



**HAL**  
open science

# Étude du bruit des accéléromètres électrostatiques ultrasensibles de la mission GOCE

Raphaël Chen

► **To cite this version:**

Raphaël Chen. Étude du bruit des accéléromètres électrostatiques ultrasensibles de la mission GOCE. Instrumentations et Détecteurs [physics.ins-det]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2017. Français. NNT : 2017PA066054 . tel-01592605

**HAL Id: tel-01592605**

**<https://theses.hal.science/tel-01592605v1>**

Submitted on 25 Sep 2017

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Thèse de doctorat

# Étude du bruit des accéléromètres électrostatiques ultrasensibles de la mission GOCE

Présentée par  
**Raphaël CHEN**

Pour obtenir le grade de  
**Docteur de l'Université Pierre et Marie Curie (Paris VI)**

Soutenance prévue le ??? devant le jury composé de

<i>Rapporteurs:</i>	<b>Isabelle</b>	<b>PANET</b>
	<b>Pierre</b>	<b>EXERTIER</b>
<i>Examineurs:</i>	<b>Jean-Luc</b>	<b>ZARADER</b>
	<b>Karim</b>	<b>DOUCH</b>
<i>Directeur de thèse:</i>	<b>Stéphane</b>	<b>HOLÉ</b>
<i>Directeur des travaux:</i>	<b>Manuel</b>	<b>RODRIGUES</b>



# Table des matières

Liste des figures	v
Liste des tableaux	ix
Introduction générale	1
<b>1 Cadre général : de la gravimétrie à la gradiométrie</b>	<b>5</b>
1.1 Intérêt du champ de pesanteur terrestre et du géoïde dans les géosciences	5
1.2 Développement en harmoniques sphériques du champ	7
1.3 Techniques classiques de mesure du champs de pesanteur	10
1.4 Les satellites et le géoïde	11
1.5 Vers les missions de gradiométrie spatiales	13
1.5.1 Mission CHAMP (CHALLENGING Minisatellite Payload)	13
1.5.2 Mission GRACE (Gravity Recovery And Climate Experiment)	14
1.5.3 Mission GOCE (Gravity Field and Steady-State Ocean Circulation Explorer)	16
1.5.4 Héritage de CHAMP, GRACE et GOCE pour les missions d'accélérométrie spatiale	21
1.6 Domaines d'application de la mission GOCE	24
1.6.1 Applications en gravimétrie	25
1.6.2 Applications en géodésie	28
1.6.3 Applications en océanographie	28
1.6.4 Application en géologie	30
1.6.5 Succès de la mission mais niveau de bruit inexplicé sur $V_{zz}$	31
<b>2 Architecture électronique du circuit d'asservissement des accéléromètres de la mission GOCE</b>	<b>35</b>
2.1 Principes des accéléromètres ultrasensibles	35
2.1.1 Expression de l'énergie électrostatique et de la capacité d'un condensateur plan	35
2.1.2 Expression de la force électrostatique	37
2.1.3 Modèle uniaxial simplifié d'un accéléromètre électrostatique	38
2.2 Contrôle asservi des accéléromètres	41
2.2.1 Le détecteur capacitif	42
2.2.2 Le convertisseur analogique-numérique ADC1	43
2.2.3 Le correcteur proportionnel-intégrateur-dérivateur numérique	45
2.2.4 Le convertisseur numérique-analogique et le DVA	45
2.2.5 La branche science	46
2.3 Fonction de transfert du contrôle asservi de la masse d'épreuve	47
2.3.1 Fonction de transfert dans le cas d'un contrôle simplifié uniaxial	47
2.3.2 Fonction de transfert dans le cas uniaxial et avec perturbations	49

<b>3</b>	<b>Analyse de la mesure accélérométrique pour la mission GOCE</b>	<b>51</b>
3.1	Accélération d'une masse d'épreuve par rapport au satellite . . . . .	51
3.1.1	Résumé des notations . . . . .	51
3.1.2	Relation entre l'accélération gravitationnelle et le potentiel gravitationnel . . . . .	52
3.1.3	Équations de la dynamique et de la cinématique . . . . .	52
3.1.4	Ordre de grandeur de la force électrostatique totale pour maintenir les masses d'épreuve immobiles . . . . .	56
3.2	Moments dynamiques d'une masse d'épreuve exercés par les électrodes . . . . .	57
3.3	Modes communs, modes différentiels et estimation des composantes du gradient de gravité . . . . .	60
3.3.1	Définition des modes différentiels et estimation des composantes du gradient de gravité . . . . .	61
3.3.2	Définition des modes communs . . . . .	63
3.4	Introduction des erreurs instrumentales . . . . .	65
3.4.1	Équations de mesures avec les erreurs instrumentales . . . . .	65
3.4.2	Éléments d'étalonnage de l'instrument . . . . .	69
3.5	Relations entre accélérations linéaires/angulaires d'une masse d'épreuve et le contrôle en tension . . . . .	71
3.5.1	Dynamique de la masse d'épreuve le long des axes $Y$ et $Z$ du repère $R_{AESRF}$ . . . . .	71
3.5.2	Dynamique de la masse d'épreuve le long de l'axe $X$ du repère $R_{AESRF}$ . . . . .	74
3.5.3	Dynamique angulaire de la masse d'épreuve autour des axes $Y$ et $Z$ du repère $R_{AESRF}$ . . . . .	77
3.5.4	Dynamique angulaire de la masse d'épreuve autour de l'axe $X$ du repère $R_{AESRF}$ . . . . .	78
<b>4</b>	<b>Analyse des mesures pendant la phase opérationnelle de la mission GOCE</b>	<b>81</b>
4.1	Bibliographie sur le traitement des données de niveau 1b des accéléromètres de GOCE . . . . .	81
4.1.1	Étude d'une méthode d'estimation des paramètres d'étalonnage et impact sur la trace du gradient de gravité . . . . .	81
4.1.2	Étude sur l'amélioration du processus d'estimation des composantes du gradient de gravité . . . . .	83
4.1.3	Étude de la stabilité des accéléromètres et de l'effet de repliement de spectre dans le signal . . . . .	86
4.1.4	Validation des accéléromètres . . . . .	88
4.1.5	Détection de craquements dans le signal livré par les accéléromètres des satellites GRACE . . . . .	91
4.1.6	Conclusion de l'étude bibliographique . . . . .	92
4.2	Densité spectrale des composantes du gradient de gravité au cours de la mission . . . . .	92
4.3	Expression théorique de la différence des modes communs . . . . .	94
4.4	Présentation des données utilisées . . . . .	97
4.4.1	Description des modes communs nominaux et étalonnés . . . . .	97
4.4.2	Évolution des modes communs nominaux et étalonnés pendant la mission . . . . .	100
4.4.3	Pré-traitement des données avant analyse spectrale . . . . .	102
4.5	Résultats des analyses spectrales . . . . .	109
4.5.1	Résultats des analyses spectrales sur les différences de modes communs étalonnés . . . . .	109
4.5.2	Comparaison des densités spectrales des différences de modes communs nominaux et étalonnés . . . . .	115
4.5.3	Analyse spectrale sur des différences pondérées de modes communs . . . . .	115
4.6	Analyse spectrale sur les modes différentiels et comparaison avec les modes communs . . . . .	118
4.7	Tensions de contrôle et de polarisation . . . . .	121
4.8	Les contributeurs au bruit de mesure d'un accéléromètre . . . . .	128
	<b>Conclusion générale</b>	<b>133</b>

<b>A</b>	<b>Annexe A</b>	<b>135</b>
A.1	Définition des repères utilisés pour l'étude du gradiomètre . . . . .	135
A.1.1	Composition du gradiomètre . . . . .	135
A.1.2	Repère inertiel - <i>Inertial Reference Frame</i> . . . . .	135
A.1.3	Repère orbital local - <i>Local Orbital Reference Frame</i> . . . . .	136
A.1.4	Repère de l'accéléromètre - <i>Accelerometer Reference Frame</i> . . . . .	136
A.1.5	Repère du système d'électrodes de chaque accéléromètre - <i>Accelerometer Electrode System Reference Frame</i> . . . . .	138
A.1.6	Repère d'un gradiomètre uniaxial - <i>One-axis Gradiometer Reference Frame</i> . . . . .	138
A.1.7	Repère du gradiomètre - <i>Gradiometer Reference Frame</i> . . . . .	139
<b>B</b>	<b>Annexe B</b>	<b>141</b>
B.1	Approximation de l'expression de la capacité . . . . .	141
<b>C</b>	<b>Annexe C</b>	<b>145</b>
C.1	Valeurs maximales des termes de la matrice $[dMI_{ij}]$ d'après les spécifications . . . . .	145
C.2	Estimations des matrices $[dMI_{ij}]$ issues des processus d'étalonnage pendant la phase scientifique de la mission . . . . .	145
<b>D</b>	<b>Annexe D</b>	<b>149</b>
D.1	Filtre de Satizky-Golay . . . . .	149
	<b>Bibliographie</b>	<b>157</b>



# Table des figures

1.1	Schéma représentant des surfaces d'équipotentielles, y compris le géoïde, et leur relation par rapport au manteau terrestre et au niveau des océans. . . . .	6
1.2	Relation entre la hauteur orthométrique, la hauteur ellipsoïdale et la hauteur du géoïde. . . . .	7
1.3	Harmoniques sphériques. . . . .	8
1.4	Hauteur du géoïde EGM2008. . . . .	10
1.5	Déformation de la Terre en légère forme de <i>poire</i> . . . . .	11
1.6	Représentation schématique du principe de l'altimétrie par satellite. . . . .	12
1.7	Concept de gravimétrie spatiale (à gauche) et satellite CHAMP (à droite) . . . . .	14
1.8	Concept de gradiométrie spatiale en tandem (à gauche) et satellites GRACE (à droite) . . . . .	14
1.9	Photographie du pendule d'Eötvös (à gauche) et schéma du principe de fonctionnement (à droite) . . . . .	16
1.10	Photographie d'une campagne de mesure en 1891 . . . . .	17
1.11	Cactus . . . . .	17
1.12	Concept de gradiométrie spatiale (à gauche) et satellites GOCE (à droite) . . . . .	18
1.13	Représentation de la boucle du système de contrôle d'orbite du satellite . . . . .	19
1.14	Disposition des sous-systèmes de GOCE . . . . .	19
1.15	Composants du gradiomètre . . . . .	20
1.16	Configuration des électrodes . . . . .	21
1.17	Illustration du concept de mission avec une formation de type Bender. . . . .	22
1.18	Vue d'artiste du satellite MICROSCOPE (à gauche), photographie des accéléromètres (au centre), vue en coupe des accéléromètres (à droite). Source : CNES et ONERA . . . . .	24
1.19	Précision attendue en fonction du domaine d'application. . . . .	25
1.20	Performance des missions CHAMP, GRACE et GOCE en termes de résolutions spatiale et temporelle . . . . .	26
1.21	Comparaison du modèle EGM_TIM_RL05 avec l'EGM2008 en termes de hauteur de géoïde (à gauche) et d'erreurs (à droite). . . . .	27
1.22	Erreurs moyennes individuelles dans le signal de gravité (à gauche) et carte de l'anomalie de gravité du modèle GOCO05S (à droite). . . . .	28
1.23	Écart des systèmes altimétriques nationaux par rapport à l'EVRF2007. . . . .	29
1.24	Topographie moyenne des océans. . . . .	29
1.25	Courants géostrophiques. . . . .	30
1.26	Profondeur du Moho. . . . .	30
1.27	Composantes du gradient de gravité théoriques et mesurées. . . . .	31
1.28	Trace du gradient de gravité mesuré avant (rouge) et après (bleu) étalonnage complet. . . . .	32
1.29	Comparaison dans le domaine spectral des composantes théoriques et mesurées du gradient de gravité. . . . .	33
2.1	Schéma d'un condensateur plan avec deux armatures infinies . . . . .	35
2.2	Système de deux conducteurs reliés à un générateur. . . . .	37
2.3	Schéma de la boucle d'asservissement de la masse d'épreuve . . . . .	39

## Table des figures

2.4	Schéma de la disposition des axes de l'AESRF par rapport aux électrodes. . . . .	41
2.5	Composants de la boucle d'asservissement d'un accéléromètre . . . . .	41
2.6	Schéma des composants électroniques d'un détecteur capacitif . . . . .	43
2.7	Principe de fonctionnement d'un ADC sigma-delta . . . . .	44
2.8	Schéma montrant les superpositions des boucles d'asservissement pour le contrôle avec les électrodes $Y$ et $Z$ . . . . .	48
3.1	Exemple de disposition entre les repères $R_{ARF25}$ , $R_{OAGRF25}$ et $R_{GRF}$ dans le cas de la paire d'accéléromètres 2-5. . . . .	52
3.2	Représentation d'un déplacement de la masse d'épreuve le long des axes $Y_{AESRF}$ et $Z_{AESRF}$ ainsi qu'un faible angle de rotation autour de l'axe $X_{AESRF}$ . . . . .	72
3.3	Schéma d'un déplacement selon l'axe $X$ ainsi que deux rotations selon autour des axes $Y$ et $Z$ . . . . .	76
4.1	Schéma du traitement des données pour estimer les gradients de gravité . . . . .	85
4.2	Impact du remplacement des accéléromètres sur l'estimation de la densité spectrale de la trace. . . . .	86
4.3	Bruit total des accéléromètres et ses contributeurs lorsque le bruit de l'ADC1 est supposé blanc (gauche) et lorsqu'il est supposé coloré (droite) . . . . .	87
4.4	Exemple caractéristique de pics dus à l'activité thermique (repérés par des droites) dans le signal de niveau 1a des accéléromètres à 10Hz . . . . .	91
4.5	Modélisation des pics dans le signal dans la direction de vol du satellite (en haut à gauche) et densités spectrales des profils de pics en fonction de la direction considérée (reste de la figure) . . . . .	92
4.6	Représentation de la densité spectrale de la composante $V_{ZZ}$ en fonction de la fréquence et du mois. . . . .	93
4.7	Représentation de la densité spectrale de la trace du gradient de gravité en fonction de la fréquence et du mois. . . . .	93
4.8	Modes communs nominal (NCM) et étalonné (CCM) pour toutes les paires et tous les axes. . . . .	98
4.9	Densités spectrales des modes communs nominaux et étalonnés pour toutes les paires selon $X$ . . . . .	99
4.10	Variations du mode commun pour la paire 1-4 selon $X$ le long de l'orbite. . . . .	99
4.11	Variations de l'altitude du satellite le long de l'orbite. . . . .	100
4.12	Exemple de mode commun corrigé des données aberrantes. . . . .	101
4.13	Évolution des modes communs nominaux (NCM) et étalonnés (CCM) selon $X$ sur une période de trois ans. . . . .	102
4.14	Évolution des modes communs nominaux (NCM) et étalonnés (CCM) selon $Y$ sur une période de trois ans. . . . .	103
4.15	Évolution des modes communs nominaux (NCM) et étalonnés (CCM) selon $Z$ sur une période de trois ans. . . . .	103
4.16	Mode commun des paires 1-4 et 2-5 (deux premières séries) puis leur différence nominale et corrigée du biais (deux dernières séries) . . . . .	105
4.17	Effet de données manquantes sur l'estimation de la densité spectrale d'un signal . . . . .	106
4.18	Exemple de configuration dans l'utilisation de la différence des modes communs. . . . .	109
4.19	Estimation du périodogramme moyen avec une fenêtre de Hanning du bruit des accéléromètres pour l'axe $X_{GRF}$ entre Novembre 2009 et Décembre 2012 . . . . .	110
4.20	Estimation du périodogramme moyen avec une fenêtre de Hanning du bruit des accéléromètres pour l'axe $Y_{GRF}$ entre Novembre 2009 et Décembre 2012 . . . . .	111
4.21	Estimation du périodogramme moyen avec une fenêtre de Hanning du bruit de l'accéléromètre 2-5 pour l'axe $Z_{GRF}$ entre Novembre 2009 et Décembre 2012 . . . . .	111
4.22	Estimation du périodogramme moyen avec une fenêtre de Hanning du bruit des accéléromètres 1-4 et 3-6 pour l'axe $Z_{GRF}$ entre Novembre 2009 et Décembre 2012 . . . . .	112
4.23	Signaux initial, lissé et résiduel obtenus avec la méthode de Savitzky-Golay. . . . .	113

4.24 Comparaison densité spectrale du signal initial avec celle du signal résiduel. . . . .	113
4.25 Densité spectrale estimée (en signal) à partir de la mesure de la température dans la cage de l'accéléromètre 1. . . . .	114
4.26 Densité spectrale estimée de la température dans le circuit FEEU contrôlant les axes Y et Z de l'accéléromètre 1. . . . .	114
4.27 Densités spectrales des différences de modes communs nominaux et étalonnés - axe X . . . . .	115
4.28 Densités spectrales des différences de modes communs nominaux et étalonnés - axe Y . . . . .	116
4.29 Densités spectrales des différences de modes communs nominaux et étalonnés - axe Z . . . . .	116
4.30 Densités spectrales pour différentes pondérations - Paires 1-4 et 3-6, axe X - Période du 7/11/09 au 8/11/09. . . . .	117
4.31 Densités spectrales pour différentes pondérations - Paire 1-4 et 2-5, axe Z - Période du 7/11/09 au 8/11/09. . . . .	118
4.32 Densités spectrales des modes différentiels selon les axes du repère $R_{GRF}$ , des termes du gradient de gravité et des termes angulaires associés. . . . .	119
4.33 Comparaison des densités spectrales de différences de modes communs et de modes différentiels. . . . .	120
4.34 Comparaison des densités spectrales des modes différentiels nominaux et étalonnés. . . . .	121
4.35 Tensions de contrôle sur les électrodes X. . . . .	122
4.36 Tensions de contrôle sur les électrodes Y. . . . .	122
4.37 Tensions de contrôle sur les électrodes Z. . . . .	123
4.38 Tensions de contrôle corrigées pour la paire 1-4. . . . .	123
4.39 Tensions de contrôle corrigées pour la paire 2-5. . . . .	124
4.40 Tensions de contrôle corrigées pour la paire 36. . . . .	124
4.41 Différence pondérée des tensions Z1 et Z2 pour l'accéléromètre 1. . . . .	125
4.42 Bruit dans le signal de tensions de contrôle pour les électrodes Z. . . . .	126
4.43 Estimation du bruit pour le contrôle en tensions sur les électrodes X - Acc. 1. . . . .	126
4.44 Estimation du bruit pour le contrôle en tensions sur les électrodes X - Acc. 2. . . . .	127
4.45 Estimation du bruit pour le contrôle en tensions sur les électrodes X - Acc. 3. . . . .	127
4.46 Estimation du bruit pour le contrôle en tensions sur les électrodes X - Acc. 4. . . . .	127
4.47 Estimation du bruit pour le contrôle en tensions sur les électrodes X - Acc. 5. . . . .	128
4.48 Estimation du bruit pour le contrôle en tensions sur les électrodes X - Acc. 6. . . . .	128
4.49 Contributeurs théoriques au bruit de mesure pour un axe sensible (gauche) et l'axe moins sensible (droite). . . . .	129
4.50 Effet de la prise en compte du bruit de facteur d'échelle dans le bruit total pour un axe sensible (gauche) et l'axe moins sensible (droite). . . . .	131
A.1 Schéma des composants mécaniques d'un accéléromètre . . . . .	136
A.2 Position de l'IRF par rapport au LORF . . . . .	137
A.3 Définition du repère $R_{OAGRF1}$ . . . . .	139
A.4 Schéma de la disposition des axes du repère $R_{GRF}$ par rapport à ceux du repère $R_{ARF}$ . . . . .	140
B.1 Schéma d'une coupe dans le plan YZ de la disposition de la masse d'épreuve, d'une butée et d'une électrode . . . . .	141
C.1 Valeurs maximales des termes de la matrice $[dMI_{ij}]$ pour la paire 14 (tableau du haut), pour la paire 25 (tableau du milieu) et pour la paire 36 (tableau du bas). . . . .	145
C.2 Comparaison des valeurs de la matrice d'étalonnage avec les spécifications pour toutes les paires d'accéléromètres et toutes les sessions d'étalonnage entre novembre 2009 et novembre 2012. . . . .	147



# Liste des tableaux

1.1	Spécification de l'erreur cumulée de la hauteur du géoïde en fonction du degré du développement en harmoniques sphériques [53]. . . . .	22
1.2	Spécification du niveau de bruit des accéléromètres dans la bande de mesure. . . . .	23
2.1	Noms et nombres de composants du système d'asservissement de la masse d'épreuve . . . . .	42
3.1	Correspondance entre notation et tensions appliquées pour un accéléromètre donné. . . . .	71
4.1	Valeurs estimées des biais et dérives des biais obtenues avec les accélérations individuelles et avec les modes communs [92]. . . . .	89
4.2	Facteurs d'échelle annuels estimés pour chaque accéléromètre et pour les modes communs [92].	90
4.3	Correspondance entre les repères $R_{AESRF}$ , $R_{ARF}$ , $R_{GRF}$ ainsi que la sensibilité des axes . . . . .	97
A.1	Composition des gradiomètres uniaxiaux. . . . .	135
A.2	Correspondance entre les repères $R_{AESRF}$ , $R_{ARF}$ , $R_{GRF}$ ainsi que la sensibilité des axes . . . . .	138
C.1	Matrice $[dMI_{ij}]$ estimée lors de la session d'étalonnage du 1 <sup>er</sup> novembre 2009. . . . .	146



# Introduction générale

La géophysique est l'une des disciplines les plus vastes et importantes des sciences naturelles et concerne l'étude des caractéristiques physiques de la planète Terre. Elle regroupe de nombreux domaines dont les objets d'intérêt s'étendent du centre de notre planète à l'environnement spatial proche de celle-ci, en passant par les couches fluides superficielles de la Terre, telles que les océans ou l'atmosphère. À titre d'exemples, on peut citer l'étude des plaques tectoniques, des nappes phréatiques, des courants océaniques, de la propagation des ondes sismiques, des phénomènes magnétiques ou encore de la fonte des glaces. Afin d'apporter des informations sur la structure et la composition complexe de la Terre, l'activité géophysique doit porter sur l'analyse d'une grande diversité de phénomènes physiques, en reposant le plus souvent sur des techniques d'observation indirectes. Néanmoins, bien que précieuses, ces informations indirectes ne permettent généralement pas d'obtenir un modèle de Terre unique, c'est-à-dire une interprétation univoque des phénomènes observés. Par conséquent, un des objectifs principaux des géophysiciens est la combinaison de l'ensemble des observations afin d'aboutir à un nombre réduit de modèles cohérents et réalistes.

Parmi les grandeurs d'intérêt en géophysique, le champ gravitationnel terrestre représente une observable fondamentale pour l'étude de la répartition des masses ou des variations de densité. En effet, la loi universelle de gravitation, établie par Newton, permet de relier l'accélération gravitationnelle en un point à la distribution de masse qui en est à l'origine. Bien que la mesure du champ gravitationnel soit simple, son interprétation est en réalité beaucoup plus complexe : étant donné la diversité des structures géologiques, à une valeur d'accélération mesurée peut correspondre, en théorie, une infinité de distributions de masse possibles. L'influence d'autres effets tels que les flux de matière, la rotation de la Terre ou la topographie compliquent aussi l'interprétation du champ mesuré. Pour ces raisons, les mesures du champ gravitationnel sont comparées à un modèle supposé *a priori*. L'observation expérimentale et l'interprétation des déviations, appelées anomalies, par rapport à ce modèle supposé permettent alors d'améliorer progressivement les modèles existants et constituent le domaine de la gravimétrie qui peut avoir de nombreuses applications : la prospection des ressources naturelles (gisements miniers, hydroliques ou énergétiques) s'appuie fortement sur ce domaine de la géophysique [1, 2].

À notre époque où l'interrogation sur l'impact climatique de l'activité humaine est préoccupante, les objectifs de la gravimétrie, et plus généralement de la géophysique, prennent un sens particulièrement fort pour la compréhension des phénomènes [3, 4, 5]. Dans ce contexte, le programme *Living Planet* de l'Agence Spatiale Européenne a pour ambition de faire progresser la connaissance sur l'environnement terrestre [6, 7, 8]. Lancé à la fin du XX<sup>ème</sup> siècle, il a marqué le commencement d'une nouvelle ère pour les missions d'observation terrestre européennes qui sont davantage ciblées sur des objectifs précis mais complémentaires et qui sont orientées vers l'utilisation des données par un public scientifique élargi. Le programme *Living Planet* s'appuie sur une coopération européenne active et engagée et comprend deux volets. Le premier regroupe les missions opérationnelles destinées au recueil de données en continu, missions appelées *Earth Watch*. Il s'agit plus précisément des familles de satellites météorologiques (Sentinel, Meteosat et MetOp) grâce auxquelles l'ESA a joué un rôle pionnier dans le domaine et continue d'apporter une contribution de premier plan à la

compréhension du changement climatique. Le deuxième volet concerne les missions dites d'exploration, missions appelées *Earth Explorers*, et dont les objectifs répondent à des enjeux scientifiques clés définis par la communauté de chercheurs [9]. À ce jour, huit satellites d'exploration ont été sélectionnés<sup>1</sup> : GOCE (2009, la gravité), SMOS (2009, l'eau), CryoSat (2010, la glace), Swarm (2013, l'environnement magnétique), ADM-Aeolus (2017, le vent), EarthCARE (2018, les nuages), Biomass (les forêts) et FLEX (la végétation). Le succès du programme Living Planet est illustré par la richesse des thèmes de géophysique abordés lors du symposium dédié qui se tient tous les trois ans et dont le dernier en date s'est déroulé en mai 2016 [10].

Le satellite Gravity field and steady-state Ocean Circulation Explorer (GOCE) est le premier satellite d'exploration du programme Living Planet et a été lancé en mars 2009 pour une durée initiale de 18 mois [11]. Sa mission, catégorisée comme gradiométrie spatiale, s'est finalement achevée en octobre 2013 et avait pour objectif principal la mesure des composantes du gradient de gravité afin que les scientifiques puissent en déduire un modèle de surface de référence du champ de pesanteur terrestre, appelé géoïde, avec une précision inégalée. Les données du satellite ont permis des contributions significatives dans plusieurs domaines de la géophysique, parmi lesquels on peut citer la géodésie et l'océanographie [12, 13]. Pour atteindre les objectifs de la mission, deux innovations importantes ont été intégrées : un système de compensation de traînée [14], permettant de créer un environnement de vol moins perturbé, et le gradiomètre gravitationnel, instrument principal de la mission [15]. Ce gradiomètre contient trois paires d'accéléromètres électrostatiques conçus par l'ONERA, dont la technologie a été validée à plusieurs reprises par des missions spatiales. Elles permettent de mesurer très précisément les accélérations linéaires et angulaires du satellite, à partir desquelles est déduit le gradient de gravité, grandeur principale de la mission GOCE. Bien que celle-ci ait été couronnée d'un franc succès, la satisfaction n'a pu être totale car la communauté scientifique s'est aperçue que certaines composantes du gradient de gravité estimé sont davantage bruitées que prévu. Ce défaut n'a pas empêché la mission de satisfaire largement les attentes des scientifiques mais pose le problème d'une recherche des causes et d'une proposition de résolution en vue d'améliorer les performances des futures missions. Puisque ce sont les accéléromètres du gradiomètre qui sont chargés d'effectuer les mesures, les scientifiques se sont tournés vers l'ONERA dans l'espoir d'obtenir des éléments d'explication sur ce constat. L'investigation des sources de bruit est également intéressante pour la mission MICROSCOPE [16], menée par le CNES en partenariat avec l'ONERA et lancée en avril 2016, dont le satellite embarque des accéléromètres basés sur la même technologie que ceux du satellite GOCE.

Aucune étude publiée n'a évalué de manière systématique les niveaux de bruit des accéléromètres de GOCE, ni n'a permis d'aboutir à une explication convaincante quant au dépassement des spécifications. La raison réside en partie dans le succès global de la mission mais aussi dans le fait qu'il faut une connaissance très précise de l'électronique de l'instrument afin de pouvoir apporter une réponse satisfaisante. C'est dans ce contexte que s'inscrit le travail présenté dans ce mémoire.

Ce mémoire commence par une présentation historique des techniques de mesure gravimétrique et gradiométrique classiques afin de motiver l'intérêt et l'apport des techniques de mesure en environnement spatial, en l'occurrence des accéléromètres électrostatiques ultrasensibles. En particulier, une brève revue des missions, dans lesquelles les accéléromètres ont été embarqués est proposée.

Dans la suite du mémoire, au chapitre 2, est introduit le principe général des accéléromètres électrostatiques ultrasensibles. Par ailleurs, l'extrême précision recherchée et spécifiée par l'ESA pour garantir la qualité des données utilisées par les géophysiciens a fait de GOCE une mission particulièrement ambitieuse. La conception des accéléromètres, et en particulier de son électronique, a été adaptée à la précision requise dans la mission. Ainsi, est proposée une description détaillée de l'architecture de l'électronique et des asservissements mise en oeuvre et qui est au cœur de la performance de l'instrument.

---

1. Entre parenthèses sont indiquées l'année de lancement, si connue, et l'objectif très global de la mission.

Afin de relier l'environnement spatial du satellite avec les mesures effectuées, il est crucial de comprendre les équations de la dynamique et les équations de mesures, qui sont présentées dans le chapitre 3. En outre, pour atteindre la performance requise, une procédure d'étalonnage en vol est nécessaire : en effet, la sensibilité des accéléromètres est telle qu'il n'est pas possible de caractériser certains défauts de l'instrument au sol à cause de la pesanteur et des vibrations. La procédure d'étalonnage en vol, introduite au chapitre 3, permet de remédier à ce problème et d'obtenir un moyen de corriger les mesures acquises.

Les mesures acquises, corrigées ou non, font l'objet de nombreuses analyses dont les résultats principaux sont présentés au chapitre 4 : en particulier, il s'agit de l'estimation du bruit des accéléromètres grâce à une étude spectrale des séries temporelles acquises lors de la mission. Cette estimation basée sur des données entre novembre 2009 et juin 2013, est une première étape dans l'étude du comportement des accéléromètres car elle représente un constat global sur l'instrument. À partir de ce point de départ, il sera ensuite possible d'identifier des contributeurs plus précis au niveau de bruit observé.

Ce mémoire s'achève par une conclusion reprenant l'ensemble des résultats acquis dans le cadre de ce travail de thèse.



# 1 Cadre général : de la gravimétrie à la gradiométrie

## Objectifs du chapitre 1

- Introduire l'intérêt de l'étude du champs gravitationnel afin d'établir le contexte général de la thèse.
- Placer l'intérêt de la mission GOCE dans le contexte de la gravimétrie et de la gradiométrie.
- Présenter des contributions rendues possible grâce à la mission GOCE en gravimétrie, géodésie, océanographie et géologie.
- Établir la problématique du travail de thèse.

## 1.1 Intérêt du champ de pesanteur terrestre et du géoïde dans les géosciences

L'objet du début de cette partie est la définition du champ de pesanteur terrestre. Un point massique à la surface de la Terre est soumis à deux types d'accélération principaux : d'une part, une accélération due à la somme des attractions gravitationnelles exercées par l'ensemble des masses ; d'autre part, une accélération centrifuge due à la rotation de la Terre. La somme de ces deux accélérations correspond à la pesanteur qui s'exerce en ce point massique et vérifie l'équation :

$$\Delta W = -4\pi\mathcal{G}\rho + 2\omega^2 \quad (1.1)$$

où  $W$  est le potentiel de pesanteur,  $\mathcal{G}$  la constante gravitationnelle,  $\rho$  la masse volumique de la Terre et  $\omega$  sa vitesse angulaire de rotation. L'opérateur  $\Delta$  correspond au Laplacien.

En introduisant le potentiel de la force gravitationnelle  $V$  (plus simplement, le potentiel gravitationnel) et le potentiel de la force centrifuge, le potentiel de pesanteur s'écrit comme la somme de ces deux contributions :

$$W = V + \Phi \quad (1.2)$$

Il est donc important de distinguer le champ gravitationnel du champ de pesanteur. On précise que  $V$  est homogène à des  $m/s^2$ .

La distribution et le transport de masses au sein de la Terre ainsi qu'à sa surface sont reflétés par le champ gravitationnel, et donc par le champ de pesanteur. De ce fait, la connaissance de ce champ est nécessaire à la compréhension et à l'estimation des processus géodynamiques internes et externes. On peut citer trois exemples choisis parmi des domaines différents. Dans le domaine de la géophysique, les lents mouvements de convection dans le manteau terrestre sont responsables de la tectonique des plaques et donc de l'existence des zones sismiques et volcaniques. L'activité sismique de ces zones redistribue les masses au sein de la planète et

## Chapter 1. Cadre général : de la gravimétrie à la gradiométrie

peut déformer de manière statique le champ de pesanteur local [17, 18]. Dans le domaine de l'océanographie, le courant thermohalin (courant marin en profondeur) est directement lié aux différences de température, de densité de l'eau et de salinité ainsi qu'à la gravité qui joue également un rôle important dans les mouvements marins à grande échelle. Ces courants marins ont un impact majeur sur les climats terrestres, en régulant la chaleur des continents et l'humidité de l'air, ainsi que sur la faune marine [19]. Enfin, dans le domaine de la géodésie révolutionné grâce à l'avènement des satellites GPS, la détermination de l'orbite des satellites est d'autant plus précise que la connaissance du champ gravitationnel (donc du champ de pesanteur) est bonne [20].

Les champs gravitationnel et de pesanteur terrestre interviennent donc dans l'analyse des phénomènes variationnels tels que ceux cités ci-dessus. Plus précisément, leur étude est souvent menée par rapport à une surface de référence théorique appelée le *géoïde*, définie comme une surface d'équipotentielle du potentiel de pesanteur (figure 1.1). La première particularité de cette surface est qu'elle coïncide avec la surface des océans, dans le cas hypothétique où il n'y aurait pas d'effets de marée, de courant ou de vent, autrement dit dans le cas où les océans seraient au repos [20, 21]. L'irrégularité de cette surface traduit l'intensité du champ de pesanteur inhomogène. La deuxième particularité de cette surface vient de sa nature équipotentielle : le vecteur gradient de pesanteur  $y$  est partout orthogonal et pointe dans la direction dite du traditionnel *fil à plomb*. Etant donné un point du manteau terrestre, la hauteur *orthométrique* est alors déterminée par la distance parcourue le long du fil à plomb reliant ce point au géoïde. Défini en premier par Gauss il y a presque deux cents ans comme *figure de la Terre*, le géoïde a l'intérêt de représenter une bonne approximation au premier ordre de la forme de la planète. La science de la détermination du champs de pesanteur et du géoïde avec toutes les méthodes associées constitue le domaine de la géodésie et a pris un regain d'intérêt certain à partir de la fin du XX<sup>ème</sup> siècle grâce notamment aux satellites.

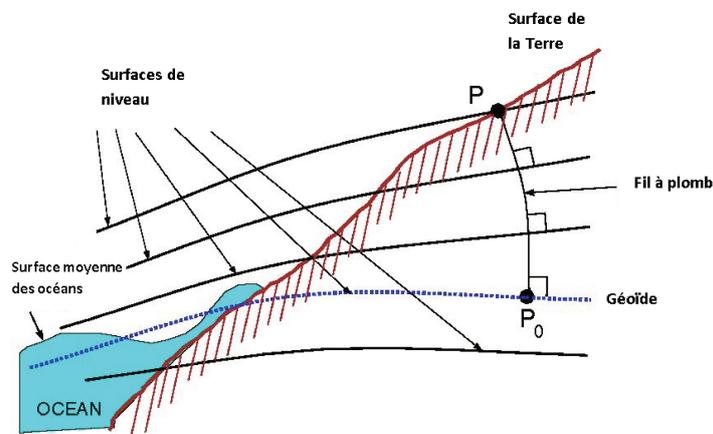


Figure 1.1 – Schéma représentant des surfaces d'équipotentielles, y compris le géoïde, et leur relation par rapport au manteau terrestre et au niveau des océans.

Etant donné que le géoïde présente un aspect ondulé, il est plus facile de se rapporter à une surface lisse pour les opérations mathématiques. Pour cette raison, une autre surface de révolution de référence appelée l'*ellipsoïde* est très largement utilisée en géodésie (cf. figure 1.2). L'ellipsoïde bien qu'étant moins apte à servir de référence comme niveau moyen de la mer, est une bonne approximation au second ordre de la forme de la Terre. Etant donné un point de hauteur orthométrique  $H$ , la relation entre la hauteur ellipsoïdale (définie comme la distance entre ce point et son projeté orthogonal sur l'ellipsoïde) est donnée par la relation :

$$h = H + N \quad (1.3)$$

## 1.2. Développement en harmoniques sphériques du champ

où  $N$  est l'ondulation du géoïde, c'est-à-dire la différence de hauteur entre un point du géoïde et son projeté orthogonal sur l'ellipsoïde.

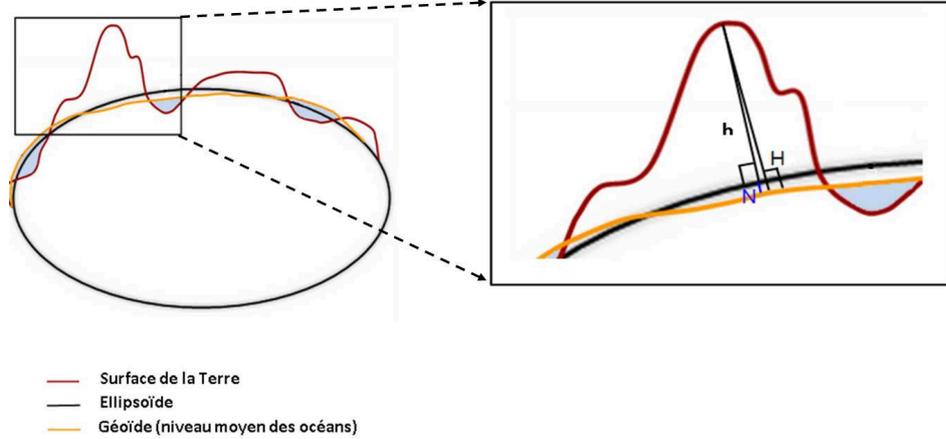


Figure 1.2 – Relation entre la hauteur orthométrique, la hauteur ellipsoïdale et la hauteur du géoïde.

## 1.2 Développement en harmoniques sphériques du champ

La densité de la Terre n'étant pas connue en tout point, on ne peut calculer le potentiel gravitationnel à partir de sa définition :

$$V(r) = \mathcal{G} \iiint_{\text{Terre}} \frac{\rho}{|r - r'|} d\nu \quad \text{avec} \quad \lim_{r \rightarrow +\infty} V(r) = 0 \quad (1.4)$$

Le potentiel gravitationnel vérifie en tout point à l'intérieur de la Terre l'équation de Poisson :

$$\Delta V = -4\pi\mathcal{G}\rho \quad (1.5)$$

Pour un point situé en dehors des masses attractives, en l'occurrence de la distribution des masses sur Terre, le potentiel gravitationnel vérifie l'équation de Laplace :

$$\Delta V = 0 \quad (1.6)$$

À partir de la résolution de l'équation de Laplace en coordonnées sphériques, en utilisant la technique de séparation des variables, il est possible d'exprimer le potentiel gravitationnel en un point de l'espace à partir d'un développement en une série d'harmoniques sphériques convergente. Ce développement n'est valable qu'en dehors des sources, c'est-à-dire en dehors de la Terre puisqu'à l'intérieur, l'équation de Laplace n'est plus vérifiée. On introduit la notation  $(r, \theta, \lambda)$  pour désigner respectivement la distance radiale, la longitude et la latitude d'un point de l'espace. Le potentiel gravitationnel de la Terre peut alors s'écrire :

$$V(r, \theta, \lambda) = \frac{\mathcal{G}M}{R} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} [A_{nm} \bar{\mathcal{E}}_{nm}(\theta, \lambda) + B_{nm} \bar{\mathcal{F}}_{nm}(\theta, \lambda)] \quad (1.7)$$

où  $\mathcal{G}M$  est le produit de la constante universelle de gravitation par la masse de la Terre,  $A_{nm}$  et  $B_{nm}$  sont les coefficients de Stokes et  $R$  est le rayon de la sphère de référence de la Terre.

Les fonctions  $\bar{\mathcal{C}}_{nm}$  et  $\bar{\mathcal{S}}_{nm}$  sont définies par :

$$\bar{\mathcal{C}}_{nm}(\lambda, \phi) = \bar{P}_{nm}(\sin \phi) \cdot \cos m\lambda \quad (1.8)$$

$$\bar{\mathcal{S}}_{nm}(\lambda, \phi) = \bar{P}_{nm}(\sin \phi) \cdot \sin m\lambda \quad (1.9)$$

où  $\bar{P}_{nm}$  est le polynôme de Legendre normalisé de degré  $n$  et d'ordre  $m$ . L'ensemble des fonctions  $\bar{\mathcal{C}}_{nm}$  et  $\bar{\mathcal{S}}_{nm}$  constitue une base orthonormale des fonctions harmoniques de la sphère unité vers  $\mathbb{R}$ . Dans l'étude du champ gravitationnel, les coefficients  $A_{nm}$  et  $B_{nm}$  sont les deux grandeurs à déterminer.

En réalité, le développement en harmoniques sphériques est toujours limité à un certain degré et ordre. À partir de cette limitation, Wahr *et al.* [22] définissent la notion de résolution spatiale  $\epsilon$  (exprimée en km) comme étant la demi-longueur d'onde associée au degré maximal du développement en harmoniques sphériques :

$$\epsilon = \frac{20000}{n_{max}} \quad (1.10)$$

On peut interpréter la résolution spatiale comme la longueur caractéristique de la plus petite ondulation observable du champ. Dans le cas de GOCE, dont les spécifications imposent un objectif de résolution inférieure à 100 km, le degré maximal jusqu'auquel il faut estimer les coefficients est 200. Ainsi, la précision du développement en harmoniques sphériques dépend de la connaissance des coefficients  $\bar{C}_{nm}$  et  $\bar{S}_{nm}$  ainsi que du degré maximal accessible par la technique d'observation utilisée.

D'un point de vue géométrique, les harmoniques sphériques  $P_{nm} \cdot \cos m\lambda$  divisent la sphère en différentes zones, illustrée dans la figure 1.3 :

- pour  $n \neq 0$  et  $m = 0$ , la sphère est divisée en  $n$  zones (positives ou négatives) avec autant de changements de signe. Elles sont dénommées harmoniques zonales. Par ailleurs, ces zones ne dépendent pas de la longitude (figure 1.3, gauche) ;
- pour  $n \neq 0$  et  $m \neq 0$ , la sphère est divisée en zones similaires à un plateau d'échec, appelées les harmoniques tessérales (figure 1.3, centre) ;
- pour  $m = n \neq 0$ , les harmoniques tessérales deviennent des harmoniques sectorielles et ne dépendent plus de la latitude (figure 1.3, droite).

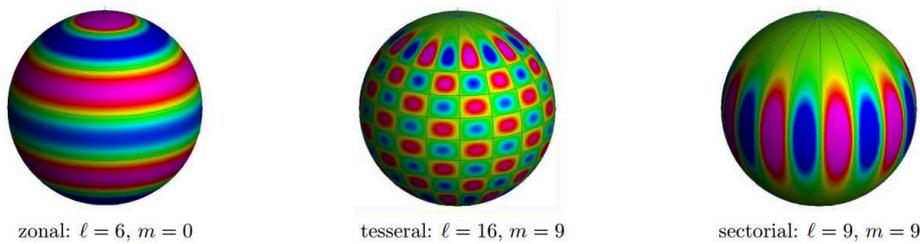


Figure 1.3 – Exemples d'harmoniques sphériques. Le bleu représente une zone de signe négatif, le violet de signe positif [23].

La grandeur d'intérêt de la mission GOCE est la détermination des composantes de la matrice du gradient de gravité (cf. chapitre 3 pour une exposition plus détaillée). Cependant, l'objectif ultime est d'estimer le développement en harmoniques sphériques du champs de gravitation et le géoïde. L'estimation des harmoniques sphériques à partir de la gradiométrie n'est pas une tâche aisée (cf. [24, 25, 26, 27]). Bien que plusieurs approches existent, dans le cadre de ce mémoire, seule la semi-analytique est très brièvement présentée pour illustrer le lien explicite qui existe entre les composantes du gradient de gravité et les har-

## 1.2. Développement en harmoniques sphériques du champ

moniques sphériques.

En effet, on peut montrer [25] que les dérivées secondes par rapport à l'espace du potentiel gravitationnel  $V_{\alpha\beta}$  peuvent s'écrire :

$$V_{\alpha\beta}(t) = \sum_m \sum_k [A_{km} \cos \psi_{km}(t) + B_{km} \sin \psi_{km}(t)] \quad (1.11)$$

où  $\alpha, \beta \in (x, y, z)$  et  $\psi_{km}$  est une somme pondérée de la période de révolution de l'orbite et de la rotation de la Terre. Les harmoniques sphériques  $\bar{C}_{nm}$  et  $\bar{S}_{nm}$  sont inclus dans  $A_{km}$  et  $B_{km}$  selon les relations :

$$A_{km} = \frac{\mathcal{G}M}{R} \sum_{n_{\min}[2]}^{n_{\max}} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} \lambda_{nk}^{(\alpha\beta)} \bar{F}_{nm}^k(i) \begin{cases} \bar{C}_{nm} \\ -\bar{S}_{nm} \end{cases} \begin{matrix} n-m \text{ pair} \\ n-m \text{ impair} \end{matrix}$$

$$B_{km} = \frac{\mathcal{G}M}{R} \sum_{n_{\min}[2]}^{n_{\max}} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} \lambda_{nk}^{(\alpha\beta)} \bar{F}_{nm}^k(i) \begin{cases} \bar{S}_{nm} \\ \bar{C}_{nm} \end{cases} \begin{matrix} n-m \text{ pair} \\ n-m \text{ impair} \end{matrix}$$

où  $\bar{F}_{nm}^k(i)$  dépend de l'inclinaison de l'orbite  $i$  et  $\lambda_{nk}^{(\alpha\beta)}$  sont des coefficients reliant  $V_{\alpha\beta}$  aux harmoniques sphériques.

Dans l'approche semi-analytique, une connaissance très précise de l'orbite du satellite est supposée connue : il s'agit d'une hypothèse raisonnable étant donné que la position est connue à quelques centimètres près [28]. Ainsi, si l'on dispose des composantes du gradient de gravité, il est possible de calculer les coefficients du développement en harmoniques sphériques du potentiel de gravité. Par ailleurs, à partir de ce développement, il est possible d'estimer le géoïde.

On a vu dans la partie précédente qu'une approximation de la forme de la Terre plus fine que la sphère est l'ellipsoïde. Le géoïde ne dévie pas de l'ellipsoïde de plus de 100 m [29]. Le potentiel et le champ gravitationnel associés à l'ellipsoïde sont respectivement appelés le potentiel normal et le champ normal. En d'autres termes, le champ normal, noté  $U$ , est une approximation du champs réel  $V$ . Le champ normal est considéré connu et la différence des deux quantités est appelé l'anomalie de gravité  $T$  et les relie grâce à l'expression :  $T = U - V$ . L'anomalie de gravité vérifie l'équation de Laplace et à ce titre peut être développée en harmoniques sphériques de la forme [21] :

$$T(\theta, \lambda) = \frac{\mathcal{G}\delta M}{R} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n [a_{nm} R_{nm}(\theta, \lambda) + b_{nm} S_{nm}(\theta, \lambda)] \quad (1.12)$$

où  $\mathcal{G}$  est la constante gravitationnelle,  $R$  le rayon de la Terre approximée comme une sphère.

Grâce au développement en harmoniques sphériques et connaissant un modèle de potentiel de l'ellipsoïde, il est possible d'estimer la hauteur du géoïde (en termes de distance par rapport à l'ellipsoïde de référence) grâce à une relation de la forme [21]:

$$N(\theta, \lambda) = \frac{\mathcal{G}\delta M}{R\gamma_0} - \frac{\delta W}{\gamma_0} + \frac{1}{\gamma_0} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n [a_{nm} R_{nm}(\theta, \lambda) + b_{nm} S_{nm}(\theta, \lambda)] \quad (1.13)$$

où  $\gamma_0 = \mathcal{G}M/R^2$ .

La figure 1.4 présente un exemple de carte représentant la hauteur du géoïde à partir du modèle de potentiel de gravité EGM2008 tronqué à l'ordre 500. L'EGM2008 [30] est le modèle « pré-GOCE » le plus abouti et a été largement utilisé pour valider les modèles déduits des mesures de la mission GOCE. L'objectif de cette partie n'est pas d'établir rigoureusement une théorie de la géodésie mais simplement de mentionner le lien existant

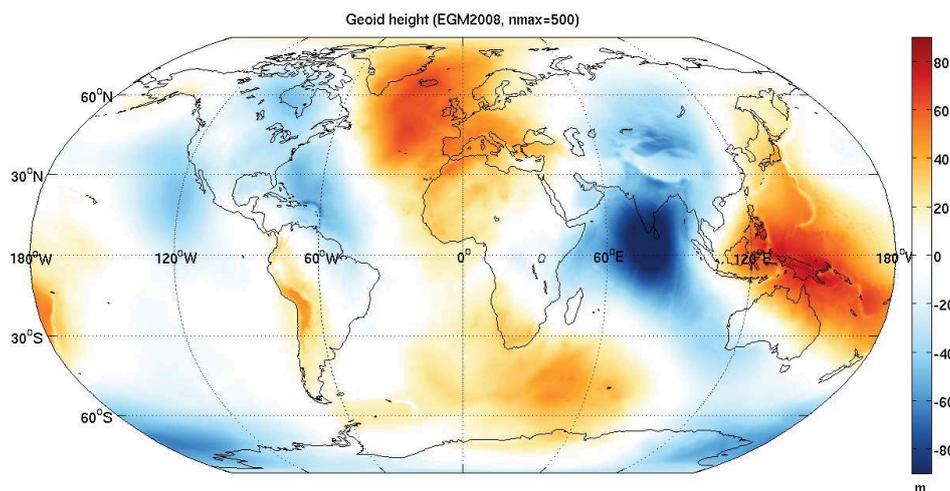


Figure 1.4 – Carte globale représentant la hauteur du géoïde correspondant au modèle EGM2008 de degré maximal 500.

entre le gradient de gravité, potentiel de gravitation et le géoïde. Ce lien est important dans le contexte de la mission GOCE et plus généralement dans les missions de gravimétrie dont on retrace l'historique dans la partie suivante.

### 1.3 Techniques classiques de mesure du champs de pesanteur

Il n'est pas possible de déterminer directement la surface correspondant au géoïde. Il faut passer par l'estimation du champ de pesanteur obtenu à partir de la mesure du champ gravitationnel par des instruments dédiés dont on peut distinguer deux familles : les gravimètres et les gradiomètres. Bien qu'une partie du perfectionnement de ces instruments aient été simultanés (l'utilisation du type d'instrument dépendant souvent de l'application), on peut situer chronologiquement l'apparition des gravimètres avant celle des gradiomètres. Depuis l'apparition du premier modèle de gravimètre créé par Huygens en 1656, de très nombreux concepts ont été développés et continuent d'être proposés [31]. Dans la suite de cette partie, un bref panorama des gravimètres est présenté afin de mettre en évidence l'intérêt des gradiomètres.

Les techniques de gravimétrie ont été développées pour déterminer directement le champ de pesanteur, absolu ou relatif à une référence. Les pendules ont été les premiers gravimètres : il est possible de faire une mesure absolue de la pesanteur grâce aux caractéristiques du pendule (moment d'inertie, masse, longueur et période d'oscillation). Bien que leur précision soit restée très limitée jusqu'au XX<sup>ème</sup> siècle ( $10^{-2}$  m/s<sup>2</sup> à  $10^{-5}$  m/s<sup>2</sup>), plusieurs ont été utilisés tout au long de la première partie du XX<sup>ème</sup> siècle pour des applications en géodésie ou en exploration pétrolière. Au début des années 1950, avec l'invention de l'horloge à quartz, des gravimètres à chute libre ont été développés et ont complètement remplacé les pendules à partir des années 1980 grâce à la précision atteinte (entre  $10^{-7}$  m/s<sup>2</sup> et  $10^{-8}$  m/s<sup>2</sup>). Comme son nom le laisse suggérer, leur principe repose sur la mesure du temps moyen de chute d'un objet sur plusieurs chutes.

En parallèle, depuis les années 1930, c'est encore l'exploration pétrolière qui alimente le développement de gravimètres répondant à la nécessité de couvrir de larges zones en un temps limité. C'est à cette époque que naissent les premiers gravimètres à ressort. Le changement de pesanteur entre deux stations est estimé à partir du changement de position d'équilibre de la masse d'épreuve dont la mesure peut se faire soit de manière mécanique, soit de manière électrostatique. Les meilleurs gravimètres à ressort qui atteignent une précision

de quelques  $10^{-7} \text{ m/s}^2/\sqrt{\text{Hz}}$ , ont été largement utilisés pour la prospection pétrolière et sont encore commercialisés aujourd'hui. La famille des gravimètres à ressort a également été utilisée sur des plateformes mobiles (avions, hélicoptères, sous-marins, etc...) pour couvrir rapidement des zones étendues tout au long de la seconde partie du XX<sup>ème</sup> siècle avec une résolution pouvant atteindre quelques  $10^{-5} \text{ m/s}^2/\sqrt{\text{Hz}}$ . La principale limitation des performances des gravimètres embarqués provient des vibrations et de l'accélération extérieure du véhicule qui peuvent très fortement perturber la mesure du champ gravitationnel. Cette problématique est commune à tout type de gravimètre ou gradiomètre embarqué. Malgré les sources de limitation, la gravimétrie aéroportée, par exemple, est l'une des techniques les plus efficaces pour fournir des données gravimétriques de haute résolution dans des zones difficilement atteignables et présente aujourd'hui une précision de l'ordre de  $2 \times 10^{-5} \text{ m/s}^2/\sqrt{\text{Hz}}$  pour une résolution spatiale de 2 km [32]. Depuis les années 1950 et surtout depuis l'existence des satellites GPS, les nombreuses campagnes de gravimétrie aéroportée ont complété les mesures terrestres et marines. C'est surtout depuis les premières campagnes à grande échelle, en 1991 et 1992, que le potentiel de ce type de techniques pour la mesure du champ gravitationnel a été établi.

## 1.4 Les satellites et le géoïde

L'existence des satellites a complètement ouvert la voie à de nouvelles méthodes en complément des techniques (terrestres, marines et aéroportées) plus classiques présentées dans la partie précédente. Plus spécifiquement, les méthodes par satellite ont permis d'établir des approches plus directes dans la détermination du géoïde. L'ensemble de ces méthodes appliquées au domaine de la géodésie constitue la discipline de la géodésie spatiale, très utilisée également dans le suivi de projet d'ingénierie à grande envergure. Depuis le lancement du premier satellite artificiel (SPUTNIK-1) en 1957, la géodésie spatiale est devenue un domaine à part entière. Le premier avantage important du satellite est sa capacité à couvrir homogènement une large portion de la planète. C'est ainsi qu'il a été démontré que la Terre adopte en réalité une légère forme de *poire* (cf. figure 1.5).

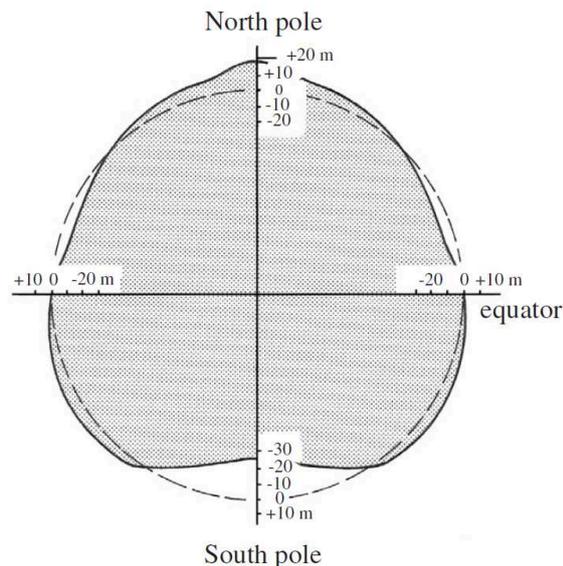


Figure 1.5 – Déformation de la Terre en légère forme de *poire* [20].

Avec plus d'un demi-siècle de recul, l'histoire du développement de la géodésie par satellite peut être classée en trois périodes. Entre 1958 et 1970, la mise au point de satellites d'observation par photographie optique

couplée aux premières méthodes d'analyses d'orbites ont permis de résoudre plusieurs problèmes basiques de la géodésie dont l'aplatissement de la Terre, la forme globale du géoïde et les premiers modèles de géopotentiel. Entre 1970 et 1990, les nouvelles techniques de mesure de distance par laser et d'altimétrie par satellite ont permis d'affiner les modèles de géoïde et la détermination d'un système de référence pour localiser les coordonnées d'un point sur Terre. Le perfectionnement rapide de ces techniques avec le développement du GPS ont mené à de nombreuses applications dans l'observation des phénomènes géodynamiques (rotation de la Terre par exemple). De 1990 à 2000, la géodésie satellite rentre dans une phase d'internationalisation avec deux types d'organismes majeurs : le Service International de la Rotation Terrestre et des Systèmes de Référence, qui a proposé un système de coordonnées global de haute précision, et le Service de Géopositionnement par Satellite (GPS) qui donne accès à un positionnement en temps réel très précis. Le domaine de la géodésie en a grandement bénéficié car, couplées à des données précises de nivellement, les coordonnées d'un point obtenues grâce au GPS peuvent mener à la déduction de la forme du géoïde. En effet, d'une part, la hauteur ellipsoïdale d'un point peut être déduite mathématiquement des coordonnées mesurées par le GPS. D'autre part, la hauteur du géoïde peut être obtenue par des mesures de nivellement. La hauteur orthométrique peut alors être calculée grâce à l'équation (1.3). Ce sujet est traité en précision dans les références [20, 21].

L'altimétrie par satellite développée depuis les années 1970 a également grandement contribué au domaine de la géodésie et de l'océanographie. Il s'agit aujourd'hui d'une technologie dont la maturité est acquise grâce aux très nombreuses missions (Skylab, Geos-3, Seasat, Geosat, ERS-1, Topex-Poseidon, ERS-2, GFO, Envisat et Jason 1). Le principe repose sur l'émission, par un radar, d'une onde qui est réfléchiée par la surface des océans puis réceptionnée par le satellite. La comparaison de l'onde émise et de l'onde reçue donne accès à la hauteur du satellite par rapport à la surface des océans, ce qui permet d'approximer l'écart entre le géoïde et l'ellipsoïde (cf. figure 1.6), moyennant des méthodes de correction sophistiquées pour prendre en compte les éléments perturbant la trajectoire de l'onde. Aujourd'hui, il est possible d'estimer cet écart avec une précision d'environ 4 cm [33].

On voit que contrairement aux traditionnelles méthodes de mesures gravimétriques, les GPS et les satellites d'altimétrie déterminent une grandeur géométrique : la hauteur du géoïde.

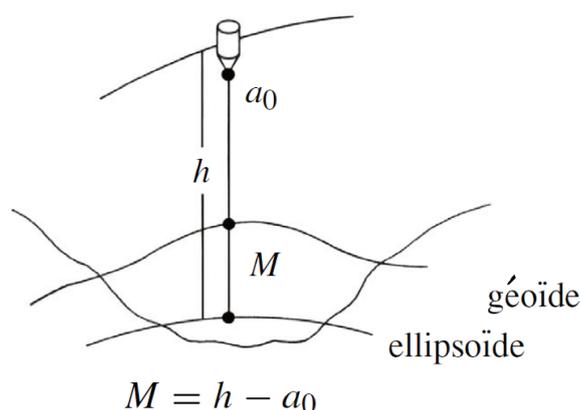


Figure 1.6 – Représentation schématique du principe de l'altimétrie par satellite [20].

### 1.5 Vers les missions de gradiométrie spatiales

Dans les parties précédentes, ont été présentés, sans prétention d'exhaustivité, trois grands types de méthodes d'étude de la gravité terrestre et du géoïde qui ont précédé les missions de gradiométrie spatiale contemporaines. Le premier type consiste à relever des mesures gravimétriques terrestres, navales ou aéroportées. Ce type de mesures est malheureusement de qualité et de répartition géographique inégales. Le second type porte sur l'utilisation de l'altimétrie spatiale qui présente néanmoins l'importante limitation de n'être applicable surtout que dans les zones océaniques. Enfin, depuis presque un demi-siècle, l'analyse des perturbations des orbites des satellites ont également permis de déduire des modèles de potentiel gravitationnel [34, 35, 36]. Cette méthode basée sur l'utilisation de mesures par laser ou par effet Doppler, présente l'inconvénient majeur d'estimer certains coefficients du développement en harmoniques sphériques du potentiel gravitationnel qu'avec une grande imprécision. En outre, le repérage des satellites depuis les stations-sol ne peut se faire que dans des fenêtres temporelles courtes et le mouvement des satellites n'est pas seulement dû au champ gravitationnel terrestre. Bien entendu, il existe des modèles de champ gravitationnel combinant plusieurs techniques : par exemple l'EGM96 qui était le modèle le plus abouti en 1999, année où la mission GOCE a été proposée. Néanmoins, à cette époque, toutes les méthodes présentées ci-dessus ne pouvaient répondre à l'exigence des océanographes et des géodésiens. Une mission spatiale dédiée dont les mesures sont précises, globales et de qualité homogène était nécessaire. Celle-ci devait dépasser les limites des méthodes classiques selon quatre critères :

- une couverture ininterrompue pour les trois dimensions de l'espace ;
- une mesure ou une compensation des effets des forces non-gravitationnelles ;
- une orbite aussi basse que possible pour la trajectoire du satellite ;
- une compensation de l'atténuation du champs gravitationnel à l'altitude du satellite.

L'obtention de ces objectifs a conduit à l'élaboration de trois types de missions spatiales dont les représentants sont, dans l'ordre chronologique de lancement, les missions CHAMP, GRACE et GOCE. Celles-ci ont en commun la mesure de l'accélération du satellite grâce à la technologie de l'accélérométrie électrostatique développée par l'ONERA. Dans la suite de cette section, les missions CHAMP et GRACE sont succinctement présentées car elles mettent en avant la nécessité de la mission GOCE et leur complémentarité en termes d'estimation du champ gravitationnel. Les informations pour CHAMP et GRACE proviennent en partie des sources suivantes : <http://op.gfz-potsdam.de/champ/> et <http://op.gfz-potsdam.de/grace/>. Pour GOCE, les sources sont multiples.

#### 1.5.1 Mission CHAMP (CHALLENGING Minisatellite Payload)

La mission CHAMP d'initiative allemande (cf. figure 1.7, à droite), a été lancée le 15 juillet 2000 sur une orbite quasi-circulaire et quasi-polaire à une altitude initiale de 454 km. La durée de vie prévue à la conception était de cinq années pendant lesquelles le satellite est descendu progressivement jusqu'à 300 km d'altitude à cause de la traînée. Finalement, le satellite a été fonctionnel pendant dix ans puisque son désorbitage a eu lieu le 19 septembre 2010. Les objectifs principaux de la mission étaient les suivants :

- à partir de l'orbitographie, déterminer les moyennes à grandes longueurs d'onde du champ gravitationnel statique et variable. La partie variable du champ étant principalement due à la redistribution de la masse atmosphérique, aux courants océaniques, aux changements du niveau de la mer causés par la fonte des calottes glacières ;
- déterminer précisément le champ magnétique principal de la Terre, de celui du manteau terrestre ainsi que leur variation temporelle ;
- obtenir une estimation de la ionosphère et de la troposphère grâce la réfraction du signal GPS.

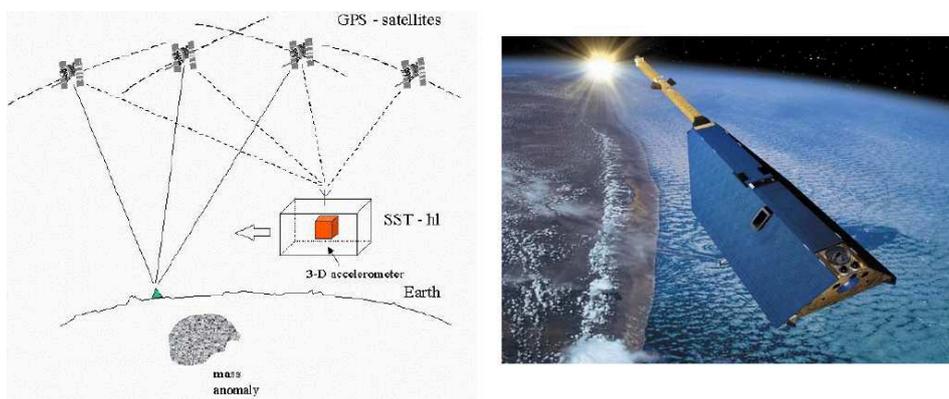


Figure 1.7 – Concept de gravimétrie spatiale (à gauche) et satellite CHAMP (à droite).

En ne prenant en compte que la détermination du champ gravitationnel, une altitude plus faible aurait été souhaitable. Celle qui avait été choisie répond à un compromis pour la mesure des champs magnétique et gravitationnel.

Dans le cadre de ce mémoire, on ne s'intéresse qu'à la mesure du champ gravitationnel statique. Le principe de l'estimation du champ gravitationnel repose sur deux piliers (cf. figure 1.7, à gauche) : tout d'abord, le suivi satellite-à-satellite (*satellite-to-satellite tracking*) grâce aux systèmes GPS et GLONASS situés encore plus en altitude (dans ce cas, on parle de mode *high-low*). Les perturbations de l'orbite du satellite dues à la gravité terrestre sont surveillées en permanence et les systèmes de positionnement donnent accès à la position et à la vitesse avec une précision de quelques centimètres. Les informations sur le champ gravitationnel sont alors contenues dans les variations de la vitesse relative du satellite par rapport au système de positionnement. D'autre part, bien que CHAMP serve de capteur spatial en chute libre dans le champ gravitationnel terrestre, la trajectoire du satellite est également perturbée par des forces non-gravitationnelles (la traînée, la pression de radiation solaire, la poussée des propulseurs, etc.). Par conséquent, ces-dernières doivent être déterminées indépendamment puis prises en compte dans les calculs de l'orbitographie. Ceci est réalisé grâce à la présence d'un accéléromètre électrostatique tri-axial, situé au centre de masse du satellite, capable de mesurer les accélérations linéaires et angulaires du satellite.

### 1.5.2 Mission GRACE (Gravity Recovery And Climate Experiment)

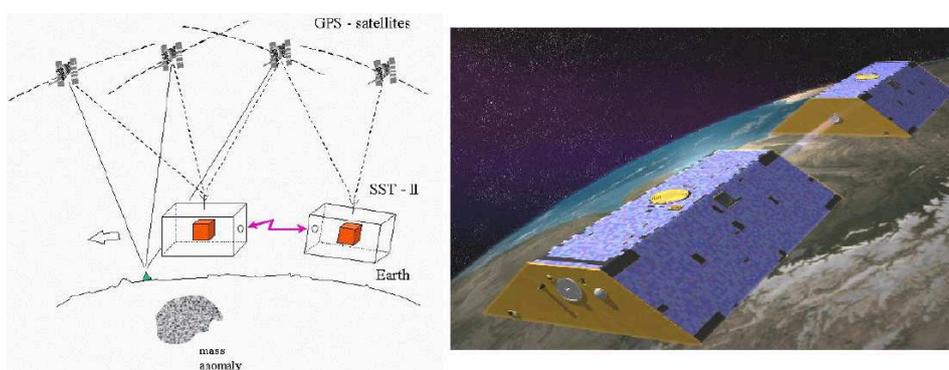


Figure 1.8 – Concept de gradiométrie spatiale en tandem (à gauche) et satellites GRACE (à droite).

La mission GRACE est issue d'une coopération américano-allemande (NASA et DLR) pour laquelle deux

satellites jumeaux ont été conçus. Le lancement a eu lieu le 17 mars 2002 sur une orbite circulaire et quasi-polaire avec une altitude initiale de 500 km. Les deux satellites se suivent, séparés par une distance de 200 km, ce qui requiert une procédure de maintien tous les un ou deux mois. La variation de distance entre les deux satellites doit être connue avec une précision meilleure que  $1 \mu\text{m/s}$ , ce qui est rendu possible grâce à l'utilisation d'un système envoyant des signaux micro-ondes, instrument principal de cette mission.

Les objectifs principaux de la mission sont :

- déterminer un modèle du géoïde, à partir de 30 jours de mesures, avec une erreur cumulée ne dépassant pas 20 cm pour une résolution spatiale de 133 km [37] ;
- déterminer les variations temporelles du champ avec une résolution spatiale de l'ordre de 200 km à 300 km [38].

Le concept de cette mission combine les techniques de suivi satellite-à-satellite avec le GPS, comme pour CHAMP, au suivi laser entre les deux satellites jumeaux (on parle alors de mode *low-low*). Cette nouveauté est essentielle pour la mesure précise du changement d'accélération gravitationnelle. En effet, une variation du champ gravitationnel (due par exemple à un changement dans la distribution des masses dans le manteau) engendre une variation d'accélération entre les deux satellites : celui qui est en tête sera affecté en premier. Grâce au laser micro-onde, il est possible de quantifier cette variation. Le système GPS apporte une connaissance précise du lieu où les satellites se trouvent lorsque ce phénomène a eu lieu. Enfin, grâce à chaque accéléromètre à bord des satellites, il est possible d'isoler les effets dus uniquement au champ gravitationnel en retirant ceux dus aux forces non-gravitationnelles. Ainsi, la différence d'accélération gravitationnelle, c'est-à-dire la différence de la dérivée première du champ gravitationnel, est estimée sur une longue distance (200 km). Autrement dit, on peut considérer l'ensemble des deux satellites comme un gradiomètre uniaxial longue distance. Par ailleurs, cette approche basée sur la différentiation de deux accélérations combinées à la localisation par GPS permet d'accéder à une meilleure résolution spatiale : par rapport à CHAMP, GRACE est capable de détecter la perturbation du champ gravitationnel engendrée de plus petites structures avec une résolution spatiale allant jusqu'à environ 400 km [39] (cf. figure 1.20). Bien que la durée de vie prévue était de cinq années, le tandem est aujourd'hui toujours fonctionnel (avec certes des pannes de batteries liées au vieillissement). La longévité exceptionnelle de cette mission a permis et permet encore de remplir l'objectif de l'observation du champ gravitationnel variable avec succès grâce à la quantité d'informations précieuses recueillies depuis le lancement. L'intérêt des variations temporelles du champ est qu'elles permettent de contribuer à la connaissance par exemple des courants océaniques ou de l'évolution des nappes phréatiques. En effet, dans le cas de variations saisonnières, étant donné la courte échelle temporelle, les causes proviennent en général des couches superficielles de la Terre.

Les trois difficultés principales dans l'estimation du champ variable proviennent d'abord de la faiblesse intrinsèque de l'amplitude des signaux par rapport à ceux du champ statique, ensuite de leur atténuation inversement proportionnelle à la distance par rapport au centre de la Terre, avec un facteur  $[R_t / (R_t + h)]^{(l+2)}$  où  $l$  est le degré considéré dans le développement en harmoniques sphériques du potentiel gravitationnel. Enfin, les satellites doivent pouvoir achever une couverture globale rapide et pendant longtemps. Une conséquence directe est que les phénomènes physiques associés à des valeurs de  $l$  petites sont les moins atténués à haute altitude : par exemple, le signal lié à l'aplatissement de la Terre ( $l = 2$ ) est très facilement détectable à partir des satellites. En revanche, les signaux correspondant à des échelles spatiales petites le sont beaucoup plus difficilement. C'est pour cette raison que la faible altitude des satellites GRACE en complément de leur durée de vie offre un avantage précieux par rapport à des suivis satellites par laser (*satellite laser ranging*) utilisés pour les missions LAGEOS plus adaptés pour les phénomènes associés à des degrés faibles [40].

### 1.5.3 Mission GOCE (Gravity Field and Steady-State Ocean Circulation Explorer)

Le défaut principal de toute mission spatiale est qu'aux altitudes des satellites, le champ gravitationnel est fortement atténué. Par conséquent, les effets de petits éléments ne sont pas discernables, d'où une résolution spatiale faible. Par ailleurs, à cause de cette atténuation, la propagation mathématique du potentiel estimé en utilisant des mesures bruitées, depuis l'altitude du satellite vers la surface de la Terre, conduit à une amplification importante des erreurs [41]. Un moyen de minimiser cet effet est de mesurer la dérivée seconde du potentiel gravitationnel à partir d'une altitude aussi faible que possible [41, 20], on parle alors de gradiométrie. La gradiométrie en soi n'est pas une technique nouvelle. En effet, le premier instrument

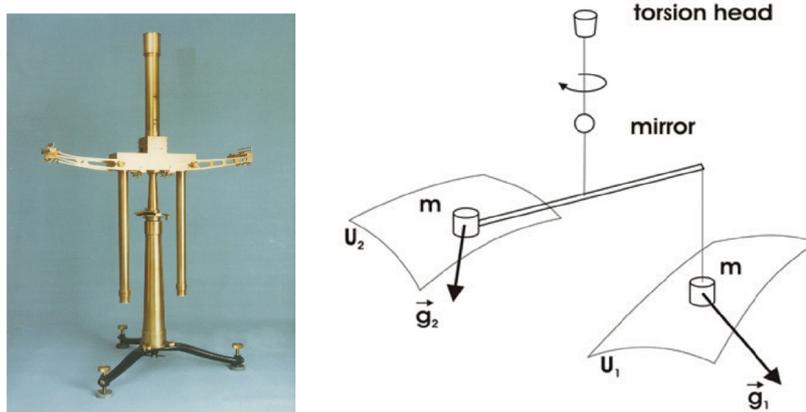


Figure 1.9 – Photographie du pendule d'Eötvös (gauche, source : [https://microscope.cnes.fr/fr/MICROSCOPE/Fr/pendule\\_a\\_torsion.htm](https://microscope.cnes.fr/fr/MICROSCOPE/Fr/pendule_a_torsion.htm)) et schéma du principe de fonctionnement (à droite, source : <http://www.tankonyvtar.hu/>).

destiné aux mesures des dérivées spatiales du champ de pesanteur et transportable en dehors d'un laboratoire a été mis au point par Lóránd Eötvös aux alentours de 1900. Basé sur l'expérience qu'Henry Cavendish a menée en 1798 pour déterminer la constante de gravitation, Eötvös propose une version améliorée du pendule de torsion. L'idée est d'estimer la différence d'accélération entre deux masses identiques rigidement liées à l'extrémité d'un bras mais à des positions différentes aussi bien horizontalement que verticalement. Le bras est lui-même suspendu par un fil fin. Étant donné que les deux masses ne subissent pas exactement la même attraction, le bras est soumis à un couple qui le fait tourner. Il était alors possible, grâce à une série de mesures, de déterminer quatre quantités dépendant des composantes du gradient de gravité, en particulier  $V_{yy} - V_{xx}$ ,  $V_{xy}$ ,  $V_{zz}$  et  $V_{yz}$  [42]. Bien que très performante pour l'époque (précision possible jusqu'à  $10^{-9} \text{ s}^{-2}$ ) [31], deux problèmes rendaient cependant cette technique peu commode : d'une part, il s'agissait d'une technique chronophage car plusieurs heures étaient nécessaires pour une séance de relevés. D'autre part, l'instrument était très sensible aux variations de masse dans sa proximité ce qui pouvait rendre impossible la distinction des effets provenant des masses en profondeur. Par conséquent, le pendule ne pouvait donc être utilisé que sur des terrains plats. Toutefois, le pendule de torsion a été intensivement utilisé dans la première partie du XX<sup>ème</sup> siècle pour la prospection minière jusqu'à ce que le gravimètre à ressort (plus robuste, plus rapide et plus maniable) et les méthodes d'étude sismique le remplacent.

C'est seulement à partir des années 1970 qu'aux États-Unis, Bell Aerospace (aujourd'hui Lockheed Martin) recommencent à investir intensivement dans le développement de système gradiométrique pour la navigation passive des sous-marins. Cette technologie permettait d'estimer toutes les composantes du gradient de gravité et de déduire par intégration le vecteur accélération, la vitesse et la position du sous-marin. Néanmoins, il était nécessaire d'enregistrer un modèle d'accélération de la pesanteur pour séparer l'effet dû à la gravitation

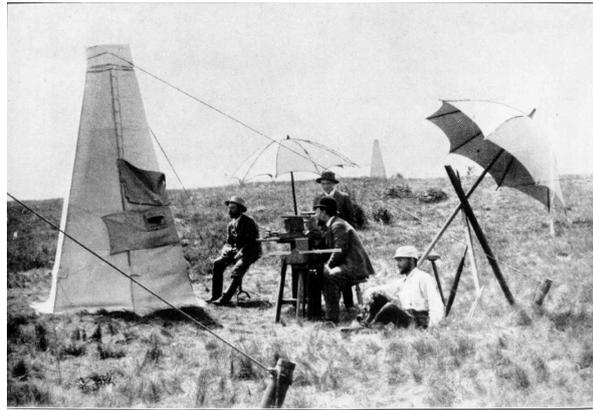


Figure 1.10 – Photographie d’une campagne de mesure en 1891, source : [http://www.elgi.hu/museum/elatud\\_.html](http://www.elgi.hu/museum/elatud_.html).

seule des autres. Cette technologie fut déclassifiée au milieu des années 1990 et commercialisée par Bell Aerospace pour la prospection minière, notamment en étant embarquée sur des plateformes aéroportées. Depuis cette époque, la gradiométrie a concentré une attention particulièrement importante pour améliorer la qualité des modèles du potentiel gravitationnel et les études des processus géodynamiques à grande échelle. Formulée dans les années 1980, l’idée de la gradiométrie spatiale était d’accéder à la mesures des petites longueurs d’onde du champ gravitationnel en plus d’une couverture globale et homogène. À cette époque, l’orbitographie et l’altimétrie avaient atteint des limites sur tous ces aspects car les modèles de géopotentiels développés à partir de ces techniques ne pouvaient caractériser les petites longueurs d’onde qu’avec une imprécision importante [43, 44]. C’est pourquoi une première mission de gradiométrie spatiale, GRADIO, avait été envisagée dans les années 1980 [45]. Celle-ci devait embarquer le modèle d’accéléromètre CACTUS (Capteur Accélérométrique Capacitif Triaxial Ultra Sensible) alors développé par l’ONERA (figure 1.11) et déjà lancé à bord du satellite CASTOR par le CNES en 1975 [46]. Il s’agissait du premier modèle d’accéléromètre électrostatique conçu par l’ONERA et utilisé pour des missions spatiales. À bord de CASTOR, l’accéléromètre CACTUS avait démontré sa performance : bien que l’accélération maximale admissible pour la mission était de  $10^{-4} \text{ m/s}^2$ , il avait été possible d’atteindre une résolution de  $10^{-10} \text{ m/s}^2$  en intégrant les mesures sur les 45 mois de durée de vie de la mission [45]. Le projet GRADIO fut jugé trop coûteux et abandonné en 1995, la même année où la mission CHAMP a été lancée.

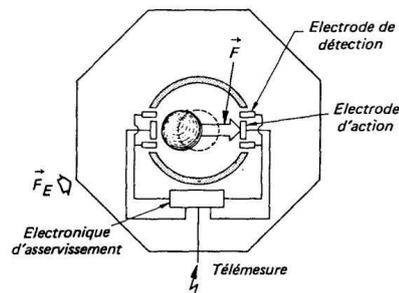


Figure 1.11 – Photographie des composants de l’accéléromètre CACTUS (à gauche) et Schéma du principe de fonctionnement d’un axe sensible (à droite), source : ONERA.

C’est avec la mission GOCE (acronyme de *Gravity and steady-state Ocean Circulation Explorer*) que la gradiométrie spatiale a franchi une étape importante [47]. Cette mission est la première d’un ambitieux pro-

## Chapter 1. Cadre général : de la gravimétrie à la gradiométrie

gramme d'observation terrestre à l'initiative de l'Agence Spatiale Européenne [48] et devait remplir les principaux objectifs suivants :

- déterminer les anomalies du champ de gravité avec une précision de 1 mGal (soit  $10^{-5} \text{ m/s}^2$ ) ;
- déterminer un modèle de géoïde avec une précision de 1 à 2 cm ;
- parvenir à ces deux premiers objectifs avec une résolution spatiale supérieure à 100 km.

Prévu pour une durée de vie initiale de 20 mois, le satellite GOCE (figure 1.12 et 1.14) a été lancé le 17 mars 2009 et est rentré dans l'atmosphère quatre années et huit mois plus tard, le 11 novembre 2013. La trajectoire du satellite suit une orbite héliosynchrone crépusculaire, quasi-circulaire, avec une inclinaison de  $96.7^\circ$ . La mission GOCE a été conçue de sorte à remplir tous les critères énoncés en début de la partie 1.5. En effet, la position du satellite a été continuellement localisée grâce aux systèmes GPS et GLONASS ainsi qu'avec un réseau dense de stations-sol. Par ailleurs, afin de limiter les effets de l'atténuation du champs de gravité, le satellite vole à une très basse altitude de 250 km (à titre de rappel, CHAMP volait à 454 km et GRACE à 500 km). En outre, en estimant la dérivée de l'accélération gravitationnelle (schéma de la figure 1.12, gauche), plutôt que la position (cas de CHAMP) ou la vitesse (cas de GRACE), il est possible de détecter l'effet de plus petites structures géologiques et donc d'atteindre une résolution spatiale supérieure.

