



HAL
open science

Étude expérimentale de la turbulence d'ondes à la surface d'un fluide. La théorie de la turbulence faible à l'épreuve de la réalité pour les ondes de capillarité et gravité

Quentin Aubourg

► **To cite this version:**

Quentin Aubourg. Étude expérimentale de la turbulence d'ondes à la surface d'un fluide. La théorie de la turbulence faible à l'épreuve de la réalité pour les ondes de capillarité et gravité. Mécanique des fluides [physics.class-ph]. Université Grenoble Alpes, 2016. Français. NNT : 2016GREAI061 . tel-01597576

HAL Id: tel-01597576

<https://theses.hal.science/tel-01597576v1>

Submitted on 28 Sep 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE LA COMMUNAUTÉ UNIVERSITÉ GRENOBLE ALPES

Spécialité : **Mécanique des fluides, procédés, énergétique**

Arrêté ministériel : 7 août 2006

Présentée par

Quentin AUBOURG

Thèse dirigée par **Nicolas MORDANT**

Préparée au sein du **Laboratoire des Ecoulements
Géophysique et Industriels**

Dans l'**École Doctorale Ingénierie Matériaux, Mécanique,
Environnement, Energétique, Procédés, Production**

Étude expérimentale de la turbulence d'ondes à la surface d'un fluide. La théorie de la turbulence faible à l'épreuve de la réalité pour les ondes de capillarité et gravité.

Thèse soutenue publiquement le **18/10/2016**
devant le jury composé de :

M. Christophe JOSSERAND

Directeur de recherche, CNRS - Rapporteur

M. Frédéric MOISY

Professeur des universités, Université Paris-Sud - Rapporteur

M. Fabrice ARDHUIN

Directeur de recherche, CNRS - Examineur

M. Eric FALCON

Directeur de recherche, CNRS - Président

M. Miguel ONORATO

Professeur associé, Università di Torino - Examineur

M. Nicolas MORDANT

Professeur des universités, Université Grenoble Alpes - Directeur de thèse



Table des matières

Résumé.....	5
Abstract	5
Introduction.....	7
Partie I Théorie.....	13
I.1 Outils théoriques	14
I.1.1 Théorie linéaire des ondes	14
I.1.2 Turbulence faible.....	19
I.2 Etat de l'art.....	30
I.2.1 Interaction résonante d'un train d'ondes	30
I.2.2 Turbulence faible.....	30
I.2.3 Dissipation des ondes.....	35
I.3 Motivations	36
Partie II Ondes gravito-capillaires.....	39
II.1 Méthode expérimentale.....	40
II.1.1 Dispositif général.....	40
II.1.2 Profilométrie par transformée de Fourier.....	41
II.1.3 Propreté de l'eau.....	44
II.2 Analyse	45
II.2.1 Analyse spatiale.....	46
II.2.2 Analyse spectrale.....	49
II.3 Résonances.....	54
II.3.1 Théorie et outils statistiques	54
II.3.2 Résultats	61
II.4 Résultats complémentaires.....	74
II.4.1 Forçage monochromatique	74
II.4.2 Décrochements aux parois.....	75
II.4.3 Air comprimé	76
II.5 Conclusion	78
Partie III Ondes de gravité	81
III.1 Méthodes expérimentales	82
III.1.1 Dispositif expérimental	82
III.1.2 Méthode de mesure.....	85
III.2 Analyse	104
III.2.1 Analyse spatiale.....	104

III.2.2	Analyse spectrale.....	109
III.2.3	Spectres spatio-temporels.....	113
III.3	Interactions résonantes.....	120
III.3.1	Solutions théoriques.....	120
III.3.2	Corrélations	123
III.4	Conclusion	135
Partie IV	Mesures in situ et ondes internes	137
IV.1	Données in situ	138
IV.1.1	Spectres de puissance	138
IV.1.2	Corrélations	141
IV.1.3	Conclusion	146
IV.2	Ondes internes de gravité	147
IV.2.1	Relation de dispersion linéaire des ondes internes de gravité	147
IV.2.2	Dispositif expérimental	148
IV.2.3	Résultats	152
IV.2.4	Conclusion	160
	Conclusion générale	161
	Bibliographie.....	169

Résumé

La turbulence d'onde cherche à apporter une description statistique des interactions d'un ensemble d'ondes faiblement non-linéaires. Initiée dans les années 1960 par les travaux de Zakharov et de Hasselmann, cette théorie est régulièrement mise en défaut par les observations expérimentales, en particulier dans le régime d'ondes de gravité ainsi qu'aux abords de la transition gravito-capillaire. L'objectif de cette thèse est d'étudier expérimentalement ces deux régimes en analysant directement les interactions résonantes qui sont le cœur de la théorie de la turbulence faible. Une première expérience concerne le régime gravito-capillaire. Une cascade d'énergie constituée d'ondes faiblement non-linéaires est observée en accord avec la phénoménologie de la turbulence faible. L'utilisation d'outils statistiques d'ordre supérieur a permis de montrer que ce sont des interactions à 3-ondes essentiellement colinéaires qui gouvernent la cascade. La seconde expérience explore le régime gravitaire dans la plateforme de Coriolis. Le spectre de puissance montre la présence systématique d'une branche harmonique qui reste faible devant la composante linéaire. Les corrélations indiquent la présence d'interactions à 3-ondes entre la branche linéaire et la branche harmonique. Aucune interaction à 4-ondes comme le prévoit la théorie n'est observée. La dernière partie rapporte les résultats d'une expérience sur des ondes internes ainsi qu'une campagne de mesure in-situ de la mer Noire dont les données ont été mises à disposition par F. Ardhuin. Ces deux expériences confirment les résultats de la partie précédente et soulèvent la question de l'importance des interactions à 3-ondes avec la branche harmonique pour la génération de la cascade en régime de gravité.

Abstract

The wave turbulence provides a statistical description of the interactions of a large set of weakly non-linear waves. Introduced in the 1960s by the works of Zakharov and Hasselmann, this theory often fails against experiments, particularly for gravity waves and at the crossover for capillary-gravity waves. The objective of this PhD is to study experimentally these two regimes by looking directly at the resonant interactions that are the heart of the weak turbulence theory. The first experiment focuses on the capillary-gravity regime. An energy cascade composed of weakly non-linear waves is observed in agreement with the phenomenology of the theory. The use of higher order statistical tools shows that it is essentially 3-waves collinear interaction that govern the cascade. The second experiment explores the pure gravity regime thanks to the large dimensions of the Coriolis platform. The full energy spectrum shows the systematic presence of the harmonic branch, although it remains small compared to the linear component. The correlations indicate the presence of strong 3-waves interactions between the linear branch and the harmonics branches. No 4-waves interaction as assumed by the theory is observed. The last section reports the results from an experiment on internal waves and from in situ data of the Black Sea made available by F. Ardhuin. These two experiments confirm the results of the previous section and raise the question of the importance of the 3-wave interaction with the harmonic branch for generating the energy cascade in the gravity wave regime.

Introduction



Ondes de gravité à la surface de l'océan...

Ondes et turbulence d'ondes

Les ondes sont un phénomène physique omniprésent dans la nature. On les rencontre sous une multitude de formes et d'échelles comme par exemple l'oscillation d'un champ électromagnétique de quelque centaines de nanomètres pour la lumière visible ou encore le déplacement mécanique de masse d'eau sur des milliers de kilomètres pour les ondes de marée. Les ondes à la surface de l'eau font partie de cette grande famille dont la première modélisation mathématique a été donnée par George Biddell Airy au 19^{ème} siècle. Une onde est alors modélisée par une simple fonction sinusoïdale correspondant aux solutions linéaires de l'équation de Laplace. Cette solution dite des vagues d'Airy n'est effective que pour des ondes de très faible pente (faible amplitude) où la linéarisation est valide. Les particules de fluide suivent alors des trajectoires elliptiques fermées comme on peut le voir dans la Figure 1.

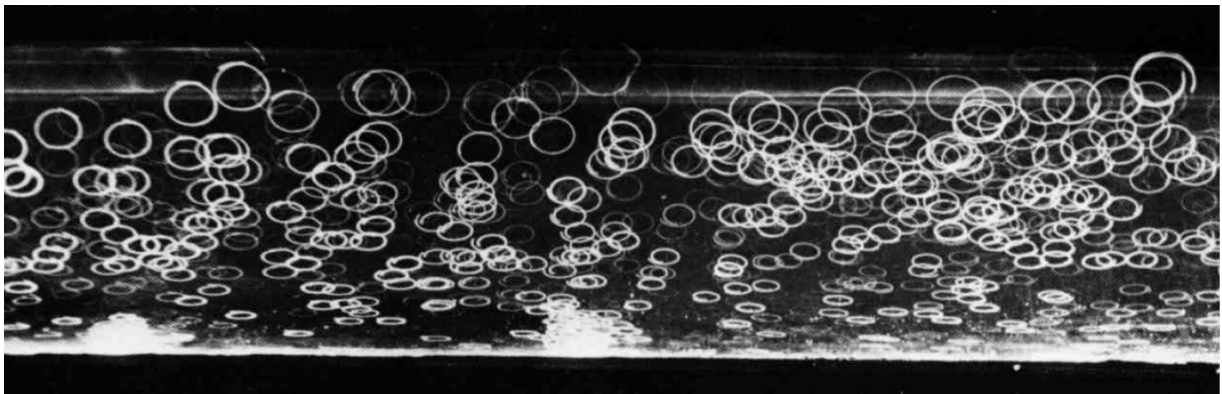


Figure 1 : Visualisation des trajectoires du fluide lors du passage d'une onde d'Airy. Image extraite de « An album of fluid motion » par V. Dyke [1].

Dans cette situation, lorsque deux ondes se croisent, aucune interaction n'a lieu : elles sont complètement indépendantes entre elles. Lorsque l'amplitude augmente, la linéarisation n'est plus possible et il est nécessaire d'ajouter les corrections à l'ordre supérieur pour obtenir une représentation plus réaliste. Cependant, à mesure que la non-linéarité augmente, l'indépendance des ondes n'est plus vérifiée à cause de l'apparition de couplages non-linéaires entre différentes ondes.

Lorsqu'on observe un système naturel tel que l'océan (voir photo introduction), on s'aperçoit rapidement que la théorie linéaire des ondes d'Airy n'est pas adaptée. En effet, de nombreux phénomènes non linéaires sont observés, comme par exemple la forme des ondes qui s'éloigne significativement d'une sinusoïde (pointes plus prononcées que les creux) ou encore la présence de déferlements imminents. La présence d'une multitude d'ondes ainsi que les conditions (fortement) non-linéaires donnent lieu à des interactions non-linéaires qui rendent le système insoluble par une approche déterministe.

C'est dans l'idée de comprendre ces transferts d'énergie d'un point de vue statistique que la théorie de la turbulence faible est née. Le mot turbulence provient de l'analogie avec la turbulence hydrodynamique.

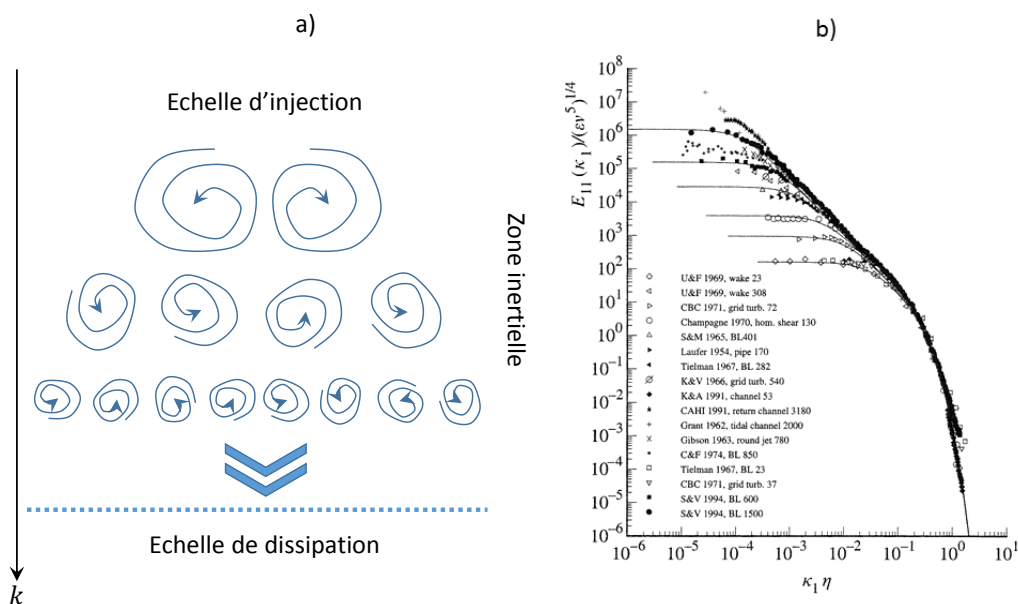


Figure 2 : a) Schéma descriptif de la cascade d'énergie de Richardson en turbulence hydrodynamique. b) Compilation de spectres de puissance expérimentaux montrant la loi puissance en $k^{-5/3}$ prédite par Kolmogorov. Figure extraite du livre de S. Pope "Turbulent Flows" [2].

Dans cette dernière, les vortex vont interagir entre eux pour en former de plus petits jusqu'à atteindre les échelles où la viscosité les convertit en chaleur (Figure 2 a)). Cette phénoménologie de cascade d'énergie entre une échelle d'injection et de dissipation a été initialement décrite par Lewis F. Richardson dans les années 1920. En supposant une conservation de l'énergie au sein de cette cascade, il est alors possible d'obtenir la forme du spectre d'énergie par analyse dimensionnelle. On obtient ainsi le très connu spectre de puissance de Kolmogorov qui a été largement vérifié par les observations (Figure 2 b)).

La phénoménologie de la turbulence d'onde est très similaire à la cascade de Richardson. Il suffit de remplacer les vortex par des ondes. Celles-ci vont alors interagir pour former de plus petites longueurs d'ondes et cela jusqu'à l'échelle de dissipation. Il en résulte alors une cascade d'énergie similaire à Kolmogorov et dont la forme du spectre peut être prédite analytiquement sous certaines hypothèses. La principale étant que les ondes doivent être faiblement non-linéaires pour supposer que les échanges d'énergie sont lents devant la période linéaire des ondes. Les transferts d'énergie sont alors supposés se produire uniquement par des interactions résonantes, ce qui donne lieu aux spectres de Zakharov qui seront détaillés par la suite.

Exemple d'un système naturel de turbulence d'ondes

Bien que contraignante dans son application, il est néanmoins possible de trouver des systèmes naturels satisfaisant aux hypothèses de la turbulence faible. On peut citer par exemple la surface d'un lac ou de l'océan lorsque le vent est trop faible pour forcer directement les ondes présentes. La Figure 3 a) montre une image issue d'un film réalisé en bord de mer dans ces conditions.

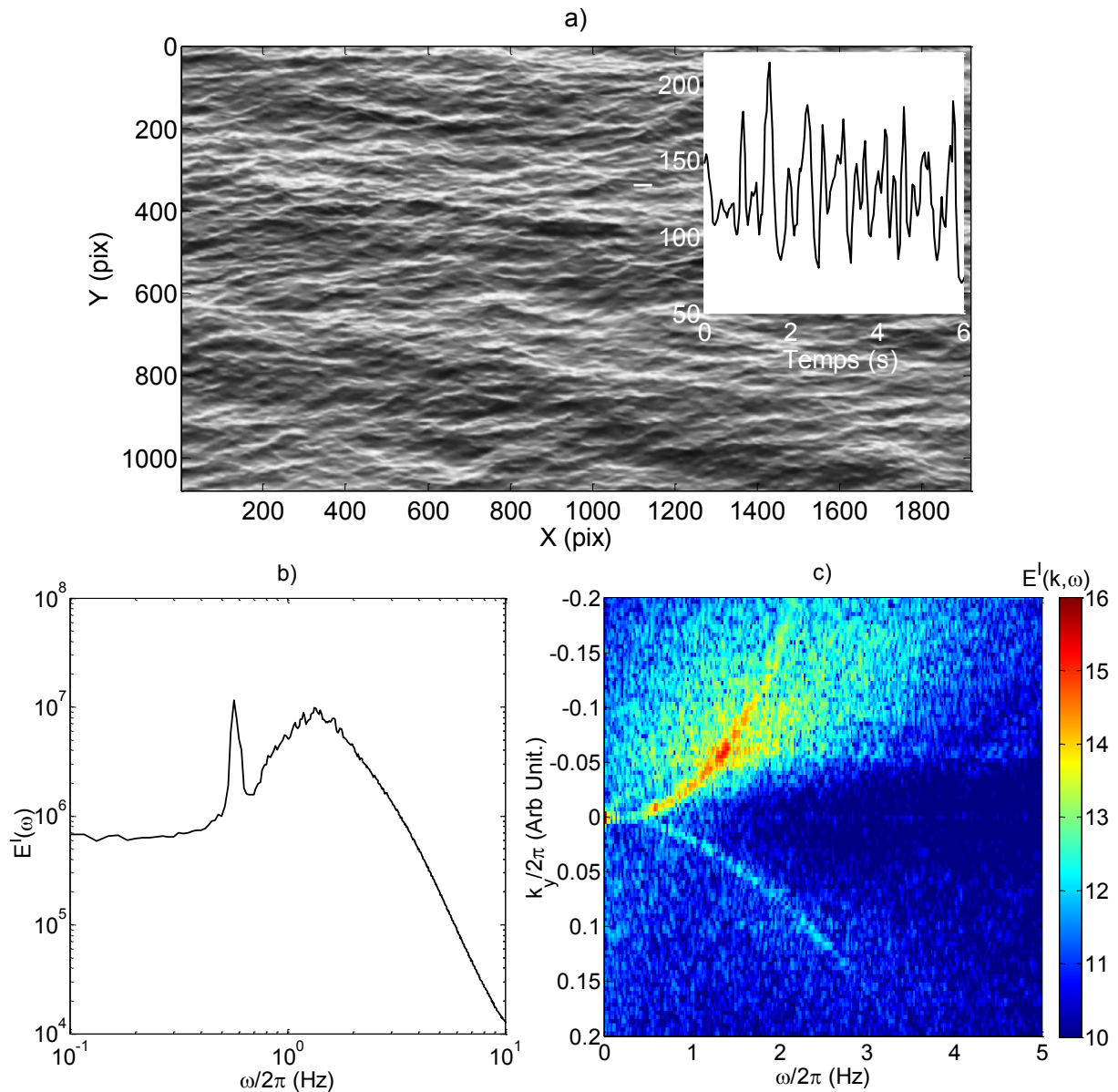


Figure 3 : a) Image issue d'un film de la surface de la mer en absence de vent. Sous-figure : évolution temporelle de l'intensité I d'un pixel b) Spectre de puissance $E^I(\omega) = |I(\omega)|^2$ calculé à partir de l'intensité des pixels du film de la surface de la mer. c) Coupe (k_y, ω) du spectre de puissance spatio-temporel $E^I(\mathbf{k}, \omega) = |I(\mathbf{k}, \omega)|^2$ calculé à partir de l'intensité des pixels du film de la surface de la mer.

On observe une superposition de vagues de différentes échelles spatiales λ et temporelles T qui sont susceptibles d'être en interaction. Une analyse rapide de ce film amateur est réalisée pour essayer de quantifier les ondes présentes dans ce système. La transformée de Fourier de l'intensité I des pixels est réalisée en espace et en temps afin de calculer un spectre de puissance $E^I(\mathbf{k}, \omega) = |I(\mathbf{k}, \omega)|^2$ où $|\mathbf{k}| = 2\pi/\lambda$ est le vecteur d'onde et $\omega = 2\pi/T$ la fréquence (voir I.1.1 pour plus de détails). La Figure 3 b) montre ce dernier uniquement dans l'espace des fréquences $E^I(\omega) = |I(\omega)|^2$ avec une échelle logarithmique. On observe un spectre constitué d'un premier pic à $\omega/2\pi = 0.5$ Hz, puis un second autour de $\omega/2\pi = 1.5$ Hz suivi d'une décroissance pratiquement linéaire signifiant la présence d'une loi de puissance. La Figure 3 c) montre une coupe (k_y, ω) du spectre complet $E^I(\mathbf{k}, \omega)$. On observe la concentration de l'énergie le long d'une unique ligne. Cette dernière correspond à la relation de dispersion linéaire des ondes (voir I.1.1) et confirme le caractère faiblement non-linéaire de ce système.

On semble retrouver dans cet exemple les caractéristiques principales de la turbulence faible, à savoir un système faiblement non-linéaire et la présence d'ondes en interaction qui génèrent une cascade d'énergie suivant une loi de puissance. Ce point souligne l'intérêt de cette théorie pour la modélisation de la surface de l'eau.

Les applications de la théorie de la turbulence d'ondes sont nombreuses et variées. Un exemple évident qui vient pour les ondes de surface est la prévision de l'état de la mer (voir par exemple le modèle numérique de prévision de la houle WAVEWATCH III co-développé par F. Ardhuin). Cette dernière est importante pour la sécurité des navires ou encore pour la production d'électricité à partir de la houle. Des applications existent également pour d'autres systèmes ondulatoires tels que la stabilité des plasmas dans les tokamaks.

Comme pour toute théorie, il est essentiel de la valider expérimentalement pour permettre son utilisation dans des modèles de prédiction. La littérature à ce sujet est riche mais à ce jour, aucune étude n'est parvenue à une conclusion précise pour le cas des ondes à la surface d'un fluide. On observe en particulier de fortes différences avec la théorie pour les ondes à la surface de l'eau dans le régime de gravité pure ainsi qu'au niveau de la transition gravito-capillaire.

L'objectif de cette thèse est donc de réaliser deux expériences de laboratoire pour essayer de mettre en lumière les interactions résonantes qui sont les mécanismes fondamentaux de la théorie de la turbulence faible. La première partie traitera du cas particulier des ondes gravito-capillaires tandis que la seconde se portera sur les ondes de gravité pure.

Plan de la thèse

La thèse est divisée comme suit.

La première partie (Partie I) introduira les outils théoriques nécessaires pour comprendre la théorie linéaire des ondes (I.1.1). Une description de la théorie de la turbulence faible et ses principales implications pour les ondes de surface seront également présentées (I.1.2). La dernière section (I.2) de cette partie présentera une revue de la littérature existante à ce sujet et présentera les motivations qui ont mené à conduire les deux expériences.

La partie suivante (Partie II) traitera du régime particulier des ondes de surface gravito-capillaires. Après avoir détaillé la méthode de mesure (II.1), une analyse spectrale sera réalisée pour la confronter une première fois à la théorie (II.2). Dans un troisième temps, une analyse basée sur des corrélations d'ordre 3 et 4 sera présentée afin d'étudier directement les interactions résonantes (II.3).

La partie suivante (Partie III) concerne l'expérience sur les ondes de gravité pure. Cette dernière a été réalisée dans la plateforme de Coriolis qui est hébergée au laboratoire (LEGI). La première section détaillera la méthode de mesure stéréoscopique qui a été développée pour l'occasion (III.1). Puis dans un second temps (III.3 et III.3.2), l'ensemble de l'analyse effectuée pour les ondes gravito-capillaires sera reproduite.

La dernière partie (Partie IV) présentera les résultats de deux expériences complémentaires. La première (IV.1) concerne l'analyse de données de mesure in situ récupérées auprès de Fabrice Ardhuin. La seconde (IV.2) introduira les résultats préliminaires d'une expérience sur des ondes internes également réalisée sur la plateforme de Coriolis.

Partie I Théorie



Ondes générées par l'impact d'une goutte...

I.1 Outils théoriques

L'étude expérimentale de la turbulence faible est réalisée sur les ondes à la surface de l'eau. Cette introduction consiste en un résumé des connaissances théoriques sur le sujet. Dans un premier temps, le comportement linéaire des ondes sera traité. La seconde partie abordera quant à elle la théorie de la turbulence faible à laquelle on va ensuite comparer nos expériences. Les connaissances présentées ici sont principalement récupérées des sources suivantes : l'article de Newell et al. [3], le livre de L. M. Brekhovskikh and V. Goncharov [4], ainsi que les thèses de A. Prządka [5] et L. Deike [6].

I.1.1 Théorie linéaire des ondes

Dans un premier temps, les résultats classiques de la théorie linéaire des ondes seront présentés.

I.1.1.1 Equation dynamique

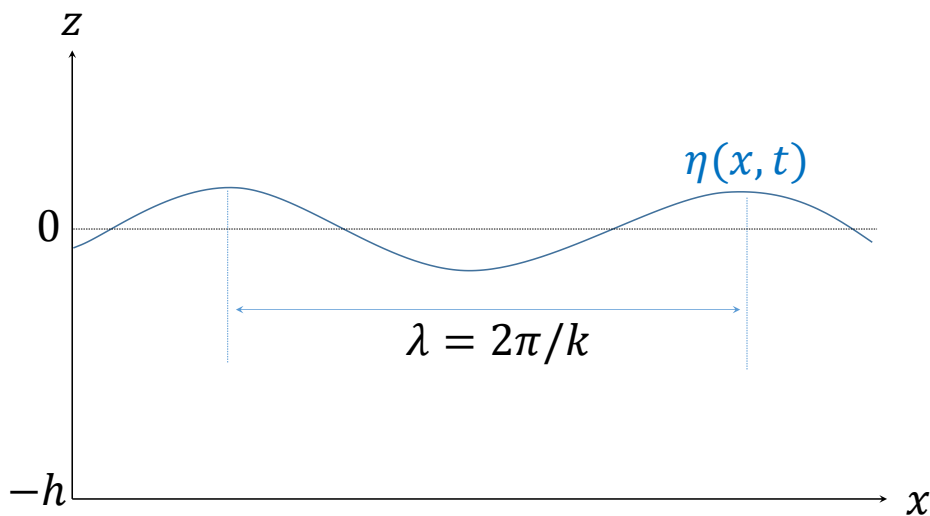


Figure I-1 : Schéma descriptif d'une onde 2D.

La description d'une onde de surface commence avec les équations fondamentales de l'hydrodynamique eulérienne (Navier-Stokes). Pour un fluide idéal et incompressible de masse volumique ρ , elles s'écrivent :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} &= -\frac{\nabla p}{\rho} + \mathbf{g} + \frac{\gamma}{\rho} (\nabla \cdot \boldsymbol{\kappa}) \delta_S \mathbf{n} \end{aligned} \quad I-1$$

Où $\mathbf{u} = (u, v, w)$ sont les composantes de vitesse d'une particule de fluide sur les directions (x, y, z) , p la pression, $\nabla \cdot \boldsymbol{\kappa}$ le vecteur de courbure de l'interface (voir I-3), \mathbf{g} le vecteur gravité et γ la tension de surface. Cette dernière s'applique uniquement à l'interface entre l'eau et l'air, représentée par le vecteur normal \mathbf{n} de la surface $\eta(x, y, z, t)$ et la fonction δ_S qui vaut 1 à la surface et 0 dans le volume.

On suppose l'écoulement irrotationnel et à surface libre. On introduit un potentiel de vitesse ϕ tel que $\nabla \phi = \mathbf{u}$. Il vient alors, pour la surface libre au repos en $z = 0$, les équations suivantes [7] :

$$\begin{aligned} \nabla^2 \phi &= 0 \\ \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla \phi^2 &= -\frac{\nabla p}{\rho} - gz + \frac{\gamma}{\rho} (\nabla \cdot \boldsymbol{\kappa}) \end{aligned} \quad I-2$$

Où $\nabla \cdot \boldsymbol{\kappa}$ est le vecteur de courbure de l'interface, avec $\boldsymbol{\kappa}$:

$$\mathbf{\kappa} = \left(\frac{\frac{\partial \eta}{\partial x}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2}}, \frac{\frac{\partial \eta}{\partial y}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2}}, 1 \right) \quad I-3$$

Dans le cas d'une surface libre entre l'eau et l'air, on a l'annulation du gradient de pression $\nabla p_{z=\eta} = 0$ à l'interface. On peut donc réécrire les équations I-2 à l'interface ainsi:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial \phi}{\partial z} &= 0 & \text{en } z = \eta \\ \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla \phi^2 + gz - \frac{\gamma}{\rho} (\nabla \cdot \mathbf{\kappa}) &= 0 & \text{en } z = \eta \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} &= 0 & \text{en } z = -h \end{aligned} \quad I-4$$

Il existe quelques solutions à ce système d'équations non-linéaires. Les plus connus étant les ondes de Stokes, établis en 2D et pour une tension de surface nulle (onde de gravité). D'autres solutions particulières existent également, telles que les solitons.

I.1.1.1 Relation de dispersion linéaire

Pour des ondes de faible amplitude, il est possible de simplifier le système I-2 en négligeant les termes non-linéaires. Cette simplification du premier ordre impose une indépendance de chaque onde, interdisant leurs interactions mutuelles. On a alors à résoudre le système suivant :

$$\begin{aligned} \nabla^2 \phi &= 0 \\ \frac{\partial \phi}{\partial t} &= -\frac{p}{\rho} - gz + \frac{\gamma}{\rho} (\nabla \cdot \mathbf{\kappa}) \delta_S \end{aligned} \quad I-5$$

Avec la courbure linéaire $\nabla \cdot \mathbf{\kappa} = \nabla \cdot \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}, \frac{\partial \eta}{\partial y}, 1 \right)$. Dans cette situation, les conditions limites peuvent être approximées comme $\eta \approx 0$ avec $p = 0$. On peut alors écrire :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial z_{z=0}} &= \frac{\partial \eta}{\partial t} \\ \frac{\partial \phi}{\partial t_{z=0}} &= g\eta + \frac{\gamma}{\rho} (\nabla \cdot \mathbf{\kappa}) \\ \frac{\partial \phi}{\partial z_{z=-h}} &= 0 \end{aligned} \quad I-6$$

Il est bien connu que ce système admet des solutions sous forme d'ondes harmoniques :

$$\begin{aligned} \phi(x, y, z, t) &= \Phi(z) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)} \\ \eta(x, t) &= \eta_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)} \end{aligned} \quad I-7$$

Où \mathbf{k} est le vecteur d'onde horizontal, $\mathbf{x} = (x, y)$ et ω la pulsation de l'onde. En injectant ces solutions dans I-5 et I-6, on s'aperçoit que le système admet des solutions uniquement si la pulsation ω et le vecteur d'onde \mathbf{k} sont liés par la relation de dispersion suivante :

$$\omega = \sqrt{\left(gk + \frac{\gamma}{\rho} k^3 \right) \tanh(kh)} \quad I-8$$

Où $k = |\mathbf{k}|$ est la norme du vecteur d'onde.

Il est intéressant de regarder plusieurs cas limites. Le premier est lorsque la profondeur h est grande devant la longueur d'onde. On a alors le terme $\tanh(kh)$ qui tend vers 1 pour donner la relation de dispersion en eau profonde :

$$\omega = \sqrt{gk + \frac{\gamma}{\rho}k^3} \quad I-9$$

Du fait de leur puissance en k différente, la gravité et la tension de surface auront un impact différent suivant les échelles considérées. Aux grandes longueurs d'onde, c'est la gravité qui l'emporte donnant lieu aux ondes de gravité, tandis qu'aux plus petites échelles, c'est la tension de surface qui domine pour les ondes de capillarité. La transition k_{gc} entre les deux régimes peut être trouvée en égalisant les deux termes :

$$gk_{gc} = \frac{\gamma}{\rho}k_{gc}^3 \rightarrow k_{gc} = \sqrt{\frac{g\rho}{\gamma}} \quad I-10$$

En injectant k_{gc} dans I-9, on obtient la fréquence de transition pour l'eau pure $\omega_{gc}/2\pi \approx 13.5 \text{ Hz}$ pour une longueur d'onde $\lambda_{gc} \approx 1.7 \text{ cm}$. La Figure I-2 permet de visualiser graphiquement la relation de dispersion linéaire.

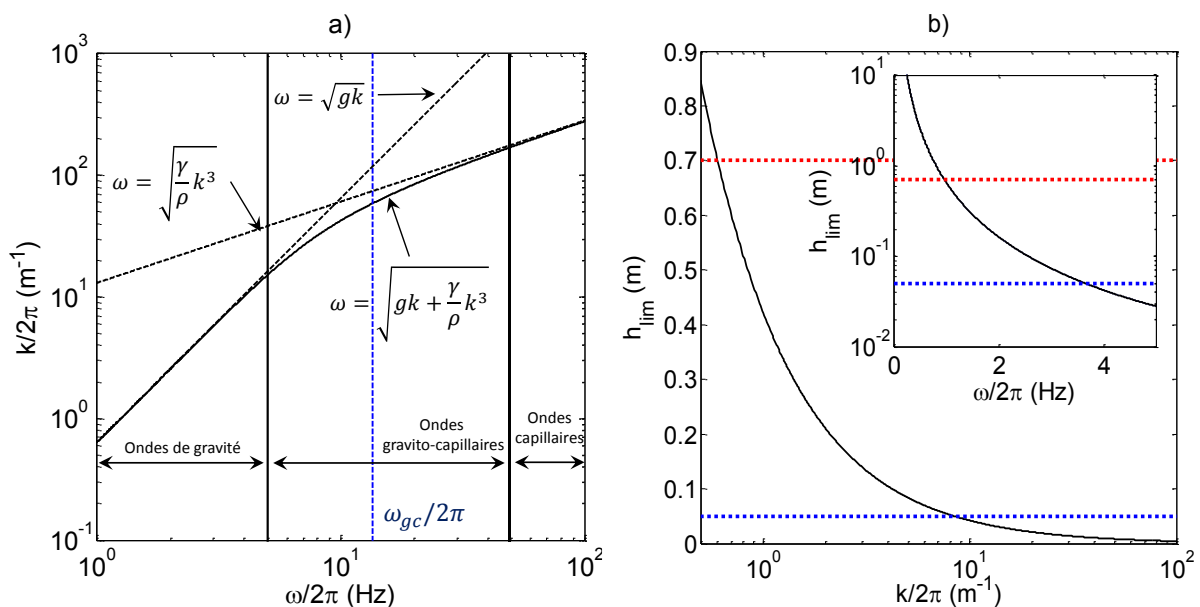


Figure I-2 :a) Relation de dispersion linéaire pour des ondes à la surface de l'eau : $g = 9.81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ et $\gamma/\rho = 7.2 \times 10^{-5} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}$. b) Profondeur limite de l'approximation en eau profonde en fonction du nombre d'onde $h_{lim} = \text{atanh}(0.9)/k$. La sous figure représente la même courbe transposée dans l'espace ω avec la relation de dispersion linéaire. Les courbes pointillées rouges et bleues représentent les profondeurs effectives des deux expériences détaillées par la suite (rouge : bassin de Coriolis, bleu : petite cuve à onde).

Dans le cas de l'eau pure, la gravité domine pour des ondes ayant des fréquences inférieures à $\omega/2\pi < 5 \text{ Hz}$ ($gk \gg \gamma/\rho k^3$) tandis que la capillarité domine pour $\omega/2\pi > 50 \text{ Hz}$ ($\gamma/\rho k^3 \gg gk$). Pour les ondes comprises entre ces deux bornes, il est nécessaire de conserver la relation de dispersion complète. La Figure I-2 b) trace la limite de l'approximation d'eau profonde en fonction des fréquences k et ω . On remarque que celle-ci est valide pour des fréquences supérieures à 1 Hz dans la cuve de Coriolis ainsi que pour des fréquences supérieures à 4 Hz dans la petite cuve.

I.1.1.2 Vitesse de phase et de groupe

Connaissant la relation de dispersion, il est possible d'obtenir la vitesse de phase $v_\phi = \omega/k$ et de groupe $v_g = \partial\omega/\partial k$. La Figure I-3 les montre pour les deux régimes qui vont être traités dans cette thèse : le régime gravito-capillaire (Partie II) et le régime gravitaire (Partie III).

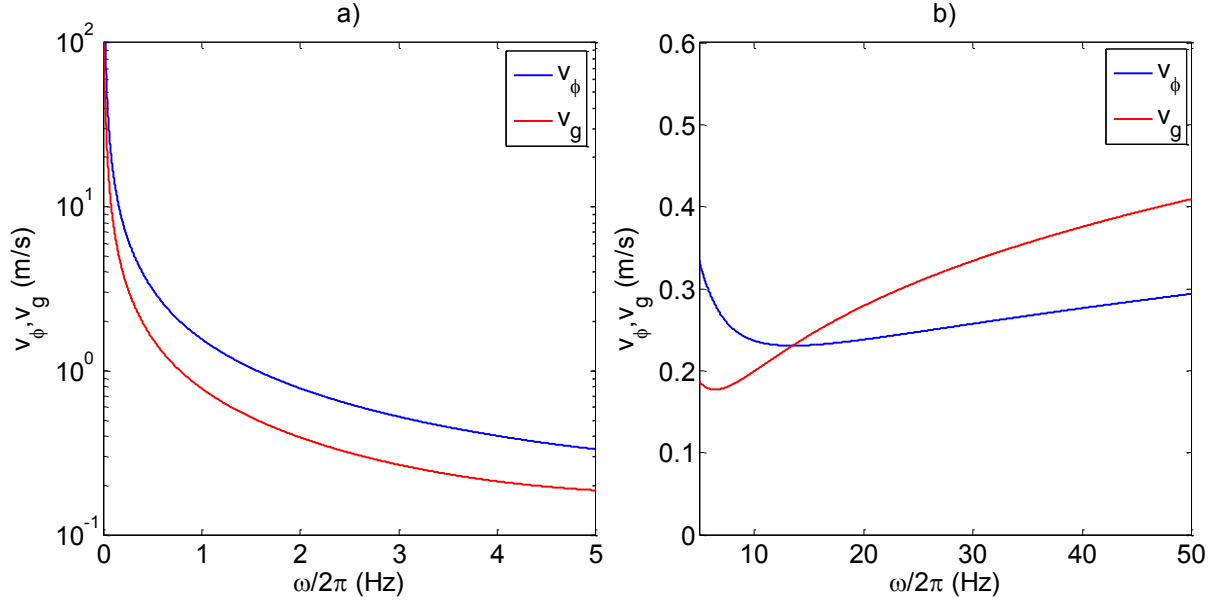


Figure I-3 : a) Vitesse de phase (bleu) et de groupe (rouge) des ondes linéaires dans le régime de gravité pur. b) Similaire à a) mais dans la région gravito capillaire.

On note la présence d'un point particulier en ω_{gc} (k_{gc}) où les deux vitesses sont égales. Dans cette situation les ondes sont dites non-dispersives. On observe également que la vitesse de phase est pratiquement constante sur une large plage de fréquences dans le régime gravito-capillaire.

I.1.1.3 Discrétisation des modes

Il est connu que la taille finie d'un domaine entraîne une discrétisation des longueurs d'ondes au sein de ce dernier. Les solutions peuvent être calculées en imposant une vitesse tangentielle nulle aux parois :

$$\frac{\partial\phi}{\partial x_{x=0}} = 0 \quad \frac{\partial\phi}{\partial x_{x=l}} = 0 \quad \frac{\partial\phi}{\partial y_{y=0}} = 0 \quad \frac{\partial\phi}{\partial x_{y=L}} = 0 \quad I-11$$

Dans un bassin rectangulaire de taille $l \times L$, les vecteurs d'onde discrets sont alors définis par :

$$\mathbf{k} = \left(\frac{m\pi}{l}, \frac{n\pi}{L} \right), \text{ avec } n, m \in \mathbb{N} \quad I-12$$

Dans le cas de la cuve utilisée pour l'expérience en régime gravito-capillaire, on obtient la discrétisation des modes $\mathbf{k}^* = \left(\frac{\pi}{l}, \frac{\pi}{L} \right)$ (équation I-12 avec $m, n = 1$):

$$\begin{aligned} k_x^*/2\pi &= 0.87 \text{ m}^{-1} \\ k_y^*/2\pi &= 1.35 \text{ m}^{-1} \\ |\mathbf{k}^*|/2\pi &= \sqrt{k_x^{*2} + k_y^{*2}}/2\pi = 1.61 \text{ m}^{-1} \end{aligned} \quad I-13$$

Les solutions pour un bassin circulaire de rayon R nécessitent un passage en coordonnées cylindriques (r, θ) où $x = r\cos(\theta), y = r\sin(\theta)$. Les solutions pour la hauteur suivent une fonction de Bessel. Les conditions limites aux parois impliquent que la dérivée de cette dernière soit

nulle : $J'_s(kR) = 0$. Il existe alors deux types de modes, les symétriques correspondants à $J'_0(kR) = 0$ et les antisymétriques correspondants à $J'_1(kR) = 0$. Leur espacement k^* dans la cuve de Coriolis qui fait $6.5m$ de rayon est d'environ: $k^*/2\pi \approx 0.08 m^{-1}$.

1.1.1.4 Energie et spectres de puissances

L'énergie cinétique et potentielle des ondes gravito-capillaires peut s'exprimer de la sorte :

$$E_c = \frac{1}{2} \int \rho |\nabla \phi|^2 dx dy dz \quad I-14$$

$$E_p = E_s + E_g = \frac{1}{2} \int \frac{\gamma}{\rho} |\mathbf{k}|^2 \eta^2 dx dy + \frac{1}{2} \int \rho g \eta^2 dx dy$$

Dans le cas d'une onde harmonique, en moyenne l'énergie cinétique est égale à l'énergie potentielle : $\langle E \rangle = \langle E_c \rangle + \langle E_p \rangle = 2\langle E_p \rangle$. En passant dans l'espace de Fourier on peut alors obtenir une expression de l'énergie simplifiée:

$$E = \frac{1}{2} \int \left(\frac{\gamma}{\rho} \|\mathbf{k}\|^2 + \rho g \right) |\hat{\eta}(\mathbf{k})|^2 d\mathbf{k} \quad I-15$$

Avec $\hat{\eta}(\mathbf{k})$ la transformée de Fourier :

$$\hat{\eta}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-T/2}^{T/2} \eta(t) e^{i\omega t} dt \quad I-16$$

$$\hat{\eta}(\mathbf{k}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \iint_{-L/2}^{L/2} \eta(\mathbf{x}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d\mathbf{x}$$

Il est possible de réduire le nombre de degrés de liberté en réalisant une intégration spatiale du spectre. Ainsi, pour un système isotrope en \mathbf{k} il vient : $\int |\hat{\eta}(k)|^2 dk = \int |\hat{\eta}(\mathbf{k})|^2 d\mathbf{k}$ avec $|\hat{\eta}(k)|^2 = 2\pi k |\hat{\eta}(\mathbf{k})|^2$. Finalement, on peut écrire :

$$E = \int E_k dk = \int \frac{1}{2} \left(\frac{\gamma}{\rho} k^2 + \rho g \right) |\hat{\eta}(k)|^2 dk \quad I-17$$

La quantité mesurée pour la caractérisation des vagues est généralement la déformation de la surface $\eta(\mathbf{x}, t)$. Il est alors possible d'exprimer le spectre de puissance dans l'espace de Fourier comme étant:

$$E^\eta(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} |\hat{\eta}(\omega)|^2 \quad I-18$$

$$E^\eta(\mathbf{k}) = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L^2} |\hat{\eta}(\mathbf{k})|^2$$

Numériquement, il est obligatoire d'utiliser des fenêtres T et L ayant une taille finie. On a donc accès uniquement à une estimation du spectre. En réalisant l'intégration angulaire en \mathbf{k} , on obtient $E^\eta(k) = 2\pi k E^\eta(\mathbf{k})$. En utilisant les relations I-17 et I-18 est possible de relier le spectre de puissance mesurée avec le spectre d'énergie :

$$E_k = \frac{1}{2} \left(\frac{\gamma}{\rho} k^2 + \rho g \right) E^\eta(k) \quad I-19$$

Similairement, en utilisant $E_k dk = E_\omega d\omega$, il vient dans le domaine fréquentiel :

$$E_\omega = \frac{1}{2} \left(\frac{\gamma}{\rho} k^2 + \rho g \right) E^\eta(\omega) \quad I-20$$

Ce changement utilise la relation de dispersion linéaire et n'est donc valide uniquement pour de faibles intensités de non-linéarité.

I.1.2 Turbulence faible

I.1.2.1 Historique

La théorie linéaire présentée précédemment ne tient pas compte des possibles interactions entre les ondes. L'étude des effets non-linéaires pour les ondes de surface a été initiée par Stokes au milieu du 19ème siècle [8]. En utilisant une approche perturbatrice, il trouva la solution au système I-2 dans le cas particulier d'une seule onde progressive et dans un régime de gravité en profondeur infinie. Cette solution peut être représentée comme la superposition d'une onde linéaire principale ainsi que d'un ensemble d'ondes harmoniques (ondes liées). Plus tard, en incorporant les termes d'ordre 3 dans l'expansion de Stokes, Benjamin & Feir ont démontré que cette solution de Stokes est instable [9]. Cette instabilité modulationnelle, traditionnellement connue sous le nom d'instabilité de Benjamin-Feir, conduit à la désintégration de l'onde principale en une multitude d'ondes de fréquences proches. Pendant la même période, l'analyse de Stokes a été reproduite pour les ondes gravito-capillaires [10] ainsi que pour des ondes purement capillaires [11].

L'étude des interactions non-linéaires pour un train d'ondes a commencé plus tard en 1960 avec les travaux de Phillips sur les ondes de gravité [12], [13]. En utilisant une méthode d'expansion perturbatrice similaire à celle employée par Stokes, il montra qu'au troisième ordre, un groupe de quatre ondes peut échanger de l'énergie par des interactions résonantes. Il démontra que l'amplitude d'une des ondes présentes dans le groupe d'interaction augmente alors linéairement avec le temps, ceci dans la limite de validité de l'expansion. McGoldrick [14] puis Simmons [15] étendirent ce travail aux ondes gravito-capillaires en montrant que pour celles-ci, les interactions deviennent possibles à l'ordre inférieur avec des triades résonantes (interactions à 3-ondes).

Durant cette même période, un intérêt débuta pour la compréhension statistique des interactions non-linéaires d'un ensemble de vagues aléatoires. Sur le même principe des interactions résonantes, plusieurs études parurent simultanément dans les domaines de la physique des plasmas ainsi que de l'océanographie. Dans le cas des ondes de gravité, on peut citer certains des nombreux travaux de Zakharov [16–18] ou encore ceux de Hasselmann [19,20]. Bien que donnant des résultats similaires, ces deux approches sont sensiblement différentes. En effet, les travaux de Hasselmann suivent l'analyse proposée par Stokes qui consiste en une perturbation autour d'un niveau d'équilibre moyen. Zakharov adopte quant à lui une approche perturbatrice directe de la surface libre, avec l'utilisation de l'Hamiltonien. C'est cette dernière qui sera décrite par la suite, en rapportant le travail effectué par Nazarenko et Newell [3,6,21,22].

I.1.2.2 Equation générale

La première étape consiste à obtenir l'équation non-linéaire du système d'onde considéré. Dans la plupart des cas il est plus simple de reformuler les équations dans l'espace de Fourier et selon la formulation Hamiltonienne qui décrit l'énergie de l'ensemble du système :

$$i \frac{\partial a_{\mathbf{k}}}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial a_{\mathbf{k}}^*} \quad I-21$$

Avec H l'Hamiltonien du système et $a_{\mathbf{k}}$ les variables canoniques représentant les amplitudes complexes des ondes dans l'espace de Fourier. Dans un second temps, on fait l'hypothèse que les non-linéarités sont suffisamment faibles pour effectuer une séparation d'échelles temporelles entre les oscillations linéaires rapides des ondes et les transferts non-linéaires supposés lents. On peut exprimer le temps linéaire comme $T_{\omega} = 2\pi/\omega_k$ et le temps non-linéaire comme : [21]

$$T_{\omega}^{NL} = 2\pi/\epsilon^{2(N-2)}\omega \quad I-22$$

Avec ϵ une indication de l'intensité des non-linéarités et $N \geq 3$ le nombre d'ondes présentes dans l'interaction. Ainsi, ϵ doit être suffisamment faible pour satisfaire la séparation d'échelle $T_\omega \ll T_\omega^{NL}$ ou $1/\epsilon^{2(N-2)} \gg 1$.

Si c'est le cas, il est alors possible d'exprimer l'Hamiltonien par un développement perturbatif :

$$H = H_1 + \epsilon H_2 + \epsilon^2 H_3 + \dots \quad I-23$$

En injectant ce développement de H dans l'équation d'Hamilton I-21, on obtient la relation générale rendant compte des possibles interactions non-linéaires entre les ondes :

$$\begin{aligned} \frac{\partial a_{\mathbf{k}_1}}{\partial t} &= i\omega a_{\mathbf{k}_1} \\ + \epsilon \int V_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3} a_{\mathbf{k}_2} a_{\mathbf{k}_3} \delta(\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_1) d\mathbf{k}_2 d\mathbf{k}_3 & \\ + \epsilon^2 \int V_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4} a_{\mathbf{k}_2} a_{\mathbf{k}_3} a_{\mathbf{k}_4} \delta(\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4 - \mathbf{k}_1) d\mathbf{k}_2 d\mathbf{k}_3 d\mathbf{k}_4 & \\ + \dots & \end{aligned} \quad I-24$$

Avec $V_{\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_N}$ un coefficient d'interaction entre N ondes et δ la fonction de Dirac. Le premier terme de droite représente les solutions linéaires du système. Le second terme fait part des interactions à 3 ondes (triades) et le suivant des interactions à 4 ondes. Dans le cas des ondes de surface, il n'est pas nécessaire de poursuivre le développement aux ordres supérieurs, seul le premier terme non-nul sera considéré. Comme il le sera expliqué plus loin, il est de $N = 3$ en régime capillaire, et $N = 4$ en régime gravitaire. Ce système n'est malheureusement pas solvable analytiquement. Il est néanmoins possible d'en extraire des solutions statistiques en faisant quelques hypothèses : ceci constitue l'approche de la turbulence faible.

I.1.2.3 Moments et cumulants

La recherche des solutions statistiques revient à décrire l'évolution au temps long des moments $M_N = \langle \eta(\mathbf{x})\eta(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \dots \eta(\mathbf{x} + \mathbf{r}^{N-2}) \rangle$, où $\langle \ \rangle$ dénote une moyenne statistique sur les réalisations qui, dans le cas d'une hypothèse d'homogénéité spatiale, est équivalente à une moyenne spatiale. Pour des raisons pratiques, il est plus simple d'utiliser les cumulants R_N reliés à M_N selon les relations suivantes :

$$\begin{aligned} M_1 &= \langle \eta(\mathbf{x}) \rangle = R_1 \\ M_2(\mathbf{r}) &= \langle \eta(\mathbf{x})\eta(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \rangle = R_2(\mathbf{r}) + R_1 R_1(\mathbf{r}) \\ M_3(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= \langle \eta(\mathbf{x})\eta(\mathbf{x} + \mathbf{r})\eta(\mathbf{x} + \mathbf{r}') \rangle \\ &= R_3(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + R_2(\mathbf{r})R_1(\mathbf{r}') + R_2(\mathbf{r}')R_1(\mathbf{r}) + R_2(\mathbf{r}' - \mathbf{r})R_1 + R_1 R_1(\mathbf{r})R_1(\mathbf{r}') \end{aligned} \quad I-25$$

Dans le cas des ondes de surface, $M_1 = \langle \eta(\mathbf{x}) \rangle = R_1 = 0$. On peut donc simplifier le système de la sorte :

$$\begin{aligned} M_2(\mathbf{r}) &= R_2(\mathbf{r}) \\ M_3(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= R_3(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \end{aligned} \quad I-26$$

Le passage dans l'espace de Fourier donne alors :

$$\begin{aligned} Q^2(\mathbf{k}) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int R_2(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d\mathbf{r} \\ Q^3(\mathbf{k}, \mathbf{k}') &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int R_3(\mathbf{r}, \mathbf{r}') e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}'} d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \end{aligned} \quad I-27$$

I.1.2.4 Equation cinétique

Une fois l'équation générale et les cumulants obtenus, l'étape suivante est d'exprimer l'équation cinétique en posant plusieurs hypothèses. Deux méthodes donnant des résultats équivalents existent. La première est la méthode dite RPA (« Random Phase Amplitude ») qui suppose un champ de vagues aléatoires ayant une distribution gaussienne en amplitude et en phase. La seconde est basée sur la hiérarchie des cumulants et ne fait pas d'approximation sur la distribution des ondes. Dans les deux cas il faut commencer par trouver la relation entre les cumulants Q^N et les amplitudes de Fourier $a_{\mathbf{k}}$. En utilisant I-25, I-26 et I-27 on peut alors écrire pour $\langle a_{\mathbf{k}}a_{\mathbf{k}'} \rangle$:

$$\begin{aligned} \langle a_{\mathbf{k}}a_{\mathbf{k}'} \rangle &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int \langle \eta(\mathbf{x})\eta(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \rangle e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - i\mathbf{k}'\cdot(\mathbf{x}+\mathbf{r})} d\mathbf{x}d(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int R_2(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d\mathbf{r} \int e^{-i(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\cdot\mathbf{x}} d\mathbf{x} \\ &= \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}') Q^2(\mathbf{k}') = \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}') Q^2(\mathbf{k}) \end{aligned} \quad I-28$$

Similairement, on obtient l'expression suivante pour le moment d'ordre 3 $\langle a_{\mathbf{k}}a_{\mathbf{k}'}a_{\mathbf{k}''} \rangle$:

$$\langle a_{\mathbf{k}}a_{\mathbf{k}'}a_{\mathbf{k}''} \rangle = \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}' + \mathbf{k}'') Q^3(\mathbf{k}', \mathbf{k}'') \quad I-29$$

La construction de la hiérarchie des cumulants se fait en multipliant l'équation cinétique I-24 par $a_{\mathbf{k}'}$ (et $a_{\mathbf{k}'}a_{\mathbf{k}''}$) puis en moyennant spatialement. En utilisant I-28 et I-29, il vient alors :

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q^2(\mathbf{k})}{\partial t} &= f_2(Q^2(\mathbf{k}), Q^3(\mathbf{k}, \mathbf{k}'), Q^4(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}''), t) \\ \frac{\partial Q^3(\mathbf{k}, \mathbf{k}')}{\partial t} &= f_3(Q^2(\mathbf{k}), Q^3(\mathbf{k}, \mathbf{k}'), Q^4(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}''), t) \end{aligned} \quad I-30$$

Le détail des fonctions f_N est visible dans [3]. En supposant la séparation d'échelle entre le temps linéaire et non-linéaire, il est alors possible d'exprimer les cumulants Q^N en une série asymptotique en puissance de ϵ :

$$Q^N(\mathbf{k}, \dots, \mathbf{k}^{(N-1)}) = q_0^N + \epsilon q_1^N + \epsilon^2 q_2^N + \dots \quad I-31$$

Cette dernière est injectée dans I-30 afin de le résoudre. On regarde ensuite le comportement des solutions aux temps longs en faisant plusieurs hypothèses. La première principale consiste à supposer le système infini pour éviter la discrétisation des modes dans l'espace de Fourier et ainsi assurer les conditions de résonances. Une fois cette première hypothèse réalisée, il est nécessaire de faire une seconde hypothèse à propos des non-linéarités : celles-ci doivent tendre vers zéro: $\epsilon \rightarrow 0$. Il existe également d'autres hypothèses : le système doit être homogène spatialement ; à l'état initial, deux points distants doivent être statistiquement non-corrélés; q_0^N doit être constant ou varier très lentement en comparaison du temps linéaire T_ω (séparation d'échelle temporelle).

Il vient alors l'équation cinétique suivante :

$$\frac{\partial n_{\mathbf{k}}}{\partial t} = T(n_{\mathbf{k}}) = \epsilon^2 T_2(n_{\mathbf{k}}) + \epsilon^4 T_4(n_{\mathbf{k}}) + \dots \quad I-32$$

Avec $n_{\mathbf{k}} = \langle a_{\mathbf{k}}a_{\mathbf{k}}^* \rangle = Q^2(\mathbf{k})$. Le terme $T_2(n_{\mathbf{k}})$ fait part des interactions résonantes à 3 ondes tandis que $T_4(n_{\mathbf{k}})$ concerne les interactions résonantes à 4-ondes. Pour des ondes qui admettent des solutions à 3-ondes (comme par exemple les ondes capillaires), on néglige $T_4(n_{\mathbf{k}})$ et on obtient l'expression suivante :

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_{\mathbf{k}_1}}{\partial t} &= \epsilon^2 4\pi \int |V_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3}|^2 \delta(\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 \\ &\quad - \mathbf{k}_1) d\mathbf{k}_2 d\mathbf{k}_3 n_{\mathbf{k}_1} n_{\mathbf{k}_2} n_{\mathbf{k}_3} F(\omega_1, \omega_2, \omega_3) \end{aligned} \quad I-33$$

$$\begin{aligned}
 F(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = & \left(\frac{1}{n_{\mathbf{k}_1}} - \frac{1}{n_{\mathbf{k}_2}} - \frac{1}{n_{\mathbf{k}_3}} \right) \delta(\omega_1 - \omega_2 - \omega_3) \\
 & + \left(\frac{1}{n_{\mathbf{k}_1}} - \frac{1}{n_{\mathbf{k}_2}} + \frac{1}{n_{\mathbf{k}_3}} \right) \delta(\omega_2 - \omega_1 - \omega_3) \\
 & + \left(\frac{1}{n_{\mathbf{k}_1}} + \frac{1}{n_{\mathbf{k}_2}} - \frac{1}{n_{\mathbf{k}_3}} \right) \delta(\omega_3 - \omega_1 - \omega_2)
 \end{aligned} \tag{I-34}$$

On remarque la double condition de résonance en k et ω donnant lieu aux classiques équations d'interactions résonantes triadiques :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{k}_1 &= \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 \\
 \omega_1 &= \omega_2 + \omega_3
 \end{aligned} \tag{I-35}$$

Dans la situation où les interactions à 3-ondes ne présentent pas de solutions (par exemple pour les ondes de gravité), on a $T_2(n_{\mathbf{k}}) = 0$. Il faut alors considérer les interactions à 4-ondes $T_4(n_{\mathbf{k}})$ donnant l'équation cinétique suivante :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial n_{\mathbf{k}_1}}{\partial t} = & \epsilon^4 4\pi \int |V_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4}|^2 n_{\mathbf{k}_1} n_{\mathbf{k}_2} n_{\mathbf{k}_3} n_{\mathbf{k}_4} \left(\frac{1}{n_{\mathbf{k}_1}} + \frac{1}{n_{\mathbf{k}_2}} - \frac{1}{n_{\mathbf{k}_3}} - \frac{1}{n_{\mathbf{k}_4}} \right) \delta(\omega_1 + \omega_2 \\
 & - \omega_3 - \omega_4) \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_4) d\mathbf{k}_2 d\mathbf{k}_3 d\mathbf{k}_4
 \end{aligned} \tag{I-36}$$

Cette fois-ci les interactions résonantes peuvent s'écrire ainsi :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 &= \mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4 \\
 \omega_1 + \omega_2 &= \omega_3 + \omega_4
 \end{aligned} \tag{I-37}$$

Au moyen de calculs laborieux, il est possible de trouver les expressions analytiques des coefficients de couplage $V_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3}$ et $V_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4}$. Pour les ondes capillaires et gravitaires voir par exemple [23].

1.1.2.5 Propriétés de l'équation cinétique et solutions de Zakharov

L'équation cinétique présente plusieurs propriétés remarquables :

- Le mécanisme de transfert d'énergie ne se fait qu'au travers d'interactions résonantes.
- L'équation I-36 admet une solution d'équilibre à flux d'énergie nul correspondant à une équipartition de l'énergie. Celle-ci n'est cependant pas adaptée à notre cas où la présence d'un flux d'énergie est nécessaire.
- En l'absence de dissipation, l'énergie E est conservée :

$$E = \frac{1}{2} \int \omega_{\mathbf{k}} n_{\mathbf{k}} d\mathbf{k} = \int E_{\mathbf{k}} d\mathbf{k} = \text{cte} \tag{I-38}$$

- Il existe une solution stationnaire décrivant un flux d'une quantité conservée (Energie E en particulier). Cette solution a été initialement obtenue par Zakharov et consiste en une avancée notable dans l'étude de la turbulence faible. C'est celle-ci qui va nous intéresser par la suite.

Les solutions de Zakharov permettent de prédire le développement d'un spectre dans un système où l'énergie est conservée. En pratique, un système est généralement composé d'une ou plusieurs sources d'énergie émettant un flux P , ainsi qu'un ou plusieurs puits, dissipant ce flux d'énergie. Les solutions de Zakharov étant supposées conserver l'énergie, on fait l'hypothèse d'une séparation d'échelle entre les puits et les sources dans l'espace de Fourier. Les solutions s'appliquant ainsi uniquement à la zone inertielle permettant le transfert d'énergie entre les puits et les sources : c'est la cascade d'énergie. Cette dernière est généralement directe avec un transfert des grandes aux petites échelles (situation générale s'appliquant pour les ondes de surface en 2D), mais peut aussi être inverse en allant des petites aux grandes échelles (situation plus rare s'appliquant par exemples aux ondes de gravité dans une configuration unidirectionnelle 1D).

Il est possible d'obtenir rapidement la forme des solutions de Zakharov par analyse dimensionnelle. Pour plus de simplicité, l'hypothèse d'un système isotrope est faite et permet de réduire le nombre de degrés de liberté en faisant une intégration angulaire: $\int E_k dk = \int E_{\mathbf{k}} d\mathbf{k}$. L'énergie étant conservée, on peut écrire :

$$\frac{\partial E_k}{\partial t} = \frac{\partial P}{\partial k} \quad I-39$$

En utilisant la relation entre l'action d'onde et l'énergie : $E_k = n_k \omega$. On a comme approximation:

$$P_k \sim \frac{\partial E_k}{\partial t} dk \sim \frac{\partial n_k \omega}{\partial t} dk \quad I-40$$

En utilisant les équations cinétiques I-33 et I-36, on peut écrire en généralisant pour un processus à N ondes :

$$\frac{\partial n_k}{\partial t} dk \sim n_k^{(N-1)} \quad I-41$$

Puis, par analyse dimensionnelle on obtient les relations suivantes :

$$E_k \sim P^{1/(N-1)} \quad I-42$$

En cherchant les solutions stationnaires aux équations cinétiques I-33 et I-36, on obtient ainsi une expression générale pour les solutions de Zakharov :

$$n_k = c P^{1/(N-1)} k^{-\alpha} \quad I-43$$

Avec c et α des constantes liées aux types d'ondes considérées.

I.1.2.6 Interaction à N-ondes ?

Avant de continuer la recherche des solutions, il est essentiel de connaître le nombre d'ondes minimum N pouvant donner lieu à une interaction. Le plus faible N possible est relié à l'ordre $(N - 1)$ des non-linéarités des équations générales. Dans le cas des ondes de surface, les termes non-linéaires étant d'ordre 2, il faut considérer au minimum $N = 3$. A cette condition s'ajoute celle de la présence de solutions non triviales aux équations résonantes. Ces dernières obtenues en I-35 et I-37 pour $N = 3$ et $N = 4$) peuvent être généralisées de la sorte :

$$\begin{aligned} \omega_1 \pm \omega_2 \pm \dots \pm \omega_N &= 0 \\ \mathbf{k}_1 \pm \mathbf{k}_2 \pm \dots \pm \mathbf{k}_N &= 0 \end{aligned} \quad I-44$$

Où ω et k sont reliés par la relation de dispersion des ondes (I-8). Lorsque les ondes suivent une relation de dispersion de simple puissance du type $\omega \propto k^\alpha$, il est possible d'évaluer rapidement l'existence de solutions. En effet, il peut être montré géométriquement que $N = 3$ n'est possible que si $\alpha \geq 1$. Ainsi, pour les ondes de capillarité pure ($\alpha = 3/2$) il existe des solutions à 3 ondes. En revanche, pour les ondes de gravité pure $\alpha = 1/2$ et $N = 4$ doit être considéré. Le cas des ondes gravito-capillaires est plus complexe et présente la particularité d'interactions à 3 ondes « non-locales ». Les détails de ces solutions seront présentés plus loin, en introduction de la partie expérimentale traitant de l'observation des interactions résonantes (II.3.1.1). A noter que dans le cas des ondes de surface, les coefficients d'interactions $V_{\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_N}$ sont non nuls et ne contribuent donc pas à la détermination de N en interdisant des couplages.

I.1.2.7 Prédiction dimensionnelle des solutions de Zakharov

Il est possible de poursuivre l'analyse dimensionnelle et d'obtenir les solutions de Zakharov dans le cas où le système est caractérisé par un unique paramètre dimensionnel λ . Cela permet de simplifier le

problème en évitant ainsi la dérivation complète de l'équation cinétique. Cependant, cela nécessite un système ayant une relation de dispersion en loi de puissance unique du type : $\omega = \lambda k^\alpha$.

1.1.2.7.1 Cascade d'énergie

Une première solution est associée à la conservation de l'énergie E_k . On commence par définir la dimension de l'énergie en posant la masse volumique $\rho = 1$. On a alors un système où la masse et le volume ont les mêmes dimensions. La masse peut donc être considérée comme une longueur $[L]$ et en utilisant I-38 il vient:

$$[E_k] = \frac{[L]^{6-d}}{[t]^2} = \frac{[L]^4}{[t]^2} \quad I-45$$

Avec d représentant la dimension de l'espace où est concentrée l'énergie. Dans le cas des ondes de surface, malgré les trois dimensions des équations générales, l'énergie est concentrée à la surface et peut être considérée comme étant de dimension $d = 2$.

A partir de I-39 et I-45, il vient pour le flux d'énergie P_k :

$$[P_k] = \frac{[L]^3}{[t]^3} \quad I-46$$

Et le paramètre dimensionnel λ a pour dimension :

$$[\lambda] = [\omega][k]^{-\alpha} = [t]^{-1}[L]^\alpha \quad I-47$$

Ainsi, en utilisant I-42, I-45, I-46 et I-47 il vient l'expression pour E_k :

$$E_k \sim \lambda^x P^{1/(N-1)} k^y \quad I-48$$

Avec :

$$x = 2 - \frac{3}{N-1} \quad y = d - 6 + 2\alpha + \frac{5-d-3\alpha}{N-1} \quad I-49$$

1.1.2.7.2 Cascade d'action d'onde

Lorsque le nombre d'ondes en interaction N est pair, il existe une seconde quantité qui peut être conservée : l'action d'onde. Celle-ci est définie par :

$$\mathcal{N} = \int \frac{E_k}{\omega_k} d\mathbf{k} \quad I-50$$

Cela peut être vu comme la conservation du nombre de paquets d'ondes (« particules ») dans une collision du type $N/2 \rightarrow N/2$. Ainsi, il existe un second flux de particules conservées, en complément de celui de l'énergie. Il est alors possible d'effectuer la même analyse dimensionnelle que précédemment pour obtenir le spectre d'énergie issue de ce flux.

Soit ζ le flux d'action d'onde ayant pour dimension $[\zeta] = [P/\omega] = l^{-5-d} t^{-2}$. Similairement à I-42, on peut alors écrire $E_k \sim \zeta^{1/(N-1)}$ et ainsi obtenir :

$$E_k \sim \lambda^x \zeta^{1/(N-1)} k^y \quad I-51$$

Avec

$$x = 2 - \frac{2}{N-1} \quad y = d - 6 + \frac{5-d-2\alpha(N-2)}{N-1} \quad I-52$$

I.1.2.7.3 Ondes capillaires

Les ondes capillaires constituent un système pouvant être traité par cette approche dimensionnelle. En effet, la relation dispersion suit une loi de puissance simple : $\omega = \gamma/\rho k^{3/2}$, donnant $\alpha = 3/2$. Les interactions sont dominées par des triades $N = 3$ et $d = 2$. En utilisant I-48 et I-49 il vient naturellement le spectre de Zakharov-Filonenko [16]:

$$E_k \sim \sqrt{P_k} \frac{\gamma^{1/4}}{\rho} k^{-7/4} \quad I-53$$

Celui-ci peut être ramené au spectre de puissance traditionnellement mesurée avec la relation I-19 et I-20 dans le cas où $g = 0$. On a alors les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} E^\eta(k) &\sim \sqrt{P} \left(\frac{\gamma}{\rho}\right)^{-3/4} k^{-15/4} \\ E^\eta(\omega) &\sim \sqrt{P} \left(\frac{\gamma}{\rho}\right)^{1/6} \omega^{-17/6} \end{aligned} \quad I-54$$

Où $E^\eta(\omega)$ est obtenue en utilisant la relation de dispersion linéaire $\omega = \gamma/\rho k^{3/2}$.

I.1.2.7.4 Ondes de gravité

Les ondes de gravité peuvent être traitées similairement aux ondes capillaires. La relation de dispersion suit une loi de puissance simple : $\omega = \sqrt{gk}$ donnant $\alpha = 1/2$. Les interactions étant à 4 ondes $N = 4$, on obtient une cascade d'énergie ainsi qu'une cascade inverse d'action d'onde. En utilisant I-48 et I-49, pour la cascade directe on a alors les solutions de Zakharov-Filonenko [18]:

$$\begin{aligned} E_k &\sim P^{1/3} g^{1/2} k^{-5/2} \\ E^\eta(k) &\sim P^{1/3} g^{-1/2} k^{-5/2} \\ E^\eta(\omega) &\sim P^{1/3} g \omega^{-4} \end{aligned} \quad I-55$$

Puis en utilisant I-51 et I-52 on obtient les spectres de Zakharov- Zaslavskii [24] pour la cascade inverse d'action d'onde:

$$\begin{aligned} E_k &\sim \zeta^{1/3} g^{2/3} k^{-7/3} \\ E^\eta(k) &\sim \zeta^{1/3} g^{-1/3} k^{-7/3} \\ E^\eta(\omega) &\sim \zeta^{1/3} g \omega^{-11/3} \end{aligned} \quad I-56$$

Le passage aux spectres de puissance $E^\eta(\omega)$ et $E^\eta(k)$ a été fait en portant la tension de surface à zéro $\gamma = 0$ dans les équations I-19 et I-20. En utilisant l'argument de Fjørtoft [21], il peut être montré que pour $\alpha > 0$ la cascade d'énergie est directe et que la cascade d'action d'onde est inverse. On a alors dans cette situation un système à double cascades, avec la génération d'un spectre de part et d'autre de l'échelle d'injection du flux P .

I.1.2.7.5 « Breakdown » de la turbulence faible

Comme il a été dit précédemment, la turbulence faible ne s'applique que sous certaines hypothèses, dont la principale est d'avoir un système faiblement non-linéaire. Dans l'idée de pouvoir estimer la limite de validité, Biven et al. [25] ont regardé l'évolution de l'équation cinétique sous certaines conditions. La plus importante consiste à considérer que les interactions sont principalement locales, c'est-à-dire que $k_1 \sim k_2 \sim \dots \sim k_N$. Ainsi il est possible de déduire un k_{NL} limite pour la turbulence faible. Pour la cascade d'énergie il vient:

$$k_{NL} = \left(\frac{P}{\lambda^3}\right)^{-1/(5-d-3\alpha)} \quad I-57$$

Dans le cas des ondes de capillarité, on a alors une limite basse k_{NL}^c où les ondes seront considérées faiblement non-linéaires si $k > k_{NL}^c$:

$$k_{NL}^c \sim P^{2/3} \frac{\rho}{\gamma} \quad I-58$$

Dans le cas des ondes de gravité on obtient une limite haute k_{NL}^g où les ondes seront considérées faiblement non-linéaires si $k < k_{NL}^g$:

$$k_{NL}^g \sim P^{-2/3} g \quad I-59$$

On remarque que l'exposant du flux P est inversé pour les deux types d'ondes. Lorsque le flux injecté augmente, k_{NL}^c augmente alors que k_{NL}^g diminue. Cela est la traduction de l'intensité des non-linéarités qui augmente avec k pour des ondes de gravité. Ainsi, plus la puissance injectée augmente, plus les non-linéarités augmentent, et plus la limite est atteinte rapidement. A l'inverse, pour les ondes capillaires, les non-linéarités diminuent avec l'augmentation de k .

Lorsque la limite k_{NL} est dépassée, il n'est alors plus possible d'utiliser la théorie de la turbulence faible.

I.1.2.8 Effets de la discrétisation

L'une des hypothèses principales de la turbulence faible est la nécessité de satisfaire les solutions résonantes du système I-44. Dans le cas d'un système fini, il a été montré précédemment (I.1.1.3) que l'espace des \mathbf{k} se discrétise avec un espacement k^* dépendant de la taille et de la géométrie du système. Il vient alors que certaines solutions deviennent impossibles à obtenir, empêchant ainsi tout échange d'énergie. Que ce soit dans la nature, en laboratoire ou dans des simulations numériques, les systèmes considérés ne sont jamais infinis et les solutions peuvent en être perturbées. Des alternatives ont donc été proposées pour permettre une description plus réaliste de la turbulence d'onde.

Le travail a été initié avec un modèle d'agrégation (« clustering ») développé par Kartashova [26–30]. La discrétisation k^* implique la création de plusieurs sous-groupes (cluster) contenant des ensembles d'ondes. Ces dernières ne pouvant alors interagir qu'uniquement entre elles au sein d'un même sous-groupe. Il n'y a alors pas de transferts possibles d'un sous-groupe à un autre. Il a été montré en particulier que dans les cas des ondes capillaires, chaque sous-groupe n'est consisté que d'une seule triade distincte, interdisant ainsi l'existence d'une cascade d'énergie au travers de ces interactions.

Dans la suite de Kartashova, Pushkarev et al. [31] proposent un modèle dit de « turbulence figée » (« Frozen turbulence ») qui dit que la cascade d'énergie ne peut se produire que si l'intensité des non-linéarités ϵ du système est suffisamment importante pour contrer l'espacement entre les modes k^* . Si ce n'est pas le cas, le système est alors figé et ne comporte plus de flux d'énergie. Cette conclusion est basée sur la création d'un élargissement de la relation de dispersion $\delta_k(\omega, \epsilon)$ relié au niveau de non linéarité ϵ :

$$k = \left(\frac{\omega}{\lambda}\right)^{1/\alpha} + \delta_k(\omega, \epsilon) \quad I-60$$

La cascade d'énergie est alors possible uniquement si :

$$\delta_k \geq k^* \quad I-61$$

Ce type d'interaction est appelé communément quasi-résonance du fait que les transferts se font par des résonances approchées du type :

$$\begin{aligned} \omega_1 \pm \omega_2 \pm \dots \pm \omega_N &= 0 \\ \mathbf{k}_1 \pm \mathbf{k}_2 \pm \dots \pm \mathbf{k}_N &= \delta_{\mathbf{k}} \end{aligned} \quad I-62$$

Où δ_k peut être traduit en δ_ω avec la relation de dispersion. Ces nouvelles solutions permettent de multiplier considérablement le nombre de solutions par rapport aux solutions exactes et sont donc potentiellement plus efficaces pour transférer de l'énergie. Elles peuvent être également

indispensables pour générer une cascade lorsque les solutions exactes sont impossibles, comme dans le cas des ondes capillaires pures.

Dans le cas des ondes de gravité, Nazarenko et al. [32] a repris cette idée de quasi-résonance avec son modèle dit de « sandpile » (tas de sable). Celui-ci a été développé après l'observation de cascades intermittentes dans des simulations numériques [33]. Le spectre, initialement nul, est alors essentiellement construit par des réalisations rares de « forte » cascade. Ce comportement peut être expliqué par un système où le degré de non linéarité ϵ ne permet pas de respecter la condition I-61. La dissipation étant très faible (voir nulle) à l'échelle de forçage, une accumulation d'énergie se produit, augmentant ainsi localement ϵ jusqu'à respecter la condition I-61. Une fois ce niveau atteint, une cascade est alors possible permettant l'évacuation de l'énergie jusqu'aux échelles de dissipation. Celle-ci se termine lorsque les non-linéarités à l'échelle du forçage redeviennent trop faibles. L'énergie au niveau du forçage remonte, et ainsi de suite... jusqu'à remplir complètement le spectre. Cette intermittence de la cascade peut être illustrée par l'analogie du tas de sable : le sable est versé doucement sur le sommet du tas, puis à certains moments lorsque la charge devient trop forte, une avalanche se produit et transporte le sable au bas du tas. A partir de cette vision, Nazarenko donne une expression du spectre d'ondes de gravité dans le cas-limite où $\delta_k = k^*$:

$$E^\eta(\omega) \propto g^{7/2} k^{*1/2} \omega^{-6} \quad I-63$$

Lorsque $\delta_k > k^*$, le spectre se rapproche alors progressivement de la solution classique I-55. A partir de cette solution limite, il est possible de donner une estimation entre le degré de non linéarité ϵ_{min} à partir duquel les effets de taille finie ne se font plus sentir :

$$\epsilon_{min} \sim \left(\frac{k^*}{k}\right)^{1/4} \quad I-64$$

Il est commun d'associer le degré de non-linéarité à la pente type des ondes, ainsi $\epsilon \sim \pi A_k k$ avec A_k l'amplitude réelle crête à crête d'une onde ayant une longueur d'onde $2\pi/k$.

Dans le cas des expériences présentées par la suite et en utilisant I-64 il est possible d'estimer une valeur typique d'environ $\epsilon_{min} \sim 0.3$. En utilisant cette estimation on peut vérifier si la séparation d'échelle discutée précédemment (I.1.2.2) tient toujours. Dans le cas des ondes de gravité dans la plateforme de Coriolis, les interactions sont supposées être à 4 ondes et on a : $\frac{1}{\epsilon^{2(N-2)}} = \frac{1}{\epsilon^4} \sim 120 \gg 1$. Il est donc théoriquement possible d'observer de la turbulence faible dans la cuve de Coriolis, si le forçage est assez fort.

I.1.2.9 Ondes gravito-capillaires

Les ondes-gravito-capillaires représentent un système beaucoup plus complexe. Il a été montré par Zakharov [34] dans la recherche du comportement d'un paquet d'ondes gravito-capillaires (solutions non statistiques) que l'un des coefficients d'interaction V de l'équation générale I-24 tend vers l'infini en présence de solutions résonantes à 3-ondes (induites par la capillarité). Ceci rend alors toute résolution impossible à moins de faire l'hypothèse que le train d'ondes soit suffisamment étroit pour interdire ces dernières. Cette hypothèse n'est évidemment pas tenable dans le cas de l'étude statistique de la turbulence faible où la multitude de vagues autorisent nécessairement ces couplages à 3-ondes. Cette impossibilité se retrouve également avec la recherche de solutions statistiques par analyse dimensionnelle. En effet le système ne peut être ni décrit par une relation de dispersion ayant une loi de puissance unique, ni par un paramètre λ unique. Ceci met en lumière une des propriétés essentielles de la théorie de la turbulence faible : l'invariance d'échelle. Cette dernière n'est pas respectée dans le cas des ondes gravito-capillaires et rend la dérivation directe de l'équation cinétique impossible.

Ce régime particulier est alors généralement ignoré et traité comme un raccord entre les ondes de gravité pure et de capillarité pure au niveau de k_{gc} (I-10). Selon Connaughton et al. [35], le raccord est possible si la transition gravito-capillaire k_{gc} (I-10) est atteignable avant la limite du « breakdown » discuté précédemment en I.1.2.7.5. Soit la condition :

$$k_{NL}^g \geq k_{gc} \geq k_{NL}^c \quad I-65$$

Il est alors possible d'établir un flux limite où le raccord est possible : $P_c = (g\gamma/\rho)^{3/4}$. Si $P > P_c$, il y a alors une zone de non-raccords entre $[k_{NL}^g, k_{NL}^c]$ donnant lieu à de fortes non-linéarités. A noter que cette hypothèse est basée sur une forte domination des couplages locaux.

Il existe également des théories alternatives permettant une description de ce régime particulier. On va décrire rapidement ici la cascade dynamique proposée par Kartashova [36,37]. Cette dernière a été développée avec l'idée que les solutions à 3-ondes dans un milieu discret ne comportent aucune solution. En effet les sous-groupes (« cluster ») ne sont constitués que d'une seule triade distincte qui empêche toute cascade. Il se trouve qu'en considérant un élargissement non-linéaire comme présenté précédemment, la séparation d'échelle ne tient plus. En effet $N = 3$ implique que $1/\epsilon^2 \gg 1$ et donc que $\epsilon \sim 10^{-2}$. Cette valeur est alors trop faible pour permettre un élargissement suffisant dans le cas d'un système aux dimensions réalistes.

Il est alors supposé que le principal mécanisme de transfert d'énergie se fait par l'instabilité modulationnelle de Benjamin-Feir [9] (Voir la section suivante I.1.2.10). Cette instabilité peut être vue comme une interaction à 4 ondes centrée sur une onde principale ω_1 qui transfère de l'énergie à deux ondes proches $\omega_1 + \delta\omega$ et $\omega_1 - \delta\omega$. Ainsi, chaque onde d'un sous-groupe va pouvoir se déstabiliser et remplir l'ensemble du spectre d'énergie. Il est alors possible de prédire analytiquement le spectre de puissance [38] :

$$E_{gc}^\eta(k) \sim \left(\frac{1}{k^2} + \frac{2 \left(\frac{\gamma}{\rho g} \right)^2}{1 + \left(\frac{\gamma}{\rho g} \right)^2 k^2} \right) \left(\frac{1}{k} - 2 \frac{\gamma}{\rho g} \arctan \left(\frac{\gamma}{\rho g} k \right) \right) \propto k^{-3} \quad I-66$$

Il est également possible d'obtenir $E_{gc}^\eta(\omega)$ numériquement. Un aperçu est visible dans la Figure I-4. Les limites asymptotiques de ce modèle dynamique correspondant à :

$$\begin{aligned} E_g^\eta(\omega) &\propto \omega^{-5} \\ E_c^\eta(\omega) &\propto \omega^{-7/3} \end{aligned} \quad I-67$$

A noter qu'en régime gravitaire pur, le spectre de puissance est similaire au célèbre spectre de Phillips utilisé en océanographie [12]. Ce dernier est estimé à partir de l'idée que l'énergie d'un mode est limitée par le déferlement. Il correspond donc à des fortes intensités de non-linéarité

Il existe une seconde théorie disponible dans la littérature qui permet de faire le lien entre les spectres de Zakharov et de Phillips. C'est la « multi-wave interaction theory » développé par Glazman et al. [39]. L'idée principale est de poser en variable le nombre d'ondes résonantes N présentes dans une interaction. Celui-ci va alors varier en fonction de l'intensité des non-linéarités. Par exemple, pour les ondes de gravité en régime faiblement non-linéaire $N = 4$ donnant ainsi le spectre de Zakharov qui a été présenté précédemment. Lorsque les non-linéarités augmentent, N augmente également jusqu'au point de déferlement où il est assumé que $N \rightarrow \infty$. Cela donne alors le spectre de Phillips. A noter que ces interactions sont supposées être fortement locales dans l'espace de Fourier.

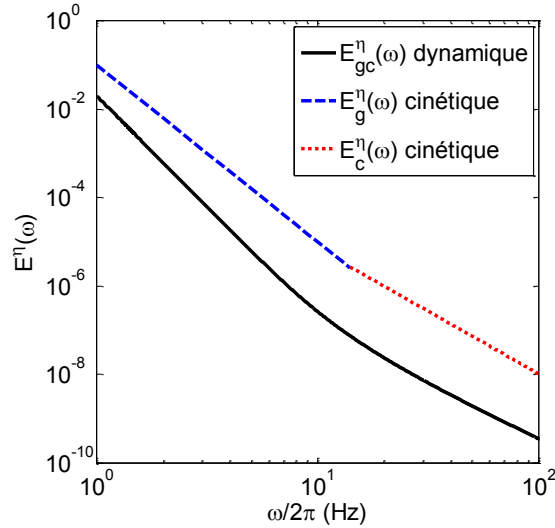


Figure I-4 : Spectre de puissance $E^\eta(\omega)$. En noir, la solution gravito-capillaire prédite par Kartashova sur le modèle de la cascade dynamique. En bleu et rouge les solutions de l'équation cinétique proposées par Zakharov pour les ondes de gravité et de capillarité.

I.1.2.10 Instabilité de Benjamin-Feir

L'instabilité de Benjamin-Feir est une instabilité modulationnelle qui conduit la désintégration d'une onde principale (\mathbf{k}_1) en deux ondes voisines ($\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3$) de fréquences proches [9]. Cette instabilité peut être vue comme une interaction à 4 ondes de la sorte :

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_1 &= \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 & I-68 \\ \omega_1 + \omega_1 &= \omega_2 + \omega_3 \end{aligned}$$

Avec

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_2 &= \mathbf{k}_1 + \delta\mathbf{k} & \omega_2 &= \omega_1 + \delta\omega \\ \mathbf{k}_3 &= \mathbf{k}_1 - \delta\mathbf{k} & \omega_3 &= \omega_1 - \delta\omega \end{aligned} \quad I-69$$

Où $|\delta\mathbf{k}|/|\mathbf{k}|, \delta\omega/\omega \ll 1$. Dans le cas des ondes de gravité, celle-ci a été observée de nombreuses fois dans des situations 1D et semble être une explication possible à la génération des vagues scélérates (voir par exemple [40]). Sa présence dans le cas d'un spectre 2D est cependant beaucoup plus faible à cause de la dispersion angulaire de l'énergie qui tend à réduire les non-linéarités en fonction de la distance [41]. La génération de cette instabilité est favorisée par une forte intensité des non-linéarités ϵ ainsi que d'une faible largeur spectrale (spectres étroits). L'indice de Benjamin-Feir (BFI) permet d'en estimer leur présence en faisant le rapport des deux [42] :

$$BFI = \frac{\epsilon}{\sigma_k/k_p} \beta(k_p, h) \equiv \frac{\epsilon}{\sigma_\omega/\omega_p} \beta(k_p, h) \quad I-70$$

Où σ_k, σ_ω est une estimation de la largeur du spectre. Il est approximé en prenant le $(k + \sigma_k)$ correspondant à $E^\eta(k + \sigma_k) = E^\eta(k_p)/2$. Le facteur $\beta(k_p, h)$ est un terme correctif qui prend en compte les effets de profondeur fini [40]. A mesure que la profondeur baisse, ce facteur diminue ce qui réduit la probabilité d'observer cette instabilité. Pour des profondeurs très faibles ($k_p h < 1.36$) ce facteur devient négatif ce qui indique une stabilité des ondes pour cette instabilité. Le coefficient est maximum et vaut $\beta(k_p, h) = 1$ pour une profondeur infinie.

