



HAL
open science

Vibrations de ligne d'arbre sur paliers hydrodynamiques : influence de l'état de surface

Jocelyn Rebufa

► **To cite this version:**

Jocelyn Rebufa. Vibrations de ligne d'arbre sur paliers hydrodynamiques : influence de l'état de surface. Autre. Université de Lyon, 2016. Français. NNT : 2016LYSEC044 . tel-01593167

HAL Id: tel-01593167

<https://theses.hal.science/tel-01593167>

Submitted on 25 Sep 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

Spécialité

Génie mécanique

ÉCOLE DOCTORALE MEGA MÉCANIQUE - ÉNERGÉTIQUE - GÉNIE CIVIL -
ACOUSTIQUE

Présentée par

Jocelyn REBUFA

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR de l'Université de Lyon délivré par l'Ecole Centrale de Lyon

**VIBRATIONS DE LIGNE D'ARBRE SUR PALIERS
HYDRODYNAMIQUES : INFLUENCE DE L'ÉTAT DE
SURFACE**

soutenue le 6 décembre 2016

devant le jury composé de :

F., THOUVEREZ, Professeur, École Centrale de Lyon	Directeur de thèse
D., MAZUYER, Professeur, École Centrale de Lyon	Directeur de thèse
E., LE GUYADEC, Ingénieur de Recherche, CEA Marcoule	Co-encadrant
M., ARGHIR, Professeur, Université de Poitiers	Rapporteur
J.-C., GOLINVAL, Professeur, Université de Liège	Rapporteur
B., PRABEL, Ingénieur de Recherche, CEA Saclay	Examineur
C., CORRE, Professeur, École Centrale de Lyon	Examineur
G., BAYADA, Professeur, INSA de Lyon	Examineur

Résumé

Le palier hydrodynamique est une solution de guidage en rotation particulièrement appréciée pour ses caractéristiques d'amortissement à hautes vitesses de rotation. Cependant les performances des machines tournantes lubrifiées par un film fluide sont impactées par des effets non linéaires difficiles à analyser. La prédiction du comportement du système par la simulation nécessite une modélisation avancée de l'écoulement de lubrifiant dans le palier hydrodynamique. Enfin, l'état de surface semble avoir un impact important sur l'écoulement du fluide lubrifiant, lui-même agissant sur les caractéristiques statiques et dynamiques des parties tournantes.

Cette étude vise à améliorer les modèles numériques liés à l'impact de l'état de surface des paliers hydrodynamiques sur la dynamique de ligne d'arbre. La méthode d'homogénéisation multi-échelles a été utilisée à cet effet dans un algorithme multi-physiques pour décrire l'interaction entre la structure flexible en rotation et les films fluides des supports de lubrification. Différents modèles ont été utilisés pour prendre en compte la présence de zone de rupture de film lubrifiant. Des méthodologies non-linéaires fréquentielles ont été mises en place afin de permettre l'étude paramétrique des solutions périodiques d'un tel système et de leur stabilité.

Afin de confronter ce modèle complexe à la réalité, un banc d'essai miniature a également été conçu. Différents échantillons présentant des états de surface modifiés par ablation à l'aide de LASER femto-seconde ont été testés. L'étude expérimentale a permis de vérifier certaines tendances prévues par la simulation. Des améliorations des performances des paliers hydrodynamiques par rapport aux vibrations auto-entretenues du système ont été démontrées pour certaines textures. En revanche toutes les améliorations ne sont pas prédites par les algorithmes d'homogénéisation multi-échelles. La présence de recirculation dans les aspérités du motif a été mise en évidence à partir de la résolution locale des équations de Navier-Stokes. Ce résultat participe à la remise en question des hypothèses classiques utilisées en texturation, et peut justifier les améliorations obtenues expérimentalement avec les paliers texturés.

Mots-clés : *Lubrification hydrodynamique, Texturation de surface, Homogénéisation multi-échelles, Dynamique non linéaire, Couplage fluide-structure, Rupture de film*

Abstract

The hydrodynamic bearing provides good damping properties in rotating machineries. However, the performances of rotor-bearings systems are highly impacted by nonlinear effects that are difficult to analyze. The rotordynamics prediction requires advanced models for the flow in the bearings. The surface of the bearings seems to have a strong impact on the lubricant flow, acting on the static and dynamic properties of the rotating parts.

This study aims to enhance the simulation of the bearings' surface state effect on the motion of the rotating shaft. The flexible shaft interacts with textured hydrodynamic bearings. Multi-scales homogenization is used in a multi-physics algorithm in order to describe the fluid-structure interaction. Different models are used to account for the cavitation phenomenon in the bearings. Nonlinear harmonic methods allow efficient parametric studies of periodic solutions as well as their stability.

Moreover, a test rig has been designed to compare predictions to real measurements. Several textured shaft samples modified with femto-seconds LASER surface texturing are tested. In most cases the experimental study showed similar results than the simulation. Enhancements of the vibration behaviors of the rotor-bearing system have been revealed for certain texturing patterns. The self-excited vibration, also known as "oil whirl" phenomenon, is stabilized on a wide rotating frequency range. However, the simulation tool does not predict well the enhancements that are observed. Vortices in surface texturing patterns have been revealed numerically with Navier-Stokes equation resolution. These results are opposed to the classical lubrication hypothesis. It is also a possible explanation of the enhancements that are experimentally measured with textured bearings.

Keywords : *Hydrodynamic lubrication, Surface texturing, Multi-scales homogenization, Nonlinear dynamics, Fluid-Structure Interaction, Cavitation, Oil whirl*

Remerciements

Ces travaux de thèse ont été effectués avec le Commissariat à l’Energie Atomique et Aux Energies Alternatives (CEA) en collaboration avec le Laboratoire de Tribologie et de Dynamique des Systèmes (LTDS) de l’Ecole Centrale de Lyon.

Premièrement, je tiens à remercier chaleureusement mes directeurs de thèses Fabrice Thouverez et Denis Mazuyer pour m’avoir constamment soutenu et guidé lors de ces trois années. Leurs deux visions polyvalentes et complémentaires de la mécanique m’ont énormément apporté dans mes recherches. Je tiens également à adresser de sincères remerciements à Erick Le Guyadec qui m’a guidé au sein du CEA. Son pragmatisme et son sens physique m’ont aidé à soulever de nombreux problèmes.

Je remercie vivement Christophe Corre, pour avoir accepté de présider mon jury de thèse et qui m’a permis d’appréhender la mécanique des fluides. Je remercie aussi sincèrement Jean-Claude Golinval, et Mihai Arghir, qui m’ont fait l’honneur de rapporter ce mémoire, et je suis reconnaissant de l’intérêt qu’ils ont porté à mon travail. Je tiens à remercier Guy Bayada, qui a largement contribué aux fondements mathématiques du sujet de la thèse, et m’a fait l’honneur d’évaluer mon travail. Enfin je remercie également Benoît Prabel qui a accepté de participer au jury de thèse, et a apporté sa vision globale de dynamique des rotors.

Un grand merci à tous les membres du LTDS, et spécialement aux équipes DySCo et TPCDI. Leurs points de vue passionnés et passionnants ont été extrêmement enrichissants. J’ai également beaucoup apprécié de partager les locaux du Laboratoire d’Etanchéité et de Technetics et je les remercie chaleureusement de leur accueil. Merci vivement à Adrien Reynaud qui a fait partie de l’équipe durant son stage de fin d’étude et a fait preuve de grandes qualités scientifiques. Un grand merci également à Patrice Lecret et Mathieu Guibert qui ont beaucoup contribué à la conception du banc d’essai, et m’ont apporté un support technologique indispensable.

Je tiens à remercier mes amis proches ainsi que ma famille, mes parents, mes frères et sœurs qui m’ont soutenu durant toutes ces années. Enfin j’aimerais remercier Marie, dont la présence à mes côtés durant la dernière ligne droite m’a été très précieuse.

*"Lui, toujours, avait expérimenté que le travail
était le meilleur régulateur de son existence",
Emile Zola, Le docteur Pascal*

Table des matières

Résumé	iii
Remerciements	vii
Nomenclature	5
Introduction	9
1 Etat de surface des paliers hydrodynamiques et vibrations d'arbres	11
1.1 Dynamique des rotors et vibrations	11
1.2 Généralités sur le palier hydrodynamique	14
1.2.1 Principe de fonctionnement	14
1.2.2 Le lubrifiant	15
1.2.3 La bague ou coussinet	17
1.2.4 L'arbre ou rotor	17
1.2.5 Le support ou logement	19
1.3 Statiques et dynamiques du palier	19
1.3.1 Représentation statique	19
1.3.2 Représentation dynamique	20
1.3.3 Vibrations auto-entretenues dans les machines tournantes flexibles .	21
1.3.4 Stabilité des vibrations dues au fluide piégé entre le rotor et le stator	23
1.3.5 Facteurs physiques susceptibles de stabiliser les vibrations fluide-rotor	25
1.4 Etat de surface et dynamique du palier hydrodynamique	26
1.4.1 Rugosité et défauts de surface	26
1.4.2 Introduction à la texturation de surface	27
1.4.3 La texturation de surface en régime hydrodynamique	27
1.4.4 La texturation de surface appliquée aux paliers hydrodynamiques .	29
1.4.5 Les effets de l'état de surface sur la dynamique du palier	30
1.5 Conclusion	32
2 Modélisation du palier hydrodynamique texturé	33
2.1 Modélisation de l'écoulement de Reynolds	33
2.1.1 Le fluide newtonien	33
2.1.2 Équation de la quantité de mouvement fluide	34
2.1.3 L'équation de la lubrification	34
2.2 Modélisation du palier lisse	37
2.2.1 Application de l'équation de Reynolds au palier lisse	37
2.2.2 Modèle de palier hydrodynamique standard	40
2.2.3 Rupture de film	41

2.2.4	Passage à la formulation faible	50
2.2.5	Discrétisation par éléments finis	50
2.2.6	Méthode de résolution de Fischer-Burmeister-Newton-Schur	53
2.3	Modélisation du palier texturé sans recirculation	54
2.3.1	Méthodes de prise en compte de rugosités en lubrification hydrodynamique	54
2.3.2	Principe de l'homogénéisation	56
2.3.3	Homogénéisation périodique de l'équation de Reynolds stationnaire sans cavitation	56
2.3.4	Homogénéisation de l'équation de Reynolds instationnaire avec cavitation	59
2.3.5	Calcul de coefficients de l'équation de Reynolds homogénéisée dans des cas particuliers	59
2.3.6	Interpolation polynomiale des facteurs de flux	65
2.4	Modélisation du palier texturé avec recirculation	69
2.4.1	Micro-échelle : résolution de l'équation de Navier-Stokes	69
2.4.2	Macro-échelle : résolution de Reynolds moyennée	70
2.4.3	Simplifications dans le cas 1D	72
2.4.4	Simplifications dans le cas 2D avec motif isotrope	74
2.5	Conclusions sur la modélisation du palier texturé	76
3	Dynamique non linéaire du problème couplé	79
3.1	Modélisation d'une poutre élastique en rotation par éléments finis	79
3.1.1	Formulation d'une poutre en rotation	79
3.1.2	Discrétisation par éléments finis	84
3.1.3	Variantes utiles des équations du mouvement de la structure	86
3.2	Problème monolithique	88
3.2.1	Projection de la pression sur la structure	89
3.2.2	Bilan des différents problèmes à résoudre	90
3.3	Méthodes d'étude des équations non-linéaires associées au palier hydrodynamique	91
3.3.1	Etat de l'art	91
3.3.2	Un exemple d'un système simplifié de palier	92
3.3.3	Position d'équilibre statique	93
3.3.4	Analyse de stabilité des positions d'équilibre statique	93
3.3.5	Réponse forcée autour de l'équilibre	98
3.3.6	Intégration temporelle	98
3.3.7	Méthode de tir	100
3.3.8	Méthode d'équilibrage harmonique	102
3.3.9	Méthodes de continuation des solutions	104
3.3.10	Analyse de stabilité des solutions périodiques	106
3.3.11	Bifurcations du palier hydrodynamique	108
3.3.12	Application de l'étude de stabilité non linéaire au cas test	112
3.4	Conclusion	115
4	Prédiction et analyse de l'impact de la texturation de surface sur la dynamique de ligne d'arbre	117
4.1	Dimensions du système	117
4.1.1	Dimensions du système rotor-paliers	117

4.1.2	Dimensions des motifs tests de texturation	118
4.2	Arbre sur paliers lisses	119
4.2.1	Déformées statiques	119
4.2.2	Stabilité des positions d'équilibre statique	122
4.2.3	Amplitude des vibrations non-linéaires	127
4.3	Arbre avec paliers texturés : Texturations sinusoïdales	132
4.3.1	Positions d'équilibre stationnaire	133
4.3.2	Amplitude des vibrations non-linéaires	133
4.4	Arbre avec paliers texturés : Texturations sinusoïdales partielles	136
4.4.1	Positions d'équilibre stationnaire	136
4.4.2	Amplitude des vibrations non-linéaires et stabilité	136
4.5	Arbre avec paliers texturés : Texturations <i>dimples</i>	138
4.5.1	Stabilité des positions d'équilibre stationnaire	138
4.5.2	Amplitude des vibrations non-linéaires	140
4.6	Bilan des prédictions et de l'influence de l'état de surface	141
5	Caractérisation expérimentale du comportement dynamique du système rotor-paliers	145
5.1	Présentation générale	145
5.1.1	Principe du dispositif	145
5.1.2	Mesure de couple	148
5.1.3	Mesure de vibrations	148
5.1.4	Mesure de l'épaisseur de film par ultrasons	149
5.1.5	Analyse modale des pièces	151
5.1.6	Étanchéité sans contact <i>viscoseal</i>	152
5.1.7	Variante des montages du banc	156
5.2	Caractérisation des échantillons	156
5.2.1	Analyse modale libre d'un échantillon	156
5.2.2	Morphologie des surfaces texturées	156
5.2.3	Défaut de rectitude des arbres	158
5.3	Analyse vibratoire des machines tournantes	161
5.3.1	Filtrage fréquentiel et interpolation	161
5.3.2	Mesure dynamique du défaut de rectitude des arbres	161
5.3.3	Diagramme cascade et <i>oil whirl</i>	163
5.3.4	Spectre complet et première fréquence propre	164
5.3.5	Équilibrage et balourd	164
5.4	Influence de la texturation sur le comportement du système	167
5.4.1	Influence sur la mesure de couple	167
5.4.2	Amortissement de l' <i>oil whirl</i>	168
5.4.3	Amplitude de vibration dans les paliers	171
5.5	Conclusions de l'étude expérimentale	177
	Conclusions générales et perspectives	179
	Bibliographie	181
	Annexes	190
	A Matrices élémentaires de poutre en rotation	191

B	Analyse linéaire d'un rotor sur un palier rigide	195
B.1	Déformée statique	195
B.2	Modes de poutre	195
B.3	Diagramme de Campbell	196
B.4	Réponse forcée	196
C	Description du programme de résolution	201
C.1	Structure du programme	201
C.1.1	Diagramme des classes	201
C.1.2	Classe <i>Control</i>	203
C.1.3	Classe <i>Fluide</i>	203
C.1.4	Classe <i>Resolution</i>	204
C.2	Paramètres d'entrée du modèle : le fichier DonnéesInitiales.m	204
C.3	Tests de validation	205
C.3.1	Modes de vibration de l'arbre	205
C.3.2	Comparaison des grandeurs statiques de palier lubrifié	205
C.3.3	Comparaison des coefficients dynamiques de palier	208
C.4	Validation de la méthode d'interpolation des facteurs de flux	211
C.5	Autres outils qualitatifs de validation	211

Nomenclature

Acronymes

<i>AFT</i>	Méthode temps-fréquence alternés (Alternating Frequency/Time-domain)
<i>EA</i>	Algorithme de résolution en pression-remplissage de Elrod-Adams
<i>FFT</i>	Transformée de Fourier rapide (FFT)
<i>HBM</i>	Méthode d'équilibrage harmonique (Harmonic Balance Method)
<i>JFO</i>	Conditions aux limites de rupture de film de Jakobson-Floberg-Olsson
<i>LCP</i>	Problème de complémentarité linéaire (Linear Complementarity Problem)

Paramètres du modèle

ϵ	Paramètre de la méthode des perturbations pour l'homogénéisation
η_b	Coefficient de dissipation de l'arbre
κ	Paramètre des méthodes de continuation de solution d'un système algébrique
μ	Viscosité dynamique du lubrifiant
ν	Coefficient de Poisson
Ω	Vitesse de rotation de l'arbre
ρ_A	Masse volumique de l'arbre
ρ_f	Masse volumique du lubrifiant
a, b	Paramètres du motif de texturation
C_r	Jeu radial moyen du palier
d	Distance du balourd par rapport à l'axe de rotation de l'arbre
E	Module d'Young de l'arbre
h_D	Epaisseur d'un disque de la ligne d'arbre
h_r	Amplitude de texturation sinusoïdale
I	Inertie de l'arbre
L_A	Longueur de l'arbre
L_p	Longueur de palier
m_B	Masse de balourd

p_{cav}	Pression de cavitation du lubrifiant
R	Rayon de l'arbre
R_c	Rayon du coussinet
R_D	Rayon d'un disque de la ligne d'arbre
S	Section de l'arbre

Autres notations

\bar{p}_0	Champs de pression moyen du problème d'homogénéisation
$\frac{D}{Dt}$	Dérivée particulaire
L_f	Longueur caractéristique de l'écoulement fluide
Re	Nombre de Reynolds
U, V	Vitesses caractéristiques de l'écoulement fluide
$\alpha_c, \beta_c, \zeta_c, \xi_c, \eta_c, \xi'_c, \eta'_c$	Angles de la méthode de mobilité et d'impédance définis figure 2.4
α_n	Multiplicateurs de Floquet
$\bar{\mathbf{V}}_s$	Vecteur vitesse de cisaillement pur dans le palier adimensionné
$\bar{\xi}, \bar{\zeta}$	Coordonnées locales pour l'homogénéisation périodique de Reynolds
\bar{h}	Épaisseur de film adimensionnée dans le repère fixe
\bar{p}	Champ de pression dans le lubrifiant adimensionné par la relation (2.2.2.5)
\bar{t}	Temps adimensionné
$\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$	Champs de position adimensionné par rapport au jeu radial C_r
\bar{x}	Circonférence adimensionnée du palier, prise dans le repère fixe
\bar{y}	Coordonnée y adimensionnée
\mathbf{B}_i	Facteurs d'écoulement de Couette du problème d'homogénéisation
\mathbf{f}	Champ de vecteur des forces volumiques dans le lubrifiant
\mathbf{f}_b	Vecteur force associé au balourd
\mathbf{f}_f	Vecteur d'écoulement de Couette fluide de l'équation de Reynolds discrétisée
\mathbf{f}_{ext}	Vecteur des forces extérieures à la structure
\mathbf{f}_{stat}	Vecteur force statique
\mathbf{v}	Champ de vecteur vitesse dans le lubrifiant
\bullet'	Dérivée par rapport au temps adimensionné \bar{t}
\bullet_A	Grandeur \bullet associée à l'arbre
\bullet_B	Grandeur \bullet associée aux balourds
\bullet_D	Grandeur \bullet associée aux disques
$\chi_{pij}, \chi_{spij}, \chi_{si}$	Facteurs de flux de Navier-Stokes moyennés

$\delta\Gamma$	Domaine correspondant à la frontière du domaine du palier hydrodynamique
δT	Travail virtuel des quantités d'accélération
δU	Travail virtuel élastique de l'arbre
δW_d	Travail des forces de dissipation interne de l'arbre
δW_e	Travail des forces visco-élastiques de l'arbre
$\dot{\gamma}$	Taux de cisaillement dans le fluide
ϵ_y	Déformation longitudinale
Γ	Domaine correspondant au palier hydrodynamique
Γ^+	Domaine correspondant à la zone active de film lubrifié
Γ^-	Domaine correspondant à la zone inactive de film lubrifié
λ	Valeur propre de l'analyse modale
Λ_i	Solutions intermédiaires du problème d'homogénéisation
\mathbb{A}_{ij}	Coefficients de flux du problème d'homogénéisation
\mathbb{G}	Matrice gyroscopique de la structure
\mathbb{H}	Matrice d'écoulement de Poiseuille fluide
\mathbb{I}	Matrice identité
\mathbb{K}	Matrice de raideur de la structure
\mathbb{K}_b	Matrice d'amortissement visqueux de la structure
\mathbb{K}_c	Matrice d'amortissement circulatoire de la structure
\mathbb{M}	Matrice de masse de la structure
$\mathbb{P}, \mathbb{P}_u, \mathbb{P}_w$	Matrices de projection de la pression fluide sur la structure
$\mathbb{Q}_1, \mathbb{Q}_2$	Matrices de remplissage fluide
\mathbf{V}_s	Vecteur vitesse de cisaillement pur dans le palier
\mathcal{E}	Fonctionnelle du domaine fluide
\mathbf{X}	Vecteur des composantes fréquentielles dans la HBM
\mathbf{x}	Vecteur des variables d'état nodales
\mathbf{x}_0	Vecteur initiale dans la méthode de tir
ν_f	Viscosité cinématique du lubrifiant
$\omega_x, \omega_y, \omega_z$	Coordonnées du vecteur de rotation structural
ρ_m	Masse volumique du mélange fluide/gaz dans la zone de cavitation
Σ^+	Frontière de rupture de film lubrifiant
Σ^-	Frontière de reformation de film lubrifiant
τ	Contrainte de cisaillement dans le fluide
θ	Paramétrage angulaire de l'épaisseur de film dans le repère fixe

$\theta_{\square}, \psi_{\square}, \phi_{\square}$	Angles entre le repère fixe et le repère tournant
$\tilde{\theta}$	Paramétrage angulaire de l'épaisseur de film dans le repère tournant
$\tilde{e}, \tilde{\beta}$	Coordonnées cylindriques de la fibre neutre de l'arbre, avec \bar{e} l'excentricité adimensionnée par rapport au jeu radial
\tilde{h}	Epaisseur de film adimensionnée dans le repère tournant
\tilde{x}	Circonférence du palier prise dans le repère tournant
$\underline{\epsilon}$	Tenseur des déformations
$\underline{\sigma}$	Tenseur des contraintes
\widehat{p}	Champ de pression adimensionnée dans le lubrifiant par la relation (2.2.2.7)
C_f	Couple résistant associé à un palier
C_{ij}	Coefficients d'amortissement d'un palier projeté sur un noeud
D	Diamètre de l'arbre
e	Excentricité relative de l'arbre par rapport à un palier
g	Constante de gravité terrestre
G_c	Module de cisaillement
gd	Approximation éléments finis proportionnelle à l'épaisseur de film au cube
h	Epaisseur de film fluide
h_0	Epaisseur de film adimensionnée moyenne pour l'homogénéisation
h_1	Epaisseur de motif locale périodique de cavitation, adimensionnée pour l'homogénéisation
h'_d	Approximation éléments finis de la dérivée spatiale de l'épaisseur de film
K_{ij}	Coefficients de raideur d'un palier projeté sur un noeud
l_e	Longueur d'un élément structure dans la méthode des éléments finis
N	Fonctions d'interpolation éléments finis
p	Champ de pression dans le lubrifiant
Q_m	Débit imposé dans le film lubrifiant
Q_v	Débit axial de lubrifiant d'un palier
$R(x, y, z)$	Repère tournant
$R_0(X, Y, Z)$	Repère fixe galiléen
T	Période d'une solution périodique
T_{\square}	Energie cinétique
u, v, w	Déplacements structuraux dans le repère fixe
u^*, v^*, w^*	Déplacements structuraux dans le repère tournant
U_e	Energie potentielle élastique de l'arbre
W	Fonctions tests du domaine fluide
x_{θ}	Circondérence de palier

Introduction

Contexte industriel et scientifique

Les applications avancées des machines tournantes, sous forme de systèmes miniaturisés et fonctionnant à haute vitesse de rotation, exigent un contrôle de plus en plus complet des caractéristiques de chaque composant. Parmi eux, le support de guidage joue un rôle crucial. Son impact est important sur le bon fonctionnement de l'ensemble du système et sur sa durée de vie. Les paliers hydrodynamiques offrent des perspectives de conception intéressantes, mais leur étude est complexe, spécialement lorsqu'ils sont de tailles réduites. Leur montage requiert alors des exigences drastiques sur les tolérances de fabrication.

Par ailleurs, les avancées récentes des technologies de texturation de surface, et leur utilisation en tribologie, ont permis des diminutions importantes des pertes par frottement ou de l'usure des pièces en contact. Ces technologies pourraient également offrir des leviers de conception intéressants vis-à-vis de la dynamique des systèmes, comme par exemple la stabilisation du mouvement sur de plus grandes plages de fonctionnement, voire la diminution des amplitudes des vibrations. La maîtrise de l'état de surface pourrait également permettre la réduction des tolérances de fabrication, ou encore des gains en consommation de lubrifiant. A l'heure actuelle, l'impact de l'état de surface du palier sur les performances dynamiques des machines tournantes est méconnu, en particulier pour celles de faible dimensions où l'échelle de la rugosité des pièces est du même ordre de grandeur que les jeux, c'est-à-dire quelques micromètres.

Toutefois, en lubrification, les études récentes ont été focalisées sur les analyses des texturations séparément du reste des mécanismes. La communauté des tribologues continue d'améliorer la compréhension des phénomènes locaux dus à la texturation de surface. Cependant, les études de dynamique des machines tournantes les plus poussées utilisent souvent des modèles extrêmement simplifiés pour les paliers. Ainsi, ces études ne permettent pas de prendre en compte les effets éventuels de l'état de surface des pièces du contact, mais présentent pour autant des non-linéarités complexes, menant à des comportements vibratoires riches.

Objectifs de l'étude

Dans ce contexte, l'objectif de ce mémoire est d'intégrer les modèles avancés de lubrification tenant compte de l'état de surface du palier, directement dans les modèles de dynamique de rotors flexibles, et de les confronter à des mesures sur un banc d'essais de rotors présentant différents états de surface réalisés par texturation au laser femtoseconde. Il s'agira in fine de statuer des éventuels effets bénéfiques du contrôle de l'état de surface dans la conception des machines tournantes lubrifiées par un liquide. Notre étude se focalise sur les rotors miniatures, de taille semblable à des rotors de turbocompresseurs automobiles.

La modélisation de tels systèmes nécessite l'emploi de stratégies *multi-échelles* compte tenu des différences d'ordres de grandeur entre la taille centimétrique du système global et micrométrique de la texturation de surface. De plus le système est *multi-physiques*, du fait des vibrations des structures tournantes, et de leur interaction avec les films lubrifiants liquides, dans lesquels on peut également constater la présence de bulles de gaz en cas de rupture de film lubrifiant. Enfin, les études paramétriques dans le cadre de la dynamique des systèmes non-linéaires nécessitent l'usage de méthodes robustes et efficaces pour l'étude des régimes périodiques et de leur stabilité, comme l'utilisation de méthodes fréquentielles.

Afin de vérifier les hypothèses de modélisation, il est nécessaire de reproduire les conditions de l'étude sur un banc d'essai. La précision due à la miniaturisation du système tournant, et les hautes vitesses de fonctionnement imposent un certain nombre de challenges en terme d'étanchéité des paliers, d'alignement des pièces, et d'équilibrage fin des parties tournantes.

Organisation du document

Ce mémoire est divisé en cinq chapitres. Le chapitre 1 rappelle les enjeux liés au contrôle des vibrations des machines tournantes, et introduit les généralités sur les rotors flexibles, lubrifiés par des paliers hydrodynamiques. Une attention particulière est apportée à l'état de l'art sur l'utilisation de la texturation de surface, et sur les études de dynamique qui ont intégré les paramètres de morphologie de surface. Ce chapitre détaille également les apports possibles de la texturation de surface par le contrôle des instabilités auto-entretenues des paliers hydrodynamiques.

Le chapitre 2 présente les modèles fluides retenus pour la simulation du comportement du palier. Plusieurs niveaux de modélisation sont évoqués, à la fois celui du phénomène de rupture de film, mais également celui des phénomènes multi-échelles. Une hiérarchisation de la complexité des différents modèles est exposée en bilan de ce chapitre.

Leur couplage avec la dynamique des structures et les méthodes de résolution de systèmes d'équations non linéaires sont présentées dans le chapitre 3. Différents cas simplifiés de dynamique de paliers sont analysés afin de valider et d'illustrer les méthodes non-linéaires mises en place.

Les méthodes de prédiction seront adaptées aux dimensions du banc d'essai dans le chapitre 4. Celui-ci présentera également les tendances de l'impact de différentes texturations en fonction des modèles retenus à travers des études paramétriques. Certaines améliorations peuvent être obtenues selon les texturations utilisées.

Le chapitre 5 est dédié à l'étude expérimentale visant à caractériser l'impact de la texturation des arbres au niveau des paliers sur les vibrations de l'ensemble. Ce chapitre décrit le dispositif expérimental qui a été développé (banc d'essais de Paliers Hydrodynamiques avec Arbre Texturé ou *PHAT*), afin de tester différents échantillons d'arbres texturés avec des profondeurs de cavité et des taux de recouvrement de texturation variables. Dans ce chapitre, les mesures seront confrontées aux prédictions, ce qui permettra de valider ou d'invalider certaines hypothèses des modèles. Si les modèles de paliers lisses présentent une bonne corrélation avec la mesure, les modèles multi-échelles classiques sont limités lorsqu'ils sont appliqués aux texturations les plus profondes. En revanche, de nettes améliorations sont mesurées dans ces cas-là en ce qui concerne les zones de stabilité des vibrations auto-entretenues.

Chapitre 1

Etat de surface des paliers hydrodynamiques et vibrations d'arbres

Dans ce chapitre, nous présenterons la démarche globale d'étude des vibrations dans les machines tournantes, et nous introduirons les bases de la lubrification par les paliers hydrodynamiques. Nous exposerons alors les représentations statiques et dynamiques du palier hydrodynamique, et introduirons l'état de l'art de l'impact de l'état de surface sur ces représentations.

1.1 Dynamique des rotors et vibrations

Les machines tournantes représentent la plus grande part des mécanismes créés par les concepteurs. Le mouvement de rotation peut servir à effectuer une translation, comme une roue le long d'un axe, à stocker de l'énergie, par exemple dans un volant d'inertie, à transférer de la puissance, par l'intermédiaire d'une courroie ou d'une boîte de vitesses, ou encore à récupérer l'énergie cinétique provenant de sources extérieures, par exemple l'énergie thermique à l'aide d'une turbine, ou encore le vent à l'aide d'une éolienne. Les parties tournantes, que l'on nomme aussi "rotors", ont bien évidemment un rôle central dans les procédés mentionnés, et représentent la principale source de nuisance dans ces systèmes. L'objectif d'un concepteur de machine tournante est de disposer d'un mouvement de rotation autour d'un axe connu et avec une vitesse bien contrôlée. Cependant les multiples défauts géométriques ou matériels, ou encore les interfaces, provoquent une perte de puissance diverses formes. Comme dans tous les mécanismes, on observe de la dissipation thermique, mais les pertes en énergie mécanique sont également souvent importantes, et le mouvement du rotor s'accompagne d'un certain nombre de vibrations. Tout d'abord, les vibrations du rotor peuvent être excitées, dans les directions axiales, radiales, ou encore en torsion par rapport à son axe de rotation. En plus de cela, des vibrations apparaissent aussi au niveau des supports de guidage (que l'on nomme paliers), ou au niveau des fluides qui entourent le système en rotation (excepté dans les applications sous vide). Par ces biais, des ondes énergétiques sont donc transmises aux parties non rotatives, voire aux équipements voisins.

Les hautes vitesses permettent d'obtenir de grandes densités d'énergie dans des machines de tailles relativement petites. En revanche, les effets de vibrations sont accentués dans ces configurations, et les conséquences mécaniques indésirables peuvent devenir de plus en plus dangereuses. C'est pourquoi il est nécessaire de mieux comprendre les phénomènes vibratoires et leurs interactions pour les applications à vitesses de rotation élevées.

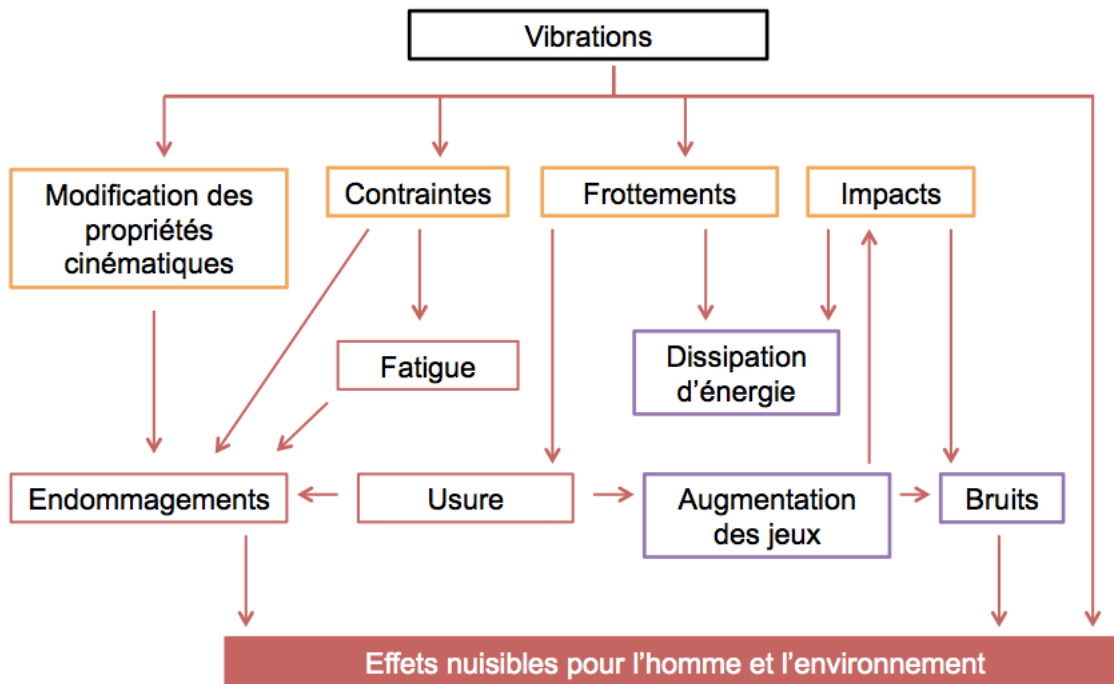


FIGURE 1.1 – Les effets des vibrations dans un système mécanique (adapté de [104])

La principale conséquence mécanique des hautes vitesses est très probablement l'effet de balourd, un rotor réel n'ayant jamais un axe d'inertie confondu avec son axe de rotation. Par définition le balourd impacte directement les vibrations latérales du rotor, évidemment à la même fréquence qu'à celle de la rotation du rotor. Lorsqu'un système mécanique est soumis à une telle excitation périodique, on parle de vibrations forcées, en opposition aux vibrations libres d'un système soumis à un choc, ou à un chargement transitoire pour atteindre un autre état d'équilibre. Il existe une troisième catégorie de vibrations appelées "vibrations auto-entretenues" qui résultent d'un transfert d'énergie d'une source constante, à une vibration dans le système. L'une des vibrations auto-entretenues la plus connue est le phénomène de flottement par exemple. Dans les machines tournantes, les vibrations auto-entretenues sont multiples, car la rotation du rotor est elle-même considérée comme une source constante d'énergie dans le système. Les phénomènes de frottement, les impacts, les interactions fluides-structures, ou les forces électromagnétiques peuvent générer des vibrations auto-entretenues potentiellement dangereuses.

Si les vibrations des machines tournantes ne sont pas toujours néfastes et considérées comme parasites du mouvement, elles se traduisent par un gaspillage d'énergie et mènent à la détérioration prématurée des composants de la machine. La figure 1.1, adaptée de [104] présente schématiquement les effets délétères que les vibrations peuvent engendrer.

Afin de limiter ces désagréments nous nous proposons, dans ce mémoire, d'étudier en profondeur l'un des composants important impliqué dans les vibrations des machines tournantes : le palier hydrodynamique. Cet organe de guidage en rotation, dont nous donnerons les caractéristiques essentielles dans les paragraphes suivants, permet d'atteindre des vitesses élevées de rotation pour un couple résistant assez faible, tout en amortissant correctement les vibrations du système. Néanmoins, il constitue également une source bien

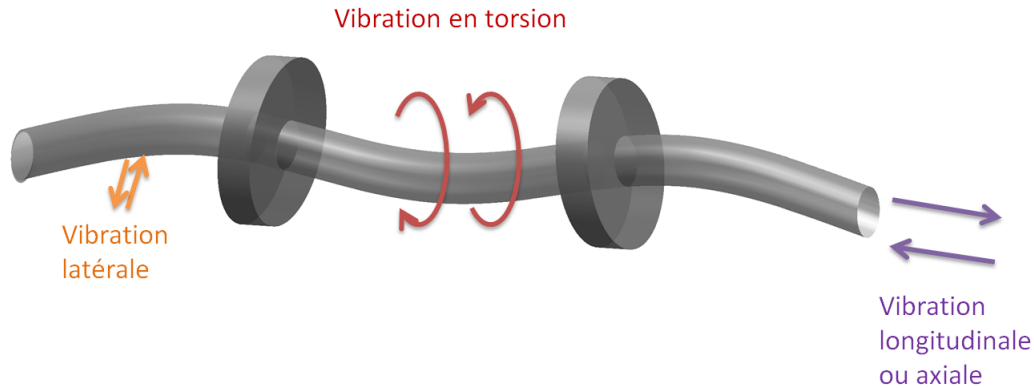


FIGURE 1.2 – Schématisation des vibrations d'un rotor flexible

identifiée de vibrations auto-entretenues, liées à l'interaction du rotor avec le fluide nécessaire à son fonctionnement. Notons que cet organe intervient principalement au niveau des vibrations latérales du rotor (représentées schématiquement figure 1.2). Cet organe a été largement étudié et utilisé depuis le début de l'ère industrielle. Cependant, son impact sur les vibrations des machines tournantes reste toujours relativement complexe à évaluer pour différentes raisons :

- les vibrations du rotor interagissent avec le lubrifiant, ce qui en fait un problème multi-physiques, incluant des interactions fluides-structures
- les défauts géométriques sont difficiles à modéliser, car ils interviennent à différentes échelles (défaut de forme, ondulation, rugosité), et celles-ci sont couplées en raison des jeux faibles au niveau des paliers par rapport à la taille des machines, ce qui en fait un problème multi-échelles d'espace, comme souvent en lubrification
- les forces hydrodynamiques qui résultent des deux premiers points sont ainsi fortement non-linéaires ; cet effet a longtemps imposé une simplification des hypothèses physiques pour modéliser le système, et mène expérimentalement à spectre vibratoire riche, comme l'apparition de multiples ou de fractions rationnelles de la fréquence de rotation, voire d'autres fréquences encore, ou même du chaos

Enfin, les applications du palier hydrodynamique ont été très nombreuses à travers l'histoire industrielle, ce qui a permis de pointer du doigt beaucoup de symptômes de dysfonctionnement. En revanche les conseils de conception et les méthodes d'étude et de simulation ne sont pas toujours généralisables et les mauvaises interprétations peuvent être nombreuses. Les paliers hydrodynamiques existent dans maintes configurations, avec sa taille allant de quelques millimètres à plusieurs mètres. Le fluide lubrifiant peut être un liquide ou un gaz, et des géométries très diverses peuvent être envisagées (par exemple des portions de cylindres pour la partie fixe, patins, etc... [132]) . Dans ce mémoire, nous nous intéressons principalement aux paliers avec lubrifiants liquides de relativement petites tailles (\sim cm), bien que certains modèles et résultats peuvent être extrapolés à d'autres applications. Dans les paragraphes qui suivent, nous présenterons les principales caractéristiques d'un palier hydrodynamique, les recommandations classiques de dimensionnement, ainsi qu'un état de l'art concernant l'impact de l'état de surface du palier dans la dynamique du système.

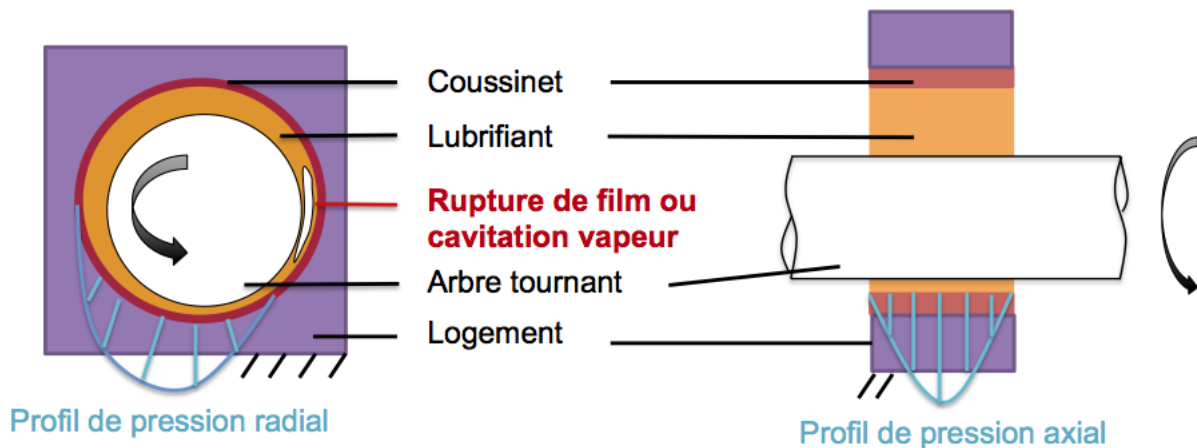


FIGURE 1.3 – Schémas du palier hydrodynamique

1.2 Généralités sur le palier hydrodynamique

1.2.1 Principe de fonctionnement

- Le principe de fonctionnement du palier hydrodynamique est le suivant (figure 1.3) :
- un arbre et un coussinet ont un mouvement relatif de rotation l'un par rapport à l'autre
 - un film de lubrifiant fluide est entraîné par le mouvement relatif et empêche le contact direct des deux surfaces solides

Sur la figure 1.3 le pic de pression généré par le palier hydrodynamique est représenté dans la partie où le lubrifiant est entraîné dans un convergent. Dans la partie divergente, si la pression atteinte est assez faible, il peut se produire le phénomène de rupture de film appelé improprement cavitation. En effet, dans cette zone, la pression peut être inférieure à la pression de vapeur saturante du liquide. Ainsi, celui-ci se transforme en partie en gaz. Le logement du palier est la partie représentée par le bâti, soutenant le coussinet.

Lorsqu'un fluide lubrifiant est piégé de cette manière entre deux surfaces, plusieurs régimes dits "de lubrification" sont possibles. Bien qu'en fonctionnement nominal, le régime hydrodynamique soit supposé s'établir dans le palier, d'autres régimes, comme les régimes limite ou mixte, peuvent survenir au démarrage ou avant l'arrêt d'une machine. En effet, dans ces phases de fonctionnement, la vitesse relative des surfaces peut être insuffisante pour que le fluide les sépare, et certaines aspérités peuvent ainsi entrer en contact.

Les transitions entre les régimes de lubrification dépendent non seulement des vitesses relatives des surfaces, de la viscosité et du chargement, mais aussi de l'état de surface des matériaux en contact. Dans le cas du palier hydrodynamique en revanche, on considère que les vitesses nominales d'entraînement sont suffisamment grandes et les chargements suffisamment faibles pour constater le régime hydrodynamique lors du fonctionnement normal de la machine.

D'autres solutions de guidage en rotation sont également possibles. On peut mentionner les paliers à graissage ou à lubrifiant solide pour les faibles chargements et les faibles vitesses de rotation. A des chargements élevés et parfois même à hautes vitesses de ro-

tations, les roulements peuvent s'avérer intéressants, notamment lorsqu'ils sont couplés à des amortisseurs hydrostatiques ou *squeeze film* pour amortir les vibrations. Enfin dans des applications moins courantes les paliers magnétiques peuvent être utilisés, présentant un frottement quasi nul, mais posant cependant certains problèmes de stabilité en configuration passive. La portance peut, par ailleurs, être contrôlée et répartie sur les différents électroaimants dans sa configuration active et asservie. L'intégration de paliers magnétiques peut être en revanche assez lourde et coûteuse.

La sélection du guidage doit être faite vis-à-vis du dimensionnement mécanique de la machine et de ses sollicitations, mais aussi de l'environnement. Des suggestions de présélection sont disponibles pour les ingénieurs, mais doivent être accompagnées d'études plus fines selon l'application, pour s'assurer du bon fonctionnement du système.

Afin de cibler les utilisations courantes du palier hydrodynamique, nous rappelons ses principaux avantages et inconvénients.

Avantages du palier hydrodynamique Le film d'huile séparant les surfaces de l'arbre et du coussinet induit un frottement relativement faible, en fonction de la viscosité du lubrifiant, et protège les surfaces de l'usure. De plus, la viscosité du fluide est également responsable de l'amortissement éventuel des vibrations de la machine au niveau des paliers.

Inconvénients du palier hydrodynamique En revanche, comme souvent en dynamique, les caractéristiques d'amortissement et de raideur peuvent conduire à des instabilités très pénalisantes dans les systèmes mécaniques. En effet, les phénomènes d'instabilités auto-entretenues directement liés au comportement du film lubrifiant peuvent avoir des conséquences néfastes dans le fonctionnement du système. C'est pourquoi elles seront étudiées en détail dans ce mémoire, tant théoriquement qu'expérimentalement. De plus, contrairement à la plupart des autres solutions de guidage en rotation, la présence de lubrifiant liquide impose la mise en place d'un réseau d'alimentation en huile ou encore des systèmes d'étanchéité dynamique qui compliquent l'intégration du palier dans le système global.

Les pertes de stabilité, en provoquant des vibrations importantes des machines, voire des phénomènes de grippage, ont des conséquences coûteuses et dangereuses sur le fonctionnement du palier. C'est pourquoi la conception des machines doit intégrer des analyses de stabilité aussi précise que possible. Cela passe par une compréhension fine de ces phénomènes non-linéaires afin de prédire correctement l'évolution du système.

Les quatre composants du palier hydrodynamique, à savoir le lubrifiant, l'arbre, le coussinet et le logement (représentés figure 1.3), ont des particularités de conception qui leurs sont propres. Nous donnons ici les principaux critères de choix à effectuer pour chacun d'eux, en précisant ceux qui seront faits dans ce mémoire.

1.2.2 Le lubrifiant

Le lubrifiant dans le palier hydrodynamique a pour rôle à la fois de réduire le frottement, de séparer les surfaces en regard, mais aussi souvent d'évacuer la chaleur et les débris du contact.

Origines des huiles Les bases des lubrifiants peuvent être séparées en deux catégories : les bases d'origine pétrolière (ou minérales) et les bases synthétiques [133]. Les huiles les plus utilisées sont les huiles minérales. Les huiles synthétiques ont été cependant développées

pour les applications où des lubrifiants à faible toxicité sont nécessaires (procédés alimentaires, industrie pharmaceutique) ou encore pour les applications à pression de vapeur saturante faible (moteurs d'avion, pompes à vide). En tribologie, les huiles synthétiques présentent l'avantage d'être plus stable chimiquement et de mieux résister à l'oxydation. Les structures moléculaires de ces différents types d'huile pilotent leurs propriétés physiques, qui permettent de les décrire à l'échelle de la mécanique des milieux continus. Ces grandeurs-clés sont résumées dans les paragraphes qui suivent.

Viscosité de l'huile C'est le paramètre clé qui influence au premier ordre la capacité de l'huile à séparer les surfaces. Il évolue de façon significative avec la température, le taux de cisaillement, la pression ou l'épaisseur de film dans le contact. Plus l'huile est visqueuse, plus elle aura tendance à séparer les surfaces en contact, mais plus de puissance sera nécessaire pour cisailier le lubrifiant, ce qui conduit à un accroissement des pertes d'énergie et de la chaleur générée dans le contact. Dans ce mémoire, nous nous bornerons aux lubrifiants considérés comme Newtonien, c'est-à-dire dont la viscosité est supposée indépendante du cisaillement. Nous rappelons cependant les lois principales qui décrivent l'évolution de la viscosité de l'huile en fonction de la température et de la pression.

Relation viscosité-température Plusieurs lois décrivant la relation viscosité-température sont disponibles. La plus communément utilisée est l'équation de Vogel indiquée ci-dessous :

$$\mu = a_v \exp\left(\frac{b_v}{T - c_v}\right) \quad (1.2.2.1)$$

Afin d'utiliser cette loi il est nécessaire d'identifier les trois coefficients a_v , b_v , et c_v à partir d'au moins trois valeurs de viscosité mesurées à trois températures distinctes.

Relation viscosité-pression La viscosité d'un lubrifiant augmente avec la pression. La loi la plus utilisée est probablement la loi de Barus à appliquer cependant à des pression inférieure à 0.5 GPa. Cette relation s'exprime :

$$\mu_p = \mu_0 \exp(\alpha_b p) \quad (1.2.2.2)$$

Le coefficient α_b , appelé le coefficient de piézo-viscosité, peut aussi être obtenu expérimentalement par identification. Par ailleurs il peut être exprimé à partir de la structure moléculaire du lubrifiant. Différentes relations semi-empiriques peuvent permettre d'exprimer ce coefficient en fonction de constantes numériques et de la viscosité cinématique par exemple [133].

Propriétés thermiques des lubrifiants Les trois propriétés thermiques essentielles des lubrifiants sont la chaleur spécifique (exprimée en $J.kg^{-1}.K^{-1}$), la conductivité thermique ($W.m^{-1}.K^{-1}$), et la diffusivité thermique ($m^2.s^{-1}$). Ces trois paramètres sont importants dans le dimensionnement du palier afin de s'assurer de températures de fonctionnement acceptables pour le bon fonctionnement du contact et la tenue des matériaux. Ces grandeurs sont dépendent également de la températures [133].

Additifs Un lubrifiant typique est composé de 95% d'huile de base et de 5% d'additifs. Ces additifs visent à corriger les propriétés des huiles. Depuis les années 1940 de nombreux additifs ont été développés. Les objectifs principaux sont :

- améliorer les caractéristiques d'abrasion et de friction en apportant des composés pour l'adsorption et la lubrification haute pression
- améliorer la résistance à l'oxydation
- contrôler la corrosion
- contrôler la contamination par produits de réaction, particules d'abrasion ou autres débris
- limiter la décroissance de la viscosité à hautes températures
- abaisser le point d'écoulement et inhiber la formation de mousse

Les phénomènes liés à l'ajout d'additifs sont complexes, et de nombreuses synergies sont possibles et encore étudiées à l'heure actuelle. Afin de s'exempter des éventuelles réactions chimiques pouvant influencer la lubrification hydrodynamique, nous utiliserons dans ce mémoire des huiles synthétiques hydrocarbures du type Poly-alpha-olefine sans additifs. Les olefines (ou alcènes) sont des chaînes d'hydrocarbures non saturés de formule générale $(-CH_2-)$. Ils consistent en un chaîne droite de carbones avec un carbone insaturé à la fin de la chaîne. Selon la longueur de la chaîne, on peut obtenir des lubrifiants de différentes viscosités. Ces huiles ont une forte résistance à l'oxydation, et ne sont ni toxiques ni corrosives.

1.2.3 La bague ou coussinet

Le coussinet est un composant clé du palier hydrodynamique. Son dimensionnement relativement à celui de l'arbre impose l'épaisseur de film maximale. On considère en général un jeu radial de l'ordre du millième du diamètre de l'arbre. L'épaisseur de film se mesure donc à trois ordres de grandeur en dessous de ceux des autres dimensions de l'écoulement. Ceci justifiera des simplifications importantes dans le modèle hydrodynamique présenté dans le chapitre 2.

Les applications extrêmement diverses du palier hydrodynamique ont conduit à l'utilisation d'une grande variété de matériaux pour le coussinet [78]. Le bronze et la fonte ont été les premiers matériaux utilisés de manière industrielle. Cependant, le moindre contact entre l'arbre et le coussinet donnait lieu à un grippage du rotor et du stator. La solution à ce problème a été d'utiliser des matériaux fusibles dans leur masse comme les métaux blancs, aussi connus sous le nom de "régules" ou encore "Babitt" (alliages de plomb ou d'étain). Ces matériaux bien adaptés aux cas de grippage ne résistent pas à des pressions de contact élevées. Ainsi, des bagues multi-couches ont été introduites afin de disposer d'une phase fusible anti-grippage, maintenue par une phase rigide pour supporter des charges élevées (Cupro-plomb, bronze au plomb, aluminium étain, etc ...). Certains coussinets sont, de plus, munis de revêtements de surface sacrificiels pour les démarrages et rodages des paliers, ou encore pour protéger les autres couches de la corrosion.

Dans ce mémoire, le matériau du coussinet sera pris de grande dureté afin d'éviter une modification de sa géométrie aux cours des différents essais.

1.2.4 L'arbre ou rotor

En général, l'arbre ne doit pas se déformer radialement sous l'effet de la pression générée au sein du fluide. On essaie dans ce cas d'éviter le régime de lubrification élasto-hydrodynamique en fonctionnement nominal. De plus, sa flèche doit être limitée pour des raisons d'alignement et de concentricité des paliers.

Vis-à-vis de cette déformation en flexion pendant la sollicitation, on distingue deux types d'arbres :

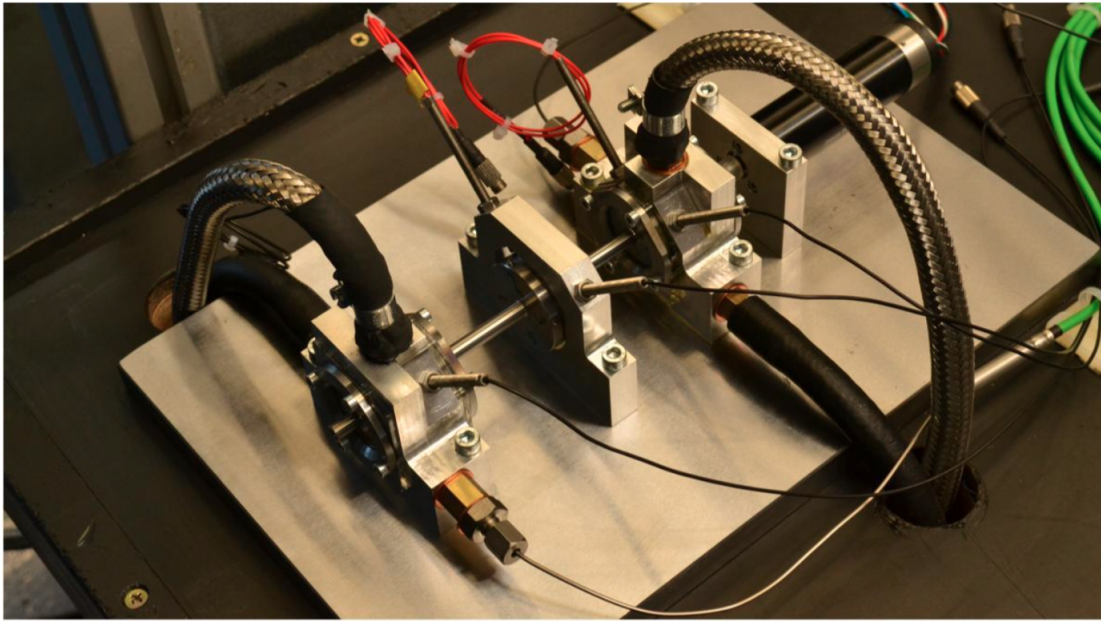


FIGURE 1.4 – Banc d’essai d’étude de rotor flexible miniature pour reproduire le comportement dynamique de turbo-compresseurs [51]

- les rotors rigides, dont la flèche ne change pas avec la vitesse de rotation et l’excitation, ou du moins sa déformation étant négligée dans la plage de fonctionnement de la machine; leurs premiers modes de résonance sont identifiés à de très hautes fréquences par rapport à la fréquence d’excitation du système [20, 21]; l’arbre ne subit pas de déformation et se déplace uniquement selon des mouvements de corps rigides
- les rotors flexibles, qui vibrent de façon importante avec la sollicitation dynamique de la machine; en général il s’agit de rotors ayant une fréquence de résonance de l’ordre de grandeur de la fréquence d’excitation, voire même inférieure à cette dernière (comme pour le banc présenté figure 1.4); on considère alors les déformations dues à la flexion de la fibre neutre de l’arbre

Les études s’intéressant spécifiquement aux paliers hydrodynamiques utilisent en général des rotors rigides, guidés par un seul palier hydrodynamique et de longueurs à peine supérieures à celle des paliers [20, 21]. Dans notre étude, on s’intéressera à un rotor guidé par deux paliers, suffisamment long pour constater les effets de flèches, de mésalignement et de distribution de balourd, mais sollicité bien en deçà de son premier mode propre. Il est à noter que le transfert d’énergie entre la fréquence de sollicitation et le premier mode de flexion de la structure reste possible par les effets non-linéaires du palier hydrodynamique. Enfin, il est intéressant de constater que la communauté des concepteurs de turbocompresseurs s’intéresse à des rotors de dimensions équivalentes à celles notre étude sur paliers hydrodynamiques, mais au-delà de deux fois la fréquence de résonance du rotor, donc ouvertement en régime de rotor flexible [51].

Par ailleurs, la conductivité thermique de l’arbre peut servir à évacuer la chaleur du contact. Dans les machines, on considère que sa dureté doit être supérieure à celle du coussinet afin de le conserver intact, car la valeur économique de l’arbre est souvent plus importante que celle des coussinets des paliers, souvent sacrificiels.

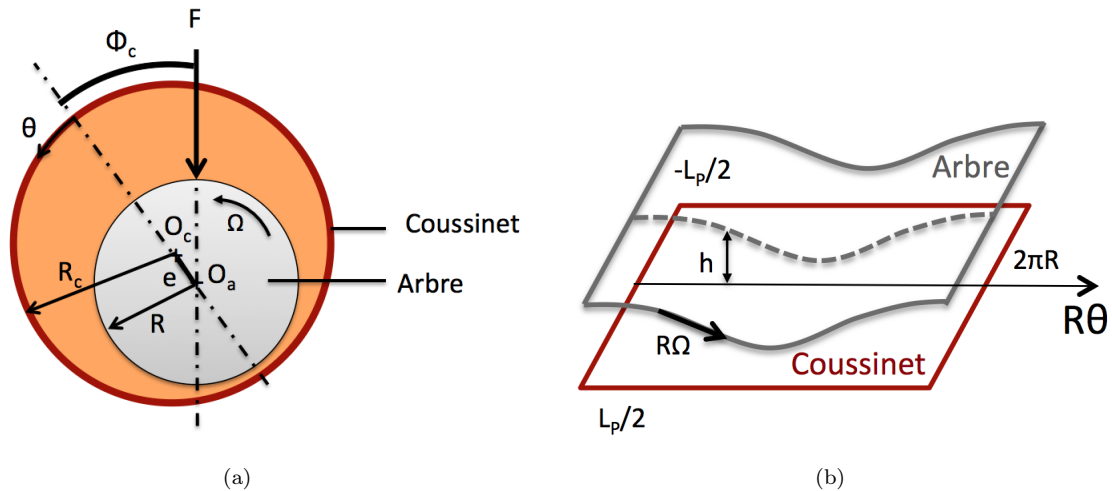


FIGURE 1.5 – Représentation géométrique du palier hydrodynamique (adapté de [60])

1.2.5 Le support ou logement

Le rôle principal du logement est d'évacuer la chaleur du coussinet. Cependant, on exige souvent une rigidité mécanique élevée afin de limiter sa déformation par rapport à la sollicitation mécanique pendant la durée de vie de la machine. La souplesse du logement peut, de plus, directement influencer l'épaisseur de film minimale du palier hydrodynamique. Le logement sera considéré comme parfaitement rigide dans ce document, et des pièces massives seront utilisées à cet effet dans l'expérimentation.

1.3 Statiques et dynamiques du palier

Avant d'introduire le concept de texturation de surface, nous rappelons ici les dimensions clés du palier hydrodynamique en fonctionnement, représentées sur la figure 1.5. La dynamique du palier est par ailleurs complexe et nous présentons dans ce paragraphe l'état de l'art des méthodes utilisées pour étudier les phénomènes de palier lisse avec rotor rigides et flexibles. Une attention particulière sera apportée au phénomène de vibration auto-entretenue dans le palier fluide.

1.3.1 Représentation statique

Portance Sous l'application d'une charge, le palier et le coussinet ne vont plus être concentriques. Un coin d'huile convergent-divergent se forme et l'écoulement de l'huile équilibre la charge appliquée. On appelle la force résultante de l'action de l'huile sur l'arbre la portance, notée F sur le schéma de la figure 1.5(a).

Excentricité On appelle excentricité la distance entre le centre du coussinet O_c et le centre de l'arbre O_a , noté e sur la figure 1.5 (a). Lorsque l'on ne prend pas en compte le mésalignement ou la flexion de l'arbre, c'est l'unique paramètre avec le jeu radial pour trouver l'épaisseur de film h de la figure 1.5 (b), pour les paliers parfaitement cylindriques.

Angle de calage En raison de l'effet de coin d'huile, la droite passant par le centre de l'arbre et celui du coussinet n'est pas colinéaire au chargement imposé. L'angle entre le

vecteur $\overrightarrow{O_c O_a}$ et le chargement est appelé angle de calage, noté ϕ_c . Cette angle dépend de la zone de cavitation, de la géométrie du palier, de la viscosité de l'huile, ou de l'amplitude du chargement imposé. Il peut être influencé par l'état de surface, ou l'étendue de la zone de cavitation, tous ces paramètres étant intimement liés.

Palier développé Afin de représenter l'épaisseur de film "vue par le lubrifiant" on représente souvent le palier sous sa forme développée. Cette représentation consiste à prendre pour plan de référence la surface du coussinet et à représenter la distance à l'arbre en chaque point (figure 1.5 (b)). Cette représentation est commode pour visualiser le profil de pression, en revanche, il ne faut pas oublier que le calcul de la portance doit être réaliser en projetant le profil pression sur le repère de la figure 1.5 (a).

Couple résistant Une autre grandeur significative dans la représentation statique du palier hydrodynamique est le couple résistant. Celui-ci résulte de l'intégrale de la contrainte du cisaillement visqueux de l'huile sur la surface de l'arbre, et équivaut au couple à fournir par le moteur pour imposer la vitesse de rotation voulue. C'est une grandeur directement liée à la puissance perdue par frottement visqueux dans le palier.

1.3.2 Représentation dynamique

Amplitude de vibration Lorsqu'une machine est excitée par un mouvement périodique comme la rotation d'un moteur, des vibrations sont transmises aux pièces en mouvement et modifiées en raison des irrégularités d'un système réel ou, comme dans le palier hydrodynamique, de l'interaction fluide-structure. La fréquence de vibration peut subir des déphasages, des amplifications ou atténuations, ou même être transférée à une ou plusieurs autres fréquences caractéristiques de la réponse vibratoire de la structure. Parmi ces phénomènes, les amplifications peuvent causer des dysfonctionnements ou même des dommages importants. Les atténuations peuvent être, elles, recherchées par les concepteurs afin de mieux contrôler le mouvement de la machine. L'étude de vibrations prend de plus en plus d'ampleur dans le travail des ingénieurs, notamment avec la tendance actuelle d'allègement des structures, ou bien d'augmentation des vitesses d'excitation.

Balourd Comme l'arbre n'est jamais parfaitement équilibré, un balourd résiduel excite toujours son mouvement. En effet, l'axe des centres de gravité des sections du cylindre n'est en général pas confondu avec l'axe géométrique de rotation. On parle de balourd lorsque l'on représente ce décentrement par une masse placée à une certaine distance de l'axe de rotation. Cela a pour conséquence d'imposer un chargement dynamique proportionnel au carré de la vitesse de rotation, dont la direction va tourner autour de l'arbre à la fréquence de rotation de l'arbre. De plus, la distribution du balourd peut évoluer le long de la ligne d'arbre, ce qui complexifie l'analyse et l'équilibrage éventuel. La distribution de balourd sollicite la structure en mouvement et influence significativement les vibrations du rotor. La figure 1.6 représente un arbre guidé par deux paliers avec une erreur d'alignement. L'axe de rotation des paliers peut être différent de l'axe moyen des paliers, par exemple sous l'effet de contraintes extérieures, telles qu'un chargement statique. À cela s'additionne la distribution de balourd, due aux défauts géométriques de l'arbre ou aux défauts de montage, comme le serrage de l'accouplement représenté sur le schéma 1.6.

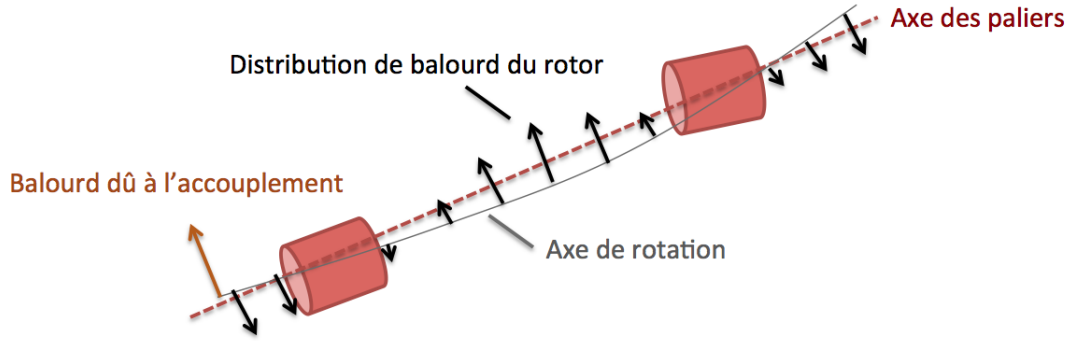


FIGURE 1.6 – Représentation schématique de l'axe de rotation et de la distribution de balourd d'une machine tournante

Coefficients dynamiques En première approximation dans l'étude dynamique du palier hydrodynamique, on peut s'intéresser à la linéarisation des efforts générés par le palier par rapport au déplacement latéral et à la vitesse latérale du centre de l'arbre, considérés homogènes le long du palier. En supposant que le déplacement autour de la position d'équilibre est faible, l'approximation est réalisée en introduisant la notion de coefficients dynamiques et se met sous la forme :

$$\begin{aligned} F_x &= -k_{xx}x - k_{xy}y - c_{xx}\dot{x} - c_{xy}\dot{y} \\ F_y &= -k_{yx}x - k_{yy}y - c_{yx}\dot{x} - c_{yy}\dot{y} \end{aligned} \quad (1.3.2.1)$$

Il est intéressant de remarquer que, dans le cadre de cette approximation, le palier est équivalent à un ressort (résultante proportionnelle au déplacement) associé à un amortisseur (résultante proportionnelle à la vitesse). Le comportement du palier est ainsi considérablement simplifié, car l'inclinaison de l'arbre n'est pas prise en compte (le déplacement de l'arbre étant réduit à deux coordonnées dans le palier) pour un déplacement faible autour de l'équilibre. De plus les coefficients dynamiques peuvent être calculés, mesurés, ou extraits à partir d'abaques lorsque la position d'équilibre statique est connue. Ils peuvent être utilisés pour dimensionner les vibrations linéaires du rotor et déterminer les ordres de grandeurs des fréquences de résonance de la structure tournante en fonctionnement. Enfin le doublement du nombre de déplacements pour la description (x_1, x_2, y_1, y_2) et la linéarisation du moment résultant sur ces déplacements, permet de prendre en compte l'inclinaison de l'arbre.

Par ailleurs, on peut utiliser le même raisonnement pour les positions considérées comme statiques dans le repère tournant [32]. En effet, si le centre de l'arbre décrit un cercle autour du centre du coussinet on peut tout à fait reprendre la notion de coefficients dynamiques, cette fois-ci dans le repère tournant autour de la position du centre de l'arbre. Cette configuration se retrouve notamment dans les cas de rotors verticaux, ou bien les rotors légers.

1.3.3 Vibrations auto-entretenues dans les machines tournantes flexibles

Les vibrations auto-entretenues liées aux paliers hydrodynamiques sont connues depuis le début du XXe siècle. Ces vibrations sont mentionnées sous le nom d'*oil whirl* et d'*oil*

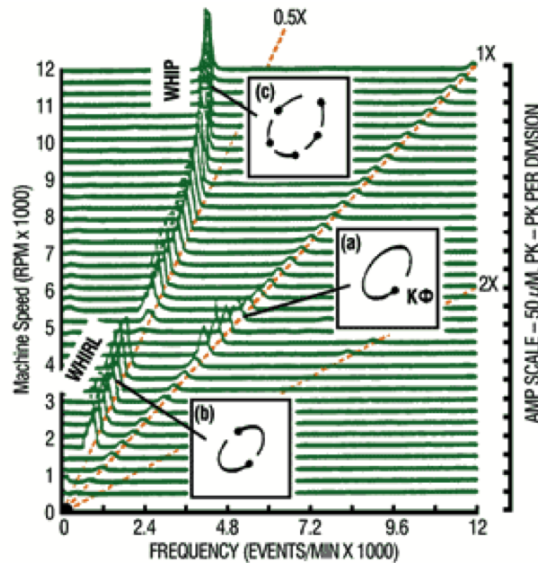


FIGURE 1.7 – Phénomènes d’ “oil whirl” et “oil whip” [103]

whirl [96, 103, 104]. Le premier phénomène consiste en un tournoiement de l’arbre autour de son orbite synchrone à une fréquence qui est de l’ordre de la moitié de la fréquence de rotation de l’arbre. Ce phénomène, dû à l’instabilité de l’équilibre statique ou du mouvement synchrone, atteint la plupart du temps un cycle limite stable. En revanche, lorsque cette fréquence coïncide avec le premier mode de vibration du rotor, l’amplitude des vibrations peut être importante dans le palier, et s’accompagner d’une perte de stabilité définitive. Des cas de contact entre les parties fixes et tournantes peuvent alors subvenir, avec des conséquences catastrophiques pour la machine entière. Ce phénomène, proche de l’*oil whirl*, mais existant aux fréquences des modes propres du rotor, est appelé *oil whip*. Il est recommandé de ne pas faire fonctionner de machine tournante au-delà du double de la fréquence du premier mode de résonance de l’arbre pour cette raison. Ce phénomène, analysé en détail dans le chapitre 4, semble corrélé à l’état de surface du palier puisqu’il dépend de la conservation du débit de lubrifiant.

La figure 1.7, que l’on appelle diagramme cascade ou *waterfall*, permet de visualiser les caractéristiques de ces phénomènes pour un rotor flexible. Trois axes sont nécessaires pour construire un tel diagramme. L’amplitude du mouvement est décomposée sur les fréquences (spectre de Fourier) pour différentes vitesses de rotation de la machine. Le cas illustré sur la figure 1.7 correspond à l’analyse d’une machine en fonctionnement à des vitesses de rotation d’environ 500 tr/min (ou 0.5 krpm) à 12.000 tr/min (ou 12 krpm). En dessous de 2000 tr/min, les vibrations ont une amplitude relativement faible (bien inférieures à 50 microns), puis entre 2000 et 4000 tr/min la fréquence moitié de la fréquence d’excitation devient prépondérante. C’est un trait caractéristique du phénomène d’*oil whirl* qui induit deux révolutions de l’arbre sur lui même lorsque son orbite fait un tour. Cela est illustré sur la figure 1.7 (b) où est représentée l’orbite filtrée de la machine. Les points représentent un *top tour*, c’est-à-dire une référence sur l’arbre qui se remarque à chaque révolution. Entre 4000 et 6000 tr/min, l’*oil whirl* s’atténue au profit de la fréquence d’excitation (ou fréquence synchrone). On obtient donc l’orbite 1.7(a), l’arbre réalisant une révolution par tour de l’orbite de son centre. Cela se produit lorsque la fréquence synchrone est proche du premier mode propre du système tournant (donc à environ 80 Hz par lecture

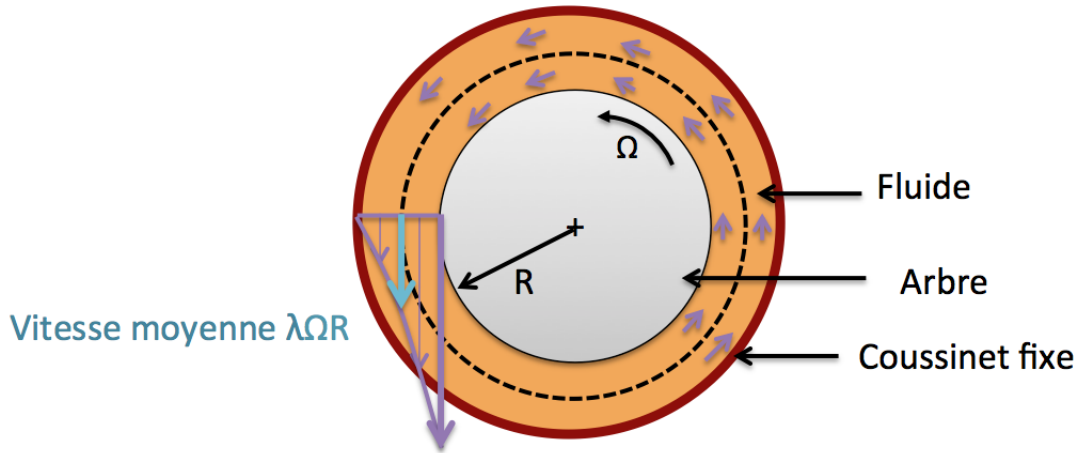


FIGURE 1.8 – Débit circonfrentiel moyen dans le palier hydrodynamique [104]

du diagramme). Le phénomène d'*oil whirl* réapparaît de 6000 à 9000 tr/min, pour se transformer en *oil whip* lorsque la fréquence d'excitation a pour valeur le double de la première fréquence de résonance du système tournant (donc environ 160 Hz, entre 9000 et 10000 tr/min sur le diagramme). Au-delà de 10000 tr/min la résonance de la machine ne varie plus et reste fixée au premier mode propre du rotor. La figure 1.7(c) montre un exemple de régime quasi-périodique, où la fréquence de rotation est d'environ 5/2 de la fréquence de résonance. Ainsi lorsque le centre de l'arbre fait deux tours d'orbite, l'arbre tourne 5 fois sur lui-même.

L'explication communément admise de la fréquence de vibration du phénomène d'*oil whirl* est liée à l'entraînement du fluide par la partie tournante, avec une vitesse moyenne $\lambda R\Omega$ avec λ compris entre 0 et 1, $R\Omega$ représentant la vitesse d'entraînement du rotor. La valeur de λ est due aux défauts géométriques, ou encore au décentrement de l'arbre par rapport à un chargement statique par exemple. Lorsque l'arbre est à peu près centré et que ses défauts de circularité et ceux du coussinet sont faibles, on peut s'attendre à avoir un coefficient λ égal à 0,5. Ainsi, à partir de la conservation de débit d'une section diamétrale de palier on obtient :

$$\begin{aligned} \dot{V}_\omega &= Q_1 - Q_2 \\ 2R_a e \omega &= \lambda R_a \Omega (C + e) - \lambda R_a \Omega (C - e) \\ \omega &= \lambda \Omega \end{aligned} \quad (1.3.3.1)$$

Où \dot{V}_ω est le volume balayé par le mouvement de l'arbre, Q_1 et Q_2 les débits moyens de lubrifiant par unité de largeur de palier des deux sections diamétrales, et ω la fréquence de rotation de l'orbite du centre de l'arbre (*whirl*).

L'excitation du débit de fluide sur le rotor expliquerait alors la vibration de l'arbre à la fréquence $\lambda\Omega$, observée par exemple sur la figure 1.7.

1.3.4 Stabilité des vibrations dues au fluide piégé entre le rotor et le stator

Les phénomènes d'*oil whirl* et *oil whip* sont souvent décrits comme étant "instabilités", bien que cela ne soit pas toujours en accord avec la définition classique de la stabilité

d'un mouvement au sens de Lyapunov (détaillée dans le chapitre 3). Il serait préférable de considérer ces vibrations comme "indésirables" du fait de l'augmentation de l'amplitude des vibrations dans le système. On peut aussi affirmer que ce sont des cycles limites atteints par la perte de stabilité d'un équilibre stationnaire du mouvement de vibration synchrone (on parle alors de bifurcation). En revanche, les cycles correspondant à ces vibrations peuvent être stables au sens de Lyapounov [107]. Dans ce cas de figure, la machine continue de fonctionner à un niveau de vibration plus élevé, avec un mouvement toujours périodique ou quasi-périodique. C'est probablement la raison pour laquelle ces phénomènes sont observables sur certaines machines tournantes.

Les équations que nous décrirons dans les chapitres 2 et 3 permettent de montrer que dans certaines configurations, les cycles limites d'*oil whirl* et d'*oil whip* peuvent eux-mêmes devenir instables. Ainsi, il est possible d'atteindre un autre cycle limite à une autre fréquence de vibration, ou bien simplement d'observer une amplification des vibrations jusqu'au contact du rotor et du stator. Cela peut déclencher encore d'autres vibrations non-linéaires à d'autres fréquences, avec d'autres physiques, ou bien mener au grippage des pièces qui entrent en contact.

L'étude des vibrations et de leur stabilité est donc primordiale pour dimensionner une machine et limiter ses dysfonctionnements. Les instabilités liées à l'interaction entre le fluide et le rotor ont fait l'objet de nombreux travaux durant ces 50 dernières années.

Afin d'étudier la stabilité des points d'équilibre statique (balourd négligé), ou des vibrations dues à des excitations d'assez faibles amplitudes, la méthode la plus économique est probablement la linéarisation des efforts de palier autour de ses positions d'équilibre (présentée plus haut sous le nom de méthode des "coefficients dynamiques"). Cette méthode peut être utilisée pour calculer des vitesses critiques de rotors [98, 92], ou des réponses linéaires de faibles amplitudes [91]. Les coefficients dynamiques sont ainsi exprimés directement à partir des dérivées partielles de la pression obtenues avec les équations de Reynolds [99], et calculées à partir d'un modèle de type éléments-finis [83]. Dans ces documents, Lund *et al.* expliquent que la méthode utilisant les coefficients dynamiques restent assez précise, même pour des mouvements de relativement grande amplitude. Notons que l'on peut aussi utiliser les coefficients dynamiques dans un repère mobile si le mouvement est piloté principalement par un chargement dynamique. En conséquence cette méthode est applicable sur une grande plage de chargements, mais se révèle limitée lorsque deux chargements de même amplitude, possédant des dynamiques différentes, interagissent avec le fluide. Lund précise aussi que de nombreuses bases de données mesurées sont disponibles et en accord avec la théorie [132], mais que des écarts persistent vraisemblablement en raison de déformations thermiques et élastiques, ou du phénomène de rupture de film. Des études mêmes récentes sont toujours publiées sur cette théorie et montrent une bonne corrélation avec l'expérience [101]. D'autres modèles simplifiés s'inspirent également de la mesure du coefficient de débit moyen λ et de coefficients dynamiques pour l'étude de l'interaction fluide-rotor [104].

La méthode la plus simple pour étudier théoriquement la stabilité des cycles limites des vibrations de plus grande amplitude est probablement l'intégration temporelle des équations du mouvement [81, 32, 33]. Cette méthode relativement robuste peut toutefois nécessiter beaucoup de calculs pour des résultats très dépendants des conditions initiales. De nombreux auteurs ont étudié différents modèles de paliers et de rotors., comme l'approximation de paliers courts présentant des régimes dynamiques très riches, avec des orbites synchrones non-linéaires [72], des régimes sous-harmoniques [82], des enveloppes de stabilité pour les conditions initiales [77], des régimes quasi-périodiques, ou encore du

chaos [28]. D'autres travaux ont conduit à des résultats équivalents pour des modèles plus complexes de paliers de longueur finie [106, 31], avec également des régimes sous-harmoniques et quasi-périodiques [1, 157]. Enfin remarquons que des modèles avancés de couplage rotor-paliers ont été proposés avec des condensations intéressantes des degrés de liberté du fluide et de la structure, et différents modèles de cavitation [156, 130, 154].

D'autres efforts ont été portés sur l'analyse des solutions périodiques du problème. On retrouve notamment la théorie de bifurcation de Hopf [105, 71]. Les bifurcations de Hopf simple, et Hopf double ont été mises en avant dans le cas de vibrations libres [128], ou d'un chargement périodique [129]. Cette méthode a été utilisée également pour justifier à la fois les phénomènes d'hystérésis constaté avec les vibrations auto-entretenues rotor-palier [151], les enveloppes de stabilité des points d'équilibre (Hopf sous-critique) [152], ou les bifurcations rencontrées dans le cas de rotors flexibles [150]. On trouve également une méthode relativement proche de la théorie de Hopf basée sur la méthode des échelles multiples [62]. Cependant, ces méthodes requièrent des simplifications importantes de la résultante des forces de palier pour être appliquées (paliers courts ou paliers longs en général), mais permettent de connaître analytiquement la stabilité et l'amplitude des cycles limites.

Les méthodes numériques, comme la méthode de discrétisation temporelle [39], la méthode de tir [149, 35, 9], ou encore la méthode d'équilibrage harmonique [149, 23], sont aussi utilisés pour étudier la stabilité des vibrations avec des modèles fluides plus avancés. Certaines de ces méthodes seront présentées en détail dans le chapitre 3. Elles sont particulièrement adaptées à l'extension des principes de l'étude de stabilité des coefficients dynamiques (avec les exposants de Lyapounov), tout en prenant en compte à la fois un chargement statique et dynamique (les détails seront présentés dans le chapitre 3).

Retenons de cet état de l'art que les astuces de simplifications de modèles rotor-palier sont multiples, et qu'elles permettent de mettre en évidence des comportements dynamiques riches. Cependant, le lien entre les approximations qu'elles engendrent (alignement parfait de l'arbre dans le palier, absence de défaut de géométrie et de surface, ou linéarisation des efforts de palier pour de petits déplacements) et la réalité du fonctionnement des machines n'est pas toujours clair. De manière générale, plus le modèle de palier et de rotor est avancé, plus l'analyse non-linéaire de stabilité de cycle limite est complexe. C'est pourquoi des méthodes numériques ont été introduites pour transposer les résultats analytiques obtenus pour des paliers simplifiés à des modèles plus complexes. Notre démarche dans ce mémoire est de les utiliser pour identifier des tendances dans le cas de modèles avancés de palier texturé.

1.3.5 Facteurs physiques susceptibles de stabiliser les vibrations fluide-rotor

Nous avons présenté les phénomènes d'instabilité qui surviennent dans le palier. Nous nous focalisons ici sur les facteurs qui semblent avoir une influence importante sur les caractéristiques des bifurcations, comme la limite de stabilité ou son caractère (super-critique ou sous-critique par exemple).

Chargement radial Muszynska [104], ou encore Van de Vorst *et al.* par exemple [149] ont montré que le balourd peut augmenter l'excentricité et la stabilité du mouvement de la même manière qu'un chargement statique radial [105, 71]. Cela a tendance à la fois à accroître la raideur du palier, mais aussi à diminuer le flux circonférenciel de lubrifiant.

Résonance du premier mode propre Muszynska a également montré expérimentalement que le système tend à se stabiliser sur la fréquence synchrone à la résonance du premier mode propre du rotor. Ce phénomène est probablement lié à l'impact du balourd sur le flux de lubrifiant.

Injection d'huile et absence de cavitation Si l'injection d'huile sous pression directement dans le palier ajoute un chargement statique et perturbe le flux circonférenciel, l'augmentation de la pression uniquement en bord de palier peut alimenter le film lubrifiant et empêcher la formation d'une zone de cavitation ou de rupture de film, cette dernière tendant à stabiliser dynamiquement le palier.

Vitesse circonférencielle moyenne du fluide La vitesse circonférencielle du fluide, dépendant directement du profil de pression vu par le rotor est la grandeur clé de l'interaction. Muszynska a mis en évidence expérimentalement une corrélation claire entre la fréquence de vibration de l'*oil whirl* et de la vitesse circonférencielle moyenne du fluide. Elle présente également dans [104], la technique d'"anti-swirl" visant à stabiliser l'*oil whirl* par injection de fluide dans un entrefer rotor/stator. En plus d'être gouvernée par l'excentricité, donc par le chargement statique et dynamique du rotor, cette dernière semble également influencée par l'état de surface du palier ainsi que par les défauts géométriques des pièces et du montage. L'étude présentée ici vise à tirer parti du contrôle de la rugosité pour stabiliser l'interaction fluide structure du palier hydrodynamique.

Les grandes lignes du dimensionnement du palier hydrodynamique et son analyse vibratoire étant désormais tracées, nous présentons dans le paragraphe suivant quelques notions sur l'état de surface du palier, son impact sur le comportement hydrodynamique du lubrifiant, et les travaux qui ont étudié la dynamique de rotor rigides dans un seul palier.

1.4 Etat de surface et dynamique du palier hydrodynamique

Avant de lier l'état de surface à la dynamique du palier, commençons par rappeler les rudiments du vocabulaire de l'état de surface, la notion de texturation et la façon dont elle joue sur la statique du palier. Nous verrons ensuite que les études touchant à l'état de surface dans la dynamique de palier ont été relativement rares, ce qui nous amènera à fixer les objectifs de l'étude actuelle.

1.4.1 Rugosité et défauts de surface

Toutes les pièces constitutives des machines industrielles possèdent des défauts de géométrie par rapport à leurs formes théoriques. On sépare en général les différentes échelles des défauts selon les écarts qu'ils engendrent par rapport à la géométrie théorique de la manière suivante :

- l'écart de forme à l'ordre 1
- l'écart d'ondulation à l'ordre 2
- l'écart de rugosité à l'ordre 3 et 4

Ces écarts proviennent de dispersion issues du procédé d'usinage, des vibrations des machines-outils, ou encore de la déformation des matériaux par exemple. Ces défauts ne sont en général pas volontaires, et si certains sont considérés comme aléatoires, des biais sont observés selon les origines des défauts. C'est pourquoi il est relativement difficile

de trouver des paramètres géométriques permettant de les classer. De plus, ces défauts sont difficiles à mesurer, notamment la rugosité de surface à cause de sa faible dimension par rapport à la taille de la pièce. On utilise la plupart du temps des grandeurs moyennées telles que des écart-types, directement influencées par la méthode de mesure, et sa résolution maximum. Des phénomènes rares peuvent avoir un impact fort sur le comportement global, bien qu'ils ne soient pas détectables avec les mesures moyennées par exemple.

1.4.2 Introduction à la texturation de surface

On peut définir la texturation comme une introduction volontaire d'un motif bien défini (creux ou *dimples*, rayures, etc...) sur des surfaces, afin d'obtenir une fonction particulière. Contrairement à la rugosité qui est considérée aléatoire, le motif de texturation est périodique et organisé. Les techniques de texturations ont été développées à l'échelle micrométrique vers la fin des années 90. Des avancées importantes ont alors été faites pour aller vers une industrialisation des procédés.

Les procédés de texturation utilisés en tribologie Depuis longtemps déjà un certain nombre de techniques ont été testées en tribologie. Etsion [55] y fait référence et mentionne la méthode de vibrorolling, la technique de gravure ionique réactive (*Reactive Ion Etching* ou RIE), la découpe par jet abrasif, le procédé LIGA ou encore la photolithographie. La plupart de ces procédés sont toujours à l'état d'études expérimentales.

Texturation par LASER Parmi les procédés disponibles, la technique par texturation Laser (*Laser surface texturing* ou LST) semble à l'heure actuelle la plus efficace en raison de la précision et de la vitesse du LASER femtoseconde. Ce dernier présente également l'avantage de ne pas altérer le matériau lors du procédé d'ablation, réalisé dans un environnement propre. Par ailleurs, en contrôlant la densité d'énergie du laser, on peut usiner des aciers, des céramiques, des polymères autant que des structures cristallines. C'est pourquoi ce procédé attire de plus en plus l'attention de la communauté des tribologues. Les applications sont nombreuses [55]. La figure 1.9 présente une mesure par interférométrie optique d'un motif de creux obtenus par ablation LASER femtoseconde. Dans ce mémoire, nous utiliserons cette technique pour maîtriser finement l'insertion d'un motif de texturation, de la taille de l'ordre de grandeur de jeux de paliers miniatures, c'est-à-dire à l'échelle du micron.

1.4.3 La texturation de surface en régime hydrodynamique

Les effets induits par une texturation de surface sur son fonctionnement en régime de lubrification hydrodynamique peuvent être variés. La texturation de surface peut servir par exemple de réservoir de lubrifiant [68], ou encore capter les débris d'usure et minimiser l'abrasion. Une surface texturée permet aussi de diminuer la surface effective du contact, ce qui peut réduire l'adhérence, permettant de réduire l'usure. Tous ces effets sont cependant mal compris dans la littérature. Davantage d'études quantitatives sont nécessaires pour caractériser ces phénomènes.

Toutefois, l'effet dominant attendu est la création d'une portance hydrodynamique due au motif. Cet effet est le seul qui ait été quantifié numériquement de façon intensive. Une des premières explications de ce phénomène est la création de cavitation locale, dissymétrisant le profil de pression. Ce phénomène a également été démontré expérimentalement

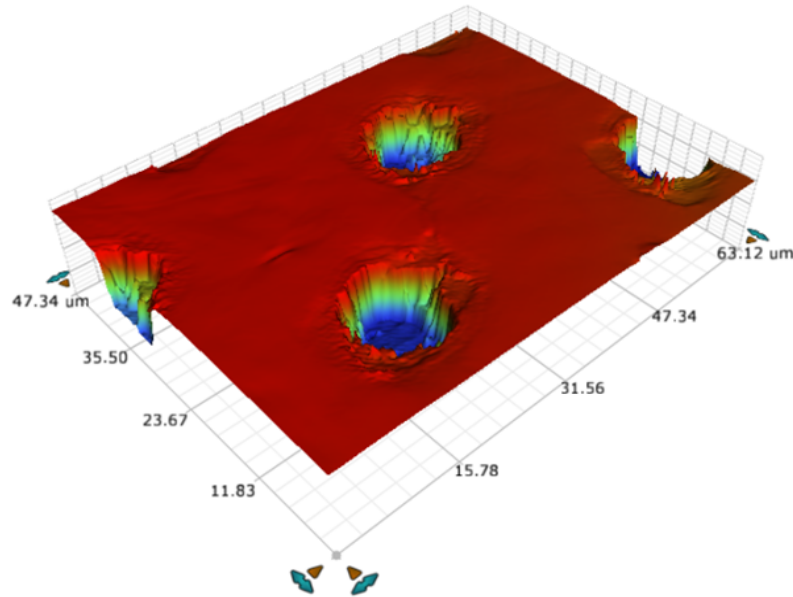


FIGURE 1.9 – Image interférométrique d’un motif de texturation de $5\mu m$ de profondeur et de $15\mu m$ de diamètre obtenu par laser femtoseconde sur un arbre de diamètre $5mm$

par Qiu et Khonsari [116] (figure 1.10). Cependant, avec cette hypothèse, le chargement n’est généré que dans certains cas, à faible pression d’alimentation du motif.

