HAL
open science

Constructions de sous-variétés legendriennes dans les espaces de jets d'ordre un de fonctions et fonctions génératrices

Maÿlis Limouzineau

▶ To cite this version:

Maÿlis Limouzineau. Constructions de sous-variétés legendriennes dans les espaces de jets d'ordre un de fonctions et fonctions génératrices. Analyse fonctionnelle [math.FA]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2016. Français. NNT : 2016PA066676 . tel-01599325v2

HAL Id: tel-01599325
https://theses.hal.science/tel-01599325v2

Submitted on 5 Oct 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Université Pierre et Marie Curie

École doctorale de sciences mathématiques de Paris centre

Thèse de doctorat

Discipline : Mathématiques

présentée par

Maÿlis Limouzineau

Constructions de sous-variétés legendriennes dans les espaces de jets d'ordre un de fonctions et fonctions génératrices

---

dirigée par Emmanuel Ferrand

Soutenue le 21 octobre 2016 devant le jury composé de :

M. Christian Blanchet	Université Paris 7	codirecteur
M. Emmanuel Ferrand	Université Paris 6	directeur
M. François Laudenbach	Université de Nantes	examinateur
M. Alexandru Oancea	Université de Paris 6	examinateur
Mme Sheila Sandon	Université de Strasbourg	examinatrice
Mme Lisa Traynor	Bryn Mawr College	rapportrice*
M. Ricardo Uribe-Vargas	Université de Bourgogne	rapporteur

* Non physiquement présente lors de la soutenance.

Institut de mathématiques de Jussieu-
Paris Rive gauche. UMR 7586.
Boîte courrier 247
4 place Jussieu
75 252 Paris Cedex 05

Université Pierre et Marie Curie.
École doctorale de sciences
mathématiques de Paris centre.
Boîte courrier 290
4 place Jussieu
75 252 Paris Cedex 05

C'est une question d'énergie
Un problème de contact

La compagnie Créole, *Collé collé*

Résumé

Dans cette thèse, on manipule deux types d'objets fondamentaux de la topologie de contact : les sous-variétés legendriennes des espaces de 1-jets de fonctions définies sur une variété M, noté $J^1(M, \mathbb{R})$, et la notion intimement liée de fonctions génératrices.

On étudie des "opérations" que l'on peut faire sur ces objets, c'est-à-dire des procédures qui construisent (génériquement) de nouvelles sous-variétés legendriennes à partir d'anciennes. On définit en particulier les opérations *somme* et *convolution* des sous-variétés legendriennes, qui sont conjuguées par une transformation de type transformée de Legendre.

Nous montrons que ces opérations se reflètent harmonieusement dans le monde des fonctions génératrices. Ce second point de vue nous conduit en particulier à nous interroger sur l'effet de nos opérations sur le *sélecteur*, notion classique de géométrie symplectique dont on adapte la construction à ce contexte.

Pour finir, on se concentre sur l'espace à trois dimensions $J^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et sur les nœuds legendriens qui admettent (globalement) une fonction génératrice. C'est une condition forte sur les sous-variétés legendriennes, que l'on choisit d'étudier en proposant plusieurs constructions. On termine avec l'étude des notions de cobordisme legendrien naturellement associées, où l'opération somme évoquée plus s'avère tenir une place centrale.

Mots-clés

Espaces des 1-jets de fonctions réelles, sous-variétés legendriennes, fonctions génératrices, somme et convolution des fonctions, transformée de Legendre, sélecteur, nœuds legendriens et cobordismes legendriens.

Constructions of Legendrian submanifolds in spaces of 1-jets of functions and generating functions

Abstract

This thesis concern two types of fundamental objects of the contact topology : Legendrian submanifolds in 1-jet spaces of functions defined on a manifold M, denoted by $J^1(M, \mathbb{R})$, and the closed related notion of generating functions.

We study "operations" that build (generically) new Legendrian submanifolds from old ones. In particular, we define the operations *sum* and *convolution* of Legendrian submanifolds, which are linked by a form of the Legendre transform.

We show how the operations are well reflected in terms of generating functions. It offers a second point of view and leads us to wonder the effect of our operations on the *selector*, which is a classical notion of symplectic geometry, and we adapt its construction to this context.

Finally, we focus on the three dimensional space $J^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ and Legendrian knots which admit a (global) generating function. It is a strong condition for Legendrian submanifolds, and we choose to examine it by proposing several explicit constructions. We conclude by studying the notions of Legendrian cobordism which are naturally related. The operation sum mentioned before find there a central role.

Keywords

Spaces of 1-jets of functions, Legendrian submanifolds, generating functions, sum and convolution of functions, Legendre transform, selector, Legendrian knots and Legendrians cobordisms.

Table des matières

Introduction **9**

1 Préliminaires : géométrie de contact dans $J^1(M, \mathbb{R})$ **35**

1.1 L'espace des 1-jets sur M 36

1.2 Familles à un paramètre de sous-variétés legendriennes plongées ou immergées : isotopie et homotopie 40

1.2.1 Isotopie 41

1.2.2 Homotopie 41

1.3 Fonctions génératrices 42

1.3.1 Généralités 42

1.3.2 Équivalence de fonctions génératrices 49

1.3.3 Fonctions génératrices et « standardité » à l'infini 50

2 Opérations sur les sous-variétés legendriennes et fonctions génératrices **53**

2.1 Produit 54

2.2 Front-spinning et demi-front-spinning 57

2.3 Tranche et Contour 58

2.3.1 Définitions : deux opérations de réduction 58

2.3.2 Propriétés 60

2.4 Somme et convolution 64

2.5 Questions d'isotopie, d'homotopie et cobordisme de fronts d'onde 70

3 Sélecteur pour les opérations somme, transformée de Legendre et convolution **75**

3.1 Transformée de Legendre-Fenchel et inf-convolution des fonctions 77

3.2 Fonctions Génératrices et sélecteur 82

3.2.1 Min-Max des fonctions presque-simples 83

3.2.2 Sélecteur pour les fonctions génératrices presque-simples 86

3.2.3 Sélecteur et opération somme 87

3.2.4 Sélecteur pour l'opération **T** 88

3.2.5 Sélecteur, opérations somme, **T** et convolution 90

3.2.6 Les identités de type Fourier : 93

4 Nœuds et entrelacs Legendriens par fonctions génératrices quadratique à l'infini (fg QI) 95

4.1 Généralités 96

4.1.1 Définitions et notations 96

4.1.2 Les trois invariants classiques 100

4.1.3 Nœuds et fonctions génératrices 105

4.2 Des nœuds et entrelacs legendriens fg QI 109

4.2.1 Réalisations de fronts d'onde par contour de fg QI à une seule variable additionnelle $w \in \mathbb{R}$ 109

4.2.2 Fermeture des nœuds longs fg QI et superposition des contours fg QI 118

4.2.3 L'opération somme et la somme connexe des nœuds legendriens : . . . 124

4.3 Cobordismes fg QI 126

4.3.1 Groupe de concordance 127

4.3.2 Des homotopies par fonctions génératrices 132

A Rappels de théorie de Morse pour les fonctions définies sur $\mathbb{R}^n$ 135

A.1 Préliminaire : généricité 135

A.2 Définitions, théorème de Sard, lemme de Morse et lemme de Thom 136

A.3 Évolution de la topologie des sous-niveaux : 138

B Répartition des points et des valeurs critiques en trois catégories : basse, haute et homologique 141

C Forme normale de Barannikov et répartition des points critiques : le couplage 145

C.1 Forme normale de Barannikov pour une fonction de Morse excellente et couplage des points critiques 145

C.2 Forme normale de Barannikov et points critiques homologiques de la somme $f_1 \oplus f_2$ 147

D Répartition des valeurs critiques dans les chemins de fonctions : bifurcations 151

Bibliographie 158

Introduction

(English version follows.)

La géométrie de contact est le terrain mathématique propice pour des questions relatives à de nombreux domaines de la physique, tels que l'optique géométrique, la mécanique classique et la thermodynamique. V.I. Arnold ventait particulièrement la chose en affirmant que *« la géométrie de contact est toute la géométrie»* [2]. De cette immense tapisserie, on attrape deux fils : d'une main celui des *sous-variétés legendriennes*, de l'autre celui des *fonctions génératrices*, et on les suit.

Une variété de contact est une variété lisse équipée d'une *structure de contact*. Une structure de contact est un champ d'hyperplans tangents totalement non intégrable. La donnée d'un tel champ d'hyperplans implique que la variété est de dimension impaire $2n+1$, et que la dimension des sous-variétés partout tangentes à ce champ ne peut excéder n. C'est le contraire d'un feuilletage ; une collection d'hyperplans qui tourne tant qu'elle est impossible à suivre de manière tangentielle sauf pour les sous-variétés de dimensions inférieures ou égales à n, et au prix de force contorsion. Dans l'espace standard à trois dimensions par exemple, ces sous-variétés de dimension maximale sont des courbes qui ne peuvent jamais prendre la direction verticale. Pour pouvoir prendre de la hauteur, elles sont contraintes de s'enrouler autour d'une droite verticale, comme une plante grimpante le long d'un tuteur.

Précisons à ce stade que les variétés de contact sont toutes modelées localement sur le même exemple standard de variété de contact (c'est le théorème de Darboux, voir [25]). Soit l'espace $\mathbb{R}^{2n+1}$ muni des coordonnées $(u, q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n)$. On l'équipe du champ d'hyperplans tangents égal au noyau de la 1-forme de contact standard : $\mathrm{d}u - p\mathrm{d}q$. La question de savoir sur quelle variété de contact on habite est donc un problème global, et non local.

Ce n'est pas directement ce type d'interrogation qui nous préoccupe. Notre travail se borne au seul archétype de variété de contact formé des espaces de 1-jets de fonctions réelles définies sur une variété lisse. Il tient lieu de rendez-vous pour les deux notions sur lesquels nous concentrons notre effort. Il nous offre déjà un large éventail de questions, d'autant plus que ce cadre est celui des applications les plus classiques en mécanique, EDP

d'ordre 1 (méthodes des caractéristiques), thermodynamique...

Les **sous-variétés legendriennes** d'une variété de contact de dimension $2n+1$ sont les sous-variétés de dimension n qui sont partout tangentes à la structure de contact. Par exemple, dans un espace de contact de dimension 3, il s'agit de courbes.

Soit F une fonction définie sur le plan euclidien $\mathbb{R}^2$. Son graphe Γ est une surface dans $\mathbb{R}^3$ qui hérite de toute la régularité dont F bénéficie. Supposons que F est lisse. On considère dans le plan horizontal $\mathbb{R}^2$ une direction privilégiée : l'axe des q, et la direction qui lui est perpendiculaire : l'axe des w, que l'on appelle aussi *espace additionnel*. On place la coordonnée u sur l'axe vertical dans $\mathbb{R}^3$, celui qui accueille les images de la fonction F.

Considérons maintenant sur Γ le lieu d'annulation de la pente en direction de l'axe des w :

$$\{(u,q,w) \mid u = F(q,w) \text{ et } \frac{\partial F}{\partial w}(q,w) = 0\}.$$

C'est une collection de courbes dessinées sur Γ. Puis on projette ce lieu d'annulation sur le plan formé de l'axe des u et de l'axe des q. On pourrait appeler cela "faire le contour" du graphe de F en direction de l'axe des w. On complète les couples (u,q) ainsi obtenus ($u = F(q,w)$ et $\frac{\partial F}{\partial w}(q,w) = 0$) par la pente $p = \frac{\partial F}{\partial q}(q,w)$ en direction de l'autre axe, celui des q :

$$L = \{(u,q,p) \mid \exists w \ , \ u = F(q,w) \ , \ p = \frac{\partial F}{\partial q}(q,w) \text{ et } \frac{\partial F}{\partial w}(q,w) = 0\}.$$

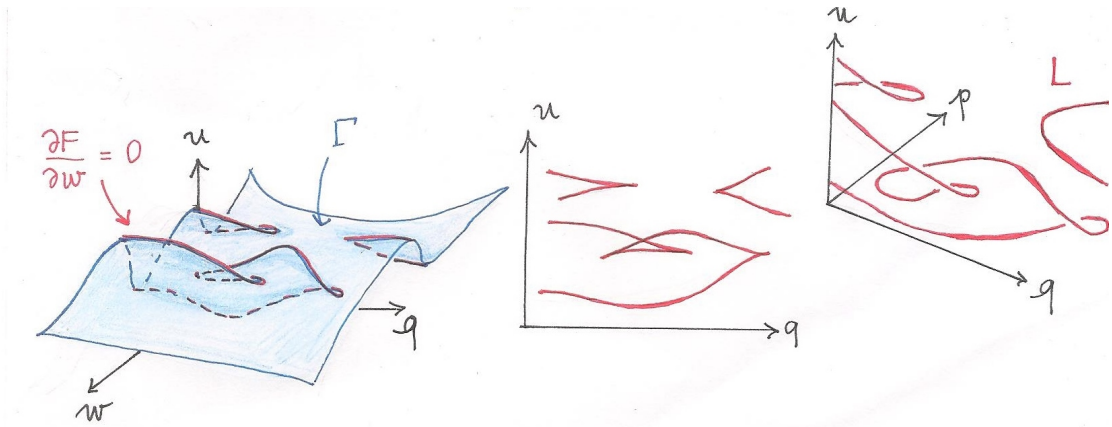


FIGURE 1 – Le contour du graphe Γ de F dans la direction de l'axe des w.

Cet ensemble qui s'étend dans l'espace des (u,q,p) est, la plupart du temps, encore une collection de courbes qui hérite de la régularité de F. Dans ce cas, c'est une sous-variété legendrienne de l'espace de contact standard $(\mathbb{R}^3, \ker(\mathrm{d}u - p\mathrm{d}q))$. On n'exclut pas le cas où le sous-ensemble obtenu n'est pas une sous-variété, bien que cette situation soit *non-générique*. Dans ce cadre, on appelle F une **fonction génératrice** de L, et L est appelé

le **contour** de F.

Une fonction génératrice s'obtient plus généralement en considérant F définie sur le produit d'une variété lisse M (auparavant l'axe des q, la direction privilégiée) et d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^k$ (espace additionnel). Les sous-variétés legendriennes réalisées vivent alors dans l'espace des 1-jets de fonctions définies sur M : $J^1(M, \mathbb{R})$.

Quelles sont les sous-variétés legendriennes de $J^1(M, \mathbb{R})$ qui sont des contours de fonctions génératrices ? Cette question-là est difficile, et mon travail s'inscrit dans ce sujet de recherche actuelle. Les *opérations* du chapitre 2 participent à y répondre, puisque la présence de fonctions génératrices pour les sous-variétés legendriennes fabriquées persiste avec les opérations. Par ailleurs, le chapitre 4 donne certaines constructions explicites dans le cas de nœuds legendriens.

Quand est-ce qu'une fonction génératrice définit une sous-variété legendrienne immergée ? plongée ? La proposition 1.3.4, résultat folklorique, nous dit que c'est génériquement le cas. On y revient dans le cadre de nos *opérations* (chapitre 2) en étudiant dans quels cas le résultat d'une opération est immergé ou plongé.

Plus globalement, que deviennent les sous-variétés legendriennes lorsqu'on pratique des opérations qui préservent la régularité des fonctions, comme la somme par exemple ? Cette question est originale, et s'entend de plusieurs manières. On voit en particulier au chapitre 2 que les opérations *produit* et *somme* des sous-variétés legendriennes donnent génériquement des sous-variétés legendriennes, mais créent des fronts d'onde à singularités non-génériques [4]. Par ailleurs, on est amené à distinguer plusieurs types de familles à un paramètre de legendriennes (isotopie, homotopie, cobordisme), en particulier dans le cas des nœuds legendriens (chapitre 4).

Cette thèse se revendique d'une inspiration élémentaire et naturelle à l'étude de ces phénomènes de contact dans les espaces de 1-jets de fonctions – la *«tautologie de contact»* comme la nomme E. Ferrand [23]. Ce cadre tautologique recèle de faits non-triviaux, puisqu'un nombre notable de résultats profonds de topologie de contact y apparait déja [9], [26].

Les legendriennes que l'on considère ici sont celles pour lesquelles on peut calculer l'homologie définie par L. Traynor [52], [12]. Les techniques de fonctions génératrices ont pris récemment un nouvel essor avec les résultats de S. Sandon [45], [46], les liens qui ont été trouvés avec l'homologie de contact, et la notion d'augmentation, voir par exemple [11]. Par ailleurs l'approche faisceautique [47] est réputée être une version modernisée des fonctions génératrices, et les constructions explicites de fronts d'onde ayant certaines propriétés sont importantes dans ces points de vue modernes. Nous espérons que notre approche pourra apporter une pierre à ces constructions.

Où sommes-nous ?

Le chapitre 1 a pour vocation de donner un panorama global de notre cadre. Il fournit les bases élémentaires pour les chapitres suivants (chapitres 2, 3 et 4). Il est complété par quatre annexes plus techniques. Toutes les définitions et propriétés de ce chapitre *«Préliminaires»* appartiennent au folklore, même si on a ressenti le besoin de refaire certaines démonstrations non trouvées dans les livres.

L'annexe A précise la notion de *généricité* dont nous nous servons constamment, puis se consacre aux rappels de base de la théorie de Morse (au cas-où). Elle constitue un outil majeur dans notre travail, spécialement pour les chapitres 3 et 4, où les fonctions génératrices sont vues comme des familles, paramétrées par la base, de fonctions définies sur $\mathbb{R}^k$ presque partout de Morse.

Les annexes B, C et D vont plus loin dans la théorie de Morse. Elles ont pour vocation d'accompagner au mieux la compréhension des chemins de points critiques et valeurs critiques pour ces familles à paramètres de fonctions de Morse presque partout.

Sauf mention du contraire, tout au long de cette thèse, les variétés, les sous-variétés, fonctions et applications que nous considérons sont supposées C^∞. Nous aurons aussi besoin d'identifier les fibres du cotangent d'une variété avec celles du tangent, nous supposerons donc les variétés munies d'une métrique riemannienne. Dans le cas de $\mathbb{R}^n$, ce sera la métrique euclidienne standard. En particulier, on préfèrera souvent l'utilisation du gradient d'une fonction à celle de la différentielle.

L'espace des 1-jets de fonctions définies sur une variété lisse M est l'ensemble constitué des 1-jets de fonctions, que l'on note $J^1(M,\mathbb{R})$. Un 1-jet est la donnée d'un point q appartenant à la base M, de son image $u \in \mathbb{R}$ par une fonction lisse ϕ définie sur un petit voisinage de q, et du gradient de ϕ au point q, $\nabla\phi(q) \in T_qM$:

$$(u = \phi(q), q, p = \nabla\phi(q)).$$

$J^1(M,\mathbb{R})$ est une variété de dimension $2n+1$. C'est aussi le produit de $\mathbb{R}$ par le fibré cotangent de la variété M :

$$J^1(M,\mathbb{R}) = \mathbb{R} \times T^*M.$$

On travaille avec des coordonnées locales canoniques (u,q,p), $u \in \mathbb{R}$, $q \in M$, $p \in T_qM$, et on notera souvent abusivement les éléments de $J^1(M,\mathbb{R})$ par un tel triplet, bien que ce fibré ne soit pas trivial trivial en général. $J^1(M,\mathbb{R})$ vient naturellement équipé de la structure de contact standard que définit le noyau de la 1-forme de contact : $\mathrm{d}u - p\mathrm{d}q$.

Les fonctions définies sur M donnent naturellement les premiers exemples de sous-variétés legendriennes. Si f est une fonction définie sur M, son 1-graphe :

$$j^1 f = \{(u,q,p) \mid u = f(q), p = \nabla f(q)\}$$

est une sous-variété de dimension n tangente en chacun de ses points à la structure de contact, car la 1-forme $\mathrm{d}u - p\mathrm{d}q$ s'y annule par construction.

Il y a beaucoup d'autres sous-variétés legendriennes dans $J^1(M, \mathbb{R})$. Disons que celles qui sont des 1-graphes de fonctions constituent le niveau 0, et que l'ensemble de toutes les sous-variétés legendriennes forme le niveau 2. Entre les deux se trouvent nos centaures, à la fois sous-variétés legendriennes et provenant de 1-graphes de fonctions en un sens plus large ; ce sont les sous-variétés legendriennes L_F obtenues comme contours de fonctions génératrices F définies sur des produits de M avec un espace additionnel $\mathbb{R}^k$:

$$L_F = \{(u, q, p) \mid \exists w \in \mathbb{R}^k \ , \ \nabla_w F(q, w) = 0 \ , \ u = F(q, w) \ , \ p = \nabla_q F(q, w)\}.$$

Dans le chapitre 1, on définit aussi les *déformations* – isotopie et homotopie legendriennes – auxquelles sont sujettes les sous-variétés legendriennes dans l'espace de contact. D'autre part, la proposition 1.3.4 (résultat folklorique) garantit que les fonctions génératrices *génériques* fabriquent effectivement des sous-variétés legendriennes plongées :

Proposition 0.0.1 (Proposition 1.3.4). *Si la fonction génératrice F est telle que 0 est une valeur régulière de l'application aux dérivées partielle*

$$\begin{aligned} \nabla_w F \ : \ M \times \mathbb{R}^k \to \quad & \mathbb{R}^k \\ (q, w) \mapsto & \left(\frac{\partial F}{\partial w_i}(q, w) \right)_{i=1\ldots k}, \end{aligned}$$

alors l'ensemble L_F réalisé par F est une sous-variété legendrienne immergée de $J^1(M, \mathbb{R})$, génériquement plongée. De plus cette condition est générique.

Il existe plusieurs fonctions génératrices qui ont la même sous-variété legendrienne pour contour. En particulier, on rappelle en deuxième partie du chapitre 1 la notion d'*équivalence de fonctions génératrices*, qui consiste à autoriser deux types de changement dans l'espace additionnel. Par ailleurs, il n'est pas vrai qu'une déformation opérée dans l'espace $J^1(M, \mathbb{R})$ sur une sous variété legendrienne L ayant une fonction génératrice F correspond à une déformation de la fonction génératrice, au sens d'un difféomorphisme de l'espace source ou de l'espace d'arrivée. Pourtant, en imposant un certain comportement à l'infini aux fonctions génératrices (par exemple *quadratique à l'infini*, ou *quadratique-linéaire à l'infini*), et se laissant la liberté de manipuler de fonctions génératrices équivalentes, on a le résultat fondamental suivant :

Théorème 0.0.2 (Y.V. Chekanov [15]). *Si $(L_t)_{t\in[0,1]}$ est une isotopie legendrienne à support compact, et si L_0 est le contour d'une fonction génératrice quadratique à l'infini F_0, alors l_1 est aussi le contour d'une fonction génératrice quadratique à l'infini F_1.*

Il est de plus possible de construire une famille $(F_t)_{t\in[0,1]}$ telle que chaque F_t est une fonction génératrice pour L_t, et les F_t sont toutes définies avec le même espace additionnel.

Opérations

On travaille au chapitre 2 sur des opérations qui jouent sur des espaces de 1-jets au-dessus de différentes bases, et de plusieurs types : M, $M_1 \times M_2$, N sous-variété de M, $\mathbb{R}^n$, etc. On entend par "opérations" sur les sous-variétés legendriennes des procédés qui produisent des sous-variétés legendriennes à partir d'autres sous-variétés legendriennes. Les plus classiques sont celles de *réductions* : la *tranche* et le *contour*.

À partir d'une sous-variété N de la base M, l'opération tranche réduit une "grande" sous-variété legendrienne de l'espace de 1-jets $J^1(M, \mathbb{R})$ à une "petite" sous-variété legendrienne de l'espace $J^1(N, \mathbb{R})$.

Le contour construit à partir d'une "grande" sous-variété legendrienne d'un espace de 1-jets de la forme $J^1(M_1 \times M_2, \mathbb{R})$ une "petite" sous-variété legendrienne de $J^1(M_1, \mathbb{R})$ (c'est la généralisation du contour qui donne la notion de fonction génératrice).

On constate que les opérations géométriques naturelles sur les sous-variétés legendriennes – la tranche, le contour ou encore le *front-spinning* – se traduisent sans résistance en termes de fonctions génératrices.

D'un autre côté, l'opération évidente de somme sur les fonctions nous inspire deux opérations sur les sous-variétés legendriennes : la *somme* et le *produit*.

La somme de fonctions définies sur M correspond au niveau du fibré $J^1(M, \mathbb{R})$ à la somme dans chaque fibre. Nous sommes ainsi naturellement amenés à définir la somme des sous-variétés legendriennes : soient L_1 et L_2 deux sous-variétés legendriennes de $J^1(M, \mathbb{R})$, leur somme est le sous-ensemble de $J^1(M, \mathbb{R})$:

$$L_1 \underline{+} L_2 = \{(u_1 + u_2, q, p_1 + p_2) \mid (u_i, q, p_i) \in L_i, i = 1, 2\}.$$

Il est remarquable que cela s'articule harmonieusement avec le niveau intermédiaire, celui des fonctions génératrices. En effet, si F_1 et F_2 sont des fonctions génératrices pour respectivement L_1 et L_2, définies respectivement sur $M \times \mathbb{R}^{k_1}$ et sur $M \times \mathbb{R}^{k_2}$, alors la somme $L_1 \underline{+} L_2$ est le contour en direction du produit des espaces additionnels $\mathbb{R}^{k_1} \times \mathbb{R}^{k_2}$ de la fonction génératrice définie sur $M \times \mathbb{R}^{k_1} \times \mathbb{R}^{k_2}$ par :

$$F_{1\underline{+}2}(q, w_1, w_2) = F_1(q, w_1) + F_2(q, w_2).$$

Le produit quand à lui est obtenu en faisant le produit des espaces de bases : considérons L_1 une sous-variété legendrienne dans $J^1(M_1, \mathbb{R})$, et L_2 une sous-variété legendrienne dans $J^1(M_2, \mathbb{R})$. Leur produit est le sous-ensemble de $J^1(M_1 \times M_2, \mathbb{R})$:

$$L_1 \underline{\times} L_2 = \{(u_1 + u_2, q_1, q_2, p_1, p_2) \mid (u_i, q_i, p_i) \in L_i, i = 1, 2\}.$$

Soient F_1 et F_2 des fonctions génératrices définies respectivement sur $M_1 \times \mathbb{R}^{k_1}$ et sur

$M_2 \times \mathbb{R}^{k_2}$, telles que L_1 est le contour de F_1 et L_2 le contour de F_2. Alors le produit de $L_1 \underline{\times} L_2$ est le contour en direction de $\mathbb{R}^{k_1} \times \mathbb{R}^{k_2}$ de la fonction génératrice définie sur le produit $M_1 \times M_2 \times \mathbb{R}^{k_1} \times \mathbb{R}^{k_2}$ par :

$$F_{1\underline{\times}2}(q_1, q_2, w_1, w_2) = F_1(q_1, w_1) + F_2(q_2, w_2).$$

On verra que ces opérations créent génériquement des sous-variétés legendriennes.

Somme et convolution

Si maintenant on se restreint aux espaces de 1-jets à base vectorielle, on crée la possibilité de faire la somme sur la base au lieu de faire la somme dans les fibres. C'est la convolution des sous-variétés legendriennes : soient L_1 et L_2 des sous-variétés legendriennes de $J^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, la convolution $L_1 \underline{\square} L_2$ est le sous-ensemble de $J^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ suivant :

$$L_1 \underline{\square} L_2 = \{(u_1 + u_2, q_1 + q_2, p) \ / \ (u_i, q_i, p) \in L_i, i = 1, 2\}.$$

Cette opération est reliée à la somme par une transformation classique (une version de la *transformation de Legendre*) :

$$\begin{aligned} \mathbf{T} : \quad J^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) &\longrightarrow J^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \\ (u, q, p) &\longmapsto (pq - u, p, q). \end{aligned}$$

C'est un *contactomorphisme*, c'est à dire que cette transformation respecte les sous-variétés legendriennes. Son effet est d'échanger les coordonnées de la base q avec les coordonnées de fibre p, c'est en particulier une involution. Ces trois ingrédients réunis forment de jolies identités (identités de *type Fourier*) :

Théorème 0.0.3 (théorème 2.4.10)**.**

$$\mathbf{T}\,(L_1 \underline{+} L_2) = (\mathbf{T}L_1) \underline{\square} (\mathbf{T}L_2) \qquad \textit{et} \qquad \mathbf{T}\,(L_1 \underline{\square} L_2) = (\mathbf{T}L_1) \underline{+} (\mathbf{T}L_2).$$

Qui de l'œuf ou de la poule était là avant ? On a choisi au chapitre 2 le point de vue géométrique qu'offrent les sous-variétés legendriennes en montrant que les opérations somme et convolution sont des cas particuliers de tranche et contour. De sorte que les identités de type Fourier ci-dessus viennent comme des conséquences des identités correspondantes pour la tranche et le contour :

Proposition 0.0.4 (proposition 2.3.6)**.** *Les opérations de tranche et de contour sont conjuguées par* $\mathbf{T}$ *:*

$$\mathbf{T}\sigma(L) = \kappa(\mathbf{T}L) \qquad \textit{et} \qquad \mathbf{T}\kappa(L) = \sigma(\mathbf{T}L)$$

où $\kappa(L)$ *est le contour de* L *et* $\sigma(L)$ *désigne la tranche correspondante.*

Ces opérations somme et convolution nous ont pourtant bien été soufflées par l'expérience des fonctions. D'ailleurs, on trouve la trace de cette mécanique entre somme, transformation **T** et convolution dans le domaine de l'analyse convexe.

On change ainsi notre fusil d'épaule au chapitre 3 en reliant les opérations somme, convolution et transformation **T** à trois opérations sur les fonctions qui sont dans l'ordre la somme, *l'inf-convolution* et *la transformée de Legendre–Fenchel.*

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}^n$. Sa transformée de Legendre–Fenchel est la fonction $f^* : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ définie par :

$$f^* \ : \ q \in \mathbb{R}^n \mapsto \sup_{v \in \mathbb{R}^n} \{qv - f(v)\}.$$

Soient f_1 et f_2 deux fonctions définies sur $\mathbb{R}^n$. Leur inf-convolution $f_1 \Box f_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ est définie par :

$$f_1 \Box f_2 \ : \ q \mapsto \inf_{v \in \mathbb{R}^k} \{f_1(v) + f_2(q - v)\}.$$

La transformée de Legendre–Fenchel et l'inf-convolution sont des outils particulièrement utiles en thermodynamique classique, domaine qui à tout à voir avec la géométrie de contact. En effet, la relation fondamentale de la thermodynamique (premier principe) relie les variables d'énergie U, de pression P, de volume V, de température T et d'entropie S d'un système fermé par l'annulation d'une forme de contact de l'espace $\mathbb{R}^5$:

$$\mathrm{d}U = P\mathrm{d}V - T\mathrm{d}S.$$

Ainsi, l'ensemble des états stables d'un système fermé forme une sous-variété legendrienne dans l'espace de contact des variables thermodynamique.

Il existe de bonnes hypothèses sur les fonctions qui permettent de retrouver la trace de la mécanique qui s'opère au niveau des sous-variétés legendriennes. En particulier, si f_1 est f_2 sont des fonctions qui sont des déformations "bornées" de fonctions convexes (voir *presque-convexe*, définition 3.2.12), on a :

$$(f_1 + f_2)^* = f_1^* \Box f_2^* \qquad \text{et} \qquad (f_1 \Box f_2)^* = f_1^* + f_2^*.$$

Le chapitre 3 a pour point de départ deux remarques élémentaires et connues des spécialistes. La première est que la transformée de Legendre–Fenchel et l'inf-convolution sont les projections au niveau de l'espace des 0-jets de fonctions des opérations **T** et convolution qui ont lieu au niveau l'espace des 1-jets $J^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, mais ce dans le cas très précis où les fonctions sont convexes et le gradient est inversible : $(\nabla f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n)$ est un difféomorphisme. Ces faits folkloriques ce réécrivent dans notre langage :

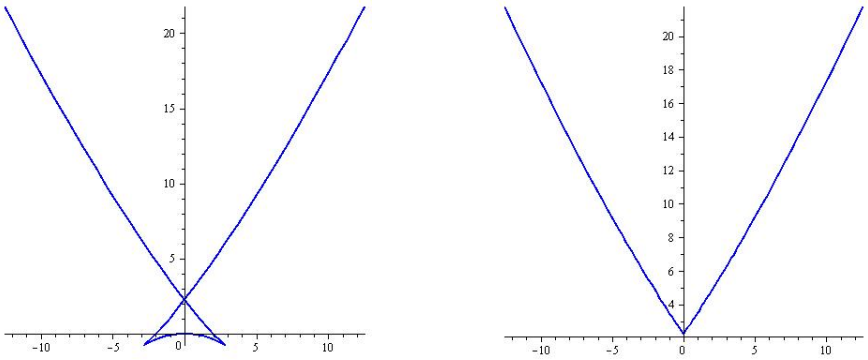
Proposition 0.0.5 (Corollaire 3.1.7 et lemme 3.1.9). *Si f est une fonction convexe et telle que ∇f est inversible, alors $\mathbf{T}(j^1 f)$ est le 1-graphe de la transformée de Legendre-Fenchel de f :*

$$\mathbf{T}(j^1 f) = j^1(f^*).$$

Si f_1 et f_2 sont deux fonctions convexes telles que ∇f_1 et ∇f_2 sont inversibles, alors :

$$(j^1 f_1)\underline{\square}(j^1 f_2) = j^1(f_1 \square f_2).$$

La seconde est que, lorsque l'on est dans le cas *presque-convexe*, la transformée de Legendre–Fenchel et l'inf-convolution ne sont plus les projections de la transformation $\mathbf{T}$ et de la convolution (qui produisent des fronts d'onde, c'est-à-dire des graphes *multivalués* et non des graphes). Elles correspondent à une procédure effectuée sur les fonctions génératrices associées respectivement à la transformation $\mathbf{T}$ et à la convolution des 1-graphes. Il s'agit de la notion de *sélecteur*, ou *"graph-selector"* [13], [54], qui est une construction classique et importante en topologie symplectique et de contact. Le sélecteur existe pour certaines classes de fonctions génératrices – on travaille au chapitre 3 avec la classes des fonctions génératrices *presque simples* (définition 3.2.15). À une fonction génératrice F donnée, le sélecteur associe une fonction continue $s(F)$, dont le graphe est une section continue du graphe du front d'onde réalisé par F. Par exemple, la fonction génératrice F définie sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ par $F(q, w) = qw - w^4 + 3w^2$ génère le front d'onde donné en figure (a), tandis que le graphe du sélecteur $s(F)$ est donné en figure (b).



(a) (b)

Il est ainsi connu que, si f est presque-convexe, alors sa transformée de Legendre–Fenchel f^* ne prend que des valeurs finies et coïncide avec le sélecteur de la fonction génératrice $f_{\mathbf{T}}$ associée à la transformation $\mathbf{T}$ du 1-graphe de f. De même, si f_1 et f_2 sont presque-convexes, alors leur inf-convolution $f_1 \square f_2$ ne prend que des valeurs finies et coïncide avec le sélecteur de la fonction génératrice $f_{1\underline{\square}2}$ de la convolution des 1-graphes de f_1 et f_2 (corollaire 3.2.28).

On a d'une part l'existence de l'objet sélecteur pour les sous-variétés legendriennes contours de certaines fonctions génératrices qui sélectionne dans le front d'onde un graphe de fonction continue. D'autre part, on a des opérations naturelles sur les sous-variétés legendriennes pour lesquelles l'existence d'une fonction génératrice persiste. On se demande pour quelles fonctions génératrices le sélecteur existe et persiste par ces opérations. Les fonctions presque-convexes sont un cas très particulier de telles fonctions génératrices (avec espace additionnel réduit à $\{0\}$). Au chapitre 3, on introduit pour répondre plus généralement à cette question des classes de fonctions génératrices (*presque-simples* et *globalement presque-simples*) qui admettent un sélecteur, et qui sont stables pour respectivement l'opération somme et la transformation $\mathbf{T}$. La suite de l'étude réclamera de définir une classe de fonctions génératrices qui soit stable pour les deux opérations à la fois, de sorte que l'on puisse travailler avec la somme, la transformation $\mathbf{T}$, la convolution et le sélecteur tout en même temps.

Enfin, il est naturel de soupçonner la présence des identités de type Fourier au niveau du sélecteur. On montre

$$s(F_{(\mathbf{T}1)\underline{+}(\mathbf{T}2)}) = s(F_{\mathbf{T}(1\underline{\square}2)}).$$

La seconde attendue – $s(F_{(\mathbf{T}1)\underline{\square}(\mathbf{T}2)}) = s(F_{\mathbf{T}(1\underline{+}2)})$ – est plus subtile (travail en cours).

Des nœuds comme contours de fonctions génératrices

Notre dernier chapitre se consacre à l'étude des sous-variétés legendriennes de l'espace tridimensionnel $J^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$: ce sont les nœuds et entrelacs legendriens *fermés* ou *longs*. La théorie des nœuds legendriens est plus fine que la théorie classique (topologique) des nœuds. Il existe de nombreux représentants legendriens (non-équivalents à isotopie legendrienne près) pour un même type de nœud topologique. Une manière de restreindre drastiquement le champ des possibles et de regarder ceux qui sont contours de fonctions génératrices.

Quels sont les types topologiques de nœuds admettant un représentant legendrien réalisable par contour de fonction génératrice ?

On commence par observer que ce n'est pas le cas de tous :

Proposition 0.0.6 (4.1.29)**.** *Il n'existe pas de représentant legendrien long du mauvais trèfle (figure 2) qui soit réalisable par fonction génératrice (quadratique à l'infini).*

FIGURE 2 – Le mauvais trèfle topologique.

Ce constat vient motiver la recherche des types de nœuds topologiques réalisables par fonctions génératrices. On lance une démarche constructive qui reste (à notre goût) em-

bryonnaire. Nous considérons en premier lieu des constructions avec les fonctions génératrices ayant un espace additionnel de dimension 1 – ce sont les familles à un paramètre de *serpents d'Arnold* [3]. On réalise certaines familles de nœuds et entrelacs. En particulier :

Théorème 0.0.7 (Théorème 4.2.4). *Soit B une tresse positive. La fermeture legendrienne de B est réalisable par contour d'une fonction génératrice quadratique à l'infini avec espace additionnel égal à $\mathbb{R}$.*

On construit ensuite des *greffes* de fonctions génératrices standards à l'infini, de sorte de créer par fonction génératrice la *fermeture* des nœuds long, puis la *superposition* des contours. Cette dernière construction est destinée à la création automatique d'entrelacs legendriens contours de fonctions génératrices quadratiques à l'infini à partir de fonctions génératrices quadratiques à l'infini données pour chaque composante.

La dernière partie de ce chapitre 4 est consacrée aux définitions et à l'étude des notions de cobordisme et de concordance que l'on associe aux nœuds munis de fonctions génératrices quadratiques à l'infini. Un cobordisme legendrien entre deux nœuds legendriens L_0 et L_1 est une "grande" sous-variété legendrienne $\mathcal{L}$ dans $J^1(\mathbb{R}\times[0,1],\mathbb{R})$, telle que L_0 et L_1 sont les tranches de $\mathcal{L}$ le long respectivement de $\mathbb{R}\times\{0\}$ et $\mathbb{R}\times\{1\}$. Les cobordismes legendriens sont totalement classés par l'*indice de Maslov*. Ces constructions viennent compléter celles de [21] en y ajoutant l'ingrédient des fonctions génératrices quadratiques à l'infini.

L'opération somme des sous-variétés legendriennes étudiée aux chapitres 2 et 3 réapparaît naturellement dans ce contexte pour réaliser la somme connexe des nœuds longs. On montre en particulier que :

Théorème 0.0.8 (Corollaire 4.3.11). *L'ensemble des nœuds legendriens réalisables par fonctions génératrices quadratiques à l'infini modulo la relation de concordance par fonction génératrice quadratique à l'infini muni de l'opération somme connexe des nœuds longs est un groupe commutatif.*

Enfin, l'opération somme offre aussi une autre mécanique surprenante, dont la première manifestation est celle-ci :

Proposition 0.0.9 (proposition 4.3.14). *La somme d'un nœud long avec un représentant du nœud legendrien trivial maximal de grand largeur et de petite hauteur est legendriennement isotope au nœud legendrien trivial maximal (figure 3).*

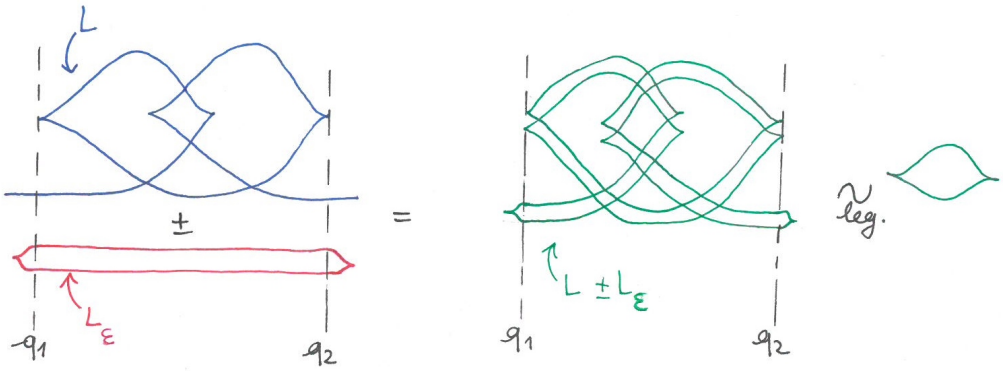


FIGURE 3 –

Continuant sur le fil de cette observation, et joignant les deux formes de standardité des fonctions génératrices à l'effort (quadratique à l'infini et quadratique-linéaire à l'infini), on trouve le fait suivant :

Théorème 0.0.10 (Proposition 4.3.16). *Soit L un nœud legendrien contour d'une fonction génératrice quadratique à l'infini. La fermeture de la somme connexe de L avec son miroir legendrien $\bar{L}$, notée $\lceil \bar{L}\#L \rceil$, est le contour d'une fonction génératrice quadratique-linéaire à l'infini, et il existe une famille à un paramètre de fonctions génératrices quadratiques-linéaires à l'infini qui réalise une homotopie legendrienne entre $\lceil \bar{L}\#L \rceil$ et le nœud trivial maximal $\diamondsuit$.*

Perspectives

Cette thèse laisse entrevoir plusieurs pistes qui n'ont été, au mieux, qu'effleurées. Parmi nos interrogations en cours, nous soulignons les quatre suivantes :

L'étude de l'opération somme des sous-variétés legendriennes sur les fronts d'ondes de petites dimensions (1 et 2) fait apparaître que, si génériquement la somme est une sous-variété legendrienne (plongée), des fronts d'onde où des singularités non-génériques apparaissent génériquement (un exemple est le *mouchoir*, voir figure 2.8).

Quels autres fronts d'onde exceptionnels fait génériquement apparaître l'opération somme dans les plus grandes dimensions ? Quelle place tiennent-il dans la classification des singularités ?

Considérons la somme d'une sous-variété legendrienne L, et de son opposé :

$$-L = \{(-u, q, -p) \mid (u, q, p) \in L\}.$$

Que peut-nous apprendre l'étude géométrique de la "différence" $L \pm (-L)$? Sachant que

la fonction génératrice associée à cette différence est le point de départ de la théorie homologique initiée par L. Traynor [52].

Soit L un nœud legendrien long qui soit le contour d'une fg QI. On sait qu'il existe une homotopie legendrienne de L vers la section nulle.

Existe-il une homotopie legendrienne entre L et la section nulle qui soit réalisable par une famille à un paramètre de fg QI ?

Quels sont tous les nœuds (ou entrelacs) legendriens longs réalisables comme contours avec un espace additionnel de dimension 1 ? Autrement dit, que peut-on réaliser comme front d'onde avec un chemin de serpents d'Arnold ?

Introduction

Contact geometry is the domain of mathematics adapted to many questions in physics, such as geometric optic, classical mechanics and thermodynamics. V.I. Arnold was proudly saying that *« contact geometry is all geometry»* ([2]). We catch to thread in this tapestry : the first one corresponds to *Legendrian submanifolds*, the second one to *generating functions*.

A contact manifold is a smooth manifold endowed with a *contact structure* and a contact structure is a field of tangent hyperplanes that is completely non-integrable. Considering such a field of hyperplanes implies that the manifold is of odd dimension $2n+1$, and that the dimension of a submanifold everywhere tangent to this field cannot exceed n. This concept is opposite to that of a foliation ; a collection of hyperplanes that twists in that manner is impossible to follow tangentially unless the dimension of the submanifold is of dimension at most n, and has to contort itself a lot. Imagine a three-dimensional world where curves cannot escalade in a straight vertical direction. They are constricted to spiral around a straight line in order to ascend, similar to a climbing plant twining around a post.

We first specify that contact manifolds are all locally modeled on the same standard example of a contact manifold (by Darboux's theorem, see [25]). Considering the space $\mathbb{R}^{2n+1}$ with coordinates $(u, q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n)$, we endow it with the field of tangent hyperplanes which defines the kernel of the standard contact 1-form : $\mathrm{d}u - p\mathrm{d}q$. Therefore, the question of knowing which contact manifold we are dealing with is a global, as opposed to a local, one.

However, this is not directly the question we are preoccupied with. We aim our attention at contact manifolds formed by spaces of 1-jets of real functions defined on a smooth variety. These are located at the crossroads of the two principal notions we focus on, while also ramifying into a large array of questions, as its framework is that of classical applications in mechanics, first order PDEs (the characteristics method) and thermodynamics.

The **Legendrian submanifolds** of a contact manifold of dimension $2n+1$ are n-dimensional submanifolds which are everywhere tangent to the contact structure. For example, if the contact space is of dimension 3, these are curves.

Let F be a function defined on the euclidean plane $\mathbb{R}^2$. Its graph Γ is a surface in $\mathbb{R}^3$ which inherits all the regularity coming from F. Suppose F is smooth. Consider a privileged

direction in $\mathbb{R}^2$: the q-axis, and the direction perpendicular to it, the w-axis, which we also refer to as the *additional space*. We place the coordinate u on the vertical axis of the $\mathbb{R}^3$ which corresponds to the image of the function F.

Let us now consider the vanishing locus of the slope in the direction of the w-axis on Γ :

$$\{(u,q,w) \ / \ u = F(q,w) \text{ et } \frac{\partial F}{\partial w}(q,w) = 0\}.$$

This is a collection of curves on Γ. We then project this vanishing locus on the plane generated by the axes u and q. We call this *drawing the contour* of the graph of F in the direction of the w-axis. Finally, we complete the pairs (u,q) obtained in this way ($u = F(q,w)$ and $\frac{\partial F}{\partial w}(q,w) = 0$) with the slope $p = \frac{\partial F}{\partial q}(q,w)$ in the direction of the remaining q-axis :

$$L = \{(u,q,p) \ / \ \exists w \ , \ u = F(q,w) \ , \ p = \frac{\partial F}{\partial q}(q,w) \text{ and } \frac{\partial F}{\partial w}(q,w) = 0\}.$$

This set, living in the space of coordinates (u,q,p), is in most cases still a collection of curves which inherits the regularity of F. In this situation, it is a Legendrian submanifold of the standard contact space $(\mathbb{R}^3, \ker(\mathrm{d}u - p\mathrm{d}q))$. However, one does not exclude the case where the obtained subset is not a submanifold, despite the *non-genericity* of this setting. In this case, we say that F is a **generating function** for L, and we refer to L as the **contour** of F.

More generally, a generating function is obtained by considering such a function F defined on the product between a smooth manifold M (previously the q-axis, the privileged direction) and an $\mathbb{R}$-vector space $\mathbb{R}^k$ (the additional space). The resulting Legendrian submanifolds then live in the space of 1-jets of functions defined on M : $J^1(M,\mathbb{R})$.

Which are the Legendrian submanifolds of $J^1(M,\mathbb{R})$ that are contours of generating functions ? This is a difficult question, and my work belongs to this branch of ongoing research. The *operations* from chapter 2 contributes to its answer, as the presence of generating functions of Legendrian submanifolds is persistent throughout the operations. Moreover, chapter 4 gives certain explicit constructions in the case of Legendrian knots.

When does a generating function define an immersed Legendrian submanifold ? What about an embedded one ? Proposition **??**, a result now part of folklore, claims that this is generically the case. We come back to this question in the framework of our *operations* (chapter 2) by studying the cases in which the result of an operation is immerged or embedded.

More globally, what happens to Legendrian submanifolds once we perform operations that preserve the regularity of functions, for example the sum of such two objects ? This is an original question, and it has several sides to it. In particular, in chapter 2 we see that

the operations of *product* and *sum* of Legendrian submanifolds generally lead to Legendrian submanifolds, but create exceptional *wave fronts*, that is to say non-generic relative to wave fronts [4]. Furthermore, we are lead to distinguish several types of one parameter families of Legendrians (isotopy, homotopy, cobordism), particularly in the case of Legendrian knots (chapter 4).

This thesis draws inspiration from the natural and elementary study of these contact phenomena in the spaces of 1-jets of functions - *contact tautology*, according to E. Ferrand [23]. This tautological framework conceals non-trivial facts, as an important number of profound results in contact topology been published by that time (see [9], [26]).

The Legendrians that we consider here are the one for which we are able to compute the homology defined by L. Traynor [52], [12]. Advances on the techniques of generating functions have recently been obtained due to the work of S. Sandon, as well as connections with contact homology (and the notion of augmentation, see for example [11]). Moreover, the sheaf approach [47] is considered to be a modernized version of generating function, and, in all of these modern approaches, explicit constructions of wave fronts with certain properties are crucial. We hope that our approach should benefit these constructions.

Setup

Chapter 1 is meant to describe a global panorama of our framework. It supplies an elementary basis for the following chapters (chapters 2, 3 and 4). It is complemented by four technical annexes. All definitions and properties of the chapter "Preliminaries" belong to mathematical folklore, even though in certain cases we considered it necessary to illustrate proofs which we were not able to find in the literature.

Annex A gives a precise definition of the concept of *genericity* which we regularly employ throughout, afterwards being dedicated to reminding the reader of basic notions in Morse theory (just in case). It constitutes a technical instrument that is fundamental to our work, particularly in chapters3 and 4, where the generating functions are seen in families, which are parametrized by a base, of almost everywhere Morse functions defined on $\mathbb{R}^k$.

Annexes B, C and D go deeper into Morse theory. Their scope is to lead to a profound comprehension of of paths of critical points and critical values of these parametrized families of almost everywhere Morse functions.

Unless we otherwise stipulate, all along this thesis the manifolds, the submanifolds, functions and applications are all assumed C^∞. We also require to identify fibers of the cotangent bundle of a manifold with those of its tangent, therefore we assume the varieties are endowed with a Riemannian metric. In the case of $\mathbb{R}^n$, this will be the standard Euclidian metric. In particular, we often prefer employing the gradient of a function rather than its differential.

The space of 1-jets of functions defined on a smooth manifold M is the set constituted by 1-jets of functions, denoted by $J^1(M,\mathbb{R})$. A 1-jet is given by a point q belonging to the base M, its image $u \in \mathbb{R}$ by a smooth function ϕ defined on a small neighborhood of q and of the gradient of ϕ at the point q, $\nabla\phi(q) \in T_qM$:

$$(u = \phi(q), q, p = \nabla\phi(q)).$$

$J^1(M,\mathbb{R})$ is a manifold of dimension $2n+1$. It is also the product of $\mathbb{R}$ and the cotangents bundle of the manifold M :

$$J^1(M,\mathbb{R}) = \mathbb{R} \times T^*M.$$

We use local canonical coordinates (u,q,p), $u \in \mathbb{R}$, $q \in M$, $p \in T_qM$ and we often abuse notation by referring to an element of $J^1(M,\mathbb{R})$ by such a triplet, even if of course this bundle is not usually trivial. $J^1(M,\mathbb{R})$ is naturally endowed with the standard contact structure which defines the kernel of the contact 1-form : $\mathrm{d}u - p\mathrm{d}q$.