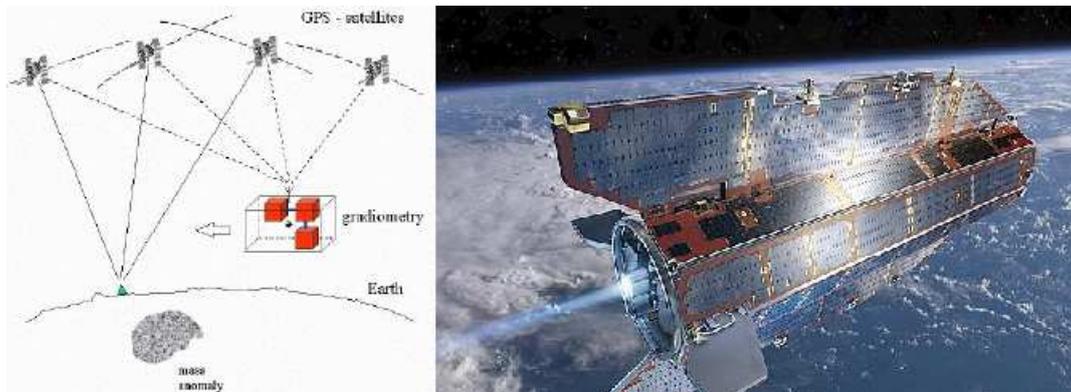


Figure 1.12 – Concept de gradiométrie spatiale (à gauche) et satellites GOCE (à droite), source : ESA.

L'une des deux principales prouesses technologiques est imposée par la très basse altitude de croisière donc par une traînée plus importante [49]. À cela s'ajoutent les forces non-gravitationnelles (comme la pression de radiation solaire, c'est-à-dire la force de pression exercée par le rayonnement électromagnétique du Soleil sur la surface illuminée du satellite) qui peuvent perturber le satellite et l'empêcher de suivre l'orbite prévue. À l'échelle de la précision de la mesure, ces perturbations sont très importantes et doivent être atténuées. Ainsi, d'une part, la surface du satellite exposée à la traînée est minimisée grâce à un profil aérodynamique symétrique avec deux ailerons : la section transversale représente une surface de  $1.1 \text{ m}^2$  pour une longueur de 5.3 m et une masse de 1000 kg. D'autre part, pour la première fois, un système de compensation de traînée permet de compenser continuellement la traînée que subit le satellite. Contrairement à un système de propulsion traditionnel qui corrige l'orbite du satellite ponctuellement lorsqu'un ajustement est nécessaire, dans le cas de GOCE, les accélérations subies par le satellite sont mesurées en continu et un système de propulsion ionique rectifie en permanence la trajectoire. Si ce système restait plus de huit jours sans fonctionner, le satellite serait irrémédiablement dévié de sa trajectoire. Ce système de compensation occupe donc une place vitale dans les sous-systèmes du satellite (voir figure 1.13). Historiquement, la compensation de traînée est apparue dans les années 1980 pour les satellites de navigation américains NOVA [50], à l'époque où les scientifiques réfléchissaient à une amélioration des performances du satellite CASTOR.

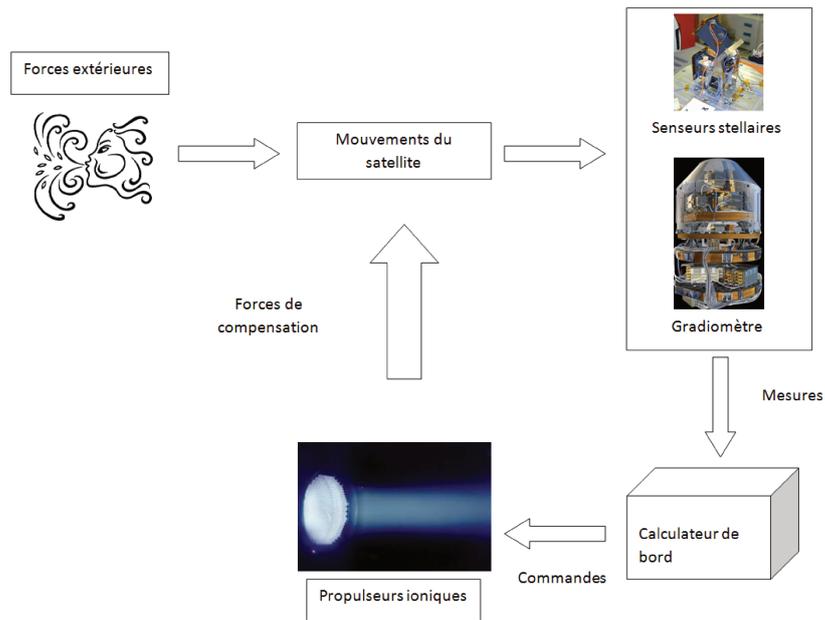


Figure 1.13 – Représentation de la boucle du système de contrôle d'orbite du satellite.

Durant les 20 mois nominaux de la durée de la mission, il y a eu deux saisons d'éclipse. Pendant l'éclipse la plus longue (135 jours avec des cycles allant jusqu'à 30 minutes), l'altitude du satellite doit être relevée pour garantir la sécurité du satellite. Pendant cette période, les observations scientifiques sont en suspens. En revanche, pendant l'éclipse courte (cycles de moins de 10 minutes), les campagnes d'observation ne sont pas interrompues. Notons enfin qu'afin de garantir une très grande stabilité du satellite, par exemple face aux variations de températures, la structure du satellite est essentiellement constituée de fibres de carbone renforcées et la charge utile du satellite est thermiquement isolée du reste.

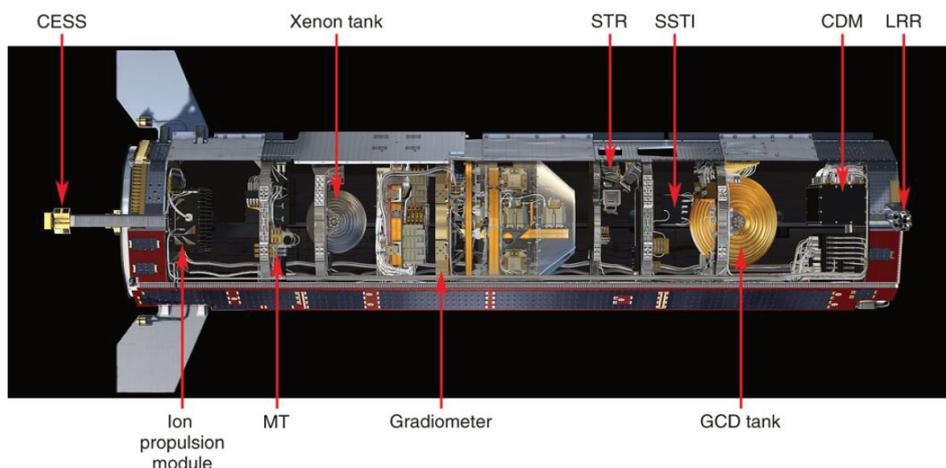


Figure 1.14 – Disposition des sous-systèmes de GOCE, source : ESA.

Outre le système de compensation de traînée, l'autre progrès majeur réalisé réside dans la conception de la charge utile qui est constituée de trois gradiomètres uniaxiaux (OAG pour *one-axis gradiometer*) disposés orthogonalement deux par deux pour former un gradiomètre tri-axial. Chaque bras est lui-même constitué

## Chapter 1. Cadre général : de la gravimétrie à la gradiométrie

de deux accéléromètres situés à une distance de 50 cm l'un de l'autre 1.15. Les trois bras coïncident en un point correspondant théoriquement au centre de masse du satellite. Cette disposition permet une mesure très précise des composantes du gradient de gravité dans trois directions données : dans la direction de vol, dans la direction radiale (pointant vers la Terre) et dans la direction transverse. En comparaison avec CHAMP et GRACE, GOCE est donc le premier satellite capable d'assurer seule des mesures de haute précision dans le domaine de la gradiométrie.

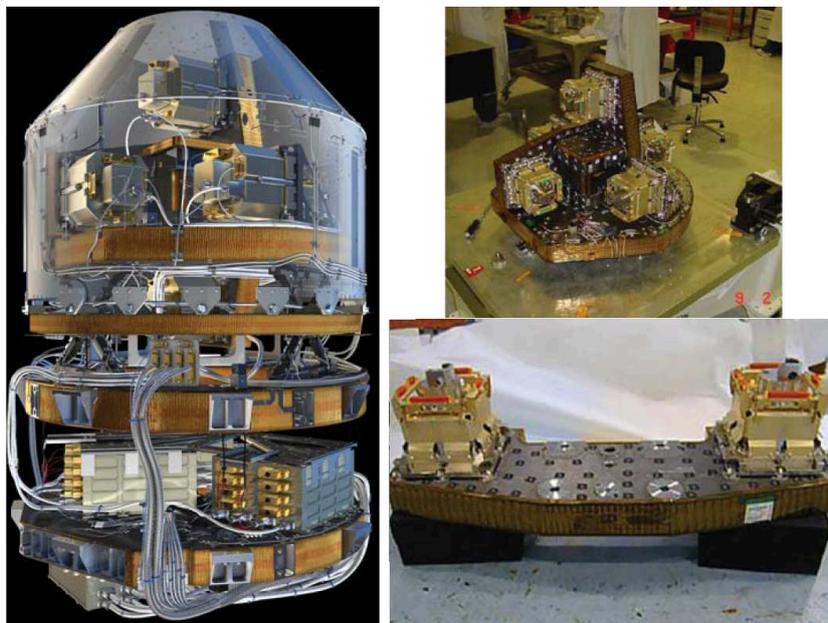


Figure 1.15 – Gradiomètre complet (à gauche), assemblage des trois paires d'accéléromètres (à droite en haut), exemple de bras (à droite en bas). Source : ESA.

Chaque accéléromètre de GOCE contient une masse d'épreuve parallélépipédique en Platine-Rhodium d'une dimension de 4 cm x 4 cm x 1 cm et d'une masse de 320 g. Celle-ci est placée au sein d'une cage formée de huit paires d'électrodes sur lesquelles des tensions sont appliquées (cf. la figure 1.16). Le principe est de créer une suspension à l'aide des forces électrostatiques qui contrôlent la position de la masse d'épreuve, le but étant de la maintenir immobile par rapport au centre de la cage. À cette fin, en tout quatre paires d'électrodes sont situées en regard des tranches du parallélépipède (ce sont les électrodes  $Y$  et  $Z$ ) et quatre en regard des deux « grandes » faces (ce sont les électrodes  $X$ ). Ces électrodes permettent de contrôler tous les degrés de liberté, en translation et en rotation. Les déplacements en translation contrôlés par les électrodes  $Y$  et  $Z$  définissent les axes sensibles, alors que ceux pris en charge par les électrodes  $X$  correspondent à l'axe non-sensible (cf. le chapitre 2).

Le progrès effectué grâce à la mission GOCE se mesure non seulement par la configuration de la charge utile mais aussi par la précision visée et imposée par les objectifs de la mission. C'est pourquoi le niveau de bruit dans la mesure des accélérations est d'importance capitale. Dans le cas de GOCE, la densité spectrale du bruit est de l'ordre de  $10^{-12} \text{ m/s}^2 / \sqrt{\text{Hz}}$  pour les axes sensibles dans la bande de mesure entre 5 mHz et 100 mHz [51]. Les accéléromètres de GOCE s'inscrivent dans la lignée de ses prédécesseurs mais bien que similaires dans la conception, leurs performances sont nettement supérieures. La génération d'accéléromètres (appelés STAR) à bord de la mission CHAMP mesurait les accélérations des masses d'épreuve avec un niveau de bruit de  $3 \times 10^{-9} \text{ m/s}^2 / \sqrt{\text{Hz}}$  sur les axes sensibles et de  $3 \times 10^{-8} \text{ m/s}^2 / \sqrt{\text{Hz}}$  sur l'axe moins sensible [52]. La génération suivante d'accéléromètres (appelés SuperSTAR) embarqués à bord de GRACE présentaient un niveau de bruit

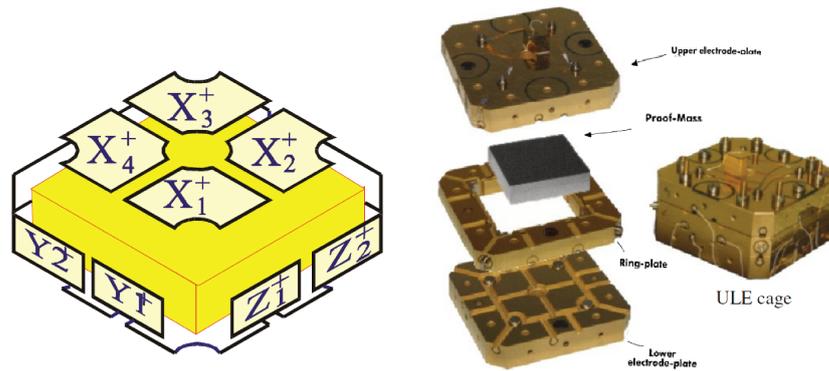


Figure 1.16 – Configuration des électrodes.

dix fois inférieur aux accéléromètres STAR avec une résolution de  $10^{-10} \text{ m/s}^2/\sqrt{\text{Hz}}$  [52].

#### 1.5.4 Héritage de CHAMP, GRACE et GOCE pour les missions d'accélérométrie spatiale

Le succès des trois premières missions dédiées à l'accélérométrie spatiale ont contribué à la maturité en niveau technologique de la technologie des accéléromètres électrostatiques ultrasensibles. Les nombreuses applications en géophysique qui ont été permises, dont quelques unes concernant la mission GOCE sont présentées dans la partie suivante, ont démontré l'intérêt scientifique, la qualité et la fiabilité de ces instruments. Fondées sur ces succès, d'autres missions spatiales auxquelles participent l'ONERA sont à l'étude, en cours de préparation ou viennent d'être lancées. L'objectif de cette partie est d'en présenter deux en phase de préparation (GRACE-FO et NGGM) et une qui vient d'être lancée (MICROSCOPE).

La mission GOCE a permis d'établir le champ gravitationnel statique avec une haute précision alors que la mission GRACE a permis d'étudier le champ gravitationnel sur une longue période mais avec une résolution spatiale moindre. Afin de perfectionner davantage la connaissance sur les phénomènes de transport de masses au sein de la Terre, l'ESA étudie depuis 2003, et surtout depuis le lancement de la mission GOCE, les concepts de futures missions dédiées à la gravité : *Next Generation Gravity Mission*. L'objectif premier est l'étude du champ gravitationnel variable sur une longue période (jusqu'à 11 ans) avec une haute résolution spatiale et temporelle [53]. Si l'on se réfère à la figure 1.20, une mission NGGM consiste à combiner les performances des missions GRACE et GOCE afin d'obtenir une mission dont les résolutions spatiale et temporelle atteignent au moins les limites définies par les lignes rouges. Toutefois, la recherche d'une haute résolution spatiale (imposant une orbite dont la période de répétition est plutôt longue) entre en contradiction avec la recherche d'une haute résolution temporelle (imposant au contraire une période de répétition courte, pour davantage de répétitions pendant la mission). Ainsi, l'arbitrage entre les deux types de résolution est une opération délicate qui est jugée à la lueur des phénomènes ciblés.

Plusieurs autres types d'arbitrage sont à prendre en compte dans l'étude d'une mission comme NGGM. Par exemple, comme pour les missions GRACE et GOCE, un satellite à haute altitude autorise une durée de mission plus longue car il est moins difficile de le maintenir en orbite (cf. le système de compensation de traînée pour GOCE). Il est donc possible d'observer l'évolution du champ gravitationnel plus longtemps. En revanche, comme on l'a vu, un signal gravitationnel associé à un degré harmonique  $l$  est atténué à une altitude  $h$  par un facteur  $[R_t/(R_t + h)]^{(l+2)}$ . Étant donné que la longueur d'onde spatiale est donnée par  $\lambda = 20000/l$ , cela signifie que les phénomènes associés à de courtes longueurs d'onde sont atténués plus vite. Ainsi, un satellite à trop haute altitude ne pourrait remplir la spécification requise en termes de résolution spatiale. Pour une résolution spatiale donnée, un satellite à haute altitude devrait alors avoir un système de mesure

## Chapter 1. Cadre général : de la gravimétrie à la gradiométrie

Degré	150	200	250
Erreur cumulée [mm]	0.1	1	10

Table 1.1 – Spécification de l’erreur cumulée de la hauteur du géoïde en fonction du degré du développement en harmoniques sphériques [53].

beaucoup plus performant qu’un satellite à basse altitude. Cet arbitrage est également valable pour la mission GOCE. Un autre type d’arbitrage concerne la précision des modèles de gravité estimés à partir des données d’une mission. À une orbite donnée est associé un échantillonnage spatio-temporel des phénomènes physiques donné. Ceci a pour conséquence d’introduire un effet de repliement dû au sous-échantillonnage de certains phénomènes physiques. Une solution est d’introduire davantage de satellites sur la même orbite et/ou sur des orbites complémentaires, ce qui a pour effet d’augmenter le coût et les risques de la mission.

Le champ variable est particulièrement intéressant dans le cadre de l’observation du changement climatique de la Terre : le changement de la masse de la couche de glace (inlandsis) de l’Antartique ou du Groenland ou encore la variation des nappes phréatiques sont des phénomènes dont l’étude demande des données accumulées sur une longue période. Les domaines de la géophysique visés par la mission NGGM en priorité sont l’étude de la fonte de la couche glacière, de la variation saisonnière du niveau des océans, du niveau des réserves d’eau continentale et des déformations post-sismiques. Convertit en termes de variation de hauteur du géoïde, l’amplitude des signaux associés à ces phénomènes sont respectivement 0.01-1 mm/an, 0.1 mm/an, 0.05-1 cm/an et 1 mm/an [53]. Le tableau 1.1 indique la précision nécessaire dans l’estimation de la variation de la hauteur du géoïde (quantifiée par l’erreur cumulée) en fonction du degré du développement en harmoniques sphériques, ou de manière équivalente en termes de longueur d’onde spatiale, et déterminée par l’étude préliminaire de l’ESA. La prise en compte des domaines visés et des divers arbitrages pour atteindre les précisions recherchées ont mené au choix d’un concept combinant le suivi de satellite-à-satellite de type GRACE avec une/des paire(s) de satellites (*low-low satellite tracking*) et de l’utilisation de la gradiométrie type GOCE. Par ailleurs, d’une part, la fonte des glaces est associée à des latitudes élevées et donc impose une orbite quasi-polaire. D’autre part, afin de minimiser le repliement de spectre, il est souhaitable que l’orbite adopte au contraire une configuration plutôt équatoriale. Cet arbitrage a mené à l’étude de quatre concept dont la formation Bender (cf. la figure 1.17) : une paire de satellite suit une orbite quasi-polaire d’inclinaison  $90^\circ$  et une autre suit une orbite avec une inclinaison moindre de  $63^\circ$ . Cette formation est efficace en terme d’erreur et d’homogénéité dans les modèles estimés de potentiel gravitationnel.

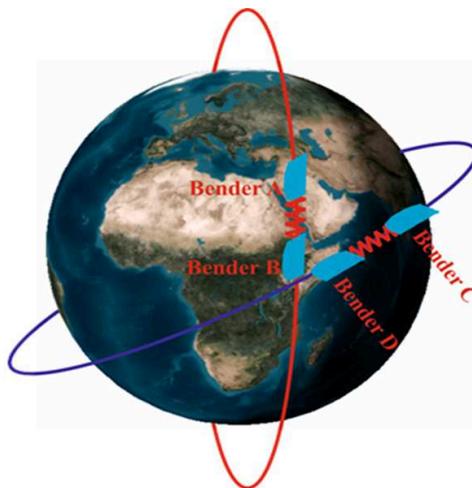


Figure 1.17 – Illustration du concept de mission avec une formation de type Bender [54].

Degré de liberté	Niveau de bruit en $m/s^2/\sqrt{Hz}$ dans l'intervall [1-100] mHz
Accélération linéaire dans la direction de vol	$1.5 \cdot 10^{-12}$
Accélération linéaire dans les directions transverses	$5 \cdot 10^{-12}$
Accélération angulaire autour de la direction de vol	$10^{-10}$
Accélération angulaire autour des directions transverses	$10^{-9}$

Table 1.2 – Spécification du niveau de bruit des accéléromètres dans la bande de mesure.

L'amplitude des signaux liés au champ variable étant faible, les niveaux de bruit des accéléromètres spécifiés sont proches de ceux spécifiés pour la mission GOCE (cf. tableau 1.2).

En parallèle de l'étude menée par l'ESA sur la mission NGGM, la NASA a entrepris un projet de succession de la mission GRACE, nommé GRACE Follow-on (GRACE-FO), en partenariat avec le centre de recherche allemand pour les géosciences (GFZ) pour laquelle l'ONERA a fourni les accéléromètres qui ont été livrés à la NASA. Cette mission, dont le lancement est prévue pour 2017, est également destinée à l'étude du champ variable et permettra de prolonger les données déjà acquises pendant ces 14 premières années de la mission GRACE. Comme, il a été détaillé ci-dessus pour la mission NGGM, pour pouvoir étudier les phénomènes liés au champ variable, il est nécessaire d'acquérir les données sur une longue période. La mission GRACE-FO permettra donc de prendre le relais de la mission GRACE avant le lancement d'une mission NGGM. La configuration de la mission GRACE-FO est quasi-identique à son prédécesseur mais inclut en plus un système de suivi de satellite-à-satellite par laser. En ce qui concerne la performance des accéléromètres, les spécifications imposent pour les axes sensibles (axes  $Y$  et  $Z$ ), un niveau de bruit maximal de  $10^{-10} m/s^2/\sqrt{Hz}$  entre 5 mHz et 0.5 Hz. Pour l'axe moins sensible, le niveau de bruit maximal dans l'intervall [0.1-0.5] Hz est fixé à  $10^{-9} m/s^2/\sqrt{Hz}$  [55].

Les missions présentées jusqu'à présent ont pour point commun l'utilisation d'accéléromètres électrostatiques ultrasensibles de forme parallélépipédique. Une autre configuration fonctionne actuellement dans le satellite MICROSCOPE (cf. figure 1.18, à droite). Cette mission est issue d'un partenariat CNES/ONERA, a été lancée en avril 2016 et a pour objectif de tester le Principe d'Équivalence faible de la théorie de la Relativité Générale avec une précision de  $10^{-15}$  [56, 57]. Ce principe stipule que la masse inertielle d'un corps est identique à sa masse gravitationnelle. Galilée a été le premier à tester un des corollaires au début du XVI<sup>ème</sup> siècle en lâchant deux corps depuis la tour de Pise : d'après ce corollaire, deux corps soumis à un même champ gravitationnel sont soumis à la même accélération, quelle que soit leur masse. Depuis, d'autres expériences ont eu lieu [58, 59, 60] mais la théorie a démontré qu'il est possible d'atteindre une précision inégalée grâce à la mission MICROSCOPE. Le coeur du satellite est constitué de deux accéléromètres cylindriques (cf. figure 1.18, au centre et à droite). Chaque accéléromètre comporte deux masses d'épreuve concentriques et coaxiales (masse interne et masse externe), ce qui permet de faire en sorte qu'elles soient soumises aux mêmes accélérations. Chaque masse d'épreuve d'un accéléromètre est entourée de six paires d'électrodes de contrôle sur l'axe sensible. Contrairement aux accéléromètres de la mission GOCE, la détection capacitive ne se fait pas par variation d'entrefer (cf. chapitre 3) mais par variation de recouvrement de surface. Néanmoins, le principe de l'asservissement est le même que les missions précédentes : maintenir les masses d'épreuve immobiles par rapport à la cage d'électrodes.

Un des deux accéléromètres sert de test (SU-EP) alors que l'autre sert de référence (SU-REF) et dont le rôle est de tester l'exactitude de l'expérience. Pour le SU-EP, les deux masses sont de matériaux différents (titane et platine-rhodium) alors que les deux masses du SU-REF sont toutes les deux en platine-rhodium. Afin de faire l'expérience en chute libre, le satellite est équipé d'un système de compensation de traînée selon les trois directions de l'espace, ce qui permet au satellite et aux masses d'épreuve d'être dans un environnement de chute libre quasi-parfaite. En comparaison, GOCE n'avait qu'une compensation de la traînée selon l'axe de vol uniquement. Dans le cas de MICROSCOPE, en réalisant des sessions de plusieurs orbites, il est possible



Figure 1.18 – Vue d’artiste du satellite MICROSCOPE (à gauche), photographie des accéléromètres (au centre), vue en coupe des accéléromètres (à droite). Source : CNES et ONERA.

d’étudier la chute des accéléromètres sur une longue durée : si le Principe d’Équivalence n’est pas vérifié, les accélérations des deux masses d’épreuves seront différentes dans le domaine spectral à une fréquence bien précise, en l’occurrence à  $1.6 \times 10^{-4}$  Hz. À l’altitude du satellite, 720 km, et sur une orbite quasi-circulaire, détecter une violation du Principe d’Équivalence avec une précision de  $10^{-15}$  est équivalent à détecter une accélération différentielle de l’ordre de  $8 \times 10^{-15} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$  [61]. Analytiquement, la différence d’accélération recherchée entre les deux masses d’épreuves s’écrit [57] :

$$\Delta \Gamma = \Gamma_1 - \Gamma_2 = \delta_{12} \mathbf{g} + [T] \Delta_{cyl} \quad (1.14)$$

où  $\Delta_{cyl}$  est le vecteur défini par le centre géométrique des deux masses d’épreuve cylindriques,  $\mathbf{g}$  est l’accélération gravitationnelle,  $[T]$  le tenseur de gradient de gravité (cf. la partie 1.6.5 et le chapitre 3). La grandeur  $\delta_{12}$  est le paramètre d’Eötvös qui quantifie la différence entre la masse inertielle  $m_i$  et masse la masse gravitationnelle  $m_g$  entre les deux masses d’épreuve 1 et 2 :

$$\delta_{12} = \frac{m_{g1}}{m_{i1}} - \frac{m_{g2}}{m_{i2}} \quad (1.15)$$

La précision recherchée pour la mission MICROSCOPE impose une mesure accélérométrique aussi peu bruitée que possible. L’architecture électronique des boucles d’asservissement des masses d’épreuve a été étudiée pour que le bruit des accéléromètres ne dépassent pas  $1.36 \times 10^{-12} \text{ m/s}^2 / \sqrt{\text{Hz}}$  [57].

## 1.6 Domaines d’application de la mission GOCE

Dans la partie précédente, l’intérêt de l’accélérométrie électrostatique spatiale a été présentée à travers l’exemple et le succès de plusieurs missions spatiales. Le travail présenté dans le cadre de ce mémoire concernant la mission GOCE, on procède, dans cette partie, à l’illustration de la contribution de cette mission à plusieurs domaines de la géophysique.

La figure 1.19 dresse une liste des domaines d’application des données collectées dans la mission GOCE ainsi que la précision en termes de hauteur du géoïde et d’anomalie de gravité nécessaire pour satisfaire les attentes de la communauté scientifique. La dernière colonne indique la résolution spatiale correspondante. C’est à partir de ces spécifications que les objectifs principaux de la mission ont été définis. Il apparaît ainsi que la communauté scientifique intéressée par les données GOCE est large et que leurs attentes étaient importantes au moment du lancement de la mission.

Une comparaison alternative est présentée dans la figure 1.20 : les phénomènes géophysiques ont des caractéristiques temporelles et spatiales très différentes. Par exemple, les transports de masses dans l’atmosphère

## 1.6. Domaines d'application de la mission GOCE

Application	Accuracy		Spatial Resolution (half wavelength - $D$ ) [km]
	Geoid [cm]	Gravity [mgal]	
Solid Earth — Lithosphere and upper-mantle density structure		1-2	100
— Continental lithosphere: • sedimentary basins		1-2	50-100
• rifts		1-2	20-100
• tectonic motions		1-2	100-500
• Seismic hazards		1	100
Ocean lithosphere and interaction with asthenosphere		0.5-1	100-200
Oceanography — Short-scale	1-2		100
— Basin scale	0.2 ~ 0.1		200 1000
Ice Sheets — Rock basement		1-5	50-100
— Ice vertical movements	2		100-1000
Geodesy — Levelling by GPS	1		100-1000
— Unification of worldwide height systems	1		100-20000
— Inertial Navigation System		-1-5	100-1000
— Orbits *	-1-3		100-1000
Sea-level Change	Many of the above applications, with their specific requirements, are relevant to studies of sea-level		

Figure 1.19 – Précision attendue en fonction du domaine d'application [62].

peuvent avoir lieu sur une large échelle spatiale mais sur une période s'étendant seulement de quelques heures à une année. Au contraire, les transports de masses liés aux structures géologiques sont beaucoup plus lents, entre quelques années jusqu'à quelques siècles. Les phénomènes détectables par les missions GRACE, CHAMP et GOCE sont classés par rapport à leur résolution spatiale et temporelle. Ce schéma révèle d'abord qu'il y a des domaines d'applications communs aux trois satellites. Il montre ensuite que les missions CHAMP et GRACE permettent, grâce à leur durée, d'obtenir des informations sur les variations au-delà du mensuel, ce qui correspond à la masse de la calotte glaciaire ou aux variations du niveau des océans. GOCE ne peut en théorie qu'apporter des informations statiques et séculaires. En revanche, il dépasse les deux autres satellites en termes de résolution spatiale et couvre ainsi un plus grand domaine d'applications dont les variations sont plus lentes que le siècle.

Quelques exemples de contributions de la mission GOCE en gravimétrie, en géodésie, en océanographie et en géologie sont présentés. Le cadre de ce mémoire est trop restreint pour prétendre à un constat représentatif et exhaustif de toutes les applications des données GOCE. La richesse de ce domaine de la recherche est illustrée par les travaux présentés par exemple au colloque *5th GOCE user workshop* organisé à Paris fin Novembre 2014 et au *Living Planet Symposium* qui s'est déroulé à Prague en mai 2016. Néanmoins on peut citer quelques études sélectionnées à partir de la synthèse présentée par Van der Meijde *et al.* (2015) [12].

### 1.6.1 Applications en gravimétrie

Dans cette partie, on présente l'un des produits principaux de la mission GOCE : les modèles de champs de gravité. De nombreux modèles de champ de gravité ont été proposés depuis le lancement de la mission. On peut les classer selon deux grandes catégories :

- les modèles obtenus uniquement à partir des données de la mission GOCE ;
- les modèles combinant les données de la mission GOCE avec d'autres informations.

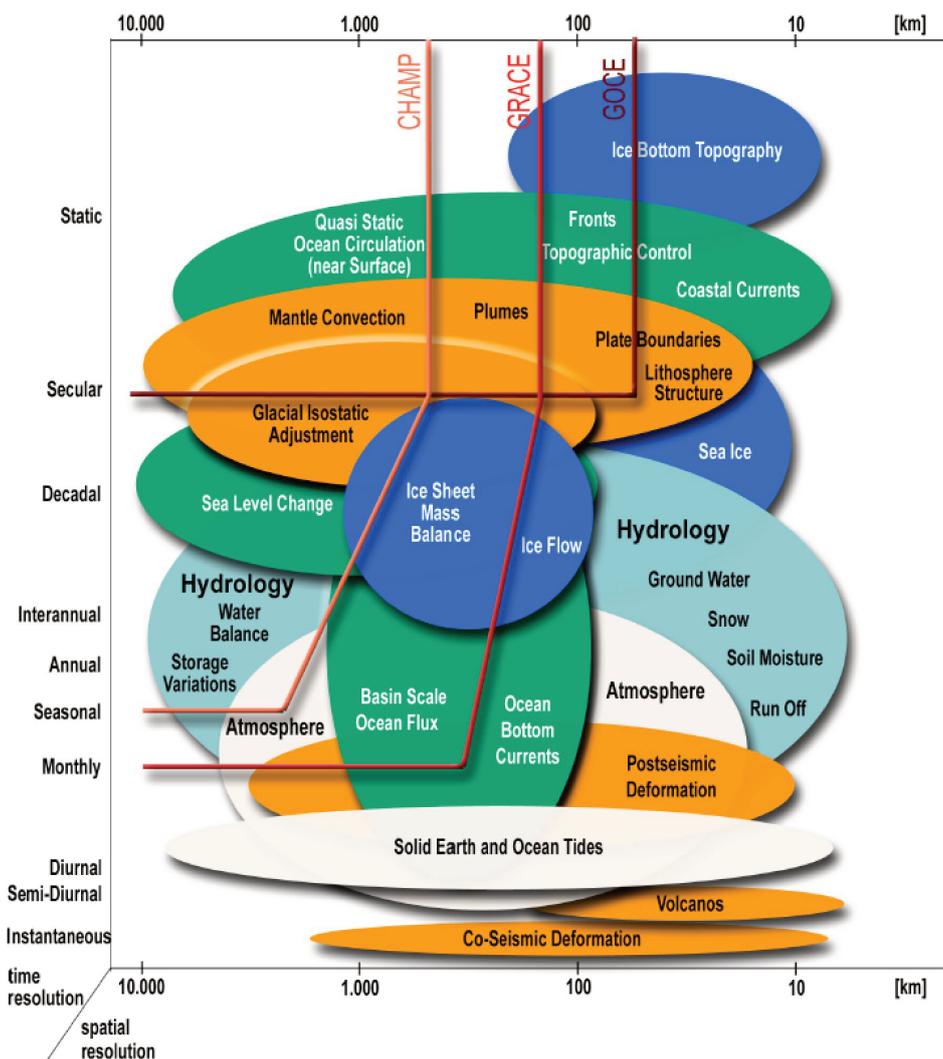


Figure 1.20 – Performance des missions CHAMP, GRACE et GOCE en termes de résolutions spatiale et temporelle, source : ESA.

Dans la première catégorie, on peut citer deux des trois modèles officiels obtenus grâce au projet HPF (*High-level Processing Facility*), financé par l'ESA [63]. Il s'agit des séries de modèles TIM (*time-wise*, [24]) et SPW (*space-wise*, [64]) ainsi que le modèle ITG-Goce02 [65].

Par exemple, le modèle EGM\_TIM\_RL05 est la dernière en date de la série TIM. Basé sur 1270 jours de données et disponible jusqu'à l'ordre et au degré 200, il atteint une précision de 2.4 cm en termes de hauteur du géoïde et de 0.7 mGal en termes d'anomalie de gravité. La figure 1.21 (à gauche) présente une comparaison dans le domaine spatial entre le dernier modèle TIM en date (EGM\_TIM\_RL05) et le modèle EGM2008 en termes de différences de hauteur de géoïde calculées à partir du développement en harmoniques sphériques jusqu'à l'ordre et au degré 200 [66]. Les deux modèles diffèrent principalement au niveau des continents dont l'origine est supposée être l'erreur systématique du modèle EGM2008 [67]. Au niveau des zones côtières ou des zones océaniques avec de forts courants par exemple, la topographie est accidentée et le modèle EGM\_TIM\_RL05 apporte une nette amélioration par rapport au modèle EGM2008 qui intègre des données altimétriques de moins bonne qualité dans ces zones. Ce résultat est justement l'une des avancées recherchées

lors l'élaboration de la mission GOCE. En revanche, dans certaines zones océaniques où la topographie est lisse (par exemple dans le Pacifique Sud), Brockman *et al.* [66] font l'hypothèse que le modèle EGM2008 est précis grâce à l'accumulation de plusieurs décennies de mesures. Une comparaison ciblée sur ces zones montrent que le modèle EGM\_TIM\_RL05 est moins performant. La figure 1.21 (à droite) présente la comparaison entre EGM\_TIM\_RL05 et l'EGM2008 en termes d'erreurs données par la variance moyenne des coefficients en fonction du degré (courbes en pointillées bleue et noire) :  $\sigma(n)^2 = \sum_{m=0}^n (C_{nm}^2 + S_{nm}^2)$ . Il apparaît que jusqu'au degré 200 environ, le modèle EGM\_TIM\_RL05 est plus précis que l'EGM2008.

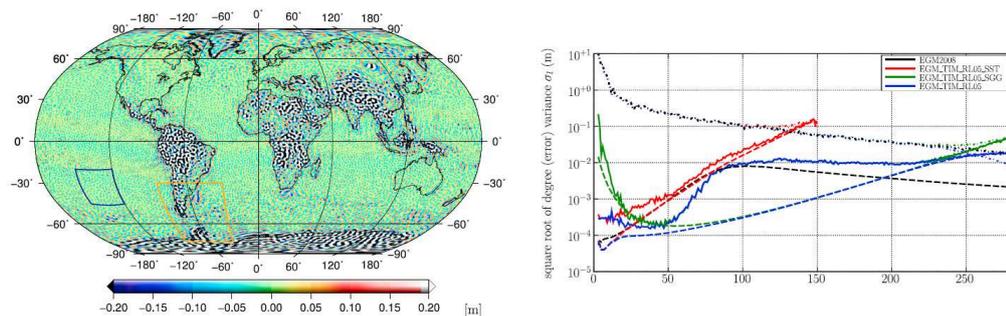


Figure 1.21 – Comparaison du modèle EGM\_TIM\_RL05 avec l'EGM2008 en termes de hauteur de géoïde (à gauche) et d'erreurs (à droite) [66].

Dans la seconde catégorie, on peut inclure :

- la troisième série de modèles officiel de l'ESA (modèle DIR pour *direct approach*) dont l'approche consiste à améliorer un modèle *a priori* en incluant des données GOCE [24] ;
- la série de modèles GOCO-S basées uniquement sur des données des satellites GOCE, GRACE, CHAMP et des données SLR (*satellite laser ranging*) [68] ;
- la série de modèles GOCO-C qui inclue en plus des données satellites, des données obtenues par des mesures terrestres ;
- un modèle combinant uniquement les données GRACE/GOCE [69].

Les données destinées à l'estimation du champ gravitationnel étant obtenues avec des techniques différentes, souvent complémentaires, leurs combinaisons permettent de tirer parti des avantages respectifs. Par exemple, la figure 1.22 (à gauche) montre la performance moyenne des techniques terrestres et des missions GRACE et GOCE en termes d'erreur dans le signal de gravité. Il apparaît que pour les faibles degrés du développement en harmoniques sphériques (entre 100 et 120), la mission GRACE est plus performante que la mission GOCE. Entre les degrés 120 et 200, la mission GOCE apporte une connaissance plus précise et enfin pour les degrés plus élevés, les mesures terrestres surpassent celles de GOCE. En effet, plus on considère la partie du signal gravitationnel correspondant aux degrés élevés, plus la topographie joue un rôle prépondérant. La courbe noire de la figure 1.22 montre la performance d'un modèle combiné. Il en existe plusieurs (GOCO01S à GOCO05S, EIGEN-6S, EIGEN-6C ou TUM2013C). La figure 1.22 (à droite) montre l'exemple des anomalies de gravité correspondant au modèle GOCO05S. Néanmoins, la résolution spatiale atteinte par ces modèles, entre 10 et 20 km, n'est pas suffisante pour des applications dans le domaine de l'ingénierie. Hirt *et al.* [70] proposent un modèle encore plus fin, en combinant GRACE, GOCE, EGM2008 et les données obtenues par une mission de topographie et atteignent une résolution d'environ 200 m.

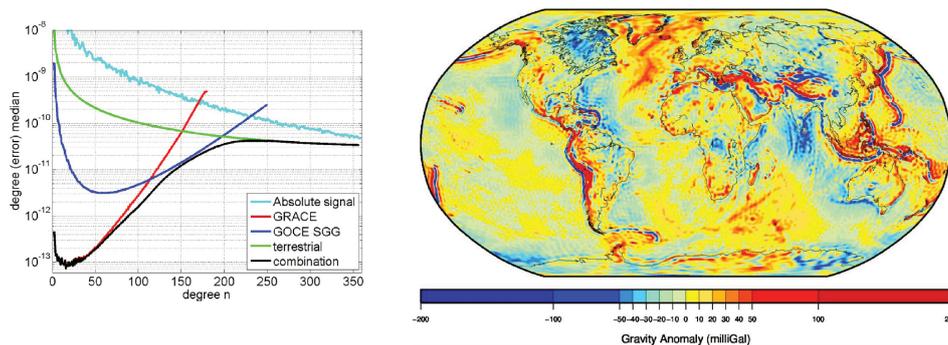


Figure 1.22 – Erreurs moyennes individuelles dans le signal de gravité [12] (à gauche) et carte de l’anomalie de gravité du modèle GOCO05S [70] (à droite).

### 1.6.2 Applications en géodésie

On cite deux applications remarquables dans le domaine de la géodésie. La première application est l’unification des systèmes altimétriques. Un type de système précis et global permet des contributions importantes dans l’étude des courants océaniques et du niveau de la mer ou alors dans les constructions à grande échelle. Jusqu’au lancement de la mission GOCE, le système altimétrique était hétérogène : en général, chaque pays détermine une référence par rapport au niveau moyen de la mer la plus proche ou alors d’un grand lac. Par exemple, en France, la référence est située à Marseille et en Espagne à Alicante. Or, le niveau moyen de la mer n’est pas uniforme sur l’ensemble de la planète avec des écarts pouvant atteindre plusieurs décimètres, ce qui conduit à des systèmes différents. La figure 1.23, établie par la *European Vertical Reference System*, illustre cette situation en Europe. Le code couleur correspond aux différents lieux utilisés comme référence par le pays en question et les chiffres montrent l’écart en cm par rapport à l’EVRS2007 un système altimétrique de référence utilisé en Europe et proposé en 2007. À partir des données GOCE, il est possible d’évaluer la hauteur du géoïde  $N$  de manière uniforme. Par ailleurs, la technique de nivellement avec les satellites GNSS permet d’accéder à la connaissance uniforme de la hauteur  $h$  d’un point à la surface de la Terre par rapport à l’ellipsoïde. Il est alors possible d’estimer la hauteur orthométrique  $H$  grâce à la relation :  $H = h - N$ .

La deuxième application est une conséquence de la première : une modélisation du champs de gravité précise permet d’améliorer la connaissance de la perturbation de l’orbite d’un satellite que le champ engendre.

### 1.6.3 Applications en océanographie

La connaissance du géoïde a des applications directes en océanographie. Par définition, le géoïde coïncide avec la surface d’équilibre des océans lorsque ceux-ci sont au repos. La surface réelle dévie du géoïde d’environ 1 m à cause, entre autres, des courants, marées ou vents. La distance verticale séparant la surface des océans du géoïde est appelée la topographie dynamique. La valeur moyenne de la topographie  $\bar{\eta}$  est reliée à la hauteur du géoïde et à la hauteur moyenne de la surface des océans par rapport à l’ellipsoïde, notée  $\bar{h}$  grâce à la relation  $\bar{\eta} = \bar{h} - N$ . La hauteur ellipsoïdale moyenne peut être déterminée par altimétrie satellite en s’appuyant sur la répétition des orbites. La figure 1.24 représente une carte de la topographie moyenne obtenue à l’Université Technique du Danemark (DTU) à partir des modèles du potentiel de gravité estimés avec les données de la mission GOCE. On y distingue les courants bien connus (le Gulf Stream ou l’Aguroshio).

La connaissance de la topographie dynamique moyenne est primordiale pour l’étude des courants géostrophiques par exemple. Ces courants résultent de l’équilibre entre la force de Coriolis et la force de pression horizontale. Dans ces zones, à cause de l’équilibre des deux forces, l’eau ne coule pas des zones de fortes

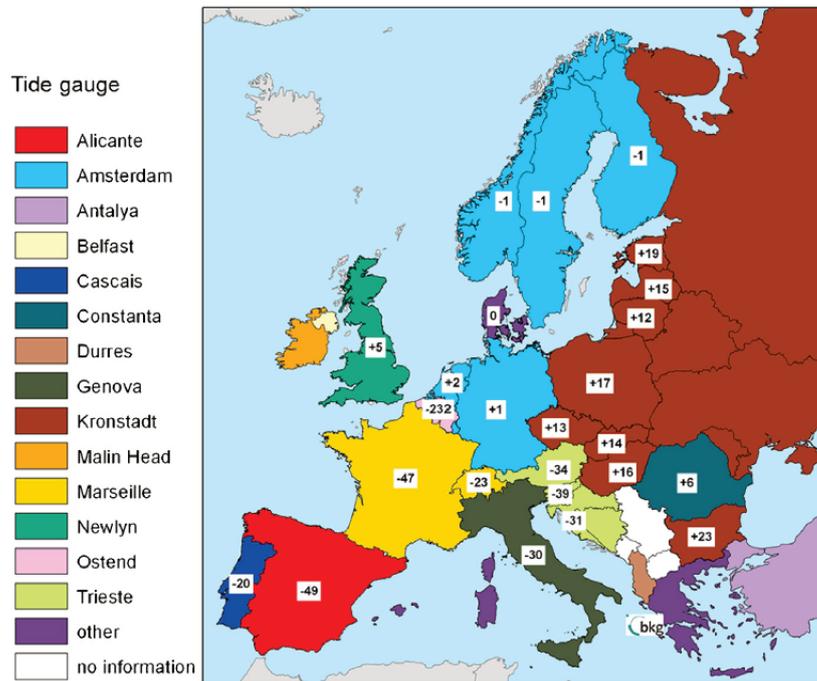


Figure 1.23 – Écart des systèmes altimétriques nationaux en cm par rapport à l'EVRF2007.

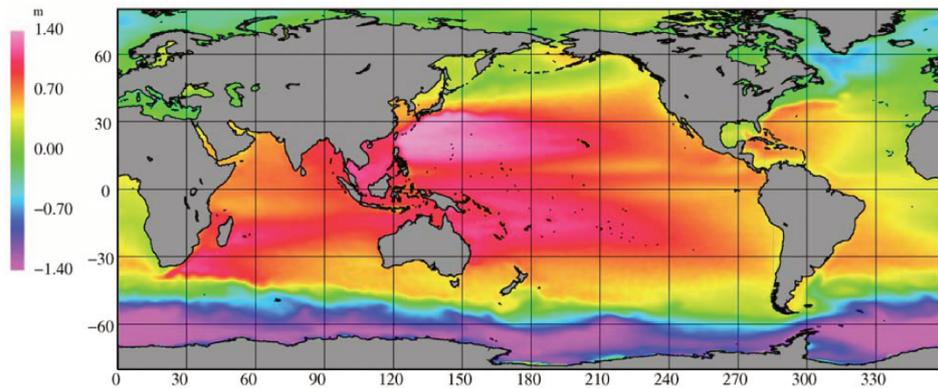


Figure 1.24 – Topographie moyenne des océans obtenue à partir des données GOCE.

pressions vers les zones de faibles pression mais le long d'isobars. Le mouvement en soi est dû à la rotation de la Terre. En première approximation, les courants océaniques permanents tels que le Gulf Stream ou les Grands Courants Équatoriaux sont en équilibre géophysique. Le vecteur vitesse est relié à la topographie moyenne selon les relations [71] :

$$u = -\frac{\gamma}{fR} \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial \phi} \quad \text{et} \quad v = \frac{\gamma}{fR \cos \phi} \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial \lambda} \quad (1.16)$$

où  $f = 2\omega_e \sin \phi$  est la force de Coriolis,  $\omega_e$  la vitesse angulaire de rotation de la Terre,  $R$  est le rayon moyenne,  $\phi$  la latitude,  $\lambda$  la longitude, et  $\gamma$  est la pesanteur normale (le gradient du potentiel associé à l'ellipsoïde de référence). Grâce à la performance de la mission GOCE, Knusden et Andersen [71] ont montré que les modèles pré-GOCE ont pu être affinés et qu'il est possible de distinguer des courants de vitesse supérieure à 5 cm/s. La

figure 1.25 montre la vitesse des courants géostrophiques qu'ils ont obtenue.

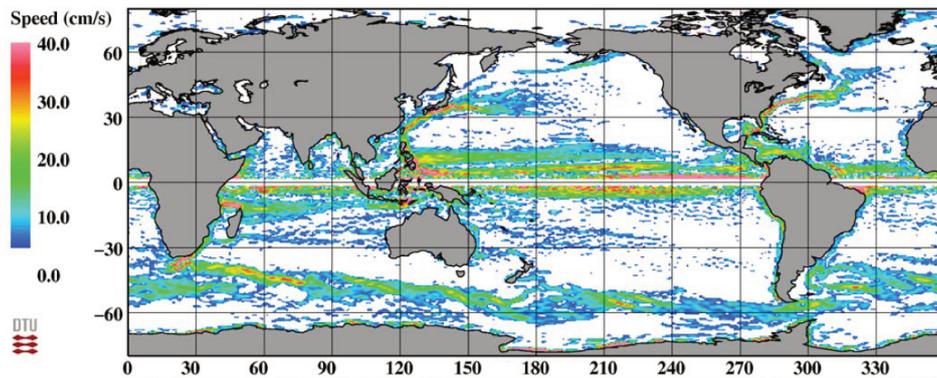


Figure 1.25 – Estimation de la vitesse des courants géostrophiques calculés à partir des données GOCE.

### 1.6.4 Application en géologie

Enfin, est citée une application dans le domaine de la géologie qui a été l'objet d'une attention particulière : il s'agit de l'estimation de la discontinuité de Mohorovičić ou Moho. Cette discontinuité est caractérisée par une augmentation brusque de la vitesse des ondes sismiques (plus faible au-dessus, plus élevée en-dessous) et marque la limite entre la croûte terrestre et le manteau supérieur de la Terre (cf. figure 1.26, droite). Le Moho se situe à une profondeur variable : entre 4 et 10 km sous les océans, et entre 20 et 70 km sous les continents. Traditionnellement, les modèles de Moho sont obtenus à partir d'études sismiques ou de missions gravimétriques comme GRACE. Néanmoins, ces méthodes font appel à des hypothèses simplificatrices jugées peu réalistes [72]. La projet GEMMA (*GOCE Exploitation for Moho Modeling and Applications*), financé par l'ESA, a permis d'obtenir un modèle du Moho avec une précision inégalée en combinant les données de la mission GOCE à d'autres (sismiques, bathymétriques et topographiques par exemple). La figure 1.26 (à droite) présente l'estimation de la profondeur du Moho dans le cadre de ce projet.

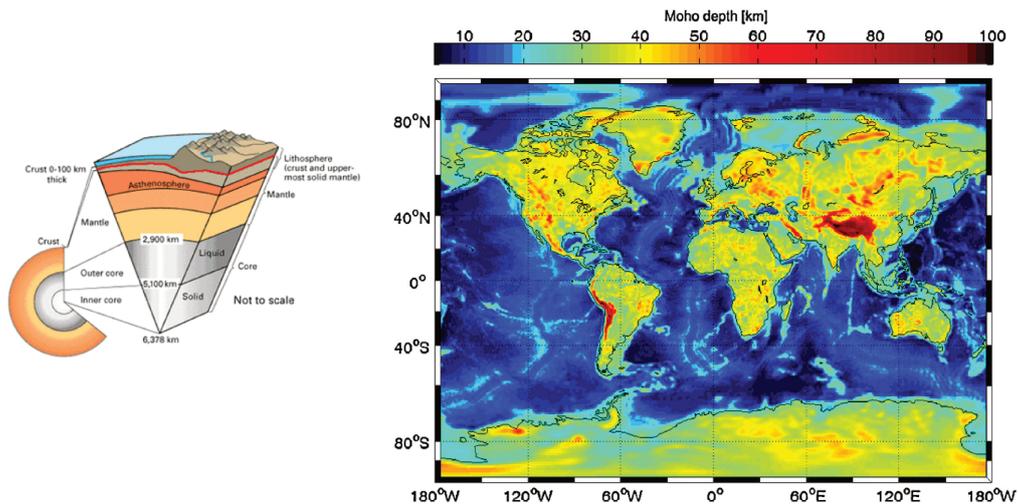


Figure 1.26 – Schéma de la structure interne de la Terre (à gauche, source : [geology.com](http://geology.com)) et GEMMA1.0 : estimation de la profondeur du Moho en kilomètres obtenue dans le cadre du projet GEMMA (à droite).

1.6.5 Succès de la mission mais niveau de bruit inexplicable sur  $V_{zz}$ 

La grandeur fondamentale d'intérêt dans la mission GOCE est la matrice des dérivées secondes du potentiel gravitationnel par rapport aux variables de l'espace, notée  $[T]$  et à distinguer du champ normal défini précédemment :

$$\Delta^2 V = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{xx} & V_{xy} & V_{xz} \\ V_{yx} & V_{yy} & V_{yz} \\ V_{zx} & V_{zy} & V_{zz} \end{bmatrix} = [T] \quad (1.17)$$

Le tenseur de gradient de gravité est symétrique : six des neuf composantes sont indépendantes. L'estimation de ces composantes est rendue possible grâce aux paires d'accéléromètres dont la différence d'accélération est mesurée (cf. chapitre 3 pour les détails). C'est à partir du gradient de gravité que les modèles de potentiel gravitationnel et du géoïde sont déduits, ce qui rend possible les applications présentées dans les parties précédentes. La figure 1.27 montrent, pour la période du 16/03/2013 au 17/03/2014, le signal associé à chaque composante dans le domaine temporel (unité en Eötvös). Les valeurs théoriques sont calculées en utilisant le logiciel ACTENS, développé pour la mission MICROSCOPE, et à partir du modèle EIGEN\_GRACE01S, de l'attitude et de l'orbite du satellite GOCE. On précise qu'étant donné que les composantes estimées à partir des mesures accélérométriques de GOCE sont biaisées, elles ont été rapportées aux valeurs médianes théoriques afin de faciliter la comparaison. On note la similarité de l'empirique et du théorique malgré la présence de bruit, notamment pour les composantes  $V_{xy}$  et  $V_{yz}$ . Par ailleurs, l'énergie des signaux associés aux composantes diagonales est plus importante que pour les autres, le signal le plus intense étant la dérivée seconde du potentiel par rapport à la verticale  $V_{zz}$ .

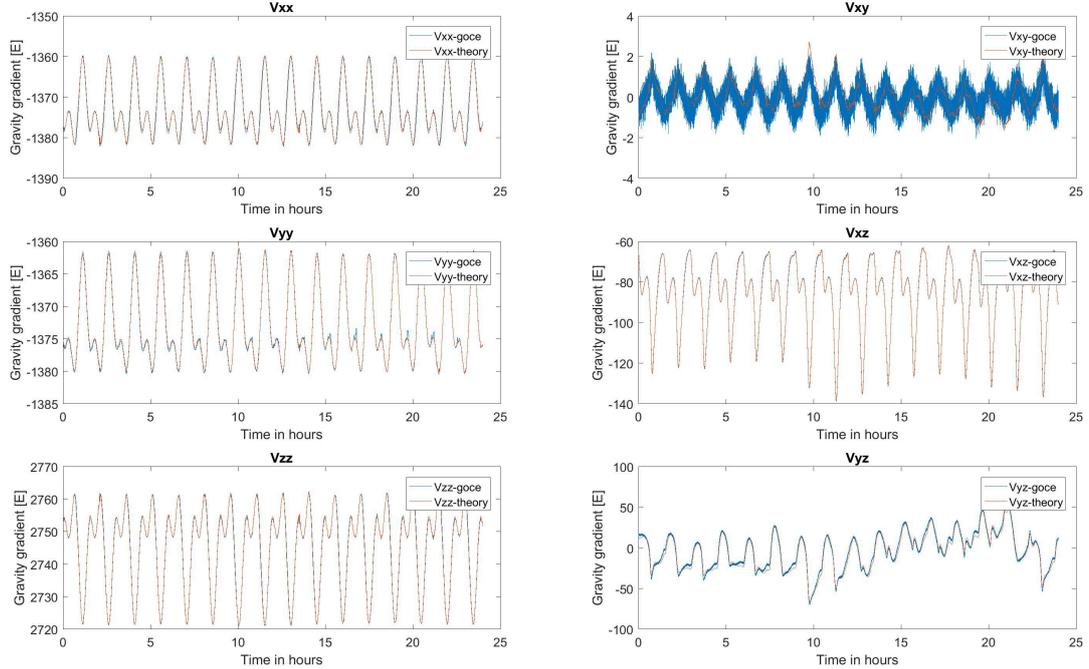


Figure 1.27 – Composantes du gradient de gravité théoriques (légendes avec le suffixe *theory*) et mesurées (légendes avec le suffixe *goce*).

On a vu qu'en dehors de la Terre, et donc en dehors des sources, le potentiel gravitationnel terrestre vérifie

l'équation de Laplace :

$$\Delta V = V_{xx} + V_{yy} + V_{zz} = 0 \quad (1.18)$$

En particulier, cette équation est vérifiée en un point à 250 km (altitude du satellite GOCE) car la contribution de l'atmosphère résiduelle à la gravitation est négligeable : la densité atmosphérique est de l'ordre de  $2.5 \times 10^{-10} \text{ kg} \cdot \text{m}^3$ .

L'équation de Laplace est une équation aux dérivées partielles homogène dont la résolution mène au développement en harmoniques sphériques présenté dans la première partie. Dans le cadre de la mission GOCE, cette équation est un outil important de vérification de la performance des mesures gradiométriques. En effet, cette équation signifie que la trace de la matrice du gradient de gravité est théoriquement nulle. Par conséquent, en utilisant les composantes diagonales mesurées, on peut estimer le bruit global du gradiomètre. Cette approche est adoptée en particulier pour comparer le bruit avant et après étalonnage de l'instrument (cf. chapitre 3 pour une discussion plus détaillée sur l'étalonnage). La figure 1.28 montre la densité spectrale de la trace du gradient de gravité estimé avant l'étalonnage (courbe rouge) et après (courbe bleue), avec en noir, le niveau de bruit spécifié [49]. L'étalonnage permet ainsi de réduire significativement le niveau de bruit de l'instrument, bien que ce dernier soit 2 fois plus élevé que prévu entre 20 mHz et 100 mHz.

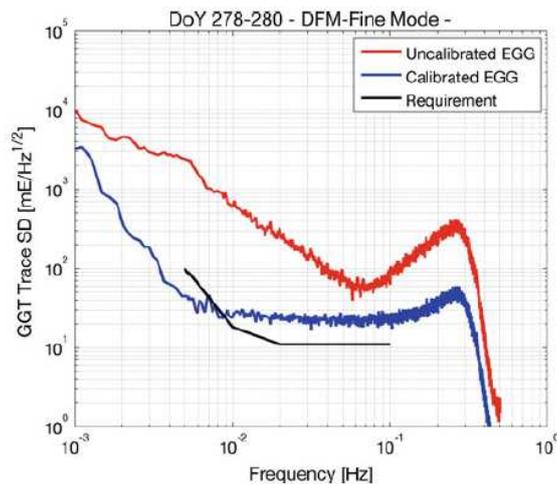


Figure 1.28 – Trace du gradient de gravité mesuré avant (rouge) et après (bleu) étalonnage complet [49]. Données pour la période 19/12/2009 au 21/12/2009.

Étant donné que la trace de la matrice du gradient est la somme de ses trois composantes diagonales, on peut affiner l'analyse en étudiant la densité spectrale de ces trois signaux. La figure 1.29 montre les densités spectrales des signaux théoriques associés au modèle de potentiel, celles des signaux mesurés ainsi que la densité spectrale attendue entre 20 mHz et 100 mHz d'après les spécifications techniques. Les données utilisées correspondent à la période du 16/03/2013 au 17/03/2013. Pour les composantes mesurées précisément ( $V_{xx}, V_{yy}, V_{zz}, V_{xz}$  - cf. chapitre 3), le niveau attendu dans cette bande de fréquences est de  $8 \text{ mE}/\sqrt{\text{Hz}}$ , et pour les composantes mesurées moins précisément ( $V_{xy}$  et  $V_{yz}$ ), il est de  $1 \text{ E}/\sqrt{\text{Hz}}$ . La disparition de l'énergie dans la densité spectrale des valeurs théoriques à partir de  $2 \times 10^{-2} \text{ Hz}$  est due à la troncature de l'ordre et du degré du modèle utilisé dans le logiciel. Néanmoins, au-delà de 50 mHz, le contenu spectral des signaux théoriques disparaît (cf. document technique de Thalès [73]). Au-delà de cette fréquence, le bruit spécifié est associé uniquement au bruit de l'instrument. On peut faire deux constats. D'une part, le contenu spectral en-deçà de  $2 \times 10^{-2} \text{ Hz}$  est très proche du contenu théorique. D'autre part, il apparaît que le bruit des

signaux  $V_{xx}$  et  $V_{yy}$  sont légèrement supérieur au niveau spécifié de  $8 \text{ mE}/\sqrt{\text{Hz}}$ , alors que le bruit dans le signal  $V_{zz}$  est plus de deux fois plus élevé avec  $19 \text{ mE}/\sqrt{\text{Hz}}$ , ce qui est cohérent avec la densité spectrale de la trace du gradient mesuré. En outre, on remarque que le bruit dans l'estimation de  $V_{xz}$  est également de l'ordre de  $19 \text{ mE}/\sqrt{\text{Hz}}$  et que celui des composantes  $V_{xy}$  et  $V_{yz}$  est particulièrement élevé, ce qui est cohérent avec le fait que ces deux dernières ne sont pas précisément estimées, mais le niveau spécifié de  $1 \text{ E}/\sqrt{\text{Hz}}$  est respecté.

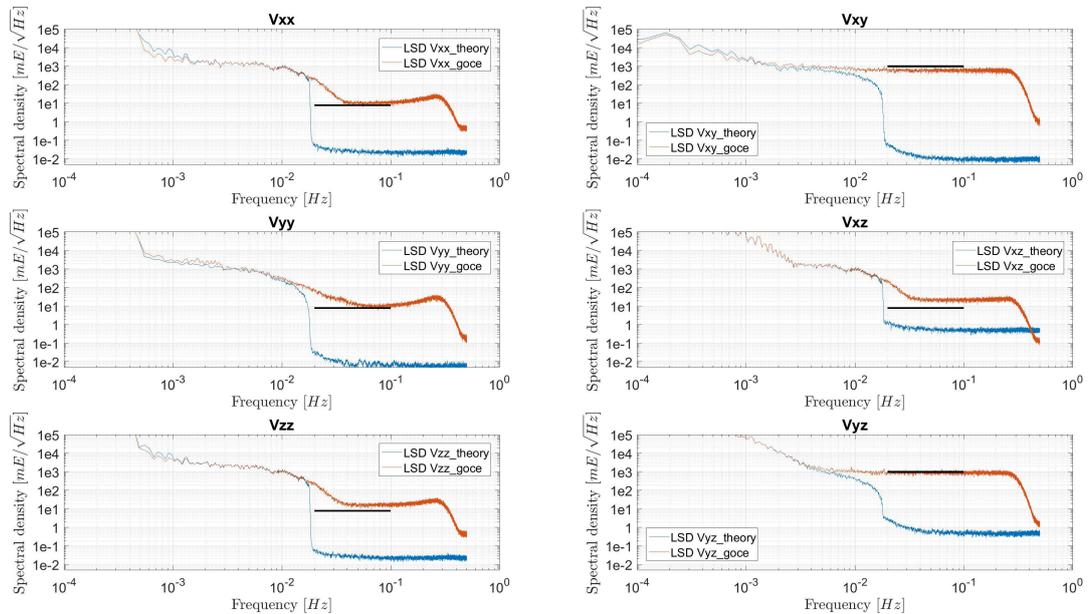


Figure 1.29 – Comparaison dans le domaine spectral des composantes théoriques et mesurées du gradient de gravité.

Le constat sur le niveau de bruit des composantes diagonales a été mentionné dans plusieurs publications, par exemple dans la revue *Journal of Geodesy* de 2011 dédiée à la mission GOCE. Une étude sur le procédé d'étalonnage a permis de réduire très légèrement le niveau de bruit entre 5 mHz et 100 mHz (cf. chapitre 3) mais l'origine de ce niveau est resté indéterminée. Étant donné que l'ONERA détient l'expertise des accéléromètres, et donc une connaissance précise du système électronique, une approche instrumentale était possible pour étudier le niveau de bruit de l'instrument. Ainsi, ce constat pose la problématique du travail doctoral présenté dans ce mémoire. L'investigation sur le niveau de bruit est également motivée par la similarité de l'architecture électronique embarquée pour la mission MICROSCOPE et par la performance recherchée en termes de bruit des accéléromètres.

#### — Récapitulatif du chapitre 1 —

Ce chapitre a permis de mettre en évidence l'intérêt de la gradiométrie spatiale en la plaçant dans le développement historique des techniques d'étude du champ de gravité. Ainsi, les objectifs de la mission GOCE ont pu être justifiés et quelques unes des nombreuses contributions qu'elle a permises dans divers domaines de la géophysique ont été présentées. Le second intérêt de ce chapitre est de placer le travail de thèse dans le contexte général auquel il appartient et d'établir le constat scientifique à l'origine du travail de thèse : identifier les causes du niveau de bruit observé. Pour cela, dans le prochain chapitre, est présenté l'architecture électronique pour le contrôle asservi des accéléromètres de la mission GOCE.



## 2 Architecture électronique du circuit d'asservissement des accéléromètres de la mission GOCE

### Objectifs du chapitre 2

- Présenter le principe de la suspension électrostatique à l'aide d'un modèle uniaxial simplifié.
- Présenter les éléments principaux de la boucle d'asservissement d'un accéléromètre de la mission GOCE.

### 2.1 Principes des accéléromètres ultrasensibles

#### 2.1.1 Expression de l'énergie électrostatique et de la capacité d'un condensateur plan

Un condensateur plan comporte deux armatures planes illimitées parallèles de potentiel  $V_1$  et  $V_2$  (cf. figure 2.1). Le système étant invariant par translation dans le plan  $(Oyz)$ , les densités de charges de surface,  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$ , sont uniformes. Tout plan contenant l'axe  $(Ox)$  est alors un plan de symétrie des charges et contient donc les lignes du champ électrique. Celles-ci sont orthogonales aux armatures et le champ ne dépend que de la direction  $(Ox)$ .

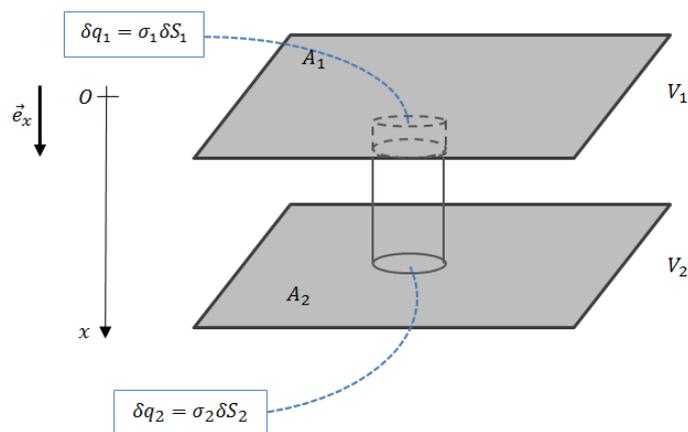


Figure 2.1 – Schéma d'un condensateur plan avec deux armatures infinies.

## Chapter 2. Architecture électronique du circuit d'asservissement des accéléromètres de la mission GOCE

Considérons un tube cylindrique droit dont les surfaces d'extrémité sont des disques élémentaires de surface  $\delta S$  sur chacune des armatures. On cherche à appliquer le théorème de Gauss à cette surface cylindrique :

$$\oiint_{cyl} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} \quad (2.1)$$

Puisque le champ est nul dans les conducteurs et perpendiculaire à la normale du tube, le flux du champ électrique à travers la surface considérée est nul. Donc  $Q_{int} = 0$ . Comme  $Q_{int} = \delta q_1 + \delta q_2 = \sigma_1 \delta S + \sigma_2 \delta S$ , on retrouve le résultat du théorème des éléments correspondants indiquant que les charges et les densités de surface des éléments en regard sont opposées :  $\delta q_1 = -\delta q_2$  et  $\sigma_1 = -\sigma_2$ . Les charges positives sont situées du côté du potentiel le plus élevé car le champ électrique est orienté dans le sens des potentiels décroissants. On conclut que les charges totales,  $Q_1$  et  $Q_2$ , portées par les deux armatures sont opposées.

Pour déterminer l'expression de la capacité du condensateur, il faut résoudre le problème de Cauchy : résoudre l'équation de Laplace  $\Delta\Phi = 0$  où  $\Phi$  est le potentiel électrique dans le cas où il est imposé sur une partie de la surface considérée et où on connaît sa dérivée normale à la surface  $\mathbf{n} \cdot \nabla\Phi$  sur le reste où le symbole  $\nabla$  indique l'opérateur gradient. Puisqu'on considère le tube cylindrique défini plus haut et que l'on sait que  $\Phi = \Phi(x)$ , il faut résoudre l'équation de Laplace en sachant que :

- $\partial\Phi/\partial n = 0$  sur la surface latérale ;
- $V(0) = V_1$  et  $V(e) = V_2$  sur les deux extrémités ;
- $\Delta V = d^2V/dx^2 = 0$ .

D'où  $V(x) = ax + b$  avec  $b = V_1$  et  $a = (V_2 - V_1)/e$ . On en déduit que :

$$\mathbf{E} = -\nabla V(x) = \frac{V_1 - V_2}{e} \mathbf{e}_x \quad (2.2)$$

Cette expression permet de vérifier que le champ électrique est orienté dans le sens des potentiel décroissant. Par ailleurs, le théorème de Coulomb donne  $\mathbf{E} = \sigma_1 \mathbf{e}_x / \epsilon_0$ . Donc :

$$\sigma_1 = \frac{Q_1}{S} = \epsilon_0 \mathbf{E} \cdot \mathbf{e}_x = \epsilon_0 \frac{V_1 - V_2}{e} \quad (2.3)$$

Finalement l'expression de la capacité du condensateur plan est :

$$C = \frac{Q_1}{V_1 - V_2} = \frac{\epsilon_0 S}{e} > 0 \quad (2.4)$$

Enfin, l'énergie d'un système de  $n$  conducteurs de charges  $Q_i$  et de potentiels  $V_i$  est donné par l'expression [74] :

$$\mathcal{E}_e = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n Q_i V_i \quad (2.5)$$

Dans le cas du condensateur considéré ici,  $Q_1 = -Q_2$  donc :

$$\mathcal{E}_e = \frac{1}{2} (Q_1 V_1 + Q_2 V_2) = \frac{1}{2} (Q_1 (V_1 - V_2 + V_2) + Q_2 V_2) = \frac{1}{2} Q_1 (V_1 - V_2) > 0 \quad (2.6)$$

et

$$\mathcal{E}_e = \frac{1}{2} C (V_1 - V_2)^2 = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 S}{e} (V_1 - V_2)^2 \quad (2.7)$$

### 2.1.2 Expression de la force électrostatique

Dans cette partie, est faite la démonstration menant à l'expression de la force électrostatique dans le cas d'un condensateur plan relié à un générateur. Cette expression est fondamentale dans le principe de fonctionnement des accéléromètres à suspension électrostatique. L'idée principale est d'appliquer la méthode des travaux virtuels.

Supposons que deux conducteurs  $A_1$  et  $A_2$  sont portés aux potentiels  $V_1$  et  $V_2$  respectivement à l'aide d'un générateur de tension qui maintient ces deux valeurs constantes (cf. figure 2.2). L'armature  $A_1$  est fixe alors que l'armature  $A_2$  est mobile. Le système  $S$  considéré est l'ensemble formé par les deux conducteurs (pointillés rouges) :  $\mathcal{S} = \{A_1\} \cup \{A_2\}$ . L'idée de la méthode est d'imaginer un petit déplacement du conducteur  $A_2$  (par exemple) à partir d'une position d'équilibre mécanique et d'examiner la modification de l'énergie électrostatique du système. Les forces associées à ce déplacement pourront en être déduites.

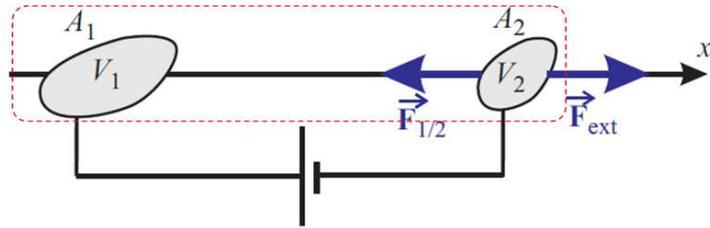


Figure 2.2 – Système de deux conducteurs reliés à un générateur.

Les forces électrostatiques appliquées par un conducteur sur l'autre,  $\mathbf{F}_{1/2}$  et  $\mathbf{F}_{2/1}$ , sont des forces internes du système considéré. D'après les résultats de la partie précédente, ces forces sont attractives car les charges portées sur chaque conducteur en influence totale sont opposées. On suppose qu'initialement, le système est maintenu à l'équilibre mécanique grâce à une force extérieure (cf. figure 2.2) exercée sur l'armature  $A_2$ , l'armature  $A_1$  étant supposée immobile. Ainsi,  $\mathbf{F}_{1/2} + \mathbf{F}_{ext} = \mathbf{0}$ .

L'énergie totale du système s'écrit  $\mathcal{E}_{tot} = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_e$  où  $\mathcal{E}_c$  est l'énergie cinétique et  $\mathcal{E}_e$  l'énergie électrostatique. Étant donné que le générateur est extérieur au système  $\mathcal{S}$  considéré et qu'il fournit un travail électrique, le système  $\mathcal{S}$  n'est pas isolé. Dans ce cas, lors d'une évolution du solide, l'énergie totale ne reste pas constante. Donc, le théorème de l'énergie mécanique s'écrit :

$$d\mathcal{E}_c = dW = d\mathcal{E}_{tot} - \mathcal{E}_e \quad (2.8)$$

où  $dW$  est le travail effectué par la résultante des forces externes s'exerçant sur le système.

Imaginons à présent que  $A_2$  effectue un déplacement infinitésimal  $d\mathbf{r}$  autour de la position d'équilibre. Ce déplacement étant infime, on fait l'approximation que  $\mathbf{F}_{ext}$  reste quasiment constant et égal à  $-\mathbf{F}_{1/2}$ . Dans ce cas, la force extérieure effectue un travail  $dW = \mathbf{F}_{ext} \cdot d\mathbf{r}$ . En même temps, le générateur doit maintenir les deux potentiels constants, ce qui n'est possible que s'il déplace une quantité de charges  $dQ_1$  au conducteur  $A_1$  et  $dQ_2$  au conducteur  $A_2$ . Par conséquent, le générateur fournit une énergie  $d\mathcal{E}_{gen} = V_1 dQ_1 + V_2 dQ_2$  au système. Cette énergie est apportée au système lors de la déformation, d'où  $d\mathcal{E}_{tot} = d\mathcal{E}_{gen}$ .

Il reste à exprimer le changement d'énergie électrique lors de ce déplacement. Puisque les potentiels sont constants,  $d\mathcal{E}_e = \frac{1}{2} (dQ_1 V_1 + dQ_2 V_2)$ . En remplaçant les différentes expressions dans l'équation 2.8, on obtient :

$$\mathbf{F}_{ext} \cdot d\mathbf{r} = V_1 dQ_1 + V_2 dQ_2 - \frac{1}{2} (dQ_1 V_1 + dQ_2 V_2) = \frac{1}{2} (dQ_1 V_1 + dQ_2 V_2) = d\mathcal{E}_e \quad (2.9)$$

On peut désormais appliquer cette expression à la configuration des accéléromètres de GOCE. Dans ce cas,  $A_1$  est une des électrodes et  $A_2$  une face de la masse d'épreuve. L'ensemble forme un condensateur parallèle avec une distance  $e$  séparant les deux armatures. Le déplacement fictif infinitésimal envisagé est une translation dans la direction orthogonal aux plans  $A_1$  et  $A_2$  et de distance  $de$ . Ainsi,  $\mathbf{F}_{ext} \cdot d\mathbf{r} = F_{ext} de$ .

Une électrode Y ou Z des accéléromètres de GOCE a pour surface environ  $10^{-4} \text{ m}^2$  et l'entrefer a pour distance environ  $3 \times 10^{-5} \text{ m}$ . Dans cette configuration, on néglige les effets de bord en première approximation et on se place dans le cas d'un condensateur plan avec deux armatures illimitées. En différenciant l'expression (2.7) par rapport à la distance entre les armatures pour un potentiel constant, il vient :

$$\frac{d\mathcal{E}_e}{de} = \frac{1}{2} \frac{dC}{de} (V_1 - V_2)^2 = -\frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 S}{e^2} (V_1 - V_2)^2 \quad (2.10)$$

Finalement, on obtient l'expression de la force électrostatique qui s'exerce entre les deux armatures :

$$\mathbf{F}_{1/2} = -\frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 S}{e^2} (V_1 - V_2)^2 \mathbf{e}_x \quad (2.11)$$

Le signe moins traduit le fait que la force électrostatique entre les armatures est attractive. Par conséquent, elle tend à faire augmenter l'énergie du système puisqu'elle tend à faire diminuer la distance entre les armatures et que l'énergie électrique emmagasinée dans le condensateur est une fonction décroissante de cette distance (cf. Eq 2.7). En termes d'ordre de grandeur, dans le cas des électrodes sensibles (voir partie suivante pour la définition), les grandeurs caractéristiques sont  $V_1 = 7.5 \text{ V}$ ,  $V_2 = 10 \text{ V}$  et  $e = 2.9 \times 10^{-5} \text{ m}$ . Donc l'intensité de la force est de l'ordre de  $F_{1/2} \approx 3.446 \times 10^{-6} \text{ N}$ .

### 2.1.3 Modèle uniaxial simplifié d'un accéléromètre électrostatique

Comme il a été présenté dans le chapitre précédent, le coeur d'un accéléromètre intégré dans le satellite GOCE correspond à l'ensemble formé par la masse d'épreuve parallélépipédique et la cage d'électrodes. C'est à ce niveau que l'action et la détection sont superposées grâce au même jeu d'électrodes (cf. partie 2.2.1 pour une discussion plus détaillée sur la détection capacitive). La figure 2.3 schématise le principe de fonctionnement d'un accéléromètre uniaxial en présence d'asservissement. L'aspect du contrôle asservi est discuté dans les prochaines parties. L'objet de celle-ci est d'illustrer, à partir d'un modèle très simplifié, le fondement physique sur lequel est conçu les accéléromètres triaxiaux de GOCE et d'introduire les notions de gains électrostatiques, de sensibilité de l'axe d'un accéléromètre et de raideur électrostatique.

On considère dans cette partie un petit déplacement d'une distance  $x$  de la masse d'épreuve (de masse  $m$ ) en présence d'une accélération externe  $\boldsymbol{\gamma} = -\gamma \mathbf{e}_x$ . L'entrefer  $e$  correspond à la distance nominale entre la masse d'épreuve immobile au centre (c'est-à-dire un déplacement  $x = 0$ ). Les deux électrodes sont identiques et de surface  $S$ . À l'aide d'un fil d'or, la masse d'épreuve est portée au potentiel  $V_p$  constant auquel s'ajoute un potentiel alternatif  $V_d$  à 100 kHz destiné à la détection. Les électrodes (respectivement E1 et E2) sont portées aux potentiels  $V_1$  et  $V_2$ . Afin de minimiser l'effet de frottement sur la masse d'épreuve, le vide est fait dans l'enceinte de la cage, de sorte que la permittivité diélectrique du milieu soit celle du vide,  $\epsilon_0$ . L'expression de la

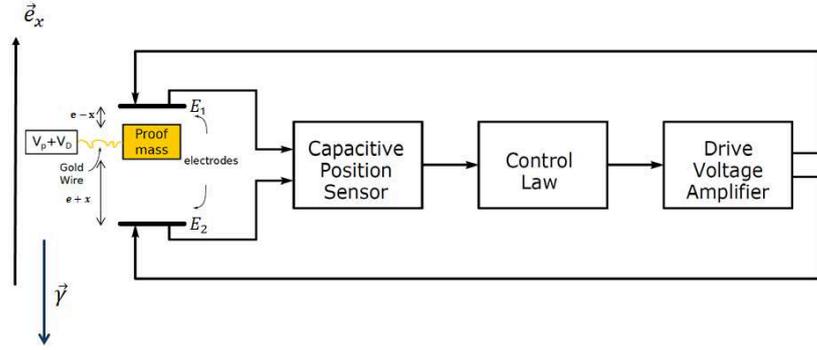


Figure 2.3 – Schéma de la boucle d'asservissement de la masse d'épreuve.

force électrostatique exercée par chaque électrode s'écrit :

$$\mathbf{F}_{E1} = \frac{\epsilon S}{(e-x)^2} (V_1 - V_p)^2 \mathbf{e}_x \quad (2.12)$$

$$\mathbf{F}_{E2} = -\frac{\epsilon S}{(e+x)^2} (V_2 - V_p)^2 \mathbf{e}_x \quad (2.13)$$

En faisant un développement limité à l'ordre 2 en  $x/e$ , et en notant  $\tilde{V}_p = V_p + V_d \sin(\omega t)$ , la force totale exercée sur la masse d'épreuve a pour expression :

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{elec} = & \frac{\epsilon S}{e^2} \left[ V_1^2 - V_2^2 + 2\tilde{V}_p(V_2 - V_1) + 2\frac{x}{e} \left( V_1^2 + V_2^2 + 2\tilde{V}_p^2 - 2\tilde{V}_p(V_1 + V_2) \right) \right] \mathbf{e}_x \\ & + 3\frac{x^2}{e^2} (V_1^2 - V_2^2 + 2\tilde{V}_p(V_2 - V_1)) \mathbf{e}_x \end{aligned} \quad (2.14)$$

Afin de linéariser le système autour du centre des deux électrodes, on applique des potentiels électriques opposés sur les deux armatures, c'est-à-dire  $V_1 = -V_2$ . Notons  $V_1 = V_e$ . Dans ce cas, l'accélération due à la force électrostatique totale s'écrit :

$$\mathbf{a}_{elec} = \frac{\mathbf{F}_{elec}}{m} = \left[ -\frac{2\epsilon S}{me^2} \tilde{V}_p V_e + \frac{4\epsilon S}{me^2} \frac{x}{e} (V_e^2 + \tilde{V}_p^2) - \frac{6\epsilon S}{me^2} \frac{x^2}{e^2} \tilde{V}_p V_e \right] \mathbf{e}_x \quad (2.15)$$

Le temps caractéristique de l'action est de plusieurs ordres de grandeur plus élevée que le temps caractéristique de la détection. En d'autres termes, l'action s'effectue plus lentement que la détection. C'est la raison de l'utilisation d'un signal modulant à 100 kHz pour séparer les deux domaines fréquentiels. Par conséquent, on peut considérer que l'accélération électrostatique appliquée sur la masse d'épreuve est une valeur moyennée en regard du temps caractéristique de la détection. Ainsi, on peut réécrire l'équation précédente ainsi :

$$\langle \mathbf{a}_{elec} \rangle = \left[ -\frac{2\epsilon S}{me^2} V_p V_e + \frac{4\epsilon S}{me^2} \frac{x}{e} (V_e^2 + V_p^2 + V_d^2) - \frac{6\epsilon S}{me^2} \frac{x^2}{e^2} V_p V_e \right] \mathbf{e}_x \quad (2.16)$$

L'équation 2.16 est fondamentale dans le principe des accéléromètres électrostatiques. Le terme  $G_{el} = 2\epsilon S V_p / me^2$ , exprimé en  $m/s^2/V$ , est le gain électrostatique ou facteur de sensibilité. Il dépend à la fois des paramètres géométriques de l'instrument (surfaces des électrodes, masse de la masse d'épreuve, entrefer) et de la tension de référence  $V_p$  appliquée à la masse d'épreuve. Le signe négatif devant ce coefficient montre qu'en imposant une tension constante non nulle sur la masse d'épreuve, les forces électrostatiques s'op-

posent au mouvement de la masse d'épreuve et tendent à la recentrer. La stabilité géométrique du matériau constituant les électrodes et la stabilité de la tension  $V_p$  appliquée par le fil d'or, qui permet d'éviter les fluctuations de potentiel de la masse d'épreuve, garantissent en théorie un faible bruit dans la force appliquée. Néanmoins, ce bruit existe : d'une part, cette tension  $V_p$ , bien que très stable, est créée par un générateur qui peut délivrer une valeur bruitée. Dans ce cas, ce bruit est répercuté sur la stabilité du gain et donc sur la qualité de l'action électrostatique. D'autre part, étant donné que le fil est collé sur la masse d'épreuve, il crée une raideur mécanique qui est un des facteurs limitants de la performance des accéléromètres.

