Travail coopératif entre professeurs et chercheurs dans le cadre d'une ingénierie didactique sur la construction des nombres : conditions de la constitution de l'expérience collective

Mireille Morellato

▶ **To cite this version:**

Mireille Morellato. Travail coopératif entre professeurs et chercheurs dans le cadre d'une ingénierie didactique sur la construction des nombres : conditions de la constitution de l'expérience collective. Education. Université de Bretagne occidentale - Brest, 2017. Français. NNT : 2017BRES0035 . tel-01591957

HAL Id: tel-01591957
https://theses.hal.science/tel-01591957

Submitted on 22 Sep 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Travail coopératif entre professeurs et chercheurs dans le cadre d'une ingénierie didactique sur la construction des nombres : conditions de la constitution de l'expérience collective

Thèse soutenue le 4 mai 2017
devant le jury composé de :

Yves CHEVALLARD
Professeur émérite, Université Aix-Marseille

Ghislaine GUEUDET
Professeur, Université de Bretagne Occidentale

Alain MERCIER
Professeur émérite, ENS Lyon / *rapporteur*

Marie-Jeanne PERRIN-GLORIAN
Professeur émérite, Université d'Artois

Serge QUILIO
Maître de conférences, Université de Nice / *co-directeur*

Gérard SENSEVY
Professeur, Université de Bretagne Occidentale / *co-directeur*

André TRICOT
Professeur, Université de Toulouse 2 / *rapporteur*

Remerciements

Produire une thèse c'est aussi se mettre en capacité de recevoir un don.

Je remercie chaleureusement toutes les personnes qui, chacune à leur manière, ont donné une part de leur attention, de leur temps, de leur énergie, parfois aussi une part d'elle-même, pour que je puisse mener à bien cette aventure humaine et intellectuelle.

Je remercie en premier lieu, Gérard Sensevy et Serge Quilio, mes directeurs de thèse.
Vous ne m'avez pas seulement transmis des savoirs mais aussi l'usage qu'on peut en faire en commentant patiemment mes productions écrites, en répondant à mes questionnements et en dialoguant longuement avec moi. Vous m'avez ouvert les portes du monde de la recherche et accompagné mes pas lors des rencontres universitaires. Et c'est tout une autre culture pour moi qui appartiens au monde de l'enseignement.

Gérard, merci d'avoir guidé ce travail pas à pas, méticuleusement, avec une bienveillante exigence. La richesse du séminaire-action que tu conduis a construit l'essentiel de l'arrière-plan avec lequel je travaille maintenant.

Serge, merci d'avoir accepté de partager avec moi ton expérience sur le terrain de recherche et ton regard sur les événements. C'est un partage qui a commencé il y a huit ans, dans une classe de mon école, et qui s'est poursuivi au sein d'un collectif jusqu'à aujourd'hui. Ta présence a été essentielle à la construction de ma posture de professeur des écoles-chercheur en éducation.

Je remercie Alain Mercier et André Tricot pour m'avoir fait l'honneur d'être les rapporteurs de ce mémoire.

Je remercie les membres du jury, Yves Chevallard, Marie-Jeanne Perrin-Glorian et Ghislaine Gueudet pour leur présence à la soutenance de ce travail et à l'intérêt qu'ils y portent.

Je remercie également les membres de la communauté scientifique didactique. Particulièrement Alain Mercier qui a enrichi mes connaissances sur les nombres et leurs usages lors des visioconférences Marseille-Bretagne ou lors des réunions du Lieu d'éducation

à la recherche du « Réseau Saint-Charles ». Et aussi Florence Ligozat qui a permis de me questionner sur le partage des savoirs dans les processus de recherche en éducation.

Je n'aurais pu mener cette thèse sereinement sans le soutien de l'institution à laquelle j'appartiens.
Je remercie l'Académie d'Aix-Marseille en la personne de Monsieur le Recteur Beignier qui s'est intéressé à ce dispositif et a autorisé le déploiement de moyens afin que la recherche puisse être implémentée dans le département des Bouches-du-Rhône. Je remercie également la Direction des services départementaux de l'Education nationale des Bouches du Rhône en la personne de son directeur académique, Monsieur Launay, et des inspecteurs de l'Education nationale adjoints, Messieurs Innocenti, Penso et Matt, qui m'ont permis d'obtenir un demi-poste pour suivre le projet de recherche et accompagner les enseignants dans sa mise en œuvre.

Merci particulièrement à Dominique Truant, Doyenne des inspecteurs auprès du Recteur, qui a porté ce projet au niveau institutionnel à travers son poste d'IEN référente à la mission départementale maths-sciences avec un regard toujours averti, positif et enthousiaste.

Cette thèse doit aussi à tous ceux que j'ai côtoyés durant ces dernières années.
Les membres des équipes nationales du projet de recherche Ace-Arithmécole : Jean-Paul Fischer, Emmanuel Sander, Bruno Villette et leurs équipes. A Marie Hild et Samantha Meyer qui m'ont accueillie dans le Nord à chacune de mes visites. Et plus particulièrement aux membres de l'équipe Bretagne-Provence avec qui j'ai travaillé au plus près.
Tous les membres du Séminaire action de Rennes et d'ailleurs, réunis par la visioconférence.
Les doctorants avec qui j'ai pu échanger sur cette expérience, certains rencontrés dès le master en Sciences de l'éducation, en particulier Sophie Joffredo-Lebrun, Tracy Bloor, Alain Yaïche.

Merci pour tous ces échanges intellectuels, stimulants et amicaux.

Cette thèse doit énormément à tous les collègues qui ont participé au projet ACE-Arithmécole et qui m'ont ouvert la porte de leurs classes. A tous leurs élèves aussi. Merci pour votre accueil

et votre confiance. Sans vous, ce mémoire n'aurait pas eu de chair. Je n'aurais eu que « les mots sans les choses »…

Merci donc à tous ces collègues, ceux engagés dans le collectif dès le début et qui ont osé relever le défi didactique, ceux qui ont poursuivi l'entreprise et ceux qui nous ont rejoints depuis. Merci donc à Florence, Sandrine, Chantal, Angélique, Sylviane, Emilie, Sabrina, Dominique, Valérie, Magali, Catherine, Agnès, Régis, Thomas, Katia, Stéphanie, Muriel, Juliette, Nathalie, Anne, Liliane, Fabienne, Ollivier, Grégory, Céline… et bien d'autres encore.
Une pensée émue pour Christine qui nous a quittés si brutalement.
Merci aux professeurs du Léa réseau Saint-Charles avec qui j'ai commencé mon master et réfléchi à la mise en place d'ingénieries didactiques en mathématiques, aux collègues de la mission maths-sciences.

Cette thèse doit enfin beaucoup au soutien attentif et constant de mes proches.
Merci à tous les amis qui m'ont accompagnée dans cette aventure, qui ont accepté mes absences, écouté mes doutes et partagé mon enthousiasme autour de repas ou de balades, particulièrement Véronique Innocent, Christine Panfiloff et Isabelle Becarelli.

Merci à ma famille, mes parents, ma sœur Hélène, mes filles Margaux et Gabrielle et mon mari Pascal Lacombe pour leur présence pleine d'affection et de compréhension.

Table des matières

INTRODUCTION 19

Une étude de cas 20
Un cadre de travail : le didactique et la didactique 21
Première description du contenu de la thèse 22

PARTIE I - MODES DE COLLABORATION ENTRE PROFESSEURS ET CHERCHEURS : ELEMENTS GENERAUX 25

Chapitre 1 - Formes de collaboration : éléments de la littérature 27
Formes de collaboration dans les recherches en éducation 27
Essai de typologie des formes de recherche collaborative 28
Recherches « à visée pragmatiste » 29
Recherches d'« approche expérimentale » 30
Recherches « sur le didactique ordinaire » 33
Cartographie d'un paysage des recherches collaboratives 35
Modes de collaboration : quelques travaux et dispositifs pour aborder le sujet 36
Des recherches et des acteurs impliqués 36
« Nous sommes tous enseignants » 37
Au Centre pour l'observation et la recherche sur l'enseignement des mathématiques 38
Un nouvel espace de réflexion 39
Des recherches et des chercheurs 40
Une notion comme fil directeur 42
Les Lieux d'éducation associés à la recherche 43
Premières caractérisations des modes de collaboration 44
Modes de collaboration : deux approches théorisées 45
Les recherches collaboratives selon l'approche canadienne 45
L'ingénierie coopérative 47
Comparaison des modes de collaboration 50
Une perception du collectif 51
Une visée exploratrice 53
Coopération dans l'ingénierie didactique *Ace-Arithmécole* 54
Visées et partenaires 55
A une échelle macro organisationnelle, un processus itératif 56

Organisation du dispositif : première présentation synoptique 57
Organisation du dispositif : deuxième présentation synoptique 59

Chapitre 2 – Coopération entre professeurs et chercheurs : éléments théoriques et problématisation 61
Dialogue d'ingénierie 61
Dialogue d'ingénierie, éléments généraux 61
Dialogue et dialogisme 61
Circonstances d'engagement, engagement des interlocuteurs 63
Transactions et arrière-plan transactionnel 66
Dialogue d'ingénierie, un premier essai de structuration 68
Le modèle du jeu 69
Jeu de commentaire de compte-rendu de pratique 69
Jeu d'analyse d'une vidéo 70
Jeu de présentation d'événement 71
Jeu de mise à l'épreuve dans une situation mathématique 72
Jeu de commentaire de production de texte 72
Première structuration des jeux dialogiques d'ingénierie 74
Action conjointe d'ingénierie 76
Le savoir à l'étude : système ingénierique et mésogénèse 77
Avancée du savoir ingénierique : chronogénèse et *temps de situation* 79
Avancée du savoir ingénierique : principe de symétrie et topogénèse 81
Faits d'expérience et construction d'un style de pensée dans une ingénierie coopérative 83
Détour historique : compréhension critique des mécanismes de la connaissance, première approche 83
Fait d'expérience et gain de savoir 84
Retour sur une possible compréhension des mécanismes de la connaissance dans un système ingénierique coopératif 87
Dialectique contrat / milieu dans le système ingénierique 89
Relation contrat / milieu : description du mécanisme d'équilibration au sein du système ingénierique 90
Construction de la relation contrat / milieu : des faits à l'enquête 94
Rôles des faits dans la construction de la relation contrat / milieu 94
Détour historique : théorie de l'enquête 94
Faits d'expérience et enquête du collectif 96
Problématique et questions de recherche 96

Chapitre 3 – Décrire pour comprendre la coopération entre professeurs et chercheurs : cadre méthodologique 103
Approche clinique 103
A l'origine de la notion de clinique 104

Une approche clinique du didactique 105
Rôle du dispositif dans l'émergence des observables 106
Un point de vue ethnographique 106
Modalités de travail du collectif : architecture générale du dispositif 110
Pluralité des régimes de description 112
Deux tendances pour voir 113
Reconstruction et réduction du vécu : des observables qui vont signe 115
Repérer les observables au travers des « traces » de l'action 115
Une démarche à la recherche d'éléments qui font signe 116
La fonction de l'analyse *a priori* 118
Approche biographique 119
Détour historique : principes et apports de l'approche biographique 120
Usage de l'approche biographique pour notre travail 121
Eléments pour une analyse *a priori* du système ingénierique 123

PARTIE II - ORGANISATION DU COLLECTIF POUR UNE MISE EN PLACE DE LA COOPERATION : ELEMENTS GENERAUX POUR UNE ANALYSE EMPIRIQUE 125

Chapitre 4 – Analyse *a priori* du système ingénierique 127
Contexte pour l'enseignement des mathématiques 127
Constats sur l'enseignement des mathématiques 128
Quelles mathématiques faut-il apprendre / enseigner ? 129
Enjeux des premiers apprentissages mathématiques 129
La relation des mathématiques au monde : représentation mentale des nombres 130
La relation des mathématiques au monde : questionner et expérimenter 131
Analyse du projet d'enseignement-apprentissage *ACE-Arithmécole* 134
Projet général d'enseignement-apprentissage 134
Description du contenu du projet 134
Structure de la progression 135
Analyse de la proposition d'enseignement pour le domaine « Situations » 137
Les mathématiques comme étude de réponses à des questions du monde : arrière-plan et problématisation 138
Les mathématiques comme modèles du monde : arrière-plan et problématisation 141
Les mathématiques comme expérience personnelle et collective : arrière-plan et problématisation 145
Organisation fonctionnelle du collectif 150
Configuration effective du collectif 150
Contrat de recherche 152
Dialogue d'ingénierie : deuxième essai de structuration 153

Des enjeux ingénieriques à identifier et à partager 153
Jeux du dialogue d'ingénierie 155

Chapitre 5 - Décrire et comprendre la coopération entre professeurs et chercheurs : construction méthodologique 159
Eléments pour une stratégie de traitement des données 159
Recueil des données et constitution du corpus 162
Délimitation de notre terrain d'étude 162
Constitution et description du corpus 163
Visioconférences 165
Document de la progression SIT 165
Courriels et liste de diffusion ; messages du forum 166
Films des réunions du groupe Provence 167
Comptes-rendus de séances 167
Films des séances de classe 168
Notes personnelles 168
Stratégies de traitement des données 169
Des « décrire comme » successifs 170
Traitement des données du dialogue au cours des réunions 171
Utilisation du logiciel *Transana* 172
Transcription des échanges : constitution du procès de l'enquête 175
Découpages du texte : chronique des sujets abordés 176
Regroupement d'épisodes : intrigue didactique 178
Constitution d'une biographie didactique du collectif : synopsis des échanges et des faits 180
Distinction entre « événement » et « fait » 180
Chronique des événements et des faits 180
Biographèmes et reconstitution de faits d'expérience 181
Éléments de synthèse 182

PARTIE III – COOPERATION AU SEIN D'UN COLLECTIF PROFESSEURS / CHERCHEURS : ANALYSE EMPIRIQUE 189

Chapitre 6 – Biographie du collectif concernant le *Jeu des annonces* 191
Éléments d'analyse a priori du *Jeu des annonces* 191
Résumé rapide de la situation didactique dite du *Jeu des annonces* 192
Classes de problèmes relevant du *Jeu des annonces* 196
Classe de problème : désigner une collection par la mesure de sa grandeur 198
Éléments mathématiques 198

Éléments du dispositif didactique 198
Hypothèses d'ingénierie 199
Classe de problème : décrire la mesure de la grandeur 200
Éléments mathématiques 200
Éléments du dispositif didactique 202
Hypothèses d'ingénierie 202
Classe de problème : représenter la mesure d'une collection 203
Éléments mathématiques 203
Éléments du dispositif didactique 204
Hypothèses d'ingénierie 206
Classe de problème : comparer des mesures de grandeurs 209
Éléments mathématiques 209
Éléments du dispositif didactique 209
Hypothèses d'ingénierie 210
Classe de problème : valider et justifier une comparaison 211
Éléments du dispositif didactique 211
Hypothèses d'ingénierie 211
Éléments de la biographie didactique du collectif : chronique des conditions de la mise en œuvre du *Jeu des annonces* 213
Des événements relatifs à la réception et à la mise en œuvre de la situation du *Jeu des annonces* aux faits didactiques d'ingénierie 214
De l'adaptation du document source à la mise en place d'une progression 214
De la controverse sur l'adidacticité de la situation et la part de hasard à la mise en place de parties fictives et inverses et à la construction d'une référence commune 223
De la controverse sur le manque de rétroaction du milieu à la mise en place d'une situation propédeutique 226
Résumé rapide de la situation didactique dite du Train / tour et organisation mathématique et didactique sous-jacente 228
Des difficultés rencontrées par les élèves à la mise en place de représentations associées 231
Cas du schéma–ligne 233
Enseignement de techniques d'utilisation du schéma-ligne 240
Proposition d'un professeur : association de deux représentations 243
Des observations in situ à la mise en place d'un module complémentaire 246
Description rapide de la situation didactique « Lancers et sommes » et organisation mathématique sous-jacente 247
Éléments de synthèse et de questionnement 248
Nécessité de changer d'échelle d'observation : un exemple sur le codage de la mesure 251
Faits relevés lors d'observation *in situ* 251

Transactions concernant le codage de la mesure 252
Séries épisodiques : une réduction synoptique du procès de la mise en œuvre du *Jeu des annonces* 262
Partage de l'enjeu « désigner la mesure de la grandeur » et temps de l'expérience 264
Premier essai de recherche documentaire 264
Deuxième essai de recherche documentaire 266
Troisième essai de recherche documentaire 267
Analyse des transactions 268
Echanges sur la représentation des mesures de grandeurs 281
Essai de recherche documentaire 282
Analyse des transactions sur l'usage des représentations 283
Analyse des transactions sur l'utilisation technique du schéma-ligne 290
Analyse des transactions introduisant des notions plus épistémiques 296
Evolution des transactions la quatrième année 305
Echanges sur la notion d'équivalence, le signe « = » et le rôle du calcul 316
Premier essai de recherche documentaire 317
Deuxième essai de recherche documentaire 319
Nouvel essai de recherche documentaire 319
Analyse des transactions 322
Question relative à l'écrit et à son rôle dans un *temps de situation* 334
Premiers essais de recherche documentaire 335
Poursuite de recherche documentaire 339
Analyse des transactions sur la nature de l'écrit 340
Analyse des transactions concernant les techniques de composition / décomposition 356
Eléments de synthèse du procès de la mise en œuvre du *Jeu des annonces* 377
Désignation de la mesure de la grandeur nombre d'entités 378
Représentations de la situation 378
Notion d'équivalence 379
Rôle de l'écrit et du langage dans un *temps de situation* 380

PARTIE IV – COOPERATION AU SEIN D'UN COLLECTIF : SYNTHESE 383

Chapitre 7 - Faits d'ingénierie, faits d'expérience et savoirs ingénieriques 385
Des faits d'ingénierie aux faits d'expérience 385
Questionnements de l'arrière-plan conceptuel 386
Fait d'ingénierie : confrontations d'arrière-plans conceptuels 386
Fait d'expérience : reconceptualisation de l'arrière-plan théorique 387
Travail de la relation système-modèle 388

Faits d'ingénierie : temps pour l'expérience, prise en compte du changement de statut de l'écrit et de la notion d'équivalence dans la situation 388
Fait d'expérience : référence aux annonces dans le travail de la relation système-modèle 390
Elaboration d'un module d'enseignement-apprentissage 390
Appropriation de la référence aux annonces par les élèves : premier exemple 395
Appropriation de la référence aux annonces par les élèves : deuxième exemple 398
Rôle du schéma-ligne dans les représentations de la situation 399
Fait d'ingénierie : du comptage d'entités à la désignation de mesures 399
Fait d'expérience : construction du schéma-ligne comme objet pour interpréter la situation 402
Notion de *temps de situation* 404
Faits d'ingénierie : saut informationnel trop important et introduction d'un module 6 bis 404
Faits d'expérience : construction d'une culture d'un *temps de situation* 405
Savoirs ingénieriques 409
Savoirs liés à l'implémentation du projet de recherche 410
Savoirs liés à l'épistémologie de l'ingénierie didactique 411
Savoirs liés aux enjeux de la situation didactique 412
Savoirs liés à la mise en œuvre 414
Savoirs liés aux phénomènes didactiques 416

Chapitre 8 – Grammaire d'une action conjointe au sein d'une ingénierie coopérative 419
Troisième essai de structuration d'un dialogue d'ingénierie 421
Recension des logiques animant les transactions 422
Système d'attente mutuelle 424
Premier exemple emblématique / logique de dialogue d'ingénierie : « Comment faire lorsqu'on n'a pas une idée précise de la suite de la progression ? » 424
Co-élaboration de problèmes communs 427
Deuxième exemple emblématique / logique de dialogue d'ingénierie : « A quoi sert le schéma-ligne ? » 427
Elucidation des choix d'ingénierie 430
Troisième exemple emblématique / logique de dialogue d'ingénierie : « Quel est l'avantage de ce code symbolique ? » 431
Ré-interrogation de l'épistémologie 433
Quatrième exemple emblématique / logique de dialogue d'ingénierie : « Introduction du schéma-ligne et notion de *contenu dans* » 434
Caractéristiques d'une coopération au sein d'une ingénierie 438
Prise de position 438
Cinquième exemple emblématique / caractéristique de la coopération : une « grande aventure » dans le journal du nombre 439

Travail dans la praxis 440
Sixième exemple emblématique / caractéristique de la coopération : travailler de manière théorique et pratique à la fois sur un problème donné aux élèves 441
Travail de questions ingénieriques scientifiques 444
Septième exemple emblématique / caractéristique de la coopération : transformer une proposition didactique issue de la TSD en proposition réélaborée au sein de la TACD (l'usage des trains-cubes) . 445
Huitième exemple emblématique / caractéristique de la coopération : l'exploration d'une question ingénierique *in situ* (travail sur la mise en lien entre représentations pour justifier "5 + 2 = 6 + 1") ... 447
Entrelacement de l'éthique et du cognitif 449
Interprétation des caractéristiques d'une coopération en TACD 451
Notion de contrat / milieu et positions des agents au sein d'une ingénierie didactique coopérative 452
Topogénèse, mésogénèse et relation épistémique coopérative 454
Qu'est-ce qu'un ingénieur au sein d'une ingénierie coopérative ? 456

ÉLEMENTS DE CONCLUSION 457

La didactique et le didactique dans l'analyse du dialogue d'ingénierie 457
Rôle de la théorie de l'action conjointe en didactique 457
Résultats : une brève reprise 459
Du côté des savoirs ingénieriques 459
Du côté d'une grammaire de la coopération 459
Une nouvelle forme de l'étude 460
Une conception renouvelée des professions de chercheur et professeur 461

Perspectives de recherche 461
Perspectives pour le dispositif : le temps d'après la recherche 462
Définition d'un bien commun 463
Bien commun et nécessité d'un *agencement social particulier* 463

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES 465
LISTE DES ANNEXES 483
RESUME 485
ABSTRACT 486

« L'éducation mathématique élémentaire consiste à faire découvrir aux enfants à la fois une multitude de phénomènes réels qui sont les sources intuitives des mathématiques, et les mathématiques elles-mêmes qui sont autre chose, avec une autre organisation. La confusion de ces deux plans - la réalité quotidienne et les mathématiques - provoque un grand nombre d'obscurités et d'erreurs. Et lorsque les responsables de l'enseignement maternel et primaire demandent à un mathématicien de les tirer d'embarras, ils reçoivent souvent des réponses… de mathématicien, c'est-à-dire de quelqu'un qui comprend les mathématiques mais n'a le plus souvent pas exploré le monde des phénomènes quotidiens dont elles sont issues à travers de multiples difficultés. D'où de nouvelles confusions, d'autant que l'expert consulté est supposé dire la vérité scientifique alors qu'il navigue au-dessus des problèmes qu'on lui pose. Ce que nous venons de décrire semble bien être une difficulté essentielle et très ancienne de l'enseignement des mathématiques élémentaires. […] Ce n'est pas de consultations dont on a besoin, mais de collaborations. Et non de la collaboration limitée aux seuls milieux universitaires : il serait essentiel que des enseignants et autres responsables « de terrain » et des personnes ayant une connaissance profonde des mathématiques se mettent ensemble pour étudier l'épistémologie des mathématiques élémentaires, c'est-à-dire la genèse de celles-ci au départ des phénomènes quotidiens. Des instituteurs ne peuvent pas faire cela en l'absence de mathématiciens, et réciproquement » (Rouche, 1992, avant-propos de l'auteur).

Introduction

Dans les évolutions récentes qui concernent depuis les années quatre-vingts la recherche en sciences humaines, la montée en visibilité des recherches participatives est un point à remarquer (Lechopier, 2013). Des praticiens travaillant dans les secteurs des sciences sociales, de la santé ou de l'éducation y sont de plus en plus impliqués (Anadon, 2007). Le terme « praticien » est alors utilisé pour distinguer l'acteur de terrain du chercheur, celui qui fait de la recherche au sein d'une institution, universitaire par exemple. Dans les recherches dites participatives, au-delà de pourvoyeurs de données, au-delà de réactants, les praticiens peuvent être parties prenantes d'une recherche, de la question initialement posée à la diffusion de résultats.

Dans ce travail doctoral, nous nous intéressons au travail collaboratif entre des professeurs des écoles et des chercheurs dans le cadre d'une ingénierie didactique en mathématiques intégrée dans le projet de recherche *ACE-Arithmécole* (Arithmétique et Compréhension à l'Ecole élémentaire).

Selon la définition donnée par le *Trésor de la langue française informatisée* (TLFI), un praticien est une personne qui connaît et exerce la pratique d'un art, d'une technique. Nous considérons que les chercheurs sont *aussi* des praticiens. Nous aurons l'occasion de revenir sur l'usage que nous faisons, pour notre part, des concepts que cela sous-entend. Nous situons alors notre étude au cœur d'un collectif de *praticiens d'horizons différents* car constitué de professeurs, de formateurs, de chercheurs, de doctorants et de personnels d'encadrement[1]. Ces différents praticiens coopèrent à la réalisation d'une œuvre commune. Ils entreprennent collectivement de développer une ressource dans le cadre d'une ingénierie didactique, *en se fondant sur l'expérience collective vécue* (Fleck, 2008).

[1] L'encadrement est formé par l'ensemble des personnes qui occupent des fonctions de direction, d'inspection, d'administration ou de conseil au sein d'une institution ayant pour vocation d'enseigner ou de former.

Une étude de cas

Dans cette thèse nous étudions un cas : *le cas d'une collaboration au sein d'une ingénierie didactique coopérative*.

Nous souhaitons en préambule préciser en quoi nous considérons ce que nous étudions comme un cas. Nous nous appuyons sur les travaux de Jean-Claude Passeron et Jacques Revel concernant la pensée par cas (Passeron & Revel, 2005) et ceux d'Hervé Dumez sur ce que l'on peut attendre d'une étude de cas (Dumez, 2013). Dumez nous invite à suivre une démarche satisfaisant à trois questions : de quoi mon cas est-il le cas ? De quoi mon cas se compose-t-il ? Que peut produire mon cas ?

Pour commencer à répondre à ces questions, nous pourrions dire que notre cas concerne le travail collaboratif entre des professeurs des écoles et des chercheurs au sein d'un dispositif par lui-même déjà singulier. Dispositif de recherche particulier d'abord par sa durée et son ampleur puisqu'il engage sur plusieurs années (depuis l'année scolaire 2011-12 jusqu'à ce jour) plus d'une centaine de personnes (dans ses phases d'expérimentation pour chaque niveau scolaire). Particulier aussi par son ambition puisqu'il produit des séquences d'enseignement-apprentissage en arithmétique qui couvrent tout le programme fixé par le ministère de l'Education nationale française. Ces séquences concernent la construction des nombres, le calcul et la résolution de problèmes pour des élèves de cycle 2 (élèves de 6 à 8 ans) et s'appuient sur des résultats de la recherche en didactique des mathématiques et en sciences cognitives. Cependant l'étude d'un cas dépasse la présentation, si détaillée et précise soit-elle, d'un exemple de travail collaboratif entre des professeurs et des chercheurs dans un cadre original.

Une étude de cas « donne plutôt l'occasion de mettre en relation les éléments disjoints d'une configuration qui est au départ indéchiffrable et même impossible à repérer, et qui pour cela fait problème » (Passeron & Revel, 2005, p. 6). En effet, « l'écriture d'un cas est une construction » (*ibid.*, p. 9), une forme de récit destinée à rendre intelligible une expérience, ici de collaboration. Entendons-nous : ce n'est pas la configuration de la collaboration en elle-même qui ferait problème (autrement dit, il ne s'agit pas de mettre en évidence une forme de collaboration). De notre point de vue, l'indiscernabilité a trait aux *pratiques de collaboration*.

Nous pourrions nous intéresser au but fondamental qui anime cette recherche collaborative, à quel degré de collaboration sont engagées les personnes ou quelles sont les raisons qui ont amené ces personnes à collaborer. Nous pourrions aussi examiner ce que la collaboration produit en termes de développement professionnel. Nous cherchons plutôt à montrer comment le cas de collaboration que nous étudions au sein de l'ingénierie didactique interroge ou éclaire de manière nouvelle des pratiques de collaboration de recherche en éducation. Nous décrirons cette collaboration comme une co-élaboration de problèmes communs aux professeurs et aux chercheurs. Elle s'est réalisée au sein d'une ingénierie didactique qualifiée de *coopérative* (Sensevy, Forest, Quilio, & Morales, 2013). Nous cherchons à « nourrir » par cette étude ce mode d'association particulier. Nous en spécifierons le processus parmi des formes diverses de recherche dites collaboratives qui intègrent des professeurs. Les interactions entre des chercheurs et des enseignants étant au cœur du dispositif, les questions posées deviennent alors : comment la collaboration s'appréhende-t-elle ou se décrit-elle en termes de relations ? Quelle est la nature de ces relations ? Comment s'organisent-elles dans la durée ? Qu'est-ce qu'elles disent d'une pratique sociale de collaboration ? L'intérêt de telles questions réside dans une problématique beaucoup plus large : celle de l'adaptation et de la diffusion des résultats de la recherche et plus spécifiquement de la création de conditions épistémologiquement optimales de l'enseignement d'un savoir (Mercier, 2008).

Un cadre de travail : le didactique et la didactique

Nous considérons que nous allons traiter de questions de *didactique* (Chevallard, 2016 ; Ligozat, 2008 ; Mercier, Schubauer-Leoni, & Sensevy, 2002). Le travail de recherche d'un didacticien, ou de toute personne faisant de la didactique, devrait avoir pour but d'étudier une question concernant la diffusion de connaissances spécifiques d'un objet disciplinaire. Ce travail doit viser la production de savoirs *spécifiés en grande partie par la question étudiée* dans une perspective exotérique, c'est-à-dire dans la position de celui qui a encore à apprendre et à découvrir (Chevallard, 2016, p. 269). Le travail comparatiste en didactique « se donnerait pour but d'identifier la part de *spécificité liée au savoir* dans les pratiques d'enseignement et d'apprentissage, et corollairement, de *décanter des formes génériques* qui apparaissent de façon

irréductible à propos des différents objets de savoir » (Ligozat, 2008, p. 20). Pour préciser cette idée, reprenons les propos d'Alain Mercier dans sa lecture anthropologique d'un programme didactique à venir (Mercier, 2008) :

> « Une institution n'a pas nécessairement de murs, elle se reconnaît à la manière dont elle détermine le langage de ses sujets, ce qu'ils pensent et les objets avec lesquels ils agissent. *Une institution s'analyse ainsi par la manière dont elle réalise un enjeu, relativement à un domaine de réalité qu'elle fait exister pour ses sujets et qui est le milieu de leurs actions.* La spécification des institutions par les savoirs, est une des manières de définir nos recherches sur le domaine de réalité qu'est le didactique » (Mercier, 2008, p. 15).

Il y a *du* didactique dans le dispositif ingénierique que nous présentons car l'enjeu de l'institution sur laquelle nous nous penchons est de produire des savoirs spécifiques. Nous serons alors amenée à étudier comment une ingénierie se constitue en institution pour un collectif. C'est une « institution à savoirs » où se déploient des pratiques de savoir, c'est-à-dire des pratiques savantes de connaisseurs, comme le sont le chercheur et le professeur. Nous allons donc, dans la suite de ce travail, « chasser » *le* didactique, c'est-à-dire ce qui change le système de décision d'autrui.

Nous nous sommes appuyée sur les concepts de la *théorie de l'action conjointe en didactique* (TACD) (Schubauer-Leoni, 1986 ; Schubauer-Leoni & Leutenegger, 2005 ; Sensevy, 2011a ; Sensevy & Mercier, 2007b) mais nous mettons à l'épreuve leur portée générique en les spécifiant à un système ingénierique.

Première description du contenu de la thèse

Dans une première partie de notre étude, nous proposerons des complexes d'hypothèses de travail destinés à faire comprendre les arrière-plans épistémologique, théorique et méthodologique qui soutiennent notre étude des pratiques de collaboration (chapitres 1 à 3). Ce cadre d'étude est hypothétique car ces hypothèses sont des descriptions raisonnées potentielles de la réalité (Dewey, 1993).

Les descriptions seront mises à l'épreuve et travaillées dans le concret dans une troisième partie (chapitre 6). Nous produirons d'abord une étude des savoirs liés aux situations didactiques mises en œuvre. Puis, nous procèderons à des analyses

cliniques, fondées sur des signes observables d'un corpus issu de l'espace de collaboration.

Une deuxième partie tentera d'articuler ces deux plans (l'arrière-plan hypothétique, développé dans la partie I, et le premier plan empirique, analysé dans la partie III) en apportant des éléments généraux et méthodologiques pour l'analyse empirique. Les éléments généraux permettront de présenter la proposition ingénierique et son organisation ainsi que de la situer dans le contexte de l'enseignement des mathématiques en France (chapitre 4). Les éléments méthodologiques exposeront les clés du dispositif d'observation et d'analyse (chapitre 5).

Les analyses réalisées dans la partie empirique (partie III) seront synthétisées dans une quatrième et dernière partie. Nous présenterons alors une vue d'ensemble sur le processus de coopération dans le cadre de cette ingénierie : les fruits du travail collaboratif (chapitre 7), une grammaire pour en décrire les logiques et un développement théorique de l'action conjointe en didactique (chapitre 8).

Partie I - Modes de collaboration entre professeurs et chercheurs : éléments généraux

Dans cette partie, nous présentons le cadre d'hypothèses de travail qui permet d'appréhender, de manière générale puis plus spécifique au projet de recherche *Ace-Arithmécole*, les arrière-plans épistémologique, théorique et méthodologique qui soutiennent notre étude de la collaboration entre des professeurs des écoles et des chercheurs. Le fil directeur consistera à examiner, sous ces divers angles, les modes de collaboration qui s'instaurent entre des acteurs d'une recherche en éducation.

Dans le premier chapitre, nous situerons l'ingénierie coopérative au sein des diverses formes de recherches collaboratives en éducation. Nous commencerons à constituer quelques caractéristiques spécifiques de ce type d'ingénierie en comparant les divers modes de collaboration au travers d'approches ou de textes scientifiques concernant des recherches collaboratives.

Nous présenterons, dans le deuxième chapitre, certains concepts de la théorie de l'*action conjointe en didactique* et des notions issues de la théorie sur lesquelles nous nous appuyons (le *style de pensée* dans un collectif, la *dialectique contrat / milieu*). Ils nous permettront d'élaborer un système d'hypothèses avec lequel nous pourrons problématiser le contexte et les conditions de coopération entre des professeurs et des chercheurs. Ce système d'hypothèses donnera lieu à la question de recherche de ce travail doctoral.

Le troisième chapitre sera consacré au cadre méthodologique. Nous cherchons à décrire pour comprendre la coopération. Nous nous inscrivons dans une approche à la fois clinique et biographique qu'il nous faudra préciser. Nous aborderons pour cela le rôle du dispositif dans l'émergence des observables et la nécessité d'utiliser différents niveaux de description.

Chapitre 1 - Formes de collaboration : éléments de la littérature

Des recherches en éducation à la présentation du dispositif de recherche « Ace-Arithmécole » : localisation d'une recherche de type « ingénierie didactique coopérative » dans le paysage des recherches collaboratives.

Formes de collaboration dans les recherches en éducation

Divers travaux permettent de dresser un tableau du paysage des recherches collaboratives et de la place des acteurs. Pour nous repérer dans ce paysage, nous avons consulté :

- des textes qui s'attachent à organiser pour les décrire les différents types de recherche collaborative en éducation (E. Roditi & Trgalovà, 2015 ; Sanchez & Monod-Ansaldi, 2015) ;

- des revues dédiées au sujet : le numéro 39 de *Carrefours de l'éducation*, « Rencontre entre chercheurs et praticiens : quels enjeux ? » (Vinatier & Rinaudo, 2015) ; le hors-série numéro 1 de *Recherches en éducation*, « Savoirs et collaborations entre enseignants et chercheurs en éducation » (Kahn, Hersant, & Orange Ravachol, 2010) ; le volume 31/2, consulté en ligne[2], de *Revue des sciences de l'éducation*, sous la direction de Serge Desgagné et Nadine Bednarz, « Médiation entre recherche et pratique en éducation » (2005) ; le numéro 20 de *Raisons éducatives*, « Le partage des savoirs dans les processus de recherche en éducation », coordonné par Florence Ligozat, Maryvonne Charmillot et Alain Muller (paru en septembre 2016)[3] ;

- les travaux de séminaires et colloques dédiés[4] : 7e session du séminaire international de l'IFé « Apprendre et faire apprendre : perspectives interdisciplinaires » (25 et 26

[2] https://www.erudit.org/revue/rse/2005/v31/n2/index.html

[3] D'autres travaux sont en cours de production : les Cahiers du CERFEE, « Education et socialisation », appellent à des contributions pour un numéro coordonné par Christophe Niewiadomski, Liliane Portelance et Thérèse Perez-Roux, à paraître en septembre 2017 : « Collaborations chercheur(s)-praticien(s) : nouvelles formes, nouveaux enjeux ? ».

[4] D'autres travaux montrent la vitalité de ce thème d'étude et de questionnements. Des colloques ont été organisés au Canada sur ce thème : 73e colloque « La recherche participative : multiples regards »

mars 2014). Intitulée « *Des dispositifs pour faire apprendre* », cette session a été consacrée à l'examen critique et croisé de quatre types de dispositifs de recherche ;
- les travaux en didactique des mathématiques, notamment ceux présentés lors de la *15e école d'été de didactique des mathématiques* (Clermont-Ferrand, 2009) et évoquant les constats et les perspectives que ce sont données les didacticiens en mathématiques (Margolinas et al., 2009) ;
- des articles de revues, actes de colloque, textes de présentations ou ouvrages (Barry, Saboya, Corriveau, Maheux, & Bednarz, 2012 ; Bednarz, 2009 ; Bednarz & Proulx, 2011 ; Cobb, Confrey, diSessa, Lehrer, & Schauble, 2003 ; Desgagné, 1997 ; Desgagné, Bednarz, Lebuis, Poirier, & Couture, 2001 ; Kemmis, 2009 ; Leutenegger, 2009 ; Matheron & Quilio, 2014 ; McTaggart, 1994 ; Sensevy, 2009, 2011b, 2016 ; Sensevy, Forest, Garel, Le Garrec, & Morales, 2010 ; Sensevy et al., 2013 ; Veillard, Tiberghien, & Vince, 2011).

Essai de typologie des formes de recherche collaborative

Des travaux ont tenté de décrire et de comparer les différentes formes de recherche en éducation qui intègrent des enseignants (Roditi & Trgalovà, 2015 ; Sanchez & Monod-Ansaldi, 2015). Ils ont établi des liens de filiation (ou de rupture) entre ces différentes formes à partir des visées de ces recherches, de leurs fondements théoriques, des méthodologies utilisées et des résultats obtenus. Les auteurs ont mis en évidence l'évolution buissonnante de telles recherches (Sanchez & Monod-Ansaldi, 2015).

Dans cette section, nous essayons d'établir une typologie des recherches collaboratives afin de dresser une première « cartographie » qui nous sera utile pour situer le cas que nous étudions. Nous avons dégagé trois grands ensembles : les recherches « à visée pragmatiste », les recherches d'« approche expérimentale » et les recherches « sur le didactique ordinaire ». Ces qualificateurs, résolument exploratoires, n'ont aucune prétention à subsumer sous une même catégorie des démarches identiques. Ils ont pour seule fonction de faciliter l'orientation dans un

(mai 2005) ; 84e colloque « La recherche collaborative : enjeux, avantages et limites », (colloque 511, mai 2016).

champ de pratiques particulièrement complexe. Nous n'avons volontairement que très peu évoqué l'aspect collaboratif que nous étudierons dans la section suivante.

Recherches « à visée pragmatiste »

Nous plaçons dans cet ensemble les recherches-actions, issues du courant *Action Research* important dans le monde de la recherche anglo-saxonne (cf. la revue *Educational Action research*[5]). Ce type de recherches vise le développement et la diffusion de pratiques innovantes en mettant en place des pistes d'action ou des situations d'enseignement-apprentissage (et les ressources correspondantes). Par exemple, une recherche visant à améliorer une situation d'abandon scolaire dans une école du secondaire rurale a diagnostiqué, avec les acteurs constitués en groupes d'intérêt, les différentes natures des problèmes rencontrés. A partir de cette évaluation de la situation, des concepts théoriques adéquats ont été proposés par les chercheurs et des pistes d'intervention développées puis décidées par les acteurs (Savoie-Zajc & Lanaris, 2005).

Autre exemple, la recherche mise en place par Magali Hersant a permis de créer des situations didactiques pour la classe (Hersant, 2010). Cette recherche a produit des situations de problèmes dits « pour chercher » à la suite d'une injonction institutionnelle concernant la mise en œuvre des nouveaux, à l'époque, programmes de 2002.

Ces recherches, dont la finalité reste la production de connaissances scientifiques, dénotent une volonté de changement, de transformation en vue d'apprendre. Elles tentent ainsi de répondre à des problèmes du champ éducatif ou de transformer la réalité en essayant d'apporter une dimension novatrice. Pour cela, un processus, après l'identification du problème, se met en place : planification de l'action, implémentation de l'action (par exemple par la mise en œuvre de situations d'enseignement-apprentissage dans des classes), analyse et évaluation des effets de l'action pour en faire éventuellement des bases pour une prochaine planification, puis généralisation des résultats. Les points de vue de chacun des acteurs, de leurs savoirs sont essentiels : l'engagement et les décisions du groupe sont constitutifs de telles

[5] Revue consultable à l'adresse : http://www.tandfonline.com/loi/reac20#.V54HSKLid40

recherches. Elles se réalisent au sein de groupes socialement engagés (McTaggart, 1994). Les recherches à visée pragmatiste sont, par nature, orientées vers la production et le développement d'outils pour la résolution de problèmes du champ éducatif. Les connaissances produites concernent souvent des transformations opérées sur les situations initiales.

Recherches d'« approche expérimentale »

Nous rangeons dans cette catégorie les *ingénieries didactiques*, ou pour le monde anglo-saxon les *design-experiment,* et, d'une certaine façon que nous détaillerons plus bas, les *design-based research* ou recherches orientées par la conception (Sanchez & Monod-Ansaldi, 2015).

Les recherches collaboratives d'« approche expérimentale » ne peuvent pas être assimilées aux recherches fondées sur des logiques d'administration de la preuve par contrôle des variables. Selon Paul Cobb, elles ont pris un virage pragmatique tout en maintenant une orientation théorique : « Design-experiments entail both « engineering » particular forms of learning and systematically studying those forms of learning within the context defined by the means of supporting them » (Cobb et al., 2003, p. 9). Les expérimentations menées lors de recherches d'approche expérimentale visent à éprouver des modèles théoriques dans des conditions écologiques, avec toutes les contraintes associées à cet environnement. C'est pour cela qu'elles sont parfois appelées « approches quasi-expérimentales ». En effet, de telles recherches sont ancrées dans la complexité des mises en œuvre : la situation proposée par l'ingénierie est testée et révisée dans des conditions d'enseignement-apprentissage réelles comme peuvent l'offrir une classe ou un centre de formation. Les itérations[6] successives jouent le même rôle que des variables dans des expérimentations (*ibid.*).

[6] Définition selon le site Wikipedia : « Iterative design is a design methodology based on a cyclic process of prototyping, testing, analyzing, and refining a product or process. Based on the results of testing the most recent iteration of a design, changes and refinements are made. This process is intended to ultimately improve the quality and functionality of a design. In iterative design, interaction with the designed system is used as a form of research for informing and evolving a project, as successive versions, or iterations of a design are implemented. » Récupéré le 14 juillet 2016 à l'adresse : https://en.wikipedia.org/wiki/Iterative_design.

Une ingénierie didactique est un dispositif créé par et pour la recherche. Un tel dispositif s'appuie sur une phénoménotechnique (Bachelard, 1993) qui a pour objet de permettre l'étude empirique de phénomènes artificiellement produits et observés. Michèle Artigue (Artigue, 1990) a décrit cette forme de travail comme une méthodologie de recherche qui vise à confronter une hypothèse théorique avec une mise en œuvre. Elle comporte des phases de conception de situations[7] didactiques, d'analyses à différentes étapes (analyses *a priori* et *a postériori*), d'expérimentation sur site de la situation didactique et d'évaluation par validation interne entre les différentes analyses. Dans le champ de la didactique, les situations didactiques conçues par les chercheurs constituent le dispositif expérimental d'une ingénierie. Celui-ci est fondé sur des modèles théoriques, comme par exemple, dans le domaine de la didactique des mathématiques, la *théorie des situations didactiques* (TSD) (Brousseau, 2004b), ou la *théorie anthropologique du didactique* (TAD) (Chevallard, 1992, 2009) pour les parcours d'étude et de recherche mis en place au collège (Matheron & Quilio, 2014). Marie-Jeanne Perrin-Glorian (Perrin-Glorian, 2009) caractérise une ingénierie didactique par une construction et une mise en œuvre dans une (ou plusieurs) classe(s) d'une suite de séances sous un contrôle théorique, relatif à la question de recherche et au cadre théorique utilisé, de la construction et de la réalisation de ces séances. Le cadre théorique y est mis à l'épreuve en même temps que les situations élaborées ainsi que leur réalisation. Jusqu'alors les ingénieries étaient destinées à tester la robustesse de situations didactiques imaginées par les chercheurs dans des classes expérimentales[8], à l'instar de celles du Centre pour l'observation et la recherche sur l'enseignement des mathématiques (COREM), à y observer des phénomènes didactiques et tenter de les modéliser. Les ingénieries didactiques s'intéressaient à la progression du savoir et aux connaissances des élèves. Lors de la 15e école d'été de didactique des mathématiques (Clermont-

[7] Une situation permet de définir une connaissance selon la *théorie des situations didactiques* (Brousseau, 2004b).

[8] Guy Brousseau a dit lui-même : « nos résultats les plus convaincants étaient obtenus dans des conditions tellement spécifiques qu'il était impossible de les faire connaître et surtout de les faire reproduire dans des lieux non protégés. Il n'était donc pas question d'encourager la réplication directe de nos expériences dans les conditions de l'époque, tant que des structures spécifiques, appropriées à des recherches expérimentales en Didactique des mathématiques, n'existeraient pas et tant qu'une culture Didactique appropriée ne se serait pas un peu répandue dans la population » (Brousseau, 2014, p. 78).

Ferrand, 2009), certains didacticiens ont envisagé de pouvoir mettre en œuvre des ingénieries en vue d'une meilleure efficacité des enseignements et apprentissages *dans des conditions ordinaires* (c'est-à-dire dans des classes qui suivent les programmes et les règlements édictés par les institutions auxquelles elles sont assujetties). Certaines ingénieries didactiques plus récentes s'orientent ainsi vers une perspective de développement et de formation en favorisant l'appropriation des situations didactiques par les enseignants, dans ce que Marie-Jeanne Perrin-Glorian appelle des « ingénieries de deuxième génération » (*ibid.*, p. 68). Tout en conservant, à un premier niveau, des conditions expérimentales pour tester la validité théorique de situations didactiques et dégager des choix fondamentaux, est étudiée, à un deuxième niveau, l'adaptabilité de ces situations à l'enseignement ordinaire. « Le problème n'est plus le contrôle et la diffusion des produits d'ingénierie issus des recherches mais de déterminer les variables fondamentales au regard des savoirs en jeu qui commandent l'ingénierie dont on veut faire une ressource pour l'enseignement ordinaire et d'étudier les conditions de leur diffusion (et non la diffusion du détail de l'ingénierie) » (*ibid.*, p. 69).

Comme les ingénieries de deuxième génération ou *ingénieries de développement*, les *design-based research* (Penuel, Fishman, Cheng, & Sabelli, 2011) ou recherches orientées par la conception s'inscrivent dans une approche quasi-expérimentale mais elles la conjuguent avec un dispositif plus heuristique et plus flexible.

> « Within Design-Based Research methodology, interventions are conceptualized and then implemented in natural settings in order to test the ecological validity of dominant theory and to generate new theories and frameworks for conceptualizing learning, instruction, design processes, and educational reform » (définition wikipédia[9]).

En effet, ce type de recherche est très contextualisé (et dépendant de ce contexte qui est vu comme un système complexe). La méthodologie s'appuie sur un processus itératif mais comme le dispositif est tributaire du contexte, il peut être révisé et amélioré à chaque itération (dans la mesure où les modifications restent compatibles avec la visée générale). L'ensemble du système de recherche (hypothèses, situation d'enseignement, outils, recueil des données, …) progresse donc par raffinements successifs. La recherche est finalisée par un produit, par exemple des séquences

[9] https://en.wikipedia.org/wiki/Design-based_research récupéré du site le 14 juillet 2016.

d'enseignement-apprentissage, qui tentent de prendre en compte les demandes et les besoins de l'utilisateur. Les professeurs participent alors au processus, de la conception à l'analyse au sein d'un espace de travail commun avec les chercheurs.

Recherches « sur le didactique ordinaire »

Les recherches « sur le didactique ordinaire » tentent de comprendre et expliquer des situations d'enseignement-apprentissage ou des pratiques professionnelles observées en milieu ordinaire. Nous avons rassemblé, dans cette catégorie, une très grande variété de conceptions.

Pour Serge Desgagné et Hélène Larouche, le chercheur se fait l'interprète des connaissances pratiques et expérientielles des professeurs et s'inscrit dans une démarche de théorisation des pratiques. Le chercheur comprend ces connaissances expérientielles en rendant raison à la logique des acteurs, et les explique en mettant en perspective des logiques et dévoilant des mécanismes (Desgagné & Larouche, 2010). Nous nommerons de telles recherches : *recherches interprétatives*.

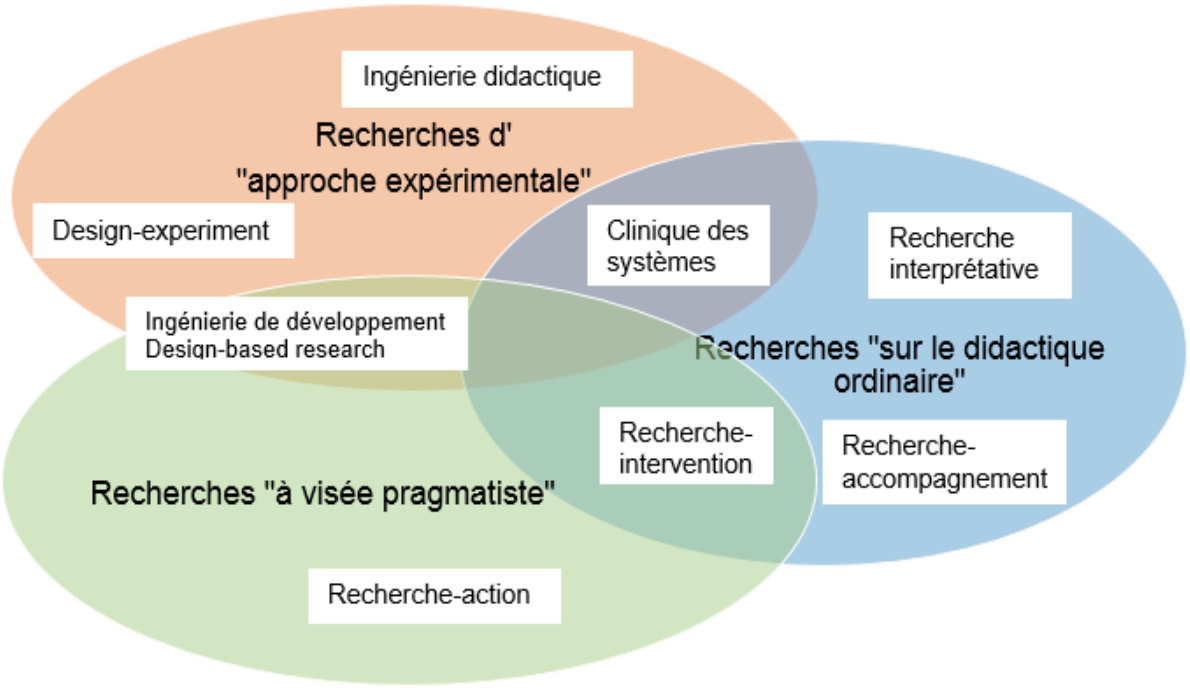
Certaines autres recherches visent (ou mettent à l'épreuve) une élaboration théorique capable d'interpréter des situations d'enseignement-apprentissage, fournies ou pas à l'enseignant par les chercheurs. Ainsi elles peuvent, à certains moments, introduire des propositions dans le cours des séquences pour tester certaines hypothèses. Par exemple le chercheur, pour les besoins de l'étude comparative, a la possibilité d'inclure une séance supplémentaire à celles prévues dans la progression par le professeur et ainsi contrôler expérimentalement certains aspects des observables (Schubauer-Leoni & Leutenegger, 2002, p. 242). De telles recherches sont dites d'« approche clinique / expérimentale » (Leutenegger, 2000, 2009) : elles étudient le système didactique formé par l'enseignant, l'apprenant et le savoir en construisant des phénomènes à partir des faits relevés. L'observation des acteurs au sein du système est au cœur du questionnement et le rapport du chercheur avec son objet d'étude fait partie de la méthodologie envisagée. Dans cette *clinique des systèmes* (*ibid.*) nous plaçons par exemple des recherches comme celles observées dans les premiers temps du développement de l'approche comparatiste en didactique (Assude & Mercier, 2007 ; Leutenegger, 2009 ; Ligozat, 2008 ; Ligozat & Leutenegger, 2008).

Nous plaçons également dans cet ensemble varié d'autres types de recherche comme par exemple celle de Martine Janner et Marie Vergnon. Ces deux chercheures se sont intégrées à un projet déjà avancé, à la demande d'une équipe de professeurs (Janner & Vergnon, 2015). Il s'agissait d'aider l'équipe à organiser une classe d'élèves moins avancés afin de permettre à ces derniers de progresser dans les meilleures conditions possibles. Une démarche d'intersubjectivité (ici, prendre en compte autrui et les signes qu'il émet pour offrir à autrui de se s'entendre avec lui sur quelque chose), s'appuyant sur un protocole d'accompagnement, a été mise en place pour comprendre les enjeux des pratiques en cours. Même si des résultats espérés n'ont pu se réaliser, les chercheures ont pu accompagner les professeurs dans leur propre cheminement en leur permettant de faire face à une certaine désillusion et d'opérer une prise de distance favorisant une remobilisation et une réorientation de leurs actions. Dans ce type de *recherche-accompagnement*, « le travail de recherche consiste également à tenter de comprendre la phénoménalité des événements rapportés par les acteurs, c'est-à-dire à essayer non seulement de les comprendre mais aussi de chercher à identifier pourquoi ils apparaissent » (*ibid.*, p. 74). Dans un autre ordre d'idée proche, Louis-Marie Bossard et Claudine Blanchard-Laville relatent une recherche se déroulant sur une dizaine d'année avec un enseignant qui a collaboré avec un groupe de chercheurs (Bossard & Blanchard-Laville, 2015). Ils qualifient ce partenariat d'« aventure » car aucune question de recherche n'était prévue au départ et c'est le cours des événements qui a dicté les orientations de recherche. Les modalités d'accompagnement se sont donc aussi précisées au fur et à mesure de l'avancée de la collaboration.

Certaines autres recherches se déclarent interventionnistes et tentent de comprendre et transformer le travail éducatif. Par exemple, un groupe chercheur-professeur se donne les moyens d'agir dans et sur les situations de travail d'enseignement ou de formation en vue de leur transformation (Laurent & Saujat, 2015). Cette approche permet d'accéder au sens que les praticiens attribuent à leur activité en « revivant leur vécu » par auto-confrontation. A partir de l'expérience offerte, dans ces *recherches-interventions*, la clinique est alors une méthode d'action et de connaissance qui permet d'articuler et de distinguer à la fois « le temps pour agir et le temps pour expliquer » (*ibid.*, p.20).

Cartographie d'un paysage des recherches collaboratives

La documentation sur ces recherches peut schématiquement organiser les propos ci-dessus. Nous avons ainsi tenté d'établir une cartographie sommaire des formes et des types de recherche collaborative.



Relations entre les formes de recherche collaborative et les types de recherche

Une ingénierie didactique coopérative, telle que définie par Gérard Sensevy, Dominique Forest, Serge Quilio et Grace Morales, peut être rangée dans la catégorie des *design-based research* (Sensevy et al., 2013). Elle s'affirme à la fois comme une recherche fondamentale (qui vise à éprouver des théories) et de développement (qui ambitionne de produire des ressources). Cependant elle va s'en distinguer par sa manière d'envisager *a priori* les modes de collaboration entre professeurs et chercheurs et par ses visées exploratoires.

Pour compléter le paysage que nous avons esquissé, il conviendrait que nous examinions plus précisément différentes recherches. Que nous apprennent-elles des modes de collaboration qui s'instaurent entre des professeurs et des chercheurs ? Pour cela nous reviendrons sur quelques textes relatant une collaboration chercheurs / professeurs puis nous comparerons deux démarches de collaboration qui ont été théorisées (celle de l'approche canadienne et celle de l'ingénierie coopérative dans lequel s'inscrit notre cas).

Modes de collaboration : quelques travaux et dispositifs pour aborder le sujet

Des recherches et des acteurs impliqués

Lorraine Savoie-Zajc et Catherine Lanaris ont montré que la collaboration praticiens, usagers, chercheurs (Savoie-Zajc & Lanaris, 2005) fonctionne quand la démarche de recherche appartient autant aux acteurs de terrain qu'aux chercheurs. Les acteurs de terrain s'étaient rendus entièrement propriétaires de leurs décisions : ils avaient procédé à des choix raisonnés à partir des différents intérêts recensés et des cadres d'analyse apportés par la recherche. Les conclusions de cette étude rejoignent celles réalisées par Sabine Kahn, Marie-Ange Barthassat et Danielle Bonneton (Barthassat & Bonneton, 2010 ; Kahn, 2010). Elles soulignent l'importance d'associer les enseignants aux projets de réformes et l'importance qu'ils y trouvent un intérêt. A une échelle plus macroscopique (puisqu'engageant les institutions éducatives désirant provoquer des changements), les auteures montrent qu'établir une implication et une adhésion des acteurs de terrain est essentielle à la compréhension de l'esprit et des enjeux des rénovations et donc à la réussite de la mise en œuvre de réformes. Par exemple, à Genève, dans les années quatre-vingt-dix, une recherche collaborative (Barthassat & Bonneton, 2010), avait accompagné le plan de rénovation du système éducatif, par l'intermédiaire de travaux de groupes à différents niveaux. Cet accompagnement avait suscité un intérêt de la part des enseignants. Après ce plan de rénovation, les transformations du système suivantes ont été mises en place par l'intermédiaire d'une hiérarchie de proximité. Les réformes ont alors été perçues par les enseignants comme des réformes de structure et non comme une évolution du système éducatif. Le texte de Sabine Kahn sur la question du redoublement (Kahn, 2010) montre que les travaux issus de la recherche sont relayés par les décideurs politiques et donc qu'un espace d'intéressement existe entre recherche et monde politique de l'éducation (en termes d'économie, de justice sociale, de politique européenne). Elle s'appuie sur les travaux en sociologie des sciences de Michel Callon et Bruno Latour pour définir l'intéressement comme la constitution d'un réseau d'acteurs qui trouvent un intérêt à une découverte ou une innovation. Selon Kahn, les travaux de la recherche sur le redoublement sont « traduits » en réformes sans qu'ils

soient « transmis », autrement dit sans qu'il y ait de problématisation commune et d'espace d'intéressement entre les praticiens politiques et les praticiens enseignants. L'auteur souligne que bien que cette question fasse partie d'une réforme innovante, comme l'est celle des cycles dans la *loi d'orientation de 1989* (MEN, 1989), l'absence d'espace d'intéressement et le caractère injonctif de la réforme aboutissent à ce que les enseignants mettent en place des pratiques qui semblent aller dans le sens attendu mais qui, en fait, ne changent pas en profondeur ces pratiques. Sabine Kahn cite par exemple[10] une pratique efficace possible, conseillée par l'institution : faire des classes multi-degrés. L'analyse des pratiques révèle que les choix de telles classes sont liés à des questions d'effectifs d'élèves dans l'école et non à des choix visant à lutter contre le redoublement. Les enseignants ne contestent pas le bien-fondé d'une réforme contre le redoublement mais sa faisabilité. Il manque alors à ces réformes des éléments pour que tous les acteurs se constituent en réseau pour tenter de répondre à la question sous-jacente. La problématisation aurait dû, selon l'auteure, porter sur la forme d'enseignement scolaire à mettre en œuvre.

« Nous sommes tous enseignants »

Magali Hersant (Hersant, 2010) montre dans son article que la formulation du problème « pour chercher » donné à résoudre aux élèves ainsi que le scénario de la mise en œuvre de la séance évoluent au cours du travail mené par le groupe (composé de la chercheure, d'un formateur en mathématiques, de professeurs plus ou moins chevronnés). Elle y indique les éléments didactiques qui ont influé sur cette évolution ; ils résultent de la diversité et la complémentarité des connaissances de chacun des membres mais aussi de l'expérience tirée de trois mises en œuvre dans les classes des professeurs. En ce qui concerne la formulation de la consigne, nous relevons que l'exigence d'une rigueur mathématique vient du formateur en mathématiques et que la vigilance sur un maintien de l'épistémologie de la situation mathématique proposée est celle de la chercheure et du formateur. La formulation de la consigne relative aux éléments à donner aux élèves pour leur permettre d'entrer dans l'activité de résolution

[10] Exemple tiré d'une étude de 110 classes belges et françaises (Kahn S. (2007), A la recherche du cycle perdu… Mise en place des cycles d'apprentissage dans les écoles primaires de trois pays Belgique, France, Québec, Thèse de doctorat en Sciences de l'éducation, Lille 3.)

de problème fait consensus. L'auteure a plus de difficulté à distinguer qui, parmi les membres du groupe, a contribué à l'élaboration et à l'évolution du scénario de la situation car « nous sommes tous enseignants, à des niveaux scolaires différents, et nous référons donc tous à des savoirs issus de l'expérience qui sont proches » (*ibid.*, p. 65). Cependant la chercheure exerce une vigilance épistémique en y incluant des savoirs issus de son cadre théorique de recherche. Ces savoirs, insuffisamment appréhendés par les professeurs pour qu'ils soient incarnés dans la pratique, manqueront lors de la gestion des moments de débats ou de synthèse de la séance avec les élèves. Elle estime que la difficulté de « transmission » des savoirs mathématiques et épistémologiques aux enseignants du groupe a fait défaut lors de ces moments.

Ce que relate Magali Hersant est tout à fait important pour nous : des savoirs d'expérience difficilement discernables (« car nous sommes tous enseignants ») permet à tous de participer au scénario mais les savoirs issus de la recherche ont du mal à s'y articuler. La chercheuse pose alors la question d'un travail spécifique de certains savoirs mathématiques pour les professeurs dans le cadre d'une recherche collaborative.

Au Centre pour l'observation et la recherche sur l'enseignement des mathématiques

Denise Greslard et Marie-Hélène Salin, qui ont participé en tant qu'enseignante pour la première et chercheure pour la seconde aux ingénieries didactiques développées au COREM, témoignent d'une collaboration essentielle pour la mise à l'épreuve d'une ingénierie didactique (Greslard & Salin, 2011). En attestent aussi les temps de décharge de classe des enseignants participants et l'organisation pour les séances observées (préparation des séquences, préparation de l'observation par les chercheurs et les autres professeurs enseignant au même niveau de classe, analyse « à chaud » pour reconstituer la réalisation effective en croisant différents regards). La collaboration se réalisait dès la préparation de la séance : la nature du travail concernait le type de questions devant se poser pour élaborer une fiche didactique d'aide au déroulement de la séance.

> « Le contrat de l'enseignant est de mettre en scène un milieu bien déterminé, et de gérer les relations des élèves à ce milieu dans un rapport adéquat, précisé et convenu avec le chercheur […] Si l'objectif d'apprentissage n'est pas atteint, c'est d'abord la situation qui est examinée et donc le travail du chercheur qui est en cause : il a laissé échapper une contrainte, une circonstance qu'il s'agit de découvrir ou de reconnaître… » (*ibid.*, p. 266).

Le travail de conception de la séance est de la responsabilité du chercheur qui doit ensuite l'expliciter, le clarifier pour que l'enseignant puisse mettre en œuvre la séance. Une heure hebdomadaire de formation aux mathématiques et à la didactique des mathématiques venait compléter le travail collaboratif de préparation afin que les professeurs puissent interpréter *in situ* les erreurs des élèves, y réagir de la manière la plus adéquate possible (c'est-à-dire sans révéler trop précocement le savoir porté par la situation mathématique) et comprendre les attentes du chercheur.

A travers ce texte, ce que nous pouvons voir des relations entre chercheurs et enseignants nous renseigne sur la difficulté de mettre en place, pour un professeur, une ingénierie didactique. L'organisation « exigeante » (préparation commune, formation préalable) palliait la réalisation de ce type d'ingénierie, délicate à mener, en condition quasi-ordinaire (quasi car les professeurs étaient acculturés à ce type d'approche).

Un nouvel espace de réflexion

Laurent Veillard, Andrée Tiberghien et Jacques Vince rapportent une collaboration entre des chercheurs en didactique des sciences et des enseignants du second degré pour la conception de ressources pour la formation et l'enseignement de la physique au lycée (Veillard et al., 2011). La question que les auteurs soulèvent et traitent est celle du rôle des théories utilisées dans les choix réalisés aux différentes étapes de la conception des ressources. Le dispositif de recherche utilise un mode itératif (analyse des savoirs en jeu, élaboration d'une première version d'une séquence, test de la séquence dans les classes, retour critique, modifications et écriture d'une deuxième version, …). Pour les chercheurs, il est nécessaire de construire une théorie plus spécifique, opérationnelle pour l'enseignement-apprentissage, qui fait lien entre deux niveaux de connaissances (celui des constructions théoriques et celui du champ

expérimental) et qui permet la fabrication d'outils utilisables en classe. Cette théorie spécifique prend appui à la fois sur les théories de l'enseignement-apprentissage (par exemple le *socio-constructivisme*, la *transposition didactique des savoirs* en jeu (Chevallard, 2004)), des concepts généraux (tels que la modélisation) et les objets et événements perceptibles, ici par l'observation ou les mesures. La collaboration avec les professeurs a permis de valider l'utilité de cette théorie spécifique (et même de la préciser) pour la prise de décisions dans le processus de conception mais a montré ses limites pour indiquer le rôle que le professeur aurait à jouer durant la mise en œuvre de la séance. Par exemple que faire des écrits personnels de l'élève ? La pratique experte des professeurs ne répond pas à tous les points qui surviennent lors d'une situation effective (ou n'est pas toujours adaptée à la situation didactique conçue). La théorie spécifique ne permet pas d'indiquer au professeur le rôle qu'il pourrait jouer dans certains épisodes particuliers comme celui de l'usage des écrits. Les chercheurs s'interrogent alors sur la place d'une *théorie de l'action conjointe en didactique* (Schubauer-Leoni, 1986 ; Sensevy, 2011a ; Sensevy & Mercier, 2007b) comme point de départ pour une fonction de la théorie spécifique intégrant ou prenant en compte le rôle des professeurs. De nouveaux questionnements et des opportunités d'exploration s'offrent alors. Donner des pistes de mises en œuvre permettrait de rendre plus opérationnelle la théorie spécifique ; ces pistes étant issues de l'analyse conjointe par les professeurs et les chercheurs de pratiques effectives.

Ce que nous retenons de ce travail de conception d'une ressource est qu'un espace de réflexion nouveau est à créer : la théorie spécifique et la pratique experte des professeurs ne suffisant pas en elles-mêmes, cet espace dépasserait même l'articulation entre théorie et pratique.

Des recherches et des chercheurs

Les textes de Brent Davis et de Bernard Laplante (Davis, 2005; Laplante, 2005) nous entraînent vers le point de vue d'un des protagonistes (le chercheur) d'une recherche collaborative. Si le texte de Laplante interroge son cheminement éthique au cours de recherches, le texte de Davis décrit l'évolution de l'attitude des protagonistes. La recherche, que Brent Davis relate, résulte d'une demande d'enseignants qui souhaitent réfléchir à l'enseignement et l'apprentissage en mathématiques (Davis,

2005). Le dispositif débute par une rencontre où sont exposés les intérêts et les attentes des uns et des autres : les projets apparaissent bien distincts. Puis des observations sont réalisées par le groupe sur des séances de mathématiques menées par le chercheur. Les enseignants tentent ensuite de reprendre certains aspects du fonctionnement et des activités des leçons observées avec leur propre classe. Les échanges ont porté surtout sur l'observation des séances menées par le chercheur puis, après une réorientation des échanges à la demande des chercheurs, sur les principes qui guident les décisions. Le chercheur décrit ce changement (réalisé sur un temps long) par une orientation de l'explicite (sous-tendant un souci d'explication) vers l'implicite des actions (qui véhicule un souci d'interprétation et d'implication) puis vers une attention à l'engagement (qui permet au groupe de partager ses réflexions et les avancées du groupe vers une communauté plus étendue et d'élargir ses réflexions). A la lumière des transcriptions (notamment du passage du « vous et nous » des chercheurs et des enseignants au « nous » des éducateurs), l'auteur perçoit les personnes appartenant au groupe comme un ensemble de « co-chercheurs » et de « co-enseignants » : « Soudainement, semblait-il, l'objet d'attention central était déterminé non plus en fonction des intérêts respectifs ou des différences explicites, mais plutôt en fonction de ce qui était partagé et imprévu » (*ibid.*, p. 406). L'implication dans une recherche de type collaboratif engage à être ouvert aux possibles qui émergent de la situation et à se saisir des opportunités qu'elle offre : c'est une question d'attitude. Dans son texte, le chercheur définit l'« attitude » face à la recherche comme ce qui réfère à la nécessité d'ajustement et d'adaptation aux particularités et à l'évolution de chaque situation : « l'attitude que l'on a à l'égard de la recherche en éducation définit, façonne les activités de tous ceux qui participent à la recherche ou qui sont directement touchés par celle-ci » (*ibid.*, p. 398).

Ce que nous trouvons singulier dans le texte de Davis est le fait que le chercheur indique ce qu'il a appris de cette expérience de collaboration. Ce qu'il a appris ne se situe pas au niveau de résultats mais dans la façon de percevoir ce que réalise un chercheur dans le monde de la recherche collaborative :

> « un changement perceptible dans la manière dont nous [Davis et son collègue Dennis] parlions de la recherche s'est fait sentir […] En faisant référence aux interactions déclenchées par la leçon, j'ai fait un commentaire sur ce point : Dennis et moi *n'aurions*

> *pas pu provoquer délibérément* une telle conversation. Au même moment, la conversation dépendait de notre engagement » (*ibid.*, p. 406).

Le fait que ces chercheurs n'auraient pas pu provoquer délibérément (c'est nous qui surlignons) un échange, sans une attitude adéquate, semble dépendre d'une relation de collaboration nouvelle. Au-delà des types de recherche, des finalités, des visées et des méthodologies qu'elle porte, la recherche collaborative impose une vision renouvelée de l'engagement des acteurs : « une sorte de fusion des intérêts de recherche et des intérêts de la pratique. Dans ce cas, les distinctions entre les chercheurs et les sujets de la recherche tombent, au fur et à mesure que le centre d'attention se déplace vers des projets sociaux et culturels de grande échelle dans lesquels la recherche se déroule et dont elle fait partie intégrante » (*ibid.*, p. 399).

Une notion comme fil directeur

Le projet de recherche TBM (« Teaching Better Mathematics ») (Vaugelade Berg, 2010) relate une approche de l'enseignement fondée sur la notion d'*inquiry*, c'est-à-dire l'enquête vue comme le fait de poser des questions, le fait de s'engager dans l'exploration, l'investigation d'une tâche, le fait de chercher des informations dans le but de développer des connaissances. Cette notion se rapporte aussi bien aux tâches mathématiques proposées aux élèves qu'à la préparation des séances de classe ou la dynamique de la recherche. La collaboration se base sur le co-apprentissage entre enseignants et chercheurs. Ils ont ainsi l'opportunité d'apprendre quelque chose du monde de l'autre mais aussi d'approfondir les connaissances dans leur domaine. Le groupe formé est ainsi reconnu comme une « communauté de pratique » qui partage un but commun et reconnaît les compétences de chacun. Au cours d'un processus, le « cycle de recherche », les chercheurs réalisent l'approche théorique qui s'appuie sur les résultats des recherches précédentes et envisagent un développement possible. Les enseignants ne sont impliqués que dans le développement de leur propre enseignement : c'est le « cycle de développement ». Ils réfléchissent à une possible adaptation des tâches proposées par les chercheurs à partir de thèmes choisis collectivement. Dans l'exemple présenté, les enseignants souhaitaient traiter la question des caractéristiques de la communication en classe de mathématiques. Les chercheurs proposent une activité basée sur la communication (tracer une figure non

visible, le logo d'un tee-shirt) et une tâche (poser des questions pour réaliser la figure). La préparation collective de la séquence, regroupant enseignants et chercheurs, consiste à se demander quelles seraient les bonnes questions mathématiques et à organiser les séances de manière à ce que la démarche d'investigation soit réinvestie. Les actions menées dans les classes sont ensuite discutées collectivement, évaluées et les conclusions tirées introduites dans un nouveau cycle de recherche. Le cycle de recherche s'articule autour de l'exploration des questions de recherche : « dans quel but la tâche a-t-elle été conçue par les chercheurs ? De quelle façon a-t-elle été présentée aux enseignants par les chercheurs au cours des ateliers de travail ? Quels sont les processus impliqués dans l'utilisation de ces tâches par les enseignants ? Et plus particulièrement, quelles sont les transformations subies par les tâches avant de pouvoir être utilisées par les enseignants ? Et de manière plus générale, de quelle façon les enseignants perçoivent-ils la notion d'*inquiry* et de quelle façon l'utilisent-ils dans leur pratique auprès des élèves ? » (*ibid*., p. 134). Nous notons la séparation temporelle entre le cycle de recherche et le cycle de développement (où se déroulent les ateliers de travail pour la mise en place de la situation didactique). C'est la notion d'*inquiry* qui est le fil directeur entre les différentes strates (de la classe, du cycle de développement, du cycle de recherche) : ce fil rouge instaure l'espace de collaboration.

Les Lieux d'éducation associés à la recherche

Les Lieux d'éducation associés à la recherche (LéA), mis en place au sein de l'Institut français de l'éducation (IFé), sont un exemple des nouvelles façons d'envisager la recherche (Lechopier, 2013). Les LéA accompagnent des collectifs dans leur démarche de collaboration. Ces collectifs peuvent être composés de professeurs, de formateurs, de chercheurs, de doctorants ou de personnels d'encadrement (qui forment l'ensemble de personnes qui occupent des fonctions de direction, d'inspection, d'administration, de conseil au sein d'une institution ayant pour vocation d'enseigner ou de former).

Les ressorts de ce qui devrait être une recherche fondamentale en éducation y sont construits (Trouche, 2012). Par exemple, la nécessité d'une question à poser et qui fonde l'action collective. Le dispositif du LéA constitue lui-même un instrument de la

recherche dans le domaine de l'éducation (Sensevy, 2011c). Participant à un Léa, nous sommes sensible à la dimension participative qu'offre ce dispositif reposant sur l'hypothèse que « la réflexivité et la collaboration entre les acteurs peuvent contribuer à la fois au développement de la recherche et du lieu d'éducation » (page d'accueil du site de l'IFé pour les LéA[11]).

Premières caractérisations des modes de collaboration

Nous avons relevé trois points qui nous semblent caractériser les modes de collaboration : l'espace d'intéressement, l'attitude de recherche et la transmission de savoirs.

Certains travaux évoquent la nécessité d'un espace d'intéressement commun aux différents acteurs d'une recherche. « Le modèle de l'intéressement met en scène tous les acteurs qui se saisissent de l'objet ou s'en détournent, et il souligne les points d'accrochage entre l'objet et les intérêts plus ou moins organisés qu'il suscite » (Akrich, Callon, & Latour, 1988, p. 22). Un accord se réalise (ou pas) entre des acteurs pour s'engager dans un processus commun. La création d'un espace d'intéressement passe par l'établissement de relations (et tout un ensemble d'actions mises en œuvre pour constituer un noyau d'acteurs). Le modèle sous-entend qu'une entité est à la base des relations. Cette entité pourrait être une équipe de chercheurs, de professeurs, des personnels d'encadrement ou des formateurs. L'entité doit s'efforcer de mobiliser les acteurs qu'elle a identifiés et de les faire rentrer dans sa logique : l'intéressement est donc fondé sur une certaine interprétation de ce que sont et veulent les acteurs à enrôler et auxquels s'associer (Lavigne-Delville, 2008). Cet espace d'intéressement peut se cristalliser autour d'une notion qui transcende toutes les strates et qui fonctionne comme un fil rouge à toutes les étapes, l'*inquiry* comme objet et comme démarche de recherche (Vaugelade Berg, 2010). Il peut aussi se concrétiser au travers d'une question ou d'un thème qui questionne ou de la nécessité de mettre en place des actions pour pallier des problèmes éducatifs concrets (Janner & Vergnon, 2015 ; Savoie-Zajc & Lanaris, 2005). L'espace d'intéressement peut également survenir au cours du déroulement du dispositif.

[11] http://ife.ens-lyon.fr/lea, adresse récupérée du site, le 14 juillet 2016.

D'autres travaux abordent l'attitude face à la recherche : l'importance d'une ouverture aux possibilités émergentes, d'ajustement et d'adaptation aux particularités et à l'évolution de chaque situation (Davis, 2005 ; Veillard et al., 2011). Elle impose ainsi une vision renouvelée de l'engagement des chercheurs par rapport à des recherches ne prenant pas en compte la complexité de la situation dans laquelle elle est plongée. D'autres travaux, enfin, évoquent la difficulté de transmission des savoirs issus de la recherche. La question de l'articulation des savoirs issus de la pratique et ceux issus de la recherche est souvent évoquée. Cette articulation est vue comme un effet positif de la collaboration : les savoirs des chercheurs et des enseignants interagissent et contribuent à la construction d'un nouveau savoir, lié à la pratique, qui vient éclairer en retour cette pratique (Bednarz, 2009). Mais le besoin d'une transposition de certains savoirs théoriques (Morrissette, 2015) pose des problèmes d'intercompréhension qui nécessitent un nouvel espace de réflexion didactique (Veillard et al., 2011) ou qui nécessitent une adaptation du dispositif collaboratif (hypothèse d'un travail spécifique (Hersant, 2010) ou des conditions à mettre en place (Greslard & Salin, 2011).
Comme nous l'avons précisé plus haut, nous allons maintenant comparer deux démarches de collaboration qui ont été théorisées.

Modes de collaboration : deux approches théorisées

Les recherches collaboratives selon l'approche canadienne

Une communauté de chercheurs canadiens du Centre interdisciplinaire de recherche sur l'apprentissage et le développement en éducation (CIRADE) s'est intéressée aux recherches collaboratives : elle a décrit et développé une démarche de recherche collaborative (Bednarz, 2009 ; Desgagné et al., 2001) à partir de celle de Serge Desgagné (Desgagné, 1997). Le pivot central de l'approche est constitué par une activité réflexive (aménagée entre chercheurs et praticiens) qui s'appuie sur l'explicitation et l'analyse de situations de pratique (vécues par les praticiens) au cours de dialogues praticiens-chercheurs. Ce modèle collaboratif est vu comme un dialogue entre deux mondes (de la recherche et des praticiens) qui ne partagent pas nécessairement le même langage, les mêmes logiques, enjeux et exigences. Chacun a besoin de l'expertise de l'autre, une expertise qu'il ne possède pas, pour mener à

bien le projet commun d'exploration d'un objet de préoccupation partagée et de construction de connaissances autour de cet objet.

Dans le champ de l'éducation, c'est une démarche qui s'inscrit dans une perspective de recherche et de formation continue à la fois car elle allie activités de production de connaissances et de développement professionnel. Elle se décrit en trois étapes. Une première phase de « co-situation » dans laquelle se manifestent les attentes des parties et se négocie un objet de réflexion commun, par exemple un aspect de la pratique à explorer. Une deuxième phase de coopération dans laquelle se déroule l'activité réflexive des enseignants et des chercheurs autour de moments vécus, rapportés ou observés relatifs à cet aspect de la pratique choisi. L'idée n'est pas que soient dégagés des consensus mais que ce qui est travaillé fasse sens pour chacun. Une troisième phase de co-production constitue la communication des résultats. Lors de la seconde phase, tandis que les chercheurs mènent une recherche formelle, c'est-à-dire accomplissent des activités de recherche afin de produire des connaissances généralisables à destination de la communauté scientifique, les enseignants investiguent sur leur pratique, c'est-à-dire la questionnent, l'analysent, en vue de la comprendre voire de la transformer. Ils attendent des chercheurs un éclairage théorique à ce « questionnement pratique ». Les chercheurs accompagnent l'investigation des enseignants en proposant des cadres conceptuels adéquats tout en investiguant sur la situation en tenant compte du point de vue des praticiens et des contraintes de leur contexte d'action : ils cumulent les rôles de formateur et de chercheur. Ce que cette communauté de chercheurs entend par collaboration enseignants-chercheurs n'est pas un partage des tâches de recherche à toutes ses étapes (définition de l'objet de recherche, choix des outils méthodologiques, recueil, traitement et analyse des données) mais une co-construction d'un savoir autour d'un aspect de la pratique, objet d'exploration de tous les acteurs. Cette co-construction se situerait dans une « zone interprétative » où se déroulerait l'activité réflexive. L'activité réflexive est aménagée de façon à ce que soit favorisé et entretenu un échange entre la pratique des enseignants et le retour réflexif sur cette pratique (entre praticiens et chercheurs).

Dans les cinq recherches collaboratives menées (Desgagné et al., 2001), les auteurs montrent que cette activité réflexive possède (i) une double pertinence car dans la phase de co-situation est négocié un objet d'exploration qui correspond aux intérêts

(de formation et de recherche) de chacune des parties, (ii) une double orientation car la phase de coopération permet une approche de formation pour les enseignants et procure un matériau d'investigation, enrichi des points de vue des praticiens, pour les chercheurs, (iii) une double retombée en termes de contributions utiles à chacune des deux communautés lors de l'étape de co-production (par exemple une ressource didactique et un apport original à un certain champ de savoir).

Joëlle Morrissette a distingué les positions de chacun devant le savoir en étudiant une recherche collaborative sur l'évaluation formative (Morrissette, 2015). Le praticien adopte une position d'explicitation du savoir d'action : il isole des épisodes significatifs dans le flot des activités réalisées et décrit ses manières de faire en donnant une visibilité à son action. Les pairs-enseignants endossent une position d'objectivation du savoir d'action par exemple en introduisant des autres possibles qui permettent de situer l'action du praticien observé ou en soulevant des controverses. Le chercheur (identifié aussi comme un formateur) rapproche les points de vue en opérant une transposition du savoir de recherche. Par exemple, il fournit des apports documentaires sur des démarches non instrumentées considérées par des enseignants comme des évaluations formatives. Par exemple un questionnement mis en œuvre au cours de l'interaction entre le professeur et un de ses élèves dans des processus de construction de sens. En cela, il propose un point de vue théorique en lien avec l'usage qui en peut en être fait (évaluer la compréhension de l'élève pour ajuster son enseignement) et donc un potentiel analytique pour l'interprétation de l'action qu'il recèle. Ainsi le chercheur occupe une position de médiateur entre les deux cultures, assurant ainsi le maillage des interprétations conjointes des deux communautés. La médiation est alors vue sous l'angle d'une position de la transposition du savoir de recherche et comprise sous l'angle de la traduction de deux formes de pensée visant à permettre l'intercompréhension.

L'ingénierie coopérative

Une communauté de chercheurs français, en lien avec le Centre de recherche sur l'éducation, les apprentissages et la didactique (CREAD), a commencé à considérer la relation entre professeurs et chercheurs de manière alternative et dans un cadre particulier. En effet, Gérard Sensevy et Alain Mercier envisagent la forme de

collaboration de l'ingénierie coopérative dans le cadre de la didactique, en tant que science *d'une pratique*, celle d'enseignement (Sensevy & Mercier, 2007a). Pour les auteurs, puisque cette science est forcément confrontée aux conceptualisations et aux actions des professeurs, il faut la considérer également hors des seules catégories savantes. Autrement dit, il faut l'examiner aussi au sein de l'action effective, en relation avec le savoir, du professeur et de ses élèves dans leur classe, sans pour cela la réduire à l'explicitation des pratiques des enseignants. Ils donnent une première orientation de travail :

> « Pour mettre en travail cette différence – pour une part irréductible – entre *sémantique familière de l'action* et *langage des modèles*, il existe donc tout un système pratique à élaborer et promouvoir, celui de recherches coopératives, dans lesquelles la production d'ingénierie didactique d'un nouveau genre se fasse sous la responsabilité conjointe des professeurs et des chercheurs, construisant ensemble des fins communes à un processus pensé comme collectif, au sein de dispositifs qui restent pour la plus grande part à inventer » (*ibid.*, p. 209).

Des travaux (Sensevy, 2011a, 2016 ; Sensevy et al., 2013 ; Joffredo-Le Brun et al, 2017) ont approfondi la question : ils ont porté sur le concept d'une collaboration qui se défie des dualismes, notamment celui de la pratique et de la théorie. Selon les descriptions des auteurs, il repose sur deux caractéristiques liées : une détermination commune de fins communes (ainsi que les moyens d'y parvenir) et un principe de symétrie entre les instances « chercheur » et « professeur ».

Les fins (d'enseignement et d'apprentissage de savoirs pour tous les élèves) sont partagées par les chercheurs et les professeurs et se réalisent dialectiquement dans la construction (et la reconstruction) des moyens (concrétisés par l'ingénierie didactique). La recherche élabore un dispositif pour mieux atteindre les fins éducatives, ce qui implique également de l'améliorer. Comme la recherche se réalise au sein d'un dispositif d'une ingénierie éprouvant des hypothèses au cours de situations mises en œuvre dans des classes, ce type de recherche possède un aspect ingénierique. Simultanément, comme elle décrit des actions humaines relatives au didactique (actions qui lient organiquement enseignement et apprentissage) au cours de (et suite à) l'implémentation du dispositif dans des classes, ce type de recherche vise à produire des connaissances sur des faits d'éducation. Elle comporte ainsi également un aspect anthropologique. Tous les

acteurs qui mettent en œuvre le dispositif ont besoin de *comprendre* les actions réalisées lors de la conception, de la mise en œuvre, de l'analyse de l'ingénierie pour pouvoir faire évoluer et transformer le dispositif et vice versa. Les deux aspects « comprendre » et « transformer » sont intrinsèquement liés car il est tout aussi nécessaire de comprendre pour transformer que de transformer pour comprendre. Le point crucial est vraiment l'assertion épistémologique qu'on ne peut comprendre (transformer) sans transformer (comprendre).

Au sein d'une ingénierie coopérative, l'égalité de relations entre les professeurs et les chercheurs est constitutive du dispositif.

> « Les assertions constitutives de l'élaboration des dispositifs vont pouvoir être produites par tout membre du collectif, à condition que tous les autres s'approprient les engagements (conséquentiels) qu'elles supposent et les autorisations qui les justifient. Le *principe de symétrie* est donc *un principe d'explicitation partagée*. Chacun est *connaisseur*, avec un sens du jeu qui lui est propre, et chacun joue le jeu d'offre et de demande de raisons qui constitue la délibération propre au travail collectif d'ingénierie, avec une double responsabilité : *la responsabilité d'asserter* et *la responsabilité de s'approprier les assertions garanties* » (Sensevy, 2011a, p. 680).

Il n'y a pas de division du travail *a priori* mais une reconnaissance des spécificités de chacun. Chacun est en égale position de produire des analyses selon son point de vue et selon son expérience de la situation (en tant que connaisseur de la chose). Gérard Sensevy utilise aussi l'expression de « pratique savante » (*ibid*., p. 127) qui est la pratique du connaisseur de la chose dans un monde social donné, celui qui sait et sait comment faire[12]. Chacun est susceptible de s'impliquer dans la réflexion pour analyser les données recueillies, modifier des éléments, proposer des pistes, critiquer ou diffuser ce que ses connaissances, à un moment donné, permettent de révéler et d'identifier. La pratique de savoir est définie comme une pratique fondée sur une puissance d'agir.

Les ingénieries coopératives s'adossent, d'une certaine façon que nous discuterons ci-dessous, au modèle des *lessons studies* (Miyakawa & Winsløw, 2009) qui sont des

[12] « Savant est historiquement, en français, le premier participe présent du verbe savoir : un savant est un « sachant », quelqu'un qu'on regarde comme nourrissant son action d'un savoir qui est seul jugé susceptible d'expliquer ses hautes performances - footballistiques, musicales, mathématiques ou autres » (Chevallard, 2011b, p. 12).

pratiques reposant sur le travail collectif d'enseignants autour d'un cours précis (préparation, réalisation et évaluation) pour le développement professionnel et l'amélioration de l'enseignement. Les *lessons studies* sont de véritables institutions au Japon : le travail hors la classe d'un enseignant japonais se réalise essentiellement au sein de la communauté de son établissement. Après la conception collective de la leçon, sa mise en œuvre observée par les collègues du professeur, l'équipe évalue la performance de la leçon. La leçon peut être alors révisée sur certains points et à nouveau reprise dans d'autres classes et par d'autres professeurs. Elle devient alors le produit d'une équipe et, suffisamment raffiné par des expérimentations, des discussions et études successives, donner lieu à un document diffusable. Ce document est peut être alors à son tour objet d'étude pour un autre collectif. La *lesson study* est bien le produit d'un travail de recherche : elle procède à partir de travaux antérieurs, de questions, elle implique la formulation explicite d'hypothèses, de conditions à tester, elle organise des expérimentations par des mises en œuvre ensuite évaluées, elle rend publique ses résultats et les diffuse sous une forme standardisée, permettant ainsi une possible reproductibilité (*ibid.*, p. 83). Si elle est ouverte à la contribution de chercheurs, elle ne bénéficie en général pas autant que les ingénieries didactiques d'appuis théoriques et méthodologiques. En cela, elle ne consiste pas en une approche d'un système d'enseignement-apprentissage du point de vue scientifique mais du point de vue de la pratique enseignante. En effet, elle n'a pas pour ambition de développer un savoir scientifique à l'instar d'une ingénierie coopérative mais elle en est proche dans la manière dont le point de vue de chacun des membres y est sollicité et mis à contribution. Gérard Sensevy (2011a) évoque l'« indiscernabilité des rôles de chercheur et de professeur » qui peut se réaliser *à certains moments* dans une ingénierie coopérative.

Comparaison des modes de collaboration

Les deux démarches précédemment décrites (approche canadienne et ingénierie coopérative) n'ont pas un même ancrage historique : l'approche canadienne a pris

naissance dans les années quatre-vingt-dix et a donné lieu à de nombreux travaux[13] tandis que l'ingénierie coopérative n'apparaît que récemment et dans le cadre précis de la didactique (Sensevy & Mercier, 2007a). La démarche de l'ingénierie coopérative s'appuie sur quelques premières mises en œuvre d'ingénieries coopératives comme celles des « Fables de la Fontaine » (Lefeuvre, 2008 ; Sensevy, 2011a), du « Jeu du trésor » (Moralès-Ibarra, 2014 ; Sensevy et al., 2010), des algorithmes opératoires au LéA Saint-Charles (Matheron & Quilio, 2014 ; Quilio & Morellato, 2016 ; Quilio & Nedelec-Trohel, 2014) et sur les travaux en cours pour le projet *Ace-Arithmécole* que nous allons présenter plus en détail dans la prochaine section. Pour comparer les deux approches, nous développerons deux points qui les distinguent : la perception du collectif et la visée exploratrice.

Une perception du collectif

Ce qui paraît au premier abord distinguer les deux démarches de collaboration est la perception du collectif. En ce qui concerne l'approche canadienne, il y a une collaboration entre deux mondes, celui des praticiens et des chercheurs, tandis que pour l'ingénierie coopérative une zone d'indiscernabilité est possible à certains moments et sur certains points.

Selon Serge Desgagné et Nadine Bednarz (Bednarz, Rinaudo, & Roditi, 2015 ; Desgagné, 1997 ; Desgagné & Bednarz, 2005), le chercheur est un agent médiateur, un accompagnateur, un régulateur des interactions qui doit se garder de glisser vers une posture d'expert apportant une solution. Un médiateur qui « se meut dans les deux mondes en vue de les rapprocher, voire de créer un point de jonction entre les deux cultures de travail qu'ils représentent, afin que s'édifie une culture commune, issue de cette démarche de médiation, où les connaissances construites en collaboration tiennent compte à la fois des contraintes et des ressources des deux mondes, celui de la recherche et celui de la pratique » (Desgagné, 1997, p. 383). Cependant, l'auteur admet que « les frontières entre les deux sensibilités mises à contribution ne sont certainement pas étanches, pas plus qu'elles ne représentent la chasse gardée d'un

[13] A la fin de l'entretien de Nadine Bednarz, dans la revue *Carrefours de l'éducation* (n°39), une bibliographie des publications en lien et des thèses portant sur une recherche collaborative est éditée (Bednarz, Rinaudo, & Roditi, 2015, p. 182-184).

seul type de partenaire » (Desgagné & Bednarz, 2005, p. 250). Dans un entretien récent pour le n° 39 de la revue *Carrefours de l'éducation*, Nadine Bednarz déclare que l'idée même de recherche collaborative engage à être davantage dans une symétrie des positions *par rapport à la construction de savoirs* (Bednarz et al., 2015). Mais ces points ne sont pas développés dans les articles. En résumé, nous pourrions dire que, dans les recherches collaboratives modélisées par les Canadiens, le chercheur occupe au sein du groupe une place particulière d'accompagnateur et de médiateur par les apports théoriques qu'il introduit dans l'investigation collective.

Reprenons la définition de « praticien » recueillie dans le TLFI[14] : « un praticien est une personne qui connaît et exerce la pratique d'un art, d'une technique ». Dans le champ de la médecine, on utilise toujours ce terme pour désigner celui qui *exerce* la médecine. Pour cet exercice, le praticien possède un ensemble de théories qui lui permettent de porter un certain regard sur sa perception des symptômes et des signes (Foucault, 2009). L'enseignant est celui qui exerce l'enseignement ; il possède un ensemble de théories (dont il n'a toutefois que peu bénéficié durant sa formation en regard avec les responsabilités qui lui incombent[15]). Le chercheur en didactique est celui qui exerce la recherche en didactique ; en tant que chercheur, des connaissances théoriques lui sont légitimement reconnues. Si professeurs et chercheurs peuvent échanger à parts égales mais de manière différente sur le dispositif pour le faire évoluer c'est parce qu'ils partagent dans certains cas une même compréhension de l'action qui se joue.

> « Une ingénierie coopérative repose sur l'idée selon laquelle la connaissance anthropologique de la pratique découle de la compréhension du jeu auquel se livre les agents de l'action. C'est ensuite de la pertinence et de la profondeur de cette reconnaissance que dépendra ce que nous avons nommé ci-dessus le travail de production d'hypothèses stratégiques » (Sensevy, 2016, p. 228-229).

---

[14] http://atilf.atilf.fr/dendien/scripts/tlfiv5/affart.exe?19;s=2222660070;?b=0;

[15] Yves Chevallard parle de semi-profession pour les professeurs (Chevallard, 2003) : « Par contraste avec les professions, les semi-professions sont marquées par le fait de renoncer à se fonder sur un corpus de connaissances théoriques fermes […] une véritable profession devrait viser la production et la mise en œuvre uniforme de solutions communes à l'ensemble des professionnels » (Chevallard, 2003, p. 12).

Dans une recherche de type ingénierie coopérative, le collectif est un lieu où chacun peut enseigner à l'autre quelque chose qui l'aidera à comprendre (pour améliorer) l'ingénierie à construire : il y a deux communautés, reconnues dans leurs différences, qui entrent en transaction, pour la production d'assertions. Nous développerons plus en détail cette idée dans le chapitre suivant qui s'intéressera plus particulièrement à la notion de transactions.

Une visée exploratrice

Ce qui distingue également les deux démarches de collaboration porte sur la visée exploratrice de la recherche : comprendre et expliquer dans la première approche, comprendre pour transformer (et transformer pour comprendre) dans la seconde. Dans l'approche la plus ancienne et la plus générale, le chercheur se place « en interprète, à la fois compréhensif et explicatif, de l'agir du praticien mais le chercheur a aussi sa part d'influence dans l'avancée du projet […] le chercheur permet au praticien d'éclairer voire élargir sa vision de la pratique » (Desgagné & Bednarz, 2005, p. 248). La recherche collaboratrice y est alors un espace d'explicitation et de théorisation du savoir d'expérience des praticiens : « collaborer ne veut pas seulement dire faire ensemble, mais avant tout se reconnaître mutuellement un champ de compétence spécifique et le mettre au service de l'objet de recherche […] le praticien devient celui qui est à la source du savoir et le chercheur celui qui se fait accompagnateur de la démarche réflexive par laquelle le praticien, ou le groupe de praticiens, sera amené à configurer individuellement et collectivement ce savoir » (Desgagné & Larouche, 2010, p. 8).

Dans une ingénierie coopérative, les chercheurs et les professeurs agissent conjointement afin de faire avancer le dispositif et produire des connaissances. Gérard Sensevy précise : ils « agissent ensemble dans une posture commune d'ingénieur. Ainsi, la recherche en ingénierie coopérative transforme (processus normatif) pour comprendre (processus épistémique), pour transformer pour comprendre, et ainsi de suite, dans un entrelacs complexe des deux processus » (Sensevy, 2016 ; Sensevy et al., 2013).

Nous avons constaté qu'il n'est pas facile de caractériser, au travers de la lecture des écrits scientifiques que sont des articles de revue ou de colloque, la manière dont des professeurs et des chercheurs travaillent *effectivement* ensemble, au-delà des démarches de recherche collaborative. Dans un article, Eric Roditi présente trois exemples de recherche relatives aux pratiques enseignantes et compare le travail respectif d'un même chercheur (avec un même cadre théorique), lui-même en l'occurrence, et des enseignants collaborant avec lui (Roditi, 2015). Il déclare que les relations entre le chercheur et les professeurs n'ont pas été les mêmes : elles se sont construites en fonction de la problématique de recherche, des besoins et des attentes de chacun des partenaires. L'auteur indique que si l'investissement des enseignants est variable (donc la relation chercheur / praticiens différente), la relation construite a constitué un facteur important dans la richesse des résultats obtenus. Le degré de collaboration relève de l'engagement des personnes, des relations de confiance qui ont pu s'établir. Tous les articles évoquent l'importance de la confiance car il existe une prise de risque du professionnel qui donne à voir sa pratique. La nature de la collaboration effective dépend des objets à l'étude collective mais aussi du type de recherche mené. Ce premier ressenti provient aussi, sûrement, de la manière qu'a chaque auteur de relater cette collaboration en fonction de l'orientation qu'il donne au sujet de son article.

Nous allons donc élaborer notre propre étude d'un mode de collaboration, à partir du projet *Ace-Arithmécole* afin de continuer l'investigation.

Coopération dans l'ingénierie didactique *Ace-Arithmécole*

L'ingénierie de la recherche *Ace-Arithmécole* poursuit une double direction : (i) mener un travail théorique sur les situations didactiques et le savoir en jeu (le collectif se questionne sur un contenu de savoir et sa mise en œuvre afin qu'ils soient efficaces) ; (ii) s'adapter aux contraintes de l'enseignement ordinaire (les situations didactiques doivent être utilisables pour, à terme, pouvoir être diffusées dans des classes ordinaires hors dispositif de recherche). Pour mener à bien ce projet, quel mode de collaboration, dans la perspective d'une ingénierie coopérative, se met effectivement en place ? Nous aborderons dans cette section l'organisation structurelle d'un tel

mode. Nous la complèterons dans les chapitres 3 et 4, au fur et à mesure que notre description gagnera en épaisseur.

Visées et partenaires

La recherche *ACE-Arithmécole*, projet pluridisciplinaire, est soutenue par la Direction générale de l'enseignement scolaire (DGESCO) et l'Institut français de l'éducation (IFé). La recherche a d'abord été financée par le Fond d'expérimentation pour la jeunesse puis dans le cadre du Plan investissement d'avenir.

Elle est centrée sur les apprentissages arithmétiques au cours préparatoire (CP, première année de la scolarité élémentaire en France ; élèves âgés de 6-7 ans) puis dans une phase d'expansion du projet au cours élémentaire première année (CE1, élèves de 7-8 ans). Le projet vise à proposer aux enseignants une progression complète pour les apprentissages numériques (construction des nombres, calcul et résolution de problèmes ; géométrie non incluse) pour ces niveaux scolaires conformément aux contenus et objectifs des programmes en vigueur dans l'Éducation nationale en France[16]. Les chercheurs à l'origine du projet le précisent : « cette progression doit également posséder des propriétés de «robustesse» ergonomique, au sens où elle doit pouvoir être mise en œuvre, *après une formation adéquate et avec un accompagnement spécifique*, par tout professeur. La progression et la conception d'activités pour les élèves, qui est le cœur de cette recherche, est ciblée sur la connaissance des nombres, le calcul et la résolution de problèmes d'addition, de soustraction et de multiplications » (p. 4 du document du projet de recherche ; cf. annexe 1).

Cette recherche est fondée sur les résultats de la recherche en psychologie cognitive et du développement ainsi qu'en didactique. Nous ne développerons pas ce point dans le cadre de notre travail et nous renvoyons à ce même document du projet de

[16] Nous faisons référence aux programmes scolaires de 2008 (Bulletin officiel hors-série n°3 du 19 juin 2008) en vigueur durant l'élaboration et la mise en œuvre expérimentale de l'ingénierie. Cependant les nouveaux programmes pour l'école élémentaire et le collège (parus au Bulletin officiel du 24 décembre 2015 pour une mise en place prévue à la rentrée scolaire de septembre 2016) sont entièrement compatibles avec les séquences d'enseignement-apprentissage construites. On pourrait même dire qu'elles les ont précédés car elles ont été conçues dans la perspective de renouvellement des programmes sur une demande de la DGESCO.

recherche les références des études scientifiques sur lesquelles elle s'appuie. Elle engage plusieurs laboratoires de recherche en sciences humaines et sociales et des chercheurs en didactique des mathématiques :

- CREAD (Centre de recherche sur l'éducation, les apprentissages et la didactique), laboratoire sous double tutelle de l'Université Rennes 2 et de l'Université de Bretagne Occidentale. La recherche *Ace-Arithmécole* est coordonnée par Gérard Sensevy ;
- *Paragraphe* (cognition, langage, interaction), laboratoire qui œuvre dans le domaine des sciences de l'information et de la communication est reconnu aussi comme domaine secondaire en Psychologie au sein de l'Université Paris 8. Le projet est suivi par Emmanuel Sander ;
- *InterPsy*, laboratoire de Psychologie à l'Université de Lorraine. Le projet est suivi par Jean-Paul Fischer ;
- PSITEC est un laboratoire de recherche en psychologie rattaché à l'Université de Lille 3. Le projet est suivi par Bruno Vilette.
- Des chercheurs en didactiques des mathématiques participent à ce projet de recherche : Alain Mercier (professeur émérite, IFé) et Serge Quilio (I3DL).

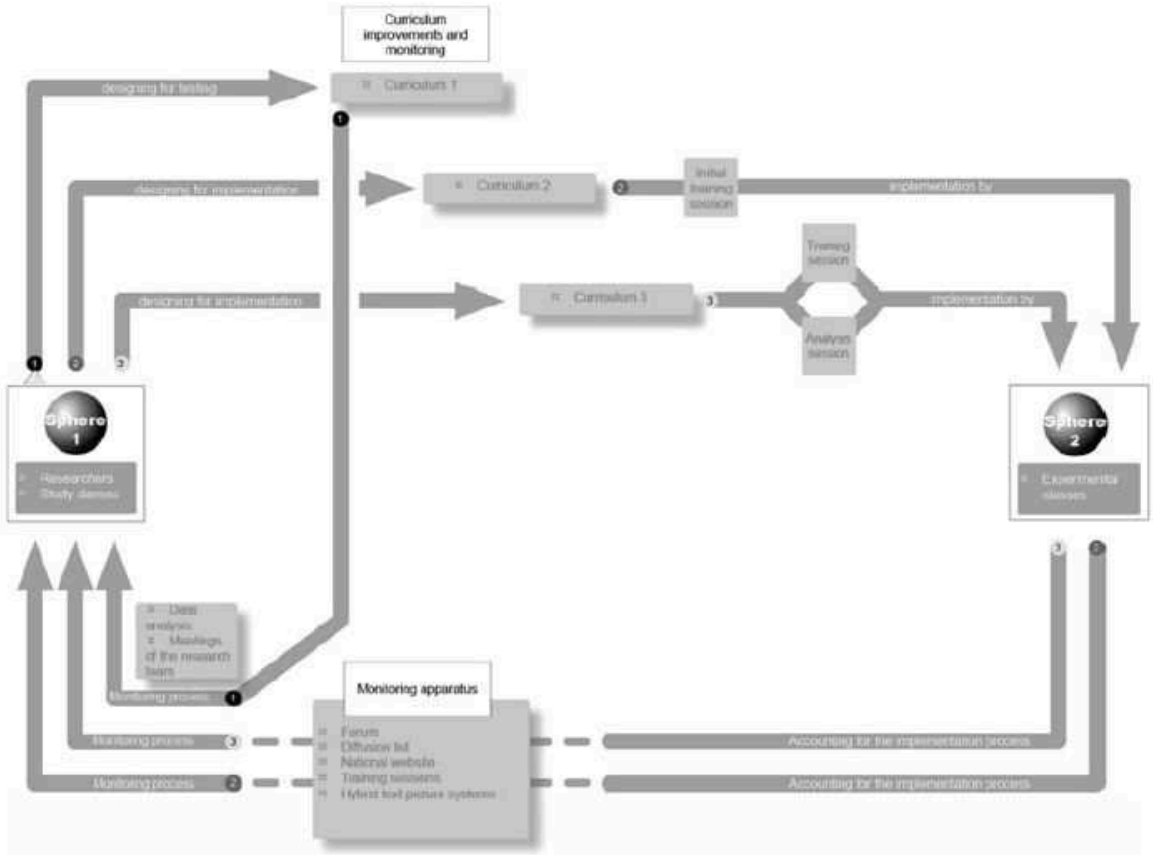
La recherche a été implémentée depuis octobre 2011 dans des classes de CP puis de CE1 de quatre académies : Aix-Marseille, Lille, Rennes et Versailles. Une cinquième académie (Nice) rejoint le dispositif en septembre 2014. Ainsi plus de 200 classes ont participé ou participent à ce dispositif dans sa phase expérimentale. Les rectorats, par l'intermédiaire des directions des services départementaux de l'Education nationale (notamment celles des Bouches-du-Rhône, de l'Ille-et-Vilaine, des Côtes d'Armor, du Nord, des Yvelines et du Var) sont donc partenaires et des conventions ont été signées.

A une échelle macro organisationnelle, un processus itératif

Dans cette section, nous présentons deux figures qui nous paraissent révéler de manière complémentaire l'organisation du dispositif de recherche. La première de ces figures a été capturée dans l'article paru dans la revue ZDM (Sensevy et al., 2013). Elle offre une vision synoptique sous la forme d'un modèle du processus itératif. Elle met particulièrement en valeur le rôle des acteurs classés selon deux sphères. Nous avons produit la seconde figure. Elle représente aussi une vision synoptique du

dispositif mais elle rend compte de manière plus effective les actions menées avec les classes (et les différents niveaux de classes). Elle y inclut de plus une dimension temporelle contextualisée.

Organisation du dispositif : première présentation synoptique



Description synoptique 1 du projet *Ace-Arithmécole*
In (Sensevy et al., 2013)

Une première boucle démarre à partir de la sphère 1. Cette sphère représente une partie du collectif engagé dans le dispositif de recherche. Elle est composée de chercheurs, de professeurs, de formateurs et de doctorants. Les professeurs et les chercheurs de la sphère 1 ont l'habitude, pour la plupart d'entre eux, de travailler ensemble. Ces professeurs, que nous appellerons les « professeurs des classes d'étude » pour les distinguer des autres professeurs engagés dans le dispositif, sont des maîtres confirmés qui ont déjà travaillé en lien avec la recherche. Pour des

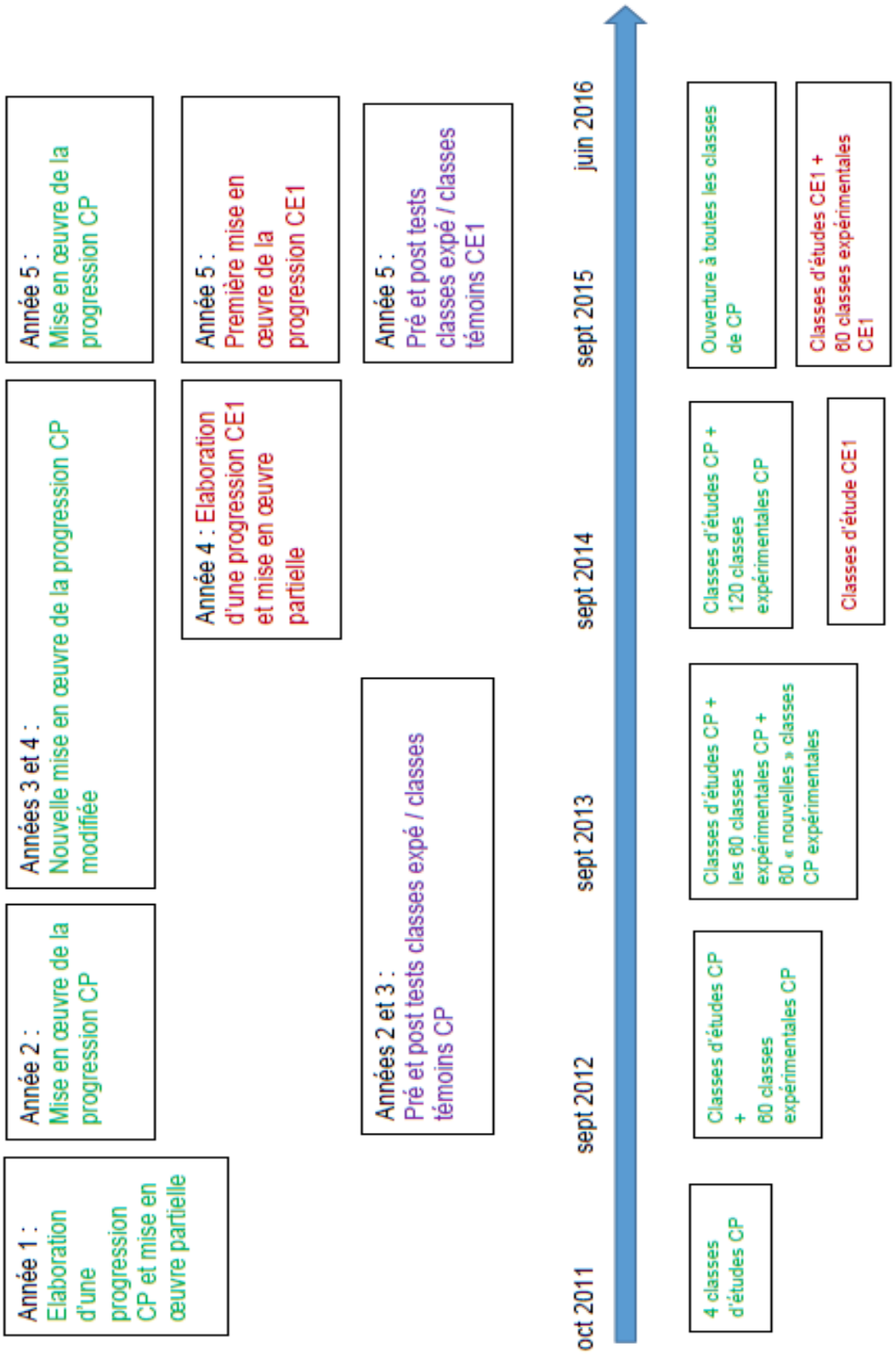
professeurs, travailler en lien avec la recherche implique d'avoir l'habitude d'accueillir un chercheur au sein de sa classe, d'être filmé, de dialoguer avec des chercheurs, d'envoyer ses documents de préparation et de rédiger des observations).

La sphère 1 produit un premier document, que nous nommerons par la suite « document de la progression ». Ghislaine Gueudet et Luc Trouche donnent une définition du terme (Gueudet & Trouche, 2008) : un *document* est un construit, il est réalisé à partir de ressources (c'est-à-dire à partir de ce qui est disponible) et de schèmes[17] d'utilisation. Nous n'allons pas développer maintenant ce que sous-entend le fait que le document soit un construit car nous sommes au cœur même du processus de collaboration et nous aurons l'occasion d'y revenir tout au long de ce travail. Disons brièvement que ce texte est une description d'un ensemble de situations didactiques à mettre en œuvre, à destination des professeurs des classes expérimentales qui constitueront la sphère 2. Ce texte est produit par la sphère 1 à partir d'une situation didactique succincte conçue par les chercheurs et des premières mises en œuvre réalisées par les professeurs des classes d'étude. Il s'appuie sur un recueil de données effectué à partir de comptes-rendus d'observation, de productions et d'échanges entre les membres de la sphère 1.

Le document devient alors, dans la seconde boucle, une ressource pour les professeurs des classes expérimentales qui éprouvent les situations. L'implémentation a lieu aussi dans les classes d'étude. Le collectif, constitué des sphères 1 et 2, échange sur les mises en œuvre réalisées et transforme le document qui devient alors une ressource dans une troisième boucle. Lors de ce processus, les professeurs expérimentaux s'intègrent peu à peu à la sphère 1.

[17] Un schème (Vergnaud, 1996) est une organisation invariante de l'activité, qui comporte notamment des règles d'action. Cette organisation de l'activité est structurée par des invariants opératoires qui se forgent au cours de cette activité, dans différents contextes rencontrés pour la même classe de situations.

Organisation du dispositif : deuxième présentation synoptique



Description synoptique 2 du projet *Ace-Arithmécole*

Le travail relatif à la première boucle s'est effectué durant l'année 2011-12 et nous considérons cette année comme la première année de mise en place du dispositif. L'implémentation suivante a été mise en place durant l'année scolaire 2012-13 (année 2) dans environ soixante classes de CP (éducation prioritaire et secteur ordinaire) au sein de quatre académies (Aix-Marseille, Lille, Rennes et Versailles). Pour l'année 2013-2014 (année 3), environ cent vingt classes sont concernées (les soixante professeurs ayant déjà mis en œuvre la progression en 2012-2013, et soixante « nouveaux » professeurs la mettant en œuvre pour la première fois).
Des tests, visant à évaluer le dispositif, sont réalisés en début (pré-tests) et en fin d'année (post-tests). Les données ont été fournies par le codage de ces pré-tests et post-tests : ce sont les performances des élèves (et non des classes) qui sont considérées ici. Les élèves ont été répartis en deux catégories croisées : (i) élèves classes ACE / élèves classes témoins ; (ii) élèves en éducation prioritaire ou pas. Les élèves ACE sont plus performants sur une très grande majorité des items. Par ailleurs, les élèves ACE des zones prioritaires progressent bien davantage, du pré-test au post-test, que les élèves témoins des zones prioritaires.
Le processus se poursuit les années suivantes, selon la même organisation avec le niveau supérieur du CE1 à partir de la quatrième année.

Ce processus de collaboration est au cœur de notre travail doctoral. Dans la suite, nous présentons les théories et concepts qui soutiennent nos questionnements et notre étude.

Chapitre 2 – Coopération entre professeurs et chercheurs : éléments théoriques et problématisation

Présentation des concepts nécessaires à l'analyse des échanges au sein d'une ingénierie coopérative et re-conceptualisation par leur plongement dans un dialogue spécifique tel que l'est le dialogue d'ingénierie.

Dialogue d'ingénierie

Pour coopérer, professeurs et chercheurs doivent échanger. Nous nommerons ces échanges « dialogue d'ingénierie ». Dans cette section, nous cherchons à préciser ce qu'est un dialogue d'ingénierie entre des acteurs engagés dans une ingénierie didactique de type coopératif telle que nous l'étudions dans le cadre du projet *ACE-Arithmécole*. Nous définirons d'abord le terme « dialogue » selon le sens où nous l'utilisons dans ce travail et nous tenterons, en nous appuyant sur certaines théories en philosophie du langage et de l'*action conjointe en didactique*, d'en dégager des premières orientations descriptives. Nous spécifierons ce type de dialogue grâce à la description de quelques-unes de ses *formes de vie* et ses *jeux de langage* associés (Wittgenstein, 2004) qui nous permettront de produire une première description, grammaticale et *a priori*.

Dialogue d'ingénierie, éléments généraux

Dialogue et dialogisme

L'étymologie du mot « dialogue », du grec « *διάλογος* » - composé du préfixe « *διά* » : « au travers, par »[18], et du radical « *λόγος* » : « parole, raison, verbe » - désigne un type de communication, essentiellement verbal, entre plusieurs personnes ou groupes

[18] Gérard Sensevy (2011a, p. 53) note une similarité entre la notion de « dialogue » et celle de « transaction ». Il remarque que la traduction grecque du préfixe trans est le préfixe dia. Nous aurons l'occasion plus loin de revenir sur l'idée que le dialogue d'ingénierie renvoie à des transactions d'ingénierie, et réciproquement.

de personnes. Le sens de l'expression « au travers de (ou par) la parole, de la raison, du verbe » marque le mode de communication mais surtout le primat d'une relation entre des êtres humains. Nous pourrions interpréter ainsi l'image ci-dessous[19] afin d'illustrer le dialogue d'ingénierie :

Une illustration pour un dialogue d'ingénierie

Bien que cette image ne signifie pas les modalités de communication possibles (échanges verbaux, oraux ou écrits, *de visu* ou virtuels, immédiats ou différés), ni leur structuration (deux par deux puis ensemble, avec tel ou tel type de rapport à l'objet de discussion), elle représente plusieurs personnes qui échangent à propos d'un objet. Symbolisé par une pièce de puzzle, emblème d'un problème à résoudre, l'objet au centre de l'attention du groupe est ici une ingénierie didactique.

Denis Vernant signale que la forme d'une telle communication ne doit pas être le critère qui la définit :

> « La forme dialogale ne garantit en rien le dialogisme du dialogue […] Les philosophes contemporains, en effet, ne se fient pas à la seule forme pour caractériser le dialogue. Ils insistent sur la richesse et la fécondité de l'échange dialogique conçu comme création mutuelle d'un accord, expérience d'un partage » (Vernant, 1997, p. 92).

Pour ce philosophe, il est fondamental de s'intéresser à la dimension dialogique de cette pratique sociale discursive qu'est le dialogue. Le dialogique, capacité intrinsèquement humaine, est caractérisé par la *co-constitution des interlocuteurs* et leur reconnaissance mutuelle, l'élaboration commune de connaissances et la

[19] Nous avons inscrit le mot « dialogue » dans le moteur de recherche « Google » et appréhendé ce que proposaient les images correspondantes. Les nombreuses connotations de ces images (compromis, entente, partage, conflit, incompréhension ou juxtaposition), les différents modes, formes ou types montrent les divers usages de ce mot.

confrontation de croyances relatives « aux mondes qu'ils construisent ensemble […] et qui fournissent les cadres conventionnels de référence aux choses » (*ibid.*, p. 95). Exemplifions ces propos avec l'énoncé d'un des chercheurs concernant des échanges, sur la liste de diffusion, de comptes-rendus de séances réalisées en classe :

> « c'est de la littérature intéressante [lire des comptes-rendus] pour qui connaît l'arrière-plan / parce que je vous assure que vous donnez les mails à quelqu'un qui ne connaît pas l'histoire il va dire mais qu'est-ce qu'il raconte là / des écritures additives qui apparaissent / y a beaucoup de sous-entendus entre nous / ce qui est un point positif c'est-à-dire qu'on n'a pas besoin de tout expliquer on sait de quoi on parle / j'ai trouvé ça particulièrement intéressant pour le groupe c'est-à-dire que on a vu qu'on partageait un peu les mêmes préoccupations et qu'on mettait en œuvre un certain nombre de solutions » (tour de paroles 66, 6e réunion, 30 janvier 2013).

Nous pouvons décrire les propos du chercheur en référant aux notions de *co-constitution des interlocuteurs* par le partage de sous-entendus, l'efficacité de la communication (« on sait de quoi on parle ») et de *co-construction des mondes* par le partage d'éléments communs (préoccupations, mises en œuvre). Ces éléments constituent un arrière-plan pour le groupe qui dialogue depuis cinq mois et se réunit pour la sixième fois depuis le début de la mise en place du dispositif ingénierique. Nous pouvons aussi décrire les propos du chercheur ci-dessus en suivant Ludwig Wittgenstein (Wittgenstein, 1987) pour qui un dialogue ne peut prendre sens que par rapport à un arrière-plan, un cadre de référence partagé[20] et pour qui l'arrière-plan est fournisseur de significations (« quelqu'un qui ne connaît pas l'histoire va dire mais qu'est-ce qu'il raconte là »).

Circonstances d'engagement, engagement des interlocuteurs

Les circonstances d'engagement des personnes dans ce dialogue d'ingénierie sont parmi les premiers éléments, avec la liste des différents protagonistes, qui nous permettent de concevoir à l'intérieur d'une *forme de vie* (Wittgenstein, 2004) les

[20] Nous nous référons à l'article « Arrière-plan (cadre de référence) » (Framework), p. 83-90, dans le « Dictionnaire Wittgenstein » de Hans-Johann Glock (Glock, 2003).

notions de *co-constitution des interlocuteurs* et de *co-construction des mondes* (Vernant, 1997). Toutes les personnes se sont engagées volontairement dans le dispositif de recherche et elles sont mues par une même finalité générale : permettre à des élèves entrant dans la scolarité obligatoire de construire des notions sur les nombres entiers et un rapport « vivant » aux mathématiques. Ces acteurs sont issus de deux institutions : l'éducation et la recherche. Les professeurs des écoles, formateurs et personnels de l'encadrement (comme les inspecteurs, IEN) font partie de l'Éducation nationale ; les chercheurs sont affiliés à des universités et des laboratoires de recherche. Même si ces deux institutions n'ont généralement pas de liens dans l'exercice de leurs activités quotidiennes respectives en dehors des cadres de dispositifs de recherche, une certaine « porosité » existe entre tous ces corps de métier : les chercheurs sont aussi enseignants, certains chercheurs en éducation ont eu une expérience dans l'enseignement primaire, certains professeurs des écoles, formateurs ou encadrants ont obtenu ou préparent des diplômes universitaires. Ces circonstances d'engagement, et surtout celle de la finalité partagée, permettraient donc une première reconnaissance mutuelle entre les protagonistes du dialogue et définiraient un premier arrière-plan aux éléments constituant le dialogue d'ingénierie. Dans cet arrière-plan pourraient figurer les programmes scolaires en mathématiques, la connaissance du système scolaire, des connaissances sur le développement cognitif de l'enfant, des connaissances mathématiques sur les nombres entiers et leur enseignement à l'école primaire,… mais aussi quelques éléments sur la nature d'une recherche en éducation comme la nécessité de mises à l'épreuve des hypothèses de recherche, la place du questionnement.

Au-delà des circonstances d'engagement, l'engagement même des personnes dans leur action d'énoncer des paroles a été mis en évidence par des philosophes comme John Langshaw Austin. Austin (Austin, 1970) utilise l'expression d'« acte de langage ». Dans ses travaux, il a cherché à comprendre ce qu'il se passait quand une énonciation était produite dans des circonstances données : tout énoncé est un acte de discours, produit dans la situation donnée où se trouvent les interlocuteurs, qui vise à accomplir quelque chose. « How to Do Things With Words » titrera-t-il son livre majeur. « Quand dire, c'est faire » dans la traduction française. Selon la définition du dictionnaire du *Trésor de la langue française informatisée* (TLFI), un acte est ce qu'une personne fait effectivement mais c'est aussi la manifestation concrète des pouvoirs d'agir de cette

personne[21]. Dans ces perspectives, nous pouvons développer l'idée que par ses énoncés (ce que la personne fait effectivement), un locuteur peut agir sur son environnement ou plus précisément, en s'adressant à quelqu'un, peut transformer ses représentations des choses et des buts (c'est le pouvoir d'agir de la personne). Pour Vernant (1997, p. 13), l'énonciation est l'acte discursif qui assume un énoncé dans les échanges dialogiques.

Penchons-nous sur le courriel d'un professeur A, participant à l'expérimentation pour la deuxième année, à propos d'une partie du compte-rendu d'un professeur B, lui aussi participant pour la seconde année :

> « En ce qui concerne le mail de X [le professeur B], son ajout de la fiche « nombre » dans le cahier me gêne un peu. Les décompositions sont « apportées » sans être « découvertes » par l'enfant. Ce sont les décompositions les plus usuelles pour les adultes mais elles ne viennent pas de « leurs découvertes ». Nous n'avons abordé en classe que les décompositions jusqu'à 6 et uniquement en manipulation, pas à l'écrit » (courriel du 16 septembre 2014 du professeur A).

Le professeur B a montré une partie de sa pratique. Cette pratique consiste à avoir donné une fiche récapitulative sur les nombres et leurs représentations sur le cahier de ses élèves. En cela le professeur B s'est engagé et a assumé une manière de faire vis-à-vis du groupe en donnant à voir sa pratique. Le professeur A est « gêné » par cette pratique et argumente de son point de vue : les représentations du nombre sont apportées par l'adulte et ne sont pas celles que les élèves ont découvertes au cours de la situation didactique proposée par l'ingénierie. En cela le professeur A assume une position différente qui semble déterminée par une certaine vision de l'enseignement-apprentissage ou par son expérience de l'année précédente et des discussions qu'il a pu avoir à ce sujet. Il attire l'attention du professeur B sur ce point particulier et cherche à transformer le point de vue de ce dernier en relatant sa propre pratique et ce qui a été fait dans sa classe (il donne à voir en retour). Le professeur A manifeste ainsi un pouvoir d'agir dans cette énonciation écrite en réponse à l'action du professeur B. Le professeur A aurait pu ne rien dire ou dire uniquement que c'est une excellente façon de faire ou dire uniquement que c'est une mauvaise façon de faire

[21] http://atilf.atilf.fr/dendien/scripts/tlfiv5/affart.exe?42;s=651787395;?b=0; récupéré du site TLFI le 3 janvier 2015.

parmi tout un ensemble de réactions possibles. Mais il a choisi de s'engager et « de donner à voir » d'une manière plus forte, dans un jeu d'offre et de demande de raisons : c'est un aspect crucial, à la fois éthique et stratégique du dialogue d'ingénierie.
L'ouvrage du philosophe Stanley Cavell qui a pour titre : « *Must We Mean What We Say?* »[22] renvoie à ce propos : dans un dialogue d'ingénierie, il faut que celui qui parle « signifie » (mean) (c'est-à-dire qu'il faut que celui qui parle « veuille dire ») vraiment ce qu'il dit (say). « Signifier » ici se comprend à la fois comme « s'engager » éthiquement et « donner à voir » épistémiquement et techniquement en s'appuyant sur une expérience. La difficulté selon Cavell est de vouloir dire ce que je dis, autrement dit cela suppose une recherche d'adéquation entre ce que je dis et ce que je veux dire - voire ce que je suis. Sandra Laugier, dans la présentation de l'ouvrage (Cavell, 2009), rapporte ainsi l'approche du philosophe :

> « il ne faut pas seulement se préoccuper de l'analyse du contenu (empirique) et de la structure logique des énoncés, il faut se préoccuper de ce que nous disons, du *nous* et du *dire* : se demander ce que nous faisons avec notre langage, c'est-à-dire comment ce que nous faisons dans telle ou telle situation fait partie de ce que nous disons » (p. 9).

Par le degré d'engagement au travers du dire (et du faire auquel il est lié) tel que nous avons commencé de le décrire, nous pouvons postuler qu'il y a un certain degré de responsabilité des personnes envers leur énoncé et dans la sincérité de leurs propos. L'engagement renvoie ainsi à ce qui constitue l'arrière-plan nécessaire à la lente construction commune de l'institution qu'est l'ingénierie coopérative.

Transactions et arrière-plan transactionnel

Dans un dialogue d'ingénierie, les interlocuteurs participent à un dispositif ingénierique et c'est dans ce cadre institutionnel qu'ils sont amenés à échanger. Nous avons entraperçu ci-dessus que le dialogue d'ingénierie est produit par l'ingénierie. Nous aurons plus amplement l'occasion de revenir sur ce point important de notre réflexion mais pour l'instant nous pouvons dire qu'il y a un échange dialogique car les

[22] « *Must We Mean What We Say?* » est paru en 1957 (traduction française « Dire et vouloir dire ») (Cavell, 2009).

participants interagissent à propos d'un élément constituant l'ingénierie. En ce sens, nous pouvons parler également de transactions d'ingénierie. Précisons cette assertion.

Le sens premier et général de « transaction » est le fait de transiger, l'acte par lequel on transige (selon la définition du TLFI)[23], c'est-à-dire par lequel on compose, on s'arrange, on s'accommode. Selon Denis Vernant (*op. cit.*), lors des transactions, la stratégie langagière du dialogue permet aux interlocuteurs de coopérer pour s'accorder en ajustant leurs actions langagières :

> « Dans cette perspective transactionnelle, le dialogue constitue une stratégie langagière de coopération qui assure la reconnaissance mutuelle des interlocuteurs comme personnes en même temps que comme agents d'action, communes ou conjointes, sur un monde qu'ils construisent et transforment ensemble. Ainsi la transaction a-t-elle une double dimension : intersubjective et intramondaine » (*ibid.*, p. 97).

Cette stratégie langagière de coopération possède un aspect interactionnel qui assure la poursuite du dialogue car l'accord entre les protagonistes porte sur les finalités de l'action collective. Autrement dit, le procès dialogique sous toutes ses formes (discussions, débats, controverses, polémiques, etc.) peut avoir lieu car les protagonistes jouent le jeu du dialogue en acceptant ses règles (par exemple de politesse, de respect de la parole d'autrui) et bien d'autres encore, données par l'arrière-plan commun en construction. Dans un même mouvement, les interlocuteurs agissent conjointement car ils partagent une même expérience comme celle par exemple que cite Vernant (*op. cit.*) d'un échange d'informations en vue de donner l'heure ou d'acheter un billet de train. Mais ces définitions et approche de la transaction ne nous disent rien ou peu de l'objet de la transaction et de la place qu'il occupe dans l'échange pour les personnes. La *théorie de l'action conjointe en didactique* (TACD) (Schubauer-Leoni, 1986 ; Schubauer-Leoni & Leutenegger, 2005 ; Sensevy, 2011a ; Sensevy & Mercier, 2007), nous permet de considérer que les échanges entre les acteurs se réalisent à propos de savoirs. Nous aurons l'occasion de développer ce que sous-entend ce savoir pour la situation que nous étudions.

---

[23] http://atilf.atilf.fr/dendien/scripts/tlfiv5/affart.exe?19;s=3175241130;?b=0; récupéré du site TLFI le 3 janvier 2015.

> « Voir l'action didactique comme une transaction, plutôt que comme une interaction, c'est proposer un modèle, qui aide à mieux la faire percevoir comme action conjointe, qui aide à mieux faire percevoir la solidarité foncière des transactants et du milieu qu'ils ont conjointement découpé dans le réel en transagissant. Ainsi, voir l'action didactique comme une transaction (un réseau de transaction), c'est orienter d'une certaine manière l'enquête didactique » (Sensevy, 2011a).

En suivant Dewey et Bentley, Gérard Sensevy indique l'importance de prendre en compte et d'étudier comme des transactions les relations construites entre les personnes et leurs environnements. Les transactions sont alors vues comme une enquête des transactants sur le savoir dans un milieu (un monde, un environnement) sur lequel ils agissent. Nous discuterons dans une section suivante l'intérêt et la nécessité de travailler au sein de la *théorie de l'action conjointe en didactique.*

Envisager les échanges dialogiques oblige à les replacer au sein de leur contexte actionnel mais aussi de prendre en compte les relations que ce contexte entretient avec des inférences conjointes produites dans le dialogue (Sensevy, 2011a ; Sensevy & Quilio, 2002). Les auteurs montrent ainsi que des institutions, des rituels ou des habitus agissent également en arrière-plan du dialogue en pesant sur les énoncés en situation. Le groupe qui dialogue est pris sous divers systèmes d'institutions : des institutions déjà là (l'école, la recherche) et une institution en cours de construction (l'ingénierie). Ces institutions modèlent les dialogues, les circonscrivent et leur donnent un sens dont il faut rechercher plus profondément dans les échanges la complexité.

Dialogue d'ingénierie, un premier essai de structuration

Nous utiliserons le concept de *forme de vie et jeux de langage* (Glock, 2003, p. 250-257 et 338-345) ; Wittgenstein, 2004) pour décrire ce type particulier de dialogue[24] en l'identifiant grâce à son usage dans la situation effective. Pour ce philosophe, tout acte de langage s'inscrit dans une forme de vie et sa signification est subordonnée aux conditions auxquelles il est lié par le contexte de la situation de communication. Le dialogue d'ingénierie peut alors se décrire sous le modèle du jeu et de ses jeux de

[24] D'autres types de dialogue : Denis Vernant (1997) étudie le dialogue informatif possible entre une machine automate de la Sncf et un usager ; nous pourrions aussi parler de dialogue amoureux entre deux personnes, de dialogue didactique entre un professeur et ses élèves, …

langage associés. Avant de présenter une première tentative de description des différents jeux dialogiques d'ingénierie puis un premier essai de structuration réalisé à partir de ces descriptions, nous montrerons l'intérêt de modéliser les transactions comme des jeux.

Le modèle du jeu

Le modèle du jeu permet de saisir l'action en une structure, par analogie au jeu, à ses règles et stratégies (Sensevy & Mercier, 2007b). Il est ainsi possible de lier organiquement structure de l'action et intentions. En cela, le modèle du jeu nous permet de nous affranchir d'une vision uniquement psychologique des relations humaines (c'est-à-dire qui s'intéresse aux faits concernant la pensée intérieure) pour nous orienter vers la compréhension de l'arrière-plan ainsi que le rôle et les règles que chacun suit. Nous pouvons alors produire une dialectique féconde entre grammaticalité de l'action et sens de cette action (Sensevy, 2012a) : nous pouvons observer et décrire comment est joué un jeu, de quelle manière les acteurs s'y prennent pour jouer ce jeu. Autrement dit, quelles sont les règles plus ou moins implicites auxquelles il faut se soumettre pour rester dans le jeu, quelles règles stratégiques acquérir pour y jouer efficacement et quelles stratégies mettre en place pour y jouer de manière habile, c'est-à-dire la plus apte à faire avancer l'ingénierie. A quels jeux (et comment) vont donc jouer ensemble les chercheurs et les professeurs pour la faire avancer ?

Dans les sections suivantes, nous proposons une première modélisation des différents types de jeux du dialogue d'ingénierie sans y introduire les savoirs mobilisés dans les transactions. Nous présenterons et expliciterons ces savoirs plus amplement par la suite.

Jeu de commentaire de compte-rendu de pratique

Un des jeux du dialogue d'ingénierie a été relaté plus haut : celui du commentaire du professeur A sur le compte-rendu du professeur B, commentaire qui déclare une vision différente sur un élément de l'ingénierie et qui propose une alternative en exposant sa pratique. Nous l'avons décrit comme le jeu de « donner à voir » ses conceptions et sa

pratique. Notons que le commentaire sur la production d'autrui aurait pu ne pas être accompagné du « donner à voir » sa pratique. Nous y voyons une vigilance à l'action d'autrui par une réaction sur l'action d'autrui. Mais cette vigilance n'est pas adressée seulement au professeur B, elle est aussi adressée au groupe entier car le courriel est diffusé sur une liste. Cette situation de communication, que Catherine Kerbrat-Orecchioni (Kerbrat-Orecchioni, 1995) a identifié comme un trilogue et que Maria-Luisa Schubauer-Léoni (Schubauer-Leoni, 1997) a faite travailler en situation didactique, est donc aussi une manière d'attirer l'attention sur un point particulier de l'ingénierie, que ce point-là soit objet d'échanges ou pas par la suite.