Par ailleurs, Tonder a suggéré que l’introduction d’un motif à l’entrée d’un contact parallèle constitue une configuration à marche ressemblant aux butées “step bearing”, ce qui lui conférerait les mêmes capacités de portance hydrodynamique [137]. D’autres explications de la pression hydrodynamique générée par la texturation de surface reposent sur un effet inertiel du lubrifiant piégé dans les aspérités de texturation [7]. Avec cette hypothèse, les équations de Reynolds ou de Stokes ne sont plus valables dans les cavités. Les études de Sahlin *et al.* [125], Dobrica et Fillon [46] ou encore de Kraker *et al.* [45, 44] ont montré que l’inertie est non seulement due à la géométrie considérée mais aussi aux conditions de l’écoulement (vitesse de cisaillement et gradient de pression). Un autre effet appelé l’aspiration d’entrée (*inlet suction*, [58]) a été mis en avant par Fowell *et al.* Ils justifient que la pression sub-ambiante causée par la partie divergente d’une cavité aspire plus de lubrifiant dans la zone de contact, et donc augmente le maximum de pression et la capacité de portance. Dans le cas de paliers à patins oscillants, Yagi et Sugimura ont aussi souligné l’éventualité d’un équilibre du moment des patins pouvant augmenter leur angle de convergence [155]. Enfin nous pouvons constater que suivant l’application, tous ces phénomènes complexes peuvent coïncider.

Une bibliographie exhaustive a été publiée récemment par Gropper *et al.* ([66]), dans laquelle ils détaillent les dernières avancées de la texturation de surface en régime hydrodynamique.

Nous nous intéresserons dans le paragraphe suivant aux applications concernant plus particulièrement le palier hydrodynamique.

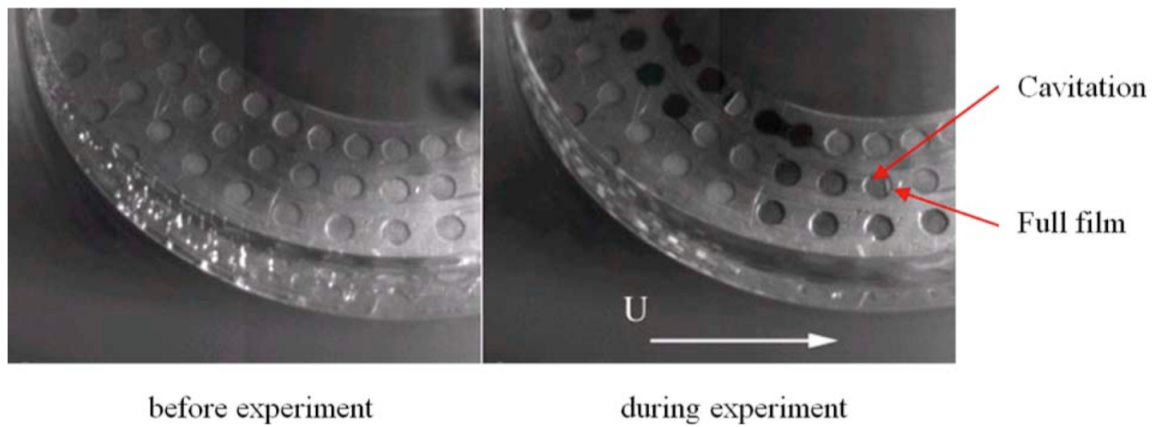


FIGURE 1.10 – Cavitation à l’intérieur des cavités de texturation ([116])

1.4.4 La texturation de surface appliquée aux paliers hydrodynamiques

Dans le cas du palier hydrodynamique, l’épaisseur de film est générée par un contact convergent divergent, donc non parallèle. La pression comme l’épaisseur de film peuvent varier significativement selon la circonférence. De plus, peu d’études numériques et expérimentales de texturation appliquées au palier ont été publiées à ce jour. Nous mentionnons ici les différents modèles qui ont été appliqués, et les conclusions auxquels leurs auteurs sont parvenus.

L’une des premières études numériques sur un palier texturé a été effectuée en 2007 par Tala-Ighil *et al.* [136]. Dans cette étude ils s’intéressent à l’impact de la texturation sur les caractéristiques statiques du palier (portance, angle de calage), en résolvant l’équation de Reynolds avec des hypothèses de cavitation de Reynolds (donc ne conservant pas le débit), qui sera rappelée dans le chapitre 2. D’après leurs travaux, la texturation dans le palier hydrodynamique peut à la fois être bénéfique ou néfaste selon la portion du contact qui est texturée. Ausas *et al.* ont aussi évoqué une augmentation de l’épaisseur de film conforme aux hypothèses de Reynolds avec cavitation et conservation de débit accompagnée d’une hausse du couple de frottement dans le cas texturé [8].

Cupillard *et al.* ont simulé l’écoulement de lubrifiant dans des paliers partiellement texturés avec les hypothèses de Navier-Stokes et ont suggéré que les texturations profondes devraient être localisées dans les zones de haute pression tandis que les textures moins profondes devraient être localisées dans les zones où l’épaisseur de film est la plus grande [42, 41].

Brizmer et Kligerman ont réalisé une étude paramétrique toujours à partir de l’équation de Reynolds et des conditions aux limites de Reynolds dans laquelle ils ont montré que la texturation totale (ou texturation de toute la circonférence du palier) est sans effets positifs sur les caractéristiques statiques des paliers [26]. Ils ont cependant montré que la texturation partielle peut raisonnablement améliorer la capacité de chargement et l’angle de calage à faible excentricité conformément aux résultats de Cupillard *et al.* [42, 41].

Kango *et al.* ont appliqué l’équation de Reynolds, avec les hypothèses de cavitation avec conservation de débit, à des cavités sphériques, en s’intéressant à l’effet de température ([75]). Ils concluent que la texturation diminue la température du lubrifiant et que les améliorations les plus significatives sont constatées à faible excentricité conformément aux autres études numériques. Ils ont également montré que les paliers partiellement texturés



FIGURE 1.11 – Paliers grossièrement texturés par usinage (à gauche) et gravure à (droite) ([90])

augmentent la portance par rapport aux paliers lisses et complètement texturés. Ainsi les études numériques, quelques soient les modèles, semblent s'accorder sur l'inefficacité de la texturation totale de la circonférence du palier. Certaines améliorations sont supposées lors de texturation partielles, mais ne sont rarement significatives en fonction des modèles, et principalement constatées à faibles excentricités. Rappelons que tous les articles mentionnés ont considéré une texturation du coussinet fixe, le palier étant uniquement soumis à un chargement statique. Les différents modèles appliqués seront revus en détail dans la partie 2.3.1.

Les études expérimentales n'ont pas encore permis de valider les conclusions de la modélisation. Lu et Khonsari ont étudié expérimentalement les paliers complètement texturés [90], et fortement chargés. Dans les conditions de lubrification mixte, ces derniers ont observé de meilleures performances qu'avec les paliers partiellement texturés. Une autre étude expérimentale réalisée par Dadouche a permis de tester 4 paliers différents avec la même texture et différentes densités [43]. Cette étude a montré que la texturation influence les caractéristiques dynamiques des paliers et la montée en température du lubrifiant, dans le cas de lubrifiants contaminés. Etant donné la taille importante des motifs de texturation dans ces exemples (creux de plusieurs mm de diamètre), les comparaisons à effectuer avec notre travail restent limitées.

En conclusion, on trouve dans la bibliographie un certain nombre de simulation concernant l'étude des caractéristiques statiques des paliers hydrodynamiques texturés. Peu d'essais expérimentaux sont disponibles et leurs conclusions ne sont pas en parfait accord avec la théorie.

1.4.5 Les effets de l'état de surface sur la dynamique du palier

Les études traitant de l'impact de l'état de surface dans la dynamique des paliers hydrodynamiques sont relativement rares. Cependant le rôle des rugosités aléatoires a été étudié via des simulations numériques en dynamique de rotor rigide, et en négligeant la pression de cavitation par rapport à la pression en bord de palier. En 1990 Majumdar et Ghosh caractérisent l'influence de la texturation de surface modélisée par la méthode moyennée de Patir et Cheng [111] avec les conditions de cavitation de Reynolds, sur la stabilité de rotors rigides [100]. En analysant l'impact de la variance de la rugosité sur les coefficients dynamiques, la stabilité et le ratio d'*oil whirl* d'un palier, ils montrent que lorsque l'arbre est très rugueux et le coussinet, lisse, la stabilité décroît de façon importante. Au contraire lorsque la surface du coussinet est très rugueuse, et lorsque le coussinet est lisse, la stabilité augmente significativement. Dans tous les cas, ils concluent que la va-

riation de rugosité prise en compte via les hypothèses de Patir et Cheng affecte peu la stabilité linéaire. Plus tard, Ramesh et Majumdar ont étudié un problème similaire par intégration temporelle afin de prendre en compte les effets non linéaires [117]. Ils utilisent également le modèle de rugosité aléatoire moyennée de Patir et Cheng. Ils trouvent que la stabilité est améliorée en présence de rugosités. Par ailleurs, la rugosité longitudinale est présentée comme stabilisante pour les paliers courts, mais déstabilisante pour les paliers longs. Cette étude a été prolongée par Turaga et Majumdar [139], toujours en simulation transitoire, par éléments finis stochastiques, basés sur le modèle de Christensen et Tonder [36]. Elle montre que le palier semble stabilisé par les rugosités transversales, tandis que les rugosités isotropes ont tendance à diminuer la stabilité. En somme la stabilité des cycles limites est augmenté soit dans le cas de rugosité transversale, ou de rugosité isotrope des parties tournantes. Par la suite Rao et Sawicki ont analysé la stabilité des paliers rugueux modélisés sur la base des travaux d'Elrod à la fois pour prendre en compte la rugosité par méthode de perturbation, et pour modéliser la cavitation avec conservation de masse [120]. L'approche utilisée est assez avancée mais les résultats difficiles à exploiter, car le seuil de stabilité est détecté à excentricité constante, et sans considération de masse et de chargement. Rao et Sawicki suggèrent que le seuil de stabilité peut être influencé substantiellement, avec des rugosités isotropes ou à chevrons, notamment pour des excentricité élevées. Cet argument n'avait pas été avancé auparavant. Enfin, Lin élargie les conclusions dues aux effets non-linéaires, en appliquant la théorie de bifurcation de Hopf au palier court avec le modèle de Christensen pour une rugosité isotrope [87], transverse [88] et longitudinale [89], sans excitation de balourd. Les rugosités longitudinales et transverses sont représentées sur la figure 1.12. Le palier avec rugosité isotrope présente une bifurcation de Hopf sous-critique (dangereuse car les cycles limites sont instables) ou super-critique (cycles limites stables). Pour les paramètres étudiés la rugosité isotrope tend à privilégier des cycles limites ayant une amplitude plus élevée qu'avec un palier lisse. Pour une rugosité transverse, il est montré que les zones de bifurcation sous-critiques sont réduites tandis que les zones supercritiques sont augmentées, ce qui est positif pour des applications en ingénierie. En revanche, le seuil de stabilité de la position d'équilibre est diminué dans les deux cas, ce qui constitue un résultat plutôt négatif si l'on veut éviter la bifurcation. Enfin, pour la rugosité longitudinale, le seuil de stabilité est augmenté et l'amplitude des cycles limites diminuée.

On peut donc en déduire que la rugosité influence non seulement la stabilité linéaire, mais aussi le caractère de la bifurcation, et l'amplitude des cycles limites. Il semble possible d'obtenir à la fois des effets positifs ou négatifs sur les vibrations en fonction du type de rugosité et des conditions de simulations (chargement et excentricité).

Ces études intéressantes ont toutefois été effectuées avec des modèle de palier rugueux relativement simplifiés, en particulier au niveau des hypothèses de cavitation. Les états de surface représentent plutôt des rugosités que des motifs texturés bien que des parallèles soient possibles entre les deux types de morphologie de surface.

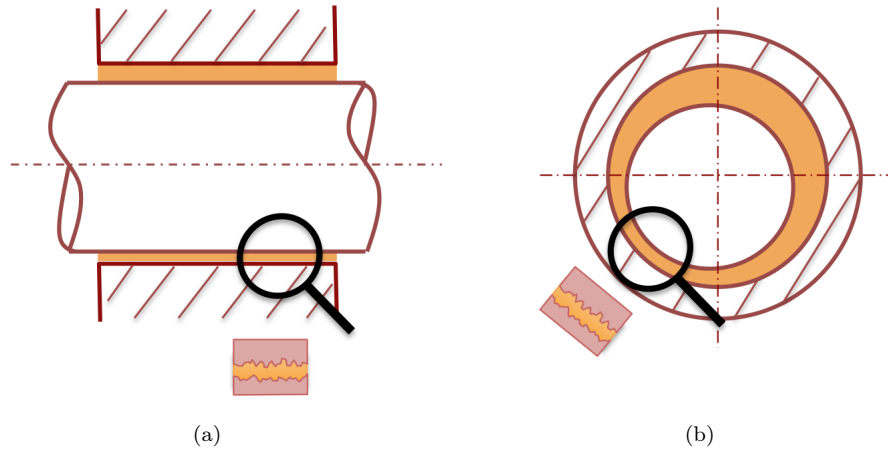


FIGURE 1.12 – Représentation de la rugosité du palier hydrodynamique : (a) longitudinale , (b) transverse (adapté de [36])

1.5 Conclusion

Dans les paragraphes précédents, nous avons présenté de nombreux travaux concernant les instabilités dynamiques dues au palier fluide. Des comportements non-linéaires, comme des bifurcations, des régimes quasi-périodiques, ou encore du chaos ont été mis en évidence. Les conclusions de ces études laissent entendre que l'état de surface du palier peut avoir un rôle prépondérant dans ces instabilités en impactant directement le débit de lubrifiant, lui-même lié aux fréquences de vibrations auto-entretenues du palier fluide. Toutefois, l'impact de l'état de surface de paliers de longueur finie en interaction avec des rotors flexibles n'a pas clairement été quantifié d'un point de vue dynamique. De plus le traitement de la pression de cavitation est souvent simplifié, celle-ci étant souvent prise comme égale à la condition aux bords de palier (en général la pression atmosphérique), ce qui n'est pas nécessairement représentatif pour les rotors légers.

Par ailleurs, la communauté des tribologues a largement contribué à la compréhension théorique de l'impact de l'état de surface dans le régime stationnaire, grâce à de nombreux outils de modélisation mathématiques et numériques. Les progrès récents de texturation de surface permettent également l'usage de procédés technologiques de contrôle micrométrique, voire nanométrique de l'état de surface.

Dans les chapitres qui suivent, nous intégrons les modèles avancés de lubrification en tenant compte de la morphologie du palier, directement dans les modèles de dynamique de rotors flexibles. Ces modèles sont confrontés à des mesures sur un banc d'essais permettant l'analyse dynamique de différents rotors présentant des états de surface contrôlés par texturation au LASER femtoseconde. L'objectif de cette comparaison est de statuer de l'intérêt du contrôle fin de l'état de surface dans la conception des machines tournantes lubrifiées par un liquide.

Chapitre 2

Modélisation du palier hydrodynamique texturé

Le chapitre précédent a permis de présenter les généralités concernant le guidage en rotation, le palier hydrodynamique, ses composants et ses caractéristiques. Un état de l'art de la texturation de surface a été introduit, ainsi que son application au palier hydrodynamique.

Dans ce chapitre, nous présentons en détail les hypothèses et les outils nécessaires à la compréhension et à la simulation de la physique du palier hydrodynamique. Nous mettons en place les hypothèses de la lubrification pour modéliser l'écoulement dans le palier lisse, et obtenir les équations menant au calcul de la pression appliquée au rotor. Une attention particulière est apportée au phénomène de cavitation, ainsi qu'à la prise en compte de la texturation de surface, modifiant les expressions de la pression pour le palier texturé. Une discrétisation en éléments finis est présentée afin de résoudre les variantes de l'équation de Reynolds numériquement. Deux méthodes moyennées sont introduites afin de localement prendre en compte les effets de la texturation, et les retranscrire à l'échelle globale : la méthode d'homogénéisation périodique de l'équation de Reynolds, et la méthode de résolution locale des équations de Navier-Stokes.

2.1 Modélisation de l'écoulement de Reynolds

2.1.1 Le fluide newtonien

La description eulérienne décrit le champ de vitesse en chaque point d'un domaine. Cette description est utile dans le cas d'étude de fluide en vue du déplacement important des volumes élémentaires, et du manque d'ordre à l'échelle du système (contrairement aux structures, plus ordonnées).

L'hypothèse de fluide Newtonien décrit un fluide en considérant une loi de proportionnalité entre le taux de cisaillement et la contrainte de cisaillement. On introduit la viscosité dynamique μ :

$$\mu = \frac{\tau}{\dot{\gamma}} \quad (2.1.1.1)$$

Avec τ la contrainte en cisaillement, et $\dot{\gamma}$ le gradient de vitesse (ou taux de cisaillement).

On introduit de même la viscosité cinématique :

$$\nu_f = \frac{\mu}{\rho_f} \quad (2.1.1.2)$$

On ajoute l'hypothèse de symétrie du tenseur de contrainte, négligeant l'influence des couples agissants sur les volumes élémentaires.

En ajoutant l'hypothèse d'isotropie du fluide, on obtient l'expression suivante pour le tenseur de contrainte visqueuse [64] :

$$\sigma_{ij}^v = 2\mu(A_{ij} - (1/3)\delta_{ij}A_{kk}) + \zeta\delta_{ij}A_{kk} \quad (2.1.1.3)$$

Avec A la partie symétrique du tenseur de taux de distorsion $\partial v_i/\partial x_j$. Le coefficient μ correspond à la viscosité de cisaillement. Le second coefficient ζ définit la viscosité de compression. En conséquence, le fluide ne revient pas instantanément à l'équilibre après une compression ou une dilatation brutale, puisqu'il dissipe de l'énergie. Dans l'hypothèse de fluide incompressible, $\zeta = 0$ et $A_{kk} = 0$.

On obtient pour le tenseur de contraintes globales :

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu A_{ij} \quad (2.1.1.4)$$

Avec p la pression hydrostatique.

2.1.2 Équation de la quantité de mouvement fluide

On écrit la forme forte de la conservation de la quantité de mouvement :

$$\rho_f \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \text{div}(\underline{\sigma}) + \rho_f \mathbf{f} \quad (2.1.2.1)$$

A cette équation s'ajoute l'équation de continuité :

$$\frac{\partial \rho_f}{\partial t} + \text{div}(\rho_f \mathbf{v}) = 0 \quad (2.1.2.2)$$

Notons que cela donne dans le cas incompressible l'équation $\text{div} \mathbf{v} = 0$, avec \mathbf{v} le champ de vecteur défini sur le domaine étudié. Les forces volumiques \mathbf{f} sont des champs de forces externes (par exemple la gravité). En utilisant l'expression (2.1.1.4) et l'hypothèse d'incompressibilité, on obtient l'équation de Navier-Stokes pour tout fluide Newtonien :

$$\rho_f \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla p + \mu \Delta \mathbf{v} + \rho_f \mathbf{f} \quad (2.1.2.3)$$

En notations indicielles (reportées sur la figure 2.1) :

$$\rho_f \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(-p\delta_{ij} + \mu \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) + \rho_f f_i \quad (2.1.2.4)$$

Il faut alors ajouter les conditions aux limites. Pour une surface solide imperméable :

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}^S \quad \text{sur} \quad \partial\Omega_f \quad (2.1.2.5)$$

Le vecteur \mathbf{v} représente la vitesse du solide à l'interface.

2.1.3 L'équation de la lubrification

Nombre de Reynolds

On suppose que $\mathbf{f} = 0$ et que le fluide est incompressible. Le fluide est donc caractérisé par sa densité et sa seule viscosité de cisaillement (la viscosité en compression n'intervient

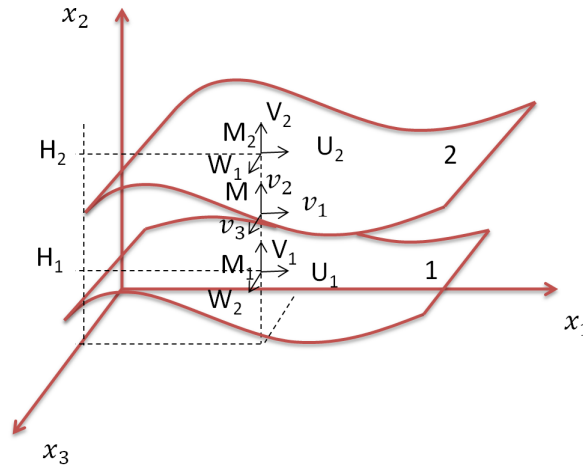


FIGURE 2.1 – Repère de coordonnées (adapté de [19])

pas). Le corps est supposé immobile dans le référentiel du laboratoire et est caractérisé par sa dimension L_f . L'écoulement est caractérisé par sa vitesse V à l'infini. On construit le nombre sans dimension de Reynolds :

$$Re = \frac{\rho_f V L_f}{\mu} \quad (2.1.3.1)$$

Afin de trouver une signification physique du nombre de Reynolds, écrivons l'équation de Navier-Stokes en régime stationnaire :

$$\rho_f (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\mathbf{grad} p + \mu \Delta \mathbf{v} \quad (2.1.3.2)$$

L'ordre de grandeur des forces d'inertie est :

$$\rho_f (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \rho_f \frac{V^2}{L_f} (\bar{\mathbf{v}} \cdot \nabla) \bar{\mathbf{v}} \quad (2.1.3.3)$$

Avec $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{x}/L_f$ et $\bar{\mathbf{v}}(\bar{\mathbf{x}}) = V\bar{\mathbf{v}}$, les variables de l'espace et les vitesses adimensionnées. L'ordre de grandeur des forces de viscosité peut être évalué de la manière suivante :

$$\mu \Delta \mathbf{v} = \mu \frac{V}{L_f^2} \Delta \bar{\mathbf{v}} \quad (2.1.3.4)$$

Le rapport de ces deux forces, donne le nombre de Reynolds :

$$Re = \frac{\text{force d'inertie}}{\text{force visqueuse}} \approx \frac{\rho_f V L_f}{\mu} \quad (2.1.3.5)$$

Nombre de Reynolds Réduit

Dans le cas où l'une des longueurs de l'écoulement est très faibles devant les deux autres, par exemple la deuxième coordonnée, on peut insérer deux longueurs caractéristiques L_{f13} et L_{f2} telles que $L_{f13} \gg L_{f2}$ et deux vitesses caractéristiques U et V . On adimensionne les positions et les vitesses de la manière suivante :

$$\bar{\mathbf{x}} = (x_1, x_2, x_3) = (L_{f13}\bar{x}_1, L_{f2}\bar{x}_2, L_{f13}\bar{x}_3) \quad \bar{\mathbf{v}} = (v_1, v_2, v_3) = (U\bar{v}_1, V\bar{v}_2, U\bar{v}_3) \quad (2.1.3.6)$$

En injectant dans (2.1.3.2) et en négligeant les termes d'ordre 2 en $\frac{L_{f13}}{L_{f2}} = O(10^{-3})$, on obtient :

$$\begin{aligned} Re^* v_j \frac{\partial v_1}{\partial x_j} &= -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_1} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} \\ \frac{\partial p}{\partial x_2} &= O(10^{-6}) \\ Re^* v_j \frac{\partial v_3}{\partial x_j} &= -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_3} + \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_2^2} \end{aligned} \quad (2.1.3.7)$$

Avec $Re^* = \frac{\rho_f U L_{f2}}{\mu} \frac{L_{f2}}{L_{f13}}$ le nombre de Reynolds réduit et avec $\bar{p} = Re^* \frac{p}{\rho_f U}$. Le nombre de Reynolds réduit permet donc d'évaluer le terme de convection de Navier-Stokes dans le cas où l'une des grandeurs de l'écoulement est très faible devant les deux autres, comme cela peut être le cas en lubrification. Les différents cas de figure sont discutés de façon extensive dans [135].

Hypothèses de la lubrification hydrodynamique

Les hypothèses de la lubrification ainsi que l'obtention des équations de Reynolds à partir des équations de Navier-Stokes est disponible dans de nombreux ouvrages [19, 34, 133, 135], et donnent souvent lieu à des remises en question quant à leurs domaines d'application. Jusqu'à maintenant, nous avons considéré que le milieu fluide était continu et newtonien. Dans la théorie de la lubrification, on considère un fluide confiné entre deux surfaces solides très rapprochées, c'est-à-dire que l'épaisseur de film lubrifiant est petite devant la largeur et la longueur du film fluide, que le rayon de courbure des parois est grand devant l'épaisseur moyenne de film. De plus, on fait l'hypothèse de non-glissement du fluide sur les surfaces, on néglige les forces volumiques ainsi que les forces d'inertie. Il est à noter que l'évaluation du nombre de Reynolds réduit présenté dans le paragraphe précédent permet de valider cette hypothèse dans un problème particulier.

Équations générales de la lubrification hydrodynamique

Les détails de la démonstration permettant d'établir l'équation générale de la lubrification sont disponibles dans [59] et dans [19]. Nous en présentons ici les grandes lignes.

Avec les hypothèses formulées dans le paragraphe précédent, on néglige donc le terme de gauche dans l'équation (2.1.3.2) (forces d'inerties, puisque $Re^* \ll 1$) ainsi que les forces volumiques f_i . Avec ces hypothèses sans nécessairement supposer l'incompressibilité du fluide, on peut montrer, en reprenant la version dimensionnée de Navier-Stokes (2.1.2.1) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x_1} &= \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\mu \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) \\ \frac{\partial p}{\partial x_2} &= 0 \\ \frac{\partial p}{\partial x_3} &= \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\mu \frac{\partial v_3}{\partial x_2} \right) \end{aligned} \quad (2.1.3.8)$$

Et l'équation de conservation de la masse :

$$\frac{\partial \rho_f}{\partial t} + \frac{\partial \rho_f v_i}{\partial x_i} = 0 \quad (2.1.3.9)$$

A ce stade il suffit d'intégrer l'équation (2.1.3.8) pour obtenir v_1 et v_3 en fonction de p , que l'on injecte dans (2.1.3.9). On introduit les notations suivantes :

$$I_n(x_1, x_2, x_3, t) = \int_{H_1}^{x_2} \frac{\xi^n}{\mu(x_1, \xi, x_3, t)} d\xi \quad (2.1.3.10)$$

$$J_n(x_1, x_3, t) = \int_{H_1}^{H_2} \frac{\xi^n}{\mu(x_1, \xi, x_3, t)} d\xi \quad (2.1.3.11)$$

$$R(x_1, x_2, x_3, t) = \int_{H_1}^{x_2} \rho(x_1, \xi, x_3, t) d\xi \quad (2.1.3.12)$$

$$F(x_1, x_3, t) = \frac{1}{J_0(x_1, x_3, t)} \int_{H_1}^{H_2} \frac{R(x_1, \xi, x_3, t)}{\mu(x_1, \xi, x_3, t)} d\xi \quad (2.1.3.13)$$

$$G(x_1, x_3, t) = \int_{H_1}^{H_2} \frac{R(x_1, \xi, x_3, t)\xi}{\mu(x_1, \xi, x_3, t)} d\xi - J_1(x_1, x_3, t)F(x_1, x_3, t) \quad (2.1.3.14)$$

On obtient alors, à partir des équations (2.1.3.8) à (2.1.3.9) l'équation de la mécanique des films minces visqueux généralisés :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(G \frac{\partial p}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(G \frac{\partial p}{\partial x_3} \right) &= \frac{\partial}{\partial x_1} (U_2(R_2 - F) + U_1 F) - \rho_2 U_2 \frac{\partial H_2}{\partial x_1} + \rho_1 U_1 \frac{\partial H_1}{\partial x_1} \\ &+ \frac{\partial}{\partial x_3} (W_2(R_2 - F) + W_1 F) - \rho_2 W_2 \frac{\partial H_2}{\partial x_3} + \rho_1 W_1 \frac{\partial H_1}{\partial x_3} \\ &+ \frac{\partial R_2}{\partial t} - \rho_2 \frac{\partial H_2}{\partial t} + \rho_1 \frac{\partial H_1}{\partial t} + \rho_2 V_2 - \rho_1 V_1 \end{aligned} \quad (2.1.3.15)$$

Cette version de Reynolds est très lourde à exploiter, et les auteurs la présentent ici principalement dans le but de montrer que de nombreuses hypothèses sont encore nécessaires pour arriver à l'équation classique de la lubrification.

2.2 Modélisation du palier lisse

2.2.1 Application de l'équation de Reynolds au palier lisse

On souhaite utiliser l'équation précédente pour déterminer la pression vue par l'arbre dans le palier hydrodynamique. On prend alors le paramétrage de la figure 2.2.

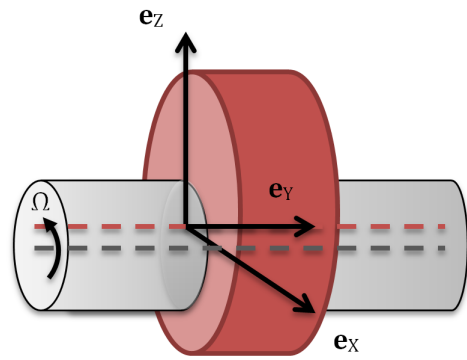
On souhaite déterminer la pression $p(\theta, y)$ avec θ indiqué sur la figure 2.2(b) et y l'abscisse curviligne de la fibre neutre de l'arbre modélisé par une poutre (cf. partie 3.1).

Pour cela, on se place dans un plan $(O_A(y), e_X, e_Z)$ avec O_A le centre de la section de l'arbre de l'abscisse curviligne y . On a donc $\overrightarrow{O_C O_A} = u e_X + w e_Z$. Notons e l'excentricité $\overline{O_C O_A}$. D'après les schémas de la figure 2.2 nous devons connaître $\overline{M_C M_A}(\theta, s)$ afin d'appliquer l'équation de Reynolds de la lubrification. Avec les notations de la figure 2.2, on a :

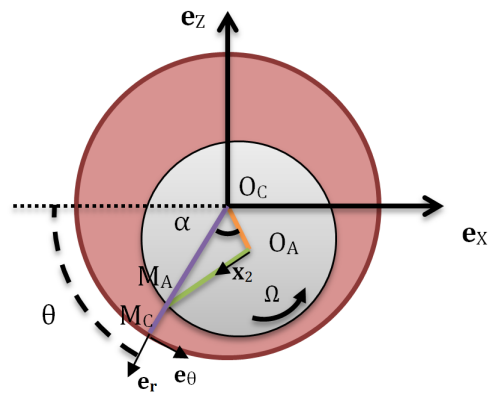
$$h = \overline{M_C M_A} = R_c - \overline{O_C M_A} \quad (2.2.1.1)$$

Or

$$\overline{O_C M_A} = \overline{O_C O_A} \cos(\alpha) + \overline{O_A M_A} \cos(\widehat{O_C M_A O_A}) \quad (2.2.1.2)$$



(a)



(b)

FIGURE 2.2 – Paramétrage d'un palier hydrodynamique

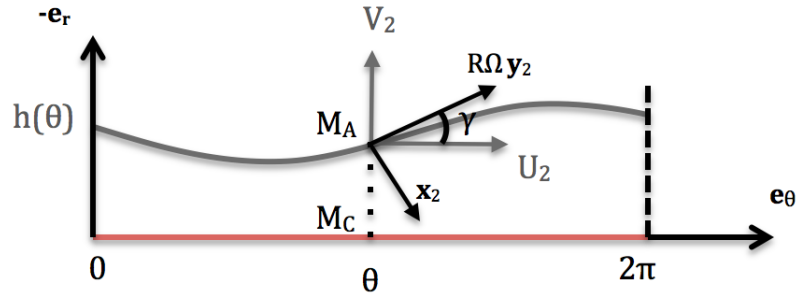


FIGURE 2.3 – Repère de coordonnées

De plus,

$$\frac{\sin(\widehat{O_C M_A O_A})}{e} = \frac{\sin(\alpha)}{R} \quad (2.2.1.3)$$

Enfin on a en combinant les équations

$$h = R_c - e \cos(\alpha) - R \cos(\arcsin(\frac{e}{R} \sin(\alpha))) \quad (2.2.1.4)$$

Ce qui donne à l'ordre 1 en $\frac{e}{R}$:

$$h = R_c - R - e \cos(\alpha) \quad (2.2.1.5)$$

En posant $C_r = R_c - R$, $\phi = \pi - \theta - \alpha$, on a $u = e \cos(\phi)$ et $w = -e \sin(\phi)$. L'équation devient :

$$h = C_r + e \cos(\phi) \cos(\theta) - e \sin(\phi) \sin(\theta) \quad (2.2.1.6)$$

D'où :

$$h(y, \theta) = C_r + u(y) \cos(\theta) + w(y) \sin(\theta) \quad (2.2.1.7)$$

Avec le paramétrage suivant, on obtient :

$$\overrightarrow{O_C M_A} = \overrightarrow{O_C O_A} + \overrightarrow{O_A M_A} \quad (2.2.1.8)$$

D'où :

$$\overrightarrow{O_C M_A} = u \mathbf{e}_X + w \mathbf{e}_Z - R \mathbf{x}_2 \quad (2.2.1.9)$$

Ainsi

$$\mathbf{V}_{M_A} = \dot{u} \mathbf{e}_X + \dot{w} \mathbf{e}_Z + R \Omega \mathbf{y}_2 \quad (2.2.1.10)$$

Avec Ω représentant toujours la vitesse de rotation de l'arbre.

Or, en négligeant $\widehat{O_C M_A O_A}$ devant θ , on a :

$$\mathbf{e}_X = -\cos(\theta) \mathbf{x}_2 + \sin(\theta) \mathbf{y}_2 \quad (2.2.1.11)$$

$$\mathbf{e}_Z = -\sin(\theta) \mathbf{x}_2 - \cos(\theta) \mathbf{y}_2 \quad (2.2.1.12)$$

Et pour $\gamma_a \ll 1$

$$\mathbf{x}_2 = \mathbf{e}_r + \gamma_a \mathbf{e}_\theta \quad (2.2.1.13)$$

$$\mathbf{y}_2 = -\gamma_a \mathbf{e}_r + \mathbf{e}_\theta \quad (2.2.1.14)$$

$$\gamma = \frac{1}{R} \frac{\partial h}{\partial \theta} \quad (2.2.1.15)$$

En gardant uniquement les termes d'ordre au plus 1 :

$$U_2 = R\Omega + \dot{u} \sin(\theta) - \dot{w} \cos(\theta) \quad (2.2.1.16)$$

$$V_2 = \dot{u} \cos(\theta) + \dot{w} \sin(\theta) + \Omega \frac{\partial h}{\partial \theta} \quad (2.2.1.17)$$

2.2.2 Modèle de palier hydrodynamique standard

Dans le cas où la viscosité et la masse volumique ne varient pas selon l'épaisseur de film fluide [59], on a :

$$J_0 = \frac{h}{\mu} \quad J_1 = \frac{h^2}{2\mu} \quad G = \rho_f \frac{h^3}{12\mu} \quad (2.2.2.1)$$

En prenant de plus $U_1 = 0$, $V_1 = 0$, $W_1 = 0$, $W_2 = 0$, c'est-à-dire avec coussinet fixe et en négligeant les vitesses selon l'axe de l'arbre, l'équation de la mécanique des films minces (2.1.3.15), devient :

$$\frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\rho_f h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\rho_f h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial y} \right) = -6\rho_f U_2 \frac{1}{R} \frac{\partial h}{\partial \theta} + 6h \frac{1}{R} \frac{\partial(\rho_f U_2)}{\partial \theta} + 12\rho_f V_2 + 12h \frac{\partial \rho_f}{\partial t} \quad (2.2.2.2)$$

Si, on considère ρ_f constant dans tout l'espace et dans le temps (approximation forte), on a alors :

$$\frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial y} \right) = -6U_2 \frac{1}{R} \frac{\partial h}{\partial \theta} + 6h \frac{1}{R} \frac{\partial U_2}{\partial \theta} + 12V_2 \quad (2.2.2.3)$$

En remplaçant les expressions de U_2 , V_2 et en gardant uniquement les termes d'ordre au plus 1 en $\frac{C}{R}$, ainsi qu'en utilisant les notations de la figure 2.3 :

$$\frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial y} \right) = \frac{\Omega}{2} \frac{\partial h}{\partial \theta} + (\dot{u} \cos(\theta) + \dot{w} \sin(\theta)) \quad (2.2.2.4)$$

Cette forme de l'équation de Reynolds est la plus répandue dans l'étude des paliers hydrodynamiques. On peut l'adimensionner en posant :

$$\bar{y} = \frac{y}{L_p} \quad \bar{h} = \frac{h}{C_r} \quad \bar{t} = \Omega t \quad \bar{p} = \frac{p - p_{cav}}{12\mu\Omega \left(\frac{R}{C_r}\right)^2} \quad (2.2.2.5)$$

Avec p_{cav} une constante représentant la pression de cavitation que l'on va définir dans la partie suivante.

On a alors :

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\bar{h}^3 \frac{\partial \bar{p}}{\partial \theta} \right) + \frac{R^2}{L_p^2} \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \left(\bar{h}^3 \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{h}}{\partial \theta} + \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{t}} \quad (2.2.2.6)$$

Cette équation est valable dans tout le domaine de film complet du palier hydrodynamique. Dans le programme utilisant la méthode des éléments finis, nous avons utilisé la notation :

$$\theta = 2\pi \bar{x} \quad L_x = 2\pi R \quad \widehat{p} = \frac{p - p_{cav}}{12\mu\Omega \left(\frac{L_x}{C_r}\right)^2} \quad (2.2.2.7)$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left(\bar{h}^3 \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} \right) + \frac{L_x^2}{L_p^2} \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \left(\bar{h}^3 \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} \right) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{t}} \quad (2.2.2.8)$$

Ou encore, en notant $\bullet' = \partial \bullet / \partial \bar{t}$:

$$\bar{h}(\bar{u}, \bar{w}, \bar{u}', \bar{w}', \bar{x}) = 1 + \bar{u} \cos(2\pi\bar{x}) + \bar{w} \sin(2\pi\bar{x}) \quad (2.2.2.9)$$

Avec $\bar{u} = u/C_r, \bar{w} = w/C_r$.

$$\frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left(\bar{h}^3 \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} \right) + \frac{L_x^2}{L_p^2} \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \left(\bar{h}^3 \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} \right) = \left(\bar{u}' + \frac{\bar{w}}{2} \right) \cos(2\pi\bar{x}) + \left(\bar{w} - \frac{\bar{u}}{2} \right) \sin(2\pi\bar{x}) \quad (2.2.2.10)$$

Par ailleurs, il est intéressant de remarquer que l'on peut exprimer les équations de Reynolds ci-dessus dans le repère tournant de la figure 2.4 issue de [34]. Dans ce repère, on a :

$$\tilde{h} = 1 + \tilde{e} \cos(2\pi\tilde{x}) \quad (2.2.2.11)$$

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{\theta}} \left(\tilde{h}^3 \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{\theta}} \right) + \frac{R^2}{L_p^2} \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \left(\tilde{h}^3 \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{y}} \right) = \tilde{e}' \cos(\tilde{\theta}) + \tilde{e} \left(\tilde{\beta}' - \frac{1}{2} \right) \sin(\tilde{\theta}) \quad (2.2.2.12)$$

Qui peut encore s'écrire avec $\tilde{\theta} = 2\pi\tilde{x}$:

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \left(\tilde{h}^3 \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}} \right) + \frac{L_x^2}{L_p^2} \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \left(\tilde{h}^3 \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{y}} \right) = \tilde{e}' \cos(2\pi\tilde{x}) + \tilde{e} \left(\tilde{\beta}' - \frac{1}{2} \right) \sin(2\pi\tilde{x}) \quad (2.2.2.13)$$

En insérant la vitesse de cisaillement pur définie par :

$$\mathbf{V}_s = \mathbf{V} - \left(\frac{\Omega}{2} \mathbf{e}_z \wedge C_r \bar{e} \mathbf{e}_r \right) = C_r (x' - z) \mathbf{e}_x + C_r (z' + x) \mathbf{e}_z \quad (2.2.2.14)$$

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{\theta}} \left(\tilde{h}^3 \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{\theta}} \right) + \frac{L_x^2}{L_p^2} \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \left(\tilde{h}^3 \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{y}} \right) = \frac{V_s}{C_r} \cos(\tilde{\theta} + \alpha) \quad (2.2.2.15)$$

Il est alors nécessaire de préciser les conditions aux limites du domaine de film complet. Si l'on considère que le film lubrifiant remplit totalement l'entrefer, alors $p = p_0$ en bord des paliers, en prenant généralement pour p_0 la valeur de la pression atmosphérique. Dans ce cas-là uniquement, on obtient le profil de pression de Sommerfeld, illustré figure 2.5.

Dans le cas d'un palier lisse, les forces résultantes des profils de pression calculées analytiquement sont disponibles avec les hypothèses de palier court et les hypothèses de palier long [59]. On remarquera de plus que l'expression de la force résultante du palier en fonction des variables cinématiques est également disponible pour un palier de longueur fini [34], explicité dans la partie 2.2.3. Ces expressions donnent une bonne approximation de l'équation de Reynolds, mais ne prennent pas en compte l'inclinaison éventuelle de l'arbre dans le palier, ni son état de surface, considéré ici comme parfaitement lisse.

2.2.3 Rupture de film

Lorsque la pression dans le lubrifiant devient inférieure à la pression atmosphérique, on constate expérimentalement une rupture de film lubrifiant (aussi désignée par le vocable impropre de "cavitation") que l'on explique par trois processus ([59] p63) :

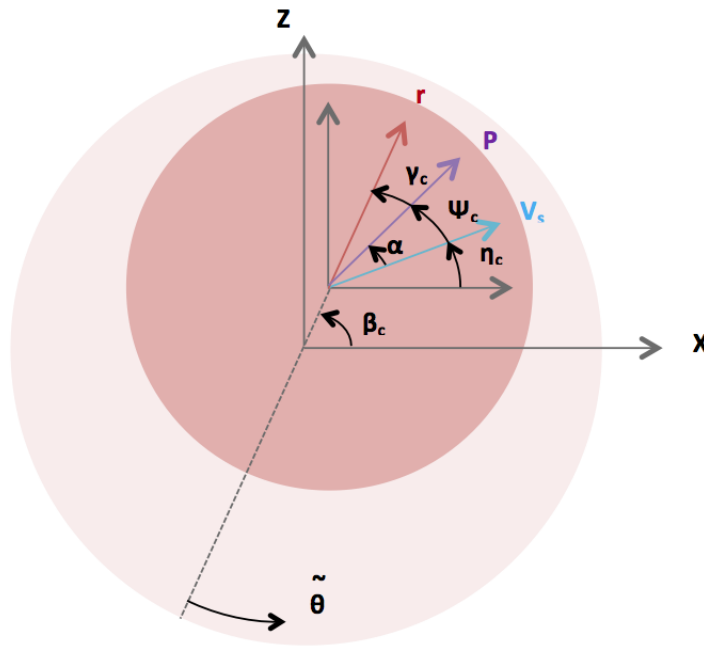


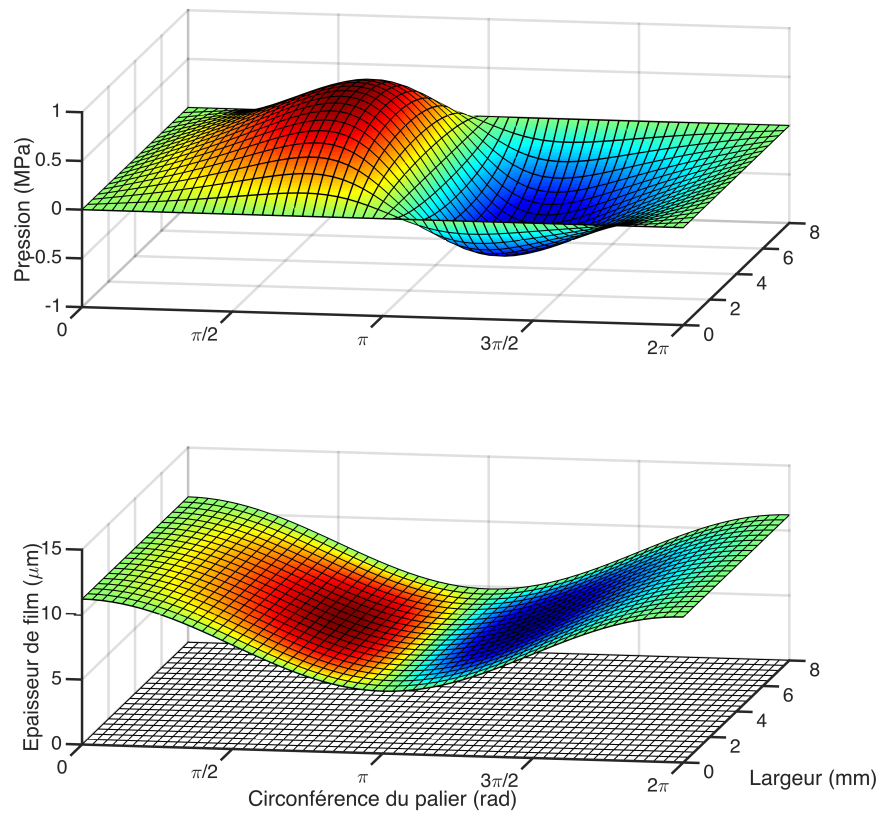
FIGURE 2.4 – Variables cinématiques utilisées dans la description du palier par impédance (adapté de [34])

- de l'air, ou un autre gaz, en provenance de l'atmosphère ambiante peut s'introduire dans la région en dépression jusqu'à ce que la pression dans cette zone devienne égale à la pression ambiante
- les gaz dissous dans le lubrifiant sont expulsés de celui-ci jusqu'à ce que la pression équilibre la pression de saturation
- si la pression est inférieure à la pression de vapeur saturante du lubrifiant, il y a vaporisation et génération de bulles de vapeur qui peuvent imploser et entraîner une détérioration des surfaces

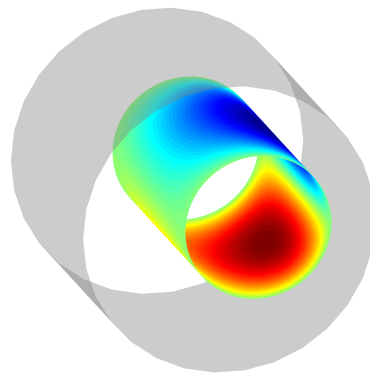
De nombreux articles proposent des conditions aux limites théoriques pour trouver la zone de rupture de film [37, 38, 57, 50, 48, 53, 73]. Nous en décrivons par la suite les hypothèses principalement utilisées. Certains de ces articles présentent des photographies de bulles de rupture de film, comme par exemple Dowson et Taylor [48], dont nous présentons l'une d'elles sur la figure 2.6. Nous utiliserons les notations de [59] représentées sur la figure 2.7.

Conditions aux limites de Gumbel Historiquement, ce sont ces conditions aux limites qui ont été utilisées pour prendre en compte la rupture de film ([59] p70). Dès 1921, Gumbel propose de négliger les pressions inférieures à la pression atmosphérique. Dans ces zones on prend pour pression une valeur constante (en général la pression atmosphérique). Cette approche a le défaut majeur de ne pas respecter la conservation de débit. Cependant, cette méthode très simple donne des résultats souvent proches des résultats expérimentaux.

Conditions aux limites de Reynolds Les conditions aux limites de Reynolds (aussi connues sous le nom de modèle de Swift-Stieber) intègrent la continuité de débit au niveau de la



(a)



(b)

FIGURE 2.5 – Profil de pression avec film complet (Sommerfeld) pour un palier de 5 mm de diamètre à 20.000 tr/min

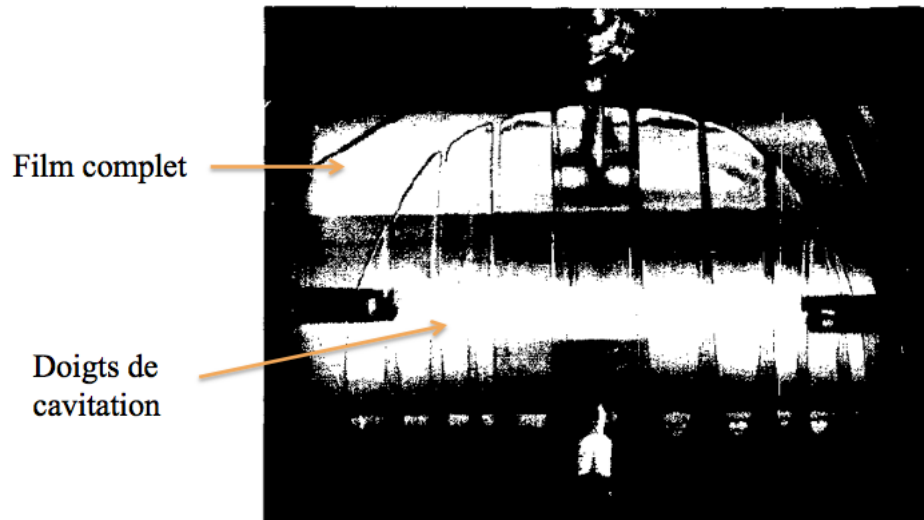


FIGURE 2.6 – Photographie du film lubrifiant avec cavitation dans un palier hydrodynamique [48]. L'arbre tourne du bas vers le haut sur la photographie (front de reformation bien visible).

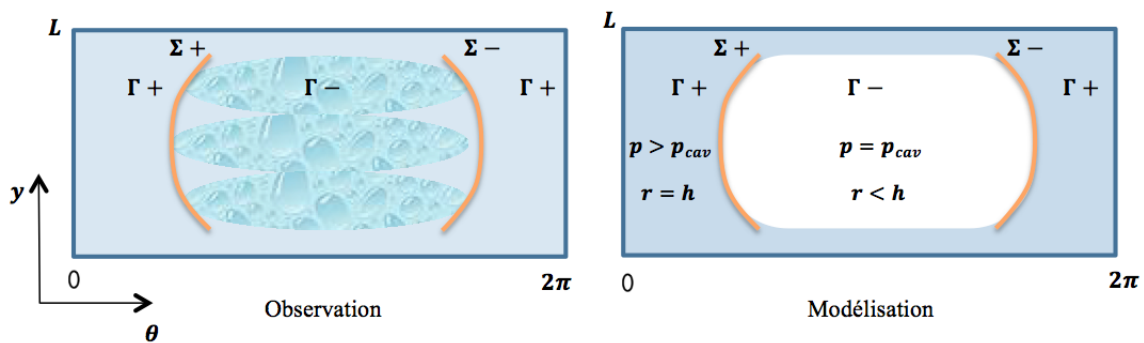


FIGURE 2.7 – Représentation du film lubrifiant avec cavitation

frontière de rupture de film lubrifiant (amont de la zone cavitation), c'est-à-dire :

$$\frac{\partial p}{\partial n} = 0 \quad \text{sur} \quad \Sigma^+ \quad (2.2.3.1)$$

Avec Σ^+ la frontière de rupture du film lubrifiant. En revanche, cette condition n'élimine pas la discontinuité de débit à la reformation du film

Approximation π -film pour palier lisse En négligeant les pressions inférieures à la pression extérieure, en bord de palier (généralement à la pression atmosphérique), on suppose dans le cas de palier lisse, que la zone de cavitation s'étend sur la moitié de la circonférence du palier (figure 2.8). Il est ainsi possible d'obtenir une expression analytique des forces de palier ([31]), sans prendre en compte l'inclinaison de l'arbre. En connaissant la position du centre de l'arbre $u = C_r \bar{u}$ et $w = C_r \bar{w}$ et en posant $\bar{V}_s = V_s / (C_r \Omega)$ on a, avec les notations du schéma 2.4. :

$$\begin{aligned} \tilde{e} &= \frac{1}{C_r} \sqrt{u^2 + w^2} = \sqrt{\bar{u}^2 + \bar{w}^2} \\ \bar{V}_s &= \frac{1}{C_r \Omega} \sqrt{\left(\dot{u} - \frac{\Omega}{2} w\right)^2 + \left(\dot{w} + \frac{\Omega}{2} u\right)^2} = \sqrt{\left(\bar{u}' - \frac{\bar{w}}{2}\right)^2 + \left(\bar{w}' + \frac{\bar{u}}{2}\right)^2} \\ \cos(\beta_c) &= \frac{\bar{u}}{\tilde{e}} \quad \sin(\beta_c) = \frac{\bar{w}}{\tilde{e}} \\ \cos(\zeta_c) &= \frac{\bar{u}' - \frac{\bar{w}}{2}}{\bar{V}_s} \quad \sin(\zeta_c) = \frac{\bar{w}' + \frac{\bar{u}}{2}}{\bar{V}_s} \\ \alpha_c &= \beta_c - \zeta_c \end{aligned} \quad (2.2.3.2)$$

On est alors en mesure de calculer :

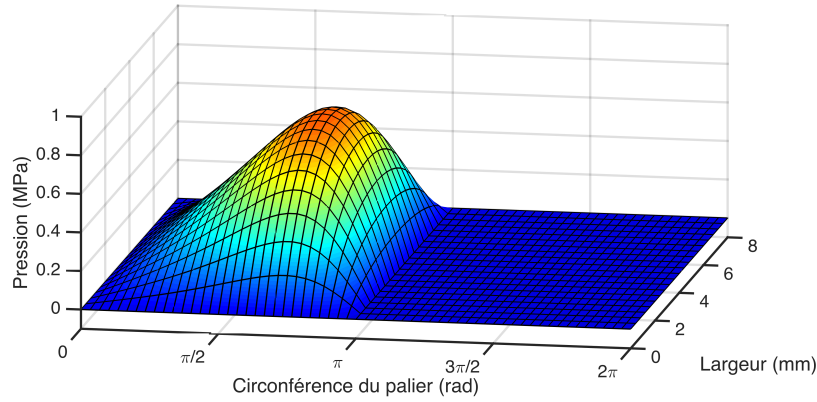
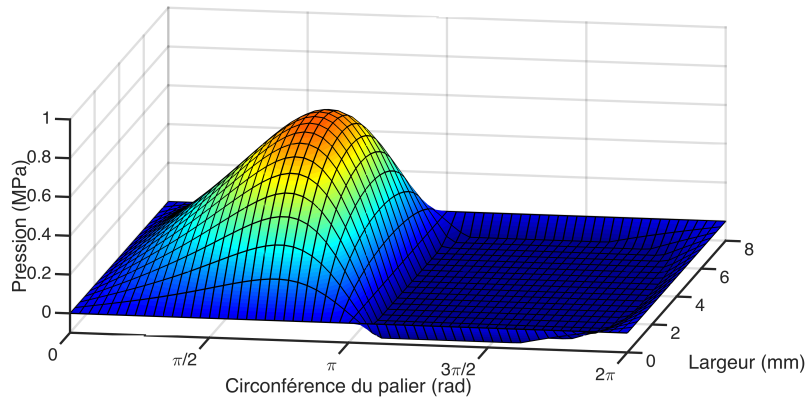
$$\begin{aligned} \xi'_c &= \epsilon \cos(\alpha_c) \quad \eta'_c = \epsilon \sin(\alpha_c) \\ B_0 &= (1 - \tilde{e}^2) \sqrt{\frac{D}{L}} \\ \gamma_c &= \left(1 - \frac{\xi'_c}{\sqrt{1 - \eta'^2_c}}\right) \left[\tan^{-1} \left(\frac{4(1 + 2.12B)\sqrt{1 - \eta'^2_c}}{3(1 + 3.60B)\eta'_c} \right) - \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn}(\eta'_c) + \arcsin(\eta'_c) \right] + \alpha_c - \arcsin(\eta'_c) \\ \xi_c &= \epsilon \cos(\gamma_c) \quad \eta_c = \epsilon \sin(\gamma_c) \\ Q_0 &= (1 - \xi_c) \sqrt{\frac{D}{L}} \\ E_0 &= 1 + 2.12 Q_0 \\ G_0 &= \frac{3\eta(1 + 3.60Q_0)}{4(1 - \xi_c)} \end{aligned} \quad (2.2.3.3)$$

On peut finalement calculer la réaction adimensionnée P :

$$P = [0.150 \sqrt{E_0^2 + G_0^2} (1 - \xi)^{3/2}]^{-1} \quad (2.2.3.4)$$

On peut rapporter la réaction dans le repère fixe suivant le schéma 2.4 :

$$P_u = P \cos(\beta_c) \quad P_w = P \sin(\beta_c) \quad (2.2.3.5)$$

FIGURE 2.8 – Représentation du film lubrifiant avec cavitation Demi-Sommerfeld et $p_{cav} = p_{atm}$ FIGURE 2.9 – Représentation du film lubrifiant avec cavitation de Gumbel et $p_{cav} \neq p_{atm}$

Enfin, pour trouver la force dimensionnée :

$$\mathbf{F} = -\frac{C^3}{R^3 2\mu L \bar{V}_s C_r \Omega} \mathbf{P} \quad (2.2.3.6)$$

Ces quelques équations permettent de s'affranchir d'un modèle élément fini, beaucoup plus lourd en calcul. Elles ne sont valables cependant que pour le palier lisse, donc on ne peut pas les utiliser directement avec une surface texturée. De plus, l'hypothèse π -film est discutable pour les nombres de Sommerfeld élevés, où l'on peut, en revanche, utiliser le calcul de γ et W avec l'hypothèse 2π -film, disponible aussi dans [31]. Cette méthode analytique nous permettra néanmoins de valider les autres modèles dans les cas particuliers où elle s'applique.

Conditions aux limites de Jakobson-Floberg-Olsson Les modélisations plus fines de la rupture de film, on sépare le domaine d'intégration Γ en deux régions. Une première région Γ^- où le film est rompu et où la pression est constante, et une région Γ^+ où le film est complet et où il y a génération de pression ($p > 0$). Σ^+ et Σ^- représentent respectivement les frontières de rupture et de reformation de film lubrifiant. Les conditions aux limites de Jakobson-Floberg-Olsson permettent de définir le front de reformation du film lubrifiant

[74, 108]. Elles ont été utilisées par Elrod pour mettre en place un algorithme de calcul de pression avec conservation de débit défini dans le paragraphe suivant [53].

Modèle pression/remplissage de Elrod-Adams

On peut modéliser le mélange fluide-gaz, entre les parois, en le considérant homogène et de masse volumique $\rho_m < \rho$. Dans ce domaine-ci, on néglige les sollicitations en cisaillement. Ainsi, la variation de pression y est nulle. En reprenant l'équation de Reynolds pour palier hydrodynamique sans hypothèse d'incompressibilité et sans vitesse axiale ($W = 0$), on a avec les notations de la partie 2.1.3 :

$$\frac{U}{R} \frac{\partial F}{\partial \theta} + \frac{\partial R_2}{\partial t} = 0 \quad (2.2.3.7)$$

On fait l'hypothèse d'une viscosité et d'une masse volumique de mélange ρ_m indépendante de y . Le calcul donne alors :

$$R_2 = \rho_m h \quad F = \frac{\rho_m h}{2} \quad (2.2.3.8)$$

On retrouve bien l'équation de conservation de débit :

$$\frac{U}{2R} \frac{\partial(\rho_m)}{\partial \theta} + \frac{\partial(\rho_m h)}{\partial t} = 0 \quad (2.2.3.9)$$

et on obtient en variables adimensionnées :

$$\frac{1}{2} \frac{\partial(rH)}{\partial \theta} + \frac{\partial(rH)}{\partial \bar{t}} = 0 \quad (2.2.3.10)$$

Avec

$$r = 1 - \frac{\rho_m}{\rho_f} \quad (2.2.3.11)$$

Cette expression de r permettra de mettre le problème sous la forme d'un problème de complémentarité linéaire classique. La signification du remplissage est illustrée sur la figure 2.10. Sur cette figure, on montre le résultat du calcul du profil de pression en couleur, avec les données du tableau C.3. L'axe vertical présente l'épaisseur de film, dont le remplissage est partiel dans la zone de cavitation. Ce modèle est à comparer à la figure 2.6 de Dowson et Taylor [48]. On observe une forme similaire de la zone de cavitation, malgré l'absence des différents "doigts de cavitation".

Ainsi, on considère deux zones dans notre domaine fluide. Une "zone active" (notée domaine $\Gamma+$) c'est-à-dire une zone de remplissage total en lubrifiant incompressible (équation 2.2.2.8), et une "zone inactive" (notée domaine $\Gamma-$), dans laquelle le fluide est compressible et la pression reste constante (équation 2.2.3.10).

Nous avons donc :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\bar{h}^3 \frac{\partial \bar{p}}{\partial \theta} \right) + \frac{R^2}{L_p^2} \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \left(\bar{h}^3 \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{h}}{\partial \theta} + \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{t}} & \text{sur } \Gamma+ \\ \frac{1}{2} \frac{\partial(r\bar{h})}{\partial \theta} + \frac{\partial(r\bar{h})}{\partial \bar{t}} = 0 & \text{sur } \Gamma- \end{cases} \quad (2.2.3.12)$$

Il faut enfin ajouter les conditions aux limites. En écrivant la conservation du débit à la frontière $\partial\Gamma$, on a :

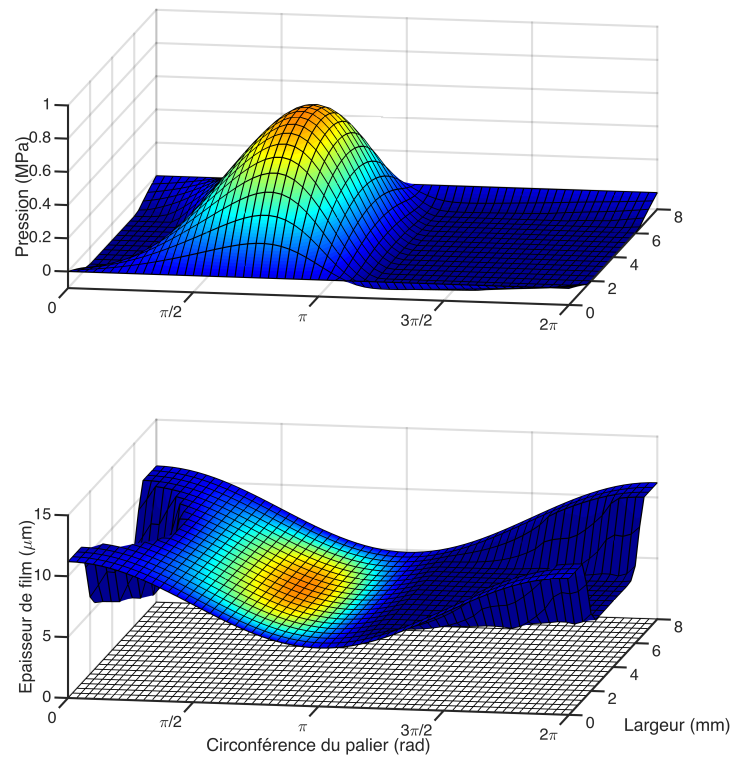


FIGURE 2.10 – Représentation du remplissage partiel du film lubrifiant avec les hypothèses de cavitation JFO

$$\begin{cases} V_{\partial\Gamma} < R\Omega/2; & r = 0; & \bar{p}_{\theta \in \partial\Gamma} = 0; & \left. \frac{\partial \bar{p}}{\partial \theta} \right|_{\theta \in \partial\Gamma} = 0 \\ V_{\partial\Gamma} \geq R\Omega/2; & r \geq 0; & \bar{p}_{\theta \in \partial\Gamma} = 0; & \left. \frac{\partial \bar{p}}{\partial \theta} \right|_{\theta \in \partial\Gamma} = \frac{1}{h^2} \left(\frac{1}{2} - \frac{V_{\partial\Gamma}}{R\Omega} \right) r \end{cases} \quad (2.2.3.13)$$

$$\begin{cases} V_{\partial\Gamma} > R\Omega/2; & r = 0; & \bar{p}_{\theta \in \partial\Gamma} = 0; & \left. \frac{\partial \bar{p}}{\partial \theta} \right|_{\theta \in \partial\Gamma} = 0 \\ V_{\partial\Gamma} \leq R\Omega/2; & r \geq 0; & \bar{p}_{\theta \in \partial\Gamma} = 0; & \left. \frac{\partial \bar{p}}{\partial \theta} \right|_{\theta \in \partial\Gamma} = \frac{1}{h^2} \left(\frac{1}{2} - \frac{V_{\partial\Gamma}}{R\Omega} \right) r \end{cases} \quad (2.2.3.14)$$

En notant $\bar{r} = \bar{h}r$, les équations précédentes peuvent se réécrire de manière plus condensées sous la forme d'un problème de complémentarité linéaire [65] :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\bar{h}^3 \frac{\partial \bar{p}}{\partial \theta} \right) + \frac{R^2}{L_p^2} \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \left(\bar{h}^3 \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} \right) &= \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{h}}{\partial \theta} + \frac{\partial \bar{h}}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{r}}{\partial \theta} + \frac{\partial \bar{r}}{\partial t} \quad \text{sur} \quad \Gamma = \Gamma^+ \cup \Gamma^- \\ \bar{p} &> 0 \\ \bar{r} &> 0 \\ \bar{p}\bar{r} &= 0 \end{aligned} \quad (2.2.3.15)$$

Afin de résoudre ce problème numériquement, nous utiliserons une discrétisation par éléments finis, largement appliquée dans le cadre du palier hydrodynamique [10, 17, 18, 12, 13, 15, 86, 109], avec un solveur de problème de complémentarité linéaire [65, 4]. De nombreux algorithmes utilisent une discrétisation par différences finies ([124], [24], [144], [145], [147], [25], [146] [146], [143]). Cependant, les résultats présentés par Bonneau et al. [19] sur la conservation de débit, et le couplage avec une structure elle-même discrétisée par éléments finis ont justifié le choix de la méthode des éléments finis pour le fluide également. Concernant l'algorithme de résolution, différentes méthodes sont également disponibles comme par exemple la méthode des caractéristiques [17, 18, 12]. La méthode LCP est toutefois assez bien documentée [54], et offre des résultats satisfaisants. De plus, on peut choisir de résoudre le problème par méthode de pivot (par exemple avec l'algorithme de Lemke) ou par méthode itérative (par exemple la méthode de Fischer-Newton). Par ailleurs, une toolbox MATLAB[®] est disponible en libre accès, proposant différents algorithmes de résolution [54]. Enfin, Woloszynski et al. ont appliqué cette méthode avec d'excellents résultats [153], sous la forme de système de Fischer-Burmeister, pour résoudre le système itérativement par algorithme de Newton-Raphson et en utilisant le complément de Schur pour que le système soit bien conditionné (méthode intégralement décrite dans [54]). Ils ont appelé cette méthode Fischer-Burmeister-Newton-Schur (FBNS) que nous rappelons dans la partie 2.2.6.7 et que nous avons également utilisé avec de bonnes performances. En bilan, nous utiliserons une méthode de discrétisation par éléments finis du fluide, et un solveur linéaire complémentaire FBNS afin d'optimiser la modélisation et la résolution du palier.

La dynamique liée à la zone de cavitation a été étudiée par exemple dans [148]. L'effet de l'algorithme de conservation de la masse semble relativement négligeable en ce qui concerne le profil de pression dynamique. En revanche, lorsque l'on utilise un modèle intégrant la montée en température du lubrifiant des écarts substantiels sont observés sur le régime transitoire [51].

2.2.4 Passage à la formulation faible

Afin d'appliquer la discrétisation en éléments finis, il convient de passer à la forme faible du problème. Nous utiliserons pour cela les résidus pondérés de Galerkin.

On considère la forme intégrale définie sur le domaine entier Γ . Notons les fonctions tests W de la fonctionnelle \mathcal{E} .

$$\mathcal{E}(\bar{p}, \bar{r}, W) = \int_{\Gamma} W \left(- \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\bar{h}^3 \frac{\partial \bar{p}}{\partial \theta} \right) + \frac{R^2}{L^2} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\bar{h}^3 \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} \right) \right] + \left[\frac{1}{2} \frac{\partial \bar{h}}{\partial \theta} + \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{t}} + \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{r}}{\partial \theta} + \frac{\partial \bar{r}}{\partial \bar{t}} \right] \right) d\Gamma \quad (2.2.4.1)$$

Toujours avec :

$$\begin{cases} \bar{p} > 0 \\ \bar{r} > 0 \\ \bar{p}\bar{r} = 0 \end{cases} \quad \text{dans} \quad \Gamma \quad (2.2.4.2)$$

Notons par ailleurs qu'il est possible de réduire l'ordre de différenciation grâce à une intégration par partie pour les deux premiers termes entre crochets :

$$\int_{\Gamma} W \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\bar{h}^3 \frac{\partial \bar{p}}{\partial \theta} \right) d\Gamma = \oint_{\partial\Gamma} W \left(\bar{h}^3 \frac{\partial \bar{p}}{\partial \theta} \right) n_{\theta} d(\partial\Gamma) - \int_{\Gamma} \bar{h}^3 \frac{\partial W}{\partial \theta} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \theta} d\Gamma \quad (2.2.4.3)$$

On retrouve le même résultat avec \bar{y} . Notons alors :

$$\mathcal{E}(\bar{p}, r, W) = \int_{\Gamma} \left[\bar{h}^3 \frac{\partial W}{\partial \theta} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \theta} + \bar{h}^3 \frac{R^2}{L^2} \frac{\partial W}{\partial \bar{y}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} \right] d\Gamma + \int_{\Gamma} W \left[\frac{1}{2} \frac{\partial \bar{h}}{\partial \theta} + \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{t}} + \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{r}}{\partial \theta} + \frac{\partial \bar{r}}{\partial \bar{t}} \right] d\Gamma \quad (2.2.4.4)$$

On annule le terme sur les bords de Γ en sous-entendant que sur $\partial\Gamma$, soit W est nulle soit $\frac{\partial \bar{p}}{\partial \theta} n_x$ (proportionnel au débit) est nulle. Divisons $\partial\Gamma$ en deux sous domaines $\partial\Gamma_1$ et $\partial\Gamma_2$ correspondant respectivement à ces deux cas de figure. On cherche alors les champs \bar{p} et \bar{r} vérifiant, pour tout $W \in C_0$:

$$\begin{cases} \bar{p} = p^* & \text{et} & W = 0 & \text{sur} & \partial\Gamma_1 \\ \mathcal{E}(\bar{p}, \bar{r}, W) = \oint_{\partial\Gamma_2} W Q_m d(\partial\Gamma) \\ \bar{p} \geq 0 \\ \bar{r} \geq 0 \\ \bar{p}\bar{r} = 0 \end{cases} \quad (2.2.4.5)$$

2.2.5 Discrétisation par éléments finis

Une formulation faible étant ainsi obtenue, nous pouvons discrétiser notre domaine en éléments finis.

Les fonctions de forme choisies sont de type Petrov-Galerkin, avec des fonctions de pondérations différentes des fonctions d'interpolation. Plus spécifiquement, les fonctions de pondérations sont choisies différentes uniquement dans la zone inactive (ou zone de cavitation), c'est-à-dire pour les matrices multipliant la variable \bar{r} . Cela vient du fait que pour un problème de convection pur les matrices des éléments finis sont mal conditionnées en prenant les mêmes fonctions tests que les fonctions d'interpolation (Boubnov-Galerkin). On décentre alors les fonctions d'interpolation pour obtenir les fonctions test (fonctions

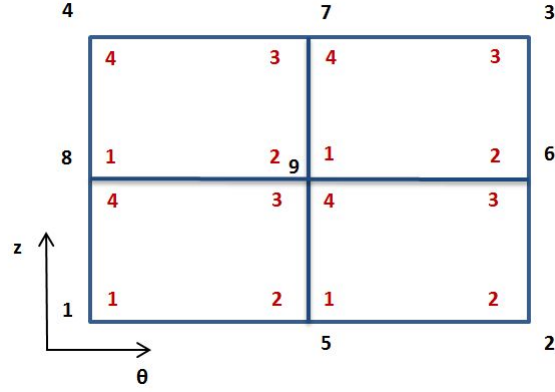


FIGURE 2.11 – Correspondance entre les éléments quadratiques (numérotés en noir) et les sous-éléments linéaires décentrés (numérotés en rouge)

décentrées amont [27]). Pour les éléments quadratiques à 9 nœuds, les fonctions d'interpolation sont classiquement choisies de la forme :

$$\begin{aligned} N_{q01}(x) &= \frac{1}{2}x(x-1) \\ N_{q02}(x) &= 1-x^2 \\ N_{q03}(x) &= \frac{1}{2}x(1+x) \end{aligned} \quad (2.2.5.1)$$

On obtient alors les 9 fonctions de formes par combinaison :

$$N_{ij}(\xi, \eta) = N_{q0i}(\xi)N_{q0j}(\eta) \quad (2.2.5.2)$$

En ce qui concerne les fonctions décentrées amont, notons :

$$\begin{aligned} N_{l01}(x) &= \frac{1}{2}(1-x) \\ N_{l02}(x) &= \frac{1}{2}(1+x) \\ N_{d0}(x) &= \frac{3}{2}(x^2-1) \end{aligned} \quad (2.2.5.3)$$

Nous avons alors choisi :

$$\begin{aligned} W_1(\xi, \eta) &= [N_{l01}(\xi) - \text{sgn}(\omega)N_{d0}(\xi)]N_{l01}(\eta) \\ W_2(\xi, \eta) &= [N_{l02}(\xi) + \text{sgn}(\omega)N_{d0}(\xi)]N_{l01}(\eta) \\ W_3(\xi, \eta) &= [N_{l02}(\xi) + \text{sgn}(\omega)N_{d0}(\xi)]N_{l02}(\eta) \\ W_4(\xi, \eta) &= [N_{l01}(\xi) - \text{sgn}(\omega)N_{d0}(\xi)]N_{l02}(\eta) \end{aligned} \quad (2.2.5.4)$$

La correspondance entre les éléments quadratiques et les sous-éléments linéaires se fait suivant la figure 2.11.

On pose :

$$\bar{p} \approx \sum_1^N N_i(\theta, \bar{y})\bar{p}_i \quad \bar{r} \approx \sum_1^N N_i(\theta, \bar{y})\bar{r}_i \quad \bar{h} \approx \sum_1^N N_i(\theta, \bar{y})\bar{h}_i = \bar{h}_d(\theta, \bar{y}) \quad (2.2.5.5)$$

Afin d'alléger la complexité de l'algorithme, on fait aussi les approximations :

$$\begin{aligned}\frac{\bar{h}^3}{6} &\approx \frac{1}{6} \sum_1^N N_i(\theta, \bar{y}) \bar{h}_i^3 = g_d(\theta, \bar{y}) \\ \frac{\partial \bar{h}}{\partial \theta} &\approx \sum_1^N \frac{\partial N_i(\theta, \bar{y})}{\partial \theta} \bar{h}_i = h'_d(\theta, \bar{z}) \\ \frac{\partial \bar{h}}{\partial t} &\approx \sum_1^N N_i(\theta, \bar{y}) \dot{\bar{h}}_i = \dot{h}_d(\theta, \bar{y})\end{aligned}\tag{2.2.5.6}$$

La quantité \mathcal{E} est approximée par \mathcal{E}_d :

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{d_i} &= \left(\int_{\Gamma} \left[g_d \frac{\partial W_i}{\partial \theta} \frac{\partial N_j}{\partial \theta} + g_d \frac{R^2}{L_p^2} \frac{\partial W_i}{\partial \bar{y}} \frac{\partial N_j}{\partial \bar{y}} \right] d\Gamma \right) p_j \\ &\quad + \left(\frac{1}{2} \int_{\Gamma} W_i \frac{\partial N_j}{\partial \theta} d\Gamma \right) \bar{r}_j + \left(\int_{\Gamma} W_i N_j d\Gamma \right) \dot{\bar{r}}_j \\ &\quad + \left(\int_{\Gamma} W_i \left[\frac{h'_d}{2} + \dot{h}_d \right] d\Gamma \right)\end{aligned}\tag{2.2.5.7}$$

Nous pouvons l'écrire matriciellement :

$$\mathcal{E}_d = \mathbb{H} \bar{\mathbf{p}} + \mathbb{Q}_1 \bar{\mathbf{r}} + \mathbb{Q}_2 \dot{\bar{\mathbf{r}}} - \mathbf{f}_f\tag{2.2.5.8}$$

Avec :

$$\begin{aligned}\mathbb{H}_{ij} &= \int_{\Gamma} \left[g_d \frac{\partial W_i}{\partial \theta} \frac{\partial N_j}{\partial \theta} + g_d \frac{R^2}{L^2} \frac{\partial W_i}{\partial \bar{y}} \frac{\partial N_j}{\partial \bar{y}} \right] d\Gamma \\ \mathbb{Q}_{1ij} &= \frac{1}{2} \int_{\Gamma} W_i \frac{\partial N_j}{\partial \theta} d\Gamma \\ \mathbb{Q}_{2ij} &= \int_{\Gamma} W_i N_j d\Gamma \\ \mathbf{f}_{f_i} &= - \int_{\Gamma} W_i \left[\frac{1}{2} \frac{\partial \bar{h}}{\partial \theta} + \frac{\partial \bar{h}}{\partial t} \right] d\Gamma\end{aligned}\tag{2.2.5.9}$$

N.B. : Lorsque la position et la vitesse de l'arbre sont connues et qu'elles ne sont pas influencées par l'huile, les grandeurs h_d , \dot{h}_d , et g_d sont connues avant résolution de l'algorithme. Dans notre cas, en considérant l'interaction fluide-structure, ces grandeurs sont liées aux mouvements de l'arbre. On doit donc résoudre le système complet, fortement non linéaire. Pour cela, les notations des équations (2.2.2.9) et (2.2.2.10) dans le repère fixe, ou (2.2.2.11) et (2.2.2.12) dans le repère tournant seront adaptées aux expressions du système (2.2.5.9).

Avec cette discrétisation, pour résoudre le problème de l'équation (2.2.4.5) sans débit imposé aux bornes du domaine il suffit de résoudre le système d'inéquations suivant :

$$\begin{cases} \mathbb{H} \bar{\mathbf{p}} + \mathbb{Q}_1 \bar{\mathbf{r}} + \mathbb{Q}_2 \dot{\bar{\mathbf{r}}} = \mathbf{f}_f \\ \bar{\mathbf{p}} \geq 0 \\ \bar{\mathbf{r}} \geq 0 \\ \bar{\mathbf{p}}^T \bar{\mathbf{r}} = 0 \end{cases}\tag{2.2.5.10}$$

Avec $\bar{\mathbf{p}}$ et $\bar{\mathbf{r}}$ les vecteurs respectifs des inconnues \bar{p}_i et \bar{r}_i .

Rappelons finalement qu'avec ces notations le problème de Sommerfeld s'écrit :

$$\mathbb{H}\bar{\mathbf{p}} = \mathbf{f}_f \quad (2.2.5.11)$$

Le problème avec cavitation de Gumbel s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{H}\bar{\mathbf{p}} = \mathbf{f}_f \\ \text{Si } \mathbf{p} \leq 0 \quad \text{on impose } \mathbf{p} = 0 \end{array} \right. \quad (2.2.5.12)$$

Le problème avec cavitation de Reynolds (soluble aussi avec l'équation (2.2.5.11) et l'algorithme de Christopherson) s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{H}\bar{\mathbf{p}} + \bar{\mathbf{r}} = \mathbf{f}_f \\ \bar{\mathbf{p}} \geq 0 \\ \bar{\mathbf{r}} \geq 0 \\ \bar{\mathbf{p}}^T \bar{\mathbf{r}} = 0 \end{array} \right. \quad (2.2.5.13)$$

2.2.6 Méthode de résolution de Fischer-Burmeister-Newton-Schur

Comme cela a été décrit par Erleben dans [54], puis appliqué plus tard par Woloszynsky et al. à un problème de cavitation en lubrification dans [153], la contrainte du problème de complémentarité linéaire

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\mathbf{p}} \geq 0 \\ \bar{\mathbf{r}} \geq 0 \\ \bar{\mathbf{p}}^T \bar{\mathbf{r}} = 0 \end{array} \right. \quad (2.2.6.1)$$

Peut se mettre sous la forme Fischer-Burmeister suivante sans erreur d'approximation :

$$F(\bar{\mathbf{p}}_j, \bar{\mathbf{r}}_j) = \bar{\mathbf{p}}_j + \bar{\mathbf{r}}_j - \sqrt{\bar{\mathbf{p}}_j^2 + \bar{\mathbf{r}}_j^2} = 0 \quad (2.2.6.2)$$

Pour tout j allant de 1 au nombre de degrés de liberté du domaine fluide N_f .

On note les autres équations du système complémentaire sous la forme $G = 0$, par exemple pour le système (2.2.5.10) :

$$G(\bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{r}}) = \mathbb{H}\bar{\mathbf{p}} + \mathbb{Q}_1\bar{\mathbf{r}} + \mathbb{Q}_2\dot{\bar{\mathbf{r}}} - \mathbf{f}_f = 0 \quad (2.2.6.3)$$

Pour résoudre le système formé par les équations (2.2.6.2) et (2.2.6.3), on utilise une méthode de Newton :

$$\begin{bmatrix} \mathbb{J}_{F,\bar{\mathbf{p}}} & \mathbb{J}_{F,\bar{\mathbf{r}}} \\ \mathbb{J}_{G,\bar{\mathbf{p}}} & \mathbb{J}_{G,\bar{\mathbf{r}}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta\bar{\mathbf{p}} \\ \delta\bar{\mathbf{r}} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} F \\ G \end{bmatrix} \quad (2.2.6.4)$$

Avec

$$\mathbb{J}_{F,\bar{\mathbf{p}}} = \frac{\partial F}{\partial \bar{\mathbf{p}}} \quad \mathbb{J}_{F,\bar{\mathbf{r}}} = \frac{\partial F}{\partial \bar{\mathbf{r}}} \quad \mathbb{J}_{G,\bar{\mathbf{p}}} = \frac{\partial G}{\partial \bar{\mathbf{p}}} \quad \mathbb{J}_{G,\bar{\mathbf{r}}} = \frac{\partial G}{\partial \bar{\mathbf{r}}} \quad (2.2.6.5)$$

On remarque que les jacobiens $\mathbb{J}_{F,\bar{\mathbf{p}}}$ et $\mathbb{J}_{F,\bar{\mathbf{r}}}$ s'expriment :

$$\begin{aligned} \mathbb{J}_{F,\bar{\mathbf{p}}}^j &= 1 - \frac{\bar{\mathbf{p}}_j}{\sqrt{\bar{\mathbf{p}}_j^2 + \bar{\mathbf{r}}_j^2}} \\ \mathbb{J}_{F,\bar{\mathbf{r}}}^j &= 1 - \frac{\bar{\mathbf{r}}_j}{\sqrt{\bar{\mathbf{p}}_j^2 + \bar{\mathbf{r}}_j^2}} \end{aligned} \quad (2.2.6.6)$$

Afin d'appliquer le complément de Schur, on réorganise le système (2.2.6.7), en échangeant la j -ème colonne avec la $(j + N_f)$ -ème colonne quand $\mathbb{J}_{F,\bar{\mathbf{p}}}^j < \mathbb{J}_{F,\bar{\mathbf{r}}}^j$.

Le système obtenu est ré-écrit sous la forme :

$$\begin{bmatrix} A_F & B_F \\ A_G & B_G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta a \\ \delta b \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} F \\ G \end{bmatrix} \quad (2.2.6.7)$$

Sous cette forme on peut écrire le système de taille $2 \times N_f$ sous forme de deux systèmes de taille N_f que l'on peut résoudre séquentiellement :

$$\begin{aligned} (B_G - A_G A_F^{-1} B_F) \delta b &= -G + A_G A_F^{-1} F \\ A_F \delta a &= -F - B_F \delta b \end{aligned} \quad (2.2.6.8)$$

Les arguments numériques du bon conditionnement des inversions impliquées dans ce système sont décrites en détails dans [153]. Notons enfin que cette décomposition est bien plus rapide que l'algorithme de Lemke, et peut s'avérer extrêmement rapide quand on connaît un vecteur d'initialisation pertinent (par exemple le pas de temps précédent dans une intégration temporelle).

2.3 Modélisation du palier texturé sans recirculation

2.3.1 Méthodes de prise en compte de rugosités en lubrification hydrodynamique

L'un des premiers auteurs à s'intéresser à la contribution de l'état de surface à l'échelle micrométrique a été Hamilton en 1966 [68]. Ses travaux, portant principalement sur les garnitures d'étanchéité, suggèrent que les aspérités des pièces mécaniques peuvent produire de la cavitation, ou d'autres phénomènes, capables d'améliorer la lubrification. Les effets constatés concernent principalement l'augmentation de la portance hydrodynamique en fonction du taux de surface texturée. Dans la foulée, Tzeng et Saibel ont modélisé le rôle d'une distribution de la rugosité et de l'ondulation de la surface en une dimension [140]. Les calculs sont très techniques, même pour un problème largement simplifié. Les effets constatés sont une augmentation de la portance et du frottement générés par la rugosité et l'ondulation. A la suite de ces travaux pionniers, de nombreuses études ont porté sur le développement des méthodes stochastiques pour prendre en compte l'état de surface des pièces lubrifiées en régime hydrodynamique. Christensen et Tonder appliquent leur modèle à un palier hydrodynamique [36]. Ils concluent qu'une rugosité transverse à l'écoulement du palier augmente le frottement et la portance, tandis qu'une rugosité longitudinale les diminuent. De plus, ils remarquent que l'impact à excentricité faible est relativement négligeable, tandis qu'il devient important à excentricité élevée. En parallèle, Sun et al. s'intéressent à l'effet de la rugosité sur l'équation de Stokes en 1D. L'équation de Stokes est plus générale que l'équation de Reynolds pour décrire l'écoulement du fluide. En effet, dans le cas de Reynolds appliqué à la lubrification, l'hypothèse d'une hauteur de film très petite devant sa longueur ($h \ll L$) permet de négliger le terme en laplacien de la vitesse de l'équation de Navier Stokes (deuxième terme de la partie droite de l'équation (2.1.3.8)). Sun et al. désignent par rugosité de Stokes, les surfaces pour lesquelles l'espacement des aspérités est de l'ordre de grandeur de l'épaisseur de film. Pour celles-ci, ils suggèrent d'utiliser l'équation de Stokes pour en analyser les effets sur la friction et la portance. Par la suite, Patir et Cheng ont proposé une méthode stochastique de prise en

compte de la rugosité en 3D sur l'écoulement hydrodynamique [111, 112]. Leur méthode moyennée, avec l'insertion des facteurs de flux dans l'équation de Reynolds est depuis largement utilisée pour intégrer l'effet de la rugosité à l'échelle macroscopique. A partir d'une génération aléatoire de la hauteur de film, liée à une rugosité, leur méthode consiste à calculer le rapport de chaque terme de débit (utilisé dans l'équation de Reynolds) au terme correspondant à une surface lisse (facteur de flux). Les résultats obtenus sont cohérents avec les méthodes analytiques mentionnées précédemment. Cependant le principal défaut de cette méthode réside dans l'effort de calcul important pour obtenir les facteurs de flux empiriques. Cela étant, une fois calculés, ces facteurs sont disponibles pour n'importe quels paliers ou butées possédant les mêmes paramètres statistiques de rugosité. Plus tard [69], Harp et al. utiliseront cette méthode tout en considérant la cavitation avec conservation de débit (Jacobson Flobert Olsson / Elrod Adams). L'utilisation de méthode de perturbation, plus précisément de méthode d'homogénéisation multi-échelles (en espace), a été proposée par Elrod [52]. Celui-ci souligne qu'il faut notamment supposer que la rugosité ait une longueur d'onde caractéristique assez petite pour utiliser une méthode de perturbation, et assez grande pour pouvoir utiliser l'équation de Reynolds ($L_e \ll h \ll L$). Son recours à la transformée de Fourier est astucieuse et permet de bien comprendre les phénomènes associés à l'utilisation des échelles multiples dans l'équation de Reynolds. Tripp propose une méthode assez semblable, et encore une fois très technique pour calculer des facteurs de flux de Patir et Cheng [138]. La méthode d'homogénéisation a été ensuite formalisée par Bayada et al. pour résoudre l'équation de Reynolds [11, 14, 16] avec des rugosités déterministes. Ces auteurs proposent des expressions des facteurs de flux sous forme de solution du problème local. Ils ont adapté, de plus, cette méthode au cas de la cavitation avec conservation de débit massique [16]. Cette façon de prendre en compte la rugosité à l'échelle macroscopique sera retenue dans notre étude lorsque les hypothèses de Reynolds s'appliquent à l'échelle locale. L'impact du modèle de cavitation a été traité par Ausas et al. [8] ainsi que par Almqvist [5]. La méthode a été utilisée par Sahlin [125] et Almqvist [2] pour des profils de surface mesurés. Grâce aux avancées des moyens numériques de calcul, de nombreux articles présentent des résultats utilisant un calcul déterministe de la texturation de surface [123, 136, 113, 26, 75, 119, 61]. Tala-Ighil et al. [136] présentent notamment des résultats de texturation de palier hydrodynamique, et leur étude conclut à une augmentation de la portance dans le cas où l'on texture la moitié du palier située là où la pression décroît. De même Brizmer et al. [26] ont énoncé qu'une texturation complète du palier diminue la portance hydrodynamique, bien que dans le cas de palier long cela augmente substantiellement l'angle de calage à faible excentricité. Des améliorations de la portance sont démontrées pour la texturation partielle, surtout à excentricité élevée. Rao et al. [119] aboutissent à des conclusions similaires, pour les paliers texturés partiellement. Pei et al. [113] se servent d'un calcul déterministe pour évaluer les coefficients dynamiques d'un palier texturé. Selon leur étude, la stabilité du palier est améliorée pour une excentricité fixée. On peut cependant se demander si, pour une même géométrie de palier lisse ou texturé, l'équilibre statique sera positionné à la même excentricité.

De nombreuses études s'intéressent également à la validité de l'équation de Reynolds en présence de texturation de surface [7, 126, 22, 6, 45, 42, 41, 44, 115, 40]. De Kraker propose un calcul de facteur de flux du type de Patir et Cheng, appliqué au calcul de la convection dans les cavités par résolution des équations de Navier-Stokes stationnaires [45, 44]. Cette méthode intéressante sera développée dans la partie 2.4.

La littérature concernant la simulation de l'influence de l'état de surface qui s'étend sur presque 50 ans est très fournie. Les progrès numériques ont permis une complexification

des modèles. Cependant, les résultats sont encore difficiles à synthétiser. De plus, afin d'intégrer les modèles de paliers texturés dans un algorithme dynamique plus complet, modélisant la structure, il convient de choisir une méthode de résolution relativement simplifiée. C'est pourquoi nous avons retenu la méthode d'homogénéisation multi-échelles périodique, car une détermination a priori des coefficients de flux peut permettre un calcul rapide de la pression moyenne dans le palier. De plus, les fondements de cette méthode sont démontrés mathématiquement, même si pour l'appliquer, il faut que l'équation de Reynolds soit valide à l'échelle locale. Lorsque ce n'est pas le cas, nous utiliserons la méthode de De Kraker basée sur une résolution de Navier-Stokes stationnaire, pour calculer a priori les coefficients multi-échelles. Nous présentons ces deux méthodes dans les parties suivantes.

2.3.2 Principe de l'homogénéisation

Les méthodes par homogénéisation consistent à résoudre un problème global qui dépend de paramètres calculés localement. Ainsi, dans le cadre de la lubrification hydrodynamique avec des surfaces texturées, la détermination du champ de pression dans le film lubrifiant est décomposée en deux sous-problèmes [19] (figure 2.12) :

- un problème local, à l'échelle microscopique à laquelle est défini le motif (environ $10\mu\text{m}$)
- la résolution d'une équation de Reynolds moyennée à l'échelle du film lubrifiant

Par la suite, nous expliciterons des valeurs de coefficients de flux pour l'équation de Reynolds homogénéisée dont le calcul sera basé sur une méthode des échelles multiples appliquée à l'équation de Reynolds.

