



HAL
open science

Applications harmoniques laminées et rigidité des feuilletages

Benoît Rivet

► **To cite this version:**

Benoît Rivet. Applications harmoniques laminées et rigidité des feuilletages. Géométrie différentielle [math.DG]. Université Paris XI, 1999. Français. NNT: . tel-01609349

HAL Id: tel-01609349

<https://theses.hal.science/tel-01609349>

Submitted on 3 Oct 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Public Domain

ORSAY
N° d'ordre 5689

UNIVERSITÉ DE PARIS SUD
Centre d'Orsay

THÈSE

présentée pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR EN SCIENCES

Spécialité : Mathématiques

par

Benoît RIVET

Sujet

**Applications harmoniques laminées
et rigidité des feuilletages**

Soutenue le 12 mars 1999 à 10 h devant la commission d'examen composée
de :

M. Fabrice Béthuel
M. François Labourie Directeur de thèse
M. François Ledrappier
M. Pierre Pansu
M. Harold Rosenberg

Rapporteurs de thèse :

M. Victor Bangert
M. Frédéric Hélein

Abstract : Let Λ and Ξ be laminations provided with riemannian metrics. A map $f : \Lambda \rightarrow \Xi$ is a laminated harmonic map if f sends leaves to leaves and is leafwise harmonic. In this thesis, we study the existence problem for laminated harmonic maps and we study their rigidity properties. We generalize convergence results due to Gromov - initially restricted to the case when Λ is a foliation and Ξ is a manifold - and we prove that, when Λ is provided with a transverse measure of finite volume and Ξ is compact with leafwise non positive curvature, the heat flow converges weakly to a \mathcal{F} -harmonic measure. A strong convergence is shown to hold under homotopic assumptions. We also study the fibered-laminated problem : find harmonic section of $\Xi \rightarrow \Lambda$, assuming that the leaves of Ξ are flat fibrations over the leaves of Λ . After studying the structure of measures on the boundary at infinity of Hadamard manifolds, we generalize a geometric reducitivity criterion due to Labourie and we give a weak convergence theorem for the fibered-laminated heat flow. We also give stability criterions for harmonic mappings based on a Bochner type formula for the distance function. These existence and stability results are useful to study the rigidity of laminations. We extend Sampson and Schoen-Yau's existence theorem of harmonic diffeomorphisms when Λ and Ξ are laminated by hyperbolic Riemann surfaces. This is a first step towards a description of a measurable laminated Teichmüller space. We also use the fibered-laminated interpretation of superrigidity and a stability criterion to prove a stability theorem for superrigid group actions over fibrations. This last result was proven independantly, with completely different methods, by Margulis and Quian.

keywords : harmonic maps ; laminations ; foliations ; transverse measures ; superrigidity ; Teichmüller theory.

AMS-classification : 58E20 (25A33 30F60 53C12 53C35 58G11)

Orsay, le 12 Février 1999

JE commence par déclarer à mes lecteurs que, dans tout ce que j'ai fait de bon ou de mauvais, je suis sûr d'avoir mérité ou démerité et que, par conséquent, je suis seul responsable des ambiguïtés et des erreurs de mon travail. Pour ce qui est de qui est des mérites ils doivent beaucoup à tous ceux qui ont guidé mes recherches, et, en premier lieu, à François Labourie dont les questions stimulantes et l'érudition mathématique ont largement contribué à modeler cette thèse. Qu'il soit remercié pour son aide précieuse, c'est à dire : sa disponibilité, ses conseils inspirés, mais aussi : son travail de relecture, grâce auquel de nombreuses erreurs ont pu être éliminées : des fautes mathématiques, bien évidemment, mais également : quelques à priori lexicographiques hasardeux et un style au revêtement barbare. Qu'il me pardonne d'en avoir rassemblé un bouquet typique en guise de remerciement.

Cette thèse n'aurait sans doute jamais commencé si Fabrice Béthuel n'avait guidé mes premiers pas dans la recherche à l'école Polytechnique. C'est avec joie que je le retrouve aujourd'hui parmi le jury de thèse. Je dois également beaucoup à Pierre Pansu et Frédéric Paulin qui ont animé avec enthousiasme l'équipe de Topologie au cours des séminaires et des groupes de travail. J'ai admiré à de nombreuses reprises leur précision et leur clarté de vue mathématique : leurs exposés sont des modèles de perfection, dont je suis encore bien éloigné. Leur exemple aura été pour moi comme pour leurs élèves un aiguillon constant. C'est donc un honneur redoutable que m'accorde Pierre Pansu en acceptant de siéger dans le jury de thèse.

Après moult tractations et difficultés pour choisir la date de soutenance, François Ledrappier et Harold Rosenberg ont bien voulu se déplacer pour siéger dans le jury. Qu'ils soient mille fois remerciés pour leur patience pendant le lent processus de convergence qui a abouti au choix du 12 Mars. Je suis également reconnaissant à Victor Bangert et Frédéric Hélein d'avoir accepté d'être les rapporteurs de cette thèse malgré un préavis très court.

Pendant mes trois années de recherche et d'enseignement à Orsay, j'ai eu l'occasion de côtoyer de jeunes mathématiciens attachants. Jean Marc Schlenker, Jean Christophe Léger, ainsi que tous mes collègues doctorants ont contribué à créer un cadre de recherche sympathique et animé. Je remercie tout spécialement Michael Gutnic pour quelques conseils informatiques, et surtout pour son enthousiasme communicatif à faire partager ses multiples activités.

Habent sua fata libelli... Si, dans l'espoir que j'ai d'avoir réalisé un travail digne d'intérêt, je me trompais, j'avoue que j'en serais fâché, mais non pas assez pour me faire repentir d'avoir écrit, car rien ne pourra faire que je ne me sois amusé ni que j'ai beaucoup appris en préparant cette thèse. Il est temps de tourner la page et de se plonger dans les Mathématiques. Merci encore à tous ceux qui m'ont soutenu durant ces trois années et bon courage à tous pour lire cette thèse jusqu'au bout.

Introduction

CETTE thèse a pour objet d'étudier le lien entre les applications harmoniques et la géométrie des espaces laminés.

- Un espace métrique Λ est une *lamination* de dimension n s'il existe un atlas de Λ par des cartes de la forme $\mathbb{R}^n \times X$, tel que les changements de carte préservent les plaques $\mathbb{R}^n \times \{x\}$,
- Si (Λ, Ξ) sont des laminations munies de métriques riemaniennes (g_Λ, g_Ξ) sur les plaques, une application $f : \Lambda \rightarrow \Xi$ est une *application harmonique laminée* si f envoie plaque sur plaque, f est \mathcal{C}^2 plaque à plaque, et son champ de tension s'annule :

$$\tau(f) := \text{tr}(\nabla df) = 0$$

où ∇ est la connexion sur $T^*\Lambda \otimes f^*T\Xi$ induite par les connexions de Levi-Civita sur $T\Lambda$ et $T\Xi$, les espaces tangents aux plaques de Λ et Ξ .

Le problème de base que nous nous posons est le suivant :

Problème 1 *Soient Λ et Ξ deux laminations. Existe-t-il une application harmonique laminée $f : \Lambda \rightarrow \Xi$? Quelles sont les propriétés géométriques des applications harmoniques laminées?*

0.1. Applications harmoniques et rigidité

L'étude des applications harmoniques a débuté avec l'article *Harmonic mappings of riemannian manifolds* d'Eells et Sampson [15] en 1964. En utilisant la méthode de l'équation de la chaleur, Eells et Sampson démontrent que chaque classe d'homotopie d'applications entre deux variétés riemaniennes compactes M et N admet un représentant harmonique $f : M \rightarrow N$ lorsque N est à courbure $K \leq 0$. Grâce à une formule de Bochner, ils prouvent le théorème de rigidité suivant : si M est à courbure de Ricci positive ou nulle et N à courbure sectionnelle négative ou nulle, toute application harmonique $f : M \rightarrow N$ est totalement géodésique, c'est à dire : $\nabla df = 0$. De plus, lorsque M est à courbure de Ricci positive, f est constante.

La rigidité des espaces localement symétriques a été mise en évidence par Mostow [35]. Mostow a démontré que lorsque M et N sont compactes, localement symétriques, à courbure négative ou nulle, si M et N ont même type d'homotopie, en général M et N sont homothétiques. Le phénomène de rigidité de Mostow n'est pas vérifié en dimension 2. Par exemple, lorsque M est une surface hyperbolique, c'est-à-dire une variété de dimension 2 à courbure -1 , la flexibilité des structures

hyperboliques est décrite par l'espace de Teichmüller, qui est de dimension finie lorsque M est compacte.

D'après le théorème d'existence d'Eells et Sampson et le théorème d'unicité d'Hartman [23], toute classe d'homotopie d'application $f : M \rightarrow N$ admet (à translation près) un unique représentant harmonique lorsque N est à courbure négative ou nulle. Dans le cadre de la rigidité de Mostow, M et N ayant même type d'homotopie, il existe une équivalence d'homotopie $f_h : M \rightarrow N$, donc une classe d'homotopie privilégiée qui admet un unique représentant harmonique f . D'après la théorie de Mostow, on sait que l'application harmonique $f : M \rightarrow N$ est totalement géodésique.

Il a fallu attendre la découverte en 1980 par Siu [42] d'une formule de Bochner adaptée aux variétés Kähleriennes, puis celle de Corlette [10] en 1992 pour $\mathbb{H}_{\mathbb{H}}^n$ et $\mathbb{H}_{\mathbb{O}}^2$ et, dans les cas les plus généraux, les formules de Mok, Siu et Yeung [33] en 1993 pour que l'on sache démontrer directement, sans utiliser la théorie de Mostow, que toute application harmonique $f : M \rightarrow N$ est totalement géodésique lorsque :

- M est un espace compact, localement symétrique, de courbure $K \leq 0$, de rang $r \geq 2$ (respectivement M est de rang 1 et M est non archimédien, c'est-à-dire : $M = \mathbb{H}_{\mathbb{H}}^n$ ou $M = \mathbb{H}_{\mathbb{O}}^2$)
- N est à courbure $K \leq 0$ (respectivement à courbure complexifiée $K_{\mathbb{C}} \leq 0$).

La généralisation des théorèmes de rigidité aux feuilletages a été initiée par Gromov [18] [19] en 1991. Dans le cadre fibré-feuilleté, Corlette et Zimmer [11] en ont déduit un résultat de superrigidité pour les actions de groupe sur les fibrés. Quiroga [37] et Adams et Hernandez [1] ont exploité les méthodes de Gromov pour démontrer des théorèmes de rigidité pour les feuilletages à feuilles localement symétriques.

Gromov [19] développe deux techniques différentes pour étudier les applications harmoniques feuilletées : une technique de perturbation, basée sur un phénomène de stabilité pour les applications harmoniques et la méthode du flot de la chaleur. Ces deux techniques s'appliquent sous des hypothèses de régularité transverse très différentes : continuité transverse pour la technique de perturbation, mesurabilité transverse pour la méthode du flot de la chaleur. Dans cette thèse, j'exploite ces deux méthodes pour étudier les applications harmoniques laminées et j'applique les résultats obtenus pour étudier différents phénomènes de rigidités : d'une part, les actions de groupes superrigides sur les fibrés principaux, qui se ramènent à l'étude du *problème fibré-laminé*, d'autre part la rigidité des laminations et l'espace de Teichmüller des laminations par des surfaces hyperboliques.

0.2. Flot de la chaleur

Avant d'énoncer les théorèmes de convergence pour le flot de la chaleur laminé, fixons deux définitions :

- Si Λ est une lamination, les changements de carte $\mathbb{R}^n \times X \rightarrow \mathbb{R}^n \times Y$ induisent une application entre transversales $f : X \rightarrow Y$. Une *mesure transverse* sur Λ est une mesure ν sur les transversales, invariante par changement de carte,
- Une *lamination riemannienne mesurée* (Λ, g, ν) est une lamination munie d'une mesure transverse ν et d'une métrique riemannienne sur les feuilles.

Sous des hypothèses de régularité, je démontre une généralisation du théorème de convergence faible de Gromov :

Théorème 2 (Convergence vers une mesure \mathcal{F} -harmonique) .

Soit (Λ, g, ν) une lamination riemannienne mesurée régulière et Ξ une lamination riemannienne compacte à courbure négative ou nulle. Soit $f_0 : \Lambda \rightarrow \Xi$ une application d'énergie e_f et de tension $\tau(f)$ bornés. Les mesures $\mu_t = (f_t)_* \nu$ convergent faiblement (à extraction près) vers une mesure μ \mathcal{F} -harmonique, c'est-à-dire à support dans l'espace des applications harmoniques laminées

$$\overline{\mathcal{H}} = \{(x, \varphi) \in \overline{\mathcal{M}} \mid \tau(\varphi) = 0\}$$

Autrement dit, il existe une lamination riemannienne mesurée $\overline{\mathcal{H}}$ telle que l'on a le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \overline{\mathcal{H}} & \rightarrow & \Xi \\ \downarrow & & \\ \Lambda & & \end{array}$$

où la projection $\pi : \overline{\mathcal{H}} \rightarrow \Lambda$ est une isométrie locale sur les feuilles et $f_\infty : \overline{\mathcal{H}} \rightarrow \Xi$ est une application harmonique feuilletée, telle que - en un sens assez subtil - le flot de la chaleur sur Λ converge faiblement vers f_∞ .