Jeu d'analyse d'une vidéo

Nous proposons maintenant un autre jeu du dialogue d'ingénierie à partir de la photographie ci-dessous, capture d'une vidéo d'une réunion entre professeurs des écoles, formateurs, encadrants et chercheurs :

Réunion d'ingénierie

Les personnes assises sont en train d'analyser le dialogue didactique qui s'est déroulé entre l'une d'eux et l'un de ses élèves. Elles viennent en effet de visionner un extrait vidéo et nous pouvons voir encore sur le grand écran l'image de cet échange didactique. Mais ce pourrait être tout autre moment de classe filmé dans une des classes engagées dans le dispositif : échange entre des élèves, échange entre le professeur et la classe entière ou un groupe d'élèves. Toutes les personnes présentes ont la possibilité, à partir de ce visionnage, de demander des précisions au professeur-acteur, de relater une expérience proche et de confronter ce vécu à celui des autres ou à un propre vécu antérieur, de poser des questions ou d'effectuer des constats

d'ordre général, didactique ou mathématique, d'attirer l'attention sur des éléments d'ordre didactique ou mathématique, de généraliser cette expérience ou de la lier à des phénomènes didactiques connus et publiés dans des écrits scientifiques. Une description du dialogue visionné, et des actions non langagières l'accompagnant, peut être élaborée à plusieurs voix et servir également de base de discussion permettant de faire émerger des hypothèses de travail, des propositions de mises en œuvre alternatives, des controverses.

Ce n'est pas à proprement parlé un jeu de « donner à voir » sa pratique pour le professeur-acteur car ce n'est pas lui mais le chercheur ou l'observateur qui a choisi l'extrait visionné en fonction d'un élément didactique ou mathématique à discuter dans le groupe. Cet extrait vidéo a un caractère d'événement au sens où il se passe quelque chose qui donne à réfléchir sur une action langagière (accompagnée aussi d'actions non-langagières) entre un professeur et un ou des élèves (ce peut-être aussi une action entre élèves). C'est un « donné à voir » orienté par une problématique ; il s'érige alors, comme nous le verrons ci-dessous, en *fait didactique*. Nous voyons alors ce jeu dialogique comme un jeu d'ingénierie à valence didactique car ce moment filmé d'échanges professeur / élève(s) a été retenu (et découpé ainsi dans le flux entier de la séance effective) par le chercheur comme objet de travail dans le groupe.

Jeu de présentation d'événement

L'action d'un élève qui vient conforter (ou heurter) le déroulement prévu de l'ingénierie ou une pratique professorale, rapportées oralement par un professeur ou un observateur, peuvent susciter un dialogue d'ingénierie. L'événement est apparemment rapporté de manière spontanée ou aléatoire car il s'insère dans le cours des discussions lors des réunions, contrairement au jeu de l'analyse de la vidéo qui est prévu par le chercheur. Ce qui n'empêche pas qu'il ait pu avoir été préparé par la personne qui le présente, qu'elle ait pu à l'avance décider de le présenter. Dans tous les cas il a un caractère d'événement puisque la personne qui le rapporte le juge digne d'être rendu public. Il n'est pas observable de manière aussi « complète », aussi holistique que s'il est regardé à partir d'une vidéo : le dialogue d'ingénierie devient alors un jeu de description visant à mieux appréhender ce qu'il s'est effectivement passé, à ajuster sa compréhension. Cet ajustement se réalise par le récit de

l'événement, par des récits d'événements proches ou contraires qui en surlignent les caractéristiques, par les liens établis avec d'autres éléments de l'ingénierie, par des questionnements, par des apports didactiques ou mathématiques. Le jeu de présentation d'événement peut devenir jeu d'analyse si l'une des personnes engage le groupe à le questionner ou à le problématiser.

Jeu de mise à l'épreuve dans une situation mathématique

L'attention du chercheur a été attirée par un point d'ordre mathématique ou didactique, soit lors d'une observation en classe, soit à la lecture d'un compte-rendu, soit lors de la discussion collective. Des éléments font signes pour lui d'un malentendu d'ordre mathématique ou didactique par rapport aux enjeux de l'ingénierie et il souhaite clarifier la situation. Il peut proposer un jeu de rôle professeur / élève ou un problème mathématique à résoudre et ainsi mettre les participants en situation d'apprentissage, voire dans la même situation que les élèves en adaptant si besoin le niveau et les variables mathématiques. Le dialogue qui s'en suit est alors un jeu didactique au sens plus classique du terme entre un enseignant, des apprenants et un savoir. Mais, dans cette configuration de dispositif ingénierique, le savoir mathématique est lié à un savoir d'ordre didactique sur lequel les participants peuvent interagir en s'appuyant sur leur expérience antérieure ou au sein même de la mise en œuvre de l'ingénierie.

Jeu de commentaire de production de texte

Un autre jeu du dialogue d'ingénierie consiste en des commentaires et des corrections de natures diverses (portant sur la forme, la formulation ou sur les éléments didactiques ou mathématiques à consigner) sur le document du déroulement de l'ingénierie. Y sont consignés les éléments pensés comme nécessaires à la mise en œuvre des situations didactiques composant l'ingénierie : enjeux et description de la situation didactique, rôle du professeur et consignes possibles, comportements observés des élèves, propositions d'activités complémentaires, ... Nous en présentons ci-dessous l'extrait d'un module :

Extrait d'un module du document déroulement de l'ingénierie dans une version 2 (sur 15 versions)

Ce document s'est constitué peu à peu à partir de textes initiaux des chercheurs (écrits courts relatant les enjeux et les règles définitoires des jeux amenant aux activités didactiques). Il a été réécrit (réécrire un texte c'est supprimer, rajouter des parties, déplacer ou modifier certains de ces passages) en plusieurs versions successives[25]

[25] Pour le CP, huit versions ont été écrites pour le module 0, neuf pour le module 1, douze pour le module 2, huit pour le module 3, treize pour le module 4, neuf pour le module 5, onze pour le module 6, quinze pour le module 7, huit pour le module 8, vingt pour le module 9, dix pour le module 10. Le domaine SIT, pour le CP, compte en tout plus de 220 pages.

grâce et à partir des commentaires et corrections mais aussi de discussions directes. Ce jeu de dialogue d'ingénierie est donc très lié à la rédaction de documents communs. A la différence du commentaire vu précédemment qui est une réaction « spontanée » du professeur A sur une action du professeur B, ce dialogue par commentaires interposés a été provoqué par le chercheur-coordinateur qui sollicite les points de vue et les remarques des autres acteurs du groupe en vue de modifier le document du déroulement de l'ingénierie. C'est un jeu de proposition de ses conceptions en vue de présenter une nouvelle idée, de compléter une idée ou de l'exprimer différemment ; parfois en réaction aux conceptions ou propositions d'autrui. Ce jeu nécessite alors un jeu de débat plus approfondi quand les positions des uns et des autres ne font pas consensus. Pour les professeurs des classes d'étude (qui participent dès la première année de la recherche et qui font partie de la sphère 1) c'est aussi un jeu de « donner à voir » car ils proposent quelquefois une mise en œuvre qu'ils viennent de tester.

Première structuration des jeux dialogiques d'ingénierie

Récapitulons ce que nous avons décrit ci-dessus dans un tableau synthétique :

Jeu joué du dialogue d'ingénierie	**Nature du jeu**	**Fonction du jeu dans le dispositif ingénierique**
Jeu de commentaire de compte-rendu de pratique	Jeu du « donner à voir » ses conceptions et éventuellement sa pratique	Souligner un point, attirer l'attention sur un point
Jeu d'analyse d'une vidéo	Jeu à valence didactique	Comprendre un fait didactique
Jeu de présentation d'événement	Jeu de description	Ajuster sa compréhension d'un événement
Jeu de mise à l'épreuve mathématique	Jeu didactique	Comprendre un point de savoir mathématique ou un fait didactique

Pour le CE1, quatorze versions ont été rédigées pour le module 1, douze pour le module 2, vingt pour le module 3, quatorze pour le module 4, neuf pour le module 5. Le domaine SIT, pour le CE1, compte en tout plus de 170 pages.

Jeu de commentaire de production de texte	Jeu de propositions	Etablir un consensus

Dans ces activités que nous modélisons comme des jeux, avec leurs langages associés, nous retrouvons dans des proportions plus ou moins importantes les idées (i) d'engagement, (à des degrés plus ou moins importants car on ne s'engage pas de la même manière au jeu de la présentation de sa pratique ou au jeu de mise à l'épreuve mathématique), (ii) de « donner à voir » ses conceptions ou sa pratique, (iii) de description (plus ou moins développée) nécessaires à la bonne réalisation des transactions d'ingénierie. Tous ces jeux donnent la possibilité d'ouvrir à des débats, des propositions et hypothèses de travail. Ils participent à construire un « voir comme » commun c'est-à-dire un arrière-plan partagé.

Nous pouvons dégager une première description grammaticale du dialogue d'ingénierie : les transactions sont organisées à partir de et par les expériences d'enseignement portant sur un objet d'ingénierie ou sur des événements didactiques survenus au cours de la mise en œuvre et rapportés au groupe. Les échanges permettent de prendre connaissance des conceptions des autres personnes du groupe afin de faire des propositions ou des hypothèses de travail pour compléter, modifier l'ingénierie ou chercher à modifier les comportements et conceptions des autres tout en construisant ainsi peu à peu des références et un arrière-plan commun (document du déroulement de l'ingénierie et outils, production ou « anecdote » ou moment particulièrement représentatif ou marquant). Ces échanges permettent d'agir à partir et sur l'action d'autrui.

En suivant tout ce que nous avons exposé précédemment, nous pourrions avancer que ce qui fonde un groupe de personnes qui dialoguent au sujet d'une ingénierie didactique coopérative est le fait de parler ensemble en vue de faire (de mettre en place une ingénierie didactique dans les classes) tout en étant, en retour, nourri du fait de faire (en mettant effectivement en œuvre cette ingénierie). C'est un processus ouvert et imprévisible car, au cours de l'échange, le dialogue se crée peu à peu en fonction d'éléments présents ou qui apparaissent plus ou moins inopinément.

Action conjointe d'ingénierie

Comme toute transaction humaine les transactions que nous étudions relèvent d'actions conjointes. Gérard Sensevy annonce l'émergence d'un paradigme générique de l'action conjointe, comme une dimension qui commence à être prise en compte dans des études scientifiques sur les actions humaines, dans les sciences de la culture (Sensevy, 2011a, p. 54-57). Nous avons évoqué ci-dessus certaines caractéristiques générales des transactions d'ingénierie : les membres d'un groupe engagé dans un dispositif ingénierique se reconnaissent les uns les autres comme acteurs de ce dispositif car ils sont mus par un ensemble de finalités communes, ils s'accordent sur un même arrière-plan de significations leur permettant de se comprendre et de produire des inférences partagées (c'est-à-dire d'être attentif aux signes qu'émet autrui et de les comprendre dans ce cadre institutionnel particulier). Ainsi chacun a la possibilité de prendre en compte l'action d'autrui en coordonnant ou ajustant son action en fonction de celle d'autrui dans un processus de sémiose. Il ne s'agit pas d'œuvrer ensemble mais d'œuvrer conjointement à la diffusion de savoirs car l'action de l'un dépend de, se réfère à celle de l'autre par rapport à un objet de savoir. Par exemple, à un niveau macro, l'action de vérifier une hypothèse d'ingénierie élaborée conjointement dépend de l'action de mise en œuvre de la situation didactique par les professeurs ; à un niveau plus micro, comme nous l'avons vu précédemment, l'action de commentaire de l'un ou des uns est liée à celle du « donner à voir » d'un autre.

Pour définir les éléments théoriques dont nous aurons besoin pour décrire l'action conjointe d'ingénierie, nous nous appuierons sur *la théorie de l'action conjointe en didactique* (TACD) (Schubauer-Leoni, 1986 ; Schubauer-Leoni & Leutenegger, 2005 ; Schubauer-Leoni, Leutenegger, Ligozat, & Fluckiger, 2007 ; Sensevy, 2011a ; Sensevy & Mercier, 2007) à la suite des travaux sur les modèles de l'action du professeur (Brousseau, 2004b), du *modèle de l'action conjointe du professeur et des élèves* développé par de nombreux didacticiens dans les années 2000, du programme comparatiste en didactique initié par Alain Mercier, Maria-Luisa Schubauer-Leoni et Gérard Sensevy (Mercier et al., 2002) dans un numéro spécial de la *Revue française de pédagogie*[26] et repris par Alain Mercier (Mercier, 2008). Mais nous devrons discuter

[26] Florence Ligozat retrace dans sa thèse (Ligozat, 2008) le développement historique de la TACD en la problématisant par rapport aux pratiques d'enseignement et d'apprentissage.

certains de ces éléments car *il ne s'agit pas* d'analyser un système didactique {apprenant, enseignant, savoir} mais d'analyser un système qui a pour objet de transaction le système didactique lui-même.

Dans un tel contexte théorique, le savoir est considéré dans un sens praxéologique (Chevallard & Sensevy, 2014). Il est vu tout à la fois comme une pratique et un discours sur la pratique. Plus précisément, le fait de parler d'une pratique d'enseignement particulière et contextualisée au sein d'un collectif crée une manière de parler de cette pratique. Cette manière d'en parler permet la compréhension, le développement, la transmission de cette pratique. C'est ce que nous décrirons dans ce travail doctoral. Mais auparavant, examinons *a priori* le système ingénierique en jeu.

Le savoir à l'étude : système ingénierique et mésogénèse

Le système à l'étude réunit des personnes qui interagissent au sujet d'une ingénierie qui prévoit la mise en œuvre, en classe, de situations didactiques par des professeurs, au sein d'un dispositif de recherche. Nous pourrions alors commencer à modéliser sur deux niveaux un tel système que nous nommerons « système ingénierique » :

{Professeurs[27] ; Chercheurs ; Ingénierie ou ensemble de situations didactiques}

⇩

{Professeurs ; Chercheurs ; {Élèves ; Professeur ; Savoir mathématique}}

Quand on observe un système didactique ordinaire dans une classe {Élèves ; Professeur ; Savoir mathématique}, on peut dire que le savoir mathématique est un savoir constitué existant (sous forme transposée) dans une institution, ici l'Éducation nationale, qui fonde un collectif acquérant du savoir dans un espace situé. Ce savoir mathématique est en voie de constitution pour les élèves sous l'effet d'une dialectique entre contrat et milieu organisée et dirigée par le professeur, c'est-à-dire entre un système dispositionnel actuel à propos du savoir et un système actualisé par un

[27] Par commodité, nous avons indiqué « Professeurs » car ce sont les professeurs des écoles qui mettent en place effectivement l'ingénierie mais derrière cette entité nous regroupons aussi les formateurs, conseillers pédagogiques et inspecteurs qui participent au dispositif ingénierique en tant qu'observateurs.

problème (relatif au savoir) qui constituent un environnement composé de nécessaires et de possibles pour l'action didactique (Sensevy, 2011a). Mais ce n'est pas exactement ce système didactique-là qui est discuté entre les chercheurs et les professeurs puisque nous nous situons dans le cadre d'une étude expérimentale du système didactique par une intervention de recherche. Si nous changeons d'échelle d'observation et que nous considérons le système ingénierique {Professeurs ; Chercheurs ; ingénierie ou ensemble de situations didactiques}, l'ensemble des situations didactiques est l'objet des transactions. Le cadre de la recherche, ici l'institution *ACE-Arithmécole*, provoque (i) un questionnement et une ré-interrogation de la *transposition didactique* (Chevallard, 2004) du savoir mathématique « en vigueur » (qu'il s'agisse par exemple des manuels scolaires généralement utilisés ou du document d'accompagnement des programmes scolaires de 2008, « le nombre au cycle 2 » (Durpaire & Mégard, 2008)), (ii) un changement dans le système didactique {Élèves ; Professeur ; Savoir mathématique} (et c'est là une hypothèse forte de cette recherche ingénierique, nous aurons l'occasion par la suite de revenir sur ce point crucial).

Nous considérons alors l'ensemble des situations didactiques comme un savoir à constituer dans le système ingénierique sans cependant considérer ce système comme un système didactique classique dans lequel un professeur enseigne à ses élèves, car ce savoir est justement à constituer pour tous, professeurs comme chercheurs. De ce fait, les positions des professeurs et des chercheurs ne sont pas assimilables aux positions du professeur et des élèves car il n'existe pas d'intention d'enseigner même s'il existe des moments d'enseignement comme nous l'avons décrit précédemment avec, par exemple, le jeu de mise à l'épreuve dans une situation mathématique. A terme, ce savoir ingénierique pourrait alors se constituer en une *puissance d'agir* (Sensevy & Mercier, 2007b) pour tous les transactants quand ce savoir leur permettra d'exercer une capacité à comprendre, à produire, à mettre en œuvre, à discuter, à modifier les situations didactiques proposées, à porter un regard critique sur d'autres situations didactiques portant sur le même objet d'enseignement, voire des objets d'enseignement appartenant au même domaine, à envisager des formations sur les situations didactiques proposées ou sur les objets composant ces situations, à prendre une place active dans d'autres ingénieries coopératives, … Nous

pouvons alors modéliser le système ingénierique par un troisième niveau sur l'échelle mésogénétique :

{Professeurs ; Chercheurs ; Savoir ingénierique}

⇩

{Professeurs ; Chercheurs ; Ingénierie ou ensemble de situations didactiques}

⇩

{Professeurs ; Chercheurs ; {Élèves ; Professeur ; Savoir mathématique}}

Dans cette perspective, nous utiliserons un descripteur de l'action conjointe, la *mésogénèse* (ou genèse du milieu), qui identifie le contenu épistémique des transactions et traduit la dynamique d'élaboration des savoirs. Le terme « milieu » est compris dans le sens de problème à résoudre : ce « milieu-problème » permet de faire évoluer l'arrière-plan partagé, le système de connaissance. Quels objets de l'ingénierie seront alors discutés par le groupe ? Quelle est leur valeur épistémique ? Comment vivront-ils à la fois dans le groupe et dans la classe ? La mésogénèse permet d'analyser le savoir ingénierique comme un processus qui doit être redéfini régulièrement par les transactants.

Avancée du savoir ingénierique : chronogénèse et *temps de situation*

Le savoir ingénierique doit être redéfini continuellement au cours des échanges. En effet nous ne pouvons pas envisager de savoir ingénierique au départ de la mise en place du dispositif : seules des hypothèses sur un déroulement possible peuvent être émises. Nous pensons que ce sont les transactions elles-mêmes qui produisent l'ingénierie, qui permettent l'élaboration, le développement et l'évolution des situations didactiques en s'appuyant sur des événements et des faits, porteurs du « milieu-problème ». S'insérant dans le cours des discussions d'ingénierie, les faits sont rapportés de manière aléatoire et spontanée sous la forme d'événements ayant retenus l'attention d'un ou plusieurs acteurs.

Nous utiliserons le descripteur de l'action conjointe, la *chronogénèse* qui s'intéresse aux changements d'état des contenus épistémiques et identifie la nature et les raisons de ces changements. Comme nous l'avons écrit ci-dessus, en ce qui concerne le

système ingénierique dont l'analyse se constitue dans la dynamique de la réalisation effective de l'action conjointe professeur / élèves, ce sont les événements et les faits qui sont au cœur du processus d'organisation et de constitution de l'enquête par les membres du groupe sur les situations didactiques et leurs mises en œuvre. Autrement dit, il n'y a pas de progression prévue dans l'avancée pour l'acquisition du savoir ingénierique comme dans un système didactique classique ; ce sont les faits qui font progression.

Cependant si les événements et faits surgissent de manière parfois aléatoire et spontanée, nous ne nous situons pas dans une juxtaposition d'éléments mais bien dans une continuité que nous pourrions qualifier, en suivant John Dewey, de *continuité de l'expérience* (Dewey, 1993) car les discussions et les réflexions lors des réunions d'ingénierie prolongent les actions effectives lors des réunions même (par exemple, des prises de décisions collectives) ou en classe (les réalisations effectives) même si elles n'ont pas la même nature. L'idée de durée est fondamentale pour rendre compte de la succession des événements et faits dans l'enquête que mène le groupe sur l'ingénierie, nous y reviendrons dans la partie méthodologique. Mais nous pouvons d'ores et déjà introduire la notion de *temps de situation* (Quilio, 2008, 2012 ; Sensevy, 2011a) à partir des travaux initiaux de Guy Brousseau sur les situations mathématiques et didactiques qui ont permis d'instaurer, entre autre, un rapport nouveau à la temporalité du savoir (Sensevy, 2011a, p. 308). Dans un *temps de situation*, le professeur dirige et organise l'étude par les élèves de questions qui émergent de situations princeps évoluant sur une longue durée et où « la genèse artificielle du savoir repose sur l'expérience didactique des élèves » (*op. cit.*, p. 326)[28]. Dans la situation ingénierique, nous postulons que la genèse du savoir ingénierique repose sur l'expérience effective acquise conjointement par les professeurs et les chercheurs lors de la mise en place du dispositif.

[28] Le *temps de situation* participe ainsi d'une nouvelle forme scolaire. En s'appuyant sur les travaux de Julia Centeno, Guy Brousseau, Yves Chevallard et Alain Mercier, Gérard Sensevy (2011a, p. 326-331) décrit sous l'expression de *temps d'objet*, la forme scolaire classique, c'est-à-dire un temps didactique qui consiste à faire du savoir l'objet d'une progression par étape qu'il s'agit de franchir pas à pas sous le contrôle du maitre.

Avancée du savoir ingénierique : principe de symétrie et topogénèse

Nous avons dans le premier chapitre présenté les fondements pour une ingénierie didactique coopérative et notamment le postulat d'une symétrie entre professeurs et chercheurs que Gérard Sensevy qualifie tous deux d'« enquêteurs de l'ingénierie coopérative » (*op. cit.*, p. 679). Le principe de construction d'une symétrie repose sur un enseignement mutuel (non intentionnel dans le sens qu'il n'est pas prévu à l'avance de manière organisée) et une explicitation partagée des connaissances de chacun. En effet, par exemple, les professeurs apprennent de la situation didactique nouvelle qui leur est proposée et les chercheurs sont aussi en position d'apprentissage des faits du point de vue de l'expérience de la réalisation effective. Chacun ayant une expérience de l'ingénierie et de sa compréhension, le point de vue des chercheurs, tout comme celui des professeurs, constitue et éclaire les faits de leur place. En ce sens on ne pourrait parler de partition des rôles *au sein du système ingénierique*[29] comme dans un système didactique où le professeur est gardien de la mémoire collective, responsable de l'avancée du temps didactique, où il garantit les découvertes et productions en les institutionnalisant, réduisant ainsi l'incertitude des élèves[30].

Un autre des descripteurs de l'action conjointe, la *topogénèse* (ou genèse des lieux), décrit le partage des responsabilités dans les transactions et identifie la manière dont la répartition du contenu épistémique se réalise entre les transactants. Une des caractéristiques importante postulée pour une ingénierie coopérative (Sensevy, 2011a ; Sensevy, Forest, Quilio, & Morales, 2013 ; Joffredo-Le Brun, Morellato, Sensevy & Quilio, 2017) est que les deux points de vue, professeurs et chercheurs, portent de l'épistémique et du didactique dans le sens que ces deux points de vue sont fournisseurs d'éléments significatifs pour l'avancée du savoir ingénierique ; notre travail s'oriente aussi vers l'étude de cette hypothèse.

Les chercheurs et les professeurs apprennent de la situation de mise en œuvre en échangeant autour de cette mise en œuvre. Nous pourrions parler de *jeux d'apprentissage* (Gruson, Forest, & Loquet, 2012 ; Sensevy, 2011a) (ou succession

[29] Il existe cependant un certain partage des rôles *au sein du dispositif de recherche* dans la mesure où ce sont les professeurs qui sont chargés de la mise en œuvre effective et où les chercheurs sont responsables de la coordination des actions langagières (meneurs de la discussion ingénierique).

[30] De nombreuses approches didactiques nuançant ces propos en tenant compte de l'intention d'apprendre de l'élève qui (ré)oriente l'action du professeur.

de jeux d'apprentissage dans une évolution des contrats et des milieux dans le temps) car il s'agit de (se) « faire apprendre » un savoir ingénierique *mutuellement* en décrivant la mise en œuvre de l'ingénierie, en commentant cette mise en œuvre, en l'analysant, en faisant des propositions pour la compléter, la modifier, …

En conséquence et parce qu'il y aurait une responsabilité didactique partagée, en anticipant un peu sur ce que nous développerons dans la partie méthodologique, nous devrions trouver dans nos analyses des éléments didactiques dans les mouvements topogénétiques[31] ascendants (qui viennent de la mise en œuvre et de son observation) et descendants (qui viennent de la réflexion autour de l'ensemble des situations mathématiques et didactiques) selon les objets dans les transactions didactiques sans que l'on puisse déclarer *a priori* que le mouvement ascendant serait l'apanage des professeurs (parce qu'il mettent en œuvre effectivement l'ingénierie) et le descendant des chercheurs (parce qu'ils sont à l'origine de la conception des situations didactiques). Nous reviendrons nécessairement dans la description de l'action conjointe effective sur cette idée de mouvement topogénétique car, de par la responsabilité didactique partagée et du fait que chacun apprend de son expérience et de celles des autres, tout un chacun peut être amené à faire avancer l'action de réflexion sur l'ingénierie, c'est-à-dire passer dans le topos de celui qui apprend au topos de celui qui désigne ce qui pourrait être appris ou remarqué ou étudié. Un *jeu d'apprentissage* est une notion qui décrit le jeu du professeur sur le jeu de l'élève, par la gestion dans le temps de la dialectique contrat-milieu. Cette notion suppose organiquement une topogénèse dissymétrique entre les positions de celui qui enseigne et celui qui apprend. Mais nous suspendons, dans ce travail théorique, l'idée d'une topogenèse dissymétrique et postulons celle d'une topogénèse symétrique comme nous l'avons décrit plus haut.

Quelles seraient alors les positions topogénétiques des uns et des autres dans des transactions données et sur quels objets épistémiques et didactiques ces positions porteraient-elles ? Dans ce jeu transactionnel-là, quelle évolution des rapports individuels au savoir ingénierique pourrions-nous alors observer ? En quoi

[31] Sensevy et Mercier (2007a) nous disent que la description de ces mouvements topogénétiques permet de séparer à tout moment celui qui apprend de celui qui désigne ce qui doit être appris et que les sujets peuvent passer dans le topos de l'autre (p. 195).

contribueraient-ils à l'avancée collective dans le savoir c'est-à-dire en quoi leur pertinence didactique et mathématique permettrait-elle cette avancée ?

L'*Action conjointe en didactique* nous a permis de dégager des hypothèses de travail que nous récapitulerons ultérieurement. Nous poursuivons ce chapitre en présentant les autres concepts (les *faits d'expérience*, le *style de pensée*, la *dialectique contrat / milieu*) sur lesquels nous appuyons notre travail.

Faits d'expérience et construction d'un style de pensée dans une ingénierie coopérative

Nous nous appuierons sur les réflexions de Ludwik Fleck, médecin bactériologiste et immunologiste polonais des années 30. Il a mis en évidence au cours de ses travaux (Fleck, 2008) une certaine forme de faits dans l'activité de recherche d'un groupe de scientifiques. Il a ainsi élaboré une théorie de la genèse de la connaissance publiée en 1934 en allemand sous le titre *Entstehung und Entwicklung einer wissenschaftlichen Tatsache* (titre traduit en français : *Genèse et développement d'un fait scientifique*). Ce qui nous intéresse est que Fleck a observé des phénomènes que nous pourrions décrire comme des phénomènes d'enseignement mutuel par des faits d'un genre particulier dans une communauté scientifique que nous rapprochons par analogie de la communauté que nous étudions.

Détour historique : compréhension critique des mécanismes de la connaissance, première approche

Dès le début de ses réflexions Ludwig Fleck s'oppose à l'idée d'un déroulement linéaire du processus de découverte qui, à partir d'une hypothèse, mènerait à une conclusion. Il s'oppose ainsi à l'illusion d'une acquisition de la connaissance par l'observation et l'expérimentation et qui serait l'œuvre d'une seule personne, sorte de génie et de conquérant à la fois. Tout au contraire, Fleck décrit le processus de production de savoirs scientifiques comme le travail d'un groupe, sans commencement détectable, toujours en mouvement et sans fin véritable. Il s'est intéressé, à partir du

cas de la syphilis, à la réalité d'une telle production de savoirs scientifiques. L'auteur nous engage alors à replacer cette production dans une perspective historique :

> « Le développement du concept de syphilis comme maladie spécifique n'est donc pas encore terminé [en 1934], et ne peut pas l'être dans la mesure où ce concept participe de toutes les découvertes et nouveautés de la pathologie, de la microbiologie et de l'épidémiologie. De mythique son caractère est devenu empirique et pathogénique puis essentiellement étiologique ; ce qui n'a pas seulement engendré un gain important en nouvelles particularités, mais a aussi entraîné la perte de nombreux détails appartenant aux anciennes théories […] De nouveaux problèmes, de nouveaux domaines de savoir sont apparus avec la transformation du concept de syphilis, de telle sorte que rien n'est véritablement achevé » (*ibid.*, p. 40-41).

L'histoire de la connaissance est selon l'auteur non celle de ses acquis mais celle de ses problèmes qui doivent sans cesse être renégociés en fonction des différents enjeux à l'intersection desquels ils se situent. Pour Ludwig Fleck, ce sont en effet les négociations, nous dirions les transactions, nées lors de problèmes rencontrés dans l'avancée des connaissances qui balisent cette avancée et permettent de la décrire. Les enjeux sociétaux, voire politiques, et l'état de savoir du moment jouent un rôle considérable dans cette négociation car ils en constituent le système écologique. Par exemple, l'auteur montre que la pression sociale et l'idée ancienne de sang impur a favorisé la recherche de tests sanguins fiables pour déceler la syphilis. Le test en vigueur (la réaction de Wassermann) n'est pas satisfaisant scientifiquement parlant car il ne décèle qu'un changement d'état sanguin, qu'il est trop complexe et trop peu clair théoriquement (*ibid.*, p. 142). Cependant ce test sérologique est resté une découverte d'une grande importance pratique, point de départ d'un concept plus moderne de la maladie. Le savoir est donc le résultat du développement historique de certaines idées et il ne peut émerger qu'au sein d'un *collectif de pensée* défini comme « la communauté des personnes qui échangent des idées ou qui interagissent intellectuellement » (*ibid.*, p. 57).

Fait d'expérience et gain de savoir

Ludwig Fleck décrit ainsi une histoire sociale des sciences mais ce qui nous intéresse particulièrement est la manière dont il a exploré l'activité de recherche d'un collectif de pensée : il s'est intéressé à un fait scientifique, éprouvé de nombreuses fois par la

communauté médicale mais qui ne s'était pas encore constitué en un fait « usé par la théorie de la connaissance » (*ibid.*, p. 1), afin de parvenir à une compréhension critique des mécanismes de la connaissance. Ce fait scientifique est la mise en relation de la réaction de Wassermann avec la syphilis. Il représente pour Fleck un « erfahrungstatsache », mot composé de « erfahrung » qui signifie l'ensemble des connaissances acquises par l'expérience et de « tatsache », le fait réel, le fait qui a eu lieu dans la réalité. La traductrice pour l'édition de 2008, Nathalie Jas, a utilisé l'expression de « fait d'expérience » car la notion d'expérience, écrit-elle en note de bas de page 3, est centrale chez Fleck. L'auteur en parle d'ailleurs ainsi :

> « Les articles de Wassermann sur sa réaction ne présentent que la description de la relation entre la syphilis et une propriété du sang ; cependant, ce n'est pas cela qui est le plus important, mais l'*expérience* acquise par lui-même, ses élèves et les élèves de ses élèves sur l'utilité pratique et le caractère effectif de la sérologie ; expérience qui *rendit pour la première fois* la réaction de Wassermann de même que d'autres méthodes sérologiques *reproductibles et utilisables*. Un tel ***état d'expérience***, qui n'est devenu général que lentement et qui doit encore et toujours être acquis pratiquement par tout adepte, constitue ce qui manquait aux premiers critiques de la réaction de Wassermann. […] On doit cependant souligner que, aujourd'hui encore [en 1934], celui qui veut mettre en œuvre la réaction de Wassermann de manière autonome doit d'abord acquérir une expérience importante avant de réussir à obtenir de bons résultats. Ce n'est que cette expérience qui permet de prendre part au style de pensée » (*ibid.*, p. 168).

Ludwig Fleck décrit le lien entre la réaction de Wassermann et la syphilis comme un fait qui a été appris de l'expérience collective dans un *style de pensée*, c'est-à-dire des concepts et des pratiques partagées au sein d'une communauté, une « disposition pour une perception dirigée » (*ibid.*, p. 191). Un état d'expérience important doit être acquis pour faire partie de cette communauté de pensée et prendre part à son style de pensée.

> « l'histoire du développement du concept de syphilis montre bien jusqu'à présent le caractère limité d'une expérimentation particulière au regard de l'expérience accumulée à l'intérieur d'un domaine, expérience reposant sur des expérimentations, des observations, des savoir-faire techniques, des transformations de concepts […] alors que l'expérimentation peut être interprétée en termes de questions et de

> réponses, l'expérience doit être comprise comme un *état intellectuel*[32] extrêmement complexe, reposant sur des interactions entre ceux qui connaissent, ce qui est déjà connu et ce qui est à connaître. L'acquisition de savoir-faire physiques et psychologiques, l'accumulation d'une certaine quantité d'observations et d'expérimentations, la capacité de remodeler des concepts engendrent un grand nombre de facteurs qui ne peuvent être contrôlés par la logique formelle, et les interactions que nous avons évoquées interdisent tout examen formel et logique du processus cognitif » (*ibid*, p. 24-25).

De fait, le style de pensée *est* l'état d'expérience, notamment cristallisé dans un voir-comme. Cet état est intellectuel et dépasse la somme des expérimentations, observations, des diverses techniques. Dans son ouvrage, Ludwig Fleck narre la construction de ce fait qui s'est produite de manière chaotique au sein d'une communauté scientifique très vaste par une succession d'événements (des expérimentations plus ou moins réussies ou ayant échoué) ordonnés par des événements antérieurs (des débats, des tâtonnements, des doutes, des questions à propos de ces expérimentations) et parfois extérieurs (des choix politiques).

Le concept de *fait d'expérience* développé par Ludwig Fleck et le sens qu'il met dans le terme « expérience », pris comme « événement vécu susceptible d'apporter un enseignement » (*ibid.*, p. 170), est pour nous à la fois un point d'appui et un point éclairant dans l'étude du développement de l'ingénierie *ACE-Arithmécole*. A la suite de l'auteur, nous considérons le groupe des personnes engagées dans le dispositif comme un *collectif de pensée* parce qu'elles échangent des idées et interagissent intellectuellement à propos d'un sujet commun : leur mise en œuvre de l'ingénierie produit des événements retenant l'attention qui, discutés au sein du collectif, s'érigent en faits. Ces faits, nous l'avons postulé, créent la progression dans les apprentissages du groupe et, nous dit Fleck, ne sont perceptibles qu'au sein d'un style de pensée ; ce style de pensée pouvant être vu comme l'arrière-plan commun. Nous faisons l'hypothèse que ces faits (ou certains d'entre eux) sont des faits d'expérience au sens de Fleck car ils permettent au collectif d'apprendre.

---

[32] C'est nous qui surlignons.

Retour sur une possible compréhension des mécanismes de la connaissance dans un système ingénierique coopératif

Gagner de l'expérience (devenir expérimenté dans le système ingénierique) est possible parce qu'il existe des actions antérieures (des mises en œuvre de situations didactiques) qui deviennent des expériences vécues partagées (car rapportées au collectif) constituant le même style de pensée ou arrière-plan. Les propositions d'action, les hypothèses de travail, les découvertes et les résultats issus des discussions sont importants car ils participent à l'élaboration du savoir ingénierique mais ce qui serait fondamental est l'expérience gagnée dans la manière de devenir un praticien-ingénieur pour le dispositif *ACE-Arithmécole*. Autrement dit à un niveau général, ce qui façonne l'expérience est de s'interroger sur le savoir didactique et mathématique nécessaire à la mise en place de l'ingénierie, de faire des liens entre des éléments de ce savoir, de les confronter à d'autres éléments de savoirs proches, de les mettre à l'épreuve… et, pour le dire de manière plus spécifique, ce qui façonne l'expérience, par exemple, est de prendre l'habitude (encore naissante) de s'appuyer sur une *même* vidéo, une *même* production d'élève ou un *même* fait relaté qui sert de référence au processus de discussion, d'argumentation et de garantie. En menant ces actions de manière épistémiquement et didactiquement pertinente toute assertion à leur sujet est garantie car elle émerge et vit dans une communauté de pensée. Nous reviendrons sur la notion de garantie dans une section postérieure.

Si nous nous référons à l'étude de Jérôme Santini et Gérard Sensevy (Santini & Sensevy, 2014) qui montre un gain en savoir quand l'expérience vécue dans les activités collectives (et modélisée par les jeux d'apprentissage) est proche des jeux épistémiques élémentaires de la *pratique savante*, c'est-à-dire la pratique des connaisseurs, de quelqu'un qu'on regarde comme « sachant » (Chevallard, 2011b), nous devrions pouvoir constater que des capacités épistémiques mathématiques et didactiques concernant l'ingénierie et sa mise en œuvre émergent des échanges dialogiques d'ingénierie. Nous pourrions penser que les transactions d'ingénierie (telles que nous avons commencé à les décrire) auraient une forme proche de ce qui pourrait être une pratique d'ingénieurs en didactique. Or cette pratique savante, encore en devenir, n'est pas réellement développée ni étudiée.

Durant l'enquête d'ingénierie, chercheurs et professeurs s'appuient sur des savoirs déjà installés. Par exemple, en ce qui concerne les professeurs, Marie-Jeanne Perrin-

Glorian (2010) distingue différentes sortes de savoirs professionnels pour enseigner les mathématiques : (i) les savoirs mathématiques, savoir disciplinaire lui-même mais aussi la part de ce savoir qui concerne le rapport aux mathématiques que l'on peut avoir en tant que professeur ; (ii) les savoirs en didactique des mathématiques qui mettent en relation analyse du savoir, développement de l'élève, organisation possible du travail et de l'étude et qui tiennent compte des contraintes institutionnelles, des dispositifs ou du développement cognitif des apprenants ; (iii) les savoirs pédagogiques qui comprennent des connaissances sur le développement de l'enfant, les effets des données sociologiques, les techniques pour gérer la classe, organiser leur travail ; (iv) les savoirs institutionnels liés à la connaissance du fonctionnement de l'établissement et de tout ce qui constitue le métier d'enseignant (Perrin-Glorian, 2010). Mais professeurs et chercheurs acquièrent également des connaissances en situation. Claire Margolinas définit une connaissance comme ce qui réalise l'équilibre entre le sujet et le milieu, comme ce que le sujet met en jeu quand il investit une situation (Margolinas, 2014). Professeurs et chercheurs construisent une expérience dans la situation même de l'ingénierie, de par sa mise en œuvre et les transactions liées à cette mise en œuvre. Cette expérience leur permettrait de « faire face » : (i) elle serait nécessaire et utile pour développer et faire fonctionner, dans les classes d'étude, les proto-situations didactiques (ou textes initiaux courts relatant les enjeux et les règles définitoires des jeux) au cours de la première année de mise en place du dispositif ; (ii) puis elle serait nécessaire et utile pour développer et faire fonctionner les situations didactiques, produites par la sphère 1, les années suivantes d'implémentation dans les classes expérimentales.

Cette expérience nous renvoie aux réflexions de Ludwig Wittgenstein sur la *certitude* (Glock, 2003, p. 115-122 ; Wittgenstein, 1987) où est développée la notion de *propositions-pivots*. Le collectif a besoin de « croire » en de telles propositions pour avancer dans la connaissance (de l'ingénierie). En effet, les propositions-pivots sont des propositions sur lesquelles chacun peut se baser, s'appuyer pour se déterminer. Dans le cas que nous étudions, ce sont des choses que le groupe tient pour acquis. C'est dans ce qu'on *fait*, nous dit Wittgenstein, qu'on constate ce qui est solide ou pas. Ainsi, le philosophe prend en compte la dimension pratique de notre rapport aux choses. Les propositions-pivots sont ainsi utilisées dans notre langage comme quelque chose de stable ; ainsi elles acquièrent un statut logique. Ludwig Wittgenstein

propose une évolution du concept de logique qui s'émancipe de la « pureté » mais qui s'oriente vers un lien que l'on peut faire avec les choses, à travers les choses au moyen du langage. Les propositions-pivots sont soustraites à l'enquête du collectif (pour comprendre pour transformer pour comprendre, pour transformer, etc. l'ingénierie) car l'enquête véhicule du doute contrairement aux propositions-pivots qui apportent de la certitude. La phase de certitude est pour Ludwig Wittgenstein une phase intermédiaire entre quelque chose de sûr (qui est personnel, subjectif, de l'ordre de l'état d'esprit, par exemple les connaissances antérieures) et le savoir à acquérir (le savoir ingénierique qui est travaillé au sein du collectif). Nous prendrons en exemple (d'une phase de construction de la certitude pour le collectif) un épisode de jeu de rôle. Au cours du jeu, un des professeurs joue son rôle et le chercheur joue le rôle d'un élève moins avancé qui est en difficulté pour dénombrer une collection d'objets. Il s'agit pour le groupe de repérer et d'identifier les difficultés d'apprentissage pouvant survenir au cours d'une activité proposée par l'ingénierie. Nous reviendrons sur cet épisode plus en détails dans la partie empirique mais nous pouvons dire que, à l'issue de cet épisode, le collectif a construit un arrière-plan nécessaire à l'enquête qu'il mène sur l'élaboration de l'ingénierie : il distingue le dénombrement de la désignation.

Qu'est-ce qui dans le collectif serait tenu pour acquis et qui potentiellement contient les conditions du doute, c'est-à-dire du questionnement qui permet d'avancer ? Dans l'exemple précédent, le collectif a acquis de la certitude sur la distinction entre dénombrement et désignation, il va pouvoir continuer d'avancer sur sa réflexion concernant la situation didactique qui est une situation de désignation et de comparaison de collections. Il va pouvoir ensuite peu à peu re-conceptualiser ce que peut signifier l'idée de désignation. *In fine*, se constitue un savoir. Selon Claire Margolinas (2014), le savoir est défini comme une construction sociale et culturelle qui vit dans une institution (Douglas, 2004). Si un savoir existe dans une institution, c'est qu'il a été rencontré comme une connaissance en situation puis reconnu comme utile, formulé, formalisé, validé, mémorisé.

Dialectique contrat / milieu dans le système ingénierique

Dans une institution scolaire, le savoir est en voie de constitution pour les élèves sous l'effet d'une dialectique entre contrat et milieu, organisée et dirigée par le professeur.

Selon l'analyse en TACD, entre un système dispositionnel actuel à propos du savoir et un système actualisé par un problème (relatif au savoir) qui constitue un environnement composé de nécessaires et de possibles pour l'action didactique. La relation contrat / milieu, s'actualisant dans un jeu d'apprentissage donné, peut être alors décrite par un mécanisme d'équilibration entre le contrat et le milieu (Sensevy, 2011a). Dans l'institution de l'ingénierie coopérative *ACE-Arithmécole*, le savoir ingénierique est en voie de constitution pour tous les membres du groupe sous l'effet d'une dialectique entre contrat et milieu que nous allons commencer à décrire maintenant.

Relation contrat / milieu : description du mécanisme d'équilibration au sein du système ingénierique

Pour caractériser la dialectique contrat / milieu qui se joue dans les jeux d'ingénierie, nous utiliserons la description du mécanisme d'*équilibration didactique* produite par Gérard Sensevy (*ibid.*, p. 194-196) dont nous reproduisons ci-dessous le schéma. Nous commenterons ce schéma en suivant les étapes numérotées sur le schéma et en nous appuyant sur un exemple qui s'est déroulé sur la première année d'implémentation (2012-13). Nous n'évoquerons cet exemple que de manière générale car il sera développé dans la partie proprement empirique de ce travail.

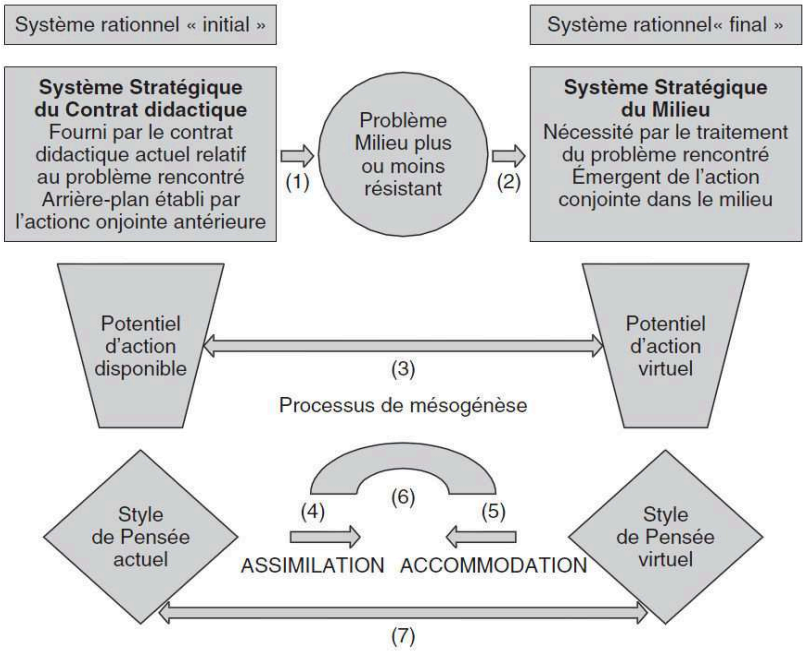


Schéma de l'équilibration didactique (Sensevy, 2011a, p. 195)

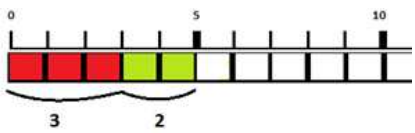
(1) A un moment M de l'avancée de l'ingénierie, le collectif partage un même arrière-plan (ou contrat en tant que système stratégique de connaissances) dont il dispose pour travailler. Cet arrière-plan est issu des actions conjointes antérieures et il fournit, dans notre exemple, une hypothèse puis le texte de sa mise en œuvre. Cette hypothèse est fondée sur l'introduction du schéma-ligne comme représentation de la situation mathématique.

Schéma-ligne (version du 24 septembre 2012) 	Le schéma-ligne est une représentation de la situation mathématique. C'est une référence, sous forme de ligne, aux mesures en jeu. Ci-contre, est représenté 2 + 1.

Or le groupe est confronté à un problème : lors de la mise en œuvre, les élèves ont des difficultés à s'approprier cette représentation (et les professeurs à le transmettre).

(2) Ces difficultés constituent un milieu-problème pour le collectif ; milieu avec lequel et sur lequel il faut agir pour avancer. Le groupe va donc devoir travailler sur son arrière-plan commun (le contrat) afin de le faire évoluer en activant le système stratégique lié à la conformation du milieu, système encore virtuel à élaborer dans l'apprentissage au sein de l'action conjointe.

Dans notre exemple, à partir de l'idée d'un professeur qui établira un lien entre plusieurs éléments existants, les transactions d'ingénierie aboutiront à proposer une représentation « augmentée » afin d'en faciliter l'appréhension par les élèves qui s'appuient ainsi sur la représentation rajoutée pour une utilisation technique facilitée du schéma-ligne.

Représentation « augmentée » (version du 12 octobre 2012)  	Une représentation figurée (cubes colorés) a été rajoutée au-dessous de la ligne. Ce rajout est un élément connu des élèves. L'association entre un élément connu et la représentation initiale permet une utilisation facilitée.

(3) Un élément de la situation didactique (la représentation sous forme de schéma-ligne de la situation) est modifié par l'ajout d'un autre élément du système (une

autre représentation existante). Il y a eu processus de mésogénèse lors des transactions d'ingénierie.

(4) Le processus de mésogénèse a permis de faire évoluer le problème en l'assimilant à l'arrière-plan : le problème a pu être identifié par rapport à des éléments existants (l'organisation conceptuelle et la présentation du schéma-ligne dans sa version initiale) dans le milieu-environnement.

(5) Le système de connaissances actuel a été ainsi accommodé de manière à pouvoir construire le problème d'ingénierie et le résoudre (par l'ajout d'un élément pour permettre un usage de la représentation).

(6) Ce processus d'assimilation du milieu par le contrat et du contrat par le milieu est qualifié de processus d'équilibration. Il pourrait ne pas y avoir eu de mécanisme d'équilibration si par exemple les difficultés avaient été ignorées intentionnellement (le « laisser-faire » pour voir si les difficultés se résolvent avec l'avancée du temps didactique aurait pu être une stratégie du groupe) ou si par exemple des solutions avaient été imposées (du moins non discutées) par un individu ou une partie du groupe.

(7) Il a permis de faire évoluer le savoir ingénierique relatif à ce point particulier c'est-à-dire de modifier, au moins provisoirement, le style de pensée du groupe.

Pour résumer, nous pourrions dire que le collectif dispose d'un arrière-plan partagé (le contrat) avec lequel il aborde un problème d'ingénierie (ou milieu-problème). Ce problème permet alors de faire évoluer l'arrière-plan partagé, le système de connaissances. Le processus qui permet de faire avancer le savoir ingénierique peut être qualifié d'« équilibration ingénierique ».

Selon Gérard Sensevy (2011a, p. 647), « il y a équilibration didactique lorsque l'action conjointe peut faire avancer le temps didactique […] le nouveau système stratégique produit par l'équilibration est alors en meilleure adéquation avec le réel, que celui-ci soit « naturel » ou « culturel ». La nature de cette adéquation est institutionnelle, [je] veux dire qu'elle dépend de l'institution didactique dans laquelle s'exerce l'activité, et des fins que celle-ci assigne au processus didactique. » En remplaçant dans cette citation le terme « didactique » par l'expression « d'ingénierie », nous pourrions conserver l'assertion. Nous soulevons néanmoins deux points, relatifs à la spécificité du système ingénierique par rapport au système didactique classique, que nous

interrogeons : celui des échelles de description de l'équilibre (i) et celui du topos des actants (ii).

(i) Il nous faudra examiner à quelles échelles de description l'équilibration d'ingénierie peut s'observer. Dans l'exemple que nous avons pris, les transactions se sont déroulées sur plusieurs réunions, ont nécessité plusieurs échanges de courriels, une réécriture partielle en plusieurs versions du document de la progression. Ce processus s'est déroulé sur un mois (fin septembre-fin octobre 2012). A l'échelle temporelle, du fait de l'organisation géographique du groupe en plusieurs lieux et fonctionnelle en deux sphères (l'une précédent l'autre dans l'avancée du temps ingénierique), l'équilibration nécessite au moins une description mésoscopique. Y aurait-il des mécanismes d'équilibration qui se joueraient à une échelle plus microscopique ? Si oui, quels rôles joueraient-ils dans l'avancée du temps ingénierique ?

De plus nous n'avons analysé et décrit l'équilibration qui se réalise dans notre exemple qu'à l'aune d'un fait didactique relativement restreint (l'introduction de la représentation « augmentée ») à l'échelle de l'ingénierie sans y inclure les conséquences qu'il provoque. Par exemple la mise en place effective de la représentation « augmentée » mettra au jour un phénomène déjà présent (le comptage par les élèves des graduations de la ligne, dans les classes que nous avons observées) qui, tout en conservant les enjeux essentiels que cette représentation apporte à la situation didactique, installera une autre forme de rapport à cet objet et relancera les transactions au sein du collectif sur ce point particulier de l'ingénierie. A quelle échelle mésogénétique peut-on alors observer ce mécanisme d'équilibration pour qu'il acquière suffisamment de sens pour l'analyse ?

(ii) En général, dans le système didactique scolaire, il y a une dissymétrie des positions : le professeur joue sur le jeu de l'élève en régulant l'équilibre contrat-milieu et en retour les élèves jouent sur le jeu du professeur. Par exemple, le professeur a une bonne compréhension du contrat s'il sait ce que les élèves sont capables de faire ou pas et leur propose un milieu adéquat. Du fait de la symétrie recherchée des positions des chercheurs et des professeurs et de l'incertitude foncière propre au processus d'ingénierie, qui va faire vivre ou comment vont vivre les jeux d'ingénierie ?

Construction de la relation contrat / milieu : des faits à l'enquête

Rôles des faits dans la construction de la relation contrat / milieu

Nous avions postulé plus haut que les faits faisaient progression car les transactions d'ingénierie s'appuyaient sur des événements et faits. Nous distinguons *a priori* deux rôles que ces faits peuvent tenir : déclencheur du milieu-problème (i) et élément de résolution dans le milieu (ii).

(i) Dans le cas du fait des difficultés des élèves à utiliser la représentation du schéma-ligne (et des professeurs à leur transmettre), ces difficultés constituent un milieu-problème pour le collectif. Un fait peut déclencher les transactions ingénieriques.

(ii) Nous avons vu aussi dans notre exemple qu'un événement, celui de l'idée du professeur de mettre en lien des éléments du système ingénierique, événement que ce professeur a jugé digne d'être rapporté au collectif, s'est érigé en fait car il est devenu, au cours des transactions, un élément décisif du milieu : le collectif s'en est emparé, il l'a étudié puis intégré dans le système stratégique du milieu. Ce fait a permis d'envisager une nouvelle proposition possible à mettre à l'épreuve de la réalité.

Ces deux rôles sont dans cet exemple considérés solidairement dans le mécanisme d'équilibration pour que cet épisode de la vie du collectif se constitue en fait d'expérience (qui fait gagner le collectif en expérience) autrement dit, comme fait porteur du milieu-problème. Quels ont été les faits rencontrés, porteurs du « milieu-problème » et entendus comme déséquilibres du milieu, pour le collectif dans une situation vue comme contexte de l'expérience selon Dewey (1993) ? Pour John Dewey, l'expérience est « eue » et s'il y a discontinuité dans cette expérience, il y a enquête.

Détour historique : théorie de l'enquête

Qu'est-ce qu'une enquête ? John Dewey, dans son ouvrage *Logique. La théorie de l'enquête* écrit en 1938 (Dewey, 1993), fournit l'esprit et la méthode d'une enquête sur l'enquête : les êtres ont une expérience continue d'une situation formant un tout unifié mais en cas de rupture, ils entreprennent de reconstituer l'unité et l'équilibre de la situation au moyen d'une enquête. Cette enquête vise à produire une action pertinente. L'enquête débute par un travail de problématisation qui permet de définir le problème

que pose la situation à un individu ou un groupe d'individus. Cette enquête peut être celle de cet individu (ou groupe) mais elle dépasse la sphère privée par ses conséquences. Il s'agit de déterminer la solution du problème puis de résoudre ce problème, ce qui suppose l'expérimentation d'hypothèses. Cette résolution permet de passer d'une situation d'incertitude, de doute, de conflits à une situation unifiée. Dans cette logique, il faut distinguer les données, issues de la perception et donc non utilisables immédiatement, de l'objet qui est le résultat de l'enquête, sa finalité, sa conclusion et qui a une signification fonctionnelle. C'est au cours d'un processus de réorganisation des expériences, que la rencontre d'une difficulté, d'un obstacle ou d'un conflit a séparées, que l'objet est élaboré avec les données sélectionnées. En effet, la situation problème est terrain d'enquête : elle est examinée pour trouver les éléments (données) qui pourraient mener à la définir puis la résoudre. Ces éléments sont perçus en fonction de leur utilité possible pour l'enquête ; ils doivent d'abord être isolés de leur environnement (du tout) et du flux des conduites habituelles. Ces éléments prennent la forme de questions, de suggestions. Ils orientent l'investigation, ils pointent vers les faits significatifs mais sans procurer de la signification. C'est un matériau à utiliser fait d'indications, de signes, d'indices qui restent des intermédiaires, des moyens. Progressivement élaboré au cours d'expérimentations, de mises à l'épreuve des hypothèses, l'objet est défini comme fait accepté et devient signifiant, au regard de ses conséquences pratiques, opérationnelles, pour une communauté qui lui donne son orientation en fonction d'évaluations qu'elle pense légitimes.

Il n'y a ainsi pas de vérité « idéaliste » pour John Dewey, mais une *assertibilité garantie*, un aboutissement de l'enquête qui supprime l'état de doute et qui peut être assimilé à la connaissance :

> « Pour nous, puisque toute connaissance particulière se présente comme le résultat d'une enquête particulière, la conception de la connaissance en soi ne peut qu'être une généralisation des propriétés dont on a découvert qu'elles appartiennent aux conclusions qui sont les résultats de l'enquête. La connaissance, en tant que terme abstrait, est le nom du produit des enquêtes bien menées » (*ibid.*, p. 65).

Faits d'expérience et enquête du collectif

Repartons au début de notre exemple : une hypothèse fondée sur l'introduction du schéma-ligne comme représentation de la situation mathématique et des difficultés à mettre en œuvre cette représentation dans les classes. Si l'idée du professeur qui a établi un lien entre plusieurs éléments existants n'avait pas été formulée, la représentation « augmentée » n'aurait peut-être pas été proposée. Mais tout aussi bien, les éléments de l'enquête auraient pu être réorganisés autrement et aboutir à la même conclusion (l'association des deux représentations). Prenons le cas où cette représentation « augmentée » ne soit pas l'aboutissement de l'enquête mais que l'enquête arrive à une toute autre conclusion : par exemple, le choix du collectif aurait pu être aussi de reporter l'introduction de cette représentation du schéma-ligne plus loin dans la progression ou engager une autre approche didactique du schéma-ligne pour en permettre l'utilisation technique. Ce sont là des faits différents qui créent potentiellement des expériences différentes pour l'histoire du groupe. Il y aurait alors des faits qui résistent à la réalisation (qui ne sont pas repris, exploités et dont l'utilité n'est pas perçue dans l'immédiat mais qui pourrait se révéler dans l'après-coup). Il y aurait aussi des faits qui résistent à la compréhension (d'une partie des membres du collectif) ou à la diffusion (faits qui passent inaperçus). Certains de ces faits prendront plus d'importance dans le déroulement historique de la mise en œuvre de l'ingénierie.

Problématique et questions de recherche

Nous avons, au cours de ce chapitre, présenté les éléments théoriques (l'action conjointe en didactique et la dialectique contrat / milieu, les faits d'expérience et le style de pensée) sur lesquels nous nous appuierons pour observer et comprendre le processus de coopération entre les membres d'un groupe. Nous avons discuté leur usage dans le cadre d'une ingénierie et vu que les interactions relevaient d'un dialogue spécifique que nous avons nommé « dialogue d'ingénierie ». Le dialogue d'ingénierie n'est pas un échange d'informations au sens où les chercheurs transmettraient des situations didactiques qu'ils ont construites et où les professeurs par exemple, pour mieux « mettre en scène » le savoir visé, les interrogeraient en retour afin qu'ils explicitent leurs conceptions.

Le dialogue d'ingénierie n'est pas un dialogue de recueil d'informations où les chercheurs demanderaient aux professeurs de mettre en place une ingénierie, les guideraient dans cette mise en place et où les professeurs communiqueraient les éléments pratiques utiles à l'amélioration de l'ingénierie.
Le dialogue d'ingénierie n'est pas non plus un dialogue didactique au sens broussaldien où les chercheurs dévolueraient la mise en œuvre de la situation didactique afin que les professeurs éprouvent le savoir utile à la mise en œuvre de l'ingénierie puis le formulent dans une perspective formatrice.
Nous avons émis des hypothèses sur le mode de collaboration entre des acteurs d'un dispositif d'ingénierie coopérative au regard des éléments théoriques que nous avons soulevés. Nous les reprenons en les organisant en un système d'hypothèses dont certaines sont subordonnées à d'autres.
- Première hypothèse de recherche : le système didactique {professeurs, chercheurs, savoir ingénierique} n'est pas assimilable à un système didactique « classique » {enseignant, apprenant, savoir}. En effet,

- le système {professeurs, chercheurs, savoir ingénierique} provoque un questionnement sur la transposition didactique du savoir mathématique « en vigueur » dans l'institution ;
- les situations didactiques sont considérées comme un savoir à construire pour *tous* les acteurs ;
- le savoir ingénierique se constitue en une puissance d'agir pour *tous* les transactants.

- Deuxième hypothèse de recherche : en s'appuyant sur les faits porteurs du « milieu-problème », les transactions produisent l'élaboration, le développement et l'évolution des situations didactiques car,

- les faits produits par les mises en œuvre sont déclencheurs du « milieu-problème » ;
- les faits produits par les mises en œuvre peuvent être également éléments de résolution dans le milieu.

- Troisième hypothèse de recherche : la genèse du savoir ingénierique repose sur l'expérience effective acquise conjointement par tous les membres du groupe lors de la mise en place du dispositif car,

- certains de ces faits sont des faits d'expérience qui permettent au collectif d'apprendre ;
- les faits d'expérience créent la progression dans les apprentissages du groupe.

- Quatrième hypothèse de recherche : tous les points de vue sont fournisseurs d'éléments significatifs pour l'avancée du savoir ingénierique car,

- des capacités épistémiques mathématiques et didactiques concernant l'ingénierie et sa mise en œuvre émergent des échanges dialogiques ;
- le point de vue de chacun constitue et éclaire les faits de leur place ;
- la responsabilité didactique est partagée : chacun peut passer du topos de celui qui apprend au topos de celui qui désigne ce qui pourrait être appris ou remarqué ou étudié ;
- tous les points de vue portent de l'épistémique et du didactique ;
- les acteurs s'appuient sur des propositions-pivots (au sens de Wittgenstein, 1987) qui sont tenues pour acquises par le groupe et qui, tout à la fois, contiennent potentiellement les conditions du questionnement.

- Cinquième hypothèse de recherche : les transactions d'ingénierie coopérative peuvent être considérées comme une pratique d'ingénieur en didactique.

Ce système d'hypothèses nous permet de postuler que *le dialogue d'ingénierie est un partage des points de vue et des expériences vécues par les divers acteurs selon leurs compétences et qu'en cela il est le vecteur essentiel de la constitution d'une expérience collective de l'ingénierie.*

Dans la perspective de cette hypothèse-phare des ingénieries didactiques coopératives, *la première question de recherche concerne la constitution de cette expérience collective. Autrement dit, de quoi est-elle composée ?*

Il s'agira dans ce travail de mettre au jour, de décrire les processus et les modalités de cette constitution de l'expérience collective. Car c'est cette expérience collective, d'après Ludwig Fleck (1934, 2008), qui construit, par des enseignements mutuels et des explicitations partagées, l'arrière-plan commun ou le *style de pensée* au sein d'un groupe, indispensable à des échanges constructifs pour la co-élaboration des séquences d'enseignement-apprentissage. Les membres du collectif ont alors à constituer des faits d'ingénierie pour avancer dans leur enquête dans le milieu, c'est-à-dire dans leur quête de connaissances sur l'ensemble des situations didactiques ou

du système didactique {Élèves ; Professeur ; Savoir mathématique}. Car le savoir, nécessaire à la mise en œuvre de l'ingénierie *ACE-Arithmécole*, voire à sa reproductibilité, n'est pas une donnée existante dans la culture enseignante ou universitaire : il n'existe au départ qu'à l'état d'éléments épars dont certains sont des hypothèses de recherche.

Pour décrire les processus et les modalités de la constitution de l'expérience collective, nous nous orienterons selon deux directions de travail dont les dimensions antagonistes devront être articulées.

La première de ces directions de travail possède une dimension exhaustive. Nous serons amenée à recenser les événements didactiques. Ils peuvent être exprimés par un observateur qui dirait par exemple « dans cette classe, j'ai constaté cela » ou par un professeur qui dirait « dans ma classe, j'ai mis en place cela, je me suis aperçu de cela » ou par un chercheur qui dirait « une étude montre que ce que tu rapportes permet cela ». Nous décrirons les processus qui permettent au collectif de les discuter afin qu'ils fassent sens pour eux. Ces événements se constituent alors en faits d'ingénierie.

La seconde de ces directions de travail a une dimension plus sélective. Nous serons amenée à identifier, dans ces expériences vécues et partagées, des faits d'expérience qui font gagner le collectif en savoir. Il y aurait des faits d'expérience qui s'institueraient en problème commun. Ils portent alors le milieu-problème et sont entendus comme déséquilibres du milieu, pour le collectif, dans une situation vue comme contexte de l'expérience selon Dewey (1938, 1993). Il y aurait aussi des faits d'expérience qui pourraient s'instituer d'emblée en proposition commune. Qu'ils soient problème ou proposition, ces faits doivent rencontrer (au-delà du simple partage) l'expérience des autres membres du groupe pour pouvoir fonder une expérience commune dans ce que nous pourrions voir comme une forme de socialisation de ces expériences individuelles.

Nous cherchons ainsi à connaître tout ce qui n'est pas accessible au premier abord dans le déroulement des transactions d'ingénierie mais qui donne à ces actions leur sens et leur fluidité. Nous pourrions avancer que certains faits d'expérience se constitueraient en faits d'expérience marquants. Ils pourraient prendre des formes de vie sous la forme d'*exemples emblématiques* pour le groupe. A terme, de tels exemples ont un potentiel de paradigme et pourraient se constituer en *exemples*

exemplaires (Kuhn, 1974)[33]. Les exemplaires permettent de poser un problème et de le résoudre au sein d'une communauté grâce à des règles d'analogies entre une réalité complexe et l'exemple, qui la représente en quelque sorte, au travers d'un cas qui montre les règles de l'usage sans en produire un exposé explicite. Ces exemplaires sont utilisés par les membres de manière routinière, sans ressentir le besoin d'une justification, pour transmettre une connaissance, une pratique (un savoir-faire) voire une attitude (un savoir-être) adéquate. C'est « un cas singulier, qui grâce à sa répétibilité, acquiert la capacité de modeler tacitement le comportement et les pratiques de recherche des savants » (Agamben, 2008, p. 12). Les exemples exemplaires sont donc cruciaux dans la description des avancées d'un groupe.

Nous émettons donc une autre hypothèse-phare qui vient compléter la précédente *: les faits d'expérience cruciaux, deviennent, au cours d'une certaine temporalité, des points de rencontre des expériences individuelles et en cela fondent l'expérience collective. A ce titre, ils doivent pouvoir être transmissibles aux nouveaux membres (qui devraient pouvoir les acquérir avec un minimum de pratique).*

Notons que cette perspective rejoint celle de Ludwig Fleck (1934, 2008) : reprenons la citation présentée dans une section précédente sur le fait scientifique (la mise en relation de la réaction de Wassermann avec la syphilis) et ce qui est, aux yeux de l'auteur, le plus important :

> « *l'expérience acquise* par lui-même, ses élèves et les élèves de ses élèves *sur l'utilité pratique et le caractère effectif* de la sérologie ; expérience qui rendit pour la première fois la réaction de Wassermann de même que d'autres méthodes sérologiques *reproductibles et utilisables*. Un tel *état d'expérience*, *qui n'est devenu général que lentement* et qui doit encore et toujours être acquis pratiquement par tout adepte, constitue ce qui manquait aux premiers critiques de la réaction de Wassermann » (p. 168) (c'est nous qui soulignons)

Ce fait scientifique pourrait être pour nous un exemple exemplaire de ce que nous supposons être l'intérêt d'une coopération au sein d'une ingénierie didactique pour qui serait un ingénieur : la constitution de faits d'expérience utiles, fonctionnels, ayant une

[33] La notion d'exemple exemplaire, au sens de Kuhn (1974) a fait l'objet d'un travail continu dans le *Séminaire action* depuis l'année 2012-2013. Elle a notamment débouché sur l'idée d'exemple emblématique sur laquelle nous reviendrons. Le *Séminaire action* est un séminaire de recherche, tenu à Rennes depuis 2000, dans lequel s'est notamment développée, en connexion avec d'autres institutions de recherche, la théorie de l'action conjointe en didactique.

portée d'engendrement au niveau épistémologique et didactique et qui s'acquièrent avec et dans un état d'expérience qui en est l'arrière-plan. Ces faits ont pour vocation de transformer la pratique et tout à la fois de la comprendre, d'éclairer des questions de recherche ou d'en susciter d'autres et d'ainsi faire avancer le savoir ingénierique. La nature de ce savoir est didactique car elle porte sur la compréhension du fonctionnement des savoirs didactiques et mathématiques contenus dans les séquences d'enseignement-apprentissage de l'ingénierie, sur les conditions de leur genèse et de leur développement et sur la façon dont les personnes s'emparent du savoir élaboré.

Notre question principale de recherche peut donc maintenant se formuler ainsi : *Comment se forme et se développe le style de pensée (Fleck, 2008), c'est-à-dire des concepts et des pratiques partagées ou des « voir-comme », d'un groupe qui travaille à l'élaboration et la réalisation de séquences d'enseignement-apprentissage sur la construction des nombres selon une façon originale d'aborder cette connaissance ? Autrement dit, qu'est-ce qui crée, dans une communauté, les conditions de constitution de paradigmes sur l'enseignement-apprentissage concernant la construction des nombres ?* Nous nous demandons s'il existe (ce nous pensons provisoirement comme) une logique qui organise les transactions entre les membres car comprendre la genèse et le développement de faits d'ingénierie, c'est pouvoir décrire cette structure c'est-à-dire décrire la grammaire qui organise l'arrière-plan dans lequel et avec lequel le groupe agit (Sensevy, 2011a). Nous cherchons à mettre en évidence la grammaire (Wittgenstein, 2004), la logique pratique (Bourdieu, 1980) de l'action coopérative qui permet au groupe de penser l'action didactique, de poser des questions sur cette action et de l'étudier.

Une deuxième question vient préciser le sujet afin d'aborder l'enjeu de la relation entre professeurs et chercheurs : *Que nous disent alors ces paradigmes sur le principe de symétrie topogénétique à bâtir dans une ingénierie coopérative ?* La question peut être ainsi reformulée : *Qu'est-ce qui est appris par les uns et les autres ? Quels sont les savoirs ingénieriques qui circulent ou émergent ? Qui les fait circuler ou émerger et comment ?*

Chapitre 3 – Décrire pour comprendre la coopération entre professeurs et chercheurs : cadre méthodologique

De l'approche méthodologique aux concepts méthodologiques : une approche clinique du didactique pour constituer un parcours biographique de l'expérience didactique du collectif.

Nous nous intéressons aux échanges entre les membres d'une communauté cherchant à élaborer une progression pour des séquences d'enseignement-apprentissage dans le cadre d'une ingénierie didactique en mathématiques. Dans le chapitre précédent, nous avons présenté le cadre conceptuel des analyses. Nous avons pu ainsi définir ces échanges comme des transactions (au sens de la TACD) dans un *dialogue d'ingénierie*, dialogue qui se déroule sur plusieurs années, en présentiel et au travers de divers médias. Nous cherchons à décrire et comprendre comment se construit le système stratégique de connaissances sur l'ingénierie (l'arrière-plan des transactions) au sein de l'action coopérative qui permet au groupe de penser l'action didactique, de l'interroger et de l'étudier. Dans ce contexte, l'approche méthodologique devrait nous permettre d'accéder à une compréhension du fonctionnement coopératif de ce collectif décrit comme un système ingénierique {professeurs, chercheurs, ingénierie}. Ce système est lui-même vu comme une entité insécable de deux systèmes « emboîtés » : le système ingénierique et le système didactique {professeur, élèves, savoir mathématique} qui se réfère à l'ingénierie et qui constitue en partie le système ingénierique. Mais de quelle façon aborder de telles relations dans une ingénierie didactique coopérative qui se déroule sur un temps long (cinq ans), qui concerne différents systèmes institutionnels emboîtés et dont l'organisation se constitue, dès le départ de l'expérimentation, de manière collective ?

Approche clinique

Dans ce travail, nous nous intéressons à l'étude collective d'un groupe qui réfléchit à la mise en œuvre d'une ingénierie en vue de sa compréhension mais aussi de sa transformation. L'organisation même du dispositif ingénierique, alternance des mises en œuvre effectives des séquences et des moments où elles sont discutées, favorise

une approche clinique dans la mesure où l'accent est mis sur l'étude du fonctionnement du groupe en situation. La clinique est alors entendue comme une posture méthodologique qui permet d'appréhender ce collectif à travers le système de relations qu'il a établi, en appui sur la TACD.

A l'origine de la notion de clinique

Michel Foucault, dans *Naissance de la clinique* (Foucault, 2009) a mis en évidence les changements épistémologiques dans la pratique médicale qui ont eu lieu dans le monde occidental à la fin du 18e siècle et dans la première partie du 19e siècle. Il l'annonce dès les premières lignes de la préface : « Il est question dans ce livre de l'espace, du langage et de la mort ; il est question du regard ». Il en précise plus loin l'idée qui nous paraît fondatrice :

> « Le regard n'est plus réducteur, mais fondateur de l'individu dans sa qualité irréductible. Et par là il devient possible d'organiser autour de lui un langage rationnel. […] c'est cette réorganisation formelle et en profondeur, plus que l'abandon des théories et des vieux systèmes, qui a ouvert la possibilité d'une expérience clinique ; elle a levé le vieil interdit aristotélicien : on pourra enfin tenir sur l'individu un discours à structure scientifique » (p. X).

Nous retenons de ces propos, l'idée de *réorganisation formelle* que permet le regard. Foucault décrit alors dans son ouvrage, à la manière d'un historien et d'un épistémologue à la fois, la modification du rapport du praticien aux faits observés. Cette modification a entraîné une nouvelle forme de discours sur la maladie et une nouvelle forme de connaissance dans la pratique médicale. En exerçant la clinique médicale, le médecin infère son diagnostic à partir de symptômes qu'il regroupe et met en relation avec le savoir médical car ils font signes pour lui : éléments de la théorie et éléments relevés sur le malade (« au lit du malade ») sont confrontés et permettent une interprétation des observables avec le plus de certitude possible.

L'approche clinique se caractérise donc par la place faite au « sujet » et la considération (dans le sens de l'attention qui doit lui être portée) nécessaire à la prise en compte de ce qui se constitue en signes pour l'observateur, en rapport avec les connaissances qu'il possède dans un domaine donné. Cette attention aux signes

produite à partir des indices relevés caractérise le *paradigme sémiotique ou indiciaire* (Ginzburg, 2010).

Une approche clinique du didactique

Dans le champ de la didactique des mathématiques, Yves Chevallard (1982), Gérard Sensevy (1999) ou Francia Leutenegger (2000) ont appelé à une *approche clinique du didactique* (Leutenegger, 2000) pour expliquer et comprendre le fonctionnement d'objets en situation. Maria-Luisa Schubauer-Leoni et Francia Leutenegger qualifient une telle approche de « clinique / expérimentale » car elle articule méthodes cliniques et dispositifs expérimentaux (Leutenegger, 2009 ; Schubauer-Leoni & Leutenegger, 2002). L'intérêt est porté sur le réseau d'indices qui peut être produit - c'est l'aspect clinique de la recherche. Les conditions posées par le dispositif (c'est-à-dire la mise en œuvre d'une ingénierie sous contrôle du collectif car elle est en cours de construction), en venant perturber le système didactique habituel {professeur, élèves, savoir mathématique}, inscrivent cette clinique dans une dimension expérimentale. Toutefois, la nature même de l'expérimental en jeu mérite d'être spécifiée au cas que nous étudions.

Précisons, à nouveau (cf. chapitre 1), que si le dispositif décrit ici s'intéresse à des classes *ordinaires* (c'est-à-dire des classes fonctionnant selon les programmes et règlements en vigueur dans l'institution Éducation nationale), l'approche n'est pas celle de l'observation du didactique *ordinaire* c'est-à-dire celui qui vit dans le quotidien des classes et « qui *peut* être rencontré partout » (Schubauer-Leoni & Leutenegger, 2002, p. 228). Dans la mesure où l'ingénierie vise à transformer des pratiques d'enseignement-apprentissage, la dimension expérimentale est ici de nature différente par rapport aux cliniques expérimentales à l'instar de celles observées dans les premiers temps du développement de l'approche comparatiste en didactique (Assude & Mercier, 2007 ; Leutenegger, 2000 ; Ligozat, 2008 ; Ligozat & Leutenegger, 2008). En effet, ces dernières ne cherchaient pas à transformer les pratiques mais tentaient plutôt de les comprendre en les perturbant de manière très contrôlée ; le chercheur était parfois amené à demander aux professeurs d'introduire des éléments didactiques nouveaux. Par exemple le chercheur, pour les besoins de l'étude comparative, avait la possibilité d'inclure une séance supplémentaire à celles prévues dans la progression

par le professeur et ainsi contrôler expérimentalement certains aspects des observables (Schubauer-Leoni & Leutenegger, 2002, p. 242). Les professeurs gardaient *in fine* la responsabilité totale des choix didactiques mis en œuvre effectivement. Tout au contraire, dans le cas de notre étude, la responsabilité est partagée entre les chercheurs et les professeurs. Cette responsabilité partagée se construit et se développe tout au long de l'avancement du dispositif. Dans le cadre d'une analyse de l'*action conjointe en didactique* la question de l'enjeu de la relation (la responsabilité partagée) est donc primordiale. A une dialectique explication / compréhension des ingénieries se substitue, dans une ingénierie de type coopératif, et par le fait même d'une co-élaboration pour la conception des séances d'enseignement-apprentissage, une dialectique transformation / compréhension dans le sens de « transformer pour comprendre et comprendre pour transformer » (Sensevy et al., 2013).

Cette « approche transformative » nous contraint alors à une approche anthropologique du système didactique d'une part (comprendre) et à une approche ingénierique de ce système d'autre part (transformer). Cette originalité a forcément des conséquences méthodologiques qu'il nous faudra spécifier au travers de deux questions intrinsèquement liées : celle des observables et celle du rôle de l'observateur que nous allons maintenant développer au travers de réflexions sur le dispositif mis en place par l'ingénierie.

Rôle du dispositif dans l'émergence des observables

Un point de vue ethnographique

André Mary (1998) reprend l'idée de Paul Ricoeur selon laquelle l'action humaine est un quasi-texte ; elle est extériorisée comme l'écriture et laisse des marques ou des traces :

> « Si l'on peut lire les actions humaines – et elles sont humaines parce qu'elles sont sensées, parce qu'elles disent quelque chose - c'est parce qu'elles ont une forme, que les actions ont une texture, qu'elles s'articulent comme un discours, et cela même avant de s'autonomiser notamment par le biais de leur inscription dans un texte écrit » (Mary, 1998).

Le terme « inscription » renvoyant à une contraction des termes « interprétation » et « description ». L'action humaine possède une textualité propre, une logique, indépendante de la logique de l'observateur qui l'*inscrirait* dans un texte pour lui donner une dimension supplémentaire. Alban Bensa affirme qu'une description doit montrer ce que les êtres humains font, la manière dont en la circonstance ils agissent ; l'action humaine est donc susceptible d'être expliquée. Elle est « nécessairement faite d'une certaine manière, pas n'importe comment » (Bazin, 2008).

Le dispositif de recherche ingénierique comprend une alternance des mises en œuvre effectives des séquences et des moments où elles sont discutées dans les divers lieux (réunion, site, liste de diffusion, productions écrites). Cette alternance a été mise en place par les chercheurs pour tout à la fois construire coopérativement l'ingénierie et observer les phénomènes didactiques produits par le dispositif. Ce dispositif de recherche et notre dispositif d'observation sont confondus puisque nous nous penchons sur le fonctionnement du collectif, qui étudie l'ingénierie pour la comprendre et la développer, dans l'exercice même de ses fonctions. L'approche se réalise d'un point de vue ethnographique : nous faisons partie du dispositif clinique et sommes un de ses membres. En tant que tel nous participons aux actions du collectif et prenons part à toutes les formes de vie (et jeux de langage associés) de cette institution : réunions, liste de diffusion, site, productions de documents et séances en classe. Notre posture nous permet d'adopter une approche respectueuse de l'action. Guy Brousseau, Denise Greslard et Marie-Hélène Salin argumentent également dans ce sens :

> « Contrairement aux apparences, l'école est une société fragile, aux rites subtils. En tension permanente, elle dépend fortement de ses relations avec l'environnement. Toute intrusion et toute atteinte à son image la met en danger. Aussi pour le chercheur, la seule approche satisfaisante vis-à-vis de l'enseignement et des élèves devrait être celle de l'anthropologue » (Brousseau, Greslard, & Salin, 2014, p. 68).

Nous essayons de devenir de plus en plus *connaisseur* « de la chose » (de cette institution de coopération) afin d'avoir accès à la logique du jeu collectif qui se joue. Etre connaisseur de la chose ici c'est posséder non seulement des connaissances didactiques et épistémiques sur la mise en œuvre de cette ingénierie (puisque nous cherchons, comme tous les membres du groupe, à les acquérir), mais aussi une connaissance théorique de ce que peut être une ingénierie coopérative (en

construction de par cette étude) et surtout une expérience de la pratique de coopération. A ce titre nous sommes connaisseur de la chose comme tous les membres du collectif mais nous menons notre propre enquête sur son fonctionnement et sur les intentions des agents. Notre parcours professionnel et universitaire[34] nous établit, en outre, dans une position spécifique et unique[35] dans le groupe : nous ne sommes ni à la place des chercheurs, ni à la place des professeurs mais nous avons eu la possibilité, à des moments donnés, de prendre les places de chercheur, d'ingénieur et de professeur. En effet, nous avons été amenée à observer les mises en œuvre dans de nombreuses classes mais aussi à contribuer au dialogue d'ingénierie, à la rédaction du document du déroulement de l'ingénierie et de comptes-rendus, au dialogue didactique avec les élèves et parfois à la mise en œuvre d'une activité dans la classe donc à émettre des hypothèses, des propositions et à les éprouver, par nous-mêmes, *in situ*.

Etre connaisseur de la chose va conditionner le recueil de nos données et leur traitement. Nous nous inspirons, pour soutenir ce propos, des travaux de l'anthropologue et ethnographe Jean Bazin (1998, 2008) qui considère en priorité la situation, les actes de langage et le point de vue des acteurs (en l'occurrence des Maliens auprès de qui il a vécu et travaillé) plutôt que les coutumes, les modes de pensée ou la « culture » de cette partie de l'Afrique. Reprenons ce qu'il dit de sa posture scientifique face à des actions humaines :

> « Je suis donc témoin d'actions humaines (pas, sauf exceptions, observateur de comportements) et de deux choses l'une : ou bien je sais ce que les gens font, ou bien je ne le sais pas et dans ce cas je dois l'apprendre. Si je sais ce qu'ils font, je peux reconnaître ce qu'ils font. Savoir ce que les êtres humains font […] c'est pouvoir en

[34] En tant que professeur des écoles, nous avons mis en œuvre une ingénierie didactique durant deux ans dans le cadre d'un lieu d'éducation associé à la recherche (Léa Saint-Charles à Marseille) où ont été implémentées des ingénieries didactiques (Quilio, 2009, 2010, 2011, 2012) et participé à la réflexion collective. Nous nous sommes ainsi forgée une expérience du dialogue d'ingénierie, de l'ingénierie didactique et un rapport pratique à la *théorie des situations didactiques* (TSD) (Brousseau, 1984b). Nous avons étudié, pour l'obtention d'un master en Sciences de l'éducation, des phénomènes didactiques dans le cadre de la TSD et TACD. Morellato, M (2011). *Appropriation collective d'un enjeu épistémologique : étude de la mise en œuvre d'une ingénierie coopérative.* Mémoire de master 2, Université de Provence, France.

[35] D'autres membres du groupe peuvent aussi tenir des positions spécifiques et uniques comme par exemple un des professeurs des classes d'étude qui a soutenu une thèse sur des dispositifs de l'ingénierie (Vigot, 2014).

> donner à un tiers une description correcte, quoique pas nécessairement complète » (Bazin, 1998).

Pour l'auteur il ne s'agit pas d'interpréter des actions humaines mais de les décrire. Qu'est-ce que ces gens font ? Nous pouvons *re*connaître ce qu'ils font car nous savons ce qu'ils font dans un espace de possibles donné si nous sommes raisonnablement familier, connaisseur de cette situation donnée. Interpréter leur action suppose une entrée dans leur culture (vue comme l'ensemble des manières de penser, d'agir et de sentir propres à une communauté), un point de vue étayé par un même style de pensée. Or si notre style de pensée n'est pas le même que celui des gens dont on regarde les actions, comment alors décrire ces actions, leur complexité et envisager éventuellement d'autres possibles qui s'offriraient à eux ? Etre connaisseur de la chose donne un avantage pour saisir les circonstances de l'action conjointe, autrement dit pour apprécier le jeu joué ensemble par les participants à l'action de coopération. Si, nous dit Bazin, nous connaissons le jeu joué par les protagonistes (ou l'apprenons en situation, sur le tas), nous pouvons comprendre, voire même anticiper, les coups ou la série de coups joués au fur et à mesure de l'action (Bazin, 2008). Gérard Sensevy (2011a, p. 262-270) s'appuie sur Walter Bryce Gallie (1964) et la notion de *followability* pour compléter l'idée que suivre un jeu relève d'une connaissance fine de la pratique. Pour cela, il faut être capable d'en saisir le gradient entre les faits contingents et les faits nécessaires à la compréhension de l'action par exemple en étant capable de les présenter en une intrigue qui en souligne la tension. « Le connaisseur du jeu est ainsi, d'une certaine façon, celui qui va pouvoir procéder à la synthèse des hétérogènes, et celui pour lequel l'imprévu et le contingent, d'une certaine manière, seront vraiment perçus comme tels » (Sensevy, 2011a, p. 264).

Nous mentionnerons comme exemple la décision d'un professeur expérimentant l'ingénierie une deuxième année. Il mettra en place les repères 0-6-12 sur la représentation lignée (à la place de 0-5-10 comme indiqué dans le document de la progression) pour symboliser la mesure de la quantité d'une collection. Nous pouvons décrire (et tous les membres du collectif également) cet événement comme une action didactique réfléchie car le professeur fait lien entre les repères 0-6-12, le jeu joué dans la situation didactique par les élèves (le *Jeu des annonces* qui met en scène la comparaison de deux collections dont celle d'un puis deux dé(s) organisée en

constellations de points de 1 à 6) et une autre activité liée à un autre domaine[36] développé par l'ingénierie. Grâce à sa connaissance des situations de l'ingénierie ou sa fréquentation des mises en œuvre, le groupe est capable de participer aux échanges autour de cette action. Il peut percevoir la potentialité didactique de la proposition et anticiper des conséquences éventuelles.

Modalités de travail du collectif : architecture générale du dispositif

Nous avons évoqué précédemment une alternance des mises en œuvre effectives des séquences et des moments où elles sont discutées. Plus précisément, cette alternance inscrit les modalités qui organisent le travail entre les membres du collectif dans un processus itératif. La première année (2011-12), des séances d'enseignement-apprentissage sont mises en œuvre dans des classes d'étude à partir d'un document princeps décrivant succinctement la situation didactique initiale. Une analyse des mises en œuvre lors d'échanges est produite collectivement. Elles permettent l'élaboration d'un document présentant une progression de séquences d'enseignement. La deuxième année (2012-13), les mises en œuvre s'effectuent dans des classes expérimentales et les classes d'étude à partir de ce document. A nouveau, des analyses collectives des mises en œuvre sont menées et le document réécrit partiellement ou complété. Le processus est reproduit la troisième année (2013-14) avec des classes supplémentaires[37]. Reprenons ces éléments dans un schéma qui ordonne chronologiquement les différentes composantes organisationnelles de l'institution coopérative de recherche les unes par rapport aux autres :

[36] Le domaine « Estimation » vise à travailler l'estimation approximative et la comparaison relative des quantités ainsi que l'évaluation des ajouts, retraits et de leurs effets sur la quantité discrète. L'activité évoquée ci-dessus a pour but de se familiariser avec une règle numérique de réponse (avec des repères 0-6-12) qui sera utilisée par le logiciel « Estimateur ».

[37] Nous pouvons même dire que le processus se reproduit, mais de manière moindre, une quatrième année (2014-15) car même si l'expérimentation *ACE* est terminée administrativement parlant elle se prolonge dans l'expérimentation *Arithmécole* qui intègre le dispositif ingénierique du CP au CE2.

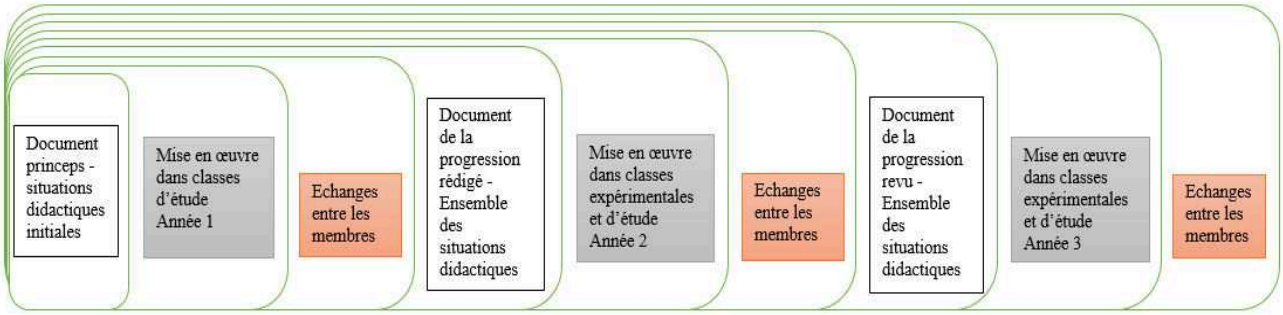
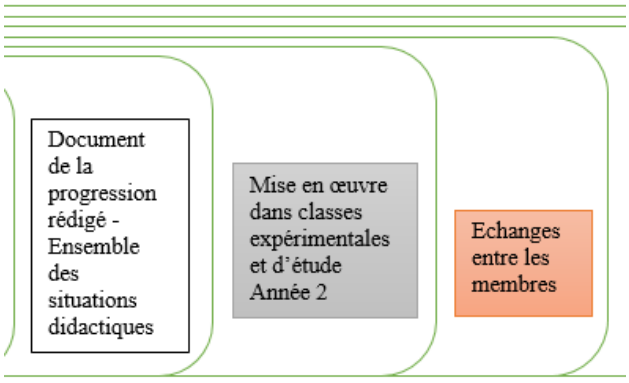


Schéma général des différentes composantes organisationnelles de l'institution de recherche

Nous avons mis en évidence, dans ce schéma, trois composantes organisationnelles : la rédaction du document de la progression (cadre blanc), les mises en œuvre des séquences d'enseignement-apprentissage (cadre grisé) et les échanges entre les membres dans les divers lieux (réunion, site, liste de diffusion, productions écrites) (cadre rosé). Il est à noter que chaque composante est considérée à l'aune des précédentes. Par exemple un professeur, expérimentant pour la deuxième année l'ingénierie, ou un chercheur peut examiner une mise en œuvre au regard de l'expérience de l'année précédente.

Isolons une entité pour exemplifier encore notre propos. Nous mettons, pour le moment, la première entité « document princeps / mise en œuvre dans les classes d'étude / échanges entre les membres » à l'écart et réservons l'explicitation de son rôle particulier dans une section ultérieure.



Après avoir lu et travaillé le document présentant la progression des séquences d'enseignement et après avoir mis en œuvre dans leur classe la situation didactique proposée, les professeurs ont une relecture du document (de la situation didactique) ou, autrement dit, ont une autre perception du document. Cette relecture est orientée à la fois par l'expérience de la mise en œuvre qu'ils ont réalisée et par les questions

qu'ils se posent. Les moments d'échanges leur permettent de partager cette relecture avec les autres membres du groupe. Les chercheurs, à l'aune de ce qui est rapporté, peuvent aussi revoir le document sous un aspect non identifié auparavant (qui pourrait s'avérer un point aveugle de l'ingénierie) ou plus naturellement revoir le document sous un aspect actualisé par l'appropriation du professeur, ce qui peut occasionner un questionnement sur la mise en œuvre, sur l'épistémologie même de la situation et un ajustement des hypothèses. Les observateurs (chercheur, formateur, inspecteur), à l'aune de leurs propres observations, confrontent aussi leurs constats, interrogations à celles des autres membres. Les échanges sont les moments où vont s'exprimer ces diverses expériences et questionnements. Ces échanges provoquent à leur tour la nécessité de réécrire plus ou moins partiellement le document de la progression et ainsi de suite. Le schéma général, ci-dessus, des différentes composantes organisationnelles de l'institution de recherche simule le processus de coopération mais dans la réalité les diverses composantes sont moins nettement dissociées. Par exemple les échanges peuvent démarrer très rapidement dès les premiers moments de la mise en œuvre à partir de questions ou remarques posées au travers de la liste de diffusion ou du site.

Pluralité des régimes de description

A la suite de Vincent Descombes (1998) et de Gérard Sensevy (2007 ; 2011a), nous faisons l'hypothèse que différentes descriptions de la réalité et leurs articulations peuvent éclairer la logique de coopération dans « une pluralité et une complexité organisée des niveaux de description » et que « la complexité de la description doit s'organiser en un système » (Descombes, 1998). « Différentes manières de décrire la réalité » s'entend dans le sens de « différentes techniques » pour trouver une articulation, un ordonnancement dans cette pluralité. « Différentes manières de décrire la réalité » s'entend aussi dans le sens d'« une logique, une grammaire » de l'ordonnancement des pratiques au sens wittgensteinien d'une action.

Deux tendances pour voir

Dans les deux sections ci-dessus nous voyons se dessiner deux tendances pour la description. Nous les évoquerons chacune à leur tour pour les besoins de notre exposé mais nous montrerons, comme l'ont déjà fait d'autres didacticiens (Ligozat, 2008 ; Mercier & Quilio, 2013d ; Quilio, 2013 ; Sensevy, 2011a, 2012b), qu'elles sont à envisager dialectiquement dans différents niveaux de description.

1) Nous avions déclaré dans une section précédente qu'être un familier de l'action qui se joue devant nous (ou apprendre à le devenir) permettrait de produire des descriptions plausibles à défaut d'être complètes (Bazin, 1998). Mais il faudrait compléter ce propos : comme Gérard Sensevy le présente (2011a, p. 188-189), cette position favorise, voire autorise, la production de descriptions ascendantes (qui ont pour origine l'action effective) et compréhensives de cette action (qui respectent autant que possible la sémantique familière de l'action c'est-à-dire l'intention et les raisons d'agir qui animent les personnes travaillant ensemble). En commençant à élaborer une *pragmatique didactique* pour analyser le discours d'un professeur en classe, Gérard Sensevy et Serge Quilio avaient œuvré dans cette voie en intégrant le concept de *pragmatique linguistique* au contexte, dans la manière dont le « contexte » donne du sens, véhicule et conditionne le sens des actions didactiques à l'œuvre (Sensevy & Quilio, 2002)[38]. Cette considération, pour « ce qui se passe » ou « ce qui a eu lieu » au niveau des réalités vécues par les gens, a notamment émergé, dans les années soixante-dix, des prises de conscience et des réflexions méthodologiques d'historiens italiens du courant de la *Microstoria*. Au fondement de leur démarche méthodologique, il y a le refus d'éliminer de l'étude l'élément particulier ou singulier, le détail. Ils élaborent une manière différente d'aborder les événements, basée sur la connaissance scientifique de l'individuel et la prise en compte de tous les indices, même les plus ténus ou les plus marginaux (Ginzburg, 2010). Le *paradigme indiciaire* est enquête historique sur la situation vécue par les acteurs, sur les images et symboles que les acteurs utilisent, et leurs conditions d'existence. Leurs faits et gestes entrent alors en jeu dans la compréhension de phénomènes plus globaux et d'une

[38] Cette forme de considération permet de compléter un cadre, donné par Guy Brousseau dans la *théorie des situations didactiques* (2004), qui s'intéressait aux acteurs rationnels pour accéder au raisonnement d'acteurs identifiés qui évoluent dans une action située.

réalité plus profonde par le recours à des *jeux d'échelles* (Revel, 1996) dans lesquels ils sont imbriqués.

> « Le travail de contextualisation multiple pratiqué par les micro-historiens part de prémisses très différentes[39]. Il pose, en premier lieu, que chaque acteur historique participe, de façon proche ou lointaine, à des processus – et donc s'inscrit dans des contextes – de dimensions et de niveaux variables, du plan local au plus global. Il n'existe donc pas d'hiatus, moins encore d'opposition entre histoire locale et histoire globale. Ce que l'expérience d'un individu, d'un groupe, d'un espace permet de saisir, c'est une modulation particulière de l'histoire globale. Particulière et originale car ce que le point de vue micro-historique offre à l'observation, ce n'est pas une version atténuée, ou partielle, ou mutilée de réalités macro-sociales : c'en est une version différente » (Revel, 1996, p. 26).

2) Nous avions ensuite présenté, toujours dans la section précédente, de manière schématique et générale les composantes organisationnelles de l'institution de recherche et montré que l'organisation même du dispositif engageait les membres à prendre en compte les composantes antérieures. Comment mener alors une description qui rende compte de ce fait ? Nous devons être attentive aux événements et faits et à la manière dont certains éléments appartenant aux composantes antérieures se manifestent et se propagent (ou pas) dans le temps et au travers de ces différentes composantes. Il s'agira alors de proposer une description qui « fasse voir », qui mette au jour, à partir du foisonnement de la réalité, les relations entre des événements ou faits. Nous pouvons suivre ici Wittgenstein (2004) qui développe la notion de *vue synoptique*, forme de compréhension qui « éclaire un très grand nombre de phénomènes divers sans rien découvrir de nouveau, en disposant ce que l'on sait déjà d'une manière qui clarifie les liens ou les relations réciproques » (Glock, 2003, p. 585).

[39] Jacques Revel (1996) décrit une conception traditionnelle qui organise dans son étude les événements minuscules, les détails, les particularités dans le but de vérifier localement des hypothèses et des résultats généraux.

Reconstruction et réduction du vécu : des observables qui vont signe

Reconstruire le vécu d'un groupe (parfois même au plus près et dans les détails de son action) et opérer des réductions sur les données foisonnantes récoltées fonctionnent bien de pair : il s'agit de s'attacher à ce que les gens font, d'en présenter en quelque sorte un tableau, tout en rapprochant certains traits pertinents afin de montrer des relations susceptibles de produire des connaissances, ici sur les pratiques et logiques de coopération (Sensevy, 2011a, chapitre 6 en ligne).

Repérer les observables au travers des « traces » de l'action

Le travail de réduction consiste en une mise en synopsis qui transforme ce qui est observable et représentable en produisant « un arrangement possible [des objets de l'empirie] en vue de les penser » (Glock, 2003, p. 585). Ce processus procède d'un choix de ces objets de l'empirie. Nous repérons immédiatement que les lieux des échanges (notamment les réunions mais aussi le site internet, la liste de diffusion et les productions écrites) seront ceux qui seront investigués prioritairement. Les données recueillies dans les différents lieux des échanges sont constituées non seulement par ce que les professeurs disent (ou écrivent) de ce qu'ils font, ont fait ou feront durant les séances en classe mais aussi par ce que toutes les personnes font par leurs actes même de langage (Austin, 1970). Elles « font » c'est-à-dire par exemple qu'elles réfléchissent sur la meilleure façon d'aborder une activité avec les élèves, ou qu'elles proposent une organisation ou réorganisation dans le déroulement de l'ingénierie, ou qu'elles partagent leurs doutes à propos de telle mise en œuvre ou formulation du document, … en le disant (ou écrivant). Le travail d'analyse empirique repose sur les traces de ces pratiques (Boursier, 2002)[40], qu'elles soient de mise en œuvre, de réflexion, de conception, et des questionnements à l'œuvre qu'il s'agira de repérer, identifier dans le foisonnement de la réalité afin que ces traces soient efficientes pour l'analyse. Nous allons les rechercher dans les différents lieux, c'est-à-

[40] Pour le sociologue et anthropologue Jean-Yves Boursier (2002), les traces sont ce qui nous reste et matérialisent ce qui n'est plus. Elles possèdent un rapport au temps qui traduit à la fois l'effacement du temps et la médiation avec le temps. Le travail de l'historien ou du chercheur est de retrouver ce qu'il s'est passé à travers des indices. En cela la trace n'exprime rien toute seule mais est une reconstruction des actions passées.

dire plus pratiquement dans les données en notre possession (transcriptions de réunions, documents divers, enregistrements vidéoscopés des séances, messages internet et notes personnelles). Mettre en cohérence les traces des actions récupérées dans les différents lieux suppose que notre regard soit orienté vers des observables significatifs, qui font signe pour nous.

Une démarche à la recherche d'éléments qui font signe

Les éléments qui font signe pour notre étude sont des observables. Par définition[41], un observable est un phénomène, un processus qui peut être observé, examiné, voire seulement remarqué ou constaté. « Observer » vient du latin *observare* « porter son attention sur ; surveiller; respecter ». Dès la deuxième moitié du Xe siècle il prend la connotation de « se conformer à ce qui est prescrit par la loi (ici la loi chrétienne) » et à la fin du XVIIe siècle de « soumettre à l'observation scientifique ». Le terme comprend donc l'idée d'une observation dirigée par une théorie ou plus exactement, dans le cas des approches cliniques, d'une construction théorique d'observables issus des faits relevés (car ils font signe pour l'observateur dans le sens foucaldien) selon le domaine d'étude propre à chaque science. Autrement dit, les données sont des construits (Chevallard, 1995).

Dans la postface (Latour, 2012) de l'ouvrage « Controverses climatiques, sciences et politique »[42], Bruno Latour examine, du point de vue sociologique, un risque épistémologique. Ce risque épistémologique est celui qui consiste à ne tenir compte que des données, véhiculant de la certitude, sans prendre en compte l'incertitude inhérente à toute situation. Le sociologue exprime ainsi, parlant des diverses disciplines mobilisées dans l'étude du changement climatique, son point de vue :

> « il s'agit là de la nouveauté même de ces disciplines qui doivent rassembler des données - ou plus justement des « obtenues » - produites par toutes sortes de disciplines et à travers des instruments qui resteraient incommensurables sans

[41] Article du *Trésor de la langue française informatisée* (TLFI) récupéré le 5 mai 2015 à http://atilf.atilf.fr/dendien/scripts/tlfiv5/affart.exe?19;s=3075005475;?b=0.

[42] L'ouvrage discute des rôles du politique et de la science face à une question sociétale vive comme celle du réchauffement climatique. Decroly, J.-M., Gemenne, F., & Zaccai, E. (2012). *Controverses climatiques, sciences et politique*. Paris : Presses de Sciences Po.

> standardisation. Et chaque effort de standardisation suppose des comités, des réseaux, des sociétés savantes, des associations, bref des *institutions*, dont la présence indispensable n'est *jamais* prise en compte par l'épistémologie ordinaire. Dès que les véritables spécialistes s'expliquent […] on voit se déployer un type d'incertitudes qui ne vient nullement *affaiblir* le tissu des vérités en cours de production, mais au contraire qui prouve l'*extension* des réseaux d'instruments, le soin des interprétations, le rapetissement progressif des intervalles de confiance, le recouvrement des « obtenues » de plus indépendantes les unes des autres » (*ibid.*, p. 6).

Nous retenons de la pensée de Bruno Latour (2012) l'idée que désigner les données comme des « obtenues », terme pouvant être mis en opposition à « trouvées », permet d'établir une distance critique face à des données qui pourraient être trop rapidement considérées comme permettant, par déduction, d'échafauder des connaissances. Nous retenons aussi qu'il convient de tenir compte du rôle des institutions dans lesquelles se construisent les données, dans lesquelles ont lieu les discussions et où se manifeste l'incertitude qui accompagne toute construction de savoirs scientifiques.
Comme nous nous intéressons aux transactions des chercheurs et professeurs au sujet de l'action conjointe professeur / élèves sur l'enseignement-apprentissage des nombres et du système numérique, cette action didactique conjointe est au cœur du processus d'organisation et de constitution de la forme collective de l'étude ingénierique et de la formation à cette forme d'étude. Notre regard doit donc se forger par rapport à ces objets mathématiques qui sont transposés dans leurs usages didactiques par l'ingénierie (et de plus dans des perspectives novatrices et inhabituelles par rapport à notre propre expérience d'enseignante) tout en étant devenus objets de transactions au sein du groupe.
Carlo Ginzburg (2010) a développé ce qui serait un savoir-faire sur l'art d'« accommoder les restes » (Boursier, 2002) que sont les traces des actions passées. Il s'est penché sur les traces délaissées, des signes marginaux, des rebuts de l'observation, des traits annexes ou marginaux dont il renoue les fils afin de reconstituer l'événement. Les textes qui composent *Mythes emblèmes et traces* (Ginzburg, 2010) relatent sa manière de faire des recherches en Histoire au travers de thèmes très variés et très distants dans le temps. Pas de continuités chronologique et thématique donc mais une continuité épistémologique qui nous est indiquée dans le sous-titre *Morphologie et histoire*. L'auteur engage une réflexion sur le rapport entre

histoire et morphologie. En général, la discipline historique est abordée dans une perspective chronologique et les historiens interprètent les rapports chronologiques entre les faits par des rapports de causalité. C'est un autre choix, celui d'une perspective morphologique, qui est fait ici.

> « Je rassemblais des mythes et des croyances provenant de milieux culturels différents, sur la base d'affinités formelles. Au-delà des identités superficielles, je reconnaissais (ou du moins je croyais reconnaître) des homologies profondes […] Les connexions historiques connues ne pouvaient pas me guider, parce que ces mythes et ces croyances (indépendamment de la date à laquelle ils apparaissaient dans la documentation) pouvaient remonter à un passé beaucoup plus éloigné. J'utilisais la morphologie comme une sonde, pour explorer une couche que l'on ne peut atteindre avec les instruments de la connaissance historique » (*ibid.*, p. 17-18).

L'auteur traque ainsi, comme pourraient le faire un détective, un chasseur ou un scientifique, les traces ou les indices qu'il rassemble et croise au fur et à mesure de son enquête. En même temps, peu à peu, il en repère les liens qui joignent des éléments pouvant apparaître comme disparates et construit à partir de là une réalité complexe. C'est alors dans la restitution de leur signification culturelle plus ou moins disparue aujourd'hui mais qui, à l'époque, était décisive de la constitution du fait étudié que Carlo Ginzburg trouve une clé pour résoudre le problème historique qu'il s'est posé. Nous serons donc amenée à déceler dans le flux des échanges les traces d'événements ou faits qui sous des formes diverses relèvent de la même question. Le travail que nous avons entrepris, de caractérisation des pratiques de dialogue ingénierique en termes de jeux, est ainsi de type *morphologique*.

La fonction de l'analyse *a priori*

Pour Marie-Hélène Salin et Alain Mercier, l'analyse *a priori* est un moyen pour prévoir des phénomènes, un outil pour préparer l'observation en produisant une description pertinente des formes de vie scolaire d'un savoir mathématique (Mercier & Salin, 1988). Une analyse didactique *a priori* concerne à la fois le savoir (dans une analyse quasi-grammaticale du savoir), l'élève (dans ce qu'il peut faire ou ne pas faire dans la situation) et le professeur (dans les possibles d'enseignement de la situation). L'analyse se réalise avant la mise en œuvre effective. Il s'agit alors d'identifier et de

décrire les enjeux de savoir tant au niveau mathématique qu'au niveau didactique : c'est une analyse descendante de la situation, qui exprime le point de vue de l'ingénieur. L'analyse peut se réaliser aussi après la mise en œuvre mais sans mentionner les sujets concrets en action. Il s'agit de repérer par exemple quels objets, non prévus antérieurement, se manifestent dans la situation effective, ou d'inventorier des techniques et stratégies mises en œuvre par les élèves : c'est une analyse ascendante de la situation, qui exprime le point de vue de « l'élève épistémique ». Croiser ces deux analyses permettrait de saisir certains problèmes didactiques auxquels les professeurs pourraient être confrontés.

Selon Serge Quilio, il s'agit plus exactement d'articuler une perspective statique de la situation à une perspective dynamique qui s'actualise dans une forme de contrat / milieu (Quilio, 2013). Ces trois temps (analyse avant la mise en œuvre, analyse après coup et articulation des deux) nous permettraient de construire des observables au niveau du système didactique {professeur, élèves, savoir mathématique} dans le but de discerner si ces problèmes sont discutés au sein du collectif. Nous verrons alors dans la section suivante comment nous pourrons utiliser ce modèle de l'analyse *a priori* pour le système ingénierique {chercheurs, professeurs, ingénierie} afin d'identifier certains épisodes qui constitueraient ce qui pourrait être une biographie du collectif dans son étude de l'ingénierie pour la comprendre et la développer et ainsi préparer le travail de réduction que nous avions annoncé.

Approche biographique

Nous avions postulé (chapitre 2) que les événements et faits déterminent la progression dans l'avancée du savoir ingénierique et que leur analyse se constitue dans la dynamique de la réalisation effective (car ils rapportent et discutent l'action didactique conjointe professeur/élèves). Nous cherchons à constituer la biographie du collectif, à partir de ces événements et faits didactiques, dans le sens développé dans les travaux d'Alain Mercier que nous spécifierons au cadre de notre étude (Mercier, 1999, 2013a, 2013b). Cette approche procède aussi d'une reconstruction du vécu et tout à la fois d'une opération de réduction du domaine de réalité.

Détour historique : principes et apports de l'approche biographique

L'approche biographique, développée par Alain Mercier dès ses travaux de thèse en 1992, « cherche à saisir le didactique et il s'agit d'atteindre, par l'observation biographique, des dimensions de la réalité étudiée qui seraient autrement invisibles ; elle permet de changer de point de vue » (Mercier, 1999, p. 40). L'auteur a mis en évidence des épisodes didactiques au cours desquels un élève a rencontré son ignorance et a organisé une ligne d'action nouvelle. Cet élève, aux prises avec une action problématique dont il comprend l'enjeu, a pu mettre en place un comportement plus efficace, une nouvelle stratégie qui lui a permis d'apprendre. De tels épisodes constituent sa *biographie didactique*. La notion d'épisodes biographiques permet de regarder l'institution du point de vue d'un sujet, pris dans une institution, qui réalise qu'il se passe quelque chose par rapport au savoir en jeu. Pour regarder cette institution didactique qu'est la classe, le chercheur s'est attaché à analyser des épisodes en classe mais aussi hors de la classe. Il a mis en place un observatoire qui fonctionnait comme un lieu d'échanges entre lui et des élèves momentanément placés hors de l'institution c'est-à-dire lors de moments où il les accueillait en dehors des heures scolaires pour répondre à leurs questions ou travailler, à leur demande, sur un point particulier en mathématiques. Ainsi, une situation *adidactique* d'un type particulier (dans le sens où le chercheur n'est pas dans la position du professeur qui maîtrise le futur et ce qui va être appris mais suis la progression personnelle d'un sujet, forcément singulière) était mise en place pour étudier une institution didactique : « j'ai exploré l'idée d'une adidacticité qui ne serait pas la propriété d'une situation didactique, parce qu'elle ne serait pas produite par l'action volontaire et consciente du professeur » (p. 11 de la présentation orale de l'habilitation à diriger des recherches[43], 1999).

En ce sens, selon Alain Mercier, ces épisodes biographiques, appelés *biographèmes*[44], sont des « révélateurs des propriétés de la situation (au sens de

[43] Consultable à l'adresse : https://www.researchgate.net/publication/284179110_HDR_ORAL

[44] Si nous nous en tenons au sens du suffixe « -ème » qui signifie « élément de base » les biographèmes sont les éléments de base d'une biographie. Alan Mercier (Mercier, 2013a) indique que ce sont des unités minimales de sens, ici biographique ET didactique, qui révèlent les conditions d'un apprentissage donné pour un sujet donné vu du point de vue de ce sujet. Alain Mercier nous signale aussi (*ibid.*) qu'il a emprunté ce terme à Roland Barthes. L'écrivain l'avait créé lors de son projet d'écriture d'un autoportrait littéraire « Roland Barthes par Roland Barthes » paru en 1975 aux éditions du Seuil

situation qu'un sujet rencontre et dans laquelle il pense et agit) : les sujets, en explorant la situation, développent des stratégies d'action qui révèlent certaines propriétés d'un jeu invisible jusqu'alors » (Mercier, 2013b). Cette approche dans l'observation des institutions permet donc d'étudier leur fonctionnement en entrant par le savoir et le rapport au savoir de l'agent, autrement dit comprendre ce qui se passe, au niveau du savoir, du point de vue d'un sujet particulier. Le terme « biographique » s'attache à l'entrée dans les problématiques par « la compréhension d'un des *espaces-temps* dans lesquels une personne est prise » (Mercier, 1999, p. 70). L'auteur le précise : « le recueil d'un *épisode* ne peut se suffire à lui-même : les historiens ont bien montré que le sens d'un fait isolé ne réside pas dans le fait lui-même, mais dans le croisement de son espace social avec son développement temporel » (p. 8 de la présentation orale de l'habilitation à diriger des recherches, 1999). Pour saisir le sens d'un épisode et l'identifier comme *biographème*, il faut donc selon Alain Mercier l'inscrire à la fois dans la chronologie des institutions dans lesquelles est assujettie la personne, dans sa propre biographie et dans l'espace-temps didactique dans lequel il trouve sa place. Nous allons maintenant spécifier les notions de biographème et de biographie didactique dans notre travail.

Usage de l'approche biographique pour notre travail

Nous regardons ce que des personnes font, ainsi que ce que leurs actions révèlent du fonctionnement d'une institution par rapport à la construction et l'évolution des savoirs en jeu qui la caractérise. Cependant nous ne nous attachons pas au développement d'une ou de personnes particulières, de ce qu'il se passe pour elle(s) mais à ce que leurs actions (leurs actes de langage) provoquent dans le collectif. En cela, c'est bien l'évolution du collectif par rapport au savoir ingénierique en construction qui nous intéresse, telle qu'elle est analysée au travers de leur action conjointe et des transactions qui témoignent de jeux d'apprentissage (mutuels) mis en place par les

(Herschberg Pierrot, 2009). Il écrira dans « La chambre claire » (Gallimard/Seuil/Cahiers du cinéma, Paris, 1980) : « J'aime certains traits biographiques qui, dans la vie d'un écrivain, m'enchantent à l'égal de certaines photographies ; j'ai appelé ces traits des *biographèmes* ». Il les qualifie aussi dans la préface de « Sade, Fourier, Loyola » (Editions du Seuil, 1971) de détails, d'inflexions. En cela nous retrouvons l'idée de paradigme indiciaire de Ginzburg (2010) et de reconstruction et réduction du vécu au travers de fragments qui mettent en scène le rapport de l'écrivain avec son propre imaginaire à partir de mots ayant une valeur pour lui.

acteurs au cours du dialogue d'ingénierie. Nous pourrons rendre ainsi compte de cette évolution au travers par exemple de l'évolution du document de la progression, de la richesse épistémique des échanges ou d'un épisode didactique en classe en lien avec des éléments de la mésogenèse.

Si la biographie didactique du collectif est la suite des événements institués en faits remarquables par le dialogue d'ingénierie et la mise en récit, ces faits constituent en quelque sorte les moments ou épisodes didactiques qui caractérisent son histoire. Ces épisodes peuvent être qualifiés de « didactiques » dans le sens où une question, un problème, une proposition, un état, … (concernant le savoir, les pratiques d'enseignement, de réflexion et de production à finalité didactique) est rapporté(e) par un individu au collectif qui s'en empare afin de comprendre pour transformer et de transformer pour comprendre de manière dialectique l'ingénierie. Au chapitre précédent, en nous appuyant sur Fleck (1934, 2008), nous avions évoqué les faits d'expérience comme événements vécus pouvant apporter un enseignement. Il nous paraît opportun de tenter maintenant de faire correspondre les faits d'expérience à des biographèmes car, en figurant *l'expérience didactique* du collectif et notamment ses *expériences didactiques cruciales*, ils décrivent l'avancée du collectif et reconstruisent son vécu par rapport au savoir ingénierique, tout en le réduisant de manière synoptique.

En résumé, un biographème serait, dans le cadre de cette étude, au croisement de la vie didactique du groupe et, à travers elle, d'une forme d'expérience acquise par l'étude collective de l'ingénierie afin de la comprendre et la mettre à sa main. Un biographème pourrait être ainsi le révélateur d'un fonctionnement coopératif du collectif au cours de son travail de partage des informations, d'analyse et de résolution du « milieu-problème ».

Nous considérons cependant qu'il ne s'agit pas d'aller à la recherche d'épisodes circonscrits à un moment précis (plus ou moins long) de la biographie du collectif. Plutôt qu'un élément de base, comme le laisserait penser le suffixe « ème », le biographème relève de quelque chose de profond dans le style de pensée collectif, un élément construit comme un socle. Notre *sonde morphologique* (Ginzburg, 2010) devrait être alors le travail coopératif vu comme un ensemble de phénomènes didactiques. Les biographèmes sont alors à rechercher au point de jonction du collectif

(et des événements qu'il traverse) et des savoirs ingénieriques qui caractérisent ces événements.

Eléments pour une analyse *a priori* du système ingénierique

Constituer la biographie du collectif et identifier certains biographèmes ou épisodes significatifs de l'expérience didactique implique une préparation pour la rencontre avec notre corpus (les échanges entre les membres) au moyen d'une analyse *a priori* pour le système ingénierique {chercheurs, professeurs, ingénierie}. Pour cela nous nous inspirons de l'analyse *a priori* pour le système didactique décrite plus haut. Cette analyse pourrait être composée par deux types d'analyse :

1) une analyse descendante pour énoncer les intentions des chercheurs, sous forme d'hypothèses, concernant leur vision de l'ingénierie sur l'enseignement / apprentissage des nombres entiers en début de scolarité ;

2) une analyse ascendante, dans ses grandes lignes, pour avoir un premier aperçu des sujets pouvant être abordés que ce soit dans le champ des mathématiques ou dans la mise en œuvre.

Le croisement de ces deux types de données (obtenu) devrait permettre d'aiguiser notre regard pour une description de ce que les personnes vont alors faire effectivement lors des dialogues d'ingénierie. Nous pourrons ainsi anticiper quels thèmes, repérés comme enjeux de l'ingénierie, vont retenir l'attention du groupe afin d'examiner par la suite, dans une partie postérieure basée sur le corpus recueilli, comment ils seront traités par le collectif. Nous pourrons également constater quels thèmes ne seront pas abordés ou développés ou quels autres, non évoqués dans l'analyse *a priori*, émergent. Nous deviendrons, en outre, connaisseur de l'ingénierie dans une dimension plus élargie que celle de la fréquentation régulière qu'elle complètera ainsi selon un autre point de vue ; point de vue qui nous installera dans notre position de chercheur.

Ce sera l'enjeu principal de la deuxième partie de ce travail. L'analyse empirique qui suivra (troisième partie de notre travail) visera, selon l'approche biographique, à mettre en évidence les jeux d'apprentissage au sein desquels les enjeux de savoir seront exprimés et interrogés à partir des événements selon leur pertinence didactique et mathématique.

Partie II - Organisation du collectif pour une mise en place de la coopération : éléments généraux pour une analyse empirique

Nous venons de présenter les complexes d'hypothèses de travail destinés à expliciter les arrière-plans avec lesquels nous travaillons. Dans cette seconde partie nous tentons d'articuler cet arrière-plan hypothétique et l'analyse empirique qui suivra en apportant des éléments généraux et méthodologiques. Les éléments généraux permettront de présenter la proposition ingénierique et son organisation ainsi que de la situer dans le contexte de l'enseignement des mathématiques en France (chapitre 4).

En effet, nous ne pourrons comprendre ce qu'il se passe lors des dialogues d'ingénierie sans référence aux intentions des chercheurs et aux hypothèses qu'ils ont émises quant à l'ingénierie c'est-à-dire sans référence aux théories et à l'épistémologie sous-jacente qu'elles sous-entendent pour ce dispositif-là, autrement dit aux arrière-plans conceptuels qui les fondent. Ces arrière-plans conceptuels sont à situer dans un contexte national pour l'enseignement des mathématiques à l'école élémentaire. Nous commencerons par le dépeindre à grands traits afin de voir comment ces arrière-plans s'y inscrivent. Nous ne pourrons pas analyser également ce qu'il se passe lors des dialogues d'ingénierie si nous n'avons pas une première idée de la manière dont pourraient être reçues ou perçues ces intentions ou hypothèses au travers des réactions dues aux mises en œuvre. Ainsi, il nous semble nécessaire de mener une analyse *a priori* du système ingénierique qui serait en quelque sorte une problématisation de ce projet d'enseignement en TACD. Dans cette analyse des hypothèses seraient faites quant à la pertinence de l'ingénierie mise en place et vue comme une situation d'acquisition d'une expérience collective. La formule générale d'une telle analyse serait donc : « en mettant en place tel dialogue d'ingénierie, on pourrait obtenir tel comportement de la part du collectif ou créer telles conditions de transactions dans le collectif ».

Nous exposerons ensuite, dans le chapitre 5, les éléments méthodologiques et donnerons les clés du dispositif d'observation et d'analyse.

Chapitre 4 – Analyse *a priori* du système ingénierique

Du contexte pour l'enseignement des mathématiques aux arrière-plans conceptuels de l'ingénierie Ace-Arithmécole et à son organisation fonctionnelle : un aperçu macroscopique du système ingénierique.

Contexte pour l'enseignement des mathématiques

Nous présentons de manière rapide le contexte pour l'enseignement des mathématiques en France : qu'est-ce qui est dit, échangé entre experts au sein des communautés de recherche, associatives et éducatives, notamment des directions institutionnelles (Direction de l'évaluation de la prospective et de la performance, Direction générale de l'enseignement scolaire, Inspection générale de l'Education nationale) ?

Pour cela, nous prendrons appui sur les actes des auditions du comité scientifique pour la tenue de la Conférence nationale sur l'enseignement des mathématiques à l'école primaire et au collège édités par Alain Mercier et Rémy Jost (*Conférence nationale sur l' enseignement des mathématiques à l'école primaire et au collège*, 2011). La conférence a eu lieu à l'Institut français de l'éducation (IFé) à Lyon, le 13 mars 2012, et a réuni les principaux acteurs de la recherche française pour l'enseignement des mathématiques et les cadres de l'Éducation nationale. Elle a établi un état des lieux sur l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques en France et a envisagé des pistes de travail pour les années à venir. Nous y avons relevé des éléments de constat qui nous paraissent importants à signaler car ils sont contemporains du projet *ACE-Arithmécole* et permettent de le situer dans le « paysage » de l'offre didactique. C'est pour cela que nous nous centrons prioritairement sur les éléments des communications relatifs à l'école primaire et au cycle 2. Nous nous appuierons également sur les recommandations et le dossier de synthèse[45] rédigés par le jury de la Conférence de consensus sur la numération à

[45] Consultables aux adresses : http://www.cnesco.fr/wp-content/uploads/2015/11/Recommandations-du-jury.pdf et http://www.cnesco.fr/wp-content/uploads/2015/12/DP_num%C3%A9ration_site1.pdf

l'école primaire. Cette conférence a été organisée par le Conseil national d'évaluation du système scolaire (Cnesco) et l'Institut français de l'éducation (IFé). Elle s'est tenue les 12 et 13 novembre 2015 à Paris. Elle avait pour but d'établir un lien entre les préoccupations et les questions des enseignants et les productions scientifiques. Elle a laissé aussi une large place d'expression à des représentants du grand public (parents d'élèves par exemple).

Constats sur l'enseignement des mathématiques

Les évaluations standardisées menées par la Direction de l'évaluation de la prospective et de la performance font un état des lieux préoccupant sur les acquis des élèves à la fin de l'école primaire (Chesné, 2011 ; Huguet, 2011). Elles notent des difficultés de reconnaissance et de réinvestissement des connaissances lorsque celles-ci sont sollicitées hors contexte scolaire ou lorsque la tâche présente une certaine nouveauté.

> « Seuls 58 % des élèves maîtrisent les compétences attendues en fin de CM2. Plus de 40 % des élèves n'ont pas acquis les connaissances de base relatives au calcul mental et aux opérations sur les grands nombres et les décimaux. […] Ces observations, et d'autres encore, sont inquiétantes, car elles concernent des connaissances indispensables pour pouvoir aborder sans difficulté majeure les apprentissages mathématiques dans la suite du cursus scolaire. Ce sont aussi des connaissances fondamentales que doit posséder tout citoyen pour pouvoir faire face aux problèmes de la vie quotidienne. Ces lacunes ne se résorbent malheureusement pas dans la suite de la scolarité » (p. 5, Conférence de consensus, nombre et opérations, premiers apprentissages à l'école primaire, recommandations du jury).

Dans ce contexte de faiblesse des résultats des élèves aux évaluations nationales ou internationales, selon les organisateurs de la Conférence de consensus, il y a nécessité de prendre en compte les conclusions de la recherche qui a considérablement progressé ces vingt dernières années. Ces connaissances sont encore trop peu prises en compte pour concevoir les curricula[46], identifier les bases

[46] Un curriculum est un parcours continu dont les finalités éducatives déterminent explicitement les objets d'enseignement et leur organisation. Ce n'est pas un enseignement basé sur un ensemble de notions disciplinairement défini.

indispensables et concevoir des démarches didactiques mieux adaptées aux capacités des élèves.

Les causes de ces difficultés sont multiples, interdépendantes et ne sont pas à rechercher dans des conditions socio-économiques. De nombreux obstacles peuvent venir entraver les premiers apprentissages en mathématiques. Par exemple, selon Rémy Brissiaud, l'enseignement du comptage-numérotage est une des causes principales de la dégradation des performances en mathématiques constatée depuis les années quatre-vingt-dix (Rémy Brissiaud, 2011). Pour d'autres observateurs du système scolaire (Emprin, 2011 ; Mégard, 2011), le développement des fichiers, utilisés dès la maternelle et très employés au CP et au CE1 au détriment d'activités moins formatées, a pu jouer un rôle. Pour de nombreux didacticiens des mathématiques, les connaissances enseignées ne sont pas assez en relation avec le monde et se réduisent trop souvent à une liste de connaissances et de compétences à assimiler. Les acteurs de ces conférences s'interrogent notamment sur les curricula à mettre en place et sur des directions de travail claires à donner aux enseignants. Nous développerons quelques-unes de leurs propositions sur les finalités éducatives dans la section suivante.

Quelles mathématiques faut-il apprendre / enseigner ?

Enjeux des premiers apprentissages mathématiques

Une synthèse de la recherche, réalisée pour le Cnesco et l'IFé (Fayol, 2015), permet d'identifier trois grands enjeux pour ces apprentissages :

- appréhender les nombres avec précision (l'élève doit être en capacité de passer d'un traitement intuitif des grandeurs et des quantités, que les enfants possèderaient dès leur plus jeune âge, à un traitement exact des nombres) ;
- assimiler le langage et l'écriture des nombres (les premiers apprentissages nécessitent la désignation des nombres dans un langage spécifique, à l'oral, et dans un système universel, à l'écrit) ;
- passer de la manipulation des objets aux opérations sur les nombres (un enfant a une compréhension intuitive des transformations qu'il peut effectuer sur des objets (ajouts, retraits). L'enjeu est d'abord de le faire manipuler des objets pour

accéder à une première exploration des opérations, puis de lui faire découvrir qu'il peut résoudre un problème sans avoir besoin de manipulations concrètes.

La relation des mathématiques au monde : représentation mentale des nombres

Pour Pierre Arnoux, les connaissances que possèdent la plupart des étudiants sont formelles et sans relation au monde. Les représentations mentales pour penser le monde peuvent être fournies par le langage mathématique. Mais pour décrire le monde à l'aide de ce langage, il faut acquérir une sémantique de ce langage, c'est-à-dire qu'il est nécessaire d'avoir une idée du monde qu'il veut décrire (Arnoux, 2011b).

> « Dans une modélisation, on a tendance à utiliser les mathématiques comme un outil préexistant ; pour que cela soit efficace, il faut déjà avoir une représentation mentale. Par exemple, si dans un modèle on a besoin d'étudier une variation, on fera probablement appel à une dérivée ; mais si on n'a pas déjà une représentation mentale de ce qu'est une dérivée, cette modélisation risque fort de rester formelle, donc incompréhensible et incritiquable » (*ibid.*, p. 25).

L'une des premières représentations à acquérir au CP est celle des nombres entiers. Quelles représentations des nombres faudrait-il proposer aux élèves ?

Christine Chambris a montré que l'écologie des savoirs liés à la numération a beaucoup évolué au cours du siècle dernier (Chambris, 2008). Dans les années soixante-dix, les mathématiques enseignées durant la réforme des « mathématiques modernes » ont été fondées sur une théorie ensembliste des nombres : un nombre entier représentait le cardinal d'une collection d'objets. Avant cette réforme, les nombres et les opérations étaient construits à partir des grandeurs. Les mesures et les grandeurs ont donc été dissociées du travail sur la numération à partir de la réforme, ce qui a entraîné des ruptures dans les relations installées entre objets d'enseignement, par exemple entre la numération et le système métrique, les opérations et les grandeurs, les techniques de calcul et le sens des opérations (Chambris, 2008, 2010, 2011 ; Perrin-Glorian, 2011). Christine Chambris cite par exemple le fait que les représentations des nombres « en unités de numération » (5 centaines 2 dizaines) ont plus ou moins disparu au profit de représentations en « écritures chiffrées des puissances de dix » (5 x 100 + 2 x 10) alors que les écritures

correspondantes en unités métriques (5 hm 2 dam) ont perduré, probablement sans que la signification des préfixes métriques soit enseignée. Dans l'enseignement post-réforme à l'école primaire a subsisté un enseignement des mesures pratiques et du système métrique pour les grandeurs continues. Les grandeurs continues n'interviennent alors que dans l'approche des fractions et nombres décimaux tandis que l'enseignement des nombres entiers reste associé au travail sur les quantités discrètes. Depuis le début des années 2000, Marie-Jeanne Perrin-Glorian constate que « la notion de grandeur a repris droit de cité et n'est plus confondue avec la mesure qui est un nombre (dépendant de l'unité choisie) mais certains enseignants continuent à ne pas se sentir à l'aise avec la notion de grandeur. Le lien avec l'enseignement des nombres n'est pas restauré » (Perrin-Glorian, 2011, p. 113). Yves Chevallard et Christine Chambris alertent aussi, dans le contexte de rédaction des nouveaux programmes en 2015, sur la nécessité de lier numération et mesures de grandeurs :

> « La tradition française a depuis longtemps isolé les mathématiques de leurs principaux domaines d'intervention extramathématiques […] Dans l'enseignement scolaire, les mathématiques ont été ainsi hypostasiées, coupées de leurs racines dans les mondes extramathématiques. Corrélativement, au sein des mathématiques, les grandeurs ont été marginalisées tandis que les nombres étaient hypostasiés, coupés de leur origine dans les mondes de la mesure des grandeurs. Or les grandeurs sont ce qui relie le mathématique au non-mathématique mathématisable. Depuis quelques décennies, on a largement perdu ce lien et jusqu'aux mots pour le dire. Si l'on veut enseigner l'intelligence du mathématique il faut enseigner les mathématiques comme moyen de mathématisation du non-mathématique et, pour cela, rétablir fortement les grandeurs dans le champ de conscience de l'enseignement scolaire » (Chevallard & Chambris, 2015).

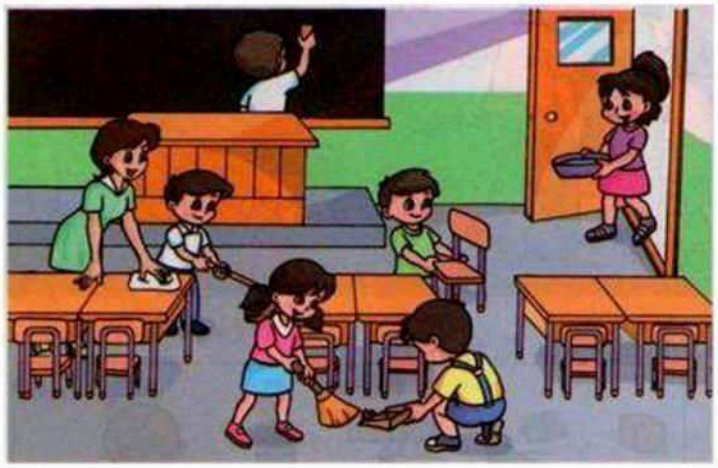
La relation des mathématiques au monde : questionner et expérimenter

De nombreux chercheurs ayant été auditionnés pour la conférence nationale sur l'enseignement des mathématiques attirent l'attention quant à la nécessité d'ancrer les mathématiques dans la résolution de problèmes variés, les pratiques sociales et l'étude des œuvres pour questionner et expérimenter le monde.

Yves Chevallard propose que l'enseignement s'inscrive dans un « paradigme de questionnement du monde, où l'on s'instruit en étudiant des questions auxquelles on essaie par là d'apporter des réponses, rassemblant et étudiant pour cela des œuvres idoines, mathématiques et autres, en fonction des besoins » (Chevallard, 2011a). Le système numérique par exemple étant une œuvre humaine. L'auteur déplore un effacement des raisons d'être et l'oubli de leur utilité.

Pierre Arnoux propose de rendre les nombres « vivants » c'est-à-dire de les rendre actifs en les mettant en lien les uns avec les autres (Arnoux, 2011a).

Maria Bartolini Bussi présente une activité de variations autour d'un problème (Bartolini Bussi, 2011) : il s'agit pour les élèves d'être capable de voir dans la même situation, différentes manières pour poser et résoudre des problèmes. Nous reprenons un des exemples relevé par la chercheure, extrait d'un manuel chinois.



6 + 1 = 7 **7 − 1 = 6** **1 + 6 = 7** **7 − 6 = 1**

One can see 6 + 1 = 7 in different ways (from different perspective, in a more flexible way):

6 children and 1 teacher;

6 persons in classroom and 1 just entering

6 persons cleaning the classroom and 1 cleaning (or writing on) the blackboard.

But also:

6 desks and 1 teacher's desk

6 chairs close to the desks and 1 still moving

What is also important is that in the same page the relationships are written in many ways:

6 + 1 = 7; 7 – 1 = 6; 7 - 6 = 1.

Extrait de manuel et indications pour l'activité

Les nombres 6 et 7 sont ainsi mis en relation : désignation de mesures de la taille de collections et utilisation de ces mesures dans des opérations (addition et soustraction) qui dénotent le *principe inverse*, cf. la revue *Educal studies in mathematics* (ESM)[47]. En France et en Italie, nous dit l'auteure, ces deux opérations sont généralement étudiées dans des chapitres différents. « Les mathématiques ne proposent pas de décrire l'action juste, mais de modéliser le monde dans lequel on cherche à agir efficacement. Les mathématiques sont donc un domaine de connaissances pratiques, techniques, et théoriques, qui ne peuvent être apprises indépendamment de l'expérience personnelle et collective du monde modelisé » (Mercier, 2011, p. 135).

Pour Michèle Artigue, il est ainsi possible, à certaines conditions didactiques, pour de jeunes élèves, d'entrer dans des modes de pensée algébrique (travaux sur l'*early algebra*) pour envisager et soutenir des généralisations par des représentations symboliques (comme par exemple les nombres) et développer certains calculs sur ces représentations (Artigue, 2011).