2.3.3 Homogénéisation périodique de l'équation de Reynolds stationnaire sans cavitation

Pour expliciter une étude asymptotique formelle basée sur la méthode des échelles multiples, nous nous plaçons d'abord dans un cas stationnaire isovisqueux incompressible. L'équation adimensionnée associée est donc :

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\bar{h}^3 \frac{\partial \bar{p}}{\partial \theta} \right) + \frac{R^2}{L_p^2} \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \left(\bar{h}^3 \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{h}}{\partial \theta} \quad (2.3.3.1)$$

L'épaisseur de film peut alors s'exprimer de la façon suivante :

$$\bar{h}(\theta, \bar{y}, \bar{\xi}, \bar{\zeta}) = h_0(\theta, \bar{y}) + h_1(\bar{\xi}, \bar{\zeta}) \quad (2.3.3.2)$$

Avec h_0 l'épaisseur de film adimensionnée moyenne, et h_1 le motif local périodique de cavitation adimensionné également.

Afin d'appliquer la méthode des échelles multiples, la fonction \bar{h} est redimensionnée à l'aide du paramètre noté ϵ :

$$\bar{h}_\epsilon(\theta, \bar{y}) = \bar{h}\left(\theta, \bar{y}, \frac{\theta}{\epsilon}, \frac{\bar{y}}{\epsilon}\right) \quad (2.3.3.3)$$

Le paramètre ϵ est relié à la longueur d'onde des rugosités.

On suppose que la fonction \bar{p} solution de l'équation (2.3.3.1), avec ses conditions aux limites, est développable sous la forme :

$$\bar{p}_\epsilon = \bar{p}_0 + \epsilon \bar{p}_1 + \epsilon^2 \bar{p}_2 + \dots \quad (2.3.3.4)$$

Où les p_i sont des fonctions des variables θ , \bar{y} , $\bar{\xi}$, $\bar{\zeta}$ périodiques en $\bar{\xi}$ et $\bar{\zeta}$ de même période que h_1 .

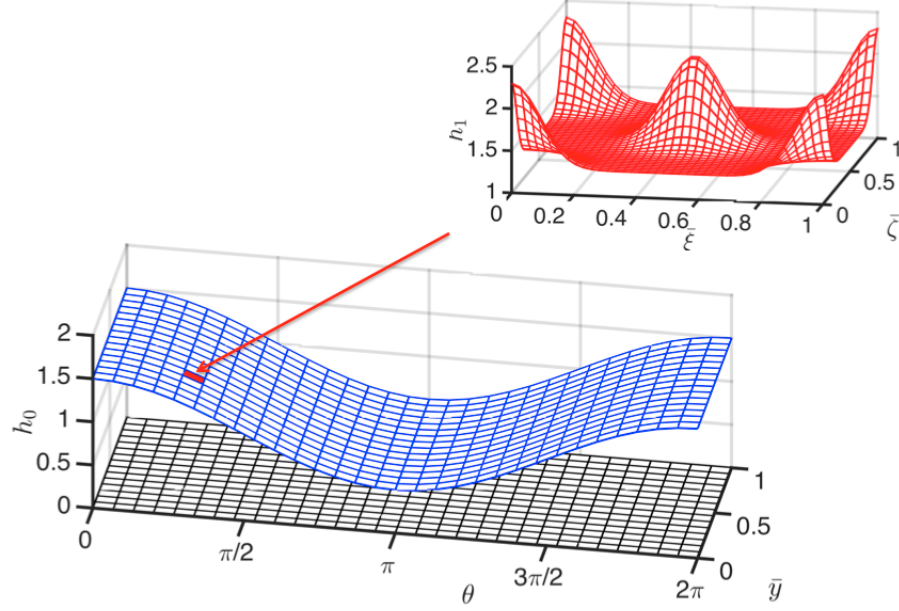


FIGURE 2.12 – Représentation des deux échelles de la méthode d'homogénéisation pour un arbre texturé

Pour simplifier les notations, on introduit les opérateurs suivants :

$$A_0 = \frac{\partial}{\partial \bar{\xi}} \left(\bar{h}^3 \frac{\partial}{\partial \bar{\xi}} \right) + \frac{R^2}{L^2} \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} \left(\bar{h}^3 \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} \right) \quad (2.3.3.5)$$

$$A_1 = \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\bar{h}^3 \frac{\partial}{\partial \bar{\xi}} \right) + \frac{R^2}{L^2} \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \left(\bar{h}^3 \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} \right) + \frac{\partial}{\partial \bar{\xi}} \left(\bar{h}^3 \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{R^2}{L^2} \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} \left(\bar{h}^3 \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \right) \quad (2.3.3.6)$$

$$A_2 = \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\bar{h}^3 \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{R^2}{L^2} \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \left(\bar{h}^3 \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \right) \quad (2.3.3.7)$$

Avec ces nouvelles notations et en appliquant les règles de dérivation de fonction à plusieurs variables on obtient pour l'équation (2.3.3.1) :

$$\left(\frac{1}{\epsilon^2} A_0 + \frac{1}{\epsilon} A_1 + A_2 \right) (\bar{p}_0 + \epsilon \bar{p}_1 + \epsilon^2 \bar{p}_2 + \dots) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{h}}{\partial \theta} + \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{\xi}} \right) \quad (2.3.3.8)$$

En factorisant par chaque puissance d' ϵ et en se limitant aux puissances -2 , -1 et 0 , on obtient :

$$A_0 \bar{p}_0 = 0 \quad (2.3.3.9)$$

$$A_0 \bar{p}_1 + A_1 \bar{p}_0 = \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{\xi}} \quad (2.3.3.10)$$

$$A_0 \bar{p}_2 + A_1 \bar{p}_1 + A_2 \bar{p}_0 = \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{h}}{\partial \theta} \quad (2.3.3.11)$$

A partir de ces équations, on remarque que \bar{p}_0 ne dépend pas de ξ et ζ . De plus la linéarité de l'opérateur A_0 et de A_1 nous indique que \bar{p}_1 est de la forme :

$$\bar{p}_1(\theta, \bar{y}, \bar{\xi}, \bar{\zeta}) = \frac{\partial \bar{p}_0(\theta, \bar{y})}{\partial \theta} \Lambda_1(\theta, \bar{y}, \bar{\xi}, \bar{\zeta}) + \frac{\partial \bar{p}_0(\theta, \bar{y})}{\partial \bar{y}} \Lambda_2(\theta, \bar{y}, \bar{\xi}, \bar{\zeta}) + \Lambda_3(\theta, \bar{y}, \bar{\xi}, \bar{\zeta}) \quad (2.3.3.12)$$

Avec :

$$A_0\Lambda_1 = -\frac{\partial\bar{h}}{\partial\xi} \quad (2.3.3.13)$$

$$A_0\Lambda_2 = -\frac{\partial\bar{h}}{\partial\zeta} \quad (2.3.3.14)$$

$$A_0\Lambda_3 = \frac{\partial\bar{h}}{\partial\xi} \quad (2.3.3.15)$$

On peut alors se ramener à l'équation suivante dont la seule inconnue est \bar{p}_0 :

$$\frac{\partial}{\partial\theta} \left(\mathbb{A}_{11} \frac{\partial\bar{p}_0}{\partial\theta} \right) + \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\mathbb{A}_{12} \frac{\partial\bar{p}_0}{\partial\bar{y}} \right) + \frac{\partial}{\partial\bar{y}} \left(\mathbb{A}_{21} \frac{\partial\bar{p}_0}{\partial\theta} \right) + \frac{\partial}{\partial\bar{y}} \left(\mathbb{A}_{22} \frac{\partial\bar{p}_0}{\partial\bar{y}} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial\mathbf{B}_1}{\partial\theta} + \frac{\partial\mathbf{B}_2}{\partial\bar{y}} \right) \quad (2.3.3.16)$$

Que l'on peut aussi écrire :

$$\nabla (\mathbb{A} \nabla \bar{p}_0) = \frac{1}{2} \nabla \mathbf{B} \quad (2.3.3.17)$$

Avec :

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_{11} &= \iint_{\Gamma_L} \bar{h}^3 \left(\frac{\partial\Lambda_1}{\partial\xi} + 1 \right) d\bar{\xi}d\bar{\zeta} & \mathbb{A}_{12} &= \iint_{\Gamma_L} \bar{h}^3 \frac{\partial\Lambda_2}{\partial\xi} d\bar{\xi}d\bar{\zeta} \\ \mathbb{A}_{21} &= \iint_{\Gamma_L} \bar{h}^3 \frac{\partial\Lambda_1}{\partial\zeta} d\bar{\xi}d\bar{\zeta} & \mathbb{A}_{22} &= \iint_{\Gamma_L} \bar{h}^3 \left(\frac{\partial\Lambda_2}{\partial\zeta} + 1 \right) d\bar{\xi}d\bar{\zeta} \\ \mathbf{B}_1 &= \iint_{\Gamma_L} -\bar{h}^3 \frac{\partial\Lambda_3}{\partial\xi} d\bar{\xi}d\bar{\zeta} + \iint_{\Gamma_L} \bar{h} d\bar{\xi}d\bar{\zeta} & \mathbf{B}_2 &= \iint_{\Gamma_L} -\bar{h}^3 \frac{\partial\Lambda_3}{\partial\zeta} d\bar{\xi}d\bar{\zeta} \end{aligned} \quad (2.3.3.18)$$

Connaissant \bar{h} en régime stationnaire, on peut résoudre les équations (2.3.3.13) à (2.3.3.15) et obtenir les Λ_i nécessaires aux calculs des \mathbb{A}_{ij} et \mathbf{B}_i .

Afin de prendre en compte ces coefficients dans le problème discrétisé, il faut modifier la matrice \mathbb{H} et le vecteur \mathbf{f}_f du système (2.2.5.9) :

$$\begin{aligned} \mathbb{H}_{Tij} &= \int_{\Gamma} \left[\mathbb{A}_{11} \frac{\partial W_i}{\partial\theta} \frac{\partial N_j}{\partial\theta} + \mathbb{A}_{12} \frac{R}{L} \frac{\partial W_i}{\partial\theta} \frac{\partial N_j}{\partial\bar{y}} + \mathbb{A}_{21} \frac{R}{L} \frac{\partial W_i}{\partial\bar{y}} \frac{\partial N_j}{\partial\theta} + \mathbb{A}_{22} \frac{R^2}{L^2} \frac{\partial W_i}{\partial\bar{y}} \frac{\partial N_j}{\partial\bar{y}} \right] d\Gamma \\ \mathbf{f}_{fT1i} &= -\frac{1}{2} \int_{\Gamma} W_i \frac{\partial\mathbf{B}_1}{\partial\theta} d\Gamma \\ \mathbf{f}_{fT2i} &= -\frac{1}{2} \int_{\Gamma} W_i \frac{\partial\mathbf{B}_2}{\partial\bar{y}} d\Gamma \end{aligned} \quad (2.3.3.19)$$

On peut ensuite utiliser la même discrétisation qu'au paragraphe précédent.

Remarquons enfin que l'insertion des facteurs d'écoulement sous cette forme correspond à la texturation de la partie mobile. En effet, en cas de texturation de la partie fixe, le cisaillement local est de sens opposé au cisaillement global, et il convient de changer le signe du premier terme du facteur \mathbf{B}_1 dans (2.3.3.18). Dans ce manuscrit, nous étudierons uniquement le cas où la partie mobile est texturé et la partie fixe, lisse.

2.3.4 Homogénéisation de l'équation de Reynolds instationnaire avec cavitation

Par un raisonnement semblable, on peut prendre en compte la cavitation JFO, comme le montrent Bayada et al. [16]. On insère la variable Θ d'homogénéisation du remplissage. Bayada et al. indiquent que l'on peut prendre la même variable Θ dans les directions θ et \bar{y} pour rendre le problème bien posé, bien que ce que cela implique mathématiquement mérite encore quelques investigations. L'équation (2.3.3.17) devient :

$$\nabla (\mathbb{A} \nabla \bar{p}_0) = \frac{1}{2} \nabla (\Theta \mathbf{B}) \quad (2.3.4.1)$$

Almqvist et al. ont ajouté le terme instationnaire et concluent qu'une très bonne approximation peut être obtenue en gardant uniquement la moyenne de l'épaisseur de film dans ce terme [2], d'où :

$$\nabla (\mathbb{A} \nabla \bar{p}_0) = \frac{1}{2} \nabla \mathbf{B} + \tilde{h} \quad (2.3.4.2)$$

Une combinaison des deux approches est disponible dans l'article récent de Almqvist et al. [3], qui étudie la convergence de la méthode de perturbation vers la solution homogénéisée dans le cas instationnaire et compressible :

$$\nabla (\mathbb{A} \nabla \bar{p}_0) = \frac{1}{2} \nabla (\Theta \mathbf{B}) + \frac{d(\Theta \tilde{h})}{dt} \quad (2.3.4.3)$$

Dans les études thermohydrodynamiques, la conservation du débit de lubrifiant est primordiale pour le calcul de l'évolution de température. Cependant, la version de l'équation (2.3.4.2) semble très correcte d'un point de vue de la dynamique du système, à température fixée.

Remarquons enfin que si les constantes de nos systèmes d'équation diffèrent par rapport aux systèmes présentés dans [2, 19, 16], elles-mêmes légèrement différentes entre elles, cela est simplement dû aux choix d'adimensionnement de la pression et des échelles de longueur. Tous ces systèmes sont néanmoins équivalents. Nous avons fait le choix de garder l'adimensionnement local de Bayada et al. [16] pour faciliter la validation du calcul des facteurs d'écoulement par rapport aux cas de résolution analytique. Pour l'échelle globale, nous avons repris notre notation de la partie 2.2.2 ce qui explique la présence du facteur $\frac{1}{2}$ par rapport au système de Bayada et al.

2.3.5 Calcul de coefficients de l'équation de Reynolds homogénéisée dans des cas particuliers

Il est possible de simplifier les expressions des facteurs de flux obtenus par homogénéisation en faisant une hypothèse sur l'expression de la hauteur de film. Nous insérons la notation :

$$\widetilde{u(x)} = \frac{1}{Y} \int_Y u(x, y) dy \quad (2.3.5.1)$$

La fonction u étant périodique par rapport à y de période Y . Si l'on suppose que l'épaisseur de film peut s'écrire de la façon suivante :

$$h(\theta, \bar{y}, \theta_\epsilon, \bar{y}_\epsilon) = h_1(\theta, \bar{y}, \theta_\epsilon) h_2(\theta, \bar{y}, \bar{y}_\epsilon) \quad (2.3.5.2)$$

Avec

$$\theta_\epsilon = \theta \epsilon \quad \bar{y}_\epsilon = \bar{y} \epsilon \quad (2.3.5.3)$$

	Sinusoïdale transverse	Sinusoïdale longitudinale
$\bar{h}_\epsilon(\theta, \bar{y}, \theta_\epsilon, \bar{y}_\epsilon)$	$\bar{h}(\theta, \bar{y}) + h_r \sin(2\pi\theta_\epsilon)$	$\bar{h}(\theta, \bar{y}) + h_r \sin(2\pi\bar{y}_\epsilon)$
$\mathbb{A}_{11}(\theta, \bar{y})$	$2 \frac{(\bar{h}(\theta, \bar{y})^2 - h_r^2)^{5/2}}{2\bar{h}(\theta, \bar{y})^2 + h_r^2}$	$\bar{h}(\theta, \bar{y})^3 + \frac{3}{2}\bar{h}(\theta, \bar{y})h_r^2$
$\mathbb{A}_{22}(\theta, \bar{y})$	$\bar{h}(\theta, \bar{y})^3 + \frac{3}{2}\bar{h}(\theta, \bar{y})h_r^2$	$2 \frac{(\bar{h}(\theta, \bar{y})^2 - h_r^2)^{5/2}}{2\bar{h}(\theta, \bar{y})^2 + h_r^2}$
$\mathbf{B}_1(\theta, \bar{y})$	$2\bar{h}(\theta, \bar{y}) \frac{(\bar{h}(\theta, \bar{y})^2 - h_r^2)}{2\bar{h}(\theta, \bar{y})^2 + h_r^2}$	$\bar{h}(\theta, \bar{y})$

TABLE 2.1 – Facteurs d’écoulement proposés par Bayada et al. [16] issus de l’homogénéisation périodique avec les texturations sinusoïdales transverse et longitudinale par rapport à l’écoulement hydrodynamique

Bayada et al. [16] montrent que l’on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_{11} &= \frac{\tilde{h}_2^3}{h_1^{-3}} & \mathbb{A}_{22} &= \frac{\tilde{h}_1^3}{h_2^{-3}} \\ \mathbb{A}_{12} &= \mathbb{A}_{21} = 0 \end{aligned} \quad (2.3.5.4)$$

Et :

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_1 &= \frac{\tilde{h}_1^{-2}}{h_1^{-3}} \tilde{h}_2 \\ \Theta &= \frac{1}{\tilde{h}_2 \tilde{h}_1^{-2}} \left(\frac{\theta_0 h_2}{h_1^2} \right) \\ \mathbf{B}_2 &= 0 \end{aligned} \quad (2.3.5.5)$$

Facteurs de flux pour une texturation locale en sinusoïde A partir de ces expressions, Bayada et al. ont calculé les facteurs de flux dans trois cas particuliers : la texturation sinusoïdale transverse par rapport à l’écoulement du palier, la texturation sinusoïdale longitudinale, ainsi que la texturation sinusoïdale oblique. Nous reprendrons les texturations sinusoïdales transverse et longitudinale, et ajouterons d’autres texturations plus proches de notre problème. Le tableau 2.1 présente les coefficients de Bayada et al. dans les deux cas retenus. Ces coefficients sont illustrés sur la figure 2.13.

Ces expressions peuvent ensuite être directement utilisées dans l’équation suivante pour obtenir le profil de pression à l’échelle macroscopique (2.3.5.6) :

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\mathbb{A}_{11} \frac{\partial \bar{p}_0}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \left(\mathbb{A}_{22} \frac{\partial \bar{p}_0}{\partial \bar{y}} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial \Theta \mathbf{B}_1}{\partial \theta} \quad (2.3.5.6)$$

La figure 2.14 compare les champs de pression obtenus avec la texturation longitudinale et un palier lisse, en utilisant les données du tableau C.3. On remarque que le profil de pression du palier avec texturation longitudinale est supérieur au profil du cas lisse. Si dans cet exemple, le pic de pression est équivalent, on voit que la frontière de reformation de la zone de cavitation est, elle, légèrement modifiée. L’impact dans ce cas précis reste cependant relativement faible sur les grandeurs statiques. Ces résultats sont également à mettre en regard avec le profil de demi-Sommerfeld (figure 2.8) dont Childs a proposé une expression analytique, extrêmement plus économique en temps de calcul.

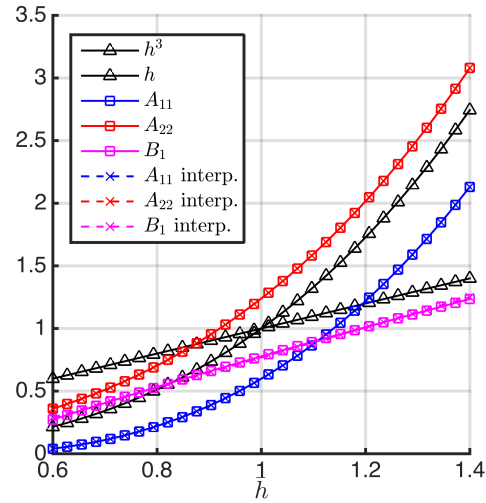


FIGURE 2.13 – Facteurs d’écoulement dans le cas d’une texturation sinusoïdale transverse comparés aux facteurs obtenus avec une surface lisse et à l’interpolation polynomiale

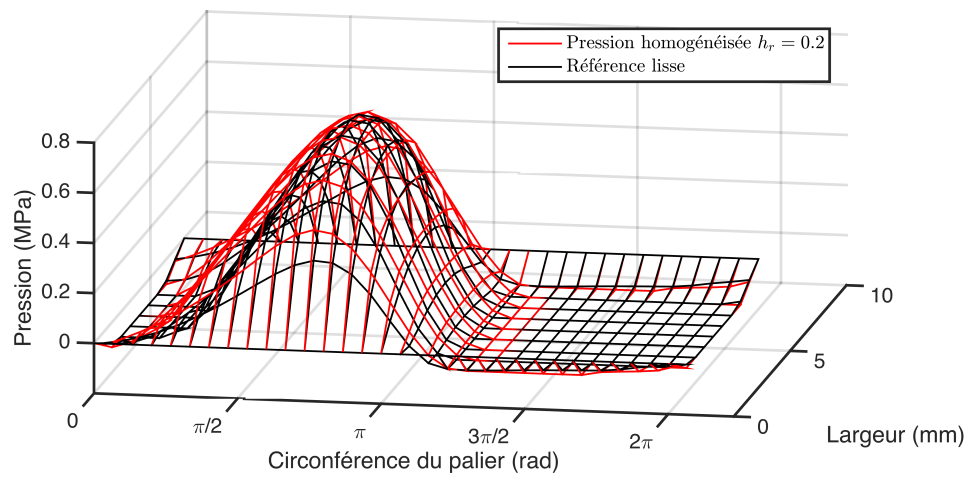


FIGURE 2.14 – Pression homogénéisée dans le cas d’une sinusoïde longitudinale d’amplitude $0.5C_r$, comparée à un palier de référence lisse, avec hypothèse de cavitation JFO, vitesse de rotation 20.000 tr/min et excentricité de $0.4 C_r$

	Créneaux transverses	Créneaux longitudinaux
$\bar{h}_{ce}(\theta, \bar{y}, \theta_\epsilon, \bar{y}_\epsilon)$	$\bar{h}(\theta, \bar{y})h_{cr,a}(\theta_\epsilon/L)$	$\bar{h}(\theta, \bar{y})h_{cr,a}(\bar{y}_\epsilon/L)$
$\mathbb{A}_{11}(\theta, \bar{y})$	$\frac{H^3}{(1-a)\bar{h}^{-3}+a(\bar{h}+h_r)^{-3}}$	$(1-a)\bar{h}^3 + a(\bar{h} + h_r)^3$
$\mathbb{A}_{22}(\theta, \bar{y})$	$(1-a)\bar{h}^3 + a(\bar{h} + h_r)^3$	$\frac{\bar{h}^3}{(1-a)H^{-3}+a(H+h_r)^{-3}}$
$\mathbf{B}_1(\theta, \bar{y})$	$\frac{(1-a)\bar{h}^{-2}+a(\bar{h}+h_r)^{-2}}{(1-a)\bar{h}^3+a(\bar{h}+h_r)^{-3}}$	\bar{h}

TABLE 2.2 – Facteur de flux issus de l’homogénéisation périodique avec les texturations en créneaux transverses et longitudinaux par rapport à l’écoulement hydrodynamique

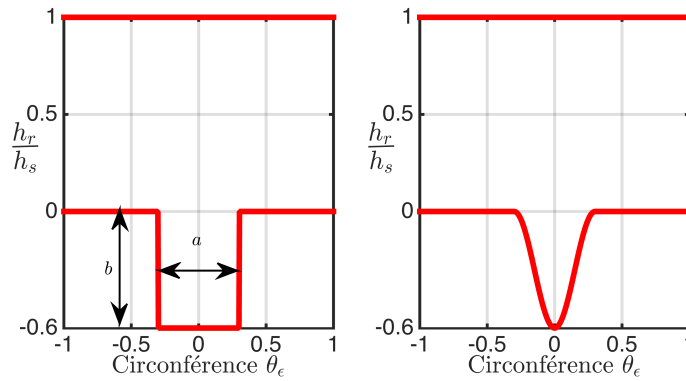


FIGURE 2.15 – Schéma représentant le rapport entre épaisseur de film locale et globale dans le cas d’un créneau

Facteurs de flux pour une texturation locale en créneau En première approche, nous nous proposons de considérer une fonction créneau pour décrire l’épaisseur de film à l’échelle locale. Bien que les hypothèses de Reynolds ne soient pas vérifiées dans ce cas particulier, le calcul des facteurs de flux permet une certaine compréhension de la méthode, et sera réutilisé pour d’autres textures dans la suite.

On peut écrire alors l’épaisseur de film locale :

$$\bar{h}_{ce} = \bar{h}h_{cr}(\theta_\epsilon/L) \quad (2.3.5.7)$$

Avec $h_r(s)$ 1-periodique définie comme suit avec les notations de la figure 2.15 :

$$h_{cr,a}(s) = \begin{cases} 1 & \text{si } s < \frac{1-a}{2} \\ 1+b & \text{si } \frac{1-a}{2} < s < \frac{1+a}{2} \\ 1 & \text{si } s > \frac{1+a}{2} \end{cases} \quad (2.3.5.8)$$

Notons que $b = h_r/\bar{h}$.

On trouve alors :

$$\tilde{h}_{ce}^k = \bar{h}^k [(1-a) + (1+b)^k a] \quad (2.3.5.9)$$

Cette formule sera utilisée pour $k = -3$, $k = -2$, $k = 1$, et $k = 3$.

Les coefficients homogénéisés pour une texturation en créneaux transverses et longitudinaux sont donnés dans le tableau 2.2.

Facteurs de flux pour une texturation locale de sinusoïde combinée avec la fonction créneau
Afin de se rapprocher d'une texturation pour laquelle les hypothèses de l'équation de Reynolds sont valides, et contrôler le ratio de longueur texturée, on peut utiliser une combinaison de la texturation sinusoïdale et de la fonction créneau. La figure 2.15 illustre l'épaisseur de film locale dans ce cas là.

Insérons la fonction 1-périodique suivante :

$$h_{crs,a}(s) = \begin{cases} 1 & \text{si } s < \frac{1-a}{2} \\ 1 + f(u) & \text{si } \frac{1-a}{2} < s < \frac{1+a}{2} \\ 1 & \text{si } s > \frac{1+a}{2} \end{cases} \quad (2.3.5.10)$$

Avec

$$f(u) = \frac{b}{2} \left[1 - \cos \left(\left(u - \frac{1-a}{2} \right) \frac{2\pi}{a} \right) \right] \quad (2.3.5.11)$$

On peut remarquer que cette fonction est proche des fonctions d'épaisseur de film locales utilisées par Bayada *et al.* Pour calculer les facteurs de flux, on remarque que l'on a :

$$\widetilde{h_{crs,a}^k} = (1-a) + \int_{1-\frac{a}{2}}^{1+\frac{a}{2}} (1+f(u))^k du \quad (2.3.5.12)$$

On injecte alors l'expression de $f(u)$ et on utilise le changement de variable $v = (u - (1-a)/2)/a - 1/4$. On obtient :

$$\widetilde{h_{crs,a}^k} = (1-a) + a \int_0^1 \left(\left(1 + \frac{b}{2} \right) + \frac{b}{2} \sin(2\pi v) \right)^k dv \quad (2.3.5.13)$$

Notons :

$$J_k(\mu, \nu) = \int_0^1 (\mu + \nu \sin(2\pi v))^k dv \quad (2.3.5.14)$$

L'intégrale de cette expression pour $k = -3$, $k = -2$, $k = 1$ et $k = 3$ donne :

$$\begin{aligned} J_{-3}(\mu, \nu) &= \frac{2\mu^2 + \nu^2}{2(\mu^2 - \nu^2)^{5/2}} \\ J_{-2}(\mu, \nu) &= \frac{\mu}{(\mu^2 - \nu^2)^{3/2}} \\ J_1(\mu, \nu) &= \mu \\ J_3(\mu, \nu) &= \mu^3 + \frac{3}{2}\mu\nu^2 \end{aligned} \quad (2.3.5.15)$$

On peut alors facilement exprimer $\widetilde{h_{crs}^k}$ et trouver les facteurs de flux avec les expressions (2.3.5.4) et (2.3.5.5) :

$$\widetilde{h_{crs,a}^k} = (1-a) + a J_k \left(1 + \frac{b}{2}, \frac{b}{2} \right) \quad (2.3.5.16)$$

Influence des facteurs croisés : rotation d'une texturation dans une dimension Bayada propose un calcul des coefficients dans le cas d'une texturation oblique, c'est-à-dire une texturation de la forme :

$$h(\theta, \bar{y}, \theta_\epsilon, z_\epsilon) = h_1 \left(\theta, \bar{y}, \frac{X_1}{\epsilon} \right) h_2 \left(\theta, \bar{y}, \frac{X_2}{\epsilon} \right) \quad (2.3.5.17)$$

	Créneaux-Sinusoïde transverses	Créneaux-Sinusoïde longitudinaux
$\bar{h}_{cs}(\theta, \bar{y}, \theta_\epsilon, \bar{y}_\epsilon)$	$\bar{h}(\theta, \bar{y})h_{crs,a}(\theta_\epsilon/L)$	$\bar{h}(\theta, \bar{y})h_{crs,a}(\bar{y}_\epsilon/L)$
$\mathbb{A}_{11}(\theta, \bar{y})$	$\left[(1-a)\bar{h}^{-3} + 4a \frac{2(2\bar{h}+h_r)^2+h_r^2}{((2\bar{h}+h_r)^2-h_r^2)^{5/2}} \right]^{-1}$	$(1-a)\bar{h}^3 + a \left[(\bar{h} + \frac{h_r}{2})^3 + \frac{3}{8}(\bar{h} + \frac{h_r}{2})h_r^2 \right]$
$\mathbb{A}_{22}(\theta, \bar{y})$	$(1-a)\bar{h}^3 + a \left[(\bar{h} + \frac{h_r}{2})^3 + \frac{3}{8}(\bar{h} + \frac{h_r}{2})h_r^2 \right]$	$\left[(1-a)\bar{h}^{-3} + 4a \frac{2(2\bar{h}+h_r)^2+h_r^2}{((2\bar{h}+h_r)^2-h_r^2)^{5/2}} \right]^{-1}$
$\mathbf{B}_1(\theta, \bar{y})$	$\left((1-a)\bar{h}^{-2} + 4a \frac{2\bar{h}+h_r}{((2\bar{h}+h_r)^2-h_r^2)^{3/2}} \right) \mathbb{A}_{11}$	\bar{h}

TABLE 2.3 – Facteur de flux issu de l’homogénéisation périodique avec les texturations en créneaux transverses et longitudinaux par rapport à l’écoulement hydrodynamique

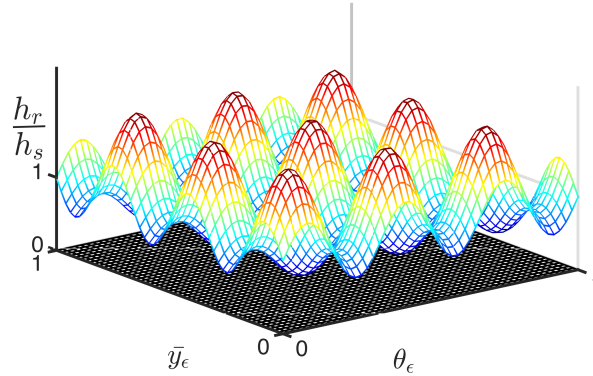


FIGURE 2.16 – Schéma représentant le rapport entre épaisseur de film locale et globale pour une combinaison de sinus en 3D

Avec

$$\begin{aligned} X_1 &= \cos(2\pi\theta_\epsilon\alpha) + \sin(\bar{y}\alpha) \\ X_2 &= -\sin(2\pi\theta_\epsilon\alpha) + \cos(\bar{y}\alpha) \end{aligned} \quad (2.3.5.18)$$

En notant par \mathbf{a} et \mathbf{b} les coefficients obtenus avec des motifs de texturation pouvant se décomposer de la forme de l’équation (2.3.5.2), on obtient alors pour l’inclinaison décrit par (2.3.5.17) et (2.3.5.18) :

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_{11} &= \mathbf{a}_{11} - (\mathbf{a}_{11} - \mathbf{a}_{22}) \sin^2(\alpha) \\ \mathbb{A}_{22} &= \mathbf{a}_{22} + (\mathbf{a}_{11} - \mathbf{a}_{22}) \sin^2(\alpha) \\ \mathbb{A}_{12} &= \mathbb{A}_{21} = ((\mathbf{a}_{11} - \mathbf{a}_{22}) \sin(\alpha) \cos(\alpha)) \\ \mathbf{B}_1 &= \Theta\mathbf{b}_1 - (\Theta\mathbf{b}_1 - \Theta\mathbf{b}_2) \sin^2(\alpha) \\ \mathbf{B}_2 &= (\Theta\mathbf{b}_1 - \Theta\mathbf{b}_2) \sin(\alpha) \cos(\alpha) \end{aligned} \quad (2.3.5.19)$$

Combinaison 2D de texture sinusoïdale À partir des texturations sinusoïdales transversale et longitudinale, on obtient directement les facteurs de flux de la combinaison des deux à partir en multipliant les deux colonnes du tableau 2.1, élevées à la puissance 1/2. La surface de la figure 2.16 est ainsi homogénéisée.

Texturation proche de la texturation Laser Pour des motifs plus proches d'une texturation par Laser, le calcul analytique devient plus difficile. On peut, en revanche, résoudre le problème local par la méthode des éléments finis, comme pour le palier lisse. Une expression d'un motif gaussien périodique correspondant à une texturation de surface laser peut s'écrire :

$$G_{\alpha,\beta}(y) = h_r \exp\left(-\frac{(y_1 - \alpha)^2 + (y_2 - \beta)^2}{2s^2}\right) \quad (2.3.5.20)$$

$$h = h_0 + G_{0,0}(y) + G_{1,0}(y) + G_{0,1}(y) + G_{1,1}(y) + G_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(y)$$

Rappelons que 95% de l'amplitude de la fonction $G_{\alpha,\beta}$ est comprise dans un cercle de rayon de $2s$ et de centre (α, β) .

La figure 2.17(a) présente la topographie correspondante à une telle expression, représentant une maille de $42 \mu m$, et un diamètre de la cavité à 95% de $15 \mu m$, soit $s \approx 0.085$. Remarquons que s n'a pas d'unité car on utilise des coordonnées locales adimensionnées. Ces dimensions correspondent à une surface texturée (95 % de la gaussienne) de 20 %, puisque l'on a l'équivalent de deux creux par motifs. Remarquons également que la topographie moyenne de la surface est légèrement décalée, car :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} G_{\alpha,\beta} dy = 2\pi s^2 h_r \quad (2.3.5.21)$$

Comme l'on a deux gaussiennes par motif, la variation de jeu radial imposé par la texturation est de l'ordre de $4\pi h_r s^2$. Dans l'exemple, on a donc une augmentation du jeu radial de 10% C_r . Sur la figure 2.18, on compare les facteurs de flux calculés pour le motif de la figure 2.16 avec les épaisseurs de film correspondant au cas lisse avec un jeu égal à C_r , puis au cas lisse avec un jeu radial est équivalent à celui obtenu en ajoutant la texturation, à savoir $C_r(1 + \gamma)$ avec $\gamma = 4\pi h_r s^2 / C_r$ (donc égal à 0,1 dans l'exemple).

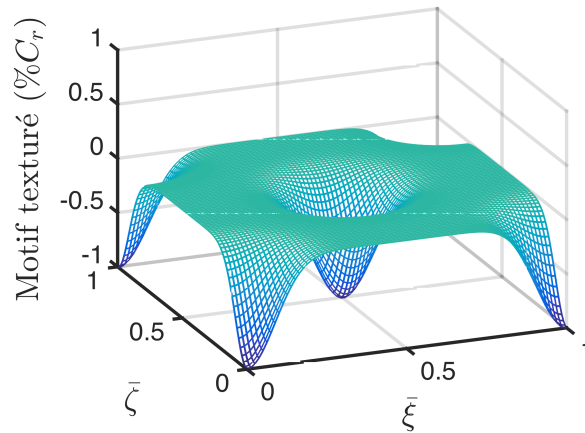
Il faut alors adapter les matrices de la méthode des éléments finis au problème intermédiaire des équations (2.3.3.13) à (2.3.3.15). Cela est relativement simple si l'on remarque que l'opérateur A_0 donne la même matrice que l'écoulement de Poiseuille de l'équation de Reynolds. Seul le terme de Couette est légèrement différent et à adapter aux dérivées partielles de l'équation (2.3.5.20). On obtient alors les solutions intermédiaires χ_1 , χ_2 et χ_3 . La figure 2.17(b) présente la solution pour l'expression (2.3.5.20) du champ χ_3 , le plus proche de la solution de la pression pour l'équation de Reynolds adimensionnée. Il convient ensuite d'intégrer les solutions intermédiaires selon les expressions du système (2.3.3.18) pour le calcul des coefficients du problème sans cavitation, c'est-à-dire pour les zones de film complet. On obtient alors les coefficients A_{11} , B_1 de la figure 2.18. Les autres coefficients sont nuls en raison de la symétrie du motif décrit par l'équation (2.3.5.20).

2.3.6 Interpolation polynomiale des facteurs de flux

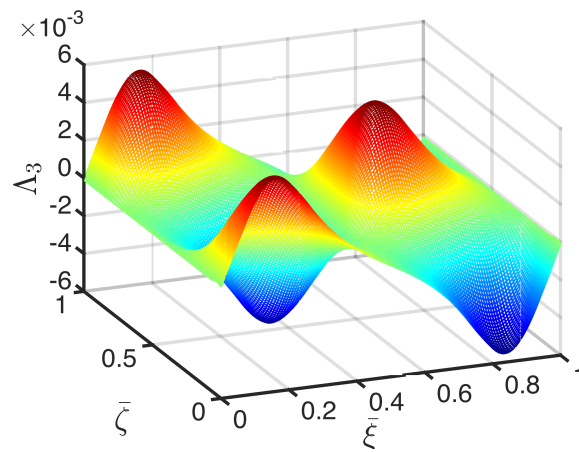
Sur les figures 2.13 et 2.18, on voit que les facteurs de flux sont approximés fidèlement par des polynômes. Une méthode tirant partie de cette approximation et permettant un gain de temps très important dans les simulations, est décrite ici.

Afin de gagner du temps de calcul lors de la résolution du problème fluide, il est intéressant de ne pas recalculer les matrices fluide à chaque résolution de l'écoulement de Reynolds pour chaque nouvelle position de l'arbre. Pour cela, dans le cas lisse, il est simplement nécessaire de développer la quantité h_0^3 avec

$$h_0 = 1 + u_1 y \cos(\theta) + u_2(1 - y) \cos(\theta) + v_1 y \sin(\theta) + v_2(1 - y) \sin(\theta) \quad (2.3.6.1)$$



(a)



(b)

FIGURE 2.17 – Topographie d’un profil périodique gaussien représentant une texturation laser (a), et résolution locale d’un champ intermédiaire de la méthode d’homogénéisation (b)

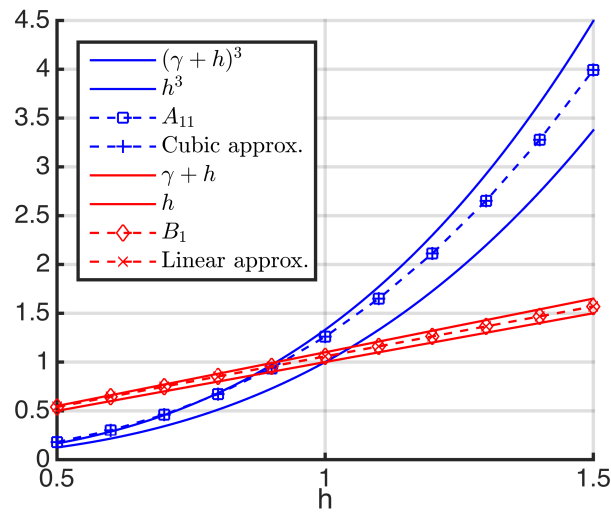


FIGURE 2.18 – Exemple de facteurs de flux homogénéisés pour la texturation de la figure 2.17(a) décrit par l’équation (2.3.5.20)

L'expression obtenue est alors polynomiale en u_1 , u_2 , v_1 et v_2 (dépendants de la structure), et l'on peut calculer les matrices indépendantes de la structure au début du programme. Dans le cas texturé, on peut réaliser une interpolation polynomiale des coefficients. Les coefficients \mathbb{A}_{ij} seront approximés par des polynômes d'ordre 3 et les coefficients \mathbf{B}_i par des polynômes d'ordre 1.

Matrice de l'écoulement de Poiseuille L'expression des facteurs de débit de Poiseuille peut donc s'écrire :

$$\mathbb{A}_{pq}(h) = \sum_{n=0}^3 \alpha_{n,pq} h^n \quad (2.3.6.2)$$

Avec p et $q \in \{1, 2\}$. A partir du développement du multinôme de Newton à l'ordre n , on a :

$$\left(\sum_{i=1}^m x_i \right)^n = \sum_{|\vec{k}|=n} \binom{n}{\vec{k}} \prod_{i=1}^m x_i^{k_i} \quad (2.3.6.3)$$

Avec $|\vec{k}| = \sum_{i=1}^m k_i$. Rappelons aussi que l'on obtient les coefficients multinomiaux avec l'égalité suivante :

$$\binom{n}{\vec{k}} = \frac{n!}{\prod_{i=1}^m k_i!} \quad (2.3.6.4)$$

Notons que numériquement, il peut être judicieux de calculer les factorielles avec la fonction gamma d'Euler.

On peut donc calculer les matrices indépendantes de la position de l'arbre pour toutes les combinaisons telles que $|\vec{k}| = k_1 + k_2 + k_3 + k_4 + k_5 = 3$:

$$a_{\vec{k},pq,ij} = \int_{\Gamma} \left(x_2^{k_2+k_4} (1-x_2)^{k_3+k_5} \cos^{k_1+k_2}(x_1) \sin^{k_3+k_4}(x_1) \frac{\partial W_i}{\partial x_p} \frac{\partial N_j}{\partial x_q} \right) dx_1 dx_2 \quad (2.3.6.5)$$

On veut alors exprimer la matrice \mathbb{H} pour le problème texturé :

$$\mathbb{H}_{ij} = \int_{\Gamma} \left(\mathbb{A}_{pq} \frac{\partial W_i}{\partial x_p} \frac{\partial N_j}{\partial x_q} \right) dx_1 dx_2 \quad (2.3.6.6)$$

$$\mathbb{H}_{ij} = \sum_{n=0}^3 \int_{\Gamma} \left(\alpha_{n,pq} h_0^n \frac{\partial W_i}{\partial x_p} \frac{\partial N_j}{\partial x_q} \right) dx_1 dx_2 \quad (2.3.6.7)$$

$$\mathbb{H}_{ij} = \sum_{n=0}^3 \sum_{|\vec{k}|=n} \binom{n}{\vec{k}} \alpha_{n,pq} a_{\vec{k},pq,ij} u_1^{k_2} u_2^{k_3} v_1^{k_4} v_2^{k_5} \quad (2.3.6.8)$$

On peut donc écrire les 35 matrices indépendantes de la position de l'arbre à calculer au début du programme $m_{\vec{k}}$ issues des 35 combinaisons telles que $|\vec{k}| = k_1 + k_2 + k_3 + k_4 + k_5 = 3$:

$$m_{\vec{k}} = \binom{n}{\vec{k}} \alpha_{n,pq} a_{\vec{k},pq} \quad (2.3.6.9)$$

$$\mathbb{H}_{ij} = \sum_{n=0}^3 \sum_{|\vec{k}|=n} m_{\vec{k}} u_1^{k_2} u_2^{k_3} v_1^{k_4} v_2^{k_5} \quad (2.3.6.10)$$

Plusieurs remarques peuvent être ajoutées à cette décomposition. Premièrement, il faut noter que l'expression (2.3.6.9) désigne une double somme sur les indices p et q bien que ce soient simplement des entiers égaux à 1 ou 2, donc une somme de 4 termes. Remarquons d'ailleurs qu'à partir de l'équation (2.3.6.5), on voit que l'adimensionnement des équations de Reynolds peut ajouter des constantes à prendre en compte dans (2.3.6.9). Par exemple, si l'on adimensionnait le domaine fluide par rapport à la circonférence $L_x = 2\pi R$ et à la longueur du palier L_p (équation 2.2.2.7), on obtiendrait :

$$m_{\vec{k}} = \binom{n}{\vec{k}} \left(\alpha_{n,11} a_{\vec{k},11} + \frac{L_x}{L_p} \alpha_{n,12} a_{\vec{k},12} + \frac{L_x}{L_p} \alpha_{n,21} a_{\vec{k},21} + \left(\frac{L_x}{L_p} \right)^2 \alpha_{n,22} a_{\vec{k},22} \right) \quad (2.3.6.11)$$

Par ailleurs, nous sommes partis d'une description de l'épaisseur de film avec 4 variables de structure (expression 2.3.6.1), afin de prendre en compte une inclinaison dans le palier. Cependant, on pourrait utiliser la même méthode dans des cas plus simples, sans inclinaison de l'arbre par exemple, ce qui permettrait de retenir uniquement 2 variables, et abaisserait le nombre de matrices $m_{\vec{k}}$ à 10. On peut également augmenter le nombre d'inconnues de structure, pour prendre en compte la flexion dans le palier.

Enfin, ces formules sont évidemment applicables dans le cas de palier lisse avec $\alpha_{3,11} = \alpha_{3,22} = 1$, et en prenant tous les autres coefficients nuls.

Vecteurs de l'écoulement de Couette Pour ce qui est du calcul du vecteur \mathbf{f}_f avec les facteurs \mathbf{B}_p , l'adaptation est de la méthode est directe. Lorsque l'on choisit une interpolation à l'ordre 1, nous avons :

$$\mathbf{B}_p(h) = \beta_{p,0} + \beta_{p,1}h \quad (2.3.6.12)$$

Avec $p \in \{1, 2\}$.

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{1,i} &= - \int_{\Gamma} W_i \left(\frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial \theta} + \frac{\partial \tilde{h}}{\partial t} \right) d\Gamma \\ \mathbf{f}_{2,i} &= - \int_{\Gamma} W_i \frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{B}_2}{\partial \bar{y}} d\Gamma \end{aligned} \quad (2.3.6.13)$$

En remplaçant les expressions de (2.3.6.12) :

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{1,i} &= - \int_{\Gamma} W_i \left(\frac{\beta_{1,1}}{2} \frac{\partial h_0}{\partial \theta} + \frac{\partial \tilde{h}}{\partial t} \right) d\Gamma \\ \mathbf{f}_{2,i} &= - \frac{\beta_{2,1}}{2} \int_{\Gamma} W_i \frac{\partial h_0}{\partial \bar{y}} d\Gamma \end{aligned} \quad (2.3.6.14)$$

$$\frac{\partial \tilde{h}}{\partial t} = \frac{\partial (\tilde{h}_1 + h_0)}{\partial t} = \frac{\partial h_0}{\partial t} \quad (2.3.6.15)$$

On constate donc que le calcul des débits de Couette dans le cas texturé est très légèrement modifié par rapport au cas de palier lisse. Les expressions des vecteurs indépendants de la position du rotor ne sont pas modifiés, seuls les deux coefficients constants $\beta_{p,1}$ sont à prendre en compte. Pour autant, l'approximation linéaire reste très cohérentes comme le montre les figures 2.13 et 2.18, notamment quand l'épaisseur de film n'est pas trop faible (excentricité < 0.8). Si toutefois, un cas de figure impose une excentricité élevée, on peut

ajouter des termes à l'interpolation de la même manière que pour le calcul de la matrice \mathbb{H} .

Par exemple, pour une interpolation de degré 2, on aurait les 15 combinaisons telles que $|\vec{k}| = k_1 + k_2 + k_3 + k_4 + k_5 = 2$:

$$f_{\vec{k},q,ij} = \int_{\Gamma} \left(x_2^{k_2+k_4} (1-x_2)^{k_3+k_5} \cos^{k_1+k_2}(x_1) \sin^{k_3+k_4}(x_1) \frac{\partial W_i}{\partial x_p} \right) dx_1 dx_2 \quad (2.3.6.16)$$

2.4 Modélisation du palier texturé avec recirculation

Comme nous l'avons mentionné au paragraphe 2.3.1, la validité de l'équation de Reynolds autour d'un motif de texturation a fait l'objet de plusieurs études. Il a été montré que les forces d'inertie peuvent ne pas être négligeables dans l'écoulement. Cependant, résoudre Navier-Stokes pour un palier hydrodynamique complet, avec une résolution suffisante au niveau du motif de texturation représente un coût calculatoire trop important. La méthode proposée par de Kraker et al. ([44]) permet de prendre en compte l'inertie au niveau des cavités sans alourdir de façon trop rédhibitoire le coût calculatoire. Il est cependant à noter que pour cela une hypothèse forte est nécessaire : les deux échelles sont considérées comme séparables, et la résolution du calcul de pression à chaque échelle s'effectue de manière distincte.

Nombre Reynolds dans une cavité Le nombre de Reynolds réduit (Re^*) n'est pas un bon moyen d'adimensionner les équations de Navier-Stokes autour d'une cavité. En effet, la longueur de l'écoulement dans les trois directions doit être prise égale à l'épaisseur de film quand sa profondeur s'en rapproche. Ainsi le nombre de Reynolds est de l'ordre de 1000 fois plus élevé que le nombre de Reynolds réduit du palier lisse (présenté partie 2.1.3). Cela justifie l'étude approfondie de l'écoulement de Navier-Stokes autour de la cavité.

2.4.1 Micro-échelle : résolution de l'équation de Navier-Stokes

Reprenons les équations de Navier-Stokes (2.1.3.8) sous forme vectorielle sans négliger les forces d'inerties mais en négligeant les forces volumiques, pour un fluide incompressible :

$$\rho_f \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla p + \mu \Delta \mathbf{v} \quad (2.4.1.1)$$

Et l'équation de continuité (toujours pour un fluide incompressible) :

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (2.4.1.2)$$

Avec $\frac{D\mathbf{v}}{Dt}$ la dérivée matérielle par rapport au temps.

Remarquons que pour un problème où l'on considère qu'une seule surface est texturée, on peut montrer que prendre la surface de référence texturée équivaut à prendre la surface de référence lisse, par transformation des coordonnées. Comme on veut résoudre le système (2.4.1.3) en régime stationnaire, la partie dépendant du temps de la dérivée matérielle disparaît. On veut donc résoudre :

$$\begin{aligned} \rho_f \mathbf{v} \nabla \cdot \mathbf{v} &= -\nabla p + \mu \Delta \mathbf{v} \\ \nabla \cdot \mathbf{v} &= 0 \end{aligned} \quad (2.4.1.3)$$

Avec les hypothèses suivantes :

- la longueur caractéristique du motif est petite devant les dimensions globales du palier
- une seule surface est texturée, l'autre surface étant lisse
- on ne prend pas en compte de rugosité de surface en dehors de la texturation
- la géométrie d'une cavité reste constante
- l'évolution des variables à l'échelle macroscopique est lente devant celle des variables microscopiques. Cela permet de considérer le problème local comme quasi-statique, c'est-à-dire que le régime stationnaire suit quasi-instantanément les changements de conditions aux limites

2.4.2 Macro-échelle : résolution de Reynolds moyennée

A l'échelle macroscopique, on résout un système en apparence semblable à l'équation (2.3.3.16). Les calculs des facteurs de flux étant effectués dans un programme à part (Fluent®), nous préférons présenter les équations dans leur forme dimensionnée dans cette partie. Nous utiliserons des notations différentes pour les nouveaux facteurs de flux afin d'éviter les confusions :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_\theta} \left(\chi_{p11} \frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x_\theta} \right) + \frac{\partial}{\partial x_\theta} \left(\chi_{p12} \frac{h^3}{6\mu} \frac{\partial p}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\chi_{p21} \frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x_\theta} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\chi_{p22} \frac{h^3}{6\mu} \frac{\partial p}{\partial y} \right) \\ = \frac{R\Omega}{2} \left(\frac{\partial \chi_{s11} h}{\partial x_\theta} + \frac{\partial \chi_{s21} h}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (2.4.2.1)$$

Avec $x_\theta = R\theta$. Remarquons que l'on ne considèrera pas par la suite de changement de vitesse selon la largeur de palier, ce qui se traduit par l'insertion de seulement deux facteurs χ_{s11} et χ_{s21} . Si une variation de vitesse relative dans deux directions est à modéliser, il convient d'ajouter les facteurs χ_{s12} et χ_{s22} . De plus, nous avons écrit cette équation avec les notations adimensionnées utilisées précédemment.

Cette équation peut se réécrire de façon plus concise :

$$\nabla \left(-\frac{h^3}{6\mu} \chi_{\mathbf{p}} \nabla p + R\Omega h \chi_{\mathbf{s}} \right) = 0 \quad (2.4.2.2)$$

Avec

$$\nabla = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_\theta} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (2.4.2.3)$$

et

$$\chi_{\mathbf{p}} = \begin{bmatrix} \chi_{p11} & \chi_{p12} \\ \chi_{p21} & \chi_{p22} \end{bmatrix} \quad \chi_{\mathbf{s}} = \begin{bmatrix} \chi_{s11} \\ \chi_{s21} \end{bmatrix} \quad (2.4.2.4)$$

Les coefficients χ_p sont déterminés pour des écoulements seulement générés par la pression (écoulement de Poiseuille). Ils représentent le rapport du débit au niveau de la texture, au débit à l'échelle globale.

On doit alors simuler l'écoulement lorsque l'on applique une différence de pression selon la direction x . Introduisons pour cela un repère local du motif (x, y, z) dans lequel on exprime la vitesse d'un volume élémentaire \mathbf{v} . Les symboles Γ_a et Γ_b représentent des surfaces orthogonales aux directions x_θ et y respectivement.

$$\chi_{p11} = \frac{\int_{\Gamma_a} \mathbf{v}_x d\Gamma_a}{-\frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x_\theta} L_y} \quad (2.4.2.5)$$

Notons que le numérateur correspond au débit stationnaire entrant à l'échelle locale, alors que le dénominateur correspond au débit calculé à l'échelle globale. On a de même :

$$\chi_{p21} = \frac{\int_{\Gamma_b} \mathbf{v}_y d\Gamma_b}{-\frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x_\theta} L_y} \quad (2.4.2.6)$$

Afin de déterminer les deux autres coefficients il faut simuler l'écoulement lorsque l'on applique une différence de pression selon la direction y :

$$\chi_{p22} = \frac{\int_{\Gamma_b} \mathbf{v}_y d\Gamma_b}{-\frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial y} L_x} \quad (2.4.2.7)$$

$$\chi_{p12} = \frac{\int_{\Gamma_a} \mathbf{v}_x d\Gamma_a}{-\frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial y} L_x} \quad (2.4.2.8)$$

Afin de déterminer les coefficients χ_s il est nécessaire de simuler un écoulement de Couette (seulement en cisaillement). On calcule ensuite les facteurs de flux comme précédemment :

$$\chi_{s11} = \frac{\int_{\Gamma_a} \mathbf{v}_x d\Gamma_a}{\frac{R\Omega}{2} h L_y} \quad (2.4.2.9)$$

$$\chi_{s21} = \frac{\int_{\Gamma_b} \mathbf{v}_y d\Gamma_b}{\frac{R\Omega}{2} h L_y} \quad (2.4.2.10)$$

On peut de plus considérer des facteurs pour les écoulements hybrides, qui ne se combinent pas forcément linéairement. Il est donc possible de calculer une matrice 2×2 , notée χ_{sp} pour corriger les effets de chaque écoulement superposé. Pour un motif isotrope, on peut démontrer, en égalant les débits locaux et globaux [122] :

$$\chi_{sp11} = \frac{\int_{\Gamma_a} \mathbf{v}_x d\Gamma_a}{-\chi_{p11} \frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x_\theta} L_y + \chi_{s11} \frac{R\Omega}{2} h L_y} \quad (2.4.2.11)$$

$$\chi_{sp22} = \frac{\int_{\Gamma_a} \mathbf{v}_x d\Gamma_a}{-\chi_{p22} \frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial y} L_x} \quad (2.4.2.12)$$

$$\chi_{sp21} = \chi_{sp12} = 0 \quad (2.4.2.13)$$

Notons qu'avec ces facteurs correcteurs on a :

$$\nabla \left(\chi_{sp} \left(-\frac{h^3}{6\mu} \chi_p \nabla p + R\Omega h \chi_s \right) \right) = 0 \quad (2.4.2.14)$$

A partir de la résolution des équations de Navier-Stokes (par exemple avec le logiciel commercial Ansys FLUENT), on peut alors calculer les rapports de débits de équations (2.4.2.5 - 2.4.2.13) pour différentes valeurs de hauteurs de film et de pression aux limites, à vitesse de cisaillement imposée constante.

En résumé, on doit commencer par discrétiser l'espace $(\frac{\partial p}{\partial x}, \frac{\partial p}{\partial y}, h)$ en calculant pour chaque point les matrices (2×2) , χ_p et χ_{sp} , ainsi que le vecteur (2×1) , χ_s . Par interpolation, on pourra ensuite injecter ces vecteurs dans (2.4.2.1), et ainsi prendre en compte la

texturation dans un calcul de lubrification. L'algorithme peut utiliser la même discrétisation que celle présentée précédemment.

Enfin, Reynaud et al. [122] ont remarqué que ce modèle suppose que les écoulement en gradient de pression axial du palier sont supposés se combiner linéairement avec le cisaillement du rotor autour du motif. Dans leur rapport des simulations montrent que ce n'est pas toujours le cas. Lorsque cette hypothèse n'est pas vérifiée, il serait nécessaire d'ajouter d'autres facteurs correcteurs.

2.4.3 Simplifications dans le cas 1D

Lorsque le motif est invariant dans une direction, comme pour les motifs de la figure 2.15 ou avec les texturations sinusoïdales par exemple, certains facteurs d'écoulement se simplifient. Si on choisit un motif invariant dans la direction y , on a :

$$\begin{aligned} \chi_{p12} = \chi_{p21} = 0 & & \chi_{p22} = 1 \\ \chi_{s21} = 0 & & \\ \chi_{sp21} = \chi_{sp12} = 0 & & \chi_{sp22} = 1 \end{aligned} \quad (2.4.3.1)$$

Par ailleurs, les débits locaux étant calculés par unité de largeur d'écoulement, il convient de prendre $L_y = 1$ dans les expressions des dénominateurs des facteurs de flux pour que les débits globaux soient également calculés par unité de largeur d'écoulement.

Ainsi, on conserve uniquement les facteurs χ_{p11} , χ_{s1} , et χ_{sp11} dépendant chacun de $(\frac{\partial p}{\partial \theta}, h)$ [44]. L'équation (2.4.2.1) devient :

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\chi_{sp11} \chi_{p11} \bar{h}^3 \frac{\partial \bar{p}}{\partial \theta} \right) + \left(\frac{R}{L} \right)^2 \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \left(\bar{h}^3 \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial \chi_{sp11} \chi_{s11} \bar{h}}{\partial \theta} \quad (2.4.3.2)$$

Appliquer la méthode de Galerkin à ce système donne donc pour le premier terme :

$$\int_{\Gamma} F \left(\theta, \frac{\partial \bar{p}}{\partial \theta} \right) \frac{\partial W}{\partial \theta} d\Gamma \quad (2.4.3.3)$$

Avec $F = \chi_{sp11}(\frac{\partial p}{\partial \theta}, \theta) \chi_{p11}(\frac{\partial p}{\partial \theta}, \theta) \bar{h}(\theta)^3$. Un choix judicieux pour l'interpolation de la non-linéarité de la fonction F peut simplifier le calcul des matrices de discrétisation.

Calculs des facteurs dans des cas particuliers

Afin d'explicitier les facteur de flux calculés à partir des équations de Navier-Stokes dans un cas particulier, nous nous sommes intéressés à un motif 1D, dont la topographie est invariante selon la largeur de l'écoulement. Pour ce faire, nous avons utilisé l'expression suivante pour la surface fixe :

$$\Sigma_1(x) = -d_p e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \quad (2.4.3.4)$$

Les calculs ont été réalisés pour des cavités de différentes largeurs ($\sigma = 1,41 \mu m$ et $\sigma = 2,82 \mu m$) et pour différentes viscosités du lubrifiant ($\mu = 0,002 Pa.s$ et $\mu = 0,02 Pa.s$). La profondeur de la cavité est égale à $d_p = 10 \mu m$. La période spatiale du motif est de $84 \mu m$. Un exemple de calcul des lignes de courant est présenté sur la figure 2.19 (étude détaillée dans [122]), lorsque l'on combine les conditions d'écoulement en cisaillement et en pression. Dans cette configuration, une recirculation de lubrifiant apparait clairement

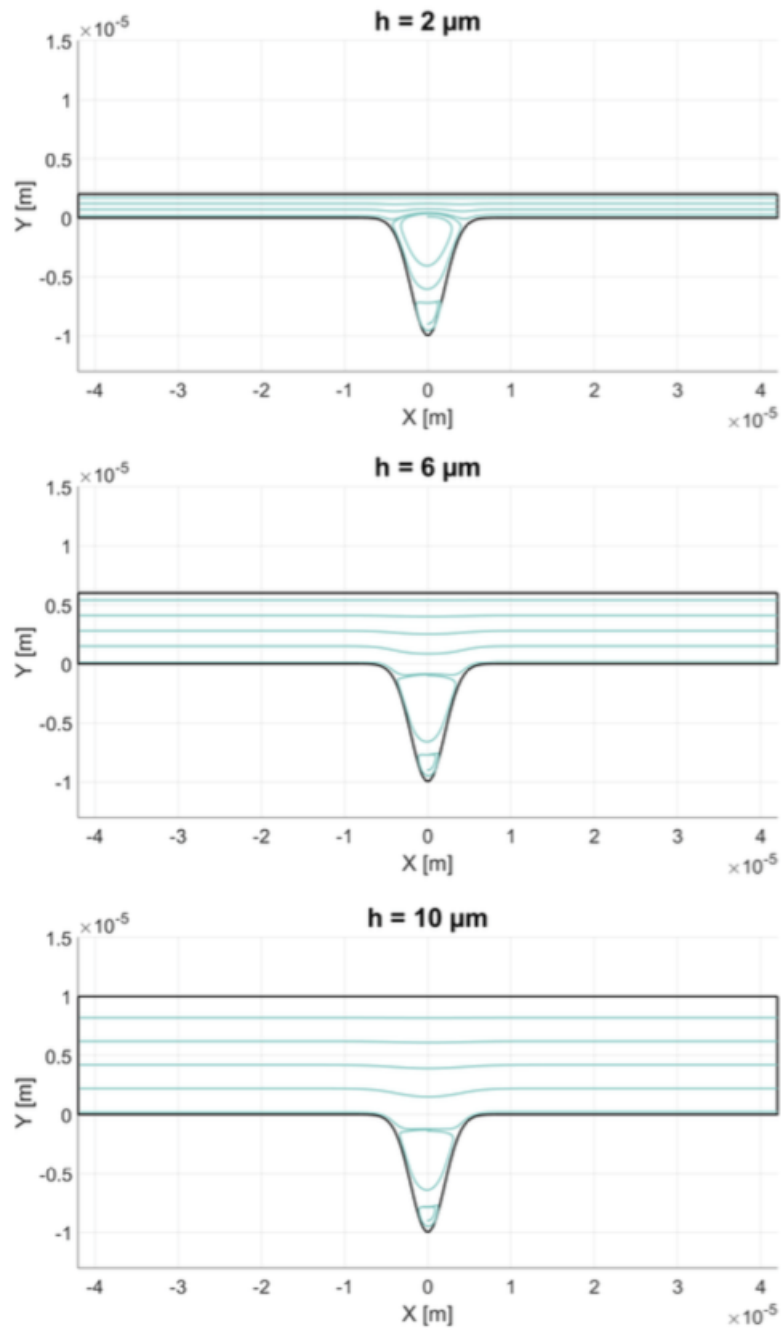


FIGURE 2.19 – Lignes de courant dans une cavité pour différentes épaisseurs de film ($U = 1,3 \text{ m/s}$, $\Delta P = 8400 \text{ Pa}$, $h_0 = 2 \mu\text{m}$, $\sigma = 1,41 \mu\text{m}$) [122]

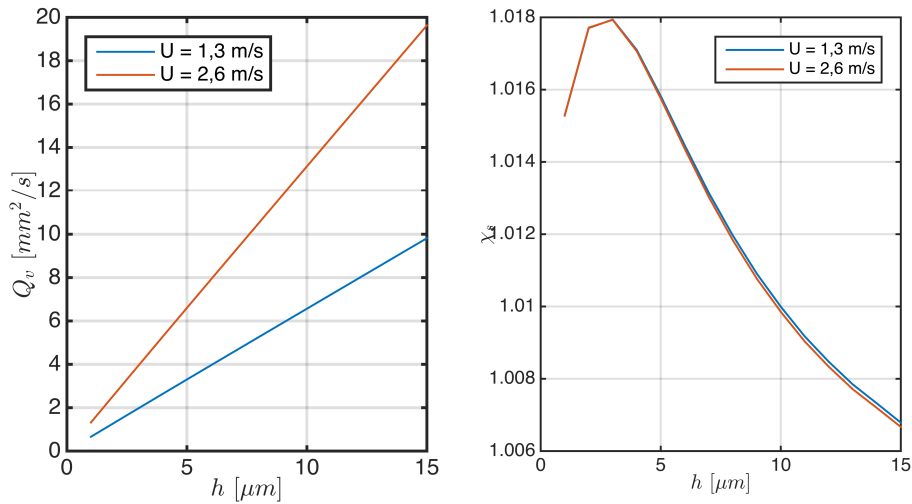


FIGURE 2.20 – Facteur de flux en cisaillement calculés pour deux vitesses $U = 1,3 \text{ m/s}$ et $U = 2,6 \text{ m/s}$ ($\sigma = 1,41 \mu\text{m}$, $\mu = 20 \text{ mPa.s}$)

dans la cavité. C’est lorsque les conditions des écoulements en pression et en cisaillement s’opposent que l’on constate majoritairement ce phénomène.

Afin d’identifier les influences des différents facteurs, nous les présentons dans ce paragraphe pour certaines configurations. La figure 2.20 présente le calcul de débit et les facteurs de flux en cisaillement correspondant à différentes épaisseurs de film h au dessus de la cavité, et pour deux vitesses de cisaillement différentes. On constate que les facteurs d’écoulement sont proches de 1, ce qui traduit la faible influence de la cavité sur le facteur d’écoulement en cisaillement.

La figure 2.21 présente le débit et le facteur d’écoulement en pression pour différents gradients de pression et épaisseurs de film au-dessus de la cavité. On constate également que les facteurs de flux sont proches de 1, sauf dans le cas de faibles épaisseurs de film. L’influence des hypothèses de Reynolds est donc également faible dans ce cas pour les facteurs d’écoulement en pression.

La figure 2.22 expose les résultats de simulation du facteur d’écoulement combiné en pression et cisaillement. Il est intéressant de remarquer le comportement asymétrique des facteurs de flux par rapport au gradient de pression imposé, comme l’ont souligné de Kraker et al. dans [44]. Ce comportement est d’autant plus important que l’épaisseur de film au-dessus de la cavité est grande. De plus, la pondération du débit peut être importante par rapport au débit de Reynolds comme l’indique la grande amplitude du facteur d’écoulement.

2.4.4 Simplifications dans le cas 2D avec motif isotrope

Dans le cas où le motif est le même dans les deux directions θ et \bar{y} , on peut également simplifier certains termes. La figure 2.23 présente un tel motif. Au vu de la physique de l’écoulement, on peut sélectionner une maille avec des conditions aux limites représentant le fait qu’il existe un grand nombre d’autres mailles autour (hypothèse de séparation des échelles).

Pour les facteurs χ_s et χ_p , ainsi que pour les facteurs diagonaux de la matrice χ_{sp} , on utilise la maille représentée figure 2.23. L’isotropie permet également de simplifier le

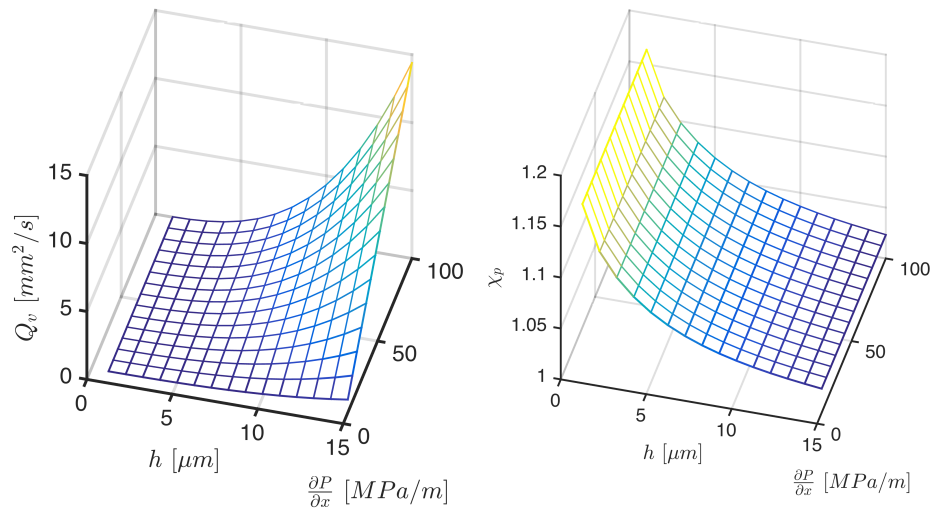


FIGURE 2.21 – Débit Q_v et facteur d'écoulement χ_p calculé par différence de pression ($\sigma = 1,41 \mu\text{m}$, $\mu = 2 \text{ mPa}\cdot\text{s}$)

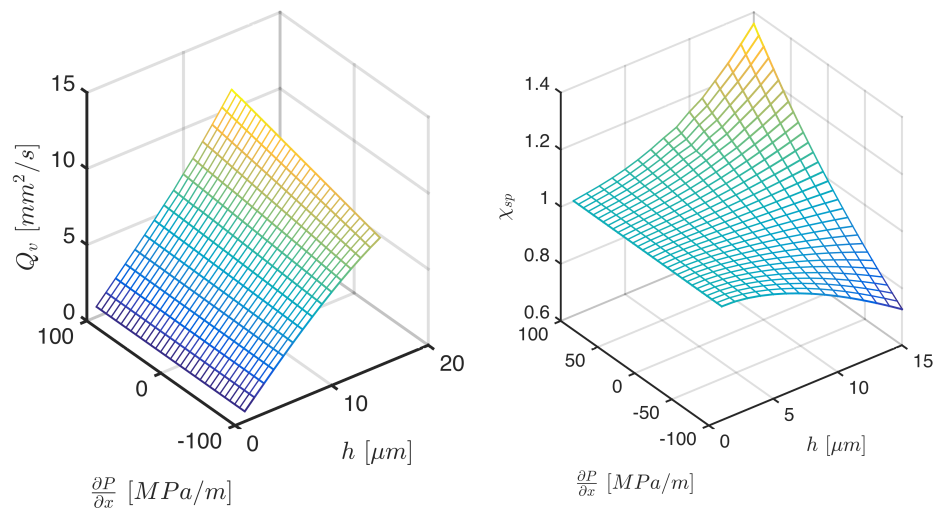


FIGURE 2.22 – Débit Q_v et facteur d'écoulement χ_{sp} en pression et cisaillement combinés ($U = 1,3 \text{ m}/\text{s}$, $\sigma = 1,41 \mu\text{m}$, $\mu = 20 \text{ mPa}\cdot\text{s}$)

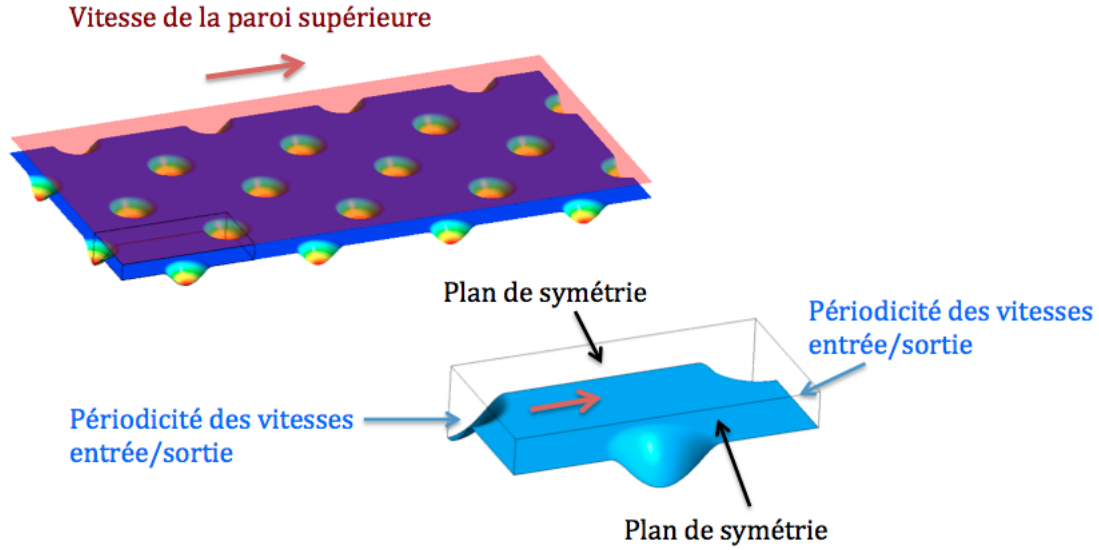


FIGURE 2.23 – Motif de texturation périodique isotrope selon deux directions

nombre de facteurs à calculer. On a en effet :

$$\begin{aligned}
 \chi_{p12} = \chi_{p21} = 0 & & \chi_{p11} = \chi_{p22} \\
 \chi_{s21} = 0 & & \\
 \chi_{sp12} = \chi_{sp21} = 0 & & \chi_{sp11} = \chi_{sp22}
 \end{aligned}
 \tag{2.4.4.1}$$

Prendre un motif isotrope ajoute seulement un facteur supplémentaire à calculer, correspondant à la combinaison de l'écoulement de cisaillement dans une direction, et en différence de pression dans l'autre direction. En revanche, l'équation de Reynolds moyennée devient plus complexe :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\chi_{sp11} \chi_{p11} \bar{h}^3 \frac{\partial \bar{p}}{\partial \theta} \right) + \\
 + \left(\frac{R}{L} \right) \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\chi_{sp12} \bar{h}^3 \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} \right) + \left(\frac{R}{L} \right) \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \left(\chi_{sp21} \bar{h}^3 \frac{\partial \bar{p}}{\partial \theta} \right) \\
 \left(\frac{R}{L} \right)^2 \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \left(\chi_{sp22} \chi_{p22} \bar{h}^3 \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial \chi_{sp11} \chi_{s11} \bar{h}}{\partial \theta}
 \end{aligned}
 \tag{2.4.4.2}$$

Il est aussi intéressant de remarquer que les facteurs égaux entre eux doivent cependant être évalués pour les gradients de pression dans des directions différentes. En clair on a $\chi_{p11} = \chi_{p22}$ bien que χ_{p11} dépende de $\frac{\partial \bar{p}}{\partial \theta}$ alors que χ_{p22} dépende de $\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}}$ dans l'équation (2.4.4.2). Cette remarque est évidemment valable aussi pour les facteurs χ_{sp} .

2.5 Conclusions sur la modélisation du palier texturé

Nous avons présenté dans cette partie un certain nombre de modèles simulant l'écoulement dans un palier, partant de la solution analytique de palier fini "demi-Sommerfeld", à

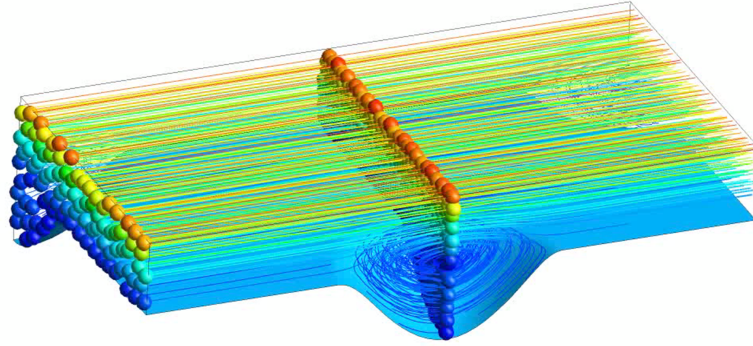


FIGURE 2.24 – Exemple de recirculation modifiant le débit autour d’une cavité - les lignes de courants sont représentées, les couleurs de bleu à rouge indiquent la vitesse des particules de 0 à la vitesse de cisaillement du plan supérieur pris à $6m/s$.

la prise en compte d’effets de cavitation et de texturation multi-échelles via des équations de Reynolds moyennées. Si l’on considère que les effets locaux sont calculés a priori sous la forme de facteurs d’écoulement, on peut synthétiser ces modèles selon les 5 niveaux de complexité numérique décrits ci-dessous.

Les modèles définis "par impédance" , où l’on exprime un vecteur en 2D résultant des efforts d’un palier en un point de la structure, comme le modèle de palier fini demi-Sommerfeld que nous avons présenté. Ses déclinaisons pour un palier court et un palier long en demi-Sommerfeld ou Sommerfeld complet sont aussi disponibles [60]. Ces modèles permettent un dimensionnement rapide, et sont limités par la non prise en compte du mésalignement du rotor dans son logement. Leur application est aussi discutable lorsque la zone de cavitation n’est pas suffisamment étendue pour considérer le modèle demi-Sommerfeld. Enfin, la texturation peut être ajoutée analytiquement avec le modèle de Christensen, ce qu’a fait Lin pour les paliers courts [87, 88, 89] par exemple.

Les modèles de cavitation avec seuil , mais sans conditions physiques aux bornes de la zone de cavitation (modèle de Gumbel). Dans ce cas, la résolution des équations linéaires de Reynolds est nécessaire. Remarquons par ailleurs qu’avec les facteurs d’écoulement interpolés que nous avons proposé, la prise en compte de la texturation n’ajoute pas de complexité à la résolution (seulement un assemblage de matrices indépendantes de la position du rotor).

Les modèles de cavitation avec conservation de débit , pour lesquels il est nécessaire d’utiliser un algorithme itératif ou un algorithme de pivot. On peut aussi en simplifier l’écriture en le mettant sous forme de problème de complémentarité linéaire, et utiliser les astuces classiques de résolution tels que la méthode FBNS présentée ici. On peut décrire à la fois la condition de Reynolds et la condition JFO sous cette forme, le système pour la condition de Reynolds étant un peu plus rapide à résoudre. Il faut toutefois remarquer que la variable complémentaire dépend du temps avec la condition JFO. Avec ces méthodes, l’utilisation de facteurs d’écoulement de Reynolds interpolés ne complexifie pas l’algorithme.

La prise en compte du mésalignement qui augmente significativement la complexité des deux modèles précédents, car cela combine les matrices liées à l'élévation de l'épaisseur de film au cube. On peut par ailleurs augmenter le nombre de degrés de liberté décrivant la position du rotor. Cependant avec 4 degrés de liberté, on doit déjà assembler 35 matrices pour chaque résolution.

L'utilisation de facteurs d'écoulement de Navier-Stokes , qui impose une non-linéarité supplémentaire dans la formulation des équations à résoudre, directement en gradient de pression. Cette méthode est encore en développement, et il n'y a pas eu de réelle application publiée dans la littérature à la connaissance des auteurs, en dehors de calculs de facteurs d'écoulement et de comparaisons aux facteurs de Reynolds ou du système de Stokes. La compatibilité de cette méthode avec les conditions de cavitation, ou avec le terme instationnaire de l'équation de Reynolds n'est pas démontrée et doit être adaptée.

Mis à part pour le dernier niveau de complexité présenté ici, la résolution d'un problème peut durer de quelques secondes à environ une minute sur un ordinateur actuel standard, et ces modèles peuvent être utilisés sous cette forme dans des algorithmes d'études dynamiques que nous présentons dans la partie suivante.

Chapitre 3

Dynamique non linéaire du problème couplé

Dans le chapitre précédent nous avons présenté les méthodes avancées de modélisation de l'écoulement dans le palier hydrodynamique. Nous présentons dans cette partie la modélisation classique de la structure basée sur la théorie de l'élasticité linéaire d'un solide en petits déplacements. Ainsi, nous détaillerons le problème couplé, par projection de la pression, calculée à l'aide des méthodes précédemment introduites, sur le rotor en rotation. Nous présenterons alors les problèmes dynamiques associés à ces modèles. La dépendance de la pression par rapport au déplacement de la structure étant fortement non-linéaire, nous développerons le formalisme d'outils permettant d'étudier les vibrations associées et leur stabilité. Ces outils vont nous permettre par la suite de comparer efficacement l'impact des texturations modélisées sur le mouvement de l'arbre et ses vibrations. Nous illustrerons ces outils par des exemples simplifiés, et leur étude approfondie fera l'objet du chapitre 4.

3.1 Modélisation d'une poutre élastique en rotation par éléments finis

Pour modéliser le solide, nous utiliserons une description lagrangienne du mouvement, c'est-à-dire par les trajectoires [64]. De plus, nous utiliserons les hypothèses de l'élasticité linéaire. Cela nous permettra de décrire la loi de comportement du matériau de manière simplifiée. On ajoute également les hypothèses de petits déplacements, petites déformations, et on considèrera le repère du laboratoire comme Galiléen. Enfin, aux vues des dimensions du rotor, nous ferons les hypothèses associées à la théorie des poutres.

3.1.1 Formulation d'une poutre en rotation

Le rotor de notre étude est constitué d'un arbre et de deux disques. Afin d'établir les équations du mouvement, nous rappelons ici les expressions des énergies cinétiques de ces composants, de l'énergie potentielle élastique de l'arbre, ainsi que les travaux des efforts non conservatifs, internes et externes au système.

Paramétrage et cinématique

Pour décrire les mouvements du rotor, nous utiliserons les notations de la figure 3.1 dans le repère du laboratoire considéré comme fixe. Nous noterons par la suite $(u^*, v^*,$

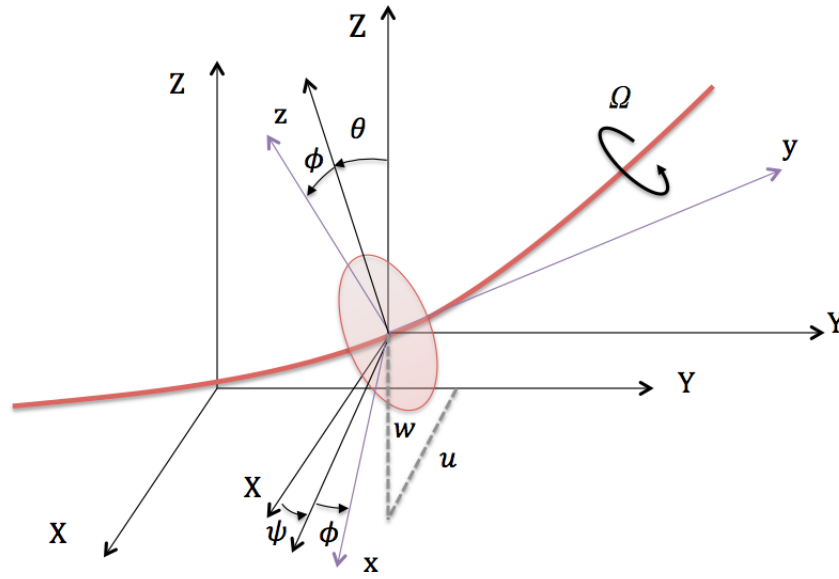


FIGURE 3.1 – Repère de référence (adapté de [85])

w^*) les coordonnées dans le repère tournant $R(x, y, z)$.

Rappelons qu'avec ce paramétrage et les hypothèses de poutre, la déformation longitudinale de second ordre (aussi nommée déformation de Von Karman) s'écrit :

$$\epsilon_y = -x \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} - z \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \quad (3.1.1.1)$$

Nous avons par ailleurs :

$$\theta_A = \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \text{et} \quad \psi_A = -\frac{\partial u}{\partial y} \quad (3.1.1.2)$$

Avec le paramétrage de la figure 3.1, le vecteur rotation en chaque point est donné dans le repère fixe par :

$$\begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\psi}_A \cos(\theta_A) \sin(\phi_A) + \dot{\theta}_A \cos(\phi_A) \\ \dot{\phi}_A + \dot{\psi}_A \sin(\theta_A) \\ \dot{\psi}_A \cos(\theta_A) \cos(\phi_A) + \dot{\theta}_A \sin(\phi_A) \end{bmatrix} \quad (3.1.1.3)$$

Energie cinétique et inertie de rotation d'un disque

L'énergie cinétique d'un disque T_D est donnée par :

$$T_D = \frac{1}{2} M_D (\dot{u}_D^2 + \dot{w}_D^2) + \frac{1}{2} (I_{D_x} \omega_{x_D}^2 + I_{D_y} \omega_{y_D}^2 + I_{D_z} \omega_{z_D}^2) \quad (3.1.1.4)$$

Avec (u, v, w) les coordonnées du centre du disque dans le repère fixe, M_D la masse du disque, I_{D_x} , I_{D_y} , I_{D_z} les composantes du tenseur d'inertie du disque coïncident avec les directions principales dans le repère tournant. On considèrera par la suite que les disques sont symétriques par rotation autour de l'axe y , ce qui donne $I_{D_x} = I_{D_z}$. On suppose de

plus en petites déformations que $\theta \ll 1$ et $\psi \ll 1$. On note enfin $\dot{\phi} = \Omega$, considéré constant par la suite. Nous évaluons alors l'expression (3.1.1.3) au centre du disque et obtenons :

$$T_D = \frac{1}{2}M_D(\dot{u}_D^2 + \dot{w}_D^2) + \frac{1}{2}I_{Dx}(\dot{\psi}_D^2 + \dot{\theta}_D^2) + \frac{1}{2}I_{Dy}2\Omega\dot{\psi}_D\theta_D + \frac{1}{2}I_{Dy}\Omega^2 \quad (3.1.1.5)$$

Energie cinétique et inertie de rotation de l'arbre

On utilise le même raisonnement pour l'expression de l'énergie cinétique de l'arbre T_A :

$$T_A = \frac{\rho_A S}{2} \int_0^{L_A} (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) dy + \frac{\rho_A I}{2} \int_0^{L_A} (\dot{\psi}_A^2 + \dot{\theta}_A^2) dy + \frac{\rho_A I L_A}{2} \Omega^2 + \rho_A I \Omega \int_0^{L_A} \dot{\psi}_A \theta_A dy \quad (3.1.1.6)$$

Avec ρ_A la masse volumique du matériau de l'arbre, S l'aire de section de la poutre, supposée constante, et I le moment d'inertie de la section par rapport à son axe neutre, supposé aussi constant. Le premier terme est l'expression classique de l'énergie cinétique pour une poutre en flexion, la seconde intégrale correspond à l'inclinaison des sections droites par rapport à la fibre neutre (poutre de Timoshenko), le terme $\rho_A I L_A \Omega^2$ est constant et n'a pas d'influence dans les équations de Lagrange, le dernier terme représente l'effet gyroscopique.

Travail des déformations d'un arbre visco-élastique en flexion

Afin de calculer l'énergie de déformation de l'arbre, il est nécessaire de faire des hypothèses sur la loi de comportement. Nous utiliserons la loi de comportement d'une poutre visco-élastique [161] qui correspond à :

$$\sigma_y = E(\epsilon_y + \eta_b \dot{\epsilon}_y) \quad (3.1.1.7)$$

Avec σ_y et ϵ_y les composantes principales respectivement des tenseurs de contrainte et de déformation dans la direction y .

On réécrit l'expression générale du travail de la déformation élastique de l'arbre :

$$\delta W_e = - \int_{\tau} \underline{\sigma} : \delta \underline{\epsilon} d\tau \quad (3.1.1.8)$$

Cela donne :

$$\delta W_e = -E \int_0^{L_A} \int_S (\epsilon_y + \eta_b \dot{\epsilon}_y) \delta \epsilon_y dS dy \quad (3.1.1.9)$$

Or :

$$\epsilon_y = -x \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} - z \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \quad (3.1.1.10)$$

D'où :

$$\dot{\epsilon}_y = -x \frac{\partial^2 \dot{u}^*}{\partial y^2} - z \frac{\partial^2 \dot{w}^*}{\partial y^2} \quad (3.1.1.11)$$

Remarquons que x et z ne dépendent pas du temps d'après la description du schéma 3.2.

Notons :

$$\delta U_e = E \int_0^{L_A} \int_S \epsilon_y \delta \epsilon_y dS dy \quad (3.1.1.12)$$

Ce terme correspond au travail des forces qui dérivent du potentiel élastique. Notons les inerties diamétrales I_x et I_z telles que :

$$I_x = \int_S z^2 dS \quad I_z = \int_S x^2 dS \quad (3.1.1.13)$$

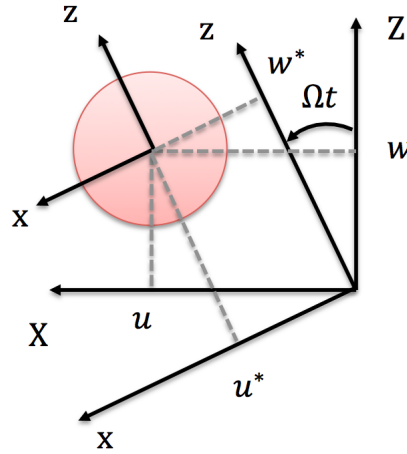


FIGURE 3.2 – Section droite de l'arbre (adapté de [85])

Rappelons que pour un arbre symétrique on a :

$$I = I_x = I_z \quad (3.1.1.14)$$

Ce qui nous donne en réinjectant :

$$\delta U_e = EI \int_0^{L_A} \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \delta u^*}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \delta w^*}{\partial y^2} \right) dy \quad (3.1.1.15)$$

Remarquons que la symétrie du rotor fait disparaître le terme croisé. Notons par ailleurs :

$$\delta W_d = -E\eta_b \int_0^{L_A} \int_S \dot{\epsilon}_y \delta \epsilon_y dS dy \quad (3.1.1.16)$$

Ce terme correspond au travail des forces dissipatives.