Gromov s'était restreint au cas où Ξ est une variété, Λ un feuilletage et f_0 transversalement \mathcal{C}^∞ : nous redémontrons le théorème de Gromov dans un cadre plus général et sous des hypothèses de régularité minimales. Nous démontrons également une généralisation du théorème de convergence forte de Gromov. Définissons :

- *Le rang géométrique* d'une variété M à courbure négative ou nulle : on dira que M est de rang géométrique supérieur ou égal à k si, pour tout $k + 1$ -uplé orthonormé (X_0, \dots, X_k) , on a :

$$\sum_{\ell=1}^k R_{X_0, X_\ell}(X_0, X_\ell) < 0$$

- *Le k -support d'une mesure* : si μ est une mesure sur $\mathcal{C}^\infty(M, N)$, $\text{supp}_k(\mu)$ est l'ensemble des points x de M tel qu'il existe une fonction dans le support de μ qui est de rang au moins k au point x .

On a alors :

Théorème 3 (Convergence forte) .

Soit (Λ, g, ν) une lamination riemannienne mesurée régulière de volume fini et Ξ une lamination riemannienne régulière compacte à courbure $K \leq 0$. Soit $f_0 : \Lambda \rightarrow \Xi$ une application laminée d'énergie et de tension bornée. Si la mesure transverse ν est ergodique, le flot de la chaleur f_t :

- converge à extraction près, ν -presque partout pour la topologie \mathcal{C}^∞ sur les feuilles, vers une application harmonique laminée $f : \Lambda \rightarrow \Xi$ mesurablement homotope à f_0 , de rang supérieur à k sur le $k + 1$ -support de μ ,
- converge globalement pour la topologie L^1 sur le $k + 1$ -support de μ au sens où :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{\Lambda} \lambda_{k+1}^2(f) \varphi(d(f_t, f)) = 0$$

où φ est une fonction telle que $\varphi(x) > 0$ lorsque $x > 0$,

lorsque l'une des hypothèses suivantes est vérifiée :

- Ξ est de rang géométrique 1 et f est d'aire minimale non nulle. Dans ce cas, $\text{supp}_2(\mu)$ est de mesure pleine,
- Ξ est de rang géométrique k et $f_{t*}v$ converge (à extraction près) vers une mesure \mathcal{F} -harmonique de rang supérieur ou égal à $k + 1$.

De plus, f est l'unique représentant harmonique de la classe d'homotopie mesurable de f_0 .

Lorsque Ξ n'est pas compacte, la convergence du flot de la chaleur est un problème nettement plus difficile. Nous l'étudions dans un cas très particulier : celui des espaces fibré-laminé. On dira que Ξ est un espace fibré-laminé de fibre N au dessus de Λ s'il existe une submersion $\pi : \Xi \rightarrow \Lambda$, tel que Ξ est un N fibré plat au dessus de Λ pour la topologie fine. Autrement dit, si $\lambda \in \Lambda$, il existe un voisinage V dans la feuille contenant λ tel que $\pi^{-1}(V)$ est isométrique au produit riemannien $V \times N$. On peut alors généraliser le théorème de convergence faible :

Théorème 4 *Soit $\Xi \rightarrow (\Lambda, \nu)$ un fibré-laminé mesuré ergodique. Si les fibres de Ξ sont à courbure $K \leq 0$, on a les trois possibilités suivantes :*

- $\bar{\Gamma}(\Xi)$ admet une mesure \mathcal{F} -harmonique (qui se projette sur ν),
- Il existe un sous-fibré convexe invariant $\Gamma = Y \times \Sigma$, où $\Sigma \rightarrow \Lambda$ est un fibré-laminé mesurable, à fibres euclidiennes, et $Y \rightarrow \Lambda$ est un fibré-laminé mesurable tel que $\bar{\Gamma}(Y)$ admet une mesure \mathcal{F} -harmonique,
- Il existe un sous-fibré convexe invariant $\Gamma = Y \times \Sigma$, où $\Sigma \rightarrow \Lambda$ est un fibré-laminé mesurable, à fibres euclidiennes, et $\partial_\infty Y \rightarrow \Lambda$ est un fibré-laminé mesurable qui admet une section invariante.

0.3. Superrigidité

Le formalisme fibré-laminé peut être exploité pour étudier les actions de groupe sur des fibrés. Le problème est le suivant : étant donné \mathbb{G} et \mathbb{H} deux groupes de Lie semi-simples de type non compact et $P_{\mathbb{H}} \rightarrow M$ un fibré principal de fibre \mathbb{H} , on cherche à classifier les actions de \mathbb{G} sur $P_{\mathbb{H}}$ par automorphisme de fibré. Définissons d'abord :

- *Les actions superrigides.* Il s'agit des actions qui se réduisent essentiellement à un morphisme de groupe de \mathbb{G} dans \mathbb{H} . Plus précisément, ρ est superrigide s'il existe un morphisme $\varphi : \mathbb{G} \rightarrow \mathbb{H}$, un sous groupe compact \mathbb{K} de \mathbb{H} qui commute avec $\varphi(\mathbb{G})$ et une section σ de $P_{\mathbb{H}}$ telle que pour tout $m \in M$:

$$\sigma(g.m) = g.\sigma(m)\rho(g^{-1})\gamma(m, g)$$

où $\gamma(m, g) \in \mathbb{K}$.

- *Les groupes non déplaçables.* On dira que le groupe \mathbb{G} n'est pas déplaçable dans \mathbb{H} si, pour tout morphisme immersif $\rho : \mathbb{G} \rightarrow \mathbb{H}$, le centralisateur de $\rho(\mathbb{G})$ est compact.

En utilisant le formalisme fibré-laminé, on démontre le théorème de superrigidité :

Théorème 5 (Superrigidité de Zimmer-Margulis) .

Soit \mathbb{G} un groupe de Lie semi-simple irréductible, de type non compact, de rang $r \geq 2$. Soit \mathbb{H} un groupe de Lie semi-simple de type non compact et $P_{\mathbb{H}} \rightarrow M$ un fibré principal. Si \mathbb{G} agit par automorphisme de fibré sur $P_{\mathbb{H}}$ en préservant une

mesure de probabilité ergodique et si \mathbb{G} n'est pas déplaçable dans \mathbb{H} , l'action de \mathbb{G} est mesurablement superrigide.

En utilisant un critère de stabilité pour les applications harmoniques, on a un résultat de stabilité \mathcal{C}^0 pour les actions superrigides :

Théorème 6 Soient \mathbb{G} , \mathbb{H} deux groupes de Lie semi-simples de type non compact, M une variété compacte, simplement connexe et ρ_M une action \mathcal{C}^∞ de \mathbb{G} sur M . Soit ρ un morphisme de \mathbb{G} dans \mathbb{H} et $\rho_{P_{\mathbb{H}}}$ l'action induite par ρ_M et ρ sur le fibré $P_{\mathbb{H}} := M \times \mathbb{H} \rightarrow M$. Soit η_M une action de \mathbb{G} sur M et η une action de \mathbb{G} sur $P_{\mathbb{H}}$ par automorphisme de fibré, qui se projette sur η_M . Supposons que :

- \mathbb{G} est irréductible, de rang supérieur $r \geq 2$ ou $\mathbb{G} = \text{isom}(\mathbb{H}_{\mathbb{H}}^n)$, $\mathbb{G} = \text{isom}(\mathbb{H}_{\mathbb{O}}^2)$,
- le morphisme ρ est réductif, c'est à dire : le centralisateur de $\rho(\mathbb{G})$ dans \mathbb{H} est compact,
- l'action ρ_M de \mathbb{G} sur M est d'Anosov et préserve une mesure absolument continue,

Alors, si η est \mathcal{C}^2 proche de $\rho_{P_{\mathbb{H}}}$, η est \mathcal{C}^0 superrigide.

Un résultat analogue, utilisant les techniques de dynamique hyperbolique a été démontré indépendamment par Margulis et Qian [32].

0.4. Espace de Teichmüller

Lorsque Λ est une lamination par des surfaces de Riemann hyperboliques, je démontre l'analogue du théorème d'existence de difféomorphismes harmoniques de Sampson [38] et Schoen et Yau [40] :

Théorème 7 Soit (Λ, g, ν) une lamination riemannienne mesurée régulière compacte de dimension 2, de volume fini, et telle que g est hyperbolique. Soit g_1 une métrique hyperbolique régulière sur Λ . Le flot de la chaleur laminé :

$$f_t|_{t \geq 0} : (\Lambda, g) \rightarrow (\Lambda, g_1)$$

avec pour condition initiale $f_0 = \text{id}$ converge vers un difféomorphisme harmonique laminé f . De plus, f est l'unique représentant harmonique de la classe d'homotopie mesurable de f_0 .

Ce théorème suggère que l'espace de Teichmüller d'une lamination s'identifie à un espace de différentielles quadratiques. Cette identification reste à démontrer : quelques exemples surprenants de la théorie de Wan prouvent qu'il y a un travail délicat à fournir pour justifier l'identité $\text{Teich}(\Lambda) = \text{QD}(\Lambda)$.

0.5. Plan de la thèse

Cette thèse est divisée en 6 chapitres :

- Le premier chapitre rappelle les propriétés élémentaires des applications harmoniques. Je démontre dans ce chapitre une formule de Bochner pour la fonction distance et je donne des critères de stabilité pour les applications harmoniques,

-
- Le second chapitre est consacré à l'étude générale des laminations. Je développe le formalisme nécessaire pour démontrer les théorèmes de convergence du flot de la chaleur laminé : étude de l'espace des applications laminées, des mesures transverses sur une lamination et des invariants d'homotopie bornée,
 - Nous récoltons au chapitre 3 les fruits de nos efforts. Ce chapitre est consacré à l'étude générale des applications laminées. Je discute la régularité transverse du flot de la chaleur, les critères de stabilité pour les applications laminées, et les résultats de convergence du flot de la chaleur,
 - Je généralise au chapitre 4 les résultats d'existence et de stabilité pour les applications harmoniques dans le cadre fibré-laminé. L'étude des applications harmoniques fibré-laminées est liée à la géométrie des variétés d'Hadamard : j'étudie en particulier les propriétés géométriques des mesures sur le bord à l'infini d'une variété d'Hadamard, puis je donne une extension du critère de réductivité géométrique de Labourie [28] dans le cadre fibré-laminé,
 - Je m'intéresse dans le chapitre 5 à un cas particulier du problème fibré-laminé, adapté à l'étude des actions de groupe sur des fibrés. J'en déduis un théorème de stabilité pour les actions superrigides, et une preuve du théorème de superrigidité de Zimmer,
 - Le chapitre 6 est consacré à l'étude de l'espace de Teichmüller laminé. Je commence par rappeler la théorie de Wan et al. [45] [44], qui étudie l'espace universel de Teichmüller grâce aux difféomorphismes harmoniques du plan hyperbolique. Je généralise le théorème de Sampson [38] et Schoen et Yau [40] d'existence de difféomorphismes harmoniques dans le cadre laminé. Ce théorème est un premier pas vers une paramétrisation de l'espace de Teichmüller d'une lamination par un espace de différentielles quadratiques. L'identification entre espace de Teichmüller et différentielles quadratiques reste à démontrer : quelques exemples surprenants de la théorie de Wan prouvent qu'il y a un travail délicat à fournir pour justifier l'identité $Teich(\Lambda) = QD(\Lambda)$.

Chapitre 1

Applications harmoniques

Ce chapitre présente des résultats généraux sur les applications harmoniques : je rappelle les résultats de compacité - estimées de Schauder et principe de Bloch - de stabilité - principe de prolongement de Sampson [38] et critères de stabilité de Gromov [19] - et de rigidité - formules de Mok, Siu et Yeung [33] - pour les applications harmoniques. Je rappelle la méthode du flot de la chaleur d'Eells et Sampson [15] [29] et l'étude du problème de Dirichlet asymptotique d'après Gromov [19] et Li et Tam [29] [30] [31]. Pour énoncer les critères de stabilité des applications harmoniques dans toute leur généralité, je définis les notions de *rang géométrique* et de *déplaçabilité* et je démontre une formule de Bochner pour la fonction distance. Cette formule est classique en rang un ou sur les espaces symétriques, mais, quoique implicite chez Gromov [19], à ma connaissance elle n'avait pas été énoncée en rang supérieur. J'exploite en particulier cette formule pour généraliser un critère de Li et Tam pour l'existence de solutions au problème de Dirichlet asymptotique en rang supérieur.

Soient (M^m, g_M) , (N^n, g_N) deux variétés riemanniennes et $f : M \rightarrow N$ une application différentiable. Si x est un point de M , l'image d'un cercle de $T_x M$ par df est une ellipse : il existe une base orthonormée de $T_x M$, telle que $f^*g = \sum_{i=1}^m \lambda_i^2 dx_i^2$; où les $\lambda_i \geq 0$ sont les *coefficients de dilatation de f* , rangés par ordre décroissant : $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_m$. Pour tout point de M , on définit l'énergie de f par :

$$e_f(x) = \frac{1}{2} |df(x)|^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \lambda_i^2$$

et l'énergie totale : $E(f) = \int_M e_f(x) dx$. Si M et N sont deux variétés riemanniennes compactes, $f : M \rightarrow N$ est une *application harmonique* lorsque f est une application \mathcal{C}^1 , point critique pour l'énergie. L'équation d'Euler-Lagrange pour l'énergie se déduit par intégration de la formule :

$$\operatorname{div} \langle df | X \rangle = \langle \tau(f) | X \rangle + \langle df | \nabla X \rangle$$

où on a défini le champ de tension de f : $\tau(f) := \operatorname{trace}(\nabla df) \in f^*TN$ et X est une section de f^*TN . Si f_t une perturbation \mathcal{C}^1 de f , en posant $X = \frac{\partial f_t}{\partial t}$ on en déduit :

$$\frac{dE(f_t)}{dt} = - \int_M \langle \tau(f_t) | \frac{\partial f_t}{\partial t} \rangle$$

En particulier, une application \mathcal{C}^2 est harmonique si et seulement si son champ de tension s'annule. Remarquons que l'on obtient naturellement une suite minimisante pour l'énergie en résolvant l'équation de la chaleur $f_t|_{t \geq 0} : M \rightarrow N$:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \tau(f)$$

Une stratégie raisonnable pour le problème d'existence des applications harmoniques passe donc par l'étude de l'équation de la chaleur : existence d'une solution en temps fini et convergence lorsque $t \rightarrow \infty$.