Des expériences menées par Onorato et al. [40] rapportent un début d'observation de cette instabilité dans le cas de spectre 1D pour des valeurs de $BFI > 0.1$.

1.2 Etat de l'art

La turbulence faible a été appliquée sur une multitude de systèmes. On peut donner une série d'exemples non exhaustive : la turbulence magnétohydrodynamique (MHD), la turbulence en milieu stratifié, la turbulence en rotation, l'optique non-linéaire, les ondes dans les plasmas, les ondes de flexions d'une plaque, les ondes de surface... Certains de ces exemples sont détaillés dans les travaux de Zakharov, Nazarenko et Newell [17,21,43]. Si pour certains systèmes, la théorie semble bien vérifiée par l'expérimentation et les simulations, ce n'est pas complètement le cas pour les ondes de surface. Cette partie va présenter les principales études expérimentales et numériques qui ont eu pour objectif de tester la turbulence faible pour les ondes de surface.

1.2.1 Interaction résonante d'un train d'ondes

Comme il a été dit précédemment, l'étude des interactions non-linéaires à la surface de l'eau a débuté dans les années 1960, un siècle après les travaux de Stokes. La première observation d'une interaction résonante a été donnée par les expériences de Longuet-Higgins et McGoldrick sur les ondes de gravité [44–46]. Leur expérience dans un bassin de $3.5 \times 3.5 \text{ m}^2$ a mis en évidence la croissance d'une onde par l'interaction résonante de 4 ondes. Celle-ci est générée par deux trains d'ondes monochromatiques perpendiculaires qui satisfont l'équation résonante : $\omega_1 + \omega_1 = \omega_3 + \omega_4$. Ces résultats ont été confirmés plus récemment par Bonnefoy et al. [47] dans une configuration non perpendiculaire. McGoldrick et al. [48] prolongea l'expérimentation sur les ondes capillaires dans une petite cuve avec un unique batteur. L'expérience consiste en la mesure de l'évolution spatiale d'une onde monochromatique. Il observera une bonne concordance avec la théorie sur la prédiction de la décroissance du mode principal par des interactions à 3 ondes, prouvant ainsi leur existence. Ces résultats ont ensuite été reproduits par Banerjee [49] et Hogan [50] où ils observent également la création d'ondes capillaires harmoniques issues d'interactions à 3-ondes suite à l'excitation d'une onde monochromatique.

Un gros travail a été réalisé sur les ondes gravito-capillaires par Hammack et al. [51–53]. Dans une première expérience, il génère un train d'ondes monochromatiques ayant une fréquence $\omega_1/2\pi > 19.6 \text{ Hz}$ et met en évidence la présence d'interactions à 3-ondes comme cela a été prédit par Simmons et al. [15]. Il observe également la présence d'un mécanisme de sélection d'une triade dominante. En effet, pour une fréquence ω_1 donnée, seul un couple ω_2, ω_3 apparaît parmi la multitude de solutions possibles. Il met également en lumière le cas particulier des ondes de Wilton [54] qui correspondent à un cas dégénéré de résonance où $\omega_2/2\pi = \omega_3/2\pi = 9.8 \text{ Hz}$. Dans une seconde expérience, il s'intéresse à l'effet de sélection de triade et trouve une corrélation avec le niveau de bruit de fond du système. La troisième étude porte quant à elle sur l'importance de l'instabilité modulationnelle de Benjamin-Feir pour ce type d'expérience. Il montre alors que celle-ci domine pour des trains d'ondes où $\omega_1/2\pi \geq 9.8 \text{ Hz}$, bien que les interactions à 3-ondes soient toujours présentes.

Récemment, une expérience similaire a été réalisée par Haudin et al. [55]. Cette dernière diffère par la présence d'un double forçage pour exciter deux ondes gravito-capillaires (ω_2 et ω_3) tout en pouvant faire varier l'angle entre ces deux ondes. Une méthode récente de visualisation 3D a également été employée pour permettre de confirmer l'existence de résonances satisfaisant les équations résonantes simultanément en ω et en \mathbf{k} .

1.2.2 Turbulence faible

Que ce soit dans un régime gravitaire à 4-ondes, ou dans un régime capillaire/gravito-capillaire à 3-ondes, les expériences présentées précédemment semblent confirmer l'existence des interactions

résonantes. La vérification expérimentale des solutions de Zakharov a quant à elle commencé plus tard à partir des années 2000. Bien que certains systèmes exotiques ont été étudiés, comme par exemple les ondes de flexion dans plaque mince [56,57], les ondes inertielles [58] ou encore les ondes hydro-élastiques [59], la majorité des études s'intéressent aux ondes de surface.

I.2.2.1 Ondes capillaires

Les ondes capillaires font partie des premiers systèmes où les spectres de Zakharov ont été observés. Expérimentalement, on peut citer le travail de Holt et Trinh [60] où ils observent une cascade directe à la surface d'une goutte, ou encore ceux de Wright et al. [61,62], Brazhnikov et al. [63], Henry et al. [64] et Lommer et al. [65] à la surface de l'eau dans une cuve. Pour l'ensemble de ces travaux, les ondes ont été générées en faisant vibrer verticalement la cuve (instabilité de Faraday) et il en ressort l'observation d'un spectre de puissance compatible à celui de Zakharov et Filonenko ($E^\eta(\omega) \propto \omega^{-17/6}$). Plus récemment, une expérience similaire réalisée par Falcon et al. [66] en régime de faible gravité ainsi qu'une mesure spatiale à haute fréquence faite par Berhanu et Falcon [67] confirment ce résultat. Cependant, dans le cas de forçage par l'instabilité paramétrique de Faraday, Xia et al. [68,69] rapportent que l'instabilité modulationnelle de Benjamin-Feir est également présente. A noter que les simulations numériques sont également en accord avec la théorie [31,70,71], confirmant ainsi la pertinence de l'application de la turbulence faible aux ondes capillaires.

I.2.2.2 Ondes de gravité

En raison de la taille importante du système et de la difficulté à réaliser des expériences contrôlées à grande échelle, les ondes de gravités sont majoritairement étudiées par des mesures in-situ. La comparaison avec la théorie est alors délicate en raison de la présence de vents générant un forçage très anisotrope et dont la plage de forçage est dépendante de sa force (instabilité de Miles [72]). A noter que le vent doit également être suffisamment fort sur une durée dépassant le temps non-linéaire, ce qui n'est pas toujours le cas pour les très basses fréquences. Parmi les nombreuses mesures de vagues in-situ, on peut citer les mesures de Donelan et al. [73] sur le lac Ontario montrant une petite fraction du spectre de puissance suivant la solution de Zakharov-Filonenko $E^\eta(\omega) \sim \omega^{-4}$. Il est également important de mentionner la mesure aérienne effectuée par Hwang et Wang [74,75] qui a permis l'obtention du spectre de puissance en k (Figure I-5).

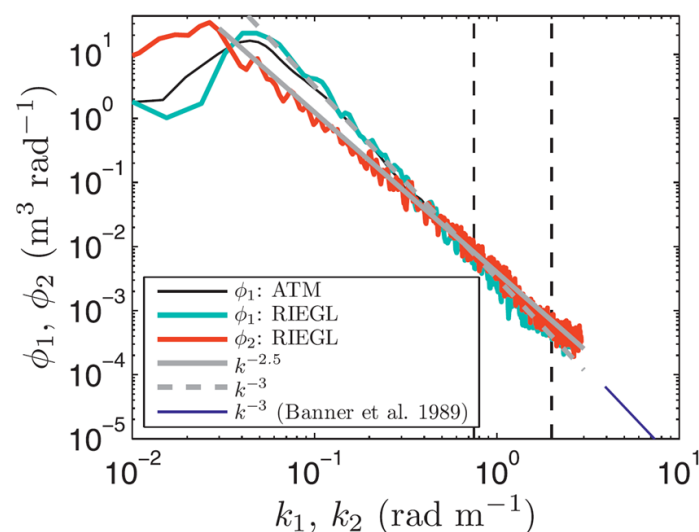


Figure I-5 : Extrait de Hwang et Wang [74] sur la mesure du spectre de puissance $E^\eta(k)$ de la surface de la mer à partir de mesures aériennes. La solution de Zakharov-Filonenko $E^\eta(k) \sim k^{-2.5}$ est reportée en gris et le spectre de Phillips $E^\eta(k) \sim k^{-3}$ en pointillés. La courbe ϕ_1 représente le spectre dans le sens du vent, tandis que ϕ_2 est une coupe transversale.

Le spectre dans la direction du vent (ϕ_1) suit une loi de puissance en $E^\eta(k) \sim k^{-3}$ qui est compatible avec le spectre de Phillips [12], signe de non-linéarité forte et de déferlements. Au contraire, le spectre transverse ϕ_2 possède un degré de non-linéarité plus faible et semble bien suivre la solution de Zakharov en $E^\eta(k) \sim k^{-2.5}$. Récemment, Leckler et al. [76] ont proposé des mesures spatio-temporelles sur la mer Noire permettant la mesure complète du spectre de puissance (voir également IV.1). En fréquence, ce dernier semble suivre les solutions de Zakharov sur une demi-décade. Cependant, le spectre complet montre l'apparition d'une branche non-linéaire suivant la première harmonique, propre aux ondes de Stokes. Les ondes suivant cette branche sont historiquement appelées « ondes liées » et peuvent être générées par interaction résonante à 3-ondes du type : $\omega_2 + \omega_3 = 2\omega_1$, $\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 = 2\mathbf{k}_1$ où l'onde $(2\mathbf{k}_1, 2\omega_1)$ est située sur la branche harmonique. La présence de tels couplages dans l'océan a été confirmé à l'aide d'outil statistique d'ordre trois (bicohérence [77]) lors de campagnes de mesure de champs de pression du fond marin [78–81].

Bien que demandant de grandes infrastructures, il existe quelques expériences sur les ondes de gravité en milieu contrôlé. Une part importante de ces expériences s'intéresse aux phénomènes fortement non-linéaires et en particulier à l'instabilité modulationnelle de Benjamin-Feir. A ce sujet on peut citer les travaux réalisés par Onorato et al. [40,41], Shemer et al. [82] ou encore Donelan et al. [73] en présence de vent. L'étude des solutions de Zakharov n'est pas très riche dans la littérature. On peut commencer en rapportant le travail de Denissenko et al. [83] dans le bassin de l'université de Hull. Les ondes sont forcées à l'aide de huit pistons couvrant la totalité d'un côté du bassin ($12 \times 6 \times 1.5 \text{ m}^3$). Les autres bords sont des murs rigides permettant la réflexion des ondes. Une mesure locale a permis d'observer un spectre de puissance montrant une forte dépendance en fonction de l'intensité de forçage (voir la Figure I-6 extraite de [83]).

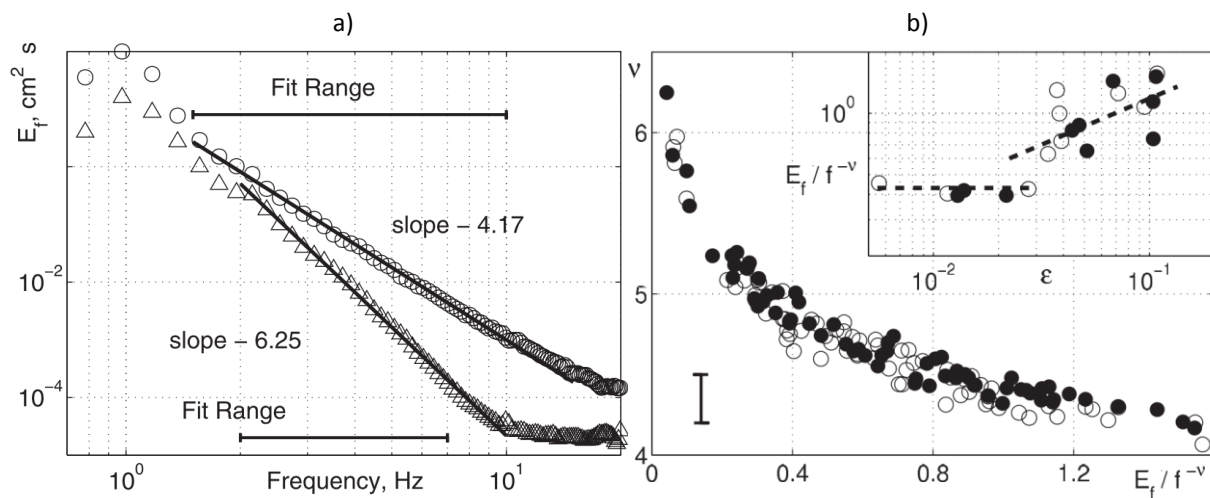


Figure I-6 : Extrait de Denissenko et al. [83] sur une mesure de spectres de puissance dans un bassin de $12 \times 6 \times 1.5 \text{ m}^3$. a) Spectre de puissance $E^\eta(\omega)$ pour un forçage faible (triangle) et fort (ronds). b) Evolution de l'exposant en fonction de l'intensité du forçage.

Aux forçages les plus forts, l'exposant tend vers ω^{-4} de la solution de Zakharov. Cependant, à ces intensités de forçages, le déferlement des ondes est très présent ce qui est en forte contradiction avec l'hypothèse de faible non-linéarité. Dans cette situation, on s'attend donc à obtenir le spectre de Phillips avec un exposant en ω^{-5} . Pour expliquer cet écart, Denissenko et al. avancent l'hypothèse faite par Kuznetsov et al. [84] qui dit que le déferlement se produit sur une ligne plutôt que localement. En modifiant également la relation de dispersion, il vient alors un spectre en ω^{-4} . Bien qu'ayant le même exposant que les solutions de Zakharov, la physique en jeu est complètement différente. Pour expliquer la divergence des faibles forçages, ils invoquent les effets de taille finie avec le modèle de « sandpile [32] » décrit précédemment (I.1.2.8). Aux plus faibles forçages, l'énergie cascade par

intermittence et donne lieu au spectre critique qui a un exposant en ω^{-6} (I-63). Cette idée est consolidée plus tard par l'observation d'intermittence dans les amplitudes de Fourier à haute fréquence [85] (voir figure 3 de l'article). Ces résultats ont pu être obtenus grâce à une nouvelle série de mesures avec une coupe de la surface donnant accès au spectre en k [86]. Cette étude a également permis d'obtenir les exposants de la cascade à la fois en k et en ω donnant lieu à la Figure I-7 suivante.

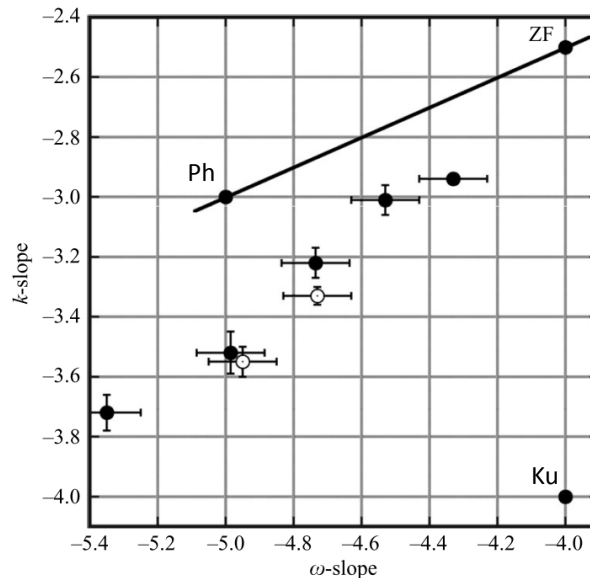


Figure I-7 : Extrait de Denissenko et al. [86]. Positionnement des expériences réalisées. Les spectres théoriques de Zakharov (ZF), Phillips (Ph) et Kuznetsov (Ku) sont également rapportés.

Curieusement, on peut alors observer que les spectres semblent tendre vers le spectre de Zakharov, malgré la forte présence de déferlement. L'hypothèse de Kuznetsov ne semble alors pas correcte pour ce système. Dans le même temps, Deike et al. [87] ont réalisé une série d'expériences similaires dans un bassin à Nantes. L'objectif principal était de regarder l'influence des conditions limites sur les spectres. Deux configurations ont été testées, l'une avec une plage absorbante et l'autre similaire aux mesures de Denissenko et al. [86] avec un mur. La présence de la plage influe fortement sur l'isotropie du spectre en rendant celui-ci fortement 1D. Dans cette configuration, l'énergie est moins distribuée spatialement et provoque une augmentation de la présence de vagues de forte cambrure. Ainsi, pour la même intensité de forçage, le spectre est moins raide que dans la situation avec des murs.

D'un point de vue numérique, on peut citer les travaux de Annenkov et Shrira [88], de Korotkevich et al. [89], de Dysthe et al. [90], de Yokoyama et al. [91] ou encore d'Onorato et al. [92]. Dans tous les cas, et contrairement aux expériences en laboratoire, les solutions de Zakharov sont globalement bien retrouvées.

I.2.2.3 Ondes gravito-capillaires

Les expériences s'intéressant au régime particulier de la transition gravito capillaire ne sont pas nombreuses. La première a été réalisée par Falcon et al. [93] dans une cuve de $20 \times 20 \text{ cm}^2$ remplie de mercure. Les ondes sont générées avec deux batteurs horizontaux sur une bande de fréquences comprise entre 0 et 4, 5 ou 6 Hz.

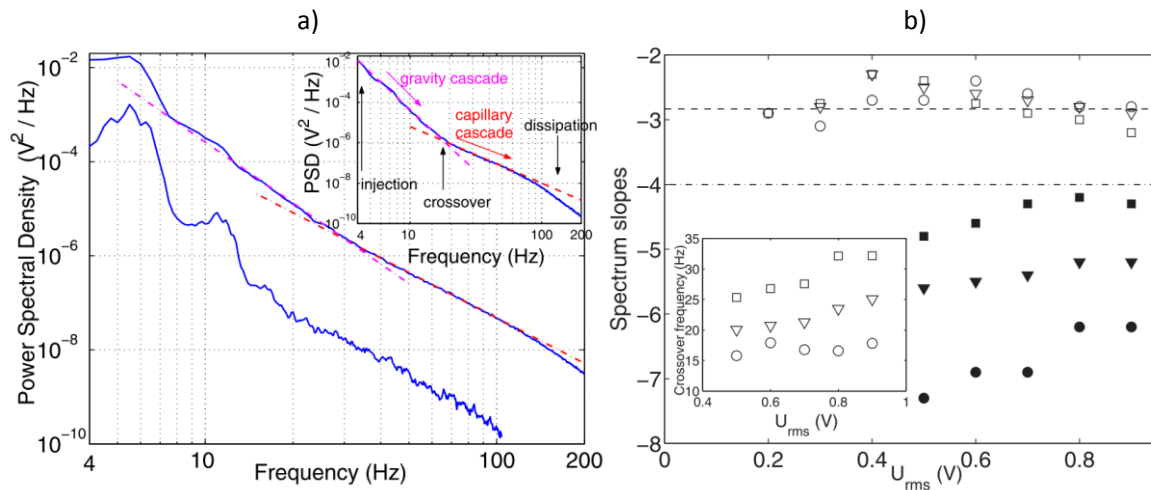


Figure I-8 : Extrait de Falcon et al. [93] sur des mesures de turbulence d'ondes à la surface du mercure. a) Spectre de puissance $E^{\eta}(\omega)$ pour un forçage faible et fort sur une gamme de fréquence de $[0,6]$ Hz. Incrustation : pour un forçage entre $[0,4]$ Hz. b) Evolution de l'exposant du spectre en fonction de l'intensité du forçage, dans le régime gravitaire (marqueurs plein) et capillaire (marqueurs vide). Les ronds, triangles et carrés représentent un forçage entre $[0,4]$, $[0,5]$ et $[0,6]$ Hz respectivement. Incrustation : estimation de la transition entre le régime gravitaire et capillaire. Pour du mercure, celle-ci est supposée se produire aux alentours de 17 Hz.

Un spectre de puissance sur pratiquement deux décades est mesuré localement avec une sonde capacitive de haute précision. Pour l'ensemble des forçages, une transition assez nette entre un régime gravitaire et capillaire est observée. Le régime capillaire possède un exposant compatible avec les solutions de Zakharov et qui est constant avec l'intensité du forçage. En revanche le régime gravitaire montre un comportement similaire aux expériences menées dans les grands bassins ([83,86,87]), avec un exposant dépendant fortement de la puissance injectée. D'un point de vue qualitatif, la transition semble concordante avec celle proposée par Connaughton et al. [35]. Grâce à une mesure de la vitesse des batteurs, une estimation du flux d'énergie P est disponible. Celle-ci est inférieure à $P \ll P_c$ permettant théoriquement le raccord entre les deux régimes. La connaissance du flux permet également un second test des solutions de Zakharov où $E_c^{\eta}(\omega) \sim P^{1/2}$ en régime capillaire et $E_g^{\eta}(\omega) \sim P^{1/3}$ en régime gravitaire (voir I.1.2.7.3 et I.1.2.7.4). Falcon et al. [93] observent une dépendance linéaire dans les deux régimes $E^{\eta}(\omega) \sim P$, en contradiction des solutions de Zakharov. A noter que l'estimation du flux d'énergie est délicate car une part inconnue de la puissance injectée est dissipée directement par turbulence hydrodynamique aux abords des batteurs (vortex). Plus récemment [94], une nouvelle estimation du flux a pu être obtenue en analysant le spectre d'énergie dissipé. Cette fois-ci un accord avec la théorie $E^{\eta}(\omega) \sim P^{1/2}$ est observé.

Quelques années plus tard, Herbert et al. [95] reproduisent cette expérience en implémentant une mesure optique permettant la mesure complète de l'interface (méthode de profilométrie par transformée de Fourier [96,97]). Cette mesure met en lumière la présence de branches harmoniques, signe de fortes non-linéarités dans le système. La mesure des spectres en k montre également un exposant plus raide que celui donné par les solutions de Zakharov. À la suite de cette mesure, il a été remarqué que le pigment de peinture utilisée pour la méthode de mesure induit une forte dissipation des ondes (voir partie suivante I.2.3). Pour visualiser des ondes dans le régime capillaire avec un forçage dans le régime gravitaire, il est alors nécessaire d'effectuer un forçage à haute intensité pour passer ce pic. Cela demande de grandes amplitudes aux batteurs ce qui entraîne généralement la génération de fortes non-linéarités directement au niveau du forçage (Par exemple, le batteur peut devenir supersonique). Pour limiter cet effet, Przadka et al. [98] ont fait un gros travail pour trouver un pigment suffisamment propre et qui n'affecte pas les propriétés hydrodynamiques de l'eau dans

les échelles concernées. L'expérience d'Herbert et al. [95] a alors été reproduite avec ce nouveau pigment par Cobelli et al. [99]. Cette étude rapporte l'existence de deux régimes de turbulence dépendant du forçage. Un premier, correspondant à des forçages faibles qui semble montrer un exposant compatible avec les solutions de Zakharov et indépendant du forçage dans le régime gravitaire. Le spectre de puissance complet montre également une concentration de l'énergie sur la relation de dispersion, sans branches harmoniques. Le second régime apparaît aux forçages les plus forts. L'énergie est alors partagée entre la relation de dispersion et les branches linéaires, similairement à Herbert et al. [95]. Dans ce régime, les exposants ont alors le même comportement que l'expérience originale de Falcon et al. [93], avec une forte dépendance en l'intensité du forçage pour le régime gravitaire.

Le rôle du forçage dans ce régime gravito-capillaire a été étudié par Issenman et Falcon [100]. Il semblerait que la vibration complète de la cuve en remplacement des batteurs produit un spectre indépendant du forçage en régime gravitaire. Une raison à ce phénomène est peut-être liée à l'augmentation de la surface immergée du « batteur » (la paroi de la cuve dans ce cas) comparé aux expériences précédentes. En effet, dans cette situation, des déplacements de plus faibles amplitudes sont nécessaires pour injecter le même flux d'énergie. Cela réduit ainsi les non-linéarités générées par le forçage et permet le passage au premier régime de turbulence rapporté par Cobelli et al. [99].

1.2.3 Dissipation des ondes

La dissipation des ondes provient de multiples sources. Pour les petites échelles, c'est principalement la viscosité qui agit. Dans un milieu confiné et/ou en faible profondeur, il faut ajouter une seconde dissipation provenant des couches limites. Cette dernière s'appliquant essentiellement pour les grandes échelles qui induisent de forts déplacements. Une description détaillée de ces deux phénomènes est donnée dans la thèse de L. Deike [6].

Les ondes de surface sont également très sensibles à la présence d'un film viscoélastique à la surface. La présence de ce dernier ajoute une forte dissipation sur une large plage de fréquences qui annule l'hypothèse de la conservation du flux d'énergie pour les solutions de Zakharov. On a alors une cascade qui « fuit » et on observe des spectres ayant des décroissances plus raides que les solutions théoriques de Zakharov. Ce phénomène a bien été mis en évidence dans le cas des ondes de flexion sur une plaque mince [101,102].

Dans le cas des ondes de surface, pour les basses fréquences l'essentiel de la dissipation est provoquée par les ondes de Marangoni. Ce sont des ondes de compression qui se propagent dans l'épaisseur du film viscoélastique. Un transfert d'énergie entre les ondes de surface et ces dernières est rendu possible par la proximité des relations de dispersion [103]. La Figure I-9 retrace les deux relations de dispersion extraites de Pradka et al. [98].

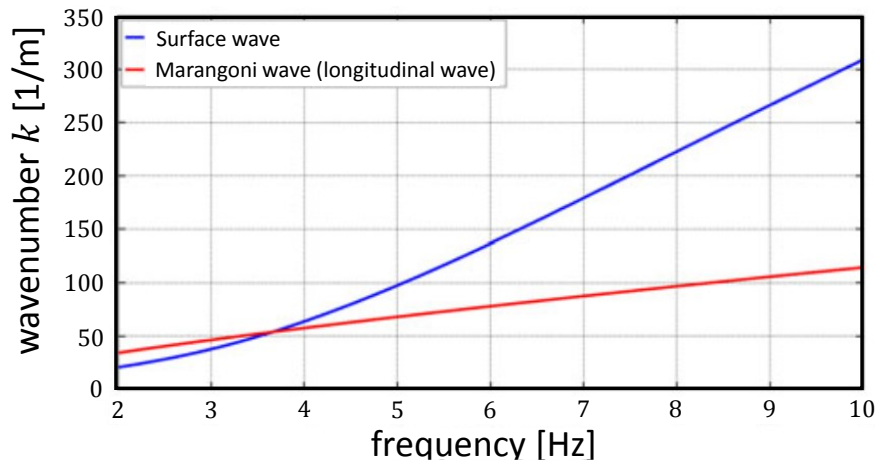


Figure I-9 : Extrait de Przadka et al. [98]. Relation de dispersion des ondes de surfaces (ligne bleue) et relation de dispersion des ondes de Marangoni (ligne rouge). Une intersection est présente aux alentours de $\omega/2\pi = 3.5\text{Hz}$, permettant un transfert d'énergie par résonance.

On observe l'intersection des deux courbes aux environs de $\omega/2\pi = 3.5\text{Hz}$, permettant le transfert d'énergie par un phénomène de résonance. Cette fréquence constitue un point d'arrêt à la cascade où une grande partie de l'énergie des ondes de surface se retrouve convertie et dissipée par ces ondes de compression (voir par exemple [104]). Pour des fréquences plus élevées, la viscosité du film est généralement plus forte que celle de l'eau, ajoutant ainsi une dissipation supplémentaire pour le peu d'énergie restante. Que ce soit pour l'expérience sur les ondes de gravité ou les ondes gravito-capillaire, ce pic de dissipation est situé très proche du forçage, ce qui oblige à prendre des précautions pour obtenir un niveau de propreté satisfaisant.

1.3 Motivations

Comme on vient de le voir, les précédentes investigations expérimentales de la turbulence faible ne permettent pas de valider solidement la pertinence des solutions de Zakharov pour l'ensemble des ondes de surface. Cela est en grande partie dû à la forte sensibilité du spectre de puissance qui est généralement utilisé comme outil de vérification. Pour pouvoir utiliser ce dernier, il faut un système satisfaisant aux principales hypothèses de la turbulence faible : de faibles non-linéarités mais suffisamment importantes pour compenser la discrétisation de l'espace des k et un flux constant d'énergie dans la zone inertielle. Cette dernière implique une parfaite séparation d'échelle entre la génération et dissipation.

Il est évident qu'il est difficile de combiner l'ensemble de ces hypothèses pour une expérience en laboratoire. La discrétisation des ondes impose une contrainte sévère dans l'étude des ondes de gravité. En effet, pour des bassins de laboratoire de taille réaliste, il faut augmenter l'intensité des non-linéarités en conséquence pour pouvoir obtenir la cascade prédite par Zakharov. Ceci rentre en conflit avec la seconde hypothèse qui est de conserver de faibles non-linéarités. A ce sens, ce sont les ondes de capillarité qui se prêtent le mieux à une étude expérimentale. Cependant elles se heurtent également à d'autres problèmes communs à l'ensemble des expériences, à savoir un flux d'énergie qui est constant. Pour la cascade directe, la dissipation est censée se produire uniquement aux petites échelles, lorsque la viscosité de l'eau entre en jeu. Cependant, dans le cas d'une contamination de la surface libre, une dissipation supplémentaire s'ajoute dans la zone inertielle et brise cette hypothèse de flux d'énergie constant. Si pour une petite surface, il est envisageable d'obtenir une eau propre, ce problème de contamination devient rapidement problématique à mesure que la surface augmente. Une autre inconnue réside dans le forçage. En effet, c'est encore une question ouverte de connaître la

part de non-linéarités du système qui provient directement du forçage. Par exemple, dans le cas d'un batteur de faible surface, on arrive rapidement à des amplitudes de déplacement importantes. Le batteur s'éloigne alors fortement des trajectoires elliptiques théoriques d'une onde linéaire, jusqu'à devenir plus rapide que les ondes dans les cas les plus extrêmes.

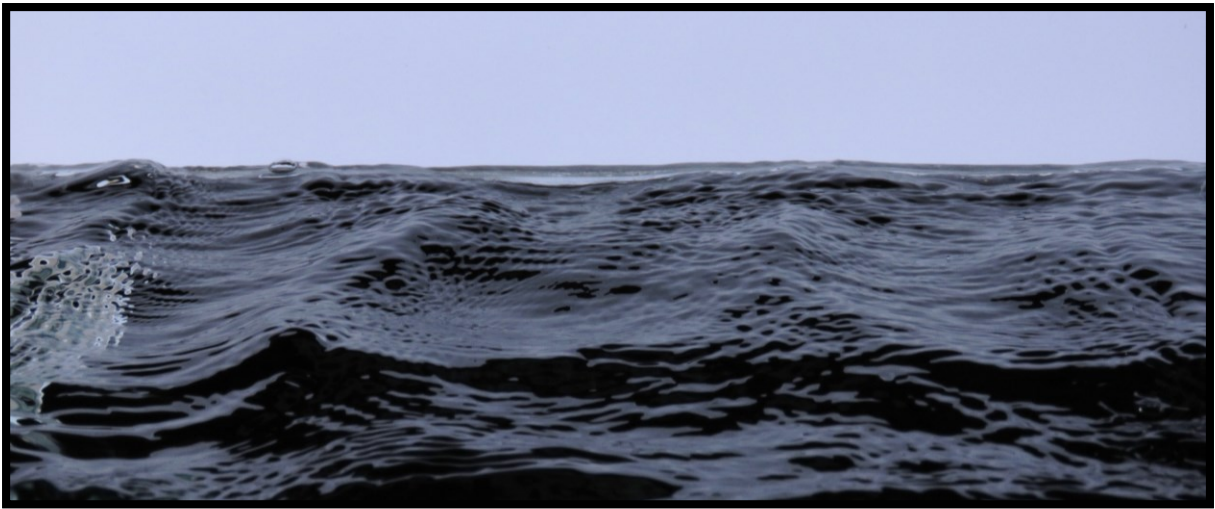
A partir de ces limitations, on comprend mieux les bons accords avec la théorie, observés pour les expériences en ondes de capillarité (voir références en I.2.2.1). Tout comme pour les simulations numériques, l'ensemble des hypothèses peuvent être pratiquement respectées simultanément. Il subsiste néanmoins quelques incohérences, comme par exemple la dépendance linéaire en le flux P au lieu de $P^{1/2}$ [6].

Les expériences en ondes de gravité sont globalement en désaccord avec la théorie de la turbulence faible. Les résultats les plus proches aux solutions de Zakharov sont obtenus soit dans des régimes de très forte non-linéarité (déferlements, voir [86,87]) soit avec des conditionnements très forts (faible forçage et petite cuve, voir [99,100]). Curieusement ces deux situations sont également contradictoires à propos de l'effet de la discrétisation. Les mesures dans les grands bassins semblent converger vers les mesures in-situ. Cependant l'hypothèse principale de faible non-linéarité n'est plus respectée, ce qui permet de se questionner sur la pertinence de la théorie de la turbulence faible pour un système naturel tel que l'océan.

On comprend alors que pour l'étude expérimentale de la turbulence faible pour des régimes complexes tels que les ondes de gravité ou encore les ondes gravito-capillaires, il est nécessaire d'utiliser d'autres outils que le spectre de puissance. Ceci constitue l'objectif principal de cette thèse qui est l'utilisation d'outils statistiques qui permettent une observation des interactions résonantes constituant le cœur de la turbulence faible. L'observation de ces interactions va permettre d'éclaircir plusieurs points comme par exemple la nature des interactions au niveau de la transition gravito capillaire. Les deux théories présentées précédemment proposent des spectres de puissances très proches mais pour des types d'interactions complètement différents. La cascade de Zakharov implique une transition d'interactions à 4-ondes en régime gravitaire pour des interactions à 3-ondes en régime capillaire. La jonction est possible uniquement si les interactions sont locales. La cascade dynamique proposée par Kartashova quant à elle, s'appuie uniquement sur l'instabilité de Benjamin-Feir avec des interactions locales et à 4-ondes dans les deux régimes. L'observation des interactions permettra alors de faire le point sur ces deux théories.

Dans cette optique de comprendre les mécanismes fondamentaux en jeu, la thèse sera décomposée en trois parties. La première s'intéressera au régime gravito-capillaire avec une expérience dans une cuve de petite taille. Après une étude classique des spectres de puissances, une analyse statistique sera réalisée pour observer les interactions résonantes. La seconde partie étendra cette analyse aux ondes de gravité pure avec une expérience dans une cuve de grandes dimensions (plateforme de Coriolis). Enfin, la troisième partie montrera les résultats préliminaires obtenus sur de la turbulence d'ondes internes de gravité ainsi qu'une analyse rapide sur un jeu de données de mesure in situ.

Partie II Ondes gravito-capillaires



Ondes gravito-capillaires en régime non-linéaire...

II.1 Méthode expérimentale

II.1.1 Dispositif général

L'expérience présentée par la suite est très proche de celle réalisée par Cobelli et al. [99]. Il s'agit d'une cuve en PVC de dimension $57 \times 37 \text{ cm}^2$ remplie d'eau à une hauteur d'environ $h = 5 \text{ cm}$. La Figure II-1 montre une vue générale de l'installation.

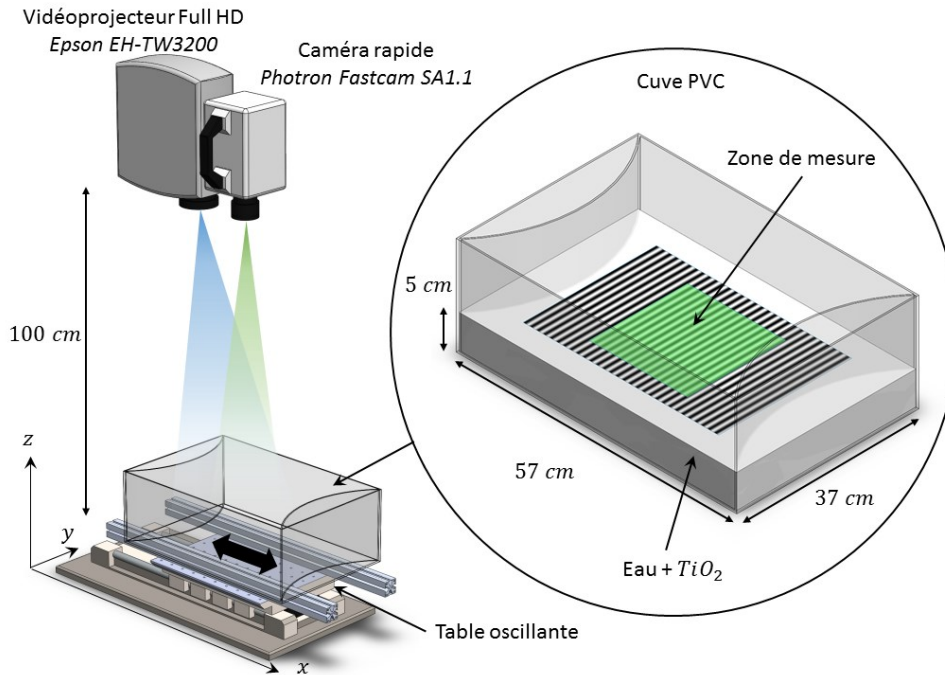


Figure II-1 : Schéma général du dispositif expérimental. Les ondes sont générées par une oscillation globale de la cuve le long de la direction x . Deux parois incurvées dans la direction du forçage sont parfois utilisées pour augmenter l'isotropie du système. Un système optique utilisant un vidéo projecteur et une caméra rapide est utilisé pour une mesure complète de l'interface.

Le forçage est effectué avec une table oscillante qui permet une vibration complète de la cuve. Dans cette situation, le forçage est très directionnel et ce sont deux faces de la cuve qui jouent le rôle de batteur. Parfois des parois incurvées ou des bouteilles sont placées dans la cuve pour diminuer l'anisotropie du système en créant des réflexions chaotiques. Ces différences ne changent pas pour autant significativement les résultats présentés par la suite. La table oscillante est pilotée en position par une tension sinusoïdale modulée aléatoirement autour d'une fréquence centrale. Deux configurations ont été testées, la première est un bruit blanc filtré dans la bande de fréquence $[0, f]$. La seconde configuration est une modulation de la fréquence mais en conservant une amplitude constante pour les oscillations. Généralement la fréquence maximum f est de l'ordre de quelques Hz . Certains essais ont également été réalisés avec un forçage monochromatique.

Une mesure complète de la surface libre est effectuée avec une méthode optique dite de profilométrie par transformée de Fourier. Les détails de cette technique, initialement proposée par Takeda et al. [96], sont développés dans la section suivante (II.1.2). Son implémentation nécessite l'utilisation d'un vidéoprojecteur, d'une caméra et d'un pigment pour augmenter la diffusivité de l'eau. Comme vu précédemment dans la partie théorique, les ondes gravito-capillaires représentent une gamme de fréquences allant de 5 Hz à environ 50 Hz . Une caméra rapide pouvant filmer à 250 images par seconde est donc utilisée pour pouvoir couvrir l'ensemble du régime. Celle-ci possède un capteur de

$1024 \times 1024 \text{ pix}^2$ qui couvre une surface d'environ $20 \times 20 \text{ cm}^2$ pour la majorité des essais. Pour obtenir une bonne convergence statistique, chaque série d'expériences est composée de 5 à 20 films de 88s.

II.1.2 Profilométrie par transformée de Fourier

II.1.2.1 Théorie

La profilométrie par transformée de Fourier est une technique de mesure optique permettant la reconstruction d'une surface à partir de la déformation d'un motif. L'idée principale proposée par Takeda et al. [96,105] est de projeter un motif statique constitué de franges sur une topographie, puis d'en mesurer le déphasage par rapport à un plan d'origine. Il vient alors une relation géométrique entre la phase, la hauteur de la topographie et le placement du couple caméra/projecteur. La Figure II-2 représente le cas particulier où les axes optiques de la caméra et du vidéoprojecteur sont alignés.

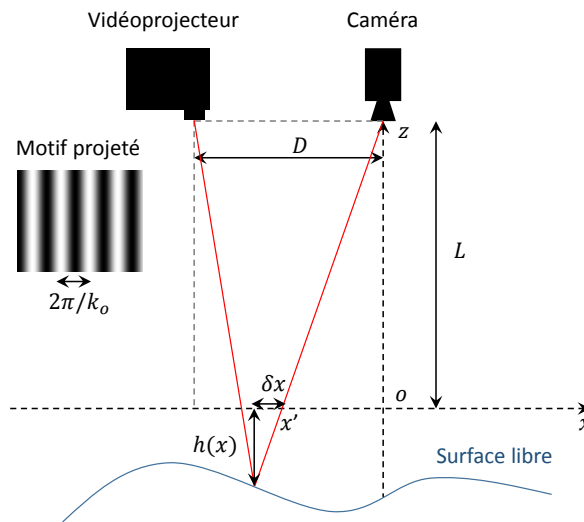


Figure II-2 : Schéma géométrique de la profilométrie par transformée de Fourier.

Au passage d'une vague, le motif est projeté en dehors du plan de référence. La phase $\varphi(x)$ de celui-ci vue par la caméra est alors différente de la phase de référence $\varphi_0(x)$. On peut ainsi obtenir une relation entre la hauteur locale $h(x)$ et le déphasage $\Delta\varphi(x) = \varphi(x) - \varphi_0(x)$:

$$h(x) = \frac{L\Delta\varphi(x)}{\Delta\varphi(x) - k_0 D} \quad II-1$$

Où L représente la hauteur de la caméra par rapport au plan de référence, D l'espacement entre le vidéo projecteur et la caméra et k_0 la fréquence des franges du motif. Cette expression n'est en fait pas exacte comme le montre Maurel et al. [97]. La position réelle x doit être corrigée pour prendre en compte le décalage δx causé par l'écart à l'axe optique ainsi que la distance au plan de référence. La correction s'écrit alors $x = x' + \delta x = x' - x' h(x')/L$, où x' est la coordonnée apparente.

II.1.2.2 Implémentation technique et numérique

L'un des principaux intérêts de cette technique comparée aux nombreuses alternatives existantes est la simplicité mathématique de la transformation. L'essentiel du traitement consiste à récupérer la phase du motif projeté à la surface de l'eau. Celui-ci est visible par la caméra avec l'ajout de dioxyde de titane (TiO_2). Cette particule neutre d'un point de vue chimique proposée par Przadka et al [98] présente l'avantage d'augmenter significativement la diffusivité de l'eau tout en conservant les propriétés hydrodynamiques. Entre autres, il a été montré que la tension de surface n'est

pratiquement pas modifiée. L'ajout de ce pigment doit néanmoins être fait en grande quantité pour assurer de bons niveaux de contrastes lors de la projection du motif. La Figure II-3 montre l'évolution du contraste mesuré par la caméra en fonction de la concentration en pigment.

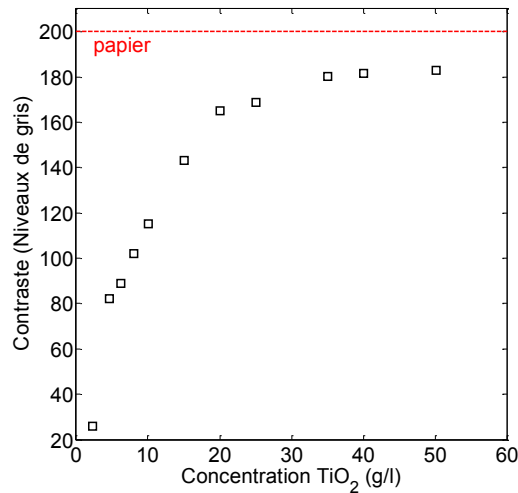


Figure II-3 : Evolution du niveau de contraste en fonction de la concentration en dioxyde de Titane. La valeur pour une feuille de papier est donnée en comparaison.

Une transition marquée est visible au-delà de 20g/l. Pour limiter les effets de la sédimentation qui font baisser le niveau de contraste (voir Przadka et al. [98]), une forte concentration de 40g/l a été utilisée. Cette dernière permet d'effectuer des mesures de plusieurs minutes dans de bonnes conditions avant de devoir réhomogénéiser le mélange.

D'un point de vue numérique, la récupération de la phase se fait par une démodulation des images brutes I du motif enregistrée par la caméra rapide. Il y a 5 étapes :

1. On commence par multiplier l'image originale $I(\mathbf{x})$: $I'(\mathbf{x}) = I(\mathbf{x})e^{-ik_0 \cdot \mathbf{x}}$ avec $\mathbf{x} = (x, y)$ et \mathbf{k}_0 la longueur d'onde du motif
2. On calcule ensuite la transformée spatiale de Fourier de $I'(\mathbf{x})$: $I'(\mathbf{k}) = \int I'(\mathbf{x})e^{-ik \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{x}$, avec $\mathbf{k} = (k_x, k_y)$ le vecteur d'onde.
3. On filtre passe-bas autour de $\mathbf{k} = (0,0)$.
4. On retourne dans l'espace réel par une transformée de Fourier inverse $I''(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi} \int I'(\mathbf{k})e^{ik \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{k}$.
5. On a alors une image complexe du type $I''(\mathbf{x}) = A(\mathbf{x})e^{i\varphi(\mathbf{x})}$ où l'on récupère la phase $\varphi(\mathbf{x})$ en calculant $\varphi(\mathbf{x}) = \text{atan2}(\text{Im}(I''(\mathbf{x})), \text{Re}(I''(\mathbf{x})))$.

Les algorithmes de transformée de Fourier étant bien optimisés sous des logiciels tels que Matlab, le temps de calcul nécessaire pour l'ensemble des 5 étapes est très court avec moins de 1 s/image pour un cœur du type Intel Xeon. L'étape de corrections des coordonnées est plus coûteuse en temps car elle demande d'effectuer des interpolations. Cependant, dans les conditions de l'expérience les amplitudes maximum sont de l'ordre du millimètre ce qui donne un rapport de correction de l'ordre de $\sim 1\%$. La correction maximum étant sur les bords de l'image, cela donne un $\delta x_{\text{maximum}} \sim 1 \text{ mm} \sim 5 \text{ pix}$. En comparaison avec la précision de la mesure qui est décrite dans la section suivante, cette étape peut être ignorée.

II.1.2.3 Précision et résolution de la mesure

La précision verticale de la mesure est limitée par plusieurs aspects. A partir de la relation II-1 il est possible d'exprimer la sensibilité verticale en fonction des différents paramètres en utilisant les dérivées partielles. Dans le cas simplifié en 2D, l'expression générale est :

$$\Delta h(x) = \left| \frac{\partial h}{\partial L} \right| \Delta L + \left| \frac{\partial h}{\partial D} \right| \Delta D + \left| \frac{\partial h}{\partial k_0} \right| \Delta k_0 + \left| \frac{\partial h}{\partial \Delta\varphi} \right| \Delta(\Delta\varphi) \quad II-2$$

En développant, il vient alors :

$$\Delta h(x) = \left| \frac{\Delta\varphi}{\Delta\varphi - k_0 D} \right| \Delta L + \left| \frac{L\Delta\varphi k_0}{(\Delta\varphi - k_0 D)^2} \right| \Delta D + \left| \frac{L\Delta\varphi D}{(\Delta\varphi - k_0 D)^2} \right| \Delta k_0 + \left| \frac{Lk_0 D}{(\Delta\varphi - k_0 D)^2} \right| \Delta(\Delta\varphi) \quad II-3$$

Avec ΔL , ΔD , Δk_0 et $\Delta(\Delta\varphi)$ les erreurs absolues des différents paramètres. Dans un premier temps, en négligeant les erreurs sur le déphasage et le motif, on s'aperçoit qu'une meilleure résolution est obtenue en réduisant la hauteur L et en augmentant la distance D . Cependant, pour des raisons techniques, ces deux paramètres sont modifiables dans des gammes très limitées. En effet, L doit être choisi en fonction de la surface de la zone de mesure, des objectifs de caméra disponibles et de la taille de pixel souhaité. Une fois L choisie, D est limité physiquement par les capacités de projection du vidéoprojecteur (limite de projection latérale).

On suppose maintenant $L, D, \Delta k_0, \Delta L$ et ΔD comme étant des paramètres fixes. De même, le déphasage $\Delta\varphi$ étant uniquement dépendant de la topographie mesurée, celui-ci peut être également considéré comme étant constant. Les variables restant en jeu sont alors k_0 et $\Delta(\Delta\varphi)$. La meilleure résolution sera alors obtenue en augmentant k_0 , c'est-à-dire en réduisant la longueur d'onde des franges du motif. Cependant cette action a un impact sur l'erreur de mesure du déphasage $\Delta(\Delta\varphi)$ car, ce dernier dépend fortement du niveau de contraste du motif qui est lui-même dépendant de la longueur d'onde du motif. Cela s'explique par la pixellisation de la caméra. Si la longueur d'onde est trop petite, les pixels caméra vont moyenniser une trop grande fraction de la longueur d'onde du motif. Il s'ensuit alors une dégradation rapide du contraste. La relation analytique entre $\Delta(\Delta\varphi)$ et k_0 étant difficile à obtenir, l'optimisation de k_0 est réalisée empiriquement. Dans cette configuration, il a été trouvé une valeur idéale aux environs de $k_0/2\pi = 1/(7pix)$ soit $\lambda_0 = 7pix \sim 1.4mm$.

La précision verticale a été estimée à partir d'une mesure d'un motif connu. La Figure II-4 affiche une visualisation de la reconstruction ainsi qu'une coupe pour une comparaison qualitative de la précision.

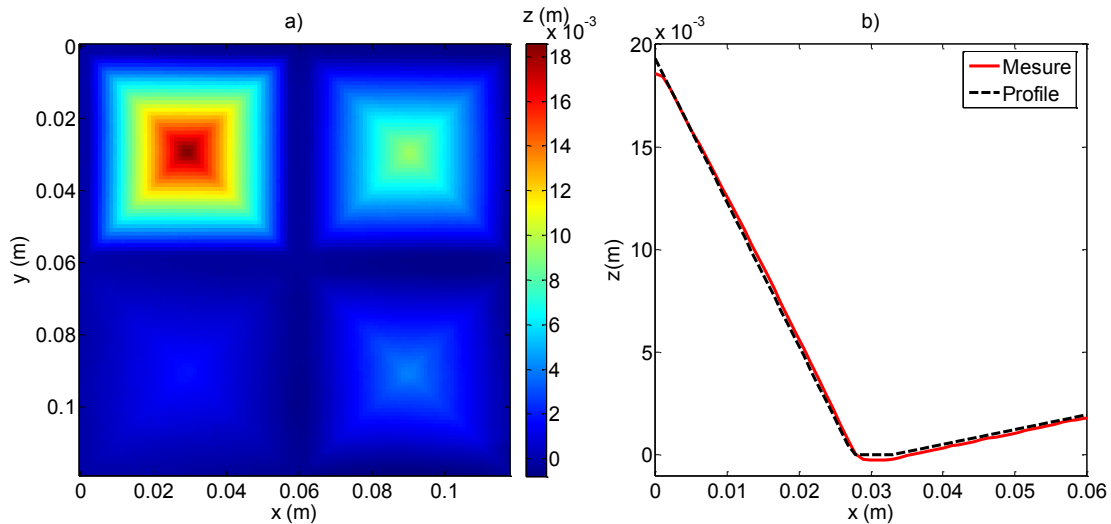


Figure II-4 : a) Image de la reconstruction d'une topographie d'essai constituée de quatre pyramides. b) Comparaison d'une coupe de la mesure avec le profil réel.

A partir de ces mesures, l'erreur verticale a été estimée comme étant aux environs de $300\mu\text{m}$.

La résolution horizontale est limitée par la longueur d'onde du motif $1/k_0$. Dans la situation d'optimisation du contraste, on obtient alors une limite d'environ $1/k_{max} \sim 7\text{pix} \sim 1.4\text{mm}$. Cependant, la réalité est moins bonne car l'étape de filtrage passe-bas effectuée dans la récupération de la phase augmente cette valeur. La résolution est alors plutôt autour de $1/3k_{max} \sim 4.2\text{mm}$. A noter que cette dernière est donc bien supérieure à la correction maximum des coordonnées discutée précédemment.

II.1.3 Propreté de l'eau

L'étude de la turbulence d'onde à la surface de l'eau nécessite une attention particulière à l'état de propreté de la surface. Comme vu précédemment, la présence d'un film viscoélastique en surface produit des ondes de Marangoni [103,104] qui ajoutent une forte dissipation aux environs de 3.5Hz [98]. Il existe dans la littérature de nombreuses méthodes pour obtenir une eau propre, voir par exemple les propositions de Scott [106]. Bien que donnant des résultats très satisfaisants, ces méthodes sont difficilement adaptables à l'échelle de cette expérience. La solution retenue consiste en un nettoyage prononcé de la cuve avec l'utilisation d'un dégraissant performant (Par exemple « Starwax – Décrassant extrême »). Un long rinçage à l'eau chaude est ensuite réalisé pour éliminer toute trace de dégraissant qui est également très efficace pour dissiper les ondes de surface. La Figure II-5 permet de se rendre compte qualitativement de cet effet en regardant l'évolution du spectre de puissance $E^\eta(k, t)$ et $E^\eta(\omega)$ avec une contamination.

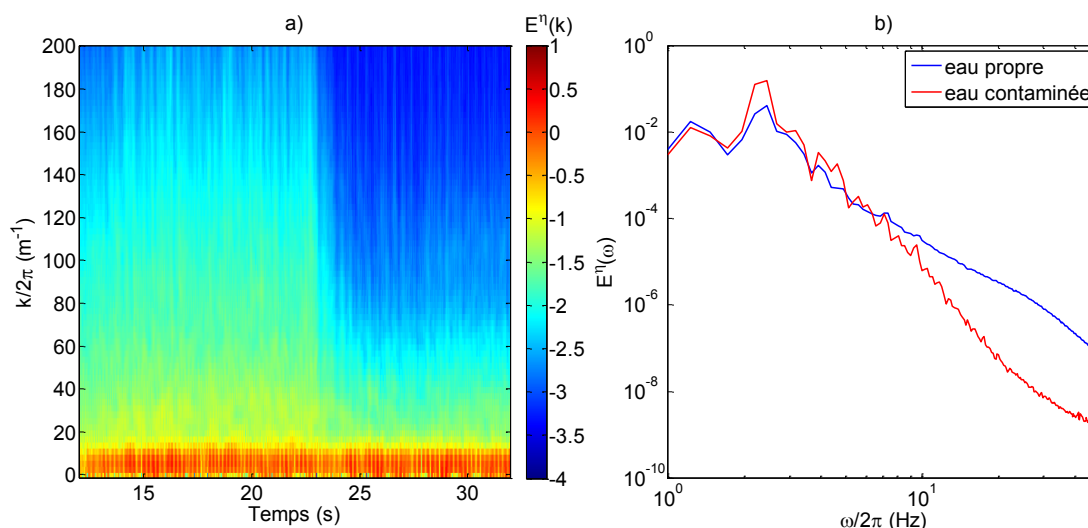


Figure II-5 : a) Evolution temporelle du spectre de puissance $E^\eta(k, t)$. La contamination de la surface est faite aux environs de 22s. b) Spectre de puissance $E^\eta(\omega)$ avant (courbe bleue) et après (courbe rouge) la contamination.

La surface a été contaminée en touchant rapidement la surface libre avec une pointe en métal qui a été précédemment en contact avec du savon. Malgré la faible quantité de polluant, on observe des effets très significatifs avec pratiquement une perte de deux ordres de grandeur pour les fréquences supérieures à 20Hz.

L'eau utilisée pour les expériences est de l'eau de ville qui a été filtrée et adoucie. Il a été vérifié que celle-ci possède une tension de surface très proche de l'eau pure avec $\gamma \sim 72 \cdot 10^{-3} \text{ N/m}$. La cuve n'ayant pas de système de filtration, la surface libre est rapidement contaminée par l'air ambiant et doit être renouvelée régulièrement. Malgré une protection mise en place entre chaque expérience, les effets de la dissipation se font sentir dans le meilleur des cas environs 24h à 48h après la mise en eau.

II.2 Analyse

Cette partie traitera des résultats des expériences obtenus par les outils classiques d'analyse. Le tableau suivant répertorie l'ensemble des expériences réalisées présentant un niveau de propreté satisfaisant.

Exp.	$\omega_p/2\pi$ (Hz)	$\sigma_{\omega_p}/2\pi$ (Hz)	A (mm)	σ_ϵ	σ_η (mm)
1	2	0.5	0.8	0.032	0.8
2	2	0.5	1.2	0.044	1
3	2	0.5	1.6	0.06	1.4
4	2	0.5	2	0.074	1.8
5	2	0.5	2.4	0.091	2.1
6	1	0.2	2.4	0.025	1
7	1	0.2	6	0.08	3.3

Tableau 1 : Liste des expériences avec un niveau de propreté satisfaisant. ω_p et σ_{ω_p} représentent le pic principal du forçage et sa largeur. A est l'amplitude des oscillations de la cuve. σ_ϵ est la pente typique des ondes et σ_η la hauteur typique de la surface libre.

II.2.1 Analyse spatiale

L'ensemble des expériences réalisées couvre une large gamme de forçage. La Figure II-6 montre une reconstruction de la surface pour un forçage faible (gauche) et un forçage fort (droite).

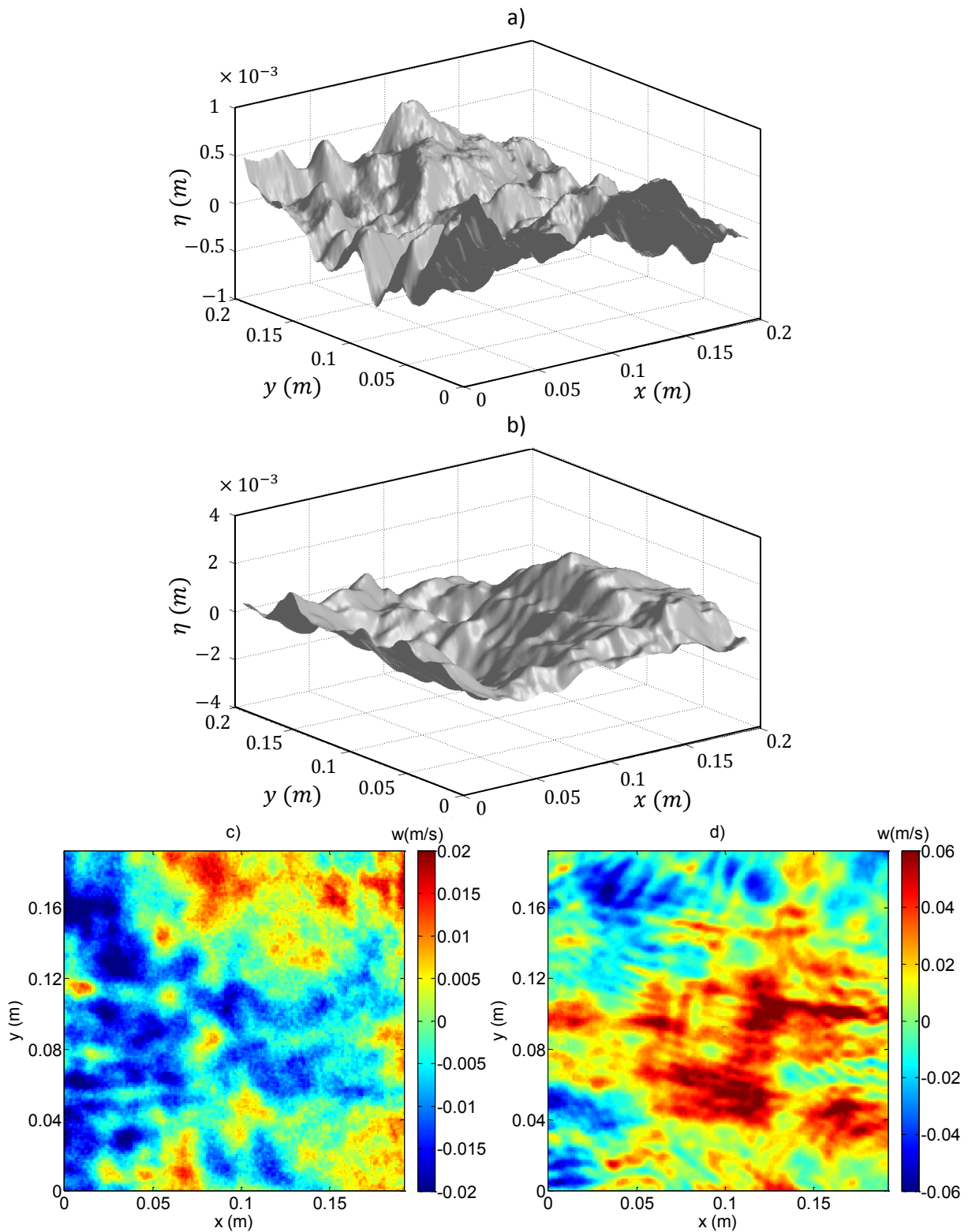


Figure II-6 : a) Reconstruction de la surface libre obtenue avec la profilométrie par transformée de Fourier et pour un forçage faible (Exp.6). b) Similaire à a) mais pour un forçage plus fort (Exp.7). c) d) Vitesse verticale $w = \partial\eta/\partial t$ pour les deux forçages.

La principale différence entre les deux régimes consiste en l'apparition de structures cohérentes aux forçages les plus forts. La Figure II-7 permet de visualiser la distribution de la surface libre pour ces deux régimes.

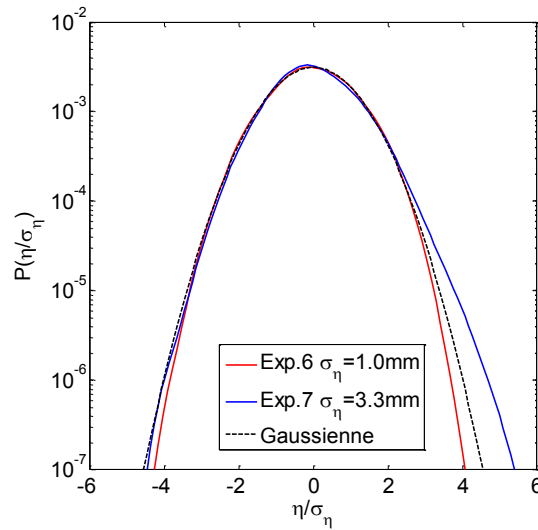


Figure II-7 : Distribution de la surface libre η pour un forçage faible (rouge) et fort (bleue). La distribution normale est tracée en pointillé noir.

On observe une nette différence de comportement. Alors que le régime faible suit une loi normale, les plus hautes intensités de forçages entraînent une déviation pour les grandes amplitudes. Ces résultats préliminaires semblent confirmer la présence de deux régimes différents comme l'ont observé Cobelli et al. [99].

L'intensité des non-linéarités est généralement reliée à la pente des vagues définie comme $\epsilon = \sqrt{\epsilon_x^2 + \epsilon_y^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2}$. Grâce à la mesure complète de la surface, il est possible de calculer cette valeur localement et d'en extraire une valeur typique σ_ϵ :

$$\sigma_\epsilon = \sqrt{(\epsilon - \langle \epsilon \rangle)^2} \quad II-4$$

La Figure II-8 a) trace la dépendance de σ_ϵ en fonction de la vitesse verticale typique des vagues. On observe une tendance linéaire bien établie entre ces deux paramètres. Cette relation entre le gradient temporel et spatial suggère que les ondes sont très proches d'un comportement linéaire. On peut donc s'attendre à observer des ondes proches de la relation de dispersion linéaire, ce qui est attendu pour des niveaux de non-linéarités aussi faible ($10^{-1} > \epsilon > 10^{-2}$). La figure b) montre l'évolution de l'asymétrie calculée à partir du moment d'ordre 3, $\langle \eta^3 \rangle$. Cette dernière permet de quantifier l'importance de la déviation par rapport à une loi normale. Comme attendu, on observe une augmentation de celle-ci à mesure que l'intensité des non-linéarités augmente. Il faut cependant garder à l'esprit que ce paramètre est très sensible à la présence de modes stationnaires a basse fréquence dont la longueur d'onde est plus grande que la zone de mesure. Ces derniers dépendant du forçage ainsi que de la géométrie de la cuve, l'asymétrie est alors accompagnée d'une grande incertitude.

Partie II Ondes gravito-capillaires

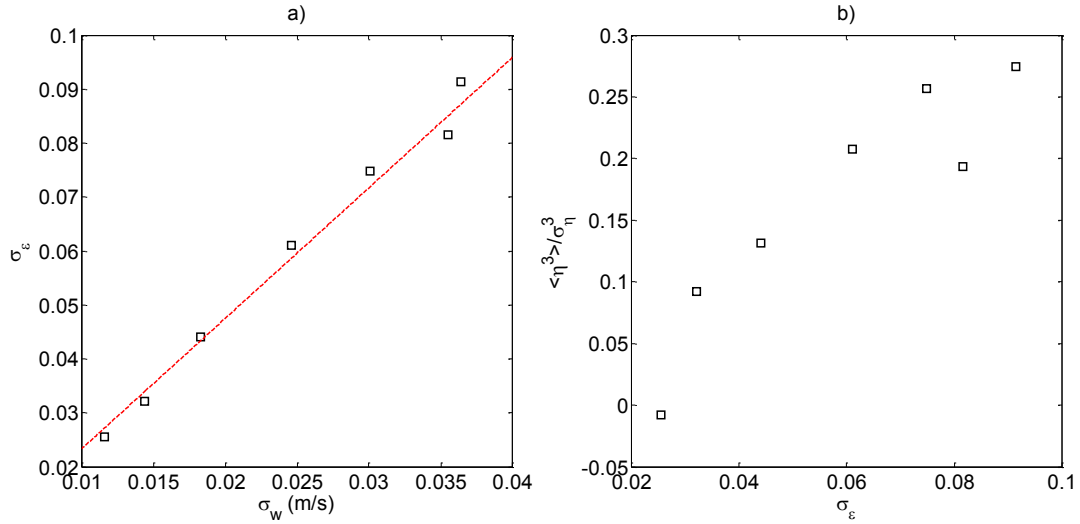


Figure II-8 : a) Intensité de la pente typique σ_ϵ en fonction de déviation standard de la vitesse verticale σ_w . La courbe rouge est une régression linéaire. b) Evolution de l'asymétrie $\langle \eta^3 \rangle / \sigma_\eta^3$ en fonction de l'intensité de la pente.

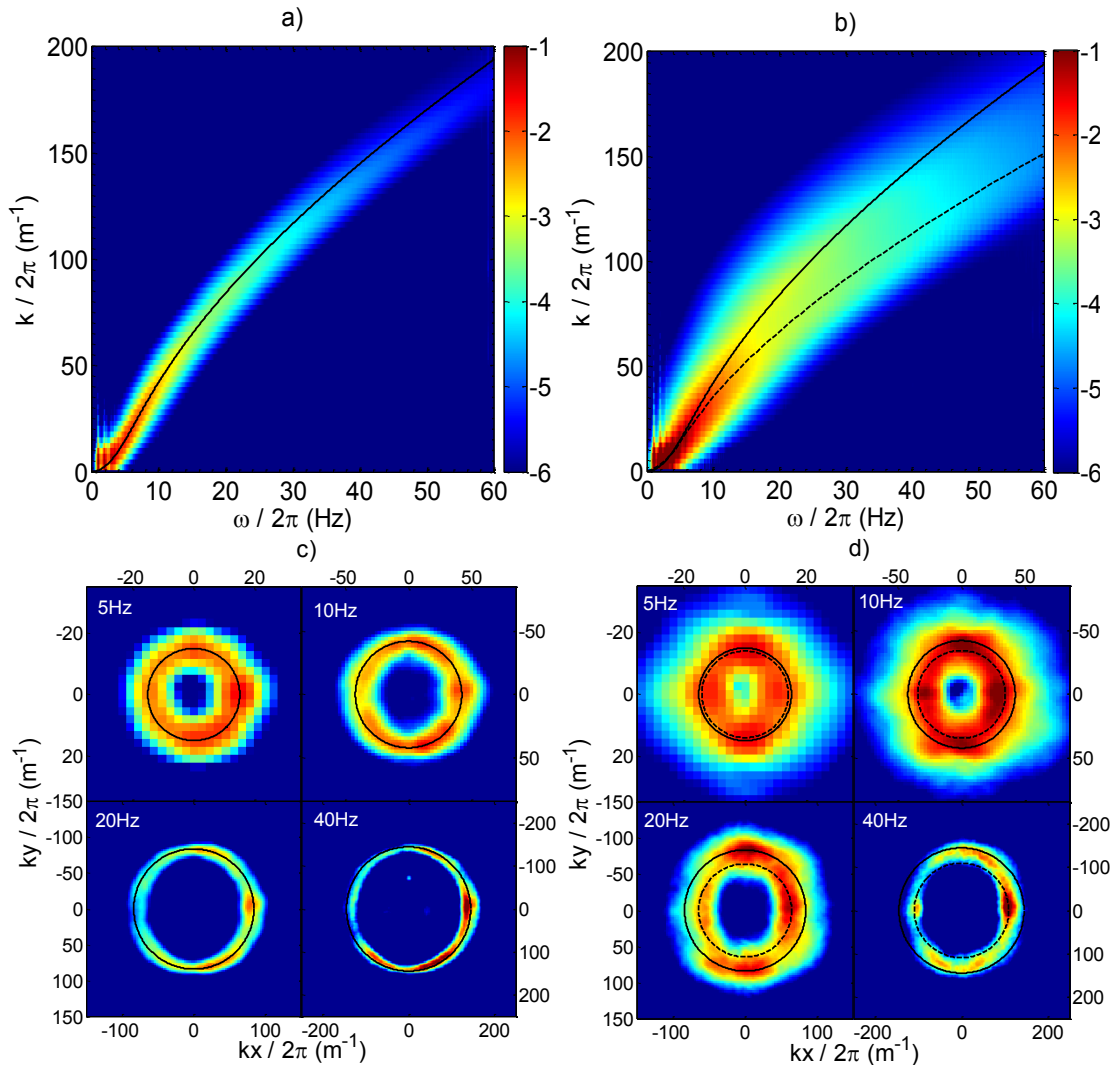


Figure II-9 : Spectres spatio-temporels intégrés de la vitesse verticale: $E^w(k, \omega)$ pour un forçage faible (a) $\sigma_\epsilon = 0.025$ et un forçage fort (b) $\sigma_\epsilon = 0.08$. L'échelle de couleur est logarithmique. La relation de dispersion linéaire est tracée avec la ligne continue noire. La ligne pointillée noire correspond à la correction non-linéaire proposée par Berhanu et Falcon [67]. Les figures c) et d) correspondent à quatre coupes fréquentielles du spectre complet $E^w(\mathbf{k}, \omega)$.

II.2.2 Analyse spectrale

La mesure complète de la surface permet le calcul du spectre 3D de puissance $E^w(\mathbf{k}, \omega)$. Pour plus de lisibilité, une intégration angulaire est réalisée en \mathbf{k} pour obtenir $E^w(k, \omega)$. Les Figure II-9 a) et b) tracent $E^w(k, \omega)$ pour un forçage faible ($\sigma_\epsilon = 0.025$) et fort ($\sigma_\epsilon = 0.08$).

Dans le cas des faibles non-linéarités, l'énergie est concentrée le long de la relation de dispersion linéaire (courbe noire). Les quatre coupes du spectre complet $E^w(\mathbf{k}, \omega)$ affichées en c) montrent un système proche de l'isotropie. La largeur de la relation de dispersion peut être assimilée aux effets non linéaires. En effet, la cohérence des ondes linéaires est affectée par les échanges d'énergies non-linéaires(voir par exemple [56]). L'étalement de l'énergie peut alors être utilisé comme marqueur de l'intensité des non-linéarités. Cette valeur peut être récupérée pour chaque fréquence en réalisant un fit gaussien en k centré sur le pic principal du spectre. On récupère ensuite l'écart type σ_k de la gaussienne comme étant le marqueur de la largeur. Pour le faible forçage, l'énergie étant bien concentrée sur la relation de dispersion linéaire, l'extraction peut se faire directement sur le spectre intégré angulairement $E^w(k, \omega)$. Pour le forçage le plus fort, il est nécessaire de regarder chaque direction θ ($k_x = k \cos \theta, k_y = k \sin \theta$) indépendamment à partir du spectre complet $E^w(\mathbf{k}, \omega)$. La Figure II-10 montre un aperçu des fit réalisés ainsi que l'évolution de la largeur σ_k pour les deux forçages présentés précédemment. La figure b) montre qu'un changement de comportement est clairement visible aux alentours de la transition gravito-capillaire ($\sim 14Hz$). Dans la partie gravitaire, l'élargissement et donc les non-linéarités augmentent avec la fréquence. Au-delà de la transition, la largeur est constante jusqu'aux environs de $40Hz$ où le niveau de bruit de la mesure altère le fit gaussien (divergence de la largeur). La ligne bleue représente la largeur minimale σ_k mesurable qui est fixée par la résolution de la mesure. Les figures c) et d) montrent la répartition angulaire de la largeur σ_k . Malgré le fort bruitage de cet estimateur, on observe pour les deux forçages un élargissement plus fort dans les angles ($|k_x| \sim |k_y|$) là où le niveau d'énergie est le plus faible. Pour le forçage fort, on note également la présence d'un pic aux environs de $20Hz$. Ce dernier semble coïncider avec les ondes de Wilton ($\omega_{Wilton}/2\pi = 19.6 Hz$, voir I.2.1). Une moyenne effectuée sur ces figures donne une valeur typique de $\sigma_k/2\pi \sim 6m^{-1}$ pour le forçage faible et de $\sigma_k/2\pi \sim 10m^{-1}$ pour le forçage fort.

Lorsque le forçage augmente, un décalage de l'énergie par rapport à la relation de dispersion linéaire apparait dans l'axe du forçage (Figure II-9 b) et d)). Ce décalage ne suit pas la branche harmonique et semble être dominant dans l'axe du forçage. La courbe noire pointillée trace la relation de dispersion non-linéaire proposée par Berhanu et al. [67] :

$$\omega = \sqrt{\left(gk \left[1 + (\sigma_\eta k)^2 \right] + \frac{\gamma}{\rho} k^3 \left[1 + \left(\frac{\sigma_\eta k}{4} \right)^2 \right]^{\frac{1}{4}} \right) \tanh(kh)} \quad II-5$$

Avec σ_η l'amplitude typique des ondes et h la profondeur de l'eau. Comme on peut l'observer sur la figure Figure II-9 d), cette correction ne semble pertinente que dans l'axe du forçage. Cela s'explique par la nature de cette expression qui permet d'estimer le décalage de la relation de dispersion pour des ondes de Stokes (et équivalent dans le régime capillaire, voir [11]). Ce décalage ne tient donc pas compte des possibles interactions non-linéaires et est dominé par des ondes de fortes amplitudes. Dans notre situation, ces dernières sont situées aux basses fréquences et sont également fortement anisotropes (ondes forcées directement par la table oscillante).

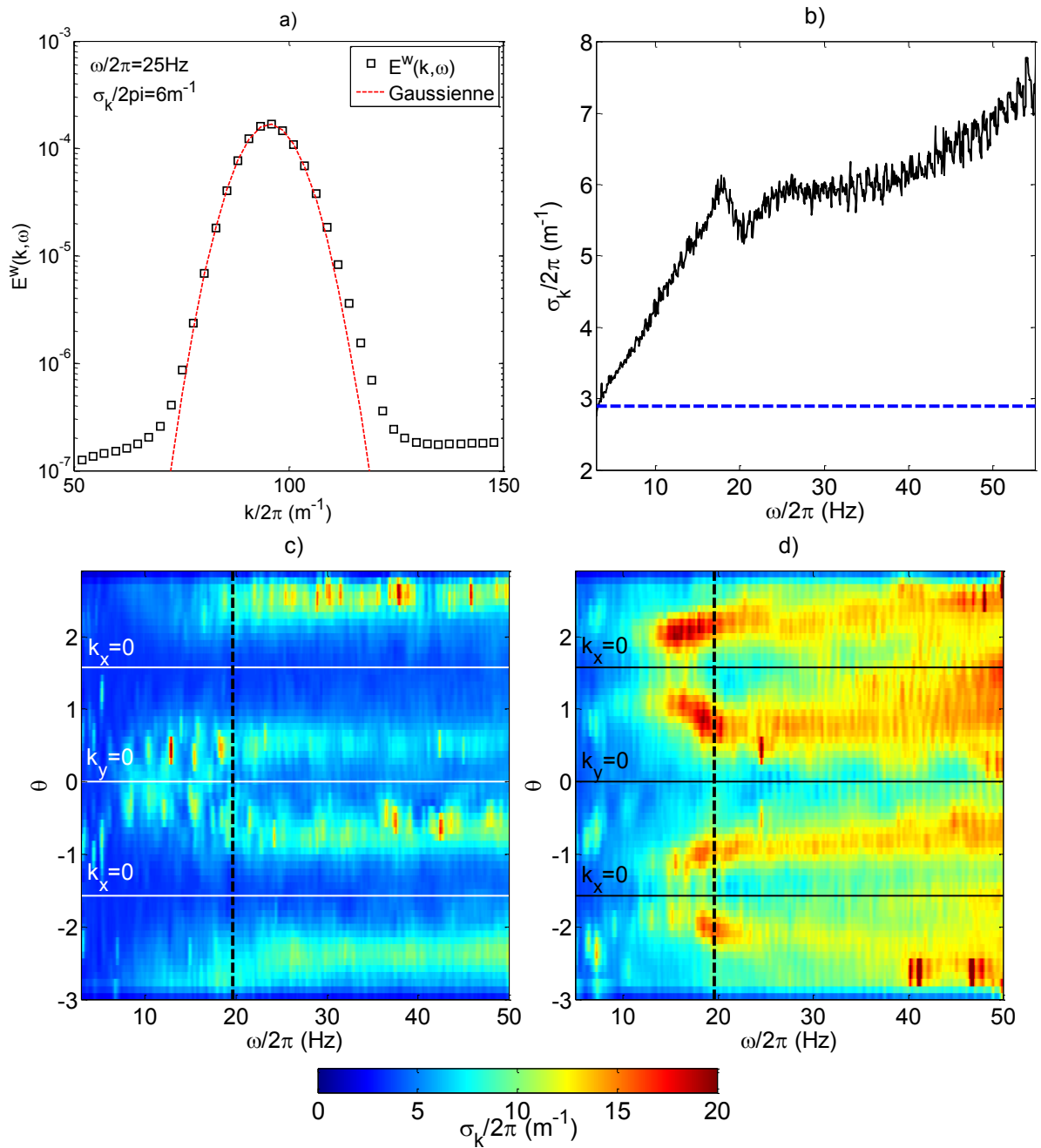


Figure II-10 : Mesure de la largeur du spectre de puissance intégrée autour de la relation de dispersion linéaire. a) Exemple de fit gaussien pour une fréquence donnée de $\omega/2\pi = 25\text{Hz}$. La largeur typique σ_k correspond à l'écart type de la gaussienne. b) Evolution de l'écart type σ_k en fonction de la fréquence pour un fit à partir du spectre intégré $E^w(k, \omega)$ et dans le cas du forçage faible $\sigma_\epsilon = 0.025$. La ligne bleue représente le $\sigma_k/2\pi$ minimal fixé par la résolution de la mesure. c) Evolution de l'écart type σ_k en fonction de la fréquence et de la direction spatiale θ ($k_x = k \cos \theta, k_y = k \sin \theta$). La ligne verticale représente la fréquence des ondes de Wilton $\omega_{wilton}/2\pi = 19.6\text{Hz}$. Les trois lignes horizontales représentent les directions principales. La valeur moyenne est d'environ $\sigma_k/2\pi \sim 6\text{m}^{-1}$. d) Idem que c) mais pour le forçage plus fort avec $\sigma_\epsilon = 0.08$. La valeur moyenne est d'environ $\sigma_k/2\pi \sim 10\text{m}^{-1}$.

L'obtention du spectre de puissance permet une première confrontation de la théorie de la turbulence faible en les comparant aux solutions de Zakharov. La Figure II-11 montre les spectres de puissances en fréquence $E^w(\omega)$ et en nombre d'onde $E^w(k)$ pour les deux forçages caractéristiques présentés précédemment.

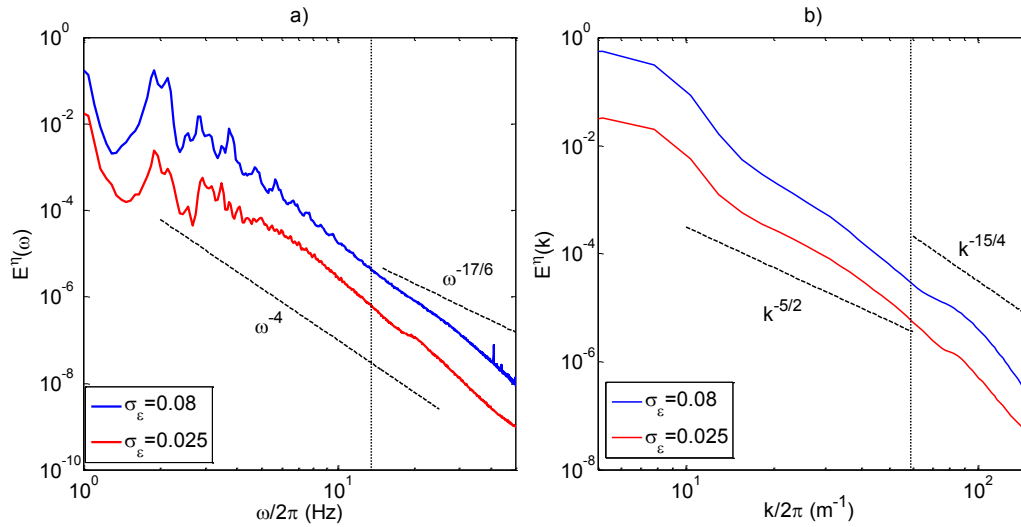


Figure II-11 : a) Spectres de puissance temporels $E^\eta(\omega)$ pour un forçage faible (rouge, Exp.6) et un forçage fort (bleu, Exp.7). Les exposants théoriques de Zakharov sont tracés en pointillés noirs. La transition gravito-capillaire $\omega_{gc} = 14.5\text{Hz}$ est marquée avec la ligne verticale. b) Idem que a) mais pour le spectre de puissance spatiale intégré $E^\eta(k)$.

Contrairement aux précédentes observations [87,93,99], aucun changement remarquable dans les spectres de puissance n'est visible aux alentours de la transition gravito-capillaire. Le régime capillaire est probablement affecté par la dissipation et/ou la sensibilité de la mesure. Ainsi, seul le régime gravitaire dans la gamme étendue de $[4,20]\text{Hz}$ ($[10,100]\text{m}^{-1}$) a été comparé aux spectres de Zakharov et de Kartashova. La Figure II-12 trace les exposants α et β correspondant respectivement à $E^w(\omega) \sim \omega^\alpha$ et $E^w(k) \sim k^\beta$.

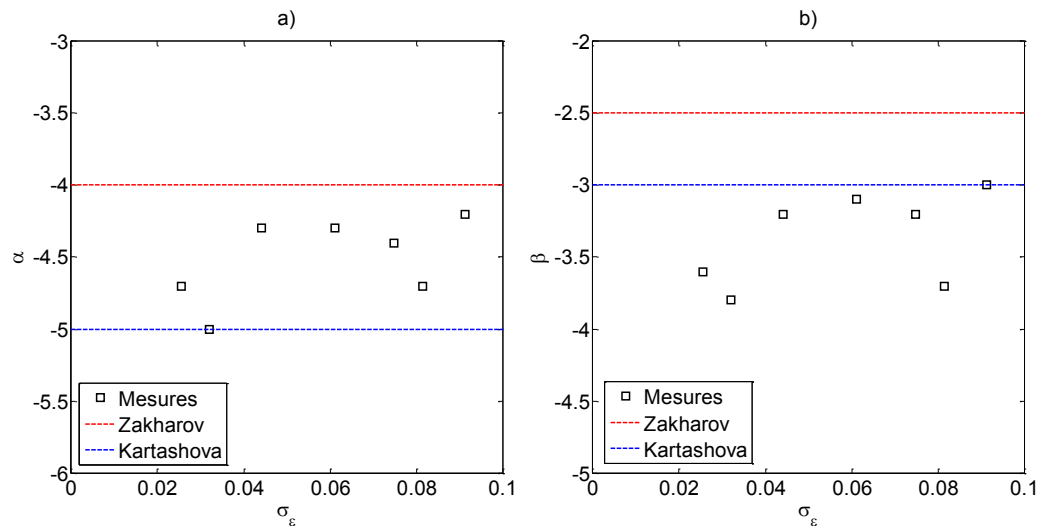


Figure II-12 : a) Exposant α du spectre de puissance $E^\eta(\omega) \sim \omega^\alpha$ dans la fenêtre $[4,20]\text{Hz}$ en fonction de la pente typique des ondes. Les prédictions du spectre de Zakharov et de la cascade dynamique de Kartashova pour le régime de gravité sont rapportées avec la courbe pointillée rouge et bleue respectivement. b) Idem que a) mais pour le spectre de puissance spatiale intégrée en k : $E^\eta(k) \sim k^\beta$ dans la fenêtre $[10,100]\text{m}^{-1}$.