The functions defined on M naturally provide the first examples of Legendrian submanifolds. If f is a function defined on M, its 1-graph :

$$j^1 f = \{(u,q,p) \ / \ u = f(q), p = \nabla f(q)\}$$

is a submanifold of dimension n which is tangent at each point to the contact structure, as the 1-form $\mathrm{d}u - p\mathrm{d}q$ vanishes on it by construction.

One can find many other Legendrian submanifolds of $J^1(M,\mathbb{R})$. We say that the ones which arise from 1-graphs of functions constitute level 0, and that the set of all Legendrian submanifolds comprise level 2. Between these two there are the main objects of our focus, which are at the same time Legendrian submanifolds and come from 1-graphs of functions in a broader sense ; thee are Legendrian submanifolds L_F obtained as contours of generating functions F defined on products of M and an additional space $\mathbb{R}^k$:

$$L_F = \{(u,q,p) \ / \ \exists w \in \mathbb{R}^k \ , \ \nabla_w F(q,w) = 0 \ , \ u = F(q,w) \ , \ p = \nabla_q F(q,w)\}.$$

In 1 we also define *deformations* – Legendrian isotopy and homotopy – which are performed on the Legendrian submanifolds in the contact space. On the other hand, proposition 1.3.4 (a folkloric result) guarantees the fact that the *generic* generating functions in fact produce embedded Legendrian submanifolds :

Proposition 0.0.11 (Proposition 1.3.4). *If* 0 *is a regular value of the map :*

$$\nabla_w F \textit{ is transversal to } \{0\}$$

then the set L_F realized by F is an immerged Legendrian submanifold of $J^1(M,\mathbb{R})$, which

is generically embedded. Moreover, this condition is generic.

There are various generating functions having the same Legendrian submanifold as their contour. In particular, in the second part of chapter 1 we recall the notion of *equivalence of generating functions*, which consists in authorizing two types of changes in the additional space. In particular, it is not true that a deformation that happens in the space $J^1(M,\mathbb{R})$ over a Legendrian manifold L with F its generating function corresponds to a deformation of this function, in the sense of a diffeomorphism of the domain or the target. However, by imposing a certain behavior at infinity of the generating functions (for example being *quadratic at infinity*) and having the liberty of manipulating equivalent generating functions, one obtains the following result :

Théorème 0.0.12 (Y.V. Chekanov [15]). *If $(L_t)_{t\in[0,1]}$ is a Legendrian isotopy with compact support, and if L_0 is the contour of a generating function F_0 that is quadratic at infinity, then L_1 is also the contour of a generating function F_1 that is quadratic at infinity. Moreover, it is possible to construct a family $(F_t)_{t\in[0,1]}$ such that every F_t is a generating function for L_t, and that all F_t are defined having the same additional space.*

Operations

In chapter 2 we focus on operations taking place on spaces of 1-jets over different bases, and of various types : M, $M_1 \times M_2$, where N is a submanifold of M, $\mathbb{R}^n$, etc. We use the term "operation" on Legendrian submanifolds to refer to processes that produce Legendrian submanifolds out of other Legendrian submanifolds. The most classical examples are that of *reductions* : the *slice* and the *contour*.

Starting from a variety N of basis M, the slicing operation reduces a "large" Legendrian submanifold of the space of 1-jets $J^1(M,\mathbb{R})$ to a "small" Legendrian submanifold of the space $J^1(N,\mathbb{R})$.

Contouring constructs, starting from a "large" Legendrian submanifold of a space of 1-jets of the form $J^1(M_1 \times M_2,\mathbb{R})$, a "small" Legendrian submanifold of $J^1(M_1,\mathbb{R})$ (the generalization of the concept of contour gives the notion of a generating function).

Notice that the natural geometric operations on Legendrian submanifolds – slicing, contouring or *front-spinning* – easily translate in terms of generating functions.

Moreover, the elementary operation of sum functions suggests two operations on Legendrian submanifolds : the *sum* and the *product*.

Summing functions defined on M corresponds, on the level of the fibers of $J^1(M,\mathbb{R})$, to the sum on each fiber. We therefore naturally lead to defining the sum of Legendrian submanifolds as follows : if L_1 and L_2 are two Legendrian submanifolds of $J^1(M,\mathbb{R})$, then their sum is the submanifold of $J^1(M,\mathbb{R})$ such that :

$$L_1 \underline{+} L_2 = \{(u_1+u_2, q, p_1+p_2) \ / \ (u_i, q, p_i) \in L_i, i = 1,2\}.$$

It is a remarkable fact that this operation correlates harmoniously on the intermediate level, i.e. that of generating functions. In fact, if F_1 and F_2 are generating functions for L_1 and L_2 respectively, defined on $M \times \mathbb{R}^{k_1}$ and $M \times \mathbb{R}^{k_2}$, then their sum $L_1 \underline{+} L_2$ is the contour in the direction of the product of the additional spaces $\mathbb{R}^{k_1} \times \mathbb{R}^{k_2}$ of the generating function defined on $M \times \mathbb{R}^{k_1} \times \mathbb{R}^{k_2}$ by :

$$F_{1\underline{+}2}(q, w_1, w_2) = F_1(q, w_1) + F_2(q, w_2).$$

As for the product, it is obtained by doing the product on the base spaces : consider a Legendrian submanifold L_1 of $J^1(M_1, \mathbb{R})$ and L_2 a Legendrian submanifold of $J^1(M_2, \mathbb{R})$. Their product is a subset of $J^1(M_1 \times M_2, \mathbb{R})$ such that :

$$L_1 \underline{\times} L_2 = \{(u_1 + u_2, q_1, q_2, p_1, p_2) \ / \ (u_i, q_i, p_i) \in L_i, i = 1, 2\}.$$

Let F_1 and F_2 be generating functions defined respectively on $M_1 \times \mathbb{R}^{k_1}$ and $M_2 \times \mathbb{R}^{k_2}$, such that L_1 is the contour of F_1 and L_2 is the contour of F_2. Then the product $L_1 \underline{\times} L_2$ is the contour in the direction of $\mathbb{R}^{k_1} \times \mathbb{R}^{k_2}$ of the generating function defined on the product $M_1 \times M_2 \times \mathbb{R}^{k_1} \times \mathbb{R}^{k_2}$ by :

$$F_{1\underline{\times}2}(q_1, q_2, w_1, w_2) = F_1(q_1, w_1) + F_2(q_2, w_2).$$

We will later see that these operations generically create Legendrian submanifolds.

Sum and convolution

If we now restrict our context to that of spaces of 1-jets whose bases are vector spaces, we create the possibility of summing on the basis as opposed to summing inside the fibers. This is the convolution of Legendrian submanifolds : let L_1 and L_2 be Legendrian submanifolds of $J^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, then the convolution $L_1 \underline{\square} L_2$ is the subset of $J^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ such that :

$$L_1 \underline{\square} L_2 = \{(u_1 + u_2, q_1 + q_2, p) \ / \ (u_i, q_i, p) \in L_i, i = 1, 2\}.$$

This operation is connected to the sum by a classical transformation (a version of the *Legendre transformation*) :

$$\begin{aligned} \mathbf{T} : \quad J^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) &\longrightarrow J^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \\ (u, q, p) &\longmapsto (pq - u, p, q). \end{aligned}$$

This is a *contactomorphism*, that is this transformation respects the Legendrian submanifolds. Its purpose is to change the coordinates of the base q with the coordinates in the fiber p, and in particular it is an involution. Together, these three ingredients form

beautiful identities (called *Fourier-type* identities) :

Théorème 0.0.13 (theorem 2.4.10)**.**

$$\mathbf{T}\,(L_1 \underline{+} L_2) = (\mathbf{T}L_1)\underline{\square}(\mathbf{T}L_2) \qquad et \qquad \mathbf{T}\,(L_1 \underline{\square} L_2) = (\mathbf{T}L_1)\underline{+}(\mathbf{T}L_2).$$

Which one of these notions came first ? In chapter 2 we chose the geometric point of view, by presenting Legendrian submanifolds such that the operations of sum and convolution are particular cases of slicing and contouring. This way, the aforementioned Fourier identities arise as a consequence of the corresponding identities for slicing and contouring :

Proposition 0.0.14 (proposition 2.3.6)**.** *The operations of slicing and contouring are conjugate to one another by* $\mathbf{T}$ *:*

$$\mathbf{T}\sigma(L) = \kappa(\mathbf{T}L) \qquad and \qquad \mathbf{T}\kappa(L) = \sigma(\mathbf{T}L)$$

where $\kappa(L)$ *is the contour of* L *et* $\sigma(L)$ *designates the corresponding slice.*

The operations of sum and convolution derive however from the experience of working with functions. We additionally find traces of the liaisons between the sum, the $\mathbf{T}$ transform and the convolution in the domain of convex analysis.

We take a different direction in Chapter 3 by connecting the operations of sum, convolution and $\mathbf{T}$ transform with three operations on functions : *the inf-convolution* and *the Legendre-Fenchel* transform.

Let f be a function defined on $\mathbb{R}^n$. Its Legendre-Fenchel transform is the function $f^* : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ defined by :

$$f^* \ : \ q \in \mathbb{R}^n \mapsto \sup_{v \in \mathbb{R}^n} \{qv - f(v)\}.$$

Let f_1 and f_2 be two functions defined on $\mathbb{R}^n$. Their inf-convolution $f_1 \square f_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ is defined by :

$$f_1 \square f_2 \ : \ q \mapsto \inf_{v \in \mathbb{R}^k} \{f_1(v) + f_2(q - v)\}.$$

The Legendre-Fenchel transform and the inf-convolution are particularly useful tools in classical thermodynamics, a domain that is closely related to contact geometry. In fact, the fundamental relation of thermodynamics (the first principle) connects the following variables : energy (U), pressure (P), volume (V), temperature (T) and entropy (S) of a closed system by the vanishing of a contact form of the space $\mathbb{R}^5$:

$$\mathrm{d}U = P\mathrm{d}V - T\mathrm{d}S.$$

Therefore, the set of stable states of a closed system forms a legendrian submanifold in the space of contact of the thermodynamical variables.

There are good hypotheses on functions which allow us to retrieve the trace of the mechanics operating at the legendrian submanifold level. In particular, if f_1 and f_2 are functions that are "bounded" deformations of convex functions (see *almost-convex*, definition 3.2.12), we have :

$$(f_1 + f_2)^* = f_1^* \Box f_2^* \qquad \text{and} \qquad (f_1 \Box f_2)^* = f_1^* + f_2^*.$$

The starting point of Chapter 3 are two elementary remarks typically known by specialists. The first is that the Legendre-Fenchel transform and the inf-convolution are projections of $\mathbf{T}$-operations and convolution on the space of 0-jets of functions, taking place on the level of the space of 1-jets $J^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, but only in the very precise case where the functions are convex and the gradient is invertible : $\nabla f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ is a diffeomorphism.

Proposition 0.0.15 (Corollary 3.1.7 and lemma 3.1.9).
If f is a convex function such that ∇f is invertible, then $\mathbf{T}(j^1 f)$ is the 1-graph of the Legendre-Fenchel transformation of f :

$$\mathbf{T} j(^1 f) = j^1(f^*).$$

If f_1 and f_2 are two convex functions such that ∇f_1 and ∇f_2 are invertible, then :

$$(j^1 f_1) \underline{\Box} (j^1 f_2) = j^1(f_1 \Box f_2).$$

The second remark is that, when we are in the almost-convex case, the Legendre-Fenchel transformation and the inf-convolution are no longer projections of the $\mathbf{T}$ transformation an convolution (which in fact produce wave fronts, that is *multivalued* graphs instead of graphs). However they correspond to a procedure on the generating functions associated respectively to the $\mathbf{T}$ transformation and the convolution of 1-graphs. This is the notion of *selector* or *"graph-selector"* [13], [54], which is an important classical construction in symplectic and contact topology. The selector exists for certain generating functions – we will define and work with the class of *almost-simple* generating functions. The sector associated to a generating function F defined on $M \times \mathbb{R}^k$, a function $s(F)$ defined on M, whose graph is a continuous part selected in the wave front construct by F.

If f is *almost-convex*, then its Legendre–Fenchel transform f^* only takes finite values and coincides with the selector of the generating function $f_{\mathbf{T}}$ associated to the transformation $\mathbf{T}$ of the 1-graph of f. Likewise, if f_1 and f_2 are almost-convex, their inf-convolution $f_1 \Box f_2$ only takes finite values and coincides with the selector of the generating function $f_{1 \underline{\Box} 2}$ of the convolution of the 1-graphs of f_1 and f_2.

Proposition 0.0.16 (Corollary 3.2.28). *If f is an almost-convex function, we have that :*

$$s(f_{\mathbf{T}}) = f^*,$$

where s is the selector. If f_1 andf_2 are two almost-convex functions, then :

$$s(f_{1\underline{\square}2}) = f_1 \square f_2 \ .$$

On the one hand, we have the existence of the selector for certain Legendrian submanifolds that are contours of generating functions, which selects the graph of a continuous function in a wave front. On the other, we have natural operations on Legendrian submanifolds for which the existence of a generating function persists. Question : for which generating functions does the selector exist and persists under these operations ? The almost-convex functions are a particular case of such generating functions (whose additional space is reduced to $\{0\}$). In chapter 3, in order to give a more general reply to this question we introduce classes of generating functions (*almost-simple* and *globally almost-simple*) which admit a selector and which are stable respectively with respect to the operations of sum and $\mathbf{T}$ transformation of generating functions. The follow-up of this study would require the definition of a class of generating functions that is stable for both operations at the same time, so that we are able to work with the sum, the $\mathbf{T}$ transformation, the convolution and the selector simultaneously.

Finally, comparing generating functions allows retrieving the trace of the Fourier-type identities on the level of the selector of generating functions. In fact, we show that :

$$s(F_{(\mathbf{T}1)\underline{+}(\mathbf{T}2)}) = s(F_{\mathbf{T}(1\underline{\square}2)}).$$

The second one that we expect to hold : $(s(F_{(\mathbf{T}1)\underline{\square}(\mathbf{T}2)}) = s(F_{\mathbf{T}(1\underline{+}2)}))$ is more subtle (work in progress).

Knots as contours of generating functions

Our last chapter is devoted to the study of Legendrian submanifolds of the three-dimensional space $J^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$: these are Legendrian knots and links that are either *closed* or *long*

Legendrian knot theory is finer than the classical (topological) knot theory. There are numerous Legendrian representatives (that are non-equivalent modulo isotopy) of the same type of topological knot. One way of drastically restricting the possibilities is to look at those that are contours of generating functions.

Which are the topological types of knots that admit a Legendrian representative that can be realized as a contour of a generating function ?

We start by observing that this is not always the case :

Proposition 0.0.17 (4.1.29). *There exists no long Legendrian representative of the bad trefoil knot (figure 2) that can be realized by a generating function (which is quadratic at infinity)*

This fact motivates the search of types of topological knots that can be realized by generating functions. We propose a constructive approach which remains (to our taste) in its incipient version. We first consider constructions using generating functions whose additional space is of dimension 1 – these are 1-parameter families of *Arnold's serpents* [3]. We realize certain families of knots and links, in particular :

Théorème 0.0.18 (Theorem 4.2.4). *Let B be a positive braid. The Legendrian closure of B is realizable as a contour of a generating function that is quadratic at infinity whose additional space is equal to $\mathbb{R}$.*

We then construct *grafts* of generating functions that are standard at infinity, such that by the generating function we create the *closure* of long knots, then the *overlap* of contours. The latter construction is destined to automatically create Legendrian links which are are contours of generating functions that are quadratic at infinity, starting from generating functions that are quadratic at infinity that are set for each component.

The last part of Chapter 4 is dedicated to defining and studying notions of cobordism and concordance associated to knots having generating functions that are quadratic at infinity. A Legendrian cobordism between two Legendrian knots L_0 and L_1 is a "large" Legendrian submanifold $\mathcal{L}$ of $J^1(\mathbb{R} \times [0,1], \mathbb{R})$, such that L_0 and L_1 are the slices of $\mathcal{L}$ along respectively $\mathbb{R} \times \{0\}$ and $\mathbb{R} \times \{1\}$. Legendrian cobordisms are totally classic using the *Maslov index*. These constructions complete those of [21] by adding the ingredient of generating functions that are quadratic at infinity.

The sum operation of Legendrian submanifolds studied in chapters 2 and 3 naturally reappears in this context, leading to the concept of convex sum of long knots. In particular, we show the following result :

Théorème 0.0.19 (Corollary 4.3.11). *The set of Legendrian knots that can be realized by generating functions that are quadratic at infinity modulo the relation of concordance by generating function that is quadratic at infinity, together with the operation of convex sum of long knots, is an abelian group.*

Finally, the sum operation provides another surprising mechanic, whose first manifestation is the subsequent :

Proposition 0.0.20 (proposition 4.3.14). *The sum between a long knot and a representative of the maximal trivial Legendrian knot of big length and small height is Lengendrian-wise isotopic to the maximal trivial Legendrian knot (figure 3).*

We join to this observation the two standard forms of generating functions (quadratic at infinity and quadratic-linear at infinity), and we obtain the following fact :

Théorème 0.0.21 (Proposition 4.3.16)**.** *Let L be a Legendrian knot that is the contour of a generating function that is quadratic at infinity. The closure of the connected sum of L with its Legendrian mirror $\bar{L}$, denoted by $\lceil \bar{L}\#L \rceil$, is itself the contour of a generating function that is quadratic-linear at infinity, and there exists a 1-parameter family of generating functions that are quadratic-linear at infinity which realizes a Legendrian homotopy between $\lceil \bar{L}\#L \rceil$ and the maximal trivial knot*

Perspectives

This thesis leaves various unexplored paths to be investigated. Amongst our current questions we mention the following four :

The study of the sum operation on Legendrian submanifolds over wave fronts of small dimensions (1 and 2) shows that, if the sum is generically an (embedded) Legendrian submanifold, the *exceptional* (non-generic) wave fronts appear generically (an example of this is the handkerchief, see figure 2.8).

Which other exceptional wave fronts generically produce the sum operation in higher dimensions ?

Consider the sum of a Legendrian submanifold L with its opposite :

$$-L = \{(-u, q, -p) \ / \ (u, q, p) \in L\}.$$

What can we learn from the geometric study of the "difference" $L \underline{+} (-L)$? It is known that the associated generating function of this difference is the starting point of the homological theory initiated by L. Traynor [52].

Let L be a long Legendrian knot which is the contour of a generating function that is quadratic at infinity. We know that there exists a Legendrian homotopy from L towards the zero section, but all homotopies can not be followed by generating functions.

Does there exist a Legendrian homotopy between L and the zero section which can be realized by a 1-parameter family of generating functions that are quadratic at infinity ?

Which are all the long Legendrian knots (or links) that can be realized as contours, having an additional space of dimension 1 ? In other words, what wave front can be realized using an Arnold serpent path ?

Chapitre 1

Préliminaires : géométrie de contact dans $J^1(M, \mathbb{R})$

Ce chapitre à pour vocation de poser le cadre dans lequel s'inscrit la thèse. Il fournit les bases élémentaires pour les chapitres suivants (chapitres 2, 3 et 4), tandis que les rappels de théorie de Morse et compléments techniques jugés annexes sont relégués en fin de manuscrit (annexes A, B, C et D). On redémontre certaines propriétés qui appartiennent au folklore de sorte qu'elles satisfassent parfaitement nos besoins.

Sauf mention du contraire, tout au long de cette thèse, les variétés, sous-variétés, fonctions et applications que nous considérons sont supposées lisses.

Conventions et notations :

• M désigne une variété de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ munie d'une métrique riemannienne. (Sur la variété $M = \mathbb{R}^n$, on impose la métrique euclidienne standard.) On identifie systématiquement le fibré cotangent T^*M au fibré tangent TM au moyen de cette métrique.

• Si $q = (q_1, \ldots, q_n)$ et $v = (v_1, \ldots, v_n)$ appartiennent à $\mathbb{R}^n$, la notation qv désigne leur produit scalaire euclidien standard : $qv = \sum_{i=1}^{n} q_i v_i$.

• Les éléments du fibré cotangent T^*M sont notés abusivement sous forme de couples (q, p), $q \in M$ est un élément de la base et $p \in (T_qM)^*$ est un élément de la fibre correspondante.

• On note des coordonnées locales sur M $q = (q_1, \ldots, q_n) \in \mathbb{R}^n$, et $p = (p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{R}^n$ les coordonnées associées canoniquement dans la fibre $\mathbf{T}^*_qM$.

• Pour une fonction f définie sur la variété M munie des coordonnées locales $q = (q_1, \ldots, q_n)$, on note ∇f son gradient. De plus, on considère systématiquement que des coordonnées sont localement fixées sur M. On notera aussi abusivement ∇f l'application qui associe à un point q de la base le vecteur aux dérivées partielles de f en q, définie (localement) par :

$$\begin{array}{rcccl} \nabla f & : & M & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & & q & \longmapsto & \left(\dfrac{\partial f}{\partial q_j}(q)\right)_{j=1\ldots n} \end{array}.$$

1.1 L'espace des 1-jets sur M

(Références : [14] et [23].)

Définition 1.1.1. L'**espace des 1-jets** (réels) sur M est l'ensemble :

$$J^1(M,\mathbb{R}) = \mathbb{R} \times T^*M,$$

C'est une variété de dimension $2n+1$ que l'on munit d'un système de coordonnées $(u,q,p) \in \mathbb{R} \times T^*M$.

Remarque 1.1.2. Plus généralement, pour $k \in \mathbb{N}$, on peut définir l'espace des k-jets (réels) sur M, $J^k(M,\mathbb{R})$. Il s'identifie localement au produit : $\mathbb{R} \times M \times \Pi_{j=1}^k L_j^{sym}(\mathbb{R}^n)$, où $L_j^{sym}(\mathbb{R}^n)$ désigne l'ensemble des formes j-linéaires symétriques définies sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^n$.

Définition 1.1.3. On considère la 1-forme différentielle $\mathrm{d}u - p\mathrm{d}q = \mathrm{d}u - \sum_{i=1}^n p_i \mathrm{d}q_i$ sur $J^1(M,\mathbb{R})$. La **structure de contact standard** sur $J^1(M,\mathbb{R})$ est le champ d'hyperplans tangents ξ que définit le noyau de cette 1-forme :

$$\xi = \ker(\mathrm{d}u - p\mathrm{d}q)\ .$$

Dans le cas de l'espace des 1-jets de dimension trois $J^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$, on peut visualiser le champ d'hyperplans ξ comme en figure 1.1.

En toute dimension, on a en l'origine l'hyperplan ξ_0 égal à l'hyperplan des vecteurs dont la composante dans la direction u est nulle. Le champ d'hyperplans ξ est invariant suivant les translations les axes des coordonnées $u, q_1, \ldots, q_n$, et tourne dans les directions des axes de coordonnées $p_1, \ldots, p_n$. À noter que ξ est transverse en tout point à la direction de la coordonnée u.

Les sous-variétés intégrales, i.e. tangentes au champ d'hyperplans ξ, sont de dimension au plus égale à n.

Définition 1.1.4. Une **sous-variété legendrienne** $L \subset J^1(M,\mathbb{R})$ est une sous-variété de dimension n partout tangente à la structure de contact ξ :

$$(\mathrm{d}u - p\mathrm{d}q)_{|L} \equiv 0.$$

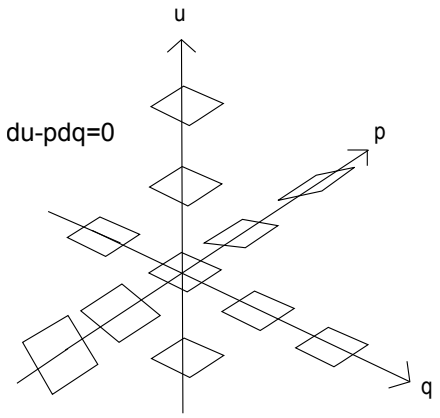


FIGURE 1.1 – Structure de contact standard sur $J^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^3$.

On note $\mathcal{O}$ la section nulle dans $J^1(M,\mathbb{R})$:

$$\mathcal{O} = \{(u=0, q, p=0) \mid q \in M\}.$$

C'est l'exemple le plus élémentaire de sous-variété legendrienne. Un exemple un peu plus général est celui des 1-*graphes* de fonctions.

Définition 1.1.5. Soit f une fonction définie sur M. Son **1-graphe** est l'ensemble :

$$j^1 f = \{(u = f(q), q, p = \nabla f(q)) \mid q \in M\}.$$

Nous serons particulièrement concernés par cette classe de sous-variétés legendriennes au chapitre 3. Réciproquement, on a le fait suivant (voir le lemme 1.3.6) :

Lemme 1.1.6. *Si une sous-variété legendrienne de $J^1(M,\mathbb{R})$ est un graphe au dessus de la base M* [1]*, alors c'est le 1-graphe d'une fonction définie sur M.*

Remarque 1.1.7. Considérons le fibré cotangent T^*M, naturellement muni de la forme symplectique standard $\omega = \mathrm{d}(p\mathrm{d}q) = \mathrm{d}p \wedge \mathrm{d}q$. La projection d'une sous-variété legendrienne $L \subset J^1(M,\mathbb{R})$ sur (T^*M,ω) est une immersion lagrangienne exacte $\mathcal{L}$ ($(p\mathrm{d}q)_{|\mathcal{L}}$ est exacte). Réciproquement, une immersion lagrangienne exacte de T^*M se relève de manière unique à translation suivant l'axe de la variable u près en un plongement legendrien de $J^1(M,\mathbb{R})$.

On emploie deux projections pour travailler avec les sous-variétés legendriennes de $J^1(M,\mathbb{R})$:

1. On entend par là qu'il s'agit d'une sous-variété de dimension égale à la dimension de M et telle que les coordonnées u, $p_1, \ldots, p_n$ sont fonctions des coordonnées de la base $q_1, \ldots, q_n$.

- la **projection lagrangienne** :

$$\begin{aligned} J^1(M,\mathbb{R}) &\xrightarrow{\mathbf{p_S}} T^*M \\ (u,q,p) &\longmapsto (q,p), \end{aligned}$$

- la **projection front d'onde** :

$$\begin{aligned} J^1(M,\mathbb{R}) &\xrightarrow{\mathbf{p_F}} \mathbb{R}\times M = J^0(M,\mathbb{R}) \\ (u,q,p) &\longmapsto (u,q). \end{aligned}$$

Exemple 1.1.8. La figure 1.2 ci-contre représente un plongement legendrien du cercle – il s'agit d'un représentant du *nœud legendrien trivial maximal* (voir chapitre 4) dans $J^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ – ainsi que ses projections par $\mathbf{p_F}$ et $\mathbf{p_S}$.

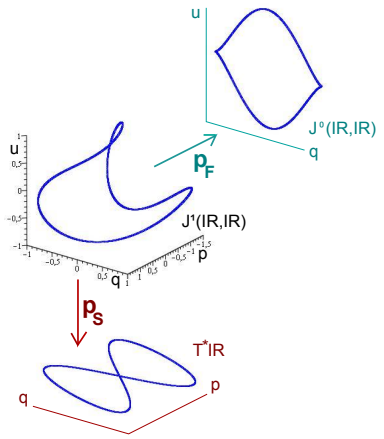


FIGURE 1.2 – Le nœud trivial maximal et ses projections.

Remarque 1.1.9. Le 1-graphe d'une fonction se projette sur le graphe au sens classique (ou 0-graphe) de f par $\mathbf{p_F}$.

Définition 1.1.10. Soit L une sous-variété legendrienne. L'ensemble $\mathbf{p_F}(L)$ est appelé le **front d'onde de** L.

Lorsqu'une sous-variété legendrienne L est en position *générique* (voir sous-annexe A.1) pour la projection $\mathbf{p_F}$, son front d'onde $\mathbf{p_F}(L)$ est une *sous-variété stratifiée*, c'est-à-dire qu'il s'agit localement d'un graphe (de dimension n) sauf en dehors d'un ensemble de singularités qui forment une union de sous-variétés de dimensions inférieures ou égales à $n-1$.

Un front d'onde générique est presque partout localement (en dehors des parties singulières) un graphe en les coordonnées $q = (q_1,\dots,q_n)$. En ce cas, toute l'information de la sous-variété legendrienne est contenue dans son front d'onde : les coordonnées $p = (p_1,\dots,p_n)$ manquantes sont les dérivées partielles $\left(\dfrac{\partial u}{\partial q_1}(q),\dots,\dfrac{\partial u}{\partial q_n}(q)\right)$.

On décrit maintenant les fronts d'onde de petites dimensions (dimensions 1 et 2) [4] :

• **Fronts d'onde de courbes legendriennes :**

Dans le cas où $n = 1$ – $J^1(M,\mathbb{R})$ de dimension 3 – les singularités d'un front d'onde générique sont isolées, et sont de deux types : les points doubles, ou auto-intersections (figure 1.3 en vert) et les cusps, droits ou gauches (en rouge).

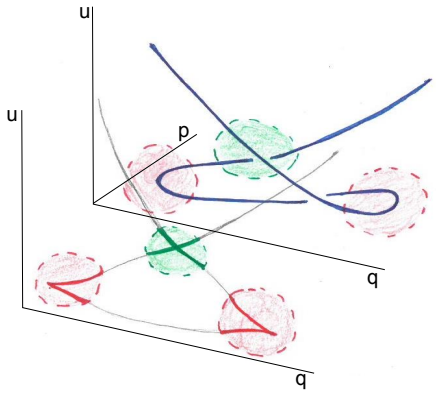
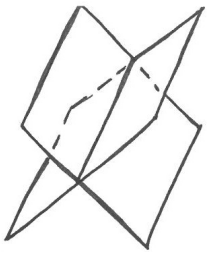


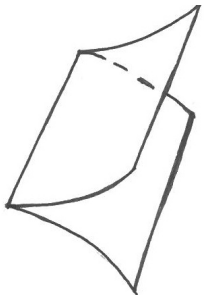
FIGURE 1.3 –

• **Fronts d'onde de surfaces legendriennes :**

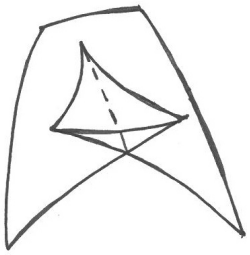
Les singularités apparaissant dans un front d'onde générique de dimension 2 sont listées en figure 1.4.



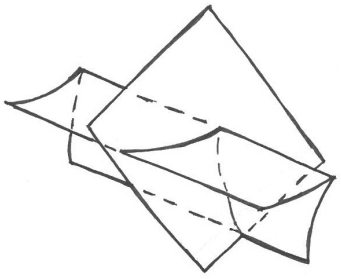
(a) Ligne d'auto-intersection.



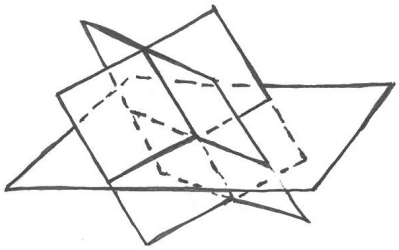
(b) Ligne de cusps.



(c) Queue d'aronde.



(d) Intersection transverse d'une ligne de cusps et d'un plan.



(e) Intersection transverse de trois plans.

FIGURE 1.4 – description locale des fronts d'onde génériques de dimension 2

Définition 1.1.11. Un **contactomorphisme** de $J^1(M,\mathbb{R})$ est un difféomorphisme de $J^1(M,\mathbb{R})$ qui préserve la structure de contact ξ. En d'autres termes, c'est un difféomor-

phisme ϕ tel que :

$$\phi^*(\mathrm{d}u - p\mathrm{d}q) = \lambda(\mathrm{d}u - p\mathrm{d}q) \ ,$$

où λ est une fonction définie sur M et partout non nulle.

L'image par un contactomorphisme d'une sous-variété legendrienne est une sous-variété legendrienne.

Un exemple fondamental de contactomorphisme est la *transformation de Legendre* (ou ses analogues) :

Définition 1.1.12. Soit $M = \mathbb{R}^n$. L'application :

$$\begin{aligned} \mathbf{L} : \quad J^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) &\longrightarrow J^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \\ (u, q, p) &\longmapsto (u - pq, p, -q) \end{aligned}$$

est un contactomorphisme. On l'appelle la **transformation de Legendre**.

Il s'agit même d'un contactomorphisme qui conserve la 1-forme standard : $\mathbf{L}^*(\mathrm{d}u - p\mathrm{d}q) = \mathrm{d}u - p\mathrm{d}q$.

On préfère utiliser aux chapitres 2 et 3 non pas $\mathbf{L}$, mais la version jumelle suivante :

Définition 1.1.13. On appelle **transformation T** le contactomorphisme de $J^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ défini par :

$$\begin{aligned} \mathbf{T} : \quad J^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) &\longrightarrow J^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \\ (u, q, p) &\longmapsto (pq - u, p, q). \end{aligned}$$

Ce dernier contactomorphisme échange q et p au niveau de la projection lagrangienne, mais ne conserve pas le forme de contact : $\mathbf{T}^*(\mathrm{d}u - p\mathrm{d}q) = -(\mathrm{d}u - p\mathrm{d}q)$. À noter aussi que $\mathbf{T}$ est une involution.

Remarque 1.1.14. Il est possible de ne considérer des versions partielles de ces transformations. Une **transformation T partielle** est obtenue en considérant I un sous-ensemble de $\{1, \ldots, n\}$, J son complémentaire, et en laissant fixes les coordonnées d'indices appartenant à I. On obtient le contactomorphisme :

$$\mathbf{T}_J \ : (u, q_I, q_J, p_I, p_J) \longmapsto (q_J p_J - u, q_I, p_J, p_I, q_J),$$

1.2 Familles à un paramètre de sous-variétés legendriennes plongées ou immergées : isotopie et homotopie

On s'intéressera particulièrement à ces notions dans le cas des courbes legendriennes fermées au chapitre 4.

1.2.1 Isotopie

Définition 1.2.1. Une **isotopie** legendrienne $(L_t)_{t\in[0,1]}$ est une famille lisse à 1-paramètre de sous-variétés legendriennes plongées.

Exemple 1.2.2. Une isotopie legendrienne d'*entrelacs legendriens* – c'est à dire de courbes legendriennes (voir chapitre 4) – générique s'interprète au niveau du front d'onde comme une suite de *mouvements de Reidemeister* décrits en figure 1.5.

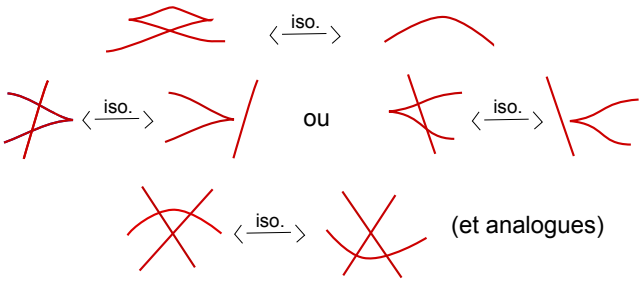


FIGURE 1.5 – Isotopie de courbe legendrienne vue au niveau du front d'onde : les mouvements de Reidemeister.

Remarque 1.2.3. Une isotopie Legendrienne $(L_t)_{t\in[0,1]}$ peut s'écrire $(\phi_t(L_0))_{t\in[0,1]}$ avec $(\phi_t)_{t\in[0,1]}$ une famille lisse de contactomorphismes, ou encore ϕ_t est le flot au temps t d'un *hamiltonien de contact* (voir chapitre 2 du livre de H. Geiges [25]).

Définition 1.2.4. Une **isotopie à support compact** legendrienne $(L_t)_{t\in[0,1]}$ est une isotopie telle que, pour tout $t \in [0,1]$, $L_t = L_0$ en dehors d'un ensemble compact.

On considère en général – c'est à dire sauf mention du contraire – les sous-variétés legendriennes à isotopie à support compact près (en particulier au chapitre 4 avec les *nœuds et entrelacs longs ou fermés*).

1.2.2 Homotopie

Cette notion est plus souple :

Définition 1.2.5. Une **homotopie** legendrienne est une famille lisse à 1 paramètre d'immersions legendriennes.

Remarque 1.2.6. Une homotopie générique $(L_t)_{t\in[0,1]}$ est une isotopie sauf en des instants d'immersion isolés.

Exemple 1.2.7. Dans le contexte des nœuds legendriens, une homotopie générique peut être vue au niveau du front d'onde comme une suite de mouvements de Reidemeister, auxquels vient s'ajouter un 4e mouvement local : mouvement d'auto-intersection (voir figure 1.6).

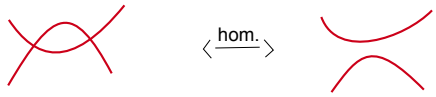


FIGURE 1.6 – Mouvement d'auto-intersection.

On remarquera (lemme 4.3.6) que ce mouvement ajouté aux trois mouvements de Reidemeister permet de dénouer tout nœud legendrien en un nœud legendrien topologiquement trivial.

1.3 Fonctions génératrices

(Références : [49] et [29].) Nous avons vu dans l'exemple 1.1.5 que les 1-graphes de fonctions définies sur M constituent des exemples élémentaires de sous-variétés legendriennes de $J^1(M,\mathbb{R})$. On élargit le champ de fabrication de sous-variétés legendriennes par des graphes de fonctions en considérant des fonctions définies sur $M \times \mathbb{R}^k$, où $\mathbb{R}^k$ est un *espace additionnel* (définition 1.3.1 ci-dessous).

Notations : Soit $k \in \mathbb{N}$. Soit F une fonction définie sur le produit $M \times \mathbb{R}^k$ muni des coordonnées (q,w), $q = (q_1,\dots,q_n) \in \mathbb{R}^n$ et $w = (w_1,\dots,w_k) \in \mathbb{R}^k$. On note $\nabla_q F$ et $\nabla_w F$ les *gradients partiels* selon q et w respectivement. Ces notations seront soumises au même abus que celui annoncé en début de chapitre pour la notation ∇f : on notera aussi $\nabla_q F$ et $\nabla_w F$ les applications aux dérivées partielles correspondantes qui elles dépendent du système de coordonnées.

$$\begin{aligned} \nabla_q F : M \times \mathbb{R}^k &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (q,w) &\longmapsto \left(\frac{\partial F}{\partial q_j}(q,w)\right)_{j=1\dots n} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \nabla_w F : M \times \mathbb{R}^k &\longrightarrow \mathbb{R}^k \\ (q,w) &\longmapsto \left(\frac{\partial F}{\partial w_j}(q,w)\right)_{j=1\dots k} \end{aligned}$$

1.3.1 Généralités

Définition 1.3.1. Soit $k \in \mathbb{N}$, et soit une fonction F définie sur $M \times \mathbb{R}^k$. On distingue $w \in \mathbb{R}^k$ en parlant de la **variable additionnelle**, et $\mathbb{R}^k$ est désigné comme l'**espace additionnel**. On appelle alors **contour de** F, noté L_F, le sous-ensemble de $J^1(M,\mathbb{R})$:

$$L_F = \{(F(q,w), q, \nabla_q F(q,w)) \mid \exists w \in \mathbb{R}^k \ , \ \nabla_w F(q,w) = 0\}$$

Réciproquement, soit L un sous-ensemble de $J^1(M,\mathbb{R})$. Une **fonction génératrice** (**fg**) pour L est une fonction F, définie sur le produit de M par un certain espace additionnel $\mathbb{R}^k$, telle que $L = L_F$.

Remarque 1.3.2. Si f est une fonction définie sur M, le 1-graphe $j^1 f$ est le contour de f avec un espace additionnel trivial réduit à $\{0\}$.

Remarque 1.3.3. Une fonction génératrice F génère un front d'onde dans $\mathbb{R} \times M$:

$$\{(F(q,w),q) \mid \exists w \in \mathbb{R}^k \ , \ \nabla_w F(q,w) = 0\}.$$

Si l'on regarde F comme une collection q-paramétrée $(F(q,.))_q$ de fonctions de la variable w, ce front d'onde est le *diagramme de bifurcation des valeurs critiques*, ou *diagramme de Cerf* (voir annexe D) de $(F(q,.))_q$.

Par exemple, une fonction génératrice pour le nœud maximal trivial (exemple 1.1.8) est :

$$F \ : (q,w) \mapsto w^3 + (q^2-1)w,$$

(voir figure 1.7).

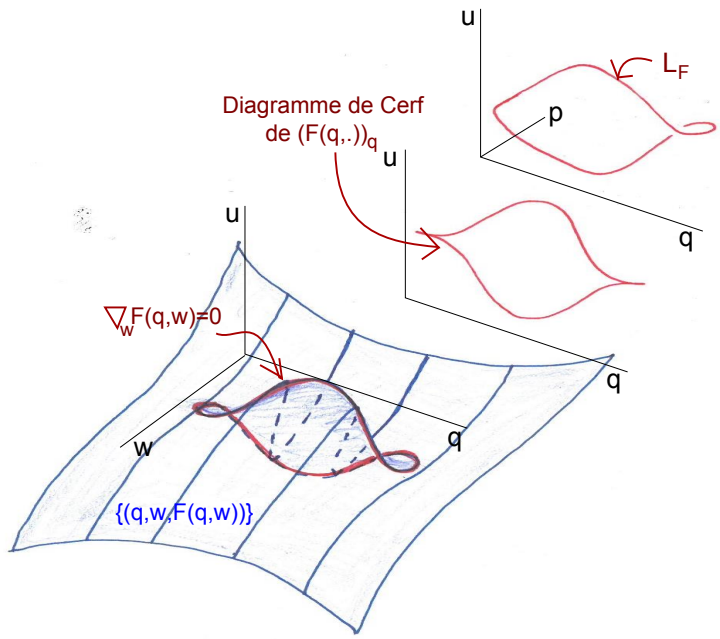


FIGURE 1.7 – Contour d'une fonction génératrice.

Soit F une fg de variable additionnelle $w \in \mathbb{R}^k$, on désigne par $\circledast$ la condition de transversalité suivante :

$$\circledast \qquad \nabla_w F \text{ est transverse à } \{0\} \ ,$$

c'est-à-dire que 0 est une valeur régulière de $\nabla_w F$.

La condition $\circledast$ assure que l'ensemble $(\nabla_w F)^{-1}(0)$ est une sous-variété de $M \times \mathbb{R}^k$ (voir figure 1.8 ci-contre).

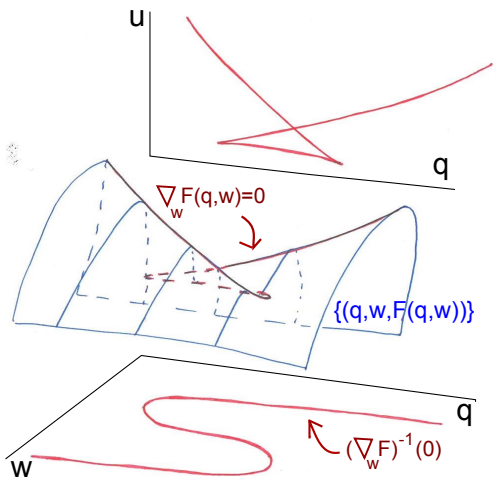


FIGURE 1.8 –

Proposition 1.3.4.
1. La condition $\circledast$ est générique.
2. Dans ce cas, l'ensemble L_F réalisé par F est une sous-variété legendrienne immergée de $J^1(M, \mathbb{R})$, génériquement plongée.

Preuve. 1. Il s'agit d'utiliser le lemme de transversalité de R. Thom (voir théorème A.2.8 en annexe A). Dans ce qui suit, pour tout $w \in \mathbb{R}^k$, la coordonnée dans la fibre $T^*_w\mathbb{R}^k$ est désignée par v. Considérons l'espace des 2-jets $J^2(M \times \mathbb{R}^k, \mathbb{R})$, qui s'identifie localement au produit :

$$\mathbb{R} \times (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k) \times (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k) \times \mathcal{M}^{sym}_{(n+k)\times(n+k)} \ ,$$

où $\mathcal{M}^{sym}_{(n+k)\times(n+k)}$ désigne d'ensemble des matrices symétriques réelles.

Une matrice hessienne $M \in \mathcal{M}^{sym}_{(n+k)\times(n+k)}$ se présente sous la forme :

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 F}{\partial q^2} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial q \partial w} \\ \dfrac{\partial^2 F}{\partial q \partial w} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial w^2} \end{pmatrix}.$$

On note N la sous-matrice $\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 F}{\partial q \partial w} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial w^2} \end{pmatrix}$.

On considère le sous-ensemble $\mathcal{I} \subset J^2(M \times \mathbb{R}^k, \mathbb{R})$ défini par : $\begin{cases} v = 0 \\ N \text{ est de rang } < k \end{cases}$.

Il s'agit d'une sous-variété stratifiée, qui se décompose en k sous-variétés (strates) $\mathcal{I}_j$

définies pour $j = 0 \dots k-1$ par : $\begin{cases} v = 0 \\ N \text{ est de rang } = j \end{cases}$.

Chaque strate est de codimension au moins égale à $n+k+1$ (voir [28]) :

$$\operatorname{codim}(\mathcal{I}_j) = (n+k-j)(k-j).$$

D'après le lemme de transversalité de R. Thom, pour $F \in C^\infty(M \times \mathbb{R}^k, \mathbb{R})$ générique, j^2F rencontre chaque sous-variété $\mathcal{I}_j$ transversalement. Or j^2F est de dimension $n+k$, de sorte que la transversalité signifie l'absence d'intersection avec chaque $\mathcal{I}_j$. Comme les strates sont en nombre fini (donc en particulier elles sont dénombrables) on conclut que pour F générique, le 2-jet de F ne rencontre pas $\cup_j \mathcal{I}_j = \mathcal{I}$, c'est-à-dire :

$$\nabla_w F \pitchfork \{0\}.$$

Notons que la codimension de $\mathcal{I}$ et la dimension de j^2F ne diffèrent que de 1. En conclusion, si un 2-graphe j^2F générique ne rencontre pas $\mathcal{I}$, des intersections se produisent génériquement pour une famille à 1-paramètre de 2-graphes, $(j^2F_t)_t$.

2. On identifie localement M à $\mathbb{R}^n$, et on utilise ici la présentation matricielle. Une preuve plus géométrique de ceci apparaîtra dans la partie allouée à la notion de contour (sous-chapitre 2.3, lemme 2.3.4).

Notons $S = (\nabla_w F)^{-1}(0)$. La transversalité $\nabla_w F \pitchfork \{0\}$ signifie que l'application $\nabla_w F$ est submersive en tout point de S, c'est-à-dire que la matrice hessienne :

$$D(\nabla_w F) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 F}{\partial q_1 \partial w_1} & \cdots & \dfrac{\partial^2 F}{\partial q_n \partial w_1} & | & \dfrac{\partial^2 F}{\partial w_1^2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 F}{\partial w_k \partial w_1} \\ \vdots & & \vdots & | & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 F}{\partial q_1 \partial w_k} & \cdots & \dfrac{\partial^2 F}{\partial q_n \partial w_k} & | & \dfrac{\partial^2 F}{\partial w_1 \partial w_k} & \cdots & \dfrac{\partial^2 F}{\partial w_k^2} \end{pmatrix}$$

est de rang maximal sur S, c'est-à-dire égal à k. En particulier, S est une sous-variété de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$ de dimension n.

On note N_q la sous-matrice de $D(\nabla_w F)$ formée des dérivées partielles secondes $\dfrac{\partial^2 F}{\partial q_i \partial w_j}$, et N_w celle des dérivées partielles secondes $\dfrac{\partial^2 F}{\partial w_i^2}$, de sorte que $D(\nabla_w F)$ est scindée en : $D(\nabla_w F) = (N_q \mid N_w)$, avec $N_q \in \mathcal{M}_{k\times n}(\mathbb{R})$ et $N_w \in \mathcal{M}_{k\times k}(\mathbb{R})$.

L_F est l'image de l'application suivante restreinte à S :

$$\begin{array}{rccc} \mathbf{I} : & \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k & \longrightarrow & J^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \\ & (q, w) & \longmapsto & (F(q,w)\ ,\ q\ ,\ \nabla_q F(q,w)) \end{array}$$

Il s'agit de voir que cette application est immersive le long de S. Soit $(q_0, w_0) \in S$. L'espace tangent $T_{(q_0,w_0)}S$ est $\ker\left(D\left(\nabla_w F\right)_{(q_0,w_0)}\right)$, et l'application différentielle de $\mathbf{I}_{|S}$ en (q_0, w_0) est :

$$\begin{array}{rcl} D(\mathbf{I}_{|S})_{(q_0,w_0)} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k & \longrightarrow & T_{(u_0,q_0,p_0)}J^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \\ (X_q, X_w) & \longmapsto & (X_u, X_q, X_p) \end{array}$$

avec : $\begin{cases} X_u = \nabla_q F(q_0, w_0) X_q \\ X_p = \dfrac{\partial^2 F}{\partial q^2}(q_0, w_0) X_q + \dfrac{\partial^2 F}{\partial w \partial q}(q_0, w_0) X_w \dfrac{\partial^2 F}{\partial q^2}(q_0, w_0) X_q + {}^t N_{q,(q_0,w_0)} X_w \end{cases}$.

On a $D(\mathbf{I}_{|S})_{(q_0,w_0)}\left(X_q, X_w\right)\begin{pmatrix} X_q \\ X_w \end{pmatrix} = 0 \ \Rightarrow \ \begin{cases} X_q = 0 \\ {}^t N_q . X_w = 0 \end{cases}$.

Puisque $X_q = 0$, on a $D\left(\nabla_w F\right)_{(q_0,w_0)} \cdot \begin{pmatrix} X_q \\ X_w \end{pmatrix} = N_w \cdot X_w$, et donc $N_w \cdot X_w = 0$.

Par ailleurs $N_w = {}^t N_w$, donc $\begin{pmatrix} {}^t N_q \\ {}^t N_w \end{pmatrix} \cdot X_w = 0$. Or, le rang de la matrice $\begin{pmatrix} {}^t N_q \\ {}^t N_w \end{pmatrix}$ est celui de $\begin{pmatrix} N_q & N_w \end{pmatrix}$, c'est-à-dire qu'il est maximal égal à k par hypothèse. Ainsi, X_w est nul, ce qui permet de voir que $\mathbf{I}$ est immersive en tout point de S, ce qui fait de L_F une immersion dans $J^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ d'une sous-variété de dimension n.

La 1-forme $\mathrm{d}u - p\mathrm{d}q$ s'annule sur L_F par construction, d'où le résultat.

Pour montrer que L_F est génériquement plongée, il faut en appeler à la généralisation du lemme de transversalité de Thom aux espaces de multi-jets faite par J.N. Mather (voir [36]).

On considère l'espace des 2-*multi*-1-*jets* :

$${}_2J^1(M \times \mathbb{R}^k, \mathbb{R}) = J^1(M \times \mathbb{R}^k, \mathbb{R}) \times J^1(M \times \mathbb{R}^k, \mathbb{R}) \setminus \ \Delta,$$

où Δ désigne ici l'ensemble de points $(u_1, q_1, w_1, p_1, v_1, u_2, q_2, w_2, p_2, v_2)$ du produit $J^1(M \times \mathbb{R}^k, \mathbb{R}) \times J^1(M \times \mathbb{R}^k, \mathbb{R})$ tels que $(q_1, w_1) = (q_2, w_2)$.

On considère la sous-variété $\mathcal{J}$ de ${}_2J^1(M \times \mathbb{R}^k, \mathbb{R})$ définie par : $\begin{cases} u_1 = u_2 \\ q_1 = q_2 \\ p_1 = p_2 \\ v_1 = v_2 = 0 \end{cases}$.