Définition 1.1 (Application harmonique, stabilité, rigidité) .

Soient M et N deux variétés riemanniennes, et $f : M \rightarrow N$.

- Si M est compacte, f est une application harmonique lorsque f est une application \mathcal{C}^1 , point critique pour l'énergie,
- Si M n'est pas compacte, f est harmonique lorsque f est \mathcal{C}^2 , et son champ de tension s'annule $\tau(f) := \text{tr}(\nabla df) = 0$.

On dira que f est une application harmonique stable si toute application harmonique g homotope à f par une homotopie bornée vérifie $g = f$.

On dira que f est une application harmonique rigide si f est totalement géodésique : $\nabla df = 0$.

Par abus de langage, j'écrirai par la suite : g est homotope, à distance bornée de f pour signifier que g est une application homotope à f par une homotopie bornée.

1.1. Compacité : principe de Bloch

L'équation $\tau(f) = 0$ est une équation elliptique : d'après la théorie de Schauder (cf Gilbarg-Trudinger [16]) on sait donc que les topologies \mathcal{C}^1 et \mathcal{C}^∞ sont équivalentes pour les applications harmoniques :

Théorème 1.2 (Estimées de Schauder) .

Soient M et N deux variétés riemanniennes \mathcal{C}^∞ . Si $f : M \rightarrow N$ est une application harmonique :

- f est \mathcal{C}^∞ ,
- f vérifie les estimées de Schauder :

$$|\nabla^k f|(x) \leq C_{x,M,f(x),N,k,r} \sup_{B_{x,r}} |df|$$

De plus, l'équation $\tau(f) = 0$ est invariante par changement d'échelle : si on effectue un changement d'échelle des métriques à la source $g_M \rightarrow Ag_M$ et au but : $g_N \rightarrow Bg_N$, $\tau(f)|_{Ag_M, Bg_N} = \frac{1}{A^2} \tau(f)|_{g_M, g_N}$. D'après Gromov [19], on en déduit :

Théorème 1.3 (Principe de Bloch) .

Soit M une variété riemannienne (de dimension m) et N une variété riemannienne compacte à bord. Si toute application harmonique $h : \mathbb{R}^m \rightarrow N$ est constante, alors : les applications harmoniques $f : M \rightarrow N$ sont localement \mathcal{C}^∞ équicontinues ; c'est-à-dire : si x est un point intérieur de M , on a :

$$|\nabla^k f(x)| \leq C_{x,M,N,k}$$

Rappelons d'abord le :

Lemme 1.4 (Quasi-maximum) .

Soit $m \in M$ tel que la boule $B_{m,2r}$ est complète. Toute fonction localement bornée $\varphi : B_{m,2r} \rightarrow]0, +\infty[$ telle que $\varphi(m) \geq 1$ admet un quasi-maximum $x \in B_{m,r}$, c'est-à-dire tel que :

$$\varphi(x) \geq \sup(\varphi(m), \frac{1}{\lambda}\varphi(y))$$

si $d(x,y) \leq \inf(\frac{1}{\lambda\sqrt{\varphi(x)}}, r)$ pour $\lambda = (\frac{r+1}{r})^2$.

Preuve (Lemme) Posons $x_0 = m$. Si x_0 n'est pas un quasi-maximum, il existe x_1 tel que : $\varphi(x_1) \geq \lambda\varphi(x_0)$ et $d(x_0, x_1) \leq \frac{1}{\lambda\sqrt{\varphi(x_0)}}$. Par récurrence, on construit x_{n+1} tel que : $\varphi(x_{n+1}) \geq \lambda\varphi(x_n) \geq \lambda^{n+1}\varphi(x_0)$ et $d(x_n, x_{n+1}) \leq \frac{1}{\lambda\sqrt{\varphi(x_n)}} \leq \lambda^{-\frac{n+2}{2}}$ tant que x_n n'est pas un quasi-maximum. Si on peut continuer la construction pour tout $n \in \mathbb{N}$, x_n converge vers x_∞ , tel que : $d(m, x_\infty) \leq \frac{1}{\sqrt{\lambda-1}} \leq r$ et φ n'est pas localement borné en x_∞ . Par la contraposée, lorsque φ est localement bornée, on en déduit qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que x_n est un quasi-maximum. \square

Preuve (Proposition) D'après les estimées de Schauder, il suffit de vérifier que toute application harmonique $f : M \rightarrow N$ est d'énergie (localement) bornée.

- Soit $m \in M \setminus \partial M$ et $p \in \mathbb{N}$. Posons $2r = d(m, \partial M)$. Supposons qu'il existe $f_n : M \rightarrow N$ une suite d'applications harmoniques telles que : $|df_n(m)| \rightarrow +\infty$. On sait qu'il existe un quasi-maximum x_n pour $|df_n|$: posons $A_n = |df_n|(x_n)$,
- Après changement d'échelle, f_n définie sur la variété riemannienne pointée $(M_n, x_n) = (M, x_n, A_n g_M)$ à valeur dans (N, g_N) vérifie : $|df_n|(x_n) = 1$, et $|df_n|(x) \leq \lambda$ si $d(x, x_n) \leq r_n = \frac{\sqrt{A_n}}{\lambda}$. De plus : (M_n, x_n) converge vers $(\mathbb{R}^m, 0)$ au sens où le tenseur de courbure et toutes ses dérivées covariantes tendent vers 0 : $|\nabla^k R|_{M_n} = A_n^{-k-4} |\nabla^k R|_M \rightarrow 0$,
- La suite $f_n : (M_n, x_n) \rightarrow (N, g_N)$ est \mathcal{C}^1 équicontinue. D'après les estimées de Schauder, f_n est en fait \mathcal{C}^∞ équicontinue, donc converge (à extraction près) pour la topologie \mathcal{C}^∞ vers $h : (\mathbb{R}^m, 0) \rightarrow N$, harmonique, non constante puisque $|dh(0)| = 1$.

On en déduit que si toute application harmonique $h : (\mathbb{R}^m, 0) \rightarrow N$ est constante, toute application harmonique $f : M \rightarrow N$ est d'énergie (localement) bornée, puis, d'après les estimées de Schauder, que toutes les dérivées de f sont localement bornées. \square

Corollaire 1.4.1 Soit M une variété riemannienne et N une variété riemannienne à bord, à courbure $K \leq 0$, qui n'admet pas de géodésique infinie : $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow N$. Les applications harmoniques $f : M \rightarrow N$ sont localement \mathcal{C}^∞ équicontinues.

Corollaire 1.4.2 Soit $f : M \rightarrow N$ une application harmonique. Si N est un espace symétrique de type non compact et si l'image de $B_{x,r}$ est de diamètre borné $d \leq R$, les dérivées de f sont contrôlées :

$$|\nabla^k f(x)| \leq C(x, M, r, R, N)$$

Preuve S'il existe $f_n : M \rightarrow N$ telles que $|df_n(x)| \rightarrow \infty$, on a démontré qu'il existe $h : \mathbb{R}^m \rightarrow N$, d'énergie bornée, telle que $|dh(0)| = 1$. Si x_n est une suite maximale pour $|dh|$, $h_n(x) = h(x - x_n)$ est une suite d'applications harmoniques \mathcal{C}^1 équicontinues, qui convergent, à extraction près, vers $\psi : \mathbb{R}^m \rightarrow N$, dont l'énergie est maximale en 0 : $|d\psi(0)| = \sup |d\psi| \neq 0$. En appliquant le principe du maximum fort à la formule de Bochner : $\Delta e_f = |\nabla df|^2 - R_{f_i, f_j}(f_i, f_j)$ (cf proposition 1.11), on en déduit que ψ est totalement géodésique. En particulier, si $d\psi(0)(X) = 1$, $\gamma_X : \mathbb{R} \rightarrow N$ défini par $\gamma_X(t) = \psi(tX)$ est une géodésique infinie. Par la contraposée, s'il n'existe pas de géodésique infinie $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow N$, les applications harmoniques $f : M \rightarrow N$ sont localement \mathcal{C}^∞ équicontinues. \square

1.2. Stabilité des applications harmoniques

1.2.1. Principe de prolongement

Le principe de prolongement de Sampson [38] pour les applications harmoniques est une conséquence directe du théorème d'annulation d'Aronszajn [2] :

Théorème 1.5 (Théorème d'annulation d'Aronszajn [2]) *Soit Δ un opérateur elliptique du second ordre sur un ouvert U de \mathbb{R}^n et $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ telle que :*

$$|\Delta f| \leq C(|df| + |f|)$$

Si f et toutes ses dérivées s'annulent en $x_0 \in M$, alors $f = 0$ partout.

Corollaire 1.5.1 (Principe de prolongement de Sampson [38]) .

Soient M et N deux variétés riemanniennes \mathcal{C}^∞ . Les applications harmoniques $f : M \rightarrow N$ vérifient le principe de prolongement : si f et g coïncident en $x_0 \in M$, ainsi que toutes leurs dérivées, alors $f = g$ partout.

Corollaire 1.5.2 *Soit $f : M \rightarrow N$. Supposons que toutes les dérivées de f sont parallèles en $x_0 \in M$, c'est à dire qu'il existe $Y \in T_{f(x_0)}N$ tel que, pour tout $k \in \mathbb{N}$:*

$$\nabla^k f_{x_0}(X_1, \dots, X_k) = \lambda(X_1, \dots, X_k)Y$$

f factorise à travers la géodésique $\gamma(t) = \exp_{f(x_0)}(tY)$. Il existe donc une fonction harmonique $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}$ telle que : $f(x) = \gamma(\varphi(x))$.

Preuve (Corollaires) Dans une carte locale, f vérifie : $\Delta f = \Gamma_f(df, df)$ où Δ est le laplacien riemannien sur M et Γ_f est donnée par les symboles de Christoffel en $f(x)$ sur N .

— On sait que :

$$\begin{aligned} \Delta(f - g) &= (\Gamma_f(df, df) - \Gamma_f(dg, dg)) + (\Gamma_f(dg, dg) - \Gamma_g(dg, dg)) \\ |\Delta(f - g)| &= C|df - dg| + C|f - g| \end{aligned}$$

Si f et g coïncident, ainsi que toutes leurs dérivées au point x_0 , d'après le théorème d'Aronszajn appliqué à $u = f - g$ on en déduit que $f = g$,

— On peut choisir au voisinage de $f(x_0)$ des coordonnées y^A telles que $\gamma(t) = (t, 0, \dots, 0)$ et $\Gamma_{(t,0)}(dt, _) = 0$. Dans ce cas, $g(x) = (f^2, \dots, f^n)(x)$ vérifie $|\Delta g| \leq C(|dg| + |g|)$ et, puisque g et toutes ses dérivées s'annulent en x_0 , $g = 0$ partout. \square

1.2.2. Formules de Bochner pour la fonction distance

Gromov [19] a donné des critères de stabilité pour les applications harmoniques $f : M \rightarrow N$ lorsque N est à courbure : $K < 0$, ou lorsque $K \leq 0$ et $Ric < 0$. Ces critères se généralisent sous des hypothèses plus exotiques sur la courbure. Introduisons donc les définitions :

Définition 1.6 (k-Courbure, rang géométrique) .

Soit M^m une variété riemannienne. A $X \in TM$ et $P \in Gr_k(TM)$, un k -plan orthogonal à X , on associe la k -courbure :

$$Ric_k(X, P) := tr_P R_{X, \cdot}(X, \cdot) = \sum_{i=1}^k R_{X, E_i}(X, E_i)$$

où $(E_i)_{i=1}^k$ est une base orthonormée de P .

M est à k -courbure majorée si $Ric_k(X, P) \leq K|X|^2$, ce que l'on notera : $Ric_k \leq K$. Le rang géométrique de M est : $rg_g(M) = \inf\{k | \exists \kappa > 0 / Ric_k < -\kappa^2\}$.

La courbure sectionnelle s'identifie à la 1-courbure et la courbure de Ricci à la $(m-1)$ -courbure. Si M est un espace symétrique de type non compact, le rang de M (en tant qu'espace symétrique) ne s'identifie pas à son rang géométrique :

- lorsque M est de rang 1, le rang géométrique de M est également 1,
- lorsque $M = N \times \mathbb{R}$, la courbure de Ricci de M s'annule pour $X = (0, 1) \in TN \times \mathbb{R}$ et le rang géométrique de M est infini,
- lorsque M est de rang k , sans facteur euclidien, M est de courbure de Ricci négative, donc : $rg_g(M) \leq m - 1$. Si X est dans l'intersection de deux plats maximaux distincts P^\pm , $Q = X^\perp \cap (P^+ \cup P^-)$ est de dimension $d \geq k$ et vérifie : $Ric_d(X, Q) = 0$. En particulier : $rg_g(M) \geq k + 1$.

Dans le cadre des espaces symétriques, il est commode de définir la notion de déplaçabilité. Cette notion géométrique a un analogue en théorie de groupe : un sous groupe \mathbb{G} d'un groupe semi simple \mathbb{H} n'est pas déplaçable si le centralisateur de \mathbb{G} dans \mathbb{H} n'est pas compact.

Définition 1.7 (Application déplaçable) .