Pour les deux cas on observe une divergence significative avec les solutions de Zakharov ou de Kartashova. Ces mesures semblent néanmoins cohérentes avec la littérature montrant un exposant dépendant de l'intensité du forçage. La Figure II-13 trace l'évolution de α en fonction de β .



Figure II-13 : Relation entre les exposants α et β en comparaison des valeurs théoriques des solutions de Zakharov et Kartashova dans le régime gravitaire. La ligne rouge représente la régression linéaire des mesures.

Une dépendance linéaire entre les deux exposants est observée. Cette dernière ne semble néanmoins pas coïncider avec les solutions de Zakharov pour les plus hautes intensités, comme le suppose Nazarenko avec le modèle de turbulence discrète [32]. La Figure II-14 montre l'évolution temporelle ainsi que la distribution du spectre de puissance $E^w(\mathbf{k}, t)$ pour quatre ondes sélectionnées. Un fort changement de comportement est observé entre les deux forçages. Dans le cas faible (a), l'ensemble du spectre présente une distribution équivalente et qui s'éloigne légèrement d'une distribution exponentielle (ligne pointillée) pour les hautes puissances. Le forçage fort montre quant à lui une modification de comportement pour les plus hautes fréquences. Ces dernières semblent principalement alimentées par des événements soudains (intermittence) comme on peut le voir dans le rectangle en pointillés violets.

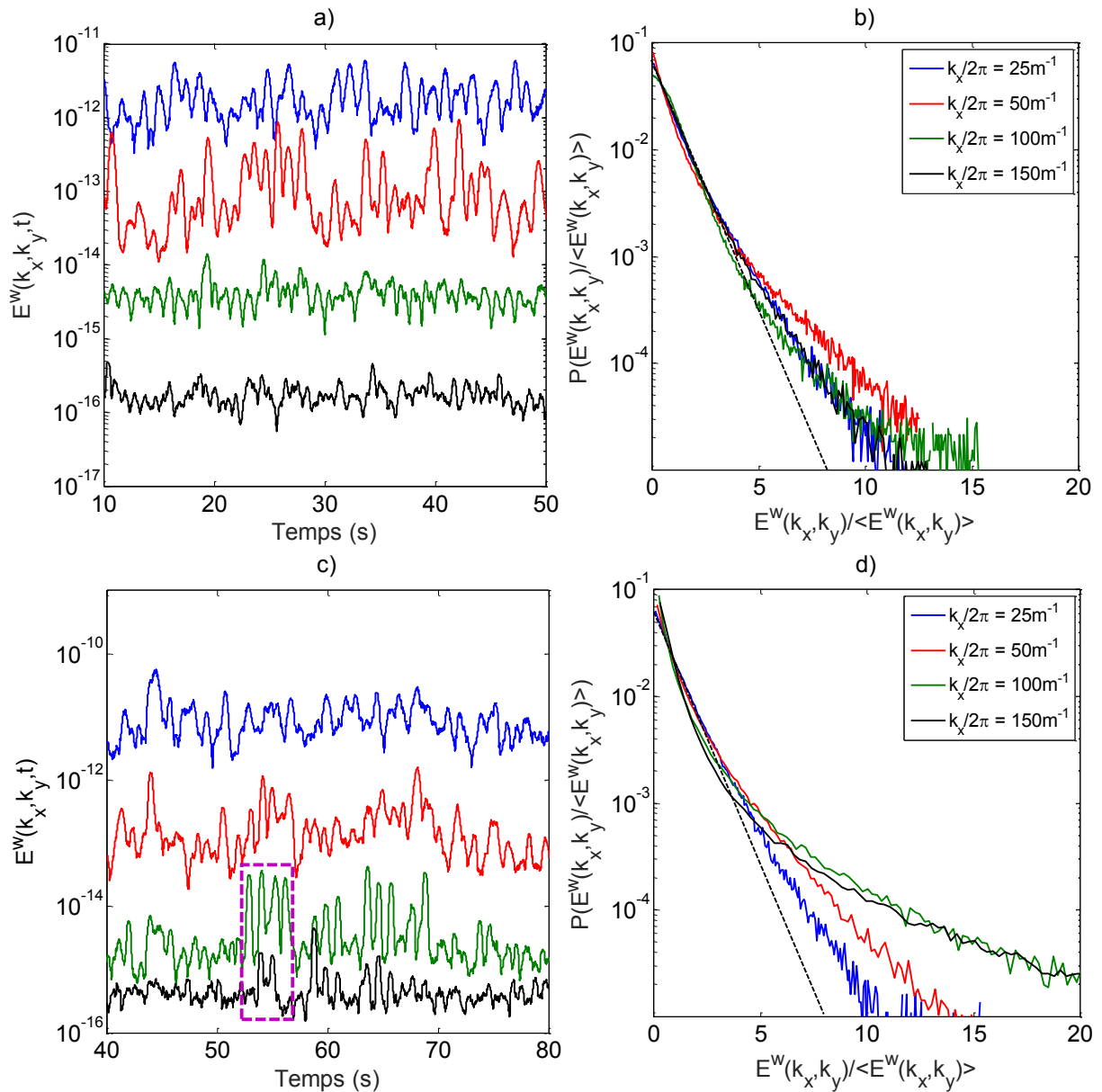


Figure II-14 : a)c) Evolution temporelle de $E^W(k_x, k_y)$ pour $k_x/2\pi = [25, 50, 100, 150]$ et $k_y/2\pi = 0$, dans le cas du forçage faible $\sigma_\epsilon = 0.025$ (a) et fort $\sigma_\epsilon = 0.08$ (c). Les courbes ont été filtrées temporellement pour éliminer l'oscillation rapide des ondes. b)d) Distribution des amplitudes de Fourier correspondant à a) et c).

II.3 Résonances

Cette partie va s'intéresser à l'observation des interactions résonantes à l'origine des transferts d'énergie en turbulence faible. Dans un premier temps une description théorique des solutions exactes et approchées sera faite. Ces dernières seront ensuite observées indirectement par utilisation de corrélations d'ordre élevé. Les interactions à 3 ondes et 4-ondes seront étudiées.

II.3.1 Théorie et outils statistiques

II.3.1.1 Théorie

II.3.1.1.1 Interaction à 3-ondes

Les interactions à 3-ondes représentent l'ordre le plus bas des interactions résonantes possibles. Pour rappel, les équations résonantes sont les suivantes :

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_1 &= \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 & \text{II-6} \\ \omega_1 &= \omega_2 + \omega_3 \end{aligned}$$

Il est possible de trouver géométriquement les solutions de ce système en utilisant la relation de dispersion linéaire. Comme il a été vu précédemment (Figure II-9), cette dernière est une très bonne approximation pour des mesures ayant de faibles intensités de non-linéarité. La Figure II-15 représente les solutions dans l'espace complet (\mathbf{k}, ω) pour une onde (\mathbf{k}_2, ω_2) fixée.

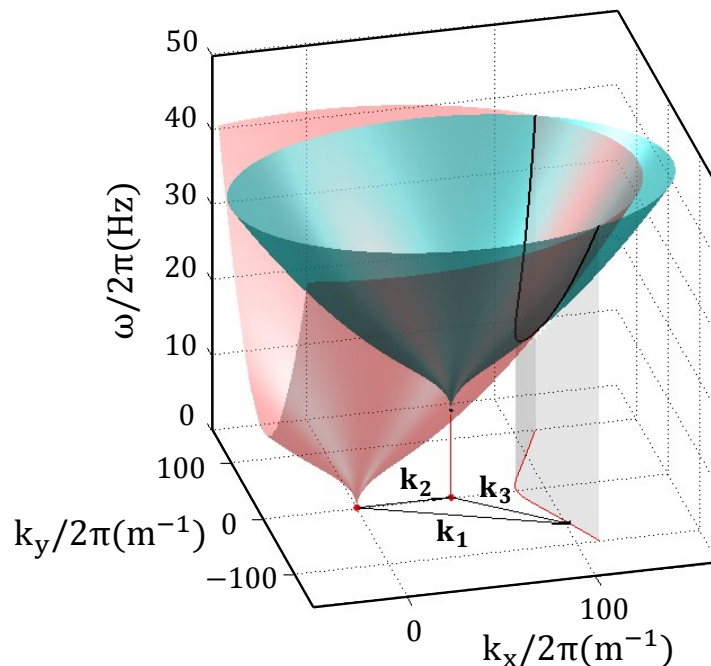


Figure II-15 : Représentation 3d des solutions résonantes pour des interactions à 3-ondes. La surface rouge représente la relation de dispersion linéaire des ondes. Une première onde (\mathbf{k}_2, ω_2) de la triade est fixée et une seconde relation de dispersion est tracée à partir de celle-ci (surface verte). Les solutions résonantes satisfaisant l'équation II-6 correspondent à l'intersection entre les deux surfaces (courbe noire). Une projection des solutions dans l'espace des \mathbf{k} est réalisée en $\omega = 0$ montrant les possibles combinaisons de $[\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3]$ (courbe rouge).

La surface rouge représente la relation de dispersion linéaire des ondes. A partir de l'onde fixée (\mathbf{k}_2, ω_2) , une seconde relation de dispersion est tracée (surface verte). Les solutions résonantes sont alors marquées par l'intersection des deux surfaces (courbe noire). Une projection des solutions dans l'espace des \mathbf{k} est visible en rouge pour des fréquences positives ($\omega > 0$). Une vue plus détaillée des solutions est donnée dans la Figure II-16.

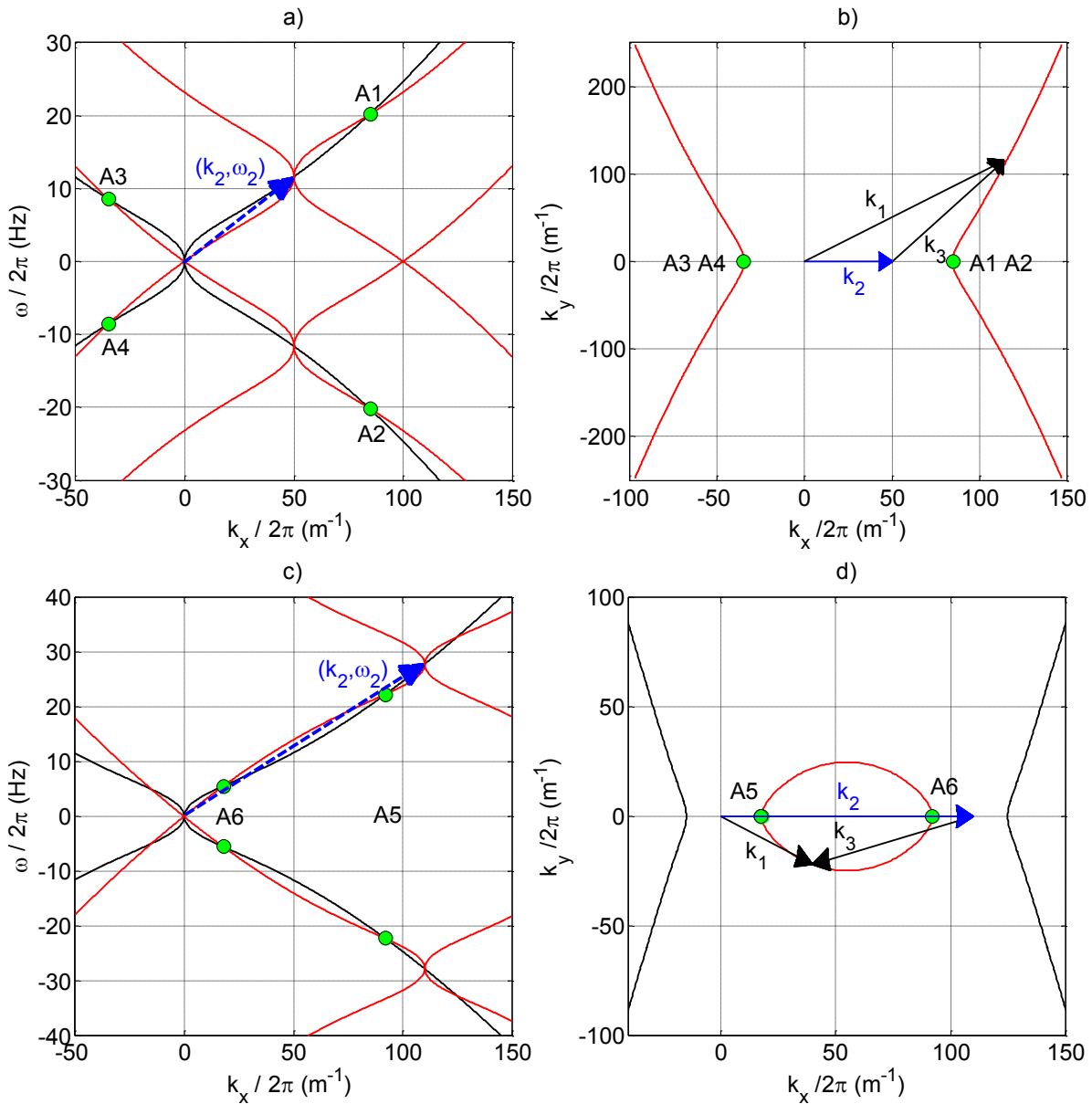


Figure II-16 : a) Coupe en (k_x, ω) de la Figure II-15 pour une onde (\mathbf{k}_2, ω_2) donnée (flèche bleue). Les solutions exactes A1, A2, A4 et A4 correspondent à l'intersection des relations de dispersion rouge et noir. B) Projection des solutions dans l'espace des k pour le même (\mathbf{k}_2, ω_2) que en a) (courbe rouge). Les solutions 1D de a) sont également reportées. C) d) Idem que a) et b) mais pour une onde (\mathbf{k}_2, ω_2) plus courte. De nouvelles solutions A5 et A6 apparaissent. L'ensemble de toutes ces solutions sont identiques et correspondent simplement à des permutations dans les indices des ondes.

On observe l'ensemble des solutions possibles en 1D en (k, ω) (gauche) et en 2D en \mathbf{k} (droite) pour une onde (\mathbf{k}_2, ω_2) fixée. Pour les figures de gauche, la relation de dispersion en noir correspond à la surface rouge tracée sur la Figure II-15 (la courbe rouge correspond à la surface verte). Les solutions sont alors les intersections entre les courbes rouges et noires. Pour les plus hautes fréquences, de nouvelles solutions apparaissent (figures c) et d)). Ces différentes solutions sont équivalentes aux précédentes et correspondent à des permutations d'indice dans les équations résonantes. Par exemple la solution A3 qui représente $\omega_1 = -\omega_2 + \omega_3$ peut-être réécrite comme étant $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$. Ainsi par permutation de ω_3 et ω_1 on retrouve la solution A1 qui représente $\omega_1 = \omega_2 + \omega_3$. Pour chaque onde fixée (k_2, ω_2) , il existe une valeur minimale $(k_3^{min}, \omega_3^{min})$ satisfaisant les équations résonantes. Cette dernière correspond au cas particulier où les trois ondes de la triade sont colinéaires.

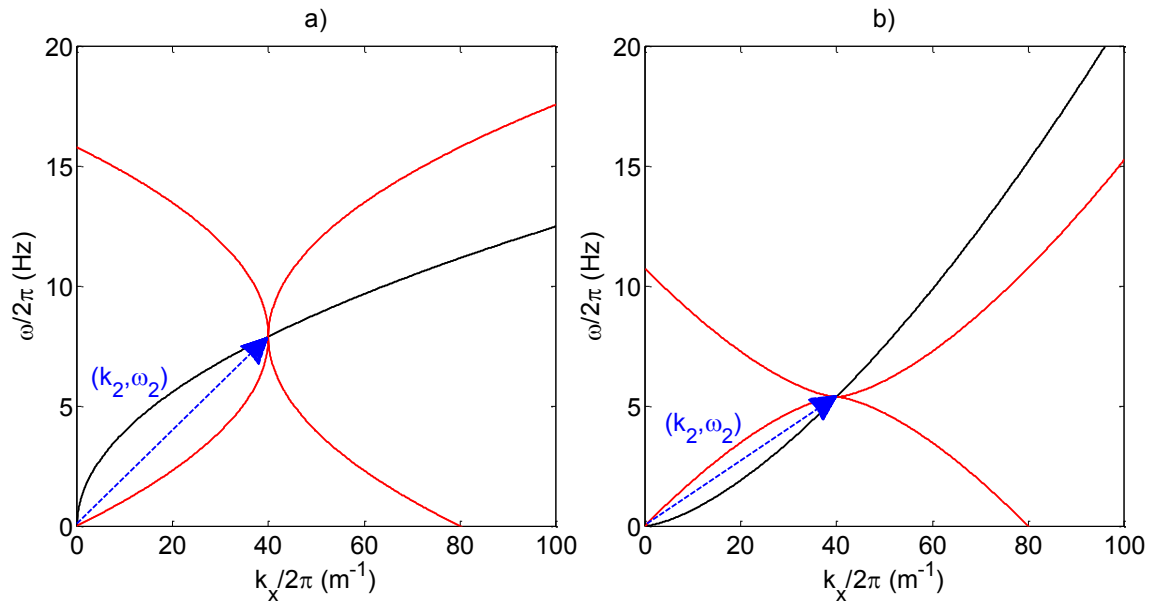


Figure II-17 : Solution 1D pour des ondes suivant la relation de dispersion des ondes de gravité pure (a) et de capillarité pure (b). Aucune solution colinéaire n'existe.

Cette solution est générée par la double courbure de la relation de dispersion. Comme on peut l'observer sur la Figure II-17, c'est un cas particulier qui est inexistant pour les ondes de capillarité ou de gravité pure. La Figure II-18 trace l'évolution de ω_3^{min} en fonction de ω_2 dans le régime gravito-capillaire.

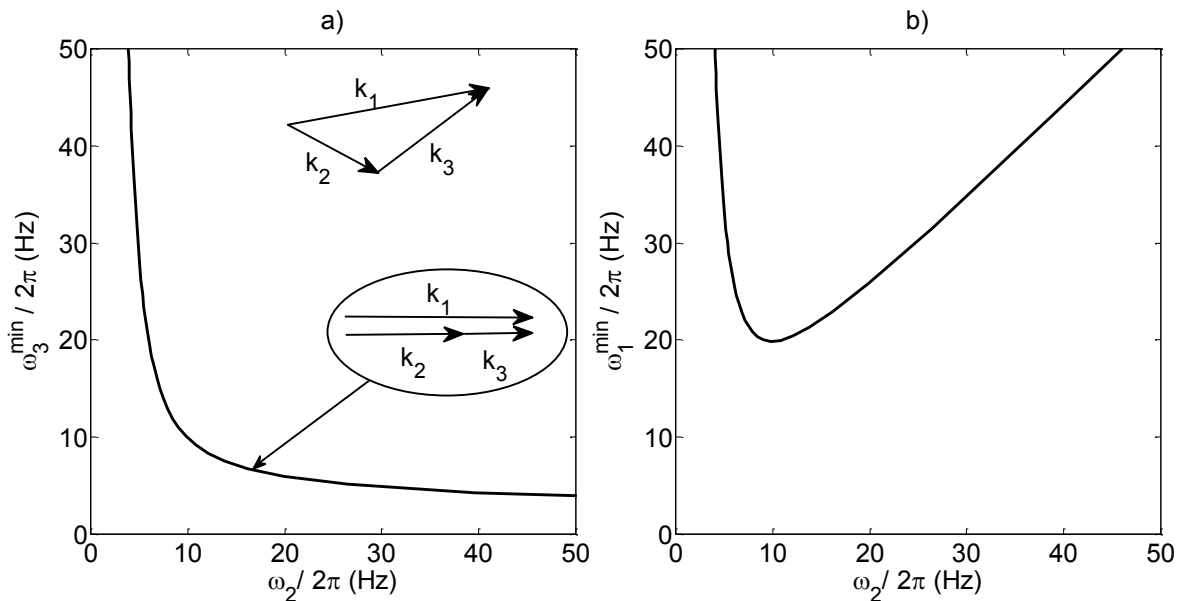


Figure II-18 :a) Evolution de ω_3^{min} correspondant à la solution 1D en fonction de ω_2 . Les solutions 2D ne sont possibles que pour $\omega_3 > \omega_3^{min}$ b) Evolution de $\omega_1^{min} = \omega_2 + \omega_3^{min}$. Un minimum est présent en $\omega_2 = \omega_3 = \omega_1^{min} / 2$ et correspond aux ondes de Wilton.

Cette ligne marque la limite de la zone où les solutions exactes sont autorisées. On remarque qu'à mesure que la fréquence diminue, les couplages autorisés deviennent de plus en plus non locaux (séparation d'échelle entre les ondes), jusqu'à disparaître dans le régime gravitaire. A noter que $\omega_1^{min} = \omega_3^{min} + \omega_2$ admet un minimum local en $\omega_2 = \omega_3^{min} = \omega_1^{min} / 2 = \omega_{wilton} = 2\pi \times 9.8 \text{ Hz}$. Ce dernier correspond au cas dégénéré des ondes de Wilton où la même onde peut interagir avec elle-même pour exciter son double (voir par exemple [53,54]). On observe alors que tant qu'aucune onde

ne dépasse ω_{wilton} , aucune interaction triadique n'est possible. Ce point particulier constitue donc un seuil pour le déclenchement d'une cascade d'énergie à 3-ondes.

Comme il en a été discuté précédemment sur la Figure II-10, le spectre de puissance possède une largeur δk autour de la relation de dispersion. Il est alors possible d'intégrer cette dernière dans la recherche de solutions résonantes pour obtenir un système plus réaliste. Les équations résonantes s'écrivent alors :

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_1 &= \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 + \delta\mathbf{k} & II-7 \\ \omega_1 &= \omega_2 + \omega_3 \end{aligned}$$

La Figure II-19 permet de visualiser la modification des solutions dans le cas particulier d'ondes colinéaires et avec l'ajout de δk .

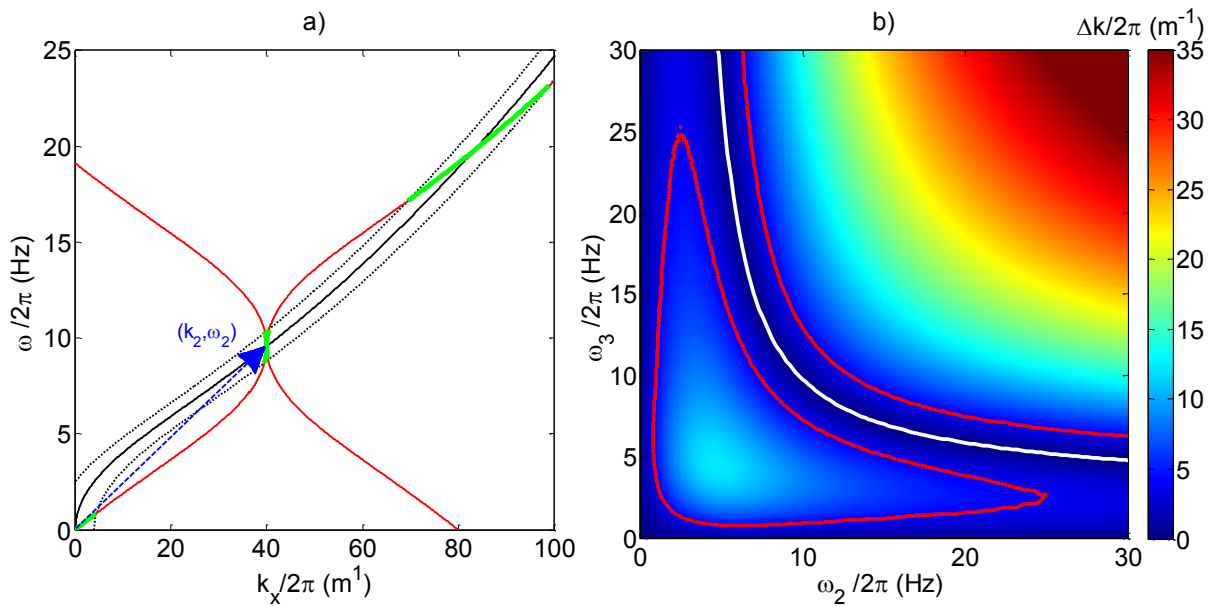


Figure II-19 : a) Solutions approchées pour les résonances à 3 ondes dans le cas 1D et d'une onde (k_2, ω_2) fixée. Un élargissement constant de $\delta k/2\pi = 6m^{-1}$ a été choisi et est représentée en pointillés noirs. Les solutions résonantes correspondent à l'intersection entre les courbes pointillées noires et la courbe rouge (courbes vertes). b) Carte de la distance Δk entre les deux relations de dispersion dans le cas 1D (courbe rouge et noire en a)). Les solutions exactes correspondent à $\Delta k = 0$ (courbe blanche) et les solutions approchées à $0 < \Delta k < \delta k$ ($\delta k/2\pi = 6m^{-1}$ est tracé en rouge)

Par souci de simplicité, une largeur constante $\delta k/2\pi = 6m^{-1}$ a été choisie. Cette valeur arbitraire correspond à la largeur σ_k moyenne mesurée pour le forçage de faible intensité (voir Figure II-10). Sur la figure a), les nouvelles solutions disponibles sont tracées en vert. Ces dernières sont communément appelées quasi-résonances ou résonances approchées du fait de leur proximité avec les solutions exactes. Pour en estimer leur importance, la figure b) trace la carte de la distance Δk entre les deux relations de dispersion tracée en a) et pour le cas 1D. La courbe rouge trace $\delta k/2\pi = 6m^{-1}$. Dans cette situation simplifiée, les quasi-résonances sont possibles si $0 < \Delta k < \delta k$. Ainsi, plus la distance Δk est grande, plus les non-linéarités doivent être importantes pour permettre les interactions. On remarque à la vue de la figure b), qu'un faible élargissement non-linéaire induit une forte augmentation du nombre de combinaisons résonantes possibles. A noter également que des solutions à 3-ondes sont désormais permises dans le régime de gravité pure.

II.3.1.1.2 Interaction à 4-ondes

La même analyse que celle présentée précédemment peut être appliquée aux interactions à 4 ondes. Pour rappel, dans le cas des ondes de surface, ces dernières satisfont le système suivant :

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 &= \mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4 + \delta\mathbf{k} & \text{II-8} \\ \omega_1 + \omega_2 &= \omega_3 + \omega_4 \end{aligned}$$

Où $\delta\mathbf{k}$ représente un possible élargissement non linéaire, permettant les quasi-résonances. La Figure II-20 montre les solutions exactes ($\delta\mathbf{k} = 0$) pour deux ondes $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_3$ fixés.

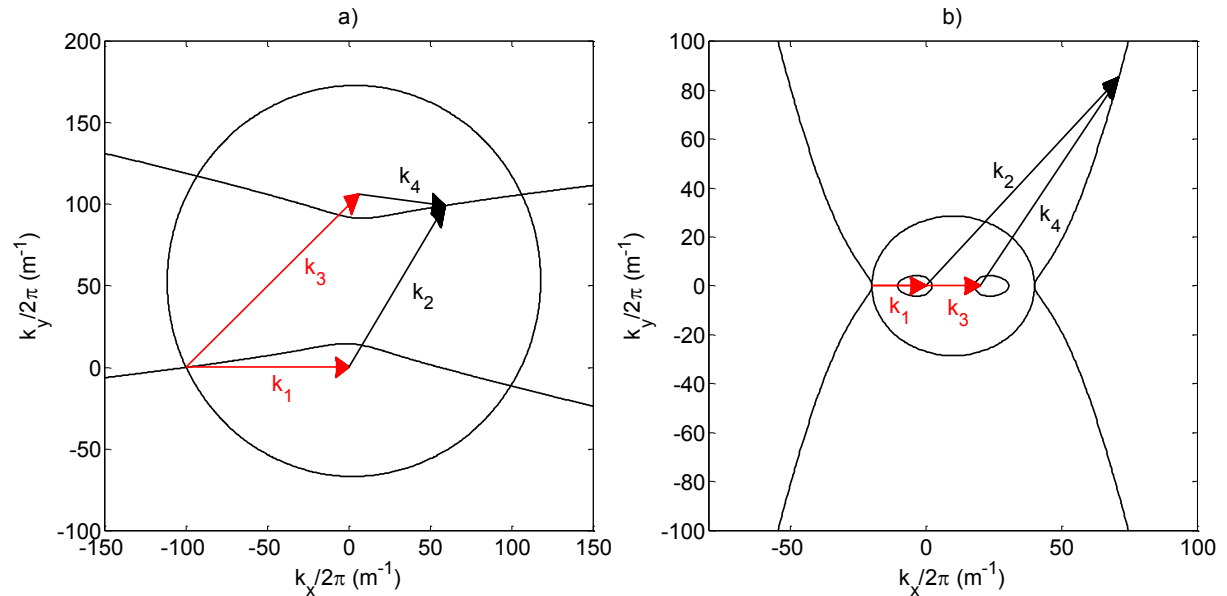


Figure II-20 : Solutions exactes dans l'espace des \mathbf{k} pour des interactions à 4 ondes avec \mathbf{k}_1 et \mathbf{k}_3 fixées. a) Pour une situation arbitraire. b) Cas où deux ondes sont colinéaires.

Contrairement aux interactions à 3-ondes, une multitude de solutions sont disponibles. Tout type de solution est à priori possible : local, non local, colinéaire, perpendiculaire... La prise en compte des quasi-résonances est affichée dans la Figure II-21 pour une situation où deux ondes sont colinéaires.

On aperçoit la très grande proximité des deux relations de dispersion. Cela signifie qu'un très faible élargissement non-linéaire va permettre une forte augmentation du nombre de solutions possibles. La figure b) permet de visualiser la carte de la distance Δk entre les relations de dispersion lorsque $\omega_i > 0$. En prenant l'estimation $\delta k/2\pi = 6m^{-1}$ issue de la largeur du spectre de puissance, on observe que la totalité de la figure devient accessible. Ces interactions sont faiblement contraintes et peuvent donc potentiellement être très efficaces en parallèle des interactions à 3-ondes.

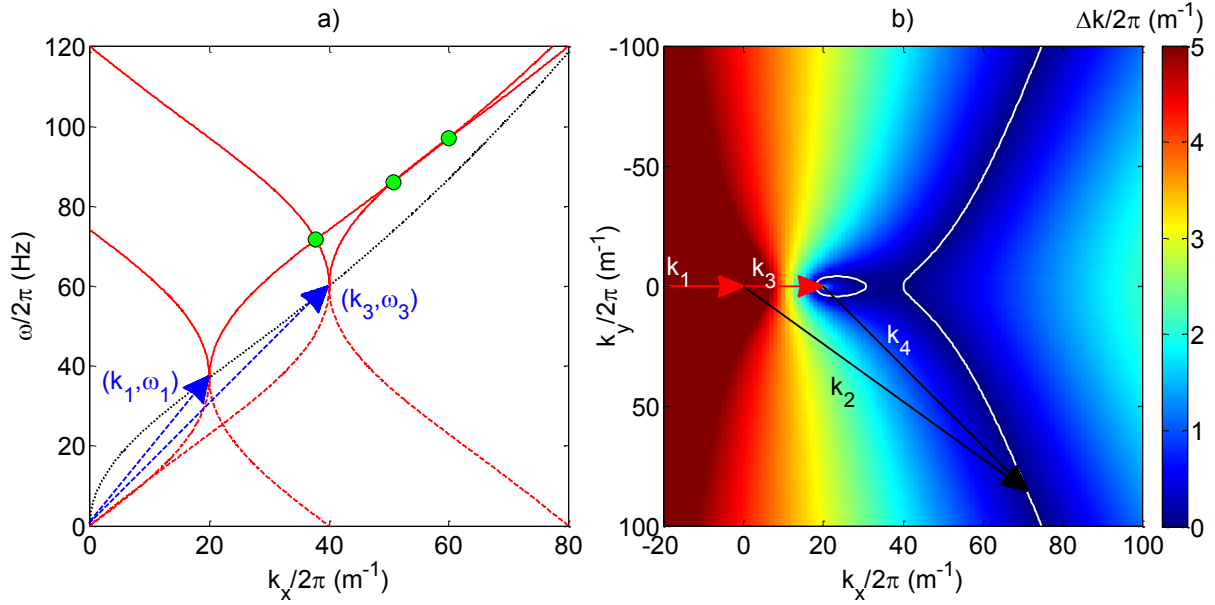


Figure II-21 : a) Coupe (k_x, ω) des solutions à 4 ondes dans le cas où $(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_3)$ sont colinéaires. Les solutions exactes sont représentées par les pastilles vertes et correspondent au croisement des relations de dispersion rouge et noir. Une forte proximité des deux courbes est visible aux alentours des solutions exactes, supposant l'apparition d'interactions quasi-résonante. b) Carte 2D de la distance Δk entre les deux relations de dispersion rouge tracée en a) ($\omega > 0$). La ligne blanche représente les solutions exactes $\Delta k = 0$.

II.3.1.2 Outils statistiques

Un estimateur statistique naturel pour l'observation d'interactions résonantes est l'utilisation de corrélations. Dans la situation où seule une mesure temporelle $\eta(t)$ est disponible, les corrélations d'ordre 3 en temps peuvent s'écrire :

$$c^3(t, \tau_2, \tau_3) = \langle \eta(t)\eta(t + \tau_2)\eta(t + \tau_3) \rangle \quad II-9$$

Dans le cas où le système est stationnaire, c^3 ne dépend plus que de τ_2 et τ_3 . Les interactions triadiques en fréquence peuvent alors être observées par le calcul de corrélation dans l'espace de Fourier :

$$c_\omega^3(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = \langle \hat{\eta}(\omega_1)\hat{\eta}(\omega_2)\hat{\eta}(\omega_3) \rangle \quad II-10$$

où $\langle \rangle$ est une moyenne sur les fenêtres temporelles. Pour rappel, $\hat{\eta}(\omega) \sim \int \eta(t)e^{i\omega t} dt$. En utilisant cette formulation dans II-10 il vient :

$$\begin{aligned} c_\omega^3(\omega_1, \omega_2, \omega_3) &\sim \iiint \langle \eta(t)\eta(t + \tau_2)\eta(t + \tau_3) \rangle e^{i((\omega_1 + \omega_2 + \omega_3)t + \omega_2\tau_2 + \omega_3\tau_3)} dt d\tau_2 d\tau_3 \\ &\sim \iiint c^3(t, \tau_2, \tau_3) e^{i((\omega_1 + \omega_2 + \omega_3)t + \omega_2\tau_2 + \omega_3\tau_3)} dt d\tau_2 d\tau_3 \end{aligned} \quad II-11$$

En supposant le signal stationnaire, on peut alors simplifier :

$$c_\omega^3(\omega_1, \omega_2, \omega_3) \sim \iiint c^3(\tau_2, \tau_3) e^{i(\omega_2\tau_2 + \omega_3\tau_3)} d\tau_2 d\tau_3 \delta(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3) \quad II-12$$

avec δ la fonction de Dirac. On se rend compte que l'estimateur permet uniquement de visualiser du signal pour $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 0$. Ainsi, pour regarder les interactions résonantes, il faut prendre le complexe conjugué sur ω_1 pour avoir $\omega_1 = \omega_2 + \omega_3$.

$$c_\omega^3(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = \langle \hat{\eta}^*(\omega_1)\hat{\eta}(\omega_2)\hat{\eta}(\omega_3) \rangle \quad II-13$$

Dans notre situation où une mesure spatiale est également disponible, il est intéressant d'effectuer une moyenne spatiale sur l'ensemble des corrélations temporelles en chaque pixel. Cela permet

d'augmenter significativement la convergence statistique et donc de réduire la durée d'enregistrement. On a alors :

$$c_{\omega}^3(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = \frac{1}{S} \iint \langle \hat{\eta}^*(\mathbf{r}, \omega_1) \hat{\eta}(\mathbf{r}, \omega_2) \hat{\eta}(\mathbf{r}, \omega_3) \rangle d^2\mathbf{r} \quad //14$$

En injectant $\hat{\eta}(\mathbf{r}, \omega) \sim \iiint \hat{\eta}(\mathbf{k}, \omega) e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} + \omega t)} d^2\mathbf{k} dt$ et en supposant le système homogène en espace (indépendance de \mathbf{r}) il vient :

$$\begin{aligned} & c_{\omega}^3(\omega_1, \omega_2, \omega_3) \\ & \sim \int \dots \int \langle \hat{\eta}^*(\mathbf{k}_1, \omega_1) \hat{\eta}(\mathbf{k}_2, \omega_2) \hat{\eta}(\mathbf{k}_3, \omega_3) \rangle e^{-i(-\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3)\cdot\mathbf{r}} d^2\mathbf{r} d^2\mathbf{k}_1 d^2\mathbf{k}_2 d^2\mathbf{k}_3 \quad //15 \\ & \sim \iiint \langle \hat{\eta}^*(\mathbf{k}_1, \omega_1) \hat{\eta}(\mathbf{k}_2, \omega_2) \hat{\eta}(\mathbf{k}_3, \omega_3) \rangle \delta(-\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3) d^2\mathbf{k}_1 d^2\mathbf{k}_2 d^2\mathbf{k}_3 \end{aligned}$$

Avec δ la fonction de Dirac. On voit que les corrélations sont non-nulles uniquement si $\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3$. On a alors un estimateur qui permet uniquement de voir les couplages qui sont résonants à la fois en temps et en espace.

Le même raisonnement peut être fait en espace ainsi qu'en espace-temps. On a alors :

$$\begin{aligned} c_k^3(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3) &= \langle \hat{\eta}^*(\mathbf{k}_1) \hat{\eta}(\mathbf{k}_2) \hat{\eta}(\mathbf{k}_3) \rangle \\ c_{k\omega}^3(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \omega_1, \omega_2, \omega_3) &= \langle \hat{\eta}^*(\mathbf{k}_1, \omega_1) \hat{\eta}(\mathbf{k}_2, \omega_2) \hat{\eta}(\mathbf{k}_3, \omega_3) \rangle \end{aligned} \quad //16$$

Similairement à $c_{\omega}^3(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ lorsque $c_k^3(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3)$ est moyenné en temps et que le système est homogène, seule les couplages qui sont résonants en temps et en espace finissent par ressortir.

Pour une interprétation plus aisée, les corrélations sont normalisées avec les spectres de puissances. Deux normalisations sont possibles :

$$C_{\omega}^3(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = \frac{c_{\omega}^3(\omega_1, \omega_2, \omega_3)}{\sqrt{\langle |\hat{\eta}(\omega_1)|^2 \rangle \langle |\hat{\eta}(\omega_2)|^2 \rangle \langle |\hat{\eta}(\omega_3)|^2 \rangle}} \quad //17$$

où

$$C_{\omega}^3(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = \frac{c_{\omega}^3(\omega_1, \omega_2, \omega_3)}{\sqrt{\langle |\hat{\eta}(\omega_2) \hat{\eta}(\omega_3)|^2 \rangle \langle |\hat{\eta}(\omega_1)|^2 \rangle}} \quad //18$$

Les deux expressions donnent des résultats très similaires. //18 est cependant plus approprié car elle est mathématiquement bornée entre 0 (pas de corrélation) et 1 (corrélation parfaite). La normalisation //17 permet quant à elle un dépassement de 1. Similairement, pour les corrélations en espace il vient

$$\begin{aligned} C_k^3(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3) &= \frac{c_k^3(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3)}{\sqrt{\langle |\hat{\eta}(\mathbf{k}_2) \hat{\eta}(\mathbf{k}_3)|^2 \rangle \langle |\hat{\eta}(\mathbf{k}_1)|^2 \rangle}} \\ C_{k\omega}^3(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \omega_1, \omega_2, \omega_3) &= \frac{c_{k\omega}^3(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \omega_1, \omega_2, \omega_3)}{\sqrt{\langle |\hat{\eta}(\mathbf{k}_2, \omega_2) \hat{\eta}(\mathbf{k}_3, \omega_3)|^2 \rangle \langle |\hat{\eta}(\mathbf{k}_1, \omega_1)|^2 \rangle}} \end{aligned} \quad //19$$

L'une des principales difficultés dans l'utilisation de ces estimateurs réside en le nombre élevé de dimensions (jusqu'à 12 pour les corrélations spatio-temporelles). Cependant comme on vient de le voir, dans le cas d'un système stationnaire et homogène, seul le signal résonant est accessible. Il est alors possible de réduire les dimensions en isolant la ligne résonante. Cela donne la bicohérence B :

$$\begin{aligned}
 B_{\omega}^3(\omega_2, \omega_3) &= \frac{c_{\omega}^3(\omega_2 + \omega_3, \omega_2, \omega_3)}{\sqrt{\langle |\hat{\eta}(\omega_2)\hat{\eta}(\omega_3)|^2 \rangle \langle |\hat{\eta}(\omega_2 + \omega_3)|^2 \rangle}} \\
 B_k^3(\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3) &= \frac{c_k^3(\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3)}{\sqrt{\langle |\hat{\eta}(\mathbf{k}_2)\hat{\eta}(\mathbf{k}_3)|^2 \rangle \langle |\hat{\eta}(\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3)|^2 \rangle}} \quad II-20 \\
 B_{k\omega}^3(\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \omega_2, \omega_3) &= \frac{c_{k\omega}^3(\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \omega_2 + \omega_3, \omega_2, \omega_3)}{\sqrt{\langle |\hat{\eta}(\mathbf{k}_2, \omega_2)\hat{\eta}(\mathbf{k}_3, \omega_3)|^2 \rangle \langle |\hat{\eta}(\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3, \omega_2 + \omega_3)|^2 \rangle}}
 \end{aligned}$$

Similairement, on peut regarder les interactions à 4-ondes du type $\omega_1 + \omega_2 = \omega_3 + \omega_4$ avec des corrélations d'ordre 4 C^4 et la tricohérence B^4 :

$$\begin{aligned}
 B_{\omega}^4(\omega_2, \omega_3, \omega_4) &= \frac{c_{\omega}^4(\omega_3 + \omega_4 - \omega_2, \omega_2, \omega_3, \omega_4)}{\sqrt{\langle |\hat{\eta}(\omega_2)\hat{\eta}(\omega_3)\hat{\eta}(\omega_4)|^2 \rangle \langle |\hat{\eta}(\omega_3 + \omega_4 - \omega_2)|^2 \rangle}} \\
 B_k^4(\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4) &= \frac{c_k^4(\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4 - \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4)}{\sqrt{\langle |\hat{\eta}(\mathbf{k}_2)\hat{\eta}(\mathbf{k}_3)\hat{\eta}(\mathbf{k}_4)|^2 \rangle \langle |\hat{\eta}(\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4 - \mathbf{k}_2)|^2 \rangle}} \quad II-21 \\
 B_{k\omega}^4(\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4, \omega_2, \omega_3, \omega_4) &= \\
 &= \frac{c_{k\omega}^4(\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4 - \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4, \omega_3 + \omega_4 - \omega_2, \omega_2, \omega_3, \omega_4)}{\sqrt{\langle |\hat{\eta}(\mathbf{k}_2, \omega_2)\hat{\eta}(\mathbf{k}_3, \omega_3)\hat{\eta}(\mathbf{k}_4, \omega_4)|^2 \rangle \langle |\hat{\eta}(\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4 - \mathbf{k}_2, \omega_3 + \omega_4 - \omega_2)|^2 \rangle}}
 \end{aligned}$$

II.3.2 Résultats

Le calcul des corrélations demande une grande quantité de données pour atteindre un niveau de convergence acceptable. La convergence étant proportionnelle $\propto 1/\sqrt{N}$ avec N le nombre de réalisations indépendantes, la recherche de faible niveau de corrélation va vite se limiter à la puissance informatique disponible. D'un coté en espace disque pour sauvegarder tous les champs de hauteurs, et de l'autre en processeur pour les calculs de corrélation. Ces derniers ont été réalisés sur le logiciel Matlab qui est très efficace pour effectuer des calculs matriciels. Dans l'optique de limiter les boucles qui sont très chronophages sur Matlab, un algorithme dédié a été développé pour accélérer sensiblement le temps de calcul. Les résultats présentés par la suite ont été calculés avec une fenêtre temporelle de 4s et une fenêtre spatiale de la taille de l'image ($20 \times 20 \text{ cm}^2$). Les valeurs utilisées constituent un bon compromis du temps de calcul, de la convergence et de la résolution. Cette section commencera par développer les interactions à 3-ondes puis effectuera une analyse des interactions à 4-ondes. Pour les deux types d'interactions une analyse en temps et en espace sera détaillée.

II.3.2.1 Interactions à 3-ondes

Cette section présentera les corrélations d'ordre trois qui permettent une observation des interactions à 3-ondes. Comme vu précédemment, elles sont censées dominer pour des ondes de capillarité pure et devenir non-locales à mesure du rapprochement du régime gravitaire.

II.3.2.1.1 Corrélation en ω

Il est plus aisé de commencer par l'analyse en fréquence du fait du faible nombre de dimensions en jeu. La première étape consiste à calculer la corrélation $C_{\omega}^3(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ afin de vérifier la présence d'un signal résonant statistiquement significatif. La Figure II-22 montre $C_{\omega}^3(\omega_1, 10\text{Hz}, \omega_3)$ pour un forçage faible ($\sigma_{\epsilon} = 0.025$) et un forçage fort ($\sigma_{\epsilon} = 0.08$).

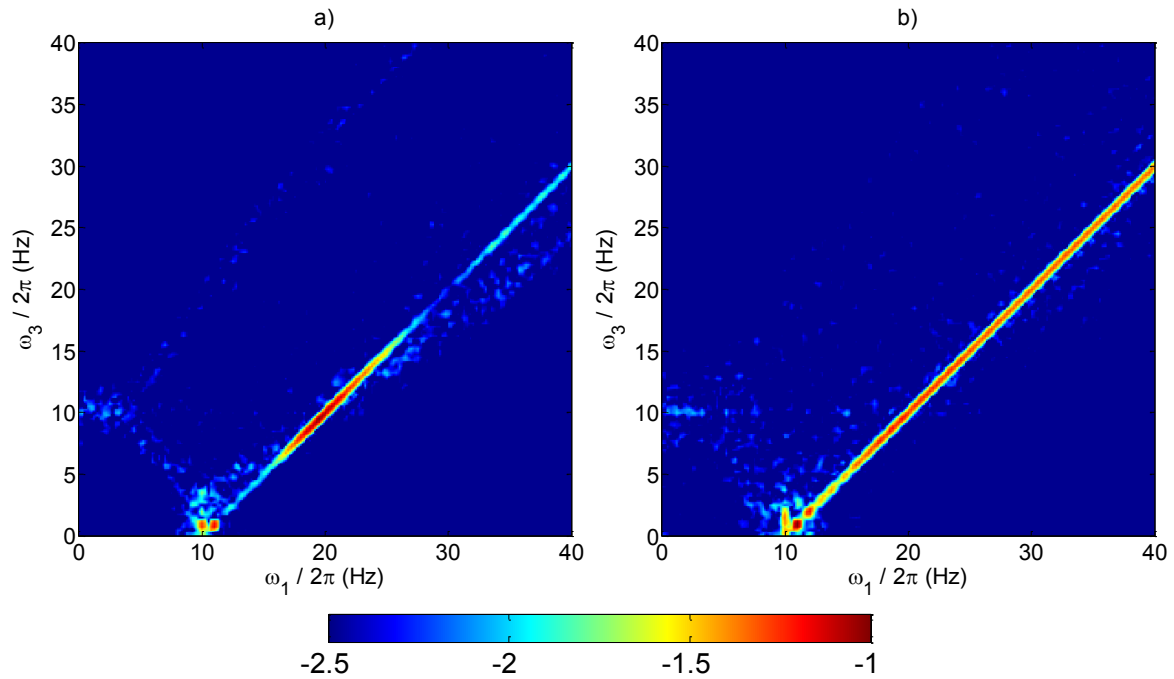


Figure II-22 : Tracé des corrélations normalisées d'ordre 3 $C_{\omega}^3(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ pour $\omega_2/2\pi = 10\text{Hz}$ (échelle de couleur logarithmique). a) forçage faible ($\sigma_{\epsilon} = 0.025$) b) forçage fort ($\sigma_{\epsilon} = 0.08$). La couleur bleue du fond représente le niveau de convergence statistique qui est d'environ $10^{-2.5}$. Dans les deux cas, la ligne résonante ($\omega_1 = \omega_2 + \omega_3$) ressort du bruit avec un maximum d'environ un ordre de grandeur.

Dans les deux cas une ligne de corrélation émerge du bruit de fond statistique qui est aux environs de $10^{-2.5}$. Cette ligne correspond à la ligne résonante où $\omega_1 = \omega_2 + \omega_3$. Comme expliqué précédemment (II.3.1.2), du fait de la moyenne spatiale, le signal visible est également résonant en espace. On observe que le signal est au maximum plus fort d'un ordre de grandeur que le bruit de fond. La Figure II-23 trace la convergence des corrélations non normalisées c_{ω}^3 d'un point situé sur la ligne résonante (courbe rouge) et d'un point en dehors (courbe noire).

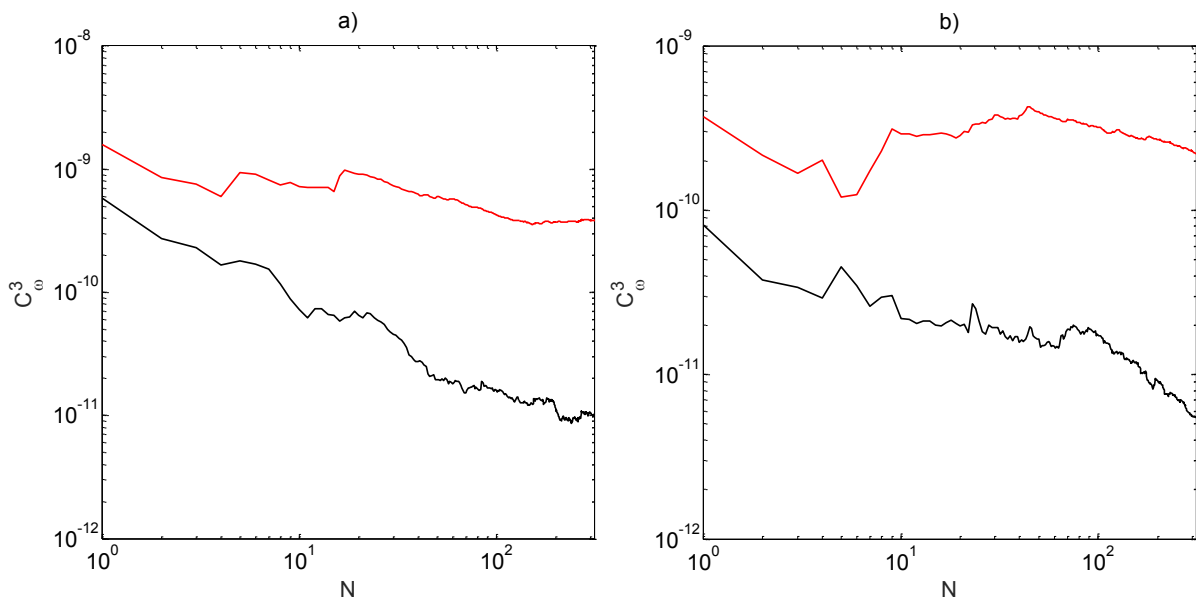


Figure II-23 : Convergence de la corrélation non normalisée c_{ω}^3 en fonction du nombre de moyennes N . a) forçage faible ($\sigma_{\epsilon} = 0.025$) b) forçage fort ($\sigma_{\epsilon} = 0.08$). La courbe rouge est un point sur la ligne résonante visible sur la Figure II-22. Le niveau de bruit est tracé en noir.

L'analyse des corrélations non normalisées permet de vérifier la stationnarité du système qui est masquée lorsque ces dernières sont normalisées. Pour les deux forçages on voit une stabilisation de la valeur sur la ligne résonante tandis que le bruit continu sa descente au fur et à mesure des réalisations. Cela confirme que la quantité de donnée est suffisante pour l'étude de ces interactions et que le signal est significatif.

Les deux figures de $C_{\omega}^3(\omega_1, 10Hz, \omega_3)$ (Figure II-22) se différencient par l'organisation des corrélations le long de la ligne résonante. Le forçage faible présente un pic aux alentours de $\omega_1/2\pi = 20Hz$ tandis que le forçage montre une répartition plus homogène. Plus d'informations peuvent être obtenues en utilisant la bicohérence $B_{\omega}^3(\omega_2, \omega_3)$. Cela correspond à extraire la ligne visible en Figure II-22 pour chaque valeur de ω_2 . La Figure II-24 montre la bicohérence $B_{\omega}^3(\omega_2, \omega_3)$ correspondant aux deux forçages précédents.

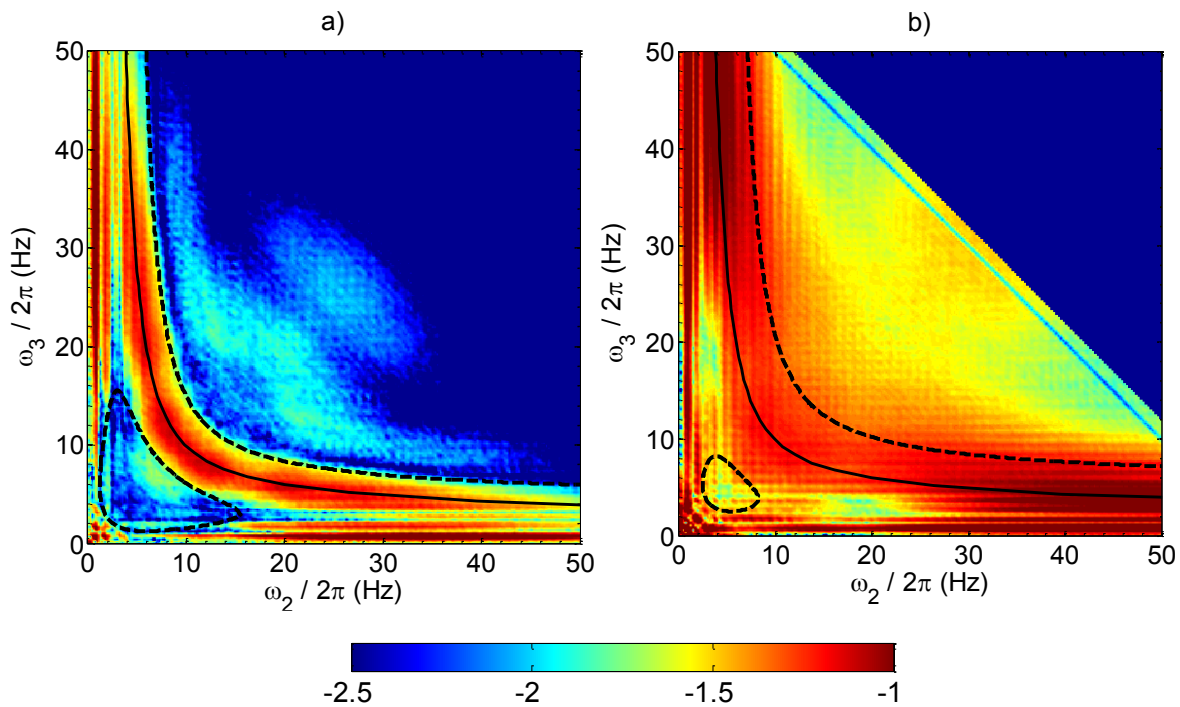


Figure II-24 : Bicohérence $B_{\omega}^3(\omega_2, \omega_3)$ pour un forçage faible a) ($\sigma_{\epsilon} = 0.025$) et un forçage fort b) ($\sigma_{\epsilon} = 0.08$). L'échelle de couleur est logarithmique. La solution exacte $\omega_3^{min}(\omega_2)$ est tracée en noir. La ligne pointillée encercle la zone de quasi-résonance 1D autorisée pour un $\delta k/2\pi = 6m^{-1}$ (a) et $\delta k/2\pi = 10m^{-1}$ (b).

Sur les deux figures la solution particulière ω_3^{min} correspondant aux interactions colinéaires est tracée en noir. Le forçage faible montre une concentration très nette des corrélations autour de cette solution particulière. Curieusement, le niveau de corrélation de la partie supérieure correspondant aux interactions 2D est très faible. Cela suggère que les interactions sont principalement 1D dans ce régime. On aperçoit également des lignes de forte corrélation sur les bords de la figure, dans une zone interdite aux interactions à 3-ondes. Ces lignes correspondent aux couplages des premiers modes du forçage avec le reste du spectre. Leur existence peut être expliquée par les quasi-résonances présentées précédemment. En supposant les interactions uniquement 1D comme le suggère le reste des corrélations, les solutions quasi-résonantes en 1D et pour un élargissement spectral $\delta k/2\pi = 6m^{-1}$ sont tracées en pointillés noirs (voir Figure II-19 b)). Ces solutions encadrent très bien l'ensemble des corrélations de la figure et mettent en lumière l'importance de ces quasi-résonances. En effet, le nombre de solutions disponibles se retrouve fortement augmenté. Dans le cas du forçage plus fort où l'élargissement non-linéaire est plus fort, pratiquement l'ensemble des fréquences devient accessible. Les solutions quasi-résonantes pour un $\delta k/2\pi = 10m^{-1}$ sont rapportées avec la courbe en pointillés noirs. On observe une cohérence plus faible avec les corrélations, en particulier à haute fréquence.

Cela peut s'expliquer facilement par le fait qu'on utilise une valeur moyenne, mais que des élargissements non-linéaires bien plus importants existent (voir Figure II-10 c)). Il est également très probable que des interactions 2D soient présentes, ce qui explique l'apparition de corrélations en dehors des lignes pointillées. L'aspect quadrillé des corrélations visible sur le forçage fort provient de la présence de modes plus énergétiques (voir courbe rouge de la Figure II-11 a)). Ceux-ci ont également une plus grande largeur non-linéaire et peuvent donc interagir plus largement. A noter que pour les deux forçages, le niveau maximum de corrélation est similaire et est aux alentours de 10% (10^{-1}).

II.3.2.1.2 Corrélation en \mathbf{k}

Le caractère 1D des interactions à 3-ondes peut être confirmé avec l'utilisation de la bicohérence en espace B_k^3 . Cette dernière étant à 3 dimensions, une onde k_2 est fixée. Du fait de l'isotropie des solutions et du spectre de puissance (voir Figure II-9), la bicohérence a été moyennée sur huit directions pour augmenter la convergence statistique. Cela est réalisé par une rotation de l'image avant le calcul de la transformée de Fourier ce qui permet de conserver \mathbf{k}_2 selon l'axe horizontal. La Figure II-25 trace B_k^3 pour trois k_2 fixés et les deux forçages. Les solutions exactes discutées précédemment sont tracées en noir et le k_2 fixé est représenté par une flèche noire. Pour toutes les figures, on observe une concentration des zones de haute corrélation le long des solutions exactes. L'amplitude des corrélations est similaire à B_ω^3 avec des maximums autour de 10%. Pour le forçage de faible amplitude, on remarque que le maximum de corrélation correspond à la solution 1D, en cohérence avec la conclusion de l'analyse de B_ω^3 . Cela est également vrai dans une moindre mesure pour les plus fortes non-linéarités où des transferts angulaires avec des angles modérés deviennent significatifs. Dans les deux cas, on observe également que des couplages avec des angles très importants se produisent aux basses fréquences. Les quasi-résonances correspondent à l'élargissement des solutions exactes. Comme attendu, on observe un élargissement plus prononcé des corrélations pour le forçage fort.

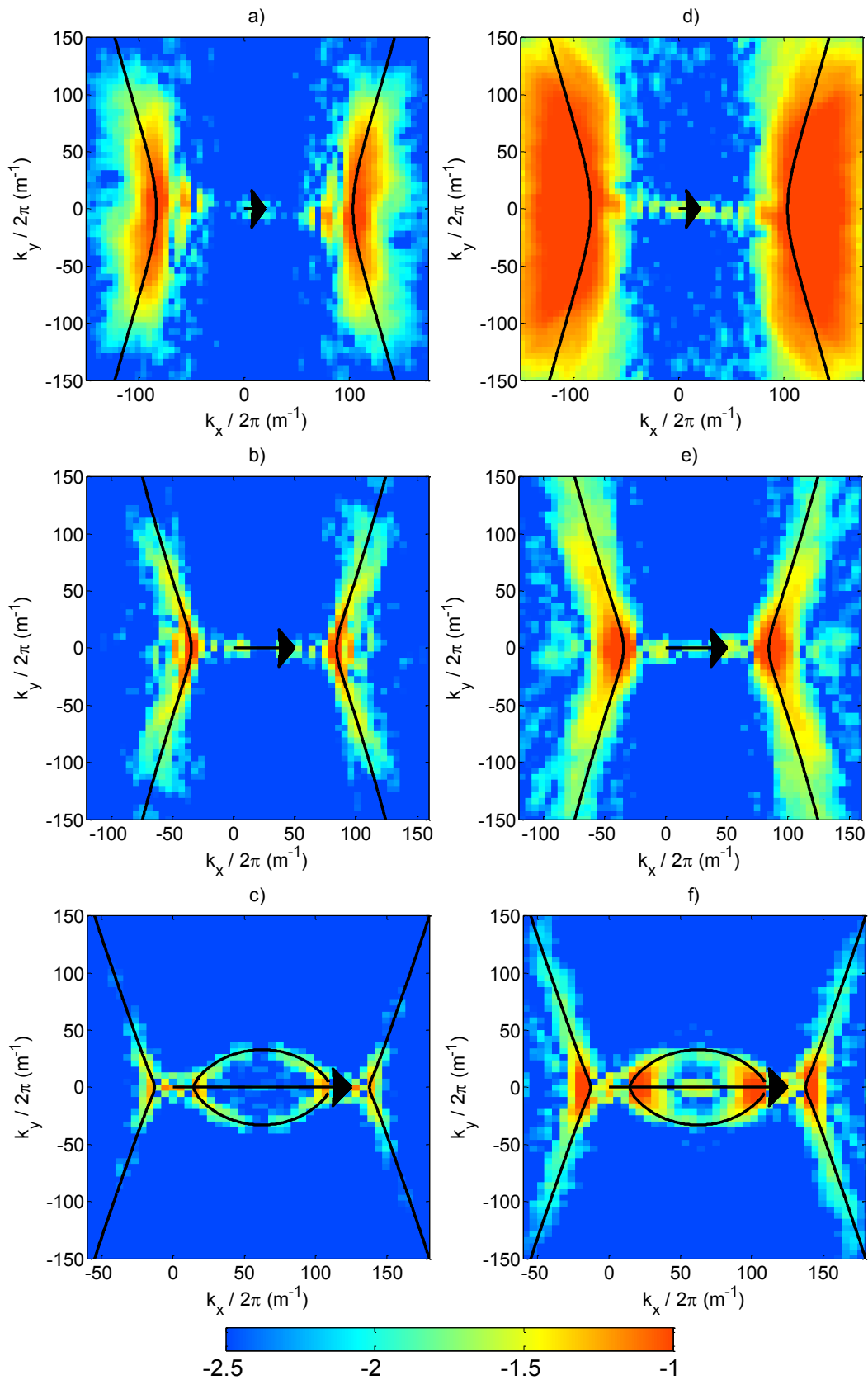


Figure II-25 : Bicohérence $B_k^3(\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3)$ pour un forçage faible $\sigma_\epsilon = 0.025$ (gauche) et fort $\sigma_\epsilon = 0.08$ (droite). L'échelle de couleur est logarithmique. La norme de l'onde est fixée à $|\mathbf{k}_2|/2\pi = 20 \text{ m}^{-1}$ en a), $|\mathbf{k}_2|/2\pi = 50 \text{ m}^{-1}$ en b) et $|\mathbf{k}_2|/2\pi = 125 \text{ m}^{-1}$ en c). Les corrélations sont moyennées pour 8 orientations différentes de \mathbf{k}_2 en effectuant une rotation de l'image. Les solutions exactes correspondantes au \mathbf{k}_2 choisi (flèche noire) sont tracées en noir. L'élargissement autour de ces solutions est attribué aux quasi-résonances.

II.3.2.1.3 Corrélation $k\omega$

Les corrélations en k et en ω présentées précédemment indiquent indirectement que les interactions résonantes sont principalement colinéaires. Une confirmation plus directe est obtenue en calculant la bicohérence $B_{k\omega}^3$ dans l'espace complet. Cette dernière présente l'avantage de ne plus nécessiter une moyenne en temps ou en espace pour forcer la résonance sur les dimensions non considérées. Le prix de cette observation directe est la forte réduction de la convergence due à la perte de la moyenne. Pour atteindre une convergence équivalente aux autres corrélations il est alors nécessaire d'augmenter le temps d'enregistrement et/ou de diminuer la résolution temporelle (pour d'augmenter le nombre de fenêtre dans la moyenne). La Figure II-26 trace quatre coupes de $B_{k\omega}^3$ pour une onde fixée (\mathbf{k}_2, ω_2).

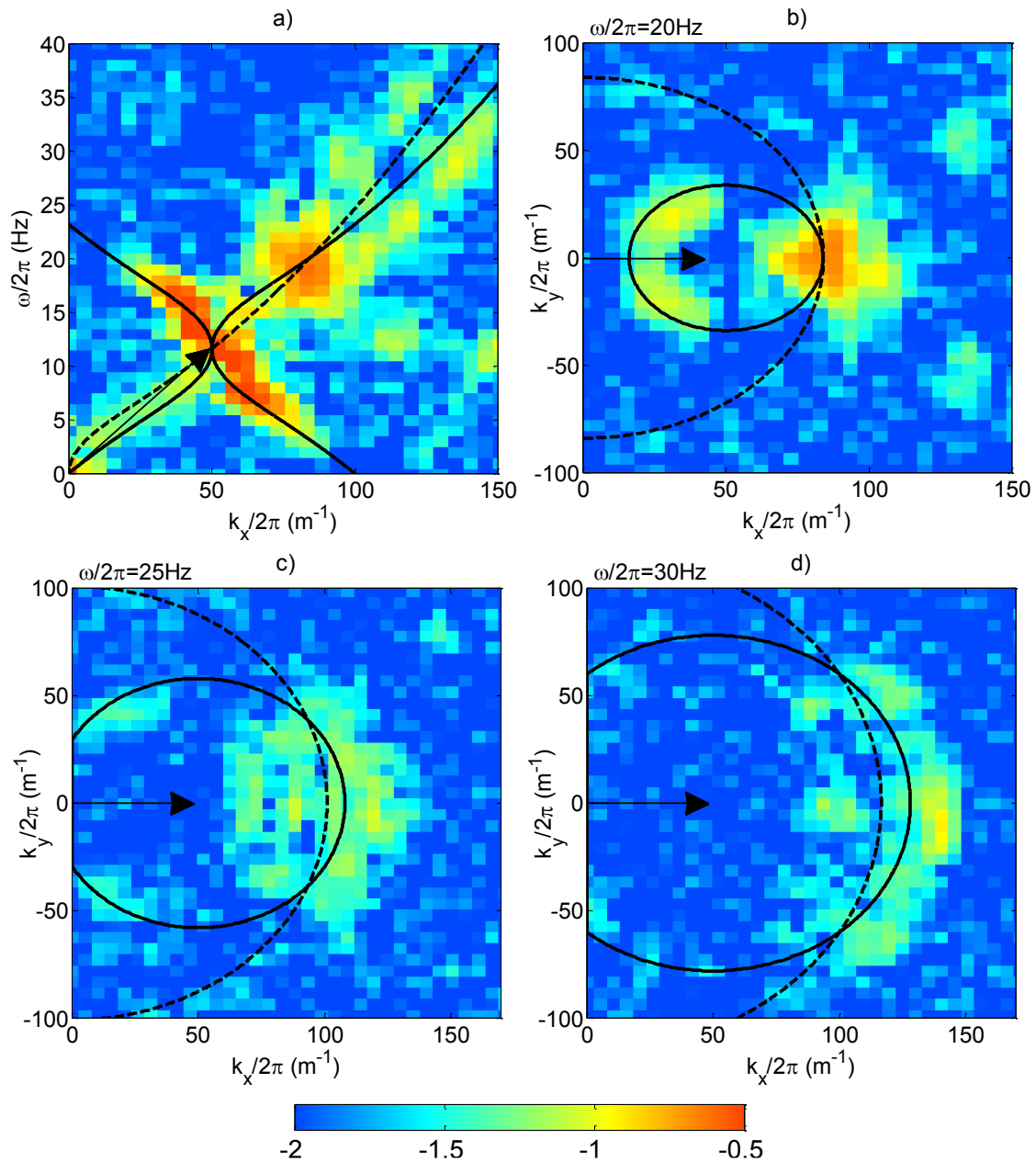


Figure II-26 : Bicohérence $B_{k\omega}^3$ pour un forçage faible $\sigma_\epsilon = 0.025$ et avec l'onde (\mathbf{k}_2, ω_2) fixée (Flèche noire). $|\mathbf{k}_2|/2\pi = 50 \text{ m}^{-1}$. a) Coupe (k_x, ω) pour $k_y = 0$. Les lignes pointillées et continues correspondent aux relations de dispersion linéaires de (\mathbf{k}_1, ω_1) et (\mathbf{k}_3, ω_3) respectivement. Les solutions résonantes exactes sont les intersections entre les deux courbes. b) Coupe (k_x, k_y) pour $\omega_1/2\pi = 20 \text{ Hz}$. c) Coupe (k_x, k_y) pour $\omega_1/2\pi = 25 \text{ Hz}$. d) Coupe (k_x, k_y) pour $\omega_1/2\pi = 30 \text{ Hz}$.

La figure a) trace la solution 1D avec une coupe (k_x, ω) pour $k_y = 0$. L'onde fixée (\mathbf{k}_2, ω_2) est représentée par la flèche noire et les solutions exactes correspondent au croisement entre la relation de dispersion de (\mathbf{k}_1, ω_1) (ligne pointillée) et la relation de dispersion de (\mathbf{k}_3, ω_3) (ligne continue). On observe un paquet de forte corrélation au niveau de ce croisement, confirmant le caractère résonant des précédentes observations. Un regard sur une coupe spatiale (figure b) pour $\omega/2\pi = 20 \text{ Hz}$ nous confirme également la forte colinéarité des interactions. Pour les solutions non colinéaires, on observe un niveau de corrélation qui est plus faible et plus étalé (figure c) et d) mais où les solutions colinéaires restent présentes par interactions quasi-résonantes. Sur la figure a), une zone de corrélations très fortes apparaît le long de la relation de dispersion de (\mathbf{k}_3, ω_3) (ligne continue) lorsque $k_3 < 0$ et $\omega_3 > 0$ et lorsque $k_3 > 0$ et $\omega_3 < 0$. Ces dernières ne correspondent pas à des solutions exactes et leurs probabilités d'être des quasi-résonances sont très faibles à cause de fort éloignement des deux relations de dispersions (grand Δk). Curieusement, ces corrélations ne sont pas visibles dans les calculs de dimension inférieure (B_ω^3 et B_k^3). On peut imaginer un couplage avec les modes stationnaires ou deux ondes équivalentes qui se propagent dans des directions opposées. Cependant le calcul des corrélations se fait avec une composante ω_1 très faible et qui ne correspond à aucune onde car trop éloigné de la relation de dispersion. Ce problème fait que pour le moment l'origine de ces branches reste inconnue...

II.3.2.2 Interactions à 4-ondes

Cette seconde partie traite des interactions à 4-ondes. Pour rappel, selon la théorie de Zakharov, ces dernières sont censées dominer en régime de gravité pure ou lorsque l'instabilité modulationnelle de Benjamin-Feir se produit.

II.3.2.2.1 Corrélation en ω

Similairement aux interactions à 3-ondes, il est plus aisé de commencer l'analyse en fréquence du fait de la dimension plus faible. La Figure II-27 trace la corrélation C_ω^4 pour les deux forçages caractéristiques.

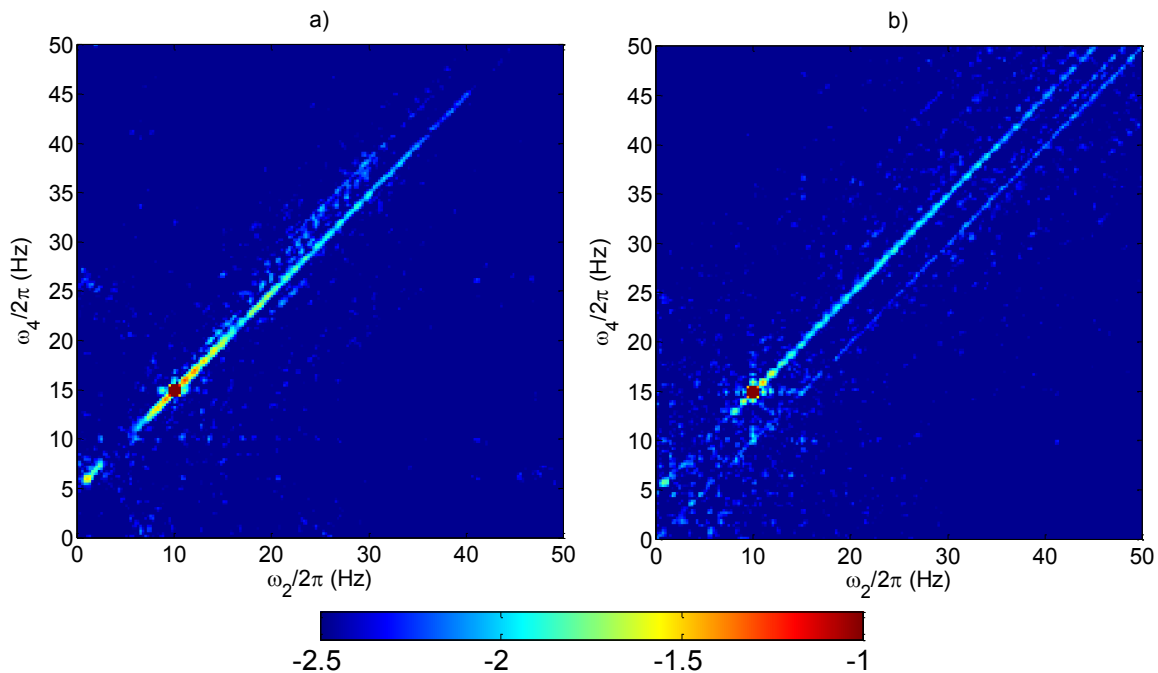


Figure II-27 : Tracé des corrélations d'ordre 4 $C_\omega^4(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4)$ pour $\omega_1/2\pi = 10\text{Hz}$ et $\omega_3/2\pi = 15\text{Hz}$ (échelle de couleur logarithmique). a) forçage faible ($\sigma_\epsilon = 0.025$) b) forçage fort ($\sigma_\epsilon = 0.08$). La couleur bleue du fond représente le niveau de convergence statistique qui est d'environ $10^{-2.5}$. Dans les deux cas, la ligne résonante ($\omega_1 + \omega_2 = \omega_3 + \omega_4$) ressort du bruit.

L'image 2D a été obtenue en fixant arbitrairement deux fréquences $\omega_1/2\pi = 10\text{Hz}$ et $\omega_3/2\pi = 15\text{Hz}$. On observe un niveau de convergence statistique aux environs de $10^{-2.5}$. La ligne résonante correspondant à $\omega_1 + \omega_2 = \omega_3 + \omega_4$ ressort légèrement du bruit. La Figure II-28 qui présente la convergence d'un point sur la ligne et d'un point en dehors permet de vérifier si le signal est significatif.

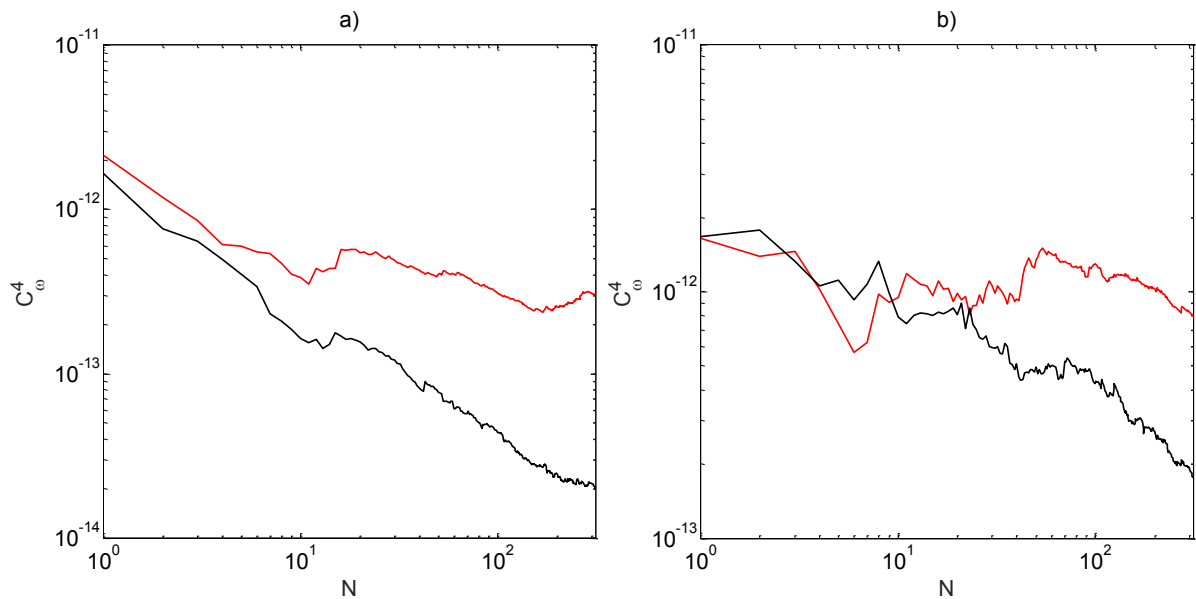


Figure II-28 : Convergence de la corrélation non normalisée c_ω^4 en fonction du nombre de moyennes N . a) forçage faible ($\sigma_\epsilon = 0.025$) b) forçage fort ($\sigma_\epsilon = 0.08$). La courbe rouge est un point arbitraire sur la ligne résonante visible sur la Figure II-27. Le niveau de bruit provenant d'un point arbitraire en dehors de la ligne résonante est tracé en noir.

Pour les deux forçages on observe que le point sur la ligne résonante semble stabilisé. Au contraire du point à l'extérieur qui montre une décroissance proche en $1/\sqrt{N}$. On a donc la confirmation de la présence d'un signal résonant significatif pour ce couple de fréquence. Un balayage plus large en fréquence est possible avec la trichérence B_ω^4 . La Figure II-29 montre cette dernière pour les deux forçages. Pour permettre une image 2D, une onde ω_2 est fixée. Pour les deux forçages on observe une augmentation de la surface et de l'intensité des corrélations à mesure que l'onde ω_2 augmente dans le régime capillaire. Curieusement, aucun signal n'est visible pour des fréquences fixées dans le régime gravitaire. On observe également un motif gaufré avec un écart $\pm n\Delta\omega$ avec $n = 1, 2, \dots$. Pour l'ensemble des figures, $\Delta\omega$ est d'environ 1Hz , suggérant un couplage avec le mode principal du forçage. Malheureusement, la complexité des solutions en ω rend pratiquement impossible toute interprétation supplémentaire à partir de ces figures.

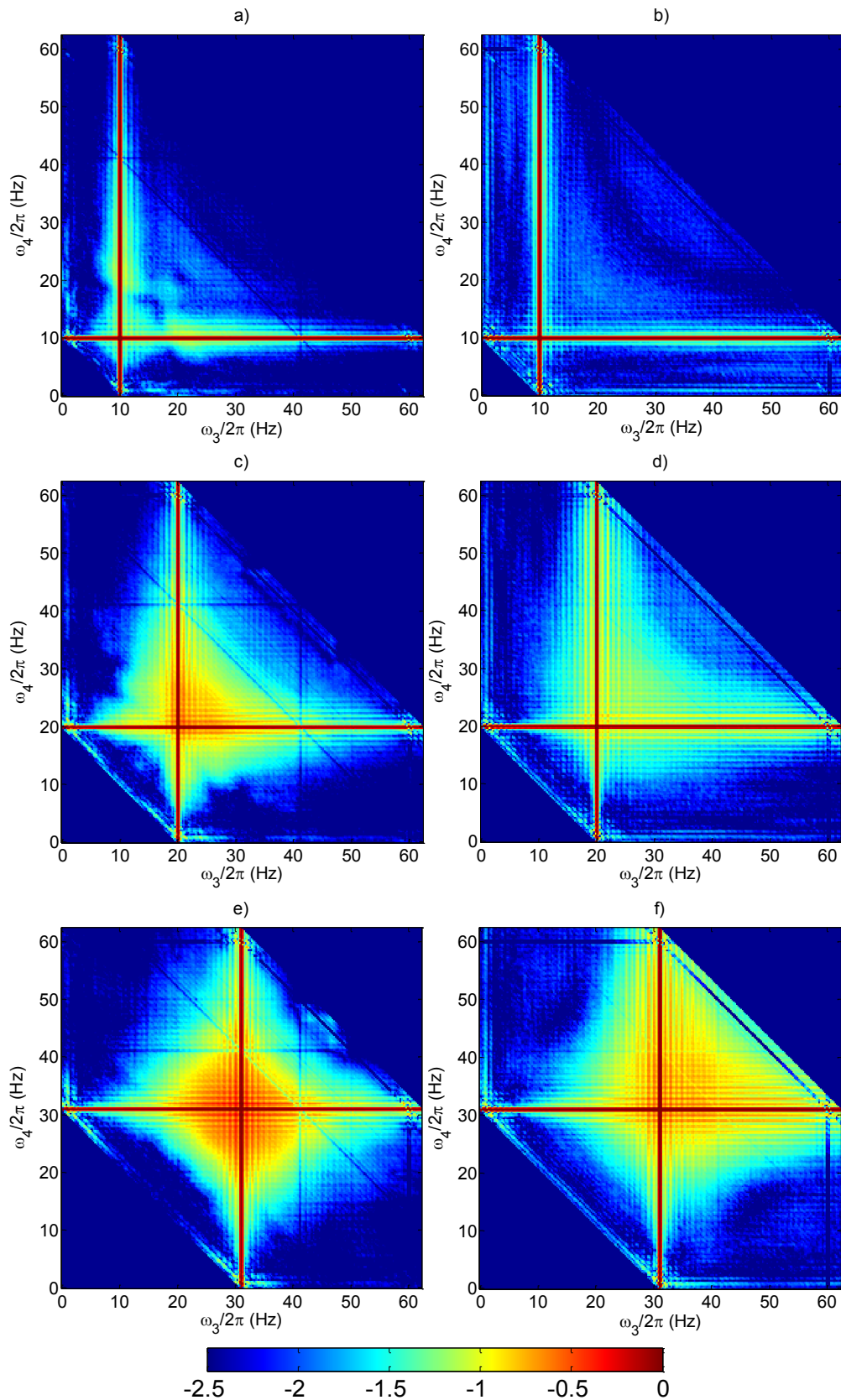


Figure II-29 : Trichérence $B_\omega^4(\omega_2, \omega_3, \omega_4)$ pour un forçage faible (gauche, $\sigma_\epsilon = 0.025$) et un forçage fort (droite, $\sigma_\epsilon = 0.08$). L'échelle de couleur est logarithmique. Pour chaque figure une onde ω_2 est fixée à 10Hz (a,b), 20Hz (c,d) et 30Hz (e,f). Les bandes rouges correspondent aux cas triviaux où $\omega_3 = \omega_2$ ou $\omega_4 = \omega_2$.

II.3.2.2 Corrélation en \mathbf{k}

Pour avoir plus d'informations sur la nature des interactions à 4-ondes observées précédemment, il faut poursuivre l'étude dans l'espace des \mathbf{k} . Celle-ci devient laborieuse du fait de la multitude de dimensions (6 pour B_k^4). Il est alors nécessaire de fixer deux ondes et de tester certaines configurations typiques. Les interactions à 3-ondes étant essentiellement colinéaires, il est naturel de commencer par cette configuration pour les interactions à 4-ondes. La Figure II-31 trace la trichérence B_k^4 pour les deux forçages précédents.

Pour l'ensemble des figures, les ondes fixées \mathbf{k}_1 et \mathbf{k}_3 sont choisies comme étant proches l'une de l'autre et colinéaires dans l'axe du forçage ($k_y = 0$). Les figures a) et b) montrent les corrélations pour deux ondes $k_1/2\pi = 30 \text{ m}^{-1}$, $k_3/2\pi = 50 \text{ m}^{-1}$ situées dans la partie gravitaire ($\omega_{1,3}/2\pi \sim 10\text{Hz} < \omega_{gc}$). Les figures c) et d) correspondent à des ondes $k_1/2\pi = 75 \text{ m}^{-1}$, $k_3/2\pi = 95 \text{ m}^{-1}$ proches de la transition gravito-capillaire ($\omega_{1,3}/2\pi \sim 20\text{Hz} \sim \omega_{gc}$). Les figures e) et f) sont pour des ondes capillaires avec $k_1/2\pi = 105 \text{ m}^{-1}$, $k_3/2\pi = 125 \text{ m}^{-1}$ ($\omega_{1,3}/2\pi \sim 30\text{Hz} > \omega_{gc}$). Les solutions exactes sont rapportées en noir. On observe une forte intensité des corrélations autour des solutions triviales $\omega_1 = \omega_3$ et $\omega_2 = \omega_4$. L'étalement autour de ce point particulier augmente à mesure que le couple $(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_3)$ progresse vers le régime capillaire. Cela est consistant avec l'observation faite à partir de l'analyse en fréquence (Figure II-29). En comparant la carte de distance Δk (Figure II-21), on remarque également que l'étalement observé coïncide avec la zone favorable aux quasi-résonances (faible Δk). La Figure II-30 montre la même trichérence B_k^4 mais pour une direction quelconque et perpendiculaire à l'axe du forçage ($k_x = 0$).