Denis Grenier (Grenier, 2011) propose d'intégrer des situations de recherche en mathématiques dans les classes pour changer le rapport aux mathématiques des élèves et leur proposer une activité proche de celle des chercheurs (choisir une question, expérimenter, étudier des cas particuliers, choisir un cadre de résolution, modéliser, énoncer de conjectures, prouver, définir, changer éventuellement la question initiale).

Il ressort de cette concertation scientifique quelques grands principes généraux quant aux premiers enseignements des mathématiques :

- la construction des nombres passe par son utilisation dans des situations didactiques variées, liées à la mesure des grandeurs et associées à des situations de la vie quotidienne. Ces dernières peuvent nous permettre d'entrevoir en pratique certains aspects de leurs constructions historiques et sociales car les mathématiques sont des pratiques qui ont (ou ont eu) une utilité dans la société. Il est donc nécessaire de les

[47] Le *principe inverse* lie addition et soustraction (et de même multiplication et division). Selon des études (ESM, Vol 79, n°3, 2012), de nombreux élèves ne s'aperçoivent pas que 61 – 48 + 48 est égal à 61. De nombreux élèves posent la soustraction 61 - 59 s'en s'apercevoir que la différence peut se trouver facilement en ajoutant 2 (59 + 2 = 61). Comprendre ce principe, c'est pouvoir utiliser de manière stratégique les opérations sur les nombres.

étudier comme des œuvres humaines, sans en dérouler à nouveau l'histoire mais en les explorant au sein de situations didactiques adaptées ;
- les mathématiques fournissent des modèles pour penser le réel, par exemple pour confronter des situations en apparence différentes ou pour résoudre un problème. Pour Lebesgue (1931/1975) « un nombre est […] le compte-rendu complet de l'opération (de mesure) expérimentale qui le produit. » (Lebesgue, 1975). La manipulation directe des grandeurs de mesures, avec des nombres, permet de lier les actions effectives dans l'expérience et de les considérer comme références pour les calculs avec les nombres.

Comment s'inscrit le dispositif ingénierique *ACE-Arithmécole* dans ce paysage de l'enseignement des mathématiques : quelles propositions d'enseignement sont faites, quels présupposés épistémiques véhiculent-elles et en quoi sont-elles originales ?

Analyse du projet d'enseignement-apprentissage *ACE-Arithmécole*

Nous décrirons d'abord le contenu didactique du projet *ACE-Arithmécole* dans ses grandes lignes en reprenant le document descriptif du projet datant de mai 2011 (cf. annexe 1). Pour plus de détails, nous renvoyons à ce même document. Puis nous centrerons nos analyses sur un des quatre domaines développés par l'ingénierie. Ce domaine a trait à un ensemble de situations sous l'appellation « Situations » et l'abréviation « SIT ». Nous avons participé plus particulièrement à son travail d'élaboration ; c'est pourquoi toute la suite de notre travail concernera ce domaine SIT.

Projet général d'enseignement-apprentissage

Description du contenu du projet

La progression de l'ingénierie didactique implémentée dans les classes est agencée selon un ensemble d'hypothèses fortes concernant les apprentissages arithmétiques lors des premières années d'école élémentaire, relatives au développement chez les élèves du sens du nombre, de leurs capacités calculatoires, et de la qualité de leur rapport aux mathématiques. Ces hypothèses sont les suivantes :

- importance de la quantification par estimation et de la familiarisation systématique des élèves aux systèmes de représentation et de traitement analogique des quantités et des transformations. L'enseignement ne peut être détaché du sens spatial et approximatif des nombres et du calcul. Ce système donne "sens" aux nombres et permet des calculs "sensés" (par exemple une soustraction dans l'ensemble des entiers naturels ne peut accroître le plus grand opérande) ;
- influence d'un travail approfondi et de longue durée au sein de situations évolutives dans lesquelles les élèves éprouvent une expérience mathématique dense, en particulier dans le maniement de divers systèmes de représentations et d'écritures symboliques et notamment grâce à la discussion collective dans la classe de relations mathématiques signifiantes. La pratique mathématique repose alors sur un travail crucial de *représentation*, avec un système de relations comportant en particulier représentant et représenté (Brousseau, 2004a ; Sensevy, 2011a, p. 652-661). Nous pouvons dégager deux éléments : d'une part l'étude du système symbolique (décimal positionnel) permis par les opérations, d'autre part la constitution de l'ensemble des nombres entiers comme un corps. Par exemple, l'addition et la soustraction (en ligne) constituent ainsi des moyens de compréhension et de construction des nombres entiers et de leurs propriétés au sein de pratiques privilégiant systématiquement la composition-décomposition ;
- fréquentation intensive de séances de calcul mental centrées sur la consolidation des connaissances déclaratives associée à l'automatisation des connaissances procédurales. Une pratique intensive du calcul mental peut ainsi compenser l'entraînement moins systématique aux techniques opératoires (posées, en colonnes).

Structure de la progression

Le projet comprend quatre domaines d'enseignement qui se complètent et renforcent mutuellement les apprentissages tout au long de l'année scolaire. Trois de ces domaines concernent trois types de situations (de jeu, de problèmes à énoncés, d'estimation) et un domaine coordonne des activités de calcul mental. L'ensemble de

la progression et des ressources, dans chacun de ces domaines, se trouve mis en ligne sur le site de la recherche[48]. En voici une description rapide :

- Domaine « Situations » (SIT)[49]. Ce domaine est organisé à partir d'une situation didactique, nommée le *Jeu des annonces*, qui évolue et se complexifie progressivement pour former un ensemble de situations. Ainsi est assurée une continuité de l'expérience mathématique des élèves. La proposition d'enseignement et apprentissage vise à structurer et organiser des mesures de grandeurs afin de construire le système numérique. Les élèves sont amenés à réaliser des comparaisons d'écritures additives. Ces écritures additives mèneront progressivement vers la structuration des nombres et l'exploration des structures additives jusqu'à la soustraction, en utilisant les variables de la situation.

Dans la section suivante, nous développerons les principes plus spécifiques à cet ensemble de situations en les mettant en rapport avec l'analyse que nous allons mener afin de pouvoir aborder la partie empirique à venir.

- Domaine « Résolution de problèmes »[50]. Ce domaine concerne la résolution de problèmes (notamment problèmes à énoncés) et les possibilités de recodage sémantique d'une situation-problème donnée. En effet, les caractéristiques sémantiques de l'histoire peuvent masquer les choix à effectuer pour la résolution. Le recodage sémantique favorise l'abstraction et le transfert d'apprentissage (Gamo, Sander, & Richard, 2010). Il s'agit de familiariser les élèves à l'application des concepts et opérations arithmétiques à la réalité. Afin de permettre l'analyse et la compréhension des relations entre les mesures des quantités en jeu, les descriptions des situations visent à mieux faire apparaître la structure de la situation-problème (qui amène à la résolution).

- Domaine « Estimation, Grandeurs et Mesures »[51]. Ce domaine développe le système de représentation analogique et approximative des nombres et du calcul afin de favoriser le sens des nombres (Vilette, Mawart, & Rusinek, 2010). Il s'appuie sur les représentations des quantités de différentes espèces de grandeurs et des

---

[48] http://python.espe-bretagne.fr/ace/ adresse récupérée du site le 1er mai 2015.

[49] Les responsables de ce domaine sont Gérard Sensevy et Serge Quilio.

[50] Le responsable du domaine « Résolution de problèmes » est Emmanuel Sander.

[51] Le responsable du domaine « Estimation, grandeurs et mesures » est Bruno Vilette.

transformations numériques que les enfants possèdent dès leur plus jeune âge. Cette connaissance de base permet une estimation approximative et une comparaison relative des quantités, ainsi qu'une évaluation des ajouts, retraits et de leurs effets.
- Domaine « Calcul mental »[52] : ce domaine est situé à l'interface des trois autres. Il renvoie à la nécessité d'une pratique intense du calcul mental qui consolide les connaissances déclaratives et automatise les connaissances procédurales (Fischer, 2012).

Analyse de la proposition d'enseignement pour le domaine « Situations »

Nous analyserons dans cette section l'ensemble des situations concernant le domaine SIT du point de vue du système ingénierique {professeur, chercheurs, savoirs} mais de manière macroscopique, c'est-à-dire sans nous engager pour l'instant dans l'analyse didactique *a priori* de la situation du *Jeu des annonces* et des situations dérivées qui sera réalisée dans la partie empirique (partie III).
Pour mener cette analyse, nous entrerons par les caractéristiques fortes du domaine SIT qui constituent *a priori* l'aspect générique du savoir ingénierique pour ce domaine :

(i) les mathématiques comme étude de réponses à des questions du monde ;
(ii) les mathématiques comme modèles du monde ;
(iii) les mathématiques comme expérience personnelle et collective.

Les contenus de ces trois caractéristiques sont intrinsèquement liés et l'organisation de leur présentation ne se veut en aucun cas ni hiérarchique ni classificatoire. Les assertions mentionnées sont les fruits du travail collectif de la sphère 1 effectué lors de la première année (2011-2012) lors des échanges en visioconférence entre les groupes de Bretagne et de Provence. Nous les avons glanées puis remises en forme à partir de nos notes et de notre compréhension de la situation ingénierique (hormis quelques éléments que nous avons réussi à resituer plus précisément).

[52] Le responsable du domaine « Calcul mental » est Jean-Paul Fischer.

Les mathématiques comme étude de réponses à des questions du monde : arrière-plan et problématisation

Selon Alain Mercier et Serge Quilio (Mercier & Quilio, à paraître)[53], les nombres appartiennent à la société humaine et les pratiques relatives à ces objets mathématiques ne peuvent être décrites qu'en situation de pratique sociale (avec ses formes langagières associées).

> « Les mathématiques sont constituées de techniques socialement partagées pour le traitement de certaines catégories de problèmes que les activités sociales conduisent à rencontrer : ce sont donc aussi des savoirs utiles, et l'usage est une des manières d'apprendre ce qui est utile » (Mercier, 2011, p. 134).

Il s'agit de baser l'enseignement des nombres sur des expériences anthropologiques. A la suite de Guy Brousseau (Brousseau, 2004b), les situations permettent la mise en place des conditions de ces expériences et quand celles-ci sont artificielles (par exemple dans le cadre scolaire), la situation est dite « situation didactique ».
Si les mathématiques contribuent à l'étude de réponses à des questions du monde, comment alors par exemple répondre aux questions qui ont trait à des pratiques de dénombrement (pris au sens d'extraire, de déterminer le nombre) d'une collection d'objets ?[54] Aux questions qui ont trait à des pratiques d'écritures qui traduisent la mesure de la grandeur ? Aux questions qui ont trait à des pratiques de comparaison ou de réunion de deux ensembles d'objets quand ils sont trop nombreux ou inaccessibles à la manipulation ? Les pratiques sont dépendantes de l'institution dans laquelle elles s'exercent. A l'école, les mathématiques, comme étude de réponses à des questions, constituent les éléments de réponses à ces questions à condition (i) que les questions soient rencontrées par les élèves (c'est-à-dire qu'ils puissent identifier les enjeux de la situation), (ii) que la manière dont les réponses puissent être

---

[53] Nous suivrons les travaux d'Alain Mercier et Serge Quilio édités dans un ouvrage, à paraître, qui a été entrepris à la suite de trois séminaires qui ont eu lieu à Marseille et en visioconférence en mars et avril 2013 (Mercier & Quilio, 2013a, 2013b, 2013c).

[54] Dénombrer des crayons pour savoir s'il y en a assez pour un petit groupe d'enfants ou dénombrer des briques de jus de fruits pour savoir s'il y en aura assez pour la fête de l'école, dénombrer des bulletins de vote à la suite d'un scrutin électoral pour vérifier si le nombre de bulletins correspond au nombre de citoyens ayant participé au scrutin et au nombre de voix exprimées, dénombrer des manifestants qui défilent, ... entraînent des pratiques mathématiques (et donc des techniques différentes à connaître) selon les quantités en jeu et la valeur attendue (approchée ou exacte).

fabriquées soit adéquate, identifiable et surtout construite au sein du groupe classe. En effet, si l'on entrait directement dans des pratiques de dénombrement, de comparaison, de réunion de collections d'objets ou dans des pratiques d'utilisation du système numérique par des aspects formels, comment se construirait alors le sens de ces pratiques ?

La proposition ingénierique consiste à ce que les élèves entrent dans le système des nombres au travers d'un ensemble de situations didactiques dans lesquelles le nombre et ses usages (désigner une mesure de grandeur de plusieurs façons, comparer des mesures de grandeurs et les ordonner, opérer sur des mesures de grandeurs) soient des réponses élaborées lors de situations pratiques qui seront présentées sous forme de jeux. Elles deviennent alors situations didactiques dans l'institution des classes. Par exemple, l'un des problèmes fondateurs d'entrée dans la numération est celui du dénombrement de collection ; la proposition d'enseignement *ACE-Arithmécole* est de mettre en place des techniques de manipulation d'une collection qui conduisent à l'écriture symbolique. Pour cela, les élèves commencent leur apprentissage par la manipulation effective de collections d'objets (de doigts et de points de dés) dont il s'agit de mesurer la *numérosité* (définie comme l'expression de la quantité d'une collection d'objets identifiés)[55]. Puis ils rencontrent des situations où la manipulation des collections est trop compliquée à gérer et où il leur faut s'approprier une manipulation symbolique (47 + 38 = 47 + 30 + 8 = 77 + 8 = 77 + 3 + 5 = 80 + 5 = 85).

Il s'agit alors de provoquer et favoriser une démarche d'enquête des élèves dans cette conquête, démarche que doit diriger le professeur. En effet, pour dénombrer, comparer, ordonner,… certains répertoires ou certaines techniques sont à « didactiser », mais lesquels ? A quel moment dans le déroulement de l'action et dans quelles proportions ?

La sphère 1 du collectif (formée la première année 2011-12 avec des chercheurs, des professeurs des classes d'étude, des formateurs et des doctorants) en discute dès sa première réunion (visioconférence du 19 octobre 2011) : constituer une technique ou un répertoire grâce à l'expérience acquise au cours du jeu, savoir quels résultats sont utiles pour réussir l'expérience sont à la charge de l'élève sous la direction du

[55] La numérosité est la grandeur « nombre d'entités d'une collection » (Chevallard & Chambris, 2015).

professeur. Un des biais serait de « didactifier »[56] (c'est-à-dire de didactiser trop précocement) des techniques, des règles ou de mémoriser systématiquement les répertoires additifs exhaustifs. Cette didactification empêcherait le développement de comportements mathématiquement pertinents et bloquerait le rapport à l'enquête que l'on veut installer chez les élèves afin qu'ils puissent s'emparer de ces techniques, règles ou répertoires ; la construction d'une technique, d'une règle ou d'un répertoire devant être vue comme un élément de synthèse de l'expérience (Brousseau, 2004b, p. 307-314).

Prenons l'exemple du répertoire : les affichages de répertoires peuvent être aussi considérés comme une mémoire externe. Ils montrent, laissent traces de ce qui a été éprouvé par les élèves au cours de la situation didactique, de ce qui a été appris, de ce qui est su. Se rendre compte que des connaissances ont été apprises dans la situation est un enjeu d'apprentissage important car de telles connaissances servent l'expérience qui les sert aussi en retour. L'enjeu dans cette situation est donc particulièrement de nature didactique : donner la priorité à des expériences numériques qui sont discursives et résister à l'algorithmisation, par exemple à l'établissement de répertoires systématiques. Le fait que le collectif pose le problème de la didactification et le discute crée une référence commune sur ce point-là de l'ingénierie. Guy Brousseau et Julia Centeno montrent la nécessité de garder en mémoire certains faits relatifs à des connaissances en cours de construction (ici par exemple l'attention à porter à la didactisation) et de réactiver cette *mémoire didactique* (Brousseau & Centeno, 1991) pour en faire un usage productif au moment opportun, quand la réflexion collective aura évoluée.

Pour que les professeurs puissent diriger la démarche d'enquête de leurs élèves, il faut qu'eux-mêmes puissent identifier clairement les divers enjeux d'apprentissage : nous avons commencé à évoquer mesure de la numérosité puis manipulation symbolique de mesures de quantités, expériences numériques et discursives. En cela les pratiques professionnelles des professeurs sont bousculées car la direction de l'étude des élèves, au sein de la progression ACE, est surtout pilotée par l'observation des pratiques des élèves à partir de la connaissance des enjeux ingénieriques. Nous

[56] Le processus de didactification est analysé par Gérard Sensevy à partir du *cas de Gaël* (Sensevy, 2011a, p. 458-508) décrit par G. Brousseau et V. Warfield (1999) : « c'est ce qui se passe quand on transforme les moyens en fins de l'apprentissage, les outils en objets d'apprentissage » (p. 470).

aurons l'occasion de le montrer dans les sections suivantes. Les chercheurs auront donc pour tâche de partager les enjeux, parfois implicites et originaux, avec les professeurs. Pour cela les chercheurs doivent trouver les moyens de faire identifier ces enjeux et ils ne pourront le faire plus efficacement qu'au travers des questions posées par la mise en œuvre et donc au travers des événements rapportés ou de faits didactiques effectifs. Nous comprenons bien alors le rôle primordial des échanges au sein du collectif et du travail que nous allons mener pour analyser les questions posées au cours de et suite à l'expérimentation des séquences en classe.

Les mathématiques comme modèles du monde : arrière-plan et problématisation

Nous utiliserons la définition du terme « modèle » suivante tirée du dictionnaire du *Trésor de la langue française informatisée* (TLFI)[57] (en précisant pour tout autre cas le sens utilisé) :

> « système physique, mathématique ou logique représentant les structures essentielles d'une réalité et capable à son niveau d'en expliquer ou d'en reproduire dynamiquement le fonctionnement. On parle de *modèle*, en science, chaque fois qu'il y a renvoi d'une réalité concrète à une réalité idéale avec exploitation de leurs analogies descriptives. Analogie ne signifie nullement identité ; il existe même une différence de nature entre le *modèle* et le réel qu'il représente, le *modèle* ayant une valeur symbolique » (section C, TLFI).

Les mathématiques participent d'un système de représentation symbolique du monde (de la réalité) qui en permet l'étude d'un certain point de vue. Le collectif doit produire l'ingénierie didactique d'une situation qui puisse impliquer les propriétés des systèmes de représentation chiffrée des nombres (l'ensemble des formes symboliques et de leurs relations). Autrement dit, il doit produire un usage des modèles dans des situations.

La première question qui s'est posée aux chercheurs concerne le système de notation. Yves Matheron et Alain Mercier décrivent ainsi le terme de notation :

---

[57] http://atilf.atilf.fr/dendien/scripts/tlfiv5/affart.exe?19;s=384378075;?b=0; récupéré du site du TLFI le 14 mai 2015.

> « Les mathématiciens savent que les objets du travail arithmétique ou algébrique ne sont pas des signes linguistiques ; par exemple, pour le mathématicien, «27» n'est pas l'adjectif numéral «vingt-sept». Ce ne sont pas non plus des symboles et «12» n'est pas un objet représentant l'idée de la quantité d'œufs que contient une douzaine d'œufs. Les mathématiciens considèrent plutôt, avec Lebesgue (1975), 27 et 12 comme « les comptes-rendus complets des opérations matérielles de mesure qui les ont produits », ce qui permet de connaître la mesure de la collection obtenue par réunion de deux collections disjointes de mesures respectives, 27 et 12, par le moyen d'une opération sur ces objets mathématiques : l'addition. Faute de disposer d'une théorie générale des fonctions de ces objets, les mathématiciens les appellent des notations » (Matheron & Mercier, 2004, p. 356).

La question peut être exprimée en ces termes : comment un système de notation standardisé peut-il être introduit auprès d'élèves de classes de CP ? Par exemple si l'élève peut expliciter ce que signifient deux paquets de cinq jetons et trois jetons, comment l'amener à l'écrire sous la forme 5 + 5 + 3 ou 2 × 5 + 3 ou 10 + 3 ou 13 et à lui faire comprendre la fonctionnalité de telles écritures ? Il y a là une différence cognitive importante que Guy Brousseau décrit par cette analogie :

> « Un enfant qui dessine une maison représente-t-il une maison? Ou accomplit-il une activité rituelle de dessin dont les éléments symboliques lui sont fournis par son milieu ? Dans le premier cas, il prend effectivement en charge certaines relations entre son modèle[58] et le dessin : à titre d'exemple, il fait deux portes parce que sa maison en a effectivement deux. Son dessin a une fonction référentielle. Dans le deuxième, non, l'enfant ne travaille que sur le plan symbolique : une maison icône ou métaphore a toujours une seule porte, deux fenêtres placées symétriquement et une cheminée, quatre fenêtres et c'est un château » (Brousseau, 2004a).

L'utilisation des systèmes sémiotiques (chiffres, signes, schéma, …) est au cœur de l'activité mathématique car elle participe au processus de modélisation : par exemple si un élève produit une écriture additive à deux termes en référence à une situation vécue (il a pris dans une boîte x cubes rouges et y cubes bleus ou il a montré x doigts de sa main droite et y doigts de sa main gauche) soit la situation didactique l'engage à produire cette écriture pour communiquer quelle était la situation, pour la désigner, soit elle l'engage à la modéliser en vue de la décrire ou d'opérer une réunion ou une

[58] Ici, « modèle » dans le sens de chose qui sert de référence à la reproduction dessinée.

comparaison avec une autre écriture. Dans ce cas, ce sont les propriétés du code numérique qui sont travaillées.

Les élèves sont amenés à utiliser les nombres et leurs propriétés et à modéliser la situation de jeu ou de la vie quotidienne en utilisant des systèmes de représentations variés. L'arrimage à l'action et une relation forte à la référence participent à la dialectique entre système étudié et modèle pour l'étude : « le travail symbolique n'est pas spontanément le moyen d'atteindre des domaines qui ne peuvent pas être pensés en pratique. Si l'élève ne s'imagine pas manipuler une collection, il n'accède pas spontanément aux symboles mathématiques » (Mercier, visioconférence du 12 décembre 2012). Cette assertion rejoint celle de Pierre Arnoux qui rappelle que pour utiliser un langage mathématique il est nécessaire d'avoir une représentation mentale préalable des objets mathématiques utilisés (Arnoux, 2011b). Nous développons l'idée qu'il est surtout nécessaire d'avoir parlé, pris dans le langage, l'expérience que l'on veut « mathématiser ». Les formes langagières associées y tiennent alors une grande place : elles permettent le contrôle des manipulations symboliques du modèle dans le langage de la situation concrète (et éventuellement vécue). Mais en retour, il est fondamental d'exercer la capacité à exemplifier les modèles pour renforcer la dialectique entre système étudié et modèle à l'étude. Selon Gérard Sensevy (Sensevy, 2015b), il est nécessaire d'installer un « rapport concret-abstrait spécifique, au sens où toute écriture arithmétique doit pouvoir si besoin être référée à une situation concrète qui peut lui donner sens, et les nombres aux espèces de grandeurs qu'ils mesurent ».

Une fois une question modélisée, le modèle peut être utilisé pour d'autres questions à explorer ou mis à l'épreuve dans un contexte de continuité de l'expérience (au sens de John Dewey, 1938) pour que *tous* les élèves puisent comprendre qu'ils traitent d'un même type de problème (d'un même modèle). Le collectif propose que la progression s'oriente dans deux directions de travail (visioconférence du 24 janvier 2012).

1) La première de ces directions de travail est de développer la situation initiale de comparaison de somme de deux collections (action permise par les mesures de ces collections) c'est-à-dire installer une comparaison qui instaure l'équivalence ou différence en question fondamentale du processus. La même situation de base du *Jeu des annonces* se réalise tout au long de l'année mais le jeu évolue en fonction de règles et de variables que nous détaillerons dans une partie suivante de ce travail. Les

changements de règles du jeu et de variables vont solliciter des techniques nouvelles qui s'appuient sur celles déjà construites, rendant parfois les anciennes techniques coûteuses à utiliser. Ces changements qui englobent des pratiques antérieures doivent être acceptés par les élèves. Ils demandent une stabilité des bases sur lesquelles on travaillait. La situation est conçue de manière « ergonomique » au sens où les élèves peuvent toujours se référer à la situation initiale ou précédente car il n'y a pas à redéfinir l'ensemble des règles du jeu mais à pointer le changement et étudier ses conséquences dans les pratiques.

2) La seconde de ces directions de travail est de proposer des problèmes qui traitent de la portée du modèle dans des problèmes à énoncés de la vie quotidienne (par exemple de comparaison de sommes comme celle du nombre d'élèves de deux écoles connaissant le nombre d'élèves dans chacune des classes de ces deux écoles).

Ainsi la situation didactique proposée se caractérise par un principe de continuité et de rupture défini comme un *temps de situation* (Quilio, 2008, 2012 ; Sensevy, 2011a), un temps qui « repose sur la mise en évidence de l'insuffisance fonctionnelle de certaines formes de savoir » selon Sensevy (*ibid.*, p. 469) et non sur un *temps d'objet* qui peut être « un temps de l'algorithmisation ». Mener une progression selon un *temps de situation* permet potentiellement l'enquête ou l'étude des élèves mais sa réalisation effective demande une grande vigilance épistémologique. Cela nécessite un changement de rapport social aux savoirs, tant au niveau des élèves que des professeurs, et implique une attention au rythme donné à la progression : quand introduire une variable ? Une nouvelle règle du jeu ? Selon quels indicateurs ?

Cette problématique devra être partagée au sein du collectif car si les changements sont décidés par le professeur, responsable des enseignements dans sa classe, ils sont auparavant collectivement envisagés et rétrospectivement discutés. Les modifications du milieu de l'étude (qui est le monde dans lequel les élèves enquêtent) permettent d'observer quelles seront les réactions des élèves et de concevoir une progression la plus pertinente possible.

Les mathématiques comme expérience personnelle et collective : arrière-plan et problématisation

Nous l'avons évoqué dans ces deux précédentes sections : les élèves ont à mener une enquête dirigée par le professeur et ce choix didactique conduit à des pratiques expérimentales relatives aux grandeurs mesurables. Pour le domaine SIT, la première grandeur manipulée est la taille d'une collection d'objets. Sa mesure s'exprime avec des nombres entiers et elle peut faire l'objet de calculs quand par exemple sont ajoutés x objets à y objets.

Il s'agit, pour évaluer cette mesure, de dépasser un premier rapport issu des pratiques familiales ou de nombreuses pratiques scolaires. Ces pratiques associent un nom de nombres (énoncé selon la comptine numérique) à chacun des objets d'une collection pour désigner la mesure de la quantité d'objets en présence : les élèves manipulent ainsi des objets symboliques que sont les noms des nombres (la comptine) et leur écriture chiffrée (les nombres en chiffres). S'ils connaissent les techniques d'énumération adéquates (transformer un ensemble d'objets en collection par constitution de la liste de ses éléments) dont Joël Briand a montré qu'elles devaient être enseignées explicitement (Briand, 1993), ils peuvent réussir à désigner la mesure exacte d'une quantité (à dire combien il y a d'objets au total). Mais ils ne pourront pas forcément la décrire, dire de quoi cette mesure est composée afin de pouvoir intentionnellement la manipuler en fonction de la situation. En effet, généralement, les élèves de CP savent ou apprennent culturellement comment écrire 35 ou 53 mais ne comprennent pas forcément l'organisation qui préside à la présentation de ces chiffres, notamment le rôle fondamental que revêt la position des chiffres dans l'économie des signes.

Explorer ce système numérique et savoir, au-delà des désignations écrites ou orales peu opérantes, à quelles mesures correspondent ces notations est un enjeu d'apprentissage capital qui, historiquement, a été le fruit de pratiques élaborées peu à peu sur de longues périodes. Autrement dit, il s'agit de faire l'expérience que notre système de numération conventionnel, qui est décimal et positionnel, est l'aboutissement d'un cheminement conceptuel. La situation didactique proposée tente d'en reconstituer la question et d'en proposer l'exploration par une accumulation d'expériences.

Les élèves vont étudier toutes les formes qui permettent la maîtrise du système des nombres ou comment faire pour indiquer toutes mesures avec le moins de signes possibles. Guy Brousseau a théorisé ce processus et produit des activités scolaires capables de réaliser les conditions artificielles d'existence des rapports à de telles questions. Adaptée de ses travaux (Brousseau, 1972) et de ceux de Gérard Deramecourt, Eliette Faucon et Francette Martin (Deramecourt, Faucon, & Martin, 1980) avec qui il a collaboré, la proposition d'enseignement *Ace-Arithmécole* repose sur les propriétés des nombres telles que l'addition qui permet de désigner de « grands » nombres (non encore connus des élèves à un certain stade de l'apprentissage) à l'aide de « petits » nombres connus qui se réfèrent à des pratiques de désignation de collections. Ainsi l'expression « 8 + 7 + 8 + 6 + 4 + 9 + 11 » désigne une collection, pour les élèves de cet âge, plus explicitement que « 53 ». Par des techniques de calcul de compositions / décompositions, l'expression tendra vers des écritures plus réduites, « lisibles », communicables telles que « 10 + 13 + 10 + 10+ 10 » qui s'écrivent aussi « 4D 13U » ou « 5D 3U » pour 5 dizaines et 3 unités, puis « 53 » qui en est la forme sociale la plus économique pour la désignation ou pour engager une comparaison ou toute autre opération. La situation didactique proposée doit permettre de manier les systèmes de représentation du nombre pour mettre au jour la pluralité de sens d'une même dénotation (référence). L'idée est que la description du nombre sous ses diverses décompositions additives conduise, par un travail sur les écritures, au codage décimal qui pense les nombres usuels (écrits en base 10) de manière additive.

La *théorie des situations didactiques* (Brousseau, 2004b, p. 59-60) établit le fait qu'une *situation didactique* (c'est-à-dire aménagée pour des élèves afin qu'elle soit à leur portée, qu'elle détermine une connaissance donnée, qu'elle implique le professeur dans un jeu d'interactions avec le problème posé et les élèves) peut faire référence à une *situation adidactique* (c'est-à-dire qui caractérise cette connaissance et peut être mise en œuvre en dehors de tout contexte scolaire). Quand une connaissance peut se caractériser par une (ou des) situation adidactique qui en préserve le sens et qu'une telle situation peut être aménagée à des fins didactiques, elle est dite *fondamentale*. Un exemple exemplaire (Kuhn, 1974) d'une telle situation pourrait être la situation de l'agrandissement d'un puzzle (Brousseau, 2004b, p. 237-240). Dans cette situation, une seule indication du changement de longueur sur l'une des pièces du puzzle permet

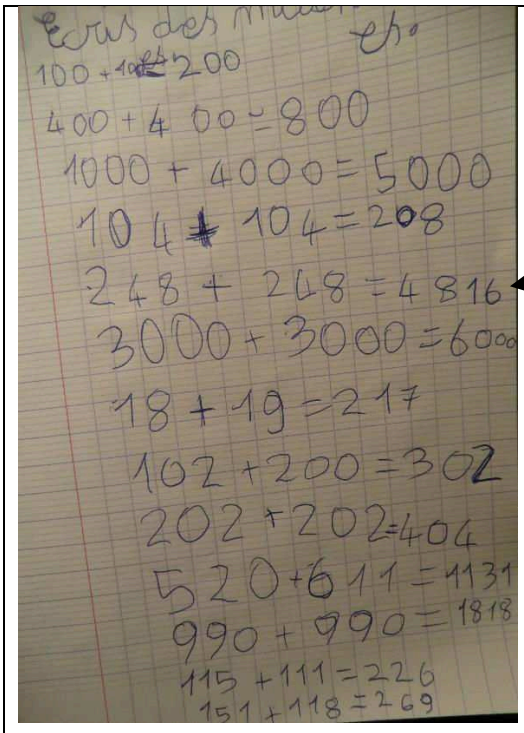
à l'élève d'agrandir toutes les autres, à condition qu'il maîtrise la connaissance et les techniques associées nécessaires à la réalisation d'une telle activité. Le savoir visé (le concept de proportionnalité) est la solution mathématique du problème posé. L'élève peut alors agir efficacement pour toute autre situation, reconnue comme appartenant à la même classe de problème, comme par exemple la réalisation d'une maquette, la confection d'une recette de cuisine pour x fois plus de personnes ou l'estimation d'une distance restant à parcourir. L'intérêt est que l'élève peut avoir une interaction avec la situation « la plus indépendante et la plus féconde possible » (*ibid.*, p. 60) ce qui implique que le professeur fasse preuve d'une *expression et d'une réticence didactiques* (Sensevy, 2011a ; Sensevy & Quilio, 2002) les plus appropriées possible. Cette interaction avec la situation au cours de sa réalisation effective suppose que celle-ci puisse agir rétrospectivement sur l'action de l'élève en validant son travail ou en apportant une aide pour progresser. Dans l'exemple du puzzle, si les mesures d'une pièce sont erronées, la pièce tracée ou fabriquée ne se positionnera pas correctement sur le puzzle. L'erreur pourra éventuellement guider l'action (la pièce est trop grande ou trop petite) mais on voit là qu'elle n'est pas suffisante car le travail ne s'effectue pas dans l'empirisme mais dans le symbolique : l'expression du professeur (ou d'un pair plus avancé) est alors décisive comme l'ont analysé Gérard Sensevy et Serge Quilio lors d'une réalisation effective de la situation (Sensevy, 2011a ; Sensevy & Quilio, 2002).

Selon ce principe, les élèves acquièrent une *certitude raisonnée* (Sensevy, 2011a) qui repose sur la justification et qui leur permet d'agir tout en restant ouverts sur le doute et la remise en question. Dans la proposition d'enseignement *ACE-Arithmécole*, cette certitude est soutenue par l'usage de représentations diverses (écritures conventionnelle et additive, schéma-ligne, schéma-boîte, rectangle-nombre, train-nombre) qui sont mises en lien les unes par rapport aux autres et en référence à la situation qu'elles modélisent de manière symbolique tout au long de la progression. Ces représentations ont pour rôle d'assurer une aide pour penser et réfléchir.

Les pratiques mathématiques sont considérées dans l'ingénierie comme des opérations expérimentales de mesure et l'ensemble des situations didactiques vise à mettre en place ces expériences : par exemple « 2 + 4 = 1 + 5 » n'est pas rencontré comme un axiome mais provient d'une expérience de comparaison de collections. Les

nombres en sont les résultats expérimentaux et en constituent en quelque sorte le compte-rendu, au sens de Lebesgue (1931/1975).

Dans le dispositif ingénierique les membres du collectif sont observateurs de ces actions expérimentales et le professeur est le premier d'entre eux. En effet, c'est lui qui accompagne l'enquête de ses élèves : il a donc besoin d'identifier les difficultés mais aussi d'interpréter, en didacticien des mathématiques, leurs tentatives de traitement des questions pour les organiser et diriger leur étude en régulant leurs actions au sein du collectif de travail qu'est la classe. Prenons un exemple dans une classe de CP. Nous l'avons repéré dans le *journal du nombre* d'un élève, dispositif mis en place dans les classes et qui est par excellence le lieu où l'élève peut exprimer librement ses connaissances (en montrant à lui-même et aux autres des choses qu'il sait faire), explorer les potentialités des nombres et des signes mathématiques[59]. En voici une photographie commentée :

<table>
<tr>
<td> 
</td>
<td>A l'incitation « Ecris des mathématiques », l'élève a produit les écritures ci-contre. Il semble s'être donné des additions à calculer.
On remarquera à la cinquième ligne l'égalité : « 248 + 248 = 4816 ».
Pour qui regarde d'un œil non averti, cette égalité peut paraître au premier abord fausse. Pourtant l'élève manifeste une connaissance qu'il faut savoir décrypter : ici il a additionné les dizaines puis les unités et a juxtaposé les résultats. S'il avait écrit « 48d et 16u » (pour 48 dizaines et 16 unités) son écriture aurait été correcte mais à ce moment-là de l'année l'étude du</td>
</tr>
</table>

[59] Nous renvoyons pour un approfondissement sur le sujet aux travaux de Gérard Sensevy sur le *Journal des fractions* qu'il avait mis en place dans un CM1/CM2 (Sensevy, 1996) et dont le *Journal du nombre* s'inspire, ainsi qu'à la thèse de Nathalie Vigot qui a étudié les pratiques de savoir et les stratégies professorales liées à un tel dispositif (Vigot, 2014). Nous renvoyons pour une explication plus détaillée des principes à la page dédiée du site *ACE-Arithmécole* : http://python.espe-bretagne.fr/ace/wp-content/uploads/Pre%CC%81sentation-du-Journal-du-Nombre.pdf page récupérée le 18 août 2016 du site de la recherche.

Photographie de la page du journal datée du 17 mars 2015	système numérique décimal positionnel proprement dit n'a pas été abordée explicitement dans la progression. Il ne s'agit pas de le « corriger » mais, après avoir discuté l'écriture avec la classe et l'avoir invalidé collectivement, *de valider la question qui est derrière et qu'on étudiera plus tard*. Reprendre par exemple cette production au cours de l'étude collective du système numérique décimal en classe permettra de la discuter, de la compléter ou la transformer : 48d + 16u sont aussi 48d + 1d + 6u ou 49d et 6u. Toutes les écritures procèdent en fait vraisemblablement de la même conception, qui n'est observable que selon certaines configurations.

Le *Journal du nombre* prend en compte l'hétérogénéité des productions d'élèves. Il constitue le partage d'une expérience vécue d'abord individuellement puis collectivement et porte donc l'historicité des questions que les élèves se posent : le travail du professeur est d'y repérer les traces du savoir en cours d'élaboration pour pouvoir y revenir au moment opportun et en faire bénéficier la classe. Un tel type d'action conjointe didactique dans l'accompagnement de l'enquête des élèves pourrait produire une nouvelle forme scolaire (Vigot, 2014). Les pratiques professionnelles sont là encore perturbées : ne pas barrer un résultat incorrect mais à la place le renvoyer à la sagacité de la classe, pour ensuite valider la question qui est derrière et qu'on étudiera plus tard, comme nous l'avons exemplifié ci-dessus, n'est pas un geste habituel ! Les questionnements didactiques qui en découlent alimentent les échanges dans le collectif car il est nécessaire de se forger une culture particulière afin de prendre en compte les présupposés du projet d'enseignement *ACE-Arithmécole*. Il s'agit bien de « rendre les professeurs capables d'un rapport de première main profond et subtil aux savoirs, et d'une concrétisation de ce rapport au sein de dispositifs didactiques » (Sensevy, 2011b).

Organisation fonctionnelle du collectif

Configuration effective du collectif

Comme nous l'avions décrit dans le chapitre 3, l'alternance des mises en œuvre effectives des séquences et des moments où elles sont discutées inscrit les modalités qui organisent le travail entre les membres du collectif dans un processus itératif. Nous l'avions représenté (cf. chapitre 3) dans le schéma ci-dessous et nous allons maintenant préciser le rôle des classes d'étude lors de la première année de mise en place du dispositif (2011-12) afin de décrire plus précisément l'organisation du collectif.

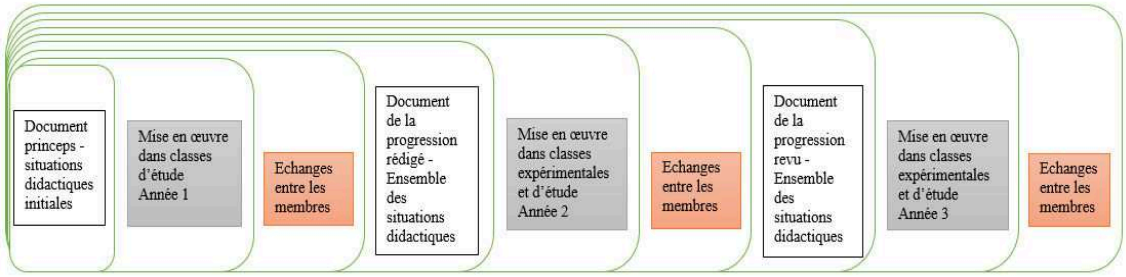


Schéma général des différentes composantes organisationnelles de l'institution de recherche

Les professeurs des classes d'étude, nous l'avions évoqué au chapitre 1, sont ceux qui travaillent dès cette première année dans le groupe de recherche. Dans les classes d'étude sont donc testées les situations proposées par la sphère 1 à partir du document princeps du *Jeu des annonces* imaginé par les didacticiens. En parallèle, cette première année, ces professeurs ont avancé selon le cours de la progression qu'ils suivent habituellement et qui est venue plus ou moins se mêler aux propositions ingénieriques. Il s'agissait bien de tester les conditions de mise en place des situations didactiques afin que le collectif se fasse une première idée d'un déroulement possible. C'est sur cette base de travail qu'a été rédigé le document de la progression. Il sera utilisé par les professeurs des classes expérimentales mais aussi par les professeurs des classes d'étude qui ont tous maintenu leur participation au projet. Nous pouvons dire ainsi que la sphère 1 met en place une *stratégie d'anticipation* à partir du travail des classes d'étude.

Les professeurs des classes expérimentales deviennent membres du collectif et constituent le deuxième cercle la seconde année (2012-13) à partir (i) de la prise de connaissance du document de la progression dans sa version de fin de première année de juin 2012[60] ; (ii) de la mise en œuvre des séquences d'enseignement dans leur classe ; (iii) des faits qui se constituent peu à peu. Nous avions évoqué ce point fondamental de la formation d'un collectif par la constitution de faits au travers des réflexions de Ludwig Fleck (1935, 2008) ; nous y reviendrons car il est au centre de notre travail.

Deux conséquences découlent de ces points : les professeurs des classes expérimentales bénéficient de l'expérience acquise l'année précédente par la sphère 1 (et de la même façon ceux qui entreront dans le dispositif l'année suivante en 2013-14, bénéficieront de l'expérience des plus anciens). Ils bénéficient aussi de leur propre expérience de mise en œuvre. C'est la confrontation de ces expériences qui alimente le dialogue d'ingénierie.

Le collectif constitué théoriquement par un système {professeurs, chercheurs, situation didactique} apparaît alors effectivement sous la forme {sphère 1, sphère 2, situation didactique} car les pôles sphère 1 et sphère 2 sont créés fonctionnellement par l'organisation en année 1 puis en année 2. Il en sera de même pour les années suivantes.

Dans la figure suivante nous schématisons ainsi, dans un premier temps, la constitution d'un collectif et sa configuration selon la place des sphères dans l'avancée des savoirs de l'ingénierie :

[60] Quatre jours de stage, inscrits au plan de formation, sont prévus en fin d'année pour les professeurs souhaitant entrer dans le dispositif l'année scolaire suivante. Ces journées sont consacrées aux premières prises de contact et aux échanges avec les professeurs déjà engagés, à la présentation du dispositif et aux principes qui l'animent, à la prise en main du document de la progression dans sa version provisoire et de toutes les ressources associées (logiciel, diaporamas).

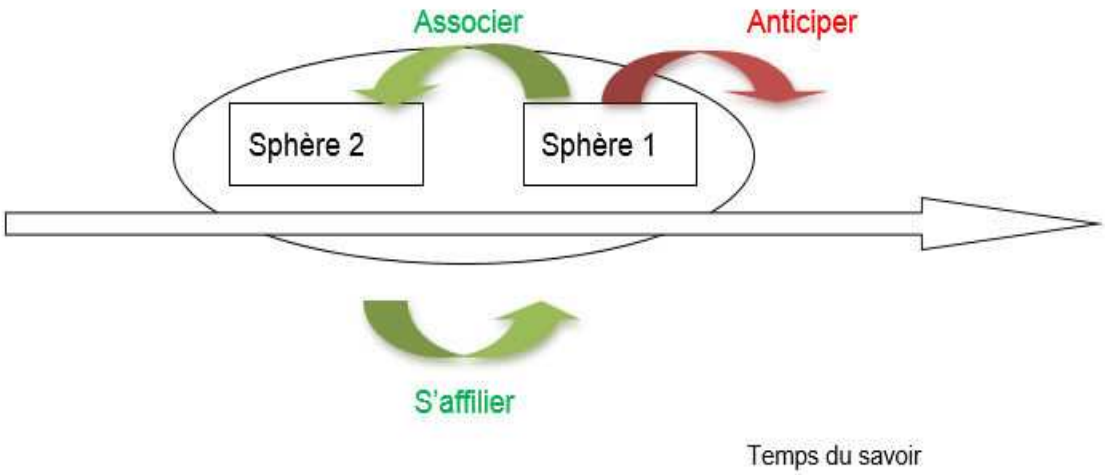


Schéma – Constitution et configuration du collectif selon les sphères

La sphère 1 associe la sphère 2 et la sphère 2 s'affilie, se fédère à la sphère 1 afin de participer aux décisions collectives concernant la mise en œuvre de la situation didactique. C'est donc dans ce lieu, où sphères 1 et 2 se retrouvent (matérialisé par une figure elliptique sur le schéma) et qui pourrait être une sorte de pépinière pour le style de pensée *ACE-Arithmécole*, que nous allons porter notre attention. Nous allons nous pencher dans la partie empirique sur ce processus et sur les conditions de sa constitution.

Contrat de recherche

Le contrat de recherche proposé aux professeurs des classes expérimentales peut être la composante proprement transactionnelle des relations professeurs / chercheurs. Il est basé sur la mise en œuvre de séances d'enseignement-apprentissage présentées dans le document support de l'ingénierie. Dans le cadre d'une ingénierie coopérative, ce document est amené à être discuté à partir de l'analyse collective des séances effectives. Un des chercheurs, lors de la première réunion annuelle entre les membres du collectif (sphères 1 et 2), définit ainsi les modalités de la coopération qui fondent le travail collectif :

- des temps de réunion qui sont des temps de travail collectif de suivi de l'ingénierie mais aussi de réflexion et de mutualisation des pratiques ;

- des questionnements, remarques, constats pouvant être déposés sur le forum du site de la recherche pour que des questions récurrentes apparaissent et soient traitées collectivement ;
- des comptes-rendus des réalisations des séances en classe qui sont des espaces d'observation des réactions et propositions des collègues professeurs ;
- des vidéos tournées durant les séances en classes qui constituent des ressources et seront utilisées comme recours pour expliciter certains points.

Pour exemplifier, regardons une des formes de vie de ce contrat de recherche dans laquelle le chercheur engage les professeurs à travailler collectivement à partir de la narration de leurs expériences issues des séances effectives en classe :

> « ce que je vous propose pour standardiser notre modalité de travail c'est de s'arrêter sur des événements que vous avez vécus / intéressants / problématiques qu'on rapporterait au groupe / ça c'est la première chose / et la deuxième chose des aménagements que vous avez produits parce que ça vous semblait être intéressant / ce que vous vous êtes interdit de faire parce que vous aviez peur de mettre en péril l'expérimentation / d'accord on fait un tour de table là-dessus↑ selon les modules / donc voyez / événement / aménagement / points positifs / points négatifs / on essaiera de tenir tout ça à chaque fois dans nos réunions afin qu'on puisse s'organiser et en rendre compte au groupe / d'accord↑ » (ChS - 1ère réunion du 26 septembre 2012 - TdP123)

La dimension didactique repose d'abord sur une définition du jeu par le chercheur : raconter l'expérience de la mise en œuvre à partir des événements considérés comme intéressants ou problématiques par le professeur mais aussi à partir des aménagements réalisés par rapport aux propositions d'enseignement présentées dans le document de la progression. En effet, comme la mise en œuvre s'est appuyée sur le document de la progression SIT, l'arrière-plan de ce contrat constitue donc un élément important de l'arrière-plan contractuel.

Dialogue d'ingénierie : deuxième essai de structuration

Des enjeux ingénieriques à identifier et à partager

Dans cette organisation fonctionnelle, tous les membres du collectif doivent identifier les enjeux de l'ingénierie mais chacun ne peut le faire que de sa place.

Pour nous faire une idée des enjeux d'un dialogue d'ingénierie, vus du point de vue des chercheurs, nous nous appuyons sur le texte publié dans les actes du séminaire national de didactique des mathématiques (Matheron & Quilio, 2014). Dans ce texte l'intention des chercheurs quant au travail des professeurs qui participent à la mise en œuvre d'une ingénierie didactique coopérative est clairement exprimée :

> « comme le didacticien qui observe les élèves au travail, le professeur doit pouvoir observer, non seulement les apprentissages que l'enseignement a rendus possibles, mais encore les problèmes que les élèves rencontrent et que le professeur doit identifier pour que leur résolution appartienne à la classe » (*Ibid.*, p. 89-90).

Il est donc nécessaire, pour les auteurs, afin de rendre possible cette observation des comportements et des productions des élèves et la partager avec le collectif, d'en organiser l'apprentissage par les moyens d'une réflexion à la fois épistémologique (au niveau des savoirs scolaires à enseigner et à apprendre), didactique (en ayant une mémoire didactique du cheminement des élèves et une connaissance du potentiel des activités proposées), anthropologique (sur l'articulation entre des savoirs culturels et scolaires).

En tout premier point, les professeurs sont responsables de la mise en œuvre des séquences d'apprentissage dans leur classe. Ils ont à étudier le document de la progression, conçu en première version par la sphère 1, afin d'en élaborer un plan d'étude pour leurs élèves car tout n'est pas dit dans ce texte. En effet, même si le texte prévoit un déroulement possible, s'il anticipe certains comportements ou difficultés, il ne peut prévoir la spécificité inhérente chaque classe et qui peut être due aux contraintes (par exemple nombre d'élèves, classes à double niveau ou pas, configuration spatiale) ou à des conditions diverses (par exemple connaissances préalables des élèves qui vont influer sur leur participation à l'activité et que les professeurs vont devoir diagnostiquer ou auxquelles ils vont devoir s'adapter).

Au départ la responsabilité de la mise en œuvre par le biais d'un plan d'étude élaboré n'est pas partagée avec les autres membres du collectif. Elle le devient, en partie, dès le moment où les professeurs en font un retour au collectif et posent des questions (du fait des actions effectives en classe) sur ce texte. C'est à partir des événements rapportés que les faits didactiques peuvent prendre corps ; ils n'étaient qu'hypothétiques auparavant ou tout simplement non encore envisagés. Les autres membres du collectif ont alors la possibilité de s'en emparer car ils ont des points

d'appui (des éléments de réalisations effectives et des conditions de ces réalisations) pour discuter les choix proposés par la sphère 1 ou des choix opérés *in situ*. Mais pour que de telles transactions puissent se réaliser, l'enjeu pour les professeurs est de *partager cette responsabilité* ; leur récit, leur analyse de la situation, leurs constats, leurs préoccupations, … sont donc constitutifs du dialogue d'ingénierie. Cette responsabilité peut aussi être partagée par le biais des observateurs qui peuvent aussi relater un événement de leur point de vue.

En second point, l'enjeu pour les professeurs est de co-élaborer au texte construit en première main par la sphère 1 qui n'a bénéficié que de l'expérience des classes d'étude (expérience de la mise en œuvre de parties de séquences non organisées selon un déroulement stable la première année) afin de le modifier et le rendre plus pratique d'utilisation et pragmatique.

Pour tous les membres, il s'agit d'apprendre de la situation d'expérimentation ou, autrement dit, des faits du point de vue de l'expérience de réalisation effective. Nous n'avons ici dressé qu'une liste d'enjeux. Certains enjeux pourraient n'être révélés qu'avec les questions qui se posent lors des échanges ou des faits qui apparaîtraient dans la biographie du groupe.

Jeux du dialogue d'ingénierie

En première intention, nous pouvons envisager que :

- les jeux des chercheurs sur les professeurs seraient (i) de faire identifier certains savoirs épistémologiques, didactiques et anthropologiques concernant l'ingénierie ; (ii) d'entrer dans le jeu du partage de la responsabilité de la mise en œuvre ;
- les jeux des professeurs sur les chercheurs seraient (i) *dès que les premiers auront avancé dans la mise en œuvre*, de partager la responsabilité de cette mise en œuvre et (ii) de co-élaborer à la progression.

Mais pour que les professeurs puissent se lancer dans la mise en œuvre et que les discussions soient les plus productives possibles, il a été nécessaire de créer un arrière-plan commun (concrétisé par le document de la progression SIT) et pour cela d'anticiper la mise en œuvre l'année 1 (2011-12). Pour que les chercheurs puissent partager la responsabilité de la mise en œuvre, il est nécessaire que les professeurs

ou les observateurs fassent part de la réalisation effective au cours des réunions ou par le biais d'un compte-rendu.

En effet, les pratiques décrites par les professeurs, selon le contrat de recherche proposé par le chercheur (cf. la section précédente) et par le travail conjoint de tous au cours des échanges, consistent à « produire du milieu ». Cette production repose sur une actualisation (parfois problématique) de l'arrière-plan commun. Cela se traduit par une organisation de la réunion qui met en avant l'expérience de la mise en œuvre de l'ingénierie vécue par les professeurs. Par exemple, lors de cette première réunion, de nombreuses relances du chercheur l'attestent. Il engage les professeurs à décrire plus finement leurs actions :

> « comment concrètement / mais vraiment euh concrètement / pas à pas / comment tu as fait ↑ / est-ce que tu as suivi exactement euh comment dire / comment tu as mis en œuvre / mais vraiment comme si on le voyait faire / tu vois ↑ / j'ai fait ci » (TdP134)
>
> « décris s'il te plaît comment tu as fait » (TdP138)
>
> « racontez / racontons nos histoires qui ont été mises en œuvre » (TdP156)
>
> « alors dis comment tu as fait / attends / dis comment / est-ce que tu dis par exemple euh / les élèves ont eu des difficultés à passer du coloriage rouge au symbole R ↑ >on va dire ça< comment tu as fait / décris » (TdP168)
>
> « concrètement dans l'action quelles décisions tu as prises ↑ » (TdP174)
>
> « alors attends concrètement / moi ça m'intéresse beaucoup là car on est réellement dans l'enjeu là / on en discutera après / comment t'as fait ↑ / qu'est-ce que tu as fait de ça ↑ » (TdP242)
>
> « t'es sûre qu'ils faisaient tous comme ça ↑ / ou ils faisaient 1 2 3 ↓ 3 ↓ » (TdP268)
>
> « quand tu dis là c'est bon là / détaille » (TdP266)
>
> « est-ce que tu peux dire une chose que tu as regardée pour essayer de voir ce qui se passait dans ta classe / le plus important dans cette fourmilière ↑ […] non mais attends / ça veut dire quoi qu'ils étaient tous au boulot ↑ qu'est-ce que tu regardais toi ↑ […] non mais faut voir à différents moments / qu'est-ce que tu regardais pour dire bon ben ça ça va / ça travaille quoi / quels indices tu prenais dans la classe toi ↑ / qu'est-ce que tu regardais ↑ » (TdP274-278)
>
> « je pense que c'est important aussi de de d'aiguiser le regard sur :: dans cette multiplicité de tâches matérielles à gérer / finalement de flux d'élèves euh :: qu'est-ce qu'on regarde dans ces cas-là / et d'essayer de le décrire / et de dire effectivement y a du bruit d'accord / visiblement y a des déplacements d'accord / évidemment y a des / mais y a des choses qui se passent positivement » (TdP282)

Reprenons la formule générale énoncée lors de l'introduction de ce chapitre : « en mettant en place tel dialogue d'ingénierie, on pourrait obtenir tel comportement de la part du collectif ou créer telles conditions de transactions dans le collectif ». Actualisons-la à la lumière de l'énoncé développé dans cette partie : « en mettant en place de manière anticipée une première forme de mise en œuvre (et en réalisant une première version d'un texte support de cette mise en œuvre), en répondant aux questions sous-tendues (de nature épistémologique, didactique ou anthropologique) par les mises en œuvre effectives de la sphère 2, la sphère 1 autorise (dans le sens de rendre auteur) les membres du collectif à co-élaborer et met en place un arrière-plan commun. En donnant à voir, en partageant les mises en œuvre (les conditions de ces mises en œuvre et ses effets), la sphère 2 enrichit cet arrière-plan commun et permet de le problématiser et ainsi d'offrir les conditions à une avancée des savoirs ingénieriques ».

Afin de compléter les éléments généraux pour une analyse empirique (partie III), nous exposons, dans le chapitre 5 suivant, les éléments méthodologiques et donnons les clés du dispositif d'observation et d'analyse.

Chapitre 5 - Décrire et comprendre la coopération entre professeurs et chercheurs : construction méthodologique

De l'approche méthodologique aux méthodes : dispositif d'observation et d'analyse envisagés pour décrire des pratiques de coopération et moyens mis au service des questions et des hypothèses.

Eléments pour une stratégie de traitement des données

Nous prendrons appui, pour exposer notre méthode, sur le travail de Gérard Sensevy (2011a) qui met en évidence les liens entre méthode, constructions théoriques et conceptions épistémologiques dans le chapitre 6 (en ligne[61]) issu de l'ouvrage *Le sens du savoir*. L'auteur y développe l'idée que le film d'étude est une représentation qui donne à voir des transactions dans leur écologie (c'est un *analogon* de l'action) et qu'il est nécessaire, pour décrire le contenu de cette action, d'en formuler une représentation digitale (verbale sous forme de textes par exemple) qui, bien que lacunaire, oriente le regard selon un point de vue (celui du chercheur au sein du cadre théorique qu'il s'est donné)[62]. Produire un tel texte consiste alors à « discrétiser la pratique [capturée par le film] en une série de moments » (*ibid.*, p. 249) puis la reconstituer en une vision synoptique ou vue d'ensemble rapprochant des faits épars dans la réalité selon l'approche wittgensteinienne comme nous l'avions développée auparavant dans le chapitre 3. Autrement dit, décomposer la pratique en la découpant temporellement selon des grains d'analyse à des niveaux d'échelles différents (qui génèrent des unités de taille et de durées différentes) puis la recomposer

[61] http://python.bretagne.iufm.fr/sensevy/sensdusavoir consulté le 20 mai 2015.

[62] Pour Gérard Sensevy, représentations analogiques et digitales de l'action doivent être présentées de manière synergique au sein de systèmes hybrides composés d'images (plus ou moins fixes ou animées) et de textes de natures diverses : « une image annote un texte […] L'image fournit une référence grâce à laquelle le texte peut dénoter l'image. Il y a aussi l'idée qu'un texte annote une image […] Là aussi, le processus d'annotation fournit une référence grâce à laquelle l'image peut dénoter le texte. […] Le chercheur dit au lecteur : voyez comment lire cette entité (texte ou image), voyez ce qu'elle peut signifier » (p. 300-301).

structurellement selon des synopsis d'action ou des intrigues[63] en regardant au « bon endroit ».

> « Le « bon endroit », ici, ne renvoie pas à un lieu « magique » dont l'identification nous donnerait la véritable teneur de la pratique mais plutôt à une manière d'orienter son regard au sein de la vision synoptique (Wittgenstein, 2004) […] Cette manière d'orienter son regard suppose, selon Diamond (1989) commentant Wittgenstein, que nous passions d'une explication du sens en termes de conditions d'assertion de tel ou tel mot ou expression à la détermination *de la place* qu'à ce mot ou expression dans notre vie. […] Le « bon endroit » - celui qui donne lieu à ce que l'on pourrait appeler des « descriptions-pivots » - possède la particularité de se prêter particulièrement bien à la mise en connexion. En termes de granularité, cela signifie que la description pivot, produite à un certain niveau d'échelle, (i) peut-être mise en relation avec d'autres niveaux d'échelle ; (ii) gagne à l'être, cette mise en relation permettant d'affiner l'explication et la compréhension des comportements produits dans les transactions didactiques » (*ibid.*, p. 273-275).

Précisons ce que signifie « niveaux d'échelle » et « descriptions-pivots » dans notre cas. Notre dispositif méthodologique doit prendre en compte les pratiques effectives de mise en œuvre des séquences en classe du point de vue des professeurs. C'est un point aveugle du dispositif et, même si nous sommes connaisseur de la chose et enseignante, nous devons nous donner les moyens de récupérer les informations implicites qui décrivent la grammaire de l'action de ces professeurs car ceux-ci agissent en fonction de différentes déterminations. Nous récupèrerons ces informations *au sein de l'espace de coopération*. En effet, les professeurs sont en prise avec le système scolaire, l'environnement même de leur école et de leur classe mais surtout (car nous sommes dans le cadre d'une mise en œuvre ingénierique) avec l'ingénierie et son texte de la progression, les chercheurs et les autres membres du collectif. Différents grains d'analyse, du niveau macroscopique de l'ingénierie (dans l'ensemble de ces composantes et de ces enjeux) au niveau microscopique des échanges sur un point précis de l'ingénierie au sein du collectif, sont à envisager. Le niveau mésoscopique pourrait alors se situer au niveau des sujets ou thèmes abordés

[63] Le synopsis est une sorte de tableau clinique d'une pratique qui en résume l'action sous une série de faits, tout en subsumant ces faits sous une même désignation (issue d'un choix théorique et méthodologique) et en les situant dans un empan complet. L'intrigue relève de la chronique narrative et résume elle aussi l'action en mettant en connexion des événements successifs. (Sensevy, *op. cit.*)

et les faits (dont nous préciserons plus bas la définition dans l'usage que nous en ferons) constituer des descriptions-pivots. En effet, le thème ou sujet discuté permet de révéler les constats et observations, les préoccupations, les questionnements nés de la pratique effective ainsi que les aménagements réalisés (niveau micro) qui seront alors à articuler avec les enjeux généraux de l'ingénierie (niveau macro) dans le jeu des échanges professeurs / chercheurs. L'échelle temporelle est aussi à considérer, du moment précis où se déroule un événement à l'ensemble des années de mise en place du dispositif : comment évolue ce thème ou sujet et comment il se constitue en fait d'expérience pour le collectif. Nous aurons donc à concevoir un dispositif d'analyse qui appréhende ensemble ces granularités et ces temporalités.

Nous prendrons également appui sur les travaux de chercheurs en didactique comparée (Ligozat, 2008 ; Ligozat & Leutenegger, 2008 ; Marlot, 2007 ; Mercier & Quilio, 2013d ; Quilio, 2008 ; Schubauer-Leoni et al., 2007) qui ont construit un réseau de significations en enquêtant sur des traces recueillies et ont mis en place un travail de réduction des données selon le principe synoptique (Wittgenstein, 1953-2004). Ces travaux sont pour nous des illustrations relatives à la manière d'actualiser les principes méthodologiques décrits précédemment. La spécificité de notre travail est qu'il concerne un système ingénierique se déroulant sur plusieurs années ; nous cherchons à adapter méthodologiquement une telle stratégie d'obtention des données.

Nous nous inspirerons enfin des réflexions d'Hervé Dumez pour qui il n'y a pas une seule façon exhaustive, objective et neutre de décrire la réalité mais de nombreux « voir comme » dans le sens de Wittgenstein (Wittgenstein, 2004). Il les a nommés dans ce contexte des « décrire comme » (Dumez, 2010). L'auteur préconise de commencer par une description minimale qui exclut des éléments pour les réintroduire dans des « décrire comme » successifs qui enrichiront la description première et permettront d'accéder à des descriptions plus denses. Il convient d'expliciter ces « décrire comme », ce que nous ferons dans la seconde partie de ce chapitre après avoir présenté notre corpus de données.

Recueil des données et constitution du corpus

Délimitation de notre terrain d'étude

Le domaine SIT est pris en charge par deux groupes, désignés par leur lieu géographique d'implantation (Bretagne et Provence), qui travaillent, malgré la distance, conjointement et de manière étroite. Ces deux groupes communiquent le plus souvent à distance par visioconférences et échanges de courriels sur la liste de diffusion dédiée. Chacun des groupes est composé de chercheurs, doctorants, professeurs, formateurs, inspecteurs. Les réunions sont organisées séparément sur les deux sites et chaque groupe possède sa propre liste de diffusion locale, créée à l'origine pour les échanges administratifs.

Dans l'étude empirique qui va suivre nous nous focaliserons plus particulièrement sur le collectif de l'académie d'Aix-Marseille (groupe Provence), ce qui ne nous empêchera pas de signaler les événements du groupe breton qui ont eu un retentissement sur le collectif. Le groupe Provence se constitue dans son fonctionnement complet à partir de la deuxième année de mise en place du dispositif (2012-13) lorsque les professeurs provençaux du groupe expérimental entrent dans le processus de coopération avec les membres (dits de la sphère 1) déjà engagés lors de la première année (2011-12). Ce collectif provençal regroupe la deuxième année de l'expérimentation (2012-13) quatorze enseignants dont un professeur de la classe d'étude qui a découvert l'ingénierie la première année[64], une conseillère pédagogique, un inspecteur de l'Éducation nationale, trois chercheurs et moi-même, enseignante et doctorante. La troisième année (2013-2014), le groupe est composé de vingt-et-un professeurs (dont six professeurs qui expérimentent à nouveau le dispositif[65]), quatre nouveaux conseillers pédagogiques, deux nouveaux inspecteurs, un nouveau doctorant qui s'ajoutent aux chercheurs, conseillère pédagogique et doctorante déjà présents l'année précédente. Nous signalerons quelques fois certains faits relatifs à la

[64] Ce professeur, en congé de maternité, a repris ses fonctions en mars 2012. La classe d'étude pour le collectif marseillais a donc été menée par deux professeurs successivement la première année d'expérimentation (2011-12).

[65] La plupart des professeurs qui n'ont pas renouvelé leur participation ont changé de poste et donc de niveau de classe. Ces professeurs sont restés néanmoins affiliés à la liste de diffusion locale.

quatrième année (2014-15) de mise en place du dispositif *Ace-Arithmécole* (2014-2017) qui intègre les autres niveaux du cycle 2[66] quand il nous semblera intéressant de donner une perspective plus étendue à certains phénomènes.

Constitution et description du corpus

Rappelons d'abord les composantes organisationnelles du dispositif pour le domaine SIT et les données associées qui nous intéressent. Nous distinguons :

- la composante des échanges dont les lieux sont les réunions en présentiel, les réunions en visioconférence (pour la sphère 1), la liste de diffusion locale, le forum du site de la recherche, le document SIT de la progression[67] ;
- la composante des productions d'écrits du collectif et le matériel collecté constitué par le document SIT de la progression, les documents décrivant le *Journal du nombre* ou l'*anticipation* (dispositifs didactiques mis en place dans le domaine SIT), des textes synthétisant l'intérêt du dispositif, une liste de matériel didactique, un document récapitulant le lexique utilisé et d'autres productions communes à tous les domaines comme par exemple la vision d'ensemble, la vision détaillée et la synchronisation des domaines[68] (organisant leur programmation dans l'année scolaire et les uns en lien avec les autres) ;
- la composante des mises en œuvre dans les classes et les traces de ces mises en œuvre : les comptes-rendus, les vidéos des séances en classe, les productions d'élèves ou les productions collectives de classe, les préparations des professeurs.

Nous travaillerons à partir du matériel empirique recensé ci-dessous puis nous en commenterons les éléments au niveau des modalités et conditions de recueil mais

---

[66] Les nouveaux programmes pour l'école primaire et le collège dont la mise en œuvre commence en 2015 pour l'école maternelle redécoupent les cycles en cycle 1 (maternelle), cycle 2 (CP, CE1, CE2), cycle 3 (CM1, CM2, 6e), cycle 4 (5e, 4e, 3e).

[67] Bien qu'il soit une production écrite collective, nous plaçons également le document SIT de la progression dans la partie des échanges car il est le support de commentaires entre les membres de la sphère 1 (comme nous avions commencé à le décrire au chapitre 2 dans la section « Jeu de commentaire de production de texte »).

[68] Tous ces documents sont consultables sur le site : http://python.espe-bretagne.fr/ace/

aussi au niveau de l'apport que ces derniers représentent pour notre étude sur la coopération. Nous verrons ainsi en quoi ces éléments constituent notre corpus.

Année 1 (2011-12)
Fichiers audio des visioconférences (sphère 1) Courriels Films vidéos tournés dans les classes d'étude Comptes-rendus des séances des classes d'étude Productions d'élèves et de classe Notes personnelles Versions du document de la progression SIT
Année 2 (2012-13)
Fichiers audio des visioconférences (sphère 1) Vidéos des neuf réunions groupe Provence Courriels et message déposés sur le forum du site internet Films vidéos tournés dans les classes d'étude et expérimentales Comptes-rendus des séances Productions d'élèves et de classe Notes personnelles Versions du document de la progression SIT
Année 3 (2013-14)
Vidéos des six réunions groupe Provence Courriels Films vidéos tournés dans les classes d'étude et expérimentales Comptes-rendus des séances Productions d'élèves et de classe Notes personnelles Versions du document de la progression SIT

Liste du matériel empirique utilisé selon les années

Visioconférences

Une partie des visioconférences a été enregistrée en format audio grâce à un dictaphone. Les visioconférences entre les membres de la sphère 1 sont régulières, sur un rythme à peu près mensuel (et parfois plus selon les besoins) et durent environ deux heures. Nous n'avons pas pu toutes les enregistrer pour des raisons techniques diverses, et les traces restantes de ces réunions consistent en nos notes personnelles. Ces visioconférences permettent aux membres de la sphère 1 de faire le point sur l'avancée de l'ingénierie que ce soit au niveau administratif, organisationnel, didactique, d'échanger leurs observations, idées, conceptions, d'exposer leurs interrogations et de prendre des décisions quant à la rédaction des documents supports de l'ingénierie. Certains des éléments de discussion portent sur le projet et sur ses conditions et contraintes matérielles (par exemple dates de réunion, mise en place d'une plate-forme informatique pour pouvoir échanger les différents travaux et matériaux collectés). Les professeurs des classes d'étude rapportent ce qu'ils ont mis en place en classe, ce qu'ils ont remarqué quant aux réactions des élèves et ce qu'ils ont régulé, ce que ça leur « a coûté » parfois en termes d'efforts, de doutes. Les chercheurs précisent les enjeux épistémologiques et didactiques de la situation par rapport à ces retours, apportent des informations au sujet du dispositif général, font part aussi de leurs observations des situations observées dans les classes ou de situations observées par ailleurs…Tous émettent des propositions de mises en œuvre et partagent leur questionnement. Les membres du groupe décident également des écrits collectifs à produire et des modalités de rédaction de ces productions. Les visioconférences nous permettent d'apprécier ce qui constitue l'arrière-plan du collectif du point de vue de la sphère 1 puisque le rôle principal de la sphère 1, selon l'analyse présentée au chapitre précédent (chapitre 4), est d'anticiper dans l'avancée des savoirs ingénieriques.

Document de la progression SIT

Nous en avons conservé les différentes versions qui ont été produites tout au long d'une rédaction reprise partiellement sur toutes les années. Ce texte comporte une progression composée de séquences d'enseignement organisée en modules (sorte d'organisations thématiques) et récapitule pour chacun des modules les enjeux

spécifiques, propose une description de mise en œuvre possible et des exemples de productions d'élève commentés. Il joue le rôle de support des échanges entre les membres de la sphère 1. En effet, les modifications entre les versions successives peuvent être considérées comme des traces de la réflexion collective, nourrie par les mises en œuvre effectives et les échanges avec les professeurs des classes expérimentales et les observateurs. Les commentaires des membres de la sphère 1 qui les accompagnent en marge témoignent des différents points de vue et expériences de chacun. Le texte de la progression concrétise une partie de l'arrière-plan (ou système stratégique du contrat selon Sensevy, 2011a) du groupe dans son ensemble.

Courriels et liste de diffusion ; messages du forum

Il y a plusieurs listes de diffusion :

- celle destinée aux membres de la sphère 1. C'est la voie privilégiée des échanges. Les divers documents rédigés par les membres du collectif sont amendés par les autres membres et les suggestions, remarques, constats discutés ; des apports documentaires (articles, chapitres de livre) les complètent parfois. Par ce média et au travers du chercheur responsable du projet, d'autres didacticiens et chercheurs, des responsables de l'Éducation nationale font part de leurs remarques et viennent ainsi confronter leurs idées ou constats à celles du collectif ;
- celles destinées aux membres des groupes locaux (Bretagne et Provence). Hormis les réunions et les échanges individuels suite aux visites dans les classes, une partie des échanges a lieu au travers de la liste de diffusion locale.

Le forum du site est ouvert à tous les groupes régionaux[69]. Les messages portent sur des demandes de renseignements sur l'utilisation du matériel et sur les ressources ou sur des questions plus générales (par exemple la question de l'intégration des élèves ACE dans des classes non ACE l'année scolaire suivante, la question des élèves à

[69] Le forum du site a été très peu utilisé par les professeurs provençaux : environ 5% des messages échangés ont été majoritairement envoyés au cours de l'année 2012-13.

besoins éducatifs particuliers, la question des évaluations). Les messages donnent parfois à voir la pratique par le biais de suggestions, de bilans, de propositions de mises en œuvre, d'encouragements ou par le biais des réponses qui sont tout aussi bien du fait des professeurs, des chercheurs, des inspecteurs que des doctorants.

Films des réunions du groupe Provence

Nous avons capturé toutes les réunions entre les membres du groupe Provence sous la forme de vidéos (en format numérique uniquement) et en caméra fixe. Les problèmes techniques principaux qui se sont posés ont été (i) le manque d'ouverture d'angle de la caméra (ou le manque de recul), ce qui fait que les participants et ce qui était parfois écrit ou projeté sur un tableau n'ont jamais pu être saisis dans leur ensemble, et (ii) des difficultés à saisir tous les énoncés oraux, notamment quand la personne qui s'exprimait était éloignée du micro ou parlait d'une voix faible. Nous avons ensuite doublé certaines réunions avec un dictaphone qui nous a permis de pallier parfois ce problème audio. Elles durent un peu plus de deux heures et demie effectives. Les réunions du collectif sont les lieux où se déroule le *procès de la mise en œuvre des situations didactiques*. Elles constituent donc le centre de notre investigation.

Comptes-rendus de séances

Les comptes-rendus, qui font partie du contrat de recherche entre les chercheurs et les professeurs, transitent par la liste de diffusion locale pour les professeurs des classes expérimentales. Ces textes n'ont pas de forme normée. Certains présentent des photographies de groupes d'élèves au travail, de productions d'élèves et de productions collectives (sur affichage, sur tableau noir). Pour qui est connaisseur de l'ingénierie, ces photos véhiculent des renseignements précieux sur les techniques utilisées ou sur les organisations de classe décidées car tout ne peut pas être dit dans le texte écrit du compte-rendu. Nous renvoyons aux travaux de Gérard Sensevy (2011a, chapitre 6, en ligne, « Comprendre l'action didactique : méthode et jeux d'échelle ») et notamment au concept d'analogique et de digital et à leur nécessaire complémentarité pour une compréhension de l'action conjointe didactique professeur-

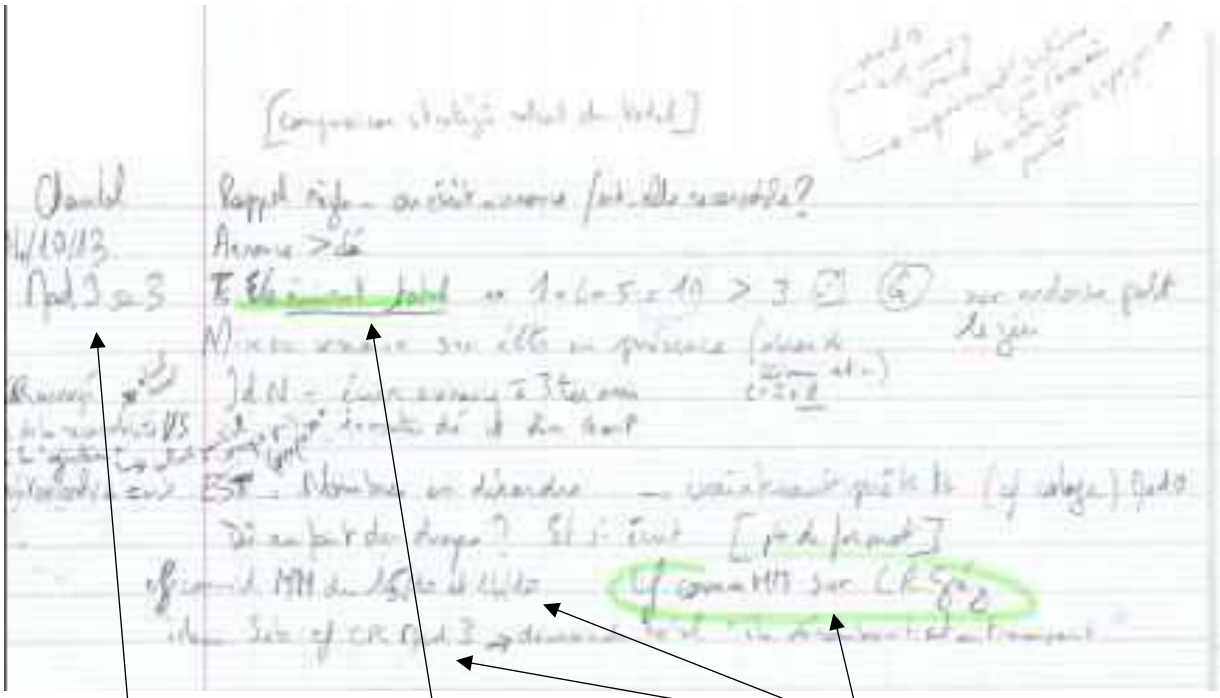
élèves. Pour les membres du collectif, les comptes-rendus sont donc des sources d'informations sur la réalisation effective de l'ingénierie dans les classes.

Films des séances de classe

Nous avons pu capturer une partie des séances sous la forme de vidéos (en format numérique uniquement) selon les disponibilités de notre emploi du temps professionnel. Ces séances se sont déroulées tant dans la classe d'étude que dans les classes expérimentales de la région. Le tournage fait aussi partie du contrat de recherche : des extraits de ces films servent de point de départ de discussion durant les réunions et sont aussi utilisés dans le cadre de la formation préalable pour donner à voir des pratiques et susciter des questionnements. Ces vidéos sont tournées avec une seule caméra en position fixe ou mobile et sans micro-cravate. Les conditions de tournage peuvent être qualifiées d'artisanales au niveau de la technique mais là aussi notre position de connaisseur a orienté notre regard et a dirigé la caméra vers les moments qui nous semblaient, sur le coup, opportuns.

Notes personnelles

Depuis le début de la mise en place du dispositif d'ingénierie nous prenons des notes durant toutes les rencontres auxquelles nous avons participé (visites dans les classes, réunions, visioconférences) dans un cahier dédié (nous en avons un par année). Quand certains éléments font référence à d'autres moments ou lieux, courriels, compte-rendus, réflexions, … nous le notons ou le signalons. Ces cahiers font pour nous liens entre les divers matériaux de notre empirie. En voici un extrait scanné :



Référence de la rencontre, ici visite en classe : professeur, date (14/10/13), avancée dans la progression (Module 3 séance 3)

Elément important par rapport aux enjeux (« tous les élèves écrivent le total »)

Documents liés : renvoi à des commentaires sur le CR d'un professeur (« commentaires MM sur CR Greg »), renvoi au CR d'un autre professeur (« Sab CR Mod3 »), à des courriels (« courriels MM du 15/10 et 14/10 »)

Il faudrait évoquer également dans cette section une forme d'échanges qui se déroule lors des visites de classe et qui pourrait passer inaperçue : les échanges individuels. Ces échanges sont par nature duaux et rapides car ils se déroulent aux marges de la séance, en général pendant les temps de récréation, occasionnellement aussi durant la séance même. Quelquefois ils regroupent les professeurs d'une même école engagés dans le dispositif. Nous en avons très rarement des traces dans nos notes mais avec le recul nous pensons que des idées, des savoir-faire ingénieriques circulent par ce biais et que l'on peut en percevoir les traces durant les réunions.

Stratégies de traitement des données

Tout ce matériel empirique permet, grâce à son format pérenne, une observation différée et de ré-expériencer l'instant à la lumière de notre questionnement. Pour cela, le corpus des données doit être traité de manière à reconstituer le vécu au plus près

du réel sachant que celui-ci ne pourra être « épuisé » et que toute reconstitution - même une transcription aussi fidèle soit-elle d'un dialogue - est déjà une annotation de ce réel. Il y a nécessité de choix : ce choix est guidé par notre connaissance du terrain et par le style de pensée dans lequel nous agissons et qui peut être mis au jour notamment dans les analyses *a priori*.

Comme nous cherchons à comprendre la logique d'un processus de coopération qui se déroule en grande partie au cœur de la relation chercheurs / professeurs, nous allons nous pencher sur les lieux des échanges, en nous focalisant sur les réunions du collectif Provence qui sont les *lieux du procès de la mise en œuvre des situations didactiques*. Il s'agit de développer dans cette section la manière dont nous traitons les données associées à ces réunions et comment nous les mettons en réseau dans nos descriptions avec les autres données qui constituent notre corpus.

Des « décrire comme » successifs

Nous avions déjà commencé à adopter une démarche descriptive. Elle débute par des descriptions élaborées pour comprendre ce qu'il se passe et accéder à un premier aperçu de ce que peut être la coopération. Puis elle s'oriente vers des descriptions intégrant de nouveaux éléments permettant de mettre en évidence de nouvelles connaissances sur les processus et les modalités de cette coopération.

En effet, dans le chapitre 2 nous avions présenté de manière générique les échanges au sein du dialogue d'ingénierie par une définition : ce sont des transactions au sujet d'objets didactiques en mathématiques, transactions qui ne peuvent prendre sens que par rapport à un arrière-plan fournisseur de significations (Wittgenstein, 1987). Puis nous leur avions donné une forme de vie en utilisant le modèle du jeu et ses jeux de langage associés. Nous avions ainsi construit un premier essai de structuration du dialogue d'ingénierie et décrit les échanges comme pouvant être des jeux dialogiques d'ingénieries (jeux de commentaires et compte-rendu de pratique, d'analyse de vidéo, de présentation d'événement, de mise à l'épreuve mathématique, de commentaire de production de texte). Il s'agit alors d'un « décrire comme » au sens de Dumez (2010) qui permet de percevoir ce qu'il se passe entre les personnes au cours des transactions d'ingénierie, et ce qu'elles y font mais qui laissent *in absentia* les contenus

à proprement parler didactiques. Nous pouvons dire que la description reste générique sur une échelle de répartition selon la densité épistémique.

Dans le chapitre précédent (chapitre 4), nous avions construit un second essai de structuration des échanges. Nous avions décrit les transactions selon un autre angle de vue et *a priori* afin de mettre au jour les *jeux d'apprentissage* (Sensevy, 2011a) spécifiques entre chercheurs et professeurs. Nous avions montré quels étaient les jeux d'apprentissage que les chercheurs tentaient de jouer sur le jeu des professeurs et vice et versa. Nous avions commencé à les nommer : identification des enjeux de savoirs épistémologiques, didactiques et anthropologiques, partage des responsabilités, problématisation de certains éléments de la situation d'enseignement et peut-être d'autres encore en vue d'une mise en accord sur l'arrière-plan des échanges et de la co-élaboration des ressources. Sous la forme de vie des jeux d'apprentissage, nous proposions ainsi un autre « décrire comme » plus dirigé vers les intentions des acteurs mais qui n'aborde pas, lui non plus, les contenus didactiques même s'ils commencent à être évoqués (variables, changements, productions et questions des élèves). La description reste là encore générique sur une échelle de répartition selon la densité didactique.

Il s'agit d'enrichir ces premières descriptions par d'autres, de manière à introduire des éléments destinés à « faire voir » d'autres aspects. Notamment à faire voir le sens de l'action conjointe. Nous en dégagerons peu à peu la logique en nous penchant à des niveaux plus microscopiques lors des réunions du collectif. Ces niveaux nous permettent d'aborder les contenus didactiques et la manière dont ils sont traités au sein du collectif.

Traitement des données du dialogue au cours des réunions

Le texte des échanges au sein des réunions du collectif Provence constitue le procès de l'enquête que les membres mènent sur les mises en œuvre des séquences proposées par l'ingénierie. Les données recueillies par l'enregistrement vidéo des réunions du collectif sont brutes et toutes ont été annotées. Nous rendrons compte, dans cette section, de ce travail d'annotation : transcriptions, réductions à divers niveaux (découpages, regroupements) et commentaires, codages et requêtes de

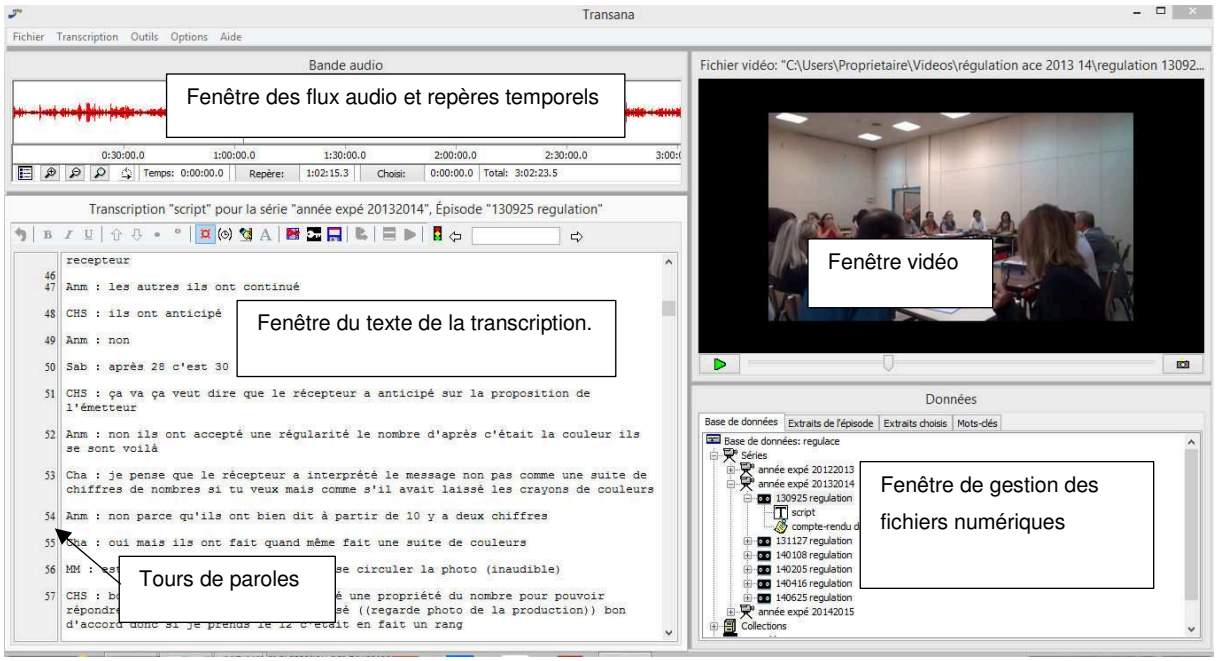
recherche. Auparavant, nous précisons comment nous avons utilisé un logiciel qui nous a permis d'annoter les données recueillies.

Utilisation du logiciel *Transana*

Dans cette section, nous présentons un des moyens d'annotation des données recueillies par vidéoscopie. Nous avons utilisé le logiciel *Transana* (Fassnacht & Woods, 2001), logiciel d'aide à la transcription, d'aide à la gestion des données filmiques et d'aide à l'analyse quantitative et qualitative des contenus.

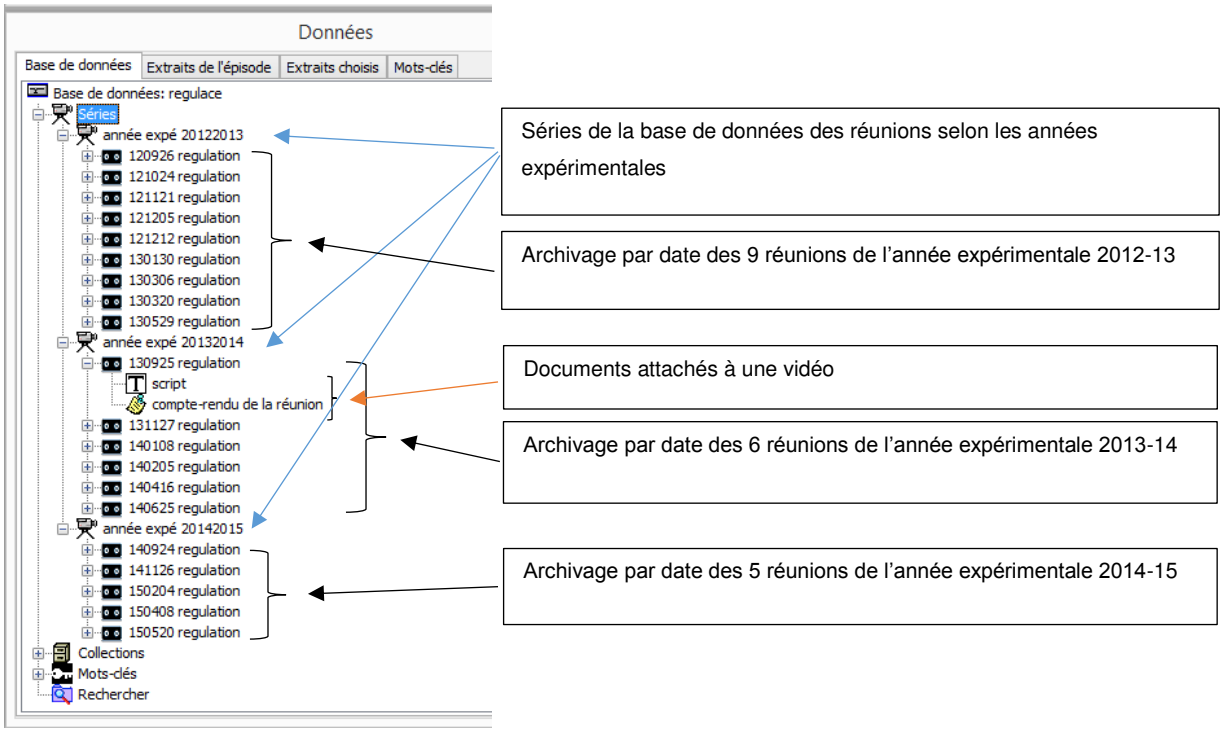
Dans un premier temps, le logiciel a été utilisé pour la transcription des échanges et l'archivage des films des réunions dans une base de données. La fonction de transcription est facilitée par un écran partagé en fenêtres : zones de texte, d'images vidéo et de flux audio sont coordonnées. Des retours ou des avancées, des pauses et des ralentissements (grâce à des raccourcis-clavier) assistent la saisie du transcript. Chaque intervention d'une personne est notée comme un tour de paroles par une numérotation générée automatiquement à chacun des retours à la ligne du clavier.

La fonction « gestion des fichiers » apparaît dans une quatrième fenêtre et permet d'organiser le corpus des films numérisés.



Capture d'écran du logiciel *Transana.* Les différentes fenêtres du logiciel

Nous avons organisé notre base de données en trois séries : année expérimentale 2012-13, année expérimentale 2013-14, année expérimentale 2014-15. Dans chaque série sont répertoriées par date les vidéos des réunions. Le texte de la transcription est attaché à chacune des vidéos ; d'autres documents (comme par exemple les comptes-rendus des réunions ou les comptes-rendus des professeurs sur les séances réalisées) peuvent être joints.

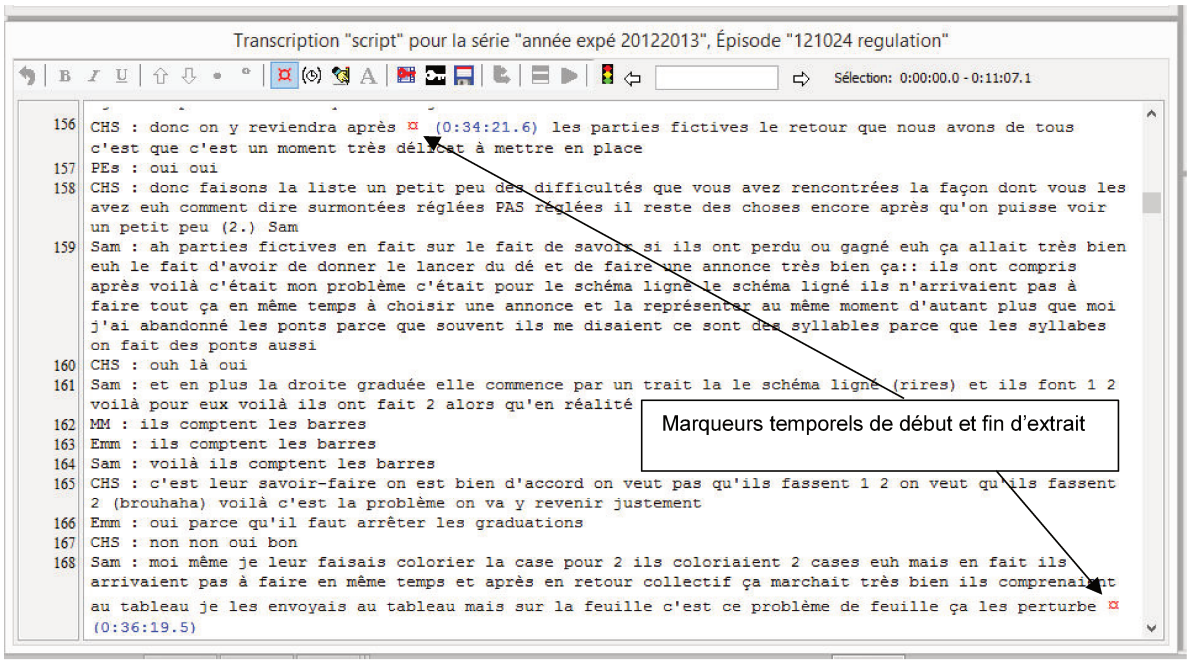


Capture d'écran du logiciel *Transana.* Fenêtre de gestion des fichiers_séries

Le repérage des films vidéos des réunions se fait toujours selon leur date suivi du mot « régulation ». Cette date est codée par année puis mois puis jour (exemple : 121024 pour le 24 octobre 2012) ; cette organisation ordonne automatiquement et chronologiquement les films et nous permet de visualiser d'emblée le rythme des réunions sur chacune des années d'expérimentation.

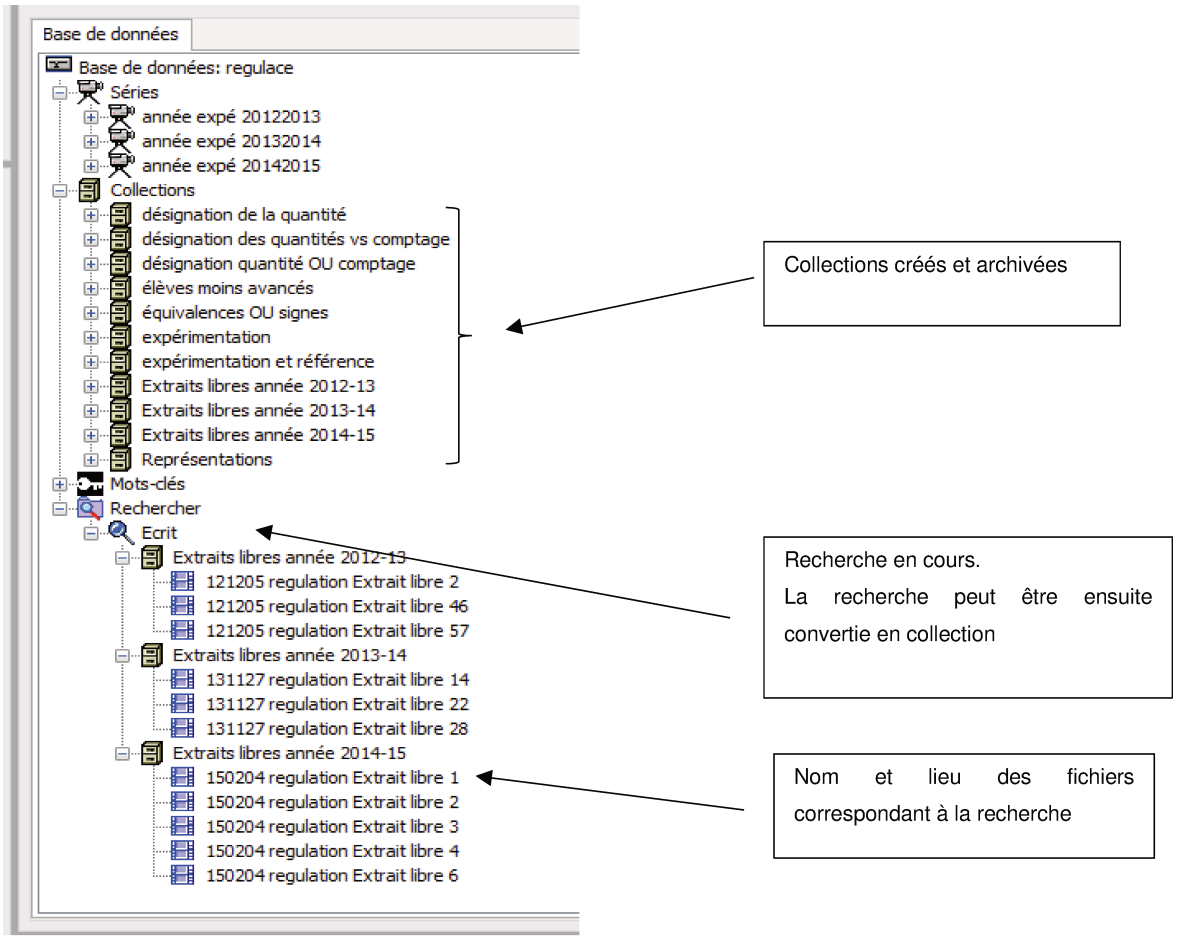
Dans un second temps, nous avons utilisé une des fonctions permises par le logiciel : celle du découpage du transcript en ce que nous nommons des épisodes qui, associés à des extraits vidéos et audio, sont en fait des clips vidéos. Ce découpage se réalise grâce à des marqueurs temporels (« time code » noté « ¤ ») insérables dans le texte par un raccourci du clavier. Ces marqueurs repèrent le début et la fin du clip. Les marqueurs peuvent être complétés par une expression en « heure :minute :seconde.

dixième de seconde » (par exemple (0:06:52.9)) qui indique à quel moment de la séquence vidéo commence ou se termine l'extrait repéré.



Capture d'écran du logiciel *Transana*. Fenêtre du texte de la transcription - création d'un épisode (clip)

Puis, dans un troisième temps, nous avons utilisé le logiciel dans sa fonction d'aide à l'analyse. Chaque épisode ou clip a pu être annoté avec des mots-clés. Ce codage permet de formuler des requêtes à l'aide des opérateurs booléens (ET, OU, SANS) et de sélectionner, grâce au moteur de recherche du logiciel, des épisodes pour créer une collection thématique définie par notre questionnement. Ainsi peuvent être classés des épisodes appartenant à diverses séries ou à divers fichiers de films : il n'y a plus de continuité temporelle mais une approche thématique ou morphologique (Ginzburg, 2010) instrumentée.



Capture d'écran du logiciel *Transana.* Fenêtre de gestion des fichiers_ collections et recherche

Organiser des épisodes grâce à leur indexation permet d'interroger le corpus des réunions par croisement de différents critères et de susciter des hypothèses ou des liens possibles qui ne seraient pas apparus sur des épisodes traités isolément. Le travail se réalise donc à une échelle temporelle plus importante : la collection thématique peut regrouper des épisodes qui se sont déroulés sur une réunion, sur une année d'expérimentation ou sur l'ensemble des années d'expérimentation.

Transcription des échanges : constitution du procès de l'enquête

Nous avons fait le choix de transcrire les données enregistrées en tentant de restituer le discours oral sans l'alourdir avec les digressions hors champs (par exemple des problèmes de température dans la salle ou les problèmes techniques dus à la mise en place du vidéoprojecteur) ni l'alourdir par des aspects prosodiques (ton utilisé lorsqu'il nous semblait peu signifiant, ou déplacement) qui ne concernent pas l'ingénierie

directement. Cependant nous nous sommes gardée de trop lisser le discours en tentant de le rendre conforme à la forme écrite : nous avons veillé à restituer au mieux la locution telle qu'entendue tout en la rendant la plus aisée possible pour la lecture.
Nous nous sommes inspirée d'une convention de transcription proposée par le logiciel[70]. Nous avons indiqué les intonations notamment interrogatives (symbolisées par « ↑ » dans la transcription), les temps de pause (notés par le nombre de secondes, par exemple « (2.) » pour deux secondes de pause), une énonciation soutenue (« oui::: »), les ralentissements ou accélérations dans le débit vocal (« <[portion de texte]> ou >[portion de texte]< ») qui signalent des insistances ou des apartés dans le discours, l'accentuation portée sur certains mots que nous avons alors écrits en majuscules (« OUI »). Lorsque nous ne sommes pas sûre parfois d'avoir perçu correctement certains fragments oraux, nous écrivons l'énonciation entre parenthèses.
Nous avons repéré les éléments non verbaux qui désignent les objets de savoir par des descriptions entre double parenthèses : par exemple « ((mime écriture en bas de la boîte)) » pour un geste accompagnant le discours sur une des représentations (ici la boîte) utilisée dans le dispositif.
Ce choix de transcription est motivé par l'exploitation d'une transcription qui s'attache à analyser le contenu du discours au niveau des savoirs et des connaissances que portent les sujets. Nous obtenons ainsi les minutes du procès de l'enquête sur la mise en œuvre des séquences que mène le collectif. (cf. annexe 2)

Découpages du texte : chronique des sujets abordés

Nous avons découpé les minutes de ce procès de l'enquête grâce à des indicateurs temporels (time-code) que nous avons insérés dans le corps de la transcription. Ces marqueurs temporels délimitent ainsi des épisodes (sous forme de clips vidéo) que nous définissons comme un ensemble cohérent d'actions produites par les transactants ou encore comme une unité de sens descriptible, c'est-à-dire qu'il est

[70] Cette notation de transcription est décrite par Jefferson dans : Jefferson, G. (1984). Transcription Notation. In J. Atkinson, & J. Heritage (Eds), *Structures of Social Interaction*. New York: Cambridge University Press.

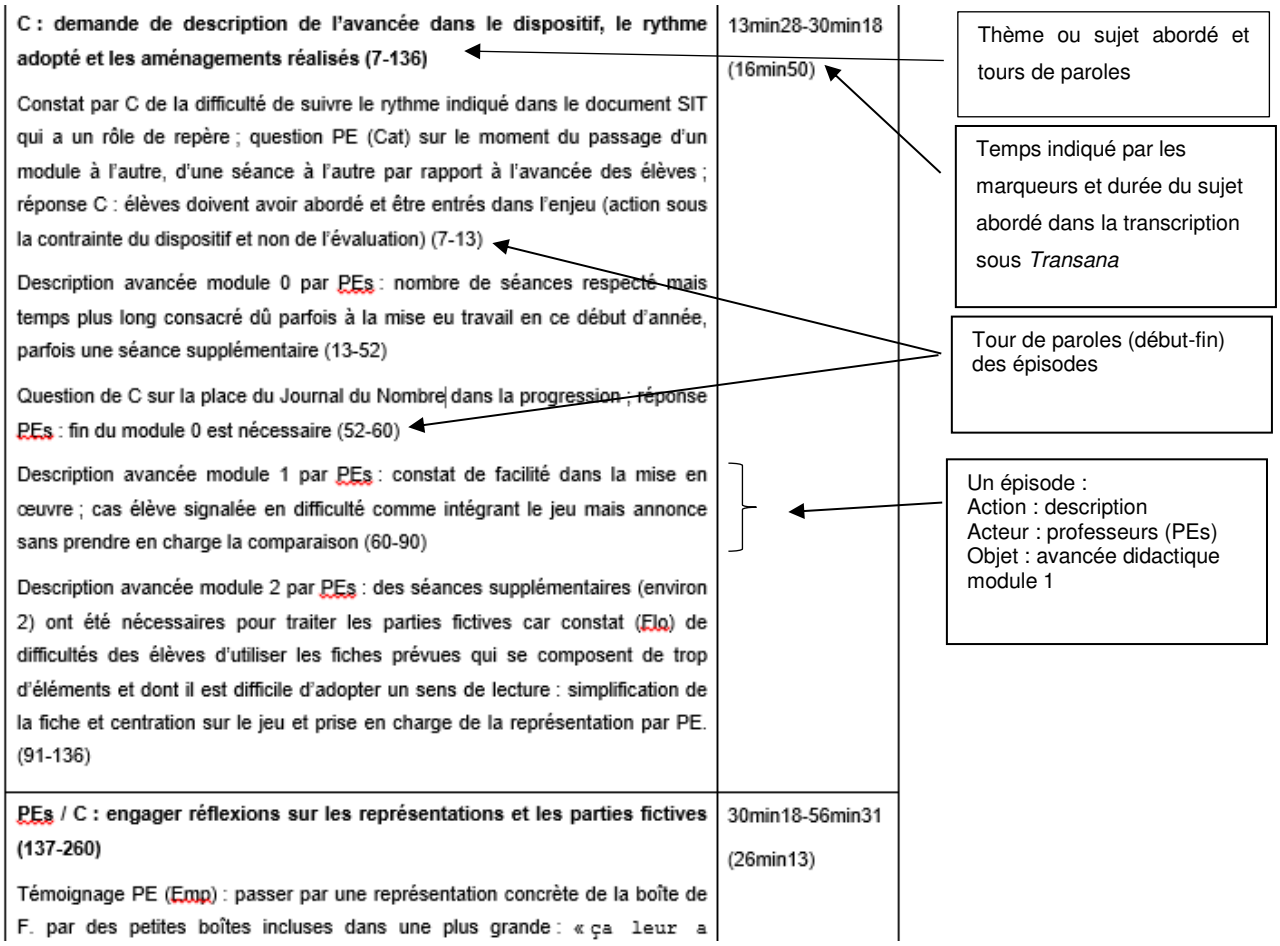
possible de décrire sans dénaturer l'esprit de l'échange. Nous avons tenté de dégager pour chaque épisode :

- une action ou acte de langage (constat, question, observation, proposition, présentation, décision, remise en cause, …) ;
- un objet de discussion qui peut-être mathématique (par exemple une représentation, les écritures additives à x termes), ou didactique (par exemple concerner l'avancée du temps didactique, le rythme d'avancée, les difficultés de certains élèves) ou concerner des préoccupations matérielles, administratives ou organisationnelles ;
- un acteur ou groupes d'acteurs (le chercheur est identifié par les lettres « Ch » suivies de l'initiale du nom, le conseiller par « Cpc », l'inspecteur par « IEN », les professeurs des écoles par « PE » si on ne peut les identifier ou « PEs » s'ils sont plusieurs ou par trois lettres pour les distinguer (Cat, Flo, Val, Reg, …).

Nous cherchons à mettre en évidence des unités de sens dans le flot continu des échanges. Pour cela nous avons tenté de repérer un changement de contenu ou d'orientation dans l'action discursive ou de repérer des indices verbaux qui signaleraient le début ou la fin d'un épisode (« je voudrais vous donner l'ordre du jour », « ça va ? On arrête sur ce module maintenant »). Les durées de ces épisodes ainsi que la quantité de prises de parole ou d'interventions sont très inégales. Elles peuvent s'étendre de un ou deux tours de paroles et quelques secondes d'échanges à une cinquantaine de tours de paroles et quelques minutes d'échanges.

Nous avons procédé également à un découpage plus large pour faire apparaître les thèmes ou sujets abordés. Nous en comptons entre trois et douze par réunion, eux aussi d'inégale durée ; certains se poursuivent lors de la réunion suivante.

Le découpage en thèmes et en épisodes est présenté sous la forme d'un tableau synoptique, un pour chacune des réunions (cf. annexe 3). Voici un extrait du tableau synoptique d'une réunion selon les thèmes traités et les épisodes annotés :



Extrait du tableau synoptique selon les thèmes et les épisodes de la deuxième réunion (année 2, 2012-13)

Nous obtenons ainsi une chronique des sujets abordés durant les réunions du collectif Provence. C'est une autre forme de « décrire comme », qui tient compte des interactions à un niveau microscopique mais qui apparaît à une échelle plus mésoscopique quant au rendu car la description reste factuelle. Une telle description est spécifique par rapport aux contenus mathématiques et didactiques. Cependant elle n'explicite pas ce qui a lieu au niveau relationnel (selon l'action didactique conjointe) entre les membres du collectif.

Regroupement d'épisodes : intrigue didactique

Nous cherchons à décrire les jeux joués par les protagonistes selon les enjeux de savoir. Pour cela, nous constituons des *séries épisodiques* par groupement d'épisodes selon les enjeux de savoir avec le logiciel *Transana*. Nous avons procédé pour cela à

un codage des épisodes puis une demande de requête à partir de l'analyse *a priori* des situations didactiques ; analyse que nous présenterons par la suite dans la partie empirique.

Les mots-clés y jouent un rôle essentiel car ce sont eux qui vont permettre l'indexation des épisodes en les annotant dans leurs traits saillants. Pour constituer la liste et les catégories de mots-clés, nous avons produit une première liste que nous avons testée sur deux réunions. Il est toujours possible par la suite de rajouter des mots-clés, si besoin, lors du codage effectif. C'est l'analyse *a priori* du système ingénierique et les premiers essais de structuration du dialogue d'ingénierie qui nous ont permis d'envisager cette liste. Les mots-clés de premier ordre (acteurs, autres domaines, contrats de recherche, date, éléments didactiques, jeu d'ingénierie, matériel, modules d'enseignement, niveau d'échelle) nomment des catégories dans lesquelles sont déclinés différents items ou mots-clés de second ordre. Chaque item peut être défini ou explicité. Une telle indication est précieuse à l'usage car elle permet de conserver le même sens, la même forme de vie au mot-clé tout au long d'une indexation qui peut s'avérer longue et se réaliser sur des temps espacés. Le sommaire des mots-clés, généré automatiquement selon un ordre alphabétique, exporté du logiciel, est placé en annexe 4.

A partir de la série épisodique produite, nous proposons une intrigue didactique dévoilant les jeux joués par les transactants en utilisant les caractéristiques de l'action conjointe : le triplet des genèses (mésogénèse, chronogénèse et topogénèse) et la notion d'équilibration didactique. Nous cherchons à obtenir un « décrire comme » des échanges à un niveau micro, spécifique des contenus mathématiques et didactiques et qui rend compte des transactions entre les protagonistes.

Nous nous centrerons sur la situation didactique du *Jeu des annonces* qui installe les conditions de l'étude des élèves par une action de comparaison entre deux collections. Cette comparaison instaure les notions mathématiques d'équivalence et de différence en question fondamentale du processus de mesure de collections.

Quels seront alors les événements rencontrés par le collectif et qui seront sujets à discussion ? Quels systèmes stratégiques du contrat et du milieu seront mobilisés et quelle forme de rapports à ces objets le collectif construira-t-il ?

Constitution d'une biographie didactique du collectif : synopsis des échanges et des faits

Distinction entre « événement » et « fait »

Il nous semble, à cette étape, nécessaire de définir les termes « événement » et « fait » de manière plus spécifique à notre travail. Un événement est ce qui se produit et qui est notable dans l'histoire du groupe. En l'occurrence un événement peut être rapporté par un membre du groupe qui le rend ainsi public ou être noté par nous-même car nous l'avons identifié comme remarquable. Selon Fleck (1935, 2008) le fait entretient une relation avec le collectif de pensée, il est sous contrainte du style de pensée car il est activement construit : « nous pouvons provisoirement définir un fait scientifique comme une relation entretenue par des concepts, conforme à un style de pensée » (*ibid*, p. 147). Nous considérons à la suite de l'auteur que le fait est reconnu, institué par le collectif car fruit d'une construction collective :

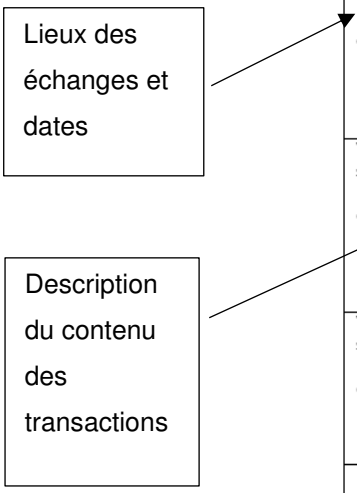
> « Aucune expérimentation isolée n'est en mesure de démontrer ce fait [la relation de la réaction du test de Wassermann avec la syphilis] ; il ne peut l'être que par une expérience élaborée, par un style de pensée particulier qui s'est construit à partir de savoirs antérieurs, de nombreuses expérimentations ayant réussi ou échoué, de beaucoup d'exercices et de formation, et – c'est ce qui, du point de vue de la théorie de la connaissance, est le plus important – de plusieurs adaptations et transformations de concepts » (*ibid*, p. 170).

Si chaque membre peut reconnaître un événement comme faisant partie de l'histoire du collectif mettant en place une ingénierie didactique, le fait constitue en quelque sorte un point d'ancrage pour les discussions ou un *aviso de résistance* (Fleck, 2008, p. 171). Les faits prennent place dans l'arrière-plan spécifique aux savoirs travaillés. S'il n'y a pas de faits, il ne peut y avoir mobilisation du collectif. En cela, ils constituent bien pour nous les éléments majeurs des descriptions-pivots.

Chronique des événements et des faits

Nous aurons à lister ces événements et faits et à les situer dans le temps et l'espace de leur apparition. Nous avons produit un recensement d'éléments factuels constituant l'histoire du groupe, en mentionnant leur contenu, les membres impliqués et les

différents lieux des échanges (réunions, courriels, compte-rendu, forum, visioconférence, document de la progression SIT). Nous avons besoin d'une vision synoptique qui récapitule les événements et faits sur les quatre années de mise en place du dispositif en les regroupant chronologiquement. Cette chronique des événements et faits nous permettra de repérer par la suite les liens entre les faits constitués par la sphère 1, par le collectif provençal et le collectif entier afin de comprendre l'arrière-plan des discussions (cf. annexe 5). En voici un extrait :



Réunion du collectif Provence (120926)	**Construction d'une référence commune sur la désignation d'une quantité** Constat par les professeurs sur des difficultés rencontrées par certains élèves qui n'arrivent pas à dénombrer de petites quantités et préoccupation pour leur intégration dans la situation didactique. Le chercheur va mettre en évidence un des enjeux mathématiques de la situation : le passage du comptage-énumération à la désignation de la quantité.
Visioconférence, sphère 1 (120926)	**Difficultés rencontrées par les élèves sur l'utilisation du schéma-ligne** Constat par un professeur classe d'étude de la difficulté pour les élèves d'envisager l'enjeu du schéma-ligne au module 2 car ils sont pris par les difficultés dans la maîtrise de cette représentation. Ce constat sera aussi signalé par les professeurs des classes expérimentales dans des courriels.
Visioconférence, sphère 1 (120926)	**Questionnement sur les systèmes de représentation de la situation** Le collectif lance une piste de questionnement : en quoi le système de représentation change quelque chose dans la construction des nombres pour les élèves et pour les professeurs ? Quelles sont les difficultés rencontrées ?
Forum (121002)	**Mise en œuvre pour l'utilisation du schéma-ligne par association de la représentation du « train-nombre » et du schéma-ligne** Témoignage d'un professeur d'une classe expérimentale : « La difficulté reste sur la droite graduée. On a fait le parallèle avec le train en faisant un petit pont entre deux graduations pour compter les cubes ex 2+3 c'est 2 cubes rouges (2 ponts) puis 3 cubes verts (3 ponts), cela fait un train de 5 cubes (cuvette par en-dessous) c'est une idée venue de trois enfants (moins avancés) et maintenant tout le monde y arrive. »
Courriel	**Alerte sur l'usage des parties fictives et du schéma-ligne**

Extrait de la chronique des faits et événements didactiques collectés au cours de l'année 2 de l'expérimentation

Biographèmes et reconstitution de faits d'expérience

Nous chercherons à reconstituer les faits d'expérience qui ont permis au collectif de progresser dans leur enquête sur l'ingénierie : quels faits d'expérience ont marqué le collectif et participé à l'avancée du savoir ? Ces faits se dégageront de l'analyse des séries épisodiques qui révèlent les faits d'ingénierie. Les faits d'ingénierie constituent à la fois un point d'ancrage des discussions (c'est-à-dire qu'ils donnent lieu à des discussions) et génèrent aussi des modifications tant sur le plan de la compréhension que de la mise en œuvre de l'ingénierie. Sont-ils restreints à un moment spécifique

par rapport à la progression et à sa mise en place ? S'observent-ils à une échelle annuelle, pluriannuelle, locale ou nationale ? A quelle échelle observe-t-on leurs répercussions ? La question méthodologique qui nous est posée est comment rendre compte de l'échelle et des liens entre les faits d'ingénierie afin de mettre au jour les faits d'expérience.

Éléments de synthèse

Nous résumons dans le tableau ci-dessous les différentes descriptions envisagées, leur densité épistémique, les techniques et stratégies utilisées, les questions posées et leurs apports à la construction empirique :

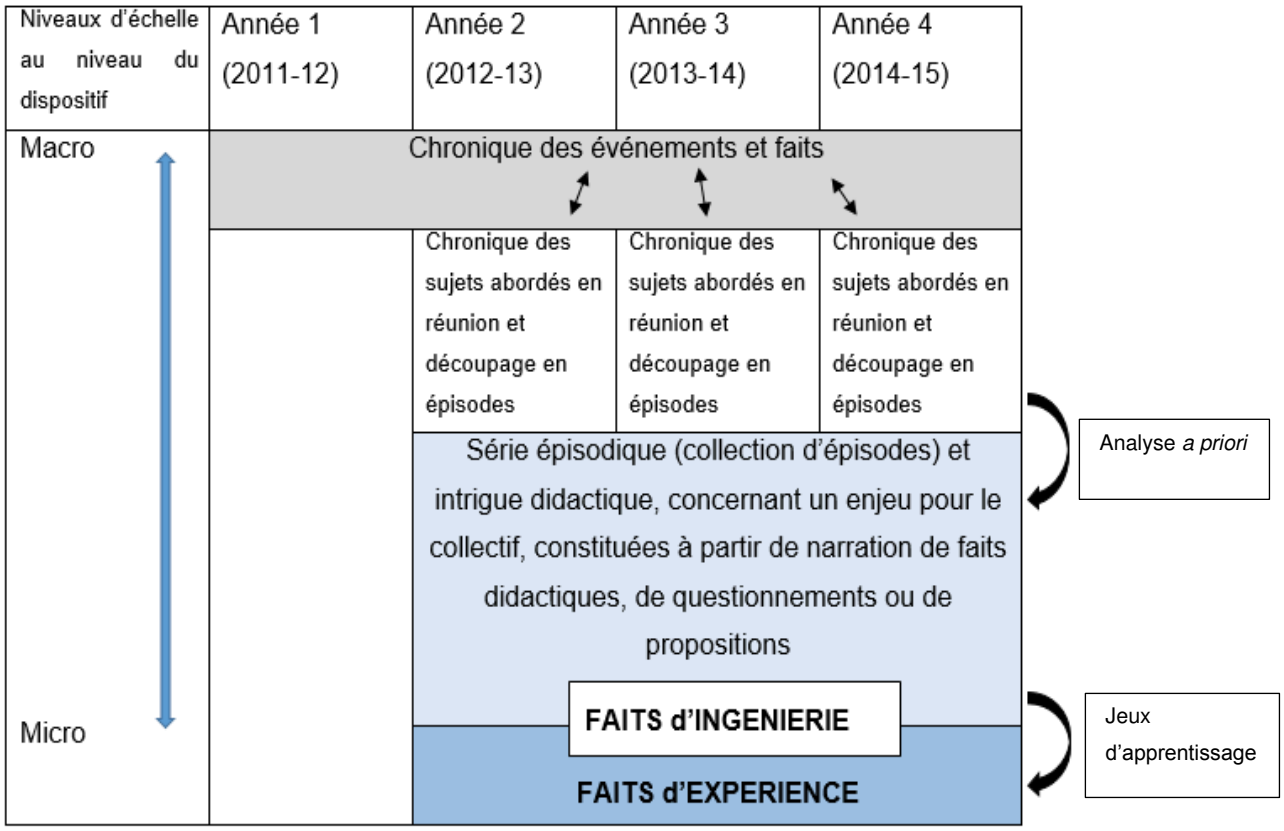
Echelle selon la densité didactique	**Technique de description des échanges**	**Type de description**	**Stratégie descriptive**	**Questions posées par le fait de décrire**	**Apports de la description**
Très générique	Image et définition	Représentation et définition du dialogue d'ingénierie	Première approche de la nature des échanges	Quelles modalités et structurations des communications possibles ?	
Générique	Narration de formes de vie sous le modèle du jeu	Jeux dialogiques d'ingénierie	Constituer une première structuration grammaticale de la coopération	Qu'est-ce que cette description produit comme connaissances sur la pratique de coopération ? Quels éléments en sont exclus ?	Description des formes du dialogue (jeux de commentaires et compte-rendu de pratique, d'analyse de vidéo, de présentation d'événement, de mise à l'épreuve mathématique, de commentaire de production de texte). N'aborde pas les contenus mathématiques et didactiques.
Générique	Mise en évidence des enjeux de l'ingénierie pour les chercheurs	Jeux d'apprentissage	Constituer une 2e structuration grammaticale de la coopération	Qu'est-ce que cette description produit comme connaissances sur la pratique de	Description des transactions comme jeux d'apprentissage (identification des enjeux de savoirs épistémologiques, didactiques et anthropologiques, partage des

	et les professeurs			coopération ? Quels éléments en sont exclus ?	responsabilités, problématisation de certains éléments de la situation d'enseignement, mise en accord sur l'arrière-plan des échanges, co-élaboration des ressources) qui montre les intentions mais pas les contenus précis.
Assez spécifique	Recensement d'éléments factuels	Chronique des événements et faits	Organiser chronologiquement les événements et faits épars des différents lieux en les regroupant dans un même document	Qu'est-ce qui correspond à un fait ?	Description des éléments factuels de la biographie du groupe mais ne montre pas les liens entre ces éléments, ne rend pas compte des échanges, ni ce qui a valeur de fait (c'est-à-dire en quoi le fait est un ancrage pour les échanges et le fruit d'un travail épistémique collectif).
Spécifique	Découpage en épisodes	Chronique des sujets abordés	Mettre en évidence des unités de sens dans le flot des échanges (= des scènes)	Quel découpage efficient ? (granularité plus ou moins fine)	Description qui rend compte des échanges à un niveau méso en les organisant par thèmes et épisodes mais qui reste factuelle car ne met pas en évidence l'action conjointe des protagonistes.

Très spécifique	Regroupement d'épisodes	Tableau synoptique et Intrigue didactique	Constituer une série épisodique selon les enjeux de savoir didactiques	A quels jeux jouent les protagonistes ? Quels faits d'ingénierie ?	Description qui rend compte des échanges et des jeux d'apprentissage entre les protagonistes à un niveau micro et spécifique par rapport aux contenus didactiques ; permet de constituer des *faits d'ingénierie* dans la biographie du collectif.
Très spécifique	Mises en liens de faits d'ingénierie	Biographèmes pour le collectif Provence	Constituer une 3e structuration grammaticale de la coopération	Quels faits d'expérience ?	Description qui rend compte de d'une expérience collective de l'ingénierie construite à partir de l'expérience des mises en œuvre et des adaptations tant concrètes que conceptuelles réalisées par leur analyse collective

Tableau récapitulatif des descriptions envisagées

Nous pourrions également résumer l'articulation entre les descriptions en ce qui constitue, sous une forme schématique, notre méthode de constitution de l'intrigue :



Articulation entre les différents niveaux de description

La chronique des événements et faits pour chacune des années est à mettre en relation avec les chroniques des sujets abordés lors des réunions du collectif professeurs / chercheurs / formateurs et encadrement : la chronique des événements et faits constituant alors une sorte d'arrière-plan pour regarder les échanges lors des réunions dans la mesure où elle permet de les situer dans un temps et un espace plus élargi. L'analyse *a priori* de la situation didactique permet de repérer les enjeux d'enseignement et de les problématiser selon une hypothétique mise en œuvre des séquences dans les classes. C'est cette analyse qui va guider nos choix de constitution d'une série épisodique. Les jeux d'apprentissage présentés également *a priori* lors du deuxième essai de structuration grammaticale de la coopération fonctionnent tels l'analyse *a priori* : ils permettent de confronter réalisation effective et hypothèses et de les valider ou compléter au niveau ingénierique. Ce qui est discuté et travaillé au sein du collectif constitue *des faits d'ingénierie*. La partie empirique suivante consiste en

cette mise à l'épreuve des jeux d'apprentissage supposés avec les faits d'ingénierie mis à jour et de retracer l'évolution de ces faits qui font gagner en expérience le collectif sur la durée de la mise en place du dispositif. Quels sont alors les *faits d'expérience* pour ce collectif provençal ?

Dans la troisième partie qui suit, nous allons concentrer l'analyse sur les enjeux didactiques de cette coopération. Dans les dialogues d'ingénierie, à quels jeux vont jouer ensemble les membres du collectif pour faire avancer le savoir ingénierique et chercher des réponses à leur questionnement ? Il s'agira de voir les discours comme des actes, selon le point de vue du contenu didactique que nous avons commencé à esquisser *et* selon le point de vue du « procédé », c'est-à-dire ce que ces discours nous disent sur la nature de la coopération.

Partie III – Coopération au sein d'un collectif professeurs / chercheurs : analyse empirique

Dans cette partie, nous cherchons à repérer des épisodes didactiques qui ont des effets biographiques pour le collectif. Ils nous permettent de décrire les conditions qui ont été nécessaires au développement de la situation didactique du *Jeu des annonces*, selon le point de vue des personnes qui ont participé à sa mise en œuvre, et de décrire leur apprentissage de la situation ingénierique. Cette partie est constituée d'un unique chapitre, le chapitre 6. Nous développons ci-dessous sa structure générale.

Pour repérer ces épisodes, nous aurons besoin, dans un premier temps, de mettre en évidence les enjeux de savoir plus spécifiques à cette partie de l'ingénierie en produisant une analyse *a priori* de la situation du *Jeu des annonces.* Dans un deuxième temps, nous bâtirons une première biographie didactique du collectif afin de montrer que la constitution de la situation, par coopération au sein de la sphère 1, produit des événements et des faits didactiques d'ingénierie qui constituent des premières conditions à la mise en œuvre. Dans un troisième temps, nous analyserons les échanges propres au groupe provençal afin de décrire les conditions plus « locales » de production collective de faits d'ingénierie et mettre en évidence les jeux au sein desquels les enjeux de savoir seront exprimés et interrogés à partir des événements selon leur pertinence didactique et mathématique.

Ce dont nous cherchons à rendre compte dans cette partie peut être formulé par les questions suivantes : Qu'est-ce qui est appris par les uns et les autres ? Quels sont les savoirs ingénieriques qui émergent ou circulent ? Au sein de quelles transactions se produit leur émergence et leur circulation ? Nous nous appuyons sur l'hypothèse suivante (cf. chapitre 2) : dans une ingénierie coopérative, tout un chacun peut être amené à faire avancer l'action de réflexion sur l'ingénierie, par exemple passer dans le topos de celui qui apprend au topos de celui qui désigne ce qui pourrait être appris ou remarqué ou étudié.

Chapitre 6 – Biographie du collectif concernant le *Jeu des annonces*

De l'analyse a priori du Jeu des annonces aux jeux d'apprentissage professeurs / chercheurs : constitution d'une biographie didactique du collectif pour décrire la construction et le fonctionnement d'une coopération.

Éléments d'analyse a priori du *Jeu des annonces*

Il s'agit de réaliser une analyse *a priori* d'ingénieur, où l'on fait des hypothèses quant à la pertinence de la situation mise en place et donc des jeux d'apprentissage associés permettant d'envisager les transactions possibles entre un professeur et ses élèves. La formule générique d'une telle analyse pourrait être : « en mettant en place tel type de situation (de jeu d'apprentissage, avec tel type de gestes), on a une bonne probabilité d'obtenir tel type de comportement mathématique ». Une des fonctions de l'analyse *a priori* est donc de pouvoir interpréter les décisions ou stratégies des élèves comme l'effet de connaissances. Une telle analyse est également un moyen pour étudier les évolutions des interactions dans le contrat-milieu afin de comprendre si et comment la connaissance produite peut être renforcée et justifiée par la fréquentation de la situation. Dans cette étude empirique, une telle analyse nous sera notamment utile pour comprendre l'arrière-plan du dialogue entre les membres du collectif qui discutent d'éléments issus des réalisations effectives des séquences d'enseignement et pour orienter la lecture des événements et des faits selon les enjeux de savoirs propres à cette situation didactique.

Pour cela, nous nous sommes fondée sur les éléments suivants :

- le texte de la progression SIT, document support de l'ingénierie ;
- les transcriptions des réunions du collectif lors des années d'expérimentation ;
- nos notes prises lors des visioconférences de la sphère 1 ;
- nos observations de séances dans différentes classes ;

- des appuis théoriques : (Brissiaud, 2007 ; Brousseau, 1972 ; Brousseau & Brousseau, 1991 ; Chambris, 2008 ; Chevallard & Chambris, 2015 ; Conne, 1987 ; Deramecourt, Faucon, & Martin, 1980 ; Duval, 1995 ; Fayol, 2012 ; Mercier & Quilio, à paraître ; Mounier, 2010 ; Roditi, 2005 ; Vergnaud, 1981).

Nous commencerons ce travail d'analyse par une courte présentation de la situation didactique du *Jeu des annonces* puis nous poursuivrons par la description des classes de problèmes que cette situation sous-tend.

Résumé rapide de la situation didactique dite du *Jeu des annonces*

La situation didactique du *Jeu des annonces*[71] repose sur un jeu dans lequel les élèves doivent « annoncer » avec les doigts de leurs mains le « score » qui va s'afficher sur un ou deux dé(s) *avant* le lancer de ce(s) dé(s). Le « score » obtenu par les annonces est ensuite comparé avec le « score » du/des dé(s) afin de déclarer une égalité ou une inégalité entre les valeurs obtenues. Les élèves sont ensuite engagés à désigner des annonces au moyen d'écritures additives, donc à construire la forme additive comme moyen de désignation de la mesure de la taille des collections (grandeur spécifique des collections), à explorer de multiples modalités d'écriture de ce type, puis à les comparer.

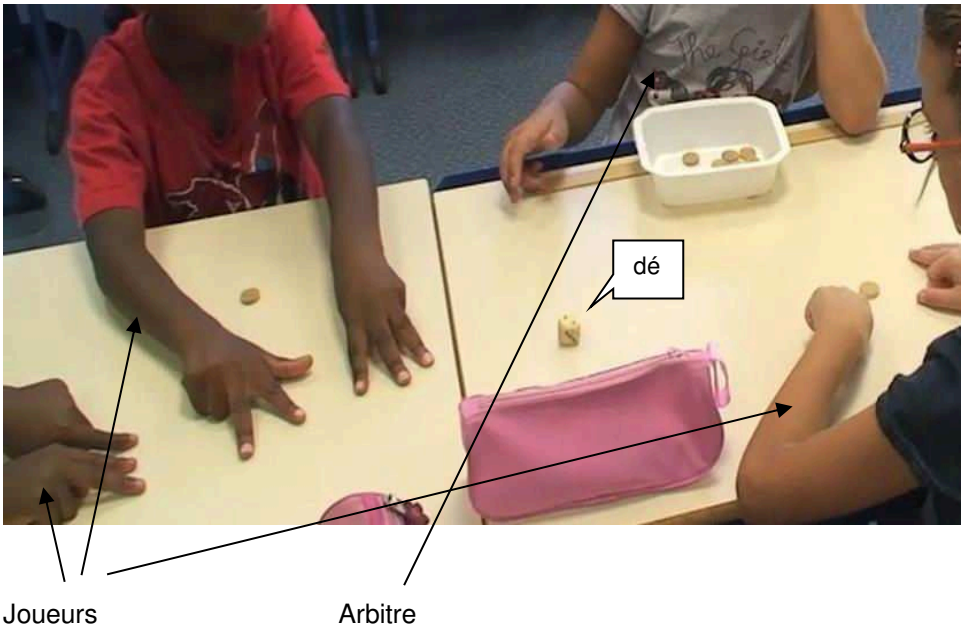
La situation didactique se déroule en trois phases dont voici les descriptions :

[71] La situation didactique a été initialement proposée, dans le cadre de la recherche *ACE-Arithmécole* sous la forme d'un document de travail, par A. Mercier et S. Quilio (ENS-IFé).

Première phase du jeu :

La désignation de la mesure de la taille de la collection (nombre d'entités de la collection) sous la forme additive est orale et analogique

Exemple de réalisation effective de cette phase de jeu :



Sur ce photogramme, nous observons une partie : nous pouvons voir que chacun des trois joueurs a réalisé une annonce avec ses deux mains. Par exemple, le joueur du centre (en maillot rouge) a annoncé « 6 » sous la forme « 3 et 3 » (notée par la suite « D3G3 » pour 3 doigts sur la main droite et 3 doigts sur la main gauche). Chacune de ces annonces est comparée avec le score d'un dé à six faces, lancé par l'arbitre *après* que les annonces ont été produites et immobilisées sur la table.

Le joueur du centre ainsi que celui de droite ont déjà gagné un pion (placé devant eux) lors de parties précédentes car leur annonce était égale au lancer du dé. C'est l'arbitre qui valide les annonces et distribue les pions.

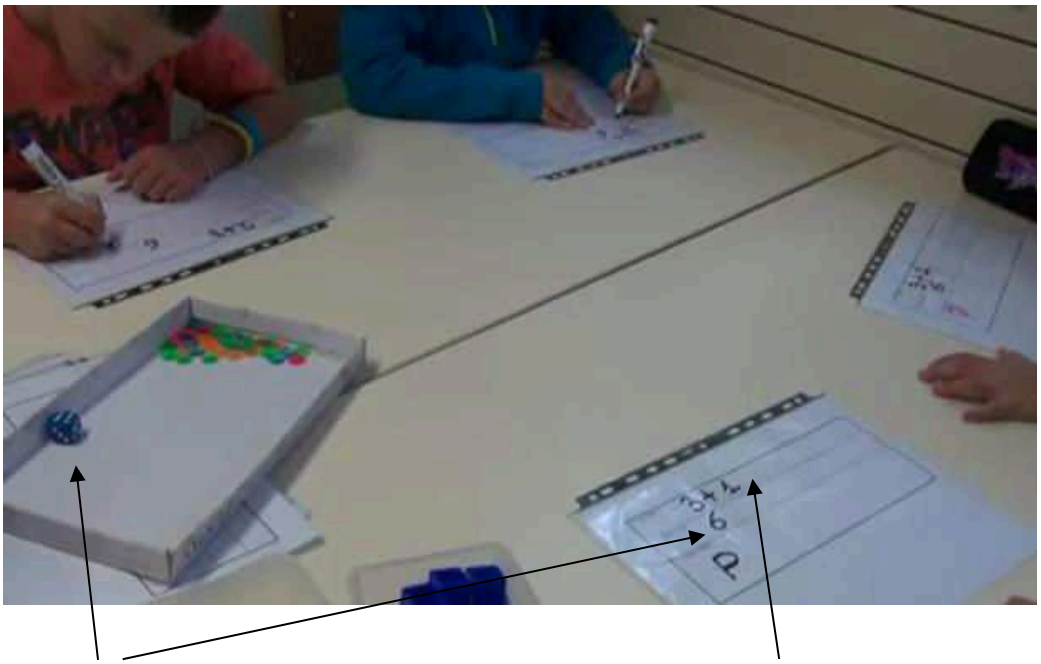
Commentaire :

Lors de la partie, les élèves désignent la mesure de la taille de la collection constituée par les points du dé à l'aide des doigts comme c'est l'usage dans l'environnement social. Cette pratique de désignation de la mesure de la grandeur nombre d'entités avec les doigts est faite au moyen d'une seule main, puis de l'autre si nécessaire. Ici la règle contraint à utiliser les deux mains. Le nombre à désigner se retrouve alors sous la forme d'une combinaison additive.