Soient M et N deux variétés riemanniennes telles que N est à courbure $K \leq 0$ et $f : M \rightarrow N$. f n'est pas localement déplaçable en $x \in M$ s'il existe $\kappa \neq 0$ tel que pour tout $X \in T_{f(x)}N$ il existe $Y \in U_x M$ tel que :

$$R_{X, df(Y)}(X, df(Y)) \leq -\kappa^2 |X|^2$$

f n'est pas déplaçable s'il existe $\kappa \neq 0$ tel que pour tout $x \in M$, pour tout $X \in T_{f(x)}N$, il existe $Y \in U_x M$ tel que :

$$R_{X, df(Y)}(X, df(Y)) \leq -\kappa^2 |X|^2$$

La condition de déplaçabilité est liée à la stabilité des applications harmoniques. Illustrons le par un exemple particulièrement frappant. Supposons fixée une immersion totalement géodésique $i : M \times \mathbb{R} \rightarrow N$ et définissons $f : M \rightarrow N$ par $f(x) = i(x, 0)$. Dans ce cas, $(0, 1) \in T_x M \times \mathbb{R}$ définit un champ de vecteur $X = di_{(x, 0)}(0, 1) \in T_{f(x)}N$, tel que $R_{X, df(Y)}(X, df(Y)) = 0$ pour tout $Y \in T_x M$. f est donc une application harmonique déplaçable. De plus, il existe une famille d'applications harmoniques homotopes à f par une homotopie bornée : $f_t(x) = i(x, t)$. f n'est donc pas une application harmonique stable.

Plus généralement, on peut déformer une application f en $f_t = \exp_{f(x)}(tX)$ sans changer le Hessien de f - au premier ordre - si $X \in f^*TM$ est un champ de vecteur parallèle tel que $R_{X,df(Y)}(X,df(Y)) = 0$ pour tout $Y \in TM$.

Dans le cadre des espaces localement symétriques, on peut donner une version algébrique de la condition de déplaçabilité. Nous démontrerons dans la proposition 5.3 que si $X_{\mathbb{G}}$ et $X_{\mathbb{H}}$ sont deux espaces localement symétriques de type non compact et $f : X_{\mathbb{G}} \rightarrow X_{\mathbb{H}}$ une immersion totalement géodésique, il existe un morphisme de groupe $\rho : \mathbb{G} \rightarrow \mathbb{H}$ tel que $f(g.x) = \rho(g).f(x)$. On peut alors vérifier :

Proposition 1.8 *Soit $f : X_{\mathbb{G}} \rightarrow X_{\mathbb{H}}$ une immersion totalement géodésique et $\rho : \mathbb{G} \rightarrow \mathbb{H}$ le morphisme associé. Soit $Z(\mathbb{G}) = \{h \in \mathbb{H} | h.\rho(g) = \rho(g).h\}$ le centralisateur de $\rho(\mathbb{G})$ dans \mathbb{H} et $Z_0(\mathbb{G})$ la composante connexe de l'identité dans $Z(\mathbb{G})$. f est déplaçable si et seulement si $Z_0(\rho(\mathbb{G}))$ n'est pas compact.*

Preuve Quitte à conjuguer ρ par un automorphisme de \mathbb{H} , on peut supposer que $f([id]) = [id]$. Soient \mathcal{G} l'algèbre de Lie de \mathbb{G} et \mathcal{H} l'algèbre de Lie de \mathbb{H} . Soit $\sigma \in \mathbb{H}$ la symétrie géodésique par rapport à $[id]$. On peut décomposer $\mathcal{H} = \mathcal{X} + \mathcal{P}$, où $\sigma|_{\mathcal{X}} = id$ et $\sigma|_{\mathcal{P}} = -id$. On sait alors que $TX_{\mathbb{H}} \simeq \mathcal{P}$ et pour $X, Y \in \mathcal{P}$: $R_{X,Y}(X, Y) = -\| [X, Y] \|^2$. Si f est localement déplaçable en $x = [id]$, il existe $Z \in \mathcal{P}$ tel que Z commute avec $D\rho(\mathcal{G})$. Le groupe $\exp(tZ)$ est alors un groupe non compact, qui commute avec $\rho(\mathbb{G})$. \square

Si M est une variété riemannienne à courbure négative ou nulle, la fonction distance est convexe : $Hess(d) \geq 0$ en dehors de la diagonale $M \subset M \times M$. Sous des conditions de courbure un peu plus stricte, on peut estimer plus finement le Hessien de la fonction distance :

Théorème 1.9 (Estimation du champ de Jacobi) .

Soient M une variété riemannienne simplement connexe à courbure négative ou nulle, x et $y \in M$ tels que $x \neq y$.

— *si M est de rang 1 : $K \leq -\kappa^2 < 0$, le hessien de la fonction distance vérifie :*

$$Hess(d)((X, Y), (X, Y)) \geq \kappa |X|^2 \tanh(\kappa d(x, y))$$

lorsque $X \in T_x M$ est orthogonal à la géodésique reliant x à y ,

— *si M un espace localement symétrique de type non compact, et X vérifie :*

$$R_{X,\dot{\gamma}}(X, \dot{\gamma}) \leq -\kappa^2 |X|^2$$

où γ est la géodésique reliant x à y , alors :

$$Hess(d)((X, Y), (X, Y)) \geq \kappa |X|^2 \tanh(\kappa d(x, y))$$

— *si M est de rang géométrique k : $Ric_k \leq -\kappa^2$ et $(X_i)_{i=1}^{k+1}$ est une famille orthonormée de $T_x M$, le hessien de la fonction distance vérifie :*

$$\sum_{i=1}^{k+1} Hess(d)((X_i, Y_i), (X_i, Y_i)) \geq \kappa \varphi(\kappa d(x, y))$$

où : $\varphi(d) = d - \frac{4d^3}{9}$ lorsque $d \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$; et $\varphi(d) = \frac{1}{\sqrt{3}}$ lorsque $d \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$.

1.2. STABILITÉ DES APPLICATIONS HARMONIQUES

Preuve Si $\gamma(t)|_{t \in [0,d]}$ est la géodésique reliant x et y et $X_t|_{t \in [0,d]}$ le champ de Jacobi le long de γ , tel que $X_0 = X$ et $X_d = Y$, le Hessien de la fonction distance est :

$$\text{Hess}(d)((X,Y),(X,Y)) = \int_0^d |\nabla_{\dot{\gamma}} X_t|^2 - R_{\dot{\gamma}X_t}(\dot{\gamma}, X_t) dt$$

- En rang 1 : $\text{Hess}(d)(X_0, X_d) \geq \int_0^d |\nabla_{\dot{\gamma}} X_t|^2 + \kappa^2 |X_t|^2 dt$. A changement d'échelle près : $g \rightarrow \kappa^2 g$, par transport parallèle d'une base orthonormée, on se ramène à démontrer dans \mathbb{R}^{n-1} :

$$\int_0^d |\dot{X}|^2 + |X|^2 \geq \varphi(d)$$

lorsque $|X(0)| = 1$. L'équation d'Euler-Lagrange associée est : $\ddot{X} = X$ et $\dot{X}(d) = 0$. Elle admet pour unique solution :

$$X(t) = (\cosh(t) - \coth(d) \sinh(t)) X(0)$$

qui vérifie : $\int_0^d |\dot{X}|^2 + |X|^2 = \tanh(d)$,

- Si M est localement symétrique, le tenseur de courbure reste invariant par transport parallèle. Si $X(t) = \sum_{i=2}^m x_i(t) E_i(t)$, où E_i est une base orthonormée parallèle de $T_\gamma(t)M$ telle que $\dot{\gamma} = E_1$ et $X(0) = E_2$, on est amené à minorer dans \mathbb{R}^{m-1} :

$$\int_0^d |\dot{X}|^2 + R(X, X)$$

On sait que $x_2(0) = 1$ et que $\int_0^d |\dot{X}|^2 + R(X, X) \geq \int_0^d |x_2|^2 + |x_2|^2$. On est donc ramené exactement à la formule en rang 1,

- En rang k , on est ramené à minorer : $H(X) = \int_0^d |\dot{X}(t)|^2 + g_t(X(t), X(t)) dt$ lorsque $X(t) \in \mathcal{M}_k(\mathbb{R})$ vérifie $X(0) = \mathbb{1}$ et g_t est la forme bilinéaire symétrique induite sur $M_n(\mathbb{R})$ par une forme bilinéaire g_t sur \mathbb{R}^n , symétrique, positive, de trace $\text{tr}(g_t) = 1$. En particulier $g_t(\mathbb{1}, \mathbb{1}) = 1$ et $g_t(a, a) \leq |a|^2$ pour tout $a \in \mathbb{R}^k$.
- Il y a un phénomène de compensation entre les deux termes à intégrer :

$$\int_0^d |\dot{X}|^2 \leq \alpha \Rightarrow \int_0^d g_t(X, X) \geq \psi(\alpha, d)$$

où $\psi(x, d) = d - \frac{4}{3} \sqrt{d^3 x}$ lorsque $x \leq \frac{1}{4d}$, et $\psi(x, d) = \frac{1}{12x}$ lorsque $x \geq \frac{1}{4d}$. En effet : d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, pour $t \leq d$, on a :

$$|X - \mathbb{1}| \leq \int_0^t |\dot{X}| \leq \sqrt{\int_0^t |\dot{X}|^2} \int_0^t 1 \leq \sqrt{\alpha t}$$

D'où l'on déduit :

$$\begin{aligned} \int_0^d g_t(X, X) &\geq \int_0^d g_t(\mathbb{1}, \mathbb{1}) - 2g_t(X - \mathbb{1}, \mathbb{1}) + g_t(X - \mathbb{1}, X - \mathbb{1}) \\ &\geq \int_0^d \sup(0, 1 - 2\sqrt{\alpha u}) du = \psi(\alpha, d) \end{aligned}$$

— En jouant sur cette compensation, on déduit :

$$\int_0^d |\dot{X}|^2 \leq \alpha_n \Rightarrow \int_0^d |\dot{X}|^2 \leq \alpha_{n+1} := H(X) - \psi(\alpha_n, d)$$

En posant $\alpha_0 = H(X)$, on définit ainsi une suite α_n telle que :

$$\forall n \geq 0, \int_0^d |\dot{X}|^2 \leq \alpha_n$$

En étudiant l'application $\alpha \rightarrow H(X) - \psi(\alpha, d)$, on vérifie qu'il existe $\gamma > 0$ tel que :

- Si $H(X) < \gamma$, la suite α_n devient négative à partir d'un certain rang, ce qui contredit : $\alpha_n \geq 0$,
- Si $H(X) > \gamma$, la suite α_n est positive, décroissante, donc converge vers une limite ℓ telle que : $\ell = H(X) - \psi(\ell, d)$, et $\frac{\partial}{\partial \ell}(H(X) - \psi)(\ell, d) \leq 1$.

On en conclut que $H(X) \geq \gamma$, où γ est caractérisé par : $\gamma - \psi(\ell, d) = \ell$, lorsque ℓ vérifie : $\frac{\partial}{\partial \ell} \psi(\ell, d) = -1$. On en déduit la formule de Bochner par un calcul de routine. \square

Remarque 1.9.1 .

Lorsque $K \geq -\zeta^2$, on peut aussi démontrer : $Hess(d)((X, Y), (X, Y)) \leq 4\zeta(|X|^2 + |Y|^2) \coth\left(\frac{\zeta d}{2}\right)$

Corollaire 1.9.2 (Distance entre deux fonctions) .

Soit M une variété riemannienne, N une variété simplement connexe, à courbure négative ou nulle, de rang géométrique k : $Ric_k \leq -\kappa^2 < 0$. Soient f et g deux applications de M dans N . On a :

$$\Delta(d(f, g)) \geq -|\tau(f)| - |\tau(g)| + \kappa \lambda_{k+1}(f)^2 \varphi(\kappa d(f, g)) \quad (1.1)$$

Si N est à courbure minorée : $K \geq -\zeta^2$, on a :

$$\Delta(d(f, g)) \leq |\tau(f)| + |\tau(g)| + 4\zeta(|df|^2 + |dg|^2) \coth\left(\frac{\kappa d(f, g)}{2}\right) \quad (1.2)$$

Corollaire 1.9.3 (Espaces symétriques) .

Soit N un espace symétrique. Soit $f : M \rightarrow N$ une application harmonique, qui n'est pas localement déplaçable, c'est à dire telle que pour tout $X \in f^*TN$, il existe $Y \in TM$ tel que :

$$R_{X, df(Y)}(X, df(Y)) \leq -\kappa^2 |X|^2 |Y|^2$$

Si $g : M \rightarrow N$ est homotope à f , g vérifie :

$$\Delta d(f, g) \geq -|\tau(g)| + \kappa \tanh(\kappa d(f, g))$$

Corollaire 1.9.4 (Formule de Bochner pour le flot de la chaleur) .

Soit M une variété riemannienne, N une variété simplement connexe à courbure négative ou nulle, de rang géométrique k : $Ric_k \leq -\kappa^2 < 0$. Soient f et g deux applications de M dans N , f_t et g_t les flots de la chaleur associés à f et g . On a :

$$\Delta(d(f_t, g_t)) \geq \frac{\partial}{\partial t} d(f_t, g_t) + \kappa \lambda_{k+1}(f_t)^2 \varphi(\kappa d(f_t, g_t)) \quad (1.3)$$

Si N est à courbure minorée : $K \geq -\zeta^2$, on a :

$$\Delta(d(f_t, g_t)) \leq \frac{\partial}{\partial t} d(f_t, g_t) + 4\zeta (|df_t|^2 + |dg_t|^2) \coth\left(\frac{\kappa d(f_t, g_t)}{2}\right) \quad (1.4)$$

Remarque 1.9.5 On a démontré une inégalité optimale en rang 1 :

$$\text{Hess}(d)(X, X) \geq \tanh(d)$$

On peut conjecturer qu'en rang supérieur, la fonction optimale pour la formule de Bochner est également $\varphi(x) = \tanh(x)$.