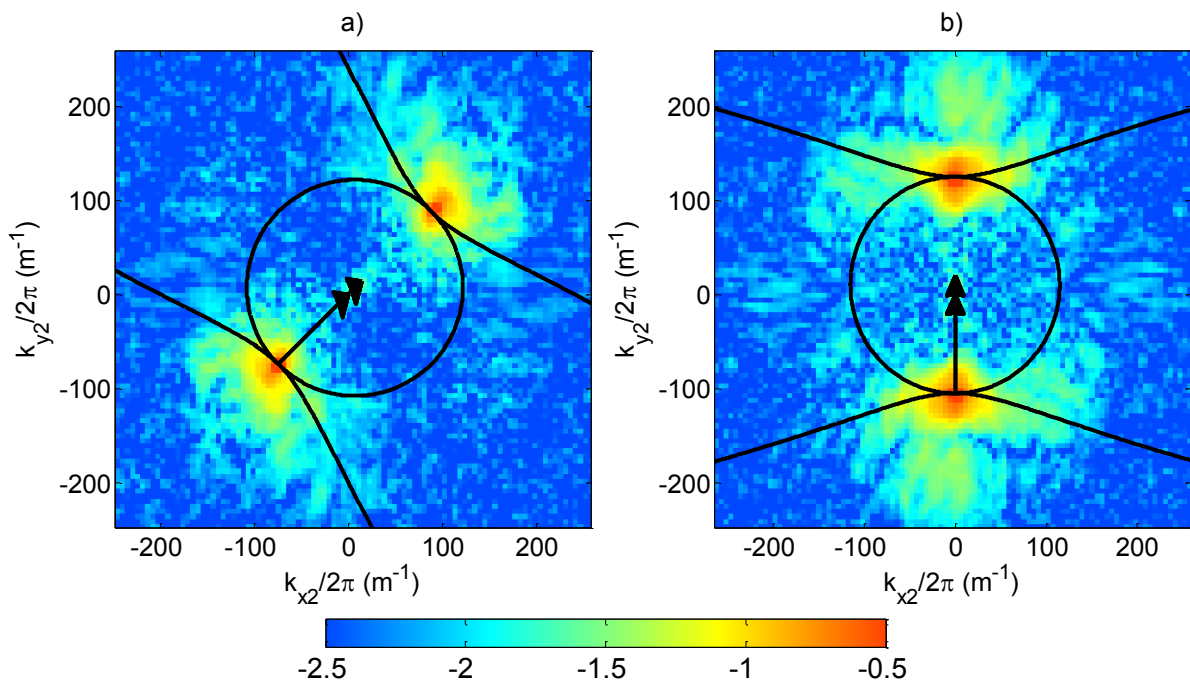


Figure II-30 : Trichérence B_k^4 dans le repère de \mathbf{k}_2 . L'échelle de couleur est logarithmique. Deux ondes représentées par les flèches noires sont fixées : $k_1/2\pi = 105 \text{ m}^{-1}$, $k_3/2\pi = 125 \text{ m}^{-1}$. a) direction quelconque, b) perpendiculaire au forçage ($k_x = 0$). Les solutions exactes sont représentées par les lignes noires.

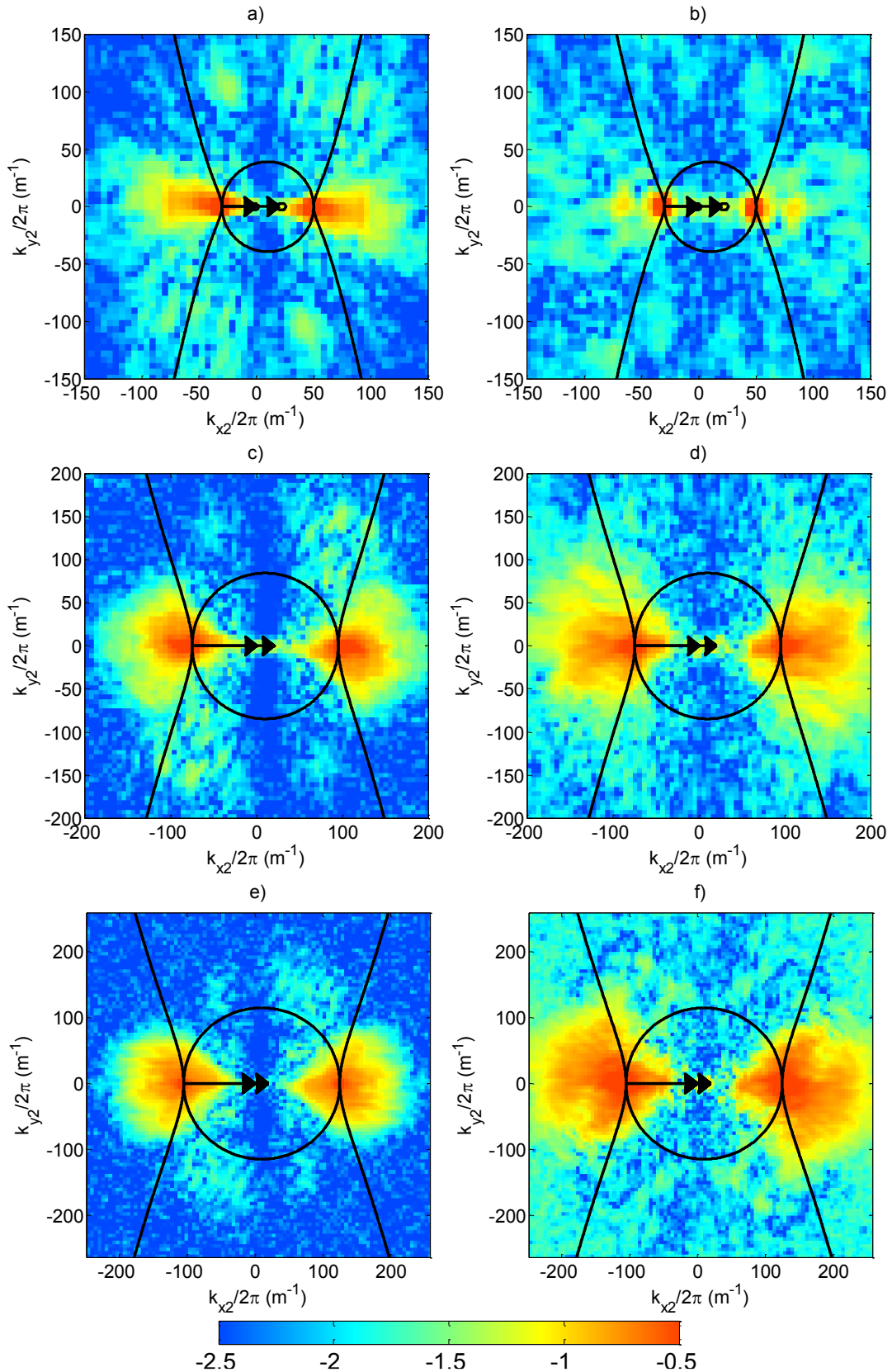


Figure II-31 : Trichérence B_k^4 dans le repère de \mathbf{k}_2 pour un forçage faible (gauche, $\sigma_\epsilon = 0.025$) et un forçage fort (droite, $\sigma_\epsilon = 0.08$). L'échelle de couleur est logarithmique. Deux ondes représentées par les flèches noires sont fixées : a)c) $k_1/2\pi = 30 \text{ m}^{-1}$, $k_3/2\pi = 50 \text{ m}^{-1}$, b)d) $k_1/2\pi = 75 \text{ m}^{-1}$, $k_3/2\pi = 95 \text{ m}^{-1}$, e)f) $k_1/2\pi = 105 \text{ m}^{-1}$, $k_3/2\pi = 125 \text{ m}^{-1}$. Les solutions exactes sont tracées en noir.

On remarque une baisse de l'intensité de corrélations suggérant de plus forte non-linéarité dans la direction du forçage.

La recherche de corrélations pour des configurations autres que des vecteurs colinéaires et locaux ne permet pas de tirer de conclusion. La Figure II-32 montre deux exemples typiques.

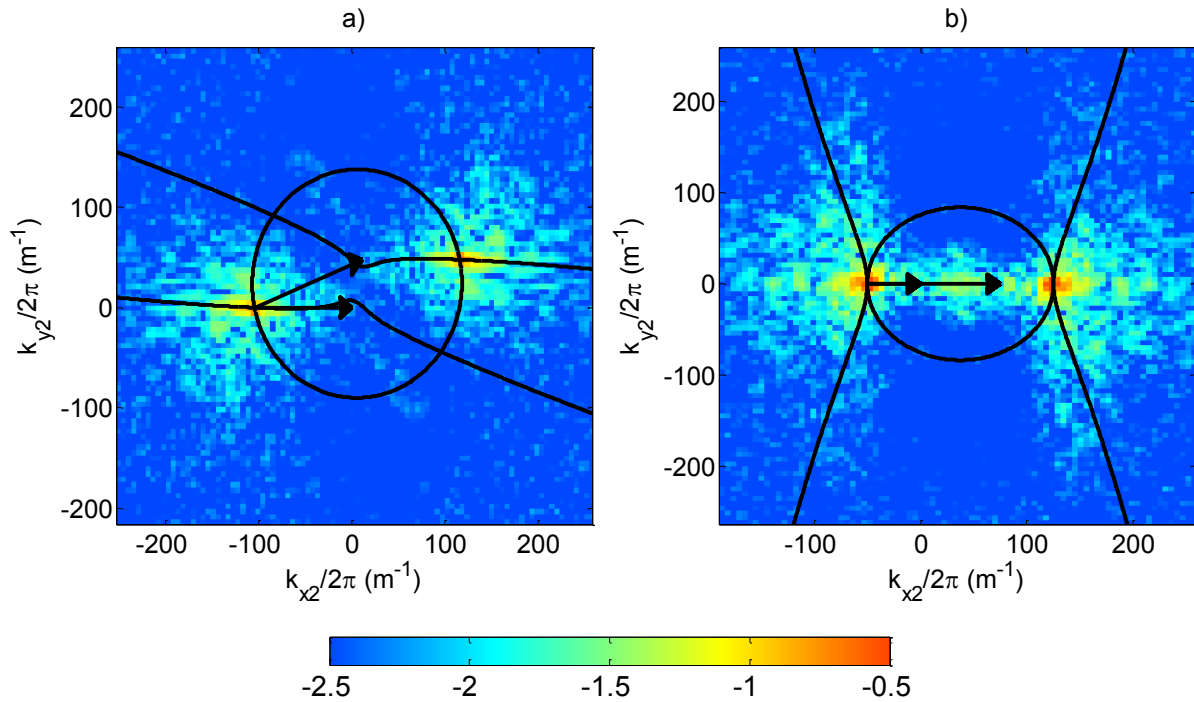


Figure II-32 : Tricohérence B_k^4 dans le repère de \mathbf{k}_2 . L'échelle de couleur est logarithmique. Deux ondes représentées par les flèches noires sont fixées a) $k_1/2\pi = 160 \text{ m}^{-1}$, $k_3/2\pi = 180 \text{ m}^{-1}$ et $\theta_{1,3} = 22^\circ$. b) $k_1/2\pi = 60 \text{ m}^{-1}$, $k_3/2\pi = 160 \text{ m}^{-1}$. Les solutions exactes sont représentées par les lignes noires.

La figure a) rapporte les corrélations pour un couplage local mais non colinéaire tandis que la figure b) montre un couplage non local et colinéaire. Dans les deux situations, l'intensité des corrélations en dehors des solutions triviales $\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_3$ et $\mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_4$ sont plus faibles que pour les figures précédentes. Le peu de signal observé est trop proche du niveau de bruit statistique pour pouvoir valider leur présence physique. Cela confirme néanmoins que les interactions à 4-ondes que l'on observe globalement dans le système sont essentiellement composées d'interactions locales. On peut alors être tenté de faire le rapprochement avec l'instabilité modulationnelle de Benjamin-Feir. Cela confirmerait alors les observations de Perlin et al. [52] où ils rapportent la forte présence de cette instabilité pour des fréquences supérieures à $\omega_{Wilton}/2\pi = 9.8\text{Hz}$. Ce dernier point est également en accord avec la forte baisse des corrélations observées dans le régime gravitaire (Figure II-29).

II.3.2.2.3 Corrélation $k\omega$

Similairement aux interactions à 3-ondes, on peut confirmer directement le caractère doublement résonant des interactions que l'on observe avec l'utilisation de la tricohérence $B_{k\omega}^4$. La Figure II-33 montre quatre coupes de cette dernière pour une configuration du forçage faible.

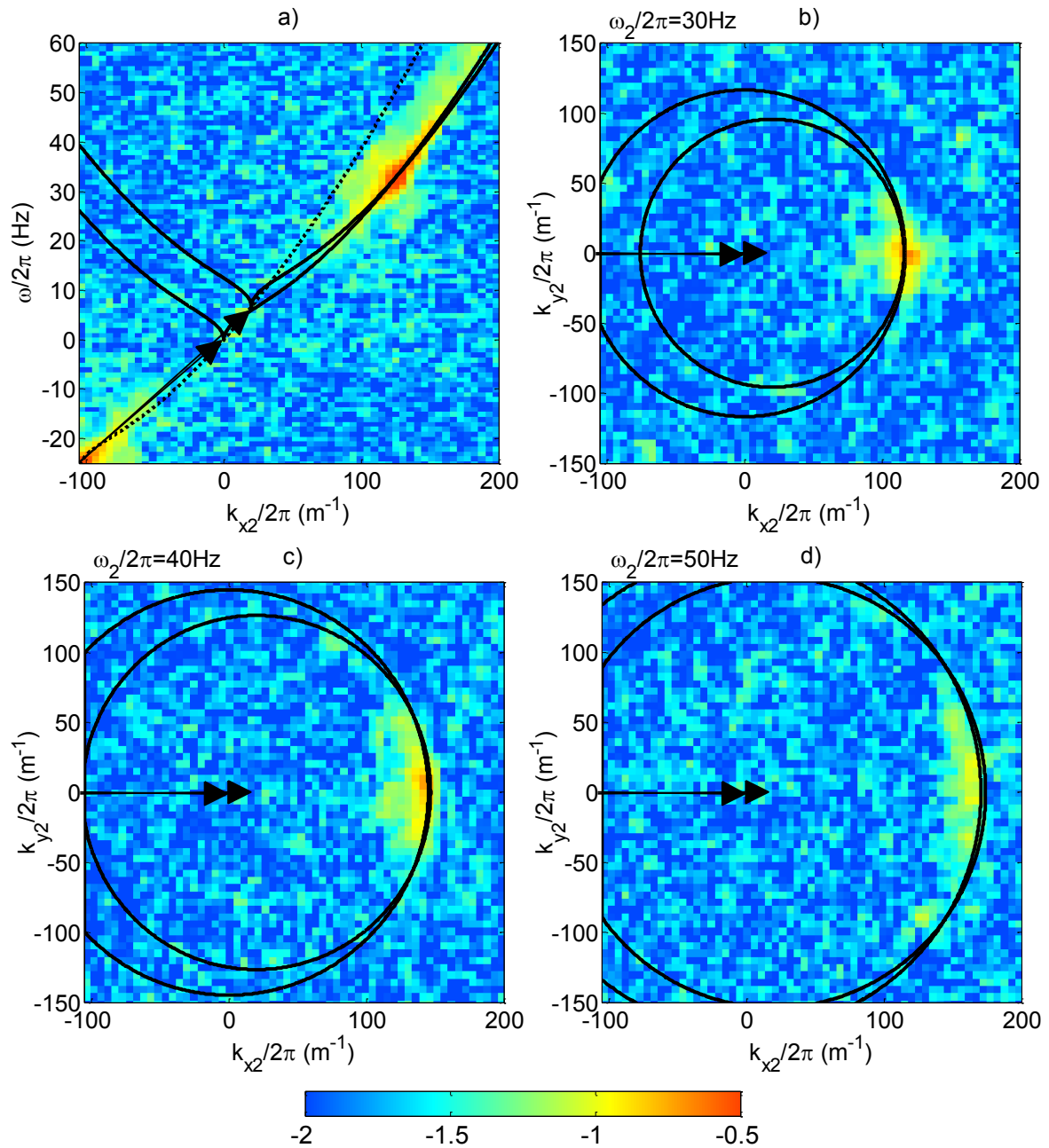


Figure II-33 : Trichérence $B_{k\omega}^4$ pour un forçage faible $\sigma_\epsilon = 0.025$ et avec les ondes (\mathbf{k}_1, ω_1) et (\mathbf{k}_3, ω_3) de fixées (Flèches noires) : $k_1/2\pi = 105 \text{ m}^{-1}$, $k_3/2\pi = 125 \text{ m}^{-1}$. L'échelle de couleur est logarithmique. a) Coupe (k_x, ω) pour $k_y = 0$. Les lignes noires correspondent aux relations de dispersion linéaire de (k_2, ω_2) et (k_4, ω_4) . Les solutions résonantes exactes sont les intersections entre ces deux courbes. b) Coupe (k_x, k_y) pour $\omega_2/2\pi = 30\text{Hz}$. c) Coupe (k_x, k_y) pour $\omega_2/2\pi = 40\text{Hz}$. d) Coupe (k_x, k_y) pour $\omega_2/2\pi = 50\text{Hz}$.

La figure a) trace la solution 1D avec une coupe (k_x, ω) pour $k_y = 0$. Les deux ondes fixées sont représentées par les flèches noires et les solutions exactes correspondent au croisement entre les deux relations de dispersion (courbes noires). On observe un paquet de fortes corrélations au niveau de ce croisement, confirmant le caractère doublement résonant des précédentes observations. Les quasi-résonances sont également visibles par l'étalement des corrélations autour de la solution particulière du fait de la forte proximité des deux relations de dispersions. Les figures b) c) et d) montrent des coupes (k_x, k_y) pour $\omega/2\pi = [30,40,50]\text{Hz}$ et confirment la présence d'un faible élargissement directionnel des interactions.

II.4 Résultats complémentaires

II.4.1 Forçage monochromatique

Dans l'objectif de tester l'influence du forçage sur la génération de la cascade d'énergie, un forçage monochromatique a été réalisé. La cuve est excitée avec un sinus pur ayant une fréquence d'environ 1.5Hz. La Figure II-34 montre le spectre de puissance spatio-temporelle issue de la mesure de profilométrie par transformée de Fourier.

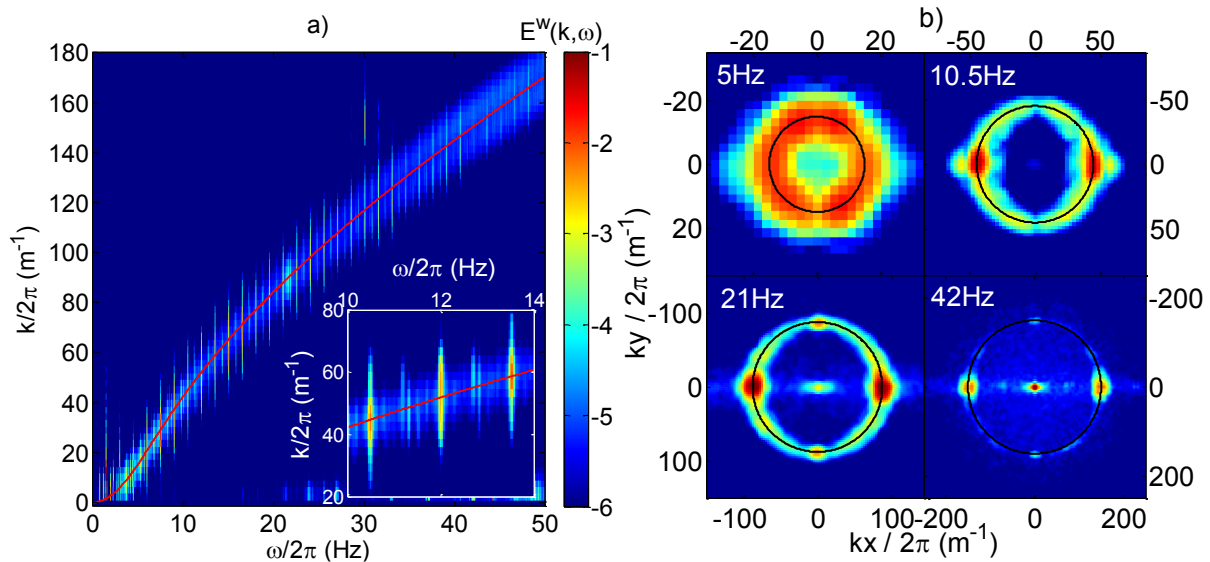


Figure II-34 : a) Spectre de puissance spatio-temporelle intégré de la vitesse verticale des vagues : $E^w(k, \omega)$. La sous-figure montre un agrandissement le long de la relation de dispersion b) Coupes du spectre de puissance $E^w(\mathbf{k}, \omega)$ pour $\omega/2\pi = 5, 10.5, 21$ et 42Hz . La relation de dispersion linéaire est tracée en noire. Les taches autour de $\mathbf{k} = (0,0)$ correspondent à du bruit de mesure.

On observe un spectre de puissance parsemé de pics positionnés sur la relation de dispersion et correspondent à des multiples de la fréquence d'excitation. Un léger continuum est également visible sur l'ensemble de la relation de dispersion. Les coupes du spectre montrent des pics fortement anisotropes tandis que le continuum est plus étalé dans l'espace. Les mesures de bicohérence B_ω^3 et de tricohérence B_ω^4 tracées en

Figure II-35 donnent des informations sur la nature des interactions. Pour les deux figures, on observe un réseau de points espacés de 1.5Hz. Dans le cas des interactions à 3-ondes, la solution particulière 1D ne semble pas ressortir. Compte tenu de la forte anisotropie du système, il s'agit essentiellement de quasi-résonances autorisées par la forte non-linéarité des pics du spectre de puissance. On peut imaginer l'établissement d'une cascade qui commence par des interactions mutuelles des modes du forçage, puis qui s'étend à l'ensemble du spectre par interaction à 3 et 4 ondes. On note tout de même qu'au vu de la faible intensité du continuum, ce sont les multiples du forçage qui semblent être privilégiés dans les interactions, provoquant ainsi ce spectre de puissance en pics. Cette sélection de croissance des modes semble être en accord avec les observations faites par Perlin et al. [51].

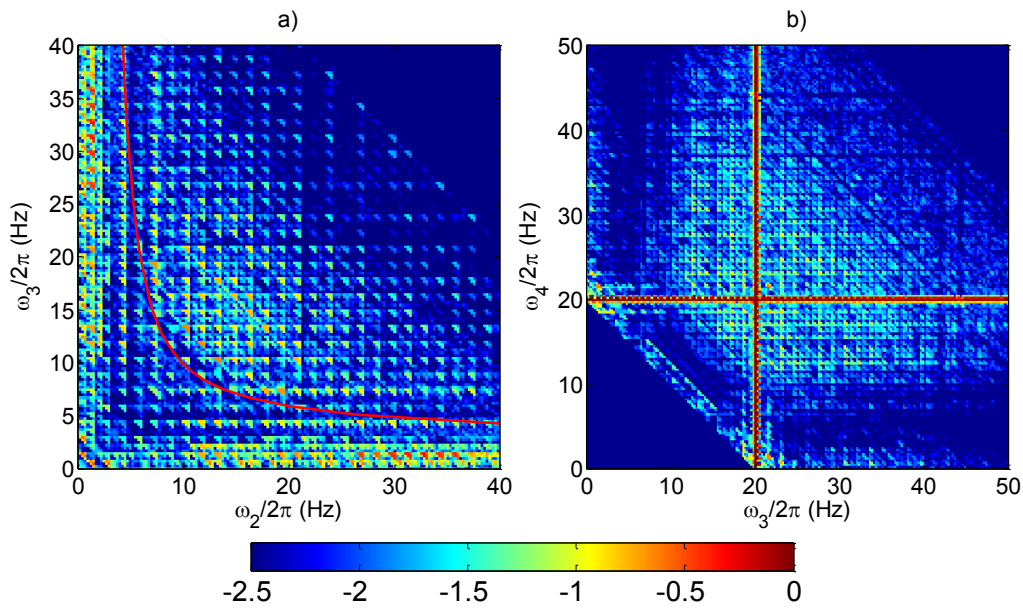


Figure II-35 : a) Bicohérence B_{ω}^3 . La ligne rouge représente la solution minimum ω_3^{min} correspondant aux solutions colinéaires. b) Tricohérence B_{ω}^4 pour $\omega_2/2\pi = 20\text{Hz}$.

II.4.2 Décrochements aux parois

Les expériences présentées précédemment sont soumises à des injections d'énergie parasite aux abords des parois de la cuve. Celles-ci sont généralement provoquées par des irrégularités de la paroi qui permettent l'accrochage du ménisque. Cette irrégularité perturbe la surface lorsque l'amplitude des ondes dépasse les capacités d'accroche du ménisque. La surface libre passe alors brusquement d'une condition statique d'accroche à une condition de glissement libre en générant un train d'ondes dispersif.

Dans l'idée d'observer plus en détail le phénomène, une simple expérience d'un unique lâché de ménisque est réalisée. La Figure II-36 montre le diagramme spatio-temporel $\eta(x, t)$ des premières secondes après le lâcher.

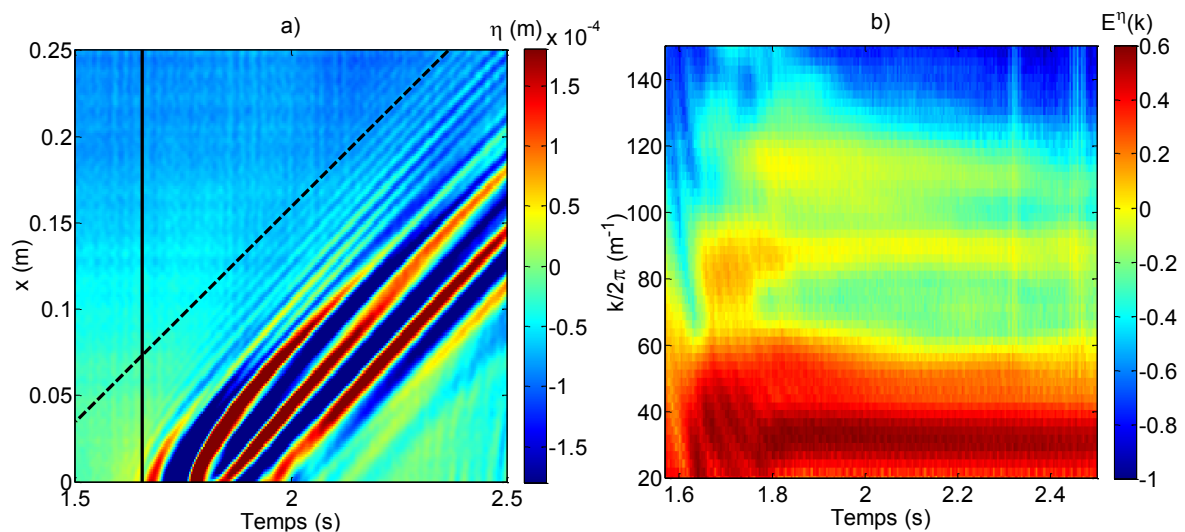


Figure II-36 : a) Diagramme spatio-temporel d'une coupe de la surface libre $\eta(x, t)$. La ligne verticale noire représente le temps d'injection. La seconde ligne pointillée marque la vitesse de phase d'une onde située sur l'avant du front. b) Spectre de puissance $E^{\eta}(k)$ en fonction du temps. Deux régions sont successivement excitées en $k/2\pi \sim 80\text{m}^{-1}$ puis en $k/2\pi \sim 120\text{m}^{-1}$.

A première vue, on observe simplement la dispersion classique d'un train d'ondes. Mais lorsqu'on regarde précisément la vitesse de phase des ondes rapides (front), on remarque que le prolongement de cette dernière (ligne pointillée oblique) ne coïncide pas avec le lâcher de ménisque (ligne verticale). Ces ondes ne sont donc pas issues de la perturbation mais ont été générées par des interactions non-linéaires. La figure b) montre l'évolution temporelle du spectre de puissance $E^\eta(k, t)$. L'injection, qui se déroule aux alentours de 1.6s génère un spectre avec des ondes allant jusqu'à environ $k/2\pi = 60 \text{ m}^{-1}$, ce qui représente des fréquences jusqu'à environ $\omega/2\pi \sim \omega_{gc}/2\pi \sim 14\text{Hz}$. Une seconde poche très marquée apparaît environ 0.1s plus tard avec un maximum à $k/2\pi = 80 \text{ m}^{-1}$ ($\omega/2\pi \sim 20\text{Hz}$). De nouveau 0.1s plus tard, une troisième poche apparaît aux environs de $k/2\pi = 118 \text{ m}^{-1}$ ($\omega/2\pi \sim 30\text{Hz}$). On note immédiatement le lien avec la fréquence particulière des ondes de Wilton $\omega_{Wilton}/2\pi = 9.8\text{Hz}$. Le train d'ondes généré au départ possède des ondes ayant une fréquence supérieure à la fréquence seuil de ω_{Wilton} . Ces dernières vont donc pouvoir interagir localement au travers d'interactions à 3-ondes pour former la première poche de résonance aux alentours de 20Hz. On assiste ensuite à une seconde interaction entre cette poche et le train d'ondes initial pour former la seconde poche vers 30Hz.

Une question naturelle est de se demander l'influence de ces lâchers sur les résultats présentés précédemment. En faisant l'hypothèse que cette expérience est représentative de tous les lâchers présents dans l'ensemble des expériences, pour les faibles intensités de forçage les exposants des cascades sont certainement biaisés jusqu'à environ 14hz du fait de cette injection d'énergie parasite. Pour les forçages plus forts, on peut cependant espérer que cet effet devient négligeable. Le reste de la cascade ne doit pas être directement affecté si ce n'est par l'ajout d'énergie par interaction résonante. Il est alors probable que l'intermittence observée à haute fréquence en Figure II-14 provient de l'intermittence même de ces décrochements. On peut alors se demander si les interactions que l'on observe dans les corrélations ne sont pas uniquement issues de ces décrochements. La réponse est donnée dans la section suivante avec la réalisation d'une expérience spécifique.

II.4.3 Air comprimé

Comme expliqué précédemment, la moindre irrégularité de la paroi peut entraîner un accrochage du ménisque qui génère un train d'ondes parasites. La réalisation d'une expérience où l'on peut s'affranchir de ces décrochements est essentielle pour quantifier leurs actions. Malheureusement, la réalisation d'une expérience avec des parois de qualité optique est complexe à réaliser. De plus, on observe systématiquement après quelques minutes de mesure un dépôt de particules de dioxyde de titane sur les parois. Celui-ci interagit ensuite avec le ménisque et génère des trains d'ondes parasites. Un contournement du problème est possible en piégeant le ménisque sur une arête le long de la cuve. Dans cette configuration, on obtient un ménisque qui reste accroché pour une gamme de quelques millimètres d'amplitudes, fixant ainsi l'amplitude maximale des ondes. Le forçage doit alors être modifié afin d'éviter le décrochement du ménisque par les modes basses fréquences de grandes amplitudes. Pour cela un jet turbulent d'air comprimé soufflant perpendiculairement à la surface libre a été utilisé. La Figure II-37 montre le spectre de puissance spatio-temporel correspondant à cette expérience.

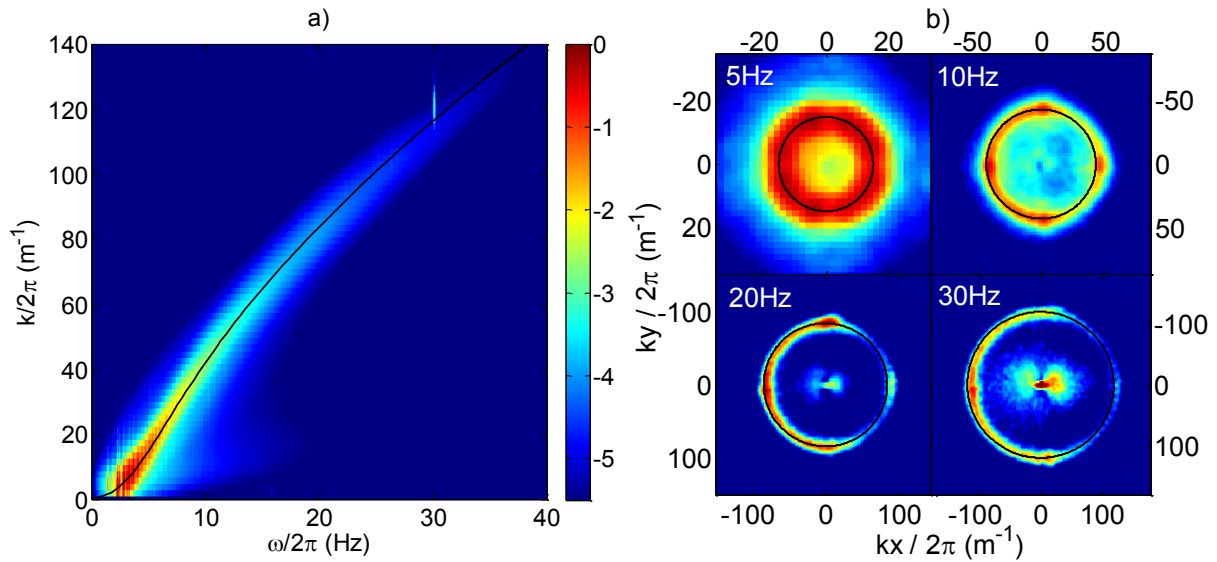


Figure II-37 : a) Spectre de puissance spatio-temporel intégré de la vitesse verticale des vagues : $E^w(k, \omega)$. b) Coupes du spectre de puissance $E^w(\mathbf{k}, \omega)$ pour $\omega/2\pi = 5, 10, 20$ et 30 Hz. La relation de dispersion linéaire est tracée en noire. Les taches autour de $\mathbf{k} = (0,0)$ correspondent à du bruit de mesure.

La pente typique des ondes $\sigma_\epsilon = 0.03$ est comparable au forçage faible présenté précédemment. Similairement aux autres expériences, on observe une concentration de l'énergie sur la relation de dispersion linéaire. Une seconde branche à faible k est également visible. Elle correspond certainement à des structures directement générées par la turbulence hydrodynamique du jet ($\omega \sim k$). L'utilisation d'un jet turbulent ne permet pas de connaître la gamme de fréquences directement affectées par le forçage. Il est donc impossible de comparer l'exposant du spectre aux solutions de Zakharov. En revanche, en faisant l'hypothèse que la turbulence du jet est décollée, l'investigation des corrélations reste valide. La Figure II-38 montre la bicohérence B_ω^3 et la tricohérence B_ω^4 .

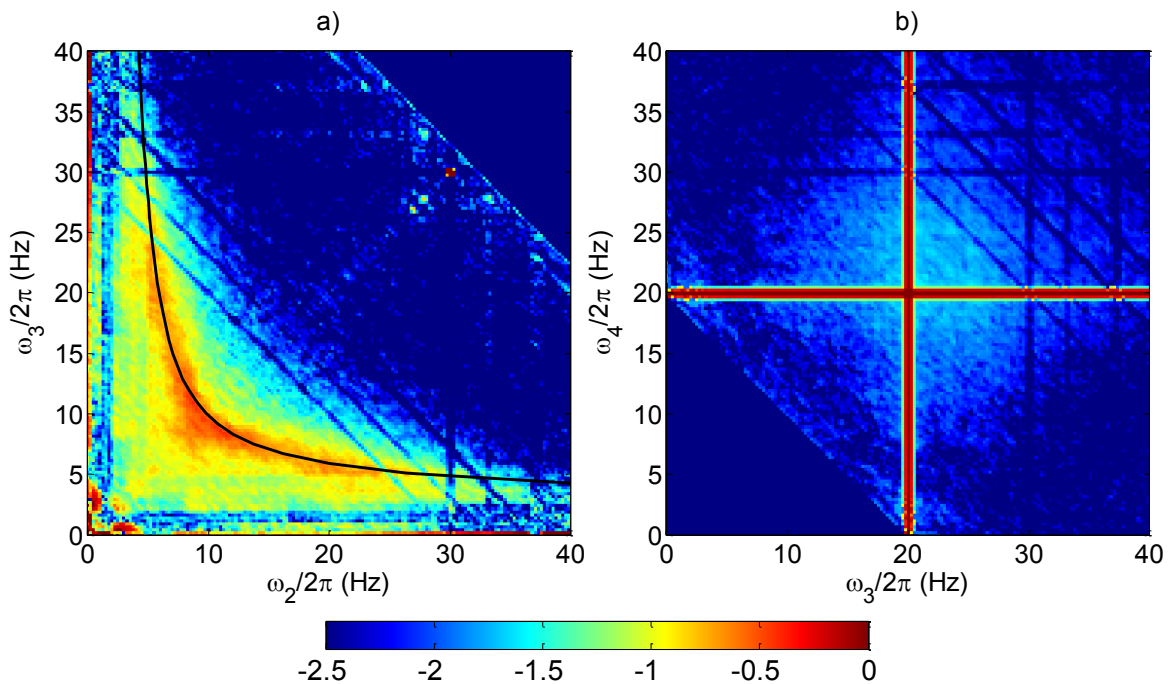


Figure II-38 : a) Bicohérence B_ω^3 pour un forçage par jet ($\sigma_\epsilon = 0.03$). La ligne noire représente la solution minimum ω_3^{min} correspondant aux solutions colinéaires. b) Tricohérence B_ω^4 avec $\omega_2/2\pi = 20$ Hz.

Similairement aux expériences précédentes, la bicoherence d'ordre 3 B_{ω}^3 confirme nettement la présence d'interactions à 3-ondes. Ces dernières semblent également majoritairement colinéaires. En revanche, aucun signal à 4-ondes n'est visible. On peut alors conclure que malgré la présence de décrochements parasites dans les expériences principales, les interactions résonantes à 3-ondes sont bien présentes au cœur du système étudié. L'absence d'interaction à 4-ondes soulève la question d'un lien possible entre le forçage et l'instabilité de Benjamin-Feir.

II.5 Conclusion

L'ensemble des analyses présentées dans ce chapitre a mis en lumière la complexité de ce régime gravito-capillaire.

L'analyse des corrélations confirme l'existence d'interactions non-linéaires à 3 ondes. Dans le cas de faible non-linéarité ($\sigma_{\epsilon} \sim 10^{-2}$), bien que l'énergie soit distribuée de manière isotrope, les couplages à 3 ondes semblent être principalement unidirectionnels. Cette solution particulière propre à ce régime mixte permet des couplages non locaux entre ondes gravitaires et capillaires jusqu'aux portes du régime de gravité pure ($\omega/2\pi < 5\text{Hz}$). A mesure que l'intensité des non-linéarités augmente, les ondes perdent en cohérence et élargissent le spectre de puissance autour de la relation de dispersion. De nouvelles solutions appelées quasi-résonances deviennent alors disponibles et augmentent significativement les possibilités d'interactions. Dans les régimes forts, les corrélations montrent une nette domination de ces dernières tout en conservant une faible dispersion angulaire.

Cet aspect unidirectionnel des interactions à 3-ondes est certainement relié aux propriétés de propagation des ondes gravito-capillaires. Comme on peut le voir dans la Figure (Figure I-3), dans ce régime la vitesse de groupe et de phase présentent un minimum aux alentours de la transition gravito-capillaire. On note également que la vitesse de phase demeure pratiquement constante sur l'intervalle $[10, 30]\text{Hz}$. On est alors en présence d'ondes faiblement dispersives qui permettent d'augmenter significativement l'efficacité des interactions. En effet, deux paquets d'ondes de fréquence proche se propageront à des vitesses similaires et auront beaucoup de temps pour interagir. Ainsi, pour un système faiblement non-linéaire où le temps d'interaction est supposé long, seules les interactions 1D arrivent à maturité et finissent par dominer. Lorsque l'intensité des non-linéarités augmente, le temps d'interaction non-linéaire diminue et permet le couplage des paquets d'ondes non colinéaires.

Les corrélations d'ordre 4 ont mis en évidence la présence de couplages non-linéaires à 4-ondes. La localité des interactions en jeu semble aller dans le sens que ces corrélations seraient la signature de l'instabilité modulationnelle de Benjamin-Feir. En effet, aucun autre couplage de type non local ou non colinéaire n'a été découvert. L'origine de ces interactions n'est cependant pas très claire. En effet, elles semblent inexistantes avec un forçage par air comprimé, malgré des intensités de non-linéarités équivalentes aux expériences menées avec la table oscillante. On soupçonne alors un potentiel lien avec le forçage mais qui n'est pas évident pour des interactions se déroulant à une échelle éloignée du forçage (pour $\omega > \omega_{Wilton} = 9.8\text{Hz}$).

Au vu de la nature des interactions en jeu, il est évident que les solutions de Zakharov pour le régime capillaire et gravitaire ne sont pas valides pour ce régime. En effet, la théorie d'un raccord des deux solutions avec pour hypothèse des couplages locaux ne concorde pas avec les observations faites : aucune interaction à 4-ondes n'est observée dans le régime de gravité tandis que le régime capillaire est dominé par des couplages non locaux avec le régime gravitaire. Il n'est alors pas surprenant que les spectres de puissances rapportés dans la section II.2.2 soient en désaccord avec les solutions de Zakharov. L'observation de l'évolution des exposants de la cascade à mesure de l'augmentation des

non-linéarités est alors probablement liée à l'augmentation des interactions quasi-résonantes. La théorie de la cascade dynamique proposée par Kartashova est également en échec pour ce régime particulier (voir Figure II-13). Bien que l'on observe la présence de l'instabilité modulationnelle de Benjamin-Feir qui est le cœur de cette théorie, celle-ci ne domine pas les interactions à 3-ondes et montre un niveau de corrélation équivalent aux interactions à 3-ondes. De plus, cette instabilité est également inexistante pour les basses fréquences et ne permet donc pas d'expliquer l'ensemble du spectre.

L'ensemble des théories existantes ne permettent pas une bonne description de ce régime. On peut avancer deux principales raisons à ces échecs. Tout d'abord la présence d'une dissipation significative dans le régime inertiel. Cette dernière provient essentiellement d'un film viscoélastique en surface et tend à raidir les spectres comme cela a été clairement mis en évidence sur d'autres systèmes [101,102]. La seconde raison réside en la non-localité des interactions à 3-ondes ainsi que la forte présence de quasi-résonances. Ces dernières, beaucoup moins contraintes que les solutions exactes, ont le pouvoir d'augmenter significativement les transferts d'énergie et de modifier complètement les solutions généralement acquises. Un exemple flagrant concerne les interactions résonantes en régime de gravité pure. La non-existence de solutions exactes à 3-ondes conduit à considérer uniquement des interactions à 4-ondes. Cependant, la forte proximité des deux relations de dispersion pour des ondes de l'ordre de 1Hz (voir carte Δk Figure II-19 b)) laisse supposer la possibilité de couplages à 3-ondes pour de très faibles intensités de non-linéarités. C'est dans l'idée de vérifier cette hypothèse qu'une seconde expérience sur des ondes de gravité pure dans la cuve de Coriolis a été réalisée.

Partie III Ondes de gravité



Ondes de gravité en régime faiblement non-linéaire...

III.1 Méthodes expérimentales

III.1.1 Dispositif expérimental

L'étude des ondes de gravité nécessite une augmentation significative de la taille de la cuve pour pouvoir accéder aux plus basses fréquences tout en limitant la discrétisation des modes. Pour ce faire, les expériences suivantes ont été réalisées dans la cuve tournante de Coriolis hébergée au LEGI, un bassin circulaire ayant un diamètre de $13m$ pour une profondeur d'environ $1m$.

III.1.1.1 Ondes de surfaces

Dans le cas de l'expérimentation sur les ondes de surface, le bassin est rempli avec de l'eau filtrée jusqu'à une hauteur de $70cm$. La Figure III-1 permet de visualiser un aperçu de la configuration générale.

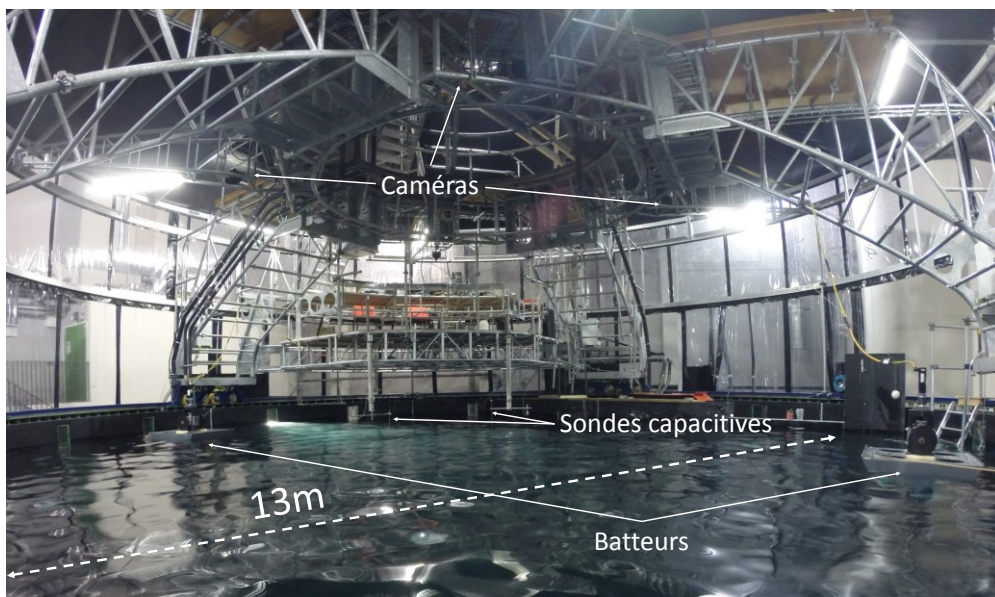


Figure III-1 : Photo de la disposition instrumentale de la cuve de Coriolis. 2 batteurs permettent de générer un champ de vagues isotrope. Deux types de mesures sont effectués : localement avec des sondes capacitatives et spatialement avec une mesure optique utilisant 3 caméras situées au plafond (voir III.1.2)

Le champ de vagues est généré avec deux batteurs ponctuels positionnés en périphérie de la cuve, à environ $1.5m$ du bord. Un zoom de leur mécanisme est visible dans la Figure III-2.

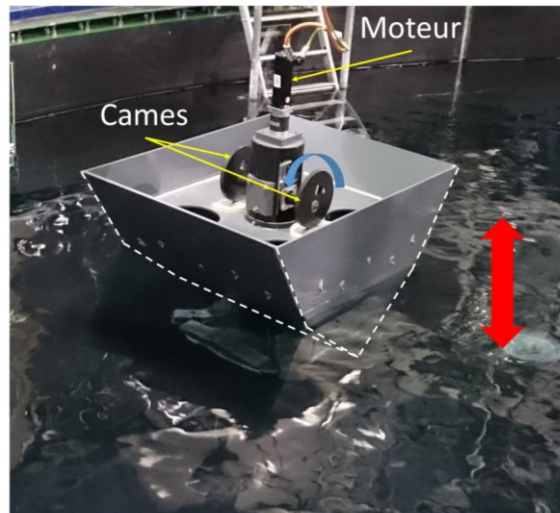


Figure III-2 : Vue du système de génération de vague. Un coin en PVC d'environ $1\text{m} \times 1\text{m} \times 1\text{m}$ est mis en oscillation verticale par la rotation de deux cames. Le moteur est piloté en fréquence avec une modulation aléatoire centrée autour de 1Hz . L'amplitude est fixée par l'excentricité des cames qui peut varier entre 1 et 5cm .

Ils sont constitués d'un coin flottant de dimension $1\text{m} \times 1\text{m} \times 1\text{m}$ et dont l'oscillation est imposée par deux cames motorisées. Celles-ci sont pilotées en fréquence avec une tension qui peut être modulée aléatoirement pour exciter une bande spectrale. Les fréquences typiques de forçage sont de l'ordre de 1Hz avec un écart type d'environ 0.1Hz . Cela correspond à une onde linéaire ayant une longueur d'onde proche de 1m qui est similaire à la dimension typique du coin pour obtenir un forçage efficace. L'amplitude des oscillations est fixée par l'excentricité de la came. Celle-ci varie entre 1cm et 5cm pour l'ensemble des expériences.

Trois caméras sont positionnées à 4m au-dessus de la surface pour effectuer une mesure stéréoscopique à l'aide de particules de polystyrène flottant à la surface de l'eau (Les détails de cette mesure sont expliqués dans la partie suivante (III.1.2)). Comme on peut le voir sur la Figure III-3, les trois caméras sont alignées sur la direction x et observent la surface avec trois angles de vue différents.

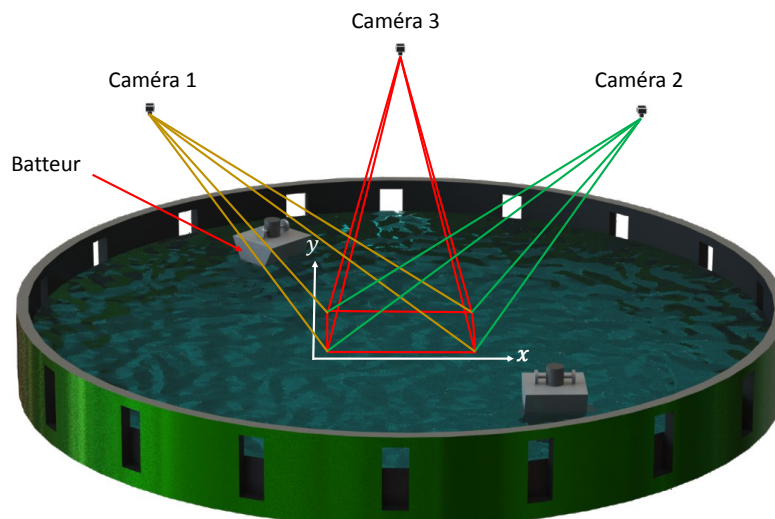


Figure III-3 : Schéma simplifié du dispositif expérimental. Les trois caméras sont alignées sur l'axe x à environ 4m de la surface. La zone de recouvrement est située sur le centre de la cuve et fait environ $1.5 \times 2\text{m}^2$ pour 1024^2 pix.

Les deux caméras extrêmes [1] et [2] sont placées avec un angle d'environ 45° par rapport à la verticale tandis que la [3] est normale à la surface. Un objectif de 35mm est placé sur chacune d'entre elles pour couvrir un champ de vision d'environ $1.5 \times 2 \text{ m}^2$ pour 1024^2 pix^2 . La taille moyenne du pixel est de $\text{pix} = (\text{pix}_x + \text{pix}_y)/2 = (2 + 1.5)/2 = 1.8\text{mm}$. L'ensemble des caméras est synchronisé à une fréquence d'échantillonnage de 20Hz . Pour conserver une bonne profondeur de champ, les objectifs des caméras [1] et [2] sont inclinés par rapport au capteur CCD en suivant la loi de Scheimpflug. La surface et les particules sont éclairées par un ensemble de projecteurs placés au niveau des fenêtres situées sur les bords de la cuve. L'illumination se fait alors sous la surface et à faible incidence pour limiter les réflexions qui peuvent perturber la mesure.

En complément de la mesure spatiale, une mesure locale de la hauteur des vagues est réalisée avec deux sondes capacitives. Celles-ci sont situées à environ 3m du bord et permettent une mesure de haute précision qui pourra ensuite être utilisée pour valider la méthode optique.

III.1.1.2 Nettoyage de la surface libre

Comme vu précédemment (I.2.3), la présence d'un film viscoélastique sur la surface libre provoque une forte dissipation par génération d'ondes de Marangoni. Leurs effets sont maximums aux alentours de 3.5Hz , là où les deux relations de dispersion se croisent et permettent un transfert d'énergie par résonance. Dans la mesure où ce point particulier est situé au milieu de la dynamique de mesure envisagée ($[0,10]\text{Hz}$), il est très probable que les spectres soient influencés. Les sources de pollutions sur un bassin de cette taille sont nombreuses et difficiles à maîtriser. Contrairement aux ondes gravito-capillaires présentées précédemment, un nettoyage approfondi du bassin ne suffit pas à obtenir une surface propre. Un système de filtration est alors mis en place pour permettre un nettoyage de la surface libre. Le principe de fonctionnement est détaillé dans la Figure III-4.

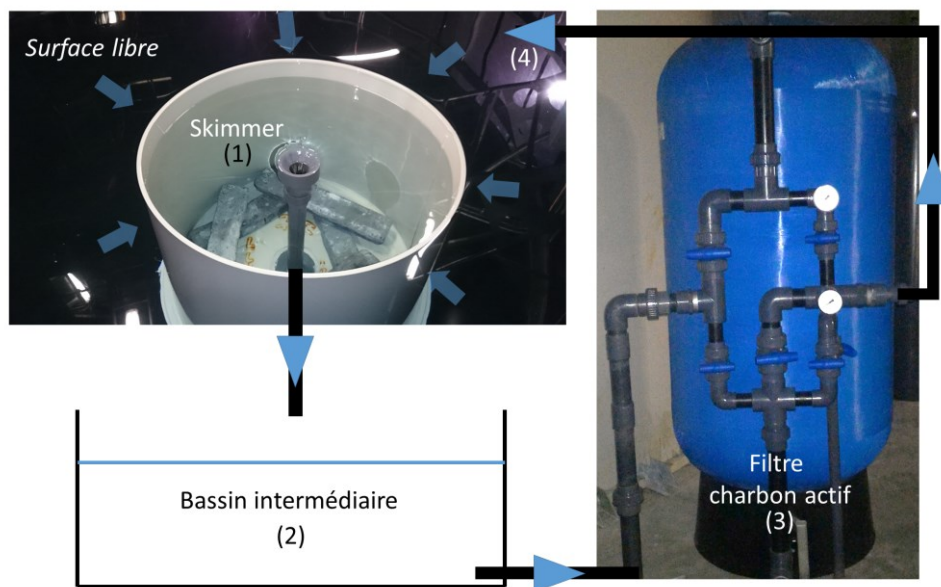


Figure III-4 : Dispositif de filtration de la surface libre. 1) La surface déborde dans un Skimmer puis coule par gravité sous la cuve de Coriolis. 2) L'eau est récupérée dans un bassin qui permet un pré-filtrage par accumulation de la pollution à la surface. 3) La partie inférieure du bassin est envoyée à un filtre à charbon actif pour éliminer les composants organiques. 4) L'eau propre est réinjectée dans la cuve principale.

La filtration est réalisée en plusieurs étapes. La première (1) consiste à faire déborder la surface libre dans un Skimmer de 75cm de diamètre (cuve cylindrique dont le niveau est quelques millimètres sous la surface). La surface libre à l'intérieur du Skimmer est alors évacuée par gravité dans un bassin

intermédiaire (2) situé sous la cuve de Coriolis. Ce bassin permet un pré-filtrage de l'eau en accumulant la pollution à sa surface. Son volume inférieur, qui est alors plus propre, est pompé et envoyé dans un filtre à charbon actif (3). Celui-ci va filtrer les composants organiques résiduels, responsables de la formation du film. L'eau ainsi filtrée est alors réinjectée en surface de la cuve principale assurant une boucle sans perte. Il est alors possible de filtrer sur de longue période.

III.1.2 Méthode de mesure

Avec la motivation de reproduire les mêmes analyses que sur les ondes gravito-capillaire, il est nécessaire d'implémenter une mesure 3D de la surface. La méthode de profilométrie par transformée de Fourier présentée précédemment n'est cependant pas adaptable pour des raisons techniques et budgétaires. En effet, le volume d'eau étant d'environ 100 m^3 , avec une concentration de 40 g/l comme utilisé pour les ondes gravito-capillaires, il serait nécessaire d'ajouter $4T$ de particules de TiO_2 . La mesure des vagues n'étant pas un problème nouveau, de nombreuses alternatives sont présentes dans la littérature. On peut citer par exemple la méthode de Moisy et al. [107] basée sur la déformation d'un motif situé au fond de l'eau. Cette méthode résultant d'une mesure du gradient permet d'obtenir une très forte sensibilité verticale mais est limitée à des pentes trop faibles pour une utilisation dans la plateforme de Coriolis où des événements fortement non-linéaire sont probables. De récentes mesures in situ [76,108,109] proposent une méthode stéréoscopique par corrélation des intensités de la surface de la mer. Similairement, des expériences en laboratoire ont été réalisées avec l'utilisation de particules comme traceurs [110–112]. C'est à partir de ces dernières que la méthode dite de « Stéréo-PIV » a été développée. Cette dernière qui est décrite dans la section suivante permet la résolution du champ de vitesses 3D en plus des champs de hauteurs habituellement obtenues par la stéréographie.

Après avoir développé les aspects théorique et pratique de la mesure, une étude de la précision sera présentée dans un second temps. Les limitations globales de la méthode seront également abordées dans un dernier temps.

III.1.2.1 Théorie méthode Stéréo-PIV

Les méthodes stéréoscopiques sont traditionnellement utilisées pour la reconstruction de surfaces complexes à partir de plusieurs angles de vue. Au contraire, les mesures de PIV (Particle Image Velocimetry) permettent des mesures de vitesse dans un plan connu (une nappe laser généralement). L'objectif de cette nouvelle mesure est de fusionner les deux méthodes afin de réaliser une mesure de PIV sur une surface non plane. Le résultat est alors l'obtention du champ complet de vitesse et de hauteur.

III.1.2.1.1 Reconstruction stéréoscopique

La première étape de la reconstruction stéréoscopique est de connaître les fonctions de calibration qui permettent de passer de l'espace réel à l'espace caméra :

$$X = F(x, y, z) \quad Y = G(x, y, z) \quad III-1$$

Où (x, y, z) sont les coordonnées physiques et (X, Y) les coordonnées caméra en pixel. Les fonctions F et G dépendent de plusieurs paramètres : la position de la camera, l'optique utilisée, la taille du capteur... Comme on peut le deviner, le système est sous-déterminé. En effet, une ligne de lumière qui passe par pixel (X, Y) , va correspondre à une série de points physique (x, y, z) . Si on veut connaître un point en particulier sur cette ligne, on doit alors lever l'indétermination en utilisant une seconde

camera : c'est le principe de la stéréographie. On commence par définir pour chaque caméra la position apparente (x_a, y_a) du point (x, y, z) dans le plan de référence $z_0 = 0$. L'indice « a » représentant la 1ère camera et « b » la seconde. On peut alors écrire pour la première caméra :

$$\begin{aligned} F_a(x, y, z) &= X_a \equiv F_a(x_a, y_a, 0) \\ G_a(x, y, z) &= Y_a \equiv G_a(x_a, y_a, 0) \end{aligned} \quad III-2$$

Et pour la seconde :

$$\begin{aligned} F_b(x, y, z) &= X_b \equiv F_b(x_b, y_b, 0) \\ G_b(x, y, z) &= Y_b \equiv G_b(x_b, y_b, 0) \end{aligned} \quad III-3$$

La Figure III-5 représente la vue schématique du système. On comprend alors aisément que la reconstruction de z consiste à rechercher l'intersection des deux droites.

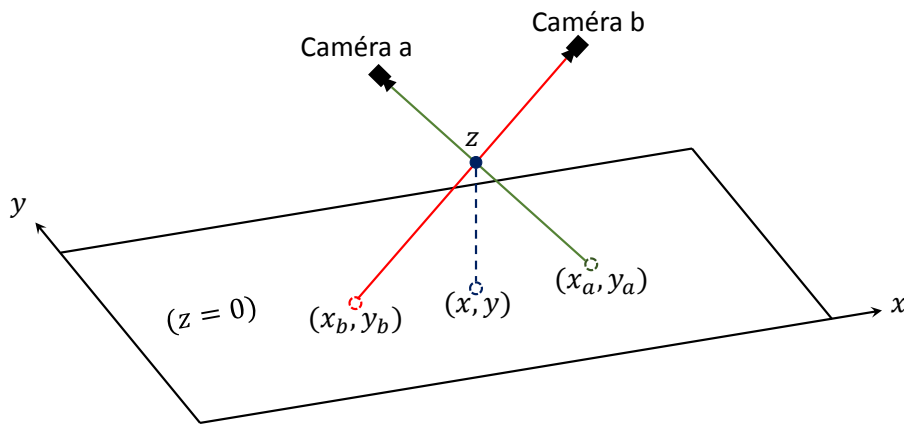


Figure III-5 Schéma de la configuration stéréographique. Le point (x, y, z) est vu par les deux caméras en $(x_a, y_a, 0)$ et $(x_b, y_b, 0)$. La position réelle est alors obtenue par l'intersection des deux droites.

La lumière se propageant en ligne droite, on linéarise les fonctions de calibrations de l'équation III-2 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_a}{\partial x}(x - x_a) + \frac{\partial F_a}{\partial y}(y - y_a) + \frac{\partial F_a}{\partial z}z &= 0 \\ \frac{\partial G_a}{\partial x}(x - x_a) + \frac{\partial G_a}{\partial y}(y - y_a) + \frac{\partial G_a}{\partial z}z &= 0 \end{aligned} \quad III-4$$

On peut ensuite réécrire le système en fonction de z :

$$\begin{aligned} x - x_a &= D_{xa}z \\ y - y_a &= D_{ya}z \end{aligned} \quad III-5$$

Avec

$$\begin{aligned} D_{xa} &= \frac{\frac{\partial G_a}{\partial y} \frac{\partial F_a}{\partial z} - \frac{\partial F_a}{\partial x} \frac{\partial G_a}{\partial z}}{\frac{\partial G_a}{\partial y} \frac{\partial F_a}{\partial x} - \frac{\partial F_a}{\partial y} \frac{\partial G_a}{\partial x}} \\ D_{ya} &= \frac{\frac{\partial G_a}{\partial x} \frac{\partial F_a}{\partial z} - \frac{\partial F_a}{\partial y} \frac{\partial G_a}{\partial z}}{\frac{\partial G_a}{\partial y} \frac{\partial F_a}{\partial x} - \frac{\partial F_a}{\partial y} \frac{\partial G_a}{\partial x}} \end{aligned} \quad III-6$$

En écrivant de même pour la camera « b » puis en différentiant avec III-5, on obtient alors le système suivant à résoudre :

$$\begin{aligned} x_b - x_a &= (D_{xb} - D_{xa})z \\ y_b - y_a &= (D_{yb} - D_{ya})z \end{aligned} \quad III-7$$

Celui-ci représente l'intersection des deux lignes de lumières. On remarque alors qu'il y a une redondance : en effet z peut être estimé par une seule des deux équations. Dans notre cas, les caméras sont alignées sur l'axe x . Il n'y a donc pratiquement aucune information sur z qui est contenue dans les déplacements en y . Néanmoins, dans un souci de généralité, nous conservons l'information des deux en effectuant une minimisation de l'erreur quadratique $\epsilon_x^2 + \epsilon_y^2$ où ϵ représente une petite erreur. On peut donc réécrire l'équation III-7 ainsi :

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= (D_{xb} - D_{xa})z - (x_b - x_a) \\ \epsilon_y &= (D_{yb} - D_{ya})z - (y_b - y_a) \end{aligned} \quad III-8$$

Et

$$\begin{aligned} d\epsilon_x &= (D_{xb} - D_{xa})dz \\ d\epsilon_y &= (D_{yb} - D_{ya})dz \end{aligned} \quad III-9$$

Les conditions limitent étant $\epsilon_x d\epsilon_x + \epsilon_y d\epsilon_y = 0$, on obtient alors l'expression de la minimisation de l'erreur :

$$(D_{xb} - D_{xa})\epsilon_x + (D_{yb} - D_{ya})\epsilon_y = 0 \quad III-10$$

En ajoutant cette 3ème équation au système III-8, on obtient alors une expression pour z :

$$z = \frac{(D_{xb} - D_{xa})(x_b - x_a) + (D_{yb} - D_{ya})(y_b - y_a)}{(D_{xb} - D_{xa})^2 + (D_{yb} - D_{ya})^2} \quad III-11$$

La reconstruction de z peut donc se faire une fois les déplacements $(x_b - x_a)$ et $(y_b - y_a)$ obtenus par corrélations entre les deux images (voir III.1.2.2.2). Une fois z obtenu, on peut calculer la position exacte (x, y) avec III-5 et récupérer une estimation de l'erreur de la mesure en injectant z dans III-8 :

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= -\lambda(D_{yb} - D_{ya}) \\ \epsilon_y &= -\lambda(D_{xb} - D_{xa}) \end{aligned} \quad III-12$$

Avec

$$\lambda = \frac{(D_{yb} - D_{ya})(x_b - x_a) - (D_{xb} - D_{xa})(y_b - y_a)}{(D_{xb} - D_{xa})^2 + (D_{yb} - D_{ya})^2} \quad III-13$$

L'erreur type étant alors $\epsilon = (\epsilon_x^2 + \epsilon_y^2)^{1/2}$. En plus d'obtenir une information sur la qualité de la mesure, cette erreur ϵ peut être utilisée pour éliminer les fausses mesures en lui appliquant un seuil. Il est également possible d'exprimer l'erreur verticale en résultant :

$$\epsilon_z = \frac{|D_{xb} - D_{xa}| + |D_{yb} - D_{ya}|}{(D_{xb} - D_{xa})^2 + (D_{yb} - D_{ya})^2} \epsilon \quad III-14$$

III.1.2.1.2 Stéréo-PIV

On va maintenant chercher à obtenir le champ de vitesse au niveau de l'interface. La surface n'étant pas plane, il est nécessaire de connaître le champ de hauteur pour permettre la bonne recombinaison des deux cameras.

Contrairement à la reconstruction stéréo qui se fait par une mesure de déplacement dans le plan de référence z_0 , l'étape de PIV ce fait directement dans l'espace caméra (X, Y) . En effet la reconstruction stéréographique demande la détection de grands déplacements. Ceux-ci seraient alors difficiles à obtenir par corrélation dans l'espace caméra du fait de la grande distorsion de l'image causée par les différences d'angles de vue. L'image est alors d'abord transformée par une interpolation dans le plan de référence. Le cas de la PIV est différent à cause des déplacements qui sont beaucoup plus faibles. On mesure alors les déplacements temporels dX_a, dY_a dans les coordonnées images de la caméra « a », évitant ainsi les erreurs liées à l'interpolation. Ceux-ci sont reliés au déplacement physique par les fonctions de calibration F, G :

$$\begin{aligned} dX_a &= \frac{\partial F_a}{\partial x} dx + \frac{\partial F_a}{\partial y} dy + \frac{\partial F_a}{\partial z} dz \\ dY_a &= \frac{\partial G_a}{\partial x} dx + \frac{\partial G_a}{\partial y} dy + \frac{\partial G_a}{\partial z} dz \end{aligned} \quad III-15$$

Grace à la stéréographie, il est maintenant possible d'avoir la correspondance entre X_a, Y_a et X_b, Y_b . On peut donc définir l'équivalent du système III-15 pour la caméra « b » et obtenir un système de 4 équations à résoudre. Encore une fois, celui-ci est redondant avec seulement trois inconnues à trouver (dx, dy, dz) pour quatre équations. Comme précédemment, on va introduire une erreur sur le déplacement :

$$\begin{aligned} \epsilon_{xa} &= \frac{\partial F_a}{\partial x} dx + \frac{\partial F_a}{\partial y} dy + \frac{\partial F_a}{\partial z} dz - dX_a \\ \epsilon_{ya} &= \frac{\partial G_a}{\partial x} dx + \frac{\partial G_a}{\partial y} dy + \frac{\partial G_a}{\partial z} dz - dY_a \\ \epsilon_{xb} &= \frac{\partial F_b}{\partial x} dx + \frac{\partial F_b}{\partial y} dy + \frac{\partial F_b}{\partial z} dz - dX_b \\ \epsilon_{yb} &= \frac{\partial G_b}{\partial x} dx + \frac{\partial G_b}{\partial y} dy + \frac{\partial G_b}{\partial z} dz - dY_b \end{aligned} \quad III-16$$

On va ensuite chercher la solution qui minimise $\epsilon_{xa}^2 + \epsilon_{ya}^2 + \epsilon_{xb}^2 + \epsilon_{yb}^2$. On écrit alors les dérivées partielles :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (\epsilon_{xa}^2 + \epsilon_{ya}^2 + \epsilon_{xb}^2 + \epsilon_{yb}^2) &= \frac{\partial F_a}{\partial x} \epsilon_{xa} + \frac{\partial G_a}{\partial x} \epsilon_{ya} + \frac{\partial F_b}{\partial x} \epsilon_{xb} + \frac{\partial G_b}{\partial x} \epsilon_{yb} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} (\epsilon_{xa}^2 + \epsilon_{ya}^2 + \epsilon_{xb}^2 + \epsilon_{yb}^2) &= \frac{\partial F_a}{\partial y} \epsilon_{xa} + \frac{\partial G_a}{\partial y} \epsilon_{ya} + \frac{\partial F_b}{\partial y} \epsilon_{xb} + \frac{\partial G_b}{\partial y} \epsilon_{yb} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} (\epsilon_{xa}^2 + \epsilon_{ya}^2 + \epsilon_{xb}^2 + \epsilon_{yb}^2) &= \frac{\partial F_a}{\partial z} \epsilon_{xa} + \frac{\partial G_a}{\partial z} \epsilon_{ya} + \frac{\partial F_b}{\partial z} \epsilon_{xb} + \frac{\partial G_b}{\partial z} \epsilon_{yb} \end{aligned} \quad III-17$$

La condition pour minimiser l'erreur est obtenue en mettant à zéro les trois dérivées partielles. On a alors le système suivant :

$$\begin{aligned}
 D_{11}dx + D_{12}dy + D_{13}dz &= \frac{\partial F_a}{\partial x}dX_a + \frac{\partial G_a}{\partial x}dY_a + \frac{\partial F_b}{\partial x}dX_b + \frac{\partial G_b}{\partial x}dY_b \\
 D_{21}dx + D_{22}dy + D_{23}dz &= \frac{\partial F_a}{\partial y}dX_a + \frac{\partial G_a}{\partial y}dY_a + \frac{\partial F_b}{\partial y}dX_b + \frac{\partial G_b}{\partial y}dY_b \\
 D_{31}dx + D_{32}dy + D_{33}dz &= \frac{\partial F_a}{\partial z}dX_a + \frac{\partial G_a}{\partial z}dY_a + \frac{\partial F_b}{\partial z}dX_b + \frac{\partial G_b}{\partial z}dY_b
 \end{aligned} \quad \text{III-18}$$

Avec la matrice D qui est symétrique ($D_{ij} = D_{ji}$) :

$$\begin{aligned}
 D_{11} &= \left(\frac{\partial F_a}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial G_a}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F_b}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial G_b}{\partial x}\right)^2 \\
 D_{12} &= \frac{\partial F_a}{\partial x} \frac{\partial F_a}{\partial y} + \frac{\partial G_a}{\partial x} \frac{\partial G_a}{\partial y} + \frac{\partial F_b}{\partial x} \frac{\partial F_b}{\partial y} + \frac{\partial G_b}{\partial x} \frac{\partial G_b}{\partial y} \\
 D_{13} &= \frac{\partial F_a}{\partial x} \frac{\partial F_a}{\partial z} + \frac{\partial G_a}{\partial x} \frac{\partial G_a}{\partial z} + \frac{\partial F_b}{\partial x} \frac{\partial F_b}{\partial z} + \frac{\partial G_b}{\partial x} \frac{\partial G_b}{\partial z} \\
 D_{22} &= \left(\frac{\partial F_a}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial G_a}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F_b}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial G_b}{\partial y}\right)^2 \\
 D_{23} &= \frac{\partial F_a}{\partial y} \frac{\partial F_a}{\partial z} + \frac{\partial G_a}{\partial y} \frac{\partial G_a}{\partial z} + \frac{\partial F_b}{\partial y} \frac{\partial F_b}{\partial z} + \frac{\partial G_b}{\partial y} \frac{\partial G_b}{\partial z} \\
 D_{33} &= \left(\frac{\partial F_a}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial G_a}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial F_b}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial G_b}{\partial z}\right)^2
 \end{aligned} \quad \text{III-19}$$

Les déplacements (dx, dy, dz) sont alors obtenus en résolvant le système III-18. On a également une estimation de l'erreur en pixel:

$$\epsilon' = \frac{1}{2} \sqrt{(\epsilon_{xa}^2 + \epsilon_{ya}^2 + \epsilon_{xb}^2 + \epsilon_{yb}^2)} \quad \text{III-20}$$

III.1.2.2 Implémentation numérique et pratique pour les ondes de surfaces

L'ensemble des calculs présentés par la suite a été développé pour être utilisé au sein de la toolbox gratuite UVMAT développée sous Matlab par Joël Someria.

III.1.2.2.1 Calibration

La première étape consiste à obtenir les relations de calibration F et G ainsi que leur inverse F' et G' . Pour les ondes de surface, les conditions expérimentales sont suffisamment simples (pas de forte déformation optique non-linéaire) pour pouvoir utiliser la méthode de calibration initialement développée par Tsai [113]. L'idée est d'utiliser un modèle mathématique pour les caméras dit de « pinhole perspective projection model ». Celui-ci est illustré dans la Figure III-6 pour une configuration 2D simplifiée.

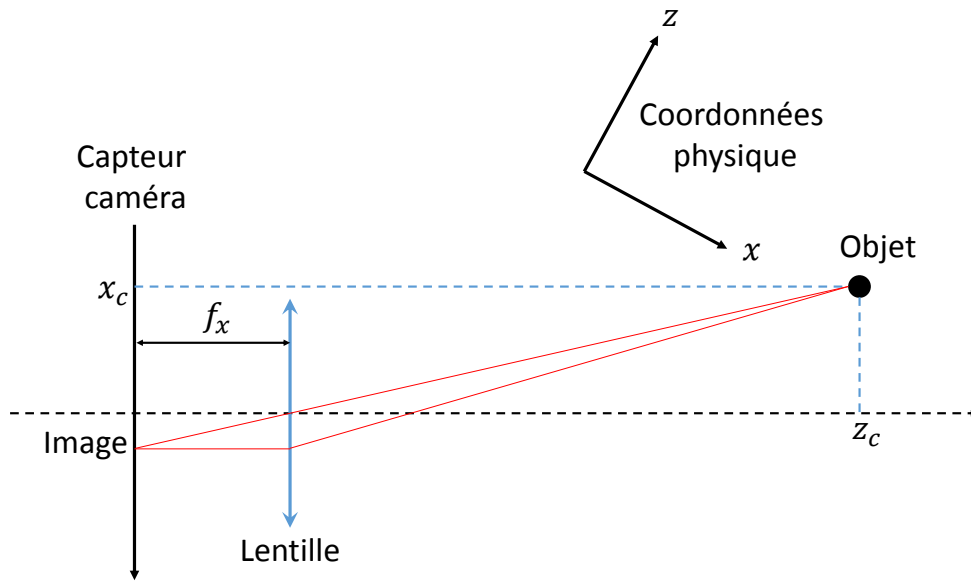


Figure III-6 : Schéma du modèle de caméra utilisé pour la calibration (« pinhole perspective projection model »). Il définit la projection d'un objet, de l'espace physique (x, z) , dans le repère lié au capteur de la caméra.

L'utilisation du modèle permet la réduction du nombre de paramètres à seulement 11. Ceux-ci sont divisés en deux catégories, les intrinsèques qui sont liés à la physique de la caméra, et les extrinsèques qui définissent la position de la caméra. Ces derniers sont au nombre de six : la matrice de rotation r construite à l'aides des trois angles de positionnement, et la matrice de translation T correspondant aux translations sur les trois axes. Elles permettent de passer des coordonnées physiques (x, y) au repère caméra (x_c, y_c) avec la relation suivante :

$$\begin{bmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 & r_2 & r_3 \\ r_4 & r_5 & r_6 \\ r_7 & r_8 & r_9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T_x \\ T_y \\ T_z \end{bmatrix} \quad \text{III-21}$$

On définit alors la projection (X', Y') dans le plan du capteur camera :

$$\begin{aligned} X' &= x_c / z_c \\ Y' &= y_c / z_c \end{aligned} \quad \text{III-22}$$

Le retour aux coordonnées pixel X, Y se fait grâce aux cinq paramètres intrinsèques : (f_x, f_y) pour la focale sur (x, y) , k_c le facteur quadratique de la distorsion géométrique et C_x, C_y pour le décalage de l'origine des coordonnées caméra par rapport à l'axe optique (Dans une optique parfaite, l'axe optique est situé au milieu du capteur). On peut alors écrire :

$$\begin{aligned} X &= f_x [1 + k_c (X'^2 + Y'^2)] X' + C_x \\ Y &= f_y [1 + k_c (X'^2 + Y'^2)] Y' + C_y \end{aligned} \quad \text{III-23}$$

Où la focale est en unité de taille de pixel. Les fonctions de calibration F et G correspondent donc à la résolution de III-21 en utilisant III-22 et III-23. Il est également possible d'obtenir les fonctions de calibration inverses F' et G' en connaissant z :

$$x = F'(X, Y) \quad y = G'(X, Y) \quad \text{III-24}$$

Pour cela, on exprime l'équation III-22 comme le système linéaire suivant :

$$\begin{aligned} x_c - X'z_c &= 0 \\ y_c - Y'z_c &= 0 \end{aligned} \quad \text{III-25}$$

On va ensuite pouvoir le réécrire en utilisant le système III-21 :

$$\begin{aligned} A_{11}x + A_{12}y + A_{13}z &= X'T_z - T_x \\ A_{21}x + A_{22}y + A_{23}z &= Y'T_z - T_y \end{aligned} \quad \text{III-26}$$

Avec

$$\begin{aligned} A_{11} &= r_1 - r_7X' & A_{12} &= r_2 - r_8X' & A_{13} &= r_3 - r_9X' \\ A_{21} &= r_4 - r_7Y' & A_{22} &= r_5 - r_8Y' & A_{23} &= r_6 - r_9Y' \end{aligned} \quad \text{III-27}$$

Où X', Y' peuvent être retrouvés à partir des coordonnées de l'image brute X, Y en inversant le système III-23. Comme les déformations quadratiques sont faibles, on peut dans un premier temps inverser le linéairement système comme suit :

$$\begin{aligned} X' &\approx (X - C_x)f_x^{-1} \\ Y' &\approx (Y - C_y)f_y^{-1} \end{aligned} \quad \text{III-28}$$

Puis dans un second temps, on estime la correction quadratique :

$$\begin{aligned} X' &= (X - C_x)f_x^{-1} [1 + k_c f_x^{-2} (X - C_x)^2 + k_c f_y^{-2} (Y - C_y)^2]^{-1} \\ Y' &= (Y - C_y)f_y^{-1} [1 + k_c f_x^{-2} (X - C_x)^2 + k_c f_y^{-2} (Y - C_y)^2]^{-1} \end{aligned} \quad \text{III-29}$$

Ainsi, en injectant cette équation dans III-2 et III-3 on obtient un système permettant le passage des coordonnées physiques (x, y, z) aux coordonnées caméras (X, Y) .

L'utilisation numérique de cette méthode de calibration se fait dans UVMAT (Matlab) grâce à la toolbox « Camera Calibration Toolbox » développée par Jean-Yves Bouguet. Cette dernière utilise le modèle intrinsèque de caméra proposé par Heikkilä [114]. L'ensemble des paramètres de calibration étant obtenus en appliquant la méthode proposée par Zhang [115]. La récupération des paramètres intrinsèques se fait avec l'extraction de points de calibrations issus d'une grille placée dans différentes orientations arbitraires. Les matrices extrinsèques r, T sont obtenues avec une simple prise de vue de la grille à l'horizontale, représentant le plan de référence.

III.1.2.2.2 Calculs des corrélations

L'application numérique des formules précédentes nécessite le calcul de corrélations pour mettre en lien les différents angles de vue (Stéréo) ou déplacement temporel (PIV). La Figure III-7 représente schématiquement l'ensemble des opérations nécessaires pour obtenir le champ complet de hauteur et de vitesse.

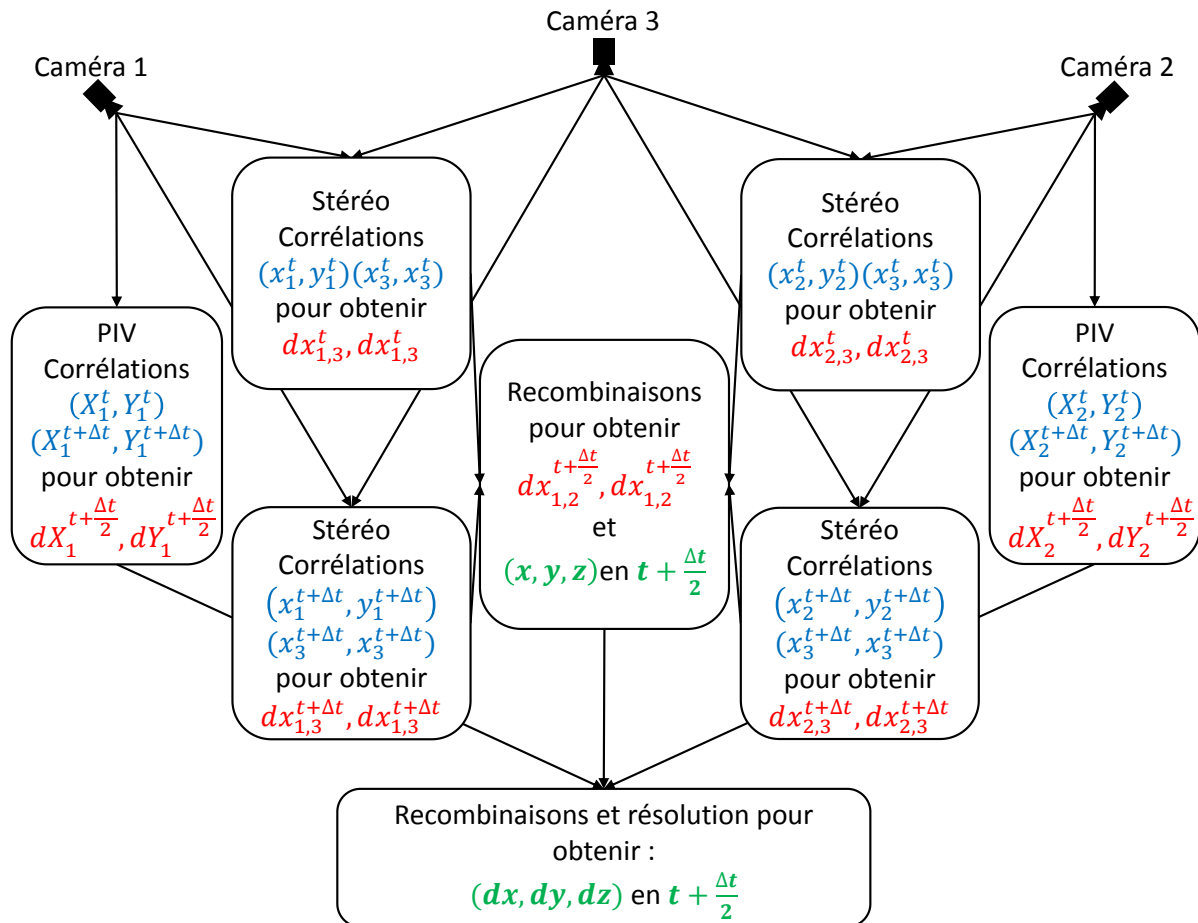


Figure III-7 : Schéma de l'organisation des différentes étapes de corrélation nécessaires pour l'obtention du champ complet de position (x, y, z) et de vitesse (dx, dy, dz) . Les déplacements $(x_b - x_a)$ et $(y_b - y_a)$ mesurés par corrélation sont notés $(dx_{a,b}^t, dy_{a,b}^t)$ où les indices a et b indiquent les caméras utilisées et t le pas de temps.

Comme on peut le voir, trois caméras sont utilisées. En effet lorsque les vagues sont grandes, les déplacements peuvent devenir trop importants pour que les calculs de corrélation puissent aboutir. Il est alors possible de les réduire en rapprochant les caméras. Cependant, pour maintenir une bonne sensibilité verticale, il est conseillé de conserver un fort écartement entre les caméras. La solution adoptée est alors l'utilisation d'une troisième caméra intermédiaire, qui est située entre les deux premières. La stéréoscopie est réalisée sur les deux couples ayant un faible angle ([1,3] et [2,3]), tandis que la PIV est réalisée avec les deux caméras extrêmes [1,2]. La charge de calcul pour l'obtention du champ final est alors élevée car il faut réaliser six étapes de corrélations pour l'obtention du champ final: quatre pour la stéréo et deux pour la PIV. Pour chaque itération temporelle il faut alors environ 2'30'' sur un cœur du type « Intel xéon 2.5GHz ». Ayant pour objectif d'obtenir une bonne convergence statistique, une expérience comporte environ 240000 images par caméra. Le temps de calcul total est alors proche de 10000h, ce qui nécessite l'utilisation du calcul parallèle.

Pour pouvoir réaliser les étapes de corrélations, la surface de l'eau a étéensemencée avec des particules de polystyrène ayant un diamètre d'environ $700\mu m$. La Figure III-8 montre deux prises de vues simultanées pour la caméra 1 et 2. Les deux images ont été transformées dans le plan de référence où la corrélation croisée pour la stéréo est effectuée afin d'obtenir les déplacements $dx_{a,b} = (x_b - x_a)$ et $dy_{a,b} = (y_b - y_a)$. Les déplacements pouvant être importants, un algorithme de raffinement pyramidal est utilisé afin de capturer les différentes échelles présentes dans le système [116].