Le terme  $\omega_0^2 = 4\epsilon S/m e^2$ , exprimé en  $\text{rad}^2/\text{s}^2$ , est la raideur électrostatique. On retrouve son analogue dans le cas des dynamomètres amortis avec un système de ressort. La particularité de la raideur électrostatique vient du fait qu'elle induit un mouvement destabilisant. En effet, son effet est nul lorsque  $x = 0$  mais elle tend à projeter la masse d'épreuve contre l'une des électrodes dès que cette dernière n'est plus centrée. C'est aussi pour cette raison que la position d'équilibre de la masse d'épreuve est instable.

Enfin, le terme  $6\epsilon S V_p/m e^2$  est un terme quadratique, pour l'asservissement en position et non pour la mesure, qui agit également en faveur de la stabilisation de la masse d'épreuve. Néanmoins l'effet quadratique est 50 fois inférieur à l'effet dû à la raideur si le déplacement vérifie :

$$x < \frac{1}{50} e \frac{2(V_e^2 + V_p^2 + V_d^2)}{3V_p V_e} \quad (2.17)$$

Dans le cas des accéléromètres de GOCE,  $e = 300\mu\text{m}$ ,  $V_p = 10\text{V}$ ,  $V_e \approx 7.5\text{V}$  et  $V_d = 7.62\text{V}$ . Dans ce cas, l'inéquation précédente devient  $x < 11.4\mu\text{m}$ . Or, la course libre (l'amplitude maximale possible de la translation) est de  $30\mu\text{m}$ . Ainsi, si l'asservissement est très bon et que les déplacements de la masse d'épreuve restent en-deçà de  $10\mu\text{m}$ , on peut négliger le terme quadratique. C'est le cas en pratique car la performance de l'asservissement garantit un déplacement de l'ordre d'une fraction d'Ångström.

Par ailleurs, pour un déplacement de  $x = 15\mu\text{m}$  et sachant que  $m = 0.31853\text{kg}$ ,  $S = 1.0475 \times 10^{-4}\text{m}^2$ , l'accélération destabilisante due à la raideur a pour valeur  $1.387 \times 10^{-6}\text{m/s}^2$ . En comparaison, l'effet stabilisant a pour valeur  $4.852 \times 10^{-6}\text{m/s}^2$ . Par conséquent, à moins que les déplacements n'excèdent pas les quelques micromètres, l'effet destabilisant ne peut être négligé. Cette raideur est surtout gênante au démarrage de l'instrument : en fonction de la géométrie des accéléromètres et de la tension  $V_p$ , il est possible, lorsque la masse d'épreuve est sur les butées, de se trouver dans un cas où la raideur électrostatique est supérieure à la force électrostatique maximale que peut appliquer les électrodes. C'est par exemple le cas dans la mission MICROSCOPE lorsque l'instrument est en mode haute résolution.

L'équation 2.16 montre aussi le rôle important de l'entrefer. D'un côté, un entrefer important signifie que pour une tension  $V_e$  donnée, la force électrostatique appliquée est faible. Par conséquent, l'action est moins efficace. D'un autre côté, le même gain électrostatique est présent dans la détection. Dans ce cas, pour une accélération donnée, un entrefer important induit une valeur de la tension détectée plus grande. Par conséquent, la détection est plus précise puisque l'instrument peut mesurer un intervalle d'accélération plus large.

D'un autre côté, la boucle d'asservissement est nécessairement perturbée par l'existence du bruit électronique qui se traduit en partie par l'ajout d'un terme stochastique  $nV_e$  à la tension appliquée  $V_e$ . Par conséquent, si l'entrefer est au contraire petit, et donc le gain est élevé, le bruit est amplifié et crée une accélération parasite. Il y a donc un arbitrage à effectuer entre une action électrostatique efficace et une détection précise.

Dans le cas des accéléromètres de GOCE, l'entrefer pour les axes  $X$  est  $32\mu\text{m}$  et ceux des axes  $Y$  et  $Z$  est  $300\mu\text{m}$ . C'est en prenant en compte la discussion ci-dessus qu'on utilise le terme *d'axe sensible* pour les axes  $Y$  et  $Z$  et *d'axe moins sensible* pour l'axe  $X$ .

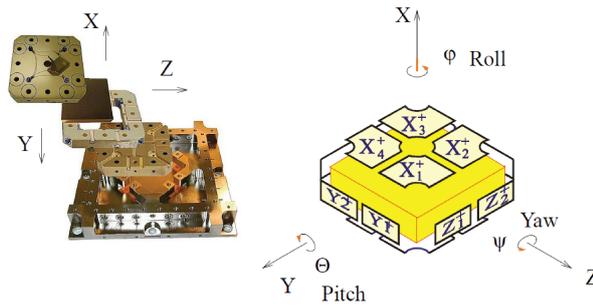


Figure 2.4 – Schéma de la disposition des axes de l'AESRF par rapport aux électrodes.

## 2.2 Contrôle asservi des accéléromètres

Le coeur du principe du fonctionnement d'un accéléromètre électrostatique repose sur le contrôle asservi de la position de la masse d'épreuve. Le système d'asservissement est hybride car il comporte quatre parties : une partie *physique* (dénommée ASH) correspondant aux forces exercées par les électrodes sur la masse d'épreuve et dont un modèle simplifié a été présenté dans la section précédente, une partie analogique (dénommée FEEU), une partie digitale (dénommée GAIEU) et enfin une partie destinée à la compensation de traînée (DFACS). Ces parties sont contenues à bord du satellite. Une fois les données transmises au sol, un certain nombre d'étapes de pré-traitement sont nécessaires avant d'obtenir des accélérations dites nominales. Dans la suite de cette partie les fonctions des différents éléments du FEEU, du GAIEU et des premières étapes de prétraitements sont présentées de manière détaillée.

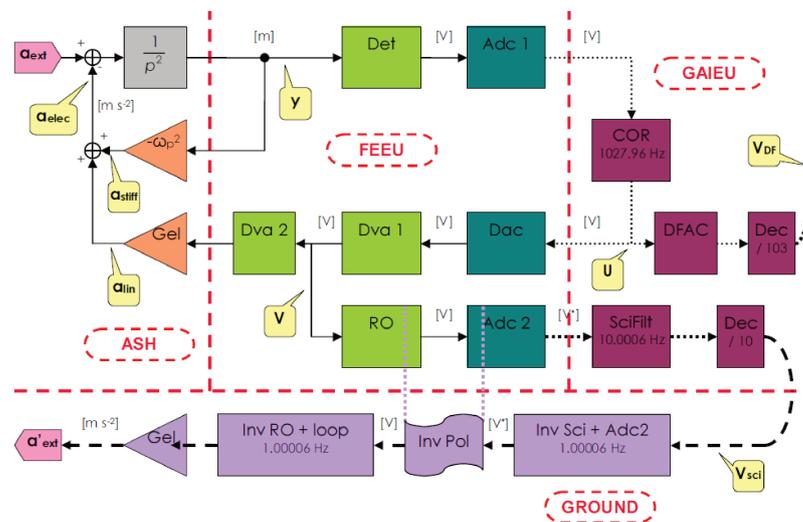


Figure 2.5 – Composants de la boucle d'asservissement d'un accéléromètre [75].

La figure 2.5 illustre cette architecture en ne considérant qu'un seul degré de liberté. Les éléments du FEEU sont : le détecteur capacitif, les convertisseurs analogique-numériques (ADC1 et ADC2), le convertisseur numérique-analogique (DAC), les amplificateurs de polarisation des électrodes (DVA) et le bloc de lecture (Read-out). Afin de contrôler tous les degrés de liberté, à chaque paire d'électrodes correspond un détecteur capacitif, un ADC1, un DAC, deux DVA (un pour chaque électrode d'une même paire). En tout, pour une masse d'épreuve donnée, il y a donc huit de chacun des éléments mentionnés précédemment, à part pour les DVA qui sont au nombre de seize. Le DVA est parfois représenté en deux parties (DVA1 et DVA2) car la lecture

Partie de l'électronique	Nom du composant	Nombre total
FEEU	Détecteur capacitif	8
	ADC1	8
	ADC2	8
	DAC	8
	DVA1	16
	DVA2	16
	Read-out	8
GAIEU	PID	6
	Filtre scientifique	8
	DFACS	8

Table 2.1 – Noms et nombres de composants du système d'asservissement de la masse d'épreuve

se fait avant la sortie du DVA mais ces deux parties forment bien un même composant.

Les éléments du GAIEU sont : d'une part, le correcteur PID, le DAC ; d'autre part, le filtre scientifique et le décimateur en sortie vers la transmission au sol ; et enfin, le DFACS, à l'entrée de la compensation de traînée. À l'entrée du GAIEU, c'est-à-dire à l'entrée du PID, les valeurs obtenues par les détecteurs sont combinées en degrés libertés. Il y a alors un PID par degré de liberté, soit six au total (pour les axes X, Y et Z en translation et les angles  $\Phi$ ,  $\Theta$  et  $\Psi$  en rotation). En sortie du PID, les données sont recombinaées de sorte à produire des valeurs pour chaque paire d'électrodes : c'est pourquoi il y a au total huit DAC. De même, il y a huit blocs DFACS. Par ailleurs, en sortie de l'ADC2 (au commencement de la branche science), les valeurs sont recombinaées par paire d'électrodes de sorte qu'il y a huit filtres scientifiques.

Ces informations sont résumées dans le tableau 2.1. Dans la suite les fonctions et propriétés de chaque bloc sont décrites.

### 2.2.1 Le détecteur capacitif

Le rôle du détecteur capacitif est de produire une tension proportionnelle aux capacités formées par la masse d'épreuve et les électrodes de la paire concernée. La partie dite *physique* du détecteur est le système masse d'épreuve avec cage d'électrodes. La partie électronique du détecteur est présentée dans la figure 2.6. Grâce à une tension alternative de détection  $V_d$  à 100 kHz générée par un générateur et appliquée sur la masse d'épreuve, un petit déplacement de la masse d'épreuve crée une différence de courant non nulle dans le transformateur différentiel dont est déduit une mesure de la variation de la charge. Le préamplificateur de charge convertit cette grandeur en une tension modulée à 100 kHz avec un faible bruit. Ensuite, le signal est filtré par l'amplificateur sélectif constitué d'un filtre passe-bande. Le signal est ramené dans la bande-passante grâce à la détection synchrone et enfin l'amplificateur de sortie permet d'adapter ce signal pour la suite du circuit (en particulier pour l'ADC). L'intérêt de la détection synchrone, lorsque le signal à mesurer est fortement bruité, est d'améliorer le rapport signal sur bruit dans le dispositif de mesure grâce, en partie, au filtre passe-bande très étroit, ce qui correspond à un facteur de qualité élevé. En sortie du détecteur, on obtient une tension de la forme :

$$V_{det} = H_{det}\Delta C(x) + b_{det} + n_{det} \quad (2.18)$$

où  $H_{det}$  est la fonction de transfert du détecteur qui peut être modélisée par un filtre passe-bas du premier ordre et  $\Delta C(x)$  est la différence des capacités formées par chaque électrode d'une paire donnée avec la masse d'épreuve. Cette différence est une fonction, entre autres, du déplacement de la masse d'épreuve  $x$  (cf.

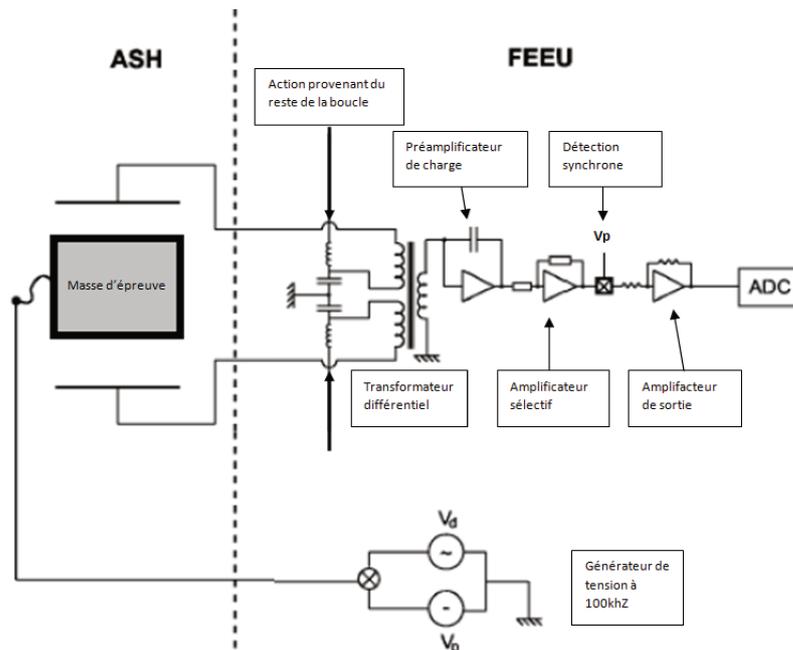


Figure 2.6 – Schéma des composants électroniques d'un détecteur capacitif.

chapitre 3). Le détecteur n'étant pas parfait, un terme de biais et un terme de bruit doivent être considérés. Le biais résulte des défauts géométriques de la cage d'électrodes et de chacun des trois éléments principaux du détecteur, en particulier une dissymétrie du transformateur différentiel, un biais de la démodulation synchrone ou encore de l'amplificateur. Le biais du détecteur a été évalué à  $20 \mu\text{V}$  (cf. la note technique [76]) avec une sensibilité thermique de  $30 \times 10^{-6} \text{ V/K}$  et une dérive pire cas de  $0.9 \mu\text{V/mois}$  (cf. [77]). Parmi les contributeurs du bruit, on peut citer le bruit thermodynamique du transformateur, le bruit de Johnson associé à la protection des résistances, le bruit du transistor à effet de champ ainsi que le bruit de l'amplificateur après démodulation. En conséquence, pour les axes sensibles, les trois premiers contributeurs sont prépondérants alors que pour l'axe moins sensible, c'est le dernier qui est plus important [77]. Les niveaux de bruits mesurés sont respectivement  $8.6 \times 10^{-6} \text{ V}/\sqrt{\text{Hz}}$  pour les axes sensibles et de  $3.2 \times 10^{-6} \text{ V}/\sqrt{\text{Hz}}$  au-dessus de 1 mHz pour les moins sensibles. En-dessous des fréquences de coupures, le bruit est en  $1/f$ .

On rappelle que l'application de la tension de détection sur la masse d'épreuve est nécessaire afin que l'action électrostatique et la détection capacitive partagent les mêmes paires d'électrode pour la détection des capacités et l'action : en effet, le temps caractéristique de l'action électrostatique due aux tensions appliquées sur les électrodes est bien supérieur à l'inverse de la fréquence de modulation (soit  $10^{-5} \text{ s}$ ). Ainsi, en pratique, les tensions provenant du DVA sont appliquées par une autre extrémité des transformateurs (cf. figure 2.6).

### 2.2.2 Le convertisseur analogique-numérique ADC1

L'ADC1 permet de convertir le signal analogique en sortie du détecteur capacitif (correspondant à des tensions) en signal numérique 24 bits échantillonné avec une fréquence  $f_{adc1} = 1027.96 \text{ Hz}$ . Il correspond à un convertisseur sigma-delta à double intégration couramment utilisé pour ce type d'opération et dont le principe de fonctionnement est schématisé dans la figure 2.7. Le bloc modulateur sigma-delta convertit une entrée analogique en un signal codé sur 1 bit. Puis, un filtre digital passe-bas (généralement un moyenneur) reconstruit le signal discrétisé. La fréquence de ce signal héritée du modulateur est très supérieure à la fréquence

$f_{adc1}$ , de sorte qu'un décimateur est nécessaire pour obtenir des données à la fréquence d'échantillonnage voulue. La valeur élevée de la fréquence du modulateur (20 kHz) permet de *déplacer* le bruit de quantification vers les hautes fréquences et ainsi impacter le moins possible le signal d'intérêt de fréquence  $f_{adc1}$ . En comparaison avec un simple intégrateur, l'utilisation du double intégrateur permet de *déplacer* davantage encore le bruit vers des fréquences supérieures. En revanche, plus le nombre d'intégrations de l'ADC (on parle d'ordre de l'ADC) est élevé, plus le bruit aux hautes fréquences est élevé et plus la conception du système est complexe. Par ailleurs, étant donnée la valeur élevée de  $f_{adc1}$ , en principe le théorème de Shannon est respecté : *a priori* les signaux mesurés par les accéléromètres de GOCE ne contiennent pas de fréquences supérieures à  $f_{adc1}/2 = 500\text{Hz}$ , à moins que des signaux parasites à hautes fréquences ne soient présents. Par conséquent pour l'ADC1, en théorie, le phénomène de repliement de spectre ne devrait pas poser de problème, d'autant plus que le détecteur applique un filtre passe-bas avec une fréquence de coupure de 231 Hz avant l'entrée de l'ADC1.

Le bruit de l'ADC est dû au bruit intrinsèque, évalué à  $3 \times 10^{-6} \text{V}/\sqrt{\text{Hz}}$ , et au bruit de quantification qui dépend de la fréquence en sortie du composant et du nombre de quantification. Le bruit complet d'un ADC utilisé dans le satellite GOCE est blanc jusqu'à 10 Hz avec le niveau spécifié ci-avant et au-delà suit une loi en  $f^2$  jusqu'à 500 Hz.

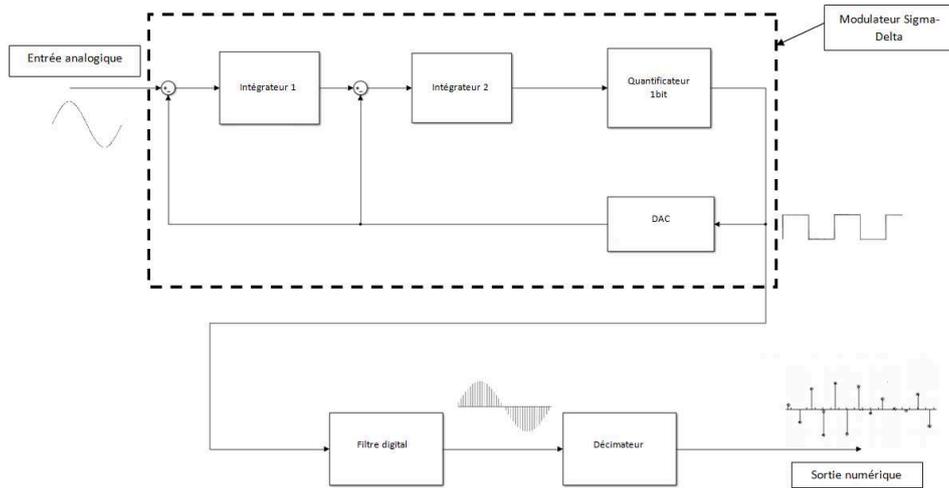


Figure 2.7 – Principe de fonctionnement d'un ADC sigma-delta.

Puisqu'il y a un ADC1 par paire d'électrodes, en sortie des ADC1 il y a quatre signaux pour les quatre paires d'électrodes X : deux signaux pour les paires d'électrodes Y et deux signaux pour les paires d'électrodes Z (cf. figure 2.8). L'objet de l'asservissement étant le contrôle en degré de liberté, ces signaux doivent être combinés en amont du PID qui a été optimisé pour le contrôle en translation et rotation de la masse d'épreuve. La combinaison est faite selon le schéma suivant :

$$\begin{pmatrix} V_X^{(pid)} \\ V_\theta^{(pid)} \\ V_\psi^{(pid)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{X1\pm}^{(adc)} \\ V_{X2\pm}^{(adc)} \\ V_{X3\pm}^{(adc)} \\ V_{X4\pm}^{(adc)} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} V_Y^{(pid)} \\ V_Z^{(pid)} \\ V_\phi^{(pid)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{Y1\pm}^{(adc)} \\ V_{Y2\pm}^{(adc)} \\ V_{Z1\pm}^{(adc)} \\ V_{Z2\pm}^{(adc)} \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

où  $V_i^{(adc)}$  est la tension en sortie de l'ADC1 pour la paire d'électrodes  $i$  et  $V_j^{(pid)}$  est la tension en entrée du

PID pour le degré de liberté  $j$ .

### 2.2.3 Le correcteur proportionnel-intégrateur-dérivateur numérique

Après la numérisation du signal par l'ADC1, le signal est dans la partie numérique de la boucle d'asservissement correspondant à l'ordinateur de bord. Le signal numérique est traité par le PID numérique dont les paramètres ont été réglés de sorte que les marges de gain et de phase assurent la stabilité de la boucle selon des critères spécifiés, sans dégrader le signal obtenu en sortie des composants analogiques. Le lien entre la sortie de l'ADC1 et le PID est établi par le FPGA (*Field Programmable Gate Array*) qui convertit le code digital 24 bits en valeur numérique. Bien que d'autres composants soient placés après le PID, ce-dernier livre en sortie les tensions à appliquer sur les électrodes. La fonction de transfert du PID numérique doit être déduite de la version analogique en utilisant la relation  $p = f_{pid}(1 - z^{-1})$  et est de la forme :

$$H_{pid} = G_p + G_I \frac{1}{1 - z^{-1}} + G_D \frac{1 - z^{-1}}{1 + k_1 z^{-1} + k_2 z^{-2}} \quad (2.20)$$

L'un des avantages principaux d'un correcteur numérique est la possibilité de régler les paramètres d'étalonnage en vol : en effet, les accéléromètres étant optimisés pour fonctionner dans un environnement micro-g, leur caractérisation au sol doit être complétée par des phases d'étalonnage en vol. Un système numérique permet donc d'apporter des modifications nécessaires après le lancement. Le choix de cette configuration analogique-numérique des boucles d'asservissement de GOCE est une conséquence de la grande précision des accéléromètres requises. À titre de comparaison, les boucles d'asservissement de la mission GRACE-FO, dont la précision nécessaire est moindre, sont entièrement analogiques.

Le gain correspondant à la partie proportionnelle du PID doit être adapté : un gain trop grand pourrait faire saturer le signal et aurait pour conséquence d'appliquer une accélération électrostatique trop importante à la masse d'épreuve. À l'inverse, un gain trop faible livrerait une tension (et donc une accélération) plus faible, ce qui empêcherait le système d'utiliser la pleine capacité de l'asservissement de la masse d'épreuve. Dans ce cas, la réponse du système serait ralentie, bien que les gains de l'intégrateur et du dérivateur compense quelque peu cet effet. De la même manière, la fonction de transfert de l'intégrateur doit être adaptée de sorte qu'en sortie, l'amplitude du signal ne dépasse pas le niveau de saturation, ce qui est possible si le satellite est soumis à une accélération extérieure importante. Le niveau de saturation du PID sont 1.25 V pour l'axe X, 1.75 V pour l'axe Y, 0.75 V pour le contrôle de l'angle  $\phi$  et 0.625 V pour le contrôle des angles  $\theta$  et  $\psi$ .

### 2.2.4 Le convertisseur numérique-analogique et le DVA

En sortie du correcteur, le signal numérique est transformé en code binaire afin que le convertisseur numérique-analogique (DAC) le reconvertisse en signal analogique. Le bruit du convertisseur est la somme quadratique du bruit intrinsèque et du bruit de quantification. Un majorant de ce bruit constant a été évalué à  $0.8 \times 10^{-6} \text{ V}/\sqrt{\text{Hz}}$ . Puisqu'il y a un PID par degré de liberté, chaque signal livré par un PID correspond à un mouvement en translation ou en rotation à imprimer à la masse d'épreuve. Or, ce sont les électrodes qui doivent assurer le contrôle en translation et en rotation en même temps. Par conséquent, entre le PID et le DAC, les signaux doivent être recombinaés de sorte à obtenir, après conversion du DAC, les tensions à appliquer

sur chacune des électrodes. Le principe de recombinaison est le suivant :

$$\begin{pmatrix} V_{X1} \\ V_{X2} \\ V_{X3} \\ V_{X4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_X^{(pid)} \\ V_\theta^{(pid)} \\ V_\psi^{(pid)} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} V_{Y1} \\ V_{Y2} \\ V_{Z1} \\ V_{Z2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_Y^{(pid)} \\ V_Z^{(pid)} \\ V_\phi^{(pid)} \end{pmatrix} \quad (2.21)$$

Enfin, les tensions à appliquer aux électrodes sont amplifiées par les DVA. Chaque paire d'électrodes partagent deux DVA placés l'un après l'autre : un gain positif  $G_{dva}$  est associé à la tension à appliquer à l'électrode positive et un gain négatif  $-G_{dva}$  est associé à la tension destinée à l'électrode négative. Le bruit du DVA a été estimé à  $9.5 \times 10^{-8} \text{ V}/\sqrt{\text{Hz}}$  et le biais à  $8.23 \times 10^{-3} \text{ V}$ .

### 2.2.5 La branche science

Les valeurs pour la branche science sont prélevées entre le DVA1 et le DVA2. Le premier bloc de la branche est le Read-out constitué d'un amplificateur et d'un filtre anti-repliement de second ordre. L'intérêt de ce filtre est de limiter le repliement introduit par le modulateur haute fréquence du bloc suivant qui est le convertisseur analogique-numérique de la branche science (ADC2). L'ADC2 convertit le signal analogique en signal numérique de fréquence 10Hz. En sortie de l'ADC2, un filtre de Butterworth d'ordre 7 est nécessaire pour assurer un anti-repliement aux multiples de la fréquence de conversion. Avant d'être transmises au sol, les données sont sous-échantillonnées pour obtenir une série temporelle à 1Hz. Enfin, au sol, les non-linéarités de la boucle et de la branche science sont corrigées numériquement avant la conversion des données acquises (des tensions) en accélérations ressenties par la masse d'épreuve.

L'amplitude maximale du signal en sortie du Read-out est 5V. Le bruit du Read-out a été évalué à environ  $1.8 \times 10^{-7} \text{ V}/\sqrt{\text{Hz}}$  pour l'axe  $X$  et  $1.071 \times 10^{-7} \text{ V}/\sqrt{\text{Hz}}$  pour les axes  $Y$  et  $Z$ . Le biais est dû à l'amplificateur contenu dans le Read-out et a été évalué à 0.01V pour l'axe  $X$  et 0.001V pour les axes  $Y$  et  $Z$ .

Le filtre anti-repliement du Read-out est un filtre passe-bas du second ordre ayant pour fonction de transfert une expression de la forme :

$$H_{ro}(p) = G_{ro} \frac{\omega_{0r}^2}{p^2 + 2p\xi\omega_{0r} + \omega_{0r}^2} \quad (2.22)$$

Ainsi, en sortie du Read-out, les tensions obtenues sont de la forme :

$$V_R(i, j) = \frac{1}{2} H_{ro} (G_{dva+} V_{ij} - G_{dva-} V_{ij}) + b_{ro} + n_{ro} \quad (2.23)$$

où  $G_{dva+} = G_{dva-}$ ,  $V_{ij}$  est la tension en sortie du DAC pour l'axe  $i \in X, Y, Z$  et la paire d'électrodes  $j$ ,  $b_{ro}$  et  $n_{ro}$  sont respectivement le biais et le bruit du Read-out. La combinaison des sorties du DVA permet d'atténuer le bruit introduit par ce dernier.

Les caractéristiques de l'ADC2 sont proches de celles de l'ADC1 et a pour fonction de transfert :

$$H_{adc2} = \text{sinc} \left( \frac{f}{f_s^{(adc2)}} \right)^3 \exp \left( 2j\pi \frac{3f}{2f_s^{(adc2)}} \right) \quad (2.24)$$

avec  $f_s^{(adc2)} = 10\text{Hz}$ .

## 2.3. Fonction de transfert du contrôle asservi de la masse d'épreuve

Le bruit de l'ADC2 a été mesuré à  $7.987 \times 10^{-7} \text{ V}/\sqrt{\text{Hz}}$ . Étant donné qu'il y a un ADC2 par paire d'électrodes (donc 8 au total), le bruit total de l'ADC2 pour chaque degré de liberté est la somme quadratique des bruits des ADC2 contribuant à cet axe. En effet, une fois transmises au sol, les tensions en sortie de la branche science sont recombinaées pour obtenir les accélérations électrostatiques linéaires et angulaires appliquées à la masse d'épreuve. En ne prenant pas en compte les opérations de correction de non-linéarités, ces expressions sont de la forme :

$$\ddot{x} = \frac{1}{4} \frac{G_{el}^{(x)}}{G_{ro}} \left( V_{X1}^{(ro)} + V_{X2}^{(ro)} + V_{X3}^{(ro)} + V_{X4}^{(ro)} \right) \quad (2.25)$$

$$\ddot{y} = \frac{1}{2} \frac{G_{el}^{(y)}}{G_{ro}} \left( V_{Y1}^{(ro)} + V_{Y2}^{(ro)} \right) \quad (2.26)$$

$$\ddot{z} = \frac{1}{2} \frac{G_{el}^{(z)}}{G_{ro}} \left( V_{Z1}^{(ro)} + V_{Z2}^{(ro)} \right) \quad (2.27)$$

$$\ddot{\phi} = \frac{1}{2} \frac{G_{el}^{(\phi)}}{G_{ro}} \left( -V_{Y1}^{(ro)} + V_{Y2}^{(ro)} \right) \quad (2.28)$$

$$\ddot{\theta} = \frac{1}{4} \frac{G_{el}^{(\theta)}}{G_{ro}} \left( V_{X1}^{(ro)} + V_{X2}^{(ro)} - V_{X3}^{(ro)} - V_{X4}^{(ro)} \right) \quad (2.29)$$

$$\ddot{\psi} = \frac{1}{4} \frac{G_{el}^{(\psi)}}{G_{ro}} \left( -V_{X1}^{(ro)} + V_{X2}^{(ro)} - V_{X3}^{(ro)} + V_{X4}^{(ro)} \right) \quad (2.30)$$

où  $V_{ij}^{(ro)}$  est la tension en sortie de la branche science pour l'axe  $i$  et la paire  $j$ ,  $G_{ro}$  le gain du Read-out et  $G_{el}^{(k)}$  le gain électrostatique pour le degré de liberté  $k$  (cf. chapitre suivant pour une présentation explicite à ce sujet).

Les composants de la boucle d'asservissement sont détaillés dans la figure 2.5 et les étapes du contrôle peuvent être résumées ainsi :

- après intégration, le détecteur convertit les positions en tensions sous forme de signal analogique ;
- l'ADC convertit les signaux analogiques en signaux digitaux avec une fréquence d'échantillonnage  $f_{sc1} = 1027.96 \text{ Hz}$  ;
- puis, le rôle du PID correcteur est de permettre d'éviter les instabilités de la boucle d'asservissement ;
- en sortie du PID, d'une part le signal est dévié vers le système de compensation. D'autre part, il est reconverti en signal analogique puis en tension à appliquer sur les électrodes ;
- en appliquant une tension sur les électrodes, celles-ci exercent une force électrostatique attractive sur la masse d'épreuve.

La figure 2.8 synthétise, grâce à un schéma plus réaliste, l'architecture électronique pour le contrôle des électrodes Y et Z. En particulier sont indiquées les combinaisons et recombinaisons des signaux au sein de la boucle d'asservissement.

## 2.3 Fonction de transfert du contrôle asservi de la masse d'épreuve

### 2.3.1 Fonction de transfert dans le cas d'un contrôle simplifié uniaxial

La partie précédente a eu pour objet la description des caractéristiques des éléments de la boucle d'asservissement. Dans la partie présente, on s'intéresse à la fonction de transfert de cette boucle, dans le cas simplifié

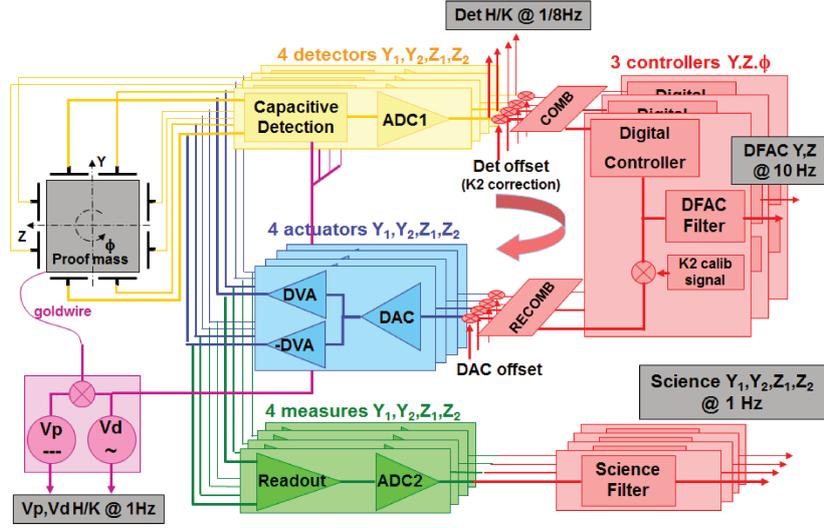


Figure 2.8 – Schéma montrant les superpositions des boucles d'asservissement pour le contrôle avec les électrodes Y et Z.

d'un contrôle uniaxial, représenté par la figure 2.5. La tension  $V_{sc}$  destinée à la branche scientifique est prélevée entre le DVA1 et le DVA2. Cette tension vérifie les deux équations :

$$V_{sc}(p) = H_{dva1}(p)H_{pid}(p)H_{adc1}(p)H_{det}(p)X(p) \quad (2.31)$$

$$X(p) = \frac{1}{p^2} \left( a_{ext} - G_{el}H_{dva2}(p)V_{sc}(p) + \omega_p^2 X(p) \right) \quad (2.32)$$

où  $H_i(p)$  est la fonction de transfert du composant  $i$ .

On en déduit que la fonction de transfert  $TF$  de la boucle fermée a pour expression :

$$TF(p) = \frac{V_{sc}(p)}{a_{ext}(p)} = \frac{H_{dva1}(p)H_{pid}(p)H_{adc1}(p)H_{det}(p)}{p^2 - \omega_p^2 + G_{el}H_{dva2}(p)H_{dva1}(p)H_{pid}(p)H_{adc1}(p)H_{det}(p)} \quad (2.33)$$

Cette fonction de transfert est la transformée de Laplace de la réponse impulsionnelle de la boucle d'asservissement.

En conséquence, la relation entre l'accélération extérieure et celle estimée en sortie de la branche science s'écrit :

$$\begin{aligned} \hat{a}_{ext}(p) &= G_{el}H_{ro}(p)H_{adc2}(p)H_{sc}(p)V_{sc}(p) \\ &= \frac{G_{el}H_{ro}(p)H_{adc2}(p)H_{sc}(p)H_{dva1}(p)H_{pid}(p)H_{adc1}(p)H_{det}(p)}{p^2 - \omega_p^2 + G_{el}H_{dva2}(p)H_{dva1}(p)H_{pid}(p)H_{adc1}(p)H_{det}(p)} a_{ext}(p) \end{aligned} \quad (2.34)$$

Dans le domaine fréquentiel, la densité spectrale de puissance de la tension en entrée de la branche science, notée  $S[V_{sci}](\omega)$ , et celle de l'accélération extérieure, notée  $S[a_{ext}](\omega)$ , vérifient l'équation :

$$S[V_{sci}](\omega) = |ATF(\omega)|^2 S[a_{ext}](\omega) \quad (2.35)$$

où  $ATF(\omega)$  est la transformée de Fourier de la réponse impulsionnelle de la boucle d'asservissement  $B_f(t)$

(donc dans le domaine temporel).

Ainsi :

$$ATF(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} B_f(u) e^{-i u \omega} du = \int_{-\infty}^0 B_f(u) e^{-i u \omega} du + \int_0^{+\infty} B_f(u) e^{-i u \omega} du \quad (2.36)$$

Étant donné que la boucle d'asservissement est un système physique non-anticipatif, la réponse impulsionnelle pour des temps négatifs est nulle. La relation précédente se simplifie donc :

$$ATF(\omega) = \int_0^{+\infty} B_f(u) e^{-i u \omega} du = \mathcal{L}[B_f](-i\omega) \quad (2.37)$$

Ainsi, la transformée de Fourier de la réponse impulsionnelle correspond à la transformée de Laplace de cette réponse évaluée en  $-i\omega$ .

On trouve finalement que les relations suivantes entre les densités spectrales de l'accélération extérieure et des tensions en entrée/sortie de la branche science :

$$S[V_{sci}](\omega) = \left| \frac{H_{dva1}(-i\omega)H_{pid}(-i\omega)H_{adc1}(-i\omega)H_{det}(-i\omega)}{(-i\omega)^2 - \omega_p^2 + G_{el}H_{dva2}(-i\omega)H_{dva1}(-i\omega)H_{pid}(-i\omega)H_{adc1}(-i\omega)H_{det}(-i\omega)} \right|^2 S[a_{ext}](\omega) \quad (2.38)$$

$$S[\hat{a}_{ext}](\omega) = \left| \frac{G_{el}H_{ro}(-i\omega)H_{adc2}(-i\omega)H_{sc}(-i\omega)H_{dva1}(-i\omega)H_{pid}(-i\omega)H_{adc1}(-i\omega)H_{det}(-i\omega)}{(-i\omega)^2 - \omega_p^2 + G_{el}H_{dva2}(-i\omega)H_{dva1}(-i\omega)H_{pid}(-i\omega)H_{adc1}(-i\omega)H_{det}(-i\omega)} \right|^2 S[a_{ext}](\omega) \quad (2.39)$$

### 2.3.2 Fonction de transfert dans le cas uniaxial et avec perturbations

Les équations précédentes sont établies sous l'hypothèse que les composants électroniques sont parfaits. Dans cette partie, on introduit le biais  $b_i$  et le bruit  $n_i$  de chaque composant  $i$  que l'on rajoute à la sortie dudit composant. Dans ce cas, la tension en entrée de la branche science vérifie les équations :

$$\begin{aligned} V_{sc}(p) = & H_{dva1}(p)H_{pid}(p)H_{adc1}(p)H_{det}(p)X(p) \\ & + H_{dva1}(p)H_{pid}(p)H_{adc1}(p)b_{det} + H_{dva1}(p)H_{pid}(p)b_{adc1} + H_{pid}(p)b_{pid} + b_{dva1} \\ & + H_{dva1}(p)H_{pid}(p)H_{adc1}(p)n_{det}(p) + H_{dva1}(p)H_{pid}(p)n_{adc1}(p) + H_{pid}(p)n_{pid}(p) + n_{dva1}(p) \end{aligned} \quad (2.40)$$

$$X(p) = \frac{1}{p^2 - \omega^2} (a_{ext} - G_{el}H_{dva2}(p)V_{sc}(p)) \quad (2.41)$$

Par conséquent, la relation entre la tension en entrée de la branche science et l'accélération extérieure prend la forme :

$$\begin{aligned} V_{sc}(p) = & TF(p)a_{ext}(p) \\ & + \frac{1}{p^2 - \omega_p^2 + G_{el}H_{dva2}(p)H_{dva1}(p)H_{pid}(p)H_{adc1}(p)H_{det}(p)} [B(p) + N(p)] \end{aligned} \quad (2.42)$$

où  $B(p)$  et  $N(p)$  correspondent aux sommes de biais et de bruits de l'équation précédente.

L'accélération estimée en sortie de la branche science a pour expression :

$$\hat{a}_{ext}(p) = G_{el}H_{ro}(p)H_{adc2}(p)H_{sc}(p)TF(p)a_{ext}(p) + \frac{G_{el}H_{ro}(p)H_{adc2}(p)H_{sc}(p)}{p^2 - \omega_p^2 + G_{el}H_{dva2}(p)H_{dva1}(p)H_{pid}(p)H_{adc1}(p)H_{det}(p)} [B(p) + N(p)] \quad (2.43)$$

En considérant que les bruits des composants électroniques sont non corrélés, la densité spectrale de leur somme est la somme de leur densité spectrale. Par conséquent,

$$S[N](\omega) = |H_{dva1}(-i\omega)H_{pid}(-i\omega)H_{adc1}(-i\omega)|^2 S[n_{det}](\omega) + |H_{dva1}(-i\omega)H_{pid}(-i\omega)|^2 S[n_{adc1}](-i\omega) + |H_{pid}(-i\omega)|^2 S[n_{pid}](\omega) + S[n_{dva1}](\omega) \quad (2.44)$$

Deux constantes n'étant pas corrélées, on a de même :

$$S[B](\omega) = |H_{dva1}(-i\omega)H_{pid}(-i\omega)H_{adc1}(-i\omega)|^2 b_{det}^2 + |H_{dva1}(-i\omega)H_{pid}(-i\omega)|^2 b_{adc1}^2 + |H_{pid}(-i\omega)|^2 b_{pid}^2 + b_{dva1}^2 \quad (2.45)$$

Finalement la densité spectrale de la tension en entrée de la branche science est reliée à celle de l'accélération extérieure, du biais et du bruit par :

$$S[V_{sc}](\omega) = |\mathcal{L}[B_f](-i\omega)|^2 S[a_{ext}](\omega) + \left| \frac{G_{el}H_{ro}(-i\omega)H_{adc2}(-i\omega)H_{sc}(-i\omega)}{(-i\omega)^2 - \omega_p^2 + G_{el}H_{dva2}(-i\omega)H_{dva1}(-i\omega)H_{pid}(-i\omega)H_{adc1}(-i\omega)H_{det}(-i\omega)} \right|^2 [S[B](\omega) + S[N](\omega)] \quad (2.46)$$

De même, la densité spectrale de l'accélération estimée en sortie de la branche science est reliée à celle de l'accélération extérieure, du biais et du bruit par :

$$S[\hat{a}_{ext}](\omega) = |G_{el}H_{ro}(-i\omega)H_{adc2}(-i\omega)H_{sc}(-i\omega)|^2 |\mathcal{L}[B_f](-i\omega)|^2 S[a_{ext}](\omega) + \left| \frac{G_{el}H_{ro}(-i\omega)H_{adc2}(-i\omega)H_{sc}(-i\omega)}{p(-i\omega)^2 - \omega_p^2 + G_{el}H_{dva2}(-i\omega)H_{dva1}(-i\omega)H_{pid}(-i\omega)H_{adc1}(-i\omega)H_{det}(-i\omega)} \right|^2 [S[B](\omega) + S[N](\omega)] \quad (2.47)$$

Ainsi, lorsque les composants électroniques introduisent des biais et des bruits, la boucle de contrôle traite un signal non nul même si aucune accélération extérieure n'est appliquée à la masse d'épreuve. Cela a donc pour effet de créer une force électrostatique parasite et donc un mouvement parasite de la masse d'épreuve. Du point de vue de l'analyse spectrale, l'importance de ces perturbations doit être évaluée par l'amplitude des densités spectrales parasites introduites dans les équations (2.46) et (2.47). Leur somme doit être en-deçà du niveau de bruit autorisé pour les accéléromètres.

#### — Récapitulatif du chapitre 2 —

Dans un premier temps, ce chapitre a permis d'établir rigoureusement l'expression de la force électrostatique exercée par les électrodes dans le cadre d'un accéléromètre uniaxial. Les grandeurs essentielles telles que le gain électrostatique et la raideur électrostatique ont pu être introduites et apparaissent à nouveau dans les relations plus réalistes entre la masse d'épreuve et les électrodes des accéléromètres de GOCE présentées au chapitre 3. Par ailleurs, le rôle des composants principaux de l'architecture électronique ainsi que leur bruit et biais ont été présentés en détail. Ces composants sont importants dans l'équation de mesure des accéléromètres et en particulier de la performance (biais et bruits) des accéléromètres.

# 3 Analyse de la mesure accélérométrique pour la mission GOCE

## Objectifs du chapitre 3

- Présenter les calculs théoriques permettant de mettre en évidence l'accélération de la masse d'épreuve par rapport à celui du satellite pour définir l'accélération mesurée par un accéléromètre.
- Définir les modes communs et les modes différentiels intervenant dans l'estimation du gradient de gravité. En particulier, pour préparer les études spectrales présentées dans le chapitre suivant et pour établir les expressions des composantes du gradient de gravité en fonction des modes différentiels.
- Établir pour chaque degré de liberté, trois en translation et trois en rotation, une approximation de la relation entre tensions appliquées sur les électrodes et accélération mesurée.

## 3.1 Accélération d'une masse d'épreuve par rapport au satellite

### 3.1.1 Résumé des notations

Dans cette partie, les notations suivantes sont utilisées :

- $O_k$  : centre de masse de la masse d'épreuve  $k$  ;
- $m_k$  : masse de la masse d'épreuve  $k$  ;
- $C_k$  : centre géométrique de la cage de l'accéléromètre  $k$  ;
- $C_{kl}$  : centre géométrique des deux cages d'électrodes de la paire d'accéléromètre  $(k,l)$ . Il s'agit du milieu du segment  $[C_k C_l]$  ;
- $O_{sat}$  : centre de masse du satellite sans les masses d'épreuve ;
- $m_{sat}$  : masse du satellite sans les masses d'épreuve ;
- $R_{IRF}$  : repère associé au référentiel inertiel ;
- $R_{sat}$  : un repère de centre  $C_{sat}$  rigidement lié au satellite.

Les définitions des référentiels et repères couramment utilisés dans le cadre de la mission GOCE se trouvent dans l'annexe A. On désigne par *accéléromètre* l'ensemble du dispositif constitué de la masse d'épreuve et des cages d'électrodes. On désigne par centre d'un accéléromètre le centre géométrique de la cage d'électrode qui est rigidement liée au satellite. Le centre de masse de la masse d'épreuve doit être confondu avec le centre de l'accéléromètre lorsque la conception de l'instrument et le contrôle asservi sont parfaits (cf. section 2.1).

Les indices *IRF* et *sat* indiquent le repère dans lequel est écrite l'accélération. Par ailleurs, un vecteur défini par deux points  $P_1$  et  $P_2$  sera noté  $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2$ . Les dérivées première et seconde s'écriront respectivement  $\overset{\circ}{\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2}$  et  $\overset{\circ\circ}{\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2}$ .

### 3.1.2 Relation entre l'accélération gravitationnelle et le potentiel gravitationnel

L'énergie totale d'un corps en orbite soumis à l'attraction gravitationnelle seule est constante, donc l'énergie cinétique et l'énergie potentielle sont reliées par la relation  $dE_c = -dE_p$ . Puisque  $E_c = 1/2mv^2$  et que le principe fondamentale de Newton donne  $F = m dv/dt$ , alors

$$dE_c = mvdv = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}dt = \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{x}}{dt}dt = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} \quad (3.1)$$

Donc  $dE_p = -\mathbf{F} \cdot d\mathbf{x}$ , autrement dit  $\mathbf{F} = -\nabla E_p$  où le symbole  $\nabla$  désigne l'opérateur gradient.

Au chapitre 1, on a vu qu'un corps au repos sur la Terre subit l'attraction due à la distribution de masse de la Terre (à l'origine de la force gravitationnelle) et de la force centrifuge due à la rotation de la Terre. En revanche, un satellite artificiel n'est pas entraîné par le mouvement de rotation de la Terre et il ne subit donc que la force gravitationnelle. En notant  $V$  le potentiel gravitationnel, l'énergie potentielle associée s'écrit :  $E_p = mV$ , où  $m$  est la masse du corps en orbite considéré. Par conséquent, en notant  $\mathbf{g}$  le champ d'accélération due à l'attraction gravitationnelle de la Terre, on a  $\mathbf{F} = m\mathbf{g}$  et  $\mathbf{F} = -\nabla E_p = -m\nabla V$ , soit  $\mathbf{g} = \nabla V$ .

### 3.1.3 Équations de la dynamique et de la cinématique

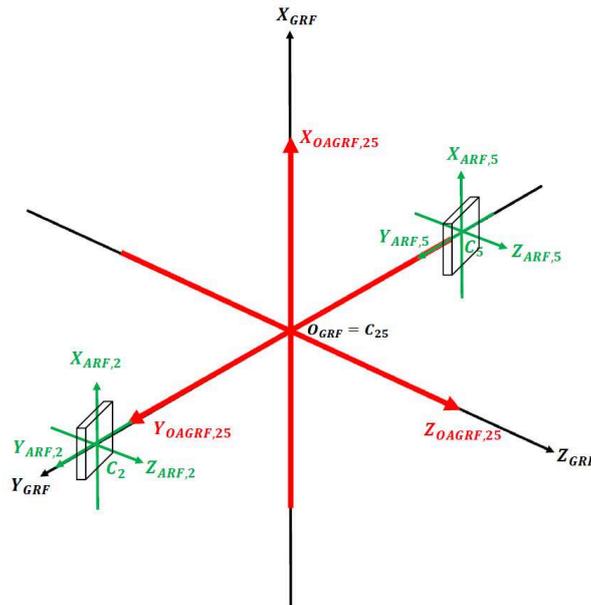


Figure 3.1 – Exemple de disposition entre les repères  $R_{ARF,25}$ ,  $R_{OAGRF,25}$  et  $R_{GRF}$  dans le cas de la paire d'accéléromètres 2-5. Les parallélépipèdes représentent les cages d'accéléromètre 2 et 5.

L'objectif de cette section est d'étudier la dynamique de la masse d'épreuve par rapport au satellite. Tout d'abord, les forces agissant sur une masse d'épreuve (de centre de masse  $O_k$ ) et sur le satellite (de centre de masse  $O_{sat}$ ) sont repertoriées. On fait l'hypothèse que les cages d'électrodes sont rigidement liées au gradiomètre et au satellite, et que le gradiomètre est un solide indéformable. En revanche, bien que le satellite ait été conçu avec l'objectif de minimiser les perturbations mécaniques internes en n'incluant aucune structure déployable ou mobile [11, 78], il peut être soumis à de faibles déformations thermoélastiques.

Par ailleurs, on considère le cas d'un gradiomètre parfait pour lequel :

### 3.1. Accélération d'une masse d'épreuve par rapport au satellite

- la conception des accéléromètres est parfaite de sorte qu'il n'y a pas de défaut géométrique et les mesures électroniques ne sont pas bruitées ;
- les 6 accéléromètres occupent leur position nominale de sorte que les axes des repères  $R_{ARF}$  rigidement liés aux cages sont parallèles ;
- les centres de symétrie de chaque paire d'accéléromètres sont confondus. Ce point commun est lui-même confondu avec le centre du gradiomètre  $O_{GRF}$  ;
- les axes des repères  $R_{ARF}$  sont parallèles aux axes du repère  $R_{GRF}$  associé au référentiel du gradiomètre et les droites passant par le centre de chaque paire d'accéléromètres sont confondues avec les axes de  $R_{GRF}$ .

Il est à noter que ces hypothèses autorisent un décalage variable entre le centre de masse du satellite  $O_{sat}$  et le centre de masse du gradiomètre  $O_{GRF}$ , mais qu'elles supposent que les axes des repères mentionnés gardent la même orientation et position au cours de la mission.

Les forces suivantes s'exercent sur la masse d'épreuve :

- la force gravitationnelle  $m_k \mathbf{g}(O_k) = m_k \nabla \mathbf{V}(O_k)$  ;
- la force gravitationnelle  $m_k \mathbf{g}_S(O_k)$  due au reste du satellite (y compris les autres masses d'épreuve) ;
- la force électrostatique exercée par les électrodes de la cage  $\mathbf{f}_{e_k}$ .
- des forces parasites intérieures à la cage  $\mathbf{f}_{par,k}^{int}$  tels que l'effet radiométrique, la pression de radiation, la raideur du fil d'or ;
- des forces parasites extérieures à la cage  $\mathbf{f}_{par,k}^{ext}$  (dues par exemple au champ magnétique terrestre ou au champ magnétique d'origine électronique).

Les forces suivantes s'exercent sur le satellite :

- la force gravitationnelle  $m_{sat} \mathbf{g}(O_{sat}) = m_{sat} \nabla \mathbf{V}(O_{sat})$  ;
- la réaction de toutes les forces électrostatiques exercées sur les masses d'épreuve  $-\sum_{i=1}^N \mathbf{f}_{e_i}$  ;
- la réaction de toutes les forces parasites intérieures à la cage  $-\sum_{i=1}^N \mathbf{f}_{par,i}^{int}$  ;
- les forces non-gravitationnelles extérieures au satellite  $\mathbf{f}_{NG,sat}$  telles que la résultante de la traînée et de la poussée des propulseurs.

Le théorème de la résultante dynamique peut s'appliquer sur le centre de gravité  $O_k$  d'une masse d'épreuve dans le repère inertiel :

$$\begin{aligned} m_k \mathbf{a}(O_k / R_{IRF}) &= m_k \mathbf{g}(O_k) + m_k \mathbf{g}_S(O_k) + \mathbf{f}_{e_k} + \mathbf{f}_{par,k}^{int} + \mathbf{f}_{par,k}^{ext} \\ &= m_k \nabla \mathbf{V}(O_k) + m_k \mathbf{g}_S(O_k) + \mathbf{f}_{e_k} + \mathbf{f}_{par,k}^{int} + \mathbf{f}_{par,k}^{ext} \end{aligned} \quad (3.2)$$

De manière analogue, le théorème de la résultante dynamique peut être appliqué sur le satellite dans le repère inertiel :

$$m_{sat} \mathbf{a}(O_{sat} / R_{IRF}) = m_{sat} \nabla \mathbf{V}(O_{sat}) - \sum_{i=1}^N \mathbf{f}_{e_i} - \sum_{i=1}^N \mathbf{f}_{par,i}^{int} + \mathbf{f}_{NG,sat} \quad (3.3)$$

La mesure accélérométrique se fait dans un repère rigidement lié au satellite. Pour cela, on définit un repère orthonormé direct  $R_{sat}$ , de centre  $C_{sat}$ , rigidement lié au satellite. L'intérêt d'une telle définition est qu'elle est suffisamment générale pour l'appliquer aux repères  $R_{ARF}$ ,  $R_{OAGRF}$  et  $R_{GRF}$  dont un exemple pour la paire 2-5 est présentée dans la figure 3.1 (la définition complète de ces repères est disponible dans l'annexe A). En outre, le référentiel associé au repère  $R_{sat}$  n'est pas galiléen. Par conséquent, pour transposer le théorème de la résultante dynamique dans  $R_{sat}$ , il faut introduire la composition des accélérations, d'un référentiel

non-galiléen (lié au satellite) vers le référentiel inertiel (avec pour repère  $R_{IRF}$ ), qui permet d'écrire :

$$\mathbf{a}(O_k/R_{IRF}) = \mathbf{a}(O_k/R_{sat}) + \mathbf{a}_e(O_k) + \mathbf{a}_c(O_k) \quad (3.4)$$

où  $\mathbf{a}_e(O_k)$  et  $\mathbf{a}_c(O_k)$  sont respectivement l'accélération d'entraînement et de Coriolis du point  $O_k$ .

L'accélération d'entraînement a pour expression:

$$\mathbf{a}_e(O_k) = \mathbf{a}(C_{sat}/R_{IRF}) + \dot{\boldsymbol{\Omega}}(R_{sat}/R_{IRF}) \wedge \mathbf{C}_{sat} \mathbf{O}_k + \boldsymbol{\Omega}(R_{sat}/R_{IRF}) \wedge (\boldsymbol{\Omega}(R_{sat}/R_{IRF}) \wedge \mathbf{C}_{sat} \mathbf{O}_k)$$

où  $\boldsymbol{\Omega}(R_{sat}/R_{IRF})$  est le vecteur rotation associé au mouvement angulaire du repère  $R_{sat}$  par rapport au repère  $R_{IRF}$ . Ce vecteur est tel que sa norme soit la vitesse angulaire correspondante, sa direction (indiquée par un vecteur directeur) soit celle de l'axe du cercle décrit par le mouvement angulaire et son sens soit tel que la rotation se fait dans le sens direct autour de la droite de vecteur directeur  $\boldsymbol{\Omega}(R_{sat}/R_{IRF})$ .

L'accélération de Coriolis a pour expression :

$$\mathbf{a}_c(O_k) = 2\boldsymbol{\Omega}(R_{sat}/R_{IRF}) \wedge \mathbf{V}(O_k/R_{sat}) = 2\boldsymbol{\Omega}(R_{sat}/R_{IRF}) \wedge \mathbf{C}_{sat} \dot{\mathbf{O}}_k|_{sat} \quad (3.5)$$

Pour simplifier les notations, dans la suite  $\boldsymbol{\Omega}(R_{sat}/R_{IRF})$  est noté  $\boldsymbol{\Omega}$ .

De même, en considérant le centre de masse du satellite sans les masses d'épreuve :

$$\mathbf{a}(O_{sat}/R_{IRF}) = \mathbf{a}(O_{sat}/R_{sat}) + \mathbf{a}(C_{sat}/R_{IRF}) + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \wedge \mathbf{C}_{sat} \mathbf{O}_{sat} + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{C}_{sat} \mathbf{O}_{sat}) + 2\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{C}_{sat} \dot{\mathbf{O}}_{sat}|_{sat} \quad (3.6)$$

Dans le repère inertiel, l'accélération de la masse d'épreuve par rapport au centre de masse du satellite s'écrit alors :

$$\mathbf{a}(O_k/R_{IRF}) - \mathbf{a}(O_{sat}/R_{IRF}) = \mathbf{O}_{sat} \ddot{\mathbf{O}}_k|_{sat} + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \wedge \mathbf{O}_{sat} \mathbf{O}_k + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{O}_{sat} \mathbf{O}_k) + 2\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{O}_{sat} \dot{\mathbf{O}}_k|_{sat} \quad (3.7)$$

Dans la suite, pour simplifier les équations, on linéarise à l'ordre 1 le champ d'accélération gravitationnelle terrestre  $\mathbf{g}$  autour d'un point A. Pour cela, on note  $g_i$ ,  $i = x, y, z$ , la composante  $i$  en un point quelconque d'un repère dans lequel on effectue les calculs.

Comme  $\mathbf{g} = \nabla V = \left[ \frac{\partial V}{\partial x} \quad \frac{\partial V}{\partial y} \quad \frac{\partial V}{\partial z} \right]$ , on peut définir comme suit la matrice de gradient de gravité  $[T]$  :

$$\nabla \mathbf{g} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_x}{\partial x} & \frac{\partial g_x}{\partial y} & \frac{\partial g_x}{\partial z} \\ \frac{\partial g_y}{\partial x} & \frac{\partial g_y}{\partial y} & \frac{\partial g_y}{\partial z} \\ \frac{\partial g_z}{\partial x} & \frac{\partial g_z}{\partial y} & \frac{\partial g_z}{\partial z} \end{bmatrix} = \nabla^2 V = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \end{bmatrix} = [T] \quad (3.8)$$

La définition du gradient de gravité doit être associée celle du repère dans lequel on l'exprime.

Grâce au développement limité précédent, on a en un point A :

$$\mathbf{g}(O_k) = \mathbf{g}(A) + \nabla \mathbf{g}(A) \cdot \mathbf{AO}_k + \|\mathbf{AO}_k\| \epsilon(\mathbf{AO}_k) = \mathbf{g}(A) + [T](A) \cdot \mathbf{AO}_k + \|\mathbf{AO}_k\| \epsilon(\mathbf{AO}_k) \quad (3.9)$$

$$\mathbf{g}(O_{sat}) = \mathbf{g}(A) + \nabla \mathbf{g}(A) \cdot \mathbf{AO}_{sat} + \|\mathbf{AO}_{sat}\| \epsilon(\mathbf{AO}_{sat}) = \mathbf{g}(A) + [T](A) \cdot \mathbf{AO}_{sat} + \|\mathbf{AO}_{sat}\| \epsilon(\mathbf{AO}_{sat}) \quad (3.10)$$

où  $\epsilon$  indique les termes négligeables d'ordres supérieurs à l'ordre 1.

### 3.1. Accélération d'une masse d'épreuve par rapport au satellite

Donc :

$$\nabla \mathbf{V}(O_k) - \nabla \mathbf{V}(O_{sat}) = \nabla \mathbf{g}(A) \cdot \mathbf{O}_{sat} \mathbf{O}_k + \|\mathbf{O}_{sat} \mathbf{O}_k\| \epsilon(\mathbf{O}_{sat} \mathbf{O}_k) \quad (3.11)$$

Cette formulation utilisant la linéarisation de l'accélération de la gravité n'est valable qu'à condition que les termes d'ordres supérieurs soient négligeables, ce qui est le cas pour un satellite à proximité de la Terre. En effet, on peut vérifier ce résultat à l'aide d'un calcul d'ordre de grandeur : le potentiel gravitationnel généré par la Terre s'écrit :  $V = \mathcal{G}M_t/r$  où  $\mathcal{G}$  est la constante gravitationnelle,  $M_t$  la masse de la Terre et  $r$  la distance entre le satellite et le centre de la Terre. Les composantes de  $[T]$  qui sont les dérivées secondes sont donc de la forme  $\mathcal{G}M_t/r^3$  et les dérivées d'ordre 3 de la forme  $\mathcal{G}M_t/r^4$ . Le satellite GOCE évolue sur une orbite située à 250 km, par conséquent, les composantes de  $[T]$  sont de l'ordre de  $10^{-6}/s^2$  et les dérivées d'ordre 3 de l'ordre de  $10^{-12}/ms^2$ .

En soustrayant les équations (3.3) et (3.2), on a en repère inertiel :

$$\begin{aligned} \mathbf{O}_{sat} \overset{\circ}{\mathbf{O}}_k |_{IRF} &= \nabla \mathbf{g}(A) \cdot \mathbf{O}_{sat} \mathbf{O}_k + \mathbf{g}_S(O_k) + \frac{\mathbf{f}_{e_k}}{m_k} + \frac{\sum_{i=1}^N \mathbf{f}_{e_i}}{m_{sat}} \\ &+ \frac{\mathbf{f}_{par,k}^{int}}{m_k} + \frac{1}{m_{sat}} \sum_{i=1}^N \mathbf{f}_{par,i}^{int} + \frac{\mathbf{f}_{par,k}^{ext}}{m_k} - \frac{\mathbf{f}_{NG,sat}}{m_{sat}} \end{aligned} \quad (3.12)$$

En égalant les équations (3.12) et (3.7), on peut alors écrire la relation entre la cinématique et la dynamique dans le repère non-galiléen  $R_{sat}$  :

$$\begin{aligned} &\nabla \mathbf{g}(A) \cdot \mathbf{O}_{sat} \mathbf{O}_k + \mathbf{g}_S(O_k) + \frac{\mathbf{f}_{e_k}}{m_k} + \frac{\sum_{i=1}^N \mathbf{f}_{e_i}}{m_{sat}} + \frac{\mathbf{f}_{par,k}^{int}}{m_k} + \frac{\sum_{i=1}^N \mathbf{f}_{par,i}^{int}}{m_{sat}} + \frac{\mathbf{f}_{par,k}^{ext}}{m_k} - \frac{\mathbf{f}_{NG,sat}}{m_{sat}} \\ &= \mathbf{O}_{sat} \overset{\circ}{\mathbf{O}}_k |_{sat} + \overset{\circ}{\boldsymbol{\Omega}} \wedge \mathbf{O}_{sat} \mathbf{O}_k + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{O}_{sat} \mathbf{O}_k) + 2\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{O}_{sat} \overset{\circ}{\mathbf{O}}_k |_{sat} \end{aligned} \quad (3.13)$$

Dans la suite, on utilise une notation matricielle pour réexprimer les produits vectoriels en produits matriciels. Pour cela, on note  $[\Omega]$  la matrice associée au vecteur rotation  $\Omega$ . Si les coordonnées de  $\boldsymbol{\Omega}$  sont  $(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ , alors la matrice associée s'écrit :

$$[\Omega] = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_Z & \omega_Y \\ \omega_Z & 0 & -\omega_X \\ -\omega_Y & \omega_X & 0 \end{bmatrix}$$

De sorte qu'étant donné un vecteur  $\mathbf{v}$  de coordonnées  $(x, y, z)$  :

$$\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{v} = [\Omega] \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{v}) = [\Omega]^2 \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad [\Omega]^2 = \begin{bmatrix} -\omega_Z^2 - \omega_Y^2 & \omega_X \omega_Y & \omega_X \omega_Z \\ \omega_X \omega_Y & -\omega_Z^2 - \omega_X^2 & \omega_Y \omega_Z \\ \omega_X \omega_Z & \omega_Y \omega_Z & -\omega_X^2 - \omega_Y^2 \end{bmatrix}$$

L'équation (3.13) peut être réécrite sous la forme :

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{f}_{e_k}}{m_k} = & -([T](A) - [\dot{\Omega}] - [\Omega]^2) \mathbf{O}_{sat} \mathbf{O}_k + \mathbf{O}_{sat}^{\circ\circ} \mathbf{O}_k|_{sat} + 2[\Omega] \mathbf{O}_{sat}^{\circ} \mathbf{O}_k|_{sat} \\ & - \mathbf{g}_S(O_k) - \frac{\sum_{i=1}^N \mathbf{f}_{e_i}}{m_{sat}} - \frac{\mathbf{f}_{par,k}^{int}}{m_k} - \frac{\sum_{i=1}^N \mathbf{f}_{par,i}^{int}}{m_{sat}} - \frac{\mathbf{f}_{par,k}^{ext}}{m_k} + \frac{\mathbf{f}_{NG,sat}}{m_{sat}} \end{aligned} \quad (3.14)$$

L'équation (3.14) montre les différents contributeurs dans l'accélération électrostatique dans le cas parfait délimité par les hypothèses énoncées au début de cette section. Dans ce cas, on voit l'effet dû à l'attraction gravitationnelle, au mouvement inertiel du satellite, aux forces non-gravitationnelles agissant sur le satellite, aux forces parasites agissant sur la masse d'épreuve et sur le satellite. Il est intéressant de noter qu'une fraction des forces électrostatiques exercées sur les autres masses d'épreuve est reliée à la force électrostatique appliquée à la masse d'épreuve considérée.

La mesure d'intérêt est l'accélération électrostatique  $\boldsymbol{\gamma}_k = \frac{\mathbf{f}_{e_k}}{m_k}$  et s'exprime dans le repère  $R_{sat}$  en fonction des autres accélérations :

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{m_k}{m_{sat}}\right) \boldsymbol{\gamma}_k = & -([T](A) - [\dot{\Omega}] - [\Omega]^2) \mathbf{O}_{sat} \mathbf{O}_k + \mathbf{O}_{sat}^{\circ\circ} \mathbf{O}_k|_{sat} + 2[\Omega] \mathbf{O}_{sat}^{\circ} \mathbf{O}_k|_{sat} \\ & - \mathbf{g}_S(O_k) - \frac{\sum_{i \neq k}^N \mathbf{f}_{e_i}}{m_{sat}} - \frac{\mathbf{f}_{par,k}^{int}}{m_k} - \frac{\sum_{i=1}^N \mathbf{f}_{par,i}^{int}}{m_{sat}} - \frac{\mathbf{f}_{par,k}^{ext}}{m_k} + \frac{\mathbf{f}_{NG,sat}}{m_{sat}} \end{aligned} \quad (3.15)$$

Une des propriétés de l'équation (3.15) est qu'elle est valable dans tout repère rigidement lié au satellite et pour tout point A par rapport auquel on a linéarisé. En particulier, l'équation (3.15) est valable dans les repères  $R_{ARF}$ ,  $R_{OAGRF}$  et  $R_{GRF}$ , tous rigidement liés au satellite. Par exemple, considérons l'accéléromètre  $A_k$  appartenant à la paire  $(k, l)$  qui correspond à l'un des trois gradiomètres uniaxiaux. Soit  $C_{kl}$  le centre du repère associé à ce gradiomètre uniaxial et qui correspond au centre des deux cages d'électrodes. Supposons qu'on choisisse le repère  $R_{OAGRF}$ , défini par rapport à ce gradiomètre uniaxial, comme repère rigidement lié au satellite pour écrire l'équation (3.15). Autrement dit, le point A choisi est le point  $C_{kl}$  et le repère  $R_{sat}$  est le repère  $R_{OAGRF,k}$  de sorte que l'on a :

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{m_k}{m_{sat}}\right) \boldsymbol{\gamma}_k = & -([T](C_{kl}) - [\dot{\Omega}] - [\Omega]^2) \mathbf{O}_{sat} \mathbf{O}_k + \mathbf{O}_{sat}^{\circ\circ} \mathbf{O}_k|_{R_{OAGRF,k}} + 2[\Omega] \mathbf{O}_{sat}^{\circ} \mathbf{O}_k|_{R_{OAGRF,k}} \\ & - \mathbf{g}_S(O_k) - \frac{\sum_{i \neq k}^N \mathbf{f}_{e_i}}{m_{sat}} - \frac{\mathbf{f}_{par,k}^{int}}{m_k} - \frac{\sum_{i=1}^N \mathbf{f}_{par,i}^{int}}{m_{sat}} - \frac{\mathbf{f}_{par,k}^{ext}}{m_k} + \frac{\mathbf{f}_{NG,sat}}{m_{sat}} \end{aligned} \quad (3.16)$$

L'équation (3.16) montre en particulier l'existence d'un couplage entre la mesure  $\boldsymbol{\gamma}_k$  et les forces électrostatiques exercées sur les autres masses d'épreuve.

### 3.1.4 Ordre de grandeur de la force électrostatique totale pour maintenir les masses d'épreuve immobiles

On peut effectuer un calcul d'ordre de grandeur des forces électrostatiques nécessaires pour maintenir une masse d'épreuve immobile. On suppose que le centre de masse du satellite  $O_{sat}$  est immobile au cours de la mission et on choisit le repère  $R_{sat}$  de sorte que le centre du repère est situé en  $O_{sat}$ . Dans ce cas, en négligeant en plus l'attraction gravitationnelle due au reste du satellite et les forces parasites sur la masse d'épreuve qui

### 3.2. Moments dynamiques d'une masse d'épreuve exercés par les électrodes

est isolée thermiquement et magnétiquement, l'équation (3.14) prend la forme :

$$\frac{\mathbf{f}_{e_k}}{m_k} + \frac{\sum_{i=1}^N \mathbf{f}_{e_i}}{m_{sat}} = -([T](O_{sat}) - [\dot{\Omega}] - [\Omega]^2) \mathbf{O}_{sat} \mathbf{O}_k + \frac{\mathbf{f}_{NG,sat}}{m_{sat}} \quad (3.17)$$

En multipliant l'équation par  $m_k$  et en sommant sur toutes les masses d'épreuve, on obtient :

$$\left(1 + \frac{\sum_i m_i}{m_{sat}}\right) \sum_{i=1}^N \mathbf{f}_{e_i} = -([T](O_{sat}) - [\dot{\Omega}] - [\Omega]^2) \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{O}_{sat} \mathbf{O}_k + \frac{\sum_i m_i}{m_{sat}} \mathbf{f}_{NG,sat} \quad (3.18)$$

Chaque masse pèse 0.318 kg. Donc, au total l'ensemble des six masses d'épreuve pèse 1.908 kg. En comparaison, le satellite sans les masses pèse 1 tonne. On peut donc négliger le rapport  $\frac{\sum_i m_i}{m_{sat}}$ , de sorte que l'équation précédente se simplifie :

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{f}_{e_i} = -([T](O_{sat}) - [\dot{\Omega}] - [\Omega]^2) \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{O}_{sat} \mathbf{O}_k + \frac{\sum_i m_i}{m_{sat}} \mathbf{f}_{NG,sat} \quad (3.19)$$

L'intensité de l'accélération due à la traînée est supérieure à  $10^{-8}$  m/s<sup>2</sup> car c'est la valeur résiduelle après compensation de traînée le long de l'axe de vol du satellite (cf. chapitre 4). Multipliée par la masse de l'ensemble des masses d'épreuve, la contribution des forces non-gravitationnelle est supérieur à  $10^{-7}$  N.

Par ailleurs, la distance  $\|\mathbf{O}_{sat} \mathbf{O}_k\|$  vaut 0.5m et les composantes des matrices  $[T]$  et  $[\dot{\Omega}_{sat/IRF}] + [\Omega_{sat/IRF}]^2$  sont de l'ordre de  $10^{-6}$  en 1/s<sup>2</sup>, rad/s et rad<sup>2</sup>/s<sup>2</sup> respectivement. Donc, en multipliant par la masse d'une masse d'épreuve et en prenant en compte la somme sur toute les masses d'épreuve, la contribution au total de la force de la gravité et du mouvement d'inertie est de l'ordre de  $10^{-6} \times 0.5 \times 0.318 \times 6 = 9 \times 10^{-7}$  m/s<sup>2</sup>.

On en déduit que la force électrostatique totale nécessaire pour maintenir toutes les masses d'épreuve immobiles est de l'ordre de quelques  $\mu$ N.

### 3.2 Moments dynamiques d'une masse d'épreuve exercés par les électrodes

Dans cette partie, le moment dynamique du satellite est relié à celui appliqué par les électrodes sur une masse d'épreuve. Cette relation est le pendant de l'étude menée dans la section précédente. L'idée générale est d'appliquer le théorème du moment dynamique.

Soit  $P$  un point commun au satellite et à une masse d'épreuve  $i$ . Les moments agissants en ce point sont :

- $\mathbf{M}_{PS \rightarrow Acc_i}^{elec}$  est le moment total appliqué par les électrodes autour de la masse d'épreuve  $i$  ;
- $\mathbf{M}_{PS \rightarrow Acc_i}^{or}$  est le moment exercé par le satellite sur la masse d'épreuve par l'intermédiaire du fil d'or ;
- $\mathbf{M}_{PS \rightarrow Acc_i}^G$  est le moment gravitationnel exercé par le satellite sur la masse d'épreuve ;
- $\mathbf{M}_{P_{ext} \rightarrow Acc_i}^G$  est le moment des forces gravitationnelles exercé par le milieu extérieur sur la masse d'épreuve ;
- $\mathbf{M}_{P_{ext} \rightarrow Acc_i}^{NG}$  est le moment des forces non-gravitationnelles exercé par le milieu extérieur sur la masse d'épreuve ;
- $\mathbf{M}_{P_{ext} \rightarrow S}^{NG}$  est le moment des forces non-gravitationnelles exercé par le milieu extérieur sur le satellite ;
- $\mathbf{M}_{P_{ext} \rightarrow S}^G$  est le moment des forces gravitationnelles exercé par le milieu extérieur sur le satellite.

On applique le théorème du moment dynamique sur le point  $P$  appartenant au système masse d'épreuve, puis sur le même point  $P$  mais appartenant au système satellite (sans les masses d'épreuves). Le théorème

des actions mutuelles [79, 80] implique qu'en considérant le système constitué du satellite et des masses d'épreuve, la somme des moments des forces internes est nulle. Par conséquent, par exemple, le moment total dû aux forces électrostatiques appliquées au satellite par la masse d'épreuve  $i$  est  $-\mathbf{M}_{P,S \rightarrow Acc_i}^{elec}$ . De même,  $\mathbf{M}_{P,Acc_i \rightarrow S}^{or} = -\mathbf{M}_{P,S \rightarrow Acc_i}^{or}$ .

Dans le repère inertiel, le théorème du moment dynamique sur le point  $P$  appartenant au système masse d'épreuve :

$$\Delta_{A/R_{IRF}}^P = \mathbf{M}_{P,S \rightarrow Acc_i}^{elec} + \mathbf{M}_{P,S \rightarrow Acc_i}^{or} + \mathbf{M}_{P,S \rightarrow Acc_i}^G + \mathbf{M}_{P,ext \rightarrow Acc_i}^{NG} + \mathbf{M}_{P,ext \rightarrow Acc_i}^G \quad (3.20)$$

Ensuite, on écrit le théorème du moment dynamique sur le point  $P$  appartenant au satellite :

$$\Delta_{S/R_{IRF}}^P = -\mathbf{M}_{P,S \rightarrow Acc_i}^{elec} - \mathbf{M}_{P,S \rightarrow Acc_i}^{or} - \mathbf{M}_{P,S \rightarrow Acc_i}^G + \mathbf{M}_{P,ext \rightarrow S}^{NG} + \mathbf{M}_{P,ext \rightarrow S}^G \quad (3.21)$$

Par ailleurs, les expressions des moments dynamiques en fonction des moments cinétiques s'écrivent [81] :

$$\Delta_{Acc_i/R_{IRF}}^P = \left[ \frac{d\boldsymbol{\sigma}_{Acc_i,R_{IRF}}}{dt} \right]_{R_{IRF}} + \frac{d}{dt} [\mathbf{O}_{IRF}\mathbf{P}]_{R_{IRF}} \wedge m_i \mathbf{V}_{Acc_i/R_{IRF}}(O_i) \quad (3.22)$$

$$\Delta_{S/R_{IRF}}^P = \left[ \frac{d\boldsymbol{\sigma}_{S,R_{IRF}}}{dt} \right]_{R_{IRF}} + \frac{d}{dt} [\mathbf{O}_{IRF}\mathbf{P}]_{R_{IRF}} \wedge m_S \mathbf{V}_S(O_{sat}) \quad (3.23)$$

où  $\boldsymbol{\sigma}$  correspond au moment cinétique,  $O_{IRF}$  à l'origine du repère inertiel considéré,  $\mathbf{V}_{Acc_i}$  et  $\mathbf{V}_S$  à la vitesse de l'accéléromètre  $i$  et du satellite respectivement dans le repère inertiel .

On peut expliciter le moment cinétique en utilisant la formule de détermination du moment cinétique galiléen [81] :

$$\begin{aligned} \left[ \frac{d\boldsymbol{\sigma}_{Acc_i,R_{IRF}}}{dt} \right]_{R_{IRF}} &= \left\{ \frac{d}{dt} ([I](P, Acc_i)\boldsymbol{\Omega}_{Acc_i/R_{IRF}} + m_i \mathbf{P}\mathbf{O}_i \wedge \mathbf{V}_{Acc_i/R_{IRF}}(P)) \right\}_{R_{IRF}} \\ &= \left\{ \frac{d}{dt} [I](P, Acc_i)\boldsymbol{\Omega}_{Acc_i/R_{IRF}} + [I](P, Acc_i)\dot{\boldsymbol{\Omega}}_{Acc_i/R_{IRF}} + m_i \frac{d}{dt} (\mathbf{P}\mathbf{O}_i \wedge \mathbf{V}_{Acc_i/R_{IRF}}(P)) \right\}_{R_{IRF}} \\ &= \left\{ \frac{d}{dt} [I](P, Acc_i)\boldsymbol{\Omega}_{Acc_i/R_{IRF}} + [I](P, Acc_i)\dot{\boldsymbol{\Omega}}_{Acc_i/R_{IRF}} \right. \\ &\quad \left. + m_i \frac{d}{dt} (\mathbf{P}\mathbf{O}_{IRF} \wedge \mathbf{V}_{Acc_i/R_{IRF}}(P) + \mathbf{O}_{IRF}\mathbf{O}_i \wedge \mathbf{V}_{Acc_i/R_{IRF}}(P)) \right\}_{R_{IRF}} \\ &= \left\{ \frac{d}{dt} [I](P, Acc_i)\boldsymbol{\Omega}_{Acc_i/R_{IRF}} + [I](P, Acc_i)\dot{\boldsymbol{\Omega}}_{Acc_i/R_{IRF}} - m_i \mathbf{V}_{Acc_i/R_{IRF}}(P) \wedge \mathbf{V}_{Acc_i/R_{IRF}}(P) \right. \\ &\quad \left. - m_i \mathbf{O}_{IRF}\mathbf{P} \wedge \boldsymbol{\Gamma}_{Acc_i/R_{IRF}}(P) - m_i \mathbf{V}_{Acc_i/R_{IRF}}(P) \wedge \mathbf{V}_{Acc_i/R_{IRF}}(O_i) \right. \\ &\quad \left. + m_i \mathbf{O}_{IRF}\mathbf{O}_i \wedge \boldsymbol{\Gamma}_{Acc_i/R_{IRF}}(P) \right\}_{R_{IRF}} \quad (3.24) \end{aligned}$$

où  $[I](P, Acc_i)$  est la matrice d'inertie de la masse d'épreuve  $Acc_i$  au point  $P$  avec une base liée au solide,  $\boldsymbol{\Omega}_{Acc_i/R_{IRF}}$  est le vecteur rotation de la masse d'épreuve dans le repère inertiel,  $O_i$  le centre de la masse d'épreuve,  $m_i$  la masse de la masse d'épreuve,  $\mathbf{V}_{Acc_i/R_{IRF}}(O_i)$  est le vecteur vitesse du point  $P$  appartenant à  $Acc_i$  dans le repère inertiel et  $\boldsymbol{\Gamma}_{Acc_i/R_{IRF}}(P)$  est le vecteur accélération du point  $P$  appartenant à  $Acc_i$  dans le repère inertiel.