Dans tous les corollaires, les formules sont valables lorsque $f(x) \neq g(x)$ - respectivement $f_t(x) \neq g_t(x)$ -

Preuve (Corollaires 1.9.2 et 1.9.4) On calcule :

$$\begin{aligned} \Delta(d(f, g)) &= \nabla d(\tau(f), \tau(g)) + \text{tr}(\text{Hess}(d) \circ (df, dg)) \\ &= \frac{\partial d(f, g)}{\partial t} + \text{tr}(\text{Hess}(d) \circ (df, dg)) \end{aligned}$$

Sachant que $|\nabla d(X, Y)| \leq |X| + |Y|$, les inégalités [1.1] et [1.3] se déduisent de la formule de Bochner en constatant que, les directions principales de dilatation de f en x , X_1, \dots, X_{k+1} sont orthonormées, d'images orthogonales et vérifient $|df(X_i)|^2 \geq \lambda_{k+1}^2(f)$. Les inégalités [1.2] et [1.4] se déduisent de la remarque 1.9.1. \square

D'après les formules de Bochner pour la fonction distance, on a les critères de stabilité pour les applications harmoniques :

Proposition 1.10 (Critères de stabilité) .

Soit $f : M \rightarrow N$ une application harmonique, où N est à courbure de Ricci minorée. f est stable dès que :

- N est de rang géométrique k : $\text{Ric}_k \leq -\kappa^2$, et f est de rang au moins $k+1$ en dehors d'un compact K : $\inf_{M \setminus K} \lambda_{k+1}(f) > 0$,
- N est localement symétrique, de type non compact, et f n'est pas déplaçable.

Preuve Soit g une application harmonique, homotope à f par une homotopie bornée. Passons au revêtement universel, et définissons les relevés de f et g $\tilde{f}, \tilde{g} : \tilde{M} \rightarrow \tilde{N}$. f et g étant homotopes, $d(\tilde{f}, \tilde{g})$ est $\pi_1(M)$ invariante, donc définit une fonction sur M , que l'on notera $d(f, g)$. De plus, la fonction $d(\tilde{f}, \tilde{g})$ vérifie les formules de Bochner. En particulier, $\Delta d(f, g) \geq 0$. Supposons le maximum de la distance atteint : d'après le principe du maximum fort, on en déduit que f et g sont à distance constante. Si $f \neq g$, d'après la formule de Bochner, on a : $\Delta d(f, g) > 0$ en dehors d'un compact, ce qui est contradictoire. Si $f = g$, le maximum de la distance n'est donc pas atteint. D'après le principe du maximum d'Omori [36] et Yau [47], il existe une suite maximisante pour $d : x_n$ telle que $\limsup \Delta d(f(x_n), g(x_n)) \leq 0$.

- Si N est de rang géométrique k , on sait que, en dehors d'un compact K :

$$\Delta d(f, g) \geq \epsilon \kappa \varphi(\kappa d(f, g))$$

où $\epsilon = \inf_{M \setminus K} \lambda_{k+1}^2(f) > 0$. On en déduit $\epsilon \kappa \varphi(\kappa \sup(d(f, g))) \leq 0$, ce qui contredit

$$\sup(d(f, g)) > 0$$

- Si N est localement symétrique et $f(M)$ n'est pas localement déplaçable, d'après la formule de Bochner : $\Delta d(f, g) \geq \kappa \tanh(\kappa d(f, g))$. La stabilité de f se déduit à nouveau par application du principe du maximum d'Omori et Yau. \square

Remarque 1.10.1 (Critère de stabilité d'Hartman [23]) .

Lorsque M est compacte, si $f^\pm : M \rightarrow N$ sont deux applications harmoniques homotopes, à valeur dans un espace à courbure négative ou nulle, l'homotopie géodésique entre f^- et f^+ , $F : M \times [0, 1] \rightarrow N$ est une application harmonique : pour tout $t \in [0, 1]$, $\tau(f_t) = 0$.

On en déduit le critère de stabilité : si $f : M \rightarrow N$ est harmonique, de M compacte, à valeur dans N à courbure $K \leq 0$, s'il existe un point où $f(M)$ n'est pas localement déplaçable, f est stable.

Remarquons que si $M = \mathbb{S}^1$ et f est une géodésique périodique, on obtient une famille à un paramètre d'applications harmoniques homotopes, à distance bornée de f en posant :

$$f_t(e^{i\theta}) = f(e^{i(\theta+t)})$$

Preuve Comme $\Delta d(f_0, f_1) \geq 0$, et M est compacte, $d(f_0, f_1)(x)$ est constante. Si f_t est l'homotopie géodésique entre f_0 et f_1 , on peut appliquer le flot de la chaleur $f_t^s|_{s \geq 0}$ à f_t . On sait que : $\frac{\partial d(f_t^s, f_\theta^s)}{\partial s} \leq \Delta d(f_t^s, f_\theta^s)$, c'est-à-dire : le flot de la chaleur est contractant. Pour $s \geq 0$, $f_t^s|_{t \in [0, 1]}$ est donc une homotopie entre f_0 et f_1 plus courte que l'homotopie géodésique. Nécessairement, sachant que $d(f_0, f_1)(x)$ est constante : $f_t^s = f_t$. Pour tout t , on en déduit : $\tau(f_t) = 0$. Enfin, s'il existe un point où $f_0(M)$ n'est pas localement déplaçable et $f_0(x) \neq f_1(x)$, $\Delta d(f_0, f_1)(x) > 0$, ce qui contredit : $d(f_0, f_1)$ est constante. \square

1.3. Rigidité : les formules de Mok, Siu et Yeung

Le prototype de la formule de rigidité de Mok, Siu et Yeung [33] est la formule de Bochner pour les applications harmoniques $f : \mathbb{R}^m \rightarrow N$.

$$\Delta e_f = |\nabla df|^2 - R_{f_i, f_j}^N(f_i, f_j)$$

d'où l'on déduit le résultat de rigidité :

Théorème 1.11 (Eells-Sampson [15]) *Soient M une variété riemannienne compacte plate et N une variété riemannienne à courbure $K \leq 0$. Toute application harmonique $f : M \rightarrow N$ est totalement géodésique*

Plus généralement, si $f : \mathbb{R}^n \rightarrow N$ est à valeur dans un espace à courbure $K \leq 0$ et l'énergie atteint son maximum, f est totalement géodésique.

Preuve M étant compacte, e_f atteint son maximum. Comme $\Delta e_f \geq |\nabla df|^2$, par le principe du maximum fort on en déduit que $|\nabla df| = 0$. \square

Avant d'énoncer la formule de Mok, Siu et Yeung, posons la :

Définition 1.12 (Tenseur rigide positif) .

Soit (M, g) une variété riemannienne. $Q \in T^*M^{\otimes 4}$ est un tenseur rigide adapté à (M, g) si Q vérifie les conditions algébriques :

- Q est parallèle : $\nabla Q = 0$
- $Q \in \text{Sym}(\Lambda^2(T^*M))$ au sens où : $Q(X \otimes Y \otimes _) = -Q(Y \otimes X \otimes _)$ et $Q(X \otimes X' \otimes Y \otimes Y') = Q(Y \otimes Y' \otimes X \otimes X')$
- Q et R sont orthogonaux au sens où :
 - $\langle Q | R \rangle = 0$ si M est localement symétrique, irréductible,
 - ou bien : $\langle Q(_, X) | R(_, Y) \rangle_{T^*M^{\otimes 3}} = 0$ pour tout $(X, Y) \in TM$.

Q est positif si Q vérifie les conditions :

- $Q(\xi, \xi) = Q_{ijkl} \xi^{il} \xi^{jk} > 0$ si $\xi \in \text{Sym}(TM)$ est de trace nulle
- $\langle Q | T \rangle \leq 0$ si T est un tenseur de type courbure, de courbure sectionnelle négative ou nulle.

Lorsque M est une variété riemannienne, la métrique permet d'identifier TM et T^*M . Si (M, g) et (N, h) sont deux variétés riemanniennes, $f : M \rightarrow N$ une application \mathcal{C}^2 et Q un tenseur rigide, on peut définir $Q(_ \otimes \nabla df \otimes df) \in T^*M \otimes f^*TN^{\otimes 2}$ puis $Q(_, \nabla df, df) = \text{tr}_{TN} Q(_ \otimes \nabla df \otimes df) \in TM$ en identifiant $TN = T^*N$ et $TM = T^*M$. Par abus de notation, on posera : $Q(\nabla df, \nabla df) = \text{tr}_{TN} Q(\sigma_{13}(\nabla df \otimes \nabla df))$ si $\sigma_{13}(a \otimes b \otimes c \otimes d) = c \otimes b \otimes a \otimes d$ et $Q(f^*R^N) = \langle Q | f^*R^N \rangle$.

La formule de Mok, Siu et Yeung s'écrit alors :

Proposition 1.13 .

Soit (M, g) une variété riemannienne et Q un tenseur rigide adapté à (M, g) . $f : M \rightarrow N$ vérifie :

$$\text{div } Q(_, \nabla df, df) = Q(\nabla df, \nabla df) - \frac{1}{2} Q(f^*R^N)$$

Preuve

$$\begin{aligned} \text{div } Q(_, \nabla df, df) &= \text{tr } \nabla(Q(_, \nabla df, df)) \\ &= \text{tr}(\nabla Q)(\nabla df, df) + Q(\nabla df, \nabla df) + Q(\nabla \nabla df, df) \\ &= Q(\nabla df, \nabla df) + \frac{1}{2} Q([\nabla, \nabla]df, df) \\ &= Q(\nabla df, \nabla df) + \frac{1}{2} \langle Q(_, df) | R^M(_, df) \rangle - \frac{1}{2} Q(f^*R^N) \end{aligned}$$

où $Q([\nabla, \nabla]df, df) = 2Q(\nabla \nabla df, df)$ car Q est antisymétrique. On en déduit la formule annoncée, sachant que $\langle Q(_, df) | R^M(_, df) \rangle = 0$ car :

- soit $\langle Q(_, X) | R(_, Y) \rangle = 0$,
- soit, lorsque M est localement symétrique, la forme quadratique

$$\phi(X) = \langle Q(_, X) | R(_, X) \rangle$$

est parallèle, de trace nulle (puisque $\langle Q | R \rangle = 0$) : M étant irréductible, ϕ est proportionnel à la métrique de M , donc nul. \square

Corollaire 1.13.1 (Rigidité des applications harmoniques) .

Soit (M, g) une variété riemannienne compacte. Si (M, g) admet un tenseur rigide positif Q , les applications harmoniques $f : M \rightarrow N$ à valeurs dans une variété N à courbure $K \leq 0$ sont rigides : $\nabla df = 0$.

Preuve Par intégration de la formule de Mok, Siu et Yeung, on sait que

$$\int_M \mathcal{Q}(\nabla df, \nabla df) - \frac{1}{2} \mathcal{Q}(f^* R^N) = 0$$

D'après les conditions de positivité : $\mathcal{Q}(f^* R^N) \leq 0$ et $\mathcal{Q}(\nabla df, \nabla df) > 0$ si $\nabla df \neq 0$; on en déduit que $\nabla df = 0$. \square

Lorsque M est un espace localement symétrique, si K est le tenseur de courbure constante 1 : $K = id_{\Lambda^2(T^*M)}$, $\mathcal{Q} = K - \frac{\langle K|R \rangle}{\|R\|^2} R$ est un tenseur rigide (pas nécessairement positif) adapté à (M, g) . En s'inspirant de cet exemple, Mok, Siu et Yeung ont prouvé le résultat remarquable :

Théorème 1.14 (Mok, Siu, Yeung) *Soit M un espace symétrique, de type non compact, de rang supérieur. Il existe un tenseur rigide positif adapté à M .*

Pour la preuve : voir Mok, Siu, Yeung [33].

Si M est un espace localement symétrique de rang 1, la formule de Mok, Siu et Yeung permet de conclure à la rigidité sous la condition (plus forte que $K \leq 0$) de courbure sectionnelle complexifiée $K_{\mathbb{C}} \leq 0$, c'est-à-dire : $R_{X,Y}(\bar{X}, \bar{Y}) \leq 0$, pour $X, Y \in TM \otimes \mathbb{C}$. Lorsque M est de rang 1, un tenseur rigide adapté à M sera positif s'il vérifie les conditions :

- $\mathcal{Q}(\xi, \xi) > 0$ pour tout tenseur symétrique ξ de trace nulle,
- $\mathcal{Q}(T) \leq 0$ pour tout tenseur de type courbure, de courbure sectionnelle complexifiée $K_{\mathbb{C}} \leq 0$.

Si M est compacte, et \mathcal{Q} un tenseur rigide positif adapté à M , toute application harmonique $f : M \rightarrow N$ à valeur dans N , de courbure sectionnelle complexifiée $K_{\mathbb{C}} \leq 0$ est totalement géodésique. Dans ce cas, d'après Corlette [10] :

Théorème 1.15 (Corlette) *Soit M un espace symétrique de rang 1. M admet un tenseur rigide positif :*

- lorsque $M = \mathbb{H}_{\mathbb{H}}^n$ est l'espace hyperbolique quaternionien, de dimension $d_{\mathbb{H}} \geq 2$
- lorsque $M = \mathbb{H}_{\mathbb{O}}^2$ est le plan hyperbolique de Cayley.

Lorsque M est plate, on peut utiliser le principe du maximum fort pour conclure à la rigidité des applications harmoniques $f : M \rightarrow N$ lorsque N est à courbure : $K \leq 0$. Dans ce cas, la formule de Mok, Siu et Yeung s'écrit en effet sous forme de Laplacien :

$$\Delta e_f = |\nabla df|^2 - R_{f_i, f_j}^N(f_i, f_j)$$

En général, on ne peut pas utiliser le principe du maximum pour démontrer les théorèmes de rigidité :

Proposition 1.16 *Si \mathcal{Q} est un tenseur rigide positif adapté à (M, g) à courbure $K \leq 0$, la formule de Mok, Siu et Yeung ne peut pas s'écrire sous forme de laplacien :*

$$\Delta \varphi(df, \nabla df) = \langle \mathcal{Q}(\nabla df, \nabla df) - \frac{1}{2} \mathcal{Q}(f^* R^N) \rangle$$

à moins que M soit plate.