Deuxième phase du jeu :

La désignation de la mesure de la taille de la collection (nombre d'entités) sous la forme additive est écrite

Exemple de réalisation effective de cette phase de jeu :



Lancer du dé : 6

Annonce à deux termes : 3 + 1

Sur le photogramme, nous pouvons voir, sur les fiches de partie, que chaque joueur a écrit son annonce puis a reporté le lancer du dé. Il a indiqué ensuite s'il a perdu (P) ou gagné (G). Le joueur (en bas à droite) a perdu (P) car son annonce « 3 + 1 » n'est pas équivalente au lancer « 6 ».

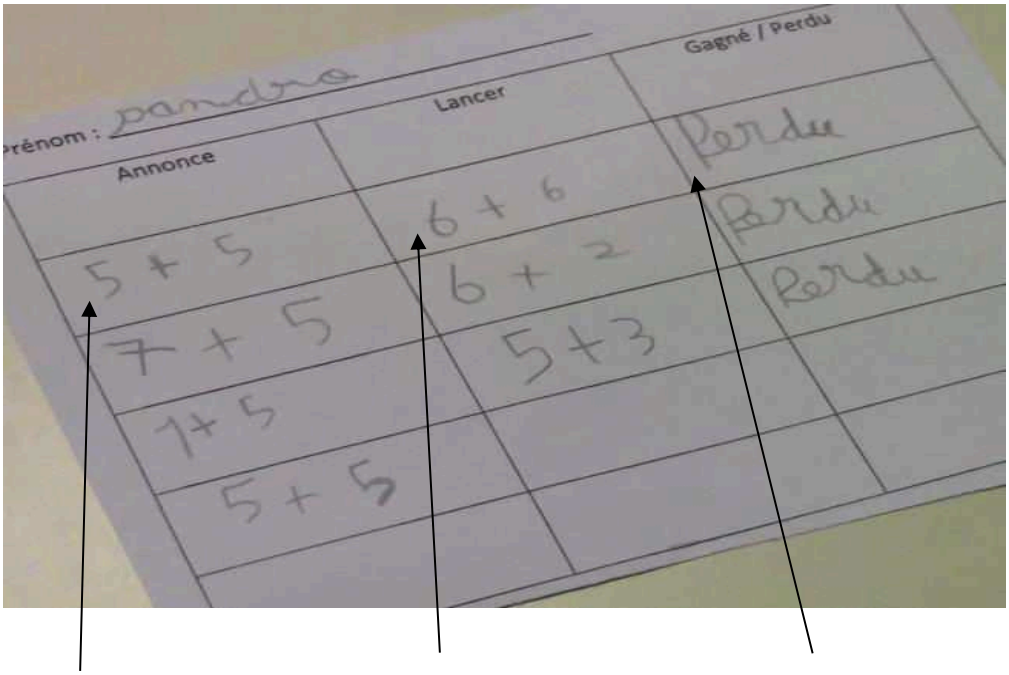
Commentaire :

L'usage des doigts disparaît pour laisser place à l'écriture symbolique. Ici l'usage du code numérique vient se substituer aux doigts mais la règle du jeu reste identique. L'écriture symbolique en chiffres et signe (le « + ») constitue la forme écrite d'une situation du jeu où les élèves étudient les mesures des quantités produites.

Troisième phase du jeu :

Usage de la désignation de la mesure de la taille de la collection (nombre d'entités) pour comparer des écritures additives

Exemple de réalisation effective de cette phase de jeu :



Annonce Lancer Validation de la partie

Dans ce photogramme nous pouvons observer une fiche de jeu ; chaque ligne correspond à une partie. Pour la première ligne, le joueur a écrit une annonce à deux termes « 5 + 5 » dans la première colonne *avant* le lancer de deux dés dont il reporte dans la deuxième colonne les scores « 6 + 6 ». Le joueur a perdu car « 5 + 5 » n'est pas équivalent à « 6 + 6 ».

Commentaire :

Nous pouvons remarquer que nous nous situons à la charnière entre un travail dans la taille des collections (nombre d'entités) et une étude des formes écrites de l'expression de cette grandeur. En effet, au début de la mise en place de la situation didactique, les élèves ont à désigner la mesure de la quantité (ou mesure de la grandeur) avec des nombres (car les nombres expriment culturellement la mesure) : ils agissent dans la taille de la collection en distinguant une quantité et en la dénotant. Quand les élèves ont à comparer deux écritures additives, ils opèrent sur les représentations de ces grandeurs.

Dans cette courte description, nous avons mis en valeur trois phases du jeu qui correspondent (i) à la compréhension des règles définitoires du jeu (ou « règlement » du jeu) et des règles stratégiques du jeu (ou comment bien jouer le jeu) dans sa dimension concrète (par la désignation orale et analogique, phase 1) puis (ii) à la description-dénotation symbolique de cette situation de référence avec la phase écrite (phase 2) enfin (iii) à la comparaison d'écritures additives (phase 3) et aux stratégies de comparaison qui commencent à se mettre en place avec l'écriture symbolique (phases 2 et 3). Ce jeu, mis en œuvre lors de nombreuses parties, permettra de se créer de l'expérience dans la production de grandeurs, l'exploration des multiples modalités d'écriture des nombres à désigner les mesures de ces grandeurs, la comparaison de ces mesures. La situation didactique construit ainsi l'étude pour l'apprentissage d'une pratique de mesure qui utilise la propriété des ensembles à pouvoir se partitionner en sous-ensembles qui ne nécessitent pas de comptage[72] ; nous y reviendrons plus loin. Les professeurs ont à diriger cette étude.

Dans la partie suivante, une recension d'éléments mathématiques et didactiques de la situation didactique complète cette première présentation du jeu. Nous nous appuierons sur les notions de *jeux d'apprentissage* et de *contrat* et *milieu* (Sensevy, 2011a) pour examiner la situation didactique au travers d'une description en classes de problèmes que les élèves sont amenés à rencontrer.

Classes de problèmes relevant du *Jeu des annonces*

Nous avons choisi de décliner les enjeux de savoirs du *Jeu des annonces* en classes de problèmes que les élèves sont amenés à rencontrer. Comme nous l'avions évoqué dans le chapitre 4 lors de l'analyse de la proposition d'enseignement *ACE-Arithmécole*, la situation didactique organise le questionnement des élèves en leur permettant d'identifier les enjeux de la situation lors d'une pratique sociale de cette situation (ici pratique scolaire puisque l'on se situe dans l'institution classe). Dans le

[72] Nous nommons « comptage » la technique de dénombrement qui consiste à associer comptine orale de la suite des nombres (ou tout autre système de compteur) avec l'énumération des éléments d'une collection.

cadre de la TACD, le « problème » est entendu comme déséquilibre du milieu pour les élèves, dans une situation vue comme contexte de l'expérience selon Dewey (1993). Il s'agit alors de traiter ce problème en s'appuyant tout à la fois sur les éléments du milieu, fournis par la situation didactique ou par le professeur, et sur les connaissances antérieures. Nous avons décrit ces éléments du milieu et ces connaissances (chapitre 2) comme systèmes stratégiques du contrat et du milieu. En ce sens ces problèmes font partie du contrat didactique entre professeur et élèves, contrat qui s'actualise lors de jeux d'apprentissage ; ils s'appuient sur des connaissances antérieures des élèves[73].

Nous allons traiter des classes de problèmes suivantes :

- désigner une collection par la mesure de sa grandeur,
- décrire la mesure de la grandeur,
- représenter la mesure d'une collection,
- comparer des mesures de grandeurs,
- valider et justifier une comparaison.

Chacune de ces classes de problèmes est exposée à partir :

- d'éléments constituant le milieu matériel et symbolique mis à disposition des élèves et décrits sous la forme d'éléments mathématiques sous-jacents et d'éléments du dispositif didactique correspondant ;
- d'hypothèses quant à la pertinence de leur mise en œuvre dans la situation et qui renvoient à autant de jeux d'apprentissage prévus par l'ingénierie.

Nous n'avons pas présenté les classes de problèmes selon un ordre hiérarchique. Elles s'imbriquent en fait les unes avec les autres pour former un système ; la forme de liste ne doit pas occulter leur interdépendance.

[73] Au début du *Jeu des annonces*, les connaissances antérieures des élèves sont notamment celles que l'on peut attendre à la fin de la maternelle et qui sont décrites dans les programmes (MEN, 2008) : utiliser les nombres dans des problèmes portant sur des quantités, connaître la suite des nombres (≤ 30), dénombrer une quantité en utilisant la suite orale des nombres connus, associer le nom d'un nombre connu avec son écriture chiffrée.

Classe de problème : désigner une collection par la mesure de sa grandeur

Éléments mathématiques

Désigner consiste à attribuer à un objet ou une collection d'objets un code qui doit être compréhensible sans équivoque par tous. Une désignation est donc arbitraire, elle peut être exprimée de différentes façons mais être reconnue sans ambiguïté par le groupe des personnes qui la pratiquent. Michel Fayol attire l'attention sur le fait que le langage encode la quantité d'une manière conventionnelle, par l'ordre des signes, contrairement à la représentation mentale analogique qui traduit l'accroissement de la quantité par une augmentation de volume, de longueur, de densité. Il est donc nécessaire d'installer de manière « précise et automatique » (Fayol, 2012, p. 58) le nom des nombres, comme évocation de la mesure d'une grandeur, sans avoir recours à la suite des noms de nombre mais par l'expérience acquise de cette désignation. Les nombres entiers permettent de désigner la mesure de la taille d'une collection constituée d'objets identifiés.

Dans le *Jeu des annonces*, deux ensembles[74] d'objets ordonnés définis par une grandeur (Brousseau & Brousseau, 1991), l'espèce de grandeur taille d'une collection d'objets (Chevallard & Chambris, 2015), composent en partie le milieu : une collection de doigts (dont les valeurs sont comprises entre 0 et 5 pour chaque main) et une collection de points (dont les valeurs sont comprises entre 1 et 6 pour chaque dé).

Éléments du dispositif didactique

Le travail se fait d'abord au niveau de quantités d'objets à produire à l'aide des doigts. Puis les mesures de grandeurs sont désignées à l'aide des doigts ou des nombres (« j'annonce *2 et 3* ou *2+3* ») afin d'être comparées à celles des points d'un dé. De telles mesures, inférieures à 6 objets, sont appréhendables par les élèves à ce moment de l'année (premier trimestre de l'année scolaire). Ce travail sur de « petites » grandeurs permet d'appeler des formes de disposition culturelle de doigts ou de points sur un dé. La collection des points est organisée selon des configurations stables ; plusieurs configurations pour la collection des doigts de la main étant possibles pour

[74] « Par *ensemble,* nous entendons toute collection M d'objets *m* de notre intuition ou de notre pensée, définis et distincts, ces objets étant appelés les *éléments* de M » Georg Cantor (1845-1918). Récupéré du site Wikipédia, https://fr.wikipedia.org/wiki/Ensemble, le 30 juillet 2015.

certaines valeurs. Des études citées par Michel Fayol (2012) montrent qu'il existe une liaison entre habiletés perceptivo-tactiles et capacités de représentations et de manipulation des quantités. Cela correspond également à une volonté de travailler sur des mesures de grandeurs petites pendant longtemps. En cela, l'ingénierie fait référence aux travaux de Guy Brousseau (1972).

Hypothèses d'ingénierie

- Annoncer avec ses doigts ou lancer un dé permet une désignation de la quantité qui se réalise grâce aux configurations particulières de ces éléments, ces configurations ayant été apprises[75]. Cette désignation ne passe pas par un dénombrement un à un (ou comptage qui couple une comptine ou tout autre système de compteur avec une énumération) des éléments de la collection. Le comptage est considéré dans l'ingénierie comme une procédure personnelle qui favorise une certaine réassurance personnelle au début de l'apprentissage mais cette stratégie n'est pas enseignée ni la connaissance de la suite des nombres sollicitée comme caractéristique de la situation. Rémy Brissiaud (2007, 2014) considère le comptage comme une stratégie de dénombrement limitant les actions et pouvant faire obstacle, s'il est vu comme un numérotage des éléments, à un accès au sens de la notion de cardinal, et plus généralement au sens du nombre.
- Annoncer la mesure d'une quantité à l'aide d'un code, tel que « D2G3 » (j'ai annoncé 2 doigts sur la main droite, et 3 doigts sur la main gauche), c'est constituer un moyen de désignation collective, propre à la classe, qui devra faire l'objet d'une étude. Ainsi, pour un élève, annoncer « D2G3 » est une façon d'annoncer « 5 » avec deux mains. Cette désignation est comparable à d'autres (par exemple 4 ou 6). Sa représentation sur une droite ou l'énumération permet de lui attribuer un ordre.
- Dans le jeu, certaines valeurs peuvent être atteintes et d'autres pas : entre l'annonce et le lancer peut subsister un décalage dû aux possibilités de décompositions de la quantité avec les mains ou les termes en référence aux mains (de 0 à 10) et à la constellation donnée avec un dé. Par exemple, un élève a annoncé D3G4 ou 3 + 4, la

[75] Nous avons remarqué que dans certaines classes, certains élèves ne connaissaient pas les configurations du dé, ni les valeurs de chacune des faces : ils se mettent à compter les points un à un. Ils ne semblent pas avoir fréquenté auparavant de manière active (lors de jeu de société par exemple) l'objet dé, ni dans leur famille, ni à l'école maternelle. Cette connaissance se construit alors au cours du *Jeu des annonces*.

somme de son annonce, 7, est supérieure à 6, score maximum figuré sur le dé. Un autre type de décalage est possible dans un jeu utilisant deux dés. Par exemple, un élève a annoncé D5G5 ou 5 + 5, la somme, 10, est inférieure à 11 ou 12, scores possibles avec deux dés. Dans le jeu, il n'existe pas de prévision rationnelle pour gagner à « coup sûr ». Mais c'est un jeu dans lequel la réponse au hasard peut conduire dans certains cas à une probabilité de réussite nulle que les élèves peuvent trouver : annoncer 0, 7, 8, 9 ou 10, c'est perdre dans un jeu avec un dé. Il reste du jeu, c'est-à-dire de l'espace pour ne pas gagner, tout en ayant joué quelque chose qui peut faire gagner[76]. L'hypothèse est que ces contraintes favorisent la construction de règles stratégiques par une enquête des élèves sur le milieu mais dans tous les cas, les connaissances mathématiques (sur le cardinal des nombres[77]) permettent de déclarer si le jeu est gagné ou perdu.

- Dans le jeu, atteindre la valeur 1 avec deux mains peut constituer un problème. Peut-on désigner 1 avec ses deux mains ? Et si oui comment ? L'utilisation du poing fermé pour désigner 0 n'est pas une évidence ; le nombre 0 est une découverte[78].

Classe de problème : décrire la mesure de la grandeur

Éléments mathématiques

Dans la perspective travaillée au sein de *ACE-Arithmécole*, les nombres correspondent aux mesures d'une grandeur et la théorie de la mesure construit une mise en relation entre la notion de grandeur et de mesure (Rouche, 1992). Dans le

[76] Pour « contourner » le hasard, on introduit dans les séances des parties *inverses* (imaginer quelles annonces doivent permettre de gagner si un tirage de dé est par exemple égal à 5) et des parties *fictives* (dans lesquelles on peut visiter les cas particuliers non survenus spontanément dans le jeu et mathématiquement pertinents).

[77] Mais sont aussi de telles « découvertes » des connaissances sur l'ordre des nombres dans le cas de parties où la variable didactique devient : « parties gagnantes si annonces supérieures (ou inférieures) au lancer ».

[78] Nous avons observé des élèves voulant désigner 1 qui cachaient une main sous la table alors que les règles de jeu stipulent que l'annonce se fait avec deux mains. C'est la question que se pose Pamela (vidéo du 4 octobre 2011, classe Marseille, 23 min 28) : « on ne peut pas avoir 1 car il faut les deux mains ». Pendant la mise en commun en classe entière des expériences réalisées en groupe, elle lève le doigt pour parler de son problème à annoncer 1. L'enseignante lui répond qu'elle doit trouver seule et que c'est possible. Elle ferme le poing sans grande conviction ; elle ne sait pas encore qu'utiliser les deux mains l'autorise à ce geste.

Jeu des annonces, nous pouvons commencer par retenir, pour le nombre entier, la définition utilisée par Eric Mounier (2010) et qualifiée par lui-même de pragmatique : « le nombre est une entité abstraite qui permet de rendre compte des quantités discrètes, finies et manipulables, c'est-à-dire qui permet de résoudre certains problèmes de comparaisons et d'évaluation à l'aide si besoin d'opérations » (p. 26).
Le nombre est aussi une propriété des collections quand le travail des élèves se réalise sur les propriétés des cardinaux de ces collections dans une définition ensembliste[79]. Pour Guy Brousseau (1972), « le [nombre entier] naturel peut-être construit par des classifications d'ensembles. Les ensembles d'ensembles doivent à leur tour être désignés » (p. 445). Selon Gérard Vergnaud, la construction des nombres entiers se fonde sur les notions de cardinalité et d'addition : « Sans addition il n'y a pas de nombre, puisque c'est l'addition qui donne au nombre ses propriétés distinctives » (Vergnaud, 1981). Selon la théorie ensembliste, le concept d'addition se traduit par la construction de la partition en sous-ensembles A et C d'un ensemble B et le contrôle de la double activité de partitionnement et de dénombrement tel que $A \subset B$; $C \subset B$; $A \cap C = \emptyset$. L'addition possède des propriétés : l'existence et l'unicité d'un élément neutre, la commutativité, l'associativité. Le signe « + » est utilisé pour signifier la réunion des deux sous-ensembles.
Yves Chevallard et Christine Chambris (2015) affirment que « sans les grandeurs et leurs mesures les nombres perdent leur raison d'être « ombilicale » qui les relie au monde vécu » (p. 1). Les auteurs rappellent la logique de la construction des nombres et leur rôle dans la mesure de toutes les espèces de grandeurs : une grandeur ou une quantité concerne tout ce qui peut être mesuré ou nombré, c'est-à-dire évalué en nombre. Le nombre étant le nombre de fois qu'une grandeur contient l'unité qui est une grandeur connue, définie et de même espèce. On exprime une grandeur quantitativement sous la forme d'un nombre et d'une référence (appelée « unité de mesure »).

[79] Définition de la théorie des ensembles en mathématiques, récupéré le 11 juillet 2015, sur https://fr.wikipedia.org/wiki/Th%C3%A9orie_des_ensembles

Éléments du dispositif didactique

La situation didactique construit l'étude pour l'apprentissage d'une pratique de mesure ce qui implique aussi la place de l'estimation, de l'ordre de grandeur dans leur dimension expérimentale : on voit « instantanément » que la partie est perdue si l'annonce est D1G1 ou 1 + 1 et le lancer 6. La situation mathématique décrit les grandeurs avec des nombres qui mesurent les collections sous une forme additive. Par exemple, « 3 + 2 » est une annonce dans la situation du jeu fondateur (cette écriture pourrait aussi représenter des billes, des crayons ou toute autre collection dans une autre situation didactique). On exploite le fait que les valeurs (ici 3 unités et 2 unités) sont appréhendables par les élèves. En effet, ce sont les propriétés des ensembles à pouvoir se partitionner en sous-ensembles qui ne nécessitent pas de comptage qui sont utilisées ici. Une approche de ce type, qui a inspiré l'ingénierie *ACE-Arithmécole*, nous l'avons précisé ci-dessus, avait été développée dans un document de l'IREM de Bordeaux. Ce document propose une suite de séquences d'enseignement-apprentissage pour le cours préparatoire. Il a été rédigé par un collectif travaillant sous l'égide de Guy Brousseau (Deramecourt et *al.*, 1980).

Hypothèses d'ingénierie

- La situation permet avant tout de décrire autrement une grandeur et non de calculer la somme d'une addition : « 4 + 2 » sont (ou sont mis à la place de) « 6 » ; « 4 + 2 » décrivent « 6 ».
- Par l'enquête dans le milieu (ici le *Jeu des annonces*), les élèves construisent des résultats connus qui deviennent peu à peu des répertoires additifs à deux termes alors mobilisables pour le jeu afin d'associer entre elles des décompositions comme 3 + 3 et 2 + 4 et 6 + 0. L'évolution de la situation comprend le passage de deux termes à trois termes : l'annonce se fait avec 3 mains mais les règles du jeu ne sont pas modifiées. En cherchant alors un moyen de comparer les écritures additives et le lancer, les élèves peuvent opérer des compositions (exemple : 2 + 2 + 1 font 4 + 1) en s'appuyant sur des résultats connus comme par exemple les doubles.
- La situation doit ainsi permettre la rencontre par les élèves de la nécessité fonctionnelle du signe « + » : le signe n'est pas seulement un séparateur (2 + 3 n'est

pas 23) mais il indique que tous les termes, dans le sens qu'ils forment un ensemble, sont à prendre en considération[80].

Classe de problème : représenter la mesure d'une collection

Éléments mathématiques

La désignation de la mesure de la taille d'une collection d'objets peut être réalisée par une représentation analogique ou symbolique. Une représentation se réfère à une situation mathématique et la dénote (Matheron & Mercier, 2004). Selon Eric Roditi (E. Roditi, 2005), l'activité qui consiste à garder en mémoire des quantités par les nombres requiert plusieurs niveaux d'abstraction, une organisation et un langage, ce qui aboutira à différents systèmes de numération, plus ou moins élaborés selon les civilisations et les époques. La première abstraction se traduit par une représentation (concrète ou figurée) analogique comme par exemple les entailles pour représenter des moutons : on ne sait pas par ce procédé combien il y a d'éléments dans une collection mais on a en mémoire sa taille en passant en revue ses éléments, organisés en liste, un par un. Cette conservation de la succession concerne l'aspect ordinal du nombre. La deuxième abstraction est la représentation symbolique de la quantité, par une représentation langagière énoncée (en mots) ou écrite (en chiffres) des nombres. La conversion de la succession en simultanéité concerne l'aspect cardinal du nombre : en dénombrant un sixième objet, je dis ou j'écris que j'ai 6 objets. La troisième abstraction permet de considérer les nombres comme mesure de tout type de grandeurs : un même système de représentation est utilisé pour quantifier des animaux, du temps, une distance, … Pour Raymond Duval (1995), faire des mathématiques c'est créer des représentations dans différents registres sémiotiques, mettre en correspondance et en coordination ces différents registres et mettre en œuvre des règles de traitement opérant sur chacun de ces registres. Michel Serfati, dans son ouvrage *La révolution symbolique* (Serfati, 2005), montre qu'à partir des travaux de Stevin (1548 – 1620), Descartes (1596 – 1650) et Leibniz (1646 – 1716) on a pu faire en Mathématiques avec l'écriture symbolique (entre autres) des

[80] Nous avons observé pour certains élèves que, lors du passage au symbolisme, les termes sont considérés comme des éléments indépendants. Par exemple les écritures 1 + 5 et 2 + 4 sont vues comme non équivalentes car leurs termes, considérés individuellement, ne sont pas identiques.

raisonnements qu'on ne pouvait pas produire auparavant. Guy Brousseau (2004b), en inscrivant le cadre de l'étude des représentations dans la *théorie des situations didactiques*, reconnaît les représentations comme moyens utilisés par un élève pour contrôler une situation mais aussi comme objet de connaissances et comme moyen didactique pour l'enseignant. Suivant la théorie broussaldienne, cela passe par l'action (comme rapport pragmatique aux choses) avant toute formulation. Plus précisément, cela passe par la production effective par l'élève d'un moyen adéquat qui répond aux nécessités de la situation.

Éléments du dispositif didactique

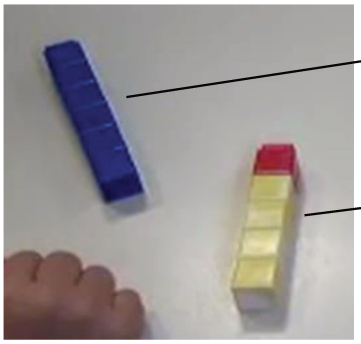
Plusieurs représentations sont utilisées dans les séquences.

1) Les collections de doigts ou de points du dé peuvent être représentées par des cubes emboîtés ; cette représentation est nommée « train-nombre ». Le statut analogique ou symbolique d'un tel objet dépend de l'usage qui va en être fait.

- Si l'objet « train » est pensé et organisé comme une liste ordonnée d'objets « wagons » qui représente les doigts (ou points du dé), il sert à énumérer (le premier wagon pour le premier doigt, le deuxième wagon pour le deuxième doigt, etc.) et reste dans un statut analogique. Il n'est pas pensé de cette manière dans la situation didactique que nous étudions.
- Si l'objet « train » représente une longueur qui elle-même représente des doigts (ou les points du dé), la grandeur taille de la collection étant en analogie avec la grandeur longueur, le train acquiert un statut symbolique. La mesure de la longueur est x wagons ou unités.

Ci-contre, le train bleu, qui mesure 6 wagons-unités, est plus long que le train blanc-rouge, composé de la mesure de 4 wagons-unités rouges et de la mesure de 1 wagon-unité blanc. Il ne s'agit pas, dans cette situation didactique, de comparer des mesures de longueur (6 unités > 5 unités) mais d'évaluer des rapports entre des longueurs (le train bleu est plus grand en longueur que le train blanc-rouge).

- Si l'objet « train » est considéré comme un système d'objets symboliques, construire des trains est alors considéré comme la construction d'une référence à une forme symbolique (les nombres). On compare ou opère avec des trains composés de wagons qui portent le nombre. La représentation joue alors le rôle d'« interprète des nombres » quand les élèves n'en ont pas encore une maîtrise suffisante. C'est alors une autre référence que celle des doigts dans la situation du *Jeu des annonces* mais qui fonctionne également comme un système de « représentations calculables »[81], c'est-à-dire qui permet un calcul sur les relations, ici du point de vue des usages de comparaisons de compositions. Une représentation calculable est associée ici à une grandeur mesurable qui possède une structure additive[82].



Par exemple, le train-nombre bleu est composé de 6 cubes ou de 4 + 1 + 1 cubes ; il a 1 cube de plus que le train-nombre blanc-rouge qui en a 4 + 1.

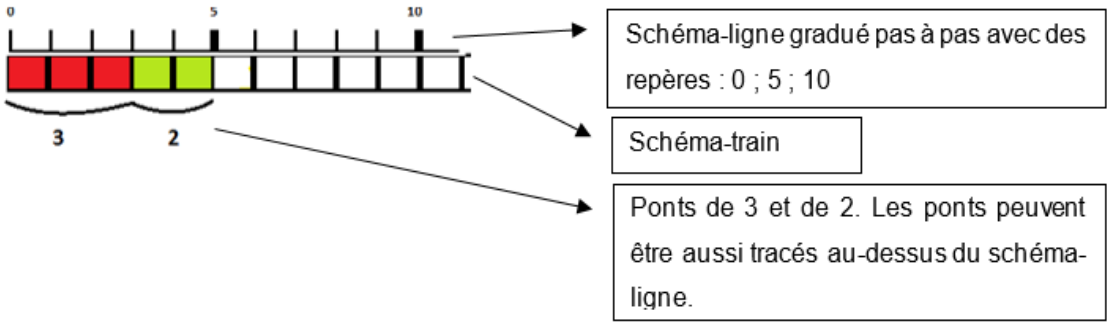
2) Les collections de doigts ou points peuvent être aussi représentées symboliquement par un ou des nombre(s) dans leur fonction cardinale sous la forme usuelle (avec le code indo-arabe chiffré ou la forme verbale) ou sous la forme additive écrite chiffrée.

3) Les collections de doigts ou points peuvent être aussi représentées symboliquement par un schéma-ligne (gradué pas à pas, ou avec des repères 0 ; 5 ; 10, ou sans repère). Dans le document de la progression, le choix a été de présenter le schéma-ligne associé au schéma du train ; ce choix sera amplement décrit et commenté par la suite. Exemple d'une représentation de l'annonce « 3 + 2 » :

---

[81] Gérard Vergnaud utilise l'expression dans l'article « Calcul rationnel et représentation calculable » paru en 1975 dans le bulletin de Psychologie, n°28, p. 378-387.

[82] Les grandeurs non mesurables, comme les échelles (par exemple de température) ou comme les indicateurs (d'intelligence, de pollution), ne fonctionnent pas comme des structures additives.



4) Les collections de doigts ou points peuvent être aussi représentées symboliquement par une représentation « pré-algébrique » (appelée « boîte ») qui représente la relation entre trois nombres, ici {2 ; 3 ; 5}, dans le champ additif sans recours aux signes mathématiques (« + » « - » ou « = ») et qui peut se modéliser par « 2 + 3 = 5 » ou « 3 + 2 = 5 » ou « 5 – 2 = 3 » ou « 5 – 3 = 2 » suivant la situation en jeu. Voici un exemple d'une représentation dans le *Jeu des annonces* pour l'annonce « G2D3 / 2 + 3 » :

5	
2	3

Hypothèses d'ingénierie

- L'ingénierie didactique prévoit l'utilisation, souvent de concert, de plusieurs représentations.

> « L'intérêt des représentations réside dans ce qui peut être fait dans un univers et qui ne peut pas être fait dans l'autre […] L'étude de la représentation en termes de situations nous permet d'envisager de façon beaucoup plus précise et concrète les conditions dans lesquelles elle est susceptible d'apparaître comme solution d'un problème, soit pour des raisons logiques, soit à cause des économies qu'elle permet» (Brousseau, 2004a, p. 254).

Une des conséquences de l'usage des représentations et leur force est que, dans une situation didactique, toute représentation est une économie par rapport à ce qui se constate empiriquement. Chacune des représentations mises en place dans la situation didactique offre des potentialités et des limites dans son usage : les élèves peuvent ainsi visualiser l'équivalence entre 4 + 5 et 6 + 3 sur le schéma-ligne ou avec

le train-nombre même s'ils ne connaissent pas le total de 4 + 5 ou 6 + 3. La boîte, comme le schéma-ligne, permet de conceptualiser les relations entre les quantités (parties et tout) d'une collection alors que l'écriture formelle « 2 + 3 = 5 » représente d'abord, dans le premier sens abordé lors du jeu, l'équivalence entre les expressions de deux collections ayant le même cardinal[83]. La boîte et la représentation écrite sous forme additive permettent d'indiquer le nombre de termes en jeu alors que le schéma-ligne, ne pouvant figurer la mesure 0, n'est pas toujours la représentation adéquate pour répondre à ce type de question. Il s'agit, pour les élèves, de construire une relation avec un système de représentations qui leur permet « d'envisager » ce qu'ils ne peuvent pas faire matériellement (parce qu'on ne peut gérer la comparaison avec des doigts quand les valeurs ou le nombre de termes augmentent) ou ce qu'ils ne seraient pas en mesure de faire à un moment donné de leur apprentissage (par exemple le schéma-ligne ou le train-nombre permettent d'évaluer toutes les combinaisons possibles de mesures de grandeurs sans opérer un calcul : 4 + 2 est équivalent à 5 + 1 qui est équivalent à 3 + 3 qui est équivalent à 2 + 1 + 3 etc.). Il s'agit de reconnaître une même situation mathématique dans des représentations dont les contenus sont apparemment différents ou de jouer sur des registres différents dans les procédures de résolution.

- Selon Gérard Vergnaud (Vergnaud, 1981), les représentations symboliques permettent des raisonnements mathématiques car elles sont plus « manipulables » grâce aux relations d'homomorphisme entre les objets et les ensembles d'une part et les nombres d'autre part. Cela peut être surtout le cas lors du passage à deux termes et deux dés (phase 3) qui signe le passage de l'action, à l'aide des nombres, à la désignation de la mesure avec les nombres où le travail de l'élève doit s'engager sur les ressources du nombre. Autrement dit, du point de vue de la constitution de la référence, il s'agit de passer des doigts aux nombres, les doigts ne suffisant plus à « supporter » tous les éléments à traiter. Ce passage à un symbolisme qui s'affranchit peu à peu de la situation initiale autorise des jeux sur les nombres ou les opérations. Par exemple pour comparer 5 + 4 et 5 + 3, opérer une correspondance entre les nombres et repérer que 4 n'est pas 3 suffit à déclarer le jeu (d'égalité) perdu. Pour

[83] Nous avons pu observer que certains élèves considéraient l'annonce 2 + 3 et le lancer 2 comme équivalents car, disent-ils, dans les deux écritures se retrouvait le même terme 2.

comparer 5 + 4 et 6 + 3, décomposer et recomposer les écritures (je peux écrire : 5 + 4 = 5 + 1+ 3 car 5 + 1 sont comme 6, et 1 + 3 font 4) permet de déclarer le jeu gagnant. Mais le passage au symbolisme ne doit cependant pas échapper à la règle du *Jeu des annonces* qui en constitue en permanence l'arrière-plan. En ce sens, les doigts peuvent constituer un milieu pour le contrôle des désignations et de leurs combinaisons ; ils restent la référence du milieu matériel longtemps dans la situation et permettent de ramener au concret toute forme symbolique (représentations, langage verbal). Le train-nombre peut jouer le même rôle. Pour Luis Radford et Monique Grenier (1996), qui dans leur travail retracent au travers de l'histoire l'émergence d'un langage algébrique et en tirent des enseignements pour élaborer des situations didactiques (Radford & Grenier, 1996), il est important que l'apprentissage des mathématiques repose sur la construction de relations entre l'objet et sa représentation. Objet et symbole doivent être liés dans les résolutions de problème : un symbole doit pouvoir s'appuyer sur un objet concret (comme par exemple un sac de bonbons) ou s'appuyer sur un autre symbole à contenu sémantique non vide. Le problème auquel les professeurs doivent faire face est celui de la manipulation matérielle qui pourrait s'ériger en recours tentant face aux difficultés que rencontrent les élèves. En effet, ce qu'on veut enseigner, à terme, c'est le travail sur les nombres écrits en chiffres dans le système décimal de position parce que ce système est efficace et parce qu'il est aujourd'hui universel. Mais il faut que les élèves puissent presque à tout moment *interpréter* ce qu'ils écrivent comme une manipulation de matériel tout en *sachant s'émanciper* du matériel parce qu'il est bien plus commode et efficace (pour celui qui sait) de manipuler des symboles écrits. Le professeur doit donc montrer que l'enjeu est sur le travail symbolique des écritures. Mais il doit aussi savoir à la fois faire en sorte que les élèves, à certains moments, puissent s'émanciper du « plus concret » pour travailler avec du « plus abstrait », et à d'autres moments, référer « le plus abstrait » au « plus concret ». Ce double travail de la relation système-modèle propre au processus de modélisation (et à la théorie des modèles) est à travailler *dans les deux sens* durant l'apprentissage.

- L'hypothèse est que le langage est décisif dans la mise en relation de toutes ces représentations. Par exemple, dans la phase 2, l'écriture formelle « 3 + 3 = 6 » est une des représentations dans le langage écrit d'une situation du *Jeu des annonces* ; c'est aussi un modèle de la situation. Les élèves peuvent l'énoncer par « j'ai gagné car mon

annonce 3 + 3 est égale au lancer du dé 6 », ou alors par « mon annonce 4 et 1 est perdante par rapport au lancer 6 car le train qui a 6 wagons est plus grand que le train qui en a 4 + 1 ». Le modèle peut être interprété de manière plus théorique par : « mon annonce D3G3 est gagnante car elle désigne la même mesure de la quantité que les 6 points indiqués sur le dé à l'issue du lancer c'est-à-dire que 3 et 3 sont comme 6 ». Selon Alain Mercier et Serge Quilio (Mercier & Quilio, 2013c), le langage de la pratique (de nature orale) permet de parler de cette représentation ; il se réfère à la situation elle-même en décrivant la représentation ainsi que son fonctionnement. Le langage de la pratique serait donc le premier logos avec lequel le modèle est pensé car il décrit la relation du modèle au système sans en être le langage théorique. Le langage oral est ce qui fait lien entre les représentations entre elles et avec la situation. Il va ainsi conditionner les usages des représentations.

Classe de problème : comparer des mesures de grandeurs

Éléments mathématiques

Dans le jeu, l'annonce est gagnante si le nombre de doigts est égal au nombre de points indiqué par le ou les dé(s). Cette équivalence entre les mesures est notée par le signe « = » entre les écritures numériques. Elle correspond à une classe d'équivalence : toutes les annonces qui sont gagnantes appartiennent à la même classe (2 + 3 = 3 + 2 = 1 + 4 = 1 + 1 + 3 etc.). Dans l'ingénierie *ACE-Arithmécole*, l'équivalence est étudiée dans le jeu en même temps que la non-équivalence qui est indiquée par les signes « ≠ » puis « > ; < » ; ces derniers dénotant une plus grande connaissance de la relation d'ordre entre les cardinaux des deux collections.

Éléments du dispositif didactique

Il s'agit d'amener les élèves à exprimer la désignation de collections de différentes façons et à exploiter l'équivalence ou la non-équivalence de ces désignations afin de pouvoir déclarer par exemple quelle est la plus grande collection ou, plus tard, à estimer puis à quantifier quelle est la différence entre deux collections.

L'annonce et le lancer peuvent être équivalents. Par exemple, si un élève a montré D3G1 qui correspondent à la même quantité que le lancer 4, il notera : « 3 + 1 = 4 », ou « 4 = 3 + 1 », qui signifie aussi l'égalité entre les écritures numériques. Le problème

posé aux élèves est celui de la comparaison de deux collections, ce sont des états du monde qui sont comparés avant la comparaison des écritures : on compare donc un système de relations.

Hypothèses d'ingénierie

- La relation d'équivalence est, dans les pratiques classiques, en général occultée et le signe « = » est vu essentiellement comme une indication à effectuer un calcul (en cela il correspond à la touche « entrée » d'une calculette). Relier 2 + 2 avec la désignation usuelle 4 (et de l'écrire « 2 + 2 = 4 ») tout en le pensant par exemple « 2 + 2 = 4 = 3 + 1 » (écriture peu usuelle en maths) est central dans la démarche proposée.
- « Pourquoi un élève écrirait-il « = » entre deux écritures ? » : c'est la question que se pose Guy Brousseau dans sa thèse (1986, p. 8-9). Selon l'auteur, les conditions d'un tel acte sont mises en place lorsque l'élève dispose d'au moins deux manières de désigner la même chose et que ces deux écritures lui sont assez familières, qu'il soit dans une situation de communication et que le signe apparaisse régulièrement, non automatiquement c'est-à-dire en relation avec d'autres symboles relationnels. Il s'agit d'enseigner les signes « =, ≠, <, > » de manière *paradygmatique*, comme y insiste Brousseau, les uns par rapport aux autres. Les signes « < » et « > » répondent à un problème que les élèves expérimentent car pour gagner il faut obtenir l'équivalence de son annonce avec le lancer. Par exemple, si un élève a montré D3G1 qui ne correspond pas au lancer 5, il notera : « 3 + 1 ≠ 5 » dans un premier temps puis plus tard « 3 + 1 < 5 », écriture qui apporte des précisions mathématiques (il n'y a pas d'égalité numérique entre les deux collections car le cardinal d'une collection est inférieur à l'autre). En effet, il leur est proposé un signe mathématique qui décrit la situation qu'ils vivent, qui dit si leur annonce est gagnante ou perdante, bref qui nomme la situation et qui la signe.
- Au cours de l'évolution du jeu vont être introduites des changements dans les règles comme par exemple « l'annonce est gagnante si elle est supérieure (ou inférieure) au lancer ». Ces changements sont considérés comme des variables didactiques car ils favorisent l'apparition de formes d'argumentation différentes : on justifie du gain ou de la perte au jeu en faisant appel à des connaissances sur l'ordre. La relation contrat-milieu est modifiée : plusieurs réponses sont admises, l'usage du signe peut être

étudié au travers de la classe de problème que sont les écarts. Par exemple, quelle(s) annonce(s) gagnante(s) avec un écart de x par rapport au lancer.

- La comparaison instaure l'équivalence / différence en question fondamentale du processus : on agit, on obtient des résultats d'action (du plus matériel au plus symbolique) et on compare ces résultats d'action. A partir du système de relations entre les nombres, construit sur l'expérience, sera ensuite dégagée la notion d'ordre sur les désignations additives c'est-à-dire savoir que par exemple 3 + 2 est inférieur à 5 + 1. Mais pour pouvoir gérer la comparaison de deux termes avec deux autres termes, l'appui de l'écrit devient nécessaire. C'est pour cela qu'à la phase 3 (comparaisons d'écritures additives en référence à une situation) le travail *commence* à se réaliser avec et sur les nombres et non plus sur les quantités d'objets qui sont comparables par estimation ou comparaisons directes (d'objet à objet). Nous décrivons ce travail plus précisément dans la section suivante.

Classe de problème : valider et justifier une comparaison

Éléments du dispositif didactique

La validation permet de déclarer si la partie est gagnée ou perdue. La justification est l'assertion que l'on porte sur la comparaison ; elle correspond à un discours rationnel sur l'action réalisée.

Hypothèses d'ingénierie

- Le professeur ou un pair (rôle de l'arbitre) puis l'élève lui-même lors des parties écrites (phases 2 et 3) valide la proposition. Les justifications peuvent être produites à partir de diverses techniques :

(i) des techniques de comparaison nombre par nombre : 1 + 2 < 4 + 5 car chacun des termes d'une composition est inférieur à ceux de l'autre. Cette technique n'est pas toujours possible à mettre en œuvre, par exemple comment comparer 4 + 5 et 6 + 3 ;

(ii) des techniques de comptage ou surcomptage. Ces techniques ne sont pas sollicitées et seront disqualifiées par la situation quand le nombre de termes s'élèvera ;

(iii) des techniques de calcul de la somme qui s'appuient sur des résultats connus ;

(iv) des techniques de composition et décomposition. La composition / décomposition est une approche qui permet d'opérer sur des mesures de grandeurs ; elle est

compatible avec le système décimal positionnel (Ma, 1999 ; Silvy, Delcroix, & Mercier, 2013). Dans les nouveaux programmes du cycle 2 (mis en place en septembre 2016), l'expression « décomposition et recomposition » (« composer et décomposer » sous la forme verbale) est utilisée pour travailler les relations numériques. Comparer 4 + 5 et 6 + 3 ce peut être par exemple, si l'on suit une stratégie qui fait « apparaître 5 », décomposer « 6 » en 5+1 et recomposer 1 et 3 pour rendre les écritures comparables facilement : 6 + 3 = 5 + 1 + 3 = 5 + 4 équivalente à 4 + 5).

Mais toutes les parties de jeu ne se prêtent pas aux mêmes techniques de validation : l'habileté technique relève du bon usage de ces techniques et des stratégies se révèlent, dénotant un certain sens du jeu (de justification).

- A terme, le travail de formulation que produisent professeur et élèves dans la validation permet de désigner les relations entre les objets mathématiques de la situation didactique. Une généralisation des justifications produites peut être formulée et aboutir à ce qui pourrait être appelé un théorème (valable dans la situation mathématique). Par exemple, la somme produite par une écriture additive à trois termes n'est pas forcément supérieure à celle d'une écriture additive à deux termes.
- Il est essentiel de surseoir à proposer ou demander des justifications à la validation durant les phases de jeu proprement dites (phases 1 et 2) afin de laisser les élèves développer des questionnements ou des constats, c'est-à-dire à développer un rapport à l'expérience dans la construction de la théorie. Par exemple l'expression « 2 + 3 = 5 » ne correspond pas à une représentation symbolique du monde matériel (« 3 doigts et 2 doigts font 5 doigts ») mais à une désignation de grandeurs dans une situation de jeu de comparaison. Ce fait d'expérience, pour les élèves, met en relation des éléments. Il permettra, à terme, lors du passage au travail dans l'écrit, d'éprouver les compositions et décompositions possibles permises par l'ensemble des techniques.

La suite de ce chapitre va permettre de décrire comment sont identifiés, discutés, traités ces enjeux de savoir au sein du collectif. Nous aborderons d'abord les éléments de la biographie didactique qui ont permis au groupe de s'instituer en collectif (sphère 1 / sphère 2), lors des deux premières années de mise en œuvre du dispositif (2011-12 et 2012-13). Puis nous changerons d'échelle d'observation pour analyser les échanges du groupe Provence au cours des quatre années d'implémentation du

dispositif dans les classes expérimentales. Ce changement va permettre de rentrer au cœur des transactions entre les sphères.

Éléments de la biographie didactique du collectif : chronique des conditions de la mise en œuvre du *Jeu des annonces*

Dans cette section, nous tentons de reconstituer la biographie didactique du collectif afin d'avoir une vue générale et chronologique sur la mise en œuvre de l'ingénierie pour la situation du *Jeu des annonces*. Dans le cadre théorique de la TACD, une telle biographie nous permet d'observer la nature des relations que les différentes instances (professeur, chercheur, doctorant, formateur, encadrant) entretiennent avec les objets du milieu pour l'étude de l'ingénierie. La biographie nous permet par exemple de voir quels ont été les sujets discutés ou les problèmes rencontrés, entendus comme déséquilibres du milieu pour le collectif, dans une situation vue comme contexte de l'expérience selon Dewey (1993). La biographie nous permet également de voir dans quels lieux ils naissent, évoluent, par qui ils sont révélés ou produits, s'ils sont pris en compte, traités et quels autres événements ils génèrent.

Nous en rédigeons ici une chronique afin de mettre en évidence les conditions de mise en œuvre de l'ingénierie. Cette chronique n'est pas et ne peut être exhaustive car (i) le travail a été réalisé à partir de nos notes qui recensent chronologiquement les faits et événements auxquels nous avons eu accès, lesquelles notes réfèrent aux visioconférences, réunions et séances en classe enregistrées mais aussi aux productions écrites, aux messages de la liste de diffusion ou du site ; (ii) nous avons opéré des choix dans les faits et événements relatés par manque de données, « pauvreté » des données recueillies ou parce que les échanges n'étaient pas d'ordre épistémiques (mathématiques)[84] ou parce qu'ils n'avaient pas eu de suite, en terme de production de faits d'ingénierie, c'est-à-dire d'ancrage pour les discussions[85]. Nous

[84] Par exemple, ceux qui concernent la rédaction proprement dite du document de la progression : échanges sur les types de formulation et les systèmes énonciatifs à employer ainsi que sur la présentation et l'organisation à adopter.

[85] Nous pensons notamment à la mise en place du *Jeu des annonces* par les classes d'étude la première année : des ajouts et précisions des règles et modalités du jeu ont permis, dès le départ de la phase d'expérimentation l'année suivante, une mise en place du jeu plus opérationnelle. Certains gestes ont été décisifs quant aux conditions didactiques de mise en œuvre et ont été repris dans la rédaction du

avons rédigé cette chronique à partir des faits et événements regroupés dans un tableau synoptique (cf. annexe 5) qui en indique le contexte environnemental (de quel type de données ils sont issus, à quelle date, en quels lieux dans le collectif) et le contexte didactique (description rapide du contenu des transactions). Nous aborderons les événements marquants suivants qui ont été constitués en faits discutés par le collectif : l'adaptation du document source de l'ingénierie par les professeurs des classes d'étude la première année de l'ingénierie (2011-12), les controverses soulevées par des chercheurs didacticiens, les difficultés de mises en œuvre de l'ingénierie lors de son implémentation en 2012-13, première année expérimentale à grande échelle.

Des événements relatifs à la réception et à la mise en œuvre de la situation du *Jeu des annonces* aux faits didactiques d'ingénierie

De l'adaptation du document source à la mise en place d'une progression

Lors des premières visioconférences de la première année de mise en place du dispositif (visioconférence du 19 octobre 2011, du 12 décembre 2011 et du 24 janvier 2012), le groupe étudie collectivement la question de la progression des séquences. Cette étude se réalise à partir des comptes-rendus et récits des professeurs des classes d'étude et des observateurs sur les mises en œuvre du jeu dans les classes durant les premiers mois, d'octobre 2011 à fin janvier 2012.

Le document source « Essai situation *Jeu des annonces* » ne mentionnant aucune indication en ce sens, le nombre de séances et la répartition des séances selon les phases de jeu ainsi que leur organisation varient selon les quatre classes d'étude qui ont mené les premières mises en œuvre l'année 1. De même, les variables de commande du jeu (nombre de dés et de mains ou termes et nature du dé) et de la situation (annonces gagnantes si égales, inférieures ou supérieures au lancer) sont introduites à des moments différents. Les tableaux ci-dessous nous permettent d'avoir

---

document SIT. Par exemple l'expression « statue des doigts » permettait une fois l'annonce réalisée que les mains puissent rester immobiles selon la configuration choisie, que l'annonce ne soit pas modifiée et que chaque élève ait la possibilité et le temps de vérifier collectivement l'annonce et le score.

une vision synoptique de l'organisation effective selon les différentes phases de la situation du *Jeu des annonces*.

Phase 1 : usage oral et spontané de la mesure de la grandeur sous forme additive.

Classe d'étude	Nombre de séances	Variables de commande	Contenu des séances et modalités de jeu
Classe A	2 séances	Deux puis trois puis six mains Un dé	Introduction du Jeu des annonces
			Appropriation du jeu : jeu par équipe
Classe B	1 séance	Deux mains et un dé	Introduction du Jeu des annonces Introduction des signes =, +, < et > à l'écrit lors de la mise en commun
Classe C	2 séances	Deux mains et un dé	Introduction du Jeu des annonces : jeu par équipe
			Appropriation du jeu : jeu par équipe
Classe D	18 séances	Deux mains et un dé.	Introduction du Jeu des annonces et appropriation du jeu : jeu par équipe de trois élèves et un arbitre (8 séances)
		Trois mains et un dé	Jeu par équipe de trois élèves (une main par élève) et arbitre (7 séances)
		Deux mains et deux dés	Jeu par équipe de trois élèves et un arbitre (3 séances)

Tableau comparatif des organisations mises en œuvre pour la phase 1 dans les quatre classes d'étude, année 1

Les trois premières classes ont consacré peu de séances (une ou deux) à la phase orale de l'expression de la grandeur par rapport à la classe D (dix-huit séances). La perception de la nécessité de la durée de cette phase 1 est très différente selon les professeurs puisque le professeur de la classe D y consacre dix-huit séances (dont la plupart sont courtes) alors que le professeur de la classe C, qui déclare que les élèves ont eu besoin d'un long temps d'appropriation, en a fait deux. Le professeur de la classe d'étude B a dès la première séance mis en place le passage à l'écrit (phase 2) pour, dit-elle, que les élèves ne modifient plus leurs annonces en cours de jeu (visioconférence du 19 octobre 2011).

Phase 2 : usage de l'écriture symbolique

Classe d'étude	Nombre de séances	Variables de commande	Contenu des séances et modalités de jeu
Classe A	3 séances	Deux termes et un dé	Jeu individuel avec le professeur comme lanceur ; annonce gagnante si supérieure au lancer. Perte du milieu d'origine : plus de référence aux mains.
Classe B	6 séances	Deux termes et un dé	Jeu individuel jeu par équipe
		Deux termes et dé à dix faces (numérotées de 1 à 10)	Passage au dé à 10 faces pour étendre le domaine numérique des annonces : jeu en collectif puis par équipe
		Trois termes et dé à dix faces	Jeu à trois mains pour tenter d'améliorer les interactions langagières entre les élèves : jeu par équipe
			Construction en collectif d'un premier répertoire additif (sommes de 1 à 10) en gardant la contrainte du jeu initial (terme ≤ 5) (2 séances)
Classe C	2 séances	Deux termes et un dé	Jeu par équipe ; annonce gagnante si égale puis si inférieure au lancer
		Deux termes et dé	Jeu par équipe ; annonce gagnante si inférieure au lancer
Classe D	13 séances	Deux termes et un dé	Jeu sur fiche ou ardoise en individuel ; professeur lanceur (5 séances)
		Trois termes et un dé	Jeu sur fiche ou ardoise en individuel ; professeur lanceur (5 séances)
		Deux termes et deux dés	Jeu sur fiche ou ardoise en individuel ; professeur lanceur (3 séances)

Tableau comparatif des organisations mises en œuvre pour la phase 2 dans les quatre classes d'étude, année 1

En ce qui concerne la phase 2 (usage du code symbolique), la durée et la répartition selon les phases de jeu sont aussi très différentes selon les lieux d'étude : pour la

classe D cette phase alterne avec la première. Il y a donc d'abord une phase d'appropriation du jeu par l'usage oral et spontané de la désignation de la grandeur puis une phase de symbolisation de la situation avant le changement de variables de commandes (nombre de dés et mains ou termes) alors que dans les autres classes, l'usage du code écrit une fois installé est conservé tout au long de la progression. Les variables sont généralement introduites dans l'intention d'étendre les possibilités d'annonces ou pour faire évoluer les stratégies. L'étude des comptes-rendus de séances montre, lors du passage à cette seconde phase, des changements du milieu non prévus dans le document source : (i) dans la classe A la référence aux doigts est abandonnée pour laisser place à la référence du dé (les annonces peuvent donc être décrites avec des termes inférieurs mais aussi égaux à 6 et ce choix révèle des difficultés pour les élèves moins avancés car ces élèves construisent leur annonce en se référant à leurs mains d'où une incompréhension quant à l'utilisation du 6 dans une écriture additive à deux termes), (ii) le professeur de la classe B introduit rapidement dès la seconde séance un nouvel objet, un dé à dix faces, qui étend l'acceptation des écritures additives. Des difficultés apparaissent dans la réalisation d'exercices liés à la situation initiale (exemple : écritures de termes plus grands que 5) (bilan classe B séance 3, du 14 octobre 2011) pour la moitié des élèves car, interprète l'enseignante : « quand on est après en situation d'exercice, ils [les élèves] sont un peu déconnectés de la partie, ils sont dans le domaine mathématique et je n'ai pas trouvé ça foncièrement dérangeant qu'ils écrivent que 8 plus 2 supérieur à 6 mais ils ont perdu l'idée du jeu » (visioconférence du 19 octobre 2011, 17 min). Dans cette classe sont aussi construits les répertoires des décompositions des nombres de 1 à 10 : ainsi est créé le répertoire additif à deux termes complet et ordonné du jeu des annonces. Dans la classe D, phase de passage à l'écrit et jeu individuel sur ardoise ou fiche sont systématiquement associés alors que les autres classes privilégient le travail en équipe.

Phase 3 : comparaison des écritures additives

Classe d'étude	Nombre de séances	Variables de commande	Contenu des séances et modalités de jeu
Classe A	6 séances	Deux dés et deux termes	Jeu par équipe ; annonce gagnante si inférieure au lancer (2 séances)

		Deux dés et deux termes	Jeu par équipe ; annonce gagnante si supérieure au lancer (1 séance)
		Trois dés et trois termes	Jeu par équipe ; annonce gagnante si supérieure au lancer (3 séances) Lors de la dernière séance, phase d'institutionnalisation des signes : = ; + ; < et >.
Classe B	4 séances	Deux dés (numérotés de 0 à 5 et deux termes)	Faire des annonces avec les deux mains égales au lancer proposé par le professeur puis jeu par équipe
Classe C	2 séances	Deux dés et deux termes	Jeu par équipe ; annonce gagnante si supérieure au lancer
		Trois dés et trois termes	Jeu par équipe ; annonce gagnante si supérieure au lancer
Classe D	2 séances	Deux dés et deux termes	Jeu sur fiche ou ardoise en individuel ; professeur lanceur

Tableau comparatif des organisations mises en œuvre pour la phase 3 dans les quatre classes d'étude, année 1

Les classes A et B, ainsi que la C car le professeur a mis en place la situation plus tardivement, ont consacré plus de temps à la phase 3 (comparaison d'écritures additives) et ont introduit plus de variables de commandes et de variables didactiques différentes lors de ce premier trimestre. La classe B modifie les variables de commande du jeu en introduisant deux dés numérotés de 0 à 5. Le rapport entre la référence aux doigts de la main et au dé est alors en complète adéquation : il n'y a plus de décalage entre les deux systèmes présents dans le *Jeu des annonces*. Le jeu inverse (produire des annonces avant le lancer du dé) est proposé.

Cette comparaison synthétique des mises en œuvre dans les quatre classes d'étude l'année 1 montre diverses organisations effectives des trois phases composant le *jeu des annonces*. Comme la situation autorise des modifications du milieu (en introduisant un autre dé, en passant de deux à trois mains ou termes), les diverses mises en œuvre ont permis d'observer quelles étaient les réactions des élèves et remarquer notamment l'importance de rester dans la référence aux doigts jusqu'à la phase 3 de l'écrit comprise.

Dans l'ensemble, les professeurs ont adapté le document « Essai situation *Jeu des annonces* » en fonction des réactions des élèves, de leur appréhension des objectifs de la situation, de la progression dans les apprentissages arithmétiques (la situation ayant été mise en place en mathématiques indépendamment du projet puisqu'ils testent, en cette première année, les activités de l'ingénierie tout en continuant les activités prévues dans leur programmation initiale), ou d'autres déterminants de l'action. Ces différents choix seront l'objet de discussions au sein de collectif.

L'idée de mener la même expérience de base pour les élèves est fondamentale pour l'avancée dans un temps didactique ouvert, susceptible de se convertir en *temps de situation* (Quilio, 2012 ; Sensevy, 2011a). Mais se pose la question des effets produits par l'ordre dans lequel les variables de commande de la situation sont introduites et celle de la nature de ces variables (visioconférence du 12 décembre 2011 et courriels jusqu'à la fin février 2012). Par exemple, l'introduction d'un dé à dix faces n'est pas partagée par tous les professeurs du collectif, le jeu à un dé et trois mains (puis termes) n'est pas envisagé à la même place dans la progression.

Nous présentons ci-dessous quelques éléments relatifs à ces débats sous la forme de commentaires qui ont été faits en marge des documents supports de l'ingénierie par les protagonistes et les explicitons ensuite :

> « Je trouve plus facile de penser un emboîtement 2 mains à la suite que 3 mains. La modification d'une variable sur le dé (à 10 faces par exemple) permet de garder des modalités de séances identiques à la phase précédente. De plus, le choix des décompositions est très réduit et certains élèves ne sont pas d'accord de ne sortir que 2 doigts par exemple. De plus, le groupe classe est en construction et il est nécessaire qu'ils apprennent à travailler en groupe d'abord ensuite à produire un travail collectif (il me semble que cela fait beaucoup en peu de temps) » (commentaire du professeur de la classe d'étude C du 21 février 2012).

Le professeur de la classe d'étude préconise la progression de la phase 1 suivante : un dé à six faces et deux mains puis un dé à dix faces et deux mains pour plus tard passer à trois mains et un dé car les modalités de jeu à trois mains sont très différentes de celles à deux mains. Selon le professeur, le jeu à trois mains nécessite une coopération jugée précoce à ce stade de l'année entre les élèves car ils doivent ajuster leur annonce (chacun une main) en fonction de la production des autres. Une

comparaison entre trois mains et un dé à six faces induit de plus la production d'annonces de petites valeurs qui limiterait les élèves.

> « Nous avons expérimenté une alternance des phases 1 et 2 (avec 1 dé, 2 mains puis 2 termes puis 3 mains puis 3 termes) avant d'introduire le second dé (phase 1, phase 2). Ce qui implicitement représente un travail de composition / recomposition sur des annonces identiques par exemple dé annonce 5 ; avec deux mains 3 + 2, avec 3 mains 1 + 2 + 2 » (commentaire du chercheur ChS du 21 février 2012).

Ce commentaire provient d'un chercheur didacticien des mathématiques, ChS, qui a pu observer et suivre la classe d'étude D. Selon le chercheur, le jeu à trois mains anticipe un travail d'ajustement en favorisant une composition : regrouper les annonces de deux mains pour savoir ce que la troisième pourrait parier pour que le jeu puisse avoir une chance d'être gagnant.

> «Je suis tout à fait opposé par principe à transformer les dés pour avoir des propriétés didactiquement commodes : l'un des intérêts de l'étude c'est que justement on étudie des objets et des pratiques du monde des adultes, et pas des objets et pratiques scolaires. Ce qui doit donc être clair, c'est que ces objets ont des propriétés que l'on étudie, et non pas que l'on reproduit à l'école les jeux de hasard… une question de « bonne distance » et de « posture mathématicienne » qui nous conduit à étudier les jeux en mathématiciens : pour savoir comment gagner (à ce jeu et à tous ceux qui relèvent des mêmes principes) et que jouer n'ait donc plus d'intérêt parce qu'on SAIT gagner. » (commentaire du chercheur ChA du 22 février 2012)
>
> « on ne peut comprendre l'écriture de dix si on l'écrit 10 dès le départ, et qu'il faut donc d'abord que le problème émerge. A moins que sur le dé à dix faces considéré il y ait 0 comme première face ce qui fait un dé numéroté de 0 à 9... » (courriel du chercheur ChA du 24 février 2012).

Selon ChA, l'enquête que mènent les élèves doit porter sur les propriétés mathématiques des objets culturels (ici dés et doigts). Le dé à six faces comporte des constellations de 1 à 6 points tandis que le dé à dix faces, des nombres (dont le nombre « 10 » qui n'a pas été étudié à ce stade de la progression comme forme symbolique et économique d'un système). Le décalage voulu entre les annonces que peuvent produire deux mains avec des termes inférieurs ou égaux à 5 (dans ces premiers

temps du jeu) et un ou deux dés de 1 à 6 permet de constater que tous les nombres ne sortent pas de manière équiprobable. Cela permet aux élèves de fournir des réponses s'appuyant sur des connaissances mathématiques (par exemple : 3 + 4 ; 4 + 4 ; 5 + 2 ; 5 + 3 ; 5 + 4, 5 + 5 sont perdus à coup sûr avec un jeu à un dé).

> « C'est une situation centrale dans le processus broussaldien : la coopération contraint les joueurs à devoir expliciter le comptage permettant d'apprécier le succès possible (anticiper) : C'EST LA FONCTION PREMIERE DU NOMBRE, centrale, on la suit dans ses développements depuis le jeu du trésor et les listes… Elle est aussi pour Brousseau anthropologue la spécificité des mathématiques et de leur développement, avec le fait que cette fonction est portée par l'usage d'un symbolisme (comme le for/da, il doit procurer le plaisir du contrôle de l'avenir… par déplacement dans le monde du symbolique !). Le fait que trois mains fassent spontanément bien plus qu'un dé est donc à conserver absolument » (commentaire de ChA du 22 février 2012).

Selon un autre commentaire du chercheur ChA, le jeu à trois mains ou termes oblige à une anticipation sur les possibles et tout à la fois une coopération dans le jeu. Anticipation et coopération s'apparentent ainsi à une analyse de la situation à l'aide des connaissances mathématiques sur les nombres puisque les joueurs doivent expliciter leurs annonces donc exercer un contrôle sur leur action avant de s'engager tous ensemble dans la partie. Cette représentation de l'action que permettent les nombres est fondamentale dans une pratique sociale des mathématiques.

Si tous les points de vue sont recevables car chacun parle au regard de ses expériences, le collectif doit prendre des décisions après avoir examiné les arguments des uns et des autres afin de produire un équilibre entre la faisabilité de la mise en œuvre et les enjeux de l'ingénierie. Ces décisions restent toutefois à mettre à l'épreuve lors de la seconde année.

Reprenons l'exemple à l'étape du passage à l'écrit (phase 2) lors du changement d'un jeu à deux termes pour un jeu à trois termes où d'autres possibles sont à explorer par les élèves (6 ce n'est pas seulement 3 + 3 ou 5 + 1 mais aussi 2 + 1 + 3, 2 + 4 + 0, etc.). Un principe de l'ingénierie, au niveau de l'écrit, est qu'un regroupement de termes connus (composition de termes) va être produit en utilisant certains résultats du répertoire acquis. Rappelons que, pour le collectif, il s'agit de concevoir une progression capable de faire éprouver aux élèves la nécessité de l'économie de

l'usage d'un code écrit. En effet, l'hypothèse générale postule que dès qu'il y a nécessité de traiter les annonces, les conditions pour le passage à l'écrit peuvent être installées. Lors de la mise en œuvre en classe, ce qui apparaît en majorité avec les élèves est un compte de doigts sortis. Si cette nouvelle variable (introduction de trois termes) amène une « régression » (recours au comptage au lieu du recours aux résultats connus du répertoire) comme cela a été constaté, il conviendrait qu'elle soit provisoire car cette technique est économiquement coûteuse et complexe dans sa relation à l'écrit. Cependant si la variable à trois termes reste maintenue à cette place dans la progression c'est qu'elle est intéressante (i) par rapport au travail d'ajustement par anticipation sur les parties et le tout ; travail qui fonde de nouvelles stratégies et qui relance l'intérêt (exemple : une première annonce de 2, une seconde annonce de 2, quelles possibilités pour la troisième annonce ?) et qui permet d'interroger et d'anticiper les possibles grâce aux connaissances mathématiques ; (ii) par rapport aux répertoires additifs qui, s'ils sont installés, rendent le jeu plus fluide. Or à cette étape, ce n'est pas le cas pour beaucoup d'élèves. Rester sur des variables trois mains et un dé permet de consolider les répertoires de base (sommes inférieures à 6), utiles aux répertoires plus importants ; (iii) par rapport à la construction du contrat collectif au sein de la classe, dans lequel par nécessité chacun est interpellé en personne dans le jeu (visioconférence du 12 décembre 2011).

La production détaillée d'une progression (avec un nombre de séances prévues à chaque étape pour le *Jeu des annonces*) permet d'acter certaines décisions au sujet d'éléments comme l'alternance des phases et la place de l'écrit, l'ordonnancement de l'introduction des variables de commandes de la situation et la nature du matériel utilisé. L'alternance des phases 1 et 2 (de jeu puis d'écritures symboliques) pour toutes les variables de commande de la situation (un ou deux dés, deux ou trois mains, …) est rapidement décidée car le passage à l'écrit (phases 2 puis 3) stabilise les annonces. Ainsi, la validation par l'arbitre et les autres joueurs, permet de laisser des traces à propos du travail en cours aussi bien pour l'élève que pour le professeur et dans une autre mesure pour les parents. La validation permet aussi de se détacher du jeu et d'adopter une autre représentation (autrement dit re-présenter la réalité ou « fictionner » le monde). Elle est aussi susceptible de provoquer des questionnements fructueux, par exemple sur l'écriture avec le terme 0, et élaborer des premières stratégies de comparaison. Par exemple si je compose une annonce avec un terme et

un autre terme alors il n'y a plus équivalence avec une annonce qui comporte un de ces termes ($4 + 2 \neq 4$) sauf si ce terme est 0 ($4 + 0 = 4$).
La version V3 de la progression prend sa forme actuelle en modules de 1 à 6 pour le *Jeu des annonces*. Les variables de commande du jeu (nombre de dés et de mains ou termes) vont organiser la situation didactique en modules ou séquences d'enseignement - apprentissage comprenant chacun de quatre séances de 45 minutes (production de documents du 21 janvier 2012 au 27 avril 2012) :

- « Module 1 » : jeu avec deux mains et un dé (qui correspond à la phase 1) ;
- « Module 2 » : jeu avec deux termes et un dé (phase 2) ;
- « Module 3 » : jeu avec trois mains et un dé (phase 1) ;
- « Module 4 » : jeu avec trois termes et un dé (phase 2) ;
- « Module 5 » : jeu avec deux mains et deux dés (phase 1) ;
- « Module 6 » : jeu avec deux termes et deux dés (phase 3).

De la controverse sur l'adidacticité de la situation et la part de hasard à la mise en place de parties fictives et inverses et à la construction d'une référence commune

D'autres chercheurs en didactique des Mathématiques, ChJ et ChM (que nous qualifierons d'extérieurs au dispositif ACE, « Ext ») ont été sollicités, l'année 1, pour donner leur avis sur la situation *Jeu des annonces*. Leurs remarques concernent principalement le caractère de non adidacticité de la situation, le statut du hasard dans le jeu et le manque de rétroaction du milieu matériel. Ces remarques constituent pour le collectif un problème dans le milieu de l'étude.
Selon ChJ (Ext), « cette situation n'a aucun caractère d'adidacticité : le savoir visé n'est pas la solution d'un problème (au sens mathématique) posé. La situation proposerait un jeu comme moyen de motivation externe (donc n'étant pas le moteur de l'évolution des savoirs)» (courriel du 17 février 2012). Le collectif est d'accord sur le fait que la situation telle qu'elle est au départ ne permet pas de fournir la connaissance mathématique visée mais elle permet par les dimensions adidactiques qu'elle contient de produire certaines connaissances qui vont être remises en jeu (visioconférence du 21 février 2012). Dans un premier temps, le jeu est appris avant qu'il ne devienne moteur d'une situation quasi adidactique. Ce n'est que dans un second temps que le

jeu pose des problèmes aux élèves : le problème posé est celui de la comparaison des désignations représentées par une écriture additive (notamment lors de la phase 3). Les propriétés du dé et des annonces à deux mains sont explorées par les élèves et non données par le professeur : il y a une dimension adidactique dans le fait qu'il n'est pas signifié un moyen d'explorer ces propriétés par le professeur. Il existe bien des éléments adidactiques dans la situation mais il s'agit surtout de proposer des situations d'enseignement assez robustes pour tenir compte de la variabilité des pratiques enseignantes. En outre, selon ChG, les questions ombilicales et les interrogations sur l'organisation de la réalité produites par la *théorie des situations didactiques* (Brousseau, 2004b) restent valides : « Quels sont les moyens et les raisons dont les élèves disposent pour travailler le problème posé ? Quelle va être l'action du professeur pour faire travailler ces moyens et ces raisons par les élèves ? » (courriel du 28 février 2012). Selon ChY, la question du milieu et des actions et rétroactions sous-jacentes doit être revue car « dans la réalité d'un enseignement dans les classes, il est impossible de trouver des milieux adidactiques avec et sur lesquels on va pouvoir agir, dont les rétroactions vont permettre de construire les connaissances. Par exemple, il y a des propriétés mathématiques rencontrées par des situations et des milieux adidactiques dont la démonstration est impossible parce que les connaissances mathématiques mobilisées ne peuvent pas se trouver dans les milieux confiés aux élèves. Dans une démarche rationaliste, ce qui importe c'est la rencontre de questions par les élèves » (visioconférence du 21 février 2012).

Selon ChJ (Ext), le *Jeu des annonces* est « un jeu sans stratégie puisque l'on est soumis au hasard et qu'il n'y a pas d'évolution possible du pari vers la prévision[86] » (courriel du 17 février 2012). Pour ChM (Ext) dans cette situation, « il s'agit d'un vrai pari (comme dans le pile ou face), où ils [les élèves] doivent être dans l'anticipation des possibles mais pas dans la prévision rationnelle » (courriel du 06 février 2012). Pour le collectif, il existe une valeur didactique des expérimentations des élèves : par exemple, ils constatent d'eux-mêmes que l'annonce est perdue si elle est supérieure

[86] En ce qui concerne l'évolution possible du pari vers la prévision, nous pouvons faire référence ici à *l'ingénierie de dévolution à propos de la soustraction* (Brousseau, 2004b, p. 304-310). Lors de la *dévolution de la devinette*, les élèves n'ont pas encore les connaissances nécessaires pour prévoir la solution. Ils donnent donc des réponses au hasard. Plus tard, ils pourront les anticiper (et parier pour gagner) quand ils seront capables de comprendre le raisonnement sous-jacent et utiliser le comptage puis l'addition et la soustraction. Cette phase de dévolution sert à « permettre à la prévision rationnelle d'émerger d'elle-même et de se définir *contre* la réponse au hasard » (p. 306).

à 6 mais il est nécessaire que ce constat s'accompagne d'une prise de conscience de la nature du dé.

Le compte-rendu de séance d'un professeur en témoigne (19 septembre 2012) : « Très peu d'annonces supérieures à 6. Marcus dit : "moi, j'ai jamais gagné". Je lui demande quelles ont été ses annonces : 4 ; 8 ; 9 ; 10. Je demande au groupe classe pourquoi Marcus n'a pas gagné. Imane répond que 8 ; 9 et 10 ne sont pas sur le dé. A combien s'arrête le dé : à 6 !! Marcus sourit ! ». Cet épisode montre que la reconnaissance de l'intervalle des valeurs est une découverte pour certains élèves et fait partie du gain (grâce à l'expérience) sur les stratégies possibles pour mieux annoncer. Le *Jeu des annonces* n'est pas un jeu de hasard : il ne s'agit pas s'éterniser dans la phase de « lancers inopérants » (préoccupation de ChC notée dans le courriel du 24 avril 2012) sous prétexte que tous doivent découvrir ces axiomes mais de les faire formuler par les élèves et les écrire (5 + 3 > 6) (visioconférence du 25 avril 2012). Le hasard sert à faire le jeu, à donner du jeu, à ouvrir l'espace de décisions possibles des élèves : il n'est pas l'objet de l'exploration mais il peut correspondre à une entrée dans le jeu pour certains élèves qui aiment s'affronter à de l'incertitude. Le hasard a un statut ancillaire et pour éviter qu'il n'ait trop de place, il est nécessaire d'introduire des parties fictives. Celles-ci permettent de poser des problèmes particuliers aux élèves (visioconférence du 21 février 2012). Les parties fictives permettent de parler ce qui a été symbolisé. Dans les parties fictives peuvent être prévus des cas de figures remarquables entre annonces et lancer afin que leur rencontre avec les élèves soit réalisée[87].

Selon ChA, « le jeu de hasard apparaît alors comme la pratique de référence à partir de laquelle les élèves peuvent comprendre ce qui leur est demandé lorsqu'on leur propose : des élèves ont joué au jeu des annonces, le lancer de dé a donné 5, un premier élève a annoncé 2 + 4, un deuxième élève a annoncé 1 + 3, un troisième élève a annoncé 0 + 5. Qu'en pensez-vous ? Un tel énoncé revêt le statut de problème et peut être immédiatement référé à une réalité matérielle que les élèves peuvent parfaitement se représenter. Ensuite, libres à eux de dire ce qu'ils veulent et pas uniquement qui a gagné ou qui a perdu ». Le hasard permet alors de construire, sous

[87] Par exemple, nous avons pu remarquer que les élèves proposaient majoritairement des annonces avec des termes identiques ; les parties fictives pourraient proposer des parties avec des annonces asymétriques.

la conduite du professeur, la relation contrat-milieu de la façon la plus socialement scolaire et profonde possible.

Pour pallier le hasard, un autre type de jeu serait d'envisager le jeu inverse, c'est-à-dire un lancer suivi par des annonces, ce qui permettrait aux élèves d'appréhender la situation d'un autre point de vue (visioconférence du 25 avril 2012). Le professeur de la classe d'étude B a introduit ce type de jeu dès la huitième séance l'année 1 car certains de ses élèves ne concevaient pas que deux écritures différentes (par exemple 4 + 2 pour l'annonce et 5 + 1 pour le lancer) puissent être équivalentes car leurs termes ne l'étaient pas. Le collectif est conscient qu'à chaque apport ou modification la question de l'impact sur les élèves et sur la situation est à envisager : il s'agit donc de se demander en quoi ce type de changement de jeu peut modifier les stratégies des élèves. Selon ChS (visioconférence du 25 avril 2012), lancer le dé puis annoncer renforce la stratégie d'ajustement d'une main sur l'autre (à partir d'une annonce approximative) ou des deux mains (utiliser la symétrie des mains qui apparaît spontanément) puis jouer sur la conservation pour viser le résultat donné par le lancer. Cette stratégie est aussi l'un des enjeux de la situation à trois mains. Elle favoriserait en outre les stratégies de décomposition (plusieurs façons de faire x) : il s'agit de la voir comme une prise de conscience des possibles si ce complément au jeu est placé en fin de séance. Le jeu inverse au *Jeu des annonces* influe sur le contrat didactique : faire envisager par les élèves un même problème de deux points de vue différents donne un statut différent aux doigts et aux dés.

Ces interpellations sur le manque d'adidacticité de la situation et le statut du hasard dans le jeu en année 1 ont permis d'approfondir et de partager certaines compréhensions des enjeux, la construction d'une référence commune dans le groupe sur la part d'adidacticité de la situation du *Jeu des annonces* (et ainsi reconstruire les rapports entre adidacticité et didacticité dans la situation didactique) et la décision de la création de parties fictives ou de jeu inverse.

De la controverse sur le manque de rétroaction du milieu à la mise en place d'une situation propédeutique

Dans un même courriel, ChJ (Ext) se demande « comment peut vivre une situation sans rétroaction qui réinterrogerait les élèves sur le bien-fondé (ou non) du travail »

(courriel du 17 février 2012). Dans le même ordre d'idée, ChM (Ext) remarque que le travail mathématique des élèves porte sur la détermination « gagné » ou « perdu ». La validation ne vient pas de la situation mais sous la forme d'une « correction » par un autre joueur ou par le professeur. Ce point lui semble encore plus problématique dans la phase 3 (comparaison des désignations) : « c'est ici que l'absence de validation du travail des élèves par la situation me paraît dangereuse car cela occulte le rôle de l'addition : permettre la prévision par le calcul de quelque chose qui concerne des collections ». ChM (Ext) propose une vérification individuelle (c'est-à-dire un moyen de contrôle de leurs assertions) qui consiste à fabriquer des « trains » avec des cubes (qui correspondraient aux écritures additives annonce et lancer) et à les comparer de manière effective. ChM (Ext) trouve essentiel que les élèves puissent faire « des allers et retours entre collections et nombres », entre le milieu matériel et le milieu symbolique, « au cours desquels les élèves sont obligés d'anticiper, de par la situation, mais où les rétroactions constituent une aide pour progresser »[88]. Le chercheur joint au courriel (du 06 février 2012) la description rapide d'une situation *Train cubes* mise en œuvre pour l'introduction des écritures additives à l'école Michelet à Talence en 1998.

Pour le collectif ACE sphère 1 (courriel du 13 février 2012), les doigts constituent surtout un milieu pour le contrôle sur la désignation des quantités : ils restent la référence du milieu matériel longtemps dans la situation et permettent de ramener au concret toute forme symbolique (au sens large du terme, langage verbal compris) mais ils ne jouent pas de rôle dans la rétroaction. Pour que l'élève puisse vérifier la validité d'une comparaison entre deux écritures additives (annonce et lancer), il pourrait être créé un milieu matériel comme celui des trains selon la proposition de ChM (Ext). Ou bien, pour que l'élève puisse contrôler la comparaison, une représentation figurée des nombres, comme par exemple une représentation des nombres par des segments (visioconférence du 21 février 2012).

Une réflexion s'est engagée sur la pertinence de l'introduction de la situation *Trains cubes*. Quel rôle peut-elle tenir ? (visioconférence du 21 février 2012). Pour ChM (Ext) et ChJ (Ext), il était important qu'une rétroaction par le milieu de la situation soit

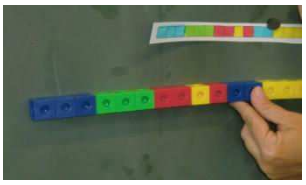
[88] Quand les élèves comparent 5 + 2 + 1 et 3 + 3 + 2, ils font une analyse symbolique. Si l'habitude dans la classe (comme à l'école Michelet, dispositif COREM) est de renvoyer au milieu matériel la vérification, par la construction de « trains » par exemple, l'addition est alors considérée comme moyen de prévision.

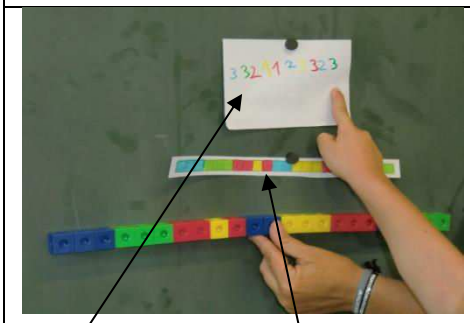
proposée et constitue une aide pour progresser. Selon le collectif, la vérification dans le milieu matériel est chronophage et peu fiable au niveau de la manipulation (erreur dans le nombre de cubes lors de l'assemblage par exemple), d'autant plus quand les valeurs numériques commencent à s'élever. La vérification symbolique (calculer) doit s'avérer moins coûteuse et constituer un progrès par rapport à une vérification matérielle. La *Situation des trains*, utilisée comme une situation matérielle fondatrice, une métaphore de toutes les additions, pourrait jouer un rôle propédeutique à la situation des annonces. Construire des trains est alors considéré, par le collectif, comme un travail de *dénotation*, de construction d'une référence à une forme symbolique. Le travail de construction d'une référence à une forme symbolique et le travail de la vérification sont considérés comme différents. La situation fonctionnerait alors par la suite comme un système de représentation calculable qui permettrait la mise en place d'une représentation des nombres qui préfigurerait celle avec des segments (visioconférence du 21 février 2012). Cette représentation prendra par la suite le nom de « train-nombre ».

La situation *Train / tours* est alors rédigée et intégrée dans la programmation en début de progression. Nous verrons que ce fait sera à l'origine d'autres faits didactiques. Mais auparavant décrivons cette situation qui vient précéder celle du *Jeu des annonces* et qui constituera un module 0.

Résumé rapide de la situation didactique dite du Train / tour et organisation mathématique et didactique sous-jacente

La situation *Train / tour* s'appuie sur les connaissances construites à l'école maternelle (dénombrement de petites collections, désignation orale des nombres, nombre comme mémoire d'une quantité, repérage de position, décomposition en sous-collections et connaissance de la comptine numérique). Il s'agit de faire rechercher aux élèves une stratégie pour constituer un train (qui pourra aussi être une tour) composé de cubes emboîtables de couleurs différentes à partir d'une représentation schématique de cet objet-train.


Représentation schématique (au-dessus) et objet-train (en dessous)

<table>
<tr><td colspan="2">Première étape :
Les élèves doivent construire un train, composé de cubes de couleurs, identique à une représentation schématique de cet objet-train.</td></tr>
<tr><td>
Objet-train</td><td>La photographie ci-contre montre un élève se retournant pour vérifier que l'agencement des cubes est conforme à la représentation schématique affichée (non visible sur la photo).</td></tr>
<tr><td colspan="2">Deuxième étape :
Un élève émet un message pour qu'un autre élève, n'ayant pas vu la représentation schématique du train, puisse construire l'objet-train à l'identique. L'émetteur a à sa disposition des crayons de couleurs.</td></tr>
<tr><td> 
Message représentation schématique</td><td>La photo ci-contre montre la validation qui s'effectue par la mise en correspondance entre le message, la représentation schématique (ou schéma-train) et l'objet-train.</td></tr>
</table>

L'enjeu pour les élèves est ici de désigner la mesure de la grandeur d'une collection (les cubes formant un train ou une tour) en utilisant le modèle additif qui décrit la quantité par une composition. En cela, cette situation *Train / tour* appartient à la même classe de situation (quant à la désignation de la mesure de la taille d'une collection ou nombre d'entités) que celle du *Jeu des annonces*. Ces deux situations appellent dans le fond le même traitement mathématique. Il s'agit de désigner une quantité sans passer par le comptage-énumération (énumérer les objets un par un en les pointant et en y associant un mot de la comptine numérique : « un, deux, trois, … »). Dans le jeu,

le professeur tient le rôle de banquier afin que les élèves lui demandent le nombre de cubes nécessaire pour une couleur et prennent conscience de cette grandeur en la désignant oralement (même si cette opération se réalise en plusieurs fois : trois cubes bleus puis deux autres bleus). Les élèves doivent être capables de passer d'une correspondance objet à objet (première étape décrite ci-dessus de correspondance entre la représentation schématique et le train-objet) au nombre comme moyen de représentation symbolique d'une quantité lors de l'émission d'un message (seconde étape). Désigner consiste alors à attribuer à cet ensemble d'objets un code qui doit être lisible par tous ; ce code est un moyen commun, convenu pour le contrôle et la justification des productions. Il est le moyen technique pour décrire la situation à un correspondant qui n'a pas vu l'objet. Il doit traduire l'ordre des groupements et se présente sous la forme d'une liste ordonnée de signes.

Voici les types de productions possibles et observés pour le schéma-train ci-dessous :

■Stratégies permettant la construction du train-objet :

-1 1 1 4 2 1 3 etc.

-1B 1R 1V 4B 2V 1J 3R etc.. (B signifiant « bleu », R « rouge », …)

-1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 etc.

-B R V B B B B V V J R R R etc.

-un bleu un rouge un vert quatre bleus deux verts (écrits en lettres grâce aux affiches des noms des nombres et des couleurs : très rare et non terminé)

■Stratégies ambigües, permettant ou pas la construction du train-objet suivant l'interprétation du lecteur :

-1 2 3 4444 55 6 777 etc.

-1 1 1 1 2 3 4 1 2 1 1 2 3 etc.

-1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 etc.

- cube bleu dessiné et « 1 » écrit dessous, cube rouge dessiné et « 1 » écrit dessous, cube vert dessiné et « 1 » écrit dessous, cube bleu dessiné et « 4 » écrit dessous etc.

■Stratégies ne permettant pas la construction du train-objet :

-5B 6R 7V 5J (total de chaque sous-collection)

-1 1 1 1 1 1 1 etc. (confusion entre élément individuel et groupement)

- lettres du prénom écrites en bleu puis rouge puis vert puis bleu puis vert puis jaune puis rouge etc. : ABDELHAC (effet de contrat du terme « écrire ») ; observé dans une classe.

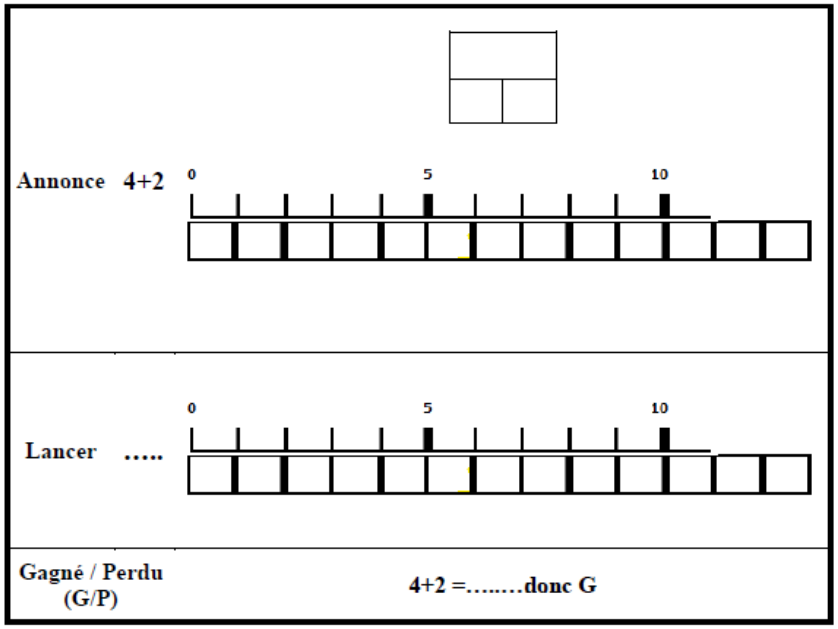
Stratégies des élèves pour la constitution d'un message permettant la construction du « train-objet »

Après cette description du jeu *Train / tour* qui nous sera utile pour comprendre les transactions s'y reportant, revenons aux événements marquants concernant les premières mises en place de la situation principale.

Des difficultés rencontrées par les élèves à la mise en place de représentations associées

Les difficultés rencontrées au cours du *Jeu des annonces* par les élèves peuvent être inhérentes aux changement des conditions du jeu (nombre de dés, de mains engagés), aux connaissances en construction sur les grandeurs et la représentation symbolique des situations (nous avons déjà évoqué que pour certains élèves 1 + 5 et 4 + 2 n'étaient pas des annonces équivalentes car leurs termes étaient différents ou bien que 2 + 3 et 2 étaient des annonces équivalentes ; un même terme « 2 » figurait dans les deux écritures). Nous ne nous attacherons pas ici à ce type de difficultés car elles font partie du processus normal d'apprentissage mais à celles qui sont liées plus directement à la mise en œuvre de l'ingénierie.

Nous ne retiendrons pas non plus les difficultés des élèves, signalées par les professeurs, à utiliser la fiche de jeu des parties fictives car cette utilisation implique pour les élèves, en ce début d'année scolaire, de nombreuses actions. Voici l'une de ces fiches :



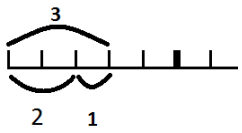
Fiche d'une partie fictive pour le module 2

Il s'agit, pour les élèves, de se repérer d'abord parmi les informations indiquées ou à compléter (indications des annonce et lancer, représentations du schéma-ligne et de la boîte, indication du gain au jeu « G » ou de la perte au jeu « P »). Puis les élèves doivent écrire la justification mathématique de la situation tout en faisant un lien logique entre deux éléments. Par exemple dans le cas de « annonce gagnante si égale au lancer », un lien entre des nombres, un signe « = ou ≠ » et gain ou perte : «A + B = Lancer si G ; A + B ≠ Lancer si P». Certains professeurs ont fait le choix de simplifier cette fiche, c'est-à-dire de ne donner que certains éléments à remplir, d'autres ont passé beaucoup de temps à l'étude de cet objet didactique « fiche » parfois peut-être au détriment d'un nombre de parties suffisant pour permettre une exploration et une expérimentation de la situation variées. L'idée, émise par un professeur, d'utiliser un dispositif matériel avec des fiches plastifiées effaçables a un peu facilité la prise en main de l'environnement de travail par les élèves. Cette difficulté parvient cependant à être surmontée au bout de quelques séances, la fiche gardant la même structure pour toutes les séances et les modules.

Nous abordons dans la suite une des difficultés rencontrées dans la mise en œuvre de l'ingénierie. Nous l'avions évoquée au cours du chapitre 2, pour exemplifier la relation contrat / milieu et montrer que cette difficulté avait constitué un milieu-problème pour le collectif.

Cas du schéma–ligne

Un événement didactique marquant et très généralement constaté dans les classes en année 2 (première année de l'expérimentation effective sur soixante classes) va apparaître lors de l'utilisation du schéma-ligne, au cours du module 2, lors de la séance 4. Cette séance met en jeu des parties fictives où certaines données (soit de l'annonce, du lancer ou de l'issue de la partie) sont fournies. Le travail des élèves consiste à créer une partie à partir de ces éléments. C'est la première fois que le schéma-ligne est introduit[89]. Il apparaît dans les fiches de parties fictives mais aucune indication n'est donnée dans le texte de la progression de l'ingénierie quant à son utilisation ou usage (dans la version présentée au mois de juin 2012). Une nouvelle version comportant un exemple (où est montrée graphiquement la technique à utiliser mais sans commentaire écrit) sera diffusée courant septembre et il est fort probable que certains professeurs ne l'aient pas vue :

 (extrait Module 2 – version 10 de septembre 2012 – p. 8)	L'annonce 2 + 1 est représentée par un pont de 2 puis un pont de 1. Le total de l'annonce est aussi représenté dans ce schéma-ligne. Aucun commentaire n'accompagne ce graphique.

La difficulté des élèves à utiliser le schéma-ligne est l'événement qui sera à l'origine de faits didactiques (l'enseignement de procédures techniques et l'adoption de l'association de deux représentations), faits orientant en grande partie l'usage des représentations. La première source d'information pour la sphère 1 vient du constat, fait par le professeur de la classe d'étude C, de la difficulté pour les élèves d'envisager l'enjeu du schéma-ligne car ils sont pris dans les difficultés de la maîtrise de l'utilisation de cette représentation et perdent l'enjeu du travail même sur cette représentation (visioconférence du 26 septembre 2012).

[89] Lors de l'année 1, les schémas-ligne n'ont pas été introduits.

Ce constat sera aussi signalé par ailleurs dans des courriels, sur le site ou lors de visite. En voici quelques exemples qui précisent les constats et les solutions apportées. Nous les commentons en parallèle avant d'engager une analyse synthétique par la suite :

> « CPC de circo [conseillère pédagogique de circonscription], je suis allée dans la classe d'une enseignante ce matin et j'ai observé une séance "difficile". En effet, l'enseignante présente la règle graduée comme un outil "pour vérifier et être sûr qu'on ne s'est pas trompé". Or, avec cette règle graduée, la plupart des élèves se trompent et les échanges P/Es sont centrés sur le fameux 0 de la première graduation, sur la confusion intervalle / graduation. Pour les élèves, cet outil n'en est pas un et le sens du jeu est bien lointain » (courriel du 4 octobre 2012 – conseillère pédagogique).

L'observatrice signale que la cohérence entre la situation du *Jeu des annonces* et le schéma-ligne n'est pas installée pour les élèves car le jeu du professeur sur le jeu des élèves semble avoir été orienté principalement sur la connaissance des éléments constitutifs de la « ligne graduée » : origine de la ligne, graduations, intervalles et non sur la représentation des mesures de grandeur engagées par la situation du jeu. La ligne est de plus considérée comme un outil de vérification de la justification de gain ou perte du jeu. Or cet outil ne peut fonctionner du fait du manque de maîtrise (normal à ce stade de l'apprentissage), ce qui semble entraîner une grande incertitude des élèves.

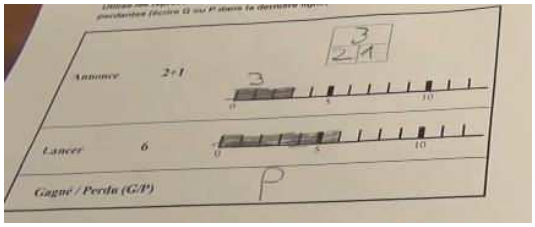
> « C'est le repérage sur la règle graduée qui est compliqué, surtout les deux sauts consécutifs. Il aurait fallu avoir le temps de l'étudier avant. Je suis obligée de les [les élèves] guider individuellement » (forum du 2 octobre 2012 – professeur classe expérimentale Bretagne).

Le professeur signale la difficulté des élèves à représenter les deux termes comme composant une seule quantité sur la ligne (par le fait que les « sauts » soient consécutifs). Le professeur, n'ayant pas trouvé de solution pour un enseignement collectif, met en place une aide individuelle qui paraît être coûteuse en temps et énergie.

> « J'ai déjà introduit la semaine dernière / mais ils [les élèves] étaient complètement paumés / parce que les ponts / tu [l'observateur] sais sous la

réglette / en séance 1 on nous a demandé d'en parler / tu vois ((en montrant la mise en forme de la fiche des parties fictives sur le tableau blanc informatisé)) / quand je l'ai mis sur le tableau il m'a automatiquement fait des cubes sous la réglette / du coup on y a pensé avec Sam [l'autre professeur engagé dans le projet] / ça va être plus facile pour eux » (séance du 2 octobre 2012 – professeur classe expérimentale Marseille – module 2 séance 2).

Devant les difficultés des élèves à tracer des « ponts » mais aussi à s'emparer du sens de cette action, le professeur a enseigné une technique de coloriage des intervalles afin d'aider les élèves à signifier les mesures des quantités en jeu sur la ligne. Ces intervalles ont été mis en évidence par la mise en forme du tableau blanc informatisé («il m'a automatiquement fait des cubes sous la réglette »). Ci-dessous une capture d'écran d'une production d'élève avec les représentations de l'annonce « 2 + 1 » (1ère ligne) et du lancer « 6 » (2ème ligne) enseignées par le professeur.



Capture d'écran

« Pour faire les sauts sur la ligne graduée, par exemple 1 saut de 3, on fait de 1 en 1 jusqu'à 3 avec des petits arcs de cercles de trait à trait et après on marque la longueur du saut de 3 car certains élèves comptent les traits au lieu des sauts et d'autres n'arrivent pas à se projeter jusqu'à 3 » (forum du 3 octobre 2012 – professeur classe expérimentale Bretagne).

Le professeur indique ici la technique enseignée afin d'orienter l'attention des élèves sur les « sauts » représentant les mesures des quantités et non les « traits » qui les bornent. Pour permettre aux élèves d'envisager la mesure de la quantité 3, le professeur leur montre auparavant la décomposition de 3 en 1 « arc de cercle » et 1 « arc de cercle » et 1 « arc de cercle ».

« J'ai rajouté deux séances sur ce sujet car les élèves sont un peu perdus sur le sens de ce nouvel apprentissage. J'ai photocopié des règles graduées en format A4 (donc en grand) ainsi que des boîtes (aussi en format A4). J'ai glissé le tout dans une pochette plastique de classeur de manière à ce que chaque enfant puisse remplir les boîtes et les règles en fonction de ce que j'annonce ou ce que le dé donne, on utilise un Velleda sur la pochette puis on efface

> (vous connaissez!). Ca me permet de vérifier en "live" quels élèves ne remplissent pas correctement. J'avais des gamins qui "enjambaient" les graduations au lieu de faire des ponts entre deux graduations !!! D'autres qui, pour coder 2 + 3, faisaient bien 2 ponts au début puis 1 seul pont = le tout faisant 3 ponts (le 3 de la deuxième partie de l'annonce !!!) » (courriel du 8 octobre 2012 – professeur classe expérimentale Marseille)

Cette observation porte sur des actions d'élèves et montre que le professeur perçoit deux types de difficultés : l'une portant sur l'usage technique des éléments constitutifs de la « règle graduée », l'autre sur une confusion entre le tout et les parties d'une annonce. Mais on ne peut affirmer si cette confusion est liée à l'état de connaissance des élèves ou à l'utilisation du schéma-ligne. Le matériel de la fiche effaçable permet au professeur de vérifier que tous les élèves se sont approprié l'utilisation des représentations (la « boîte » et la « règle graduée »). Ces représentations servent à « coder » la situation 2 + 3.

> « Il y a une annonce 1 + 2 + 3 chez Mila qui est restée problématique. Elle ordonne les nombres donc elle fait un bond de un et refait un bond de un pour ne pas dépasser 2 et encore un bond de un pour ne pas dépasser 3 » (courriel du 27 octobre 2012 – professeur classe d'étude C).

Cette observation porte sur l'action d'une élève et montre que le professeur perçoit la difficulté de l'élève à distinguer aspect cardinal (1 + 2 + 3 qui égalent une mesure de 6) et aspect ordinal (« bond » de 1 pour le premier terme, « bond » de 1 pour le second terme c'est-à-dire que l'élève considère 2 comme le 2ème, etc.). La représentation de l'élève reflète ici un conflit entre représentation graphique (instrument sémiotique) et représentation mentale.

Plusieurs éléments d'analyse sont à dégager de ces déclarations : (i) le lexique utilisé, (ii) l'usage de cette représentation ; (iii) la centration sur les actions des élèves. Nous les développons et complétons par d'autres observations :

- Lexique utilisé

Un lexique varié est employé par les différents acteurs. Nous relevons « saut », « bond », « arc de cercle » « pont » (ce dernier terme étant utilisé dans le texte de la progression de l'ingénierie) qui sont utilisés pour nommer la portion de ligne signifiant la mesure de la quantité prise en compte sur le schéma-ligne (nous rappelons que la ligne présentée lors du *Jeu des annonces* est graduée de 1 en 1 avec les repères

chiffrés 0, 5 et 10). Nous relevons « graduations », « traits », « intervalles », « règle graduée », « réglette » pour ses éléments constitutifs. Les dénotations sont différentes : certaines se référant à un mouvement, une avancée (« saut », « bond »), d'autres à un empan (« arc de cercle » « pont » « intervalle ») qui indique plutôt un état, une composition d'éléments. Le mot « traits » renvoie à la dimension de dessin de la représentation et ne véhicule pas directement de concept. Les mots « règle », « réglette » correspondent à un instrument de mesure tandis que « graduations », « graduée » à des repères. C'est dans ce sens que s'exprime le professeur de la classe d'étude C dans un courriel à destination de la sphère 1 suite à l'alerte donnée par ChS concernant les difficultés de maîtrise rencontrées par les élèves (courriel du 4 octobre 2012) : « La question de la confusion graduations et intervalles se règle assez rapidement grâce aux nombres inscrits 0, 5, 10 ... on observe alors l'emplacement de ces nombres. […] Un élève fait quatre petits bonds de un mais un autre élève explique que le 4 est avant ou devant 5 donc il précise que tu n'as pas besoin de compter. Une autre élève dira que 4 c'est un de moins que 5 et c'est grâce à la ligne graduée ». Mais ce point de vue, qui oriente l'action des élèves vers les repères et donc des positions et non le comptage, reste à ce stade de la progression de l'ingénierie encore non diffusé en dehors de la sphère 1. Le lexique utilisé réfère donc à des conceptions différentes quant à la technique utilisée pour représenter annonce et lancer sur des lignes.

- Usage de la représentation

Dans les constats relevés plus haut, le schéma-ligne est considéré comme un outil de vérification pour la justification de gain ou perte du jeu pour une enseignante, un autre professeur la voit comme une traduction de la situation qui « code » la situation. Nous pourrions dire que ce professeur *représente* les données (de l'annonce et du lancer) et les instructions opératoires (la prise en compte de la composition des deux mains pour l'annonce). Nous avons pu observer dans cinq classes lors d'actions didactiques que ces deux points de vue étaient partagés : soit la représentation lignée se complète après la partie pour valider à nouveau le gain ou la perte[90], soit en cours de partie pour « re-présenter » la situation du jeu et réaliser la comparaison entre l'annonce et le

[90] Séances du 28 septembre 2012 – Kar – Mod2sc1, du 2 octobre 2012 – Val – Mod2sc2 et du 9 octobre 2012 – Flo – Mod2sc3

lancer en référence aux annonce et lancer écrits correspondants[91]. Une seule trace en notre possession à ce stade de l'avancée de l'ingénierie, en ce début de mise en place avec les classes expérimentales (début d'année 2, 2012-13), nous montre un autre usage du schéma-ligne par le même professeur de classe d'étude (cf. paragraphe précédent) et dans le même courriel :

> « Cela [la deuxième partie] nous a permis de traiter la question de la validité de l'annonce 6 + 0. Le dé peut aller jusqu'à 6 affirme Caren, auteur de la proposition. Arthur n'est pas d'accord puisqu'une main ne possède pas 6 doigts. Caren montre alors 5 doigts sur une main et un autre doigt sur l'autre main. Il répond : c'est 6 mais c'est 5 + 1. Je trace sur la ligne graduée 5 bonds de un et encore un bond de un. Kelenn répond : non. Tu peux faire un bond de 5 et un bond de un. Question, est-ce le même nombre ? Réponses des élèves : oui parce que ça arrive au même endroit. Lila dit : mais tu peux faire aussi 4 + 2 ... avec des feutres de couleurs nous avons matérialisé les différentes représentations du nombre 6 proposées par les élèves » (courriel du 4 octobre 2012 à destination de la sphère 1 – professeur classe d'étude C).

La représentation est utilisée ici pour raisonner sur la situation, prendre du recul par rapport à la partie jouée et simuler d'autres possibles. Cependant cette conception du schéma-ligne n'est pas encore partagée par l'ensemble des professeurs de la sphère 2.

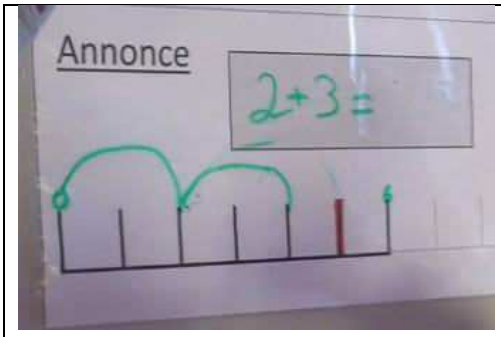
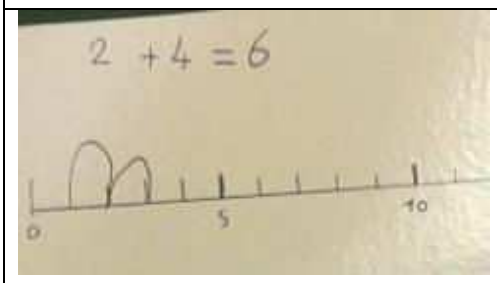
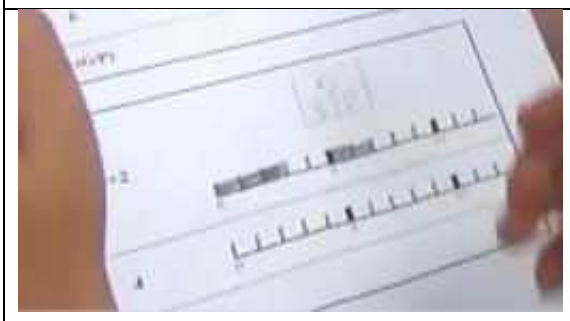
- Centration sur les actions des élèves

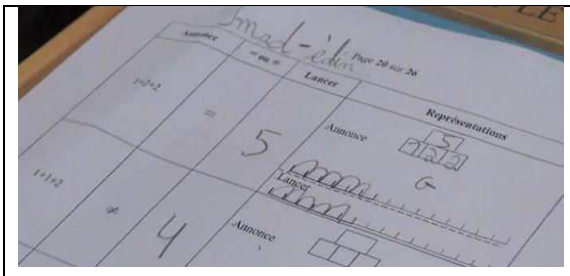
Les professeurs sont préoccupés par le fait que les élèves doivent acquérir la compréhension de l'objet « ligne graduée », qu'ils doivent apprendre une technique pour son utilisation, c'est-à-dire qu'ils soient capables d'en repérer les éléments pertinents (graduations, intervalles, origine) et de signifier par des « ponts » les mesures de quantités en jeu pour l'annonce et le lancer. Par exemple, pour saisir la mesure de la quantité « 3 », un professeur fait tracer trois fois un « pont » avant de la désigner ; un autre fait colorier les intervalles. Nous sommes ici dans une activité de mesurage (par report de l'unité 1 trois fois sans que cela soit explicité) et non de désignation. La fiche plastifiée et effaçable permet à un autre professeur (ce procédé

[91] Séances du 2 octobre 2012 – Reg – Mod2sc2 et du 23 octobre 2012 – Emm – Mod4sc3

sera largement diffusé) de contrôler les essais des élèves et de s'assurer que tous parviennent à effectuer les gestes adéquats sur le schéma-ligne. Les professeurs tentent aussi d'interpréter au travers des productions les concepts qui guident les actions des élèves : le nombre est-il vu sur la ligne de manière ordinale (position) ou cardinale (mesure) ? Comment la composition de deux ou trois nombres est-elle représentée ? La maîtrise technique doit relever à la fois de l'ordre du gestuel et du conceptuel, par un entrelacement du conceptuel et du gestuel. Nous supposons que de nombreuses questions sous-jacentes affleurent ici sur le rôle de cette représentation dans la situation didactique.

Nos observations (en année 2 – 2012-13, première année de l'expérimentation à grande échelle) corroborent les constats des professeurs : dans la majorité des classes une partie des élèves a des difficultés à acquérir une technique afin que le schéma-ligne puisse être le support d'un travail d'anticipation ou de création de parties. Ci-dessous sont présentés d'autres exemples relevés dans des classes marseillaises :

	Certains élèves ont du mal à représenter les mesures des quantités en jeu avec des empans adéquats. Ci-contre, l'annonce écrite 2 + 3 est représentée sur la ligne par deux ponts de 2.
	Sur ce photogramme, l'élève n'a encore tracé que la représentation du terme 2, mais il ne se sert pas de l'origine de la ligne. Le terme 2 est représenté comme 1 + 1
	L'annonce 3 + 2 est bien considérée comme étant égale à 5 (signifié dans la représentation boîte), le nombre d'intervalles adéquats est colorié mais une lecture de la ligne ne serait pas possible, la composition ne pouvant pas se lire 5 à l'aide du repère 5.

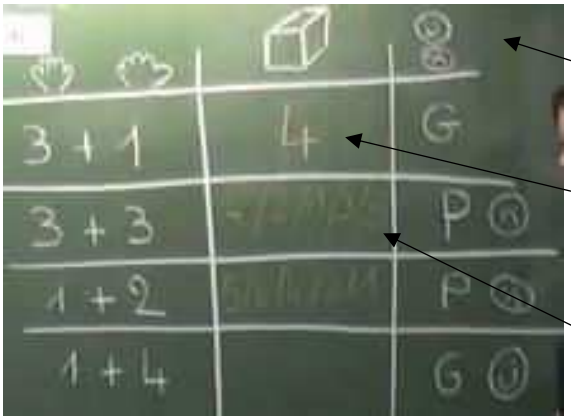
	L'annonce « 1 + 2 + 2 » et le lancer « 5 » sont représentés comme une annonce ou un lancer de 5 termes (1 + 1 + 1 + 1 + 1) et dénote une activité de mesurage.

Enseignement de techniques d'utilisation du schéma-ligne

Les mises en œuvre *in situ* du *Jeu des annonces* (modules 2 et 4) observées renseignent sur les actions possibles du professeur et corroborent les constats décrits plus haut et déposés sur le forum du site par les professeurs : lors de l'année 2, la technique d'utilisation du schéma-ligne est enseignée ; le geste de faire un « pont » est, de plus, étayé de manière quasi-individualisée. En voici un exemple emblématique car concentrant toutes les problématiques effectives de l'usage du schéma-ligne : nous présentons la transcription de ce moment d'enseignement (séance du 9 octobre 2012 – module 2 séance 4, parties fictives) que nous situons auparavant dans la séance puis que nous commentons :

Place de l'épisode au sein de la séance :

Les élèves ont joué plusieurs parties fictives : il s'agissait de prévoir un lancer connaissant l'annonce et sachant que la partie était gagnée ou perdue. Voici le tableau de relevé des propositions (que les élèves ont écrites sur leur ardoise) et qui est géré par le professeur :



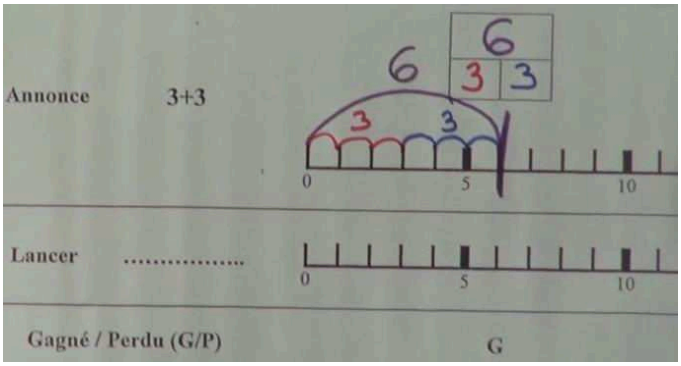
Dessins symbolisant les colonnes des annonces, du lancer et de la validation

Il n'y a qu'une solution possible pour le lancer quand la partie est donnée comme gagnante (« G »).

Il y a plusieurs solutions quand la partie est donnée comme perdue (« P »).

Puis le professeur distribue à chacun une fiche individuelle d'une partie gagnante dont la copie agrandie est affichée au tableau (voir ci-dessous). Il demande d'abord aux élèves de prendre connaissance de l'annonce (« 3 + 3 ») et de la montrer avec leurs mains. Le

professeur fait compléter la représentation boîte : l'habitude dans la classe est d'écrire en couleur les annonces (rouge pour la main gauche et bleu pour la main droite ; le total est en violet). Ensuite le professeur a l'intention de compléter l'annonce sur la représentation du schéma-ligne : « 3 et 3 si je sais pas combien ça fait comment je fais ? Comment je peux m'aider de la ligne dessous ? ». Un élève propose de « sauter ».



Transactions entre le professeur et ses élèves pour représenter l'annonce :

[…]

Professeur : je pars de où et je vais où↑ je fais quoi↑

Élève : on part de 0

P : alors je pars de 0 avec qui↑ ((montre les feutres))

El : le rouge

P : avec le feutre rouge je pars de 0 et je saute combien↑ quoi↑

El : 3

P : je saute de 3 est-ce que j'ai le droit de tomber dans les trous↑ ((désigne un intervalle)

Élèves : non

P : on n'a le droit d'être que sur les petites piques ((désigne une graduation)) on saute de 3

Els et P : 1 2 3 ((P trace trois ponts successifs de 1 en rouge)) est-ce que je continue pour aller jusqu'à 6↑

Els : oui non

P : je continue↑ ((lève le feutre rouge)) je continue ou pas↑

Els : oui non

P : pourquoi tu dis non Walid↑

Wal : on s'arrête à 3

P : on s'arrête à 3 pourquoi↑ pourquoi on s'arrête à 3 et on va pas jusqu'à 6 en rouge

El : parce que (inaudible)

P : d'accord on s'arrête à 3 parce que la main gauche elle dit ((montre G3))

Els : 3

P : elle dit 3 la main gauche elle dit 3 donc on s'arrête à 3 et après on passe à la main droite qui nous dit quoi↑ ((montre D3))

Els : bleu

P : bleu elle nous dit bleu↑ ((montre D3))

Els : 3

P : elle dit 3↓ on repart d'où pour sauter 3↑ d'ici↑ ((pointe sur le repère 4))

El : 3

P : on part du 3 c'est bien et on saute combien↑

Els : 3 10

P : de 10↑

Els : non

P : de 3 ((trace trois ponts successifs de 1 en bleu)) sur la main droite il y avait 3 donc on s'arrête à 3 combien ça fait ce trait là↑ ((désigne la graduation 6)) il va s'appeler 6 ((écrit 3 en rouge)) on a 3 et 3 ((écrit 3 en bleu)) et ça fait si on fait un seul grand saut ((trace un pont de 6 en violet)) ça fait↑

Els : 6

P : ici y a combien ((fait une marque)) ici c'est le trait qui s'appelle↑

Els : 6

P : 6 ok première étape franchie

Commentaires :

Le jeu d'apprentissage initial prévu par la situation didactique est un jeu de prévision du lancer en fonction de contrainte (partie gagnée ou perdue) et un jeu de représentation de mesures. Mais le jeu effectif, dans l'exemple ci-dessus, est essentiellement un jeu du remplissage de la fiche avec une position topogénétique haute du professeur. L'épisode retenu l'illustre bien : le professeur a l'intention que les élèves sachent utiliser le schéma-ligne pour trouver le total de l'annonce («6 / ok / première étape franchie »). Pour cela, il montre la procédure et les gestes techniques en s'appuyant sur des signes (couleurs, trait de position du total) et un langage dont la sémantique décrit le visuel et les actions familières (« je pars de », « je vais », « je saute », « tomber dans les trous », « être sur les piques », « je continue », « pour aller à », « on s'arrête », « trait », « ce que disent les mains »). La référence au jeu, à la mesure et au milieu des doigts est rappelée et mise en lien avec la représentation assez tardivement dans la transaction mais le contrat-milieu

ne porte pas sur la situation du jeu (il y a une perte de sens à l'usage du schéma car le nombre à atteindre a déjà été trouvé avec la boîte) ni ne porte sur la représentation de la mesure de 3 doigts (qui est représentée comme 3 mesures de 1).

Episode didactique du 9 octobre 2012– enseignement de l'utilisation du schéma ligne, année 2

Nous avons eu aussi l'occasion d'observer un autre professeur d'une classe expérimentale à un stade de la progression plus avancé (module 4 séance 3 - parties fictives) et qui a aussi eu lieu avant la réunion abordant ce sujet entre professeurs et chercheurs. Ce professeur montre à la classe comment placer l'annonce « 1 + 2 + 2 » sur le schéma-ligne : « est-ce que je peux écrire mon annonce là (montre le schéma-ligne) avec des ponts ? Combien je fais de ponts ? 1 (trace 1 pont) puis 1 2 (trace deux ponts correspondant au terme 2) et encore 1 2 (trace deux ponts correspondant au second terme 2) » (séance du 23 octobre 2012). La technique liée à la représentation schéma-ligne est de fait une situation de comptage des intervalles et non une situation de représentation de la mesure qui tient compte du nombre de termes dans la composition.

Proposition d'un professeur : association de deux représentations

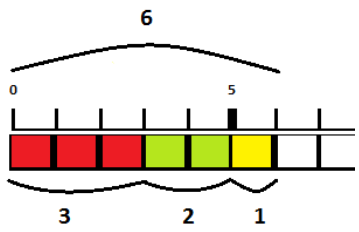
De nombreux témoignages de professeurs sur le forum, la liste de diffusion et les observations réalisées dans les classes montrent une large focalisation sur les techniques d'utilisation de la représentation du schéma-ligne et les difficultés des élèves à les acquérir. Une telle focalisation entraîne une perte de sens du jeu et un détournement de ce qui est l'enjeu de représentation de mesure des quantités. Sur le forum, le message d'un professeur d'une classe expérimentale en Bretagne va jouer un rôle important par la suite :

> « La difficulté reste sur la droite graduée. On a fait le parallèle avec le train en faisant un petit pont entre deux graduations pour compter les cubes ex 2 + 3 c'est 2 cubes rouges (2 ponts) puis 3 cubes verts (3 ponts), cela fait un train de 5 cubes (cuvette par en-dessous) c'est une idée venue de trois enfants (moins avancés) et maintenant tout le monde y arrive » (forum du site – 2 octobre 2012).

Le professeur, reprenant une proposition de ses élèves, fait associer la représentation du train à celle du schéma-ligne. Il fait placer un pont ou cuvette au-dessus ou en-dessous des cubes qui sont alors vus comme les intervalles de la droite graduée.
Le collectif (sphère 1) engage une réflexion à partir de cette technique (visioconférence du 12 octobre 2012) et partage un point de vue sur la fonction didactique du schéma-ligne : il s'agit de distinguer l'utilisation de l'outil (étude de l'objet en lui-même, son fonctionnement) de son usage (pour raisonner sur un milieu objectif, le voir comme une modélisation de ce que raconte le jeu, un simulateur de la réalité pour anticiper l'action). Des propositions de révisions des modules 4 et 6 (avec effet rétroactif au module 2) sont alors émises par la sphère 1 quant à la technique à utiliser : introduction d'un schéma-train associé au schéma-ligne comme repère afin de permettre aux élèves d'appréhender de manière plus progressive la maîtrise de l'utilisation technique du schéma-ligne. En voici une description (prise sous deux angles) de la représentation de deux annonces (5 + 1 et 3 + 2) sur un schéma-ligne.

	Dans un premier temps, l'élève a annoncé G5 D1 et a construit la référence symbolique de son annonce avec le train-nombre composé de 5 cubes rouges et 1 cube blanc. Elle a aussi écrit : « 5 + 1 ». Sur la capture d'écran ci-contre, nous voyons qu'elle trace un pont de 5 sur le schéma-ligne en se repérant grâce au train-nombre. (séance d'anticipation module 2 - septembre 2013)
	L'annonce 2 + 3 est représentée par 2 cubes jaunes et 3 cubes bleus qui sont ensuite coloriés sur le schéma-train. L'élève, sur le schéma-ligne au-dessus, en s'aidant des repères donnés par le schéma-train, trace deux ponts pour représenter son annonce de deux termes. (séance anticipation module 2 – septembre 2013)

Il y a association des représentations d'abord cubes / schéma-train pour repérer la composition et l'exprimer avec des couleurs puis schéma-train / schéma-ligne gradué pour faciliter le tracé des ponts car les couleurs matérialisent la grandeur et permettent d'en représenter la mesure. Cette procédure (cubes puis schéma-trains à colorier puis ponts à tracer selon le guidage de la couleur) évite les erreurs de position, rend les élèves plus autonomes dans la production mais nécessite un enseignement.
C'est ainsi que sera présentée et décrite la représentation du schéma-ligne, en association avec une autre représentation, celle du schéma-train, sur le texte de la progression de l'ingénierie pour le module 4 :



« Pour faire travailler cette nouvelle représentation par les élèves, le professeur peut s'exprimer en substance de la manière suivante :
« Où est le premier wagon sur la ligne graduée ? De 0 à 1. Où se trouve le quatrième wagon ? De 3 à 4….»
Ces énoncés sont toujours accompagnés de la désignation, par le professeur, de la « graduation », du « wagon » correspondant et de la production du geste de cette correspondance. Dans un second temps, le professeur place les ponts sur les wagons correspondant à l'annonce pour que les élèves puissent observer l'analogie entre les ponts représentant chaque terme de l'annonce et les wagons.
Il fait travailler les énoncés suivants : le premier terme de l'annonce, 3, *correspond* aux wagons rouges ; le deuxième nombre de l'annonce, 2, *correspond* aux wagons verts ; le troisième nombre de l'annonce, 1, *correspond* au wagon jaune. » (extrait Module 4 - version 10 du 12 octobre 2012 – p.8-9)

La description de la technique est attentive à ce que chaque signe soit d'abord clairement exprimée en langage naturel (« wagon », « pont »), puis dans le langage de la situation (« annonce », « terme »), le passage de l'une à l'autre des expressions devant être facilité. La proposition d'établir, dès le module 0 de la situation *Train / tour*,

un lien entre la représentation schématisée du train-objet et des éléments (ponts) du schéma-ligne d'une collection sera formulée puis mise en place dans la réécriture du module 0 pour une mise en œuvre l'année suivante (année 3). Le stage « Bilan-perspectives » mené en juin 2013 à Saint-Brieuc a joué un grand rôle dans cette réécriture, puisque la réorganisation du module 0 a été pensée conjointement avec les professeurs.
Voyons maintenant un dernier événement marquant que nous avons relevé pour le *Jeu des annonces* et qui a donné lieu à un fait discuté au sein du collectif.

Des observations in situ à la mise en place d'un module complémentaire

Suite à des observations *in situ*, le chercheur, ChS, alerte la sphère 1 :

> « A partir des observations à Marseille, il me semble très important de rester dans le temps de situation des annonces [avec la situation proposée *Lancers et sommes* jointe] au moyen des écritures additives et que les élèves, mêmes les moins avancés, soient rompus à l'exercice de désignation et comparaison de nombres sous formes additives les plus complexes et longues possibles. Ainsi nous pourrions par la suite éviter l'usage des cartes proposées (beaucoup de doigts) où figurent des mains/doigts dont nous avons constaté qu'elles avaient produit presque automatiquement un retour au milieu matériel conduisant aux techniques de comptage primitives au détriment des usages écrits du numérique en cours de routinisation dans la classe » (courriel du 1er décembre 2012 – année 2).

Selon les observations des mises en œuvre dans les classes marseillaises, trop d'élèves manquent encore d'aisance dans les désignations et les comparaisons de nombres sous la forme additive. Le travail prévu par la suite dans la progression (module 7, situation *Beaucoup de mains*) et qui engage une écriture additive longue constituerait un saut informationnel trop important. En effet, gérer une écriture additive longue suppose des techniques de composition et décomposition, utilisées dialectiquement, et ces techniques ne sont pas apparues dans les classes, même si elles sont contenues (en germe) dans le jeu. Les techniques de calcul du total, d'estimation ou de comparaisons terme à terme suffisaient jusqu'alors pour comparer des écritures additives à deux termes. Il semble donc nécessaire, selon ChS, si l'on

veut continuer à travailler sur le numérique et non sur un milieu matériel qui conduirait à des techniques régressives, de mettre en place une situation intermédiaire.
Suite au courriel ci-dessus, la sphère 1 décide la mise en place d'une situation complémentaire au *Jeu des annonces*, la situation *Lancers et sommes* (proposée comme module 6 bis dans la progression) qu'elle diffuse aux enseignants via le site du dispositif ACE pour cette première année expérimentale à grande échelle[92]. Cette situation avait l'objet en année 1 d'une expérimentation dans les classes d'étude mais elle n'avait pas été retenue dans la progression car elle paraissait, à ce moment-là pour la sphère 1, redondante par rapport à la situation fondatrice des annonces.

Description rapide de la situation didactique « Lancers et sommes » et organisation mathématique sous-jacente

Le jeu consiste à comparer des lancers de dés (ceux d'un groupe A contre ceux d'un groupe B ou ceux du professeur contre ceux de la classe) afin de déterminer qui a gagné ou qui a le plus de points, l'écriture additive étant la mémoire des points obtenus à chaque lancer. Il s'agit donc de comparer une écriture additive de 3 à 6 termes à une autre écriture additive de 3 à 6 termes, le nombre de termes étant défini au hasard par le tirage d'une carte dans un jeu de plusieurs cartes numérotées de 1 à 6. Par exemple, l'équipe A tire la carte « 3 », lance le dé trois fois et obtient 4 + 2 + 5 points. L'équipe B tire la carte « 4 », lance le dé quatre fois et obtient 2 + 1 + 1 + 6 points. Qui a obtenu le plus grand score ? Puis le jeu évolue avec la question : « De combien ce score est-il le plus grand / petit ? »
Il s'agit donc de comparer les scores obtenus par chaque équipe avec un nombre de lancers suffisamment élevé pour que les élèves engagent des regroupements de termes et ainsi réinvestissent ou renforcent les connaissances construites durant le *Jeu des annonces*. Mais la question à laquelle les élèves s'affrontent est celle de quels regroupements / dégroupements effectuer pour comparer puis dégager la différence entre les scores. A ce stade de l'année (mois de décembre environ) et de la progression, peu d'élèves arrivent à effectuer un regroupement total des termes et effectuer la somme correctement quand le nombre de termes et la valeur des termes

[92] Cette situation *Lancers et sommes* sera l'année suivante intégrée comme module 8 ; le module 7 étant consacré à l'étude de la différence entre deux annonces.

deviennent élevés (exemple possible : 5 + 3 + 6 + 4 + 2). Si l'on prend l'exemple présenté ci-dessus (4 + 2 + 5 à comparer à 2 + 1 + 1 + 6), une des stratégies de regroupement possible est de « faire voir » dans chacune des écritures un 4, par un regroupement de termes sur la seconde écriture, et ainsi comparer 4 + 7 et 4 + 6. On aurait pu aussi faire apparaître un 4 et un 6. Ainsi 4 + 2 + 5 à comparer à 2 + 1 + 1 + 6 donnent 4 + 1 + (1 + 5) soit 4 + 1 + 6 à comparer avec (2 + 1 + 1) + 6 soit 4 + 6. Donc 4 + 2 + 5 est supérieur de 1 à 2 + 1 + 1 + 6. La situation permet en outre de constater, dans certains cas comme celui décrit ci-dessus (et bien choisis à l'occasion de parties fictives), qu'un nombre de tirages plus important et l'obtention d'un score gagnant ne sont pas corrélés.

Éléments de synthèse et de questionnement

Dans les sections précédentes, nous avons montré que des observations *in situ* sur les mises en œuvre effectives et des interpellations sur les difficultés des élèves déstabilisaient le système contractuel (l'arrière-plan structurant les échanges) et posaient problème au collectif. Cette situation invite à repenser le système contrat-milieu et donc à imaginer d'autres jeux d'apprentissage, caractérisés par un milieu-problème et un contrat (la forme d'interaction propre au contrat) différents. Nous avons longuement abordé l'objet didactique de la représentation du schéma-ligne mais aussi plus rapidement celui des comparaisons de nombres sous la forme additive. L'élaboration biographique est le produit de descriptions et d'analyses didactiques : les échanges au niveau macro ont montré que le travail du collectif a permis des prises de décisions sous la forme d'aménagements de l'ingénierie par rajout de modules d'enseignement (module 0, module 6 bis) ou par modification du texte de la progression de la situation SIT (mise en place d'une représentation augmentée par association schéma-ligne / train, parties fictives et inverses) et a permis le partage de relation didactique à des objets.

Par exemple, l'utilisation de la représentation du schéma-ligne met en évidence le procédé des « ponts », dont la maîtrise gestuelle par les élèves a été renforcée par l'association avec le schéma-train. Ce procédé permet de désigner une mesure (un pont de 3 désigne une mesure de 3 doigts comme une mesure de 3 cubes) et de partager, dans le collectif, la fonction de représentation d'une mesure de cet objet

schéma-ligne. Mais l'adéquation du schéma-ligne à sa fonction didactique, c'est-à-dire son rôle, son usage dans la situation de *comparaison* d'annonces (pour raisonner sur un milieu objectif, le voir comme une modélisation de ce que raconte le jeu, un simulateur de la réalité pour anticiper l'action) n'est partagée qu'au sein de la sphère 1. Comment ce partage se réalisera-t-il pour l'ensemble du collectif ? C'est encore, au moment de la mise en œuvre des modules 2 et 4 pour les classes expérimentales la seconde année, un point aveugle de l'ingénierie. Nous pourrions faire référence à la notion de *site local d'une question* (Silvy, Delcroix, & Mercier, 2013) qui désigne le champ des objets et des relations pertinentes appelés par la situation didactique et que les professeurs doivent connaître pour ne pas être démunis face aux difficultés ou obstacles que rencontrent leurs élèves. Le site local de la question de comparaison entre deux collections d'objets à partir de représentations diverses pour des élèves de CP est à l'étude pour ce collectif, professeurs comme chercheurs.

L'apprentissage d'une structure mathématique complexe, comme celle des nombres entiers, nécessite des processus longs qui sont aussi repérables par l'analyse macro. Les mises en œuvre dans les classes d'étude et leur analyse collective, la première année, ont montré par exemple la nécessité de laisser un temps pour l'expérience de la production de grandeurs et de la désignation de leur mesure (et des différentes valeurs qu'elles peuvent prendre) ou de l'importance de l'introduction de la variable de commande de la situation à trois mains. C'est dans l'observation de l'adéquation des objets et des pratiques en classe que se construit l'ajustement au niveau macro, lequel se traduit notamment par l'établissement d'une progression et dans la rédaction du document à destination des professeurs des classes expérimentales. Dans ce mouvement, le collectif (sphère 1) s'empare des différents objets et construit de manière *anticipée* des relations à ces objets afin de pouvoir les partager avec les professeurs qui expérimenteront les années suivantes. La sphère 1 est ainsi première dans l'avancée du temps du savoir de l'ingénierie parce qu'elle a participé à l'élaboration de la mise en œuvre dès la première année (2011-12). Les professeurs des classes expérimentales n'ont pas à reconstituer cette histoire pour pouvoir mettre en œuvre les séquences lors de l'année d'expérimentation à grande échelle (2012-13) mais ils ont à prendre « le train (de la compréhension de l'ingénierie) en route » en même temps qu'ils en effectuent la mise en œuvre. Comment, dans un deuxième

temps, ce partage des propositions ingénieriques avec les destinataires « réels » qui portent en premier la responsabilité de la mise en œuvre va-t-il avoir lieu ?

Les controverses sur les choix didactiques du *Jeu des annonces* avec des chercheurs appartenant à la communauté plus élargie des didacticiens et chercheurs en sciences de l'éducation, échanges épistolaires avec ChJ (Ext) et ChM (Ext), provoquent aussi une déstabilisation du système contractuel. Les échanges, dans ces cas, ne prennent pas cependant appui sur les réalisations effectives mais sur une analyse *a priori* de la situation sous-jacente. Il s'agit de produire et de confronter des argumentations. Ces échanges, s'ils permettent également de faire émerger des propositions de mise en place d'une situation propédeutique (*Train / tour*), de parties fictives ou inversées, sont en fait le moyen de réaffirmer au sein du collectif le positionnement épistémologique en TACD sur des questions de didactique : l'importance de la rencontre de questions posées par la situation, des moyens et des raisons dont les élèves disposent et que le professeur met au travail. Cette question problématique commence par une discussion dans la sphère 1 et nous verrons dans la section suivante (d'un exemple sur le codage de la mesure) qu'elle fera aussi l'objet d'une enquête de la part des professeurs des classes expérimentales pour apprendre à cerner la connaissance commune qui permet de contrôler le problème.

Nous avons commencé à identifier quelques-uns des types de problèmes rencontrés, les systèmes d'objets mobilisés pour les traiter et quelques formes de rapport à ces objets en train de se construire dans l'action conjointe. Il nous reste à poursuivre cette enquête au travers des réunions entre les professeurs, les chercheurs et les formateurs, au plus près de ce qui est rapporté des réalisations en classe. Si nous voulions chercher à définir ces processus *pour chacun des professeurs* alors les lieux dans lesquels nous devrions rechercher les traces de ces processus seraient leurs comptes-rendus de séances, leurs courriels ou messages sur le forum ou les séances en classe elles-mêmes. Mais nous nous intéressons à un groupe et au travail coopératif de ce groupe. Les réunions du collectif sont les lieux où se déroule le *procès de la mise en œuvre* lors des deuxième et troisième années d'expérimentation (2012-13 et 2013-14). Nous changerons donc d'échelle d'observation.

Nous commençons ci-dessous par montrer l'intérêt d'un tel changement d'échelle au travers d'un exemple se déroulant au cours de la mise en œuvre de la situation

Train/tour et de la réunion qui revient sur un fait didactique relatif à cette mise en œuvre.

Nécessité de changer d'échelle d'observation : un exemple sur le codage de la mesure

Faits relevés lors d'observation *in situ*

Nous avons pu observer la troisième séance du module 0 (situation *Train / tour*) sur cinq classes marseillaises différentes, toutes engagées pour la première fois dans l'expérimentation : classe de Emm en année 2 (2012-13), classes de Nah, Lil, Mur, Ste en année 3 (2013-14). Dans cette séance, un élève émetteur doit produire un message pour que l'élève récepteur puisse construire un train constitué de cubes, identique à un schéma-train. L'élève émetteur peut utiliser ses crayons de couleur mais la consigne précise qu'il n'a plus le droit de dessiner et qu'il doit écrire le message.
Pour deux des cinq classes, à part un très petit nombre de productions (deux messages dans une des classes où les cubes sont encore dessinés, un dans l'autre classe), toutes les productions des élèves sont identiques et conformes au code[93] attendu par le professeur (hormis quelques erreurs de codage). Un des professeurs (Nah) a débuté la séance en annonçant : « vendredi on a repris le train et *on a regardé comment ne pas se tromper* ((un schéma-train avec des ponts et des nombres est affiché au tableau)) il va falloir écrire le message ». L'autre professeur (Mur) a dit : « aujourd'hui pour faire le message on n'a plus le droit de dessiner / trouvez une autre manière pour que le copain construise le train / *on a vu des façons de faire* ».
Dans ces deux classes, nous supposons que le véritable travail sur le code (comprendre l'organisation d'un code et la nécessité d'un message explicite dans la communication) s'est engagé lors de la mise en commun de la séance 2 et que cette séance 3 est destinée à ce que tous s'entraînent sur l'écriture de ce code.
Pour les trois autres classes (classes de Emm, Lil et Ste), les productions sont très variées. Nous avons recensé : des productions avec un cube pour chacune des

[93] Nous appelons « code » le moyen de la désignation écrite de la taille d'une collection dans une situation de communication telle qu'elle est proposée dans la situation *Train / tour.*

couleurs accompagné d'un nombre écrit en dessous, des productions de cubes associés à des nombres, des productions de nombres en couleur, des dessins encore (avec des formes triangulaires), des productions composées de barres colorées, des écritures du message en lettres (deux élèves ont utilisé les affiches avec les noms des couleurs et les noms des nombres, suite peut-être à la consigne du professeur insistant sur l'expression « écrire un message »). Dans deux des classes, lors de la mise en commun, les professeurs Lil et Emm mettront en valeur les productions permettant de rédiger rapidement le message : messages écrits sous la forme nombre et couleur, type « R3 » pour 3 cubes rouges, ou en nombres colorés. Dans l'autre classe, le professeur Ste institutionnalisera le message écrit en chiffres et en couleurs tel que présenté dans le texte de la progression. Il ne retiendra pas le message écrit en lettres, présenté comme juste mais non terminé, au motif que de nombreux élèves ne sont pas capables de le lire. En ce sens est abordé implicitement le fait qu'un code doit pouvoir être compris de tous. Dans toutes les classes, c'est bien le code présenté dans le texte de la progression SIT qui est déclaré, par l'enseignant, comme code à adopter. Pourtant, le document ne donnait qu'une indication parmi des possibles : « *vers quoi peut tendre* le codage […] par exemple, 2 (écrit en rouge pour désigner la sous collection de cubes rouges), 3 (écrit en bleu pour désigner la sous-collection de cubes bleus) » (p. 12, texte de la progression SIT) ». Autrement dit, les professeurs ont accéléré l'avancée du temps didactique en institutionnalisant plus ou moins rapidement le code proposé dans le texte de la progression.

Ce fait d'observation pourrait laisser à penser que nous nous trouvons au cœur du dualisme piégé des rôles de la théorie (qui indique ce qu'il faut mettre en place) et de la pratique (qui doit appliquer et éventuellement faire « remonter » les disfonctionnements afin qu'ils soient modifiés). Nous aurons besoin d'aller visiter un autre lieu d'observation (la réunion du collectif provençal) et d'analyser les faits avec une autre échelle d'observation. Nous allons montrer dans la section suivante que le travail coopératif dépasse ce clivage et propose une alternative.