De manière analogue, on peut développer la dérivée temporelle du moment cinétique pour le point  $P$

### 3.2. Moments dynamiques d'une masse d'épreuve exercés par les électrodes

appartenant au satellite :

$$\left[ \frac{d\boldsymbol{\sigma}_{S/R_{IRF}}}{dt} \right]_{R_{IRF}} = \left\{ \frac{d}{dt} [I](P, S) \boldsymbol{\Omega}_{S/R_{IRF}} + [I](P, S) \dot{\boldsymbol{\Omega}}_{S/R_{IRF}} - m_S \mathbf{V}_{S/R_{IRF}}(P) \wedge \mathbf{V}_{S/R_{IRF}}(P) \right. \\ \left. - m_S \mathbf{O}_{IRF} \mathbf{P} \wedge \boldsymbol{\Gamma}_{S/R_{IRF}}(P) - m_S \mathbf{V}_{S/R_{IRF}}(P) \wedge \mathbf{V}_{S/R_{IRF}}(O_{sat}) \right. \\ \left. + m_S \mathbf{O}_{IRF} \mathbf{O}_{sat} \wedge \boldsymbol{\Gamma}_{S/R_{IRF}}(P) \right\}_{R_{IRF}} \quad (3.25)$$

En utilisant le fait que  $\frac{d}{dt} [\mathbf{O}_{IRF} \mathbf{P}]_{R_{IRF}} = \mathbf{V}_{A/R_{IRF}}(P)$ , le moment dynamique s'écrit :

$$\Delta_{Acc_i/R_{IRF}}^P = \left\{ \frac{d}{dt} [I](P, Acc_i) \boldsymbol{\Omega}_{Acc_i/R_{IRF}} + [I](P, Acc_i) \dot{\boldsymbol{\Omega}}_{Acc_i/R_{IRF}} + m_i \mathbf{P} \mathbf{O}_i \wedge \boldsymbol{\Gamma}_{Acc_i/R_{IRF}}(P) \right\}_{R_{IRF}} \\ \Delta_{S/R_{IRF}}^P = \left\{ \frac{d}{dt} [I](P, S) \boldsymbol{\Omega}_{S/R_{IRF}} + [I](P, S) \dot{\boldsymbol{\Omega}}_{S/R_{IRF}} + m_S \mathbf{P} \mathbf{O}_{sat} \wedge \boldsymbol{\Gamma}_{S/R_{IRF}}(P) \right\}_{R_{IRF}} \quad (3.26)$$

En choisissant le point  $P$  comme étant le centre de masse de la masse d'épreuve  $P = O_i$  et :

$$\Delta_{S/R_{IRF}}^{O_i} - \Delta_{Acc_i/R_{IRF}}^{O_i} = \left\{ \frac{d}{dt} [I](P, S) \boldsymbol{\Omega}_{S/R_{IRF}} - \frac{d}{dt} [I](P, Acc_i) \boldsymbol{\Omega}_{Acc_i/R_{IRF}} \right. \\ \left. + [I](P, S) \dot{\boldsymbol{\Omega}}_{S/R_{IRF}} - [I](P, Acc_i) \dot{\boldsymbol{\Omega}}_{Acc_i/R_{IRF}} + m_S \mathbf{O}_i \mathbf{O}_{sat} \wedge \boldsymbol{\Gamma}_{S/R_{IRF}}(O_i) \right\}_{R_{IRF}} \quad (3.27)$$

En combinant les équations (3.20), (3.21) et (3.27), on peut exprimer le moment total dû aux électrodes exercé par le satellite sur la masse d'épreuve s'écrit:

$$\mathbf{M}_{O_i, S \rightarrow Acc_i}^{elec} = \frac{1}{2} \left\{ [I](O_i, Acc_i) \dot{\boldsymbol{\Omega}}_{Acc_i/R_{IRF}} - [I](O_i, S) \dot{\boldsymbol{\Omega}}_{S/R_{IRF}} + m_S \mathbf{O}_{sat} \mathbf{O}_i |_{R_{IRF}} \wedge \boldsymbol{\Gamma}_{S/R_{IRF}}(O_i) \right. \\ \left. - 2\mathbf{M}_{O_i, S \rightarrow Acc_i}^G - 2\mathbf{M}_{O_i, S \rightarrow Acc_i}^{or} + \mathbf{M}_{O_i, ext \rightarrow S}^{NG} - \mathbf{M}_{O_i, ext \rightarrow Acc_i}^{NG} + \mathbf{M}_{O_i, ext \rightarrow S}^G - \mathbf{M}_{O_i, ext \rightarrow Acc_i}^G \right\}_{R_{IRF}} \quad (3.28)$$

L'équation (3.28) relie le moment total dû aux forces électrostatiques exercées sur la masse d'épreuve aux moments dynamiques exercés par les différentes forces et par le mouvement du satellite. D'une certaine manière, on peut la considérer comme le pendant de l'équation (3.15). Par ailleurs, en utilisant la composition des vitesses angulaires et le fait que leurs dérivées temporelles sont indépendantes du choix du référentiel, on peut réécrire l'équation (3.28) en faisant apparaître l'accélération angulaire de la masse d'épreuve par rapport au satellite. Pour cela, on introduit le repère  $R_{sat}$  rigidement lié au satellite et défini en début de chapitre :

$$\mathbf{M}_{O_i, S \rightarrow Acc_i}^{elec} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{d}{dt} [I](P, S) \boldsymbol{\Omega}_{S/R_{IRF}} - \frac{d}{dt} [I](P, Acc_i) \boldsymbol{\Omega}_{Acc_i/R_{sat}} - \frac{d}{dt} [I](P, Acc_i) \boldsymbol{\Omega}_{R_{sat}/R_{IRF}} \right. \\ \left. + [I](O_i, Acc_i) \dot{\boldsymbol{\Omega}}_{Acc_i/R_{sat}} + [I](O_i, Acc_i) \dot{\boldsymbol{\Omega}}_{R_{sat}/R_{IRF}} - [I](O_i, S) \dot{\boldsymbol{\Omega}}_{S/R_{IRF}} \right. \\ \left. + m_S \mathbf{O}_{sat} \mathbf{O}_i |_{R_{IRF}} \wedge \boldsymbol{\Gamma}_{S/R_{IRF}}(O_i) \right. \\ \left. - 2\mathbf{M}_{O_i, S \rightarrow Acc_i}^G - 2\mathbf{M}_{O_i, S \rightarrow Acc_i}^{or} + \mathbf{M}_{O_i, ext \rightarrow S}^{NG} - \mathbf{M}_{O_i, ext \rightarrow Acc_i}^{NG} + \mathbf{M}_{O_i, ext \rightarrow S}^G - \mathbf{M}_{O_i, ext \rightarrow Acc_i}^G \right\}_{R_{IRF}} \quad (3.29)$$

On peut noter qu'en sommant les moments dynamiques  $\Delta_{S/R_{IRF}}^{O_i}$  et  $\Delta_{A/R_{IRF}}^{O_i}$ , on s'affranchit des moments internes entre le satellite et la masse d'épreuve considérée. Il est alors possible d'établir une relation entre les moments dus aux forces externes et les mouvements angulaires :

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{M}_{O_i, ext \rightarrow S}^G + \mathbf{M}_{O_i, ext \rightarrow Acc_i}^G + \mathbf{M}_{O_i, ext \rightarrow S}^{NG} + \mathbf{M}_{O_i, S \rightarrow Acc_i}^{NG} \\
 = & \left\{ \frac{d}{dt} [I](P, S) \boldsymbol{\Omega}_{S/R_{IRF}} + \frac{d}{dt} [I](P, Acc_i) \boldsymbol{\Omega}_{Acc_i/R_{IRF}} + [I](O_i, S) \dot{\boldsymbol{\Omega}}_{S/R_{IRF}} + [I](O_i, Acc_i) \dot{\boldsymbol{\Omega}}_{Acc_i/R_{sat}} \right. \\
 & \left. + [I](O_i, Acc_i) \dot{\boldsymbol{\Omega}}_{R_{sat}/R_{IRF}} + m_S \mathbf{O}_i \mathbf{O}_{sat} \wedge \boldsymbol{\Gamma}_{S/R_{IRF}}(O_i) \right\}_{R_{IRF}}
 \end{aligned} \tag{3.30}$$

Dans le cas où l'asservissement maintient immobile la masse d'épreuve au centre de la cage, le mouvement relatif de la masse par rapport au satellite est nul, c'est-à-dire  $\dot{\boldsymbol{\Omega}}_{Acc_i/R_{sat}} = \mathbf{0}$ .

### 3.3 Modes communs, modes différentiels et estimation des composantes du gradient de gravité

L'expression (3.15) de la mesure électrostatique déterminée dans un repère rigidement lié au satellite contient diverses contributions. Étant donné que les accéléromètres de la mission GOCE sont répartis par paire, il est possible d'isoler certaines des contributions à l'aide de combinaisons linéaires simples des mesures accélérométriques. En particulier, dans cette partie, on définit les modes différentiels à partir desquels les composantes du gradient de gravité sont estimées ainsi que les modes communs qui servent pour la consigne des propulseurs. Dans la suite, on considère donc un couple de masse  $(i, j)$  appartenant au même gradiomètre uniaxial. Pour chaque accéléromètre  $i$ , en un point A, on définit la quantité :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A}_i = & -([T](A) - [\dot{\boldsymbol{\Omega}}] - [\boldsymbol{\Omega}]^2) \mathbf{O}_{sat} \mathbf{O}_i + \mathbf{O}_{sat} \overset{\circ}{\mathbf{O}}_i|_{R_{sat}} + 2[\boldsymbol{\Omega}] \mathbf{O}_{sat} \overset{\circ}{\mathbf{O}}_i|_{R_{sat}} \\
 & - \mathbf{g}_S(O_i) - \frac{1}{m_{sat}} \sum_{k \neq i, k \neq j}^N \mathbf{f}_{e_i} - \frac{\mathbf{f}_{par,i}^{int}}{m_i} - \frac{\sum_{k=1}^N \mathbf{f}_{par,k}^{int}}{m_{sat}} - \frac{\mathbf{f}_{par,i}^{ext}}{m_i} + \frac{\mathbf{f}_{NG,sat}}{m_{sat}}
 \end{aligned} \tag{3.31}$$

La grandeur  $\mathbf{A}_i$  correspond à la partie de l'accélération de la masse  $i$  qui n'est pas due aux réactions des forces électrostatiques appliquées sur les masses  $i$  et  $j$ . Cette définition est valable dans tout repère rigidement lié au satellite. Par exemple, on peut faire le choix de l'écrire dans le repère  $R_{OAGRF}$  de la paire d'accéléromètres  $(i, j)$  considérée, ou alors dans le repère du gradiomètre  $R_{GRF}$ . Dans le cas d'un gradiomètre parfait, les origines des repères associés à ces deux référentiels sont confondues, de sorte que  $O_{OAGRF,ij} = O_{GRF}$ .

Dans un repère rigidement lié au satellite, on peut alors réexprimer la mesure accélérométrique, dans l'équation (3.15), en rassemblant les contributions électrostatiques relatives aux masses  $i$  et  $j$  de la façon suivante :

$$\left(1 + \frac{m_i}{m_{sat}}\right) \boldsymbol{\gamma}_i + \frac{m_j}{m_{sat}} \boldsymbol{\gamma}_j = \mathbf{A}_i \quad \text{et} \quad \left(1 + \frac{m_j}{m_{sat}}\right) \boldsymbol{\gamma}_j + \frac{m_i}{m_{sat}} \boldsymbol{\gamma}_i = \mathbf{A}_j \tag{3.32}$$

### 3.3.1 Définition des modes différentiels et estimation des composantes du gradient de gravité

On définit le mode différentiel comme la demi-différence des deux mesures accélérométriques d'une paire (i,j) donnée :

$$\mathbf{a}_{ij}^{(d)} = \frac{\mathbf{Y}_i - \mathbf{Y}_j}{2} \quad (3.33)$$

À partir de la différence des équations (3.32), on peut expliciter le mode différentiel :

$$\begin{aligned} 2\mathbf{a}_{ij}^{(d)} &= \mathbf{A}_i - \mathbf{A}_j \\ &= ([T](A) - [\dot{\Omega}] - [\Omega]^2) \mathbf{O}_i \mathbf{O}_j - \mathbf{O}_i \mathbf{O}_j|_{R_{sat}} - 2[\Omega] \mathbf{O}_i \mathbf{O}_j|_{R_{sat}} \\ &\quad + \mathbf{g}_S(O_j) - \mathbf{g}_S(O_i) + \frac{\mathbf{f}_{par,j}^{int}}{m_j} - \frac{\mathbf{f}_{par,i}^{int}}{m_i} + \frac{\mathbf{f}_{par,j}^{ext}}{m_j} - \frac{\mathbf{f}_{par,i}^{ext}}{m_i} \\ &= ([T](A) - [\dot{\Omega}] - [\Omega]^2) \mathbf{C}_i \mathbf{C}_j + \mathbf{C}_i \mathbf{C}_j|_{R_{sat}} + 2[\Omega] \mathbf{C}_i \mathbf{C}_j|_{R_{sat}} \\ &\quad - ([T](A) - [\dot{\Omega}] - [\Omega]^2) (\mathbf{C}_i \mathbf{O}_i - \mathbf{C}_j \mathbf{O}_j) + (\mathbf{C}_i \mathbf{O}_i|_{R_{sat}} - \mathbf{C}_j \mathbf{O}_j|_{R_{sat}}) + 2[\Omega] (\mathbf{C}_i \mathbf{O}_i|_{R_{sat}} - \mathbf{C}_j \mathbf{O}_j|_{R_{sat}}) \\ &\quad + \mathbf{g}_S(O_j) - \mathbf{g}_S(O_i) + \frac{\mathbf{f}_{par,j}^{int}}{m_j} - \frac{\mathbf{f}_{par,i}^{int}}{m_i} + \frac{\mathbf{f}_{par,j}^{ext}}{m_j} - \frac{\mathbf{f}_{par,i}^{ext}}{m_i} \end{aligned} \quad (3.34)$$

où le centre de chaque cage d'électrodes a été introduit dans la troisième égalité.

Dans l'équation d'un mode différentiel apparaît donc les gradients de gravité et d'inertie, le mouvement relatif des deux masses d'épreuve ainsi que les perturbations sur les masses. La mission est spécifiée de sorte à rendre les contributions des forces parasites aussi faibles que possibles. En toute rigueur, les termes d'attraction due au satellite ne s'annulent pas, ce qui laisse un biais constant lors de la mesure des modes différentiels. En revanche, en première approximation, on peut négliger cet effet devant celui de la gravité terrestre. Par ailleurs, d'après l'hypothèse d'un gradiomètre parfait, le vecteur  $\mathbf{C}_i \mathbf{C}_j$  est constant au cours du temps. Enfin, si le centre de chaque masse d'épreuve est maintenu immobile au centre géométrique de sa cage respective, l'équation du mode différentiel se simplifie :

$$2\mathbf{a}_{ij}^{(d)} = ([T](A) - [\dot{\Omega}] - [\Omega]^2) \mathbf{C}_i \mathbf{C}_j \quad (3.35)$$

La grandeur à gauche de l'égalité est obtenue par les mesures, par définition. Dans le membre de droite, l'étude de l'attitude du satellite permet d'accéder à la vitesse angulaire et à l'accélération angulaire du satellite. Ainsi, connaissant la distance séparant deux masses d'épreuves asservies au centre de leur cage, il est possible d'extraire une estimation des composantes du gradient de gravité.

L'équation précédente est valable dans tout repère rigidement lié au satellite et en tout point, en particulier dans le repère du gradiomètre  $R_{GRF}$  au point  $O_{GRF}$ . En se plaçant toujours dans le cadre d'un gradiomètre idéal, le centre de masse du satellite, le centre de masse du gradiomètre et les centres de chaque paire d'accéléromètres sont confondus. Par conséquent, les vecteurs  $\mathbf{C}_1 \mathbf{C}_4$ ,  $\mathbf{C}_2 \mathbf{C}_5$ ,  $\mathbf{C}_3 \mathbf{C}_6$  sont confondus avec les axes du repère  $R_{GRF}$ . Dans ce repère, ils ont donc pour coordonnées :

$$\mathbf{C}_1 \mathbf{C}_4 = L_X \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{C}_2 \mathbf{C}_5 = L_Y \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{C}_3 \mathbf{C}_6 = L_Z \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Ceci permet d'écrire les composantes des modes différentiels pour chaque paire de masses d'épreuve :

$$\mathbf{a}_{14}^{(d)} = \begin{bmatrix} a_{14,X}^{(d)} \\ a_{14,Y}^{(d)} \\ a_{14,Z}^{(d)} \end{bmatrix} \approx \frac{1}{2} L_X \begin{bmatrix} -V_{XX} - \omega_Z^2 - \omega_Y^2 \\ -V_{XY} + \dot{\omega}_Z + \omega_X \omega_Y \\ -V_{XZ} - \dot{\omega}_Y + \omega_X \omega_Z \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

$$\mathbf{a}_{25}^{(d)} = \begin{bmatrix} a_{25,X}^{(d)} \\ a_{25,Y}^{(d)} \\ a_{25,Z}^{(d)} \end{bmatrix} \approx \frac{1}{2} L_Y \begin{bmatrix} -V_{XY} - \dot{\omega}_Z + \omega_X \omega_Y \\ -V_{YY} - \omega_X^2 - \omega_Z^2 \\ -V_{YZ} + \dot{\omega}_X + \omega_Y \omega_Z \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

$$\mathbf{a}_{36}^{(d)} = \begin{bmatrix} a_{36,X}^{(d)} \\ a_{36,Y}^{(d)} \\ a_{36,Z}^{(d)} \end{bmatrix} \approx \frac{1}{2} L_Z \begin{bmatrix} -V_{XZ} + \dot{\omega}_Y + \omega_X \omega_Z \\ -V_{YZ} - \dot{\omega}_X + \omega_Y \omega_Z \\ -V_{ZZ} - \omega_X^2 - \omega_Y^2 \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

En réarrangeant on obtient l'expression des coefficients du tenseur de gravité. On fait un abus de notation en remplaçant le signe d'égalité approximatif par un signe d'égalité stricte.

$$V_{XX} = -\frac{2a_{14,X}^{(d)}}{L_X} - \omega_Y^2 - \tilde{\omega}_Z^2 \quad (3.39)$$

$$V_{YY} = -\frac{2a_{25,Y}^{(d)}}{L_Y} - \tilde{\omega}_X^2 - \tilde{\omega}_Z^2 \quad (3.40)$$

$$V_{ZZ} = -\frac{2a_{36,Z}^{(d)}}{L_Z} - \tilde{\omega}_X^2 - \omega_Y^2 \quad (3.41)$$

$$\tilde{V}_{XY} = -\frac{2\tilde{a}_{14,Y}^{(d)}}{L_X} + \tilde{\omega}_Z + \tilde{\omega}_X \omega_Y = -\frac{2a_{25,X}^{(d)}}{L_Y} - \tilde{\omega}_Z + \tilde{\omega}_X \tilde{\omega}_Y \quad (3.42)$$

$$V_{XZ} = -\frac{2a_{14,Z}^{(d)}}{L_X} - \dot{\omega}_Y + \tilde{\omega}_X \tilde{\omega}_Z = -\frac{2a_{36,X}^{(d)}}{L_Z} + \dot{\omega}_Y + \tilde{\omega}_X \tilde{\omega}_Z \quad (3.43)$$

$$\tilde{V}_{YZ} = -\frac{2\tilde{a}_{25,Z}^{(d)}}{L_Y} + \tilde{\omega}_X + \omega_Y \tilde{\omega}_Z = -\frac{2\tilde{a}_{36,Y}^{(d)}}{L_Z} - \tilde{\omega}_X + \omega_Y \tilde{\omega}_Z \quad (3.44)$$

Grâce à la redondance des trois dernières égalités, on peut réexprimer les coefficients non-diagonaux du

### 3.3. Modes communs, modes différentiels et estimation des composantes du gradient de gravité

tenseur ainsi que les accélérations angulaires :

$$\tilde{V}_{XY} = -\frac{2\tilde{a}_{14,Y}^{(d)}}{L_X} - \frac{2a_{25,X}^{(d)}}{L_Y} + \tilde{\omega}_X\omega_Y \quad (3.45)$$

$$V_{XZ} = -\frac{2a_{14,Z}^{(d)}}{L_X} - \frac{2a_{36,X}^{(d)}}{L_Z} + \tilde{\omega}_X\tilde{\omega}_Z \quad (3.46)$$

$$\tilde{V}_{YZ} = -\frac{2\tilde{a}_{25,Z}^{(d)}}{L_Y} - \frac{2\tilde{a}_{36,Y}^{(d)}}{L_Z} + \omega_Y\tilde{\omega}_Z \quad (3.47)$$

$$\tilde{\omega}_X = -\frac{2\tilde{a}_{36,Y}^{(d)}}{L_Z} + \frac{2\tilde{a}_{25,Z}^{(d)}}{L_Y} \quad (3.48)$$

$$\tilde{\omega}_Y = -\frac{2a_{14,Z}^{(d)}}{L_X} + \frac{2a_{36,X}^{(d)}}{L_Z} \quad (3.49)$$

$$\tilde{\omega}_Z = -\frac{2a_{25,X}^{(d)}}{L_Y} + \frac{2\tilde{a}_{14,Y}^{(d)}}{L_X} \quad (3.50)$$

Les tildes signalent les composantes qui sont estimées avec moins de précision. En effet, étant donné la configuration des accéléromètres dans le satellite, toutes les composantes du gradiomètre ne peuvent pas être estimées avec la même précision : les modes différentiels  $a_{14,y}^{(d)}$ ,  $a_{25,z}^{(d)}$  et  $a_{36,y}^{(d)}$  sont des combinaisons d'accélération mesurées avec des axes non-sensibles (cf. figure A.4). Par conséquent, les vitesses angulaires  $\tilde{\omega}_x$  et  $\tilde{\omega}_z$  sont estimées avec moins de précision que  $\tilde{\omega}_y$ . Il en résulte qu'en principe, les composantes  $V_{XY}$  et  $V_{YZ}$  sont moins précisément estimées que  $V_{XX}$ ,  $V_{YY}$ ,  $V_{ZZ}$  et  $V_{XZ}$ .

En résumé, sous l'hypothèse que la conception du gradiomètre et des coeurs d'accéléromètre est parfaite, que l'asservissement des masses d'épreuve est parfait, et que les forces parasites sont négligeables, les équations (3.39) à (3.47) montrent que la connaissance des modes différentiels et des vitesses angulaires permettent d'accéder à la matrice du gradient de gravité. D'où l'importance de la précision de leur mesure. Ces équations illustrent également l'intérêt de la gradiométrie spatiale puisqu'il est possible d'obtenir directement une estimation de la dérivée seconde du potentiel gravitationnel.

#### 3.3.2 Définition des modes communs

De manière analogue à la définition de la demi-différence des accélérations mesurées, il est possible de définir leur demi-somme :

$$\mathbf{a}_{ij}^{(c)} = \frac{\boldsymbol{\gamma}_i + \boldsymbol{\gamma}_j}{2} \quad (3.51)$$

En introduisant les modes communs et différentiels dans la différence des équations (3.32), on obtient :

$$\left(1 + \frac{m_i}{m_{sat}} + \frac{m_j}{m_{sat}}\right) \mathbf{a}_{ij}^{(c)} = \frac{\mathbf{A}_i + \mathbf{A}_j}{2} + \left(\frac{m_2}{m_{sat}} - \frac{m_1}{m_{sat}}\right) \mathbf{a}_{ij}^{(d)} \quad (3.52)$$

D'où :

$$\mathbf{a}_{ij}^{(c)} = \left(1 + \frac{m_i}{m_{sat}} + \frac{m_j}{m_{sat}}\right)^{-1} \left[ \frac{\mathbf{A}_i + \mathbf{A}_j}{2} + \left(\frac{m_2}{m_{sat}} - \frac{m_1}{m_{sat}}\right) \frac{\mathbf{A}_i - \mathbf{A}_j}{2} \right] \quad (3.53)$$

Afin d'alléger les notations on définit les grandeurs suivantes :

$$\mu_c = \frac{m_i + m_j}{m_i + m_j + m_{sat}} \quad \text{et} \quad \mu_d = \frac{m_i - m_j}{m_i + m_j + m_{sat}} \quad (3.54)$$

On obtient alors l'expression suivante pour un mode commun :

$$\mathbf{a}_{ij}^{(c)} = (1 - \mu_c) \frac{\mathbf{A}_i + \mathbf{A}_j}{2} - \mu_d \frac{\mathbf{A}_i - \mathbf{A}_j}{2} \quad (3.55)$$

Par ailleurs, on a :

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{A}_i + \mathbf{A}_j}{2} &= -\frac{1}{2} ([T](A) - [\dot{\Omega}] - [\Omega]^2) (\mathbf{O}_{sat} \mathbf{O}_i + \mathbf{O}_{sat} \mathbf{O}_j) \\ &+ \frac{1}{2} (\mathbf{O}_{sat}^{\circ\circ} \mathbf{O}_i + \mathbf{O}_{sat}^{\circ\circ} \mathbf{O}_j) + 2[\Omega] (\mathbf{O}_{sat}^{\circ} \mathbf{O}_i |_{R_{sat}} + \mathbf{O}_{sat}^{\circ} \mathbf{O}_j |_{R_{sat}}) \\ &- \frac{1}{2} (\mathbf{g}_s(O_i) + \mathbf{g}_s(O_j)) - \frac{1}{m_{sat}} \sum_{k \neq i, k \neq j}^N \mathbf{f}_{e_k} - \frac{1}{2} \left( \frac{\mathbf{f}_{par,i}^{int}}{m_i} + \frac{\mathbf{f}_{par,j}^{int}}{m_j} \right) \\ &- \frac{\sum_{k=1}^N \mathbf{f}_{par,k}^{int}}{m_{sat}} - \frac{1}{2} \left( \frac{\mathbf{f}_{par,i}^{ext}}{m_i} + \frac{\mathbf{f}_{par,j}^{ext}}{m_j} \right) + \frac{\mathbf{f}_{NG,sat}}{m_{sat}} \end{aligned} \quad (3.56)$$

On peut désormais expliciter le mode commun en introduisant le centre  $C_{sat}$  du repère  $R_{sat}$  rigidement lié au satellite :

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{ij}^{(c)} &= -\frac{1}{2} ([T](A) - [\dot{\Omega}] - [\Omega]^2) [2(1 - \mu_c) \mathbf{O}_{sat} \mathbf{C}_{sat} + (1 - \mu_c) (\mathbf{C}_{sat} \mathbf{O}_i + \mathbf{C}_{sat} \mathbf{O}_j) - \mu_d \mathbf{O}_i \mathbf{O}_j] \\ &+ \frac{1}{2} [2(1 - \mu_c) \mathbf{O}_{sat}^{\circ\circ} \mathbf{C}_{sat} |_{R_{sat}} + (1 - \mu_c) (\mathbf{C}_{sat}^{\circ\circ} \mathbf{O}_i |_{R_{sat}} + \mathbf{C}_{sat}^{\circ\circ} \mathbf{O}_j |_{R_{sat}}) + \mu_d \mathbf{O}_i \mathbf{O}_j |_{R_{sat}}] \\ &+ [\Omega] (2(1 - \mu_c) \mathbf{O}_{sat}^{\circ} \mathbf{C}_{sat} |_{R_{sat}} + (1 - \mu_c) (\mathbf{C}_{sat}^{\circ} \mathbf{O}_i |_{R_{sat}} + \mathbf{C}_{sat}^{\circ} \mathbf{O}_j |_{R_{sat}}) - \mu_d \mathbf{O}_i \mathbf{O}_j |_{R_{sat}}) \\ &- (1 - \mu_c) \mathbf{g}_{s,ij}^{(c)} + \mu_d \mathbf{g}_{s,ij}^{(d)} + (1 - \mu_c) \frac{1}{m_{sat}} \left( \mathbf{f}_{NG,sat} - \sum_{k \neq i,j} \mathbf{f}_{e_k} - \sum_{k=1}^N \mathbf{f}_{par,k}^{int} \right) \\ &- (1 - \mu_c) \mathbf{a}_{par,ij}^{int,c} + \mu_d \mathbf{a}_{par,ij}^{int,d} - (1 - \mu_c) \mathbf{a}_{par,ij}^{ext,c} - \mu_d \mathbf{a}_{par,ij}^{ext,d} \end{aligned} \quad (3.57)$$

où

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_{s,ij}^{(c)} &= 1/2 (\mathbf{g}_s(O_i) + \mathbf{g}_s(O_j)) \quad \text{et} \quad \mathbf{g}_{s,ij}^{(d)} = 1/2 (\mathbf{g}_s(O_i) - \mathbf{g}_s(O_j)) \\ \mathbf{a}_{par,ij}^{int/ext,c} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\mathbf{f}_{par,i}^{int}}{m_i} + \frac{\mathbf{f}_{par,j}^{int}}{m_j} \right) \quad \text{et} \quad \mathbf{a}_{par,ij}^{int/ext,d} = \frac{1}{2} \left( \frac{\mathbf{f}_{par,i}^{int}}{m_i} - \frac{\mathbf{f}_{par,j}^{int}}{m_j} \right) \end{aligned}$$

Cette expression se simplifie grandement en choisissant  $R_{GRF}$  comme repère rigidement lié au satellite, en introduisant les hypothèses d'asservissement idéal et de gradiomètre idéal. Dans ce cas  $C_{sat} = O_{GRF}$ , les centres des masses d'épreuve sont confondues avec le centre des cages respectives, le milieu de  $O_i O_j$  est confondu avec  $O_{GRF}$ . Par conséquent, les centres de masses sont symétrique par rapport à l'origine du repère  $R_{GRF}$ . Par ailleurs, étant donné la qualité de la conception des masses d'épreuves, on peut considérer qu'elles

sont toutes de même masse. Donc  $\mu_d = 0$ . Ainsi :

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{ij}^{(c)} = & -(1 - \mu_c) ([T](O_{GRF}) - [\dot{\Omega}] - [\Omega]^2) \mathbf{O}_{sat} \mathbf{O}_{GRF} \\ & - (1 - \mu_c) \mathbf{g}_s^{(c)} + (1 - \mu_c) \frac{1}{m_{sat}} \left( \mathbf{f}_{NG,sat} - \sum_{k \neq i,j} \mathbf{f}_{e_k} - \sum_{k=1}^N \mathbf{f}_{par,k}^{int} \right) \\ & - (1 - \mu_c) \mathbf{a}_{par,ij}^{int,c} - (1 - \mu_c) \mathbf{a}_{par,ij}^{ext,c} \end{aligned} \quad (3.58)$$

Enfin, on peut considérer en première approximation que les masses des masses d'épreuve sont négligeables devant celle du satellite :  $\mu_c \approx 0$ . Par ailleurs, le satellite est conçu de sorte que le centre de masse du satellite et celui du gradiomètre soient très proches, donc que la distance  $\|\mathbf{O}_{sat} \mathbf{O}_{GRF}\|$  soit très faible. Par conception, l'accélération dues aux forces parasites internes et externes doit idéalement être négligeable devant celles dues aux forces non-gravitationnelles. Dans ce cas, l'expression du mode commun se simplifie encore davantage :

$$\mathbf{a}_{ij}^{(c)} = -\mathbf{g}_s^{(c)} + \frac{1}{m_{sat}} \left( \mathbf{f}_{NG,sat} - \sum_{k \neq i,j} \mathbf{f}_{e_k} \right) \quad (3.59)$$

Par conséquent, si la conception du gradiomètre et la qualité de l'asservissement sont parfaites, un mode commun ne dépend en première approximation que de l'accélération due aux forces non-gravitationnelles s'exerçant sur le satellite et à l'accélération moyenne due à la gravité du satellite sur les masses d'épreuve considérées.

## 3.4 Introduction des erreurs instrumentales

### 3.4.1 Équations de mesures avec les erreurs instrumentales

Les calculs de la section précédente sont établis dans le cas d'un gradiomètre parfait et d'un asservissement parfait. En réalité, malgré tout le soin apporté, de nombreuses petites imperfections font différer l'accélération déduite de la tension mesurée de l'accélération réelle. Ces imperfections peuvent être d'origine géométrique (défauts liés à la conception de l'instrument) ou électronique (défaut de détection capacitive, bruit électronique ou fonction de transfert de la boucle d'asservissement pas parfaitement connue). Dans cette partie, les équations de mesures sont écrites en prenant en compte ces défauts. Les hypothèses introduites au début de la section 3.1.3 doivent donc être abandonnées et remplacées par les suivantes :

- les 6 accéléromètres n'occupent pas exactement leur position nominale dans les repères  $R_{OAGRF}$  ;
- les axes des repères  $R_{OAGRF}$  ne sont pas parfaitement parallèles entre eux ;
- les axes de mesures des accéléromètres ne sont pas parfaitement orthogonaux deux à deux ;
- les axes des repères  $R_{ARF}$  ne sont pas parfaitement alignés avec ceux des repères  $R_{OAGRF}$  ;
- les mesures sont affectées par des perturbations (bruits et biais) ;
- la position des accéléromètres peut varier légèrement au cours du temps.

Dans la suite, on désigne par  $\Gamma^{(i)}$  la valeur de l'accélération mesurée par l'accéléromètre  $A_i$ , c'est-à-dire l'accélération déduite des tensions appliquées sur les électrodes, et par  $\gamma_k$  la valeur réelle telle qu'elle a été définie par l'équation (3.15). Autrement dit, si l'instrument était parfait,  $\gamma_k$  serait alors la valeur mesurée mais en réalité,  $\Gamma^{(i)}$  et  $\gamma_k$  diffèrent à cause des imperfections. Les différentes sources de perturbations sont modélisées comme suit :

- problème de mésalignement. Dans le cas d'une conception imparfaite, les axes géométriques d'une

cage d'un accéléromètre peut différer de sa position nominale par une faible rotation. On modélise ce défaut par une matrice de rotation notée :

$$[R_i] = \begin{bmatrix} 1 & \psi_i & -\theta_i \\ \psi_i & 1 & \phi_i \\ \theta_i & -\phi_i & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \psi_i & -\theta_i \\ \psi_i & 0 & \phi_i \\ \theta_i & -\phi_i & 0 \end{bmatrix} = [I_3] + [dR_i] \quad (3.60)$$

- problème de couplage. Les axes d'une cage d'accéléromètre peuvent aussi ne pas être parfaitement orthonormés. Ceci crée un couple entre axes dans les mesures accélérométriques. Ce défaut est modélisé par une matrice représentant de faibles déviations :

$$[S_i] = \begin{bmatrix} 1 & \epsilon_i & \eta_i \\ \epsilon_i & 1 & \zeta_i \\ \eta_i & \zeta_i & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \epsilon_i & \eta_i \\ \epsilon_i & 0 & \zeta_i \\ \eta_i & \zeta_i & 0 \end{bmatrix} = [I_3] + [dS_i] \quad (3.61)$$

- problème de facteurs d'échelle. L'accélération mesurée est déduite des tensions appliquées. Néanmoins, le gain électrostatique et le gain du Read-out ne sont pas parfaitement connus, ce qui fait différer légèrement la mesure de sa valeur réelle. On modélise cette connaissance imparfaite de la fonction de transfert par une matrice de facteurs d'échelle :

$$[K_i] = \begin{bmatrix} 1 + dK_{i,x} & 0 & 0 \\ 0 & 1 + dK_{i,y} & 0 \\ 0 & 0 & 1 + dK_{i,z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} dK_{i,x} & 0 & 0 \\ 0 & dK_{i,y} & 0 \\ 0 & 0 & dK_{i,z} \end{bmatrix} \\ = [I_3] + [dK_i] \quad (3.62)$$

- la boucle d'asservissement présente un biais électronique  $\mathbf{b}_i^{(0)}$  qu'il faut rajouter aux mesures ;
- les non-linéarités (du second ordre) dans la fonction de transfert de la boucle d'asservissement doivent également être prises en compte. Celles-ci sont dues, entre autres, à des différences de surface entre les électrodes et entre les gains des DVA et introduisent une relation non-linéaire entre l'accélération réelle  $\boldsymbol{\gamma}$  et la valeur mesurée  $\boldsymbol{\Gamma}$ . Les non-linéarités sont modélisées par une matrice de facteurs quadratiques :

$$[K2_i] = \begin{bmatrix} K2_{i,x} & 0 & 0 \\ 0 & K2_{i,y} & 0 \\ 0 & 0 & K2_{i,z} \end{bmatrix} \quad (3.63)$$

Ce type d'imperfection crée une accélération parasite supplémentaire de la forme  $\mathbf{Q}_i = [K2_i] \begin{bmatrix} \gamma_{i,x}^2 & \gamma_{i,y}^2 & \gamma_{i,z}^2 \end{bmatrix}^\top$  ;

- enfin, les mesures accélérométriques sont bruitées, ce qui est modélisé par un vecteur  $\mathbf{n}_i^\top = \begin{bmatrix} n_{i,x} & n_{i,y} & n_{i,z} \end{bmatrix}$ .

Étant donné que les composantes des vecteurs et matrices d'imperfection sont très faibles, le second ordre est négligé de sorte que les matrices définies ci-dessous commutent. En prenant en compte tous ces défauts, la relation entre l'accélération mesurée et la valeur réelle s'écrit :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Gamma}^{(i)} &= [R_i] [S_i] [K_i] \boldsymbol{\gamma}_i + [K2_i] \boldsymbol{\gamma}_i^{(2)} + \mathbf{b}_i^{(0)} + \mathbf{n}_i \\ &= ([I_3] + [dR_i]) ([I_3] + [dS_i]) ([I_3] + [dK_i]) \boldsymbol{\gamma}_i + [K2_i] \boldsymbol{\gamma}_i^{(2)} + \mathbf{b}_i^{(0)} + \mathbf{n}_i \\ &= ([dR_i] + [dS_i] + [K_i]) \boldsymbol{\gamma}_i + [K2_i] \boldsymbol{\gamma}_i^{(2)} + \mathbf{b}_i^{(0)} + \mathbf{n}_i \\ &= [M_i] \boldsymbol{\gamma}_i + [K2_i] \boldsymbol{\gamma}_i^{(2)} + \mathbf{b}_i^{(0)} + \mathbf{n}_i \end{aligned} \quad (3.64)$$

où l'on a posé  $\boldsymbol{\gamma}_i^{(2)} = \begin{bmatrix} \gamma_{i,x}^2 & \gamma_{i,y}^2 & \gamma_{i,z}^2 \end{bmatrix}^\top$  et  $[M_i] = ([dR_i] + [dS_i] + [K_i])$  qui est une matrice  $3 \times 3$ .

Dans le cas de la mission GOCE, le processus d'étalonnage est conçu non pour estimer les termes des matrices de défauts pour chaque accéléromètre mais pour les modes commun et différentiel des accélérations mesurées. Pour cela, on introduit les grandeurs suivantes :

$$\begin{aligned} [M_{ij}^{(c)}] &= \frac{1}{2} ([M_i] + [M_j]) & \text{et} & & [M_{ij}^{(d)}] &= \frac{1}{2} ([M_i] - [M_j]) \\ [K_{ij}^{(c)}] &= \frac{1}{2} ([K_i] + [K_j]) & \text{et} & & [K_{ij}^{(d)}] &= \frac{1}{2} ([K_i] - [K_j]) \\ \mathbf{a}_{ij}^{(c)} &= \frac{1}{2} (\boldsymbol{\gamma}_i + \boldsymbol{\gamma}_j) & \text{et} & & \mathbf{a}_{ij}^{(d)} &= \frac{1}{2} (\boldsymbol{\gamma}_i - \boldsymbol{\gamma}_j) \\ \mathbf{b}_{ij}^{(c)} &= \frac{1}{2} (\mathbf{b}_i + \mathbf{b}_j) & \text{et} & & \mathbf{b}_{ij}^{(d)} &= \frac{1}{2} (\mathbf{b}_i - \mathbf{b}_j) \end{aligned}$$

Pour une composante donnée selon l'axe  $\epsilon$  de l'accélération, on a la relation :

$$\gamma_{i,\epsilon}^2 = \left( a_{ij,\epsilon}^{(c)} \right)^2 + \left( a_{ij,\epsilon}^{(d)} \right)^2 + 2a_{ij,\epsilon}^{(c)} a_{ij,\epsilon}^{(d)} \quad (3.65)$$

$$\gamma_{j,\epsilon}^2 = \left( a_{ij,\epsilon}^{(c)} \right)^2 + \left( a_{ij,\epsilon}^{(d)} \right)^2 - 2a_{ij,\epsilon}^{(c)} a_{ij,\epsilon}^{(d)} \quad (3.66)$$

En introduisant le produit de Hadamard (produit termes à termes de matrice) :

$$\boldsymbol{\gamma}_i \otimes \boldsymbol{\gamma}_i = \mathbf{a}_{ij}^{(c)} \otimes \mathbf{a}_{ij}^{(c)} + \mathbf{a}_{ij}^{(d)} \otimes \mathbf{a}_{ij}^{(d)} + 2\mathbf{a}_{ij}^{(c)} \otimes \mathbf{a}_{ij}^{(d)} \quad (3.67)$$

$$\boldsymbol{\gamma}_j \otimes \boldsymbol{\gamma}_j = \mathbf{a}_{ij}^{(c)} \otimes \mathbf{a}_{ij}^{(c)} + \mathbf{a}_{ij}^{(d)} \otimes \mathbf{a}_{ij}^{(d)} - 2\mathbf{a}_{ij}^{(c)} \otimes \mathbf{a}_{ij}^{(d)} \quad (3.68)$$

et en utilisant les grandeurs définies précédemment, on définit alors les modes communs et différentiels mesurés à partir de l'équation (3.64) :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Gamma}_{ij}^{(c)} &= \frac{1}{2} (\boldsymbol{\Gamma}^{(i)} + \boldsymbol{\Gamma}^{(j)}) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \left( [M_{ij}^{(c)}] + [M_{ij}^{(d)}] \right) (\mathbf{a}_{ij}^{(c)} + \mathbf{a}_{ij}^{(d)}) + \left( [M_{ij}^{(c)}] - [M_{ij}^{(d)}] \right) (\mathbf{a}_{ij}^{(c)} - \mathbf{a}_{ij}^{(d)}) \right. \\ &\quad + \left( [K2_{ij}^{(c)}] + [K2_{ij}^{(d)}] \right) (\mathbf{a}_{ij}^{(c)} \otimes \mathbf{a}_{ij}^{(c)} + \mathbf{a}_{ij}^{(d)} \otimes \mathbf{a}_{ij}^{(d)} + 2\mathbf{a}_{ij}^{(c)} \otimes \mathbf{a}_{ij}^{(d)}) \\ &\quad + \left. \left( [K2_{ij}^{(c)}] - [K2_{ij}^{(d)}] \right) (\mathbf{a}_{ij}^{(c)} \otimes \mathbf{a}_{ij}^{(c)} + \mathbf{a}_{ij}^{(d)} \otimes \mathbf{a}_{ij}^{(d)} - 2\mathbf{a}_{ij}^{(c)} \otimes \mathbf{a}_{ij}^{(d)}) \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{b}_{ij}^{(c)} + \mathbf{n}_{ij}^{(c)} \right\} \\ &= \left[ M_{ij}^{(c)} \right] \mathbf{a}_{ij}^{(c)} + \left[ M_{ij}^{(d)} \right] \mathbf{a}_{ij}^{(d)} + \left[ K2_{ij}^{(c)} \right] (\mathbf{a}_{ij}^{(c)} \otimes \mathbf{a}_{ij}^{(c)} + \mathbf{a}_{ij}^{(d)} \otimes \mathbf{a}_{ij}^{(d)}) + 2 \left[ K2_{ij}^{(d)} \right] \mathbf{a}_{ij}^{(c)} \otimes \mathbf{a}_{ij}^{(d)} \\ &\quad + \mathbf{b}_{ij}^{(c)} + \mathbf{n}_{ij}^{(c)} \\ &= \left[ M_{ij}^{(c)} \right] \mathbf{a}_{ij}^{(c)} + \left[ M_{ij}^{(d)} \right] \mathbf{a}_{ij}^{(d)} + \left[ Q_{ij}^{(c)} \right] + \mathbf{b}_{ij}^{(c)} + \mathbf{n}_{ij}^{(c)} \end{aligned} \quad (3.69)$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{\Gamma}_{ij}^{(d)} &= \frac{1}{2} \left( \mathbf{\Gamma}^{(i)} - \mathbf{\Gamma}^{(j)} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left\{ \left( \left[ M_{ij}^{(c)} \right] + \left[ M_{ij}^{(d)} \right] \right) \left( \mathbf{a}_{ij}^{(c)} + \mathbf{a}_{ij}^{(d)} \right) - \left( \left[ M_{ij}^{(c)} \right] - \left[ M_{ij}^{(d)} \right] \right) \left( \mathbf{a}_{ij}^{(c)} - \mathbf{a}_{ij}^{(d)} \right) \right. \\
&\quad + \left( \left[ K2_{ij}^{(c)} \right] + \left[ K2_{ij}^{(d)} \right] \right) \left( \mathbf{a}_{ij}^{(c)} \otimes \mathbf{a}_{ij}^{(c)} + \mathbf{a}_{ij}^{(d)} \otimes \mathbf{a}_{ij}^{(d)} + 2\mathbf{a}_{ij}^{(c)} \otimes \mathbf{a}_{ij}^{(d)} \right) \\
&\quad - \left( \left[ K2_{ij}^{(c)} \right] - \left[ K2_{ij}^{(d)} \right] \right) \left( \mathbf{a}_{ij}^{(c)} \otimes \mathbf{a}_{ij}^{(c)} + \mathbf{a}_{ij}^{(d)} \otimes \mathbf{a}_{ij}^{(d)} - 2\mathbf{a}_{ij}^{(c)} \otimes \mathbf{a}_{ij}^{(d)} \right) \\
&\quad \left. + \mathbf{b}_{ij}^{(d)} + \mathbf{n}_{ij}^{(d)} \right\} \\
&= \left[ M_{ij}^{(c)} \right] \mathbf{a}_{ij}^{(d)} + \left[ M_{ij}^{(d)} \right] \mathbf{a}_{ij}^{(c)} + \left[ K2_{ij}^{(d)} \right] \left( \mathbf{a}_{ij}^{(c)} \otimes \mathbf{a}_{ij}^{(c)} + \mathbf{a}_{ij}^{(d)} \otimes \mathbf{a}_{ij}^{(d)} \right) + 2 \left[ K2_{ij}^{(c)} \right] \mathbf{a}_{ij}^{(c)} \otimes \mathbf{a}_{ij}^{(d)} \\
&\quad + \mathbf{b}_{ij}^{(d)} + \mathbf{n}_{ij}^{(d)} \\
&= \left[ M_{ij}^{(c)} \right] \mathbf{a}_{ij}^{(d)} + \left[ M_{ij}^{(d)} \right] \mathbf{a}_{ij}^{(c)} + \left[ Q_{ij}^{(d)} \right] + \mathbf{b}_{ij}^{(d)} + \mathbf{n}_{ij}^{(d)} \tag{3.70}
\end{aligned}$$

où l'on a regroupé les termes du facteurs quadratiques dans les matrices  $\left[ Q_{ij}^{(c)} \right]$  et  $\left[ Q_{ij}^{(d)} \right]$ .

Les matrices  $\left[ M_{ij}^{(c)} \right]$  et  $\left[ M_{ij}^{(d)} \right]$  dans les modes communs et différentiels ont pour expression :

$$\left[ M_{ij}^{(d)} \right] = \begin{bmatrix} K_{d,ij,x} & \psi_{d,ij} + \epsilon_{d,ij} & -\theta_{d,ij} + \eta_{d,ij} \\ -\psi_{d,ij} + \epsilon_{d,ij} & K_{d,ij,y} & \phi_{d,ij} + \zeta_{d,ij} \\ \theta_{d,ij} + \eta_{d,ij} & -\phi_{d,ij} + \zeta_{d,ij} & K_{d,ij,z} \end{bmatrix} \tag{3.71}$$

$$\left[ M_{ij}^{(c)} \right] = \begin{bmatrix} 1 + K_{c,ij,x} & \psi_{c,ij} + \epsilon_{c,ij} & -\theta_{c,ij} + \eta_{c,ij} \\ -\psi_{c,ij} + \epsilon_{c,ij} & 1 + K_{c,ij,y} & \phi_{c,ij} + \zeta_{c,ij} \\ \theta_{c,ij} + \eta_{c,ij} & -\phi_{c,ij} + \zeta_{c,ij} & 1 + K_{c,ij,z} \end{bmatrix} \tag{3.72}$$

Les composantes de ces matrices sont les demi-sommes ou demi-différences des termes des matrices d'imperfections définies ci-dessus. Les équations (3.69) et (3.70) montre que dans la mesure d'un mode commun/différentiel interviennent les accélérations communes et différentielles réelles, en plus des facteurs quadratiques, des bruits et des biais. Ces équations peuvent être réécrites en une seule de sorte à définir la matrice d'étalonnage qui est un élément essentiel à déterminer pendant les phases d'étalonnage :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{\Gamma}_{ij}^{(c)} \\ \mathbf{\Gamma}_{ij}^{(d)} \end{pmatrix} = \left[ M_{ij} \right] \begin{pmatrix} \mathbf{a}_{ij}^{(c)} \\ \mathbf{a}_{ij}^{(d)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \left[ Q_{ij}^{(c)} \right] \\ \left[ Q_{ij}^{(d)} \right] \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{b}_{ij}^{(c)} \\ \mathbf{b}_{ij}^{(d)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{n}_{ij}^{(c)} \\ \mathbf{n}_{ij}^{(d)} \end{pmatrix} \tag{3.73}$$

où la matrice d'étalonnage symétrique et de taille  $6 \times 6$  est définie par :

$$\left[ M_{ij} \right] = \begin{pmatrix} \left[ M_{ij}^{(c)} \right] & \left[ M_{ij}^{(d)} \right] \\ \left[ M_{ij}^{(d)} \right] & \left[ M_{ij}^{(c)} \right] \end{pmatrix} \tag{3.74}$$

Étant donné la définition de la matrice d'étalonnage, on peut la réécrire sous la forme :

$$\left[ M_{ij} \right] = \left[ I_6 \right] + \left[ dM_{ij} \right] \tag{3.75}$$

où  $[dM_{ij}]$  est définie par  $[dM_{ij}] = \begin{pmatrix} [M_{ij}^{(c)}] - [I_3] & [M_{ij}^{(d)}] \\ [M_{ij}^{(d)}] & [M_{ij}^{(c)}] - [I_3] \end{pmatrix}$ .

### 3.4.2 Éléments d'étalonnage de l'instrument

Les équations (3.69) et (3.70) montrent l'existence d'un couplage dû aux imperfections entre les modes communs et différentiels mesurés, c'est pourquoi, étant donnée la performance attendue pour la mission GOCE, l'étalonnage de l'instrument est un processus crucial afin de rendre les mesures accélérométriques exploitables pour l'estimation du gradient de gravité. Telles qu'elles sont définies, une matrice d'étalonnage représente les imperfections dans le repère  $R_{OAGRf}$  associé à la paire d'accéléromètres correspondante.

Il y a deux types d'étalonnage : au sol et en vol. L'objectif de l'étalonnage est de déduire des grandeurs mesurées, une estimation des valeurs réelles des modes communs et différentiels. Autrement dit, sachant  $\Gamma_{ij}^{(c/d)}$  on cherche  $\mathbf{a}_{ij}^{(c/d)}$ . Par conséquent, pour des raisons d'efficacité, la matrice à déterminer n'est pas la matrice d'étalonnage mais son inverse que l'on note  $[MI_{ij}]$ . La matrice  $[MI_{ij}]$  est symétrique par bloc donc son inverse est également symétrique par bloc, de sorte que :

$$[M_{ij}]^{-1} = [MI_{ij}] = [MI_{ij,uv}]_{1 \leq u,v \leq 6} = \begin{pmatrix} [MI_{ij}^{(c)}] & [MI_{ij}^{(d)}] \\ [MI_{ij}^{(d)}] & [MI_{ij}^{(c)}] \end{pmatrix} \quad (3.76)$$

L'équation (3.75) permet l'approximation suivante au premier ordre :

$$[MI_{ij}] = ([I_6] + [dM_{ij}])^{-1} \approx [I_6] - [dM_{ij}] \quad (3.77)$$

Au sol, les tests d'étalonnage sont réalisés à l'ONERA sur un pendule de torsion [82]. Cette opération permet d'estimer certaines composantes de la matrice d'étalonnage et des facteurs quadratiques immédiatement après la construction des accéléromètres. Néanmoins, ces tests doivent être complétés par des phases d'étalonnage en vol, permettant d'estimer les valeurs en vol des facteurs quadratiques communs et différentiels, et de les annuler si nécessaire, ainsi que la matrice inverse d'étalonnage pour chaque paire d'accéléromètres. Les valeurs maximales des termes de la matrice  $[dM_{ij}]$  sont présentées dans l'annexe C.

Le processus d'étalonnage permet donc d'obtenir une estimation  $[\widehat{MI}_{ij}]$  de la matrice  $[MI_{ij}]$ . En notant  $[\delta MI_{ij}]$  l'erreur commise dans l'estimation, on a :

$$[\widehat{MI}_{ij}] = [MI_{ij}] + [\delta MI_{ij}] \quad (3.78)$$

Par conséquent, la relations entre mesures étalonnées et mesures nominales s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \widehat{\Gamma}_{ij}^{(c)} \\ \widehat{\Gamma}_{ij}^{(d)} \end{pmatrix} = [\widehat{MI}_{ij}] \begin{pmatrix} \Gamma_{ij}^{(c)} \\ \Gamma_{ij}^{(d)} \end{pmatrix} \quad (3.79)$$

Entre novembre 2009 et novembre 2012, il y a eu au total 16 sessions d'étalonnage. Le tableau C.1 donne, à titre d'exemple, les matrices  $[\widehat{MI}_{ij}]$  pour toutes les paires d'accéléromètres pour la session d'étalonnage du 1<sup>er</sup> novembre 2009. On voit qu'en dehors des termes diagonaux, tous les autres termes sont en-deçà des valeurs maximales spécifiées. Ceci est valable pour les 17 sessions d'étalonnage. À partir des matrices  $[\widehat{MI}_{ij}]$ , les valeurs des facteurs d'échelle communs et différentiels, des mésalignements et des couplages sont estimées. Les comparaisons entre les spécifications et ces valeurs pour chacune des sessions d'étalonnage sont regroupées dans la figure C.2. Globalement, pendant toute la mission, les termes correspondant aux

mésalignements et aux couplages sont en-dessous des valeurs maximales spécifiées, à l'exception du terme de mésalignement différentiel pour la paire 3-6. Par ailleurs, les facteurs d'échelle communs pour les axes de mesure sensibles, ainsi que les facteurs d'échelle différentiels pour la paire 1-4, sont tous largement supérieurs à la spécification (indiquée par des lignes rouges).

L'estimation des composantes du gradient de gravité à partir des valeurs mesurées est faite en suivant les grandes lignes suivantes [73] :

- Étape 1. Déterminer les accélérations  $\Gamma_i$  à partir des tensions appliquées sur les électrodes pour tous les accéléromètres dans les repères  $R_{ARF}$ .
- Étape 2. Déterminer les modes communs et différentiels nominaux  $\mathbf{a}_{ij}^{(c)}$  et  $\mathbf{a}_{ij}^{(d)}$  dans le repère  $R_{GRF}$ .
- Étape 3. Obtenir des estimations, dans le repère  $R_{GRF}$ , des modes communs et différentiels étalonnés,  $\hat{\mathbf{a}}_{ij}^{(c)}$  et  $\hat{\mathbf{a}}_{ij}^{(d)}$ , grâce à la matrice d'étalonnage inverse estimée  $[\widehat{M}]_{ij}$ .
- Étape 4. Obtenir des estimations des accélérations angulaires  $\hat{\omega}$  et des vitesses angulaires  $\hat{\omega}$  autour des axes du repère  $R_{GRF}$  avec les données du gradiomètre et des senseurs stellaires.
- Étape 5. Obtenir les estimations des composantes du gradient de gravité, exprimés dans le repère  $R_{GRF}$ , en suivant les équations (3.39) à (3.41) et (3.45) à (3.47).

En remplaçant l'équation (3.73) dans l'équation (3.79), on peut déterminer l'erreur commise sur l'estimation des composantes du gradient de gravité. La relation entre la valeur réelle  $V_{XX}$  et la valeur estimée  $\hat{V}_{XX}$  dans le repère  $R_{OAGRF,14}$ , de la paire d'accéléromètres  $(i, j)$ , s'écrit :

$$\begin{aligned}
 \hat{V}_{XX} = & V_{XX} - \delta\omega_y^{(2)} - \delta\omega_z^{(2)} - \frac{2}{L_X} \left\{ \left[ Q_{14}^{(d)} \right] \right\}_X \\
 & - \frac{2}{L_X} b_{14,X}^{(d)} - \frac{2}{L_X} \left\{ \left( \left[ \delta M_{14}^{(d)} \right] - \left[ dM_{14}^{(d)} \right] \right) \mathbf{b}_{14}^{(c)} \right\}_X - \frac{2}{L_X} \left\{ \left( \left[ \delta M_{14}^{(c)} \right] - \left[ dM_{14}^{(c)} \right] \right) \mathbf{b}_{14}^{(d)} \right\}_X \\
 & - \left\{ \frac{2}{L_X} \left( \left[ \delta M_{14}^{(d)} \right] \mathbf{a}_{14}^{(c)} + \left[ \delta M_{14}^{(c)} \right] \mathbf{a}_{14}^{(d)} \right) \right\}_X \\
 & - \frac{2}{L_X} n_{14,X}^{(d)} - \frac{2}{L_X} \left\{ \left( \left[ \delta M_{14}^{(d)} \right] - \left[ dM_{14}^{(d)} \right] \right) \mathbf{n}_{14}^{(c)} \right\}_X - \frac{2}{L_X} \left\{ \left( \left[ \delta M_{14}^{(c)} \right] - \left[ dM_{14}^{(c)} \right] \right) \mathbf{n}_{14}^{(d)} \right\}_X \quad (3.80)
 \end{aligned}$$

où la notation  $\{\cdot\}_X$  dénote la composante selon l'axe  $X$  dans le repère  $R_{OAGRF,14}$  et où  $\delta\omega_y^{(2)}$  et  $\delta\omega_z^{(2)}$  sont les erreurs commises sur l'estimation des carrés des vitesses angulaires,  $\frac{2}{L_X} \left\{ \left[ Q_{14}^{(d)} \right] \right\}_X$  est l'erreur due au facteur quadratique, les erreurs dépendant de  $\mathbf{b}_{14}^{(c/d)}$  sont dues au biais, les erreurs dépendant de  $\mathbf{a}_{14}^{(c/d)}$  sont dues au couplage avec les modes communs et différentiels et les erreurs dépendant de  $\mathbf{n}_{14}^{(c/d)}$  sont dues au couplage avec les bruits des accéléromètres de la paire considérée.

En ce qui concerne la contribution des bruits, si l'on considère que l'erreur commise dans l'estimation de la matrice inverse d'étalonnage n'a pas de composante stochastique, entre 5 mHz et 100 mHz, seul le terme  $\frac{2}{L_X} n_{14,X}^{(d)}$  a une contribution non nulle. Étant donné que le bruit attendu pour un axe sensible d'un accéléromètre dans cet intervalle de fréquence est  $2 \times 10^{-12} \text{ m/s}^2 / \sqrt{\text{Hz}}$ , la contribution du bruit différentiel en terme de gradient de gravité est donc bien de l'ordre de  $8 \text{ mE} / \sqrt{\text{Hz}}$ . On rappelle que la bande de fréquence d'intérêt dans le cas du gradiomètre est l'intervalle de 5 mHz à 100 mHz. Dans le domaine fréquentiel, le biais n'a pas d'impact dans cet intervalle.

### 3.5. Relations entre accélérations linéaires/angulaires d'une masse d'épreuve et le contrôle en tension

$V_p$	Tension de polarisation appliquée sur la masse d'épreuve
$\tilde{V}_d = V_d \sin(\omega_D t)$	Tension de détection sinusoïdale à 100kHz appliquée sur la masse d'épreuve
$V_{X1+}$	Tension appliquée sur l'électrode X1+
$V_{X1-}$	Tension appliquée sur l'électrode X1-
$V_{X2+}$	Tension appliquée sur l'électrode X2+
$V_{X2-}$	Tension appliquée sur l'électrode X2-
$V_{X3+}$	Tension appliquée sur l'électrode X3+
$V_{X3-}$	Tension appliquée sur l'électrode X3-
$V_{X4+}$	Tension appliquée sur l'électrode X4+
$V_{X4-}$	Tension appliquée sur l'électrode X4-
$V_{Y1+}$	Tension appliquée sur l'électrode Y1+
$V_{Y1-}$	Tension appliquée sur l'électrode Y1-
$V_{Y2+}$	Tension appliquée sur l'électrode Y2+
$V_{Y2-}$	Tension appliquée sur l'électrode Y2-
$V_{Z1+}$	Tension appliquée sur l'électrode Z1+
$V_{Z1-}$	Tension appliquée sur l'électrode Z1-
$V_{Z2+}$	Tension appliquée sur l'électrode Z2+
$V_{Z2-}$	Tension appliquée sur l'électrode Z2-

Table 3.1 – Correspondance entre notation et tensions appliquées pour un accéléromètre donné.

## 3.5 Relations entre accélérations linéaires/angulaires d'une masse d'épreuve et le contrôle en tension

Dans cette partie, on exprime l'accélération électrostatique imprimée à la masse d'épreuve  $i$ , c'est-à-dire  $\gamma_i$ , dans le repère  $R_{AESRF,i}$  et en fonction des tensions appliquées sur les électrodes. On trouve une expression pour tous les degrés de liberté : trois en translation, notés  $x$ ,  $y$  et  $z$ , et trois en rotation  $\phi$ ,  $\theta$  et  $\psi$ . On distingue le cas de l'action des électrodes  $Y/Z$  de celui des électrodes  $X$ . On détaille davantage le terme  $\mathbf{f}_{elec,i}/m_i$  défini précédemment dans les équations de la section précédente. Les notations utilisées sont présentées dans le tableau 3.1.

### 3.5.1 Dynamique de la masse d'épreuve le long des axes $Y$ et $Z$ du repère $R_{AESRF}$

On suppose l'existence d'un faible déplacement selon les axes  $Y_{AESRF}$  et  $Z_{AESRF}$ , ainsi qu'un faible angle de rotation  $\phi$  autour de l'axe  $X_{AESRF}$  (cf. figure 3.2). Par convention, on suppose que le sens du déplacement se fait dans le sens positifs des axes et que la rotation se fait dans le sens direct. Les capacités  $C_i$  correspondant aux condensateurs plans formés d'une face de la masse d'épreuve et de l'électrode  $i$  en regard s'écrivent pour les électrodes  $Y$  (cf. annexe B) :

$$C_{Y1+} = \frac{\epsilon S_{yz}}{e_{yz} - y + d_{yz}\phi} \quad \text{et} \quad C_{Y1-} = \frac{\epsilon S_{yz}}{e_{yz} + y - d_{yz}\phi}$$

$$C_{Y2+} = \frac{\epsilon S_{yz}}{e_{yz} - y - d_{yz}\phi} \quad \text{et} \quad C_{Y2-} = \frac{\epsilon S_{yz}}{e_{yz} + y + d_{yz}\phi}$$

De même pour les électrodes Z :

$$C_{Z1+} = \frac{\epsilon S_{yz}}{e_{yz} - z - d_{yz}\phi} \quad \text{et} \quad C_{Z1-} = \frac{\epsilon S_{yz}}{e_{yz} + z + d_{yz}\phi}$$

$$C_{Z2+} = \frac{\epsilon S_{yz}}{e_{yz} - z + d_{yz}\phi} \quad \text{et} \quad C_{Z2-} = \frac{\epsilon S_{yz}}{e_{yz} + z - d_{yz}\phi}$$

où  $e$  est l'entrefer nominal,  $d_{yz}$  le bras de levier d'une électrode Y/Z et  $S_{yz}$  la surface d'une électrode Y/Z. On considère que toutes les surfaces des électrodes Y et Z sont identiques : celles-ci sont réalisées par ultrasons avec une précision de quelques microns. La dissymétrie relative des surfaces d'électrodes réelle est de l'ordre de  $\Delta S_{yz}/S_{yz} = 10^{-3}$  et est négligée pour le moment.

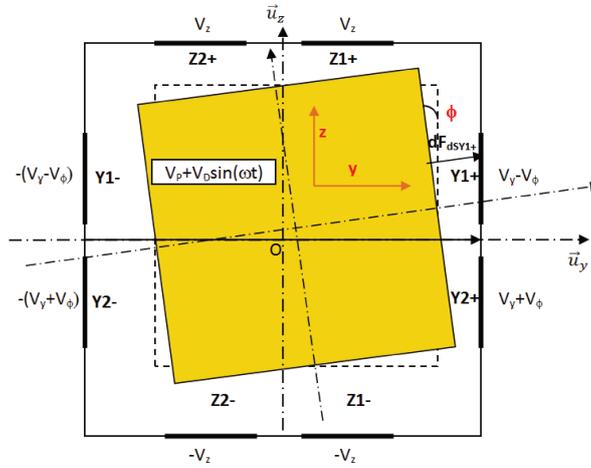


Figure 3.2 – Représentation d'un déplacement de la masse d'épreuve le long des axes  $Y_{AESRF}$  et  $Z_{AESRF}$  ainsi qu'un faible angle de rotation autour de l'axe  $X_{AESRF}$ .

Etant donné que la force électrostatique dans un condensateur plan, auquel sont appliquées des tensions sur les électrodes, est attractive, on déduit les expressions suivantes des forces électrostatiques exercées sur la masse d'épreuve et due à l'électrode  $i$  :

$$\mathbf{F}_{Y1+} = \frac{1}{2} \frac{\epsilon S_{yz}}{(e_{yz} - y + d_{yz}\phi)^2} (V_{Y1+} - (V_p + \hat{V}_d))^2 \mathbf{u}_y \quad \text{et} \quad \mathbf{F}_{Y1-} = -\frac{1}{2} \frac{\epsilon S_{yz}}{(e_{yz} + y - d_{yz}\phi)^2} (V_{Y1-} - (V_p + \hat{V}_d))^2 \mathbf{u}_y$$

$$\mathbf{F}_{Y2+} = \frac{1}{2} \frac{\epsilon S_{yz}}{(e_{yz} - y - d_{yz}\phi)^2} (V_{Y2+} - (V_p + \hat{V}_d))^2 \mathbf{u}_y \quad \text{et} \quad \mathbf{F}_{Y2-} = -\frac{1}{2} \frac{\epsilon S_{yz}}{(e_{yz} + y - d_{yz}\phi)^2} (V_{Y2-} - (V_p + \hat{V}_d))^2 \mathbf{u}_y$$

$$\mathbf{F}_{Z1+} = \frac{1}{2} \frac{\epsilon S_{yz}}{(e_{yz} - z - d_{yz}\phi)^2} (V_{Z1+} - (V_p + \hat{V}_d))^2 \mathbf{u}_z \quad \text{et} \quad \mathbf{F}_{Z1-} = -\frac{1}{2} \frac{\epsilon S_{yz}}{(e_{yz} + z + d_{yz}\phi)^2} (V_{Z1-} - (V_p + \hat{V}_d))^2 \mathbf{u}_z$$

$$\mathbf{F}_{Y Z2+} = \frac{1}{2} \frac{\epsilon S_{yz}}{(e_{yz} - z + d_{yz}\phi)^2} (V_{Z2+} - (V_p + \hat{V}_d))^2 \mathbf{u}_z \quad \text{et} \quad \mathbf{F}_{Z2-} = -\frac{1}{2} \frac{\epsilon S_{yz}}{(e_{yz} + z - d_{yz}\phi)^2} (V_{Z2-} - (V_p + \hat{V}_d))^2 \mathbf{u}_z$$

où  $\hat{V}_d = V_d \sin(\omega t)$  est la tension sinusoïdale à 100 kHz appliquée sur la masse d'épreuve et destinée à la détection capacitive. Autrement dit, la période du signal sinusoïdal est 10  $\mu$ s.

Les tensions appliquées sur les électrodes vérifient les propriétés suivantes :  $V_{Y1+} = -V_{Y1-} = V_{Y1}$  et  $V_{Z1+} = -V_{Z1-} = V_{Z1}$ . Grâce à l'hypothèse de petits déplacements, on peut écrire l'accélération due à la résultante des

### 3.5. Relations entre accélérations linéaires/angulaires d'une masse d'épreuve et le contrôle en tension

forces électrostatiques selon l'axe Y et Z avec un développement limité à l'ordre 2 :

$$\begin{aligned}
 \overset{\circ\circ}{\mathbf{y}}_{\mathbf{u}_y} &= \frac{\mathbf{F}_Y}{m_{pm}} = -\frac{2\epsilon S_{yz}}{m_{pm}e_{yz}^2}(V_p + \hat{V}_d)(V_{Y1} + V_{Y2})\mathbf{u}_y + \frac{2\epsilon S_{yz}}{m_{pm}e_{yz}^2} \frac{y}{e_{yz}} (V_{Y1}^2 + V_{Y2}^2 + 2(V_p + \hat{V}_d)^2)\mathbf{u}_y \\
 &\quad - \frac{6\epsilon S_{yz}}{m_{pm}e_{yz}^2} \left(\frac{y}{e_{yz}}\right)^2 (V_p + \hat{V}_d)(V_{Y1} + V_{Y2})\mathbf{u}_y \\
 &\quad + \frac{2\epsilon S_{yz}}{m_{pm}e_{yz}^2} \frac{d_{yz}\phi}{e_{yz}} (V_{Y2}^2 - V_{Y1}^2) - \frac{12\epsilon S_{yz}}{m_{pm}e_{yz}^2} \frac{y d_{yz}\phi}{e_{yz}^2} (V_p + \hat{V}_d)(V_{Y2} - V_{Y1})\mathbf{u}_y \\
 &\quad - \frac{6\epsilon S_{yz}}{m_{pm}e_{yz}^2} \left(\frac{d_{yz}\phi}{e_{yz}}\right)^2 (V_p + \hat{V}_d)(V_{Y1} + V_{Y2})\mathbf{u}_y
 \end{aligned} \tag{3.81}$$

Et pour l'axe Z :

$$\begin{aligned}
 \overset{\circ\circ}{\mathbf{z}}_{\mathbf{u}_z} &= \frac{\mathbf{F}_Z}{m_{pm}} = -\frac{2\epsilon S_{yz}}{m_{pm}e_{yz}^2}(V_p + \hat{V}_d)(V_{Z1} + V_{Z2})\mathbf{u}_z + \frac{2\epsilon S_{yz}}{m_{pm}e_{yz}^2} \frac{z}{e_{yz}} (V_{Z1}^2 + V_{Z2}^2 + 2(V_p + \hat{V}_d)^2)\mathbf{u}_z \\
 &\quad - \frac{6\epsilon S_{yz}}{m_{pm}e_{yz}^2} \left(\frac{z}{e_{yz}}\right)^2 (V_p + \hat{V}_d)(V_{Z1} + V_{Z2})\mathbf{u}_z \\
 &\quad + \frac{2\epsilon S_{yz}}{m_{pm}e_{yz}^2} \frac{d_{yz}\phi}{e_{yz}} (V_{Z1}^2 - V_{Z2}^2)\mathbf{u}_z - \frac{12\epsilon S_{yz}}{m_{pm}e_{yz}^2} \frac{z d_{yz}\phi}{e_{yz}^2} (V_p + \hat{V}_d)(V_{Z1} - V_{Z2})\mathbf{u}_z \\
 &\quad - \frac{6\epsilon S_{yz}}{m_{pm}e_{yz}^2} \left(\frac{d_{yz}\phi}{e_{yz}}\right)^2 (V_p + \hat{V}_d)(V_{Z1} + V_{Z2})\mathbf{u}_z
 \end{aligned} \tag{3.82}$$

Plus précisément, chaque tension appliquée sur une électrode contient une partie destinée au contrôle en translation de la masse d'épreuve, et une partie destinée au contrôle en rotation. Ainsi :  $V_{Y1+} = V_y - V_\phi = -V_{Y1-}$  et  $V_{Y2+} = V_y + V_\phi = -V_{Y2-}$ . Par ailleurs, le temps caractéristique de l'action électrostatique est beaucoup plus long que celui de la détection. Par conséquent, on peut ne considérer que la partie DC dans les expressions ci-dessus : ceci revient à moyenner sur une durée correspondant à quelques multiples de la période du signal  $\hat{V}_d$ . Sur cette durée, on peut considérer que les tensions appliquées sur les électrodes restent constantes. En conséquence, en introduisant la tension efficace  $V_{def} = V_d/\sqrt{2}$ , les expressions ci-dessus se simplifient :

$$\begin{aligned}
 \langle \overset{\circ\circ}{\mathbf{y}} \rangle_{\mathbf{u}_y} &= -\frac{4\epsilon S_{yz}}{m_{pm}e_{yz}^2} V_p V_y \mathbf{u}_y + \frac{4\epsilon S_{yz}}{m_{pm}e_{yz}^2} \frac{y}{e_{yz}} (V_y^2 + V_\phi^2 + V_p^2 + V_{def}^2)\mathbf{u}_y - \frac{12\epsilon S_{yz}}{m_{pm}e_{yz}^2} \left(\frac{y}{e_{yz}}\right)^2 V_y V_p \mathbf{u}_y \\
 &\quad + \frac{8\epsilon S_{yz}}{m_{pm}e_{yz}^2} \frac{d_{yz}\phi}{e_{yz}} V_y V_\phi - \frac{24\epsilon S_{yz}}{m_{pm}e_{yz}^2} \frac{y d_{yz}\phi}{e_{yz}^2} V_\phi V_p \mathbf{u}_y - \frac{12\epsilon S_{yz}}{m_{pm}e_{yz}^2} \left(\frac{d_{yz}\phi}{e_{yz}}\right)^2 V_y V_\phi \mathbf{u}_y
 \end{aligned} \tag{3.83}$$

et :

$$\begin{aligned}
 \langle \overset{\circ\circ}{\mathbf{z}} \rangle_{\mathbf{u}_z} &= -\frac{4\epsilon S_{yz}}{m_{pm}e_{yz}^2} V_p V_z \mathbf{u}_z + \frac{4\epsilon S_{yz}}{m_{pm}e_{yz}^2} \frac{z}{e_{yz}} (V_z^2 + V_\phi^2 + V_p^2 + V_{def}^2)\mathbf{u}_z - \frac{12\epsilon S_{yz}}{m_{pm}e_{yz}^2} \left(\frac{z}{e_{yz}}\right)^2 V_z V_p \mathbf{u}_z \\
 &\quad + \frac{8\epsilon S_{yz}}{m_{pm}e_{yz}^2} \frac{d_{yz}\phi}{e_{yz}} V_z V_\phi - \frac{24\epsilon S_{yz}}{m_{pm}e_{yz}^2} \frac{z d_{yz}\phi}{e_{yz}^2} V_\phi V_p \mathbf{u}_z - \frac{12\epsilon S_{yz}}{m_{pm}e_{yz}^2} \left(\frac{d_{yz}\phi}{e_{yz}}\right)^2 V_z V_\phi \mathbf{u}_z
 \end{aligned} \tag{3.84}$$

Considérons un déplacement y (respectivement z) de la masse d'épreuve dans le sens positif de l'axe défini

par  $\mathbf{u}_y$  (respectivement  $\mathbf{u}_z$ ). On suppose qu'il n'y a pas de mouvement en rotation, c'est-à-dire  $\phi = 0$ . Dans ce cas, pour contrebalancer le mouvement de la masse d'épreuve, on constate qu'il faut imposer une tension  $V_y$  (respectivement  $V_z$ ) positive pour que la masse d'épreuve ait une accélération résultante inverse au déplacement initial en translation. Dans ce cas, la dynamique de la masse d'épreuve (selon l'axe  $Y$  ou  $Z$ ) est la résultante de trois contributions :

- Le terme faisant intervenir le facteur d'échelle  $(4\epsilon S_{yz})V_p/(m_{pm}e_{yz}^2)$  correspond à un mouvement qui s'oppose au déplacement de la masse d'épreuve. Avec les grandeurs caractéristiques des accéléromètres de la mission GOCE, ce facteur d'échelle est de l'ordre de  $9.77 \times 10^{-7} \text{ m/s}^2/\text{V}$  ;
- Le second terme, proportionnel à  $y$  ou  $z$ , correspond à la raideur électrostatique qui favorise le décentrage de la masse d'épreuve et qui n'est pas négligeable. En effet, par exemple prenons la course libre maximale pour valeur du déplacement (c'est-à-dire  $y = 2.9 \times 10^{-5} \text{ m}$ ), avec également  $V_{def} = 7.62\text{V}$  et  $V_y = 2\text{V}$  qui est un ordre de grandeur typique de la mission (cf. chapitre 4). Dans ce cas, l'accélération déstabilisante due à la raideur électrostatique est de  $1.52 \mu\text{m/s}^2$ . En comparaison, le terme précédent crée une accélération de l'ordre de  $1.957 \mu\text{m/s}^2$  ;
- Le troisième terme est proportionnel à  $y^2$  ou  $z^2$ . Il induit également un mouvement en faveur du recentrage de la masse d'épreuve mais est négligeable au premier ordre puisqu'avec les valeurs caractéristiques, ce terme est de l'ordre de  $1.652 \times 10^{-5} \mu\text{m/s}^2$ .

Par ailleurs, la présence de termes proportionnels à  $\phi$  signifie que lorsque la masse d'épreuve effectue un mouvement de rotation, le contrôle angulaire correspondant induit un couplage sur le contrôle du mouvement linéaire de la masse d'épreuve. Par conception, l'angle maximal de rotation de la masse d'épreuve autour de l'axe  $X_{AESRF}$  est  $\phi_{max} = 1.5 \times 10^{-3} \text{ rad}$  (cf. [83]). En supposant une rotation dans le sens positif, la tension  $V_\phi$  appliquée doit être positive. On peut alors interpréter les termes liés à  $\phi$  de la manière suivante :

- Le terme proportionnel à  $\phi/e_{yz}$  induit un couplage entre le contrôle de  $\phi$  et celui de  $y$  au travers des tensions  $V_\phi$  et  $V_y$ . Ce couplage est destabilisant.
- Les termes proportionnels à  $y\phi/e_{yz}^2$  et  $\phi^2/e_{yz}^2$  sont stabilisateurs.

### 3.5.2 Dynamique de la masse d'épreuve le long de l'axe $X$ du repère $R_{AESRF}$

Dans cette partie, on s'intéresse aux axes moins sensibles des accéléromètres et écrire la relation entre les tensions appliquées sur les électrodes et la dynamique de la masse d'épreuve. Le contrôle linéaire et angulaire selon cette axe est assuré par quatre électrodes identiques. On suppose un petit déplacement le long de l'axe  $X$  ainsi que deux faibles angles de rotation : l'un autour de l'axe  $Y$  et noté  $\theta$ , l'autre autour de l'axe  $Z$  et noté  $\psi$ . La figure 3.3 présente deux vues en tranche selon les plans  $(O, X_{AESRF}, Y_{AESRF})$  et  $(O, X_{AESRF}, Z_{AESRF})$  pour illustrer les déplacements mentionnés.