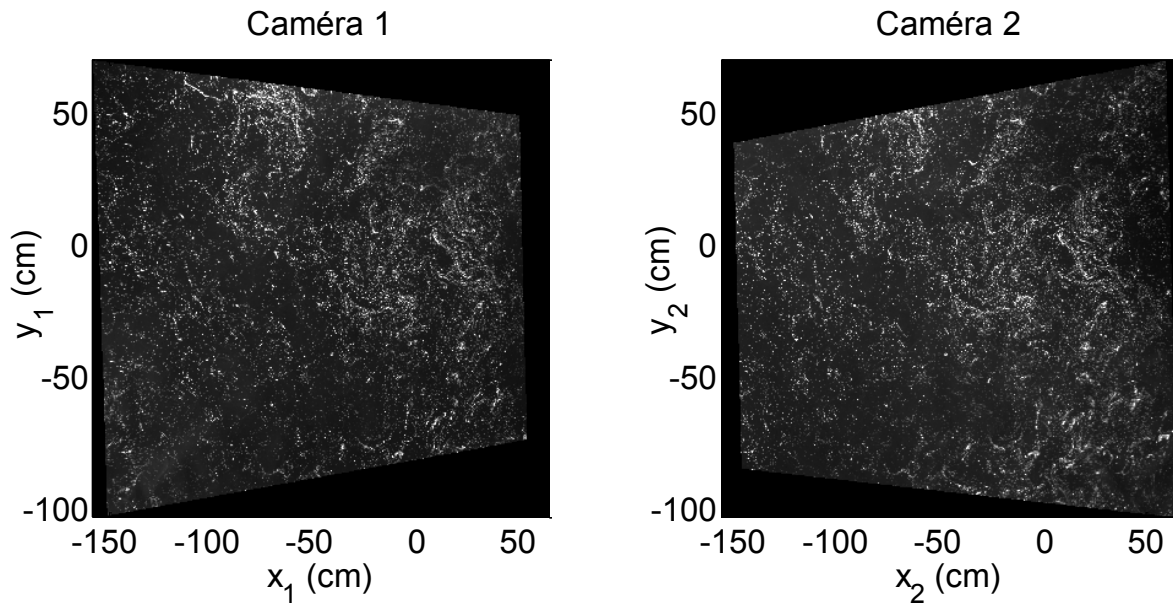


Figure III-8 : Surfaceensemencée de particules vue par les caméras 1 et 2 au même instant. Les images ont été transformées dans le plan de référence. Les points blancs visibles sont des particules de polystyrène ayant un diamètre de $700\mu\text{m}$.

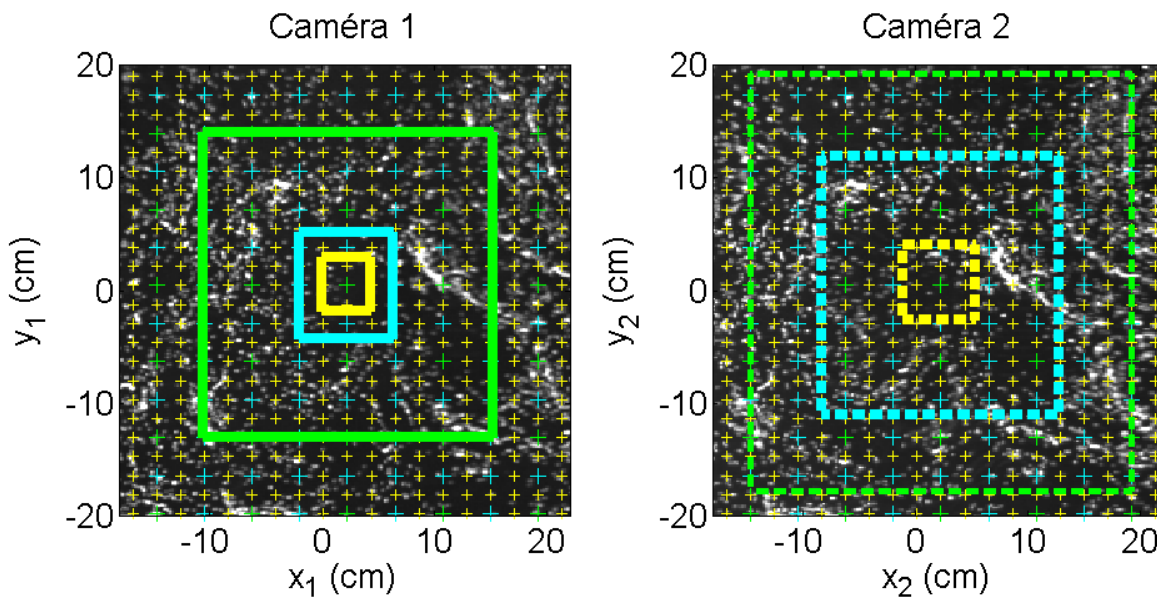


Figure III-9 : Illustration de l'algorithme de raffinement utilisé. L'image de gauche est la vue de la caméra 1 où le rectangle plein représente la zone de corrélation choisi. La zone de recherche correspondante dans la caméra 2 est tracée en pointillés. Les différentes couleurs représentent les trois étapes successives de raffinement. Les points représentent les différentes positions spatiales où la corrélation est réalisée.

La Figure III-9 permet de le visualiser l'algorithme pour la mesure de stéréo. On commence par chercher les grands déplacements en définissant une large zone de corrélation où l'intensité des pixels sera moyennée (rectangle vert figure a)). On déplace ensuite cette zone sur la seconde image dans une surface de recherche prédéfinie (rectangle pointillé vert). Le maximum de corrélation entre l'intensité de la fenêtre immobile de l'image 1 et une position de l'image 2 indique le déplacement le plus probable. On réitère ensuite cette procédure deux fois en réduisant successivement la taille de la zone de corrélation afin d'accéder aux les plus petites échelles (rectangles bleus et jaunes).

La PIV ayant des déplacements plus faibles, la corrélation temporelle peut s'effectuer avec uniquement 2 étapes de raffinement pour gagner en temps de calculs. Pour chaque zone de recherche (rectangles pointillés), on va pouvoir incorporer N fois la zone de corrélation (rectangles continus). On se retrouve alors avec une carte de N points de corrélation. Un exemple issu de la PIV est affiché dans la Figure III-10.

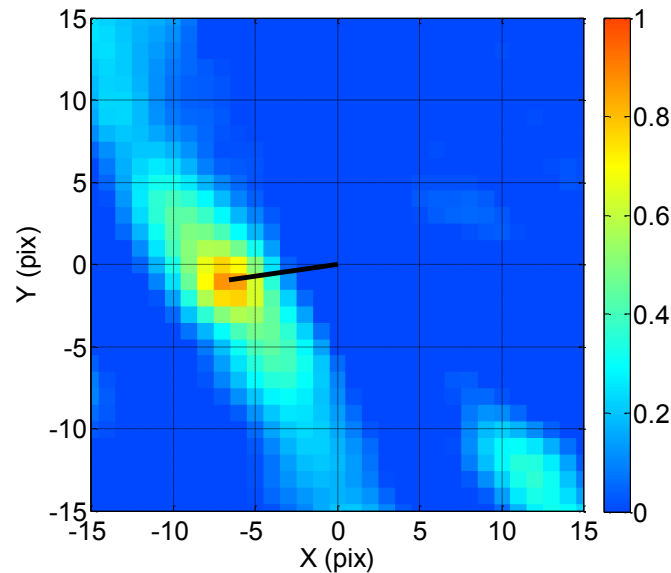


Figure III-10 : Carte de corrélation pour une zone de recherche. Le centre de la zone de corrélation au temps t (ou caméra 1 en stéréo) est situé en $(0,0)$. Chaque point correspond à un décalage d'un pixel de la zone de corrélation dans la fenêtre de recherche. La corrélation varie entre 1 pour une corrélation parfaite et 0 pour aucune corrélation. Ici un pic à 0.9 est visible et nous informe que la fenêtre s'est déplacée d'environ $(-6, -2)$ pixels (ligne noire).

La corrélation varie entre 1 pour une corrélation parfaite et 0 pour aucune corrélation. Dans cet exemple on observe un pic aux alentours de $(-6, -2)$, représentant le déplacement temporel le plus probable de la zone de corrélation. La distribution de la corrélation étant supposée gaussienne autour du maximum, un fit est réalisé afin d'accroître la précision. Il est admis que celle-ci demeure autour de 0.1 pix [116]. Cette étape de recherche est alors répétée successivement sur différents points de l'image. Dans notre cas, un recouvrement d'environ 50% entre les fenêtres de corrélation a été utilisé ce qui représente un échantillonnage de deux fois la taille de zone de corrélation. La résolution spatiale finale est d'environ 4 cm et correspond à la taille de la plus petite zone de corrélation qui fait $4 \times 4 \text{ cm}^2$. Cela limite la mesure à des ondes linéaires ayant une fréquence inférieure à environ 7 Hz .

Pour obtenir une bonne mesure, il est indispensable de pouvoir éliminer les faux déplacements. Ceux-ci peuvent provenir de trous dans l'ensemencement des particules, de réflexions directes de la lumière sur la surface, ou encore de mauvais réglages des paramètres de corrélations. Pour s'en débarrasser, une première étape consiste à fixer un seuil minimum dans l'intensité des corrélations. Cependant, on observe la forte persistance de vecteurs erratiques. Un deuxième filtre consiste en l'élimination des pics de corrélation situés sur les bords de la zone de recherche, là où les déplacements sont probablement sous-estimés. Dans un 3ème temps, un fit 2D « spline » (méthode dite « thin plate spline ») est réalisé sur les données préalablement filtrées spatialement (filtre gaussien paramétrable). Les déplacements qui sont trop éloignés de l'estimation sont alors éliminés. Cette étape est ensuite réalisée une seconde fois en réduisant le seuil de déplacement autorisé.

III.1.2.3 Test précision

La méthode de mesure étant inédite, il est important d'en connaître la précision. Dans notre cas, celle-ci peut être estimée avec différentes approches : en utilisant de fausses images, en mesurant une surface connue et en utilisant la redondance apportée par les trois caméras.

III.1.2.3.1 Fausses images

Les fausses images permettent de tester la méthode globale en s'affranchissant des erreurs dues à la calibration : on va ainsi pouvoir observer précisément les erreurs issues des étapes de corrélation.

Un premier test consiste en la reconstruction d'une simple déformation sinusoïdale $z_{artificielle}$ ayant une dimension typique de ce que l'on cherche à observer. Celle-ci est visible dans la Figure III-11.

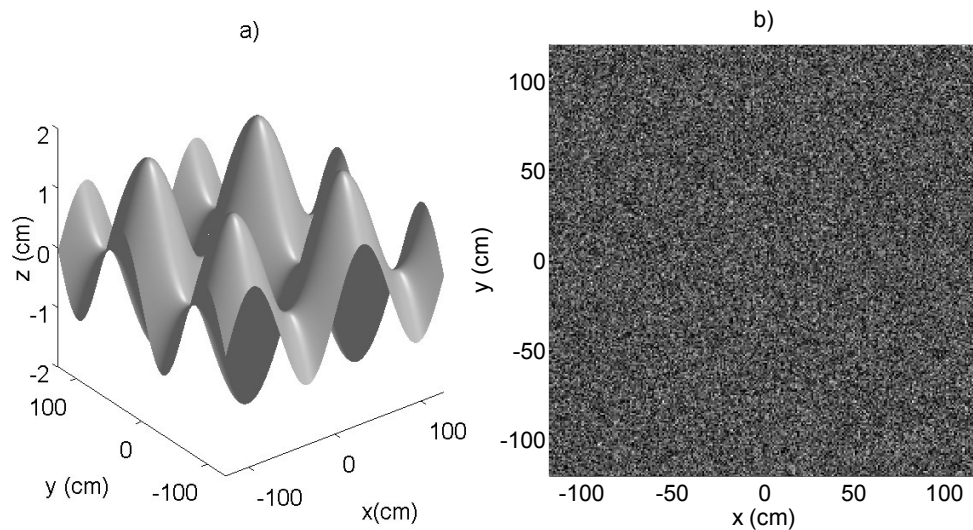


Figure III-11 : a) Vue 3D de l'image artificielle utilisée pour estimer les erreurs dues à la corrélation. b) Motif utilisé pour le calcul des corrélations.

Cette dernière a également été translatée dans une seconde image pour effectuer une mesure de vitesse artificielle ($dx_{artificielle}$, $dy_{artificielle}$, $dz_{artificielle}$). Le champ d'intensité utilisé pour le calcul des corrélations est visible dans la Figure III-11 b). Il est appliqué comme un motif sur la déformation artificielle. La vue correspondante pour chaque caméra est obtenue avec les fonctions inverses de calibration F' , G' . Il a été vérifié que l'aller-retour entre (x, y, z) et (X, Y) n'engendre qu'une erreur négligeable provenant des interpolations successives. Ceci assure une indépendance du résultat vis-à-vis des fonctions de calibration. L'image caméra ainsi obtenue est alors injectée dans les mêmes programmes de la toolbox UVMAT que ceux utilisés pour la reconstruction d'images réelles. La Figure III-12 montre les distributions des différences entre la mesure (z , dx , dy , dz) et les valeurs imposées ($z_{artificielle}$, $dx_{artificielle}$, $dy_{artificielle}$, $dz_{artificielle}$).

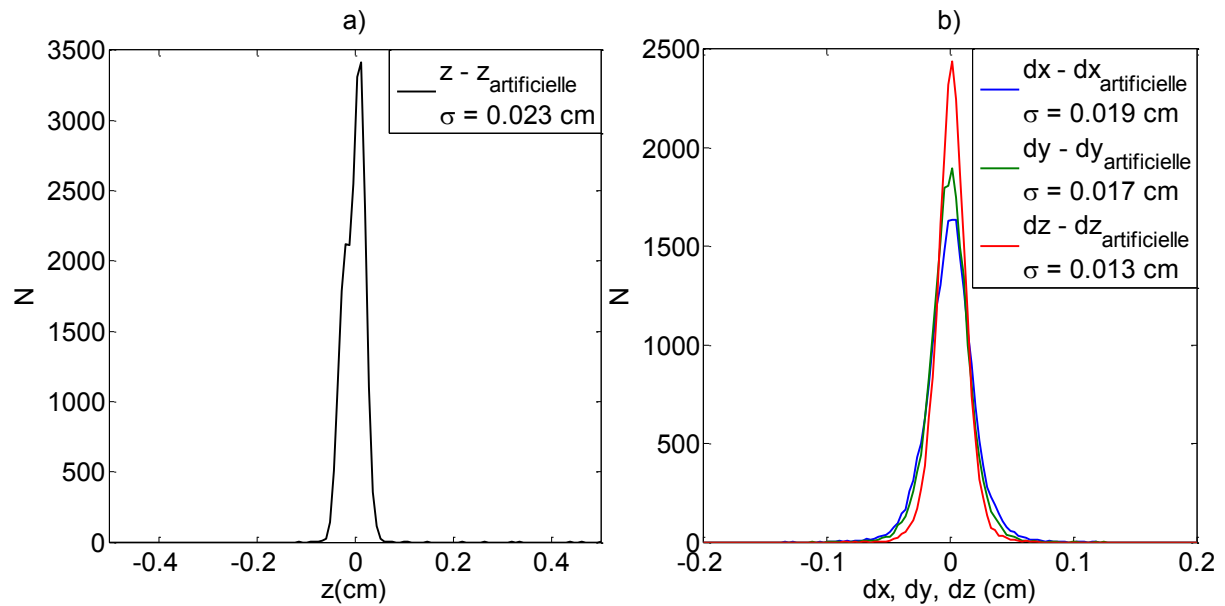


Figure III-12 : a) Distribution de la différence entre le champ artificiel imposé $z_{artificielle}$ et le champ reconstitué z . On observe une dispersion $\sigma = \sqrt{\langle (Z - Z_{artificielle})^2 \rangle} = 0.023 \text{ cm}$ ce qui équivaut à environ 0.1 *pix*. b) Distribution des différences entre les déplacements (vitesse) mesurés et artificiels.

Les distributions étant proche d'une gaussienne, on utilise alors l'écart-type σ pour quantifier la dispersion. Dans le cas de la reconstruction stéréographique on a $\sigma = \sqrt{\langle (Z - Z_{artificielle})^2 \rangle} = 0.023 \text{ cm}$ ce qui équivaut à 0.1 *pix*. Les distributions pour les déplacements (vitesse) sont similaires et cohérentes avec les valeurs usuelles annoncées précédemment. Ceci valide donc la partie mathématique de la mesure.

III.1.2.3.2 Faux spectre

Il est également utile de connaître le comportement de la méthode dans un système plus complexe. En effet, l'ensemble de la mesure n'étant pas linéaire, il est possible d'observer des erreurs dans des cas limites. Par exemple, une petite vague peut être affectée par la présence d'un fort déplacement vertical ou d'une forte pente.

Cette estimation est faite en injectant un ensemble de structures dont le déplacement vertical simule un champ d'onde isotrope ayant une phase aléatoire. Les vitesses horizontales sont nulles. Pour se placer dans des conditions proches de la réalité expérimentale, un spectre suivant la relation de dispersion linéaire a été choisi. Il comporte un pic prononcé à la fréquence du forçage et possède une décroissance en loi de puissance proche de $\sim \omega^{-4}$. La Figure III-13 permet de comparer le spectre temporel mesuré avec celui introduit.

Les mêmes paramètres de corrélations que pour des champs réels ont été utilisés. On observe une bonne concordance de la mesure jusqu'à environ 3 Hz où la résolution spatiale commence à filtrer. Il n'y a plus de signal pour des ondes linéaires ayant une fréquence supérieure à environ 7 Hz, ce qui donne une limite en k d'environ $k_{max}/2\pi = 25 \text{ m}^{-1}$ soit une longueur d'onde de 4 cm. Comme expliqué précédemment, cette valeur correspond à la plus petite taille de fenêtre de corrélation utilisée. La seconde figure montre la mesure du spectre intégré $E^\eta(k, \omega)$. On observe un niveau de bruit d'environ 6 décades sous le pic principal. Aucun effet parasite non-linéaire ne semble visible.

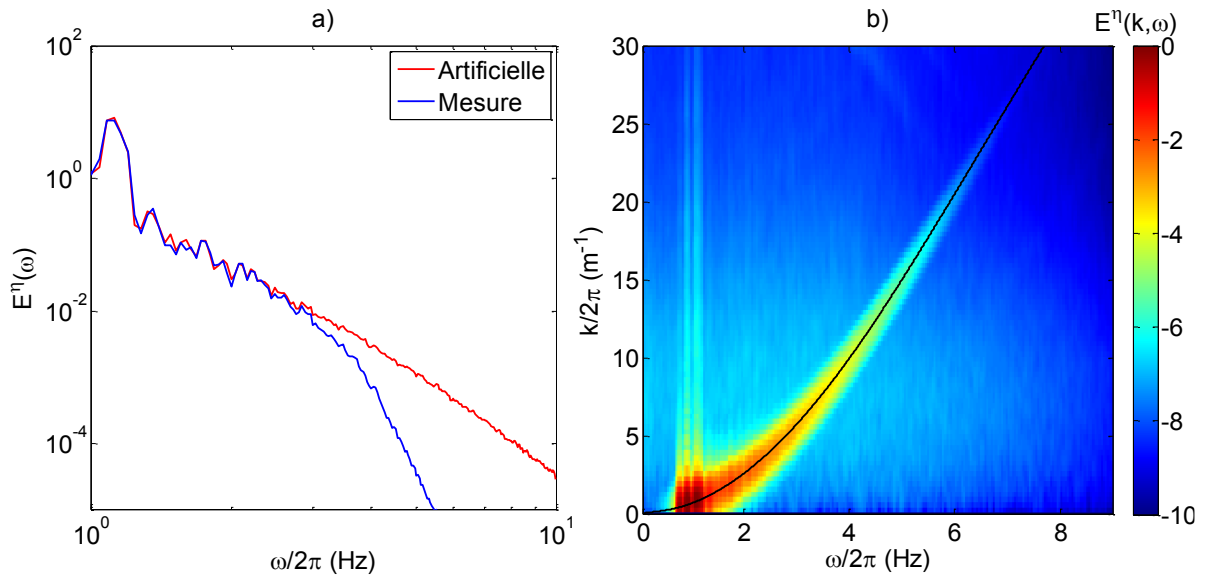


Figure III-13 : a) Spectre tempore $E^\eta(\omega)$ des vagues artificielles (ligne rouge) et de la mesure (ligne bleue). La mesure des ondes linéaires est valide jusqu'à environ 3Hz, là où la résolution spatiale commence à filtrer. b) Spectre spatio-temporel de la mesure de hauteur intégré en k : $E^\eta(k, \omega)$. Le bruit de mesure est réparti de manière homogène dans l'espace de Fourier. La ligne noire est la relation de dispersion linéaire des ondes de gravité.

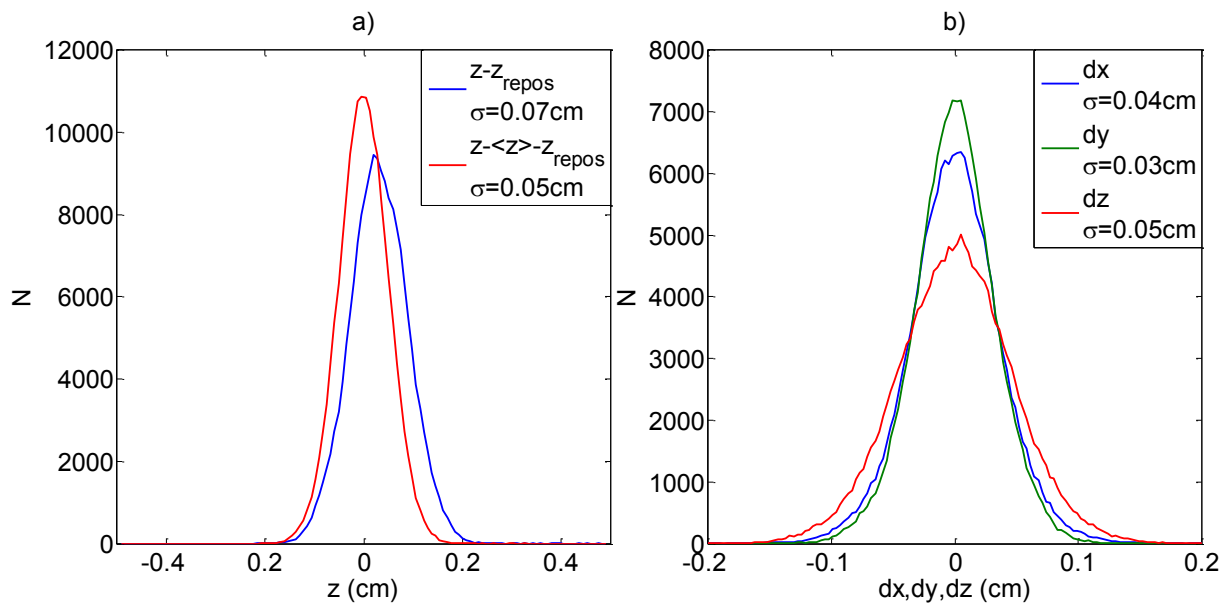


Figure III-14 : a) En rouge, distribution de la différence entre la surface mesurée et la valeur réelle au repos. En bleu la valeur moyenne temporelle en chaque pixel a été soustraite. On observe des dispersions entre 500 et 700 μm . b) Distributions des déplacements (vitesse).

III.1.2.3.3 Précision statique

Maintenant que l'erreur provenant de la corrélation est connue, on peut s'intéresser aux contributions provenant de la calibration et des autres paramètres extérieurs (ensemencement des particules, lumière...).

Un premier test statique consiste à réaliser une vraie mesure de la surface lorsque l'eau est au repos. En effet, celle-ci étant parfaitement plate et déterminée, on va pouvoir tester la précision des mesures avec une simple différentiation. La Figure III-14 montre les distributions pour les mesures stéréographiques (a) et de PIV (b).

La courbe bleue en a) montre la distribution de $z - z_{repos}$ intégrée sur une dizaine d'images. La dispersion est d'environ $700 \mu m$. On remarque que la moyenne n'est pas à 0, suggérant une erreur constante. Celle-ci peut provenir d'un déplacement des caméras entre la calibration et le moment de la mesure. En faisant l'hypothèse que ces erreurs sont essentiellement linéaires, il est possible d'améliorer la mesure en soustrayant la moyenne temporelle de chaque pixel. C'est ce qui est fait avec la courbe rouge, qui montre alors une dispersion plus faible autour de $500 \mu m$ soit $0.3 pix$. La figure b) représente les distributions des vitesses mesurées avec la PIV. Celles-ci possèdent une dispersion légèrement inférieure proche de $0.2 pix$.

III.1.2.3.4 Précision dynamique

Le test de la surface au repos permet une estimation de l'erreur dans une situation idéale. Cependant il est possible que l'erreur soit augmentée dans le cas d'une mesure dynamique. Si on a vu précédemment avec les images artificielles que la méthode de mesure se comporte bien dans de telles situations, il n'en est pas forcément de même avec la calibration. D'autres sources d'erreurs qui étaient absentes dans la situation au repos peuvent également s'ajouter. Par exemple la présence de réflexions directes des projecteurs sur la caméra ou encore le plongeon de particules sous la surface lors d'évènements fortement non-linéaires.

L'estimation de l'erreur dans cette situation est plus délicate car la surface n'est pas connue. Cependant grâce aux trois caméras présentes il est possible de l'estimer à partir de trois mesures pratiquement indépendantes. Il est également possible d'utiliser l'estimation de l'erreur donnée par les équations III-12 pour la stéréographie et III-20 pour la PIV. La Figure III-15 montre ces deux estimations intégrées sur une centaine d'images pour la reconstruction stéréographique. En a), on peut voir les différences entre les trois estimations de la surface données par les couples de caméra [1,2], [1,3] et [2,3]. On remarque une dispersion équivalente pour les trois couples qui est de l'ordre de $900 \mu m$. La moyenne temporelle contenant les erreurs constantes liées à la calibration de chaque caméra a été soustraite. On peut ainsi proposer l'hypothèse de l'indépendance des trois couples et estimer une erreur typique $\sigma_{z_{[i,j]}} = \sigma_{z_{[i,j]} - z_{[i,j]}} / \sqrt{2} \approx 600 \mu m$.

La Figure III-15 b) trace la distribution de ϵ_y donnée en III-12. La configuration des caméras alignées sur l'axe x implique une forte minimisation de ϵ_x . (L'information étant majoritairement comprise sur cet axe). Ainsi, ϵ_y peut être assimilé directement à l'erreur horizontale. Il est ensuite possible d'exprimer une erreur typique verticale avec l'équation III-14. On obtient alors une valeur similaire à $\sigma_{z_{[i,j]}}$ avec $\epsilon_{z_{[i,j]}} \approx 500 \mu m$. On retrouve la précision observée dans le cas statique, confirmant ainsi la précision de $0.3 pix$ de la reconstruction stéréographique pour les réelles conditions d'expérimentation.

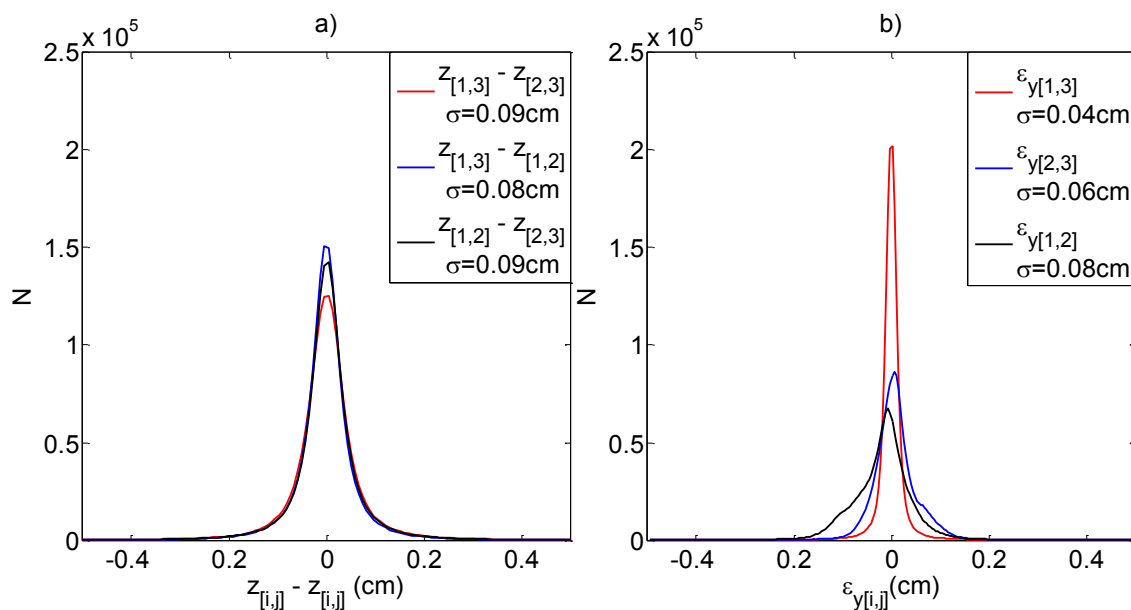


Figure III-15 : a) Distributions des différences entre les z estimés par les trois couples de caméras. L'erreur typique verticale étant $\sigma/\sqrt{2}$ dans le cas où les couples de caméras sont complètement indépendants. b) Distribution des erreurs horizontale ϵ_y . Il est possible de remonter à l'erreur verticale qui est de $\epsilon_z \approx 0.05\text{cm}$ pour les trois estimations (voir équation III-14).

Il est également possible d'effectuer la même analyse sur les mesures de PIV. La Figure III-16 trace les différences entre les trois mesures de vitesse verticale dz .

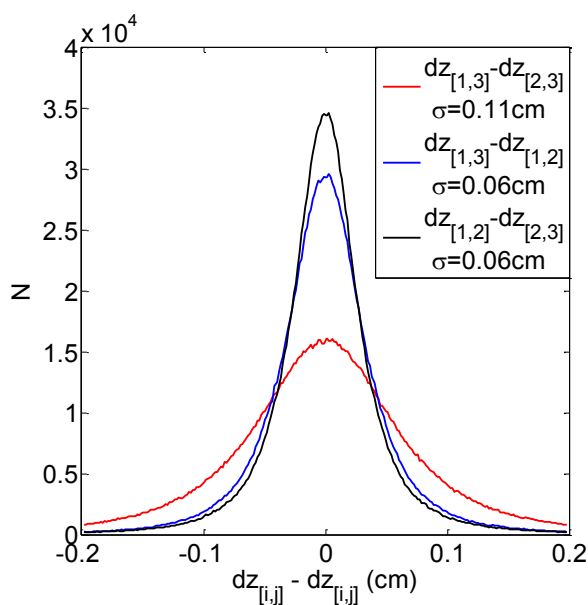


Figure III-16 : Distribution des différences entre les trois estimations de la vitesse verticale dz obtenue par PIV.

Contrairement à z , on observe une distribution différente selon les configurations. La courbe rouge qui regroupe les deux couples utilisant la caméra 3 présente la plus grosse dispersion. Celle-ci peut s'expliquer par la position de la caméra 3 qui est normale à la surface. Cette dernière est incapable de mesurer une vitesse verticale réduisant ainsi la sensibilité du couple. Ainsi, la meilleure sensibilité verticale est obtenue avec le couple [1,2] où les deux caméras permettent de mesurer dz . En divisant σ par $\sqrt{2}$ on obtient une valeur type autour de $400\mu\text{m}$ qui est comparable à l'estimation faite au repos.

A partir de ces différentes estimations d'erreur, il est évident que l'utilisation des deux caméras extrêmes 1 et 2 est nécessaire pour obtenir la meilleure sensibilité verticale sur la vitesse. Néanmoins, comme expliqué précédemment, l'angle fort entre les deux caméras peut parfois empêcher le calcul de corrélation au niveau de l'étape de reconstruction stéréographique. L'utilisation d'une troisième caméra intermédiaire permet de s'affranchir de ce problème tout en conservant la sensibilité sur z : en effet, la reconstruction stéréographique présente une erreur $\epsilon_{z[i,j]}$ semblable pour les trois couples.

III.1.2.3.5 Recombinaison

Comme on peut le voir sur la Figure III-7, l'algorithme général recombine les reconstructions stéréographiques des deux couples [1,3] et [2,3] pour obtenir l'équivalent d'une reconstruction directe du couple [1,2]. A la vue de l'erreur $\epsilon_{z[i,j]}$ qui est identique pour les trois couples, on pourrait penser qu'il suffit de ne calculer qu'un seul couple pour obtenir le z nécessaire à la recombinaison de la PIV. Cependant $\epsilon_{z[i,j]}$ ne comporte pas l'erreur constante liée à la calibration qui a été soustraite par la moyenne temporelle de chaque pixel. Cette dernière qui est différente pour les trois caméras doit être prise en compte pour assurer la recombinaison. Ainsi l'utilisation de [1,2] est indispensable pour obtenir une bonne mesure. D'un point de vue numérique, la recombinaison est faite en additionnant les déplacements dans le plan de référence :

$$\begin{aligned} x_2 - x_1 &= (x_2 - x_3) + (x_3 - x_1) \\ y_2 - y_1 &= (y_2 - y_3) + (y_3 - y_1) \end{aligned} \quad \text{III-30}$$

La Figure III-17 permet de voir la distribution de la différence entre la recombinaison et la mesure directe.

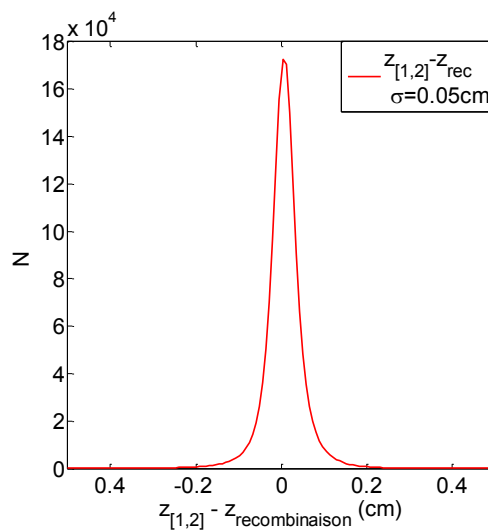


Figure III-17 : Distribution de la différence de z , estimée par le couple [1,2], et entre la recombinaison des couples de camera [1,3] et [2,3].

On retrouve une dispersion du même ordre de grandeur que celle estimée précédemment sur les autres couples de caméras. L'utilisation de la recombinaison peut donc être utilisée sans soucis dans cette situation.

Pour conclure sur ces essais de précisions, dans les conditions d'expérimentation dans la plateforme de Coriolis, l'erreur est donc de $\epsilon_z \approx 0.3 \text{ pix} \approx 500 \mu\text{m}$ sur la hauteur z et de $\epsilon_{dz} \approx 0.2 \text{ pix} \approx 400 \mu\text{m}$ sur la vitesse verticale dz .

III.1.2.4 Limitations

L'utilisation de la stéréo-PIV présente trois grandes limitations. Les deux premières sont d'origine optique alors que la dernière est d'ordre physique et concerne l'ensemencement des particules.

III.1.2.4.1 Limitations géométriques

La première d'ordre géométrique est la limitation de la pente des vagues. Si celle-ci dépasse l'angle d'incidence de vue de la caméra, il y a alors zone d'ombre provoquant une perte d'information. Bien que tous les angles supérieurs à cette valeur soient acceptables, il est néanmoins conseillé d'en être le plus écarté possible pour conserver une bonne résolution spatiale. En effet, pour que l'interpolation et de corrélation de l'image dans le plan de référence fonctionne bien, il faut limiter les fortes déformations entre les vues. La Figure III-18 résume schématiquement cet effet.

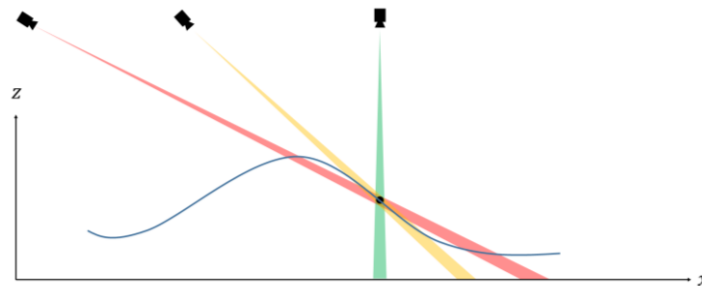


Figure III-18 : Représentation schématique de la limitation géométrique provoquée par la pente des vagues. En bleu est tracée une surface déformée où une particule noire est visée. La caméra la plus extrême avec le faisceau rouge ne peut la voir et rend le calcul de corrélation impossible. La mesure verte fonctionne bien. La position limite permet la mesure mais avec une précision spatiale très mauvaise : le faisceau, représentant un pixel, intègre une grande partie de la surface et rend les étapes d'interpolation et de corrélation imprécises.

A noter que la pente des vagues est naturellement limitée par le déferlement qui se produit aux alentours 30° dans le cas des ondes progressives et qui est pratiquement vertical pour une onde stationnaire [117]. Cependant, ces phénomènes sont suffisamment rares dans nos mesures pour ne pas la perturber significativement. En effet, la pente typique de nos mesures de vague est de l'ordre de 10% ce qui correspond à des angles d'environ 6° . Les caméras extrêmes (1 et 2) ont elles des angles de l'ordre de 45° .

Une seconde limitation géométrique provient de la réflexion directe de la lumière des projecteurs. L'éclairage est placé à faible incidence sous le niveau de l'eau pour obtenir une réflexion totale sous la surface. Ainsi seule la lumière diffuse parvient à la camera. Cependant, si une pente suffisamment forte apparaît, il est possible que la lumière traverse l'interface et frappe directement la caméra, rendant les calculs de corrélation impossibles. Une solution simple pour limiter cet effet est de maximiser l'angle entre les caméras et les projecteurs en les plaçant à 90° , sur l'axe y .

III.1.2.4.2 Ensemencement des particules

Indépendamment de la résolution du capteur de la caméra, la résolution spatiale est fortement limitée par l'ensemencement des particules. Une forte concentration est désirable pour permettre un bon niveau de corrélation ainsi que la résolution des plus petites échelles [118]. Cependant, dans le cas des ondes de surface, il est difficile d'obtenir une forte concentration de particules qui restent réparties homogènement sur la surface libre. En effet, en supposant les particules neutres d'un point de vue électrostatique, une force d'origine capillaire vient s'ajouter au mouvement brownien. Celle-ci provient de la déformation de l'interface par la particule. Pour des particules flottantes ayant un rayon

supérieur à $5\mu\text{m}$, c'est essentiellement l'action combinée de la gravité et de la capillarité qui tend à les rapprocher [119]. La Figure III-19 permet de visualiser schématiquement le phénomène.

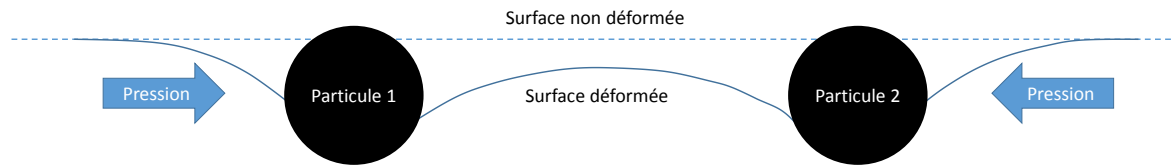


Figure III-19 : Représentation schématique du rapprochement de deux particules. En présence d'une particule, la capillarité déforme la surface. Lorsqu'une seconde particule est suffisamment proche, les deux courbures se rejoignent et provoquent une dépression entre les deux. Cette différence de pression entraîne le rapprochement des deux particules.

Cette force est nettement plus forte que celle induite par le mouvement brownien et ce sur des distances pouvant dépasser dix fois le diamètre de la particule [120]. Ainsi, peu de temps après l'ensemencement, un agrégat de particules se forme et provoque de nombreux trous. Cet effet peut être partiellement réduit avec l'utilisation de particules plus petites. Cependant cette solution est rapidement limitée par la résolution de la caméra ($\text{pix} \geq \phi_{\text{particule}}$) ainsi que par la densité propre de chaque particule. Avec ce type de particules, un diamètre plus petit augmente la densité et réduit le confinement à la surface libre. La mesure reste néanmoins réalisable grâce au mélange effectué par les vagues. Celles-ci étant globalement isotropes, elles permettent une ré-homogénéisation assez efficace comme on peut le voir avec la Figure III-20.

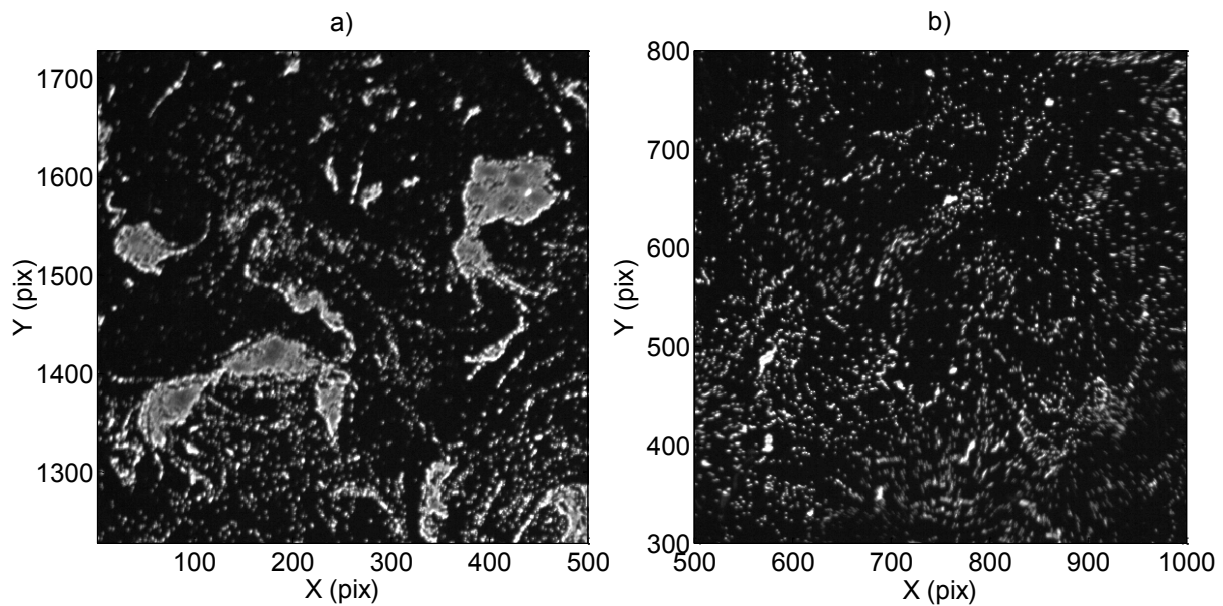


Figure III-20 : a) Importants agrégats de particules sur la surface au repos. b) Ré-homogénéisation de l'ensemencement en présence d'un champ de vagues isotropes. De petits agrégats restent présents.

Un second problème qui affecte l'ensemencement des particules est la présence d'un courant de surface qui tend à les rapprocher. Celui-ci semble provenir des deux batteurs et provoque une zone de condensation au centre de la cuve. La Figure III-21 montre une photo prise pendant une expérience où le phénomène est très présent.



Figure III-21 : Photo de la surface libre où un forçage fort provoque un courant de surface en provenance des deux batteurs. Les particules se retrouvent alors confinées jusqu'à la création d'un film quasi continu.

Comme on peut le voir, les particules se retrouvent en très forte concentration au centre de la cuve, au point de former une nappe continue sur une grande surface. A l'inverse, les bords sont complètement dégarnis rendant le calcul des corrélations irréalisable. Cette recirculation augmentant en rapport avec l'amplitude de forçage, elle limite les mesures spatio-temporelles aux excitations les moins fortes.

III.2 Analyse

Tout comme pour les ondes gravito-capillaires présentées précédemment, la mesure complète de la surface permet une multitude d'analyses... Le tableau suivant résume les trois principales expériences réalisées avec leurs caractéristiques qui seront décrites et utilisées par la suite.

Exp.	$\omega_p/2\pi$ (Hz)	$\sigma_{\omega_p}/2\pi$ (Hz)	Amplitude batteurs (cm)	$k_p/2\pi$ (m^{-1})	σ_η (cm)	$A_p = 4\sigma_\eta$ (cm)	σ_ϵ	$\epsilon_p = A_p k_p/2$
A	0.75	0.15	6	0.40	1.2	4.8	0.09	0.08
B	1	0.25	4	0.65	1.6	6.4	0.12	0.11
C	1	0.08	6	0.65	2.5	10	0.16	0.17

Tableau 2 : Résumé des expériences réalisées. L'indice p représente le forçage effectué à une fréquence ω_p modulée aléatoirement dans une bande spectrale σ_{ω_p} . La longueur d'onde correspondante k_p ainsi que la déformation typique de la surface σ_η permet d'estimer la pente typique des ondes ϵ_p . Cette dernière est également estimée directement par l'écart type σ_ϵ de la pente locale ϵ .

Des mesures locales ont également été réalisées avec des sondes capacitatives afin d'élargir la gamme de paramètres expérimentaux plus aisément.

III.2.1 Analyse spatiale

III.2.1.1 Hauteur η

La Figure III-22 montre une reconstruction de la surface obtenue avec la méthode optique de stéréo-PIV correspondant à l'expérience B.

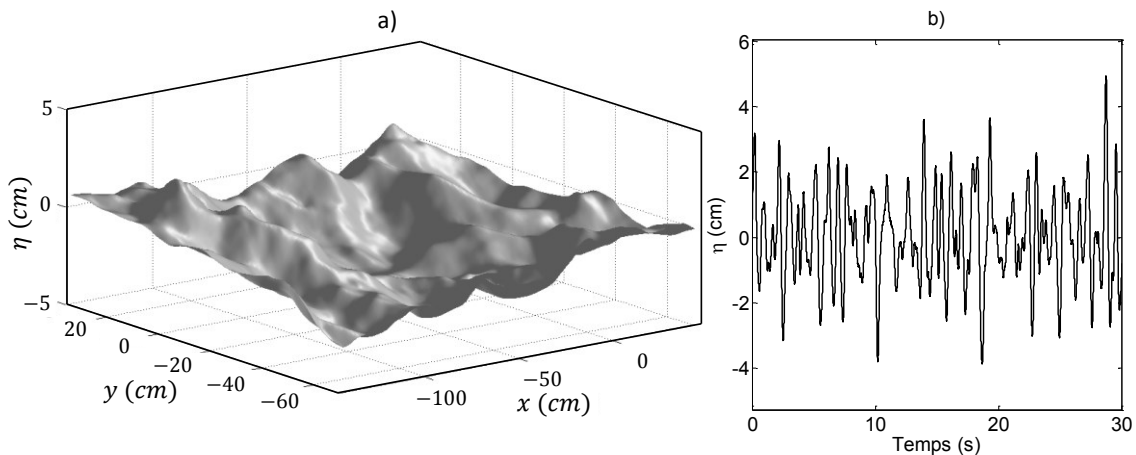


Figure III-22 : a) Reconstruction 3D de la surface à un instant donné de l'expérience B. b) Evolution temporelle d'un pixel.

Le forçage a été effectué à $\omega_p/2\pi = 1\text{Hz}$ avec une faible modulation aléatoire ayant une largeur spectrale $\sigma_{\omega_p}/2\pi = 0.25\text{Hz}$. On observe la génération d'un ensemble de vagues de différentes échelles et se propageant dans plusieurs directions. La signature temporelle semble confirmer la nature turbulente du système. Une première analyse pour caractériser ce signal est de regarder la distribution spatio-temporelle de la hauteur. La Figure III-23 trace la fonction de probabilité $P(\eta/\sigma_\eta)$ de la distribution de η pour les trois forçages significatifs énumérés dans le Tableau 2.

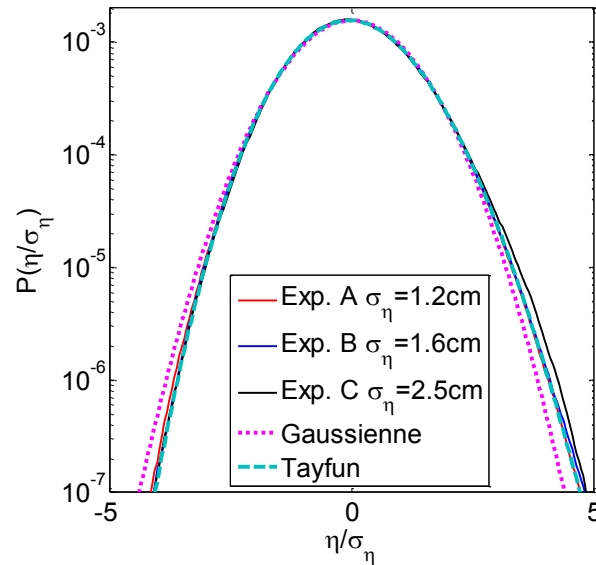


Figure III-23 : Fonctions de probabilité de distribution $P(\eta/\sigma_\eta)$ en fonction de η/σ_η pour les trois principales expériences. La distribution gaussienne et la correction apportée par Tayfun sont également rapportées.

La valeur numérique de l'écart type de la hauteur $\sigma_\eta = \langle \sqrt{\eta^2} \rangle$ est donnée dans le Tableau 2. On observe que les distributions s'écartent d'une loi normale. Ce décalage bien connu dans le milieu océanique est classiquement rapporté à la présence d'ondes de Stokes. Ces dernières correspondent à la présence d'ondes harmoniques liées aux ondes linéaires et qui provoquent un raidissement des pics et un aplatissement des creux. Tayfun appliqua la correction d'ordre deux des ondes de Stokes en faisant l'hypothèse que les ondes linéaires conservent une distribution gaussienne [121]. Il en résulte la distribution dit de « Tayfun », simplifiée par Socquet-Juglard et al. [122] :

$$P(\eta) = \frac{1 - \frac{7\sigma^2 k_p^2}{8}}{\sqrt{2\pi(1 + 3G + 2G^2)}} \exp\left(-\frac{G^2}{2\sigma^2 k_p^2}\right) \quad \text{III-31}$$

$$G = \sqrt{1 + 2k_p \sigma \eta} - 1$$

Où σ_η est l'écart type de η et k_p est le nombre d'onde du pic principal. Cette distribution est tracée en cyan sur la Figure III-23 et semble très bien approximer l'ensemble des mesures. On note un début d'écartement pour le forçage le plus fort, signe probable de la présence de non-linéarités supplémentaires. En effet, la distribution de Tayfun ne prend pas en compte les possibles interactions résonantes, à la base de la théorie de la turbulence faible.

III.2.1.2 Pente ϵ

La pente locale des vagues ϵ est traditionnellement reliée au degré de non-linéarité du système. Généralement, les mesures spatiales ne sont pas disponibles et une estimation de la pente ϵ_p est faite en prenant l'amplitude typique des vagues σ_η ainsi que la longueur d'onde du pic principal k_p (voir par exemple [41]) :

$$\epsilon_p = k_p 2\sigma_\eta = \frac{k_p A_p}{2} \quad \text{III-32}$$

A noter qu'une autre définition est également utilisée comme étant $2\epsilon_p = k_p \sigma_\eta$ [23]. Dans notre cas la mesure complète de l'interface permet directement la mesure locale du module de la pente, définie

comme étant $\epsilon = \sqrt{\epsilon_x^2 + \epsilon_y^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2}$. La Figure III-24 montre un instantané spatial (figure a)) ainsi que la distribution spatio-temporelle (figure b) et c)) de ce paramètre.

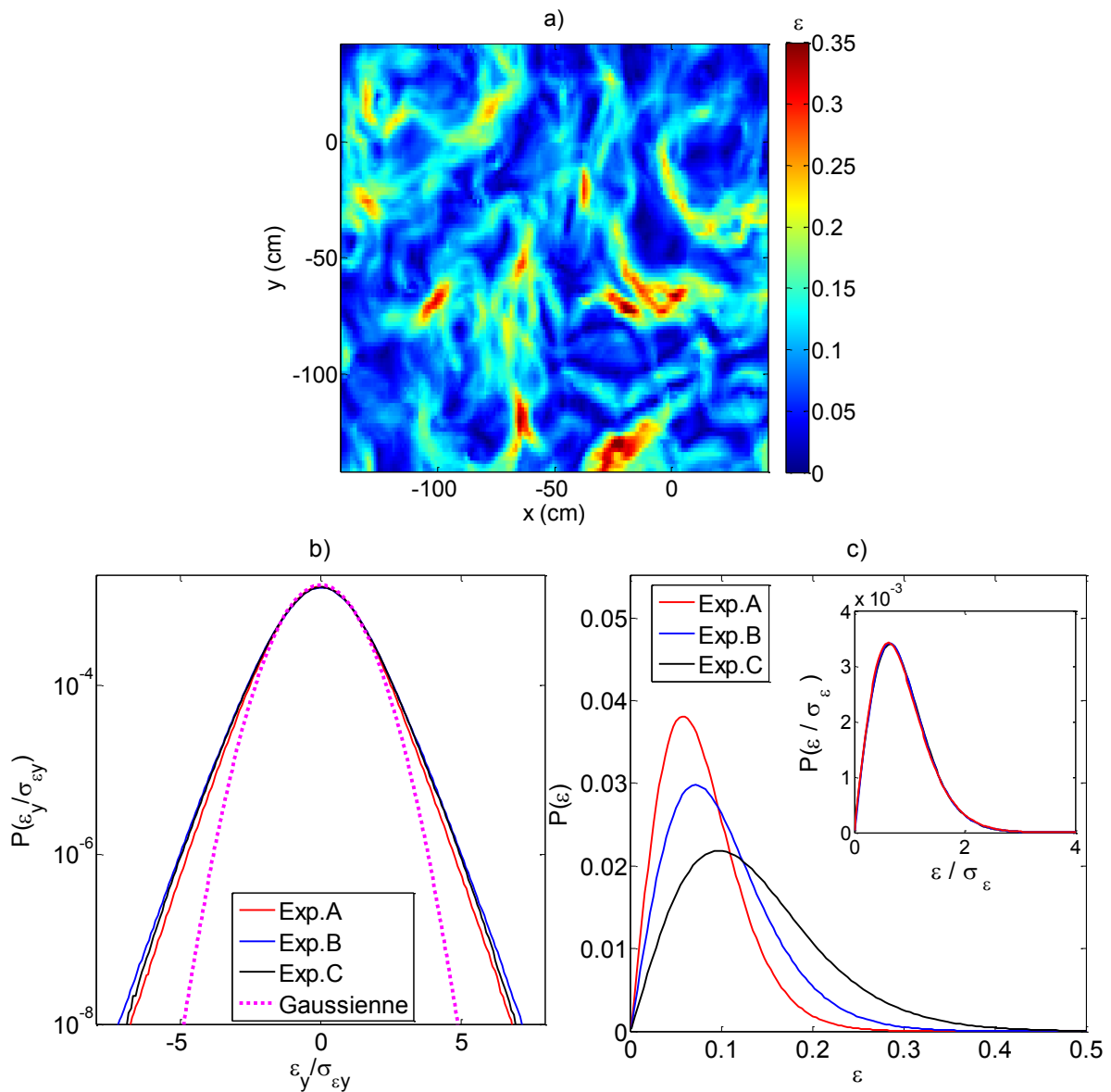


Figure III-24 : a) Instantané du module de la pente ϵ . b) Fonction de probabilité de distribution de la composante ϵ_y normalisée par l'écart type. Une distribution gaussienne est tracée à titre de comparaison c) Fonction de probabilité de distribution du module de la pente pour les quatre expériences (A=rouge, B=bleu, C=noir). La sous-figure retrace les mêmes courbes mais normalisées par l'écart type σ_ϵ .

On retrouve en figure a) un champ d'onde qui semble bien mélangé. La distribution normalisée d'une des deux composantes ϵ_y est tracée sur la figure b). On observe une distribution qui s'écarte significativement d'une loi normale avec des branches proches d'une exponentielle. Pour rappel, le seuil de déferlement local pour une vague propagatrice est d'environ $\epsilon_d \approx 0.5$ [117]. On peut voir que sur la distribution du module de la pente ϵ (figure c)), celui-ci n'est jamais franchi signe que les non-linéarités restent faibles pour nos expériences. Une estimation de la pente typique est faite en calculant l'écart-type σ_ϵ :

$$\sigma_\epsilon = \sqrt{\langle (\sqrt{\epsilon_x^2 + \epsilon_y^2})^2 \rangle - \langle \sqrt{\epsilon_x^2 + \epsilon_y^2} \rangle^2} \quad \text{III-33}$$

Il se trouve que ce calcul donne un résultat équivalent à l'estimation ϵ_p donnée par formulation III-32. Pour l'ensemble des expériences, on a $0.06 \leq \sigma_\epsilon \sim \epsilon_p \leq 0.17$ (voir Tableau 2). La sous figure de la figure c) montre également la distribution normalisée $P(\epsilon/\sigma_\epsilon)$. Celle-ci est équivalente pour les trois expériences, signe d'une forte similitude entre les différents forçages malgré une variation significative de la pente.

III.2.1.3 Vitesse

La stéréo-PIV permet également une mesure de la vitesse de l'interface. La Figure III-25 montre un aperçu du champ complet de vitesse ainsi que la distribution des vitesses verticales.

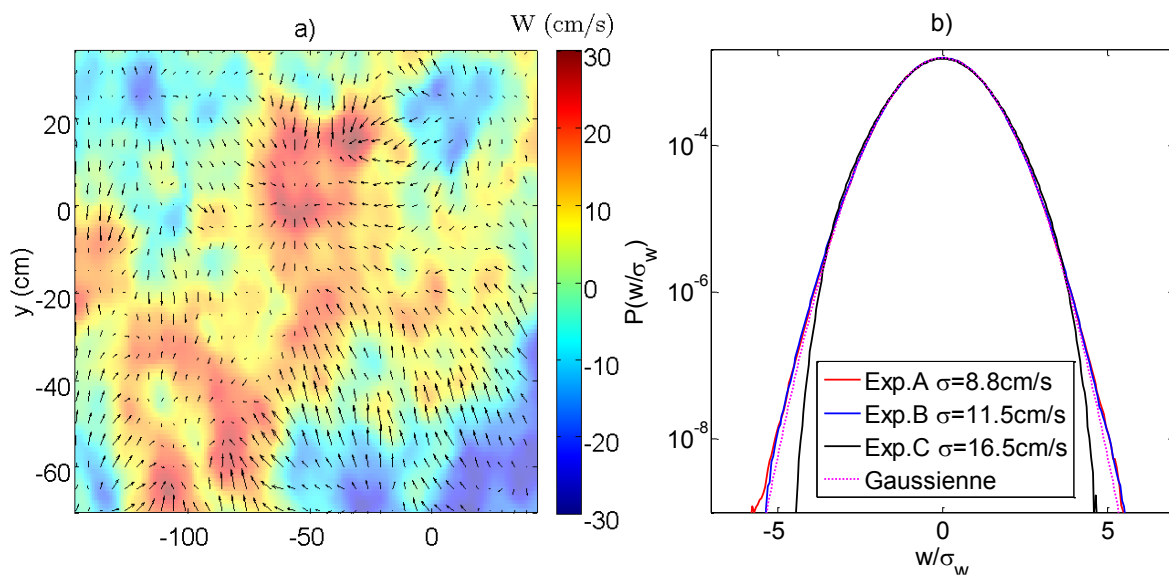


Figure III-25 : a) Champ de vitesse 3D. Les composantes (u, v) sont représentées par les vecteurs, w est codé en couleur. b) Distribution normalisée $P(w/\sigma_w)$ de la vitesse verticale. La distribution gaussienne est également tracée en violet pointillé.

Les distributions suivent bien une gaussienne, excepté pour le forçage le plus fort qui commence à s'en écarter légèrement. Le lien entre la vitesse verticale w mesurée et la dérivée temporelle $\partial\eta/\partial t$ est donnée par la relation suivante :

$$\frac{\partial\eta}{\partial t} = w - \mathbf{u} \cdot \nabla\eta = w - u\epsilon_x - v\epsilon_y \quad \text{III-34}$$

Où $\mathbf{u} \cdot \nabla\eta$ est la composante non-linéaire liée à la pente. Disposant de l'ensemble des composantes, il est possible de regarder l'importance de du terme-non linéaire en fonction de la fréquence. La Figure III-26 montre les cohérences spectrales en fréquences :

$$\begin{aligned} C_\omega^{\dot{\eta}, w} &= \frac{\langle |\dot{\eta}(\omega)^* w(\omega)| \rangle}{\sqrt{\langle |\dot{\eta}(\omega)|^2 \rangle \langle |(w - \mathbf{u} \cdot \nabla\eta)(\omega)|^2 \rangle}} \\ C_\omega^{\dot{\eta}, -\mathbf{u} \cdot \nabla\eta} &= \frac{\langle |\dot{\eta}(\omega)^* (\mathbf{u} \cdot \nabla\eta)(\omega)| \rangle}{\sqrt{\langle |\dot{\eta}(\omega)|^2 \rangle \langle |(w - \mathbf{u} \cdot \nabla\eta)(\omega)|^2 \rangle}} \\ C_\omega^{\dot{\eta}, w - \mathbf{u} \cdot \nabla\eta} &= \frac{\langle |\dot{\eta}(\omega)^* (w - \mathbf{u} \cdot \nabla\eta)(\omega)| \rangle}{\sqrt{\langle |\dot{\eta}(\omega)|^2 \rangle \langle |(w - \mathbf{u} \cdot \nabla\eta)(\omega)|^2 \rangle}} \end{aligned} \quad \text{III-35}$$

Avec $\dot{\eta} = \partial\eta/\partial t$.

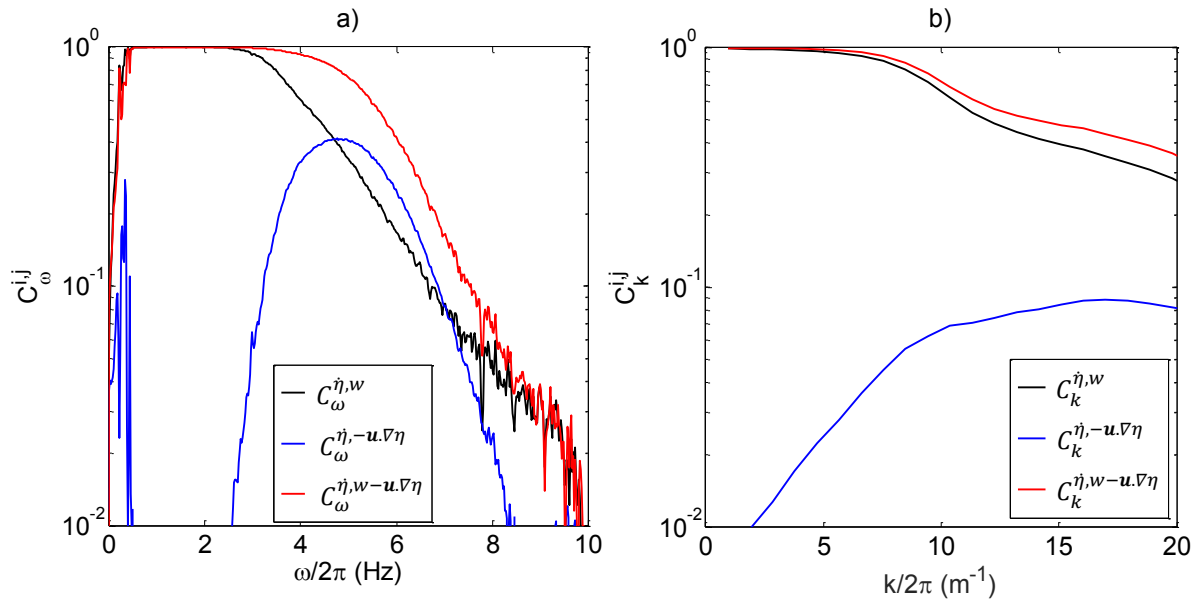


Figure III-26 : a) Logarithme des cohérences normalisées $C_{\omega}^{\dot{\eta},w}$, $C_{\omega}^{\dot{\eta},-u.\nabla\eta}$ et $C_{\omega}^{\dot{\eta},w-u.\nabla\eta}$ pour le forçage intermédiaire (Exp.B). La composante non-linéaire $-u.\nabla\eta$ devient importante à partir d'environ $\omega/2\pi = 3$ Hz et domine jusqu'à que le signal tombe complètement dans le bruit vers $\omega/2\pi = 8$ Hz. b) Idem mais en k pour une direction arbitraire. Logarithme des cohérences normalisées $C_k^{\dot{\eta},w}$, $C_k^{\dot{\eta},-u.\nabla\eta}$ et $C_k^{\dot{\eta},w-u.\nabla\eta}$.

On observe un niveau de cohérence proche de 1 pour $C_{\omega}^{\dot{\eta},w}$ jusqu'aux environs de $\omega/2\pi = 3$ Hz. Cela indique un niveau très faible de non-linéarité pour cette gamme de fréquences et que les deux mesures sont équivalentes. Au-delà, le terme non-linéaire commence à prendre de l'importance jusqu'à aux fréquences complètement dominées par le bruit ($\omega/2\pi \sim 8$ Hz). Cette observation va dans le sens de que l'intensité des non-linéarités augmente avec la fréquence [3]. Cependant il faut également garder à l'esprit que la coupure spatiale de la méthode de mesure tend à favoriser les harmoniques qui pour une fréquence donnée ont un k plus faible. Ces dernières ayant des niveaux de non-linéarités plus forts, il n'est alors pas surprenant d'observer une domination du terme non-linéaire à haute fréquence. Pour s'affranchir de ce problème et obtenir une meilleure estimation de l'intensité du terme non-linéaire, il faut reproduire l'analyse dans l'espace des \mathbf{k} . C'est ce qui est fait dans la figure b) pour une direction arbitraire. On s'aperçoit que la composante non-linéaire atteint un maximum de 10% contre pratiquement 50% pour l'estimation en fréquence. Cette valeur plus réaliste confirme tout de même la croissance des non linéarités lorsque la fréquence augmente.

III.2.1.4 Instabilité de Benjamin-Feir

Un effet non-linéaire classique que l'on cherche à distinguer de la turbulence faible est l'instabilité modulationnelle de Benjamin-Feir. Pour rappel, cette instabilité est une désintégration d'une onde principale en deux ondes voisines au travers d'une interaction à quatre ondes particulière (voir I.1.2.10). La génération de cette instabilité est favorisée par une forte pente ϵ et une faible largeur spectrale. Pour en estimer la probabilité de présence, on calcule l'indice de Benjamin-Feir (BFI) qui a été présenté précédemment (I.1.2.10). Pour l'ensemble des expériences le BFI est compris entre $0.01 \leq BFI \leq 0.06$, ce qui représente des valeurs plutôt faibles. Par comparaison, l'équipe d'Onorato et al. [40] commence à voir des effets dans le cas de spectre 1D pour des valeurs de $BFI > 0.1$. En ajoutant le fait que l'on est dans une configuration 2D et que la génération des vagues est fortement localisée (forte dispersion de l'énergie), cette instabilité ne devrait pas intervenir dans nos expériences.

III.2.1.5 Autres expériences dans la littérature

Tous ces éléments vont dans le sens que les trois expériences semblent être dans un régime équivalent de faibles non-linéarités. Il est intéressant de se situer parmi les principales expériences de laboratoire en turbulence d'onde de gravité ayant un spectre continu et une génération par batteur (pas de vent):

Lieu	Hull [83]	Nantes [87]	Hull [86]	Marintek [41]	Grenoble
Taille bassin (m)	12 × 6 × 1.5	15 × 10 × 1.9	12 × 6 × 1.5	70 × 50 × 3	∅13 × 0.7
ϵ_p	0.16 – 0.5	0.1 – 0.5	0.2 – 0.5	0.13 – 0.16	0.02 – 0.23
confinement	mur	Plage ou mur	mur	plage	mur

Tableau 3 : Résumé des principales expériences de turbulence d'onde de gravité

On remarque rapidement la forte démarcation des expériences dans la cuve de Coriolis qui présentent les niveaux d'intensité les plus faibles. En effet, en faisant l'hypothèse que les distributions des pentes sont équivalentes aux nôtres, une grande partie des expériences rapportées dans ce tableau doivent être confrontées aux déferlements. Ces fortes non-linéarités peuvent également générer l'instabilité de Benjamin-Feir comme le voient Onorato et al. [41] dans le bassin de Marintek.

III.2.2 Analyse spectrale

Une validation directe de la théorie de la turbulence faible est de comparer les spectres de puissance mesurés avec ceux prédit par Zakharov. Cette partie va traiter en détail les spectres obtenus à partir des sondes capacitatives ainsi que de la stéréo-PIV. Après avoir mis en lumière les effets de la pollution de l'eau, les valeurs seront comparées aux expériences existantes (voir Tableau 3).

III.2.2.1 Pollution de l'eau

Comme il a été vu précédemment avec les ondes gravito-capillaires, la surface libre est très sensible à la présence d'un film viscoélastique en sa surface. Celui-ci provoque une forte dissipation aux environs de $\omega/2\pi \sim 3\text{Hz}$ qui est causée par une résonance entre les ondes de Marangoni présentes dans le film et les ondes de surface. Une première série de mesures a été réalisée sans prendre de précautions à ce sujet. La Figure III-27 trace le spectre de puissance $E^\eta(\omega)$ provenant des sondes capacitatives dans cette configuration qualifiée par la suite d'eau « sale ».

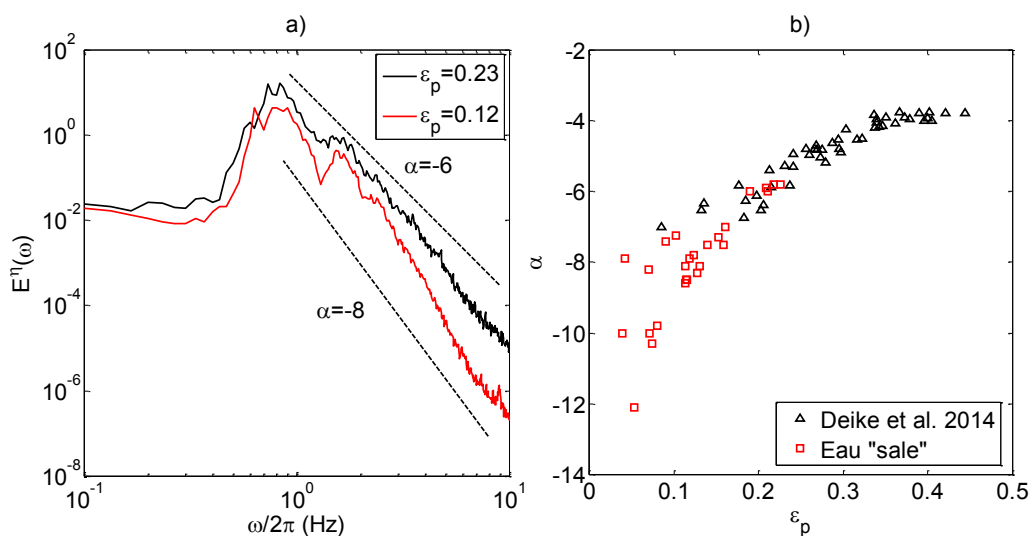


Figure III-27 : a) Spectre de puissance $E^\eta(\omega)$ pour deux intensités de forçage dans des conditions d'eau « sale ». L'exposant α de la pente varie entre environ -6 et -8. b) Courbe de dépendance de α en fonction de l'intensité du forçage. Les mesures rapportées par Deike et al. [87] sont tracées en noir. Mesures locales effectuées à partir des sondes capacitatives.

L'exposant de la pente α est obtenu en réalisant une régression linéaire du spectre en échelle logarithmique. Le domaine fréquentiel où celle-ci est réalisée varie entre $[2 - 5]\text{Hz}$ et $[2 - 10]\text{Hz}$ en fonction de l'intensité du forçage. Pour les très faibles intensités, la régression linéaire devient difficile à réaliser du fait de la chute rapide de l'énergie et de la présence de pics dans le spectre. Les valeurs de α sont donc entachées d'une forte erreur et doivent être prises uniquement comme une indication. Dans cette série réalisée en eau « sale » l'exposant varie entre $-12 < \alpha < -6$. Comme on peut le voir dans la figure b), ces mesures semblent bien prolonger celles réalisées par Deike et al. [87] dans le bassin de Nantes. A noter que les mesures stoppent aux alentours de $\epsilon_p \approx 0.23$, au moment où le déferlement commence à apparaître.

Il a été également remarqué que dans cette situation, l'ajout d'une grande quantité de surfactant en surface (ou d'un corps gras) était sans effet sur l'exposant α des spectres de puissances. Les conséquences étant dramatiques pour les expériences sur les ondes gravito-capillaire, il a été conclu que la surface était probablement déjà « sale » avec la présence d'un important film viscoélastique qui induit une dissipation proche d'un niveau de saturation. Un système de filtration a été implémenté (III.1.1.2) pour essayer d'en réduire les effets. La Figure III-28 permet d'en visualiser le résultat.

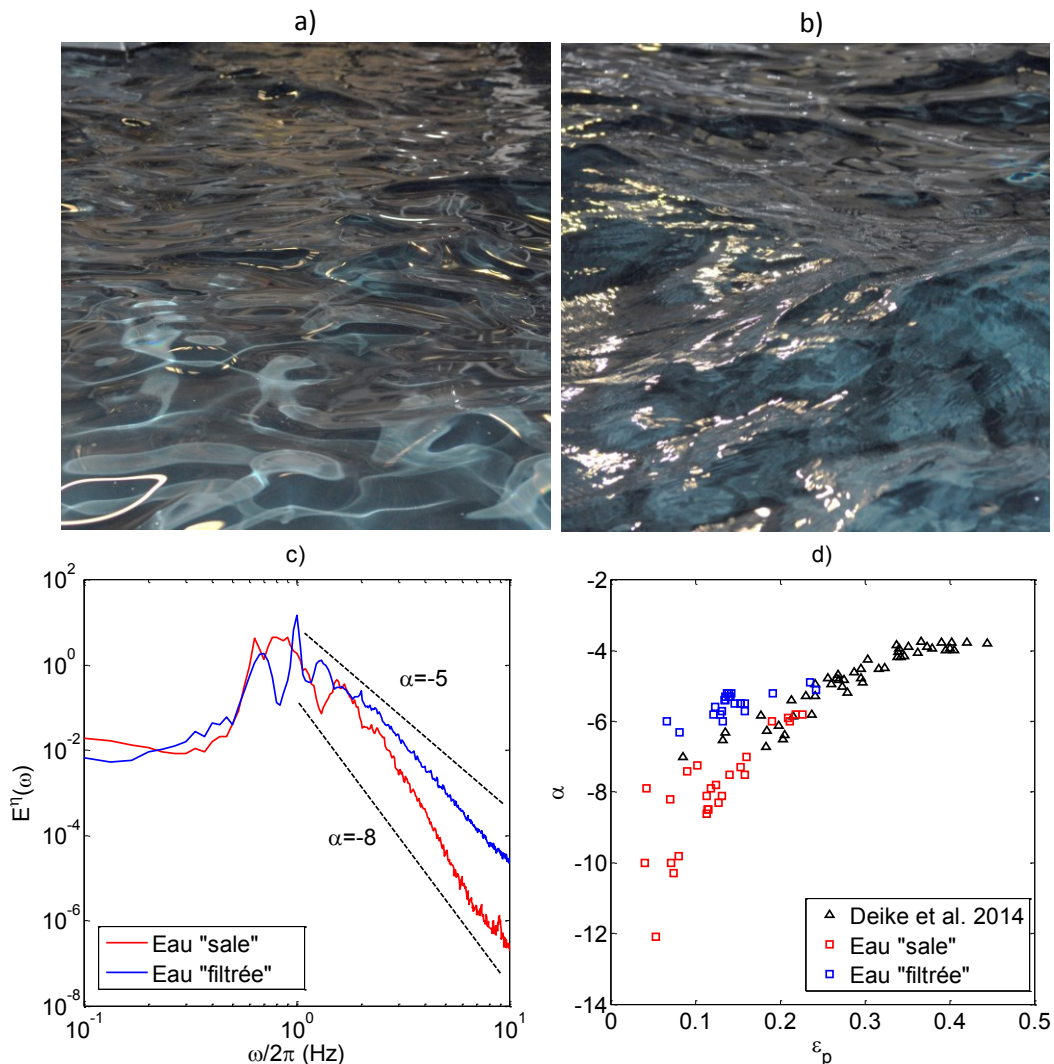


Figure III-28 : a) Photo de la surface avant la filtration. b) Photo de la surface après la filtration. c) Comparaison de deux spectres issus des sondes capacitives ayant un forçage similaire : en rouge avant la filtration, en bleu : après filtration. d) Répartition de l'exposant α en fonction de l'intensité du forçage. En rouge, les mesures en eau « sale », en bleu avec filtration. Les mesures rapportées par Deike et al. [87] sont tracées en noir.

Les deux photos de la surface sur la figure a) et b) permettent d'observer qualitativement le phénomène. Une fois la filtration effectuée, l'aspect de la surface change significativement avec l'apparition d'ondes capillaires. La figure c) permet d'en évaluer quantitativement l'effet : pour deux forçages montrant un niveau de non-linéarité ϵ_p équivalent, l'exposant α passe d'environ -8 à -5.5 . La sensibilité de l'exposant α selon l'amplitude du forçage est donc modifiée comme on peut le voir sur la figure d). Les mesures réalisées en eau filtrée se démarquent nettement et soulignent l'importance du phénomène.

L'étape suivante est de se questionner sur l'efficacité du système de filtration. En d'autres termes, un filtrage plus efficace va-t-il permettre d'atteindre l'exposant théorique prédit par Zakharov ($\alpha = -4$) ? Ou le système est-il déjà débarrassé de toute pollution et c'est un autre phénomène qui provoque le raidissement du spectre, comme par exemple la taille finie de la cuve [32] ? Un début de réponse peut être apporté par l'observation de la variation temporelle de α après une filtration. La Figure III-29 permet de visualiser son évolution sur une période d'environ 4h.

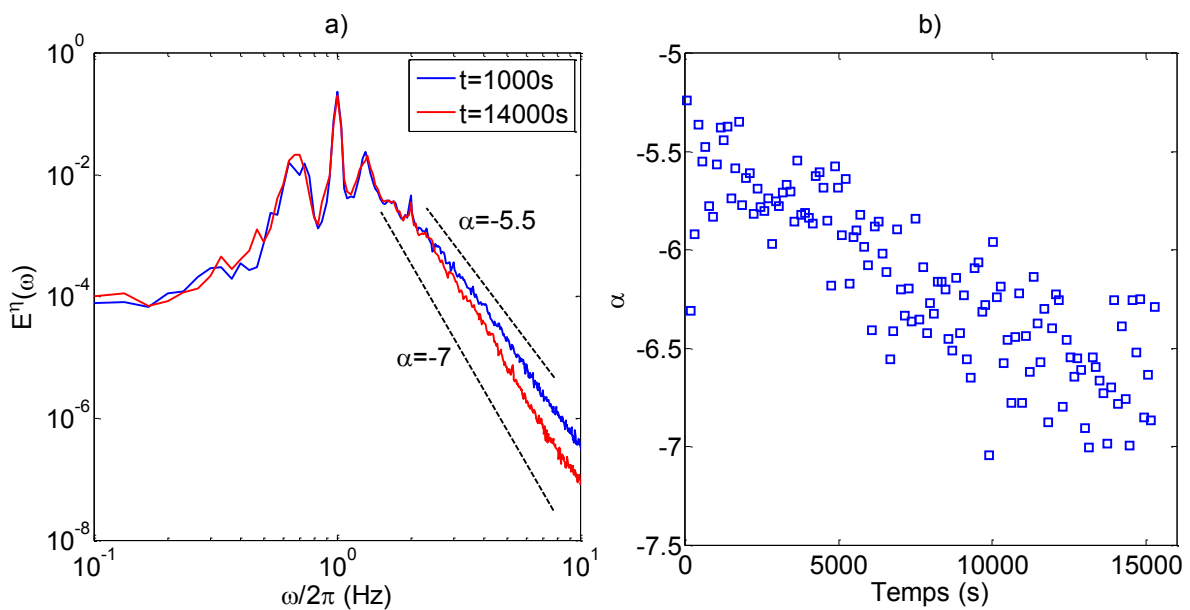


Figure III-29 : a) Evolution temporelle du spectre de puissance après la filtration. b) Evolution de l'exposant du spectre α en fonction du temps après le filtrage. Mesures locales effectuées à partir des sondes capacitatives.

On observe une augmentation notable de la raideur du spectre, signe de la présence d'une source de pollution présente continuellement pendant l'expérience. La figure b) permet une estimation de l'évolution de l'exposant $\alpha(t)$. On note une diminution d'environ 0.5 par heure et qui s'amorce immédiatement après l'arrêt de la filtration. Cette observation va dans le sens que le filtre ne permet pas un nettoyage complet de la surface. Le flux évacué est naturellement limité par la taille du skimmer qui est relativement petite devant la surface de la cuve ($\sim 0.5\%$). Il y a alors un équilibre qui est atteint entre la source et la filtration, correspondant à un exposant $\alpha \approx -5.5$. On peut alors proposer l'hypothèse qu'une filtration plus efficace permettra encore de se rapprocher de la valeur théorique. Un autre indice qui va dans ce sens est visible lorsqu'on regarde plus attentivement la forme du spectre, peu de temps après l'arrêt de filtration (Figure III-30).

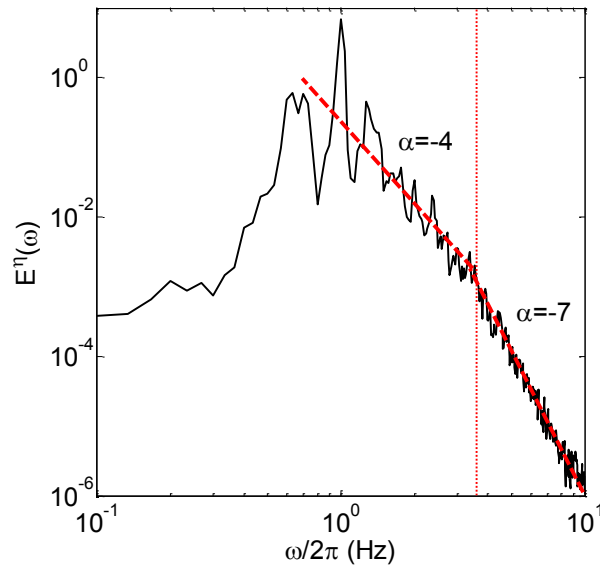


Figure III-30 : Spectre de puissance $E^\eta(\omega)$ peu de temps après l'arrêt de la filtration. Deux régimes sont visibles. La ligne pointillée rouge verticale représente le maximum de dissipation des ondes de Marangoni présent pour $\omega/2\pi \sim 3.5\text{Hz}$. Mesures locales effectuées à partir des sondes capacitives.

Deux régimes sont clairement présents : un premier qui semble être proche de $\alpha = -4$ et qui se termine aux alentours de $\omega/2\pi = 3\text{Hz}$. Le second est beaucoup plus raide avec un exposant proche de $\alpha = -7$. On retrouve la valeur de $\alpha = -5.5$ en prenant la moyenne des deux, signe que la régression linéaire effectuée précédemment n'est pas vraiment représentative de la réalité (elle permet néanmoins une bonne estimation). Il est remarquable que la transition entre les deux régimes se produise au pic de dissipation induit par les ondes de Marangoni à $\omega/2\pi \sim 3.5\text{Hz}$ [103]. Cela confirme leur présence malgré les efforts de filtration. Au fur et à mesure de l'épaississement du film, la dissipation autour de cette fréquence augmente et raidit l'ensemble du spectre. Seules les très basses fréquences restent alors épargnées et montrent un exposant proche de celui de Zakharov.

Malgré la filtration, la zone mesurable de l'exposant en fréquence demeure trop réduite pour permettre une conclusion solide. Cette zone peut être étendue de deux manières : en améliorant l'efficacité de la filtration ou en forçant à plus basse fréquence. Néanmoins ces deux solutions souffrent de limitations techniques plutôt fortes et sont intrinsèquement contradictoires. En effet une surface plus grande est nécessaire pour un forçage à plus basse fréquence afin de limiter la discrétisation. Mais dans le même temps, il devient également beaucoup plus difficile d'éviter la contamination pour de grandes dimensions. De plus, la baisse de la fréquence de forçage est très limitée par la relation de dispersion des ondes qui impose rapidement des tailles de bassin inaccessibles en laboratoire. Une petite aide est cependant apportée par la relation de dispersion des ondes de gravité. Du fait de sa courbure négative, la zone épargnée par la pollution est beaucoup plus grande dans l'espace des \mathbf{k} que des ω . Ainsi, une mesure du spectre d'énergie en \mathbf{k} permettrait de valider l'exposant théorique de façon un peu plus robuste.

L'évaluation du spectre d'énergie en espace est possible grâce à la mesure de stéréo-PIV. Cependant, avant de mettre en place cette dernière, il est important de vérifier si l'ajout de particules à la surface nécessaire pour les étapes de corrélations ne va pas entraîner une dissipation supplémentaire. La Figure III-31 permet de se convaincre que ce n'est pas le cas.

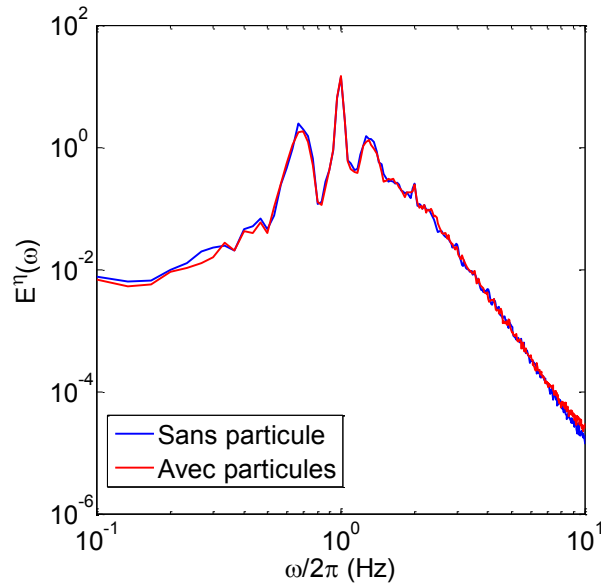


Figure III-31 : Effet de l'ajout des particules sur le spectre de puissance. Ces dernières n'altèrent pas la surface dans notre gamme de fréquences. Mesures locales effectuées à partir des sondes capacitives.