C'est une sous-variété de codimension $1 + 2(n + k)$. L'intersection du 2-multi-1-jet de F :

$$ {}_2j^1F = j^1F \times j^1F \cap (J^1(M \times \mathbb{R}^k, \mathbb{R}) \times J^1(M \times \mathbb{R}^k, \mathbb{R}) \setminus \ \Delta) $$

avec $\mathcal{J}$ correspond aux points d'auto-intersection de L_F. Pour F générique ${}_2j^1F$ rencontre $\mathcal{J}$ transversalement (voir proposition 3.3 de [36]). Or, ${}_2j^1F$ est une sous-variété de dimension $2(n+k)$. La transversalité se traduit ainsi par l'absence d'intersection, d'où le résultat. □

Les fonctions génératrices constituent plus que des exemples de sous-variétés legendriennes dans $J^1(M, \mathbb{R})$, elles sont en fait un modèle local :

Proposition 1.3.5. *Soit L une sous-variété legendrienne de $J^1(M, \mathbb{R})$. Pour tout $x \in L$, il existe un voisinage $N(x)$ dans $J^1(M, \mathbb{R})$ tel que $L \cap N(x)$ admette une fg.* [2]

Preuve. On découpe la preuve en trois temps :

Lemme 1.3.6. *Si $L \cap N(x)$ est un graphe au dessus des variables $\{q_i, i = 1, \ldots, n\}$, alors c'est un 1-graphe de $J^1(M, \mathbb{R})$.*

Preuve. $L \cap N(x)$ graphe au dessus de $\{q_i, i = 1, \ldots, n\}$ signifie que les autres variables $u, p_1, \ldots, p_n$ sont fonctions des variables $q_i, 1 \leqslant i \leqslant n$:

$$ \begin{cases} u = f(q_1, \ldots, q_n) \\ p_1 = f_1(q_1, \ldots, q_n) \\ \quad \vdots \\ p_n = f_n(q_1, \ldots, q_n). \end{cases} $$

Puisque par ailleurs la 1-forme $\mathrm{d}u - p\mathrm{d}q$ s'annule sur $L \cap N(x)$, il vient :

$$ \frac{\partial}{\partial q_i} f = f_i \ , \forall 1 \leqslant i \leqslant n, $$

et $L \cap N(x)$ est le 1-graphe de la fonction f.

Lemme 1.3.7. *Il existe $I \subset \{1, \ldots, n\}$ tel que $L \cap N(x)$ soit un graphe au dessus de l'espace engendré par les variables $\{q_i, i \in I\} \cup \{p_j, j \notin I\}$.*

2. Voir aussi [4], § **19.3.** *« Existence de la famille génératrice d'un germe lagrangien »*.

Preuve. La coordonnée u étant systématiquement fonction des autres, il s'agit de montrer cela au niveau lagrangien, c'est-à-dire montrer que $\mathcal{L} = \mathbf{p_S}(L \cap N(x)) \subset T^*\mathbb{R}^n$ est un graphe au dessus de coordonnées $\{q_i, i \in I\} \cup \{p_j, j \notin I\}$. Pout tout $(q,p) \in T^*\mathbb{R}^n$, l'espace tangent $T_{(q,p)}\mathbb{R}^n$ est identifié au produit $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, dont on désigne la base canonique par $(e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_n)$. Considérons pour $i = 1 \dots n$ les projections :

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{q}_i \ : T_{(q,p)}\mathcal{L} & \longrightarrow & \mathrm{vect}(e_i) \\ X & \longmapsto & X_{q_i} \end{array} \qquad \text{et} \qquad \begin{array}{rcl} \mathbf{p}_i \ : T_{(q,p)}\mathcal{L} & \longrightarrow & \mathrm{vect}(f_i) \\ X & \longmapsto & X_{p_i}. \end{array}$$

Dire que $\mathcal{L} \cap N(x)$ est un graphe au dessus de $\{q_i, i = 1, \dots, n\}$ signifie que chacune des projections $\mathbf{q}_i$ est non-nulle (ou surjective). $T_{(q,p)}\mathcal{L}$ est un espace totalement isotrope de dimension maximale égale à n pour la forme symplectique $(\mathrm{d}p \wedge \mathrm{d}q)_{(q,p)} = \sum_i (\mathrm{d}p_i \wedge \mathrm{d}q_i)_{(q,p)}$, c'est-à-dire que tout couple de vecteurs (X, Y) de $T_{(q,p)}\mathcal{L}$ avec $X = (X_{q_1}, \dots X_{q_n}, X_{p_1}, \dots, X_{p_n})$ et $Y = (Y_{q_1}, \dots Y_{q_n}, Y_{p_1}, \dots, Y_{p_n})$ doit vérifier :

$$\sum_{1 \leqslant i \leqslant n} Y_{q_i} X_{p_i} - X_{q_i} Y_{p_i} = 0 \ .$$

Supposons qu'il existe i_0 tel que $\mathbf{q}_{i_0} = 0$, autrement dit que $T_{(q,p)}\mathcal{L} \subset \mathrm{vect}(\{e_i, 1 \leqslant i \neq i_0 \leqslant n\} \cup \{f_j, 1 \leqslant j \leqslant n\}) = \mathrm{vect}(f_{i_0}) \bigoplus \mathrm{vect}(e_i, f_i, i \neq i_0)$. Alors les coordonnées des vecteurs X et Y de $T_{(q,p)}\mathcal{L}$ doivent vérifier :

$$\sum_{1 \leqslant i \neq i_0 \leqslant n} Y_{q_i} X_{p_i} - X_{q_i} Y_{p_i} = 0,$$

c'est à dire que $T_{(q,p)}\mathcal{L}$ correspond à un sous-espace totalement isotrope pour la forme symplectique $(\mathrm{d}p \wedge \mathrm{d}q)_{(q,p)} = \sum_{i \neq i_0} (\mathrm{d}p_i \wedge \mathrm{d}q_i)_{(q,p)}$ restreinte au sous-espace $\mathrm{vect}(e_i, f_i, i \neq i_0)$. La dimension d'un sous-espace totalement isotrope dans ce sous-espace symplectique est inférieure ou égale $n-1$. On en déduit que $T_{(q,p)}\mathcal{L}$ ne peut être entièrement contenu dans $\mathrm{vect}(e_i, f_i, i \neq i_0)$, et ainsi la projection $\mathbf{p}_{i_0}$ est non nulle.

Ainsi, pour tout i, soit $\mathbf{q}_i$, soit $\mathbf{p}_i$ est surjective. On conclut en posant :

$$I = \{i \mid \mathbf{q}_i \neq 0\} \ .$$

Lemme 1.3.8. *Si F est une fonction génératrice locale pour $L \cap N(x)$, alors l'image de $L \cap N(x)$ par la transformation $\mathbf{T}$ partielle :*

$$\mathbf{T}_J \ : \ (u, q_I, q_J, p_I, p_J) \mapsto (q_J p_J - u, q_I, p_J, p_I, q_J)$$

admet pour fonction génératrice locale la fonction :

$$F_{\mathbf{T_J}}(q_I, q_J, v_J, w) = q_J v_J - F(q_I, v_J, w).$$

On utilise ses trois ingrédients pour montrer la proposition 1.3.5 :

D'après le lemme 1.3.7 $L \cap N(x)$ est un graphe au dessus des $\{q_i, i \in I\} \cup \{p_j, j \notin I\}$ pour un certain sous-ensemble $I \subset \{1, \ldots, n\}$. L'image de $L \cap N(x)$ par la transformation $\mathbf{T}_J$, avec $J = \{i \notin I\}$, est alors un graphe au dessus de $\{q_i, i = 1, \ldots, n\}$. D'après le lemme 1.3.6 $\mathbf{T}_J\,(L \cap N(x))$ est le 1-graphe d'une fonction f. On termine avec le lemme 1.3.8 qui nous donne la fonction génératrice

$$F(q_I, q_J, v_J) = q_J v_J - f(q_I, v_J)$$

pour $\mathbf{T}_J \circ \mathbf{T}_J\,(L \cap N(x)) = L \cap N(x)$. □

1.3.2 Équivalence de fonctions génératrices

(Références : [49] et [50].) Démarrant d'une fonction génératrice F définie sur $M \times \mathbb{R}^k$ et réalisant le sous-ensemble $L_F \subset J^1(M \times \mathbb{R}^k, \mathbb{R})$, on dispose de deux opérations naturelles qui donnent automatiquement des fonctions génératrices ayant le même contour L_F.

Définition 1.3.9. On appelle **difféomorphisme à la source** l'opération qui remplace une fonction génératrice F par $F \circ \Phi$, où Φ est un difféomorphisme de $M \times \mathbb{R}^k$ respectant les fibres, i.e. $\Phi(q, w) = (q, \phi_q(w))$ avec ϕ_q est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^k$ pour tout $q \in M$.

Définition 1.3.10. On appelle **stabilisation** l'opération qui remplace F par $F \oplus Q$ où Q est une forme quadratique non-dégénérée définie sur un espace additionnel $\mathbb{R}^l$: $F \oplus Q(q, w, v) = F(q, w) + Q(v)$.

Définition 1.3.11. On dit qu'une fg F est un **descendant** d'une fg F_1 si F peut être obtenue de F_1 par une succession de difféomorphismes à la source et de stabilisations.

On dit que deux fg F_1 et F_2 sont **équivalentes**[3] si elles ont un descendant commun, et on note $F_1 \sim F_2$.

Propriétés 1.3.12.
1. Si F est un descendant de F_1, F peut être obtenue de F_1 par la succession d'une seule stabilisation suivie d'un seul difféomorphisme à la source.

2. Des fonctions génératrices équivalentes réalisent les mêmes contours :

$$F_1 \sim F_2 \;\Rightarrow\; L_{F_1} = L_{F_2}.$$

3. La propriété d'avoir un descendant commun définit une relation d'équivalence.

Preuve. 1. On considère F fonction génératrice définie sur $M \times \mathbb{R}^k$. Soit Φ un difféomorphisme respectant les fibres de $M \times \mathbb{R}^k$, et soit Q une forme quadratique non-dégénérée définie sur $\mathbb{R}^l$. Alors :

$$(F \circ \Phi) \oplus Q = (F \oplus Q) \circ (\Phi, id_{\mathbb{R}^l}).$$

Les stabilisations peuvent donc systématiquement être réalisée avant les difféomorphismes à la source, d'où la conclusion.

2. La vérification se fait par un calcul direct. □

1.3.3 Fonctions génératrices et « standardité » à l'infini

Dans notre cadre où les fg sont définies sur un fibré produit où ni la base M ni l'espace additionnel $\mathbb{R}^k$ ne sont a priori compacts, il est souvent nécessaire de leur prescrire un *comportement standard à l'infini*, de sorte que l'étude soit ramenée sur un terrain compact.

On présente ici les deux formes de standardité à l'infini classiques. On s'en servira particulièrement au chapitre 4.

Quadratique à l'infini (voir D. Théret [49])

Définition 1.3.13. Une fonction génératrice F, définie sur $M \times \mathbb{R}^k$, est **presque quadratique à l'infini** s'il existe une forme quadratique non dégénérée Q définie sur $\mathbb{R}^k$ et un compact I de M tels que :

- le gradient partiel de la différence $\nabla_w(F - Q)$ soit borné sur $I \times \mathbb{R}^k$,
- F soit égale à Q en dehors $I \times \mathbb{R}^k$.

On dit que Q est la **forme quadratique de référence** de la fg F.

Remarque 1.3.14. Une fg presque quadratique à l'infini est égale à une forme quadratique pour q assez grand. Ainsi, les fg presque quadratiques à l'infini réalisent des sous-variétés legendriennes confondues avec la section nulle $\mathcal{O}$ en dehors d'un compact. Nous utiliserons cette forme de fg au chapitre 4 pour fabriquer des *nœuds et entrelacs legendriens longs.*

Lemme 1.3.15. *La propriété d'être une fg presque quadratique est stable par stabilisation et par difféomorphisme à la source à support compact.*

Preuve. Soit F fg presque quadratique à l'infini, définie sur $M \times \mathbb{R}^k$. Soit Q une forme quadratique définie et I un compact satisfaisant les hypothèses de la définition.

Soit Φ un difféomorphisme de $M \times \mathbb{R}^k$ respectant les fibres, de support compact égal à $K \subset M \times \mathbb{R}^k$. On a $F \circ \Phi = F$ en dehors de K, et en particulier $\nabla_w(F \circ \Phi - F)$ est borné. Il existe un sous-ensemble compact $\tilde{I}$ de M tel que $I \times \mathbb{R}^k$ et K sont inclus dans $\tilde{I} \times \mathbb{R}^k$. Alors $F \circ \Phi = Q$ en dehors de $\tilde{I} \times \mathbb{R}^k$, et $\nabla_w(F \circ \Phi - Q) = \nabla_w(F \circ \Phi - F) - \nabla_w(F - Q)$ est borné sur $\tilde{I} \times \mathbb{R}^k$.

Soit $\tilde{Q}$ une forme quadratique non-dégénérée définie sur un espace additionnel $\mathbb{R}^{\tilde{k}}$. Notons que $Q \oplus \tilde{Q}$ est une forme quadratique non dégénérée définie sur l'espace additionnel $(\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{\tilde{k}})$.

La stabilisation de F par $\tilde{Q}$ est telle que :

- le gradient partiel $\nabla_{w,\tilde{w}}(F \oplus \tilde{Q} - Q \oplus \tilde{Q}) = (\nabla_w(F - Q), 0)$ est borné sur $I \times (\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{\tilde{k}})$,
- $F \oplus \tilde{Q}$ est égale à $Q \oplus \tilde{Q}$ en dehors de $I \times (\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{\tilde{k}})$.

□

Il est commode de travailler avec la notion plus cadrée suivante :

Définition 1.3.16. Une fonction génératrice F définie sur $M \times \mathbb{R}^k$ est dite **Quadratique à l'Infini** (fg **QI**) s'il existe une forme quadratique non-dégénérée Q sur $\mathbb{R}^k$, et un compact $K \subset M \times \mathbb{R}^k$ tels que $F = Q$ en dehors de K.

Cette définition permet de formuler plus explicitement F, puisque dans ce cas il existe une fonction f à support égal à K telle que F se réécrit :

$$F(q, w) = f(q, w) + Q(w).$$

Contrairement à la notion de fg presque quadratique à l'infini, la notion de fg QI n'est pas stable par stabilisation. En effet, si on stabilise F par une forme quadratique non-dégénérée $\tilde{Q}$ définie sur $\mathbb{R}^{\tilde{k}}$, on obtient : $F \oplus \tilde{Q} = f + Q \oplus \tilde{Q}$. Cette nouvelle fg est égale à la forme quadratique non-dégénérée $Q \oplus \tilde{Q}$, définie sur $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{\tilde{k}}$, en dehors de $K \times \mathbb{R}^{\tilde{k}}$. En particulier, il existe un compact I de M tel que $F \oplus \tilde{Q}$ est égale à $Q \oplus \tilde{Q}$ en dehors de $I \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{\tilde{k}}$. Mais $K \times \mathbb{R}^{\tilde{k}}$ n'est pas un compact.

En revanche, la différence $F \oplus \tilde{Q} - Q \oplus \tilde{Q} = f$ est bornée. En particulier, son gradient partiel $\nabla_{(w,\tilde{w})} f = (\nabla_w f, \nabla_{\tilde{w}} f) = (\nabla_w f, 0)$ est borné.

L'une des remarques fondamentales faite par D. Théret, est le fait qu'une fg presque quadratique est équivalente à une fg QI :

Proposition 1.3.17 ([49] proposition 1.1)**.** *Si F est une fg presque quadratique, il existe un difféomorphisme Φ respectant les fibres de $M \times \mathbb{R}^k$, égal à l'identité sur tout compact prescrit d'avance, tel que $F \circ \Phi$ soit une fg QI.*

Remarque 1.3.18. Si une fg F définie sur $M \times \mathbb{R}^k$ est de la forme $F(q, w) = Q_q(w)$, avec Q_q est une forme quadratique non-dégénérée définie sur $\mathbb{R}^k$ dépendant du paramètre $q \in M$, alors F est équivalente à une forme quadratique non-dégénérée Q définie sur $\mathbb{R}^k$, indépendante du paramètre $q \in M$, voir [49].

Dans le chapitre 4 en particulier, on considèrera les fg QI à équivalence près, de sorte que l'on oubliera la notion de presque quadratique.

Quadratique-linéaire à l'infini (voir J. Jordan et L. Traynor [29])

Une autre forme de standardité à l'infini des fg permet de réaliser des sous-variétés legendriennes compactes :

Définition 1.3.19. Une fonction génératrice F définie sur $M\times(\mathbb{R}^k\times\mathbb{R})$ est dite **Quadratique-Linéaire à l'infini** (fg **QL**) s'il existe une application linéaire non-nulle l sur $\mathbb{R}$, une forme quadratique non-dégénérée Q sur $\mathbb{R}^k$ et un compact $K\subset M\times(\mathbb{R}^k\times\mathbb{R})$ tels que $F=Q+l$ en dehors de K.

De manière équivalente, on écrit qu'il existe une fonction f à support égal à K telle que F se réécrit :

$$F(q,w,v)=f(q,w,v)+Q(w)+l(v)\ .$$

Remarque 1.3.20. On peut définir aussi la notion de fg presque quadratique-linéaire à l'infini. De même que pour les fg QI, les opérations de difféomorphisme à la source et de stabilisation permettent de travailler à équivalence près, voir [29].

Le résultat fondamental pour ce qui est d'utiliser ces outils est le théorème de Y.V. Chekanov, qui garantit la persistance des fg QI par *isotopie legendrienne à support compact* :

Théorème 1.3.21 (Y.V. Chekanov [15]). *Si $(L_t)_{t\in[0,1]}$ est une isotopie legendrienne à support compact, et si L_0 est le contour d'une fg QI F_0, alors l_1 est aussi le contour d'une fg QI F_1.*

Il est de plus possible de construire une famille $(F_t)_{t\in[0,1]}$ telle que chaque F_t est une fg QI pour l_t, et les F_t sont toutes définies avec le même espace additionnel.

Remarque 1.3.22. Le théorème de Chekanov donne une fg F définie sur $M\times[0,1]\times\mathbb{R}^k$, où $M\times[0,1]$ est la base et $\mathbb{R}^k$ l'espace des variables additionnelles,

$$F(q,t,w)=F_t(q,w),$$

égale à une forme quadratique Q_t en dehors d'un compact. Cette forme quadratique dépend à priori de t. Cependant une telle fg est équivalente à une fg QI (voir remarque 1.3.22).

La version fg QL du théorème de Chekanov est démontrée dans [29]. Cette persistance par isotopie appuie l'idée que ces formes de standardité sont pertinentes pour travailler avec les sous-variétés legendriennes modulo isotopie à support compact – en particulier les nœuds et entrelacs legendriens (chapitre 4).

On proposera au chapitre 3 une forme de standardité un peu différente – *fonctions génératrices presque simples* – mais conceptuellement l'idée sera la même que la notion de presque quadratique à l'infini.

Chapitre 2

Opérations sur les sous-variétés legendriennes et fonctions génératrices

Dans ce chapitre, chaque section est allouée à la présentation d'une opération qui respecte le caractère legendrien dans les espaces de 1-jets de fonctions.

Lorsque les sous-variétés legendriennes sont des contours de fonctions génératrices (fg), on traduit chaque opération en une opération sur les fg correspondantes.

Exemple 2.0.23. Tout contactomorphisme peut être vu comme une opération sur les sous-variétés legendriennes, en particulier la transformation $\mathbf{T}$ (définition 1.1.13) : si L est une sous-variété legendrienne de $J^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, $\mathbf{T}L$ est la sous-variété legendrienne de $J^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ suivant

$$\mathbf{T}L = \{(qp - u, p, q) \mid (u, q, p) \in L\}.$$

Lemme 2.0.24 (Fonction génératrice)**.** *Si $L \subset J^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ est le contour d'une fonction génératrice F définie sur $\mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^k)$, alors $\mathbf{T}L$ admet pour fonction génératrice $F_{\mathbf{T}}$ définie sur $\mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k)$ par :*

$$F_{\mathbf{T}}(q, v, w) = qv - F(v, w).$$

L'ensemble des sous-variétés legendriennes est bien sûr stable par toute opération correspondant à un contactomorphisme. Ce chapitre concerne d'autres exemples d'opérations qui, à partir de sous-variétés legendriennes, construisent *génériquement* d'autres sous-variétés legendriennes.

Notation : Pour éviter toute ambiguïté, lorsqu'une fg F est définie sur un produit comportant plus de deux termes, $M \times \mathbb{R}^{k_1} \times \mathbb{R}^{k_2}$ par exemple, on désigne l'espace additionnel en le plaçant entre parenthèses.

Ainsi, le contour de F définie sur $M \times (\mathbb{R}^{k_1} \times \mathbb{R}^{k_2})$ n'est pas celui de F définie sur $M \times \mathbb{R}^{k_1} \times (\mathbb{R}^{k_2})$.

Cette distinction sera visible au niveau des variables en préférant la lettre q, ainsi que les q_i ou Q pour désigner les variables de la base, tandis que les lettres w, v ainsi que les w_i seront utilisées pour désigner les variables additionnelles. Par exemple

$$(q, w_1, w_2) \in M \times (\mathbb{R}^{k_1} \times \mathbb{R}^{k_2}) \quad \text{et} \quad (q_1, q_2, w) \in M \times \mathbb{R}^{k_1} \times (\mathbb{R}^{k_2}).$$

2.1 Produit

Soient M_1 et M_2 des variétés de dimensions respectives n_1 et n_2. On considère les espaces de jets $J^1(M_1, \mathbb{R})$, $J^1(M_2, \mathbb{R})$, et $J^1(M_1 \times M_2, \mathbb{R})$, munis respectivement des coordonnées locales (u_1, q_1, p_1), (u_2, q_2, p_2) et (u, q_1, q_2, p_1, p_2).

Définition 2.1.1. Soient $L_1 \subset J^1(M_1, \mathbb{R})$, et $L_2 \subset J^1(M_2, \mathbb{R})$. On définit le **produit** $L_1 \underline{\times} L_2$ par :

$$L_1 \underline{\times} L_2 = \{(u_1 + u_2, q_1, q_2, p_1, p_2) \mid (u_i, q_i, p_i) \in L_i\} .$$

Remarque 2.1.2. Notons qu'il ne s'agit pas stricto sensu du produit $L_1 \times L_2$, qui lui habite dans l'espace produit $J^1(M_1, \mathbb{R}) \times J^1(M_2, \mathbb{R})$. Cependant, si L_1 et L_2 sont des sous-variétés, alors $L_1 \underline{\times} L_2$ est une immersion de la variété produit $L_1 \times L_2$ dans $J^1(M_1 \times M_2, \mathbb{R})$.

Lemme 2.1.3. *Si $L_1 \subset J^1(M_1, \mathbb{R})$ et $L_2 \subset J^1(M_2, \mathbb{R})$ sont des sous-variétés legendriennes, alors le produit $L_1 \underline{\times} L_2$ est une sous-variété legendrienne immergée.*

Preuve. Considérons les projections lagrangiennes respectives, $\mathcal{L}_1 \subset T^*M_1$ et $\mathcal{L}_2 \subset T^*M_2$, de L_1 et L_2. Ce sont des sous-variétés lagrangiennes exactes immergées. $L_1 \underline{\times} L_2$ se projette dans $T^*(M_1 \times M_2)$ sur le produit (le vrai) $\mathcal{L}_1 \times \mathcal{L}_2$, qui est une sous-variété immergée. $L_1 \underline{\times} L_2$ est donc aussi une sous-variété immergée de dimension $n_1 + n_2$. On vérifie de plus que la forme de contact $\mathrm{d}u - (p_1 \mathrm{d}q_1 + p_2 \mathrm{d}q_2)$ s'annule sur $L_1 \underline{\times} L_2$, ce qui permet de conclure que c'est une immersion legendrienne. □

Exemple 2.1.4. Le produit des deux représentants du nœud legendrien trivial maximal :

$$L_1 = \{(u = \sin^3(t), q = \cos(t), p = -3\cos(t)\sin(t)) \mid t \in [0, 2\pi]\}$$

$$\text{et} \quad L_2 = \{(u = \frac{1}{2}\sin^3(t), q = \cos(t), p = -\frac{3}{2}\cos(t)\sin(t)) \mid t \in [0, 2\pi]\}$$

est un tore plongé dans $\mathbb{R}^5$. Son front d'onde, appelons-le un *oreiller torique* (figure 2.2). Il possède quatre arêtes de rebroussement (en bleu sur la figure 2.12) et deux lignes d'auto-intersection (en rouge sur la figure 2.12). On compte quatre singularités non-génériques : les quatre coins de l'oreiller. Ces singularités sont de type D_4^+ (voir [4]).

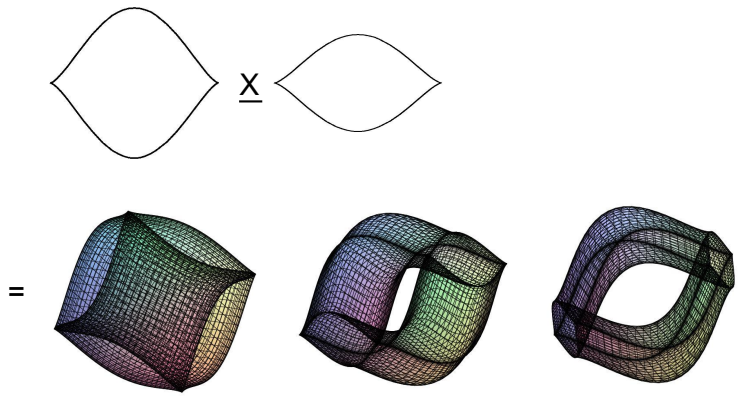


FIGURE 2.1 – Un exemple de produit : l'oreiller torique est donné sous trois angles de vue différents

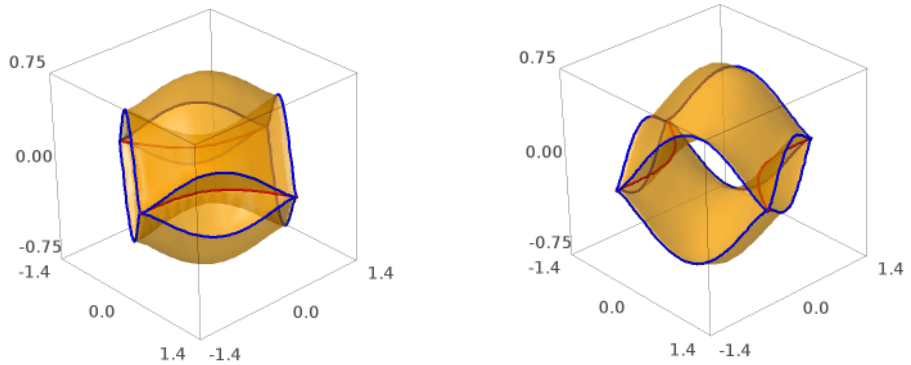


FIGURE 2.2 –

Dans [30] P. Lambert-Cole étudie une version plus générale de cette notion de produit. Il remarque en particulier que le produit de deux sous-variétés legendriennes est plongé si *« les actions des cordes de Reeb de chacune d'elles forment des ensembles disjoints »*.

Les cordes de Reeb d'une sous-variété legendrienne L correspondent aux points d'auto-intersection de la projection lagrangienne $\mathbf{p_S}(L)$, c'est-à-dire aux paires de points (u, q, p) et (u', q, p) de L, avec $u \neq u'$. L'action d'une telle corde est alors défini par : $|u - u'|$.

Le produit $L_1 \underline{\times} L_2$ est une sous-variété legendrienne plongée si les ensembles :

$$\{|u_1 - u_1'| \mid u_1 \neq u_1', \exists (q_1, p_1), (u_1, q_1, p_1) \text{ et } (u_1', q_1, p_1) \in L_1\}$$

$$\text{et} \quad \{|u_2 - u_2'| \mid u_2 \neq u_2', \exists (q_2, p_2), (u_2, q_2, p_2) \text{ et } (u_2', q_2, p_2) \in L_2\}$$

ont pour intersection l'ensemble vide. Cette condition étant générique, on conclut que notre produit $L_1 \underline{\times} L_2$ est génériquement plongé.

Dans notre exemple 2.1.4, on en déduit les observations suivantes : si on fait varier la largeur de l'une ou l'autre composante, le résultat sera isotope. En revanche, faisons varier la hauteur $h = 1/2$ de L_2 par exemple, et considérons les produits :

$$L_1 \underline{\times} L_h \ ,$$

$$\text{où } L_h = \{(u = hsin^3(t), q = cos(t), -3hcos(t)sin(t)) \mid t \in [0, 2\pi]\} \ , \ h \in]0, +\infty[\ .$$

Le produit est une sous-variété legendrienne plongée sauf dans le cas où les hauteurs des deux fronts sont les mêmes : $h = 1$. Dans ce cas exceptionnel, le résultat a pour front d'onde *l'oreiller* (sans trou) illustré en figure 2.3.

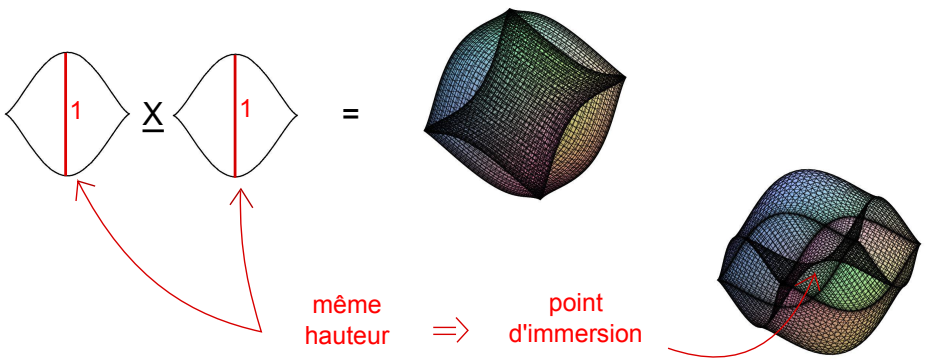


FIGURE 2.3 – L'oreiller.

Remarque 2.1.5. Si $M_1 = \mathbb{R}^{n_1}$ et $M_2 = \mathbb{R}^{n_2}$, l'opération produit commute avec la transformation $\mathbf{T}$:

$$\mathbf{T}(L_1 \underline{\times} L_2) = (\mathbf{T}L_1) \underline{\times} (\mathbf{T}L_2).$$

À noter que l'on emploi indifféremment le même symbole $\mathbf{T}$ pour désigner la transformation opérant dans l'espace $J^1(\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}, \mathbb{R})$ et celle opérant dans $J^1(\mathbb{R}^{n_1}, \mathbb{R})$, ou encore $J^1(\mathbb{R}^{n_2}, \mathbb{R})$.

Lemme 2.1.6 (Fonction génératrice). *Si L_1 et L_2 sont des sous-variétés legendriennes réalisées respectivement par des fonctions génératrices :*

$$F_1 \text{ définie sur } M_1 \times \mathbb{R}^{k_1}$$
$$F_2 \text{ définie sur } M_2 \times \mathbb{R}^{k_2},$$

alors le produit $L_1 \underline{\times} L_2$ admet pour fonction génératrice $F_{1\underline{\times}2}$ définie sur $M_1 \times M_2 \times (\mathbb{R}^{k_1} \times \mathbb{R}^{k_2})$ par :

$$\boxed{F_{1\underline{\times}2}(q_1, q_2, w_1, w_2) = F(q_1, w_1) + F(q_2, w_2).}$$

2.2 Front-spinning et demi-front-spinning

T. Ekholm, J. Etnyre et M. Sullivan définissent dans [17] l'opération suivante :

Soit une sous-variété legendrienne L contenue dans le demi-espace $\{q_n > 0\} \subset J^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$. On construit le front d'onde d'une sous-variété legendrienne dans $J^1(\mathbb{R}^{n+1}, \mathbb{R})$ en faisant tourner le front d'onde de L autour de l'axe vertical, celui de la coordonnée u (voir figure 2.4 (a) et (b)) :

$$\circlearrowleft \mathbf{p_F}(L) = \{(u, q_1, \ldots, q_{n-1}, \cos(\theta)q_n, \sin(\theta)q_n) \mid (u, q_1, \ldots, q_n) \in \mathbf{p_F}(L) \text{ et } \theta \in [0, 2\pi[\} \ .$$

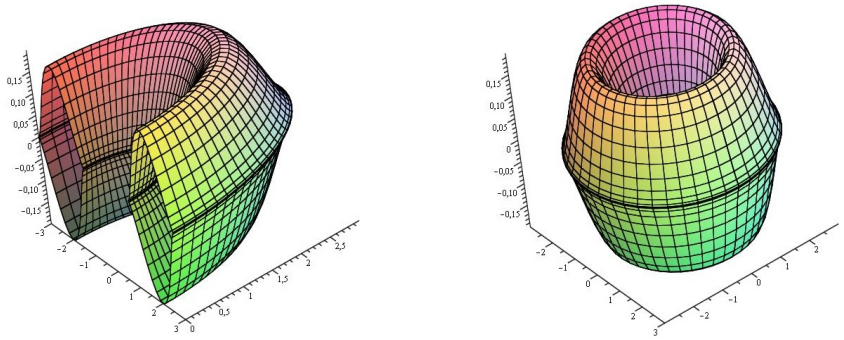
Définition 2.2.1. Le **front spinning de** L est la sous-variété Legendrienne ΣL de $J^1(\mathbb{R}^{n+1}, \mathbb{R})$, dont le front d'onde est $\circlearrowleft \mathbf{p_F}(L)$.

En considérant le front d'onde seulement tourné d'un demi-tour, on définit une notion qui nous permettra de construire le *groupe de concordance* des nœuds legendriens longs au chapitre 4 :

Définition 2.2.2. On appelle **demi-front-spinning de** L la sous-variété Legendrienne $\frac{1}{2}\Sigma L$ dans $\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ dont le front d'onde est obtenu à partir de celui de L en n'opérant qu'un demi-tour :

$$\curvearrowleft \mathbf{p_F}(L) = \{(u, q_1, \ldots, q_{n-1}, \cos(\theta)q_n, \sin(\theta)q_n) \mid (u, q_1, \ldots, q_n) \in \mathbf{p_F}(L) \text{ et } \theta \in [0, \pi]\} \ .$$

Le front spinning d'une sous-variété legendrienne est une sous-variété legendrienne. Par ailleurs, P. Lambert-Cole dans [30] montre que le front-spinning est legendriennement isotope au produit de L avec un nœud legendrien trivial maximal dont la longueur de la corde de Reeb est plus grande que toutes celles de L.



(a) (b)

FIGURE 2.4 – Demi-front-spinning (a) et front-spinning (b) du nœud trivial.

Cela implique en particulier que les fronts d'onde des figures 2.4 (b) et 2.2 représentent des sous-variétés legendriennes isotopes, c'est-à-dire que le produit de deux nœuds legendriens triviaux maximaux de hauteurs différentes est legendriennement isotope au front spinining du nœud legendrien trivial maximal.

Lemme 2.2.3 (Fonction génératrice, [12]). *Si L est une sous-variété legendrienne réalisée par une fonction génératrice F définie sur $\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_+^* \times (\mathbb{R}^k)$, alors ΣL est réalisé par la fonction génératrice $F_{\circlearrowleft}$ définie sur $\mathbb{R}^{n-1} \times (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \times (\mathbb{R}^k)$ par :*

$$\boxed{F_{\circlearrowleft}(q_1, \ldots, q_n, q_{n+1}, w) = F(q_1, \ldots, \sqrt{q_n^2 + q_{n+1}^2}, w).}$$

2.3 Tranche et Contour

2.3.1 Définitions : deux opérations de réduction

(Référence : [23].)

Soient n_1 et n_2 des entiers tels que $n = n_1 + n_2$, et soit N^{n_1} une sous-variété de M^n de dimension n_1. Si l'on ne dispose pas d'une façon canonique de projeter $J^1(M, \mathbb{R})$ sur $J^1(N, \mathbb{R})$, il existe néanmoins une *opération de réduction* canonique de $J^1(M, \mathbb{R})$ vers $J^1(N, \mathbb{R})$. Elle nous permet d'obtenir (génériquement) à partir d'une grande sous-variété legendrienne dans $J^1(M, \mathbb{R})$, une petite sous-variété legendrienne dans $J^1(N, \mathbb{R})$:

On définit le sous-espace $\mathcal{E}_\sigma \subset J^1(M, \mathbb{R})$ par :

$$\mathcal{E}_\sigma = \{(u, q, p) \mid q \in N\} .$$

On identifie localement M au produit $\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}$ de sorte que N soit localement $\mathbb{R}^{n_1} \times \{0\}$. On munit M des coordonnées $q = (q_1, q_2) \in \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}$, de sorte que $J^1(M, \mathbb{R})$ s'identifie

localement à $\mathbb{R} \times (\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}) \times (\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2})$ muni des coordonnées (u, q_1, q_2, p_1, p_2). $\mathcal{E}_\sigma$ se réécrit alors dans ce système de coordonnées :

$$\mathcal{E}_\sigma = \{(u, q_1, q_2, p_1, p_2) \mid q_2 = 0\} \ .$$

Le sous-espace $\mathcal{E}_\sigma$ se projette naturellement sur $J^1(N, \mathbb{R})$ en associant à chaque 1-jet défini sur M le 1-jet de sa restriction à N. Cela se traduit en termes de coordonnées locales par la projection :

$$\begin{array}{rcccl} \mathbf{p}_\sigma & : & \mathcal{E}_\sigma & \longrightarrow & J^1(N, \mathbb{R}) \\ & & (u, q_1, 0, p_1, p_2) & \longmapsto & (u, q_1, p_1) \end{array}$$

Définition 2.3.1. Soit L une sous-variété legendrienne de $J^1(M, \mathbb{R})$. La **tranche de L le long de** N est l'ensemble : $\mathbf{p}_\sigma(L \cap \mathcal{E}_\sigma) \subset J^1(N, \mathbb{R})$. On la note $\sigma(L)$.

L'appellation «tranche» prend tout son sens lorsque cette opération est vue au niveau des fronts d'onde : le front d'onde d'une tranche est l'intersection du front d'onde avec un hyperplan vertical (voir Figure 2.5) [1]. On notera également dans l'exemple illustré en Figure 2.5 que l'une des tranches présente un front non générique (où la singularité n'est ni un cusp ni un croisement). Pourtant, toutes ces tranches sont des sous-variétés legendriennes parfaitement plongées. En comparaison, la figure suivante (voir Figure 2.6), où sont présentées des tranches sur une ligne de cusps courbée, fait apparaître sur la troisième (en rouge) un front qui ne correspond pas à une courbe legendrienne plongée. C'est un moment de *cobordisme* dans $J^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (voir définition 2.5.4)).

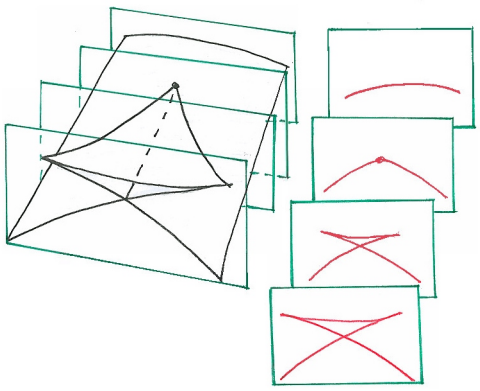


FIGURE 2.5 – Des tranches de queue d'aronde.

1. La grande sous-variété, représentée par son front d'onde, est une sous-variété legendrienne de $J^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Les tranches sont des sous-variétés legendriennes de $J^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

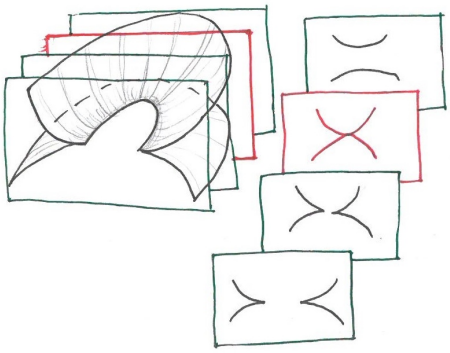


FIGURE 2.6 – Des tranches d'une ligne de cusps courbée.

Supposons maintenant que M est (globalement) un produit : $M = N_1 \times N_2$, où N_1 et N_2 sont des variétés de dimension respectives n_1 et n_2. Une autre forme de réduction de $J^1(M, \mathbb{R})$ à $J^1(N_1, \mathbb{R})$ est la suivante :
On munit (globalement) M des coordonnées $q = (q_1, q_2)$, où $q_1 \in N_1$ et $q_2 \in N_2$. On identifie $J^1(M, \mathbb{R})$ à $\mathbb{R} \times T^*N_1 \times T^*N_2$, puis au produit $\mathbb{R} \times (N_1 \times N_2) \times (\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2})$, muni des coordonnées (u, q_1, q_2, p_1, p_2). On définit le sous-espace de $J^1(M, \mathbb{R})$:

$$\mathcal{E}_\kappa = \{(u, q_1, q_2, p_1, p_2) \mid p_2 = 0\}.$$

On a alors la projection naturelle :

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{p}_\kappa \quad : & \mathcal{E}_\kappa & \longrightarrow J^1(N_1, \mathbb{R}) \\ & (u, q_1, q_2, p_1, 0) & \longmapsto (u, q_1, p_1). \end{array}$$

Définition 2.3.2. Soit L une sous-variété legendrienne de $J_1(M, \mathbb{R})$. Le **contour de L en direction de** N_1 est l'ensemble : $\mathbf{p}_\kappa(L \cap \mathcal{E}_\kappa) \subset J^1(N_1, \mathbb{R})$. On le note $\kappa(L)$.

Remarque 2.3.3. L'exemple fondamental est celui des fonctions génératrices : si V est une variété et F est une fonction génératrice définie sur $V \times (\mathbb{R}^k)$, son contour L_F (au sens de la définition 1.2.1) est le contour (au sens de la définition 2.3.2) du 1-graphe $j^1F \subset J^1(V \times \mathbb{R}^k, \mathbb{R})$ en direction de V.

2.3.2 Propriétés

On se restreint dans cette sous-section au cas $M = \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} = \mathbb{R}^{n_1+n_2}$. Les deux lemmes qui suivent appartiennent au folklore.

Lemme 2.3.4 (Transversalité automatique)**.** *Soit L une sous-variété legendrienne de $J^1(\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}, \mathbb{R})$. Si L est transverse à $\mathcal{E}_\sigma$ (respectivement L est transverse à $\mathcal{E}_\kappa$), alors la*

tranche $\sigma(L)$ (respectivement le contour $\kappa(L)$) est une sous-variété legendrienne immergée de $J^1(\mathbb{R}^{n_1}, \mathbb{R})$.

Preuve. La projection de la legendrienne $L \subset \mathbb{R} \times T^*\mathbb{R}^{n_1+n_2}$ sur $T^*\mathbb{R}^{n_1+n_2}$ est une sous-variété lagrangienne exacte immergée dans $T^*\mathbb{R}^{n_1+n_2}$ muni de la forme symplectique standard $\mathrm{d}p_1 \wedge \mathrm{d}q_1 + \mathrm{d}p_2 \wedge \mathrm{d}q_2$. Pour tout $x = (u, q_1, q_2, p_1, p_2) \in L$, les coordonnées de deux vecteurs X et Y dans T_xL doivent satisfaire l'équation :

$$(\star) \qquad X_{p_1}Y_{q_1} - Y_{p_1}X_{q_1} + X_{p_2}Y_{q_2} - Y_{p_2}X_{q_2} = 0 \ ,$$

où $X = (X_u, X_{q_1}, X_{q_2}, X_{p_1}, X_{p_2})$ et $Y = (Y_u, Y_{q_1}, Y_{q_2}, Y_{p_1}, Y_{p_2})$ dans

$$T_x(J^1(\mathbb{R}^{n_1+n_2}, \mathbb{R})) \simeq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} \times \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}.$$

On suppose $L \pitchfork \mathcal{E}_\sigma$. Alors, $L \cap \mathcal{E}_\sigma$ est une sous-variété de $J^1(\mathbb{R}^{n_1+n_2}, \mathbb{R})$, et :

$$\forall x \in L \cap \mathcal{E}_\sigma, \dim(T_xL \cap T_x\mathcal{E}_\sigma) = n_1 \ .$$

Le comptage des dimensions permet de conclure que T_xL contient une base de n_2 vecteurs pour le supplémentaire du sous-espace vectoriel $T_xL \cap T_x\mathcal{E}_\sigma$ dans T_xL :

$$\exists \ X_i = (X_{u,i}, X_{q_1,i}, X_{q_2,i}, X_{p_1,i}, X_{p_2,i}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} \times \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} \ ,$$

$i = 1, \ldots, n_2$, tels que $\{X_{q_2,i} \ , \ i = 1, \ldots, n_2\}$ sont linéairement indépendants.

La projection $\mathbf{p}_\sigma$ restreinte à $L \cap \mathcal{E}_\sigma$ définit localement une immersion dans $J^1(\mathbb{R}^{n_1}, \mathbb{R})$ si son application différentielle est injective en tout point $x = (u, q_1, q_2, p_1, p_2) \in L \cap \mathcal{E}_\sigma$:

$$\begin{array}{rccc} D_x(\mathbf{p}_\sigma)_{|T_x(L\cap\mathcal{E}_\sigma)} \ : & T_x(L \cap \mathcal{E}_\sigma) & \longrightarrow & T_{(u,q_1,p_1)}J^1(\mathbb{R}^{n_1}, \mathbb{R}) \\ & (X_u, X_{q_1}, 0, X_{p_1}, X_{p_2}) & \longmapsto & (X_u, X_{q_1}, X_{p_1}). \end{array}$$

Son noyau est composé de vecteurs de forme $X = (0, 0, 0, 0, X_{p_2})$. Par ailleurs ils satisfont l'équation $(\star)$ avec tout autre vecteur T_xL. En particulier, si l'on considère les n_2 vecteurs $X_i, \ \ i = 1, \ldots, n_2$, il vient que les produits scalaires $X_{p_2}X_{q_2,i}$ sont nuls. Donc $X_{p_2} = 0$, ce qui fait de $\mathbf{p}_\sigma(L \cap \mathcal{E}_\sigma)$ l'image dans $J^1(\mathbb{R}^{n_1}, \mathbb{R})$ d'une sous-variété par une immersion locale.

Dans le cas du contour, il s'agit d'appliquer la même démonstration en échangeant les rôles q_2 et p_2. □

Lemme 2.3.5. *La transversalité de L à $\mathcal{E}_\sigma$ (resp. $\mathcal{E}_\kappa$) est une condition générique.*

Idée de la preuve. On découpe $J^1(M, \mathbb{R})$ en une union dénombrable de compacts - c'est une

variété - et on raisonne pour commencer sur l'un de ces compacts, noté K. Une sous-variété legendrienne admet localement une fonction génératrice (proposition 1.3.5). La transversalité locale de L à $\mathcal{E}_\sigma$ se traduit par la transversalité du 1-graphe de cette fonction génératrice à une certaine sous-variété dans l'espace des 1-jets où se situe le 1-graphe de cette fonction génératrice. On sait d'après le lemme de transversalité de Thom que cette transversalité est générique. Le lemme s'obtient alors par compacité sur K, et enfin globalement grâce au recouvrement dénombrable par des compacts $J^1(M, \mathbb{R})$. □

Les opérations de tranche et de contour des sous-variétés legendriennes fabriquent donc génériquement des sous-variétés legendriennes. Elles sont par ailleurs reliées l'une l'autre par la transformation $\mathbf{T}$.

Proposition 2.3.6. *Les opérations de tranche le long de $\mathbb{R}^{n_1} \times \{0\}$ et de contour en direction de $\mathbb{R}^{n_1}$ sont conjuguées par $\mathbf{T}$:*[2]

$$\mathbf{T}\sigma(L) = \kappa(\mathbf{T}L) \qquad \textit{et} \qquad \mathbf{T}\kappa(L) = \sigma(\mathbf{T}L).$$

Preuve. La démonstration est ensembliste

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}\sigma(L) &= \mathbf{T}\{(u, q_1, p_1) \mid \exists p_2 \in \mathbb{R}^{n_2}, (u, q_1, 0, p_1, p_2) \in L\} \\
&= \{(q_1 p_1 - u, p_1, q_1) \mid \exists p_2 \in \mathbb{R}^{n_2}, (u, q_1, 0, p_1, p_2) \in L\} \\
&= \{(q_1 p_1 - u, p_1, q_1) \mid \exists p_2 \in \mathbb{R}^{n_2}, (q_1 p_1 - u, p_1, p_2, q_1, 0) \in \mathbf{T}L\} \\
&= \kappa(\mathbf{T}L).
\end{aligned}$$

$\mathbf{T}$ étant une involution, la seconde égalité s'en suit. □

Remarque 2.3.7. Le lemme de transversalité automatique (lemme 2.3.4) reste vrai si on remplace $\mathbb{R}^{n_1}$ et $\mathbb{R}^{n_2}$ respectivement par M_1 et M_2 des variétés quelconques – la preuve trouve une traduction immédiate en raisonnant avec des coordonnées locales. En revanche, les relations de conjugaison de la proposition 2.3.6 n'ont de sens que pour M_1 et M_2 des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels.

Lemme 2.3.8 (Fonctions Génératrices)**.** *Soit L une sous-variété legendrienne de $J^1(\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}, \mathbb{R})$ réalisée par une fg F définie sur $\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} \times (\mathbb{R}^k)$. Considérons $\sigma(L)$ la tranche le long de $\mathbb{R}^{n_1} \times \{0\}$, et $\kappa(L)$ le contour en direction de $\mathbb{R}^{n_1}$. On a :*

- *$\sigma(L)$ est réalisé par la fg F_σ définie sur $\mathbb{R}^{n_1} \times (\mathbb{R}^k)$ par :*

$$\boxed{F_\sigma(q, w) = F(q, 0, w),}$$

2. On utilise à nouveau le même symbole $\mathbf{T}$ pour désigner la transformation $\mathbf{T}$ opérée sur des espaces différents.

- *$\kappa(L)$ est réalisé par la fg F_κ définie sur $\mathbb{R}^{n_1} \times (\mathbb{R}^{n_2} \times \mathbb{R}^k)$ par :*

$$\boxed{F_\kappa(q, v, w) = F(q, v, w).}$$

Remarque 2.3.9. En combinant ces formules, il vient une fonction génératrice pour le *contour de la tranche* d'une part, et une pour la *tranche du contour*. En remarquant qu'elles se correspondent parfaitement :

$$\begin{tikzcd}
 & F_\sigma(q_1, q_2, w) = F(q_1, q_2, 0, w) \arrow[dr, bend left, "\kappa"] & \\
F(q_1, q_2, q_3, w) \arrow[ur, bend left, "\sigma"] \arrow[dr, bend right, "\kappa"'] & & (F_\sigma)_\kappa = F(q_1, v, 0, w) = (F_\kappa)_\sigma \arrow[ll, bend left, green, "\surd"] \\
 & F_\kappa(q_1, v, q_3, w) = F(q_1, v, q_3, w) \arrow[ur, bend right, "\sigma"'] &
\end{tikzcd}$$

En revanche, si l'on fait les deux comparaisons suivantes :

1.)

$$\begin{tikzcd}
 & F_{\mathbf{T}}(q_1, q_2, v_1, v_2, w) = q_1 v_1 + q_2 v_2 - F(v_1, v_2, w) \arrow[dr, bend left, "\sigma"] & \\
F(q_1, q_2, w) \arrow[ur, bend left, "\mathbf{T}"] \arrow[dr, bend right, "\kappa"'] & & (F_{\mathbf{T}})_\sigma(q_1, v_1, v_2, w) = q_1 v_1 - F(v_1, v_2, w) \\
 & F_\kappa(q_1, v, w) = F(q_1, v, w) \arrow[ur, bend right, "\mathbf{T}"'] & (F_\kappa)_{\mathbf{T}}(q_1, V, v, w) = q_1 V - F(V, v_1, w) \arrow[ll, bend left, green, "\surd"]
\end{tikzcd}$$

2.)

$$\begin{tikzcd}
 & F_{\mathbf{T}}(q_1, q_2, v_1, v_2, w) = q_1 v_1 + q_2 v_2 - F(v_1, v_2, w) \arrow[dr, bend left, "\kappa"] & \\
F(q_1, q_2, w) \arrow[ur, bend left, "\mathbf{T}"] \arrow[dr, bend right, "\sigma"'] & & (F_{\mathbf{T}})_\kappa(q_1, V, v_1, v_2, w) = q_1 v_1 + V v_2 - F(v_1, v_2, w) \\
 & F_\sigma(q_1, w) = F(q_1, 0, w) \arrow[ur, bend right, "\mathbf{T}"'] & (F_\sigma)_{\mathbf{T}}(q_1, v, w) = q_1 v - F(v, 0, w) \arrow[ll, bend left, red, "\times"]
\end{tikzcd}$$

On voit dans le cas 1.) que les deux fonctions génératrices sont les mêmes modulo un changement de variables, c'est-à-dire qu'elles sont équivalentes (voir chapitre 1). Mais dans le cas 2.) les deux fonctions génératrices ne sont pas immédiatement comparables.