Avec cette configuration, la force électrostatique exercée par l'électrode  $i$  sur la masse d'épreuve s'écrit :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F}_{X1\pm/pm} &= \frac{1}{2} \frac{\epsilon S_x}{(e_x \mp x \mp \theta d_z \pm \psi d_y)^2} (V_{X1\pm} - V_p - \hat{V}_d)^2 \times (\pm \mathbf{u}_x) \\
 \mathbf{F}_{X2\pm/pm} &= \frac{1}{2} \frac{\epsilon S_x}{(e_x \mp x \mp \theta d_z \mp \psi d_y)^2} (V_{X2\pm} - V_p - \hat{V}_d)^2 \times (\pm \mathbf{u}_x) \\
 \mathbf{F}_{X3\pm/pm} &= \frac{1}{2} \frac{\epsilon S_x}{(e_x \mp x \pm \theta d_z \mp \psi d_y)^2} (V_{X2\pm} - V_p - \hat{V}_d)^2 \times (\pm \mathbf{u}_x) \\
 \mathbf{F}_{X4\pm/pm} &= \frac{1}{2} \frac{\epsilon S_x}{(e_x \mp x \pm \theta d_z \pm \psi d_y)^2} (V_{X2\pm} - V_p - \hat{V}_d)^2 \times (\pm \mathbf{u}_x)
 \end{aligned} \tag{3.85}$$

### 3.5. Relations entre accélérations linéaires/angulaires d'une masse d'épreuve et le contrôle en tension

Les tensions appliquées sur les électrodes vérifient :  $V_{X1+} = -V_{X1-}$ ,  $V_{X2+} = -V_{X2-}$ ,  $V_{X3+} = -V_{X3-}$ ,  $V_{X4+} = -V_{X4-}$ . Comme pour le cas des électrodes  $Y$  et  $Z$ , on prend la convention :  $V_{X1+} = V_{X1}$ ,  $V_{X2+} = V_{X2}$ ,  $V_{X3+} = V_{X3}$  et  $V_{X4+} = V_{X4}$ . On peut alors exprimer la résultante des forces s'exerçant sur la masse d'épreuve à l'aide d'un développement limité à l'ordre 1. La résultante pour chaque paire s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{X1/pm} = & -\frac{2\epsilon S_x}{e_x^2} (V_p + \hat{V}_d) V_{X1} \mathbf{u}_x + \frac{2\epsilon S_x}{e_x^2} \frac{x}{e_x} (V_{X1}^2 + (V_p + \hat{V}_d)^2) \mathbf{u}_x - \frac{6\epsilon S_x}{e_x^2} \left(\frac{x}{e_x}\right)^2 (V_p + \hat{V}_d) V_{X1} \mathbf{u}_x \\ & + \frac{2\epsilon S_x}{e_x^2} \frac{\theta d_z - \psi d_y}{e_x} (V_{X1}^2 + (V_p + \hat{V}_d)^2) \mathbf{u}_x - \frac{12\epsilon S_x}{e_x^2} \frac{x(\theta d_z - \psi d_y)}{e_x^2} (V_p + \hat{V}_d) V_{X1} \mathbf{u}_x \\ & - \frac{6\epsilon S_x}{e_x^2} \left(\frac{\theta d_z - \psi d_y}{e_x}\right)^2 (V_p + \hat{V}_d) V_{X1} \mathbf{u}_x \end{aligned} \quad (3.86)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{X2/pm} = & -\frac{2\epsilon S_x}{e_x^2} (V_p + \hat{V}_d) V_{X2} \mathbf{u}_x + \frac{2\epsilon S_x}{e_x^2} \frac{x}{e_x} (V_{X2}^2 + (V_p + \hat{V}_d)^2) \mathbf{u}_x - \frac{6\epsilon S_x}{e_x^2} \left(\frac{x}{e_x}\right)^2 (V_p + \hat{V}_d) V_{X2} \mathbf{u}_x \\ & + \frac{2\epsilon S_x}{e_x^2} \frac{\theta d_z + \psi d_y}{e_x} (V_{X2}^2 + (V_p + \hat{V}_d)^2) \mathbf{u}_x - \frac{12\epsilon S_x}{e_x^2} \frac{x(\theta d_z + \psi d_y)}{e_x^2} (V_p + \hat{V}_d) V_{X2} \mathbf{u}_x \\ & - \frac{6\epsilon S_x}{e_x^2} \left(\frac{\theta d_z + \psi d_y}{e_x}\right)^2 (V_p + \hat{V}_d) V_{X2} \mathbf{u}_x \end{aligned} \quad (3.87)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{X3/pm} = & -\frac{2\epsilon S_x}{e_x^2} (V_p + \hat{V}_d) V_{X3} \mathbf{u}_x + \frac{2\epsilon S_x}{e_x^2} \frac{x}{e_x} (V_{X3}^2 + (V_p + \hat{V}_d)^2) \mathbf{u}_x - \frac{6\epsilon S_x}{e_x^2} \left(\frac{x}{e_x}\right)^2 (V_p + \hat{V}_d) V_{X3} \mathbf{u}_x \\ & + \frac{2\epsilon S_x}{e_x^2} \frac{\psi d_y - \theta d_z}{e_x} (V_{X3}^2 + (V_p + \hat{V}_d)^2) \mathbf{u}_x - \frac{12\epsilon S_x}{e_x^2} \frac{x(\psi d_y - \theta d_z)}{e_x^2} (V_p + \hat{V}_d) V_{X3} \mathbf{u}_x \\ & - \frac{6\epsilon S_x}{e_x^2} \left(\frac{\psi d_y - \theta d_z}{e_x}\right)^2 (V_p + \hat{V}_d) V_{X3} \mathbf{u}_x \end{aligned} \quad (3.88)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{X4/pm} = & -\frac{2\epsilon S_x}{e_x^2} (V_p + \hat{V}_d) V_{X4} \mathbf{u}_x + \frac{2\epsilon S_x}{e_x^2} \frac{x}{e_x} (V_{X4}^2 + (V_p + \hat{V}_d)^2) \mathbf{u}_x - \frac{6\epsilon S_x}{e_x^2} \left(\frac{x}{e_x}\right)^2 (V_p + \hat{V}_d) V_{X4} \mathbf{u}_x \\ & - \frac{2\epsilon S_x}{e_x^2} \frac{\psi d_y + \theta d_z}{e_x} (V_{X4}^2 + (V_p + \hat{V}_d)^2) \mathbf{u}_x + \frac{12\epsilon S_x}{e_x^2} \frac{x(\psi d_y + \theta d_z)}{e_x^2} (V_p + \hat{V}_d) V_{X4} \mathbf{u}_x \\ & - \frac{6\epsilon S_x}{e_x^2} \left(\frac{\psi d_y + \theta d_z}{e_x}\right)^2 (V_p + \hat{V}_d) V_{X4} \mathbf{u}_x \end{aligned} \quad (3.89)$$

Si les angles de rotations sont négligeables, on peut obtenir une expression simple de l'accélération totale de la masse d'épreuve due à l'action des électrodes :

$$\begin{aligned} \langle \ddot{\mathbf{x}} \rangle_{\mathbf{u}_x} = & \frac{\mathbf{F}_{X1/pm} + \mathbf{F}_{X2/pm} + \mathbf{F}_{X3/pm} + \mathbf{F}_{X4/pm}}{m_{pm}} \\ = & -\frac{2\epsilon S_x}{m_{pm} e_x^2} (V_p + \hat{V}_d) (V_{X1} + V_{X2} + V_{X3} + V_{X4}) \mathbf{u}_x \\ & + \frac{2\epsilon S_x}{m_{pm} e_x^2} \frac{x}{e_x} (V_{X1}^2 + V_{X2}^2 + V_{X3}^2 + V_{X4}^2 + 4(V_p + \hat{V}_d)^2) \mathbf{u}_x \\ & - \frac{6\epsilon S_x}{m_{pm} e_x^2} \left(\frac{x}{e_x}\right)^2 (V_p + \hat{V}_d) (V_{X1} + V_{X2} + V_{X3} + V_{X4}) \mathbf{u}_x \end{aligned} \quad (3.90)$$

Cette expression est fortement similaire au cas des axes  $Y$  et  $Z$  : il fait intervenir un terme proportionnel au

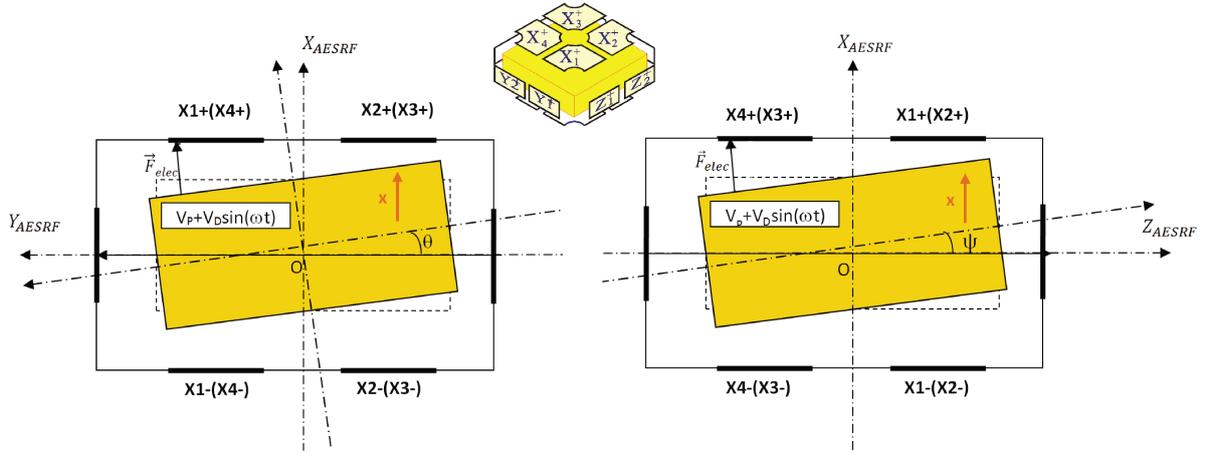


Figure 3.3 – Schéma d'un déplacement selon l'axe X ainsi que deux rotations selon autour des axes Y et Z.

facteur d'échelle dont l'action est de corriger le déplacement de la masse d'épreuve, un terme proportionnel à la raideur électrostatique dont l'action s'oppose à la correction et un terme proportionnel au facteur quadratique traduisant également une action en faveur de recentrage de la masse d'épreuve.

Dans le cas général, on utilise les relations :

$$\begin{aligned} V_{x1+} &= V_x + V_\theta - V_\psi \\ V_{x2+} &= V_x + V_\theta + V_\psi \\ V_{x3+} &= V_x - V_\theta + V_\psi \\ V_{x4+} &= V_x - V_\theta - V_\psi \end{aligned}$$

De manière analogue au cas de la partie précédente, on trouve :

$$\begin{aligned} \langle \ddot{x} \rangle \mathbf{u}_x &= -\frac{8\epsilon S_x}{m_{pm} e_x^2} V_p V_X \mathbf{u}_x + \frac{8\epsilon S_x}{m_{pm} e_x^2} \frac{x}{e_x} \left( V_X^2 + V_\theta^2 + V_\psi^2 + V_p^2 + V_{def}^2 \right) \mathbf{u}_x - \frac{24\epsilon S_x}{m_{pm} e_x^2} \left( \frac{x}{e_x} \right)^2 V_p V_X \mathbf{u}_x \\ &+ \frac{16\epsilon S_x}{m_{pm} e_x^2} \frac{(\theta d_z V_\theta + \psi d_y V_\psi)}{e_x} V_x \mathbf{u}_x - \frac{48\epsilon S_x}{m_{pm} e_x^2} \frac{x(\theta d_z V_\theta + \psi d_y V_\psi)}{e_x^2} V_p \mathbf{u}_x - \frac{24\epsilon S_x}{m_{pm} e_x^2} \frac{\theta^2 d_z^2 + \psi^2 d_y^2}{e_x^2} V_x V_p \mathbf{u}_x \end{aligned} \quad (3.91)$$

On constate que dans le cas du contrôle en translation de la masse d'épreuve le long de l'axe  $X_{AESRF}$ , il y a également un couplage avec la rotation de la masse d'épreuve.

Afin d'effectuer une analyse d'ordre de grandeur lors d'un régime asservi établi, les valeurs suivantes sont utilisées :

- Pour les caractéristiques géométriques, on a  $S_x = 2.62 \times 10^{-4} \text{ m}^2$ ,  $e_x = 3.2 \times 10^{-5} \text{ m}$  et  $d_x = 9.63 \times 10^{-3} \text{ m}$  ;
- Pour les tensions,  $V_p = 7.5 \text{ V}$ ,  $V_{def} = 7.62 \text{ V}$ , et comme ordre de grandeur (cf. chapitre4)  $V_x = V_\theta = V_\psi = 0.05 \text{ V}$  ;
- Dans le cas de GOCE, lorsque la masse d'épreuve est asservie, son déplacement n'excède pas les quelques picomètres, *a fortiori*  $x < 10^{-9} \text{ m}$ . En effet, dans les conditions normales de fonctionnement (pas de chocs brusques et intenses, par exemple), en régime asservi établi, le mouvement de la masse d'épreuve est essentiellement dû à des tensions parasites qui sont conséquences du bruit du détecteur.

### 3.5. Relations entre accélérations linéaires/angulaires d'une masse d'épreuve et le contrôle en tension

Les mouvements qui pourraient être dus aux forces extérieures sont compensées par l'asservissement dont le temps de réaction est suffisant ;

- Les angles de rotation ont pour valeur maximale  $\theta_{max} = \psi_{max} = 1.6 \times 10^{-5}$  rad.

Avec ces valeurs et avec  $x = 10^{-9}$  m, les termes de l'équation (3.91) sont respectivement de l'ordre de  $-2.27 \times 10^{-5}$  m/s<sup>2</sup>,  $2.16 \times 10^{-7}$  m/s<sup>2</sup>,  $-6.64 \times 10^{-14}$  m/s<sup>2</sup>,  $2.91 \times 10^{-9}$  m/s<sup>2</sup>,  $-4.09 \times 10^{-11}$  m/s<sup>2</sup> et  $-3.15 \times 10^{-11}$  m/s<sup>2</sup>. Ainsi, les termes correspondant à des couplages avec la rotation de la masse d'épreuve ont un effet négligeable sur le contrôle électrostatique. En outre, le terme destabilisant (deuxième terme de l'équation (3.91)) est également négligeable.

Ce calcul n'est valable qu'en régime de fonctionnement normal de l'accéléromètre. En revanche, il ne l'est pas lors du démarrage du gradiomètre pour la première fois : les masses d'épreuve sont *collées* contre les butées et le déplacement de la masse d'épreuve est trop important pour que la linéarisation de l'équation (3.91) soit encore valable. En pratique, le mode acquisition est prévu pour répondre à ce cas de figure : les paramètres électroniques sont ajustées de manière à pouvoir centrer la masse d'épreuve [83] (par exemple,  $V_p = 26.9$  V et  $V_{def} = 1.33$  V au lieu de 7.5 V et 7.62 V respectivement).

Quel que soit l'axe selon lequel on cherche à estimer les accélérations linéaires de la masse d'épreuve dans son repère  $R_{AESRF}$ , les estimations se font à partir du premier terme des équations (3.83), (3.84) et (3.91) [84]. La raison réside dans le fait que dans la conception de l'asservissement, les termes de raideur et de couplage sont directement pris en compte dans l'application des forces électrostatiques. La linéarisation de l'expression mathématique présentée dans cette partie et la précédente n'est pas nécessaire au premier ordre pour la mesure capacitive. En outre, l'asservissement est optimisé pour asservir la sortie des détecteurs à zéro. Par conséquent, en régime établi, l'accélération linéaire de la masse d'épreuve peut être estimée uniquement avec le terme en  $V_p V_x$  (pour l'axe X) ou  $V_p V_y$  (pour l'axe Y) ou  $V_p V_z$  (pour l'axe Z).

#### 3.5.3 Dynamique angulaire de la masse d'épreuve autour des axes Y et Z du repère

$R_{AESRF}$

Les relations entre accélération angulaire autour des axes  $Y_{AESRF}$  et  $Z_{AESRF}$  et tensions appliquées sur les électrodes X peuvent être établies en s'appuyant sur la figure 3.3. On considère une translation infinitésimale dans le sens positif de l'axe  $X_{AESRF}$ , une rotation d'angle  $\theta$  dans le sens direct autour de l'axe  $Y_{AESRF}$  et une rotation d'angle  $\psi$  dans le sens direct autour de l'axe  $Z_{AESRF}$ . On définit la matrice de rotation suivante :

$$[R_{\theta\psi}] = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \cos(\psi) & -\cos(\theta) \sin(\psi) & \sin(\theta) \\ \sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ -\sin(\theta) \cos(\psi) & \sin(\theta) \sin(\psi) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & -\psi & \theta \\ \psi & 1 & 0 \\ -\theta & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.92)$$

Les coordonnées des images des axes du repère AESRF par la composition  $R_{\theta\psi}$  des deux rotations sont :

$$\mathbf{u}_\xi = R_{\theta\psi} \mathbf{u}_x \approx \begin{pmatrix} 1 \\ \psi \\ \theta \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{u}_\eta = R_{\theta\psi} \mathbf{u}_y \approx \begin{pmatrix} -\psi \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{u}_\zeta = R_{\theta\psi} \mathbf{u}_z \approx \begin{pmatrix} \theta \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.93)$$

Étant donné un point de la masse d'épreuve P de coordonnées  $(x_p, y_p, z_p)$ , situé face à l'électrode  $X_i$ , la force électrostatique exercée par cette électrode sur l'élément de surface  $dydz$  autour du point M s'écrit :

$$d\mathbf{F}_{X_i/pm}(p) = \frac{1}{2} \frac{\epsilon dydz}{D_{X_i/pm}^2(x_p, y_p, z_p)} (V_{X_i} - \hat{V}_p)^2 \mathbf{n}_i \quad (3.94)$$

où  $D_{X_i/pm}$  est la distance entre l'électrode et le point considéré et  $\mathbf{n}_i$  est la normale à la surface de la masse d'épreuve au point P.

Le moment total exercé par l'électrode i sur la masse d'épreuve a donc pour expression

$$\mathbf{M}_{X_i/pm} = \iint_{S_i} \mathbf{O}_{AESRF} \mathbf{P} \wedge d\mathbf{F}_{X_i/pm}(P) \quad (3.95)$$

En considérant successivement les électrodes X les unes après les autres, on peut montrer que les moments projetés sur l'axe  $\mathbf{u}_y$  exercés par chaque électrode X s'écrivent au premier ordre :

$$\mathbf{M}_{X1\pm/pm} \cdot \mathbf{u}_y \approx \pm \frac{1}{2} \frac{\epsilon S_x}{e_x^2} (V_{X1\pm} - \hat{V}_p)^2 \left[ d_x \left( 1 \pm 2 \frac{x}{e_x} \mp 2 \frac{\psi d_x}{e_x} \right) \pm \frac{2\theta}{e_x} \left( d_x^2 + \frac{L_x^2}{12} \right) \right] \quad (3.96)$$

$$\mathbf{M}_{X2\pm/pm} \cdot \mathbf{u}_y \approx \pm \frac{1}{2} \frac{\epsilon S_x}{e_x^2} (V_{X2\pm} - \hat{V}_p)^2 \left[ d_x \left( 1 \pm 2 \frac{x}{e_x} \pm 2 \frac{\psi d_x}{e_x} \right) \pm \frac{2\theta}{e_x} \left( d_x^2 + \frac{L_x^2}{12} \right) \right] \quad (3.97)$$

$$\mathbf{M}_{X3\pm/pm} \cdot \mathbf{u}_y \approx \mp \frac{1}{2} \frac{\epsilon S_x}{e_x^2} (V_{X3\pm} - \hat{V}_p)^2 \left[ d_x \left( 1 \pm 2 \frac{x}{e_x} \pm 2 \frac{\psi d_x}{e_x} \right) \mp \frac{2\theta}{e_x} \left( d_x^2 + \frac{L_x^2}{12} \right) \right] \quad (3.98)$$

$$\mathbf{M}_{X4\pm/pm} \cdot \mathbf{u}_y \approx \mp \frac{1}{2} \frac{\epsilon S_x}{e_x^2} (V_{X4\pm} - \hat{V}_p)^2 \left[ d_x \left( 1 \pm 2 \frac{x}{e_x} \mp 2 \frac{\psi d_x}{e_x} \right) \mp \frac{2\theta}{e_x} \left( d_x^2 + \frac{L_x^2}{12} \right) \right] \quad (3.99)$$

En utilisant les expressions des tensions appliquées sur les électrodes X, en ne considérant que la partie DC du signal et en introduisant le moment d'inertie  $I_y$  de la masse d'épreuve selon l'axe  $\mathbf{u}_y$ , on obtient à partir du moment total exercé par les électrodes X selon l'axe  $\mathbf{u}_y$ , une expression au premier ordre de l'accélération angulaire autour de l'axe  $Z_{AESRF}$  :

$$\langle \ddot{\theta} \rangle = - \frac{4\epsilon S_x d_x}{I_y e_x^2} V_p V_\theta + \frac{8\epsilon S_x}{I_y e_x^2} \frac{\theta}{e_x} \left( d_x^2 + \frac{L_x^2}{12} \right) \left( V_x^2 + V_\theta^2 + V_\psi^2 + V_p^2 + V_{def}^2 \right) + \frac{16\epsilon S_x}{I_y e_x^2} \frac{x}{e_x} V_x V_\theta + \frac{16\epsilon S_x}{I_y e_x^2} \frac{\psi d_x}{e_x} V_\psi V_\theta \quad (3.100)$$

De la même manière, on obtient à partir du projeté sur l'axe  $\mathbf{u}_y$  du moment total exercé par les électrodes X, une expression au premier ordre de l'accélération angulaire autour de l'axe  $Y_{AESRF}$  :

$$\langle \ddot{\psi} \rangle = - \frac{4\epsilon S_x d_x}{I_y e_x^2} V_p V_\psi + \frac{8\epsilon S_x}{I_y e_x^2} \frac{\psi}{e_x} \left( d_x^2 + \frac{L_x^2}{12} \right) \left( V_x^2 + V_\theta^2 + V_\psi^2 + V_p^2 + V_{def}^2 \right) + \frac{16\epsilon S_x}{I_y e_x^2} \frac{x}{e_x} V_x V_\psi + \frac{16\epsilon S_x}{I_y e_x^2} \frac{\theta d_x}{e_x} V_\psi V_\theta \quad (3.101)$$

De manière similaire au contrôle en translation, au premier ordre, le contrôle en rotation est la combinaison d'une action stabilisatrice, d'une action destabilisatrice et d'un couplage dû au déplacement en translation et en rotation. Les accélérations angulaires de la masse d'épreuve mesurées directement sont estimées uniquement avec le terme stabilisateur [84].

### 3.5.4 Dynamique angulaire de la masse d'épreuve autour de l'axe X du repère $R_{AESRF}$

D'après la figure 3.3, étant donné que la force électrostatique est orthogonale à la surface sur laquelle elle s'exerce, la surface sur la masse d'épreuve qui compte peut être approximée (en négligeant les effets de bord) comme la partie en regard d'une électrode donnée. Ainsi, on note par  $(L_{pm}/2, \xi_1)$  and  $(L_{pm}/2, \xi_2)$  les coordonnées dans le repère  $(\xi_y, \xi_z)$  des points sur la masse d'épreuve correspondant aux extrémités de

### 3.5. Relations entre accélérations linéaires/angulaires d'une masse d'épreuve et le contrôle en tension

l'électrode Y1+ placée en regard. Par symétrie, les coordonnées des points de la masse d'épreuve correspondant aux autres extrémités de l'électrode Y1-, Y2+ et Y2- s'écriront respectivement  $[(-L_{pm}/2, \xi_1), (-L_{pm}/2, \xi_2)]$ ,  $[(L_{pm}/2, -\xi_1), (L_{pm}/2, -\xi_2)]$  et  $[(-L_{pm}/2, -\xi_1), (-L_{pm}/2, -\xi_2)]$ .

L'expression générale du moment appliqué par l'électrode  $i$  sur la masse d'épreuve a pour expression :

$$\mathbf{M}_{Yi} = \iint_{S_i} \mathbf{OP} \wedge d\mathbf{F}_{dS} \quad (3.102)$$

où  $O_\xi$  est le centre du repère  $(\xi_y, \xi_z)$ ,  $P$  un point de la masse d'épreuve en regard de l'électrode de coordonnées  $\pm L_{pm}/2, \xi$  et  $d\mathbf{F}_{dS}$  la force électrostatique exercée sur la masse d'épreuve autour du point  $P$  par un élément de surface  $dS$  de l'électrode en regard du point. Pour de petits angles, cette expression prend la forme suivante en fonction de l'électrode considérée :

$$d\mathbf{F}_{Y1\pm} = \pm \frac{e d\xi}{2(e_y \mp y \pm \xi \phi)^2} (V_{Y1\pm} - V_p)^2 \mathbf{u}_\xi \quad (3.103)$$

$$d\mathbf{F}_{Y2\pm} = \pm \frac{e d\xi}{2(e_y \mp y \mp \xi \phi)^2} (V_{Y2\pm} - V_p)^2 \mathbf{u}_\xi \quad (3.104)$$

Étant donnée la géométrie du système, les propriétés suivantes sont vérifiées :  $\xi_2 - \xi_1 = L_y$  et  $\xi_1 + \xi_2 = 2d_y$ . À partir des expressions précédentes, on peut alors montrer que le moment angulaire exercé par les électrodes individuelles ont pour expression :

$$\mathbf{M}_{Y1\pm/X} = \mp \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 S_{yz}}{(e_y)^2} (V_{Y1\pm} - \hat{V}_p)^2 \left[ d_y \left( 1 \pm 2 \frac{y}{e_y} \right) \mp 2 \frac{\phi}{e_y} \left( d_y^2 + \frac{L_y^2}{12} \right) \right] \mathbf{u}_x \quad (3.105)$$

$$\mathbf{M}_{Y2\pm/X} = \pm \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 S_{yz}}{e_y^2} (V_{Y2\pm} - \hat{V}_p)^2 \left[ d_y \left( 1 \pm 2 \frac{y}{e_y} \right) \pm 2 \frac{\phi}{e_y} \left( d_y^2 + \frac{L_y^2}{12} \right) \right] \mathbf{u}_x \quad (3.106)$$

De manière analogue, on peut montrer que les moments appliqués par les électrodes Z individuellement s'écrivent :

$$\mathbf{M}_{Z1\pm/X} = \pm \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 S_{yz}}{(e_z)^2} (V_{Z1\pm} - \hat{V}_p)^2 \left[ d_z \left( 1 \pm 2 \frac{z}{e_z} \right) \pm 2 \frac{\phi}{e_z} \left( d_z^2 + \frac{L_z^2}{12} \right) \right] \mathbf{u}_x \quad (3.107)$$

$$\mathbf{M}_{Z2\pm/X} = \mp \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 S_{yz}}{e_z^2} (V_{Z2\pm} - \hat{V}_p)^2 \left[ d_z \left( 1 \pm 2 \frac{z}{e_z} \right) \mp 2 \frac{\phi}{e_z} \left( d_z^2 + \frac{L_z^2}{12} \right) \right] \mathbf{u}_x \quad (3.108)$$

À partir des équations (3.106) et (3.108), on peut exprimer le moment dynamique angulaire total exercé par l'exemple des électrodes Y, en faisant un développement limité au premier ordre en  $y/e_y$  :

$$\mathbf{M}_{Y/X} \cdot \mathbf{u}_x = \frac{2\epsilon S_{yz}}{e_y^2} \left\{ d_y \hat{V}_p (V_{Y1} - V_{Y2}) + \frac{\phi}{e_y} \left( d_y^2 + \frac{L_y^2}{12} \right) (V_{Y1}^2 + V_{Y2}^2 + 2\hat{V}_p^2) + \frac{y d_y}{e_y} (V_{Y2}^2 - V_{Y1}^2) \right\} \quad (3.109)$$

De même, pour les électrodes Z :

$$\mathbf{M}_{Z/X} \cdot \mathbf{u}_x = \frac{2\epsilon S_{yz}}{e_z^2} \left\{ d_z \hat{V}_p (V_{Z2} - V_{Z1}) + \frac{\phi}{e_z} \left( d_z^2 + \frac{L_z^2}{12} \right) (V_{Z1}^2 + V_{Z2}^2 + 2\hat{V}_p^2) + \frac{z d_z}{e_z} (V_{Z1}^2 - V_{Z2}^2) \right\} \quad (3.110)$$

En notant  $I_x$  le moment d'inertie de la masse d'épreuve par rapport à l'axe X,  $\overset{\circ}{\phi}$  l'accélération angulaire autour

de l'axe  $X$ , le moment total exercé par les électrodes  $Y/Z$  sur la masse d'épreuve s'écrit :

$$\overset{\circ}{\phi}_{\mathbf{u}_x} = \frac{\mathbf{M}_{Y/X} + \mathbf{M}_{Z/X}}{I_x} \quad (3.111)$$

Dans le fonctionnement des accéléromètres de la mission GOCE, contrairement aux électrodes  $Y$ , les électrodes  $Z$  ne contrôlent pas le mouvement de rotation de la masse d'épreuve. L'asservissement électronique est conçu de sorte que  $V_{Z1+} = -V_{Z1-} = V_{Z2+} = -V_{Z2-} = V_z$ . Pour les électrodes  $Y$ , en revanche, on a  $V_{Y1+} = V_y - V_\phi = -V_{Y1-}$  et  $V_{Y2+} = V_y + V_\phi = -V_{Y2-}$ . Par ailleurs, étant donné la précision de la manufacture, on a  $d_y = d_z = d_{yz}$ ,  $e_y = e_z = e_{yz}$  et  $L_y = L_z = L_{yz}$ .

En tenant compte de ces relations et en ne considérant que la partie DC, l'accélération angulaire de la masse d'épreuve autour de l'axe  $X_{AESRF}$  se simplifie :

$$\langle \overset{\circ}{\phi} \rangle = -\frac{4\epsilon_0 S_{yz} d_{yz}}{I_x e_{yz}^2} V_p V_\phi + \frac{4\epsilon_0 S_{yz}}{I_x e_{yz}^2} \frac{\phi}{e_{yz}} \left( d_{yz}^2 + \frac{L_{yz}^2}{12} \right) \left( V_y^2 + V_\phi^2 + V_z^2 + 2V_p^2 + 2V_{def}^2 \right) + \frac{8\epsilon_0 S_{yz} d_{yz}}{I_x e_{yz}^2} \frac{y}{e_{yz}} V_y V_\phi \quad (3.112)$$

On retrouve dans l'équation (3.112) les mêmes contributeurs du contrôle angulaire de la masse d'épreuve que dans les cas précédents. Le terme proportionnel à  $V_p V_\phi$  exerce un moment opposé au mouvement angulaire de la masse d'épreuve et tend à la ramener dans sa position d'équilibre. La raideur électrostatique s'oppose à la stabilisation de la masse d'épreuve. Enfin, on note l'existence d'un terme de couplage dû à la translation de la masse d'épreuve le long de l'axe  $Y_{AESRF}$ . Toutefois, on remarque que le fait d'imposer les mêmes tensions sur les électrodes  $Z$  positives élimine le terme de couplage dû à la translation de la masse d'épreuve le long de l'axe  $Z_{AESRF}$  : c'est pourquoi il n'y a pas de terme proportionnel à  $z/e_{yz}$  dans l'équation (3.112).

#### — Récapitulatif du chapitre 3 —

Ce chapitre a deux objectifs principaux. D'une part, les composantes du gradient de gravité, qui sont les grandeurs fondamentales de la mission GOCE, sont définies dans le cadre d'un gradiomètre idéal à partir des modes différentiels. D'autre part, différentes sources de perturbations ont été introduites, menant à la définition de la matrice d'étalonnage dont l'estimation précise a joué un rôle crucial dans le succès de la mission GOCE. Les équations reformulées dans ce chapitre permettent d'interpréter les résultats issus de l'analyse des données de la mission et présentés dans le chapitre suivant.

# 4 Analyse des mesures pendant la phase opérationnelle de la mission GOCE

## Objectifs du chapitre 4

- Présenter une étude bibliographique sur le traitement des données de niveau 1b de la mission et sur les perturbations de la mesure.
- Présenter les différentes séries temporelles utilisées et les analyses spectrales qui permettent d'obtenir une estimation du niveau de bruit des accéléromètres.

## 4.1 Bibliographie sur le traitement des données de niveau 1b des accéléromètres de GOCE

Au chapitre précédent sont développées les relations théoriques des équations de mesure et l'importance de l'étalonnage destiné à rendre les données exploitables. Ce chapitre a pour objectif de présenter le résultat d'analyses faites sur les données de niveau 1b, c'est-à-dire après traitement des données en sortie de la branche science mais avant leur utilisation pour estimer des modèles de potentiel gravitationnel. Afin de situer la démarche adoptée dans ce chapitre, cette partie présente une étude bibliographique liée au processus d'étalonnage et à la validation des accéléromètres.

Les données de la mission GOCE réparties selon trois catégories : le niveau 0 correspond aux données transmises par le satellite au sol. Il s'agit de données de télémétrie. Ces données sont ensuite traitées afin de leur donner un sens physique (accélérations, gradient de gravité, données GPS, etc...), ce sont alors les données de niveau 1b qui existent en version nominale et étalonnée. À partir des données de niveau 1b étalonnée, les données orbitales ainsi que les modèles de champ gravitationnel sont estimés. Ce sont les données de niveau 2.

### 4.1.1 Étude d'une méthode d'estimation des paramètres d'étalonnage et impact sur la trace du gradient de gravité

En partant du constat que la densité spectrale de la composante  $V_{zz}$  et de la trace de la matrice du gradient de gravité sont supérieures aux spécifications, l'ESA a mené une étude [85] visant à réétudier l'estimation de la matrice d'étalonnage et l'algorithme de reconstruction des composantes du gradient de gravité. Ce dernier est développé dans la partie suivante qui lui est dédiée car cet algorithme a fait l'objet d'une étude à part entière. Dans cette partie, sera reprise quelques uns des éléments principaux du premier volet, c'est-à-dire l'impact

de la nouvelle méthode proposée sur l'estimation de la matrice d'étalonnage et sur la trace de la matrice du gradient. Dans [85], cette nouvelle méthode est comparée à la méthode initiale de l'ESA qui consiste, à une date donnée, à utiliser les valeurs de la matrice d'étalonnage obtenues pendant la dernière session d'étalonnage avant cette date.

Le principe directeur de la nouvelle méthode proposée est d'utiliser les données acquises pendant des périodes de mesure nominales (c'est-à-dire hors session d'étalonnage) et sur l'utilisation des redondances des mesures accélérométriques et des senseurs stellaires en formant 12 conditions de la forme  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{e} = \mathbf{0}$ , où  $\mathbf{x}$  représente les paramètres d'étalonnage à estimer. Les six premières conditions viennent de la différence des modes communs parfaitement étalonnés qui vérifient pour deux paires d'accéléromètres  $ij$  et  $kl$  l'équation (cf. chapitre 3) :

$$\mathbb{E}\{\mathbf{a}_{ij}^{(c)} - \mathbf{a}_{kl}^{(c)}\} = 0 \quad (4.1)$$

Sans l'opérateur d'espérance, il faut prendre en compte les bruits communs et différentiels, de sorte que  $a_{ij}^{(c)} - a_{kl}^{(c)} = n_{ij}^{(c)} - n_{kl}^{(c)}$ . De cette condition, l'auteur déduit les six premières conditions en faisant intervenir les facteurs d'échelle individuel des accéléromètres pour des raisons développées dans [85] et qui ne sont pas essentielles à notre propos :

$$0 = \left(a_{36,x}^{(c)} - a_{25,x}^{(c)}\right) \left(\frac{1}{s_{3,x}} + \frac{1}{s_{6,x}} + \frac{1}{s_{2,x}} + \frac{1}{s_{5,x}}\right) + e_1 \quad (4.2)$$

$$0 = \left(a_{36,x}^{(c)} - a_{14,x}^{(c)}\right) \left(\frac{1}{s_{3,x}} + \frac{1}{s_{6,x}} + \frac{1}{s_{1,x}} + \frac{1}{s_{4,x}}\right) + e_2 \quad (4.3)$$

$$0 = \left(a_{14,z}^{(c)} - a_{36,z}^{(c)}\right) \left(\frac{1}{s_{1,z}} + \frac{1}{s_{4,z}} + \frac{1}{s_{3,z}} + \frac{1}{s_{6,z}}\right) + e_3 \quad (4.4)$$

$$0 = \left(a_{25,y}^{(c)} - a_{14,y}^{(c)}\right) \left(\frac{1}{s_{2,y}} + \frac{1}{s_{5,y}} + \frac{1}{s_{1,y}} + \frac{1}{s_{4,y}}\right) + e_4 \quad (4.5)$$

$$0 = \left(a_{25,z}^{(c)} - a_{14,z}^{(c)}\right) \left(\frac{1}{s_{2,z}} + \frac{1}{s_{5,z}} + \frac{1}{s_{1,z}} + \frac{1}{s_{4,z}}\right) + e_5 \quad (4.6)$$

$$0 = \left(a_{36,y}^{(c)} - a_{25,y}^{(c)}\right) \left(\frac{1}{s_{3,y}} + \frac{1}{s_{6,y}} + \frac{1}{s_{2,y}} + \frac{1}{s_{5,y}}\right) + e_6 \quad (4.7)$$

Les trois conditions suivantes sont déduites de la relation entre accélérations différentielles et les composantes  $V_{xy}$ ,  $V_{xz}$  et  $V_{yz}$  (cf. chapitre 3) :

$$0 = \frac{a_{25,z}^{(d)}}{L_y} - \frac{a_{36,y}^{(d)}}{L_z} - \dot{\omega}_x + e_7 \quad (4.8)$$

$$0 = \frac{a_{36,z}^{(d)}}{L_z} - \frac{a_{14,z}^{(d)}}{L_x} - \dot{\omega}_y + e_8 \quad (4.9)$$

$$0 = \frac{a_{14,y}^{(d)}}{L_x} - \frac{a_{25,x}^{(d)}}{L_y} - \dot{\omega}_z + e_9 \quad (4.10)$$

Les trois dernières conditions sont déduites des relations entre accélérations différentielles et les composantes  $V_{xx}$ ,  $V_{yy}$  et  $V_{zz}$  mais filtrées dans la bande de mesure entre 5 mHz et 100 mHz. Dans cet intervalle, l'auteur suppose que le signal du gradient de gravité est négligeable [86] et que celui de l'accélération angulaire est négligeable devant le signal des modes différentiels, ce que l'analyse spectrale des deux quantités suggère. En

conséquence, les trois conditions sont :

$$0 = 2a_{14,x}^{(d)} \left( \frac{1}{s_{1,x}} + \frac{1}{s_{4,x}} \right) + e_{10} \quad (4.11)$$

$$0 = 2a_{25,y}^{(d)} \left( \frac{1}{s_{2,x}} + \frac{1}{s_{5,x}} \right) + e_{11} \quad (4.12)$$

$$0 = 2a_{36,z}^{(d)} \left( \frac{1}{s_{3,x}} + \frac{1}{s_{6,x}} \right) + e_{12} \quad (4.13)$$

Les grandeurs  $e_i$  sont des termes d'erreur qui sont fonctions des combinaisons de bruits des accéléromètres. Par exemple,  $e_6 = n_{25,z}^{(d)}/L_y - n_{36,y}^{(d)}/L_z$ .

En effectuant un développement limité à l'ordre 1 tel que  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) + \mathbf{J}(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$ , on obtient :

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}_0)\mathbf{x}_0 - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{J}(\mathbf{x}_0)\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{e} \quad (4.14)$$

où  $\mathbf{J}(\mathbf{x}_0)$  est la matrice Jacobienne des dérivées premières de  $\mathbf{x}_0$  qui correspond aux valeurs initiales supposées des paramètres d'étalonnage.

Une méthode d'estimation des moindres carrés adaptés permet alors d'estimer les paramètres  $\mathbf{x}$  car, en introduisant la matrice de covariance de  $\mathbf{e}$ , noté  $\Sigma(\mathbf{e})$  :

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 - [\mathbf{J}(\mathbf{x}_0)^T \boldsymbol{\sigma}^{-1} \mathbf{J}(\mathbf{x}_0)]^{-1} \mathbf{J}(\mathbf{x}_0)^T \Sigma^{-1} \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) \quad (4.15)$$

L'avantage de cette méthode est qu'elle rend possible l'estimation des éléments de la matrice d'étalonnage sur une période quelconque où les données scientifiques sont disponibles. En comparaison, la méthode initiale de l'ESA ne permettait l'estimation de la matrice d'étalonnage que pendant les sessions d'étalonnage s'étalant sur une durée de 24 h. En réalisant l'estimation par les moindres carrés, l'auteur a mis en évidence et quantifié une dérive des paramètres de la matrice d'étalonnage au cours du temps. Ainsi, les facteurs d'échelle sont caractérisés par une dérive de l'ordre de  $10^{-4}$  /mois à  $10^{-5}$  /mois alors que les termes correspondant au mésalignement et à la non-orthogonalité sont très stables. Afin de valider cette méthode d'estimation de la matrice d'étalonnage, l'auteur reconstruit les composantes du gradient de gravité et estime la trace de la matrice. Avec cette méthode, la densité spectrale de la trace estimée reste stable au cours du temps. En revanche, à part pour  $V_{yy}$ , les densités spectrales des composantes du gradient de gravité est plus élevée en-dessous de la bande de mesure comparé à celles obtenues avec la méthode initiale. Ceci signifie que la méthode initiale mène à des estimations plus précises des composantes autres que  $V_{yy}$ .

#### **4.1.2 Étude sur l'amélioration du processus d'estimation des composantes du gradient de gravité**

Ainsi qu'il a été mentionné dans la partie précédente, en partant du constat que la densité spectrale de la composante  $V_{zz}$  et de la trace de la matrice du gradient de gravité sont supérieures aux spécifications, Stummer [87] propose une amélioration de la stratégie de traitement des mesures pour estimer les composantes du gradient de gravité afin de se rapprocher des spécifications. L'idée de Stummer est d'améliorer le processus adopté par l'ESA sur quatre points : l'utilisation de matrices d'étalonnages interpolées, une détermination de la vitesse angulaire du satellite plus précise grâce à la combinaison des données des senseurs stellaires à celles du gradiomètre, une détermination plus précise de l'attitude du satellite avec le même procédé et, enfin, en utilisant les données de tous les senseurs stellaires. Depuis, cette stratégie améliorée a été appliquée par l'ESA sur toutes les données acquises.

La figure 4.1 présente un schéma des étapes de l'estimation des composantes du gradient de gravité avec, en bleu, les améliorations proposées. En entrée, les données nécessaires sont les paramètres de la matrice d'étalonnage ( $ICM_{ij}$ ), les mesures accélérométriques ( $a_i$ ), les matrices de passage entre le repère des senseurs stellaires et celui du gradiomètre ( $R^{SSRFx \rightarrow GRF}$ ) et les quaternions d'attitude ( $q^{IRF \rightarrow SSRFx}$ ). Dans la méthode initiale de l'ESA, la matrice d'étalonnage utilisée pour étalonner les modes communs et différentiels à une date donnée était issue de la session d'étalonnage précédente. Stummer a proposé d'utiliser une matrice interpolée à partir des dernières sessions d'étalonnage. Ceci permet une meilleure approximation des paramètres lorsque ceux-ci présentent une dérive dans le temps : par exemple, il s'est avéré que les facteurs d'échelles différentiels présentent une dérive plus importante que les coefficients de la matrice d'étalonnage inverse (ICM) correspondant au mésalignement qui sont très stables dans le temps. La conséquence d'une dérive des facteurs d'échelle est donnée par l'équation (3.73) inversée qui montre un couplage entre les modes communs et différentiels étalonnés. Ce couplage est mal corrigé lorsque les facteurs d'échelle sont mal connus, donc les modes différentiels étalonnés sont mal estimés ce qui est répercuté en fin de compte sur l'estimation des composantes du gradient de gravité. L'utilisation d'ICMs interpolés permet de réduire cet effet. Contrairement à la méthode présentée dans la partie précédente, l'interpolation est réalisée à partir des matrices obtenues uniquement pendant les sessions d'étalonnage.

Par ailleurs, Stummer propose de découpler l'estimation de la vitesse angulaire du satellite de celle de l'attitude, ce qui n'était pas le cas dans la méthode initiale où les deux étapes étaient regroupées et où était utilisé un filtre de Kalman dans le domaine temporel dont les coefficients étaient issus de modèles *a priori*. Dans la nouvelle méthode, la vitesse angulaire est estimée en combinant les données gradiométriques (EGG) et des senseurs stellaires (STR) grâce à l'adaptation d'un filtre de Wiener dans le domaine temporel :

$$\omega(merge)_k = \omega(STR)_k * h(STR)_k + \omega(EGG)_k * h(EGG)_k \quad (4.16)$$

où  $\omega(\cdot)_k$  est la vitesse angulaire à l'instant  $k$  et  $h(\cdot)_k$  les coefficients du filtre de Wiener. Ces coefficients sont les transformées de Fourier inverse des coefficients du filtre de Wiener dans le domaine fréquentiel :

$$H(STR)_k = \frac{\sigma_k^2(EGG)}{\sigma_k^2(EGG) + \sigma_k^2(STR)} \quad (4.17)$$

$$H(EGG)_k = \frac{\sigma_k^2(STR)}{\sigma_k^2(EGG) + \sigma_k^2(STR)} \quad (4.18)$$

où  $\sigma_k^2$  est la variance du bruit du signal EGG/STR à la fréquence  $k$ .

La précision des données gradiométriques est meilleure que celles des senseurs stellaires au-dessus de la fréquence orbitale  $1.85 \times 10^{-4}$  Hz. En conséquence, les coefficients  $H(STR)_k$  sont plus importants que  $H(EGG)_k$  en-dessous de cette fréquence, pour donner davantage de poids aux données des senseurs stellaires. Au-dessus, c'est l'inverse, pour donner davantage de poids aux données gradiométriques. Dans le domaine temporel, les coefficients  $h(EGG)_k$  et  $h(STR)_k$  correspondent à des filtres passe-haut et passe-bas respectivement, dont l'intérêt est de cibler les plages de fréquences pertinentes des signaux EGG et STR. La longueur de ces filtres (8401 s) a été choisie empiriquement en réponse à l'arbitrage entre l'avantage d'un filtre long et la perte de données due au temps d'initialisation du filtre. En comparaison, le filtre de Kalman utilisé dans la méthode initiale de l'ESA avait un temps de démarrage d'une demie-journée, soit 43 200 s.

La reconstruction de l'attitude du satellite suit le même schéma que celle de la vitesse angulaire : l'attitude donnée par tous les senseurs stellaires est combinée avec celle estimée par intégration de la vitesse angulaire reconstruite avec la méthode ci-dessus. Cette approche suit la même logique que la reconstruction de la

#### 4.1. Bibliographie sur le traitement des données de niveau 1b des accéléromètres de GOCE

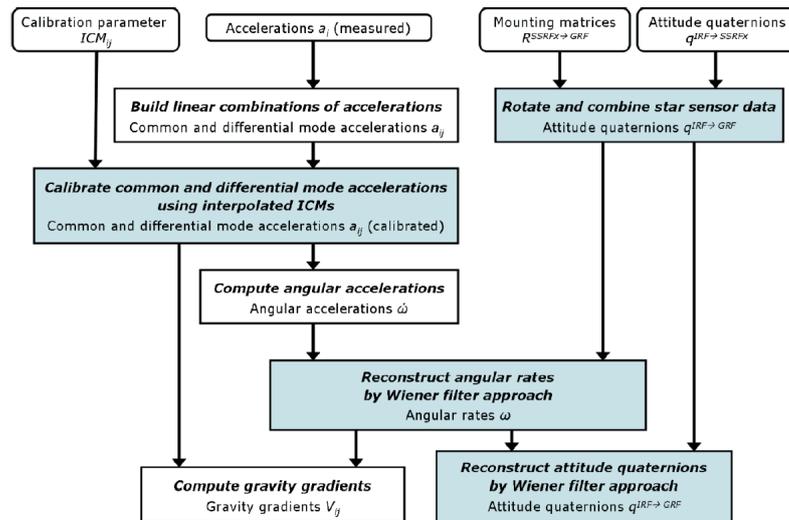


Figure 4.1 – Schéma du traitement des données pour estimer les gradients de gravité [87].

vitesse angulaire, avec des données des senseurs stellaires plus précises en basses fréquences :

$$q(merge)_k = q(STR)_k * h(STR)_k + q(INT)_k * h(EGG)_k \quad (4.19)$$

où  $q(\cdot)_k$  est l'attitude du satellite à l'instant  $k$  et  $INT$  indique l'attitude obtenue par intégration de  $\omega(merge)_k$ .

La validation de la nouvelle méthode proposée se fait selon les critères suivants : d'une part, l'analyse spectrale des composantes du gradient de gravité ; d'autre part, comparaison de la trace de la matrice de gradient de gravité obtenue avec l'ancienne et la nouvelle méthode, des variances par degré (degree variances) des modèles de potentiel estimés, de l'erreur cumulée en termes de hauteur du géoïde et d'anomalie de gravité. Les deux modèles de référence utilisés pour les comparaisons sont le modèle ITG-Grace2010 et le modèle EGM2008 qui présentent l'avantage d'utiliser des données de la mission GRACE et donc d'apporter une référence fiable aux basses fréquences ainsi qu'aux faibles à moyens degrés du développement en harmoniques sphériques.

La nouvelle méthode proposée par Stummer diminue le bruit dans la trace du gradient de gravité d'un facteur 10 en-dessous de la bande de mesure du gradiomètre (5 mHz à 100 mHz), très faiblement entre 5 mHz et 8 mHz et laisse le niveau de bruit inchangé au-delà. En outre, les erreurs aux multiples de la fréquence orbitale sont diminuées. Cette conclusion est vérifiée en particulier pour les composantes de la matrice de gradient de gravité. Par conséquent, l'étude menée par Stummer montre qu'il a été possible d'améliorer l'estimation des composantes du gradient dans les basses fréquences et aux multiples de la fréquence orbitale, mais que le niveau de bruit observé initialement pour la trace et les composantes individuelles ne sont pas dues à la méthode de reconstruction du gradient de gravité à partir des mesures accélérométriques. Enfin, l'étude proposée par Stummer n'est basée que sur deux mois de données GOCE, plus précisément novembre 2009 et décembre 2009.

Un autre aspect étudié par Stummer est la validation des paires d'électrodes et des accéléromètres. En remplaçant les tensions des paires d'électrodes de manière pertinentes et les mesures d'un accéléromètre donné par la combinaison d'autres, puis en reconstruisant la trace de la matrice du gradient de gravité, elle conclut qu'aucune paire d'électrodes ni aucun accéléromètre n'est défectueux. La figure 4.2 illustre le résultat de l'analyse de la trace du gradient de gravité après remplacement d'un accéléromètre dans l'équation d'exploitation du gradient de gravité : dans tous les cas, la densité spectrale de la trace issue d'un remplacement

(courbes verte, rouge et bleue) est supérieure à la référence (courbe cyan). Ceci signifie qu'il n'est pas possible d'améliorer l'estimation de la trace par un remplacement.

Pour le contrôle des électrodes Stummer propose, pour chaque accéléromètre, d'intervertir les paires X1 et X2, X3 et X4, Y1 et Y2, Z1 et Z2. Toutefois, à notre sens, cette démarche présente l'inconvénient de ne pas prendre en compte correctement le contrôle angulaire de la masse d'épreuve qui mène à des tensions différentes sur chaque électrode (à part pour les électrodes Z qui ne contrôlent pas le mouvement angulaire de la masse d'épreuve).

Enfin, Stummer aborde très brièvement l'analyse spectrale de la différence des modes communs sous l'angle de l'effet de différentes méthodes d'étalonnage, mais pas de l'étude du bruit des accéléromètres ni de son évolution temporelle car seules les données du 1er novembre 2009 sont utilisées. Son objectif premier est de comparer la méthode d'étalonnage de l'instrument développée par Thalès Alenia Space et celle développée par l'ESA. En outre, les densités spectrales des différences de modes communs sont estimées sur une durée de 24 h simplement à partir de la transformée de Fourier discrète sans apodisation ni moyennage. Par conséquent, la puissance du signal déterministe est importante dans les densités spectrales estimées. Or, le phénomène de repliement de spectre indique que, dans le domaine spectral, le signal a tendance à se replier des zones fréquentielles où l'énergie du signal est élevé vers celles où l'énergie est plus faible [88]. On peut donc raisonnablement penser que son analyse spectrale aboutit à une sur-évaluation du niveau de bruit des accéléromètres. Dans la publication précédant le mémoire doctoral de Stummer, l'auteure indique qu'estimer le niveau de bruit réel n'est pas son objectif car cela n'a pas d'incidence sur la méthode de Wiener proposée [89].

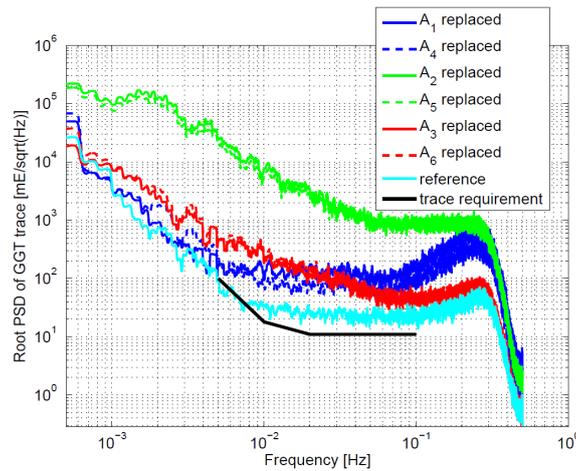


Figure 4.2 – Impact du remplacement des accéléromètres sur l'estimation de la densité spectrale de la trace [87].

### 4.1.3 Étude de la stabilité des accéléromètres et de l'effet de repliement de spectre dans le signal

Bergé *et al.* [90] étudient la stabilité et le bruit des accéléromètres de GOCE à partir d'une simulation de la boucle d'asservissement et de l'utilisation des données de la mission entre novembre 2009 et juin 2011. Dans un premier temps, deux grandeurs sont utilisées comme indicateurs pour évaluer la stabilité du détecteur et de la branche science : respectivement la *cohérence du détecteur* et la *cohérence scientifique*. La cohérence d'un détecteur le long des axes Y et Z du repère  $R_{AESRF}$  est défini par :

$$GHDET_{YZ} = -V_{Y1,det} + V_{Y2,det} - V_{Z1,det} + V_{Z2,det} \quad (4.20)$$

#### 4.1. Bibliographie sur le traitement des données de niveau 1b des accéléromètres de GOCE

où les tensions sont les valeurs à la sortie du détecteur. D'après Bergé *et al.*, l'étude de l'évolution de cette grandeur permet d'apporter une information indirecte sur celle du facteur quadratique. Les auteurs quantifient la dérive du facteur quadratique à  $0.11 \text{ s}^2/\text{m}/\text{mois}$  ce qui est en-deçà de la dérive spécifiée de  $1 \text{ s}^2/\text{m}/\text{mois}$ .

La cohérence scientifique est définie par :

$$V_{SciCohZ} = \frac{V_{SciZ1} - V_{SciZ2}}{2} \quad (4.21)$$

où les tensions sont les valeurs en sortie de la branche science. Cette grandeur est corrélée à la sortie du détecteur et l'étude de l'évolution de cette corrélation donne une indication sur l'impact des gains de la mesure et du DVA sur l'évolution du facteur d'échelle. Cet impact sur la dérive du facteur d'échelle a été quantifié à  $10^{-6} / \text{mois}$  ce qui est en-deçà de la dérive empirique de  $10^{-5} / \text{mois}$ .

Dans un second temps, Bergé *et al.* étudient l'effet du bruit de l'ADC1 (*Analogic to Digital Converter*) sur les mesures accélérométriques. Le rôle de l'ADC est de convertir les mesures analogiques en sortie du détecteur capacitif en mesures numériques (cf. chapitre 2). Contrairement à l'hypothèse adoptée pendant la conception de l'instrument, le bruit de l'ADC1 est supposé coloré. Bergé *et al.* montrent que, dans ce cas, le repliement de spectre augmente le bruit total en sortie de la branche science. Par conséquent, le bruit de l'instrument atteint  $2.3 \times 10^{-12} \text{ m/s}^2/\sqrt{\text{Hz}}$  et dépasse alors légèrement les spécifications de la mission à  $2 \times 10^{-12} \text{ m/s}^2/\sqrt{\text{Hz}}$ , mais n'explique pas à lui seul le niveau de bruit empirique obtenu à partir d'un calcul d'ordre de grandeur avec les équations (3.40) à (3.47) :  $3.9 \times 10^{-12} \text{ m/s}^2/\sqrt{\text{Hz}}$  pour la paire 1-4,  $3.1 \times 10^{-12} \text{ m/s}^2/\sqrt{\text{Hz}}$  pour la paire 2-5,  $6.7 \times 10^{-12} \text{ m/s}^2/\sqrt{\text{Hz}}$  pour la paire 3-6. La figure 4.3 résume cette conclusion et indiquent les contributeurs au niveau de bruit des accéléromètres ainsi que le niveau de bruit total en termes d'accélération dans deux cas : lorsque le bruit de l'ADC1 est supposé blanc et dans le cas où il est supposé coloré.

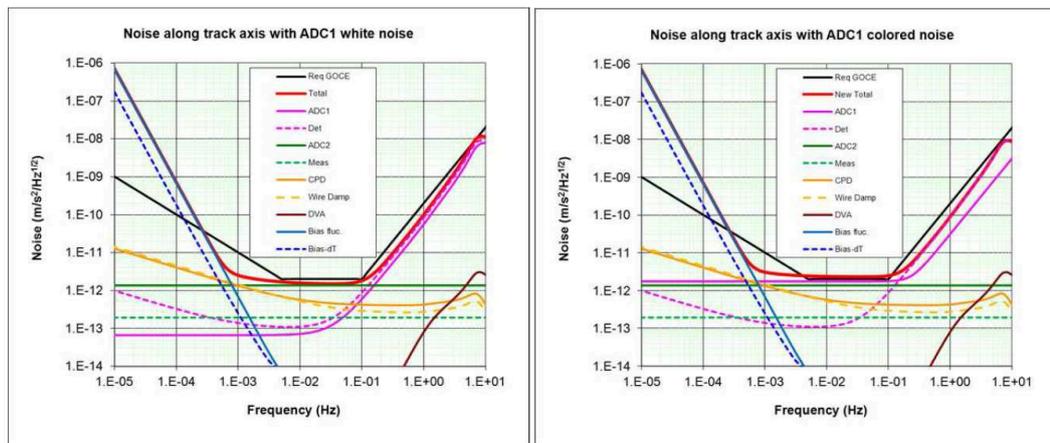


Figure 4.3 – Bruit total des accéléromètres et ses contributeurs lorsque le bruit de l'ADC1 est supposé blanc (gauche) et lorsqu'il est supposé coloré (droite) [90].

Il faut signaler que la simulation de la boucle d'asservissement est une version simplifiée de la boucle réelle : un seul degré de liberté est simulé, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de prise compte d'éventuels effets dus aux combinaisons et recombinaisons des tensions, et seuls les comportements linéaires des composants électroniques sont pris en compte. En outre, un seul ADC par boucle est simulé, au lieu de deux. Enfin, dans la simulation, aucune accélération extérieure n'est prise en compte. En conséquence, des pistes d'approfondissement peuvent être envisagées : quel est l'effet du repliement spectral avec une boucle simulée de manière plus réaliste ?

dans quelle mesure l'intensité d'accélération extérieures augmente l'effet du repliement et donc le niveau de bruit des accéléromètres ?

#### 4.1.4 Validation des accéléromètres

En plus de l'amélioration des processus d'étalonnage et de reconstruction du gradient de gravité, une étude a été destinée à l'évaluation des facteurs d'échelle et du biais des accéléromètres. L'étude présentée dans cette partie est l'une des seules destinées à la caractérisation des accéléromètres (biais et facteurs d'échelle) mais ne s'intéresse pas à leur bruit. Néanmoins, les résultats obtenus sont intéressants car ils permettent des comparaisons avec des valeurs obtenues par d'autres méthodes.

La méthode proposée par cette étude a été développée avant le lancement de la mission et appliquée en utilisant des données simulées [91] puis testée sur les données réelles acquise durant l'ensemble de la période d'opération scientifique du satellite [92], soit entre le 1<sup>er</sup> novembre 2009 et le 20 octobre 2013. Cette méthode consiste à comparer la position du satellite dans un repère lié à la Terre (repère ECEF), connue avec une précision d'environ 2 cm et donnée par la méthode PSO (*Precise Science Orbit*) officielle de l'ESA [28, 93], à la position du satellite calculée par la méthode POD (*Precise Orbit Determination*) grâce au logiciel GEODYN de la Nasa. Cette dernière a été mise en application dès la mission CHAMP pour estimer, par exemple, les forces non-gravitationnelles à partir de la localisation GPS combinée à des modèles de champ gravitationnel [94]. De la comparaison entre les deux calculs de la position, les facteurs d'échelle et les biais sont estimés. Dans les études de Visser, les mésalignements et les non-orthogonalités sont supposés négligeables par rapport aux facteurs d'échelle, ce qui est théoriquement le cas si ces défauts sont en-deçà des niveaux spécifiés.

Bien que dans l'étude précédant le lancement [91], l'auteur prenne en compte un décalage de 3.45 cm entre le centre de masse du satellite et le centre géométrique du gradiomètre, dans l'étude finale [92], ce décalage est négligé en faveur de l'identité entre ces deux points. Par conséquent, dans cette étude, chaque mode commun exprimé dans le repère  $GRF$  mesure exactement les forces non-gravitationnelles aux biais et aux facteurs d'échelle près (cf. l'équation (3.57)). Implicitement, l'hypothèse est faite que les masses d'épreuve sont immobiles par rapport aux cages et que la gravité du satellite ainsi que les autres forces parasites sont négligeables.

Le calcul de la position par la méthode GEODYN requiert la connaissance des forces non-gravitationnelles : dans les études de Visser, celles-ci sont estimées, d'une part grâce aux modes communs et, d'autre part grâce aux mesures accélérométriques individuelles. Les deux approches aboutissent à deux jeux de biais et facteurs d'échelle estimés qui sont comparés entre eux afin de tester la cohérence des valeurs obtenues. Dans le cas de l'utilisation des mesures individuelles des accéléromètres, l'équation de mesure modélisée est :

$$\mathbf{a}_{obs,i} = \mathbf{S}_i \left( ([\Gamma] + [R])\mathbf{x}_i + \mathbf{d} \right) + \mathbf{b}_i + \boldsymbol{\epsilon}_i \quad (4.22)$$

où  $\mathbf{a}_{obs,i}$  est l'accélération mesurée par l'accéléromètre  $i$ ,  $\mathbf{d}$  l'accélération non-gravitationnelle,  $[\Gamma]$  la matrice du gradient de gravité au centre de masse du satellite,  $[R]$  la matrice d'inertie correspondant au mouvement angulaire du satellite,  $\mathbf{S}_i$  la matrice diagonale des facteurs d'échelle,  $\mathbf{x}_i$  la position du centre de l'accéléromètre  $i$  dans le repère du satellite,  $\mathbf{b}_i$  les biais par axe et  $\boldsymbol{\epsilon}_i$  le bruit de l'accéléromètre. De manière équivalente, en isolant l'accélération non-gravitationnelle, il vient :

$$\mathbf{d} = \mathbf{S}_i^{-1} \left( \mathbf{a}_{obs,i} - \mathbf{b}_i - \boldsymbol{\epsilon}_i \right) - ([\Gamma] + [R])\mathbf{x}_i \quad (4.23)$$

Le fondement de l'étude de Visser est la condition selon laquelle tous les accéléromètres mesurent la même

#### 4.1. Bibliographie sur le traitement des données de niveau 1b des accéléromètres de GOCE

	Biais (nm/s <sup>2</sup> )			Dérive du biais (nm/s <sup>2</sup> /jour)		
	axe X	axe Y	axe Z	axe X	axe Y	axe Z
Acc. 1	-328.5107	<b>-13 092.9747</b>	-28.8157	0.0042	<b>0.1773</b>	0.0065
Acc. 2	1.8871	-17.1804	<b>-20 374.7206</b>	-0.0025	-0.0050	<b>-1.7953</b>
Acc. 3	-24.5868	<b>-23 014.2477</b>	-123.7527	-0.0010	<b>0.8997</b>	0.0126
Acc. 4	-46.3430	<b>-11 244.1808</b>	-23.6116	-0.0023	<b>3.3048</b>	0.0055
Acc. 5	-7.0344	619.3736	<b>-10 675.6254</b>	0.0078	-0.2079	<b>1.1939</b>
Acc. 6	-40.9932	<b>-3504.9026</b>	-10.4918	-0.0009	<b>-0.0384</b>	0.0093
<i>Moyenne</i>	-187.4268	301.0966	-67.1223	0.0010	-0.1065	0.0110
CM	-187.4291	301.0891	-65.0774	0.0009	-0.1064	0.0093

Table 4.1 – Valeurs estimées des biais et dérivées des biais obtenues avec les accélérations individuelles et avec les modes communs [92].

force non-gravitationnelle agissant sur le satellite. Dans ce cas, l'équation (4.23) devient

$$\mathbf{S}_i^{-1}(\mathbf{a}_{obs,i} - \mathbf{b}_i - \boldsymbol{\epsilon}_i) - \mathbf{S}_j^{-1}(\mathbf{a}_{obs,j} - \mathbf{b}_j - \boldsymbol{\epsilon}_j) = ([\Gamma] + [R])(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) \quad (4.24)$$

Ainsi, que ce soit pour estimer l'accélération non-gravitationnelle dans l'équation (4.23) ou l'estimation des combinaisons de biais  $b_i - b_j$  et facteurs d'échelle par moindres carrés dans l'équation (4.24), il est nécessaire d'isoler les termes liés au gradient de gravité et au mouvement angulaire. Pour la contribution du gradient, un modèle de champ gravitationnel *a priori* est utilisé ; et pour la contribution du mouvement angulaire, des mesures des senseurs stellaires sont déduites les angles  $\phi_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) de roulis (roll), de tangage (pitch) et de lacets (yaw) par rapport aux axes du repère  $R_{GRF}$ . À l'aide d'un ajustement avec un polynôme du second degré, la vitesse angulaire  $\omega_i$  et l'accélération angulaire du satellite  $\dot{\omega}_i$  peuvent être estimés :

$$\phi_i = \phi_{0,i} + \omega_i t + \dot{\omega}_i t^2 \quad (4.25)$$

Le tableau 4.1, extrait de [92], regroupe les valeurs estimées des biais et dérivées des biais obtenues avec les accélérations individuelles et avec les modes communs. Les valeurs des biais sont celles estimées pour la première date disponible, soit le 1<sup>er</sup> novembre 2009. Pour les valeurs correspondant aux modes communs (CM), pour l'axe X, il s'agit de la paire 1-4, pour l'axe Y de la paire 2-5 et pour l'axe Z de la paire 3-6. Pour chaque axe, la moyenne des deux valeurs en italique devrait en théorie être égales aux valeurs estimées avec les modes communs. En effet, le biais d'un mode commun correspond à la moyenne des biais des deux accéléromètres correspondant (cf. chapitre 3 pour la définition des modes communs). On vérifie que les valeurs en question sont proches. Enfin, les valeurs en gras correspondent aux axes non-sensibles d'un accéléromètre, ce qui se traduit par des valeurs importantes des biais et des dérivées du biais. La dérive, pas nécessairement linéaire, du biais d'un accéléromètre peut être due, par exemple, au vieillissement des composants électroniques ou de l'évolution de la force parasite due au fil d'or bien que ces deux hypothèses aient été rejetées par l'ONERA (correspondance personnelle entre P. Visser et B. Christophe).

Le tableau 4.2 regroupe les facteurs d'échelle annuels estimés pour chaque accéléromètre et pour les modes communs. Pour tous les axes, les facteurs d'échelles estimés sont stables dans le temps. Pour l'axe X du gradiomètre, les facteurs d'échelle sont très proches de 1 et n'en dévient pas de plus de  $10^{-3}$ . Pour l'axe Z, ils ne dévient pas de 1 de plus de  $10^{-2}$ . Pour l'axe Y, une déviation par rapport à 1 plus importante, mais stable, de 0.03 environ est observée. P. Visser n'a pu aboutir à une explication de cette déviation mais suggère qu'une modélisation plus fine des modèles utilisés dans le logiciel GEODYN pourrait réduire cet écart.

#### Chapter 4. Analyse des mesures pendant la phase opérationnelle de la mission GOCE

	CM	Acc. 1	Acc. 2	Acc. 3	Acc. 4	Acc. 5	Acc. 6
2009							
axe X	1.00009	1.00011	1.00015	1.00007	1.00009	1.00013	0.99998
axe Y	1.02669	1.02586	1.02724	1.02893	1.03036	1.02789	1.02904
axe Z	0.97686	0.97842	0.98030	0.97435	0.97276	0.97199	0.97778
2010							
axe X	1.00012	1.00017	1.00019	0.99999	1.00009	1.00015	1.00000
axe Y	1.02653	1.02700	1.02596	1.02679	1.02765	1.02711	1.02718
axe Z	0.99365	0.99163	0.98475	0.97882	0.97868	0.99375	0.98197
2011							
axe X	0.99997	1.00003	1.00006	0.99980	0.99992	1.00001	0.99985
axe Y	1.03619	1.03842	1.03501	1.03713	1.03476	1.03725	1.03617
axe Z	0.97388	0.97606	0.97616	0.97751	0.96843	0.96982	0.97547
2012							
axe X	0.99987	0.99979	0.99994	1.00005	0.99996	0.99999	0.99988
axe Y	1.03567	1.03842	1.0351	1.03713	1.03476	1.03725	1.03617
axe Z	0.98430	0.98497	0.98602	0.98878	0.98125	0.98131	0.98799
2013							
axe X	0.99994	0.99997	1.00003	0.99986	0.99993	1.00000	0.99986
axe Y	1.02796	1.02942	1.02751	1.02873	1.02743	1.02845	1.02759
axe Z	1.00110	1.00137	1.00154	1.00159	1.00010	1.00053	1.00081
Moyenne sur toute la mission							
axe X	0.99994	0.99992	1.00001	0.99997	0.99997	1.00002	0.99989
axe Y	1.03087	1.03225	1.03048	1.03186	1.03078	1.03171	1.03141
axe Z	0.99557	0.99590	0.99603	0.99612	0.99323	0.99438	0.99557

Table 4.2 – Facteurs d'échelle annuels estimés pour chaque accéléromètre et pour les modes communs [92].

#### 4.1.5 Détection de craquements dans le signal livré par les accéléromètres des satellites GRACE

Dans cette partie est présentée une étude menée par Flury *et al.* [95] sur les pics d'accélération dus à l'activité électrique des circuits thermiques des satellites GRACE. Bien que cette étude ne concerne pas la mission GOCE, son intérêt provient de son objectif : des phénomènes internes dans le satellite peuvent perturber les mesures accélérométriques. En l'occurrence, l'activité des chauffettes crée des pics d'accélération très visibles dans les mesures. Cette étude participe donc à l'activité complexe qui consiste à mettre en évidence des différents contributeurs aux perturbations observées dans les signaux empiriques. Dans le cas de la mission GOCE, il y a également de nombreux contributeurs au bruit des accéléromètres et il ne peut être complètement exclu que des phénomènes internes mal connus ou modélisés puissent être la source de perturbations dans les mesures. Avant le début de cette thèse et jusqu'à la rédaction de ce mémoire, aucune publication n'a présenté de travaux relatifs à ce type d'approche. Par conséquent, présenter l'étude de Flury *et al.* dans cette partie pose la question d'une investigation similaire dans le cas de la mission GOCE et qui n'a jamais encore été menée. Néanmoins, dans le cas de la mission GOCE, le système d'isolement thermique et magnétique permet d'éviter l'existence de pics avec amortissement semblables à ceux de la mission GRACE.

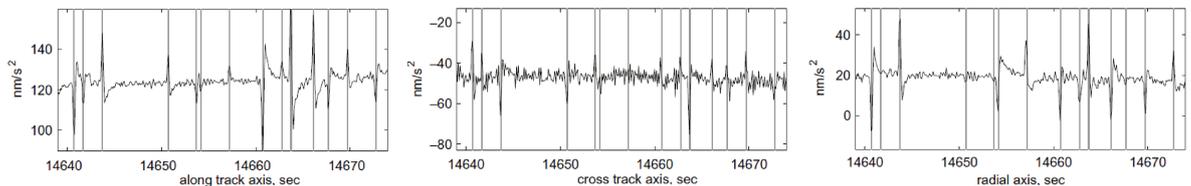


Figure 4.4 – Exemple caractéristique de pics dus à l'activité thermique (repérés par des droites) dans le signal de niveau 1a des accéléromètres à 10Hz [95].

Les mesures utilisées sont des données de niveau 1a (GRACE-N1a) échantillonnées à 4 Hz où la présence de pics parmi d'autres artefacts a limité la qualité de certaines applications scientifiques, en particulier pour l'estimation de modèles de champs gravitationnel ou de modélisation atmosphérique. La caractérisation de la performance des accéléromètres a également été impactée. Les données de niveau 1a sont obtenues à partir d'un traitement réversible des tensions nominales appliquées sur les électrodes. La figure 4.4 montre un exemple typique d'accélération mesurées dans la direction de vol, radiale et transverse d'un des satellites GRACE. Les lignes verticales indiquent le lieu des pics dont l'amplitude est du même ordre de grandeur que les accélérations mesurées. Les pics peuvent correspondre à une superposition de l'activité des plusieurs chauffettes actives en même temps, ce qui rend leur caractérisation plus difficile. Néanmoins, les auteurs ont modélisé un profil type d'un pic apparaissant sur les données après l'activation d'une chauffette. À partir de l'extrapolation de ce profil aux données réelles, une simulation fidèle des pics sont obtenues sous forme de séries temporelles (figure 4.5, en haut à gauche) et la densité spectrale correspondante est estimée pour les trois directions d'intérêt (figure 4.5, en haut à droite et en bas). Flury *et al.* concluent que l'activité des chauffettes créent un bruit en accélération supérieur à la spécification (courbe noire en pointillés) au-dessus de 4 mHz et inférieur en-dessous de cette fréquence. En outre, pour la direction de vol du satellite, est indiqué le profil du bruit spécifié pour le suivi laser (KBR). Il apparaît que le bruit dû aux chauffettes reste en-deçà de la spécification. Flury *et al.* avancent également que pour cette raison, l'impact sur les modèles de champs gravitationnels déduits des données GRACE n'est pas inquiétant car dans le cas de la mission GRACE, la bande fréquentielle d'intérêt est en-deçà de 4 mHz.

Enfin, en se basant sur des périodes où l'activité des chauffettes est nulle, Flury *et al.* apporte une estimation du bruit réel des accéléromètres de GRACE. Cependant, cette estimation est un majorant car d'autres perturbations n'ont pas été exclues. Leurs résultats montrent un niveau de bruit légèrement supérieur aux spé-

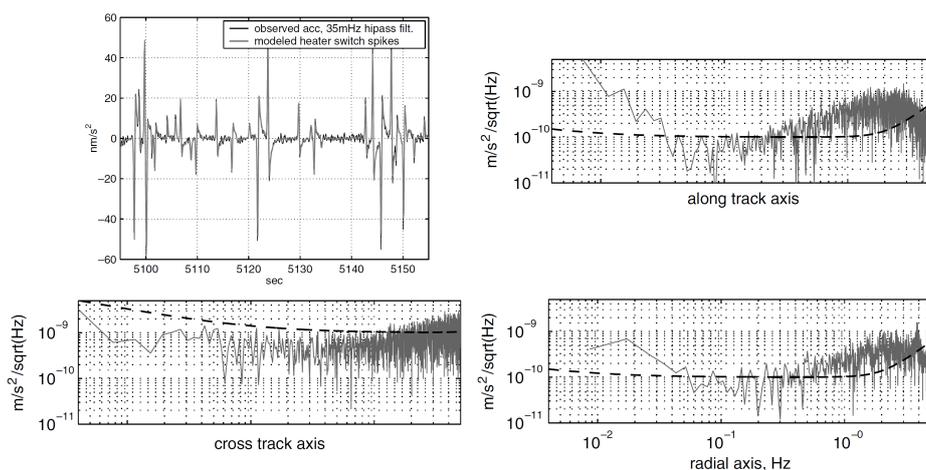


Figure 4.5 – Modélisation des pics dans le signal dans la direction de vol du satellite (en haut à gauche) et densités spectrales des profils de pics en fonction de la direction considérée (reste de la figure) [95].

cifications au-delà de 30 mHz mais atteint, en-deçà de cette fréquence, le niveau spécifié de  $10^{-10} \text{ m/s}^2/\sqrt{\text{Hz}}$  pour les axes sensibles et de  $10^{-9} \text{ m/s}^2/\sqrt{\text{Hz}}$  pour l'axe moins sensible. Étant donné qu'il s'agit d'une surestimation du bruit, Flury *et al.* concluent que le niveau de bruit réel est en-dessous des spécifications et donc que la performance des accéléromètres de la mission GRACE est satisfaisante. Malgré cette étude, le mécanisme exact dans l'activité des chaufferettes à l'origine des pics reste inconnu.

#### 4.1.6 Conclusion de l'étude bibliographique

L'étude bibliographique présentée dans la première partie de ce chapitre révèle le constat suivant : les travaux concernant les mesures accélérométriques de GOCE ont porté sur le procédé d'étalonnage du gradiomètre ou sur une amélioration du processus d'estimation des composantes du gradient de gravité. Seule l'étude de Bergé *et al.* apporte une première piste sur un des contributeurs théoriques du bruit plus important que prévu grâce à une simulation simplifiée de l'asservissement des accéléromètres. En conséquence, il apparaît nécessaire d'effectuer une estimation soignée du bruit des accéléromètres, ainsi que sur ses sources, sur l'ensemble de la période d'opération scientifique (objet de ce chapitre).

Dans cette bibliographie, n'ont pas été incluses les nombreuses études concernant l'exploitation scientifique des données de la mission GOCE, c'est-à-dire les modèles de champs gravitationnels. Celle-ci a été présentée succinctement au chapitre 1 et ne concerne pas le travail mené dans le cadre de cette thèse qui porte sur l'étude du fonctionnement des accéléromètres.

## 4.2 Densité spectrale des composantes du gradient de gravité au cours de la mission

Les premières publications montrant la comparaison entre les densités spectrales empiriques et théoriques des composantes du gradient de gravité n'ont mobilisé que les données des premiers mois de la période d'opérations scientifiques de la mission, c'est-à-dire fin novembre 2009, début 2010. Dans le cadre de cette thèse, il est donc apparu important de vérifier si cette comparaison est restée similaire au cours de la mission. La figure 4.6 représente l'évolution de la densité spectrale mensuelle de la composante  $V_{zz}$  estimée à partir des

## 4.2. Densité spectrale des composantes du gradient de gravité au cours de la mission

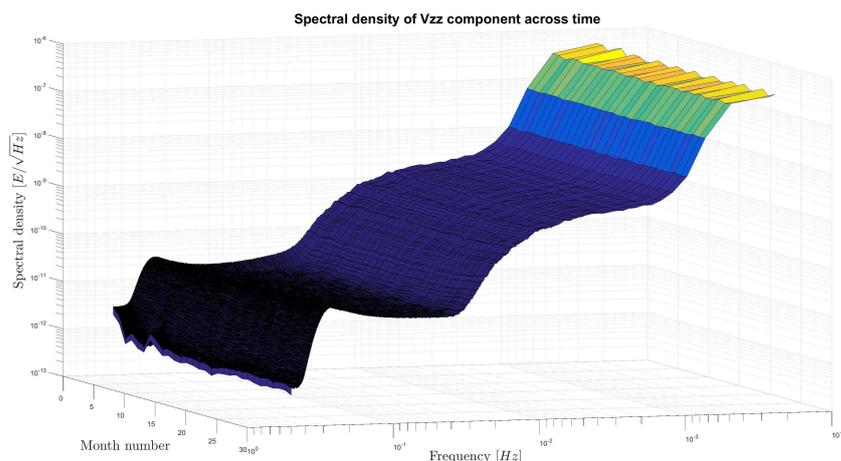


Figure 4.6 – Représentation de la densité spectrale de la composante  $V_{zz}$  en fonction de la fréquence et du mois.

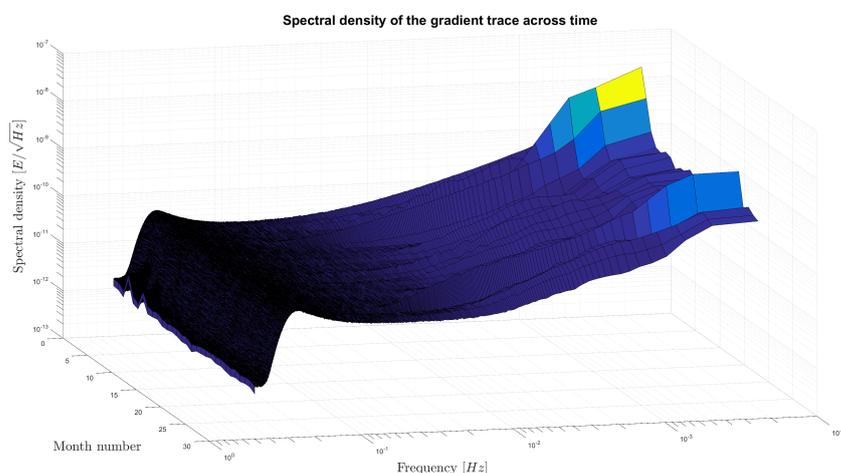


Figure 4.7 – Représentation de la densité spectrale de la trace du gradient de gravité en fonction de la fréquence et du mois.

données GOCE sur une période de 30 mois, entre novembre 2009 et décembre 2012 (les mois manquants n'ont pas été inclus). Il apparaît que la densité spectrale de la composante  $V_{zz}$  est remarquablement stable dans le temps malgré une période d'activité solaire particulièrement forte en mars 2011 (cf. rapports hebdomadaires de l'ESA).

La même observation peut être faite pour la trace (figure 4.7), bien que celle-ci varie davantage dans les basses fréquences entre 1 mHz et 300 mHz. Ceci est dû au fait que pour ces mois, la densité spectrale mensuelle de  $V_{xx}$  ou  $V_{yy}$  est plus élevée dans les basses fréquences. Il peut s'agir simplement du fait que la suppression automatique des données aberrantes et la correction de la tendance linéaire mise en place n'est pas parfaite. Par conséquent, dans le calcul des densités spectrales moyennes, une densité aberrante peut avoir été introduite. Dans l'ensemble le niveau des densités spectrales pour toutes les composantes et pour la trace vérifie le constat fait initialement dans les publications scientifiques, c'est-à-dire qu'elles sont supérieures aux spécifications (cf. la partie 1.6.5). Dans les parties suivantes, on s'intéresse alors à l'analyse spectrale des contributeurs aux composantes de gradients de gravité. Ces contributeurs ont été explicités au chapitre 3.

On précise qu'une analyse temps-fréquence réalisée sur les composantes du gradient de gravité et sur sa

trace, à partir de séries temporelles de durée allant jusqu'à 1 mois, montrent également la stabilité des signaux au cours du temps. En particulier, on n'observe pas de fréquence *parasite* apparaissant dans des fenêtres temporelles finies.

### 4.3 Expression théorique de la différence des modes communs

Dans le chapitre 3, on a défini les modes commun et différentiel pour chaque paire d'accéléromètres du gradiomètre. Ces deux grandeurs contiennent de nombreux signaux déterministes et ne peuvent donc être directement utilisés pour étudier le niveau de bruit des mesures accélérométriques. Théoriquement, il est possible de le faire à partir des modes différentiels, si l'on dispose d'une connaissance du gradient de gravité et du mouvement angulaire du satellite indépendamment obtenues des mesures du gradiomètre. Pour le gradient, des modèles existent et pour le mouvement angulaire, les senseurs stellaires peuvent être utilisés. On peut alors soustraire à un mode commun mesuré, les valeurs théoriques. Néanmoins, le satellite GOCE est sensé proposer des estimations du gradient de gravité plus précises que les modèles qui l'ont précédés. Par ailleurs, les mesures des senseurs stellaires sont moins précises que celles du gradiomètre dans la bande de mesure 5 mHz–100 mHz. De ce fait, *a priori*, en suivant cette méthode, on introduirait des erreurs indésirables.

Un autre choix est possible en s'appuyant plutôt sur les modes communs. On a vu que dans le cas d'un gradiomètre et d'un asservissement parfait, ceux-ci contiennent la contribution des forces non-gravitationnelles mais aussi celle de la gravité due au satellite ainsi que les réactions des forces électrostatiques. Dans ce cas, en soustrayant deux modes communs, il est théoriquement possible d'estimer un niveau de bruit moyen des mesures accélérométriques, comme on le montre par la suite. Pour cela, on reprend les calculs de la partie 3.3.2. En effet, on ne peut utiliser directement l'équation (3.57) qui comporte les termes correspondant aux réactions des forces électrostatiques par les paires autre que celle considérée.