Transactions concernant le codage de la mesure

Pour aller plus loin dans la compréhension, nous allons étudier les échanges concernant la mise en œuvre de ces événements didactiques lors des réunions

professeurs des classes expérimentales, chercheurs et personnels d'encadrement. Nous nous intéresserons aux échanges du collectif qui concernent l'adoption d'un code, moyen de la désignation de la mesure de la taille d'une collection dans une situation de communication telle qu'elle est proposée dans la situation *Train / tour.* Nous rappelons que, lors de la seconde étape du jeu, un élève-émetteur doit écrire un message à un élève-récepteur qui doit reconstituer le train-objet à partir de ce message. Les élèves produisent d'abord des codes graphiques (carrés, barres) lors de la seconde séance. A la troisième séance, la consigne indique qu'il faut « écrire » le message : les élèves produisent ce qu'ils se représentent comme étant de l'écrit. C'est une étape qui provoque un réel saut dans l'apprentissage car peu maîtrisent la notion de texte écrit que ce soit en chiffres ou en lettres.

Lors de la première mise en place de la situation *Train / tour* (en année 2, première année d'expérimentation à grande échelle, car cette situation didactique propédeutique au *Jeu des annonces* a été rajoutée suite aux discussions de la sphère 1 lors de la première année), la préoccupation des professeurs est de faire fonctionner la situation didactique. En effet, lors de la première réunion du collectif du 26 septembre 2012, nous constatons que les échanges portent surtout sur la gestion de la classe. Les professeurs font des choix de mises en œuvre qui, pour la plupart, sont liés à cette gestion de classe : mise au travail par groupe, entrée dans la tâche, gestion des groupes émetteurs ou récepteurs, disposition du matériel dans la classe, ... Onze des quatorze professeurs abordent ces types de sujets qui sont partie prenante des conditions de mises en œuvre de la situation didactique. De tels sujets ne peuvent être négligés par les enseignants au cours de leur action. Nous ne les traiterons cependant pas dans ce travail car s'ils ont été objets d'échanges et de partage de moyens, ils n'ont pas été objets d'une analyse épistémique.

Le code écrit est souvent enseigné. Ainsi, un professeur, Jef, relate :

> « là où ça a buté c'est du passage on va dire du dessin au codage / enfin pour moi pour ma classe / je les ai laissés réfléchir / je les ai laissés un peu le nez là-dedans et ils ont essayé de trouver de trouver / et *ils n'ont pas trouvé / donc on a fait ensemble une fois un codage au tableau* et après ils ont fait eux-mêmes le codage de manière individuelle » (Jef, TdP128).

Un autre professeur, Nad, s'est appuyé sur une production d'élève pour indiquer à la classe les propriétés (nombre et couleur pour la lettre-initiale) du code « expert » proposé en exemple dans le document.

> « c'est une élève qui n'a pas respecté la consigne parce qu'elle n'a pas utilisé les nombres / mais elle n'a utilisé que les lettres / pour 2J elle a écrit JJ / pour 3R elle a écrit RRR / voilà puis après je suis partie de là pour leur dire *voilà il y a une élève qui a utilisé les lettres / qu'est-ce qu'il manque↑ les nombres↓* ensuite pour la séance suivante les critères de réussite c'était j'utilise pour le code les nombres et les lettres » (Nad, TdP189).

D'autres encore ont accepté que soit utilisé un code produit par des élèves et regroupant les deux propriétés l'une dans l'autre (c'est-à-dire le nombre écrit en couleur) :

> « pour ce qui est des couleurs V B les initiales et les machins j'ai laissé tomber / *s'ils écrivaient 1 en rouge et 3 en vert et 4 en jaune eh ben ça suffit /* et du coup leur train ils l'ont bien décodé » (Flo, TdP258)
>
> « et même si le code était au tableau *pour ceux qui sont déjà en difficulté c'est déjà beaucoup de choses /* à compter les cubes / les retranscrire / écrire la première lettre de la bonne couleur / voilà alors que *quand tu prends ton crayon rouge et que tu as 3 voilà c'était moins difficile* » (Kaa, TdP305).

C'est ce codage (nombre écrit en couleur) qui sera proposé dans le texte de la progression l'année suivante. Parfois l'adoption d'un code est motivée par des raisons fonctionnelles externes au milieu telles que la rapidité d'exécution.

> « à la séance du dessin elle [une élève] a mis ça [nombre et couleur] / et du coup alors je sais pas si j'ai bien fait ou pas mais au moment du retour de la procédure on en a parlé / et *j'ai sauté sur l'occasion pour dire c'est intéressant parce qu'elle est allée plus vite que les autres* / et du coup au nom de la rapidité / les enfants tous / mais vraiment tous / se sont dit / ah ben oui c'est rapide / plus rapide » (Emp, TdP167).

Certains professeurs font éprouver la validité d'un message et font jouer au milieu (l'objet-train construit) un rôle dans cette validation. Le professeur Agn relate son action :

> « il [un élève] m'a mis J4R5V3B2 / il a fait la totalité des couleurs on dirait / il a regroupé les couleurs en me disant eh ben y a 5 rouges sur le même train […] alors j'ai laissé

((montre petite feuille pour message)) / *au moment où il faut faire des trains en fait on s'apercevait que finalement c'était pas le même train* » (Agn, TdP237-243).

La nécessité d'un message explicite est éprouvée lors des phases de validation : les interprétations de lecture montrent que certains messages proposés peuvent être ambigus. Le professeur Kaa rapporte :

« j'ai dès la première séance une élève qui a codé en gain de temps / elle a >au lieu de dessiner 3 rouges< elle a dessiné 1 cube rouge mais elle a écrit 3 / donc elle a dessiné rouge 3 / euh elle a dessiné 1 vert et il en fallait 2 / elle a écrit 2 en-dessous / ça a posé problème à l'élève qui devait lire le message parce que du coup il a regardé juste les cubes dessinés lui et il a mis un de chaque couleur / et du coup *c'était pas du tout le bon train / mais on a rebondi dessus et en grand groupe on a essayé de lire le message qu'elle avait voulu écrire* / *pourquoi il l'avait mal lu* » (Kaa, TdP301).

Si la nécessité d'un message explicite est éprouvée dans certaines classes, le fait d'enseigner ce code ou de le suggérer pose question :

« après *je sais pas si j'ai trop induit ou pas* [le codage] / je sais pas / en tout cas après sur le journal du nombre c'était plutôt réussi (Flo, TdP258)

« je me pose la question aussi / *est-ce que j'ai trop guidé* / est-ce que j'ai pas guidé / est-ce que j'ai trop donné / je sais pas » (Kar, TdP296)

« moi aussi c'est ce que je me suis dit / arrivés au journal du nombre / le fait qu'ils ne se trompent pas / *je me suis dit j'ai dû trop induire* (Kaa, TdP299).

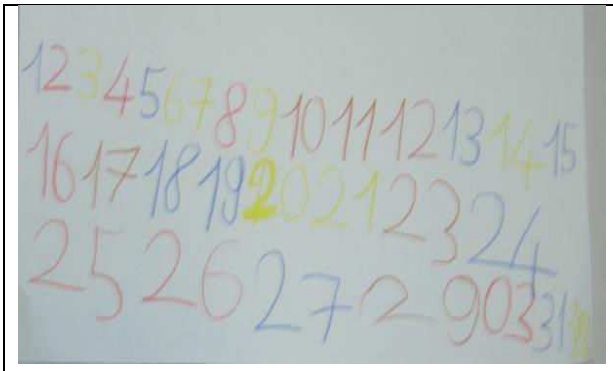
Il semble que l'idée de degré de guidage évoquée par rapport au fait d'indiquer aux élèves les traits pertinents (nombre et couleur) du code rend les professeurs perplexes. En général, ils mettent en valeur le fait de s'appuyer sur des productions d'élèves pour introduire le code. Jef paraît gêné d'avoir à « induire » un code :

« ils [les élèves] ont essayé de trouver de trouver / et ils n'ont pas trouvé / donc on a fait ensemble une fois un codage au tableau / et après ils ont fait eux-mêmes le codage de manière individuelle (.) donc à ce moment-là *j'ai été obligé de leur donner* quoi / quasiment enfin / de leur faire ressortir / mais c'est comme si je leur avais donné / *c'est pas ça* » (Jef, TdP128).

Le chercheur ne rebondit pas sur ces assertions et reste dans une position topogénétiquement basse durant les narrations des mises en œuvre. Puis il reprend une position topogénétique haute pour « réhabiliter » certains actes d'enseignement comme celui de désigner la couleur par la lettre-initiale. En effet, certains actes

d'enseignement sont nécessaires pour réguler l'action des élèves car « la situation ne fait pas tout ». Autrement dit, les élèves ne peuvent pas toujours trouver dans le milieu (dans l'environnement didactique) les éléments nécessaires à leur avancée dans les apprentissages.

Nous présentons également les interactions en année 3 (deuxième année d'expérimentation à grande échelle) afin de montrer plus précisément la nature dialogique du dialogue d'ingénierie (cf. chapitre 2) dans sa dimension didactique, par une analyse en terme de transactions. A la demande du chercheur d'engager une réflexion sur le module 0 à partir de leurs impressions et du récit de leur expérience, les professeurs répondent d'abord avec la description des productions d'élèves ou des comportements d'élèves. Un message produit par un élève va être l'objet de discussion dans le collectif. Nous reportons ci-dessous la production de l'élève, sa description rapide dans la colonne de droite, puis ce qu'en disent le professeur (Anm) et l'inspectrice (IEN) qui était présente durant la séance.

 Production d'un élève émetteur (classe Anm)	La production est qualifiée d'« ordinale » par le professeur Anm : le 1er cube est bleu, le 2ème rouge, le 3ème jaune, … le 6ème et 7ème sont jaunes etc. Le 28ème cube ne figure pas sur le message et le nombre 30 est écrit « en miroir » (03 au lieu de 30)

« Anm : dans les propositions des élèves / y avait eu dans les écritures des messages / la proposition du nombre ordinal avec quelques erreurs / mais les élèves ils ont quand même accepté une régularité […] il avait mis 1 en bleu pour annoncer le cube bleu / 2 en rouge / 3 en jaune 4 en (brouhaha) / alors moi je me suis dit / si on n'avait jamais vu ça / je me suis dit / les autres en récepteurs ils ont quand même du mérite / ils vont mettre 1 bleu et 2 rouges / ben non / ils ont mis le premier bleu le deuxième rouge etc. / et malgré les erreurs d'écriture ben ils ont accepté la régularité […]

IEN : et quand je lui ai dit pourquoi tu en mets pas 2 (inaudible)

Anm : elle a dit parce qu'à partir du 10 y a deux chiffres / voilà l'écriture du nombre » (TdP9-19)

Nous analysons ci-dessous les transactions qui vont permettre l'émergence de la construction d'une référence partagée plus approfondie sur la notion de code. Nous avons repéré dans les transcriptions (à l'aide du tableau synoptique de la réunion du 25 septembre 2013, cf. annexe 3) plusieurs épisodes relatifs au fait didactique relaté ci-dessus. Pour rendre compte d'un aspect de la coopération, ici la construction d'une référence partagée sur le code, nous avons regroupé les épisodes signifiants pour les restituer sous la forme d'une sorte d'intrigue (que nous appelons « série épisodique »). Nous décrivons cette série en trois moments :

Episodes didactiques concernant l'enjeu « notion de code » Trois moments Extraits transcriptions ou résumés et descriptions des transactions Réunion du 25 septembre 2013 (Année 3 - deuxième année d'expérimentation à grande échelle)
Premier moment de la série ChS : voilà les gamins utilisent comme le sens de la lecture en fait en orientant en disant le premier est tant le deuxième est tant le troisième est tant donc ils ont utilisé une propriété du nombre qui est la propriété ordinale pour pouvoir répondre à la question au problème qui leur a été posé bon *c'était pas ce que tu attendais dans le texte* [le document de la progression ACE]↑ Anm : j'ai laissé ChS : bien sûr c'était pas ce qui était désigné comme possible dans l'écriture du texte donc ça ça a une existence dans la classe bon comment ça a vécu combien de temps ça a vécu et qu'est-ce que ça a produit↑ Anm : on l'a repris ensemble ChS : les récepteurs ont-ils réussi↑ Anm : oui ChS : bon les récepteurs ont réussi donc tu ne peux pas disqualifier la proposition des élèves Anm : ben non ChS : ça marche […] (TdP28-36) Anm : *ça a marché mais c'est inefficace* (TdP43) […] on a repris les messages et on en a fait une lecture et après coup y en a *qui ont proposé une règle* (TdP60)

(épisodes 1h 03min 43 – 1h 13min 44)

Transactions contribuant à :

- décrire la production et la réaction des élèves-récepteurs du message : le message est idoine car les élèves-récepteurs sont capables de le décoder et de produire le train-objet correctement en interprétant le message comme une suite d'indications sur la couleur des cubes ; ils ont su lire « 1 et 0 » comme 10ème cube etc. On peut supposer leur familiarité à la frise numérique ;
- mettre en évidence que le message, bien qu'ayant joué son rôle dans la communication, n'est pas retenu par le professeur dans la poursuite de l'activité. Selon ChS ce n'est pas ce que le professeur attendait («c'était pas ce que tu attendais dans le texte↑/ c'était pas ce qui était désigné comme possible dans l'écriture du texte ») et selon le professeur Anm c'était « inefficace » (sans plus d'explication), terme utilisé selon nous dans le sens de «pas efficace pour tous » puisque sujet à interprétation ou puisqu'ensuite Anm fait adopter une règle de codage (TdP60).

Deuxième moment de la série

IEN : là qu'est-ce qu'on fait de ça [du message ci-dessus] ↑ (TdP68)

Les propositions des professeurs sont (i) de faire corriger le message et par extension reprendre les messages qui avaient posé des difficultés de lecture ou (ii) de confronter les messages et éprouver leur économie :

Val : peut-être que faut juste leur montrer que même si ça marche ce message après il en a un qui est plus économique qu'un autre parce qu'il prend plus ou moins de place il prend beaucoup moins de place à écrire (TdP77)

(épisodes 1h 13min 44 - 1h 15min 26)

Transactions contribuant à :

- proposer des actions à mettre en place pour prendre en compte ce type de message idoine à la situation (car les récepteurs du message ont pu construire le train) mais pas à l'attendu : faire corriger c'est-à-dire rendre interprétable un code sans ambiguïté, choisir un code économique à écrire et à lire.

Troisième moment de la série

Mél : je leur avais demandé d'écrire un message sans dessiner […] ce qui leur a posé un problème c'est écrire donc écrire c'est des lettres nous on sait pas écrire donc ils ont écrit des lettres au hasard y en a qui ont écrit leur prénom avec des couleurs mais par contre

les récepteurs eux ont compris les messages ils ont fait le train qui correspondait au message mais c'était pas le train initial ils ont réussi avec des lettres de couleurs à se dire ben là y a un I rouge donc je vais mettre un cube rouge là y a un F vert je vais mettre un cube vert
Cat : sur le prénom par exemple
Mél : oui ils ont écrit
ChS : on a quelque chose de particulièrement intéressant sur le travail qui est produit en maternelle on a un effet massif sur premièrement on a une situation où *il y a un enjeu d'apprentissage donc les élèves ont identifié* >et c'est bien< que finalement dans une situation qui était proposée en classe y avait un enjeu d'apprentissage c'était pour apprendre quelque chose on attendait et donc *on va construire une relation autour de cette attente* (2.) je dois construire un message mais pour autant qu'est-ce qui permet de contrôler cette chose-là↑ *quel est le savoir convoqué*↑ ben des savoirs disponibles des savoirs disponibles c'est de l'écrit connu de l'écrit connu en maternelle quel est l'écrit connu qui a du sens et qui est convoqué systématiquement↑ c'est les étiquettes de prénom ça pourrait être des jours de la semaine ça pourrait être un certain nombre de chose autrement dit *ils ont répondu à l'écriture d'une production de message sans convoquer le savoir attendu* mais comment tu as fait après↑
Mél : ben y en avait un qui avait mis les initiales des couleurs pour chaque cube donc c'est le seul qui du coup a eu le train qui son message correspondait au train initial après j'ai affiché tous les messages au tableau et on a vu que ça pouvait pas correspondre pourquoi le message en fait correspondait pas au train mais que par contre en fait j'ai construit au fur et à mesure les trains correspondants aux messages et après on a comparé avec le train qui devait être construit et on a vu donc que c'était pas:: que c'était pas le même et pourquoi et que donc même si on mettait des lettres effectivement il fallait que ça respecte quand même l'ordre des couleurs et après c'est moi qui ai induit les nombres enfin c'est moi qui ai induit les mettre 2 en rouge 3 en jaune […]
ChS : tu sais on peut s'autoriser à dire que tu as enseigné quelque chose c'est pas forcément induit *je crois qu'il y a des choses qu'il faut assumer d'enseigner* […] tu as *désigné la stratégie qui marchait* désignant la stratégie qui marchait c'est pas nécessairement que tu as dit il faut faire comme ça des élèves pourraient employer ou décliner cette proposition en disant ben tiens moi je vais faire etc. etc. donc tu as quand même euh comment dire là tu as changé la nature du contrat si j'ose dire c'est-à-dire que *d'un écrit pour produire un message tu es passée à l'usage d'un CODE c'est plus pareil tu as montré qu'il y avait nécessité d'un code* alors faisant ça peut-être que tu as que tu

as économisé le temps de travail collectif sur la nature du code c'est-à-dire bon ben on va essayer tel code etc. etc. ça c'est la contrainte du temps (TdP92-105)
Narrations de professeurs sur des mises en œuvre et des réactions d'élèves n'utilisant pas les attributs sensibles (sans crayons de couleurs) ou utilisant les mots de la couleur avec des couleurs différentes : les élèves éprouvent ou contraignent les possibles dans les messages
ChS : le fait de fonctionner avec ce type de contrat je produis à l'aide de ce que je connais ce que je sais je le mets en œuvre je le convoque je le confronte à l'attendu c'est-à-dire ça fonctionne ça fonctionne pas mais ça c'est pas mon projet *c'est le projet commun que tout le monde doit avoir* donc c'est pas nécessairement la même stratégie cette discussion-là est importante parce que *vous avez un moyen de traiter les erreurs de voir la nature de l'erreur et d'agir au bon endroit* par rapport à l'enjeu par exemple l'histoire de l'ordinal ça marche ça marche si on n'oublie pas un rang par exemple donc si ça marche pas c'est pas la stratégie qui est en cause c'est la mise en œuvre de la stratégie qui est en cause (TdP110-124)
(épisodes 1h 15min 26 - 1h 28min 15)

Transactions contribuant à :
- décrire des productions d'élèves utilisant des lettres pour coder à l'écrit la composition du train-objet ;
- identifier dans les réponses des élèves une disposition à l'apprentissage même lorsque le savoir convoqué n'est pas adéquat ;
- identifier, dans l'action conjointe professeur/élèves, la différence entre enseigner ce qui est prévu par le document et enseigner le code quand il y a la nécessité d'adopter un code dans la situation ;
- échanger sur les mises en œuvre et les moyens de contrôle pouvant être opérés par le groupe classe sur les messages : convoquer les savoirs disponibles (ici au sortir de la maternelle, l'écriture des prénoms) n'est pas toujours efficace car ne permet par le contrôle du message par rapport à la production du train-objet ;
- décrire d'autres moyens mis en œuvre par les élèves et les manières dont ils testent les possibles par rapport à la convention ;
- établir la nécessité d'un code commun pour parler ensemble des productions, pour contrôler et justifier les productions. Plus ce code est partagé et devient conventionnel, plus on peut agir avec lui dans une communauté.

Que ce soit lors de la première année expérimentale à grande échelle (2012-13) ou la seconde (2013-14), le jeu des professeurs (relayé par l'IEN) sur le chercheur est de montrer qu'ils sont contraints par la pratique. En effet, une de leurs priorités est le maintien de la relation didactique (« ils n'ont pas trouvé donc on a fait ensemble une fois un codage au tableau » ; « j'ai été obligé de leur donner *» ;* « j'ai dû trop induire » ; « qu'est-ce qu'on fait de ça [du message sous forme ordinale] ? »). Le jeu du chercheur sur les professeurs, la seconde année d'expérimentation, est d'instituer l'enjeu de désignation rapidement mais aussi d'en donner les raisons : la situation *Train / tour* est didactisée pour que l'utilisation des nombres réponde à une réalité fonctionnelle dans la situation. En effet, un message peut donner lieu à une réalisation correcte mais celle-ci est dépendante d'une interprétation. L'interprétation la moins ambigüe possible (ou celle qui existe dans la société) est celle qui permettra le contrôle des productions par tout un chacun. Guy Brousseau (2004) nous dit que la production de savoirs commence avec la création d'un *code commun de désignation* (ou un système symbolique de notation) des objets de l'action (ici action de production de message). Ces objets (ici les nombres) vont aider à penser l'action, à poser des questions au sujet de cette action donc à l'étudier. C'est une phase d'expérimentation pour les élèves de ce qu'une désignation écrite partagée véhicule en termes de possibilités dans les échanges. L'analyse collective des moyens mis en œuvre répond à une exigence didactique de maintien de la responsabilité des élèves dans le jugement des réponses qu'ils produisent.

Ainsi il y a un pas à franchir, pour les professeurs, formateurs et IEN, dans la compréhension de la situation, entre l'enseignement d'un code attendu (celui indiqué par le texte de la progression SIT pour le module 0) et l'adoption d'un code partagé par une communauté (celui de la désignation d'une mesure de grandeur avec le système numérique). L'action de régulation du chercheur permet d'enrichir le contenu épistémique car ont été formulées les raisons de l'utilisation d'un code partagé par tous (les nombres) dans l'étude collective en classe de la situation mathématique. Nous supposons que cette action est due à l'expérience de régulation de l'ingénierie que le chercheur a acquise. Lors de la première année de mise en place de la situation *Train / tour* (première année d'expérimentation à grande échelle, année 2) des échanges de pratiques ont permis au groupe de trouver un accord sur une pratique d'enseignement. Mais c'est lors de l'année suivante (deuxième année

d'expérimentation à grande échelle, année 3) qu'un apprentissage de savoir ingénierique a pu se mettre en place, celui des raisons d'être des nombres comme code commun de désignation de la mesure d'une grandeur (ici nombre d'entités d'une collection). Ce savoir annonce la fonction que prendra la représentation « objet-train » dans la situation à venir du *Jeu des annonces*, celle de référence à une forme symbolique de représentation calculable. En effet, opérer avec des objets-trains permet d'« interpréter » les nombres quand les élèves n'en ont pas encore la maîtrise donc d'établir une continuité entre le système (produit par la situation du jeu de comparaison) et le modèle (le système numérique).

Dans cette section, nous avons tenté de montrer, au travers d'un événement didactique rapporté (la production d'élève), l'intérêt de regarder les transactions qui permettent au collectif d'établir un fait d'ingénierie (les questions et discussions que cette production suscite quant aux raisons de l'usage d'un code symbolique commun). Nous pouvons percevoir la fécondité des échanges : (i) y sont analysés collectivement les moyens pour permettre aux élèves de porter un jugement sur leurs réponses ; (ii) y sont déclarés ou discutés les savoirs des professeurs qui ont donné forme aux gestes d'enseignement et de direction de l'étude, les savoirs des chercheurs qui ont conçu l'ingénierie dans ses grandes directions et les savoirs du collectif qui montrent leur état de compréhension de l'ingénierie. Il y a bien une dimension dialogique dans ce dialogue d'ingénierie : des connaissances sont construites et converties en savoirs d'ingénierie. Nous explorons dans la section suivante cette voie de travail.

Séries épisodiques : une réduction synoptique du procès de la mise en œuvre du *Jeu des annonces*

Les situations *Jeu des annonces* et *Train / tour* sont évoquées lors des réunions du collectif provençal : la deuxième année lors des réunions du 26 septembre, du 24 octobre, du 21 novembre, du 5 et 12 décembre 2012 ; la troisième année lors des réunions du 25 septembre et du 27 novembre 2013. Il s'agit d'y retrouver les traces des savoirs qui montrent l'état de compréhension de l'ingénierie par le collectif.

Nous recherchons les épisodes didactiques relatifs aux enjeux de savoirs que nous avions décrits dans l'analyse *a priori* de la situation sous la forme de classes de problèmes que les élèves rencontrent et qu'ils ont à résoudre :

- désigner une collection par la mesure de sa grandeur ;
- décrire la mesure de la grandeur ;
- représenter la mesure d'une collection ;
- comparer des mesures de grandeurs ;
- valider et justifier une comparaison.

Nous recherchons, en même temps, des épisodes relatifs aux éléments didactiques constituant les faits relevés dans la biographie à l'échelle macro et décrits précédemment. Nous nous intéresserons donc plus particulièrement à ce qui a trait :

- à la référence à la situation ;
- au temps de l'expérience ;
- au passage à l'écrit ;
- au rôle du passage à trois mains dans l'avancée didactique et aux stratégies développées et permises par ce changement de commande de la situation ou tout autre changement de commande ;
- aux rapports aux répertoires ;
- à la désignation des mesures de grandeurs ;
- aux usages et à l'utilisation des représentations.

Est-ce que tous ces éléments se constitueront en faits d'ingénierie (que nous avons définis comme ancrages des échanges épistémiques) et seront repris par le collectif « local » ? Lesquels seront travaillés dans le groupe Provence et dans quelles circonstances ?

Pour rechercher de tels épisodes (épisodes didactiques relatifs aux enjeux de savoirs et épisodes relatifs aux éléments didactiques constituant les faits relevés dans la biographie à l'échelle macro) nous utiliserons le logiciel *Transana* dans sa fonction d'aide à l'analyse (cf. chapitre 5 – Utilisation du logiciel). Grâce à l'annotation par mots-clés de chaque épisode, nous pouvons formuler des requêtes et créer des collections thématiques. Ces collections d'épisodes peuvent s'étendre sur plusieurs années. Nous mentionnerons pour chaque section quels essais de recherches documentaires nous avons engagés et quels résultats ils ont produits. Nous verrons que l'enquête n'aboutit pas toujours.

Nous ne pourrons là encore prétendre à l'exhaustivité mais nous essaierons de ne pas perdre du vue notre boussole ou sonde morphologique (Ginzburg, 2010) qui est celle du travail coopératif à propos de savoirs ingénieriques. Les faits, repris dans le collectif provençal, sont ainsi considérés comme des descriptions-pivots (Sensevy, 2011a; Wittgenstein, 2004) permettant de comprendre l'articulation entre les échanges de la sphère 1, notamment ceux de la première année (2011-12), et les échanges avec les professeurs lors des années suivantes d'implémentation de l'ingénierie.

Partage de l'enjeu « désigner la mesure de la grandeur » et temps de l'expérience

Un des arrière-plans forts de l'ingénierie est de considérer les mathématiques comme une expérience de pratiques sociales voire anthropologiques (cf. chapitre 4) ; le travail en classe portant sur des pratiques expérimentales relatives aux grandeurs mesurables. Nous avions aussi décrit le *Jeu des annonces*, au début de ce chapitre, comme une situation permettant d'« expériencer » (dans le sens de se créer de l'expérience dans) la production de grandeurs et d'explorer les multiples modalités d'écriture des nombres à désigner les mesures de ces grandeurs puis à les comparer. Nous avions vu plus haut que le travail d'enquête du collectif la première année (2011-12) avait montré la nécessité de rester suffisamment longtemps sur le jeu (et la référence aux doigts jusqu'à la phase 3 de l'écrit comprise). Ces transactions, dans une première équilibration au sein du système ingénierique, avaient produit le document de la progression SIT et le découpage en modules de la situation didactique. Nous cherchons ici à constituer la série épisodique relative aux transactions concernant le partage de l'enjeu « désigner la mesure de la grandeur » dans le cadre de pratiques scolaires de mathématiques expérimentales au sein du collectif Provence. Nous utilisons pour cela l'assistance du logiciel *Transana* telle que nous l'avons décrite précédemment.

Premier essai de recherche documentaire

Une requête dans notre corpus, assistée par le moteur de recherche de *Transana*, pourrait commencer à partir du mot-clé « expérimentation » que l'on peut associer à

« désignation de la mesure de la quantité » et d'autres mots-clés comme « référence » ou « stratégie ». Mais la requête n'est guère productive pour nous qui cherchons à éprouver la validité de l'hypothèse d'un partage d'enjeux. Cependant, la série épisodique, constituée à partir de la requête, révèle finalement *en creux* la relation des professeurs avec cet élément constitutif du style de pensée *ACE-Arithmécole*. Autrement dit, les professeurs ne « parlent » pas l'aspect expérimental de l'ingénierie sauf dans de rares épisodes et de manière assez fugace ([à propos du jeu à trois mains] « j'en ai un qui a fait une annonce à un moment donné donc le premier a annoncé quelque chose le deuxième annonce autre chose et j'ai vu le troisième réfléchir alors ils ont réfléchi collectivement à ce que le troisième pouvait annoncer pour ne pas dépasser 6 »). En effet, dans les épisodes de la requête ressortent d'abord les préoccupations des professeurs (par rapport au comptage sur les annonces, à la désignation orale des nombres à acquérir, à la nécessité ou pas d'afficher une file numérique) ou des narrations sur les mises en œuvre (introduction des notions de commutativité et d'associativité dans les écritures additives qui, même si elles ne sont pas employées dans ces termes, sont mises en place en action). Nous ne développerons pas une telle analyse sur cette série épisodique dans cette section mais nous pouvons dire rapidement que c'est dans l'expression du chercheur qu'est employée la notion d'expérimentation : le jeu du chercheur sur les professeurs consiste alors en des apports didactiques sur le rôle des parties fictives comme classes de problèmes à rencontrer ou la nécessité de conserver une relation, une référence au jeu.

> « tu as de quoi assurer un certain nombre de supports aux élèves qui sont par exemple les nombres / ils ont fréquenté physiquement intimement de multiples façons des nombres / le 5 ils le connaissent bien / ils l'ont touché comme ça ((fait une annonce avec les doigts)) ils l'ont touché comme ça ((fait une annonce avec les doigts)) ils ont une relation je dirai sensitive physique avec les nombres / ils savent qu'ils peuvent les désigner de différentes façons / ils ont une fréquentation intellectuelle et effective avec les nombres et donc ils ont les moyens de savoir que 5 c'est égal à 4 plus 1 / 3 plus 2 / 5 plus 0 / c'est pas la même chose / donc on peut déjà constituer un certain nombre de >comment dire< de relations aux nombres / par exemple ils savent que 5 c'est plus grand que 3 / ah d'accord / mais 2 plus 1 c'est plus petit que 3 plus 2 / voilà / mais ça veut dire qu'on construit si tu veux des relations d'ordre entre

les écritures qui ont une relation à l'expérience / et c'est des choses dont ils sont sûrs sur lesquelles ils peuvent s'appuyer éventuellement pour comparer les nombres » (ChS – réunion du 21 novembre 2012 – TdP226).

Deuxième essai de recherche documentaire

Nous avons alors utilisé le mot-clé « temps didactique » dans une nouvelle requête. Nous nous sommes en effet demandée comment les professeurs ont installé effectivement ce temps de l'expérience par rapport à l'avancée de la progression. Il ressort de la série épisodique, constituée par cette requête, que des séances supplémentaires ou de durées plus longues ont été nécessaires notamment sur les modules d'entrée dans l'écrit (« toutes les parties fictives qui sont présentées je vois pas comment je peux faire ça en quatre séances » ; « je n'arrive pas à tout faire en mathématiques dans les 5 heures ou 5 heures et demie »). En général, et surtout au début de la progression, le texte est considéré comme prescriptif : les professeurs y adhèrent et essaient de s'y conformer (« pour les premiers modules j'ai fait exactement le même nombre de séances »). Puis ils mettent en place des aménagements mais ceux-ci s'avèrent aussi en majorité chronophages (« ce signe [inférieur à] c'est une découverte / on peut pas faire trois milliards de choses dans une même séance / il faut euh scander euh les séances / pas tout mélanger / faire une petite séquence à ce niveau-là / pour après l'introduire dans le jeu des annonces / pour moi ça me demande plus de temps que ce que c'était marqué » Agn, réunion du 21 novembre 2012, TdP702). Une des préoccupations d'un professeur peut être dans le rythme à donner à l'avancée du temps didactique comme le montre ce court épisode :

« Cat : travaillés ou acquis↑
ChS : alors normalement si c'est travaillé il devrait y avoir des choses
Cat : oui mais acquis c'est pas pareil que avoir des choses quoi / parce qu'il y en a [des élèves] vraiment en cours »
(TdP8-11 - réunion du 24 octobre 2012)

L'intention du chercheur, nous l'avions énoncé au chapitre 4, est de rendre possible l'observation des comportements et des productions des élèves par leur professeur mais aussi, d'une certaine manière qui lui est liée, la possibilité d'utiliser le texte de la

progression avec plus de libertés quant au rythme à adopter ou aux activités à aménager ou à choisir. Le chercheur doit donc organiser cet apprentissage par l'observation au moyen d'une réflexion à la fois épistémologique, didactique et anthropologique. Une des conditions est l'identification des savoirs en jeu :

> « quand je dis « travaillés » c'est avec les élèves / et que les élèves soient dans l'enjeu / il a ce que le prof fait et ce que l'on veut voir apparaître à partir des actions effectives des élèves / par exemple comme je le dis là / est-ce qu'ils utilisent encore le dénombrement avec les doigts ou est-ce que l'on voit de façon stable l'usage de la désignation de quantités soit à l'oral soit à l'écrit pour la majorité des élèves↑ / par exemple quand tu lis les modules / y a bien écrit voilà l'enjeu pour le prof voilà l'enjeu pour les élèves […] on agit sous la contrainte du dispositif où il y a des choix d'enseignement qui sont faits et des modalités de visibilité d'apprentissage qui ont été retenues / on est bien d'accord que ce n'est pas parfait / qu'il faut que l'on y travaille / qu'on l'aménage / qu'on fasse des remarques là-dessus / […] il a quand même cette épée de Damoclès qui est là / qu'on soit bien clair c'est un repère (TdP7-13) […] bon on a fait des remarques la dernière fois sur le module 0 / sur le fait qu'il y avait vraiment des enjeux / bon pas immédiatement à atteindre mais il fallait avoir conscience que l'on visait ça / et il va falloir construire les conditions pour que ça apparaisse » (ChS - TdP52 - réunion du 24 octobre 2012).

Les professeurs doivent pouvoir acquérir une lisibilité des enjeux afin de diriger l'étude des élèves à partir des actions de ces derniers (par exemple dénombrement avec les doigts ou désignation de quantités). Cette lisibilité des enjeux doit pouvoir également leur permettre d'installer des conditions de l'étude adéquates et d'avancer selon un rythme qui convienne à cette étude par les élèves – le texte de la progression proposant des repères. Comment va se réaliser cette identification de l'enjeu (pourtant énoncé dans le texte de la progression SIT) ?

Troisième essai de recherche documentaire

La requête avec le mot-clé « désignation de la mesure de la quantité » produit trente-quatre épisodes. Une partie significative de ces épisodes contiennent aussi les mots-clés « élèves moins avancés » et « comptage ». Un professeur s'exprime ainsi : « je

pense que ça doit apparaître dans d'autres classes / c'est que j'en ai deux ou trois [élèves] qui ne savent pas compter jusqu'à 4 / ceux-là ils sont là mais je me demande en fait s'ils vont pouvoir entrer dans le projet / et comment faire / qu'est-ce que je fais d'eux↑ (Sam - réunion du 26 septembre 2012 – TdP157). Pour cerner les difficultés que rencontrent les élèves nous avons formulé une requête avec le mot-clé « élèves moins avancés » puis avons éliminé les difficultés trop liées à la compréhension même de la situation du jeu (confusion quantité d'objets d'une sous-collection et d'une collection comme montrer D3G3 pour désigner 3 ou faire toujours la même annonce non pertinente D5G5 dans un jeu avec un dé). La difficulté principale concerne l'attribution d'une mesure à une collection, pour certains élèves déjà à partir de 2 objets et pas au-delà de 3. Mais ce qui revient le plus souvent dans les propos des professeurs est la technique de dénombrement (de comptage des entités une à une). Cette technique semble être utilisée systématiquement avec les élèves moins avancés : « mais la petite / combien t'as de doigts↑ / je suis obligée de lui dire compte / 1 / 2 » ; « on rencontre vraiment des enfants comme tu as toi et qui au bout de trois mois / quatre mois / ne savent toujours pas compter jusqu'à 5 / j'avoue à un moment donné on a tout fait / on a compté les billes / on a compté des chaises / des élèves debout / on est allé dans la cour / on a compté les arbres / les machins enfin tu vois ». Le comptage est *la connaissance que les professeurs possèdent dans leurs savoir-faire professionnels et sollicitent pour désigner la mesure de la taille d'une collection*. Nous allons donc nous pencher à une échelle microscopique sur les transactions relatives à la construction de la notion de désignation telles qu'elles se réalisent au sein du collectif et y chercher les traces de la confrontation entre déterminations du jeu (Sensevy & Mercier, 2007b) et enjeux de la situation didactique. Nous les décrirons puis les analyserons comme des jeux d'apprentissage (Sensevy, 2011a).

Analyse des transactions

Nous avons lancé une requête associant les mots-clés « désignation de la mesure de la quantité » et « comptage ». Au niveau méthodologique, la requête à partir de « désignation de la mesure de la quantité » et « comptage », avec l'opérateur booléen « ET », révèle nettement la distinction de ces notions telles qu'elles sont traitées dans les transactions. Avec l'opérateur booléen « OU », le rapport de recherche produit par

le logiciel indique un nombre beaucoup plus important d'épisodes (quarante-quatre au lieu de six). Si la première requête nous permet de voir comment le chercheur opère entre les deux notions, la seconde nous permet de montrer le cheminement de la réflexion du groupe. La première requête nous a donc été utile mais c'est sur la seconde que nous travaillerons.

A partir de ce rapport regroupant tous les épisodes selon la requête demandée, nous avons dû effectuer des coupes (d'épisodes ou de tours de paroles) pour éviter une trop longue lecture. Pour maintenir la cohérence sur ce que nous pouvons dégager de l'ensemble de la série comme connaissances pour l'ingénierie et expérience engrangée, nous avons organisé la série épisodique en moments d'un, parfois deux ou trois épisodes. La série épisodique suivante concerne ce qui nous apparaît comme révélant le processus de construction de la connaissance « désignation de la mesure de la grandeur » ; nous y avons repéré trois moments. Dans le premier, le chercheur attire explicitement l'attention sur l'enjeu de désignation. Dans le deuxième, les professeurs mettent en pratique la désignation dans une action de la vie quotidienne. Le cas d'un élève moins avancé est discuté dans le troisième moment.

Episodes didactiques concernant l'enjeu « désignation de la mesure de la grandeur » Trois moments Extraits transcriptions ou résumés et descriptions des transactions Réunion du 26 septembre 2012 (Année 2 - première année d'expérimentation à grande échelle)
Premier moment de la série
Agn : il m'a mis J4R5V3B2 il m'a fait la totalité des couleurs on dirait (.) il a il a PE : il a regroupé les couleurs Agn : il a regroupé les couleurs en me disant eh ben y a 5 rouges sur le même train (brouhaha) ChS : et alors c'est fondamental ça Emp : (inaudible) c'est-à-dire que c'est très bien en même temps 4 rouges et comme toi à ce moment-là j'ai été obligée de leur dire attention il faut aussi l'ordre des wagons voilà (brouhaha) ChS : alors attends concrètement moi *ça m'intéresse beaucoup là car on est réellement dans l'enjeu là* on en discutera après comment t'as fait↑ qu'est-ce que tu as fait de ça↑

Agn : alors j'ai laissé ((montre petite feuille pour message)) au moment où il faut faire des trains des messages en fait on s'apercevait que finalement c'était pas le même train (TdP237-243) […]
Anl : ils comptaient ils disaient par exemple y avait 3 rouges là j'ai bien mis 3 rouges donc il faut mettre 3 rouges là y avait 4 verts on va mettre 4 verts et ainsi de suite
ChS : t'es sûre qu'ils faisaient tous comme ça↑ ou ils faisaient 1 2 3↓ 3 ↓
Anl : oui ils comptaient (inaudible) mais enfin ils arrivaient à valider et à confronter leur production avec ce qui était demandé (TdP267-269)
(épisodes 46min 55 - 1h 06min 34)

Transactions contribuant à :
- pour les professeurs, décrire les productions ou actions des élèves (regrouper les cubes de couleurs pour désigner leur mesure ; compter les cubes par couleur et les ordonner). Cette description provient d'une demande de ChS qui a présenté les modalités de travail de la réunion : raconter des événements intéressants ou problématiques ou des aménagements réalisés ou non réalisés que l'on s'est interdit de faire pour ne pas mettre en péril l'expérimentation (TdP123-127) ;
- pour le chercheur attirer l'attention sur un fait didactique (« et alors c'est fondamental ça ») et la manière de désigner par l'élève la mesure d'une grandeur (« t'es sûre qu'ils faisaient tous comme ça↑ [nommer la mesure de la collection par sa désignation orale 3] ou ils faisaient 1 2 3↓ 3 ↓ »). Ainsi, dans ce moment du jeu d'apprentissage, il relâche sa réticence didactique en exprimant des actions possibles d'élèves et en dévoilant l'objet mathématique qu'il veut porter à l'étude collective.

Deuxième moment de la série

ChS : combien tu as dans ton porte-monnaie Reg↑
Reg : 10 euros
ChS : montre comment tu fais↑ (.) tout le monde va compter ses pièces *le fait de passer de l'énumération-comptage à la désignation de la quantité c'est pas naturel c'est un gain* et les élèves on le voit bien qu'ils sont là-dedans c'est-à-dire que le gamin qui fait 1 2 puis 2 et qui s'adresse en disant 2 vous voyez que c'est pas spontanément qu'on passe de ce qu'ils savent faire d'habitude c'est-à-dire du comptage-énumération à la désignation de la quantité pour la collection c'est-à-dire *on va désigner des collections avec une quantité et non pas en faisant 1 2 3 on dit 3 ça se gagne* (TdP289-293)
(épisode 1h 06min 34 - 1h 08min 37)

Transactions contribuant à :
- évoquer une expérience quotidienne : désigner la somme d'argent que l'on a dans sa poche (Reg a quelques pièces de monnaie). Cette petite expérience permet de montrer que l'acte de compter, même s'il est fugitif chez l'adulte, est un acte social ;
- faire le parallèle avec les actions des élèves dans leur désignation de la mesure de la quantité de cubes ;
- fournir au collectif un apport didactique en déclarant explicitement les enjeux de la situation : désigner la somme pour répondre à la question et non la compter (technique).

Troisième moment de la série

Sam : j'en fais quoi [cas d'une élève qui ne sait pas compter jusqu'à 3 / désigner 3]↑
ChS : alors je vais faire des propositions y a cette idée de constitution alors pour moi les wagons c'est trop grand pourquoi pas prendre un train très réduit et travailler sur si elle arrive à dire 2 c'est déjà gagné 2
Sam : oui mais les wagons on y est plus on est au ::
Cat : pas nécessairement des trains moi je pensais faire
ChS : des colliers je sais pas quoi mais il faut vraiment vous ayez cerné l'enjeu vraiment
Cat : (inaudible) moi la question que je me pose c'est peut-être ralentir un peu rajouter des séances
ChS : tu vas pas ralentir les séances alors qu'il y a une élève qui n'arrive pas à dire qu'il en a 2 tu peux pas faire ça c'est pas possible
Sam : est-ce qu'on peut les décrocher du grand groupe les mettre à part dans une autre activité↑ […]
ChS : non hors de question de la mettre hors jeu dans les situations ça c'est sûr maintenant trouver dans la situation les moyens de soutenir cette gamine […] qu'elle arrive à le dire et *d'enclencher ce mécanisme d'expression de la quantité et non pas de comptage-énumération*
Emm : moi il me semble que de toutes façons qu'elle va vivre des situations qui vont quand même faire écho il y a quand même des choses qu'ils apprennent (brouhaha)
ChS : on a un gros cas le gamin il peut pas passer 2 et de dire qu'il y en a 2 bon voyons si y a pas (.) admettons qu'il n'y ait pas d'autres problèmes (.) admettons ↓ si on arrive à gagner sur des petites collections qu'elle arrive à passer justement sur l'expression de la quantité et à commencer à décomposer là-dessus c'est un pas énorme pour cette gamine on ne sait pas
Sam : elle le saura ça
ChS : on ne sait pas les bénéfices que ça va entraîner par la suite

Cat : elle risque de refaire ChS : eh ben elle le refera mais elle sera rentrée quand même et on peut estimer que ça aura contribué aux choses (TdP344-381) (épisode 1h 31min 54 – 1h 37min 54)
Transactions contribuant à : - proposer des pistes de travail dans la situation avec les élèves moins avancés sur la désignation de la mesure de la quantité et les garder dans la situation didactique travaillée en classe sur des valeurs très petites ; - rappeler l'enjeu (« enclencher ce mécanisme d'expression de la quantité et non pas de comptage-énumération ») et la nécessité de diriger l'étude des élèves par cet enjeu.

Série épisodique « désignation de la mesure de la grandeur » - année 2 – 1ère réunion

Le jeu du chercheur est d'aider les professeurs à observer les actions de leurs élèves (quelles techniques utilisent-ils pour mesurer la collection de cubes dont ils ont besoin et qui est déjà partitionnée ?) et à réguler cette action en orientant tous les élèves, même les moins avancés, vers la désignation de la mesure. Pour cela, le chercheur s'appuie sur les expériences vécues par les professeurs lors des séquences d'enseignement qu'il leur demande de décrire précisément. Il met également en place un dialogue d'ingénierie qui consiste en une mise à l'épreuve mathématique (désigner la somme que l'on possède dans sa poche) afin de solliciter des pratiques quotidiennes (auxquelles on ne prête plus attention et qui sont pourtant un pas à franchir pour les élèves) pour les analyser à la lumière de la situation didactique. Ainsi l'enjeu didactique de désignation de la mesure est clairement mis au jour par ChS.

Lors de la réunion suivante (24 octobre 2012), la notion est à nouveau objet de transactions. Nous décrivons ce fait d'ingénierie dans la série ci-dessous constituée en deux moments qui interrogent la désignation de la mesure réalisée par des élèves à partir de faits observés dans les classes.

Episodes didactiques concernant l'enjeu « désignation de la mesure de la grandeur »
Deux moments
Extraits transcriptions ou résumés et descriptions des transactions

Réunion du 24 octobre 2012 (Année 2 - première année d'expérimentation à grande échelle)

Premier moment de la série

Cat : je voulais revenir sur ce que tu disais j'ai des élèves en très grande difficulté qui n'ont pas conscience du nombre même des petits nombres je leur donnais 3 c'est très fluctuant des fois ils me donnent la quantité le 3 ou le 4 et même avec les doigts ça peut mettre un temps un jour ça va venir le lendemain y aura plus […]

ChS : la crainte que tu as est totalement justifiée et il y a aussi la pression sociale on est au cœur du problème là euh on est dans les pratiques du monde le fait de connaître la suite numérique et de savoir que 29 est avant 30 ne garantit pas que l'écart entre 29 et 30 est le même qu'entre 100 et 101 etc *les pratiques de numération habituelles on le sait bien ne garantissent pas >comment dire< une fréquentation une compréhension du concept de nombre il faut le construire* […] on n'a pas besoin d'aborder les grands nombres pour pouvoir le faire et *on a besoin justement de ne pas dénombrer pour construire ça de compter pas à pas ne garantit pas* malgré tout mais comme tu le dis après tu as un certain nombre de pratiques qui viennent s'installer en vérification qui sont du pas un par un mais qui deviennent des problèmes de manipulation tu en as oublié un celui-là tu l'as déjà compté mais qui ne sont pas des problèmes mathématiques ce sont des problèmes pratiques *ça devient un problème de manipulation où tu as mal compté* nous on essaie de de d'être euh comment dire dans *la connaissance mathématique qui correspond au contrôle de la situation on essaie d'installer ça* alors effectivement on va voir un comment dire un certain nombre de pratiques qui sont pas installées et qu'on installe avec des petits nombres parce qu'on sait que ce sera la même chose sur des grandeurs plus importantes (TdP297-298)

(épisode 1h 06min 05 – 1h 11min 04)

Transactions contribuant à :

- alerter sur certains comportements observés en classe ;
- situer l'enjeu de désignation de la mesure dans un contexte anthropologique et didactique plus large : les pratiques de désignation de la mesure telles que proposées par l'ingénierie vont à l'encontre des pratiques sociales usuelles. Celles-ci ne garantissent pas la construction des nombres et peuvent être sources d'erreurs car elles convoquent des techniques de manipulations. Le contrôle de la situation sera assuré par la connaissance mathématique et c'est ce qu'il s'agit d'installer.

Deuxième moment de la série

Jef : j'ai fait exactement ça c'est-à-dire ceux qui n'étaient pas à l'aise dans le calcul mental mais faîtes le jeu des annonces *sauf qu'ils comptent sur les doigts* 1 2 3 4 5 6 ((mime comptage sur le menton)) (brouhaha) moi ça m'a posé des problèmes

Emm : écoute moi je les vois quand on fait la feuille de calcul mental je les vois ils ont les mains comme ça ils font ok mais TOI tu gardes (inaudible) tu leur donnes une idée d'autre chose qu'ils peuvent faire au fur et à mesure à force d'entendre ben tu sais en fait on pouvait on pouvait très bien ne pas calculer sur tes doigts on pouvait faire 2 plus 2 égal 4 je rajoute 1 il l'entend il l'entend une fois il l'entend deux fois il l'entend trente fois il l'entend quarante fois au bout de quarante fois et ben

Jef : ok si on le fait comme ça moi j'adhère

ChS : je veux revenir là-dessus

Emm : ça marche

ChS : la certitude que peuvent avoir les élèves elle est pas spontanée tu le vois toi je fais l'hypothèse que *ils l'énoncent publiquement et ils vérifient que ça marche*

Emm : c'est clair

ChS : nous ce qu'on essaie de voir *c'est de construire des moyens de certitude pour anticiper* schémas lignés les boîtes l'écriture additive la décomposition (inaudible) elle ne peut pas être certaine on est en train de la construire donc les élèves ils énoncent publiquement devant tout le monde et devant leur prof et ben oui 1 2 3 3 *il faut faire en sorte que ce soit 3 c'est la certitude il a des moyens de contrôle privé et il restitue de manière publique ce qui est attendu c'est un indice le fait qu'il dise 3* c'est-à-dire qu'il est dans ce qui est attendu mais pour énoncer ce qui est attendu et ben il a besoin d'une certitude cette certitude elle est pas encore installée pour certains ça y est pour d'autres non il faut la travailler il faut qu'elle diffuse il faut qu'elle soit certaine pour les élèves *par contre que toi tu dises compte sur tes doigts NON on l'a vu* que c'était quelle annonce 3 plus 1 bon 3 plus 1 le fait que toi tu reprennes en demandant une vérification en comptant 1 c'est une régression dans ce qui est attendu […] tout ça ça se construit expérimentalement cette certitude elle s'acquiert comme ça et que c'est normal que ça s'affronte à vos procédures ou même des procédures sociales de vérification nous on est bien d'accord on fait des *procédures mathématiques construites raisonnables expérimentalement éprouvées et qu'on va pouvoir modéliser c'est ça qu'on va apprendre à construire* alors effectivement *ça s'affronte à comment vérifier si on ne peut pas vérifier un par un alors si on est sur des petites quantités c'est parce qu'on a construit l'ensemble des possibles des combinaisons* qui permettent de s'assurer que et l'élève *tous les élèves qui ont joué doivent être responsables de ça* […] *quand tu reprends c'est pas compte non 2*

c'est pas 1 2 2 reprends par-dessus le global c'est ça qu'il faut gagner il faut que l'élève entende ce qui est attendu (TdP355-374) (épisode 1h 19min 06 – 1h 25min)
Transactions contribuant à : - alerter sur certains comportements observés en classe (le comptage perdure malgré la désignation en référence à la situation du jeu) ; - proposer des alternatives ; - réaffirmer les gestes d'enseignement : faire appel à la mémoire didactique (« on l'a vu », « tous les élèves qui ont joué doivent être responsables de ça ») et au contrat didactique (« quand tu reprends c'est pas compte non 2 c'est pas 1 2 / 2 reprends par-dessus le global c'est ça qu'il faut gagner il faut que l'élève entende ce qui est attendu ») ; - installer l'idée que le comptage est une procédure personnelle de réassurance (« ils l'énoncent publiquement et ils vérifient que ça marche ») mais qui ne doit pas se substituer à une certitude à acquérir (« c'est un indice le fait qu'il dise 3 ») ; - rappeler que les procédures de dénombrement pas à pas ne garantissent pas la compréhension du système numérique et que les procédures expérimentales de construction des combinaisons de désignations possibles participent à la modélisation du système.

Série épisodique « désignation de la mesure de la grandeur » - année 2 – 2ème réunion

Dans cette série, la poursuite des échanges montre que le partage de l'identification de l'enjeu lors de la réunion précédente a permis aux professeurs de repérer les actions de leurs élèves en fonction de cet enjeu de désignation et de leur proposer des stratégies. Le jeu des professeurs sur le chercheur est de nouveau de l'interpeller par rapport aux observations qu'ils ont faites en classe (persistance du comptage, difficultés de certains élèves) afin que des solutions d'action puissent être proposées par le collectif. Le jeu du chercheur en retour vise à compléter les ressources épistémiques des professeurs en situant les pratiques ingénieriques de désignation de la mesure par rapport aux pratiques culturelles de dénombrement pas à pas. Il consiste aussi à doter les professeurs de repères, d'indices d'observation tout en formulant dans un langage de la pratique, qui contient la théorie, les gestes d'enseignement à mettre en place dans la classe (« toi [le professeur] quand tu reprends c'est pas compte non / 2 / c'est pas 1 / 2 / 2 reprends par-dessus le global ») ainsi que les éléments du

contrat didactique à expliciter (« c'est ça qu'il faut gagner / il faut que l'élève entende ce qui est attendu » - TdP374). Nous retrouverons par la suite la formule sous une forme raccourcie, condensée, comprise uniquement au sein du collectif de pensée : « 1 / 2 / 3 non / 3 » qui deviendra un leitmotiv dans l'ingénierie et symbolisera didactiquement la désignation de la mesure (désigner la mesure « 3 » dans sa globalité et non énumérer « 1 / 2 / 3 » comme allant-de-soi que le dernier mot prononcé, « 3 », est considéré comme la désignation de trois objets et non le troisième objet).

L'année d'expérimentation à grande échelle suivante (année 3), les professeurs, reprenant l'ingénierie pour la seconde fois, vont occuper une place topogénétique plus importante. Nous le décrivons dans les deux moments de la série épisodique ci-dessous qui montre la manière dont diffuse le savoir ingénierique dans le collectif.

Episodes didactiques concernant l'enjeu « désignation de la mesure de la grandeur » - Diffusion du savoir
Deux moments Extraits transcriptions ou résumés et descriptions des transactions Réunion du 25 septembre 2013 (Année 3 – deuxième année d'expérimentation à grande échelle)
Premier moment de la série Val [professeur en 2e année d'expérimentation] : l'année dernière je voulais qu'ils comptent qu'ils m'annoncent le nombre de wagons et *cette année j'ai vraiment validé en disant ben tu as des rouges tu peux me les demander je veux 2 rouges et 3 rouges et 1 rouge* en une seule fois on peut me commander les trois quantités et c'est vrai qu'il y en a beaucoup qui n'arrivaient pas dénombrer avec les doigts c'était trop loin et du coup ils sont tous arrivés à commander leur nombre de cubes j'ai même eu le signe plus du coup y en avait 1 plus 3 plus 1 j'ai trouvé ça bien et du coup on a même fait un affichage où à la fin pour la mise en commun on a écrit les commandes de ce train pour les commandes jaunes je pouvais commander 2 + 3 + 1 jaunes […] on les a comptés 2 4 6 mais *on a les deux procédures en fait on n'a pas mis en avant l'une plus que l'autre* (TdP145-147) (épisode 1h 38min 28 – 1h 39min 36)
Transactions contribuant à : - faire partager un changement de point de vue sur la situation : le professeur (Val) accepte les deux formes de désignation de la mesure lors de la commande à l'adulte de cubes

(désignation par la mesure de la quantité totale ou désignation sous forme additive orale) mais aussi deux procédures de dénombrement. Cela permet en outre à tous les élèves de pouvoir entrer dans le problème et le travailler ;
- accepter une désignation symbolique de la commande (2 + 3 + 1 pour une commande de 2 et 3 et 1 cubes jaunes) car elle est proposée par les élèves en référence à la situation.

Deuxième moment de la série

Flo [professeur en 2e année d'expérimentation] : j'ai un élève qui m'a dit qu'il n'arrivait pas à compter en fait en un seul trajet il était coincé il avait les rouges à commander et il était coincé et il m'a dit j'arrive pas à dire combien ça fait j'ai dit ben c'est pas grave tu peux me dire enfin trouve une autre solution et c'est lui qui m'a dit j'en veux 2 et 3 j'ai dit ok je t'en donne 5 et je lui ai donné et du coup on est revenu sur ça en grand groupe et on dit que *la commande on n'était pas obligé de donner un total on pouvait donner des morceaux de cubes de train* et ça passe quand même je leur donne bien la bonne quantité
ChS : et *c'est là que c'est important de connaître l'enjeu* c'est-à-dire qu'on peut désigner une quantité sans avoir à désigner le cardinal de toute la collection et le fait qu'elle dise pas compte par exemple ça pourrait coincer le fait qu'elle dise ben voilà tiens que fait l'élève↑ il est conforté dans sa stratégie sans avoir à dire *il comprend que c'est ce qui est attendu finalement dans la situation* […]
Flo : du coup les élèves en difficultés qui n'arrivent pas ils ont pu participer et réussir cette tâche-là et ça les a aidés aussi après à pouvoir participer à la construction du train quand ils étaient en groupe parce qu'ils étaient confortés ils se disaient oui voilà la maîtresse attend ça j'ai bien commandé les cubes comme elle a demandé je suis responsable de la couleur jaune et je vais venir avec mes cubes jaunes pour pouvoir participer *ce qui n'était pas le cas les premiers temps parce que du coup après ils sont coincés s'il manque une couleur* s'il y a un élève qui est moins avancé que les autres ils sont coincés quoi ils attendent les cubes jaunes ça commence à monter [les élèves s'agitent] ils essaient de l'aider mais ils veulent pas lui dire et puis bon et là ça a détendu tout le monde (TdP157-161)
(épisode 1h 43min 28 – 1h 45min 34)

Transactions contribuant à :
- relater un fait qui indique (idem épisode précédent) que dans la situation didactique les élèves se sont emparés de la procédure de désignation de la mesure de la quantité sous une forme orale additive ;

- constater que c'est une procédure essentielle car (i) elle a du sens mathématique dans la situation didactique et (ii) car elle permet, pour tous les élèves, de commander la quantité de cubes nécessaire à la réalisation du train-objet donc de prendre sa place dans le groupe et de rester dans l'activité du groupe sans la ralentir ;
- montrer l'importance d'une connaissance des enjeux par les professeurs pour pouvoir diriger l'étude des élèves (« il comprend que c'est ce qui est attendu finalement dans la situation »).

Série épisodique « désignation de la mesure de la grandeur » - Diffusion du savoir - année 3

Les deux professeurs, Val et Flo, qui ont déjà expérimenté l'ingénierie l'année précédente, renseignent le collectif sur leur façon de diriger l'action des élèves par rapport à l'enjeu de la désignation de la mesure des grandeurs. Val et Flo introduisent, dès la situation *Train / tour* et au cours même de l'action, cette dimension de désignation des nombres sous la forme d'une composition de petites quantités (« tu peux me les demander / je veux 2 rouges et 3 rouges et 1 rouge » Val, TdP145 ; « on n'était pas obligé de donner un total / on pouvait donner des morceaux de cubes de train » Flo, TdP157). Les élèves sont en mesure de désigner de petites quantités, ils peuvent faire appel au milieu pour juger de la validité de leur action comme l'indique le professeur Flo (« ils se disaient / j'ai bien commandé les cubes comme elle a demandé »).

Tout en rapportant les faits, les deux professeurs communiquent cet enjeu de désignation au collectif, notamment en direction des professeurs qui prennent en main l'ingénierie pour la première fois. Il est à remarquer que si des élèves proposent l'écriture symbolique « 2 + 3 + 1 » pour signifier la commande de cubes nécessaire, le professeur Val le note (car cette écriture dénote la situation). Le professeur s'y réfère dans l'action même de cette situation sans en faire un objet d'enseignement qui anticiperait, peut-être trop précocement pour certains élèves, sur la suite de la situation. Cette action des professeurs sur le jeu de leurs élèves permet de mettre en place des conditions d'enseignement propices et fluidifie en outre le fonctionnement des groupes d'élèves (les élèves moins avancés ont les moyens de participer et d'agir dans l'activité ; ils ne ralentissent pas l'action collective). Le jeu du chercheur consiste ici à mettre en évidence ces actions professorales, à les signaler au groupe, afin d'en montrer l'intérêt et l'importance dans une direction de l'étude des élèves. Il met ainsi

au jour le contrat didactique qui lie, à ce moment-là de la séquence, le professeur et les élèves (« le fait qu'elle [le professeur] dise ben voilà tiens que fait l'élève↑ il est conforté dans sa stratégie sans avoir à dire / il comprend que c'est ce qui est attendu finalement dans la situation » ChS, TdP158).

Nous rapportons aussi un autre fait d'ingénierie concernant la désignation de la mesure, vue sous un aspect plus technique. Nous le décrivons dans la série suivante en deux moments. Le premier recense les difficultés observées par les professeurs, le second des exemples d'actions conjointes.

Episodes didactiques concernant l'enjeu « désignation de la mesure de la grandeur » – Aspects techniques
Deux moments Extraits transcriptions ou résumés et descriptions des transactions Réunion du 25 septembre 2013 (Année 3 – deuxième année d'expérimentation)
Premier moment de la série
Certains élèves ne sont pas entrés dans la situation : confusion quantité d'objets d'une sous-collection et d'une collection (ex : montrer D3G3 pour désigner 3), difficulté à désigner la quantité et envisager la grandeur (déjà à partir de 2 et pas au-delà de 3), participer au jeu sans être dans le jeu (montrer une annonce avec ses doigts sans la comparer au lancer, faire toujours la même annonce non pertinente ex D5G5) (épisode 1h 45min 34 - 1h 49min 35)
Transactions contribuant à : - recenser à la demande du chercheur les difficultés rencontrées par les élèves qui ne sont pas entrés dans la situation du *Jeu des annonces.* Une de ces difficultés est liée à la désignation de la mesure de la quantité d'une collection et en envisager la grandeur. Elle sera traitée dans l'épisode suivant. Les deux autres difficultés sont liées à la confusion parties / tout et à la compréhension des règles stratégiques du jeu.
Deuxième moment de la série
Jeux de rôle : transactions entre un élève moins avancé (joué par le chercheur ChS) et son professeur (Nac) : ChS : on joue allez Nac : est-ce que tu es sûr qu'il y a bien 3 cubes↑ est-ce que tu crois qu'il y a bien 3 cubes ici↑ est-ce que tu peux me montrer si tu as 3 cubes↑

ChS : ((action non visible)) 3 cubes
Nac : je vais les dénombrer avec toi si tu veux on va les dénombrer combien j'en mets là↑ tu me dis combien j'en mets là pour celui-là↑
ChS : 1
Nac : et puis pour celui-là↑
ChS : 1
Nac : et puis pour celui-là↑
ChS : 1
Nac : et puis pour celui-là↑
ChS : 1
Nac : d'accord ben moi je vais te dire comment on peut faire ((action non visible)) alors là j'ai 1 cube j'ai 2 cubes j'ai 3 cubes et là j'ai 4 cubes est-ce que tu peux maintenant me dire prendre 3 cubes par rapport à ce que j'ai compté avec toi↑
ChS : ((action non visible)) 1 1 1 1
Nac : d'accord↓ alors (brouhaha) non non je vais faire autre chose je vais pas stresser je vais les mettre tu vas retourner au magasin et je vais dire voilà maintenant tu vois je vais te donner 3 petits garçons et je voudrais que chaque petit garçon puisse avoir un cube pour aller jouer par exemple tu es d'accord je vais dessiner 3 petits garçons on va remettre les cubes au magasin et tu vas me donner pour qu'il y ait assez de cubes pour chacun et je vais essayer de t'aider et après peut-être lui dire est-ce qu'il y a pas une autre façon de montrer 3 on l'a vu dans la classe est-ce qu'on peut aller chercher le dé↑ ou est-ce que tu vois 3 sur le dé par exemple↑ ou est-ce que tu vois 3 sur la frise↑ ou est-ce que tu vois 3 sur tes doigts↑ essayer de trouver cette désignation de 3 cette quantité » (TdP199-212)
(épisode 1h 51min 34 – 1h 53min 38)
Le chercheur décrit ensuite la scène jouée : deux actions réalisées par le professeur dans le jeu de rôle (rangement des objets dans une liste ordonnée - qui est une technique d'énumération - et utilisation de la numérosité). Il manquerait une action : faire vérifier pour convoquer la technique d'énumération.
(épisode 1h 53min 38 - 1h 56min 53)

Transactions contribuant à :
- orienter l'action sur le traitement de la difficulté rencontrée par certains élèves et constatée par les professeurs : le jeu de rôle va permettre de tester des actions à mettre en place avec les élèves qui ne savent pas désigner la mesure 3 (décomposer la collection, constituer la collection, faire correspondre terme à terme les objets de la

collection de 3 objets avec une autre collection équivalente). Ces actions ne relèvent pas d'un comptage-énumération car le nombre est toujours employé par le professeur avec la grandeur qu'il désigne (« j'ai 1 cube j'ai 2 cubes j'ai 3 cubes et là j'ai 4 cubes ») ;
- décrire l'action professorale adéquate à mettre en place en utilisant des termes issus des recherches en didactique.

Série épisodique « désignation de la mesure de la grandeur » – Aspects techniques - année 3

Face aux observations des professeurs sur les difficultés rencontrées par certains élèves moins avancés, l'objet « désignation de la mesure » est travaillé collectivement de manière plus technique que lors de l'année 2. ChS va proposer un jeu de rôle sur une désignation de 3 cubes. Ce jeu de rôle révèle certains savoir-faire professionnels et connaissances sur les nombres du professeur Nac, des actions, adéquates et préalables aux principes ingénieriques, qu'un professeur peut mener dans de tels cas : rangement des objets dans une liste ordonnée qui est une technique d'énumération ; utilisation de la numérosité ; vérification pour convoquer la technique d'énumération. Ce type de dialogue d'ingénierie se révèlera assez récurrent dans l'ensemble du dispositif (sous forme différée à l'aide de vidéo ou de simulation comme ici) : il permet de soulever la question du rapport des enseignants aux objets didactiques dans la situation et des évolutions possibles de ces objets, de compléter les connaissances par des apports théoriques issus des recherches en didactique. Il permet aussi de mettre en place un *jeu d'imitation* (Sensevy, 2015a) qui montre une action professeur / élève possible. Nous y reviendrons.
Nous ne pouvons pas aborder la question de la désignation de la mesure de la grandeur sans aborder la question des représentations de cette mesure.

Echanges sur la représentation des mesures de grandeurs

La question de la mesure de la grandeur se joue aussi avec les diverses représentations de la situation du *Jeu des annonces* : boîte, écriture additive et notamment schéma-ligne. La représentation de la mesure sur le schéma-ligne est un fait didactique longuement discuté : nous avons commencé à rapporter la difficulté des élèves à prendre en main cette représentation et des professeurs à les guider. Dans une section précédente, nous avons évoqué les conceptions des professeurs sur

l'enjeu de la représentation du schéma-ligne (représentations utilisées comme vérification pour la justification de gain ou perte du jeu ou pour « re-présenter » la situation du jeu et réaliser la comparaison entre l'annonce et le lancer en référence aux annonce et lancer écrits correspondants). Nous avons également montré, en ce qui concerne les élèves, les difficultés à maîtriser son utilisation technique (tracer des ponts pour signifier la mesure de la quantité annoncée ou le lancer effectué, démarrer à l'origine de la ligne,...). Ces difficultés avaient amené un professeur de classe expérimentale à proposer de l'associer au train-nombre et avait amené la sphère 1, suite à cette proposition, à modifier le texte de la progression afin d'assurer un enseignement de son utilisation technique. Mais avant que cette modification n'apparaisse, le sujet fait aussi l'objet de transactions lors de la seconde réunion (24 octobre 2012) du groupe provençal.

Essai de recherche documentaire

Le type de problème « représenter des mesures de grandeurs », pour ce qui concerne les représentations inhabituelles dans l'enseignement comme le schéma-ligne et la boîte, est un objet de discussion très prégnant dans le collectif. Une requête sur *Transana* à partir du mot-clé « représentations » produit soixante-et-onze épisodes[94] pour la situation du *Jeu des annonces*. *A posteriori* nous pensons que nous aurions dû distinguer les différentes formes de représentations avec des mots-clés plus divers. Dans le chapitre 5, nous avions ainsi défini le mot-clé « représentations » : « système symbolique de représentation de la situation ; peut être constitué par l'écriture conventionnelle chiffrée, l'écriture additive, l'écriture en dizaine et unité (type 5d 3u pour 53), la boîte, le schéma-ligne, le nombre-rectangle ou tout autre codage de la situation ». Derrière ce mot-clé nous avons englobé en fait toutes les formes de désignations écrites possibles utilisées dans l'ingénierie. Nous avons lancé plusieurs requêtes en associant ce mot-clé avec les mots-clés désignant les différents modules

[94] Ces soixante-et-onze épisodes se déroulent sur plusieurs réunions (24 octobre, 21 novembre, 5 décembre 2012 pour l'année 2 ; 25 septembre et 27 novembre 2013 pour l'année 3). La discussion se poursuit la 4ème année (2014-2015) lors de l'expérimentation *Ace-Arithmécole* qui intègre le niveau CE1. Il nous a semblé intéressant de voir comment les choses évoluaient lors de cette année transitoire pour le dispositif de recherche.

afin de spécifier la recherche mais cela éliminait tous les épisodes où les représentations étaient traitées de manière plus macroscopique. Nous avons donc recherché des thèmes de discussion au sein de ces soixante-et-onze épisodes. Nous avons dégagé différentes directions de discussion : certaines portaient sur l'usage de représentation des schéma-ligne et boîte, d'autres sur l'utilisation technique du schéma-ligne, d'autres encore sur des notions plus épistémiques (à une échelle plus macroscopique) concernant les représentations. Ces thèmes sont imbriqués dans le déroulement de la discussion et nous avons dû les dissocier pour les besoins de l'analyse.

Analyse des transactions sur l'usage des représentations

Nous présentons ci-dessous la série épisodique en six moments qui décrivent le processus d'appropriation concernant l'usage des représentations par la sphère 2.

Episodes didactiques concernant l'enjeu « représenter les mesures de grandeurs » - Usages des représentations Six moments Extraits transcriptions ou résumés et descriptions des transactions Réunion du 24 octobre 2012 (Année 2 - première année d'expérimentation à grande échelle)
Premier moment de la série ChS : entre nous on va adopter un vocabulaire entre nous on appelle ça les boîtes de Fischer le schéma la représentation avec des segments je ne souhaite pas qu'on appelle ça règle […] pourquoi on ne pratique pas une activité de mesure à ce moment-là on reste encore (inaudible) on appelle ça schéma ligné et on n'essaie pas de reproduire avec des bâtons d'allumettes […] *c'est pour raisonner* pour raisonner […] c'est une représentation qui est liée et qui va être >j'avance un petit peu par rapport à ça< dont les usages vont être réglés par les usages soit avec les doigts soit avec les boîtes et la boîte va être réglée soit avec le schéma ligné soit avec les annonces et donc les manipulations qu'il va y avoir vont pouvoir être référées à ce système à cette référence commune que sont les annonces et les usages qu'on a pu faire relativement aux annonces (TdP146-154) (épisode 31min 26 – 34min 21)

Transactions contribuant à :
- préciser un des usages du schéma-ligne : le schéma-ligne n'a pas une fonction d'enseignement de la mesure à ce moment-là. Son rôle est de mettre en évidence la fonction des nombres permettant la mesure par la composition de l'annonce en deux ou trois termes afin de permettre un raisonnement sur la situation ;
- anticiper sur le fait que le schéma-ligne, la boîte et les configurations de doigts et dé(s) forment un système de relations qui se réfèrent à la situation du jeu, les annonces constituant *la référence commune* ;
- évoquer qu'il y existe un usage essentiel des représentations (« c'est pour raisonner »).

Deuxième moment de la série

Val : le premier problème pour moi et je pense c'est aussi celui de nos élèves c'est pourquoi je remplis ça ça ne sert à rien pour jouer et du coup après au retour *j'ai cherché à voir l'utilité* alors la boîte c'est venu assez rapidement la boîte je mets les résultats de mon calcul et *je peux me rendre compte avant qu'on lance le dé si j'ai dépassé 6 ou pas euh:: la boîte* après c'est venu très naturellement pour la droite vérifier la somme de:: voilà son annonce et quel était le nombre et la droite graduée alors je sais pas si c'est bien ou pas mais ça a une utilité j'ai vu *c'est une vérification du calcul effectué*
Jef : moi j'ai vu comme toi
Val : ils font leur calcul pour moi 3 + 2 ça fait 5 d'accord je mets le 5 et sur ma droite je vais vérifier alors je mets 3 points après je mets 2 points et je vérifie que ça fait bien 5 et que je me suis pas trompé
Jef : c'est ça oui
Val : alors après évidemment c'est qu'ils comptent mais d'un autre côté ils le faisaient aussi ils vérifiaient avec leurs doigts des fois *ils sont sûrs ils avaient pas besoin de le faire mais du coup ceux-là je leur impose quand même de remplir quand même la droite et ça ça me gêne* et euh:: par contre ceux qui arrivaient pas à faire la somme il fallait bien 3 + 2 combien ça fait ils me regardent avec des yeux comme ça comment je fais et tu te rappelles pas non je me rappelle pas et *alors comment je fais pour euh pour savoir si j'ai gagné ou pas* (TdP171-175)
(épisode 36min 19 – 37min 53)

Transactions visant à :
- partager un questionnement (« j'ai cherché à voir l'utilité ») et une expérience sur le rôle des représentations : pour le professeur Val, la boîte sert à anticiper le nombre à atteindre (« je peux me rendre compte avant qu'on lance le dé si j'ai dépassé 6 ou pas ») et le

schéma-ligne à vérifier cette somme : si je place 2 puis 3 alors la composition doit correspondre à 5 ;
- partager une interrogation sur le rôle du schéma-ligne dans la vérification : selon le professeur Val, dans le cas d'élèves sachant compter, la vérification n'est pas nécessaire car les élèves sont sûrs du résultat de l'annonce (ils ont vérifié en comptant sur leurs doigts). Dans le cas d'élèves ne sachant pas effectuer une somme, le schéma-ligne ne fait pas encore sens pour eux et ne permet pas la validation du gain.

Troisième moment de la série

Emm : le sens du schéma ligné moi je l'ai introduit comme une comparaison entre une annonce et un lancer voilà mon annonce on compte pas forcément combien de ponts il y a ou combien mais *on voit tout de suite si c'est différent ou si c'est égal* et après on a beaucoup enfin moi *j'insiste toujours sur combien il y a de plus combien aurait dû faire le dé* pour qu'il y en pour que ça soit égal et *on travaille en fait sur les différences de ponts là-dessus* mais jamais pour vérifier (TdP180)
(épisode 37min 53 – 40min 47)

Transactions contribuant à :
- rebondir sur les propos tenus par le chercheur (TdP150) au sujet de la fonction de raisonnement sur la situation. En « visualisant » sur le schéma-ligne les ponts représentant les deux (ou trois) mains de l'annonce et le lancer du dé, les élèves peuvent tirer des informations de la situation : par exemple l'annonce est égale au lancer ou l'annonce est supérieure (ou inférieure) de tant au lancer (recherche de la différence). Le professeur propose aussi des fictions de parties : combien aurait dû faire le dé pour qu'annonce et lancer soient égaux.

Quatrième moment de la série

Jef : moi j'ai fait plutôt comme la collègue [Val] le schéma ligné et c'est encore plus flagrant sur le module 4 ouais sur le module 4 il sert de vérification parce que les élèves dans le module 2 ils n'en ont pas besoin dans le sens où ils vont utiliser leurs deux mains et vérifier l'annonce en direct mais *à trois mains ils ne peuvent plus le faire et là le schéma ligné va servir de vérification* c'est-à-dire qu'ils vont remplir la boîte ils vont écrire le résultat dans le haut de la boîte et le schéma ligné va leur permettre de vérifier ce résultat de la boîte en fait […]
Kaa : parce que des *parfois ils font des erreurs sur le schéma ligné* qu'ils font pas dans la boîte

Cat : ça j'ai vu moi aussi
Kaa : ils s'en servent pour représenter enfin c'est vraiment on refait trois fois le même truc je fais une annonce j'écris je fais une addition je fais la boîte je fais la ligne
Flo : c'est trois façons de faire la même chose (TdP188-197)
(épisode 42min 20 – 43min 55)

Transactions contribuant à :
- discuter le rôle du schéma-ligne comme outil de vérification : pour le professeur Jef, il est utile surtout pour la vérification de la situation dans un jeu à trois mains car les élèves ne peuvent plus utiliser leurs deux mains pour compter la somme ; le schéma- ligne permet alors d'agir là où l'on ne peut plus le faire matériellement. Mais pour le professeur Kaa, le schéma-ligne n'est pas assez fiable dans cette fonction de vérification car les élèves peuvent faire des erreurs en l'utilisant ;
- évoquer le fait que le schéma-ligne n'est pas une représentation isolée : c'est pour les professeurs Kaa et Flo dans une reprise schéma-ligne, boîte et écriture que les configurations de doigts et dé doivent être représentées.

Cinquième moment de la série

Anl : j'en ai un qui a fait une annonce à un moment donné donc le premier a annoncé quelque chose le deuxième annonce autre chose et j'ai vu le troisième réfléchir alors *ils ont réfléchi collectivement à ce que le troisième pouvait annoncer pour ne pas dépasser 6*
ChS : c'est bon ça
Anl : c'est génial
ChS : alors est-ce que tu as utilisé alors *voilà une opportunité n'hésitez pas s'il vous plaît à utiliser les représentations* à ce moment-là c'est là que ça va jouer fort (TdP442-445)
(épisode 1h 29min 13 - 1h 32min 12)

Transactions contribuant à :
- exemplifier un raisonnement sur la situation par anticipation : que pourrait-on annoncer connaissant les deux premières annonces ;
- rappeler l'apport des représentations dans cette action d'anticipation qui permet de raisonner sur la situation et encourager leur utilisation.

Sixième moment de la série

Emm : elle [la boîte] me gêne pour un truc alors je suis persuadée que les gamins quand ils ont 3 et 2 si on met le 5 en haut la seule utilité que j'y vois *c'est d'avoir un répertoire*

additif >c'est pas inintéressant hein< effectivement mais ils vont chercher ils vont toujours compter quoi avec cette boîte Emp : pas spécialement non c'est une autre manière d'envisager l'addition Emm : *ça enlève le côté malin du truc* quoi moi j'ai des gamins qui cassent un nombre pour le mettre avec l'autre parce que c'est plus utile et avec la boîte tout est emboîté quoi ChS : *je vois des intérêts par rapport à la main manquante* […] il faut faire attention ce ne sera pas une représentation qui permet de calculer faut être très vigilant par rapport à ça *la représentation qui permet de calculer c'est le nombre et les signes opératoires* (TdP901-907) (épisode 2h 43min 10 – 2h 44min 27)
Transactions contribuant à : - débattre sur les fonctions et l'usage de la boîte : pour le professeur Emm, la boîte joue le rôle de répertoire additif et n'autorise pas les manipulations (décompositions, compositions), pour le professeur Emp, elle permet de représenter la composition, pour le chercheur, elle aura un intérêt dans la désignation de la différence ; - rappeler que la représentation sous forme de nombres et de signes opératoires est la seule qui permet les calculs.

Série épisodique « représenter les mesures de grandeurs » – Usage des représentations - année 2

En orientant les transactions, dès le début des échanges, sur la diversité des fonctions des représentations (« c'est pour raisonner […] les usages qu'on a pu faire relativement aux annonces » - ChS, TdP146), le chercheur tente de susciter la réflexion autour des usages des représentations dans la mise en œuvre du jeu. Les professeurs y répondent en donnant à voir leur conception des usages des représentations (en interprétant ces usages ou en les questionnant) ou en rapportant leur pratique. Le schéma-ligne prend une place importante dans l'activité (« ils vont remplir la boîte / ils vont écrire le résultat dans le haut de la boîte et le schéma ligné va leur permettre de vérifier ce résultat de la boîte en fait » - Jef – TdP188). D'autres professeurs (Kaa, Cat) interrogent cette fonction de vérification : le repérage sur le schéma peut être faussé par des erreurs d'utilisation. La fonction de vérification peut créer ainsi une distance trop grande avec l'expérience concrète du jeu car elle n'est pas fiable. Certains considèrent le triplet boite / schéma / écriture additive comme « trois façons de faire la même chose » pour représenter l'annonce ou perçoivent de

manières diverses les usages de la boîte (par exemple fonction d'indicateur du nombre à atteindre pour que la partie soit gagnante ou usage de mémoire sous la forme d'un répertoire additif).

Il y a une incertitude qui se dégage au niveau des usages que peuvent avoir les représentations dans la situation et des relations possibles entre ces représentations au sein de la situation. Un professeur entre dans le jeu du chercheur et se saisit de l'opportunité donnée par le chercheur avec le terme « raisonner » : il prendra une position topogénétique singulière en rapportant des mises en œuvre possibles qui n'avait pas été envisagées par ses collègues (« combien il y a de plus / combien aurait dû faire le dé pour qu'il y en / pour que ça soit égal / et on travaille en fait sur les différences de ponts là-dessus » - Emm, TdP180). Le chercheur reste dans une position topogénétique relativement basse : il laisse les échanges se dérouler et ne sortira de sa réticence que pour exprimer un encouragement (« voilà une opportunité n'hésitez pas s'il vous plaît à utiliser les représentations à ce moment-là » - ChS – TdP445). Il interviendra et prendra une place topogénétique plus importante quand les échanges porteront sur des notions plus épistémiques (à une échelle plus macroscopique) concernant les représentations ; nous y reviendrons.

Lors de la réunion suivante (21 novembre 2012), les transactions sur les représentations se poursuivent. En effet, les professeurs ont pu « mettre à leur main » ce qui a été donné à voir des pratiques lors de la réunion précédente. Ils font un retour au collectif, avec des observations plus distanciées, des mises en œuvre réalisées depuis dans leur classe. D'autres usages des représentations sont ainsi abordés. Par exemple, quand le groupe débat de la sollicitation ou pas du calcul de la somme de l'annonce, un professeur remarque le rôle que joue le schéma-ligne dans la compréhension d'une des propriétés de l'addition concernant le nombre de termes et la valeur des termes.

> « tu vois pour l'égalité justement / c'est quelque chose qui pose problème l'égalité entre le tirage du dé et l'annonce / et là je trouve du coup que le schéma ligné il permet de représenter là ce pareil / oui mais ce pareil il pose problème aussi / parce qu'avec le dé il va y avoir par exemple qu'un seul bond / et il y a plusieurs bonds qui vont faire le 6 pour l'annonce » (Nad, TdP359).

Le professeur indique ainsi l'intérêt de la représentation du schéma-ligne : annonce et lancer, s'ils sont équivalents, arrivent à un même point sur le schéma. Mais ce « pareil » peut être source également de questionnement productif. Autre exemple au cours de l'évocation d'une activité mise en place avec l'écriture additive d'une annonce (à trouver) à partir de sa représentation sous la forme du schéma-ligne :

> « j'ai produit un schéma ligné où il n'y avait qu'un pont avec trois cases / et il faut produire une annonce à deux mains / mais il n'y a qu'un terme / y en a qui ont essayé d'écrire 2 + 1 / on a bien vu que sur le schéma on ne peut pas lire 2 + 1 c'est pas possible/ et c'est sorti par un élève que s'il n'y avait rien ça faisait 3 + 0 / mais il y a encore des difficultés pour certains » (Val - TdP459).

Ce professeur signale ainsi les limites dans l'usage du schéma-ligne qui ne peut représenter une annonce dont un des termes serait 0, ce que permet, par contre, l'écriture additive. Le groupe s'approprie ainsi le fait que le système des représentations combinées les unes aux autres permet aux élèves d'interpréter la situation mathématique. Par exemple, de découvrir que le 0 ne permet pas d'augmenter une valeur, ou qu'un nombre de termes important ne présage pas forcément d'une plus grande valeur totale.

Les conceptions du groupe sur les représentations ont évolué grâce au partage des pratiques et des conceptions lors de cette seconde année (2012-2013). La manière de considérer le schéma-ligne s'enrichit au cours des transactions : d'outil de vérification, le schéma-ligne est peu à peu construit comme un objet sur lequel raisonner pour interpréter le jeu, anticiper ou imaginer une partie de jeu. Les représentations autorisent ou pas, et certaines plus que d'autres suivant les cas, l'expression d'une réponse au service d'une question posée dans et par la situation : par exemple, mettre en évidence la composition d'une annonce, le nombre à atteindre pour gagner au jeu ou la différence entre annonce et lancer. Chercheur et professeurs apprennent ainsi quels sont les différents usages possibles des représentations et les usages réalisables à tel moment de l'avancée dans le jeu.

Analyse des transactions sur l'utilisation technique du schéma-ligne

Nous avions déjà exposé dans ce chapitre les mises en œuvre de deux professeurs[95] et montré que la technique liée à la représentation schéma-ligne était une situation de comptage des intervalles dans la plupart des classes. Comment l'utilisation technique du schéma-ligne est-elle abordée et discutée ? Nous avons vu précédemment que les échanges se sont d'abord orientés vers un usage de vérification de la partie en jeu puis réorientés vers les fonctions des représentations (interprétation, anticipation). C'est l'usage de vérification sur le schéma-ligne, interrogée par le collectif, qui a orienté la suite des échanges sur l'utilisation technique du schéma-ligne. En voici la série épisodique décrite en quatre moments.

Episodes didactiques concernant l'enjeu « représenter les mesures de grandeurs » - Utilisation technique du schéma-ligne Quatre moments Extraits transcriptions ou résumés et descriptions des transactions Réunion du 24 octobre 2012 (Année 2 - première année d'expérimentation)
Premier moment de la série Emp : ils s'en servent comme une vérification parce que ce qu'ils font avec le schéma ligné *ils recomptent c'est-à-dire qu'ils mettent qu'ils repartent du début et ils comptent* à aucun moment ils vont marquer faire 2 points en disant 2 et 3 voilà pour eux le schéma ligné n'a aucun rapport j'exagère peut-être il *n'a aucun rapport avec la structure additive c'est une vérification de comptage* (TdP203) (épisode 43min 55 – 44min 51)
Transactions contribuant à : - alerter sur un hiatus entre l'utilisation technique du schéma-ligne pour la vérification (par comptage d'intervalles) et la référence qu'il entretient avec la situation (annonce comme composition de deux ou trois mains ou termes que l'on désigne) : les élèves ne feraient pas de liens.

[95] Séances du 9 octobre 2012 – mod2sc4 et du 23 octobre 2012 – Mod4sc3.

Deuxième moment de la série

Emp : tu m'as vu (rires) je suis tombée dans ça [le comptage des intervalles] […]
ChS : ce que je veux vous faire pointer du doigt vous voyez bien que le fait de gagner de 1 2 à 2 quand je disais que l'enjeu était là et qu'on arrivait petit à petit à jouer là ça s'affronte à quoi ce que vous faîtes faire en ce moment c'est des procédures de dénombrement un à un qui ne garantissent rien sur la compréhension du code numérique par les élèves cette compréhension elle va pas être faite au cp elle va se faire ((gestes d'avancement)) jusqu'à la fac sur la théorie du nombre mais là on est en train de construire ça mais la procédure de vérification ce qui est dur c'est comment vérifier ça et bien si on vérifie sur des résultats expérimentaux acquis 3 + 1 c'est pareil que 2 + 2 et on va voir que l'écart la différence sur le schéma ligné y en a pas
Sam : et ça ::
ChS : mais oui mais tout ça *ça se construit expérimentalement* cette certitude elle s'acquiert comme ça et que c'est normal que ça s'affronte à vos procédures ou même des procédures sociales de vérification nous on est bien d'accord *on fait des procédures mathématiques construites raisonnables expérimentalement éprouvées et qu'on va pouvoir modéliser* c'est ça qu'on va apprendre à construire alors effectivement ça s'affronte à comment vérifier *si on ne peut pas vérifier un par un alors si on est sur des petites quantités c'est parce qu'on a construit l'ensemble des possibles des combinaisons qui permettent de s'assurer que et l'élève tous les élèves qui ont joué doivent être responsables de ça* ils ont joué vous le savez bien ah dis donc on l'a déjà rencontré 2 + 1 c'est pareil que quoi↑ (TdP366-374)
(épisode 1h 19min 06 - 1h 25min 03)

Transactions contribuant à :
- rappeler l'enjeu de désignation : « le fait de gagner de 1 / 2 à 2 » c'est-à-dire de passer de l'énumération à la désignation de la mesure pour des très petites valeurs ;
- mettre en lien cet enjeu avec les difficultés relevées par les professeurs (focalisation sur les procédures de dénombrement sur le schéma-ligne) : procédures de désignation et dénombrement s'affrontent lors de la mise en œuvre ;
- mettre l'accent sur un fondement de l'ingénierie : la vérification se réalise sur des résultats acquis expérimentalement par les élèves au cours de la situation du *Jeu des annonces* à savoir les équivalences entre désignations additives (3 + 1 c'est pareil que 2 + 2) ;
- rappeler le rôle des représentations qui permettent de valider ces résultats acquis expérimentalement au travers des combinaisons possibles, sur de petites quantités.

Troisième moment de la série

Le groupe a visionné un extrait de mise en œuvre de l'enseignement de l'utilisation du schéma-ligne (extrait transcrit plus haut de la séance du 9 octobre 2012, mod2sc4) dans lequel le professeur et ses élèves mettaient en place une technique de comptage des intervalles pour représenter la mesure de la quantité.

Agn : c'est ça qui (inaudible)

Flo : ils en avaient pas besoin du tout en plus c'est pas l'usage de ça l'utilité de

ChS : on passe à l'extrait suivant on va pas plus loin parce qu'on là voit bien un petit peu si on remonte un petit peu par rapport aux remarques que j'ai pu faire là on est uniquement dans le schéma ligné pour le schéma ligné rien que pour le schéma ligné et donc *on est dans un problème de manipulation du schéma ligné sans relation avec ce qui contrôle l'usage du schéma ligné* […] *ça joue contre ça oui parce que tu dénombres 1 2 3* […]

Sam : c'est sûr que 3 et 3 ils le savaient ils n'avaient pas besoin de ça (inaudible) je vais jusqu'à 6 ils le savaient (brouhaha)

ChS : oui il faut donc que ça rapporte quelque chose de différent

Emm : et oui sinon ils ne s'investiront jamais (TdP800-813)

(épisode 2h 29min 05 - 2h 33min 49)

Transactions contribuant à :

- actualiser les remarques, observations, propositions qui ont été faites au sujet des fonctions des représentations concernant le schéma-ligne : il ne sert pas à vérifier que 3 et 3 font 6 (« c'est sûr que 3 et 3 ils le savaient ils n'avaient pas besoin de ça ») mais il doit permettre de dégager d'autres informations sur la situation (« que ça rapporte quelque chose de différent ») ;
- rappeler que la désignation des petits nombres gagne à ne pas s'effectuer par comptage. En effet le risque est de focaliser le travail des élèves sur une utilisation techniciste et inadéquate du schéma-ligne (compter les intervalles à la place d'un travail de raisonnement sur la situation).

Quatrième moment de la série

ChS : par contre comme tu le disais y a un problème de variables c'est-à-dire que si tu mets 6 par exemple ((geste d'un seul pont)) tu peux pas le faire ça va être difficile pour faire la relation entre deux mains donc il va falloir le faire en deux fois tu vois ça va être un petit peu délicat de gérer ça et puis il y a le problème du statut *c'est pas la vérification c'est la fiction de la partie*

Tho : moi déjà c'était simplement tu as 6 faire une marque de 6 par exemple
ChS : oui ((fait un geste d'un seul grand pont))
Tho : *mais il faut que je repère le 6 avant de faire mon arc les élèves ils n'y arrivent pas* enfin soit ils font des fois ils font un grand arc avec des petits ponts un grand pont avec des petits ponts pour repérer à chaque fois jusqu'à 6
ChS : oui le problème il est est-ce que tu fais 6 ou 3 + 3 ↑
Tho : et même pour aller à 3
ChS : tu crois que les élèves ne peuvent pas faire 3↑
PE : ils ont du mal c'est difficile (brouhaha)
Tho : ce que je leur fais faire c'est 0 tu comptes les points 0 1 2
ChS : eh ben voilà tu comptes
Tho : non pour le repérer juste pour le repérer et ensuite tu (inaudible) ((geste du pont))
[…]
ChS : *tu produis un geste d'enseignement* on peut pas demander aux élèves leur demander la découverte de cette chose-là parce qu'on a vu ce que ça donnait c'est un exemple que l'on pourrait multiplier par chacun là ils vont *regarder dans l'outil quels sont les repères qui vont leur permettre de vérifier de contrôler* etc. or nous ce *qu'on veut c'est que ça soit une représentation de l'annonce donc on peut pas laisser à la charge intégrale de l'élève* de faire ce (inaudible) puisque ça fait l'objet de l'apprentissage […] voilà c'est 3 c'est 3 ah comment on peut faire 3↑ *le fait de comment faire 3 c'est pas la même chose que de faire 3 c'est deux questions différentes* (TdP832-873)
Des propositions sont alors faites par les professeurs pour éviter le comptage des graduations : utiliser une ligne sans graduation, des cases / boîtes à placer sous la ligne, des bandes représentant les mesures. (TdP855-893)
(épisode 2h 36min 36 - 2h 42min 43)

Transactions contribuant à :
- débattre sur la difficulté pour les élèves d'appréhender des mesures de quantités de 6 sur le schéma-ligne (ce qui se traduit effectivement par effectuer des tracés relativement longs de ponts) ;
- proposer, pour le traçage des ponts, d'enseigner une technique de décomposition de 6 en deux ponts de 3 ou utiliser des bandes prédécoupées ;
- rappeler que l'enjeu principal est l'appréhension d'une technique adéquate de désignation d'une mesure (« le fait de comment faire 3 c'est pas la même chose que de faire 3 c'est deux questions différentes ») ;

- rappeler que l'enjeu principal est aussi le raisonnement sur le schéma-ligne et non la vérification ;
- proposer des solutions techniques pour éviter le comptage des graduations ou possible prise en charge (du moins partielle) par le professeur de la représentation.

Série épisodique « représenter les mesures de grandeurs » – Utilisation technique du schéma-ligne – année 2

Les transactions autour de la fonction du schéma-ligne, perçues d'abord par une majorité des professeurs comme une fonction de vérification de la validité de la partie, s'orientent vers un constat d'un usage très souvent techniciste du schéma-ligne. Le jeu des professeurs est d'alerter sur la perte de sens de l'usage de cette représentation dans la situation du *Jeu des annonces* lors du passage à l'écrit (« il n'a aucun rapport avec la structure additive c'est une vérification de comptage » - Emp – TdP203 ; « ils le remplissaient juste pour me faire plaisir et à la limite ils étaient plus à l'aise pour me faire plaisir avec la boîte qu'avec le schéma-ligne » - Anl – TdP226). Un extrait de vidéo, montrant la mise en œuvre d'un enseignement de l'utilisation du schéma-ligne, est visionné après ces échanges. Les professeurs peuvent ainsi produire, par eux-mêmes, une relecture d'une action professorale qui a été jouée antérieurement et qui est emblématique des actions jouées dans les classes (dans lesquelles l'action conjointe des élèves et du maître se focalise sur le comptage des graduations au détriment d'un usage raisonné de la représentation). Cette relecture est possible car ont été travaillés collectivement la désignation de la mesure et l'usage des représentations dans la situation (comme par exemple valider les résultats acquis expérimentalement au travers des combinaisons possibles, sur de petites quantités : « c'est sûr que 3 et 3 ils le savaient / ils n'avaient pas besoin de ça »).

Mais certains professeurs restent préoccupés par des aspects techniques notamment le traçage de « grands » ponts. Des propositions de solutions techniques sont avancées pour éviter le comptage des graduations comme par exemple l'utilisation de bandes représentant par analogie les différentes mesures ou l'association de cases matérialisant les intervalles. Nous retrouvons là des propositions proches du schéma-train associé au schéma-ligne, idée proposée sur le forum par un professeur de classe expérimentale du groupe Bretagne (reprise par la suite dans le document de la progression).

Mais toutes ces propositions restent en fait liées à la question de la graduation qu'un professeur relève : « le problème c'est que c'est gradué ce truc » (Agn, TdP155). Nous supposons que ce professeur a perçu le hiatus entre graduation (qui induit le mesurage, le pas à pas) et désignation pour raisonner sur la situation (selon le paradigme ACE). En effet, dès la première réunion, lors d'un épisode que l'on pourrait maintenant qualifier de fondateur pour ce groupe, le chercheur a rappelé régulièrement : «on va désigner des collections avec une quantité / et non pas en faisant 1 / 2 / 3 : on dit 3 / ça se gagne » (TdP293 ; épisode 1h 06min 34 - 1h 08min 37 ; première réunion du 25 septembre 2012, année 2). Nous verrons comment ces propositions évolueront ultérieurement car la question restera encore au travail durant la quatrième année (2014-2015, troisième année d'expérimentation et année transitoire intégrant le niveau CE1).

Cette série épisodique met en évidence le fait que le schéma-ligne, présenté sous forme de ligne graduée, induit des comportements de dénombrement. Pour un professeur, cela fait appel implicitement, par ce qui serait un « habitus » mathématique, à une comparaison sur la règle avec des mesures[96]. Ces comportements sont de plus accentués par une utilisation technique de comptage des intervalles qui est d'abord pratiquée « culturellement » par les élèves puis enseignée au départ. Mais ces pratiques ne correspondent pas à des usages d'annonces (ou de décompositions) tels que le véhiculerait, dans sa conception, la situation didactique du *Jeu des annonces*. Autrement dit, la représentation du schéma-ligne permet des mesures mais ce qui est attendu *ce sont des mesures reposant sur des comparaisons de décompositions, et des comparaisons permises par le travail effectué sur de petites quantités*, appréhendables par les élèves à ce moment-là de l'apprentissage. Il s'agit donc, à cette étape-là, dans le *Jeu des annonces*, de comparer des rapports de longueur et non directement des mesures de longueur. Cette nécessité de renforcer cet apprentissage, en construisant une relation stable avec les représentations, est d'autant plus importante qu'au fur et à mesure de l'évolution de la situation didactique et des valeurs plus grandes qui vont être introduites par la suite, les manipulations matérielles avec les doigts ou cubes ne seront plus possibles.

[96] Le schéma-ligne, par la suite et dans les niveaux de classes suivants, pourra être une représentation d'une situation mathématique qui indique des unités de longueur ou toute autre espèce de grandeur.

Lors de la 3e année (deuxième année d'expérimentation à grande échelle, 2013-14), les mises en œuvre observées *in situ* du *Jeu des annonces* renseignent sur les actions des professeurs. Nous avons constaté que les professeurs (qu'ils débutent l'ingénierie ou l'expérimentent pour la seconde fois) mènent toujours un enseignement de l'utilisation technique du schéma-ligne. La plupart n'en font d'ailleurs usage que sur les fiches des parties, par ce qu'on pourrait appeler un effet de contrat expérimental. En ce qui concerne les trains-nombres, l'enjeu de désignation d'une mesure sous une forme additive est perçu mais il reste une « machine à saisir le geste du pont » (visioconférence du 25 septembre 2013). La boîte n'est pas évoquée. Le schéma-ligne, le schéma-train et train-nombre ainsi que les écritures additives sont les principaux objets, relatifs aux représentations de la situation, qui seront évoqués plus longuement mais la discussion prendra un tour plus épistémique.

Analyse des transactions introduisant des notions plus épistémiques

Nous cherchons ce qui est discuté et appris sur les représentations en dehors de leur usage et de leur utilisation technique lors des réunions la première année d'expérimentation à grande échelle. Nous en présentons ci-dessous la série épisodique découpée en trois moments. Les deux premiers moments évoquent la dialectique système / modèle, le troisième les relations entre les représentations et leurs fonctions dans le système.

Episodes didactiques concernant l'enjeu « représenter les mesures de grandeurs » - Notions épistémiques
Trois moments Extraits transcriptions ou résumés et description des transactions Réunions des 24 octobre et 21 novembre 2012 (Année 2 - première année d'expérimentation à grande échelle)
Premier moment de la série
A partir d'un constat par les professeurs de difficultés des élèves de transférer la situation du *Jeu des annonces* pour donner la somme de deux termes (sur la feuille de calcul prévue dans le domaine calcul mental), un professeur (Tho) propose une référence à une quantité de billes provenant de deux poches de pantalon. ChS rappelle le système de

référence construit avec le *Jeu des annonces* et demande de considérer l'écriture additive *comme modèle pour d'autres situations*.
ChS : l'usage de cette représentation *pour anticiper fictivement ce qui pourrait apparaître concrètement* c'est un grand pas pour les élèves c'est pas spontané ça se construit *il faut apprendre à la contrôler* voyez le contrôle sur ces représentations il est pas spontané donc *il doit référer aux usages que vous avez construits précédemment* ou qui pourront apparaître avec les billes avec les fleurs avec les élèves de la cour *y a des tas de situations où on pourrait utiliser convoquer utilisez-le dans vos usages courants* combien on est aujourd'hui↑ et bien on est 4 filles plus 12 garçons (TdP403)
(épisodes 1h 12min 46 – 1h 19min 06 et 1h 25min 03 – 1h 29min 13)

Transactions contribuant à :
- montrer que les représentations se réfèrent au *Jeu des annonces* au départ dans la situation didactique mais qu'elles sont le modèle additif de nombreuses autres situations. Il s'agit ici de comprendre que les représentations du modèle additif que sont boîte, schéma-ligne et écriture additive sont bâties en référence à une situation mais transférables à d'autres ;
-montrer que l'usage des représentations pour anticiper sur une situation possible doit être sous le contrôle de la situation (à construire par les élèves). Le contrôle consiste alors à mettre en lien situation réelle, concrète et représentations qui sont des modèles de la situation.

Deuxième moment de la série

Un extrait de séance où l'on voit un professeur utilisant une fiche de partie fictive vierge lors de la mise en commun d'une partie (séance du 28 septembre 2012 – Mod2sc1) est visionné. C'est la première séance du passage à l'écrit du jeu.
PEs : eh oui voilà (inaudible) [lors du visionnage pendant que le professeur compte les 6 cases sur le schéma-ligne]
Mir : on l'a tous fait
Cat : bien sûr qu'on l'a tous fait et on risque de recommencer et de s'en rendre compte après
Emp : faut le faire directement c'est ça↑
Tho : directement c'est difficile pour eux de représenter 6 directement on leur dit (inaudible)
Kaa : ils voient pas où est le 6 ils comprennent pas comment ça marche

ChS : [après le visionnage] vous voyez bien bon y a aussi le statut de vérification ça nous permet de lire pas forcément de vérifier *ça permet de jouer la partie de représenter la partie* et vous voyez bien que quand on demande de vérifier la technique qu'ils connaissent pour vérifier y en a deux c'est soit l'énumération un par un qu'on n'a voulu justement plus ou *alors des résultats qui seraient convoqués mais les résultats ils les ont construits dans un certain contexte et il faut trouver les moyens faut convoquer le contexte* alors convoquer le contexte c'est pas forcément exiger que les élèves le prennent à leur charge […] finalement vous avez fini par le faire
Emm : ben oui complètement
ChS : tu vois c'est nécessaire ils peuvent pas inventer cette chose-là (TdP820-832) (épisode 2h 33min 49 – 2h 36min 36)

Transactions contribuant à :
- montrer que l'usage du schéma-ligne est de faire lien avec le contexte du jeu (le concret) et les résultats acquis et mémorisés au cours des parties pour les convoquer dans la situation de comparaison ;
- valider la prise en charge (plus ou moins partielle) par le professeur de la représentation pour que les élèves se focalisent sur l'usage et non la production proprement dite (difficulté de tracer un pont de 6).

Troisième moment de la série

Un professeur (Agn – TdP671-691) fait remarquer une difficulté technique d'utilisation du schéma-ligne due à la graduation et le fait que l'erreur produite par l'élève l'empêche de pouvoir se servir du schéma-ligne pour valider la partie. L'élève avait en effet tracé pour une annonce de 1 + 5, un pont de 1 puis un pont de 4 (au lieu de 5) car il a focalisé sur le repère « 5 » : « je me disais que j'avais pas assez insisté sur le sens cette comparaison entre le schéma ligné et le résultat du calcul […] le schéma ligné il est gradué quoi c'est vrai qu'il y a cette euh 0 à 5 à 10 donc ce 5 au milieu il peut aussi gêner justement les annonces de plus 5 » (TdP689)
Un autre professeur (Emp – TdP751-753) propose d'utiliser des bandes préfabriquées de différentes mesures pour faciliter l'utilisation de la ligne.
ChS : […] les élèves jouaient oralement au début et puis on l'écrit grâce à un moyen mathématique qui est la désignation additive qui utilise l'addition euh quid du schéma ligné et de la boîte alors↑ je crois qu'il y a peut-être une confusion qu'on a laissé un peu trop dans le vague cette affaire-là pour le module qui est venu je crois que ce qui est important *c'est qu'une représentation doit correspondre à un usage autrement dit elle doit*

avoir une fonction (3.) et il faut le penser en terme de fonction autrement dit qu'est-ce *qu'apporte le schéma ligné comme fonction qu'à ce stade de l'évolution de l'apprentissage le nombre ne permettait pas de produire aux élèves* […] on n'est plus dans un usage métaphorique qui vient troubler la fonction pour certains élèves le schéma ligné consiste à faire des ponts on fait deux ponts on fait trois ponts y a des ponts qui ne peuvent pas être signifiés le pont 0 il existe dans l'écriture […] la représentation doit avoir une fonction au service de la situation de la question qui est posée aux élèves on peut pas comparer comme ça et ben on peut comparer autrement alors le degré d'exigence il va pas être le même que celui du calcul par exemple […] la représentation par le schéma ligné va peut-être évoquer une décomposition à 3 termes à 4 termes parce qu'y aura un 0 ah ça veut dire que quand on fait une annonce le 0 ne permet pas d'augmenter la grandeur c'est une découverte encore pour certains peut-être pourquoi parce que le 0 va jouer un rôle bien déterminé à ce niveau-là ce que je dis pour la représentation lignée est intéressant parce que dans une représentation lignée par la suite si vous avez la chance d'aller ou l'occasion d'aller *dans d'autres niveaux elle a l'occasion par exemple d'indiquer les unités* or dans le calcul maintenant on ne met plus les unités donc la fonction de la représentation lignée segmentée sera l'occasion dans la réflexion d'utiliser une représentation avec des unités d'accord idem pour la boîte quelle fonction ça peut jouer↑ ça peut jouer la maison des 3 ça peut déterminer un fois un terme connu quel est le complément qui a :::
Emm : oui alors c'est juste de l'institutionnalisation de quelque chose qu'on sait mais […] ça force au calcul ça force au résultat la boîte
ChS : en tous cas tu vois bien que ça a pas la même fonction […] et on voit bien que là on est *dans un système de relations de représentations* on voit bien que la relation à ce stade-là entre la représentation additive et la représentation lignée ne va pas être de même nature que celle entre la boîte et la représentation lignée
Emm : sauf qu'elles se trouvent au même endroit sur les parties fictives
ChS : ça voudra dire que dans les parties fictives *faudra réorganiser la chose en le pensant en terme de fonction* c'est-à-dire que si on veut comparer des choses difficiles ben on mettra la représentation lignée parce que ça se verra davantage et si on le pense en terme de fonction je pense qu'on gagne en compréhension (TdP759-767)
(épisodes 1h 58min 40 – 2h 01min 31 ; 2h 12min 39 – 2h 13min 43 et 2h 13min 43 – 2h 20min)

Transactions contribuant à :
- engager à penser les représentations en terme de fonctions et non plus comme objets pour vérifier ou valider une partie ;
- développer des exemples de fonctions du schéma-ligne (indication du rôle du zéro, indication des unités de mesure dans une phase ultérieure de développement) ou de la boîte (mémoriser des répertoires additifs) ;
- instaurer les représentations en système : elles se complètent les unes les autres et apportent des informations différentes ;
- penser la fiche non comme un objet à renseigner mais comme une mise à disposition d'éléments à utiliser stratégiquement.

Série épisodique « représenter les mesures de grandeurs » - Notions épistémiques - année 2

Face aux préoccupations des professeurs dans la mise en œuvre des représentations durant les séances et face à l'incertitude de leur rôle (vu principalement comme vérification de la partie permettant la validation), le jeu du chercheur est de réguler les futures actions des professeurs par des apports didactiques. Pour cela, il s'appuie sur les constats que font les professeurs ou sur ce qu'ils donnent à voir de leur pratique (comme faire appel à des situations de la vie quotidienne, Tho). Ces apports consistent à faire voir les représentations comme des modèles additifs transposables à d'autres situations, à les amener à être considérés en système (référé à la situation concrète du jeu qu'il faut convoquer) et utilisés stratégiquement suivant la situation. Il s'agit de dépasser une pratique ordinaire de l'analogie (c'est comme des billes dans deux poches) pour voir la structure additive à enseigner derrière les représentations de la situation des annonces. ChS cherche ici à donner la possibilité aux professeurs de diriger l'enquête des élèves sur les questions de désignation et de comparaison à l'aide des représentations (« si on le pense en terme de fonction je pense qu'on gagne en compréhension »).

Le sujet est sensiblement discuté dans les mêmes conditions l'année suivante. Nous rapportons ici la série épisodique en trois moments.

Episodes didactiques concernant l'enjeu « représenter les mesures de grandeurs »
Trois moments
Extraits transcriptions ou résumés et descriptions des transactions
Réunion du 27 novembre 2013 (Année 3 – deuxième année d'expérimentation)

Premier moment de la série

Tho (professeur en 2e année d'expérimentation) : *est-ce que le schéma ligné est vraiment nécessaire dans le sens où on prend énormément de temps pour l'installer* et si on le réactive pas de quinze jours là j'ai 40% de réussite la boîte 100%

PEs : (murmures d'approbation)

Tho : mais le schéma-ligné certes c'est puissant mais est-ce que finalement ça prend pas trop de temps sur le reste *alors qu'on peut avoir des représentations avec les trains* avec des groupes de 10 parmi les trains de 10 ou:: c'est vraiment la question […] si je fais 3 + 2 je prends 3 cubes 3 wagons plus 2 wagons j'en ai combien↑ *alors le problème c'est que généralement ils vont dénombrer alors que dans le schéma ligné avec la graduation y en a beaucoup plus qui arrivent à 5* […]

ChS : qu'est-ce qui a été joué↑

Tho : la lecture de schéma ligné par exemple y avait 3 + 2 sur le schéma ligné fallait qu'il fasse […] et inversement j'ai une annonce et je dois écrire dans le schéma ligné et l'an dernier aussi on butait là-dessus et euh voilà

ChS : tu attendais quoi↑ (TdP379-391)

(épisode 1h 33min 27 – 1h 36min 19)

Transactions contribuant à :

- discuter la nécessité de l'introduction du schéma-ligne car son enseignement est chronophage selon les professeurs. Selon le professeur (Tho), la représentation de la situation avec le train-nombre est plus efficace, cependant le schéma-ligne, pour certains élèves, permet d'éviter le dénombrement ;
- situer le problème dans une situation particulière de conversion (ou transformation de registres selon Duval, 2006) d'une annonce entre deux représentations (schéma-ligne et écriture additive).

Deuxième moment de la série

Les professeurs échangent ensuite sur l'intérêt du schéma-ligne adossé au schéma-train : certains professeurs (Tho, Val) n'ont très vite plus reproduit le schéma-train, d'après d'autres professeurs (Sab, Nac) certains élèves ont encore besoin de colorier les cubes avant de tracer le pont (au module 6), pour le professeur (Flo) ces deux représentations ne font qu'une dans l'usage (TdP393-422)

ChS : c'est une difficulté dont on suppose qu'elle va se >comment dire< que *la fréquentation de cet outil de représentation va permettre une meilleure maîtrise de cette chose-là* c'est-à-dire que nous en tant qu'enseignants aussi *sur le rôle qu'on veut y voir*

jouer trop précocement parce qu'on envisage cette puissance-là peut-être trop précocement chez les élèves *d'abord c'est le niveau d'exigence sur l'usage* ce qu'on sait par contre et c'est une des difficultés pour penser notre enseignement on ne parle pas enseignement en terme de mois enfin de semestres de trimestres *faut l'envisager sur une durée qui est très longue* et on sait que cet outil-là que cette représentation-là est d'une *puissance très importante dans la conceptualisation notamment du contenu dans* […] mais cette nécessité-là il faut la rencontrer le plus tôt possible l'idée c'est que *ce ne doit pas être l'enjeu d'un enseignement on n'apprend pas aux élèves à bien utiliser la représentation le système de représentations est un MOYEN de rentrer dans certaines propriétés conceptuelles du nombre* c'est très lent d'autant plus que dans le système de maturation il y a l'idée de mesures qui est derrière l'idée de conservation dans la mesure d'une unité commune pour pouvoir opérer qui n'est pas spontanée qui est culturelle […] ça veut dire que nous on l'envisage mais on n'en sait fichtrement rien de est-ce qu'il faut le garder combien de temps est-ce qu'il vaut mieux mettre le train en-dessous pendant un certain temps et puis l'enlever *ce qu'on sait c'est qu'on a vu que si on gardait 1 2 3 non 3 le fait d'avoir des graduations était une aide >comment dire< presque perceptive pour que les gamins aient un contrôle là-dedans* ben si ça marche comme ça regardons conservons-le et *regardons à quel moment par rapport aux situations il y a une bascule qui se fait* parce que elle se fait cette bascule il y a des gamins qui font tu as vu hein qui font des bonds en disant c'est presque pareil mais là c'est 3 et là c'est 4 ils ont plus besoin de graduations et je pense qu'il y a une corrélation entre les situations le travail sur l'estimation […]

Tho : ça a été moins éprouvant avec les trains (inaudible) que l'année précédente là on a gagné on a gagné voilà

ChS : si tu veux faut pas dévier par rapport aux exigences d'enseignement dans les programmes on nous demande pas l'usage de l'algèbre des segments

Tho : bien sûr on est dans une représentation comme d'autres méthodes ont des représentations (TdP423-439)

(épisodes 1h 36min 19 – 1h 46min 13)

Transactions contribuant à :

- rappeler le fait que l'utilisation technique du schéma-ligne renforce sa maîtrise conceptuelle ;
- accepter l'idée que le schéma-ligne n'est pas enjeu d'enseignement mais un moyen d'enseignement pour accéder à certaines propriétés conceptuelles des nombres ;

- réinterroger le niveau d'exigence (tant dans son utilisation que dans son usage) qui est attendu ;
- donner du temps à l'installation de l'outil (sur une scolarité à l'école élémentaire), ce qui permet de conceptualiser notamment la notion de contenu d'un nombre dans un autre nombre (et qui sera travaillée plus tard dans la scolarité pour faire une mesure avec le report d'une unité commune conventionnelle ou dans les situations de commensuration) ;
- reconnaître le fait que la graduation et l'utilisation du schéma-train associé au schéma-ligne sont des aides perceptives pour la désignation de petites quantités mais qu'elles ne doivent pas devenir des béquilles ;
- se rendre attentif au moment où les élèves se mettent à parler du rapport entre des longueurs sur le schéma-ligne même s'il n'y a pas d'exactitude entre les longueurs proportionnellement parlant (la longueur qui représente 3 sur le schéma-ligne sera en rapport dans le discours avec la longueur qui représente 4). C'est-à-dire observer à quel moment les élèves utilisent le schéma-ligne sans graduation et peuvent décrire leur action.

Série épisodique « représenter les mesures de grandeurs » - année 3

Lors de cette troisième année, le jeu des professeurs est à nouveau d'attirer l'attention sur l'introduction du schéma-ligne qui est vécue comme une mise en œuvre chronophage : les comptes-rendus que les professeurs ont envoyés sur la liste de diffusion en témoignent abondamment. La focalisation se situe toujours sur son utilisation technique même s'il est reconnu que l'association du schéma-train et du schéma-ligne en facilite l'appropriation (« ça a été moins éprouvant avec les trains que l'année précédente là on a gagné » - Tho - TdP435). Comme toute représentation, le schéma-ligne participe au processus de modélisation de la situation et il permet ainsi d'accéder à certaines propriétés des nombres. Cependant, il n'est pas considéré par certains professeurs, à ce moment-là, comme un moyen d'enseignement. Le chercheur doit à nouveau fournir des apports épistémiques et didactiques et attirer l'attention sur ses usages possibles et futurs : le schéma-ligne participe à la construction de la notion de « contenu dans » d'un nombre plus petit dans un plus grand, de la conservation dans la mesure d'une unité commune pour pouvoir opérer. Nous supposons que le chercheur sait, en cette deuxième année d'expérimentation à grande échelle, que cet usage prendra beaucoup plus de sens lors de la modélisation de la différence, lorsque les élèves auront gagné en expérience et avancé dans la

construction des nombres, notamment aussi par le travail sur l'estimation des quantités (domaine *Estimation*). Il engage alors le groupe à observer les conditions dans lesquelles les élèves pourront se passer de l'aide perceptive des graduations et du schéma-train pour accéder à un usage plus adéquat du schéma-ligne.

Lors des dialogues d'ingénierie, au travers d'une relecture des mises en œuvre effectives (à partir d'une vidéo par exemple), les enjeux de la situation sont rencontrés. Le jeu du chercheur, à ce stade-là, est de faire comprendre l'intérêt de faire rencontrer par les élèves les enjeux de la situation (et non de faire seulement fonctionner la situation). La question du matériel des cubes l'illustre bien :

Troisième moment de la série
Sab : est-ce qu'ils peuvent ressortir les cubes s'ils ont envie de tracer sur le schéma et s'ils ont envie d'aller chercher les cubes […] ChS : on est au cp et on est passé dans le nombre l'idée qu'on a besoin du recours au matériel pour penser est une régression à ce stade-là que des élèves Anm : moi y en a quand même qui ont colorié les cubes ChS : que des élèves à titre euh ludique plaisir ou que tu le vois toi-même par moments aillent vers mais c'est aller de l'abstrait vers le concret et non pas du concret vers l'abstrait *à ce stade-là on va de l'abstrait dans le concret on n'est pas dans une vérification qui part du matériel pour aller vers l'abstrait* le mouvement il est là dans ce sens-là oui voilà c'est ça qui est derrière d'accord↑ ça veut dire que c'est pas gênant en soi […] il faut que les élèves comprennent que ça les émancipe du matériel et que on peut toujours aller vers le matériel dès lors qu'on a ça oui toujours et c'est ça qui est intéressant au contraire j'ai ça et ben *je peux trouver une illustration là avec les cubes avec les trains* […] dans ce mouvement-là c'est intéressant parce que les gamins vont dire ah ouais en écrivant additivement il y a plein de situations qu'on peut rencontrer là c'est intéressant (TdP458-471) (épisode 1h 46min 13 – 1h 49min 49)
Transactions contribuant à : - rapporter une pratique d'élèves quant à l'utilisation du schéma-ligne à l'aide de matériel ; - décrire cette pratique avec un langage plus didactique (« à ce stade-là on va de l'abstrait dans le concret on n'est pas dans une vérification qui part du matériel pour aller vers l'abstrait le mouvement il est là dans ce sens-là ») ;

- commenter la pratique (« c'est intéressant parce en écrivant additivement il y a plein de situations qu'on peut rencontrer »).

Suite série épisodique « représenter les mesures de grandeurs » - année 3

Le matériel des cubes (réel ou figuré) doit être considéré dans une dialectique « système / modèle », c'est-à-dire dans une dialectique entre la situation et une de ses représentations. Il ne s'agit pas seulement, pour les élèves, d'arriver à tracer les ponts grâce aux cubes ou à comparer une annonce et un lancer avec des cubes de manière correcte (ce qui correspond à faire fonctionner la situation). Il s'agit de percevoir *le sens* de leur manipulation s'ils utilisent des cubes : « je peux trouver une illustration là avec les cubes ». Autrement dit : « je peux réaliser matériellement la situation que j'ai représentée sur le schéma-ligne (ou avec une écriture) ou que j'ai jouée ». Par exemple, je peux exprimer, si l'annonce est « 3 + 0 + 5 », la raison pour laquelle je ne prends que 3 cubes rouges et 5 cubes verts pour constituer un train représentant la situation (ce qui correspond à faire rencontrer un enjeu de la situation). Gérard Sensevy (2011a, p. 428), reprenant Van Fraassen[97] et l'idée d'un langage de description disponible pour un système de représentations, utilise le terme d'« élucidation de l'expérience ».

Si nous constatons que les professeurs enrichissent leur manière de voir les représentations, chercheur et professeurs étoffent les fonctions qu'elles peuvent réaliser et leur rôle dans la dialectique système / modèle. Le chercheur peut recenser les usages et les difficultés que les professeurs et les élèves rencontrent tant au niveau pratique qu'au niveau conceptuel. Des questions semblent encore rester en l'état : quelle durée pour une mise en place quasi autonome du schéma-ligne ? Que mettre en place pour que les élèves s'emparent de la représentation ?

Evolution des transactions la quatrième année

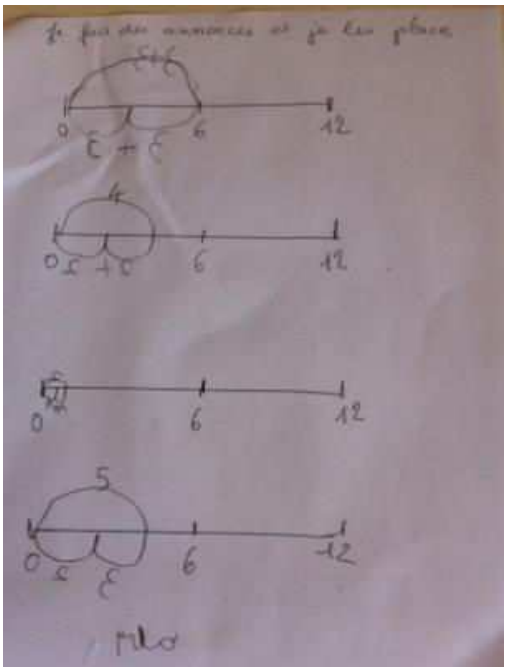
Lors de cette quatrième année (2014-15, troisième année d'expérimentation à grande échelle), les observations de pratique en classe et les comptes-rendus montrent que

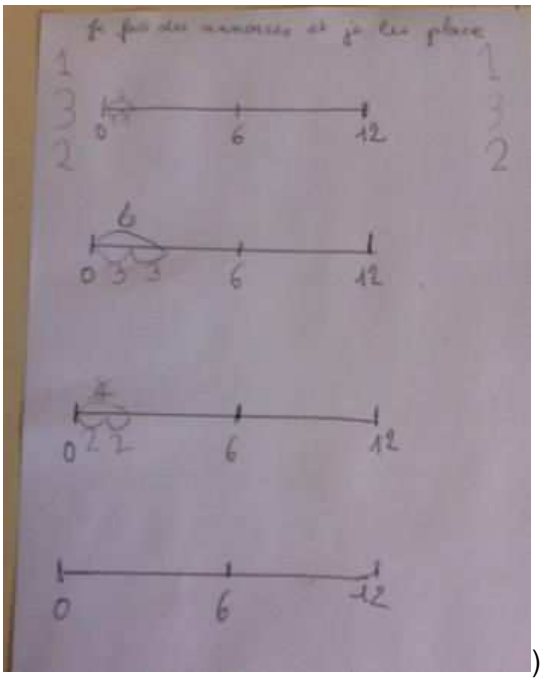
[97] Fraassen, B.C. van (2006). Representation: The Problem for Structuralism. *Philosophy of Science, 73* (5), 536-547.

les professeurs ayant déjà expérimenté l'ingénierie prennent en charge le schéma-ligne dès le début du module 2. Puis ils laissent peu à peu la main aux élèves pour qu'ils s'y essayent petit à petit. Cette pratique a donc largement diffusé. Cependant, nous retenons des échanges, lors de la quatrième année, la série épisodique présentée ci-dessous, composée de cinq moments, qui montre que la réflexion collective se poursuit et s'enrichit. Deux premiers moments donnent à voir deux nouvelles façons d'introduire le schéma-ligne, le troisième discute la première introduction et le quatrième institue une synthèse des réflexions. Un cinquième montre les transactions autour d'une appropriation des enjeux par un professeur (Her) débutant l'ingénierie.

Episodes didactiques concernant l'enjeu « représenter les mesures de grandeurs » Cinq moments Extraits transcriptions ou résumés et descriptions des transactions Réunions du 24 septembre et du 26 novembre 2014 (Année 4)
Premier moment de la série
Nac [professeur en deuxième année d'expérimentation] : moi j'ai toujours le même souci avec ce schéma ligné gradué ou pas:: […] je pense que c'est toi [ChS] qui réagissait que le schéma ligné c'est pas quelque chose à enseigner *moi je l'enseigne et ça me prend vraiment du temps* et en fait ce schéma ligné on doit s'en servir pour valider >c'est plus petit c'est plus grand qu'il y a une différence entre les deux nombres < j'ai vraiment l'impression de montrer comment ça marche et est-ce qu'il faut compter les petits carrés en-dessous voyez j'ai::: tu disais la technique on en prend 5 on fait un pont j'ai l'impression de l'enseigner voilà je suis pas très à l'aise avec ça […] je passe un temps dingue je suis pas très à l'aise avec ce schéma ligné alors Cal disait qu'elle mettait plus les::: Cal [professeur en deuxième année d'expérimentation]: en attaquant le module 1 il y a eu deux choses Nac : on en a parlé aussi Cal : une chose remarquable quand même j'ai pas UN élève qui après trois séances de jeu a remarqué qu'on ne pouvait pas faire plus de 6 avec les doigts pour gagner […] donc j'ai dû un peu induire […] deuxièmement quand on a fait ce module 1 avec en collectif la simulation en train j'ai dit ah ben regardez si on fait la ligne de l'estimateur avec 0 6 12 vous vous rappelez oui oui oui oui […] alors ce matin sur vingt-huit [élèves] il y en a dix-huit qui sont arrivés à la première séance à mettre leurs annonces

((Cal fait circuler quelques productions :





))

IEN : c'est le lien avec l'estimateur avec les bornages de l'estimateur [logiciel du domaine « Estimation », utilisé par les élèves pour représenter sur une ligne bornée une mesure de la taille d'une collection, donnée analogiquement ou symboliquement]

Cal : en mettant les nombres sur je les laisse (inaudible) on avait parlé 6 ce qui va un peu avant 6 et mêmes des choses vraiment qui pourraient passer *donc je me dis peut-être que le truc il est là* parce que l'année dernière en fait moi personnellement […] j'étais un peu dans les choux et notamment décalée sur l'estimateur mais c'est vrai parce qu'on avait les quatre domaines différents en parallèle y avait beaucoup de choses (rires)

Her : y a toujours beaucoup de choses (rires)

IEN : y avait beaucoup de choses sur lesquelles vous ne voyiez pas le sens qu'il y a l'estimateur […]

Cal : c'est vrai que l'année dernière peut-être que ça aurait pu venir comme ça mais ça ne l'a pas fait parce que l'estimateur je l'ai utilisé plus tard même en collectif et que cet estimateur me semble la solution pour faire constater et du coup ne pas enseigner (TdP 2-45) […]

Cal : je voulais vérifier s'ils avaient compris qu'on fait pas plus que 6 […]

Sab : c'est un rapport à l'estimateur

Cal : et moi si tu veux spontanément c'est dans le dé le 5 et comme dans l'estimateur on a le 6

Sab : mais là on est dans le dé on s'arrête à 6 et là tu les prépares pour le module 3 tu vas déjà jusqu'à 10

Cal : je sais pas j'ai juste utilisé ce qu'ils avaient vu sur les diapos et je pense que de faire ce qu'ils avaient vu sur les diapos et ben *leur ligne ça prend un sens* (TdP77-84) (épisodes 24min 36 – 33min 27)

Transactions contribuant à :

- rapporter au collectif ses interrogations sur la manière d'introduire le schéma-ligne (enseigner comment ça marche) ;
- donner à voir une pratique d'utilisation du schéma-ligne (sans graduations, borné 0-6-12) en lien avec une activité d'un autre domaine (logiciel *Estimateur*) suite à une remarque non formulée des élèves au cours du jeu (inutile d'annoncer plus que 6) : « je voulais vérifier s'ils avaient compris qu'on fait pas plus que 6 » ;
- donner à voir ses connaissances sur l'ingénierie : 5 est contenu dans 6 (désignation de la valeur d'une main contenue dans la désignation de la valeur maximale donnée par le dé) ;
- commenter cette action professorale : accélération de l'avancée didactique (« tu vas *déjà* jusqu'à 10 »).

Deuxième moment de la série

Jeux de rôle : transactions entre un élève (joué par Emd) et son professeur (joué par ChS) :

ChS : tu montres [sens d'annoncer] 5 + 8 et je te dis perdu 5 + 8 l'annonce [ici lancer du dé] est 6 tu me dis 5 + 8 perdu je te dis pourquoi tu as perdu explique-moi
Emd : l'annonce c'est 6 5 + 8 pourquoi j'ai perdu↑ parce que c'est trop c'est plus que 6↑
ChS : qu'est-ce qui est plus que 6↑
Emd : le 8 déjà
ChS : et pourquoi le 8 c'est plus que 6↑
Emd : ils l'ont déjà appris que le 6 c'est (inaudible) ↑ (rires) parce qu'il y a déjà 6 dans le 8
ChS : parce qu'il y a déjà 6 je comprends rien à ce que tu me racontes (rires) attends tu veux bien ↑ on va essayer de comprendre tous les deux et je vais te montrer comment moi je fais pour essayer de te comprendre tu me dis quoi↑
Emd : que 6 est dans 8 est contenu dans 8
ChS : bon d'accord attends voilà ((trace au tableau une ligne)) je vais mettre mon 6 et tu me dis 6 est contenu dans 8 euh ça veut dire quoi 6 est contenu dans 8 ↑ est-ce que si je fais ça ça te convient voilà je fais 6 ((trace un pont de 6)) et puis je fais 8 ((trace un pont de 8 qui part de la même origine)) est-ce que ça te convient je comprends bien là↑
Emd : oui

ChS : et donc l'annonce était combien↑
Emd : la mienne↑ c'était 5 + 8 […]
ChS : donc tu me dis que 6 est contenu dans 8 ça va↑ et donc mon 6 est à cette position-là ((la marque sur la ligne)) et donc mon annonce est forcément perdante voilà est-ce que ça t'a ennuyée que je dessine ça↑
Nac : qui moi↑ non
ChS : je viens d'introduire le schéma ligné (TdP167-197)
(épisode 46min 55 – 49min 17)

Transactions contribuant à :
- montrer un exemple d'introduction du schéma-ligne non gradué dont la fonction est d'établir un langage commun à propos d'un type de partie ;
- mettre en œuvre un jeu de rôle qui n'est pas forcément transposable à la relation professeur / élève avec les valeurs choisies mais qui peut être imité.

Troisième moment de la série

ChS : y avait une autre question qui était c'est pas sorti la borne des résultats la borne des valeurs les gamins n'ont pas constaté qu'ils ne pouvaient pas aller au-delà de 6
Cal : oui
ChS : qu'est-ce qui te gêne là-dedans↑
Cal : ça m'aurait arrangé qu'il y en a un qui le dise parce que je voulais pas le dire moi
Mir : mais du coup tu as trouvé un système de représentation pour dialoguer avec eux
Cal : là maintenant je veux voir parce que *pour l'instant ce 6 pour moi c'est artificiel le fait qu'on aille pas plus que 6* donc là j'ai laissé on n'a pas joué aujourd'hui on n'a pas joué hier donc euh je vais attaquer là demain je vais rejouer je vais leur laisser l'ardoise je leur dirai pas faîtes un schéma je leur dirai débrouillez-vous pour gagner expliquez-moi pourquoi vous avez gagné mais en faisant des dessins enfin quelque chose sur l'ardoise alors peut-être qu'ils me mettront je sais pas moi la suite des nombres euh j'en sais rien ce qu'il font faire
ChS : je peux te poser une question sur les modalités du jeu↑ euh est-ce qu'il y a un enjeu avec des points tu sais↑ des pions […]
Cal : oui ils sont bien contents d'avoir des perles et il y en a qui n'en ont jamais et j'espère que ils vont un petit peu en avoir […]
ChS : l'idée qu'on peut pas atteindre toutes les valeurs là elle est sans doute implicite mais *c'est pas non plus un enjeu de la situation* elle va venir *avec le contrôle euh que tu vas construire sur les nombres*

Cal : mais par contre je pense que ce schéma il va les aider quand on passera à pour gagner faut faire plus que ChS : ah ça […] j'ai gagné de combien Cal : mais après le fait que c'est l'hypothèse que ceux qui ont un peu raté y en a qui ont fait 5 et 5 qui ont mis 10 et qui ont placé avant le 6 ils ont fait deux ponts égaux y a les deux 5 et le 10 en tout c'est bien c'est un peu avant le 6 mais on verra ça on va en discuter mais je trouve que c'est quand même gagné parce que l'année dernière j'avais des trucs euh des petits ponts 1 1 1 1 jusqu'à 6 (TdP370-388) (épisode 1h 06min 18 – 1h 08min 30)
Transactions contribuant à : - indiquer que l'enjeu n'est pas de signifier quelles sont les valeurs pouvant être atteintes ou pas (le gain d'un pion peut le signifier) ; - signaler que le contrôle dans le jeu vient des connaissances mathématiques ; - montrer des usages du schéma pour la comparaison et la recherche de l'écart (« ce schéma il va les aider quand on passera à pour gagner faut faire plus que », « j'ai gagné de combien ») ; - partager une observation de productions d'élèves et donner à voir sa pratique pour l'enseignement / apprentissage de l'ordre sur les nombres (« y a les deux 5 et le 10 en tout c'est bien c'est un peu avant le 6 mais on verra ça on va en discuter »).

Série épisodique « représenter les mesures de grandeurs » - année 4

A partir de l'interrogation d'un professeur (Nac) sur l'enseignement de l'utilisation du schéma-ligne, le professeur Cal donne à voir sa pratique et des productions de ses élèves. Sa proposition est une manière d'introduire le schéma-ligne et d'en montrer l'intérêt aux élèves : il permet de visualiser les combinaisons d'annonces possibles pour avoir une chance de gagner dans le jeu de comparaison avec un dé. Pour avoir une chance de gagner, les annonces ne doivent pas être supérieures à 6, c'est-à-dire qu'elles ne doivent pas dépasser 6 dans le schéma-ligne. Le jeu du chercheur va consister à pousser un peu plus loin le raisonnement. En effet, mêmes des annonces inférieures ou égales à 6 peuvent être perdantes car le jeu comprend une part de hasard qui participe à faire le jeu (et la distribution ou pas d'un pion participe à le signifier). ChS établit alors un autre modèle de contrat et produit une nouvelle forme de validité de la réponse (voir le 6 dans le 8).