Question : $(F_{\mathbf{T}})_\kappa$ et $(F_\sigma)_{\mathbf{T}}$ ont-elles un descendant (définition 1.3.11) commun ?

2.4 Somme et convolution

On définit la *somme de sous-variétés* comme la somme dans les fibres :

Définition 2.4.1. Soient L_1 et L_2 deux sous-variétés legendriennes de $J^1(M,\mathbb{R})$. La **somme** de L_1 et L_2 est l'ensemble :

$$L_1 \underline{+} L_2 = \{(u_1+u_2, q, p_1+p_2) \mid (u_i, q, p_i) \in L_i, i=1,2\}$$

Exemple 2.4.2. La figure 2.7 montre les différents cas de somme de deux cusps opposés opérée dans l'espace $J^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Le cas intermédiaire (non-générique) intervient lorsque les pointes des cusps sont alignées à la verticale.

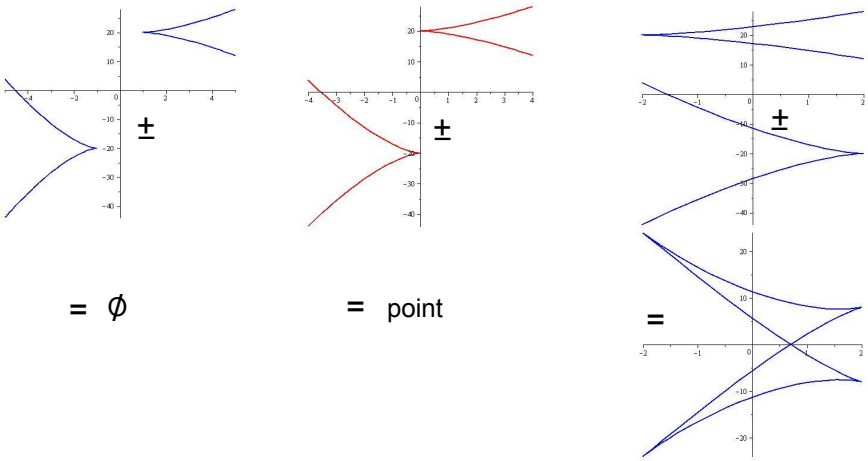


FIGURE 2.7 – Sommes de cusps opposés.

Exemple 2.4.3. L'exemple décrit en figure 2.8 – qui prend place dans $J^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ – témoigne d'une observation importante concernant l'opération somme : bien que $L_1 \underline{+} L_2$ soit génériquement une sous-variété legendrienne, des singularités non-génériques apparaissent génériquement au niveau des fronts d'onde.

Ici les arêtes de rebroussement des deux lignes de cusps ont beau être en position générique l'une par rapport à l'autre, leur somme crée systématiquement un front d'onde non-générique – il présente une singularité non-générique de type D_4^+ – que l'on appelle

le *mouchoir*. Remarquons que les quatre coins de l'oreiller (voir exemple 2.1.4) sont des mouchoirs.

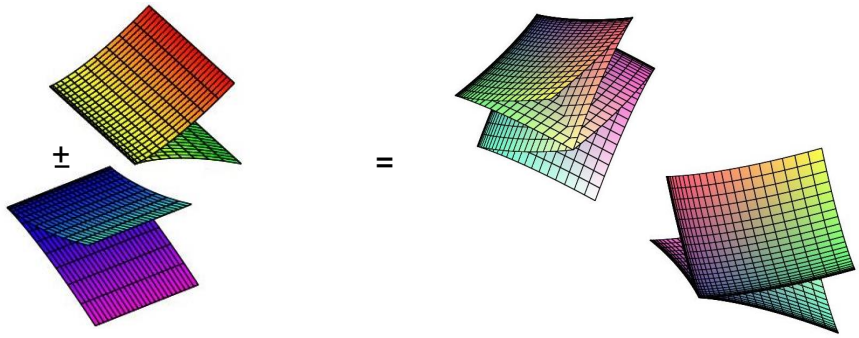


FIGURE 2.8 – La somme de deux lignes de cusps crée génériquement le mouchoir (le résultat est donné sous deux angles de vue différents).

Remarque 2.4.4. Le produit de deux sous-variétés legendriennes $l_1 \subset J^1(M_1, \mathbb{R})$ et $l_2 \subset J^1(M_2, \mathbb{R})$ s'obtient à partir de la somme comme suit.

On construit dans $J^1(M_1 \times M_2, \mathbb{R})$ les cylindres L_1 et L_2 de bases respectives l_1 et l_2 :

$$L_1 = \{(u_1, q_1, k, p_1, 0) \mid (u_1, q_1, p_1) \in l_1 \ , \ k \in M_2\}$$
$$L_2 = \{(u_2, k', q_2, 0, p_2) \mid (u_2, q_2, p_2) \in l_2 \ , \ k' \in M_1\} \ .$$

Alors le produit $l_1 \underline{\times} l_2$ est aussi la somme des cylindres $L_1 \underline{+} L_2$:

$$\begin{aligned} L_1 \underline{+} L_2 &= \{(u_1 + u_2, q, p_1, p_2) \mid \exists (k', k) \in M_1 \times M_2 \ , \ q = (q_1, k) = (k', q_2) \ , \ (u_i, q_i, p_i) \in l_i\} \\ &= \{(u_1 + u_2, q, p_1, p_2) \mid \exists (k', k) \in M_1 \times M_2 \ , \ q = (q_1, q_2) \ , \ (u_i, q_i, p_i) \in l_i\} \\ &= l_1 \underline{\times} l_2 \ . \end{aligned}$$

Lemme 2.4.5. *Soit L_1 une sous-variété legendrienne de $J^1(M, \mathbb{R})$. Pour $L_2 \subset J^1(M, \mathbb{R})$ générique parmi les sous-variétés legendriennes, la somme $L_1 \underline{+} L_2$ est une sous-variété legendrienne immergée.*

Preuve. On applique ici les techniques de F. Laudenbach de *transversalité sous-contrainte* qui sont exposées en détail dans [31] et [32]. Soit un recouvrement dénombrable de $J^1(M, \mathbb{R})$ par des compacts, et soit K l'un de ces compacts. Il existe un recouvrement de K par des ouverts $O_i, i \in I$ tel que, sur chacun de ces ouverts, L_1 et L_2 soient chacune décrite par une fonction génératrice. On extrait de $\{O_i, i \in I\}$ un recouvrement fini : $K \subset \bigcup_{j=1}^{N} O_j$. On fixe l'un des ouverts O_j. Si F_1 définie sur $M \times \mathbb{R}^{k_1}$ est une fonction génératrice pour $L_1 \cap O_j$ et F_2 définie sur $M \times \mathbb{R}^{k_2}$ est une fonction génératrice pour $L_2 \cap O_j$, alors $L_1 \underline{+} L_2$ restreinte

à O_j admet pour fonction génératrice $F_{1\pm 2}$. On va montrer que, étant fixée une fonction génératrice F_1 pour $L_1 \cap O_j$, les fonctions génératrices $F_2 \in C^\infty(M \times \mathbb{R}^{k_2}, \mathbb{R})$ qui réalisent localement des sous-variétés legendriennes $L_2 \cap O_j$ vérifient génériquement $\nabla_w F_{1\pm 2}$ transverse à $\{0\} \subset \mathbb{R}^{k_1} \times \mathbb{R}^{k_2}$. En répétant le raisonnement sur chaque ouvert du recouvrement extrait du compact K, puis sur chaque compact du recouvrement dénombrable par des compacts de $J^1(M, \mathbb{R})$ considéré, on obtiendra le résultat.

Soient $\mathfrak{F}_i$, $i = 1, 2$, l'ensemble des fonctions définies sur $M \times \mathbb{R}^{k_i}$ vérifiant la condition de transversalité : $\nabla_{w_i} F_i \pitchfork \{0\}$. On fixe $F_1 \in \mathfrak{F}_1$. On veut montrer que les $F_2 \in \mathfrak{F}_2$ telles que $\nabla_w F_{1\pm 2} = (\nabla_{w_1} F_1, \nabla_{w_2} F_2) \pitchfork \{0\}$ forment une intersection dénombrable d'ouverts denses. On pose

$$\mathfrak{F} = \{g \in C^\infty(M \times \mathbb{R}^{k_1} \times \mathbb{R}^{k_2}, \mathbb{R}^{k_1} \times \mathbb{R}^{k_2}) | \exists F_2 \in \mathfrak{F}_2 \text{ telle que } g = \nabla_w F_{1\pm 2}\}.$$

Pour pouvoir utiliser le *théorème de transversalité sous-contrainte* ([31], § 4.3), il nous faut montrer que la famille $\mathfrak{F}$ est localement transversale sur $\{0\}$ (voir [31] définition chapitre 6, § 4.2).

Soit l'application $g \in \mathfrak{F}$,

$$\begin{aligned} g \ : \ M \times \mathbb{R}^{k_1} \times \mathbb{R}^{k_2} &\longrightarrow \mathbb{R}^{k_1} \times \mathbb{R}^{k_2} \\ (q, w_1, w_2) &\longmapsto g(q, w_1, w_2) = (\nabla_{w_1} F_1(q, w_1), \nabla_{w_2} F_2(q, w_2)). \end{aligned}$$

Il existe un voisinage $V(0)$ de 0 dans $\mathbb{R}^{k_2}$ tel que $\nabla_{w_2} F_2$ est transverse sur tout $V(0)$ (la transversalité est une propriété ouverte), ou encore $\nabla_{w_2} F_2 + v \pitchfork \{0\}$ pour tout $v \in V(0)$. Par conséquent, pour tout $v \in V(0)$, l'application

$$\begin{aligned} g_v \ : \ M \times \mathbb{R}^{k_1} \times \mathbb{R}^{k_2} &\longrightarrow \mathbb{R}^{k_1} \times \mathbb{R}^{k_2} \\ (q, w_1, w_2) &\longmapsto g(q, w_1, w_2) + (0, v) \\ &\qquad\quad = (\nabla_{w_1} F_1(q, w_1), \nabla_{w_2} F_2(q, w_2) + v) \end{aligned}$$

est un élément de $\mathfrak{F}$. On pose

$$\begin{aligned} G \ : \ (M \times \mathbb{R}^{k_1} \times \mathbb{R}^{k_2}) \times V(0) &\longrightarrow \mathbb{R}^{k_1} \times \mathbb{R}^{k_2} \\ (q, w_1, w_2, v) &\longmapsto g(q, w_1, w_2) + (0, v). \end{aligned}$$

$G \pitchfork \{0\}$ le long de $(M \times \mathbb{R}^{k_1} \times \mathbb{R}^{k_2}) \times V(0)$. En effet, considérons en chaque point (q, w_1, w_2, v) tel que $\nabla_{w_1} F_1(q, w_1) = 0$ et $\nabla_{w_2} F_2(q, w_2) + v = 0$ la matrice aux dérivées

partielles

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial G}{\partial q} & \frac{\partial G}{\partial w_1} & \frac{\partial G}{\partial w_2} & \frac{\partial G}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial q \partial w_1} F_1 & \frac{\partial^2}{\partial w_1^2} F_1 & 0 & 0 \\ \frac{\partial^2}{\partial q \partial w_2} F_2 & 0 & \frac{\partial^2}{\partial w_2^2} F_2 & I_{k_2} \end{pmatrix}.$$

On montre qu'elle est de rang maximal, c'est-à-dire égal à $k_1 + k_2$. Par hypothèse sur F_1, la partie $\begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial q \partial w_1} F_1 & \frac{\partial^2}{\partial w_1^2} F_1 \end{pmatrix}$ est de rang maximal égal à k_1 pour tout (q, w_1) tel que $\nabla_{w_1} F_1(q, w_1) = 0$, et le bloc identité I_{k_2} assure les k_2 colonnes indépendantes manquantes.

Le théorème de transversalité sous-contrainte assure que, pour tout compact K de $M \times \mathbb{R}^{k_1} \times \mathbb{R}^{k_2}$, l'ensemble des fonctions g dans $\mathfrak{F}$ qui sont transversales sur $\{0\}$ le long de K forme un ouvert dense. Montrons que, pour tout compact $K \subset M \times \mathbb{R}^{k_1} \times \mathbb{R}^{k_2}$, l'ensemble des $F_2 \in \mathfrak{F}_2$ telle que $\nabla_w F_{1\pm 2} \pitchfork \{0\}$ le long de K est un ouvert dense dans $\mathfrak{F}_2$.

C'est un ouvert, car si F_2 est telle que $\nabla_w F_{1\pm 2} \pitchfork \{0\}$, c'est-à-dire que la matrice des dérivées partielles secondes $\begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial q \partial w} F_{1\pm 2} & \frac{\partial^2}{\partial w^2} F_{1\pm 2} \end{pmatrix}_{(q,w)}$ est de rang maximal pour tout $(q, w) \in K$, alors il existe un voisinage $W_2(F_2)$ de F_2 dans $C^\infty(M \times \mathbb{R}^{k_2}, \mathbb{R})$ (et donc dans $\mathfrak{F}_2$) tel que $\nabla_w F_{1\pm\epsilon} \pitchfork \{0\}$ pour tout $F_\epsilon \in W(F_2)$.

C'est un ensemble dense : soit $F_2 \in \mathfrak{F}_2$. D'après ce qui précède, il existe une suite $g_k \in \mathfrak{F}$ telle que :

- $g_k \pitchfork \{0\}$ le long de K pour tout k,
- $g_k = (\nabla_{w_1} F_1, \nabla_{w_2} F_{2,k})$ pour tout k, avec $F_{2,k} \in \mathfrak{F}_2$,
- $g_k \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} \nabla_w F_{1\pm 2}$.

En posant $\tilde{F}_{2,k} = F_{2,k} + F_2(a) - F_k(a)$ pour un point a quelconque, on est sûr d'avoir construit une suite $\tilde{F}_k$ de $\mathfrak{F}_2$ qui tend vers F_2, et telle que $\nabla_w F_{1\pm 2,k} \pitchfork \{0\}$ le long de K pour tout k. □

On se restreint dans la suite de cette partie au cas vectoriel : $M = \mathbb{R}^n$.

Définition 2.4.6. Soit L_1 et L_2 des sous-variétés legendriennes de $J^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. La **convolution** de L_1 et L_2 est l'ensemble :

$$L_1 \underline{\square} L_2 = \{(u_1 + u_2, q_1 + q_2, p) \mid (u_i, q_i, p) \in L_i, i = 1, 2\} .$$

Remarque 2.4.7. Soulignons que la structure de groupe de la base est essentielle pour cette définition (contrairement à celle de la somme).

Remarque 2.4.8. Comme pour les opérations de tranche et contour, on peut ramener la question de l'immersion de la somme et de la convolution à une condition de transver-

salité de fonctions génératrices (locales). On en déduit en particulier que le somme et la convolution sont génériquement des immersions legendriennes (lorsque la transversalité est assurée en dehors d'un compact).

Remarque 2.4.9. La somme de L_1 et L_2 s'obtient à partir des opérations produit et tranche de la manière suivante :

Considérons le produit $L_1 \underline{\times} L_2$, et son image par le contactomorphisme :

$$\begin{array}{rcccl} \Phi & : & J^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}) & \longrightarrow & J^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \\ & & (u, q_1, q_2, p_1, p_2) & \longmapsto & (u, \dfrac{q_1+q_2}{2}, \dfrac{q_1-q_2}{2}, p_1+p_2, p_1-p_2), \end{array}$$

$$\Phi(L_1 \underline{\times} L_2) = \{(u_1+u_2, \frac{q_1+q_2}{2}, \frac{q_1-q_2}{2}, p_1+p_2, p_1-p_2) \mid (u_i, q, p_i) \in L_i\}.$$

La tranche de $\Phi(L_1 \underline{\times} L_2)$ le long de $\mathbb{R}^n \times \{0\}$ est alors l'ensemble [3] :

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_\sigma(\Phi(L_1 \underline{\times} L_2) \cap \mathcal{E}_\sigma) &= \mathbf{p}_\sigma(\{(u_1+u_2, q, 0, p_1+p_2, p_1-p_2) \mid (u_i, q, p_i) \in L_i\} \\ &= \{(u_1+u_2, q, p_1+p_2) \mid (u_i, q, p_i) \in L_i\} \end{aligned}$$

D'où : $\sigma\left(\Phi(L_1 \underline{\times} L_2)\right) = L_1 \underline{+} L_2$.

On obtient $L_1 \underline{\square} L_2$ à partir de $L_1 \underline{\times} L_2$ et de l'opération contour en remplaçant le contactomorphims Φ par :

$$\begin{array}{rcccl} \Psi & : & J^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}) & \longrightarrow & J^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \\ & & (u, q_1, q_2, p_1, p_2) & \longmapsto & (u, q_1+q_2, q_1-q_2, \dfrac{p_1+p_2}{2}, \dfrac{p_1-p_2}{2}). \end{array}$$

On a : $\kappa\left(\Psi(L_1 \underline{\times} L_2)\right) = L_1 \underline{\square} L_2$.

Théorème 2.4.10. *Soient L_1 et L_2 deux sous-variétés legendriennes de $J^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Alors :*

$$\mathbf{T}\left(L_1 \underline{+} L_2\right) = (\mathbf{T}L_1) \underline{\square} (\mathbf{T}L_2) \qquad \textit{et} \qquad \mathbf{T}\left(L_1 \underline{\square} L_2\right) = (\mathbf{T}L_1) \underline{+} (\mathbf{T}L_2).$$

Preuve. Tout d'abord, notons que Φ et Ψ définies en remarque 2.4.9 sont conjuguées par $\mathbf{T}$: $\Psi = \mathbf{T} \circ \Phi \circ \mathbf{T}$. Le reste de la preuve découle de la proposition 2.3.6 et de la remarque 2.1.5 :

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(L_1 \underline{+} L_2) &= \mathbf{T}(\sigma(\Phi(L_1 \underline{\times} L_2)) & \mathbf{T}(L_1 \underline{\square} L_2) &= \mathbf{T}(\kappa(\Psi(L_1 \underline{\times} L_2)) \\ &= \kappa(\mathbf{T} \circ \Phi(L_1 \underline{\times} L_2)) & &= \sigma(\mathbf{T} \circ \Psi(L_1 \underline{\times} L_2)) \\ &= \kappa(\Psi \circ \mathbf{T}(L_1 \underline{\times} L_2)) & &= \sigma(\Phi \circ \mathbf{T}(L_1 \underline{\times} L_2)) \end{aligned}$$

3. En d'autres termes, il s'agit de la tranche suivant la diagonale $\Delta = \{(q_1, q_2) \mid q_1 = q_2\} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.

$$= \kappa(\Psi((\mathbf{T}L_1)\underline{\times}(\mathbf{T}L_2)) \qquad = \sigma(\Phi((\mathbf{T}L_1)\underline{\times}(\mathbf{T}L_2))$$
$$= (\mathbf{T}L_1)\underline{\square}(\mathbf{T}L_2) \qquad = (\mathbf{T}L_1)\underline{+}(\mathbf{T}L_2)$$

□

Lemme 2.4.11 (Fonctions génératrices). *Si L_1 et L_2 sont les contours respectifs de fg F_1 définie sur $\mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^{k_1})$, et F_2 définie sur $\mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^{k_2})$, alors :*

- *$L_1\underline{+}L_2$ est réalisée par fg $F_{1\underline{+}2}$ définie sur $\mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^{k_1} \times \mathbb{R}^{k_2})$ par :*

$$\boxed{F_{1\underline{+}2}(q, w_1, w_2) = F_1(q, w_1) + F_2(q, w_2),}$$

- *$L_1\underline{\square}L_2$ est réalisée par la fg $F_{1\underline{\square}2}$ définie sur $\mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{k_1} \times \mathbb{R}^{k_2})$ par :*

$$\boxed{F_{1\underline{\square}2}(q, v, w_1, w_2) = F_1(v, w_1) + F_2(q - v, w_2).}$$

Remarque 2.4.12. En combinant les formules, on obtient la même dissymétrie observée en remarque 2.3.9 dans les deux comparaisons de fonctions génératrices suivantes :

i) $F_{(\mathbf{T}1)\underline{+}(\mathbf{T}2)}$ avec $F_{\mathbf{T}(\mathbf{1}\underline{\square}\mathbf{2})}$:

$$\begin{aligned} F_{(\mathbf{T}1)\underline{+}(\mathbf{T}2)}(q, v_1, v_2, w_1, w_2) &= q(v_1 + v_2) - (F_1(v_1, w_1) + F_2(v_2, w_2)) \\ F_{\mathbf{T}(1\underline{\square}2)}(q, V, v, w_1, w_2) &= qV - (F_1(v, w_1) + F_2(V - v, w_2)) \end{aligned}$$

√

ii) $F_{(\mathbf{T}1)\underline{\square}(\mathbf{T}2)}$ avec $F_{\mathbf{T}(\mathbf{1}\underline{+}\mathbf{2})}$:

$$\begin{aligned} F_{(\mathbf{T}1)\underline{\square}(\mathbf{T}2)}(q, V, v_1, v_2, w_1, w_2) &= V(v_1 - v_2) + qv_2 - (F_1(v_1, w_1) + F_2(v_2, w_2)) \\ F_{\mathbf{T}(1\underline{+}2)}(q, v, w_1, w_2) &= qv - (F_1(v, w_1) + F_2(v, w_2)) \end{aligned}$$

×

Remarque 2.4.13. On vérifie facilement que les contours des fg $F_{(\mathbf{T}1)\underline{\square}(\mathbf{T}2)}$ et $F_{\mathbf{T}(\mathbf{1}\underline{+}\mathbf{2})}$ coïncident, ainsi que ceux des fg $F_{(\mathbf{T}1)\underline{+}(\mathbf{T}2)}$ et $F_{\mathbf{T}(\mathbf{1}\underline{\square}\mathbf{2})}$. Cette remarque constitue une nouvelle preuve du théorème 2.4.10.

2.5 Questions d'isotopie, d'homotopie et cobordisme de fronts d'onde

Les opérations de somme et de produit ne sont pas compatibles avec la notion d'isotopie legendrienne (définition 1.2.1), comme leur classe d'isotopie legendrienne dépend fortement de leur position (ce fait pour l'opération produit était déjà souligné dans [30]).

Exemple 2.5.1. Par exemple, on ne change pas un nœud legendrien en lui ajoutant la section nulle $\mathcal{O} = \{(u = 0, q, p = 0) \mid q \in M\}$. Considérons ensuite $\mathcal{O}$ sommé avec une boucle longue B, puis $\mathcal{O}$ sommé avec des translatés horizontaux B_{-T} de B (voir figure 2.9). On obtient des entrelacs legendriens non-isotopes, avec une composante *papillon* qui apparaît.

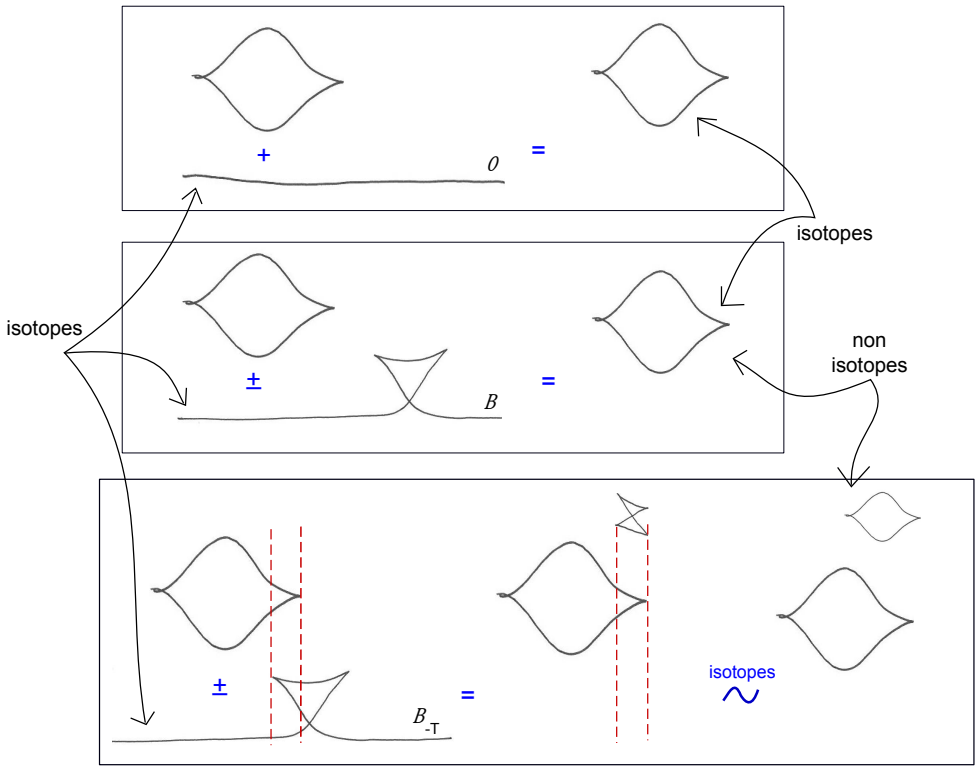


FIGURE 2.9 – Sommes de composantes isotopes

Plus généralement et quelque soit la dimension, il est clair que la section nulle $\mathcal{O}$ dans $J^1(M, \mathbb{R})$ est un élément neutre pour l'opération somme.

Cet exemple permet aussi de constater que la somme ne respecte pas la notion d'homotopie legendrienne (définition 1.2.5) – on ne peut pas créer de composante supplémentaire.

En revanche, puisque l'opération produit crée systématiquement des immersions legendriennes, on en déduit que le produit est lui compatible avec la notion d'homotopie :

Lemme 2.5.2. *Si L est une sous-variété legendrienne de $J^1(M_1, \mathbb{R})$, et $(L_t)_{t\in[0,1]}$ est une homotopie legendrienne de $J^1(M_2, \mathbb{R})$, alors la famille $(L \underline{\times} L_t)_{t\in[0,1]}$ constitue une homotopie legendrienne de $J^1(M_1 \times M_2, \mathbb{R})$.*

La notion de cobordisme legendrien :

Considérons une isotopie legendrienne $(L_t)_{t\in[0,1]}$ de $J^1(M, \mathbb{R})$. L'union $\cup_{t\in[0,1]} L_t \subset J^1(M, \mathbb{R}) \times [0, 1]$ se relève de manière unique en une sous-variété legendrienne L de l'espace des jets $J^1(M \times [0, 1], \mathbb{R})$. Chaque L_t est alors la tranche de L le long de $M \times \{t\}$.

De même, une homotopie legendrienne de $J^1(M, \mathbb{R})$ peut être considérée comme une collection de tranches d'une sous-variété legendrienne de $J^1(M \times [0, 1], \mathbb{R})$.

Exemple 2.5.3. Dans le cas des isotopies de courbes legendriennes, le premier mouvement de Reidemeister peut être vu comme une famille lisse de tranches effectuées sur la queue d'aronde (voir figure 2.5). De même, les deux autres mouvements s'obtiennent en opérant des tranches successives sur les fronts représentés en (d) et (e) de la figure 1.4.

Le mouvement d'homotopie qui vient s'ajouter aux mouvements de Reidemeister est quand à lui obtenu à partir du front d'onde de dimension 2 décrit en figure 2.11 (a) avec l'intersection transverse de deux "tuiles".

Ce sont des cas particulier de ce qu'on l'on appelle les *cobordismes legendriens* – selon la terminologie donnée par V.I. Arnold dans [1] et [**?**] – où les deux extrémités L_0 et L_1 sont les tranches d'une sous-variété legendrienne de $J^1(M \times [0, 1], \mathbb{R})$ quelconque.

Définition 2.5.4. Soient L_0 et L_1 deux sous-variétés legendriennes de $J^1(M, \mathbb{R})$. Un **cobordisme legendrien** entre L_0 et L_1 est une sous-variété legendrienne L de $J^1(M \times [0, 1], \mathbb{R})$ telle que L_0 est la tranche de L le long de $M \times \{0\}$, et L_1 est la tranche de L le long de $M \times \{1\}$.

Remarque 2.5.5. En notant L_t la tranche de L le long de $M \times \{t\}$ pour chaque $t \in [0, 1]$, un cobordisme en position générique L peut se voir comme une famille lisse à un paramètre d'immersions legendriennes (homotopie), excepté en des instants de cobordisme isolés.

Exemple 2.5.6. Un cobordisme entre deux nœuds legendriens se décompose encore en une suite de mouvements locaux au niveau du font d'onde. Aux mouvements décrits en figures 1.5 et 1.6 s'ajoutent les deux mouvements locaux de cobordisme (figure 2.10) : mouvement de type point selle, et mouvement de type maximum/minimum.

Le premier mouvement (*de type point selle*) correspond à la famille des tranches décrite en figure 2.6. Le second mouvement (*de type disque*) est donné par la famille des tranches de la demie-soucoupe (figure 2.11 (b)).

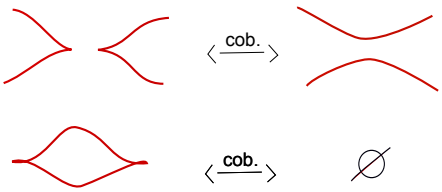
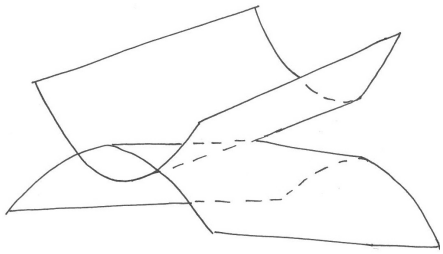


FIGURE 2.10 – Mouvements de cobordisme.



(a) Intersection transverse de deux tuiles.

(b) Demie-soucoupe.

FIGURE 2.11 –

Exemple 2.5.7. Considérons le demi-front-spinning d'une boucle legendrienne longue (figure 2.12). On verra en fin de chapitre 4 que cette opération permet de créer un cobordisme entre L_0 constitué d'une paire de boucles legendriennes, et L_1 égale à la section nulle $\mathcal{O}$. Sa décomposition en mouvements élémentaires fait apparaître dans l'ordre : un mouvement de cobordisme de type point selle, un mouvement d'auto-intersection, et un mouvement de cobordisme de type maximum/minimum.

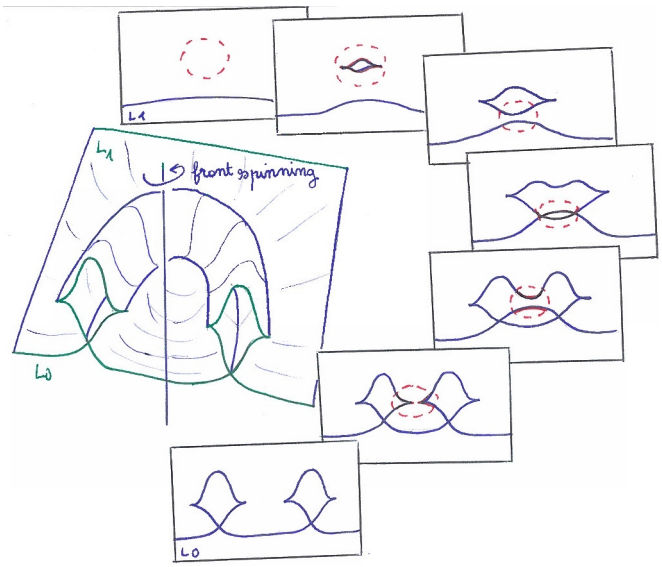


FIGURE 2.12 –

Exemple 2.5.8. Soit N une sous-variété de M. Soient L_1 et L_2 deux sous-variétés legendriennes de $J^1(M, \mathbb{R})$, et soient l_1 et l_2 les tranches respectives de L_1 et L_2 le long de N. Alors $l_1 \underline{+} l_2$ est la tranche de $L_1 \underline{+} L_2$ le long de N.

En particulier, si L_1 réalise un cobordisme entre l_1 et l_1', L_2 réalise un cobordisme entre l_2 et l_2' ($M = N \times [0,1]$), et $L_1 \underline{+} L_2$ est une sous-variété legendrienne, alors $L_1 \underline{+} L_2$ réalise un cobordisme entre $l_1 \underline{+} l_2$ et $l_1' \underline{+} l_2'$.

Chapitre 3

Sélecteur pour les opérations somme, transformée de Legendre et convolution

Dans ce chapitre, on regarde les fonctions comme des fonctions génératrices avec espace additionnel trivial (c'est-à-dire égal à $\{0\}$). On se restreint au cas où la base de l'espace $J^1(M, \mathbb{R})$ est $M = \mathbb{R}^n$.

L'opération somme des 1-graphes (au sens de la définition 2.4.1, chapitre 2) relève géométriquement l'opération somme des fonctions : $f_1, f_2 \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \mapsto f_1 + f_2 \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ à l'espace $J^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$:

$$(j^1 f_1) \underline{+} (j^1 f_2) = j^1(f_1 + f_2).$$

Les opérations $\mathbf{T}$ et convolution du chapitre 2 (exemple 2.0.23 et définition 2.4.6) ont aussi une interprétation au niveau des fonctions. Dans ce qui suit, on les rapproche de deux opérations qui proviennent du domaine de l'analyse convexe : *la transformée de Legendre–Fenchel* et *l'inf-convolution* des fonctions. Concernant ces deux dernières notions, on rappelle en section 3.1 les faits qui nous sont nécessaires. On renvoie le lecteur au livre de H.H Bauschke et P.L. Combettes [8] pour plus de détails et d'applications.

On considère la transformée de Legendre–Fenchel et l'inf-convolution comme des manifestations particulières de l'objet *sélecteur* appliqué aux fonctions génératrices que l'on a associées au chapitre 2 respectivement à la transformation $\mathbf{T}$ et à la convolution. Pour une fonction génératrice F définie sur $\mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^k)$ ayant une certaine standardité à l'infini – ici on est amené à définir la classe des fonctions génératrices *presque-simples* (définition 3.2.15) – le sélecteur associe à F une fonction $s(F)$ définie sur la base $\mathbb{R}^n$, dont le graphe est une section continue au-dessus de la base du front d'onde réalisé par F.

Si f est une fonction définie sur $\mathbb{R}^n$, son 1-graphe admet pour fonction génératrice (triviale) f, et la transformation $\mathbf{T}$ de son 1-graphe admet pour fonction génératrice

$$f_{\mathbf{T}} \ : (q, v) \mapsto qv - f(v).$$

De même, si f_1 et f_2 sont deux fonctions définies sur $\mathbb{R}^n$, leurs 1-graphes admettent respectivement f_1 et f_2 comme fonctions génératrices (triviales), et la convolution de leurs 1-graphes admet pour fonction génératrice

$$f_{1\underline{\square}2} \ : (q, v) \mapsto f_1(v) + f_2(q - v).$$

Il est bien connu que dans les cas *presque-convexe* (resp. *presque-concave*) le sélecteur sélectionne la partie inférieure (resp. supérieure) du front d'onde réalisé par la fonction génératrice. Ceci conduit aux deux faits suivants : Si f est une fonction *presque-convexe* définie sur $\mathbb{R}^n$, alors sa transformée de Legendre–Fenchel

$$f^* \ : q \mapsto \sup_{v \in \mathbb{R}^n} \{qv - f(v)\}$$

est le sélecteur de la fonction génératrice $f_{\mathbf{T}}$. De même, si f_1 et f_2 sont presque-convexes, alors leur inf-convolution

$$f_1 \square f_2 \ : q \mapsto \inf_{v \in \mathbb{R}^n} \{f_1(v) + f_2(q - v)\}$$

est le sélecteur de la fonction génératrice $f_{1\underline{\square}2}$.

Un indice supplémentaire du lien avec les opérations définies au chapitre 2 est la présence d'identités de type Fourier similaires à celles qui apparaissent naturellement pour les sous-variétés legendriennes (théorème 2.4.10). En effet, lorsque f_1 et f_2 sont des fonctions presque-convexes, on a :

$$(f_1 \square f_2)^* = f_1^* + f_2^* \qquad \text{et} \qquad (f_1 + f_2)^* = f_1^* \square f_2^*.$$

Les fonctions presque-convexes constituent une classe particulière de fonctions génératrices qui admettent un sélecteur (trivialement), et dont l'existence d'un sélecteur persiste par les opérations somme (trivialement), transformation $\mathbf{T}$ et convolution. L'objectif de ce chapitre est d'étendre cette mécanique aux fonctions génératrices en général. On définit des classes de fonctions génératrices qui admettent un sélecteur d'une part, et qui survivent à l'opération somme – resp. à la transformation $\mathbf{T}$ – d'autre part (on rappelle que la convolution peut être vue comme l'opération somme conjuguée par l'opération $\mathbf{T}$, voir chapitre 2).

La bonne classe de fonctions génératrices pour travailler avec le sélecteur et la convo-

lution est aussi celle qui permettra de travailler à la fois avec le sélecteur, la somme et la transformation $\mathbf{T}$. Ceci est encore un travail en cours.

L'un de nos principaux objectifs dans ce travail est de retrouver la trace des identités de type Fourier au travers de l'objet sélecteur. Nous expliquons à la fin de ce chapitre comment l'analogue de la première des deux identités est obtenu immédiatement. La démonstration de l'analogue pour la seconde identité demeure aussi un travail en cours.

3.1 Transformée de Legendre-Fenchel et inf-convolution des fonctions

On donne dans cette première partie les définitions et propriétés de la transformée de Legendre–Fenchel et de l'inf-convolution des fonctions. Puis on les rapproche de la transformation $\mathbf{T}$ et de l'opération convolution au niveau des 1-jets de fonctions.

Définition 3.1.1. Une fonction f définie sur $\mathbb{R}^n$ est **simple** si l'application

$$(\nabla f \ : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n) \text{ est un difféomorphisme de } \mathbb{R}^n \ .$$

Définition 3.1.2. La **transformée de Legendre** $f^{\mathbf{t}}$ d'une fonction simple f est la fonction $f^{\mathbf{t}}$ définie sur $\mathbb{R}^n$ par la formule :

$$(*) \qquad f^{\mathbf{t}}(q) = q(\nabla f)^{-1}(q) - f((\nabla f)^{-1}(q)).$$

Par exemple, la transformée de Legendre d'une parabole $P_{\frac{a}{2}} \ : q \mapsto \dfrac{a}{2}q^2$, où $a \neq 0$, est la parabole $P_{\frac{1}{2a}} \ : q \mapsto \dfrac{1}{2a}q^2$.

Propriétés 3.1.3. *Soit f une fonction simple. Alors :*
1. $\nabla f^{\mathbf{t}} = (\nabla f)^{-1}$.
2. $f^{\mathbf{t}}$ *est aussi une fonction simple.*
3. $f^{\mathbf{tt}} = f$.
4. Si de plus f est convexe (resp. concave), alors $f^{\mathbf{t}}$ est aussi convexe (resp. concave).

Preuve. Les assertions 1. , 2. et 3. sont immédiates. La propriété 4. est obtenue en remarquant que le cas convexe (resp. concave) est équivalent au fait que la matrice hessienne de f est en tout point la matrice d'une forme quadratique définie positive (resp. définie négative). Selon 1. les matrices hessiennes de $f^{\mathbf{t}}$ aux points q sont les inverses des matrices hessiennes de f aux points $(\nabla f)^{-1}(q)$. La matrice inverse d'une matrice définie positive (resp. définie négative) est aussi définie positive (resp. définie négative), d'où le résultat. $\square$

Du point de vue géométrique – sous-entendu au niveau de l'espace des 1-jets $J^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ – il s'agit d'observer que le 1-graphe d'une fonction simple f, qui est un graphe en les

coordonnées $q_1, \ldots, q_n$, est aussi un graphe en les coordonnées $p_1, \ldots, p_n$. C'est équivalent au fait que $\mathbf{T}(j^1 f)$ est aussi le 1-graphe d'une fonction.

Lemme 3.1.4. *Soit f une fonction simple. Alors $\mathbf{T}(j^1 f)$ est le 1-graphe de la transformée de Legendre de f :*

$$\boxed{\mathbf{T}(j^1 f) = j^1(f^{\mathbf{t}}).}$$

Preuve. Le 1-graphe de f : $j^1 f = \{(u = f(q), q, p = \nabla f(q)) \ / \ q \in \mathbb{R}^n\}$ est envoyé par $\mathbf{T}$ sur :

$$\begin{aligned}\mathbf{T}(j^1 f) &= \{(U = q\nabla f(q) - f(q), Q = \nabla f(q), P = q) \ / \ q \in \mathbb{R}^n\} \\ &= \{(U = (\nabla f)^{-1}(Q)Q - f((\nabla f)^{-1}(Q)), Q, P = (\nabla f)^{-1}(Q)) \ / \ Q \in \mathbb{R}^n\} \\ &= j^1 f^{\mathbf{t}}.\end{aligned}$$

□

La *transformée de Legendre–Fenchel* est une manière d'étendre la transformée de Legendre des fonctions simples et convexes à une classe plus large de fonctions.

Définition 3.1.5. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}^n$. Sa **transformée de Legendre–Fenchel** est la fonction f^* définie [1] par :

$$(**) \qquad q \in \mathbb{R}^n \mapsto \sup_{v \in \mathbb{R}^n} \{qv - f(v)\} \ .$$

Remarque 3.1.6. Sous de bonnes hypothèses, cette définition par supremum fabrique des fonctions, non nécessairement lisses, mais convexes. Par exemple, si f est une déformation à support compact d'une fonction convexe, alors f^* est non-lisse mais convexe, et sa *bi-conjuguée* f^{**} est la fonction dont l'épigraphe est l'enveloppe convexe de l'épigraphe de f (voir figure 3.3).

Les définitions 3.1.2 et 3.1.5 coïncident lorsque f est une fonction simple et convexe. En effet, considérons la famille de fonctions q-paramétrée $(F_q : v \mapsto qv - f(v))_{q \in \mathbb{R}^n}$. Lorsque f est simple et convexe, alors chaque fonction F_q est simple et concave. Chacune admet donc une unique valeur critique qui est son maximum global, sélectionné par le supremum de la formule $(**)$ (voir aussi figure 3.1). Par conséquent :

Corollaire 3.1.7. *Soit f une fonction simple et convexe. Alors $\mathbf{T}(j^1 f)$ est le 1-graphe de la transformée de Legendre-Fenchel de f :*

$$\boxed{\mathbf{T}(j^1 f) = j^1(f^*).}$$

1. L'application f^* peut ici prendre la valeur $+\infty$.

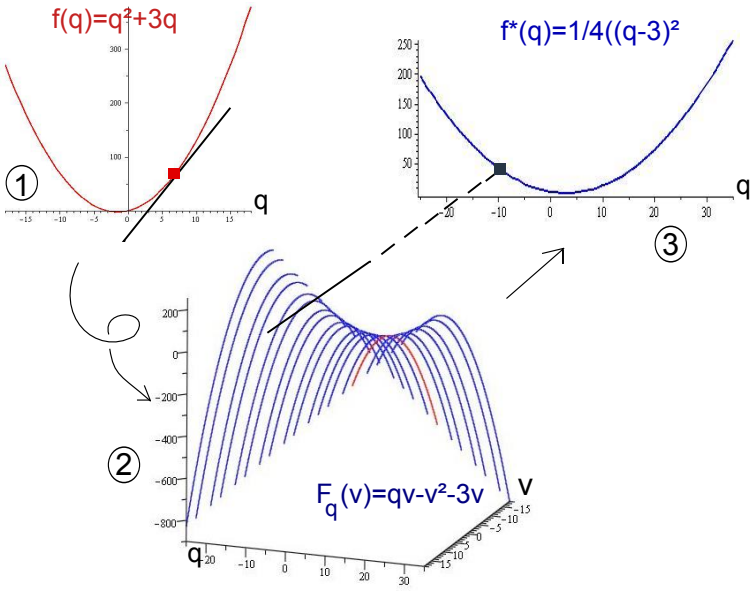


FIGURE 3.1 – Construction de Legendre-Fenchel pour $f : q \mapsto q^2 + 3q$

Définition 3.1.8. Soient f_1 et f_2 deux fonctions définies sur $\mathbb{R}^n$. Leur **inf-convolution** $f_1 \square f_2$ est la fonction définie sur $\mathbb{R}^n$ par :

$$(*^*) \qquad q \mapsto \inf_{v \in \mathbb{R}^n} \{f_1(v) + f_2(q - v)\} \ .$$

Si f_1 et f_2 sont simples et convexes, alors pour tout $q \in \mathbb{R}^n$ la fonction $F_q : v \mapsto f_1(v) + f_2(q - v)$ est aussi une fonction simple et convexe. De sorte que chaque F_q admet un unique point critique v_q, qui est sont minimum absolu :

$$f_1 \square f_2(q) = f_1(v_q) + f_2(q - v_q) \ \text{ pour } v_q \text{ tel que } \nabla f_1(v_q) = \nabla f_2(q - v_q) \ ,$$

ou encore :

$$f_1 \square f_2(q) = f_1(q_1) + f_2(q_2) \ , \ \text{pour } q = q_1 + q_2 \text{ et } \nabla f_1(q_1) = \nabla f_2(q_2) \ ,$$

de sorte que l'on voit apparaître la formule définissant la convolution (définition 2.4.6) du 1-graphe $j^1 f_1$ avec le 1-graphe $j^1 f_2$.

Lemme 3.1.9. *Si f_1 et f_2 sont deux fonctions simples et convexes, alors leur inf-convolution $f_1 \square f_2$ est aussi une fonction simple et convexe, et :*

$$\boxed{(j^1 f_1) \square (j^1 f_2) = j^1 (f_1 \square f_2).}$$

Les définitions géométriques de somme, transformation **T** et convolution constituent

donc une façon de généraliser aux sous-variétés legendriennes de $J^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ les opérations sur les 1-graphes de fonctions simples et convexes fournies par le relèvement aux espaces de 1-jets de la somme, la transformée de Legendre–Fenchel et l'inf-convolution des fonctions.

D'un autre côté, on peut considérer ces différentes opérations au niveau des 0-jets comme des opérations sur les fronts d'onde. On se concentre sur la transformation $\mathbf{T}$ pour la fin de cette partie, et sur sa projection dans $J^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$: $\mathbf{pr} \circ \mathbf{T}$.

Si f n'est pas une fonction simple, le résultat $\mathbf{pr} \circ \mathbf{T} j(^1 f)$ est éventuellement un *graphe multi-valué* – on entend par là un front d'onde qui n'est pas un graphe au dessus des coordonnées $q_1, \ldots, q_n$ – comme illustré en exemple 3.1.12). Le *sélecteur* (partie 3.2) appliqué aux fonctions génératrices (quand il existe) permet d'obtenir à nouveau un graphe de fonction.

Avant cela, on propose ci-dessous trois exemples simples, dans la cas $n = 1$, où l'on compare l'opération $\mathbf{pr} \circ \mathbf{T}$ avec la transformée de Legendre–Fenchel.

Exemple 3.1.10. La fonction f égale à l'exponentielle : $f(q) = e^q$, $q \in \mathbb{R}$, est une fonction convexe mais non simple : ∇f est un difféomorphisme sur $]0, +\infty[$, et non $\mathbb{R}$ tout entier.

Le calcul de la transformée de Legendre-Fenchel donne :

$$f^*(q) = \begin{cases} +\infty & , \text{ if } \ q < 0 \\ 0 & , \text{ if } \ q = 0 \\ q(\ln(q) - 1) & , \text{ if } \ q > 0 \end{cases}$$

Par ailleurs, la transformation $\mathbf{T}$ au 1-graphe de f :

$$j^1 f = \{(u = e^q, q, p = e^q) \ / \ q \in \mathbb{R}\} \ ,$$

a pour résultat :

$$\mathbf{T}(j^1 f) = \{(u = e^x(x-1), q = e^x, p = x) \ / \ x \in \mathbb{R}\} \ .$$

C'est à nouveau le 1-graphe d'une fonction $q \mapsto q(\ln(q) - 1)$, mais seulement définie sur $\mathbb{R}_{>0}$.

Ici, l'unique différence entre f^* et $\mathbf{pr} \circ \mathbf{T}(j^1 f)$ est dans la façon de gérer les pentes p non-atteintes par la gradient. Si l'on restreint f^* à son *domaine* (i.e. le sous-ensemble de $\mathbb{R}$ où elle prend une valeur finie), alors les deux opérations coïncident.

Exemple 3.1.11. Soit f la fonction (non lisse) définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(q) = \begin{cases} (q+1)^2 \ , \ q \in \ ]-\infty; -1] \\ \quad 0 \qquad \ , \ q \in \ ]-1; 1[\\ (q-1)^2 \ , \ q \in \ [1; +\infty[\end{cases}$$

C'est un cas intermédiaire, fortement non-générique, entre l'exemple qui précède et celui qui viendra ensuite. La fonction f définie par morceau est malgré tout de classe C^1, de sorte que l'on peut considérer son 1-graphe. Calculons :

$$f^*(q) = \begin{cases} \dfrac{1}{4}q^2 - q \ , \ q \leqslant 0 \\ \\ \dfrac{1}{4}q^2 + q \ , \ q \geqslant 0 \end{cases}$$

On note que f^* et $\mathbf{pr} \circ \mathbf{T}(j^1 f)$ coïncident, et font apparaître une singularité (voir figure 3.2), de sorte que $\mathbf{T}(j^1 f)$ n'est pas le 1-graphe d'une fonction dans ce cas de figure. Remarquons aussi qu'en ré-appliquant la transformée de Legendre–Fenchel dans ce cas, on retrouve f.

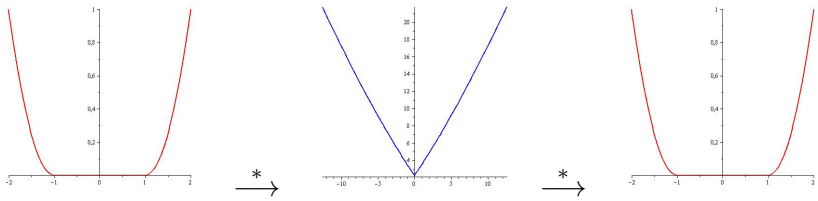


FIGURE 3.2 – transformées de Legendre–Fenchel successives pour une fonction convexe mais non simple.

Exemple 3.1.12. La différence fondamentale qui nous intéresse apparaît pour des déformations (lisses) à support compact de fonctions simples et convexes. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(q) = q^4 - 3q^2 \ ,$$

dont le graphe (illustré en figure 3.3) est confondu avec celui d'une fonction convexe excepté sur un ensemble compact, où elle réalise une "bosse concave". La définition par suprema de f^* *sélectionne* seulement la partie supérieure $\mathbf{pr} \circ \mathbf{T}(j^1 f)$ pour donner le graphe de f^*. Notons qu'à nouveau une singularité apparaît, mais le résultat demeure continu. On remarque aussi que la transformée de Legendre–Fenchel traite cet exemple comme le précédent exemple 3.1.11, sans considérer la bosse concave. D'ailleurs, en ré-appliquant la transformée de Legendre–Fenchel, on ne retrouve pas le graphe de f mais son enveloppe

convexe, où la bosse a été remplacée par un plat. A contrario $\mathbf{pr}\left(\mathbf{T} \circ \mathbf{T}(j^1 f)\right)$ redonne le graphe de f (rappelons que $\mathbf{T}$ est involutive, voir chapitre 1).