Nous avons alors :

$$\int_S \dot{\epsilon}_y \delta \epsilon_y dS = \left(\int_S x^2 dS \right) \frac{\partial^2 \dot{u}^*}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \delta u^*}{\partial y^2} + \left(\int_S z^2 dS \right) \frac{\partial^2 \dot{w}^*}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \delta w^*}{\partial y^2} \quad (3.1.1.17)$$

$$\int_S \dot{\epsilon}_y \delta \epsilon_y dS = I \frac{\partial^2 \dot{u}^*}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \delta u^*}{\partial y^2} + I \frac{\partial^2 \dot{w}^*}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \delta w^*}{\partial y^2} \quad (3.1.1.18)$$

De nouveaux termes circulatoires vont apparaître en se ramenant au repère fixe par la transformation :

$$\begin{bmatrix} u^* \\ w^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\Omega t) & -\sin(\Omega t) \\ \sin(\Omega t) & \cos(\Omega t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix} \quad (3.1.1.19)$$

Or

$$\begin{bmatrix} \dot{u}^* \\ \dot{w}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\Omega t) & -\sin(\Omega t) \\ \sin(\Omega t) & \cos(\Omega t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{w} \end{bmatrix} + \Omega \begin{bmatrix} -\sin(\Omega t) & -\cos(\Omega t) \\ \cos(\Omega t) & -\sin(\Omega t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix} \quad (3.1.1.20)$$

D'où :

$$\begin{bmatrix} \dot{u}^* \\ \dot{w}^* \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \delta u^* \\ \delta w^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{w} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \delta u \\ \delta w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & \Omega \\ -\Omega & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta u \\ \delta w \end{bmatrix} \quad (3.1.1.21)$$

L'application de cette équation de changement de repère dans l'expression de U_e de l'équation (3.1.1.15) donne, en vue de la symétrie du rotor :

$$\delta U_e = EI \int_0^{L_A} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \delta u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2} \right) dy \quad (3.1.1.22)$$

L'équation (3.1.1.16) donne alors :

$$\delta W_d = -EI\eta_b \int_0^{L_A} \left(\frac{\partial^2 \dot{u}}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \delta u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \dot{w}}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2} \right) dy - EI\Omega\eta_b \int_0^{L_A} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \delta u}{\partial y^2} \right) dy \quad (3.1.1.23)$$

L'expression finale du travail de déformation visco-élastique de l'arbre est exprimée par :

$$\begin{aligned} \delta W_e = -\delta U_e + \delta W_d = & -EI \int_0^{L_A} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \delta u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2} \right) dy \\ & -EI\eta_b \int_0^{L_A} \left(\frac{\partial^2 \dot{u}}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \delta u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \dot{w}}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2} \right) dy \\ & -EI\Omega\eta_b \int_0^{L_A} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \delta u}{\partial y^2} \right) dy \end{aligned} \quad (3.1.1.24)$$

Forces de balourd

On représente le balourd par une masse m_b située à la distance d de l'axe géométrique de rotation du rotor (dans notre cas supposé être l'axe géométrique de l'arbre). Sa vitesse V_B est la suivante :

$$V_B = \begin{bmatrix} \dot{u}_B + \Omega d \cos(\Omega t) \\ 0 \\ \dot{w}_B - \Omega d \sin(\Omega t) \end{bmatrix} \quad (3.1.1.25)$$

D'où l'énergie cinétique suivante :

$$T_B = \frac{1}{2} m_B \dot{u}_B^2 + \frac{1}{2} m_B \dot{w}_B^2 + \frac{1}{2} m_B \Omega^2 d^2 + m_B \Omega d (\dot{u}_B \cos(\Omega t) - \dot{w}_B \sin(\Omega t)) \quad (3.1.1.26)$$

Les deux premiers termes seront négligés car la masse du balourd est faible devant celle du rotor. On fait alors l'approximation :

$$T_B \approx \frac{1}{2} m_B \Omega^2 d^2 + m_B \Omega d (\dot{u}_B \cos(\Omega t) - \dot{w}_B \sin(\Omega t)) \quad (3.1.1.27)$$

Principe de l'action stationnaire pour l'élasto-dynamique et formulation faible du système

D'après le principe de l'action stationnaire, nous avons, de l'instant t_0 à l'instant t_1 :

$$\delta \mathcal{A} = \int_{t_0}^{t_1} (\delta T - \delta U + \delta W) dt = 0 \quad (3.1.1.28)$$

Avec \mathcal{A} , l'action hamiltonienne, T l'énergie cinétique du système, U l'énergie dérivant d'un potentiel, et δW le travail dissipé des forces ne dérivant pas d'un potentiel.

Le premier terme correspond à l'inertie de l'arbre, des disques, et des balourds. Le second terme correspond à la déformation élastique de l'arbre en flexion et à l'action de la

gravité sur l'arbre et les disques, et le dernier terme correspond à l'action des paliers dans notre application. Détaillons chacun de ces termes :

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} \delta T dt = \int_{t_0}^{t_1} \left(M_D(\dot{u}_D \delta \dot{u}_D + \dot{w}_D \delta \dot{w}_D) + I_{Dx}(\dot{\psi}_D \delta \dot{\psi}_D + \dot{\theta}_D \delta \dot{\theta}_D) + I_{Dy} \Omega \delta \dot{\psi}_D \theta_D + I_{Dy} \Omega \dot{\psi}_D \delta \theta_D \right. \\ \left. + \rho_A S \int_0^{L_A} (\dot{u}_A \delta \dot{u}_A + \dot{w}_A \delta \dot{w}_A) dy + \rho_A I \int_0^{L_A} (\dot{\psi}_A \delta \dot{\psi}_A + \dot{\theta}_A \delta \dot{\theta}_A) dy + \rho_A I \Omega \int_0^{L_A} \delta \dot{\psi}_A \theta_A + \dot{\psi}_A \delta \theta_A dy \right. \\ \left. m_B \Omega d(\delta \dot{u}_B \cos(\Omega t) - \delta \dot{w}_B \sin(\Omega t)) \right) dt \end{aligned} \quad (3.1.1.29)$$

Par intégration par partie et en rappelant que le champ cinématiquement admissible δu est nul en t_0 et t_1 on a :

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} \delta T dt = \int_{t_0}^{t_1} \left(-M_D(\ddot{u}_D \delta u_D + \ddot{w}_D \delta w_D) - I_{Dx}(\ddot{\psi}_D \delta \psi_D + \ddot{\theta}_D \delta \theta_D) - I_{Dy} \Omega (\dot{\theta}_D \delta \psi_D - \dot{\psi}_D \delta \theta_D) \right. \\ \left. - \rho_A S \int_0^{L_A} (\ddot{u}_A \delta u_A + \ddot{w}_A \delta w_A) dy \right. \\ \left. - \rho_A I \int_0^{L_A} (\ddot{\psi}_A \delta \psi_A + \ddot{\theta}_A \delta \theta_A) dy - \rho_A I \Omega \int_0^{L_A} (\dot{\theta}_A \delta \psi_A - \dot{\psi}_A \delta \theta_A) dy \right. \\ \left. - m_B \Omega^2 d(-\delta u_B \sin(\Omega t) + \delta w_B \cos(\Omega t)) \right) dt \end{aligned} \quad (3.1.1.30)$$

Remarquons que l'on retrouve bien le travail des quantités d'accélération. Les termes d'inertie sont tous contenus dans (3.1.1.30). Les termes dérivant d'un potentiel, à savoir la déformation élastique et les forces de gravité donnent :

$$-\int_{t_0}^{t_1} \delta U dt = -\int_{t_0}^{t_1} \left(EI \int_0^{L_A} \left(\frac{\partial^2 u_A}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \delta u_A}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_A}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \delta w_A}{\partial y^2} \right) dy + \rho_A g S \int_0^{L_A} \delta w_A dy \right) dt \quad (3.1.1.31)$$

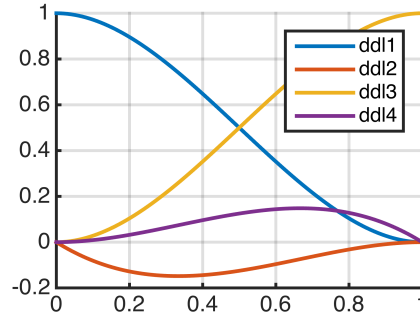
Enfin, il reste le travail des efforts non conservatifs (amortissement interne) et celui des efforts généralisés des paliers sur le système :

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} \delta W dt = \int_{t_0}^{t_1} \left[-EI \eta_b \int_0^{L_A} \left(\frac{\partial^2 \dot{u}_A}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \delta u_A}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \dot{w}_A}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \delta w_A}{\partial y^2} \right) dy \right. \\ \left. - EI \Omega \eta_b \int_0^{L_A} \left(\frac{\partial^2 u_A}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \delta w_A}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w_A}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \delta u_A}{\partial y^2} \right) dy \right. \\ \left. + \int_S (\mathbf{T}_u \delta u_A + \mathbf{T}_w \delta w_A) dS \right] dt \end{aligned} \quad (3.1.1.32)$$

En remplaçant les expressions (3.1.1.30) à (3.1.1.32) dans (3.1.1.28), on obtient la formulation faible du système.

3.1.2 Discrétisation par éléments finis

Pour résoudre numériquement le problème énoncé par la formulation faible du système mécanique, il est nécessaire de discrétiser le système. Pour ce faire, on découpe le domaine linéaire de la poutre en plusieurs éléments, sur lesquels on définit des fonctions de forme qui nous permettront d'approximer les déplacements de la poutre.

FIGURE 3.3 – Fonctions de forme de Hermite pour le vecteur \mathbf{N}_1

Fonctions de forme

Nous utiliserons les fonctions de forme de Hermite [160].

Notons :

$$\mathbf{N}_1(y) = \begin{bmatrix} 1 - \frac{3y^2}{l_e^2} + \frac{2y^3}{l_e^3} & -y + \frac{2y^2}{l_e} - \frac{y^3}{l_e^2} & \frac{3y^2}{l_e^2} - \frac{2y^3}{l_e^3} & \frac{y^2}{l_e} - \frac{y^3}{l_e^2} \end{bmatrix} \quad (3.1.2.1)$$

$$\mathbf{N}_2(y) = \begin{bmatrix} 1 - \frac{3y^2}{l_e^2} + \frac{2y^3}{l_e^3} & y - \frac{2y^2}{l_e} + \frac{y^3}{l_e^2} & \frac{3y^2}{l_e^2} - \frac{2y^3}{l_e^3} & -\frac{y^2}{l_e} + \frac{y^3}{l_e^2} \end{bmatrix} \quad (3.1.2.2)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}_1(y)\mathbf{x}_u \quad \mathbf{w} = \mathbf{N}_2(y)\mathbf{x}_w \quad (3.1.2.3)$$

$$\mathbf{x}_u = [u_1, \psi_1, u_2, \psi_2] \quad \mathbf{x}_w = [w_1, \theta_1, w_2, \theta_2] \quad (3.1.2.4)$$

Discrétisation

On prend pour vecteur de déplacement élémentaire :

$$\mathbf{x}_e = [u_1, w_1, \theta_1, \psi_1, u_2, w_2, \theta_2, \psi_2] \quad (3.1.2.5)$$

On compose le vecteur des inconnues de déplacement global à partir des inconnues élémentaires selon la méthode des éléments finis [160]. On réinjecte la discrétisation dans les équations (3.1.1.29) à (3.1.1.32), pour exprimer (3.1.1.28). Les détails des matrices élémentaires à assembler sont donnés en annexe A. Avec cette approximation, l'équation (3.1.1.28) devient :

$$\int_{t_0}^{t_1} \left(\delta \mathbf{x}^T \mathbb{M} \ddot{\mathbf{x}} + \delta \mathbf{x}^T [\mathbb{K}_b + \Omega \mathbb{G}] \dot{\mathbf{x}} + \delta \mathbf{x}^T [\mathbb{K} + \Omega \mathbb{K}_c] \mathbf{x} - \delta \mathbf{x}^T \mathbf{f}_b(\Omega t) - \delta \mathbf{x}^T \mathbf{f}_{ext}(\Omega, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) \right) dt = 0 \quad (3.1.2.6)$$

Cette relation étant vraie pour tout $\delta \mathbf{x}$, on obtient l'équation du mouvement suivante :

$$\mathbb{M} \ddot{\mathbf{x}} + [\mathbb{K}_b + \Omega \mathbb{G}] \dot{\mathbf{x}} + [\mathbb{K} + \Omega \mathbb{K}_c] \mathbf{x} = \mathbf{f}_b(\Omega t) + \mathbf{f}_{ext}(\Omega, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) \quad (3.1.2.7)$$

Avec \mathbb{M} la matrice de masse du système, \mathbb{K}_b la matrice de dissipation, \mathbb{G} la matrice gyroscopique, \mathbb{K} la matrice de raideur du système, et \mathbb{K}_c la matrice circulatoire. La force \mathbf{f}_b représente le balourd radial et la force \mathbf{f}_{ext} représente les efforts extérieurs appliqués au système. Cette force regroupera l'action de la gravité et celle des paliers sur l'arbre

flexible.

Pour réécrire cette équation sous forme de système d'état, notons :

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \mathbf{x} \end{bmatrix} \quad (3.1.2.8)$$

On obtient :

$$\begin{bmatrix} \mathbb{M} & 0 \\ 0 & -\mathbb{K} - \Omega\mathbb{K}_c \end{bmatrix} \dot{\mathbf{y}} + \begin{bmatrix} \mathbb{K}_b + \Omega\mathbb{G} & \mathbb{K} + \Omega\mathbb{K}_c \\ \mathbb{K} + \Omega\mathbb{K}_c & 0 \end{bmatrix} \mathbf{y} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_b(\Omega) + \mathbf{f}_{ext}(\Omega, \mathbf{y}) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.1.2.9)$$

On remarque que l'on peut écrire ce système de la manière suivante :

$$\left(\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbb{M} & 0 \\ 0 & -\mathbb{K} \end{bmatrix}}_{\text{sym}} + \Omega \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\mathbb{K}_c \end{bmatrix}}_{\text{antisym}} \right) \dot{\mathbf{y}} + \left(\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbb{K}_b & \mathbb{K} \\ \mathbb{K} & 0 \end{bmatrix}}_{\text{sym}} + \Omega \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbb{G} & \mathbb{K}_c \\ \mathbb{K}_c & 0 \end{bmatrix}}_{\text{antisym}} \right) \mathbf{y} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_b(\Omega) + \mathbf{f}_{ext}(\Omega, \mathbf{y}) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.1.2.10)$$

3.1.3 Variantes utiles des équations du mouvement de la structure

Les équations présentées ci-dessus peuvent être légèrement modifiées afin de rendre plus efficace leur résolution, ou de prendre en compte des effets supplémentaires. Nous présentons ici la réduction modale permettant de tirer partie de la géométrie, la masse et la raideur de la poutre, pour diminuer efficacement le nombre de degré de liberté. Nous présenterons également la transformation permettant de changer de repère ; cette méthode peut également permettre d'adapter la résolution du système par rapport aux chargements prépondérants. Enfin, nous montrerons comment prendre en compte simplement un éventuel défaut de rectitude de l'arbre dans la dynamique du système. Les deux dernières variantes seront largement étudiées dans la partie 4.

Reduction modale

Nous avons vu, partie 3.1.2, qu'un choix de discrétisation de la structure est nécessaire. Nous avons donc sous-entendu que l'on doit discrétiser la poutre en éléments dont le nombre et la longueur sont arbitraires. Afin de diminuer le nombre de degrés de liberté, on peut en revanche, à partir de cette discrétisation reconstituer des dépendances entre les degrés de liberté afin d'en garder un nombre minimum. En effet, si l'on sait que le rotor doit vibrer selon un certain type de déformées, on peut souhaiter garder uniquement ces déformées, c'est-à-dire les dépendances entre les degrés de liberté du découpage arbitraire. Dans cet optique, on peut utiliser par exemple les déformées libres de la poutre (sans rotation et sans paliers), pour réduire le nombre de degrés de liberté d'un rotor sur deux paliers hydrodynamiques. Nous donnons ici les grandes lignes d'une telle réduction modale.

On note Φ la matrice composée des n_r vecteurs propres sélectionnés du système libre, et Λ la matrice diagonale des valeurs propres. On a alors :

$$\mathbb{K}\Phi = \mathbb{M}\Phi\Lambda \quad (3.1.3.1)$$

On normalise Φ de sorte que :

$$\Phi^T \mathbb{M} \Phi = I \quad \Phi^T \mathbb{K} \Phi = \Lambda \quad (3.1.3.2)$$

On posant alors $\mathbf{x} = \Phi \mathbf{z}$ les équations du mouvement (3.1.2.7) deviennent

$$\ddot{\mathbf{z}} + \Xi_1 \dot{\mathbf{z}} + [\Lambda + \Xi_2] \mathbf{z} = \mathbf{f}_b^* + \mathbf{f}_{ext}^*(\Omega, \mathbf{z}, \dot{\mathbf{z}}) \quad (3.1.3.3)$$

Avec $\Xi_1 = \Phi^T [\mathbb{K}_b + \Omega \mathbb{G}] \Phi$, $\Xi_2 = \Omega \Phi^T \mathbb{K}_c \Phi$, $\mathbf{f}_b^* = \Phi^T \mathbf{f}_b(\Omega t)$, $\mathbf{f}_{ext}^* = \Phi^T \mathbf{f}_{ext}(\Omega, \Phi \mathbf{z}, \Phi \dot{\mathbf{z}})$. Ce système possède la taille du nombre de modes choisis n_r , qui ont pu être calculés à partir d'une discrétisation fine pour le vecteur des inconnues \mathbf{x} .

Zheng et Hasebe [157] proposent de séparer les vecteurs modaux dont le déplacement est non nul aux degrés de liberté concernés par les paliers. Cette séparation est avantageuse lorsque l'on procède à une projection des forces de paliers sur des noeuds de structure, mais l'est moins lorsqu'on les projette sur des éléments, car les modes concernés sont à relativement hautes fréquences. Par ailleurs, si l'on n'effectue pas cette séparation, cette méthode a le désavantage de distribuer la non-linéarité sur tous les degrés de liberté restant. Nous verrons que cela diminue l'efficacité de la méthode de balance harmonique, que nous présenterons dans la partie 3.3.8, qui est, elle, d'autant plus efficace que l'on a peu de degrés de libertés affectés par la non-linéarité.

Repère fixe et repère tournant

Le choix du repère pour écrire les équations du mouvement peut être fait par rapport aux sollicitations externes du système. Pour les machines tournantes soumises à un chargement élevé dans le repère fixe, comme le poids par exemple, le choix de ce repère peut être intéressant. En revanche le repère tournant peut représenter un choix plus avantageux pour une excitation périodique, comme le balourd par exemple, devient prépondérant par rapport au poids du rotor (par exemple pour des rotors légers ou verticaux à hautes vitesses de rotation). Dans le repère tournant, le balourd est donc constant, ce qui simplifie l'étude. Nous décrivons dans ce paragraphe le changement des équations du mouvement dans le repère tournant.

Le passage d'un repère à l'autre s'effectue en remarquant :

$$\begin{aligned} [u^*, w, \theta^*, \psi^*]^T &= \begin{bmatrix} R & \mathbf{0}_2 \\ \mathbf{0}_2 & R \end{bmatrix} [u, w, \theta, \psi]^T \\ R &= \begin{bmatrix} \cos(\Omega t) & -\sin(\Omega t) \\ \sin(\Omega t) & \cos(\Omega t) \end{bmatrix} \\ R^T R &= I \\ \dot{R} &= \Omega \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} R \end{aligned} \quad (3.1.3.4)$$

Ainsi avec ces notations on peut exprimer le vecteur des inconnues du repère tournant \mathbf{x}^* :

$$\mathbf{x}^* = (I_{2n} \otimes R) \mathbf{x} \quad (3.1.3.5)$$

Où \otimes désigne le produit tensoriel, et n désigne le nombre de noeuds de poutre choisis pour sa discrétisation. Notons :

$$\mathbb{R} = I_{2n} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.1.3.6)$$

On a alors :

$$\dot{\mathbf{x}} = (I_{2n} \otimes \dot{R}^T) \mathbf{x}^* + (I_{2n} \otimes R^T) \dot{\mathbf{x}}^* = (I_{2n} \otimes R^T) * (\Omega \mathbb{R} \mathbf{x}^* + \dot{\mathbf{x}}^*) \quad (3.1.3.7)$$

$$\ddot{\mathbf{x}} = (I_{2n} \otimes R^T) * (-\Omega^2 \mathbf{x}^* + 2\Omega \mathbb{R} \dot{\mathbf{x}}^* + \ddot{\mathbf{x}}^*) \quad (3.1.3.8)$$

L'équation (3.1.2.7) devient :

$$\begin{aligned} \mathbb{M} \ddot{\mathbf{x}}^* + [\mathbb{K}_b + \Omega \mathbb{G} + 2\Omega \mathbb{M} \mathbb{R}] \dot{\mathbf{x}}^* + [\mathbb{K} + \Omega \mathbb{K}_c - \Omega^2 \mathbb{M} + \Omega(\mathbb{K}_b + \Omega \mathbb{G}) \mathbb{R}] \mathbf{x}^* \\ = (I_{2n} \otimes R) * (\mathbf{f}_b(\Omega) + \mathbf{f}_{ext}(\Omega, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})) \end{aligned} \quad (3.1.3.9)$$

Rappelons que l'on a, par construction (annexe A), les relations :

$$\begin{aligned} \mathbb{K}_c &= \mathbb{K}_b \mathbb{R}^T \\ \mathbb{M} &= \mathbb{M}_0 + \mathbb{M}_s \\ \mathbb{G} &= 2\mathbb{M}_s \mathbb{R}^T \end{aligned} \quad (3.1.3.10)$$

Notons par ailleurs que la force \mathbf{f}_b est fixe dans ce repère. On note ce vecteur fixe $\mathbf{f}_b^* = (I_{2n} \otimes R) * \mathbf{f}_b(\Omega)$. On utilise la même notation pour le chargement extérieur, qui est donc appliqué dans le repère tournant.

Cela permet de simplifier le terme de gauche de (3.1.3.9) :

$$\mathbb{M} \ddot{\mathbf{x}}^* + (\mathbb{K}_b + 2\Omega \mathbb{M}_0 \mathbb{R}) \dot{\mathbf{x}}^* + [\mathbb{K} + \Omega^2 (\mathbb{M}_s - \mathbb{M}_0)] \mathbf{x}^* = \mathbf{f}_b^* + \mathbf{f}_{ext}^*(\Omega, \mathbf{x}^*, \dot{\mathbf{x}}^*) \quad (3.1.3.11)$$

On retrouve conformément les termes classiquement attendus dans ce repère, à savoir une nouvelle matrice de raideur en Ω^2 due à l'inertie du système tournant. Le terme \mathbf{f}_{ext}^* , qui sera explicité partie 3.2.1.

Défaut de rectitude de l'arbre

Les arbres réels n'ont évidemment pas de fibre neutre parfaitement droite. En général, pour les rotors de bonne qualité, cet écart est faible (de l'ordre du micron). Cependant, dans le cas de paliers hydrodynamiques, l'écart de rectitude avoisine le jeu radial. Il peut alors être intéressant de l'inclure dans les modèles de simulation. Cela peut être fait assez simplement en modifiant les équations du mouvement (3.1.2.7) dans le repère fixe de la manière suivante [63] :

$$\mathbb{M} \ddot{\mathbf{x}} + [\mathbb{K}_b + \Omega \mathbb{G}] \dot{\mathbf{x}} + [\mathbb{K} + \Omega \mathbb{K}_c] \mathbf{x} = \mathbf{f}_b(\Omega t) + \mathbf{f}_{ext}(\Omega, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) + \mathbb{K} I_{2n} \otimes R \mathbf{x}_r(\Omega t + \alpha_0) \quad (3.1.3.12)$$

Avec \mathbf{x}_r le défaut de rectitude mesuré à l'arrêt. La matrice $I_{2n} \otimes R$ représente la rotation du défaut de rectitude autour de l'axe de rotation (même expression que dans le changement de repère présenté partie 3.1.3), et α_0 représente l'angle à l'instant $t = 0$. Remarquons enfin que dans le repère tournant, le défaut de rectitude est fixe quand l'arbre a une position stationnaire dans ce repère.

3.2 Problème monolithique

Maintenant que nous avons présenté un modèle de poutre élastique en rotation d'une part, et d'autre part un modèle de palier hydrodynamique avec différents modèles de cavitation, ainsi que différents modèles d'écoulement du fluide dans les motifs de texturation, nous allons présenter maintenant la projection de la pression due à l'écoulement sur la structure, ce qui nous permettra de considérer un modèle global, qui pourra se résoudre de manière monolithique.

3.2.1 Projection de la pression sur la structure

Exprimons le travail de la pression du fluide sur l'interface de la structure :

$$\delta W_{coupl} = \int \int_{\delta\Gamma} [p_u \delta u + p_w \delta w] d\delta\Gamma \quad (3.2.1.1)$$

Or, en reprenant le paramétrage utilisé sur la figure 2.2, on a :

$$\begin{aligned} p_u &= p \cos(\theta) \\ p_w &= p \sin(\theta) \end{aligned} \quad (3.2.1.2)$$

D'où, pour un palier :

$$\delta W_{coupl_1} = \int_0^{L_p} \int_0^{2\pi} [p \cos(\theta) \delta u + p \sin(\theta) \delta w] R d\theta dy \quad (3.2.1.3)$$

$$\begin{aligned} \delta W_{coupl_1} = \int_0^{L_p} \int_0^{2\pi} [\sum N_{f_i}(\theta, y) p_i \cos(\theta) \sum N_{s_j}(y) \delta u_j + \\ \sum N_{f_i}(\theta, y) p_i \sin(\theta) \sum N_{s_i}(y) \delta w_j] R d\theta dy \end{aligned} \quad (3.2.1.4)$$

$$\begin{aligned} \delta W_{coupl_{1ij}} = p_i \left[\int_0^{L_p} \left(\int_0^{2\pi} N_{f_i}(\theta, y) R \cos(\theta) d\theta \right) N_{s_j}(y) dy \right] \delta u_j \\ + p_i \left[\int_0^{L_p} \left(\int_0^{2\pi} N_{f_i}(\theta, y) R \sin(\theta) d\theta \right) N_{s_j}(y) dy \right] \delta w_j \end{aligned} \quad (3.2.1.5)$$

On peut noter :

$$\begin{aligned} N_{f_{ui}}(y) &= \int_0^{2\pi} N_{f_i}(\theta, y) R \cos(\theta) d\theta \\ N_{f_{wi}}(y) &= \int_0^{2\pi} N_{f_i}(\theta, y) R \sin(\theta) d\theta \end{aligned} \quad (3.2.1.6)$$

Et encore :

$$\begin{aligned} [\mathbb{P}_u]_{ij} &= 12\mu \left(\frac{R}{C_r} \right)^2 \int_0^{L_p} N_{f_{ui}}(y) N_{s_j}(y) dy \\ [\mathbb{P}_w]_{ij} &= 12\mu \left(\frac{R}{C_r} \right)^2 \int_0^{L_p} N_{f_{wi}}(y) N_{s_j}(y) dy \end{aligned} \quad (3.2.1.7)$$

Donc, avec ces notations :

$$\delta W_{coupl_1} = \Omega (\delta \mathbf{u}^T \mathbb{P}_u \bar{\mathbf{p}} + \delta \mathbf{w}^T \mathbb{P}_w \bar{\mathbf{p}}) \quad (3.2.1.8)$$

On peut aussi insérer la matrice \mathbb{P} composée de \mathbb{P}_u et de \mathbb{P}_w nous permettant d'écrire :

$$\delta W_{coupl_1} = \delta \mathbf{x}^T \mathbb{P} \bar{\mathbf{p}} \quad (3.2.1.9)$$

Projection dans le repère tournant

Le calcul des forces de palier dans le repère tournant n'est pas plus complexe que dans le repère fixe, grâce à l'hypothèse de négligeabilité des forces d'inertie du fluide. Il faut toutefois remarquer que le cisaillement de la surface mobile s'effectue dans l'autre sens, c'est-à-dire que pour le fluide, ce n'est plus la surface l'arbre qui possède une vitesse de cisaillement mais celle du coussinet. Ainsi le terme de Couette $(\frac{1}{2}\frac{\partial \bar{h}}{\partial \theta} + \frac{1}{2}\frac{\partial \bar{r}}{\partial \theta})$ de l'équation de Reynolds (2.2.3.15) change de signe.

3.2.2 Bilan des différents problèmes à résoudre

Nous énonçons dans cette section les différents problèmes couplés dans le repère fixe. Remarquons que les variantes présentées dans la partie 3.1.3 peuvent être également utilisées.

Arbre sur palier lisse avec condition de cavitation de Gumbel

Le problème de dynamique d'arbre sur palier avec cavitation de Gumbel s'écrit :

$$\begin{cases} M\ddot{\mathbf{x}} + [\mathbb{K}_b + \Omega\mathbb{G}]\dot{\mathbf{x}} + [\mathbb{K} + \Omega\mathbb{K}_c]\mathbf{x} = \mathbf{f}_b(\Omega t) + \mathbf{f}_s + \Omega[\mathbb{P}_1 + \mathbb{P}_2]\bar{\mathbf{p}} \\ \mathbb{H}(\mathbf{x})\bar{\mathbf{p}} = \mathbf{f}_f(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) \\ \bar{\mathbf{p}} \geq 0 \end{cases} \quad (3.2.2.1)$$

Avec \mathbb{P}_1 et \mathbb{P}_2 les matrices respectives de projection de la pression de chaque palier, et \mathbf{p} le vecteur des inconnues de pression des deux paliers regroupés. Rappelons que les matrices \mathbb{H} , et le vecteur \mathbf{f}_f sont construits à partir des inconnues $(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$, leur dépendance étant non-linéaire. Une dernière précision est nécessaire pour définir le problème fluide : la périodicité selon la circonférence du palier, et la condition de pression aux bord du palier. Notons que sous la forme écrite ci-dessus, on a $\bar{\mathbf{p}}_{\partial\Gamma}(\Omega)$, la pression adimensionnée aux bords du palier qui dépend de Ω .

Arbre sur palier lisse avec condition de cavitation de Reynolds

Le problème de dynamique d'arbre sur paliers avec cavitation de Reynolds s'écrit :

$$\begin{cases} M\ddot{\mathbf{x}} + [\mathbb{K}_b + \Omega\mathbb{G}]\dot{\mathbf{x}} + [\mathbb{K} + \Omega\mathbb{K}_c]\mathbf{x} = \mathbf{f}_b(\Omega t) + \mathbf{f}_s + \Omega[\mathbb{P}_1 + \mathbb{P}_2]\bar{\mathbf{p}} \\ \mathbb{H}(\mathbf{x})\bar{\mathbf{p}} + \bar{\mathbf{r}} = \mathbf{f}_f(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) \\ \bar{\mathbf{p}} \geq 0 \\ \bar{\mathbf{r}} \geq 0 \\ \bar{\mathbf{p}}\bar{\mathbf{r}} = 0 \end{cases} \quad (3.2.2.2)$$

Arbre sur palier lisse avec cavitation JFO et conservation du débit

Le problème de dynamique d'arbre sur paliers avec cavitation de JFO s'écrit :

$$\begin{cases} M\ddot{\mathbf{x}} + [\mathbb{K}_b + \Omega\mathbb{G}]\dot{\mathbf{x}} + [\mathbb{K} + \Omega\mathbb{K}_c]\mathbf{x} = \mathbf{f}_b(\Omega t) + \mathbf{f}_s + \Omega[\mathbb{P}_1 + \mathbb{P}_2]\bar{\mathbf{p}} \\ \mathbb{H}(\mathbf{x})\bar{\mathbf{p}} + \mathbb{Q}_1\bar{\mathbf{r}} + \mathbb{Q}_2\dot{\bar{\mathbf{r}}} = \mathbf{f}_f(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) \\ \bar{\mathbf{p}} \geq 0 \\ \bar{\mathbf{r}} \geq 0 \\ \bar{\mathbf{p}}\bar{\mathbf{r}} = 0 \end{cases} \quad (3.2.2.3)$$

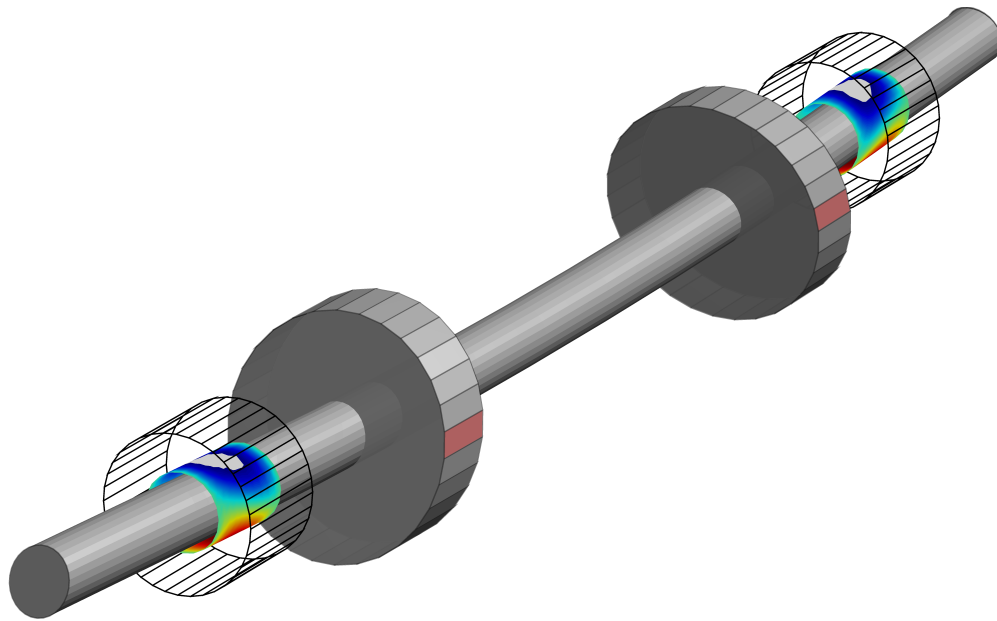


FIGURE 3.4 – Représentation qualitative du problème (3.2.2.3) - la pression est représentée dans les paliers en dégradé de bleu à rouge, et l'arbre flexible, en gris, est soumis à son propre poids ainsi qu'à un chargement statique dirigée vers le bas; la zone de cavitation déterminée par l'algorithme JFO est représentée en blanc

On peut évidemment adapter tous ces systèmes dans les cas texturés en remplaçant $\mathbb{H}, \mathbb{Q}, \mathbf{f}_f$ par leurs équivalents homogénéisés des systèmes (2.3.3.16) à (2.3.4.2).

3.3 Méthodes d'étude des équations non-linéaires associées au palier hydrodynamique

3.3.1 Etat de l'art

Comme mentionné dans l'introduction, la dynamique non linéaire associée au palier hydrodynamique a fait l'objet de nombreuses études analytiques et numériques dans les 40 dernières années. Lund et al. [83, 91, 92, 93, 94, 96, 98, 99] ont présenté les premiers résultats de décomposition modale et d'analyse de stabilité d'un rotor flexible sur paliers hydrodynamiques. Les analyses de stabilité du palier hydrodynamique ont été nombreuses [47, 103, 118], et s'intéressent pour beaucoup à la vibration auto-entretenu appelée "oil-whirl". Les analyses plus récentes ont reproduit les calculs de stabilité dans des cas où l'on peut piloter l'état de surface du palier [120], une éventuelle texturation [30, 79], ou encore l'optimisation d'une géométrie [134]. Zheng et al. proposent également des méthodes de calcul de coefficients dynamiques optimisés dans le cas de cavitation modélisé par un problème linéaire de complémentarité (LCP) [158]. En complément des analyses de stabilité, de nombreuses études ont analysé le comportement du palier hydrodynamique à partir d'intégration temporelle des équations du mouvement [1, 28, 31, 32, 33, 72, 77, 81, 82, 101, 106, 130, 154, 156, 157]. Ces études utilisent différents degrés de simplification des modèles, et présentent une dynamique du palier hydrodynamique très riche, avec des régimes sous-harmoniques, des régimes quasi-périodiques, ou encore du chaos. On peut aussi trouver des analyses temporelles de palier avec une prise en compte de la rugosité

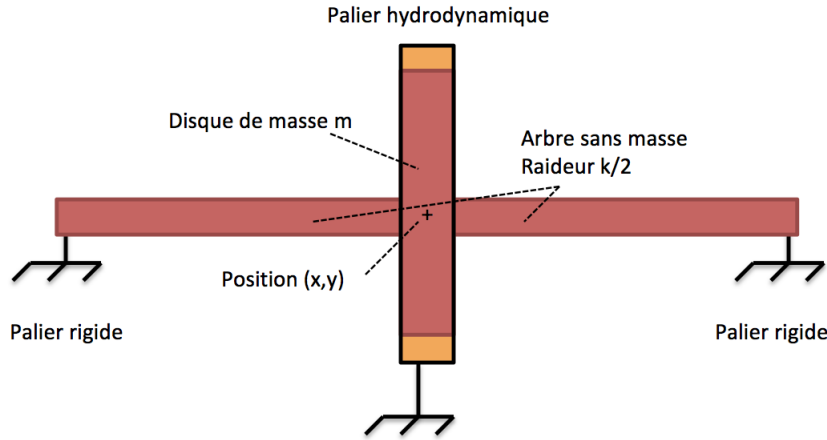


FIGURE 3.5 – Schématisation de l'exemple simplifié

[117, 139]. D'autres efforts ont été effectués pour analyser les solutions périodiques du problème. On retrouve notamment la théorie de bifurcation de Hopf [71, 105, 128, 129, 151, 152, 150], la méthode des perturbations [62], la méthode de discrétisation temporelle [39], la méthode de tir [9, 35, 149], ou encore la méthode d'équilibrage harmonique [23, 80, 149]. Enfin, on trouvera aussi des études portant sur l'influence de la température dans le système [95, 97, 110]. Toutes ces études présentent la complexité du problème et la richesse des solutions liées à la dynamique de ligne d'arbre sur palier hydrodynamique. L'analyse de l'impact d'un modèle de rugosité périodique ou texturation de surface ne semble pas avoir été effectuée d'un point de vue de l'analyse de bifurcations et représente l'objet de notre étude.

3.3.2 Un exemple d'un système simplifié de palier

Afin d'illustrer les méthodes et outils d'analyse présentés dans cette partie, nous utiliserons un cas simple d'une masse positionnée dans un seul palier lisse fini, pouvant se déplacer selon deux directions du plan (x, y) , représenté figure 3.5. On utilise alors l'expression de l'impédance du palier fini en approximation π -film donné par les systèmes (2.2.3.2) à (2.2.3.6), que nous pourrions comparer aux autres modèles de palier fini projeté sur la structure avec les expressions (3.2.1.9). Cela se traduit par :

$$m\mathbb{I}_2 \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} + k\mathbb{I}_2 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \end{bmatrix} + me\Omega^2 \begin{bmatrix} \cos(\Omega t) \\ \sin(\Omega t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -mg \end{bmatrix} \quad (3.3.2.1)$$

On a donc $\mathbb{M} = m\mathbb{I}_2$, $\mathbb{K} = k\mathbb{I}_2$, $\mathbb{K}_c = \mathbb{K}_b = \mathbb{G} = \mathbf{0}_2$.

Les données utilisées seront : $L_p = 8 \text{ mm}$, $R = 2.5 \text{ mm}$, $C_r = 8 \text{ } \mu\text{m}$, $\mu = 6 \text{ mPa.s}$, $m = 1 \text{ mg}$. La valeur de k sera prise nulle excepté dans la partie 3.3.12, afin d'ajouter artificiellement une fréquence de résonance au système homogène.

Dans les paragraphes qui suivent, nous présenterons les différentes analyses du système, à savoir, le calcul de la position d'équilibre statique et de sa stabilité, le calcul linéaire et non-linéaire de la réponse forcée. En ce qui concerne les méthodes non-linéaires, nous présenterons l'intégration temporelle, la méthode de tir, et enfin la méthode d'équilibrage harmonique (HBM). Les systèmes seront adaptés à l'exemple illustratif.

3.3.3 Position d'équilibre statique

Le problème se simplifie à l'équilibre statique :

$$[\mathbb{K} + \Omega\mathbb{K}_c]\mathbf{x}_{stat} = \mathbf{f}_s + \mathbf{f}_{nl}(\mathbf{x}_{stat}) \quad (3.3.3.1)$$

La résolution est quant à elle toujours non linéaire et peut-être obtenue à partir d'un algorithme itératif de type Newton-Raphson. Le calcul du jacobien dans l'algorithme peut être obtenu directement à partir d'un développement de Taylor de la pression [83, 158]. On peut aussi l'obtenir par perturbation numérique. Ces méthodes sont rappelées en annexe C.3.3.

Exemple simplifié Dans le cas illustratif, en prenant $k = 0$, la recherche de position d'équilibre revient à calculer \mathbf{x}_{stat} pour avoir :

$$\mathbf{f}_{nl}(\mathbf{x}_{stat}) = -\mathbf{f}_s \quad (3.3.3.2)$$

Par exemple, si l'on prend $\mathbf{f}_s = [0; W_c]^T$ et pour $W_c = [0..20 \text{ N}]$ on obtient les positions de la figure 3.6. Sur cette figure, on compare différents modèles pour calculer la position d'équilibre idéale. Nous comparons le modèle π -film avec notre résolution éléments finis, avec condition de rupture de film de Reynolds, et la pression de cavitation égale à la pression atmosphérique, ce qui présente une validation de l'algorithme. Cependant lorsque l'on prend la pression de cavitation différente de la pression atmosphérique, on voit que l'angle correspond à la position de film complet (Sommerfeld) avec un angle de calage de $\pi/2$, puis intervient la cavitation. On voit par ailleurs qu'à des excentricités élevées, on rejoint le profil π -film, car les pressions inférieures à la pression de cavitation deviennent négligeables. Lorsque l'on compare les position de paliers lisses avec cavitation JFO à un cas texturé de la figure 2.17(a) (également avec cavitation JFO), on voit qu'il y a de faibles différences sur la position d'équilibre statique. Le modèle de cavitation présente une variation minime pour cet exemple. Remarquons que le chargement n'a pas été imposé jusqu'à $20N$ pour le cas texturé, car l'excentricité devenait trop élevée. Cette texture semble limiter la portance maximale. Une étude spécifique à chargement et excentricité élevés devrait toutefois être réalisée pour tirer des conclusions plus précises. Cela ne présente pas d'intérêt par rapport à l'étude actuelle. En conclusion, pour les conditions de fonctionnement d'un tel palier, on ne peut pas adopter le profil π -film ce qui justifie le calcul par éléments finis.

3.3.4 Analyse de stabilité des positions d'équilibre statique

Une fois l'équilibre obtenu, il peut être intéressant de calculer les modes de vibration du système linéarisé autour de la solution d'équilibre par exemple :

$$\mathbb{M}\ddot{\mathbf{x}} + [\mathbb{K}_b + \Omega\mathbb{G}\mathbb{J}_1]\dot{\mathbf{x}} + [\mathbb{K} + \Omega\mathbb{K}_c + \mathbb{J}_2]\mathbf{x} = 0 \quad (3.3.4.1)$$

Exemple simplifié Le système adapté à l'exemple présenté dans le paragraphe 3.3.2 donne :

$$\mathbb{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbb{J}_1\dot{\mathbf{x}} + [\mathbb{K} + \mathbb{J}_2]\mathbf{x} = 0 \quad (3.3.4.2)$$

Avec :

$$\mathbb{J}_1 = -\mathbb{P} \frac{\partial \bar{\mathbf{p}}}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \quad \mathbb{J}_2 = -\mathbb{P} \frac{\partial \bar{\mathbf{p}}}{\partial \mathbf{x}} \quad (3.3.4.3)$$

On peut remarquer que pour le cas test du système (3.3.2.1) avec projection de la pression sur un nœud, le jacobien du système correspond aux coefficients dynamiques

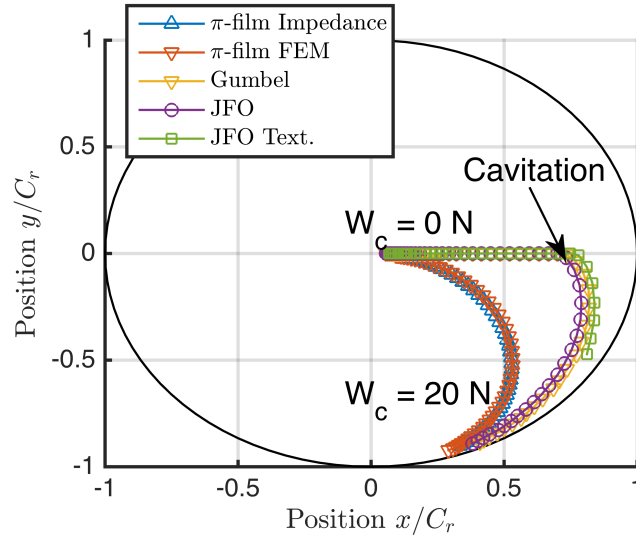


FIGURE 3.6 – Position stationnaire adimensionnée par rapport au jeu dans le cas test du système (3.3.2.1) pour un chargement vertical de 0 à 20 N (rotation en sens direct)

du palier. La figure 3.7 présente les coefficients adimensionnés pour le modèle π -film de palier fini par impédance, confronté au modèle π -film par FEM, et au modèle π -film avec facteurs d'écoulement correspondant à la texturation de la figure 2.17(a). On remarque que le modèle le modèle FEM présente des résultats très proches du modèle de palier fini par impédance, ce qui permet de le valider. Par ailleurs, concernant le modèle texturé on remarque que pour des excentricités inférieures à 0.8 toutes les courbes se superposent, montrant le faible impact de la texturation. Lorsque l'excentricité est supérieure à 0.8, les coefficients dynamiques de palier texturé se séparent franchement des coefficients de palier lisse, en présentant des raideurs et des amortissement significativement plus faibles.

On cherche alors les solutions sous la forme $\mathbf{x} = \mathbf{x}_{stat} + \mathbf{x}_0 e^{\lambda t}$:

$$\left[\lambda^2 \mathbb{M} + \lambda (\mathbb{K}_b + \Omega \mathbb{G} + \mathbb{J}_1) + (\mathbb{K} + \Omega \mathbb{K}_c + \mathbb{J}_2) \right] \mathbf{x}_0 = 0 \quad (3.3.4.4)$$

$$\mathbb{A}_0 \begin{bmatrix} \lambda \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{x}_0 \end{bmatrix} = \lambda \mathbb{B}_0 \begin{bmatrix} \lambda \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{x}_0 \end{bmatrix} \quad (3.3.4.5)$$

Avec :

$$\mathbb{A}_0 = - \begin{bmatrix} \mathbb{K}_b + \mathbb{J}_1 + \Omega \mathbb{G} & \mathbb{K} + \mathbb{J}_2 + \Omega \mathbb{K}_c \\ \mathbb{K} + \mathbb{J}_2 + \Omega \mathbb{K}_c & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbb{B}_0 = \begin{bmatrix} \mathbb{M} & 0 \\ 0 & -\mathbb{K} - \mathbb{J}_2 - \Omega \mathbb{K}_c \end{bmatrix} \quad (3.3.4.6)$$

Comme dans l'annexe B.2, la partie réelle de λ nous donne la stabilité locale des positions d'équilibre du système autonome. Il faut tout de même remarquer que la sollicitation d'un balourd peut stabiliser le mouvement autour de ces positions d'équilibre comme le montrent Van de Vorst et al. ([149]). Ce résultat peut sembler à première vue contre-intuitif, mais résulte simplement de l'analogie entre le repère fixe et le repère tournant pour le chargement statique et le balourd.

Exemple simplifié Le système adapté à l'exemple présenté dans le paragraphe 3.3.2 donne :

$$\left[\lambda^2 \mathbb{M} + \lambda \mathbb{J}_1 + (\mathbb{K} + \mathbb{J}_2) \right] \mathbf{x}_0 = 0 \quad (3.3.4.7)$$

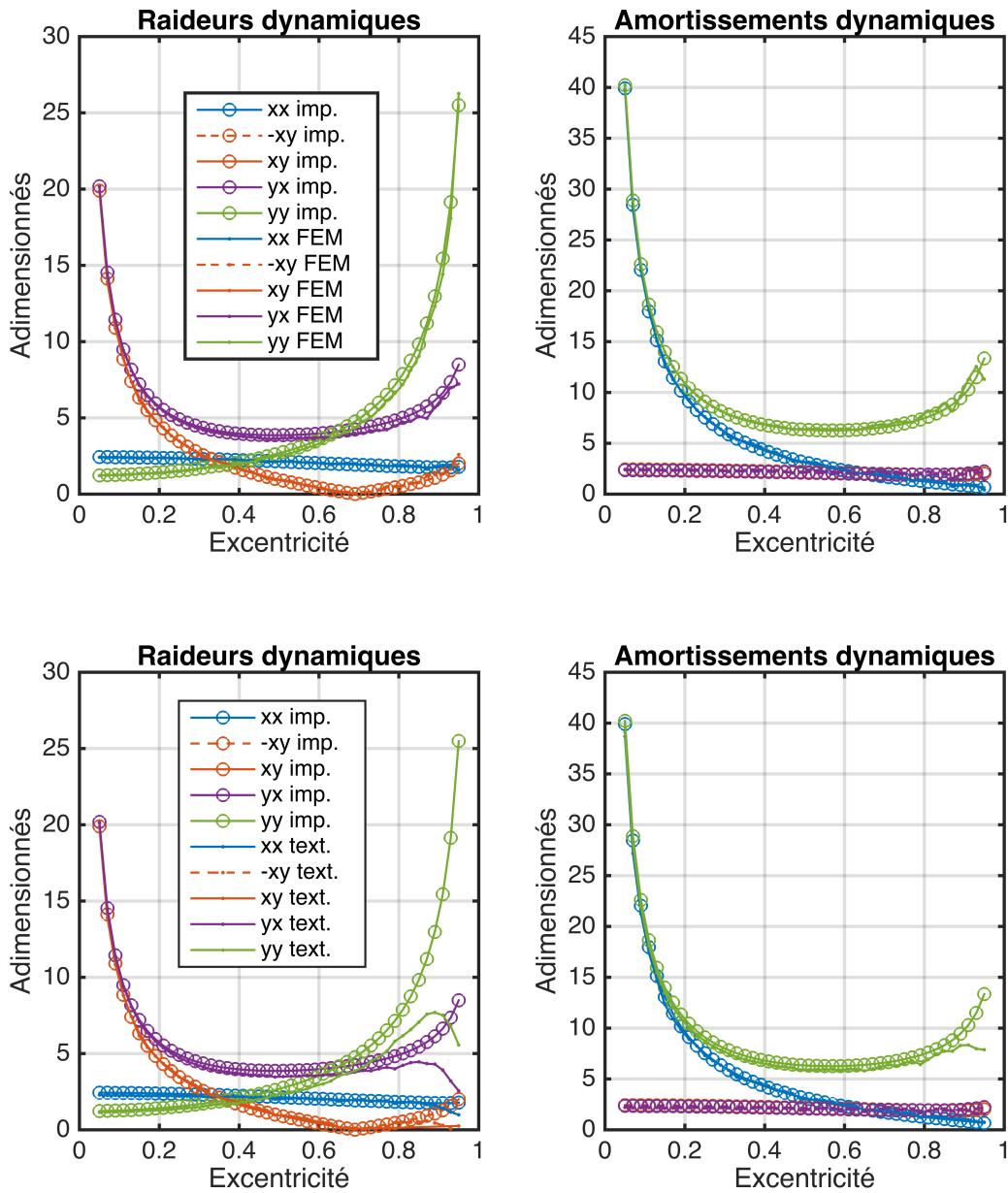


FIGURE 3.7 – Coefficients dynamiques adimensionnés de l’approximation du palier fini π -film par impédance (imp.), π -film par FEM (FEM), et π -film par FEM texturé avec le motif de la figure 2.17(a) (text.)

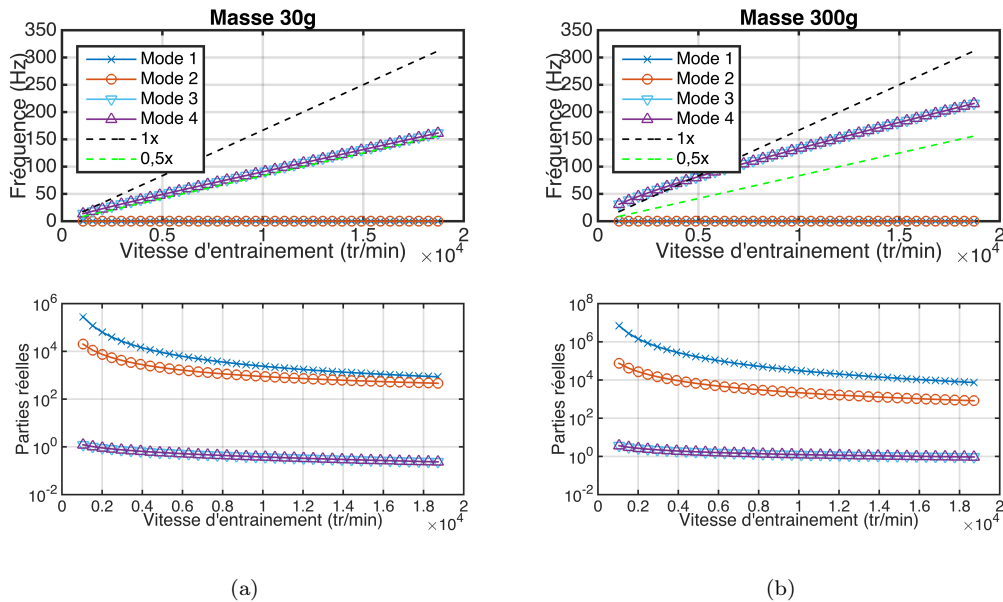


FIGURE 3.8 – Diagramme de Campbell du système (3.3.2.1) avec palier π -film par impédance et une masse de 30 g (a), et 300 g (b)

Dans notre cas test, on remarque que le chargement ajouté influe beaucoup sur l'analyse de la stabilité de la position d'équilibre stationnaire de la masse. En effet, le chargement ajouté pilote l'excentricité de la position d'équilibre, donc les coefficients dynamiques. Avec les dimensions du cas test, avec un chargement de 30 mN et 300 mN, et en faisant varier la vitesse de rotation de l'arbre de 100 tr/min à environ 20000 tr/min, on peut remarquer que le palier est toujours stable (figure 3.8). On remarque de plus que la seule fréquence de rotation du système à être non nulle est proportionnelle à la vitesse de rotation de l'arbre d'un facteur $1/2$. C'est ce que l'on appelle en général le phénomène d'*oil whirl*, dans le cas stable.

En revanche, si l'on allège l'arbre pour que le chargement statique soit de 0,3 mN (correspondant donc à une masse d'environ 30 mg), on remarque que le mode propre de fréquence $\Omega/2$ devient instable vers 14.000 tr/min (figure 3.9). Cela signifie qu'au-delà de 14.000 tr/min, pour un système parfaitement équilibré (le centre de gravité de la masse étant parfaitement sur son axe de rotation) on constatera qu'une perturbation de l'équilibre éloignera la masse de son point d'équilibre stationnaire. A ce stade, on ne peut pourtant pas savoir quel sera le mouvement de l'arbre, bien que l'on puisse parler de bifurcation de Hopf pour le système autonome. En effet, une paire de valeurs propres complexes conjuguées traverse l'axe des imaginaires. Plus exactement, on ne sait pas si c'est une bifurcation de Hopf sur-critique ou sous-critique (*cf* partie 3.3.11).

On peut également comparer les diagrammes de Campbell pour des texturations longitudinales et transversales. On voit que dans le cas transverse, la fréquence de l'*oil whirl* est légèrement décalée. En effet, dans ce cas-là le facteur de flux de Couette n'est pas égal à $\frac{1}{2}$ comme le montre la figure 2.13, et cela influence directement le diagramme de Campbell. Ces conclusions sont en accord avec les considérations de Muszynska [103] et présentent un lien clair entre les équations des différentes physiques pour expliquer ce phénomène.

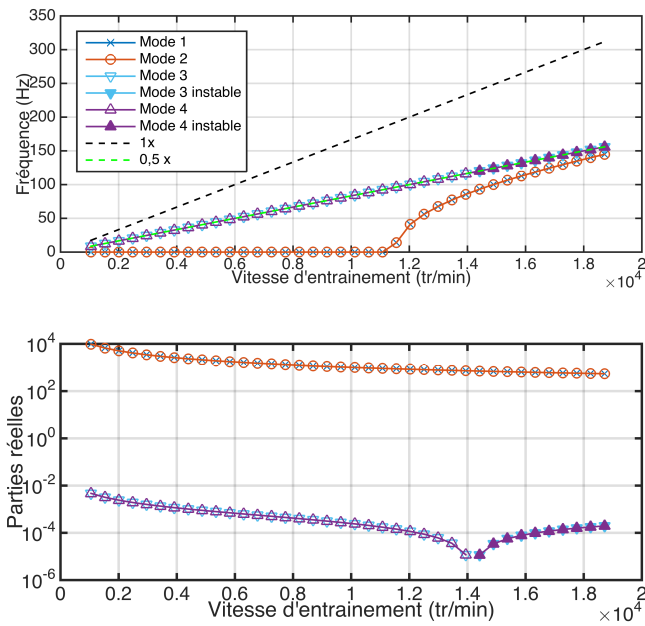


FIGURE 3.9 – Diagramme de Campbell du système (3.3.2.1) avec palier π -film par impédance et une masse de 30 mg

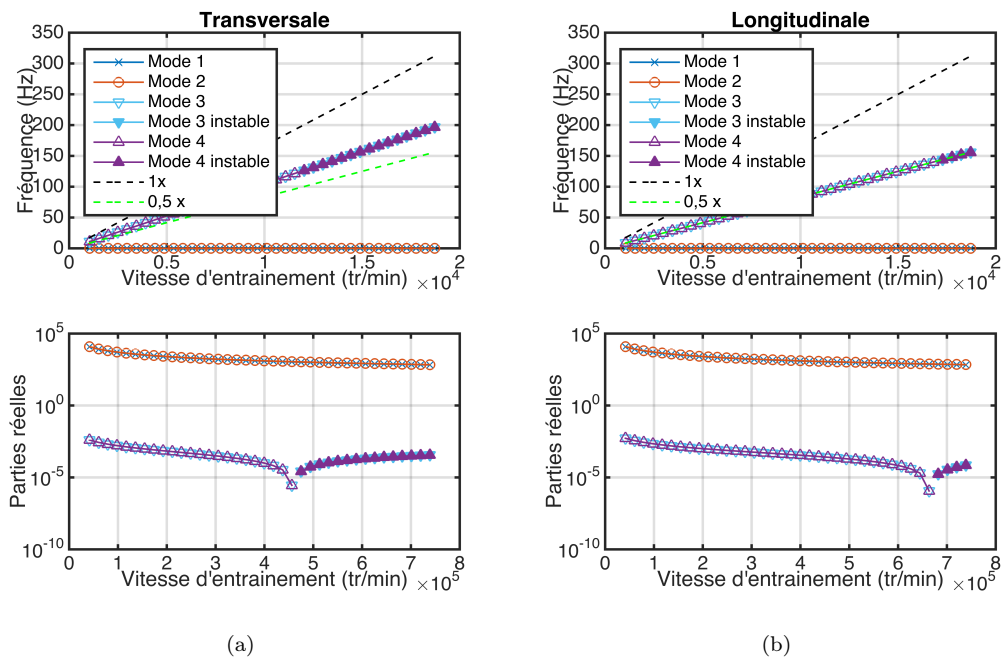


FIGURE 3.10 – Diagramme de Campbell du système (3.3.2.1) avec palier π -film par impédance et une masse de 30 mg avec une surface localement sinusoidale transversale (a) et sinusoidale longitudinale (b) d'amplitude $0,5C_r$

3.3.5 Réponse forcée autour de l'équilibre

De façon également similaire à l'annexe B.4, on peut, pour un balourd donné, estimer l'amplitude de la réponse en déplacement de la structure en linéarisant le système d'équation autour de la position d'équilibre. Par ce même calcul, on est capable d'approximer l'orbite d'un noeud de la structure autour de sa position d'équilibre par une ellipse. L'approximation est cette fois assez forte, et il faut en général que le déplacement autour de l'équilibre soit faible pour avoir une bonne approximation linéaire du mouvement. On cherche donc une solution de la forme $\mathbf{x} = \mathbf{x}_{stat} + \mathbf{x}_0 e^{i\Omega t}$:

$$(-\Omega^2 \mathbb{M} + i\Omega[\mathbb{K}_b + \Omega \mathbb{G} + \mathbb{J}_1] + [\mathbb{K} + \Omega \mathbb{K}_c + \mathbb{J}_2])\mathbf{x}_0 = \mathbf{f}_b \quad (3.3.5.1)$$

En inversant ce système on trouve les amplitudes permettant de reconstituer l'ellipse du mouvement linéarisé. Remarquons que l'on peut effectuer cette linéarisation dans le repère tournant, en inversant les rôles des chargements statique et dynamique. Un exemple est présenté figure 3.11, et les orbites sont comparées à une intégration temporelle, introduite dans le paragraphe suivant.

3.3.6 Intégration temporelle

Lorsque l'amplitude du mouvement est suffisamment grande la force non-linéaire des paliers ne peut plus être linéarisé comme dans les méthodes présentées dans les paragraphes précédents. Ainsi, il est nécessaire d'utiliser des méthodes qui prennent en compte la non-linéarité parmi lesquelles l'intégration temporelle est la plus simple. On peut alors directement intégrer les équations du mouvement (3.1.2.9) à partir de certaines conditions initiales. Il existe beaucoup de schémas d'intégration temporelle différents. Dans cette étude, nous avons principalement utilisé les fonctions `ode15s` et `ode45` pré-implémentées dans Matlab.

Exemple simplifié On peut comparer les orbites obtenues par l'approximation linéaire autour de l'équilibre, et les orbites obtenues par intégration temporelle des équations non-linéaires (3.3.2.1), sur la figure 3.11. Pour des valeurs de balourd élevées (diagramme du centre et diagramme de droite), on observe que l'approximation linéaire dans le repère fixe est assez éloignée de l'intégration temporelle. Nous pouvons commenter cela par rapport au choix du repère, discuté dans la partie 3.1.3. En effet, lorsque le balourd est faible, l'amplitude du mouvement autour de la position d'équilibre est faible, la position est donc principalement pilotée par le chargement statique, et l'on peut approximer relativement fidèlement le mouvement avec la linéarisation des forces de palier autour de l'équilibre (figure en haut à gauche). Lorsque le balourd est plus élevé, il devient prépondérant par rapport au chargement, et l'on voit que l'orbite devient circulaire : la position dans le repère mobile a une amplitude qui diminue. Si le balourd augmente encore, le chargement statique pourra être considéré comme une petite perturbation de la position dans le repère tournant (figure du bas). En revanche, lorsque les deux contributions sont du même ordre, aucun repère n'est profitable (figure en haut à droite). Dans ces cas-là, il est nécessaire d'étudier le mouvement avec des méthodes d'analyse non linéaire, parmi lesquelles l'intégration temporelle est la plus simple.

L'intégration temporelle est une méthode très robuste pour analyser le comportement non-linéaire d'un système mécanique. Son principal défaut est que l'on doit, la plupart du temps, dépenser de longs efforts de calcul avant d'obtenir un résultat de régime établi. Par exemple, la figure 3.12 présente une intégration temporelle du système à partir d'une

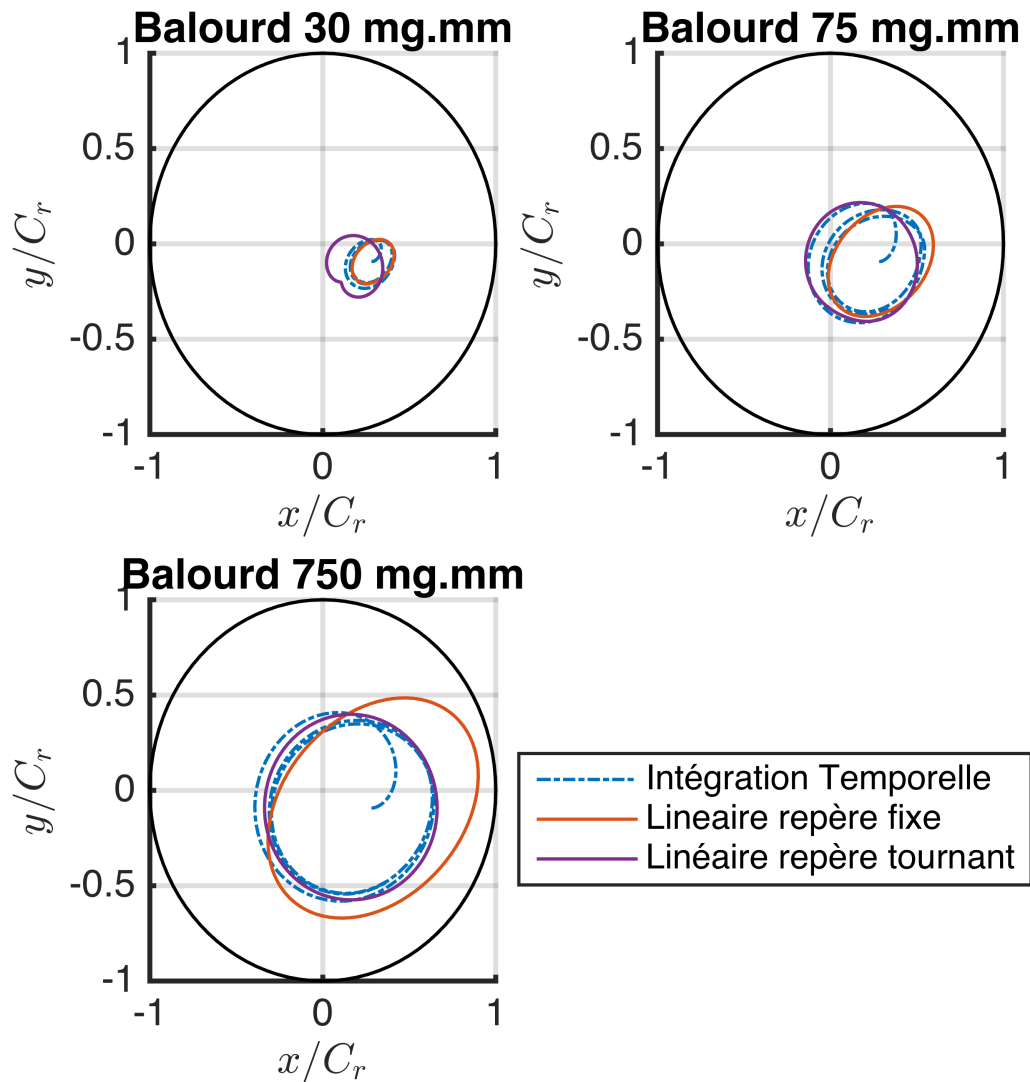


FIGURE 3.11 – Comparaison des orbites obtenues avec l'intégration temporelle (en pointillés bleus), la réponse forcée linéaire autour de l'équilibre dans le repère fixe (en rouge) et dans le repère tournant (en jaune) dans le cas test à 1000 rad/s avec un chargement vertical de 0,3N et trois distances de balourd

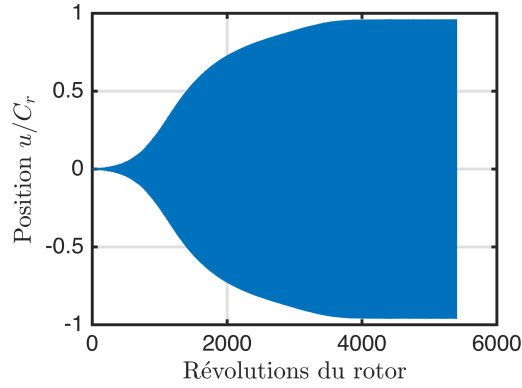


FIGURE 3.12 – Position horizontale adimensionnée lors de l’intégration temporelle pour le système test dans un cas instable : 190.000 tr/min, chargement statique 100 mNm, balourd < 1mg

position instable. Le calcul a duré 14h pour le système à deux degrés de liberté et avec un modèle analytique de forces de palier (environ 5000 périodes nécessaires). Par ailleurs, plus la taille du système et grand, plus il est couteux de calculer le régime transitoire du système. Lorsque le facteur d’amplification ou d’amortissement d’une solution périodique est proche de 0 mais non nul, il est difficile de statuer de la stabilité de l’orbite obtenue, et l’on doit parfois attendre un temps notable pour constater l’amplification ou la diminution de la taille de l’orbite.

3.3.7 Méthode de tir

Afin de s’affranchir des phénomènes transitoires pouvant s’avérer couteux en temps de calcul, et qui ne présentent pas d’intérêts particuliers dans notre étude, nous recherchons directement les solutions périodiques des problèmes présentés partie 3.2.2. Dans ce paragraphe, nous nous intéressons à la méthode de tir. Pour alléger les notations, insérons la fonction F représentant les forces linéaires et non-linéaires du système d’état, adapté du système (3.1.2.9) :

$$\dot{\mathbf{y}} = F(\mathbf{y}) \quad (3.3.7.1)$$

Ayant pour matrice jacobienne $D_{\mathbf{y}}F$.

On part de la définition d’une solution périodique.

$$\mathbf{y}(T, \mathbf{y}_0) = \mathbf{y}_0 \quad (3.3.7.2)$$

On ne connaît pas a priori T sauf dans certains cas non autonomes, et on cherche \mathbf{y}_0 ([107]). L’idée de la méthode de tir est de résoudre ce problème par une méthode numérique de type Newton-Raphson. En différenciant cette condition par rapport aux variables T et \mathbf{y}_0 on obtient le système suivant :

$$\left(\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{y}_0} - \mathbb{I} \right) d\mathbf{y}_0 + \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial T} dT = 0 \quad (3.3.7.3)$$

Comme le soulignent Nayfeh et al., remarquons que :

$$\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial T}(T_0, \mathbf{y}_0) = F(\mathbf{y}_0) \quad (3.3.7.4)$$

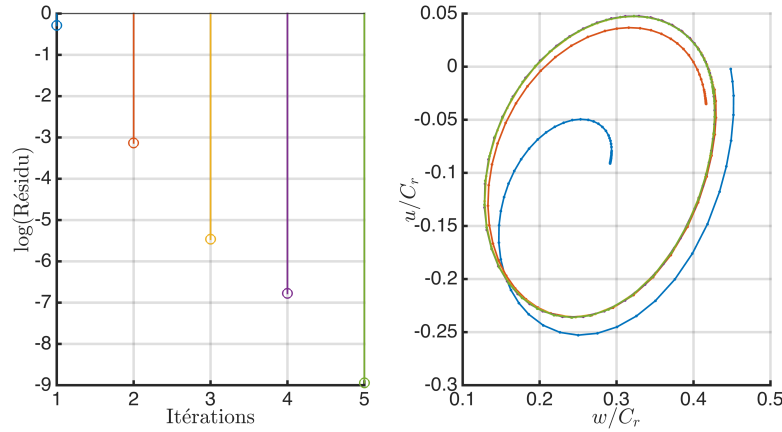


FIGURE 3.13 – Itérations de la méthode de tir dans le cas test à 2000 rad/s avec force verticale de 0.3 N et un balourd de 37.5 mg.mm - A gauche, est représenté le logarithme du résidu de l'équation (3.3.7.2), à droite, les courbes correspondantes à chaque intégration temporelle de l'itération de tir.

Ainsi que :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{y}_0} \right) = D_y F \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{y}_0} \quad (3.3.7.5)$$

Avec

$$\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{y}_0}(0) = \mathbb{I} \quad (3.3.7.6)$$

Lorsque la période T du mouvement est inconnue (système autonome), il faut alors ajouter une équation pour fermer le système, qui correspond à fixer la phase de la solution. Nous avons pris une condition d'orthogonalité entre la correction $d\mathbf{y}_0$ et le champ vectoriel F :

$$F^T(\mathbf{y}_0) \cdot d\mathbf{y}_0 = 0 \quad (3.3.7.7)$$

Nayfeh et al. proposent par ailleurs des conditions alternatives. On peut alors résoudre le système (3.3.7.2) par une méthode de Newton. Lorsque l'on a obtenu une solution de ce système, on est en mesure d'utiliser des algorithmes de continuation pour trouver d'autres solutions de ce système en faisant varier un paramètre (comme par exemple la vitesse de rotation du moteur dans le cas de système non-autonome).

Exemple simplifié Pour l'exemple illustratif (3.3.2.1), le système (3.3.7.1) devient :

$$\dot{\mathbf{y}} = - \begin{bmatrix} \mathbb{M} & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix}^{-1} \left(\begin{bmatrix} 0 & \mathbb{K} \\ I & 0 \end{bmatrix} \mathbf{y} + \begin{bmatrix} \mathbf{f}_b(\Omega) + \mathbf{f}_{ext}(\Omega, \mathbf{y}) \\ 0 \end{bmatrix} \right) \quad (3.3.7.8)$$

La figure 3.13 présente le résultat de la méthode de tir appliquée au système (3.3.2.1). Sur cette figure, nous avons pris la force verticale $W_c = 0.3 \text{ N}$, le balourd $me = 37.5 \text{ mg.mm}$, et la vitesse de rotation $\Omega = 2000 \text{ rad/s}$. On constate sur la figure de gauche que le résidu de la méthode tend relativement rapidement vers 0. Au bout de 2 itérations, les orbites se superposent sur la figure de droite.

3.3.8 Méthode d'équilibrage harmonique

Les solutions périodiques des problèmes présentés partie 3.2.2 peuvent également être approximées efficacement par des méthodes fréquentielles. La pertinence de ces méthodes réside dans le nombre d'harmoniques présentes dans une solution périodique. Ces méthodes sont intéressantes dans notre étude car peu d'harmoniques sont nécessaires pour reconstituer le mouvement de l'arbre dans les paliers.

On rappelle le système dynamique à résoudre :

$$\mathbb{M}\ddot{\mathbf{x}} + [\mathbb{K}_b + \Omega\mathbb{G}]\dot{\mathbf{x}} + [\mathbb{K} + \Omega\mathbb{K}_c]\mathbf{x} = \mathbf{f}_b(\Omega t) + \mathbf{f}_s + \mathbf{f}_{nl}(\Omega t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) \quad (3.3.8.1)$$

Comme dans la méthode de tir, on s'intéresse aux solutions périodiques de ce système. Pour cela, on fait une approximation de la solution par série de Fourier tronquée :

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{X}^0 + \sum_{k=1}^{N_h} (\mathbf{X}^{ck} \cos(k\omega t) + \mathbf{X}^{sk} \sin(k\omega t)) \quad (3.3.8.2)$$

On note alors le vecteur :

$$\mathbf{X} = [\mathbf{X}^0, \mathbf{X}^{c1}, \mathbf{X}^{s1}, \dots, \mathbf{X}^{cN_h}, \mathbf{X}^{sN_h}]^T \quad (3.3.8.3)$$

On insère aussi la notation :

$$\mathbb{T}(\Omega t) = [\mathbb{I}, \cos(\Omega t)\mathbb{I}, \sin(\Omega t)\mathbb{I}, \dots, \cos(N_h\Omega t)\mathbb{I}, \sin(N_h\Omega t)\mathbb{I}] \quad (3.3.8.4)$$

On a donc :

$$\mathbf{x}(t) = \mathbb{T}(\Omega t)\mathbf{X} \quad (3.3.8.5)$$

On insère de même l'opérateur de dérivée fréquentielle :

$$\begin{aligned} \nabla &= \text{diag}(\mathbf{0}, \nabla_1, \dots, \nabla_{N_h}) \\ \nabla_k &= k \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbb{I} \\ -\mathbb{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.3.8.6)$$

Remarquons que l'on a alors :

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \Omega\mathbb{T}(\Omega t)\nabla\mathbf{X} \\ \ddot{\mathbf{x}}(t) &= \Omega^2\mathbb{T}(\Omega t)\nabla^2\mathbf{X} \end{aligned} \quad (3.3.8.7)$$

De même introduisons les notations :

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_b(\Omega t) + \mathbf{f}_s &= \mathbb{T}(\Omega t)\mathbf{F} \\ \mathbf{f}_{nl}(\Omega t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) &= \mathbb{T}(\Omega t)\mathbf{F}_{nl}(\Delta) \end{aligned} \quad (3.3.8.8)$$

En effectuant une projection de Galerkin des équations du mouvement (3.3.8.1) sur la base tronquée de fonctions trigonométriques de l'équation (3.3.8.2), on a :

$$(\mathbf{N}_M\nabla^2 + [\mathbf{N}_{\mathbb{K}_b} + \Omega\mathbf{N}_G]\nabla + [\mathbf{N}_{\mathbb{K}} + \Omega\mathbf{N}_{\mathbb{K}_c}])\mathbf{X} = \mathbf{F} + \mathbf{F}_{nl}(\mathbf{X}) \quad (3.3.8.9)$$

Avec les matrices $\mathbf{N}_\square = \text{diag}(\square, \square, \dots)$, de taille $N_h \times N_{ddl}$. N_{ddl} représente le nombre de degrés de liberté du système (3.3.8.1).

Méthode temps-fréquence alternés

Pour calculer le vecteur \mathbf{F}_{nl} nous avons choisi la méthode des domaines temporels et fréquentiels alternés (méthode AFT, [29]). Cette méthode est basée sur l'usage de la transformée de Fourier discrète.

$$\mathbf{X} \xrightarrow{\mathbb{T}(\Omega t)} (\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) \longrightarrow \mathbf{f}_{nl}(\Omega, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) \xrightarrow{FFT} \mathbf{F}_{nl}(\mathbf{X}) \quad (3.3.8.10)$$

Le système non-linéaire (3.3.8.11) peut alors être résolu pour obtenir \mathbf{X} . Des méthodes de type Newton ou quasi-Newton peuvent être utilisées. Lorsque l'on a obtenu une solution, il est possible d'utiliser des méthodes de continuation par longueur d'arc ou pseudo-longueur d'arc pour déterminer d'autres solutions en changeant un paramètre (comme par exemple la vitesse de rotation du rotor Ω).

Enfin, au cas où l'on cherche des solutions quasi-périodiques, il est nécessaire de générer des solutions sur des bases de Fourier tronquées dépendant de deux fréquences incommensurables. Il existe alors des méthodes utilisant des hyper-temps comme le propose Guskov et al. [67], ou encore d'autres variantes de la HBM comme le propose Zhou et al. [159].

Exemple simplifié Pour le problème (3.3.2.1), il suffit de résoudre le problème :

$$(\mathbf{N}_M \nabla^2 + \mathbf{N}_K) \mathbf{X} = \mathbf{F} + \mathbf{F}_{nl}(\mathbf{X}) \quad (3.3.8.11)$$

On obtient alors la figure 3.14. On constate sur cette figure qu'avec une seule harmonique, le mouvement est relativement bien approximé dans cet exemple. La simulation comptant 15 harmoniques se superpose quasi-parfaitement avec la simulation comptant 5 harmoniques et avec l'intégration temporelle en régime établi.

Remplacement des degrés de liberté linéaires

Dans le cas général, il arrive souvent qu'un certains nombres de degrés de liberté ne soient pas affecté par la force non-linéaire. Pour diminuer la taille du système (3.3.8.11) à résoudre, on peut remplacer les degrés de liberté linéaires du système par leur expression en fonction des degrés de liberté non-linéaires. On pose $\mathbb{H} = \mathbf{N}_M \nabla^2 + [\mathbf{N}_{K_b} + \Omega \mathbf{N}_G] \nabla + [\mathbf{N}_K + \Omega \mathbf{N}_{K_c}]$. En réorganisant ce système on obtient :

$$\begin{bmatrix} \mathbb{H}_{ll} & \mathbb{H}_{lnl} \\ \mathbb{H}_{nll} & \mathbb{H}_{nlnl} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_l \\ \mathbf{X}_{nl} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{nl,l}(\mathbf{X}_{nl}) \\ \mathbf{F}_{nl,nl}(\mathbf{X}_{nl}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{b,l} \\ \mathbf{F}_{b,nl} \end{bmatrix} \quad (3.3.8.12)$$

On a donc :

$$\mathbf{X}_l = \mathbb{H}_{ll}^{-1} [\mathbf{F}_{nl,l}(\mathbf{X}_{nl}) + \mathbf{F}_{b,l} - \mathbb{H}_{lnl} \mathbf{X}_{nl}] \quad (3.3.8.13)$$

Le système devient donc :

$$[\mathbb{H}_{nlnl} - \mathbb{H}_{nll} \mathbb{H}_{ll}^{-1} \mathbb{H}_{lnl}] \mathbf{X}_{nl} = \mathbf{F}_{nl,nl}(\mathbf{X}_{nl}) + \mathbf{F}_{b,nl} - \mathbb{H}_{nll} \mathbb{H}_{ll}^{-1} [\mathbf{F}_{nl,l}(\mathbf{X}_{nl}) + \mathbf{F}_{b,l}] \quad (3.3.8.14)$$

On peut alors résoudre ce système de taille réduite pour trouver les positions \mathbf{X}_{nl} dont on peut déduire les \mathbf{X}_l . Remarquons toutefois que, dans notre cas, ce système peut se simplifier, car on a $\mathbf{F}_{nl,l}(\mathbf{X}_{nl}) = \mathbf{F}_{b,l} = 0$, c'est-à-dire que les degrés de liberté qui contribuent à la force de palier hydrodynamique sont les seuls à recevoir la résultante. De plus, les balourds sont situés en bord de palier. Cela donne donc :

$$[\mathbb{H}_{nlnl} - \mathbb{H}_{nll} \mathbb{H}_{ll}^{-1} \mathbb{H}_{lnl}] \mathbf{X}_{nl} = \mathbf{F}_{nl,nl}(\mathbf{X}_{nl}) + \mathbf{F}_{b,nl} \quad (3.3.8.15)$$

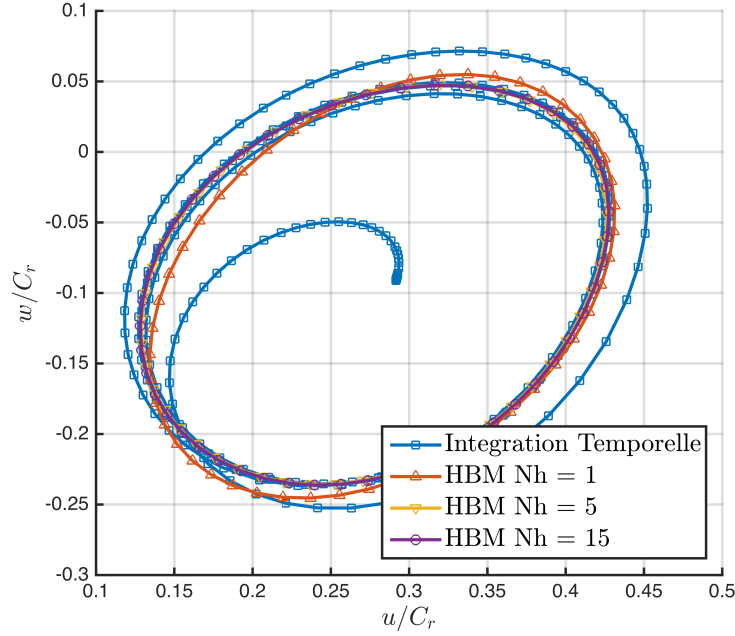


FIGURE 3.14 – Méthode d'équilibrage harmonique avec différents nombres d'harmoniques ($N_h = \{1, 5, 15\}$) dans la reconstitution de la solution périodique, comparées à l'intégration temporelle, dans le cas test à 2000 rad/s avec un chargement vertical de 0,3 N et un balourd de 37.5 mg.mm

3.3.9 Méthodes de continuation des solutions

Nous avons vu qu'avec la méthode de tir et la méthode d'équilibrage harmonique, la recherche de solutions périodiques du système dynamique peut se mettre sous la forme d'un système algébrique. On peut avoir besoin de faire varier un paramètre pour étudier un système mécanique. Dans notre étude par exemple, on peut s'intéresser à faire varier la vitesse de rotation du moteur, le chargement statique, le chargement dynamique (balourd), ou même la viscosité ou le nombre de Sommerfeld. Nous exprimons le paramètre de continuation par la lettre κ . Le vecteur \tilde{x} peut être par exemple représenter \mathbf{x}_0 dans la méthode de tir, ou \mathbf{X} dans la HBM. On a alors, en notant H le système algébrique issu de (3.3.7.2) ou (3.3.8.11) :

$$H(\tilde{x}, \kappa) = 0 \quad (3.3.9.1)$$

Appelons (\tilde{x}_0, κ_0) le couple obtenu à l'initialisation, vérifiant le système (3.3.9.1).

On peut alors utiliser une méthode de prédiction-corrrection illustrée sur le schéma 3.15 adapté de [127] à nos notations. Il s'agit alors, à partir de la solution connue au préalable (\tilde{x}_0, κ_0) et du système algébrique de prédire une solution en faisant varier le paramètre κ autour de κ_0 . Il est alors nécessaire d'utiliser une méthode de correction pour que vérifier de nouveau le système algébrique (3.3.9.1) par itérations à partir de la solution prédite.

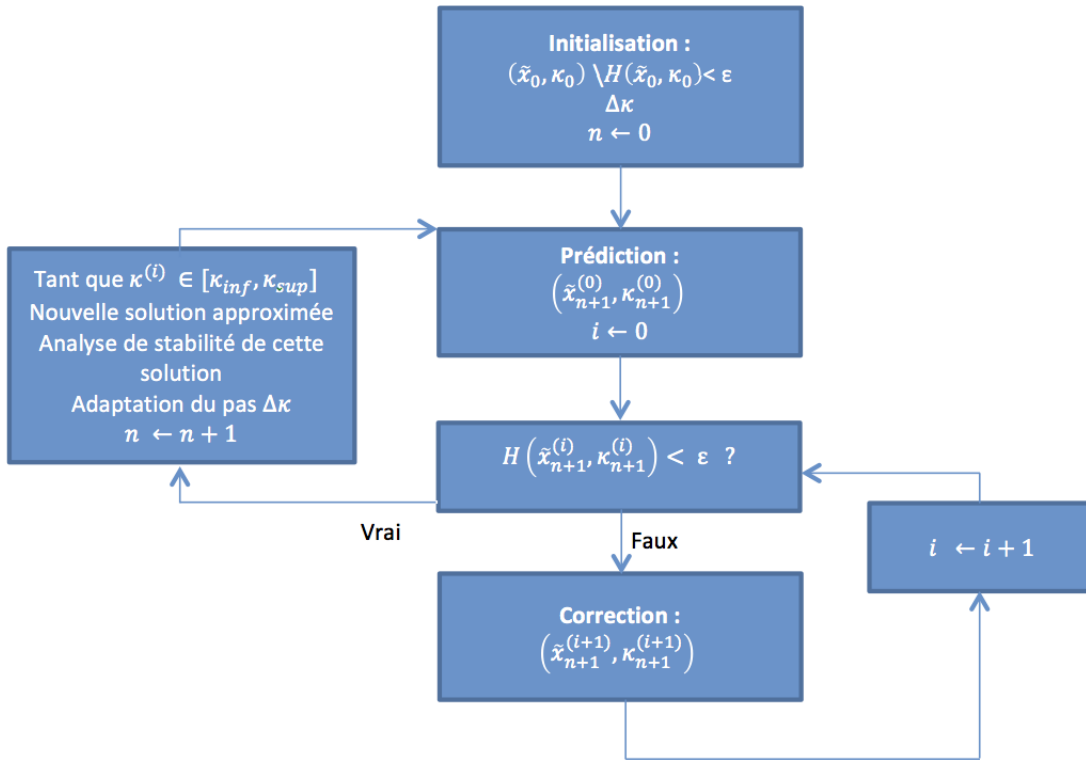


FIGURE 3.15 – Schéma de l'algorithme de prédiction-correction [127]

Méthode de prédiction tangente

En écrivant le développement à l'ordre 1 de H par rapport aux variables (\tilde{x}, κ) et en injectant dans (3.3.9.1) on a :

$$\begin{aligned} D_{\tilde{x}}H(\tilde{x}, \kappa) \cdot \Delta \tilde{x} + D_{\kappa}H(\tilde{x}, \kappa) \cdot \Delta \kappa &= 0 \\ \Delta \tilde{x} &= -\Delta \kappa D_{\tilde{x}}H(\tilde{x}, \kappa)^{-1} D_{\kappa}H(\tilde{x}, \kappa) \end{aligned} \quad (3.3.9.2)$$

On impose alors $\Delta \tilde{x}^T \Delta \tilde{x} + \Delta \kappa^2 = 1$. Cela nous permet de déterminer $\Delta \kappa$. Enfin, on a :

$$\begin{aligned} \tilde{x}_{n+1}^{(0)} &= \tilde{x}_n + \Delta \tilde{x} \\ \kappa_{n+1}^{(0)} &= \kappa_n + \Delta \kappa \end{aligned} \quad (3.3.9.3)$$

Méthode de correction

Lorsque l'on obtient une solution au rang n , (\tilde{x}_n, κ_n) et que l'on prédit $(\tilde{x}_{n+1}^{(0)}, \kappa_{n+1}^{(0)})$, il est nécessaire, comme présenté sur le schéma de la figure 3.15, de corriger la prédiction pour obtenir la solution $(\tilde{x}_{n+1}, \kappa_{n+1})$.

Dans le programme, nous avons choisi de corriger simultanément \tilde{x} et κ . La méthode de Newton nous donne :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} D_{\tilde{x}}H(\tilde{x}_{n+1}^{(i)}, \kappa_{n+1}^{(i)}) & D_{\kappa}H(\tilde{x}_{n+1}^{(i)}, \kappa_{n+1}^{(i)}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \tilde{x} \\ \Delta \kappa \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -H(\tilde{x}_{n+1}^{(i)}, \kappa_{n+1}^{(i)}) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \tilde{x}_{n+1}^{(i+1)}; \kappa_{n+1}^{(i+1)} \end{bmatrix}^T &= \begin{bmatrix} \tilde{x}_{n+1}^{(i)}; \kappa_{n+1}^{(i)} \end{bmatrix}^T + \begin{bmatrix} \Delta \tilde{x}, \Delta \kappa \end{bmatrix}^T \end{aligned} \quad (3.3.9.4)$$

Il manque une équation pour inverser le système de Newton. On peut soit choisir d'utiliser la pseudo-inverse de Moore-Penrose, soit d'ajouter une équation comme par exemple l'orthogonalité entre le vecteur tangent et le vecteur $[\Delta\tilde{x}, \Delta\kappa]^T$.

3.3.10 Analyse de stabilité des solutions périodiques

Une fois que l'on obtient des solutions périodiques du système dynamique par méthode de tir ou par méthode d'équilibrage harmonique, il peut être utile de connaître la stabilité de la solution, notamment pour prédire si cette solution pourra se retrouver dans une expérience réelle ou une intégration temporelle. De plus, une solution instable peut mener parfois à une amplification du mouvement, pouvant parfois déclencher des accidents. La simulation peut permettre de prédire ces comportements dès le dimensionnement afin de prévoir une plage de fonctionnement dans une zone stable [107].

Théorie de Floquet

Sur le même principe que l'étude de la stabilité des points d'équilibre [107], on perturbe une solution périodique $\mathbf{y}_0(t)$ avec une petite perturbation $\mathbf{z}(t)$:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}_0(t) + \mathbf{z}(t) \quad (3.3.10.1)$$

En injectant cela dans les équations du mouvement (3.3.7.1) et en effectuant un développement de Taylor à l'ordre 1 en $\mathbf{x}_0(t)$ de F on obtient :

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = J(t)\mathbf{z}(t) \quad (3.3.10.2)$$

Avec $J(t)$ la jacobienne de F en \mathbf{x}_0 . Ce système de dimension N possède N solutions linéairement indépendantes $\mathbf{z}_n(t)$ avec lesquelles on peut reconstituer toute solution :

$$\mathbf{z}(t) = \sum_{n=1}^N c_n \mathbf{z}_n(t) \quad (3.3.10.3)$$

Toutes les solutions fondamentales peuvent s'exprimer :

$$\mathbf{z}_n(t) = p_n(t)e^{\alpha_n t} \quad (3.3.10.4)$$

avec p_n T -périodique et α_n un nombre complexe [107].