Les particules ont été soigneusement nettoyées avant l'insémination. Leur taille réduite et leur faible concentration permettent ainsi d'éviter une dissipation supplémentaire dans la gamme de mesure.

III.2.3 Spectres spatio-temporels

Cette partie va traiter des spectres spatio-temporels obtenus avec la méthode stéréo-PIV. Avant-toute chose il est toujours agréable de vérifier l'accord de cette méthode avec les sondes capacitives. La Figure III-32 permet une comparaison entre le spectre de puissance obtenue avec les sondes et celui à partir de la stéréo-PIV.

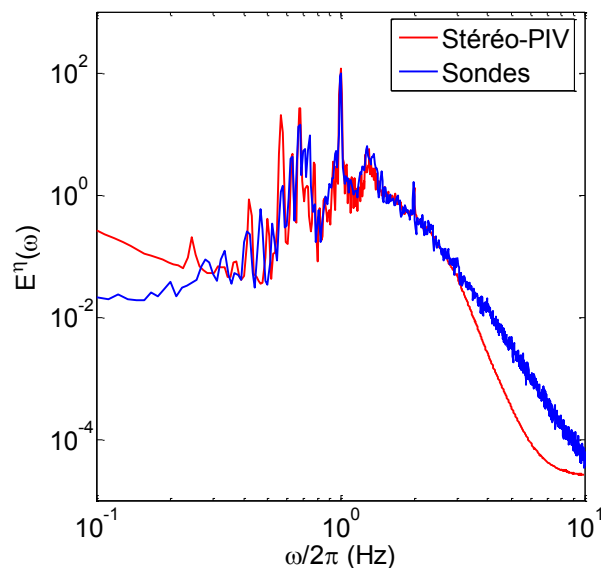


Figure III-32 : Spectres de puissances mesurées avec les sondes (courbe bleue) et avec la méthode optique (courbe rouge). La concordance est bonne jusqu'à environ 3Hz.

On observe une bonne concordance des deux mesures dans l'intervalle $[0.3,3]$ Hz. La limite des $\omega/2\pi = 3$ Hz est similaire à celle observée lors des tests de la méthode effectuée avec de fausses images, signe de la limite spatiale de la mesure (III.1.2.3).

Les spectres spatio-temporels sont obtenus en calculant la transformée de Fourier spatiale et temporelle du champ de vitesse verticale $E^w(\mathbf{k}, \omega) = \langle |w(\mathbf{k}, \omega)|^2 \rangle$. Où $\langle \dots \rangle$ correspond à une moyenne sur les différentes fenêtres temporelles utilisées pour le calcul de la transformée de Fourier de w . Cette dernière a été réalisée avec une fenêtre temporelle d'environ 100s et d'une fenêtre spatiale recouvrant l'ensemble de l'image. Dans l'objectif d'avoir une image plus simple à comprendre, une intégration angulaire est faite pour réduire les dimensions. On obtient alors $E^w(k, \omega)$. Celui-ci est visible sur la Figure III-33 pour le forçage intermédiaire ($\epsilon_p = 0.11$).

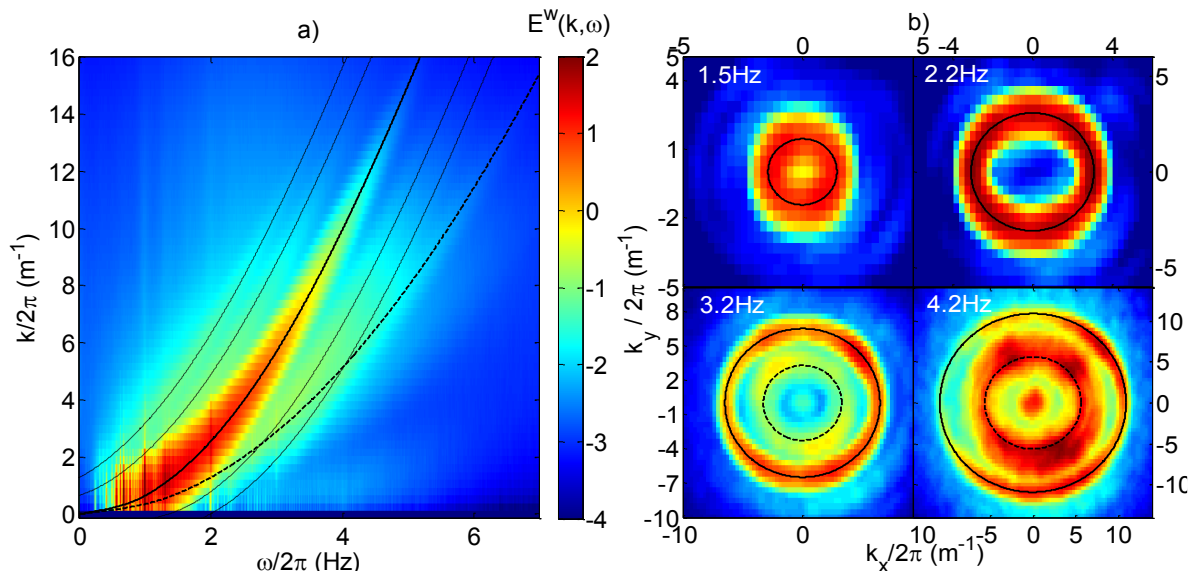


Figure III-33 : a) Spectre de puissance de la vitesse verticale intégré sur la direction de \mathbf{k} $E^w(k, \omega)$ pour une pente typique $\epsilon_p = 0.11$ (Exp.B). L'échelle de couleur est logarithmique. La ligne noire est la relation de dispersion linéaire des ondes gravito-capillaires. La ligne pointillée serrée est la première harmonique. Les quatre lignes fines représentent un décalage de la relation de dispersion de $\omega = \omega \pm \omega_p$ et $k = k \pm k_p$ où l'indice «p» identifie les pics principaux du spectre. b) Coupes de $E^w(\mathbf{k}, \omega)$ avec $\omega/2\pi = [1.5, 2.2, 3.2, 4.2]$ Hz. La relation de dispersion et la première harmonique sont tracées en noir et pointillés noirs.

On observe une forte concentration d'énergie le long de la relation de dispersion. Comme on peut le voir avec les coupes fréquentielles en b), celle-ci est également bien distribuée en espace, assurant un spectre isotrope jusqu'à environ $\omega/2\pi = 3$ Hz. D'autres branches sont également visibles : on peut apercevoir la première harmonique mais avec un niveau d'énergie plus bas d'au moins un ordre de grandeur pour un k fixé. On note également deux paires de branches identifiées par les quatre fines lignes noires. Celles-ci sont centrées sur la relation de dispersion linéaire (ω_l, k_l) et semblent suivre une relation de dispersion du type $\omega = \omega_l \pm \omega_p$ et $k = k_l \pm k_p$, où l'indice «p» identifie les pics principaux du spectre. Pour le moment leurs origines ne sont pas réellement comprises. Un effet non-linéaire lié à la mesure n'est pas à exclure. Car si les étapes de corrélation et de reconstruction ont pu être validées avec les fausses images, il n'en est pas de même avec la calibration. On peut également imaginer un biais causé par les particules qui ne suivent pas parfaitement le fluide.

L'étalement de l'énergie autour de la relation de dispersion permet une estimation de l'intensité des non-linéarités. La Figure III-34 en montre une estimation obtenue à partir de fit gaussien local sur la branche linéaire.

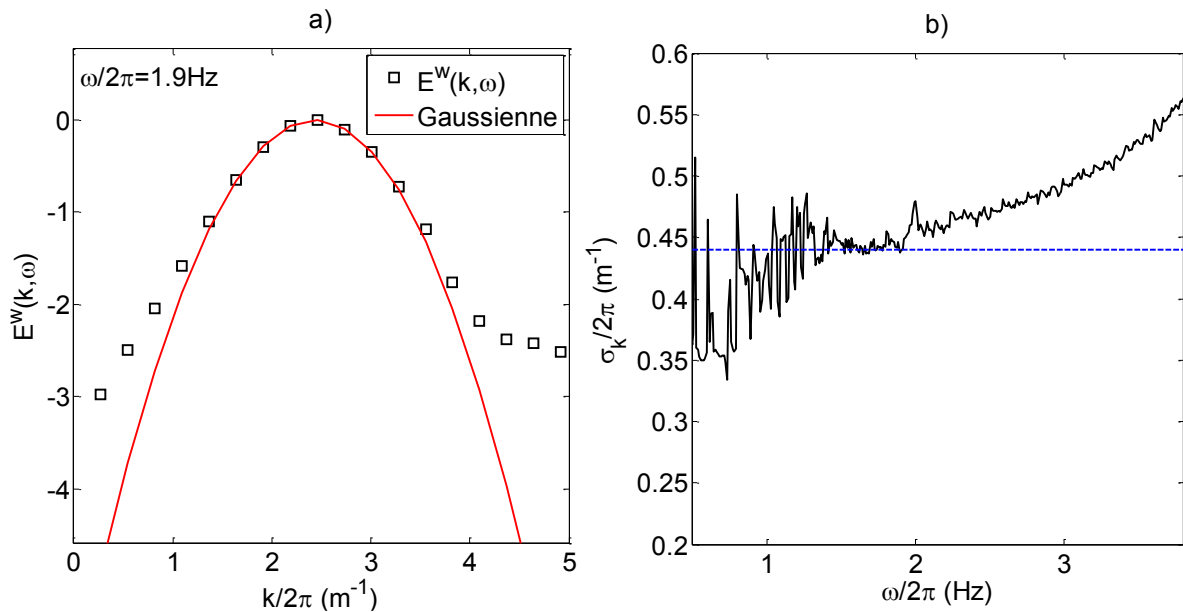


Figure III-34 : a) Exemple de fit gaussien sur une coupe du spectre $E^w(k, \omega)$ pour $\omega/2\pi = 1.9$ Hz. b) Evolution de l'écart type de la gaussienne σ_k en fonction de la fréquence. La ligne bleue représente l'élargissement σ_k minimum imposée par la résolution de la mesure.

Jusqu'à une fréquence de environ $\omega/2\pi = 2$ Hz, l'écart type de la gaussienne σ_k de la relation de dispersion linéaire est limité par la résolution de la mesure. On remarque une faible croissance à plus haute fréquence qui est probablement liée à la multitude de branches dans le spectre. Cette estimation de la largeur sera utilisée par la suite pour estimer les probabilités d'existence des quasi-résonances.

La Figure III-35 montre les spectres d'énergie $E^w(\mathbf{k}, \omega)$ correspondant aux expériences A et C. Au plus faible forçage (figure a) et b)), l'énergie est moins bien distribuée. Elle est principalement alignée sur la direction des batteurs et autres obstacles générant des vagues parasites, comme par exemple le skimmer utilisé pour la filtration. Le plus fort forçage (figure c) et d)) se démarque par la forte intensité du pic de forçage à 1Hz, ainsi que la présence plus prononcée de deux branches parallèles qui sont de part et d'autre la relation de dispersion. Comme on peut le voir sur la coupe à $\omega/2\pi = 4.2$ Hz, celles-ci demeurent fortement isotropes au contraire de la branche linéaire.

L'ensemble des trois forçages présentés sont finalement très proches. L'intensité des différentes branches reste toujours nettement inférieure à la composante linéaire dans les limites de la mesure. Cet aspect semble confirmer le caractère faiblement non-linéaire du système, indispensable à la théorie de Zakharov.

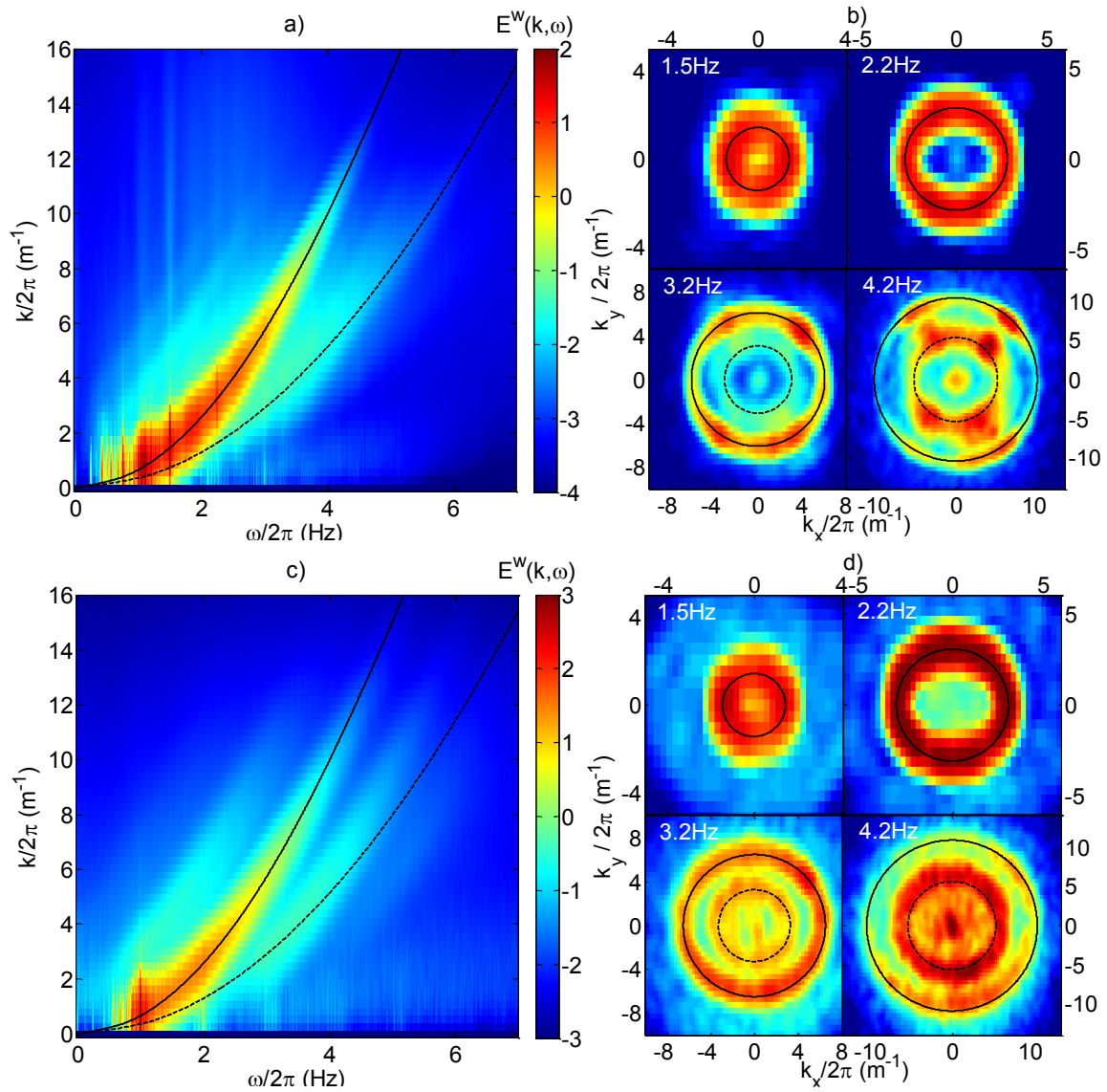


Figure III-35 : a) et b) : Spectre de puissance $E^w(\mathbf{k}, \omega)$ correspondant à l'expérience A. c) et d) : Spectre de puissance $E^w(\mathbf{k}, \omega)$ correspondant à l'expérience C. La relation de dispersion linéaire est tracée en noir. La première harmonique est tracée en pointillé noir.

III.2.3.1 Cascade en k et ω

Le spectre complet étant connu, il est désormais possible de regarder l'exposant β de la cascade en k . Le spectre en k est obtenu en intégrant $E^w(k, \omega)$ sur $0 < \omega < 10 \text{ Hz}$. La Figure III-36 affiche les spectres en ω et en k correspondant aux trois expériences.

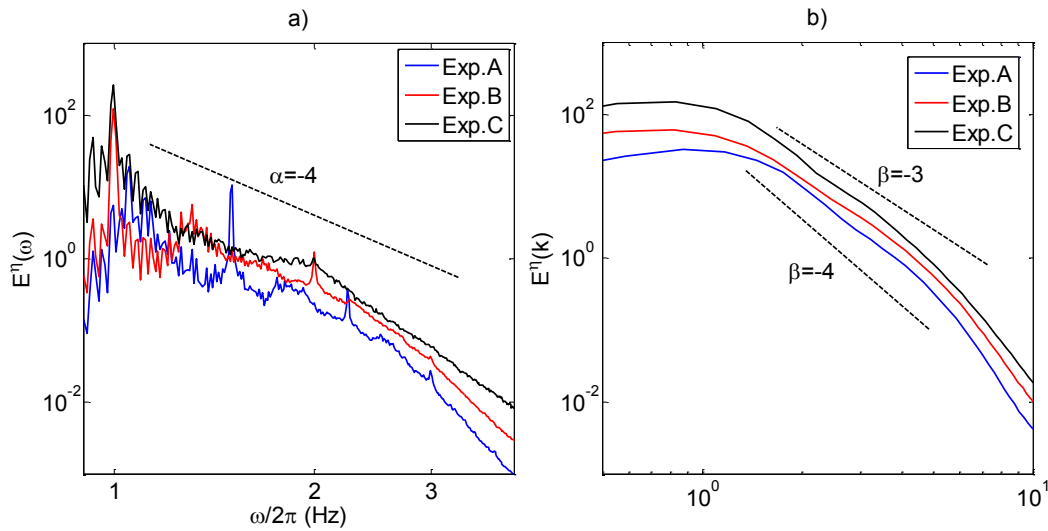


Figure III-36 : a) Spectres de puissance en fréquence $E^\eta(\omega)$ obtenus par intégration en k du spectre complet $E^\eta(k, \omega)$. b) Spectres de puissance en espace $E^\eta(k)$, obtenus par intégration en ω du spectre complet $E^\eta(k, \omega)$. Les lignes pointillées donnent un ordre de grandeur pour l'exposant de la cascade dans le régime non affecté par la pollution de surface.

La figure a) est similaire aux spectres présentés précédemment. On devine une coupure qui prend effet vers les $\omega/2\pi = 2.5 \text{ Hz}$ due aux effets combinés du filtrage spatial et de la pollution de l'eau. La nature du spectre rend hasardeuse le calcul de l'exposant α en fréquence. Celui-ci sera tout de même réalisé à titre d'indication dans la gamme $[1, 2.5] \text{ Hz}$. Les spectres en k visibles en b) montrent un régime en loi de puissance sur une plage plus grande : environ $k/2\pi \sim [1, 6] \text{ m}^{-1}$. Dans cette zone, l'exposant du spectre se situe aux alentours de $\beta \approx 3.5$. Il est intéressant de comparer ces avec celles effectuées par Nazarenko et al. [86] dans le bassin de Hull. La Figure III-37 compile l'ensemble des résultats dans l'espace (α, β) .

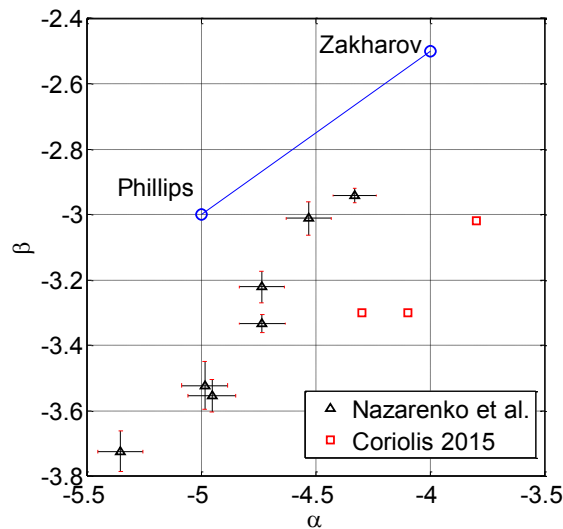


Figure III-37 : Comparaison des exposants α, β pour les expériences A, B et C (Coriolis 2015) avec les valeurs rapportées par Nazarenko et al. [86].

Compte tenu de la différence de forçage entre les deux séries ($\epsilon_p = [0.2, 0.5]$ pour Nazarenko et al.), les mesures présentées ici se démarquent notablement. Néanmoins, contrairement à β , la mesure de l'exposant α souffre d'une grande incertitude provoquée en grande partie par la présence de pics significatifs dans le spectre. Il est alors difficile de conclure sur ces valeurs. Elle montre tout de même que la zone de mesure faiblement affectée par la pollution ($\omega/2\pi < 3\text{Hz}$) de la surface semble se rapprocher de l'exposant théorique prédit par Zakharov. On note également que les exposants ne sont pas liés par la relation de dispersion (ligne bleue). Cela peut sembler contradictoire à la vue du spectre spatio-temporel qui montre que l'essentiel de l'énergie est concentré sur la relation de dispersion linéaire. En regardant de plus près, on s'aperçoit que les pics d'énergie du forçage à $\omega/2\pi = [1, 2]\text{Hz}$ sont très larges en k . Cela affecte la cascade en la raidissant. Il est alors probable que l'exposant se rapproche de $\beta = -2.5$ sans ces pics prononcés mais cela reste impossible à confirmer avec ces données...

III.2.3.2 Stationnarité

La mesure spatiale permet d'avoir un aperçu de la stationnarité du système en regardant l'évolution temporelle des composantes de Fourier $E^W(k_x, k_y)$. La Figure III-38 montre cette évolution pour quatre k de l'expérience B.

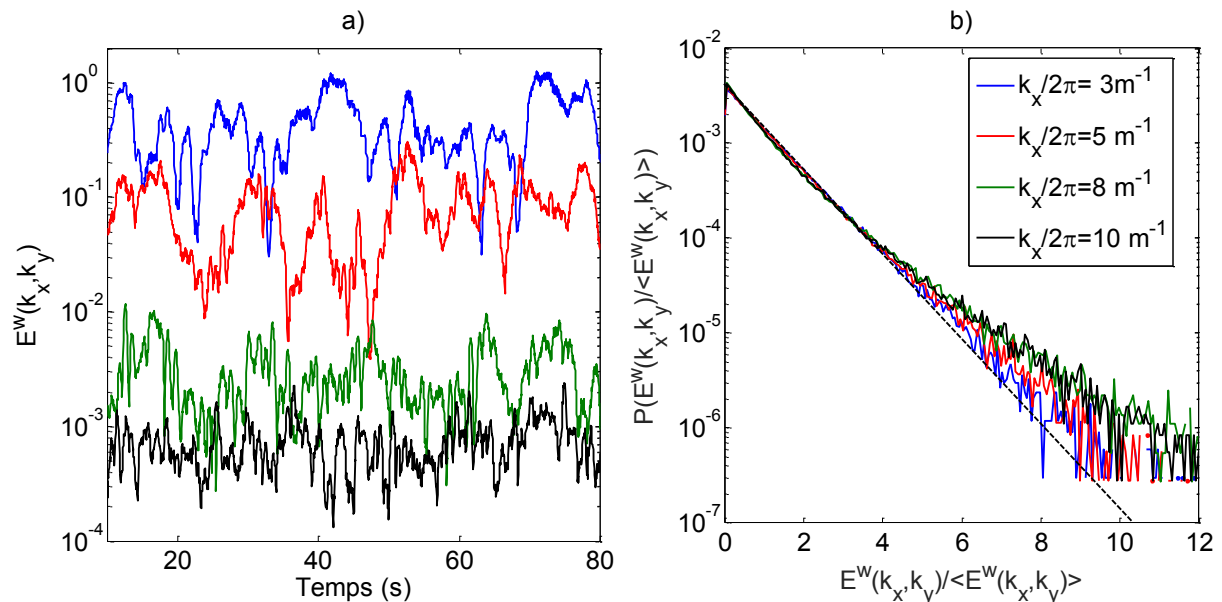


Figure III-38 : a) Evolution temporelle de $E^W(k_x, k_y)$ pour $k_x/2\pi = [3, 5, 8, 10]$ et $k_y/2\pi = 0$ (respectivement la courbe bleue, rouge, verte et noire), dans le cas du forçage intermédiaire de l'expérience B. Les valeurs ont été filtrées temporellement pour éliminer les oscillations rapides. b) Probabilité de densité des amplitudes des Fourier correspondante. La ligne pointillée noire représente une distribution exponentielle.

On observe un régime stationnaire différent que celui rapporté par Nazarenko et al. [85] dans le bassin du Hull. Ces derniers observent un continuum d'énergie avec la présence de pics localisés issus du déferlement. La figure a), quant à elle, présente des variations de plus faible amplitude et plus homogène à hautes fréquences. Les distributions normalisées en figure b) montrent un écart sensible à une exponentielle (ligne pointillée noire) qui se creuse à mesure que le nombre d'onde augmente. Ce point indique que les non-linéarités sont plus fortes à haute fréquence comme le prévoit la théorie [3]. Cette observation confirme également l'analyse préliminaire effectuée sur l'intensité du terme non-linéaire $-\mathbf{u}\nabla\eta$ (voir partie III.2.1.3, Figure III-26).

III.2.3.3 Régime transitoire

De nombreuses informations peuvent être extraites de l'étude des régimes transitoires. Bien que ce ne soit pas l'objet de cette étude, une mesure très approximative du temps non-linéaire cinétique peut être effectuée en regardant le temps nécessaire pour atteindre le régime stationnaire. En prenant comme hypothèse que les interactions à 4-ondes dominant, le temps cinétique peut être estimé comme suit : [85]

$$t_c \approx \frac{g^4}{\omega^9 A_p^4} \quad \text{III-36}$$

Ce temps caractéristique est très sensible en la valeur l'amplitude du mode principal A_p , il est alors impossible d'en extraire une valeur précise. Pour une expérience réalisée en eau propre et sans particules, $A_p \approx 6\text{cm}$ et $\omega \approx 2\pi$. On obtient alors un temps caractéristique $t_c \approx 50\text{s}$. ($t_c \approx 100\text{s}$ Pour $A_p = 5\text{cm}$). La Figure III-39 trace l'évolution locale et spectrale de $\eta(t)$ au début de la mise en route des batteurs.

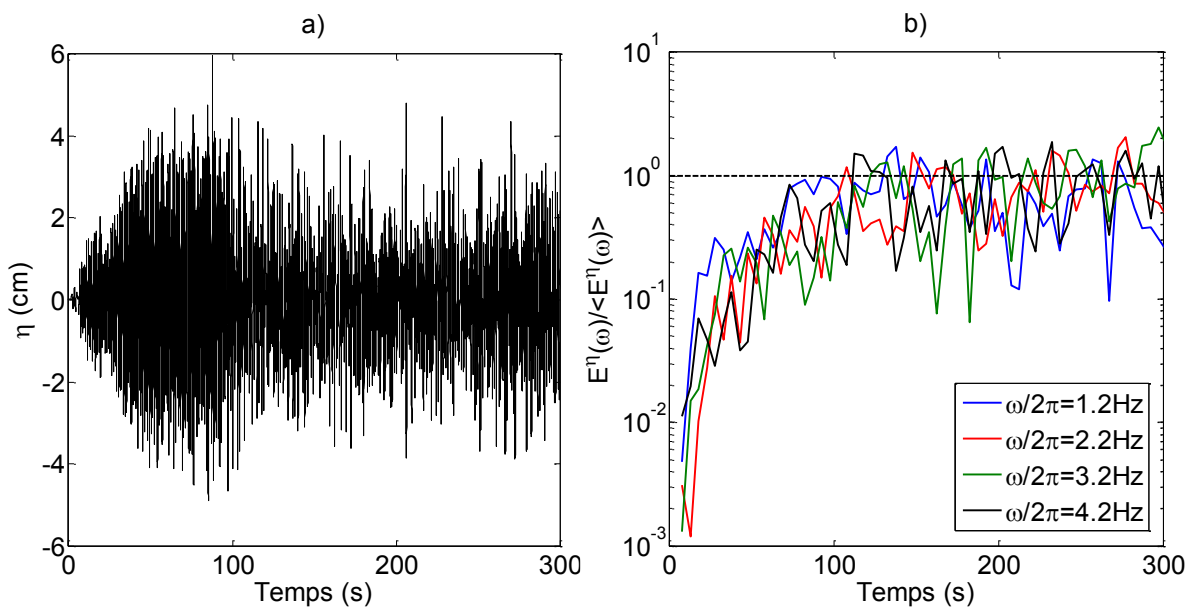


Figure III-39 : a) Evolution temporelle de $\eta(t)$ à la mise en route des batteurs. Un changement de régime est observé vers $t = 150\text{s}$. b) Evolution temporelle du spectre normalisé pour quatre fréquences définies. La ligne pointillée représente l'état stationnaire qui est atteint simultanément aux alentours de $t = 150\text{s}$.

Une transition vers le régime stationnaire pour l'ensemble du spectre est clairement observée aux alentours de 150s . Bien que légèrement supérieur à l'estimation de t_c , il en demeure néanmoins compatible. En effet, la valeur de $A_p = 4\sigma_\eta = 6\text{cm}$ semble un peu exagéré dans cette situation, sous-estimant ainsi t_c . Cette observation semble en accord avec les mesures rapportées par Nazarenko et al [85].

L'ensemble des informations issues des spectres semblent montrer de nombreux éléments allant dans la direction de la théorie de Zakharov. Cependant, l'analyse spectrale ne permet pas de valider solidement cette dernière. Cela est essentiellement dû aux effets de pollutions de surface qui induisent une forte dissipation sur une large gamme de fréquences et rendent difficile l'exploitation des exposants (voir par exemple [101,102]). Cet obstacle étant difficilement surmontable pour des expériences à grandes échelles, une autre solution pour tester la théorie consiste à observer directement les interactions résonantes qui sont au cœur de la turbulence faible.

III.3 Interactions résonantes

Similairement aux ondes gravito-capillaires présentées dans la partie précédente, une étude statistique est réalisée pour observer la présence d'interactions résonantes. Bien que les ondes de gravité soient supposées n'interagir qu'au travers d'interactions à 4-ondes, une étude d'ordre 3 sera également réalisée pour observer l'éventuelle présence de quasi-résonances.

III.3.1 Solutions théoriques

Avant de réaliser l'étude statistique, il est bon d'avoir une idée des solutions résonantes et quasi-résonantes. Celles-ci peuvent être obtenues facilement par résolution géométrique. Il faut tout de même garder à l'esprit que la présence de solutions ne garantit pas la présence d'interactions. En effet, pour qu'elles aient lieu, il faut que la valeur du coefficient d'interaction V_{k_1, \dots, k_N} soit non nulle. Du fait de sa complexité, ce dernier ne sera pas abordé. Seuls les couples géométriquement autorisés seront présentés afin de mieux comprendre les résultats des calculs de corrélations présentés par la suite.

III.3.1.1 Interactions à 3-ondes

Comme vu précédemment avec les ondes gravito-capillaires, les interactions à 3-ondes exactes sont limitées à des interactions fortement non locales pour les ondes de gravité. La gamme de fréquences effective pour la branche linéaire étant d'environ $1 < \omega/2\pi < 3\text{Hz}$, leur présence est alors impossible. Il reste néanmoins les solutions approchées qui suivent pour rappel l'équation suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_1 &= \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 + \delta\mathbf{k} \\ \omega_1 &= \omega_2 + \omega_3 \end{aligned} \quad \text{III-37}$$

Où $\delta\mathbf{k}$ est une estimation de la non-linéarité, exprimée à partir de l'élargissement de l'énergie autour de la relation de dispersion. Une valeur constante $\delta k/2\pi = 0.5\text{m}^{-1}$ est utilisée en cohérence avec l'extraction de la largeur du spectre visible sur la Figure III-34. A partir de cette estimation, il est possible de prédire où seront localisées les quasi-résonances. Pour plus de simplicité l'analyse est faite en 1D. C'est dans cette configuration que l'écart entre la relation de dispersion $\omega_2(k_2)$ et $\omega_3(k_3)$, est le plus faible et donc le plus propice aux quasi-résonances. La Figure III-40 permet de visualiser les solutions théoriques à partir de l'estimation de δk . Comme on peut le voir, la faible non-linéarité du système ne permet pas beaucoup de solutions quasi-résonantes. Celles-ci sont confinées à basse fréquence, là où le spectre devient discret dû au confinement de la cuve. La carte de la distance $\Delta k = |k_2 - k_3|$ en figure b) permettra de valider la présence ou non de ces quasi-résonances lors des calculs des corrélations.

Les spectres de puissance comportent également plusieurs branches qui sont susceptibles d'interagir entre elles. Par exemple, il est possible de trouver des solutions exactes entre les branches harmoniques et linéaires. Celles-ci répondent au système suivant :

$$\begin{aligned} 2\mathbf{k}_1 &= \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 \\ 2\omega_1 &= \omega_2 + \omega_3 \end{aligned} \quad \text{III-38}$$

La Figure III-41 permet d'en visualiser les solutions en 1D et en 2D.

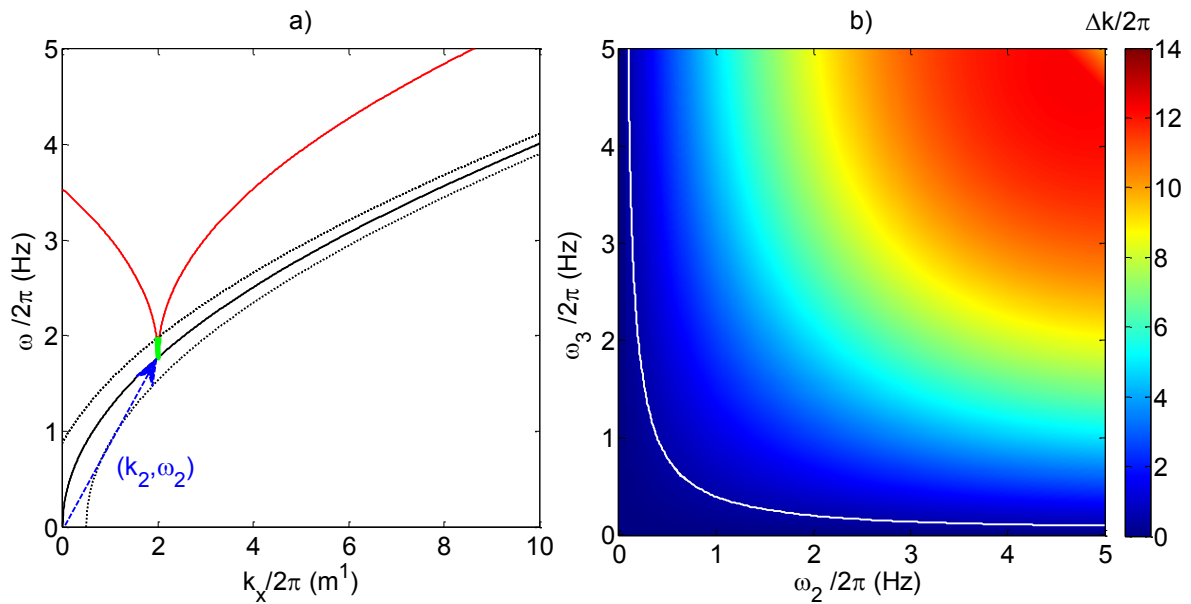


Figure III-40 :a) Solutions des interactions à 3-ondes dans le cas 1D, $\omega > 0$ et pour $k_2/2\pi = 2\text{m}^{-1}$. La courbe rouge représente la relation de dispersion linéaire $\omega_3(k_3)$ et la courbe noire $\omega_1(k_1)$. Les solutions exactes sont désignées par les intersections de ces deux courbes. L'élargissement non linéaire $\delta k/2\pi \approx 0.5\text{m}^{-1}$ estimé à partir du spectre spatio-temporel est tracé en pointillés noirs. Aucune solutions exactes ne sont disponibles et seules quelques quasi-résonances sont autorisées (en vert). b) Carte de la distance en k : $\Delta k = |k_2 - k_3|$ dans le domaine fréquentiel (ω_2, ω_3) . La ligne blanche trace la situation $\Delta k = \delta k$. Tous les couples de fréquences situés en dessous de cette ligne sont alors permis pour les quasi-résonances.

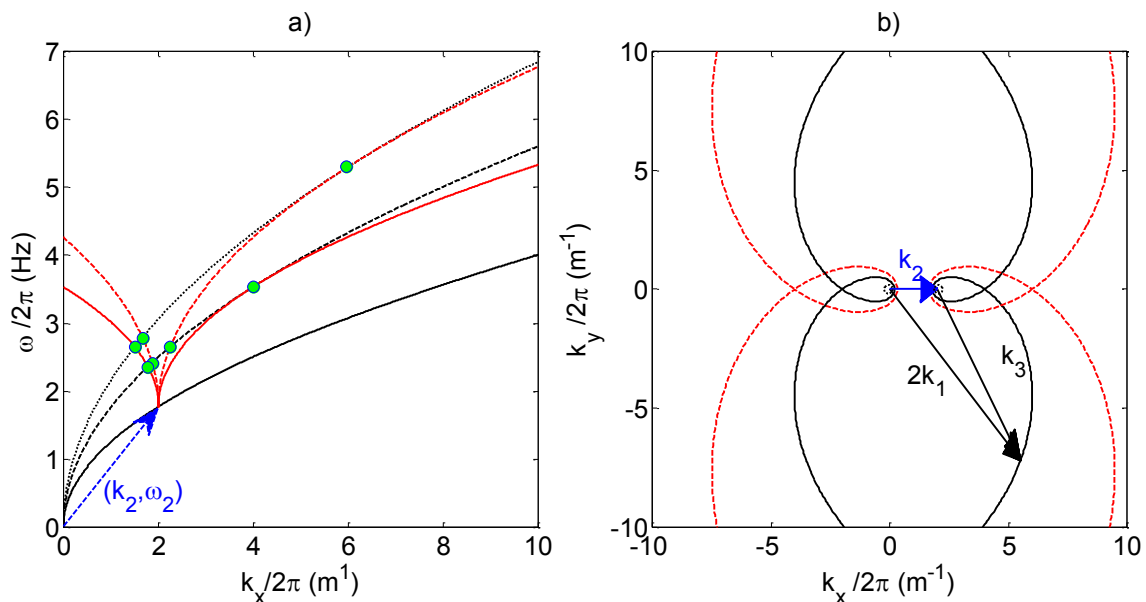


Figure III-41 : a) Solutions théoriques 1D avec $k_2/2\pi = 2\text{m}^{-1}$ et $\omega > 0$ pour l'interaction entre les branches harmoniques et linéaires. Les couples autorisés sont repérés par les points verts qui correspondent aux intersections des courbes rouges $\omega_3(k_3)$ et noires $\omega_1(k_1)$. Les harmoniques sont tracées en pointillés. b) Solutions équivalentes mais projetées en 2D dans l'espace (k_x, k_y) et pour tous les ω . La courbe noire représente les solutions du type $2k_1 = k_2 + k_3$, la courbe en pointillé rouge $3k_1 = k_2 + 2k_3$ et la courbe pointillée noire (proche de la flèche bleue) les solutions du type $2k_1 = k_2 + 2k_3$. Les solutions du type $3k_1 = k_2 + k_3$ et d'ordre plus élevé ne sont pas représentées.

On remarque que le nombre de combinaisons autorisées est assez grand et qu'elles sont étalées sur une grande plage de fréquences. Des interactions du type $3k_1 = k_2 + 2k_3$ et plus sont également possibles. La figure b) permet de visualiser la grande variété des solutions dans l'espace (k_x, k_y) . Aucune direction privilégiée ne semble sortir. A noter la présence d'un point particulier en 1D, correspondant à : $2k_1 = k_2 + k_3$ où $k_2 = k_3$. On a donc une vague qui interagit avec elle-même pour former sa propre harmonique. En implémentant les quasi-résonances, ce point particulier se retrouve fortement élargi. En effet, comme on peut le voir sur la figure a), les deux relations de dispersion sont très proches dans cette zone.

Il est également possible de reproduire la même analyse avec les branches parallèles à la relation de dispersion. Les résultats seront similaires aux harmoniques dans la mesure où ces branches sont comparables à ces dernières.

III.3.1.2 Interactions à 4-ondes

Bien que les interactions à 3-ondes soient possibles par des quasi-résonances ou des couplages avec des harmoniques, la théorie de Zakharov dans le régime gravitaire est construite sur une cascade faisant uniquement intervenir des interactions à 4-ondes. Pour rappel, celles-ci satisfont le système suivant :

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 &= \mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4 + \delta\mathbf{k} & \text{III-39} \\ \omega_1 + \omega_2 &= \omega_3 + \omega_4 \end{aligned}$$

Où $\delta\mathbf{k}$ représente un élargissement non-linéaire, permettant les quasi-résonances. Les solutions de ce système sont nombreuses du fait du grand nombre de degrés de liberté. Pour simplifier l'analyse il est alors de nécessaire de fixer une ou plusieurs composantes. La figure montre deux solutions exactes ($\delta\mathbf{k} = 0$) en ayant fixés les vecteurs $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_3$.

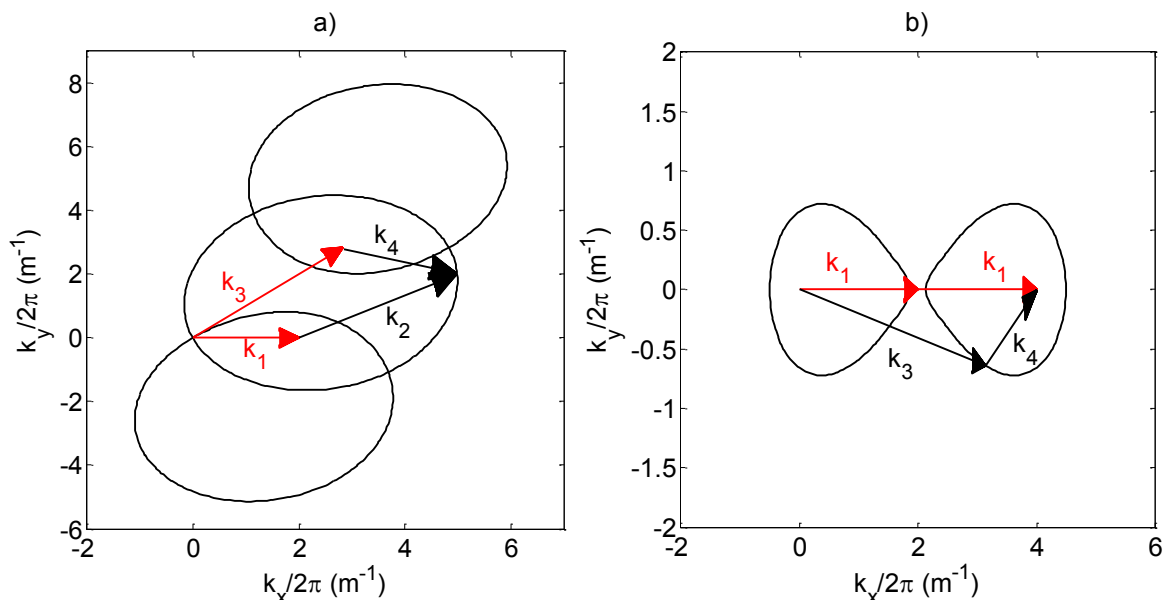


Figure III-42 : a) Solutions arbitraires des interactions à 4-ondes pour un couple de $(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)$ donnée. L'ensemble des $(\mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4)$ satisfaisant III-39 est représenté par les lignes noires. ω peut être positif ou négatif. b) Similaire à a) mais dans le cas particulier où une onde est présente deux fois $\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4$.

On peut observer une multitude de solutions permettant des couplages avec tous les angles possibles. La figure b) présente le cas particulier où une onde est présente deux fois $\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4$. On peut avancer que cette configuration soit la plus présente, dans le sens où les conditions de collision ont une probabilité plus grande d'être réunie (La probabilité d'avoir une collision de 3-ondes résonantes

est plus forte qu'une à 4-ondes). Il faut néanmoins garder à l'esprit que ces interactions se démarquent de l'interaction à 3-ondes $2\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3$ décrite précédemment. En effet l'interaction de deux ondes linéaires n'est pas équivalente à celle d'une harmonique, même si leurs solutions géométriques sont confondues. Similairement aux interactions à 3-ondes, il est envisageable d'avoir la présence de quasi-résonances ($\delta k > 0$). La Figure III-43 permet d'en estimer leurs probabilités.

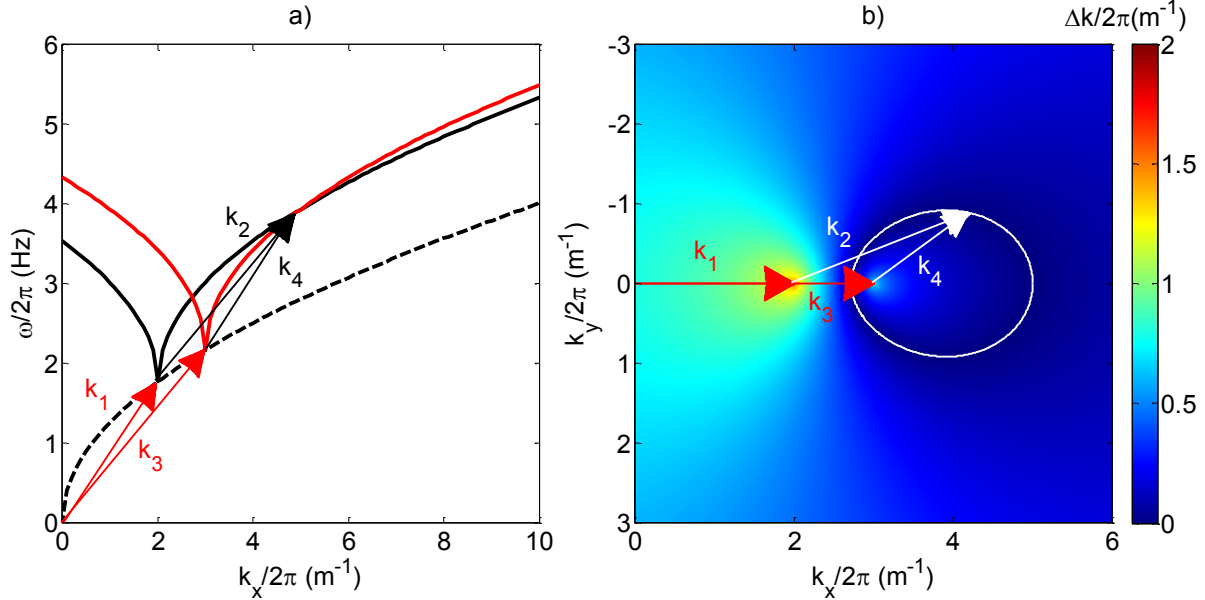


Figure III-43 : a) Coupe (k_x, ω) des solutions à 4 ondes dans le cas où $(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)$ sont colinéaires et $\omega > 0$. Les solutions exactes sont représentées par le croisement des courbes noire et rouge, représentant les relations de dispersion linéaire $\omega_2(k_2)$ et $\omega_4(k_4)$ respectivement. Une forte proximité des deux courbes est visible aux alentours de (k_1, ω_1) supposant l'apparition d'interactions quasi-résonantes. b) Carte 2D de la distance Δk entre les deux courbes tracées en noir et rouge en a). La ligne blanche représente les solutions exactes $\Delta k/2\pi = 0 m^{-1}$.

La figure a) représente une coupe des solutions dans l'espace (k_x, ω) . On s'aperçoit d'une très grande proximité des deux relations de dispersion, permettant une interaction avec un très faible élargissement spectral δk . La figure b) permet de mieux se rendre compte de la situation en 2D. Avec un $\delta k/2\pi \approx 0.5 m^{-1}$ comme estimé précédemment, c'est une grande partie de la figure qui devient accessible. On a alors un éclatement de l'ensemble des solutions autorisées, permettant pratiquement tout type d'interactions.

III.3.2 Corrélations

L'analyse statistique présentée ici reprend les mêmes outils développés dans le chapitre précédent sur les ondes gravito-capillaires. Pour rappel, les interactions à 3-ondes peuvent être observées avec les corrélations normalisées d'ordre 3 C^3 et la bicohérence B^3 :

$$\begin{aligned}
 B_{\omega}^3(\omega_2, \omega_3) &= \frac{c_{\omega}^3(\omega_2 + \omega_3, \omega_2, \omega_3)}{\sqrt{\langle |\hat{\eta}(\omega_2) \hat{\eta}(\omega_3)|^2 \rangle \langle |\hat{\eta}(\omega_2 + \omega_3)|^2 \rangle}} \\
 B_k^3(\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3) &= \frac{c_k^3(\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3)}{\sqrt{\langle |\hat{\eta}(\mathbf{k}_2) \hat{\eta}(\mathbf{k}_3)|^2 \rangle \langle |\hat{\eta}(\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3)|^2 \rangle}} \\
 B_{k\omega}^3(\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \omega_2, \omega_3) &= \frac{c_{k\omega}^3(\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \omega_2 + \omega_3, \omega_2, \omega_3)}{\sqrt{\langle |\hat{\eta}(\mathbf{k}_2, \omega_2) \hat{\eta}(\mathbf{k}_3, \omega_3)|^2 \rangle \langle |\hat{\eta}(\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3, \omega_2 + \omega_3)|^2 \rangle}}
 \end{aligned}
 \tag{III-40}$$

Ainsi que les interactions à 4-ondes avec les corrélations à l'ordre supérieur C^4 et B^4 :

$$\begin{aligned}
 B_{\omega}^4(\omega_2, \omega_3, \omega_4) &= \frac{c_{\omega}^4(\omega_3 + \omega_4 - \omega_2, \omega_2, \omega_3, \omega_4)}{\sqrt{\langle |\hat{\eta}(\omega_2)\hat{\eta}(\omega_3)\hat{\eta}(\omega_4)|^2 \rangle \langle |\hat{\eta}(\omega_3 + \omega_4 - \omega_2)|^2 \rangle}} \\
 B_k^4(\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4) &= \frac{c_k^3(\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4 - \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4)}{\sqrt{\langle |\hat{\eta}(\mathbf{k}_2)\hat{\eta}(\mathbf{k}_3)\hat{\eta}(\mathbf{k}_4)|^2 \rangle \langle |\hat{\eta}(\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4 - \mathbf{k}_2)|^2 \rangle}} \\
 B_{k\omega}^4(\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4, \omega_2, \omega_3, \omega_4) &= \\
 &= \frac{c_{k\omega}^3(\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4 - \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4, \omega_3 + \omega_4 - \omega_2, \omega_2, \omega_3, \omega_4)}{\sqrt{\langle |\hat{\eta}(\mathbf{k}_2, \omega_2)\hat{\eta}(\mathbf{k}_3, \omega_3)\hat{\eta}(\mathbf{k}_4, \omega_4)|^2 \rangle \langle |\hat{\eta}(\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4 - \mathbf{k}_2, \omega_3 + \omega_4 - \omega_2)|^2 \rangle}}
 \end{aligned}
 \tag{III-41}$$

Pour plus de détails, se reporter à la partie II.3.1.2.

III.3.2.1 Interactions à 3-ondes

La première étape de l'analyse consiste à vérifier la présence d'un signal résonant significatif. Pour cela on regarde la corrélation normalisée $C_{\omega}^3(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ en fixant une fréquence arbitraire ω_2 . La Figure III-44 trace cette dernière pour la hauteur η et la vitesse verticale w tout en fixant $\omega_2/2\pi = 2.2$ Hz.

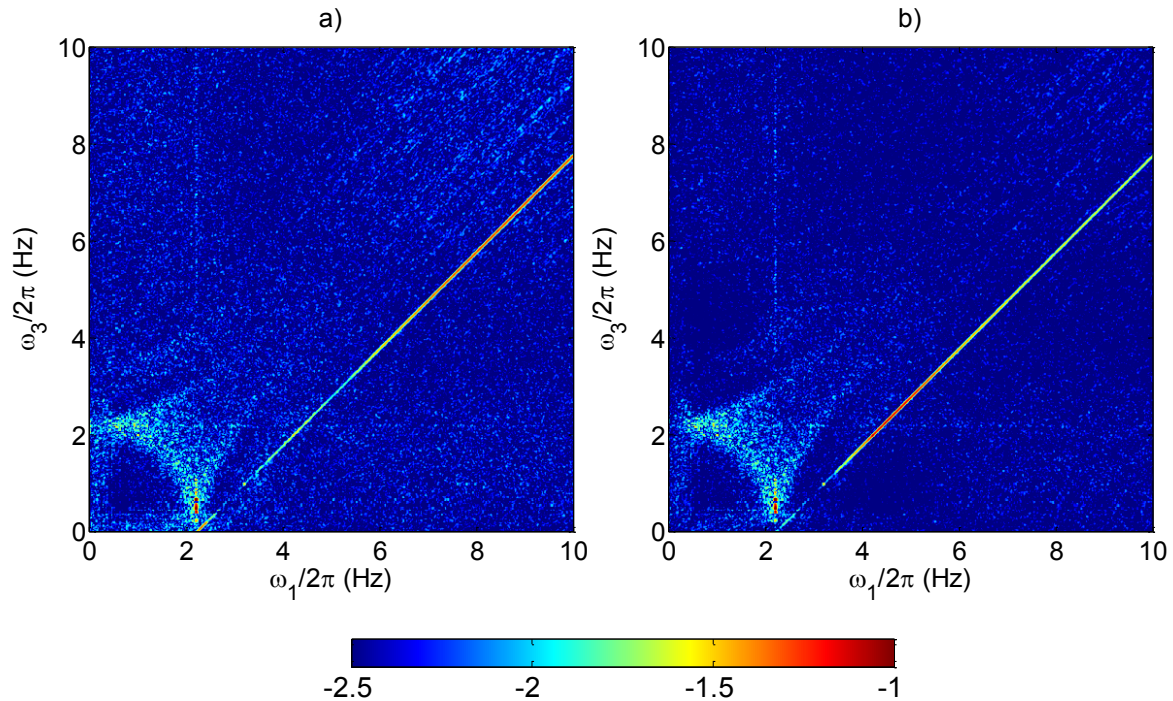


Figure III-44 : Corrélations d'ordre 3 normalisées $C_{\omega}^3(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ pour $\omega_2/2\pi = 2.2$ Hz. Echelle de couleur logarithmique. a) Corrélations de la mesure de hauteur η b) Corrélations de la mesure de vitesse verticale w . La couleur bleue du fond représente le niveau de convergence statistique qui est d'environ $10^{-2.5}$. Pour les deux mesures, la ligne résonante ($\omega_1 = \omega_2 + \omega_3$) ressort significativement du bruit.

Pour les deux mesures la ligne résonante ressort fortement du niveau de bruit qui est aux environs de $10^{-2.5}$. La Figure III-45 permet de se convaincre de la robustesse statistique en traçant l'évolution de la corrélation sur la ligne résonante (lignes rouges) et pour un point quelconque (lignes noires).

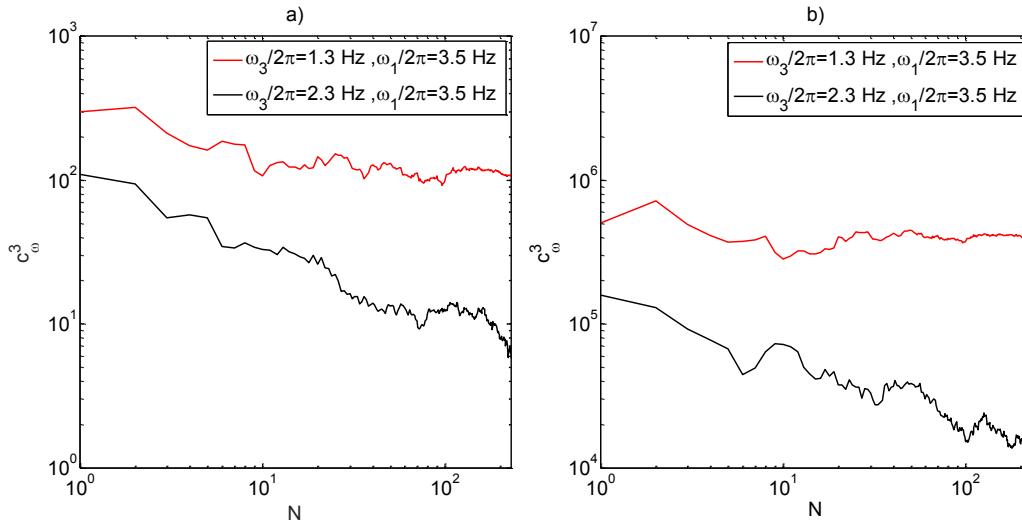


Figure III-45 : Convergence de la corrélation non normalisée c_{ω}^3 en fonction du nombre de moyennes N . a) Corrélations de la mesure de hauteur η . b) Corrélations de la mesure de vitesse verticale w . La courbe rouge est un point sur la ligne résonante visible sur la Figure III-44 ($\omega_2/2\pi = 2.2$ Hz). Le niveau de bruit d'un point quelconque est tracé en noir.

L'organisation des corrélations le long des lignes résonantes (Figure III-44) présente des différences entre les deux mesures. Une première zone est visible pour des fréquences $\omega_3/2\pi \sim 0.5$ Hz où les corrélations en η montrent un plus fort couplage. Il s'ensuit une zone pratiquement identique pour les deux mesures jusqu'aux environs de $\omega_3/2\pi \sim 3$ Hz. Au-delà, les différences sont significatives. Cela est probablement dû à la part importante des non-linéarités qui réduit la cohérence entre les deux mesures (voir Figure III-26). La présence de signal significatif aux très hautes fréquences est probablement liée au bruit de la mesure.

Pour une vue plus en détail des corrélations du système la bicohérence $B_{\omega}^3(\omega_2, \omega_3)$ est tracée sur la Figure III-46

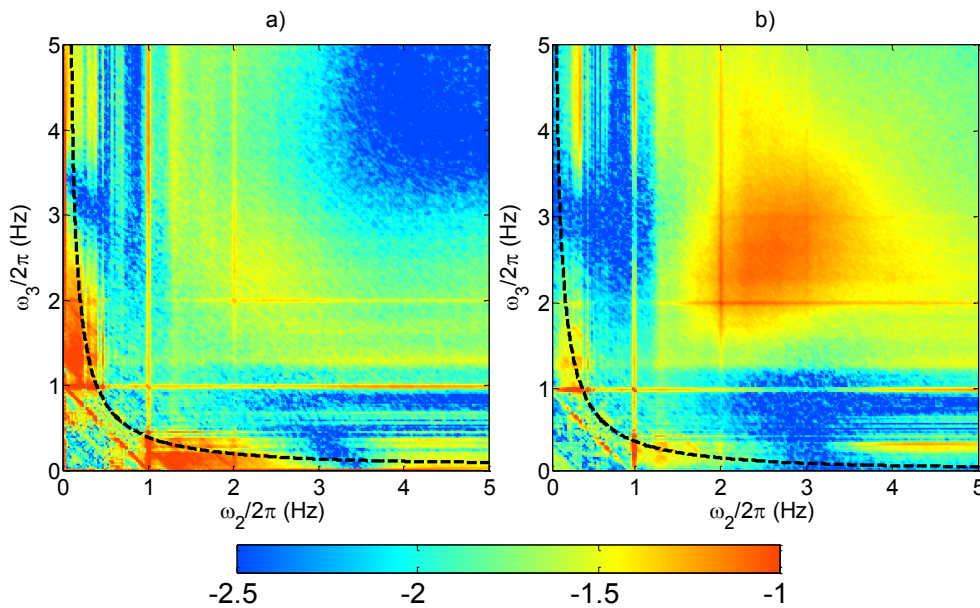


Figure III-46 : Bicohérence $B_{\omega}^3(\omega_2, \omega_3)$ pour la mesure de hauteur η a) et la mesure de vitesse verticale w b). L'échelle de couleur est logarithmique. La solution quasi-résonante pour $\delta k/2\pi = 0.5\text{m}^{-1}$ est tracée en pointillé noir.

La figure a) montre les corrélations en η tandis que la figure b) montre les corrélations en de la vitesse verticale w . Comme vu précédemment et malgré des petites différences d'intensité, les deux figures sont équivalentes jusqu'à $\omega_1/2\pi \sim 3 \text{ Hz}$. On observe une forte tache rouge à $\omega_1/2\pi \sim 5 \text{ Hz}$ pour les corrélations de vitesse verticale. Cette tache est située au-dessus de la ligne noire pointillée représentant la limite des quasi-résonances pour un élargissement spectral de $\delta k/2\pi = 0.5 \text{ m}^{-1}$. La nature de ces interactions est alors probablement des interactions entre les harmoniques. Du signal résonant est également observé sur les bords de la figure a) pour $\omega_2/2\pi = [0, 0.5] \text{ Hz}$ (respectivement $\omega_3/2\pi = [0, 0.5] \text{ Hz}$ par symétrie). Cependant le spectre de puissance étant pratiquement nul pour ces fréquences, leurs origines ne sont probablement pas physiques. On observe une forte interaction du pic du forçage ($\omega_{2,3}/2\pi = 1 \text{ Hz}$) qui est probablement la marque de quasi-résonances permises par la forte largeur spectrale de ce mode.

Pour tenter de voir plus clair sur la nature de ces interactions, il est nécessaire de poursuivre l'investigation des corrélations dans l'espace des \mathbf{k} . La Figure III-47 montre la bicohérence $B_k^3(\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3)$ pour η et w . Pour chaque figure, l'onde fixée \mathbf{k}_2 est représenté par la flèche noire. Les solutions entre les branches harmoniques et linéaires présentées précédemment (voir III.3.1.1) sont tracées en noir. On observe une forte différence entre les deux mesures. Pour la mesure de hauteur η , de fortes taches de corrélations sont présentes pour l'ensemble des ondes testées. Le maximum de corrélation semble être colinéaire mais une dispersion angulaire est également visible. La concordance avec les solutions exactes est difficile à établir. Ce brouillage est certainement dû à la grande proximité des solutions permettant de nombreuses quasi-résonances. Les corrélations de la vitesse verticales sont beaucoup plus faibles et les maximums de corrélations ne sont pas exactement situés aux mêmes endroits. Par exemple, la figure e) montre une tache de corrélation aux alentours de $k_{x1}/2\pi \sim 15 \text{ m}^{-1}$ qui est absente sur la figure b). En revanche le caractère colinéaire des interactions reste dominant dans les deux cas.

Au vu des corrélations en ω puis en k , il semblerait que ce soit les interactions entre les branches harmoniques et linéaires qui dominant, et non des quasi-résonances entre la branche linéaire. Cependant, la complexité du spectre avec la présence de nombreuses branches superpose l'ensemble des solutions et complique l'interprétation des corrélations.

Le dernier outil pour espérer une clarification du système est la bicohérence dans l'espace complet $B_{k\omega}^3$. Celle-ci est tracée dans la Figure III-48 pour les mêmes configurations que présentées précédemment. Pour l'ensemble des figures, une nette zone de fortes corrélations apparait à proximité de l'intersection entre la branche linéaire de ω_2 (courbe continue rouge) et la première harmonique de ω_1 (courbe pointillée noire). Cela confirme la présence d'interactions du type : $2\omega_1 = \omega_2 + \omega_3$. Du signal est également visible pour des interactions entre différentes branches harmoniques, comme par exemple le couplage $3\omega_1 = \omega_2 + 2\omega_3$. Au contraire, aucune trace de signal quasi-résonant ne semble exister entre les deux branches linéaires, à part pour le point particulier $\omega_3/2\pi = 0 \text{ Hz}$ qui n'a pas de sens physique. Cela confirme le trop faible élargissement spectral de cette branche pour les autoriser. Similairement à l'analyse effectuée sur les ondes-gravito-capillaires, des corrélations inattendues sont observés. Celles-ci sont principalement situées le long de la branche linéaire de ω_3 (ligne continue rouge) et sont à l'écart de toutes solutions théoriques. Par exemple, pour les figure a) et d), la tache au niveau de $k_x/2\pi = 5 \text{ m}^{-1}$ et $\omega/2\pi = 1 \text{ Hz}$ n'est pas comprise. Malgré le niveau de corrélation très élevés, la composante ω_1 de la triade possède des niveaux d'énergie très faibles mettant en doute la présence d'une onde pour cette composante. Cet aspect questionne sur leur origine. Les similarités observées avec les ondes dans le régime gravito-capillaire semblent innocenter la mesure en elle-même. Un effet indirect lié à la présence d'ondes quasi-stationnaires et qui induit des corrélations insoupçonnées peut également être envisagé.

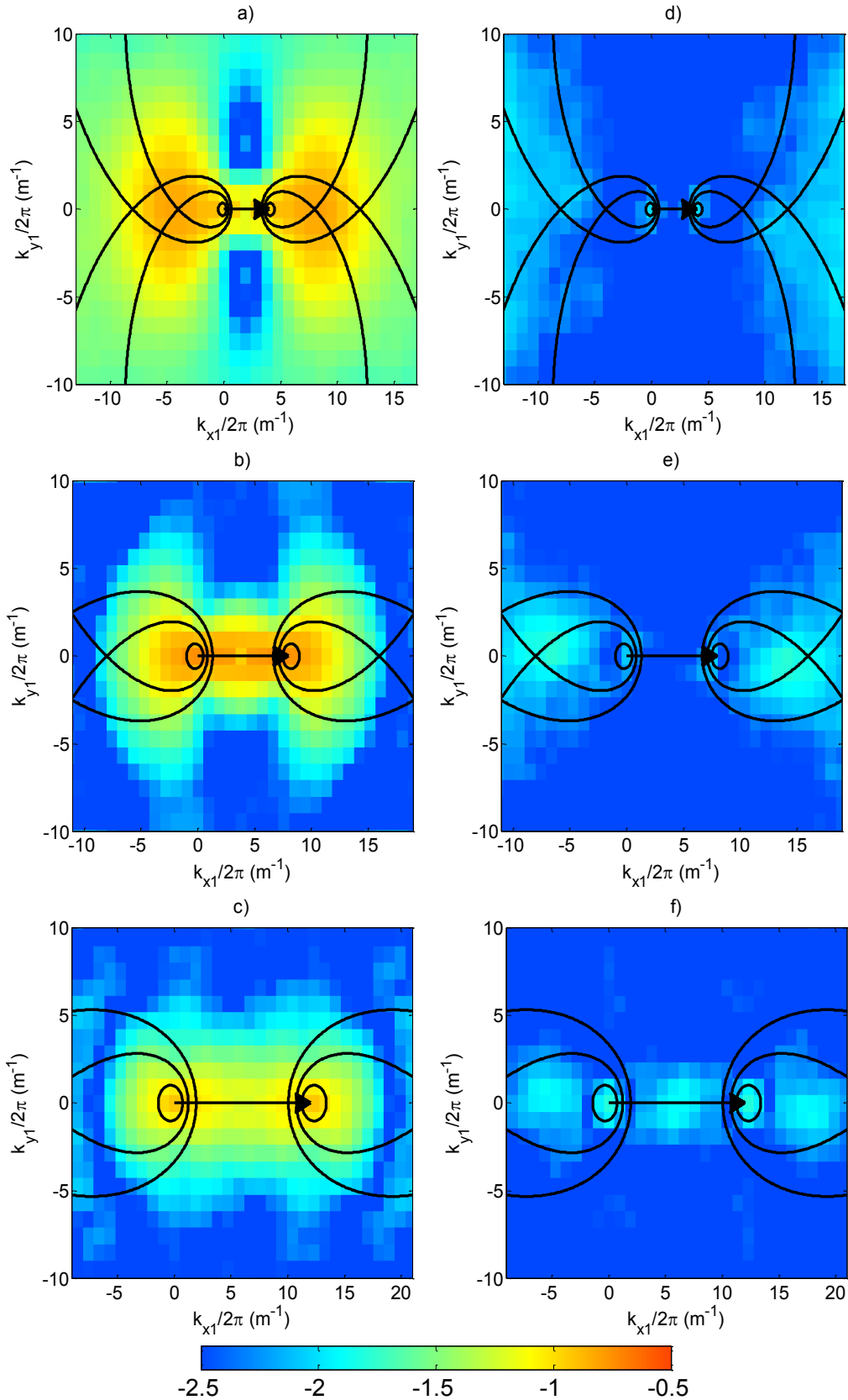


Figure III-47 : Bicohérence $B_k^3(\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3)$ pour les mesures de hauteur η (gauche) et de vitesse verticale w (droite). L'échelle de couleur est logarithmique. La norme de l'onde est fixée à $|\mathbf{k}_2|/2\pi = 4 \text{ m}^{-1}$ (a,d), $|\mathbf{k}_2|/2\pi = 8 \text{ m}^{-1}$ (b,e) et $|\mathbf{k}_2|/2\pi = 12 \text{ m}^{-1}$ (c,f). Les corrélations sont moyennées pour 8 orientations différentes de \mathbf{k}_2 en effectuant une rotation de l'image. Les solutions exactes pour les interactions entre les branches linéaires et harmoniques sont tracées en noir.

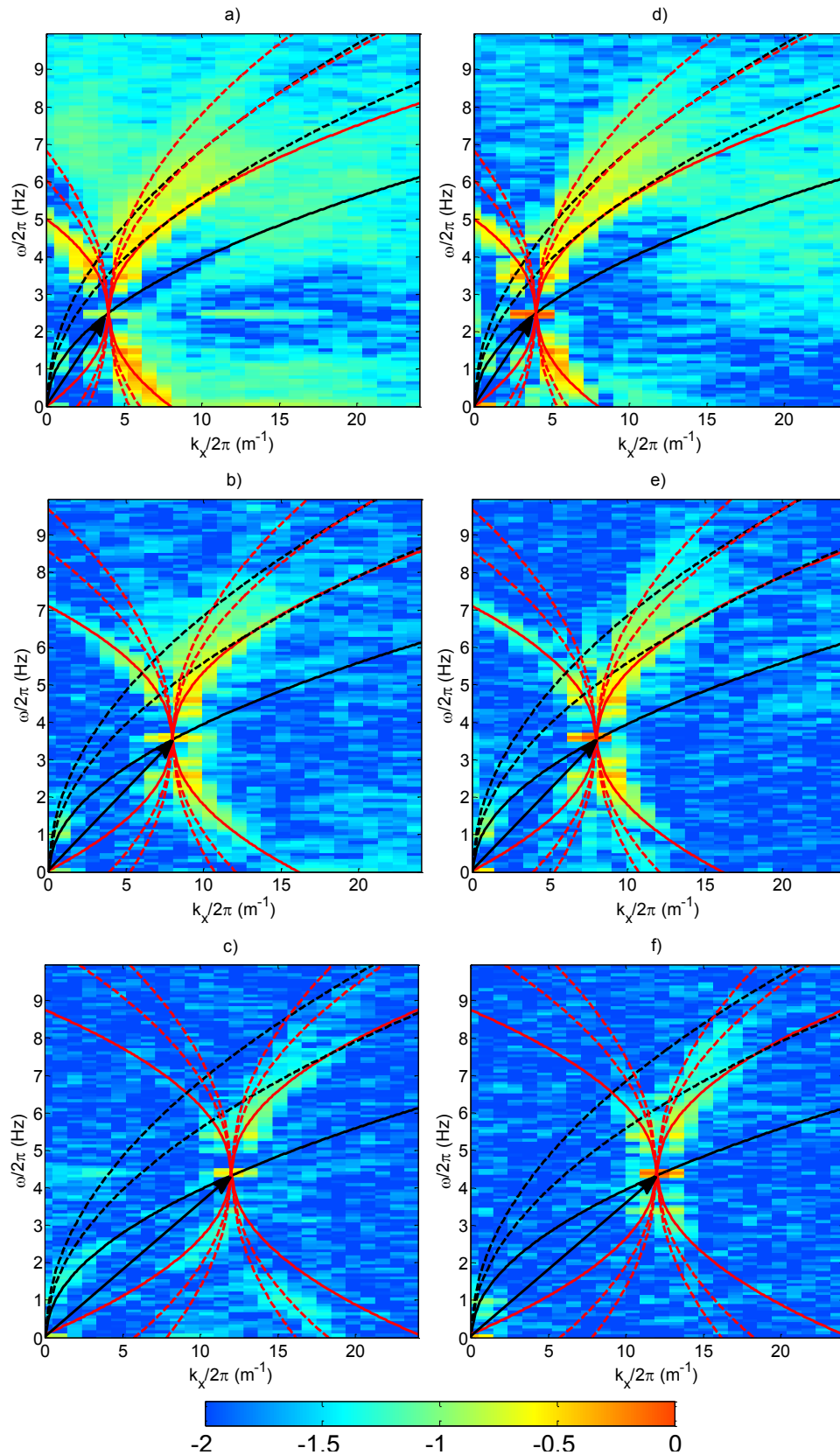


Figure III-48 : Coupe de la bicoherence $B_{k\omega}^3(\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \omega_2, \omega_3)$ en $k_y = 0$ pour les mesures de hauteur η (gauche) et de vitesse w (droite). Pour chaque figure une onde (\mathbf{k}_2, ω_2) est fixée : $|\mathbf{k}_2|/2\pi = 4 \text{ m}^{-1}$ (a,d), $|\mathbf{k}_2|/2\pi = 8 \text{ m}^{-1}$ (b,e) et $|\mathbf{k}_2|/2\pi = 12 \text{ m}^{-1}$ (c,f). La ligne continue noire est la relation de dispersion linéaire de (\mathbf{k}_1, ω_1) tandis que les lignes pointillées sont les deux premières harmoniques. Les lignes rouges sont identiques aux noires mais dans le référentiel de (\mathbf{k}_3, ω_4) . Les solutions exactes sont les intersections des courbes rouges et noires.

La Figure III-49 affiche quatre coupes spatiales à fréquence fixée de la bicohérence correspondant à la Figure III-48 d). Similairement à la Figure III-48, les différentes relations de dispersion sont tracées en rouge pour le repère de (\mathbf{k}_3, ω_3) et en noir pour le repère de (\mathbf{k}_1, ω_1) . On observe des zones de forte corrélation qui coïncident bien avec les jonctions des différentes lignes. Une dispersion angulaire significative est observée avec un angle maximum dépassant les 45° .

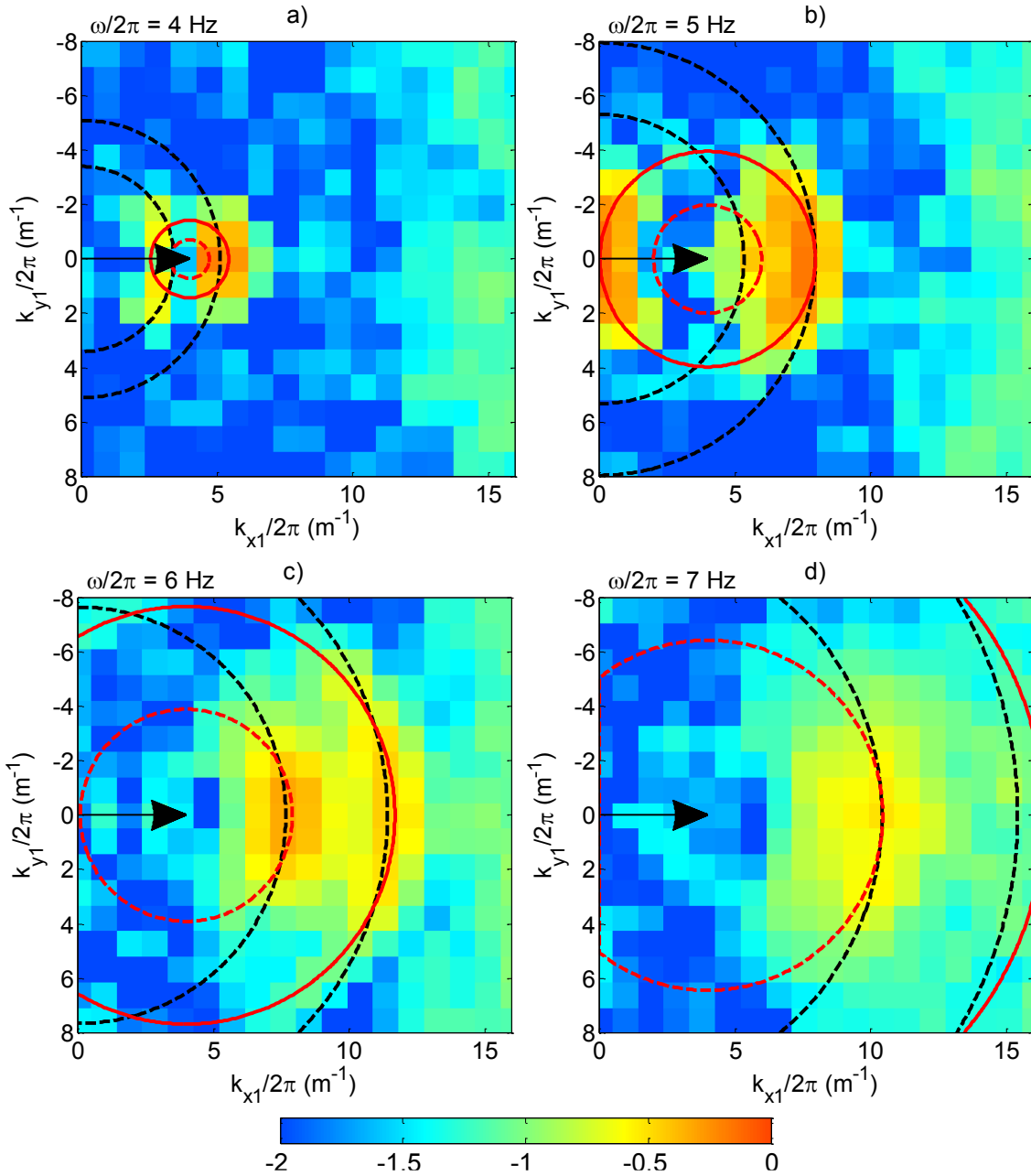


Figure III-49 : Coupe (k_x, k_y) à fréquence ω donnée de la bicohérence $B_{k\omega}^3(\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \omega_2, \omega_3)$ pour une mesure de vitesse verticale w . L'échelle de couleur est logarithmique. L'onde (\mathbf{k}_2, ω_2) est fixée à $|\mathbf{k}_2|/2\pi = 4 \text{ m}^{-1}$. La fréquence correspondante est choisie sur la relation de dispersion linéaire. Les courbes sont équivalentes à la Figure III-48. Les lignes pointillées noires sont les deux premières branches harmoniques dans le repère de (\mathbf{k}_1, ω_1) . La ligne continue rouge est la relation de dispersion linéaire dans le repère de (\mathbf{k}_3, ω_3) , la ligne pointillée rouge est la première harmonique.

III.3.2.2 Interactions à 4-ondes

La partie précédente a mis en évidence la présence d'interactions à 3-ondes entre les branches linéaires et harmoniques. La suite de l'analyse s'oriente naturellement vers les couplages à 4-ondes supposés générés la cascade. En procédant de manière identique que précédemment, la corrélation $C_{\omega}^4(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4)$ est tout d'abord calculée pour regarder si un signal résonant est présent. La Figure III-50 trace cette dernière pour la mesure de hauteur η et de vitesse verticale w .

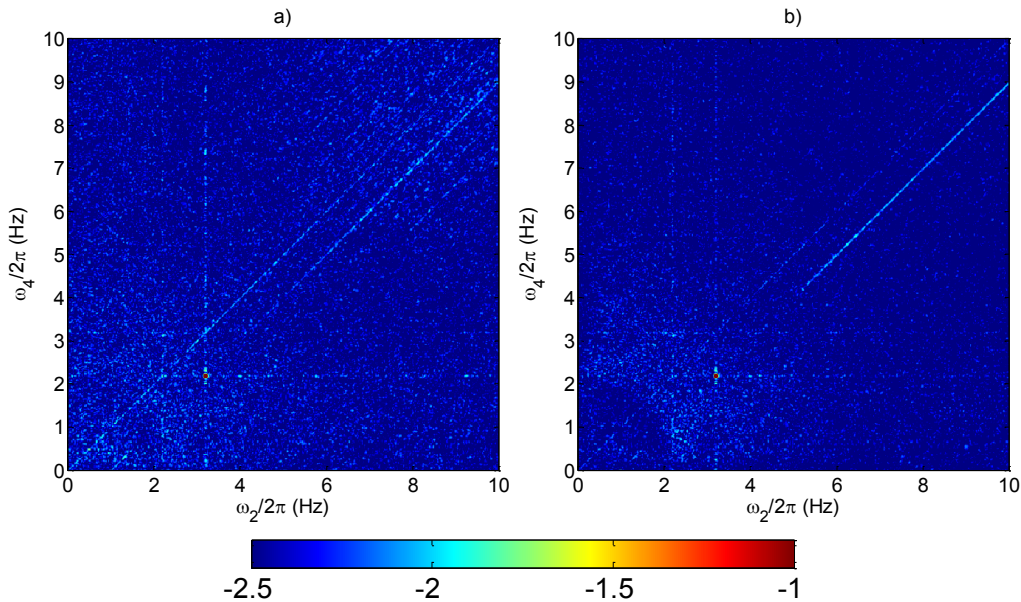


Figure III-50 : Corrélations d'ordre 4 $C_{\omega}^4(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4)$ pour $\omega_1/2\pi = 2.2$ Hz et $\omega_3/2\pi = 3.2$ Hz. Echelle de couleur logarithmique. a) Corrélations de la mesure de hauteur η . b) Corrélations de la mesure de vitesse verticale w . La couleur bleue du fond représente le niveau de convergence statistique qui est d'environ $10^{-2.5}$.

Contrairement aux corrélations d'ordre 3, la ligne résonante ne semble pas sortir du bruit pour des fréquences ω_2 inférieures à 5Hz. La Figure III-51 montre l'évolution du niveau des corrélations non normalisées c_{ω}^3 pour un point sur la ligne résonante (courbe rouge), en dehors (courbe noire) ainsi que d'un point sur la ligne résonante au-delà de 5Hz (courbe bleue).

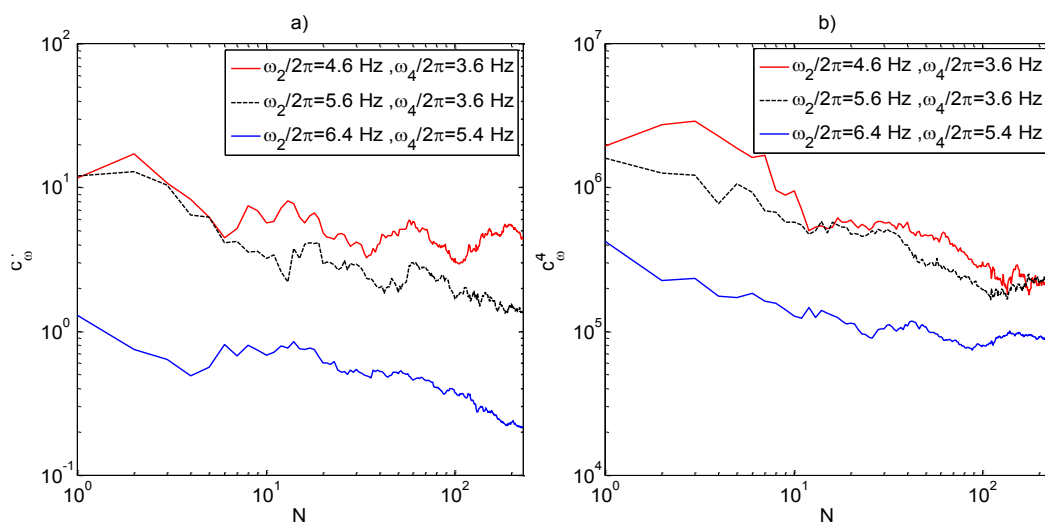


Figure III-51 : Convergence de la corrélation non normalisée c_{ω}^3 en fonction du nombre de moyennes N . a) Corrélations de la mesure de hauteur η . b) Corrélations de la mesure de vitesse verticale w . Les courbes rouges et bleues sont deux points sur la ligne résonante de la Figure III-50 ($\omega_1/2\pi = 2.2$ Hz et $\omega_3/2\pi = 3.2$ Hz). Le niveau de bruit d'un point en dehors de la ligne résonante est tracé en pointillé noir.

Pour l'ensemble des points, aucune stabilisation significative n'est observée. Cela semble en contradiction avec la ligne résonante qui sort significativement du niveau de bruit à haute fréquence. L'unique différence entre les deux courbes est la présence d'une normalisation pour la Figure III-50. Cette différence indique que le système n'est pas stationnaire. Pour mieux comprendre, il faut regarder l'évolution de la convergence de chaque composante spectrale. La Figure III-52 trace les quatre fréquences en jeu correspondant à la ligne bleue de la Figure III-51 .