Avec l'action d'introduire d'une autre manière le schéma-ligne, en mettant en place un jeu de rôle professeur-élève, il signifie que l'enjeu n'est pas centré sur les valeurs à atteindre. En effet, même si la valeur de l'annonce participe à la stratégie du jeu, l'enjeu se situe sur la comparaison des annonce et lancer entre eux : si l'un(e) est contenu(e) dans l'autre alors ils ne sont pas équivalents et le jeu est perdu. A partir d'un jeu de rôle (qui n'est pas forcément transposable à la relation professeur / élève avec les valeurs choisies mais que le professeur peut imiter), le chercheur tente de montrer une manière de faire, un possible pour l'action didactique. Il établit ainsi un *jeu d'imitation* (Sensevy, 2015a), c'est-à-dire que le professeur devrait pouvoir copier une telle action didactique (d'introduction du schéma-ligne) tout en inventant sa propre façon de le faire avec son propre style. Autrement dit, d'adapter un tel dialogue didactique aux circonstances particulières, par exemple celles de l'avancée didactique dans sa classe. Imiter (dans le sens donné par Gérard Sensevy, 2015a) nécessite un apprentissage : ici celui de comprendre le jeu qui pourrait se jouer entre professeur et élève. Dans ce jeu de rôle, le professeur-chercheur interprète à l'aide du schéma-ligne, la justification proposée par l'élève-professeur Emd. Il lui propose une autre manière de (d)écrire la situation et la justification (« je vais te montrer comment moi je fais pour essayer de te comprendre »). Il accompagne cette proposition par le langage de la situation.

Nous revenons ici, de manière sous-jacente, à un enjeu de la situation déclaré auparavant. Il ne s'agit pas d'« enseigner » la maîtrise technique du schéma-ligne (nous préciserons plus loin) mais de rencontrer la nécessité de son étude (ici au travers du rôle du repère 6 sur le schéma-ligne dans le jeu de comparaison des annonces). Il s'agit également d'utiliser les potentialités du schéma-ligne dans la comparaison comme le montrent les deux manières de l'introduire abordées par le professeur Cal et le chercheur lors des échanges.

Quatrième moment de la série
Nac : je suis restée dans ce carcan du matériel de l'année dernière je savais que ça n'allait pas mais je l'ai laissé quand même et je me suis embêtée […] mais c'était fait
PE : quoi (inaudible)
Nac : le schéma ligné et en-dessous les wagons (brouhaha)
Cal : et j'étais la première à le réclamer (brouhaha)
Emd : et il y a un moment donné où on passera du train au schéma sans mettre le::

ChS : il y a un truc sur lequel vous devez être vraiment vigilant c'est que l'idée que comme vous avez des trains et des cubes *on perd la dimension qu'on fait qu'on a une mesure* puisque 1 ne représente pas une mesure le train là c'est une activité de mesurage et on joue sur une grandeur l'idée c'est que peut-être que les élèves ont effectivement ils veulent contrôler tellement contrôler que le 1 mesure peut-être 1 c'est la mesure 1 peut-être […] par contre ce qui est certain c'est que si tu en restes au stade >comment dire< d'une désignation qui n'est pas raccord avec l'expression d'une mesure là ça va poser problème et effectivement ça va plutôt créer un obstacle chez certains élèves ou même chez beaucoup d'élèves *le fait d'avoir toujours à contrôler par le comptage et c'est obligatoire parce que c'est comme ça que ça marche vous voulez désigner dénombrer vous êtes obligés de faire une liste et vous êtes obligés de créer un ordre sur une liste* je vous l'ai expliqué l'an dernier en introduction c'est obligatoire *ACE casse ça parce que ça empêche c'est un obstacle à l'appréhension du nombre comme mesure* (4.) et le problème avec le train si tu veux c'est *qu'ils voient la collection mais ils voient pas que les wagons c'est la mesure de la collection* (2.) le train mesure tant de wagons mais si tu travailles comme ça <le train MESURE tant de wagons>là on a une petite une petite marge mais là encore on est toujours dans une relation entre les objets à dénombrer et une liste ordonnée ça pose pas mal de difficultés (TdP389-400)
[…]
ChS : comme ils sont dans le nombre ils en ont pas encore la maîtrise donc *on va utiliser des représentations qui vont pouvoir jouer le rôle d'interprétation* on interprète et le problème que j'ai avec le train c'est qu'on confond représentation euh schéma et interprétation là on est dans une interprétation quand on a le train en-dessous on n'est pas dans une interprétation on est dans une traduction un cube on traduit en train on interprète pas l'idée c'est pareil pour les boîtes la grande puissance de la boîte c'est *qu'on est obligé d'interpréter de parler beaucoup et cette capacité a nécessité de l'interprétation dans l'usage de cette boîte qui en fait vraiment l'intérêt* mais le train on traduit en train on n'a rien à interpréter puisqu'il y a les cases ça il y a une représentation iconique qui est similaire (TdP458)
(épisodes 1h 08min 30 - 1h 12min 25 et 1h 21min 13 - réunion du 24 septembre 2014)

Transactions contribuant à :
- signaler que le schéma-train peut induire une pratique de mesure (et ACE vise à l'appréhension des nombres comme mesures d'espèces de grandeur) à condition de considérer les wagons-unités comme une mesure et pas comme des objets à numéroter (« ACE casse ça parce que ça empêche c'est un obstacle à l'appréhension du nombre

comme mesure et le problème avec le train si tu veux c'est qu'ils voient la collection mais ils voient pas que les wagons c'est la mesure de la collection ») ;
- installer les représentations comme interprétation de la situation du jeu ;
- indiquer que toute représentation (exemple fort de la boîte) nécessite l'utilisation du langage qui *est* interprétation de la situation.

Cinquième moment de la série

Her [professeur en première année d'expérimentation] : l'année prochaine moi *je sais très bien que quand j'arriverai au module 2 ce sur quoi je vais vraiment axer* c'est sur j'ai d'un côté mon annonce j'ai d'un autre côté mon lancer et je dois les comparer *ça va être la notion de comparaison* que je vais mettre en jeu et la boite et le schéma ligne ce sera des outils (brouhaha) alors soit j'axe sur je commence à représenter des annonces sur le schéma ligné et après une fois que je vais pouvoir que je vais appréhender l'outil et après je l'utiliserai dans la comparaison si tu veux une fois qu'on était lancé sur ça avec les fiches etc les fiches comme elles sont faites parce que moi j'avais que ça enfin on avait que ça quand tu débutes tu n'as que ce modèle-là ton annonce elle est en haut le lancer qui est au milieu et puis tu as rien de physique et c'est quand même ::: j'ai fait mes 3 colonnes j'ai fait mon annonce sur une colonne mon lancer sur l'autre et *au milieu on va utiliser un signe pour comparer* je trouve que c'est:: pour moi c'est plus parlant d'avoir l'annonce le lancer et je compare ((signe d'indication du milieu entre deux colonnes)) parce que sur les quantités sur lesquelles on est sur les petites quantités on n'a pas besoin de faire un schéma de 3 et de 4
Cal : si si c'est là qu'ils y arriveront
PEs : c'est là (inaudible) (brouhaha)
Her : non mais ils voient de suite que c'est il voient pas de combien non mais ça veut pas dire qu'on doit pas le faire mais c'est comme quand tu dis là j'ai gagné ou j'ai perdu il sait qui a gagné qui a perdu il a vu que c'était différent […]
ChS : *on n'est pas encore dans les mathématiques qui permettent de répondre à tous les coups* là-dedans on sait que mais on sait pas encore pourquoi et l'exprimer par exemple je vais te donner un exemple
Her : c'est ce que je dis c'est pour ça que pour moi l'essentiel
ChS : est-ce que tu sais pourquoi la boîte existe↑ [...]
Her : c'est pour avoir conscience que des nombres existent dans d'autres nombres
ChS : généralement les choses sont très simples elles sont tellement simples qu'on les a oubliées *ça permet de raisonner sur des quantités sans signes* et tu t'embarrasses pas d'écritures etc tu peux jongler réfléchir sur des combinaisons de quantités sans signes

Mag : mais moi il les mettent les signes (brouhaha) ChS : ça a une puissance didactique et de mise en œuvre qui est incroyable tu peux raisonner sur des combinaisons de quantités sans signe y compris sur le schéma ligné c'est aussi simple que ça mais ordinairement les élèves qui sont au cp dans la culture sociale c'est de rentrer dans la combinaison de quantités avec les signes algébriques et donc on est un petit peu à rebours on construit quelque chose ça prend du temps ce que tu [Her] dis par rapport au document on a conscience que c'est très lourd et que *comprendre le fin du fin c'est pour ça qu'on est là qu'on discute qu'on mutualise et qu'on apprend avec vous parce que vous avez des éléments que vous nous donnez qui nous permettent de dégraisser encore ce qu'on met à disposition* (TdP145-158) (épisode 2h 23min 23 – 2h 28min 36 – réunion du 26 novembre 2014)
Transactions contribuant à : - pour le professeur Her, une prise de décision pour une future mise en œuvre centrée sur l'enjeu de comparaison ; - commenter l'usage du schéma-ligne pour des comparaisons sur de petits nombres (par exemple 1 + 2 et 4) : selon Her, le schéma-ligne n'est pas utile, selon d'autres professeurs, il doit être introduit pour que les élèves se l'approprient, selon ChS, comme la boîte, il permet de raisonner de manière relationnelle sur la situation en produisant des combinaisons additives de quantités sans utiliser de signes algébriques ; - mettre en évidence l'action conjointe professeurs / chercheurs dans la recherche ingénierique.

Suite série épisodique « représenter les mesures de grandeurs » - année 4

Cette série épisodique présente des professeurs faisant des choix ou émettant des commentaires éclairés par leur expérience de la mise en œuvre, les apports du chercheur mais aussi par les discussions collectives. Le premier exemple montre un professeur (Cal) qui a mis à sa main l'introduction du schéma-ligne en construisant des liens entre différents objets de l'ingénierie (la ligne dans les domaines SIT et Estimateur). Cal cherche à répondre à un problème : des élèves font des annonces supérieures à 6 et ne semblent pas remarquer que le jeu est perdu d'avance. Dans le second exemple, le professeur Her donne à voir sa pratique future et par là sa compréhension de cette étape de la progression : elle est centrée sur l'enjeu de comparaison. Autre instant très bref, le jeu des professeurs (notamment Cal) sur le

discours de Her pour rappeler l'intérêt que les élèves ont, dès le début, à prendre en main le schéma-ligne même sur des comparaisons « évidentes » pour étudier le schéma-ligne, en lui-même (« si si c'est là qu'ils y arriveront » - Cal - TdP146 – réunion du 26 novembre 2014).

Deux pratiques relatives à l'usage du schéma-ligne et qui ne s'excluent pas l'une l'autre émergent :

1) La première prend appui dans la production de techniques actualisant ou concrétisant une conceptualisation mathématique adéquate à l'enseignement. Si l'on emploie une bonne façon de faire, la bonne technique, on est du côté d'une meilleure compréhension conceptuelle. La pratique sur de petites quantités en facile ou en permet l'accès pour les élèves, l'utilisation d'une ligne non graduée peut favoriser l'« interprétation » de la situation (car n'orientant pas vers le comptage-numérotage des intervalles). L'idée sous-jacente est celle des représentations comme forme écrite permettant une « interprétation » de la situation, après que la « traduction » nécessaire a été assurée. En effet, il y a une dialectique, dans le travail du schéma-ligne, entre comprendre l'organisation de cet objet (par exemple comprendre ce que signifie un repère) et son utilisation pour comprendre les nombres dans la situation. Comprendre l'organisation, c'est la « traduction » (par exemple du schéma-ligne en une autre représentation) pour *savoir de quoi on parle et ce qu'on fait* lorsqu'on utilise le schéma-ligne. Utiliser le schéma-ligne pour comprendre les nombres, c'est « l'interprétation » du schéma-ligne : construire grâce au schéma-ligne des encadrements (« 5 est entre 4 et 6 »), des inclusions (« on voit 5 dans 6 »), des approximations (« ce point sur le schéma, il est plus proche de 5 que de 10, donc il ne peut pas désigner 8, qui est plus proche de 10 que de 5 ») etc. Sans langage, sans système langagier précisément construit collectivement (la construction conjointe de la référence commune, empirique et analytique), l'usage des représentations ne peut fonctionner correctement.

2) La seconde se situe dans l'utilisation du schéma-ligne comme représentation permettant un raisonnement sur la situation mathématique (quand on ne possède pas encore une maîtrise suffisante des nombres pour raisonner de manière relationnelle avec les nombres et les signes algébriques). De manière générale, si l'on travaille à partir des fonctions que permettent les représentations utilisées dans l'ingénierie (interpréter la situation, anticiper la fin de la partie, visualiser le jeu, valider la comparaison, établir un langage commun, …), on accède à une meilleure

compréhension conceptuelle de la situation. Le jeu du chercheur a consisté à pousser le plus loin et le plus finement possible la réflexion collective en réponse à l'incertitude (par exemple celle du professeur Nac à choisir par défaut une utilisation du schéma-ligne qui ne lui convenait pas dans la situation de mise en œuvre de la séquence). La focalisation s'est opérée sur l'intérêt des représentations comme outil permettant de discuter et de raisonner sur la situation quand les élèves n'ont pas encore la maîtrise des nombres et des signes algébriques.

A la fin du quatrième moment (TdP158), le chercheur met au jour une des raisons du travail collectif : les transactions permettent d'expliciter ce que le document de la progression ne peut pas dire, par exemple ici au sujet des fiches des parties fictives. En effet, il est écrit dans ce document « qu'en aucun cas, les parties fictives ne doivent être considérées comme des fichiers d'exercice. Elles sont avant tout destinées à la réflexion […]. Dans cette perspective, les parties données ne doivent pas être abordées de manière exhaustive. C'est au professeur de choisir celles qui lui paraissent les plus fructueuses en fonction du déroulement de la progression dans sa classe » (p. 20 – module 2). Le texte déclare aussi les critères de choix retenus pour ces parties. Cependant l'usage des représentations (qui sont pré-tracées sur les fiches, schéma-ligne gradué avec le schéma-train en-dessous) n'est pas donné dans ce texte. Il est le produit de l'effort du travail collectif lors des transactions d'ingénierie et constitue ainsi une expérience constituée et partagée dans le groupe.

Echanges sur la notion d'équivalence, le signe « = » et le rôle du calcul

La situation didactique du *Jeu des annonces* est une organisation didactique qui va permettre la production de désignations orales puis écrites de mesures de grandeurs et l'étude des moyens de leur comparaison. La notion d'équivalence de ces désignations est fondamentale dans le processus didactique. Lors de la première année de test de la situation didactique avec les classes d'étude (2011-12), la notion d'équivalence n'apparaît pas comme pouvant être problématique ou pouvant soulever des difficultés dans la mise en œuvre. Pourtant, dans les pratiques sociales et scolaires traditionnelles, comme nous l'avions présenté dans l'analyse *a priori*, la relation d'équivalence est en général occultée et le sens du signe « = » est vu essentiellement comme une indication à effectuer un calcul. Comment les

épistémologies de la pratique habituelle (comparer par un calcul de la somme) d'une part et de l'ingénierie (comparaison des « états du monde » donc d'un système de relations) d'autre part vont-elles se rencontrer ? Est-ce que le collectif provençal s'est emparé de la question de l'équivalence et si oui comment l'a-t-il traitée ?

Premier essai de recherche documentaire

Nous avons effectué une recherche sur *Transana* et la requête à partir du mot-clé « équivalence » (relatif à la notion d'équivalence abordée dans les échanges). La requête nous indique trois épisodes trouvés.

Deux des épisodes sont liés à des commentaires du chercheur sur la sémantique du terme « différent » (le signe « ≠ » signifiant « n'est pas égal à », « n'est pas équivalent à » et parfois nommé « différent à »). En effet, nous avons observé que pour certains élèves, en fin de premier trimestre de l'année scolaire, l'écriture 2 + 3 n'est pas équivalente à l'écriture 1 + 4 par exemple car les termes utilisés ne sont pas les mêmes. Nous supposons que ces élèves ne sont pas encore emparés du système formé par l'écriture additive de la désignation de la grandeur nombre d'entités et par les outils sémiotiques (représentations permettant la comparaison « visuelle » telle que le schéma-ligne) comme faisant fonction de modèle de la situation du jeu. Autrement dit, ils n'ont pas encore assimilé qu'il y a plusieurs façons d'écrire un même nombre sous la forme additive. Le chercheur alerte les professeurs sur la polysémie du mot « différent » qui ne s'attache, quant à la notion d'équivalence, que sur le mode de désignation écrite qui est différent pour désigner une mesure de grandeur commune.

Le troisième épisode montre un professeur en première année d'expérimentation (Ste) qui a observé une question d'un élève et sa résolution par l'élève lui-même sur le journal du nombre :

> « Ste : moi par exemple la semaine dernière sur le module 5 / dans le journal du nombre / y en a un qui a anticipé sur le module 6 / et du coup j'ai pas su si il fallait que je l'exploite / j'ai laissé faire lui et j'en ai pas reparlé à tous enfin
> Mir : mais comment il a anticipé↑
> Ste : c'est-à-dire qu'il mettait:: / c'était « écris des annonces mathématiques avec le + et le = » / donc il m'appelle et il me dit maîtresse il faut que tu viennes

m'aider / je veux mettre ça 2 + 2 / j'arrive et je lui dis mais tu es coincé à 2 + 2↑ / il me dit oui / je dis comment ça tu es coincé à 2 + 2 enfin tu vois je:: / mais il me dit non *parce que je veux pas écrire 4 / je veux l'écrire d'une autre manière / ça y est j'ai trouvé je vais écrire 3 + 1* / ah / tu vois de lui-même il a anticipé comme ça

Mir : et tu l'as laissé comme ça ↑

Ste : j'ai dit très bien et je suis partie (rires) c'était pas :: / et il a rempli la page de ça

Flo : mais tu peux t'en servir / *c'est super pour la classe /* toi tu as *écrit ça* et vous est-ce que vous êtes capable d'écrire comme lui (inaudible) / c'est *le début d'une grande aventure* »

(TdP10-15 – réunion du 27 novembre 2013)

Le professeur Ste rapporte un événement qui a eu lieu dans sa classe : lors d'une phase de production incitée dans le journal du nombre, *avant l'étude collective* de l'usage de la désignation comme mesure de la taille de la collection pour comparer des écritures additives (prévue au module 6), un élève se demande et trouve comment exprimer une équivalence entre deux écritures additives à deux termes. Cette trouvaille est née de l'expérience dans le jeu et se traduit à l'écrit dans le système sémiotique mis en place aux modules 2 et 4 précédents. Cet élève a saisi le sens du signe « = » tel que : 4 (désignation usuelle) = 2 + 2 (possibilité de le désigner dans le jeu) = 3 + 1 (autre manière de l'écrire). Le professeur (Ste) le relève, ce qui montre que cet événement a été perçu comme intéressant et suffisamment remarquable pour être rapporté au collectif. Mais l'inexpérience de ce professeur qui débute dans la mise en œuvre de l'ingénierie l'empêche de voir son importance dans la construction de la notion d'équivalence pour les élèves (relier 2 + 2 avec la désignation usuelle 4 mais de le penser comme 2 + 2 = 4 = 3 + 1, écriture peu « usuelle » en mathématiques au CP). Un professeur en deuxième année d'expérimentation (Flo) identifie la connaissance que le professeur Ste a mise en action dans ce module (et l'exprime par le « ça »). Son épistémologie personnelle vient renforcer l'action du professeur Ste afin d'installer un éventuel *jeu d'imitation* (Sensevy, 2015a) au sein de la classe (« c'est super pour la classe / vous est-ce que vous êtes capable d'écrire comme lui »). La discussion se clôt sur l'intérêt d'une diffusion dans la classe d'une telle proposition : l'idée d'explorer les potentialités d'une telle écriture (« c'est le début d'une grande aventure »). Même si l'épistémologie profonde (équivalence de désignations de

grandeurs) n'est pas explicitement travaillée collectivement ici, il reste que cet épisode existe désormais dans le collectif pour être éventuellement repris à l'initiative des uns ou des autres.

Deuxième essai de recherche documentaire

Nous associons alors le mot-clé « équivalence » à celui de « signes mathématiques » avec l'opérateur booléen « OU ». Nous trouvons dans le rapport de l'enquête des constats et des propositions au sujet de l'enseignement des signes, notamment « inférieurs à » et « supérieurs à ». La nécessité de les enseigner de manière paradigmatique[98], c'est-à-dire en remplacement du signe « ≠ » et en contraste avec le signe « = », ne sera pas abordée explicitement lors des échanges dans les réunions. Lors de la quatrième année, lorsque seront comparées la situation du *Jeu des annonces* et la situation des *Balances Roberval* testée dans des classes d'étude de CE1, la notion d'équivalence sera retravaillée. L'écrit est alors le compte-rendu, l'expression d'une expérience avec des masses marquées qui représentent une masse, une quantité de matière comme les doigts et points du dé qui représentent une quantité d'objets. Le moyen de désignation est alors étudié pour une autre espèce de grandeur (la masse). Le signe « = » signifie « pèse comme ou autant que» dans le sens de « est pareil que, est équivalent à, sont comme, ça désigne x, ça permet d'atteindre x » du *Jeu des annonces*. Nous reviendrons sur le sujet du passage à l'écrit dans une section ultérieure. D'une manière générale, la notion d'équivalence est intrinsèquement liée à celle de la pratique écrite ou de la pratique orale de désignation d'un même nombre de diverses façons ; elle constitue l'essence même du *Jeu des annonces*.

Nouvel essai de recherche documentaire

Dans cette requête, le mot-clé « addition » apparaît aussi associé au mot-clé « équivalence ». Il est défini comme l'opération qui modélise la composition et qui

[98] Guy Brousseau propose d'enseigner les signes « =, ≠, <, > » de manière *paradygmatique*, les uns par rapport aux autres (Brousseau, 1986, p. 8-9).

permet de produire une somme. L'un des principes forts de cette démarche d'enseignement-apprentissage exploite le fait que la désignation est interprétable dans la composition ou décomposition en sous-ensembles d'objets par le critère de la taille de la collection. La composition ou décomposition de ces sous-ensembles est à l'étude pour les élèves dans le jeu de comparaison. Nous avions énoncé, dans l'analyse *a priori*, que la comparaison de mesures ne passe pas nécessairement par un calcul de la somme et que ce calcul n'est qu'une technique de comparaison parmi d'autres. Par exemple, on peut comparer 2 et 2 + 4 et déclarer que les écritures ne sont pas équivalentes en énonçant que « l'annonce 2 + 4 a 4 de plus que le lancer 2 ». Cependant la technique de calcul de la somme apparaît massivement dans les réalisations effectives. Cela peut venir d'habitudes culturelles prégnantes comme le constatent les professeurs : « la seule chose c'est qu'il y en a qui vont toujours calculer / mais ça fait combien ? ». Dans un jeu à trois mains (modules 3 et 4), dans la plupart des cas, il est plus aisé de comparer deux termes avec un seul (et donc de composer) que de comparer trois termes avec un seul. Par exemple, il est plus difficile de comparer l'annonce 3 + 1 + 2 au lancer 5 que de comparer 5 + 1 (5 étant obtenu par composition des termes 3 + 2) au lancer 5. Mais nous avons de très nombreuses fois observé que les élèves passaient systématiquement par le total de l'annonce, notamment dans les jeux à trois mains, avant le lancer. Certains comptes-rendus en font aussi état. Citons un extrait de l'un d'entre eux dans lequel le contrat didactique installe lui-même ce fait :

> « Je trouve que ça c'est plutôt bien passé.
> Ils annoncent tous leurs doigts *mais «oublient» de relier leur annonce avec ET ou PLUS, et ils n'annoncent pas tous le résultat*.
> Pour annoncer le résultat, certains dénombrent les doigts (même pour 5). Beaucoup essaient d'annoncer sans dénombrer mais se trompent. Certains dénombrent «avec leurs yeux» sans le montrer avec le doigt.
> Ils ont *encore besoin d'entraînement pour le résultat mais le principe du jeu est acquis*.
> L'après-midi, j'ai fait en calcul mental EcAd1 : somme de 3 groupes, le lien est bien arrivé. » (extrait CR Module 3 - 25 octobre 2013)

Nous avons souligné dans l'extrait l'attente du professeur (débutant dans l'ingénierie) qui consiste à donner le total de l'annonce à trois termes pour comparer annonce et

lancer (« ils «oublient» de relier leur annonce avec ET ou PLUS, et ils n'annoncent pas tous le résultat / Ils ont encore besoin d'entraînement pour le résultat mais le principe du jeu est acquis »). Le professeur observe la manière dont les élèves y répondent : le dénombrement un à un. Il ne rend compte que de cette technique et projette une direction de travail (entraîner les élèves à donner le résultat), nous supposons par recours aux résultats mémorisés ou par compositions successives. On est alors ici dans une action conjointe qui n'est plus centrée sur la comparaison et l'expérience de cette comparaison mais sur l'obtention du total pour comparer.

Un autre fait d'enseignement, qui paraît emblématique car il se déroule à l'écrit (séance 3 du module 3 - 14 octobre 2013) montre également la direction de travail donnée aux élèves. Nous le décrivons ci-dessous puis le commentons à la suite.

Pour illustrer ce fait observé, nous avons capturé la photographie ci-dessous lors de la 3ème séance du *Jeu des annonces* du module 3 (jeu à 3 mains et 1 dé, annonce *gagnante si supérieure* au lancer). La séance fait partie du module 3 mais le module 4 est en quelque sorte déjà introduit car l'arbitre est scripteur de la partie.

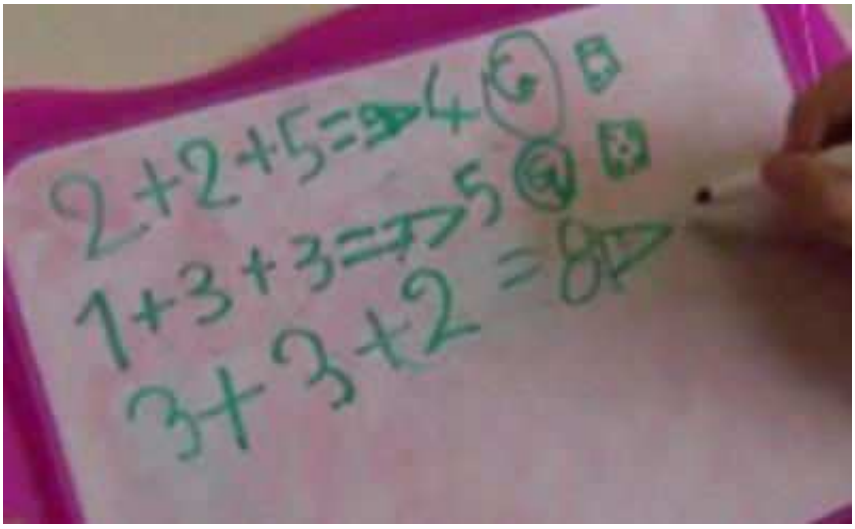


Photo : capture vidéo d'une ardoise d'arbitre lors de la 3ème séance du module 3

Deux parties ont été jouées :

1ère ligne : annonce « 2 + 2 + 5 », total « 9 » et lancer du dé « 4 » pour la première partie.

2ème ligne : annonce « 1 + 3 +3 », total « 7 » et lancer du dé « 5 » pour la seconde partie.

Le lancer du dé est ensuite noté en chiffre (4 pour la première partie, 5 pour la seconde) et sous forme de dessin de la configuration du dé.

Elles sont gagnantes (« G » entouré) car l'annonce est supérieure au lancer ; le signe « > » le dénote.

Dans la 3ème partie du jeu (3ème ligne), les élèves ont annoncé « 3 + 3 + 2 » et l'arbitre a (comme dans les parties précédentes) effectué le total de l'annonce « 8 » avant le lancer du dé. Cette forme de compte-rendu est instituée dans la classe puisque tous les élèves-arbitres produisent le même type d'écrit.
Commentaires : Dans la partie que nous avons visionnée, l'élève-arbitre inscrit immédiatement après la somme de l'annonce, le signe «> » car il *sait* que le total de l'annonce (9 puis 7 puis 8) est plus grand que « 6 ». En cela le sens du jeu est compris (la comparaison est l'objet du jeu) et la stratégie permet le gain (annoncer plus que « 6 »). Dans le jeu tel que pensé dans l'ingénierie, par exemple, annoncer « 3 + 3 » dénote une stratégie efficace car ce résultat connu est équivalent au lancer maximum du dé « 6 ». « 3 + 3 + un autre terme » est donc une partie à coup sûr gagnante (sauf si la 3e main montre « 0 », ce qui serait une prise de risque car les élèves contrôlent l'annonce). C'est ce qui a été joué pour les 2e et 3e parties. *A fortiori* pour la première partie où 5 + 2 est déjà supérieur au lancer maximum du dé. En effectuant d'emblée le total de l'annonce, les élèves se privent d'autres stratégies de comparaison. Le signe « = » dénote ici le total et n'a pas le sens d'équivalence qui est celui utilisé dans le *Jeu des annonces*. Le signe « = » vient donc en supplément se greffer sur le jeu. Les élèves jouent donc à un autre jeu puisqu'ils ont trouvé la stratégie gagnante ; le jeu initial est sans plus d'intérêt. Pour les élèves ne possédant pas encore la stratégie gagnante, le total peut venir occulter d'autres stratégies de comparaison.

Nous allons donc analyser les transactions avec une requête par le mot-clé « addition » afin de comprendre comment la notion d'équivalence est traitée dans le collectif avec ce prisme.

Analyse des transactions

La requête avec le mot-clé « addition » indique onze épisodes tous situés lors de l'année 2 (2012-13). Nous retenons des échanges, lors de cette première année

d'expérimentation à grande échelle, la série épisodique présentée ci-dessous, composée de quatre moments, qui présente les échanges autour du résultat de l'annonce et son rôle dans la comparaison entre annonce et lancer. Les deux premiers moments donnent à voir les présupposés, les pratiques, les questionnements des professeurs et le point de vue du chercheur, le troisième introduit la perspective du changement de variables prévu par la suite de la progression et le quatrième étudie le cas d'une partie qui comporte plus de deux termes dans une situation effective.

Episodes didactiques relatifs à la comparaison et au calcul de la somme Quatre moments Extraits transcriptions ou résumés et descriptions des transactions Réunions du 24 octobre, 21 novembre et 5 décembre 2012 (Année 2)
Premier moment de la série Emp : y a un enfant qui m'a posé la question et qui m'a dit maîtresse *est-ce que je peux mettre égal dans l'annonce pour marquer déjà le résultat pour que je m'en rappelle* c'est-à-dire que euh 3 + 1 + 2 est-ce que je peux écrire la somme il m'a dit est-ce que je peux mettre égal sachant qu'on avait vu déjà les structures additives possibles y a certains je les ai autorisés c'est-à-dire que j'ai autorisé certains enfants à écrire la somme dans la colonne des annonces mais en écrivant d'abord l'addition ChS : ça ne fait pas en rien bien au contraire Emp : au contraire c'est même mieux ChS : d'ailleurs cette disposition en tableau a un inconvénient c'est qu'elle ne permet pas dans la même écriture de *mettre la décomposition et le nombre atteint dans la même expression* […] on voit bien que les élèves anticipent là ils sont dans un état d'anticipation […] pourquoi parce que vous allez en avoir besoin dans le tableau résumé des résultats expérimentaux 3 et 4 c'est la maison du 7 comme 5 et 2 etc. *il va falloir tôt ou tard passer à 3 + 4 = 5 + 2 = 6 + 1 = 1 + 6* = […] l'élève écrit l'écriture mathématique complète ce qui est important c'est *de reformuler par-dessus 3 doigts et 5 doigts désignent le lancer tant ou permet d'atteindre le nombre tant ou correspond à tel lancer* etc. et *surtout pas à ce moment-là pour que l'écriture formelle ne soit pas isolée du sens de la situation qui l'a produite* (TdP589-598) (épisode 1h 49min 33 - 1h 54min 07 – 24 octobre 2012)

Transactions contribuant à :
- s'interroger sur l'usage de la somme de l'annonce dans le jeu de comparaison : pour le professeur (Emp) le résultat sert de mémoire pour faciliter la comparaison puisqu'il n'y a plus qu'un terme à comparer avec le lancer (« le résultat pour que je m'en rappelle »), pour le chercheur, cette écriture permet de mettre en évidence la décomposition et le nombre atteint et commencer ainsi à construire les équivalences (« il va falloir tôt ou tard passer à 3 + 4 = 5 + 2 = 6 + 1 = 1 + 6 = »). Il sert alors à faire fonctionner le modèle ;
- attirer l'importance du langage employé dans la situation et qui doit en décrire son fonctionnement (« reformuler par-dessus 3 doigts et 5 doigts désignent le lancer tant ou permet d'atteindre le nombre tant ou correspond à tel lancer ») ;
- rendre vigilant à ne pas dissocier l'écrit de la situation c'est-à-dire à ne pas utiliser trop précocement les écritures sans passer par un temps suffisant de l'expérience (« surtout pas à ce moment-là pour que l'écriture formelle ne soit pas isolée du sens de la situation qui l'a produite »).

Deuxième moment de la série

Emm : moi ça m'arrive pas souvent de demander le résultat de l'annonce […] c'est très rare que je leur demande alors ça fait combien quand ils en n'ont pas besoin pour regarder si c'est pareil ou pas pareil

Kaa : ben ça dépend on en a besoin pour savoir s'ils ont gagné ou perdu […]

ChS : mais on est dans une expérience (brouhaha) on est dans une période aussi de réglage comment dire d'aller au fond de l'épistémologie de la situation de l'enjeu de la situation *on voit bien qu'on peut le traiter rien qu'avec la situation* il est pas nécessaire toujours de viser ce là où on veut aller là on est bien c'est-à-dire le code numérique sous la forme la plus condensée un nombre ça peut se désigner on travaille là-dessus de plein de façons et plein de façons avec deux termes avec trois termes mais aussi qu'on peut jouer sur le nombre de termes *c'est-à-dire qu'on va pouvoir réduire augmenter et c'est ça c'est celle qui arrive qui est derrière* […]

Reg : on leur donne une idée du sens de l'écriture dans le cas de 3 + 4 + 1 on doit privilégier le 3 + 4 qui donnent 7 et après euh 7 + 1

ChS : tu dois avoir des gamins qui utilisent une propriété de façon je dirais presque silencieuse euh si tous les termes de l'annonce A sont plus grands que l'annonce B c'est même pas la peine de chercher à faire le calcul 1 + 0 + 2 ça sera systématiquement plus petit que 3 + 3 + 3 c'est une technique de comparaison intéressante quand tous les termes sont plus importants le nombre est plus grand je vous rappelle que c'est une

connaissance inscrite dans le code numérique en base 10 comparer deux nombres on commence par comparer la puissance la plus élevée […]
PE : c'est toujours enseigné comme ça
ChS : c'est une technique et c'est quoi ça quand tu as tous les termes qui sont plus grands quand tous les termes sont plus grands et ben il va désigner un nombre plus grand vous comprenez un peu *des techniques qui peuvent apparaître donc là en l'occurrence on n'a pas besoin de calculer* (2.) oui
Kaa : ben moi justement j'ai une question par rapport à ça je suis d'accord enfin je comprends bien on n'a pas besoin de calculer
ChS : toujours
Kaa : que 3 + 2 + 1 c'est pas égal à 2 parce que
Emm : 3 + 2 + 1 on voit bien que le dé c'est 2 et que dans l'écriture et ben y a d'autres nombres donc c'est pas la peine donc c'est plus grand
Kaa : mais pour savoir que c'est égal à 6 je vois pas comment faire sinon […]
Nad : tu vois pour l'égalité justement c'est quelque chose qui pose problème l'égalité entre le tirage du dé et l'annonce et là je trouve du coup le schéma ligné il permet de représenter là ce pareil oui *mais ce pareil il pose problème aussi* parce que le dé il va y avoir par exemple qu'un seul bond le voilà et il y a plusieurs bonds pour (inaudible) qui vont faire le 6 par exemple (TdP310-359)
[…]
Emm : ah oui je compte plus rien pratiquement ça fait plus partie du tout de ma manière de :: mais parce que peut-être j'avais ce défaut-là avant de manière trop excessive alors du coup euh mais l'année dernière c'était en permanence quoi et combien ça fait 3 + 5 eh ben tu poses 5 et tu surcomptes le surcomptage ça c'était :: […]
ChS : entendons-nous *bien ça sollicite d'autres techniques que celles que l'on sollicite habituellement* mais on n'est pas dans un jugement de valeur de ce qu'on fait hein on dit on faisait pas mal et mieux maintenant on fait différemment hein […]
Emm : j'aurais jamais imaginé qu'on était capable de faire tout ça sans avoir recours forcément à une comparaison de deux nombres écrits sous la forme conventionnelle […] *ça remet en question pas des défauts mais des choses qu'on avait intégrées* et qui étaient (inaudible) un réflexe en fait on était conditionné dans un moule et là on se rend compte qu'on peut aller plus loin on peut faire apprendre en faisant des choses et être en expérimentation avec eux c'est-à-dire qu'on avance aussi avec eux (TdP389-409)
(épisodes 1h 03min 43 – 1h 11min 43 et 1h 13min 47 – 1h 18min 09 – 21 novembre 2012)

Transactions contribuant à :
- s'interroger sur la place du calcul de la somme dans le jeu de comparaison et des effets produits par ce calcul ;
- donner à voir ses conceptions et les différentes techniques de comparaison ;
- prendre en compte la situation effective dans le jeu de comparaison et le rôle du schéma-ligne dans la comparaison en ce qui concerne le nombre et la valeur des termes ;
- faire un parallèle entre les techniques pour comparer qui seront utilisées dans le *Jeu des annonces* dans son développement ultérieur (« on va pouvoir réduire augmenter et c'est ça c'est celle qui arrive qui est derrière ») avec les techniques usuelles (comparer la plus grande puissance) ;
- prendre conscience que la procédure de calcul relève trop souvent du conditionnement alors qu'elle devrait être une stratégie au service du jeu de comparaison.

Troisième moment de la série

ChS : la question que tu posais j'ai pas oublié en fait est-ce que c'est gênant que les élèves calculent

Emp : pour moi non au contraire

ChS : alors évidemment non c'est pas gênant pourquoi ça serait gênant ils ont des techniques qui répondent à la question et la situation permet de construire des techniques *est-ce que cette technique est viable pour l'ensemble et bien si tu mets vingt termes tu vas saturer les possibilités de calcul* autrement dit *la situation propose organiquement la mise à l'épreuve des techniques des élèves pour en construire d'autres la difficulté va être laquelle*↑ […]

Emm : la seule chose c'est qu'il y en a qui vont toujours calculer et il va falloir leur dire mais est-ce que tu es sûr de ton calcul↑

ChS : justifier de

Emm : et moi j'en ai qui vont tenir tête et qui vont dire mais si je suis sûr que c'est la bonne méthode et si je calcule tout euh

ChS : si je calcule euh tu peux le faire fais-le je pense que là il faut être très clair aussi on a les moyens comment dire y aura pour l'élève très rapidement un calcul de groupes à effectuer sur la technique que j'ai *alors les calculs et en quoi ce serait gênant puisqu'on a construit des répertoires* où on sait que 4 + 2 + 3 ça fait 9 et si je sais que 4 + 2 + 3 ça fait 9 et qu'on me dit + 1 10 je dis 10 comment ben j'ai fait la *somme tu peux faire la somme et on voit bien que la désignation écrite autorise le calcul* ah tu peux le faire avec 3 termes tu peux le faire avec 8 termes↑ et si tu mets un 0↑ comment ça joue cette affaire-

là hein n'oublions pas aussi j'ai entendu parler tout à l'heure d'associativité de commutativité n'oublions pas non plus que si algébriquement 4 + 1 c'est égal à 1 + 4 en calcul rappelez-vous dans la situation ça pas nécessairement le même sens […] *la sollicitation de l'écriture symbolique elle doit prendre un sens dans la situation* et *ce que l'on va traiter du point de vue du calcul effectivement pour les élèves ça peut être difficile le fait d'avoir plus cette contrainte de la situation* […] les élèves construisent des techniques qui sont certaines au contraire il faut montrer que vous vous rendez compte que ça fait deux mois et demi qu'ils sont avec la même situation *il faut que ça soit productif pour eux* […] avec la même écriture symbolique tu pouvais faire le calcul bon mais si tu restes au calcul ça marche pas mais *est-ce que à partir de l'écriture additive tu peux produire autre chose* […] c'est ce moment-là qui est *délicat en fait dans la situation pour celui qui doit diriger cette étude-là* (TdP156-170)
(épisodes 48min 02 – 54min 56 – 5 décembre 2012)

Transactions contribuant à :
- montrer que le calcul du résultat pour comparer annonce et lancer peut être efficace sur deux ou trois termes voire un peu plus pour les bons calculateurs mais que cette procédure est sujette à erreurs si le nombre de termes devient plus important (« si tu mets vingt termes tu vas saturer les possibilités de calcul ») ;
- engager une réflexion sur la suite de la progression qui envisage une évolution de la situation didactique avec plus de termes et que cette évolution est conçue pour provoquer une rupture (un saut informationnel) permettant de remettre en question les techniques construites sans pour autant les disqualifier (« la situation propose organiquement la mise à l'épreuve des techniques des élèves pour en construire d'autres ») ;
- discuter le fait que le calcul pourra toujours s'effectuer car la désignation écrite l'autorise mais que d'autres techniques plus efficaces (parce qu'elles disent « quelque chose d'autre » de l'expression considérée) peuvent le remplacer (« est-ce que à partir de l'écriture additive tu peux produire autre chose ») ;
- comprendre que la direction de l'étude des élèves va devoir accompagner ce passage d'une situation où il y a une forte référence à la situation vers une situation où le travail peut mieux s'effectuer sur des symboles qui autorisent d'autres manipulations, parce que ces symboles produisent une autre représentation de l'expression initiale (« la sollicitation de l'écriture symbolique elle doit prendre un sens dans la situation »).

Quatrième moment de la série

Cet épisode se situe en parallèle avec le visionnage d'un extrait de séquence en classe où le jeu *Lancers et sommes* (Module 6 bis) a été mis en œuvre le 4 décembre, veille de la réunion. C'est la première fois que la situation est jouée dans une classe. Il s'agit de comparer 5 + 5 + 1 et 4 + 5 + 1 + 6 dans une quatrième partie, les trois premières n'ayant pas soulevé de difficultés de comparaison chez les élèves. Dans cette quatrième partie, une des stratégies que l'on aimerait voir en œuvre est celle de rendre des termes identiques. Le professeur qui a mené la séquence s'interroge :

Agn : donc on a 11 et on a 16 et ils calculent là et je pataugeais là *à essayer de faire regrouper ou calculer à l'intérieur des termes* quoi j'y arrivais pas quoi (TdP410)

Des propositions sont émises par les autres professeurs : barrer les termes identiques puis comparer les termes restants (5 et 4 + 6), s'appuyer sur les propositions des élèves plus avancés, rajouter plus de termes, repérer des termes identiques et grouper pour fabriquer des termes identiques (proposition du professeur de la classe d'étude) […]

Reg : moi c'est la stratégie qui m'interpelle quand ils barrent d'un côté comme de l'autre le 4 quelque part quand tu barres ça veut dire qu'il existe pas or il existe bien (brouhaha)

Emm : moi je fais rien c'est lui [l'élève] qui le fait il le fait sur son ardoise il barre un coup

Reg : lui il a pigé mais ceux qui le voient barrer ils peuvent se dire d'accord mais quoi

Emm : ben moi je m'empare de ça en fait et je montre avec les doigts voilà y a un 4 ici et un 4 là voilà je montre

ChS : y a plusieurs interprétations possibles

Reg : (inaudible) de part et d'autre ben on peut pas dire finalement qu'ils s'annulent on peut dire qu'ils comptent pas trop pour pouvoir réussir à se centrer sur les autres (TdP529-534) […]

Le groupe se remet alors à visionner la vidéo, dans laquelle l'observateur indique une piste au professeur et aux élèves : « dans l'annonce 5 + 5 + 1 il y a des 5 et dans l'autre annonce combien il y a de 5↑ » ; les élèves répondent « un » ; l'observateur reprend : « et il n'y en a pas d'autres de 5 qu'on peut faire↑ » ; un élève trouve qu'on peut grouper 4 + 1 ; l'annonce devient 5 + 5 + 6 à comparer avec 5 + 5 + 1. Une réduction de termes a été réalisée pour rendre le plus de termes identiques […]

ChS : y a un moment où il faut signifier au groupe où il est productif de signifier au groupe qu'il y a des connaissances qu'il possède et qui peuvent être utilisées à ce moment-là […] donc on sait des choses sur les écritures la réflexion elle se fait pas sur les lancers en partie elle se fait sur les écritures est-ce qu'il y a un moyen de pouvoir désigner de façon proche de façon similaire de se rapprocher de cette désignation ou pas […] tu [Agn] es le gardien de la mémoire de ce qui a été travaillé des connaissances qui ont été construites

et des sollicitations que tu peux faire de façon intéressante productive là elle s'empare de quelle variable-là↑ réduction du nombre de termes pour comparer est-ce que c'est productif↑ (TdP556) […] c'est-à-dire avoir un nombre à l'état usuel 6 par exemple savoir que tu peux le dégrouper et le redégrouper pour le regrouper d'une autre façon intéressante pour faire apparaître dans un terme la valeur qui nous intéresse 4 5 etc. c'est pas spontané il faut le travailler il faut vraiment le travailler (TdP575)
Des propositions des professeurs sur d'autres stratégies possibles à mettre en œuvre sur cet exemple sont alors faites (chercher des 6 ou des 10 dans les deux écritures)
(épisodes 1h 46min 37 – 2h 21min 04 - 5 décembre 2012)

Transactions contribuant à :
- relater une expérience de première mise en œuvre de la situation *Lancers et sommes* où l'intention du professeur est d'amener la classe à développer une autre stratégie que celle du calcul du total (la vidéo montre que très peu de ses élèves utilisent cette « autre stratégie » pour comparer les lancers, que certains proposent des résultats faux pour 4 + 5 + 1 + 6 et que le reste de la classe ne produit rien) ;
- proposer des pistes pour développer d'autres stratégies et montrer ainsi que le contrat change : il revient maintenant à travailler sur les nombres pour faciliter la comparaison ;
- discuter d'une stratégie (celle de barrer les termes identiques ou rendus identiques) pouvant constituer des obstacles pour certains élèves ;
- mettre au jour une stratégie : réduire des termes à l'aide de connaissances déjà construites de manière à rendre identique le plus possible les deux écritures additives par des techniques de composition et décomposition (« le dégrouper et le redégrouper pour le regrouper d'une autre façon intéressante pour faire apparaître dans un terme la valeur qui nous intéresse ») ;
- indiquer des directions de travail possible : signifier que les connaissances acquises par le groupe classe sont à utiliser (« il est productif de signifier au groupe qu'il y a des connaissances qu'il possède et qui peuvent être utilisées à ce moment-là ») ou solliciter la mémoire didactique de la classe (« tu es le gardien de la mémoire de ce qui a été travaillé des connaissances qui ont été construites ») de manière à diriger l'étude des élèves («des sollicitations que tu peux faire de façon intéressante productive ») ;
- trouver d'autres stratégies de regroupement : chercher des « 6 » (5 + 5 + 1 et 4 + 5 + 1 + 6 donnent 5 + 6 à comparer à 4 + 6 + 6) ou des « 10 » (5 + 5 + 1 et 4 + 5 + 1 + 6 donnent 10 + 1 à comparer à 10 + 5 + 1).

Cette série épisodique montre le travail du groupe sur la nécessité et le rôle du calcul dans le jeu de comparaison entre deux écritures additives. La question qui traverse les échanges est celle de l'articulation entre le calcul et la mise en œuvre de stratégies de comparaison, dans des jeux de comparaison fictifs puis dans un jeu de comparaison effectif (mis en place dans une classe). Cela conduit en fait à discuter la signification que prend le signe « = ». Ce signe fait appel à la notion d'équivalence dans le style de pensée de l'ingénierie, d'autant plus que le travail dans ce modèle nécessite des moyens de contrôle pour la comparaison, par la connaissance et la maîtrise des répertoires additifs par exemple.

Au début des échanges, le signe « = » est identifié comme pouvant indiquer le nombre à atteindre dans le jeu d'ingénierie rapporté au premier moment. Le nombre à atteindre joue un rôle de mémoire dans le jeu de comparaison et fait appel aux connaissances des répertoires ou à des calculs de la somme quand plus de deux termes sont concernés (par exemple pour comparer 3 + 2 + 1 et 5). Dans ce cas, il est associé à une technique de comparaison qui permet de mémoriser la mesure de quantités et de comparer un nombre plus grand à un nombre plus petit. Durant ce même moment, le chercheur oriente la discussion et indique que le signe peut jouer le rôle d'indicateur des décompositions possibles. Dans ce cas, l'écriture et la lecture devraient s'opérer dans le sens a = b + c (« 7 comme 5 et 2 »). D'autres techniques de comparaisons qui ne s'appuient pas sur le total sont alors proposées et enrichissent la palette des stratégies possibles (« 3 + 2 + 1 on voit bien que le dé c'est 2 et que dans l'écriture et ben y a d'autres nombres donc c'est pas la peine [de faire le total] donc c'est plus grand »). Elles s'accompagnent d'une prise de conscience du professeur Emm d'une habitude quasi mécanique du calcul du total dans les jeux de comparaison qui n'est pas interrogée dans les pratiques usuelles.

Le chercheur attire l'attention sur le passage qui va se réaliser au cours de la progression entre le jeu dans la situation réelle des annonces et le jeu dans une situation à l'aide des nombres. Cette transformation du jeu est mise en évidence par le saut informationnel prévu dans l'évolution de la situation didactique (« si tu mets vingt termes tu vas saturer les possibilités de calcul » ; « la situation propose organiquement la mise à l'épreuve des techniques des élèves pour en construire

d'autres »). En effet, à la suite du module 6[99], on ne jouera plus avec deux ou trois termes mais avec beaucoup plus de termes. Cela engagera un plus grand nombre de possibles au niveau des stratégies de comparaisons donc au niveau également des techniques de compositions / décompositions. Insistons sur le fait que la nature du contrat change parce que le milieu change. Il s'agit, dans le nouveau contrat-milieu, d'un travail dans le modèle de l'équivalence entre écritures additives. Le recours au calcul par les élèves est un indice de volonté de contrôle de ces nouveaux objets (que sont les désignations additives plus longues, comportant plus de termes). Mais ce contrôle est plus difficilement réalisable si l'on restreint la stratégie au calcul de la somme. Pour jouer au sein de ce nouveau contrat-milieu, une interprétation de la situation est nécessaire ; elle engage l'utilisation simultanée de formes symboliques et de formes langagières. Cette pratique n'est pas courante à ce niveau de classe et elle nécessite justement une action décisive du professeur sur le jeu de l'élève, comme par exemple celle de la réduction des écritures en termes identiques discutée dans le quatrième moment de la série épisodique. L'action effective ayant été « bloquée » (« je patauge ais là / ils savaient pas où je voulais en venir » - Agn – TdP410 et 423), la question qui est posée au groupe est : comment réagir pour permettre à des élèves ne maîtrisant pas les calculs complexes (par exemple additionner par des regroupements successifs 4 + 5 + 1 + 6) de réussir à comparer 5 + 5 + 1 et 4 + 5 + 1 + 6 ? Ce quatrième moment montre les professeurs proposant et commentant les pistes de mises en œuvre. En cela, ce qu'on pourrait nommer un « jeu de projection » de propositions plausibles, se met en place car le chercheur arrête la vidéo de classe avant l'action effective filmée. Nous reviendrons sur l'exploration collective de la technique de composition /décomposition dans la section suivante car elle est liée à l'écrit et à son rôle dans l'enquête mathématique sur les nombres et leurs relations que les élèves ont à mener.

Dans cette série épisodique, nous avons pu mettre au jour le travail collectif autour des sens du signe « = » et de son orientation dans l'écriture, après ou avant l'écriture additive. Par exemple 2 + 5 = 7 pour signifier que 2 et 5 font 7 ou 7 = 2 + 5 pour

[99] A la suite du module 6 sera mis en place le module 6 bis (qui correspond au jeu *Lancers et sommes* décrit antérieurement) au sein des classes provençales lors de la première année d'expérimentation à grande échelle (2012-13). Ce module 6 bis deviendra lors de la deuxième année d'expérimentation à grande échelle (2013-14) le module 8.

signifier que 7 peut se décomposer en 2 et 5 et que l'on peut utiliser un de ces termes pour réaliser une composition avec un autre terme. Nous considérons que ce travail collectif réalisé lors de la seconde année (et première année d'expérimentation à grande échelle en 2012-13), est une *expérience pour le groupe* à ce moment-là du dispositif. Mais cette expérience a mis plus de temps pour diffuser lors de la troisième année (2013-14) comme le montrent les observations réalisées et rapportées au début de cette section : le calcul de la somme reste la technique principale utilisée et instituée au cours des mises en œuvre des premiers modules ; le signe « = » indiquant l'action à réaliser, en l'occurrence effectuer le total.

Nous retrouvons, au cours de cette même année (2013-14), le même type de transactions que celles jouées lors du quatrième moment de la série épisodique ci-dessus lors d'échanges sur le module 10 qui est à venir. Nous rapportons ci-dessous un échange qui a lieu durant un travail du collectif à partir du compte-rendu du professeur de la classe d'étude qui a joué de manière anticipée ce module. Dans le module 10, la situation didactique vise à la recherche d'un nombre inconnu au sein d'une équivalence (par exemple 17 + 12 + 19 = 12 + 15 + x). Nous avons aussi observé que les élèves ont recours au calcul de la somme, ce qui les met aussi parfois en difficulté. A ce moment-là de l'année (16 avril 2014), le professeur de la classe d'étude propose des techniques variées, susceptibles d'être produites par les élèves et faisant appel aux techniques travaillées (composition / décomposition, « contenu dans »), pour trouver le nombre inconnu. Le chercheur se rend alors compte au cours du compte-rendu de la séance effective de la classe d'étude de l'absence d'une question explicite posée aux élèves :

> « pour que ce soit un signe d'équivalence il faut que ça corresponde à une question […] si vous l'écrivez comme ça / "quel nombre faut-il ajouter à 12 + 15 pour obtenir 17 + 12 + 19 ?" / vous voyez bien que vous êtes obligés de COMPARER les deux écritures / si vous le comparez avec un signe égal / c'est un signe d'équivalence / c'est plus un signe de calcul / y a plus de doutes / seulement il faut écrire l'énoncé en entier » (ChA – TdP 28 – réunion du 16 avril 2014).

Il reconstruit alors *a posteriori* ce qui serait un point aveugle de la mise en œuvre :

> « l'idée qu'on avait au départ / le type de travail qu'on propose là / est un travail de type algébrique / c'est-à-dire que il ne s'agit jamais de calculer mais d'écrire

autrement un nombre / et depuis le début écrire que 7 + 2 à la place de 9 dans le jeu des annonces par exemple / c'est un travail qui permet d'écrire le nombre 9 par une addition / donc il se traduit pas avec une égalité par 7 + 2 = 9 plus que par 9 = 7 + 2 / c'est deux écritures équivalentes / c'est-à-dire que normalement / *si le travail avec les élèves est fait avec ça en tête pour les professeurs depuis le début de l'année / y a pas de problème pour les élèves / le signe égal est un signe d'équivalence* (1.) la réalité c'est que c'est pas vrai↓ […] ça fonctionne pas comme un signe d'équivalence la plupart du temps / ou plutôt quand ça fonctionne comme un signe d'équivalence on le dit pas / et quand ça fonctionne comme un signe qui demande un résultat là on le dit […] le changement que vous propose le dispositif d'enseignement qui est là est un changement finalement beaucoup plus important que ce qu'on imaginerait / parce que il suppose que *vous regardiez comme un travail d'écriture algébrique l'écriture des nombres / et que finalement 19 c'est une écriture comme 12 + 7 du nombre 19 / alors cette chose-là est plus ou moins bien installée depuis le début /* on a par exemple pas osé / on n'est pas allé jusqu'à dire que c'était deux écritures du nombre […] ou alors on désigne de deux façons différentes (2.) mais on n'a pas donné un nom à cette désignation […] *on aurait dû dire un nom du nombre ou son écriture* (1.) l'écriture du nombre (2.) on n'a pas dit l'écriture du nombre ou le nom du nombre / on a dit ça désigne le nombre / mais le nombre qui est désigné c'est quoi↑ c'est 19 […] alors 12 + 7 ça désigne 19 donc le signe égal il est orienté / c'est pas une équivalence / c'est pas 19 qui désigne 12 + 7 / c'est 12 + 7 qui désigne 19 / et voyez comment des choses que l'on ne voit pas quand on le met en place vous reviennent par le fait que les élèves l'interprètent / bien sûr alors ils l'interprètent pas explicitement / mais en pratique / et dans leurs comportements / ils l'interprètent et *finalement le signe égal est devenu comme d'habitude / un signe qui dit à gauche j'ai la question / à droite j'ai le résultat »* (ChA – TdP 26-41 – réunion du 16 avril 2014)

Selon le chercheur ChA, il est nécessaire de formuler explicitement qu'il y a une situation d'équivalence dans la situation didactique : « quand ça fonctionne comme un signe d'équivalence on le dit pas ». En ce qui concerne les modules relatifs au *Jeu des annonces*, dire qu'un même nombre s'exprime de manière différente ou que 19 est le *nom du nombre* au même titre que 17 + 2 ou 16 + 3 etc., ce qui se traduit à l'écrit par 19 = 17 + 2, etc. aussi bien que par 17 + 2 = 19, etc. Ces assertions sont, bien sûr,

énoncées à plusieurs reprises dans le document support de l'ingénierie et ont aussi été abordées à d'autres moments lors des réunions. Cependant, le travail d'adéquation des notions au jeu didactique, ici de comparaison, est à actualiser au sein du collectif au fil de la progression, des modules et des années de mises en œuvre. Il s'agit donc de repérer collectivement les moments où c'est le résultat du calcul (en tant que technique) qui est attendu et les moments dans la situation didactique où l'équivalence entre en jeu (et le formuler pour qu'elle entre en jeu). Par exemple par des énoncés comme : « quel nombre faut-il ajouter à 12 + 15 pour obtenir 17 + 12 + 19 » pour le module 10. Un tel énoncé peut ainsi jouer sur une certaine dialectique expression-réticence qui permet d'orienter l'enquête des élèves dans l'équivalence.

Question relative à l'écrit et à son rôle dans un *temps de situation*

L'introduction et la place de l'écrit dans la progression du *Jeu des annonces* ont été des enjeux discutés par la sphère 1 dès le début des tests de mise en œuvre de la situation didactique dans les classes d'étude la première année (2011-12). En effet, la progression vise à faire éprouver aux élèves la nécessité de l'économie de l'usage d'un code écrit qui correspond aux raisons d'être du système numérique décimal. L'hypothèse générale postule que dès qu'il y a nécessité de traiter les annonces, les conditions pour le passage à l'écrit peuvent être installées. La sphère 1 du collectif avait constaté dès les premières mises en œuvre dans les classes d'étude et les premières réunions en visioconférence d'octobre 2011 à fin janvier 2012 que le passage à l'écrit pouvait induire une didactisation trop précoce de la situation. Cette didactisation irait à l'encontre d'une démarche d'enquête des élèves dans cette conquête des raisons d'être du code numéral écrit. La sphère 1 avait établi une progression alternant phases de jeu et phases d'écrit. Ces phases ont été réparties sur un temps long (modules 1 à 6 étalés sur le premier trimestre de l'année scolaire du CP) afin de favoriser des expériences des mesures. En effet, l'écrit est d'abord vu comme expression de la mesure de la quantité sous diverses formes de représentations symboliques (écriture additive, désignation conventionnelle, schéma-ligne, boîte) avant d'être aussi un moyen technique pour décrire une situation et procéder à des manipulations dans cette situation. L'écrit est donc présent dans toutes les classes de problèmes que les élèves ont à rencontrer (désigner une collection par

la mesure de sa grandeur, décrire la mesure de la grandeur, représenter la mesure d'une collection, comparer des mesures de grandeurs, valider et justifier une comparaison). Il est donc largement abordé lors des réunions du collectif. A partir de quels faits est-il abordé et que produisent les échanges ?

Premiers essais de recherche documentaire

Dans une demande de requête au logiciel *Transana* avec le mot-clé « écrit », le rapport de la collection mentionne assez peu d'épisodes (treize épisodes) au regard de ce qui a été énoncé précédemment. En effet, le mot-clé « écrit » est défini plus spécifiquement comme les traces de la réflexion et de la stratégie mise en œuvre, autrement dit comme un compte-rendu de l'expérience de manipulation avec les nombres. Il n'est donc pas surprenant que les épisodes correspondants apparaissent au moment où le module 6 bis (situation *Lancers et sommes* décrite antérieurement) est (ou va être) mis en œuvre. C'est à cette étape-là que le travail de comparaison d'annonces à plus de deux termes nécessite une manipulation de ces termes ; ce travail commençant même à apparaître au cours du module 6. Nous l'avions évoqué dans la section précédente lorsqu'il s'agissait de comparer deux écritures qui correspondent dans le jeu à deux lancers 5 + 5 + 1 et 4 + 5 + 1 + 6. Une des stratégies enseignées (le calcul du total n'étant pas toujours à la portée de tous les élèves à ce moment de l'année) est de rendre des termes identiques au moyen de techniques de composition / décomposition. Nous retrouvons alors dans ces épisodes les raisons de l'introduction de ce module 6 bis et ses raisons d'être qui sont présentées par le chercheur ChS :

> « comme on avait observé dans les classes un certain nombre de faits par rapport aux pratiques des élèves[100] / il nous a semblé opportun de l'[module 6 bis] introduire dans le dispositif / et de le faire fonctionner dans les classes […] l'idée qui est derrière cette situation c'est de vraiment installer pour tout le

[100] Cf. le courriel du chercheur ChS du 1er décembre 2012 relaté antérieurement : « A partir des observations à Marseille, il me semble très important de rester dans le temps de situation des annonces [avec la situation proposée *Lancers et sommes* jointe] au moyen des écritures additives et que les élèves, mêmes les moins avancés, soient rompus à l'exercice de désignation et comparaison de nombres sous formes additives les plus complexes et longues possibles ».

monde la désignation sous la forme de somme et la manipulation de l'écrit avec des techniques / d'instrumenter les élèves pour en faire tous les usages qu'ils connaissent ou qu'ils ont appris à développer dans le jeu des annonces » (ChS - TdP1-4 – réunion du 5 décembre 2012 – année 2, première année d'expérimentation à grande échelle)

« on va vraiment dans l'écriture et c'est ça / on est vraiment maintenant désormais dans l'écriture / on va utiliser des capacités techniques développées précédemment pour comparer » (ChS - TdP215 – réunion du 27 novembre 2013 – année 3)

« on n'étudie plus les scores mais *on étudie l'écrit* / on va les comparer / on va voir dans quelles mesures on retrouve des quantités identiques écrites sous différentes formes / et *c'est ça qui change la nature du travail* […] le travail change de nature / les élèves doivent maintenant étudier les formes écrites de l'expression de la quantité et non plus faire l'expérience de comment on produit cette quantité / nécessitant pour le coup patiemment de construire de nouvelles techniques et de nouveaux rapports à l'écrit sur le jeu des annonces / ça change donc de forme vous voyez bien la bifurcation↑ […] c'est ici que les élèves entrent de plein pied dans l'espace des signes mathématiques / ils ont étudié / je dirais de manière parallèle / l'écrit avec des signes / lettres / nombres de façon un peu confuse / je dirais depuis la moyenne section grande section et début de cp / là les signes qui vont être employés de manière mathématiques les combinaisons que l'on va devoir faire sont d'une autre nature que celles qu'ils ont rencontrés avec les mots […] l'élève a besoin des traces de ces modifications parce qu'elles vont lui permettre de comprendre la constitution du décimal positionnel / le fait que l'on puisse agrandir ou réduire des informations c'est l'essence du décimal positionnel / la valeur exprimée par le chiffre dans le rang » (ChS - TdP1-6 – réunion du 4 février 2015 – année 4)

Le chercheur indique que l'écrit est associé au changement d'orientation didactique dans la progression et au changement de la nature de l'écrit dans les situations. Dans ce module, l'élève devient « étudiant » de l'écrit en mathématique (et en particulier du système numérique décimal positionnel). Il n'est plus seulement producteur d'une expression de la quantité. Cette étude va susciter des questions de la part des élèves que le professeur va devoir porter. Les écrits sont le compte-rendu de cette activité ; le professeur étant amené à diriger cette recherche et non plus seulement à diriger

l'expérience de production. Nous venons de voir que l'un des premiers jeux du chercheur sur les professeurs est d'annoncer cette hypothèse ingénierique et de la présenter. Comment ce changement sera-t-il travaillé au sein du collectif ?

Le rapport de la collection *Transana* montre que le mot-clé « stratégie » (défini comme la stratégie de résolution dans une situation, par exemple une technique de comparaison adéquate aux données de la situation) est aussi associé au mot-clé « écrit ». A cette étape de l'avancée du groupe en lien avec la progression, plusieurs épisodes concernent des échanges à propos de stratégies utilisées en situation effective. Ces stratégies relèvent de techniques de calcul du total ou de comparaison de termes *rendus* identiques. Ce sont les chercheur, professeur de la classe d'étude, doctorant-observateur (c'est-à-dire les personnes ayant participé à la sphère 1 qui a anticipé la mise en œuvre) qui proposent les stratégies par comparaison de termes rendus identiques grâce aux techniques de composition / décomposition. Nous reparlerons plus en détails des échanges autour de ces techniques. Certains professeurs relèvent l'importance de l'observation des termes, observation qui précède le travail de comparaison proprement dit. Ils mettent ainsi en valeur une des conditions nécessaires à la comparaison. D'autres épisodes montrent les professeurs en train de les éprouver par eux-mêmes dans des jeux de mise à l'épreuve mathématique proposés par le chercheur. Celui-ci récapitulera ainsi le rôle de l'écrit dans la réalisation de ces stratégies :

> « quand tu dis j'enlève [des termes annulés par l'équivalence] / quand tu dis je regroupe [des termes] / tout ça ça te permet de / parce que c'est écrit / c'est-à-dire que tu l'as enlevé mais que ça reste / le fait que tu l'as enlevé mais que ça reste / c'est rendu possible parce que c'est écrit pour ce travail / une des difficultés majeures c'est que on doit travailler dans les écritures / avec les écritures […] les élèves ils vont travailler dans l'écrit / avec l'écrit / et une des difficultés qu'il y a c'est qu'à un moment l'écriture n'est plus la même / mais désigne la même chose / c'est-à-dire que l'écriture est transformée / il faut accepter de la transformer / et on la transforme / on s'autorise à le faire parce que ça ne change rien dans le fond » (ChS - TdP292 - réunion du 27 novembre 2013 – année 3)

L'écrit rend explicite les procédures, met en relation les différentes étapes de la réflexion, ce qui en permet le contrôle. En effet, les termes dans les écritures se

modifient en se groupant ou dégroupant. Les élèves doivent comprendre que chaque écriture est équivalente à la précédente, qu'elle en conserve la mesure de la quantité. Nous présentons ci-dessous, pour illustrer notre propos, un exemple de production d'élève au cours du module 6 bis.

Sur la photo apparaissent, en haut, le schéma-ligne relatif à la partie jouée[101] et, en-dessous, le travail sur les écritures additives.

Il s'agit de comparer une annonce « A » à quatre termes (4 + 3 + 2 + 4) et un lancer « L » à deux termes (6 + 6) : quel est le score le plus grand ? et de combien ?

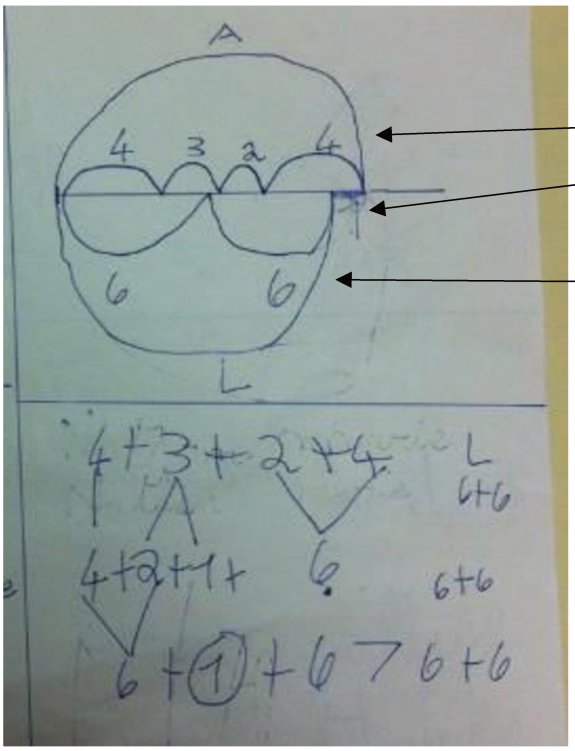


Schéma-ligne :
Annonce « 4 + 3 + 2 + 4 »
Différence entre l'annonce et le lancer
Lancer « 6 + 6 »

Travail de composition / décomposition sur l'écriture additive de l'annonce

Production d'élève pour le module 6 bis

Le schéma-ligne a été d'abord produit collectivement et l'élève l'a recopié.

Il est ensuite demandé de combien l'annonce est la plus grande. L'ordre de grandeur de cette différence peut-être visualisé sur le schéma-ligne : c'est un « petit écart » entre annonce et lancer (le « 1 » a été ajouté postérieurement).

Pour trouver la différence entre les deux scores, on peut observer que le travail se réalise dans les écritures. Le total n'est jamais indiqué ni sur le schéma, ni dans les écritures mathématiques. L'élève cherche à rendre les termes identiques et la stratégie choisie est de « fabriquer » des « 6 », comme pour le lancer. Pour cela, la technique est de

[101] Pour faire du jeu, le nombre de termes a été obtenu par tirage d'une carte.

dégrouper le « 3 » en « 2 + 1 » afin de faire apparaître un « 2 ». Ce « 2 », groupé au « 4 » existant, composera un « 6 » tandis que les deux derniers termes de l'annonce « 2 + 4 » sont composés en « 6 ». La comparaison entre l'écriture transformée « 6 + 6 + 1 » et l'écriture « 6 + 6 » du lancer est aisée et fait voir le « 1 » d'écart. Composition / décomposition sont donc ici utilisées de manière dialectique.

Mais ce qui nous intéresse est de comprendre comment est travaillé, au sein du collectif professeurs / chercheurs, la mise en œuvre de cette étape cruciale de l'écrit dans la progression de l'ingénierie, c'est-à-dire quels sont les faits didactiques effectifs ou les questionnements qui ont permis le travail collectif. Pour cela une nouvelle requête est nécessaire.

Poursuite de recherche documentaire

Les mots-clés « expérimentation », « référence », « composition », « décomposition », « technique de composition / décomposition », « saut informationnel », « journal du nombre » ont été essayés tour à tour, associés ou pas au mot-clé « écrit ». Mais nous n'avons pas pu dégager une série épisodique qui rendrait compte de ce travail collectif. Il y a là pour nous une des « limites » de l'instrumentation qui est fortement liée au découpage des épisodes et à leur annotation par mots-clés. En effet, dans le flot des échanges, les éléments pertinents regardés sur des temps longs (sur une réunion de trois heures voire plusieurs réunions ayant lieu parfois à plus d'un mois d'écart) n'apparaissent qu'en fonction de la question que nous nous posons. Cette question n'est pas posée dans le même temps que celui de l'annotation qui est plus liée au regard que l'on porte sur l'épisode et à l'action effective qui s'y déroule. Des mots-clés peuvent alors être ajoutés *a posteriori*, ou leur définition modifiée, mais il nous semble que l'annotation au plus près de l'action effective est à conserver.

La recherche a dû se réaliser « à la main » en regroupant certains des épisodes (glanés dans les tableaux synoptiques qui présentent le découpage en épisodes de chacune des réunions) et qui constituaient, pour nous, une série épisodique reflétant le travail collectif autour du passage d'une nature de l'écrit à une autre.

Analyse des transactions sur la nature de l'écrit

Nous allons commencer par étudier une première série se déroulant en cinq moments lors de la première année d'expérimentation à grande échelle et qui traduit un travail de prise de conscience de la nature des écrits utilisés et du changement de cette nature au cours de la progression.

Episodes didactiques relatifs au changement de nature de l'écrit Cinq moments Extraits transcriptions ou résumés et descriptions des transactions Réunions du 21 novembre et 5 décembre 2012 (Année 2 – première année d'expérimentation à grande échelle)
Premier moment de la série Reg : sur le calcul mental tu leur dis 2 + 9 oh c'est pareil que 9 + 2 ah est-ce qu'on peut leur dire ça aujourd'hui qu'on peut inverser les nombres que ça change rien (brouhaha) Agn : ça je l'ai dit ça mais ils l'ont vécu *c'est leur vécu* ChS : il ne faut pas confondre propriétés générales et faits constitués 2 + 3 et 3 + 2 ça joue c'est-à-dire à partir d'un moment où ils constatent que leur expérience *à condition qu'ils aient vraiment expérimenté il faut pas que ça soit une propriété déclarée a priori* ça ça irait à l'encontre par contre de dire ben pour l'instant on va supposer que euh 9 + 2 c'est pareil que 2 + 9 si on pense que 2 + 3 c'est pareil que 3 + 2 et 1 + 4 c'est pareil que 4 + 1 c'est pas que c'est pareil c'est jamais pareil mais *c'est égal ou ça désigne le même nombre* on le sait Jef : ça tu le vois quand tu fais les boîtes ou quand tu dis par exemple donnez-moi les différentes façons d'écrire 5 et ben tout d'un coup y a 3 + 2 et 2 + 3 et ils se rendent bien compte qu'il y a inversion de la position Agn : c'est inverse Emm : et oui mais *ça fait quand même deux solutions de trouvées au lieu d'une* c'est ce qu'ils disent car quand on demande de les trouver toutes celui qui a oublié de l'inverser eh ben il en a une en moins […] ChS : beaucoup de prudence à ce niveau-là je vous explique pourquoi *dans l'écriture c'est possible mais la situation qui donne sens à cette écriture c'est pas la même* combien d'enfants 5↓ 3 filles 2 garçons 3 garçons 2 filles c'est pas la même chose c'est

pas parce qu'on l'écrit symboliquement tu dis numériquement ça sera pareil […] faisons attention à l'écriture symbolique et la situation qui lui donne sens parce que si on fait des raccourcis trop rapides *on prête des propriétés mais nous on traite pas des propriétés on traite symboliquement mathématiquement des situations* et ça peut être des sources de confusions chez les élèves […] on a tendance à utiliser la propriété de commutativité là dans le problème elle n'existe pas j'ai 3 garçons 2 filles ou 2 garçons 3 filles c'est pas commutatif […] mais *c'est un grand pas pour les élèves effectivement après de dire cette propriété*

Emm : on s'abstrait de ça

ChS : si on désigne que des nombres si on est dans le domaine que des nombres effectivement je peux construire que 3 + 2 c'est pareil que 2 + 3 mais on pourra pas non plus convoquer cette propriété en disant mais tu sais bien que 2 + 3 c'est égal à 3 + 2 *toi [Reg] quand tu as une situation effective tu utilises des techniques de calcul en rapprochant certains termes tu utilises l'associativité ben l'associativité que tu fais sur le calcul c'est pas l'associativité que tu fais dans la situation* (TdP260-289)

(épisode 54min 22 – 1h 00min 48 – réunion du 21 novembre 2012)

Transactions contribuant à :

- établir à quelles conditions il est possible pour les élèves de considérer les écritures a + b et b + a comme équivalentes : (i) lorsque l'expérience est faite que ces écritures sont différentes mais désignent le même nombre (« c'est leur vécu », « à condition qu'ils aient vraiment expérimenté il faut pas que ça soit une propriété déclarée a priori »), (ii) lorsque le travail se réalise dans l'univers symbolique (« dans l'écriture c'est possible ») ;
- prendre conscience que dans la situation didactique du *Jeu des annonces* il n'est pas traité des propriétés des nombres (en l'occurrence la commutativité) mais que l'écriture symbolique dénote la situation (« on prête des propriétés mais nous on traite pas des propriétés on traite symboliquement mathématiquement des situations ») ;
- accepter de manipuler les écritures a + b et b + a l'une à la place de l'autre ou l'une remplaçant l'autre si l'observation vient des élèves. Dans ce cas le travail s'opère sur et avec les nombres et non plus en référence à la situation et c'est un progrès dans l'univers des mathématiques et du calcul et « un grand pas pour les élèves ».

Deuxième moment de la série

Reg : alors dans ce cas-là je me plante parce que quand ils le font à trois mains si c'est 5 + 3 + 1 et qu'il est paumé je lui dis qu'est-ce que tu sais faire↑ je sais faire 5 + 1 et bien

tu fais d'abord 5 + 1 et tu rajoutes 3 […] voilà mais *je lui fais comprendre qu'il peut jouer avec les nombres et l'ordre* tu comprends pour qu'il réussisse à arriver au résultat
ChS : alors la façon dont tu le traites je dis pas qu'elle est mauvaise *je dis qu'on pourrait la traiter avec les annonces* […] et tu l'as traité par le calcul par l'associativité sur un groupe […] *les techniques que tu utilises à ce moment-là échappent à la situation qui les a constituées* 1 + 2 + 2 *tu fais l'associativité* 2 + 2 ça fait 4 et en plus généralement 2 et 2 4 et 4 + 1 5 mais tu as écrit 1 + 2 + 2 tu te rends compte le nombre de directions et d'orientations de calcul que tu donnes
Reg : sauf que quand je fais 1 + 2 + 2 au tableau *je mets entre parenthèses* ça fait 4 2 + 2
ChS : mais est-ce que tu crois pas que c'est possible aussi de faire 1 + 2 + 2 ((montre avec les doigts)) […] un rappel que c'est les annonces qui structurent la chose […] 1 + 2 ça peut faire une annonce 3 3 + 2 5 et j'ai pas fait appel nécessairement à des techniques et pourquoi je dis ça parce que ben dîtes donc le 1 + 2 on l'a rencontré déjà ça fait ça désigne combien↑ 3 *on travaille finalement là de façon concrète sur la réduction d'écritures* le calcul que tu sollicites c'est une réduction d'écritures successives
Reg : c'est en référence au répertoire qu'on a constitué avec le jeu des annonces j'utilise le sens des écritures
ChS : ben c'est à dire que tu utilises tes connaissances mathématiques d'associativité
Agn : ben faut attendre faut le faire
ChS : non mais pour certains élèves ça ne pose pas de problème *mais ça échappe à la situation qui a généré cette écriture-là* (TdP290-309)
(épisode 1h 00min 48 – 1h 03min 43 – réunion du 21 novembre 2012)

Transactions contribuant à :
- actualiser les assertions précédentes (cf. premier moment) à des moments de classe vécus et que le chercheur ChS a pu observer *in situ*. Le professeur Reg se rend compte qu'il utilise la propriété de l'associativité quand il indique aux élèves, pour traiter l'annonce 5 + 3 + 1 au stade du jeu où la classe travaille (module 3, jeu avec trois mains à comparer avec le lancer d'un dé), la procédure « 5 + 3 + 1 c'est 5 + 1 qui font 6 et je rajoute 3 » ;
- montrer sa pratique et les pistes de mises en œuvre effectuées (« je lui fais comprendre qu'il peut jouer avec les nombres et l'ordre pour qu'il réussisse à arriver au résultat », « quand je fais 1 + 2 + 2 au tableau je mets entre parenthèses ») ;
- proposer que la mise en œuvre, à ce stade de l'apprentissage, se traite avec et dans le jeu par réduction d'écritures et non en utilisant des techniques de calcul par associativité

(« les techniques que tu utilises à ce moment-là échappent à la situation qui les a constituées »).

Troisième moment de la série

Emm : avec les CE1 [classe double CP/CE1] j'ai travaillé et les CP ont gardé peut-être qu'ils en ont chopé quelque chose j'ai demandé aux CE1 *de faire la liste exhaustive de toutes les propositions de toutes les annonces à trois termes qui pouvaient faire 4* après on a fait la liste exhaustive de tout ce qui pouvait faire 5 on a un petit défi effectivement les CP ont bien remarqué qu'on pouvait faire bouger des termes dans l'annonce et que ça faisait des annonces supplémentaires et donc ils se sont rendus compte effectivement que pour faire 6 on pouvait avoir des tas des tas et des tas d'annonces à trois termes
ChS : tu sais que là ce que tu fais ça s'appelle de l'algèbre […] tu écris algébriquement les choses quand je mets deux termes eh oui mettre deux termes dans un ordre différent c'est une forme algébrique
Emm : et trois
ChS : tu vois bien qu'arithmétiquement ça correspond pas à une situation concrète
Emm : non ils ont mis trois
ChS : et on est au CP
Emm : parce qu'ils avaient bien vu que et c'est les CP qui faisaient des commentaires tu as oublié de mettre le 0 à droite après ils faisaient des regroupements moi j'ai utilisé 1 + 1 + 2 si j'utilise 1 + 1 + 2 il faut que je fasse tout bouger à l'intérieur de ce corpus-là et après pour en trouver un autre ben faut que j'en rajoute un du coup je suis passé à 1 + 2 du coup si j'en rajoute je l'enlève de l'autre côté mais comme j'avais les CE1 aussi ça tire vachement les choses quoi
ChS : ça veut dire que tu es déjà dans les techniques de dégroupement
Emm : ah ben oui parce que si je l'enlève ici et je le rajoute de l'autre côté euh ça ils l'ont découvert tout seul (TdP371-381)
(épisode 1h 11min 43 – 1h 13min 43 – réunion du 21 novembre 2012)

Transactions contribuant à :
- relater une activité mise en œuvre : établir la liste de toutes les écritures qui désignent x avec trois termes, l'écriture a + b + c étant considérée différente par exemple de b + a + c. Cet épisode reprend une intervention de ce même professeur dans un épisode précédent (au premier moment de la série) : « et oui mais ça fait quand même deux solutions de trouvées au lieu d'une c'est ce qu'ils disent car quand on demande de les trouver toutes celui qui a oublié de l'inverser eh ben il en a une en moins » ;

- montrer que cette activité est un travail algébrique dans et avec les nombres et qui utilise des techniques de dégroupement.

Quatrième moment de la série

Reg : j'avais abordé le problème avec toi [ChS] pour dire 1 + 4 + 2 on pouvait faire des regroupements avec les enfants et notamment parce que ça change le sens de la lecture et tu es obligé de faire 1 + 4 et tu peux pas faire 1 + 2 et après + 4 […] *le but c'était de faire référence à leur répertoire additif* pour éviter de passer par les nombres 1 + 2
1 + 4 + 2 tu dis ça puis 1 + 2 ça fait 3
Agn : et on regroupait
Emm : c'était pas les doigts↑
Reg : non le but c'était justement ne prenez pas les doigts qu'est-ce que vous connaissez↑ qu'est-ce que vous savez là↑
ChS : non attends ce que je veux dire par là alors peut-être que je me suis mal exprimé sans doute euh il faut dissocier ce qui relève des techniques de calcul parce que là ce qui était sollicité c'était une technique de calcul que premièrement les élèves n'ont pas nécessairement rencontrée comme étant efficace opérationnelle […] tu utilises quelque part la propriété d'associativité dans l'écriture *cette propriété au moment où tu l'as dite n'est pas nécessairement rencontrée comme un résultat établi par les élèves* par rapport à la référence au travail conduit par les élèves cette méfiance d'avoir un point de vue algébrique sur la propriété que tu connais *que tu donnes à expliquer comme étant évidente pour les élèves et qui n'était nécessairement pas sous contrôle de la référence à la situation* […]
Reg : parce que là moi je l'ai fait beaucoup trop tôt
ChS : il l'a fait beaucoup trop tôt c'est-à-dire qu'il l'avait fait les élèves étaient au 3 [au module 3] […] tu l'as traitée de façon orale en décrivant le calcul comme si c'était un écrit posé tu oralisais ce qui était inscrit mentalement comme une écriture additive que les élèves n'avaient pas nécessairement tu vois et donc tu sollicitais une propriété évoquée de mémoire avec des manipulations de symboles qui dans le fait sont vraies mais à ce stade-là les élèves ne pouvaient en aucun cas déjà envisager une référence à quatre lancers je crois
Reg : c'était à trois (TdP334-371)
(épisode 1h 35min 49 – 1h 46min 37 – réunion du 5 décembre 2012)

Transactions contribuant à :
- aborder à nouveau la question des regroupements qui avait été traitée par le professeur Reg avec l'utilisation des propriétés de l'associativité (épisode 1h 00min 48 – 1h 03min 43 de la réunion précédente du 11 novembre) et préciser ses intentions : travailler avec les nombres et les répertoires additifs construits dans la situation ;
- rappeler les principes de traitement des écritures : éviter de convoquer précocement des notions encore trop abstraites (propriété d'associativité) pour les élèves qui ne font pas forcément le lien entre les résultats établis lors du jeu (répertoires additifs construits dans la situation) et les propriétés des nombres ;
- décrire la situation effective : le travail de regroupement s'est fait à l'oral (« tu l'as traitée de façon orale en décrivant le calcul comme si c'était un écrit posé tu oralisais ce qui était inscrit mentalement ») et la propriété avait été évoquée durant les manipulations de symboles.

Cinquième moment de la série

Agn : pourquoi on l'a pas introduit ce regroupement à partir de trois mains et un dé cette histoire d'associer trois mains concrètement sur la manipulation *parce qu'on le voyait quand ils manipulaient voilà y avait pas d'ordre parce qu'ils étalaient trois mains* y avait 2 2 1 voilà pourquoi ceux qui arrivaient à faire 2 et 2 4 et 1 5 pourquoi et *après on passe à l'écrit* et à l'écrit sur les petits nombres les petites quantités les petits calculs comme ça faciles finalement ils auraient pu déjà réduire

ChS : est-ce qu'ils en avaient besoin dans la situation↑

Agn : ceux qui le faisaient pas ils comptaient ils ne calculaient pas moi aux trois mains il en avait beaucoup qui faisaient ((compte ses doigts à l'aide du menton)) ils passaient pas par le calcul et peut-être si on avait incité à passer des trois mains par le calcul forcément on associait déjà deux termes il en avait qui le faisaient

Emm : mais ils en avaient pas besoin parce que le lancer du dé il y avait toujours un terme qu'ils avaient trouvé dans la main une fois qu'ils l'avaient trouvé d'un côté et de l'autre ils voyaient bien que enfin ils en avaient pas forcément besoin quoi

ChS : en tous cas les techniques qui étaient sollicitées à ce moment-là ne nécessitaient pas nécessairement l'écrit

Emm : pas toujours selon les lancers ça aurait pu

ChS : voilà ça aurait pu mais *à partir du moment où il y a plus de deux dés là la ressource de l'écriture devient indispensable* 2 dés 3 dés 4 dés quand il y a plusieurs parties à deux dés tu vois le fait d'avoir plusieurs termes à gérer y a une surcharge quelque part que tu peux pas prendre en charge mais tu es pris en charge par l'écrit et là

l'écrit devient la nécessité de la situation […] ils ne peuvent s'en sortir qu'avec l'écrit avant peut-être pas tu vois et *cette idée à chaque fois je construis quelque chose des techniques qui me semblent intéressantes que je confronte après à la nouvelle variation proposée par le prof de voir dans quelles mesures ça joue ça joue pas en même temps ça a la tâche de responsabiliser l'élève de le rendre responsable* dis donc on le sait ça hein et le prof gère cette mémoire-là il peut faire des retours pertinents sur certaines situations et tu peux pas >c'est la discussion que j'avais un peu avec Rég< *à partir du moment où tu t'engouffres dans l'opportunité d'enseignement quelque part tu prends le risque de pas avoir fait jouer la situation et la construction de la certitude par l'élève* mais quelque fois la situation ne prend pas tout en charge il faut que le prof l'enseigne et c'est ça qui est un petit peu délicat […] 3 + 2 ils se désignent aussi 2 + 1 + 2 une fois qu'on rentre dans ce jeu-là pour peu que je considère un terme lui aussi comme un nombre et c'est très important ça voyez un petit peu quand on dit qu'on est dans l'étude du nombre dans la structuration du nombre *à partir du moment où toute symbolisation écrite correspond pour l'élève à un nombre sur lequel je peux agir je peux le dégrouper le regrouper l'associer à d'autres mais c'est quand même un pas énorme* (TdP662-670) (épisode 2h 29min 06 - 2h 33min 59 – réunion du 5 décembre 2012)

Transactions contribuant à :

- faire un lien avec la question des regroupements par réduction d'écritures et la situation au module 3 (jeu de comparaison de taille de collections entre trois mains et un dé) en proposant une technique de regroupement basée d'abord sur la manipulation matérielle (regrouper deux mains avant d'en ajouter une troisième) puis réinvestir cette manipulation à l'écrit afin d'éviter le comptage un à un des doigts des trois mains ;
- s'interroger sur la fonction des techniques (comptage, regroupement) dans cette situation de comparaison (3 mains / 1 dé) : on peut parfois passer par l'estimation des quantités en présence ;
- penser la place de l'écrit dans la situation : l'écrit est nécessaire à partir d'une comparaison de plusieurs termes avec plusieurs autres termes (« à partir du moment où il y a plus de deux dés là la ressource de l'écriture devient indispensable ») ;
- envisager d'inscrire la progression dans un *temps de situation* qui va permettre aux élèves, devenus ainsi co-responsables de l'avancée dans les savoirs car ils peuvent s'appuyer sur des actions antérieures, de confronter chaque nouvelle technique à la situation que le professeur fait évoluer à l'aide de variables didactiques. C'est ainsi, d'après ChS, que la situation doit pouvoir être jouée, dans une introduction opportune de gestes d'enseignement au bon moment quand la situation a suffisamment maturé au

niveau expérimental (« à partir du moment où tu t'engouffres dans l'opportunité d'enseignement quelque part tu prends le risque de pas avoir fait jouer la situation et la construction de la certitude par l'élève ») ;
- tirer un bilan de ces échanges en étant en mesure d'accompagner les élèves dans le saut, le changement, le « gap » qu'ils auront à franchir de voir un terme comme un nombre sur lequel on peut opérer.

Série épisodique « changement nature des écrits » – Année 2

Dans cette série épisodique, nous pouvons supposer le système d'attente réciproque entre professeurs et chercheur. L'attente du chercheur est intégrée aux modalités de travail du collectif : il engage les membres, à chaque réunion, à produire des réflexions ou remarques sur la réalisation effective. Par exemple à propos de l'introduction du module 6 bis :

> « alors tu vois en fait il y a aussi une possibilité / je dis presque une nécessité face au quotidien / de voir comment vous vous avez fait des propositions par rapport à la situation comme situation / et de voir comment vous les avez adaptées / et qu'on puisse dialoguer sur qu'est-ce qui reste de l'enjeu / est-ce qu'on reste toujours dans l'enjeu ou pas » (ChS, TdP112, réunion du 5 décembre 2012).

L'attente des professeurs se traduit par une demande de réponse concernant la mise en œuvre :

> « sur le calcul mental tu leur dis 2 + 9 oh c'est pareil que 9 + 2 / ah est-ce qu'on peut leur dire ça aujourd'hui / qu'on peut inverser les nombres que ça change rien » (Reg, TdP260)
>
> « pourquoi on l'a pas introduit ce regroupement à partir de trois mains et un dé / cette histoire d'associer trois mains concrètement sur la manipulation / parce qu'on le voyait quand ils manipulaient / voilà y avait pas d'ordre parce qu'ils étalaient trois mains / y avait 2 2 1 / voilà pourquoi ceux qui arrivaient à faire 2 et 2 /4 / et 1 /5 / pourquoi / et après on passe à l'écrit et à l'écrit sur les petits nombres les petites quantités les petits calculs comme ça faciles / finalement ils auraient pu déjà réduire » (Agn, TdP662).

Le jeu du chercheur sur les professeurs consiste à resituer les actions de traitement des écritures dans le contexte situationnel de la progression. En effet, conceptuellement, ce n'est qu'à partir du module 6 / 6 bis que sont abordées explicitement les questions de comparaison d'écritures additives (phase 3 de la

situation didactique). Les élèves commencent à y travailler sur les nombres et donc à pouvoir utiliser les propriétés des nombres. L'écrit prendra alors une place essentielle par rapport à la gestion de ces opérations avec et sur les nombres. Les modules antérieurs 1 à 5 correspondent à l'usage de la désignation de nombres d'abord comme expression de la mesure d'une grandeur sous les formes additives orale et analogique (phase 1 de la situation didactique, modules 1, 3 et 5). Puis l'écriture symbolique vient se substituer aux doigts (phase 2, modules 2, 4 et 6). L'écriture symbolique est en lien très fort avec la situation qui l'a constituée. Dans une progression bâtie selon un *temps de situation*, le saut conceptuel du passage de termes (en lien direct avec la situation du jeu) aux nombres (*en référence* à la situation initiale de jeu) permet une enquête construite sur les usages (de désignation de la mesure, de comparaison, de représentation, …). C'est cette enquête qui produit l'étude des propriétés du code. Mais cette question de l'étude des propriétés du code arrive bien plus tôt (en rapport avec les modules 3 et 4) avec les épisodes de faits didactiques rapportés par les professeurs Reg et Emm.

Le travail du collectif, dirigé par le chercheur avec une position topogénique forte, explore cette idée du caractère expérimental de la situation à partir de faits didactiques (présentés dans les premier, deuxième et troisième moments) ou de questionnement sur la mise en œuvre (deuxième, quatrième et cinquième moments). Certains professeurs ont anticipé précocement les conditions et contraintes dans la mise en œuvre de la situation en travaillant sur les propriétés du code (commutativité, associativité, technique de dégroupement). Si nous analysons cette série épisodique au niveau micro, le jeu d'ingénierie consiste à actualiser un fait didactique aux enjeux de la situation didactique. Si nous l'analysons à un niveau plus macroscopique, le jeu d'ingénierie consiste alors en un partage des principes ingénieriques lié au *temps de situation*. Les professeurs ont alors à se projeter dans la suite de la progression sans l'avoir encore vécue et doivent imaginer ce qu'ils pourraient mettre en œuvre en fonction de leurs élèves à partir de ce qu'indique le chercheur (lors de la réunion du 21 novembre). Le retour du prof Reg sur sa pratique, la mise en œuvre relatée par le professeur Agn et les commentaires collectifs portant sur le film de cette expérience (visionnage le 5 décembre d'un extrait de séquence en classe où le jeu *Lancers et*

sommes (Module 6 bis) a été mis en œuvre le 4 décembre, veille de la réunion[102]) permettent une projection des actions possibles qui vient retravailler le concept porté par le saut informationnel.

Nous allons maintenant examiner à partir de quels faits didactiques ce travail collectif s'est déroulé les années suivantes. La série épisodique que nous présentons ci-dessous contient trois moments relatifs au changement de nature de l'écrit qui décrivent autant de faits didactiques relatés puis discutés. Dans les premier et troisième moments sont soulevés des difficultés de mises en œuvre face aux élèves moins avancés. Dans le second moment est abordé le traitement didactique d'une question posée par des élèves au cours de la mise en place de la séquence.

Episodes didactiques relatifs au changement de nature de l'écrit
Trois moments Extraits transcriptions ou résumés et descriptions des transactions Réunions du 25 septembre et 27 novembre 2013 (Année 3 – deuxième année d'expérimentation à grande échelle) et du 4 février 2015 (Année 4 – troisième année d'expérimentation à grande échelle)
Premier moment de la série
[à propos d'une élève moins avancée] ChS : tout le monde sait et c'est anthropologique quand on veut pas oublier des choses on l'écrit […] alors dans Ace il faut pas oublier toi tu dis >à juste titre à ce niveau de Ace< qu'il y a un travail qui repose sur la mémoire dans Ace y a un point décisif et central c'est que les mathématiques sont une pratique écrite (3.) à un moment quand on a besoin de penser on écrit *le recours à l'écrit pour pouvoir se poser pour pouvoir penser est tout à fait central* que cet enfant n'arrive pas à mémoriser ou oraliser etc. regardons dès lors qu'on va passer à l'ECRIT comment le soutien de l'écrit va lui permettre de solliciter ses capacités d'une autre manière que celle que si on faisait que de l'oral Cal [professeur entrant dans le dispositif] : c'est ce que j'ai fait mais quand même (inaudible) ChS : pour se souvenir y a la mémoire mais y a aussi l'écrit et le travail dans l'écrit pour l'écrit et avec l'écrit dans Ace y a une chose qui est vraiment importante qui est l'espace et le rôle de l'écriture à la fois dans la situation on écrit les annonces et c'est très

[102] Nous avions développé les échanges autour de l'extrait dans la partie précédente.

important parce que quand tu vas jouer avec deux dés avec N dés tu vas pas pouvoir te souvenir et ça va casser la mémoire donc ça va solliciter le travail dans l'écrit pour faire mieux ça c'est une chose et puis tu as aussi des espaces institutionnels différents comme le journal du nombre où là encore la ressource de l'écrit *les moyens et les actions permises et autorisées dans l'écrit vont être centrales pour soi mais aussi centrales pour le groupe* c'est-à-dire ah il a fait ça il pose une question mais moi je suis pas (inaudible) à exprimer oralement sa question à clarifier sa pensée ou à développer sa pensée de ce qui est contenu dans l'écrit et en l'oralisant il y a ce levier-là c'est-à-dire que je mets bien en réserve le fait de dire que ça va résoudre hein c'est pas un truc que je donne mais en tous cas je dis qu'il y a une spécificité aussi de Ace le temps etc. mais la prégnance très tôt du travail dans l'écrit dans l'écrit mathématique mais effectivement si elle oublie trois termes le fait de l'écrire ben va peut-être l'aider à continuer à jouer et à combiner et à participer au projet collectif

Cal : *ce que je veux obtenir c'est un nombre écrit de 1 à 6* qu'elle arrive à les écrire mais elle ne me dit pas (inaudible)

ChS : oui mais ça c'est le nombre que tu travailles c'est pas la numérosité

Cal : mais oui mais là on cherche à y a pas non plus y a pas reconnaissance de l'écriture des chiffres (inaudible) y a aucun support pour pouvoir traduire une annonce à un moment donné faut quelque chose donc j'ai obtenu des chiffres après j'espère que

Tho [PE en deuxième année de mise en œuvre] : pour représenter une annonce on a le train on peut prendre 3 rouges 2 bleus […]

ChS : alors évidemment je veux dire que le travail dans l'écrit *y a quand même quelque chose qui est travaillé aussi c'est la force des représentations* la force des systèmes de représentations qui vont être progressivement introduits dans la progression c'est aussi des éléments décisifs (3.) parce que c'est extrêmement difficile ça quand même *cette notion d'écrire les nombres etc. on essaye de voir que c'est une réalité fonctionnelle dans la situation* […] ce que je veux dire par là c'est qu'il y a un certain nombre d'éléments conceptuels qui ont une réalité fonctionnelle dans la situation et c'est à nous de la didactiser ça veut dire que ça réponde à une nécessité de la situation pour construire les apprentissages tu vois↑ donc je dis pas que ça va résoudre mais y a un certain nombre de dispositifs représentations travail dans l'écrit travail sur le long terme parties fictives qui font que à tout prix essayons de garder ces élèves en progrès constants de là où ils partent (TdP295-310)

(épisode 2h 15min 36 - 2h 24min 04 – réunion du 25 septembre 2013, année 3)

Transactions contribuant à :
- confronter les points de vue : pour le professeur Cal, l'écrit c'est en premier lieu être capable d'écrire un signe culturellement admis qui traduise la situation du jeu ; pour le professeur Tho, la mesure peut, au départ, pour les élèves moins avancés, être représentée par un train-nombre ; pour ChS, la situation est didactisée pour que le nombre ait une réalité fonctionnelle (le travail sur la numérosité ou expression de la mesure de la quantité dans les premiers modules) ;
- indiquer le rôle de l'écrit en général, en accord avec les recherches des anthropologues de l'écriture, et dans les perspectives de travail à venir en appui sur les représentations (« l'écrit pour pouvoir se poser pour pouvoir penser », « les moyens et les actions permises et autorisées dans l'écrit vont être centrales pour soi mais aussi centrales pour le groupe », « travail sur le long terme parties fictives »).

Deuxième moment de la série

Anm : nous on est parti d'un questionnement des élèves à la suite de la séance 1 de l'anticipation du module 4 [jeu à 3 mains/1 dé] euh les élèves ont demandé jusqu'à combien on pouvait faire une annonce jusqu'à combien de mains alors ils ont dit quatre cinq six puis ils ont dit dix dix je pense qu'ils se sont arrêtés à dix parce que dix parce que ça leur paraissait un nombre assez grand et important donc ils ont fait à dix [élèves montrant chacun une main] une annonce collective et après une recherche individuelle sur le journal du nombre (TdP4)

Le groupe visionne ensuite l'extrait où les élèves ont travaillé autour de la question posée par l'un d'entre eux (peut-on faire 6 avec plus de quatre termes ?) en créant et montrant une annonce réalisée avec 10 mains, où des productions collectives sont écrites (« 3 + 3 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 » et « 0 + 2 + 4 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 ») par le professeur au tableau et des productions écrites des élèves dans leur journal du nombre (par exemple, du type « 0 + 3 + 1 + 1 + 1 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 » ou « 0 + 1 + 0 + 0 + 0 + 1 + 1 + 2 + 1 + 0 = 6 »), beaucoup de ces écrits étant une copie de celles produites collectivement.

ChS : ce qu'on peut voir ici c'est qu'on voit la difficulté de deux choses premièrement c'est qu'*on voit bien le passage délicat entre l'expérience et le nombre* c'est-à-dire que autant c'est facile d'écrire ce qui est désigné par les mains autant le contraire c'est bien difficile *parce que le nombre va devenir une représentation d'autres expériences possibles* là on est dans le passage avec le nombre d'ailleurs pour preuve c'est le signe égal le signe égal apparaît dans l'écriture des élèves et pas dans l'écriture des enseignants les enseignants sont encore dans l'expérience avec les doigts hein c'est un

doigt c'est deux doigts c'est trois doigts les élèves ça les conduit implicitement c'est là qu'on voit une force de la situation et du contrat didactique y a quelque chose à apprendre de nouveau on n'est plus dans les doigts on est dans les nombres et là on a un foisonnement de questions c'est nouveau mais là y a quelque chose qui est insécurisant c'est qu'on rentre dans la maîtrise du nombre alors les élèves vont le maîtriser avec ce qu'ils savent là où ils prennent le moins de risque c'est avec le 0 pour preuve c'est que vous avez plus que quatre termes là-dedans […] et en même temps on crée un obstacle (1.) c'est que on est borné par 6 (3.) là on est borné par la valeur 6 qui est enquiquinante et on met un agent de maîtrise qui est le 0 si j'ose dire pour s'empêcher d'aller trop loin […] voilà on rentre dans les choses sérieuses autrement dit pour les élèves d'ailleurs ils le sentent bien hein on les sent en sécurité et ils se demandent >on pourrait interpréter ça mais c'est une interprétation hein< on pourrait se demander là euh *il y a quelque chose de nouveau qui est attendu il faut mettre plus de choses mais faut rester dans la situation précédente* [...] ils l'ont la question quelque part ils sont sur la piste de la question on peut désigner autrement et potentiellement ça ouvre à plus de choses (TdP110-116)
(épisodes 2min 09 – 2min 49 et 34min 45 – 39min 20 – réunion du 27 novembre 2013, année 3)

Transaction contribuant à :
- décrire une action didactique mise en place à partir d'une question d'élève et qui a recours à l'écrit ;
- commenter cette phase de passage à l'écrit en attirant l'attention sur le changement de nature de l'écrit et les contraintes mais aussi les perspectives que cela occasionne ;
- remarquer le rôle joué par le 0 comme nombre « agent de maîtrise » ou régulateur dans une écriture mathématique.

Troisième moment de la série

Cam : j'aimerais bien savoir pour vos élèves moi je suis à la fin du 6 bis ceux qui n'ont pas encore bien mémorisé les répertoires additifs vous faîtes comment↑ vous les incitez à surcompter ou vous utilisez un support où c'est déjà écrit où ils vont chercher la réponse↑
Nac : (inaudible) ils vont chercher la réponse
Syl : faut éviter qu'ils utilisent les doigts
Cam : il faut lutter ça dépend des fois je sais pas là
Syl : on les sollicite dans la séance d'anticipation c'est ça↑

ChS : il y a plusieurs choses ce qui est certain c'est que le recours au surcomptage est un indice d'insécurité de l'élève c'est à dire il retourne à une technique […]
Cam : elle est dysgraphique donc le passage à l'écrit c'est compliqué et elle est aussi dyslexique on espère qu'elle passe à l'écrit voilà c'est compliqué donc oui elle est en situation d'insécurité après elle y arrive très bien mais je pense qu'elle peut pas tout mobiliser en même temps moi je prends les cubes mais bon c'est du surcomptage du coup elle fait ses deux trains machin donc j'hésitais à lui en donner un ou le construire avec elle j'en sais rien […] c'est comme les compléments à 10 hein les trucs qu'elle peut savoir […]
ChS : regardons quelles propositions tu peux avoir toi par rapport à cette difficulté mais ce que l'on sait par rapport à l'enjeu c'est qu'il va y avoir des moyens et que des moyens ponctuels doivent être au service d'une finalité plus lointaine qui est la compréhension de la constitution du code écrit
Cam : ça elle le construit je suis pas inquiète là-dessus
ChS : voilà maintenant regardons
Cam : mais quel outil est plus adapté pour elle↑ est-ce que je lui donne :::↑
ChS : alors ce qui est certain c'est que la conforter dans un rapport contractuel de retour systématique au surcomptage n'est pas pertinent à mon sens quand je dis systématique c'est de dire d'adapter des stratégies par rapport à ses difficultés qu'elle rencontre
Cam : mais du coup conclusion je fais comme tu me conseilles↑ je la fais moins surcompter je prends moins les cubes et je fais son répertoire c'est ça↑
Nac : mais moi l'année dernière y avait Flo c'est ça qui faisait les soleils des nombres je l'avais fait l'an dernier
Cam : c'est ça que j'appelle répertoire
Nac : et euh c'est vrai que les moins avancés ils prennent leur porte-vue ou se lèvent dans la classe et pour construire la différence
Cam : je construis avec elle
ChS : ça prendra sans doute plus de temps mais je voudrais attirer l'attention sur tu vois bien qu' on va avoir de plus en plus d'écart entre le besoin à la relation affective matérielle avec maintenant la représentation symbolique puisqu'on va étudier le code écrit donc toutes les combinaisons tout le travail l'écrit n'est pas une description des combinaisons avec le matériel on s'en éloigne plus en plus donc il faut se méfier d'avoir trop recours >même si c'est nécessaire à un moment< au matériel comme les cubes parce qu'ils dévient de l'enjeu qui est on étudie les pratiques de l'écrit les pratiques de manipulation matérielle ne sont pas celles que l'on étudie elles sont un moyen >comment dire< je dirais une référence possible mais ce n'est pas une traduction d'une manipulation

matérielle j'imagine et je pense qu'une façon de commencer à travailler pour avancer avec ce profil-là c'est de construire des représentations de répertoires de mémorisation autrement dit des moyens techniques de mémorisation de résultats et de mises en relation de ces résultats

Nac : et celui que j'ai fait dans ma classe le répertoire par rapport à l'an dernier on a vraiment c'est les enfants qui ont trouvé en fait je m'en suis servie le double je l'ai matérialisé avec un point orange par exemple après deux résultats on était dans la commutativité et on les a rangés ensemble et j'ai mis une accolade donc dans le répertoire du 8 par exemple j'ai les inverses j'ai le double et *c'est mieux rangé que l'an dernier en fait*

ChS : oui mais c'est un effort si tu veux qui va vers l'émancipation avec des techniques je dirais primitives mais vous voyez bien que quand je parlais de rapport à l'expérience qui change de nature on a besoin de certitudes pour pouvoir avancer vers l'étude du code symbolique sous la forme et écrite et c'est un gros travail à faire qui ne peut pas être uniquement supporté par le matériel et qui est à terme contre-productif il peut résoudre localement une difficulté mais à long terme il sera contre-productif ça veut dire que parallèlement au recours au matériel *il va falloir construire un moyen de construire de la certitude avec des répertoires* s'il n'y a pas:: les répertoires attestent quoi↑ *les répertoires attestent d'un rapport à l'expérimental* qui n'est >comment dire< plus dans la manipulation effective c'est quelque chose qu'on sait qui relève de l'évidence qu'on a rencontré mais on n'a pas besoin de se souvenir des conditions de la rencontre pour dire ben finalement je le sais c'est comme ça et tout le monde le sait et ça fait partie aussi des choses que les élèves doivent identifier dans leurs pratiques d'étude il y a un moment où il nous est signifié qu'on doit savoir ça que tout le monde doit savoir ça et que toi individuellement tu as la responsabilité de le restituer si on te le demande et on va s'organiser pour et tu n'as pas le droit de l'ignorer parce que tout le monde l'a rencontré (TdP19-45)

(épisode 13min - 19min 58 – réunion du 4 février 2015, année 4)

Transactions contribuant à :

- préciser que les répertoires permettent de construire un premier rapport, né de l'expérimentation, à la manipulation sur les nombres. Les « soleils des nombres » dont le professeur Nac fait référence est une organisation qui recense les décompositions possibles à x termes d'un nombre dans le cadre d'une pratique de recherche du

complément à y pour ce nombre ou de recherche de la différence de ce nombre avec un autre[103] ;
- rappeler que les répertoires créent de la certitude qui est l'économie de l'expérimentation (« il y a un moment où tout le monde doit savoir ça ») ;
- disqualifier le surcomptage ou le recours au matériel (dans un très court terme) pour ne pas cantonner les élèves dans des techniques primitives qui ne peuvent être pérennes ;
- donner à voir une pratique en rapport aux répertoires : le professeur Nac, en les organisant à partir de l'expérimentation dans la situation, indique implicitement un travail de formulation autour des écritures.

Série épisodique « nature des écrits » – Années 3 et 4

Le jeu des professeurs sur le chercheur est d'aborder des questions didactiques non triviales (action à mettre en place face à des élèves moins avancés, traiter les questions sur la situation posées par les élèves) afin de les comprendre et de les résoudre en adéquation avec les enjeux de la situation didactique. Le jeu du chercheur sur les professeurs est de permettre aux professeurs d'identifier la nature de l'écrit au travers des activités et des actions des élèves rapportées. Le rapport qu'entretient l'écrit avec la situation évolutive du *Jeu des annonces* est à retravailler chaque année : nous le voyons plus nettement lors du premier moment de cette série qui a lieu lors de la première réunion annuelle du collectif. Les professeurs qui débutent l'ingénierie ont à appréhender le concept de fonctionnalité de l'écrit dans son usage au travers de la situation qui est didactisée à cet effet : expression de la mesure de la quantité dans les premiers modules, moyen pour opérer sur des mesures de grandeurs par la suite, mémoire des résultats construits et des actions réalisées. La construction de la fonctionnalité de l'écrit se réalise au travers de questions liées à des difficultés de mise en œuvre (souvent révélées par les actions des élèves les moins avancés, classes de Cal et de Cam aux premier et troisième moment de la série épisodique) ou à des questions mêmes des élèves (classe de Anm, deuxième moment de la série). Face à de telles questions, le recours, dans l'immédiateté de l'action, consiste la plupart du temps à faire appel à des pratiques scolaires courantes (association des désignations écrite et orale des nombres, utilisation de matériel). Les professeurs mettant en place

[103] Cette pratique a largement diffusée par le biais des comptes-rendus sur la liste de diffusion locale.

l'ingénierie pour la seconde fois (Tho, Nac) sont à même de proposer des mises en œuvre pour pallier les difficultés des élèves moins avancés ou à besoins éducatifs particuliers (recours à la représentation du train-nombre pour les élèves n'ayant pas encore associé l'expression de la quantité aux symboles chiffrés, liens organisé entre expérimentation dans le jeu, pratique de recherche de la différence et répertoires). Le chercheur introduit les principes ingénieriques en les adaptant au fait didactique narré. Par exemple, l'introduction de l'écrit, relaté dans le deuxième moment, est plus en adéquation avec la situation vécue même si elle arrive tôt par rapport à la progression prévue. La question posée par un élève de la classe de Anm (peut-on faire 6 avec dix termes ?) est appropriée puisqu'elle intervient lors de la première séance où un changement de commande de la situation intervient (jeu à trois mains au lieu de deux). L'écrit est alors représentation des solutions envisagées *in situ* et des solutions possibles même si pour ce dernier cas le saut n'est pas franchi par tous : la possibilité d'un travail sur l'écrit comme pouvant représenter quelque chose que l'on ne pourra pas représenter matériellement est entrevu (« ils l'ont la question quelque part / ils sont sur la piste de la question / on peut désigner autrement et potentiellement ça ouvre à plus de choses » - ChS - TdP116). Les échanges au sein de l'épisode restituent ainsi l'idée que l'écrit suscite des questionnements et des recherches d'éléments de réponse sur les usages qu'il permet.

Nous allons maintenant nous intéresser aux échanges qui ont trait aux techniques de composition / décomposition. Nous les plaçons dans cette section relative à l'écrit car ces techniques sont rendues possibles par et dans l'écrit et car elles participent à la construction du code numérique écrit.

Analyse des transactions concernant les techniques de composition / décomposition

Nous avions énoncé qu'un saut informationnel est prévu dans la situation, autrement dit qu'un nombre plus élevé de termes dans l'annonce et le lancer va être introduit comme variable de la situation. Le nombre de termes va augmenter mais aussi, par la suite, la valeur des termes. D'autres configurations de jeu seront testées : elles utiliseront des dés comportant dix faces ou plus de dix faces, des cartes à jouer (dans lesquelles les rois, reines et valets ont été ôtés) ou des cartes numérotées qui

viendront se substituer aux annonces faites avec les mains. Les valeurs des variables vont donc augmenter en devenant supérieures à 10 (progressivement dans les modules 8 à 10). Comme nous le verrons, le choix de ces variables n'est pas anodin pour la mise en œuvre de la comparaison et les techniques à mettre en œuvre.

Pour comparer deux écritures à plus de deux termes, il est en général nécessaire d'opérer sur la mesure de ces deux collections afin de les désigner le plus efficacement possible et ainsi faciliter la comparaison. Par exemple, pour comparer une première écriture « 5 + 6 + 7 » et une seconde écriture « 10 + 3 + 8 », il est envisageable :

- de rendre des termes identiques en opérant sur l'une des deux écritures afin de rendre le plus possible de termes de la première écriture identiques à la seconde, en utilisant des techniques de composition / décomposition :

  5 + 6 + 7 = 5 + 13 = 5 + 10 + 3 = 10 + 3 + *5* à comparer avec 10 + 3 + *8* ; la première annonce est inférieure de 3 à la seconde si l'on calcule la différence avec les termes 5 et 8 ;

- de rendre le plus possible de termes identiques en opérant sur les deux écritures, en utilisant des techniques de composition / décomposition ; on obtient ainsi des groupes de termes identiques :

  première écriture : 5 + 6 + 7 = 5 + 6 + 6 + 1 = 6 + 6 + 6,

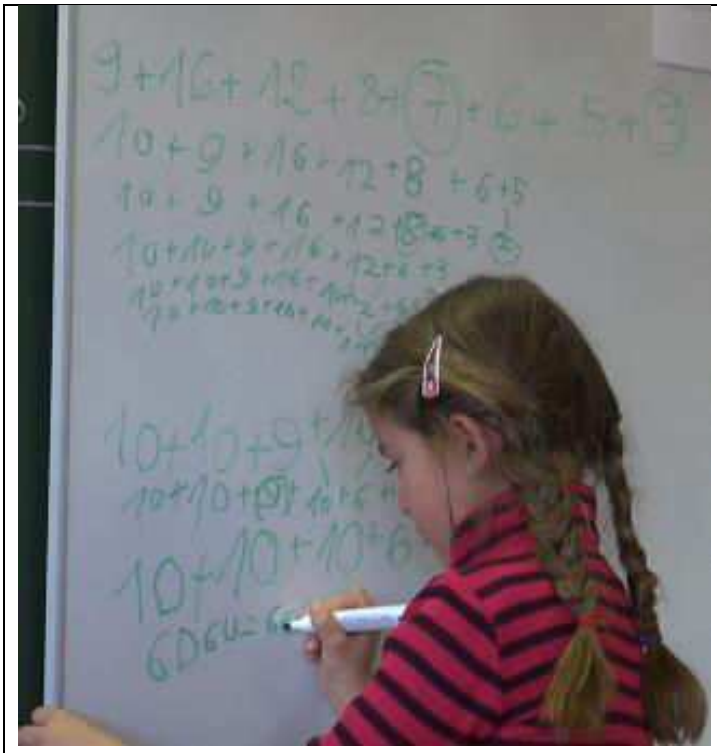
  seconde écriture : 10 + 3 + 8 = 6 + 4 + 3 + 6 + 2 = 6 + 6 + 6 + 3,

  soit 3 « six » à comparer avec 3 « six » + 3 ; la première annonce est inférieure de 3 à la seconde ;

- de calculer le total : 5 + 6 + 7 = 18 et 10 + 3 + 8 = 21 ; et 18 + 3 = 21 ; la première annonce est inférieure de 3 à la seconde ou 18 est plus petit que 21 selon l'ordre des nombres.

Dans la culture scolaire, on tend à adopter cette dernière façon de faire. En effet, la représentation du nombre « 21 » est une économie par rapport à ses autres désignations comme par exemple « 10 + 3 + 8 » qui s'écrit avec six signes alors que « 21 » n'en utilise que deux. Mais on a oublié que « calculer » consiste en une réduction de la *complexité ostensive de l'écriture* (Tonnelle, 1979) : pour calculer on peut organiser l'écriture en augmentant sa complexité ostensive avant de la réduire (10 + 3 + 8 = 10 + 11 = 10 + 10 + 1 = 20 + 1 soit 2 dizaines et 1 unité plus conventionnellement écrit « 21 »). Dans la séquence d'enseignement-apprentissage il est prévu de faire rencontrer aux élèves cette économie dans les signes que comprend

tout nombre dans le système numérique décimal positionnel. Les techniques de composition / décomposition sont justifiées par la taille des nombres et la situation à laquelle elles sont confrontées. La dizaine y joue un rôle crucial. Cette connaissance va donc se révéler indispensable pour le dénombrement d'une grande collection d'objets : la nécessité de composition ou groupement (fabriquer des dizaines avec des connaissances stables comme par exemple 6 + 4) et de décomposition ou dégroupement (fabriquer des dizaines en décomposant 13 en 10 + 3) fonctionnent de manière dialectique et sont déterminantes dans la compréhension des propriétés du code numérique. Nous illustrons ci-dessous notre propos par un exemple.



Production d'élève (fin mai 2014)

L'écriture additive « 9 + 16 + 12 + 8 + 7 + 6 + 5 + 3 » a été transformée par compositions et décompositions de certains de ses termes de manière à obtenir des groupes de 10. Il y a bien sûr plusieurs façons d'opérer. Ici, le 7 et le 3 (entourés) de la première ligne écrite ont été groupés pour former un 10 (écrit au début de la seconde ligne ; les autres termes ayant été recopiés ensuite pour conserver l'équivalence de la « mesure »). Le 5 final de la seconde ligne est décomposé en 3 + 2 à la troisième ligne ; le 2 étant utilisé ensuite pour former un 10 avec le 8 etc. Six « 10 » + 6 ont été ainsi obtenus ; ce qui peut être formulé en 6 dizaines et 6 unités (notés « 6D 6U » si l'on utilise les unités de mesure pour des entités discrètes) soit « 66 » dans l'écriture usuelle.

Pour retrouver des transactions concernant le sujet des techniques de composition / décomposition, nous avons repris les tableaux synoptiques concernant les réunions dans lesquelles sont discutées les mises en œuvre des écritures additives « longues ». Nous avons dégagé à leur lecture trois directions dans les dialogues d'ingénierie qui vont constituer autant de séries épisodiques. Dans la première série sont rapportées les transactions sur les moyens de comparer des écritures additives dans la situation. Dans la deuxième série le collectif porte ses réflexions sur le fait de grouper par 10. Dans la troisième série sont examinées les variables à mettre en jeu pour arriver au but fixé de la désignation conventionnelle des nombres dans le système décimal positionnel.

La première série, présentée ci-dessous en trois moments, révèle les échanges qui ont été nécessaires au début de la mise en œuvre du module 6 bis dans les classes pour que soient appréhendées les techniques de composition et décomposition.

Episodes didactiques relatifs aux techniques de composition / décomposition et à leur mise en œuvre Trois moments Extraits transcriptions ou résumés et descriptions des transactions Réunion du 5 décembre 2012 (Année 2 – première année d'expérimentation à grande échelle)
Premier moment de la série
Emm : j'en suis à la deuxième séance de bataille de dés [module 6 bis] franchement je pense vraiment que c'est nécessaire ne serait que pour faire émerger chez certains élèves ah ben là j'arrive pas voilà hier on a fait c'était des comparaisons de six lancers et j'en ai qui m'ont dit là y en a trop [de termes] j'y arrive pas [à calculer] *bon ben très bien on voit que là y en a trop bon ben très bien on va faire autre chose avec ça*[104] ChS : voilà on a des choses qu'on savait faire on sait les faire et l'idée c'est de dire finalement

[104] Le professeur Emm décrira plus loin la pratique mise en œuvre dans sa classe à partir d'une trouvaille d'un élève, Octave : « j'ai des élèves qui calculent la somme des termes et j'ai des élèves comme Octave qui me dit je regarde y a 4 d'un côté y a 4 de l'autre je les barre parce que c'est les mêmes et il procède par ordre comme ça et à la fin il me dit il me reste 6 et 4 il me reste 3 et 2 je vois que du côté de l'équipe des rouges ben c'est tout plus petit que l'équipe des bleus donc je dis c'est plus petit voilà (TdP426) […] la comparaison comme ça sans calculer ils le font parce qu'ils connaissent les nombres ils les voient ils les barrent d'un côté de l'autre ». (TdP440)

Emm : c'est de les pousser dans leurs limites finalement
ChS : c'est pas dans les limites on sait des choses et puis *avec ce que je sais je peux résoudre le problème* quand il y a beaucoup de termes ah bon on éprouve les limites de sa connaissance quelque part mais ça ne disqualifie pas par ailleurs […] il va falloir qu'on trouve un moyen maintenant et on sait le faire *il va falloir qu'on invente ce moyen-là sous-entendu puisqu'il est proposé les élèves savent bien qu'ils vont réussir à le faire* (TdP293-300)
(épisode 1h 29min 22 – 1h 31min 23)

Transactions contribuant à :
- rapporter que la situation du module 6 bis permet aux élèves d'éprouver la nécessité de trouver un moyen nouveau pour comparer ;
- indiquer que les élèves peuvent faire appel à des moyens déjà connus, c'est-à-dire qu'il existe un contrat sur lequel s'appuyer pour rechercher des moyens de résoudre le problème qui est posé même si le milieu a quelque peu évolué.

Deuxième moment de la série

ChS : on voit bien que la question elle va apparaître c'est difficile [de comparer des écritures comportant de nombreux termes] et donc on ne peut s'en sortir à partir de ce moment-là qu'en restant dans l'écriture additive alors vraiment *ça doit être la boîte à outils des élèves l'écriture additive* ça a un intérêt aussi de façon non anodine euh pour pouvoir réduire il faut d'abord avoir développé (2.)
Emm : quand on a décomposé
ChS : alors quand on a beaucoup de termes c'est facile parce que ça se fait presque spontanément mais quand on a une écriture avec un nombre de termes euh inférieur et bien pour pouvoir arriver à ça pour pouvoir comparer il va falloir développer on voit bien que *pour pouvoir regrouper il faut préalablement disposer de quelque chose qui est dégroupé pour le faire*
Emm : ah mais alors si tu compares une écriture à trois termes et une écriture à dix termes moi je pense qu'il faut plutôt regrouper l'écriture à dix termes pour l'amener à trois plutôt que de dégrouper la trois pour l'amener à dix
ChS : d'accord mais oui
Emm : parce que ce qui est naturel c'est de réduire
ChS : mais ce qui n'est pas naturel et que permet l'écriture symbolique c'est-à-dire a priori tu as une écriture groupée rien ne t'empêche de la dégrouper et de faire d'autres regroupements par rapport à l'écriture d'origine et *de façon intéressante* par rapport à la

situation […] *d'une écriture groupée s'autoriser à la dégrouper pour pouvoir la regrouper éventuellement d'une autre façon c'est pas spontané*
Emm : mais ça avec les dés tu pourras pas l'obtenir quand même parce que ton dé quand tu le lances il va que jusqu'à 6 tu vas pas dégrouper 6 parce que ça va (TdP311-322)
(épisode 1h 32min 09 – 1h 35min 49)

Transactions contribuant à :
- rappeler que l'écrit permet de résoudre le problème de comparaison en travaillant dans l'écriture additive (l'écriture additive, et les opérations que l'on peut stratégiquement mener sur les termes, est le système du contrat pour la situation de comparaison) ;
- indiquer un moyen mathématique qui existe : la possibilité de décomposer un nombre pour pouvoir en recomposer d'autres avec les termes obtenus ;
- confronter ce moyen par rapport au moyen pratiqué habituellement (« ce qui est naturel c'est de réduire [les termes] ») ;
- interroger les stratégies de dégroupement pour des termes ≤ 6.

Troisième moment de la série

ChS : si tu as 3 et 7 [termes] alors là ça va être délicat
Reg : tu peux décomposer pour t'aider↑
Kar [professeur de la classe d'étude] : effectivement je décomposais je disais dans le 6 y a 4 et 2 ou bien il m'arrivait de dire dans le 6 je sors le 4 je prends le 4
Reg : est-ce que par exemple 3 + 7 tu peux les transformer en 3 + 3 + 4↑
Mir : tu disais qu'est-ce qui est caché dans le 6
Kar : oui qu'est-ce qui est caché dans le 6
Reg : est-ce que tu pouvais du coup tu parles d'une situation de pièce de théâtre t'arrives à 3 et tu repasses à 2 et du coup en associant des choses qui sont plus simples c'est ça↑
ChS : ben oui ce que je disais tout à l'heure Reg c'est-à-dire avoir un nombre à l'état à l'état usuel 6 par exemple savoir que tu peux le dégrouper pour le regrouper d'une autre façon intéressante pour faire apparaître dans un terme la valeur qui nous intéresse 4 5 etc. c'est pas spontané il faut le travailler il faut vraiment le travailler (TdP565-575)
[…]
Nad : j'ai une question sur ce que tu [Kar] disais quand tu dis le 4 était caché dans le 6 ça bien sûr c'est toi qui vas le dire mais est-ce que après les élèves ils s'emparent de ça↑
Kar : oui surtout après quand on passe aux groupements par 10 c'est vraiment là qu'ils cherchent

Kaa : même ceux qui sont en difficulté↑ Kar : dégrouper pas tout de suite Emm : ils ont pas l'utilité de le faire ChS : pour l'instant Emm : c'est vrai qu'ils n'ont pas du tout l'utilité (TdP589-595) (épisodes 2h 08min 58 – 2h 10min 15 et 2h 13min 46 – 2h 14min 11)
Transactions contribuant à : - montrer une formulation utilisée dans la pratique pour les dégroupements (« il m'arrivait de dire dans le 6 je sors le 4 je prends le 4 », « le 4 caché dans le 6 ») ; - rappeler l'enjeu de la technique : obtenir dans un terme une valeur intéressante qui pourra être groupée avec une autre selon la stratégie envisagée ; - rappeler que la technique doit se travailler ; - questionner la technique par rapport aux pratiques du module 6 bis observées [extrait vidéo de la séance du module 6 bis] ou rapportées par le professeur de la classe d'étude ; - questionner la mise en œuvre de la technique : quand fonctionne-t-elle ?

Série épisodique « technique de composition / décomposition et mise en œuvre » – Année 2

La première série épisodique ci-dessus nous renseigne sur la réception par les professeurs de l'enjeu concernant la manipulation des nombres dans un jeu de composition et décomposition dans la situation. A ce moment-là de la mise en place du dispositif (c'est-à-dire environ au module 6 ou au début du module 6 bis pour les classes les plus avancées dans la progression), cet enjeu est inédit.

Il nous faut arrêter l'analyse et nous pencher quelques instants sur le contexte général de la mise en œuvre pour bien comprendre le jeu qui se joue dans cette série épisodique. En effet, l'usage des compositions et décompositions de termes avait été testé par les classes d'étude beaucoup plus tardivement dans l'année scolaire lors de l'année 1 (2011-12)[105] et au sein d'une situation didactique différente. Il était proposé

[105] Rappelons aussi que les classes d'étude lors de la première année d'expérimentation (2011-12) ne suivaient pas le curriculum complet ACE. Elles ne testaient que la situation du *Jeu des annonces*, « poussée dans ses limites de mise en œuvre », au côté d'autres situations ou démarches d'enseignement mises en place habituellement dans ces classes. Il s'agissait alors d'expérimenter l'évolution de la situation didactique et de l'inscrire dans un ensemble de situations.

un jeu de réduction de termes basé sur une situation de dénombrement de doigts (situation nommée « Beaucoup de mains »). Les mises en œuvre se révèlent donc différentes de celles qui sont à la discussion dans le groupe expérimental en cette année 2 (2012-13). Nous ne développerons pas ici le travail sur ce sujet au sein de la sphère 1[106] qui a débuté près d'un an avant les échanges du collectif provençal que nous étudions ici[107]. Mais nous pouvons noter que, par exemple, lors de visioconférences entre les membres de la sphère 1, les 27 et 28 novembre 2012, soit une semaine avant, deux professeurs des classes d'étude rapportent que les élèves effectuent des groupements mais que les dégroupements et regroupements conjoints ne sont pas étudiés. Ces professeurs proposent de « faire voir des nombres dans un nombre » pour amorcer le dégroupement. La sphère 1 a donc peu anticipé dans le temps et peu accumulé d'expérience en ce qui concerne la mise en œuvre des stratégies de composition / décomposition, des formulations et du système sémiotique les accompagnant.

La série épisodique montre que la stratégie « augmenter parfois le nombre de termes pour pouvoir le réduire de manière plus efficace » n'est pas connue. Cette stratégie apparaîtra plus probante (i) quand il faudra mettre en évidence la différence entre deux écritures (de combien l'annonce A est plus grande, ou plus petite, que l'annonce B ?) ; (ii) quand le nombre et surtout la valeur des termes augmentera et (iii) que des groupements à 10 seront recherchés. C'est ce qui commence à émerger des échanges entre les professeurs des classes expérimentales, le professeur de la classe d'étude et le chercheur. Les professeurs ont ici à se projeter dans une action didactique à venir. Autre exemple qui participe également au fait de se projeter dans la situation didactique à mettre en œuvre dans les classes : certains autres épisodes au cours de la même réunion et des réunions suivantes vont montrer le travail du collectif à propos de propositions de gestion des écritures avec des systèmes de signes. Ceux-ci n'ont pas vocation à être des enjeux d'apprentissage mais doivent aider à la gestion des transformations subies par l'écriture. Nous retrouverons les années suivantes ce

[106] Résumons très brièvement les transactions au sein de la sphère 1 : de la situation de dénombrement de doigts (situation « Beaucoup de mains ») qui vise à produire des regroupements à 10 à partir de configurations de doigts, la situation proposée a évolué vers une situation de manipulations des écritures (telle que décrite au début de la section) *en référence* à la situation princeps.

[107] Les échanges au sein de la sphère 1 sur le sujet ont eu lieu de fin février 2012 à fin janvier 2013.

même type d'épisodes. De très nombreux épisodes concernent donc la mise en œuvre des transformations des écritures additives et les conditions qui permettent ce travail sur l'écrit. Ce travail sur l'écrit consiste, en autre, à identifier les cas où le dégroupement sera nécessaire, construire les répertoires facilitant la reconnaissance des compositions ou décompositions (à mener pour obtenir le plus possible de termes égaux notamment à 10), gérer les termes dans l'écriture pour ne pas en oublier.
Dans la deuxième série épisodique, présentée ci-dessous en trois moments, le choix stratégique du groupement à 10 est questionné. Dans le premier moment, la raison d'être du groupement dans l'ingénierie est introduite et cette raison est interrogée du point de vue des élèves. Dans le second moment sont anticipés les comportements des élèves ; une réponse didactique est donnée. La nécessité d'un enseignement explicite est posée dans le dernier moment.

Episodes didactiques relatifs aux techniques de composition / décomposition et groupements à 10 Trois moments Extraits transcriptions ou résumés et descriptions des transactions Réunion du 12 décembre 2012 (Année 2 – première année d'expérimentation à grande échelle)
Premier moment de la série ChS : parmi toutes les techniques que l'on a convoquées quelles sont celles qui vont mettre en évidence le groupement et le dégroupement le plus simple *pour pouvoir comparer par rapport à ce dont on dispose dans notre culture c'est-à-dire le nombre et la base 10* (4.) alors je vous laisse finir [de lire la partie introductive « présentation du module » dans le document de la progression] et puis euh je m'arrête au paragraphe là voilà [cale la partie du texte vidéo-projetée sur l'écran] et puis je m'arrête exprès à ce qui est essentiel de comprendre et on va voir ça un petit peu (25.) alors vos questions vos remarques par rapport à comment vous imaginez votre euh dans le suivi vas-y Agn Agn : ben ce qu'on dit au départ le groupement dégroupement pour réduire le nombre de termes c'est déjà ce qu'on fait là ce qui marche euh les techniques si on en vient à comparer y a trois 4 y a quatre 4 ou 6 etc. par contre au niveau du 10 ChS : pourquoi le 10↑ Agn : *pourquoi ils font arriver à un groupe de 10 voilà* (TdP29-32) (épisodes 14min 15 – 16min 44)

Transactions contribuant à :
- commenter le texte de la progression ;
- rappeler que, dans le module qui va suivre, les groupements par 10 (obtenus par les techniques de compositions et décompositions de termes) vont constituer la stratégie privilégiée pour comparer et désigner des écritures longues ;
- questionner, du point de vue des élèves, ce choix du groupement à 10 ;
- interroger, de manière implicite, la mise en œuvre effective : « pourquoi ils [les élèves] font arriver à un groupe de 10 ».