Dans la suite on considère donc deux paires d'accéléromètres  $(i, j)$  et  $(k, l)$ . Pour chaque accéléromètre on définit la grandeur  $\mathbf{B}_i$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_i = & -([T](O_{sat}) - [\dot{\Omega}] - [\Omega]^2) \mathbf{O}_{sat} \mathbf{O}_i + \mathbf{O}_{sat}^{\circ\circ} \mathbf{O}_i|_{R_{sat}} + 2[\Omega] \mathbf{O}_{sat}^{\circ} \mathbf{O}_i|_{R_{sat}} \\ & - \mathbf{g}_S(O_i) - \frac{1}{m_{sat}} \sum_{u \neq i, j, k, l}^N \mathbf{f}_{e_i} - \frac{\mathbf{f}_{par, i}^{int}}{m_i} - \frac{\sum_{u=1}^N \mathbf{f}_{par, k}^{int}}{m_{sat}} - \frac{\mathbf{f}_{par, i}^{ext}}{m_i} + \frac{\mathbf{f}_{NG, sat}}{m_{sat}} \end{aligned} \quad (4.26)$$

Pour une paire d'accéléromètres donnée, on a alors :

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{B}_i + \mathbf{B}_j}{2} = & -\frac{1}{2}([T](O_{sat}) - [\dot{\Omega}] - [\Omega]^2) (\mathbf{O}_{sat} \mathbf{O}_i + \mathbf{O}_{sat} \mathbf{O}_j) + \frac{1}{2} (\mathbf{O}_{sat}^{\circ\circ} \mathbf{O}_i|_{R_{sat}} + \mathbf{O}_{sat}^{\circ\circ} \mathbf{O}_j|_{R_{sat}}) \\ & + [\Omega] (\mathbf{O}_{sat}^{\circ} \mathbf{O}_i|_{R_{sat}} + \mathbf{O}_{sat}^{\circ} \mathbf{O}_j|_{R_{sat}}) - \frac{1}{2} (\mathbf{g}_S(O_i) + \mathbf{g}_S(O_j)) \\ & - \frac{1}{m_{sat}} \sum_{u \neq i, j, k, l}^N \mathbf{f}_{e_i} - \frac{1}{2} \left( \frac{\mathbf{f}_{par, i}^{int}}{m_i} + \frac{\mathbf{f}_{par, j}^{int}}{m_j} \right) - \frac{\sum_{u=1}^N \mathbf{f}_{par, k}^{int}}{m_{sat}} \\ & - \frac{1}{2} \left( \frac{\mathbf{f}_{par, i}^{ext}}{m_i} + \frac{\mathbf{f}_{par, j}^{ext}}{m_j} \right) + \frac{\mathbf{f}_{NG, sat}}{m_{sat}} \end{aligned} \quad (4.27)$$

On peut alors réécrire les équations (3.32) :

$$\left(1 + \frac{m_i}{m_{sat}}\right) \gamma_i + \frac{m_j}{m_{sat}} \gamma_j + \frac{m_k}{m_{sat}} \gamma_k + \frac{m_l}{m_{sat}} \gamma_l = \mathbf{B}_i \quad (4.28)$$

$$\left(1 + \frac{m_j}{m_{sat}}\right) \gamma_j + \frac{m_i}{m_{sat}} \gamma_i + \frac{m_k}{m_{sat}} \gamma_k + \frac{m_l}{m_{sat}} \gamma_l = \mathbf{B}_j \quad (4.29)$$

$$\left(1 + \frac{m_k}{m_{sat}}\right) \gamma_k + \frac{m_l}{m_{sat}} \gamma_l + \frac{m_i}{m_{sat}} \gamma_i + \frac{m_j}{m_{sat}} \gamma_j = \mathbf{B}_k \quad (4.30)$$

$$\left(1 + \frac{m_l}{m_{sat}}\right) \gamma_l + \frac{m_k}{m_{sat}} \gamma_k + \frac{m_i}{m_{sat}} \gamma_i + \frac{m_j}{m_{sat}} \gamma_j = \mathbf{B}_l \quad (4.31)$$

En sommant les équations (4.28) et (4.29), puis (4.30) et (4.31) :

$$\left(1 + \frac{m_i + m_j}{m_{sat}}\right) \mathbf{a}_{ij}^{(c)} + \frac{m_i - m_j}{m_{sat}} \mathbf{a}_{ij}^{(d)} + \frac{m_k + m_l}{m_{sat}} \mathbf{a}_{kl}^{(c)} + \frac{m_k - m_l}{m_{sat}} \mathbf{a}_{kl}^{(d)} = \frac{\mathbf{B}_i + \mathbf{B}_j}{2} \quad (4.32)$$

$$\left(1 + \frac{m_k + m_l}{m_{sat}}\right) \mathbf{a}_{kl}^{(c)} + \frac{m_k - m_l}{m_{sat}} \mathbf{a}_{kl}^{(d)} + \frac{m_i + m_j}{m_{sat}} \mathbf{a}_{ij}^{(c)} + \frac{m_i - m_j}{m_{sat}} \mathbf{a}_{ij}^{(d)} = \frac{\mathbf{B}_k + \mathbf{B}_l}{2} \quad (4.33)$$

En soustrayant les équations (4.32) et (4.33) :

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{ij}^{(c)} - \mathbf{a}_{kl}^{(c)} &= \frac{\mathbf{B}_i + \mathbf{B}_j}{2} - \frac{\mathbf{B}_k + \mathbf{B}_l}{2} \\ &= -\frac{1}{2} \left( [T](O_{sat}) - [\dot{\Omega}] - [\Omega]^2 \right) (\mathbf{O}_{sat} \mathbf{O}_i + \mathbf{O}_{sat} \mathbf{O}_j - \mathbf{O}_{sat} \mathbf{O}_k - \mathbf{O}_{sat} \mathbf{O}_l) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left( \mathbf{O}_{sat}^{\circ\circ} \mathbf{O}_i |_{R_{sat}} + \mathbf{O}_{sat}^{\circ\circ} \mathbf{O}_j |_{R_{sat}} - \mathbf{O}_{sat}^{\circ\circ} \mathbf{O}_k |_{R_{sat}} - \mathbf{O}_{sat}^{\circ\circ} \mathbf{O}_l |_{R_{sat}} \right) \\ &\quad + [\Omega] \left( \mathbf{O}_{sat}^{\circ} \mathbf{O}_i |_{R_{sat}} + \mathbf{O}_{sat}^{\circ} \mathbf{O}_j |_{R_{sat}} - \mathbf{O}_{sat}^{\circ} \mathbf{O}_k |_{R_{sat}} - \mathbf{O}_{sat}^{\circ} \mathbf{O}_l |_{R_{sat}} \right) \\ &\quad - \frac{1}{2} \left( \mathbf{g}_S(O_i) + \mathbf{g}_S(O_j) - \mathbf{g}_S(O_k) - \mathbf{g}_S(O_l) \right) \\ &\quad - \frac{1}{2} \left( \frac{\mathbf{f}_{par,i}^{int}}{m_i} + \frac{\mathbf{f}_{par,j}^{int}}{m_j} - \frac{\mathbf{f}_{par,k}^{int}}{m_k} - \frac{\mathbf{f}_{par,l}^{int}}{m_l} \right) \\ &\quad - \frac{1}{2} \left( \frac{\mathbf{f}_{par,i}^{ext}}{m_i} + \frac{\mathbf{f}_{par,j}^{ext}}{m_j} - \frac{\mathbf{f}_{par,k}^{ext}}{m_k} - \frac{\mathbf{f}_{par,l}^{ext}}{m_l} \right) \end{aligned} \quad (4.34)$$

Si les masses d'épreuves sont parfaitement asservies, et donc immobiles au centre de leur cage respective, et que la conception du gradiomètre est parfaite, alors les termes correspondant aux mouvements des masses d'épreuve s'annulent. Par ailleurs, si le centre de masse du satellite est parfaitement confondu avec le centre de masse du gradiomètre, alors du fait de la symétrie induite, les termes correspondant à l'attraction du satellite s'annulent. Enfin, par conception, les forces parasites doivent être négligeables de sorte que la différence des modes communs dans le cas idéal vaut zéro :  $\mathbf{a}_{ij}^{(c)} - \mathbf{a}_{kl}^{(c)} = \mathbf{0}$ .

Dans le cas général, en introduisant le centre instantané  $O_{ij}$  et  $O_{kl}$  des masses d'épreuves considérées, on a :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{a}_{ij}^{(c)} - \mathbf{a}_{kl}^{(c)} &= -([T](O_{sat}) - [\dot{\Omega}] - [\Omega]^2) (\mathbf{O}_{sat} \mathbf{O}_{ij} - \mathbf{O}_{sat} \mathbf{O}_{kl}) \\
 &+ \mathbf{O}_{sat}^{\circ\circ} \mathbf{O}_{ij}|_{R_{sat}} - \mathbf{O}_{sat}^{\circ\circ} \mathbf{O}_{kl}|_{R_{sat}} + 2[\Omega] (\mathbf{O}_{sat}^{\circ} \mathbf{O}_{ij}|_{R_{sat}} - \mathbf{O}_{sat}^{\circ} \mathbf{O}_{kl}|_{R_{sat}}) \\
 &- \frac{1}{2} (\mathbf{g}_S(O_i) + \mathbf{g}_S(O_j) - \mathbf{g}_S(O_k) - \mathbf{g}_S(O_l)) \\
 &- \frac{1}{2} \left( \frac{\mathbf{f}_{par,i}^{int}}{m_i} + \frac{\mathbf{f}_{par,j}^{int}}{m_j} - \frac{\mathbf{f}_{par,k}^{int}}{m_k} - \frac{\mathbf{f}_{par,l}^{int}}{m_l} \right) \\
 &- \frac{1}{2} \left( \frac{\mathbf{f}_{par,i}^{ext}}{m_i} + \frac{\mathbf{f}_{par,j}^{ext}}{m_j} - \frac{\mathbf{f}_{par,k}^{ext}}{m_k} - \frac{\mathbf{f}_{par,l}^{ext}}{m_l} \right)
 \end{aligned} \tag{4.35}$$

L'équation précédente indique les contributions physiques dans la différence des modes communs réels. En réalité, celle-ci est calculée à partir des modes communs étalonnés qui sont des estimations des valeurs réelles. En utilisant les notations du chapitre précédent, la relation entre modes communs étalonné et mesuré s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \hat{\mathbf{a}}_{ij}^{(c)} \\ \hat{\mathbf{a}}_{ij}^{(d)} \end{pmatrix} = [\widehat{M}I_{ij}] \begin{pmatrix} \mathbf{\Gamma}_{ij}^{(c)} \\ \mathbf{\Gamma}_{ij}^{(d)} \end{pmatrix} - [\widehat{M}I_{ij}] \begin{pmatrix} [Q_{ij}^{(c)}] \\ [Q_{ij}^{(d)}] \end{pmatrix} - [\widehat{M}I_{ij}] \begin{pmatrix} \mathbf{b}_{ij}^{(c)} \\ \mathbf{b}_{ij}^{(d)} \end{pmatrix} - [\widehat{M}I_{ij}] \begin{pmatrix} \mathbf{n}_{ij}^{(c)} \\ \mathbf{n}_{ij}^{(d)} \end{pmatrix} \tag{4.36}$$

où le symbole  $\hat{(\cdot)}$  indique le fait que la matrice d'étalonnage est elle-même estimée à partir des sessions dédiées. D'où :

$$\begin{aligned}
 \hat{\mathbf{a}}_{ij}^{(c)} &= [\widehat{M}I_{ij}^{(c)}] \mathbf{\Gamma}_{ij}^{(c)} + [\widehat{M}I_{ij}^{(d)}] \mathbf{\Gamma}_{ij}^{(d)} - [\widehat{M}I_{ij}^{(c)}] [Q_{ij}^{(c)}] - [\widehat{M}I_{ij}^{(d)}] [Q_{ij}^{(d)}] \\
 &- [\widehat{M}I_{ij}^{(c)}] \mathbf{b}_{ij}^{(c)} - [\widehat{M}I_{ij}^{(d)}] \mathbf{b}_{ij}^{(d)} - [\widehat{M}I_{ij}^{(c)}] \mathbf{n}_{ij}^{(c)} - [\widehat{M}I_{ij}^{(d)}] \mathbf{n}_{ij}^{(d)}
 \end{aligned} \tag{4.37}$$

Cette relation montre que le mode commun étalonné est constitué d'une partie déterministe et d'une partie stochastique. La partie déterministe correspond au mode commun réel en absence de bruit et en présence d'un étalonnage parfait. Ainsi, en supposant en première approche que l'étalonnage est bien réalisé, on peut distinguer les deux contributions :

$$\hat{\mathbf{a}}_{ij}^{(c)} = \tilde{\mathbf{a}}_{ij}^{(c)} - [\widehat{M}I_{ij}^{(c)}] \mathbf{n}_{ij}^{(c)} - [\widehat{M}I_{ij}^{(d)}] \mathbf{n}_{ij}^{(d)} \tag{4.38}$$

où le tilde indique la partie déterministe. En considérant deux paires d'accéléromètres  $(i, j)$  et  $(k, l)$ , on a alors :

$$\hat{\mathbf{a}}_{ij}^{(c)} - \hat{\mathbf{a}}_{kl}^{(c)} = \tilde{\mathbf{a}}_{ij}^{(c)} - \tilde{\mathbf{a}}_{kl}^{(c)} + [\widehat{M}I_{kl}^{(c)}] \mathbf{n}_{kl}^{(c)} - [\widehat{M}I_{ij}^{(d)}] \mathbf{n}_{ij}^{(d)} + [\widehat{M}I_{kl}^{(d)}] \mathbf{n}_{kl}^{(d)} - [\widehat{M}I_{ij}^{(c)}] \mathbf{n}_{ij}^{(c)} \tag{4.39}$$

Sous l'hypothèse qu'outre la présence de bruit électronique, l'étalonnage du gradiomètre est parfaitement réalisé, c'est-à-dire que la matrice inverse d'étalonnage est précisément connue, la différence des parties déterministes correspond à la différence des modes communs réels et est négligeable (cf. équation (4.34)). On voit donc que la différence des modes communs étalonnés permet d'estimer en première approche une combinaison linéaire du bruits de tous les accéléromètres considérées. En comparaison, une différence de modes communs nominaux, c'est-à-dire de modes communs mesurées, donne :

$$\mathbf{\Gamma}_{ij}^{(c)} - \mathbf{\Gamma}_{kl}^{(c)} = [M_{ij}^{(c)}] \mathbf{a}_{ij}^{(c)} - [M_{kl}^{(c)}] \mathbf{a}_{kl}^{(c)} + [M_{ij}^{(d)}] \mathbf{a}_{ij}^{(d)} - [M_{kl}^{(d)}] \mathbf{a}_{kl}^{(d)} + [Q_{ij}^{(c)}] - [Q_{kl}^{(c)}] + \mathbf{b}_{ij}^{(c)} - \mathbf{b}_{kl}^{(c)} + \mathbf{n}_{ij}^{(c)} - \mathbf{n}_{kl}^{(c)} \tag{4.40}$$

Cette équation se réduit à la précédente si la matrice d'étalonnage est la matrice identité, autrement dit si le gradiomètre est parfait.

En fonction des paires d'accéléromètres et de l'axe du gradiomètre considéré, les différences de modes communs étalonnés donnent accès à des estimation différentes. Le tableau A.2 rappelle la relation entre axes du gradiomètre, accéléromètres et précision des mesures. Les initiales *US* et *LS* indiquent respectivement les

Paire d'accéléromètres	Axe dans $R_{AESRF}$	Axe dans $R_{ARF}$	Axe dans $R_{GRF}$	Sensibilité
A1, A4	$X_e$	$+Y_1, +Y_4$	$Y_{GRF}$	LS
	$Y_e$	$-Z_1, -Z_4$	$Z_{GRF}$	US
	$Z_e$	$-X_1, -X_4$	$X_{GRF}$	US
A2, A5	$X_e$	$+Z_2, +Z_5$	$Z_{GRF}$	LS
	$Y_e$	$-X_2, -X_5$	$X_{GRF}$	US
	$Z_e$	$-Y_2, -Y_5$	$Y_{GRF}$	US
A3, A6	$X_e$	$+Y_3, +Y_6$	$Y_{GRF}$	LS
	$Y_e$	$-X_3, -X_6$	$X_{GRF}$	US
	$Z_e$	$+Z_3, +Z_6$	$Z_{GRF}$	US

Table 4.3 – Correspondance entre les repères  $R_{AESRF}$ ,  $R_{ARF}$ ,  $R_{GRF}$  ainsi que la sensibilité des axes.

axes sensibles et moins sensibles des accéléromètres.

## 4.4 Présentation des données utilisées

### 4.4.1 Description des modes communs nominaux et étalonnés

Pour l'étude des bruits des accéléromètres à partir de la différence des modes communs, les données utilisées sont les séries temporelles à 1 Hz de niveau 1b disponible à l'ONERA. La description des données est détaillée dans le guide d'utilisation préparé par l'ESA [96]. Les données dont on dispose à l'ONERA sont organisée par période de 24 h et dans celles-ci les modes communs nominaux et étalonnés sont disponibles. Les modes communs étalonnés sont des estimations des modes communs réels après correction des défauts de mesure alors que les modes communs nominaux sont les valeurs obtenues à partir des mesures accélérométriques avant tout traitement.

La figure 4.8 présente un exemple de comparaison entre les modes communs nominaux et étalonnés, entre le 02/11/09 et le 03/11/09, pour toutes les paires d'accéléromètres et tous les axes du gradiomètre. Tous les signaux sont nettement périodiques : la répétition de 16 périodes correspond aux nombres d'orbites complètes par jour. En effet, pour une altitude de 250 km, chaque orbite a pour période  $T = (4\pi^2 R^3 / GM_t)^{0.5} \approx 5358$  s où  $G \approx 6.673 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{k}^2\text{g}$ ,  $M_t \approx 5.98 \times 10^{24} \text{ kg}$  et  $R = 6371 + 250 \text{ km}$ . Le nombre total d'orbite en 24 h est donc  $3600 \cdot 24 / T \approx 16$ . Bien que théoriquement les modes communs ne contiennent que l'effet dû aux forces non-gravitationnelles agissant sur le satellite, deux raisons principales peuvent expliquer la présence de périodicité à la période orbitale. D'une part, les défauts de l'instrument peuvent créer un couplage entre mode commun et mode différentiel à travers lequel des résidus de gradient de gravité sont présents. D'autre part, même s'il n'y a pas de couplage, l'environnement spatiale peut être à l'origine de nombreux effets internes du satellite (poussée des propulseurs, contrôle thermique ou autres) et qui peuvent être récurrents au fur et à mesure que le satellite tourne autour de la Terre.

Il est à noter que les modes communs de la figure 4.8 ne sont pas corrigés des biais des accéléromètres. Néanmoins, la distinction entre axes sensibles et axes moins-sensibles apparaît. Pour l'axe X, toutes les paires

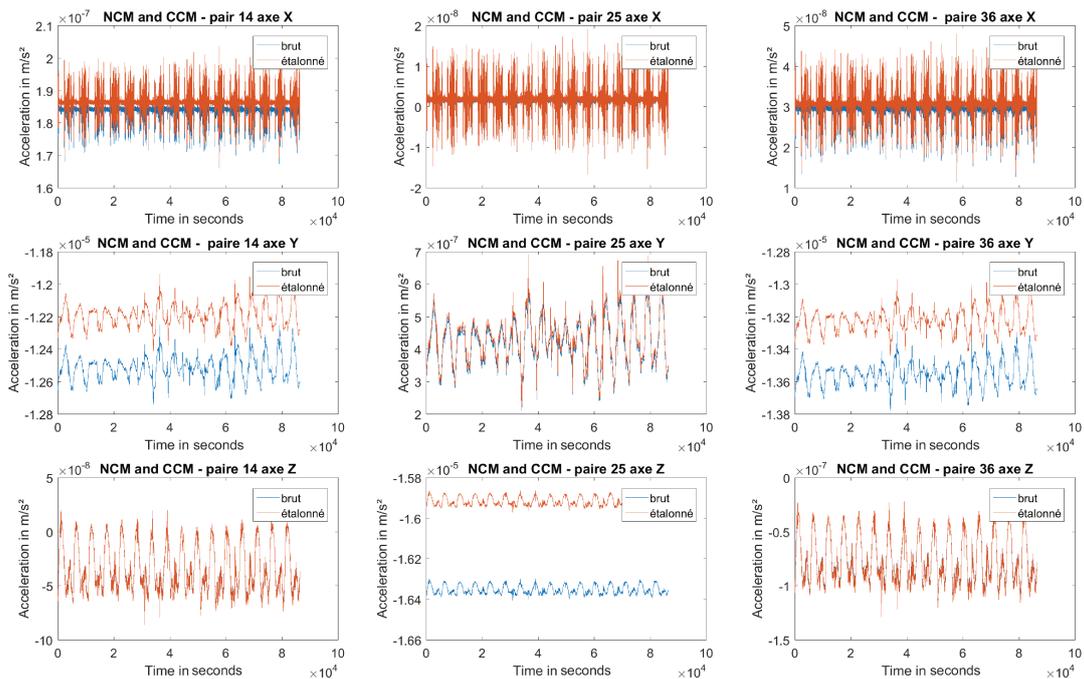


Figure 4.8 – Modes communs nominal et étalonné pour toutes les paires d'accéléromètres et tous les axes du gradiomètre - données du 02/11/09 au 03/11/09.

utilisent leurs axes sensibles; pour l'axe Y, seule la paire 2-5 utilise des axes sensibles; et pour l'axe Z, les paires 1-4 et 3-6 utilisent des axes sensibles. On voit que dans ces cas, les mesures nominales et étalonnées sont relativement proches, ce qui n'est pas le cas des mesures obtenues avec la paire 1-4 selon Y, la paire 2-5 selon Y et la paire 2-5 selon Z. La supériorité de la précision des axes sensibles à celles des moins-sensibles est visible en comparant les ordres de grandeur des signaux mesurés ( $10^{-7} \text{ m/s}^2$  contre  $10^{-5} \text{ m/s}^2$ ). Cette différence est due au biais important dans les mesures des axes moins-sensibles.

Par ailleurs, puisqu'en principe l'axe X du gradiomètre est aligné avec l'axe de vol et que la compensation de traînée n'est conçue que pour cet axe, les amplitudes des modes communs selon X par rapport aux autres axes montrent que l'action des propulseurs permet d'atténuer fortement l'effet de la traînée. En effet, le système de compensation de traînée a été conçu pour que le résidu d'accélération linéaire selon l'axe de vol soit inférieur à  $9 \times 10^{-7} \text{ m/s}^2$  [97]. Puisque les biais ne sont pas corrigés sur la figure 4.8, la comparaison dans le domaine temporel peut être utilement complétée par une comparaison dans le domaine fréquentiel. C'est l'objet de la figure 4.9 où l'on a représenté les densités spectrales des modes communs nominaux et étalonnés pour toutes les paires et pour l'axe X. Le trait rouge correspond au niveau maximal spécifié de  $2.3 \times 10^{-8} \text{ m/s}^2 / \sqrt{\text{Hz}}$  dans la bande de mesure du gradiomètre [97]. On voit d'une part que la densité spectrale des modes communs est bien inférieure à la spécification, et d'autre part que les modes communs nominaux et étalonnés ont un contenu spectral quasi-identique. La coupure de la densité spectrale après 0.3 Hz est la conséquence de l'existence de filtres anti-repliement utilisés pour diminuer l'effet de repliement des hautes fréquences vers les basses fréquences.

La figure 4.8 montre que les modes communs alternent des périodes stables et des périodes de variations plus importantes. La figure 4.10 montre, sur une projection de Robinson, la variation du mode commun selon l'axe de vol le long de l'orbite du satellite et entre le 2 novembre 2011 et le 10 novembre 2011. Il apparaît qu'entre  $30^\circ\text{S}$  et  $60^\circ\text{N}$ , la variation du signal est plus intense qu'au-delà. Cette observation peut être expliquée lorsqu'on compare la variation d'altitude (par rapport à la valeur médiane) le long de l'orbite sur la même

#### 4.4. Présentation des données utilisées

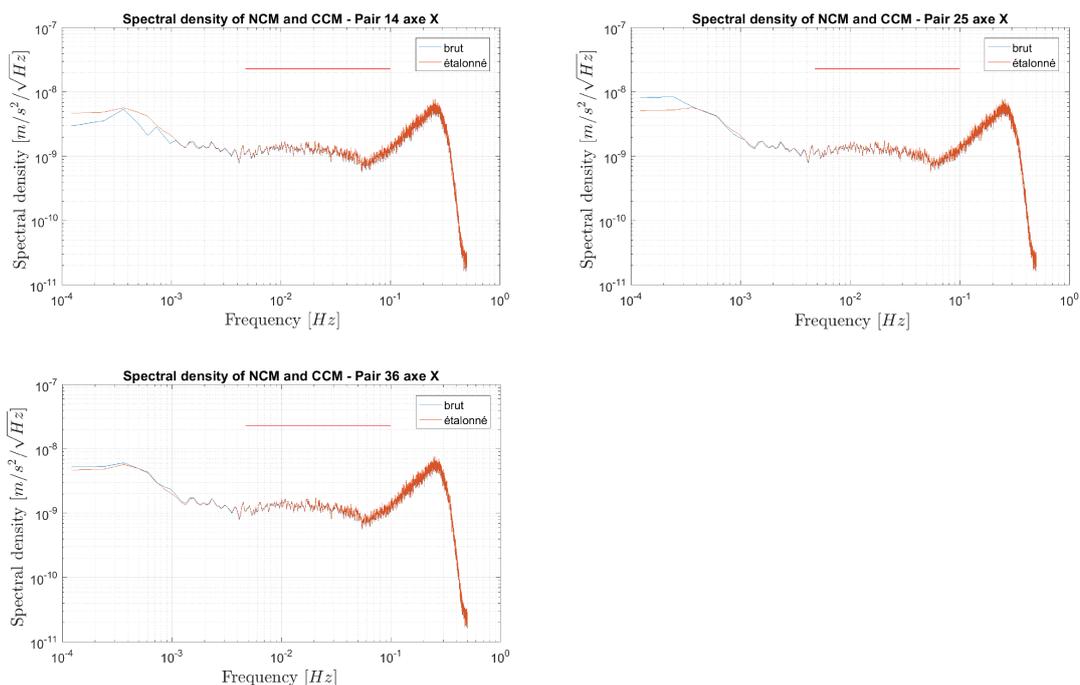


Figure 4.9 – Densités spectrales des modes communs nominaux et étalonnés pour toutes les paires selon X - données du 02/11/09 au 03/11/09.

période (figure 4.11). On observe qu’au-dessus de 30°S (en se dirigeant vers l’hémisphère Nord), l’altitude du satellite est plus basse. La traînée est donc plus importante, ce qui augmente l’activité des propulseurs. La résultante des deux actions est plus importante que lorsque le satellite est à haute altitude. On note que le mode commun atteint des valeurs importantes entre 30°S et 60°N, lors de la transition de l’altitude.

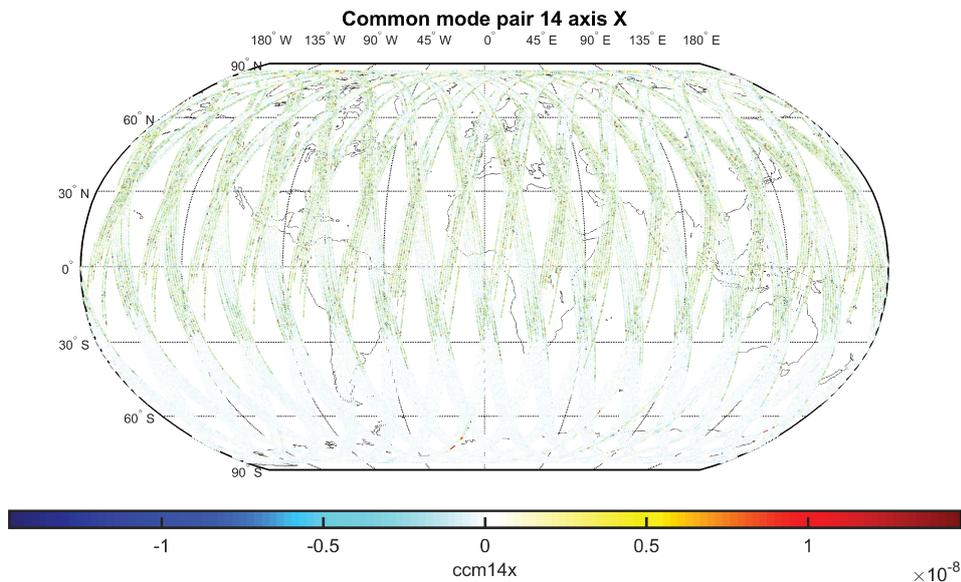


Figure 4.10 – Variations du mode commun pour la paire 1-4 selon X le long de l’orbite - données du 02/11/09 au 10/11/09.

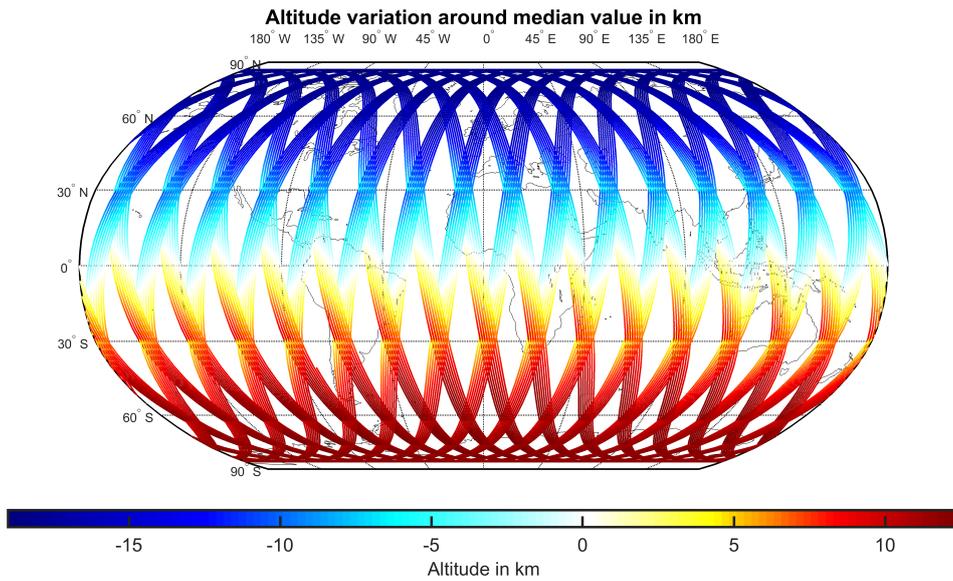


Figure 4.11 – Variations de l’altitude du satellite le long de l’orbite - données du 02/11/09 au 10/11/09.

#### 4.4.2 Évolution des modes communs nominaux et étalonnés pendant la mission

Dans cette partie, on s’intéresse à l’évolution temporelle des modes communs nominaux et étalonnés entre le 2 novembre 2009 et le 2 mars 2013. Cette période est incluse dans la période d’opération qui s’étend du 2 novembre 2009 à octobre 2013. La raison pour laquelle on se restreint à une sous-période est qu’on ne dispose des modes communs nominaux que jusqu’au 2 mars 2013 dans les données disponibles à l’ONERA. Cette sous-période permet toutefois de représenter pleinement l’évolution des mesures pendant la mission. Néanmoins, il faut noter que pour un fichier donné, il peut y avoir des trous de mesures (allant de quelques secondes à quelques heures). Par ailleurs, il peut y avoir des périodes de trous beaucoup plus longues, lors de l’étalonnage par exemple ou lors de résolution d’anomalies.

Un aspect important nécessaire au préalable avant l’exploitation des données est de traiter les données aberrantes qui peuvent être très nombreuses dans une période perturbée. Les accélérations mesurées ne sont pas régulières, certains pics peuvent être dus à des phénomènes physiques indépendants du satellite. Ce qu’on appelle données aberrantes correspond à des valeurs d’accélération dont l’amplitude est extrême et rare par rapport au reste de la série temporelle, ou alors à des paliers qui correspondent par exemple à des modifications d’altitude. Afin d’exclure ces données aberrantes, on a utilisé la méthode dite du *mean absolute deviation* (abrégée en *MAD*), préconisée par plusieurs publications [98, 99, 100, 101]. L’avantage principal du *MAD* est qu’il s’agit d’une grandeur insensible aux valeurs aberrantes, à moins qu’une très large proportion des données ne soient affectées [98]. Le *MAD* est défini par la relation :

$$MAD = bM(|y - M(y)|) \quad (4.41)$$

où  $M(y)$  est la médiane de la série temporelle considérée. En règle générale, lorsqu’il est possible de supposer la normalité dans le processus aléatoire générant les données,  $b = 1.4826$  [100].

À partir du *MAD* on définit le critère de décision en imposant un seuil de tolérance  $\tau$  : toute valeur  $y_t$  telle que  $|y_t - M(y)| \geq \tau MAD$  est considérée comme aberrante. Pour l’évolution des modes communs, les seuils de tolérance ont été sélectionnés empiriquement en fonction de l’amplitude des signaux :

- pour l’axe  $X$  du gradiomètre et pour toutes les paires, la tolérance choisie est  $\tau = 25$  ; Pour pouvoir

discriminer les valeurs aberrantes des autres, il faut une valeur élevée car les amplitudes des signaux sont très petits ;

- pour l'axe  $Y$  du gradiomètre et pour toutes les paires, la tolérance choisie est  $\tau = 17$  ;
- pour l'axe  $Z$  du gradiomètre et pour toutes les paires, la tolérance choisie est  $\tau = 10$ .

La figure 4.12 illustre l'utilisation de cet outil sur le mode commun de la paire 1-4 selon l'axe  $X$  entre le 01/03/2011 et le 08/03/2011. La courbe bleue correspond aux données initiales et la courbe orange aux données corrigées. Le palier observé sur les données initiales est une opération de descente du satellite [102]. Les propulseurs appliquent une poussée, ce qui crée un biais constant dans les mesures, le temps de l'opération. Les droites verte et rouge sont les seuils supérieur et inférieur acceptables des valeurs. On voit que l'utilisation du MAD avec le choix de tolérance ci-dessus permet d'éliminer les signaux extrêmes tout en laissant le doute pour des pics d'amplitudes beaucoup plus faibles.

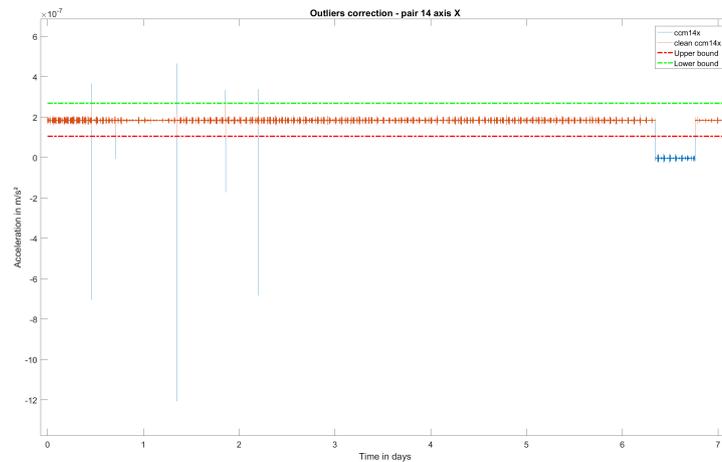


Figure 4.12 – Exemple de mode commun corrigé des données aberrantes - Paire 1-4, axe  $X$  - données du 01/03/2011 au 08/03/2011.

À partir des données corrigées, on a représenté l'évolution des modes communs par paire et par axe au cours de la mission. Pour des raisons de mémoire informatique, on a choisi comme exemple seulement sept séries temporelles, correspondant à sept mois de données à intervalle à peu près régulier. Pour chaque mode commun, la série temporelle comprend au total 15 952 197 points. Les périodes choisies sont :

- du 2 novembre 2009 au 1er décembre 2009 ;
- du 1er avril 2010 au 1er mai 2010 ;
- du 4 octobre 2010 au 31 octobre 2010 ;
- du 2 mai 2011 au 1er juin 2011 ;
- du 1er novembre 2011 au 1er décembre 2011 ;
- du 1er mai 2012 au 1er juin 2012 ;
- du 1er septembre 2012 au 1er octobre 2012.

Par ailleurs, pour chaque série temporelle, à l'aide d'une régression linéaire sur les valeurs étalonnées, on a estimé la dérive du niveau d'accélération mesuré. Les figures 4.13 à 4.15 présentent l'évolution des modes communs nominaux et étalonnés pour chaque axe et chaque paire d'accéléromètres sur une période de trois ans. On précise que ces signaux ne sont pas corrigés des biais. Pour l'axe  $X$  du gradiomètre (en principe aligné avec la direction de vol du satellite), on note que tout au long de la mission, les modes mesures nominaux et étalonnées sont restés remarquablement stables et similaires. Il apparaît que pendant la toute première période (02/09/11 au 01/12/2009), c'est-à-dire immédiatement au début de la phase de d'acquisition

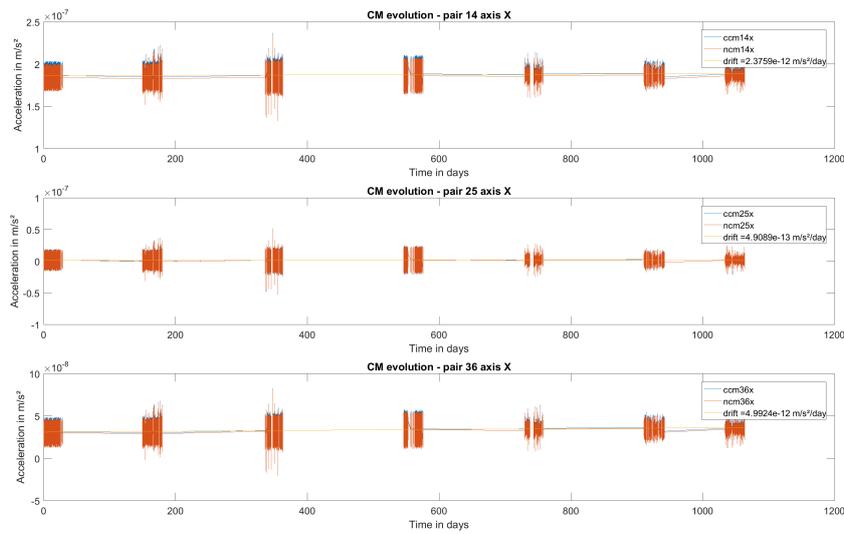


Figure 4.13 – Évolution des modes communs selon X sur une période de trois ans.

scientifiques, les signaux sont les moins variables et les plus complets. La dérive du signal a également été quantifiée : de l'ordre de quelques  $10^{-12}$  m/s<sup>2</sup>/jour pour la paire 1-4 et 3-6 et de l'ordre de quelques  $10^{-13}$  m/s<sup>2</sup>/jour pour la paire 2-5. La faible dérive entraîne un biais total au bout de trois ans de quelques  $10^{-9}$  m/s<sup>2</sup> dans le cas des paires 1-4 et 2-5 et de quelques  $10^{-10}$  m/s<sup>2</sup> dans le cas de la paire 3-6. Cette stabilité traduit la performance de la compensation de traînée le long de la direction de vol.

Pour les axes Y et Z (transverse et radial), on note que les perturbations des signaux croissent au cours du temps. Ce phénomène est très visible pour la paire 2-5 dans la direction Z qui est la seule paire utilisant des axes moins-sensibles selon cet axe. Bien que les masses d'épreuve soient positionnées différemment, les signaux mesurés pour un axe donné devraient être relativement similaires. C'est le cas si on compare les mesures de la paire 1-4 avec celles de la paire 2-5 pour l'axe Z. En ce qui concerne la dérive pour l'axe Z, l'ajustement par une droite est moins précise du fait de la forme de signaux. Par conséquent, comme il apparaît sur la figure 4.15, la dérive de l'ordre de  $-10^{-10}$  m/s<sup>2</sup>/jour est une légère surestimation de la dérive réelle. Le biais total est donc sans doute inférieure à  $10^{-7}$  m/s<sup>2</sup>, bien que ce ne soit pas négligeable devant l'amplitude des accélérations mesurées.

Les accélérations mesurées par les paires 2-5 et 3-6 selon l'axe Y sont relativement stables au cours du temps avec une dérive de l'ordre de  $-10^{-10}$  m/s<sup>2</sup>/jour et un biais total de l'ordre de  $-10^{-7}$  m/s<sup>2</sup>. En revanche, on note une nette dérive pour la paire 1-4 avec une dérive de  $1.89 \times 10^{-9}$  m/s<sup>2</sup>/jour et un biais total de  $1.89 \times 10^{-6}$  m/s<sup>2</sup>. L'analyse formulée pour l'axe Z peut être reprise ici : l'écart entre les accélérations mesurées par les paires 1-4 et 2-5/3-6 laisse présager une dérive d'un biais dans les mesures. On note toutefois que dans la forme des signaux, les mesures des accéléromètres 1-4 et 2-5 sont davantage similaires, comparés aux acquisitions de la paire 3-6.

#### 4.4.3 Pré-traitement des données avant analyse spectrale

Afin d'obtenir une estimation du bruit de mesures des accéléromètres, on utilise la différence des modes communs. Dans cette partie, on étudie d'abord cette grandeur dans le domaine temporel. La figure 4.16 présente un exemple typique de modes communs étalonnés sur une durée de cinq jours, en l'occurrence des paires 1-4 et 2-5 le long de l'axe  $X_{GRF}$  (deux premières séries temporelles). Sont aussi présentées la différence nominale des deux modes communs ainsi que la même différence corrigée du biais (deux dernières séries

#### 4.4. Présentation des données utilisées

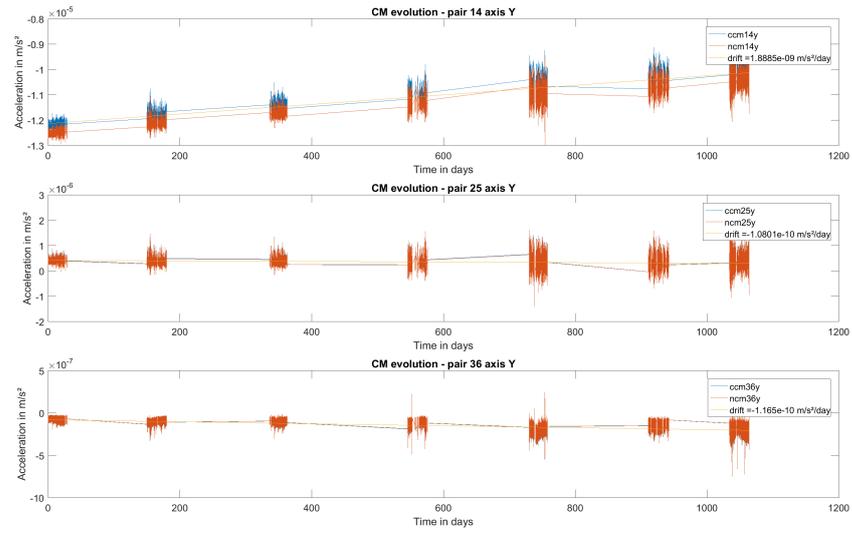


Figure 4.14 – Évolution des modes communs selon Y sur une période de trois ans.

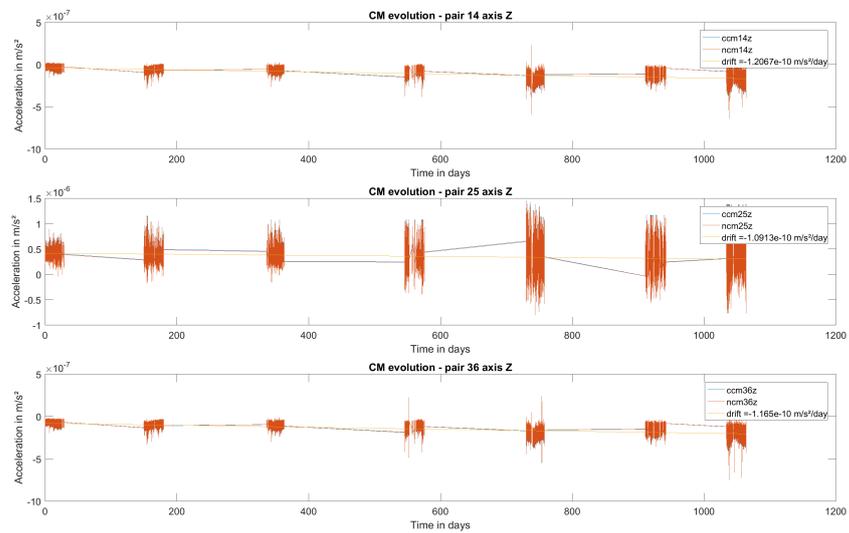


Figure 4.15 – Évolution des modes communs selon Z sur une période de trois ans.

temporelles).

Dans l'optique d'étudier le niveau de bruit, on a tout d'abord sélectionné les segments de données continues car l'estimation de densités spectrales est perturbée par la présence de données manquantes car le repliement de spectre peut être fortement amplifié, ce qui augmente notablement le niveau de bruit estimé [103]. Cette affirmation peut être justifiée de la manière suivante. On considère un processus stationnaire discret échantillonné à 1 Hz de moyenne nulle et dont on a une réalisation sous forme de signal  $y(t)$ . La présence de données manquantes est équivalente à multiplier ce signal initial par une fenêtre temporelle  $w(t)$  qui prend pour valeur 0 aux instants où les données sont manquantes et 1 ailleurs. On suppose que les lieux des trous et leur durée sont aléatoires de sorte que, le signal avec données manquantes, noté  $\tilde{y}(t)$ , peut être considéré comme une réalisation d'un processus à peu près stationnaire. Par ailleurs, ayant des séries temporelles de durée finie, on ne peut obtenir leur densités spectrales exactes mais seulement des estimateurs dont le périodogramme est un exemple. Appliqué au signal avec données manquantes, ce-dernier est défini par :

$$\tilde{P}(f) = \frac{1}{N} \left| \sum_{t=1}^N y(t) w(t) e^{-2i\pi f t} \right|^2 \quad (4.42)$$

Dans le cadre de l'argument développé, l'objectif est de démontrer qu'estimer un niveau de bruit à partir d'une série temporelle avec données manquantes est erroné. Pour cela, on s'intéresse à l'espérance du périodogramme  $\tilde{S}(f) = \mathbb{E} \{ \tilde{P}(f) \}$ . En développant le module au carré, il vient :

$$\begin{aligned} \tilde{S}(f) &= \mathbb{E} \left\{ \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \sum_{s=1}^N y(t) w(t) y^*(s) w^*(s) e^{-2i\pi f(t-s)} \right\} \\ &= \left\{ \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \sum_{s=1}^N w(t) w^*(s) r(t-s) e^{-2i\pi f(t-s)} \right\} \\ &= \left\{ \frac{1}{N} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} S(\psi) \left[ \sum_{t=1}^N \sum_{s=1}^N w(t) w^*(s) e^{-2i\pi(f-\psi)(t-s)} \right] d\psi \right\} \\ &= \left\{ \frac{1}{N} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} S(\psi) \left| \sum_{t=1}^N w(t) e^{-2i\pi(f-\psi)t} \right|^2 \right\} \\ &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} S(\psi) W(f-\psi) d\psi \end{aligned} \quad (4.43)$$

La seconde et la troisième égalité viennent de l'introduction de la fonction de covariance du processus  $y(t)$  définie par :

$$\mathbb{E} \{ y(t) y^*(s) \} = r(t-s) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} S(f) e^{2i\pi f(t-s)} df \quad (4.44)$$

où  $S(\omega)$  est la densité spectrale du processus  $y(t)$ . La dernière égalité fait intervenir le périodogramme de la fenêtre temporelle  $w(t)$  :

$$W(f-\psi) = \frac{1}{N} \left| \sum_{t=1}^N w(t) e^{-2i\pi(f-\psi)t} \right|^2 \quad (4.45)$$

Si l'on considère que  $y(t)$  est un signal issu d'une réalisation d'un processus stochastique stationnaire, le calcul précédent montre que le périodogramme du signal avec données manquantes pour une fréquence donnée est la convolution de la densité spectrale du signal initial et du périodogramme de la fenêtre temporelle. Dans

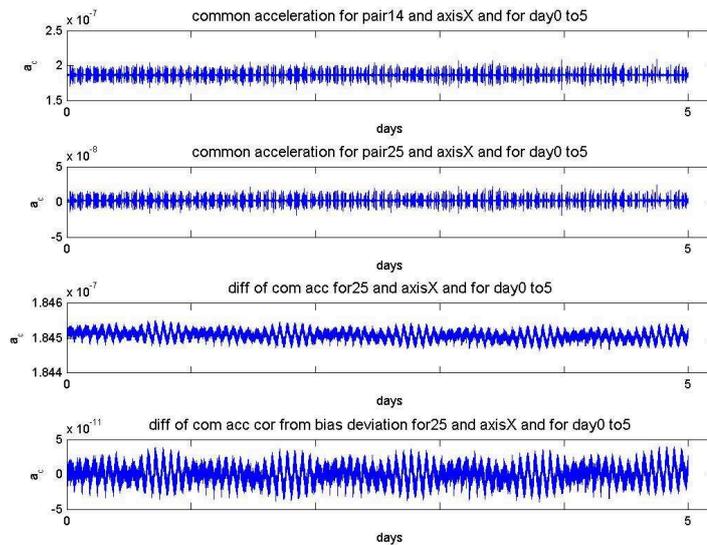


Figure 4.16 – Mode commun des paires 1-4 et 2-5 (deux premières séries) puis leur différence nominale et corrigée du biais (deux dernières séries).

le cas considéré, la fenêtre temporelle correspond à une suite non-périodique de créneaux d’amplitude 1 et de durées déterminées par les plages du signal  $y(t)$  dont les données ne sont pas manquantes. Cette convolution a pour conséquence d’accentuer localement l’effet de repliement spectral et en fin de compte, de surestimer le niveau de bruit. Par ailleurs, ce repliement dépend du nombre de données manquantes, de leur durée, de leur disposition ainsi que de la densité spectrale réelle du processus étudié. Ainsi, si la densité spectrale du processus exhibe une forte remontée aux basses ou aux hautes fréquences, le phénomène d’aliasing sera plus important. À titre d’exemple, on a généré, sur une durée de 24 h, une réalisation d’un processus stochastique à partir d’une densité spectrale d’expression :

$$S(f) = 2.02 \times 10^{-26} + \frac{1.638 \times 10^{-27}}{f} + 8.203 \times 10^{-19} f^4 \quad (4.46)$$

La méthode suivie pour générer cette réalisation suit l’algorithme proposé par Timmer [104]. On a supposé l’existence de 100 intervalles répartis aléatoirement suivant une loi uniforme sur la durée du signal simulé. La durée de ces intervalles est uniformément distribué dans l’intervalle [1 s – 5 s]. La figure 4.17 (en haut à gauche) représente le signal simulé avec les données manquantes répertoriées par des bandes. La suite de créneaux correspondant aux données manquantes et son périodogramme sont respectivement représentés en haut à droite et en bas à droite. Enfin, en bas à gauche, ont été représentées la densité spectrale réelle (courbe verte), l’estimation de la densité spectrale à partir du signal simulé (courbe bleue) et celle à partir du signal avec données manquantes (courbe orange). Il apparaît clairement qu’à cause de la remontée importante du bruit aux hautes fréquences, le repliement de spectre augmente fortement le niveau de la densité spectrale estimée.

Par ailleurs, il est nécessaire de sélectionner des périodes plutôt courtes afin de limiter la contribution de l’énergie des résidus de signaux déterministes dans la différence des modes communs. Ainsi, les segments sont sectionnés en sous-périodes de 10 orbites par exemple. Une inspection visuelle permet d’éliminer les sous-périodes clairement inutilisables, par exemple lorsque un événement à bord du satellite a corrompu les données. Pour les période utilisables, les pics, paliers et autres valeurs aberrantes ont été supprimées à l’aide de la méthode du MAD. Ceci a pour conséquence de sous-segmenter davantage encore les séries temporelles,

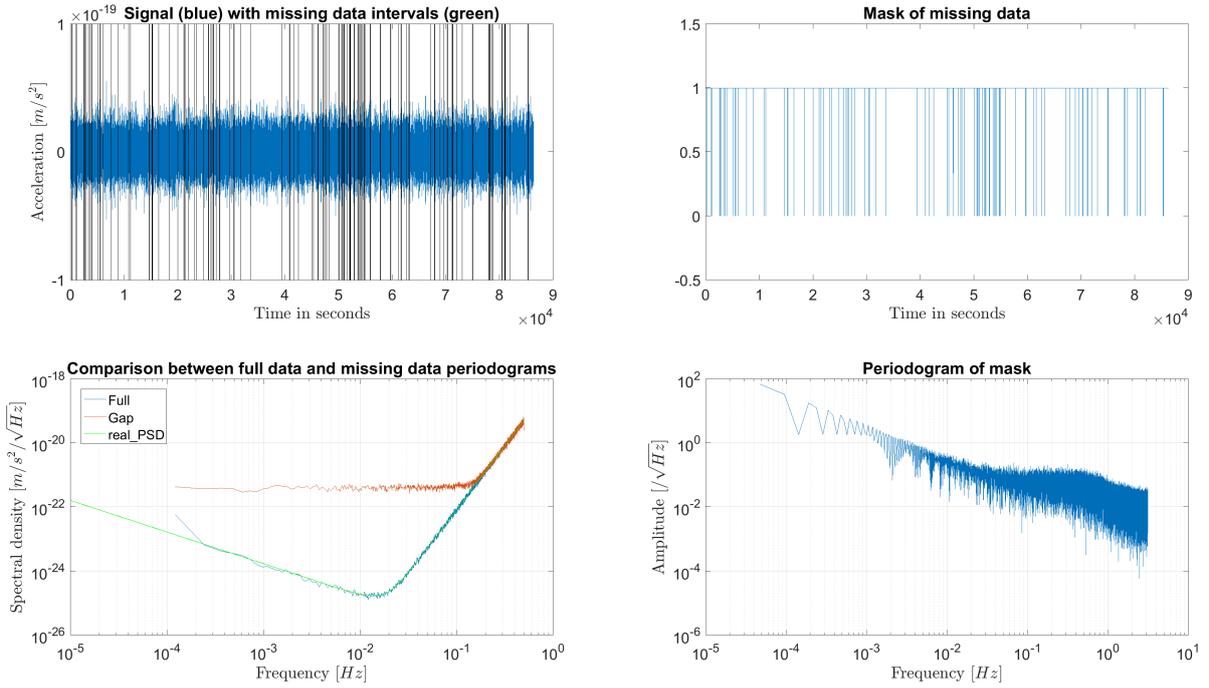


Figure 4.17 – Effet de données manquantes sur l’estimation de la densité spectrale d’un signal.

de sorte que certains segments continus ne représentent que quelques heures. Étant donné que notre objet d’intérêt est le bruit et non le signal, cela n’a pas une incidence négative majeure. Ensuite, pour chacun des segments de données continus, la valeur médiane a été corrigée afin de centrer les valeurs autour de 0 et la tendance linéaire a été corrigé à l’aide d’un polynôme de degré 1.

Enfin, pour chacun des segments obtenu après ces étapes de pré-traitement, la densité spectrale du signal a été estimée à l’aide de la méthode de Welch [105] : chaque segment continu de taille  $N$  est divisé en sous-segments de taille  $M$  avec recouvrement. La taille du recouvrement est  $K$ . Au total, il y a donc  $S$  segments, de sorte que si  $y(t)$  est la série temporelle initiale, le segment  $j$  obtenu s’écrit :

$$y_j(t) = y((j - 1)K + t) \tag{4.47}$$

où  $t = 1, \dots, M$  et  $j = 1, \dots, S$ . Pour chaque segment  $y_j$ , une fenêtre d’apodisation  $v(t)$  de taille  $M$  est appliquée puis le périodogramme est estimé à l’aide d’une transformée de Fourier discrète :

$$\hat{P}_j(f) = \frac{1}{MU} \left| \sum_{t=1}^M v(t)y_j(t)e^{-2i\pi f t} \right|^2 \tag{4.48}$$

où  $U$  est la puissance de la fenêtre d’apodisation :

$$U = \frac{1}{M} \sum_{t=1}^M |v(t)|^2 \tag{4.49}$$

Enfin, l’estimateur de la densité spectrale  $\hat{P}_w$  obtenu par la méthode Welch correspond à la moyenne des

périodogrammes calculés sur chacun des  $S$  segments :

$$\hat{P}_w(f) = \frac{1}{S} \sum_{j=1}^S \hat{P}_j(f) \quad (4.50)$$

La méthode de Welch présente trois avantages importants. Premièrement, autoriser le recouvrement des segments et moyenniser tous les périodogrammes obtenus permettent de réduire la variance de l'estimateur de la densité spectrale. Deuxièmement, l'utilisation d'une fenêtre d'apodisation permet de limiter l'effet dû au recouvrement des segments qui a pour conséquence une corrélation plus importante entre les périodogrammes de deux segments consécutifs, et donc d'augmenter la variance de l'estimateur. Troisièmement, le choix d'une fenêtre d'apodisation, dont la transformée de Fourier a des pics secondaires de faibles amplitudes par rapport au pic principal, permet de diminuer les effets de repliement de spectres d'une fréquence vers les fréquences voisines [106]. Par conséquent, bien que le périodogramme obtenu par la méthode de Welch soit aussi biaisé, il l'est moins que dans le cas du périodogramme classique sans sous-segment ni fenêtre d'apodisation. Dans le traitement des données GOCE, on a fait le choix d'utiliser une fenêtre de Hanning définie par la fonction :

$$v(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi t}{M}\right) \quad (4.51)$$

pour  $0 \leq t \leq M-1$  et  $v(t) = 0$  dans les autres cas. En outre,  $v(t) = v(-t)$ . Enfin, afin de réduire davantage la variance et d'obtenir une estimation moyenne de la densité spectrale du bruit des accéléromètres, on a moyenné l'estimation des densités spectrales de tous les segments continus qui s'étendent de novembre 2009 à décembre 2013. Les résultats sont présentés dans la partie suivante.

Les densités spectrales de la figure 4.17 (en bas à gauche) sont estimées à l'aide de la méthode de Welch avec une fenêtre de Hanning. En particulier, en comparant l'estimation de la densité spectrale à partir des données simulées (courbe bleue) à la densité spectrale réelle (courbe verte), on note que la méthode de Welch aboutit à un estimateur quasiment non biaisé, sauf aux basses fréquences. Cette vérification, en addition de l'utilisation étendue de la méthode de Welch dans la littérature, ont mené au choix de cette méthode pour l'analyse spectrale sur la différence des modes communs.

Comme le montre l'équation (4.39), dans la différence des modes communs étalonnés, il y a, d'une part, un couplage entre les axes pour les bruits qui interviennent dans l'expression. D'autre part, les bruits différentiels sont également présents. Ainsi, à moins que le gradiomètre ne soit parfait, et donc que la matrice d'étalonnage inverse ne soit égale à l'identité, la différence des modes communs mène à une combinaison linéaire des différents bruits des accéléromètres des paires impliquées. Cependant, les sessions d'étalonnage ont montré que les termes correspondant au couplage et au mésalignement, c'est-à-dire les termes non-diagonaux des matrices  $\left[\widehat{MI}_{ij}^{(d)}\right]$  et  $\left[\widehat{MI}_{kl}^{(c)}\right]$  sont de l'ordre de  $10^{-5}$  ou  $10^{-7}$ . Par ailleurs, pour les matrices  $\left[\widehat{MI}_{ij}^{(d)}\right]$  et  $\left[\widehat{MI}_{kl}^{(d)}\right]$ , les termes diagonaux sont au plus de l'ordre de  $10^{-2}$  et les termes non-diagonaux sont au plus de l'ordre de  $10^{-5}$ . Par conséquent, en première approximation et pour chaque axe du repère  $R_{GRF}$ , on considère que les bruits différentiels et les effets de couplage/mésalignement sont négligeables devant les bruits communs le long de l'axe considéré, c'est-à-dire qu'on approxime l'équation (4.39) ainsi :

$$\widehat{\mathbf{a}}_{ij}^{(c)} - \widehat{\mathbf{a}}_{kl}^{(c)} \approx \mathbf{n}_{kl}^{(c)} - \mathbf{n}_{ij}^{(c)} = \frac{1}{2} (\mathbf{n}_k + \mathbf{n}_l - \mathbf{n}_i - \mathbf{n}_j) \quad (4.52)$$

Il n'en reste pas moins qu'utiliser la différence des modes communs ne permet seulement que d'estimer un bruit moyen des accéléromètres. Néanmoins, comparer deux à deux les résultats obtenus avec les différentes paires mobilisées apporte une information sur le bruit relatif des accéléromètres.

En pratique, afin d'obtenir le bruit moyen d'un seul accéléromètre, une normalisation est nécessaire. En

effet, on trouve dans l'équation précédente le bruit des quatre accéléromètres  $\mathbf{n}_i$ ,  $\mathbf{n}_j$ ,  $\mathbf{n}_k$  et  $\mathbf{n}_l$ . Chaque accéléromètre ayant deux axes sensibles (US) et un axe moins sensible (LS), on dénote respectivement par  $n_i^{US}$  et  $n_i^{LS}$  le bruit selon un axe US et LS pour l'accéléromètre  $i$ . Les circuits d'asservissement étant différents entre les accéléromètres, on peut supposer que leur bruit intrinsèque ne sont pas corrélés, de sorte que pour deux instants  $t$  et  $s$ , et deux accéléromètres  $i$  et  $j$ , on a  $\mathbb{E}\{n_i^{US/LS}(t)n_j^{US/LS}(s)\} = 0$ .

Le calcul simple suivant donne la normalisation nécessaire en fonction de la sensibilité de l'axe considéré. On considère d'abord le premier cas où pour un axe du repère  $R_{GRF}$  donné, les paires d'accéléromètre ( $i, j$ ) et ( $k, l$ ) utilisent toutes deux leurs axes sensibles uniquement ou leur axe moins sensible uniquement : par exemple, pour les accéléromètres 1-4 et 2-5 selon l'axe  $X$  du repère  $R_{GRF}$  ou pour les paires 1-4 et 3-6 pour l'axe  $Y$  du repère  $R_{GRF}$ . Pour simplifier les calculs, on part de l'une des définitions de la densité spectrale :

$$S(f) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \mathbb{E} \left\{ \frac{1}{N} \left| \sum_{t=1}^N y(t) e^{-2i\pi f t} \right|^2 \right\} = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \sum_{s=1}^N \mathbb{E} \{ y(t) y^*(s) \} e^{-2i\pi(t-s)f} \quad (4.53)$$

où  $y(t) = \frac{1}{2} (n_k^{US/LS}(t) + n_l^{US/LS}(t) - n_i^{US/LS}(t) - n_j^{US/LS}(t))$ . On rappelle que dans ce premier cas, soit tous les axes utilisés sont sensibles, soit tous moins sensibles.

Avec les hypothèses précédentes, il vient :

$$\begin{aligned} S(f) &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \sum_{s=1}^N \frac{1}{4} [n_k^{US/LS}(t)n_k^{*US/LS}(t) + n_l^{US/LS}(t)n_l^{*US/LS}(t) \\ &\quad - n_i^{US/LS}(t)n_i^{*US/LS}(t) - n_j^{US/LS}(t)n_j^{*US/LS}(t)] e^{-2i\pi(t-s)f} \\ &= \frac{1}{4} [S_k^{US/LS}(f) + S_l^{US/LS}(f) + S_i^{US/LS}(f) + S_j^{US/LS}(f)] \end{aligned} \quad (4.54)$$

où  $S_i^{US/LS}(f)$  est la densité spectrale de puissance du bruit de l'accéléromètre  $i$ .

Les accéléromètres étant de conception normalement identique, on peut supposer que tous les bruits ont une même distribution statistique et donc la même densité spectrale. Donc, en posant  $S_k^{US/LS}(f) = S_l^{US/LS}(f) = S_i^{US/LS}(f) = S_j^{US/LS}(f) = S^{US/LS}(f)$ , il vient  $S_n(f) = S^{US/LS}(f)$ . Ainsi, lorsqu'on considère un axe du repère  $R_{GRF}$  pour lequel les accéléromètres utilisent tous un axe sensible ou tous un axe moins sensible, la densité spectrale de la différence des modes communs donne, en théorie et en première approximation, une estimation du niveau de bruit d'un accéléromètre. Il n'y a donc pas de facteur de normalisation à utiliser.

Le second cas que l'on considère est celui pour lequel, selon l'axe du repère  $R_{GRF}$  considéré, deux accéléromètres utilisent un axe sensible et les deux autres, un axe moins sensible. Ce cas de figure survient par exemple lorsque l'on utilise les paires 1-4 et 3-6 selon l'axe  $Z$  du repère  $R_{GRF}$ . La différence avec le premier cas provient du fait que par conception, le bruit de mesure d'un accéléromètre selon un axe moins sensible est 100 fois supérieur à celui selon un axe sensible. En théorie, on peut donc négliger le bruit des axes sensibles devant celui de l'axe moins sensible. Pour le calcul, supposons que la paire ( $k, l$ ) utilise l'axe moins sensible et que la paire ( $i, j$ ) utilise un axe sensible. En tenant compte de la remarque précédente et en réitérant le calcul précédent, il vient :

$$S(f) = \frac{1}{4} [S_k^{LS}(f) + S_l^{LS}(f)] \quad (4.55)$$

En supposant que les bruits ont la même distribution, alors :

$$S(f) = \frac{1}{2} S^{LS}(f) \quad (4.56)$$

Ainsi, lorsqu'on considère un axe du repère  $R_{GRF}$  pour lequel deux accéléromètres utilisent un axe sensible et deux autres leur axe moins sensible, il faut multiplier par deux l'estimation de la densité spectrale de la différence des modes communs pour retrouver une estimation du bruit de mesure d'un accéléromètre le long d'un axe moins sensible.

## 4.5 Résultats des analyses spectrales

### 4.5.1 Résultats des analyses spectrales sur les différences de modes communs étalonnés

Dans cette partie est présentée l'estimation des densités spectrales des différences de modes communs selon les axes  $X$ ,  $Y$  et  $Z$  du repère  $R_{GRF}$ . La figure 4.18 illustre, en prenant pour exemple les modes communs des paires 1-4 et 2-5 selon l'axe  $X$ , la configuration des accéléromètres et la direction dans laquelle la différence des modes communs est mesurée.

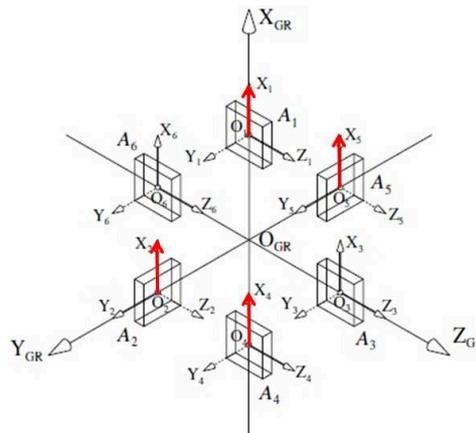


Figure 4.18 – Exemple de configuration dans l'utilisation de la différence des modes communs.

Pour l'axe  $X$  du repère  $R_{GRF}$ , les résultats sont présentés dans la figure 4.19, où la courbe noire représente les spécifications et la courbe verte représente le bruit nominal, c'est-à-dire le bruit d'un accéléromètre estimé *a priori* après conception des accéléromètres. Les autres courbes correspondent aux estimations moyennes des densités spectrales des différences de mode commun pour toutes les paires d'accéléromètres et entre Novembre 2009 et Décembre 2012. C'est la durée pendant laquelle l'altitude est restée relativement stable (environ 260km). Au-delà, le satellite a entamé une descente progressive avec des signaux de plus en plus bruités.

Il apparaît que dans aucun cas, le niveau de bruit moyen estimé pour un accéléromètre n'est inférieur aux spécifications. Aux basses fréquences, la pente est approximativement parallèle à la spécification avec une remontée en  $1/f$ . Par ailleurs, dans la bande de mesure (5 mHz à 100 mHz), le niveau de bruit atteint au minimum  $7 \times 10^{-12} \text{ m/s}^2/\sqrt{\text{Hz}}$  (pour la différence des modes communs avec les paires 1-4/2-5) et au maximum  $10^{-11} \text{ m/s}^2/\sqrt{\text{Hz}}$  (pour la différence des modes communs avec les paires 2-5/3-6). En comparaison, dans la bande de mesure, le niveau de bruit spécifié est  $2 \times 10^{-12} \text{ m/s}^2/\sqrt{\text{Hz}}$ .

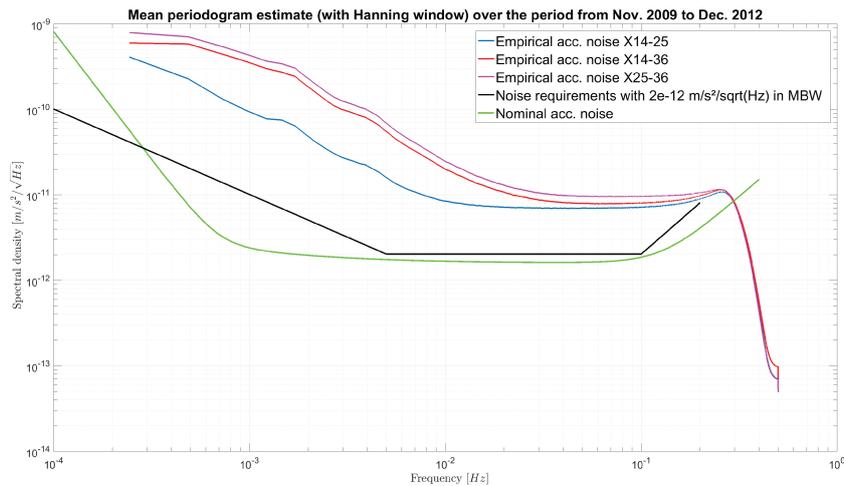


Figure 4.19 – Estimation du périodogramme moyen avec une fenêtre de Hanning du bruit des accéléromètres pour l'axe  $X_{GRF}$  entre Novembre 2009 et Décembre 2012.

Puisque chaque paire apparaît deux fois dans les différences de modes communs, il est possible de déduire une classification. En effet, la différence des modes communs mobilisant les paires 2-5 et 3-6 présente le niveau de bruit le plus élevé, et celle impliquant les paires 1-4 et 2-5 présente le niveau de bruit le moins élevé. Ceci laisse penser que c'est la paire 3-6 qui est davantage bruitée. Cette déduction semble être corroborée par le fait que la courbe rouge, correspondant aux paires 1-4 et 3-6, est au-dessus de la courbe bleue.

Pour l'axe  $Y$  du repère  $R_{GRF}$ , la figure 4.20 montre que, dans la bande de mesure, tous les bruits respectent quasiment le niveau de bruit spécifié sur la période étudiée c'est-à-dire  $4 \times 10^{-10} \text{ m/s}^2 / \sqrt{\text{Hz}}$  à comparer avec  $3 \times 10^{-10} \text{ m/s}^2 / \sqrt{\text{Hz}}$ . En outre, on remarque que les densités spectrales estimées sont identiques et relativement plates entre 5 mHz et 0.2 Hz, ce qui montre que les différences de modes communs pour l'axe  $Y$  sont quasiment des bruits blancs. Cependant, il est à noter l'existence de pics de peu d'énergie et d'origine restée inconnue à 45 mHz, 90 mHz et 100 mHz. En-dessous de 5 mHz, le niveau de bruit estimé a une remontée légèrement inférieure à la spécification qui a une pente en  $1/f$ . Comme expliqué dans la partie précédente, la paire d'accéléromètres 2-5 utilise un axe sensible pour les mesures selon l'axe  $Y$  du repère  $R_{GRF}$ . Par conséquent, les différences des modes communs 1-4/2-5 et 2-5/3-6 donnent une estimation du bruit moyen des paires 1-4 (courbe bleue) et 3-6 (courbe violette). Il apparaît donc que le bruit moyen des accéléromètres 1 et 4 est très légèrement supérieur à celui des accéléromètres 2 et 5. Cette différence est accentuée aux basses fréquences.

L'analyse spectrale des différences de modes communs pour l'axe  $Y$  ne permet pas d'obtenir d'estimation du bruit de mesure pour la paire 2-5. En effet, pour cet axe, les accéléromètres 2 et 5 sont les seuls à ne pas utiliser leur axe moins sensible pour les mesures.

Enfin, les figures 4.21 et 4.22 présentent les résultats pour l'axe  $Z$  du repère  $R_{GRF}$ . Pour cet axe, seules les paires 1-4 et 3-6 utilisent un axe sensible. En utilisant l'une ou l'autre comme référence pour estimer un majorant du bruit des accéléromètres de la paire 2-5, on observe que le profil du niveau de bruit est quasi-constant avec une valeur d'environ  $4.5 \text{ m/s}^2 / \sqrt{\text{Hz}}$  (cf. figure 4.21). En revanche, lorsqu'on estime une moyenne du bruit des accéléromètres 1-4 et 3-6, le niveau de bruit est supérieur à  $10^{-11} \text{ m/s}^2 / \sqrt{\text{Hz}}$ . Les profils de bruit sont similaires aux résultats obtenus pour les axes  $X$  et  $Y$  du repère  $R_{GRF}$ .

Les figures 4.19 à 4.22 correspondent à des estimations moyennées sur trois ans mais les valeurs utilisées pour obtenir ces résultats montrent qu'au cours du temps, les densités spectrales pour tous les axes et toutes

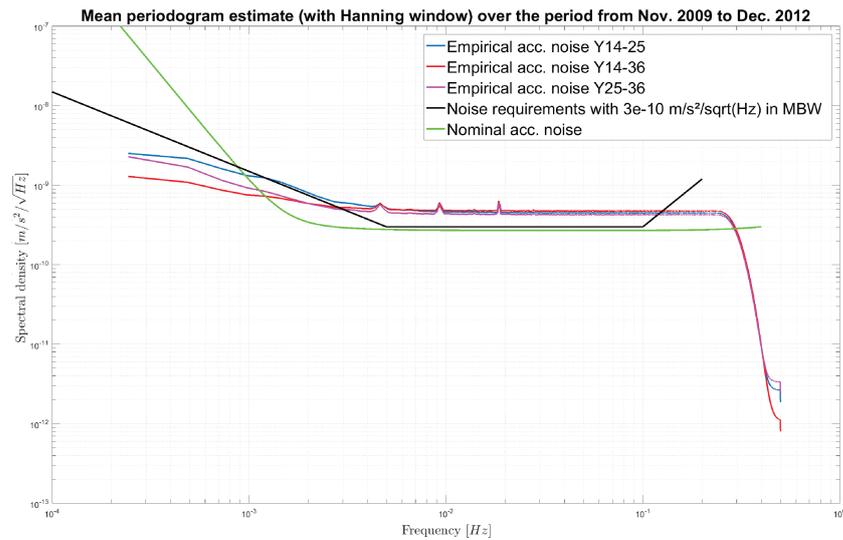


Figure 4.20 – Estimation du périodogramme moyen avec une fenêtre de Hanning du bruit des accéléromètres pour l’axe  $Y_{GRF}$  entre Novembre 2009 et Décembre 2012.

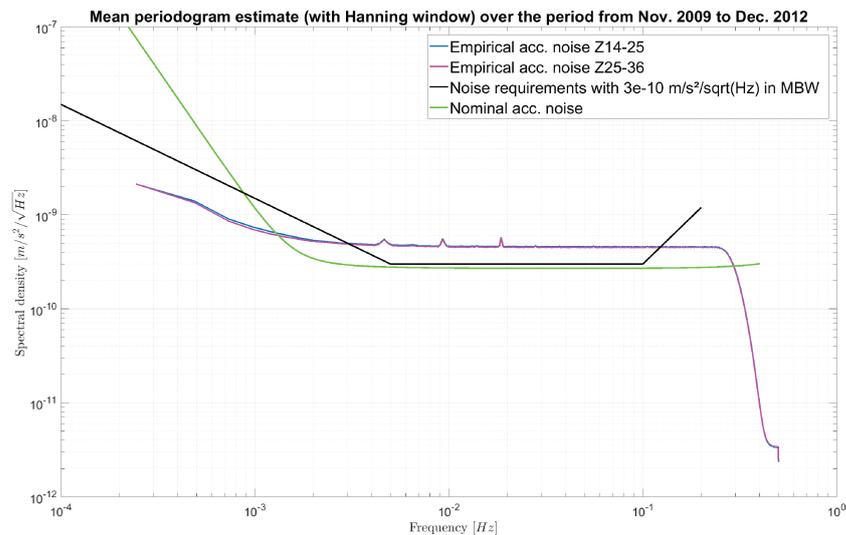


Figure 4.21 – Estimation du périodogramme moyen avec une fenêtre de Hanning du bruit des accéléromètres 1-4/2-5 et 2-5/3-6 pour l’axe  $Z_{GRF}$  entre Novembre 2009 et Décembre 2012.

les différences de modes communs sont très stables au-dessus de 5 mHz. Autrement dit, le niveau de bruit estimé n’a pas varié au cours de la mission. Étant donné que les circuits électroniques des accéléromètres sont indépendants, cette observation montre que le niveau de bruit est probablement dû à l’asservissement électronique.

Les relations (3.40) à (3.45) permettent d’obtenir un majorant du niveau de bruit attendu pour les composantes diagonales de la matrice du gradient de gravité, en supposant que tout le bruit est concentré dans les modes différentiels, c’est-à-dire que les vitesses angulaires n’introduisent pas de bruit. Pour les axes sensibles, les valeurs estimées pour le *plancher* du bruit sont entre  $7 \times 10^{-12} \text{ m/s}^2 / \sqrt{\text{Hz}}$  et  $10^{-11} \text{ m/s}^2 / \sqrt{\text{Hz}}$  pour les mesures selon l’axe  $X$  du repère  $R_{GRF}$ . Pour l’axe  $Z$ , le bruit moyen estimé est d’environ  $10^{-11} \text{ m/s}^2 / \sqrt{\text{Hz}}$ . Ainsi, le bruit attendu au-dessus de 50 mHz pour les composantes  $V_{xx}$  et  $V_{yy}$  devrait être entre  $21 \text{ mE} / \sqrt{\text{Hz}}$  et  $40 \text{ mE} / \sqrt{\text{Hz}}$ ,

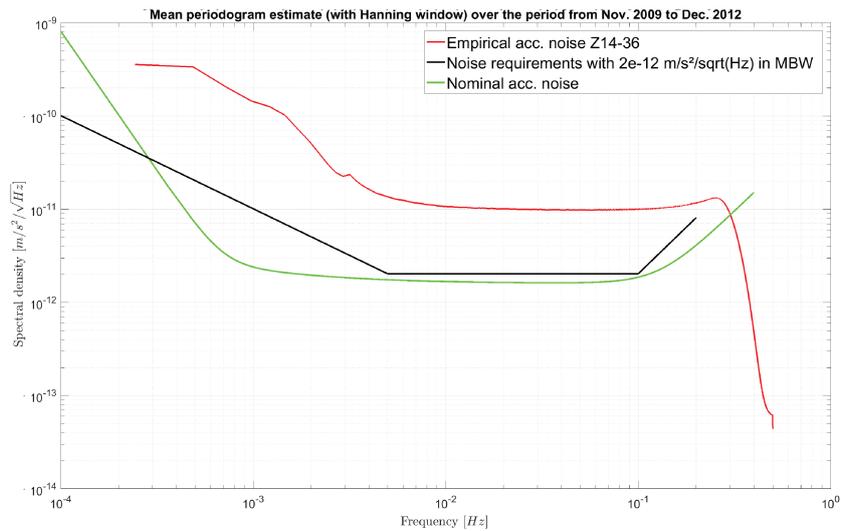


Figure 4.22 – Estimation du périodogramme moyen avec une fenêtre de Hanning du bruit des accéléromètres 1-4 et 3-6 pour l’axe  $Z_{GRF}$  entre Novembre 2009 et Décembre 2012.

et devrait être de  $40 \text{ mE}/\sqrt{\text{Hz}}$  pour la composante  $V_{zz}$ . Ces valeurs sont largement supérieures au bruit observé pour les composantes  $V_{xx}$  et  $V_{yy}$  (environ  $10 \text{ mE}/\sqrt{\text{Hz}}$ , pour rappel) et pour la composante  $V_{zz}$  (environ  $19 \text{ mE}/\sqrt{\text{Hz}}$ ). Ainsi, de deux choses l’une : ou bien les valeurs moyennes du bruit de mesure des accéléromètres présentées dans cette partie sont largement surestimées, ou bien le bruit dans les modes différentiels sont inférieurs. Dans la suite du chapitre, les deux assertions sont étudiées.

Par ailleurs, les densités spectrales estimées pour l’axe  $X$  montrent que le bruit n’est pas blanc dans toute la bande de mesure. Ce phénomène est particulièrement visible pour les différences de modes communs avec les paires 1-4/3-6 et 2-5/3-6. Une cause possible provient du fait que la paire 3-6 est placée dans la direction radiale où l’intensité du gradient de gravité est la plus importante. Cela se manifeste par une énergie plus importante dans les basses fréquences dans la densité spectrale du mode commun de la paire 3-6. Étant donné qu’un résidu de signal déterministe est possible dans les différences de modes communs, on peut alors se demander dans quelle mesure, dans le calcul des spectres, le bruit en basses fréquences influence celui dans la bande de mesure et mène à une surestimation du niveau de bruit. Cette question est également légitime pour les autres différences de modes communs avec des paires utilisant uniquement un axe sensible. Pour y répondre, l’approche suivante a été choisie : afin de modéliser le résidu de signal déterministe, un filtre de Savitzky-Golay (cf. annexe D) a été utilisé pour lisser le signal de la différence des modes communs dans le domaine temporel ; puis ce signal a été retranché du signal initial pour obtenir une série temporelle qui ne devrait contenir que du bruit ; enfin, la densité spectrale est estimée avec la méthode de Welch. L’idée derrière le filtre de Savitzky-Golay est d’approximer localement les données par un polynôme. La figure 4.23 montre un exemple de cette procédure avec les données du 2 au 3 novembre 2009 : la différence des modes communs des paires 1-4 et 2-5 dans le domaine temporel (courbe bleue) est lissée grâce à la méthode de Savitzky-Golay (courbe verte). Cette courbe verte modélise le signal déterministe et en le soustrayant au signal initial, on obtient un résidu (courbe orange). La méthode de Savitzky-Golay doit tenir compte du degré du polynôme ajusté et de la taille fenêtre de lissage. Pour le degré du polynôme, on a choisi une valeur de 1, c’est-à-dire qu’on fait l’hypothèse que localement, le signal est linéaire. Pour la taille de la fenêtre de lissage, on a fait le choix expérimental de prendre la longueur 201. On a comparé la densité spectrale estimée pour le signal initial avec celle estimée pour le signal résiduel (figure 4.24). Cette comparaison montre que l’influence du bruit en basses fréquences vers la bande 5 mHz-100 mHz n’explique pas le niveau de bruit observé.