On a alors :

$$\mathbf{z}_n(t + T) = \mathbf{z}_n(t)e^{\alpha_n T} \quad (3.3.10.5)$$

Les nombres complexes (α_n) sont les multiplicateurs de Floquet. On remarque par ailleurs que si un α_n vérifie (3.3.10.5) alors $\alpha_n + 2ik\pi/T$ le vérifie aussi. A partir de (3.3.10.5), on peut connaître la stabilité de \mathbf{x}_0 en analysant la partie réelle des (α_n) . On remarque aussi que la matrice de monodromie définie dans la méthode de tir est la matrice composée des vecteurs $\mathbf{y}_n(T)$. Les exposants de Floquet sont donc ses valeurs propres. On peut ainsi obtenir directement l'information de la stabilité des solutions dans la méthode de tir. Ce n'est pas exactement le cas dans la HBM pour laquelle on peut cependant calculer la matrice de monodromie par intégration numérique de l'équation (3.3.10.2). Les méthodes de calcul de la matrice de monodromie sont listées dans [114]. Parmi ces méthodes, nous avons sélectionné la méthode des exponentielles, qui présente de bonnes performances dans notre application. Cette méthode approxime la matrice jacobienne J par une matrice

constante sur chaque sous intervalles de discrétisation en temps de l'équation (3.3.10.2). En notant \mathbf{H} la matrice de monodromie, on a :

$$\mathbf{H} = [\mathbf{y}_n(0)] = [\mathbf{y}_n(T)] \approx \tilde{\mathbf{H}} = \prod_{k=1}^{n_d} e^{J_k(t_k - t_{k-1})} \quad (3.3.10.6)$$

Avec J_k obtenue à partir des valeurs discrétisées de J sur les n_d points de la période. L'exponentielle de cette relation est bien entendu une exponentielle matricielle. Peletan et al. [114] proposent de prendre $J_k = (J(t_k) + J(t_{k-1}))/2$. La qualité de l'approximation dépend alors du nombre de points n_d choisis pour discrétiser la période, puisque l'on a :

$$\lim_{n_d \rightarrow +\infty} \tilde{\mathbf{H}} = \mathbf{H} \quad (3.3.10.7)$$

Exposants de Lyapounov du système HBM

A partir du système de la HBM, une autre méthode peut servir à étudier la stabilité, sans passer par le calcul des multiplicateurs de Floquet. Cette méthode est basée sur la supposition que le vecteur des composantes harmoniques \mathbf{X} dépend du temps, et a directement inspiré la méthode de HBM à coefficient variable présenté par Zhou et al. dans [159]. Nous avons donc :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \mathbb{T}\mathbf{X} \\ \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbb{T}(\mathbf{X}' + \Omega\nabla\mathbf{X}) \\ \ddot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbb{T}(\mathbf{X}'' + 2\Omega\nabla\mathbf{X}' + \Omega^2\nabla^2\mathbf{X}) \end{aligned} \quad (3.3.10.8)$$

En injectant alors dans 3.3.8.1 et en utilisant encore la projection de Galerkin sur l'espace trigonométrique on a :

$$\mathbf{N}_{\mathbb{M}}\mathbf{X}'' + (2\Omega\mathbf{N}_{\mathbb{M}}\nabla + \mathbf{N}_{\mathbb{K}_b} + \Omega\mathbf{N}_{\mathbb{G}})\mathbf{X}' + (\mathbf{N}_{\mathbb{M}}\nabla^2 + [\mathbf{N}_{\mathbb{K}_b} + \Omega\mathbf{N}_{\mathbb{G}}]\nabla + [\mathbf{N}_{\mathbb{K}} + \Omega\mathbf{N}_{\mathbb{K}_c}])\mathbf{X} = \mathbf{F} + \mathbf{F}_{nl}(\mathbf{X}, \mathbf{X}') \quad (3.3.10.9)$$

La solution classique de la HBM présentée auparavant constitue simplement la solution stationnaire de ce système. Autour de la position stationnaire, on peut donc calculer la stabilité, comme dans un système dynamique classique. Il est donc nécessaire de linéariser la force non-linéaire $\mathbf{F}_{nl}(\mathbf{X}, \mathbf{X}')$, donc de calculer son jacobien :

$$\mathbb{M}_{VC}\mathbf{X}'' + (\mathbb{C}_{VC} + \mathbb{J}_{VC1})\mathbf{X}' + (\mathbb{K}_{VC} + \mathbb{J}_{VC2})\mathbf{X} = 0 \quad (3.3.10.10)$$

On peut de la même manière le mettre sous la forme d'un problème aux valeurs propre en passant le système en variables d'état $(\mathbf{X}, \mathbf{X}')$.

Remarquons que :

$$[\mathbf{F}_{nl}]_k = \sum_{j=0}^{N_h-1} \mathbf{f}_{nl}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) e^{-2\pi i \frac{jk}{N_h}} \quad (3.3.10.11)$$

D'où

$$\frac{\partial[\mathbf{F}_{nl}]_k}{\partial\mathbf{X}} = \sum_{j=0}^{N_h-1} \frac{\partial\mathbf{f}_{nl}(\mathbb{T}\mathbf{X}, \mathbb{T}\mathbf{X}' + \Omega\mathbb{T}\nabla\mathbf{X})}{\partial\mathbf{X}} e^{-2\pi i \frac{jk}{N_h}} \quad (3.3.10.12)$$

Ce qui donne :

$$\frac{\partial[\mathbf{F}_{nl}]_k}{\partial\mathbf{X}} = \sum_{j=0}^{N_h-1} \left(\mathbb{T} \frac{\partial\mathbf{f}_{nl}}{\partial\mathbf{x}} + \Omega\mathbb{T}\nabla \frac{\partial\mathbf{f}_{nl}}{\partial\dot{\mathbf{x}}} \right) e^{-2\pi i \frac{jk}{N_h}} \quad (3.3.10.13)$$

Rappelons qu'à partir des modèles de paliers, on peut calculer analytiquement ou semi-analytiquement les grandeurs $\frac{\partial \mathbf{f}_{nl}}{\partial \mathbf{x}}$ et $\frac{\partial \mathbf{f}_{nl}}{\partial \dot{\mathbf{x}}}$ (détaillés dans le chapitre 2). D'où en distribuant l'exponentielle et en factorisant les sommes par les matrices, et en notant $\mathbf{F}_{nl,\mathbf{x}}$ et $\mathbf{F}_{nl,\dot{\mathbf{x}}}$ les transformées de Fourier discrètes respectives de $\frac{\partial \mathbf{f}_{nl}}{\partial \mathbf{x}}$ et $\frac{\partial \mathbf{f}_{nl}}{\partial \dot{\mathbf{x}}}$:

$$\mathbb{J}_{VC2} = -\frac{\partial[\mathbf{F}_{nl}]}{\partial \mathbf{X}} = -\mathbb{T}\mathbf{F}_{nl,\mathbf{x}} - \Omega\mathbb{T}\nabla\mathbf{F}_{nl,\dot{\mathbf{x}}} \quad (3.3.10.14)$$

Par le même raisonnement on a :

$$\mathbb{J}_{VC1} = -\frac{\partial[\mathbf{F}_{nl}]}{\partial \mathbf{X}'} = -\mathbb{T}\mathbf{F}_{nl,\dot{\mathbf{x}}} \quad (3.3.10.15)$$

Enfin, en posant $\mathbb{M}_{VC} = \mathbf{N}_{\mathbb{M}}$, $\mathbb{C}_{VC} = 2\Omega\mathbf{N}_{\mathbb{M}}\nabla + \mathbf{N}_{\mathbb{K}_b} + \Omega\mathbf{N}_{\mathbb{G}}$ et $\mathbb{K}_{VC} = \mathbf{N}_{\mathbb{M}}\nabla^2 + [\mathbf{N}_{\mathbb{K}_b} + \Omega\mathbf{N}_{\mathbb{G}}]\nabla + [\mathbf{N}_{\mathbb{K}} + \Omega\mathbf{N}_{\mathbb{K}_c}]$, on peut linéariser le système (3.3.10.10), exactement comme le système (3.3.4.1) :

On cherche alors les solutions sous la forme $\mathbf{X} = \mathbf{X}_{HBM} + \mathbf{X}_0 e^{\lambda t}$:

$$\left[\lambda^2 \mathbb{M}_{VC} + \lambda(\mathbb{C}_{VC} + \mathbb{J}_{VC1}) + (\mathbb{K}_{VC} + \mathbb{J}_{VC2}) \right] \mathbf{X}_0 = 0 \quad (3.3.10.16)$$

$$\mathbb{A}_{VC0} \begin{bmatrix} \lambda \mathbf{X}_0 \\ \mathbf{X}_0 \end{bmatrix} = \lambda \mathbb{B}_{VC0} \begin{bmatrix} \lambda \mathbf{X}_0 \\ \mathbf{X}_0 \end{bmatrix} \quad (3.3.10.17)$$

Avec :

$$\mathbb{A}_{VC0} = -\begin{bmatrix} \mathbb{C}_{VC} + \mathbb{J}_{VC1} & \mathbb{K}_{VC} + \mathbb{J}_{VC2} \\ I & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbb{B}_{VC0} = \begin{bmatrix} \mathbb{M}_{VC} & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix} \quad (3.3.10.18)$$

On peut donc statuer de la stabilité des solutions périodiques de la HBM en résolvant simplement le problème aux valeurs propres du système (3.3.10.16).

Illustration de la méthode de continuation : oscillateur de Duffing Avant d'appliquer la méthode de continuation au palier hydrodynamique qui sera présenté au paragraphe 3.3.12, nous nous proposons ici de l'illustrer et de la valider sur un exemple académique : l'oscillateur de Duffing. Pour cet exemple, nous appliquons la méthode de tir et la HBM au système dynamique :

$$\ddot{\mathbf{x}} + 0.1 \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{x} + \mathbf{x}^3 = 0.1 \cos(\omega t) \quad (3.3.10.19)$$

La figure 3.20 présente l'amplitude des vibrations pour une continuation sur le paramètre ω du système (3.3.10.19). La méthode de tir et la méthode HBM donnent bien des résultats proches à la fois pour l'amplitude de vibration et la stabilité des cycles limites.

3.3.11 Bifurcations du palier hydrodynamique

Définitions de la stabilité

Nous avons à plusieurs reprises mentionné la "stabilité" du système dynamique, sans la définir correctement. En fait, nous utiliserons dans ce mémoire deux définitions de la stabilité locale. La première définition, la plus vulgarisée en mécanique, est la notion de stabilité asymptotique, la seconde définition concerne la stabilité uniforme appropriée à l'étude des vibrations. Afin de définir correctement ces notions, insérons la notation de

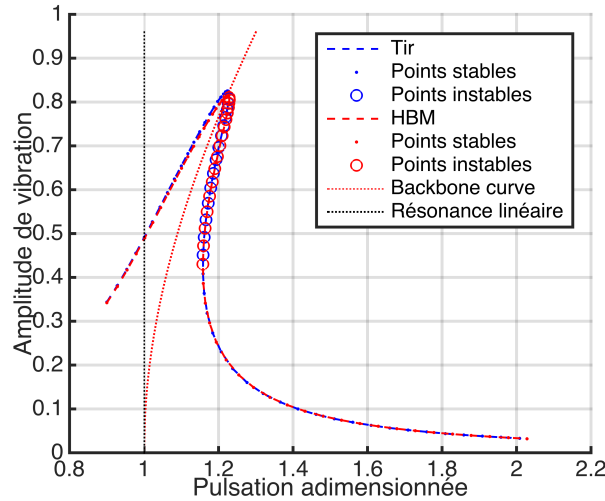


FIGURE 3.16 – Exemple de continuation des solutions périodiques avec analyse de stabilité, par méthode de tir et HBM à 4 harmoniques, dans le cas de l’oscillateur de Duffing

l’opérateur d’évolution qui suppose que pour un certain $t \in T$ avec T un sous ensemble discret ou continu de l’espace réel, défini dans l’espace d’état X ,

$$\varphi^t : X \rightarrow X \quad (3.3.11.1)$$

qui transforme un état initial $x_0 \in X$ en l’état à l’instant t , $x_t \in X$:

$$x_t = \varphi^t x_0 \quad (3.3.11.2)$$

On peut alors définir la notion d’invariant d’un système dynamique $\{T, X, \varphi^t\}$ comme un sous-ensemble $S \subset X$ tel que $x_0 \in S$ implique que $\varphi^t x_0 \in S$ pour tout $t \in T$.

Stabilité asymptotique Un invariant S_0 est dit asymptotiquement stable si il existe un voisinage $U_0 \supset S_0$ tel que $\varphi^t x \rightarrow S_0$ pour tout $x \in U_0$ quand $t \rightarrow +\infty$. En d’autres termes, si on perturbe un point de l’invariant S_0 , il se rapprochera de S_0 dans un voisinage aussi petit que l’on veut au bout d’un certain temps.

Stabilité de Lyapounov Un invariant S_0 est dit stable au sens de Lyapounov, si sur un voisinage suffisamment petit $U \supset S_0$ il existe un voisinage $V \supset S_0$ tel que $\varphi^t x \in U$ pour tout $x \in V$ et pour tout $t > t_0$. Autrement dit, si un ensemble S_0 est stable, une perturbation suffisamment petite ne doit pas la faire sortir d’un voisinage. Remarquons qu’il existe des objets stables asymptotiquement et non au sens de Lyapounov et inversement.

Bifurcation Lorsque l’on modifie la stabilité du système en faisant varier un paramètre, on parle de bifurcation. Ce phénomène est largement documenté (le lecteur pourra se référer par exemple à [84]) et nous présenterons ici uniquement les bifurcations que nous avons constaté dans le cas du palier hydrodynamique. En fait, ce phénomène est plus large que la simple étude de stabilité des invariants, car il est défini comme l’apparence d’un portrait de phase non-équivalent topologiquement sous l’effet de variation d’un paramètre. Les changements de stabilité asymptotique et au sens de Lyapounov sont donc inclus dans

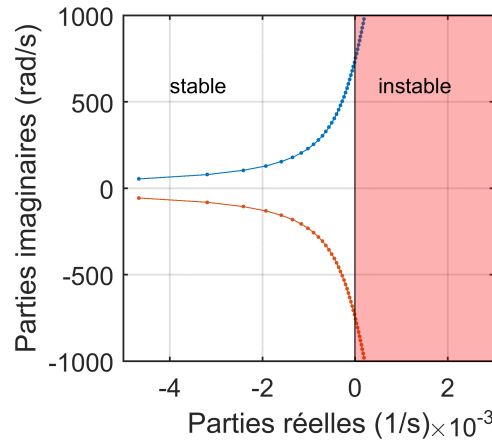


FIGURE 3.17 – Exposants de Lyapounov de la figure 3.9, indiquant une bifurcation de Hopf pour le palier π -film faiblement chargé

les bifurcations. On parle alors de diagramme de bifurcation lorsque l'on représente une partie du portrait de phase en fonction du paramètre faisant naître la bifurcation. Dans notre application, le principal paramètre étudié pouvant faire émerger une bifurcation est la vitesse de rotation de l'arbre. Néanmoins, on verra que l'amplitude du forçage, ou le balourd dans le repère fixe, ainsi que l'amplitude du chargement statique permettent également d'obtenir les mêmes types de bifurcation.

Bifurcation de Hopf

La bifurcation de Hopf est une bifurcation entre solution stationnaire et solution oscillante. La position d'équilibre stationnaire, sous forme de point d'équilibre, devient instable (schéma de la figure 3.18). Pour étudier la stabilité d'un point fixe, on peut utiliser les valeurs propres de la jacobienne $D_y F$ du système dynamique (3.3.7.1) en fonction du paramètre en question, explicitée par l'équation (3.3.4.6) pour notre système. Comme nous l'avons évoqué dans la partie 3.3.4, si toutes les parties réelles des exposants de Lyapounov (*i.e.* les valeurs propres de la matrice jacobienne) sont négatives, alors le système est stable. On parle de bifurcation de Hopf lorsqu'une paire d'exposants imaginaires a des parties réelles qui deviennent négatives. La figure 3.17 est une adaptation de la figure 3.9 en traçant les valeurs propres de la jacobienne du système d'état dans le plan complexe.

Notons que l'on distingue deux types de bifurcations de Hopf, les bifurcations sur-critiques, qui donnent lieu à un cycle limite stable après la bifurcation, et les bifurcations sous-critiques, pour lesquelles on constate un cycle limite instable avant la bifurcation, le "sens" de la bifurcation étant communément admis par le sens de la perte de stabilité du point fixe en fonction de la variation du paramètre, bien que ce sens soit totalement arbitraire. Ces bifurcations sont schématisées sur la figure 3.18.

Bifurcation *flip* ou dédoublement de période

Une orbite est un invariant stable au sens de Lyapounov. Cependant, en faisant varier un paramètre, il peut se produire un dédoublement de période, ce qui constitue une bifurcation (parfois appelée *flip*). On caractérise ce genre de bifurcation par la sortie d'au moins un multiplicateur de Floquet du cercle unité, par le point $(-1; 0)$. C'est la bifurcation

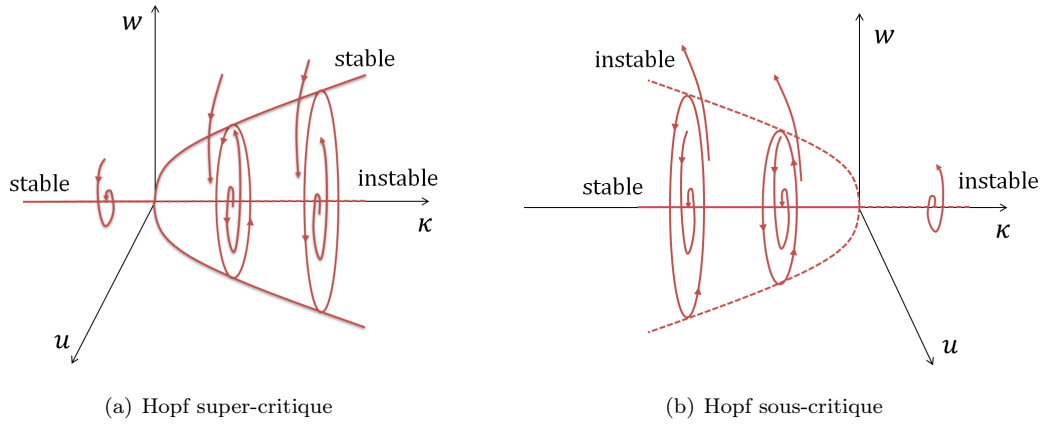


FIGURE 3.18 – Schématisation des bifurcations de Hopf super-critique et Hopf sous-critique (adapté de [84])

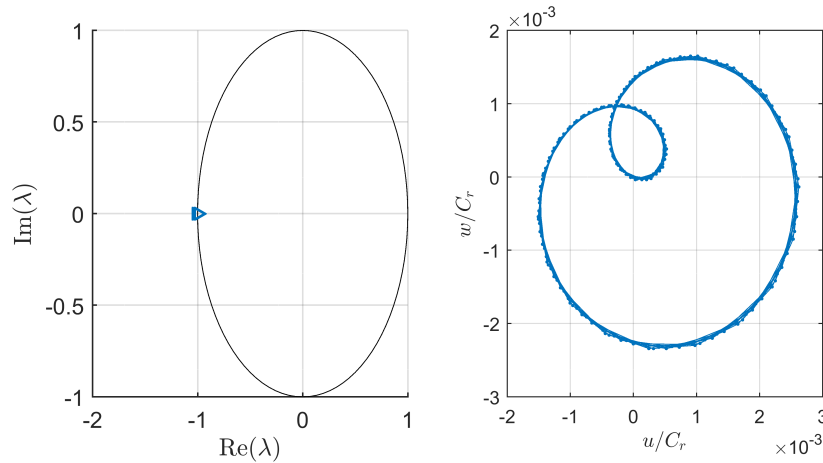


FIGURE 3.19 – Bifurcation de dédoublement de période sous-critique; multiplicateur de Floquet principal (à gauche) et orbite perturbée au début de l'intégration temporelle (à droite); l'orbite est légèrement divergente, et donne un cycle limite équivalent à celui de la figure 3.12 après une intégration longue

concernée par l'*oil whirl* lorsqu'il est situé à la fréquence $\Omega/2$. Un exemple de bifurcation est donné figure 3.19, reprenant le système test du paragraphe 3.3.2, avec un forçage très faible de 0.25 mg.mm.

Bifurcation de Hopf II ou Neimark-Sacker

De la même manière que pour la bifurcation de *flip*, la bifurcation de Neimark-Sacker se produit lors d'une perte de stabilité d'un cycle limite. Cette perte de stabilité se caractérise par la sortie de deux multiplicateurs de Floquet conjugués du cercle unité, avec des parties imaginaires non nulles (exemple figure 3.22). Il s'en suit l'apparition qu'une nouvelle fréquence, en général non commensurable avec la fréquence du cycle limite précédant la bifurcation, ce qui se traduit par une orbite quasi-périodique.

Ce type de bifurcation peut aussi être caractérisé par une bifurcation de Hopf du système HBM comme présenté dans la partie 3.3.10. Enfin, soulignons que la méthode de Zhou *etal.* propose d'appliquer une nouvelle HBM du système (3.3.10.10) à une nouvelle

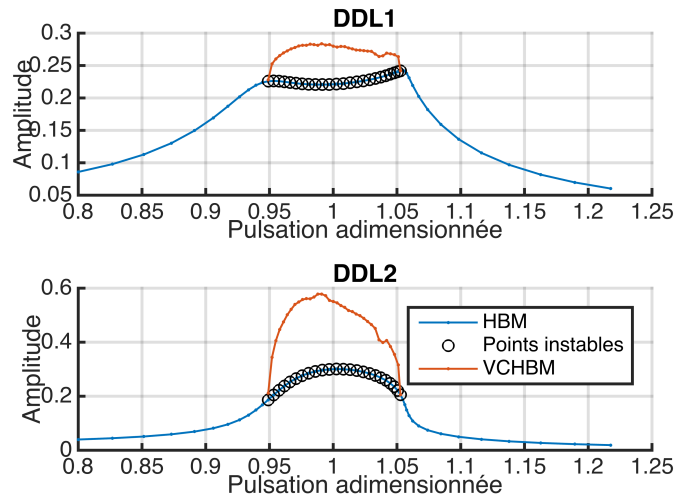


FIGURE 3.20 – Exemple de continuation des solutions périodiques et quasi-périodiques, par méthode de VCHBM avec 3 harmoniques pour la fréquence synchrone, et 5 pour la deuxième fréquence, dans le cas de l’oscillateur de NES régit par l’équation (3.3.11.3) - $\epsilon = 0.1$, $\lambda = 0.4$, $k_{nl} = 5$, $A = 0.3$

fréquence, ce qui leur permet de trouver des solutions quasi-périodiques. Ils ont appelé cette méthode l’équilibrage harmonique à coefficients variables (*Variable Coefficient Harmonic Balance Method*, VCHBM). La seconde fréquence est a priori inconnue, et ils proposent de l’initialiser à partir de la perte de stabilité du système (3.3.10.16), en utilisant comme point de départ le vecteur qui devient instable au point de bifurcation et sa valeur propre.

Illustration de la méthode multi-fréquentielle : système NES Afin de valider les routines du programme associé, tant pour la continuation ou la stabilité que pour la méthode de HBM à coefficients variables, nous avons reproduit le comportement du puits d’énergie non-linéaire (*Nonlinear Energy Sink*, NES) présenté par Zhou et al. dans [159]. Cet exemple est intéressant car il possède deux bifurcations de Neimark-Sacker sur-critiques qui pourraient être également présentes dans un système de rotor lubrifié par palier hydrodynamiques texturés. Cet exemple est décrit par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + \epsilon\lambda(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + x_1 + \epsilon k_{nl}(x_1 - x_2)^3 = \epsilon A \cos(\omega t) \\ \ddot{x}_2 + \epsilon\lambda(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + \epsilon k_{nl}(x_2 - x_1)^3 = 0 \end{cases} \quad (3.3.11.3)$$

L’amplitude du mouvement est présentée sur la figure 3.3.11.3. On voit qu’en dehors de l’intervalle $[0.95; 1.05]$, la fréquence synchrone est stable, tandis qu’elle perd sa stabilité à l’intérieur de l’intervalle. Ainsi, l’amplitude du mouvement atteint une seconde branche, représentée en rouge, où la contribution d’une deuxième fréquence augmente l’amplitude du mouvement.

3.3.12 Application de l’étude de stabilité non linéaire au cas test

On se propose dans ce paragraphe d’appliquer les méthodes de continuation au cas test (3.3.2.1) pour illustrer les notions que l’on a introduites. Dans cet exemple, on ajoute une matrice de raideur $\mathbb{K} = 10^6 \mathbb{M}$ afin de créer artificiellement un mode de résonance à 1000 rad/s . On calcule alors différentes réponses forcées à l’aide de la HBM, et on étudie la

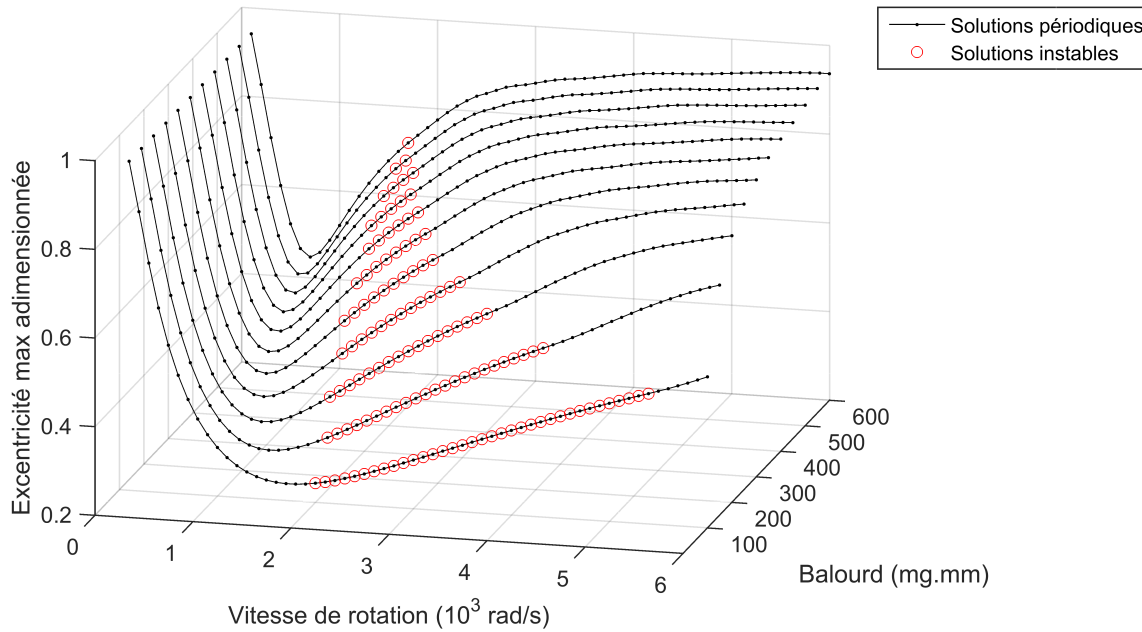


FIGURE 3.21 – Continuation des solutions pour le système test (3.3.2.1), en faisant varier le balourd dans le cas test, avec palier lisse, et cavitation de type Reynolds, avec $p_{cav} < p_{atm}$

stabilité des solutions périodiques grâce aux exposants de Lyapounov du système HBM. La figure 3.21 présente différentes courbes obtenues pour des balourds de 100 mg.mm à 600 mg.mm avec un pas de 50 mg.mm. Le système est soumis à un chargement statique de 0.3 N. On voit qu'à faibles vitesses, le chargement contraint le rotor à rester au fond du palier, la vitesse de rotation étant trop faible pour créer une portance suffisante, l'excentricité représentée est en fait quasi invariante dans le repère fixe. Le système est stabilisé à faible vitesse par la raideur ajoutée (le système est instable en son absence à faibles vitesses). Alors que la vitesse augmente, la portance compense le chargement ce qui traduit une diminution de l'excentricité maximale. Ensuite, le balourd prend de plus en plus d'importance et participe à l'augmentation de l'excentricité maximale, en revanche, l'excentricité devient quasiment invariante dans le repère tournant. Lorsque l'on arrive à la fréquence critique du système, correspondant à un point de bifurcation de Neimark-Sacker, la stabilité des cycles synchrones est perdue. Avec l'augmentation de la vitesse de rotation, le balourd permet enfin de retrouver la stabilité du système. Logiquement, en augmentant le balourd, on diminue la zone d'instabilité fluide, en revanche, on augmente l'excentricité, donc on diminue l'épaisseur de film minimale. Remarquons que la résonance à 1000 rad/s est toujours parfaitement absorbée par l'amortissement du palier.

Les deux changements de stabilité sont des bifurcations de Neimark-Sacker, comme l'indique la figure 3.22, sur laquelle sont représentés les multiplicateurs de Floquet principaux pour la courbe de la figure 3.21 avec le plus faible balourd (100 mg.mm), mettant en évidence les deux bifurcations de Neimark-Sacker.

La figure 3.23 met en évidence un régime quasi-périodique calculé par VCHBM après la première bifurcation de Neimark Sacker présentée sur le diagramme, pour un balourd de 125mg.mm, à 2000 rad/s. Le résultat de la VCHBM est également comparé à une intégration temporelle sur cette figure. Des différences subsistent même si les amplitudes du mouvement quasi-périodiques semblent assez bien approximées. En tout cas cela justifie

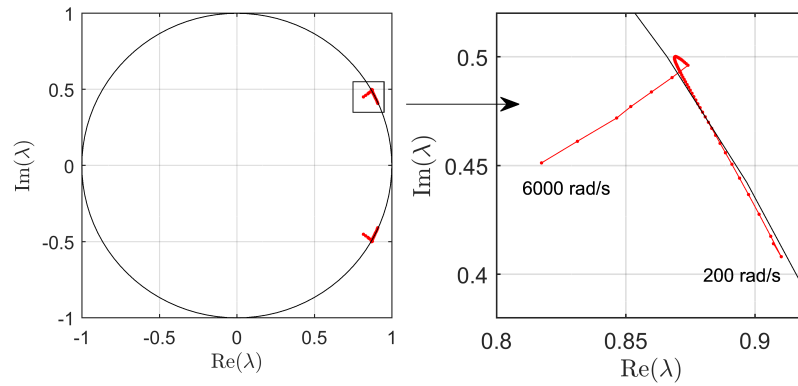


FIGURE 3.22 – Multiplicateurs de Floquet pour l’excitation de 100mg.mm de la figure 3.21 présentant deux bifurcations de Neimark-Sacker

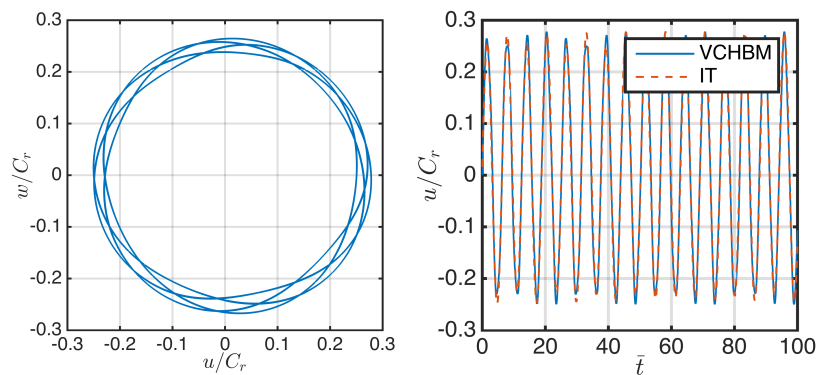


FIGURE 3.23 – Reconstitution VCHBM du régime quasi-périodique après bifurcation à 2000 rad/s avec un balourd de 125mg.mm pour les dimensions de la figure 3.21, et comparaison avec une intégration temporelle (à droite)

que la bifurcation de Neimark-Sacker associée est super-critique car le cycle limite apparaît stable par intégration numérique. Toutefois, cette conclusion peut être fautive si la solution diverge après une intégration temporelle plus longue, ce qui constitue la limite de cette méthode.

Enfin un dernier exemple de test de continuation est présenté, dans lequel la texturation *dimple* de la figure 2.17(a) est comparée à un palier lisse avec le jeu radial du même palier sans texture, et un palier lisse avec un jeu radial moyen plus grand, correspondant au jeu moyen avec la texturation (augmenté de 20% par l’aspérité de texturation). On voit sur la figure 3.24 que le seuil de stabilité est légèrement diminué pour le palier lisse possédant un jeu plus élevé. En revanche, l’amplitude des vibrations est augmenté. Le palier texturé se situe entre les deux courbes des paliers lisses.

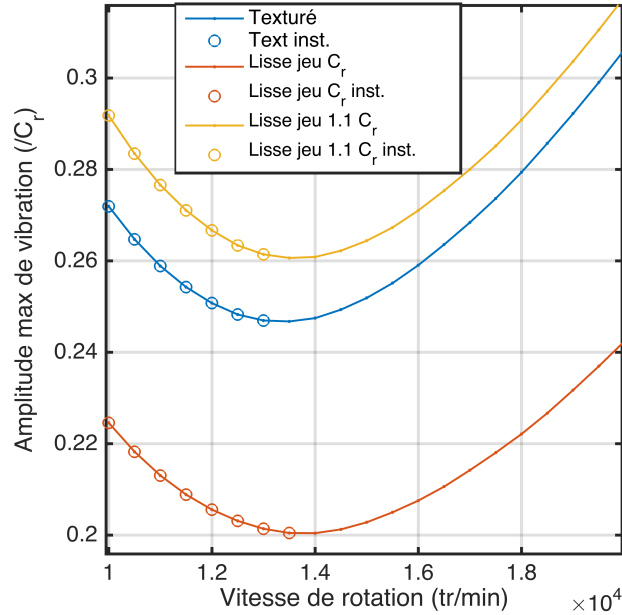


FIGURE 3.24 – Comparaison de la texturation dimple de la figure 2.17(a) dans le système test sans raideur externe, pour un balourd de 10 mg.mm et un chargement vertical de 2 N, à vitesse de rotation élevées

3.4 Conclusion

Ce chapitre a permis de faire le lien entre l'écoulement fluide dans le palier, dont les modélisations ont été présentées dans le chapitre 2, avec les mouvements de la structure flexible. Les équations couplées à résoudre ont été introduites. La projection de la pression représente un terme fortement non-linéaire, qui complique la résolution du système dynamique global. Pour cette raison, les méthodes numériques classiques d'études des équations de la dynamique non-linéaire ont été présentées et appliquées à un cas test, d'une simple masse tournante dans un palier. A travers ce cas test, nous avons évalué à l'aide des outils mis en place, l'influence du modèle de cavitation et de différentes texturations sur les positions d'équilibre stationnaire, sur les réponses forcées et sur leurs stabilités. Les phénomènes de bifurcation de Hopf, de dédoublement de période et de Neimark-Sacker ont aussi été mis en avant.

En cohérence avec les données bibliographiques présentées dans le chapitre 1, la texturation influence l'instabilité d'*oil whirl*, en modifiant sa fréquence dans le cas de texturation transversales, mais aussi en modifiant le seuil d'instabilité, c'est-à-dire les points de bifurcation.

Dans la continuité de cette étude, ces méthodes seront appliquées en détail dans le cas d'un rotor flexible supporté par deux paliers hydrodynamiques dans le chapitre 4, afin de prédire le comportement du banc d'essai qui sera présenté dans le chapitre 5.

Chapitre 4

Prédiction et analyse de l'impact de la texturation de surface sur la dynamique de ligne d'arbre

Dans les parties précédentes, nous avons présenté les outils de modélisation du comportement du palier hydrodynamique avec un état de surface contrôlé, ainsi que le couplage avec un solide élastique tournant et les méthodes de résolution d'équations de dynamique non-linéaire associées. Nous disposons donc des outils nécessaires à l'analyse du comportement vibratoire d'un rotor, supporté par des paliers hydrodynamiques dont on pourra tester différents états de surface. Dans l'optique de les comparer à des essais expérimentaux par la suite, on se propose dans ce chapitre d'étudier un système de rotor miniature qui possèdera les dimensions du banc d'essai du chapitre 5. Cela permettra à la fois de justifier le dimensionnement du banc d'essai, mais aussi d'appréhender les impacts théoriques attendus par l'insertion de motifs de texturation particuliers sur la surface des paliers.

Nous commencerons par présenter les dimensions caractéristiques du rotor miniature de l'étude, puis nous procéderons à l'analyse vibratoire classique introduite dans la partie 3, c'est-à-dire par l'analyse statique, modale, la dynamique en réponses forcées, et leurs domaines de stabilité.

4.1 Dimensions du système

4.1.1 Dimensions du système rotor-paliers

Le rotor étudié est une tige en acier pour roulement à bille (100C6, dureté 62 HRC), de relativement petite taille (schématisé sur la figure 4.1), sur laquelle sont frettées deux rondelles d'aluminium. La masse du rotor calculée à partir des données du tableau 4.1 est donc assez faible ($m \approx 25 \text{ g}$). Cela se traduit par un chargement statique par palier d'environ 0.13 N à comparer aux différents chargements tests des chapitres précédents. Une seconde remarque peut être effectuée par rapport à la vitesse de rotation du rotor. En effet, dans la plage de fonctionnement, à 10000 tr/min par exemple, ($\approx 1000 \text{ rad/s}$), le chargement dû au balourd, d'amplitude $m_b r_b \Omega^2$ deviendra relativement important. Pour atteindre une excitation périodique équivalente au chargement statique (0.13 N par palier), il suffit d'un balourd de seulement 130 mg.mm . On peut donc aussi souligner qu'un écart moyen entre l'axe de rotation et l'axe des centres de gravité du rotor de seulement quelques microns suffit pour obtenir des chargements statiques et dynamiques équivalents

Paramètres de l'arbre	
Rayon	$R = 2.5 \text{ mm}$
Module d'Young	$E = 211 \text{ GPa}$
Coefficient de Poisson	$\nu = 0.3$
Densité	$\rho_a = 7800 \text{ kg/m}^3$
Longueur	$L_a = 134 \text{ mm}$
Amortissement interne	$\eta = 2.10^{-7}$
Raideur d'accouplement radiale	8400 N/m
Raideur d'accouplement angulaire	0.014 N/°
Distance entre les paliers	90 mm
Plage de vitesses de rotation	$0 - 20.000 \text{ tr/min}$
Paramètres des paliers	
Longueur	$L_p = 5 \text{ mm}$
Jeu radial	$C_r = 5 \text{ } \mu\text{m}$
Viscosité dynamique	$\mu = 0.006 \text{ Pa.s}$
Pression de cavitation	$p_{cav} = -1 \text{ bar}$
Pression de référence en bords de palier	$p_{\delta\Gamma} = 0 \text{ bar}$
Paramètres des disques	
Rayon	$R_D = 7.5 \text{ mm}$
Densité	$\rho_D = 2700 \text{ kg/m}^3$
Longueur	$L_D = 5 \text{ mm}$

TABLE 4.1 – Dimensions du système rotor-palier

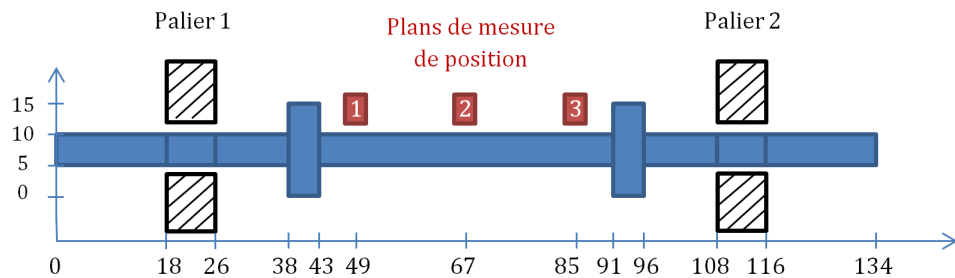


FIGURE 4.1 – Représentation schématique des dimensions géométriques du rotor (mm)

à 10000 tr/min . Remarquons aussi que le jeu radial est de l'ordre de grandeur de $10 \text{ } \mu\text{m}$. Avec des motifs de texturation de l'ordre du micron également, on peut modifier localement l'épaisseur de film de façon importante. Sur la figure 4.1 sont également numérotés trois plans de position orthogonaux à l'axe du rotor, pour lesquelles il sera intéressant d'interpoler le déplacement calculé, car ces plans correspondront aux plans de mesure de position sur le banc d'essai du chapitre 5.

4.1.2 Dimensions des motifs tests de texturation

Dans ce chapitre, nous testerons différents types de texturation obtenus par ablation LASER. Nous étudierons premièrement l'impact de sinus longitudinaux ou transversaux par rapport à l'écoulement du palier. Nous analyserons également l'impact des texturations sinusoïdales partielles (partiellement constante sur le motif). Ces texturations sont invariantes dans une direction. Enfin, nous présenterons les résultats lorsque l'on utilise

une texturation isotrope mais variant dans les deux directions de la surface du palier, du type des texturations en *dimples* obtenues par laser femtoseconde. Toutes ces texturations sont décrites dans la partie 2.3.5. Le tableau 4.3 récapitule les formes en trois dimensions de ces motifs. En ce qui concerne les motifs isotropes du type *dimple*, nous nous intéresserons à 6 texturations particulières, dont 5 sont analysées sur le banc d'essais du chapitre 5 (texturations n°1 à 5), correspondant aux caractéristiques suivantes :

N°	Surface texturée	Profondeur	h_r	s	γ
1	5%	0.5 μm	$0.05 \times C_r$	0.0446	0.125% C_r
2	5%	5 μm	$0.5 \times C_r$	0.0446	1.25% C_r
3	5%	10 μm	C_r	0.0446	2.5% C_r
4	20%	0.5 μm	$0.05 \times C_r$	0.0893	0.5% C_r
5	20%	5 μm	$0.5 \times C_r$	0.0893	5% C_r
6	20%	10 μm	C_r	0.0893	10% C_r

TABLE 4.2 – Paramètres de forme des motifs de texturation *dimple*

4.2 Arbre sur paliers lisses

4.2.1 Déformées statiques

Repère fixe - Chargement statique

Le poids de l'arbre étant très faible, la position d'équilibre stationnaire dans le repère fixe n'est donc pas très excentrée. Afin de visualiser les déformées statiques des différentes tiges, on se propose d'ajouter un chargement vertical vers le bas dans le cas du palier lisse. La figure 4.2 présente une tige en rotation à 100 rad/s sur paliers lisses, sur laquelle on a appliqué progressivement un chargement de 5 N dans les bords intérieurs des palier. Le chargement ajouté est représenté par une flèche sur le diagramme. L'excentricité possible dans les paliers (i.e. le jeu) est représentée par les parties grisées. Sur cette figure, on constate qu'avec un chargement assez important par rapport à la taille des paliers, l'excentricité de l'arbre reste relativement faible dans les paliers. La flexion de l'arbre est cependant assez marquée au milieu de la tige, aux vue de la dissymétrie du chargement ajouté par rapport aux supports.

Remarquons qu'il y a une nette différence de fonctionnement entre un rotor fortement chargé dans le repère fixe (figure 4.3(b)), ou non chargé (4.3(a)), par rapport à la zone de cavitation (représentée en gris dans le profil de pression). Le chargement influence fortement la position d'équilibre statique, mais dissymétrise également le profil de pression dans les paliers. On peut donc prévoir que cela va évidemment jouer un rôle important dans la stabilité locale, puisque les coefficients dynamiques vont fortement en être impactés.

Sans chargement statique autre que le poids propre de la tige, et sans prendre en compte le balourd, l'excentricité est très faible comme on peut le constater sur la figure 4.4. Sur ce diagramme on observe la tige pour des positions stationnaires d'équilibre à faibles vitesses (10 à 100 rad/s). Aux plus faibles vitesses, le décentrage devrait être légèrement visible. Sur la figure 4.4 on voit que le décentrage reste tout de même théoriquement inférieur au dixième du jeu radial dans les paliers, donc inférieur au micron à 10 rad/s .

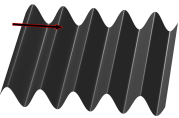
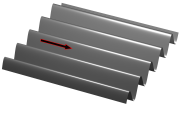
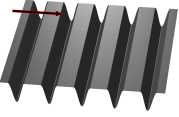
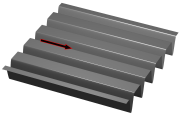
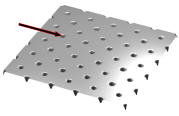
Texturations sinusoïdales Paramètre : h_r	Transversale	
	Longitudinale	
Texturations sinusoïdales partielles Paramètres : a, h_r	Transversale	
	Longitudinale	
Texturation laser dimples Paramètres : s, h_r	Isotrope	

TABLE 4.3 – Texturations de l'étude - les flèches rouge représentent le sens de l'écoulement local du fluide

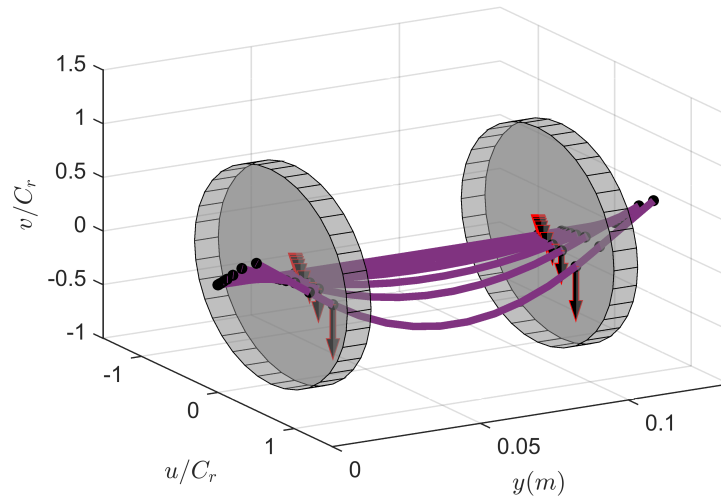
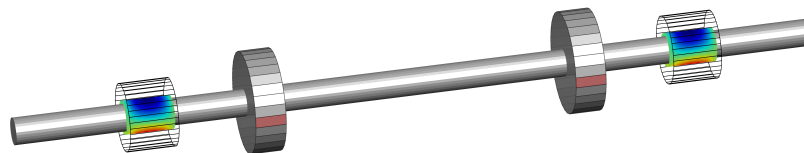
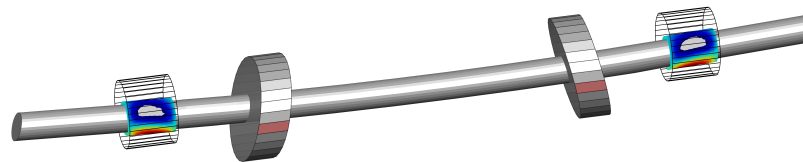


FIGURE 4.2 – Positions du rotor pour un chargement progressif de 0 N à 2×5 N dans le cas d'un rotor lisse du banc PHAT à 100 rad/s



(a) Position d'équilibre statique du rotor non chargé



(b) Position d'équilibre statique du rotor chargé de 2×5 N

FIGURE 4.3 – Représentation qualitative de l'arbre du banc d'essai PHAT non chargé, et chargé à 2×5 N, à 100 rad/s; la pression dans les paliers est représentée par un dégradé de bleu à rouge et la zone de rupture de film est représentée en blanc

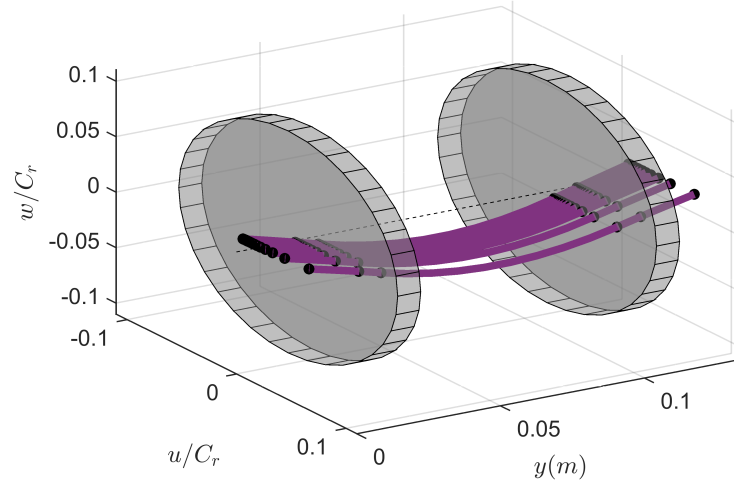


FIGURE 4.4 – Positions d'équilibre du rotor du banc PHAT soumis seulement à son propre poids, en faisant varier sa vitesse de rotation de 10 rad/s (excentricité la plus élevée) à 100 rad/s (position quasiment centrale, la figure étant tracée pour uniquement 10% du jeu radial)

Repère tournant - balourd seul

Il n'est pas possible d'ajouter un chargement statique sur le banc PHAT. En revanche, nous verrons dans le chapitre 5 qu'il est possible de piloter le balourd assez finement. Ainsi il peut être intéressant de considérer la déformée imposée par le balourd seul, en négligeant le chargement statique en première approche. Pour cela, il suffit de résoudre le problème statique dans le repère tournant. La figure 4.5 présente la montée en vitesse de 100 rad/s à 2000 rad/s dans le cas d'un balourd de $2 \times 1 \text{ g.mm}$, qui devrait être de l'ordre de grandeur du balourd maximal du banc PHAT. On remarque que la déformée est supérieure à la contribution du poids propre de l'arbre dans cet exemple. Cependant à faibles vitesses et pour des balourds moins élevés, les chargements statiques et dynamiques seront sensiblement du même ordre de grandeur, et ils imposeront une excentricité relativement faible dans les paliers. Nous verrons par ailleurs que les problèmes d'instabilité du type *oil whirl* se présentent principalement dans cette configuration.

4.2.2 Stabilité des positions d'équilibre statique

Projection des efforts des paliers sur des noeuds

Afin de bien comprendre l'impact du modèle de palier fini projeté sur la structure par éléments finis, avec la prise en compte du mésalignement, rappelons tout d'abord le diagramme de Campbell et les déformées modales classiques, obtenues dans le cas de palier lisse (que l'on retrouve dans [92] ou plus récemment dans [101]). La figure 4.6 présente le diagramme de Campbell du rotor du banc PHAT, avec palier sur un noeud de la structure et sans prendre en compte de mésalignement. On remarque sur cette figure qu'une paire de modes doubles suit la droite $0.5x$, c'est à dire que ces modes ont une fréquence propre égale à la moitié de la fréquence de rotation de l'arbre. Cela correspond à la définition de l'*oil whirl*. Le premier mode de résonance en flexion de l'arbre se sépare légèrement avec l'augmentation de la vitesse de rotation. La séparation du mode de précession directe et du mode de précession rétrograde est faible pour le rotor du banc PHAT, car il possède

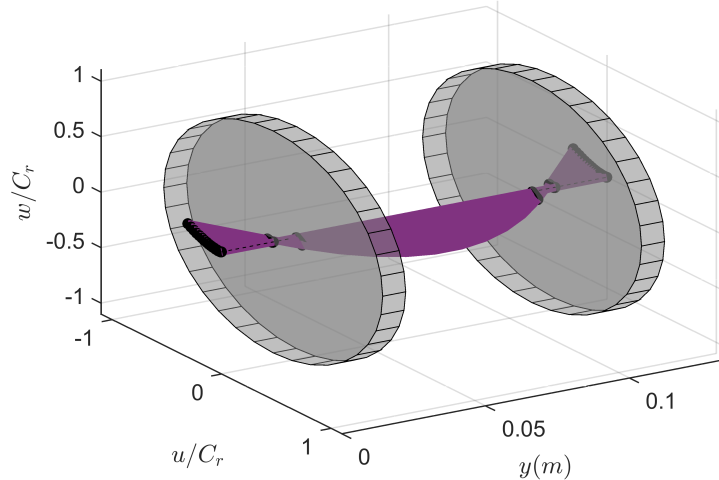


FIGURE 4.5 – Positions d'équilibre du rotor du banc PHAT dans le repère tournant, soumis seulement à un balourd de $2 \times 1 \text{ g.mm}$, en faisant varier sa vitesse de rotation de 100 rad/s (excentricité la plus faible) à 1000 rad/s (excentricité la plus élevée) - le balourd est imposé dans la direction de u

une inertie très faible en raison de sa petite taille. La séparation serait plus marquée dans le cas d'un rotor possédant une masse plus élevée. Lorsque les modes de corps rigide (correspondant au phénomène d'*oil whirl*), atteignent la fréquence du premier mode propre, on constate une perte de la stabilité. Cela correspond au phénomène d'*oil whip*.

Sur la figure 4.6, chaque point correspond à deux modes propres du rotor. Quatre points ont été sélectionnés (points A, B, C et D), afin d'illustrer les phénomènes d'*oil whirl* et *oil whip* sur la figure 4.7, sur laquelle nous représentons leurs déformées modales. On constate que les modes d'*oil whirl* correspondent aux modes de corps rigide à faibles vitesses, puis leurs déformés se fléchit après l'interaction avec le premier mode de flexion. Remarquons aussi que chaque point des modes de la droite proche de $0,5x$ correspond à deux doubles modes de déformée différente.

Maintenant que nous avons présenté le cas classique d'étude d'un rotor chargé sur deux paliers hydrodynamiques, avec prise en compte des paliers sous forme de projection nodale (donc avec la définition classique des coefficients dynamiques), nous présentons maintenant l'analyse modale d'un rotor avec projection de la résultante de palier sur les éléments de la structure. Rappelons que la projection sur élément permet de prendre en compte le mésalignement. Nous nous intéressons premièrement au rotor chargé déjà présenté sur la figure 4.2, avec un chargement ajouté de $2 \times 5 \text{ N}$ sur les noeuds intérieurs en bord des paliers. Sur cette figure, on constate que la prise en compte de la projection sur élément influence largement la fréquence du premier mode propre. Cependant, le seuil de stabilité n'est influencé que légèrement.

Rotor chargé et projection des efforts de palier sur les éléments

Nous avons également représenté les déformées modales dans cet exemple (figure 4.9). On constate que le second mode propre a une fréquence également fortement diminuée (figure 4.9(c)). La forme des modes et leur stabilité sont faiblement influencés. La différence avec la figure 4.7 réside essentiellement dans le fait que la position statique d'équilibre est très différente. En effet, étant donné que l'on applique le chargement uniquement d'un

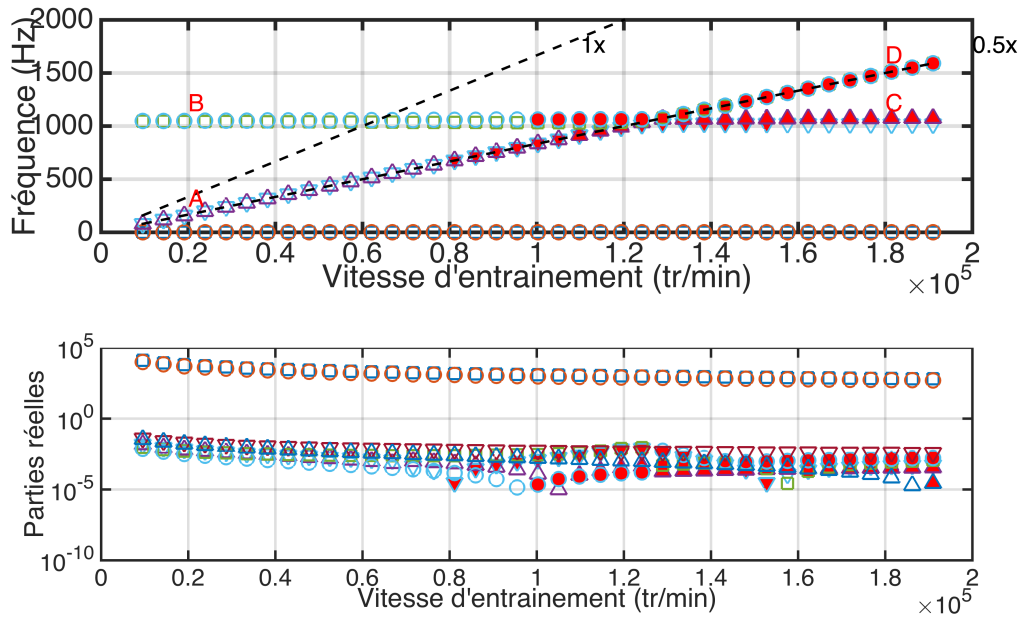


FIGURE 4.6 – Diagramme de Campbell du rotor du banc PHAT, avec un modèle de projection sur les noeuds de la structure et sans prise en compte de l'inclinaison du rotor dans le palier ; un chargement statique de $2 \times 5 \text{ N}$ est appliqué au niveau des paliers pour stabiliser l'oil whirl ; les marqueurs rouges pleins représentent les modes instables

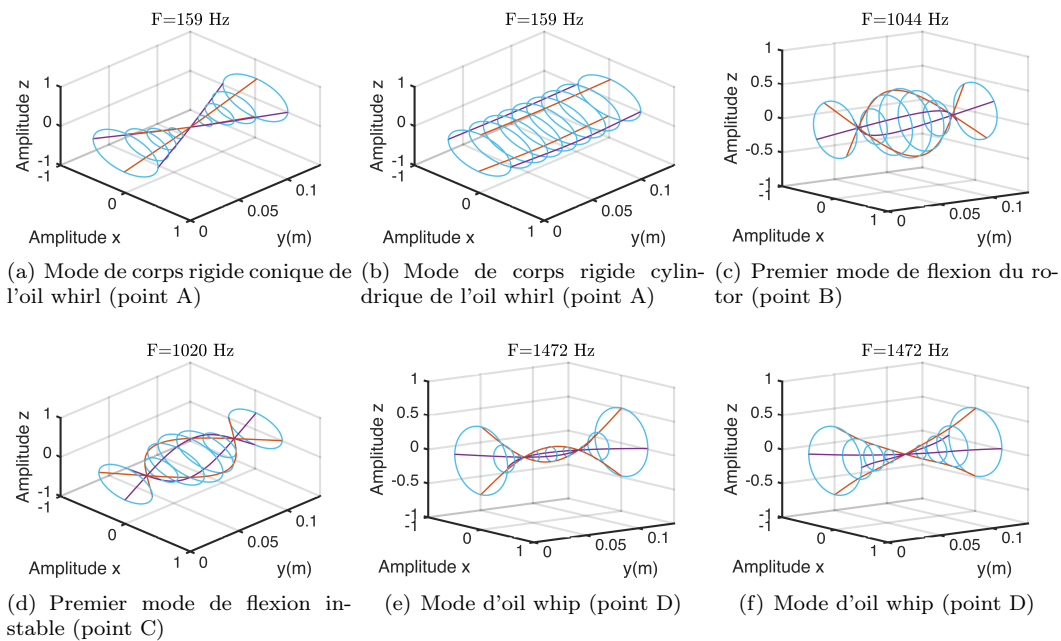


FIGURE 4.7 – Déformées modales du rotor correspondant au diagramme de Campbell de la figure 4.6

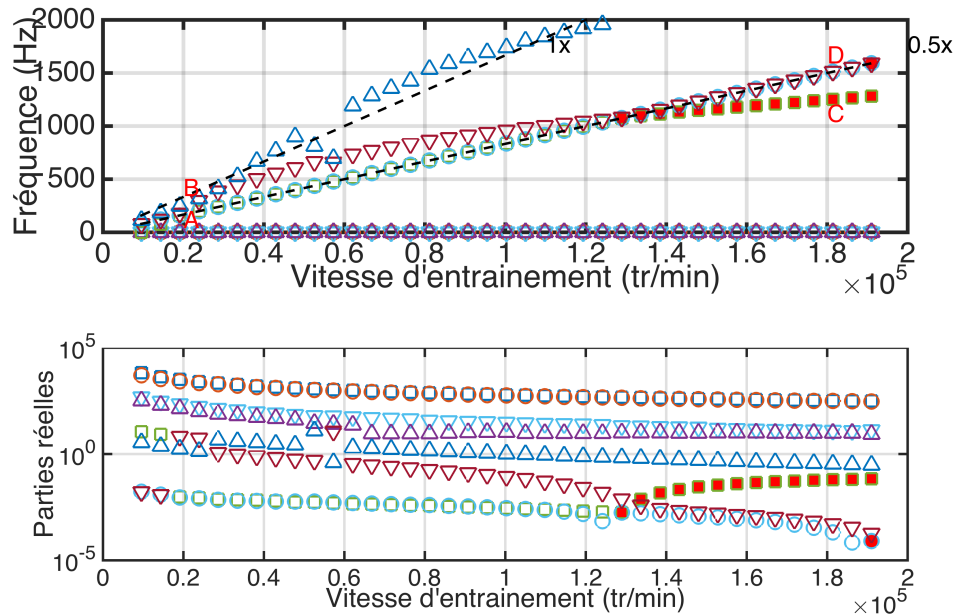


FIGURE 4.8 – Diagramme de Campbell du rotor du banc PHAT, avec un chargement statique de $2 \times 5 \text{ N}$ est appliqué au niveau des bords intérieurs des paliers pour stabiliser l’oil whirl - les marqueurs rouges pleins représentent les modes instables

seul côté de chaque palier la déformée en flexion est plus importante (comme on l’observe sur la figure 4.2). Nous ne présenterons plus de déformées modales par la suite, car elles restent très proches de celles du cas présenté ici.

Diagramme de Campbell du rotor du banc PHAT dans le repère fixe

Nous avons donc étudié le cas où le rotor est stabilisé par un chargement statique. Or, comme nous l’avons mentionné précédemment, le rotor du banc PHAT possède un poids très faible, et il n’y a pas de chargement ajouté dans la version actuelle du banc d’essai. Sur la figure 4.10, nous présentons le diagramme de Campbell du rotor du banc PHAT dans le repère fixe, uniquement soumis à son propre poids. On constate dans ce cas là que le rotor est toujours instable. Étant donné que ce type d’analyse ne prend pas en compte le chargement dû au balourd, ce résultat est assez peu représentatif de la réalité pour le problème envisagé.

Diagramme de Campbell du rotor du banc PHAT dans le repère tournant

Si l’on a constaté au paragraphe précédent que le rotor du banc d’essai est supposé instable lorsqu’il est soumis uniquement à son propre poids, en réalité, il est soumis au chargement dynamique du balourd lors de son fonctionnement. On peut analyser l’effet stabilisant dû au chargement progressif du balourd avec la vitesse de rotation. Pour cela, il suffit de faire une étude statique dans le repère tournant en négligeant le chargement du poids du rotor à partir du système 3.1.3.11. La figure 4.11 présente donc le diagramme de Campbell du rotor PHAT dans le repère tournant avec un balourd de $2 \times 0,5 \text{ g.mm}$. On constate sur la figure que le rotor est instable jusqu’à ce que le balourd devienne suffisant

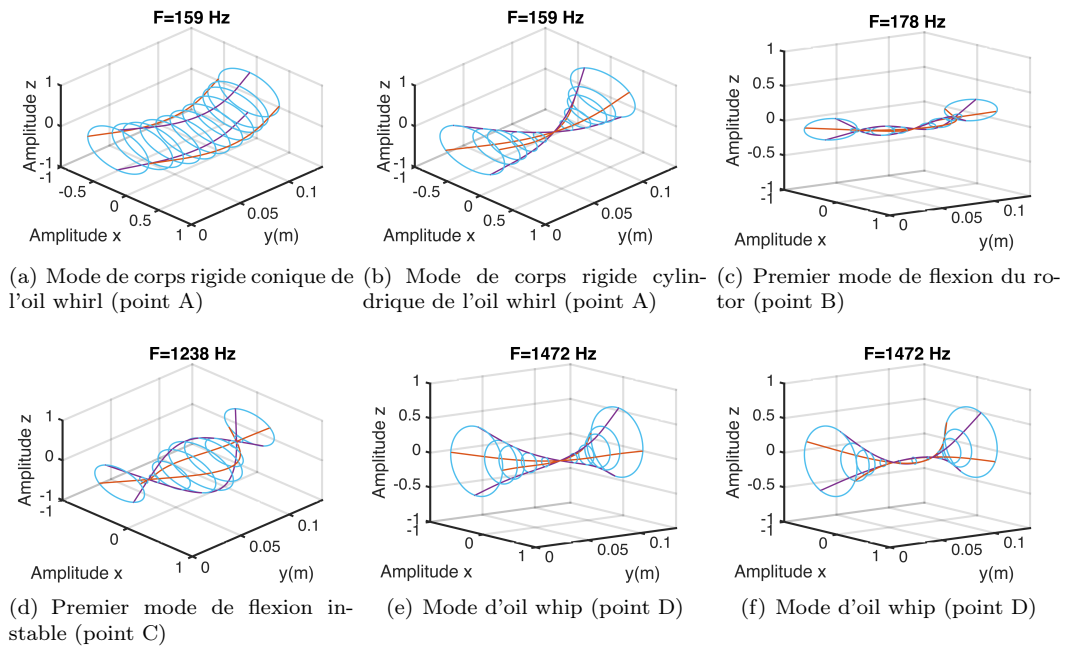


FIGURE 4.9 – Déformées modales du rotor correspondant au diagramme de Campbell de la figure 4.8

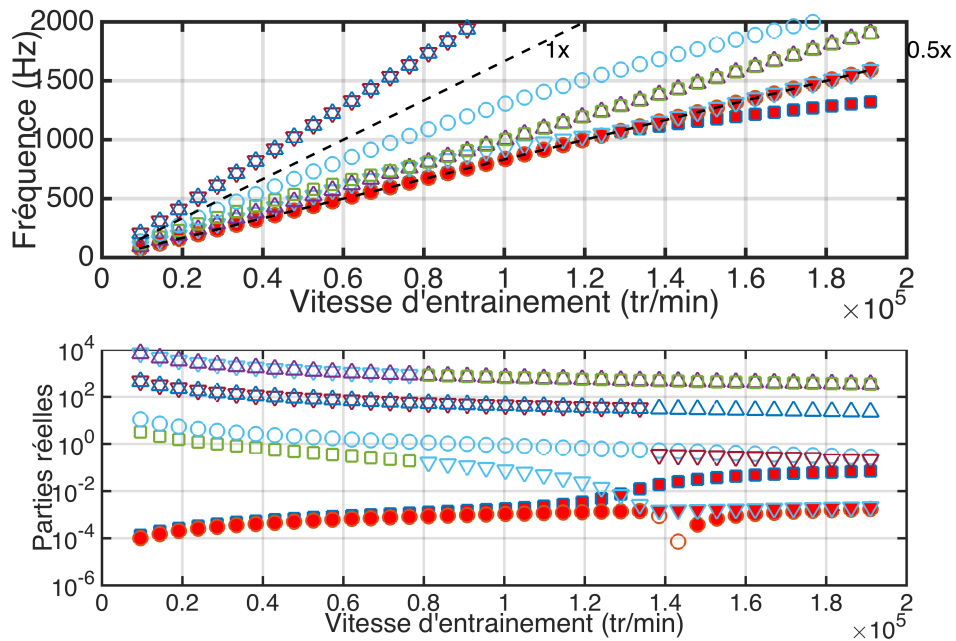


FIGURE 4.10 – Diagramme de Campbell du rotor du banc PHAT, soumis seulement à son propre poids - les marqueurs rouges pleins représentent les modes instables

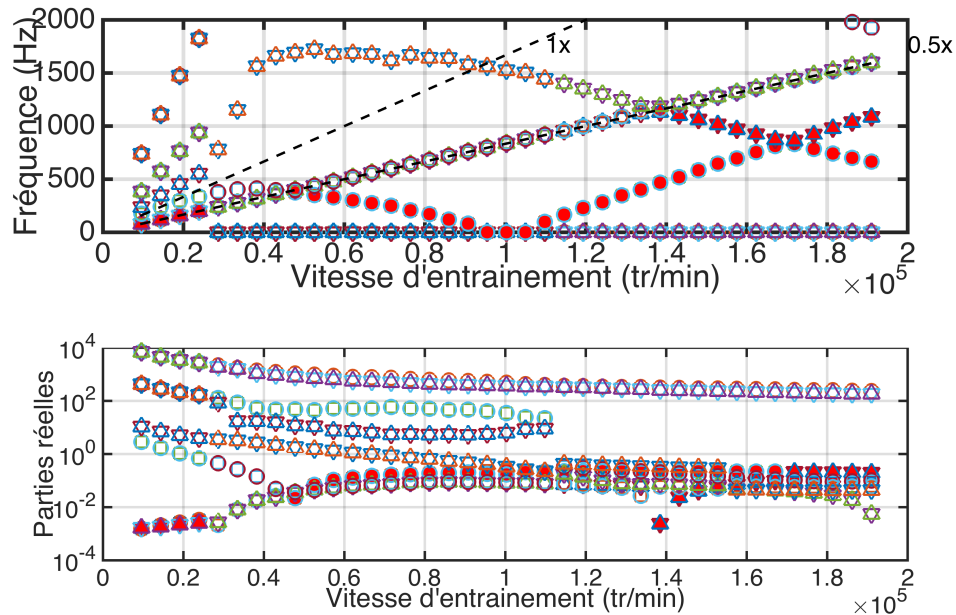


FIGURE 4.11 – Diagramme de Campbell du rotor du banc PHAT, dans le repère tournant, avec un balourd de $0,5 \text{ g.mm}$ - les marqueurs rouges pleins représentent les modes instables

pour obtenir la stabilité des modes d'*oil whirl*. En revanche, la stabilité est perdue lorsque la vitesse de rotation atteint le premier mode propre de l'arbre. L'information de stabilité est donc complètement différente dans le repère tournant, et aux vue des dimensions du banc d'essai, c'est le repère le plus intéressant. Le rotor devrait donc être instable au démarrage, puis se stabiliser sur la fréquence synchrone à partir d'une certaine vitesse de rotation. La deuxième perte de stabilité prévue par l'analyse linéaire dans le repère tournant se produit à une fréquence beaucoup plus haute que la vitesse de rotation nominale du banc et ne devrait pas être observée sur le banc d'essais. Remarquons enfin que dans tous les cas, les parties réelles des modes instables sont souvent très faibles, donc les comportement divergents devraient avoir des apparitions relativement lentes. Par ailleurs, nous rappelons que la perte de stabilité de ce système peut mener à l'observation d'un cycle limite stable (comme dans le cas de bifurcation de Hopf super-critique).

4.2.3 Amplitude des vibrations non-linéaires

Nous avons vu que l'analyse linéaire autour des positions d'équilibre est un moyen d'analyser en première approche la stabilité du système, en séparant l'impact du chargement statique et celui du chargement dynamique. Cependant afin de prendre en compte les deux contributions de manière économique, la méthode HBM est une alternative efficace. Toutefois, rappelons que la limitation de la HBM dans l'analyse de système excité par un balourd vient du fait que cette méthode n'est pas capable de prendre en compte les mouvements stables à d'autre fréquences que la fréquence du moteur et ses harmoniques, telle que nous l'utilisons dans ce mémoire.

La figure 4.12 présente la comparaison entre les amplitudes de vibration analysées avec les méthodes linéaires dans le repère fixe et dans le repère tournant, et la méthode HBM.

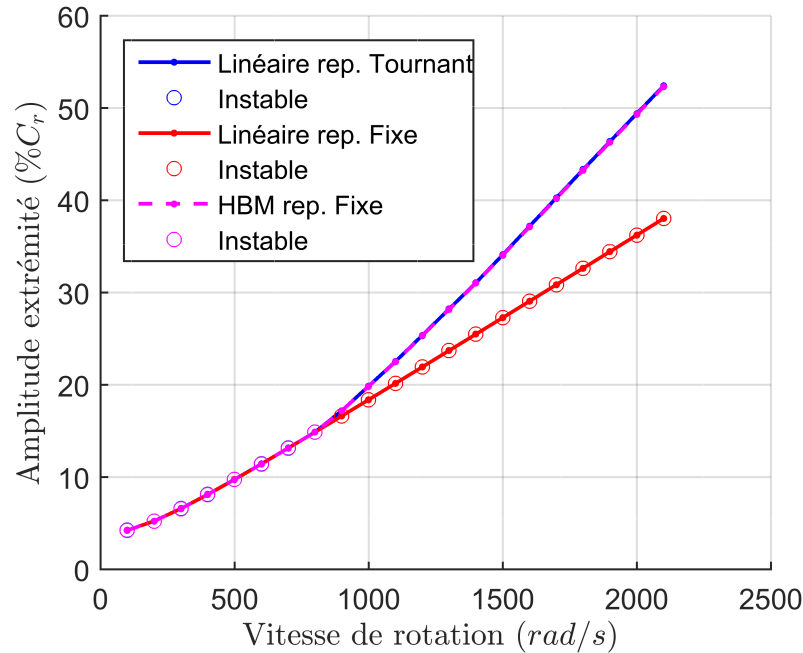


FIGURE 4.12 – Excentricité maximum et stabilité du mouvement du rotor du banc PHAT soumis à un balourd de 1 $g.mm$ pour différentes vitesses de rotation, obtenu par analyse linéaire dans le repère fixe, tournant, et par analyse par HBM

Pour le système du banc PHAT, et avec un balourd de 1 $g.mm$, on fait un balayage en vitesse et on trace l'excentricité maximum du cycle limite à une extrémité de l'arbre. On constate que la méthode linéaire dans le repère fixe donne une mauvaise approximation du mouvement à hautes vitesses de rotation, et particulièrement de la stabilité. En effet, c'est avant tout la cavitation impliquée par le chargement de balourd qui n'est pas bien prise en compte dans le cas de l'analyse linéaire dans le repère fixe, alors que c'est ce phénomène qui participe à stabiliser le mouvement. Pour ces raisons, nous ne présenterons pas les résultats non pertinents de l'analyse linéaire dans le repère fixe par la suite. En revanche, dans le cas de l'analyse linéaire dans le repère tournant, les résultats sont parfois très proches de la méthode HBM, aux vues du faible chargement statique du rotor qui nous intéresse dans cette étude. En effet, dans le cas du banc PHAT, le chargement statique n'est pas assez important par rapport au balourd pour mettre en défaut l'analyse linéaire de ce chargement. Cela n'est pas toujours le cas à faibles vitesses ou en faisant varier certains paramètres, et la méthode HBM, plus générale, permet de s'assurer de la bonne approximation de l'analyse linéaire ou de proposer une alternative assez peu coûteuse en temps de calcul.

Afin de bien visualiser la signification des points du diagramme de la figure 4.12, nous représentons le mouvement de l'arbre pour le point obtenu à la vitesse de 2100 rad/s , sur la figure 4.13. Les cercles noirs sur cette figure correspondent aux trajectoires des nœuds de la fibre de la poutre représentée en violet pendant une révolution, aux extrémités et en bords de palier. On voit que l'amplitude des vibrations au niveau des paliers est relativement faible. Cela est dû au fait qu'à des vitesses élevées, le balourd et la résultante du palier sont assez élevés par rapport à la raideur de l'arbre, et le moment induit impose une courbure importante. La droite en pointillés indique la position stationnaire d'équilibre

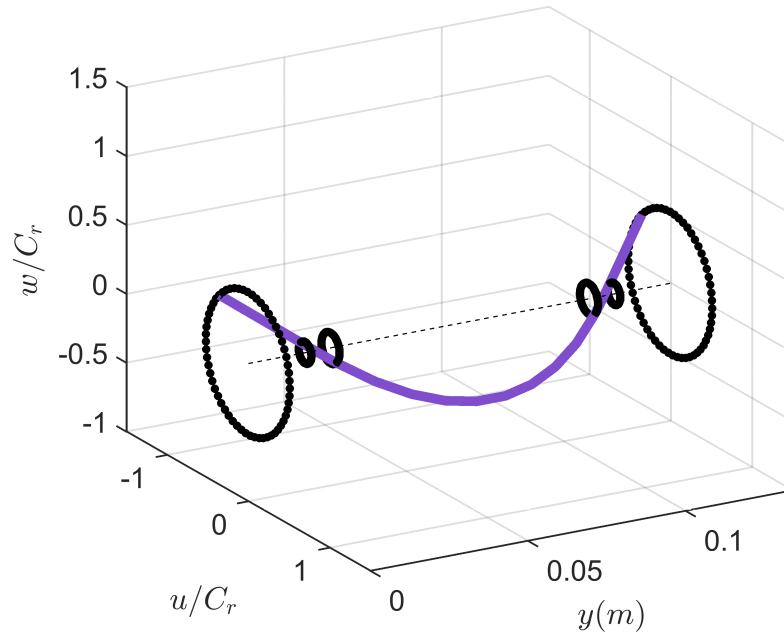


FIGURE 4.13 – Flexion de la fibre de l'arbre et révolution lors d'une sollicitation d'un balourd de 1 g.mm sur le rotor du banc PHAT

sans sollicitation du balourd, c'est à dire uniquement en prenant en compte le poids propre de l'arbre.

Afin d'observer des comportements légèrement différents du système, on se place sur la figure 4.14 à un jeu radial C_r de $10 \text{ }\mu\text{m}$, et on fait varier la fréquence de rotation du moteur au-delà du premier mode propre (situé environ à $1000 \text{ Hz} \approx 6300 \text{ rad/s}$), jusqu'à presque 20.000 rad/s ($\approx 191.000 \text{ tr/min}$). On voit dans ce cas-là que les deux approximations linéaires sont inefficaces.

La méthode HBM prévoit la stabilisation de l'*oil whirl* vers la résonance, puis de nouveau la perte de stabilité vers le double de la pulsation de résonance, c'est-à-dire pour le phénomène d'*oil whip*. Ce diagramme présente donc le même comportement que sur le diagramme *waterfall* présenté dans l'introduction en figure 1.7, tiré de ([103]).

Dans les paragraphes qui suivent, nous nous proposons de faire varier certains paramètres clés afin d'appréhender leurs différentes influences dans les vibrations synchrones du système.

Variation du balourd

L'un des paramètres souvent étudié dans les machines tournantes est bien évidemment le balourd, car on ne le maîtrise pas toujours complètement (défauts des pièces, défauts d'assemblage) mais l'on peut souvent le corriger partiellement in situ. La figure 4.15 présente l'amplitude de vibration en faisant varier à la fois la vitesse de rotation et l'amplitude du balourd. On aperçoit sur cette figure que plus le balourd est important, plus la stabilité est atteinte à faibles vitesses de rotation. On constate sur la partie de droite de la figure que la dépendance apparaît quadratique, ce qui est tout à fait compréhensible étant donné que la force d'excitation dépend du carré de la vitesse de rotation, multiplié par

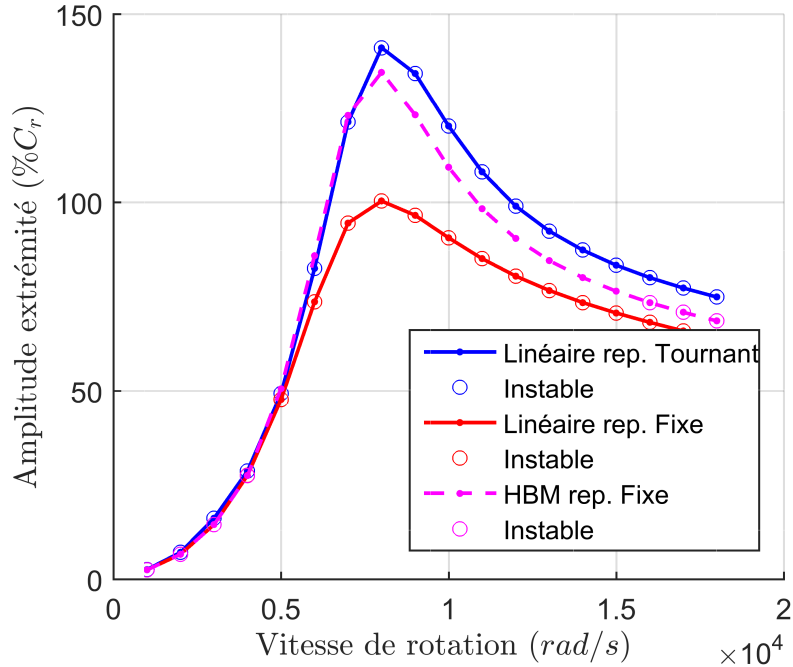


FIGURE 4.14 – Excentricité maximum et stabilité du mouvement du rotor du banc PHAT soumis à un balourd de 20 mg.cm pour différentes vitesses de rotation, obtenu par analyse linéaire dans le repère fixe, tournant, et par analyse par HBM au-delà de la 1^{re} fréquence de résonance du rotor ($\approx 1000 \text{ Hz}$)

le balourd ($m_b r_b \Omega^2$). Par ailleurs on constate une très bonne approximation de l'analyse linéaire effectuée dans le repère tournant par rapport à la méthode HBM, légèrement plus coûteuse en temps de calcul. De plus, si le balourd permet de stabiliser l'arbre sur de plus grandes plages de vitesses de rotation, il augmente aussi significativement l'amplitude de vibration, et donc diminue également l'épaisseur de film fluide, ce qui peut être néfaste dans le comportement de la machine.

Variation du jeu radial

Le jeu radial est impliqué dans la pression de cavitation, et influence également linéairement le dimensionnement de la pression. Malgré la forte dépendance de la stabilité par rapport au seuil de cavitation, on remarque sur la figure 4.16, que le seuil de stabilité augmente relativement légèrement avec le jeu radial. En revanche, s'il l'on considère l'amplitude de vibration en microns sur la figure de droite (et non en pourcentage du jeu radial qui lui-même augmente, figure de gauche), on constate qu'elle augmente de façon relativement importante. Sur cette figure, nous présentons également la réponse linéaire dans le repère tournant en magenta, afin de montrer une fois encore que si l'amplitude de vibration est très proche du résultat HBM, cette méthode est également efficace dans l'étude de stabilité dans le cas de rotors légers, ou en général des rotors faiblement chargés dans le repère fixe.

Variation de la viscosité

On voit sur la figure 4.17 que le seuil est théoriquement à peu près constant lorsque l'on fait varier la viscosité de 0.002 Pa.s à 0.02 Pa.s . Aux très faibles viscosités, l'épaisseur de

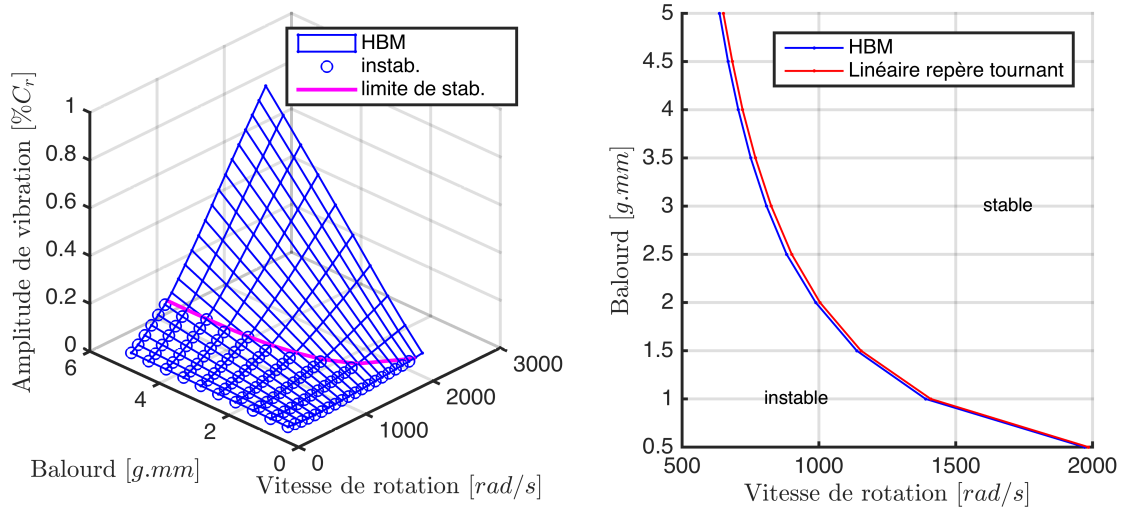


FIGURE 4.15 – Dépendance par rapport au balourd, de l'excentricité maximum et de la stabilité du mouvement du rotor du banc PHAT soumis à un balourd de 1 g.mm pour différentes vitesses de rotation (à une extrémité de l'arbre), obtenu par analyse linéaire dans le repère fixe, tournant, et par analyse par HBM

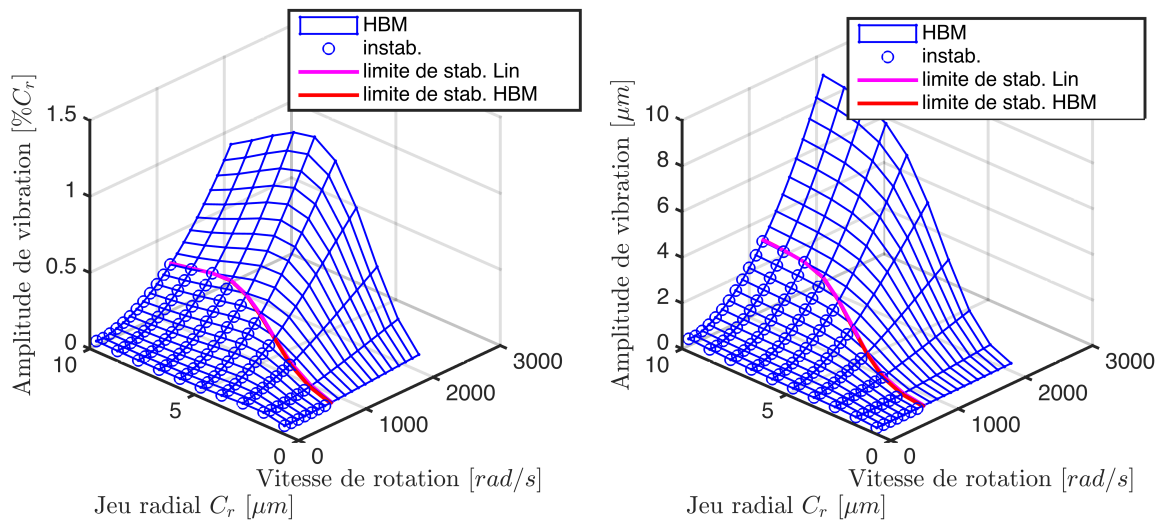


FIGURE 4.16 – Dépendance par rapport au jeu radial, de l'excentricité maximum et de la stabilité du mouvement du rotor du banc PHAT soumis à un balourd de 1 g.mm pour différentes vitesses de rotation, obtenu par analyse linéaire dans le repère fixe, tournant, et par analyse par HBM

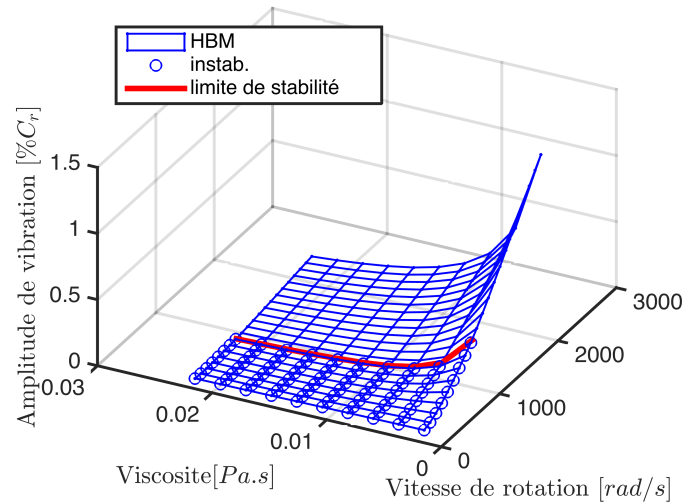


FIGURE 4.17 – Dépendance par rapport au jeu radial, de l'excentricité maximum et de la stabilité du mouvement du rotor du banc PHAT soumis à un balourd de 1 g.mm pour différentes vitesses de rotation, obtenu par analyse linéaire dans le repère fixe, tournant, et par analyse par HBM

film est plus faible, car un excentrement plus important est nécessaire pour contre-balancer le chargement dynamique.

Impact du défaut de rectitude des arbres

Les arbres réels ne sont jamais rigoureusement droits, et un défaut de rectitude subsiste par rapport à la géométrie cylindrique théorique. Si l'arc de l'arbre (ou *shaft bow*) est de l'ordre de quelques microns (donc relativement faible pour l'ensemble de la pièce), il peut influencer le film d'huile de façon importante. On peut constater sur la figure 4.18 que l'arc de l'arbre peut avoir des vertus stabilisatrices pour le rotor. Afin de tracer cette figure, le défaut de rectitude a été approximé avec des paraboles qui s'annulent au centre des paliers, et dont l'extremum vaut A_r au milieu de la tige. A partir de ces trois points, on interpole alors la flexion par un polynôme d'ordre 2 en première approximation. L'arc de l'arbre a été, dans cet exemple, modélisé en phase avec le balourd, mais l'on peut imaginer que la présence de déphasage peut influencer également l'amplitude du mouvement et le seuil de stabilité.

4.3 Arbre avec paliers texturés : Texturations sinusoïdales

Nous avons vu les principales dépendances des vibrations par rapport aux paramètres du système dans le cas d'arbre lisse sur palier hydrodynamiques. Nous nous proposons à partir de ce paragraphe et dans la suite de ce chapitre, d'analyser l'impact des différentes texturations du tableau 4.3 sur la dynamique du système, en commençant par les texturations sinusoïdales, longitudinales et transversales. Afin de comparer les positions d'équilibre des rotors pour les différentes textures, nous nous proposons d'utiliser le repère tournant, à un balourd relativement élevé de $2 \times 1\text{ g.mm}$ et à la vitesse maximum prévue pour le banc PHAT, c'est-à-dire 2000 rad/s . Rappelons que nous utilisons la forme des facteurs d'écoulement décrite dans la partie 2.3.2, donc avec texturation de la partie mobile (ici le rotor).

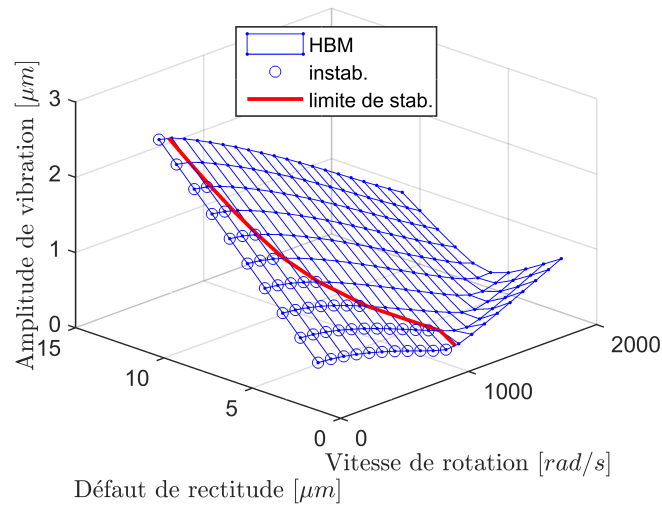


FIGURE 4.18 – Dépendance par rapport au défaut de rectitude des arbres A_r , de l'excentricité maximum et de la stabilité du mouvement du rotor du banc PHAT soumis à un balourd de 1 g.mm pour différentes vitesses de rotation, obtenu par analyse linéaire dans le repère fixe, tournant, et par analyse par HBM

4.3.1 Positions d'équilibre stationnaire

La figure 4.19 présente la variation de la position du centre de l'arbre pour différentes texturations sinusoïdales. On constate sur ce graphique que la modification de la position d'équilibre stationnaire dans le repère tournant est relativement faible. La partie gauche du diagramme permet de remarquer que la texturation longitudinale devrait modifier tout de même la phase, et la partie droite montre que l'amplitude des vibrations pourrait varier au maximum d'environ 15 %. Cependant cette valeur serait atteinte pour des amplitudes de texturation très élevées (70 % du jeu), or pour ces amplitudes, l'épaisseur de film minimum serait fortement réduite, ce qui pourrait poser d'autres problèmes dans le mécanisme. Nous rappelons que dans la réalité, ces texturations ne seraient pas obtenues à partir du palier lisse dont la position d'équilibre stationnaire est représentée sur la figure (pour une amplitude $h_r = 0$), car la sinusoïde est ajoutée par rapport au palier lisse en enlèvement et en ajout de matière (donc difficile à obtenir dans un cas réel à partir d'un arbre lisse de même rayon moyen). En revanche, cet exemple a pour intérêt de comparer des jeux moyens équivalents.