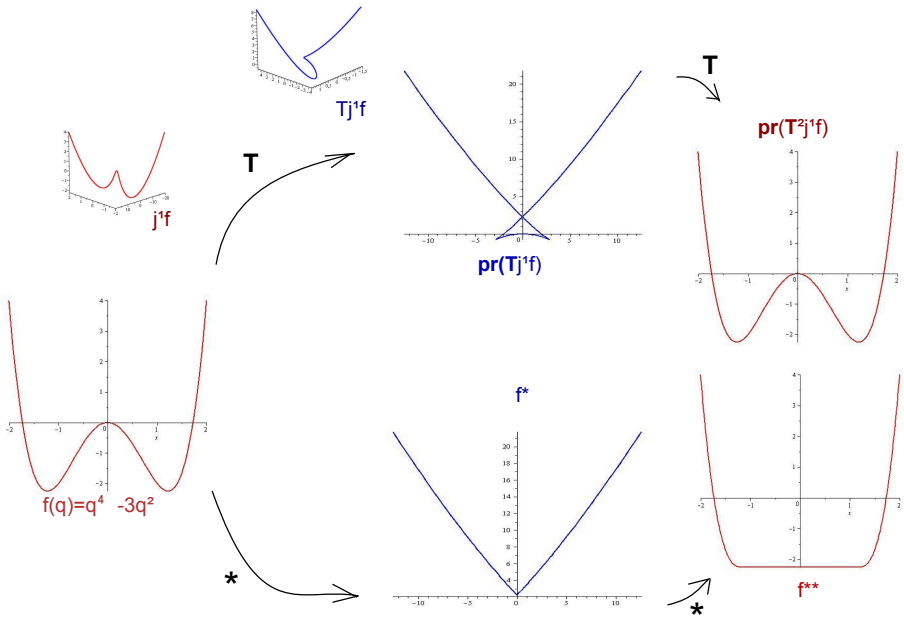


FIGURE 3.3 –

3.2 Fonctions Génératrices et sélecteur

(Références : [55], [13], [54].)

Cette partie s'attèle à la création de classes de fonctions génératrices pour lesquelles le sélecteur existe et persiste par les opérations somme, transformation $\mathbf{T}$ et convolution des fonctions génératrices. Le lecteur trouvera en annexe A les rappels de théorie de Morse employée pour la suite, ainsi que les références utilisées.

Remarque 3.2.1. Les expressions $qv - f(v)$ et $f_1(v) + f_2(q - v)$ manipulées dans $(**)$ et $(*^*)$ coïncident respectivement avec celles des fonctions génératrices pour la transformation $\mathbf{T}(j^1 f)$ (voir introduction du chapitre 2) et la convolution $(j^1 f_1)\underline{\square}(j^1 f_2)$ (voir lemme 2.4.11).

Comment généraliser la transformée de Legendre–Fenchel aux déformations à support compact de fonctions simples (pas seulement convexes) ?

3.2.1 Min-Max des fonctions presque-simples

La construction du min-max est en général présentée pour la classe des fonctions quadratiques à l'infini, ou presque-quadratiques à l'infini, [53], [41], [55]. Notre unique contribution ici est de leur préférer une classe plus générale de fonctions, naturelle pour travailler avec la transformation $\mathbf{T}$: on les appelle les *fonctions presque-simples.*

Considérons une fonctions f définie sur $\mathbb{R}^k$ telle que son gradient ∇f soit une application propre, i.e. qu'il envoie tout compact de $\mathbb{R}^k$ sur un compact de $\mathbb{R}^k$. Ceci entraîne une forme forte de la condition de Palais–Smale (voir annexe A.1). En particulier, on a que l'ensemble des points critiques $crit(f)$ est fini, ainsi que l'ensemble des valeurs critiques $vcrit(f)$.

La théorie de Morse est ici employée pour l'étude des sous-niveaux de f. Ceux-ci satisfont les caractéristiques suivantes (voir annexe A.2) :

1. La topologie des sous-niveaux de f change exactement au passage des valeurs critiques,

2. Ces changements sont répartis dans un ensemble compact de $\mathbb{R}$.

Notations : Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, on note f^λ le sous-niveau de hauteur λ de f :

$$f^\lambda = f^{-1}(]-\infty, \lambda]) \ .$$

Pour $\lambda_1 \leqslant \lambda_2$ réels, on désigne par $f^{\lambda_2}_{\lambda_2}$ le sous-niveau relatif de f :

$$f^{\lambda_2}_{\lambda_1} = f^{-1}([\lambda_2, \lambda_1]) \ .$$

Définition 3.2.2. Soit f une fonction telle que ∇f est propre. Soit C un réel positif assez grand pour que $vcrit(f)$ soit inclus dans $]-C, C[$. Alors :

$$\forall \lambda > C \text{ , on note les sous-niveaux : } \begin{cases} f^\lambda \\ f^{-\lambda} \end{cases} \text{ par : } \begin{cases} f^{+\infty} \\ f^{-\infty} \end{cases} ,$$

$$\text{que l'on appelle les } \textbf{grands sous-niveaux} \text{ de } f \ : \begin{cases} f^{+\infty} \text{ le } \textbf{haut sous-niveau} \text{ de } f \\ f^{-\infty} \text{ le } \textbf{bas sous-niveau} \text{ de } f \end{cases}$$

Remarque 3.2.3. On confondra donc un sous-niveau f^{λ_1} avec un sous-niveau f^{λ_2} si $C < \lambda_2 < \lambda_1$ (respectivement $\lambda_2 < \lambda_1 < -C$) sous prétexte que f^{λ_1} se rétracte par déformation sur f^{λ_2}. C'est commode pour travailler avec l'homologie relative des grands sous-niveaux $H_*(f^{+\infty}, f^{-\infty})$ et $H_*(f^\lambda, f^{-\infty})$ où seul $\lambda \in [-C, C]$ varie dans cette écriture.

Si les groupes d'homologie relative $H_*(f^{+\infty}, f^{-\infty})$ sont tous nuls, excepté en une dimension $\iota \in [\![0, n]\!]$ où le groupe est $\mathbb{Q}$, alors on considère le plus petit λ où un générateur

de $H_\iota(f^{+\infty}, f^{-\infty})$ apparaît dans un sous-niveau f^λ.

Définition 3.2.4. Soit f une fonction telle que ∇f est propre. S'il existe $\iota \in [\![1, k]\!]$ tel que :

$$H_*(f^{+\infty}, f^{-\infty}) \simeq \begin{cases} \mathbb{Q} & \text{if } * = \iota \\ 0 & \text{if } * \neq \iota \end{cases}$$

on dit que f a une **grande homologie relative simple d'indice** ι. On définit alors le **min-max de** f par :

$$s(f) := \inf\{\lambda \ / \ H_\iota(f^\lambda, f^{-\infty}) \overset{\mathbf{i}_*^\lambda}{\to} H_\iota(f^{+\infty}, f^{-\infty}) \text{ is surjective}\} \ ,$$

où $\mathbf{i}_*^\lambda$ l'application en homologie induite par l'inclusion :

$$(f^\lambda, f^{-\infty}) \overset{\mathbf{i}^\lambda}{\hookrightarrow} (f^{+\infty}, f^{-\infty}) \ .$$

Remarque 3.2.5.
• Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ est une valeur régulière de f, et soit c la plus grande valeur critique telle que $c < \lambda$. Alors le sous-niveau f^λ se rétracte par déformation sur chaque $f^{\lambda-\epsilon}$ tant que $\lambda - \epsilon \geqslant c$. Le min-max de f est donc nécessairement une valeur critique de f.
• Par ailleurs, un cycle relatif dans $f^{s(f)}$ qui réalise un générateur du groupe d'homologie $H_\iota(f^{+\infty}, f^{-\infty})$ passe par un point critique $\zeta \in f^{-1}(\{s(f)\})$ dont l'indice de Morse est ι.

Définition 3.2.6. Soit g une fonction simple (définition 3.1.1). Alors g admet un unique point critique noté w_0, et il est non dégénéré. L'indice de Morse ι de w_0 sera aussi appelé **l'indice de Morse de g**.

Définition 3.2.7. Une fonction f définie sur $\mathbb{R}^k$ est **presque-simple** si elle est décomposable en une somme comme suit :

$$f = g + h \text{ telle que } \begin{cases} g \text{ fonction simple} \\ \exists B > 0 \ / \ \forall w \in \mathbb{R}^k \ , \ \| \nabla h(w) \| \leqslant B \end{cases}$$

Exemple 3.2.8.
• Les formes quadratiques non-dégénérées sont des fonctions simples, de valeur critique $0 \in \mathbb{R}^k$ et d'indice de Morse égale au nombre de carrés négatifs de la forme quadratique écrite dans une base orthogonale.
• Les fonctions qui sont quadratiques à l'infini, c'est à dire confondues avec une forme quadratique non-dégénérée en dehors d'un compact, sont des fonctions presque-simples.

Les propriétés suivantes sont évidentes :

Propriétés 3.2.9.
1. Une fonction simple ou presque-simple a un gradient propre.
2. Une fonction simple d'indice de Morse ι a une homologie relative simple d'indice ι.

On utilise un lemme de déformation des grands sous-niveaux, dont une démonstration se trouve en annexe C du texte de V. Roos [41] :

Lemme 3.2.10. *Si f et g sont deux fonctions dont la différence admet un gradient borné $\nabla(f-g) \leqslant B$, alors leurs hauts sous-niveaux (respectivement bas sous-niveaux) sont difféomorphes.*

On en déduit le résultat suivant :

Corollaire 3.2.11 (Indice de Morse d'une fonction presque-simple)**.** *Si f est une fonction presque-simple décomposable en $g+h$ comme dans la définition 3.2.7, avec g simple d'indice de Morse ι, alors elle admet une grande homologie relative simple d'indice ι. Par conséquent :*

1. f admet un min-max : $s(f)$.

2. Si $f = \tilde{g} + \tilde{h}$ est une autre décomposition de f comme dans la définition 3.2.7, alors l'indice de Morse de la fonction simple $\tilde{g}$ doit être le même ι.

On appelle alors ι l'**indice de Morse** de la fonction presque-simple f.

Définition 3.2.12. Une fonction f définie sur $\mathbb{R}^k$ est **presque-convexe** (respectivement **presque-concave**) si c'est une fonction presque-simple d'indice de Morse égal à 0 (resp. égal à k).

Le fait suivant appartient au folklore :

Lemme 3.2.13. *Si f est une fonction presque-convexe (respectivement presque-concave) alors le min-max de f est son minimum absolu (resp. maximum absolu) :*

$$s(f) = \min f$$

$$(\textit{resp.}\quad s(f) = \max f)\ .$$

Preuve. Dans le cas où f est presque-convexe, notons m son minimum. Le lemme 3.2.10 implique que $f^{-\infty}$ est vide, et $f^{+\infty}$ est un disque de dimension k. Le point critique m est le plus petit candidat d'indice 0 pour être min-max, et passer la valeur critique m donne lieu au sous-niveau $f^{m+\epsilon}$ qui est un disque pour ϵ petit. Ce disque est inclus dans le disque $f^{+\infty}$, c'est donc un rétracte par déformation de $f^{+\infty}$. Cela permet de conclure que, $H_0(f^{m+\epsilon}, f^{-\infty}) \overset{\mathbf{i}_*^{m+\epsilon}}{\to} H_0(f^{+\infty}, f^{-\infty})$ est bijective.

Si f est presque-concave, $f_{-\infty}^{+\infty}$ est encore un disque, attaché cette fois au bord du bas sous-niveau $f^{-\infty}$. Soit M le maximum de f. Supposons qu'une valeur critique c_1 plus petite que M soit telle que f^{c_1} contient un cycle relatif générateur pour l'homologie $H_k(f^{+\infty}, f^{-\infty})$. Alors $f_{-\infty}^{c_1}$ devrait avoir la même homologie que le disque $f_{-\infty}^{+\infty}$. Mais puisque c_1 n'est pas le maximum de f, le niveau $f^{-1}(c_1+\epsilon)$ est non-vide, et $f_{-\infty}^{c_1+\epsilon}$ a donc plus d'une composante de bord : une dans $f^{-\infty}$, à laquelle s'additionnent les composantes connexes de $f^{c_1+\epsilon}$. C'est absurde. En conclusion, f^M est le plus petit niveau où apparaît un générateur pour l'homologie $H_k(f^{+\infty}, f^{-\infty})$. □

3.2.2 Sélecteur pour les fonctions génératrices presque-simples

Il s'agit de la version q-paramétrée du min-max pour les fonctions.

Définition 3.2.14. Une fonction génératrice G définie sur $\mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^k)$ est dite **simple** si :

$$\forall q \in \mathbb{R}^n \ , \ G(q,.) \text{ est une fonction simple } .$$

Définition 3.2.15. Une fonction génératrice F définie sur $\mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^k)$ est **presque-simple** (fg **PS**) si elle se décompose en une somme comme suit :

$$F = G + H \ , \text{ avec } \forall q \in \mathbb{R}^n \ \begin{cases} G(q,.) \text{ simple} \\ \| \nabla H(q,.) \| \leqslant B(q) \end{cases} ,$$

où B est une fonction continue sur $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.

Une conséquence du lemme de Morse à un paramètre (voir annexe A.1) est le lemme suivant :

Lemme 3.2.16. *Si G est une fonction génératrice simple, l'indice de $G(q,.)$ est le même pour tout $q \in \mathbb{R}^n$. On l'appelle* ***indice de Morse*** *de G.*

La définition 3.2.15 et le lemme 3.2.16 entraînent :

Corollaire 3.2.17.
1. Si F est une fg PS, alors $F(q,.)$ est une fonction presque-simple pour tout $q \in \mathbb{R}^n$.
2. L'indice de Morse de $F(q,.)$ est le même pour tout $q \in \mathbb{R}^n$.

On l'appelle l'**indice de Morse de** F.

Définition 3.2.18. Soit F une fg PS définie sur $\mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^k)$. Pour tout $q \in \mathbb{R}^n$, on note $s(F)(q)$ le min-max de la fonction simple $F(q,.)$:

$$s(F)(q) := s(F(q,.)) \ .$$

Le **sélecteur de** F est la fonction $s(F)$ définie sur $\mathbb{R}^n$ par :

$$\begin{aligned} s(F) \ : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \ \mathbb{R} \\ q \ &\longmapsto s(F)(q) \end{aligned}$$

La continuité est une propriété classique du sélecteur. Elle est montrée dans le cas compact dans [31], chapitre 6, et aussi dans [55] et [41] pour des cas standards à l'infini.

C'est aussi une conséquence de l'*évolution continue du couplage des valeurs critiques* qui est décrite en annexe D.

Lemme 3.2.19. *Le sélecteur d'une fonction génératrice presque-simple est continu.*

3.2.3 Sélecteur et opération somme

Proposition 3.2.20. *Soient F_1 et F_2 deux fg PS. Alors $F_{1\underline{+}2}$ est une fg PS et :*

$$s(F_{1\underline{+}2}) = s(F_1) + s(F_2) \ .$$

Preuve. C'est la version à q-paramètre du lemme suivant :

Lemme 3.2.21. *Soient f_1 et f_2 deux fonctions presque-simples. On note $f_1 \oplus f_2$ la fonction $(w_1, w_2) \mapsto f_1(w_1) + f_2(w_2)$. Alors :*
1. $f_1 \oplus f_2$ est aussi presque-simple,
2. $s(f_1 \oplus f_2) = s(f_1) + s(f_2)$.

Preuve. 1. On décompose f_1 en f_2 en :

$$\begin{cases} f_1 = g_1 + h_1 \\ f_2 = g_2 + h_2 \end{cases}$$

où g_1 et g_2 sont simples, d'indices respectifs ι_1 et ι_2, et :

$$\exists B_1, B_2 > 0 \ , \ \begin{cases} \forall w_1, \| \nabla h_1(w_1) \| \leqslant B_1 \\ \forall w_2, \| \nabla h_2(w_2) \| \leqslant B_2 \end{cases}$$

Alors, $g_1 \oplus g_2$ est une fonction simple d'indice $\iota_1 + \iota_2$, et :

$$\begin{aligned} &\|\nabla(h_1 \oplus h_2)(w_1, w_2) \|^2 \\ &= \| \nabla_{w_1}(h_1 \oplus h_2)(w_1, w_2) \|^2 + \| \nabla_{w_2}(h_1 \oplus h_2)(w_1, w_2) \|^2 \\ &= \| \nabla_{w_1} h_1(w_1) \|^2 + \| \nabla_{w_2} h_2(w_2) \|^2 \\ &\leqslant B_1^2 + B_2^2 \ . \end{aligned}$$

En conclusion, $f_1 \oplus f_2 = g_1 \oplus g_2 + h_1 \oplus h_2$ est une fonction presque-simple.

2. On peut donc considérer le min-max de $f_1 \oplus f_2$. La formule $s(f_1 \oplus f_2) = s(f_1) + s(f_2)$ se montre en utilisant la forme normale du complexe de Morse–Barannikov pour les fonctions Morse excellentes (voir annexe C.2), et en concluant grâce à la continuité du sélecteur. □ □

3.2.4 Sélecteur pour l'opération T

Malheureusement, la notion de fg PS n'est pas stable par l'opération $\mathbf{T}$. Il faut affiner la définition. Commençons avec une fonction simple g d'indice ι définie sur $\mathbb{R}^n$. Une fonction génératrice pour la transformée de son 1-graphe $j^1 g$ est :

$$(q, v) \mapsto qv - g(v)$$

Notons-la $g_{\mathbf{T}}$. Elle a les propriétés suivantes :

1. $\forall q \in \mathbb{R}^n, \nabla_v g_{\mathbf{T}}(q, .)$ réalise un difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$
2. $\nabla g_{\mathbf{T}}$ réalise un difféomorphisme de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.

En d'autres termes, $g_{\mathbf{T}}(q, .)$ est une fonction simple en chaque $q \in \mathbb{R}^n$, et $g_{\mathbf{T}}$ est (globalement) une fonction simple.

On sait par ailleurs (lemme 3.1.4) que $\mathbf{T}(j^1 g)$ est le 1-graphe de la transformée de Legendre de g (voir définition 3.1.2) :

$$g^{\mathbf{t}} \ : \ q \mapsto q(\nabla g)^{-1}(q) - g((\nabla g)^{-1}(q)) \ .$$

Définition 3.2.22. Une fonction génératrice G définie sur $\mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^k)$ est dite **globalement simple** (fg **GS**) si elle satisfait les deux conditions suivantes :

1. $\forall q \in \mathbb{R}^n, \nabla_w G(q, .)$ réalise un difféomorphisme de $\mathbb{R}^k$
2. ∇G réalise un difféomorphisme de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$.

Lemme 3.2.23.
1. Si G est une fg GS, alors la fonctions génératrice $G_{\mathbf{T}}$ pour la transformation $\mathbf{T}$ est aussi une fg GS.
2. Une fg GS G réalise le 1-graphe d'une fonction simple g, et $G_{\mathbf{T}}$ réalise le 1-graphe de sa transformée $g^{\mathbf{t}}$.

Preuve. 1. On calcule le gradient partiel $\nabla_{(v,w)}$ de $G_{\mathbf{T}}(q,v,w) = qv - G(v,w)$:

$$\nabla_{(v,w)} G_{\mathbf{T}}(q;v;w) = \begin{pmatrix} \nabla_v G_{\mathbf{T}}(q,v,w) \\ \nabla_w G_{\mathbf{T}}(q,v,w) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q - \nabla_v G(v,w) \\ -\nabla_w G(v,w) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q \\ 0 \end{pmatrix} - \nabla G \ .$$

∇G étant un difféomorphisme, on en déduit que $\nabla_{(v,w)} G_{\mathbf{T}}(q,.,.)$ l'est aussi pour tout $q \in \mathbb{R}^n$.

Calculons le gradient (global) de $G_{\mathbf{T}}$:

$$\nabla G_{\mathbf{T}}(q;v;w) = \begin{pmatrix} \nabla_q G_{\mathbf{T}}(q,v,w) \\ \nabla_v G_{\mathbf{T}}(q,v,w) \\ \nabla_w G_{\mathbf{T}}(q,v,w) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ q - \nabla_v G(v,w) \\ -\nabla_w G(v,w) \end{pmatrix} \ .$$

On cherche l'application réciproque : Soit (Q,V,W) tel que :

$$\begin{pmatrix} Q \\ V \\ W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ q - \nabla_v G(v,w) \\ -\nabla_w G(v,w) \end{pmatrix} \ .$$

Nécessairement $v = Q$. Donc, puisque $\nabla_w G(Q,.)$ est un difféomorphisme, il vient $w = (\nabla_w G(Q,.))^{-1}(W)$, puis $q = V + \nabla_v G(Q,w)$. Cela définit une application réciproque qui est lisse, et l'on conclut que $\nabla G_{\mathbf{T}}$ est bien un difféomorphisme.

2. Pour tout $q \in \mathbb{R}^n$, on désigne par $w(q)$ l'unique point critique de la fonction simple $G(q,.)$. La condition 1. de la définition 3.2.22 entraîne que l'application $\nabla_w G$ est submersive sur 0. Donc l'ensemble $\{(q,w(q)), q \in \mathbb{R}^n\}$ est lisse, ainsi que l'application $q \mapsto w(q)$.

G réalise le 1-graphe de la fonction $g : \ q \mapsto G(q,w(q))$. Comme $\nabla_w G(q,w(q)) = 0$, on a : $\forall q \in \mathbb{R}^n \ , \ \nabla g(q) = \nabla_q G(q,w(q))$. Soit $Q \in \mathbb{R}^n$. On a :

$$Q = \nabla g(q) \ \Leftrightarrow \ (q,w(q)) = (\nabla G)^{-1}(Q,0).$$

On trouve l'application réciproque de ∇g comme la composition de la projection $\mathbb{R}^n$ et de l'application ∇G^{-1} restreinte à $\mathbb{R}^n \times \{0\}$. C'est la composition d'application lisses, on en déduit donc que ∇g est un difféomorphisme.

Si l'on ajoute à cela la premier point de lemme que nous venons de démontrer, on obtient que $G_{\mathbf{T}}$ réalise aussi le 1-graphe d'une fonction. Soit $Q \in \mathbb{R}^n$, on écrit :

$$\begin{aligned} (\nabla G_{\mathbf{T}})^{-1}(Q,0,0) = (q,v,w) \ &\Leftrightarrow \ v = Q \ , \ q = \nabla_q G(v,w), \ \nabla_w G(v,w) = 0 \\ &\Leftrightarrow \ q = \nabla_q G(Q,w(Q)), \ (v,w) = (Q,w(Q)) \\ &\Leftrightarrow \ q = \nabla g(Q), \ (v,w) = (Q,w(Q)) \end{aligned}$$

En conclusion, $G_{\mathbf{T}}$ réalise le 1-graphe de :

$$q \mapsto qQ - G(Q, w(Q)) \ , \ \text{with } Q = (\nabla g)^{-1}(q) \ ,$$

c'est à dire $g^{\mathbf{t}}$. □

Définition 3.2.24. Une fonction génératrice F définie sur $\mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^k)$ est **globalement presque-simple** (fg **GPS**) si elle peut être décomposée en :

$$F = G + H \ , \ \text{avec} \ \begin{cases} G \text{ est une fg GS} \\ \exists B > 0 \ , \ \| \nabla H(q,w) \| \leqslant B, \forall (q,w) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \end{cases} .$$

Remarque 3.2.25. Une fg GPS est en particulier une fg PS, de sorte qu'on lui associe aussi un indice de Morse, ainsi qu'un sélecteur.

Proposition 3.2.26. *Si F est une fg GPS, alors $F_{\mathbf{T}}$ l'est aussi. En particulier, $F_{\mathbf{T}}$ admet un sélecteur.*

Preuve. On écrit $F_{\mathbf{T}}(q,v,w) = G_{\mathbf{T}}(q,v,w) - H(v,w)$, et on conclut grâce au lemme 3.2.23. □

3.2.5 Sélecteur, opérations somme, T et convolution

Pour travailler à la fois avec la somme et **T** (et donc avec la convolution), il faudra raffiner encore la classe des fonctions génératrices, car celle de fg GPS définie en section précédente (définition 3.2.24) pour manipuler **T** n'est pas stable par la somme en général. En effet, écrivons :

$$\begin{aligned} F_{1\pm 2}(q,w_1,w_2) &= F_1(q,w_1) + F_2(q,w_2) \\ &= G_{1\pm 2}(q,w_1,w_2) + H_{1\pm 2}(q,w_1,w_2) \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{cases} G_{1\pm 2}(q,w_1,w_2) = G_1(q,w_1) + G_2(q,w_2) \\ H_{1\pm 2}(q,w_1,w_2) = H_1(q,w_1) + H_2(q,w_2) \end{cases}$$

On a $\nabla H_{1\pm 2}$ borné :

$$\begin{aligned} \| \nabla H_{1\pm 2}(q,w_1,w_2) \| &= \| (\nabla_q H_1(q,w_1), \nabla_{w_1} H_1(q,w_1), 0) + (\nabla_q H_2(q,w_2), 0, \nabla_{w_2} H_2(q,w_2)) \| \\ &\leqslant \| \nabla H_1(q,w_1) \| + \| \nabla H_2(q,w_2) \| \leqslant B_1 + B_2 \ . \end{aligned}$$

Mais l'application $\nabla G_{1\pm 2}$ qui à (q,w_1,w_2) associe :

$$(\nabla_q G_1(q,w_1) + \nabla_q G_2(q,w_2), \nabla_{w_2} G_1(q,w_1), \nabla_{w_2} G_2(q,w_2))$$

n'est en général pas un difféomorphisme, et en particulier, elle peut ne pas être surjective.

Le gradient de $H_{1\underline{+}2}$ étant borné, si $\nabla G_{1\underline{+}2}$ n'est pas surjectif, on n'a aucun espoir de parvenir à décomposer $F_{1\underline{+}2}$ en une somme convenable qui en ferait une fg globalement presque-simple.

Exemple 3.2.27. Par (contre-)exemple, considérons la somme de $F_{1\underline{+}2}$ où $F_1(q, w_1) = q^2 + w_1^2$ et de $F_2(q, w_2) = -q^2 + w_2^2$. La partie en q disparaissant, cela donne la fg indépendante de la variable q, égale en tout q à $w_1^2 + w_2^2$. Si l'on applique la formule de la transformée de Legendre dans ce cas, on obtient :

$$F_{\mathbf{T}(1\underline{+}2)}(q, v, w_1, w_2) = qv - w_1^2 - w_2^2.$$

Cela ne donne pas une famille à paramètre de fonctions presque-simples dont on peut chercher à chaque q le min-max. En effet, le gradient partiel en v, $\nabla_v F_{\mathbf{T}(1\underline{+}2)}$, est nul si et seulement si $q = 0$.

Une solution pour que la mécanique fonctionne est de se restreindre aux fonctions *presque-convexes* (définition 3.2.12). Le lemme 3.2.13 entraine que dans ce cas d'indice de Morse minimal égal à 0 on retrouve les définitions 3.1.5 et 3.1.8 de transformée de Legendre–Fenchel et inf-convolution :

Corollaire 3.2.28.
1. Soit f une fonction presque-convexe, alors :

$$s(f_{\mathbf{T}}) = f^* \quad et \quad s(f_{\mathbf{TT}}) = f \ .$$

2. Soient f_1 et f_2 deux fonctions presque-convexes. Alors pour tout q , $f_{1\underline{\square}2}(q, .)$ est aussi presque-convexe et :

$$s(f_{1\underline{\square}2}) = f_1 \square f_2 \ .$$

Preuve. 1. On écrit $f = g + h$ avec g simple d'indice de Morse $\iota = 0$, et ∇h borné. Alors :

$$f_{\mathbf{T}}(q, v) = qv - g(v) - h(v)$$

et pour tout q, $f_{\mathbf{T}}(q, .)$ est la somme de $v \mapsto qv - g(v)$, qui est simple et concave, et de $-h$ qui a gradient borné. Donc pour tout q, $f_{\mathbf{T}}(q, \cdot)$ est une fonction presque-concave, de sorte que le min-max en chaque q coïncide avec sa borne supérieure (lemme 3.2.13).

2. Si f_1 et f_2 sont décomposées respectivement en $g_1 + h_1$ et $g_2 + h_2$, alors pour tout $q \in \mathbb{R}^n$, $f_{1\underline{\square}2}(q, .)$ se décompose en :

$$f_{1\underline{\square}2}(q, v) = (g_1(v) + g_2(q - v)) + (h_1(v) + h_2(q - v)) \ .$$

Comme ∇h_1 et ∇h_2 sont bornés, il vient que :

$$\forall q \ , \ \nabla(h_1(v) + h_2(q - v)) \text{ est borné.}$$

Par ailleurs, $\forall q$, la matrice hessienne de $v \mapsto g_1(v) + g_2(q - v)$ en v est :

$$\mathrm{Hess}_v(g_1(.) + g_2(q - .)) = \mathrm{Hess}_v(g_1) + \mathrm{Hess}_{q-v}(g_2) \ .$$

Puisque la somme de deux matrices définies positives est une matrice définie positive, on conclut que $v \mapsto g_1(v) + g_2(q - v)$ est simple et d'indice de Morse nul. □

Remarque 3.2.29. Remarquons que, si $s(f_{\mathbf{T}})$ correspond à la transformée de Legendre-Fenchel dans le cas des fonctions f presque-convexes, $s(f_{\mathbf{TT}})$ nous donne une involution, tandis que f^{**} est différente de la fonction f de départ (voir figures 3.3 et 3.4).

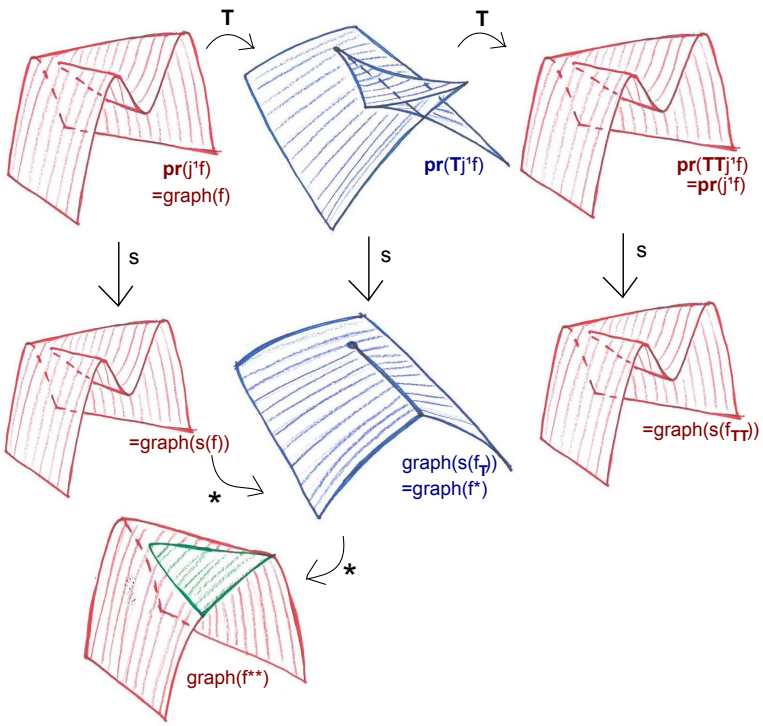


FIGURE 3.4 –

3.2.6 Les identités de type Fourier :

Pour finir, on rappelle la remarque 2.4.12 faite au chapitre 2. On y comparait les fonctions génératrices suivantes :

$$i) \quad F_{(\mathbf{T}1)\underline{+}(\mathbf{T}2)} \text{ avec } F_{\mathbf{T}(1\underline{\square}2)} \ ,$$

$$ii) \quad F_{(\mathbf{T}1)\underline{\square}(\mathbf{T}2)} \text{ avec } F_{\mathbf{T}(1\underline{+}2)} \ .$$

Lorsque les sélecteurs existent, la comparaison $i)$ nous permet de conclure l'identité :

$$\boxed{s(F_{(\mathbf{T}1)\underline{+}(\mathbf{T}2)}) = s(F_{\mathbf{T}(1\underline{\square}2)})}.$$

En effet, les deux fonctions génératrices sont équivalentes (voir définition 1.3.11) car elles varient d'un difféomorphisme à la source. Or, il n'est pas difficile de voir que si des fonctions génératrices qui admettent un sélecteur sont équivalentes, alors leurs sélecteurs sont confondus.

En revanche, la seconde identité attendue, c'est-à-dire$s(F_{(\mathbf{T}1)\underline{\square}(\mathbf{T}2)}) = s(F_{\mathbf{T}(1\underline{+}2)})$, ne vient pas immédiatement de la comparaison $ii)$. Montrer que les deux fonctions génératrices impliquées sont équivalentes ne va pas de soit. Finalement, une idée pour conclure l'identité manquante serait de montrer que, pour tout $q \in \mathbb{R}^n$, les sous-niveaux de $F_{\mathbf{T}(1\underline{+}2)}(q,.)$ dans $\mathbb{R}^{n+k_1+k_2}$ sont des rétractes par déformation de ceux de $F_{(\mathbf{T}1)\underline{\square}(\mathbf{T}2)}(q,.)$ dans $\mathbb{R}^{3n+k_1+k_2}$.

Chapitre 4

Nœuds et entrelacs Legendriens par fonctions génératrices quadratique à l'infini (fg QI)

On se place dans le cadre de l'espace tridimensionnel $J^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Les sous-variétés legendriennes considérées sont ici des courbes, compactes ou non : c'est ce que l'on appelle les nœuds et entrelacs legendriens *fermés* ou *longs*.

Qui sont parmi eux les nœuds et entrelacs legendriens qui sont contours de fonctions génératrices quadratiques à l'infini ?

Une réponse à cette question existe en principe : ce sont ceux dont la fermeture d'un front d'onde admet un certain type de décoration, résultat du couplage continu des valeurs critique (voir annexe D et *graded normal ruling* [43]). Ce chapitre s'engage sur une voie d'accès complémentaire – constructive – pour comprendre les nœuds contours de fg QI.

On commence par donner les informations essentielles concernant les nœuds legendriens en partie 4.1 (les références sont [24], [25]), ainsi que certaines obstructions à leur réalisation par fg. En section 4.2 on lance une démarche constructive en fabriquant explicitement des fg QI pour des représentants legendriens de certaines familles de nœuds topologiques, avec la contrainte de n'avoir qu'une seule variable additionnelle $w \in \mathbb{R}$ (ce que l'on pourrait appeler des chemins dans l'espace des *serpents d'Arnold* [3]). Puis on construit une manière de fermer un nœud long contour d'une fg QI en un nœud fermé contour d'une fg QL. La dernière partie (partie 4.3) est consacrée aux notions de cobordisme et de concordance que l'on peut entendre associer aux nœuds fg QI. L'opération somme (définition 2.4.1) y est largement employée.

Ce chapitre en appelle à la théorie des nœuds classique, dont on se borne à faire de brefs rappels. On renvoie le lecteur au livre de D. Rolfsen [40] pour de plus amples explications.

Concernant les nœuds legendriens, la section 4.1 rappelle en détail toute la théorie dont nous aurons besoin pour la suite du chapitre. Les résultats sont donnés sans preuve mais avec des références, excepté le dernier : l'un des deux nœuds de trèfle n'admet aucun représentant legendrien contour d'une fg QI. Complétons la liste de ces références avec le cours de John B. Etnyre [19] qui fournit un large panorama du domaine.

4.1 Généralités

4.1.1 Définitions et notations

Définition 4.1.1. Une sous-variété legendrienne L fermée de $J^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est appelé un **entrelacs legendrien**. On appelle **composantes** de L ses composantes connexes.

Un **nœud legendrien** est un entrelacs de $J^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ ayant une seule composante.

On rappelle (définition 1.2.1) qu'une isotopie legendrienne est une famille à 1-paramètre de sous-variétés legendriennes plongées.

Définition 4.1.2. Des entrelacs legendriens L_1 et L_2 sont dit **legendriennement isotopes** s'ils sont reliés par une isotopie legendrienne. On note :

$$L_1 \underset{\text{leg.}}{\sim} L_2 \ .$$

Si on oublie la structure de contact ξ pour ne garder que la structure topologique, on peut considérer les nœuds et entrelacs legendriens à *isotopie topologique* près.

Définition 4.1.3. Une **isotopie topologique** de $J^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est une famille lisse à 1-paramètre de courbes dans $J^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Si T_1 et T_2 sont des nœuds ou entrelacs topologiques isotopes, on note :

$$T_1 \underset{\text{top.}}{\sim} T_2.$$

Définition 4.1.4. Soit L un nœud ou entrelacs legendrien. On appelle **type topologique** de L la classe d'équivalence d'isotopie topologique à laquelle L appartient.

Réciproquement, soit T est un nœud topologique. Si L est un nœud legendrien de type topologique T, on dit que L est un **représentant legendrien** de T. On notera : $L_1 \underset{\text{top.}}{\sim} L_2$ si L_1 et L_2 sont deux entrelacs legendriens ayant même type topologique.

Définition 4.1.5. Un **nœud legendrien long** est un nœud legendrien L confondu avec la section nulle $\mathcal{O} = \{(u,q,p) \ / \ q \in \mathbb{R}, u = 0, p = 0\} \subset J^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ en dehors d'un compact $K \subset J^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$:

$$L \cap K^c = \mathcal{O} \cap K^c \ .$$

Si un nœud (ou entrelacs) legendrien dans $J^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est compact, on dira que c'est un nœud (resp. entrelacs) legendrien **fermé**.

Un **entrelacs legendrien long** est un entrelacs dont toutes les composantes sont des nœuds legendriens fermés, sauf une qui est un nœud legendrien long.

On appelle **support** du nœud (resp. entrelacs) legendrien long L le plus petit intervalle réel $I = [a, b]$ tel que L est confondu avec la section nulle en dehors du sous-espace $\{(u, q, p) \ / \ q \in [a, b]\}$.

Pour la suite, on ne travaillera qu'avec des entrelacs legendriens longs ou fermés. Les isotopies considérées sont à support compact (voir définition 1.2.4).

On rappelle qu'un nœud ou entrelacs topologique est représenté par un diagramme planaire, où l'on symbolise les passages locaux d'un brin au dessus d'un autre par un trait plein et un trait coupé. D'un autre côté, le front d'onde (générique) d'un nœud ou entrelacs legendrien est une représentation qui présente deux types de singularités (voir définition 1.1.10) : les cusps (gauches ou droits) et les points d'auto-intersection.

Ce dernier se traduit automatiquement en un diagramme de nœud (resp. entrelacs) topologique :

- on remplace les cusps par des portions de courbes lisses

- on traduit les points d'auto-intersection par des croisements suivant la règle suivante : le brin ayant la pente la plus faible passe par dessus celui de pente la plus forte.

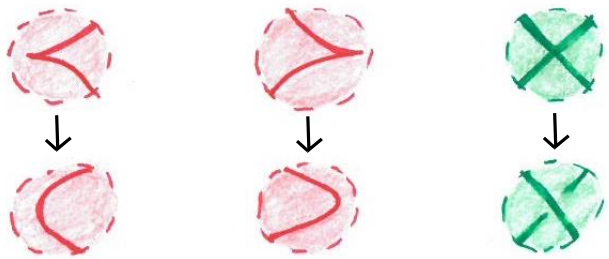
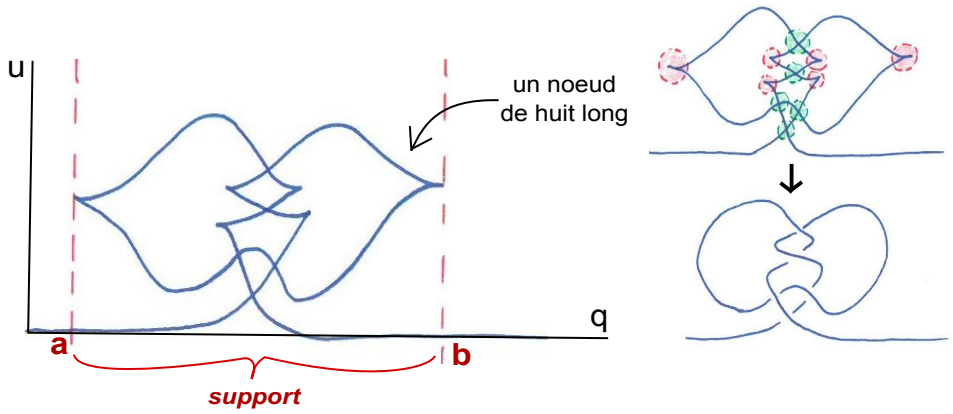
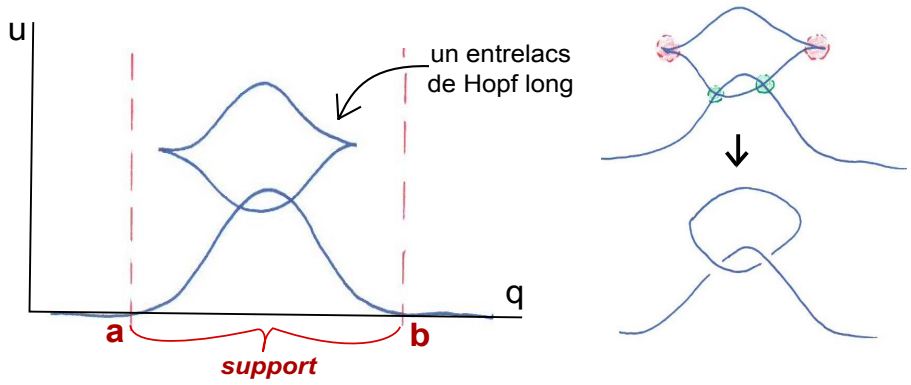


FIGURE 4.1 – Traduction legendrien $\rightarrow$ topologique.

Exemples 4.1.6. On donne en figure 4.1.6 un exemple de nœud legendrien long (a) et un exemple d'entrelacs legendrien long (b).



(a)



(b)

FIGURE 4.2 – Un exemple de 8 legendrien long (a) et un exemple de Hopf legendrien long (b)

Réciproquement, on associe à tout diagramme de nœud ou entrelacs un front d'onde – et par conséquent un nœud (resp. entrelacs) legendrien – de la manière suivante :

Quitte à perturber un peu le diagramme, on peut supposer que les différences avec un front d'onde sont *franches* (figure 4.3) c'est à dire :

- au voisinage des points de pente verticale, la courbe ne traverse pas sa tangente,
- aucun croisement ne contient de brin vertical.

FIGURE 4.3 –

Cela fait, on procède ainsi :

- les endroits du diagramme où apparaît une pente verticale seront remplacés par un cusp,
- les croisements tels que le brin de pente $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}q}$ la plus faible est au-dessus de celui ayant

pente la plus forte sont remplacés par des points d'auto-intersection,
- les autres croisements seront eux remplacés par des (figure 4.4).

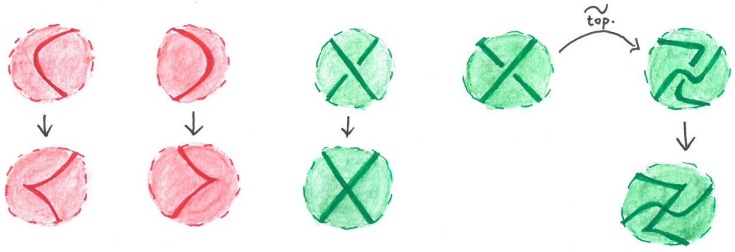


FIGURE 4.4 – Traduction topologique → legendrien

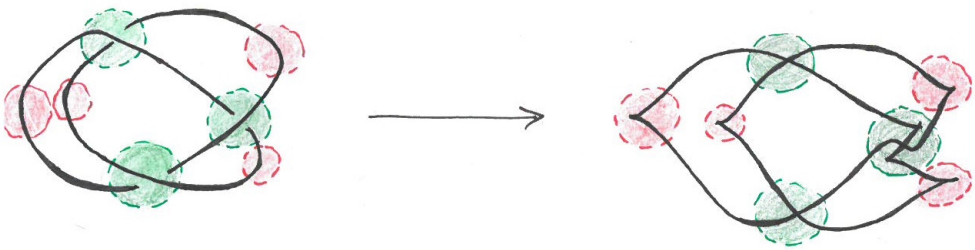


FIGURE 4.5 – Exemple de traduction topologique → legendrien avec un trèfle.

Il est clair que le nœud legendrien obtenu a le même type topologique que le nœud topologique de départ. On en déduit que tout nœud (ou entrelacs) topologique possède un représentant legendrien.

On rappelle que le théorème de Reidemeister assure qu'une isotopie (à support compact) de nœuds ou entrelacs topologiques s'interprète au niveau du diagramme comme une suite finie de mouvements locaux, appelés **mouvements de Reidemeister** (voir figure 4.6) :

Dans le cadre legendrien, on a l'analogue suivant :

Théorème 4.1.7 (voir [48]).

$L_1 \underset{leg.}{\sim} L_2 \iff$ *Les fronts d'onde de L_1 et L_2 peuvent être obtenus l'un de l'autre par une suite finie de mouvements de Reidemeister legendriens (figure 4.7).*

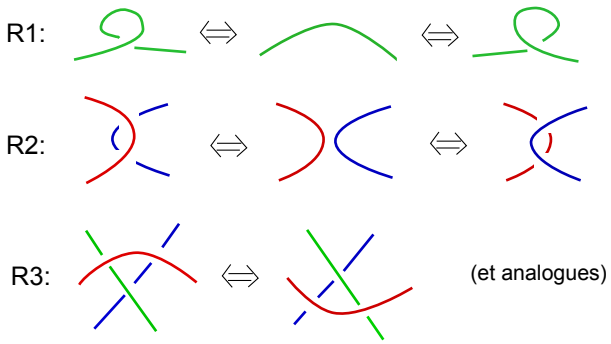


FIGURE 4.6 – Mouvements de Reidemeister (topologiques).

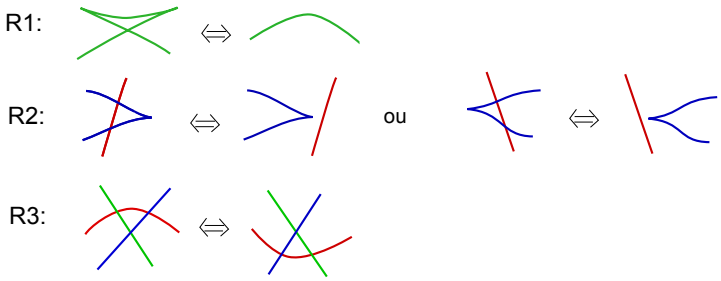


FIGURE 4.7 – Mouvements de Reidemeister legendriens.

4.1.2 Les trois invariants classiques

Le type topologique est évidemment un invariant d'isotopie legendrienne, i.e.

$$L_1 \underset{\text{leg.}}{\sim} L_2 \Rightarrow L_1 \underset{\text{top.}}{\sim} L_2 \ .$$

Si maintenant on considère les fronts d'onde *orientés*, les croisements viennent suivant les quatre possibilités suivantes :

- les flèches vers la gauche : ou vers la droite : , on dit que ces croisements sont **positifs**,
- vers le haut : , vers le bas : , on dit que ces croisements sont **négatifs**.

Définition 4.1.8. Soit F le front d'un nœud legendrien L orienté. Si L est un nœud fermé, on appelle **nombre de Thurston–Bennequin** l'entier :

$$\mathrm{tb}(L) = \# \ + \# \ - \# \ - \# \ - \frac{1}{2}\#\{\text{cusps}\} \ .$$

Si L est un nœud long, son nombre de Thurston–Bennequin est l'entier :

$\mathrm{tb}(L) = \#$ $+\#$ $-\#$ $-\#$ $-\frac{1}{2}\#\{\mathrm{cusps}\} + 1\ .$

Si l'on change l'orientation, les croisements vers la gauche deviennent des croisements vers la droite, les croisements vers le haut deviennent des croisement vers le bas, et réciproquement. En conclusion, le nombre de Thurston–Bennequin ne dépend pas de l'orientation.

Remarque 4.1.9. Le nombre de Thurston–Bennequin d'un nœud legendrien L est aussi l'*enlacement* de L avec L_ϵ, où L_ϵ est la copie de L dont le front d'onde est celui de L décalé de ϵ vers le haut (suivant l'axe des u).

Remarque 4.1.10. Les définitions du nombre de Thurston–Bennequin pour un nœud long et un nœud fermé sont cohérentes si l'on considère qu'à tout nœud long correspond un nœud fermé obtenu en joignant les extrémités longues au dessus du front d'onde, créant un cusp gauche et un cusp droit (voir *fermeture des nœuds longs, partie 4.2.2*).

Le front d'onde d'un nœud orienté fait aussi apparaître quatre types de cusps :
- les cusps montant à gauche : , ou montant à droite : ,
- ceux qui descendent à gauche : ou qui descendent à droite : .

Définition 4.1.11. Soit F le front d'un nœud legendrien L orienté (long ou compact). On appelle **indice de Maslov** de L l'entier :

$\mu(L) = \frac{1}{2}\Big(\#$ $-\#$ $+\#$ $-\#$ $\Big).$

L'indice de Maslov est un invariant du nœud legendrien L orienté. C'est aussi :

$\mu(L) = \#$ $-\#$
$= \#$ $-\#$.

Remarque 4.1.12. Il s'agit au signe prés du nombre de tours effectués par le vecteur vitesse de la courbe lagrangienne sous-jacente.

Propriétés 4.1.13. *Le nombre de Thurston–Bennequin tb et l'indice de Maslov $|\mu|$ sont des invariants d'isotopie legendrienne (orientée) :*

$$L_1 \underset{leg.}{\sim} L_2 \implies \begin{cases} tb(L_1) = tb(L_2) \\ \mu(L_1) = \mu(L_2) \end{cases}$$

Réunis avec le type topologique, le nombre de Thurston–Bennequin et l'indice de Maslov forment les **trois invariants classiques** du nœud legendrien L orienté. (Dans le cas non-orienté, on remplace l'indice de Maslov par sa valeur absolue.)

Il existe une infinité de couples (tb, μ) pour un même type topologique (voir les *stabilisations* ci-après). Cependant tous les couples ne sont pas réalisables, comme l'atteste l'existence de certaines inégalités où la somme $tb + |\mu|$ est bornée par un invariant du type topologique :

Définition 4.1.14. On appelle **inégalité de type Bennequin** une inégalité de la forme (i) ou (ii) :

$$\begin{array}{ll} (i) & tb + |\mu| \leqslant \tau, \\ (ii) & tb \leqslant \tau, \end{array}$$

où τ est un invariant du type topologique.

Exemples 4.1.15. Un exemple est l'inégalité de Bennequin originale,qui est de la forme (i). Elle fait intervenir le *genre* $g_3(L)$ de L, i.e. le genre minimal d'une surface orientable dans $\mathbb{R}^3$ dont le bord est égal au nœud L (voir D. Bennequin [10]) :

$$(1) \qquad tb + |\mu| \leqslant 2g_3 - 1.$$

Par exemple, le nœud topologique trivial O est le seul nœud de genre égal à 0. Un représentant legendrien L du nœud topologique trivial est donc soumis à l'inégalité :

$$tb(L) + |\mu(L)| \leqslant -1.$$

En particulier, le représentant legendrien que l'on appelle "nœud legendrien trivial maximal" (figure 4.8 ci-contre) réalise la borne supérieure fournie par cette égalité.

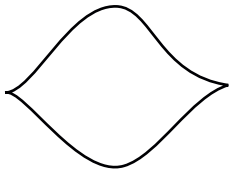


FIGURE 4.8 – Le nœud legendrien trivial maximal.

En figure 4.9 sont représentés les deux trèfles (topologiques) : le **bon trèfle** et son miroir en (figure 4.9 (a)) que l'on nomme le **mauvais trèfle**, et des représentants legendriens L_1 et L_2 de l'un et l'autre (figure 4.9 (b)).

Le bon trèfle et son miroir ont genre g_3 égal à 1. Si L est un représentant legendrien de l'un ou l'autre, l'inégalité de Bennequin (1) impose :

$$tb(L) + |\mu(L)| \leqslant 1.$$

Le représentant legendrien du bon trèfle L_1 réalise la borne maximale de l'inégalité (1) $tb(L_1) = 1$ et $\mu(L_1) = 0$, tandis que le représentant legendrien du mauvais trèfle L_2 a pour

invariants $tb(L_2) = -6$ et $\mu(L_2) = \pm 1$. La somme $tb + |\mu|$ est donc égale à -5, donc L_2 ne maximise pas l'inégalité de Bennequin (1).