Preuve Une condition nécessaire est en effet : $dQ(_, \nabla df, df) = 0$, soit, en se plaçant dans les coordonnées exponentielles :

$$\begin{aligned} dQ(df, \nabla df) &= d\left(Q^{iabc} f_c^A f_{ab}^A dx^i\right) \\ &= Q^{iabc} f_{cj}^A f_{ab}^A dx^j \wedge dx^i + Q^{iabc} f_c^A f_{abj}^A dx^j \wedge dx^i \\ &= 0 \end{aligned}$$

où $f_{abi}^A = \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^a}} \frac{\partial f^A}{\partial x^b} \right)$. On peut supposer : $f_{abc} = 0$ et $\nabla df = dx^a \otimes dx^b + dx^b \otimes dx^a$. On obtient alors :

$$\sum_{i \neq b} Q^{ibab} dx^a \wedge dx^i + \sum_{i \neq a} Q^{iaba} dx^b \wedge dx^i = 0$$

D'où l'on déduit que $Q = \lambda id_{\Lambda^2(T^*M)}$. On peut choisir $\lambda = \pm 1$. Si M est à courbure négative ou nulle, la condition d'orthogonalité : $\langle Q | R \rangle = 0$ implique alors : $scal(R) = 0$, donc M est plate. La formule de Mok, Siu et Yeung est alors exactement la formule de Bochner pour l'énergie. \square

1.4. Existence : le flot de la chaleur

Si M est compacte, et N est à courbure $K \leq 0$, Eells et Sampson [15] ont démontré l'existence de solutions pour l'équation de la chaleur. La version la plus générale du théorème d'Eells et Sampson est celle de Li et Tam [29] :

Proposition 1.17 (Existence du flot de la chaleur) .

Soit M une variété riemannienne de courbure de Ricci minorée $Ric \geq -\kappa^2$ et N une variété riemannienne à courbure $K \leq 0$. Si $f : M \rightarrow N$ est une application \mathcal{C}^2 , d'énergie et de tension bornée, l'équation de la chaleur admet une unique solution $f_t|_{t \geq 0} : M \rightarrow N$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} &= \tau(f) \\ f_0 &= f \end{aligned}$$

L'unicité se déduit de la formule de Bochner pour la fonction distance :

$$\Delta d(f_t, g_t) \geq \frac{\partial}{\partial t} d(f_t, g_t)$$

Le flot de la chaleur vérifie des estimées a priori :

- $\sup(e_{f_t}) \leq \sup(e_{f_0})e^{\kappa^2 t}$ et $\sup(e_{\tau(f_t)}) \leq \sup(e_{\tau(f_0)})$, qui se déduisent du principe du maximum appliqué aux formules de Bochner :

$$\begin{aligned} \Delta e_f &= |\nabla df|^2 + \frac{de_f}{dt} + Ric^M(df, df) - R_{f_i f_k}^N(f_i, f_k) \\ \Delta e_{\tau(f)} &= |\nabla \tau(f)|^2 + \frac{de_{\tau(f)}}{dt} - R_{f_t f_i}^N(f_t, f_i) \end{aligned}$$

où $e_{\tau(f)} = \frac{1}{2} |\tau(f)|^2$,

- L'estimée en moyenne de Li et Tam [29] : $\sup_{B_{x,R}} e_{f_{t+1}}^p \leq \frac{C_p}{Vol(B_{x,R})} \int_{B_{x,R}} e_{f_t}^p$, qui se déduit de la formule de Bochner pour l'énergie,

— Les estimées de Schauder sur les dérivées d'ordre supérieur :

$$|\nabla^k f_{t+1}(x)|^2 \leq C_k \sup_{B_{x,R}} e_{f_t}$$

où les constantes C_k dépendent de la géométrie de M et de N ,

— Lorsque M est compacte, l'énergie de f est décroissante :

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_f}{\partial t} &= -2E_{\tau(f)} \\ \frac{\partial E_{\tau(f)}}{\partial t} &\leq 0 \end{aligned}$$

ce qui se déduit de l'équation d'Euler-Lagrange pour l'énergie, et de la formule de Bochner pour le champ de tension. En particulier : $E_{\tau(f_t)}$ est décroissante positive, donc converge. Comme $E_f \geq 0$ et $\frac{\partial E_f}{\partial t} = -2E_{\tau(f)}$, la limite vérifie

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_M |\tau(f_t)|^2 = 0$$

Corollaire 1.17.1 (Existence d'applications harmoniques) .

Soit M une variété compacte, N une variété à courbure $K \leq 0$. Soit $f : M \rightarrow N$. On a la dichotomie :

- Soit f est homotope à une application harmonique g : dans ce cas, le flot de la chaleur converge vers h harmonique, homotope à f ,
- Soit il n'existe pas d'application harmonique dans la classe d'homotopie de f : le flot de la chaleur converge (à extraction près) vers un point du bord à l'infini de N

Preuve Comme $\frac{\partial d(f_t, g_t)}{\partial t} \leq \Delta d(f_t, g_t)$, le flot de la chaleur est contractant.

- Dans le premier cas on sait donc que, pour tout $t \geq 0$: $d(f_t, g) \leq d(f, g)$. Le flot de la chaleur est donc \mathcal{C}^∞ équicontinu, borné : à extraction près, on peut supposer que $f_{t_n} \rightarrow h$. $E_{\tau(h)} = \lim E_{\tau(f_{t_n})} = 0$, donc h est harmonique. D'après la propriété de contraction du flot de la chaleur, pour $t \geq t_n$, $d(f_t, h) \leq d(f_{t_n}, h)$: f_t converge donc vers h . Notons qu'à priori, il n'y a aucune raison pour que $h = g$,
- Dans le deuxième cas : s'il existe x tel que $f_t(x)$ admet une sous suite convergente, f_{t_n} est une suite équicontinue, bornée : donc f_{t_n} converge (à extraction près) vers g , harmonique ; et on est ramené au premier cas ! Par contraposée, on en déduit que $f_t(x)$ quitte tout compact. On sait que l'énergie locale $e_{f_{t+1}}(x)$ est contrôlée par l'énergie globale E_{f_t} , qui est décroissante. Le diamètre de $f_t(M)$ est donc borné et on en déduit que f_t converge, à extraction près, vers un point du bord à l'infini de N . \square

D'après Hamilton [21], on a une version du théorème d'Eells et Sampson pour les variétés à bord :

Proposition 1.18 (Flot de la chaleur pour les variétés à bord) .

Soit M une variété riemannienne compacte à bord et N une variété riemannienne à courbure $K \leq 0$. Si $f : M \rightarrow N$ est une application \mathcal{C}^2 , l'équation de la chaleur (avec condition de Dirichlet) admet une unique solution $f_t|_{t \geq 0} : M \rightarrow N$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} &= \tau(f) \\ f_0 &= f \\ f_t|_{\partial M} &= f|_{\partial M} \end{aligned}$$

Corollaire 1.18.1 *Soit M une variété compacte à bord, N une variété à courbure $K \leq 0$. Soit $f : M \rightarrow N$. Il existe une unique application harmonique $g : M \rightarrow N$ homotope à f , telle que $g|_{\partial M} = f|_{\partial M}$.*

1.5. Stabilité par perturbation

Définition 1.19 (Application quasi-harmonique) .

Soit N une variété à courbure négative ou nulle.

- *Lorsque N est de rang géométrique $k : Ric_k \leq -\kappa^2$. $f : M \rightarrow N$ est quasi-harmonique s'il existe $\epsilon > 0$ tel que f vérifie :*

$$\lambda_{k+1}(f)^2 \geq \frac{\sqrt{3}}{\kappa}(1+\epsilon)|\tau(f)|$$

- *Lorsque N est de rang 1 : $K \leq -\kappa^2 < 0$, f est quasi-harmonique si :*

$$\lambda_2(f)^2 \geq \frac{1+\epsilon}{\kappa}|\tau(f)|$$

- *Lorsque N est localement symétrique, f est quasi-harmonique si : pour tout $X \in f^*UN$, il existe $Y \in UM$ tel que :*

$$-R_{X,df(Y)}(X,df(Y)) \geq [(1+\epsilon)|\tau(f)| + \epsilon]^2$$

On dira que f est une application quasi-harmonique stricte si les inégalités vérifiées sont strictes.

Théorème 1.20 (Problème de Dirichlet asymptotique) .

Soit $f : M \rightarrow N$ une application quasi-harmonique. f est homotope, à distance bornée d'une application harmonique φ .

Preuve La résolution du problème de Dirichlet asymptotique se fait par la méthode d'exhaustion de Gromov [19] :

- On choisit M_n une suite exhaustive de sous-variétés connexes, compactes, à bord dans M . D'après le théorème d'Hamilton [21], on peut résoudre le problème de Dirichlet : il existe f_n homotope à f telle que : $\Delta f_n = 0$ sur M_n et $f_n|_{\partial M} = f|_{\partial M}$,
- En rang k , d'après la formule de Bochner pour la distance, on sait que :

$$\Delta d(f_n, f) \geq \lambda_{k+1}(f)^2 \kappa \varphi(\kappa d(f_n, f)) - |\tau(f)|$$

soit : $\Delta d(f_n, f) \geq |\tau(f)|(\sqrt{3}(1+\epsilon)\varphi(\kappa d(f_n, f)) - 1)$. Comme $d(f_n, f) = 0$ sur ∂M_n , le maximum est atteint à l'intérieur de M_n . Si $\max d(f_n, f) > \varphi^{-1}(\frac{1}{\sqrt{3}(1+\epsilon)})$, $\Delta d(f_n, f) \geq 0$ au voisinage du maximum de $d(f_n, f)$. Par le principe du maximum fort, $d(f_n, f)$ est constante sur M_n , ce qui contredit $d(f_n, f) = 0$ sur ∂M_n . Par la contraposée, on en déduit que f_n reste à distance bornée de f :

$$\max d(f_n, f) \leq \varphi^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}(1+\epsilon)}\right)$$

- Lorsque N est localement symétrique, d'après la formule de Bochner pour la fonction distance :

$$\Delta d(f, f_n) \geq ((1+\epsilon)\tanh(\epsilon d(f, g)) - 1)|\tau(f)|$$

et on en déduit de même que f_n est à distance bornée de f :

$$\max d(f_n, f) \leq \frac{1}{\epsilon} \operatorname{arctanh}\left(\frac{1}{1+\epsilon}\right)$$

- Comme $d(f_n, f) \leq C$, où C ne dépend pas de n , l'image de $B_{x,1}$ par f_n est dans une boule $B_{f(x),R}$, où R ne dépend pas de n . D'après le principe de Bloch, f_n est donc localement \mathcal{C}^∞ équicontinue, bornée. Par le théorème d'Arzéla-Ascoli, on en déduit que f_n converge, à extraction près, vers une application harmonique φ homotope à distance bornée de f . \square

Remarque 1.20.1 (Stabilité) .

Lorsque f est quasi-harmonique, il n'existe pas en général une unique application harmonique homotope, à distance bornée de f . Par exemple, si γ est une géodésique de N et g une fonction harmonique sur M , $\psi = \gamma \circ g$ est une application harmonique, qui n'est pas stable : $\psi_t = \gamma(g+t)$ est une famille d'applications harmoniques à distance bornée de ψ . Il n'y a donc pas a priori stabilité lorsque ψ est quasi-harmonique. Je ne sais pas si, en supposant f quasi-harmonique stricte, il y a unicité pour le problème de Dirichlet asymptotique. Cependant, dans l'exemple précédent, il est probable que l'on peut perturber ψ en une application quasi-harmonique stricte...

Remarque 1.20.2 (Stabilité en dimension 2) .

Si $f : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$ est une quasi-isométrie asymptotiquement quasi-harmonique, f est à distance bornée d'une unique application harmonique φ . De plus, φ est une quasi-isométrie.

Ce résultat est énoncé et démontré dans la proposition 6.18.

Lorsque M est à courbure négative ou nulle, on peut résoudre le problème de Dirichlet asymptotique sous une condition légèrement plus faible : Li et Tam [31, Theorem 6.4] ont démontré que les applications *asymptotiquement quasi-harmoniques* $f : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$ sont à distance bornée d'une application harmonique et Gromov [19, Proposition 2B₂] a donné des critères généraux d'existence de solution pour le problème de Dirichlet asymptotique. Dans l'esprit du théorème de Li et Tam, on a :

Théorème 1.21 (Applications asymptotiquement quasi-harmoniques) .

Soit M une variété simplement connexe, à courbure négative ou nulle, N une variété à courbure négative ou nulle, de rang géométrique $k : Ric_k \leq -\kappa^2$. Soit $f : M \rightarrow N$ une application asymptotiquement quasi-harmonique ; c'est-à-dire qu'il existe $\epsilon > 0$ tel qu'en dehors d'un compact K :

$$\lambda_{k+1}(f)^2 \geq \frac{\sqrt{3}}{\kappa} (1+\epsilon) |\tau(f)| + \epsilon$$

Alors : f est à distance bornée d'une application harmonique.