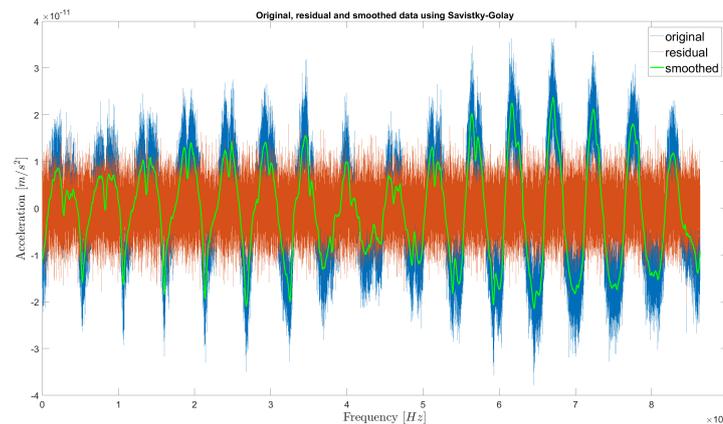


Figure 4.23 – Signaux initial, lissé et résiduel obtenus avec la méthode de Savitzky-Golay.

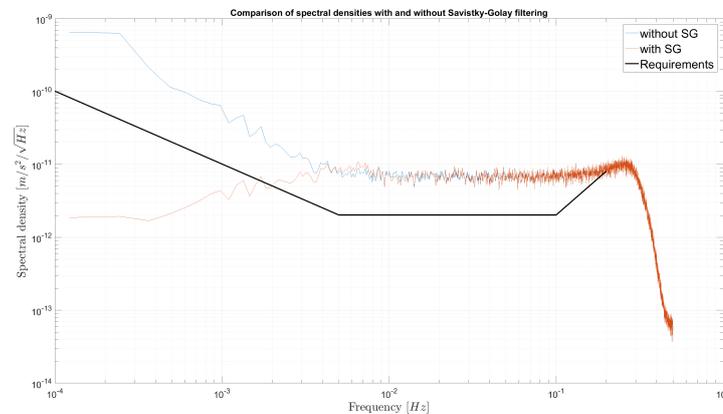


Figure 4.24 – Comparaison densité spectrale du signal initial avec celle du signal résiduel.

Un dernier point d'analyse est abordé pour clore cette partie. En-dessous de 3 mHz, la spécification du bruit de mesure en accélération suit une loi en  $1/f$ , soit  $1/f^2$  en puissance (cf. courbe noire de la figure 4.22 par exemple). En revanche, le profil du bruit (de mesure en accélération) nominal suit une loi en  $1/f^3$  due à l'effet du bruit thermique et de la fluctuation des forces parasites sur la stabilité du biais [76] (cf. courbe verte de la figure 4.22 par exemple). L'importance de ces deux contributeurs dépendent des profils du bruit thermique dans la cage d'électrodes et dans le FEEU, spécifiés par ALCATEL, et qui suivent respectivement, en signal, une loi en  $1/f^2$  et en  $1/f^3$  en-dessous de 3 mHz [76]. Les estimations des densités spectrales à partir des différences de modes communs mesurés montrent plutôt que le profil du bruit suit une loi en  $1/f$  (cf. courbes de la figure 4.19 par exemple), ce qui laisse supposer que les profils des bruits thermiques sont largement surestimés. En effet, cette observation est confirmée par l'estimation de la densité spectrale (en signal) de la température dans une cage d'électrodes et dans un circuit FEEU. À titre d'exemple, on a considéré, d'une part, la température à l'intérieur de la cage d'électrodes de l'accéléromètre 1 et, d'autre part, la température dans la partie du FEEU destiné au contrôle des axes Y/Z de l'accéléromètre 1. Les données utilisées datent de la période du 2 novembre 2009 au 2 décembre 2009.

La figure 4.25 présente la densité spectrale estimée à partir de la mesure de la température dans la cage de l'accéléromètre 1 sur la période considérée. La droite rouge correspond à une loi en  $1/\sqrt{f}$  ajustée en-dessous de 1 mHz et la droite verte correspond au bruit nominal déterminé par ALCATEL avec pour loi  $10^{-9}/f^2$ . Il apparaît donc qu'en-dessous de 0.5 mHz, à part l'existence d'un pic à la fréquence orbitale, la densité spectrale de la température suit globalement une loi en  $1/\sqrt{f}$ . L'énergie du pic est due à la longueur de la

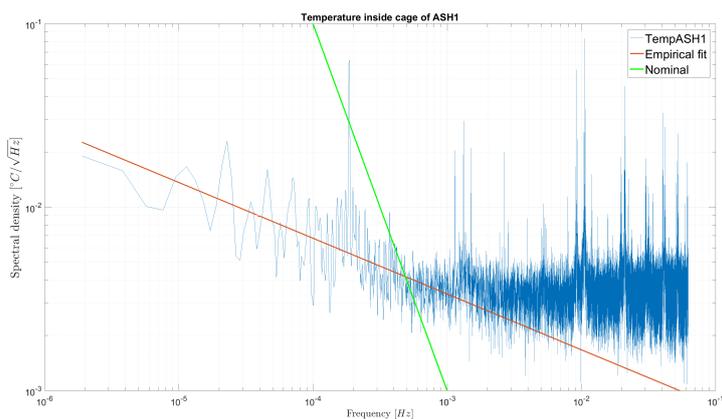


Figure 4.25 – Densité spectrale estimée de la température dans la cage de l'accéléromètre 1.

période considérée. Par ailleurs, au-dessus de 0.6 mHz, le bruit de la température est couvert par le bruit de digitalisation de la mesure. La densité spectrale estimée n'est alors plus représentative du bruit réel.

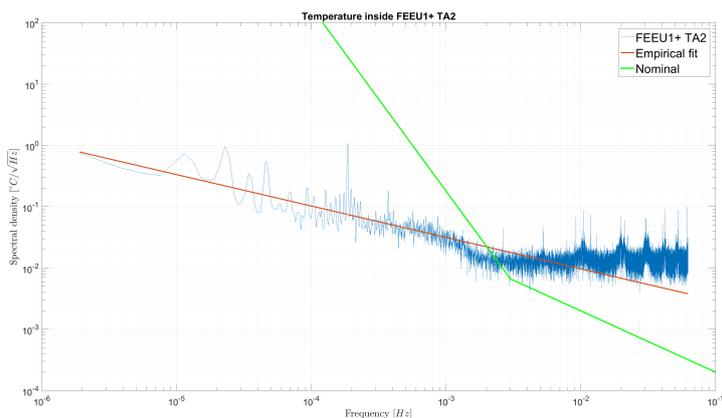


Figure 4.26 – Densité spectrale estimée de la température dans le circuit FEEU contrôlant les axes Y et Z de l'accéléromètre 1.

La figure 4.26 montre la densité spectrale estimée de la température dans le circuit FEEU destiné au contrôle des axes Y et Z de l'accéléromètre 1. La courbe verte correspond au bruit nominal selon ALCATEL avec une loi en  $1/f^3$  en-dessous de  $3 \times 10^{-3}$  mHz et une loi en  $1/f$  au-dessus. La courbe rouge est la droite ajustée en-dessous de 1 mHz et suit une loi en  $1/\sqrt{f}$ . De même que précédemment, la densité spectrale empirique aux basses fréquences est en-dessous du bruit nominal. C'est pourquoi le bruit estimé d'un accéléromètre le long d'un axe sensible ne suit pas, aux basses fréquences, une loi en  $1/f^3$  prévue par le bruit nominal.

On précise que si le bruit thermique empirique suit une loi en  $1/\sqrt{f}$  en signal, il n'est alors plus le contributeur prépondérant en-dessous de 5 mHz. C'est pourquoi, les profils des densités spectrales en signal estimées à partir de la différence des modes communs ne suivent pas une loi en  $1/\sqrt{f}$ .

### 4.5.2 Comparaison des densités spectrales des différences de modes communs nominaux et étalonnés

Les résultats présentés dans partie précédente correspondent aux différences de modes communs étalonnés. Il est intéressant de comparer ces résultats à ceux obtenus avec des différences de modes communs non étalonnés. Les figures 4.27 à 4.29 montrent la comparaison de l'estimation des densités spectrales des modes communs nominaux (courbes oranges) et étalonnés (courbes bleues) pour tous les axes et combinaisons possibles pour la journée du 2 novembre 2009. La courbe rouge (pointillés) indique le niveau de bruit spécifié dans la bande de mesure du gradiomètre. Il apparaît que dans tous les cas, l'étalonnage permet de réduire le niveau de bruit, surtout aux basses fréquences, en corrigeant les défauts dans les mesures accélérométriques. L'amélioration dans les basses fréquences est la plus importante pour les axes moins sensibles, c'est-à-dire l'axe Y pour la paire 1-4 et 3-6 et l'axe Z pour la paire 2-5. En revanche, on remarque que l'ordre de grandeur des niveaux de bruit estimés au-dessus de 5 mHz reste le même dans le cas nominal et dans le cas étalonné. On peut donc conclure que le processus d'étalonnage du gradiomètre n'est pas à l'origine d'un bruit plus important.

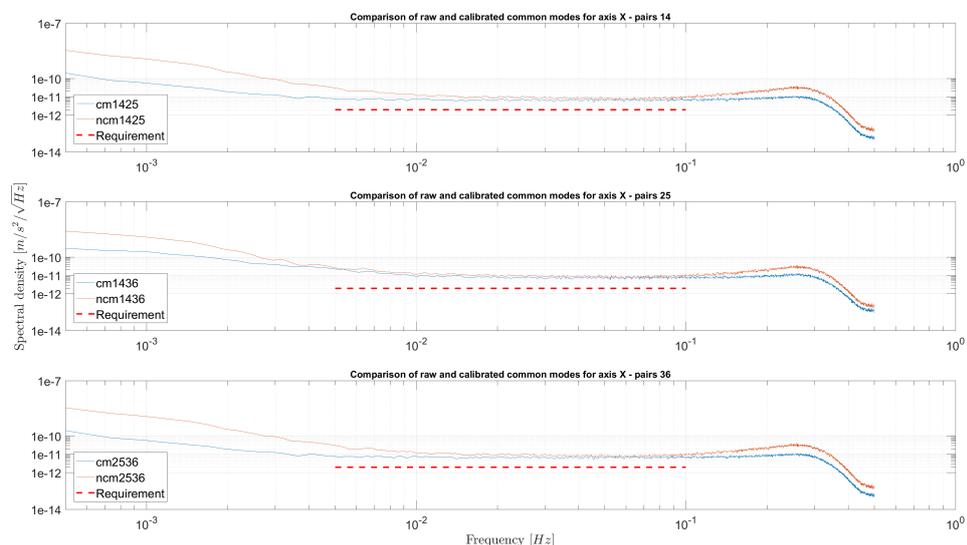


Figure 4.27 – Densités spectrales des différences de modes communs nominaux et étalonnés - axe X.

### 4.5.3 Analyse spectrale sur des différences pondérées de modes communs

Bien que l'étalonnage du gradiomètre soit rigoureux et que les correspondances personnelles avec un membre de l'ESA en charge de l'étalonnage indiquent sa confiance en la précision de l'estimation de la matrice d'étalonnage, on a vérifié si l'étalonnage peut être amélioré. Une manière de le tester est de former des différences pondérées de modes communs à partir desquels on applique la méthode d'analyse spectrale présentée dans la partie précédente. Afin d'illustrer cette idée, le calcul est fait dans le cas où seul le facteur d'échelle est à prendre en compte. Cette simplification est justifiée par le fait que les sessions d'étalonnage ont révélé que les termes de mésalignement et de couplage sont négligeables devant les facteurs d'échelle, c'est-à-dire que très peu de correction est à prendre en compte. Par ailleurs, comme il n'est pas possible d'estimer les facteurs d'échelle absolus mais seulement d'égaliser les facteurs d'échelles différentiels et communs. Par conséquent, la connaissance des facteurs d'échelles absolus peut ne pas être optimale. Pour un axe  $\epsilon$  donné,

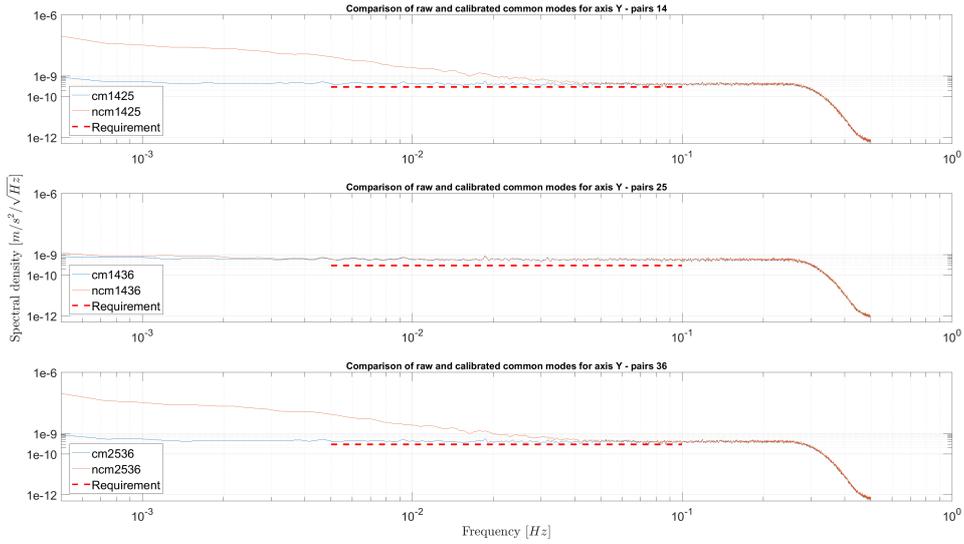


Figure 4.28 – Densités spectrales des différences de modes communs nominaux et étalonnés - axe Y.

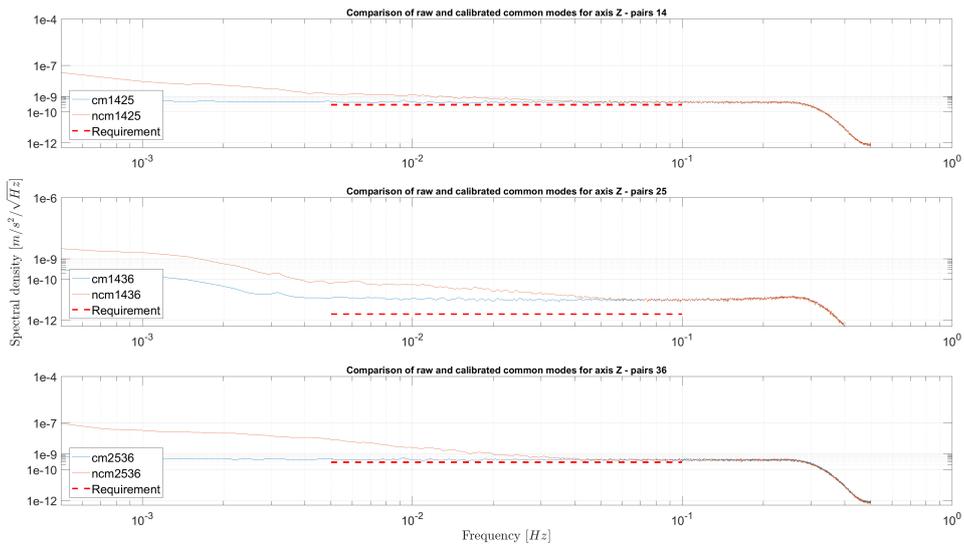


Figure 4.29 – Densités spectrales des différences de modes communs nominaux et étalonnés - axe Z.

l'équation d'étalonnage s'écrit dans ce cas :

$$\Gamma_{ij,\epsilon}^{(c)} = \left(1 + K_{ij,\epsilon}^{(c)}\right) a_{ij,\epsilon}^{(c)} + K_{ij,\epsilon}^{(d)} a_{ij,\epsilon}^{(d)} + Q_{ij,\epsilon}^{(c)} + b_{ij,\epsilon}^{(c)} + n_{ij,\epsilon}^{(c)} \quad (4.57)$$

$$\Gamma_{ij,\epsilon}^{(d)} = K_{ij,\epsilon}^{(d)} a_{ij,\epsilon}^{(c)} + \left(1 + K_{ij,\epsilon}^{(c)}\right) a_{ij,\epsilon}^{(d)} + Q_{ij,\epsilon}^{(d)} + b_{ij,\epsilon}^{(d)} + n_{ij,\epsilon}^{(d)} \quad (4.58)$$

Étant donné que les facteurs quadratiques peuvent être corrigés de manière satisfaisante [107] et que les valeurs peuvent être centrées autour de 0, les facteurs quadratiques et les biais sont omis dans la suite du développement. En remplaçant la deuxième équation dans la première, on obtient l'expression d'un mode

commun étalonné dans ce cas simplifié :

$$a_{ij,\epsilon}^{(c)} = \frac{(1 + K_{ij,\epsilon}^{(c)})^2}{(1 + K_{ij,\epsilon}^{(c)})^2 - K_{ij,\epsilon}^{(d)}} \left( \frac{1}{1 + K_{ij,\epsilon}^{(c)}} \Gamma_{ij,\epsilon}^{(c)} - \frac{K_{ij,\epsilon}^{(d)}}{(1 + K_{ij,\epsilon}^{(c)})^2} \Gamma_{ij,\epsilon}^{(d)} + \frac{K_{ij,\epsilon}^{(d)}}{(1 + K_{ij,\epsilon}^{(c)})^2} n_{ij,\epsilon}^{(d)} - \frac{1}{1 + K_{ij,\epsilon}^{(c)}} n_{ij,\epsilon}^{(c)} \right) \quad (4.59)$$

$$\approx \left( 1 - K_{ij,\epsilon}^{(c)} \right) \Gamma_{ij,\epsilon}^{(c)} - K_{ij,\epsilon}^{(d)} \Gamma_{ij,\epsilon}^{(d)} - \left( 1 - K_{ij,\epsilon}^{(c)} \right) n_{ij,\epsilon}^{(c)} + K_{ij,\epsilon}^{(d)} n_{ij,\epsilon}^{(d)}$$

en ayant fait un développement limité à l'ordre 1. On peut modéliser la méconnaissance des facteurs d'échelle avec un terme multiplicatif  $(1 + dK_{ij})$ , de sorte que  $\tilde{a}_{ij,\epsilon}^{(c)} = (1 + dK_{ij}) a_{ij,\epsilon}^{(c)}$  et si on considère deux paires d'accéléromètres :

$$\tilde{a}_{ij,\epsilon}^{(c)} - \tilde{a}_{kl,\epsilon}^{(c)} = (1 + dK_{ij}) a_{ij,\epsilon}^{(c)} - (1 + dK_{kl}) a_{kl,\epsilon}^{(c)} \quad (4.60)$$

En faisant varier les facteurs  $dK_{ij}$  et  $dK_{kl}$ , on peut alors étudier la variation de la densité spectrale estimée. Il est équivalent de ne faire varier qu'un seul des deux facteurs de proportionnalité, par exemple  $dK_{ij}$ . L'ordre de grandeur de l'écart estimé, lors des séances d'étalonnage, des facteurs d'échelles par rapport à 1 est de quelques  $10^{-2}$  et afin de prendre en compte une erreur éventuellement large sur la connaissance du facteur d'échelle, on a fait varier  $dK_{ij}$  dans l'intervalle  $[0.98, 1.02]$  avec un pas 0.001 et on a estimé la densité spectrale de la différence pondérée pour chaque point. Les figures 4.30 et 4.31 montrent un exemple de résultat pour un axe sensible et un axe moins sensible (période du 7/11/09 au 8/11/09). Pour chaque figure, la courbe rouge correspond à la densité spectrale de la différence simple des modes communs. Toutes les autres courbes au-dessous correspondent à des différences pondérées. On s'aperçoit qu'aucune pondération n'améliore le niveau de bruit, ce qui signifie que l'étalonnage du gradiomètre (tel qu'il a été conçu) a atteint une estimation optimale des facteurs d'échelle commun. On ajoute trois remarques : tout d'abord, cette analyse conduit à des conclusions identiques quel que soit l'axe sensible ou moins sensible considéré. Ensuite, la date considérée ne change pas la conclusion. Enfin, cette analyse serait valable si au lieu de considérer une erreur sur les facteurs d'échelle, on considérait une erreur sur le mésalignement ou le couplage. On peut donc conclure que le plancher du bruit estimé dans la différence simple des modes communs est représentatif du bruit moyen estimé des accéléromètres : le bruit est peu impacté par une erreur d'estimation des facteurs d'échelle.

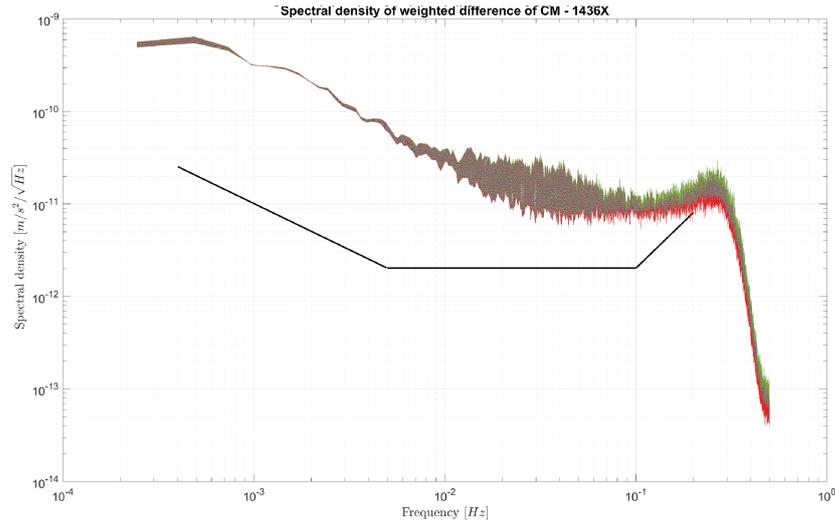


Figure 4.30 – Densités spectrales pour différentes pondérations - Paire 1-4, axe X - Période du 7/11/09 au 8/11/09.

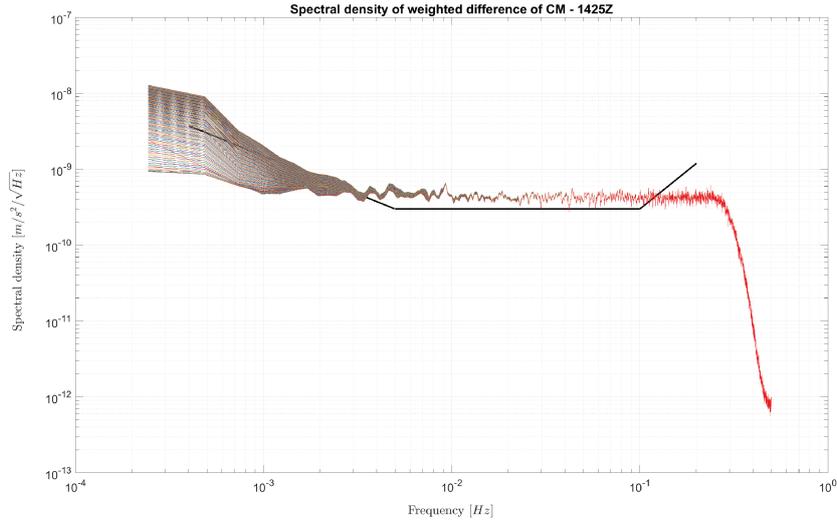


Figure 4.31 – Densités spectrales pour différentes pondérations - Paire 1-4 et 2-5, axe Z - Période du 7/11/09 au 8/11/09.

## 4.6 Analyse spectrale sur les modes différentiels et comparaison avec les modes communs

Malgré la présence de signaux déterministes, les modes différentiels peuvent également apporter une information sur le niveau de bruit estimé. L'avantage de cette approche provient du fait que les modes différentiels ne font intervenir que les mesures des deux accéléromètres d'une même paire, alors que la différence de deux modes communs font intervenir les mesures de quatre accéléromètres en tout. Autrement dit, l'analyse spectrale d'un mode différentiel apporte une information plus fine sur le bruit des accéléromètres correspondant.

Dans la partie 3.3.1, il est montré que les modes différentiels théoriques sont la somme d'un terme de la matrice de gradient de gravité et de termes dus au mouvement angulaire. En particulier, pour chaque axe du repère  $R_{GRF}$ , les modes différentiels de la paire alignée avec cet axe s'écrivent :

$$a_{14,X}^{(d)} = \frac{1}{2} L_X (-V_{XX} - \omega_Z^2 - \omega_Y^2) \quad (4.61)$$

$$a_{25,Y}^{(d)} = \frac{1}{2} L_Y (-V_{YY} - \omega_X^2 - \omega_Z^2) \quad (4.62)$$

$$a_{36,2}^{(d)} = \frac{1}{2} L_Z (-V_{ZZ} - \omega_X^2 - \omega_Y^2) \quad (4.63)$$

On rappelle, qu'en pratique, les modes différentiels sont calculés directement à partir des tensions de contrôle, puis étalonnés. Ensuite, les vitesses angulaires sont estimées par la procédure décrite dans la partie 4.1.2 et enfin, les composantes du gradient de gravité sont estimées. Ainsi, la densité spectrale d'un mode différentiel étalonné donné contient les densités spectrales d'une composante du gradient de gravité, du mouvement angulaire du satellite ainsi que d'une combinaison du bruit des accéléromètres.

Dans la suite on considère des modes différentiels étalonnés sur une période de 24 h entre le 17 avril 2012 et le 18 avril 2012 et dont on a estimé les densités spectrales (cf. figure 4.32, courbes jaunes). Le choix de cette date pour cet exemple est aléatoire mais l'analyse qui suit est vérifiée sur l'ensemble de la période d'opération scientifique de la mission. Pour évaluer la contribution due à la gravité, on a généré, pour cette

#### 4.6. Analyse spectrale sur les modes différentiels et comparaison avec les modes communs

période, avec le logiciel ACTENS les signaux correspondant aux composantes du gradient de gravité, puis on a estimé leur densité spectrale (cf. figure 4.32, courbes bleues). Pour les vitesses angulaires, ne disposant pas de valeurs théoriques simulées *a priori*, on a utilisé celles obtenues par la procédure officielle puis on a estimé les densités spectrales correspondantes (cf. figure 4.32, courbes oranges). Certes, ces valeurs contiennent une partie du bruit des accéléromètres mais elles constituent un majorant utile dans la mesure où la spécification, définie dans [73], sur l'erreur de calcul des vitesses angulaires est respectée.

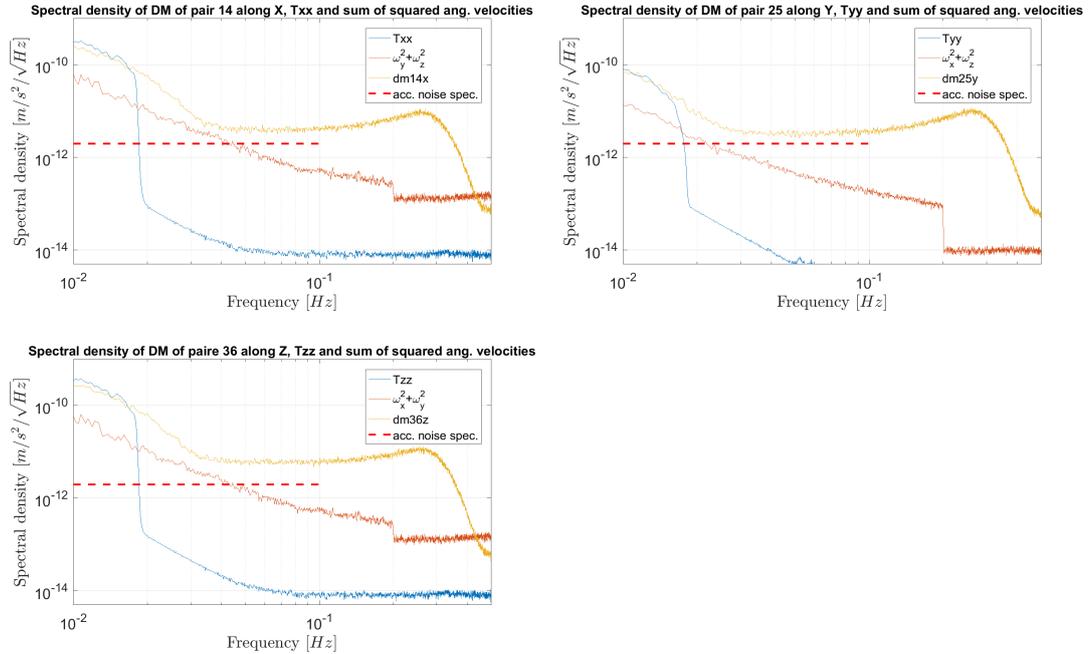


Figure 4.32 – Densités spectrales des modes différentiels selon les axes du repère  $R_{GRF}$ , des termes du gradient de gravité et des termes angulaires associés.

Il est à noter qu'afin d'obtenir une estimation représentative du bruit d'un seul accéléromètre, un facteur multiplicatif  $\sqrt{2}$  est nécessaire pour les densités spectrales des modes différentiels. Par ailleurs, en plus du facteur  $\sqrt{2}$ , afin de rapporter les densités spectrales au même niveau de comparaison, il est nécessaire de multiplier celles des composantes du gradient de gravité et des vitesses angulaires au carré par  $\sqrt{2} \frac{1}{2}$ , conformément aux relations ci-dessus. La figure 4.32 montre qu'au-delà de 20 mHz, les contributions spectrales des composantes du gradient de gravité dans les modes différentiels sont négligeables devant le bruit théorique de mesure des accéléromètres. Ceci est confirmé d'après le document de spécification [73], où le signal du gradient est simulé sur six mois de mission et où il est montré que les signatures spectrales des composantes diagonales de la matrice du gradient de gravité sont en-deçà de  $3 \times 10^{-13} \text{ m/s}^2/\sqrt{\text{Hz}}$  au-delà de 50 mHz. Par ailleurs, les densités spectrales estimées correspondant au mouvement angulaire, sachant que ce sont des majorants, ne sont pas négligeables mais, entre 0.08 Hz et 0.1 Hz, elles sont quasiment un ordre de grandeur inférieur à celles des modes différentiels. Cela montre que dans la partie supérieure de la bande de mesure, c'est-à-dire entre 0.08 Hz et 0.1 Hz, les densités spectrales des modes différentiels corrigées correspondent en théorie au bruit d'un accéléromètre. Empiriquement, on observe en effet que les niveaux de bruit de mesure des accéléromètres le long des axes du repère  $R_{GRF}$  sont proches du niveau spécifié de  $2 \times 10^{-12} \text{ m/s}^2/\sqrt{\text{Hz}}$  (cf. figure 4.32, courbes rouges en pointillés). Autrement dit, le bruit moyen des accéléromètres selon l'axe  $Z$  dans le repère  $R_{AESRF}$  serait proche de la spécification. On précise, par ailleurs, que le fait qu'en-dessous de 0.08 Hz les niveaux des densités spectrales des modes différentiels ne soient pas représentatifs du bruit de mesure est dû à la présence des signaux déterministes dans ces modes (cf. équations ci-dessus).

Ces observations contrastent fortement avec les résultats des analyses spectrales des différences de modes communs présentés précédemment. En effet, la figure 4.33 compare, pour chaque axe du repère  $R_{GRF}$ , les densités spectrales estimées des différences de modes communs et des modes différentiels. Pour chaque axe, la densité spectrale estimée du mode différentiel de la paire alignée avec cet axe (qu'on appellera, mode différentiel *axial*) est proche de la spécification entre 0.08 Hz et 0.1 Hz. En revanche, les autres modes différentiels sont largement au-dessus.

Par ailleurs, la comparaison entre les densités spectrales estimées des modes différentiels axiaux et des différences de modes communs montre que pour les axes de mesure sensibles des accéléromètres, le niveau de bruit estimé à partir des différences de modes communs est systématiquement presque deux fois supérieur à celui estimé à partir des modes différentiels (cf. figure 4.33, en haut à gauche et à droite). Une explication possible est qu'un mode différentiel contient la différence des bruits des deux accéléromètres de la paire considérée. S'il existe des sources de bruit commune aux deux accéléromètres, les signaux correspondant peuvent s'annuler en faisant la différence. Ceci est plausible dans la mesure où deux accéléromètres d'une même paire partagent certains éléments électroniques. En revanche, deux accéléromètres de deux paires différentes ne partagent pas de composant électronique. Par conséquent, dans la différence des modes communs, les signaux correspondant aux sources de bruits communes ne s'annulent pas, ce qui conduit à un niveau moyen de bruit supérieur.

Une exception peut être notée pour l'axe Y du repère  $R_{GRF}$  : les niveaux de bruits estimés à partir des différences de modes communs sont cohérents avec la densité spectrale de la paire 1-4. Cette paire n'utilisant pas ses axes sensibles pour les mesures selon l'axe Y, comme c'est le cas pour la paire 2-5, il n'y a pas de raison *a priori* d'observer cette cohérence.

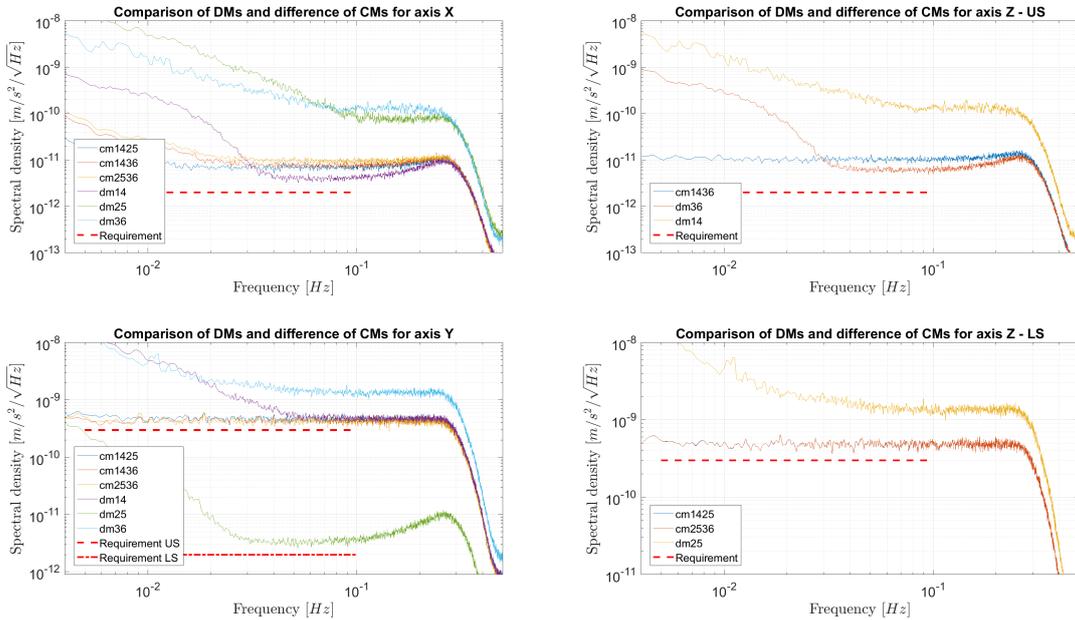


Figure 4.33 – Comparaison des densités spectrales de différences de modes communs et de modes différentiels.

L'effet de l'étalonnage est visible lors de la comparaison des densités spectrales des modes différentiels nominaux et étalonnés. La figure 4.34 montre que pour les modes différentiels axiaux (en haut à gauche), les valeurs étalonnées pour les modes différentiels 1-4 et 2-5 sont largement améliorées et rapprochées de la spécification. En revanche, on note que l'amélioration pour le mode différentiel 3-6 est peu perceptible. Comme le montre les autres figures, pour les mesures non-axiales des accéléromètres, l'étalonnage n'apporte

aucune amélioration.

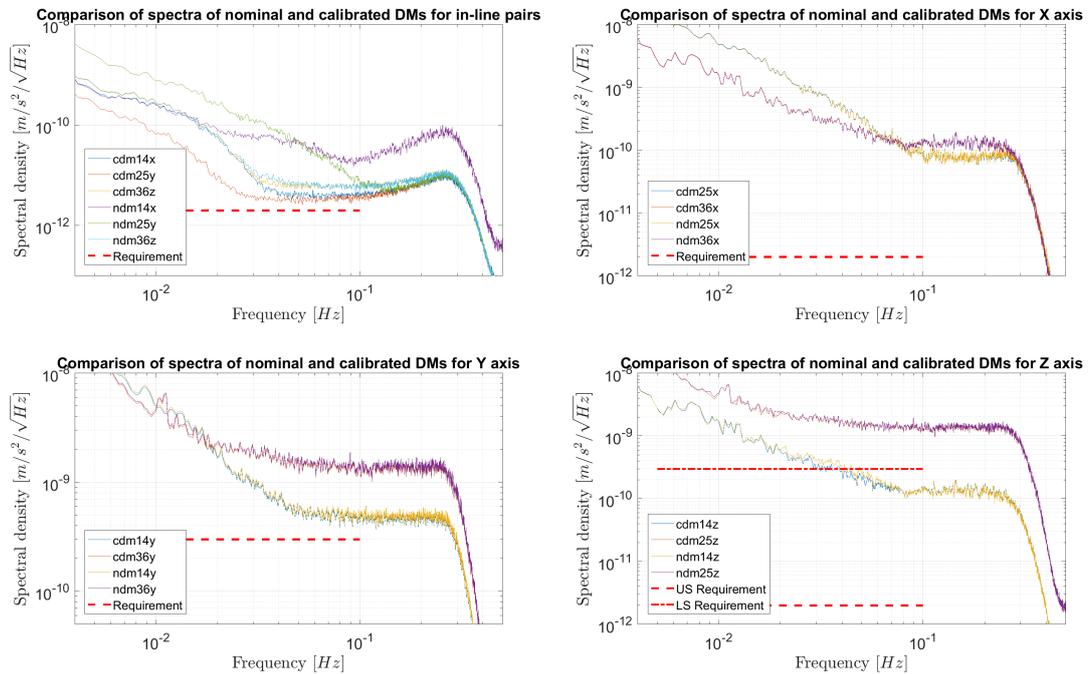


Figure 4.34 – Comparaison des densités spectrales des modes différentiels nominaux et étalonnés.

Les conclusions de l'analyse spectrale des modes différentiels axiaux, présentées dans cette partie, sont entièrement cohérentes avec les densités spectrales des composantes du gradient de gravité mesurées avec précision. Ceci est prévisible car les équations (3.40) à (3.45) et (3.47) établissent une relation directe entre ces quantités et expliquent inversement pourquoi les mesures gradiométriques de la mission reste performante malgré la présence de bruit.

## 4.7 Tensions de contrôle et de polarisation

Dans cette partie, on étudie l'évolution des tensions de contrôle et de polarisation pendant la durée de la mission. Ces valeurs font partie des données de niveau 1b sous forme de séries temporelles à 1 Hz et sont disponibles pour toutes les électrodes de chaque accéléromètre. Il s'agit valeurs non étalonnées puisque le processus d'étalonnage se fait au niveau des modes communs et différentiels. Parmi les données de niveau 1b, les tensions de contrôle sous l'appellation EGG\_CTR\_1i sont les valeurs obtenues en sortie de la branche science. En appliquant des filtres inverses de correction de phase, les valeurs en entrée de la branche science sont déduites et sont fournies sous l'appellation EGG\_CCV\_1i. Les figures 4.35 et 4.36 montrent un exemple de comparaison sur 24 h des valeurs en entrée et en sortie de la branche science pour tous les accéléromètres et toutes les tensions de contrôle et pour la période du 13-04-2012 au 14-04-2012. Toutes ces séries présentent une périodicité correspondant aux 16 orbites par jour qu'effectue le satellite. Par ailleurs, les tensions appliquées sont de l'ordre du mV, ce qui indique que les forces électrostatiques à appliquer pour maintenir les masses d'épreuve immobiles sont assez faibles. Indirectement, cette observation signifie que la modélisation des phénomènes physiques et des erreurs dans les accéléromètres est précise. Enfin, on note que la similarité des signaux devient évident lorsqu'on corrige les biais des séries temporelles.

## Chapter 4. Analyse des mesures pendant la phase opérationnelle de la mission GOCE

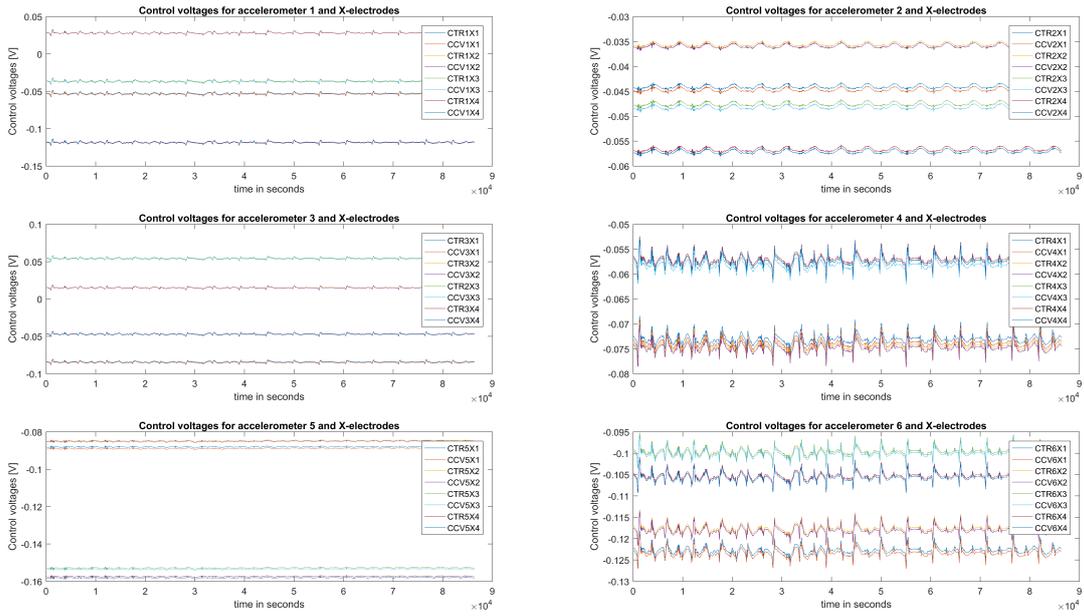


Figure 4.35 – Série temporelle de tensions de contrôle CTR et CCV pour les électrodes X pour la période du 13-04-2012 au 14-04-2012.

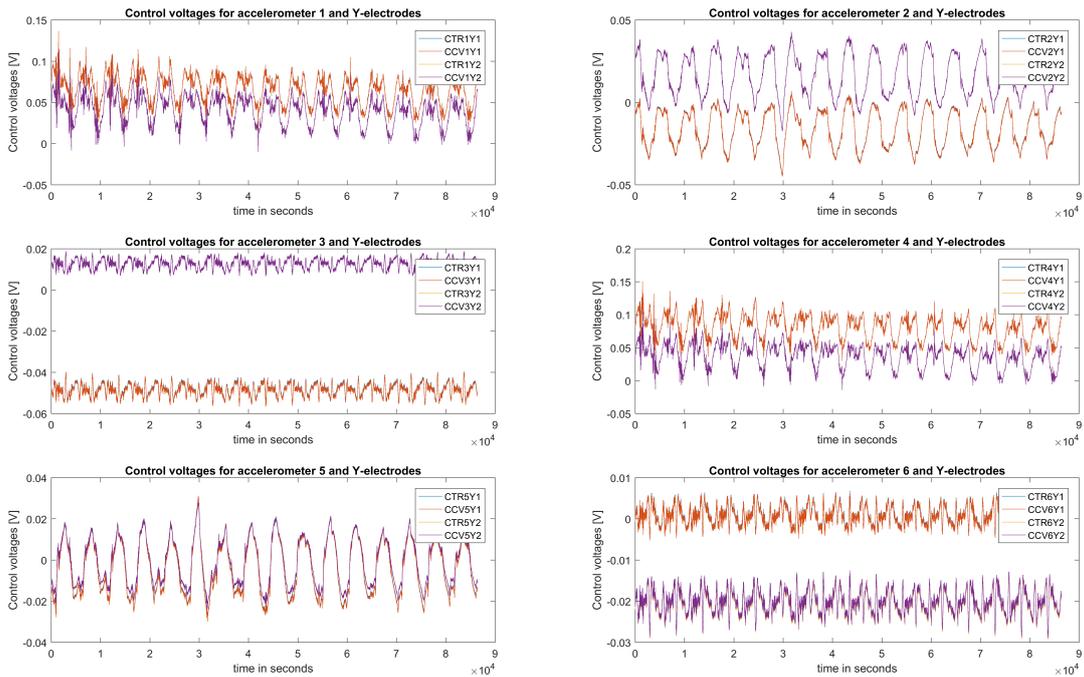


Figure 4.36 – Série temporelle de tensions de contrôle CTR et CCV pour les électrodes Y pour la période du 13-04-2012 au 14-04-2012.

Le contrôle en rotation autour de l'axe X du repère des électrodes est assuré uniquement par les électrodes Y de sorte que les signaux correspondant aux électrodes Z sont quasiment identiques. Ceci montre que le mouvement de rotation est très bien contrôlé puisque dans le cas contraire, la distance entre la masse d'épreuve et les électrodes Z seraient différentes. En s'appuyant sur cette observation, on peut estimer le niveau de bruit moyen des mesures nominales en entrée et en sortie de la branche science de chaque

## 4.7. Tensions de contrôle et de polarisation

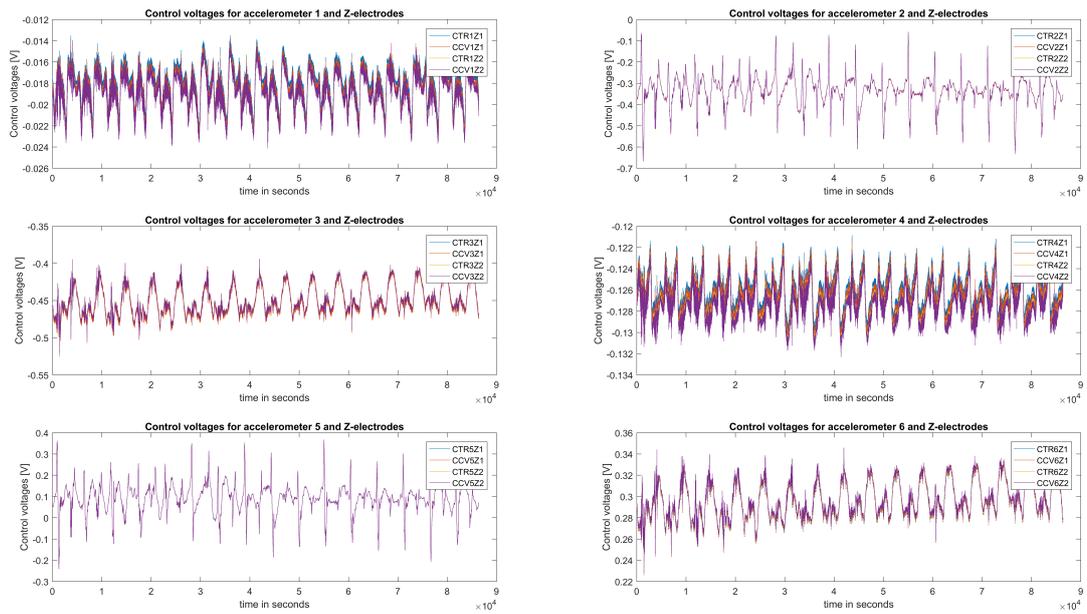


Figure 4.37 – Série temporelle de tensions de contrôle CTR et CCV pour les électrodes Z pour la période du 13-04-2012 au 14-04-2012.

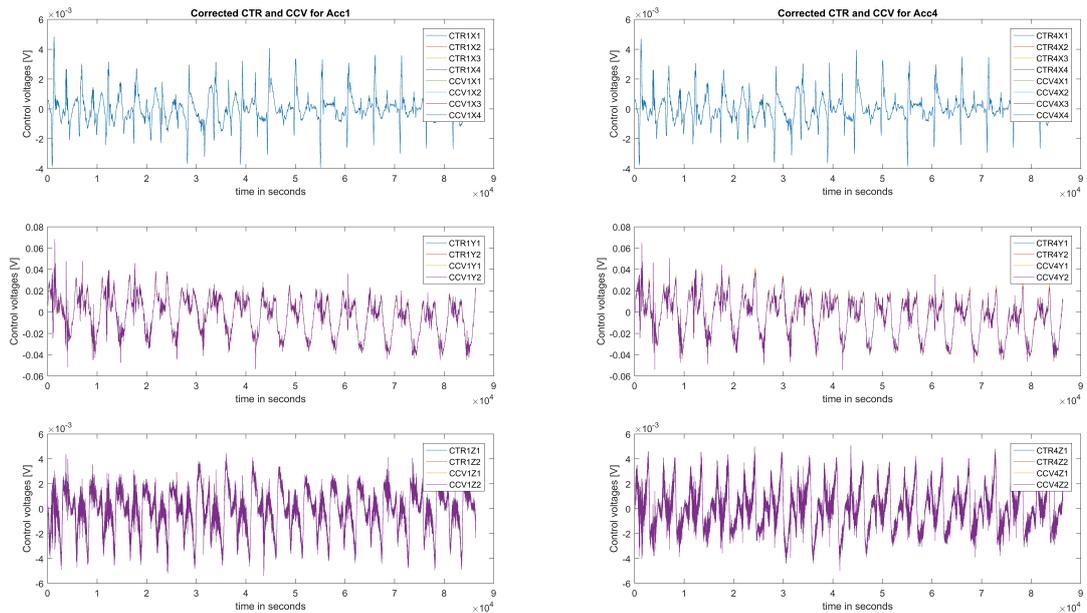


Figure 4.38 – Tensions de contrôle corrigées (CTR et CCV) pour la paire 2-5 sur la période du 13-04-2012 au 14-04-2012.

accéléromètre. Pour cela, en utilisant les données EGG\_CTR, il faut supprimer le signal déterministe à l'aide d'une soustraction pondérée de la tension de contrôle sur l'électrode Z1 et de celle sur Z2. La figure 4.41 présente un exemple de résidus obtenus de cette opération et la figure 4.42, le résultat de l'analyse spectrale (colonne de droite). On voit que pour tous les accéléromètres le niveau de bruit des tensions de mesure est  $10^{-5} \text{ V}/\sqrt{\text{Hz}}$ . La relation entre l'accélération de la masse d'épreuve selon l'axe Z (dans le repère  $R_{AESRF}$ ) et les

**Chapter 4. Analyse des mesures pendant la phase opérationnelle de la mission GOCE**

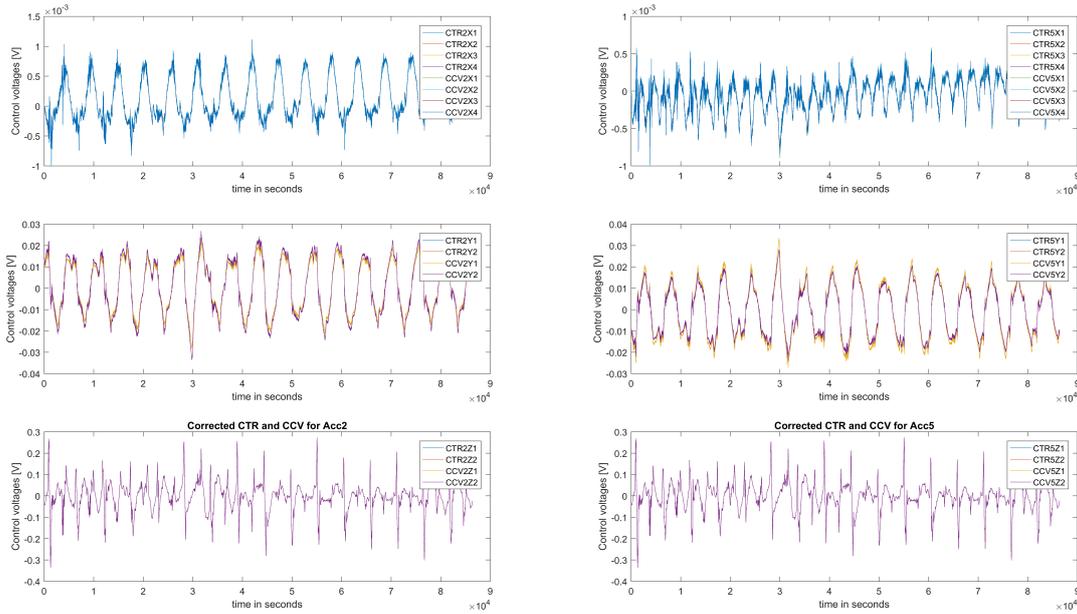


Figure 4.39 – Tensions de contrôle corrigées (CTR et CCV) pour la paire 2-5 sur la période du 13-04-2012 au 14-04-2012.

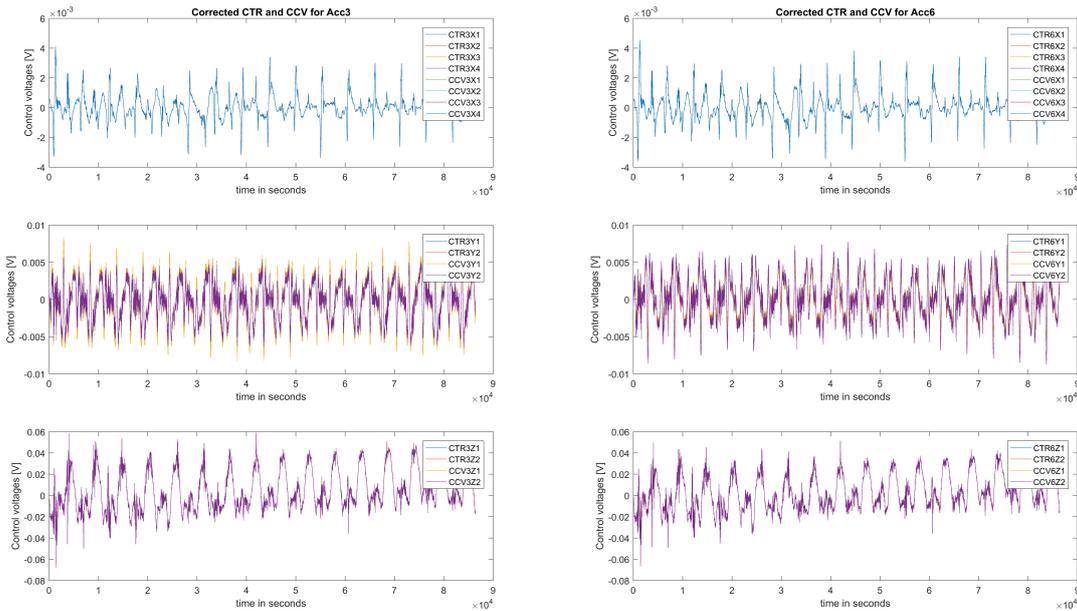


Figure 4.40 – Tensions de contrôle corrigées (CTR et CCV) pour la paire 36 sur la période du 13-04-2012 au 14-04-2012.

tensions appliquées s'écrit :

$$a_z = \frac{2\epsilon_0 S_z V_p}{m e_z^2} \frac{1}{G_{ro}} (V_{z1} + V_{z2}) \quad (4.64)$$

En négligeant la corrélation entre les signaux, on obtient un niveau de bruit en accélération d'environ  $6.4 \times 10^{-12} \text{ m/s}^2 / \sqrt{\text{Hz}}$ , à comparer avec la spécification dans la bande de mesure correspondant à

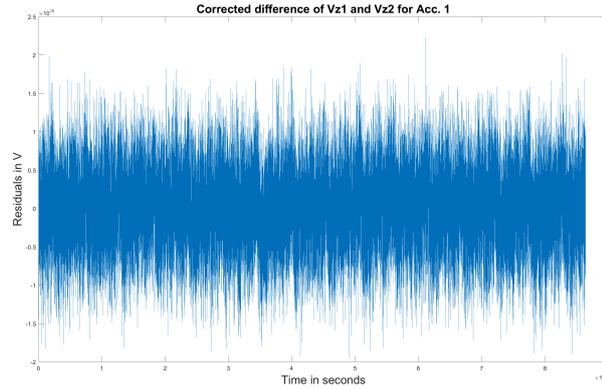


Figure 4.41 – Différence pondérée des tensions Z1 et Z2 pour l'accéléromètre 1 pendant la période du 13-04-2012 au 14-04-2012.

$2 \times 10^{-12} \text{ m/s}^2 / \sqrt{\text{Hz}}$ . Cette observation est cohérente avec le niveau de bruit moyen des accéléromètres estimés à partir des modes communs.

Il est intéressant de noter que, quelles que soient les tensions utilisées (EGG\_CTR ou EGG\_CCV), cette analyse spectrale aboutit aux mêmes résultats. Ceci signifie au moins que la correction appliquée pour estimer les valeurs en entrée de la branche science n'apportent pas de bruit supplémentaire.

Pour le contrôle en tensions des électrodes  $X$ , il existe également une combinaison des valeurs qui doit s'annuler théoriquement. Afin de contrôler le mouvement de translation le long de l'axe  $X$  du repère  $R_{AESRF}$  et les mouvements de rotation autour des axes  $Y$  et  $Z$  du même repère, une combinaison de tension est appliquée sur chaque électrode :

$$\begin{aligned} V_{x1+} &= V_x + V_\theta - V_\psi \\ V_{x2+} &= V_x + V_\theta + V_\psi \\ V_{x3+} &= V_x - V_\theta + V_\psi \\ V_{x4+} &= V_x - V_\theta - V_\psi \end{aligned}$$

Ainsi, la combinaison  $V_{x1+} - V_{x2+} + V_{x3+} - V_{x4+} = 0$ . Cette relation offre un moyen d'estimer le niveau de bruit moyen pour le contrôle en tension des électrodes  $X$ . Les figures 4.43 à 4.44 montrent la combinaison des tensions dans le domaine temporel (partie gauche) et la densité spectrale correspondante (partie droite). Pour ces graphiques la date choisie est la même que précédemment, c'est-à-dire entre le 13-04-2012 et le 14-04-2012. Les densités spectrales pour les accéléromètres 1 à 5 montrent que la combinaison des tensions considérée donne des processus stochastiques qui sont des bruits blancs en-deçà de 0.2 Hz, et en particulier entre 5 mHz et 100 mHz. Le niveau de bruit correspondant est entre  $2 \times 10^{-5} \text{ V} / \sqrt{\text{Hz}}$  et  $2.5 \times 10^{-5} \text{ V} / \sqrt{\text{Hz}}$ . Pour l'accéléromètre 6, bien que le plancher du bruit soit le même que les autres accéléromètres, on observe des pics révélant la présence d'un signal harmonique. Il est à noter que ces pics ne sont pas aux mêmes fréquences en fonction de la date de la mission.

L'accélération le long des axes moins-sensibles est estimée avec la relation :

$$a_x = \frac{2\epsilon_0 S_x V_p}{m e_x^2} \frac{1}{G_{roX}} (V_{x1} + V_{x2} + V_{x3} + V_{x4}) \quad (4.65)$$

où  $e_x = 3.2 \times 10^{-5} \text{ m}$ ,  $G_{roX} = 2$  et  $S_x = 2.6228 \times 10^{-4} \text{ m}^2$ . En utilisant cette relation, le niveau de bruit estimé

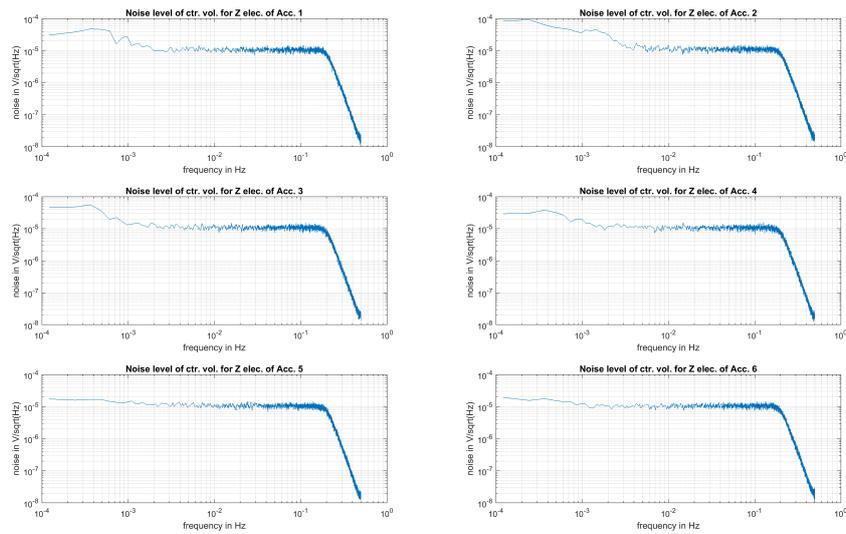


Figure 4.42 – Bruit dans le signal de tensions de contrôle pour les électrodes Z pendant la période du 13-04-2012 au 14-04-2012.

dans les accélérations mesurées le long des axes moins-sensible est :

$$\frac{2\epsilon_0 S_x V_p}{m e_x^2} \frac{1}{G_{roX}} \times \frac{2.5 \cdot 10^{-5}}{4} \approx 3.39 \times 10^{-10} \text{ m/s}^2 / \sqrt{\text{Hz}} \quad (4.66)$$

On voit que ce estimation est cohérente avec ce que l'on obtient à partir de la différence des modes communs pour les axes moins-sensibles.

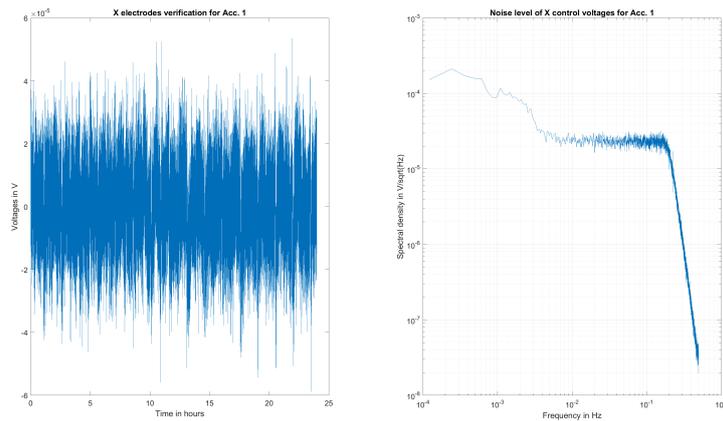


Figure 4.43 – Signal correspondant à la combinaison des tensions considérée (gauche) et densité spectrale (droite) - Acc. 1.

## 4.7. Tensions de contrôle et de polarisation

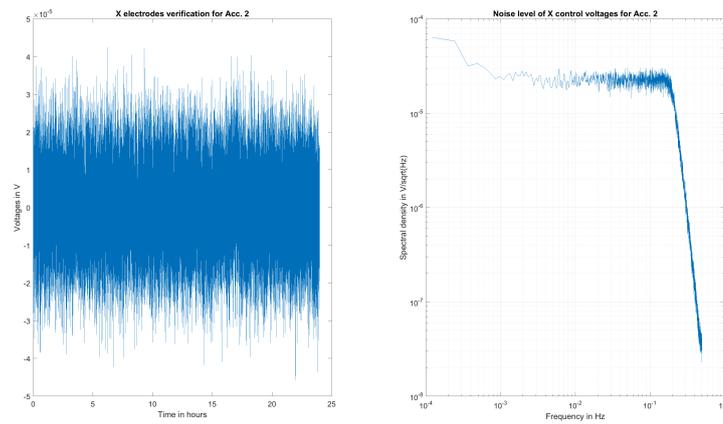


Figure 4.44 – Signal correspondant à la combinaison des tensions considérée (gauche) et densité spectrale (droite) - Acc. 2.

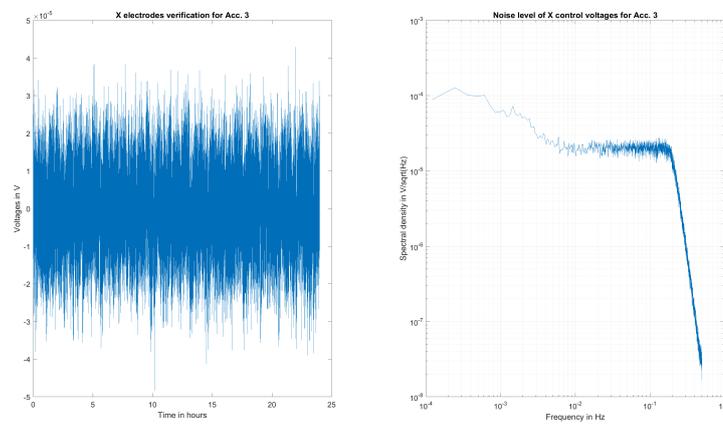


Figure 4.45 – Signal correspondant à la combinaison des tensions considérée (gauche) et densité spectrale (droite) - Acc. 3.

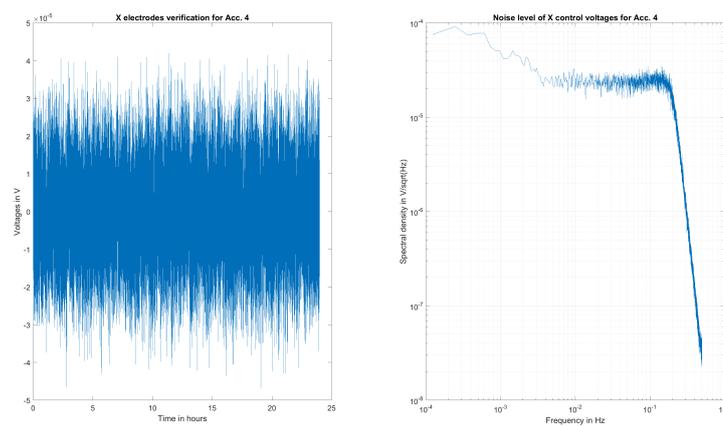


Figure 4.46 – Signal correspondant à la combinaison des tensions considérée (gauche) et densité spectrale (droite) - Acc. 4.

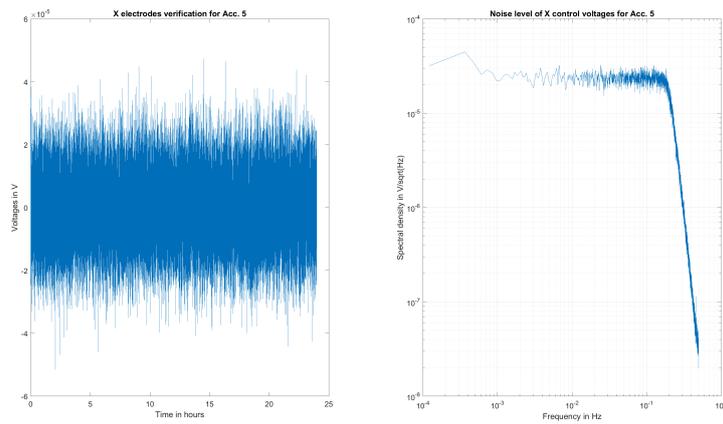


Figure 4.47 – Signal correspondant à la combinaison des tensions considérée (gauche) et densité spectrale (droite) - Acc. 5.

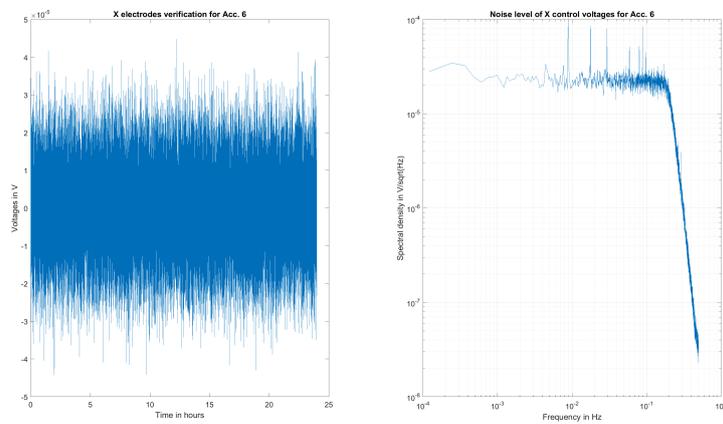


Figure 4.48 – Signal correspondant à la combinaison des tensions considérée (gauche) et densité spectrale (droite) - Acc. 6.

## 4.8 Les contributeurs au bruit de mesure d'un accéléromètre

Dans les parties précédentes, sont présentées des estimations du bruit des accéléromètres effectuées à partir diverses mesures acquises en vol. Dans cette partie, sont présentées les différentes sources du bruit, les vérifications empiriques et l'estimation de l'impact du bruit de facteur d'échelle. Globalement, il y a trois groupes de contributeurs au bruit : le couplage du bruit électronique avec diverses  $N_{elec}$ , les bruits dus aux forces parasites  $N_{par}$  et l'effet du bruit thermique sur le biais  $N_{bias}$ .

Les bruits électroniques proviennent des différents composants de la boucle d'asservissement :

- en amont de la boucle, les bruits contenus dans les tensions ( $V_p$  et  $V_d$ ) appliquées sur la masse d'épreuve et dans celles appliquées sur les électrodes en sortie du DVA sont couplées aux défauts géométriques et au biais du détecteur capacitif ;
- via le bruit du détecteur capacitif, la raideur électrostatique introduit un bruit proportionnel au bruit en position du détecteur capacitif ;
- du fait de dissymétries, le transformateur dans le détecteur capacitif génère un bruit via la bruit en tension du détecteur ;
- la susceptibilité magnétique génère également un bruit ;

#### 4.8. Les contributeurs au bruit de mesure d'un accéléromètre

- les DVA, CPD et la sortie science (Read-out et Sigma-Delta) introduisent des contributions supplémentaires dans le bruit de mesure.

Les bruits dus aux forces parasites ont principalement deux origines : l'amortissement de la masse d'épreuve en présence de pression résiduelle dans la cage d'électrodes et la raideur du fil d'or. Par ailleurs, un couplage entre le biais de chaque composant, la stabilité thermique et le bruit thermique des composants introduit un bruit de mesure supplémentaire. Enfin, un couplage entre les forces parasites (effet radiométrique, pression de radiation, moment magnétique de la Terre, force de Lorentz, raideur du fil d'or) et le bruit thermique introduit également un bruit de mesure.

Toutes ces contributions, ramenées en bruit d'accélération, sont résumées dans la figure 4.49 pour un axe de mesure sensible (gauche) et pour l'axe moins sensible (droite) d'un accéléromètre. La courbe noire correspond au niveau de bruit maximal établi par les documents de spécification ; la courbe rouge est le bruit total évalué par l'ONERA avec des paramètres théoriques ou obtenus après conception des accéléromètres.

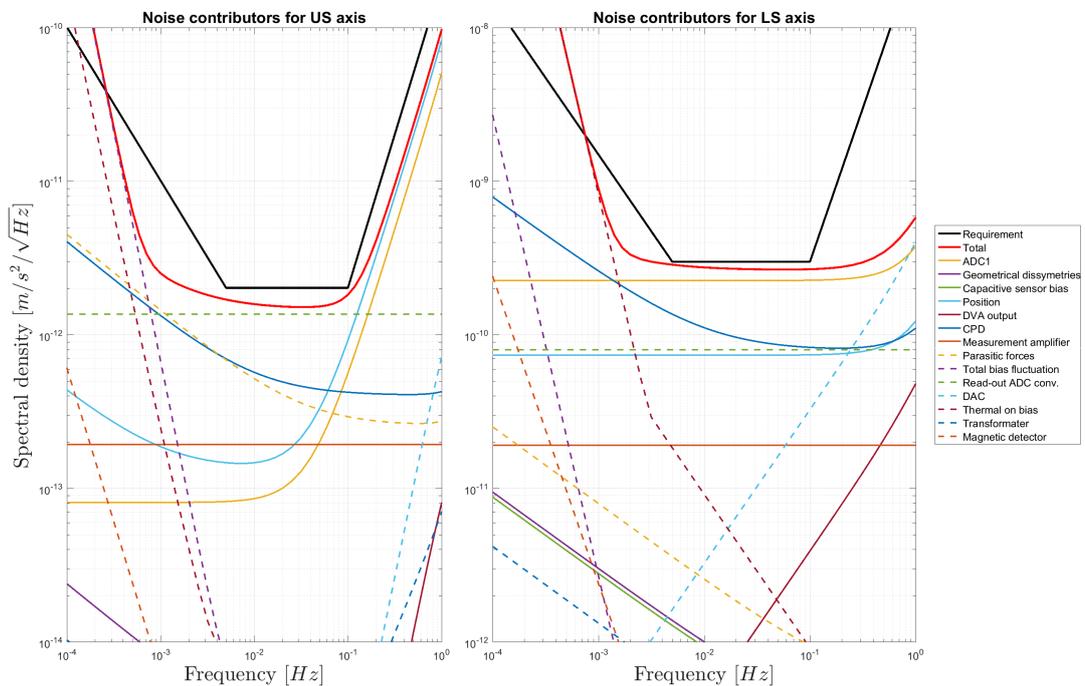


Figure 4.49 – Contributeurs théoriques au bruit de mesure pour un axe sensible (gauche) et l'axe moins sensible (droite).

En-dessous de 1 mHz, la fluctuation du biais due aux forces parasites et la température sont les principales sources de bruit pour un axe sensible et l'axe moins sensible respectivement. Entre 5 mHz et 100 mHz, le bruit de l'ADC du Read-out et celui de l'ADC1 sont respectivement le principal contributeur pour un axe sensible et l'axe moins sensible. Au-dessus de 100 mHz, pour un axe sensible, l'ADC1 et le bruit en position sont les principaux contributeurs ; pour l'axe moins sensible, l'ADC1 et le DAC sont les principaux contributeurs.

Après le lancement du satellite, l'ONERA a vérifié, pour tous les axes sensibles des accéléromètres, l'adéquation avec la spécification des postes de bruits suivants : le bruit dû à la raideur électrostatique, le bruit de l'ADC du Read-out, les bruits du détecteur et de l'ADC1 ainsi que les bruits du DAC et du DVA. Ces vérifications écartent donc leur responsabilité directe dans le niveau de bruit estimé à partir des mesures.

Néanmoins, dans la modélisation des densités spectrales théoriques des sources de bruit, le bruit du facteur

d'échelle n'est pas pris en compte, bien que celui-ci soit évalué séparément. Le bruit du facteur d'échelle est dû à la tension de référence de l'ADC2, à la tension de polarisation, au potentiel de contact et au bruit du DVA, à la sensibilité thermique de l'entrefer et des surfaces d'électrode. Ce bruit introduit dans la mesure une perturbation proportionnelle à l'accélération réelle ressentie. En effet, pour un axe donné, on peut modéliser la mesure  $\Gamma$  d'un accéléromètre par :

$$\Gamma = (1 + d_K + n_K) a + b + n = (1 + d_K) a + b + n_K a + n \quad (4.67)$$

où  $d_K$  et  $n_K$  sont respectivement le facteur d'échelle et le bruit de facteur d'échelle pour l'axe considéré,  $a$  est l'accélération réelle ressentie par le satellite,  $b$  et  $n$  sont respectivement le bruit et le biais de mesure.

Par conséquent, au bruit de mesure de l'accéléromètre s'ajoute un terme stochastique supplémentaire. Pour évaluer l'effet en termes de densités spectrales, il est nécessaire d'estimer la densité spectrale de l'accélération réelle. En effet, en notant  $S_{n\Gamma}$  la densité spectrale de la partie stochastique, on a :

$$S_{n\Gamma}(f) = S_{nK}(f) \otimes S_a(f) + S_n(f) \quad (4.68)$$

où  $\otimes$  indique le produit de convolution ;  $S_{nK}$ ,  $S_a$  et  $S_n$  sont respectivement les densités spectrales de  $n_K$ ,  $a$  et  $n$ .

La densité spectrale des bruits de facteur d'échelle pour un axe sensible et l'axe moins sensible sont respectivement [76] :

$$\begin{aligned} S_{nK,US}(f) &= 1.5 \cdot 10^{-7} \sqrt{1 + \left(\frac{0.0036}{f}\right)^2 + \frac{0.09}{f}} \\ S_{nK,LS}(f) &= 4.5 \cdot 10^{-8} \sqrt{1 + \left(\frac{0.013}{f}\right)^2 + \frac{0.9}{f}} \end{aligned} \quad (4.69)$$

À défaut de posséder des mesures d'accélération réelles indépendantes des accéléromètres, on obtient une approximation en lissant par la méthode de Savitzky-Golay, la densité spectrale de l'accélération mesurée par l'accéléromètre 1 par exemple. La figure 4.50 présente l'évaluation de l'effet du bruit de facteur d'échelle s'il est considéré dans le bruit total de l'accéléromètre. Les courbes rouges indiquent la densité spectrale totale du bruit sans inclure le bruit de facteur d'échelle ; les courbes bleues indiquent les nouvelles estimations en incluant le bruit de facteur d'échelle ; les courbes noires indiquent la spécification. Pour l'axe moins sensible, il n'y a aucune différence. En revanche, pour un axe sensible, la prise en compte du bruit de facteur d'échelle aboutit à un modèle où le bruit est supérieur au modèle initial. Bien qu'il s'agisse d'un majorant, cette exercice montre que la prise en compte du bruit de facteur d'échelle est nécessaire dans la modélisation de la précision des accéléromètres mais ne peut, au mieux, qu'expliquer une faible partie du niveau de bruit estimé à partir de la différence des modes communs.

#### 4.8. Les contributeurs au bruit de mesure d'un accéléromètre

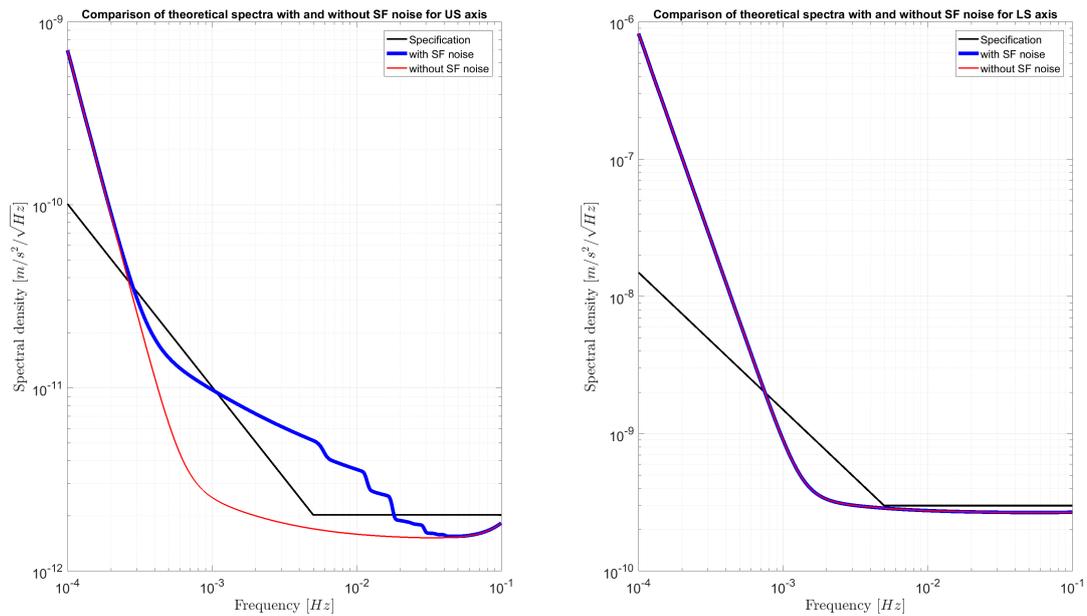


Figure 4.50 – Effet de la prise en compte du bruit de facteur d'échelle dans le bruit total pour un axe sensible (gauche) et l'axe moins sensible (droite).

#### Récapitulatif du chapitre 4

Ce chapitre rassemble les résultats obtenus à partir des données empiriques obtenues entre novembre 2009 et janvier 2013. Ces données permettent de caractériser un aspect du fonctionnement des accéléromètres. En particulier, elles ont mené à l'estimation de majorants du bruit moyen des accéléromètres pendant la mission et en fonction des axes de l'instrument. Il est apparu que, dans la bande de mesure du gradiomètre (entre 5 mHz et 100 mHz), le bruit des axes moins sensibles est peu élevé par rapport aux spécifications ( $4 \times 10^{-10} \text{ m/s}^2/\sqrt{\text{Hz}}$  au lieu de  $3 \times 10^{-10} \text{ m/s}^2/\sqrt{\text{Hz}}$ ) mais que celui des axes sensibles dépasse d'un facteur 10 le niveau des spécifications (environ  $10^{-11} \text{ m/s}^2/\sqrt{\text{Hz}}$  au lieu de  $2 \times 10^{-12} \text{ m/s}^2/\sqrt{\text{Hz}}$ ). La stabilité de cette observation au cours de la mission et le même constat ayant été fait pour tous les accéléromètres et axes, la cause du niveau de bruit empirique est à chercher dans l'architecture de l'électronique même.



## Conclusion générale

La mission GOCE a joué un rôle emblématique à double titre. Il s'agit de la première mission du programme Living Planet dédié à l'étude prolongée et à grande échelle des phénomènes géophysiques clés grâce à une flotte de satellites équipés de technologie d'observation de pointe. Par ailleurs, la mission GOCE a démontré le fort potentiel de la gradiométrie spatiale, théorisée depuis plusieurs dizaines d'années, pour la connaissance du géoïde, du champ gravitationnel statique et du courant océanique. En complément des missions de gravimétrie spatiale et des relevés aéroportés et terrestres, les données de la mission GOCE ont également permis aux scientifiques d'affiner considérablement leurs modèles du champ gravitationnel.

Équipé d'un gradiomètre électrostatique, dont les accéléromètres ultrasensibles ont été conçus par l'ONERA, le satellite GOCE permet de mesurer les variations locales du champ gravitationnel dans les trois directions de l'espace avec une précision jusqu'alors inégalée. Le concept de la mission GOCE satisfait quatre critères fondamentaux qui s'étaient imposés au moment de la définition du projet : couverture ininterrompue selon les trois directions de l'espace, compensation continue des forces non-gravitationnelles, sélection d'une orbite basse et compensation de l'atténuation du champ gravitationnel. Malgré la satisfaction de la communauté scientifique, il s'est avéré que la précision des composantes du gradient de gravité dépasse les spécifications, ce qui montre que le bruit des accéléromètres est plus important que prévu.