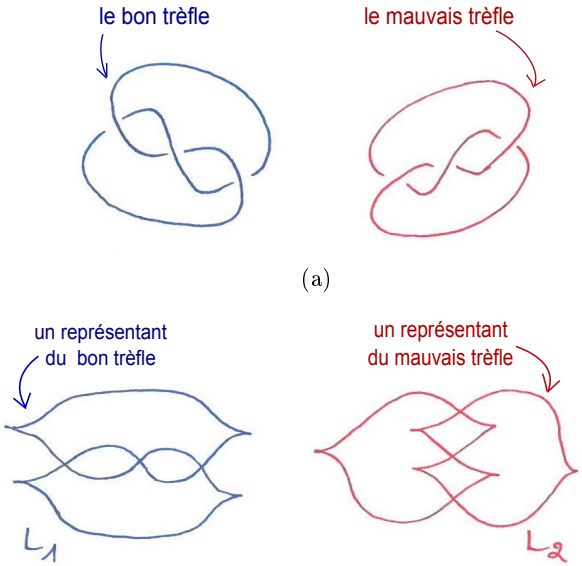


FIGURE 4.9 – Le bon trèfle et son miroir : le mauvais trèfle.

Un exemple d'inégalité de type Bennequin de la forme (ii) est :

$$(2) \qquad tb \leqslant e_Y,$$

où e_Y est le plus petit degré de la variable de framing dans le polynôme de Kauffman (voir l'article de L. Rudolph [42], et aussi celui d' E. Ferrand [22] et ses références).

L'invariant topologique e_Y est égal à -6 pour le mauvais trèfle. Cette borne supérieure pour l'inégalité de type Bennequin (2) est réalisée par L_2.

Stabilisations et nœuds maximaux :

Définition 4.1.16. Un $\succ$ est une partie du front d'onde où se succèdent deux cusps droit et gauche (sans croisement entre les deux).
Il y en a deux versions (voir figure 4.4) : les **montants** et les **descendants**.

Définition 4.1.17. On appelle **stabilisation** d'un nœud L le fait de remplacer une partie lisse de son front d'onde par un $\succ$. On note $L \# \succ$ le nœud legendrien après une stabilisation par un $\succ$ descendant, $\prec \# L$ après une stabilisation par un $\succ$ montant, ou simplement $L \# \succ$ lorsque l'orientation n'est pas précisée.

On dit que L' est un **stabilisé** de L si L' est obtenu de L après une ou plusieurs stabilisations.

(a) (b)

FIGURE 4.10 – Les "z" montants (a) et descendants (b).

Propriétés 4.1.18.
1. Une stabilisation ne change pas le type topologique d'un nœud legendrien.

2. Les $\succ$ *montants (resp. descendants) voyagent dans le front d'onde : un entrelacs legendrien stabilisé montant (resp. descendant) est legendriennement isotope à lui même stabilisé par un* $\succ$ *montant (resp. descendant) à un autre endroit du front d'onde.*

3. Une stabilisation fait chuter le nombre de Thurston–Bennequin de 1*, et modifie l'indice de Maslov de plus ou moins* 1 *:*

$$\begin{cases} tb(L \# \succ) = tb(L) - 1 \\ \mu(L \# \succ) = \mu(L) \pm 1 \end{cases}$$

Remarque 4.1.19. Le point 2. justifie que l'on rassemble les $\succ$ montants et descendants après une série de stabilisations, et que l'on note $L\#(\succ)^k$ (resp. $(\prec)^k\#L$) le résultat de L stabilisé par un $\succ$ montant (resp. descendant) k-fois.

Selon 3. une stabilisation a pour effet de modifier la somme $tb + |\mu|$ de 0 ou -2. En d'autres termes, le membre de gauche d'une inégalité de type Bennequin (définition 4.1.14) de la forme (i) chute donc de 0 ou 2 après une stabilisation, mais ne peut augmenter. Il chute systématiquement de 1 pour une inégalité de type Bennequin de la forme (ii).

À noter qu'une stabilisation change un nœud legendrien – pour un autre représentant legendrien du même type topologique – $L \underset{leg}{\nsim} L\# \succ$. On a cependant le résultat fondamental suivant :

Théorème 4.1.20 (Fuchs et Tabachnikov, [24])**.** *Si deux nœuds legendriens* L_1 *et* L_2 *sont topologiquement isotopes, alors ils deviennent legendriennement isotopes après une série de stabilisations :*

$$L_1 \underset{top.}{\sim} L_2 \qquad \Rightarrow \qquad \exists k_1, k_1', k_2, k_2' \in \mathbb{N} \ / \\ (\prec)^{k_1}\#L_1(\succ)^{k_1'} \underset{leg.}{\sim} (\prec)^{k_2}\#L_2(\succ)^{k_2'}.$$

Puisqu'on peut stabiliser à nouveau un nœud stabilisé, on en déduit qu'il existe une infi-

nité de représentants legendriens différents pour un même nœud topologique. En revanche, pour un nœud legendrien quelconque, décrit par son front d'onde, il n'est en général pas facile de savoir s'il est **destabilisable**, c'est-à-dire s'il peut être obtenu d'un autre nœud legendrien par stabilisation.

Attention que l'on entend par là "à isotopie legendrienne près. Il se peut qu'un soit *non-apparent* dans un front d'onde, caché après une isotopie legendrienne. Autrement dit, un nœud peut être destabilisable alors qu'aucun n'est visible sur son front d'onde.

Définition 4.1.21. Un nœud legendrien est dit **maximal** s'il ne peut être obtenu d'un autre par stabilisation.

Remarque 4.1.22. D'après la remarque 4.1.19, un nœud legendrien maximal L maximise la somme $tb + |\mu|$ de l'ensemble des stabilisés de L.

Définition 4.1.23. Un type de nœud topologique T est dit **legendriennement simple** si ses représentants legendriens (orientés) sont totalement classés par les invariants classiques :

$$\text{Si } L \text{ et } \tilde{L} \text{ sont tels que } \begin{cases} tb(\tilde{L}) = tb(L) \\ \mu(\tilde{L}) = \mu(L) \\ L \underset{\text{top.}}{\sim} T \underset{\text{top.}}{\sim} \tilde{L} \end{cases} \text{, alors } L \underset{\text{leg.}}{\sim} \tilde{L}.$$

Théorème 4.1.24.
- *Le nœud trivial est legendriennement simple (Eliashberg et Fraser [18]).*
- *Le bon trèfle et son miroir, et plus généralement les nœuds toriques, sont simples (Etnyre et Honda [20]).*
- *Le nœud de huit est simple (Etnyre et Honda [20]).*

4.1.3 Nœuds et fonctions génératrices

Définition 4.1.25. Un **nœud** ou **entrelacs legendrien** est **fg QI** (resp. **fg QL**) s'il est réalisable comme contour d'une fg QI (resp.fg QL) (définitions 1.3.16 et 1.3.19).

Un **nœud** ou **entrelacs topologique** sera dit **fg QI** s'il existe un représentant legendrien de ce nœud, resp. entrelacs, qui l'est.

On rappelle que, d'après le théorème de Chekanov (théorème 1.3.21), l'existence d'une fg QI est stable par isotopie à support compact. Cela justifie que l'on puisse parler de *nœud legendrien fg QI*, et non pas seulement de front d'onde fg .

Exemple 4.1.26. On place en fin de cette sous-partie (figure 4.12) une illustration pour la réalisation d'un représentant legendrien long du bon trèfle comme contour d'une fg QI avec une seule variable additionnelle.

Propriétés 4.1.27 (Obstructions).

1. L'indice de Maslov d'un nœud (ou entrelacs) fg QI est nul.

2. Le front d'onde d'un nœud (ou entrelacs) fg QI ne contient aucun .

Preuve. 1. Considérons le front d'onde comme une union finie de branches lisses, reliées par des cusps. À chacune correspond un chemin lisse de points critiques $(\zeta(q))_q$ dans l'espace des variables additionnelles $\mathbb{R}^k$, avec un indice de Morse bien défini pour chaque chemin. On décore le front d'onde avec cet indice, puis on parcourt le front en entrant du côté des q petits, et en sortant du côté des q grands.

Lorsqu'on passe un cusp qui monte (resp. descend), l'indice de Morse augmente (resp. diminue) de 1 (voir annexe D). Puisqu'à l'entrée et à la sortie du parcours l'indice de Morse est le même, égal à celui de la forme quadratique de référence Q, il doit y avoir autant de cusps montants que descendants. C'est à dire que l'indice de Maslov doit être nul.

2. Un est constitué de trois brins – un entrant, un sortant et un les connectant– formant 2 cusps. Le couplage continus des valeurs critiques (voir annexe D) impose que les brins reliés par des cusps soient couplés, ce qui n'est pas compatible avec un : il faudrait pouvoir coupler le brin du milieu à la fois avec le brin entrant et le brin sortant, c'est absurde. □

Remarque 4.1.28. En particulier, un nœud legendrien fg QI L est maximal. En effet, il pourrait exister un "non apparent" dans le front d'onde de L, qui ne contredirait pas la preuve faite pour le point 2. de la proposition précédente. Mais l'on sait que ce est déplaçable par isotopie jusqu'à être apparent, et le théorème de Chekanov permet de conclure que ce cas de non apparent est aussi exclu.

Ces ingrédients mis ensembles nous permettent l'observation qui suit en proposition 4.1.29. Sa preuve est la seule de la section 4.1 qui pourrait nous être attribuée. Elle est cependant suffisamment élémentaire pour que l'on juge probable qu'il en existe une autre version ailleurs.

Proposition 4.1.29. *Le mauvais trèfle n'est pas réalisable par fg QI.*

Preuve. Considérons le front d'onde orienté ci-dessus :

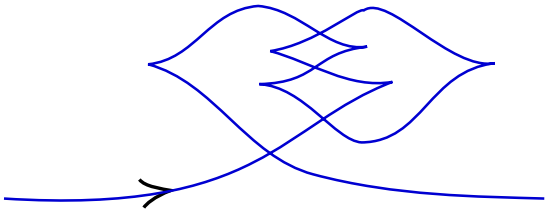


FIGURE 4.11 – Un représentant legendrien long du mauvais trèfle.

C'est le front d'onde d'un représentant legendrien long orienté du mauvais trèfle. Notons-le L. On a vu en exemple 4.1.15 que les invariants classiques de L sont $tb(L) = -6$ et $\mu(L) = 1$. Supposons que L soit un stabilisé d'un autre nœud legendrien $\tilde{L}$ ayant un indice Maslov égal à 0. Alors on aurait $tb(\tilde{L}) = -5$, ce qui contredit l'inégalité de type Bennequin (ii).

Considérons maintenant le stabilisé $L\#\gtrsim$ de L. On a $tb(L\#\gtrsim) = -7$ et $\mu(L\#\gtrsim) = 0$. Supposons qu'il existe un représentant du mauvais trèfle L' tel que $\mu(L') = 0$. Le théorème de Fuchs et Tabachnikov (théorème 4.1.20) entraine qu'il existe alors k_1 et k_2 des entiers naturels tels que :

$$(\lesssim)^{k_1}\#L'\#(\gtrsim)^{k_1} \underset{leg.}{\sim} (\lesssim)^{k_2}\#L\#(\gtrsim)^{k_2+1}.$$

On en déduit que l'invariant de Thurston–Bennequin de L' est $tb(L') = -7 + 2(k_1 - k_2)$. Or, d'après l'inégalité de type Bennequin (2), on a $tb(L') \leqslant -6$, donc $k_1 \leqslant k_2$. L' a donc les même invariants de Thurston–Bennequin et Maslov que le stabilisé $(\lesssim)^{k_2-k_1}\#L\#(\gtrsim)^{k_2-k_1+1}$. Mais puisque les nœuds de trèfles (bon ou mauvais) sont simples (théorème 4.1.24), il vient que L' est legendriennement isotope à ce stabilisé de L :

$$L' \underset{leg.}{\sim} (\lesssim)^{k_2-k_1}\#L\#(\gtrsim)^{k_2-k_1+1}.$$

En conclusion, le mauvais trèfle n'est pas fg QI. □

Il existe donc des classes de nœuds topologique non réalisables par fg QI. Cette remarque nous motive pour partir à la recherche de classes de nœuds (et entrelacs) topologiques qui le sont. La démarche engagée dans ce qui suit est constructive.

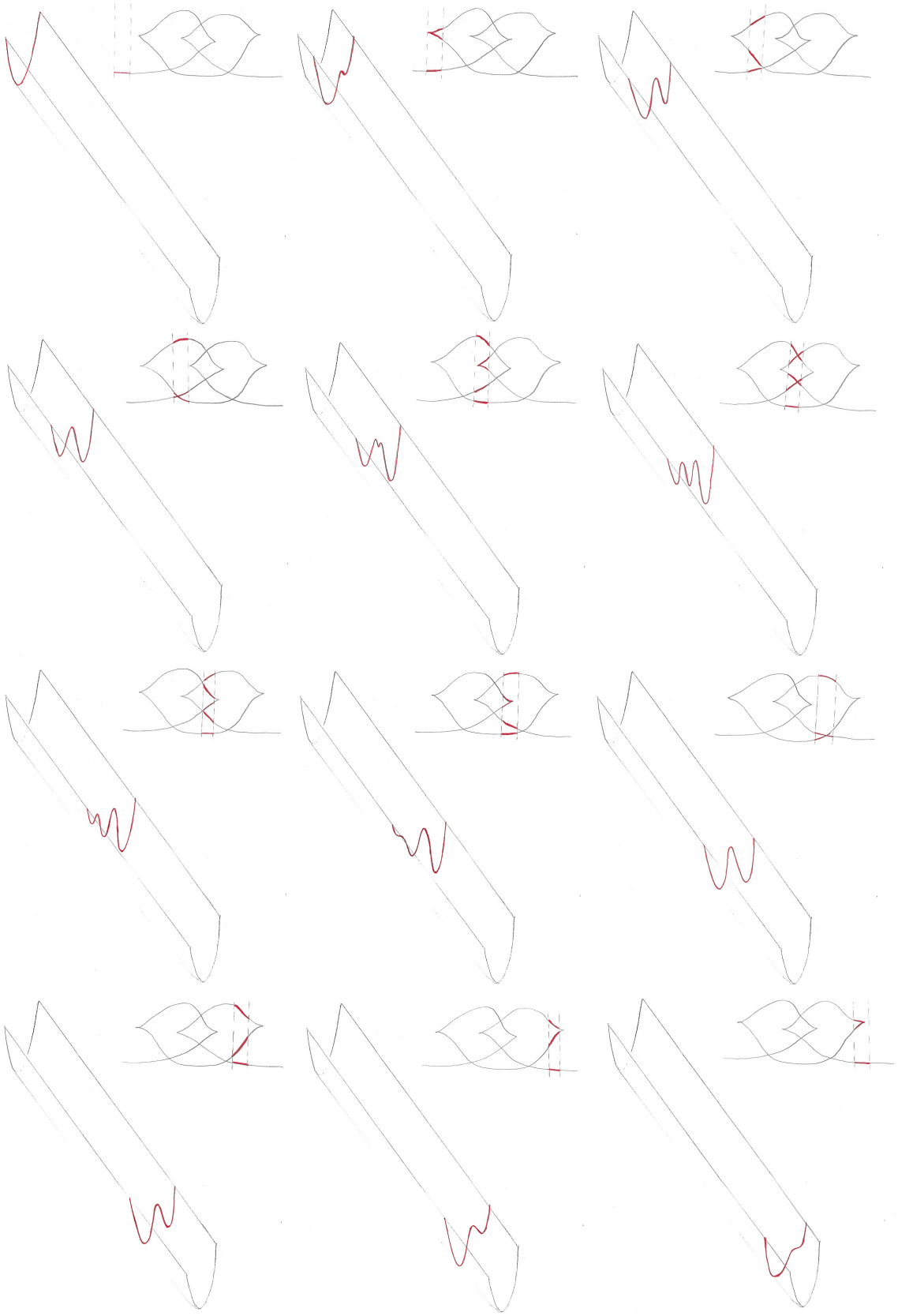


FIGURE 4.12 – Réalisation d'un bon trèfle fg QI.

4.2 Des nœuds et entrelacs legendriens fg QI

Dans ce contexte, on considère des familles à 1-paramètre $q \in \mathbb{R}$ de fonctions. L'axe réel des q est naturellement orienté des q négatifs vers les q positifs, et on dira de la *gauche* vers la *droite*.

On s'intéresse dans un premier temps à la réalisation explicite d'entrelacs par contours apparents de fg avec une seule dimension pour l'espace des paramètres additionnels. Cette restriction supplémentaire n'est pas vide de sens, puisqu'il existe des fronts d'onde réalisables par fg mais qui ne le sont pas avec une fg ayant une seule variable additionnelle. Le huit représenté en figure 4.1.6 par exemple est réalisable par une fg QI définie sur $\mathbb{R} \times (\mathbb{R}^2)$ mais pas sur $\mathbb{R} \times (\mathbb{R})$.

4.2.1 Réalisations de fronts d'onde par contour de fg QI à une seule variable additionnelle $w \in \mathbb{R}$

Préliminaires

Dans ce paragraphe, on travaille avec des chemins $(F(q,\cdot))_{q\in\mathbb{R}}$ de fonctions génériques (voir annexe D) d'une variable $w \in \mathbb{R}$ quadratiques à l'infini. q variant, on considère les chemins lisses de points critiques : ζ_k , $k = 1 \dots N$, où N est le nombre total de points critiques manipulés pour la réalisation du front d'onde (par exemple, pour la réalisation du bon trèfle en figure 4.12, $N = 5$). On parle de manière abusive de "point critique" pour désigner un chemin lisse de points critiques.

Un point critique ζ_k garde le même indice tout au long de son existence dans le front d'onde. On profite du fait que la variable w soit dans $\mathbb{R}$ pour ordonner les points critiques les uns par rapport aux autres :

Pour ζ_{k_1} et ζ_{k_2} deux points critiques de $F(q,\cdot)$, on dira que ζ_{k_1} est **à gauche** (resp. **à droite**) de ζ_{k_2} si $\zeta_{k_1} < \zeta_{k_2}$ (resp. $\zeta_{k_2} < \zeta_{k_1}$). Le fait qu'un point critique ζ_{k_1} soit à gauche ou à droite d'un point critique ζ_{k_2} ne dépend pas de q.

On dira que ζ_{k_1} est **immédiatement à gauche** (resp. **immédiatement à droite**) de ζ_{k_2} si de plus il n'existe pas d'autre point critique à droite de ζ_{k_1} et à gauche de ζ_{k_2} (resp. à droite de ζ_{k_2} et à gauche de ζ_{k_1}) :

$$\nexists k_3 \neq k_1, k_2 \ / \ \zeta_{k_1} < \zeta_{k_3} < \zeta_{k_2}$$

$$(\text{resp. } \zeta_{k_2} < \zeta_{k_3} < \zeta_{k_1} \ ).$$

La droite réelle correspondant à l'espace des images des fonctions $F(q,\cdot)$ permet aussi d'ordonner les points critiques suivant leurs images – aussi appelées leurs **hauteurs** – mais cet ordre-là est bien sûr momentané, et éventuellement partiel – il arrive que des points critiques prennent la même valeur. Étant donné un certain $q \in \mathbb{R}$, on dira que ζ_{k_1} est **en-**

dessous (resp. **au-dessus**) de ζ_{k_2} si $F(q,\zeta_{k_1}) < F(q,\zeta_{k_2})$ (resp. $F(q,\zeta_{k_2}) < F(q,\zeta_{k_1})$). Ceci dépend fortement du paramètre $q \in \mathbb{R}$. Si ζ_{k_1} et ζ_{k_2} sont tels que $F(q,\zeta_{k_1}) = F(q,\zeta_{k_2}) = c$ (en d'autres termes, ζ_{k_1} et ζ_{k_2} ont même hauteur), on dira qu'ils sont au **même niveau**.

Dans notre cas où l'espace additionnel est de dimension 1, les seuls points critiques de Morse manipulés sont d'indice 0 ou 1. On appelle **minimum** un point critique d'indice 0, et **maximum** un point critique d'indice 1. À partir de maintenant, on change la manière de désigner les points critiques : on considère des indices i, j variant de 0 à $\dfrac{N+1}{2}$ (on rappelle que N est le nombre total de points critiques manipulés pour la réalisation du front d'onde), et on note m_i les points critiques qui sont des minimums, et M_j ceux qui sont des maximums.

Ce cas où l'espace additionnel est de dimension 1 offre une dynamique simple dans les chemins de fonctions :

- Pour les $q << 0$, on a un unique point critique, m_0 ou M_0 (dépendant de l'indice, 0 ou 1, de la forme quadratique de référence).
- Un cusp gauche sur le front d'onde correspond à la naissance d'une paire (m_i, M_i). On place le même indice au minimum et au maximum impliqués pour signifier qu'ils sont nés ensembles. Chaque point critique conserve cette dénomination tout au long de son existence dans le chemin de fonctions $(F(q,\cdot))_{q\in\mathbb{R}}$, jusqu'à sa mort dans un cusp droit.

- Lorsque deux points critiques arrivent au même niveau (c'est-à-dire qu'ils ont la même image) ; les deux options possibles, mort ou croisement, sont régies par les règles suivantes :
  1. si les points critiques sont deux minimums ou deux maximums, alors ils se croisent,
  2. si les point critiques sont un minimum m_i et un maximum M_j, alors ils meurent ensembles – formant un cusp droit – si et seulement si ils sont l'un immédiatement à droite de l'autre.

Définition 4.2.1. Un nœud ou entrelacs legendrien (long) est dit **1-(fg QI)** s'il peut être obtenu comme contour d'une fg QI définie sur $\mathbb{R} \times (\mathbb{R})$.

Fait : Soit une série finie et alternée de N points $\ldots m_{i_1}, M_{i_2}, m_{i_3} \ldots$, disposés de gauche à droite sur la droite réelle, telle qu'à chaque point m_i (resp . M_j) est associé une valeur c_i (resp. C_j). À la série $\ldots, m_{i_1}, M_{i_2}, m_{i_3}, \ldots$ correspond ainsi la série des valeurs : $\ldots, c_{i_1}, C_{i_2}, c_{i_3} \ldots$. Si cette dernière vérifie la propriété : $\forall k, \begin{cases} c_{i_k} < C_{i_{k+1}} \\ c_{i_{k+1}} < C_{i_k} \end{cases}$, alors il existe une fonction lisse et standard à l'infini qui à pour minimums les m_i, pour maximums les M_j, et dont les valeurs critiques sont respectivement les c_i et C_j.

Remarque 4.2.2. C'est aussi ce que V.I. Arnold appelle un "serpent" dans [3].

Les nœuds et entrelacs fg QI fermetures de tresses positives

Définition 4.2.3. Une **tresse (topologique)** est la réunion de p brins enlacés qui parcours l'espace de gauche à droite. Ceci se représente par un diagramme en forme de boîte, où les p brins orientés entrent parallèles à gauche et ressortent parallèles à droite, avec dans la boîte des **croisements de types (1) ou (2)** comme illustré en figure 4.13 :

(1) (2)

FIGURE 4.13 –

Une tresse est dite **positive** si tous ses croisements sont de type (2).

Toute tresse positive B se traduit automatiquement en un front d'onde de tresse legendrienne, que l'on peut refermer en un d'entrelacs legendrien long $\bar{B}$ comme décrit en figure 4.14. On appelle $\bar{B}$ **la fermeture legendrienne de** B.

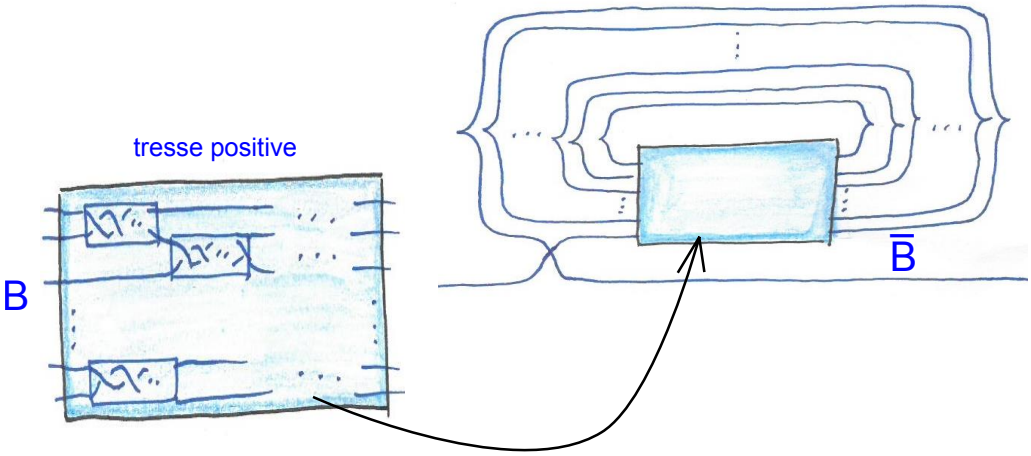


FIGURE 4.14 – La fermeture legendrienne d'une tresse positive B.

Théorème 4.2.4. *Soit B une tresse positive. La fermeture legendrienne $\bar{B}$ de B est* 1*-(fg QI).*

Preuve. On prend pour forme quadratique de référence $Q\ : w \mapsto w^2$. On procède en suivant les instant q croissants . Pour les instants $q << 0$, on a uniquement un minimum, noté $\tilde{m}_0$. On découpe la suite du raisonnement en 4 étapes, qui s'appuie schématiquement sur la figure 4.15.

Étape 1 : On crée à droite du minimum absolu $\tilde{m}_0$ une paire de points critiques au niveau $p+1$: un maximum M_1 et un minimum $\tilde{m}_1$. On augmente la hauteur de M_1 et on diminue celle de $\tilde{m}_1$, de sorte de placer M_1 au niveau $2p+1$ et $\tilde{m}_1$ au niveau 1.

Ensuite, on abaisse $\tilde{m}_1$ jusqu'au niveau 0 tandis qu'on monte $\tilde{m}_0$ jusqu'au niveau 1. On construit ainsi le croisement qui relie la fermeture de la tresse à la section nulle. Pour faire simple, on note pour la suite $m_0 = \tilde{m}_1$, et $m_1 = \tilde{m}_0$. On oublie même m_0 qui n'interviendra plus dans la suite.

Étape 2 : On crée ensuite, à nouveau au niveau $p+1$, les $p-1$ paires manquantes $(m_i, M_i), i = 2 \dots p$ à droite de m_0, l'une après l'autre, dans l'ordre croissant de 2 à p. On élève les maximums $M_i, i = 2 \dots p$ aux niveaux respectifs $2p+2-i$, tandis qu'on abaisse les minimums $m_i, i = 2 \dots p$ aux niveaux respectifs i.

De cette manière, on a fixé le sort des images des points critiques m_i et M_i, mais il nous reste encore de nombreuses façons de disposer les m_i, M_i sur la droite des w. On revient sur ce choix à l'étape 4.

Étape 3 : En gardant les maximums à niveaux respectifs constants, on croise les minimums sans restriction pour réaliser la boîte de croisements de la tresse B. Lorsque tous les croisements sont réalisés, on trouve au niveau i le minimum indicé $s(i)$. On note s la permutation de l'ensemble $\{1, 2, \dots, p\}$ qui à i associe $s(i)$.

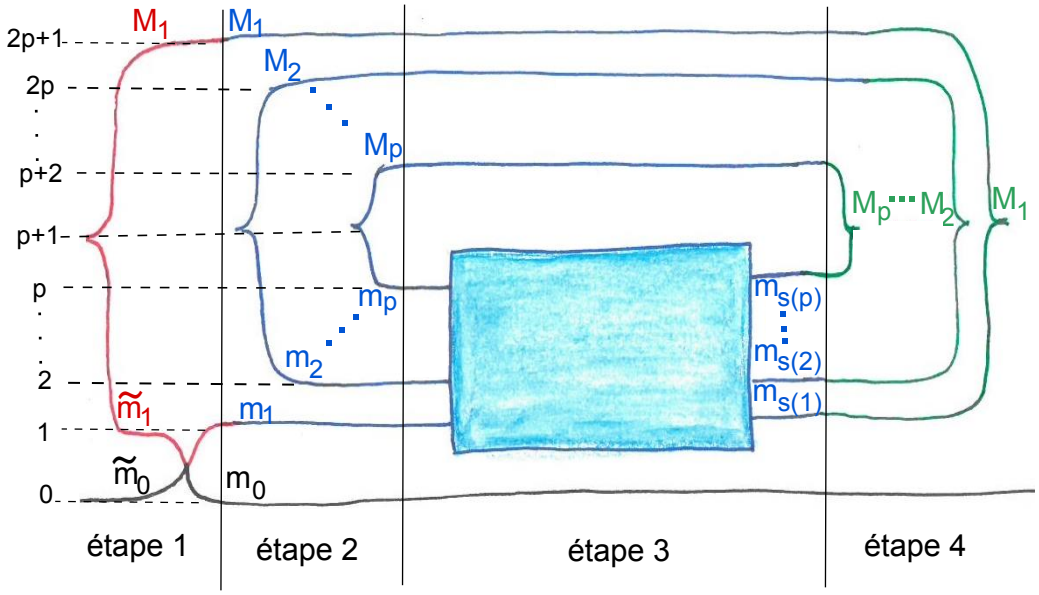


FIGURE 4.15 –

Étape 4 : Le tout est maintenant que l'on puisse effectivement éliminer les $m_{s(i)}$ avec les

M_i. Pour cela, il faut que le *scénario* de naissance des paires (m_i, M_i) en étape 2 soit compatible avec celui de la mort des paires $(m_{s(i)}, M_i)$ l'une après l'autre, dans l'ordre décroissant de p à 1.

On décompose s en K cycles à supports disjoints $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k$ de longueurs respectives $l_k, k = 1 \dots K$. Pour $k = 1 \dots K$, on note j_k le plus petit élément du support de σ_K. Quitte à re-numéroter les cycles, on peut supposer que $j_k < j_{k'}$ si $k < k'$. En particulier $j_1 = 1$.

Pour chaque cycle σ_k, on considère la suite finie d'indices constituée en répétant chaque élément du support de σ_k une fois, sauf le premier j_k placé en tête en en queue de liste :

$$j_k, \sigma_k(j_k), \sigma_k(j_k), \sigma_k^2(j_k), \sigma_k^2(j_k), \dots, \sigma_k^{l_k}(j_k), \sigma_k^{l_k}(j_k), j_k$$

À partir de ces suites finies d'indices, on construit les mots en les lettres M_i, m_j, avec alternance des M_i et m_j, comme ceci :

$$M_{j_k} m_{\sigma_k(j_k)} M_{\sigma_k(j_k)} m_{\sigma_k^2(j_k)} M_{\sigma_k^2(j_k)} \dots m_{\sigma_k^{l_k}(j_k)} M_{\sigma_k^{l_k}(j_k)} m_{j_k}$$

On dispose ces mots les uns à droite des autres dans l'ordre des k croissants, de sorte que l'on obtient un mot où chaque M_i et chaque m_j, pour $i, j = 1 \dots p$, apparait une fois et une seule :

$$\begin{aligned}
&M_1 m_{\sigma_1(1)} M_{\sigma_1(1)} m_{\sigma_1^2(1)} M_{\sigma_1^2(1)} \dots m_{\sigma_1^{l_1}(1)} M_{\sigma_1^{l_1}(1)} m_1 \\
&M_{j_2} m_{\sigma_2(j_2)} M_{\sigma_2(j_2)} m_{\sigma_2^2(j_2)} M_{\sigma_2^2(j_2)} \dots m_{\sigma_2^{l_2}(j_2)} M_{\sigma_2^{l_2}(j_2)} m_{j_2} \\
&\vdots \\
&M_{j_K} m_{\sigma_K(j_K)} M_{\sigma_K(j_K)} m_{\sigma_K^2(j_K)} M_{\sigma_K^2(j_K)} \dots m_{\sigma_K^{l_K}(j_K)} M_{\sigma_K^{l_K}(j_K)} m_{j_K}
\end{aligned}$$

Enfin, on considère les deux parenthésages de ce mot suivant :

1. Le premier couple simplement deux à deux les lettres dans l'ordre de lecture en commençant par la première :

$$(M_1 m_{\sigma_1(1)})(M_{\sigma_1(1)} m_{\sigma_1^2(1)})(M_{\sigma_1^2(1)} \dots m_{\sigma_1^{l_1}(1)})(M_{\sigma_1^{l_1}(1)}) m_1) \dots \text{ etc.}$$

2. Pour le second, on rassemble d'abord chaque série de lettres qui correspondent à un cycle dans une de grande parenthèse :

$$\begin{aligned}
&\left(M_1 m_{\sigma_1(1)} M_{\sigma_1(1)} m_{\sigma_1^2(1)} M_{\sigma_1^2(1)} \dots m_{\sigma_1^{l_1}(1)} M_{\sigma_1^{l_1}(1)} m_1\right) \\
&\left(M_{j_2} m_{\sigma_2(j_2)} M_{\sigma_2(j_2)} m_{\sigma_2^2(j_2)} M_{\sigma_2^2(j_2)} \dots m_{\sigma_2^{l_2}(j_2)} M_{\sigma_2^{l_2}(j_2)} m_{j_2}\right) \\
&\vdots
\end{aligned}$$

$$\Big(M_{j_K} m_{\sigma_K(j_K)} M_{\sigma_K(j_K)} m_{\sigma_K^2(j_K)} M_{\sigma_K^2(j_K)} \dots m_{\sigma_K^{l_K}(j_K)} M_{\sigma_K^{l_K}(j_K)} m_{j_K}\Big).$$

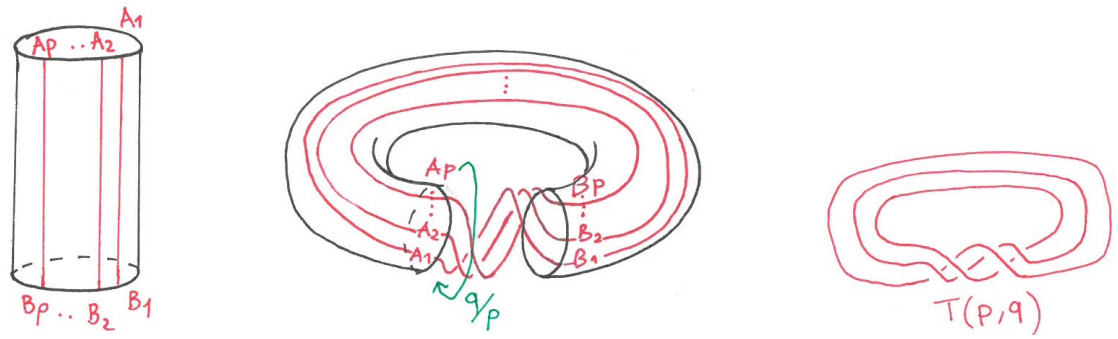
Puis dans chaque grande parenthèse, on couple les lettres deux à deux dans l'ordre de lecture en sautant la première :

$$\Big(M_1(m_{\sigma_1(1)}M_{\sigma_1(1)})\dots(m_{\sigma_1^{l_1}(1)}M_{\sigma_1^{l_1}(1)})m_1\Big)\Big(M_{j_2}(m_{\sigma_2(j_2)}M_{\sigma_2(j_2)})\dots(m_{\sigma_2^{l_2}(j_2)}M_{\sigma_2^{l_2}(j_2)})m_{j_2}\Big)$$
$$\dots\Big(M_{j_K}(m_{\sigma_K(j_K)}M_{\sigma_K(j_K)})\dots(m_{\sigma_K^{l_K}(j_K)}M_{\sigma_K^{l_K}(j_K)})m_{j_K}\Big).$$

Le mot parenthésé 1. constitue un scénario de mort des points critiques M_i avec les $m_{s(i)}$ par ordre décroissant des i, tandis que le mot parenthésé 2. constitue un scénario de naissance des points critique (m_i, M_i) dans l'ordre croissant des i. □

Cas particulier : les nœuds et entrelacs toriques positifs

Définition 4.2.5. Un **nœud (ou entrelacs) torique** est un nœud (resp. entrelacs) obtenu à partir de p brins dessinés sur un cylindre comme en figure 4.21 (a). On referme ensuite ce cylindre en un tore en faisant $\frac{q}{p}$ tours (figure 4.21 (b))). Le nœud ou entrelacs ainsi fabriqué est noté $T(p,q)$ (figure 4.21 (c))).



(a) (b) (c)

FIGURE 4.16 – Nœuds et entrelacs toriques $T(p,q)$.

Lorsque q est un entier positif, le diagramme (topologique) disposé comme en figure 4.21 (c) permet de traduire automatiquement en un front d'onde pour un représentant legendrien long de $T(p,q)$, noté $L(p,q)$:

C'est un cas particulier de fermeture legendrienne de tresse positive, et le théorème 4.2.4 s'applique aux nœuds et entrelacs toriques longs (avec dans ce cas la permutation $s\ : i \mapsto i + q[p]$) :

Corollaire 4.2.6. *Les nœuds et entrelacs toriques longs $L(p,q)$, avec $q \geqslant 0$, sont 1-(fg QI).*

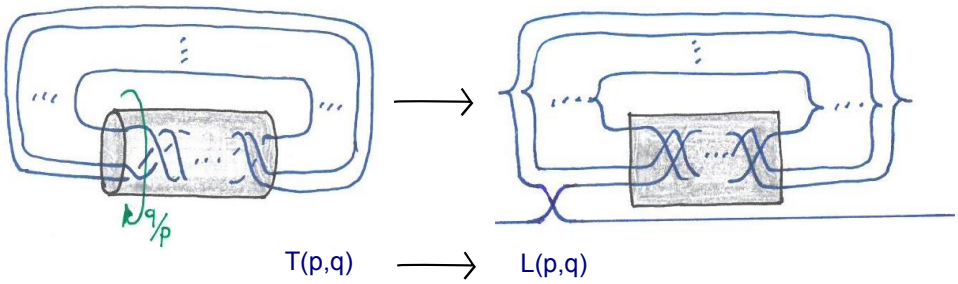


FIGURE 4.17 – Traduction de $T(p,q)$ en son représentant legendrien $L(p,q)$.

Entrelacs à 2-ponts et bretzels

Tout entrelacs topologique admet une présentation en *ponts et sentiers* :

Considérons dans $\mathbb{R}^3$ muni des coordonnées (x,y,z) le demi-plan vertical V et le plan horizontal H :

$$V = \{(x=0,y,z) \ / \ z \in \mathbb{R}_+\} \qquad\qquad H = \{(x,y,z=0)\}.$$

On appelle **pont** un chemin inclus dans le demi-plan vertical dont les extrémités appartiennent à la droite $V \cap H$. On appelle **sentier** un segment dans le plan H.

Exemple 4.2.7. Prenons l'exemple du bon trèfle. À partir du diagramme en figure 4.18, on construit la présentation en 3 ponts et 3 sentiers.

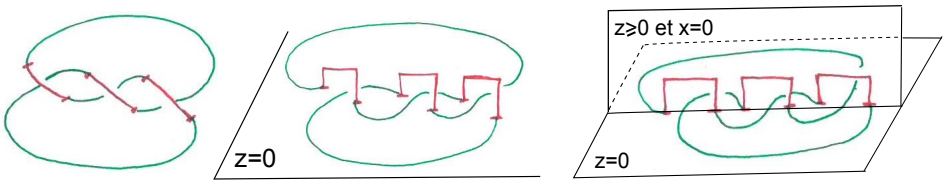


FIGURE 4.18 – Présentation du bon trèfle en 3-ponts.

Le bon trèfle admet aussi une présentation en 2 ponts et 2 sentiers (voir figure 4.19).

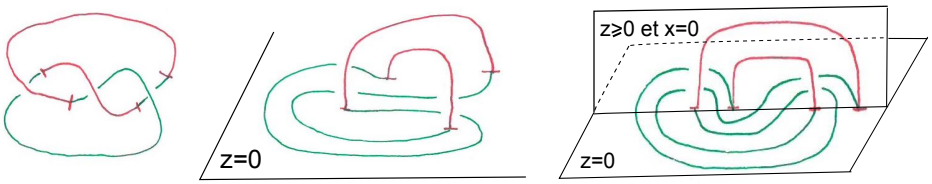
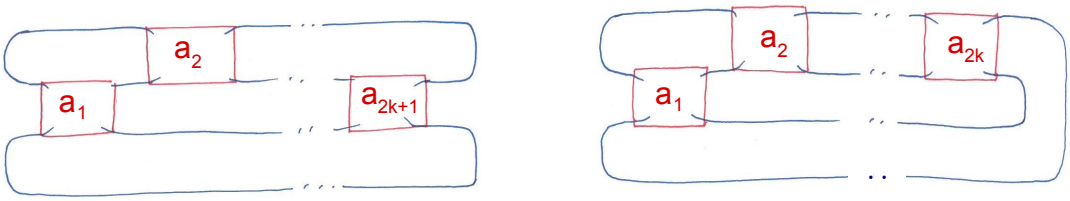


FIGURE 4.19 – Présentation du bon trèfle en 2-ponts.

Définition 4.2.8. Un **entrelacs à 2-ponts** est un entrelacs – autre que le nœud trivial – qui admet une présentation en deux ponts que relient deux sentiers.

Un **diagramme rationnel** est un diagramme construit à partir d'une tresse à 3 brins que l'on ferme comme illustré en figure 4.20 :



(cas n impair) (cas n pair)

FIGURE 4.20 – Diagramme rationnel $T(a_1, \ldots, a_n)$.

La tresse est composée d'une succession de n boîtes de croisements de type (1) ou (2) (définition 4.2.3). L'entier $a_i \neq 0$ placé sur chaque boîte indique à la fois le type des croisements de la boîte et leur nombre : la i-ème boîte contient $|a_i|$ croisements de type (1) si $a_i < 0$, ou a_i croisements de type (2) si $a_i > 0$. On ferme la tresse de deux manière différentes selon que n est impair ou pair, illustrées en figure 4.20. On note un tel diagramme de nœud (ou entrelacs) topologique $T(a_1, \ldots, a_n)$.

Le passage d'une présentation à 2-ponts à une présentation rationnelle constitue un résultat classique de théorie des nœuds (voir par exemple le livre de P.R. Cromwell [16]). À noter aussi que plusieurs diagrammes rationnels représentent le même nœud ou entrelacs (à nouveau , voir [16] et [40] pour plus de détails).

Dans [38], L. Ng montre que tout entrelacs à 2-ponts admet une présentation rationnelle $T(a_1, \ldots, a_n)$, telle que pour tout i, $a_i \geqslant 2$. Une telle présentation se traduit automatiquement en un front d'onde d'entrelacs legendrien long, comme illustré en figure 4.21. On note ce **front d'onde rationnel** $L(a_1, \ldots, a_n)$.

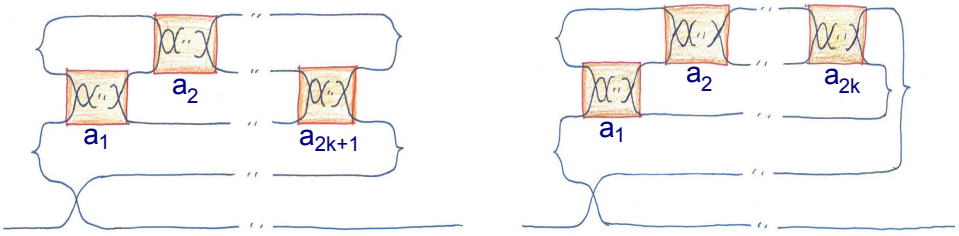


FIGURE 4.21 – Front d'onde rationnel $L(a_1, \ldots, a_n)$.

Proposition 4.2.9. *Soit L un entrelacs legendrien à 2-ponts admettant un front d'onde*

rationnel $L(a_1, \ldots, a_n)$. Alors L est le contour d'une 1-(fg QI) si et seulement si a_1 et a_n sont impairs, et les a_i sont pairs pour $i \neq 1, n$.

Preuve. On démarre avec un minimum absolu $\tilde{m}_0$, puis on fait naître deux paires : $(\tilde{m}_1, M_1)$ et au dessus (m_2, M_2). Les trois scénarios de naissance possibles sont :

$$\begin{array}{ll} (\tilde{a}.) & \tilde{m}_0(M_1\tilde{m}_1)(M_2m_2) \\ (\tilde{b}.) & (\tilde{m}_1M_1)\tilde{m}_0(M_2m_2) \\ (\tilde{c}.) & (m_2M_2)(\tilde{m}_1M_1)\tilde{m}_0 \\ (\tilde{d}.) & (M_2m_2)\tilde{m}_0(\tilde{m}_1M_1) \end{array}$$

Puisque $(\tilde{a}.)$ et $(\tilde{c}.)$ sont clairement équivalents, ainsi que $(\tilde{b})$. et $(\tilde{d}.)$, on fait la suite du raisonnement en ne conservant que $(\tilde{a}.)$ et $(\tilde{b}.)$. On réalise le croisement que relie la partie compacte du front à la section nulle, et on renomme $\tilde{m}_0$ par m_1, et $\tilde{m}_1$ par m_0. Les deux possibilités de disposition des points critiques se réécrivent :

$$\begin{array}{ll} (a.) & m_1M_1m_0M_2m_2 \\ (b.) & m_0M_1m_1M_2m_2 \end{array}$$

Il s'agit de réaliser la suite du front d'onde avec les points critiques M_1, m_2 et M_2, plus m_1 qui interviendra à la fermeture. Pour pouvoir réaliser la première série de a_1 croisements, il faut et il suffit que m_2 et M_1 ne soient pas immédiatement à côté l'un de l'autre, ce qui est le cas pour $(a.)$ et $(b.)$. Si a_1 est pair, on trouve à nouveau m_2 au dessus de M_1, et la série de croisements suivants devrait être réalisée par m_2 et M_2, ce qui n'est pas possible, car ils sont immédiatement l'un à droite de l'autre.

Ainsi, on a nécessairement a_1 impair, de sorte qu'à la sortie de la première boîte de a_1 croisements, on trouve M_1 au dessus de m_2. La série suivante de a_2 croisements est réalisée par M_1 et M_2. Si a_2 est impair, on trouvera à la sortie M_1 au dessus de M_2. Mais alors il faudrait que la série suivante soit réalisée par m_2 et M_2, ce qui est absurde. Donc a_2 doit être pair. Le même raisonnement s'applique à la série de a_3 croisements, et ainsi de suite jusque la série de a_{n-1} croisements.

Une fois les $n-1$ séries de croisements réalisées, on a dans l'ordre m_2 en dessous de M_1, lui-même en dessous de M_2. Dans le cas n impair, la dernière série de croisements fait intervenir m_2 et M_1, tandis que dans le cas de n pair, elle concerne M_1 et M_2.

Supposons n impair. Si a_n est pair, alors les points critiques restent disposés de la même façon après la dernière série de croisements. Puisqu'un maximum ne peut mourir qu'avec un minimum, la fermeture préconisée n'est pas réalisable.

Dans le cas n pair, il faut pouvoir faire mourir m_2 avec un maximum avant m_1 avec l'autre. Nécessairement, m_2 meurt avec M_2, et donc a_n est impair. □

Remarque 4.2.10. Dans le cas n impair, on réalise des entrelacs à deux composantes, tandis que dans le cas n pair, on réalise des nœuds.

Remarque 4.2.11. Le même type de raisonnement s'applique à la réalisation des fronts d'onde *bretzels* décrits en figure 4.22, où n boîtes de p_i croisements sont disposées les unes au dessus de autres. Il vient que de tels fronts d'onde sont réalisables à une seule variable si et seulement si les p_i pour $i = 2 \dots n-1$ sont pairs.

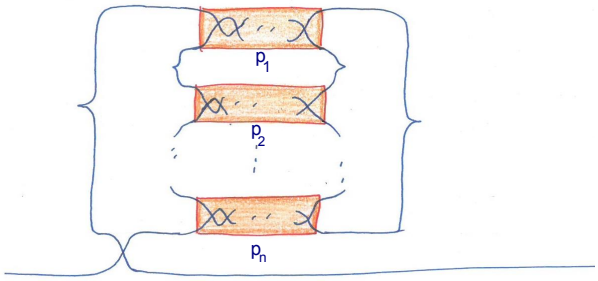


FIGURE 4.22 – nœuds et entrelacs legendriens bretzels.

Question : Quels autres fronts d'onde rationnels $L(a_1, \dots, a_n)$ peut-on réaliser si on s'autorise un espace de variables additionnelles de dimension n quelconque ?

Une manière d'aborder cette question serait d'étudier la combinatoire des *rulings* possibles pour ces fronts d'ondes (voir fin de l'annexe D et ses références).

Question : Quelle est la combinatoire des "chemins de serpents" en général ? Ou quels sont les fronts d'ondes réalisés par des 1-(fg QI) ?

4.2.2 Fermeture des nœuds longs fg QI et superposition des contours fg QI

Fermeture d'un nœud ou entrelacs legendrien fg QI :

Définition 4.2.12. Soit L un nœud ou entrelacs legendrien à support I. La **fermeture du front d'onde de** L consiste à greffer le front réduit à son support :

$$\mathbf{p_F}(L) \cap \{(u, q) \ / \ q \in I\}$$

dans la partie basse d'un front d'onde trivial maximal (voir figure 4.23).

La **fermeture de** L est le nœud, notée $\lceil L \rceil$, dont le front d'onde est la fermeture du front d'onde de L.

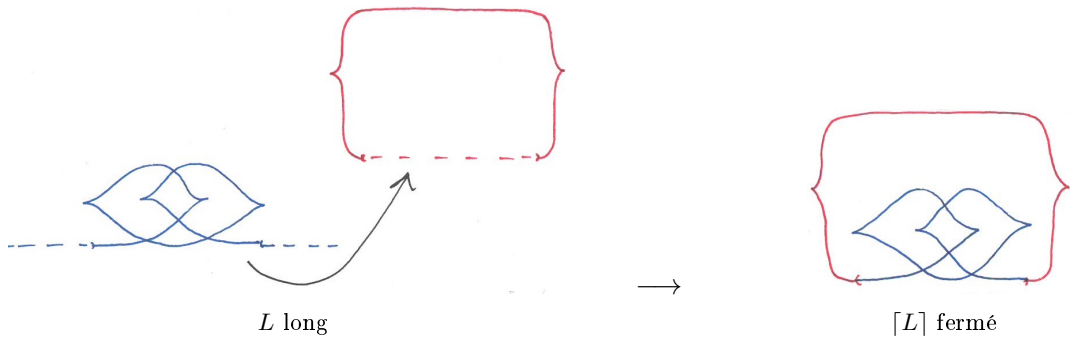


FIGURE 4.23 – Fermeture de L long en $\lceil L \rceil$ fermé.

Proposition 4.2.13. *La fermeture d'un nœud ou entrelacs fg QI possède une fg QL.*

Preuve. Soit L nœud legendrien long réalisé par F fg QI, définie sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^k$, de support $I = [q_1, q_2]$, et soit $K \subset \mathbb{R}^k$ compact, tels que : $F(q, w) = f(q, w) + Q(w)$ avec f à support inclus dans $I \times K$.

<u>Étape 1 : création d'une *base ajustée à F*</u>

Un fg QL pour le nœud trivial maximal $\diamondsuit$, de support $[-1, 1]$, d'altitude minimale 0 et maximale 2 est fournie par F_1, fonction définie sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ par :

$$F_1(q, v) = \frac{1}{2}(v+1)^3 + \frac{3}{2}(v+1)(q^2-1) + 1.$$

Pour $q \in]-1, 1[$, $F_1(q, \cdot)$ admet deux points critiques, $v_0(q)$ et $v_1(q)$, correspondant respectivement à un minimum local $m(q)$ et un maximum local $M(q)$. Pour $q = 0$, $F_1(0, \cdot)$ admet comme deux points critiques $v_0(0) = 0$ et $v_1(0) = -2$. Son minimum local est $m(0) = 0$ et son maximum local est $M(0) = 2$.