4.3.2 Amplitude des vibrations non-linéaires

Oil whirl et bifurcation de Neimark-Sacker

Lorsque l'on s'intéresse à la stabilité des orbites obtenues par méthode HBM, nous observons également une bifurcation pour le palier texturé. Cependant, la texturation influence directement la bifurcation. Comme on le voit sur la figure 4.20 le point auquel les multiplicateurs de Floquet traversent le cercle unité est bien différent entre la texturation sinusoïdale transverse et longitudinale, de même amplitude $h_r = 0.5 C_r$. Ce résultat est également lié à la dépendance de la fréquence de l'*oil whirl* par rapport à l'état de surface des paliers.

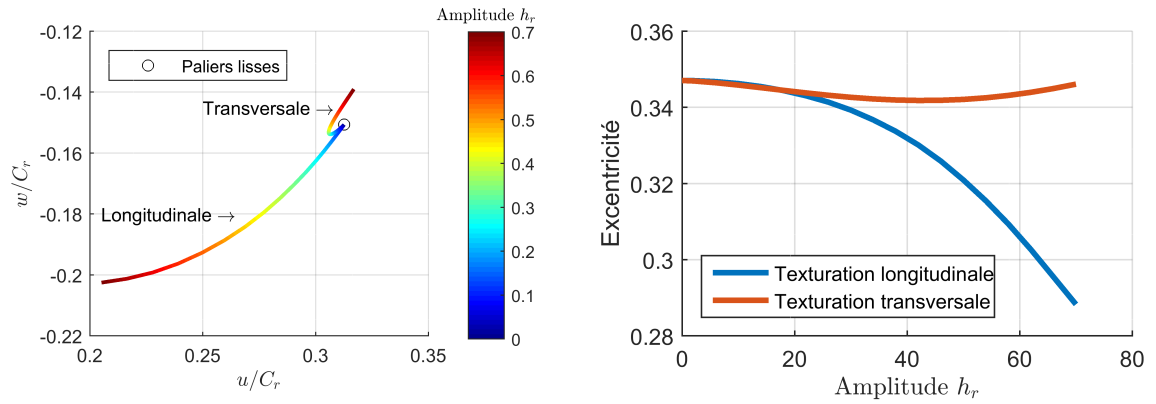


FIGURE 4.19 – Positions d'équilibre du rotor du banc PHAT dans le repère tournant, soumis seulement à un balourd de $2 \times 1 \text{ g.mm}$, en faisant varier sa vitesse de rotation de 100 rad/s (excentricité la plus faible) à 1000 rad/s (excentricité la plus élevée); le balourd est imposé dans la direction de u

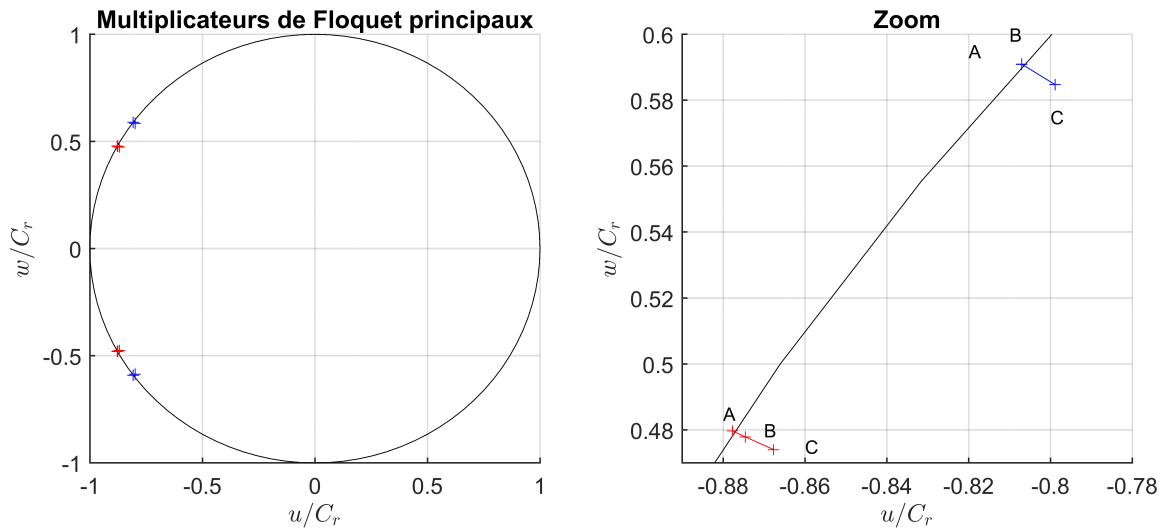


FIGURE 4.20 – Bifurcation de Neimark-Sacker illustrée par les multiplicateurs de Floquet, avec un motif sinusoidal longitudinal et transversal d'amplitude $h_r = 0,5 C_r$; les points A,B, et C sont reportés sur la figure 4.22

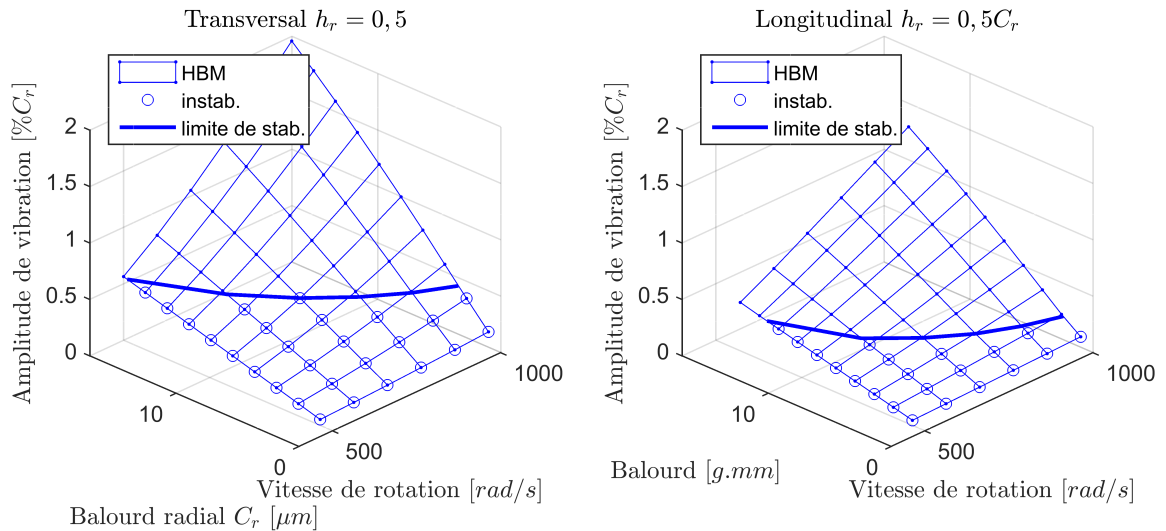


FIGURE 4.21 – Amplitude de vibration de rotors texturés avec un motif sinusoïdal longitudinal et transversal d’amplitude $h_r = 0,5 C_r$

Impact sur le seuil de stabilité

Comme il a été présenté dans l’article [121], l’amplitude de vibration et le seuil de stabilité peuvent être très influencés par la texturation sinusoïdale. Dans ce mémoire, nous avons adapté les grandeurs du système au banc PHAT ce qui explique que les résultats sont légèrement différents par rapport à l’article [121]. Par rapport à cet article, la vitesse de rotation a été prise un peu inférieure (de 500 à 1000 rad/s), ce qui explique que les valeurs des balourds soient également un peu supérieures pour atteindre la stabilité. La figure 4.21 présente les amplitudes de vibrations d’une extrémité du rotor pour des texturations sinusoïdales transversales et longitudinales d’amplitude $h_r = 0,5 C_r$. On remarque que pour les plages de vitesses étudiées, l’amplitude des vibrations ainsi que le seuil de stabilité sont diminués pour la texturation longitudinale, ce qui la rend théoriquement plus performante que la texturation transversale.

Les seuils de stabilité sont présentés séparément sur la figure 4.22, et sont comparés avec le seuil de stabilité obtenu dans le cas lisse de même jeu radial moyen C_r . Cette figure illustre bien les remarques précédentes, et montre également que la texturation transversale est, dans ce cas, moins performante que le rotor lisse d’un point de vue vibratoire par rapport à la vibration synchrone. Dans l’article [121], l’analyse est effectuée pour des vitesses de rotation plus élevées (2500 à 3000 rad/s) et des dimensions de rotor légèrement différentes. Avec ces données, il est montré que le seuil de stabilité est diminué avec la texturation transversale, tandis que c’est bien toujours la texturation longitudinale qui permet de diminuer l’amplitude des vibrations. Toutefois, les différences de seuil de stabilité sont obtenues avec des balourds très faibles à vitesses élevées.

A vitesse fixée, on peut s’intéresser au balourd minimum susceptible de stabiliser le mouvement en fonction de l’amplitude de texturation (figure 4.23). On constate également que la texturation longitudinale abaisse le seuil de stabilité ainsi que l’amplitude des vibrations tandis que la texturation transversale a tendance à les augmenter. Sur ce graphique, on peut souligner que les courbes ne semblent pas se rejoindre à amplitude nulle. En fait, en affinant la discrétisation vers zéro, on observe que la courbe de la texturation transverse rejoint bien la courbe de la texturation longitudinale, mais à très faible

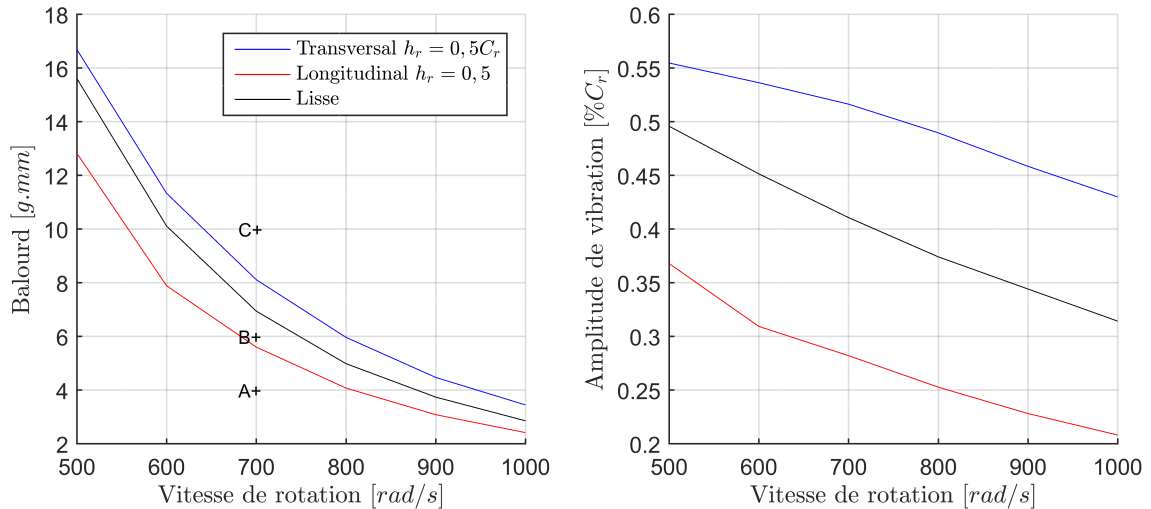


FIGURE 4.22 – Comparaison des seuils de stabilité des rotors texturés avec un motif sinusoïdal longitudinal et transversal d’amplitude $h_r = 0,5 C_r$ par rapport au rotor lisse de même jeu radial

amplitude de texturation le mouvement est stabilisé par la texturation transversale. Ce résultat a également été mis en évidence à plus haute vitesse dans [121].

4.4 Arbre avec paliers texturés : Texturations sinusoïdales partielles

En vertu de la définition des texturations sinusoïdales partielles que nous avons adopté, nous comparons dans cette partie un rotor lisse avec le même rotor, texturé par enlèvement de matière. Dans ce paragraphe, les jeux ne sont donc pas égaux contrairement au paragraphe précédent. Il conviendra alors non seulement de comparer les rotors texturés avec les rotors non texturés, mais également avec les rotors lisses à jeu moyen égaux, étant donné que l’enlèvement de matière augmente le jeu radial moyen (*cf.* tableau 2.3).

4.4.1 Positions d’équilibre stationnaire

La figure 4.24 présente les positions d’équilibre stationnaire dans le repère tournant (en négligeant le poids propre de l’arbre), pour différents taux a de texturation (pour $a = 100\%$ on retrouve la texturation sinusoïdale du paragraphe précédent). Étant donné que le taux d’enlèvement de matière influence également le jeu moyen, nous avons comparé les arbres texturés avec les arbres lisses de jeu moyen $C_r = C_{r0} + \frac{a}{2}h_r$, avec C_{r0} , le jeu radial pris pour $a = 0$. On constate que quelque soit l’état de surface, le fait d’augmenter le jeu radial moyen augmente l’excentricité par rapport au rotor auquel n’a pas été effectué d’enlèvement de matière.

4.4.2 Amplitude des vibrations non-linéaires et stabilité

Afin d’étudier l’impact du taux de surface texturé a , on se propose sur la figure 4.25 de présenter l’amplitude de vibration et la stabilité pour différentes vitesses de rotation. On constate qu’en augmentant le jeu radial pour chacune des texturations, on augmente

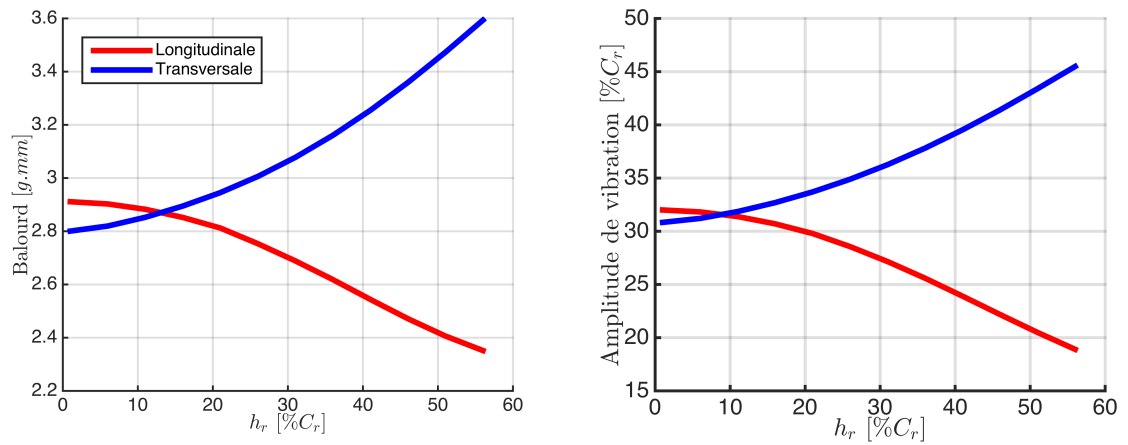


FIGURE 4.23 – Balourd minimum nécessaire à la stabilisation du système à 1000 rad/s en fonction de l’amplitude de la texturation sinusoïdale dans le cas de motifs longitudinaux ou transversaux par rapport à l’écoulement (à gauche) et amplitude des vibrations au niveau du seuil de stabilité (à droite)

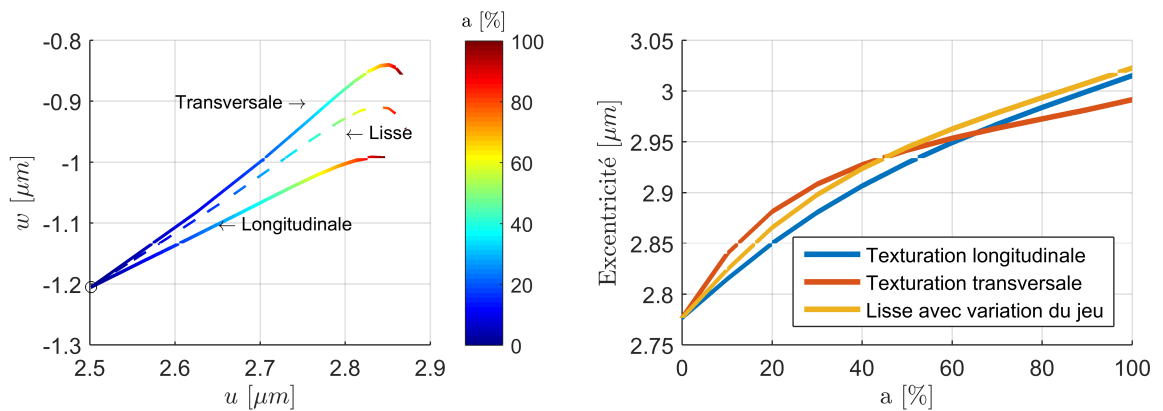


FIGURE 4.24 – Positions d’équilibre stationnaire dans le repère tournant pour les systèmes sinusoïdaux ($h_r = C_r$) partiellement texturés (taux de texturation a) soumis à un balourd de 1 $g.mm$ à 2000 rad/s , comparé au palier lisse de jeu radial moyen équivalent, avec un balourd de 1 $g.mm$

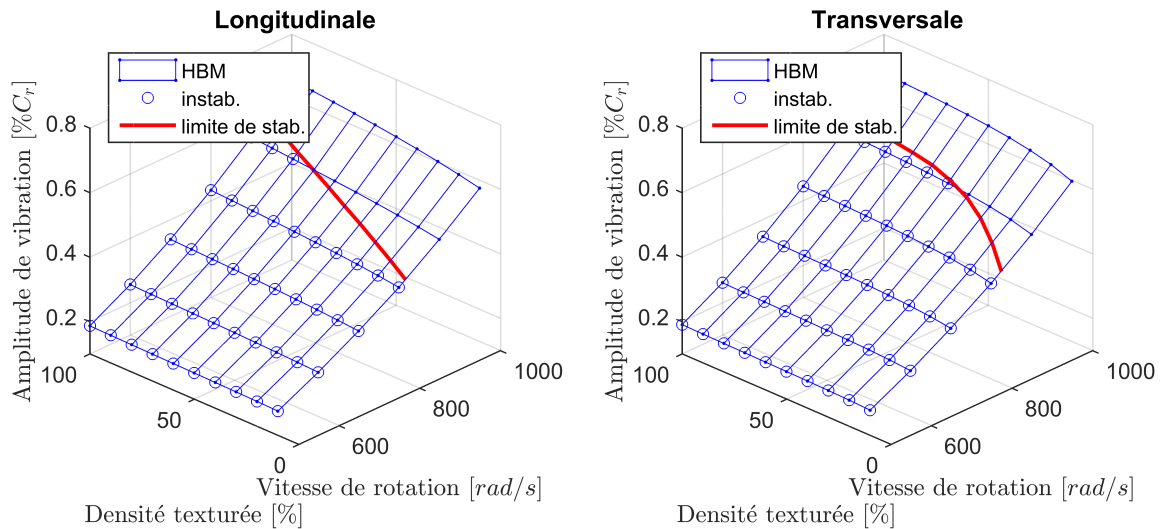


FIGURE 4.25 – Amplitude des vibrations et seuil de stabilité pour différentes densités de texturation (a), pour les texturation par enlèvement de matière, transversales et longitudinales par rapport à l’écoulement dans le palier

également la vitesse du seuil de stabilité, ce qui représente un résultat plutôt négatif pour la machine.

Afin d’observer plus facilement le seuil de stabilité et l’amplitude de vibration lors du passage du seuil de stabilité, et de comparer les texturations longitudinale, transversale et lisse à jeu radial moyen équivalent, les seuils ont été tracés séparément sur la figure 4.26. On observe sur cette figure, les mêmes tendances que précédemment, à savoir une augmentation du seuil de stabilité avec l’augmentation du jeu radial moyen. Remarquons tout de même que la texturation transversale présente une inflexion intéressante, et correspond à un seuil de vibration inférieur à la texturation longitudinale à haute densité de texturation.

4.5 Arbre avec paliers texturés : Texturations *dimples*

4.5.1 Stabilité des positions d’équilibre stationnaire

De la même manière que précédemment, on peut s’intéresser aux positions d’équilibre stationnaire dans le repère tournant pour les texturations du type de creux micrométriques obtenus par laser (ou *dimples*). La figure 4.27 présente les résultats obtenus pour des arbres soumis à un balourd de $2 \times 10 \text{ g.mm}$, pour des vitesses de rotation de 100 à 2000 rad/s . La position choisie pour l’exemple est l’une des extrémités intérieures d’un palier (abscisse curviligne de 26 mm ou 108 mm sur la figure 4.1). Les positions d’équilibre en traits pleins obtenus avec les texturations sont comparées avec les positions d’équilibre obtenues pour des paliers lisses de jeu moyen équivalent en pointillés. On remarque premièrement sur cette figure que les différentes texturations mènent à des résultats tout à fait similaires. Par ailleurs, on constate que l’impact de la texturation est très proche de l’impact de l’augmentation du jeu. On observe cependant une faible différence d’excentricité et d’angle de calage dans les cas texturés.

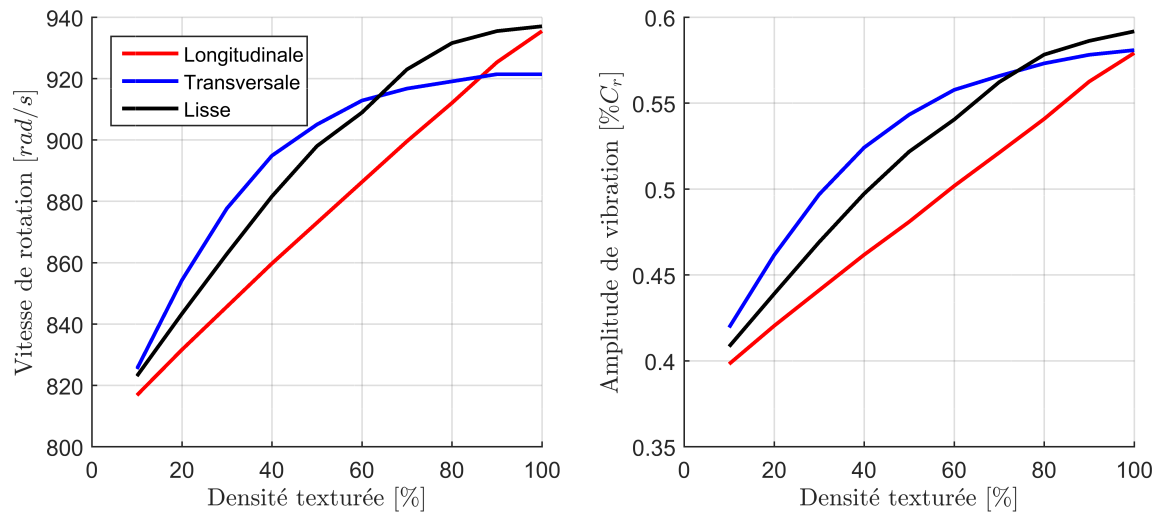


FIGURE 4.26 – Seuils de stabilité obtenus pour différentes densités de texturation (a), pour les texturation par enlèvement de matière, transversales et longitudinales par rapport à l'écoulement dans le palier (à gauche) - amplitude des vibrations lors du passage du seuil de stabilité (à droite)

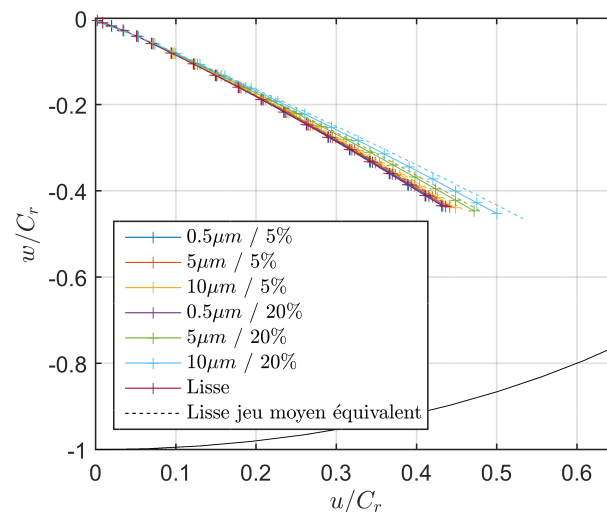


FIGURE 4.27 – Positions d'équilibre stationnaire dans le repère tournant pour des arbres texturés avec des *dimples*, soumis à un balourd de $2 \times 10 \text{ g.mm}$, et pour des vitesses de rotation de 100 à 2000 rad/s

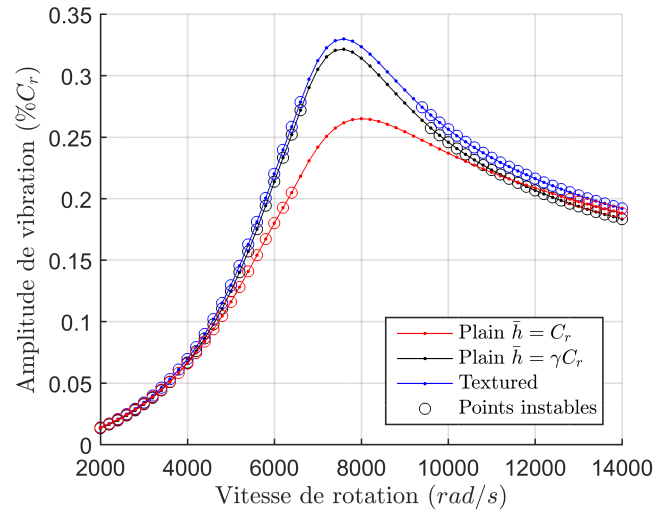


FIGURE 4.28 – Amplitudes des vibrations et stabilité des cycles limites synchrones dans le cas de la texturation type *laser dimples* n°6, comparé au même échantillon sans enlèvement de matière (en rouge), et également à l'échantillon lisse de jeu moyen équivalent (en noir), avec $C_r = 10\mu m$ et pour un balourd de $2 \times 5 mg.cm$

4.5.2 Amplitude des vibrations non-linéaires

Les résultats de l'analyse non-linéaire obtenus avec la texturation 6 sont exposés pour de hautes vitesses de rotation sur la figure 4.28. Nous avons choisis de présenter cette texturation en premier lieu car c'est la texturation la plus éloignée du cas lisse dans les texturations sélectionnées. La figure 4.28 indique les amplitudes des vibrations obtenus par HBM et leur stabilité, pour des arbres soumis à des balourds de $2 \times 5 mg.cm$, de 2000 à 8000 rad/s . Les vitesses étudiées, plus élevées que celles attendues sur le banc PHAT permettent de dépasser la première fréquence de résonance du rotor. Pour faire apparaître la résonance, le jeu radial a été pris de $10 \mu m$. Que ce soit avant ou après la résonance, la texturation a tendance à augmenter les amplitudes de vibration. Par ailleurs, le seuil de stabilité est légèrement augmenté. Avec les hypothèses de Reynolds, la texturation *dimples* semble peu influente, voire très légèrement néfaste d'un point de vue vibratoire avec les dimensions étudiées ici.

Nous répétons cette étude à de plus faibles vitesses et pour toutes les texturations étudiées afin de prédire le comportement des échantillons du banc PHAT. Sur la figure 4.29, on constate encore que la texturation augmente très légèrement les vibrations, ainsi que le seuil de stabilité d'environ 1000 tr/min . Il est intéressant de constater que les influences des texturations se classent dans l'ordre de l'augmentation du jeu moyen. On remarque également que les tendances sont similaires pour $C_r = 5 \mu m$ et $C_r = 10 \mu m$.

Enfin, on s'intéresse aux seuils de stabilité obtenus à faibles vitesses pour les texturations de type *laser dimples* sur les figures 4.30 et 4.31. On observe que les seuils se recouvrent quasi-parfaitement pour les courbes ayant un taux de recouvrement de 5% et le cas non texturé. Par ailleurs, on constate un deuxième groupe de courbes pour le taux de recouvrement de 20%. En ce qui concerne l'amplitude de vibration, on retrouve les deux groupes de courbes mais dont les amplitudes sont légèrement distinctes en fonction de la profondeur de texturation. Cela étant, la texturation de profondeur $0.5 \mu m$ et de taux de recouvrement de 5% se superpose parfaitement avec la courbe lisse ce qui montre le peu

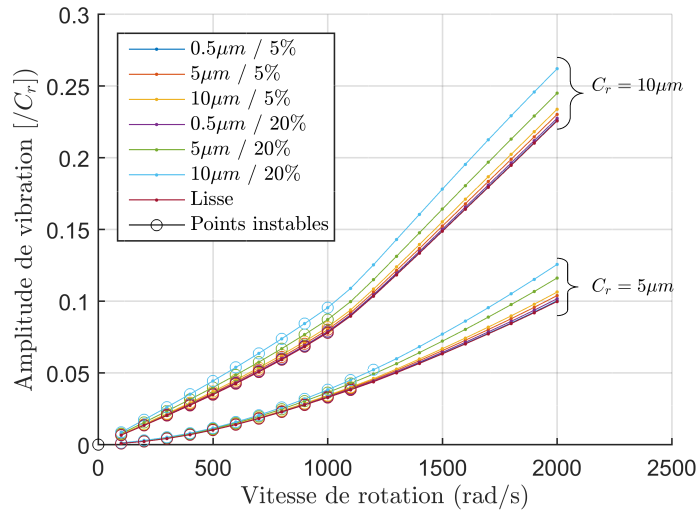


FIGURE 4.29 – Amplitude des vibrations et stabilité des cycles synchrones obtenus avec les différentes texturations type *laser dimples*, avec un balourd de $2 \times 2g.mm$ pour deux valeurs de jeu radial du palier sans texturation $C_r = 5 \mu m$ et $C_r = 10 \mu m$

d'impact théorique de cette texturation. Afin de distinguer les courbe de la figure 4.30, nous les avons tracées en 3 dimensions sur la figure 4.31.

En somme, les impacts des texturations du type *laser dimples* devraient être relativement faibles par rapport au seuil de stabilité, et également minimales en ce qui concerne les amplitudes de vibrations. Excepté pour les recouvrement importants (20%) et à faible profondeur de texturation, les résultats seraient néfastes, si les hypothèses du programme sont vérifiées.

4.6 Bilan des prédictions et de l'influence de l'état de surface

Grâce à l'efficacité de la méthode HBM, nous avons étudié, dans le cas de paliers lisses, l'influence de divers paramètres dans l'ordre de grandeur du banc d'essai du chapitre suivant :

- le balourd influence fortement la stabilité du système, notamment lorsque l'on fait varier fortement la vitesse de rotation de l'arbre (dépendance en $mr\Omega^2$), par un comportement stabilisant lorsque l'on augmente le balourd
- l'augmentation du jeu radial augmente à la fois les amplitudes de vibrations et le seuil de stabilité
- la variation raisonnable de viscosité dans les conditions d'application n'influence que très légèrement le seuil de stabilité
- l'existence d'un défaut de rectitude présente un effet stabilisant

La simulation du comportement dynamique d'une poutre élastique sur des paliers hydrodynamiques possédant divers état de surface a également été présentée dans ce chapitre. Rappelons que le modèle de palier fluide utilisé repose sur l'application des hypothèses de Reynolds à l'échelle des aspérités de topographie des surfaces, ce qui est une hypothèse forte du modèle. Rappelons de plus que la variation locale de viscosité peut rendre cette hypothèse encore plus discutable.

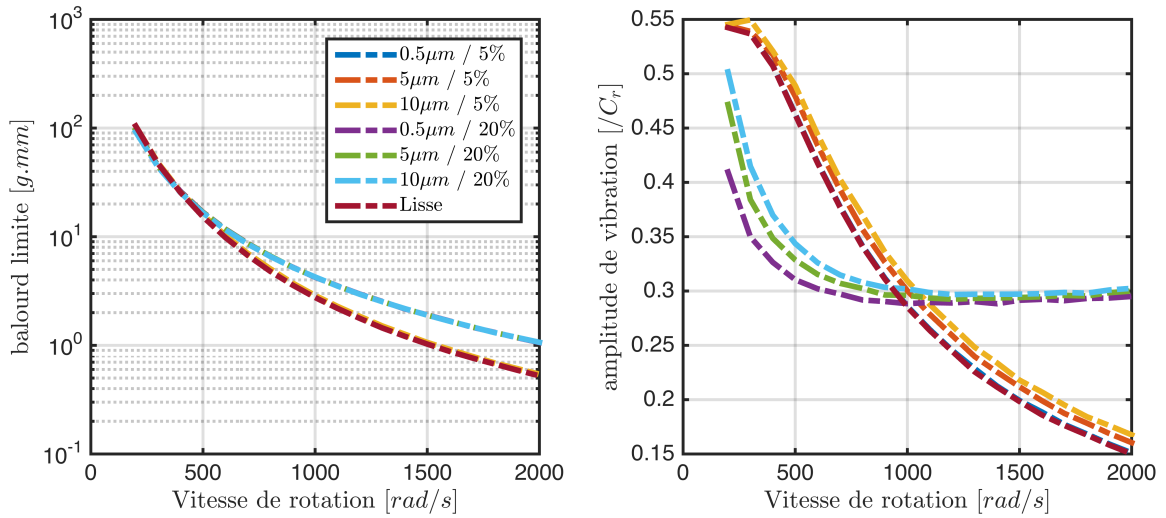


FIGURE 4.30 – Balourds minimum nécessaires à la stabilité des cycles synchrones en fonction de la vitesse de rotation (à gauche), et amplitude de vibration pour le cycle limite correspondant (à droite)

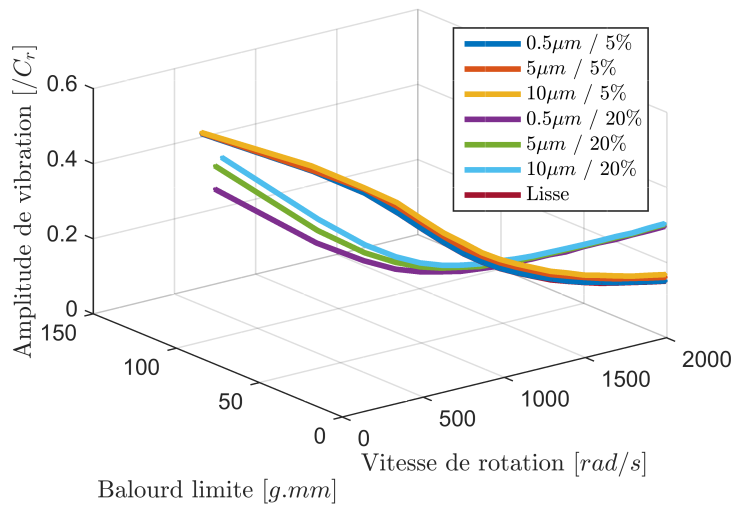


FIGURE 4.31 – Balourds minimum nécessaires à la stabilité des cycles synchrones en fonction de la vitesse de rotation, et amplitude de vibration pour le cycle limite correspondant (courbes de la figure 4.30 présentées en 3D)

En première approche nous avons séparé l'analyse de trois types d'états de surface (sinusoïdes 1D, sinusoïdes espacées 1D, *laser dimples*, cf. tableau 4.3), prise en compte sur tout le pourtour du palier, et dont l'étude a permis de mettre en avant les conclusions suivantes :

- l'influence sur les positions d'équilibre stationnaire est relativement faible, et relativement difficile à mettre en évidence sur banc d'essai par rapport aux autres paramètres mentionnés plus haut (jeu radial du palier, défaut de rectitude de l'arbre et balourd)
- les texturations longitudinales par rapport à l'écoulement dans le palier ont tendance à diminuer l'amplitude de vibration, toutefois, si l'on considère qu'elles sont obtenues par enlèvement de matière, l'augmentation du jeu radial qu'elles imposent rendent le procédé inefficace en ce qui concerne la diminution des vibrations
- les mêmes conclusions peuvent être faites quant aux effets obtenus sur le seuil de stabilité, c'est-à-dire que l'on ne devrait pas obtenir d'amélioration par enlèvement de matière à partir d'un palier lisse, en revanche, les paliers possédant une rugosité longitudinale présenteraient de meilleures performances que des paliers lisses de même jeu radial
- en ce qui concerne les paliers texturés par laser, les prédictions du modèle ne suggèrent pas d'amélioration du seuil de stabilité, voire plutôt une influence néfaste de la profondeur de texturation, encore une fois liée à l'augmentation du jeu radial moyen ; les variations seraient cependant suffisamment faibles pour ne pas être pénalisantes par rapport aux autres paramètres du système
- les améliorations les plus intéressantes concernent les texturations de faibles profondeurs et à faibles vitesses, qui devraient diminuer l'amplitude de vibration du rotor - ce résultat est également intéressant car dans ce cas là, les hypothèses locales de Reynolds devraient être vérifiées

En conclusion, l'étude des vibrations à partir du modèle d'écoulement local de Reynolds suggère qu'un polissage, conduisant à un enlèvement de matière, donc à une augmentation du jeu radial, à une diminution de la rugosité longitudinale du palier est inefficace. En revanche, cette étude ne prend pas en compte l'abrasion accentuée dans les phases de démarrage et d'arrêt par exemple, qui pourrait être due à un palier trop rugueux. Le même constat peut-être obtenu avec les texturations laser : en effet leur impact semble a priori faiblement négatif, mais si les aspérités permettent de capter les débris d'usure, la durée de vie du palier peut en être augmentée.

Enfin, nous avons vu que dans tous les cas le seuil de stabilité est relativement peu influencé par les texturations obtenues par enlèvement de matière, et que cette influence est principalement négative. Nous verrons dans le chapitre 5 que l'expérience contredit clairement ces résultats, mettant en doute les hypothèses de l'algorithme. Toutefois, ces résultats sont cohérents avec la plupart des études statiques présentées dans la littérature avec les mêmes hypothèses. Nous verrons dans la partie suivante que cette contradiction remet en doute les conclusions des autres études, et suggère le besoin d'améliorer le modèle hydrodynamique de palier, notamment par l'adaptation du principe des coefficients moyennés de Navier-Stokes au problème dynamique.

Chapitre 5

Caractérisation expérimentale du comportement dynamique du système rotor-paliers

Afin de reproduire le comportement dynamique d'une ligne d'arbre miniature lubrifiée par des paliers hydrodynamiques texturés, un banc d'essai de Palier Hydrodynamique avec Arbre Texturé (PHAT) a été conçu. L'objectif principal est de mesurer les vibrations du rotor dues à son interaction avec les films fluides de ses deux paliers. Le changement du rotor doit être facilité, pour tester facilement plusieurs tiges, lisses, ou texturées selon différents motifs, obtenus par un procédé utilisant un laser femtoseconde. Les modèles et les résultats des chapitres précédents ont permis de dimensionner les composants de mesure et le moteur.

Dans ce chapitre, nous commencerons par décrire le banc d'essai dans son ensemble, les choix de conception et de mesure, puis les dimensions réelles des éléments clés. Les problématiques d'alignement, d'étanchéité et d'équilibrage seront présentées, et nous discuterons de leur impact dans l'étude des vibrations des différentes tiges. Nous décrirons et discuterons les résultats obtenus pour différentes textures, et notamment leurs impacts sur les vibrations des rotors. Des comparaisons avec les prédictions obtenues à partir des modèles théoriques seront également effectuées.

5.1 Présentation générale

5.1.1 Principe du dispositif

Le schéma de la figure 5.1.1 présente une vue d'ensemble du banc PHAT. L'usinage a été réalisé par l'entreprise COMERA. Le moteur MAXON EC22 (0007) met en rotation la partie tournante du couplemètre MAGTROL TM301 (0009) via l'accouplement (0008). De même, la tige (0105) est mise en rotation par l'accouplement flexible (0010) et soutenue par les bagues (0101) et (0107), faisant office de paliers hydrodynamiques. Les paliers sont alimentés en huile par écoulement gravitaire depuis les colonnes (0114). Le lubrifiant est maintenu au bord des paliers par les joints d'étanchéité dynamique sans contact (0102) et (0103). Ces joints *viscoseal*, sont décrits en détail dans le paragraphe 5.1.6. Les bagues sont maintenues dans les boîtiers (0100) et (0106) par les pièces d'ajustement (0120). Le bon alignement de tous les modules (moteur, couplemètre, boîtiers des paliers), est assuré par la réglette rectifiée (0004). Quatre thermocouples sont placés afin de sonder la

température dans les bains d'huile en bord de palier (figure 5.2). Le portique de capteur de position (0109) permet de monter et démonter en bloc les 3 plans de mesures capacitives, sans trop modifier leur distance par rapport au rotor. Enfin, le banc a été conçu afin de pouvoir effectuer un montage sans le couplemètre, grâce à deux taraudages permettant de rapprocher le moteur et de l'accoupler directement à la tige (visible plus loin sur la photographie de la figure 5.9(b)). Les deux paliers peuvent également être intervertis ainsi que les boîtiers. Notons que l'une des deux bagues a été usinée afin de coller des sondes ultrasonores sur les plans de sa circonférence (0101) (présenté dans le paragraphe 5.1.4).

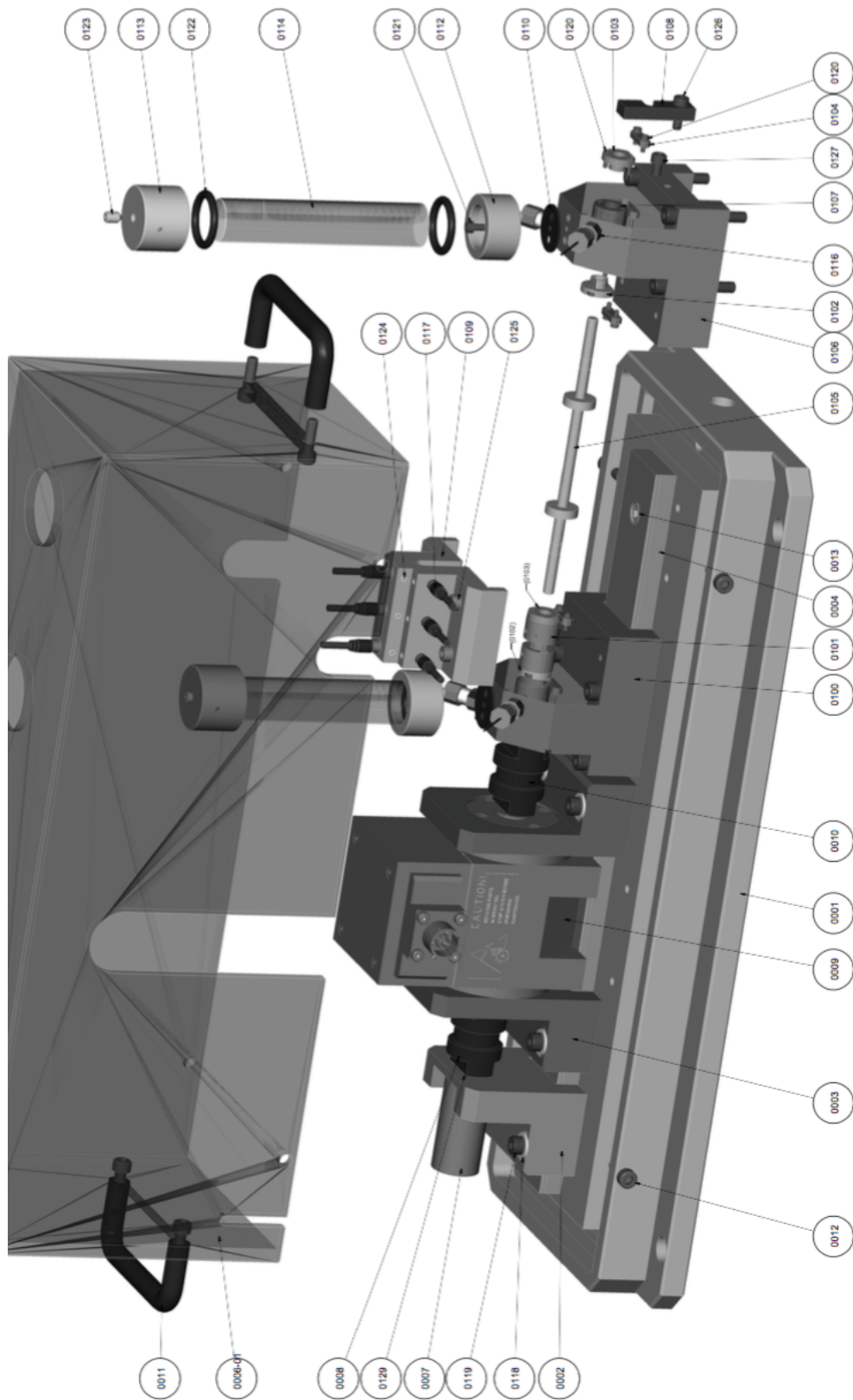


FIGURE 5.1 – Vue d'ensemble du banc de test de vibrations de Paliers Hydrodynamiques avec Arbres Texturés (PHAT)

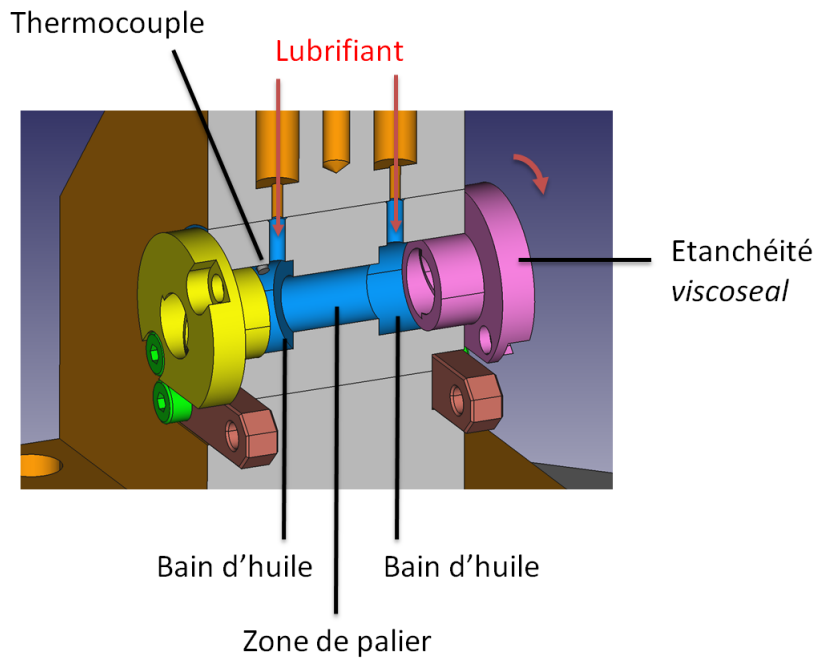


FIGURE 5.2 – Représentation schématique du bain d'huile alimentant le palier

5.1.2 Mesure de couple

La mesure de couple est réalisée de deux manières sur le banc PHAT : en montage couplemètre ou à partir de l'intensité du moteur. Le couplemètre, basé sur une mesure de champ électromagnétique entre deux disques troués de fenêtres, permet la mesure de couples faibles (200 mNm nominal). La torsion des disques assure la correspondance ou non des fenêtres des disques. Lorsque les fenêtres ne se recouvrent pas, il n'y a pas de courant dans les bobines de la partie statique. Lorsque les disques sont déformés en torsion, et que les fenêtres se recouvrent une tension alternative est mesurée dans les bobines. Il est important de remarquer que pour mesurer des couples aussi faibles, le dispositif nécessite d'être relativement gros par rapport à la taille du système. En ajoutant une inertie importante sur les parties tournants, le couplemètre induit un effet pénalisant. Le tableau 5.1 indique les inerties des différents composants. On constate que le montage avec le couplemètre présente une inertie 30 fois plus grande que le montage où le moteur est accouplé directement à la tige. Cela implique qu'à vitesse de rotation égale, le montage avec couplemètre stockera 30 fois plus d'énergie dans le système que le montage sans couplemètre. Un autre inconvénient lié au montage du couplemètre est le fait que la précision de l'assemblage sera moins maîtrisée, en raison des différents balourds qu'il introduit. Par ailleurs, on peut remonter à l'information de couple à partir de l'intensité nécessaire au moteur pour maintenir la vitesse de rotation de l'arbre dans les paliers. Cette mesure moins précise permet toutefois de comparer les différents échantillons directement d'un point de vue de leur consommation d'énergie électrique.

5.1.3 Mesure de vibrations

La mesure des vibrations est effectuée le long de la ligne d'arbre au moyen de capteurs capacitifs. Le bon fonctionnement de ce genre de capteur est directement lié à l'environ-

Partie tournante	Inertie
Tige	0,62 $g.cm^2$
Disque	0,66 $g.cm^2$
Couplemètre	250 $g.cm^2$
Accouplement pour le couplemètre	23,3 $g.cm^2$
Accouplement sans couplemètre	3,7 $g.cm^2$
Montage complet avec couplemètre	301 $g.cm^2$
Montage complet sans couplemètre	8 $g.cm^2$

TABLE 5.1 – Inertie des composants en rotation

nement. En effet, la présence d’huile sur la cible change la conductivité diélectrique dans l’entrefer et peut perturber la mesure. Afin de réaliser une mesure fiable avec ce genre de capteur dans un environnement lubrifié, il faut s’assurer de la propreté de la cible (en l’occurrence la surface de l’arbre entre ses rondelles dans notre application).

Les capteurs de position sont orientés à 90° afin de pouvoir reconstituer au mieux les orbites de l’arbre au niveau des plans de mesure. Par un choix d’interpolation, on peut extrapoler les positions de l’arbre à partir des trois plans de mesures du banc PHAT. En général, il peut être judicieux de positionner les capteurs de part et d’autre des paliers. Cependant pour des questions de simplicité d’intégration, nous avons choisi de les placer uniquement entre les paliers. Il faut donc être prudent quant à l’interpolation du déplacement au niveau des extrémités des tiges. En revanche, le positionnement d’au moins trois plans permet de distinguer la flexion de l’arbre, ce qui n’aurait évidemment pas été possible à partir d’un nombre inférieur de plans.

Les capteurs capacitifs acquièrent un signal en volt proportionnel à la position de l’arbre à une fréquence maximum de 10 kHz donnant ainsi des analyses de spectres à des fréquences maximum de 5 kHz , soit environ 5 fois supérieures au premier mode propre des tiges.

5.1.4 Mesure de l’épaisseur de film par ultrasons

Comme nous l’avons vu dans tous les chapitres précédents, la première grandeur clé des vibrations induites par les paliers hydrodynamiques est le débit de lubrifiant à l’intérieur du palier. Cette grandeur est, dans notre configuration, impossible à mesurer directement de façon non intrusive. La deuxième grandeur clé est la pression dans le palier, directement reliée au débit de lubrifiant et à la zone de cavitation. Certaines études expérimentales ont permis d’observer cette grandeur comme par exemple dans l’article de Mihara et al. [102], de Valkonen et al. [142, 141], ou encore l’étude de Sinanoglu et al. [131]. Toutefois dans ces études les sondes ont été utilisées sur des paliers de diamètres assez élevés, et elles auraient un impact largement intrusif dans l’écoulement d’un palier de diamètre aussi faible que ceux du banc PHAT, ou alors seraient difficiles à intégrer. Par ailleurs, instrumentations relativement récentes permettent de mesurer localement l’épaisseur de film et la zone de cavitation par des méthodes ultrasonores. Le travail du groupe de Dwyer-Joyce semble le plus prometteur pour obtenir des mesures non-intrusives du comportement local du film lubrifiant [49, 76].

Des sondes piézoélectriques de très petites tailles ont été placées sur l’un des paliers afin d’émettre et recevoir des signaux ultra-sonores. Le traitement de ces signaux permet de remonter à une valeur de l’épaisseur de film et à la présence éventuelle d’une zone de cavitation dans le palier. Douze sondes ont été collées le long de la circonférence du palier

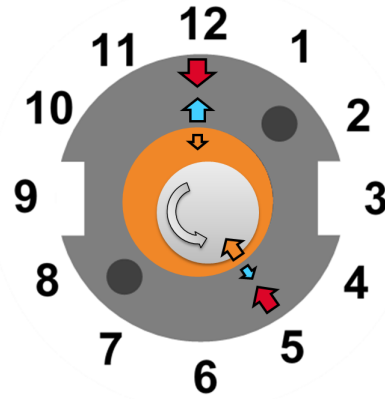


FIGURE 5.3 – Positions des 12 capteurs à ultrasons, l'émission de l'onde est représentée en rouge, la transmission en orange et la réflexion en bleu, schématiquement pour deux positions différentes



FIGURE 5.4 – Photographie du palier instrumenté par les capteurs ultrasons

selon le schéma de la figure 5.3. Un commutateur permet d'acquérir le signal d'une de ces sondes lorsqu'elle est sélectionnée.

On distingue plusieurs méthodes permettant de calculer l'épaisseur de film à partir de l'émission et la réception de signaux ultra-sonores. Les trois méthodes principales, plus ou moins efficaces selon l'ordre de grandeur de l'épaisseur de film à mesurer sont résumées dans le tableau 5.2. En raison des faibles épaisseurs de film prévues dans les paliers du banc PHAT, nous avons sélectionné la méthode de raideur d'interface, modèle de "ressort" (*Spring model*), décrit dans le paragraphe suivant. Cette méthode est préconisée lorsque l'interface à caractériser a une épaisseur de l'ordre de grandeur de la longueur d'onde des ultrasons.

Modèle de "ressort" du film fluide

Dans ce modèle, on considère que la couche de lubrifiant agit comme un ressort, dont la raideur k_L est fonction de l'épaisseur de film h :

Méthode	Épaisseur de film mesurée min - max	Avantages	Inconvénients
Temps de vol	$100 \mu m - \infty$	Pas affecté par la température- Mesure de référence non nécessaire	Mesure de couches épaisses uniquement
<i>Resonant dip</i>	$30 \mu m - \infty$	Pas affecté par la température - Mesure de référence non nécessaire	Mesure de couches épaisses uniquement
Modèle ressort	$100 nm - 50 \mu m$	Mesure de couches très minces	Un signal de référence est nécessaire - Dépend de la température

TABLE 5.2 – Les différentes méthodes de mesure par spectrométrie ultra-sonore (adapté de [70])

$$k_L = \frac{\rho c^2}{h} \quad (5.1.4.1)$$

A partir de la réflexion de l'onde ultra-sonore sur l'interface, on obtient la relation liant le coefficient de réflexion R et la raideur de l'interface k_L :

$$R = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{2k_L}{\omega Z}\right)^2}} \quad (5.1.4.2)$$

Avec Z l'impédance acoustique des matériaux solides du contact. Ainsi, en mesurant le coefficient de réflexion R à partir du signal émis et de la mesure du signal réfléchi, on peut obtenir h par la relation suivante :

$$h = \frac{2\rho c^2}{\omega Z} \sqrt{\frac{R^2}{1 - R^2}} \quad (5.1.4.3)$$

Le module d'acquisition installé sur le banc PHAT permet d'obtenir après traitement le coefficient de réflexion R à une fréquence maximum de $1 kHz$.

5.1.5 Analyse modale des pièces

Afin d'éviter toute résonance externe aux vibrations d'intérêt de l'étude, les modes des différentes pièces ont été analysés à l'aide du logiciel Code ASTER, et les résultats obtenus sont présentés sur la figure 5.6.

Modes du moteur et couplemètre

Afin d'analyser les fréquences des modes de vibration pour le moteur et le couplemètre, nous avons représenté ces derniers par des masses en acier sous forme de cylindre (module d'Young 210 GPa, coefficient de poisson 0.3, masse volumique $7800 kg/m^3$). Nous obtenons alors les 4 premières fréquences propres présentées dans le tableau 5.3. Ces dernières sont plus de dix fois supérieures à la fréquence de rotation nominale du banc ($300 Hz$).

Mode	Fréquence (kHz)
1 moteur	3.7
2 moteur	4.1
1 couplemètre	4.2
2 couplemètre	4.5

TABLE 5.3 – Tableau des premières fréquences propres du moteur et du couplemètre

Mode	Fréquence (kHz)
1 réservoir seul	1.8
2 réservoir seul	1.9
1 palier et réservoir	5.1

TABLE 5.4 – Tableau des premières fréquences propres correspondant aux boîtiers des paliers

Modes des paliers

Pour l'analyse des paliers, nous avons modélisé le réservoir en verre par un matériau élastique (module d'Young 69 GPa , coefficient de poisson 0.25, masse volumique 2500 kg/m^3) et le reste en acier (y compris le joint plat). Sur la figure 5.5 apparaissent la vis (en rouge) et le joint torique (en noir), que nous n'avons pas pris en compte dans le modèle éléments finis.

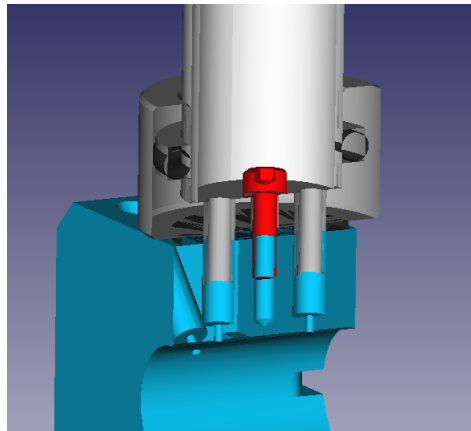


FIGURE 5.5 – Vue en coupe de l'arrivée d'huile dans le palier

Les fréquences de résonance sont présentées dans le tableau 5.4.

Cette analyse montre que les fréquences de résonances des pièces du banc d'essai sont suffisamment élevées pour ne pas être excitées. De plus les modes possédant les fréquences propres les plus faibles (environ 2 kHz), correspondant aux modes de vibration des réservoirs, qui ne devraient pas être excités par la rotation de l'arbre.

5.1.6 Étanchéité sans contact *viscoseal*

Afin de retenir l'huile en bords de palier en limitant l'augmentation du frottement et des vibrations dans le système, des joints sans contact ont été conçus. Le type d'étanchéité dynamique sans contact utilisé ici est appelé joint *viscoseal* ou joint *windback*. Ces joints permettent d'obtenir une bonne étanchéité avec un frottement faible, mais présentent deux

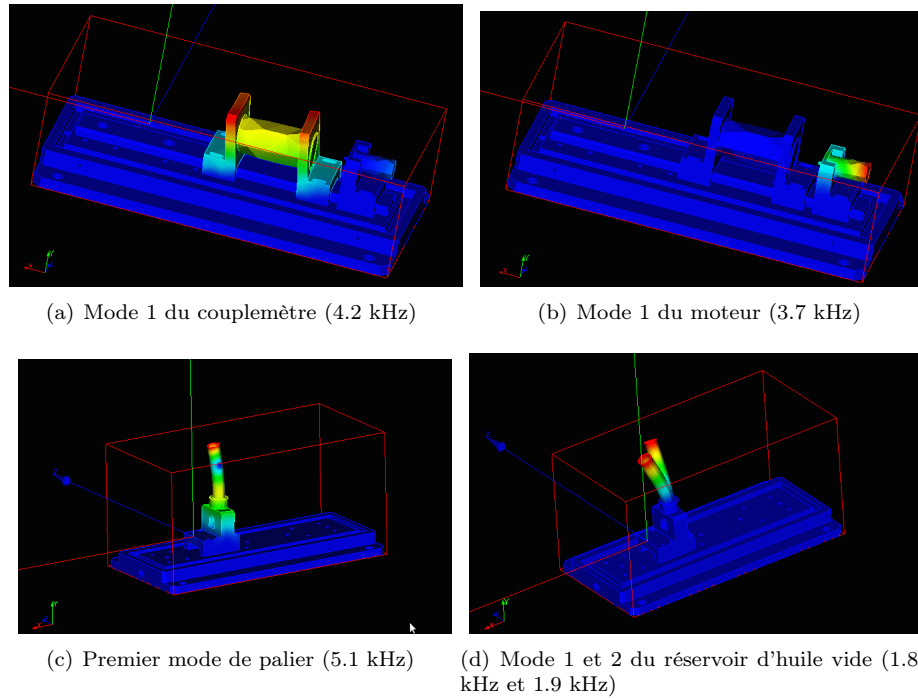


FIGURE 5.6 – Modes des pièces du banc d'essai

désavantages principaux :

- l'étanchéité est garantie uniquement à partir d'une certaine vitesse de rotation (pas d'étanchéité à l'arrêt)
- ces joints ne sont efficaces qu'au niveau d'une interface gaz/liquide

L'étanchéité est assurée par l'écoulement visqueux généré entre la surface en mouvement (dans notre cas le rotor) et la surface fixe. Remarquons que nous avons utilisé la version cylindrique du joint visqueux, mais on peut la décliner sous la forme radiale sur une butée.

Dans le cas d'un écoulement laminaire, on peut dimensionner le joint visqueux à partir d'un coefficient d'étanchéité Λ_v [56] défini par :

$$\Lambda_v = 3\mu \frac{L_v \Omega d_v}{c_v^2 \Delta p} \quad (5.1.6.1)$$

Permettant de relier la différence de pression entre l'entrée et la sortie du joint Δp , la viscosité du fluide μ , la longueur du joint L_v , la vitesse de rotation de l'arbre Ω , le diamètre du joint d_v , et le jeu radial minimum du joint c_v . Ces grandeurs sont explicitées sur la figure 5.7.

Les performances du joint sont alors garanties par les paramètres géométriques suivants :

$$\beta_v = \frac{h_v + c_v}{c_v} \quad (5.1.6.2)$$

avec h_v la profondeur du filetage

$$\gamma_v = \frac{b_v}{a_v + b_v} \quad (5.1.6.3)$$

avec b_v la largeur de la rainure, et a_v la largeur du créneau.

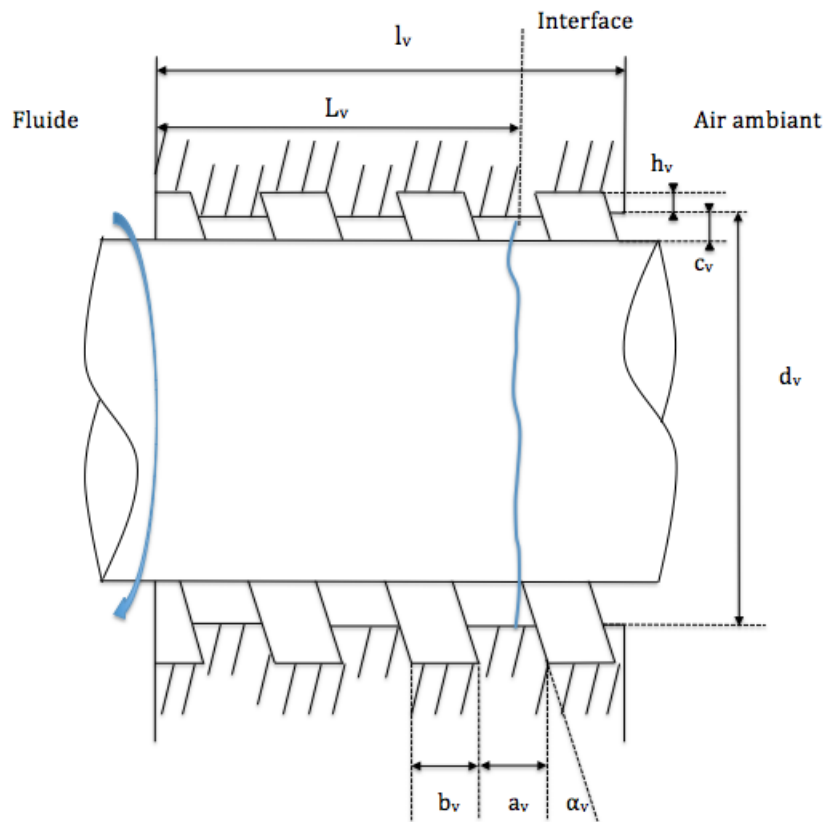
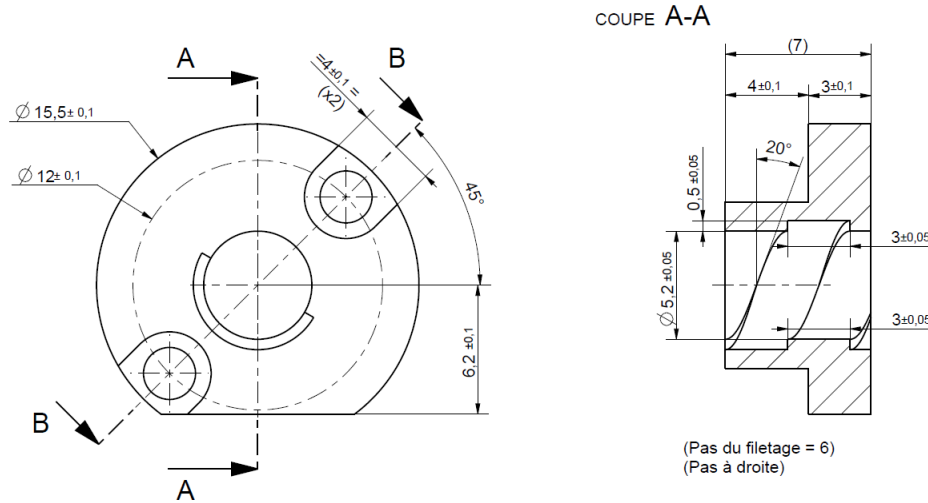


FIGURE 5.7 – Représentation schématique des notations nécessaires au dimensionnement du joint *viscoseal*


 FIGURE 5.8 – Plans de joints d'étanchéité sans contact *viscoseal*

Paramètres géométriques	
Longueur du joint l_v	7 mm
Profondeur de rainure h_v	0.5 mm
Jeu radial c_v	100 μm
Diamètre de l'alésage d_v	5 mm
Angle de la rainure α_v	20°
Largeur axiale d'espace entre rainure a_v	3 mm
Largeur axiale de rainure b_v	3 mm

 TABLE 5.5 – Données des joints *viscoseal*

$$t_v = \tan(\alpha_v) \quad (5.1.6.4)$$

avec α_v l'angle de l'hélice

On peut alors utiliser l'expression de Λ à partir de ces paramètres géométriques si les hypothèses d'écoulement laminaire sont justifiées.

$$\Lambda_v = \frac{\beta_v^3(1 + t_v^2) + \gamma_v t_v^2(1 - \gamma_v)(\beta_v^3 - 1)^2}{\gamma_v t_v(1 - \gamma_v)(\beta_v^3 - 1)(\beta_v - 1)} \quad (5.1.6.5)$$

Remarquons également que sur le banc d'essai PHAT, l'excentricité de l'arbre est limitée par le jeu des paliers hydrodynamiques. Ainsi, en prenant un jeu radial dans les joints de l'ordre de 100 μm , l'excentricité relative dans les joints visqueux ne doit pas excéder 10% de l'entrefer.

Les grandeurs retenues pour les joints utilisés sur le banc PHAT sont listées sur le plan 5.8, ainsi que dans le tableau 5.5.

Avec ces grandeurs, on trouve pour une huile de viscosité 0.006 Pa.s (comme pour la PAO-2 à 25°C, une augmentation de pression maximum d'environ 4 kPa à 10.000 tr/min (dans le cas où $L_v = l_v$).

Type d'accouplement	Rigidité radiale [Nm/mm]	Rigidité en torsion [Nm/rad]	Rigidité angulaire [Nm/°]	Moment d'inertie [kg.m ²]
Membrane métallique en cuivre (couplemètre)	8,43	389 (par lamelle)	0,014 (par lamelle)	$2,33 \times 10^{-6}$
Membrane métallique en inox	4	145	0,3	$6,0 \times 10^{-7}$
Soufflet en inox	16	310	-	$3,7 \times 10^{-7}$

TABLE 5.6 – Caractéristiques dynamiques des différents accouplements

N° de mode	Valeur mesurée	Valeur théorique	erreur (%)
1	1222 Hz	1216 Hz	0.4 %
2	3021 Hz	2987 Hz	1.1 %
3	6315 Hz	6350 Hz	0.6 %

TABLE 5.7 – Fréquences propres mesurées et théoriques des échantillons

5.1.7 Variantes des montages du banc

Nous rappelons dans ce paragraphe les différents montages possibles sur le banc PHAT :

- joints *viscoseal* ou joints lisses (cf. paragraphe 5.1.6)
- différents types d'accouplements dont les différentes raideurs sont présentées dans le tableau 5.6
- présence ou non du couplemètre (figure 5.9(a) et 5.9(b))
- présence du palier instrumenté par ultrason côté moteur ou côté libre, ou encore bague de remplacement non instrumentée (figure 5.9(c))
- 3 différentes huiles sont disponibles à savoir la PAO-2, la PAO-4 et la PAO-6, présentant respectivement à 25°C des viscosités de 5.4 mPa.s, 27 mPa.s, et 44 mPa.s

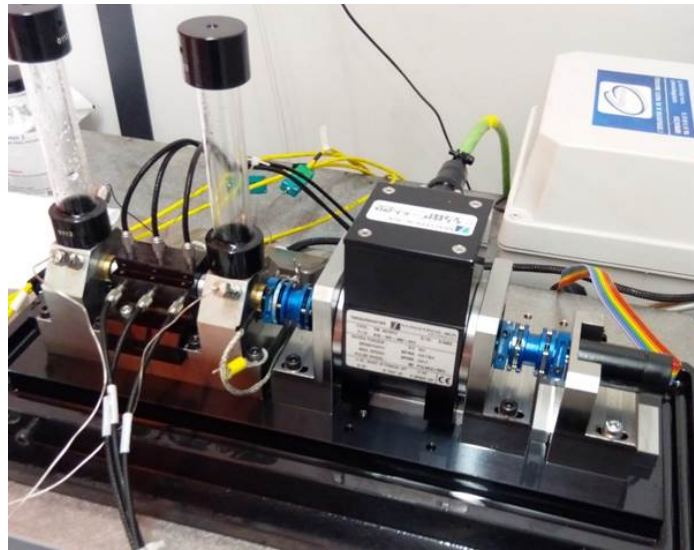
5.2 Caractérisation des échantillons

5.2.1 Analyse modale libre d'un échantillon

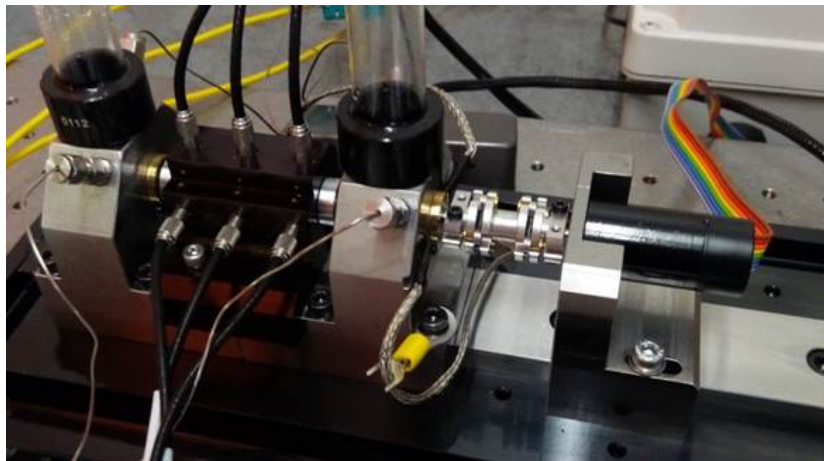
Afin de vérifier la validité des fréquences propres prévues par la théorie des poutres libres, nous avons effectué une analyse au marteau de choc, la tige étant soutenue par des élastiques souples. Les vibrations ont été mesurées par un microphone afin d'analyser la réponse globale de la poutre par rapport à la sollicitation, et de comparer les fréquences. Le tableau 5.7 présente la comparaison entre les résultats théoriques et la mesure. Le modèle de poutre droite est relativement bien vérifié, les erreurs sur les trois premiers modes propres étant de l'ordre de grandeur de 1%.

5.2.2 Morphologie des surfaces texturées

Les échantillons testés sur le banc PHAT présentent différents états de surface réalisés par texturation par ablation au LASER femtoseconde, en plus de la rugosité aléatoire des échantillons (R_a inférieur à $0,1 \mu m$). Sur les cinq échantillons texturés, nous avons testé deux recouvrements surfaciques (5% et 20% de la surface), et trois profondeurs de texturations ($0,5 \mu m$, $5 \mu m$ et $10 \mu m$ représentées figure 5.11). Les diamètres d'entrée des trous sont constants, et correspondent au diamètre du faisceau LASER ($\approx 15 \mu m$). Ainsi,



(a) Montage avec couplemètre



(b) Montage sans couplemètre



(c) Intersion du palier instrumenté

FIGURE 5.9 – Photographies de différents montages

N°	Profondeur / Densité surfacique
2	Lisse
3	$0,5 \mu m$ / 20%
4	$5 \mu m$ / 20%
5	$0,5 \mu m$ / 5%
6	Lisse
7	Lisse
8	$10 \mu m$ / 5%
9	$5 \mu m$ / 5%

TABLE 5.8 – Tableau des échantillons texturés testés

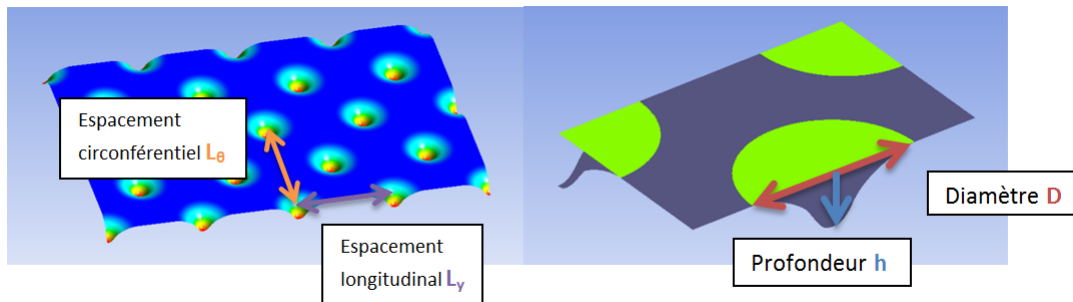


FIGURE 5.10 – Représentation schématique des motifs de texturation obtenus par ablation

pour reproduire une densité surfacique de 5% et 20%, les espacements ont été pris respectivement de $84 \mu m$ et $42 \mu m$, égaux dans les directions longitudinales et circonférentielles par rapport à l'arbre (exposées figure 5.10).

Le tableau 5.8 rappelle les combinaisons réalisées et le numéro correspondant, gravé sur l'échantillon.

5.2.3 Défaut de rectitude des arbres

Les arbres présentent un défaut de rectitude relativement faible (quelques microns de courbure entre les paliers). Cependant, étant donné le jeu également faible des paliers (entre 5 et 10 microns), l'amplitude de mesure des capteurs de position est principalement influencée par ce paramètre. Ainsi, nous avons mis en place une procédure de métrologie à partir d'un profilomètre confocal (figure 5.12(a)). La mesure a été effectuée par balayage radial au niveau des paliers ainsi qu'au niveau des capteurs de position, pour relier la mesure capacitive à la position de l'arbre dans le palier (figure 5.12(b)). Quatre positions angulaires ont été mesurées sur chaque arbre afin d'évaluer les maximums dans deux plans orthogonaux (plan $[0^{\circ} 90^{\circ}]$ et $[-45^{\circ} 45^{\circ}]$), les angles étant mesurés à partir de la marque gravée du numéro de l'arbre (figure 5.12(c)).

Les mesures moyennées et leurs écarts sont présentés sur le graphique de la figure 5.13. Celle-ci montre que les 4 échantillons possèdent des défauts de rectitude comparables : deux lisses, une texturation de recouvrement 20% et de profondeur $5 \mu m$ et une texturation de recouvrement 5% et de profondeur $10 \mu m$. Il est également intéressant de constater que l'on dispose d'un arbre lisse de déflection importante, ce qui peut nous permettre de vérifier ou non les prédictions de la simulation sur l'impact de ce paramètre sur la stabilité du système.

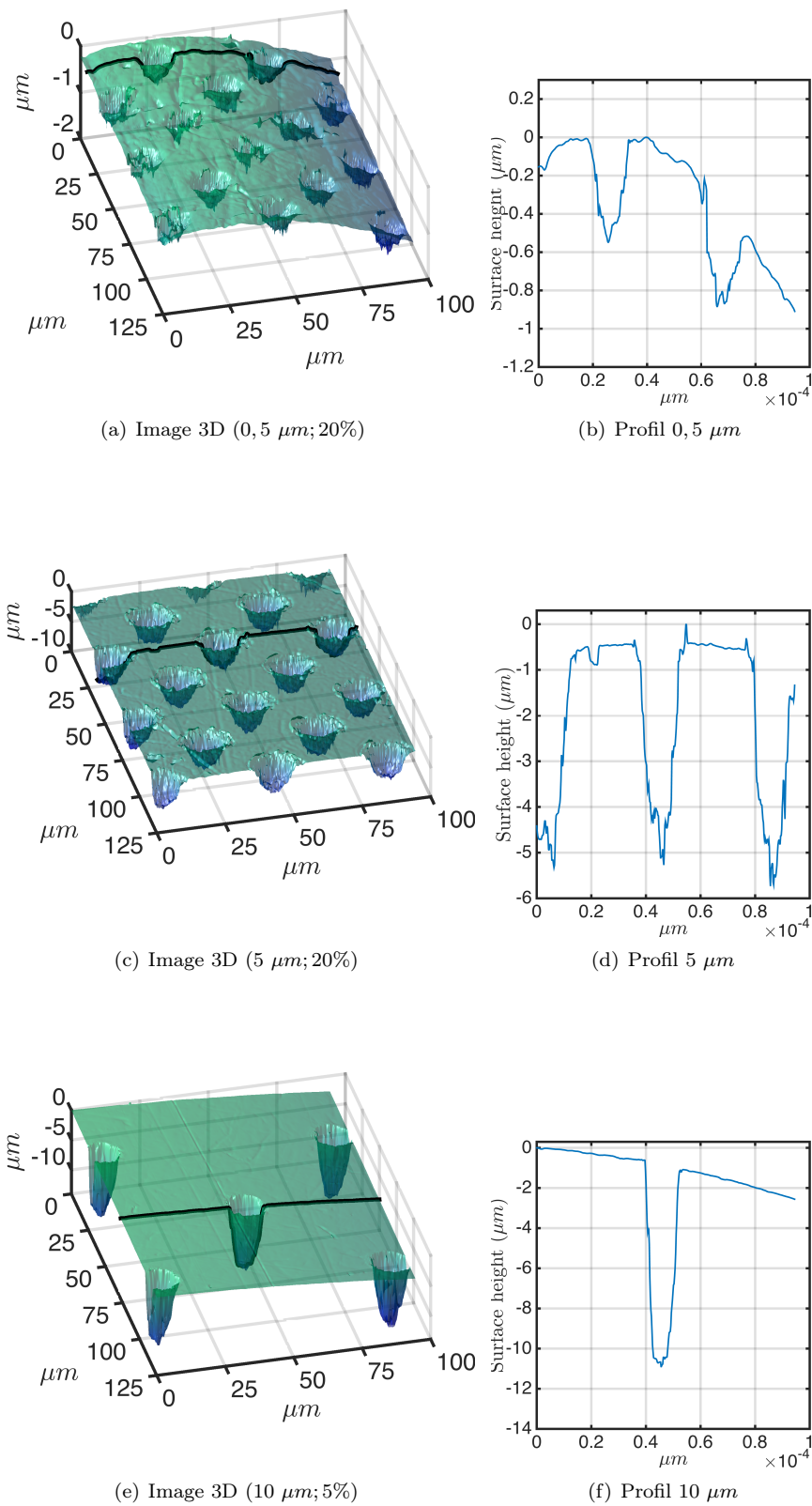
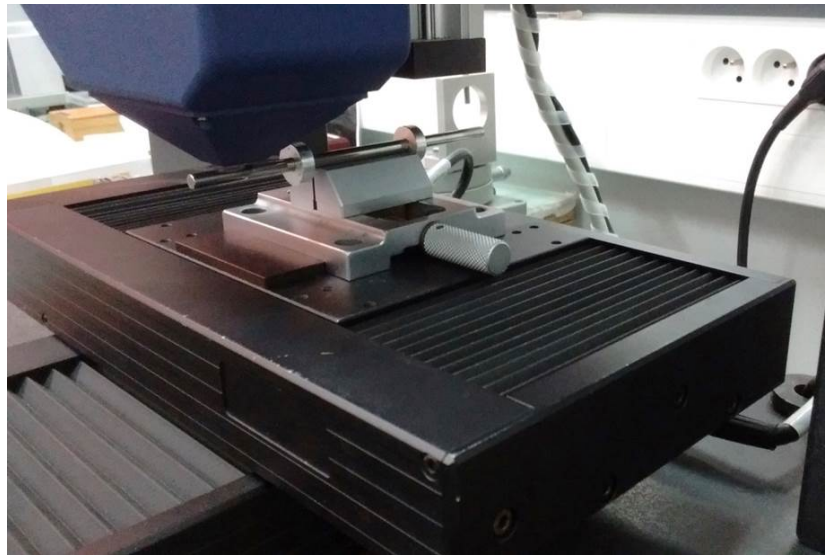
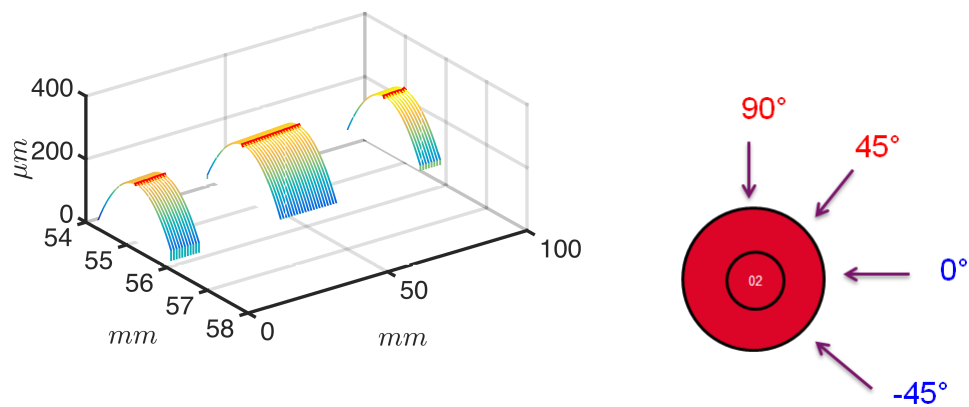


FIGURE 5.11 – Images topographiques 3D de surfaces texturées avec des cavités de profondeur différentes, et leurs profil 1D (arbre $N^{\circ}3$, $N^{\circ}4$, et $N^{\circ}8$)



(a) Dispositif de mesure



(b) Mesure au niveau des paliers et du milieu de la tige (c) Angles de mesures de la déflexion (arbre N°2, angle 0°)

FIGURE 5.12 – Procédure de mesure de défaut de rectitude des tiges

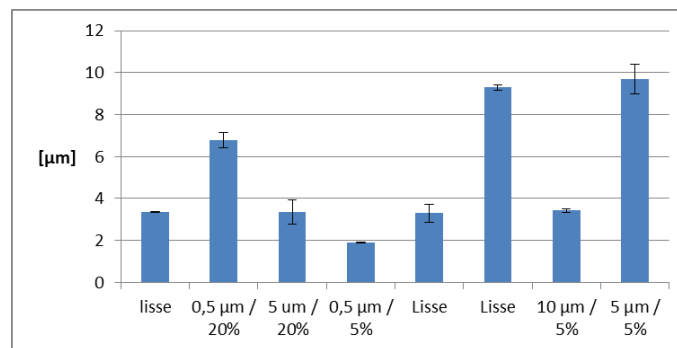


FIGURE 5.13 – Moyenne des deux mesures du défaut de rectitude des différents échantillons

5.3 Analyse vibratoire des machines tournantes

Les différentes caractéristiques du banc d'essai et des échantillons ayant été détaillées, nous présentons les mesures qui ont été réalisées pour confronter l'expérience à la modélisation. L'influence des différentes texturations sera mise en évidence dans le paragraphe 5.4. Afin de s'assurer de la bonne reproductibilité des mesures, deux campagnes de 5 essais par échantillons ont été menées, avec montage/démontage du boîtier de palier le plus éloigné du moteur, et nettoyage des alésages des paliers entre chaque essais à l'aide de bâtonnets *swabs*. Le montage sans couplemètre avec l'accouplement à membrane métallique en inox a été utilisé pour ces campagnes. Les paliers ont été lubrifiés avec l'huile PAO-4 pour la première campagne et l'huile PAO-2 pour la seconde. La température ambiante a pu varier de 22°C à 25°C durant les campagnes d'essais, et l'accouplement avec le moteur a été effectué angulairement de façon aléatoire. Pour la première campagne de mesure (PAO-4), la consigne du moteur a été une rampe de 50 *tr/min/s*, jusqu'à un plateau à 5000 *tr/min* d'environ 900 secondes. Pour la seconde campagne de mesure (PAO-2), la rampe de consigne a été de 50 *tr/min/s* jusqu'à un plateau de 10000 *tr/min* pendant environ 800 secondes. Chaque essai a duré environ 1000 *s*. Aucun balourd n'a été ajouté, et l'étude de l'impact du balourd (paragraphe 5.3.5) a fait l'objet d'une campagne d'essais supplémentaire, avec un contrôle spécifique de l'accouplement angulaire des échantillons avec le moteur.

Les références utilisées dans les paragraphes suivants pour les différents capteurs sont présentées sur la figure 5.14.

5.3.1 Filtrage fréquentiel et interpolation

Les acquisitions des signaux des conditionneurs ont été effectuées par un module de synchronisation compatible avec MATLAB. Un minimum d'informations en temps réel sont conservées pour le contrôle durant les essais, et les signaux bruts sont ensuite analysés en post-traitement. Le filtrage a été effectué à partir de fenêtrage rectangulaire passe-bande dans le domaine fréquentiel. Une fois les signaux filtrés, nous avons procédé à une interpolation des trois plans de mesure afin d'obtenir une information qualitative de la déformée des arbres autour de la valeur moyenne en régime établi. La figure 5.15 présente le résultat du filtrage et de l'interpolation.

Toutefois, il est nécessaire d'étudier l'interpolation polynomiale de façon critique puisque seulement 3 plans ont été utilisés, et que chacun des trois plans se situe du même côté des paliers. Bien que les amplitudes extrapolées restent tout à fait discutables, elles permettent une analyse qualitative intéressante des différents essais.

5.3.2 Mesure dynamique du défaut de rectitude des arbres

La figure 5.16 compare la mesure du défaut de rectitude des arbres à celle des capteurs de position. La valeur utilisée pour la position est la moitié de la valeur crête à crête du capteur de position 4 (représentée sur les figures 5.14 et 5.15) en régime stationnaire à 10000 *tr/min*. La campagne d'essais utilisée est constituée de 5 essais par échantillons, avec l'huile PAO-2. Les moyennes et les écarts-types des mesures sont représentés sur le diagramme de la figure 5.16. On constate que les écarts-types sont relativement faibles, malgré l'absence de contrôle de la position angulaire de l'accouplement du moteur et de la température ambiante. En contrôlant la position angulaire de l'accouplement du moteur, la répétabilité des mesures est encore meilleure. La corrélation est un peu moins bonne

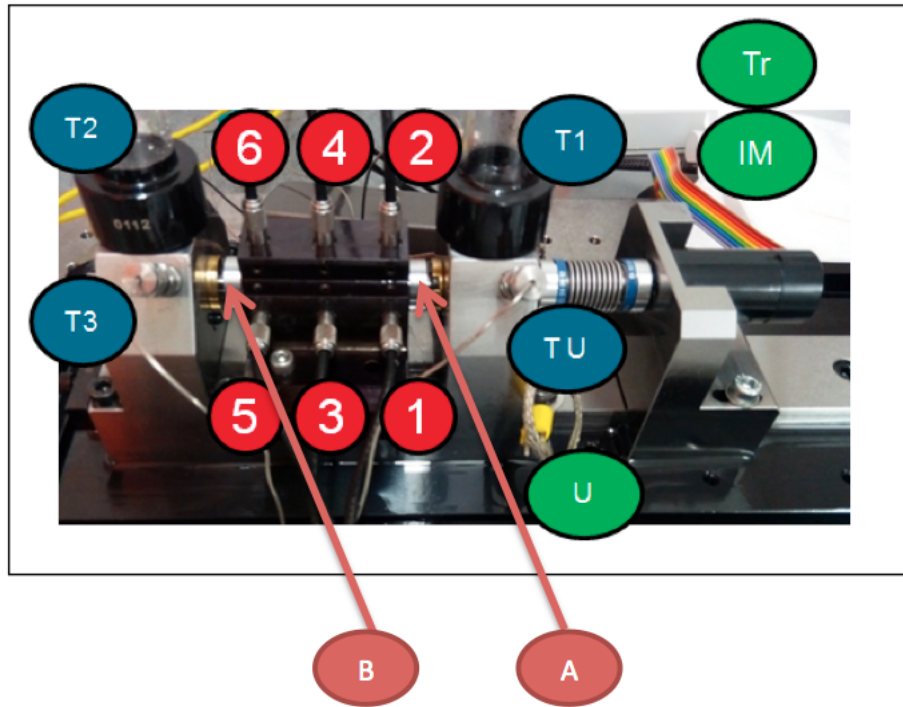


FIGURE 5.14 – Schéma représentant les notations des différents signaux en montage sans couplemètre, avec les positions (1 à 6), les températures (T1 à T3, et TU utilisée pour le calcul ultrason), le compte-tour du moteur (Tr), l'intensité du moteur (IM) et le signal des transducteurs à ultrasons après le commutateur (U) - on insère également la notation des plans d'équilibrage au niveau des rondelles (A et B)

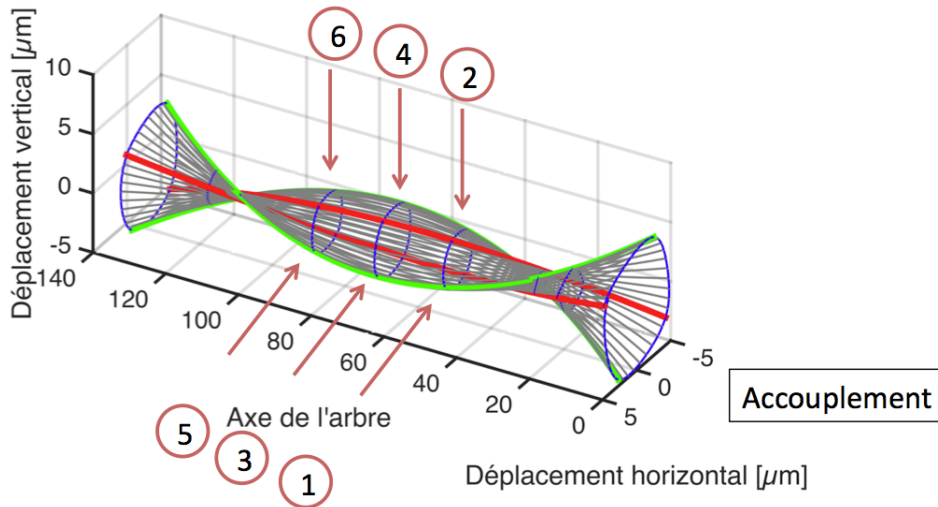


FIGURE 5.15 – Représentation de l'interpolation de la position de l'arbre à partir des signaux filtrés des capteurs de positions, dont les 3 orbites sont représentées au milieu de la ligne d'arbre (positions 1 à 6)- les orbites extrapolées sont également présentées au niveau des bords des paliers et des extrémités

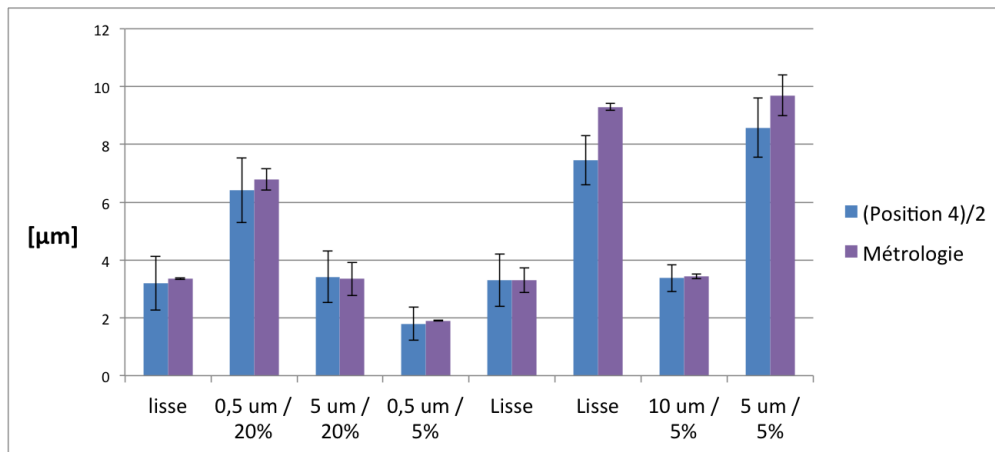


FIGURE 5.16 – Comparaison de la mesure dynamique en régime stationnaire à 10000 tr/min et avec l’huile PAO-2 de la moitié de la valeur crête à crête du capteur de position 4 comparé au défaut de rectitude obtenu par métrologie

pour les arbres possédant un défaut de rectitude élevé, en raison d’excentricités de paliers élevées dans cette configuration. Ceci augmente la contrainte due aux films d’huile sur l’arc de l’arbre, et peut contribuer à diminuer ce dernier par flexion.