Dans le cadre de cette thèse, qui s'inscrit dans le contexte présenté ci-dessus, on a cherché à caractériser le bruit des accéléromètres dans toutes les directions de l'espace et au cours de la mission. On a justifié le choix d'utiliser l'analyse spectrale de la différence des modes communs qui apportent une connaissance sur le bruit moyen des accéléromètres sur une période entre novembre 2009 et décembre 2012. On a montré, en considérant la direction de vol du satellite qu'entre 5 mHz et 100 mHz, les accéléromètres 3 et 6 présentent un bruit moyen de mesure de  $10^{-11} \text{ m/s}^2/\sqrt{\text{Hz}}$  selon l'axe  $Y$  des repères  $R_{AESRF}$  associés. Les accéléromètres 2 et 5 présentent un bruit moyen de  $8 \times 10^{-12} \text{ m/s}^2/\sqrt{\text{Hz}}$  selon l'axe  $Y$  des repères  $R_{AESRF}$  associés et les accéléromètres 1 et 4 présentent un bruit moyen de  $6 \times 10^{-12} \text{ m/s}^2/\sqrt{\text{Hz}}$  selon l'axe  $Z$  des repères  $R_{AESRF}$  associés. Par ailleurs, en considérant l'axe radial du satellite, on a montré que les paires d'accéléromètres 14 et 36 présentent un niveau de bruit moyen de  $10^{-11} \text{ m/s}^2/\sqrt{\text{Hz}}$  respectivement selon les axes  $Y$  et  $Z$  des repères  $R_{AESRF}$  associés. Dans tous les cas, les valeurs empiriques sont au-dessus du niveau spécifié de  $2 \times 10^{-12} \text{ m/s}^2/\sqrt{\text{Hz}}$ . En revanche, la méthode de la différence des modes communs ne permet pas d'estimer le bruit de mesure des accéléromètres 2 et 5 selon l'axe  $Z$  des repères  $R_{AESRF}$  associés.

Quant aux axes moins sensibles, en considérant les directions transverses et radiales du satellite, on a montré que les paires 14, 25 et 36 présentent respectivement un bruit de mesure moyen d'environ  $5 \times 10^{-10} \text{ m/s}^2/\sqrt{\text{Hz}}$ ,  $4 \times 10^{-10} \text{ m/s}^2/\sqrt{\text{Hz}}$  et  $4.5 \times 10^{-10} \text{ m/s}^2/\sqrt{\text{Hz}}$  selon l'axe  $X$  des repères  $R_{AESRF}$  associés. Pour l'axe moins sensible, on voit que l'écart entre les valeurs empiriques et la spécification est plus resserré que pour les axes sensibles de mesure.

Tous ces niveaux de bruit estimés sont restés stables pendant la période considérée, même pendant des sessions de manœuvres d'ajustement orbital. Bien que ces bruits estimés dépassent les spécifications, l'impact

## Conclusion générale

---

sur l'estimation des composantes du gradient de gravité reste limité car ce sont les modes différentiels qui sont utilisés. Par construction, ces derniers peuvent annuler les signaux correspondant aux bruits qui leur sont communs, ce qui conduit à un niveau de bruit inférieur à celui estimé à partir de la différence des modes communs. Par ailleurs, on a souligné la limite de l'utilisation des modes communs en expliquant que les estimations obtenues étaient forcément non seulement des valeurs moyennes, mais aussi des majorants du niveau de bruit réel.

Le satellite GOCE ayant été détruit lors de l'entrée dans l'atmosphère, il n'est pas possible de récupérer le gradiomètre pour étudier son comportement à nouveau. Par conséquent, un des moyens possibles d'affiner davantage l'étude sur les causes du bruit empirique de mesure est de simuler le fonctionnement d'une boucle de contrôle réaliste en modélisant finement les non-linéarités telles que la dépendance au carré de l'accélération ressentie par exemple. Une telle démarche présenterait un intérêt pour le développement des futurs accéléromètres électrostatiques ultrasensibles.

À la suite des missions GOCE et GRACE-FO, la priorité en ce qui concerne les futures missions gravimétriques est la détermination du champ variable essentiellement associé au cycle de l'eau, c'est-à-dire correspondant à des phénomènes géophysiques tels que la fonte des glaces ou les cycles saisonniers dans les bassins hydrologiques. La détection de ces phénomènes nécessite une sensibilité suffisante de la part des capteurs utilisées, en particulier dans les basses fréquences car le champ variable est synonyme de temps caractéristiques longs. Les accéléromètres développés par l'ONERA et validés par les missions de gravimétrie (CHAMP, GRACE, GRACE-FO) et de gradiométrie (GOCE) sont des candidats envisagés pour la prochaine génération de mission gravimétrique (NGGM) étudiée par l'Agence Spatiale Européenne, moyennant des améliorations afin de les adapter à ce type de mission. Étant donnés les contributeurs au bruit de mesure des accéléromètres, les possibilités d'amélioration sont multiples : optimisation de la boucle de contrôle, diminution des effets des forces parasites, diminution et stabilisation de la température de l'environnement des accéléromètres ou encore augmentation de la masse de la masse d'épreuve. Ainsi, l'ONERA a développé un nouveau modèle d'accéléromètre, appelé MICROSTAR et amené à supplanter la génération des accéléromètres de GOCE, dont la masse d'épreuve cubique permet une mesure sensible des accélérations linéaires selon les trois directions de l'espace [108]. Entre 1 mHz et 100 mHz, le bruit de mesure attendu est blanc avec un niveau situé entre  $1.5 \times 10^{-12} \text{ m/s}^2/\sqrt{\text{Hz}}$  et  $4 \times 10^{-11} \text{ m/s}^2/\sqrt{\text{Hz}}$ , c'est-à-dire une performance située entre celle des accéléromètres de GOCE et de GRACE. En revanche, aux basses fréquences, le bruit suit une loi en  $1/f^2$  avec un niveau inférieur à celui des accéléromètres GOCE qui sera déterminé en fonction des nécessités de la mission gravimétrique.

En parallèle, d'autres améliorations et concepts sont étudiés. Une accéléromètre fonctionnant à température cryogénique peut grandement diminuer le bruit thermique qui est théoriquement prépondérant aux basses fréquences dans le cas des accéléromètres de la mission GOCE. Néanmoins, le stockage de l'hélium liquide nécessaire est un inconvénient rédhibitoire pour une mission du type NGGM qui doit durer au moins dix ans. La piste concernant les forces parasites est en revanche activement étudiée à l'ONERA, en Italie et en Allemagne par exemple. Un des contributeurs principal parmi les forces parasites est la raideur électrostatique du fil d'or. Ce-dernier est nécessaire pour maintenir une tension stable sur la masse d'épreuve ce qui permet de contrôler les charges sur celle-ci mais aussi l'action et la détection électrostatique. Pour s'affranchir de cette contrainte, l'ONERA étudie une technique de polarisation de la masse d'épreuve grâce à des lampes UV. Bien que complexifiant considérablement le contrôle initial de la masse d'épreuve, cette technique est déjà mise en oeuvre dans la mission LISA Pathfinder dédiée à l'observation des ondes gravitationnelles par interférométrie [109]: n'ayant pas de fil d'or, les charges dues aux rayons cosmiques s'accumulent sur les masses d'épreuve qui doivent être déchargées grâce à un système de lampe UV. L'accélérométrie électrostatique ultrasensible dans son ensemble est donc une technique prometteuse pour la science fondamentale, l'observation du système Terre ou encore la prospection minière et hydrologique (instrument GREMLIT [110]).

# A Annexe A

## A.1 Définition des repères utilisés pour l'étude du gradiomètre

### A.1.1 Composition du gradiomètre

Le gradiomètre est composé des six accéléromètres (notés  $A_1, \dots, A_6$ ). La figure A.1 représente un accéléromètre c'est-à-dire l'ensemble du dispositif constitué de la masse d'épreuve (*proof-mass*), de la cage d'électrodes (*upper plate, ring plate et bottom plate*) et de la semelle (*sole plate*). Les électrodes sont gravées directement sur la structure en ULE<sup>TM</sup> qui constitue la cage. Les six accéléromètres sont deux à deux rigidement fixés en paire à une structure en carbone par l'intermédiaire des semelles.

On désigne par centre d'un accéléromètre le centre géométrique de la cage d'électrodes qui est rigidement liée au satellite. Le centre de masse de la masse d'épreuve doit être confondu avec le centre de l'accéléromètre lorsque le contrôle asservi est parfait. Chaque accéléromètre a deux axes sensibles et un moins sensible, les mêmes que ceux de la masse d'épreuve. Chaque paire d'accéléromètres constitue un gradiomètre uniaxial (noté OAG pour *One-axis-gradiometer*) capable de mesurer la dérivée spatiale de l'accélération ressentie par le satellite le long de cet axe. Étant donné qu'il y a six accéléromètres, il y a trois gradiomètres uniaxiaux notés OAG<sub>1</sub>, OAG<sub>2</sub> et OAG<sub>3</sub>. Le tableau A.1 indique la numérotation des accéléromètres constituant un OAG donné ainsi que la distance les séparant :

Table A.1 – Composition des gradiomètres uniaxiaux.

Gradiomètre uniaxial	Paire d'accéléromètres	Distance
OAG <sub>1</sub>	A <sub>1</sub> et A <sub>4</sub>	0.514 m
OAG <sub>2</sub>	A <sub>2</sub> et A <sub>5</sub>	0.5 m
OAG <sub>3</sub>	A <sub>3</sub> et A <sub>6</sub>	0.5 m

L'axe reliant une paire d'accéléromètres correspond à un des deux axes sensibles de chaque accéléromètre. Les trois gradiomètres uniaxiaux sont fixés orthogonalement les uns par rapport aux autres de sorte que les milieux de chaque gradiomètre uniaxial sont confondus. L'ensemble forme le gradiomètre tri-axial. Cette configuration permet de mesurer les dérivées spatiales de l'accélération dans les trois directions de l'espace avec les axes sensibles des accéléromètres.

Enfin, dans la configuration nominale, l'axe de l'OAG<sub>1</sub> est parallèle à la direction de vol du satellite, l'axe de l'OAG<sub>2</sub> est parallèle à la direction transverse et l'axe de l'OAG<sub>3</sub> est parallèle à la direction radiale du satellite.

### A.1.2 Repère inertiel - *Inertial Reference Frame*

Ce repère est défini par le repère J2000 dont l'origine est situé au centre de la Terre. L'axe X pointe dans la direction de l'intersection des plans équatorial et écliptique à la date du 01/01/2000, l'axe Z est orthogonal au

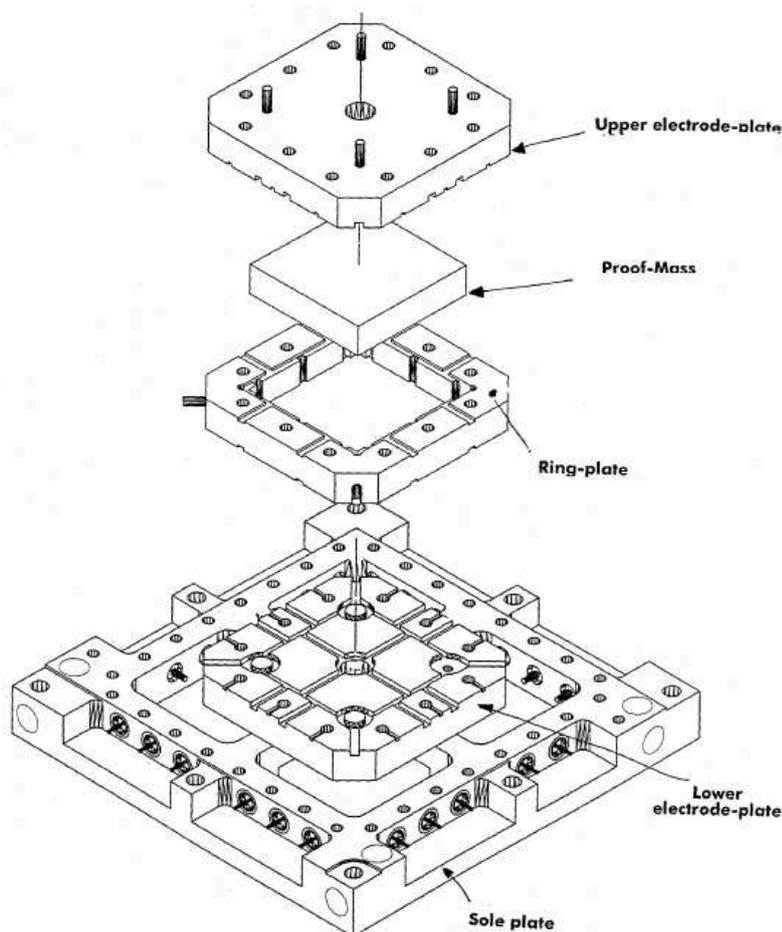


Figure A.1 – Schéma des composants mécaniques d'un accéléromètre.

plan équatorial à cette date. L'axe  $Y$  complète pour former un repère orthonormé direct.

### A.1.3 Repère orbital local - *Local Orbital Reference Frame*

Ce repère définit l'attitude du satellite au cours de la mission. L'origine  $O_o$  du repère correspond au centre de masse du satellite. L'axe  $X_o$  est parallèle au vecteur de vitesse instantanée et pointe dans le même sens. L'axe  $Y_o$  est parallèle au moment angulaire instantané  $\mathbf{N}$  du satellite et pointe dans le même sens. Le vecteur  $\mathbf{N}$  est défini comme le produit vectoriel du vecteur  $\mathbf{R}$  pointant du centre de la Terre au centre de masse du satellite et du vecteur vitesse. L'axe  $Y_o$  est appelé le vecteur transverse. Enfin, l'axe  $Z_o$  complète le repère  $R_{LORF}$  de sorte à construire un repère orthonormé direct. En pratique, ce vecteur pointe vers la Terre, sa direction est donc radiale. La figure A.2 présente la correspondance entre les repères  $R_{IRF}$  et  $R_{LORF}$ .

### A.1.4 Repère de l'accéléromètre - *Accelerometer Reference Frame*

C'est dans ce repère, que l'accélération de la masse d'épreuve par rapport à la cage est mesurée. Chaque d'accéléromètre possède son propre repère  $R_{ARF}$ . Ce repère est défini par rapport à la cage d'électrodes qui est fixe par rapport au reste du satellite, ce qui en fait un repère rigidement lié au satellite.

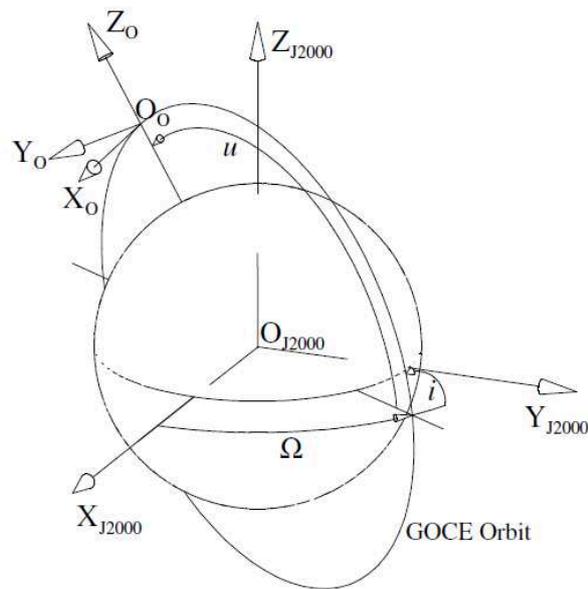


Figure A.2 – Position de l'IRF par rapport au LORF.

Pour les accéléromètres  $A_1$  et  $A_4$  de l'OAG<sub>1</sub> :

- L'origine  $C_i$  correspond au centre de l'accéléromètre  $A_i$  ;
- L'axe  $X_i$  est parallèle à l'axe sensible dans l'alignement de l'axe de OAG<sub>1</sub> et dans le sens pointant de  $A_4$  vers  $A_1$  ;
- L'axe  $Z_i$  est le produit vectoriel du vecteur directeur de l'axe  $X_i$  et du vecteur unitaire orthogonal à la semelle en pointant dans le sens opposé. L'axe  $Z_i$  est parallèle au deuxième axe sensible de l'accéléromètre ;
- L'axe  $Y_i$  forme le troisième axe de sorte que le repère  $R_{ARF}$  soit un repère orthonormé direct. En pratique, dans le cas nominal, il est parallèle à l'axe non-sensible de l'accéléromètre.

Pour les accéléromètres  $A_2$  et  $A_5$  de l'OAG<sub>2</sub> :

- L'origine  $C_i$  correspond au centre de l'accéléromètre  $A_i$  ;
- L'axe  $Y_i$  est parallèle à l'axe sensible dans l'alignement de l'axe de OAG<sub>2</sub> et dans le sens pointant de  $A_5$  vers  $A_2$  ;
- L'axe  $X_i$  est le produit vectoriel du vecteur directeur de l'axe  $Y_i$  et du vecteur unitaire orthogonal à la semelle en pointant dans le sens opposé. L'axe  $Y_i$  est parallèle au deuxième axe sensible de l'accéléromètre ;
- L'axe  $Z_i$  forme le troisième axe de sorte que le repère  $R_{ARF}$  soit un repère orthonormé direct. En pratique, dans le cas nominal, il est parallèle à l'axe non-sensible de l'accéléromètre.

Pour les accéléromètres  $A_3$  et  $A_3$  de l'OAG<sub>3</sub> :

- L'origine  $C_i$  correspond au centre de l'accéléromètre  $A_i$  ;
- L'axe  $Z_i$  est parallèle à l'axe sensible dans l'alignement de l'axe de OAG<sub>3</sub> et dans le sens pointant de  $A_6$  vers  $A_3$  ;
- L'axe  $X_i$  est le produit vectoriel du vecteur directeur de l'axe  $X_i$  et du vecteur unitaire orthogonal à la semelle en pointant dans le sens opposé. L'axe  $X_i$  est parallèle au deuxième axe sensible de l'accéléromètre ;

- L'axe  $Y_i$  forme le troisième axe de sorte que le repère  $R_{ARF}$  soit un repère orthonormé direct. En pratique, dans le cas nominal, il est parallèle à l'axe non-sensible de l'accéléromètre.

### A.1.5 Repère du système d'électrodes de chaque accéléromètre - *Accelerometer Electrode System Reference Frame*

Ce repère, est le système de coordonnées permettant de repérer les électrodes de contrôle. Chaque accéléromètre dispose de son propre repère  $R_{AESRF}$ . L'origine de chacun de ces repères est situé au centre de l'accéléromètre (et non de la masse d'épreuve qui peut être mobile). Les axes du repère  $R_{AESRF}$  sont parallèles aux axes du repère  $R_{ARF}$  du même accéléromètre de sorte à en faire des repères orthonormés. L'axe  $X_e$  du repère  $R_{AESRF}$  est orthogonal aux électrodes non-sensibles. Les axes  $Y_e$  et  $Z_e$  sont orthogonaux aux axes sensibles. Le tableau A.2 indique les correspondances entre les axes des repères  $R_{AESRF}$  et  $R_{ARF}$  (deux premières colonnes) ainsi que la sensibilité des électrodes correspondantes (dernière colonne).

Accéléromètres	Axe du repère $R_{AESRF}$	Axes du repère $R_{ARF}$	Axes du repère $R_{GRF}$	Sensibilité
A1, A4	$X_e$	$+Y_1, +Y_4$	$Y_{GRF}$	LS
	$Y_e$	$-Z_1, -Z_4$	$Z_{GRF}$	US
	$Z_e$	$-X_1, -X_4$	$X_{GRF}$	US
A2, A5	$X_e$	$+Z_2, +Z_5$	$Z_{GRF}$	LS
	$Y_e$	$-X_2, -X_5$	$X_{GRF}$	US
	$Z_e$	$-Y_2, -Y_5$	$Y_{GRF}$	US
A3, A6	$X_e$	$+Y_3, +Y_6$	$Y_{GRF}$	LS
	$Y_e$	$-X_3, -X_6$	$X_{GRF}$	US
	$Z_e$	$+Z_3, +Z_6$	$Z_{GRF}$	US

Table A.2 – Correspondance entre les repères  $R_{AESRF}$ ,  $R_{ARF}$ ,  $R_{GRF}$  ainsi que la sensibilité des axes.

Dans ce tableau, *US* et *LS* signifient axe sensible et moins sensible respectivement.

### A.1.6 Repère d'un gradiomètre uniaxial - *One-axis Gradiometer Reference Frame*

Le repère d'un gradiomètre uniaxial est le système dans lequel les composantes du gradient de gravité sont mesurés par chaque gradiomètre uniaxial. Chaque paire possède son propre repère  $R_{OAGRF}$ .

Pour  $OAG_1$  (paire 14) :

- L'origine  $O1_{OGR}$  est située à mi-distance de l'origine  $C_4$  du repère  $R_{ARF4}$  et de l'origine  $C_1$  du repère  $R_{ARF1}$ . Cette origine est également notée  $C_{14}$  dans le chapitre 3 ;
- l'axe  $X1_{OGR}$  est parallèle à l'axe  $C_1C_4$  et orienté de  $C_4$  vers  $C_1$  ;
- l'axe  $Y1_{OGR}$  est parallèle à la somme des projections, sur le plan orthogonal à  $X1_{OGR}$ , des vecteurs  $Y_1$  et  $Y_4$  (appartenant aux repères  $R_{ARF1}$  et  $R_{ARF4}$ ) ;
- l'axe  $Z1_{OGR}$  complète le repère de sorte qu'il soit orthonormé direct.

Pour  $OAG_3$  (paire 35) :

- L'origine  $O2_{OGR}$  est située à mi-distance de l'origine  $C_2$  du repère  $R_{ARF2}$  et de l'origine  $C_5$  du repère  $R_{ARF5}$ . Cette origine est également notée  $C_{25}$  dans le chapitre 3 ;
- l'axe  $X2_{OGR}$  est parallèle à l'axe  $C_2C_5$  et orienté de  $C_5$  vers  $C_2$  ;

## A.1. Définition des repères utilisés pour l'étude du gradiomètre

- l'axe  $Y_{2OGR}$  est parallèle à la somme des projections, sur le plan orthogonal à  $X_{2OGR}$ , des vecteurs  $Y_2$  et  $Y_5$  (appartenant aux repères  $R_{ARF2}$  et  $R_{ARF5}$ ) ;
- l'axe  $Z_{2OGR}$  complète le repère de sorte qu'il soit orthonormé direct.

Pour  $OAG_3$  (paire 36) :

- L'origine  $O_{1OGR}$  est située à mi-distance de l'origine  $C_3$  du repère  $R_{ARF3}$  et de l'origine  $C_6$  du repère  $R_{ARF6}$ . Cette origine est également notée  $C_{36}$  dans le chapitre 3 ;
- l'axe  $X_{3OGR}$  est parallèle à l'axe  $C_3C_6$  et orienté de  $C_6$  vers  $C_3$  ;
- l'axe  $Y_{3OGR}$  est parallèle à la somme des projections, sur le plan orthogonal à  $X_{3OGR}$ , des vecteurs  $Y_3$  et  $Y_6$  (appartenant aux repères  $R_{ARF3}$  et  $R_{ARF6}$ ) ;
- l'axe  $Z_{3OGR}$  complète le repère de sorte qu'il soit orthonormé direct.

La figure A.3 présente la disposition des repères  $R_{OAGRF}$  par rapport aux  $R_{ARF}$ .

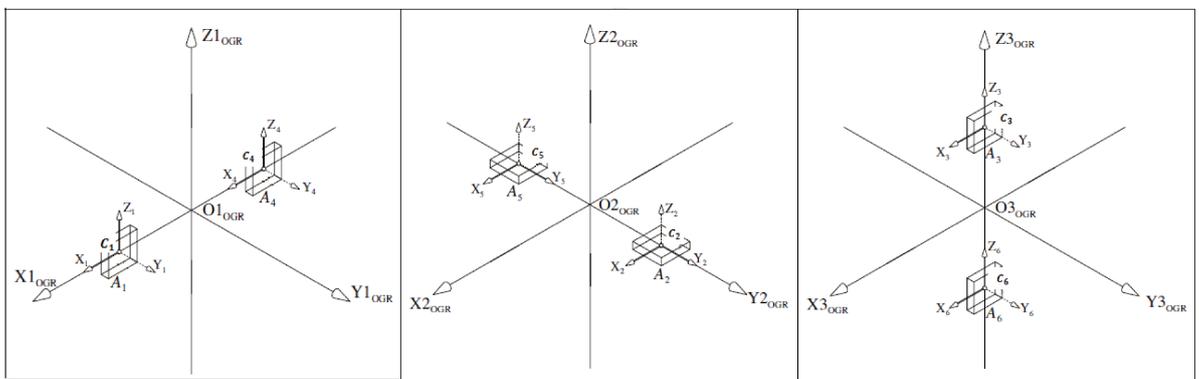


Figure A.3 – Définition du repère  $R_{OAGRF1}$ .

### A.1.7 Repère du gradiomètre - *Gradiometer Reference Frame*

Le repère  $R_{GRF}$  représente le repère du gradiomètre triaxial dans son ensemble et sert à repérer la position des trois OAG ainsi que celle du gradiomètre dans son ensemble par rapport aux autres repères. C'est dans ce repère que sont mesurés les composantes du tenseur de gravité sont mesurées par le gradiomètre entier. Le repère  $R_{GRF}$  est défini de telle sorte qu'il est confondu avec le repère  $R_{OAGRF3}$ .

Si le gradiomètre est dans sa configuration nominale : les centres des repères  $R_{OAGRF}$  et du repère  $R_{GRF}$  sont confondus, les axes des repères  $R_{OAGRF}$  sont deux à deux parallèles et orientés dans les mêmes directions, de même pour les axes des six repères  $R_{ARF}$ . La figure suivante représente la disposition nominale des repères. Les axes ultra-sensibles sont indiqués par une flèche pleine alors que les axes moins sensibles sont indiqués par des flèches en pointillés.

Dans la phase de mesure, le repère  $R_{GRF}$  est orienté de telle sorte que son axe  $X$  pointe dans la direction de vol du satellite, son axe  $Z$  pointe dans la direction nadir et son axe  $Y$  complète le repère de telle sorte qu'il soit orthonormé direct. La configuration des axes ultra-sensibles permet d'assurer la mesure des composantes diagonales du gradient de gravité avec une très grande précision.

La figure A.4 présente également la configuration des paires d'accéléromètres dans le gradiomètre, en particulier l'orientation de chaque masse d'épreuve. Pour la direction  $X_{GRF}$ , les trois paires d'accéléromètres sont orientées de manière à utiliser les axes sensibles de chaque accéléromètre. Cela permet d'optimiser la

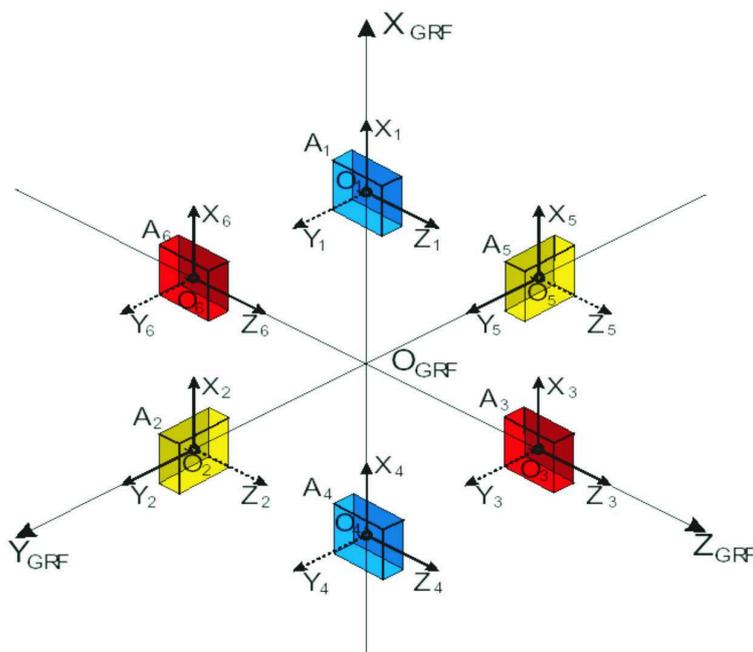


Figure A.4 – Schéma de la disposition des axes du repères  $R_{GRF}$  par rapport à ceux du repère  $R_{ARF}$ . Dans ce schéma, les points  $O_i$  correspondent aux points  $C_i$  de la figure A.3.

mesure des forces subies par le satellite afin de compenser la traînée. Pour la direction  $Y_{GRF}$ , seule la paire 25 mobilise les axes sensibles de ses accéléromètres. Les deux autres paires présentent les axes non sensibles des accéléromètres. Enfin, pour l'axe  $Z_{GRF}$ , la paire 36 (placée sur le bras) ainsi que la paire 14 présentent les axes sensibles des accéléromètres alors que la paire 25 présente ses axes non sensibles. Dans la suite, pour chaque axe du GRE, on appelle *paire sensible*, une paire dont les axes sensibles de chaque accéléromètre sont utilisés pour les mesures.

En résumé, dans le cas nominal, tous les repères présentés (autres que le repère inertiel) sont immobiles les uns par rapport aux autres. Les repères correspondant sont tous rigidement liés au satellite.

# B Annexe B

## B.1 Approximation de l'expression de la capacité

Lorsque la masse d'épreuve effectue une faible rotation, le condensateur formé par une face de la masse d'épreuve et par l'électrode en regard, n'est plus rigoureusement un condensateur plan. Néanmoins, dans le chapitre 3, on a approximé l'expression de la capacité avec la relation valable dans le cas d'un condensateur plan pour lequel les effets de bords sont négligés. Dans cette partie, on justifie cette expression.

Les effets de bord continuent d'être négligés pour deux raisons principales. Premièrement, la proximité des butées par rapport à la masse d'épreuve, situées aux quatre coins de la cage pour empêcher la masse d'épreuve de toucher les électrodes et portées au même potentiel que celle-ci, limite l'interaction électrostatique à la partie de la masse d'épreuve en regard de l'électrode. Certes, des lignes de champ existent entre les butées et l'électrode mais cette interaction a des effets négligeables car celles-ci sont beaucoup plus éloignées des électrodes que ne l'est la masse d'épreuve (cf. figure B.1 et l'étude [111]). Deuxièmement, la longueur d'une électrode Y/Z est  $1.3 \times 10^{-2}$  m et l'écart nominal entre masse d'épreuve et électrode est  $2.99 \times 10^{-4}$  m. À l'échelle de l'électrode, cette configuration peut être approximée en un condensateur parallèle plan. En



Figure B.1 – Schéma d'une coupe dans le plan YZ de la disposition de la masse d'épreuve, d'une butée et d'une électrode.

restant dans le cas de condensateur plan sans effet de bord, l'objet de cette partie est de comparer trois méthodes de calculs de capacité lorsque l'une des armatures (une face de la masse d'épreuve) effectue une petite rotation d'angle  $\phi$ , l'autre (l'électrode) restant fixe. Cette situation est schématisée dans la figure B.1 où on a représenté une portion d'une face de la masse d'épreuve et la face d'une électrode Y/Z, par exemple Z1+. Dans le cas de la mission GOCE, la rotation maximale autorisée par la présence rapprochée des butées est

## Appendix B. Annexe B

$\phi_{max} = 1.5 \times 10^{-3}$  rad. On peut donc se placer dans l'approximation des petits angles.

La première méthode reprend les travaux publiés par Lucas *et al.* [112] qui développent un calcul analytique permettant, entre autres, de déterminer la variation de capacité lors d'une modification géométrique d'une électrode à partir d'une configuration initiale. Dans le cas présent, la configuration initiale est celle dans laquelle la masse d'épreuve est parallèle aux électrodes Y/Z avec un entrefer nominal  $e$ . Dans le calcul qui suit, on s'appuie sur la figure 3.2 mais en supposant aucune translation selon les directions  $\mathbf{u}_y$  et  $\mathbf{u}_z$  afin d'illustrer notre propos dans un cadre simplifié. Pour cet exemple on considère le condensateur formé par l'électrode Y1+ et la portion de la masse d'épreuve en regard. On suppose uniquement une rotation d'angle  $\phi$ , supposé petit, autour du point  $O$ . On suppose que la rotation se fait dans le sens direct. La matrice  $R(\phi)$  associé à cette rotation s'écrit donc :

$$R(\phi) = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix} \quad (\text{B.1})$$

Dans la configuration initiale où la masse d'épreuve est parallèle aux électrodes, la capacité entre une des électrodes Y/Z et la portion de la masse d'épreuve en regard est approchée par  $C_{//} = \epsilon_0 S/e$ . La nouvelle capacité, après rotation de la masse d'épreuve est donnée par  $C_\phi = C_{//} + \delta C$  où  $\delta C$  est donnée par [112] :

$$\delta C = -\epsilon_0 \iint_{elec} (\boldsymbol{\xi}_{elec} \cdot \boldsymbol{\zeta}) (\boldsymbol{\xi}_{pm} \cdot d\mathbf{S}_{elec}) \quad (\text{B.2})$$

où  $\epsilon_0$  est la permittivité du vide,  $\iint_{elec}$  indique l'intégration sur la surface de l'électrode considérée,  $\boldsymbol{\zeta}$  est le vecteur de déplacement,  $\boldsymbol{\xi}_{elec}$  est le champ électrique produit par l'électrode lorsqu'elle est soumise à une tension de 1 V et que la masse d'épreuve est à la masse, dans cette configuration  $\boldsymbol{\xi}_{elec} = -\mathbf{u}_z/e$  avec  $\mathbf{u}_z$  le vecteur unitaire perpendiculaire à l'électrode dans sa configuration initiale, et  $\boldsymbol{\xi}_{pm} = -\boldsymbol{\xi}_{elec}$  est le champ électrique produit par la masse d'épreuve lorsqu'elle est soumise à une tension de 1 V et que l'électrode est à la masse.

Ainsi :

$$\delta C = \epsilon_0 \xi_{elec}^2 \iint_{elec} \boldsymbol{\zeta} \cdot \mathbf{u}_z dS_{elec} \quad (\text{B.3})$$

En se plaçant dans le repère indiqué par la figure 3.2, on peut montrer que :

$$\boldsymbol{\zeta} \cdot \mathbf{u}_z = \eta_y \sin(\phi) + \frac{L_{Y/Z}}{2} (\cos(\phi) - 1) \quad (\text{B.4})$$

où  $L_{Y/Z}$  est la longueur d'une électrode et  $\eta_y$  est l'abscisse d'un point de la portion de la masse d'épreuve en regard de l'électrode Z1+ dans la configuration initiale et dans le repère défini par  $(\mathbf{u}_y, \mathbf{u}_z)$ .

Pour achever le calcul, on intègre sur la surface de l'électrode en notant  $S_{Y/Z}$  la surface totale et  $d$  la distance entre l'axe ( $Oz$ ) et le milieu de l'électrode Z1+. Il vient au premier ordre :

$$\delta C \approx \frac{\epsilon_0 S_{Y/Z} d}{e^2} \phi - \frac{\epsilon_0 S_{Y/Z} L_{Y/Z}}{4e^2} \phi^2 \quad (\text{B.5})$$

Finalemnt, au second ordre, la capacité du condensateur formé de l'électrode Z1+ et de la masse d'épreuve avec une rotation d'angle  $\phi$  s'écrit :

$$C_\phi \approx C_{//} + \delta C = \frac{\epsilon_0 S_{Y/Z}}{e} + \frac{\epsilon_0 S_{Y/Z} d}{e^2} \phi - \frac{\epsilon_0 S_{Y/Z} L_{Y/Z}}{4e^2} \phi^2 \quad (\text{B.6})$$

## B.1. Approximation de l'expression de la capacité

Dans le cas de GOCE,  $e = 2.99 \times 10^{-4}$  m,  $d = 8 \times 10^{-3}$  m,  $L_{Y/Z} = 1.3$  cm et  $Y/Z = 1.0475 \times 10^{-4}$  m. Avec  $\phi_{max}$ ,

$$C_{\phi_{max}} = 3.101861204 * 10^{-12} + 1.200744958 * 10^{-13} - 7.586233817 * 10^{-17} = 3.221859837 \text{ pF} \quad (\text{B.7})$$

Le terme d'ordre 2 représente environ 0.023% de la capacité estimée totale.

La deuxième approche consiste à utiliser les résultats de [113] et [114]. Une expression théorique générale en prenant en compte les effets de bord est proposée à l'aide des transformations conformes et des intégrales elliptiques. Dans le cas où l'angle  $\phi$  et  $e/L_{Y/Z}$  sont petits et en considérant que les deux armatures en interaction sont de même longueur, l'expression générale admet une simplification majeure :

$$\hat{C} = \frac{\epsilon_0 S}{e} + \frac{\epsilon_0 l}{\pi} \left[ \left( 1 + \frac{L_{Y/Z}}{4e} \right) \phi + \frac{\phi^2}{2} \right] \quad (\text{B.8})$$

Avec les valeurs des paramètres:  $\hat{C} \approx 3.254785853$  pF et le deuxième terme a pour valeur  $2.4412 \times 10^{-2}$  pF. La différence avec l'expression précédente est de 0.8%.

La troisième approche consiste à considérer que le condensateur non-parallèle est l'ensemble de condensateurs plans infinitésimaux. Étant donné la faible valeur de la rotation, on fait l'approximation que les lignes de champ dans le condensateur non-parallèle sont quasi-orthogonales aux armatures. On définit alors la capacité totale par l'expression :

$$\tilde{C} \approx \epsilon_0 S \int_{\eta_1}^{\eta_2} \frac{1}{h(x_E, y_E)} dy_E \quad (\text{B.9})$$

où  $h(x_E, y_E) = \left( \frac{L_{Y/Z}}{2} \cos(\phi) + x_E \sin^2(\phi) - y_E \cos(\phi) \sin(\phi) - x_E^2 + \left( \frac{L_{Y/Z}}{2} \sin(\phi) - x_E \sin(\phi) \cos(\phi) + y_E \cos^2(\phi) - y_E^2 \right)^2 \right)$ ,  $\eta_2 - \eta_1 = L_{Y/Z}$  et  $\eta_2 + \eta_1 = 2d$

Un calcul formel à l'aide de Matlab donne l'expression suivante à l'ordre 1 :

$$\tilde{C} \approx \frac{\eta_2 - \eta_1}{e} + \frac{\phi(\eta_1^2 - \eta_2^2)}{2e^2} = \frac{\epsilon_0 S}{e} + \frac{\epsilon_0 S d \phi}{e^2} \quad (\text{B.10})$$

avec un terme d'ordre 2 négligeable, de l'ordre de  $1.4237 \times 10^{-15}$  pF.

Ainsi, au premier ordre, les trois méthodes présentées sont équivalentes à l'expression  $C = \frac{\epsilon S}{e - \phi d} \approx \frac{\epsilon_0 S}{e} + \frac{\epsilon_0 S d \phi}{e^2}$ . On a donc adopté cette forme d'expression pour sa simplicité analytique dans le calcul des forces électrostatiques au chapitre 3.



# C Annexe C

## C.1 Valeurs maximales des termes de la matrice $[dMI_{ij}]$ d'après les spécifications

Ci-dessous sont indiquées les valeurs maximales, à ne pas dépasser durant toute la mission, des termes de la matrice  $[dMI_{ij}]$  spécifiées par Thalès - Alenia Space [73].

$dMI_{14,11} < 4.1 \cdot 10^{-3}$	$MI_{14,12} < 1.5 \cdot 10^{-4}$	$MI_{14,13} < 1.3 \cdot 10^{-4}$	$MI_{14,14} < 4.1 \cdot 10^{-3}$	$MI_{14,15} < 1.5 \cdot 10^{-4}$	$MI_{14,16} < 1.3 \cdot 10^{-4}$
$MI_{14,21} < 1.5 \cdot 10^{-4}$	$dMI_{14,22} < 5.8 \cdot 10^{-2}$	$MI_{14,23} < 1.9 \cdot 10^{-5}$	$MI_{14,24} < 1.5 \cdot 10^{-4}$	$MI_{14,25} < 5.8 \cdot 10^{-2}$	$MI_{14,26} < 1.4 \cdot 10^{-4}$
$MI_{14,31} < 1.3 \cdot 10^{-4}$	$MI_{14,32} < 1.9 \cdot 10^{-5}$	$dMI_{14,33} < 4.1 \cdot 10^{-3}$	$MI_{14,34} < 1.3 \cdot 10^{-4}$	$MI_{14,35} < 1.4 \cdot 10^{-4}$	$MI_{14,36} < 4.1 \cdot 10^{-3}$
$MI_{14,41} < 4.1 \cdot 10^{-3}$	$MI_{14,42} < 1.5 \cdot 10^{-4}$	$MI_{14,43} < 1.3 \cdot 10^{-4}$	$dMI_{14,44} < 4.1 \cdot 10^{-3}$	$MI_{14,45} < 1.5 \cdot 10^{-4}$	$MI_{14,46} < 1.3 \cdot 10^{-4}$
$MI_{14,51} < 1.5 \cdot 10^{-4}$	$MI_{14,52} < 5.8 \cdot 10^{-2}$	$MI_{14,53} < 1.4 \cdot 10^{-4}$	$MI_{14,54} < 1.5 \cdot 10^{-4}$	$dMI_{14,55} < 5.8 \cdot 10^{-2}$	$MI_{14,56} < 1.9 \cdot 10^{-5}$
$MI_{14,61} < 1.3 \cdot 10^{-4}$	$MI_{14,62} < 1.4 \cdot 10^{-4}$	$MI_{14,63} < 4.1 \cdot 10^{-3}$	$MI_{14,64} < 1.3 \cdot 10^{-4}$	$MI_{14,65} < 1.9 \cdot 10^{-5}$	$dMI_{14,66} < 4.1 \cdot 10^{-3}$

$dMI_{25,11} < 4.1 \cdot 10^{-3}$	$MI_{25,12} < 1.3 \cdot 10^{-4}$	$MI_{25,13} < 1.9 \cdot 10^{-5}$	$MI_{25,14} < 4.1 \cdot 10^{-3}$	$MI_{25,15} < 1.3 \cdot 10^{-4}$	$MI_{25,16} < 1.4 \cdot 10^{-4}$
$MI_{25,21} < 1.3 \cdot 10^{-4}$	$dMI_{25,22} < 4.1 \cdot 10^{-3}$	$MI_{25,23} < 1.5 \cdot 10^{-4}$	$MI_{25,24} < 1.3 \cdot 10^{-4}$	$MI_{25,25} < 4.1 \cdot 10^{-3}$	$MI_{25,26} < 1.5 \cdot 10^{-4}$
$MI_{25,31} < 1.9 \cdot 10^{-5}$	$MI_{25,32} < 1.5 \cdot 10^{-4}$	$dMI_{25,33} < 5.8 \cdot 10^{-2}$	$MI_{25,34} < 1.4 \cdot 10^{-4}$	$MI_{25,35} < 1.5 \cdot 10^{-4}$	$MI_{25,36} < 5.8 \cdot 10^{-2}$
$MI_{25,41} < 4.1 \cdot 10^{-3}$	$MI_{25,42} < 1.3 \cdot 10^{-4}$	$MI_{25,43} < 1.4 \cdot 10^{-4}$	$dMI_{25,44} < 4.1 \cdot 10^{-3}$	$MI_{25,45} < 1.3 \cdot 10^{-4}$	$MI_{25,46} < 1.9 \cdot 10^{-5}$
$MI_{25,51} < 1.3 \cdot 10^{-4}$	$MI_{25,52} < 4.1 \cdot 10^{-3}$	$MI_{25,53} < 1.5 \cdot 10^{-4}$	$MI_{25,54} < 1.3 \cdot 10^{-4}$	$dMI_{25,55} < 4.1 \cdot 10^{-3}$	$MI_{25,56} < 1.5 \cdot 10^{-4}$
$MI_{25,61} < 1.4 \cdot 10^{-4}$	$MI_{25,62} < 1.5 \cdot 10^{-4}$	$MI_{25,63} < 5.8 \cdot 10^{-2}$	$MI_{25,64} < 1.9 \cdot 10^{-5}$	$MI_{25,65} < 1.5 \cdot 10^{-4}$	$dMI_{25,66} < 5.8 \cdot 10^{-2}$

$dMI_{36,11} < 4.1 \cdot 10^{-3}$	$MI_{36,12} < 1.9 \cdot 10^{-5}$	$MI_{36,13} < 1.3 \cdot 10^{-4}$	$MI_{36,14} < 4.1 \cdot 10^{-3}$	$MI_{36,15} < 1.4 \cdot 10^{-4}$	$MI_{36,16} < 1.3 \cdot 10^{-4}$
$MI_{36,21} < 1.9 \cdot 10^{-5}$	$dMI_{36,22} < 5.8 \cdot 10^{-2}$	$MI_{36,23} < 1.5 \cdot 10^{-4}$	$MI_{36,24} < 1.4 \cdot 10^{-4}$	$MI_{36,25} < 5.8 \cdot 10^{-2}$	$MI_{36,26} < 1.5 \cdot 10^{-4}$
$MI_{36,31} < 1.3 \cdot 10^{-4}$	$MI_{36,32} < 1.5 \cdot 10^{-4}$	$dMI_{36,33} < 4.1 \cdot 10^{-3}$	$MI_{36,34} < 1.3 \cdot 10^{-4}$	$MI_{36,35} < 1.5 \cdot 10^{-4}$	$MI_{36,36} < 4.1 \cdot 10^{-3}$
$MI_{36,41} < 4.1 \cdot 10^{-3}$	$MI_{36,42} < 1.4 \cdot 10^{-4}$	$MI_{36,43} < 1.3 \cdot 10^{-4}$	$dMI_{36,44} < 4.1 \cdot 10^{-3}$	$MI_{36,45} < 1.9 \cdot 10^{-5}$	$MI_{36,46} < 1.3 \cdot 10^{-4}$
$MI_{36,51} < 1.4 \cdot 10^{-4}$	$MI_{36,52} < 5.8 \cdot 10^{-2}$	$MI_{36,53} < 1.5 \cdot 10^{-4}$	$MI_{36,54} < 1.9 \cdot 10^{-5}$	$dMI_{36,55} < 5.8 \cdot 10^{-2}$	$MI_{36,56} < 1.5 \cdot 10^{-4}$
$MI_{36,61} < 1.3 \cdot 10^{-4}$	$MI_{36,62} < 1.5 \cdot 10^{-4}$	$MI_{36,63} < 4.1 \cdot 10^{-3}$	$MI_{36,64} < 1.3 \cdot 10^{-4}$	$MI_{36,65} < 1.5 \cdot 10^{-4}$	$dMI_{36,66} < 4.1 \cdot 10^{-3}$

Figure C.1 – Valeurs maximales des termes de la matrice  $[dMI_{ij}]$  pour la paire 14 (tableau du haut), pour la paire 25 (tableau du milieu) et pour la paire 36 (tableau du bas).

## C.2 Estimations des matrices $[dMI_{ij}]$ issues des processus d'étalonnage pendant la phase scientifique de la mission

Appendix C. Annexe C

	[dMI <sub>ij</sub> ]					
Pair 14	2,39e-02	-2,94e-05	6.38e-6	1.77e-2	1.23e-5	-6.83e-6
	2.99e-5	-2.56e-2	5.87e-7	-8.19e-6	-2.66e-4	5.69e-5
	-6.53e-05	-1.66e-5	2.00e-2	-6.08e-6	-5.83e-5	1.08e-2
	1,75e-02	1.23e-05	-6.83e-6	2.39e-2	-2.94e-5	-6.36e-6
	-8.19e-6	-2.66e-4	5.69e-5	2.99e-5	-2.56e-2	5.87e-7
	-6.08e-6	-5.83e-5	1.08e-2	-6.53e-5	-1.66e-5	2.00e-2
Pair 25	1.81e-2	7.64e-5	-3.38e-6	4.54e-3	-5.45e-5	-6.36e-6
	-7.22e-5	1.89e-2	-3.44e-6	4.20e-5	5.50e-3	1.84e-5
	4.38e-8	2.33e-6	-2.02e-2	1.67e-6	-6.14e-6	2.16e-2
	4.54e-3	-5.45e-5	-6.36e-6	1.81e-2	7.64e-5	-3.38e-6
	4.20e-5	5.50e-3	1.84e-5	-7.22e-5	1.89e-2	-3.44e-6
	1.67e-6	-6.14e-6	2.16e-2	4.38e-8	2.33e-6	-2.02e-2
Pair 36	1.88e-2	-5.03e-6	-4.19e-6	-4.36e-3	6.07e-5	-1.43e-4
	4.39e-7	-2.62e-2	4.25e-5	-6.50e-5	-2.47e-3	-2.94e-5
	8.62e-6	-2.49e-5	2.26e-2	1.56e-4	2.53e-5	-3.34e-4
	-4.36e-3	6.07e-5	-1.43e-4	1.88e-2	-5.03e-6	-4.19e-6
	-6.50e-5	-2.47e-3	-2.94e-5	4.39e-7	-2.62e-2	4.25e-5
	1.56e-4	2.53e-5	-3.34e-4	8.62e-6	-2.49e-5	2.26e-2

Table C.1 – Matrice [dMI<sub>ij</sub>] estimée lors de la session d'étalonnage du 1<sup>er</sup> novembre 2009.

C.2. Estimations des matrices  $[dMI_{ij}]$  issues des processus d'étalonnage pendant la phase scientifique de la mission

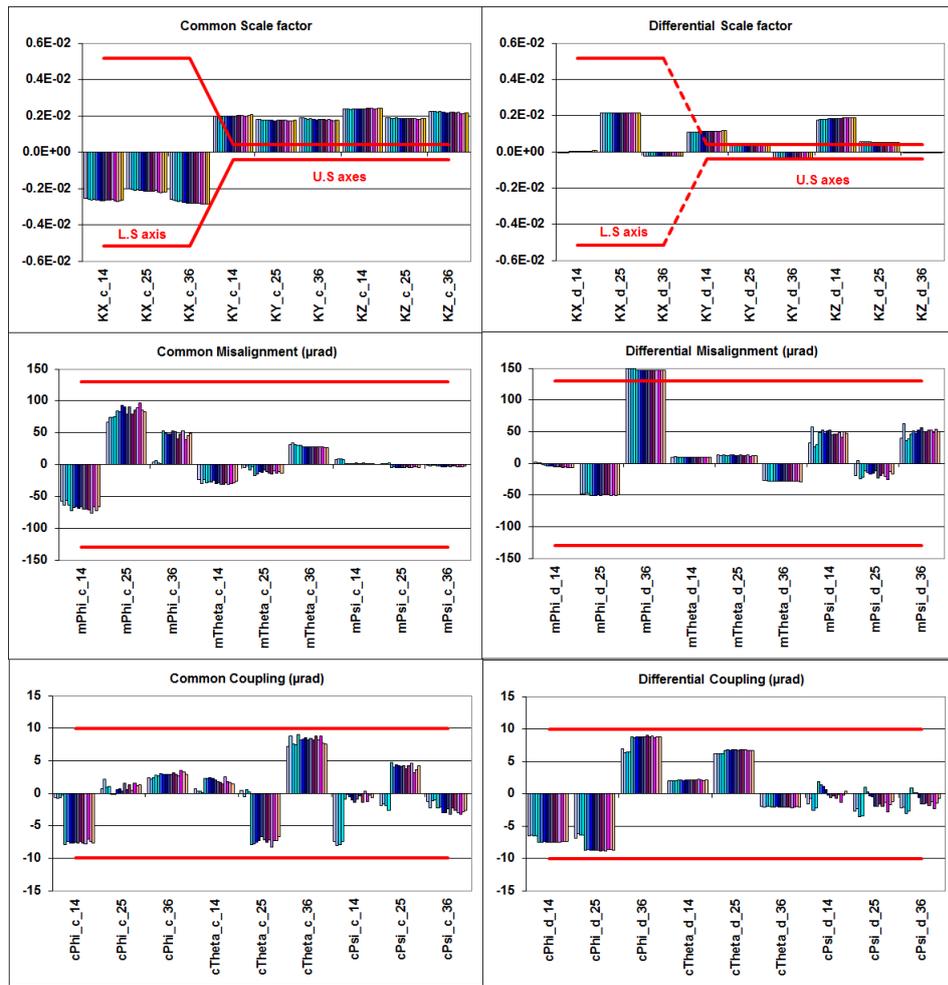


Figure C.2 – Comparaison des valeurs de la matrice d'étalonnage avec les spécifications pour toutes les paires d'accéléromètres et toutes les sessions d'étalonnage entre novembre 2009 et novembre 2012.



# D Annexe D

## D.1 Filtre de Savitzky-Golay

Le filtre numérique de Savitzky-Golay [115] (S-G) est une méthode de lissage dans le domaine temporel qui a initialement été développée afin de faire ressortir l'amplitude réelle des pics dans les données spectrométriques bruitées. Le principe de cette méthode est d'ajuster localement un polynôme au sens des moindres carrés. Par conséquent, l'hypothèse fondamentale de cette méthode est que localement, la courbe à lisser peut être bien approximée par un polynôme. Ci-dessous, on présente dans les grandes lignes le principe de la méthode de S-G.

On considère une réalisation  $x(t)$ , pour  $t = 0, \dots, N$ , d'un processus stationnaire. Pour chaque  $t$ , on cherche à approximer l'échantillon centré en la date  $t$  et de taille  $2M + 1$  par un polynôme de degré  $N$  de la forme :

$$p(n) = \sum_{k=0}^N a_k n^k \quad (\text{D.1})$$

On cherche à déterminer les coefficients de ce polynôme de sorte à minimiser l'erreur quadratique moyenne suivant :

$$\mathcal{L}(t) = \sum_{n=-M}^M (p(n) - x(t+n))^2 = \sum_{n=-M}^M \left( \sum_{k=0}^N a_k n^k - x(t+n) \right)^2 \quad (\text{D.2})$$

On peut déterminer les coefficients  $a_k$  en différentiant  $\mathcal{L}(t)$  par rapport à chacun de ces coefficients et en cherchant à trouver les valeurs annulant ces dérivées. Ainsi, pour tout  $i = 0, \dots, N$  :

$$\frac{\partial \mathcal{L}(t)}{\partial a_i} = \sum_{n=-M}^M \sum_{k=0}^N a_k n^{k+i} - \sum_{n=-M}^M x(t+n) n^i = \sum_{k=0}^N a_k \left( \sum_{n=-M}^M n^{k+i} \right) - \sum_{n=-M}^M x(t+n) n^i = 0 \quad (\text{D.3})$$

Le système d'équations normales défini par le jeu d'égalités précédentes pour tout  $i$  admet une solution si  $N \leq 2M$ . Pour déterminer cette solution, on passe en écriture matricielle en définissant  $\mathbf{x} = [x(t-M), \dots, x(t), \dots, x(t+M)]^\top$ ,  $\mathbf{a} = [a_0, \dots, a_N]^\top$ . On définit également la matrice  $[A]$  de taille  $(2M+1) \times (N+1)$  et d'éléments  $\alpha_{n,i} = n^i$  pour  $-M \leq n \leq M$  et  $0 \leq i \leq N$ . Dans ce cas, le terme  $\sum_{n=-M}^M n^{k+i}$  est le terme  $(i, k)$  de la matrice symétrique  $[A]^\top [A]$  de taille  $(N+1) \times (N+1)$ .

Le système d'équations normales peut alors être réécrit :

$$[A]^\top [A] \mathbf{a} = [A]^\top \mathbf{x} \quad (\text{D.4})$$

## Appendix D. Annexe D

---

On en déduit que les coefficients du polynôme cherché s'écrivent :

$$\mathbf{a} = ([A]^T [A])^{-1} [A]^T \mathbf{x} \quad (\text{D.5})$$

Dans la méthode de S-G, on cherche à remplacer la valeur  $x(t)$  par la valeur du polynôme  $p(n)$  évaluée en ce point. Puisque, l'échantillon considéré est centré en  $t$ , donc en  $n = 0$ , la valeur estimée  $\hat{x}(t)$  est la valeur du polynôme  $p(n)$  évaluée en 0 :

$$\hat{x}(t) = p(0) = a_0 \quad (\text{D.6})$$

Par conséquent, seule la première ligne de la matrice  $[H] = ([A]^T [A])^{-1} [A]^T$  est nécessaire dans l'estimation de  $a_0$ . D'après l'équation (D.5),  $a_0$  est donc une combinaison linéaire des valeurs de  $\mathbf{x}$ . Si l'on note  $h_{u,v}$  les éléments de la matrice  $[H]$ , on a alors :

$$a_0 = \sum_{v=0}^N h_{0,v} x_v \quad (\text{D.7})$$

Une propriété fondamentale dans la méthode de S-G est que les composantes de la matrice  $[H]$  ne dépendent pas des données empiriques. Ce résultat a été démontré par Savitzky et Golay dans [115]. Autrement dit, l'ajustement local d'un polynôme au sens des moindres carrés, en un point  $x(t)$  de la réalisation, est équivalent à remplacer  $x(t)$  par une somme pondérée des  $2M + 1$  valeurs voisines où les poids de la pondération sont indépendantes de la réalisation.

Les deux paramètres à indiquer en entrée d'un algorithme codant la méthode de S-G sont le degré  $N$  du polynôme et la taille  $M$  de la fenêtre. Ces paramètres sont déterminés empiriquement avec les deux règles générales suivantes :

- pour une valeur de  $M$  donnée, un polynôme de faible degré  $N$  mène à une estimation d'avantage biaisée mais de moindre variance. À l'inverse, un polynôme de degré plus élevé s'adapte mieux aux valeurs et mène donc à une estimation moins biaisée mais plus volatile (plus forte variance) ;
- la valeur de  $M$  dépend de la largeur des pics dans le signal. Si un pic a une largeur trop inférieure à la valeur  $M$ , le filtre de S-G a tendance à trop lisser le pic et ne pourra restituer son amplitude réelle.

En plus de la condition d'approximation polynomiale énoncée en début de section, une deuxième condition importante pour pouvoir appliquer le filtre de Savitzky est que les données doivent être uniformément espacées. Dans le cas contraire, il n'est pas possible d'obtenir un jeu de coefficients universel utilisable en tous les points de la série temporelle. Dans le cas des données de la mission GOCE, les données sont uniformément échantillonnées (à 1 Hz dans le cas des modes communs et différentiels, par exemple).

# Bibliography

- [1] Robin E Bell, Roger Anderson, and Lincoln Pratson. Gravity gradiometry resurfaces. *The Leading Edge*, 16(1):55–59, 1997.
- [2] Engelhardt August Eckhardt. A brief history of the gravity method of prospecting for oil. *Geophysics*, 5(3):231–242, 1940.
- [3] John Orcutt. *Earth System Monitoring: Selected Entries from the Encyclopedia of Sustainability Science and Technology*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [4] Augusto CV Getirana. Extreme water deficit in brazil detected from space. *Journal of Hydrometeorology*, 2015.
- [5] Anny Cazenave and Robert S Nerem. Present-day sea level change: Observations and causes. *Reviews of Geophysics*, 42(3), 2004.
- [6] European Space Agency. New scientific challenges for esa's living planet programme. Technical report, European Space Agency, 02 2007.
- [7] European Space Agency. Earth observation science strategy for esa: A new era for scientific advances and societal benefits (esa sp-1329/1). Technical report, European Space Agency, 02 2015.
- [8] European Space Agency. Esa's living planet programme: scientific achievements and future challenges - scientific context of the earth observation science strategy for esa (esa sp-1329/2). Technical report, European Space Agency, 02 2015.
- [9] European Space Agency. The earth explorers - the science and research elements of esa's living planet programme. Technical report, European Space Agency, 02 2007.
- [10] Living planet symposium themes. [http://lps16.esa.int/page\\_Themes.php](http://lps16.esa.int/page_Themes.php). Accessed: 2016-05-09.
- [11] Mark R Drinkwater, R Haagmans, D Muzi, A Popescu, R Floberghagen, M Kern, and M Fehringer. The goce gravity mission: Esa's first core earth explorer. In *Proceedings of the 3rd international GOCE user workshop*, pages 6–8. European Space Agency Noordwijk, The Netherlands, 2006.
- [12] Mark van der Meijde, Roland Pail, R Bingham, and R Floberghagen. Gocce data, models, and applications: A review. *International journal of applied earth observation and geoinformation*, 35:4–15, 2015.
- [13] Carla Braitenberg, Patrizia Mariani, and Tommaso Pivetta. Gocce observations in exploration geophysics. In *Proceedings of 4th Int GOCE User Workshop, Munich, Germany*, 2011.
- [14] Enrico Canuto and Luca Massotti. All-propulsion design of the drag-free and attitude control of the european satellite gocce. *Acta Astronautica*, 64(2):325–344, 2009.

## Bibliography

---

- [15] P Touboul, B Foulon, B Christophe, and JP Marque. Champ, grace, goce instruments and beyond. In *Geodesy for Planet Earth*, pages 215–221. Springer, 2012.
- [16] Joel Bergé, Pierre Touboul, Manuel Rodrigues, et al. Status of microscope, a mission to test the equivalence principle in space. In *Journal of Physics: Conference Series*, volume 610, pages 12009–12014. IOP Publishing, 2015.
- [17] Richard S. Gross and Ben F. Chao. *Gravity, Geoid and Geodynamics 2000: GGG2000 IAG International Symposium Banff, Alberta, Canada July 31 – August 4, 2000*, chapter The Gravitational Signature of Earthquakes, pages 205–210. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2002.
- [18] David F. Barnes. Gravity changes during the alaska earthquake. *Journal of Geophysical Research*, 71(2):451–456, 1966.
- [19] Stefan Rahmstorf. Ocean circulation and climate during the past 120,000 years. *Nature*, 419(6903):207–214, 2002.
- [20] Günter Seeber. *Satellite geodesy: foundations, methods, and applications*. Walter de Gruyter, 2003.
- [21] Bernhard Hofmann-Wellenhof and Helmut Moritz. *Physical geodesy*. Springer Science & Business Media, 2006.
- [22] J. Wahr, M. Molenaar, and F. Bryan. Time variability of the earth's gravity field: Hydrological and oceanic effects and their possible detection using grace. *Journal of Geophysical Research*, 103(B12):30 205 – 30 229, 12 1998.
- [23] Franz Barthelmes. Definition of functionals of the geopotential and their calculation from spherical harmonic models. *Helmholtz Centre Potsdam, GFZ (<http://icgem.gfz-potsdam.de/ICGEM/theory/str-0902.pdf>)*, 2009.
- [24] R. Pail, S. Bruinsma, C. Migliaccio, Fand Förste, H. Goiginger, W.-D. Schuh, E. Höck, M. Reguzzoni, J. M. Brockmann, O. Abrikosov, M. Veicherts, T. Fecher, R. Mayrhofer, I. Krasbutter, F. Sansò, and C. C. Tscherning. First goce gravity field models derived by three different approaches. *Journal of Geodesy*, 85(11):819–843, 2011.
- [25] R Pail and G Plank. Assessment of three numerical solution strategies for gravity field recovery from goce satellite gravity gradiometry implemented on a parallel platform. *Journal of Geodesy*, 76(8):462–474, 2002.
- [26] Roland Pail, Bernhard Metzler, Barbara Lackner, Thomas Preimesberger, Eduard Höck, Wolf-Dieter Schuh, Hamza Alkathib, Christian Boxhammer, Christian Siemes, and Martin Wermuth. Goc gravity field analysis in the framework of hpf: operational software system and simulation results. In *Proceedings 3rd GOCE user workshop, Frascati, ESRIN*, pages 249–256, 2006.
- [27] Christian Boxhammer and Wolf-Dieter Schuh. *GOCE Gravity Field Modeling: Computational Aspects — Free Kite Numbering Scheme*, pages 209–224. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2006.
- [28] Heike Bock, Adrian Jäggi, Ulrich Meyer, Pieter Visser, Jose van den IJssel, Tom van Helleputte, Markus Heinze, and Urs Hugentobler. Gps-derived orbits for the goce satellite. *Journal of Geodesy*, 85(11):807–818, 2011.
- [29] Nico Sneeuw. *Physical geodesy. Institute of Geodesy, Stuttgart University*, 2006.
- [30] Nikolaos K Pavlis, Simon A Holmes, Steve C Kenyon, and John K Factor. An earth gravitational model to degree 2160: Egm2008. *EGU General Assembly*, pages 13–18, 2008.

- [31] M. N. Nabighian, M. E. Ander, V. J. S. Grauch, R. O. Hansen, T. R. LaFehr, Y. Li, W. C. Pearson, J. W. Peirce, J.D. Phillips, and M. E. Ruder. Historical development of the gravity method in exploration. *Geophysics*, 70(6):63–89, 2005.
- [32] Bas Anthonie Alberts. *Regional gravity field modeling using airborne gravity data*. PhD thesis, TU Delft, Delft University of Technology, 2009.
- [33] Lee-Lueng Fu and Anny Cazenave. *Satellite altimetry and earth sciences: a handbook of techniques and applications*, volume 69. Academic Press, 2000.
- [34] P. Schwintzer, C. Reigber, A. Bode, Z. Kang, Y. S. Zhu, F.-H. Massmann, C. J. Raimondo, R. Biancale, G. Balmino, M. J. Lemoine, B. Moynot, C. J. Marty, F. Barlier, and Y. Boudon. Long-wavelength global gravity field models: Grim4-s4, grim4-c4. *Journal of Geodesy*, 71(4):189–208, 1997.
- [35] Richard Biancale, Georges Balmino, Jean-Michel Lemoine, Jean-Charles Marty, Bernard Moynot, Francois Barlier, Pierre Exertier, Olivier Laurain, Pascal Gegout, Peter Schwintzer, et al. A new global earth's gravity field model from satellite orbit perturbations: Grim5-s1. *Geophysical Research Letters*, 27(22):3611–3614, 2000.
- [36] Ch Gerlach, L Földvary, Dražen Švehla, Th Gruber, M Wermuth, N Sneeuw, B Frommknecht, H Oberndorfer, Th Peters, M Rothacher, et al. A champ-only gravity field model from kinematic orbits using the energy integral. *Geophysical Research Letters*, 30(20), 2003.
- [37] R. Stanton, S. Bettadpur, C. Dunn, K.-P. Renner, and M. Watkins. Science and mission - requirements document. Technical Report 15, Jet Propulsion Laboratory, University of Texas and GeoForschungsZentrum Potsdam, 05 1998.
- [38] Laboratoire d'Etudes en Géophysique et Océanographie Spatiales. La mission de gravimétrie spatiale grace : Premiers résultats en hydrologie globale, 4.
- [39] Byron D Tapley, Srinivas Bettadpur, John C Ries, Paul F Thompson, and Michael M Watkins. Grace measurements of mass variability in the earth system. *Science*, 305(5683):503–505, 2004.
- [40] FJ Lerch, SM Klosko, and GB Patel. A refined gravity model from lageos (gem-l2). *Geophysical Research Letters*, 9(11):1263–1266, 1982.
- [41] Reiner Rummel, M Van Gelderen, R Koop, E Schrama, F Sanso, M Brovelli, F Migliaccio, and F Sacerdote. Spherical harmonic analysis of satellite gradiometry. Technical report, Netherlands Geodetic Commission Nederlandse Rjkscommissie voor Geodesie, 1993.
- [42] Wolfgang Torge and Jürgen Müller. *Geodesy*. Walter de Gruyter, 2012.
- [43] Ch Reigber, G Balmino, H Müller, W Bosch, and B Moynot. Grim gravity model improvement using lageos (grim3-11). *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 90(B11):9285–9299, 1985.
- [44] Fancis J. Lerch, Steven M. Klosko, Roy E. Laubscher, and Carl A. Wagner. Gravity model improvement using geos 3 (gem 9 and 10). *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 84(B8):3897–3916, 1979.
- [45] G Balmino, D Letoquart, F Barlier, M Ducasse, A Bernard, B Sacleux, C Bouzat, JJ Runavot, X Le Pichon, and M Souriau. Le projet gradio et la determination a haute resolution du geopotentiel. *Bulletin géodésique*, 58(2):151–179, 1984.
- [46] Y. Boudon, F. Barlier, A. Bernard, R. Juillerat, A.M. Mainguy, and J.J. Walch. Synthesis of flight results of the cactus acceleromometer. *Acta Astronautica*, 6(11):1387 – 1398, 1979.

## Bibliography

---

- [47] Gravity Field. Steady-state ocean circulation mission. *ESA SP*, 1233(1):217, 1999.
- [48] European Space Agency. Esa's living planet programme: Scientific achievements and future challenges. Technical report, European Space Agency, 02 2015.
- [49] R. Floberghagen, M. Fehringer, D. Lamarre, D. Muzi, B Frommknecht, C. Steiger, J. Piñeiro, and A. da Costa. Mission design, operation and exploitation of the gravity field and steady-state ocean circulation explorer mission. *Journal of Geodesy*, 85(11):749–758, 2011.
- [50] A Eisner and SM Yionoulis. Nova-1-the'drag-free' navigation satellite. In *In: National Aerospace Meeting, Moffett Field, CA, March 24, 25, 1982, Proceedings.(A83-28776 11-04) Washington, DC, Institute of Navigation, 1982, p. 26-31.*, pages 26–31, 1982.
- [51] R. Rummel, W. Yi, and C. Stummer. Goce gravitational gradiometry. *Journal of Geodesy*, 85(11):777–790, 2011.
- [52] P. Touboul, E. Willemenot, B. Foulon, and V. Josselin. Accelerometers for champ, grace and goce space missions: synergy and evolution. *Bollettino di Geofisica Teorica ed Applicata*, 40(3-4):321–327, 1999.
- [53] Stefano Cesare and Gianfranco Sechi. Next generation gravity mission. In Marco D'Errico, editor, *Distributed Space Missions for Earth System Monitoring*, pages 575–598, New York, NY, 2013. Springer New York.
- [54] Basem Elsaka. Feasible multiple satellite mission scenarios flying in a constellation for refinement of the gravity field recovery. *International Journal of Geosciences*, 5(3):267, 2014.
- [55] F. Liorzou, D. Boulanger, E. Perrot, V. Lebat, B. Foulon, and B. Christophe. Performance analysis of grace-fo accelerometer. Technical report, ONERA - DMPH/IEA, 12 2015.
- [56] Pierre Touboul and Manuel Rodrigues. The microscope space mission. *Classical and Quantum Gravity*, 18(13):2487, 2001.
- [57] P Touboul, G Métris, V Lebat, and A Robert. The microscope experiment, ready for the in-orbit test of the equivalence principle. *Classical and Quantum Gravity*, 29(18):184010, 2012.
- [58] CWF Everitt and PW Worden. Cryogenic equivalence principle experiment, 1985.
- [59] S. Schlamminger, K.-Y. Choi, T. A. Wagner, J. H. Gundlach, and E. G. Adelberger. Test of the equivalence principle using a rotating torsion balance. *Phys. Rev. Lett.*, 100:041101, Jan 2008.
- [60] E.G. Adelberger, J.H. Gundlach, B.R. Heckel, S. Hoedl, and S. Schlamminger. Torsion balance experiments: A low-energy frontier of particle physics. *Progress in Particle and Nuclear Physics*, 62(1):102 – 134, 2009.
- [61] Emilie Hardy. *Procédures expérimentales et traitement des données associées pour la mission spatiale MICROSCOPE*. PhD thesis, Observatoire de Paris, 2013.
- [62] H Rebhan, M Aguirre, and J Johannessen. The gravity field and steady-state ocean circulation explorer mission-goce. *ESA Earth Observation Quarterly*, 66:6–11, 2000.
- [63] Reiner Rummel, Thomas Gruber, and Radboud Koop. High level processing facility for goce: products and processing strategy. In *Proceedings of the 2nd International GOCE User Workshop, ESA-SP569*, pages 8–10, 2004.

- [64] F Migliaccio, M Reguzzoni, F Sanso, CC Tscherning, and M Veicherts. Goce data analysis: the space-wise approach and the first space-wise gravity field model. In *Proceedings of the ESA living planet symposium*, volume 28. Citeseer, 2010.
- [65] Judith Schall, Annette Eicker, and Jürgen Kusche. The itg-goce02 gravity field model from goce orbit and gradiometer data based on the short arc approach. *Journal of Geodesy*, 88(4):403–409, 2014.
- [66] Jan Martin Brockmann, Norbert Zehentner, Eduard Höck, Roland Pail, Ina Loth, Torsten Mayer-Gürr, and Wolf-Dieter Schuh. Egm\_tim\_rl05: An independent geoid with centimeter accuracy purely based on the goce mission. *Geophysical Research Letters*, 41(22):8089–8099, 2014.
- [67] Nikolaos K. Pavlis, Simon A. Holmes, Steve C. Kenyon, and John K. Factor. The development and evaluation of the earth gravitational model 2008 (egm2008). *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 117(B4):n/a–n/a, 2012.
- [68] T Mayer-Gürr, D Rieser, E Höck, JM Brockmann, WD Schuh, I Krasbutter, J Kusche, A Maier, S Krauss, W Hausleitner, et al. The new combined satellite only model goco03s. *Abstract, GGHS2012, Venice*, 2012.
- [69] H Hashemi Farahani, P Ditmar, R Klees, X Liu, Q Zhao, and J Guo. The static gravity field model dgm-1s from grace and goce data: computation, validation and an analysis of goce mission’s added value. *Journal of Geodesy*, 87(9):843–867, 2013.
- [70] Christian Hirt, Sten Claessens, Thomas Fecher, Michael Kuhn, Roland Pail, and Moritz Rexer. New ultrahigh-resolution picture of earth’s gravity field. *Geophysical research letters*, 40(16):4279–4283, 2013.
- [71] Per Knudsen and Ole Baltazar Andersen. A global mean ocean circulation estimation using goce gravity models-the dtu12mdt mean dynamic topography model. In *20 years of progress in radar altimetry symposium*, 2012.
- [72] M Reguzzoni and D Sampietro. Gemma: An earth crustal model based on goce satellite data. *International Journal of Applied Earth Observation and Geoinformation*, 35:31–43, 2015.
- [73] S. Cesare. Performance requirements and budgets for the gradiometric mission. Technical Report 2, Alenia Spazio - A Finmeccanica Company, 07 2002. GO-TN-AI-0027.
- [74] John David Jackson. *Classical electrodynamics*. Wiley, 1999.
- [75] V. Josselin, P. Touboul, and R. Kielbasa. Capacitive detection scheme for space accelerometers applications. *Sensors and Actuators*, 78:92 – 98, 1998.
- [76] ONERA GOCE Team. Accelerometer error budget computation (mathcad file). Technical Report 5, ONERA - The French Aerospace Lab, 04 2009. GO-TN-ONE-MCD-0017.
- [77] ONERA GOCE Team. Accelerometer error budget analysis. Technical Report 3, ONERA - The French Aerospace Lab, 10 2007. GO-TN-ONE-0017.
- [78] ESA Christoph Steiger, ESA Juan Piñeiro, and ESA Pier Paolo Emanuelli. Operating goce, the european space agency’s low-flying gravity mission, 2010.
- [79] Pascal Brasselet. *Mécanique MPSI-PCSI*. Presse Universitaire de France, 2000.
- [80] Jean-Marie Berthelot. *Mécanique des solides rigides*. Technique et Documentation, 2006.
- [81] A. Caignot, V. Crespel, M. Dérumaux, C. Garreau, B. Martin, A. Redondo, and S. Roux. *Sciences industrielles de l’ingénieur*. Vuibert, 2014.

## Bibliography

---

- [82] E Willemonot and P Touboul. Electrostatically suspended torsion pendulum. *Review of Scientific Instruments*, 71(1):310–314, 2000.
- [83] GOCE Team. Accelerometer model. Technical Report 6, ONERA - The French Aerospace Lab, 11 2005. GO-TN-ONE-0002.
- [84] IAPG team B. Frommknecht. Goce ground segment instrument processing facility 1 - detailed processing model for egg. Technical Report 18, IAPG, 11 2005.
- [85] C Siemes. Goce gradiometer calibration and level 1b data processing. Technical report, ESA Working Paper EWP-2384. [https://earth.esa.int/c/document\\_library/get\\_file](https://earth.esa.int/c/document_library/get_file), 2012.
- [86] S. Cesare and G. Catastini. Gradiometer on-orbit calibration procedure analysis. Technical Report 4, Alenia Spazio - A Finmeccanica Company, 02 2008. GO-TN-AI-0069.
- [87] Claudia S. Stummer. *Gradiometer Data Processing and Analysis for the GOCE mission*. PhD thesis, Technische Universität München, 2013.
- [88] M.B. Priestley. *Spectral Analysis and Time Series*. Academic Press, 1981.
- [89] C. Stummer, T. Fecher, and R. Pail. Alternative method for angular rate determination within the goce gradiometer processing. *Journal of Geodesy*, 85(9):585–596, 2011.
- [90] J. Bergé, B. Christophe, and B. Foulon. Goce accelerometers data revisited : stability and detector noise, 2013. Living Planet Symposium.
- [91] PNAM Visser. Goce gradiometer: estimation of biases and scale factors of all six individual accelerometers by precise orbit determination. *Journal of Geodesy*, 83(1):69–85, 2009.
- [92] P. N. A. M. Visser and J. A. A. van den IJssel. Calibration and validation of individual goce accelerometers by precise orbit determination. *Journal of Geodesy*, 90(1):1–13, 2015.
- [93] Heike Bock, Adrian Jäggi, Gerhard Beutler, and Ulrich Meyer. Goce: precise orbit determination for the entire mission. *Journal of Geodesy*, 88(11):1047–1060, 2014.
- [94] Jose van den IJssel and Pieter Visser. Determination of non-gravitational accelerations from {GPS} satellite-to-satellite tracking of {CHAMP}. *Advances in Space Research*, 36(3):418 – 423, 2005. Satellite Dynamics in the Era of Interdisciplinary Space Geodesy.
- [95] J. Flury, S. Bettadpur, and B. Tapley. Precise accelerometry onboard the grace gravity field satellite mission. *Advances in Space Research*, 42:1414–1423, 2008.
- [96] SERCO/DATAMAT Consortium. Goce 1b products user handbook - goce-gseg-eopg-tn-06-0137. Technical report, European Space Agency, 06 2008.
- [97] G Sechi, M Buonocore, F Cometto, M Saponara, A Tramutola, B Vinai, G Andrè, and M Fehringer. In-flight results from the drag-free and attitude control of goce satellite. *IFAC Proceedings Volumes*, 44(1):733–740, 2011.
- [98] Christophe Leys, Christophe Ley, Olivier Klein, Philippe Bernard, and Laurent Licata. Detecting outliers: Do not use standard deviation around the mean, use absolute deviation around the median. *Journal of Experimental Social Psychology*, 49(4):764–766, 2013.
- [99] Peter J Huber. *Robust statistics*. Springer, 2011.

- [100] Peter J Rousseeuw and Christophe Croux. Alternatives to the median absolute deviation. *Journal of the American Statistical association*, 88(424):1273–1283, 1993.
- [101] Namjin Chung, Xiaohua Douglas Zhang, Anthony Kreamer, Louis Locco, Pei-Fen Kuan, Steven Bartz, Peter S Linsley, Marc Ferrer, and Berta Strulovici. Median absolute deviation to improve hit selection for genome-scale rnai screens. *Journal of biomolecular screening*, 13(2):149–158, 2008.
- [102] ESA Mission Operations Department. Weekly operations report number 104 - go-rp-esc-fs-6100 - reporting period 07-mar-11 to 13-mar-11. Technical report, European Space Agency, 03 2011.
- [103] Quentin Baghi, Gilles Métris, Joël Bergé, Bruno Christophe, Pierre Touboul, and Manuel Rodrigues. Regression analysis with missing data and unknown colored noise: Application to the microscope space mission. *Phys. Rev. D*, 91:062003, Mar 2015.
- [104] J Timmer and M Koenig. On generating power law noise. *Astronomy and Astrophysics*, 300:707, 1995.
- [105] Peter D Welch. The use of fast fourier transform for the estimation of power spectra: A method based on time averaging over short, modified periodograms. *IEEE Transactions on audio and electroacoustics*, 15(2):70–73, 1967.
- [106] Michael Tröbs and Gerhard Heinzl. Improved spectrum estimation from digitized time series on a logarithmic frequency axis. *Measurement*, 39(2):120–129, 2006.
- [107] Björn Frommknecht, Daniel Lamarre, Marco Meloni, Alberto Bigazzi, and Rune Floberghagen. Goce level 1b data processing. *Journal of Geodesy*, 85(11):759–775, 2011.
- [108] B Christophe, D Boulanger, B Foulon, P-A Huynh, V Lebat, F Liorzou, and E Perrot. A new generation of ultra-sensitive electrostatic accelerometers for grace follow-on and towards the next generation gravity missions. *Acta Astronautica*, 117:1–7, 2015.
- [109] S Anza, M Armano, E Balaguer, M Benedetti, C Boatella, P Bosetti, D Bortoluzzi, N Brandt, Claus Braxmaier, M Caldwell, et al. The ltp experiment on the lisa pathfinder mission. *Classical and Quantum Gravity*, 22(10):S125, 2005.
- [110] Karim Douch. *Gradiomètre planaire aéroporté pour l'étude de la gravité en zones littorales*. PhD thesis, UNIVERSITÉ SORBONNE PARIS CITÉ, 2015.
- [111] Raphaël Chen. 3d modelling of goce's electrostatic accelerometers using finite elements. Master's thesis, Cranfield University, United Kingdom, 2013.
- [112] J. Lucas, S. Holé, and B Christophe. Analytical capacitive sensor sensitivity distribution and applications. *Measurement science and technology*, 17(9):2467, 2006.
- [113] Yumin Xiang. The electrostatic capacitance of an inclined plate capacitor. *Journal of electrostatics*, 64(1):29–34, 2006.
- [114] Bijunath R Patla. Small angle approximation for non-parallel plate capacitors with applications in experimental gravitation. *arXiv preprint arXiv:1208.2984*, 2012.
- [115] Abraham Savitzky and Marcel JE Golay. Smoothing and differentiation of data by simplified least squares procedures. *Analytical chemistry*, 36(8):1627–1639, 1964.