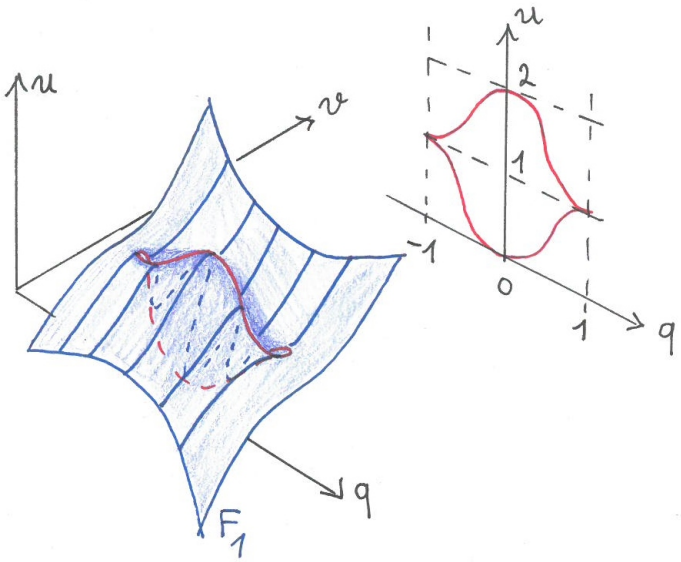


FIGURE 4.24 –

Strico sensu F_1 n'est pas une fg quadratique-linéaire à l'infini. Il s'agit de remplacer par opération de difféomorphisme à la source, $\frac{1}{2}(v+1)^3 + \frac{3}{2}(v+1)(q^2-1)+1$ en v pour les (q,v) tels que la norme $\| (q,v) \|$ est assez grande. Commençons par observer que, pour $q \notin [-1,1]$, $F_1(q,\cdot)$ est inversible. Par ailleurs, pour chaque instant $q \in [-1,1]$, $F_1(q,\cdot)$ est confondue avec un difféomorphisme en dehors d'un compact, disons $[-4,2]$ (voir figure 4.25). En d'autres termes, il existe une fg $\tilde{F}_1$ telle que $\tilde{F}_1(q,\cdot)$ est un difféomorphisme pour tout q, et telle que $\tilde{F}_1 = F_1$ en dehors du compact $[-1,1] \times [-4,2]$. (Notons que le contour de $\tilde{F}_1$ est l'ensemble vide.)

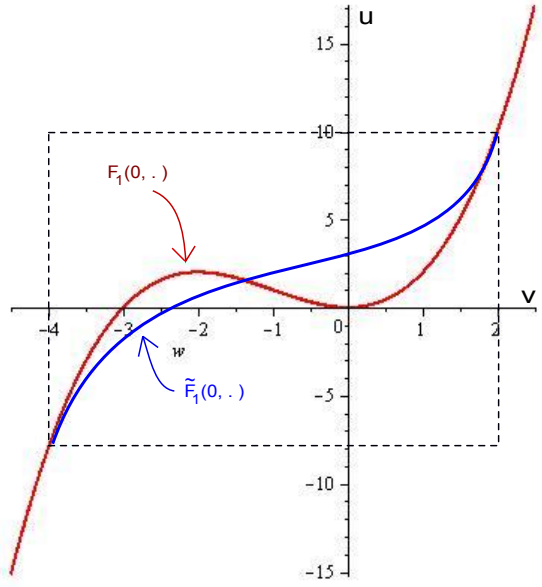


FIGURE 4.25 –

$\tilde{F}_1$ permet de définir le difféomorphisme Φ respectant les fibres :

$$\Phi(q,v) = (q, (\tilde{F}_1(q,\cdot))^{-1}(v)).$$

En remplaçant F_1 par $F_1 \circ \Phi$, on obtient une fg équivalente qui est confondue avec la forme linéaire $l\ : v \mapsto v$ pour $q \notin [-1,1] \times [-4,2]$.

On désigne à nouveau par F_1 la fg équivalente obtenue. F_1 est maintenant une fg QL pour $\diamondsuit$.

D'abord, on multiplie F_1 d'abord par un premier paramètre d'ajustement, la hauteur $H > 0$. On note F_H la fg QL ainsi obtenue :

$$F_H = F_1 \times H.$$

Le front d'onde réalisé par F_H est celui réalisé par F_1 mais étiré sur sa hauteur, de sorte que l'altitude de ce nouveau front varie entre 0 et $2H$.

Puis, on ajoute un second paramètre d'ajustement, la largeur $A > 0$, de sorte de créer la fonction génératrice $F_{A,H}$, telle que $F_{A,H}(q,\cdot)$ soit égale à $F_H(0,\cdot)$ pour tout $q \in [-2A, 2A]$. Il existe $\epsilon > 0$ et $\phi \in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ strictement croissante sur $\mathbb{R} \setminus [-2A, 2A]$ tels que :

$$\text{où } \phi(q) = \begin{cases} (q+2A)^3\ ,\ q \in]-\infty, -2A-\epsilon] \\ 0\ ,\ q \in [-2A, 2A] \\ (q-2A)^3\ ,\ q \in [2A+\epsilon, +\infty[. \end{cases}$$

On pose :

$$F_{A,H}(q,v) = F_H(\phi(q),v).$$

Notons que $F_{A,H}$ est égale à $F_H(0,\cdot)$ sur $[-2A,2A]\times(\mathbb{R})$.

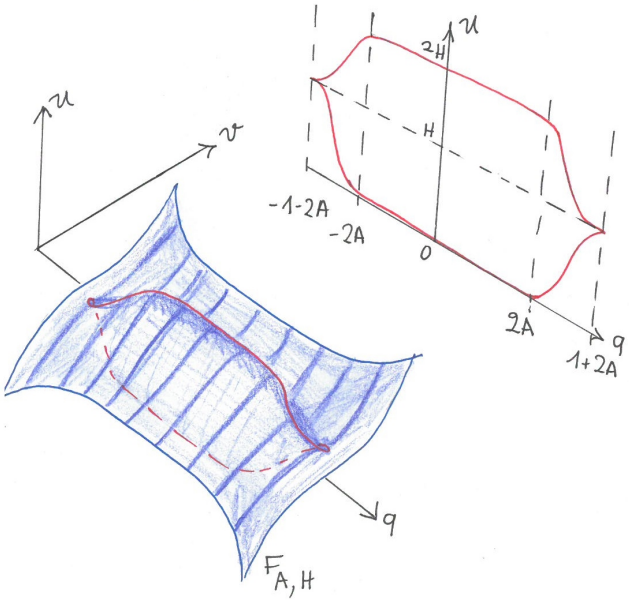


FIGURE 4.26 –

Le support de cette nouvelle fg est $[-1-2A,2A+1]$. Elle constitue une **base ajustée à la fermeture de** F si :

- H est plus grande que la plus grande des valeurs critiques des fonctions $F(q,\cdot)$,
- le support I de F est contenu dans $[-A,A]$.

<u>Étape 2 : greffe d'une fg QI sur une base ajustée</u>

On "stabilise" la fg QI de départ F, non pas par une forme quadratique, mais par :

$$F_H(0,v) = \left(\frac{1}{2}(v+1)^3 - \frac{3}{2}(v+1)+1\right)H.$$

Notons $\tilde{F}$ la fg obtenue. $\tilde{F}$ est égale $F_{A,H}\oplus Q$ sur $([-2A,-A]\cup[A,2A])\times\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}$. À chaque instant $q\in[-2A,2A]$, les points criques ζ de $F(q,\cdot)$ sont dé-doublés en des couples de points critiques pour $\tilde{F}$: (ζ,v_0) et (ζ,v_1), où $v_0=0$ et $v_1=-2$ sont les points critiques de $F_{A,H}(0,v)$.

On ne conserve $\tilde{F}$ que sur $[-2A,2A]\times\mathbb{R}^k\times[-1,1]$, de sorte de n'avoir qu'une copie du front de L restreint à son support.

On considère alors la fonction génératrice :

$$\tilde{\tilde{F}}(q, w_1, \ldots, w_k, v) = \begin{cases} \tilde{F} \text{ sur } [-2A, 2A] \times \mathbb{R}^k \times [-1, 1] \\ F_{A,H} \oplus Q \text{ sur } ([-A, A] \times \mathbb{R}^k \times [-\epsilon, \epsilon])^c \end{cases}.$$

$F_{A,H} \oplus Q$ est une stabilisation d'une fg QL, c'est donc (à équivalence près) aussi une fg QL (voir chapitre 1, partie 1.3.2) Donc $\tilde{\tilde{F}}$ est (équivalente à) une fg QL pour $\lceil L \rceil$. □

Remarque 4.2.14. La fermeture systématique d'un nœud fg QI en un nœud fg QL permet en particulier d'utiliser les techniques et arguments de type *rulings* (voir fin de l'annexe D) pour déterminer si un front est réalisable par fg QI ou non.

Superposition des contours et fg QI :

Un bricolage similaire à celui-ci permet de *superposer* deux fronts d'onde de nœuds (ou entrelacs) fg QI. De cette manière, on crée à partir de deux nœuds longs fg QI L et L' un entrelacs fg QI dont les composantes sont $\lceil L \rceil$ et L'.

Définition 4.2.15. Soient L et L' deux nœuds (ou entrelacs) legendriens longs. On appelle **superposition** de L' avec $\lceil L \rceil$, noté $L'\lceil L \rceil$, l'entrelacs legendrien dont le front d'onde est l'union des fronts d'onde de L' et de la fermeture de L, $\lceil L \rceil$.

Considérons L et L' deux nœuds fg QI, réalisés respectivement par F et F', dont les formes quadratiques de référence sont respectivement Q et Q'. On stabilise F par Q' et F' par Q. $F \oplus Q'$ et $F' \oplus Q$ sont (à difféomorphisme à la source près) des fg QI pour respectivement L et L', qui sont définies avec le même espace additionnel $\mathbb{R}^k$ et ont même forme quadratique de référence : $Q \oplus Q'$.

Au lieu de partir d'une fg QL pour le nœud trivial maximal $\diamondsuit$, on utilise une fg QI pour une base ajustée réalisant l'union $\diamondsuit \cup \mathcal{O}$. Pour cela, on modifie la base précédente créée pour la fermeture d'un nœud en remplaçant pour tous les $q \in \mathbb{R}$ et pour les $v \in]-\infty, -3-\epsilon[$ $F_1(q, v)$ par $(v + 4 + \epsilon)^2$ (voir figure 4.27).

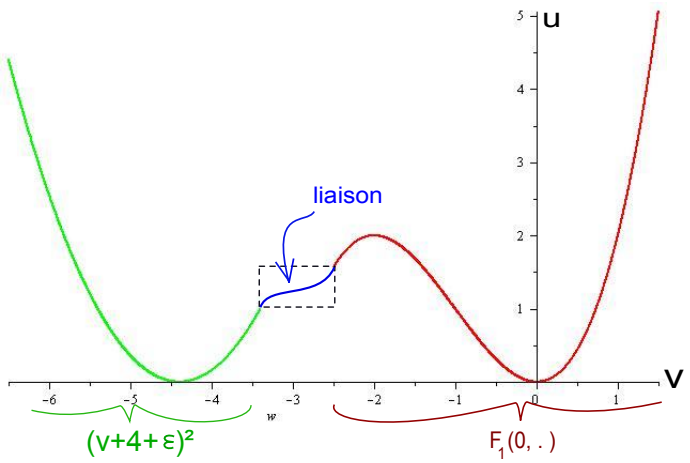


FIGURE 4.27 – Construction d'une base adaptée pour $L'\lceil L\rceil$

Il s'agit de greffer F' sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^k\times[-4-2\epsilon,-4]$ pour réaliser L', et de conserver $\tilde{\tilde{F}}$ (construite en partie précédente) sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^k\times[-2-\epsilon,+\infty[$ pour réaliser $\lceil L\rceil$.

Exemple 4.2.16. La superposition permettra de dupliquer un nœud pour former deux copies superposées, puis enlacées, et enfin non (figure 4.37).

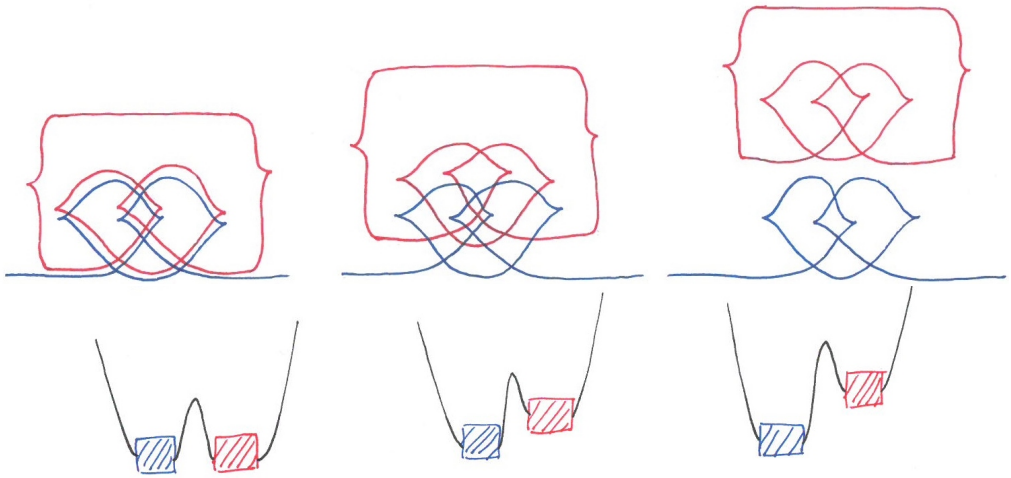


FIGURE 4.28 – Plusieurs duplications d'un trèfle fg QI.

4.2.3 L'opération somme et la somme connexe des nœuds legendriens :

Définition 4.2.17. La **somme connexe** de deux entrelacs legendriens longs, L_1 et L_2, est l'entrelacs legendrien qui consiste à les disposer l'un puis l'autre sur la section nulle (voir figure 4.6), noté $L_1\#L_2$.

Quitte à translater L_1 vers la gauche et L_2 vers la droite, supposons que le support I_1

de L_1 est inclus dans $]-\infty, 0[$, que le support I_2 de L_2 est inclus dans $]0, +\infty[$. Lorsque les support sont ainsi disjoints, la somme connexe est aussi la somme $L_1 \underline{+} L_2$.

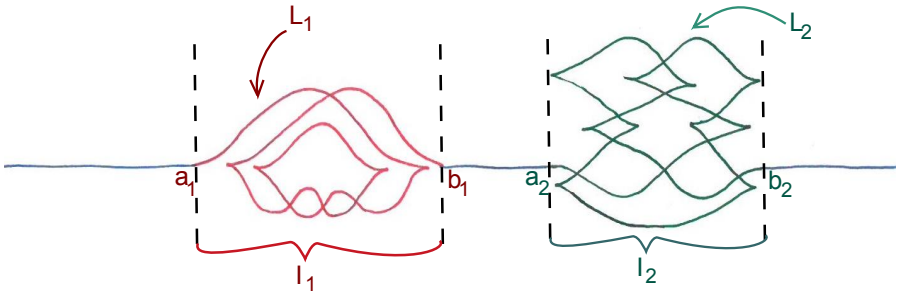


FIGURE 4.29 – $L_1 \# L_2$

Remarque 4.2.18. Si L_1 et L_2 sont réalisés par des fg QI F_1 et F_2, alors leur somme connexe $L_1 \# L_2$ est réalisée par :

$$F_{L_1 \# L_2} : (q, w_1, w_2) \mapsto F_1(q + T, w_1) + F_2(q - T, w_2),$$

où $T > 0$ est une constante assez grande pour disjoindre les supports de L_1 et L_2.

Proposition 4.2.19 ([24]). *Dans $J^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, l'opération somme connexe est commutative (à isotopie près).*

Preuve. Il s'agit de réduire l'une des deux composantes, disons L_2, à une version isotope plus petite L_ϵ, puis de la faire "voyager" par isotopie le long de L_1 de grâce aux mouvements de Reidemeister (voir figure 4.35.)

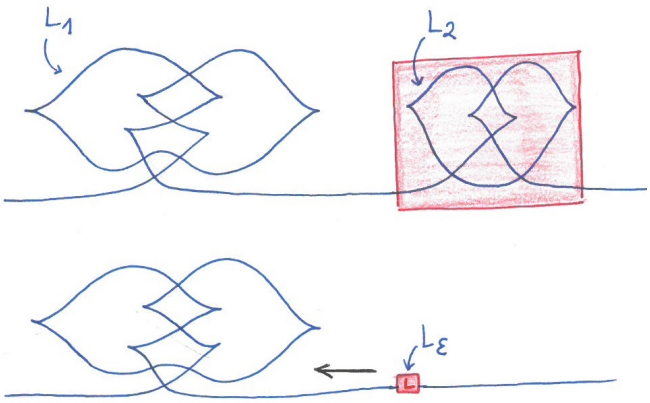


FIGURE 4.30 –

Si L_ϵ rencontre un croisement de L_1, les mouvements de Reidemeister II et III permettent de le franchir.

Le franchissement d'un cusp est plus subtil (voir figure 4.31) :

Considérons L_ϵ situé sur le brin inférieur d'un cusp gauche. Une isotopie au niveau du plan lagrangien permet de placer L_ϵ dans une boucle en la renversant temporairement en son miroir $\bar{L}_\epsilon$ (voir définition 4.3.7). Les mouvements de Reidemeister I, II et III permettent de terminer avec $\bar{L}_\epsilon$ situé sur le brin du dessus d'un cusp gauche (figure 4.31).

Pour conclure, puisqu'un front d'onde contient un nombre pair de cusps, on aura renverser L_ϵ un nombre pair de fois, d'où la conclusion.

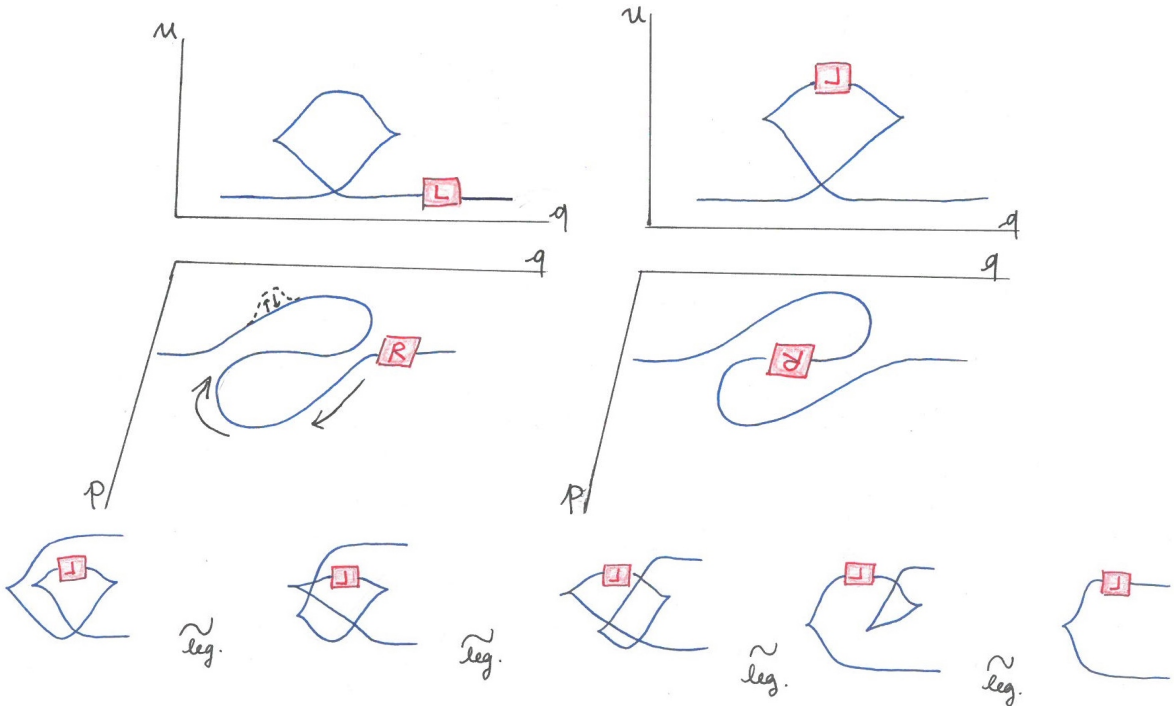


FIGURE 4.31 – Franchissement d'un cusp.

□

Remarque 4.2.20. Attention que si on applique le théorème de Chekanov pour obtenir une fg pour $L_2\#L_1$ à partir de $F_{L_1\#L_2}$ et d'une isotopie entre $L_1\#L_2$ et $L_2\#L_1$, le résultat sera a priori très différent de la fg $F_{L_2\#L_1}$.

4.3 Cobordismes fg QI

On rappelle que le notion de cobordisme legendrien que nous considérons (définition 2.5.4) consiste en une "grosse" sous-variétés legendrienne dans $J^1(\mathbb{R}\times[0,1],\mathbb{R})$ entre deux "petites" dans $J^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Les nœuds legendriens modulo cobordisme legendrien sont totalement classés par l'indice de Maslov [1], [5]. Dans [21], E. Ferrand propose une étude

combinatoire en excluant certains mouvements locaux.

Nous travail s'engage sur une voix complémentaire. On se restreint aux nœuds fg QI – qui ont en particulier indice de Maslov nul – et aux cobordismes réalisés par fg QI. On se pose la question d'obtenir une théorie plus fine.

Définition 4.3.1. Un **cobordisme fg QI** entre deux nœuds (ou entrelacs) longs L_0 et L_1 est un cobordisme legendrien L au sens de la définition 2.5.4 tel que L admet une fg QI. On dira que L_0 est **(fg QI)-cobordant** à L_1.

Remarque 4.3.2. Si L_0 et L_1 sont reliées par un cobordisme fg QI, alors par conséquent elles sont elles-mêmes fg QI (voir chapitre 2 lemme 2.3.8).

Exemple 4.3.3. Si $(L_t)_{t\in[0,1]}$ est une isotopie démarrant avec L_0 noeud fg QI, alors le théorème de Chekanov permet de construire une fg QI F, définie sur $\mathbb{R}\times[0,1]\times(\mathbb{R}^k)$ pour un certain entier k, qui réalise la legendrienne $L\subset J^1(\mathbb{R}\times[0,1],\mathbb{R})$ dont les tranches le long des $\mathbb{R}\times\{t\}$ sont les L_t (voir théorème 1.3.21 et remarque 1.3.22). En particulier cette sous-variété legendrienne L est un cobordisme fg QI entre L_0 et L_1.

Dans [12], F. Bourgeois, J.M. Sabloff et L. Traynor construisent explicitement un cobordisme linéaire à l'infini entre toute sous-variété legendrienne linéaire à l'infini de $J^1(M,\mathbb{R})$ et le vide. Cette construction peut être adaptée au cas quadratique à l'infini pour créer systématiquement un cobordisme fg QI entre tout nœud fg QI et la section nulle.

La proposition 1.3.4 vue au chapitre 1 permet de conclure que, non seulement il existe un cobordisme fg QI, mais on sait qu'il y en a même beaucoup.

Lemme 4.3.4. *Soit L_0 un nœud ou entrelacs legendrien fg QI. Soit $F_0=f_0+Q$ une fg QI pour L_0 définie sur $\mathbb{R}\times(\mathbb{R}^k)$, où f_0 est à support compact, et Q est une forme quadratique de référence. Alors un chemin générique de fonctions $(f_t)_{t\in[0,1]}$ entre f_0 et $f_1\equiv 0$ définit une fg QI F dont le contour est un cobordisme fg QI entre L_0 et la section nulle $\mathcal{O}$.*

Idée de la preuve. Un chemin de fonctions $(F_t)_{t\in[0,1]}$, avec $F_t=f_t+Q$, constitue une fonction génératrice F définie sur $\mathbb{R}\times[0,1]\times(\mathbb{R}^k)$. On fait la même démarche que dans la démonstration du lemme 2.4.5 – qui utilise la transversalité sous contrainte – pour montrer qu'un chemin de fonctions générique $(f_t)_{t\in[0,1]}$ entre f_0 et la fonction constante égale à 0 donne une fg F qui satisfait la condition de transversalité $\circledast$. □

On restreint maintenant la recherche de cobordismes fg QI en s'intéressant à la notion correspondante de *concordance*.

4.3.1 Groupe de concordance

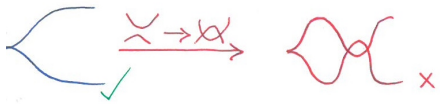
Définition 4.3.5. Une **concordance legendrienne** entre deux nœuds legendriens longs dans est un cobordisme legendrien qui est difféomorphe à la base $\mathbb{R}\times[0,1]$. Une **concor-**

dance fg QI est une concordance legendrienne qui est réalisable comme contour d'une fg QI.

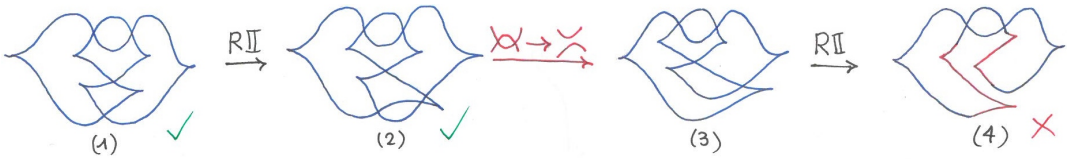
Une homotopie legendrienne (définition 1.2.5) est en particulier une concordance legendrienne. La simple notion de concordance legendrienne n'est donc pas restrictive, puisqu'on peut montrer le fait suivant :

Lemme 4.3.6. *Tout nœud legendrien (long ou fermé) peut être déformer par homotopie legendrienne en un représentant legendrien du nœud topologique trivial (long resp. fermé).*

En revanche, l'ajout de la condition fg QI crée a priori une notion restrictive, car il n'est pas toujours possible de suivre un mouvement d'homotopie – instant d'auto-intersection transverse – par fg. Par exemple, croiser les deux brins immédiatement à la suite d'un cusp (figure 4.32 (a)) n'est pas possible par fg. Décroiser des brins n'est pas forcément possible non plus, comme en témoigne l'exemple dépeint en figure 4.32 (b) (si le mouvement d'homotopie était possible entre les figures (2) et (3), on serait capable de réaliser l'étape (4), ce qui contredit l'impossibilité de la présence de $\asymp$ dans le front d'onde).



(a)



(b)

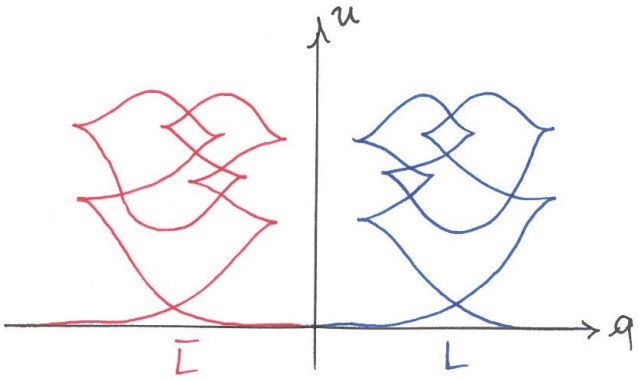
FIGURE 4.32 – L'existence d'une fonction génératrice ne persiste pas nécessairement le long d'un mouvement d'homotopie.

Définition 4.3.7. Soit L un nœud legendrien. Son **miroir** legendrien est le nœud legendrien noté $\bar{L}$ dont un front d'onde est le symétrique par rapport à l'axe verticale de la coordonnée u du front d'onde de L – éventuellement décalé de sorte que son support soit inclus dans $\mathbb{R}_+^*$ (voir 4.33) :

$$\bar{L} = \{(u, -q, -p) \ / \ (u, q, p) \in L\}.$$

Attention que $\bar{L}$ ne correspond pas au miroir au sens de la théorie des nœuds classique (topologique). Il est clair que si F est une fg pour L, alors une fonction génératrice pour $\bar{L}$ est

$$\bar{F} \ : (q, w) \mapsto F(-q, w).$$



le miroir $\bar{L}$ est obtenu en prenant le front symétrique de celui de L par rapport à la l'axe des coordonnées vertical.

FIGURE 4.33 – Miroir legendrien.

Proposition 4.3.8. *Soit L un nœud legendrien fg QI. La somme connexe $\bar{L}\#L$ est (fg QI)-concordante à la section nulle $\mathcal{O}$. On note*

$$\boxed{\bar{L}\#L \underset{conc.\ fg\,QI}{\sim} \mathcal{O}}.$$

Preuve. On peut supposer que le support du nœud legendrien L est inclus dans $]0,+\infty[$, quitte à la remplacer par une version isotope. Soit T tel que le support de L soit contenu dans $[0,T[$. Il s'agit d'utiliser le demi-front-spinning (voir définition 2.2.2) appliqué au nœud tronqué :

$$L_{q>0} = \{(u,q,p) \in l \ / \ q > 0\}.$$

On considère le demi-front-spinning $\frac{1}{2}\Sigma(L_{q>0})$. C'est une sous-variété legendrienne qui contient un demi-disque fermé $D_{0,\epsilon}$ de rayon $\epsilon > 0$, centré en l'origine et épointé de l'origine :

$$D \setminus \{0\} = \{(u=0, q=r\cos\theta, t=r\sin\theta, p=0, s=0) \ / \ \theta \in [0,\pi], r \in]0,\epsilon]\}.$$

On complète le demi-front spinning par l'origine : $\frac{1}{2}\Sigma(L_{q>0}) \cup \{0\}$ de sorte que l'on crée une sous-variété legendrienne de $J^1(\mathbb{R}\times[0,+\infty[,\mathbb{R})$, confondue avec la section nulle en dehors d'un compact. Cette sous-variété est de plus difféomorphe à $\mathbb{R}\times[0,+\infty[$. En restreignant le demi-front-spinning complété $\frac{1}{2}\Sigma(L_{q>0}) \cup \{0\}$ à la base $\mathbb{R}\times[0,T]$, on obtient une sous-variété legendrienne qui est difféomorphe à $\mathbb{R}\times[0,T]$, dont la tranche en $t=0$ est la somme connexe $\bar{L}\#L$, et la tranche au temps $t=T$ est la section nulle $\mathcal{O}$ dans $J^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ (voir figure 4.34).

Supposons que L est un nœud fg QI, réalisé par une fg QI F de forme quadratique de

référence Q. Une fonction génératrice pour le demi-front-spinning complété $\frac{1}{2}\Sigma L_{q>0} \cup \{0\}$ est :

$$F_{\curvearrowleft}(q = r\cos\theta, t = r\sin\theta, w) = F(r, w),$$

Cette fonction génératrice est quadratique à l'infini, car égale à Q pour w hors d'un compact, ou pour (q, t) n'appartenant pas au demi-disque :

$$D_{0,T} = \{(q, t) \ / \ q = r\cos\theta, t = r\sin\theta, r \in [0, T], \theta \in [0, \pi]\}.$$

□

Pour définir le groupe de concordance, il faut considérer les nœuds legendriens *équipés* d'une fg QI.

Définition 4.3.9. Un nœud legendrien **(fg QI)-équipé** est la donnée d'un nœud legendrien L et d'une fonction génératrice F qui réalise L, noté (L, F), modulo la relation d'équivalence des fonctions génératrices.

On ne considère alors que les concordances fg QI qui "respectent" cet équipement.

Définition 4.3.10. Une **concordance fg QI entre deux nœuds (fg QI)-équipés** (L_0, F_0) et (L_1, F_1) est une concordance legendrienne $\mathcal{L} \in J^1(\mathbb{R} \times [0, 1], \mathbb{R})$, réalisée par une fg QI $\mathcal{F}$, telle que la tranche de $\mathcal{L}$ le long de $\mathbb{R} \times \{0\}$ est L_0 et celle le long de $\mathbb{R} \times \{1\}$ est L_1, et $\begin{cases} F_0 & : (q, w) \in \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^k) \mapsto \mathcal{F}(q, 0, w) \\ F_1 & : (q, w) \in \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^k) \mapsto \mathcal{F}(q, 0, w) \end{cases}$.

Corollaire 4.3.11. *L'ensemble des nœuds legendriens (fg QI)-équipés modulo la relation de concordance fg QI muni de la somme connexe est un groupe commutatif.*

Question : Ce groupe est-il non trivial ?

Exemple 4.3.12. Les figures suivantes décrivent le demi-front spinning d'un représentant du nœud de huit, complété en l'origine pour réaliser une concordance avec la section nulle (figure 4.34). La figure 4.35 décrit les différentes tranches le long des $\mathbb{R} \times \{t\}$, $t \in [0, +\infty[$. On y voit se succéder à la fois moments de cobordismes et instants d'auto-intersection transverse (homotopie).

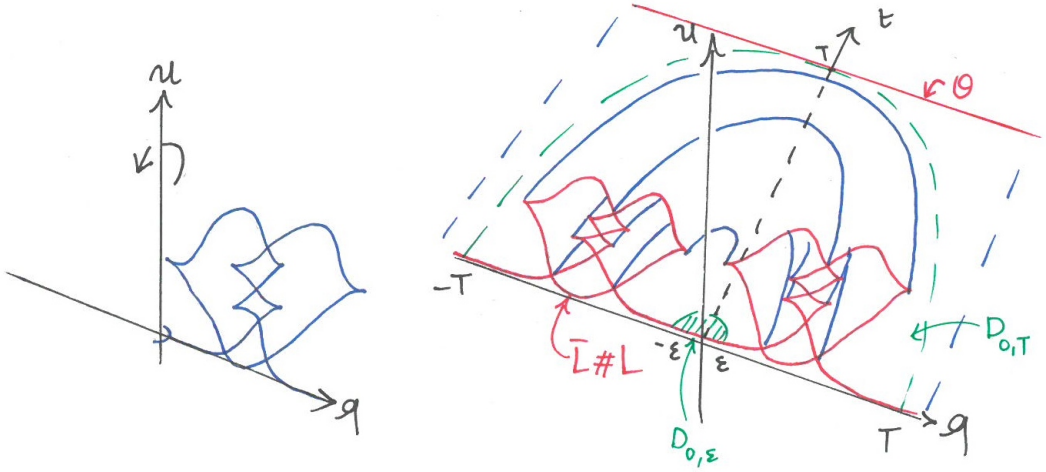


FIGURE 4.34 – demi-front-spinning compété du 8 long

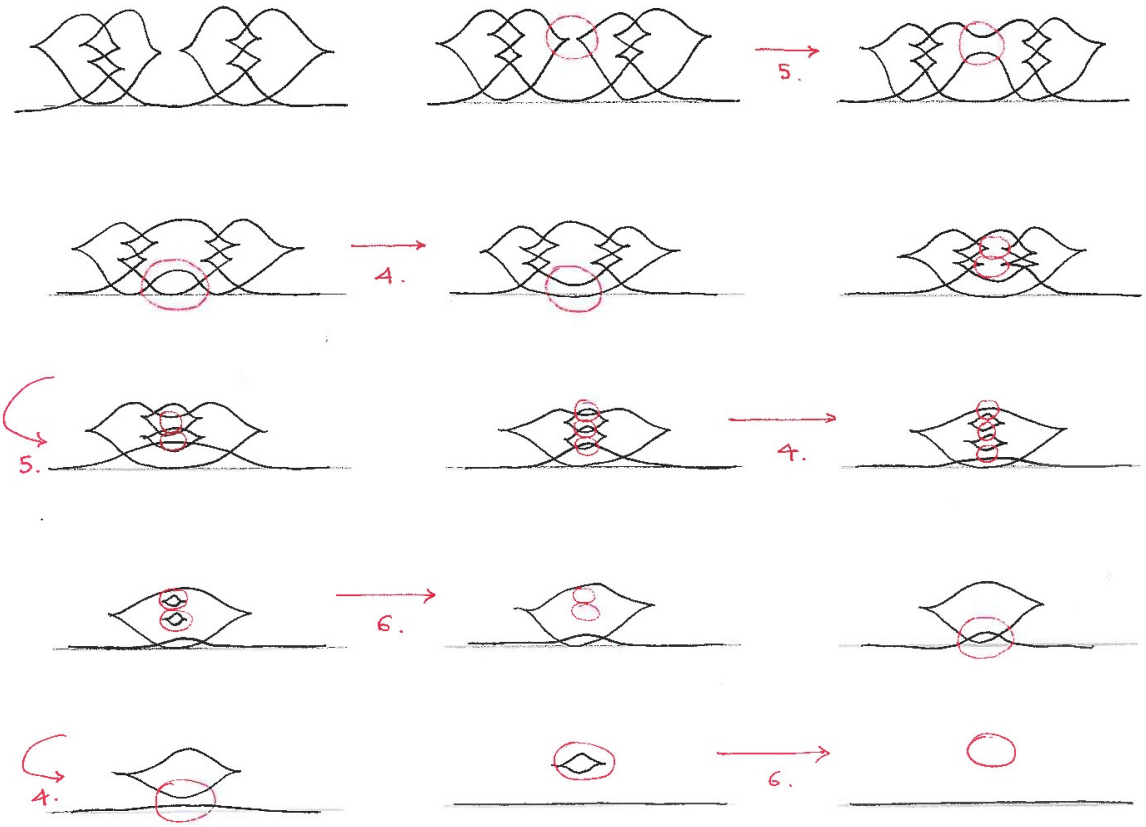


FIGURE 4.35 – De $\bar{8}\#8$ à $\mathcal{O}$.

4.3.2 Des homotopies par fonctions génératrices

On commence par faire la remarque suivante.

Lemme 4.3.13. *Soit F_1 une fg QI et soit F_2 une fg QL, alors $F_{1\pm 2}$ est (équivalente à) une fg QL.*

Preuve. Soit F_1 une fg QI décomposée en $F_1 = f_1 + Q_1$, où f_1 est à support compact et définie $\mathbb{R}\times(\mathbb{R}^{k_1})$ et Q_1 forme quadratique de référence d'espace additionel $\mathbb{R}^{k_1}$. Soit F_2 une fg QL décomposée en $F_2 = f_2+Q_2+l$, où f_2 est à support compact et définie $\mathbb{R}\times(\mathbb{R}^{k_2}\times\mathbb{R})$, Q_2 forme quadratique de référence de la variable additionnelle $w_2 \in \mathbb{R}^{k_2}$, et l une forme linéaire de la variable additionnelle $v \in \mathbb{R}$. Alors, il existe un intervalle compact I de $\mathbb{R}$ tel que $F_{1\pm 2}$ est confondu avec $Q_1 \oplus Q_2 \oplus l$ en dehors de $I\times(\mathbb{R}^{k_1}\times\mathbb{R}^{k_2}\times\mathbb{R})$. De plus la norme du gradient partiel $\nabla_{(w_1,w_2,v)}(F_{1\pm 2} - Q_1 \oplus Q_2 \oplus l)$ en tout point de $I\times(\mathbb{R}^{k_1}\times\mathbb{R}^{k_2}\times\mathbb{R})$ est égale à celle de $\nabla_{(w_1,w_2,v)} f_{1\pm 2}$. Or :

$$\| \nabla_{(w_1,w_2,v)} f_{1\pm 2} \|^2 = \| \nabla_{w_1} f_1 \|^2 + \| \nabla_{(w_2,v)} f_2 \|^2 .$$

Puisque f_1 et f_2 sont à supports compacts, le membre de droite cette l'égalité est borné. Donc $\nabla_{(w_1,w_2,v)}(F_{1\pm 2} - Q_1 \oplus Q_2 \oplus l)$ est borné en tout point de $I\times(\mathbb{R}^{k_1}\times\mathbb{R}^{k_2}\times\mathbb{R})$, d'où le résultat. □

Application 1. Dénouement d'un nœud long fg QI

Considérons un nœud legendrien long L, à support $I = [q_1, q_2]$, et un représentant L_ϵ du nœud trivial maximal dont le support contient I, étiré en longueur de sorte que les cusps droit et gauche se tiennent en dehors du support de L, et dont la hauteur ne dépasse pas un petit $\epsilon > 0$ (voir figure 4.37). Il est facile d'observer que le résultat de cette somme est legendriennement isotope à l'identité.

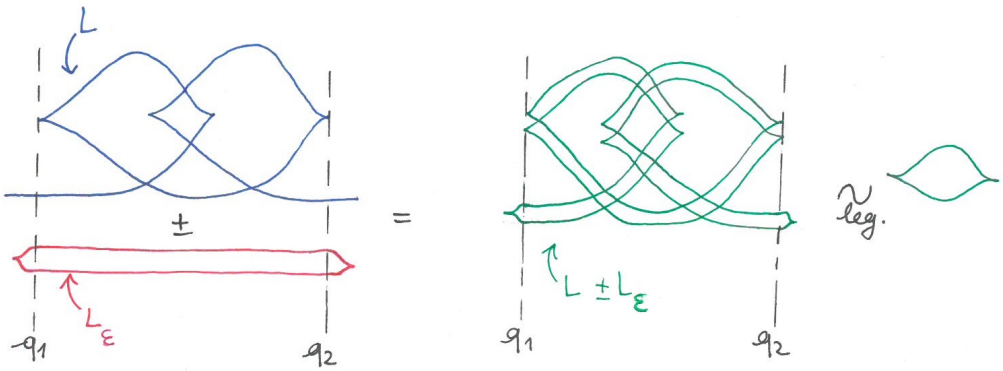


FIGURE 4.36 – La somme d'un nœud long avec un certain représentant du nœud trivial maximal est isotope à nœud legendrien trivial maximal.

Lemme 4.3.14. *Soit L un nœud legendrien fg QI. La somme $L \underline{+} L_\epsilon$ est un nœud legendrien fg QL et il existe une isotopie fg QL qui envoie $L \underline{+} L_\epsilon$ sur le nœud legendrien trivial maximal. On note*

$$\boxed{L \underline{+} L_\epsilon \underset{iso.\ fgQL}{\sim} \diamond.}$$

Preuve. Le lemme 4.3.13 assure que le résultat de la somme de L nœud fg QI et de L_ϵ qui est un nœud fg QL est fg QL. Le théorème de Chekanov (théorème 1.3.21) permet de conclure en suivant une isotopie legendrienne entre $L \underline{+} L_\epsilon$ et le nœud legendrien trivial maximal par une grande fg QL. □

Application 2. Fermeture fg QL de la somme connexe d'un nœud fg QI et de son miroir

Si dans l'application précédente on fait la somme d'un nœud legendrien long L avec un représentant L_T du nœud trivial maximal de hauteur T grande, on obtient deux copies du nœud, l'une franchement au dessus de l'autre (voir figure 4.37). L'astuce décrite en figure 4.31 permet de conclure que le résultat est isotope à la fermeture de la somme connexe de L avec son miroir $\bar{L}$ (définition 4.3.7). Il vient le résultat suivant :

Lemme 4.3.15. *Soit L un nœud legendrien fg QI. Les nœuds $L \underline{+} L_T$ et $\lceil \bar{L} \# L \rceil$ sont fg QL et il existe une isotopie fg QL qui envoie l'un sur l'autre. On note*

$$\boxed{L \underline{+} L_T \underset{iso.\ fgQL}{\sim} \lceil \bar{L} \# L \rceil.}$$

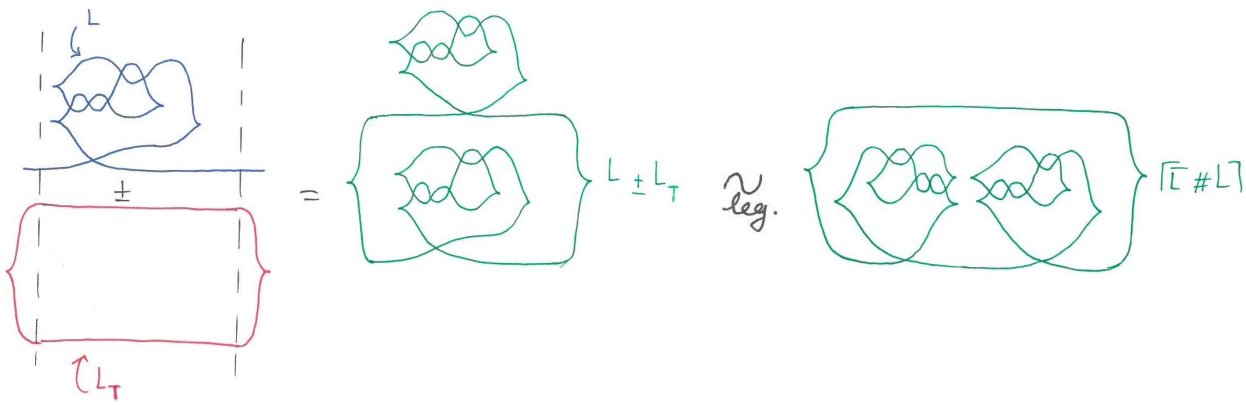


FIGURE 4.37 –

Mis ensembles, les deux lemmes conduisent à un phénomène surprenant. Soit L un nœud legendrien long fg QI. On considère la famille à 1 paramètre des sommes $L \underline{+} L_t$,

$t \in [\epsilon, T]$ où L_t est le représentant du nœud legendrien trivial maximal de grande largeur et dont on fait varier la hauteur de ϵ très petit à T grand. Aucun moment de cobordisme n'est rencontré dans la famille $(L \underline{+} L_t)_t$; c'est une homotopie entre $L \underline{+} L_\epsilon$ et $L \underline{+} L_T$. Il vient :

Proposition 4.3.16. *Soit L un nœud legendrien fg QI. On considère la fermeture de la somme connexe de L avec son miroir legendrien : $\lceil \bar{L} \# L \rceil$. Il existe une famille à un paramètre t de fg QL qui réalise une homotopie entre $\lceil \bar{L} \# L \rceil$ et le nœud trivial maximal. On note $\diamondsuit$:*

$$\boxed{\lceil \bar{L} \# L \rceil \underset{hom.\ fg\,QL}{\sim} \diamondsuit.}$$

Remarque 4.3.17. La famille à 1 paramètre des sommes $L \underline{+} L_t$, $t \in [\epsilon, T]$ où L_t est le nœud L_1 dont on fait varier la hauteur de ϵ très petit à H grand forme les tranches d'une sous-variété legendrienne $\mathcal{L}$ de $J^1(\mathbb{R} \times [\epsilon, T], \mathbb{R})$.

$\mathcal{L}$ est aussi la somme du cylindre $\mathcal{L}_1$ basé sur L_1 :

$$\mathcal{L}_1 = \{(u, q, t, p, 0) \ / \ (u, q, p) \in L \ , \ t \in [\epsilon, T]\}$$

et de :

$$\mathcal{L}_2 = \{(tu, q, t, tp, u) \ / \ (u, q, p) \in L_1 \ , \ t \in [\epsilon, T]\}.$$

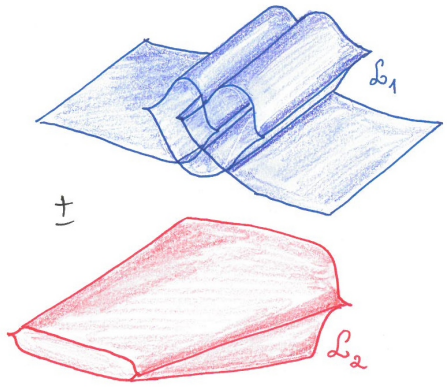


FIGURE 4.38 – Somme $\mathcal{L}_1 \underline{+} \mathcal{L}_2$.

Remarque 4.3.18. De manière similaire, si L est un nœud legendrien fg QI, on montre l'existence d'une famille à un paramètre de fg QI réalisant une homotopie entre L et la somme connexe $L \# \bar{L} \# L$:

$$\boxed{L \# \bar{L} \# L \underset{\text{hom. fgQI}}{\sim} L.}$$

Question : Étant donnés deux nœuds fg, on sait que toute homotopie entre eux n'est pas réalisable par une fg, mais peut en existe-t-il une qui l'est. Autrement dit, est-ce que $L \underset{\text{hom. fgQI}}{\sim} \mathcal{O}$? Ce résultat entraînerait en particulier que le groupe de concordance fg QI est trivial.

Question : Dans le cas des nœuds 1-(fg QI), le mouvement d'homotopie qui dénoue deux brins enlacés peut être systématiquement réalisé par une famille à 1-paramètre de fg QI – mais pas celui qui noue. Est-ce que ce mouvement, réuni avec les trois mouvements de Reidemeister, est suffisant pour dénouer les nœuds 1-(fg QI) ?

Annexe A

Rappels de théorie de Morse pour les fonctions définies sur $\mathbb{R}^n$

La théorie de Morse est l'étude à la fois locale et globale des points critiques de fonctions (génériques) définies sur une variété, et de leur relation avec la topologie de la variété. On rappelle ici les grandes lignes dans le cadre qui nous intéresse. Il existe de nombreuses références. Le lecteur trouvera par exemple dans [6] et [31] cette théorie développée sous forme de cours détaillés et motivés.

On commence par clarifier la notion de *généricité*. Elle est au cœur de l'utilisation de la théorie de Morse pour les fonctions, mais pas seulement.

A.1 Préliminaire : généricité

Pour cette partie, on renvoie en particulier au chapitre 5 de [31] intitulé *Transversalité*.

Une première version de la généricité est celle attribuée à une propriété satisfaite par *presque tout* objet d'un espace mesurable (sur $\mathbb{R}^n$, on pense à la mesure de Lebesgue). C'est ce qui apparaît par exemple dans le théorème de Sard (théorème A.2.3).

Plus généralement, on se place dans un espace topologique de Baire, c'est-à-dire tel que toute intersection dénombrable d'ouverts denses[1] est un sous-ensemble dense.

Définition A.1.1. Sur un espace de Baire, on dit d'une propriété qu'elle est **générique** si elle est satisfaite par une intersection dénombrable d'ouverts denses.

On dit, par abus de langage, que les objets appartenant à ce sous-ensemble sont génériques.

L'espace topologique qui nous concerne est celui des applications lisses d'une variété lisse M sur une variété lisse N, noté $C^\infty(M, N)$, équipé de la topologie fine de Whitney

1. Une telle intersection est aussi appelée un sous-ensemble *résiduel*.

(voir [27]). C'est un espace de Baire. La suite de cette annexe concernera le cas particulier de l'espace des fonctions $C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.

Nous nous intéressons aux chapitres 1 et 2 à la généricité de certaines propriétés sur les sous-variétés, non directement sur les fonctions. Il s'agit d'un abus de langage qui identifie une sous-variété N dans une variété M à un plongement propre d'une variété abstraite $\tilde{N}$ dans M. Une propriété génériquement vérifiée par N devient une propriété génériquement vérifiée par un plongement propre dans $C^\infty(\tilde{N}, M)$.

Remarque A.1.2. Si $\dim(M) \geqslant 2\dim(N) + 1$, alors l'ensemble des plongements propres est lui aussi un espace de Baire.

Exemple A.1.3. Par exemple, un plongement propre générique du cercle dans $\mathbb{R}^3$ se projette sur un plan donné en ne faisant apparaître que des singularités de type intersection transverse, ou *croisements*. (En ajoutant à chaque croisement l'information d'ordre dans lequel les deux brins se sont projetés, on obtient l'outil *diagramme* en théorie des nœuds.)

Exemple A.1.4. Une sous-variété legendrienne de dimension n dans un espace de 1-jets $J^1(M, \mathbb{R})$ en position générique se projette sur l'espace des 0-jets correspondant, $J^0(M, \mathbb{R})$, en une sous-variété singulière *stratifiée* de codimension 1 (voir chapitre 1 définition 1.1.10 et fronts d'onde de dimensions 1 et 2).

A.2 Définitions, théorème de Sard, lemme de Morse et lemme de Thom

Soit $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.

Définitions A.2.1. On appelle **point critique** de f un point $\zeta \in \mathbb{R}^n$ tel que $\nabla f(\zeta) = 0$. L'ensemble des points critiques est noté $crit(f)$.

Une **valeur régulière** est un élément $y \in \mathbb{R}$ tel que f est submersive sur $\{y\}$, c'est-à-dire que le gradient ∇f est non nul en tout point $x \in f^{-1}(y)$. [2]

Au contraire, une **valeur critique** est une valeur c de f telle que f n'est pas submersive sur $\{c\}$. C'est aussi l'ensemble des valeurs c telle qu'il existe un point critique appartenant au niveau $f^{-1}(c)$. On note $vcrit(f)$ l'ensemble des valeurs critiques de f.

Remarque A.2.2. Si y est une valeur régulière, $f^{-1}(y)$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ (on considère que l'ensemble vite est une sous-variété).