On constate sur ce graphique que l’amplitude de la mesure des capteurs de position semble donc directement liée au défaut de rectitude. L’impact des texturations sur ce paramètre apparaît minime. Sans ajout de balourd supplémentaire, les orbites dans les paliers sont également très faibles, ce qui est tout à fait cohérent avec les résultats du chapitre 4.

5.3.3 Diagramme cascade et *oil whirl*

Le moyen le plus efficace pour étudier le seuil d’instabilité de l’*oil whirl* est l’utilisation de diagrammes cascades ou *waterfall* lors de la montée en vitesse du moteur. Celle-ci doit être suffisamment lente, d’une part pour être considérée à peu près constante sur les fenêtres glissantes où seront calculées les transformées de Fourier, d’autre part pour améliorer la définition des spectres en agrandissant les fenêtres.

Nous présentons sur la figure 5.17 la montée en vitesse pour l’échantillon lisse n° 2. Le spectrogramme de la figure 5.17(a) montre que l’instabilité existe bien lors du démarrage à cause du faible chargement dynamique, comme expliqué dans les chapitres précédents. A partir de 50 Hz l’*oil whirl* commence à s’estomper mais reste faiblement présent jusqu’à 10000 tr/min. Les figures 5.17(b) et 5.17(c) présentent les spectres et les orbites extraits à 60 secondes et 180 secondes, filtrés à 500 Hz. On observe bien à 60 secondes (donc à une rotation de l’arbre d’environ 1200 tr/min), une orbite et un spectre typiques de l’*oil whirl*. En effet, le plus haut pic représente la fréquence synchrone, principalement liée à la mesure du défaut de rectitude de l’arbre en rotation, et l’on observe un pic plus faible exactement à la fréquence moitié. A 180 secondes, le pic lié au défaut de rectitude est à peine augmenté en raison de l’accroissement du chargement de balourd à vitesse de rotation plus élevée. Cependant le pic à la fréquence moitié est très largement atténué. On observe distinctement sur cet essai la bifurcation *flip* prédite par la modélisation, vers 10000 tr/min. Des ordres du spectrogramme sont extraits en couleur du diagramme cascade de la figure 5.17(d). Dans la partie 5.4, nous présenterons essentiellement l’impact de l’*oil whirl* sur les ordres

extraits de 1x (ordre 1 synchrone) et 0,5x (ordre moitié correspondant à l'*oil whirl*).

5.3.4 Spectre complet et première fréquence propre

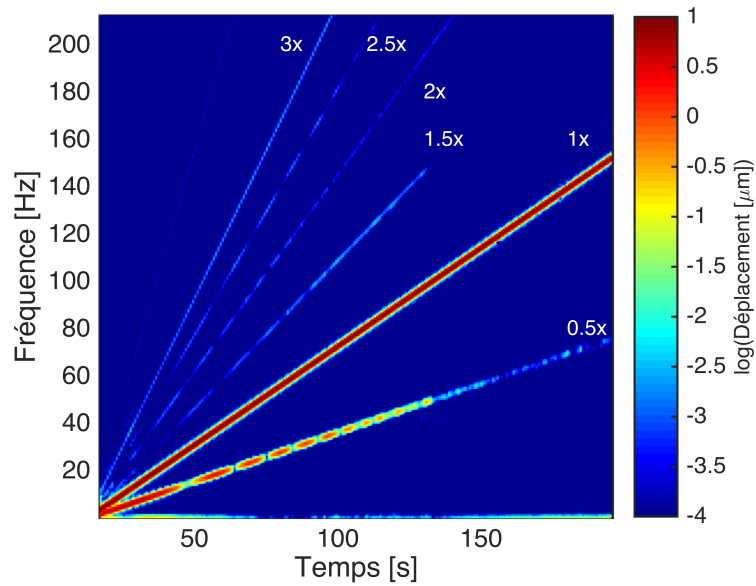
Dans la partie précédente, nous avons volontairement tronqué le spectrogramme à des fréquences relativement faibles pour mettre en évidence le phénomène d'*oil whirl*. Cependant, le premier mode propre de l'arbre est excité à plus hautes fréquences. Afin d'analyser le sens de rotation de ce mode (sens de précession direct ou inverse), nous utilisons dans ce paragraphe le spectre complet obtenu par mesure d'orbite (ou *full-spectrum*) décrit en détails dans [104]. L'avantage de cette méthode est de mettre l'orbite mesurée sous forme d'une combinaison entre une orbite circulaire de précession directe et une orbite circulaire de précession inverse. Si les composantes d'une fréquence est égale dans les deux spectres, cela signifie que les deux rotations se compensent et que l'orbite est relativement "aplatie". En revanche, si l'un des deux spectres l'emporte sur l'autre, la précession se fait dans le sens du spectre où la composante fréquentielle est plus élevée.

Le diagramme 5.18 présente l'analyse des vibrations à hautes fréquences. Sur la figure 5.18(a), nous présentons le même spectrogramme que sur la figure 5.17(a) mais dont l'ordonnée est prise de 1850 Hz à 2050 Hz pour illustrer l'apparition d'une fréquence excitée avec la rotation. L'étude quantitative de cette composante en régime permanent, repose sur le spectre complet (*full-spectrum*) calculé sur 100 périodes au bout de 900 secondes d'essai, présenté sur la figure 5.18(b). Sur cette figure, le pic le plus élevé correspond à la fréquence synchrone, essentiellement en précession directe. L'*oil whirl* est indiscernable à cette vitesse de rotation, mais l'on voit que la fréquence excitée vers 2 kHz possède un spectre symétrique dans les deux sens de précession. Cette caractéristique est mise en évidence par l'orbite filtrée en passe-bande présenté sur la figure 5.18(c). La fréquence excitée présente donc une précession très faible. Cependant son amplitude avoisine le micromètre en régime établi, ce qui est relativement important par rapport à la vibration synchrone. Par ailleurs, cette vibration ne semble ni être affectée par la viscosité de l'huile, ni par la texturation, ni même par le défaut de rectitude des arbres à travers nos campagnes d'essais. Cela est cohérent avec le fait que la déformée du premier mode propre possède des noeuds de vibration dans les paliers. Ainsi, cette fréquence correspond probablement à un mode propre des tiges.

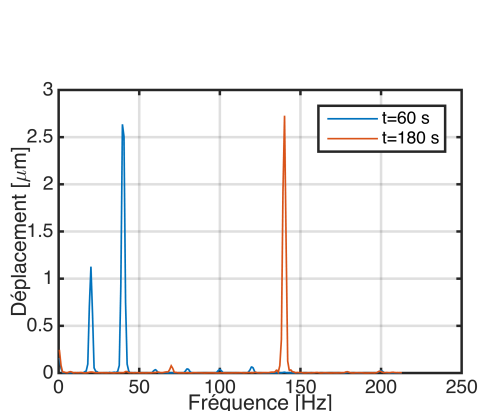
5.3.5 Equilibrage et balourd

Afin de piloter l'influence du balourd, un procédé a été mis en œuvre pour modifier la masse du balourd et son orientation angulaire par rapport à l'échantillon, uniquement en démontant le portique de capteurs de position (donc sans démonter l'arbre et les paliers). Pour cela, nous avons utilisé une gaine thermo-rétractable autour des rondelles des échantillons. Entre la gaine et la rondelle, il est possible d'insérer de fines lamelles de métal de 5 mg à 200 mg , ce qui donne des balourds d'environ 4 $mg.cm$ à 150 $mg.cm$.

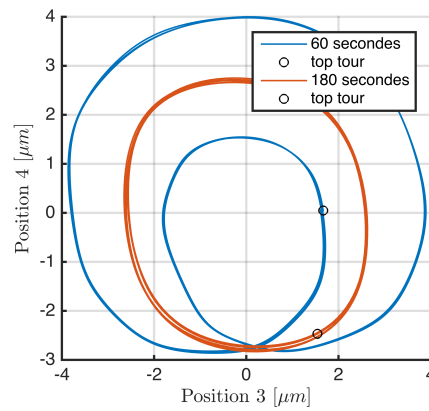
La figure 5.19(a) présente l'ordre 1 de la vitesse de rotation, extrait du spectrogramme (cf. figure 5.17(d)), pour différents balourds ajoutés au plan A (cf. figure 5.14). Des masses de 15 mg , 45 mg et 80 mg ont été placées de chaque côté de l'arbre dans le plan de l'arc du défaut de rectitude mesuré en métrologie (convention positive du côté du défaut de rectitude et négative du côté opposé). On ajoute et on soustrait ainsi respectivement 11 $mg.cm$, 34 $mg.cm$ et 60 $mg.cm$ au balourd initial dû à l'arc de l'arbre et à l'accouplement du moteur. On remarque sur cette figure que l'on peut assez finement contrôler la cinématique du système à partir du balourd par cette méthode.



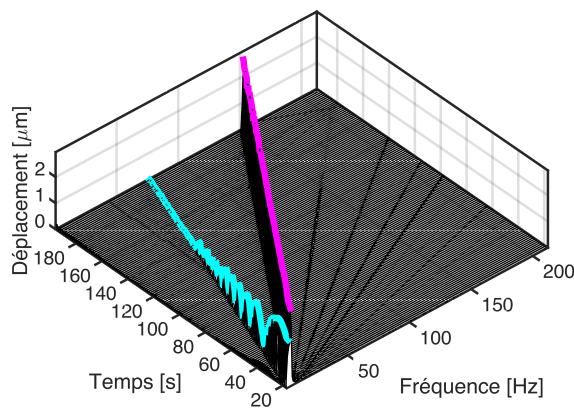
(a) Spectrogramme de la montée en vitesse



(b) Deux exemples de transformées de Fourier extraits du spectrogramme

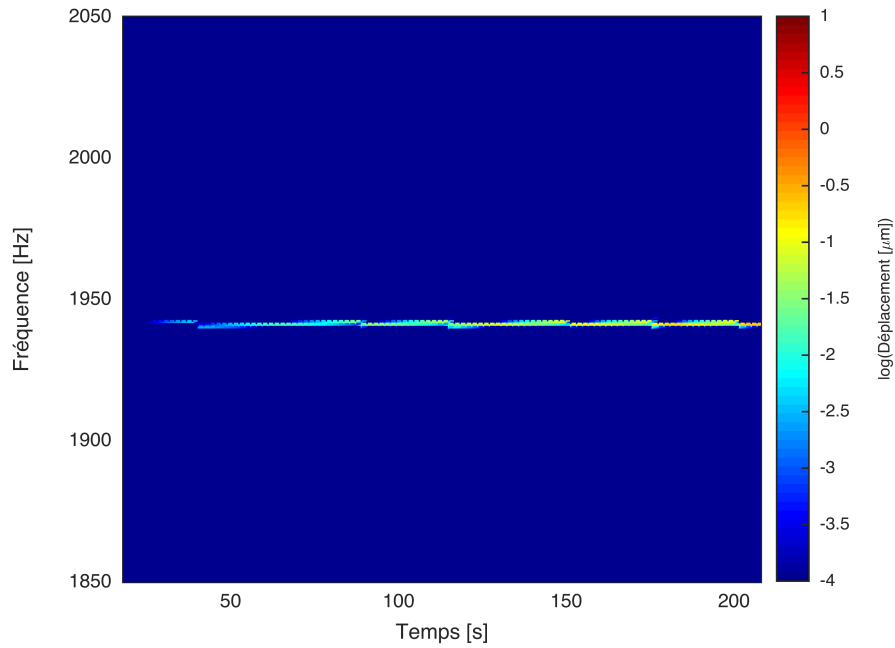


(c) Orbites (passe-bas 500 Hz)

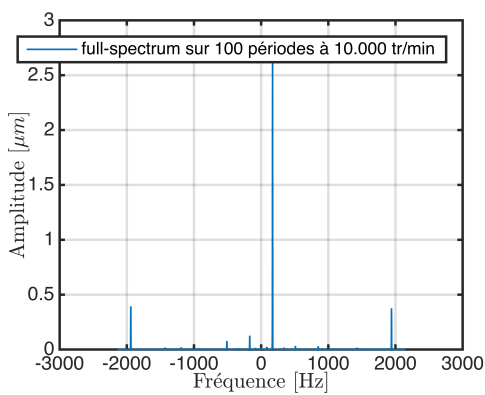


(d) Extraction des ordres de la vitesse de rotation (en rose ordre 1, en cyan ordre moitié)

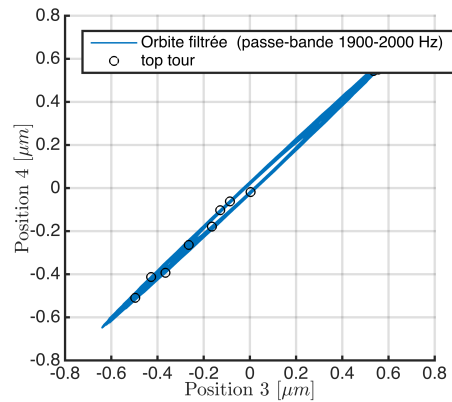
FIGURE 5.17 – Diagramme cascade et seuil de stabilité de l'*oil whirl* pour l'arbre lisse n°2 lors d'une montée en vitesse de 200 s à 10000 *tr/min* avec l'huile PAO-2



(a) Spectrogramme à hautes fréquences



(b) Full-spectrum à 10.000 tr/min



(c) Orbites (passe-bande 1.9-2.0 kHz)

FIGURE 5.18 – Vibrations à hautes fréquences de l'arbre lisse n°2 lors d'une montée en vitesse de 200 s à 10000 tr/min avec l'huile PAO-2

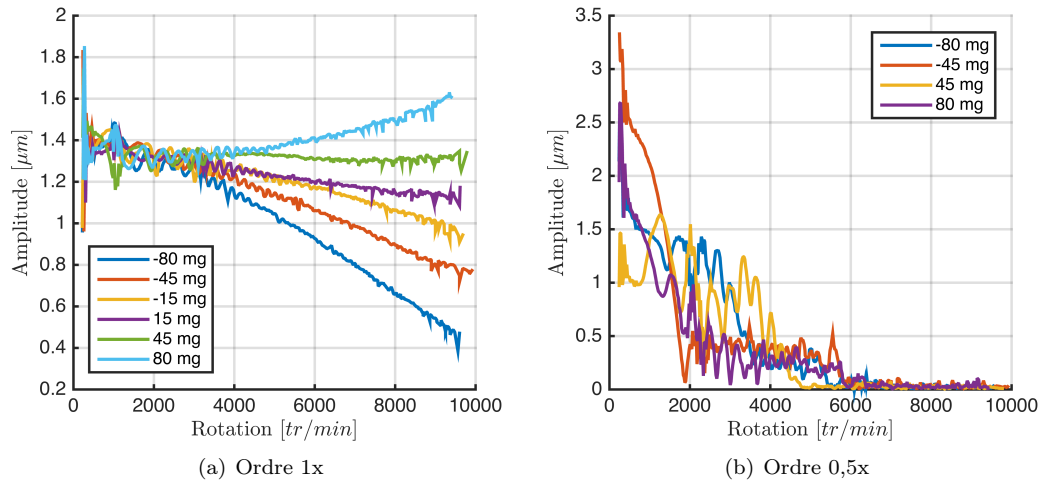


FIGURE 5.19 – Ordres de la vitesse de rotation du moteur extraits du spectrogramme pour différents balourds appliqués au plan A de la tige lisse n°2 - les balourds sont appliqués dans le plan de l'arc du défaut de rectitude

En revanche, l'effet du balourd sur l'ordre $1/2$ n'est pas significatif, comme le montre la figure 5.19(b). Ce résultat est relativement cohérent avec la simulation, les balourds testés étant environ 10 fois plus faibles que les balourds nécessaires pour obtenir la stabilité d'après le modèle théorique du chapitre 4 (cf. figure 4.15). Cependant, les balourds nécessaires théoriquement peuvent induire des déflexions importantes des arbres et nuire à l'ensemble du système.

5.4 Influence de la texturation sur le comportement du système

Ce paragraphe présente l'impact de la texturation sur les différentes mesures disponibles sur le banc d'essai et les conclusions que l'on peut en tirer à partir de l'étude théorique. Premièrement, nous discutons de l'impact faible sur la puissance nécessaire au moteur pour les différents échantillons. Deuxièmement, nous verrons que la texturation possède des caractéristiques d'amortissement de l'*oil whirl* remarquables. Ce résultat remet en question les hypothèses du modèle de Reynolds local, car ces améliorations ne sont pas prévues par la modélisation du chapitre 4.

5.4.1 Influence sur la mesure de couple

Afin de comparer le couple résistant des différents échantillons, nous utilisons la campagne d'essais réalisée à 10.000 tr/min avec l'huile PAO-2 (décrite au début du paragraphe 5.3). La figure 5.20 expose les différentes valeurs de couple moteur en mNm , pour les différents échantillons, ainsi que l'amplitude du déplacement au milieu de l'arbre relativement à sa valeur moyenne (en microns). Nous remarquons d'abord que la dispersion des couples est relativement faible (environ 10%). Malgré la variation de température ambiante de quelques degrés, les écarts-types sont en outre assez faibles, excepté pour l'arbre N°7, dont le couple a probablement été influencé par les différents accouplements angulaires avec le moteur selon les essais, en raison d'un défaut de rectitude élevé. Les échantillons N°3 et N°6 présentent les couples résistants les plus faibles, or ils possèdent des déflexions et des texturations différentes. Ensuite, nous pouvons souligner que deux échantillons semblables en

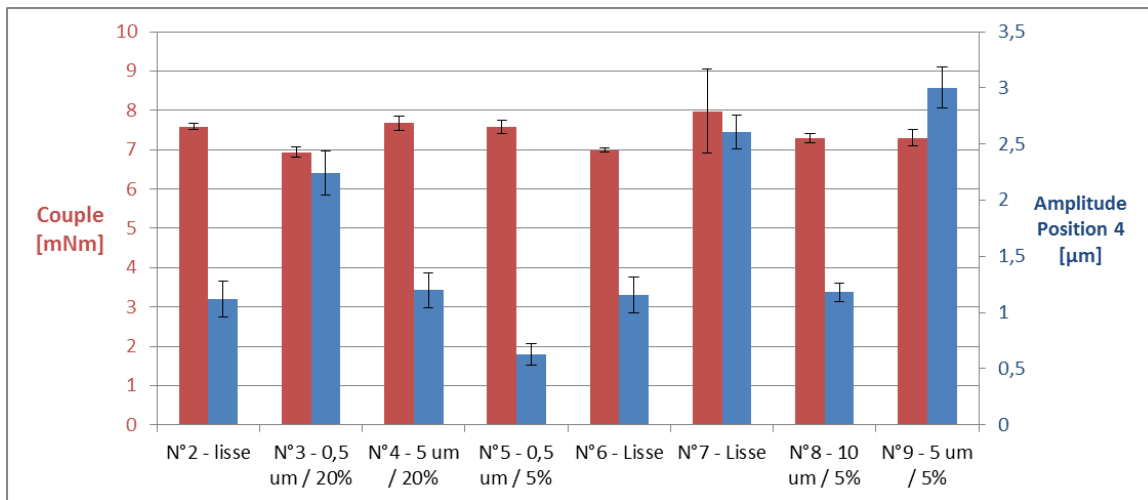


FIGURE 5.20 – Comparaison du couple résistant en régime stationnaire à 10000 tr/min et avec l’huile PAO-2 et de la moitié de la valeur crête à crête du capteur de position 4

terme de déflexion et d’état de surface, les arbres lisses N°2 et N°6, présentent des couples légèrement différents. Enfin, des arbres possédant des déflexions très différentes comme l’arbre N°5 et l’arbre N°9 possèdent des couples résistants assez proches.

A travers cette étude nous ne sommes pas en mesure de lier texturation et couple résistant. Quoiqu’il en soit, chaque arbre possède un couple résistant qui lui est propre avec une bonne répétabilité, mais la variation entre les différents échantillons reste inférieure à 10%. Enfin, pour établir un lien éventuel entre le défaut de rectitude et couple résistant, une description géométrique plus fine est nécessaire. En conclusion, l’impact des texturations testées sur le couple résistant ne semble pas significatif, et si d’autres avantages dynamiques sont obtenus, il est intéressant de remarquer que l’usage de paliers texturés n’est pas pénalisant d’un point de vue énergétique en régime établi.

5.4.2 Amortissement de l’*oil whirl*

Nous avons présenté sur la figure 5.21 les ordres extraits du diagramme cascade de l’arbre N°8, c’est-à-dire un arbre texturé avec un recouvrement de 5% et de profondeur 10 μm . Ce diagramme est à comparer directement avec la figure 5.17(d) obtenue avec l’arbre lisse N°2. On constate que l’ordre 0,5x est atténué pour des vitesses beaucoup plus faibles avec l’arbre texturé. De plus, la fréquence d’*oil whirl* est également très proche de la moitié de la vitesse de rotation. Nous avons constaté cela pour tous les arbres texturés, alors que les prédictions issues de la simulation pour ce genre de texturation ne prévoient pas une modification importante de la fréquence de l’*oil whirl* contrairement à des texturations transverses par exemple (cf. chapitre 4).

La figure 5.24 présente l’extraction de l’ordre 0.5x pour tous les essais de la campagne de mesure effectuée avec l’huile PAO-2, avec une montée en vitesse de 200 s jusqu’à 10.000 tr/min. Pour chaque échantillon, les différents essais présentent des résultats très proches, ce qui justifie encore une fois la bonne reproductibilité des résultats. On constate sur cette figure que les arbres lisses ou faiblement texturés (0,5 μm) présentent une atténuation de l’*oil whirl* à beaucoup plus hautes fréquences de rotation que dans les cas texturés. Par ailleurs, la comparaison des arbres lisses (N°2, N°6 et N°7), suggère que le défaut de rectitude permet aussi de diminuer l’amplitude de la vibration d’*oil whirl*. Si

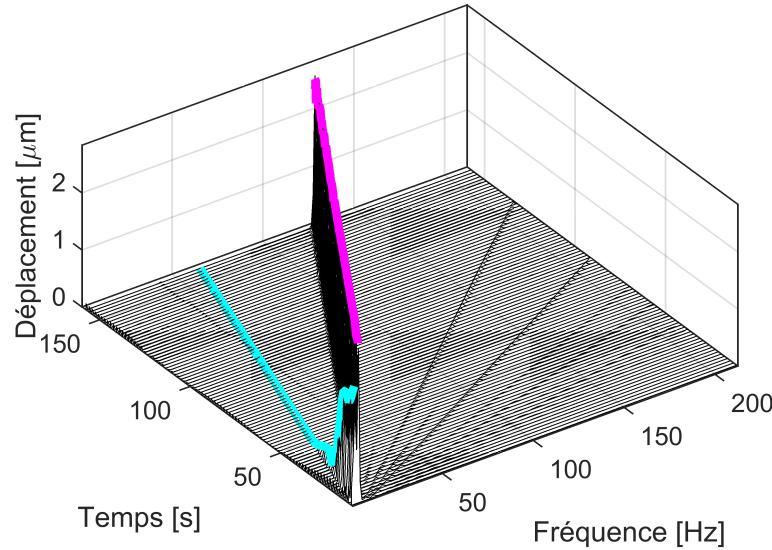


FIGURE 5.21 – Extraction des ordres de la vitesse de rotation (en rose ordre 1, en cyan ordre moitié), du diagramme cascade pour l'arbre lisse n°2 lors d'une montée en vitesse de 200 s à 10000 *tr/min* avec l'huile PAO-2

l'on compare des arbres présentant un défaut de rectitude similaire (arbres N°2, N°4, N°6, N°8), on constate nettement l'effet stabilisant des texturations.

Pour mieux caractériser les effets des texturations sur le seuil de stabilité des arbres, nous avons présenté sur la figure 5.23, les fréquences de rotation moyennes à partir desquelles l'amplitude de l'*oil whirl* devient inférieure à $0.1 \mu m$. Les remarques précédentes peuvent être faites, sur la bonne répétabilité des mesures (excepté pour l'arbre lisse N°7, fortement arqué), ainsi que sur l'efficacité de la texturation pour stabiliser le phénomène d'*oil whirl*.

Remarquons que ces résultats sont en complet désaccord avec les prédictions de la partie 4. En effet, mis à part pour les texturations les plus faibles ($0,5 \mu m$), le seuil de stabilité devrait être atteint à des vitesses de rotation légèrement plus élevées. Le modèle de Reynolds local n'explique donc pas d'effet stabilisant de la texturation. L'existence des recirculations à l'intérieur des cavités pourrait expliquer ce phénomène. En effet, nous avons mentionné dans la partie 2.4 que l'écoulement est également influencé en fonction des conditions aux limites en pression autour des cavités, donc de la position des cavités par rapport aux convergents et divergents. Ce paramètre supplémentaire à prendre en compte dans les facteurs d'écoulement dissymétriserait le profil de pression et perturberait l'écoulement circonférenciel de l'*oil whirl*. Enfin nous pouvons remarquer que l'impact important des cavités plus profondes ($5 \mu m$ et $10 \mu m$), suggère l'existence d'un seuil vers $50 Hz$ à partir duquel on constate l'effet de la texturation. Une explication possible de ce phénomène repose également sur l'étude des facteurs de flux de la partie 2.4. En effet, nous avons montré, à travers l'étude de mécanique des fluides, qu'il existe une dissymétrie du flux par rapport au gradient de pression, en fonction de l'épaisseur de film moyenne (liée à l'amplitude de la vibration synchrone et au jeu radial). Cette dissymétrie intervient à partir d'une certaine profondeur de texturation et d'un certain gradient de pression atteint dans le palier pour huile donnée. On peut donc supposer que la perturbation du

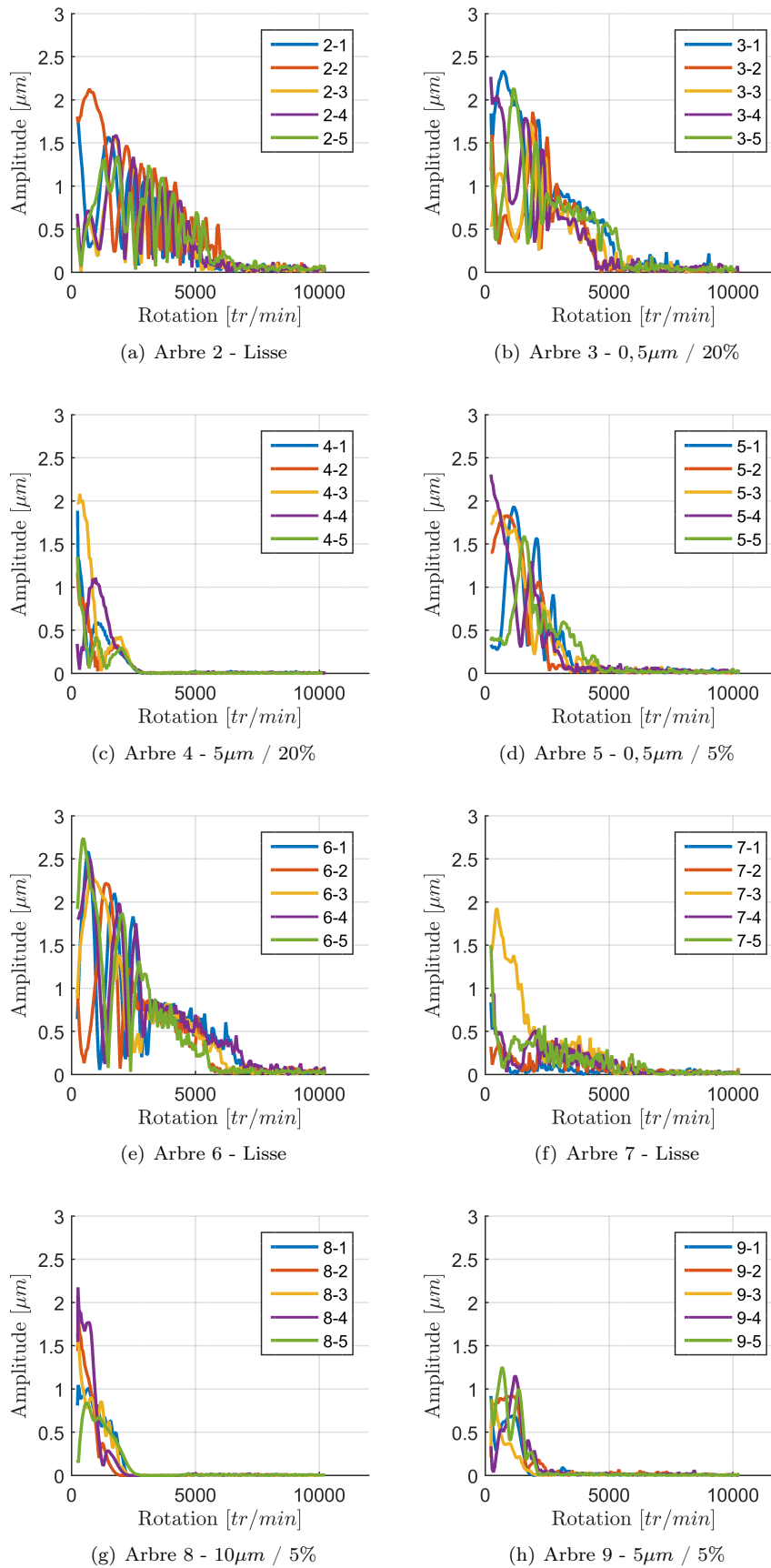


FIGURE 5.22 – Ordre extrait 0,5x pour la campagne d’essais avec montée en vitesse à 10.000 tr/min, avec l’huile PAO-2

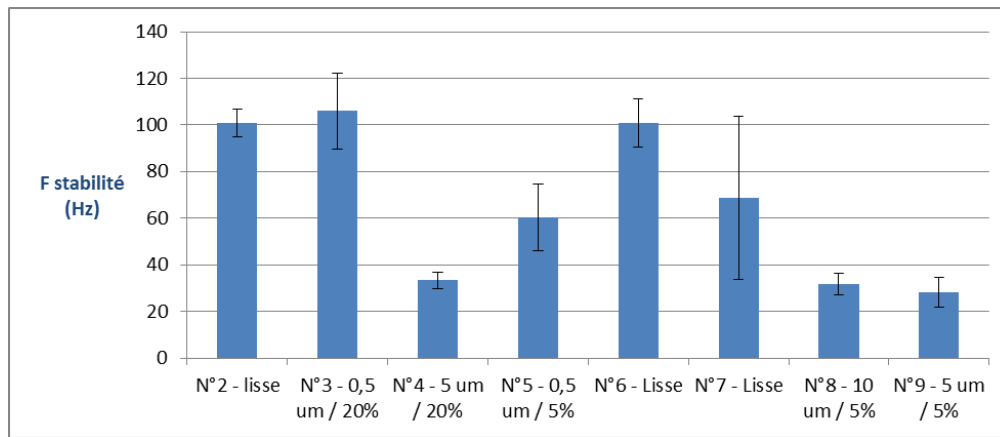


FIGURE 5.23 – Fréquence de rotation du rotor à partir l’amplitude de l’ordre 0,5x devient inférieure à $0.1 \mu m$, pour la campagne d’essais avec montée en vitesse à 10.000 tr/min, et avec l’huile PAO-2

débit due à l’*oil whirl* s’effectue à partir de ce seuil de profondeur. Les investigations sont à poursuivre à partir du modèle de Navier-Stokes moyenné pour confirmer hypothèse.

La campagne de mesure utilisant l’huile PAO-4 a donné des résultats similaires, bien que tous les seuils de stabilité soient diminués. Sur la figure 5.24, nous présentons l’ordre 0,5x pour les arbres texturés et l’arbre lisse N°7. On remarque encore une fois que les arbres faiblement texturés N°3 et N°5 ainsi que l’arbre lisse N°7 présentent encore l’instabilité vers 2000 tr/min, tandis que sur les arbres texturés de profondeur supérieure à $5 \mu m$ ne présentent plus du tout l’instabilité après 1000tr/min. Par ailleurs, on retrouve quasiment parfaitement le rapport 5 de viscosité dans le rapport de fréquence du seuil de stabilité dans ce cas de figure, ce qui est particulièrement intéressant. On remarque encore que l’amplitude de l’*oil whirl* est une fois de plus diminuée en raison du défaut de rectitude important de l’arbre N°7.

5.4.3 Amplitude de vibration dans les paliers

Les capteurs à ultrasons présentés dans la partie 5.1.4 permettent d’obtenir des informations sur le film fluide venant directement du contact pouvant être corrélées au couple résistant ou à l’épaisseur de film. Toutefois, nous avons constaté que le jeu radial du palier instrumenté par sondes ultra-sonores présente un jeu radial plus faible que le palier utilisé pour l’étude de l’*oil whirl*. Ainsi, la stabilisation de l’*oil whirl* s’effectue à plus basse vitesse de rotation, et devient alors difficilement observable. Dans cette section, nous n’étudierons donc pas le phénomène d’*oil whirl*, mais nous analyserons les vibrations mesurées par les capteurs à ultrasons à l’intérieur de paliers.

Coefficient de réflexion moyen et couple résistant Les différents échantillons d’arbres texturés sont comparés en se focalisant d’abord sur une seule position de capteur ultrason (position 9). La figure 5.25 présente les résultats mesurés à 10.000 tr/min, les arbres étant lubrifiés par l’huile PAO-2. On remarque sur cette figure une légère corrélation entre la mesure du couple moteur et le coefficient de transmission mesuré par ultrasons ($T = 1 - R$) : un coefficient de transmission faible est synonyme d’épaisseur de film élevée. Ainsi, on peut supposer que les différences de couple observées expérimentalement sont dues à des épaisseur de film en moyenne un peu plus élevée pour ces échantillons. On remarque également

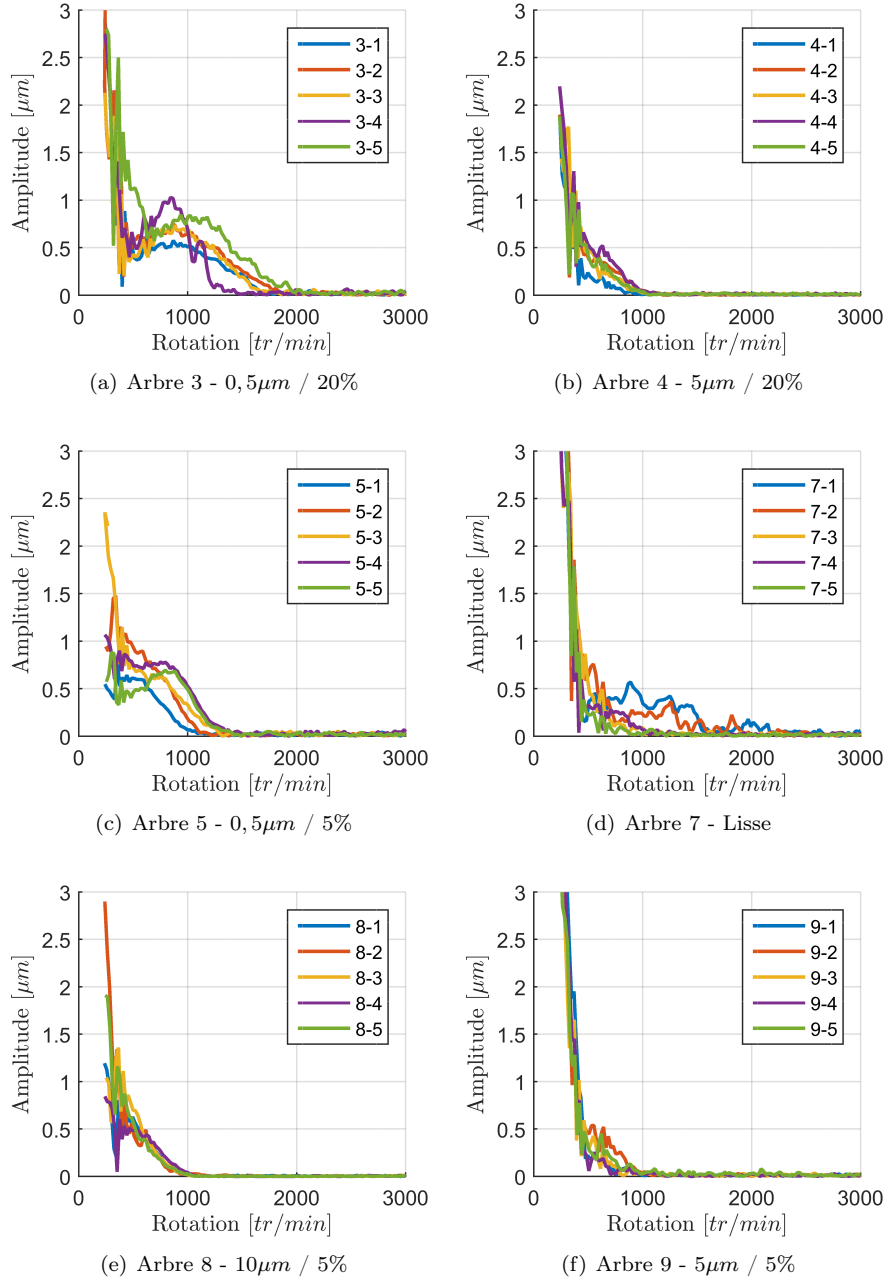


FIGURE 5.24 – Ordre extrait 0,5x pour la campagne d'essais avec montée en vitesse à 5.000 tr/min, avec l'huile PAO-4

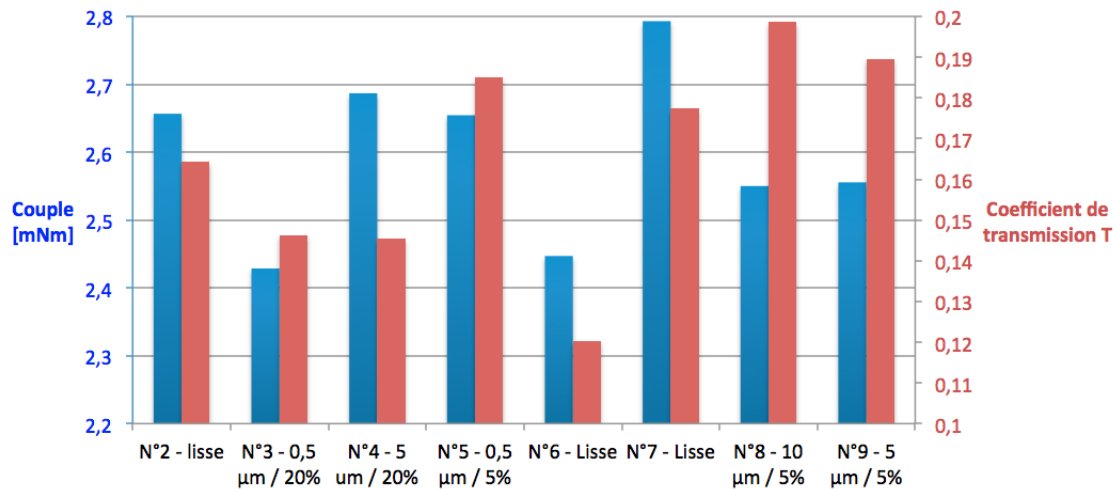


FIGURE 5.25 – Coefficient de réflexion moyen ultrasonore mesuré en position 9, comparé au couple moteur à 10.000 tr/min, et avec l’huile PAO-2

que le coefficient de transmission moyen, et donc le coefficient de réflexion moyen, varie relativement peu entre tous les échantillons ($< 10\%$). On peut interpréter cela par le fait que tous les arbres ont des positions moyennes relativement équivalentes quelque soit la texturation ajoutée et que le contact "voit" une épaisseur moyenne semblable pour tous les motifs.

Amplitude de variation du coefficient de réflexion et texturation La variation du coefficient de réflexion autour de sa position moyenne est très différente en fonction des texturations. Par exemple, pour l’essai effectué à 10.000 tr/min avec l’huile PAO-2 et en sélectionnant le capteur à ultrason $N^{\circ}9$, les arbres lisses présentent une amplitude crête à crête du coefficient de réflexion la plus faible (figure 5.26). On constate également que la proportion de surface texturée influe également sur l’amplitude du coefficient de réflexion. Une interprétation possible serait que les arbres texturés ont une excentricité dynamique plus élevée que les arbres lisses. Des oscillations importantes du coefficient de transmission seraient dus à une excentricité plus élevée dans le repère tournant. On peut supposer, à partir de la simulation et des mesures ultrasonores de coefficient de réflexion moyen, que les arbres sont tous relativement bien centrés en valeur moyenne dans les paliers. En revanche, les arbres lisses semblent plus contraints dans leurs paliers, et leurs oscillations autour du centre semblent moins importantes que pour les arbres texturés.

Afin de confirmer cette tendance à d’autres vitesses de rotation et à d’autres positions de mesure par ultrasons dans le paliers, nous avons effectué un essai à 2.000 tr/min, toujours avec l’huile PAO-2, en commutant les 12 capteurs à ultrasons, et en les synchronisant par rapport au top-tour moteur en post-traitement. Ainsi, on compare sur la figure 5.27 les positions des capteurs 3, 6, 9 et 12. On retrouve bien la tendance énoncée précédemment, c’est-à-dire une valeur crête à crête du coefficient de réflexion faible pour les arbres lisses, et plus élevée pour les texturations, en particulier pour les plus profondes. Par ailleurs, on remarque que les arbres possédant des défauts de rectitude élevés comme l’arbre 7 se caractérisent par des amplitudes de coefficients de réflexion plus élevées que les autres échantillons lisses. Cela peut expliquer le fait que l’arbre 9, combinant texturation et défaut de rectitude élevés possède la plus forte amplitude du coefficient de réflexion. Enfin, les

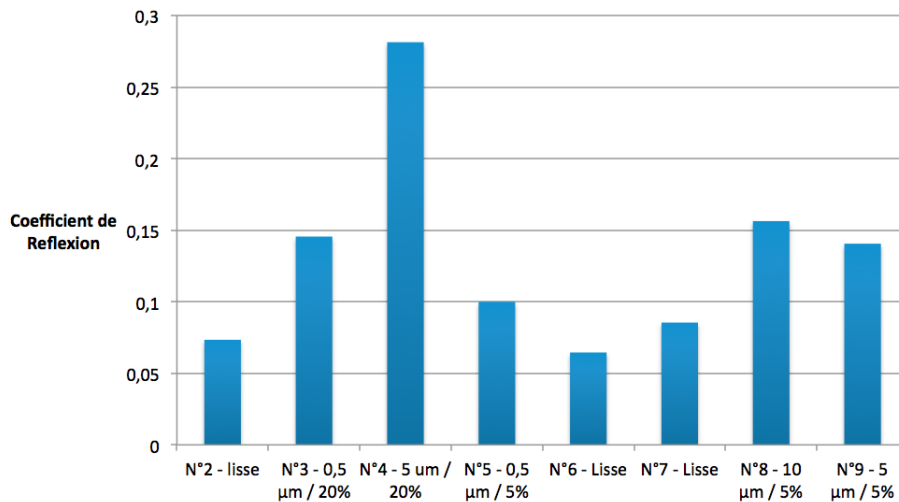


FIGURE 5.26 – Amplitude crête-à-crête du coefficient de réflexion ultrasonore mesuré en position 9 à 10.000 tr/min, et avec l’huile PAO-2

mesures d’amplitude crête à crête du coefficient de réflexion confirment les tendances mesurées sur le seuil de stabilité avec le palier non instrumenté par ultrasons, présenté figure 5.23.

Comparaison avec l’interpolation de la position Les signaux temporels de l’épaisseur de film théorique obtenue avec la formule (5.1.4.3) sont comparés à l’interpolation dans les paliers de la mesure capacitive de position (cf. schéma 4.1), afin de relier la mesure de coefficient de réflexion de l’onde ultrasonore et l’épaisseur de film dans les paliers, ou d’étudier la possibilité d’apparition de zones de ruptures de film. Par exemple, la figure 5.28 montre ces signaux temporels pour l’arbre lisse $N^{\circ}2$ sur un peu plus de deux périodes. Un filtre passe-bas à 200 Hz a été appliqué pour simplifier la lecture des signaux. La valeur moyenne a également été soustraite afin de comparer l’amplitude des vibrations. Avant d’interpréter ces signaux, il faut remarquer que l’interpolation de la mesure capacitive est effectuée à partir de 3 points de mesures, ce qui représente une forte approximation. Néanmoins, les évolutions des signaux sont relativement proches, excepté pour les trois pics à 1,70 s, 1,73 s, et 1,76 s. On peut supposer que l’augmentation du coefficient de réflexion des ultrasons est due à la présence zone de rupture de film en face du capteur, ce qui est interprété à tort par une augmentation de l’épaisseur de film. Cela explique la forte différence sur un pic par période entre les deux signaux. Enfin, il convient de remarquer que la zone de rupture de film peut être relativement faible par rapport à la taille du capteur ultrason (0,5 mm \times 3 mm). Or, la mesure d’épaisseur de film et de la cavitation est moyennée sur la surface du capteur. Ainsi, il est difficile d’évaluer la part du signal qui est liée à la cavitation.

Par ailleurs, si l’on compare les signaux temporels de position par mesure ultrasonore à l’interpolation de la mesure capacitive pour l’arbre $N^{\circ}8$, représenté figure 5.29, on constate une bien plus forte décorrélation entre les signaux. La présence de pics supplémentaires suggère le fait que la distribution circonférentielle du film lubrifiant est bien plus complexe. Plusieurs explications peuvent justifier la présence de pics supplémentaires, comme par exemple plusieurs zones de rupture de film, ou la présence de recirculation de lubrifiant dans les cavités, modifiant la raideur de l’interface, et donc le coefficient de réflexion

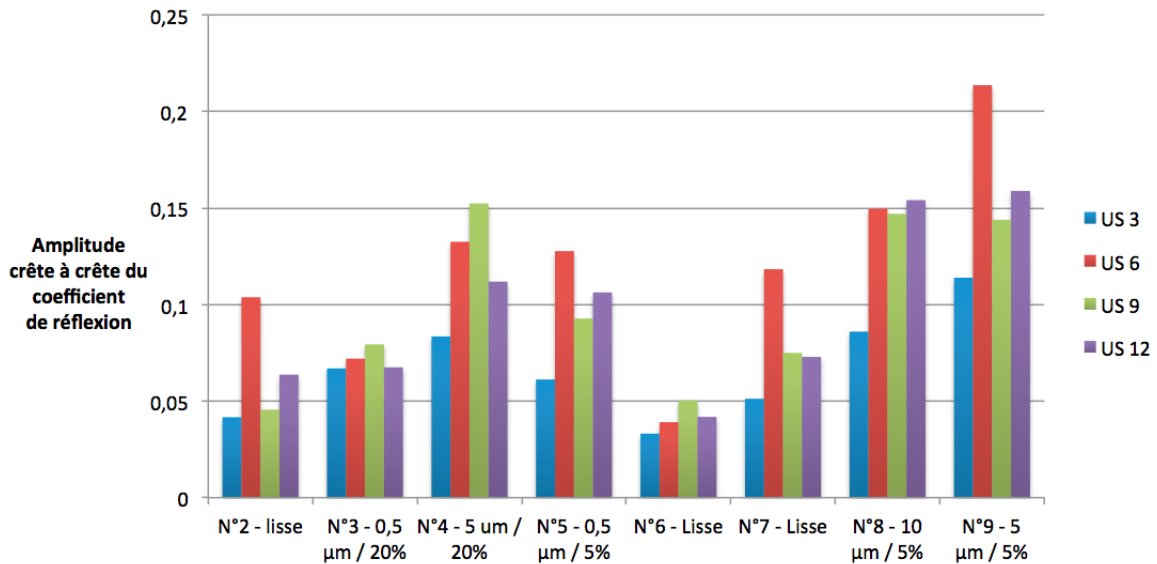


FIGURE 5.27 – Amplitude crête-à-crête du coefficient de réflexion ultrasonore mesuré en positions 3, 6, 9 et 12, à 2.000 tr/min, et avec l’huile PAO-2

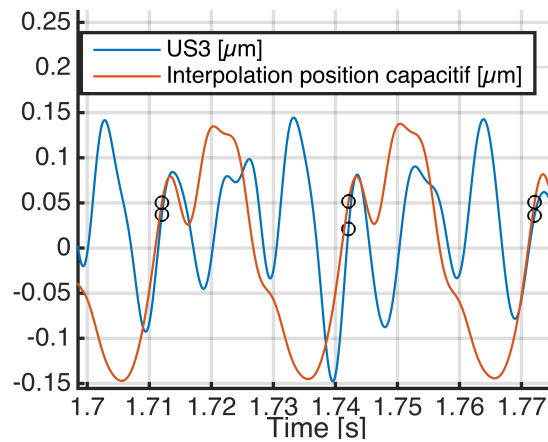


FIGURE 5.28 – Epaisseur de film calculée par ultrasons (position US3), comparée à l’interpolation du déplacement mesuré avec les capteurs capacitif, à 2.000 tr/min, et avec l’huile PAO-2 pour l’échantillon N°2, (filtre passe-bas à 200 Hz, les top-tour sont représentés par les symboles o)

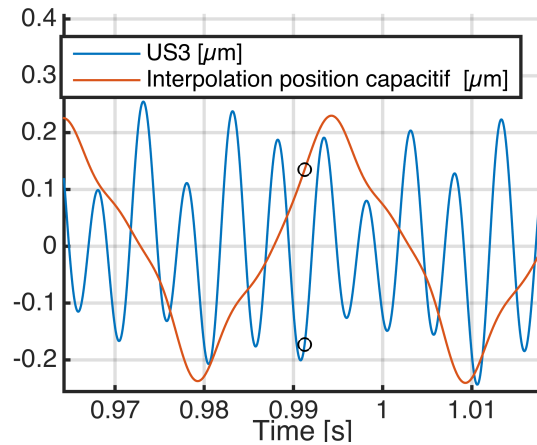


FIGURE 5.29 – Epaisseur de film calculée par ultrasons (position US3), comparée à l’interpolation du déplacement mesuré avec les capteurs capacitif, à 2.000 tr/min, et avec l’huile PAO-2 pour l’échantillon N°8, avec filtre passe-bas à 200 Hz

mesuré. Dans ce cas de figure, d’autres hypothèses sont nécessaires pour déduire des valeurs d’épaisseur de film à partir du coefficient de réflexion de l’onde ultrasonore.

Comparaison avec la simulation Les signaux mesurés à partir des capteurs à ultrasons présentent de nombreuses harmoniques de la fréquence de rotation. Nous nous proposons de calculer la valeur de pression obtenue à partir de la simulation de la partie 4, moyennée sur une surface équivalente à un capteur ultrason, pour interpréter ces signaux. La figure 5.30 montre deux périodes d’un tel signal, pour un arbre présentant un défaut de rectitude parabolique de $4\mu\text{m}$, et soumis à un balourd faible de $2\text{ mg}\cdot\text{mm}$. Le passage de la zone de rupture de film ainsi que l’inclinaison de l’arbre due à son balourd et à son défaut de rectitude déforme le signal de pression, selon une allure comparable à celle des signaux de la figure 5.28. Il est à noter que la pression, moyennée sur une surface équivalente à un capteur ultrasonore, n’atteint pas la pression de cavitation dans cet exemple, car la zone de rupture de film ne recouvre jamais entièrement la surface du capteur. Nous avons choisi d’étudier le profil de pression obtenu avec le modèle de rupture de film de type Reynolds. Cependant on pourrait également s’intéresser au remplissage obtenu par l’algorithme JFO et l’utiliser pour l’interprétation de la mesure de coefficient de réflexion des ultrasons sous la forme d’épaisseur de film.

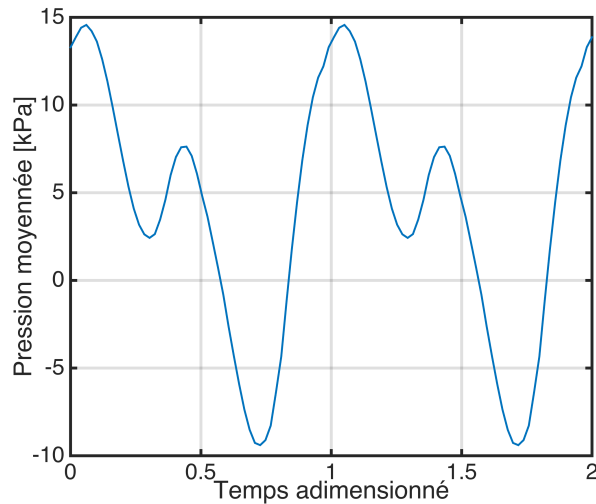


FIGURE 5.30 – Prédiction du signal temporel de pression moyennée sur la longueur de mesure des capteurs ultrasons, à partir du programme de simulation de la partie 4 et avec les dimensions du banc PHAT, pour un arbre lisse, à 1000 rad/s soumis à un balourd de $2 \times 1 \text{ mg.mm}$, et un défaut de rectitude parabolique de $4 \mu\text{m}$; le temps est adimensionné par rapport à une période de révolution de l'arbre sur lui-même

5.5 Conclusions de l'étude expérimentale

Nous avons présenté la conception d'un banc d'essai de rotors miniatures lubrifiés par des paliers hydrodynamique. Ce dispositif de haute précision mécanique permet de caractériser différentes tiges texturées efficacement. Les étanchéités dynamiques, les mesures capacitives de positions et les mesures ultrasonores rendent l'étude peu intrusive sur le comportement vibratoire des paliers. Ce banc modulable permet également différents montages. Le remplacement des échantillons est simplifié par sa conception. Par ailleurs, une caractérisation relativement fine des échantillons testés a été réalisée afin d'expliquer la plupart des biais entre les mesures, à travers leur topographie et leur défaut de rectitude.

La reproduction du comportement vibratoire de rotors miniatures sur paliers lisses a permis de mettre en évidence une bonne corrélation entre théorie et expérimentation. Ainsi, la bifurcation *flip* du palier lisse prédite a bien été observée. A basses vitesses de rotation une forte composante $0,5x$ a été mesurée, signature de la vibration auto-entretenue d'*oil whirl*. La stabilité de la fréquence synchrone est rétablie à partir d'une certaine vitesse de rotation correspondant à cette bifurcation.

Concernant l'étude des texturations, le banc PHAT a permis de mettre en évidence les points suivants :

- La texturation de surface a peu d'impact sur les amplitudes de vibrations synchrones. Il est difficile de les discriminer par rapport aux défauts géométriques propres au système (défaut de rectitude des tiges par exemple).
- Les texturations utilisées sur toute la surface du rotor ne modifient pas significativement la consommation énergétique du moteur.
- Une augmentation significative de la zone de stabilité du système peut être obtenue avec les surfaces texturées vis-à-vis de la vibration sous-synchrone *oil whirl*.
- Cette augmentation nécessite une profondeur minimum d'au moins $5 \mu\text{m}$ pour les cavités. Cependant, notre étude n'a pas mis en évidence une influence nette du taux de surface texturée sur ce paramètre.

- La présence des texturations influe fortement sur la raideur du film lubrifiant, vraisemblablement en diminuant la portance du palier, ce qui se traduit par un excentrement plus important de l'arbre à l'intérieur des paliers sous l'action du balourd. Ce phénomène pourrait expliquer l'origine de la stabilisation de la fréquence synchrone.
- L'augmentation de l'amplitude de la vibration synchrone dans les paliers conduit principalement à un signal temporel riche en harmoniques de la vitesse de rotation, probablement dues au moyennage des défauts géométriques comme le défaut de rectitude, sur la longueur du capteur ultrason, ou à la présence éventuelle de zones de rupture de film tournantes.

En confrontant ces résultats à l'analyse théorique des vibrations non-linéaires présentée dans le chapitre 4, basée sur les hypothèses de Reynolds dans les cavités, une forte discordance a été démontrée dans le cas de texturations profondes. Ainsi, les hypothèses de Reynolds sont efficaces pour prévoir le phénomène d'*oil whirl* pour les paliers lisses ou faiblement texturés, mais elles ne sont plus valides pour rendre compte de la stabilisation rencontrée avec les texturations plus profondes. A ce titre, des améliorations numériques supplémentaires doivent être effectuées pour adapter des modèles plus complexes à une étude de dynamique non-linéaire, comme par exemple le modèle de Navier-Stokes moyenné sur un motif, présenté dans la partie 2.4. Cette méthode intéressante peut expliquer la modification du débit par rapport à la dérivée de la pression, elle-même reliée à l'excentricité du palier et donc à la géométrie de l'écoulement.

Cette remarque peut également être faite dans le cas de l'interprétation de la mesure des capteurs à ultrasons en terme d'épaisseur de film. L'impact des texturations sur la raideur de l'interface, et donc sur le coefficient de réflexion des ondes ultrasonores est important. Il est difficile d'interpréter les signaux dynamiques qui en résultent avec les modèles actuels. Toutefois, la mesure de ces sondes permet de comprendre à la fois les différences de couples résistants mesurés par la valeur moyenne des signaux, et également les tendances en termes de fréquence de stabilisation d'*oil whirl*. Cette méthode semble particulièrement prometteuse pour la caractériser. Des efforts supplémentaires seront nécessaires pour affiner la mesure et en améliorer la compréhension à partir des modèles, notamment en présence de surfaces texturées et de rupture de film. On pourrait par ailleurs élargir ce commentaire aux surfaces rugueuses.

Conclusions générales et perspectives

Nous avons présenté dans ce mémoire une étude numérique et expérimentale du comportement dynamique d'une ligne d'arbre de machine tournante miniaturisée, dont les supports de guidage sont deux paliers hydrodynamiques, lesquels peuvent présenter une texturation maîtrisée de leur surface. Le premier chapitre a permis d'énoncer les généralités concernant le palier hydrodynamique et les vibrations d'arbres, ainsi que de présenter un état de l'art de la texturation de surface utilisée en lubrification hydrodynamique. A partir des documents disponibles, nous avons montré l'intérêt du contrôle de l'état de surface pour modifier le débit de lubrifiant à l'intérieur du palier, et ainsi perturber les vibrations auto-entretenues qui y sont liées, telles que l'*oil whirl* et l'*oil whip*.

Les méthodes avancées de modélisation du film fluide ont été présentées dans le chapitre 2. Différentes conditions aux limites ont été exposées pour modéliser la zone de rupture de film, comme les conditions de Reynolds et les conditions de conservation de Jakobson-Floberg-Olsson. Un algorithme de résolution efficace a été présenté pour résoudre le calcul de pression sous forme d'un problème de linéaire de complémentarité (FBNS). Afin de prendre en compte l'effet global des texturations micrométriques, deux méthodes multi-échelles ont été étudiées. La première méthode, appelée homogénéisation périodique, repose sur la vérification des hypothèses de Reynolds à l'échelle locale. La seconde méthode, plus complexe, repose sur la résolution locale des équations de Navier-Stokes pour un fluide incompressible. La première méthode a été adaptée à la résolution du profil de pression avec les différentes conditions de rupture de film. Toutefois la seconde méthode, plus réaliste mais plus complexe, nécessite davantage d'investigations avant d'être parfaitement adaptée au calcul de la pression dans le palier. Les résolutions locales de Navier-Stokes incompressibles peuvent être cependant exploitées pour augmenter la compréhension phénoménologique des mesures expérimentales.

Le chapitre 3 a permis d'adapter les méthodes complexes de calcul de la pression du lubrifiant à une ligne d'arbre flexible. La méthodologie de l'étude non-linéaire des systèmes dynamiques a été exposée et exploitée sur différents exemples de paliers, afin de faire le lien entre les chargements statiques et dynamiques et leur interaction avec le film fluide. Les bifurcations entre solutions synchrones stables vers des cycles limites sous-synchrones ont été mises en évidence. La méthode d'équilibrage harmonique a présenté de bonnes performances. Une variante de cette méthode appelée méthode d'équilibrage harmonique à coefficients variables (VCHBM) a également permis de trouver des cycles limites sous-synchrones après bifurcation super-critique dans le cas d'un palier étudié séparément du reste de la ligne d'arbre.

L'application de l'algorithme présenté dans le chapitre 3 au cas du rotor étudié dans la partie expérimentale dans le chapitre 5, a été largement exploitée dans le chapitre 4 sous forme d'étude paramétrique. L'algorithme a permis de présenter l'influence stabilisante du balourd, du défaut de rectitude des tiges, et de la diminution du jeu radial. Trois types de texturation ont alors été testés à savoir les texturations sinusoïdales complètes et partielles

en une dimension, placée de façon longitudinale et transverses par rapport à l'écoulement, ainsi que les texturation de type *dimple* (cavités). L'amplitude de vibration est diminuée dans le cas de texturation longitudinale et les zones de stabilité sont étendues. Néanmoins, ces modifications restent minimales par rapport à l'influence du jeu radial. Les améliorations les plus intéressantes sont obtenues pour les texturations d'amplitudes les plus faibles. Or, dans ce cas les hypothèses de Reynolds devraient effectivement être vérifiées localement. Les conclusions générales de l'étude de l'algorithme multi-échelles et multi-physiques stipulent que la texturation totale par enlèvement de matière semble néfaste, si l'on garde les hypothèses de l'écoulement de Reynolds à l'échelle locale. Cependant, comme nous l'avons vu dans le chapitre 2, ces hypothèses sont très discutables pour les texturations les plus profondes, de l'ordre de grandeur du film fluide.

Les mesures présentées dans la partie 5 sont cohérentes avec l'algorithme pour les paliers lisses et les texturations peu profondes. En effet la bifurcation *flip* prédite par l'algorithme a bien été vérifiée expérimentalement. L'efficacité des texturations les plus profondes réalisées par ablation LASER sur la stabilisation du mouvement synchrone dans de plus grandes plages de fonctionnement a également été démontrée. Toutefois, ce résultat en discordance avec l'étude du chapitre 4, amène deux conclusions principales :

- la justification de l'intérêt de la texturation totale des parties tournantes pour atténuer les vibrations auto-entretenuées liées au palier hydrodynamique
- la remise en question du modèle multi-échelles basé sur les hypothèses de Reynolds locale dans l'étude de l'apport de la texturation de surface

Par ailleurs, l'étude expérimentale du film fluide par méthode ultrasonore a également présenté des résultats très intéressants par rapport aux oscillations de la raideur du film fluide autour de sa valeur moyenne. Cette étude permet de supposer que les texturations les plus profondes et les plus denses diminuent la portance hydrodynamique du film par rapport au chargement dynamique, ce qui se traduit par une oscillation également plus importante de l'arbre autour de sa position moyenne. Par ailleurs, si la comparaison des signaux des capteurs à ultrasons à ceux des capteurs de position capacitifs, suggère la présence de cavitation, il semblerait que ce phénomène soit encore plus complexe dans les paliers texturés. Dans ce cas, il peut être également lié à la présence de recirculation dans les motifs de texturations, changeant localement la raideur du film fluide dans les zones de basses pressions. Des investigations supplémentaires sont nécessaires pour discriminer ces deux phénomènes. La mesure par capteur à ultrasons offre une information *in situ* extrêmement précieuse, à laquelle on ne peut accéder avec les autres capteurs en dehors du contact. Pour continuer à exploiter l'information issue de ces mesures, il serait nécessaire d'améliorer les modèles fluides notamment en intégrant la résolution des équations de Navier-Stokes locales, et le remplissage partiel de lubrifiant dans les zones de ruptures de film.

Bibliographie

- [1] M. L. Adams. Non-linear dynamics of flexible multi-bearing rotors. *Journal of Sound and Vibration*, 71(1) :129–144, July 1980.
- [2] A. Almqvist, E. K. Essel, L. E. Persson, and P. Wall. Homogenization of the unsteady incompressible Reynolds equation. *Tribology International*, 40(9) :1344–1350, September 2007.
- [3] A. Almqvist, J. Fabricius, and P. Wall. Homogenization of a Reynolds equation describing compressible flow. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 390(2) :456–471, 2012.
- [4] A. Almqvist, J. Fabricius, R. Larsson, and P. Wall. A New Approach for Studying Cavitation in Lubrication. *Journal of Tribology*, 136(1) :011706–011706, November 2013.
- [5] A. Almqvist, D. Lukkassen, A. Meidell, and P. Wall. New concepts of homogenization applied in rough surface hydrodynamic lubrication. *International Journal of Engineering Science*, 45(1) :139–154, January 2007.
- [6] M. Arghir, F. Billy, G. Pineau, J. Frêne, and A. Texier. Theoretical Analysis of Textured “Damper” Annular Seals. *Journal of Tribology*, 129(3) :669–678, March 2007.
- [7] M. Arghir, N. Roucou, M. Helene, and J. Frene. Theoretical Analysis of the Incompressible Laminar Flow in a Macro-Roughness Cell. *Journal of Tribology*, 125(2) :309–318, March 2003.
- [8] R. Ausas, P. Ragot, J. Leiva, M. Jai, G. Bayada, and G. C. Buscaglia. The Impact of the Cavitation Model in the Analysis of Microtextured Lubricated Journal Bearings. *Journal of Tribology*, 129(4) :868–875, April 2007.
- [9] K. Avramov, M. Shulzhenko, O. Borysiuk, and C. Pierre. Influence of periodic excitation on self-sustained vibrations of one disk rotors in arbitrary length journal bearings. *International Journal of Non Linear Mechanics*, 77 :274–280, December 2015.
- [10] G. Bayada. Variational Formulation and Associated Algorithm for the Starved Finite Journal Bearing. *Journal of Tribology*, 105(3) :453–457, July 1983.
- [11] G. Bayada and M. Chambat. New Models in the Theory of the Hydrodynamic Lubrication of Rough Surfaces. *Journal of Tribology*, 110(3) :402–407, July 1988.
- [12] G. Bayada, M. Chambat, and C. Vázquez. Characteristics method for the formulation and computation of a free boundary cavitation problem. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 98(2) :191–212, October 1998.
- [13] G. Bayada and L. Chupin. Compressible Fluid Model for Hydrodynamic Lubrication Cavitation. *Journal of Tribology*, 135(4) :041702–041702, June 2013.

- [14] G. Bayada and J. B. Faure. A Double Scale Analysis Approach of the Reynolds Roughness Comments and Application to the Journal Bearing. *Journal of Tribology*, 111(2) :323–330, April 1989.
- [15] G. Bayada. From a compressible fluid model to new mass conserving cavitation algorithms. *Tribology International*, 71 :38–49, March 2014.
- [16] G. Bayada, S. Martin, and C. Vázquez. An Average Flow Model of the Reynolds Roughness Including a Mass-Flow Preserving Cavitation Model. *Journal of Tribology*, 127(4) :793–802, May 2005.
- [17] A. Bermúdez and J. Durany. La méthode des caractéristiques pour les problèmes de convection-diffusion stationnaires. *ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis - Modélisation Mathématique et Analyse Numérique*, 21(1) :7–26, 1987.
- [18] A. Bermúdez and J. Durany. Numerical solution of cavitation problems in lubrication. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 75(1–3) :457–466, October 1989.
- [19] D. Bonneau, A. Fatu, and D. Souchet. *Paliers hydrodynamiques : Tome 1, Equations, modèles numériques isothermes et lubrification mixte*. Lavoisier, September 2011.
- [20] J. Bouyer and M. Fillon. An Experimental Analysis of Misalignment Effects on Hydrodynamic Plain Journal Bearing Performances. *Journal of Tribology*, 124(2) :313–319, July 2001.
- [21] J. Bouyer and M. Fillon. Experimental measurement of the friction torque on hydrodynamic plain journal bearings during start-up. *Tribology International*, 44(7–8) :772–781, July 2011.
- [22] P. Brajdic-Mitidieri, A. D. Gosman, E. Ioannides, and H. A. Spikes. CFD Analysis of a Low Friction Pocketed Pad Bearing. *Journal of Tribology*, 127(4) :803–812, May 2005.
- [23] R. Brancati, M. Russo, and R. Russo. On the stability of periodic motions of an unbalanced rigid rotor on lubricated journal bearings. *Nonlinear Dynamics*, 10(2) :175–185, June 1996.
- [24] D. E. Brewe. Theoretical Modeling of the Vapor Cavitation in Dynamically Loaded Journal Bearings. *Journal of Tribology*, 108(4) :628–637, October 1986.
- [25] D. E. Brewe and B. O. Jacobson. The effect of vibration amplitude on vapour cavitation in journal bearings. *Wear*, 115(1–2) :63–73, March 1987.
- [26] V. Brizmer and Y. Kligerman. A Laser Surface Textured Journal Bearing. *Journal of Tribology*, 134(3) :031702–031702, June 2012.
- [27] A. N. Brooks and T. J. R. Hughes. Streamline upwind/Petrov-Galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 32(1–3) :199–259, September 1982.
- [28] R. D. Brown, G. Drummond, and P. S. Addison. Chaotic response of a short journal bearing. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part J : Journal of Engineering Tribology*, 214(4) :387–400, April 2000.
- [29] T. M. Cameron and J. H. Griffin. An Alternating Frequency/Time Domain Method for Calculating the Steady-State Response of Nonlinear Dynamic Systems. *Journal of Applied Mechanics*, 56(1) :149–154, March 1989.

- [30] S.-K. Chen, H.-C. Chou, and Y. Kang. Stability analysis of hydrodynamic bearing with herringbone grooved sleeve. *Tribology International*, 55 :15–28, November 2012.
- [31] D. Childs, H. Moes, and H. van Leeuwen. Journal Bearing Impedance Descriptions for Rotordynamic Applications. *Journal of Lubrication Technology*, 99(2) :198–210, April 1977.
- [32] D. W. Childs. A Rotor-Fixed Modal Simulation Model for Flexible Rotating Equipment. *Journal of Manufacturing Science and Engineering*, 96(2) :659–669, May 1974.
- [33] D. W. Childs. A Modal Transient Simulation Model for Flexible Asymmetric Rotors. *Journal of Manufacturing Science and Engineering*, 98(1) :312–319, February 1976.
- [34] D. W. Childs. *Turbomachinery Rotordynamics : Phenomena, Modeling, and Analysis*. John Wiley & Sons, April 1993.
- [35] M. Chouchane and A. Amamou. Bifurcation of limit cycles in fluid film bearings. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 46(9) :1258–1264, November 2011.
- [36] H. Christensen and K. Tonder. The Hydrodynamic Lubrication of Rough Journal Bearings. *Journal of Tribology*, 95(2) :166–172, April 1973.
- [37] J. C. Coyne and J. Elrod, H. G. Conditions for the Rupture of a Lubricating Film. Part I : Theoretical Model. *Journal of Tribology*, 92(3) :451–456, July 1970.
- [38] J. C. Coyne and J. Elrod, H. G. Conditions for the Rupture of a Lubricating Film—Part II : New Boundary Conditions for Reynolds Equation. *Journal of Tribology*, 93(1) :156–167, January 1971.
- [39] M. T. M. Crooijmans, H. J. H. Brouwers, D. H. van Campen, and A. de Kraker. Limit Cycle Predictions of a Nonlinear Journal-Bearing System. *Journal of Manufacturing Science and Engineering*, 112(2) :168–171, May 1990.
- [40] S. Cupillard, M. J. Cervantes, and S. Glavatskih. Thermohydrodynamic Analysis of a Journal Bearing with a Microgroove on the Shaft. *Computational Thermal Sciences*, 6(1) :47–57, 2014.
- [41] S. Cupillard, M. J. Cervantes, and S. Glavatskih. A CFD Study of a Finite Textured Journal Bearing. In *IAHR 24th Symposium on Hydraulic Machinery and Systems*, pages 1–11, 2008.
- [42] S. Cupillard, M. J. Cervantes, and S. Glavatskih. Pressure Buildup Mechanism in a Textured Inlet of a Hydrodynamic Contact. *Journal of Tribology*, 130(2) :021701–021701, April 2008.
- [43] A. Dadouche and M. J. Conlon. Operational performance of textured journal bearings lubricated with a contaminated fluid. *Tribology International*, 93, Part A :377–389, January 2016.
- [44] A. de Kraker, R. A. J. van Ostayen, and D. J. Rixen. Development of a texture averaged Reynolds equation. *Tribology International*, 43(11) :2100–2109, November 2010.
- [45] A. de Kraker, R. A. van Ostayen, A. van Beek, and D. J. Rixen. A Multiscale Method Modeling Surface Texture Effects. *Journal of Tribology*, 129(2) :221–230, December 2006.
- [46] M. B. Dobrica and M. Fillon. About the validity of Reynolds equation and inertia effects in textured sliders of infinite width. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part J : Journal of Engineering Tribology*, 223(1) :69–78, January 2009.

- [47] M. Dostal, J. B. Roberts, and R. Holmes. Stability control of flexible shafts supported on oil-film bearings. *Journal of Sound and Vibration*, 35(3) :361–377, August 1974.
- [48] D. Dowson and C. M. Taylor. Cavitation in Bearings. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 11(1) :35–65, 1979.
- [49] R. S. Dwyer-Joyce, P. Harper, and B. W. Drinkwater. A Method for the Measurement of Hydrodynamic Oil Films Using Ultrasonic Reflection. *Tribology Letters*, 17(2) :337–348, August 2004.
- [50] D. Dyer and B. R. Reason. A Study of Tensile Stresses in a Journal-Bearing Oil Film. *Journal of Mechanical Engineering Science*, 18(1) :46–52, February 1976.
- [51] R. Eling, M. Te Wierik, and R. van Ostayen. Multiphysical modeling comprehensiveness to model a high speed Laval rotor on journal bearings. *Proceedings of the 14th EDF/Pprime Workshop, "Influence of design and materials on journal and thrust bearing performance"*, 2015.
- [52] H. G. Elrod. A General Theory for Laminar Lubrication With Reynolds Roughness. *Journal of Tribology*, 101(1) :8–14, January 1979.
- [53] H. G. Elrod. A Cavitation Algorithm. *Journal of Tribology*, 103(3) :350–354, July 1981.
- [54] K. Erleben. Numerical methods for linear complementarity problems in physics-based animation. In *ACM SIGGRAPH 2013 Courses*, page 8. ACM, 2013.
- [55] I. Etsion. State of the Art in Laser Surface Texturing. *Journal of Tribology*, 127(1) :248, 2005.
- [56] R. Flitney. *Seals and sealing handbook*. iChemE. Butterworth-Heinemann, an imprint of Elsevier, Amsterdam, sixth edition edition, 2014.
- [57] L. Floberg. Lubrication of Two Rotating Cylinders at Variable Lubricant Supply With Reference to the Tensile Strength of the Liquid Lubricant. *Journal of Tribology*, 95(2) :155–163, April 1973.
- [58] M. Fowell, A. V. Olver, A. D. Gosman, H. A. Spikes, and I. Pegg. Entrainment and Inlet Suction : Two Mechanisms of Hydrodynamic Lubrication in Textured Bearings. *Journal of Tribology*, 129(2) :336–347, April 2007.
- [59] J. Frêne. *Lubrification hydrodynamique*. Eyrolles, Paris, 1990.
- [60] J. Frêne. *Hydrodynamic lubrication bearings and thrust bearings*. Elsevier, Amsterdam [Netherlands] ; New York, 1997.
- [61] T. S. R. Ganji and K. S K. Dynamic Characteristics and Stability of Cylindrical Textured Journal Bearing. *International Journal of Recent advances in Mechanical Engineering*, 3(3) :1–14, August 2014.
- [62] M. Gardner, C. Myers, M. Savage, and C. Taylor. Analysis of Limit-Cycle Response in Fluid-Film Journal Bearings Using the Method of Multiple Scales. *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, 38(1) :27–45, January 1985.
- [63] G. Genta. *Dynamics of Rotating Systems*. Mechanical Engineering Series. Springer US, New York, NY, 2005.
- [64] P. Germain. *Mécanique*. Ecole Polytechnique ; Edition Marketing, Palaiseau ; Paris, 1986.
- [65] M. Giacomini, M. T. Fowell, D. Dini, and A. Strozzi. A Mass-Conserving Complementarity Formulation to Study Lubricant Films in the Presence of Cavitation. *Journal of Tribology*, 132(4) :041702–041702, September 2010.

- [66] D. Gropper, L. Wang, and T. J. Harvey. Hydrodynamic lubrication of textured surfaces : A review of modeling techniques and key findings. *Tribology International*, 94 :509–529, February 2016.
- [67] M. Guskov, J.-J. Sinou, and F. Thouverez. Multi-dimensional harmonic balance applied to rotor dynamics. *Mechanics Research Communications*, 35(8) :537–545, December 2008.
- [68] D. B. Hamilton, J. A. Walowit, and C. M. Allen. A Theory of Lubrication by Microirregularities. *Journal of Basic Engineering*, 88(1) :177–185, March 1966.
- [69] S. R. Harp and R. F. Salant. An Average Flow Model of Rough Surface Lubrication With Inter-Asperity Cavitation. *Journal of Tribology*, 123(1) :134–143, October 2000.
- [70] P. Harper. *Measurement of film thickness in lubricated components using ultrasonic reflection*. Ph.D., University of Sheffield, 2008.
- [71] P. Hollis and D. L. Taylor. Hopf Bifurcation to Limit Cycles in Fluid Film Bearings. *Journal of Tribology*, 108(2) :184–189, April 1986.
- [72] R. Holmes. The effect of sleeve bearings on the vibration of rotating shafts. *Tribology*, 5(4) :161–168, August 1972.
- [73] B. O. Jacobson and B. J. Hamrock. High-Speed Motion Picture Camera Experiments of Cavitation in Dynamically Loaded Journal Bearings. *Journal of Lubrication Technology*, 105(3) :446–452, July 1983.
- [74] B. Jakobsson and L. Floberg. *The finite journal bearing, considering vaporization : (Das Gleitlager von endlicher Breite mit Verdampfung)*. Göteborg, 1957. OCLC : 484566286.
- [75] S. Kango, D. Singh, and R. K. Sharma. Numerical investigation on the influence of surface texture on the performance of hydrodynamic journal bearing. *Meccanica*, 47(2) :469–482, February 2012.
- [76] S. Kasolang and R. S. Dwyer-Joyce. Observations of Film Thickness Profile and Cavitation Around a Journal Bearing Circumference. *Tribology Transactions*, 51(2) :231–245, March 2008.
- [77] M. M. Khonsari and Y. J. Chang. Stability Boundary of Non-Linear Orbits Within Clearance Circle of Journal Bearings. *Journal of Vibration and Acoustics*, 115(3) :303–307, July 1993.
- [78] M. M. Khonsari and E. R. Booser. *Applied tribology : bearing design and lubrication*. Tribology series. Wiley, Chichester, England ; Hoboken, NJ, 2nd ed edition, 2008. OCLC : ocn212893696.
- [79] C.-H. Kim and D. W. Childs. Analysis for Rotordynamic Coefficients of Helicallly-Grooved Turbulent Annular Seals. *Journal of Tribology*, 109(1) :136–143, January 1987.
- [80] Y. B. Kim and S. T. Noah. Quasi-Periodic Response and Stability Analysis for a Non-Linear Jeffcott Rotor. *Journal of Sound and Vibration*, 190(2) :239–253, February 1996.
- [81] R. G. Kirk and E. J. Gunter. Transient Response of Rotor-Bearing Systems. *Journal of Manufacturing Science and Engineering*, 96(2) :682–690, May 1974.
- [82] R. G. Kirk and E. J. Gunter. Short Bearing Analysis Applied to Rotor Dynamics—Part 2 : Results of Journal Bearing Response. *Journal of Tribology*, 98(2) :319–329, April 1976.

- [83] P. Klit and J. W. Lund. Calculation of the Dynamic Coefficients of a Journal Bearing, Using a Variational Approach. *Journal of Tribology*, 108(3) :421–424, July 1986.
- [84] Y. A. Kuznetsov. *Elements of Applied Bifurcation Theory*, volume 112 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer New York, New York, NY, 2004.
- [85] M. Lalanne and G. Ferraris. *Rotordynamics prediction in engineering*. Wiley, July 1990.
- [86] J. Lengiewicz, M. Wichrowski, and S. Stupkiewicz. Mixed formulation and finite element treatment of the mass-conserving cavitation model. *Tribology International*, 72 :143–155, 2014.
- [87] J.-R. Lin. Application of the Hopf bifurcation theory to limit cycle prediction of short journal bearings with isotropic roughness effects. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part J : Journal of Engineering Tribology*, 221(8) :869–879, 2007.
- [88] J.-R. Lin. The surface roughness effects of transverse patterns on the Hopf bifurcation behaviors of short journal bearings. *Industrial Lubrication and Tribology*, 64(5) :265–270, August 2012.
- [89] J.-R. Lin. The influences of longitudinal surface roughness on sub-critical and super-critical limit cycles of short journal bearings. *Applied Mathematical Modelling*, 38(1) :392–402, January 2014.
- [90] X. Lu and M. M. Khonsari. An Experimental Investigation of Dimple Effect on the Stribeck Curve of Journal Bearings. *Tribology Letters*, 27(2) :169–176, August 2007.
- [91] J. W. Lund. Modal Response of a Flexible Rotor in Fluid-Film Bearings. *Journal of Manufacturing Science and Engineering*, 96(2) :525–533, May 1974.
- [92] J. W. Lund. Stability and Damped Critical Speeds of a Flexible Rotor in Fluid-Film Bearings. *Journal of Manufacturing Science and Engineering*, 96(2) :509–517, May 1974.
- [93] J. W. Lund. Review of analytical methods in rotor-bearing dynamics. *Tribology International*, 13(5) :233–236, October 1980.
- [94] J. W. Lund. Review of the Concept of Dynamic Coefficients for Fluid Film Journal Bearings. *Journal of Tribology*, 109(1) :37–41, January 1987.
- [95] J. W. Lund and P. K. Hansen. An Approximate Analysis of the Temperature Conditions in a Journal Bearing. Part I : Theory. *Journal of Tribology*, 106(2) :228–236, April 1984.
- [96] J. W. Lund and E. Saibel. Oil Whip Whirl Orbits of a Rotor in Sleeve Bearings. *Journal of Manufacturing Science and Engineering*, 89(4) :813–823, November 1967.
- [97] J. W. Lund and J. Tonnesen. An Approximate Analysis of the Temperature Conditions in a Journal Bearing. Part II : Application. *Journal of Tribology*, 106(2) :237–244, April 1984.
- [98] J. W. Lund, E. B. Arwas, H. S. Cheng, C. W. Ng, and C. H. Pan. Rotor-Bearing Dynamics Design Technology. Part III : Design Handbook for Fluid Film Type Bearings. Technical report, May 1965.
- [99] J. Lund and K. Thomsen. Calculation method and data for the dynamic coefficients of oil-lubricated journal bearings. pages 1–28, 1978.
- [100] B. C. Majumdar and M. K. Ghosh. Stability of a Rigid Rotor Supported on Rough Oil Journal Bearings. *Journal of Tribology*, 112(1) :73, 1990.

- [101] R. U. Mendes and K. L. Cavalca. On the Instability Threshold of Journal Bearing Supported Rotors. *International Journal of Rotating Machinery*, 2014 :e351261, February 2014.
- [102] Y. Mihara, M. Kajiwara, T. Fukamatsu, and T. Someya. Study on the measurement of oil-film pressure of engine main bearing by thin-film sensor—The influence of bearing deformation on pressure sensor output under engine operation. *JSAE review*, 17(3) :281–286, 1996.
- [103] A. Muszynska. Whirl and whip—Rotor/bearing stability problems. *Journal of Sound and Vibration*, 110(3) :443–462, November 1986.
- [104] A. Muszyńska. *Rotordynamics*. Number 188 in Mechanical engineering. Taylor & Francis, Boca Raton, 2005.
- [105] C. J. Myers. Bifurcation Theory Applied to Oil Whirl in Plain Cylindrical Journal Bearings. *Journal of Applied Mechanics*, 51(2) :244–250, June 1984.
- [106] J. Myrick, S. T. and H. G. Rylander. Analysis of Flexible Rotor Whirl and Whip Using a Realistic Hydrodynamic Journal Bearing Model. *Journal of Manufacturing Science and Engineering*, 98(4) :1135–1143, November 1976.
- [107] A. H. Nayfeh. *Applied nonlinear dynamics : analytical, computational, and experimental methods*. Wiley series in nonlinear science. Wiley, New York, 1995.
- [108] K.-O. Olsson. *Cavitation in Dynamically Loaded Bearings*. Scandinavian University Books, 1965.
- [109] V. Optasanu and D. Bonneau. Finite Element Mass-Conserving Cavitation Algorithm in Pure Squeeze Motion. Validation/Application to a Connecting-Rod Small End Bearing. *Journal of Tribology*, 122(1) :162–169, June 1999.
- [110] R. S. Paranjpe and T. Han. A Transient Thermohydrodynamic Analysis Including Mass Conserving Cavitation for Dynamically Loaded Journal Bearings. *Journal of Tribology*, 117(3) :369–378, July 1995.
- [111] N. Patir and H. S. Cheng. An Average Flow Model for Determining Effects of Three-Dimensional Roughness on Partial Hydrodynamic Lubrication. *Journal of Tribology*, 100(1) :12–17, January 1978.
- [112] N. Patir and H. S. Cheng. Application of Average Flow Model to Lubrication Between Rough Sliding Surfaces. *Journal of Tribology*, 101(2) :220–229, April 1979.
- [113] S. Pei, S. Ma, H. Xu, F. Wang, and Y. Zhang. A multiscale method of modeling surface texture in hydrodynamic regime. *Tribology International*, 44(12) :1810–1818, November 2011.
- [114] L. Peletan, S. Baguet, M. Torkhani, and G. Jacquet-Richardet. A comparison of stability computational methods for periodic solution of nonlinear problems with application to rotordynamics. *Nonlinear Dynamics*, 72(3) :671–682, January 2013.
- [115] B. Podgornik, L. M. Vilhena, M. Sedlaček, Z. Rek, and I. Žun. Effectiveness and design of surface texturing for different lubrication regimes. *Meccanica*, 47(7) :1613–1622, October 2012.
- [116] Y. Qiu and M. M. Khonsari. On the Prediction of Cavitation in Dimples Using a Mass-Conservative Algorithm. *Journal of Tribology*, 131(4) :041702–041702, September 2009.
- [117] J. Ramesh and B. C. Majumdar. Stability of Rough Journal Bearings Using Nonlinear Transient Method. *Journal of Tribology*, 117(4) :691–695, October 1995.

- [118] J. S. Rao. Instability of rotors mounted in fluid film bearings with a negative cross-coupled stiffness coefficient. *Mechanism and Machine Theory*, 20(3) :181–187, 1985.
- [119] T. V. V. L. N. Rao, A. M. A. Rani, T. Nagarajan, and F. M. Hashim. Analysis of partially textured slider and journal bearing. In *AIP Conference Proceedings*, volume 1440, pages 273–284. American Institute of Physics, June 2012.
- [120] T. V. V. L. N. Rao and J. T. Sawicki. Stability Analysis of a Rough Journal Bearing Considering Cavitation Effects. *Journal of Tribology*, 127(1) :112–119, February 2005.
- [121] J. Rebufa, F. Thouverez, E. Le Guyadec, and D. Mazuyer. Effects of rough journal bearings on vibration of lightweight rotors. *Proceedings of Vibration In Rotating Machinery 11*, 2016.
- [122] A. Reynaud. Simulations numériques pour l'étude de la lubrification de paliers hydrodynamiques texturés. Master Thesis, Aix Marseille Université, Marseille, 2016.
- [123] A. Ronen and I. Etsion. Friction-Reducing Surface-Texturing in Reciprocating Automotive Components. *Tribology Transactions*, 44 :359–366, 2001.
- [124] W. B. Rowe and F. S. Chong. A computational algorithm for cavitating bearings : Requirement of boundary conditions which satisfy the principle of mass conservation. *Tribology International*, 17(5) :243–250, October 1984.
- [125] F. Sahlin, A. Almqvist, R. Larsson, and S. Glavatskih. Rough surface flow factors in full film lubrication based on a homogenization technique. *Tribology International*, 40(7) :1025–1034, July 2007.
- [126] F. Sahlin, S. B. Glavatskih, T. Almqvist, and R. Larsson. Two-Dimensional CFD-Analysis of Micro-Patterned Surfaces in Hydrodynamic Lubrication. *Journal of Tribology*, 127(1) :96–102, February 2005.
- [127] E. Sarrouy. *Analyse globale de systèmes mécaniques non-linéaires - Application à la dynamique des rotors*. phdthesis, Ecole Centrale de Lyon, October 2008.
- [128] J. Shaw and S. W. Shaw. Instabilities and bifurcations in a rotating shaft. *Journal of Sound and Vibration*, 132(2) :227–244, July 1989.
- [129] J. Shaw and S. W. Shaw. The effects of unbalance on oil whirl. *Nonlinear Dynamics*, 1(4) :293–311, July 1990.
- [130] G. Shen, Z. Xiao, W. Zhang, and T. Zheng. Nonlinear Behavior Analysis of a Rotor Supported on Fluid-Film Bearings. *Journal of Vibration and Acoustics*, 128(1) :35–40, July 2005.
- [131] C. Sinanoğlu, F. Nair, and M. B. Karamış. Effects of shaft surface texture on journal bearing pressure distribution. *Journal of Materials Processing Technology*, 168(2) :344–353, September 2005.
- [132] T. Someya. *Journal-bearing databook*. Springer Berlin, Berlin, 1989.
- [133] G. Stachowiak and A. W. Batchelor. *Engineering Tribology*. Butterworth-Heinemann, March 2011.
- [134] E. Swanson. Fixed-Geometry, Hydrodynamic Bearing with Enhanced Stability Characteristics. *Tribology Transactions*, 48(1) :82–92, January 2005.
- [135] A. Z. Szeri. *Fluid film lubrication*. Cambridge University Press, Cambridge ; New York, 2nd ed edition, 2011.