Preuve Fixons $y \in M$ et R tel que $K \subset B_{y,R}$. On peut supposer $K = B_{y,R}$. Pour $r \geq R$, posons $f_r : B_{y,r} \rightarrow N$, l'unique application harmonique égale à f sur $S_{y,r}$ et définissons $\phi(x) = d(f_r, f) + \psi(\rho^2)$, où $\rho(x) = d(y, x)$ et ψ est une fonction que l'on choisira, telle que $\psi \geq 0$. On calcule :

$$\begin{aligned} \Delta \phi &= \Delta d(f_r, f) + 2(|d\rho|^2 + \rho \Delta \rho) \psi(\rho) + 4\rho^2 \ddot{\psi}(\rho) \\ &\geq \Delta d(f_r, f) + 2\psi(\rho) + 4\rho^2 \ddot{\psi}(\rho) \end{aligned}$$

car $|d\rho| = 1$ et, puisque M est à courbure $K \leq 0$, $\Delta\rho \geq 0$. On sait que, en dehors de K :

$$\begin{aligned}\Delta d(f_r, f) &\geq \lambda_{k+1}(f)^2 \kappa \varphi(\kappa d(f_r, f)) - |\tau(f)| \\ &\geq \sqrt{3}(1+\epsilon)|\tau(f)| \left(\varphi(\kappa d(f_r, f)) - \frac{1}{(1+\epsilon)\sqrt{3}} \right) + \epsilon \kappa \varphi(\kappa d(f_r, f))\end{aligned}$$

On peut choisir $\psi(x)$ tel que :

- sur le compact K : $\Delta\phi > 0$. Il suffit en effet de choisir $\psi(0) = 0$ et $\psi(x) = C + 1$ pour $x \leq R^2$, si $|\tau(f)| \leq C$ sur K ,
- en dehors de K , lorsque $d(f_r, f) \geq 1$:

$$\Delta\phi > \left(\sqrt{3}(1+\epsilon)|\tau(f)| \right) \left(\varphi(\kappa\rho) - \frac{1}{\sqrt{3}(1+\epsilon)} \right)$$

Si on pose $\bar{\epsilon} = \epsilon \kappa \varphi(\kappa)$, il suffit en effet de choisir ψ de sorte que $\bar{\epsilon} + 4x\psi(x) > 0$ et $\psi(x) \geq 0$ lorsque $x \geq R^2$. On sait que $\psi(R^2) = C + 1 > 0$ et $\psi(x) > -\frac{\bar{\epsilon}}{4x}$.

Comme $\int_t^\infty \frac{dx}{x} = \infty$, on peut choisir ψ de telle sorte que $\psi(x)$ soit constante pour $x \geq M(\epsilon, \kappa, C)$. En particulier, pour tout $x \geq 0$, on aura donc :

$$0 \leq \psi(x) \leq \alpha = \alpha(\epsilon, \kappa, C)$$

On sait que ϕ atteint son maximum sur $B_{y,r}$. Comme $\Delta\phi > 0$ sur K , le maximum est atteint sur $B_{y,r} \setminus K$. Trois cas sont à considérer :

- ϕ atteint son maximum sur le bord de $B_{y,r}$. On sait que $\phi \leq d(f_r, f) + \sup(\psi)$ et $\sup(\psi) = \alpha$, donc : $\phi \leq \alpha$,
- ϕ atteint son maximum en un point x intérieur à $B_{y,r}$, et $d(f_r(x), f(x)) \leq 1$. Comme $\phi \leq d(f_r, f) + \alpha$, on a : $\phi \leq \alpha + 1$,
- ϕ atteint son maximum en un point x intérieur à $B_{y,r}$, et $d(f_r(x), f(x)) \geq 1$. Comme $\Delta\phi(x) \leq 0$, on déduit : $d(f_r(x), f(x)) \leq \frac{1}{\kappa} \varphi^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{3}(1+\epsilon)} \right) \neq +\infty$.

Dans tous les cas :

$$\max_{x \in B_{y,r}} \phi(x) \leq \frac{1}{\kappa} \varphi^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{3}(1+\epsilon)} \right) + \alpha + 1$$

Comme : $d(f_r, f) = \phi - \psi \leq \phi$, on en déduit :

$$d(f_r, f) \leq \frac{1}{\kappa} \varphi^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{3}(1+\epsilon)} \right) + \alpha + 1$$

f_r est donc à distance bornée de f : d'après le principe de Bloch, on en déduit que f_r est localement \mathcal{C}^∞ équicontinue, bornée, donc converge, à extraction près, vers f_∞ harmonique, à distance bornée de f . \square

Chapitre 2

Laminations

CE chapitre est consacré à une présentation générale des laminations et plus particulièrement à l'étude de l'espace \mathcal{M} des applications laminées. Cet espace a été introduit par Gromov [19] pour démontrer l'existence d'applications harmoniques laminées. Gromov [19] suppose implicitement que l'espace \mathcal{M} est naturellement muni d'une métrique adaptée à la topologie \mathcal{C}^∞ et que \mathcal{M} muni d'une telle distance est complet. Après un rappel des propriétés élémentaires des laminations, je définis la notion de *revêtement asymptotique*, qui me permet de définir explicitement une distance adaptée à la topologie \mathcal{C}^∞ sur l'espace \mathcal{M} . En général \mathcal{M} muni de cette distance n'est pas un espace métrique complet. Par contre, on peut considérer \mathcal{M} comme un sous espace de son *revêtement d'holonomie* $\overline{\mathcal{M}}$: la distance définie sur \mathcal{M} s'étend naturellement sur $\overline{\mathcal{M}}$ et $\overline{\mathcal{M}}$ est un espace métrique complet à base dénombrable. Remarquons que, dans le même esprit, Quiroga [37] a défini explicitement une distance adaptée à la topologie \mathcal{C}^∞ sur l'espace des applications laminées, lorsque les feuilles à la source sont localement symétriques. Cependant, contrairement à la distance que nous définissons, la distance de Quiroga n'est a priori pas complète. Je termine ce chapitre en donnant une interprétation des mesures transverses sur l'espace \mathcal{M} , qui sera utile au chapitre 3 pour démontrer le théorème de convergence faible du flot de la chaleur laminé, puis en étudiant les invariants d'homotopie bornée des applications laminées, qui nous seront utiles pour étudier la convergence forte du flot de la chaleur laminé.

2.1. Généralités sur les laminations

Définition 2.1 (Lamination) .

Soit Λ un espace métrique paracompact.

- Λ est une lamination de dimension n s'il existe un atlas \mathcal{C}^0 de Λ par des cartes de la forme $f_i : \mathbb{R}^n \times Y_i \rightarrow \Lambda$, et tel que les changements de carte sont de la forme $g = f_j^{-1} \circ f_i : \mathbb{R}^n \times Y_i \rightarrow \mathbb{R}^n \times Y_j$, $g(x, y) = (\varphi(x, y), \psi(y))$. De plus, Λ est une lamination transversalement continûment \mathcal{C}^∞ si les applications $x \rightarrow \varphi(x, y)$ sont \mathcal{C}^∞ , et toutes les dérivées $D^\ell \varphi : (\otimes^k \mathbb{R}^n) \times \Lambda \rightarrow \mathbb{R}^n$ sont continues. Sauf mention explicite du contraire, on supposera toujours Λ transversalement continûment \mathcal{C}^∞ .
- Λ est un feuilletage \mathcal{C}^∞ si Λ est une variété munie d'un atlas \mathcal{C}^∞ tel que

les changements de carte sont de la forme : $g = f_j^{-1} \circ f_i : \mathbb{R}^n \times Y_i \rightarrow \mathbb{R}^n \times Y_j$,
 $g(x, y) = (\varphi(x, y), \psi(y))$.

Dans une carte de Λ , on peut distinguer les *plaques*, c'est-à-dire les ensembles de la forme $\mathbb{R}^n \times \{y\}$ et les *transversales*, de la forme $\{x\} \times Y_i$. Lorsque Λ est une lamination, les changements de cartes $(x, y) \rightarrow (\varphi(x, y), \psi(y))$ envoient plaque sur plaque, et définissent une application entre transversales, appelée *transformation d'holonomie* : $y \rightarrow \psi(y)$.

On définit une relation d'équivalence sur Λ en posant : $x \sim y$ s'il existe $n \geq 1$ et une suite $(x_i)_{0 \leq i \leq n}$ telle que $x_0 = x$, $x_n = y$ et deux points consécutifs (x_i, x_{i+1}) sont sur une même plaque. Une *feuille* de la lamination Λ est une classe d'équivalence pour cette relation d'équivalence : c'est une variété de dimension n , immergée dans Λ .

Si Λ est une lamination \mathcal{C}^∞ , on peut distinguer deux topologies sur Λ : la *topologie initiale*, induite par la structure d'espace métrique de Λ et la *topologie fine* : la structure de lamination de Λ fait de Λ une variété de dimension n , en général non paracompacte. Dans une carte locale : $\Lambda = \mathbb{R}^n \times Y$, un voisinage de (x, y) est donné par $O \times \{y\}$. Les feuilles de Λ sont alors les composantes connexes de Λ pour la topologie fine. Puisque Λ est une variété \mathcal{C}^∞ de dimension n pour la topologie fine, on peut définir $T\Lambda$ le fibré tangent à Λ , les fibrés de jets $J_\ell(\Lambda)$ et tous les fibrés induits naturellement. Si Λ est une lamination \mathcal{C}^∞ , le fibré tangent $T\Lambda$ est naturellement muni d'une structure de lamination \mathcal{C}^∞ .

Définition 2.2 (Application laminée) .

Soient Λ et Ξ deux laminations \mathcal{C}^∞ . Une application $f : \Lambda \rightarrow \Xi$ est une application laminée \mathcal{C}^∞ si f est \mathcal{C}^∞ pour la topologie fine, c'est-à-dire f envoie chaque feuille \mathcal{L}_λ de Λ dans une feuille de Ξ et l'application induite $f : \mathcal{L}_\lambda \rightarrow \mathcal{L}_\xi$ est \mathcal{C}^∞ . f est transversalement continûment \mathcal{C}^∞ si f est une application laminée \mathcal{C}^∞ continue pour la topologie initiale et les jets $J_k(f) : J_k\Lambda \rightarrow J_k\Xi$ sont continus pour la topologie initiale sur l'espace laminé des k jets de Λ et Ξ .

Les propriétés géométriques des laminations sont liées à leurs propriétés transverses : ces propriétés se comprennent à travers la notion d'holonomie. Soit $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathcal{L}_\lambda$ un chemin sur une feuille de Λ . On sait que l'on peut recouvrir γ par un nombre fini de cartes $\mathcal{O}_i = \mathbb{R}^n \times Y_i$: il existe une suite croissante $0 = x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_p = 1$ tels que $\gamma([x_i, x_{i+1}]) \subset \mathcal{O}_i$. Les transformations d'holonomie définissent des applications $g_{i+1}^i : Y_i \rightarrow Y_{i+1}$, donc une application $Hol(\gamma, Y_0, Y_p, \mathcal{O}_i) : Y_0 \rightarrow Y_p$. Le germe de $Hol(\gamma, Y_0, Y_p, \mathcal{O}_i)$ est défini intrinsèquement : si on choisit des cartes $(\overline{\mathcal{O}}_i)_{i=0}^k$ telles que $\overline{Y}_0 = Y_0 = Y$ et $\overline{Y}_k = Y_p = Z$, $Hol(\gamma, Y, Z, \mathcal{O}_i) = Hol(\gamma, Y, Z, \overline{\mathcal{O}}_i)$ sur un voisinage de $\gamma(0)$. On peut donc poser la :

Définition 2.3 (Holonomie) .

Soit Λ une lamination. A $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathcal{L}_\lambda$ un chemin sur une feuille de Λ , Y_0 - resp. Y_1 - une transversale à \mathcal{L}_λ en $\gamma(0)$ - resp. $\gamma(1)$ -, est naturellement associée une holonomie $Hol(\gamma, Y_0, Y_1) : (Y_0, \gamma(0)) \rightarrow (Y_1, \gamma(1))$, dont le germe est défini intrinsèquement.

L'holonomie définit un groupoïde, et ne dépend que de la classe d'homotopie du chemin considéré. De plus si γ est un lacet la condition d'holonomie triviale :

$$Hol(\gamma, Y, Y) = id$$

ne dépend pas de la transversale Y choisie. En particulier :

Définition 2.4 (Revêtement d'holonomie) .

Soit Λ une lamination et $\lambda \in \Lambda$. Le groupe d'holonomie de $(\mathcal{L}_\lambda, \lambda)$ est le groupe des lacets basés en λ , quotienté par les lacets d'holonomie triviale :

$$Hol(\mathcal{L}_\lambda, \lambda) = \{\gamma : (\mathbb{S}^1, 0) \rightarrow (\mathcal{L}_\lambda, \lambda) \mid Hol(\gamma, Y, Y) = id\}$$

où Y est une transversale à la lamination en λ . Le revêtement d'holonomie de $(\mathcal{L}_\lambda, \lambda)$ est $\overline{\mathcal{L}}_\lambda = \tilde{\mathcal{L}}_\lambda / \{Hol(\gamma, Y, Y) = id\}$, où $\tilde{\mathcal{L}}_\lambda$ est le revêtement universel de Λ . Il a pour fibre le groupe d'holonomie de \mathcal{L}_λ

En général, l'holonomie d'un chemin est un homéomorphisme. On peut enrichir la structure transverse d'une lamination, en restreignant l'holonomie. Illustrons le par deux exemples radicalement opposés : un exemple trivial est donné par $\Lambda = M \times N$, laminé par $M \times \{n\}$. Si N est une variété riemannienne, Λ est un feuilletage riemannien : il existe un atlas dans lequel les transversales s'identifient à des ouverts de N et les transformations d'holonomie sont des isométries. Un exemple plus délicat est celui du feuilletage géodésique, défini sur le fibré unitaire tangent UM d'une variété riemannienne M . La feuille en (x, n) est : $(\exp_x(tn), d\exp_x(n))_{t \in \mathbb{R}}$. La mesure de Lebesgue est préservée par le flot géodésique $\phi_t : UM \times \mathbb{R} \rightarrow UM$, elle définit donc une mesure sur les transversales au feuilletage, invariante par les transformations d'holonomie : c'est une *mesure transverse* sur Λ .