Deuxième moment de la série

Emm : moi ce que je comprends c'est que pour l'instant euh ils vont peut-être pas arriver au groupement de 10 tout de suite ils vont peut-être se mettre d'accord pour dire on va tout grouper en 5 parce que 5 on sait faire […] parce que 2 + 3 je connais parce que 4 + 1 c'est facile je connais

Kaa : c'est par rapport aux mains le groupe de 10 en fait c'est parce que s'ils vont réduire le nombre de mains en mettant des doigts en transférant des doigts sur des mains qui vont devenir complètes ils vont se rendre compte que ça ((montre sa main))

Emm : c'est une main

Kaa : ils vont grouper par 5 et par 10 pour avoir moins de mains et avoir des mains complètes [Kaa confirmera par la suite qu'elle faisait référence à la version précédente du module "Beaucoup de mains" qui avait été déposée sur le site en juin 2012]

Agn : dès qu'ils vont voir 5 ils vont dire 10 […]

ChS : nous *on apprend à désigner avec un code symbolique c'est-à-dire qu'on passe d'un milieu matériel doigts les collections d'objets à des techniques de dénombrement au moyen d'un code symbolique ECRIT* et ce que restituent les élèves ce n'est qu'un énoncé une évocation de la manipulation du code symbolique écrit et ça il faut l'installer il faut le temps que ça diffuse c'est quelque part un saut dans l'histoire de l'apprentissage de ces élèves ils doivent apprendre à dénombrer avec autre chose et le autre chose que l'on propose c'est le code symbolique écrit et donc il va falloir rentrer dans cette combinatoire

Emm : *tu veux dire combien ça fait*

ChS : voir ce que ça propose l'idée on est bien d'accord↑ on dénombre des collections c'est-à-dire qu'on dit le cardinal de la collection *mais notre façon de dénombrer notre technique ça va être le code symbolique écrit*

Emm : mais quel est l'avantage de ce code symbolique qu'on propose nous par rapport à un code où on dit ben cette quantité c'est 54↑ parce que moi je suis sûre qu'il y a des élèves qui vont dire 10 + 10 + 10 + 4 *combien ça fait en fait*

Cat : 34
ChS : et bien ça fait 20 + 10 + 4 ou ça fait ::
Emm : oui mais tu comprends ma réponse voilà ils te poussent à demander et il faut pouvoir répondre à ça parce que sinon ils vont jamais se l'approprier cette euh
Cat : mais est-ce qu'on peut pas donner la réponse là↑ on peut donner le nombre
Emm : mais on compare deux méthodes soit on arrive à trouver le nombre de doigts avec du calcul et du coup ça donne le nombre 54 doigts c'est ce qu'on veut pas faire hein en gros on veut pas qu'ils comptent 54 doigts et 12 et je surcompte 7 et je rajoute encore 5 pour faire etc. donc ça c'est ce qu'on veut pas faire on veut pas qu'ils calculent qu'ils donnent le nombre à la fin on veut trouver l'écriture additive de 54 avec des groupements de 10 voilà […] mais comment tu comptes après 10 + 10 + 10 + 4 puisque tu fais pas calculer comment ces élèves-là sont pas entraînés à faire 10 + 10 + 10 + 4 en calcul
Kaa : y en a qui savent
ChS : pour répondre à ta question elle est contenue là où je me suis arrêté ce qui est essentiel de comprendre et de construire avec les élèves c'est que *les sommes maintenant vont pouvoir être désignées au bout du compte par un code commun qui permet une écriture plus simple et une comparaison universelle* […] en fait pour bien comprendre l'affaire c'est que la position va venir se substituer par convention à notre écriture 2C + 1D + 8U et donc on est réellement *dans une démarche où la position la désignation de ce que contient cette position va apparaître dans le code écrit conventionnel* de façon comment dire universelle reconnue par tout le monde […] mais vous ne pouvez pas laisser ce code symbolique euh livré tel quel aux élèves vous voyez bien qu'ils ont besoin que c'est agréable que c'est motivant même d'en éprouver les différentes techniques de voir comment ça joue et puis vous ça vous donne des prises possibles 18 c'est un dix c'est 1D + 8U euh ça vient après 17 et avant 19 (TdP35-77) (épisodes 16min 44 – 27min 35)

Transactions contribuant à :
- mettre en lien la situation proposée par la sphère 1 et les réactions possibles des élèves afin d'envisager comment pourrait se réaliser la mise en œuvre : « ils vont peut-être pas arriver au groupement de 10 tout de suite ils vont peut-être se mettre d'accord pour dire on va tout grouper en 5 », « ils vont réduire le nombre de mains en mettant des doigts », « dès qu'ils vont voir 5 ils vont dire 10 » ;
- rappeler l'enjeu et le saut informationnel qui a eu lieu : « on passe d'un milieu matériel doigts les collections d'objets à des techniques de dénombrement au moyen d'un code symbolique ECRIT » ;

- signaler l'importance d'une technique de calcul mental (calcul de x D + U)
- comprendre et actualiser l'expression « technique de dénombrement au moyen du code symbolique écrit » afin de distinguer le calcul du résultat de la désignation 3D 4U pour 3 dizaines et 4 unités, autre représentation de 10 + 10 + 10 + 4 ou 34.

Troisième moment de la série

ChS : est-ce que je m'exprime bien sur le fait que c'est pas le 10 n'apparaît pas naturellement pas du tout le 10 doit non seulement on l'induit

Kaa : on leur dit alors on se met d'accord↑

ChS : *dans notre société le nombre est conventionnellement constitué selon ce code* (2.) y a pas du tout une découverte >si vous voulez c'est la différence entre inventer et découvrir< les élèves inventent la nécessité de se mettre d'accord en construisant des techniques ils ne font pas la découverte du code universel vous voyez un petit peu ils inventent on fait des inventeurs

Cat : *en fait ce qu'on attend d'eux c'est qu'ils inventent des groupements* les plus simples possibles pour réussir à trouver une quantité mais nous *après on a quasiment dit ben maintenant vous allez faire des groupements par 10* […]

ChS : *la situation ne fabrique pas ne fait pas apparaître la magie du 10 c'est nous enseignants qui montrons que dans notre société c'est 10 mais c'est eux les élèves qui ont découvert qu'il y avait des dégroupements et des regroupements pour comparer*

Cat : mais de manière concrète sur SIT nous on va commencer↑

ChS : ben on le travaille là

Cat : oui mais je veux dire on commence sans induire le 10 mais à quel moment tu l'introduis↑

ChS : c'est pas qu'on introduit le 10 c'est qu'il va le 10 ça va être un enseignement tu dois produire le geste d'enseignement

Cat : tu le fais pas dès le départ↑

ChS : ben non […] à ce stade du module l'usage du 10 et intuitivement la condensation *va apparaître comme un gain* pour les élèves on a gagné ça mais on n'a pas perdu ce qui permet de faire et oui on a fait tout ça pour ça peut-être mais *on a construit une épistémologie de ce symbole qui est solide pour les élèves* […] y a vraiment au cœur de cela y a vraiment une appréhension technique une théorie de la chose une théorie du nombre en acte hein quelque part qui a été construite avec les élèves et cette écriture condensée universelle elle doit apparaître *comme quelque chose qui soulage tout le monde* (TdP88-103)

(épisode 31min 07 – 38min)

Transactions contribuant à : - définir les conditions de la production du groupement à 10 : comment passer des groupements à x aux groupements à 10 ; - signaler la nécessité d'enseigner le groupement à 10 ; - voir la production de groupements à 10 comme un gain, une connaissance fondamentale (« on a construit une épistémologie de ce symbole » autrement dit, les élèves ont étudié l'intérêt du 10 dans la numération de position en représentant l'écriture additive par xD yU) ; - indiquer un changement d'orientation du travail : il n'y a plus de questionnement sur la stratégie de groupement à adopter, la stratégie est maintenant le groupement à 10 (« ça soulage tout le monde »).

Série épisodique « technique de composition / décomposition et groupements à 10 » – Année 2

Cette deuxième série épisodique rend compte de la rencontre par les professeurs, guidés par le chercheur, avec la notion de groupement à 10 telle qu'elle est pensée dans l'ingénierie. Les apports didactiques et épistémologiques du chercheur sont ici indispensables car le groupement à 10 n'est pas pensé de manière habituelle. Dans la culture scolaire, le groupement à 10 sert aussi au dénombrement de la taille de collections. Il n'y est pas envisagé comme un fait conventionnel « qui met tout le monde d'accord » après avoir éprouvé d'autres types de groupement (rendre des écritures comparables en rendant des termes identiques et en fabriquant des groupes de x). Par exemple, il est plus difficile de comparer 4 « cinq » + 3 et 3 « six » + 2 (pour qui ne connaît pas les répertoires multiplicatifs) que 4 « cinq » + 3 et 4 « cinq » (comparables directement). Dans l'ingénierie, ce sont les désignations 2 « dix » + 3 et 2 « dix » (notées « 2D 3U et 2D 0U ») qui sont *in fine* retenues car on peut les écrire de manière très économique « 23 » et « 20 »[108].

Cette série décrit les jeux d'apprentissage des professeurs qui doivent s'approprier cette conception de l'enseignement de la désignation décimale positionnelle afin de la

[108] Il subsiste, pour d'autres espèces de grandeurs comme les durées, des conventions de groupements qui ne sont pas des groupements à 10. Mais le phénomène reste inaperçu en tant que tel ; seules les techniques sont travaillées dans les classes de niveau supérieur (à partir du CE2). Par exemple, dans le système de calcul des durées, le groupement se fait à 60 pour transformer des secondes en minutes ou des minutes en heures, à 24 pour transformer des heures en jour, à 30 (ou 29 ou 31) ou 365 (ou 366) pour transformer des jours en mois ou en années.

faire jouer dans leur classe. Nous pouvons d'ailleurs percevoir que cette hypothèse d'ingénierie rencontre d'abord des interrogations (« tu veux dire combien ça fait », Emm - TdP55) car la connaissance convoquée par les professeurs est la désignation conventionnelle qui serait ici contrôlée par le calcul. Cela se traduit par le fait que les professeurs Emm et Cat sont préoccupés par la manière dont la désignation sera introduite pour les élèves : « mais est-ce qu'on peut pas donner la réponse là↑ on peut donner le nombre » (TdP66) ; « mais comment tu comptes après 10 + 10 + 10 + 4 puisque tu fais pas calculer / comment / ces élèves-là sont pas entraînés à faire 10 + 10 + 10 + 4 en calcul » (TdP70). Les professeurs rappellent ainsi que leur préoccupation reste légitime dans le cadre du calcul mental où une telle procédure est à appréhender par les élèves. Elle peut venir en outre renforcer le savoir de désignation d'un nombre avec les unités de mesure en D et U. Le chercheur est dans un premier temps réticent dans son expression qui reste générale : « ils doivent apprendre à dénombrer avec autre chose et le autre chose que l'on propose c'est le code symbolique écrit et donc il va falloir rentrer dans cette combinatoire […] notre façon de dénombrer notre technique ça va être le code symbolique écrit » (ChS – TdP54-56). Puis il décrira explicitement l'action en indiquant le rôle des unités de mesure que sont les symboles D et U : « 18 c'est un dix c'est 1D + 8U / ça vient après 17 et avant 19 » (TdP77).

Les raisons d'être et les conditions du groupement à 10 sont ainsi définies au sein du groupe mais c'est un long travail qui va se poursuivre. Les professeurs discutent alors du travail à réaliser : la manière d'aborder les transformations des écritures additives et le choix des variables proposé par le document de la progression. Nous réduisons ces transactions dans une troisième série épisodique présentée ci-dessous. Le premier moment de la série montre les professeurs tentant d'anticiper sur les réactions des élèves et d'envisager des actions de régulation. Dans le second moment sont discutées des modifications des variables de l'ingénierie afin de faciliter l'appropriation de la séquence d'enseignement-apprentissage par les élèves.

Episodes didactiques relatifs aux techniques de composition / décomposition et choix des variables didactiques
Deux moments
Extraits transcriptions ou résumés et descriptions des transactions

Réunions du 12 décembre 2012 et du 30 janvier 2013 (Année 2 – première année d'expérimentation à grande échelle)

Premier moment de la série

Emm : mais la seule chose c'est qu'on s'est jamais entraîné à faire euh de l'automatisation de résultats de la table de 10 enfin de compléments à 10

ChS : attends ce que tu appelles compléments à 10 c'est que un certain nombre de propositions des élèves vont se reposer sur leur expérience fréquentée d'un nombre n'oublions jamais ça

Emm : oui mais 8+2 ils peuvent pas l'avoir rencontré ça ça dépasse le dé c'est plus grand que 6 y a pas 8 doigts sur une main et 2 doigts sur l'autre

Mir : 5+3+2

Emp : à quel moment↑

Emm : dégrouper dégrouper honnêtement c'est jamais apparu dans ma classe

Reg : je suis d'accord avec toi (inaudible)

Agn : faut le demander

Reg : rassembler peut-être mais dégrouper (inaudible)

Emm : ah dégrouper ils le voient pas ils le voient pas du tout

Agn : faut leur dire faut le guider le dégroupement (brouhaha)

Emm : il va falloir dégrouper dans cette situation-là il va falloir faire les deux en même temps […]

ChS : vous avez bien compris que lorsqu'on a commencé à travailler ensemble j'ai dit que *les gestes de l'enseignement seront déterminants* (TdP136-158)

[…]

Emm : pour le trouver ils vont avoir du mal c'est ça que je veux te dire ils vont avoir du mal parce qu'ils vont surcompter à un moment donné

ChS : je dis pas (inaudible) oui mais ils vont surcompter

Emm : parce que 8 + 2 pour savoir que ça fait 10 ils vont faire 8 9 et 10

Emp : exactement

Emm : c'est obligé comment veux-tu qu'ils le trouvent le 10↑ [...]

ChS : vous sollicitez l'intelligence pratique des élèves les stratégies qu'ils peuvent mettre en place mais par contre ce qui va être important c'est que toi tu écrives la technique le moyen intellectuel pour 8 + 2 oui 8 + 2 égale 10 désigne 10 ça cette relation entre le moyen intellectuel et l'écriture symbolique la technique convoquée par les élèves c'est là que tu vas devoir sans doute montrer que tu attends que notre outil il est là et que notre outil répond à ça […]

Val : est-ce qu'on peut faire avec les mains avec les doigts↑ ((montre 8 doigts levés et 2 baissés))
ChS : tu comprends que je suis toujours gêné sur avec on peut on peut pas moi ce qui m'intéresse ce qui est important notre boussole notre outil de dénombrement dans la classe c'est le code symbolique
Tho : dans la représentation pour y arriver moi j'essaye de leur faire passer l'idée qu'il faut qu'ils s'imaginent aussi le schéma ligné j'ai 8 il faut combien pour aller jusqu'à 10
ChS : alors le schéma ligné est une représentation […] eh oui ben dites donc et avec le schéma ligné comment ça fonctionne […] cette question-là elle est persistante n'oublions pas le travail sur le journal du nombre (3.) là c'est comme si on pensait que les élèves vont s'affronter à une découverte qu'ils n'ont jamais non quelque part nous avons les moyens avec le système de représentation mais aussi avec un travail effectif assidu dans le journal du nombre >je vais vous montrer ça tout à l'heure< qui peut anticiper l'affaire sans avoir fait l'objet d'un enseignement ou d'une rencontre dans la situation (TdP159-172)
[…]
Reg : est-ce qu'on peut réécrire dans un autre sens parce qu'ils sont capables facilement enfin pour une partie d'arriver à 10 au complément à 10 à partir du moment où les nombres pour pouvoir regrouper (inaudible) aller chercher par exemple le complément de 4 + 5 à un moment donné dans l'écriture d'aller chercher autre part c'est ça qui leur pose problème à mes élèves ils arrivent pas à aller chercher au bout de l'écriture en disant bon ben c'est vrai que le 5 je vais chercher le 5 qui se trouve là-bas ils cherchent tout de suite le 6 ils disent ah ben non c'est pas jouable je peux pas le faire
ChS : c'est la proximité
Reg: est-ce qu'on peut procéder à une écriture différente qui puisse faciliter le regroupement↑
ChS : ça va être ton travail de l'organiser effectivement de conduire ça […]
Reg : dans l'écriture là par exemple je regroupe euh le 5 et le 5 (inaudible) si je regroupe par couleurs ça marche ou ça marche pas je regroupe par couleur (brouhaha)
ChS : non non ce que je veux dire par là je suis un peu gêné de comment dire j'ai pas de jugement moral de bien ou de mal etc. je comprends bien qu'il y a un certain nombre de pratiques euh comment dire génériques hein mettre des couleurs pour les groupes de mots pour les syllabes etc.
Mir : pour attirer l'attention
ChS : pour attirer l'attention je mets en garde sur la surcharge
Reg : je comprends ça

ChS : tu comprends que comment dire il faut se rapprocher au maximum de l'épure que représente l'écriture euh dégroupée etc. maintenant qu'à un moment on a un système de représentations qui vienne tu comprends bien que pour nous le meilleur système de représentation est là on n'a pas besoin de patates de couleurs etc.
Tho : ((fait le signe des arbres à calcul))
Mir : des arbres […]
Agn : c'est quoi la réponse sur le 5 et 5 qui sont éloignés et qu'on regroupe↑
Emm : tu réécris tu réécris
Agn : mais moi j'ai eu un cas comme ça et y a un gamin qui m'a dit je le vois à la limite 4 + 4 mais est-ce qu'on peut maîtresse j'ai dit oui mais ça le gênait qu'ils soient loin
Reg : tu fais comment tu le barres↑ (brouhaha)
ChS : je vais le dire très clairement je suis un peu gêné sur les astuces de manipulation […] moi ce qui m'intéresse c'est que tu <réécrives> c'est l'usage de l'écriture symbolique (TdP175-203)
(épisodes 44min 45 – 53min 51 – réunion du 12 décembre 2012)

Transactions contribuant à :
- envisager les difficultés que les élèves pourraient rencontrer (« 8+2 ils peuvent pas l'avoir rencontré ça ça dépasse le dé c'est plus grand que 6 y a pas 8 doigts sur une main et 2 doigts sur l'autre […] pour le [le groupement à 10] trouver ils vont avoir du mal c'est ça que je veux te dire ils vont avoir du mal parce qu'ils vont surcompter à un moment donné », « dégrouper ils le voient pas ils le voient pas du tout », « aller chercher par exemple le complément de 4 + 5 à un moment donné dans l'écriture d'aller chercher autre part c'est ça qui leur pose problème à mes élèves ils arrivent pas à aller chercher au bout de l'écriture en disant bon ben c'est vrai que le 5 je vais chercher le 5 qui se trouve là-bas ils cherchent tout de suite le 6 ils disent ah ben non c'est pas jouable je peux pas le faire ») ;
- anticiper sur les gestes d'enseignement à produire : le dégroupement devra être identifié par les élèves (« faut le guider le dégroupement »), le répertoire à 10 construit et mémorisé (« faire euh de l'automatisation de résultats de la table de 10 enfin de compléments à 10 »), la gestion des écritures explicitée (comme par exemple dans l'action d'associer des termes non contigus : « procéder à une écriture différente qui puisse faciliter le regroupement »), l'intérêt de réécrire tous les termes pour garder la trace des transformations apportées (groupements et dégroupements) ;
- considérer la piste d'une exploitation du *Journal du nombre* (des productions libres d'élèves pourraient servir de base de travail pour la classe) ;

- rappeler que le travail se fait avec les nombres en appui sur les représentations écrites ;
- réfléchir en amont le système sémiotique accompagnant le travail dans les écritures afin qu'il ne vienne pas trop perturber le sens des actions rendu à l'écrit et afin qu'il vienne soutenir ces actions.

Deuxième moment de la série

Nad : d'abord en amont je crois même qu'on est plusieurs à l'avoir fait avant même de rentrer dans la phase 1 y aurait peut-être quelque chose sur les compléments à 10

PEs : oui oui

Kaa : regroupements de nombres qui font 10 pas forcément que les compléments à 10 mais faire des recherches sur les écritures additives à deux termes trois termes ou quatre termes qui font 10

Val : alors moi je me suis demandée si puisque c'est vrai du coup on passe d'un seul coup avec le lancer de dés on est jamais au-delà du nombre 6 avec tout à coup des 14 des 8 avec des compléments que la plupart ne connaissent pas le 14 qu'on n'a pas appris

Jef : manque un lien

Val : à dégrouper avec 10

Emp : 10+4

Val : est-ce que on pourrait pas dans un premier temps *avoir plus de nombres mais pas au-delà de 10* mais grouper par 5 ça fait un dégroupement de 5 que là ils peuvent (TdP96-111)

[…]

Reg : là [par rapport à l'annonce proposée dans le document 12+4+5+6+5+8+2+14+16] je retiendrais par exemple les termes 4+5+6+5+8+2 c'est tout

ChS : voilà (brouhaha) tu vois la numération de position elle doit faire l'objet d'une étude cette étude on va pouvoir l'outiller avec les techniques comment on étudie la numération de position avec les techniques qui ont été rencontrées dans les modules précédents et on nous nous allons devoir diriger cette étude […] le professeur a toujours la possibilité dans ces variables didactiques de solliciter toujours la même chose on est dans un on est dans le symbolique mais qui est toujours avec une référence partagée c'est toujours la même chose (3.) et chacun doit être interpellé en personne […]

Reg : si je comprends bien tu pars quand même sur le 10 là je regarde le calcul depuis tout à l'heure tu exclus complètement le 12 le 14 et le 16 dans un premier temps et tu cherches d'abord vraiment à regrouper les unités enfin les termes les plus petits […] ça me paraît plus simple de dire que plutôt de dire bon écoute t'as le 12 et qu'est-ce qu'on

fait avec le reste l'idée de partir d'abord sur les petites unités pour après arriver à dégrouper le 12 le 14 et le 16 ça me paraît logique (TdP129-133) (épisodes 30min 20 – 31min 18 et 42min – 44min 45 – réunion du 30 janvier 2013)
Transactions contribuant à : - rappeler la nécessité d'un travail spécifique à mener sur les groupements de termes équivalents à la dizaine et d'une investigation sur des nombres qui n'ont pas été fréquentés dans le *Jeu des annonces* (« on est jamais au-delà du nombre 6 avec tout à coup des 14 des 8 avec des compléments que la plupart ne connaissent pas le 14 qu'on n'a pas appris ») ; - situer ce travail dans une perspective d'étude de la numération décimale positionnelle (« tu vois la numération de position elle doit faire l'objet d'une étude cette étude on va pouvoir l'outiller avec les techniques comment on étudie la numération de position avec les techniques qui ont été rencontrées dans les modules précédents et on nous nous allons devoir diriger cette étude ») ; - proposer une réorganisation de la progression : travailler sur des groupements à 10 dans l'écriture additive, puis introduire des termes supérieurs à 10 à dégrouper en 10 + x afin d'utiliser ce « x » dans un nouveau groupement ; - réaménager l'écriture additive longue proposée dans le document de la progression et dont certains termes étaient supérieurs à 10, en écriture additive longue de termes inférieurs ou égaux à 10.

Série épisodique « technique de composition / décomposition – variables de la situation » – Année 2

Le changement dans les variables de la situation didactique (augmentation du nombre et de la valeur des termes) engage à un saut informationnel. En effet, les stratégies à mettre en œuvre ne relèvent plus de la même nature : les élèves doivent dorénavant opérer sur des nombres devenus moyens techniques pour procéder à des manipulations dans une situation. Ils auront à étudier les formes écrites de l'expression de la quantité et non plus à faire l'expérience de la production de cette quantité. Ce saut informationnel suscite chez les professeurs une anticipation de la mise en place de ce nouveau contrat. Un professeur formule une hypothèse sur les difficultés possibles que pourraient rencontrer ses élèves dans la technique de composition / décomposition : « c'est ça qui leur pose problème à mes élèves / ils arrivent pas à aller chercher au bout de l'écriture en disant / bon ben c'est vrai que le 5 / je vais chercher

le 5 qui se trouve là-bas / ils cherchent tout de suite le 6 / ils disent ah ben non c'est pas jouable / je peux pas le faire » (Reg – TdP15). Les professeurs se fondent sur leurs connaissances des compétences de leurs élèves dans l'avancée de la progression, c'est-à-dire (i) par rapport aux enjeux de transformation des écritures, notamment le dégroupement : « dégrouper dégrouper / honnêtement c'est jamais apparu dans ma classe » (Emm – TdP141), « rassembler peut-être / mais dégrouper » (Reg – TdP144), « ah dégrouper / ils le voient pas / ils le voient pas du tout » Emm – TdP145) et (ii) par rapport à la fréquentation des nombres par les élèves au cours du *Jeu des annonces*. En effet, selon eux, les élèves n'ont pas encore acquis suffisamment de connaissances sur certaines désignations additives (comme par exemple 8 + 2 : « 8 + 2 ils peuvent pas l'avoir rencontré ça / ça dépasse le dé / c'est plus grand que 6 / y a pas 8 doigts sur une main et 2 doigts sur l'autre » Emm – TdP138) ou certains mesures supérieures à 12 (« on passe d'un seul coup / avec le lancer de dés on est jamais au-delà du nombre 6 / avec tout à coup des 14 / des 8 / avec des compléments que la plupart ne connaissent pas / le 14 qu'on n'a pas appris » Val – TdP99). Ce changement suscite alors des premières propositions des professeurs afin de pallier les difficultés envisagées : « faut leur dire / faut le guider le dégroupement » (Agn – TdP146), « il faut qu'ils s'imaginent aussi le schéma ligné / j'ai 8 / il faut combien pour aller jusqu'à 10 » (Tho – TdP167), « d'abord en amont / je crois même qu'on est plusieurs à l'avoir fait avant même de rentrer dans la phase 1 [de la séance] / y aurait peut-être quelque chose sur les compléments à 10 » (Nad – TdP96). Il suscite également des demandes de validation de pratiques : « est-ce qu'on peut faire [trouver les compléments à 10] avec les mains avec les doigts↑ » (Val – TdP165), « est-ce qu'on peut procéder à une écriture différente qui puisse faciliter le regroupement↑ » (Reg – TdP177). Le jeu du chercheur sur celui des professeurs est alors de rappeler que le *Jeu des annonces* est construit sur le principe de la composition de mesures et qu'il intègre la décomposition (nous avions vu qu'une égalité pouvait aussi se lire dans les deux sens : « 3 + 2 = 5 » et « 5 = 3 + 2 ») : « vous sollicitez l'intelligence pratique des élèves / les stratégies qu'ils peuvent mettre en place […] cette relation entre le moyen intellectuel et l'écriture symbolique / la technique convoquée par les élèves / c'est là que tu vas devoir sans doute montrer que tu attends que notre outil il est là / et que notre outil répond à ça » (ChS – TdP164). Le chercheur rappelle que l'action des professeurs sur l'action des élèves est

déterminante : il faut signifier aux élèves que les apprentissages antérieurs (production de la mesure de la quantité en x termes, connaissances déclaratives portant sur quelques résultats des répertoires additifs) sont à convoquer. Le chercheur attend alors des professeurs qu'ils identifient quels sont les apprentissages antérieurs nécessaires à l'action et comment ils peuvent être articulés avec les stratégies au sein du nouveau contrat. Les professeurs attendent du chercheur qu'il leur dise comment procéder. Il y a là un hiatus entre professeurs qui pensent que les élèves ne possèdent pas de connaissances suffisantes pour entrer dans ce nouveau jeu de désignation de la mesure et le chercheur qui pense qu'elles sont à faire émerger. De ce hiatus naît la nécessité de réorganiser la progression : un professeur (Reg) propose de modifier, dans un premier temps, l'écriture additive longue proposée dont certains termes étaient supérieurs à 10 en écriture additive longue de termes inférieurs ou égaux à 10. Ces variables permettraient de rencontrer des combinaisons encore peu fréquentées tout en préservant les enjeux au travail (transformer une écriture additive de termes variés en une écriture composée de dizaines et unités, notée « xD yU », afin de s'orienter vers l'étude de la numération décimale positionnelle).
Le chercheur évoque aussi l'intérêt de s'emparer du *journal du nombre* pour travailler les pistes possibles évoquées par les professeurs :

> « là c'est comme si on pensait que les élèves vont s'affronter à une découverte qu'ils n'ont jamais non quelque part nous avons les moyens avec le système de représentation mais aussi avec un travail effectif assidu dans le journal du nombre >je vais vous montrer ça tout à l'heure< *qui peut anticiper l'affaire sans avoir fait l'objet d'un enseignement ou d'une rencontre dans la situation* » (ChS – TdP172)

Le *journal du nombre* est un moyen didactique encore peu développé au sein de la sphère 2 et objet de recherche encore à l'étude en ce qui concerne son application dans le dispositif ingénierique. Les chercheurs ont des hypothèses quant à son usage : il peut anticiper des questionnements d'élèves. En effet, c'est un espace de tentatives libres, un lieu où chaque élève est sollicité dans la mesure où il répond à une incitation du professeur. Il reste à l'élève une marge de liberté, par exemple dans le choix des valeurs qu'il se donne lui-même en répondant à l'incitation. Autrement dit, dans le journal du nombre, peut être produite une écriture mathématique qui n'a pas encore fait l'objet d'un enseignement ou qui n'a pas été rencontrée dans la situation du jeu. Si

certains élèves sont capables de produire de telles écritures, elles peuvent être présentées à la classe, mises en liens entre elles et discutées comme d'autres possibles qui s'affranchissent des contraintes du jeu. Ainsi les productions peuvent faire l'objet d'une étude collective en classe permettant de faire avancer les savoirs. Ce journal pourrait alors entrer en jeu, par des incitations dans le travail sur ce qui apparaît comme des manques repérés par les professeurs (comme par exemple l'usage du dégroupement ou l'exploration de nombre supérieurs à 12). Le chercheur est donc en attente de la manière dont les professeurs vont mettre en place effectivement ce moyen didactique. En cela ces derniers occupent une position potentiellement haute.

Au terme de cette partie d'analyse des transactions au sein du collectif provençal, nous proposons, dans la section suivante, des éléments pour récapituler brièvement le procès de la mise en œuvre du *Jeu des annonces* tel qu'il s'est déroulé pour ce collectif. Nous réserverons pour le chapitre suivant une mise en perspective de la biographie de l'ensemble du collectif, sphères 1 et 2, afin de tenter de mettre au jour les faits d'expérience qui ont marqué la coopération professeurs, chercheurs, formateurs et personnels d'encadrement.

Eléments de synthèse du procès de la mise en œuvre du *Jeu des annonces*

Nous avons relevé quatre grands thèmes d'ordre épistémique qui ont retenu l'attention des membres du collectif provençal. Ils se sont constitués en ensembles de faits d'ingénierie qui sont les faits discutés par le groupe suite à un (ou des) événement(s) didactique(s), vu(s) comme point(s) d'ancrage pour la discussion. Ces thèmes ont porté sur (i) la notion de désignation de la mesure de la grandeur nombre d'entités, (ii) les représentations de la situation, (iii) la notion d'équivalence et (iv) le rôle de l'écrit dans un *temps de situation*. Chacun de ces thèmes de discussion et d'échanges a eu pour origine un (ou des) fait(s) didactique(s) effectif(s) qui sont entré(s) en contradiction par exemple avec les enjeux de l'ingénierie, qui ont préoccupé les acteurs ou qui les ont questionné(s). Les transactions ont constitué l'enquête (au sens deweyen du terme) qu'a menée ce collectif afin de dépasser la difficulté ressentie.

Désignation de la mesure de la grandeur nombre d'entités

La désignation de la mesure de la grandeur est l'enjeu de l'ingénierie que les professeurs n'ont, dans un premier temps, pas identifié. En demandant aux professeurs de rapporter les actions de leurs élèves, le chercheur a l'intention de le mettre en évidence et de caractériser deux stratégies relatives à l'expression de la mesure de la taille (nombre d'entités) d'une collection. L'une de ces stratégies est l'énumération (ou comptage pas à pas) ; l'autre est la désignation globale. Cette dernière stratégie est attendue dans l'ingénierie. Elle est rendue possible car elle met en jeu des collections partitionnées dont les mesures sont appréhendables et représentables sur le schéma-ligne. Ayant appris à identifier les stratégies possibles et ayant constaté que certains de leurs élèves continuaient à compter, les professeurs se sont interrogés sur les actions à mener. Au cours des transactions, le chercheur a affirmé le contrat de désignation et l'idée que le comptage reste une procédure personnelle de contrôle de la certitude pour les élèves moins avancés. Les professeurs ont appris à identifier et actualiser cet enjeu ingénierique dans la situation. Ils ont ainsi partagé des pratiques possibles pour les élèves beaucoup moins avancés. De ces échanges, le chercheur peut retenir (apprendre) des informations sur les réactions des élèves face à la situation, les pratiques initiales et habituelles des professeurs, leurs besoins en apports didactiques. Cet enjeu diffuse rapidement et presque imperceptiblement les années suivantes, souvent par le biais des pratiques rapportées par les professeurs expérimentant l'ingénierie pour la seconde fois et ayant acquis l'expérience de la situation à la fois dans sa dimension pratique mais aussi conceptuelle.

Représentations de la situation

Un autre des thèmes de discussion dans le groupe concerne les représentations. Le sujet est abordé à la fois par le chercheur qui a pour intention de mettre au travail les usages des représentations (écritures additives, boîte et schéma-ligne) dans la situation et par des professeurs qui alertent sur le manque de liens, pour les élèves, entre l'utilisation technique du schéma-ligne (provoquant un comptage des intervalles) et la référence que cette représentation doit entretenir avec la situation du jeu. Le travail collaboratif au sein du groupe provençal se réalise alors sur les fonctions des

représentations, notamment du schéma-ligne. D'outil de vérification, cette représentation est considérée peu à peu comme un instrument sur lequel raisonner pour interpréter le jeu, anticiper ou imaginer une partie. Des liens entre les représentations, leurs spécificités dans la situation, leurs limites et leur complémentarité sont évoqués. Leurs mises en œuvre ultérieures dans les classes sont rapportées, enrichissant ainsi leur actualisation dans la situation. Les représentations sont aussi envisagées en référence au modèle additif qui régit la situation du *Jeu des annonces*. Le schéma-ligne commence alors à être considéré non pas seulement comme un objet à enseigner mais aussi comme un objet dont on doit rencontrer les potentialités, la nécessité de l'étude et découvrir les fonctions dans la situation. La représentation devient alors un moyen pour agir. Nous observons son changement de statut dans le milieu et des nouvelles règles d'usage possibles dans la situation. Le groupe peut proposer des alternatives de mises en œuvre. Par exemple, pour minimiser le comptage des intervalles, il est proposé que le schéma-ligne soit pris en charge techniquement au début par le professeur pour que l'attention se porte d'abord sur ses fonctions dans la situation. La seconde année d'expérimentation, un professeur met en place dès le début de l'année scolaire un schéma-ligne sans graduation pas à pas mais avec des repères « 0-6-12 ». Le groupe réfléchit aux effets produits par cette expérimentation, aux manières de l'introduire et de la mettre en œuvre et s'interroge sur le moment le plus pertinent pour l'utiliser.

Notion d'équivalence

La notion d'équivalence est liée à la désignation additive d'un nombre de diverses façons en vigueur dans l'ensemble des situations didactiques proposées par l'ingénierie ; elle est dénotée par le signe « = ». Nous avons montré le surinvestissement, par les professeurs et les élèves, du signe « = » comme signe d'un programme de calcul et non d'équivalence. Ce surinvestissement est constaté de manière générale et pour chaque année d'implémentation. Effectivement, dans le jeu jusqu'au module 4 avec deux (ou trois) mains ou termes et un dé, la stratégie de calcul du tout reste économique au regard des autres stratégies (par exemple, estimation ou comparaison d'un des termes avec le score du dé). En effet, les répertoires de petites mesures de la quantité sont connus et les élèves peuvent recourir facilement à un

dénombrement sur leurs doigts sortis. Le calcul de la somme de l'annonce indique alors le nombre à atteindre pour gagner. A partir du module 6 de comparaison de deux écritures additives à deux termes, d'autres stratégies viennent concurrencer fortement le calcul du tout. Les professeurs s'interrogent dès le début sur la place du total par rapport aux enjeux ou à l'articulation entre le calcul et la mise en œuvre d'autres stratégies de comparaison. Leur préoccupation d'un travail sur le calcul du tout est légitime car ce travail est à mener dans d'autres domaines comme le calcul mental ou utile dans la résolution de problèmes. Le chercheur met alors en perspective la notion d'équivalence avec l'évolution du jeu et le saut informationnel (changement de statut de l'écrit qui engage le travail à venir sur le système numérique décimal positionnel) prévu par la situation et qui ne s'appuie pas sur le calcul du tout.

Lors de la première année d'expérimentation à grande échelle, les professeurs n'ayant pas toujours pu assimiler entièrement l'énorme document de la progression, c'est le chercheur qui met en perspective la situation didactique actuelle et la situation à venir. Il a alors une « longueur d'avance », tout comme le professeur de la classe d'étude et les observateurs ayant participé à la mise en œuvre d'une partie de l'ensemble des situations didactiques. Cette position leur permet de proposer des stratégies (par exemple, la construction de termes identiques) pour des parties de jeu engageant la comparaison d'écriture additive de trois termes ou plus. Le chercheur oriente aussi l'action relative aux échanges sur le signe « = » comme indicateur de la décomposition pour écrire un nombre autrement, c'est-à-dire comme un signe montrant l'équivalence. Certains professeurs plus expérimentés dans l'ingénierie le reconnaissent aussi dans des productions d'élèves. Mais les chercheurs se rendent compte qu'il n'est pas toujours actualisé dans les situations. Par exemple, au cours du module 10 (recherche du nombre inconnu dans une équivalence), les élèves ne sont pas dirigés dans leur étude de la comparaison car le signe « = » n'est pas vu comme un signe portant l'équivalence. Les actions des professeurs et les analyses collectives de ces actions permettent un retour critique sur le document de l'ingénierie.

Rôle de l'écrit et du langage dans un *temps de situation*

D'expression de la mesure d'une grandeur, l'écrit et ses jeux de langage associés deviennent un compte-rendu de l'expérience de manipulation quand la valeur et le

nombre de termes qui augmentent ne permettent plus (ou très difficilement) le contrôle dans la situation matérielle. Ce changement de statut de l'écrit, porté par le saut informationnel dans la situation de comparaison et de désignation de longues écritures additives, est un point essentiel d'ancrage des transactions. Ces échanges sont indispensables à la construction du style de pensée du groupe car, dans les pratiques scolaires habituelles, il n'existe pas une culture du saut informationnel. Les professeurs ont dû, dans un premier temps, éprouver la nécessité pour les élèves d'une pratique expérientielle longue dans la manipulation des écritures. Cette expérience doit être forgée au sein de la notion d'équivalence pour que les nombres acquièrent un statut véritablement symbolique (c'est-à-dire qui autorise la manipulation symbolique faisant appel aux propriétés de commutativité, d'associativité afin de rendre, par exemple, des termes identiques pour faciliter les comparaisons d'écritures additives).

Professeurs et chercheur ont dû travailler l'actualisation de ce saut informationnel dans la situation et prendre en compte les difficultés auxquelles peuvent se heurter les élèves, notamment les élèves moins avancés qui n'ont pas encore franchi cette étape conceptuelle. Ainsi professeurs, observateurs et chercheurs (lors de la première année expérimentale – année 2) ont pu déclarer que les élèves n'étaient pas prêts à franchir le saut informationnel prévu initialement par la progression (réduction en « xD + yU » d'une grande écriture additive du type « 14 + 8 + 4 + 5 + 3 + 5 + 9 + 13 + 11 » dans la version de l'ingénierie mise à disposition en décembre 2012). Le constat est fait dans les classes expérimentales provençales d'un besoin d'expérimentations plus important dans la désignation des nombres, la connaissance des répertoires et l'usage du groupement / dégroupement mené conjointement. Des propositions de travail en amont ou de modifications du document de la progression sont apportées. Par exemple, l'introduction du module 6 bis (devenu par la suite module 8), précédant le travail sur les groupements par dix pour réduire les écritures additives afin de mieux les comparer et les désigner économiquement, a été testé. Il s'est avéré favoriser l'expérimentation de groupements divers et prolonger l'expérience de désignation. Ces propositions montrent aussi que les professeurs se sont emparés de l'enjeu et, face aux contraintes, ont aménagé les variables : transformation de l'écriture additive longue proposée dont certains termes étaient supérieurs à 10 en écriture additive longue de termes inférieurs ou égaux à 10. Le travail du collectif a donc réorienté la

progression et le choix des variables pour cette phase de développement de l'ingénierie.

La partie suivante reprendra la biographie de l'ensemble du collectif, sphères 1 et 2 (notamment du groupe provençal), dans une perspective diachronique afin de tenter de mettre au jour les faits d'expérience qui ont marqué la coopération professeurs, chercheurs, formateurs et personnels d'encadrement.

Partie IV – Coopération au sein d'un collectif : synthèse

Dans cette partie, nous rassemblons les résultats de l'étude et les organisons afin de présenter une vue d'ensemble du processus de coopération entre les membres d'un collectif qui cherche à faire vivre un dispositif pour la recherche *ACE-Arithmécole*.

Ce que nous cherchions à décrire dans la partie précédente pouvait être formulé par les questions suivantes : qu'est-ce qui est appris par les uns et les autres dès lors que l'ingénierie est mise en œuvre dans les classes ? Quels sont les savoirs ingénieriques qui émergent ou diffusent dans le collectif ? Comment se produit leur émergence et leur circulation ? Nous avons constaté que décrire les échanges nous a permis de mettre au jour les savoirs qui nécessitaient, du point de vue du collectif, d'être travaillés. Dans cette perspective, les savoirs sont considérés dans un sens praxéologique car ils relèvent à la fois de pratiques contextualisées et de discours sur ces pratiques (Chevallard & Sensevy, 2014). Nous nous étions appuyée sur l'hypothèse suivante : dans une ingénierie coopérative, tout un chacun peut être amené à faire avancer l'action de réflexion sur l'ingénierie, par exemple passer du topos de celui qui apprend au topos de celui qui désigne ce qui pourrait être appris ou remarqué, étudié (cf. chapitre 2). Nous avons montré que chacun, qu'il soit professeur, chercheur, formateur ou encadrant, avait agi sur les autres. Nous devons maintenant décrire certaines dimensions ou constituants de cette action conjointe qu'est le dialogue d'ingénierie.

Dans la partie empirique précédente (chapitre 6), nous avions montré en quoi les transactions avaient contribué à l'élaboration de ces savoirs à une échelle microscopique.

Dans le chapitre 7, nous nous attacherons aux apprentissages réalisés au cours des transactions sous un jour plus distancié, à une échelle diachronique plus macroscopique. Nous examinerons d'abord les effets que ces apprentissages ont produits en se constituant en faits d'expérience. Nous proposerons ensuite une catégorisation des savoirs d'ingénierie qui ont été transmis ou construits, en tant que praxéologies, au cours des transactions.

Nous chercherons dans le chapitre 8 à établir une nouvelle structuration du dialogue d'ingénierie au travers d'une logique des transactions qui ont permis à ces savoirs d'émerger. Nous tenterons alors de caractériser cette coopération. Un enjeu de cette synthèse consistera à discuter de cette forme de coopération dans la perspective d'un développement de la théorie de l'action conjointe en didactique.

Chapitre 7 - Faits d'ingénierie, faits d'expérience et savoirs ingénieriques

Des faits d'ingénierie aux faits d'expérience : une dynamique du travail collectif et ses effets dans la constitution d'un style de pensée. Des faits aux savoirs ingénieriques : une catégorisation des savoirs transmis ou construits.

Des faits d'ingénierie aux faits d'expérience

Dans cette section, nous centrerons notre attention sur les apprentissages réalisés par le groupe et qui ont modifié son *style de pensée* en « dirigeant » son appréhension des actions (Fleck, 2008). Autrement dit, nous mènerons une synthèse du chapitre 6 empirique dans une perspective plus diachronique (afin de percevoir les effets de ces actions) et à une échelle macroscopique nous permettant de voir le degré de transformation qu'ont permises ces actions. Pour mener cette synthèse, nous avons mis en correspondance les faits d'ingénierie discutés par la sphère 1 avec ceux discutés dans la sphère 2 et avec d'autres événements didactiques observés ou rapportés dans les comptes-rendus que les professeurs et observateurs envoient au collectif. Cette mise en correspondance nous permet de voir quels ont été les faits d'ingénierie qui préoccupent l'ensemble du collectif, ou qui font milieu pour l'étude collective, et comment ont été traitées les questions sous-jacentes à ces faits.

Nous avions supposé que, dans une ingénierie coopérative, un fait d'ingénierie pouvait devenir un fait d'expérience. Un fait d'ingénierie est un fait discuté par le groupe suite à un événement, à un relevé d'observation de la mise en œuvre qui a interpellé un ou quelques-uns des membres. C'est un point d'ancrage pour les discussions ou travail d'un "milieu-problème". Parce que ce fait est né d'une mise en œuvre, qu'il a été étudié collectivement, que des connaissances ont émergées et que des actualisations successives ont été menées, nous le qualifions de fait d'expérience. Autrement dit, un fait d'expérience est un fait collectivement appris du vécu. L'évolution de faits d'ingénierie en faits d'expérience, dans une conception de l'expérience qui doit autant à Dewey (1993) qu'à Fleck (2008), est ce que nous tentons d'expliciter dans cette section.

Nous structurerons cette section de la manière suivante : chaque sous-section se rapporte à un « grand » thème que nous avons pu dégager à la suite des analyses empiriques. Nous distinguons, même s'ils sont liés intrinsèquement : (i) les questionnements de l'arrière-plan conceptuel, (ii) le travail de la relation système-modèle, (iii) le rôle du schéma-ligne dans les représentations de la situation, (iv) la notion de *temps de situation*. Dans chacune de ces sous-sections, nous décrirons d'abord un ou des faits d'ingénierie relatifs au thème qui ont marqué la biographie du groupe, avant de montrer en quoi ce ou ces faits peuvent se qualifier en fait d'expérience correspondant. Ils se constituent alors en biographèmes (Mercier, 2013), tels que nous avons commencé à le décrire au chapitre 3, au croisement de la vie didactique du groupe et d'une forme d'expérience, expérience acquise tout à la fois par la mise en place et par l'étude collective de l'ingénierie, afin de la comprendre et la « mettre à sa main ».

Questionnements de l'arrière-plan conceptuel

Fait d'ingénierie : confrontations d'arrière-plans conceptuels

La constitution des savoirs ingénieriques n'a pas toujours comme point de départ un fait d'ingénierie issu de la mise en œuvre des classes d'étude ou expérimentales. Des chercheurs didacticiens en mathématiques ont été consultés en dehors du collectif *ACE-Arithmécole.* Leurs remarques ont permis de travailler, au sein de la sphère 1, certains éléments de l'arrière-plan conceptuel de la situation didactique du *Jeu des annonces*. Ces remarques ont porté sur le caractère de non adidacticité de la situation (le savoir visé n'est pas la solution d'un problème mathématique, le hasard dans le jeu ne permet pas l'expression de stratégies) et les propriétés non didactiques de la situation (le manque de rétroaction du milieu matériel). Les chercheurs du groupe ont pu ainsi (re)formuler certaines des hypothèses d'ingénierie, par exemple « les propriétés des désignations sont explorées par les élèves » ou « le jeu est moteur d'une situation qui permet de produire des connaissances ». Ils ont eu l'occasion d'expliciter une partie de l'arrière-plan conceptuel qui a présidé au choix de la situation didactique parmi d'autres possibles, par exemple : « ce qui importe est la rencontre par les élèves de questions concernant les propriétés des nombres » ou « le jeu de

hasard dû aux lancer du dé est vu comme une pratique de référence pour travailler un problème de comparaison »[109].

Le cas de la proposition de l'introduction de la situation *Train-cubes* par un chercheur extérieur est particulièrement représentatif d'une confrontation d'arrière-plans conceptuels. Le fait d'ingénierie consiste en la manière dont la sphère 1 s'est appropriée une suggestion didactique, la situation *Train-cubes*. Cette suggestion a été présentée depuis une épistémologie de la *théorie des situations didactiques (TSD)*. Mais elle a été utilisée dans une épistémologie de la *théorie de l'action conjointe en didactique (TACD)* qui est le système théorique de la recherche *ACE-Arithmécole*, pour ce qui concerne le domaine SIT. Elle a abouti à l'introduction dans la progression d'un module propédeutique (module 0, situation *Train / tour*). Nous considérons cet exemple comme emblématique du travail ingénierique à l'échelle de la communauté élargie. C'est pour cela que nous reviendrons plus amplement sur ce cas dans le chapitre suivant.

Fait d'expérience : reconceptualisation de l'arrière-plan théorique

Les apports, précisés ci-dessus, des personnes appartenant à un cercle « extérieur » au collectif ont été limités au début de l'expérimentation (année 1) mais leur rôle est à prendre en compte dans la construction de l'ingénierie. Ces cercles « extérieurs » doivent partager suffisamment de points communs avec le collectif pour que leurs remarques soient comprises. Il s'agit ici de convergences, mais aussi de divergences, entre l'épistémologie de la construction des connaissances propres à la TSD et le système théorique de la recherche *Ace-Arithmécole*. A ce stade de l'avancée de l'ingénierie, seuls les chercheurs participent au type de discussion relevant de cet arrière-plan théorique. Il ne peut être partageable sans un long travail portant sur l'épistémologie des situations didactiques. Cependant nous supposons que les professeurs ou formateurs ayant participé au dispositif, et qui ont vécu en acte une

[109] Nous avons détaillé ces échanges dans les sous-sections « De la controverse sur l'adidacticité de la situation et la part de hasard » et « De la controverse sur le manque de rétroaction du milieu » au chapitre 6, dans la section concernant les éléments relatifs à la mise en œuvre de la situation du *Jeu des annonces*.

situation à valence adidactique telle que le *Jeu des annonces*, pourraient faire des liens et entrer peu à peu dans un tel arrière-plan.

Les chercheurs ACE ont eu la possibilité d'organiser leurs arguments pour répondre aux questions posées par le cercle extérieur. Ils ont appris, dans un tel contexte, à reconstruire les rapports entre adidacticité et didacticité, en accordant une place décisive au rapport concret-abstrait, à la relation de référence, et à l'impact des représentations dans ce rapport et cette référence. Nous verrons dans les sections suivantes que l'ensemble du collectif aussi sera amené à travailler ces points. Ils ont eu également l'occasion de revisiter l'idée broussaldienne d'expérience, pour les élèves, de la nécessité fonctionnelle de la connaissance : cette expérience n'est pas considérée seulement comme un point de départ, elle est aussi pensée comme une culture que les élèves (et plus largement les participants à l'ingénierie) ont à appréhender peu à peu.

En cela nous pouvons parler de faits d'expérience. Ces faits sont alors vus comme la rencontre d'un point de vue propre et de celui d'autrui et qui permet de faire avancer les conceptions sur la question. Ces faits ont permis une réorganisation de la progression par l'introduction du module 0 (situation *Train / tour*). Ils ont également permis d'amorcer une réflexion sur la part de hasard qui constitue le jeu et ont offert l'opportunité au collectif de proposer des compléments à la mise en œuvre. Les propositions pour ces compléments à la mise en œuvre émanent tant de la part des professeurs (jeu inverse ou jeu pour une stratégie d'ajustement de sa proposition) que des chercheurs (parties fictives qui sont des études de parties).

Travail de la relation système-modèle

> Faits d'ingénierie : temps pour l'expérience, prise en compte du changement de statut de l'écrit et de la notion d'équivalence dans la situation

Les premiers travaux du collectif pour la mise en œuvre de l'ingénierie s'intéressent à la question de la continuité de la progression et notamment à la répartition entre les phases de jeu à l'oral (avec doigts et dés) et à l'écrit. Un professeur d'une des classes d'étude, la première année d'expérimentation, a « tenu » la situation sur dix-huit séances qui permettaient aux élèves de mener l'enquête « jusqu'à son épuisement »

sur le jeu oral[110]. Les autres classes d'étude n'avaient exploré cette forme de jeu que sur deux séances. Ainsi, ce professeur permet d'installer l'idée d'un nombre suffisant de séances devant porter sur le jeu dans sa phase 1 de désignation de la mesure de la quantité ou de la taille d'une collection : dix séances seront ainsi inscrites dans la progression. Dans la dialectique concret / abstrait qui se mettra en place par la suite, avec l'introduction de la forme symbolique pour décrire la situation du jeu et pour développer des stratégies de comparaison d'écritures additives, il est acté par la sphère 1 que la référence à un jeu d'annonces doit être maintenue tout au long de l'évolution de l'ensemble des situations (en référence aux mains jusqu'au module 6 puis en référence à un jeu d'annonces de manière plus générale). Cette référence *est rendue possible* car elle est le fruit d'une longue expérimentation de la situation des annonces par les élèves. Elle a donné lieu à des séquences étalées sur huit à neuf semaines de temps scolaire.

Le travail collectif au sein de la sphère 2 s'est alors réalisé sur le passage de l'appréhension de la numérosité (par l'expression de la taille des collections) aux nombres comme objets mathématiques symboliques pour penser et étudier l'action (de comparaison, de composition, de recherche de la différence de collections). Lors des dialogues d'ingénierie, les professeurs, guidés par le chercheur, ont dû se rendre compte d'un fait essentiel. En effet, la nature du travail a changé : même si d'apparence le fil rouge des annonces est resté le même, la production écrite de mesures de grandeur a laissé place à l'*étude des formes écrites* de telles mesures (par exemple au travers des transformations possibles au sein de l'écriture additive). Les stratégies à enseigner (par exemple celle de rendre des termes identiques par composition / décomposition) diffusent au travers des membres de la sphère 1 qui ont déjà mis en œuvre l'ingénierie.

Si le signe « = », tel que par exemple 2 + 2 (possibilité de désigner et d'écrire une mesure) = 3 + 1 (autre manière de la désigner et de l'écrire) = 4 (désignation usuelle) est bien un élément constitutif du jeu et de la construction de la notion d'équivalence (et déclaré comme tel dans le document de la progression), sa mise en œuvre a été

[110] C'est-à-dire en permettant l'exploration des combinaisons pour atteindre des valeurs ; exploration motivée par la part de hasard donnée par le jeu et par le décalage des valeurs portées par les mesures des doigts annoncés et des points du (ou des) dé(s) pouvant être atteintes.

travaillée au sein du collectif provençal. La lecture du signe « = » *dans les deux directions* (la première direction comme indiquant une décomposition possible en x termes, 12 = 2 + 10 = 2 + 2 + 8 ; la seconde comme indiquant un nombre à atteindre, un total, 2 + 10 = 12) n'est pas une évidence. Nous avons montré dans la partie empirique de notre travail qu'elle était à actualiser dans la situation tant est forte la prégnance de la seconde direction dans la culture et la forme scolaires.

Fait d'expérience : référence aux annonces dans le travail de la relation système-modèle

Les faits d'ingénierie relatifs à la mise en place de la progression pour favoriser un temps de l'expérience, à la prise de conscience du changement du statut de l'écrit et à une lecture dans les deux directions d'écritures mathématiques nous signalent que jouer et faire jouer au *Jeu des annonces* ont été travaillés afin de *penser et agir sur la mesure de collections*, mesure décrite comme une somme de x termes nommée « annonce ». La référence aux annonces est un fait d'expérience crucial partagé peu à peu par les professeurs, les chercheurs et les autres membres du collectif. Cette référence est pensée comme une référence à une situation de désignation d'une mesure sous forme d'une somme de mesures plus « petites », contenues dans cette mesure.

Pour exemplifier notre propos, nous déclinons ce fait d'expérience au travers de trois moments qui montrent comment s'oriente le travail au sein du collectif de pensée. Le premier moment relate l'élaboration du module 9 par le collectif. Les deuxième et troisième moments ceux de l'appropriation par les élèves, permise par l'ingénierie et la compréhension de l'ingénierie par les professeurs.

Elaboration d'un module d'enseignement-apprentissage

Le module 9 d'enseignement-apprentissage vise à faire construire par les élèves le système numérique décimal positionnel *en appui sur les nombres, en référence aux annonces*. Ainsi le module 9 marque un changement d'enjeu d'apprentissage avec l'introduction de « D » (pour dizaine) et « U » (pour unité) qui fonctionnent comme des unités de grandeur. Ces signes D et U serviront de théorie en acte de la numération décimale positionnelle.

Au départ, la situation *Beaucoup de mains,* prévue initialement et testée lors de l'année 1, avait été pensée en appui sur des doigts dessinés. Cependant le travail des élèves se réalisera, lors de la phase d'implémentation expérimentale, sur une écriture additive à plusieurs termes. Quel travail collectif a fondé ce changement ? Nous retiendrons, à titre de propos emblématique, une réflexion d'un professeur d'une classe d'étude qui a mis en place les deux options :

> « Pour moi qui ai fait la séance avec les doigts [situation *Beaucoup de mains*] avant de me lancer dans le module, j'ai trouvé que de ne plus avoir les doigts en référence [c'est-à-dire les dessins de configurations de doigts prévus dans *Beaucoup de mains*] donnait plus de liberté aux élèves qui ont vraiment pris les nombres à bras le corps et se sont autorisés des groupements qu'ils ne pratiquaient pas autrement. La référence aux doigts entraîne quasi automatiquement le groupement par 5 et le groupement par 10 apparaît comme le résultat de deux groupes de 5 » (Jos – courriel du 14 décembre 2012).

Ce professeur constate que le groupement par 10 est induit par la situation mettant en place des doigts et mains et qu'ainsi les élèves n'ont pas l'occasion de se confronter à d'autres groupements. Travailler sur des nombres a permis aux élèves de se construire une expérience de groupements parmi lesquels le groupement à 10 est un cas parmi d'autres. Autrement dit, les élèves ont la possibilité de raisonner avec des écritures pour montrer les propriétés spécifiques du système numérique.

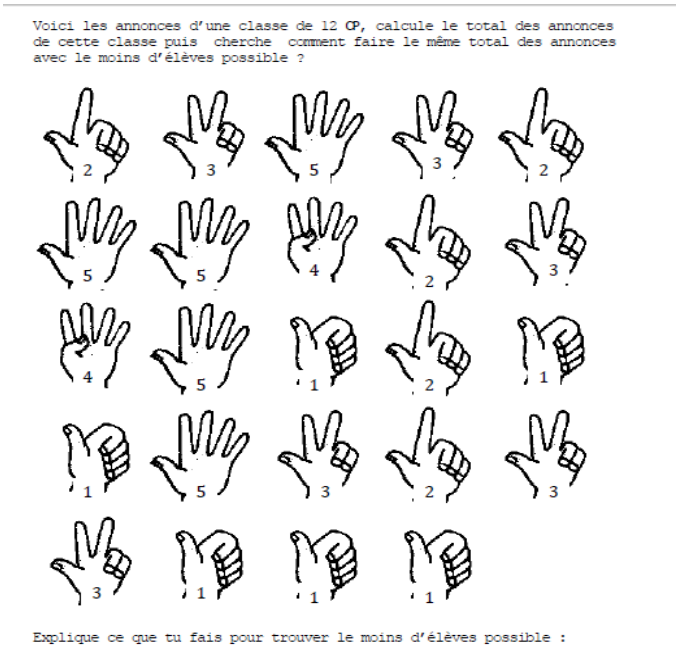
L'élaboration du module 9 a eu lieu d'abord au sein de la sphère 1, de fin février 2012 à fin août 2013, puis s'est poursuivie en collaboration avec la sphère 2 jusqu'en mars 2014 durant les deux premières années d'expérimentation à grande échelle. Les transactions au sein de la sphère 1 ont surtout eu lieu au travers du document de la progression qui a circulé par courriels : écriture du module et réécritures à partir des commentaires ont produit différentes versions. Ci-dessous, pour illustrer ce propos, nous présentons les descriptions rapides de trois versions de ce module (parmi les vingt produites) illustrant trois étapes de la réflexion collective. Ces descriptions sont suivies de commentaires.

Premier moment – appui direct sur le jeu

Version 4 du 24 mai 2012

Situation *Beaucoup de mains* :

« Voici les annonces d'une classe de CP, calcule le total des annonces de cette classe puis cherche comment faire le même total des annonces avec le moins d'élèves possibles »



Les consignes à donner aux élèves pour la séance 1 sont :

1ère phase : « Tous les élèves d'une classe ont produit une annonce avec leurs deux mains. Voici leur annonce. » Le professeur affiche au tableau une feuille sur laquelle est représentée l'ensemble des annonces (cf. ci-dessus). « Vous allez faire la même annonce avec le moins de mains possible. Le nombre total de doigts sera le même. »

A cette étape une démonstration est proposée et jouée par quelques élèves : il s'agit de faire comprendre le jeu qui consiste à passer de « beaucoup de mains » à « moins de mains » par un système d'échange de doigts.

2ème phase : « J'ai découpé les mains de l'annonce cette classe pour en faire des étiquettes. Vous devez grouper les étiquettes pour obtenir le moins de mains possible. »

La mise en commun prévoit ensuite de désigner le nombre obtenu à l'aide de groupements de 10, c'est-à-dire de trouver dans quelles productions il y a le moins d'élèves possible.

Commentaires :
Cette première proposition, qui sera mise à l'épreuve uniquement dans les classes d'étude, présente une activité de dénombrement en appui sur du matériel (représenté sur l'affiche). On attend des élèves qu'ils trouvent la somme d'une annonce à 24 mains. Le nombre de doigts est suffisamment grand pour discréditer un dénombrement par comptage et induire un dénombrement par groupement de termes. En effet, l'affiche est conçue de manière à induire des groupements par 5 (les doigts d'une main) ou par 10 (avec la consigne « cherche à faire le même total des annonces avec le moins d'élèves possible »). Il s'agit d'exprimer la mesure de la quantité par une désignation canonique (10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 7). L'activité est « découpée » en étapes guidant l'élève (présentation et but, étape transitoire pour comprendre le but, moyen d'y parvenir, étayage permettant la conversion mains / élèves, groupements par 5 ou par 10.)

Deuxième moment – référence aux annonces
Version 15 du 13 décembre 2012

Situation *Groupements à 10* :
« Voici une écriture additive : 14 + 8 + 4 + 5 + 3 + 5 + 9 + 13 + 11. Vous allez la réécrire pour qu'elle puisse être lue plus simplement. »

Pour produire une écriture canonique sous forme de dizaines et d'unités, les élèves doivent parvenir, par des techniques de dégroupement / groupement, à « chercher des 10 cachés » ou à « faire voir des 10 » en utilisant la notion d'équivalence entre chacune des écritures. En effet chaque écriture additive (ou ligne d'écriture) transformée est équivalente à la précédente et la suivante.

Commentaires :
Cette version sera déposée sur le site pour une mise à l'épreuve dans les classes expérimentales. Les élèves travailleront directement sur une longue écriture additive comprenant aussi des termes supérieurs à 10. Leur action sera orientée vers le groupement / dégroupement. La cohabitation, au début, de différents groupements possibles pour dénombrer un grand nombre de termes est importante car elle permet d'utiliser les connaissances apprises dans les modules précédents (doubles et répertoires connus) et d'en éprouver les limites pour s'engager vers le groupement à dix. Ce qu'il est essentiel de comprendre, c'est que les sommes (exprimées sous la forme de groupes de 10 et unités isolées) vont pouvoir être désignées par une écriture en xD et

yU, un code commun qui permet une écriture plus simple, et une comparaison immédiate et universelle. Ainsi, le travail dans le système des écritures permettrait de repérer des connaissances nouvelles et d'aller plus loin dans les connaissances que les manipulations mobilisent.
Lors des réunions, les professeurs vont attirer l'attention sur le fait que les élèves ont besoin de plus d'expérimentations dans la désignation des nombres, la connaissance des répertoires et l'usage du groupement / dégroupement mené dialectiquement. Ils proposent des aménagements des variables.

Troisième moment – référence aux annonces

Version 19 du 19 mars 2014 (réédition le 3 mars 2015)

Huit élèves ont fait chacun une annonce. On l'écrit au tableau :
« 7 + 3 + 4 + 7 + 10 + 6 + 5 + 1 »,
puis le professeur dessine la boite en huit termes :

?							
7	3	4	7	10	6	5	1

Problème : il faut pouvoir faire cette annonce avec moins de termes. Comment pourrait-on obtenir une écriture avec des « dix », c'est-à-dire des dizaines ?

La consigne est de réécrire l'annonce des huit élèves avec le moins de termes possibles. La représentation de la boîte permet de concrétiser la réduction du nombre de termes car peu à peu le nombre de cases diminue.
7 et 3 deviennent 10, ainsi que 6 et 4. Mais la réduction rencontrera un problème à résoudre par les élèves lorsque l'écriture se présentera sous la forme
« 10 + 10 + 10 + 7 + 5 + 1 » : réduire les termes à nouveau ne permet pas de produire des 10 sauf à décomposer 13 (groupement de 7 + 5 + 1) en 10 et 3.

Commentaires :
Cette version a pris en compte les transactions au sein de la sphère 2. Ces transactions avaient mis en évidence le fait que les élèves ne pouvaient traiter une écriture additive trop éloignée des compositions ou décompositions qu'ils avaient l'habitude de fréquenter. Les transactions avaient aussi mis en évidence la très grande complexité d'organisation spatiale que demandent des techniques de composition / décomposition. Passer d'une ligne à une autre demande en effet un double travail de conservation (les termes qui ne changent pas d'une ligne à une autre) et de modification (les termes composés ou

décomposés), auquel s'ajoute le travail proprement sémiotique de mise en évidence de ces modifications. C'est la raison essentielle pour laquelle l'idée de la représentation boîte avait été proposée.
Dans cette version, les compositions pour faire voir des 10 sont repérables et un seul problème nouveau est traité (la décomposition d'un nombre supérieur à 10). Elle favorise ainsi un travail de transformation des termes : les élèves opèrent sur les mesures de grandeurs.

Evolution de la situation didactique au module 9 : trois versions produites par la sphère 1

L'évolution de la situation didactique proposée au module 9 (module traitant de la constitution du système numérique décimal positionnel), décrite en trois versions successives, montre que la référence aux annonces se consolide par un travail sur les écritures. Cette évolution cherche aussi à respecter les contraintes dues à la progression et l'avancée des élèves (expérimentations effectives dans le système des nombres). Pour cela, un travail collectif d'analyse de la situation didactique et de ses mises en œuvre effectives a été nécessaire afin que les deux aspects à la fois soient pris en compte.

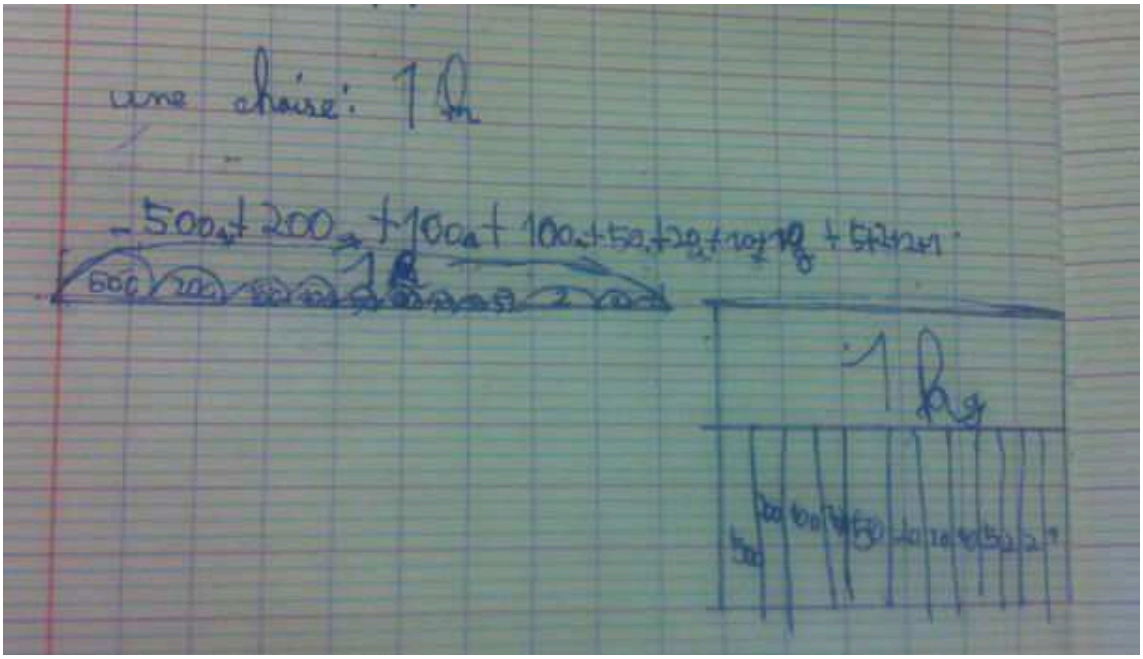
Appropriation de la référence aux annonces par les élèves : premier exemple

La référence aux annonces se construit peu à peu en paradigme pour les élèves. Nous prendrons comme premier exemple la mise en place expérimentale de la situation *Balance Roberval*. Il s'agit de désigner un (ou des objets) posé(s) sur un plateau de la balance, des crayons par exemple, par *une* des grandeurs qui qualifie cette collection de crayons : dans cette situation de mesurage, la masse. Pour cela, les élèves utilisent une boîte de masses marquées. Les élèves désigneront alors cette grandeur « masse » avec une écriture additive, appelée dans certaines classes « annonce des masses marquées », mais aussi en utilisant les autres représentations. C'est un travail identique au *Jeu des annonces*, mais avec une autre *espèce de grandeur* (Chevallard & Chambris, 2015). L'écrit en est alors le compte-rendu, l'expression d'une expérience de mesurage avec des masses marquées qui représentent une mesure de la grandeur « masse » comme l'expérience de désignation d'une mesure de la grandeur « taille des collections » dans le *Jeu des annonces*. Le signe « = » signifie « pèse comme ou autant que» dans le sens de « est pareil que, est équivalent à, sont comme, ça désigne

x, ça permet d'atteindre x » du *Jeu des annonces*. Cette somme est d'abord contrainte par les valeurs des masses marquées[111] comme les annonces sont contraintes par les doigts des deux mains dans le *Jeu des annonces*. Elle se réalisera par la suite à l'aide du système numérique et des unités de la grandeur « masse » en référence à ces situations de pesée.

Nous illustrons ci-dessous la manière dont les élèves s'approprient cet enjeu de mesure avec des productions relevées dans le *Journal du nombre*.

Séquence 1 - Expression d'une mesure avec des masses marquées :

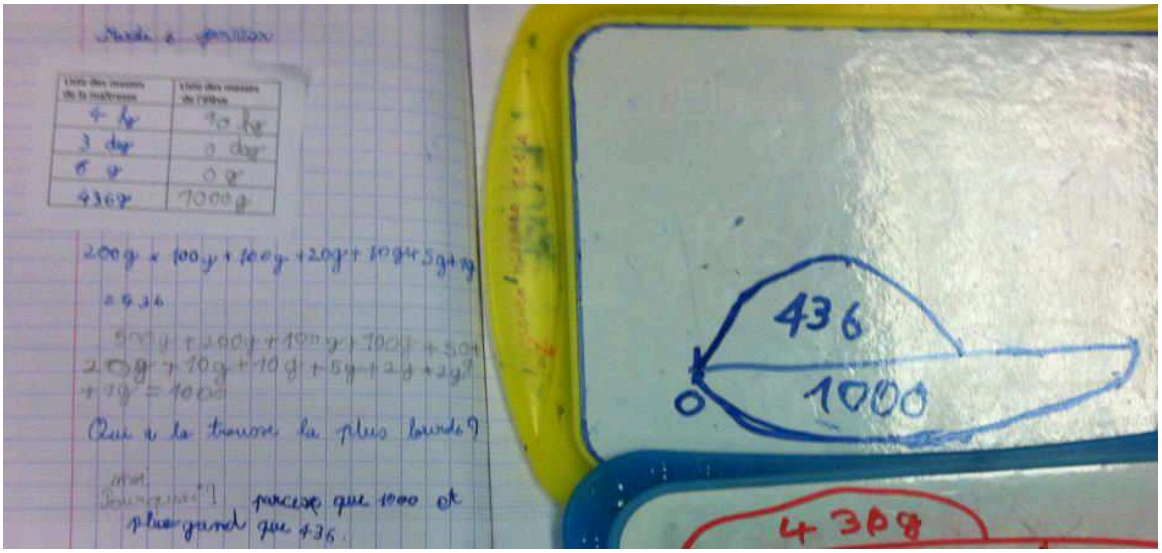


Production d'élève de CE1

Dans son journal du nombre, cet élève a choisi un objet (une chaise), lui a donné une mesure de masse vraisemblable (1 kg) et l'a représentée par une écriture additive, un schéma-ligne et une boite. 1 kg est une valeur que les élèves ont envie d'explorer ; elle correspond à la totalité des masses marquées d'une boîte de douze masses marquées. On retrouve souvent ce choix dans les journaux du nombre.

[111] Les masses marquées accompagnant une balance de type Roberval sont toujours organisées avec la même distribution de masses : 1 g, 2 g, 2 g, 5 g, 10 g, 10 g, 20 g, 50 g, 100 g, 100 g, 200 g, 500 g etc. Cette organisation est, pour les élèves, à l'étude. Par exemple, peut-on composer toutes les mesures possibles (au gramme près) avec ces masses marquées ? Quelles sont les mesures qui n'autorisent qu'une composition et celles qui en autorisent plusieurs ?

Séquence 2 - Expression de la mesure avec des unités de mesure de masse dans le système décimal :



Production d'élève de CE1

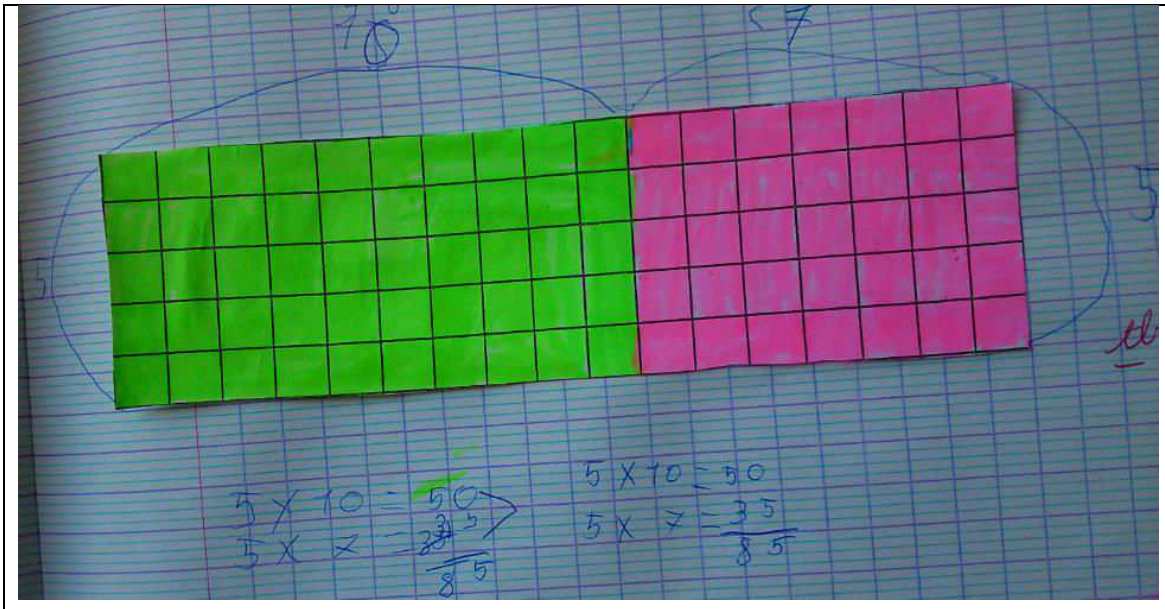
Deux objets sont comparés selon leur masse. Ici deux trousses dont les valeurs sont imaginées par l'élève dans son journal du nombre sous la forme d'une décomposition selon des unités de mesures de masse : 4 hg et 3 dag et 6 g ou 436 g pour la première ; 10 hg ou 1000 g pour la seconde.

Productions d'élèves dans le journal du nombre relatives aux mesures de masse

Le groupe a progressivement construit le fait que lorsque les élèves jouent au *Jeu des annonces* ou à *Balance Roberval*, ils procèdent à une activité de mesure d'une grandeur et expérimentent, dès le début, les nombres comme mesures d'une grandeur. Ils constituent également avec les écritures numériques des propriétés des nombres. Ainsi la relation systématique entre le modèle (l'écriture additive) et le système (la situation de mesurage) donne un sens profond à ce *style de pensée*. Dans ce « voir-comme », la référence aux annonces est compatible avec tout problème du champ additif mettant en jeu d'autres espèces de grandeurs calculables (masse, volume, longueur) ou d'autres types de collection. Les représentations jouent un rôle essentiel dans cette dialectique système-modèle car elles sont des descripteurs de cette relation entre la situation et la notion mathématique, c'est pourquoi nous y consacrerons une section ultérieure.

Appropriation de la référence aux annonces par les élèves : deuxième exemple

Le *style de pensée* de ce collectif a des conséquences nombreuses sur l'activité d'ingénierie : nous l'avons illustré dans la section précédente. Il a également des conséquences sur l'activité didactique et mathématique elle-même : nous en apportons ci-dessous un exemple. Un professeur (San) relève la manière dont un élève de CE1 (Théo) parvient à résoudre un calcul complexe, non prévu dans l'ingénierie, mais qu'il a rencontré : la multiplication d'un nombre a deux chiffres par un nombre à un chiffre. Ce professeur relate aussi la pratique qui lui a permis de diffuser cette découverte dans la classe. Nous présentons ci-dessous la production d'un élève qui a imité la technique découverte par Théo et les commentaires apportés par le professeur.



Production d'élève de CE1 pour le calcul de 5x17

Commentaire du professeur :

« J'envoie deux photos prises dans les cahiers de mes élèves pour illustrer le calcul d'un produit. Leur démarche s'inscrit dans la continuité du travail mené sur les nombres rectangles : « voir un nombre-rectangle dans un autre ». Les enfants ne savent pas encore calculer 5 x 17, mais dans le nombre-rectangle 5 x 17, ils sont désormais capables de « voir » les deux nombres rectangles 5 x 10 et 5 x 7. Ils en sont donc arrivés à décomposer le produit 5 x 17 en la somme des produits 5 x 10 et 5 x 7… dont ils connaissent le résultat via le travail mené par ailleurs sur les tables en calcul mental. […] Au départ, Théo a expliqué que pour calculer 2 x 28, on pouvait « casser le 28 en 20 + 8 » et qu'ensuite on n'avait « plus qu'à multiplier 20 par 2 et

8 par 2 ». Certains élèves ont compris tout de suite, mais pour d'autres c'était bien-sûr plus compliqué. Alors le lendemain, je leur ai fait découper le nombre-rectangle 3 x 16 sur un quadrillage. Et là, je leur ai demandé comment on pourrait calculer le nombre de carreaux sans les compter. Un élève a choisi de partager 16 en 8 et 8 « parce que 3 x 8 ça fait 24, et 2 fois 24 ça fait 48 » ; un autre a proposé de partager 16 en 10 + 6 puis de calculer 3 x 10 et 6 x 3 » (San - courriel du 30 mars 2016).

Dans une dialectique système-modèle, les membres du collectif *ACE-Arithmécole* (élèves compris) ont acquis un *style de pensée* qui leur permet d'envisager comment pourront se résoudre des problèmes de mesures et ainsi d'élargir l'espace des décisions dans ces situations. Ils jonglent ainsi avec les représentations (nombres-rectangles, écritures mathématiques) et des situations de référence (annonces, balance Roberval) dans un aller-retour concret-abstrait qui leur permet d'exploiter des notions mathématiques telles que la composition additive d'une manière originale. Le travail sur une représentation (ici les nombres-rectangles) fournit une référence à l'écriture distributive. En effet, une écriture mathématique, telle que 17 x 5, est explorée à l'aide d'une représentation : c'est bien l'écriture qui pose des questions nouvelles difficilement appréhendables en dehors d'une concrétisation dans le monde des représentations rectangulaires. Les nombres-rectangles sont ainsi vus comme "producteurs de distributivité" dans l'activité mathématique conjointe.

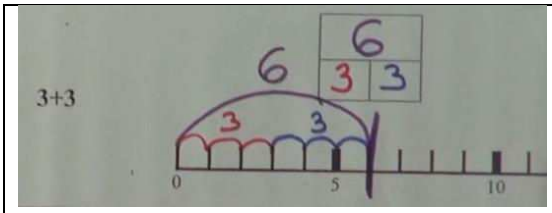
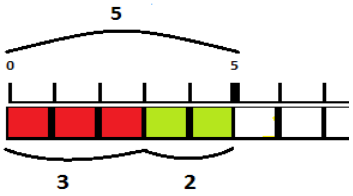
Rôle du schéma-ligne dans les représentations de la situation

Fait d'ingénierie : du comptage d'entités à la désignation de mesures

Nous nous pencherons surtout sur le cas du schéma-ligne car c'est celui qui a constitué dans la biographie du collectif un « milieu-problème »[112] longuement discuté. En effet, le schéma-ligne pose un problème important de mise en œuvre au début de l'implémentation des séquences d'enseignement dans les classes (septembre-octobre

[112] La boîte et le schéma-ligne, bien qu'évoqués par la sphère 1 dès la première année (2011-12), ne seront introduits qu'en deuxième année ou première année d'expérimentation à grande échelle (2012-13).

2012). Se pose tout d'abord la question de son appréhension par les élèves. Il est donc naturel que les professeurs cherchent à résoudre au sein de leur classe cette difficulté de mise en œuvre. Un professeur, en associant le schéma-train au schéma-ligne, résout en partie ce problème (message dans forum du 2 octobre 2012). Mais dans la plupart des cas observés au cours des séances en classe ou relevés dans les échanges écrits (courriels, forum), la mesure d'un terme est désignée comme la somme d'unités de valeur « 1 ». Autrement dit, pour désigner par exemple la mesure « 3 », trois ponts de « 1 » sont tracés[113] ou coloriés. On trouve ici une pratique de mesurage où l'unité « 1 » est reportée ou comptée x fois. L'idée d'association des représentations (« train » et « ligne ») rapportée par le professeur est ensuite reprise et travaillée au sein de la sphère 1 puis de la sphère 2 afin de proposer une procédure pour enseigner l'utilisation du schéma-ligne, et ce dès le module 0. Dans ce module, et par la suite également, une mesure, par exemple de « 3 », sera montrée par *un seul* pont comportant trois unités. Le fait de *désigner la mesure d'une quantité par le tracé d'un seul empan* (chaque pont représentant un terme de l'annonce ou du lancer) est un élément important dans le *style de pensée* de l'ingénierie. Rappelons que l'ingénierie fait construire la mesure de la quantité à partir de « petites » quantités connues (inférieures à 6).

	
Au début de l'implémentation élèves et professeurs représentent une annonce de « 3 + 3 » avec trois ponts de « 1 » et encore trois ponts de « 1 ».	La proposition du professeur reprise et travaillée par les sphères 1 puis 2 permet de représenter l'annonce « 3 + 2 » avec un pont de « 3 » et un pont de « 2 ».

[113] Commentaires de professeurs au début de l'expérimentation : « On a fait le parallèle avec le train en faisant un petit pont entre deux graduations pour compter les cubes ex 2 + 3 c'est 2 cubes rouges (2 ponts) puis 3 cubes verts (3 ponts), cela fait un train de 5 cubes (cuvette par en-dessous) » (extrait forum du site – 2 octobre 2012). « Pour faire les sauts sur la ligne graduée, par exemple 1 saut de 3, on fait de 1 en 1 jusqu'à 3 avec des petits arcs de cercles de trait à trait » (extrait forum du 3 octobre 2012). « D'autres qui, pour coder 2 + 3, faisaient bien 2 ponts au début [pour le terme 2] » (extrait courriel du 8 octobre 2012).

Ce fait est à associer aux faits d'ingénierie que nous avons décrits dans le chapitre précédent concernant la notion de « désignation de la mesure de la quantité ». La désignation de la mesure est un sujet de discussion abordé par le collectif provençal (réunion du 26 septembre 2012) juste avant cet ensemble de moments biographiques sur la mise en place de l'utilisation du schéma-ligne par la sphère 1 (du 2 au 12 octobre 2012). Nous avons montré que le chercheur ChS avait dû mettre au travail dans la sphère 2 ce choix épistémique d'ingénierie. En effet, au début de l'implémentation de l'ingénierie, le comptage était la connaissance que les professeurs sollicitaient pour désigner la mesure d'une collection et le travail d'analyse collective de faits d'observation didactiques a permis de décrire les actions des élèves et les diriger vers la désignation (c'est-à-dire attribuer à une collection d'objets un code qui doit être compréhensible). La formulation « 1 / 2 / 3 non // 3 » condense didactiquement la désignation de la mesure en montrant à l'élève ce qui est attendu : désigner une mesure d'une grandeur, la *taille de la collection*, et non « compter en numérotant ». Pour le groupe provençal, il s'agit ainsi de désigner la mesure « 3 » dans sa globalité et non d'énumérer « 1 / 2 / 3 » comme allant-de-soi que le dernier mot prononcé, « 3 », est considéré comme la désignation de trois objets et non du troisième objet.

Nous avons montré ensuite que ce savoir de désignation et de représentation de la mesure diffuse les années expérimentales suivantes par l'intermédiaire des professeurs ayant déjà mis en place l'ingénierie, au travers des comptes-rendus écrits de leur pratique ou rapportés lors des réunions. C'est un savoir alors clairement identifié, porté également par la représentation du schéma-ligne. Ce savoir est rapporté à une pratique d'utilisation de ce schéma-ligne. Autrement dit, la représentation du schéma-ligne est discutée en tant que pratique de la mesure mais une des théories sous-jacentes est celle de la désignation de mesures, ici la taille de la collection. Cette pratique est interrogée par la sphère 2 que nous avons suivie. L'interrogation prend d'abord naissance par rapport à un usage de vérification de la comparaison entre annonce et lancer, puis en rapport avec l'utilisation technique du schéma : quelle graduation utiliser, pas à pas ou avec des repères et lesquels ? Qui, du professeur ou des élèves, indiquent les repères à utiliser ? Peut-on ne plus utiliser de graduations ou repères ? Le constat d'un comptage pas à pas qui perdure longtemps chez certains élèves amènera le groupe à discuter, et de manière récurrente chaque année, des fonctions que peut prendre le schéma-ligne dans la

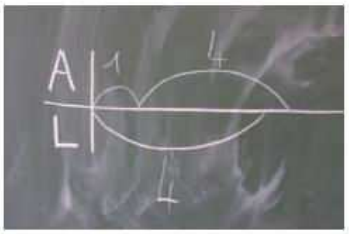
situation. L'expérience du groupe s'acquiert sur les liens qu'entretiennent entre elles les représentations et sur leurs mises en œuvre. Notamment le schéma-ligne qui d'outil de vérification est peu à peu envisagé comme une ressource adaptée à la comparaison de mesures. Il permet alors de faire travailler les élèves dans le passage de l'espèce de grandeur "taille (nombre d'entités) d'une collection", à l'espère de grandeur "longueur". Ainsi s'installe un fait d'expérience partagé par les professeurs, chercheurs et autres membres du collectif, celui de l'interprétation des représentations lors d'une pratique, par exemple du schéma-ligne pour comprendre les nombres et pour raisonner sur la situation (interpréter la situation, l'anticiper ou l'imaginer).

Fait d'expérience : construction du schéma-ligne comme objet pour interpréter la situation

L'usage des représentations n'est pas indiqué dans le texte du document de la progression. Les représentations sont seulement pré-tracées sur les fiches, schéma-ligne gradué avec le schéma-train en-dessous. L'usage de ces représentations est le produit de l'effort du travail collectif lors des transactions d'ingénierie. Les liens à créer entre construction des représentations et raisonnement sur la situation se sont constitués peu à peu en fait d'expérience dans le groupe. Des observations ou des comptes-rendus de réalisations effectives montrent que des pratiques, accompagnées par le langage à la fois de la pratique mathématique et de la situation[114], sont intégrées dans le collectif de pensée. Nous présentons ci-dessous un exemple, extrait d'un compte-rendu envoyé sur la liste de diffusion, que nous commenterons ensuite.

[114] Dans le langage de la situation, l'élève peut expliciter ce que signifie deux paquets de six jetons et un jeton : par exemple, chaque enfant a reçu un même nombre de jetons et il en reste un. Dans le langage de la pratique mathématique, il sera amené à l'écrire sous la forme 6 + 6 + 1 ou 2 × 6 + 1 ou 12 + 1 ou 13. Comprendre la fonctionnalité de telles écritures est pouvoir les ramener à la situation et à la question posée dans la situation.

Le 10 octobre, on reprend l'idée du schéma ligné mais sans graduation.
J'emprunte des fiches individuelles du jeu des annonces (ex.1+4 ≠4) et propose cette écriture au tableau :
les enfants commentent « Oui, ça marche bien, on voit que ça dépasse de 1 », « C'est sûr que c'est pas 4 puisqu'il y a déjà 1 en trop! »



Extrait du compte-rendu du professeur (Cel) pour le module 2 (13 octobre 2014)

Cet extrait témoigne d'une compréhension du professeur des systèmes de représentations à mettre en lien dans la situation de jeu. Ici, l'écriture mathématique et le schéma-ligne concourent pour répondre à la question de comparaison. Le travail de comparaison s'effectue bien sur les écritures de l'annonce A et du lancer L : « 1 + 4 » et « 4 » ne sont pas équivalentes. Les élèves sont capables de le formuler (« il y a déjà 1 en trop ») en s'appuyant sur leurs connaissances de la situation. Mais le schéma-ligne montre que « ça dépasse » : « on le voit ». Poser un problème relevant du nombre d'entités de deux collections (annonce et lancer) dans le schéma-ligne permet d'utiliser « l'évidence » (ça dépasse) fournie par les longueurs. Cette représentation pourrait encore mieux affiner la comparaison : il serait intéressant d'introduire le signe « supérieur à » (noté « > ») dans l'écriture quand une grande partie des élèves sera en capacité de formuler en quoi se constitue cette inégalité.

Entre ce qui a été représenté (l'annonce et le lancer) et ses représentations sous la forme d'écritures (1 + 4 ≠ 4 ou 1 + 4 > 4) ou sous la forme d'un schéma-ligne, des liens langagiers sont établis : chacune de ces représentations a ainsi une fonction par rapport à la situation et prend aussi un sens l'une par rapport à l'autre. Ce langage de la pratique (qui décrit les représentations et leur fonctionnement) est le premier logos avec lequel le modèle additif est pensé : il est relatif à un fait d'expérience car un tel fait de mise en place d'un schéma-ligne a été auparavant discuté au sein du collectif.

Notion de *temps de situation*

Faits d'ingénierie : saut informationnel trop important et introduction d'un module 6 bis

La sphère 1 tente de concevoir une progression capable de faire éprouver aux élèves la nécessité de l'économie de l'usage d'un code écrit. Par exemple, pour une annonce de 3 + 2 + 1 à comparer avec un lancer de 5, si l'élève regroupe 3 et 2 alors il peut comparer 5 + 1 au lancer 5. Le calcul de la somme de l'annonce n'est utile que pour vérifier s'il a une possibilité de gagner, c'est-à-dire si son annonce est inférieure ou égale aux scores possibles affichés par un dé. Or à deux termes et trois termes (modules 1 à 6), il est observé majoritairement un compte global de doigts ou de points des dés sortis. Cette technique de comptage est efficace à cette étape de la progression car elle est correspond aux connaissances des élèves. Précisons qu'elle est très efficace jusqu'au module 4 car il n'y a que l'annonce à traiter pour la comparer au lancer, un peu moins aux modules 5 et 6 car annonce et lancer sont à manipuler conjointement. Seule la variable didactique d'augmentation du nombre ou de valeur des termes permet un changement de techniques de comparaison mettant en relief la nécessité de travailler sur le code écrit. Ce saut informationnel (changement de statut de l'écrit[115] qui engage le travail à venir sur le système numérique décimal positionnel) est prévu par l'ingénierie. Il participe au principe de continuité et de rupture défini comme un *temps de situation* (Quilio, 2008, 2012 ; Sensevy, 2011a) qui organise l'évolution de la situation didactique. L'évolution envisagée provoque une rupture qui remet en question les techniques anciennes (de calcul du tout) pour en construire de nouvelles (techniques de composition / décomposition utilisées dialectiquement). Cette rupture s'effectue dans une continuité de l'expérience de la situation didactique (*Jeu des annonces*) qui contient intrinsèquement les notions de composition, décomposition et équivalence entre les écritures.

Le fait d'ingénierie soulevé vient des observations de terrain : le saut informationnel prévu est trop important au regard des connaissances acquises par les élèves. En

[115] Nous rappelons que dans l'ingénierie, l'écrit est d'abord vu comme expression de la mesure d'une grandeur pour décrire la situation sous diverses formes de représentations symboliques (écriture additive, désignation conventionnelle, schéma-ligne, boîte) avant d'être aussi un moyen technique pour procéder à des manipulations dans cette situation.

effet, les observateurs et le chercheur ChS (dans un courriel du 1er décembre 2012, première année d'expérimentation à grande échelle) soulignent le fait que trop d'élèves manquent encore d'aisance dans la désignation des nombres, la maîtrise de répertoires et les comparaisons de nombres sous la forme additive. Ils ne peuvent alors s'engager dans un travail sur les groupements / dégroupements de grandes écritures additives telle que « 14 + 8 + 4 + 5 + 3 + 5 + 9 + 13 + 11 » dans la version de l'ingénierie mise à disposition en décembre 2012. L'introduction du module 6 bis (comparaison d'écritures additives de trois à cinq termes dont la valeur des termes n'est pas supérieure à 6) permet un temps d'expérimentation supplémentaire pour les élèves. Comme nous l'avons évoqué dans une section précédente de ce chapitre, sur l'évolution de la situation didactique au module 9, les discussions au sein du collectif (sphères 1 et 2) mèneront également à modifier la proposition de travail sur la réduction des grandes écritures. Mais ces réflexions sur la situation didactique initiale proposée n'ont pu se réaliser qu'au travers de la compréhension de l'enjeu ingénierique du changement de statut de l'écrit et du saut informationnel qu'il provoque.

Faits d'expérience : construction d'une culture d'un *temps de situation*

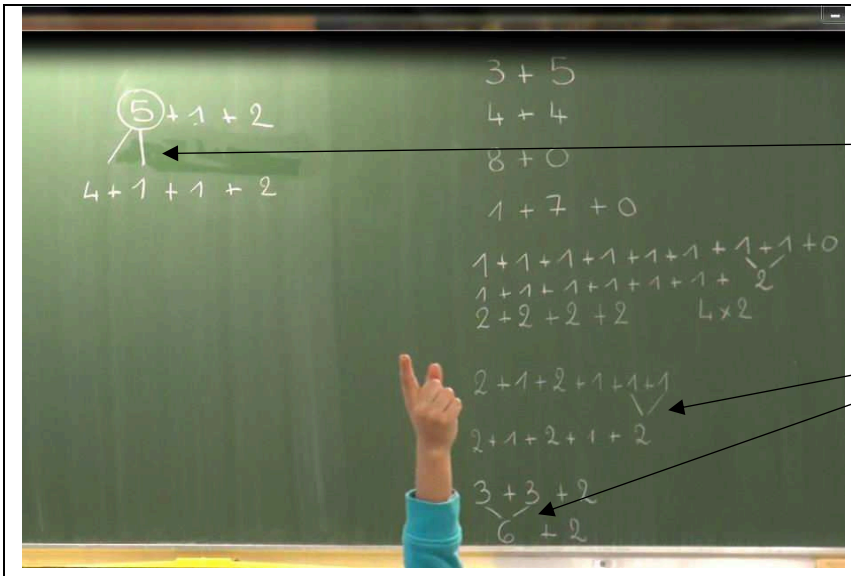
La compréhension de l'enjeu du changement du statut de l'écrit et de ses conséquences pour la mise en œuvre des modules est un fait d'expérience crucial pour le groupe. Cela s'est joué sur un temps long qui a nécessité des « intégrations conceptuelles » dans les actions didactiques effectives. Nous avons décrit ces moments dans le précédent chapitre lors de l'analyse empirique des transactions au sein du groupe provençal (chapitre 6) et nous reprenons brièvement ici l'idée de gestes d'enseignement à proposer et à produire, sous cette nouvelle perspective de la construction d'une culture commune d'un *temps de situation*.

Le changement du statut de l'écrit au cours de la progression et ses conséquences (travail sur l'écrit, étude de l'écrit) a été annoncé par le chercheur ChS plusieurs fois, notamment lors des réunions qui abordent l'introduction du module 6 bis. Mais une telle déclaration ne suffit pas à entrer dans l'expérience de ce qu'est mener l'avancée didactique dans la classe selon un *temps de situation*. Il faut lui donner une forme de vie et de langage associé. En effet, les professeurs (expérimentant pour la première

année) ont à se projeter dans une action didactique à venir. Cette projection est une réelle difficulté.

Dès le début des échanges est discutée l'importance de la constitution de faits numériques (par exemple le fait que 3 + 2 soit plus petit que 6, que 3 + 2 soit équivalent à 4 + 1). Cette constitution de faits numériques, par les élèves eux-mêmes et au cours d'un jeu dont ils expérimentent les stratégies gagnantes, leur permet de devenir co-responsables de l'avancée dans les savoirs. Permettre l'émergence de ces faits numériques et les mettre en valeur sont des actions professorales à mettre en place. Elles ne sont pas courantes dans les habitudes d'enseignement, tout du moins sur une durée allant au-delà d'une ou deux séances. Lors du dialogue d'ingénierie, les professeurs apprennent à reconnaître les effets d'une opportunité d'enseignement qui permettrait (ou pas) aux élèves de s'appuyer sur leurs actions antérieures et la certitude qu'elles leur procurent. Autrement dit, ils apprennent à désigner les connaissances déjà construites sur lesquelles s'appuyer, à convoquer un enseignement au bon moment, c'est-à-dire en fonction de l'observation de l'avancée des élèves.

Un professeur (Flo, en deuxième année d'expérimentation) va produire des actions qu'il considère comme nécessaires pour franchir le saut informationnel du changement de statut de l'écrit. Pour cela, le professeur va s'appuyer sur le *Journal du nombre*. Régulièrement une mesure (dans l'exemple ci-dessous, le nombre « 8 ») est proposée et doit être décomposée de manières différentes. Chaque élève a la possibilité d'écrire ce qu'il sait. Quelques-unes des productions sont ensuite recensées au tableau, donnant ainsi à voir aux autres élèves des décompositions possibles. Des liens sont établis par les élèves entre les écritures ; le professeur les montre par un système de signes.



Système de signes montrant un « dégroupement »

Système de signes montrant un « groupement »

Les écritures proposées par les élèves ont été écrites au tableau ; il n'y a aucune recherche d'exhaustivité. Quand un élève remarque un lien entre des écritures, par exemple au bas du tableau que 3 et 3 font 6 et que donc « 3 + 3 + 2 » est équivalent à « 6 + 2 », le professeur le note.

Le professeur introduit ensuite le dégroupement :

« Professeur : ce nombre-là ((montre 5 + 1 + 2)) c'est 8 / si je vous demande de l'écrire avec un 4

Elève : 4 + 4

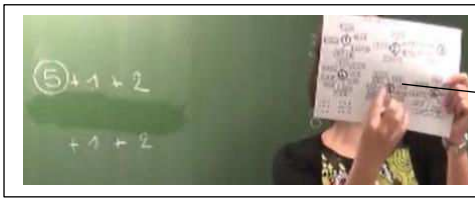
P : on peut l'écrire 4 + 4 / mais je veux garder le 1 et le 2 / donc je vais garder le 1 et le 2 ((recopie 1 et 2 en-dessous)) et je veux voir un 4 / on peut regarder ici / dans le soleil de quoi ?

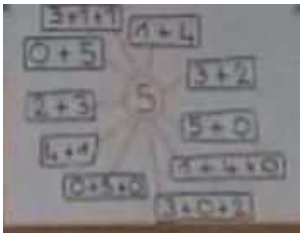
E : 4 plus 1

P : ((entoure le 5)) je dois dégrouper le 5 / je vais voir dans le soleil du 5 et je cherche les 4

E : 4 + 1

E : ou 2 + 3





P : est-ce qu'il y a 4 dans 2 + 3 ? / on a dit qu'on voulait le 4 / le 5 on le dégroupe et on peut écrire 4 + 1 à la place ((écrit 4 + 1))

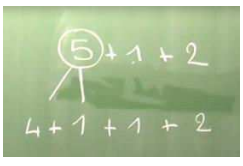
E : ou 1+4

P : vous voyez à quoi il peut servir le soleil ?

E : et même 4+1+1+2 c'est égal à 8

P : c'est exactement ça / on écrit les différentes écritures de 8 »

(séance au CP du 12 décembre 2013)



En reprenant les remarques de ses élèves, le professeur leur signifie que le travail s'effectue dorénavant sur les nombres et que les relations entre les écritures sont étudiées. Le milieu devient ici « les écritures » avec lesquelles on raisonne, à partir des propriétés des nombres.

Le professeur ouvre le champ des possibles en s'appuyant sur les connaissances des élèves. L'outil du « soleil » n'est pas un simple répertoire additif, il est le moyen de rechercher dans quel nombre un autre nombre est « contenu dans ». En cela, le professeur crée un nouveau milieu (composé d'éléments mésogénétiques connus anciens tels que la décomposition, l'équivalence entre les écritures) pour une situation nouvelle (faire voir un nombre dans un autre). Il permet que l'expérience sur les nombres et leurs désignations additives se poursuive. Le *Journal du nombre* est un moyen de faire avancer le dialogue didactique dans la mesure ici où des écritures additives, autres que des expressions de mesures dans le jeu, sont produites. Le professeur peut s'emparer d'écritures non produites dans la situation du jeu afin de les mettre à l'étude. Ainsi ce professeur a conçu une action d'enseignement nécessaire à la mise en œuvre du saut informationnel tout en étant adéquate aux enjeux ingénieriques. Il se trouve en position topogénétique haute par rapport à cette question de l'ingénierie.

Décomposer un nombre par un nombre « contenu dans » et un autre nombre-complément, en appui sur les répertoires additifs, peut être considéré comme une *connaissance spécifique* (Tricot & Sweller, 2016). Pour André Tricot et John Sweller, une connaissance spécifique est définie par sa nécessité à la réalisation d'une tâche. Au module 7, la notion de différence est introduite explicitement. Dans l'ingénierie, cette notion est abordée par la recherche de l'écart, en premier lieu dans une situation mettant en jeu deux trains. Cette situation est d'abord représentée avec des cubes emboîtés (les wagons) ; les élèves peuvent toujours y revenir ou s'y référer. Nous avons pu observer que les élèves qui trouvent aisément la différence entre les nombres d'entités des deux collections de wagons sont les élèves qui savent « faire voir un nombre (contenu) dans un autre », avec l'aide éventuelle de l'outil « soleil des nombres ». En effet, dans le style de pensée de l'ingénierie, la différence est vue comme le nombre que je rajoute au plus petit pour obtenir le plus grand et se formulera en appui sur le *principe inverse* (qui lie addition et soustraction). D'autres professeurs du groupe se saisiront de cette activité et la pratiqueront régulièrement, avant la mise

en place du module 7. Elle diffusera les années suivantes sans pour autant figurer dans le document de la progression. La connaissance spécifique de « nombre contenu dans » est aussi importante dans la résolution d'autres problèmes comme par exemple ordonner des nombres, trouver un nombre de parts identiques. Nous pouvons considérer que le travail épistémique avec des professeurs est aussi une « ouverture aux connaissances spécifiques » qu'il s'agit d'identifier et de recenser.

Savoirs ingénieriques

Dans la section précédente, nous avons essayé de montrer quels faits d'ingénierie se constituent en faits d'expérience. Tout un système de connaissances émane de l'expérience vécue et du partage de cette expérience au sein du collectif de pensée. Nous tenterons de les synthétiser dans cette section.

Nous avions présenté dans le chapitre 2 la mise en œuvre de l'ensemble des situations didactiques comme un savoir à constituer dans le système ingénierique par tous les membres du collectif. Les savoirs ingénieriques sont alors des savoirs institués par et dans le collectif de pensée *ACE-Arithmécole*. Ces savoirs s'intègrent dans le *style de pensée* du collectif, autrement dit en font partie en tant qu'éléments constitutifs. Certains de ces savoirs existent déjà avant les transactions (ils appartiennent au topos de l'un des membres et ils sont transmis aux autres, autrement dit, ils sont issus de la recherche, des pratiques et connaissances professionnelles ou de l'observation *in situ*), d'autres sont le fruit de l'expérience partagée (construits collectivement lors des échanges). Les savoirs existants participent à l'élaboration des savoirs construits au sein de transactions d'ingénierie que nous avons décrites et analysées au chapitre 6. Nous avons organisé ces savoirs ingénieriques en plusieurs catégories : nous distinguons les savoirs liés (i) à l'implémentation du projet de recherche, (ii) à l'épistémologie de l'ingénierie didactique, (iii) aux enjeux de la situation didactique, (iv) à la mise en œuvre, (v) aux phénomènes didactiques.

Savoirs liés à l'implémentation du projet de recherche

Un projet de recherche est un objet insolite pour les professeurs ou les personnels d'encadrement n'ayant pas eu l'occasion de fréquenter le milieu de la recherche. Un projet de recherche coopérative peut aussi être un objet parfois étrange pour des chercheurs habitués aux formes classiques de la recherche. Par exemple, dans une recherche collaborative orientée par la conception comme la recherche *ACE-Arithmécole*, les propositions ingénieriques sont constituées par des hypothèses de travail qui doivent être mises à l'étude collective. Dans un premier temps, chaque membre doit comprendre ce que signifient tout à la fois concrètement et théoriquement ces hypothèses de travail. Dans un second temps, à partir de cette compréhension, les membres du groupe s'autorisent des variations qui peuvent être importantes. S'autoriser à, c'est par exemple être auteur de commentaires, de propositions, de constats. Il s'agit aussi d'assimiler le fait que les connaissances issues de la recherche n'ont pas réponse à tout questionnement et que la production de connaissances ingénieriques nouvelles est en grande partie à fournir au sein de l'effort collectif.

Nous pourrions citer également en exemple de savoirs liés à l'implémentation d'un projet de recherche le fait que le dispositif demande des évaluations qui sont à considérer différemment des évaluations réalisées en classe (des pré-tests et post-tests ont été réalisés les deuxième et troisième années). Un entendement spécifique est nécessaire afin d'éviter les malentendus : les résultats de ces tests évaluent le *dispositif* (non les élèves ou le travail des professeurs).

Les chercheurs ont à intégrer les contraintes dues à l'institution scolaire. Même s'ils les connaissent, ils ont à les accommoder à la situation locale, toujours particulière pour chaque classe, école voire circonscription ou académie. Nous citerons par exemple la contrainte des évaluations départementales des Bouches-du-Rhône (de mi-parcours fin janvier et de fin de parcours au mois de mai) que les professeurs ont à faire passer à leurs élèves. Ces évaluations déstabilisent les professeurs car leurs propositions viennent se heurter à l'avancée didactique de l'ingénierie (par exemple les calculs, proposés à mi-parcours, utilisent des valeurs numériques ou bien demandent des techniques de résolution que les élèves n'ont pas encore rencontrées).

Ces savoirs liés à l'implémentation ne concernent pas directement le travail collectif mais ils font partie du « paysage » de la recherche collaborative. Tout un chacun doit les comprendre afin que les transactions directement liées aux finalités communes de

l'enseignement-apprentissage visé puissent se dérouler dans les meilleures conditions possibles.

Nous pourrions rajouter à ce paysage les connaissances liées à la genèse de la mise en place du dispositif qui ne sont partagées d'abord que par les membres participant depuis la première année. Par exemple, l'état d'explicitation de la situation didactique au tout début (octobre 2011) et son développement la première année (2011-12) témoignent du parcours collectif accompli par la sphère 1. La ressource produite à destination des professeurs des classes expérimentales la seconde année est un construit qui a produit questions et essais encore présents dans la mémoire des membres de la sphère 1. D'autres connaissances liées au contexte historique sont connues plus particulièrement des chercheurs : la genèse du projet de recherche, ses caractéristiques administratives et financières, son inscription dans les recherches en éducation. Ces connaissances sont dans une certaine mesure secondaires pour l'avancée concrète du projet mais avoir conscience de l'historicité du projet c'est situer cet avancement dans un parcours temporel et humain.

Savoirs liés à l'épistémologie de l'ingénierie didactique

Dans le chapitre 4, nous avions présenté l'arrière-plan du projet *Ace-Arithmécole* et analysé la proposition selon les conceptions de l'enseignement des mathématiques envisagées, et plus généralement de l'enseignement et de l'apprentissage. Nous avions développé les présupposés profonds que véhiculait l'ingénierie didactique : par exemple, les mathématiques sont considérées comme des pratiques culturelles à étudier car elles répondent à des questions universelles (par exemple des pratiques de dénombrement de collection d'objets, des pratiques d'écritures des mesures réalisées, des pratiques de comparaisons de ces mesures, …) qui font l'objet de pratiques « savantes », dont il s'agit de transposer (Chevallard, 2004) certains éléments. Autres exemples de présupposés véhiculés par l'ingénierie : des expériences personnelles et collectives sont à solliciter pour appréhender ces pratiques ; les mathématiques fournissent des modèles pour représenter le réel.

Ces savoirs appartiennent à l'origine au domaine des chercheurs. Ils ne sont pas appréhendables facilement par les autres membres du groupe car peu habituels dans les pratiques d'enseignement classiques : *l'épistémologie pratique* courante des

professeurs (Sensevy, 2007) ne correspondant pas avec l'épistémologie spécifique véhiculée par l'ingénierie et certains éléments de son cadre théorique. Par exemple, dans les pratiques habituelles de l'enseignement de la numération décimale positionnelle, la structure mathématique est exposée et analysée d'abord matériellement avec des plaques (représentant les centaines d'unités), des barres (représentant les dizaines) et des cubes (représentant les unités) puis avec des symboles que sont les nombres, à construire avec les uns pour obtenir les autres. La structure mathématique doit être alors « reconnue » dans diverses situations (combien de dizaines dans 30 ? dans 95 ? dans 104 ? ou combien de grammes dans 3 hectogrammes). Cette reconnaissance se réalise en dissociant apprentissage des méthodes et situations dans lesquelles elles doivent être « réinvesties ». Dans la proposition ingénierique, éprouver l'économie des groupements à 10 dans un jeu de comparaison puis nommer pour identifier l'objet groupe (D) et décrire la structure constituée relève d'une approche épistémologique et didactique différente. Cette approche est intrinsèquement liée à un temps long pour l'expérimentation.

Transmettre de tels types de savoirs a demandé un long travail collaboratif, sans cesse réactualisé aux situations didactiques. Le cas du schéma-ligne, qui est à comprendre dans ses dimensions à la fois de modèle du champ additif et de représentation de la situation du jeu, en est un exemple emblématique : il permet de construire un lien dans la situation, grâce au langage, entre l'abstrait des écritures mathématiques et le concret de la situation de comparaison du *Jeu des annonces*. Les représentations (écriture additive, boîte et schéma-ligne) modélisent la situation du jeu en appui sur le langage. Autrement dit, elles ne peuvent décrire conceptuellement la situation du jeu sans appui sur des jeux de langage attachés à une pratique de ces représentations. L'utilisation du schéma-ligne enseignée aux élèves avait d'abord caché ce lien : « 3 et 3, on sait que ça fait 6, à quoi sert de tracer le schéma-ligne ? ». Le travail collectif ayant porté sur une pratique d'interprétation de la représentation, et sur son étude associée, a été décrit comme un fait d'expérience pour le collectif.

Savoirs liés aux enjeux de la situation didactique

Nous avions détaillé ces savoirs liés aux présupposés de la situation du *Jeu des annonces* au chapitre 6 et les avions décrits comme des classes de problèmes que

les élèves ont à rencontrer : désigner une collection par la mesure de sa grandeur, décrire la mesure de la grandeur, représenter la mesure d'une collection, comparer des mesures de grandeurs, valider et justifier une comparaison. Les savoirs mathématiques et didactiques font donc partie initialement du domaine des chercheurs mais sont éprouvés par les professeurs au fur et à mesure de la réalisation en classe des séquences d'enseignement. Ils ne sont donc pas appréhendés de la même manière par les chercheurs et professeurs. Les premiers en ont une connaissance épistémologique (issue de leurs recherches propres ou de celles de la communauté scientifique) qu'ils confrontent à la mise en œuvre observée ou rapportée ; les seconds les découvrent *a posteriori* et en apprécient la portée didactique à l'aune de leurs expériences de mises en œuvre. C'est le partage de ces points de vue argumentés par les connaissances de chacun qui crée un espace de discussion et d'action.

Nous avons vu que certains de ces savoirs n'étaient pas exploités, en premier lieu, selon la conception ingénierique. Par exemple, la désignation de la mesure (attribuer à une collection d'objets un code qui doit être compréhensible sans équivoque par tous) apparaît, pour les professeurs, comme un fait déjà acquis par les élèves et non à gagner. En effet, la désignation n'est pas distinguée d'une procédure de comptage : désigner une mesure ne fait pas partie au départ du système de connaissances didactiques des professeurs. La notion d'équivalence en est un autre exemple : l'usage de l'équivalence dans la situation de comparaison est associé plus spontanément au total d'un calcul qu'au travail sur les écritures différentes d'une même mesure. Ce sont les transactions au sein du dialogue d'ingénierie qui en permettront une compréhension partagée. Dès lors qu'ont été posés les enjeux d'écritures additives comme moyen de désignation des mesures, l'action didactique des professeurs s'affine.

Dans le fonctionnement du groupe provençal, nous avons pu observer la mise en évidence et le travail dans la classe, avec un contrat possible, de tels enjeux. Ainsi, par exemple, un professeur plus expérimenté dans l'ingénierie a pu repérer, au cours du récit d'un collègue qui décrivait l'action d'un élève dans le *Journal du nombre*, le sens intuitif algébrique de l'égalité dont cet élève, en début de CP, faisait preuve en écrivant, avant l'expérimentation prévue, « 2 + 2 = 1 + 3 » à la place de « 2 + 2 = 4 ». Le professeur expérimenté propose alors de faire jouer dans la classe un *jeu d'imitation* (Sensevy, 2016). Les savoirs liés à la situation didactique sont donc

assimilés par les professeurs qui les transmettent et les explicitent à leur tour aux professeurs entrant dans le dispositif car ils sont devenus capables de les identifier dans l'action, qu'elle soit narrée ou observée au travers d'une vidéo ou d'un compte-rendu de séance. Les savoirs liés aux enjeux de la situation didactique sont également ainsi concrétisés pour les chercheurs. Nous reviendrons sur ce point à la fois pratique et théorique au cours du chapitre suivant.

Savoirs liés à la mise en œuvre

Ce sont les savoirs issus de la pratique effective lors de la mise en œuvre de la situation didactique. Ils appartiennent à première vue au domaine des professeurs mais les observateurs et les chercheurs sont aussi amenés à les repérer lors d'un jeu d'analyse d'une vidéo par exemple ou à la lecture des comptes-rendus de séances.
Ces savoirs concernent en grande partie l'avancée de la progression et le rythme à donner à cette avancée. Nous avions décrit dans le chapitre 6 la mise en œuvre testée dans les classes d'étude lors de la première année (2011-12). Les discussions relatives à cette mise en œuvre ont permis à la sphère 1 d'établir l'organisation des premiers modules d'enseignement selon les « variables de commande » du jeu (nombre de dés et de mains ou termes et nature du dé) et les variables de la situation (annonces gagnantes si égales, inférieures ou supérieures au lancer). Nous avons remarqué que les professeurs se fondaient sur les élèves moins avancés pour évaluer la portée de leur enseignement et celui de l'ingénierie. Le rythme de l'avancée de la progression est bien sûr très lié au profil d'une classe particulière mais quand les constats se recoupent, c'est le groupe entier qui est concerné et qui est amené à réfléchir au problème.
Une véritable dimension pratique pèse sur le temps didactique et la relation à l'expérimental sur le long terme : sur combien d'élèves peut-on s'appuyer pour faire avancer tout le groupe ? Sur quelles propositions s'appuyer parmi toutes celles qui foisonnent ? Cette dimension pratique se double intrinsèquement d'une dimension théorique pour qui voit les questions posées au cours de la mise en œuvre comme appartenant à une science de la compréhension des accomplissements pratiques. En cela, de telles questions constituent des questions ingénieriques scientifiques fondamentales. Par exemple, la question de la gestion de la mémoire didactique est

centrale dans l'établissement des certitudes ; elle relève du professeur agissant dans sa classe et de sa connaissance de l'ingénierie. Ainsi les professeurs ont mis en évidence le besoin d'entraînement (à des répertoires, des techniques) et la nécessité d'étapes intermédiaires (par exemple la nécessité de travailler d'autres groupements que 10 plus longuement ou un travail plus spécifique pour « faire voir un nombre dans un autre »). Le travail du groupe a permis qu'un tel type de tâche soit proposé comme incitation dans le *Journal du nombre*. Ainsi l'enseignement peut s'adapter aux besoins réels des élèves, à ce qu'ils sont capables de faire individuellement mais qui peut être analysé, imité collectivement. La pratique a donc été pourvoyeuses non seulement d'incitations nouvelles mais aussi de questions scientifiques nouvelles (par exemple, comment rendre collectif ce qui a été produit individuellement).

La responsabilité de l'enseignement est partagée avec les chercheurs vis-à-vis de l'institution scolaire et des élèves, mais elle reste l'apanage des professeurs vis-à-vis des parents d'élèves, voire des collègues des classes du niveau supérieur. Les professeurs ont alors organisé les productions écrites afin de communiquer et d'instaurer des écrits de recherche, d'entraînements, d'institutionnalisation. Ils constituent des savoirs liés à l'efficacité d'une communication nécessaire au sein d'une même école.

Les savoirs issus de la pratique concernent aussi le langage à utiliser. Nous avons vu qu'il permettait de faire fonctionner la dialectique système-modèle. Si elle est trouvée et éprouvée au sein de chacune des classes (et d'abord des classes d'étude), la manière de « parler » les représentations et la situation diffuse notamment lors de la rédaction du document de la progression. Il y a de manière évidente un effet de diffusion des chercheurs vers les professeurs, formateurs et encadrants, des savoirs issus de la recherche et de modification des rapports à la discipline. Par exemple, pour la désignation orale des « grands » nombres, la désignation numérique (en xD et yU), plus régulière et permettant des comparaisons universelles, est mise en avant par les professeurs qui lui donnent des formes de vie : « prenez vos livres à la page 7D et 4U ». Elle vient concurrencer la désignation orale usuelle : « on dit aussi en France soixante-quatorze mais septante-quatre en Belgique ».

Ces savoirs concernent également les conditions de mise en place du jeu. Certaines de ces conditions se sont révélées essentielles à l'expérimentation des élèves. En effet, pour que les élèves puissent expérimenter par exemple les combinaisons

gagnantes possibles dans le jeu, il a fallu que ces dernières soient observables suffisamment longtemps par chacun des élèves. La condition pour que cette observation soit réalisée, immobiliser les mains selon la formule « statue des mains », a été instaurée dans une classe d'étude.

Savoirs liés aux phénomènes didactiques

Ce type de savoirs liés aux phénomènes didactiques appartient au domaine des chercheurs qui étudient ainsi les modèles théoriques en mettant à l'épreuve de la réalisation didactique leurs hypothèses dans des conditions écologiques. Nous pourrions qualifier ces savoirs de phénoménotechniques car ils sont nés de l'analyse de la mise en œuvre et viennent interroger la théorie.
Ce travail doctoral même et les résultats qu'il apporte en sont un exemple[116] ainsi que les articles et communications scientifiques dans des colloques. Par exemple, la communication de Gérard Sensevy sur le rôle de l'imitation dans le processus didactique (Sensevy, 2015), la communication de Serge Quilio qui s'intéresse à ce que sous-tend l'étude de certaines productions d'élèves, concernant une situation expérimentée par tous, par le groupe organisé en collectif par le professeur (Quilio, 2015), l'article de Joffredo-Lebrun, Morellato, Sensevy & Quilio (à paraître) qui étudie la relation professeur-chercheur au sein des ingénieries spécifiques. Ces savoirs peuvent à leur tour fournir un apport épistémologique ou didactique intégrable dans l'analyse, la mise en œuvre ou la modification des ressources mises à disposition. Par exemple, la description du jeu d'imitation, né de pratiques d'enquête dans le *journal du nombre*, permet de conceptualiser ce jeu comme « une action nécessaire à l'incorporation du modèle d'action qu'autrui nous offre » (Sensevy, 2016).

Tous ces savoirs ingénieriques constituent une partie de ce que les professeurs doivent connaître pour diriger l'étude de leurs élèves et coopérer avec le collectif. Ces

[116] D'autres travaux doctoraux sont parus ou à paraître : celui portant sur le *Journal du nombre* et l'anticipation, deux dispositifs au sein desquels se construit un arrière-plan commun professeur-élèves (Vigot, 2014), ceux sur la continuité de l'expérience des élèves au travers des systèmes de représentation (Joffredo-Lebrun, 2016) et sur l'influence de la prise en compte par le professeur de biographèmes (Alain Yaïche, en cours de préparation).

savoirs constituent une partie de ce que les chercheurs doivent connaître pour étudier les phénomènes produits par l'ingénierie, élaborer les enjeux épistémiques et épistémologiques avec les professeurs et coopérer avec le collectif. Ces savoirs constituent une partie de ce que les observateurs doivent connaître pour appréhender les interactions en classe et coopérer avec le collectif. Les transactions ont pour fonction de permettre leur transmission ou leur construction. Nous détaillons et catégorisons dans le chapitre suivant les différentes logiques qui animent les transactions réalisées entre les sphères 1 et 2.

Chapitre 8 – Grammaire d'une action conjointe au sein d'une ingénierie coopérative

De la structuration du dialogue d'ingénierie aux caractéristiques d'une coopération : une grammaire pour décrire de quelle manière les membres de ce collectif pensent et agissent pour faire vivre et développer une ingénierie coopérative ; une grammaire pour appréhender la dialectique contrat / milieu par un usage différent du contexte du contrat didactique et du milieu.

Dans le chapitre 8, au vu de l'analyse empirique (chapitre 6) et de la synthèse relative aux faits d'expérience et aux savoirs, issue de cette analyse (chapitre 7), nous proposons une structuration plus spécifique de l'action conjointe dans un dialogue d'ingénierie. Nous organiserons les contributions identifiées dans les transactions de manière à leur donner une portée plus générique et à les caractériser selon une logique des échanges.

Dans une première section, nous recenserons les logiques plus « explicites » des transactions : il s'agit d'attribuer des dispositions à agir aux agents qui, pris dans la situation réelle de discussion, n'en avaient pas forcément pleinement conscience. C'est ce qui est « visible » (pour celui qui se fait connaisseur de l'ingénierie) dans leurs actes de langage qui nous permet d'attribuer une disposition à agir. Nous pourrons alors dégager, dans une deuxième section, les caractéristiques d'une coopération au sein d'une ingénierie coopérative. Dans ces deux sections, nous essaierons de rendre nos propos plus concrets à l'aide *d'exemples emblématiques*. Nous avions écrit, au chapitre 2, que certains faits d'expérience pourraient se constituer en faits d'expérience marquants, autrement dit qu'ils pourraient prendre des formes de vie sous forme d'exemples emblématiques pour le groupe. A terme, de tels exemples ont un potentiel de paradigme (Agamben, 2008 ; Kuhn, 2008) et peuvent se constituer en *exemples exemplaires* (Kuhn, 1974 ; Kuhn, Biezunski, Jacob, Lyotard-May, & Voyat, 1990)[117]. L'usage spécifié d'une telle conceptualisation en didactique a été initialement

[117] Les exemples exemplaires permettent de poser un problème et de le résoudre au sein d'une communauté grâce à des règles d'analogies entre une réalité complexe et l'exemple. Ces exemplaires sont utilisés par les membres de manière routinière, sans ressentir le besoin d'une justification, pour

proposé par Gérard Sensevy (Sensevy, 2011a) et travaillé collectivement dans un séminaire[118]. La notion d'exemples emblématiques a été introduite en tant que proto-exemples exemplaires, qui leur sont isomorphes, mais qui ne peuvent être institutionnalisés comme tel qu'après une appropriation partagée dans une communauté de recherche. Ainsi, de tels exemples emblématiques pourraient à terme se constituer en exemples exemplaires pour qui serait formé un minimum à l'ingénierie et voudrait l'étudier ou la mettre en place. Dans le chapitre 7 précédent, nous avons illustré nos propos par des exemples qui décrivaient de manière analogique des faits d'expérience : les gestes d'enseignement de professeurs utilisant les représentations pour résoudre le calcul d'un produit (5 x 17), pour comparer une somme avec un nombre (1 + 4 > 4), pour montrer l'usage possible d'une décomposition (« voir un 4 » dans l'écriture additive 5 + 1 + 2). Nous pourrions les considérer également comme des « exemples emblématiques » car ces épisodes d'action conjointe professeur / élèves montrent les règles d'un usage possible des représentations, sans pour autant en produire un exposé explicite. Nous n'avons toutefois pas nommé de cette manière ces exemples, car ils n'avaient pas été *a priori* construits de cette façon.

Nous examinerons ensuite, dans la dernière section de ce chapitre 8, cette forme de coopération qu'est le dialogue d'ingénierie dans la perspective d'un développement de la théorie de l'*action conjointe en didactique.* Nous montrerons en quoi ces caractéristiques, *intrinsèquement liées*, confirment en particulier le principe de symétrie annoncé (Joffredo-Le Brun, Morellato, Sensevy, & Quilio, à paraître ; Sensevy, 2016 ; Sensevy, Forest, Quilio, & Morales, 2013). Nous allons ainsi interpréter ces caractéristiques, dans le cadre de la TACD, en développant notamment la notion de contrat et de milieu qui lui est associé.

transmettre une connaissance, une pratique (un savoir-faire) voire une attitude (un savoir-être) adéquate.

[118] Le *Séminaire action* est un séminaire de recherche réunissant mensuellement, depuis une quinzaine d'années, des chercheurs de disciplines différentes, œuvrant en didactique, dans la perspective de développement d'une théorie de l'action conjointe en didactique.

Troisième essai de structuration d'un dialogue d'ingénierie

Nous nous sommes intéressée au dialogue d'ingénierie et l'avons décrit, au travers des transactions, dans sa dimension dialogique. Nous avions tenté dans des chapitres précédents de caractériser le dialogue d'ingénierie :

- au chapitre 2, dans un premier essai de structuration, nous avions inventorié *a priori* les différents types d'actions des protagonistes sous le modèle du jeu et de ses jeux de langage associés (jeux de commentaire de compte-rendu de pratique, d'analyse d'une vidéo, de présentation d'événement, de mise à l'épreuve mathématique, de commentaire de production de texte). Nous avions décrit un tel dialogue comme organisé à partir de et par les expériences d'enseignement portant sur un objet d'ingénierie (par exemple les écritures additives ou le texte d'un module d'enseignement) ou sur des événements didactiques survenus au cours de la mise en œuvre et rapportés au groupe. Nous avions avancé que ce qui fonde un groupe de personnes qui dialoguent au sujet d'une ingénierie didactique est le fait de parler ensemble en vue de faire (de mettre en place une ingénierie didactique dans les classes) tout en étant, en retour, nourri du fait de faire (en mettant effectivement en œuvre cette ingénierie). Nous avions fait émerger les conditions d'engagement des membres au dispositif ingénierique : « donner à voir » ses conceptions ou ses pratiques, décrire le plus précisément possible ses actions. Ces conditions étant nécessaires à la réalisation d'un tel dialogue.
- au chapitre 4, dans un deuxième essai de structuration, nous avions précisé, *a priori*, quels seraient les jeux des uns sur les autres. Nous avions envisagé que les jeux des chercheurs sur les professeurs seraient de faire identifier certains savoirs épistémiques, épistémologiques, didactiques et anthropologiques. Ces savoirs concernent l'ingénierie et permettent d'entrer dans le jeu du partage de la responsabilité de la mise en œuvre. Nous avions envisagé que les jeux des professeurs sur les chercheurs seraient de partager la responsabilité de cette mise en œuvre et de co-élaborer à la progression. Le travail conjoint de tous au cours des échanges consiste à « aménager le milieu » en construisant un milieu pour l'enquête. Nous avions supposé qu'en mettant en place de manière anticipée une première forme de mise en œuvre (et en réalisant une première version d'un texte support de cette mise en œuvre), en répondant aux questions sous-tendues par les mises en œuvre effectives de la sphère 2, la sphère 1 autorisait (dans le sens de rendre auteur) les

membres du collectif à co-élaborer et mettait en place un arrière-plan commun. En donnant à voir, en partageant les mises en œuvre (les conditions de ces mises en œuvre et ses effets), la sphère 2 enrichissait cet arrière-plan commun et permettait de le problématiser et ainsi d'offrir les conditions à une avancée des savoirs ingénieriques.
Pour tenter de caractériser le dialogue d'ingénierie après les analyses empiriques et le début de synthèse amorcé au chapitre 7, nous allons dans ce qui suit (i) recenser les logiques animant les transactions. Puis nous les (re)présenterons au sein du réseau qui les lie au travers des caractérisations du dialogue : (ii) système d'attente mutuelle, (iii) co-élaboration de problèmes communs, (iv) élucidation des choix d'ingénierie et (v) ré-interrogation de l'épistémologie.

Recension des logiques animant les transactions

Nous avons, dans un premier temps et à un niveau de description proche des transactions, tenté de recenser les différentes logiques animant les transactions d'ingénierie.
Pour donner à voir de manière synoptique ces logiques, nous avons choisi de les présenter sous la forme de deux colonnes : l'une recensant les logiques appartenant au topos des chercheurs, l'autre recensant les logiques appartenant au topos des professeurs, formateurs et encadrants. Nous avons aussi distingué à l'aide de flèches celles qui sont passées du topos des uns au topos des autres, au fur et à mesure de l'expérience acquise par le groupe et de l'avancée de la mise en œuvre.
Il ne s'agit pas ici de créer une dichotomie entre les pratiques ingénieriques des chercheurs et des professeurs mais de *commencer* à montrer ce qui pourrait définir une pratique d'ingénieur dans une ingénierie didactique coopérative.

Topos des chercheurs	Topos des professeurs, formateurs et encadrants
Analyser l'action : - en identifiant les enjeux d'ingénierie ; - en identifiant et explicitant les praxéologies liés à la situation didactique ; - en attirant l'attention sur un objet didactique ; - en centrant le dialogue sur un enjeu de savoir ; - en situant le contexte ; - en donnant des éléments pour diriger l'étude des élèves.	→
←	Rendre les savoirs concrets : - en inventoriant les faits recueillis dans la pratique ; - en attirant l'attention sur un objet didactique ; - en soulevant des questions liées à des problèmes effectifs ; - en proposant des modalités de mises en œuvre ; - en discutant des modalités de mise en œuvre ; - en donnant à voir une pratique de classe.
Repérer les besoins en apports notionnels. Fournir des apports notionnels épistémologiques, épistémiques, didactiques ou anthropologiques.	
←	Centrer la discussion sur les élèves moins avancés.
Anticiper, se projeter dans la situation à venir et faire liens avec la situation à venir.	→
←	Prendre en compte les propositions du collectif dans la mise en œuvre.

Cette présentation indique que la plupart des logiques, repérées en bleu, sont partagées, *au fur et à mesure de la coopération*, par tous les membres du groupe. Celle de repérer et celle de fournir des apports notionnels[119], repérées en noir, ne le sont pas. Nous verrons dans la section suivante que ces logiques sont liées les unes

[119] Notons que les travaux universitaires produits par des professeurs ACE (M2 Recherche en didactique sur Rennes, 5 mémoires soutenus entre 2015 et 2017, 5 autres en cours) s'inscrivent dans une telle logique.

aux autres ; certaines étant subordonnées à d'autres. Nous présenterons alors le réseau qui les lie à un niveau de description plus général.

Système d'attente mutuelle

Une des premières intentions pour les chercheurs est de connaître le déroulement de la mise en œuvre, notamment la construction des conditions de cette mise en œuvre. Cette intention est très clairement exprimée par le chercheur du groupe provençal au cours des dialogues d'ingénierie : « Comment concrètement tu as fait ? Qu'est-ce que tu as fait de ça ? Concrètement dans l'action quelles décisions tu as prises ? ». Nous pouvons alors décrire l'arrière-plan du travail coopératif d'une ingénierie dont le développement est soutenu par l'expérience des mises en œuvre par les professeurs et chercheurs. Cependant une telle demande ne se met pas en place si aisément, surtout pour les professeurs implémentant l'ingénierie la première fois. Elle demande une pratique d'ingénierie, pratique venant autant du fait des professeurs que des chercheurs.
Nous reproduisons ci-dessous un dialogue d'ingénierie entre un chercheur (ChS) et un professeur en première année d'expérimentation (Kaa).

Premier exemple emblématique / logique de dialogue d'ingénierie : « Comment faire lorsqu'on n'a pas une idée précise de la suite de la progression ? »

Ce dialogue d'ingénierie nous paraît emblématique sur deux points : (i) il montre, en creux, l'importance d'une mise en œuvre comme base du travail coopératif, (ii) il rend compte plus généralement de l'action des uns sur celles des autres.

> « Kaa : j'avance avec eux [les élèves] en fait / j'arrive pas à savoir / je maîtrise pas bien ce qu'il y a après en fait et du coup ça me déstabilise dans ma progression enfin dans ma méthode / j'aimerais savoir ce que ça donne vraiment sur la longueur parce que y a des choses […] on sait pas trop ce qui vient après / voilà moi ça me :: […] est-ce qu'on aura / oui à l'issue de notre année d'expérimentation avec les élèves / à quel moment ils auront fait les choses / euh voilà on sait pas trop quand ça (inaudible)
> ChS : est-ce que tu as lu l'intégralité de la description des situations↑

> Kaa : mais ça reste euh […] je suis pas allée jusqu'au bout / mais ça reste quand même abstrait parce que ::: on l'a pas mis en place encore / alors ce qu'on a mis en place voilà ça y est / c'est intégré tout ça […]
> ChS : mais on est tous conscient / y compris dans nos observations / que il y a des gestes / comment dire j'appelle ça comme ça mais on va se comprendre / des gestes d'enseignement habituels qui peuvent être mis au service des situations / et d'autres dont on sait qu'ils viennent perturber l'enjeu des situations / et d'autres qui sont inconnus / à inventer / ou qui existaient avant / ou à redécouvrir pour faire fonctionner ces situations […]
> Kaa : c'est vrai qu'en en parlant là on se dit / c'est vrai moi aussi je fais ça / je vais faire ça » (TdP423-437 - réunion du 21 novembre 2012)

Par certains aspects, l'échange est emblématique du dialogue d'ingénierie. En effet, les professeurs se lancent dans une progression encore à l'état d'hypothèse et n'ont pas de visibilité des actions à venir. La description de ces actions dans le texte du document de la progression ne suffit pas toujours : «ça reste quand même abstrait parce que ::: on l'a pas mis en place encore » (Kaa). Pour mener les transactions avec leurs élèves en classe, les professeurs ont besoin de se faire une image, une carte mentale ou une vision de la progression. Ou bien de l'avoir mise en place une fois : « ce qu'on a mis en place voilà ça y est / c'est intégré tout ça » (Kaa). Ou bien de prendre appui sur les expériences et les pratiques des autres : « en parlant là on se dit / c'est vrai moi aussi je fais ça / je vais faire ça » (Kaa). Les échanges au sein du collectif permettent de confronter les diverses conceptions et de les mettre à l'épreuve de manière fictive mais anticipée à l'action effective. Le travail d'analyse collective, en amont ou en aval de la mise en œuvre effective, permet de dégager des pistes ou des possibles susceptibles d'être mis en œuvre. Si les professeurs n'ont pas de visibilité claire sur l'action didactique à venir, le chercheur, bien qu'ayant une certaine appréhension de l'épistémologie sous-jacente à la situation, n'en a pas non plus une anticipation pratique précise. Il exprime ainsi des attentes qui sont aussi celles de tout le groupe :

> « [il y a à éprouver] des gestes d'enseignement habituels qui peuvent être mis au service des situations / et d'autres dont on sait qu'ils viennent perturber l'enjeu des situations / et d'autres qui sont inconnus / à inventer / ou qui existaient avant / ou à redécouvrir pour faire fonctionner ces situations »

Professeurs et chercheurs vont devoir inventer ou redécouvrir des gestes d'enseignement pour permettre aux élèves d'apprendre. De tels types de « gestes d'enseignement » participent à la construction de faits d'expérience. Ils s'acquièrent par la pratique ingénierique.