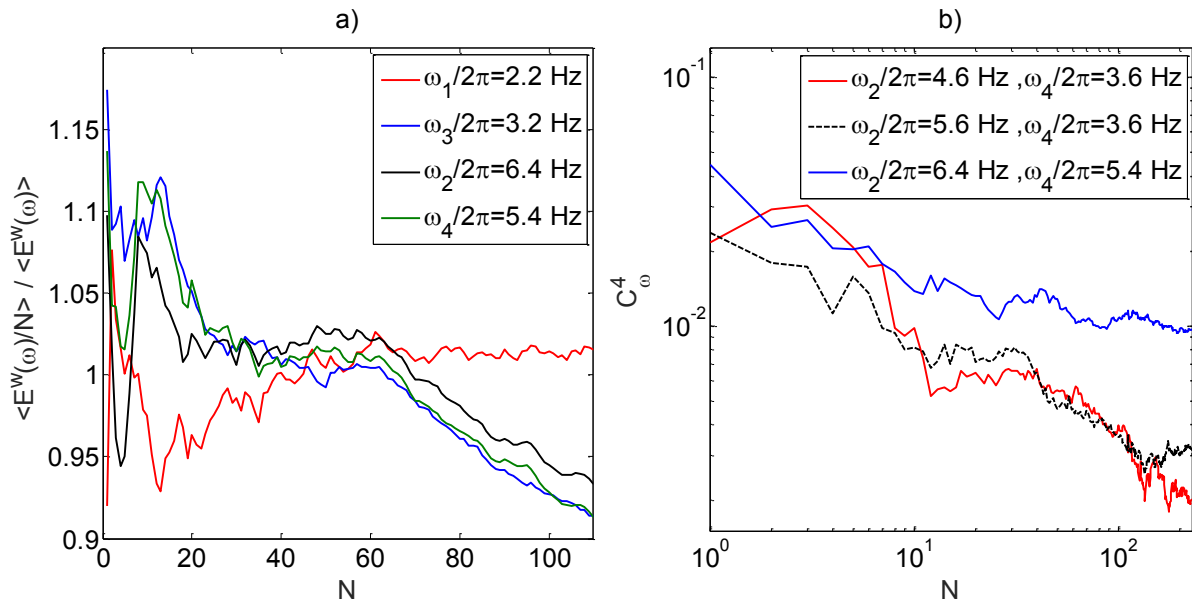


Figure III-52 : a) Evolution de la convergence de quatre composantes du spectre de puissance $E^w(\omega)$. Les courbes sont normalisées par la moyenne de l'ensemble des valeurs convergées. Une décroissance pour les hautes fréquences s'amorce aux environs de la 60^{ème} itération ($\sim 1h$). b) Convergence de la corrélation normalisée C_ω^3 en fonction du nombre de moyennes N . En opposition aux convergences non normalisées c_ω^3 (Figure III-51) la ligne bleue semble se stabiliser.

On observe que contrairement à ω_1 , l'ensemble des fréquences ne convergent pas vers un état stationnaire. Une descente simultanée de ces composantes se produit à partir de la 60^{ème} itération, ce qui représente environ 1h après le démarrage de l'expérience. Cette décroissance du spectre est très probablement provoquée par la pollution de surface qui s'intensifie au fil du temps. Ainsi, la décroissance des corrélations observées sur la Figure III-51 provient probablement en grande partie de cet effet. Dans cette situation, les corrélations normalisées représentent alors un meilleur estimateur. La figure b) montre ces dernières qui correspondent à la Figure III-51 b). On observe alors un début de stabilisation pour la ligne résonante à haute fréquence (ligne bleue).

Cette non-stationnarité du spectre met en défaut l'effet de la moyenne en espace sur l'image qui permet d'isoler le signal résonant en \mathbf{k} (voir II.3.1.2). Ainsi, c'est certainement l'analyse directe en (k, ω) qui est la plus significative. Cependant, à titre de comparaison et similairement aux interactions à 3-ondes, l'ensemble des corrélations seront tout de même présentées.

La Figure III-53 montre la trichérence $B_{\omega}^4(\omega_2, \omega_3, \omega_4)$ pour une vue plus globale des corrélations en fréquence.

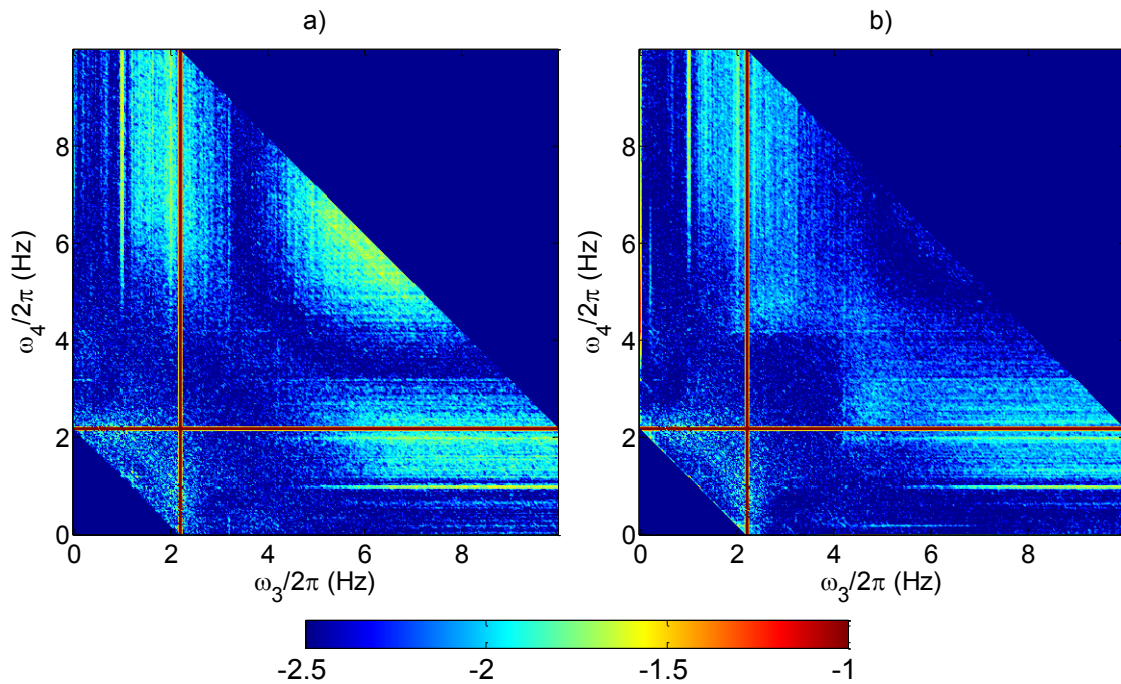


Figure III-53 : Trichérence $B_{\omega}^4(\omega_2, \omega_3, \omega_4)$ pour la mesure de hauteur η a) et la mesure de vitesse verticale w b). L'échelle de couleur est logarithmique et $\omega_2/2\pi = 2.2$ Hz.

La fréquence ω_2 est fixé à 2.2 Hz. Les bandes rouges de corrélations sont la conséquence des solutions triviales $\omega_3 = \omega_2$ et $\omega_4 = \omega_1$ (ou respectivement $\omega_4 = \omega_2$ et $\omega_3 = \omega_1$). Globalement le niveau de corrélations est très bas. On observe tout de même quelques lignes à $\omega_3/2\pi = [1,2]$ Hz, une zone à haute fréquence le long des solutions triviales ainsi qu'une tache à visible en a) pour $\omega_3/2\pi > 4$ Hz et $\omega_4/2\pi > 4$ Hz. Cela semble indiquer que les interactions sont principalement présentes aux hautes fréquences. En comparant avec les figures obtenues dans le régime gravito-capillaire, il semble évident que l'instabilité de Benjamin-Feir n'est pas présente dans ce système. En effet, celle-ci se manifestait avec de fortes corrélations centrées sur l'intersection des solutions triviales (lignes rouges). Il est cependant difficile d'aller plus loin dans l'analyse car le foisonnement de solutions disponibles rend impossible toute interprétation dans l'espace des fréquences.

Pour tenter de voir plus clair sur le type d'interaction en jeu il faut poursuivre l'analyse dans l'espace des \mathbf{k} . Le nombre élevé de dimensions impose de faire des choix dans les couples d'ondes à analyser. A la vue de la Figure III-53 et contrairement aux observations faites pour les ondes gravito-capillaires, les interactions semblent concerner des ondes ayant une séparation significative entre les échelles. La Figure III-54 montre un premier jeu de corrélations pour des ondes colinéaires. On observe que contrairement aux interactions à 3-ondes, les corrélations en hauteur η et en vitesse verticale w sont cette fois très similaires. Ainsi pour la suite, seules les données de vitesse verticale ayant une plus grande dynamique de mesure seront présentées. Pour les trois couples d'ondes affichées, on voit un léger étalement de corrélations autour des points triviaux. Cette caractéristique semble cohérente avec l'observation faite en fréquence d'une zone de corrélation le long des solutions triviales. En revanche, ces corrélations semblent identiques en intensité quelle que soient les fréquences en jeu. Il est également difficile de dire si les solutions exactes présentées sont à l'origine de ces corrélations.

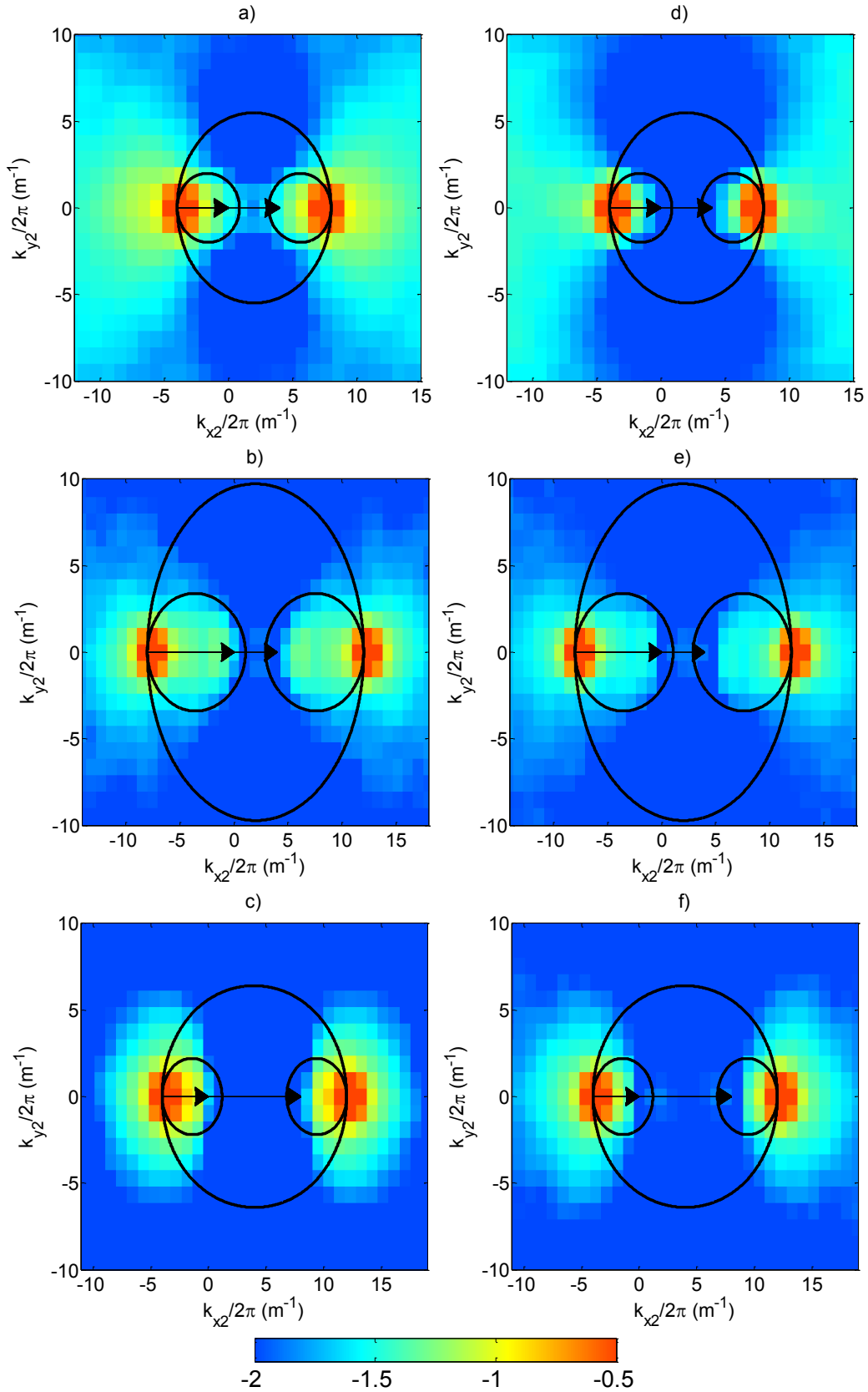


Figure III-54 : Trichère $B_k^4(\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4)$ pour les mesures de hauteur η (gauche) et de vitesse verticale w (droite). L'échelle de couleur est logarithmique. Les deux ondes fixées \mathbf{k}_1 et \mathbf{k}_3 sont colinéaires et tracées par les flèches noires. (a,d) : $|\mathbf{k}_1|/2\pi = 4 \text{ m}^{-1}$ et $|\mathbf{k}_3|/2\pi = 8 \text{ m}^{-1}$, (b,e) : $|\mathbf{k}_1|/2\pi = 8 \text{ m}^{-1}$ et $|\mathbf{k}_3|/2\pi = 12 \text{ m}^{-1}$, (c,f) : $|\mathbf{k}_1|/2\pi = 4 \text{ m}^{-1}$ et $|\mathbf{k}_3|/2\pi = 12 \text{ m}^{-1}$. Les corrélations sont moyennées pour 8 orientations différentes. Les solutions exactes pour les interactions entre les branches linéaires sont tracées en noir.

La Figure III-55 représente l'évolution des deux premiers couples d'ondes pour une situation non colinéaire.

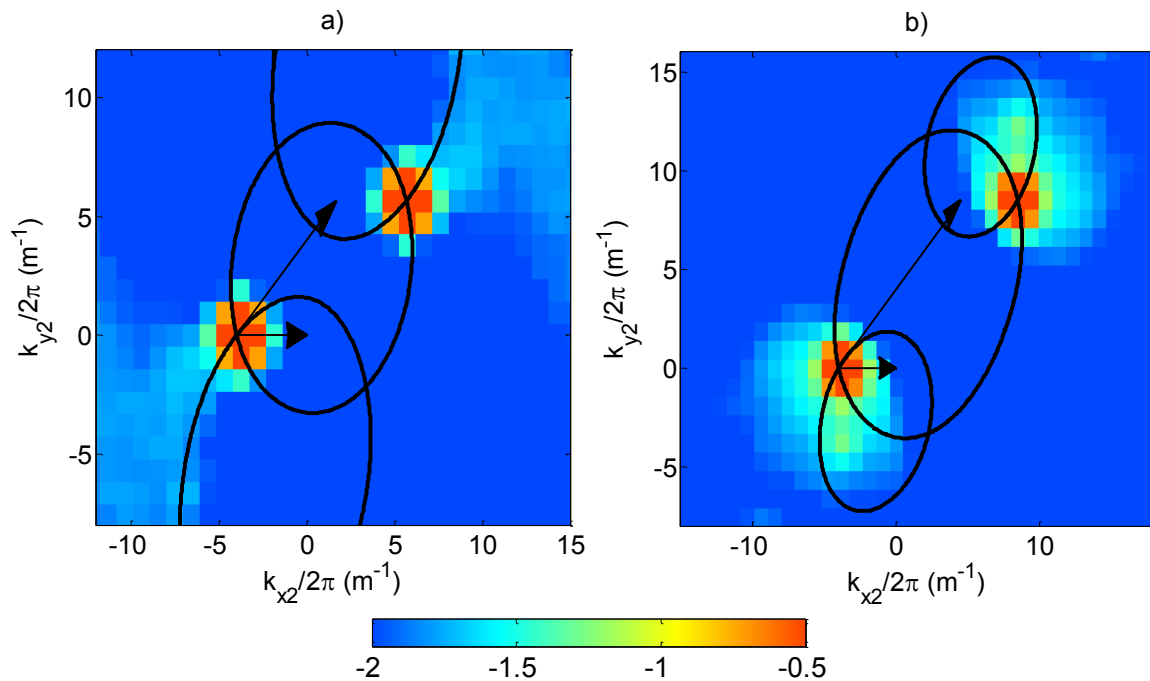


Figure III-55 : Trichérence $B_k^4(\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4)$ pour les mesures de vitesse verticale w . L'échelle de couleur est logarithmique. Les deux ondes fixées \mathbf{k}_1 et \mathbf{k}_3 présentent un angle de $\pi/4$ et sont tracées par les flèches noires. a): $|\mathbf{k}_1|/2\pi = 4 \text{ m}^{-1}$ et $|\mathbf{k}_3|/2\pi = 8 \text{ m}^{-1}$, b): $|\mathbf{k}_1|/2\pi = 4 \text{ m}^{-1}$ et $|\mathbf{k}_3|/2\pi = 12 \text{ m}^{-1}$. Les corrélations sont moyennées pour 8 orientations différentes en effectuant une rotation de l'image. Les solutions exactes pour les interactions entre les branches linéaires sont tracées en noir.

A basse fréquence (figure a)), les corrélations baissent significativement et il ne reste que le point trivial. Au contraire, lorsqu'une composante est haute fréquence (figure b)), les corrélations ne semblent pas faiblir. Cette dernière figure montre que des ondes se propageant dans des directions différentes peuvent interagir mais transfèrent leurs énergies à des ondes ayant des directions similaires. Par exemple le couple d'ondes $(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_3)$ seront colinéaire entre elles (idem pour le couple $(\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_4)$). Cependant, ces figures ne permettent toujours pas d'identifier les types d'interactions en jeu. En effet, la tache de corrélation ne permet pas d'identifier clairement un type de solution.

Le dernier outil pour espérer une clarification sur la nature de ces corrélations est l'utilisation la trichérence $B_{k\omega}^4(\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4, \omega_2, \omega_3, \omega_4)$ dans l'espace spatio-temporel. La Figure III-56 montre deux coupes de celle-ci pour un couple d'onde colinéaire présenté précédemment (Figure III-54 d)).

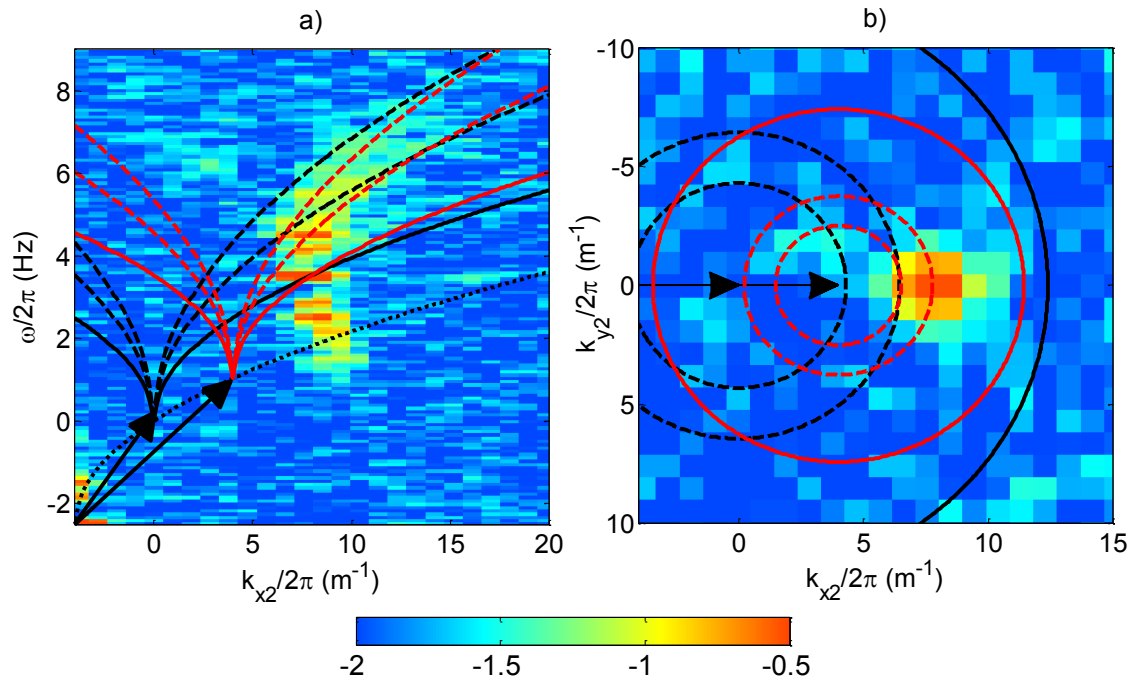


Figure III-56 : Tricohérence $B_{k\omega}^4(\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4, \omega_2, \omega_3, \omega_4)$ en de vitesse verticale w . L'échelle de couleur est logarithmique. Deux ondes colinéaires sont fixées $|\mathbf{k}_1|/2\pi = 4 \text{ m}^{-1}$ et $|\mathbf{k}_3|/2\pi = 8 \text{ m}^{-1}$. Les fréquences correspondantes sont choisies sur la relation de dispersion linéaire. a) coupe en fixant $k_{y2}/2\pi = 0 \text{ m}^{-1}$, b) coupe en fixant $\omega/2\pi = 4.5 \text{ Hz}$. La ligne noire et pleine représente la relation de dispersion linéaire dans le référentiel de (\mathbf{k}_2, ω_2) tandis que les lignes pointillées sont les deux premières harmoniques. Les lignes rouges sont identiques aux noires mais dans le référentiel de (\mathbf{k}_4, ω_4) . Les solutions exactes correspondent aux intersections entre les courbes rouges et noires.

La première figure montre une coupe (k_x, ω) pour $k_y/2\pi = 0 \text{ m}^{-1}$. Les différentes relations de dispersion linéaire et harmonique sont tracées par les courbes. Les solutions exactes sont les intersections entre une courbe rouge et noire. Une vaste zone de corrélation est visible aux alentours des intersections entre les harmoniques. La vue de la coupe spatiale pour $\omega/2\pi = 4.5 \text{ Hz}$ (b), confirme le caractère colinéaire des interactions. Une seconde tache située aux alentours de $\omega/2\pi = 2 \text{ Hz}$ est également visible. Son apparition demeure néanmoins inconnue pour l'heure et semble similaire aux zones comprises visibles pour les interactions à 3-ondes en Figure III-48. Un lien entre les deux branches parallèles visibles dans le spectre de puissance n'est pas à exclure (Figure III-33). Cette figure permet néanmoins de conclure que le peu de signal résonant à 4-ondes concerne essentiellement des interactions entre les branches linéaires et harmoniques. Aucune trace d'interaction entre des branches uniquement linéaires n'est observée, en dehors du point trivial.

III.4 Conclusion

L'ensemble des expériences menées dans la plateforme Coriolis ont permis une meilleure compréhension des interactions résonantes en jeu. En tout premier lieu l'importance de la propriété de l'eau a été mise en lumière. Une fine couche viscoélastique présente en surface ajoute une forte dissipation au système en générant des ondes de compression au sein de cette dernière. Si cette configuration représente probablement une très bonne approximation pour un système naturel tel que l'océan, elle est malheureusement très contraignante pour l'étude fondamentale de la turbulence d'onde. En effet, le maximum de dissipation se produisant aux alentours de 3 Hz , une grande partie du spectre accessible en laboratoire se retrouve perturbé. Si la dissipation est trop forte, le temps de vie d'une onde (temps de dissipation) devient trop faible. Cela brise la séparation d'échelle, empêche tout

transfert résonant et conduit à l'observation classique de spectre de puissance très raide pour de faibles forçages. Pour essayer de contourner le problème, un filtrage de la surface a été réalisé et a conduit à un gain significatif sur les exposants des spectres. Cependant, malgré ces efforts les lois de puissance observées ne semblent pas réellement en accord avec les prédictions théoriques. Seules des fréquences aux environs du forçage et qui sont peu affectées par cette dissipation semblent se rapprocher de la théorie. Mais l'extraction des exposants dans cette zone ne sont pas significatifs (pics dans le spectre).

Cette divergence entre théorie et mesure a été confirmée avec l'analyse des corrélations. Il a été montré que ces dernières se produisent aussi bien à 3 et 4 ondes et concernent essentiellement des interactions entre les branches harmoniques. On peut alors se demander si leur présence à de si faibles degrés de non-linéarité n'est pas causée directement par les batteurs. Bien qu'elles puissent également être excitées par les interactions résonantes, la vérité est probablement un mélange des deux phénomènes. Au vu de ces résultats il est alors possible que les interactions à 4-ondes observées expérimentalement par Phillips et McGoldrick [44,45] et plus récemment par Bonnefoy et al. [47] soient de fait des interactions à 3-ondes entre deux ondes linéaires et une harmonique. En effet, comme expliqué précédemment, bien qu'identiques mathématiquement dans l'espace des fréquences, ces deux solutions ne sont pas similaires ($\omega_1 + \omega_1 = \omega_2 + \omega_4 \neq 2\omega_1 = \omega_2 + \omega_4$) et sont impossibles à départager sans une analyse spatio-temporelle ou en utilisant les corrélations.

L'absence d'interaction à 4-ondes entre les branches linéaires pour ces échelles constitue un fort revers à la théorie. On peut émettre comme hypothèse, qu'à ce niveau de faible non-linéarité et en présence d'une source de dissipation significative, la durée de vie des ondes ne permet pas d'atteindre les temps d'interactions non-linéaire. Les interactions à 4-ondes ne sont alors pas possibles, hormis pour les branches harmoniques à hautes fréquences. Pour ces dernières, le degré de non-linéarité est probablement suffisamment élevé pour abaisser le temps d'interaction sous le temps de dissipation.

La suite des travaux serait de réaliser une expérience avec un niveau de propreté mieux maîtrisé pour augmenter le temps de dissipation et ainsi voir si des interactions à 4-ondes apparaissent. Une autre solution serait d'effectuer une expérience avec des fréquences plus basses. Cependant, du fait de la relation de dispersion des ondes, si l'on veut gagner un ordre de grandeur en fréquence tout en conservant un niveau de confinement similaire, un bassin d'environ $1km$ est nécessaire. Ce qui n'est pas réaliste... Deux autres solutions intermédiaires sont également disponibles. La première est d'effectuer une mesure in-situ des grandes longueurs d'onde dans l'océan. Le problème principal étant le grand nombre de paramètres non-contrôlés. La seconde solution consiste à éliminer la tension de surface de la surface libre responsable du piège du film viscoélastique en réalisant des ondes entre deux fluides aux caractéristiques proches (Ondes interne de gravité dans un fluide bicouche). Ces deux approches constituent le contenu de la partie suivante où des résultats préliminaires seront présentés.

Partie IV Mesures en mer et ondes internes



Ondes internes de gravité dans un système Bicouche

IV.1 Données en mer

IV.1.1 Spectres de puissance

Grace à une collaboration avec Fabrice Ardhuin et son doctorant Charles Peureux (IFREMER), un échantillon de données spatiales d'une mesure in situ a pu être récupéré afin de reproduire l'analyse des corrélations présentée précédemment. Le jeu de données provient de la mer Noire où les vagues sont mesurées par une méthode stéréoscopique qui utilise les motifs naturels de la surface. La Figure IV-1 extraite de Leckler et al. [76] permet d'avoir un aperçu de la méthode.

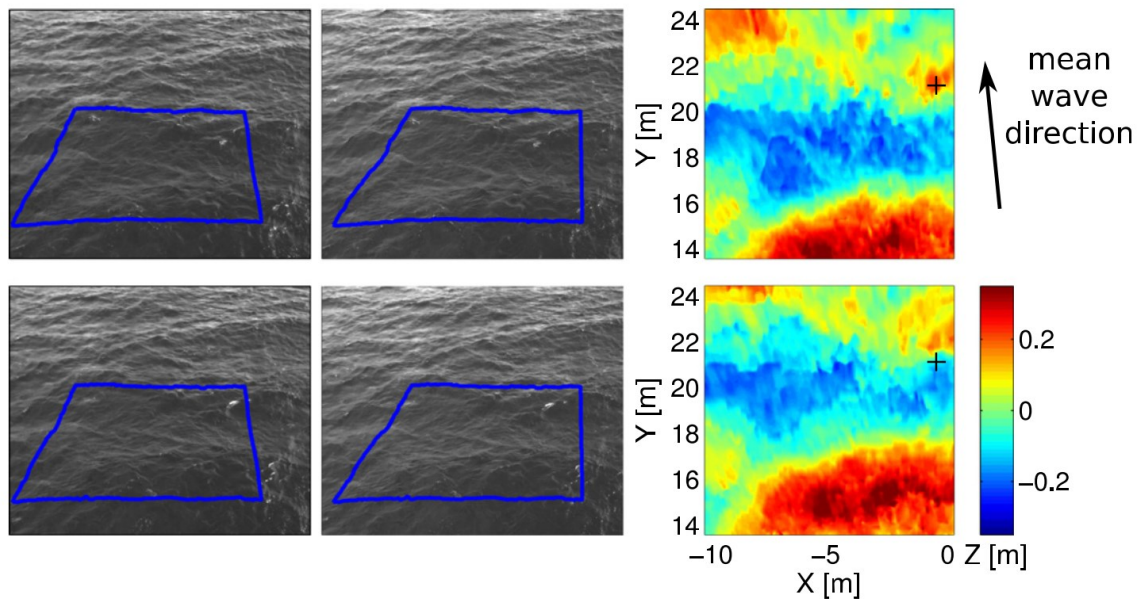


Figure IV-1 : Figure extraite de Leckler et al. [76] . Reconstruction de la surface $z = \eta$ (droite) par corrélations des intensités de la surface (gauche) pour deux pas de temps (haut et bas).

Ces mesures spatiales ont été confrontées à une mesure locale faite par des sondes. La Figure IV-2, également extraite de Leckler et al. [76], montre le spectre de puissance $E^\eta(\omega)$.

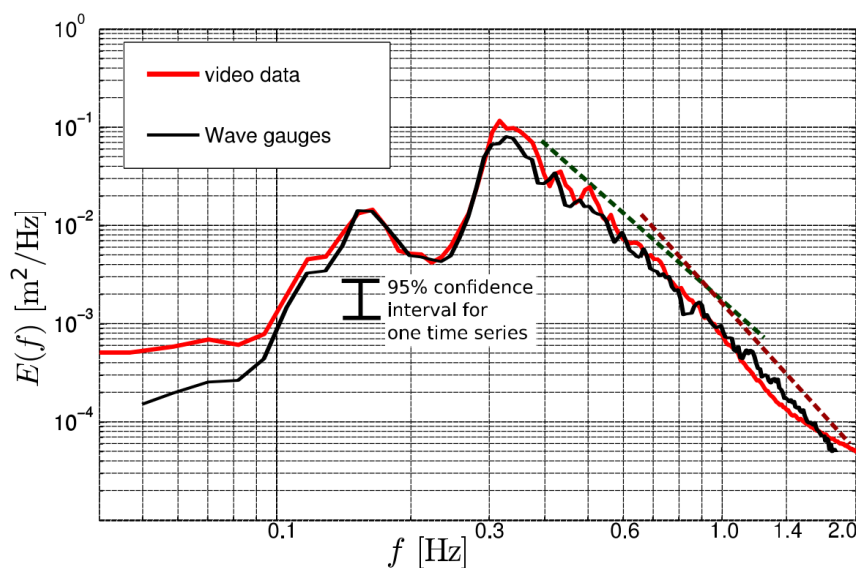


Figure IV-2 : Extrait de Leckler et al. [76]. Spectres de puissance $E^\eta(\omega)$. En rouge, données provenant de la mesure stéréoscopique. En noir, données provenant d'une mesure locale faite par une série de sondes. La ligne pointillée verte montre un exposant de $\alpha = -4$ et la ligne pointillée bordeaux un exposant de $\alpha = -5$.

On observe une bonne concordance entre les deux mesures. Le spectre d'énergie montre un exposant pour la cascade compris entre $-5 < \alpha < -4$. La cascade de Zakharov et le spectre de Phillips sont donc tous deux possibles pour ce système.

Pour plus de détails sur les conditions de mesures ainsi que leurs résultats, voir [76].

La Figure IV-3 montre le spectre spatio-temporel $E^\eta(\mathbf{k}, \omega)$ recalculé à partir des données fournies.

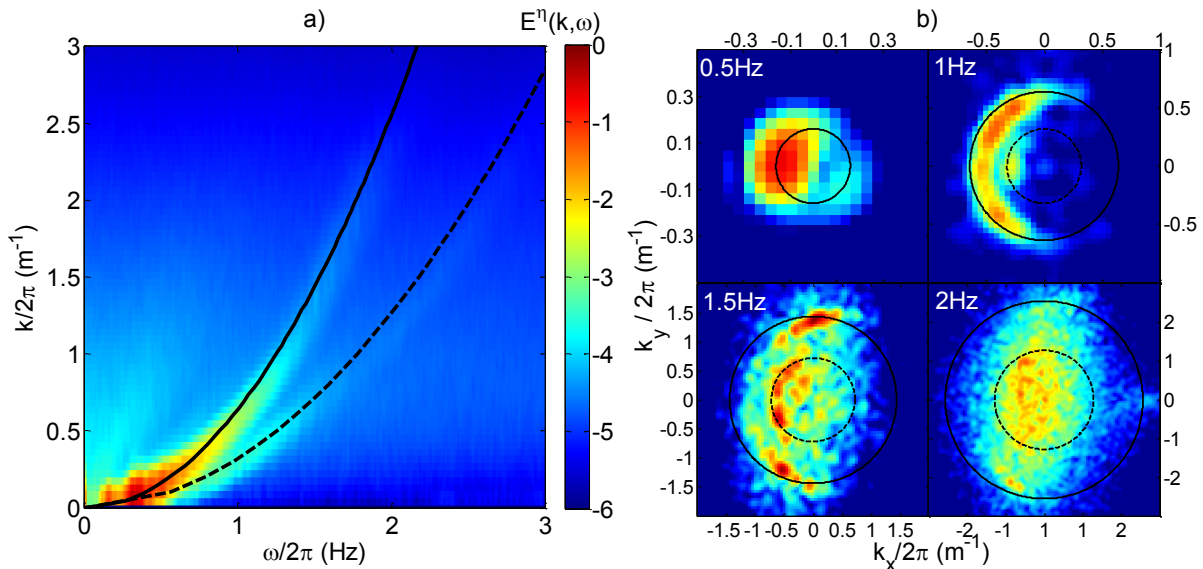


Figure IV-3 : a) Spectre de puissance intégré de la hauteur $E^\eta(k, \omega)$ pour un jeu de données de mesure in-situ. Le logarithme de l'énergie est codé en couleur. La ligne noire est la relation de dispersion linéaire des ondes de gravité. La ligne pointillée est la première harmonique. b) Coupes du spectre de puissance $E^\eta(\mathbf{k}, \omega)$ pour $\omega/2\pi = [0.5, 1, 1.5, 2]$ Hz.

Le spectre intégré angulairement $E^\eta(k, \omega)$ (figure a)) montre du signal le long de la relation de dispersion linéaire jusqu'aux environs de $\omega/2\pi = 2$ Hz. La première branche harmonique est également visible jusqu'à des fréquences légèrement supérieures. Les coupes du spectre $E^\eta(\mathbf{k}, \omega)$ pour des fréquences fixées (figure b)) montrent une forte anisotropie du système. Le décalage de l'énergie par rapport à la relation de dispersion provient d'un effet Doppler qui est provoqué par la présence d'un courant significatif en surface. On observe un changement de direction du spectre à mesure de l'augmentation de la fréquence. A basse fréquence l'essentiel des ondes se propagent le long de la direction k_x puis obliquent progressivement vers la direction de k_y . En localisant le pic principal du spectre à environ $\omega_p/2\pi = 0.34$ Hz et $k_p/2\pi = 0.07$ m^{-1} , on peut estimer la pente typique du système $\epsilon_p = 4\sigma_\eta k_p/2 \sim 0.02$. Où $\sigma_\eta = \sqrt{\langle \eta^2 \rangle} \sim 0.12$ m. Cette pente indique un taux de non-linéarité plus faible que les expériences dans la cuve de Coriolis ($\epsilon_p \sim 0.1$). A noter tout de même la présence de la branche harmonique qui indique la présence de non-linéarités. Figure IV-4 permet de comparer l'exposant du spectre $\alpha \sim -4.5$ à ceux obtenus pour les ondes de surfaces en laboratoire.

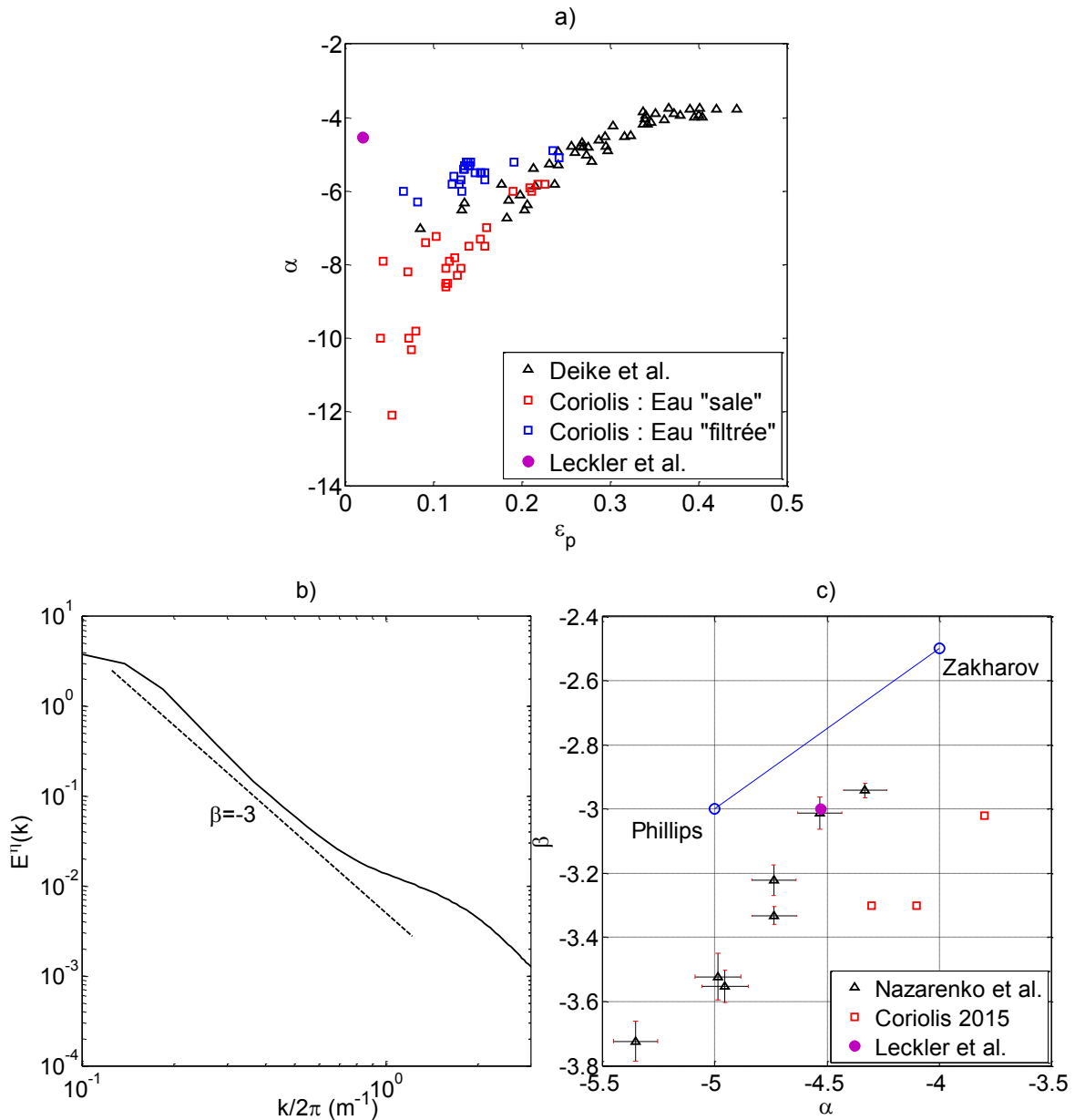


Figure IV-4 : a) Exposant α des spectres de puissances $E^\eta(\omega)$ en fonction de l'intensité des non linéarités ϵ_p . La valeur estimée à partir des données in situ est représentée par le point mauve. Les points rouges et bleus représentent les expériences sur les ondes de surface dans la plateforme Coriolis. Les triangles noirs sont les mesures effectuées dans le bassin de Nantes par Deike et al. [87]. b) Spectre de puissance $E^\eta(k)$. c) Exposants en fréquence α en fonction de l'exposant β en k . Les mesures effectuées dans Coriolis et celles par Nazarenko et al. [86] sont également rapportées.

On observe une nette différence avec les mesures précédentes faites dans la plateforme de Coriolis. Ce point confirme que la pollution de l'eau est négligeable pour ces longueurs d'onde. La figure b) montre que dans la gamme $0.1 \leq k/2\pi \leq 0.8 \text{ m}^{-1}$, le spectre de puissance $E^\eta(k)$ est proche d'une loi de puissance avec un exposant $\beta = -3$. Pour les ondes plus courtes (grand k), du bruit présent à basse fréquence tend à redresser le spectre. La figure b) place cette mesure dans l'espace α, β afin de comparer avec les expériences dans la cuve de Coriolis ainsi que celles rapportés par Nazarenko et al. [86]. On remarque que le point coïncide avec les expériences de Nazarenko et al. et ce malgré une l'intensité de non-linéarité dix fois plus faible.

L'indice d'instabilité de Benjamin-Feir (BFI) $BFI = \epsilon_p / (\sigma\omega/\omega_p) \sim 0.2$ est plus élevé d'environ un ordre de grandeur par rapport aux expériences dans Coriolis voir (III.2.1.4)). Par comparaison, Onorato et

al. [40] commencent à voir des effets pour des valeurs de $BFI > 0.1$. On peut donc s'attendre à voir la trace de cette interaction dans les calculs de corrélations présentés par la suite.

IV.1.2 Corrélations

L'analyse et les solutions théoriques sont identiques à celles décrite pour l'expérience précédente sur les ondes de surface dans la cuve de Coriolis (III.3.1). Cette section présentera donc uniquement les résultats issus des calculs de corrélation. Dans un premier temps une analyse à 3-onde sera effectuée pour chercher à mettre en évidence un possible couplage entre les branches linéaires et harmoniques. Puis, dans un second temps, les corrélations d'ordre quatre seront utilisées pour voir si des interactions à 4-ondes existent pour des ondes uniquement présentes sur la relation de dispersion linéaire. Pour la description des outils statistiques utilisés, se reporter à la partie II.3.1.2.

IV.1.2.1 Interactions à 3-ondes

Pour avoir une vue plus globale de la présence ou non d'interaction, on commence l'analyse en fréquence où le nombre de dimensions est le plus faible. La Figure IV-5 montre les corrélations normalisées $C_{\omega}^3(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ pour une fréquence $\omega_2/2\pi = 8\text{Hz}$ ainsi que la bicohérence $B_{\omega}^3(\omega_2, \omega_3)$.

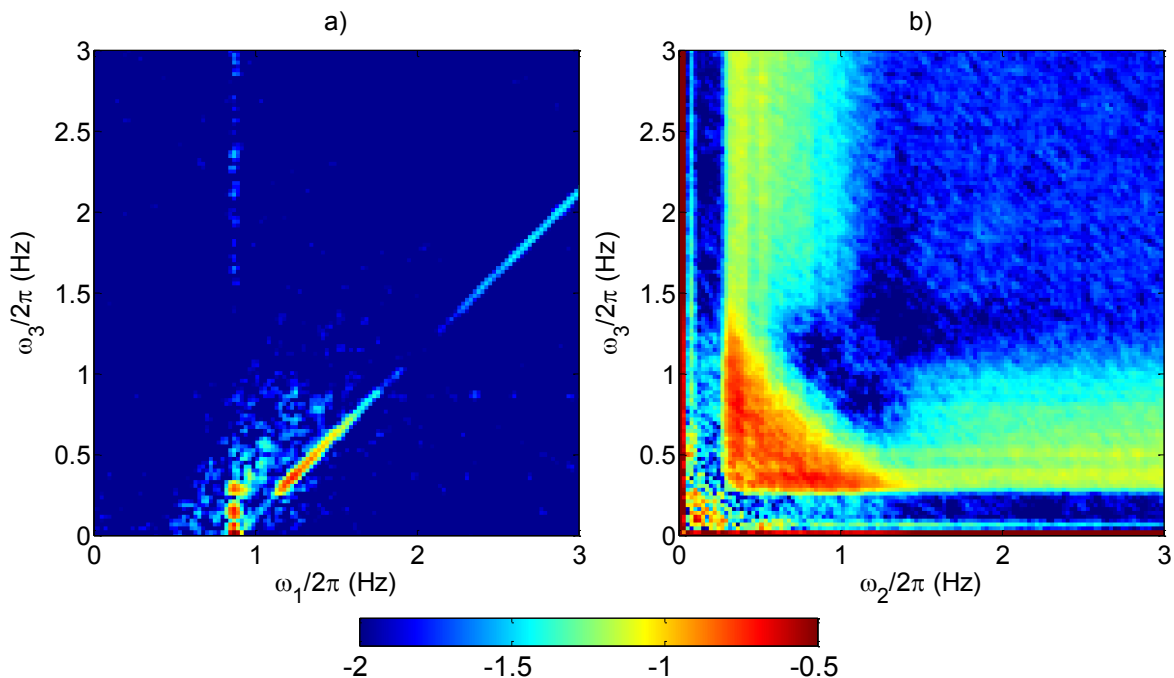


Figure IV-5 : a) Corrélations d'ordre 3 normalisées $C_{\omega}^3(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ pour $\omega_2/2\pi = 0.8\text{ Hz}$. Echelle de couleur logarithmique. La couleur bleue du fond représente le niveau de convergence statistique qui est d'environ 10^{-2} . La ligne résonante ($\omega_1 = \omega_2 + \omega_3$) ressort significativement du bruit. b) Bicohérence $B_{\omega}^3(\omega_2, \omega_3)$. L'échelle de couleur est logarithmique.

La corrélation C_{ω}^3 (figure a)) nous indique la présence significative d'un signal résonant à 3-ondes. On observe deux zones de corrélation. Une première à basse fréquence aux environs de $\omega_1/2\pi = 1.2\text{Hz}$ où le maximum de corrélation a une intensité d'un ordre de grandeur supérieure au bruit de fond statistique. La seconde zone concerne les plus hautes fréquences et montre une intensité plus faible. A la vue du spectre spatio-temporel (Figure IV-3), pour ces fréquences, l'énergie est pratiquement nulle sur la branche linéaire. Ce signal est alors probablement un mélange entre des interactions entre les branches harmoniques et du bruit (spécialement pour les très hautes fréquences). La bicohérence B_{ω}^3 tracée sur la figure b) permet une vue d'ensemble des corrélations à 3-ondes présentes dans le système. On retrouve les deux zones vues précédemment sur C_{ω}^3 . La plus forte est concentrée aux

basses fréquences tandis que la seconde s'étend sur les bords de la figure. Ce dernier point tend à indiquer la présence de couplages non locaux. L'élargissement non-linéaire du spectre est estimé comme étant proche de $\delta k/2\pi \sim 0.1 m^{-1}$. Similairement à l'expérience dans la cuve de Coriolis, cette valeur n'est pas assez élevée pour permettre des interactions quasi-résonantes aux zones où les fortes corrélations sont observées. Il est alors probable que l'on observe uniquement un couplage entre les ondes liées (harmoniques) et la branche linéaire.

Pour confirmer cette hypothèse, on peut regarder la forme des interactions dans l'espace des \mathbf{k} . La Figure IV-6 trace la bicohérence $B_k^3(\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3)$ pour une onde fixée \mathbf{k}_2 .

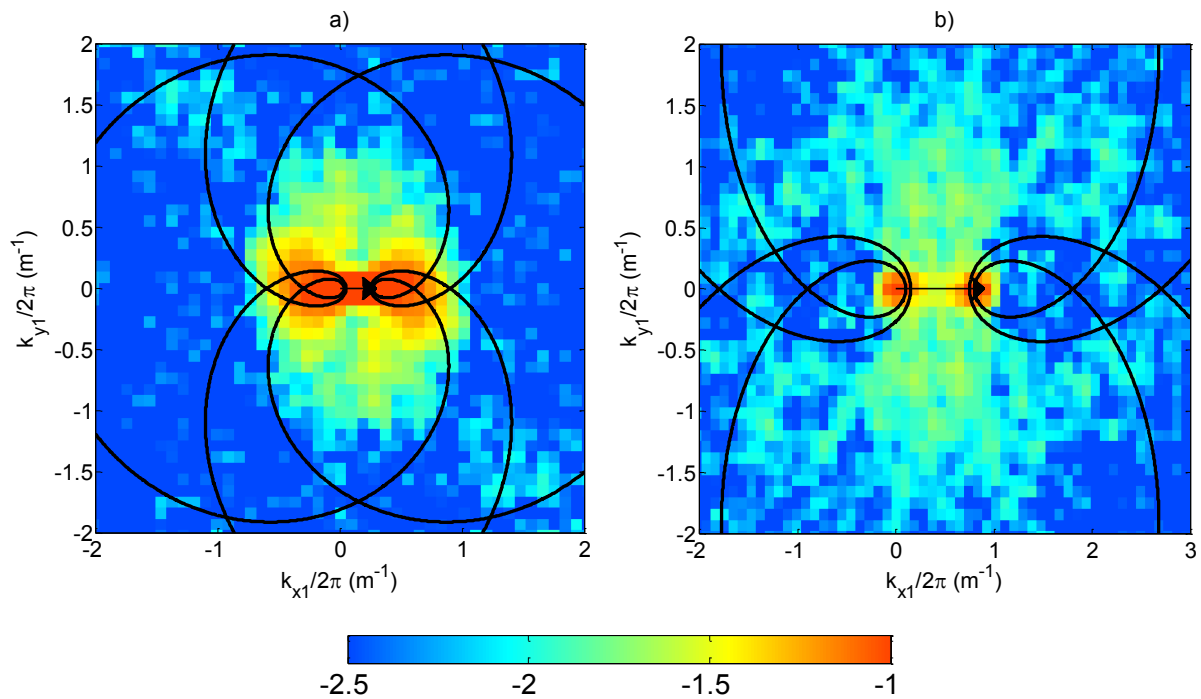


Figure IV-6 : Bicohérence $B_k^3(\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3)$. L'échelle de couleur est logarithmique. La norme de l'onde est fixée à $|\mathbf{k}_2|/2\pi = 0.3 m^{-1}$ (a) et $|\mathbf{k}_2|/2\pi = 0.9 m^{-1}$ (b). Les corrélations sont moyennées pour 8 différentes orientations de \mathbf{k}_2 en effectuant une rotation de l'image. Les solutions exactes pour les interactions entre les branches linéaires et harmoniques sont tracées en noir.

Pour chaque figure, l'onde fixée \mathbf{k}_2 est représenté par la flèche noire. Les solutions théoriques et exactes pour des interactions entre les branches harmoniques et linéaires sont tracées en noir (Voir III.3.1 pour plus de détails). Pour une onde basse fréquence (figure a)), on observe une forte concentration de corrélation pour les solutions colinéaires. Un léger étalement directionnel est également présent. Ce dernier est probablement lié à des quasi-résonances entre les branches harmoniques et linéaires, là où les deux relations de dispersion sont proches (voir III.3.1 pour plus d'explications). La figure b) montre qu'une onde ayant une fréquence plus élevée présente un niveau de corrélation beaucoup plus faible. Les deux points rouges visibles correspondent à une interaction particulière qui fait intervenir une fréquence nulle ($k/2\pi = 0 m^{-1}$) et n'ont donc pas de signification physique.

Pour confirmer la nature des interactions, il est utile de regarder les corrélations spatio-temporelles $B_{k\omega}^3(\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \omega_2, \omega_3)$. La Figure IV-7 montre cet estimateur pour les deux ondes présentées dans la figure précédente.

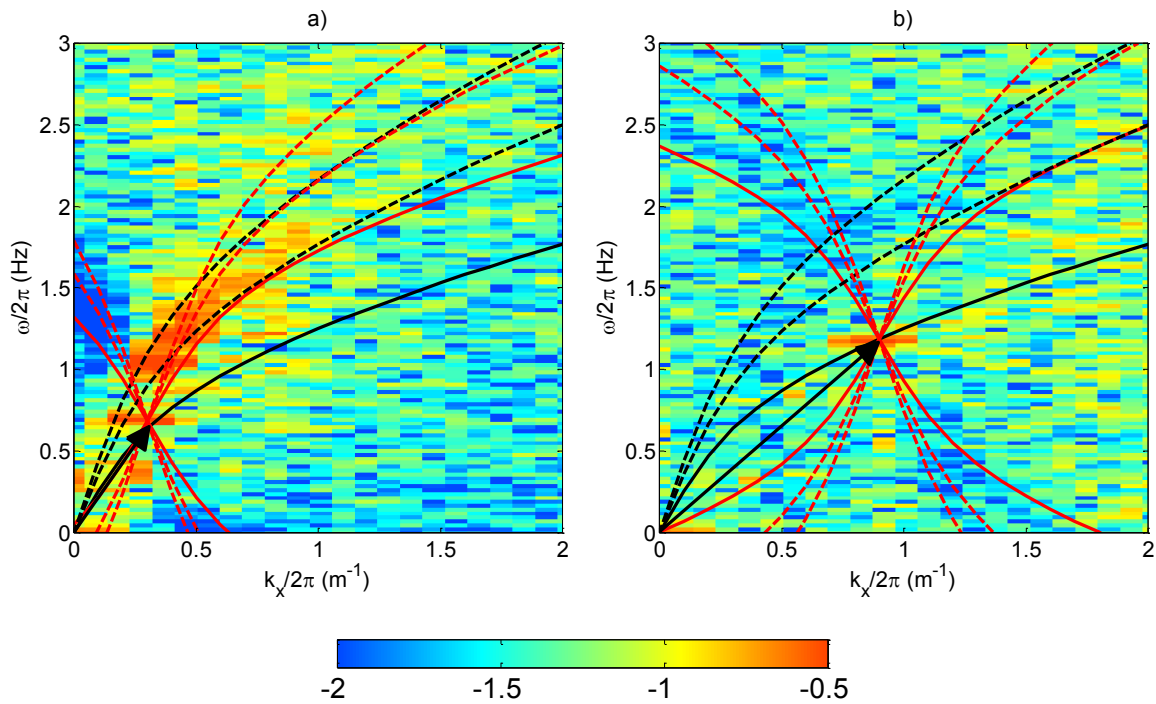


Figure IV-7: Coupe de la Bicoherence $B_{k\omega}^3(\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \omega_2, \omega_3)$ en $k_y/2\pi = 0m^{-1}$. L'échelle de couleur est logarithmique. Pour chaque figure une onde (\mathbf{k}_2, ω_2) est fixée (a) : $|\mathbf{k}_2|/2\pi = 0.4 m^{-1}$ et (b) : $|\mathbf{k}_2|/2\pi = 0.9 m^{-1}$. La fréquence correspondante est choisie sur la relation de dispersion linéaire. La ligne continue noire représente la relation de dispersion linéaire dans le référentiel de (\mathbf{k}_1, ω_1) tandis que les lignes pointillées sont les deux premières harmoniques. Les lignes rouges sont identiques aux noires mais dans le référentiel de (\mathbf{k}_3, ω_3) . Les solutions exactes correspondent aux intersections entre les courbes rouges et noires.

A cause de la faible quantité de données disponible, cet estimateur ne présente qu'un faible niveau de convergence. Ainsi, seule la coupe $k_y/2\pi = 0m^{-1}$ contenant l'essentiel des corrélations est présentée. Les différentes branches linéaires (lignes continues) et harmoniques (lignes pointillées) sont rapportées et les solutions exactes correspondent aux intersections entre les courbes rouges et noires. Pour la première figure, on observe que la forte zone de corrélation correspond bien à des interactions entre les branches harmoniques et linéaires. Aucune corrélation n'est présente en proximité des deux lignes continues. Cela confirme qu'aucune quasi-résonance entre des ondes uniquement linéaires n'existe. Similairement à la Figure IV-6 b), la figure b) ne montre aucune corrélation convergée, hormis éventuellement un léger pic discutable à l'intersection entre la courbe rouge et la première harmonique noire. A noter que le point de corrélation situé au bout de la flèche noire représente une triade particulière ($\omega_3/2\pi = 0Hz$) qui n'a pas de signification physique pour ce système.

Cette analyse rapide a permis de confirmer la présence d'ondes liées qui sont générées par des interactions à 3-ondes ainsi que l'absence d'interaction quasi-résonante entre les branches linéaires. Ces deux points montrent une grande ressemblance avec les expériences réalisées dans la plateforme de Coriolis.

IV.1.2.2 Interactions à 4-ondes

La suite de l'analyse va se rapporter aux interactions à 4-ondes. Malgré une convergence significative, les expériences dans la plateforme de Coriolis n'ont montré aucune interaction entre les branches linéaires. Seules quelques traces d'interactions avec les branches harmoniques étaient visibles. On cherche donc à savoir si ces interactions existent pour des longueurs d'onde plus grandes où la pollution de surface devient négligeable.

Similairement aux interactions à 3-ondes, on commence par travailler en fréquence avec les corrélations normalisée $C_{\omega}^4(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4)$ et la trichérence $B_{\omega}^4(\omega_2, \omega_3, \omega_4)$ pour avoir une vue globale de la présence ou non d'un signal résonant. La Figure IV-8 trace un échantillon de ces deux estimateurs.

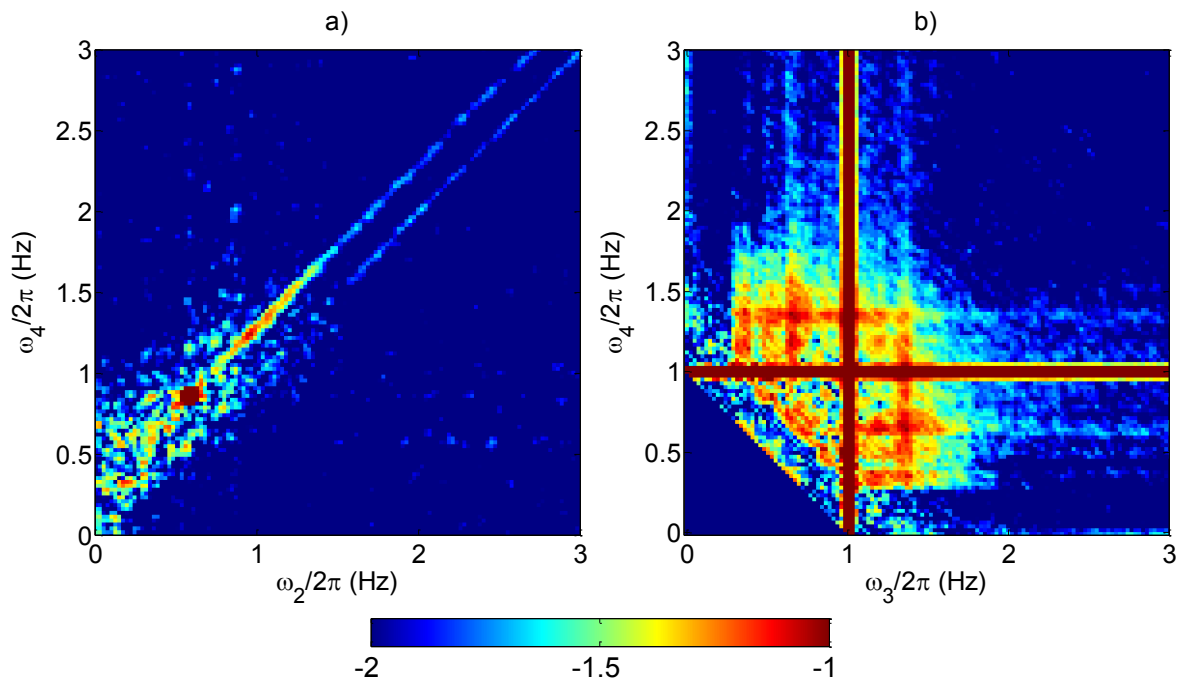


Figure IV-8 :a) Corrélations d'ordre 4 $C_{\omega}^4(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4)$ pour $\omega_1/2\pi = 0.6 \text{ Hz}$ et $\omega_3/2\pi = 0.9 \text{ Hz}$ (échelle de couleur logarithmique). La couleur bleue du fond représente le niveau de convergence statistique qui est d'environ 10^{-2} . b) Trichérence $B_{\omega}^4(\omega_2, \omega_3, \omega_4)$. L'échelle de couleur est logarithmique et $\omega_2/2\pi = 1 \text{ Hz}$.

La figure a) montre la corrélation C_{ω}^4 pour un couple de fréquence $\omega_1/2\pi = 0.6 \text{ Hz}$ et $\omega_3/2\pi = 0.9 \text{ Hz}$. La ligne résonante $\omega_1 + \omega_2 = \omega_3 + \omega_4$ ressort nettement du bruit statistique avec un maximum situé autour de $\omega_2/2\pi = 1 \text{ Hz}$. Une légère trace est également visible à plus haute fréquence. La trichérence B_{ω}^4 tracée en figure b) indique une forte zone de corrélation de nature assez locale et centrée sur l'intersection des solutions triviales $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \omega_4$. Ce comportement est significativement différent de celui observé dans la cuve de Coriolis où seule des couplages à haute fréquence le long des lignes triviales étaient visibles. Ce schéma semble se rapprocher aux observations dans le régime gravito-capillaire présentées dans la première partie. L'interrogation suivante porte sur la nature de ces interactions : interactions à 4-ondes comme le prévoit la théorie, interactions avec les harmoniques, ou une marque de l'instabilité de Benjamin-Feir ?

Pour essayer de répondre à cette question on poursuit l'analyse dans l'espace des \mathbf{k} en calculant la trichérence spatiale $B_k^4(\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4)$. En s'inspirant des corrélations en fréquence, on commence par regarder les corrélations pour des ondes proches (interactions locales). La Figure IV-9 montre les résultats pour une configuration colinéaire (figure a)) et avec un angle de $\pi/6$ (figure b)).

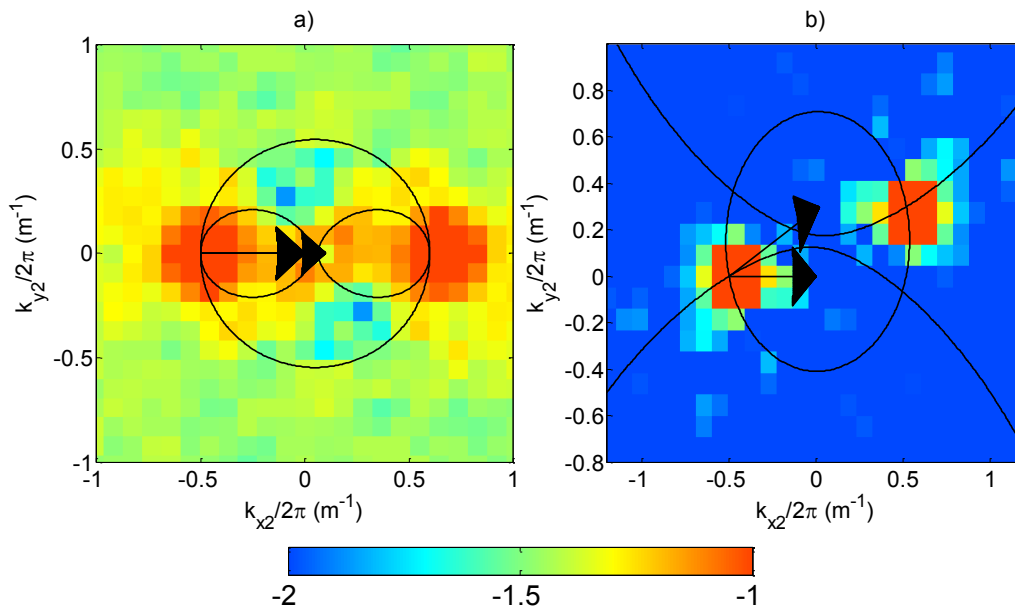


Figure IV-9 : Tricohérence $B_k^4(\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4)$. L'échelle de couleur est logarithmique. Les deux ondes fixées \mathbf{k}_1 et \mathbf{k}_3 sont tracées par les flèches noires. a) $|\mathbf{k}_1|/2\pi = 0.4 \text{ m}^{-1}$ et $|\mathbf{k}_3|/2\pi = 0.6 \text{ m}^{-1}$, Les corrélations sont moyennées pour 8 différentes orientations en effectuant une rotation de l'image. Les solutions exactes pour les interactions entre les branches linéaires sont tracées en noir. b) idem a) mais avec un angle de $\pi/6$ entre les deux ondes fixées.

Les deux ondes fixées ainsi que les solutions théoriques pour des interactions entre les branches linéaires sont tracées en noires. Pour la situation colinéaire (figure a)), malgré une faible convergence provoquée par la proximité des deux ondes, une zone de corrélations semble être présente à proximité des solutions. La situation colinéaire semble dominer. La figure b) montre qu'en présence d'un angle entre deux ondes proches, les corrélations disparaissent complètement, ne laissant que les solutions triviales.

Ces deux figures semblent indiquer que la zone de corrélation visible sur la tricohérence B_ω^4 (Figure IV-8 b)) ne contient que des interactions colinéaires. Malheureusement la nature des interactions demeure difficile à déterminer. Il est intéressant de noter que les interactions colinéaires sont interdites par la théorie à cause de la valeur nulle du coefficient de couplage [23]. En ajoutant le caractère fortement local des interactions, il semblerait que l'on observe alors l'instabilité de Benjamin-Feir qui est censée se produire pour ce type de système ($BFI > 0.1$).

La Figure IV-10 montre les corrélations pour deux ondes avec une séparation d'échelle significative. La figure a) rapporte le cas colinéaire. Pour plus de clarté, les solutions exactes similaires à la figure précédente et qui sont confinées vers les deux points triviaux ne sont pas rapportées. On observe par ailleurs que dans cette région, aucune corrélation n'est visible. En revanche, deux points fort de corrélation sont observés pour des $k_x/2\pi \sim 4 \text{ m}^{-1}$. Au vu du spectre (Figure IV-3), ces valeurs élevées ne peuvent correspondre qu'à la branche harmonique. On a donc, similairement à l'expérience dans la cuve de Coriolis, des interactions entre les branches linéaires et harmoniques. La figure b) montre le même phénomène mais en moins intense pour une situation non colinéaire.

Il n'est malheureusement pas possible de poursuivre l'analyse avec les corrélations spatio-temporelles du fait du trop faible nombre de données. Les niveaux de corrélation étant plutôt faibles, la convergence statistique nécessaire pour les observer n'est pas atteinte.

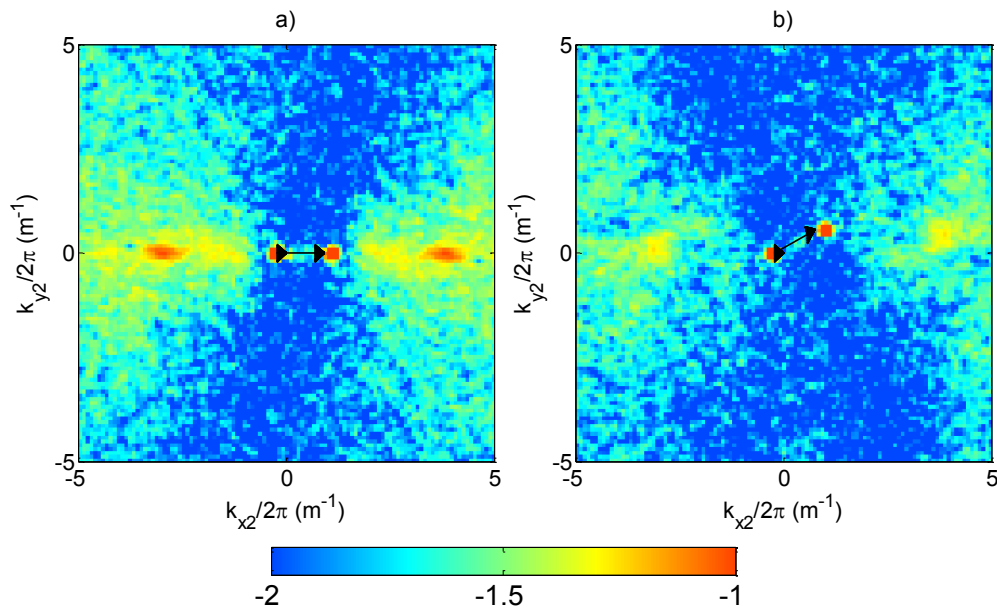


Figure IV-10 : Tricoherence $B_k^4(\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4)$. L'échelle de couleur est logarithmique. Les deux ondes fixées \mathbf{k}_1 et \mathbf{k}_3 sont tracées par les flèches noires. a) $|\mathbf{k}_1|/2\pi = 0.23 \text{ m}^{-1}$ et $|\mathbf{k}_3|/2\pi = 1.14 \text{ m}^{-1}$, Les corrélations sont faites le long de la direction k_y sans intégration angulaire b) idem a) mais avec un angle de $\pi/6$ entre les deux ondes fixées.

IV.1.3 Conclusion

Cette analyse rapide a permis de confirmer une grande part des observations faites dans la plateforme de Coriolis.

En premier lieu, la présence d'ondes liées peut être attribuée à des interactions à 3-ondes. Ces dernières constituent l'ensemble du signal résonant à 3-ondes et semblent pouvoir exister pour de très faibles niveaux de non-linéarité. Aucune interaction quasi-résonante entre les branches linéaires n'est observée.

Les interactions à 4-ondes montrent un mélange de plusieurs types d'interactions. Similairement à l'expérience dans Coriolis, des interactions non-locales à 4-ondes entre les branches linéaires et harmoniques sont présentes. Un signal très net d'interactions locales est également visible pour les corrélations en fréquences. Bien que moins présent pour les corrélations en \mathbf{k} , ces interactions semblent être essentiellement colinéaires. Ce caractère unidirectionnel des interactions étant a priori impossible (pour des ondes linéaires) dans le cadre de la théorie de la turbulence faible, il est alors probable que l'on observe la trace de l'instabilité modulationnelle de Benjamin-Feir. Cependant il n'est pas possible de trancher définitivement entre les deux interactions. Une meilleure compréhension serait atteignable avec une mesure plus longue et possédant une meilleure résolution spatiale. Cela permettrait une analyse en espace-temps avec des solutions qui sont mieux définies et plus aisées à interpréter (moins pixélisées).

IV.2 Ondes internes de gravité

Cette partie présentera les résultats préliminaires d'une expérience faite dans la cuve de Coriolis sur les ondes internes de gravité. L'un des objectifs de ce type d'expérience est de s'affranchir du problème de pollution de surface en supprimant la tension de surface de l'interface. Cette approche étant inédite, les expériences ont été essentiellement réalisées à des fins exploratoires ainsi que pour valider si la génération et la mesure d'un tel système est réalisable à cette échelle. Du fait du peu de résultats disponibles et de la complexité du système, seule une description et une analyse très élémentaire seront présentées.

IV.2.1 Relation de dispersion linéaire des ondes internes de gravité

La physique des ondes dans un milieu stratifié est plus complexe que celle des ondes sur une surface libre. La Figure IV-11 montre une description 1D générale du système.

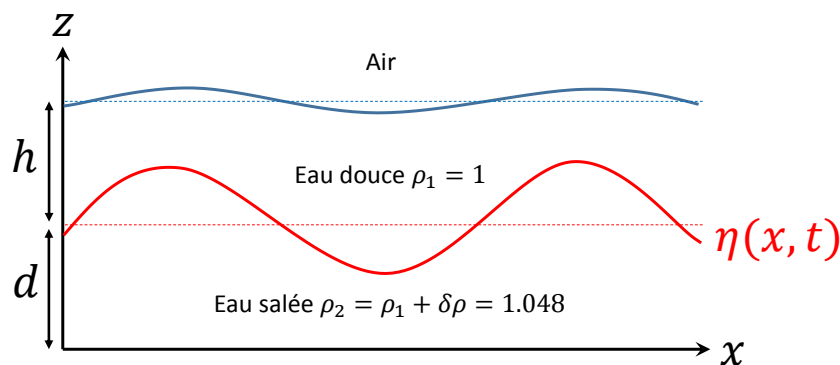


Figure IV-11 : Schéma 1D d'une onde interne de gravité à l'interface entre une couche d'eau douce et d'eau salée.

Les ondes se propagent à l'interface de deux fluides de densité différente en situation stable. Dans la situation idéale où la densité ρ présente une discontinuité (gradient de densité infinie, pas de mélange) et qu'une surface libre existe sur la partie supérieure, il est possible de calculer analytiquement la relation de dispersion linéaire des ondes à l'interface. La formulation pour une situation générale est [4]:

$$\begin{aligned} (\omega^2 - gk \tanh(kh)) \left(\omega^2 - \frac{\Delta\rho}{\rho_2} gk \tanh(kd) \right) \\ = \frac{\rho_1}{\rho_2} \omega^2 \tanh(kd) (gk - \omega^2 \tanh(kh)) \end{aligned} \quad IV-1$$

Celle-ci est quadratique en ω et comporte donc deux solutions. L'une concerne un mode dit « rapide » qui possède une dynamique équivalente aux ondes de surface. La seconde au contraire présente une dynamique plus lente qui est plus adaptée pour une expérimentation en laboratoire. Pour les conditions de l'expérience présentée par la suite, les deux épaisseurs de fluides d et h sont équivalentes et font 35cm . Les deux relations de dispersion correspondant à ces conditions sont tracées sur la Figure IV-12.

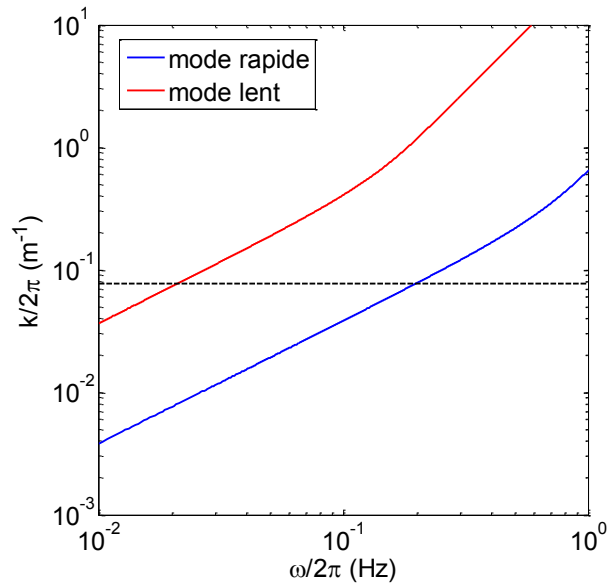


Figure IV-12 : Relations de dispersion pour une onde interne de gravité. Les deux couches font la même épaisseur (35cm). La ligne pointillée noir représente la dimension de la cuve de Coriolis.

Le k correspondant au diamètre de la cuve de Coriolis est tracé par la ligne pointillée noire. Les batteurs utilisés pour forcer les ondes sont les mêmes que pour les ondes de surface. Leur taille caractéristique d'environ $1m$ impose une fréquence de forçage autour de $\omega_p/2\pi \sim 0.15 Hz$ pour un maximum d'efficacité. Cette dimension correspond également à la zone de mesure accessible avec la méthode de Stéréo-PIV ($k/2\pi > 1m^{-1}$, voir la section suivante).

IV.2.2 Dispositif expérimental

L'expérimentation sur les ondes internes de gravité est semblable en beaucoup d'aspects aux ondes de surface. La cuve est remplie en deux temps avec les deux densités différentes : de l'eau douce avec une densité de $\rho_1 = 1$, puis avec de l'eau salée avec une densité de $\rho_2 = 1.048$. Pour limiter le mélange, l'eau salée est injectée sous l'eau douce en de multiples points et à très faible débit. Il en résulte une stratification en bicouche dont l'interface fait quelques centimètres (Voir Figure IV-15 pour un aperçu du profil de densité après le remplissage).

Une mesure locale est réalisée avec des sondes ultrasonores. Le temps de vol d'un paquet d'ondes acoustique est mesuré sur une distance fixée. La vitesse du son étant plus faible dans l'eau douce que dans l'eau salée, une différence dans leur proportion entraîne un changement du temps de vol et permet la mesure de la position de l'interface. Une sonde de mesure de conductivité est également utilisée pour réaliser des profils de densité. Il est alors possible de suivre l'évolution de l'interface dans le temps.

Une mesure spatiale similaire aux ondes de surface est également implémentée. L'angle de vue ainsi que la position des caméras sont inchangés ce qui offre une zone de recouvrement légèrement réduite de l'ordre de $1 \times 1.5 m^2$ du fait du changement d'indice. La fréquence d'acquisition des caméras est abaissée à $6Hz$ et une plaque de plexiglas est positionnée sur la surface. Celle-ci permet une mesure sous la surface libre en s'affranchissant des perturbations créées par des vagues parasites en surface. La principale difficulté de cette mesure vient du fait que l'interface à mesurer se trouve sous la surface libre. Dans cette situation, le changement d'indice rend inutilisable le modèle de calibration de Tsai utilisé pour les ondes de surface. Récemment, Astruc et al. [112] ont tout de même utilisé ce modèle de calibration erronée pour une mesure similaire en corrigeant l'indice après l'étape de reconstruction 3D. Bien que plus facile à réaliser, cette solution semble néanmoins générer une erreur importante

d'environ 4 *pix*. Pour limiter celle-ci, une autre méthode de calibration décrite par la suite a été utilisée.

IV.2.2.1 Calibration

La méthode utilisée a été développée par Machicoane et al. [123]. Contrairement au modèle de Tsai, celle-ci n'incorpore pas de modèle mathématique de caméra permettant de réduire le nombre de paramètre libre du système. La seule hypothèse utilisée est que la lumière se propage de manière rectiligne dans la zone de mesure. Il est alors possible d'effectuer des mesures dans des situations complexes, telle qu'à travers des surfaces non planes ou des interfaces présentant des changements d'indices. Néanmoins, le prix d'une telle liberté est une plus grande complexité de réalisation pratique. En effet, il est nécessaire de connaître précisément l'ensemble des points de calibration dans les 3 dimensions de l'espace physique. En comparaison, le modèle de Tsai du fait de son plus faible nombre de libertés (paramètres du modèle), se contente de connaître les points dans un plan arbitraire. Il est donc nécessaire d'effectuer une série d'images d'une grille de calibration à des hauteurs connues. La Figure IV-13 montre la configuration générale de la procédure de calibration.

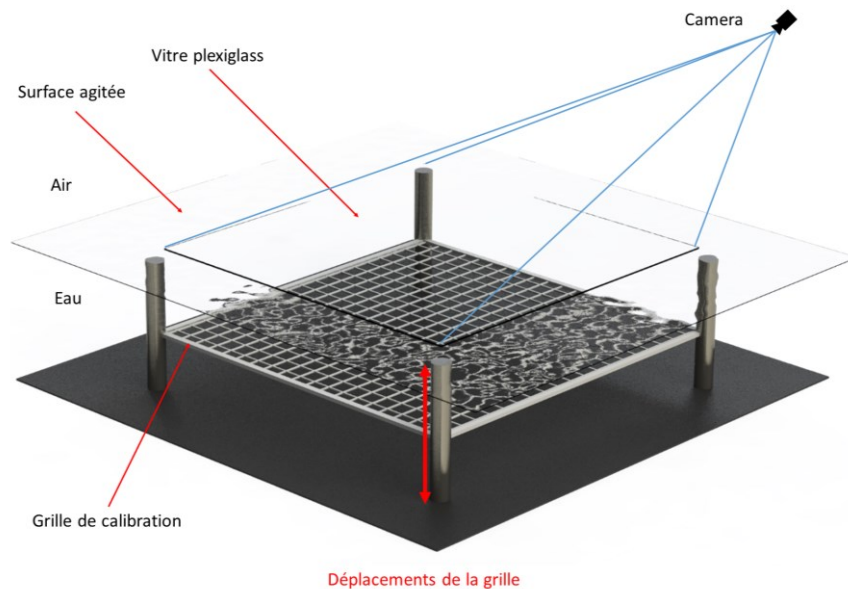


Figure IV-13 : Schéma de la procédure de calibration pour un milieu à changement d'indice. La grille est déplacée verticalement afin d'obtenir un ensemble de points connus en (x, y, z) . Une vitre de plexiglas est placée à la surface pour éliminer les distorsions parasites créées par les vagues à la surface.

La grille est déplacée verticalement dans l'eau guidée par quatre poteaux préalablement percés à des intervalles réguliers. Pour chaque position verticale de grille z , une projection 2D f_z est réalisée pour obtenir la relation entre les positions dans le repère physique (x, y) et les pixels dans le repère du capteur caméra (X, Y) . Celle-ci peut être linéaire ou d'ordre supérieur pour corriger d'éventuelles distorsions optiques. Une fois la série de projections réalisées, on obtient pour chaque pixel caméra un ensemble de points associés (x, y, z) . En faisant l'hypothèse que la lumière se propage en ligne droite dans le milieu, on réalise une régression linéaire en trois dimensions pour chaque pixel caméra. On obtient alors les équations des droites de lumière traversant la zone de mesure dont les paramètres serviront à la reconstruction stéréoscopique. La Figure IV-14 résume la méthode en dimension réduite pour plus de clarté.

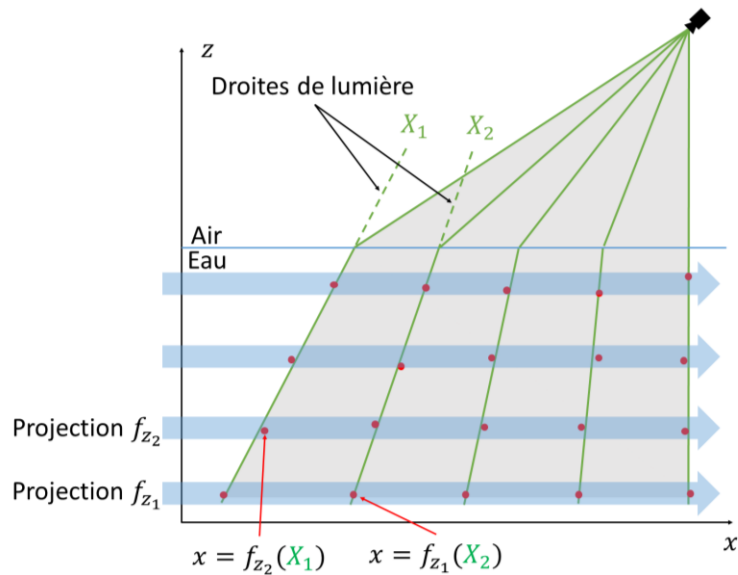


Figure IV-14 : Schéma de l'obtention de la droite de lumière en dimension réduite $((x, z), (X))$. Pour chaque hauteur de grille z , une projection f_z est réalisée pour obtenir la relation entre (x) et (X) (flèches bleues). Ensuite, pour chaque pixel caméra X , une régression linéaire (ligne verte) est calculée sur l'ensemble des positions physiques (x, z) données par les projections (points rouges).

Le nombre minimum de plans nécessaire à l'obtention de la droite est donc de trois. Cependant, la grille mesurant $3 \times 3 \text{ m}^2$ il est difficile d'effectuer une translation verticale de haute précision tout en étant immergée. Il est alors intéressant d'augmenter le nombre de plans pour réduire les erreurs de positionnement.

Du fait de la complexité du trajet optique, les fonctions de calibration F et G utilisées précédemment pour la reconstruction stéréoscopique des ondes de surface ne sont plus exprimables par une simple matrice. Pour chaque position de pixel (X_a, Y_a) sur la caméra « a » il est nécessaire de connaître les six paramètres pour générer la droite de lumière : les coordonnées apparentes du point visé dans le plan de référence (x_a, y_a, z_0) et les trois coefficients directeurs de la droite (Ax_a, Ay_a, Az_a) . Pour éviter de stocker tous ces paramètres pour chaque pixel et permettre une précision sous pixel, des fonctions numériques d'interpolations sont utilisées. Elles sont au nombre de huit pour chaque caméra :

$$\begin{aligned}
 X_a &= F_{a,1}(x_a, y_a, z_0) \\
 Y_a &= F_{a,2}(x_a, y_a, z_0) \\
 x_a &= G_{a,1}(X_a, Y_a) \\
 y_a &= G_{a,2}(X_a, Y_a) \\
 z_0 &= G_{a,3}(X_a, Y_a) = \text{Cte} \\
 Ax_a &= G_{a,4}(X_a, Y_a) \\
 Ay_a &= G_{a,5}(X_a, Y_a) \\
 Az_a &= G_{a,6}(X_a, Y_a)
 \end{aligned}
 \tag{IV-2}$$

Les deux premières fonctions F permettent un passage de l'espace physique dans le plan de référence à l'espace caméra. Les six autres fonctions G correspondent aux paramètres des droites de lumière dans l'espace physique pour une position quelconque dans le repère du capteur.

IV.2.2.2 Stéréo-PIV

Tout comme pour les ondes de surface, on cherche à obtenir le champ complet de hauteur et de vitesse de l'interface. Afin d'effectuer les corrélations, le fluide est ensemencé de particules de polystyrène

de $700\mu\text{m}$. Comme on peut le voir sur la Figure IV-15, celles-ci sont triées en densité pour obtenir un confinement à l'interface.