Théorème A.2.3 (Sard, [31]). *Soit $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Presque tout*[3] *$y \in \mathbb{R}$ est une valeur régulière de f.*

2. En particulier, si x n'est pas une valeur prise par la fonction, c'est une valeur régulière.
3. *"Presque tout"* s'entend ici au sens de la mesure de Lebesgue.

Définitions A.2.4. Un point critique ζ est **non-dégénéré** si la matrice hessienne, $\mathrm{Hess}(f)_\zeta$, est inversible. Si $\mathrm{Hess}(f)_\zeta$ est vue comme la matrice d'une forme quadratique, on considère sa signature $(n-i, i)$. On dit que i est l'**indice** de ζ. L'ensemble des points critiques d'indice i de f sera noté $crit_i(f)$.

On dit que f est une **fonction de Morse** si tous ses points critiques sont non-dégénérés.

Lemme A.2.5 (Morse, [39]). *Si $\zeta \in crit_i(f)$, il existe des coordonnées locales $x = (x_1, \ldots, x_n)$ au voisinage de ζ dans lesquelles f s'écrit :*

$$f(x) = f(\zeta) - x_1^2 - \cdots - x_i^2 + x_{i+1}^2 + \ldots x_n^2.$$

Le lemme de Morse donne non-seulement un modèle au voisinage d'un point critique non-dégénéré, mais il implique aussi qu'un tel point critique est systématiquement isolé. Citons aussi le version à paramètre qui garantit au chapitre 3 la notion d'*indice d'une fonction génératrice presque-simple* (lemme 3.2.16) :

Lemme A.2.6 (Lemme de Morse à paramètre, [34]). *Soit $(f_t)_{t\in]-\epsilon,\epsilon[}$ un chemin de fonctions qui admettent toutes $\zeta = 0$ comme point critique non-dégénéré, alors il existe un chemin de difféomorphismes locaux $(\phi_t)_{t\in]-\epsilon,\epsilon[}$ définis sur $\mathbb{R}^n$, valant 0 en $0 \in \mathbb{R}^n$, tels que :*

$$\forall t \in]-\epsilon, \epsilon[\ ,\ f_t \circ \phi_t = Q \quad \textit{au voisinage de } 0,$$

où Q est une forme quadratique non-dégénérée.

Remarque A.2.7. Soit $(\zeta_t)_{t\in]-\epsilon,\epsilon[}$ est un chemin de points critiques non-dégénérés pour $(f_t)_{t\in]-\epsilon,\epsilon[}$, c'est-à-dire $\nabla f_t(\zeta_t) = 0$, $\forall t \in]-\epsilon, \epsilon[$. Alors le lemme s'adapte en remplaçant f_t par g_t :

$$\forall t \in]-\epsilon, \epsilon[\ ,\ g_t\ : x \mapsto f_t(x + \zeta_t) - f(\zeta_t).$$

On conclut en particulier que l'indice d'un point critique reste constant lorsqu'on le suit dans un chemin de fonctions de Morse.

Les deux résultats suivants traitent de généricité :

Théorème A.2.8 (Lemme de transversalité dans les espaces de jets, R. Thom [51]). *Soit M une variété lisse. Soit W une sous-variété de l'espace des k-jets $J^k(M, \mathbb{R})$. Alors le k-jet d'une fonction $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ est génériquement transverse à W.*

Le lemme de transversalité de Thom est le pilier central de la preuve de la proposition 1.3.4, et il peut être employé pour démontrer la généricité des fonctions de Morse :

Théorème A.2.9. *Une fonction $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ est génériquement de Morse.*

On peut raffiner ce dernier résultat en montrant que les fonctions de Morse telles que tous les points critiques ont des valeurs critiques différentes sont génériques. De telles fonctions sont appelées des **fonctions de Morse excellentes**.

A.3 Évolution de la topologie des sous-niveaux :

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}^n$. Soient λ_1 et λ_2 des valeurs régulières de f, $\lambda_1 > \lambda_2$. On considère les sous niveaux f^{λ_1} et f^{λ_2}, ainsi que le **sous-niveau relatif** $f^{\lambda_1}_{\lambda_2}$ de f :

$$f^{\lambda_1} = \{x \in \mathbb{R}^n \ / \ f(x) \leqslant \lambda_1\} \qquad , \qquad f^{\lambda_2}_{\lambda_2} = \{x \in \mathbb{R}^n \ / \ f(x) \leqslant \lambda_2\},$$

$$f^{\lambda_1}_{\lambda_2} = \{x \in \mathbb{R}^n \ / \ \lambda_2 \leqslant f(x) \leqslant \lambda_1\}.$$

Définition A.3.1. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}^n$. On dit que f satisfait la **condition de Palais–Smale** si :

$$\text{s'il existe une suite } (x_m)_m \text{ de } \mathbb{R}^n \text{ telle que } \begin{cases} |f(x_m)| \text{ soit bornée} \\ \nabla f(x_m) \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \end{cases}$$

$$\text{alors il existe une suite extraite convergente } x_{\phi(m)} \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} x \ .$$

Notons que dans ce cas $x \in crit(f)$. Cette condition nous permet de s'en remettre aux valeurs critiques de f pour suivre l'évolution topologique des sous-niveaux, comme dans le cas compact [37], [6] :

Théorème A.3.2 ($f^{\lambda_1}_{\lambda_2}$ sans point critique)**.** *Soit f fonction définie sur $\mathbb{R}^n$ satisfaisant la condition de Palais–Smale. Si $[\lambda_2, \lambda_1] \cap vcrit(f) = \emptyset$, alors f^{λ_2} est un rétracte par déformation de f^{λ_1}.*

L'étude du modèle local garanti par le lemme de Morse (lemme A.2.5) permet d'obtenir le

Théorème A.3.3 (franchissement d'une valeur critique c)**.** *Si $c \in vcrit(f)$ est telle que $f^{-1}(c) \cap crit(f)$ est réduit à un unique point critique non-dégénéré d'indice i, $\zeta \in crit_i(f)$, alors $f^{c+\epsilon}$ se rétracte par déformation sur $f^{c-\epsilon} \cup e^i$, où e^i est une **i-cellule** : $e^i = (\mathbb{D}^i, \partial\mathbb{D}^i)$, et dont le bord $\partial\mathbb{D}^i$ est inclus dans $f^{-1}(c-\epsilon)$.*

On utilise dans cette thèse une condition un peu plus forte de celle de Palais–Smale :

Définition A.3.4. Une fonction f a **gradient propre** si son gradient est une application propre de $\mathbb{R}^n$ sur lui-même, i.e. l'image réciproque de tout compact par ∇f est compact.

La condition f a gradient propre implique en particulier :

$$\text{s'il existe une suite } (x_m)_m \text{ de } \mathbb{R}^m \text{ telle que } \nabla f(x_m) \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \ ,$$

$$\text{alors il existe une suite extraite convergente } x_{\phi(m)} \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} x.$$

Propriétés A.3.5. *Si f a gradient propre, alors :*

1. *f satisfait la condition de Palais–Smale,*
2. *crit(f) est compact, ainsi que vcrit(f).*

Puisque les points critiques d'une fonction de Morse sont isolés on a le

Corollaire A.3.6. *Si f a gradient propre et est de Morse, alors crit(f) et vcrit(f) sont des ensembles finis.*

Complexe des points critiques et comptage des trajectoires :

On suppose que f est une fonction de Morse qui a gradient propre.

Définition A.3.7. Soit $C_i(f_{\lambda_2}^{\lambda_1})$ le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel basé sur $\mathrm{crit}_i(f) \cap f^{-1}([\lambda_2, \lambda_1])$. Le **complexe de Morse** pour $f_{\lambda_2}^{\lambda_1}$ est le complexe de chaines gradué $C(f_{\lambda_2}^{\lambda_1})$ constitué des $C_i(f_{\lambda_2}^{\lambda_1})$:

$$C(f_{\lambda_2}^{\lambda_1}) = \bigoplus_{i=0}^{n} C_i(f_{\lambda_2}^{\lambda_1}).$$

Définitions A.3.8. Un **pseudo-gradient adapté** à une fonction de Morse f est un champ de vecteurs X tel que :
- X est confondu avec $-\nabla f$ au voisinage des points critiques,
- $X.f < 0$ ailleurs.[4]

Soit ϕ_X le flot de X. Les trajectoires de ϕ_X, $t \in \mathbb{R} \mapsto \phi(t, x)$ où $x \in f_{\lambda_2}^{\lambda_1}$, vont soit :
- de $f^{-1}(\lambda_1)$ à $f^{-1}(\lambda_2)$,
- d'un point critique à un autre point critique,
- d'un point critique à $f^{-1}(\lambda_2)$
- de $f^{-1}(\lambda_1)$ à un point critique.

Soit ζ un point critique de f. On appelle **variété stable** de ζ l'ensemble :

$$W^s(\zeta) = \{x \in \mathbb{R}^k \ / \ \lim_{t \to +\infty} \phi(t, x) = \zeta\},$$

et **variété instable** de ζ l'ensemble :

$$W^u(\zeta) = \{x \in \mathbb{R}^k \ / \ \lim_{t \to -\infty} \phi(t, x) = \zeta\}.$$

Les pseudo-gradients fournissent un outil plus souple que le gradient, tout en remplissant le même rôle au voisinage des points critiques. En particulier, on peut réclamer à un pseudo-gradient adapté à f de remplir la condition générique suivante :

4. On choisit la même convention que dans [6], avec un champ de vecteur qui "descend" le long des sous-niveaux de la fonction.

Définition A.3.9. Un pseudo-gradient adapté à f vérifie la **condition de Morse–Smale** si les variétés stables et instables se rencontrent transversalement.

Cette hypothèse assure que les trajectoires reliant un point critique à un autre sont en nombre fini, et aussi qu'aucune trajectoire ne relie deux points critiques de même indice. On construit alors la *différentielle de Morse* :

$\mathbb{R}^n$ est muni de son orientation canonique, et on fixe également une orientation sur les variétés stables, de sorte que toute trajectoire de X est naturellement munie d'un signe (voir [34]). On compte pour toute paire de points critiques d'indices consécutifs (ζ^{i+1}, ξ^i) la somme algébrique des trajectoires de X joignant ζ^{i+1} à ξ^i, notée $n(\zeta^{i+1}, \xi^i)$.

Définitions A.3.10. L'**application bord** ∂ : $C_{i+1}(f_{\lambda_2}^{\lambda_1}) \to C_i(f_{\lambda_2}^{\lambda_1})$ est alors définie pour tout point critique ζ par :

$$\partial(\zeta^{i+1}) = \sum_{j=1\ldots\#\mathrm{crit}_i(f)} n(\zeta^{i+1}, \xi_j^i)\xi_j^i \ .$$

Remarque A.3.11. Par convention, on indique l'indice de Morse d'un point critique non-dégénéré en le plaçant en exposant de celui-ci, tandis qu'un indice placé en bas à droite correspondra à une numérotation dans une famille.

Théorème A.3.12. $\partial \circ \partial = 0$. *On appelle* ***Homologie de Morse*** *l'homologie du complexe de Morse* $H_*(C(f_{\lambda_2}^{\lambda_1}), \partial)$, *notée simplement* $H_*(f_{\lambda_2}^{\lambda_1})$.

Théorème A.3.13. *L'homologie de Morse* $H_*(f_{\lambda_2}^{\lambda_1})$ *ne dépend pas du gradient adapté employé.*

Théorème A.3.14 ([37]). *L'homologie de Morse* $H_*(f_{\lambda_2}^{\lambda_1})$ *est isomorphe avec l'homologie classique (simpliciale) du sous-niveau* f^{λ_1} *relativement au sous-niveau* f^{λ_2}.

Du fait que f a gradient propre, on peut parler des grands sous-niveaux de f (voir définition 3.2.2) : on considère C une constante telle que $\mathrm{vcrit}(f) \subset]-C, C[$. On place $-\infty$ (resp. $+\infty$) en indice ou en exposant de f pour signifier $-\lambda$ (resp. λ) pour $\lambda >> C$.

On construit tout aussi bien l'homologie de Morse pour les sous-niveaux de f, $H_*(f^\lambda)$. On considèrera aussi les groupes d'homologie relative $H_*(f^{\lambda_1}, f^{\lambda_2})$ et $H_*(f^\lambda, f^\infty)$. On a les identifications suivantes :

$$\begin{aligned} H_*(f^\lambda) &= H_*(f_{-\infty}^\lambda) \\ &\simeq H_*(f^\lambda, f^{-\infty}) \end{aligned} \qquad \text{et} \qquad H_*(f^{\lambda_1}, f^{\lambda_2}) \simeq H_*(f_{\lambda_2}^{\lambda_1}).$$

Enfin, lorsqu'on considère le complexe de Morse pour le sous-niveau $f^{+\infty}$, il s'agit de prendre en compte tous les points critiques et toutes les trajectoires d'un pseudo-gradient adapté. On notera éventuellement – et pour alléger les notations – $C_*(f)$ au lieu de $C_*(f^{+\infty})$ ou $C_*(f_{-\infty}^{+\infty})$.

Annexe B

Répartition des points et des valeurs critiques en trois catégories : basse, haute et homologique

Pour les détails et preuves de cette annexe, on renvoie à l'article de D. Le Peutrec, F. Nier et C. Viterbo [35]. On rappelle que les d'homologies considérées sont à coefficients dans le corps des rationnels $\mathbb{Q}$.

Soit f fonction de Morse excellente et qui a gradient propre.

Proposition B.0.15 (proposition 2.2, [35])**.** *Les valeurs critiques de f se répartissent entre les trois possibilités exclusives suivantes :*
1. Une valeur critique c est dite ***basse*** *si l'application :*

$$H_*(f^{c+\epsilon}, f^{c-\epsilon}) \overset{k_*}{\to} H_*(f^{+\infty}, f^{c-\epsilon})$$

est nulle, où k_* est induite par l'inclusion :

$$(f^{c+\epsilon}, f^{c-\epsilon}) \overset{k}{\hookrightarrow} (f^{+\infty}, f^{c-\epsilon}).$$

2. Une valeur critique c est dite ***haute*** *si l'application :*

$$H_*(f^{c+\epsilon}) \overset{j_*}{\to} H_*(f^{c+\epsilon}, f^{c-\epsilon})$$

est nulle, où j_* est l'application induite par passage au quotient $(C_*(f^{c+\epsilon}))/(C_*(f^{c-\epsilon}))$.

3. Une valeur critique c est dite ***homologique*** *sinon.*

Remarque B.0.16. Tant que f est supposée être une fonctions de Morse excellente (voir *bifurcations* en annexe D), on a une correspondance bijective entre les valeurs et les points critiques. On parlera aussi de **point critique haut**, **bas** ou **homologique**.

Théorème B.0.17 (théorème 2.7. [35]). *Le nombre de points critiques homologiques d'indice i est le rang du i-ème groupe d'homologie $H_i(f^{+\infty}, f^{-\infty})$.*

Cas des fonctions à grande homologie relative simple (voir définition 3.2.4)

Proposition B.0.18. *Le min-max*[1] *d'une fonction a grande homologie relative simple est une valeur homologique.*

Preuve. [2]Soit c valeur critique de f. On considère le diagramme commutatif constitué des suites exactes d'homologies relatives suivant :

$$\begin{tikzcd}
\underset{=0}{H_{*+1}(f^{c+\epsilon}, f^{c-\epsilon})} \arrow[r, "\partial"'] & H_*(f^{c-\epsilon}) \arrow[r, "i_*"'] \arrow[d, "\mathbf{i}_*^{c-\epsilon}"'] & H_*(f^{c+\epsilon}) \arrow[r, "j_*"'] \arrow[d, "\mathbf{i}_*^{c+\epsilon}"'] & \underset{\simeq \mathbb{Q}}{H_*(f^{c+\epsilon}, f^{c-\epsilon})} \arrow[r, "\partial"'] & \cdots \\
& H_*(f^{+\infty}) \arrow[r, "="'] \arrow[d, "\mathbf{j}_*^{c-\epsilon}"'] & H_*(f^{+\infty}) \arrow[d, "\mathbf{j}_*^{c+\epsilon}"'] & & \\
\cdots \arrow[r, "\partial"'] & \underset{\simeq \mathbb{Q}}{H_*(f^{c+\epsilon}, f^{c-\epsilon})} \arrow[r, "k_*"'] & H_*(f^{+\infty}, f^{c-\epsilon}) \arrow[r, "l_*"'] & H_*(f^{+\infty}, f^{c+\epsilon}) \arrow[r, "\partial"'] & \underset{=0}{H_{*-1}(f^{c+\epsilon}, f^{c-\epsilon})}
\end{tikzcd}$$

Les applications i_*, k_*, l_*, $\mathbf{i}_*^{c-\epsilon}$ et $\mathbf{i}_*^{c+\epsilon}$ sont induites pas les inclusions concernées, et j_*, $\mathbf{j}_*^{c-\epsilon}$ et $\mathbf{j}_*^{c+\epsilon}$ sont induites par les quotients concernés.

Si c est une valeur critique haute, par définition j_* est zéro, ce qui entraîne que i_* est surjective. Par conséquent, si $\mathbf{i}_*^{c+\epsilon}$ est surjective, alors $\mathbf{i}_*^{c-\epsilon}$ l'est aussi, ce qui contredit la minimalité dans la définition du min-max.

De même, si c est une valeur critique basse, par définition on a k_* qui est zéro et donc l_* est injective. En ce cas, si $\mathbf{j}_*^{c+\epsilon}$ est zéro, $\mathbf{j}_*^{c-\epsilon}$ l'est aussi, ce qui entraîne que $\mathbf{i}_*^{c+\epsilon}$ surjective implique $\mathbf{i}_*^{c-\epsilon}$ surjective et la minimalité dans la définition du min-max est encore niée. □

Exemple B.0.19. La figure B.1décrit l'exemple d'une fonction à grande homologie relative simple définie sur $\mathbb{R}^2$. On compte 5 valeurs critiques indicées par ordre croissant : $c_1, \ldots, c_5$ pour 5 points critiques : un d'indice 0, trois d'indice 1 et 1 d'indice 2. Les valeurs critiques c_1 et c_4 sont basses, c_2 et c_5 sont hautes, et c_3 est l'unique valeur critique homologique.

1. Voir définition 3.2.4.
2. Voir aussi propositions 2.4 et 2.6 dans [35]

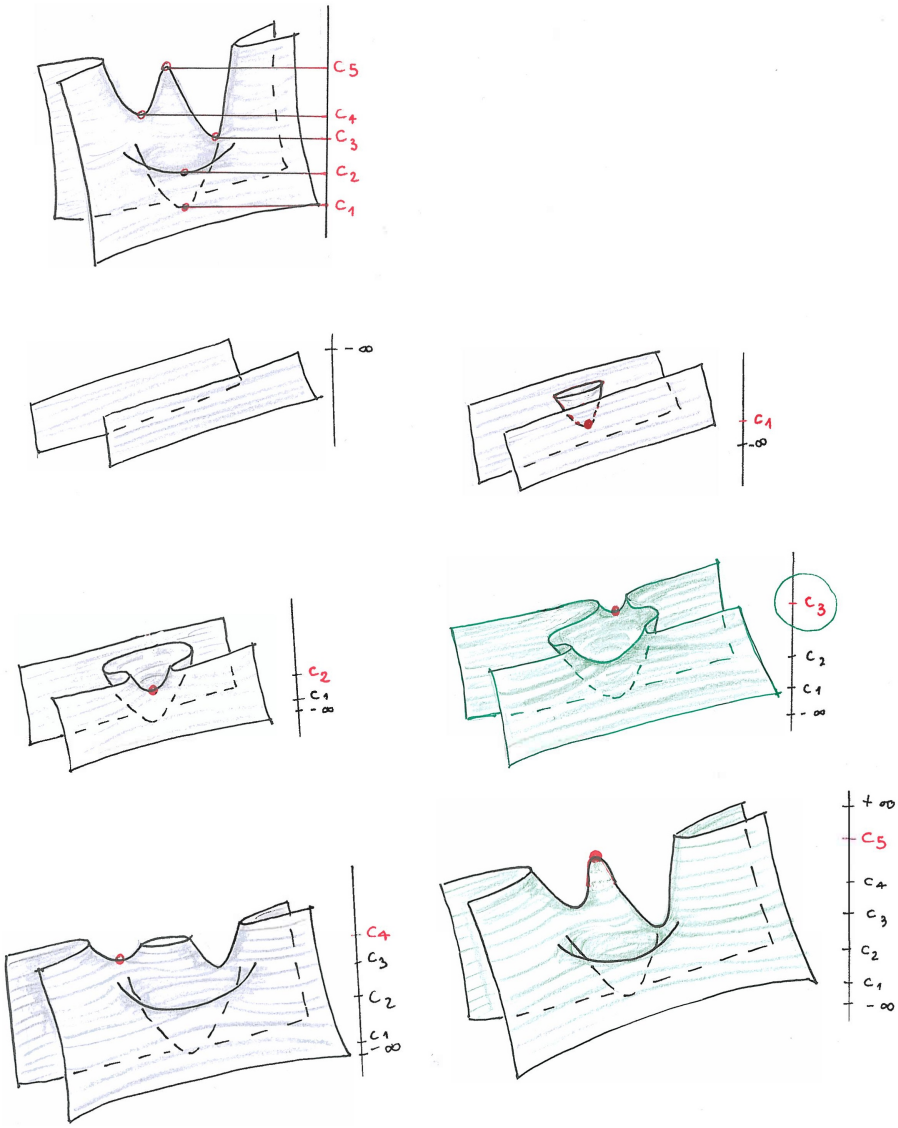


FIGURE B.1 –

Annexe C

Forme normale de Barannikov et répartition des points critiques : le couplage

Pour cette cette annexe, les références sont [33], [35] et [55].

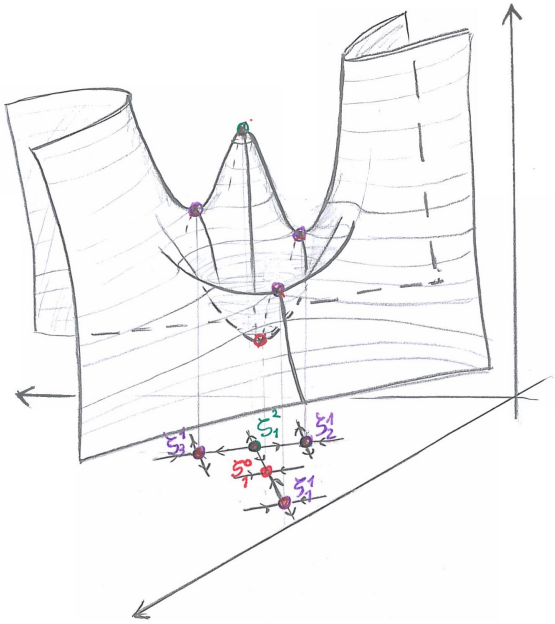
Notations :

Soit f fonction de Morse excellente sur définie sur $\mathbb{R}^n$ et qui a gradient propre. Pour tout indice k, les points critiques ζ_i^k d'indice k sont ordonnés par les valeurs critiques correspondantes :

$$\text{pour } i, j = 1 \dots \#crit_k(f)$$

$$i < j \;\Rightarrow\; f(\zeta_i^k) < f(\zeta_j^k)\ .$$

On dit que i et j sont les **hauteurs** respectives des points critiques ζ_i^k et ζ_j^k.



C.1 Forme normale de Barannikov pour une fonction de Morse excellente et couplage des points critiques

Théorème C.1.1 (Barannikov [7]). *Il existe pour chaque $C_k(f)$ du complexe de Morse un changement de base tel que l'opérateur bord ∂ admette une « forme normale » satisfaisant*

les conditions suivantes :

1. *les nouveaux générateurs de la base sont de la forme :*

$$Z_l^k = \sum_{i \leqslant l} \alpha_{l,i} \zeta_i^k \ , \quad \textit{avec } \alpha_{l,l} \neq 0$$

2. *et leur bord vérifie :*

$$\partial(Z_l^k) = 0 \quad \textit{ou} \quad \partial(Z_l^k) = Z_m^{k-1} \textit{ de sorte que } \nexists l' \neq l \textit{ tel que } \partial(Z_{l'}^k) = Z_m^{k-1} \ .$$

De plus, toute autre famille de tels générateurs vérifiant ces conditions donnera un opérateur bord ∂ identique.

Preuve. On ne rappelle ici que la construction des générateurs par induction. On aura besoin de cette construction pour la preuve du lemme C.2.3.

Soit un indice k et soit une hauteur $l \in [\![1, \#\mathrm{crit}_k(f)]\!]$. Supposons construits des générateurs Z_q^p satisfaisant les conditions du théorème pour tout indice $p < k$ et toute hauteur $q \in [\![1, \#\mathrm{crit}_p(f)]\!]$, ainsi que pour toute hauteur $q \leqslant l$ dans le cas $p = k$. Lorsque Z_q^p n'est pas de bord nul, on note $j_p(q)$ la hauteur du générateur $Z_{j_p(q)}^{p-1} = \partial(Z_q^p)$. On sait alors :

$$\forall q' \leqslant l \text{ tel que } q' \neq q \ , \ j_p(q') \neq j_p(q) \ .$$

Considérons maintenant le point critique d'indice k et de hauteur suivante $l+1$: ζ_{l+1}^k. Soit son bord est nul, soit son bord est de la forme $\partial(\zeta_{l+1}^k) = \sum_{j=1}^{\#crit_{k-1}(f)} \alpha_j Z_j^{k-1}$. Dans le premier cas, on pose $Z_{l+1}^k = \zeta_{l+1}^k$. Dans le second, on fait passer de l'autre côté de l'égalité tous les générateurs $Z_{j_k(q)}^{k-1} = \partial(Z_q^k)$ avec $q \leqslant l$, c'est à dire dont le bord est de hauteur plus petite que l :

$$(\star) \qquad \partial(\zeta_{l+1}^k - \sum_{q \leqslant l} \alpha_{j_k(q)} Z_q^k) = \sum_{j \neq j_k(q), q \leqslant l} \alpha_j Z_j^{k-1}$$

On pose alors $Z_{l+1}^k = \zeta_{l+1}^k - \sum_{q \leqslant l} \alpha_{j_k(q)} Z_q^k$. Soit son bord est nul, c'est à dire tous les α_j pour $j \neq j_k(q)$ sont nuls, et alors on continue l'induction, soit l'un de ces α_j est non nul. Notons j_0 le plus grand indice tel que $\alpha_{j_0} \neq 0$ et remplaçons $Z_{j_0}^{k-1}$ par $\sum_{j \neq j_k(q)} \alpha_j Z_j^{k-1}$. L'indice j_0 devient $j_k(l+1)$, et le nouveau générateur $Z_{j_k(l+1)}^{k-1} = \partial(Z_{l+1}^k)$ est de bord nul, puisque déjà un bord. De plus, ce changement n'a aucune incidence sur les générateurs construits auparavant, car si j_0 avait été le bord d'un générateur précédemment construit, alors il aurait été passé à gauche dans l'égalité $(\star)$. On continue ainsi l'induction. □

Le complexe ainsi créé est appelé le complexe de Morse–Barannikov. Cette forme élé-

mentaire offre deux atouts remarquables :

1. Il détecte les points critiques homologiques : si $\partial(Z_l^k) = 0$ et $\nexists Z_m^{k+1}$ tel que $\partial(Z_m^{k+1}) = Z_l^k$, alors ζ_l^k est un point critique homologique.
2. Les autres générateurs de Barannikov se répartissent en des *couples* (Z_l^k, Z_m^{k-1}) tels que $\partial(Z_l^k) = Z_m^{k-1}$. Alors ζ_l^k est un point critique de type haut, et ζ_m^{k-1} est un critique de type bas.

Ainsi, les points critiques de type haut sont couplés avec ceux de type bas, tandis que les points critiques homologiques sont laissés libres. C'est ce que l'on appelle le **couplage**.

Conséquences :
1. Dans le cas où l'**homologie relative des grands sous-niveaux** est **triviale** :

$$H_*(f^{+\infty}, f^{-\infty}) = 0 \ , \ \forall * \in [\![0, k]\!] \ ,$$

alors toutes les valeurs critiques sont couplées.

2. Dans le cas où l'**homologie relative des grands sous-niveaux** est **simple** :

$$H_*(f^{+\infty}, f^{-\infty}) \begin{cases} = \mathbb{Q} \ , \ * = \iota \\ = 0 \ , \ * \neq \iota \end{cases}$$

alors les valeurs critiques autres que le min-max sont couplées.

C.2 Forme normale de Barannikov et points critiques homologiques de la somme $f_1 \oplus f_2$

Soient f_1 et f_2 deux fonctions de Morse excellentes, définies respectivement sur $\mathbb{R}^{n_1}$ et $\mathbb{R}^{n_2}$ et qui ont gradients propres. On considère la fonction $f_1 \oplus f_2$ définie sur le produit $\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}$ par :

$$f_1 \oplus f_2(x, y) = f_1(x) + f_2(y).$$

$f_1 \oplus f_2$ a gradient propre et, quitte à perturber un peu f_1, on peut supposer que $f_1 \oplus f_2$ est aussi une fonction de Morse excellente.

À partir de pseudo-gradients X_1 et X_2 adaptés respectivement à f_1 et f_2 et qui vérifient la condition de Morse–Smale, on dispose des complexes de Morse respectifs $(C_*(f_1), \partial_1)$ et $(C_*(f_2), \partial_2)$ pour $(f_1^{+\infty}, f_1^{-\infty})$ et $(f_2^{+\infty}, f_2^{-\infty})$. Alors $X_{1\oplus 2} = (X_1, X_2)$ est un pseudo-gradient adapté à $f_1 \oplus f_2$ satisfaisant la condition de Morse–Smale.

Notations :

Pour $k_1 \in [\![0, n_1]\!]$, on note ζ^{k_1} les points critiques de f_1 d'indice k_1.

Pour $k_2 \in [\![0, n_2]\!]$, on note η^{k_2} les points critiques de f_2 d'indice k_2.

Les points critiques de $f_1 \oplus f_2$ d'indice K sont les couples $\omega^K = (\zeta^{k_1}, \eta^{k_2})$, où $k_1 + k_2 = K$.

Les points critiques de $f_1 \oplus f_2$ sont également ordonnés par les valeurs critiques que l'on signalera par I en indice, appelé à nouveau *hauteur*, comme ceci :

$$\omega_I^K = (\zeta_{i_1}^{k_1}, \eta_{i_2}^{k_2}).$$

Remarque C.2.1. On ne peut déduire la hauteur I pour un point critique de $f_1 \oplus f_2$ directement des hauteurs i_1 et i_2 des points critiques correspondant pour f_1 et f_2. On peut cependant remarquer que

$$\text{si à la fois } i_1 \leqslant l_1 \text{ et } i_2 \leqslant l_2 \text{ , alors on a } I \leqslant L \text{ .}$$

Le complexe de Morse $(C_*(f_1 \oplus f_2), \partial_{1+2})$ est isomorphe au complexe de Morse tensorisé $(C_*(f_1) \otimes C_*(f_2), \partial_1 \otimes \mathbf{1} + (-1)^* \mathbf{1} \otimes \partial_2)$:

$$\partial_{1\oplus 2}(\zeta^{k_1}, \eta^{k_2}) = (\partial_1(\zeta^{k_1}), \eta^{k_2}) + (-1)^{k_1}(\zeta^{k_1}, \partial_2(\eta^{k_2})).$$

Remarque C.2.2. Notons que $(0, \eta^{k_2}) = (\zeta^{k_1}, 0) = 0$.

On considère $Z_{l_1}^{k_1} = \sum_{i_1 \leqslant l_1} \alpha_{l_1, i_1} \zeta_{i_1}^{k_1}$ des générateurs de Barannikov pour f_1, et $H_{l_2}^{k_2} = \sum_{i_2 \leqslant l_2} \alpha_{l_2, i_2} \eta_{i_2}^{k_2}$ des générateurs de Barannikov pour f_2. On pose provisoirement les générateurs suivants pour $f_1 \oplus f_2$:

$$\Omega_L^K = (Z_{l_1}^{k_1}, H_{l_2}^{k_2}) := \sum_{i_1 \leqslant l_1 \ , \ i_2 \leqslant l_2} \alpha_{l_1, i_1} \alpha_{l_2, i_2} (\zeta_{i_1}^{k_1}, \eta_{i_2}^{k_2}) \ .$$

Chaque générateur Ω_L^K est une combinaison linéaire de points critiques de hauteur $I \leqslant L$ (voir remarque C.2.1). Le bord est donné par la formule :

$$\partial_{1\oplus 2}(\Omega_L^K) = (\partial_1(Z_{l_1}^{k_1}), H_{l_2}^{k_2}) + (-1)^{k_1}(Z_{l_1}^{k_1}, \partial_2(H_{l_2}^{k_2})).$$

On distingue trois cas :

<u>CAS 0</u> : $\begin{cases} \partial_2(H_{l_2}^{k_2}) = 0 \\ \partial_1(Z_{l_1}^{k_1}) = 0 \end{cases} \Rightarrow \partial_{1\oplus 2}(\Omega_L^K) = 0.$

$$\underline{\text{CAS 1}} : \begin{cases} \partial_2(H^{k_2}_{l_2}) = 0 \\ \partial_1(Z^{k_1}_{l_1}) = Z^{k_1-1}_{j_{k_1}(l_1)} \end{cases} \Rightarrow \partial_{1\oplus 2}(\Omega^K_L) = (\partial(Z^{k_1}_{l_1}), H^{k_2}_{l_2}),$$

$$\text{ou} \begin{cases} \partial_2(H^{k_2}_{l_2}) = H^{k_2-1}_{j_{k_2}(l_2)} \\ \partial_1(Z^{k_1}_{l_1}) = 0 \end{cases} \Rightarrow \partial_{1\oplus 2}(\Omega^K_L) = (-1)^{k_1}(Z^{k_1}_{l_1}, \partial_2(H^{k_2}_{l_2})).$$

$$\underline{\text{CAS 2}} : \begin{cases} \partial_2(H^{k_2}_{l_2}) = H^{k_2-1}_{j_{k_2}(l_2)} \\ \partial_1(Z^{k_1}_{l_1}) = Z^{k_1-1}_{j_{k_1}(l_1)} \end{cases} \Rightarrow \partial_{1\oplus 2}(\Omega^K_L) = (Z^{k_1}_{l_1}, \partial_2(H^{k_2}_{l_2})) + (-1)^{k_1}(\partial_1(Z^{k_1}_{l_1}), H^{k_2}_{l_2}).$$

Si on applique l'algorithme de la preuve du théorème C.1.1, le cas 0 ne provoque aucun changement dans l'induction, et le cas 1 change éventuellement un générateur Ω^{K-1} pour son opposé. Le cas 2 en revanche est à étudier.

On considère la situation où un générateur de $\Omega^K_L = Z^{k_1}_{l_1}, H^{k_2}_{l_2})$ correspond à un couple $(\zeta^{k_1}_{l_1}, \eta^{k_2}_{l_2})$ de points critiques homologiques. D'après ce qui précède, cela signifie :

$$(A) \begin{cases} \partial_1(Z^{k_1}_{l_1}) = 0 \\ \partial_2(H^{k_2}_{l_2}) = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad (B) \begin{cases} \nexists l'_1 \neq l_1 \text{ tel que } \partial(Z^{k_1}_{l'_1}) = Z^{k_1-1}_{m_1} \\ \nexists l'_2 \neq l_2 \text{ tel que } \partial(H^{k_2}_{l'_2}) = H^{k_2-1}_{m_2} \end{cases}.$$

Un tel générateur survit à l'algorithme. D'abord parce qu'il a un bord convenable (identités (A)). Ensuite parce qu'il n'apparait pas comme faisant partie du bord dans les cas 1 ou 2, sinon cela contredirait les identités (B).

On vient de démontrer le lemme suivant :

Lemme C.2.3. *Soient $\zeta^{k_1}_{l_1}$ un point critique homologique de f_1, et $\eta^{k_2}_{l_2}$ un point critique homologique de f_2. Alors $(\zeta^{k_1}_{l_1}, \eta^{k_2}_{l_2})$ est un point critique homologique de $f_1 \oplus f_2$.*

Remarque C.2.4. Les générateurs formés de couples haut et haut (respectivement bas et bas) donneront des points critique hauts (resp. bas). Pour les générateurs formés à partir de couples mixes, haut et bas, cela dépendra de la valeur critique.

Annexe D

Répartition des valeurs critiques dans les chemins de fonctions : bifurcations

Pour cette annexe, on renvoie en particulier à [33] et [34].

Soit $(f_t)_{t\in\mathbb{R}}$ un chemin de fonctions définies sur $\mathbb{R}^k$ qui ont gradient propre. On considère les chemins de points critiques associés : $(\zeta_i(t))_t$ et les chemins de valeurs critiques $(c_i(t))_t$. Le nombre des points critiques peut évoluer avec le temps t, ainsi que l'ensemble des indices i. On note $I(t)$ l'ensemble des indices à l'instant t.

Chemins de fonctions : naissance/mort de points critiques

À partir du lemme de transversalité de R. Thom, on peut montrer la proposition suivante :

Proposition D.0.5 ([34]). *Soit $(f_t)_{t\in[0,1]}$ un chemin de fonctions définies sur $\mathbb{R}^n$ à gradient propre. Les propriétés suivantes sont génériques pour $(f_t)_t$:*
1. Pour tout $t \in [0,1]$, exceptés un nombre fini d'instants accidentels $\{t_1, \dots, t_k\}$, $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_k < 1$, f_t est une fonction de Morse.
2. À chaque instant accidentel t_i, la fonction f_{t_i} admet un unique point critique ζ dégénéré d'ordre 1, i.e. $Hess(f_{t_i})_\zeta$ est de rang $n-1$.
3. Il existe des coordonnées locales $(x_1, \dots, x_n)$ telles que f_t se réécrive au voisinage de c et pour t voisin de t_i sous l'une des deux formes normales suivantes :

$$f_t(x) = f_{t_i}(c) + x_1^3 \pm (t - t_i)x_1 + Q(x_2, \dots, x_n),$$

où Q est une forme quadratique non dégénérée définie sur $\mathbb{R}^{n-1}$.

Ce résultat nous permet de ramener l'évolution de l'ensemble des points critiques à des naissances ou morts de paires isolées :

- Dans le cas où la forme est $f_t(x) = f_{t_i}(c) + x_1^3 + (t - t_i)x_1 + Q(x_2, \ldots, x_n)$, on voit apparaître deux nouveaux points critiques, l'un au dessus de l'autre, lorsque t croît au voisinage de t_i. Alors que dans le cas contraire, on voit disparaître deux points critiques lorsque t croît au voisinage de t.

- Les indices de ces points critiques sont consécutifs : si Q est d'indice ι, le point critique du dessus a indice $\iota + 1$ et celui de dessous a indice ι.

On rend compte de l'évolution des points et valeurs critiques dans une chemin générique de fonctions en traçant son *diagramme de Cerf* :

Définition D.0.6. Le **diagramme de Cerf** d'une famille à 1 paramètre de fonctions $(f_t)_{t\in\mathbb{R}}$ est le sous-ensemble de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ constitué des chemins lisses que forment les valeurs critiques :

$$\{(t, c_i(t)) \ / \ t \in \mathbb{R}\}.$$

Remarquons qu'il s'agit du front d'onde réalisé par la fonction génératrice :

$$F \ : (t, w) \mapsto f_t(w).$$

Bifurcations

(Voir partie 2 [33].) Pour t variant, tant que la fonction f_t reste de Morse excellente, les sous-niveaux $f_t^{c_i(t)}$ conserve la même homologie. Lorsque survient une naissance ou un mort, les points critiques concernés sont couplés ensembles, c'est-à-dire : les points critiques qui naissent (resp. meurent) ensembles sont automatiquement couplés au temps $t+\epsilon$ proche de t (resp. $t-\epsilon$). De plus, le point critique d'indice $k+1$ est de type haut, tandis que celui d'indice k est de type bas.

Dans le cas d'un croisement, si les points critiques concernés ont même indice k, il peut arriver un échange dans le couplage :

Avant l'instant t du croisement de deux points critiques d'indice k, $\zeta_j(t-\epsilon)$ et $\zeta_i(t-\epsilon)$, supposons $\zeta_j(t-\epsilon)$ couplé avec $\xi_j(t-\epsilon)$. Il se produit au croisement d'instant t une **bifurcation** si $\xi_j(t+\epsilon)$ devient couplé avec $\zeta_j(t+\epsilon)$. On peut distinguer deux cas :

Soit le second point critique $\zeta_i(t-\epsilon)$ impliqué dans le croisement était couplé avec un $\xi_i(t-\epsilon)$, alors dans ce cas $\zeta_j(t+\epsilon)$ couplé avec $\xi_i(t+\epsilon)$ (véritable échange).

Soit le second point critique $\zeta_i(t-\epsilon)$ est de type homologique, alors dans ce cas $\zeta_j(t+\epsilon)$ devient un point critique homologique, porteur d'un générateur de l'homologie en degré ι (transfert).

Puisque que les échanges se font lorsque les points critiques ont même valeur, on a le

Lemme D.0.7. *Le couplage des valeurs critiques évolue de manière continue dans le diagramme de Cerf.*

Couplage et chemins de fonctions à grande homologie relative simple : le sélecteur

Lorsque l'on a un chemin de fonctions à grande homologie relative simple, on peut en particulier suivre l'unique valeur critique homologique pour créer l'objet *sélecteur* (définition 3.2.18). Une conséquence du lemme ci-dessus est que le sélecteur d'une fonction génératrice presque-simple (définition 3.2.15 chapitre 3) est continu.

Couplage et chemin de fonctions à grande homologie relative triviale : existence d'un ruling

L'attribution de couleurs à chaque chemin de points critiques équipe le diagramme de Cerf d'une décoration que l'on appelle un **ruling**. L'étude combinatoire d'un tel objet est faite dans [39] et [44]. Il fournit un invariant des nœuds et entrelacs legendriens, et mène à la construction d'autres invariants comme le *ruling polynomial* (voir [43]).

Bibliographie

[1] V. I. Arnold. Lagrange and Legendre cobordisms. I, II. *Funktsional. Anal. i Prilozhen.*, 14(3) :1–13, 96, 1980.

[2] V. I. Arnold. *Contact geometry and wave propagation*, volume 34 of *Monographies de L'Enseignement Mathématique [Monographs of L'Enseignement Mathématique]*. L'Enseignement Mathématique, Geneva, 1989. Série des Conférences de l'Union Mathématique Internationale [Lecture Series of the International Mathematics Union], 9.

[3] V. I. Arnold. *Nombres d'Euler, de Bernouilli et de Springer pour les groupes de Coxeter et les espaces de morsification : le calcul des serpents*, volume 1. Cassini, 2000.

[4] V. I. Arnold, S. M. Gusein-Zade, and A. N. Varchenko. *Singularities of differentiable maps. Volume 1.* Modern Birkhäuser Classics. Birkhäuser/Springer, New York, 2012. Classification of critical points, caustics and wave fronts, Translated from the Russian by Ian Porteous based on a previous translation by Mark Reynolds, Reprint of the 1985 edition.

[5] Michèle Audin. *Cobordismes d'immersions lagrangiennes et legendriennes*, volume 20 of *Travaux en Cours [Works in Progress]*. Hermann, Paris, 1987.

[6] Michèle Audin and Mihai Damian. *Théorie de Morse et homologie de Floer.* Savoirs Actuels (Les Ulis). [Current Scholarship (Les Ulis)]. EDP Sciences, Les Ulis ; CNRS Éditions, Paris, 2010.

[7] S. A. Barannikov. The framed Morse complex and its invariants. In *Singularities and bifurcations*, volume 21 of *Adv. Soviet Math.*, pages 93–115. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994.

[8] Heinz H. Bauschke and Patrick L. Combettes. *Convex analysis and monotone operator theory in Hilbert spaces.* CMS Books in Mathematics/Ouvrages de Mathématiques de la SMC. Springer, New York, 2011. With a foreword by Hédy Attouch.

[9] Daniel Bennequin. Entrelacements et équations de Pfaff. In *Third Schnepfenried geometry conference, Vol. 1 (Schnepfenried, 1982)*, volume 107 of *Astérisque*, pages 87–161. Soc. Math. France, Paris, 1983.

[10] Daniel Bennequin. Entrelacements et équations de Pfaff. In *Third Schnepfenried geometry conference, Vol. 1 (Schnepfenried, 1982)*, volume 107 of *Astérisque*, pages 87–161. Soc. Math. France, Paris, 1983.

[11] Frédéric Bourgeois and Baptiste Chantraine. Bilinearised legendrian contact homology and the augmentation category. *arXiv :1210.7367v2[mathSG]*, 2013.

[12] Frédéric Bourgeois, Joshua M. Sabloff, and Lisa Traynor. Lagrangian cobordisms via generating families : construction and geography. *Algebr. Geom. Topol.*, 15(4) :2439–2477, 2015.

[13] Marc Chaperon. Lois de conservation et géométrie symplectique. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 312(4) :345–348, 1991.

[14] Marc Chaperon. On generating families. In *The Floer memorial volume*, volume 133 of *Progr. Math.*, pages 283–296. Birkhäuser, Basel, 1995.

[15] Yu. V. Chekanov. Critical points of quasifunctions, and generating families of Legendrian manifolds. *Funktsional. Anal. i Prilozhen.*, 30(2) :56–69, 96, 1996.

[16] Peter R. Cromwell. *Knots and links.* Cambridge University Press, Cambridge, 2004.

[17] Tobias Ekholm, John Etnyre, and Michael Sullivan. Non-isotopic Legendrian submanifolds in $\mathbb{R}^{2n+1}$. *J. Differential Geom.*, 71(1) :85–128, 2005.

[18] Yakov Eliashberg and Maia Fraser. Classification of topologically trivial Legendrian knots. In *Geometry, topology, and dynamics (Montreal, PQ, 1995)*, volume 15 of *CRM Proc. Lecture Notes*, pages 17–51. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998.

[19] John B. Etnyre. Legendrian and transversal knots. In *Handbook of knot theory*, pages 105–185. Elsevier B. V., Amsterdam, 2005.

[20] John B. Etnyre and Ko Honda. Knots and contact geometry. I. Torus knots and the figure eight knot. *J. Symplectic Geom.*, 1(1) :63–120, 2001.

[21] Emmanuel Ferrand. On Legendre cobordisms. In *Differential and symplectic topology of knots and curves*, volume 190 of *Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2*, pages 23–35. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999.

[22] Emmanuel Ferrand. On Legendrian knots and polynomial invariants. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 130(4) :1169–1176 (electronic), 2002.

[23] Emmanuel Ferrand. Topologie et combinatoire des sous-variétés legendriennes. *https ://webusers.imj-prg.fr/ emmanuel.ferrand/publi/HAB.pdf*, 2006.

[24] Dmitry Fuchs and Serge Tabachnikov. Invariants of Legendrian and transverse knots in the standard contact space. *Topology*, 36(5) :1025–1053, 1997.

[25] Hansjörg Geiges. *An introduction to contact topology*, volume 109 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics.* Cambridge University Press, Cambridge, 2008.

[26] Emmanuel Giroux. Sur la géométrie et la dynamique des transformations de contact (d'après Y. Eliashberg, L. Polterovich et al.). *Astérisque*, (332) :Exp. No. 1004, viii, 183–220, 2010. Séminaire Bourbaki. Volume 2008/2009. Exposés 997–1011.

[27] M. Golubitsky and V. Guillemin. *Stable mappings and their singularities.* Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1973. Graduate Texts in Mathematics, Vol. 14.

[28] Victor Guillemin and Alan Pollack. *Differential topology.* AMS Chelsea Publishing, Providence, RI, 2010. Reprint of the 1974 original.

[29] Jill Jordan and Lisa Traynor. Generating family invariants for Legendrian links of unknots. *Algebr. Geom. Topol.*, 6 :895–933 (electronic), 2006.

[30] Peter Lambert-Cole. Legendrian products. *arxiv 1301.3700v1 [math.SG]*, janvier 2013.

[31] François Laudenbach. *Topologie Différentielle.* Cours de l'école polytechnique, 1992-1996.

[32] François Laudenbach. *Transversalité, courants et Théorie deMorse.* Les éditions de l'école polytechnique, 2011.

[33] François Laudenbach. On an article by S.A. Barannikov. *expanded version of the lectures given in Winter school La Llagonne in January*, 2013.

[34] François Laudenbach. Homologie de Morse dans la perspective de l'homologie de Floer. *Mini-cours dans le cadre de la rencontre GIRAGA XIII, Yaoudé*, septembre 2010.

[35] Dorian Le Peutrec, Francis Nier, and Claude Viterbo. Precise Arrhenius law for p-forms : the Witten Laplacian and Morse-Barannikov complex. *Ann. Henri Poincaré*, 14(3) :567–610, 2013.

[36] D. N. Mazer. Stability of C^∞ mappings. V. Transversality. *Uspehi Mat. Nauk*, 29(1(175)) :99–128, 1974. Translated from the English by A. N. Varčenko.

[37] John Milnor. *Lectures on the h-cobordism theorem.* Notes by L. Siebenmann and J. Sondow. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1965.

[38] Lenhard L. Ng. Maximal Thurston-Bennequin number of two-bridge links. *Algebr. Geom. Topol.*, 1 :427–434, 2001.

[39] P. E. Pushkar and Yu. V. Chekanov. Combinatorics of fronts of Legendrian links, and Arnold's 4-conjectures. *Uspekhi Mat. Nauk*, 60(1(361)) :99–154, 2005.

[40] Dale Rolfsen. *Knots and links*, volume 7 of *Mathematics Lecture Series.* Publish or Perish, Inc., Houston, TX, 1990. Corrected reprint of the 1976 original.

[41] Valentine Roos. Variational and viscosity operators for the evolutive Hamilton-Jacobi equation. *preprint available : http ://www.math.ens.fr/ roos/iteratedvarvisc0316.pdf*, 2016.

[42] Lee Rudolph. A congruence between link polynomials. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 107(2) :319–327, 1990.

[43] Dan Rutherford. The Bennequin number, kauffman polynomial, and ruling invariants of a legendrian link : the Fuchs conjecture and beyond. *arXiv :math/0511097v1 [math.GT]*, 2005.

[44] Joshua M. Sabloff. Augmentations and rulings of Legendrian knots. *Int. Math. Res. Not.*, (19) :1157–1180, 2005.

[45] Sheila Sandon. Contact homology, capacity and non-squeezing in $\mathbb{R}^{2n} \times S^1$ via generating functions. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 61(1) :145–185, 2011.

[46] Sheila Sandon. A Morse estimate for translated points of contactomorphisms of spheres and projective spaces. *Geom. Dedicata*, 165 :95–110, 2013.

[47] Vivek Shende, David Treumann, and Eric Zaslow. Legendrian knots and constructible sheaves. *arXiv :1210.7367v2[mathSG]*, 2013.

[48] Jacek Swiatkowski. On the isotopy of Legendrian knots. *Ann. Global Anal. Geom.*, 10(3) :195–207, 1992.

[49] David Théret. *Utilisation des fonctions génératrices en géométrie symplectique globale.* 1996.

[50] David Théret. A complete proof of Viterbo's uniqueness theorem on generating functions. *Topology Appl.*, 96(3) :249–266, 1999.

[51] René Thom. Un lemme sur les applications différentiables. *Bol. Soc. Mat. Mexicana (2)*, 1 :59–71, 1956.

[52] Lisa Traynor. Generating function polynomials for Legendrian links. *Geom. Topol.*, 5 :719–760, 2001.

[53] Claude Viterbo. Symplectic topology as the geometry of generating functions. *Math. Ann.*, 292(4) :685–710, 1992.

[54] Claude Viterbo. Symplectic topology and Hamilton-Jacobi equations. In *Morse theoretic methods in nonlinear analysis and in symplectic topology*, volume 217 of *NATO Sci. Ser. II Math. Phys. Chem.*, pages 439–459. Springer, Dordrecht, 2006.

[55] Qiaoling Wei. Subtleties of the minmax selector. *arxiv 1112.5272 [math.SG]*, 2011.