La position des professeurs débutant l'ingénierie paraît topogénétiquement basse mais elle est en fait *potentiellement* topogénétiquement haute. En effet, dès qu'il est proposé aux professeurs des hypothèses de travail (sous la forme du document de la progression), il leur est conféré de fait une position topogénétiquement haute. Le travail de ces hypothèses et la responsabilité de leur validation seront *sis* dans leur « territoire ». La position topogénétique du chercheur est au départ basse vis-à-vis de la connaissance des comportements *in vivo* des élèves, vis-à-vis du système de ressources proposé (ou pas) au cours de la situation (par exemple quels signes utiliser dans les écritures).

Une des premières « grandes » logiques des transactions, à un niveau de description plus général, est donc de permettre l'émergence des attentes réciproques. Ce système d'attente ne peut pas être traduit par une expression telle que « comme les chercheurs savent comment peut se dérouler un enseignement de l'ingénierie, ils vont l'enseigner aux professeurs ». Au départ de la mise en place de l'ingénierie ou pour les professeurs novices dans le dispositif, nous avons repéré dans le groupe Provence que l'intention des professeurs est bien d'obtenir des réponses sur ou pour la mise en œuvre, par exemple comment aborder telle ou telle activité ou comment procéder avec les élèves moins avancés. Le chercheur n'intervient pas pour proposer des pistes concrètes. En effet, il ne possède pas encore assez d'informations, à ce stade, sur la situation réelle (c'est-à-dire comment professeurs et élèves réagissent aux propositions du document élaboré par la sphère 1). Il souhaite également que l'engagement dans la mise en œuvre soit une responsabilité partagée. Mais il exprime des enjeux, des notions véhiculées par l'ingénierie et des pistes d'observation sur l'action des élèves. Peu à peu ce système d'attente évolue vers un système didactique d'enseignement mutuel des connaissances sur la situation didactique que chacun possède de par sa pratique : cet enseignement mutuel est nécessité par le fait que les membres ont à expliciter les choix d'ingénierie et co-élaborer des problèmes. Nous développons cette assertion forte dans les sections suivantes.

Co-élaboration de problèmes communs

Travailler sur les usages du schéma-ligne dans la situation du *Jeu des annonces* est un travail d'élaboration d'un problème commun. Nous partirons d'un tel exemple pour illustrer notre propos. Le schéma-ligne est un modèle (à certains moments) des actions envisagées avec les compositions additives. Il contient potentiellement toutes les questions qui peuvent se présenter dans le contexte de l'action des élèves. Mais c'est aussi un modèle pour les professeurs et chercheurs du travail d'analyse à mener pour comprendre les problèmes et questions didactiques posés par sa mise en œuvre. Ce sont d'abord les chercheurs qui connaissent certains motifs de la place et du rôle des représentations et qui en portent l'hypothèse dans la situation didactique. Le jeu du chercheur sur les professeurs, au sein du groupe provençal, est un jeu d'émissions d'hypothèses en lien avec les enjeux : les représentations, « c'est pour raisonner » annonce-t-il. C'est aussi un jeu de demande de précisions sur la mise en œuvre : quels gestes dans l'action conjointe en classe peuvent donner corps à cette hypothèse ?
Les premiers échanges du collectif[120] révèlent les mises en œuvre et notamment l'élaboration collective de l'usage du schéma-ligne dans la situation. Nous reproduisons ci-dessous un dialogue d'ingénierie entre un chercheur (ChS) et des professeurs lors de la première année d'expérimentation (2012-13).

Deuxième exemple emblématique / logique de dialogue d'ingénierie : « A quoi sert le schéma-ligne ? »

Ce dialogue d'ingénierie nous paraît emblématique sur deux points : (i) il montre comment s'élabore et se résout une question d'ingénierie à partir d'un problème identifié, (ii) il rend compte plus généralement du travail ingénierique concret à l'échelle d'un groupe.

[120] Nous avons déjà produit une première description et analyse de ces transactions du groupe provençal dans le chapitre 6 (« Analyse des transactions sur l'usage des représentations »). Pour illustrer notre propos, ces échanges sont ici « épurés » de manière à faire ressortir uniquement les traits saillants. Ils constituent en fait plusieurs épisodes qui se sont déroulés lors des deuxième et troisième réunions du collectif (première année d'expérimentation de l'ingénierie à grande échelle, 2012-13).

« Val : le premier problème pour moi / et je pense c'est aussi celui de nos élèves / c'est pourquoi je remplis ça [le schéma-ligne et la boîte] / ça ne sert à rien pour jouer / et du coup après j'ai cherché à voir l'utilité / alors la boîte c'est venu assez rapidement / la boîte je mets les résultats de mon calcul et je peux me rendre compte avant qu'on lance le dé si j'ai dépassé 6 ou pas […] pour la droite [le schéma-ligne] vérifier la somme [...] c'est une vérification du calcul effectué […] je mets 3 ponts après je mets 2 ponts et je vérifie que ça fait bien 5 et que je me suis pas trompé […] certains [élèves] sont sûrs / ils avaient pas besoin de le faire / mais du coup ceux-là je leur impose quand même de remplir la droite / et ça ça me gêne […]

Emm : le sens du schéma ligné moi je l'ai introduit comme une comparaison entre une annonce et un lancer / on compte pas forcément combien de ponts il y a / mais on voit tout de suite si c'est différent ou si c'est égal / et après sur combien il y a de plus / combien aurait dû faire le dé pour que ça soit égal / et on travaille en fait sur les différences de ponts là-dessus […]

Kaa : parfois ils font des erreurs sur le schéma ligné […] c'est vraiment on refait trois fois le même truc / je fais une addition / je fais la boîte / je fais la ligne […]

Anl : j'en ai un qui a fait une annonce à un moment donné / donc le premier a annoncé quelque chose / le deuxième annonce autre chose / et j'ai vu le troisième réfléchir / alors ils ont réfléchi collectivement à ce que le troisième pouvait annoncer pour ne pas dépasser 6

ChS : voilà une opportunité / n'hésitez pas à utiliser les représentations à ce moment-là /c'est là que ça va jouer fort […]

Nad : tu vois pour l'égalité justement / c'est quelque chose qui pose problème l'égalité entre le tirage du dé et l'annonce / et là je trouve que le schéma ligné permet de représenter ce pareil / oui mais ce pareil il pose problème aussi / parce qu'avec le dé il va y avoir par exemple qu'un seul bond / et il y a plusieurs bonds qui vont faire le 6 pour l'annonce […]

Val : j'ai produit un schéma ligné où il n'y avait qu'un pont avec trois cases / et il faut produire une annonce à deux mains / mais il n'y a qu'un terme / y en a qui ont essayé d'écrire 2 + 1 / on a bien vu que sur le schéma on ne peut pas lire 2 + 1 c'est pas possible/ et un élève a dit que s'il n'y avait rien ça faisait 3 + 0 […]

ChS : une représentation doit correspondre à un usage / autrement dit elle doit avoir une fonction / qu'est-ce qu'apporte le schéma ligné comme fonction

qu'à ce stade de l'évolution de l'apprentissage le nombre ne permet pas de produire […] »

Le problème évoqué au sein du collectif, et que nous pouvons percevoir au travers de ces échanges, est celui de l'usage du schéma-ligne. Cet usage est questionné par certains professeurs qui n'ont d'abord pas tous cerné ses fonctions. Certains doutent de son utilité : à quoi servirait le schéma-ligne si l'on peut employer d'autres moyens comme le comptage d'intervalles ou la connaissance des répertoires pour déclarer la partie gagnée ou perdue ? Son rôle de vérification ne paraît guère probant car il est dépendant d'une utilisation adéquate. Le partage de quelques usages mis en œuvre (anticipation de la partie et estimation d'un gain possible, constat visuel de gain ou de perte de la partie, mise en évidence de la différence entre annonce et lancer) et des questionnements productifs qu'il peut ou a pu susciter (Est-ce que l'égalité entre annonce et lancer est indépendante du nombre de termes ? Quel rôle joue le zéro) permet de mettre au jour une grande partie de ses fonctions. Les professeurs sont ici dans une position topogénétiquement haute de par leurs propositions et leurs interprétations de la situation qui permettent la constitution de faits d'expérience ; le chercheur de par la synthèse qu'il produit.

L'arrière-plan (concernant le rôle et l'utilisation des représentations) était concrétisé au départ par le document de la progression de l'ingénierie, élaboré en première main par la sphère 1. Ce document propose une utilisation des différentes représentations et l'importance de les mettre en lien. Cette hypothèse, pour devenir scientifiquement éprouvée, a donc dû être travaillée dans la praxis effective, qui est elle-même le *véritable objet scientifique* de la recherche. En effet, l'hypothèse portée par les chercheurs est venue se heurter à des difficultés de mises en œuvre concrètes : difficultés pour les élèves, et pour les professeurs qui ont à l'enseigner, d'utiliser le schéma-ligne ; incertitude des professeurs quant à sa fonction dans la situation. La fonction des représentations dans la situation n'était pas effectivement décrite dans le document de la progression. Ce sont les transactions sphère 1 / 2 qui ont produit la nécessité de travailler une telle question. En effet, les représentations, notamment celle du schéma-ligne, constituent un révélateur de problème, non perçu directement. Ce révélateur « invente » le problème pour le collectif et l'étude du fonctionnement des représentations va jouer un rôle fondateur dans la création du *style de pensée* de l'ingénierie. Nous pourrions dire aussi que le chercheur « ne fait » qu'exprimer une

hypothèse de travail (l'usage de raisonnement des représentations), mais que les professeurs, en appui sur le milieu (en constitution) de leur pratique, lui donnent vraiment sa chair à la fois empirique et conceptuelle. D'une certaine manière, ce « véritable objet scientifique de la recherche » appartient autant aux professeurs qu'aux chercheurs qui sont les uns et les autres, ici, des *ingénieurs*. En effet, les phénomènes didactiques liés à la mise en place de la représentation ont été identifiés collectivement. Les transactions sont le lieu de cette identification du problème et de pistes pour sa résolution.

Une des autres « grandes » logiques des transactions, à un niveau de description plus général, est donc de co-élaborer pour la mise en place de problèmes communs en identifiant, produisant puis cherchant à résoudre ces problèmes. Ces problèmes ne sont « reconnaissables » qu'avec une connaissance clinique de l'ingénierie, donc par tous les membres du collectif qui pratiquent l'ingénierie.

Elucidation des choix d'ingénierie

La plupart des choix d'ingénierie ne sont pas des choix didactiques habituels. Par exemple, la désignation de nombres à l'aide d'autres ayant des valeurs plus petites va à l'encontre de l'enseignement ordinaire. Ces choix sont, notamment au début de l'implémentation, interprétés avec les pratiques habituelles. Un travail d'élucidation est donc nécessaire pour que puisse s'élaborer des pratiques en adéquation avec l'ingénierie. Ce sont les chercheurs qui repèrent les besoins en apports notionnels ; ils sont en position topogénétiquement haute dans de tels moments.

Nous reproduisons ci-dessous un dialogue d'ingénierie entre un chercheur (ChS) et des professeurs lors de la première année d'expérimentation (2012-13)[121]. Ce dialogue aborde la question de la désignation des « grands » nombres[122] au module 9.

[121] Nous avons déjà produit une première description et analyse de ces transactions du groupe provençal dans le chapitre 6 (« Analyse des transactions concernant les techniques de composition / décomposition », 2e série épisodique). Cet épisode a lieu lors de la cinquième réunion du collectif (première année d'expérimentation de l'ingénierie à grande échelle, 2012-13).

[122] Pour des élèves de CP, au cours des deuxième et troisième trimestres scolaires, un « grand » nombre est un nombre compris entre 20 et 100.

Troisième exemple emblématique / logique de dialogue d'ingénierie : « Quel est l'avantage de ce code symbolique ? »

Ce dialogue d'ingénierie nous paraît emblématique sur trois points : (i) il montre comment certains choix d'ingénierie vont à l'encontre des pratiques habituelles, (ii) il rapporte comment un changement de perspective dans la désignation des nombres est analysé collectivement, (iii) il rend compte plus généralement de l'action des uns sur celles des autres.

« ChS : nous on apprend à désigner avec un code symbolique / c'est-à-dire qu'on passe d'un milieu matériel doigts les collections d'objets à des techniques de dénombrement au moyen d'un code symbolique ECRIT / et ce que restituent les élèves ce n'est qu'un énoncé / une évocation de la manipulation du code symbolique écrit / et ça [la désignation avec un code symbolique écrit] il faut l'installer / il faut le temps que ça diffuse / c'est quelque part un saut dans l'histoire de l'apprentissage de ces élèves / ils doivent apprendre à dénombrer avec autre chose / et le autre chose que l'on propose c'est le code symbolique écrit / et donc il va falloir rentrer dans cette combinatoire

Emm : tu veux dire combien ça fait

ChS : on dénombre des collections / c'est-à-dire qu'on dit le cardinal de la collection / mais notre façon de dénombrer / notre technique / ça va être le code symbolique écrit

Emm : mais quel est l'avantage de ce code symbolique qu'on propose nous par rapport à un code où on dit ben cette quantité c'est 34↑ parce que moi je suis sûre qu'il y a des élèves qui vont dire 10 + 10 + 10 + 4 / combien ça fait en fait

Cat : 34

ChS : et bien ça fait 20 + 10 + 4 ou ça fait ::

Emm : oui mais tu comprends ma réponse / voilà ils te poussent à demander et il faut pouvoir répondre à ça parce que sinon ils vont jamais se l'approprier cette euh

Cat : mais est-ce qu'on peut pas donner la réponse là↑ on peut donner le nombre

Emm : mais on compare deux méthodes / soit on arrive à trouver le nombre de doigts avec du calcul et du coup ça donne le nombre 34 doigts / c'est ce qu'on veut pas faire hein / en gros on veut pas qu'ils comptent 12 et je

surcompte 7 et je rajoute encore 5 pour faire etc. / donc ça c'est ce qu'on veut pas faire / on veut pas qu'ils calculent / qu'ils donnent le nombre à la fin / on veut trouver l'écriture additive de 34 avec des groupements de 10 voilà […] mais comment tu comptes après 10 + 10 + 10 + 4 puisque tu fais pas calculer / comment ces élèves-là sont pas entraînés à faire 10 + 10 + 10 + 4 en calcul

Kaa : y en a qui savent […]

ChS : ce qui est essentiel de comprendre et de construire avec les élèves c'est que les sommes maintenant vont pouvoir être désignées au bout du compte par un code commun qui permet une écriture plus simple et une comparaison universelle […] en fait pour bien comprendre l'affaire c'est que la position va venir se substituer par convention à notre écriture 2C + 1D + 8U / et donc on est réellement dans une démarche où la position la désignation / de ce que contient cette position / va apparaître dans le code écrit conventionnel de façon comment dire universelle / reconnue par tout le monde […] mais vous ne pouvez pas laisser ce code symbolique livré tel quel aux élèves […] 18 c'est un dix c'est 1D + 8U / ça vient après 17 et avant 19 » (TdP46-77 – réunion du 12 décembre 2012)

Même si les élèves acquièrent des répertoires et des techniques de composition / décomposition pour « fabriquer » des dizaines, ces résultats et méthodes ne se constituent pas spontanément en objets de connaissance : un travail d'élucidation des propriétés de la numération décimale positionnelle doit être mené. Ce travail est fondé sur une rencontre entre la structure numérique et le langage qui accompagne les actions de composition / décomposition. Il doit être d'abord compris comme tel par les professeurs. Ainsi on va de la construction de « dix », au sein d'une mesure caractérisée par sa réponse additive, à la dénomination en xD et yU. C'est parce que suffisamment d'éléments sur lesquels s'appuyer ont été énoncés qu'une existence de la structure mathématique a pu être déclarée. En effet, nous avons vu dans les analyses empiriques (cf. chapitre 6), et rapidement dans cet extrait, que c'est l'établissement d'un lexique « D et U » qui donne une existence théorique aux décompositions obtenues dans un jeu de comparaison. Auparavant seul le calcul du total était envisagé par les professeurs (« ces élèves-là sont pas entraînés à faire 10 + 10 + 10 + 4 en calcul ») : c'est à partir des problèmes que de telles conceptions suscitent (on a besoin du calcul pour pouvoir désigner un « grand » nombre à partir de

sa décomposition canonique) qu'a été travaillée la nécessité de mots et de métalangage pour convertir les connaissances en savoirs reconnus de tous. Les mots « dizaine » et « unité » ont acquis un sens particulier, une *existence théorique* car a été menée une analyse didactique collective des propriétés de la structure à partir de l'hypothèse de la nécessité d'éprouver que des sommes soient désignées par des groupements à 10 dans un jeu de comparaison.

Une des autres « grandes » logiques des transactions, à un niveau de description plus général, est donc d'élucider les choix didactiques opérés par la sphère 1 et, en amont, ceux contenus dans l'épistémologie de l'ingénierie. Si cette fonction paraît assumée en premier lieu par les chercheurs, elle n'est réalisable que parce que des questions ont été soulevées par les mises en œuvre et parce que ces choix ont été réellement testés, mis à l'épreuve en classe.

Ré-interrogation de l'épistémologie

Dans les échanges apparaissent parfois de nouvelles questions quant à des objets ou des pratiques habituellement utilisés. Les professeurs proposent leur intégration à l'ingénierie : par exemple l'usage de la frise numérique ou le travail sur la désignation orale des « grands » nombres et les pratiques et jeux de langage associés (« trente c'est comme trois, on entend *trrr* » ; « soixante-douze, c'est 60 + 12 ») ou encore le « jeu de Lucky Luke » qui consiste à « dégainer » une annonce avec sa main droite et sa main gauche à l'énoncé oral d'un nombre. A quelles conditions ces pratiques peuvent-elles être mises en adéquation avec les enjeux de l'ingénierie ? Pour les chercheurs, le fait d'être questionnés demande un travail d'élucidation d'abord *per se* (en appui éventuel sur d'autres travaux de la recherche) puis d'élucidation vers les autres. Ces propositions réinterrogent les choix épistémologiques : est-ce que le jeu de « Lucky Luke » traite la question de l'équivalence, celle de la composition ? Est-ce qu'il suppose la mesure de la grandeur nombre d'entités ? L'appel à la langue orale pour comprendre la structure mathématique de l'organisation des entiers est-il pertinent ?

La ré-interrogation peut concerner également des modalités de mise en œuvre ou des problèmes générés par les pratiques. Un exemple emblématique (le quatrième exemple emblématique rapporté ci-après) est celui de l'expression à un niveau

pratique d'une question théorique relative au mesurage : les graduations en unités sur le schéma-ligne. Faut-il les utiliser dès le début ou pas ? A quel moment est-il opportun de les supprimer ? Ces questions interrogent la théorie car l'introduction des graduations pas à pas est un moyen de compréhension et de contrôle de leur action par les élèves. Cependant elle entraîne une dépendance au comptage-numérotage pour certains élèves. La question reste vive dans les groupes. Elle vient heurter la question de la représentation de la grandeur « taille des collections » par analogie avec la grandeur « longueur ». Il ne s'agit pas, dans cette situation didactique, de comparer des mesures de longueur mais des mesures de la taille de collection représentées comme des longueurs et de penser la situation du *Jeu des annonces* en s'appuyant sur l'évaluation d'un rapport entre deux longueurs : la représentation sur le schéma-ligne de l'annonce 5 + 4 est plus « grande » que la représentation du lancer 3 + 5. Ces rapports de longueur ne sont pas basés sur du mesurage mais sur des connaissances sur les nombres issues de l'expérience de comparaison. La discussion sur ce point d'ingénierie est très liée à la fonction décrite de co-élaboration de problèmes communs et d'élucidation des choix épistémologiques portant sur les représentations de la mesure.

Nous reproduisons ci-dessous un dialogue d'ingénierie entre un chercheur (ChS) et des professeurs lors de la troisième année d'implémentation de l'ingénierie à grande échelle [123].

Quatrième exemple emblématique / logique de dialogue d'ingénierie : « Introduction du schéma-ligne et notion de *contenu dans* »

Ce dialogue d'ingénierie nous paraît emblématique sur trois points : (i) il relate l'expression à un niveau pratique d'une question théorique relative au mesurage, (ii) il rapporte des modalités d'argumentation basées sur la mise à l'épreuve, (iii) il rend compte plus généralement du travail ingénierique à l'échelle du groupe.

[123] Nous avons déjà produit une première description de ces transactions du groupe provençal dans le chapitre 6 (« Evolution des transactions la quatrième année »). Pour illustrer notre propos, ces échanges sont ici « épurés » de manière à faire ressortir uniquement les traits saillants. Ils constituent en fait plusieurs épisodes qui se sont déroulés lors de la première réunion du collectif (troisième année d'implémentation de l'ingénierie à grande échelle, 2014-15).

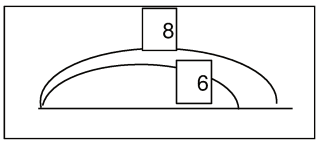
Un professeur en deuxième année d'expérimentation, Nac, expose au groupe le problème qu'il rencontre lors de l'introduction du schéma-ligne.

> « j'ai toujours le même souci avec ce schéma ligné gradué ou pas:: […] je pense que c'est toi [ChS] qui réagissait que le schéma ligné c'est pas quelque chose à enseigner / moi je l'enseigne et ça me prend vraiment du temps / et en fait ce schéma ligné on doit s'en servir pour dire si c'est plus petit / si c'est plus grand / qu'il y a une différence entre les deux nombres / j'ai vraiment l'impression de montrer comment ça marche [….] j'y passe un temps dingue »

En réponse au problème soulevé par Nac, un autre professeur également en deuxième année d'expérimentation, Cal, rapporte la mise en place du schéma-ligne pour représenter la situation de comparaison entre annonce et lancer. Ce professeur Cal a testé la mise en place du schéma-ligne sans graduation mais avec les repères 0-6-12. Cal s'appuie pour cela sur la mise en place de la ligne dans le domaine ACE « Estimation » où les élèves estiment des mesures de quantités et les placent sur une ligne. Comme ses élèves n'avaient pas exprimé que le jeu était perdu lorsque l'annonce était supérieure à 6 (jeu de comparaison de deux mains et un dé), Cal a introduit le schéma-ligne afin de visualiser les combinaisons d'annonces possibles gagnantes. Le chercheur propose alors aussi une autre manière d'introduire cette représentation au travers d'un jeu de rôle sur la mise en place du schéma-ligne (où il joue le rôle du professeur de la classe et Emd l'élève).

> « ChS : tu montres [tu annonces] 5 + 8 et tu me dis 5 + 8 perdu / je te dis / pourquoi tu as perdu↑ explique-moi
> Emd : pourquoi j'ai perdu↑ parce que c'est trop / c'est plus que 6↑
> ChS : qu'est-ce qui est plus que 6↑
> Emd : le 8 déjà
> ChS : et pourquoi le 8 c'est plus que 6↑
> Emd : parce qu'il y a déjà 6 dans le 8
> ChS : parce qu'il y a déjà 6 / je comprends rien à ce que tu me racontes (rires) / attends tu veux bien ↑ on va essayer de comprendre tous les deux et je vais te montrer comment moi je fais pour essayer de te comprendre / tu me dis quoi↑

Emd : que 6 est dans 8 / est contenu dans 8
ChS : bon d'accord attends voilà ((trace au tableau une ligne)) je vais mettre mon 6 / et tu me dis 6 est contenu dans 8 / ça veut dire quoi 6 est contenu dans 8 ↑ est-ce que si je fais ça / ça te convient↑ voilà je fais 6 ((trace un pont de 6)) et puis je fais 8 ((trace un pont de 8 qui part de la même origine)) est-ce que ça te convient↑ je comprends bien là↑
Emd : oui » (TdP167-193)



Le professeur Cal et le chercheur ChS proposent des mises en œuvre selon leur expérience de l'ingénierie. La concrétisation (de ce qui est écrit par la sphère 1 dans le document de la progression) nécessite une mise à l'épreuve qui demande d'abord une interprétation du texte. Ici, il s'agit de donner à voir puis d'analyser comment effectivement le schéma-ligne est introduit dans sa fonction de représentation de la situation de jeu, en appui sur le langage de cette situation de comparaison de mesures de grandeurs, et au service de sa compréhension. Les membres du collectif étudient la situation didactique (ici dans la partie d'introduction du schéma-ligne) en la mettant à l'épreuve, dans les différentes directions qu'elle peut prendre : *c'est cette production collective qui est expérimentale*. Professeurs et chercheurs y apportent leur point de vue d'ingénieur ; le point de vue de ceux qui ont à résoudre des problèmes, concrets et souvent complexes, liés à la conception, à la réalisation et à la mise en œuvre des séquences d'enseignement. Cet effort est aussi théorique car il permet de discuter un point épistémique fondamental : la notion de « contenu dans », c'est-à-dire le fait qu'une mesure peut être contenue dans une autre. Autrement dit, mesurer une grandeur c'est la comparer à une autre grandeur connue et de même espèce (Chevallard & Chambris, 2015). Ici ce rapport ne se réalise pas en passant par l'unité mais en comparant une mesure en rapport avec une autre mesure. L'expérience de comparaison vécue du *Jeu des annonces* permet un tel travail ainsi que l'estimation de quantités et la connaissance des nombres.

Cette forme de vie d'une question vive au sein d'une coopération (questionner, proposer, élucider) s'accompagne de jeux de langage qui permettent de renforcer une intercompréhension des échanges entre les protagonistes. Un lexique et des expressions apparaissent au cours des récits ou de certaines mises en œuvre mêmes. Ils sont ensuite éprouvés dans la situation et repris dans le texte de la progression : « faire une annonce », « statue des doigts », « représenter l'annonce dans la boîte ou

avec le schéma-ligne », « voir la différence », « faire voir un nombre dans un autre », « un nombre contenu dans un autre », « traduire une représentation dans une autre »,... Ce langage décrit à la fois l'action proprement dite (avec les élèves et entre les membres) et la théorie de l'action (par exemple faire une annonce c'est produire une somme de x mesures de grandeurs, c'est pouvoir décomposer n'importe quelle mesure en mesures plus petites connues et contenues dans).

Nous pourrions aussi évoquer un autre exemple emblématique d'une ré-interrogation qui s'est réalisée en direct (cf. chapitre 6 – Analyse des transactions, Echanges sur la notion d'équivalence). Au cours d'un échange sur la mise en œuvre du module portant sur la recherche d'un terme inconnu au sein d'une équivalence (12 + 15 + ? = 17 + 12 + 19), le chercheur réalise que le signe « = » prend le sens d'équivalence si la question dévolue aux élèves se formule « quel nombre faut-il ajouter à 12 + 15 pour obtenir 17 + 12 + 19 ? ». Il se rend compte que lorsqu'on utilise le signe « = » comme une équivalence « on ne le dit pas ». L'équivalence peut rester implicite. En effet, il s'agit d'un travail algébrique qui n'attend pas comme réponse de la part des élèves un calcul, mais *d'écrire autrement un nombre*. Cependant aucune formulation explicite n'accompagne la consigne. Selon le chercheur, « on dit qu'on désigne un nombre de deux façons différentes mais on n'a pas donné un nom à cette désignation » comme par exemple « l'écriture du nombre » ou « le nom du nombre » (c'est-à-dire exprimer que 19 est le nom du nombre au même titre que par exemple 17 + 2 ou 16 + 3). Cet épisode est emblématique dans la mesure où il constitue non seulement un fait d'expérience pour le groupe mais aussi parce qu'il montre la nécessité de la mise en œuvre effective et discutée pour que les points aveugles de l'ingénierie émergent.

Une des autres « grandes » logiques des transactions, à un niveau de description plus général, est donc d'avoir des opportunités pour réinterroger l'épistémologie de l'ingénierie à la lumière des pratiques qui en révèle parfois les points aveugles dans la concrétisation (de ce qui est écrit par la sphère 1 dans le document de la progression).

Caractéristiques d'une coopération au sein d'une ingénierie

Les logiques, relatives aux transactions, d'émergence des attentes réciproques, de co-élaboration de problèmes communs, d'élucidation des choix d'ingénierie et de ré-interrogation de son épistémologie, nous ont permis de décrire d'une certaine façon le dialogue d'ingénierie. Ces fonctions participent à caractériser la coopération. A cette étape de notre réflexion, nous pouvons présenter les grandes caractéristiques d'une coopération telle que nous l'avons analysée dans le cadre de l'ingénierie didactique *Ace-Arithmécole.* Nous distinguerons dans les sections suivantes : (i) une prise de position, (ii) un travail dans la praxis, (iii) un travail des questions ingénieriques-scientifiques, (iv) l'entrelacement de l'éthique et du cognitif.

Prise de position

Dans une ingénierie coopérative, chacun est à même de fournir des éclairages concrets (ou de comprendre ce que ces éclairages concrets évoquent), de faire des propositions, de donner un avis argumenté sur un choix au regard de son expérience ou de sa compréhension. Ainsi chacun assume une position dans laquelle il exprime un rapport personnel à l'ingénierie, mais aussi au monde, sur des faits qui l'interpellent. Un tel rapport d'action est indispensable au processus de coopération. Nous supposons d'ailleurs que les rares professeurs qui n'ont pas poursuivi au-delà d'une année l'ingénierie sont restés au stade d'un rapport d'exécution : ils n'ont pas vu le document comme une ressource à développer et une ressource pour *se* développer (Mayen, 1999)[124] mais comme une marche à suivre qui ne leur convenait pas et à laquelle il fallait se conformer.

[124] Pour tous les membres, il s'agit d'apprendre de la situation d'expérimentation ou, autrement dit, des faits du point de vue de l'expérience de réalisation effective. Patrick Mayen introduit la notion de situation potentielle de développement pour qualifier toute situation professionnelle qui « engage et étaye le processus de développement des compétences d'un individu ou d'un groupe d'individus ». Il a étudié une telle situation (cas des contremaîtres de services techniques d'établissement hospitaliers) et l'a décrite comme « un moment d'ouverture dont les différents acteurs semblent s'être emparés pour se transformer », moment qui est « à la fois ouverture d'un espace dans le champ des possibles et opportunité dues à des événements issus de la situation elle-même et du parcours des individus » (Mayen, 1999). Nous supposons que la situation objet de notre étude, au sens de l'ensemble des conditions matérielles et intellectuelles dans lesquelles se trouve une personne, relève d'une telle situation potentielle de développement. Nous le décrivons dans notre travail comme un gain dans le jeu de coopération.

Nous reproduisons ci-dessous un dialogue d'ingénierie entre deux professeurs et un observateur (Mir) lors de la deuxième année d'implémentation de l'ingénierie à grande échelle (2013-14)[125]. Un des professeurs (Flo) a déjà mis en place l'ingénierie l'année précédente ; l'autre professeur (Ste) débute dans l'expérimentation. L'échange porte sur la production d'un élève du professeur Ste dans son *Journal du nombre*.

Cinquième exemple emblématique / caractéristique de la coopération : une « grande aventure » dans le journal du nombre

Ce dialogue nous paraît emblématique sur trois points : (i) il témoigne d'un rapport personnel à l'ingénierie, (ii) il montre une posture face à l'enquête, (iii) il rend compte plus généralement de l'action des uns sur celles des autres.

> «Ste : la semaine dernière dans le journal du nombre / il y a un élève qui a anticipé sur le module 6 / et du coup j'ai pas su si il fallait que je l'exploite / j'ai laissé faire lui et j'en ai pas reparlé à tous
> Mir : mais comment il a anticipé↑
> Ste : c'était « écris des annonces mathématiques avec le + et le = » / donc il m'appelle et il me dit maîtresse il faut que tu viennes m'aider / je veux mettre ça / 2 + 2 / je lui dis mais tu es coincé à 2 + 2↑ / il me dit oui / je dis comment ça tu es coincé à 2 + 2 enfin tu vois je:: / mais il me dit non parce que je veux pas écrire 4 / je veux l'écrire d'une autre manière / ça y est j'ai trouvé je vais écrire 3 + 1 / tu vois de lui-même il a anticipé comme ça
> Mir : et tu l'as laissé comme ça ↑
> Ste : j'ai dit très bien et je suis partie (rires) c'était pas :: / et il a rempli la page de ça
> Flo : mais tu peux t'en servir / c'est super pour la classe / toi tu as écrit ça et vous est-ce que vous êtes capable d'écrire comme lui / c'est le début d'une grande aventure » (TdP10-15 – réunion du 27 novembre 2013)

Dans cet épisode d'un dialogue d'ingénierie commentant les productions des élèves dans le *Journal du nombre*, un professeur (Ste) rapporte la production de son élève

[125] Cet échange a été décrit et analysé une première fois dans le chapitre 6 (« Echanges sur la notion d'équivalence »).

de CP (« 2 + 2 = 3 + 1 ») qu'il trouve remarquable car en avance sur le temps didactique mais dont il n'a pas perçu le potentiel didactique à ce moment-là de l'avancée de l'ingénierie. En effet, cet élève produit une équivalence écrite entre deux écritures alors qu'un tel travail n'a pas été abordé. C'est un autre professeur (Flo, plus expérimenté dans l'ingénierie) qui lui indique un sens profond qu'on peut trouver à l'action de l'élève et une proposition d'exploitation en classe. Ce professeur occupe une position topogénétique haute en envisageant le milieu du *Journal du nombre* dans une dynamique fonctionnelle : « 2 + 2 = 3 + 1 » n'est pas seulement l'expression d'une équivalence, c'est aussi un *jeu d'imitation* potentiel (Sensevy, 2016).

C'est une telle posture face à l'enquête (sur ce qui fait problème ou pose question) qui construit la symétrique entre chercheurs et professeurs. Cette posture est en lien avec la légitimité de ce que l'on a à dire ou à signifier : elle s'acquiert par l'expérience dans la mise en œuvre de l'ingénierie. Elle n'est pas liée au fait que l'on soit chercheur, professeur, formateur ou IEN car chacun possède une forme d'expérience de cette mise en œuvre. Ces positions sont assumées en fonction de la compréhension de chacun de l'ingénierie et car elles émergent selon des faits qui font milieu-problème au sein du collectif. Elle implique une adaptation à ce qui est énoncé en fonction de ses connaissances, notamment des enjeux épistémiques et épistémologiques de l'ingénierie. Le savoir à acquérir par les membres n'est qu'en partie connu par la sphère 1 (qui a une longueur d'avance) ou par les chercheurs à l'état d'hypothèses, et de toute manière lacunaire.

Travail dans la praxis

Les acteurs (chercheurs compris) confrontés jour après jour à la nécessité d'assurer la mise en œuvre devant les élèves (mais aussi les parents, la communauté éducative, l'institution) expriment des capacités d'innovation et d'adaptation. Si les chercheurs et les professeurs discutent de la manière dont ce qui a été prévu conjointement a été mis en œuvre, la discussion correspondant à cet engagement, indissociablement théorique et pratique, ne pourrait être spontanément obtenue d'une autre façon.

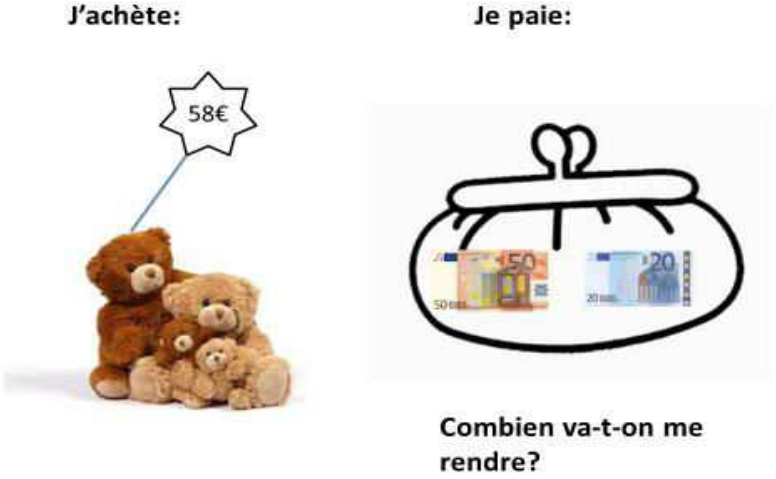
Nous reproduisons ci-dessous un dialogue d'ingénierie entre deux professeurs de classes de CE1. Un des professeurs a déjà mis en place l'ingénierie l'année

précédente ; l'autre professeur débute dans l'expérimentation. L'échange porte sur le traitement didactique d'une difficulté générale des élèves face à un type de problème.

Sixième exemple emblématique / caractéristique de la coopération : travailler de manière théorique et pratique à la fois sur un problème donné aux élèves

Ce dialogue n'est pas direct mais il a eu lieu au travers de la liste de diffusion. Ce dialogue nous paraît emblématique sur deux points : (i) il rend compte d'un rapport à la fois pratique et théorique à la pratique didactique, (ii) il traduit plus généralement l'action des uns sur celles des autres mais aussi un effet du travail coopératif.

Un des faits d'ingénierie concerne la difficulté des élèves de CE1 à traiter un problème de rendu de la monnaie (« jeu de la marchande » proposé dans le cadre du domaine « Grandeurs et mesures »). A l'origine cette séance était proposée plus tardivement dans la progression mais des modifications ont amené à l'intégrer au cours de la première période scolaire (septembre-octobre) pour cette seconde année d'expérimentation CE1 à grande échelle. Les données du problème n'ayant pas été changées, la tâche s'avère difficile pour les élèves. Voici un des exemples de l'activité proposée aux élèves :



Exemple proposé pour l'activité du rendu-monnaie

Deux professeurs (l'un novice, Ler, et l'autre expérimenté dans l'ingénierie, San) envoient leur compte-rendu de séances, compte-rendu relatif à la mise en place du jeu de la marchande, à la liste de diffusion. Nous considérons de tels échanges comme

un dialogue d'ingénierie car les professeurs donnent à voir leur pratique et la commentent. Ces deux pratiques étant très différentes d'une certaine façon, les échanges les confrontent et se répondent, même s'il n'y a pas de commentaires croisés. Le professeur Ler, débutant dans l'ingénierie, écrit :

> « Voyant les difficultés de mon groupe de CE1, je leur ai proposé en situation concrète (avec pièces et billets) de travailler le rendu de monnaie sur des montants plus petits et en lien avec les compléments à 10. Dans une deuxième étape, ils ont exploré la ligne pour trouver le rendu puisque j'avais enlevé les pièces » (courriel Ler – 26 octobre 2016).

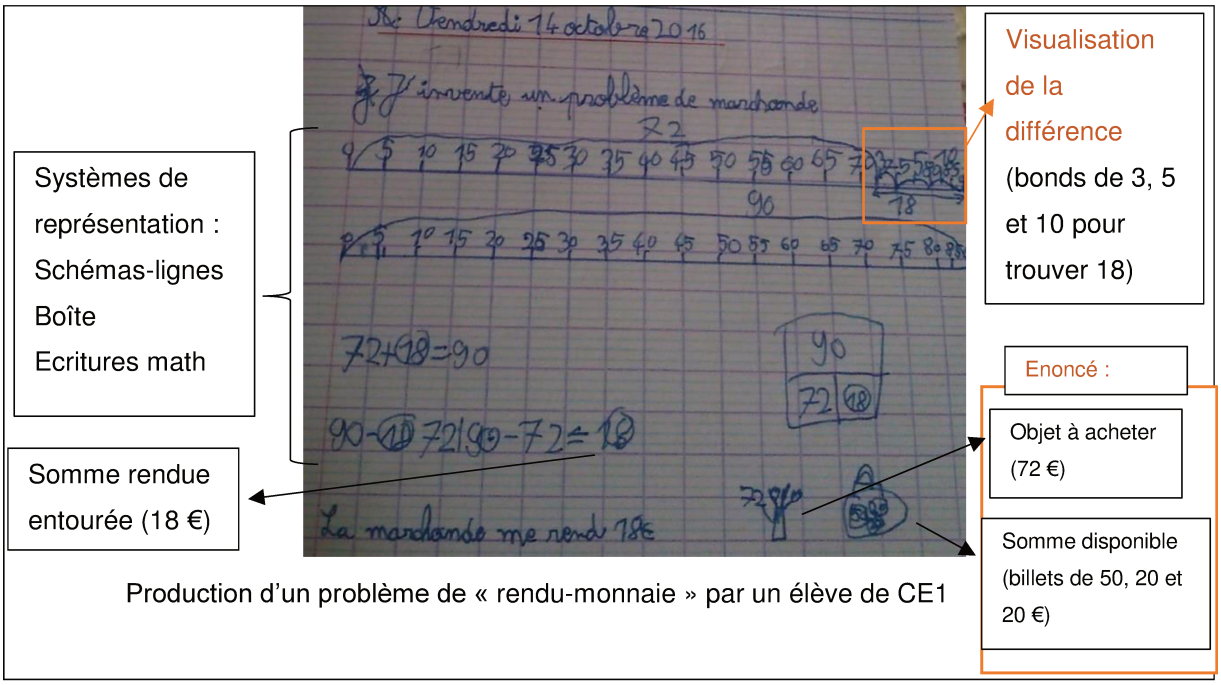
Le professeur Ler a mis en place un traitement « social » de la difficulté rencontrée : les élèves jouent la scène avec des billets et pièces comme dans la réalité. Puis le comportement est traduit sur le schéma-ligne pour calculer ce qui doit être rendu ; les précisions sur la procédure effective ne sont pas indiquées. Le professeur San, expérimenté dans l'ingénierie, écrit :

> « Le jeu de la marchande est difficile pour beaucoup d'élèves. Nous avons donc essayé de nous doter d'un outil [le système de représentations] permettant de trouver la différence entre deux montants en euros. Bilan : les élèves s'emparent facilement de la fiche de comparaison dans ce contexte » (CR San – 26 octobre 2016).

Dans la première séance, la classe a résolu collectivement le problème, reproduit plus haut, dont l'énoncé peut se formuler ainsi : « Les ours en peluche coûtent 58 euros. Je paie avec un billet de 50 euros et un billet de 20 euros. Combien la marchande va-t-elle me rendre ? ». Les élèves ont résolu le problème en utilisant deux schémas-lignes qui représentent le prix des peluches et la somme donnée, une boîte montrant que c'est une différence entre le coût et la somme donnée qui est recherchée, puis des écritures mathématiques correspondantes à la situation.

Lors de la deuxième séance, ce professeur demande à ses élèves de créer des « problèmes de marchande » dans leur *Journal du nombre*. Les élèves ont donc *choisi* les valeurs attribuées à l'objet acheté et à la somme disponible. Nous prélevons un des exemples de production d'élève joint au compte-rendu envoyé. L'élève a répondu à l'énoncé qu'il s'est créé. Cet énoncé n'est pas rédigé mais produit sous forme de dessins de la situation (figurant en bas, à droite de l'image). Cet énoncé pourrait être :

« Les fleurs et le pot coûtent 72 euros. Je paie avec un billet de 50 euros et deux billets de 20 euros. Combien la marchande va-t-elle me rendre ? ».



Production d'un problème de « rendu-monnaie » par un élève de CE1

> « Je constate qu'ils réinvestissent l'utilisation de la fiche de comparaison en la reproduisant sur leur cahier. Les élèves s'emparent de la stratégie d'exploration de la ligne[126] pour calculer le rendu-monnaie. La situation donne du sens à cette exploration : la marchande va me rendre la différence entre le prix de l'objet et ce que j'ai donné. Je peux visualiser « ce que j'ai donné en plus » sur le schéma-ligne (rendu-monnaie symbolisé par la double flèche) » (CR San – 26 octobre 2016).

Le professeur San donne à voir le traitement didactique de ce type de problème mis en place dans sa classe : la situation du rendu-monnaie est enseignée comme une recherche de la différence entre deux mesures dans un problème d'égalisation. Cette façon de voir le problème fait partie du *style de pensée* du collectif qui considère la différence dans son sens mathématiques comme « quelque chose que je rajoute au nombre le plus petit pour obtenir le plus grand » et qui est représenté dans divers systèmes de représentation mis en lien avec le langage (schéma-ligne, boîte et écritures mathématiques). La réponse didactique à la difficulté des élèves face à ce type de problème de rendu-monnaie a été traitée mathématiquement, en faisant appel

[126] Certains élèves s'étant donné des différences difficiles à calculer pour leur niveau ont utilisé la ligne pour trouver la différence. Pour 90 – 72, ils ont calculé en « avançant avec des bonds » de 3 + 5 + 10.

au modèle additif. Faire créer un problème de même type ou de même classe dans le *Journal du nombre* est une manière de faire travailler les élèves en résolution de problèmes ; il est propre au *style de pensée* du groupe. Nous pouvons considérer que le professeur expérimenté dans l'ingénierie montre une voie didactique possible, embarquant les concepts théoriques de la différence, des systèmes de représentations de la situation, du lien concret / abstrait (situation de référence / modèle utilisé pour la traiter), et aussi du temps long de « l'aventure mathématiques » pour les signifier au professeur débutant et aussi aux autres membres du groupe. Ce « donner à voir » est le résultat du dialogue d'ingénierie qui s'est déroulé sur un temps long (deux années pour l'implémentation de l'ingénierie pour le CE1).

Travail de questions ingénieriques scientifiques

La mise en œuvre de l'ingénierie a été rendue d'abord possible car un document de la progression (qui en est la description) se constitue en ressource pour les professeurs des classes expérimentales. Pour Ghislaine Gueudet et Luc Trouche, un document, c'est une ressource "munie" d'un schème d'utilisation (Gueudet & Trouche, 2008). D'une certaine manière, on peut voir le dialogue d'ingénierie comme une manière de munir la ressource (progression) d'un système de schèmes d'usage partagé. Tout le travail du dialogue d'ingénierie peut être donc vu comme une genèse documentaire, qui transforme la ressource en document. Cette ressource est produite de manière anticipée par la sphère 1. Mais c'est le travail du groupe qui la valide (ou pas) et surtout qui peut traiter des questions ingénieriques-scientifiques que soulève les mises en œuvre. Chacun peut assister et participer (directement ou indirectement) à la mise à l'épreuve et à la reconfiguration des hypothèses de recherche au cours de la mise en œuvre des situations, à la proposition de nouvelles hypothèses. Cette mise en œuvre est effective non seulement parce qu'elle est réalisée *in situ* dans des conditions « écologiques » mais aussi parce qu'elle acquiert une valeur productive en terme de questionnements, de propositions, de confrontations, d'élucidations qui la nourrissent en retour. Nous avons vu que certaines questions sont encore à l'étude ; certaines ont dépassé le cadre du collectif *Ace-Arithmécole*.

Une des caractéristiques d'une coopération au sein d'une ingénierie didactique est de travailler des questions ingénieriques-scientifiques. Nous présentons deux exemples emblématiques relatifs à ce point de caractérisation de la coopération.

Pour le premier exemple, nous rapportons ci-dessous des échanges par courriels entre des chercheurs didacticiens participant au dispositif de recherche avec d'autres didacticiens issus de la communauté des recherches en didactique, avant l'implémentation de l'ingénierie dans les classes expérimentales[127]. Les chercheurs s'interrogent sur la pertinence d'une situation didactique qui pourrait être mise en lien avec le *Jeu des annonces*.

Septième exemple emblématique / caractéristique de la coopération : transformer une proposition didactique issue de la TSD en proposition réélaborée au sein de la TACD (l'usage des trains-cubes)

Ces échanges nous paraissent emblématiques sur deux points : (i) ils montrent une confrontation des arrière-plans conceptuels à l'échelle de la communauté élargie, (ii) ils rendent compte des conceptions épistémologiques parentes mais différentes de la TACD et de la TSD.

Un chercheur en didactique des mathématiques, extérieur au collectif *Ace-Arithmécole*, propose d'introduire une situation didactique (la situation *Train-cubes*). Cette situation consiste à fabriquer des trains avec des cubes comme moyen de contrôle des assertions. En effet, dans le *Jeu des annonces*, les actions dans le système des nombres ne reçoivent pas suffisamment de rétroactions. A ce temps de l'ingénierie, lors de la première année d'implémentation dans les classes d'étude (2011-12), c'est l'action dans le système matériel et les variations qu'il permet qui créent les conditions à l'appel des représentations. Par exemple, pour une annonce à deux mains (2 doigts main droite et 4 doigts main gauche) et un lancer du dé de 6, seule l'écriture « 2 + 4 = 6 » viendra asserter le gain de la partie. Le chercheur externe au groupe propose la fabrication d'un train comprenant 4 cubes plus 2 cubes pour

[127] Nous avons décrit ces échanges dans les sous-sections « De la controverse sur l'adidacticité de la situation et la part de hasard » et « De la controverse sur le manque de rétroaction du milieu » au chapitre 6, dans la section concernant les éléments relatifs à la mise en œuvre de la situation du *Jeu des annonces*.

l'annonce puis d'un train de 6 cubes pour le lancer. La comparaison matérielle de ces deux trains-cubes permet ainsi une vérification individuelle du gain au jeu. Selon ce chercheur, il faut permettre aux élèves de contrôler le milieu symbolique (sous la forme ici d'un codage numérique) par le milieu matériel qui constitue ainsi en retour une aide pour progresser.

Pour les chercheurs du groupe *ACE-Arithmécole*, c'est le travail symbolique sur les nombres qui doit devenir premier. Ils s'emparent de la situation *Train-cubes* mais l'envisagent comme une référence pour la forme symbolique. Ainsi, la fonction de la situation est changée : elle devient une situation propédeutique au *Jeu des annonces* dans la progression en posant le rôle des nombres comme code commun. Puis elle est pensée comme élément du système de représentation en tant que train-nombre. Cette transformation de la fonction de la situation montre probablement certaines différences d'épistémologie entre la TSD et la TACD sur le plan des liens entre formes symboliques et pratiques concrètes où les représentations jouent un rôle spécifique.

Voilà donc un fait d'ingénierie, issu de questionnements de la communauté scientifique élargie, qui provoque un changement de perspective. La situation du codage d'un train devient un instrument pour le travail symbolique. Elle est vue alors comme pertinente pour l'ingénierie et, à ce titre, intégrée dans son système mésogénétique. Elle donnera lieu à la situation *Train / tour* du module 0. Dans cette situation didactique, les élèves recherchent une stratégie pour constituer un train (ou une tour) composé de cubes emboîtables, groupés en couleurs différentes, à partir d'une représentation schématique de cet objet-train (ou tour). L'enjeu, pour les élèves, est de désigner la mesure de la grandeur « taille » d'une « grande » collection (les cubes du train ou de la tour), à partir de mesures « petites » et connues (inférieures à 6), en la codant. Ils vérifient ensuite la validité de ce codage dans un jeu d'échange de message.

Pour le deuxième exemple emblématique relatif à cette question (le huitième au total), nous reproduisons ci-dessous un travail conjoint professeur / élèves. L'échange porte sur le traitement didactique de l'équivalence à l'aide des représentations. La personne qui tient le rôle du professeur n'est pas celui de la classe mais nous-même, dans une position d'ingénieur.

Huitième exemple emblématique / caractéristique de la coopération : l'exploration d'une question ingénierique *in situ* (travail sur la mise en lien entre représentations pour justifier "5 + 2 = 6 + 1")

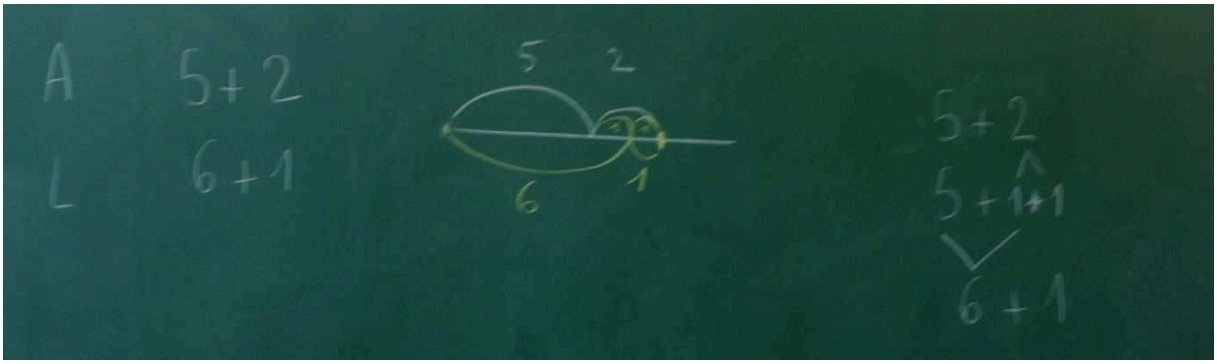
Ce dialogue nous paraît emblématique sur trois points : (i) il montre la mise en œuvre d'une synergie des représentations au service d'un travail de l'équivalence, (ii) il rend compte d'un travail d'ingénieur, (iii) il traduit plus généralement un travail ingénierique orienté vers une question théorique en réflexion (le travail dans la concrétisation ou *ascension de l'abstrait au concret*[128] d'une question théorique relative au mesurage).
En effet, l'ingénieur cherche à voir comment, dans une classe, on peut mettre en œuvre la question à l'étude de la notion « contenu dans » travaillée avec le schéma-ligne. Ceci correspond à la prise de conscience du fait que mesurer une grandeur pourrait se réaliser en comparant une mesure en rapport avec une autre mesure. Cet exemple complète en quelque sorte le quatrième exemple emblématique « Introduction du schéma-ligne et notion de *contenu dans* ». Lorsque celui qui mène l'action didactique « joue dans le concret », il dispose de formules abstraites (par exemple, les différentes fonctions du schéma-ligne qui ont été mises au jour avec le chercheur en coresponsabilité) qu'il va *concrétiser*, au sens marxien du terme (Sensevy, 2014), c'est-à-dire auxquelles il va donner un contenu et une substance pratiques.
Cet épisode a lieu au début du module 6 du *Jeu des annonces* lorsque annonce à deux termes et lancer de deux dés sont à comparer. Lors d'une partie, une élève annonce « 5 + 2 ». Les dés sont lancés : ils tombent sur 6 et 1. L'élève ne sait pas si elle a gagné. Son camarade affirme qu'elle a gagné car son annonce fait 7 et le lancer aussi. L'élève ne semble pas convaincue : pour elle 5 et 2 ne sont pas comme 6 et 1. Cette partie est reprise avec toute la classe au tableau. Le professeur montre, en appui sur les écritures mathématiques et le schéma-ligne, comment on transforme une écriture de deux termes (5 + 2) en trois termes (5 + 1 + 1) puis en deux termes (6 + 1) pour *faire voir l'annonce* (5 + 2) *dans le lancer* (6 + 1). Le professeur commence à

[128] Ce travail collectif sur le modèle de l'ascension de l'abstrait au concret lors du *Séminaire action* est encore à l'étude dans ses dimensions à la fois pratique (comment rendre concrète une notion didactique en vue de l'écriture d'un ouvrage collectif) et théorique (cf. présentations de G. Sensevy, le 27 janvier 2014 : « La conquête du concret. Notes pour une épistémologie de l'analogie paradigmatique : après Marx, La Fontaine »).

montrer que 5 + 2 peut se décomposer en 5 + 1 + 1 à la fois sur le schéma-ligne et sur l'écriture mathématique par un système de signes :

Il appuie la démonstration avec une gestuelle qui encadre entre ses deux mains écartées le « 5 + 2 » et le « 5 et encore 1 et encore 1 ».

Puis il demande si un élève peut voir un 6 dans « 5 + 1 + 1 ». Certains élèves répondent « 5+1 ». Le professeur reprend : on peut voir un 6 en groupant 5 et 1. Il le note sur le schéma et dans l'écriture :



Le professeur dit alors aux élèves : « sur le schéma l'annonce 5 + 2 arrive au même endroit, mesure la même longueur que le lancer 6 + 1 » Le professeur assortit sa démonstration écrite de la même gestuelle encadrant les ponts sur le schéma-ligne. Il peut alors écrire l'égalité « 5 + 2 = 6 + 1 ».

Ainsi, le professeur donne au signe « = » un statut différent du statut conventionnel, celui de marqueur de l'équivalence. Il propose aux élèves une autre forme de justification du gain à la partie et signale ainsi qu'il est possible d'intégrer une nouvelle dimension dans la justification. L'équivalence est montrée *en acte* dans les représentations par des allers-retours entre l'abstrait de l'écriture et le concret de la représentation (en analogie avec la longueur). Le professeur donne à voir ce qui fondera par la suite le travail de comparaison d'écritures, de transformation d'écritures

avec les techniques de décomposition et composition, il réalise le travail mathématique devant les élèves en le commentant.

Dans cet exemple emblématique, le geste d'enseignement est testé dans les conditions réelles de la classe. Il répond à un besoin auparavant identifié : justifier autrement le gain de la partie et introduire un travail sur les nombres[129] en prenant appui sur les représentations (schéma-ligne et écritures mathématiques) mises en synergie. Le professeur est ici ingénieur-professeur : il explore comment on peut se saisir du schéma-ligne d'une manière nouvelle. Il teste des formulations, des gestes, des manières d'organiser les signes ainsi que l'organisation des représentations au tableau pour répondre à l'interrogation de l'élève. Nous[130] avions déjà mené de tels échanges didactiques mais sans penser à le travailler de cette manière sur le schéma-ligne. Cette pratique pourrait être qualifiée de pratique de « professeur-chercheur », qui est ici une forme particulière d'ingénieur. On pourrait dire qu'il s'agit d'une forme d'une certaine manière « idéale » d'ingénieur didacticien, pour laquelle les deux postures sont à la fois nécessaires et activées praxéologiquement (dans le discours et dans l'action). Une telle pratique est aussi une réponse pour le professeur de la classe, débutant dans l'ingénierie : « c'est exactement ce qui me manquait, je n'aurais pas su quoi dire à cette élève [au sujet de la partie gagnée 5 + 2 = 6 + 1], à part que l'annonce et le lancer faisaient 7 tous les deux ».

Entrelacement de l'éthique et du cognitif

Un rapport théorique et pratique à l'ingénierie est donc nécessaire pour que chacun acquière une position dans l'ingénierie. Le jeu des transactions permet que des réponses d'ordre didactiques soient produites : chacun fait quelque chose pour que

[129] Nous rappelons qu'à partir de ce stade de l'ingénierie les nombres commencent à changer de statut et il est nécessaire d'organiser ce saut informationnel. En effet, d'expression de la numérosité (par l'expression de la taille des collections) les nombres seront considérés comme objets mathématiques symboliques pour penser et étudier l'action (de comparaison, de composition, de recherche de la différence de collections). Nous avions développé ce travail du collectif dans le chapitre 6 « Questions relatives à l'écrit et son rôle dans un temps de situation ».

[130] Le « nous » employé, ici, renvoie à notre travail dans les classes. Au titre de maître-ressource de la mission départementale maths-sciences, nous accompagnons les professeurs engagés dans le dispositif *Ace-Arithmécole*.

l'autre apprenne quelque chose. C'est l'aspect « cognitif », au sens le plus large de ce terme, du processus de coopération.

La dimension temporelle est indispensable pour que des positions symétriques puissent être tenues dans un dispositif coopératif. L'engagement (liée à la durée) participe à la dimension éthique du processus de coopération. L'organisation même du dispositif permet un temps de questionnement et de problématisation s'installant dans la durée. En effet, l'étude collective des expériences réalisées et la constitution d'un capital de ces expériences sont rendues possibles car les questions et les problèmes communs ont un espace-temps pour s'exprimer et se développer : les questions et constats soulevés reviennent sous un nouvel aspect à l'occasion d'un fait nouveau.

C'est l'adéquation analysée collectivement entre des problèmes rencontrés dans la mise en œuvre et des usages, par exemple ceux autorisés par l'écrit ou par les représentations, qui a permis au collectif d'acquérir une expérience dans le domaine. En effet, chaque année d'implémentation du dispositif, la question l'usage des représentations est discutée, à partir de faits d'ingénierie divers. Cette question prend des formes de vie (et des jeux de langage associés) différentes mais cette récurrence est nécessaire pour que se façonne et s'enrichisse une théorie de la pratique didactique. L'expérience acquise par le groupe permet de les traiter de manière plus efficace, avec des apports plus ciblés et des exemples plus adaptés. Citons par exemple le long cheminement qui a été nécessaire pour passer des premiers questionnements collectifs sur l'usage du schéma-ligne (« A quoi ça sert ? ils le savent que 3 et 3 font 6 ») aux usages pour raisonner sur la situation puis à sa convocation pour résoudre un problème de différence du rendu-monnaie, dans un traitement mathématique et non d'abord « social » de la question ou pour montrer l'équivalence entre des écritures à plusieurs termes. Nous constatons d'ailleurs que c'est lorsque les personnes gagnent en expérience qu'elles peuvent en dire le plus, au point de vue didactique et épistémique. Les nouveaux arrivants font émerger les points à expliciter mais ont besoin de temps pour entrer dans le jeu des discussions.

Une ingénierie coopérative donne la possibilité à tous les participants d'assumer le travail des hypothèses d'enseignement mises en œuvre. Tous les membres sont engagés dans une finalité commune (permettre à tous les élèves d'entrer dans un rapport d'enquête au savoir, de construire des connaissances sur les nombres et les

opérations, de travailler sur les formes symboliques, etc. de manière adéquate aux résultats des recherches en éducation et en didactique) et tous les membres, quels qu'ils soient, sont responsables des moyens mis en œuvre. Il n'y a donc pas d'un côté les « conseilleurs » (qui exprimeraient un discours de la recherche) et les « exécutants » (qui tenteraient de « traduire » sur le terrain les incitations avec l'aide des conseilleurs) mais des membres, qui chacun de leur place et avec leurs compétences, réfléchissent à une mise en œuvre possible et sans cesse remise au travail. Sans que cette dualité soit assimilée au travail collaboratif mené au COREM, nous pourrions alors reprendre les propos de Marie-Hélène Salin et Denise Greslard (2011, p. 266) sur une partie du contrat qui liaient les chercheurs et les professeurs qui participaient à une ingénierie didactique (cf. chapitre 1 – Modes de collaboration : quelques articles pour aborder le sujet). En remplaçant le mot « chercheur » (utilisé dans la citation de Salin & Greslard) par le mot « collectif », nous revenons alors sur l'énoncé de la manière suivante : « Si l'objectif d'apprentissage n'est pas atteint, c'est d'abord la situation qui est examinée et donc le travail du *collectif* qui est en cause : le *collectif* a laissé échapper une contrainte, une circonstance qu'il s'agit de découvrir ou de reconnaître… ».

Interprétation des caractéristiques d'une coopération en TACD

Dans cette section, nous discutons de ce que notre analyse d'une coopération au sein d'un dialogue d'ingénierie, peut apporter à la compréhension et au développement de la *théorie de l'action conjointe en didactique*. Nous commencerons par examiner la notion de contrat / milieu en lien avec la position des agents puis nous convoquerons les concepts de topogénèse et mésogénèse pour décrire la relation épistémique coopérative. Nous tenterons alors de définir ce que serait un ingénieur dans une ingénierie didactique coopérative.

Notion de contrat / milieu et positions des agents au sein d'une ingénierie didactique coopérative

De manière générale, l'arrière-plan d'un dialogue d'ingénierie peut être décrit, dans une dialectique contrat-milieu, comme le contrat qui permet à chacun de se comprendre. Les transactions portent donc, de manière « implicite », la construction de cet arrière-plan (qui devient peu à peu le style de pensée du collectif) et permettent la mise en place d'un milieu pour l'enquête. Dans l'analyse que nous avons réalisée et que nous avons décrite en prenant appui sur la TACD, le système stratégique du contrat est le système de connaissances disponibles (tout à la fois au travers du document de la progression, de la mise en œuvre effective de l'ingénierie et des échanges au sein du dialogue d'ingénierie) qui permet d'abord de créer un arrière-plan pour se comprendre. C'est un système actualisé par des problèmes (soulevés par la mise en œuvre et constitués en faits d'ingénierie) qui constituent un environnement composé de nécessaires et de possibles pour l'action didactique coopérative.

Dans un système didactique scolaire classique, les positions de professeur et d'élève sont dissymétriques : le professeur joue sur le jeu de l'élève en régulant l'équilibre contrat-milieu et en retour, les élèves jouent sur le jeu du professeur. Par exemple, le professeur a une bonne compréhension du contrat s'il sait ce que ses élèves sont capables de faire (ou pas) et leur propose un milieu adéquat de ce point de vue. Si le milieu est adéquat, les élèves apprennent. Chacun a une place qui lui est assignée par l'institution scolaire : le professeur est celui qui sait, notamment quelles sont les connaissances (attendues par l'institution) à acquérir. Il possède une relative maîtrise du système stratégique du contrat et a, en conséquence, une certaine longueur d'avance quant à la manière de traiter le milieu-problème (par exemple en faisant appel à la mémoire didactique ou en introduisant des aides ou des apports). L'élève est celui qui ne sait pas encore. Dès que ce dernier sait, les transactions n'ont plus d'enjeux épistémiques. Nous pourrions parler alors, au sein de ce système didactique scolaire classique, de *position-place* des agents car ces positions sont fixes et désignées par l'institution, le savoir y est défini par avance. Seule la manière de l'acquérir donne lieu à des possibles divers selon les jeux d'apprentissage engagés par les protagonistes.

Dans le système didactique de l'ingénierie coopérative, une symétrie des positions est permise par l'organisation-même du dispositif de recherche : au sein des transactions, une forme d'engagement est requise, notamment par cette prise de position à

assumer. Nous pourrions parler alors de *position-posture*, expression traduisant une dynamique et utilisée dans le sens général de conduite (position à tenir, à assumer) mais qui serait aussi de l'ordre d'une "disposition à" (c'est-à-dire un état d'esprit, une manière d'être au monde) mêlée à un engagement (envers le dispositif de l'ingénierie mais aussi de manière plus générale pour l'apprentissage).

Une des formes de vie de cette posture serait la « posture de désignation » : la posture de celui qui désigne à l'autre quelque chose qui est à travailler ou à remarquer au sein du collectif. Nous avons vu que cette position pouvait être tenue par toutes les instances (chercheur, professeur, formateur et inspecteur). Tout le monde est à même de rapporter un problème qui émerge de la formulation du document de la progression ou d'un événement lors de la mise en œuvre. Les membres les plus expérimentés dans l'ingénierie le réfèrent à un problème épistémique en lien avec l'ingénierie (autrement dit à une question ingénierique scientifique). Une autre de ces formes de vie serait celle de la « posture de proposition » : la posture de celui qui propose une hypothèse à éprouver, une orientation de la progression à tester dans la mise en œuvre de l'ingénierie. Ou bien la « posture de travailleur dans la praxis » : la posture de celui qui répond à une question d'élève(s) en cherchant une solution adaptée lors de mises en œuvre *effectives* où le terme « effectif » renvoie à une idée de valeur productive de l'action.

En TACD, la symétrie ou la dissymétrie des positions est un élément essentiel à prendre en compte dans l'analyse des systèmes stratégiques du contrat et du milieu : la prise de position d'un acteur oriente (ou réoriente) l'action à propos du savoir étudié. Dans les cas que nous étudions, cette orientation est le fait de personnes « d'horizons » multiples, de pratiques différentes mais qui ont vécu toutes l'expérience de la mise en œuvre d'une manière plus ou moins directe : elle donne alors une tonalité spécifique aux transactions didactiques. En effet, cette position est en marche dans un système didactique coopératif alors qu'elle n'est qu'en germe dans un système didactique classique, notamment scolaire, où une dissymétrie organique est constitutive du système.

Précisons cependant un fait important. Dans un système didactique classique (scolaire), si les élèves ont pu expérimenter (dans le sens de se créer une expérience comme c'est le cas par exemple pour l'ingénierie *Ace-Arithmécole* où les élèves expérimentent des combinaisons d'annonces gagnantes à x termes), ils ont aussi la

possibilité d'orienter l'action didactique vers un élément épistémique (par exemple en interrogeant le rôle du 0 ou en proposant de nouvelles écritures additives valides en fonction du nombre de termes déclaré). En élaborant leur propre milieu, en se donnant à eux-mêmes le milieu de leur enquête, ils permettent ainsi au temps didactique d'avancer. C'est notamment le cas dans le *Journal du nombre* car son emploi se déroule dans un temps asynchrone au temps didactique principal. Pour s'emparer de ces questions et propositions du *Journal du nombre* et les rendre publiques au sein de la classe, une des conditions est que le professeur puisse les remarquer et qu'il puisse engager ses élèves dans leur étude.

Topogénèse, mésogénèse et relation épistémique coopérative

Dans une pratique locale telle que l'ingénierie *Ace-Arithmécole*, chacun peut désigner un élément à remarquer ou discuter, proposer un moyen pour répondre à un problème d'enseignement ou le travailler dans la praxis. Il se trouve alors en position *topogénétiquement haute* par rapport à une question ingénierique. Nous avons montré que professeurs et chercheurs peuvent partager des questions cruciales d'ingénierie et les travailler conjointement, en diluant la division du travail classique entre conception (concepteurs) et actions (acteurs).

Nous avons vu au travers de gestes d'enseignement que les professeurs ou tout observateur de l'action en classe (chercheurs compris) pouvaient travailler *in situ* à faire avancer les savoirs ingénieriques. Par exemple, celui qui comprend l'intérêt du schéma-ligne ou du nombre-rectangle et en invente une pratique liée à une question d'élève, celui qui introduit la décomposition d'un nombre au service d'un travail sur la notion de « contenu dans », …. Par exemple, nous avons vu aussi que les interventions du chercheur ne consistent pas à « dire la vérité sur la pratique », mais à s'associer, à se faire co-responsable de la pratique évoquée (qui n'est pas dans son topos), en la commentant-résumant, et en posant des questions (« Qu'est-ce qu'apporte le schéma ligné comme fonction ? »). Les réponses sont alors au moins autant dans le territoire du professeur, qui va *jouer dans le concret*, que dans celui du chercheur qui peut parfois lui aussi jouer dans le concret (au travers d'un jeu de rôle comme nous l'avons décrit dans le quatrième exemple emblématique de l'introduction du schéma-ligne avec la notion de « contenu dans »).

Mais tout un chacun peut également se trouver dans une position topogénétiquement basse où il a à apprendre de l'action des autres et de leur culture personnelle, professionnelle et spécifique. Dans l'organisation même du dispositif ingénierique coopératif, la progression didactique à l'état d'hypothèses offre l'opportunité, notamment aux professeurs, d'être en position topologique haute car le travail des hypothèses, leur reconceptualisation et la responsabilité qu'ils ont de la classe les y placent *automatiquement*.

Lorsque l'écriture, par la sphère 1, d'un module comme système d'hypothèses de travail, est terminée, l'intelligence collective a été utilisée pour produire la forme concrète du module, au mieux des possibilités du groupe. Celles-ci reposent sur certains repères épistémologiques (par exemple, un nombre est la mesure d'une grandeur) et épistémiques (par exemple, le schéma-ligne est un outil pertinent pour approcher la notion d'équivalence). Ces repères engendrent des propositions de pratiques qui concrétisent les hypothèses de travail. A côté de ces éléments hypothétiques, de nombreux éléments lacunaires subsistent, par exemple sur le plan épistémologique (comment passer d'une espèce de grandeur à une autre ?) et sur le plan épistémique (comment considérer le schéma-ligne si on veut le mettre au travail pour mettre en correspondance deux espèces de grandeur ?). Mais il y a aussi d'autres éléments lacunaires pour lesquels l'incertitude épistémique est encore bien plus grande. Nous pouvons les décrire à peu près comme tout ce que nous ne savons pas, et dont nous *ne* savons *pas* que nous ne le savons pas… De nouveaux savoirs peuvent émerger des faits et questionner en retour les conceptions que chacun en avait. Les membres ont alors à mener une enquête qui n'est pas assurée d'être terminée dans le temps imparti au dispositif de recherche.

Le processus de mésogénèse (reconnaître ensemble un problème, les éléments qui pourraient s'y rattacher mais qui sont encore déconnectés du problème, le travail de mise en relation de ces éléments épars pour en former un système cohérent) est sans cesse remis au travail collectif car des nouveaux faits d'ingénierie viennent perturber l'équilibre du système didactique ingénierique. La participation de chacun à ce processus caractérise dans l'action ce que nous avons reconnu comme *relation épistémique coopérative* (Joffredo-Le Brun, Morellato, Sensevy, & Quilio, à paraître).

Qu'est-ce qu'un ingénieur au sein d'une ingénierie coopérative ?

Comment former quelqu'un à une utilisation du schéma-ligne adéquate à la situation et aux connaissances des élèves lorsqu'il la met en œuvre pour la première fois ? Penserait-on qu'une personne qui a étudié la chirurgie uniquement dans des livres puisse former un chirurgien ? L'ingénierie coopérative est une étude collective *de et pour* la mise en œuvre. Nous pouvons ajouter qu'un travail empirique en profondeur et récurrent garantit en retour sa valeur théorique. Nous pouvons décrire le travail coopératif comme une avancée progressive, par chaque membre de l'ingénierie, vers une posture d'ingénieur. Chacun (chercheur ou professeur) peut s'appuyer sur des éléments de sa culture professionnelle spécifique pour ce devenir, mais aucune de ces deux cultures ne contient entièrement cette posture. C'est bien là un problème crucial pour la profession de chercheur en éducation et pour la profession de professeur.

Nous pouvons dire qu'est ingénieur tout membre du collectif qui, durant un moment, se positionne dans un *état de recherche pratique* pour comprendre ou faire avancer l'ingénierie. Ce moment peut survenir en classe mais aussi pendant un échange direct (réunion, courriels) ou à l'occasion de la rédaction d'un compte-rendu. C'est une position, au sein d'une pratique locale. Elle est faite d'observations cliniques car les faits d'ingénierie produisent des signes pour les connaisseurs de la chose. En cela, cette position est bien celle de chacun des membres du collectif, qui s'acquiert au bout d'un certain temps de pratique ingénierique.

L'intérêt d'une coopération pour la mise en place d'une ingénierie didactique est la constitution de faits d'expérience utiles, fonctionnels, ayant une portée d'engendrement au niveau épistémique et didactique et qui s'acquièrent avec et dans un état d'expérience qui en est l'arrière-plan. Ces faits ont pour vocation tout à la fois de transformer la pratique et de la comprendre, d'éclairer des questions de recherche ou d'en susciter d'autres et d'ainsi faire avancer le savoir ingénierique. La constitution de faits d'expérience se réalise parce que chacun peut devenir, pour une certaine durée, un ingénieur. La force première d'une ingénierie coopérative telle que nous la concevons est de rendre *pratiquement disponibles* des idées théoriques (selon le modèle de l'*ascension de l'abstrait vers le concret*) et pouvoir ainsi réorganiser ces idées théoriques pour les rendre, de nouveau, à la disponibilité pratique.

Éléments de conclusion

La didactique et le didactique dans l'analyse du dialogue d'ingénierie

Dans ce travail doctoral, nous avons caractérisé les pratiques de coopération de professeurs, formateurs, encadrants et chercheurs qui ont œuvré pour la constitution et la mise en place conjuguées d'une ingénierie didactique sur la construction des nombres au début de l'enseignement primaire. Ils ont fondé pour cela une *institution*, au sein du projet de recherche *Ace-Arithmécole*, que nous avons décrite au travers d'un dialogue spécifique, le dialogue d'ingénierie. Ce dialogue a produit des savoirs, des praxéologies (Chevallard & Sensevy, 2014). Ces savoirs ont permis de faire évoluer le système de décision de chacun des membres du groupe. C'est pour cette raison qu'un tel dialogue est avant tout un dialogue où il y a *du* didactique. La *théorie de l'action conjointe en didactique* (TACD) (Schubauer-Leoni, 1986 ; Schubauer-Leoni & Leutenegger, 2005 ; Sensevy, 2011a ; Sensevy & Mercier, 2007b) a constitué le cadre théorique principal qui nous a permis d'analyser ce dialogue d'ingénierie.

Rôle de la théorie de l'action conjointe en didactique

Nous avons montré que les transactions portent, de manière « implicite », la construction d'un arrière-plan partagé qui devient peu à peu le style de pensée du collectif. Elles permettent la mise en place d'un milieu pour l'enquête. Ainsi nous avons participé à concrétiser les racines, le nourrissage des concepts didactiques par le concept d'arrière-plan développé par Wittgenstein (2004), par celui de style de pensée et de collectif de travail au sens de Fleck (2008), et par celui d'enquête selon Dewey (1993).

Nous nous sommes fondée sur la portée anthropologique de la notion de contrat / milieu et l'intérêt de la comprendre dans une perspective actionnelle et conjointe. Toutes les transactions dans le monde social ont un caractère d'action conjointe mais toutes n'ont pas vocation à se comprendre dans une perspective didactique. Nous montrons, dans ce travail doctoral, la puissance heuristique de la TACD comme filtre

de discernement des enjeux transactionnels. En effet, le cadre de la TACD a permis d'identifier les conditions et contraintes d'une telle pratique de coopération : nous avons montré que cette pratique demande un mouvement d'analyse ascendante (par rapport aux faits d'ingénierie) et descendante (par rapport à l'épistémologie des situations). Autrement dit, le travail du collectif met au jour et à jour les savoirs ingénieriques, en particulier ce qu'il faudrait savoir et savoir-faire pour diriger efficacement l'étude des élèves mais qui ne se trouve pas entièrement dans le texte du savoir, le document de la progression sur lequel se basent les professeurs expérimentant l'ingénierie. En cela, nous pouvons affirmer que le dialogue d'ingénierie participe d'une genèse documentaire (Gueudet & Trouche, 2008) qui transforme une ressource (le document de la progression établi en première main par la sphère 1) en document utilisable par des professeurs. Le dialogue d'ingénierie commente, voire produit des annotations du texte. Certaines sont intégrées au texte, d'autres pas car « tout ne peut être dit dans un texte » aussi complet soit-il.

La logique du processus de coopération révèle une dynamique permanente de proposition / analyse. Cette dynamique se traduit par des confrontations des aménagements réalisés, par des questions posées sur l'ingénierie et sa mise en œuvre. La logique du processus dévoile également des actions d'élucidation et de ré-interrogation des fondements épistémologiques et épistémiques de l'ingénierie au travers des faits didactiques rapportés. Nous voyons le système stratégique du milieu à l'œuvre : si le problème ou la question est posé(e) dans le collectif puis porté(e) par le collectif, alors les logiques de co-élaboration d'un problème commun et d'élucidation des enjeux de l'ingénierie en permettent l'étude et l'analyse collective, parfois sa ré-interrogation épistémologique.

La TACD a fourni les moyens de décrire une première dynamique qui a permis que les événements didactiques soient considérés par le collectif comme des faits d'ingénierie, puis une seconde dynamique qui a permis que ces faits se constituent en faits d'expérience (Fleck, 2008) pour les membres du groupe. Nous avons pu alors montrer que l'arrière-plan du dialogue (le système stratégique du contrat) devenait de plus en plus partagé entre les membres du groupe provençal : les conséquences en ont été notamment une reconstruction de l'épistémologie liée aux nombres et une reconstruction de pratiques d'enseignement correspondantes pour les professeurs et

les chercheurs. Un regard de plus en plus *commun*, tout à la fois théorique et pratique, sur la pratique didactique, a pu ainsi s'installer dans les transactions.

Résultats : une brève reprise

Du côté des savoirs ingénieriques

Nous avons pu retrouver la trace (Ginzburg, 2010) des éléments épistémiques et épistémologiques qui ont été discutés, de manière récurrente, au sein du groupe provençal que nous avons plus particulièrement suivi. Ces éléments ont joué le rôle de révélateurs de problèmes dans le système didactique ingénierique : notion de *temps de situation* (Quilio, 2008, 2012 ; Sensevy, 2011a) et natures de l'écrit, travail de l'individuel et du collectif (Quilio, 2016 ; Sensevy, 2016), notion d'équivalence, désignation des nombres sous forme additive, notions de grandeur et mesure, système des représentations. Nous avons d'ailleurs montré que les représentations ont été un élément-pivot majeur entre ce qui est important à discuter / travailler pour entrer dans le *style de pensée* (Fleck, 2008) *ACE-Arithmécole* et ce qui est en cours de ré-interrogation théorique : liens entre les espèces de grandeurs, en particulier cette idée de donner plus de sens et de substance au concept de *nombre comme mesure d'une grandeur*. Les représentations, comme exemple emblématique révélateur de problèmes à traiter par le collectif et point d'ancrage des transactions, se constituent en élément concret de l'arrière-plan, style de pensée du collectif (Morales, Sensevy, & Forest, 2017).

Du côté d'une grammaire de la coopération

Nous avons pu attester que la position de connaisseurs de la chose (de l'ingénierie), acquise peu à peu, permet à chacun des membres du collectif de s'engager et participer. Nous avons ainsi pu caractériser les logiques qui animent les transactions au cours des dialogues d'ingénierie (système d'attente mutuelle, co-élaboration de problème commun, élucidation des choix ingénieriques, ré-interrogation épistémologique) et distinguer les caractéristiques d'une telle coopération (prise de

position, travail dans la praxis, travail des questions d'ingénierie, entrelacement du cognitif et de l'éthique). Nous avons ainsi décrit ce qu'il se passe dans une action conjointe au sein d'une ingénierie coopérative.

Une nouvelle forme de l'étude

Au cours de cette recherche, une nouvelle forme de l'étude, ici de l'étude coopérative se précise. Un « voir comme » se construit lentement ; il n'est pas réductible aux regards portés sur un même objet avec divers points de vue. Ce « voir comme » est la constitution, au cours d'un processus historique, d'une expérience mêlant du pratique et du théorique. Nous avons ainsi reconstruit la biographie didactique (Mercier, 1999, 2013) d'un groupe et assumons l'idée selon laquelle les transactions et les productions témoignent de pratiques relevant d'une conceptualisation de l'ingénierie de plus en plus importante. Nous pourrions par exemple avancer que ce qui a le plus changé au plan épistémologique à travers cette recherche, que ce soit pour les professeurs ou pour les chercheurs, c'est la conception du rôle des représentations dans le travail mathématique. Nous y voyons la constitution d'un *style de pensée* : il a un impact direct sur la progression didactique et les praxéologies associées, sur les comportements, les perceptions et les pensées des individus.
Suivre une ingénierie (à partir des ressources éditées) appartient au domaine de l'individuel, du personnel. Nous avons montré qu'agir, en donnant et se donnant les moyens de réaliser l'ingénierie, appartient au domaine du collectif, et plus particulièrement à l'action collective coopérative, dans une certaine relation épistémique coopérative. Agir au sein d'une ingénierie coopérative c'est alors produire collectivement des hypothèses de travail et les concrétiser dans l'enquête, toute à la fois théorique et pratique, de la pratique didactique. Agir au sein d'une ingénierie coopérative c'est aussi se créer une expérience dans le domaine didactique à partir de l'analyse de faits didactiques. Cette thèse participe à bâtir une conception de l'apprentissage qui se réalise au sein d'une expérience collective et par cette expérience collective.

Une conception renouvelée des professions de chercheur et professeur

Les professions de professeur et de chercheur pourraient en venir à être aménagées, au sein de dialogues et de transactions d'ingénierie qui ont lieu au cours d'un processus d'enquête (Dewey, 1993). Les professions ne se confondent pas mais nous voyons poindre ce que l'une peut emprunter à l'autre, *provisoirement et dans le cadre de cette enquête*, afin de favoriser l'avancée didactique. Par exemple, pour un professeur ou un formateur, se fonder sur des aspects épistémologiques issus de la recherche en didactique pour identifier l'intérêt d'une production individuelle d'élève et communiquer au groupe l'analyse de cette production en tant que repère épistémique remarquable. Par exemple, pour un chercheur, proposer des hypothèses à la mise à l'épreuve, dans une forme brute, mais en s'engageant à la travailler dans la praxis même. C'est ce que nous avons *commencé* à observer dans le dispositif.
De telles pratiques pourraient consonner avec celle de maître-formateur. En effet, les maîtres-formateurs sont régulièrement incités à travailler avec la recherche. Mais comment leur institution pourrait-elle mettre ce vœu en œuvre concrètement ? Leur statut pourrait être celui d'un professeur-chercheur, comme il en existe dans d'autres professions, par exemple chez les médecins hospitaliers, à la fois médecin-praticien auprès de patients et chercheur-praticien « au chevet du malade ». Des dialogues d'ingénierie pourraient être alors envisagés aussi en direct, au sein d'une classe même, pendant l'exercice d'enseignement, et pas seulement lors de réunions ou d'échanges épistolaires.

Perspectives de recherche

Que se passerait-il alors entre un chercheur et un professeur œuvrant conjointement dans une classe quand ils cherchent ensemble à mettre en œuvre effectivement une hypothèse d'ingénierie ? Quels apprentissages ingénieriques pourraient émerger d'une telle action conjointe ? Seraient-ils différents de ceux que nous avons pu observer ? Autrement dit, qu'est-ce qui se transmet de l'un à l'autre et qui ne peut se transmettre dans une réunion ? Serait-ce de l'ordre d'un *jeu d'imitation* (Sensevy, 2016) ou d'autres phénomènes didactiques peuvent-ils émerger ?

Nous avons pu observer de près un groupe de chercheurs, professeurs, formateurs et encadrants qui coopéraient (groupe Provence) et, de plus loin, d'autres groupes. Nous avons pu observer ainsi le groupe Bretagne, engagé lui aussi dans la conception du domaine SIT (« Situation »), mais aussi le groupe Hauts-de-France ou le groupe Région parisienne engagés dans la conception des autres domaines mis à l'œuvre dans le projet de recherche. Nous n'avons pas étudié ces autres domaines de recherche et le travail collectif qui a pu s'accomplir. Nous avons constaté, sans pouvoir le développer explicitement dans ce travail, que certains faits d'ingénierie entrainent des réflexions et des analyses différentes. Quelles différences se jouent lors du travail collectif d'un groupe par rapport à un autre groupe ? Pour quels effets dans les classes ? Quels savoirs ingénieriques sont-ils alors élaborés ?

Perspectives pour le dispositif : le temps d'après la recherche

L'ingénierie *Ace-Arithmécole* est un travail collectif d'élaboration d'abord orienté vers la recherche mais qui a vocation, à terme, à être diffusé sous la forme d'une ressource numérique pour un enseignement alternatif en mathématiques (par exemple parce qu'il suit un *temps de situation*, parce qu'il permet de développer la dimension expérimentale du travail des élèves, parce qu'il propose une approche de la numération par la composition et la comparaison de mesures de diverses grandeurs). Cette ressource est disponible depuis septembre 2014 en accès libre pour le niveau CP[131]. Mais, nous l'avons vu, elle n'est appréhendable que dans une réelle acculturation et avec l'acquisition de certains savoir-faire qui ont été assurés, jusqu'à maintenant, par une proximité entre les enseignants, chercheurs, formateurs, encadrants. Qu'en sera-t-il pour une diffusion dans le temps et hors du groupe expérimental ? Nous discutons ici de la valeur de *commun* que pourrait avoir une telle ressource dans son aspect éthique d'utilisation (Jacques, 2016).

[131] L'accès libre pour le niveau CE1 se réalisera en 2017.

Définition d'un bien commun

Elinor Ostrom, prix Nobel d'économie en 2009, a théorisé l'idée de partage d'un *bien commun* au sein d'une communauté d'usage (c'est-à-dire qui en garantit l'usage). Théoriquement, tout le monde peut avoir la jouissance d'un bien commun sans en détenir la propriété. Le concept concerne, à l'origine, des ressources principalement locales (une forêt ou un moulin par exemple) mais s'élargit vers des ressources globales (les océans, le climat, la diversité biologique,…). Un bien commun est non-exclusif (tout le monde peut s'en servir) mais pour autant rival (la consommation de ce bien empêche une autre personne de le consommer ; il s'agit d'éviter une surconsommation entraînant la disparition ou la détérioration du bien). Par exemple, je peux me promener dans une forêt, ramasser du bois mort mais je ne peux y couper les arbres. De tels types de biens sont gérés, de manière durable et efficace, par des systèmes de règles pour des actions collectives (par exemple celles d'une commune). Le cas d'œuvres concernant la connaissance, notamment diffusées par internet, renvoie à un type particulier de ressources. En effet, les documents numériques en accès libre entrent dans une catégorie particulière des biens communs : le principe de rivalité pour cause de risques de consommation sans limite est caduque mais le risque d'enclosure (c'est-à-dire le risque de confiscation par une entreprise privée) est bien réel (Le Crosnier, 2012). La licence *Creatives Commons*[132] a été créée pour faciliter la diffusion et le partage des œuvres numériques sans qu'elles puissent être appropriées de manière commerciale ou privée.

Bien commun et nécessité d'un *agencement social particulier*

Ce qui nous intéresse dans le concept de bien commun est que la notion de *communs* est liée intrinsèquement à la notion de *communauté d'usage.* Les biens ne sont pas considérés pour eux-mêmes mais dans leur relation avec les groupes sociaux qui participent à leur production ou leur maintien. « Ce qui est alors ouvert au partage n'est pas seulement une ressource, mais bien un *agencement social particulier*[133] ; en

[132] http://creativecommons.fr/licences/
[133] C'est nous qui soulignons.

conséquence, la préservation de la ressource passe par la prise de conscience des interactions sociales qui permettent ce partage » (Le Crosnier, 2012). Nous suivons cette idée pour *Ace-Arithmécole* : celle d'une ressource qui devrait continuer à être discutée sur la base des documents édités sur le site, d'une ressource qui devrait susciter des échanges en appui sur des mises en œuvre dans des classes, d'une ressource qui devrait pouvoir évoluer dans et par sa mise en œuvre. En un mot, une ressource vivante (Gueudet & Trouche, 2008).

L'« agencement social particulier » constitué jusqu'alors par la sphère 1 (chercheurs, professeurs des classes d'étude, formateurs, doctorants) et la sphère 2 (professeurs des classes expérimentales, personnels d'encadrement) qui, en coopérant, ont produit du *collectif de pensée*, évoluerait en d'autres composantes. Par exemple, nous pourrions imaginer une sphère 1 regroupant des personnes ayant eu une expérience de l'ingénierie, qui seraient encore « actives », et éventuellement en lien avec les chercheurs, et une sphère 2 formée par des personnes désirant s'engager dans la démarche.

Nous avons défini certaines conditions qui nous paraissent indispensables au fonctionnement d'un tel collectif :

- la co-élaboration de problèmes communs et le travail collectif de questions ingénieriques ;
- l'élucidation et la concrétisation dans la praxis des choix didactiques ;
- un espace-temps d'échanges et de rencontres qui se déroulent durant un temps long (la durée d'une année scolaire au moins) ;
- un entrelacement de l'éthique et du cognitif où chacun peut prendre position et apprendre.

Cet agencement social pourrait être organisé par exemple par une circonscription, une ESPE ou une mission. Il pourrait être également « soutenu » par des colloques regroupant les utilisateurs et les personnes qui ont participé au développement de l'ingénierie. De telles rencontres permettraient à chacun de confronter ses points de vue et conceptions, d'échanger des pratiques, d'interroger les choix épistémologiques et didactiques, et ainsi continuer à se former au-delà de l'appropriation des ressources mises à disposition, en se forgeant une expérience de l'ingénierie.

Références bibliographiques

Agamben, G. (2008). *Signatura rerum : sur la méthode*. Paris : J. Vrin.

Akrich, M., Callon, M., & Latour, B. (1988). A quoi tient le succès des innovations ? L'art de l'intéressement. *Annales des mines*, *11*, 4-17.

Anadon, M. (Éd.) (2007). *La recherche participative : multiples regards*. Québec : Presses de l'Université du Québec.

Arnoux, P. (2011a). Des nombres « vivants »? Disgression sur la vie des nombres. In A. Mercier, & R. Jost (Eds), *Actes des auditions du comité scientifique* (p. 25-27). Lyon : ENS IFé. Consulté à l'adresse : http://educmath.ens-lyon.fr/Educmath/dossier-manifestations/conference-nationale/1actes-mercierjost_2012.pdf.

Arnoux, P. (2011b). Quelques remarques sur les représentations mentales des élèves. In A. Mercier, & R. Jost (Eds), *Actes des auditions du comité scientifique* (p. 24-25). Lyon : ENS IFé.

Artigue, M. (1990). Ingénierie didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 9* (3), 281–308.

Artigue, M. (2011). Enseignement et apprentissage de l'algèbre. In A. Mercier, & R. Jost (Eds), *Actes des auditions du comité scientifique* (p. 118-123). Lyon : ENS IFé.

Assude, T., & Mercier, A. (2007). L'action conjointe professeur-élèves dans un système didactique orienté vers les mathématiques. In G. Sensevy, & A. Mercier (Eds), *Agir ensemble. L'action didactique conjointe du professeur et des élèves* (p. 153-185). Rennes : Presses universitaires de Rennes.

Austin, J. L. (1970). *Quand dire, c'est faire*. Paris : Le Seuil.

Bachelard, G. (1993). *La formation de l'esprit scientifique : contribution à une psychanalyse de la connaissance*. Paris : J. Vrin.

Barry, S., Saboya, M., Corriveau, C., Maheux, J.-F., & Bednarz, N. (2012). Défis et enjeux de la démarche de recherche collaborative en didactique des mathématiques. In A. Bronner, C. Bulf, C. Castela, J.-P. Georget, M. Larguier, B. Pedemonte, A. Pressiat, & E. Roditi (Eds), *Actes de la 16ème école d'été de didactique des mathématiques (vol. 2)* (p. 447-482). Grenoble : La pensée sauvage.

Barthassat, M.-A., & Bonneton, D. (2010). De l'accompagnement des pratiques au contrôle des enseignants : quels enjeux pour quel métier ? *Recherches en Education*, *H.S. n°1*, 19-30.

Bartolini Bussi, M. (2011). Introduction to the problem of curricula all over the world. In A. Mercier, & R. Jost (Eds), *Actes des auditions du comité scientifique* (p. 27-31). Lyon : ENS IFé.

Bazin, J. (1998). Questions de sens. *Enquête, 6*, 13-34. Consulté à l'adresse : http://enquete.revues.org/1383.

Bazin, J. (2008). *Des clous dans la Joconde : l'anthropologie autrement*. Toulouse : Anacharsis.

Bednarz, N. (2009). Recherches collaboratives en enseignement des mathématiques : une nouvelle entrée sur la conception d'activités en mathématiques à l'intersection de pratique en classe et recherche. In *Actes du 61ème colloque de la CIEAEM (Commission internationale pour l'étude et l'amélioration de l'enseignement des mathématiques (vol. 2)* (p. 3-18).

Bednarz, N., & Proulx, J. (2011). Spécificité du travail mathématique de l'enseignant : un ancrage pour la formation continue. Communication présentée à ENS, Lyon.

Bednarz, N., Rinaudo, J.-L., & Roditi, É. (2015). La recherche collaborative. *Carrefours de l'éducation, 39* (1), 171-184.

Bossard, L.-M., & Blanchard-Laville, C. (2015). « L'accompagnement » au long cours d'un professeur des écoles par une équipe de recherche. *Carrefours de l'éducation, 39* (1), 37-54.

Bourdieu, P. (1980). *Le sens pratique*. Paris : Éditions de Minuit.

Boursier, J.-Y. (2002). La mémoire comme trace des possibles. *Socio-anthropologie, 12*. Mis en ligne le 15 mai 2004, consulté à l'adresse : http://socio-anthropologie.revues.org/145.

Briand, J. (1993). *L'énumération dans le mesurage des collections. Un dysfonctionnement dans la transposition didactique*. Thèse de doctorat. Université de Bordeaux I, France.

Brissiaud, R. (2007). *Premiers pas vers les Mathématiques. Les chemins de la réussite à l'école maternelle*. Paris : Retz.

Brissiaud, R. (2011). Quelles pratiques pédagogiques faut-il éviter à l'école maternelle et au CP ? Les réponses d'une expérimentation menée à l'échelle de la nation.

In A. Mercier, & R. Jost (Eds), *Actes des auditions du comité scientifique* (p. 52-57). Lyon : ENS IFé.

Brousseau, G. (1972). Un exemple de processus de mathématisation. L'addition dans les naturels : CP-CE1. In *La mathématique à l'école élémentaire* (p. 443-457). Paris : APMEP. Consulté à l'adresse : http://guy-brousseau.com/952/processus-de-mathematisation/.

Brousseau, G. (1986). *Théorisation des phénomènes d'enseignement des mathématiques*. Thèse d'état. Université Victor Segalen, Bordeaux, France. Consultable à l'adresse : https://tel.archives-ouvertes.fr/file/index/docid/509225/filename/TheseetAnnexesGBA.pdf.

Brousseau, G. (2004a). Les représentations : étude en théorie des situations didactiques. *Revue des sciences de l'éducation, 30* (2), 241-277.

Brousseau, G. (2004b). *Théories des situations didactiques* (2e éd.). Grenoble : La pensée sauvage.

Brousseau, G. (2014). Le COREM et l'étude scientifique des situations mathématiques et didactiques. In A.-C. Mathé, & E. Mounier (Eds), *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques* (p. 77-79). Bordeaux, France.

Brousseau, G., & Brousseau, N. (1991). Le poids d'un récipient. Etude des problèmes de mesurage en CM. *Grand N, 50*, 65-87.

Brousseau, G., & Centeno, J. (1991). Rôle de la mémoire didactique de l'enseignant. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 11* (2.3), 167-210.

Brousseau, G., Greslard, D., & Salin, M.-H. (2014). L'accès au milieu scolaire pour l'élaboration et l'expérimentation d'ingénieries didactiques de recherche : conditions et contraintes. Le Centre d'Observation et de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques (COREM). In A.-C. Mathé, & E. Mounier (Eds), *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques* (p. 66-76). Bordeaux, France.

Cavell, S. (2009). *Dire et vouloir dire : livre d'essais*. Paris : Cerf.

Chambris, C. (2008). *Relations entre les grandeurs et les nombres dans les mathématiques de l'école primaire. Evolution de l'enseignement au cours du 20e siècle. Connaissance des élèves actuels.* Thèse de doctorat. Université de Paris VII, France.

Chambris, C. (2010). Relations entre grandeurs, nombres et opérations dans les mathématiques de l'école primaire au 20e siècle : théories et écologie. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 30* (3), 317-366.

Chambris, C. (2011). Quelques réflexions sur l'enseignement des grandeurs, des relations entre grandeurs et nombres, voire des nombres à l'école primaire. In A. Mercier, & R. Jost (Eds), *Actes des auditions du comité scientifique* (p. 94-99). Lyon : ENS IFé.

Chesné, J.-F. (2011). Ce que nous apportent les évaluations standardisées sur les acquis des élèves à la fin de l'école primaire en Mathématiques (Nombres et calcul). In A. Mercier, & R. Jost (Eds), *Actes des auditions du comité scientifique* (p. 10-12). Lyon : ENS IFé.

Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 12* (1), 73-112.

Chevallard, Y. (1995). L'observation didactique : remarques liminaires. *Skhole, Cahiers de la recherche et du développement, 2*, 5-25.

Chevallard, Y. (2003). *Didactique et formation des enseignants*. Présenté à Journée d'études INRP-GEDIAPS, Paris. Consulté à l'adresse : http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=63.

Chevallard, Y. (2004). *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné* (2e éd.). Grenoble : La pensée sauvage.

Chevallard, Y. (2009). La notion d'ingénierie didactique, un concept à refonder. In C. Margolinas, M. Abboud-Blanchard, L. Bueno-Ravel, N. Douek, A. Fluckiger, P. Gibel, F. Vandebrouck, & F. Wozniak (Eds), *En amont et en aval des ingénieries didactiques* (p. 81-108). Grenoble : La pensée sauvage.

Chevallard, Y. (2011a). Des programmes, oui. Mais pour quoi faire ? Vers une réforme fondamentale de l'enseignement. In A. Mercier, & R. Jost (Eds), *Actes des auditions du comité scientifique* (p. 32-40). Lyon : ENS IFé.

Chevallard, Y. (2011b). *Conditions et contraintes de la recherche en didactique des mathématiques : un témoignage*. Colloquium organisé par l'ARDM et la CFEM. Consulté à l'adresse : http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=199.

Chevallard, Y. (2016). Territoires disciplinaires et ethos didacticien. Problèmes d'écologie et d'économie de la recherche en didactique. In Y. Matheron, G. Gueudet, V. Celi, C. Derouet, D. Forest, M. Krysinska, S. Quilio, M. Rogalski, T. A. Sierra, L. Trouche, C. Winslow, S. Besnier (Eds), *Enjeux et débats en didactique des mathématiques (vol. 1)* (p. 257-275). Grenoble : La pensée sauvage.

Chevallard, Y., & Chambris, C. (2015). Grandeurs et nombres : quelques remarques pour un programme. Consulté à l'adresse : http://www.cfem.asso.fr/actualites/GrandeursetnombresYCCC.pdf.

Chevallard, Y., & Sensevy, G. (2014). Anthropological Approaches in Mathematics Education, French Perspectives. In *Encyclopedia of Mathematics Education* (p. 38-43). New York, London: Springer Dordrecht, Heidelberg. Consulté à l'adresse : https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01139352.

Cobb, P., Confrey, J., diSessa, A., Lehrer, R., & Schauble, L. (2003). Design Experiments in Educational Research. *Educational Researcher, 32* (1), 9-13.

Conne, F. (1987). Comptage et écriture des égalités dans les premières classes de l'enseignement primaire. *Math-Ecole, 128*, 2-12.

Davis, B. (2005). Trois attitudes dans la recherche en éducation : autour de « l'explicite », de « l'implicite » et de la « complexité ». *Revue des sciences de l'éducation, 31* (2), 397-416.

Deramecourt, G., Faucon, E., & Martin, F. (1980). *Maths - CP. Enseignement des mathématiques au cycle préparatoire : aides pédagogiques - Une suite de séquences de classe pour le CP (tome II)*. Bordeaux : IREM.

Descombes, V. (1998). La confusion des langues. *Enquête, 6*, 35-54. Mis en ligne le 15 juillet 2013, consulté à l'adresse : http://enquete.revues.org/1403.

Desgagné, S. (1997). Le concept de recherche collaborative : l'idée d'un rapprochement entre chercheurs universitaires et praticiens enseignants. *Revue des sciences de l'éducation, 23* (2), 371-393.

Desgagné, S., & Bednarz, N. (2005). Médiation entre recherche et pratique en éducation : faire de la recherche « avec » plutôt que « sur » les praticiens. *Revue des sciences de l'éducation, 31* (2), 245-258.

Desgagné, S., Bednarz, N., Lebuis, P., Poirier, L., & Couture, C. (2001). L'approche collaborative de recherche en éducation : un rapport nouveau à établir entre recherche et formation. *Revue des sciences de l'éducation, 27* (1), 33-64.

Desgagné, S., & Larouche, H. (2010). Quand la collaboration de recherche sert la légitimation d'un savoir d'expérience. *Recherches en Education*, *H.S. n°1*, 7-18.

Dewey, J. (1993). *Logique : la théorie de l'enquête* (2e éd.). Paris : Presses universitaires de France.

Dumez, H. (2010). La description : point aveugle de la recherche qualitative. *Le Libellio d'Aegis, 6* (2), 28-43.

Dumez, H. (2013). Qu'est-ce qu'un cas, et que peut-on attendre d'une étude de cas ? *Le Libellio d'Aegis, 9* (2), 13-26.

Durpaire, J.-L., & Mégard, M. (2008). *Le nombre au cycle 2*. MEN. Consulté à l'adresse : http://media.eduscol.education.fr/file/ecole/00/3/Le_nombre_au_cycle_2_153003.pdf.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine : registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Berne ; New York : P. Lang.

Emprin, F. (2011). Eléments d'observation et d'analyse sur l'enseignement à l'école maternelle. In A. Mercier, & R. Jost (Eds), *Actes des auditions du comité scientifique* (p. 47-52). Lyon : ENS IFé.

Fassnacht, C., & Woods, D. (2001, 2013). *Transana (version 2.52) [PC]*. Wisconsin Center for Education Research, University of Madison, USA. Consulté à l'adresse : http://www.transana.org/.

Fayol, M. (2012). *L'acquisition du nombre*. Paris : Presses universitaires de France.

Fayol, M. (2015). *Un bilan scientifique. Conférence de consensus. Nombres et opérations : premiers apprentissages à l'école primaire*. Cnesco / IFé, Paris. Consulté à l'adresse : http://www.cnesco.fr/wp-content/uploads/2015/11/Bilan-de-la-recherche.pdf.

Fischer, J.-P. (2012). Que sont nos tables devenues ? *Psychologie & Education, 4*, 97-109.

Fleck, L. (2008). *Genèse et développement d'un fait scientifique* (3e éd.). Paris : Flammarion.

Foucault, M. (2009). *Naissance de la clinique*. Paris : Presses universitaires de France.

Gamo, S., Sander, E., & Richard, J.-F. (2010). Transfer of strategies by semantic recoding in arithmetic problem solving. *Learning and Instruction, 20*, 400-410.

Ginzburg, C. (2010). *Mythes emblèmes traces. Morphologie et histoire*. Lagrasse : Verdier.

Glock, H.-J. (2003). *Dictionnaire Wittgenstein*. Paris : Gallimard.

Go, H.-L. (2009). Des ingénieries didactiques à l'œuvre. *Education & Didactique, 3* (2), 7-45.

Grenier, D. (2011). Changer le rapport des élèves aux mathématiques en intégrant l'activité de recherche dans des classes. In A. Mercier, & R. Jost (Eds), *Actes des auditions du comité scientifique* (p. 40-47). Lyon : ENS IFé.

Greslard, D., & Salin, M.-H. (2011). La collaboration entre chercheurs et enseignants au COREM. Une composante essentielle de la mise à l'épreuve d'une ingénierie didactique. In C. Margolinas, M. Abboud-Blanchard, L. Bueno-Ravel, N. Douek, A. Fluckiger, P. Gibel, F. Vandebrouck, & F. Wozniak (Eds), *En amont et en aval des ingénieries didactiques (vol. 2)* (p. 263-282). Grenoble : La pensée sauvage.

Gruson, B., Forest, D., & Loquet, M. (2012). *Jeux de savoir : études de l'action conjointe en didactique*. Rennes : Presses universitaires de Rennes.

Gueudet, G., & Trouche, L. (2008). Du travail documentaire des enseignants : genèses, collectifs, communautés. *Education & Didactique, 2* (3), 7-34.

Hersant, M. (2010). Finalités, conditions, intérêts et limites d'une collaboration enseignants, formateurs et chercheur. Un exemple en mathématiques à propos d'une injonction institutionnelle adressée aux enseignants du primaire. *Recherches en Education*, *H.S. n°1*, 60-70.

Herschberg Pierrot, A. (2009). Lexique d'auteur et miroir encyclopédique. *Recherches & Travaux, 75*, 21-34.

Huguet, T. (2011). Les résultats des élèves aux évaluations CEDRE 2008 et les besoins qu'ils révèlent. In A. Mercier, & R. Jost (Eds), *Actes des auditions du comité scientifique* (p. 12-20). Lyon : ENS IFé.

Jacques, A.-S. (2016, février). *Communs : une notion médiévale viendra-t-elle protéger le logiciel libre ?* Consulté 26 mars 2016, à l'adresse : about:reader?url=http%3A%2F%2Fwww.arretsurimages.net%2Fchroniques%

2F2016-02-24%2FCommuns-une-notion-medievale-viendra-t-elle-proteger-le-logiciel-libre-id8503.

Janner, M., & Vergnon, M. (2015). Accompagner chemin faisant une équipe d'enseignants en dynamique d'innovation : importance des dimensions d'Intersubjectivité et d'Éthique. *Carrefours de l'éducation, 39* (1), 69-84.

Joffredo-Le Brun, S., Morellato, M., Sensevy, G., & Quilio, S. (2017). Cooperative Engineering as a Joint Action. *European Educational Research Journal*, à paraître.

Joffredo-Lebrun, S. (2016). *Continuité de l'expérience des élèves et systèmes de représentation en mathématiques au cours préparatoire. Une étude de cas au sein d'une ingénierie coopérative*. Thèse de doctorat. Université de Bretagne occidentale, Brest, France.

Kahn, S. (2010). Les réformes contre le redoublement ou les limites des recherches non collaboratives. *Recherches en Education, H.S. n°1*, 71-84.

Kahn, S., Hersant, M., & Orange Ravachol, D. (Eds) (2010). *Savoirs et collaborations entre enseignants et chercheurs en éducation.* Recherches en éducation, H.S. n°1. Consulté à l'adresse : http://www.recherches-en-education.net/spip.php?article130.

Kemmis, S. (2009). Action research as a practice-based practice. *Educational Action Research, 17* (3), 463-474.

Kerbrat-Orecchioni, C. (1995). Le trilogue. Introduction. In URA, groupe de recherche sur les interactions conversationnelles (Éd.), *Le trilogue* (p. 1-28). Lyon : Presses universitaires de Lyon.

Kuhn, T.S. (1974). Second Thoughts on Paradigms. In F. Suppe (Éd.), *The Structure of Scientific Theories* (p. 459-482). Urbana : University of Illinois Press.

Kuhn, T. S. (2008). *La structure des révolutions scientifiques*. Paris : Flammarion.

Kuhn, T. S., Biezunski, M., Jacob, P., Lyotard-May, A., & Voyat, G. (1990). *La tension essentielle : tradition et changement dans les sciences*. Paris : Gallimard.

Laplante, B. (2005). Cheminement éthique d'un chercheur engagé en recherche collaborative. *Revue des sciences de l'éducation, 31* (2), 417-440.

Latour, B. (2012). Que la bataille se livre au moins à armes égales. In J.-M. Decroly, F. Gemenne, & E. Zaccai (Eds), *Controverses climatiques, sciences et politique* (postface). Paris : Presses de Sciences Po.

Laurent, Y., & Saujat, F. (2015). L'intervention en milieu de travail éducatif entre visée de transformation et visée de connaissance. *Carrefours de l'éducation*, *39* (1), 19-35.

Lavigne-Delville, P. (2008). Problématisation, intéressement, enrôlement. La sociologie de la traduction est-elle utile pour le développement. Consulté à l'adresse du site de l'auteur : https://anthropo-impliquee.org/2013/12/04/2008.

Le Crosnier, H. (2012). Elinor Ostrom ou la réinvention des biens communs. *Le monde diplomatique*. Consulté à l'adresse : http://blog.mondediplo.net/2012-06-15-Elinor-Ostrom-ou-la-reinvention-des-biens-communs.

Lebesgue, H. (1975). *La mesure des grandeurs*. Paris : Blanchard.

Lechopier, N. (2013). Recherches participatives et partage de résultats scientifiques. Quels enjeux ? *Bulletin IFé, 20*. Consulté à l'adresse : http://ife.ens-lyon.fr/ife/recherche/bulletins/bulletin-nb020.

Lefeuvre, L. (2008). *Savoirs, dispositifs d'actualisation des savoirs et gestes d'enseignement*. Mémoire de master 2. Université Rennes 2, Rennes, France.

Leutenegger, F. (2000). Construction d'une « clinique » pour le didactique. Une étude des phénomènes temporels de l'enseignement. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 20* (2), 209-250.

Leutenegger, F. (2009). *Le temps d'instruire. Approche clinique et expérimentale du didactique ordinaire en mathématique*. Bern : P. Lang.

Ligozat, F. (2008). *Un point de vue de didactique comparée sur la classe de mathématiques. Etude de l'action conjointe du professeur et des élèves à propos de l'enseignement / apprentissage de la mesure des grandeurs dans des classes françaises et suisses romandes*. Thèse de doctorat. Universités de Genève et Aix-Marseille.

Ligozat, F., & Leutenegger, F. (2008). Construction de la référence et milieux différentiels dans l'action conjointe du professeur et des élèves. Le cas d'un problème d'agrandissement de distances. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 28* (3), 319-378.

Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics: teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States*. Mahwah, N.J : Lawrence Erlbaum Associates.

Margolinas, C. (2014). Connaissance et savoir. Des distinctions frontalières? In P. Losego (Éd.), *HAL archives ouvertes* (p. 16-44). Lausanne, Suisse. Consulté à l'adresse : https://www.hepl.ch/files/live/sites/systemsite/files/uer-agirs/actualites/colloque-didactiques-et-sociologie/actes-colloque-sociologie-et-didactiques-philippe-losego-hep-vaud.pdf.

Margolinas, C., Abboud-Blanchard, M., Bueno-Ravel, L., Douek, N., Fluckiger, A., Gibel, P., Vandebrouck, F., & Wozniak, F. (Eds) (2009). *En amont et en aval des ingénieries didactiques*. Grenoble : La pensée sauvage.

Marlot, C. (2007). Analyse de l'action du professeur en classe ordinaire : formes méthodologiques de réduction du corpus et gestion de la disparité des unités de découpage de l'action. In D. Lahanier-Reuter, & E. Roditi (Eds), *Questions de temporalité. Les méthodes de recherche en didactiques (vol 2)* (p. 153-172). Villeneuve d'Ascq : Presses universitaires du Septentrion.

Mary, A. (1998). De l'épaisseur de la description à la profondeur de l'interprétation. *Enquête, 6*, 57-72. Mis en ligne le 15 juillet 2013, consulté à l'adresse : http://enquete.revues.org/1433.

Matheron, Y., & Mercier, A. (2004). Les usages didactiques des outils sémiotiques du travail mathématique : étude de quelques effets mémoriels. *Revue des sciences de l'éducation*, *30* (2), 355-377.

Matheron, Y., & Quilio, S. (2014). L'accès au milieu scolaire pour l'élaboration et l'expérimentation d'ingénieries didactiques de recherche : conditions et contraintes. Le dispositif des Léa (Lieux d'éducation associés à l'IFé). In A.-C. Mathé, & E. Mounier (Eds), *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques* (p. 80-91). Bordeaux, France.

Mayen, P. (1999). Des situations potentielles de développement. *Education permanente, 139*, 65-86.

McTaggart, R. (1994). Participatory Action Research: issues in theory and practice. *Educational Action Research*, *2* (3), 313-337.

Mégard, M. (2011). Quelques constats et éléments d'analyse concernant l'enseignement des mathématiques à l'école primaire. In A. Mercier, & R. Jost (Eds), *Actes des auditions du comité scientifique* (p. 67-71). Lyon : ENS IFé.

MEN. Loi d'orientation sur l'éducation, Publication n°. 89-486, 8860 (1989). Consulté à l'adresse :

https://www.legifrance.gouv.fr/affichTexte.do?cidTexte=JORFTEXT000000509314&dateTexte=19890714.

MEN. Programmes d'enseignement de l'école primaire, Hors série n°3, Bulletin officiel (2008). Consulté à l'adresse http://www.education.gouv.fr/bo/2008/hs3/default.htm.

Mercier, A. (1999). *Sur l'espace-temps didactique. Etudes du didactique, en Sciences de l'Education.* Note de synthèse pour l'habilitation à diriger des recherches en éducation. Université de Provence, Aix-Marseille, France.

Mercier, A. (2008). Pour une lecture anthropologique du programme didactique. *Education & Didactique*, *2* (1), 7-40.

Mercier, A. (2011). Quelles mathématiques faut-il apprendre pour se préparer à répondre aux questions des élèves et à traiter leurs erreurs? Le cas des commencements de l'algèbre. In A. Mercier, & R. Jost (Eds), *Actes des auditions du comité scientifique* (p. 35-52). Lyon : ENS.

Mercier, A. (2013a). *Quelques biographèmes personnels choisis pour tenter de désyncrétiser le rapport d'Alain Mercier aux questions biographiques par lui-même*. Présenté au Séminaire Acadis, Marseille, France.

Mercier, A. (2013b). *Chronique autobiographique d'un parcours*. Communication sur *L'enquête en méthode. Rendre compte des logiques de situations en didactique des mathématiques*. 5e session, Education et sciences de l'apprendre, ENS-IFé, Lyon. Consulté à l'adresse : http://www.canal-u.tv/video/ecole_normale_superieure_de_lyon/chronique_autobiographique_d_un_parcours.13419.

Mercier, A., & R. Jost (Eds) (2011). *Conférence nationale sur l'enseignement des mathématiques à l'école primaire et au collège*. Lyon : ENS IFé. Consulté à l'adresse : http://educmath.ens-lyon.fr/Educmath/dossier-manifestations/conference-nationale.

Mercier, A., & Quilio, S. (à paraître). *Mesurer des grandeurs, faire vivre des nombres*. Rennes : Presses universitaires de Rennes.

Mercier, A., & Quilio, S. (2013a). *Construction des nombres et des représentations. Apprentissages conceptuels et application pour l'enseignement (vol. 1)*. Visioconférence Marseille-Bretagne.

Mercier, A., & Quilio, S. (2013b). *Construction des nombres et des représentations. Apprentissages conceptuels et application pour l'enseignement (vol. 2)*. Visioconférence Marseille-Bretagne.

Mercier, A., & Quilio, S. (2013c). *Construction des nombres et des représentations. Apprentissages conceptuels et application pour l'enseignement (vol. 3)*. Visioconférence Marseille-Bretagne.

Mercier, A., & Quilio, S. (2013d). *Commentaires sur le diaporama de Francia Leutenegger*. Communication sur *L'enquête en méthode. Questionner les pratiques éducatives*. 5e session, Education et sciences de l'apprendre, ENS-IFé, Lyon. Consulté à l'adresse : http://www.canal-u.tv/video/ecole_normale_superieure_de_lyon/commentaires_sur_le_diaporama_de_francia_leutenegger.13427.

Mercier, A., & Salin, M.-H. (1988). L'analyse *a priori*, outil pour l'observation. In *Actes de l'université d'été « Didactique et formation des maîtres à l'école élémentaire »* (p. 203-244). Bordeaux : IREM.

Mercier, A., Schubauer-Leoni, M.-L., & Sensevy, G. (2002). Vers une didactique comparée. *Revue Française de Pédagogie*, *141*, 5-16.

Miyakawa, T., & Winsløw, C. (2009). Un dispositif japonais pour le travail en équipe d'enseignants : étude collective d'une leçon. *Education & Didactique*, *3* (1), 77-90.

Morales-Ibarra, G. (2014). *L'enseignement et l'apprentissage de la représentation : une étude de cas en maternelle : le « Jeu des trésors »*. Thèse de doctorat. Université de Bretagne occidentale, Brest, France.

Morales, G., Sensevy, G., & Forest, D. (2017). About cooperative engineering: theory and emblematic examples. *Educational Action Research*, *25* (1), 128-139.

Morrissette, J. (2015). Une analyse interactionniste de la complémentarité des positions de savoir en recherche collaborative. *Carrefours de l'éducation, 39* (1), 103-118.

Mounier, E. (2010). *Une analyse de l'enseignement de la numération au CP. Vers de nouvelles pistes*. Thèse de doctorat. Université de Paris VII, France.

Passeron, J. C., & Revel, J. (Eds) (2005). *Penser par cas*. Paris : École des hautes études en sciences sociales.

Penuel, W. R., Fishman, B. J., Cheng, B. H., & Sabelli, N. (2011). Organizing research and development at the intersection of learning, implementation, and design. *Educational Researcher, 40* (7), 331-337.

Perrin-Glorian, M.-J. (2009). L'ingénierie didactique à l'interface de la recherche avec l'enseignement. Vers une ingénierie didactique de deuxième génération ? In C. Margolinas, M. Abboud-Blanchard, L. Bueno-Ravel, N. Douek, A. Fluckiger, P. Gibel, F. Vandebrouck, & F. Wozniak (Eds), *En amont et en aval des ingénieries didactiques (vol. 1)* (p.57-78). Grenoble : La pensée sauvage.

Perrin-Glorian, M.-J. (2010). Des savoirs disciplinaires à construire pour une formation professionnelle universitaire des maîtres. *Spirale, 46*, 43-61.

Perrin-Glorian, M.-J. (2011). Quelques réflexions sur l'enseignement des nombres et grandeurs au long de la scolarité obligatoire. In A. Mercier, & R. Jost (Eds), *Actes des auditions du comité scientifique* (p. 112-118). Lyon : ENS IFé.

Quilio, S. (2008). *Contribution à la pragmatique didactique. Une étude de cas dans l'enseignement des nombres rationnels et décimaux à l'école primaire*. Thèse de doctorat. Université de Provence, Aix-Marseille, France.

Quilio, S. (2012). Une forme caractéristique de condition de l'étude dans la réalisation d'une ingénierie didactique en mathématiques à l'école primaire. *Education & Didactique, 6* (2), 9-26.

Quilio, S. (2013). *L'usage des données vidéo en didactique à travers le dispositif VISA*. Communication sur *L'enquête en méthode. Rendre compte des logiques de situations en didactique des mathématiques*. 5e session, Education et sciences de l'apprendre, ENS-IFé, Lyon. Consulté à l'adresse : http://www.canal-u.tv/video/ecole_normale_superieure_de_lyon/l_usage_des_donnees_video_en_didactique_a_travers_le_dispositif_visa.13423.

Quilio, S. (2015). *La dimension collective dans la théorie des situations didactiques*. Présenté à la 18e école d'été de didactique des mathématiques, Brest, France.

Quilio, S. (2016). La dimension collective dans la théorie des situations didactiques. In Y. Matheron, G. Gueudet, V. Celi, C. Derouet, D. Forest, M. Krysinska, S. Quilio, M. Rogalski, T. A. Sierra, L. Trouche, C. Winslow, & S. Besnier (Eds), *Enjeux et débats en didactique des mathématiques (vol. 1)* (p. 113-125). Grenoble : La pensée sauvage.

Quilio, S., & Morellato, M. (2016). La coopération entre professeurs et chercheurs pour la conception, la réalisation et l'observation d'un enseignement en mathématiques : une double interaction didactique ? *Raisons éducatives, 20*, 165-187.

Quilio, S., & Nedelec-Trohel, I. (2014). Une ingénierie coopérative à l'école élémentaire dans une école de ZEP à Marseille. In A. Bronner, C. Bulf, C. Castela, J.-P. Georget, M. Larguier, B. Pedemonte, & E. Roditi (Eds), *Questions vives en didactique des mathématiques. Problèmes de la profession d'enseignant, rôle du langage (vol. 2)* (p. 315-333). Grenoble : La pensée sauvage.

Radford, L., & Grenier, M. (1996). Entre les choses, les symboles et les idées… une séquence d'enseignement d'introduction à l'algèbre. *Revue des sciences de l'éducation, 22* (2), 253–276.

Revel, J. (Éd.). (1996). *Jeux d'échelles : la micro-analyse à l'expérience*. Paris : Gallimard -Seuil.

Roditi, E. (2005). L'éducation face aux théories de la construction du nombre chez l'enfant. *Spirale, 36*, 37-52.

Roditi, E. (2015). Recherches sur les pratiques enseignantes et relations chercheurs-praticiens. *Carrefours de l'éducation, 39* (1), 55-68.

Roditi, E., & Trgalovà, J. (2015). *Collectifs de professeurs et chercheurs*. Présenté à la 18e école d'été de didactique des mathématiques, Brest, France.

Rouche, N. (1992). *Le sens de la mesure : des grandeurs aux nombres rationnels*. Bruxelles : D. Hatier.

Sanchez, E., & Monod-Ansaldi, R. (2015). Recherche collaborative orientée par la conception. *Education & Didactique*, *9* (2), 73-94.

Santini, J., & Sensevy, G. (2014). *Investigating Conceptualization as a System of Knowledge Games. A Comparative Case Study of Earthquakes in Seismology and Classroom Sessions*. Communication présentée à EERA, Porto, Portugal.

Savoie-Zajc, L., & Lanaris, C. (2005). Regards et réflexions d'une communauté face au problème de l'abandon scolaire : le cas d'une recherche dans une école de l'Iutaouais. *Revue des sciences de l'éducation, 31* (2), 297-316.

Schubauer-Leoni, M.-L. (1986). *Maître-élève-savoir : analyse psychosociale du jeu et des enjeux de la relation didactique*. Thèse de doctorat. Université de Genève, Suisse.

Schubauer-Leoni, M.-L. (1997). Interactions didactiques et interactions sociales : quels phénomènes et quelles constructions conceptuelles. *Skhole, Cahiers de la recherche et du développement, 7*, 103-134.

Schubauer-Leoni, M.-L., & Leutenegger, F. (2002). Expliquer et comprendre dans une approche clinique/expérimentale du didactique ordinaire. In M. Saada-Robert, & F. Leutenegger (Eds), *Expliquer et comprendre en sciences de l'éducation* (p. 227-251). Bruxelles : De Boeck.

Schubauer-Leoni, M.-L., & Leutenegger, F. (2005). Une relecture des phénomènes transpositifs à la lumière de la didactique comparée. *Revue suisse des sciences de l'éducation, 27* (3), 407-429.

Schubauer-Leoni, M.-L., Leutenegger, F., Ligozat, F., & Fluckiger, A. (2007). Un modèle de l'action conjointe professeur-élèves : les phénomènes didactiques qu'il peut / doit traiter. In G. Sensevy, & A. Mercier (Eds), *Agir ensemble. L'action didactique conjointe du professeur et des élèves* (p. 51-91). Rennes : Presses universitaires de Rennes.

Sensevy, G. (1996). Le temps didactique et la durée de l'élève. Etude d'un cas au Cours Moyen : le Journal des Fractions. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 16* (1), 7-46.

Sensevy, G. (1999). *Éléments pour une anthropologie didactique*. Note pour l'habilitation à diriger des recherches. Université de Provence, Marseille, France. Repéré à l'adresse http://python.espe-bretagne.fr/sensevy/Sensevy%20(1999)%20Elements_anthropologie_action_didactique.pdf.

Sensevy, G. (2007). Des catégories pour décrire et comprendre l'action didactique. In G. Sensevy, & A. Mercier (Eds), *Agir ensemble. L'action didactique conjointe du professeur et des élèves* (p. 13-49). Rennes : Presses universitaires de Rennes.

Sensevy, G. (2009). Contenus de savoirs et gestes d'enseignement. Professeurs et chercheurs : vers de nouveaux modes de coopération ? In J. Clanet (Éd.),

Recherche / formation des enseignants. Quelles articulations ? (p. 127-141). Rennes : Presses universitaires de Rennes.

Sensevy, G. (2011a). *Le sens du savoir : éléments pour une théorie de l'action conjointe en didactique*. Bruxelles : De Boeck.

Sensevy, G. (2011b). Quel type de mathématiques pratiquer en début d'école primaire ? In A. Mercier, & R. Jost (Eds), *Actes des auditions du comité scientifique* (p. 58-60). Lyon : ENS.

Sensevy, G. (2011c). *Les LéA, vers une nouvelle alliance entre professeurs et chercheurs, entre recherche et formation.* Présenté à la *Première rencontre nationale des Léa*, ENS IFé, Lyon. Consulté à l'adresse : http://www.canal-u.tv/video/ecole_normale_superieure_de_lyon/vers_une_nouvelle_alliance_entre_professeurs_educateurs_et_chercheurs_entre_recherche_et_formation.10447.

Sensevy, G. (2012a). Le jeu comme modèle de l'activité humaine et comme modèle en théorie de l'action conjointe en didactique. Quelques remarques. *Nouvelles perspectives en sciences sociales, 7* (2), 105-132.

Sensevy, G. (2012b). Logique d'action et film d'étude. *Education & Didactique, 6* (3), 167-177.

Sensevy, G. (2014). *Après Marx, La fontaine*. Présenté au *Séminaire action*, Rennes, France.

Sensevy, G. (2015a). *Le collectif en didactique. Quelques remarques*. Présenté à la 18e école d'été de didactique des mathématiques, Brest, France.

Sensevy, G. (2015b). *Serait-il pertinent d'identifier certaines ressources pour les enseignants et les élèves ? L'exemple d'ACE*. Communication présentée à la conférence de consensus sur les nombres et opérations, premiers apprentissages, Lycée Buffon, Paris XV. Consulté à l'adresse : http://www.cnesco.fr/wp-content/uploads/2015/11/26-Gerard-Sensevy.pdf.

Sensevy, G. (2016). Le collectif en didactique. Quelques remarques. In Y. Matheron, G. Gueudet, V. Celi, C. Derouet, D. Forest, M. Krysinska, S. Quilio, M. Rogalski, T. A. Sierra, L. Trouche, C. Winslow, S. Besnier (Eds), *Enjeux et débats en didactique des mathématiques (vol. 1)* (p. 223-253). Grenoble : La pensée sauvage.

Sensevy, G., Forest, D., Garel, B., Le Garrec, A., & Morales, G. (2010). Influence d'un collectif d'étude sur la mise en place d'une ingénierie didactique : l'exemple du saut informationnel dans la situation du « jeu des trésors ». In L. Mottier Lopez, C. Martinet, & V. Lussi (Eds), *Actualité de la recherche en éducation et en formation*. Genève : AREF.

Sensevy, G., Forest, D., Quilio, S., & Morales, G. (2013). Cooperative Engineering as a Specific Design-Based Research. *ZDM, The International Journal on Mathematics Education*, *45* (7), 1031-1043.

Sensevy, G., & Mercier, A. (2007a). Agir ensemble : l'action didactique conjointe. In G. Sensevy, & A. Mercier (Eds), *Agir ensemble. L'action didactique conjointe du professeur et des élèves* (p. 187-211). Rennes : Presses universitaires de Rennes.

Sensevy, G., & Mercier, A. (Eds) (2007b). *Agir ensemble. L'action didactique conjointe du professeur et des élèves*. Rennes : Presses universitaires de Rennes.

Sensevy, G., & Quilio, S. (2002). Les discours du professeur. Vers une pragmatique didactique. *Revue Française de Pédagogie, 141*, 47-56.

Serfati, M. (2005). *La révolution symbolique : la constitution de l'écriture symbolique mathématique*. Paris : Pétra.

Silvy, C., Delcroix, A., & Mercier, A. (2013). Enquête sur la notion de « pedagogical content knowledge », interrogée à partir du « site local d'une question ». *Education & Didactique, 7* (1), 33-58.

Tonnelle, J. (1979). *Le monde clos de la factorisation au premier cycle.* DEA. Universités de Bordeaux I et Aix-Marseille II, France.

Tricot, A., & Sweller, J. (2016). La cécité aux connaissances spécifiques. *Education & Didactique, 10,* 9-26.

Trouche, L. (2012). *A propos des Léa*. Communication présenté au Séminaire sur les outils des Léa, IFé, Lyon. Consulté à l'adresse : https://www.canal-u.tv/video/ecole_normale_superieure_de_lyon/a_propos_des_lea_intervention_de_luc_trouche.10474.

Vaugelade Berg, C. (2010). Le projet TBM : un exemple de modalité de collaboration entre chercheurs et praticiens en Norvège. *Recherches en Education, H.S. n°1*, 130-146.

Veillard, L., Tiberghien, A., & Vince, J. (2011). Analyse d'une activité de conception collaborative de ressources pour l'enseignement de la physique et la formation des professeurs. Le rôle de théories ou outils spécifiques. *Activités, 8* (2). Consulté à l'adresse : http://activites.revues.org/2627

Vergnaud, G. (1981). *L'enfant, la mathématique et la réalité*. Berne : Peter Lang.

Vergnaud, G. (1996). Au fond de l'action, la conceptualisation. In J.-M. Barbier (Éd.), *Savoirs théoriques et savoirs d'action*. Paris : Presses universitaires de France.

Vernant, D. (1997). *Du discours à l'action*. Paris : Presses universitaires de France.

Vigot, N. (2014). *Temps des pratiques de savoir, dispositifs et stratégies professorales : une étude de cas en mathématique au cours préparatoire : Journal du nombre et Anticipation*. Thèse de doctorat. Université de Bretagne occidentale, Brest, France.

Vilette, B., Mawart, C., & Rusinek, S. (2010). L'outil « estimateur », la ligne numérique mentale et les habiletés arithmétiques. *Pratiques psychologiques, 16* (2), 203-214.

Vinatier, I., & Rinaudo, J.-L. (2015). *Rencontre entre chercheurs et praticiens : quels enjeux*. Paris : A. Colin.

Wittgenstein, L. (1987). *De la certitude*. Paris : Gallimard.

Wittgenstein, L. (2004). *Recherches philosophiques*. Paris : Gallimard.

Liste des annexes

Annexe 1 : Projet pour le dispositif expérimental ACE (Arithméthique à l'école élémentaire) ; version du 30 mai 2011

Annexe 2 : Transcriptions des réunions du groupe Provence

- Transcription du 26 septembre 2012
- Transcription du 24 octobre 2012
- Transcription du 21 novembre 2012
- Transcription du 5 décembre 2012
- Transcription du 12 décembre 2012
- Transcription du 25 septembre 2013
- Transcription du 27 novembre 2013
- Transcription du 24 septembre 2014

Annexe 3 : Tableaux synoptiques des réunions du groupe Provence

- Tableau synoptique réunion du 26 septembre 2012
- Tableau synoptique réunion du 24 octobre 2012
- Tableau synoptique réunion du 21 novembre 2012
- Tableau synoptique réunion du 5 décembre 2012
- Tableau synoptique réunion du 12 décembre 2012
- Tableau synoptique réunion du 25 septembre 2013
- Tableau synoptique réunion du 27 novembre 2013
- Tableau synoptique réunion du 24 septembre 2014

Annexe 4 : Mots-clés utilisés pour indexer les épisodes dans le logiciel *Transana*

Annexe 5 : Chronique des événements et des faits pour le *Jeu des annonces*

Résumé

Travail coopératif entre professeurs et chercheurs dans le cadre d'une ingénierie didactique sur la construction des nombres : conditions de la constitution de l'expérience collective

Nous avons cherché, dans ce travail doctoral, à caractériser les pratiques de coopération de professeurs, formateurs, encadrants et chercheurs. Ceux-ci ont œuvré à la constitution et la mise en place conjuguées d'une ingénierie didactique sur la construction des nombres au début de l'enseignement primaire. Ils ont fondé pour cela un collectif, considéré comme une institution au sein du projet de recherche *Ace-Arithmécole.* Nous avons décrit une telle institution au travers d'un dialogue spécifique, le dialogue d'ingénierie.

Pour analyser un tel dialogue, nous sommes appuyée principalement sur le cadre de la *théorie de l'action conjointe en didactique*. La notion de *contrat / milieu* nous a permis d'appréhender les transactions entre les membres du collectif dans une perspective didactique et de montrer qu'elles ont construit des faits d'expérience, c'est-à-dire des faits appris de l'expérience vécue collectivement. En effet, les transactions ne relèvent pas d'un jeu de questions /réponses entre les protagonistes mais d'un travail d'enquête commune sur la mise en place d'une ingénierie didactique coopérative. Chacun est alors capable de passer du topos de celui qui apprend au topos de celui qui désigne ce qui pourrait être appris, remarqué ou étudié. Au sein de cette nouvelle forme de l'étude, après un certain temps de pratique ingénierique, chacun est à même de réorienter l'action didactique collective et de participer à l'élaboration de praxéologies d'ingénierie.

Mots-clés

Ingénierie didactique coopérative ; enseignement des mathématiques à l'école élémentaire ; théorie de l'action conjointe en didactique ; dialogue d'ingénierie ; faits d'expérience

ABSTRACT

A didactic engineering cooperative programme composed of teachers and researchers on the construction of numbers: a study of the conditions of the collective experience.

This doctoral thesis seeks to characterise the cooperative practices of a team of teachers, pedagogical trainers, pedagogical advisors and researchers during the implementation of a didactic engineering on the construction of number concepts for 6-year-old and 8-year-old pupils (first & second grades). The collective group founded by these various actors are viewed as an institution within the research project *Ace-arithmécole* with a specific dialogue, that of the engineering dialogue of the project.
In order to analyse this dialogue, we use the Joint Action Theory in Didactics. We refer to the notion of the dialectic of contract / milieu in order to identify the transactions between the collective members from a didactic point of view. We show how experience-facts have been developed by these transactions, that is to say facts that have been learnt from the collective, lived experience. Such transactions are not about a game of questions and responses between the various members of the group, but rather the result of a common investigation of the didactic engineering in which each member of the group is able to change learning positions and indicate a factor which they could learn, observe or study. Therefore, after an initial period of engineering practice, this new form of study enables each member to re-orientate the collective engineering action and to take on a share of the construction of the engineering knowledge.

Key words
Cooperative didactic engineering; mathematics teaching in elementary school; Joint Action Theory in Didactics; engineering dialogue; experience-facts