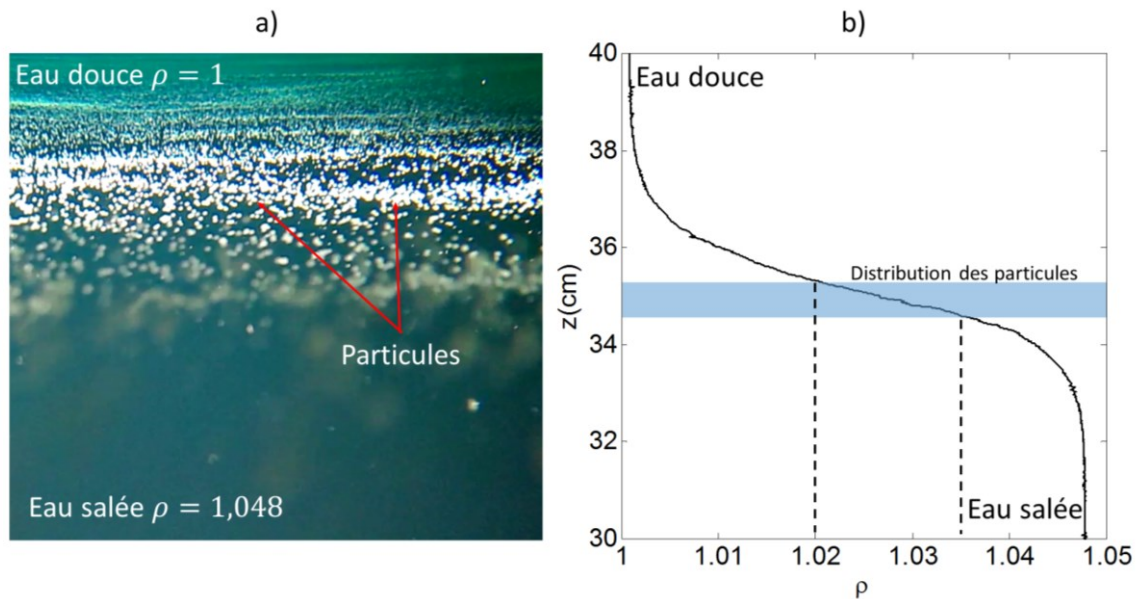


Figure IV-15 : a) : Vue transversale de l'interface entre l'eau douce et l'eau salée. Les particules sont piégées à l'interface. b) : profil de densité correspondant. La transition entre l'eau salée ayant une densité de $\rho_2 = 1.048$ et l'eau douce $\rho_1 = 1$ se fait sur environ 5cm après le remplissage et avant la mise en route des batteurs. Les particules sont triées en densité sur l'intervalle $1.02 < \rho_{\text{particules}} < 1.035$ ce qui permet un confinement sous les 1cm d'épaisseur positionné au milieu de l'interface.

La raideur de l'interface permet d'obtenir une distribution verticale assez fine pour un écart de densité modéré. Ainsi, peu de temps après le remplissage, quand la stratification est la plus forte, l'épaisseur de la couche de particule est sous les 1cm pour une plage de densité correspondant à environ 1/3 de la différence entre les deux couches. Il est à noter que l'interface s'élargit significativement en fonction du temps : d'une part à cause de la diffusivité du sel, et d'autre part à cause du mélange provoqué au niveau des batteurs. Cependant, le gradient restant assez important au milieu de l'interface, l'épaisseur de la couche de particule n'est que très peu modifiée.

La reconstruction stéréographique avec cette méthode de calibration est équivalente à celle présentée précédemment pour les ondes de surface. On commence par trouver les corrélations entre deux caméras puis, pour chaque point, on extrait la droite de lumière en utilisant les fonctions numériques d'interpolation de la calibration (IV-2). La reconstruction stéréographique se fait alors par le calcul de l'intersection des deux droites.

La PIV est utilisée différemment que précédemment. On ne mesure pas directement la vitesse par résolution du système III-26 mais on l'utilise pour obtenir la correspondance temporelle de deux reconstructions stéréographiques. Les composantes de vitesses sont alors obtenues par simple différenciation. La Figure IV-16 résume schématiquement la méthode en dimension réduite.

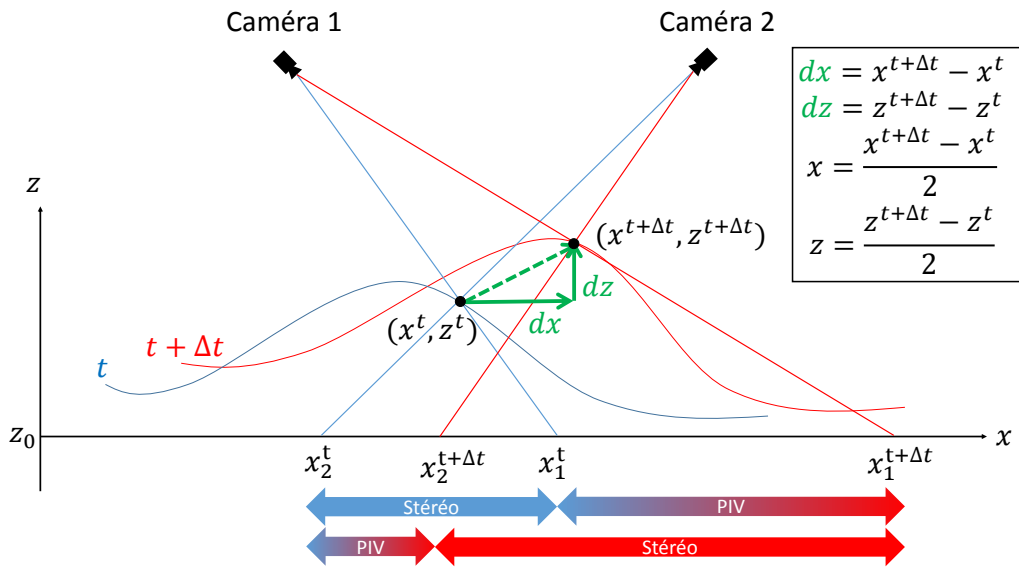


Figure IV-16 : Schéma de la reconstruction stéréo-PIV dans le cas de l'utilisation d'une fonction de calibration basée sur de l'interpolation. Pour plus de clarté, l'interface air/eau est ignorée. La reconstruction stéréographique est réalisée pour deux pas de temps successifs : t et $t + \Delta t$. La PIV permet d'avoir le déplacement temporel du point apparent et ainsi de lier les deux reconstructions stéréographiques x^t et $x^{t+\Delta t}$. Les composantes de vitesse sont alors déduites par différenciation des deux positions.

Si cette méthode permet d'obtenir simplement l'ensemble du champ de hauteur et de vitesse, elle présente néanmoins le désavantage de ne pas améliorer la sensibilité par une mesure directe de la vitesse. Ce problème peut être réglé en développant une correction liée au changement d'indice dans le modèle de Tsai. Cependant, il faut garder à l'esprit que la résolution verticale sera fortement limitée par l'épaisseur de la distribution des particules. Celle-ci étant supérieur d'un facteur dix face aux sensibilités atteintes pour les ondes de surface, l'utilisation de cette méthode simplifiée est donc suffisante.

IV.2.3 Résultats

Sur l'ensemble des expériences réalisées, seule une réalisation présente un caractère suffisamment turbulent pour être analysée. Les autres expériences souffrant très probablement de l'inadéquation du batteur qui provoque un forçage peu efficace. Le Tableau 4 rapporte les paramètres principaux de l'expérience qui sera présentée par la suite.

$\omega_p/2\pi$ (Hz)	A (cm)	σ_ϵ	σ_η (m)	σ_w (m/s)
0.15	8	0.09	0.012	0.012

Tableau 4 : Paramètres de l'expérience : ω_p est la fréquence monochromatique du forçage, A l'amplitude verticale du batteur et σ_ϵ , σ_η et σ_w la pente, la hauteur et la vitesse typique des ondes.

IV.2.3.1 Analyse spatiale et spectrale

La Figure IV-17 permet un aperçu de la dynamique des ondes en montrant une reconstruction de la surface à un instant donné, un échantillon du signal temporel ainsi que la fonction de probabilité de la distribution de la hauteur de l'interface η .

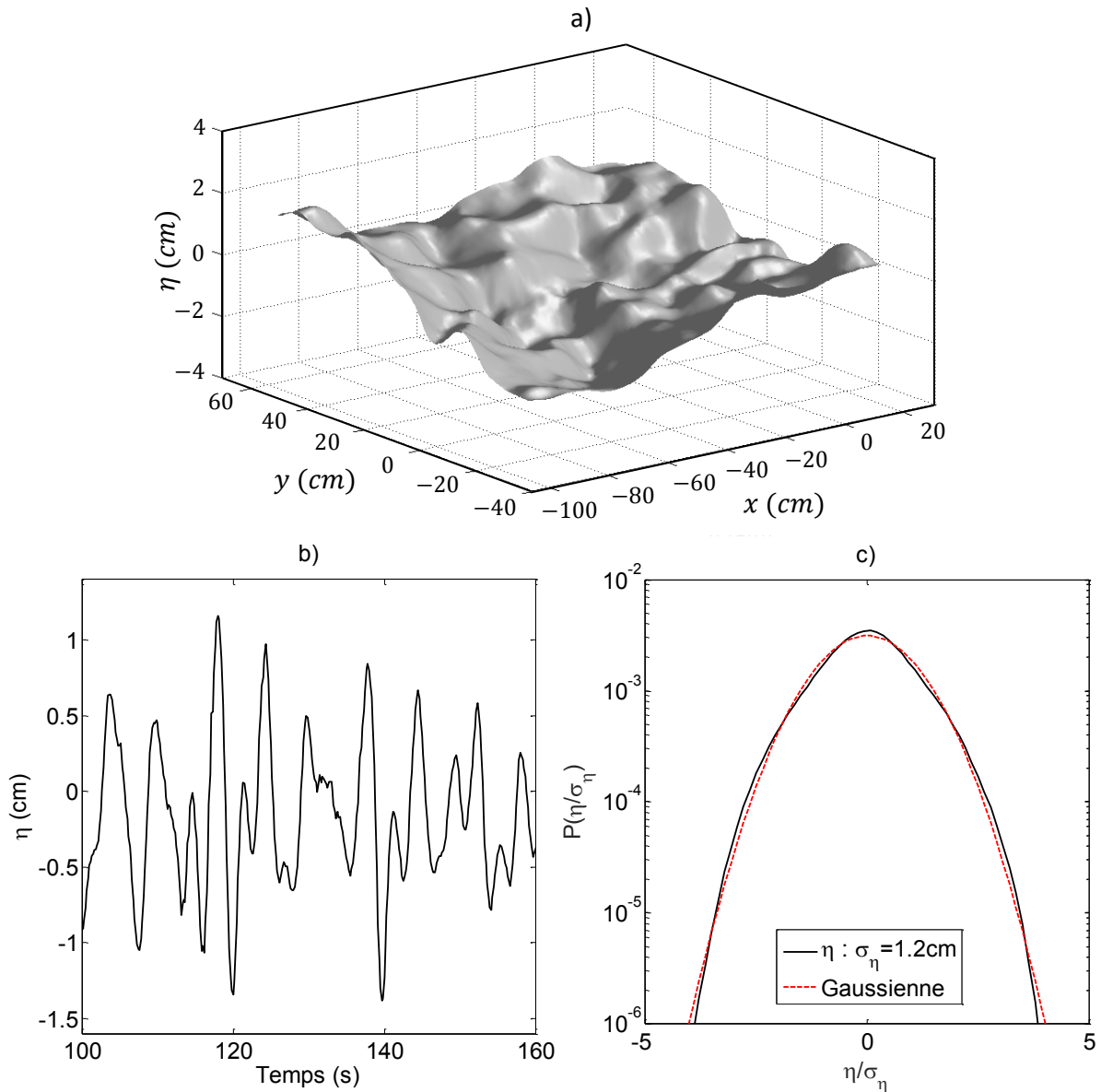


Figure IV-17: a) Reconstruction 3D de l'interface η à un instant donné. b) Signal temporel d'un point de l'interface η . c) Fonction de probabilité de la distribution de l'interface η . La loi normale est tracée en pointillé rouge.

A première vue, le champ d'onde obtenu semble similaire aux ondes de surface précédemment observées. On observe la présence d'un signal turbulent composé de différentes structures spatiales et temporelles (figure a,b). La pente typique des ondes internes est également comparable aux ondes de surface avec $\sigma_\epsilon = \sqrt{\langle \epsilon^2 \rangle} \sim 0.09$. La fonction de probabilité de la distribution de l'interface η (figure c)) est très bien approximée par une loi gaussienne. Ce point est une première différence significative avec les ondes de surface où la présence d'harmoniques introduit une plus forte probabilité pour les crêtes de vagues que pour les creux (distribution de Tayfun, voir III.2.1.1). Il semblerait donc que ces dernières soient moins prononcées pour les ondes internes de gravités, et ce malgré un forçage équivalent.

La Figure IV-18 montre le champ de vitesses de l'interface à un instant donné ainsi que la fonction de probabilité de distribution.

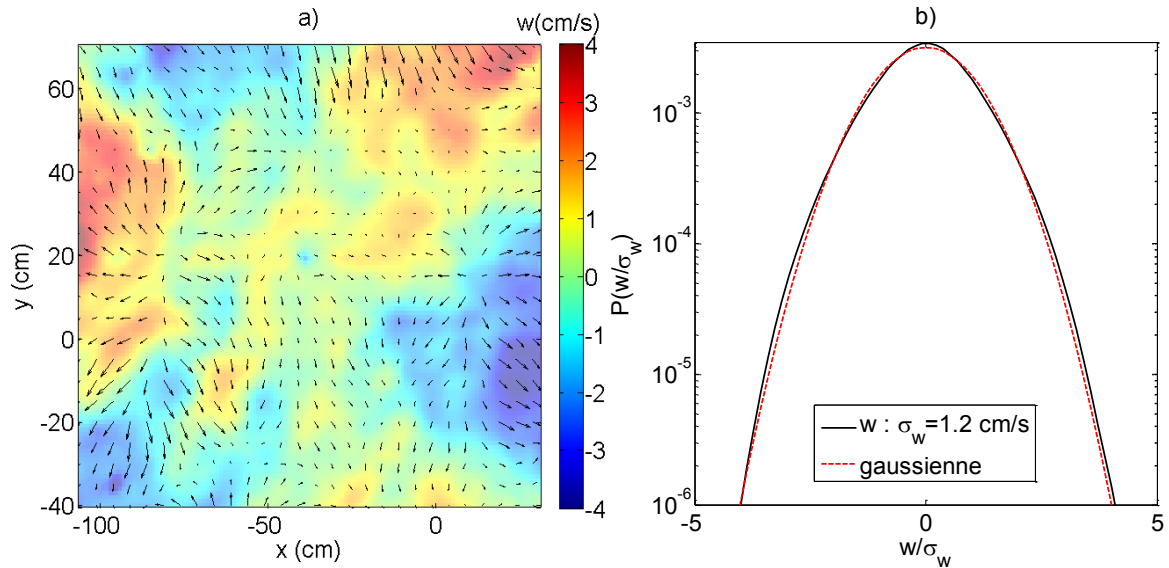


Figure IV-18 : a) Champ de vitesse de l'interface à un instant donné. Les composantes (u, v) sont représentées par des vecteurs. La composante verticale w est tracée en couleur. b) Fonction de probabilité de la distribution de la vitesse verticale de l'interface w . La loi normale est tracée en pointillé rouge.

Les composantes (u, v) de la vitesse sont représentées par les vecteurs. La vitesse verticale w est codée en couleur. Similairement à la hauteur de l'interface η , on retrouve un champ qui semble turbulent et homogène. La fonction de probabilité de de distribution de la vitesse verticale w est tracée sur la figure b). On retrouve également une loi normale.

Cette similarité des distributions entre la vitesse verticale w et la position de l'interface η semble indiquer une faible intensité du terme non-linéaire $-\mathbf{u} \cdot \nabla \eta$ permettant le lien entre les deux : $\dot{\eta} = w - \mathbf{u} \cdot \nabla \eta$ (avec $\dot{\eta} = \partial \eta / \partial t$). Pour s'en rendre compte plus quantitativement, on regarde les cohérences entre les différentes composantes :

$$\begin{aligned}
 C_{\omega}^{\dot{\eta}, w} &= \frac{\langle |\dot{\eta}(\omega)^* w(\omega)| \rangle}{\sqrt{\langle |\dot{\eta}(\omega)|^2 \rangle \langle |w - \mathbf{u} \cdot \nabla \eta(\omega)|^2 \rangle}} \\
 C_{\omega}^{\dot{\eta}, -\mathbf{u} \cdot \nabla \eta} &= \frac{\langle |\dot{\eta}(\omega)^* (\mathbf{u} \cdot \nabla \eta)(\omega)| \rangle}{\sqrt{\langle |\dot{\eta}(\omega)|^2 \rangle \langle |w - \mathbf{u} \cdot \nabla \eta(\omega)|^2 \rangle}} \\
 C_{\omega}^{\dot{\eta}, w - \mathbf{u} \cdot \nabla \eta} &= \frac{\langle |\dot{\eta}(\omega)^* (w - \mathbf{u} \cdot \nabla \eta)(\omega)| \rangle}{\sqrt{\langle |\dot{\eta}(\omega)|^2 \rangle \langle |w - \mathbf{u} \cdot \nabla \eta(\omega)|^2 \rangle}}
 \end{aligned} \tag{IV-3}$$

La Figure IV-19 montre ces dernières jusqu'à une fréquence de $\omega/2\pi = 1\text{Hz}$. Avec cette normalisation, les cohérences donnent deux indications importantes. La première est donnée par la très forte proximité des courbes rouge ($C_{\omega}^{\dot{\eta}, w - \mathbf{u} \cdot \nabla \eta}$) et noire ($C_{\omega}^{\dot{\eta}, w}$). Cela indique que le terme non-linéaire est effectivement une composante faible du spectre total avec une valeur d'environ 1% ($C_{\omega}^{\dot{\eta}, -\mathbf{u} \cdot \nabla \eta}$). La seconde indication provient du fait que la courbe rouge ($C_{\omega}^{\dot{\eta}, w - \mathbf{u} \cdot \nabla \eta}$) qui est normalisée par le produit ses deux composantes ne montre pas une valeur proche de 1. Cela signifie la présence d'un niveau de bruit significatif dans les mesures. Ce dernier est probablement lié à la mesure de PIV qui est incertaine à cause de l'épaisseur de la couche de particules. Il a été observé visuellement que l'écoulement n'est pas toujours homogène sur l'ensemble de l'épaisseur, ce qui peut conduire à des erreurs dans les phases de corrélations de la PIV.

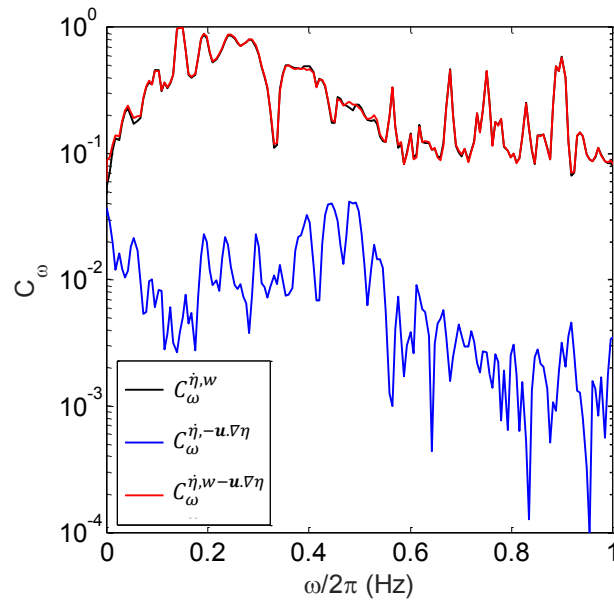


Figure IV-19 : Cohérences normalisées $C_{\omega}^{\eta,w}$, $C_{\omega}^{\eta,-u.\nabla\eta}$ et $C_{\omega}^{\eta,w-u.\nabla\eta}$.

Les figures Figure IV-20 et Figure IV-21 montrent les spectres de puissance spatio-temporels de la position de l'interface $E^{\eta}(\mathbf{k}, \omega)$ et de la vitesse verticale $E^w(\mathbf{k}, \omega)$ respectivement. Pour les deux figures, on observe la présence d'une forte branche constituée de pics. Ces derniers s'écartent de la relation de dispersion linéaire qui est tracée en rouge sur les figures a). Un fit polynomial est réalisé sur les principaux pics pour mieux visualiser l'écart de cette branche (Figure IV-21 a)). Celui-ci provient de la nature de la stratification de l'interface qui n'est pas infiniment fine comme dans la théorie. A mesure que la longueur d'onde se rapproche de la taille caractéristique de l'interface, la stratification de cette dernière tend à modifier les propriétés de propagation en réduisant la fréquence. La limite étant que lorsque la longueur d'onde correspond à l'épaisseur de l'interface, on obtient une onde interne en stratification non uniforme. On note également que le spectre subit une coupure de $k/2\pi = 10m^{-1}$, ce qui correspond effectivement à l'épaisseur de la stratification. Du fait de la dérivée temporelle obtenue par la vitesse, les hautes fréquences ont un niveau d'énergie plus élevé et mettent en lumière deux nouvelles branches. La première est très faible et semble être une harmonique du fit polynomial (ligne en pointillé fin, à droite sur la Figure IV-21 a)). La seconde est beaucoup plus intense et est située à basse fréquence. Elle montre une vitesse de phase qui est plus lente et semblent suivre une relation de dispersion linéaire (ligne pointillée large noire). La nature physique de ces structures n'est pour l'heure pas bien établie. Il est possible que ce soit la trace d'ondes internes confinées dans la stratification. En effet, on observe que la jonction de cette courbe avec la relation de dispersion polynomiale se produit au niveau du k correspondant à l'épaisseur de l'interface. Ce point indique une probable similarité entre ces deux objets... Les coupes du spectre visible dans les figures b) sont sensiblement différentes entre la hauteur et la vitesse verticale.

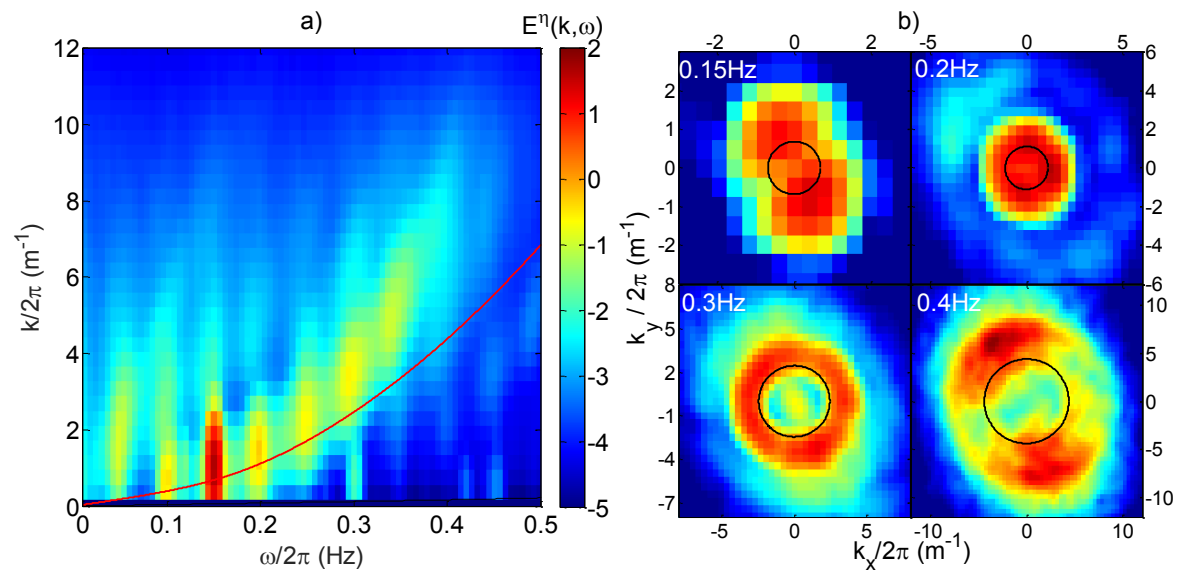


Figure IV-20 : a) Spectre de puissance intégré de la hauteur de l'interface $E^\eta(k, \omega)$. L'échelle de couleur est logarithmique. La ligne rouge est le mode lent de la relation de dispersion linéaire des ondes d'interface. b) Coupes de $E^\eta(k, \omega)$ avec $\omega/2\pi = [0.15, .02, 0.3, 0.4]$ Hz. La relation de dispersion est tracée en noire.

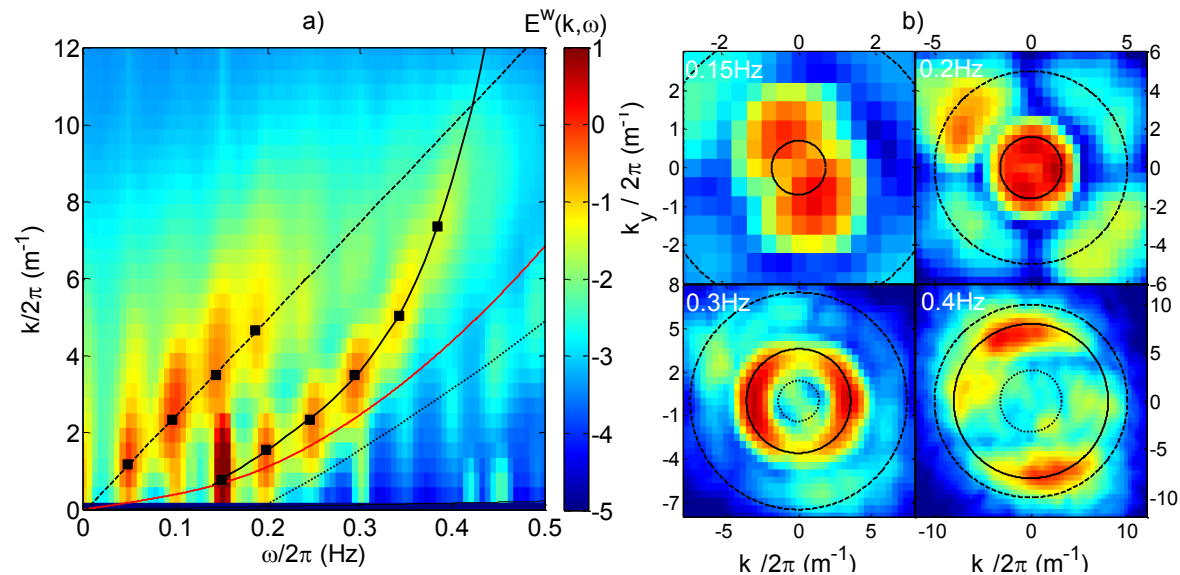


Figure IV-21 : a) Spectre de puissance intégré de la vitesse verticale $E^w(k, \omega)$. L'échelle de couleur est logarithmique. La ligne rouge est le mode lent de la relation de dispersion linéaire des ondes internes de gravité. Les points noirs correspondent aux principaux pics. La ligne continue noire est un fit polynomiale effectuée sur les pics. La ligne aux larges pointillés noir est une régression linéaire. La ligne aux pointillés fins est la première harmonique du fit polynomiale. b) Coupes de $E^w(k, \omega)$ avec $\omega/2\pi = [0.15, .02, 0.3, 0.4]$ Hz. Les différentes courbes tracées en a) sont également rapportée.

Il semblerait qu'une part importante des pics soit des modes stationnaires. Cela est visible par la nature symétrique du spectre sur une direction donnée, indiquant la propagation contraire de deux ondes équivalentes. On observe clairement cet effet pour les ondes d'interface (ligne continue) aux fréquences $\omega/2\pi = [0.3, 0.4]$ Hz ou encore pour les « ondes internes » (ligne en pointillé large) à $\omega/2\pi = 0.2$ Hz.

IV.2.3.2 Corrélations

Bien que le nombre de données soit très limité, il est intéressant de regarder si des couplages résonants sont présents dans le système. Du fait de la faible convergence statistique, seuls les couplages à 3-ondes seront traités.

Similairement aux ondes de surface, la forme de la relation de dispersion linéaire interdit les interactions à 3-ondes entre des composantes linéaires. En effet, la forme particulière de la relation de dispersion observée précédemment (Figure IV-21) ne change pas cette conclusion. En revanche les couplages avec la branche harmonique ou la branche droite des « ondes internes » sont possibles. On note également que ces différentes branches ont une largeur spectrale importante pouvant générer des quasi-résonances. Les outils statistiques utilisés par la suite ont été décrit précédemment dans la partie II.3.1.2.

En gardant le même protocole que pour les analyses précédentes, on commence l'investigation en fréquence du fait de la faible dimension du système. La Figure IV-22 montre un échantillon de la corrélation normalisée $C_{\omega}^3(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ ainsi que la bicohérence $B_{\omega}^3(\omega_2, \omega_3)$.

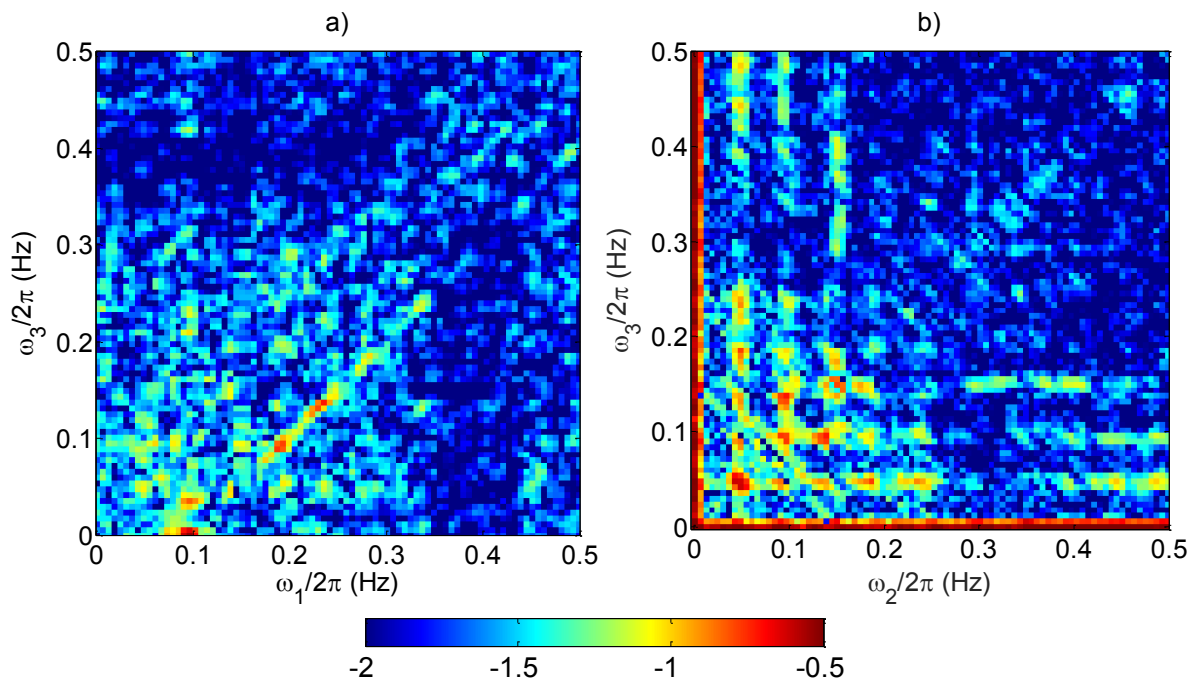


Figure IV-22 : a) Corrélations d'ordre 3 normalisées $C_{\omega}^3(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ pour $\omega_2/2\pi = 0.1$ Hz. Echelle de couleur logarithmique. La couleur bleue du fond représente le niveau de convergence statistique qui est d'environ 10^{-2} pour les hautes fréquences. La ligne résonante ($\omega_1 = \omega_2 + \omega_3$) ressort légèrement du bruit. b) Bicohérence $B_{\omega}^3(\omega_2, \omega_3)$. L'échelle de couleur est logarithmique.

La corrélation C_{ω}^3 tracée en figure a) montre un début d'apparition de la ligne résonante $\omega_1 = \omega_2 + \omega_3$. Cependant, du fait de la faible quantité de données, la convergence n'est pas très bonne à basse fréquence. Certains pics sortent tout de même nettement du bruit, comme par exemple à $\omega_2/2\pi = 0.2$ Hz. La figure b) trace la bicohérence B_{ω}^3 . On retrouve un réseau de points correspondant aux différents pics visibles dans le spectre spatio-temporel. Il est néanmoins impossible de dire de quels types d'interactions il s'agit.

La Figure IV-23 trace la bicohérence B_k^3 dans l'espace des \mathbf{k} .

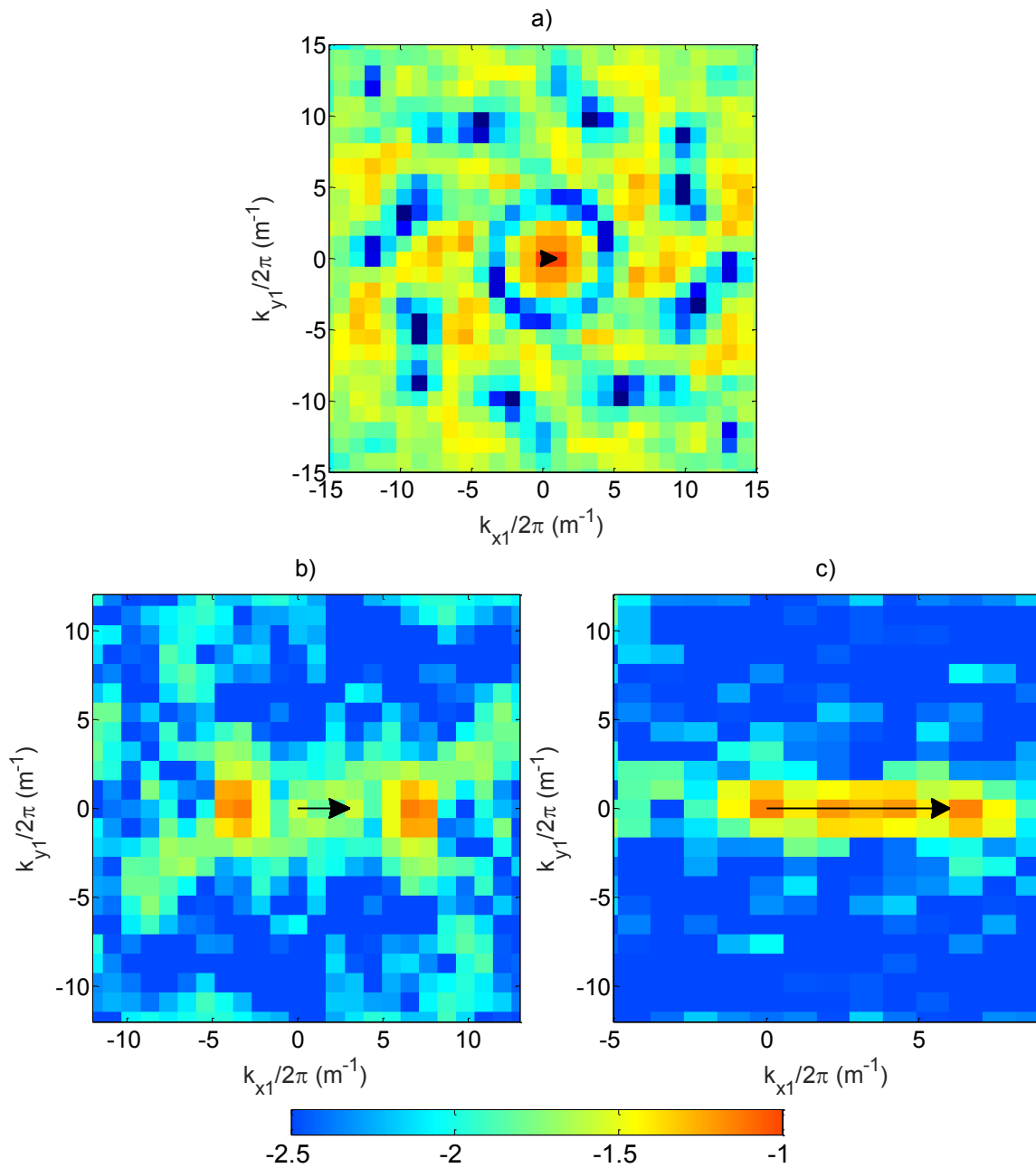


Figure IV-23 : Bicohérence $B_k^3(\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3)$. L'échelle de couleur est logarithmique. L'onde fixée est représentée par la flèche noire dont la norme est a) $|\mathbf{k}_2|/2\pi = 1 \text{ m}^{-1}$, b) $|\mathbf{k}_2|/2\pi = 3 \text{ m}^{-1}$ et c) $|\mathbf{k}_2|/2\pi = 3 \text{ m}^{-1}$. Les corrélations sont moyennées pour 8 différentes orientations.

On remarque que pour une onde située sur le forçage (figure a)), des corrélations sont visibles pour l'ensemble des directions. On retrouve également les nombreux points correspondant au spectre. Pour des ondes plus courtes (figures b) et c)), on observe au contraire des interactions essentiellement colinéaires. Pour plus d'informations sur la nature des interactions il est nécessaire de regarder la bicohérence $B_{k\omega}^3$ dans l'espace des (\mathbf{k}, ω) . La Figure IV-24 trace cette dernière pour trois ondes déterminées.

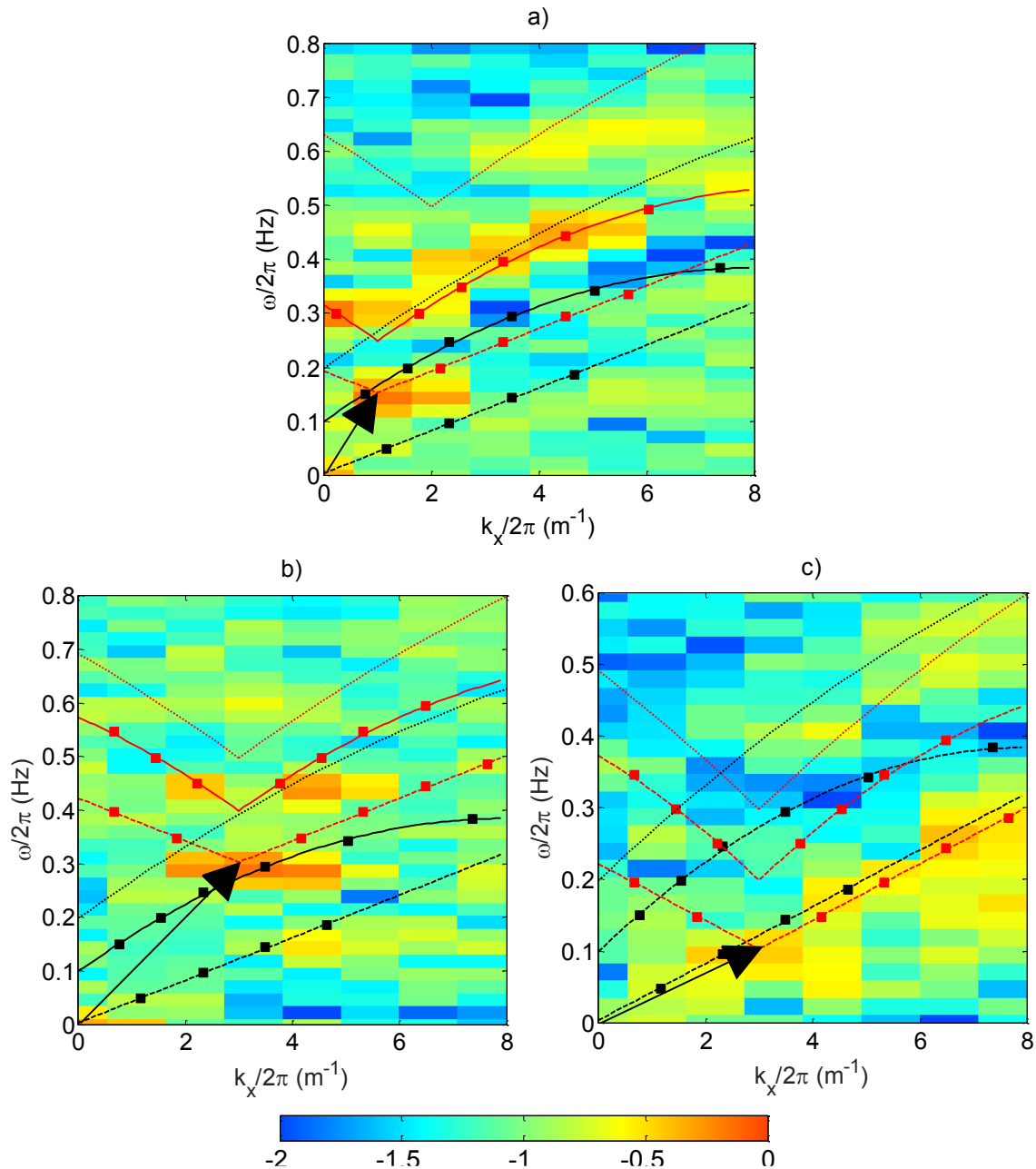


Figure IV-24 : Coupes de la Bicoherence $B_{k\omega}^3(\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \omega_2, \omega_3)$ en $k_y = 0$. L'échelle de couleur est logarithmique. Pour chaque figure une onde (\mathbf{k}_2, ω_2) est fixée : a) : $|\mathbf{k}_2|/2\pi = 1 \text{ m}^{-1}$, $\omega_2/2\pi = 0.15 \text{ Hz}$, b) : $|\mathbf{k}_2|/2\pi = 3 \text{ m}^{-1}$, $\omega_2/2\pi = 0.3 \text{ Hz}$ et c) : $|\mathbf{k}_2|/2\pi = 3 \text{ m}^{-1}$, $\omega_2/2\pi = 0.1 \text{ Hz}$. La ligne continue représente la relation de dispersion polynomiale extraite du spectre spatio-temporel. La ligne en pointillé court est la première harmonique. La ligne en pointillé long est la régression linéaire des « ondes internes ». Les courbes noires sont dans le repère de (\mathbf{k}_1, ω_1) tandis que les rouges dans le repère de (\mathbf{k}_3, ω_3) . Les solutions exactes correspondent à l'intersection de deux lignes de couleurs différentes.

La figure a) montre les corrélations d'une onde située sur la relation de dispersion polynomiale et à la fréquence du forçage (flèche noire). Comme on le voit, aucun croisement entre les deux relations de dispersion polynomiales (lignes continues noires et rouges) n'existe. Deux solutions sont cependant possibles entre la relation de dispersion polynomiale (ligne continue noir) et la relation des « ondes internes » (ligne pointillée rouge). Un point rouge est visible sur l'une des deux mais il correspond également à une fréquence nulle, ce qui n'a pas de sens physique pour ce système. De fait, l'ensemble des corrélations observées se produit avec la branche harmonique où les deux courbes sont très proches en comparaison de la largeur spectrale. Cette observation est cohérente avec celles faites

pour les ondes de surface et correspond à la génération d'ondes liées sur la branche harmonique. La figure b) montre la même information pour une onde à plus haute fréquence. La figure c) s'intéresse aux corrélations d'une « onde internes ». On observe cette fois-ci un signal différent avec une ligne de corrélation le long de la jonction des deux relations des ondes internes (lignes pointillés longs).

IV.2.4 Conclusion

Cette expérience préliminaire sur les ondes interne a mis en lumière la complexité du système. En addition de la difficulté technique de la mesure, une multitude de phénomènes se superposent et rendent l'analyse plus délicate. Les limites technique et physique à la création d'une interface suffisamment fine imposent une sévère limitation à la cascade des ondes et qui provoque également l'apparition de structures qui semblent être des ondes internes confinées dans cette couche.

Il est apparu que les ondes d'interface et ce qu'on pense être des ondes internes ne sont pas corrélées à l'ordre trois malgré des résonances géométriquement autorisées. Néanmoins et similairement aux données en mer et à l'expérience sur les ondes de surface, des corrélations entre les ondes d'interface et leurs proches harmoniques sont observées. Des corrélations sont également observées entre les « ondes internes » bien que leurs significations ne soit pas très claire.

Au vus de ces éléments, ce système n'est probablement pas la meilleure piste pour étudier les interactions à 4-ondes pour des ondes de surface dépourvues de pollution. Il reste cependant très intéressant pour l'étude de la turbulence d'onde grâce à sa dynamique qui est suffisamment lente pour ajouter la force de Coriolis en mettant la plateforme en rotation.

Conclusion générale



Motifs de particules générés par les ondes de surface...

Partie expérimentale

L'ensemble des analyses effectuées pendant cette thèse ont permis une meilleure compréhension de la nature de la turbulence faible. D'un point de vue expérimental, deux éléments se sont montrés essentiels pour réaliser une étude sur les ondes de surface en condition faiblement non-linéaire.

Le premier point concerne l'utilisation d'une méthode de mesure qui donne accès à une reconstruction complète de l'interface. La connaissance de cette dernière permet ensuite de réaliser une transformée de Fourier en trois dimensions et ainsi de connaître précisément la nature des ondes. Si dans le cas des ondes gravito-capillaires, la majorité des ondes présentes sont sur la relation de dispersion linéaire, les mesures expérimentales et in-situ des ondes de gravité pure ont montré la présence significative de branches secondaires. Seule la connaissance précise de ces branches secondaires ainsi que l'intensité globale des non-linéarités du système (élargissement du spectre) permet d'effectuer une recherche précise des interactions résonantes en jeu dans le système.

Le second élément concerne l'effet de la contamination de la surface de l'eau. Bien qu'étant un phénomène connu de longue date, son intensité a été une surprise pour l'ensemble des expériences réalisées. Il en résulte que de sérieuses précautions doivent être prises pour toute expérience se concentrant sur des régimes faiblement non-linéaires et dont les ondes ont une fréquence supérieure à environ $\omega/2\pi > 1\text{Hz}$. Sans attention particulière à ce sujet, la cascade d'énergie est alors fortement limitée et conduit à la mesure de spectres de puissance ayant des exposants très raides. Une réaction naturelle est alors d'augmenter l'intensité du forçage pour espérer exciter des ondes à plus haute fréquence. Cette action peut alors entraîner la génération d'ondes fortement non-linéaires directement au niveau du batteur et éloigne ainsi le système des conditions d'application de la théorie de la turbulence faible. Pendant cette thèse deux approches ont été testées pour permettre d'obtenir une surface propre. La première consiste à effectuer un nettoyage complet et soigneux de la cuve avec un détergent efficace. On injecte ensuite de l'eau très propre en faisant attention de ne pas la contaminer. Cette technique s'est montrée efficace avec l'expérience sur les ondes gravito-capillaire dans une cuve ayant une dimension de l'ordre du mètre. Le principal défaut de cette méthode est sa faible tenue dans le temps qui nécessite une opération de nettoyage régulière avec un changement complet de l'eau. Pour de grands volumes contenant des éléments complexes (cuve de Coriolis avec les batteurs) cette méthode n'est pas adaptée à cause de la multitude de sources de pollution qui ne sont pas maîtrisables. Une seconde méthode est alors utilisée. Il s'agit d'un filtre actif de la surface libre qui peut être mis en route entre chaque expérience lorsque la surface est au repos. Ces principaux inconvénients étant le placement d'un objet intrusif dans le système (réflexions parasites des ondes) ainsi que sa complexité de mise en place (aspiration par gravité, filtre charbon actif, pompe régulée...).

Malgré de faibles intensités non-linéaires ainsi qu'un état de propreté correct de de la surface de l'eau, les spectres de puissances montrent une grande variabilité. Ces observations sont cohérentes avec celles que l'on trouve dans la littérature et indiquent globalement un désaccord avec les prédictions théoriques. C'est dans l'idée de voir ce qui se passe plus fondamentalement au niveau des interactions résonantes que les analyses des bi-corrélations et tri-corrélations ont été réalisées. Pour les deux systèmes traités, les résultats ont mis en évidence des incompatibilités avec la vision actuelle de la turbulence faible

Ondes gravito-capillaires

Dans le cadre de la turbulence faible, le régime gravito-capillaire ne présente pas d'invariance d'échelles qui permettent le calcul de solutions analytiques. Ce régime est alors généralement traité schématiquement comme un raccord du régime de gravité pure et de capillarité pure si l'intensité des non-linéarités n'est pas trop forte pour éviter le « breakdown » de la turbulence. Les interactions

résonantes étant supposées être à 4-ondes dans le régime de gravité et à 3-ondes dans le régime capillaire, la transition n'est alors possible qu'en faisant l'hypothèse que les interactions sont essentiellement locales. Cependant, lorsque l'on regarde les solutions géométriques pour des ondes gravito-capillaires, on remarque la possibilité de couplages à 3-ondes présentant un caractère colinéaire et très non local. Ce dernier point allant à l'encontre de la théorie du raccord des deux régimes.

L'analyse des corrélations a permis de lever le doute sur les phénomènes en jeu pour ces ondes particulières. La Figure 1 résume schématiquement l'ensemble des phénomènes et interactions observés lors des expériences en régime gravito-capillaire et en condition de faible non-linéarité.

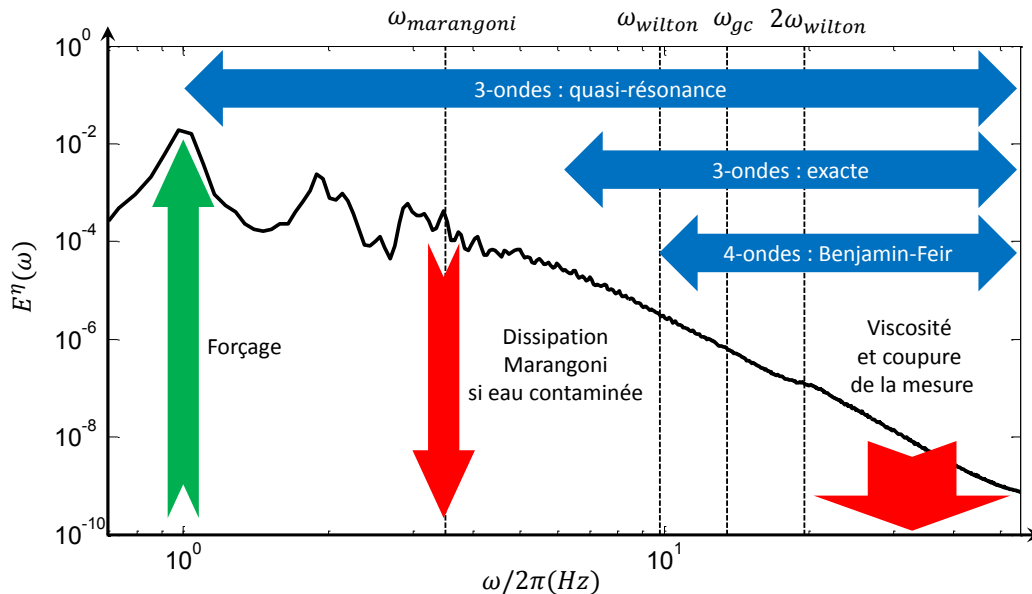


Figure 1 : Résumé des phénomènes observés pour une expérience sur les ondes gravito-capillaires en régime faiblement non-linéaire.

L'énergie est principalement injectée à basse fréquence par les oscillations de la cuve. Lorsque l'eau est suffisamment propre pour éviter la génération d'ondes de Marangoni, l'essentiel de la dissipation se produit à haute fréquence par la viscosité. Les transferts entre ces échelles se font par plusieurs phénomènes. On observe des interactions à 3-ondes qui suivent les solutions exactes. Ces dernières sont principalement colinéaires et concernent uniquement des triades dont l'une des composante est supérieure au seuil de ω_{wilton} . Dans cette gamme de fréquence, les couplages pour des ondes inférieures à $\omega/2\pi \sim 5\text{Hz}$ sont impossibles à cause de la non-localité qui devient trop importante. Par exemple, une onde à $\omega/2\pi \sim 3\text{Hz}$ ne peut interagir qu'avec une onde aux environs de $\omega/2\pi \sim 100\text{Hz}$ qui n'est plus présente à cause de la viscosité. Ces interactions exactes laissent donc un « vide » entre le forçage $\omega_p/2\pi = 1\text{Hz}$ et leurs apparitions aux alentours de $\omega/2\pi \sim 5\text{Hz}$. Ce « vide » peut être comblé avec l'apparition des quasi-résonances qui sont permises pour l'ensemble de la gamme de fréquences malgré la faible intensité des non-linéarités. Des interactions à 4-ondes provenant de l'instabilité de Benjamin-Feir sont également observées pour des fréquences supérieures au seuil de ω_{wilton} . Ces dernières semblent néanmoins liées au forçage qui est très anisotrope car dans le cas d'un forçage moins directionnel tel que l'air comprimé, ces interactions disparaissent.

A partir de ces éléments on comprend mieux l'échec de la théorie du raccord des deux régimes. Contrairement à ce qui est attendu, aucune interaction à 4-ondes n'est observée dans le régime de gravité. Des interactions à 3-ondes quasi-résonantes sont présentes sur l'ensemble du système et montrent un caractère fortement non local pour les hautes fréquences. La théorie de la cascade

Conclusion générale

dynamique de Kartashova est également mise en défaut par l'observation de l'instabilité de Benjamin-Feir qui n'apparaît que pour des hautes fréquences ($\omega > \omega_{wilton}$). Cela laisse donc également un « vide » entre sa présence et la fréquence du forçage. Sa présence dépendant également du type de forçage, son rôle est alors certainement secondaire dans la génération de la cascade d'énergie.

Finalement, l'ensemble de l'analyse suggère la présence d'un unique système gravito-capillaire dont la cascade d'énergie est assurée principalement par des interactions à 3-ondes quasi-résonantes. La cascade est rendue très efficace par les possibilités de solutions colinéaires et des vitesses de phase pratiquement constantes permettant des temps d'interactions très longs. Il y a alors un foisonnement de couplages non-locaux qui assurent la transition entre les deux régimes.

Ondes de gravité

Bien qu'ayant une base théorique plus solide que le régime gravito-capillaire, nos observations de la turbulence d'ondes de gravité pure ne semblent pas montrer une très forte cohérence avec la théorie. Plusieurs hypothèses peuvent expliquer ces divergences, comme par exemple la discrétisation des modes due à la taille finie des bassins ou encore les effets de la pollution de l'eau. Les rares spectres (en fréquence) s'approchant des solutions théoriques sont obtenus à des niveaux de non-linéarité beaucoup trop élevés pour maintenir l'hypothèse de séparation d'échelle.

La Figure 2 montre la liste des phénomènes observés lors de l'expérience dans la plateforme de Coriolis.

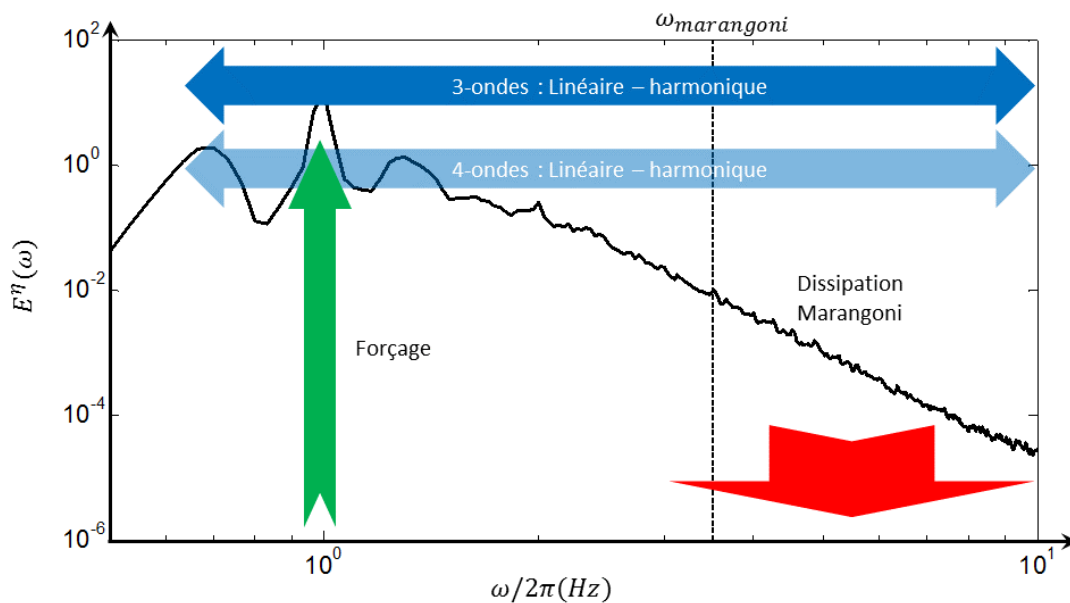


Figure 2 : Résumé des phénomènes observés pour une expérience sur les ondes gravito-capillaire en régime faiblement non-linéaire.

L'ensemble de l'énergie présente dans le système est injectée par les batteurs aux alentours de $\omega_p/2\pi = 1\text{Hz}$. Malgré un nettoyage de la surface, ce sont les ondes de Marangoni qui semblent principalement à l'origine de la dissipation pour cette expérience. La jonction entre ces deux échelles apparaît comme être principalement assurée par les interactions à 3-ondes entre la branche linéaire et la branche harmonique. L'élargissement du spectre est trop faible pour autoriser des quasi-résonances entre uniquement des ondes sur la relation de dispersion linéaire comme c'est le cas dans le régime gravito-capillaire. Aucune interaction à 4-ondes entre des ondes sur la relation de dispersion

linéaire n'est également observée. Et cela en dépit d'un bon niveau de convergence statistique. L'instabilité de Benjamin-Feir est absente comme le suggère l'indice d'instabilité *BFI*.

Pour ce système, il semblerait donc que la cascade d'énergie se fait principalement par des interactions entre la branche harmonique et linéaire et non par des interactions à 4-ondes comme le prévoit la théorie. Cette observation semble confirmer l'expérience en régime gravito-capillaire où ces dernières sont également absentes dans la partie gravitaire. La domination des interactions entre branches linéaire et harmonique semble également exister dans les mesures in-situ où, malgré un niveau de non-linéarité beaucoup plus faible, la branche harmonique est également présente. Il faut tout de même garder à l'esprit que cette branche reste très faible devant la partie linéaire. On peut donc la voir donc comme un « catalyseur » ou un « déclencheur » de la cascade où l'énergie ne fait que transiter d'une onde linéaire à une autre en passant par une harmonique.

Ces observations vont donc également à l'encontre de la théorie de la turbulence faible qui est dominée par des interactions à 4-ondes. On peut penser que l'absence de ces dernières est causée par un temps d'interaction qui est trop grand devant les effets de la pollution ou encore une conséquence de la taille finie de la cuve. Cependant les mesures in-situ qui ne sont pas concernées par ces problèmes ne semblent pas aller à l'encontre de cette conclusion. Une autre piste possible est que ces interactions sont très faibles et donc invisibles à cause d'une convergence statistique qui est trop faible. On note tout de même que des interactions à 4-ondes provenant de l'instabilité de Benjamin Feir sont présentes et montrent globalement de forts niveaux de corrélations.

Vue globale

Si de nombreuses réponses ont été apportées à propos des interactions en jeu, de nombreux « trous » restent à résoudre. En guise de conclusion, la Figure 3 donne une vue globale des interactions observées pour les ondes de surface.

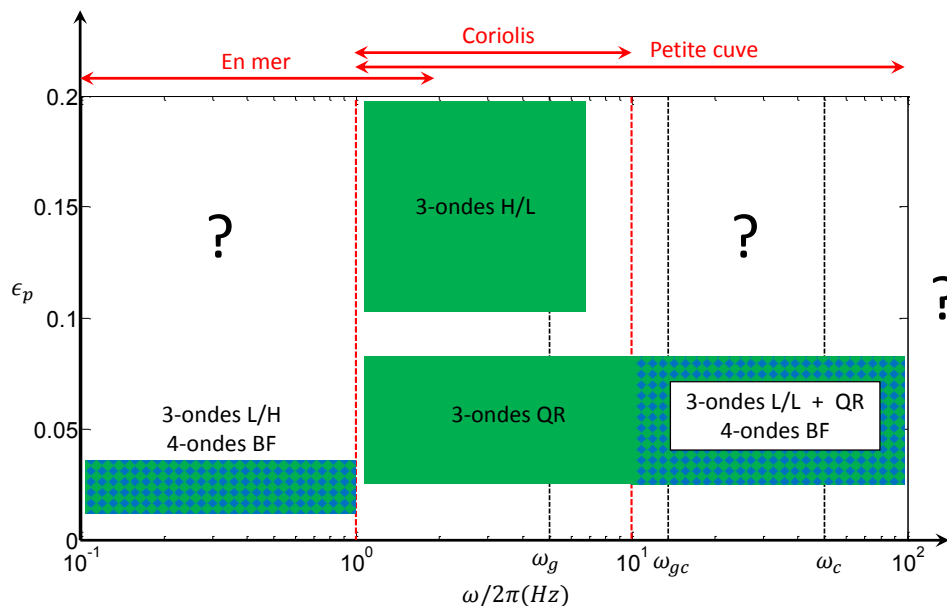


Figure 3 : Résumé des interactions observées en fonction de la gamme de fréquences et de l'intensité des non-linéarités du forçage ϵ_p . 3-ondes L/H = interactions à 3-ondes entre la branche harmonique et la branche linéaire. 3-ondes L/L : interactions à 3-ondes au sein de la branche linéaire. 3-ondes QR = interactions à 3-ondes quasi-résonantes. 4-ondes BF = Instabilité de Benjamin-Feir.

Les différentes expériences sont réparties en fonction de la fréquence ainsi que de l'intensité des non-linéarités du forçage ϵ_p . On observe un semblant de paradoxe autour dans la gamme de fréquences

Conclusion générale

$\omega/2\pi = [1,10]Hz$ où les interactions quasi-résonantes ne sont présentes que pour de faibles non-linéarités alors qu'elles sont favorisées par de fortes non-linéarités. Cette interprétation vient de ϵ_p qui n'est qu'un indice basé sur le forçage. Pour être plus juste, il faut regarder la largeur du spectre de puissance qui donne accès à la variation de l'intensité des non-linéarités en fonction de la fréquence. Il faut ensuite comparer cette largeur δ_k à la largeur nécessaire Δk pour permettre les quasi-résonances. Dans l'expérience de Coriolis, $\delta_k < \Delta k$, on comprend alors pourquoi les interactions quasi-résonantes ne sont pas observées malgré une intensité de forçage plus prononcé.

A partir de ce schéma, on est tenté de proposer une description générale du mécanisme des interactions résonantes. La Figure 4 montre l'arborescence des interactions en fonction de la fréquence et de l'intensité générale des non-linéarités.

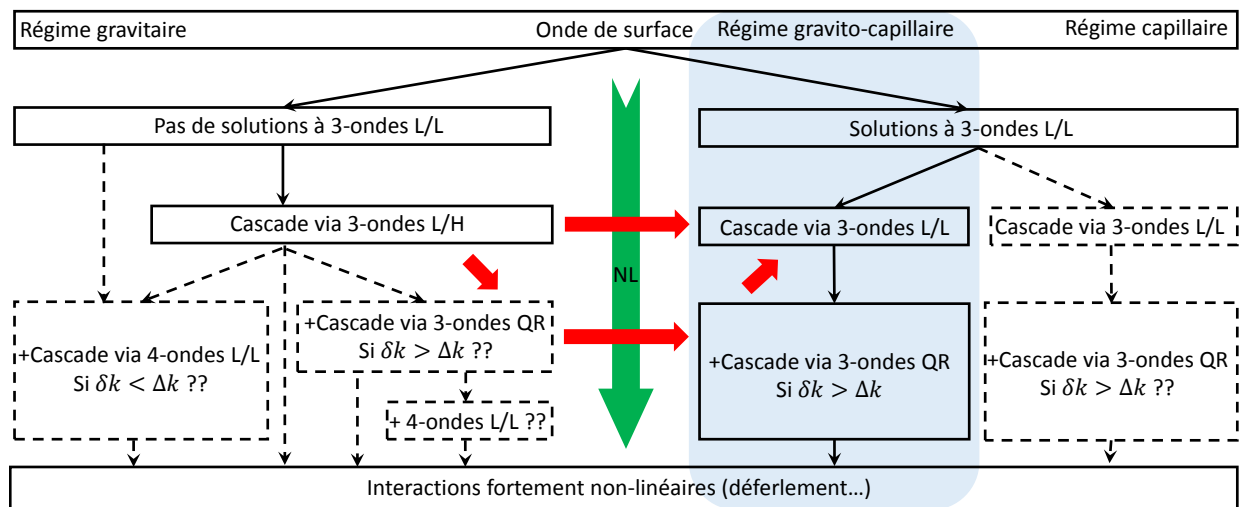


Figure 4 : Arborescence des interactions observées (rectangles continus) et supposées (rectangles pointillés). La flèche verte représente l'augmentation des non-linéarités (NL). 3-ondes L/H = interactions à 3-ondes entre la branche harmonique et la branche linéaire. 3-ondes L/L : interactions à 3-ondes au sein de la branche linéaire. 3-ondes QR = interactions à 3-ondes quasi-résonantes. 4-ondes L/L = interactions à 4-ondes au sein de la branche linéaire. Les flèches rouge représente les transferts d'énergies entre le régime gravitaire et capillaire.

Les rectangles continus représentent les observations présentées dans cette thèse. Les rectangles pointillés sont des hypothèses. On suppose que ce sont les interactions à 3-ondes qui dominent largement la cascade pour l'ensemble des ondes de surface. L'instabilité de Benjamin-Feir est écartée de l'organigramme car considérée comme un phénomène secondaire qui vient s'ajouter à la cascade de turbulence faible.

Lorsque les niveaux des non-linéarités sont faibles et qu'aucune solution à 3-ondes n'existe au sein de la branche linéaire (onde de gravité), la cascade d'énergie est développée par des interactions avec la branche harmonique (3-ondes L/H). Une question intéressante concerne ce qu'il se passe lorsque le niveau de non-linéarité augmente (point d'interrogation à gauche dans la Figure 3). On peut imaginer plusieurs scénarios :

- L'élargissement spectral est suffisant pour générer une cascade quasi-résonante : $\delta k > \Delta k$. qui vient s'ajouter à la cascade 3-ondes L/H.
- L'élargissement spectral est insuffisant mais le temps non-linéaire des interactions à 4-ondes L/L T_{NL}^{4LL} devient inférieur au temps de dissipation T_d . Cette cascade peut donc s'ajouter la cascade à 3-ondes L/H.

- L'élargissement spectral est insuffisant et le temps non-linéaire des interactions à 4-ondes L/L T_{NL}^{4LL} reste supérieur au temps de dissipation T_d jusqu'au seuil du déferlement. Seule une cascade à 3-ondes L/H existe.

Ces scénarios dépendent évidemment des fréquences considérées. Par exemple en régime gravitaire où les non-linéarités augmentent avec la fréquence, une onde proche de la transition gravito-capillaire aura probablement plus de chances d'atteindre le régime de quasi-résonance qu'une onde infra-gravitaire.

Lorsque des solutions à 3-ondes au sein de la branche linéaire existent (3-ondes L/L), ces dernières dominent et sont rapidement complétées par les quasi-résonances à mesure que le degré de non-linéarité augmente. Il reste néanmoins deux zones inconnues (voir point d'interrogation en Figure 3). La première concerne le régime gravito-capillaire lorsque les non-linéarités augmentent fortement. Le second point concerne le régime capillaire pur qui n'a pas été traité pendant cette thèse. La littérature montre un bon accord avec la théorie. On peut donc s'attendre à observer des interactions à 3-ondes L/L. Cependant ces dernières n'acceptent que des interactions dans une gamme limitée d'angle (environ 70° , pas de solutions colinéaires). Il est alors probable que les 3-ondes QR soient présentes pour augmenter les directions d'interactions possibles.

Une grande énigme reste la transition entre le régime de gravité pure et le régime capillaire via le régime gravito-capillaire. Le cheminement le plus naturel serait : 3-ondes L/H en régime de gravité vers 3-ondes L/L en régime gravito-capillaire puis capillaire pur (flèche rouge du haut sur le Figure 4). Les interactions à 3-ondes L/H doivent alors générer une onde linéaire supérieure à la fréquence seule de Wilton $\omega_{wilton}/2\pi = 9.8Hz$ pour amorcer la cascade gravito-capillaire. Les non-linéarités augmentant avec la fréquence dans la région gravitaire, il est très probable que les quasi-résonances favorisent la transition en apportant des interactions beaucoup moins locales que les interactions à 3-ondes L/H. (flèche rouge du bas sur le Figure 4).

Futures expériences

La réalisation de nouvelles expériences avec une résolution complète de la surface sont nécessaires pour vérifier les différentes hypothèses proposées. Il serait très intéressant de disposer d'une expérience permettant d'observer pleinement la transition entre le régime gravitaire et gravito-capillaire. Cela n'est malheureusement pas aisé à cause de la dissipation des ondes de Marangoni qui est très difficile à éliminer sur de grandes surfaces. Une expérience dans un bassin de quelques mètres est peut être la solution pour concilier une faible discrétisation et un nettoyage efficace de la cuve.

Il serait également intéressant d'essayer d'observer des interactions à 4-ondes au sein de la branche linéaire comme le prévoit la théorie. Dans l'expérience de Coriolis, il est fort probable que l'on a la séparation d'échelle suivante :

$$T_\omega \ll T_{NL}^{3LH} \ll T_d \ll T_{NL}^{4LL}$$

Avec T_ω le temps linéaire des ondes, T_{NL}^{3LH} le temps non linéaire des interactions à 3-ondes entre la branche linéaire et harmonique, T_{NL}^{4LL} le temps non linéaire des interactions à 4-ondes au sein de la branche linéaire et T_d le temps de dissipation. L'observation des interactions à 4-ondes peut donc se faire suivant deux pistes. La première consiste à augmenter l'intensité des non-linéarités afin de réduire $T_{NL}^{4LL} \ll T_d$. Mais dans cette approche, il est très probable que $T_{NL}^{3LH} \sim T_\omega$ ce qui détruit la séparation d'échelle et conduit probablement à des régimes où le déferlement devient très présent. L'autre solution est d'augmenter le temps de dissipation $T_d \gg T_{NL}^{4LL}$ en nettoyant efficacement la surface. Mais cela est difficilement réalisable pour de grandes dimensions. On peut alors se tourner

Conclusion générale

vers les mesures in-situ à grande échelle qui sont moins sensibles à la contamination, mais il sera difficile de trouver un régime stationnaire suffisamment long à cause de la variabilité des conditions météorologiques. Quelle que soit la mesure envisagée, il est essentiel de réaliser de longs enregistrements pour atteindre un niveau de convergence statistique suffisant dans les calculs des corrélations. Une expérience dans un système non favorable à l'instabilité de Benjamin-Feir serait un plus (Génération ponctuelle des ondes).

Une investigation des ondes de capillarité serait également utile pour confirmer la bonne concordance des résultats existant dans la littérature vis-à-vis de la théorie. Pour cela, une expérience à l'interface de deux fluides différents de densité proche serait certainement une bonne solution pour une mesure spatiale de haute résolution.

Bibliographie

Bibliographie

- [1] M. Van Dyke and M. Van Dyke, *An Album of Fluid Motion* (Parabolic Press Stanford, 1982).
- [2] S. B. Pope, *Turbulent Flows* (IOP Publishing, 2001).
- [3] A. Newell, S. Nazarenko, and L. Biven, *Phys. D Nonlinear Phenom.* **152-153**, 520 (2001).
- [4] L. M. Brekhovskikh and V. Goncharov, *Mechanics of Continua and Wave Dynamics* (Springer Science & Business Media, 2012).
- [5] A. Prasadka, *Mesures Spatio-Temporelles D'ondes à La Surface de L'eau : Retournement Temporel et Turbulence D'onde.*, 2012.
- [6] L. Deike, *Etudes Expérimentales et Numériques de La Turbulence D'ondes de Surface*, Paris 7, 2013.
- [7] F. Dias and C. Kharif, *Annu. Rev. Fluid Mech.* **31**, 301 (1999).
- [8] G. G. Stokes, *Trans Cambridge Philos Soc* **8**, 441 (1847).
- [9] T. B. Benjamin and J. E. Feir, *J. Fluid Mech.* **27**, 417 (1967).
- [10] W. J. Harrison, *Proc. London Math. Soc.* **2**, 107 (1909).
- [11] G. D. Crapper, *J. Fluid Mech.* **2**, 532 (1957).
- [12] O. M. Phillips, *J. Fluid Mech.* **9**, 193 (1960).
- [13] M. S. Longuet-Higgins, *J. Fluid Mech.* **12**, 321 (1962).
- [14] L. F. Mcgoldrick, *J. Fluid Mech.* **21**, 305 (1965).
- [15] W. F. Simmons, *Proc. R. Soc. A Math. Phys. Eng. Sci.* **309**, 551 (1969).
- [16] V. Zakharov and N. Filonenko, *J. Appl. Mech. Tech. ...* **8**, 37 (1967).
- [17] V. Zakharov, in *Basic Plasma Phys. Sel. Chapters, Handb. Plasma Physics, Vol. 1* (1984), p. 3.
- [18] V. Zakharov and N. N. Filonenko, in *Sov. Phys. Dokl.* (1967), p. 881.
- [19] K. Hasselmann, *J. Fluid Mech* **12**, 481 (1961).
- [20] K. Hasselmann, *J. Fluid Mech.* **15**, 273 (1963).
- [21] S. Nazarenko, *Wave Turbulence* (Springer Science & Business Media, 2011).
- [22] A. Newell and B. Rumpf, *Ann. Rev. Fluid Mech.* **43**, 59 (2011).
- [23] V. Zakharov, *Eur. J. Mech.* **18**, 327 (1999).
- [24] V. Zakharov and M. M. Zaslavskii, *Izv. Atmos. Ocean. Phys.* **18**, 747 (1982).
- [25] L. Biven, S. Nazarenko, and A. Newell, *Phys. Lett. Sect. A Gen. At. Solid State Phys.* **280**, 28 (2001).
- [26] E. A. Kartashova, *Phys. Rev. Lett.* **72**, 2013 (1994).
- [27] E. A. Kartashova, *Phys. D Nonlinear Phenom.* **46**, 43 (1990).
- [28] E. A. Kartashova, *Phys. D Nonlinear Phenom.* **54**, 125 (1991).
- [29] E. Kartashova, *EPL (Europhysics Lett.)* **87**, 1 (2009).
- [30] E. Kartashova, *J. Exp. Theor. Phys. Lett.* **83**, 283 (2006).
- [31] a Pushkarev, *Eur. J. Mech. B/Fluids* **18**, 345 (1999).
- [32] S. Nazarenko, *J. Stat. Mech. Theory Exp.* **02002**, 1 (2013).
- [33] Y. V. Lvov, S. Nazarenko, and B. Pokorni, *arXiv Prepr. Math-ph/0507054* **22**, (2005).

- [34] V. Zakharov, J. Appl. Mech. Tech. Phys. **9**, 190 (1968).
- [35] C. Connaughton, S. Nazarenko, and A. Newell, Phys. D Nonlinear Phenom. **184**, 86 (2003).
- [36] E. A. Kartashova, Phys. Rev. E - Stat. Nonlinear, Soft Matter Phys. **86**, 1 (2012).
- [37] E. A. Kartashova, EPL (Europhysics Lett. **102**, 44005 (2013).
- [38] E. Tobisch, J. Exp. Theor. Phys. Lett. **119**, 359 (2014).
- [39] R. E. Glazman and B. Roman, J. Fluid Mech. **293**, 25 (1995).
- [40] M. Onorato, A. R. Osborne, M. Serio, L. Cavaleri, C. Brandini, and C. T. Stansberg, Eur. J. Mech. B/Fluids **25**, 586 (2006).
- [41] M. Onorato, L. Cavaleri, S. Fouques, O. Gramstad, P. a. E. M. P. Janssen, J. Monbaliu, a. R. Osborne, C. Pakozdi, M. Serio, C. T. Stansberg, a. Toffoli, and K. Trulsen, J. Fluid Mech. **627**, 235 (2009).
- [42] M. Serio, M. Onorato, A. R. Osborne, and P. a. E. M. P. Janssen, Nuovo Cim. Della Soc. Ital. Di Fis. C **28**, 893 (2005).
- [43] V. Zakharov, V. S. L'vov, and G. Falkovich, *Kolmogorov Spectra of Turbulence I: Wave Turbulence* (Springer Science & Business Media, 2012).
- [44] O. M. Phillips, R. Soc. **299**, 104 (1967).
- [45] L. F. Mcgoldrick, O. M. Phillips, N. E. Huang, and T. H. Hodgson, J. Fluid Mech. **25**, 437 (1966).
- [46] M. S. Longuet-Higgins and N. D. Smith, J. Fluid Mech. **25**, 417 (1966).
- [47] F. Bonnefoy, F. Haudin, G. Michel, B. Semin, M. Berhanu, E. Falcon, T. Humbert, S. Aumaître, M. Berhanu, and E. Falcon, arXiv Prepr. arXiv1606.09009 (2016).
- [48] L. F. Mcgoldrick, J. Fluid Mech. **40**, (1970).
- [49] P. P. Banerjee, Phys. Fluids **25**, 1938 (1982).
- [50] S. J. Hogan, Phys. Fluids **27**, 42 (1984).
- [51] M. Perlin, D. Henderson, and J. Hammack, J. Fluid Mech. **219**, 51 (1990).
- [52] M. Perlin and J. Hammack, J. Fluid Mech. **229**, 229 (1991).
- [53] D. Henderson and J. Hammack, J. Fluid Mech. **184**, 15 (1987).
- [54] J. R. Wilton, London, Edinburgh, Dublin Philos. Mag. J. Sci. **29**, 688 (1915).
- [55] F. Haudin, A. Cazaubiel, L. Deike, T. Jamin, E. Falcon, and M. Berhanu, Phys. Rev. E **93**, 043110 (2016).
- [56] N. Mordant, Eur. Phys. J. B **76**, 537 (2010).
- [57] P. Cobelli, P. Petitjeans, A. Maurel, V. Pagneux, and N. Mordant, Phys. Rev. Lett. **103**, 204301 (2009).
- [58] G. Bordes, F. Moisy, T. Dauxois, and P. P. Cortet, Phys. Fluids **24**, 1 (2012).
- [59] L. Deike, J.-C. Bacri, and E. Falcon, J. Fluid Mech. **733**, 394 (2013).
- [60] R. Holt and E. Trinh, Phys. Rev. Lett. **77**, 1274 (1996).
- [61] W. B. Wright, R. Budakian, D. J. Pine, and S. J. Putterman, Science (80-.). **278**, 1609 (1997).
- [62] W. B. Wright, R. Budakian, and S. J. Putterman, Phys. Rev. Lett. **76**, 4528 (1996).
- [63] M. Y. Brazhnikov, G. V. Kolmakov, A. A. Levchenko, and L. P. Mezhov-Deglin, Europhys. Lett. **58**, 510 (2002).
- [64] E. Henry, P. Alstrøm, and M. T. Levinsen, EPL (Europhysics Lett. **52**, 27 (2000).

Bibliographie

- [65] M. Lommer and M. T. Levinsen, *J. Fluoresc.* **12**, 45 (2002).
- [66] C. Falcón, E. Falcon, U. Bortolozzo, and S. Fauve, *EPL (Europhysics Lett.)* **86**, 14002 (2009).
- [67] M. Berhanu and E. Falcon, *Phys. Rev. E* **87**, 033003 (2013).
- [68] H. Xia, M. Shats, and H. Punzmann, *Europhys. Lett.* **91**, 6 (2010).
- [69] M. Shats, H. Punzmann, and H. Xia, *Phys. Rev. Lett.* **104**, 104503 (2010).
- [70] a Pushkarev and V. Zakharov, *Phys. D Nonlinear Phenom.* **135**, 98 (2000).
- [71] L. Deike, D. Fuster, M. Berhanu, and E. Falcon, *Phys. Rev. Lett.* **112**, 234501 (2014).
- [72] J. W. Miles, *J. Fluid Mech.* **3**, 185 (1957).
- [73] M. A. Donelan, J. Hamilton, and W. H. Hui, *Philos. Trans. R. Soc. London A Math. Phys. Eng. Sci.* **315**, 509 (1985).
- [74] L. Romero and W. K. Melville, *J. Phys. Oceanogr.* **40**, 466 (2010).
- [75] P. A. Hwang, D. W. Wang, E. J. Walsh, W. B. Krabill, and R. N. Swift, *J. Phys. Oceanogr.* **30**, 2753 (2000).
- [76] F. Leckler, F. Ardhuin, C. Peureux, A. Benetazzo, F. Bergamasco, and V. Dulov, *J. Phys. Oceanogr.* **45**, 2484 (2015).
- [77] W. B. Collis, P. R. White, and J. K. Hammond, *Mech. Syst. Signal Process.* **12**, 375 (1998).
- [78] S. Elgar, T. H. C. Herbers, V. Chandran, and R. Guza, *J. Geophys. Res.* **100**, 4977 (1995).
- [79] S. Elgar and R. Guza, *J. Fluid Mech.* **161**, 425 (1985).
- [80] S. Elgar and R. Guza, *J. Phys. Oceanogr.* **25**, 1063 (1995).
- [81] T. H. C. Herbers and R. Guza, *J. Geophys. Res.* **99**, 10035 (1994).
- [82] L. Shemer and A. Sergeeva, *J. Geophys. Res. Ocean.* **114**, 1 (2009).
- [83] P. Denissenko, S. Lukaschuk, and S. Nazarenko, *Phys. Rev. Lett.* **99**, 014501 (2007).
- [84] E. a. Kuznetsov, *J. Exp. Theor. Phys. Lett.* **80**, 83 (2004).
- [85] R. Bedard, S. Lukaschuk, and S. Nazarenko, *JETP Lett.* **97**, 459 (2013).
- [86] S. Nazarenko, S. Lukaschuk, S. McLELLAND, and P. Denissenko, *J. Fluid Mech.* **642**, 395 (2009).
- [87] L. Deike, B. Miquel, T. Jamin, B. Semin, M. Berhanu, E. Falcon, and F. Bonnefoy, *J. Fluid Mech.* **781**, 196 (2015).
- [88] S. Annenkov and V. Shrira, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 204501 (2006).
- [89] a. O. Korotkevich, A. I. Dyachenko, and V. Zakharov, *arXiv Prepr. arXiv1212.2225* 62 (2012).
- [90] K. B. Dysthe, K. Trulsen, H. E. Krogstad, and H. Socquet-Juglard, *J. Fluid Mech.* **478**, 1 (2003).
- [91] N. Yokoyama, *J. Fluid Mech.* **501**, 169 (2004).
- [92] M. Onorato, a R. Osborne, M. Serio, D. Resio, a Pushkarev, V. Zakharov, and C. Brandini, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 144501 (2002).
- [93] E. Falcon, C. Laroche, and S. Fauve, *Phys. Rev. Lett.* **98**, 094503 (2007).
- [94] L. Deike, M. Berhanu, and E. Falcon, *Phys. Rev. E - Stat. Nonlinear, Soft Matter Phys.* **89**, 1 (2014).
- [95] E. Herbert, N. Mordant, and E. Falcon, *Phys. Rev. Lett.* **105**, 144502 (2010).
- [96] M. Takeda, H. Ina, and S. Kobayashi, *J. Opt. Soc. Am.* **72**, 156 (1982).

- [97] A. Maurel, P. Cobelli, V. Pagneux, and P. Petitjeans, *Appl. Opt.* **48**, 380 (2009).
- [98] A. Przadka, B. Cabane, V. Pagneux, A. Maurel, and P. Petitjeans, *Exp. Fluids* **52**, 519 (2011).
- [99] P. Cobelli, a. Przadka, P. Petitjeans, G. Lagubeau, V. Pagneux, and a. Maurel, *Phys. Rev. Lett.* **107**, 214503 (2011).
- [100] B. Isenmann and E. Falcon, *Phys. Rev. E* **87**, 011001 (2013).
- [101] T. Humbert, O. Cadot, G. Düring, C. Josserand, S. Rica, and C. Touzé, *EPL (Europhysics Lett.)* **102**, 30002 (2013).
- [102] B. Miquel, A. Alexakis, and N. Mordant, *Phys. Rev. E* **89**, 62925 (2014).
- [103] W. Alpers and H. Hühnerfuss, *J. Geophys. Res.* **94**, 6251 (1989).
- [104] F. Behroozi, K. Cordray, and W. Griffin, *Am. J. Phys.* **75**, 407 (2007).
- [105] M. Takeda and K. Mutoh, *Appl. Opt.* **22**, 3977 (1983).
- [106] J. C. Scott, *J. Fluid Mech.* **69**, 339 (1975).
- [107] F. Moisy, M. Rabaud, and K. Salsac, *Exp. Fluids* **46**, 1021 (2009).
- [108] A. Benetazzo, *Coast. Eng.* **53**, 1013 (2006).
- [109] S. de Vries, D. F. Hill, M. A. de Schipper, and M. J. F. Stive, *Coast. Eng.* **58**, 239 (2011).
- [110] D. Douxchamps, D. Devriendt, H. Capart, C. Craeye, B. MacQ, and Y. Zech, *Exp. Fluids* **39**, 533 (2005).
- [111] L. Chatellier, S. Jarny, F. Gibouin, and L. David, *EPJ Web Conf.* **6**, 12002 (2010).
- [112] D. Astruc, S. Cazin, E. Cid, O. Eiff, L. Lacaze, P. Robin, F. Toub Blanc, and I. Cáceres, *Coast. Eng.* **60**, 11 (2012).
- [113] R. Y. Tsai, *IEEE J. Robot. Autom.* **3**, 323 (1987).
- [114] J. Heikkilä and O. Silvén, in *Comput. Vis. Pattern Recognit.* (1997), pp. 1106–1112.
- [115] Z. Zhang, *Proc. Seventh IEEE Int. Conf. Comput. Vis.* **1**, 0 (1999).
- [116] F. Scarano and M. L. Riethmuller, *Exp. Fluids* **26**, 513 (1999).
- [117] M. S. Longuet-Higgins, *J. Fluid Mech.* **248**, 449 (1993).
- [118] H. Hu, T. Saga, and S. Kobayashi, *J. ...* **1**, 87 (1998).
- [119] P. A. Kralchevsky and K. Nagayama, *Adv. Colloid Interface Sci.* **85**, 145 (2000).
- [120] W. A. Gifford and L. E. Scriven, *Chem. Eng. Sci.* **26**, 287 (1971).
- [121] M. A. Tayfun, *J. Geophys. Res. Ocean.* **85**, 1548 (1980).
- [122] H. Socquet-Juglard, K. B. Dysthe, K. Trulsen, H. E. Krogstad, and J. Liu, *J. Fluid Mech.* **542**, 195 (2005).
- [123] N. Machicoane, M. Lopez-Caballero, M. Bourgoïn, A. Aliseda, and R. Volk, *arXiv Prepr. arXiv1605.03803* (2016).