- [136] N. Tala-Ighil, M. Fillon, and P. Maspeyrot. Effect of textured area on the performances of a hydrodynamic journal bearing. *Tribology International*, 44(3) :211–219, March 2011.
- [137] K. Tønder. Hydrodynamic effects of tailored inlet roughnesses : extended theory. *Tribology International*, 37(2) :137–142, February 2004.
- [138] J. H. Tripp. Surface Roughness Effects in Hydrodynamic Lubrication : The Flow Factor Method. *Journal of Tribology*, 105(3) :458–463, July 1983.
- [139] R. Turaga, A. S. Sekhar, and B. C. Majumdar. Non-Linear Transient Stability Analysis of a Rigid Rotor Supported on Hydrodynamic Journal Bearings with Rough Surfaces. *Tribology Transactions*, 43(3) :447–452, January 2000.
- [140] S. T. Tzeng and E. Saibel. Surface Roughness Effect on Slider Bearing Lubrication. *A S L E Transactions*, 10(3) :334–348, January 1967.
- [141] A. Valkonen, J. Juhanko, and P. Kuosmanen. Measurement of oil film pressure in hydrodynamic journal bearings. In *7th International DAAAM baltic Conference "Industrial Engineering", Tallin Estonia*, pages 1–6, 2010.
- [142] A. Valkonen. Oil film pressure in hydrodynamic journal bearings. 2009.
- [143] D. Vijayaraghavan and J. Keith, T. G. Analysis of a Finite Grooved Misaligned Journal Bearing Considering Cavitation and Starvation Effects. *Journal of Tribology*, 112(1) :60–67, January 1990.
- [144] D. Vijayaraghavan and J. Keith, T. G. An Efficient, Robust, and Time Accurate Numerical Scheme Applied to a Cavitation Algorithm. *Journal of Tribology*, 112(1) :44–51, January 1990.
- [145] D. Vijayaraghavan and J. Keith, T. G. Grid Transformation and Adaption Techniques Applied in the Analysis of Cavitated Journal Bearings. *Journal of Tribology*, 112(1) :52–59, January 1990.
- [146] D. Vijayaraghavan and T. G. Keith. Development and Evaluation of a Cavitation Algorithm. *Tribology Transactions*, 32(2) :225–233, January 1989.
- [147] D. Vijayaraghavan and T. G. Keith Jr. Effect of cavitation on the performance of a grooved misaligned journal bearing. *Wear*, 134(2) :377–397, November 1989.
- [148] B. Vincent, P. Maspeyrot, and J. Frene. Cavitation in dynamically loaded journal bearings using mobility method. *Wear*, 193(2) :155–162, May 1996.
- [149] E. L. B. V. D. Vorst, R. H. B. Fey, A. D. Kraker, and D. H. V. Campen. Steady-state behaviour of flexible rotordynamic systems with oil journal bearings. *Nonlinear Dynamics*, 11(3) :295–313, November 1996.
- [150] C.-C. Wang, M.-J. Jang, and Y.-L. Yeh. Bifurcation and nonlinear dynamic analysis of a flexible rotor supported by relative short gas journal bearings. *Chaos, Solitons & Fractals*, 32(2) :566–582, April 2007.
- [151] J. K. Wang and M. M. Khonsari. On the Hysteresis Phenomenon Associated With Instability of Rotor-Bearing Systems. *Journal of Tribology*, 128(1) :188–196, August 2005.
- [152] J. K. Wang and M. M. Khonsari. Prediction of the Stability Envelope of Rotor-Bearing System. *Journal of Vibration and Acoustics*, 128(2) :197–202, June 2005.
- [153] T. Woloszynski, P. Podsiadlo, and G. W. Stachowiak. Efficient Solution to the Cavitation Problem in Hydrodynamic Lubrication. *Tribology Letters*, 58(1) :1–11, March 2015.

-
- [154] Z. Xia, G. Qiao, T. Zheng, and W. Zhang. Nonlinear modeling and dynamic analysis of the rotor-bearing system. *Nonlinear Dynamics*, 57(4) :559–577, September 2009.
- [155] K. Yagi and J. Sugimura. Balancing Wedge Action : A Contribution of Textured Surface to Hydrodynamic Pressure Generation. *Tribology Letters*, 50(3) :349–364, June 2013.
- [156] J. Zhang. Calculation and bifurcation of fluid film with cavitation based on variational inequality. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 11(01) :43–55, January 2001.
- [157] T. Zheng and N. Hasebe. Nonlinear Dynamic Behaviors of a Complex Rotor-Bearing System. *Journal of Applied Mechanics*, 67(3) :485–495, November 1999.
- [158] T. Zheng and N. Hasebe. Calculation of Equilibrium Position and Dynamic Coefficients of a Journal Bearing Using Free Boundary Theory. *Journal of Tribology*, 122(3) :616–621, October 1999.
- [159] B. Zhou, F. Thouverez, and D. Lenoir. A variable-coefficient harmonic balance method for the prediction of quasi-periodic response in nonlinear systems. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 64, 2015.
- [160] O. C. Zienkiewicz. *The Finite Element Method : Its Basis and Fundamentals Ed. 7*. Elsevier Science, San Diego, CA, USA, 2013.
- [161] E. S. Zorzi and H. D. Nelson. Finite Element Simulation of Rotor-Bearing Systems With Internal Damping. *Journal of Engineering for Power*, 99(1) :71–76, January 1977.

Annexe A

Matrices élémentaires de poutre en rotation

Afin de construire les matrices \mathbb{M} , \mathbb{G} , \mathbb{K} , \mathbb{K}_b , et \mathbb{K}_c , il convient de les assembler à partir de matrices élémentaires ([85], [160]).

Matrice élémentaire de masse

$$\delta \mathbf{x}^T \mathbb{M}_0 e \mathbf{x} = \frac{\rho_a S}{2} \int_0^{l_e} (\delta \mathbf{x}_u^T \mathbf{N}_1^T \mathbf{N}_1 \mathbf{x}_u + \delta \mathbf{x}_w^T \mathbf{N}_2^T \mathbf{N}_2 \mathbf{x}_w) dy$$

$$\mathbb{M}_0 e = \frac{\rho_A S l_e}{420} \begin{bmatrix} 156 & 0 & 0 & -22l_e & 54 & 0 & 0 & 13l_e \\ 0 & 156 & 22l_e & 0 & 0 & 54 & -13l_e & 0 \\ 0 & 22l_e & 4l_e^2 & 0 & 0 & 13l_e & -3l_e^2 & 0 \\ -22l_e & 0 & 0 & 4l_e^2 & -13l_e & 0 & 0 & -3l_e^2 \\ 54 & 0 & 0 & -13l_e & 156 & 0 & 0 & 22l_e \\ 0 & 54 & 13l_e & 0 & 0 & 156 & -22l_e & 0 \\ 0 & -13l_e & -3l_e^2 & 0 & 0 & -22l_e & 4l_e^2 & 0 \\ 13l_e & 0 & 0 & -3l_e^2 & 22l_e & 0 & 0 & 4l_e^2 \end{bmatrix} \quad (\text{A.0.0.1})$$

Matrice élémentaire de masse liée aux rotations

$$\delta \mathbf{x}^T \mathbb{M}_s e \mathbf{x} = \frac{\rho_A I}{2} \int_0^{l_e} \left(\delta \mathbf{x}_u^T \frac{\partial \mathbf{N}_1^T}{\partial y} \frac{\partial \mathbf{N}_1}{\partial y} \mathbf{x}_u + \delta \mathbf{x}_w^T \frac{\partial \mathbf{N}_2^T}{\partial y} \frac{\partial \mathbf{N}_2}{\partial y} \mathbf{x}_w \right) dy$$

$$\mathbb{M}_s e = \frac{\rho_A I}{30l_e} \begin{bmatrix} 36 & 0 & 0 & -3l_e & -36 & 0 & 0 & -3l_e \\ 0 & 36 & 3l_e & 0 & 0 & -36 & 3l_e & 0 \\ 0 & 3l_e & 4l_e^2 & 0 & 0 & -3l_e & -l_e^2 & 0 \\ -3l_e & 0 & 0 & 4l_e^2 & 3l_e & 0 & 0 & -l_e^2 \\ -36 & 0 & 0 & 3l_e & 36 & 0 & 0 & 3l_e \\ 0 & -36 & -3l_e & 0 & 0 & 36 & -3l_e & 0 \\ 0 & 3l_e & -l_e^2 & 0 & 0 & -3l_e & 4l_e^2 & 0 \\ -3l_e & 0 & 0 & -l_e^2 & 3l_e & 0 & 0 & 4l_e^2 \end{bmatrix} \quad (\text{A.0.0.2})$$

Matrice élémentaire gyroscopique

$$\delta \mathbf{x}^T \mathbb{G}_e \mathbf{x} = -\rho_A I \int_0^{l_e} \left(\delta \mathbf{x}_u^T \frac{\partial \mathbf{N}_1^T}{\partial y} \frac{\partial \mathbf{N}_2}{\partial y} \mathbf{x}_w - \delta \mathbf{x}_w^T \frac{\partial \mathbf{N}_2^T}{\partial y} \frac{\partial \mathbf{N}_1}{\partial y} \mathbf{x}_u \right) dy = 2\mathbb{M}_s e \mathbb{R}^T$$

$$\mathbb{G}_e = \frac{\rho_A I}{15l_e} \begin{bmatrix} 0 & -36 & -3l_e & 0 & 0 & 36 & -3l_e & 0 \\ 36 & 0 & 0 & -3l_e & -36 & 0 & 0 & -3l_e \\ 3l_e & 0 & 0 & -4l_e^2 & -3l_e & 0 & 0 & l_e^2 \\ 0 & 3l_e & 4l_e^2 & 0 & 0 & -3l_e & -l_e^2 & 0 \\ 0 & 36 & 3l_e & 0 & 0 & -36 & 3l_e & 0 \\ -36 & 0 & 0 & 3l_e & 36 & 0 & 0 & 3l_e \\ 3l_e & 0 & 0 & l_e^2 & -3l_e & 0 & 0 & -4l_e^2 \\ 0 & 3l_e & -l_e^2 & 0 & 0 & -3l_e & 4l_e^2 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.0.0.3})$$

Matrice élémentaire de dissipation

$$\delta \mathbf{x}^T \mathbb{K}_b e \mathbf{x} = \frac{EI\eta_b}{2} \int_0^{l_e} \left(\delta \mathbf{x}_u^T \frac{\partial^2 \mathbf{N}_1^T}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \mathbf{N}_1}{\partial y^2} \mathbf{x}_u + \delta \mathbf{x}_w^T \frac{\partial^2 \mathbf{N}_2^T}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \mathbf{N}_2}{\partial y^2} \mathbf{x}_w \right) dy$$

$$\mathbb{K}_b e = \frac{\eta_b EI}{l_e^3} \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 & -6l_e & -12 & 0 & 0 & -6l_e \\ 0 & 12 & 6l_e & 0 & 0 & -12 & 6l_e & 0 \\ 0 & 6l_e & 4l_e^2 & 0 & 0 & -6l_e & 2l_e^2 & 0 \\ -6l_e & 0 & 0 & 4l_e^2 & 6l_e & 0 & 0 & 2l_e^2 \\ -12 & 0 & 0 & 6l_e & 12 & 0 & 0 & 6l_e \\ 0 & -12 & -6l_e & 0 & 0 & 12 & -6l_e & 0 \\ 0 & 6l_e & 2l_e^2 & 0 & 0 & -6l_e & 4l_e^2 & 0 \\ -6l_e & 0 & 0 & 2l_e^2 & 6l_e & 0 & 0 & 4l_e^2 \end{bmatrix} \quad (\text{A.0.0.4})$$

Matrice élémentaire circuloire

$$\delta \mathbf{x}^T \mathbb{K}_c e \mathbf{x} = EI\eta_b \int_0^{l_e} \left(\delta \mathbf{x}_u^T \frac{\partial^2 \mathbf{N}_1^T}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \mathbf{N}_2}{\partial y^2} \mathbf{x}_w + \delta \mathbf{x}_w^T \frac{\partial^2 \mathbf{N}_2^T}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \mathbf{N}_1}{\partial y^2} \mathbf{x}_u \right) dy = \mathbb{K}_b e \mathbb{R}^T$$

$$\mathbb{K}_c e = \frac{\eta_b EI}{l_e^3} \begin{bmatrix} 0 & -12 & -6l_e & 0 & 0 & 12 & -6l_e & 0 \\ 12 & 0 & 0 & -6l_e & -12 & 0 & 0 & -6l_e \\ 6l_e & 0 & 0 & -4l_e^2 & -6l_e & 0 & 0 & -2l_e^2 \\ 0 & 6l_e & 4l_e^2 & 0 & 0 & -6l_e & 2l_e^2 & 0 \\ 0 & 12 & 6l_e & 0 & 0 & -12 & 6l_e & 0 \\ -12 & 0 & 0 & 6l_e & 12 & 0 & 0 & 6l_e \\ 6l_e & 0 & 0 & -2l_e^2 & -6l_e & 0 & 0 & -4l_e^2 \\ 0 & 6l_e & 2l_e^2 & 0 & 0 & -6l_e & 4l_e^2 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.0.0.5})$$

Matrice élémentaire de raideur avec cisaillement ([85]) Il est fréquemment nécessaire de prendre en compte l'effet du cisaillement. L'effet du cisaillement modifie la matrice de raideur classique, que l'on retrouve avec $a_G = 0$:

$$\delta \mathbf{x}^T \mathbb{K} e \mathbf{x} = \frac{EI}{(1+a)} \int_0^{l_e} \left(\delta \mathbf{x}_u^T \frac{\partial \mathbf{N}_1^T}{\partial y} \frac{\partial \mathbf{N}_1}{\partial y} \mathbf{x}_u + \delta \mathbf{x}_w^T \frac{\partial \mathbf{N}_2^T}{\partial y} \frac{\partial \mathbf{N}_2}{\partial y} \mathbf{x}_w \right) dy$$

$$\mathbb{K} e = \frac{EI}{(1+a_G)l_e^3} \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 & -6l_e & -12 & 0 & 0 & -6l_e \\ 0 & 12 & 6l_e & 0 & 0 & -12 & 6l_e & 0 \\ 0 & 6l_e & (4+a_G)l_e^2 & 0 & 0 & -6l_e & (2-a_G)l_e^2 & 0 \\ -6l_e & 0 & 0 & (4+a_G)l_e^2 & 6l_e & 0 & 0 & (2-a_G)l_e^2 \\ -12 & 0 & 0 & 6l_e & 12 & 0 & 0 & 6l_e \\ 0 & -12 & -6l_e & 0 & 0 & 12 & -6l_e & 0 \\ 0 & 6l_e & (2-a_G)l_e^2 & 0 & 0 & -6l_e & (4+a_G)l_e^2 & 0 \\ -6l_e & 0 & 0 & (2-a_G)l_e^2 & 6l_e & 0 & 0 & (4+a_G)l_e^2 \end{bmatrix} \quad (\text{A.0.0.6})$$

Avec :

$$a_G = \frac{12EI}{G_c S_r l_e^2} \quad G_c = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (\text{A.0.0.7})$$

où ν représente le coefficient de poisson et $S_r \approx S$ la section réduite.

Vecteur élémentaire du poids propre de l'arbre :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_w^T \mathbf{f}_s &= \rho_A g S \int_0^{L_A} \mathbf{x}_w^T \mathbf{N}_w^T dy \\ \mathbf{x}_u^T \mathbf{f}_s &= 0 \\ \mathbf{f}_s e^T &= \left[0 \quad \frac{l_e}{2} \quad \frac{l_e^2}{12} \quad 0 \quad 0 \quad \frac{l_e}{2} \quad -\frac{l_e^2}{12} \quad 0 \right] \end{aligned} \quad (\text{A.0.0.8})$$

Matrices nodales des disques Pour finir d'assembler les matrices de la structure, on doit ajouter les matrices associées aux disques aux noeuds correspondants. Pour un noeud, constitué des degrés de libertés $\mathbf{x} = [u, w, \theta, \psi]$, on a :

$$\mathbb{M}_{De} = \begin{bmatrix} M_d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{Dx} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{Dx} \end{bmatrix} \quad (\text{A.0.0.9})$$

$$\mathbb{G}_{De} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I_{Dy} \\ 0 & 0 & I_{Dy} & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.0.0.10})$$

Vecteur nodal d'excitation périodique dû au balourd :

$$\mathbf{f}_b e = -m_B d \Omega^2 \begin{bmatrix} \sin(\Omega t) \\ \cos(\Omega t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.0.0.11})$$

Annexe B

Analyse linéaire d'un rotor sur un palier rigide

B.1 Déformée statique

Lorsque l'on n'impose aucune excitation dynamique ni aucune force non linéaire, on obtient l'équilibre statique linéaire à partir de la résolution du système :

$$\mathbb{K}\mathbf{x}_{stat} = \mathbf{f}_{stat} \quad (\text{B.1.0.1})$$

En inversant ce système on trouve classiquement la déformée statique de la poutre, comme illustré figure B.1 pour le cas particulier de poutre encastree-libre.

La figure B.1 compare la solution de l'algorithme éléments finis à la solution analytique connue pour décrire la flèche d'une poutre encastree-libre désignée par w dans l'équation (B.1.0.2).

$$w(y) = \frac{\rho AgS}{6EI} \left(\frac{y}{4} - y^3 L_A + \frac{3}{2} y^2 L_A^2 \right) \quad (\text{B.1.0.2})$$

B.2 Modes de poutre

Autour de la position d'équilibre, on peut alors s'intéresser aux modes propres de vibration de la poutre. On cherche les solutions sous la forme $\mathbf{x} = \mathbf{x}_{stat} + \mathbf{x}_0 e^{\lambda t}$:

$$\left[\lambda^2 \mathbb{M} + \lambda(\mathbb{K}_b + \Omega \mathbb{G}) + (\mathbb{K} + \Omega \mathbb{K}_c) \right] \mathbf{x}_0 = 0 \quad (\text{B.2.0.3})$$

Ce système peut se mettre sous la forme d'un problème aux valeurs propres :

$$\mathbb{M}_0 \begin{bmatrix} \lambda \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{x}_0 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \lambda \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{x}_0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.2.0.4})$$

Avec :

$$\mathbb{M}_0 = - \begin{bmatrix} \mathbb{M} & 0 \\ 0 & -\mathbb{K} + \Omega \mathbb{K}_c \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbb{K}_b + \Omega \mathbb{G} & \mathbb{K} + \Omega \mathbb{K}_c \\ \mathbb{K} - \Omega \mathbb{K}_c & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.2.0.5})$$

La figure B.2 présente les déformées modales du cas précédent sans rotation. Seuls les modes dans le plan $z = 0$ sont illustrés, mais le calcul donne les mêmes modes dans le plan $x = 0$. La figure B.3 illustre les déformées modales avec rotation de la poutre sur elle-même. Sur cette figure, seuls les modes de précession directe sont présentés, mais le

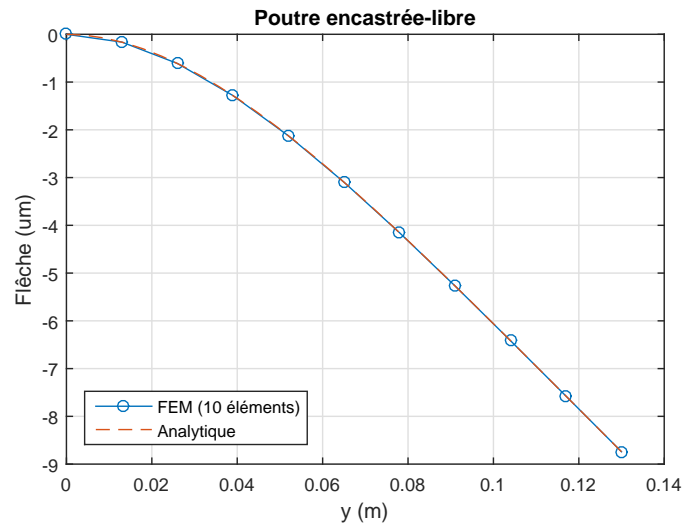


FIGURE B.1 – Déformée statique en microns d'un cylindre en acier de longueur 13 cm et de rayon 2,5 mm, encastré en 0 et soumis à son propre poids.

calcul donne les mêmes déformées à des fréquences un peu inférieures pour le modes de précession inverse (voir diagramme de Campbell dans la partie suivante). Les fréquences propres seront validées par comparaison aux solutions analytiques dans la partie C.3.1.

B.3 Diagramme de Campbell

Une façon de présenter la dépendance des fréquences de vibration des modes de la poutre en fonction de la vitesse de rotation Ω est le diagramme de Campbell. Ce type de diagramme permet de constater quel mode est excité par la fréquence synchrone (figure B.4). On remarque que les modes obtenus à vitesse de rotation nulle (présentés figure B.2) se séparent en mode de précession directe et mode de précession inverse avec la vitesse de rotation. Cela s'observe surtout sur la figure avec zoom (figure B.4 (b)). Un zoom sur les fréquences est nécessaire pour mettre en évidence la séparation des modes de précessions directe et inverse, le rotor choisi ayant une masse très faible. La séparation des fréquences propres est plus flagrante lorsque l'on ajoute de la masse au rotor. Par ailleurs, sans amortissement structural, les modes de la structure ont pour valeur propre des imaginaires purs (pas d'amplification ni d'amortissement, car la partie réelle des valeurs propres est nulle).

En ajoutant un amortissement structural $\eta = 2 \cdot 10^{-7}$, on remarque que les modes de précession directe de la structure deviennent instables lorsque la vitesse de rotation devient supérieure à leur fréquence propre (figures B.5).

B.4 Réponse forcée

Pour un balourd donné, on peut calculer l'amplitude de la réponse en déplacement de la structure. Par ce même calcul, on est capable de reconstituer l'orbite d'un noeud de la structure autour de sa position d'équilibre. Pour cela, on cherche une solution de la forme $\mathbf{x} = \mathbf{x}_{stat} + \mathbf{x}_0 e^{\lambda t}$:

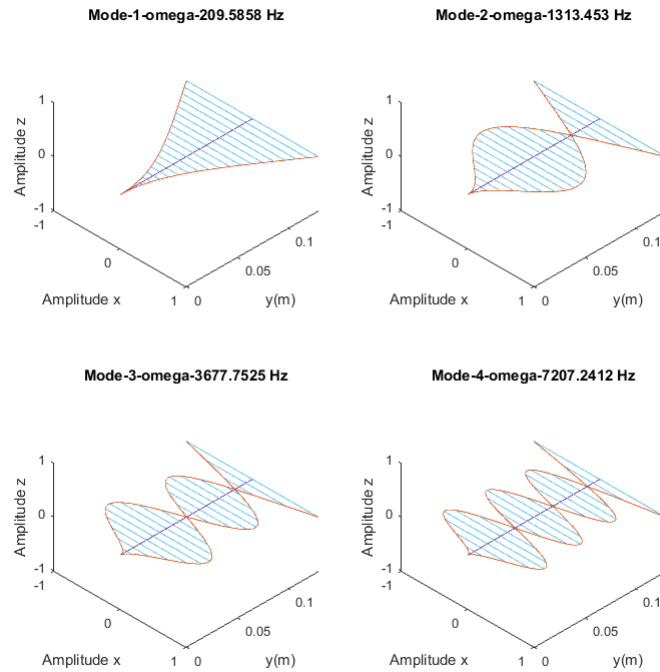


FIGURE B.2 – Déformée modale d'un cylindre en acier de 13 cm et de rayon 2,5 mm, encastré en 0 (modes dans le plan $z = 0$)

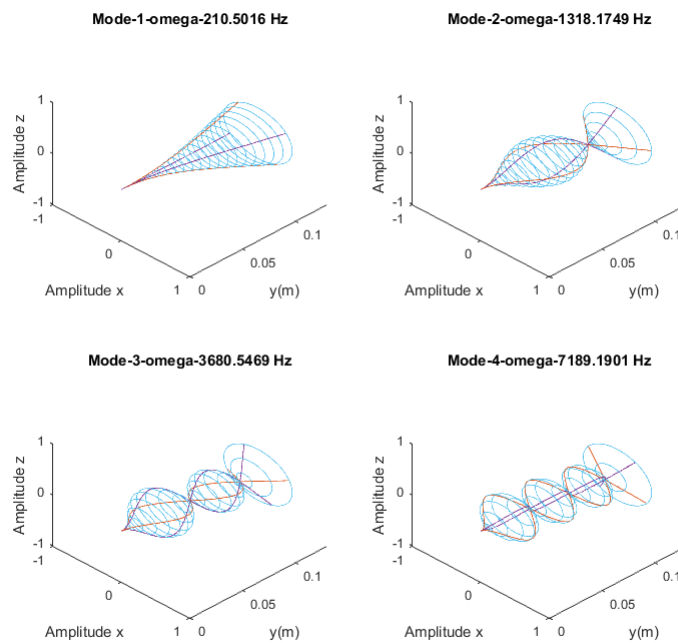
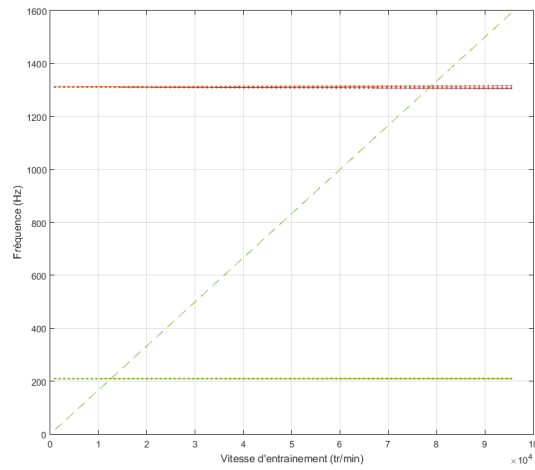
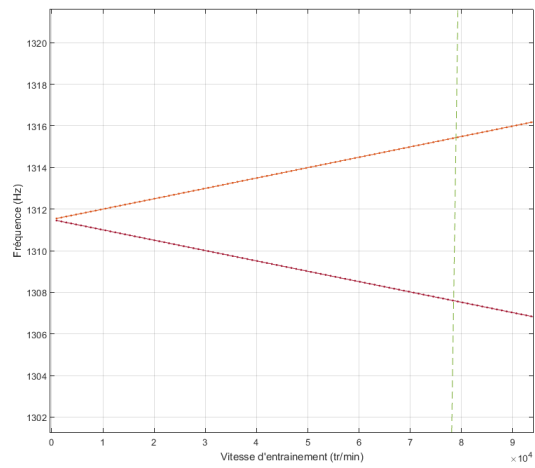


FIGURE B.3 – Déformée statique en microns d'un cylindre en acier de 13 cm et de rayon 2,5 mm, encastré en 0, en rotation autour de son axe principal (modes de précession directe).

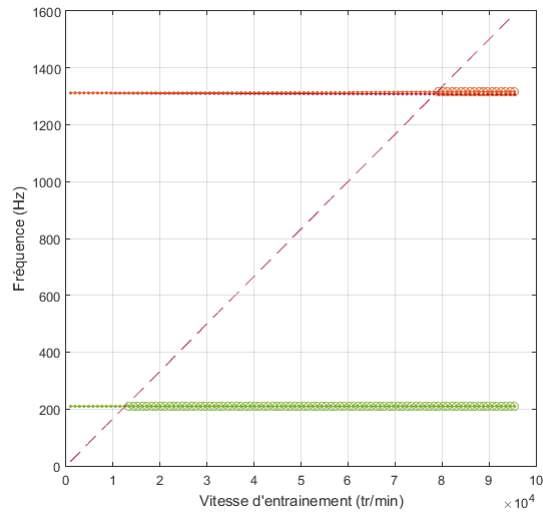


(a) Modes de flexion 1 et 2

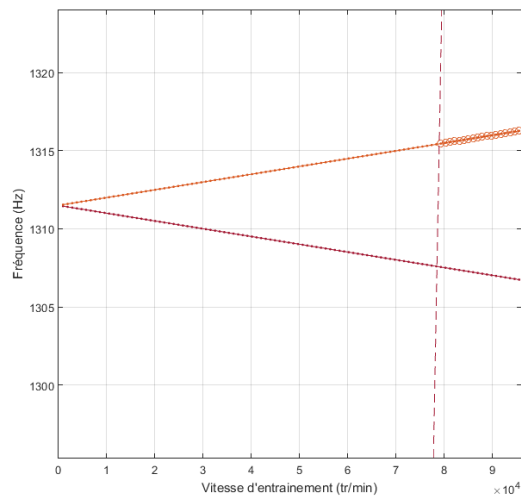


(b) Zoom sur le deuxième mode de flexion

FIGURE B.4 – Diagramme de Campbell d'un arbre de 13 cm et de rayon 2,5 mm encastré à une extrémité, sans amortissement structural (fréquence synchrone en pointillés)



(a) Modes de flexion 1 et 2



(b) Zoom sur le deuxième mode de flexion

FIGURE B.5 – Diagramme de Campbell d'un arbre de 13 cm et de rayon 2,5 mm encastré à une extrémité, avec amortissement structural, mode instables (partie réelle positive) entouré par un 'o' (fréquence synchrone en pointillés).

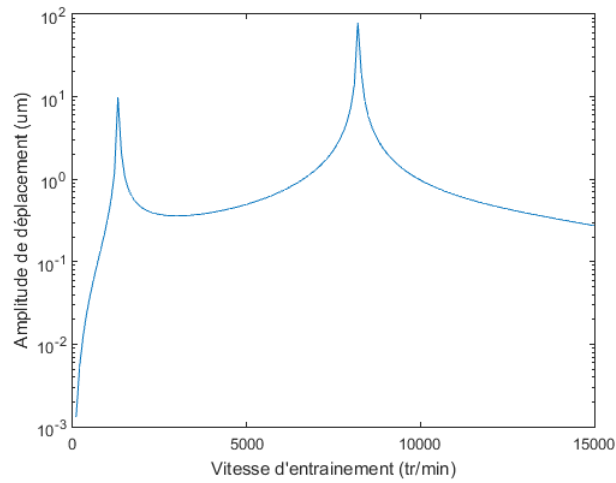


FIGURE B.6 – Réponse à un balourd de $7.5 \times 10^{-3} g.mm$ placé à une extrémité d'un arbre de 13 cm et de rayon $2.5mm$ encastré à l'autre extrémité : amplitude du noeud à l'extrémité libre en micromètres.

$$(-\lambda^2 \mathbb{M} + i\lambda[\mathbb{K}_b + \Omega \mathbb{G}] + [\mathbb{K} + \Omega \mathbb{K}_c]) \mathbf{x}_0 = \Omega^2 \mathbf{f}_b \quad (\text{B.4.0.6})$$

En inversant ce système, on obtient par exemple la courbe de la figure B.6. Sur cette courbe, on présente l'amplitude de déplacement d'une extrémité de l'arbre en réponse à un balourd placé à l'extrémité libre de l'arbre.

Annexe C

Description du programme de résolution

Le programme de résolution a été réalisé à l'aide du logiciel MATLAB®. Afin de faciliter sa lecture et sa compréhension, tout en le rendant facilement modifiable et évolutif, il a été conçu par programmation orientée objet. Cette structure permet de modifier facilement le nombre d'arbre ou de palier, tout en modifiant ou ajoutant aisément des modèles (cavitation, texturation, solide élastique ou rigide). Afin d'assurer la fiabilité du programme, un certain nombre de tests ont été mis en place, basés sur la comparaison des résultats par rapport à la littérature, et vérifiables à tout moment de l'évolution du code. Les routines sont alors validées dans des cas tests directement intégrés au programme. Par ailleurs, la plupart des figures des parties précédentes de ce document sont issues de ces codes de validation.

C.1 Structure du programme

C.1.1 Diagramme des classes

Le programme est organisé autour de trois classes principales :

- la classe *Domaine*, qui contient les routines qui vont permettre de modéliser les différents domaines fluide ou structure, avec différentes hypothèses, à travers ses différentes sous-classes
- la classe *Control*, qui va permettre à l'utilisateur de construire les matrices de son modèle, puis d'en exploiter les résultats après résolution.
- la classe *Resolution*, qui va permettre de résoudre différents systèmes à partir des matrices construites par la classe *Control*, et procéder aux recherches de solutions statiques, modales, transitoires, ou périodiques par méthode de tir ou HBM.

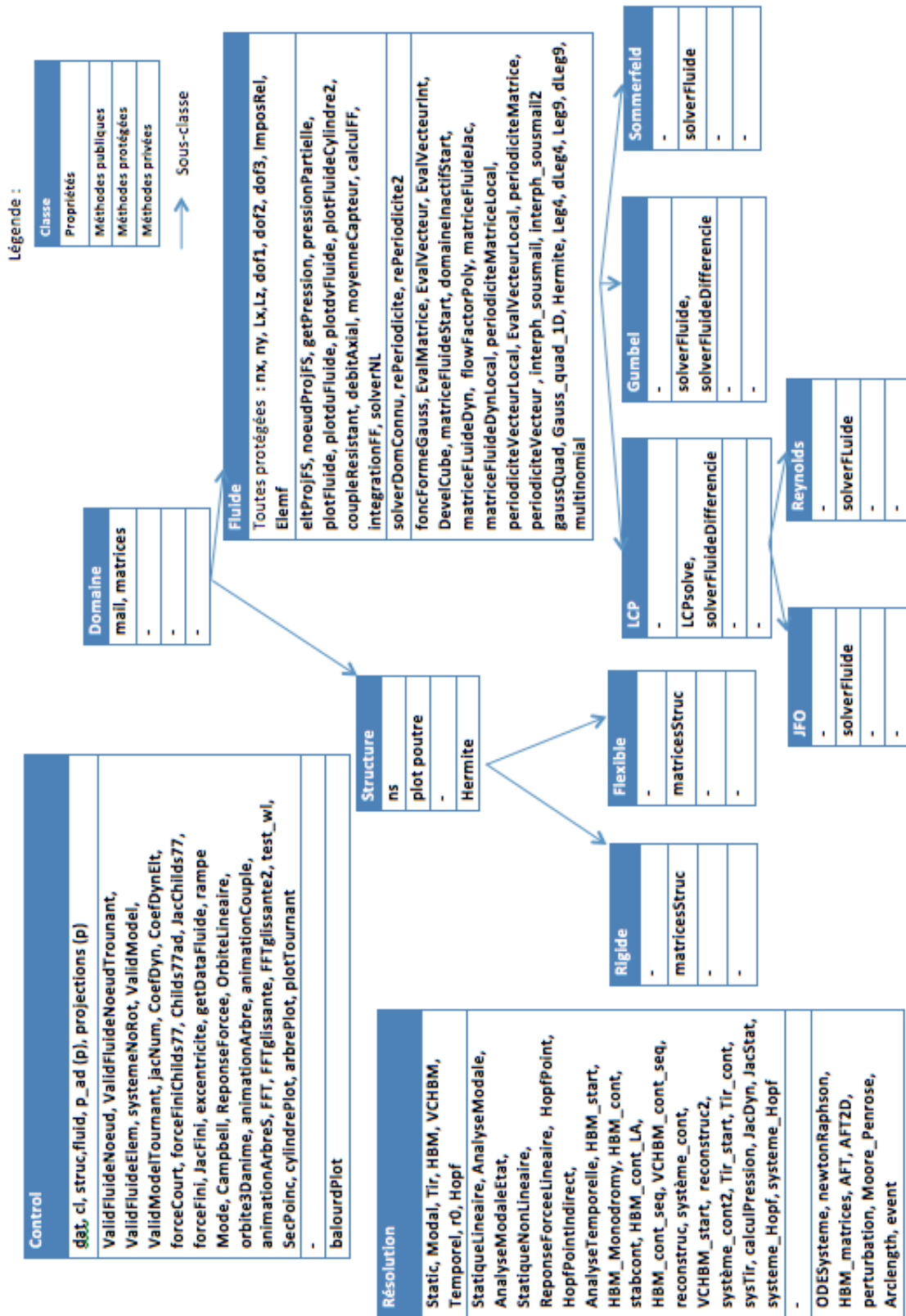


FIGURE C.1 – Diagramme des classes du programme

On remarque aisément sur la figure C.1 que les classes *Control* et *Fluide* sont les plus importantes. Pour la classe *Fluide*, cela est dû au fait que de nombreuses variantes sont disponibles au niveau du modèle de fluide, à savoir 4 modèles différents de cavitation, la projection du fluide sur un élément ou sur un nœud, ou encore la prise en compte ou non de la texturation de surface.

C.1.2 Classe *Control*

La classe *Control* est la première classe à être appelée au début du programme. Elle va charger les données du fichier “donneesInitiales.m” qui contient toutes les informations relatives au modèle comme le nombre de paliers, les caractéristiques de la texturation, le modèle de cavitation, les données géométriques et physiques, ou même les informations relatives à l’intégration temporelle. Une fois chargées, ces données sont sauvegardées et accessibles dans la structure “control.donnees”. Les informations de force extérieure appliquée, de position du palier, de mode de projection ou même des degrés de liberté structure associés à la projection des pressions palier sont sauvegardées et accessibles dans la structure “control.cl”. On y trouve aussi les conditions aux limites en pression pour les paliers.

Une fois le fichier “donneesInitiales.m” chargé, la classe *Control* va créer les domaines, les maillages, les degrés de libertés et les matrices élémentaires des domaines par l’appel de leur constructeur de classe. Ces actions sont détaillées dans les fichiers des classes concernées. Une fois les matrices de base calculées et les maillages construits, ils seront stockés dans les structures control.fluid.mail, control.fluid.matrices, control.struc.mail, control.struc.matrices.

Ensuite, la classe *Control* possède les fonctions “système” c’est-à-dire les fonctions qui vont être appelées par les fonctions de résolution pour construire les systèmes d’équations à résoudre. Elles font notamment appel aux fonctions privées, par exemple pour le calcul des forces non-linéaires dues aux palier, mais aussi pour les autres forces, comme le balourd ou le chargement statique extérieur.

Dans la dernière partie du fichier, on retrouve un certain nombre de méthodes publiques, qui seront, elles, destinées à être appelées par l’utilisateur (ou une future classe de vue pour une interface graphique) afin d’exploiter les résultats de la classe *Resolution*.

Il faut donc bien remarquer que la classe *Control* est la colonne vertébrale du programme, car elle initialise les domaines, construit les systèmes, et permet d’exploiter les résultats.

C.1.3 Classe *Fluide*

La classe *Fluide* est appelée pour chaque palier pour composer les forces qui vont s’appliquer sur la structure. Dans la classe *Fluide*, toutes les grandeurs sont adimensionnées. Les classes privées contiennent toutes les informations de fonctions de forme, et d’intégration par points de Gauss pour le calcul des matrices élémentaires. Dans certains cas, on peut aussi calculer des matrices invariantes à assembler en fonction de l’excentricité de la structure. Cela n’est pas valable avec texturation, mais accélère considérablement le calcul dans le cas lisse. On intègre en fait les fonctions de la méthode “DevelCub” qui sont issues du développement de la hauteur de film élevée au cube, afin d’extraire une somme de matrices indépendantes de la vitesse et de la position de l’arbre. Une fois ces fonctions pré-calculées, on peut donc les multiplier par la valeur du degré de liberté structure qui leur correspond et assembler le tout sans avoir à ré-assembler toutes les matrices élémentaires.

On peut aussi remarquer que les matrices de projection de la pression pour chaque palier sont calculées à l'initialisation du programme et sont indépendantes des grandeurs du problème.

C.1.4 Classe *Resolution*

La classe *Resolution* est appelée indépendamment des autres classes. On choisit une fonction de résolution, et on lui soumet une fonction système contenant les matrices nécessaires à la résolution. Par exemple, la méthode AnalyseModale nécessite seulement une matrice de masse et une matrice de raideur et donne les fréquences propres et les vecteurs propres correspondants à la résolution du problème aux valeurs propres. On stocke alors les résultats de chaque méthode employée dans la propriété publique correspondante (Xstat, Modal, tir, HBM, Temporel).

C.2 Paramètres d'entrée du modèle : le fichier `DonnéesInitiales.m`

On retrouve les paramètres du modèle dans le fichier "`DonnéesInitiales.m`" :

```
%% PALIER
donnees.nx=15;donnees.ny=5; % nb ddl fluide

donnees.palier.mu = 0.006; % viscosité dynamique de l'huile (Pa.s)
donnees.palier.p_cav=-.1e6; % pression de cavitation (Pa)
donnees.palier.C=.5e-5; % jeu radial (m)
donnees.palier.L=0.008; % longueur de palier (m)
donnees.palier.solver='Reynolds'; % algorithme de resolution du domaine fluide
donnees.palier.alignement=[0. 0. 0. 0.]; % decalage du 2e palier [noeud1X noeud1Z noeud2X noeud2Z]
donnees.palier.textPoly='Manutech_6.mat' % facteurs polynomiaux de la texturation voulue

%% ROTOR
donnees.arbre.type='Flexible';
cl.projection='Element';
cl.ddls_fx=[];

donnees.ns=5; % valable uniquement si type = 'Flexible' sinon ns=1 (1 element) ou ns = 0 (1 noeud)
nb_noeud=donnees.ns+1;
cl.noeuds_F=[2,3,nb_noeud-2,nb_noeud-1]; % force imposée sur bord de paliers
cl.ddls_F=4*(cl.noeuds_F)-2;

%Arbre
donnees.arbre.E=2e11; % module d'Young (Pa)
donnees.arbre.nu=0.3; % coefficient de poisson
donnees.arbre.rho=7800; % masse volumique de l'arbre (kg/m3)
donnees.arbre.L=0.134;%0.08; %longueur de l'arbre (m)
donnees.arbre.R=0.0025; %rayon de l'arbre (m)
donnees.arbre.W=-0; % Chargement supplémentaire(N)
donnees.arbre.eta=2e-7; %coefficient de dissipation visqueuse
cl.F=zeros(4*nb_noeud,1);
cl.F(cl.ddls_F,1)=donnees.arbre.W*ones(size(cl.ddls_F)); %Force imposée
cl.noeud_disque=[3,nb_noeud-2];
cl.positionsPalier=[.022,.112];%[donnees.arbre.L/2]; %vecteur position du milieu de chaque palier
donnees.ndomainefluid=size(cl.positionsPalier,2);
donnees.arbre.Acc=-diag([8000 8000 0.3*pi/180 0.3*pi/180]); % donnees pour l'accouplement (N/m et N/rad)
donnees.arbre.sens_rotation = 1 ;
donnees.arbre.deflexion = 0;
donnees.arbre.nR = 0;

% Disque
donnees.disque.rho=2700; % masse du disque (kg)
donnees.disque.R=3*donnees.arbre.R; % rayon externe du disque (m)
donnees.disque.h=0.005; % epaisseur de disque (m)

% Balourd
```

```

donnees.balourd.D=3*donnees.arbre.R; % Distance de décentrement du balourd (m)
donnees.balourd.M=2e-6/donnees.balourd.D; % masse de balourd (kg)
donnees.balourd.alpha=0; % angle de position du balourd à t=0 (rad)

```

C.3 Tests de validation

C.3.1 Modes de vibration de l'arbre

Le premier test de validation consiste à valider la méthode des éléments finis de la structure. On compare les modes de vibration de poutre calculés numériquement aux solutions analytiques classiques (tableau C.1). On obtient les fréquences propres (en Hertz) par l'équation suivante :

$$f_n = \frac{\lambda_n^2}{2\pi} \sqrt{\frac{EI}{\rho SL^4}} \quad (\text{C.3.1.1})$$

Libre-libre	$\lambda_1 = 0$	$\lambda_2 = 0$	$\lambda_3 = 4.73004$	$\lambda_4 = 7.85320$	$\lambda_{k \geq 5} = (2k - 3)\frac{\pi}{2}$
Encastrée-libre	$\lambda_1 = 1.87510$	$\lambda_2 = 4.69409$	$\lambda_3 = 7.85473$	$\lambda_{k \geq 4} = (2k - 1)\frac{\pi}{2}$	
Encastrée-encastrée	$\lambda_1 = 4.73004$		$\lambda_2 = 7.85320$	$\lambda_{k \geq 3} = (2k + 1)\frac{\pi}{2}$	
Appuyée-encastrée	$\lambda_1 = 3.9266$		$\lambda_2 = 7.0686$	$\lambda_{k \geq 3} = \frac{\pi}{4} + k\pi$	
Appuyée-appuyée	$\lambda_{k \geq 1} = k\pi$				
Glissante-libre	$\lambda_1 = 0$	$\lambda_2 = 2.3650$	$\lambda_3 = 5.4978$	$\lambda_{k \geq 4} = -\frac{\pi}{4} + (k - 1)\pi$	
Glissante-encastrée	$\lambda_1 = 2.3650$		$\lambda_2 = 5.4978$	$\lambda_{k \geq 3} = -\frac{\pi}{4} + k\pi$	
Glissante-Appuyée	$\lambda_{k \geq 1} = (2k - 1)\frac{\pi}{2}$				
Glissante-Glissante	$\lambda_1 = 0$		$\lambda_{k \geq 2} = (k - 1)\pi$		

TABLE C.1 – Valeurs analytiques des modes

	f_1 (Hz) / Err.		f_2 (Hz) / Err.		f_3 (Hz) / Err.		f_4 (Hz) / Err.	
Libre-libre	0	-	0	-	1333.6	0.0002 %	3676.2	0.002 %
Encastrée-libre	209.6	4.10^{-4} %	1314	1.10^{-4} %	3678	2.10^{-3} %	7207	5.10^{-3} %
Encastrée-Encastrée	1334	6.10^{-5} %	3676	1.10^{-3} %	7207	6.10^{-6} %	11913	0.02 %
Appuyée-Encastrée	919	1.10^{-4} %	2948	3.10^{-4} %	6214	4.10^{-3} %	10626	0.01 %
Appuyée-Appuyée	1334	6.10^{-5} %	3676	1.10^{-3} %	7207	6.10^{-3} %	11913	0.02 %
Glissante-libre	0	-	333	2.10^{-3} %	1802	4.10^{-4} %	4449	2.10^{-3} %
Glissante-encastrée	333	2.10^{-3} %	1802	3.10^{-4} %	4450	2.10^{-3} %	8273	8.10^{-3} %
Glissante-Appuyée	147	7.10^{-6} %	1324	1.10^{-3} %	3677	6.10^{-3} %	7207	0.02 %
Glissante-Glissante	0	-	588	1.10^{-3} %	2353	5.10^{-4} %	5295	3.10^{-3} %

TABLE C.2 – Comparaison des modes propres de la structure à partir du programme avec 20 éléments de poutre.

La validation de la structure peut aussi être effectuée par comparaison avec le calcul de la déformée statique (partie B.1, figure B.1).

C.3.2 Comparaison des grandeurs statiques de palier lubrifié

Afin de valider le calcul de pression hydrodynamique dans un palier seul (sans arbre flexible), on dispose de données issues du livre de Bonneau *et al.* ([19]) dans une simulation de référence (tableau C.3). On compare alors, en fonctionnement stationnaire du palier à

excentricité imposée, la pression max, la charge totale, le nombre de Sommerfeld, le couple, l'angle de calage, et le débit entrant et sortant par rapport au tableau de ([19]) p. 136 (tableaux C.4, C.5, C.6). Ces tableaux permettent de valider les modèles de cavitation. En revanche, notre calcul du débit ne correspond pas au calcul de Bonneau *et al.*. Nous parvenons au bon ordre de grandeur, et constatons bien que seul le modèle JFO conserve le débit, mais une erreur persiste. Ce calcul est à améliorer par la suite.

Rayon du palier	20	mm
Largeur du palier	20	mm
Jeu radial	25	μ m
Fréquence de rotation	3000	tr/min
Pression ambiante	0	MPa
Viscosité dynamique	0.01	Pa.s

TABLE C.3 – Données de référence pour les conditions de simulation

Méthode	Ref. Gumbel	Alg. Gumbel	Err.(%)
Pression (MPa)	2.164	2.163	0.04
Charge (N)	688.8	690.5	0.2
Nombre de Sommerfeld	0.3717	0.3707	0.3
Couple	14.55 24.58	15.26 24.61	4.6 0.1
Angle de calage (°)	58.3	58.4	0.2
Débit entrant (l/min)	0.0702	0.122	-
Débit sortant (l/min)	0.0946	0.123	-

TABLE C.4 – Comparaison entre algorithme et référence avec l'hypothèse de cavitation de Gumbel

Méthode	Ref. Reynolds	Alg. Reynolds	Err.(%)
Pression (MPa)	2.225	2.224	0.04
Charge (N)	719.4	721.3	0.3
Nombre de Sommerfeld	0.3559	0.3549	0.3
Couple	18.14 24.59	18.40 24.61	1.4 0.08
Angle de calage (°)	54.9	54.84	0.1
Débit entrant (l/min)	0.0374	0.0849	-
Débit sortant (l/min)	0.0962	0.114	-

TABLE C.5 – Comparaison entre algorithme et référence avec l'hypothèse de cavitation de Reynolds

Méthode	Ref. JFO - EA	Alg. JFO - EA	Err.(%)
Pression (MPa)	2.210	2.2100	0
Charge (N)	699.5	701.1	0.2
Nombre de Sommerfeld	0.3660	0.3652	0.2
Couple	21.12	22.1	4
Angle de calage (°)	46.3	46.28	0.4
Débit entrant (l/min)	0.0598	0.0892	-
Débit sortant (l/min)	0.0598	0.0892	-

TABLE C.6 – Comparaison entre algorithme et référence avec l'hypothèse de cavitation JFO

L'expression du nombre de Sommerfeld est la suivante :

$$S_o = \frac{2\mu R^3 \Omega L_p}{F_0 C^2} \quad (\text{C.3.2.1})$$

Afin de comparer l'angle de calage de Bonneau *et al.* avec le paramétrage de la figure 2.4, on utilise la formule suivante :

$$\psi = \phi + \arctan\left(\frac{F_v}{F_w}\right) \quad (\text{C.3.2.2})$$

Pour calculer le couple résistant, on part de la contrainte de cisaillement au sein du lubrifiant avec les notations de la figure 2.1 ([19]) :

$$\begin{cases} \tau_{xy} = \mu \frac{\partial u}{\partial y} \\ \tau_{zy} = \mu \frac{\partial w}{\partial y} \end{cases} \quad (\text{C.3.2.3})$$

Par intégration, on a :

$$M_{O_{z_c}}^a = -R \iint_{\Gamma} \tau_{xy}|_{y=h} dx dz \quad (\text{C.3.2.4})$$

D'où le couple résistant calculé sur l'arbre avec nos notations :

$$M_{O_{z_c}}^a = -R \iint_{\Gamma} \left[\frac{h}{2} \frac{\partial p}{\partial x_{\theta}} + \frac{r}{h} \frac{\mu R \Omega}{h} \right] dx dy \quad (\text{C.3.2.5})$$

$$C_f = M_{O_{z_c}}^a = -R \iint_{\Gamma} \left[\frac{h}{2R} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{r}{h} \frac{\mu R \Omega}{h} \right] d\theta dy \quad (\text{C.3.2.6})$$

Le couple est adimensionné selon la formule suivante :

$$\bar{C}_f = \frac{C_f}{2\mu L_p \Omega \frac{R^3}{C_r}} \quad (\text{C.3.2.7})$$

Enfin, l'expression du calcul de débit axial sortant à l'une des extrémités est la suivante :

$$Q_v = \int_0^{2\pi} -\frac{\rho h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial y} R d\theta \quad (\text{C.3.2.8})$$

En faisant intervenir les variables adimensionnées :

$$Q_v = \frac{\rho C_r \Omega R^3}{12L_p} \int_0^{2\pi} \bar{h}^3 \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} d\theta \quad (\text{C.3.2.9})$$

On peut séparer ensuite la partie de la frontière sur laquelle le gradient de pression est négatif et la partie pour laquelle le gradient est positif pour avoir une valeur de débit entrant et sortant. Le calcul de Bonneau *et al.* ([19] p171) est plus complexe car il considère une autre façon de calculer le débit dans les éléments possédant au moins un nœud inactif. Cela explique les écarts dans le calcul de débit du tableau C.6.

C.3.3 Comparaison des coefficients dynamiques de palier

Les coefficients dynamiques de palier représentent une linéarisation des forces de palier par rapport à la position du centre de l'arbre (raideur) ou par rapport à la vitesse du centre de l'arbre (amortissement), autour d'une position d'équilibre statique. On peut calculer ces coefficients de deux manières. La première consiste à calculer la pression en perturbant la position d'équilibre statique selon chaque variable selon laquelle on veut obtenir un coefficient dynamique (méthode de différentiation numérique). La seconde consiste à dériver directement l'équation de Reynolds et d'intégrer la dérivée partielle de la pression calculée dans le domaine de film complet (méthode de perturbation).

Méthode de différentiation numérique

Pour obtenir le couple de force appliqué par l'huile sur l'arbre on intègre la pression selon les relations :

$$\begin{aligned} F_u &= \int_{\Gamma} p(u, w, \dot{u}, \dot{w}) \cos(\theta) R d\theta dy \\ F_w &= \int_{\Gamma} p(u, w, \dot{u}, \dot{w}) \sin(\theta) R d\theta dy \end{aligned} \quad (\text{C.3.3.1})$$

Donc afin de calculer les coefficients de palier on peut résoudre Reynolds pour chaque position perturbée par rapport à l'équilibre statique ce qui donne :

$$\begin{aligned} K_{uu} &= \frac{F_u(u_0 + \epsilon, w_0, 0, 0) - F_u(u_0, w_0, 0, 0)}{\epsilon} \\ K_{uw} &= \frac{F_u(u_0, w_0 + \epsilon, 0, 0) - F_u(u_0, w_0, 0, 0)}{\epsilon} \\ K_{wu} &= \frac{F_w(u_0 + \epsilon, w_0, 0, 0) - F_w(u_0, w_0, 0, 0)}{\epsilon} \\ K_{ww} &= \frac{F_w(u_0, w_0 + \epsilon, 0, 0) - F_w(u_0, w_0, 0, 0)}{\epsilon} \end{aligned} \quad (\text{C.3.3.2})$$

De même pour les coefficients d'amortissement :

$$\begin{aligned} C_{uu} &= \frac{F_u(u_0, w_0, \epsilon, 0) - F_u(u_0, w_0, 0, 0)}{\epsilon} \\ C_{uw} &= \frac{F_u(u_0, w_0, 0, \epsilon) - F_u(u_0, w_0, 0, 0)}{\epsilon} \\ C_{wu} &= \frac{F_w(u_0, w_0, \epsilon, 0) - F_w(u_0, w_0, 0, 0)}{\epsilon} \\ C_{ww} &= \frac{F_w(u_0, w_0, 0, \epsilon) - F_w(u_0, w_0, 0, 0)}{\epsilon} \end{aligned} \quad (\text{C.3.3.3})$$

Cela demande donc de résoudre autant de fois l'équation de Reynolds que de coefficients. En plus, on doit recalculer la zone de cavitation pour chaque résolution. Cette méthode est lourde en temps de calcul. De plus, le choix de la perturbation ϵ peut être difficile dans certains cas.

Notons que pour retrouver les coefficients dynamiques à partir des coefficients adimensionnés on utilise les relations :

$$K_{ij} = \frac{F_0}{C_r} K_{ijad} \quad C_{ij} = \frac{F_0}{C_r \Omega} C_{ijad} \quad (\text{C.3.3.4})$$

Avec $F_0 = \sqrt{F_u(u_0, w_0, 0, 0)^2 + F_w(u_0, w_0, 0, 0)^2}$

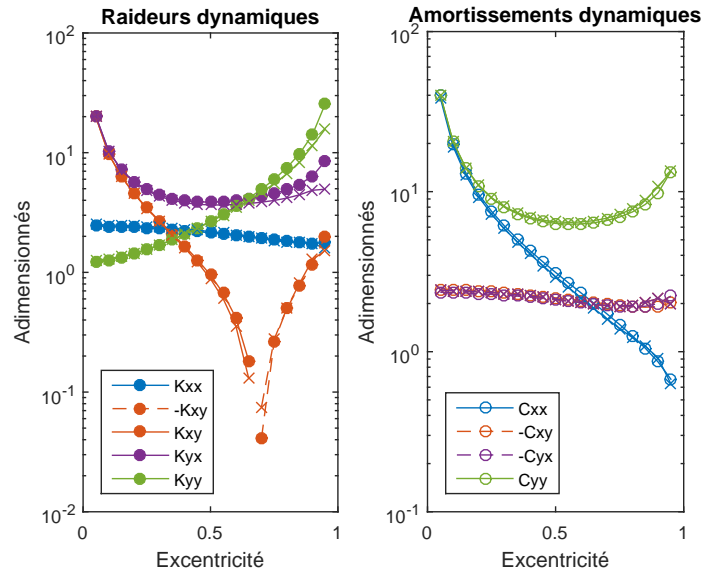


FIGURE C.2 – Comparaison de coefficients dynamiques calculés par méthode de différenciation numérique entre impédance de palier lisse fini (o) et calcul par l’algorithme de palier lisse avec cavitation de Reynolds et $p_{cav} = 0$ (équivalent à π -film) avec un maillage 8x2 éléments (x).

Méthode de perturbation

On écrit la pression adimensionnée \bar{p} sous la forme :

$$\bar{p} = p_0 + p_u \epsilon_u + p_w \epsilon_w + p_{\dot{u}} \epsilon_{\dot{u}} + p_{\dot{w}} \epsilon_{\dot{w}} \quad (\text{C.3.3.5})$$

On note :

$$h = C + (u_0 + \epsilon_u) \cos(\theta) + (w_0 + \epsilon_w) \sin(\theta) \quad (\text{C.3.3.6})$$

Et notons la position d’équilibre stationnaire (u_0, w_0) .

En injectant cette expression dans l’équation de Reynolds pour le domaine de film complet, on obtient 4 nouvelles équations en plus de Reynolds stationnaire [99, 158] :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{H^3}{6} \frac{\partial p_0}{\partial \theta} \right) + \frac{R^2}{L_p^2} \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \left(\frac{H^3}{6} \frac{\partial p_0}{\partial \bar{y}} \right) &= u_0 \sin(\theta) + w_0 \cos(\theta) \\ \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{H^3}{6} \frac{\partial p_u}{\partial \theta} \right) + \frac{R^2}{L_p^2} \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \left(\frac{H^3}{6} \frac{\partial p_u}{\partial \bar{y}} \right) &= \sin(\theta) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{3 \cos(\theta) H^2}{6} \frac{\partial p_0}{\partial \theta} \right) + \frac{R^2}{L_p^2} \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \left(\frac{3 \cos(\theta) H^2}{6} \frac{\partial p_0}{\partial \bar{y}} \right) \\ \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{H^3}{6} \frac{\partial p_w}{\partial \theta} \right) + \frac{R^2}{L_p^2} \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \left(\frac{H^3}{6} \frac{\partial p_w}{\partial \bar{y}} \right) &= \cos(\theta) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{3 \sin(\theta) H^2}{6} \frac{\partial p_0}{\partial \theta} \right) + \frac{R^2}{L_p^2} \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \left(\frac{3 \sin(\theta) H^2}{6} \frac{\partial p_0}{\partial \bar{y}} \right) \\ \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{H^3}{6} \frac{\partial p_{\dot{u}}}{\partial \theta} \right) + \frac{R^2}{L_p^2} \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \left(\frac{H^3}{6} \frac{\partial p_{\dot{u}}}{\partial \bar{y}} \right) &= \frac{2}{\Omega} \cos(\theta) \\ \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{H^3}{6} \frac{\partial p_{\dot{w}}}{\partial \theta} \right) + \frac{R^2}{L_p^2} \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \left(\frac{H^3}{6} \frac{\partial p_{\dot{w}}}{\partial \bar{y}} \right) &= \frac{2}{\Omega} \sin(\theta) \end{aligned} \quad (\text{C.3.3.7})$$

En fait, avec les matrices de la méthode des éléments finis, les termes de droite de l’équation en p_u et de l’équation en p_w peuvent être calculés dès l’initialisation du programme

[158]. En effet en notation matricielle on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{H}\mathbf{p}_0 &= \mathbf{f}_1 \\
\mathbb{H}\mathbf{p}_u &= \mathbf{f}_3 - \mathbb{H}_1\mathbf{p}_0 \\
\mathbb{H}\mathbf{p}_w &= \mathbf{f}_4 - \mathbb{H}_2\mathbf{p}_0 \\
\mathbb{H}\mathbf{p}_{\dot{u}} &= \frac{2}{\Omega}\mathbf{f}_4 \\
\mathbb{H}\mathbf{p}_{\dot{w}} &= \frac{2}{\Omega}\mathbf{f}_3
\end{aligned} \tag{C.3.3.8}$$

Avec

$$\mathbb{H}_{1ij} = \int_{\Gamma} \left[\frac{\cos(\theta)h^2}{2} \frac{\partial W_i}{\partial \theta} \frac{\partial N_j}{\partial \theta} + \frac{\cos(\theta)h^2}{2} \frac{R^2}{L^2} \frac{\partial W_i}{\partial \bar{y}} \frac{\partial N_j}{\partial \bar{y}} \right] d\Gamma \tag{C.3.3.9}$$

$$\mathbb{H}_{2ij} = \int_{\Gamma} \left[\frac{\sin(\theta)h^2}{2} \frac{\partial W_i}{\partial \theta} \frac{\partial N_j}{\partial \theta} + \frac{\sin(\theta)h^2}{2} \frac{R^2}{L^2} \frac{\partial W_i}{\partial \bar{y}} \frac{\partial N_j}{\partial \bar{y}} \right] d\Gamma \tag{C.3.3.10}$$

En récapitulatif, on résout la première équation du système pour déterminer la zone de cavitation et le vecteur p_0 . Ensuite, on peut calculer les vecteurs p_u , p_w , $p_{\dot{u}}$, et $p_{\dot{w}}$, sur le domaine de film complet. Une justification de cette méthode aux bords de la zone de film complet est donnée dans Lund [99]. Ensuite, il suffit d'intégrer sur le domaine :

$$\begin{aligned}
K_{uu} &= \int_{\Gamma_+} p_u \cos(\theta) R d\theta dy \\
K_{uw} &= \int_{\Gamma_+} p_u \sin(\theta) R d\theta dy \\
K_{wu} &= \int_{\Gamma_+} p_w \cos(\theta) R d\theta dy \\
K_{ww} &= \int_{\Gamma_+} p_w \sin(\theta) R d\theta dy
\end{aligned} \tag{C.3.3.11}$$

De même pour les coefficients d'amortissement :

$$\begin{aligned}
C_{uu} &= \int_{\Gamma_+} p_{\dot{u}} \cos(\theta) R d\theta dy \\
C_{uw} &= \int_{\Gamma_+} p_{\dot{u}} \sin(\theta) R d\theta dy \\
C_{wu} &= \int_{\Gamma_+} p_{\dot{w}} \cos(\theta) R d\theta dy \\
C_{ww} &= \int_{\Gamma_+} p_{\dot{w}} \sin(\theta) R d\theta dy
\end{aligned} \tag{C.3.3.12}$$

Cette méthode est plus rapide que la précédente, dans la mesure où l'on n'a pas besoin de rechercher la zone de cavitation une fois qu'elle a été calculée pour l'équation stationnaire. Il suffit donc de résoudre seulement 4 systèmes d'équations linéaires, ce qui est moins coûteux que les 8 systèmes linéaires complémentaires de la méthode précédente.

Le calcul des coefficients dynamiques de palier peut alors être comparé modèle de palier lisse fini de Childs *et al.* [31]. Par ailleurs, un livre est consacré à une base de donnée de simulation et d'expérimentation pour différents types de paliers [132].

C.4 Validation de la méthode d'interpolation des facteurs de flux

C.5 Autres outils qualitatifs de validation

Les étapes précédentes permettent de valider :

- le modèle de la structure ainsi que les matrices de masse et de raideurs (figure B.1, B.2, tableau C.2)
- le modèle statique de lubrification de Reynolds et les modèles de cavitation (tableaux C.4, C.5, C.6)
- le modèle dynamique de lubrification de Reynolds (figure C.2)

D'autres outils permettent de valider qualitativement les routines du programme :

- l'analyse statique et temporelle du système correspondant à la poutre en rotation pour des conditions aux limites arbitraires (figures B.2 à B.6)
- l'analyse dynamique d'un palier seul (figures 3.6 à 3.13)
- la validation des algorithmes non-linéaires sur un problème de Duffing en une dimension (3.20) et un Nonlinear Energy Sink (NES) en deux dimensions
- le calcul des facteurs d'écoulement d'un palier lisse présentant un jeu radial différent, comparé au cas directement calculé avec le bon jeu radial

Table des figures

1.1	Les effets des vibrations dans un système mécaniques (adapté de [104]) . . .	12
1.2	Schématisation des vibrations d'un rotor flexible	13
1.3	Schémas du palier hydrodynamique	14
1.4	Banc d'essai d'étude de rotor flexible miniature pour reproduire le comportement dynamique de turbo-compresseurs [51]	18
1.5	Représentation géométrique du palier hydrodynamique (adapté de [60]) . .	19
1.6	Représentation schématique de l'axe de rotation et de la distribution de balourd d'une machine tournante	21
1.7	Phénomènes d' "oil whirl" et "oil whip" [103]	22
1.8	Débit circonfrentiel moyen dans le palier hydrodynamique [104]	23
1.9	Image interférométrique d'un motif de texturation de $5\mu m$ de profondeur et de $15\mu m$ de diamètre obtenu par laser femtoseconde sur un arbre de diamètre $5mm$	28
1.10	Cavitation à l'intérieur des cavités de texturation ([116])	29
1.11	Paliers grossièrement texturés par usinage (à gauche) et gravure à (droite) ([90])	30
1.12	Représentation de la rugosité du palier hydrodynamique : (a) longitudinale , (b) transverse (adapté de [36])	32
2.1	Repère de coordonnées (adapté de [19])	35
2.2	Paramétrage d'un palier hydrodynamique	38
2.3	Repère de coordonnées	39
2.4	Variables cinématiques utilisées dans la description du palier par impédance (adapté de [34])	42
2.5	Profil de pression avec film complet (Sommerfeld) pour un palier de 5 mm de diamètre à 20.000 tr/min	43
2.6	Photographie du film lubrifiant avec cavitation dans un palier hydrodynamique [48]. L'arbre tourne du bas vers le haut sur la photographie (front de reformation bien visible).	44
2.7	Représentation du film lubrifiant avec cavitation	44
2.8	Représentation du film lubrifiant avec cavitation Demi-Sommerfeld et $p_{cav} = p_{atm}$	46
2.9	Représentation du film lubrifiant avec cavitation de Gumbel et $p_{cav} \neq p_{atm}$	46
2.10	Représentation du remplissage partiel du film lubrifiant avec les hypothèses de cavitation JFO	48
2.11	Correspondance entre les éléments quadratiques (numérotés en noir) et les sous-éléments linéaires décentrés (numérotés en rouge)	51

2.12	Représentation des deux échelles de la méthode d'homogénéisation pour un arbre texturé	57
2.13	Facteurs d'écoulement dans le cas d'une texturation sinusoïdale transverse comparés aux facteurs obtenus avec une surface lisse et à l'interpolation polynomiale	61
2.14	Pression homogénéisée dans le cas d'une sinusoïde longitudinale d'amplitude $0.5C_r$, comparée à un palier de référence lisse, avec hypothèse de cavitation JFO, vitesse de rotation 20.000 tr/min et excentricité de $0.4 C_r$	61
2.15	Schéma représentant le rapport entre épaisseur de film locale et globale dans le cas d'un créneau	62
2.16	Schéma représentant le rapport entre épaisseur de film locale et globale pour une combinaison de sinus en 3D	64
2.17	Topographie d'un profil périodique gaussien représentant une texturation laser (a), et résolution locale d'un champ intermédiaire de la méthode d'homogénéisation (b)	66
2.18	Exemple de facteurs de flux homogénéisés pour la texturation de la figure 2.17(a) décrit par l'équation (2.3.5.20)	66
2.19	Lignes de courant dans une cavité pour différentes épaisseurs de film ($U = 1,3 m/s$, $\Delta P = 8400 Pa$, $h_0 = 2 \mu m$, $\sigma = 1,41 \mu m$) [122]	73
2.20	Facteur de flux en cisaillement calculés pour deux vitesses $U = 1,3 m/s$ et $U = 2,6 m/s$ ($\sigma = 1,41 \mu m$, $\mu = 20 mPa.s$)	74
2.21	Débit Q_v et facteur d'écoulement χ_p calculé par différence de pression ($\sigma = 1,41 \mu m$, $\mu = 2 mPa.s$)	75
2.22	Débit Q_v et facteur d'écoulement χ_{sp} en pression et cisaillement combinés ($U = 1,3 m/s$, $\sigma = 1,41 \mu m$, $\mu = 20 mPa.s$)	75
2.23	Motif de texturation périodique isotrope selon deux directions	76
2.24	Exemple de recirculation modifiant le débit autour d'une cavité - les lignes de courants sont représentées, les couleurs de bleu à rouge indiquent la vitesse des particules de 0 à la vitesse de cisaillement du plan supérieur pris à $6m/s$	77
3.1	Repère de référence (adapté de [85])	80
3.2	Section droite de l'arbre (adapté de [85])	82
3.3	Fonctions de forme de Hermite pour le vecteur \mathbf{N}_1	85
3.4	Représentation qualitative du problème (3.2.2.3) - la pression est représentée dans les paliers en dégradé de bleu à rouge, et l'arbre flexible, en gris, est soumis à son propre poids ainsi qu'à un chargement statique dirigée vers le bas ; la zone de cavitation déterminée par l'algorithme JFO est représentée en blanc	91
3.5	Schématisme de l'exemple simplifié	92
3.6	Position stationnaire adimensionnée par rapport au jeu dans le cas test du système (3.3.2.1) pour un chargement vertical de 0 à 20 N (rotation en sens direct)	94
3.7	Coefficients dynamiques adimensionnés de l'approximation du palier fini π -film par impédance (imp.), π -film par FEM (FEM), et π -film par FEM texturé avec le motif de la figure 2.17(a) (text.)	95
3.8	Diagramme de Campbell du système (3.3.2.1) avec palier π -film par impédance et une masse de 30 g (a), et 300 g (b)	96

3.9	Diagramme de Campbell du système (3.3.2.1) avec palier π -film par impédance et une masse de 30 mg	97
3.10	Diagramme de Campbell du système (3.3.2.1) avec palier π -film par impédance et une masse de 30 mg avec une surface localement sinusoïdale transversale (a) et sinusoïdale longitudinale (b) d'amplitude $0,5C_r$	97
3.11	Comparaison des orbites obtenues avec l'intégration temporelle (en pointillés bleus), la réponse forcée linéaire autour de l'équilibre dans le repère fixe (en rouge) et dans le repère tournant (en jaune) dans le cas test à 1000 rad/s avec un chargement vertical de $0,3N$ et trois distances de balourd	99
3.12	Position horizontale adimensionnée lors de l'intégration temporelle pour le système test dans un cas instable : 190.000 tr/min, chargement statique 100 mNm, balourd $< 1\text{mg}$	100
3.13	Itérations de la méthode de tir dans le cas test à 2000 rad/s avec force verticale de $0.3 N$ et un balourd de 37.5 mg.mm - A gauche, est représenté le logarithme du résidu de l'équation (3.3.7.2), à droite, les courbes correspondantes à chaque intégration temporelle de l'itération de tir.	101
3.14	Méthode d'équilibrage harmonique avec différents nombres d'harmoniques ($N_h = \{1, 5, 15\}$) dans la reconstitution de la solution périodique, comparées à l'intégration temporelle, dans le cas test à 2000 rad/s avec un chargement vertical de $0,3 N$ et un balourd de 37.5 mg.mm	104
3.15	Schéma de l'algorithme de prédiction-correction [127]	105
3.16	Exemple de continuation des solutions périodiques avec analyse de stabilité, par méthode de tir et HBM à 4 harmoniques, dans le cas de l'oscillateur de Duffing	109
3.17	Exposants de Lyapounov de la figure 3.9, indiquant une bifurcation de Hopf pour le palier π -film faiblement chargé	110
3.18	Schématisation des bifurcations de Hopf super-critique et Hopf sous-critique (adapté de [84])	111
3.19	Bifurcation de dédoublement de période sous-critique; multiplicateur de Floquet principal (à gauche) et orbite perturbée au début de l'intégration temporelle (à droite); l'orbite est légèrement divergente, et donne un cycle limite équivalent à celui de la figure 3.12 après une intégration longue	111
3.20	Exemple de continuation des solutions périodiques et quasi-périodiques, par méthode de VCHBM avec 3 harmoniques pour la fréquence synchrone, et 5 pour la deuxième fréquence, dans le cas de l'oscillateur de NES régit par l'équation (3.3.11.3) - $\epsilon = 0.1$, $\lambda = 0.4$, $k_{nl} = 5$, $A = 0.3$	112
3.21	Continuation des solutions pour le système test (3.3.2.1), en faisant varier le balourd dans le cas test, avec palier lisse, et cavitation de type Reynolds, avec $p_{cav} < p_{atm}$	113
3.22	Multiplicateurs de Floquet pour l'excitation de 100mg.mm de la figure 3.21 présentant deux bifurcations de Neimark-Sacker	114
3.23	Reconstitution VCHBM du régime quasi-périodique après bifurcation à 2000 rad/s avec un balourd de 125mg.mm pour les dimensions de la figure 3.21, et comparaison avec une intégration temporelle (à droite)	114
3.24	Comparaison de la texturation dimple de la figure 2.17(a) dans le système test sans raideur externe, pour un balourd de 10 mg.mm et un chargement vertical de $2 N$, à vitesse de rotation élevées	115
4.1	Représentation schématique des dimensions géométriques du rotor (mm)	118

4.2	Positions du rotor pour un chargement progressif de $0 N$ à $2 \times 5 N$ dans le cas d'un rotor lisse du banc PHAT à 100 rad/s	121
4.3	Représentation qualitative de l'arbre du banc d'essai PHAT non chargé, et chargé à $2 \times 5 N$, à 100 rad/s ; la pression dans les paliers est représentée par un dégradé de bleu à rouge et la zone de rupture de film est représentée en blanc	121
4.4	Positions d'équilibre du rotor du banc PHAT soumis seulement à son propre poids, en faisant varier sa vitesse de rotation de 10 rad/s (excentricité la plus élevée) à 100 rad/s (position quasiment centrale, la figure étant tracée pour uniquement 10% du jeu radial)	122
4.5	Positions d'équilibre du rotor du banc PHAT dans le repère tournant, soumis seulement à un balourd de $2 \times 1 \text{ g.mm}$, en faisant varier sa vitesse de rotation de 100 rad/s (excentricité la plus faible) à 1000 rad/s (excentricité la plus élevée) - le balourd est imposé dans la direction de u	123
4.6	Diagramme de Campbell du rotor du banc PHAT, avec un modèle de projection sur les noeuds de la structure et sans prise en compte de l'inclinaison du rotor dans le palier; un chargement statique de $2 \times 5 N$ est appliqué au niveau des paliers pour stabiliser l'oil whirl; les marqueurs rouges pleins représentent les modes instables	124
4.7	Déformées modales du rotor correspondant au diagramme de Campbell de la figure 4.6	124
4.8	Diagramme de Campbell du rotor du banc PHAT, avec un chargement statique de $2 \times 5 N$ est appliqué au niveau des bords intérieur des paliers pour stabiliser l'oil whirl - les marqueurs rouges pleins représentent les modes instables	125
4.9	Déformées modales du rotor correspondant au diagramme de Campbell de la figure 4.8	126
4.10	Diagramme de Campbell du rotor du banc PHAT, soumis seulement à son propre poids - les marqueurs rouges pleins représentent les modes instables	126
4.11	Diagramme de Campbell du rotor du banc PHAT, dans le repère tournant, avec un balourd de $0,5 \text{ g.mm}$ - les marqueurs rouges pleins représentent les modes instables	127
4.12	Excentricité maximum et stabilité du mouvement du rotor du banc PHAT soumis à un balourd de 1 g.mm pour différentes vitesses de rotation, obtenu par analyse linéaire dans le repère fixe, tournant, et par analyse par HBM	128
4.13	Flexion de la fibre de l'arbre et révolution lors d'une sollicitation d'un balourd de 1 g.mm sur le rotor du banc PHAT	129
4.14	Excentricité maximum et stabilité du mouvement du rotor du banc PHAT soumis à un balourd de 20 mg.cm pour différentes vitesses de rotation, obtenu par analyse linéaire dans le repère fixe, tournant, et par analyse par HBM au-delà de la 1 ^{re} fréquence de résonance du rotor ($\approx 1000 \text{ Hz}$)	130
4.15	Dépendance par rapport au balourd, de l'excentricité maximum et de la stabilité du mouvement du rotor du banc PHAT soumis à un balourd de 1 g.mm pour différentes vitesses de rotation (à une extrémité de l'arbre), obtenu par analyse linéaire dans le repère fixe, tournant, et par analyse par HBM	131

4.16	Dépendance par rapport au jeu radial, de l'excentricité maximum et de la stabilité du mouvement du rotor du banc PHAT soumis à un balourd de 1 <i>g.mm</i> pour différentes vitesses de rotation, obtenu par analyse linéaire dans le repère fixe, tournant, et par analyse par HBM	131
4.17	Dépendance par rapport au jeu radial, de l'excentricité maximum et de la stabilité du mouvement du rotor du banc PHAT soumis à un balourd de 1 <i>g.mm</i> pour différentes vitesses de rotation, obtenu par analyse linéaire dans le repère fixe, tournant, et par analyse par HBM	132
4.18	Dépendance par rapport au défaut de rectitude des arbres A_r , de l'excentricité maximum et de la stabilité du mouvement du rotor du banc PHAT soumis à un balourd de 1 <i>g.mm</i> pour différentes vitesses de rotation, obtenu par analyse linéaire dans le repère fixe, tournant, et par analyse par HBM	133
4.19	Positions d'équilibre du rotor du banc PHAT dans le repère tournant, soumis seulement à un balourd de 2×1 <i>g.mm</i> , en faisant varier sa vitesse de rotation de 100 <i>rad/s</i> (excentricité la plus faible) à 1000 <i>rad/s</i> (excentricité la plus élevée) ; le balourd est imposé dans la direction de u	134
4.20	Bifurcation de Neimark-Sacker illustrée par les multiplicateurs de Floquet, avec un motif sinusoïdal longitudinal et transversal d'amplitude $h_r = 0,5 C_r$; les points A,B, et C sont reportés sur la figure 4.22	134
4.21	Amplitude de vibration de rotors texturés avec un motif sinusoïdal longitudinal et transversal d'amplitude $h_r = 0,5 C_r$	135
4.22	Comparaison des seuils de stabilité des rotors texturés avec un motif sinusoïdal longitudinal et transversal d'amplitude $h_r = 0,5 C_r$ par rapport au rotor lisse de même jeu radial	136
4.23	Balourd minimum nécessaire à la stabilisation du système à 1000 <i>rad/s</i> en fonction de l'amplitude de la texturation sinusoïdale dans le cas de motifs longitudinaux ou transversaux par rapport à l'écoulement (à gauche) et amplitude des vibrations au niveau du seuil de stabilité (à droite)	137
4.24	Positions d'équilibre stationnaire dans le repère tournant pour les systèmes sinusoïdaux ($h_r = C_r$) partiellement texturés (taux de texturation a) soumis à un balourd de 1 <i>g.mm</i> à 2000 <i>rad/s</i> , comparé au palier lisse de jeu radial moyen équivalent, avec un balourd de 1 <i>g.mm</i>	137
4.25	Amplitude des vibrations et seuil de stabilité pour différentes densités de texturation (a), pour les texturation par enlèvement de matière, transversales et longitudinales par rapport à l'écoulement dans le palier	138
4.26	Seuils de stabilité obtenus pour différentes densités de texturation (a), pour les texturation par enlèvement de matière, transversales et longitudinales par rapport à l'écoulement dans le palier (à gauche) - amplitude des vibrations lors du passage du seuil de stabilité (à droite)	139
4.27	Positions d'équilibre stationnaire dans le repère tournant pour des arbres texturés avec des <i>dimples</i> , soumis à un balourd de 2×10 <i>g.mm</i> , et pour des vitesses de rotation de 100 à 2000 <i>rad/s</i>	139
4.28	Amplitudes des vibrations et stabilité des cycles limites synchrones dans le cas de la texturation type <i>laser dimples</i> n°6, comparé au même échantillon sans enlèvement de matière (en rouge), et également à l'échantillon lisse de jeu moyen équivalent (en noir), avec $C_r = 10\mu m$ et pour un balourd de 2×5 <i>mg.cm</i>	140

4.29	Amplitude des vibrations et stabilité des cycles synchrones obtenus avec les différentes texturations type <i>laser dimples</i> , avec un balourd de $2 \times 2g.mm$ pour deux valeurs de jeu radial du palier sans texturation $C_r = 5 \mu m$ et $C_r = 10 \mu m$	141
4.30	Balourds minimum nécessaires à la stabilité des cycles synchrones en fonction de la vitesse de rotation (à gauche), et amplitude de vibration pour le cycle limite correspondant (à droite)	142
4.31	Balourds minimum nécessaires à la stabilité des cycles synchrones en fonction de la vitesse de rotation, et amplitude de vibration pour le cycle limite correspondant (courbes de la figure 4.30 présentées en 3D)	142
5.1	Vue d'ensemble du banc de test de vibrations de Paliers Hydrodynamiques avec Arbres Texturés (PHAT)	147
5.2	Représentation schématique du bain d'huile alimentant le palier	148
5.3	Positions des 12 capteurs à ultrasons, l'émission de l'onde est représentée en rouge, la transmission en orange et la réflexion en bleu, schématiquement pour deux positions différentes	150
5.4	Photographie du palier instrumenté par les capteurs ultrasons	150
5.5	Vue en coupe de l'arrivée d'huile dans le palier	152
5.6	Modes des pièces du banc d'essai	153
5.7	Représentation schématique des notations nécessaires au dimensionnement du joint <i>viscoseal</i>	154
5.8	Plans de joints d'étanchéité sans contact <i>viscoseal</i>	155
5.9	Photographies de différents montages	157
5.10	Représentation schématique des motifs de texturation obtenus par ablation	158
5.11	Images topographiques 3D de surfaces texturées avec des cavités de profondeur différentes, et leurs profil 1D (arbre $N^\circ 3$, $N^\circ 4$, et $N^\circ 8$)	159
5.12	Procédure de mesure de défaut de rectitude des tiges	160
5.13	Moyenne des deux mesures du défaut de rectitude des différents échantillons	160
5.14	Schéma représentant les notations des différents signaux en montage sans couplémètre, avec les positions (1 à 6), les températures (T1 à T3, et TU utilisée pour le calcul ultrason), le compte-tour du moteur (Tr), l'intensité du moteur (IM) et le signal des transducteurs à ultrasons après le commutateur (U) - on insère également la notation des plans d'équilibrage au niveau des rondelles (A et B)	162
5.15	Représentation de l'interpolation de la position de l'arbre à partir des signaux filtrés des capteurs de positions, dont les 3 orbites sont représentées au milieu de la ligne d'arbre (positions 1 à 6)- les orbites extrapolées sont également présentées au niveau des bords des paliers et des extrémités	162
5.16	Comparaison de la mesure dynamique en régime stationnaire à 10000 tr/min et avec l'huile PAO-2 de la moitié de la valeur crête à crête du capteur de position 4 comparé au défaut de rectitude obtenu par métrologie	163
5.17	Diagramme cascade et seuil de stabilité de l' <i>oil whirl</i> pour l'arbre lisse n°2 lors d'une montée en vitesse de 200 s à 10000 tr/min avec l'huile PAO-2	165
5.18	Vibrations à hautes fréquences de l'arbre lisse n°2 lors d'une montée en vitesse de 200 s à 10000 tr/min avec l'huile PAO-2	166
5.19	Ordres de la vitesse de rotation du moteur extraits du spectrogramme pour différents balourds appliqués au plan A de la tige lisse n°2 - les balourds sont appliqués dans le plan de l'arc du défaut de rectitude	167

5.20	Comparaison du couple résistant en régime stationnaire à 10000 tr/min et avec l'huile PAO-2 et de la moitié de la valeur crête à crête du capteur de position 4	168
5.21	Extraction des ordres de la vitesse de rotation (en rose ordre 1, en cyan ordre moitié), du diagramme cascade pour l'arbre lisse n°2 lors d'une montée en vitesse de 200 s à 10000 tr/min avec l'huile PAO-2	169
5.22	Ordre extrait 0,5x pour la campagne d'essais avec montée en vitesse à 10.000 tr/min, avec l'huile PAO-2	170
5.23	Fréquence de rotation du rotor à partir l'amplitude de l'ordre 0,5x devient inférieure à 0.1 μm , pour la campagne d'essais avec montée en vitesse à 10.000 tr/min, et avec l'huile PAO-2	171
5.24	Ordre extrait 0,5x pour la campagne d'essais avec montée en vitesse à 5.000 tr/min, avec l'huile PAO-4	172
5.25	Coefficient de réflexion moyen ultrasonore mesuré en position 9, comparé au couple moteur à 10.000 tr/min, et avec l'huile PAO-2	173
5.26	Amplitude crête-à-crête du coefficient de réflexion ultrasonore mesuré en position 9 à 10.000 tr/min, et avec l'huile PAO-2	174
5.27	Amplitude crête-à-crête du coefficient de réflexion ultrasonore mesuré en positions 3, 6, 9 et 12, à 2.000 tr/min, et avec l'huile PAO-2	175
5.28	Epaisseur de film calculée par ultrasons (position US3), comparée à l'interpolation du déplacement mesuré avec les capteurs capacitif, à 2.000 tr/min, et avec l'huile PAO-2 pour l'échantillon N°2, (filtre passe-bas à 200 Hz, les top-tour sont représentés par les symboles o)	175
5.29	Epaisseur de film calculée par ultrasons (position US3), comparée à l'interpolation du déplacement mesuré avec les capteurs capacitif, à 2.000 tr/min, et avec l'huile PAO-2 pour l'échantillon N°8, avec filtre passe-bas à 200 Hz	176
5.30	Prédiction du signal temporel de pression moyennée sur la longueur de mesure des capteurs ultrasons, à partir du programme de simulation de la partie 4 et avec les dimensions du banc PHAT, pour un arbre lisse, à 1000 rad/s soumis à un balourd de $2 \times 1mg.mm$, et un défaut de rectitude parabolique de 4 μm ; le temps est adimensionné par rapport à une période de révolution de l'arbre sur lui-même	177
B.1	Déformée statique en microns d'un cylindre en acier de longueur 13 cm et de rayon 2,5 mm, encastré en 0 et soumis à son propre poids.	196
B.2	Déformée modale d'un cylindre en acier de 13 cm et de rayon 2,5 mm, encastré en 0 (modes dans le plan $z = 0$)	197
B.3	Déformée statique en microns d'un cylindre en acier de 13 cm et de rayon 2,5 mm, encastré en 0, en rotation autour de son axe principal (modes de précession directe).	197
B.4	Diagramme de Campbell d'un arbre de 13 cm et de rayon 2,5 mm encastré à une extrémité, sans amortissement structural (fréquence synchrone en pointillés)	198
B.5	Diagramme de Campbell d'un arbre de 13 cm et de rayon 2,5 mm encastré à une extrémité, avec amortissement structural, mode instables (partie réelle positive) entouré par un 'o' (fréquence synchrone en pointillés).	199
B.6	Réponse à un balourd de $7.5 \times 10^{-3}g.mm$ placé à une extrémité d'un arbre de 13 cm et de rayon 2.5mm encastré à l'autre extrémité : amplitude du noeud à l'extrémité libre en micromètres.	200

C.1	Diagramme des classes du programme	202
C.2	Comparaison de coefficients dynamiques calculés par méthode de différen- ciation numérique entre impédance de palier lisse fini (o) et calcul par l'al- gorithme de palier lisse avec cavitation de Reynolds et $p_{cav} = 0$ (équivalent à π -film) avec un maillage 8x2 éléments (x).	209

Liste des tableaux

2.1	Facteurs d'écoulement proposés par Bayada et al. [16] issus de l'homogénéisation périodique avec les texturations sinusoïdales transverse et longitudinale par rapport à l'écoulement hydrodynamique	60
2.2	Facteur de flux issus de l'homogénéisation périodique avec les texturations en crêneaux transverses et longitudinaux par rapport à l'écoulement hydrodynamique	62
2.3	Facteur de flux issus de l'homogénéisation périodique avec les texturations en crêneaux transverses et longitudinaux par rapport à l'écoulement hydrodynamique	64
4.1	Dimensions du système rotor-palier	118
4.2	Paramètres de forme des motifs de texturation <i>dimple</i>	119
4.3	Texturations de l'étude - les flèches rouge représentent le sens de l'écoulement local du fluide	120
5.1	Inertie des composants en rotation	149
5.2	Les différentes méthodes de mesure par spectrométrie ultra-sonore (adapté de [70])	151
5.3	Tableau des premières fréquences propres du moteur et du couplemètre . .	152
5.4	Tableau des premières fréquences propres correspondant aux boîtiers des paliers	152
5.5	Données des joints <i>viscoseal</i>	155
5.6	Caractéristiques dynamiques des différents accouplements	156
5.7	Fréquences propres mesurées et théoriques des échantillons	156
5.8	Tableau des échantillons texturés testés	158
C.1	Valeurs analytiques des modes	205
C.2	Comparaison des modes propres de la structure à partir du programme avec 20 éléments de poutre.	205
C.3	Données de référence pour les conditions de simulation	206
C.4	Comparaison entre algorithme et référence avec l'hypothèse de cavitation de Gumbel	206
C.5	Comparaison entre algorithme et référence avec l'hypothèse de cavitation de Reynolds	206
C.6	Comparaison entre algorithme et référence avec l'hypothèse de cavitation JFO	206

AUTORISATION DE SOUTENANCE

Vu les dispositions de l'arrêté du 7 août 2006,

Vu la demande du Directeur de Thèse

Monsieur F. THOUVEREZ et Monsieur D. MAZUYER

et les rapports de

M. J-C. GOLINVAL

Professeur - Université de Liège - LTAS - Quartier Polytech 1 - allée de la découverte
B-4000 LIEGE 1 - Belgique

et de

M. M. ARGHIR

Professeur - Institut PPRIME CNRS - Université de Poitiers ISAE-ENSMA - UPR 3346 SP2MI
Téléport 2 - 11 bd Marie et Pierre Curie - BP 30179
86962 FUTUROSCOPE CHASSENEUIL cedex

Monsieur REBUFA Jocelyn

est autorisé à soutenir une thèse pour l'obtention du grade de **DOCTEUR**

Ecole doctorale MECANIQUE, ENERGETIQUE, GENIE CIVIL ET ACOUSTIQUE

Fait à Ecully, le 24 novembre 2016

P/Le directeur de l'E.C.L.
La directrice des Etudes