Définition 2.5 (Mesure transverse) .

Soit Λ une lamination. Λ est munie d'une mesure transverse μ s'il existe un atlas de Λ telle que les transversales Y_i sont munies d'une mesure de Borel $\mu_i = \mu|_{Y_i}$ et les transformations d'holonomie préservent μ , c'est-à-dire, si les changements de carte sont de la forme : $f_j^i : (x, y) \in \mathbb{R}^n \times Y_i \rightarrow (\varphi_j^i(x, y), g_j^i(y)) \in \mathbb{R}^n \times Y_j$ et $g_j^i|_* \mu_i = \mu_j$.

Lorsque Ξ est une lamination de dimension n munie d'une forme volume ω - c'est-à-dire d'une section du fibré $\Lambda^n(\Xi)$, donc d'une mesure sur les feuilles -, la mesure ω et la mesure transverse μ définissent une mesure $\omega \times \mu$ sur l'espace total Λ : dans une carte locale $\mathcal{O} = \mathbb{R}^n \times Y$, ω est une mesure sur \mathbb{R}^n , μ est une mesure sur Y et $\omega \times \mu$ est le produit habituel des deux mesures. Par exemple, si Ξ est munie d'une métrique riemannienne g sur les feuilles, Ξ est munie de la forme de volume associée à la métrique g :

Définition 2.6 (Lamination riemannienne) .

Soit Λ une lamination. Λ est une lamination riemannienne si Λ est munie d'une métrique riemannienne g sur les feuilles, \mathcal{C}^∞ feuille à feuille, c'est à dire d'une section du fibré $Sym^+(T\Lambda)$ des formes bilinéaires symétriques définies positives sur $T\Lambda$. Λ est une lamination riemannienne transversalement continûment \mathcal{C}^∞ si de plus g est transversalement continûment \mathcal{C}^∞ . Enfin, Λ est complète si les feuilles de Λ sont des variétés riemanniennes complètes.

Pour la suite, les laminations riemanniennes seront toujours supposées complètes.

Lorsque Λ et Ξ sont deux laminations riemanniennes, Λ et Ξ sont munies de la connexion de Levi-Civita et on peut définir $\tau(f) \in f^*T\Xi$ pour toute application laminée $f : \Lambda \rightarrow \Xi$. On a donc une notion d'application harmonique laminée, de

flot de la chaleur laminé etc... Pour étudier les applications harmoniques laminées, il est commode de supposer que les feuilles de Λ sont à géométrie bornée : c'est-à-dire que la courbure et toutes ses dérivées sont bornées.

Définition 2.7 (Λ, g) est une lamination riemannienne régulière transversalement continûment \mathcal{C}^∞ si Λ une lamination munie d'une métrique riemannienne g transversalement continûment \mathcal{C}^∞ , telle que R et toutes ses dérivées sont bornées.

Par exemple, si Λ est une lamination compacte, muni d'une métrique riemannienne g transversalement continûment \mathcal{C}^∞ , (Λ, g) est une lamination riemannienne régulière transversalement continûment \mathcal{C}^∞ . Pour énoncer les théorèmes de convergence du flot de la chaleur dans toute leur généralité, il sera commode d'affaiblir la régularité transverse des métriques riemanniennes. On définit donc :

Définition 2.8 (Lamination riemannienne régulière) .

(Λ, g) est une lamination riemannienne régulière si Λ est munie d'une métrique de référence h telle que (Λ, h) est une lamination riemannienne régulière transversalement continûment \mathcal{C}^∞ et telle que g et toutes ses dérivées $\nabla_h^k g$ sont bornées. (Λ, g, μ) est une lamination riemannienne mesurée régulière si Λ est munie d'une mesure transverse μ et si la métrique g et toutes ses dérivées sont bornées par rapport à h en norme L^∞ .

Remarquons que l'existence d'une métrique de référence transversalement \mathcal{C}^∞ sera indispensable pour définir dans le paragraphe 2.3 une distance sur l'espace des applications laminées.

Rappelons enfin sans démonstration deux résultats élémentaires :

Proposition 2.9 Soit Λ une lamination \mathcal{C}^∞ .

- Si $\mathcal{O}_i |_{i \in I}$ est un recouvrement ouvert localement fini de Λ , il existe une partition de l'unité transversalement continûment \mathcal{C}^∞ subordonnées à \mathcal{O}_i ,
- Il existe un plongement transversalement continûment \mathcal{C}^∞ de Λ dans un espace de Hilbert séparable \mathcal{H} .

2.2. Revêtements asymptotiques et holonomie

Le but de ce paragraphe est de donner une interprétation du revêtement d'holonomie qui nous permette de construire une distance associée à la topologie \mathcal{C}^∞ sur l'espace des applications laminées. L'idée est la suivante : si $f : \Lambda \rightarrow \Xi$ est une application laminée, lorsque x et y sont proches de λ on peut presque relever $f|_{\mathcal{L}_x}$ et $f|_{\mathcal{L}_y}$ en f_x et f_y , définies sur le revêtement d'holonomie de \mathcal{L}_λ , à valeur dans Ξ , donc, via un plongement de Ξ dans un espace de Hilbert \mathcal{H} , à valeur dans \mathcal{H} . f_x et f_y étant définies sur la même variété, à valeurs dans un espace de Hilbert \mathcal{H} , on peut définir raisonnablement leur distance \mathcal{C}^∞ .

Définition 2.10 (Revêtement asymptotique) .

Soit M un espace métrique et $y \rightarrow \mathcal{L}_y$ une application qui, à $y \in M$ associe une variété riemannienne pointée (\mathcal{L}_y, y, g_y) . Fixons $x \in M$:

- On dira que les variétés \mathcal{L}_y , au voisinage de x , ce que l'on notera $\mathcal{L}_{y|y \rightarrow x}$, sont des revêtements asymptotiques de \mathcal{L}_x , ce que l'on notera $\mathcal{L}_x \leq \mathcal{L}_{y|y \rightarrow x}$, si pour tout $y \in M$, on se donne une holonomie $Hol_y : B_{y,r(y)} \rightarrow \mathcal{L}_x$ tel

2.2. REVÊTEMENTS ASYMPTOTIQUES ET HOLONOMIE

que : $\lim_{y \rightarrow x} r(y) = \infty$, $\lim_{y \rightarrow x} Hol_y(y) = x$ et Hol_y est presque une isométrie locale : pour tout $r > 0$, on a :

$$\limsup_{y \rightarrow x} |Hol_y^* g_x - g_y| = 0$$

— On dira que \mathcal{L}_x est un revêtement asymptotique de $\mathcal{L}_{y|y \rightarrow x}$, ce que l'on notera $\mathcal{L}_{y|y \rightarrow x} \leq \mathcal{L}_x$, si pour tout $y \in M$, on se donne une holonomie $Hol_y : B_{x,r}(y) \rightarrow \mathcal{L}_y$ tel que : $\lim_{y \rightarrow x} r(y) = \infty$, $\lim_{y \rightarrow x} d(y, Hol_y(x)) = 0$ et Hol_y est presque une isométrie locale : pour tout $r > 0$, on a :

$$\limsup_{y \rightarrow x} |Hol_y^* g_y - g_x| = 0$$

Si $\overline{M} \rightarrow M$ est un revêtement riemannien d'une variété M , on notera de même : $M \leq \overline{M}$.

Si Λ est une lamination, on sait que l'on peut plonger Λ dans un espace de Hilbert. Une fois choisi un tel plongement, x étant fixé, la projection orthogonale de la feuille \mathcal{L}_y sur \mathcal{L}_x définit une holonomie $Hol_y : \mathcal{L}_y \rightarrow \mathcal{L}_x$.

Proposition 2.11 (Dualité pour les revêtements asymptotiques) .

Si $\mathcal{L}_{y|y \rightarrow x}$ sont des revêtements asymptotiques de \mathcal{L}_x , le revêtement universel $\tilde{\mathcal{L}}_x$ est un revêtement asymptotique des $\tilde{\mathcal{L}}_{y|y \rightarrow x}$. On a donc :

$$\mathcal{L}_x \leq \mathcal{L}_{y|y \rightarrow x} \Rightarrow \mathcal{L}_x \leq \mathcal{L}_{y|y \rightarrow x} \leq \tilde{\mathcal{L}}_{y|y \rightarrow x} \leq \tilde{\mathcal{L}}_x$$

Preuve Soit $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathcal{L}_x$ un chemin tel que $\gamma(0) = x$. Comme $\mathcal{L}_x \leq \mathcal{L}_{y|y \rightarrow x}$ il existe une holonomie $Hol_y : B_{y,r(y)} \rightarrow \mathcal{L}_x$. On peut relever γ en $Hol_y^{-1}(\gamma) : [0, 1] \rightarrow \mathcal{L}_y$. La classe d'homotopie de $Hol_y^{-1}(\gamma)$ ne dépend que de la classe d'homotopie de γ , pourvu que y soit proche de x : en effet, si γ_0 et γ_1 sont deux chemins sur \mathcal{L}_x de longueur $\ell \leq r$, il existe $K(r) \neq \infty$ tel que γ_0 et γ_t sont homotopes, par une homotopie γ_t telle que $\ell(\gamma_t) \leq K(r)$. Si Hol_y^{-1} est défini sur $B_{x,K(r)}$, les chemins $Hol_y^{-1}(\gamma_0)$ et $Hol_y^{-1}(\gamma_1)$ sont homotopes. $Hol_y^{-1}(\gamma)$ définit donc une application $\overline{Hol}_y : (B_{x,r} \subset \tilde{\mathcal{L}}_x) \rightarrow \tilde{\mathcal{L}}_y$ et $\tilde{\mathcal{L}}_x$ est un revêtement asymptotique des $\tilde{\mathcal{L}}_{y|y \rightarrow x}$. \square

Corollaire 2.11.1 Soit Λ une lamination et $\lambda \in \Lambda$. Le revêtement d'holonomie $\overline{\mathcal{L}}_\lambda$ est un revêtement asymptotique des revêtements d'holonomie des feuilles proches. On a donc :

$$\mathcal{L}_\lambda \leq \mathcal{L}_{x|x \rightarrow \lambda} \Rightarrow \mathcal{L}_\lambda \leq \mathcal{L}_{x|x \rightarrow \lambda} \leq \overline{\mathcal{L}}_{x|x \rightarrow \lambda} \leq \overline{\mathcal{L}}_\lambda$$

Preuve Le revêtement d'holonomie de \mathcal{L}_λ est l'ensemble des chemins $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Lambda$ tels que $\gamma(0) = \lambda$, où deux chemins γ et $\bar{\gamma}$ sont identifiés s'ils ont même holonomie : $Hol(\gamma, Y_0, Y_1) = Hol(\bar{\gamma}, Y_0, Y_1)$, pour deux transversales Y_0 et Y_1 . Cette condition ne dépend pas des transversales choisies.

On sait que $\tilde{\mathcal{L}}_{x|x \rightarrow \lambda} \leq \tilde{\mathcal{L}}_\lambda$, c'est-à-dire : pourvu que x soit proche de λ , tout chemin γ de longueur $\ell \leq r$ sur \mathcal{L}_λ se relève en un chemin $Hol_x(\gamma)$ défini sur \mathcal{L}_x et la classe d'homotopie de $Hol_x(\gamma)$ ne dépend que de celle de γ . Pour démontrer que cette application passe au quotient, et définit une holonomie : $Hol_x : \overline{\mathcal{L}}_\lambda \rightarrow \overline{\mathcal{L}}_{x|x \rightarrow \lambda}$, il suffit de vérifier que lorsque γ est d'holonomie triviale, le chemin relevé sur \mathcal{L}_x est d'holonomie triviale.

Supposons donc que $Hol(\gamma, Y, Y) = id$. Il existe $0 = x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n = 1$ et des cartes $\mathcal{O}_i = \mathbb{R}^n \times Y_i$ de Λ telles que : $Y_0 = Y$, $Y_n = Y$, $\gamma([x_i, x_{i+1}]) \subset \mathcal{O}_i$,

et $g_{i+1}^i : Y_i \rightarrow Y_{i+1}$ vérifie : $g_n^{n-1} \circ \dots \circ g_1^0 = id$. Sur chaque carte, γ définit une courbe $[x_i, x_{i+1}] \rightarrow \mathbb{R}^n$. Si x est proche de λ , on peut relever naturellement γ sur $[x_i, x_{i+1}[$ en $H_x(\gamma)$, qui admet des points de discontinuité aux points x_i . Lorsque x est proche de λ , on peut rectifier $H_x(\gamma)$ en une courbe continue. On sait alors que : $Hol(H_x(\gamma), Y, Y, \mathcal{O}_i) = Hol(\gamma, Y, Y, \mathcal{O}_i) = id$. De plus, $H_x(\gamma)$ est homotope à $Hol_x(\gamma) : Hol_x(\gamma)$ est donc d'holonomie triviale. \square

Avant de d'étudier la topologie \mathcal{C}^∞ sur l'espace des applications laminées, posons la :

Définition 2.12 (Limite d'une suite de feuilles) .

Soit Λ une lamination et λ_n une suite de points qui convergent vers λ . Le sous groupe des lacets triviaux relativement à λ_n est le sous groupe Γ de $\pi_1(\mathcal{L}_\lambda)$ engendré par les lacets dont les relèvements sur des feuilles arbitrairement proches sont fermés :

$$\Gamma_0 = \{\gamma \in \pi_1(\mathcal{L}_\lambda) \mid \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N \exists \gamma_n \in \pi_1(\mathcal{L}_{\lambda_n}) / Hol(\gamma_n) = \gamma\}$$

La limite des feuilles \mathcal{L}_{λ_n} est le revêtement de \mathcal{L}_λ défini par :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{L}_{\lambda_n} = \tilde{\mathcal{L}}_\lambda \Gamma$$

où $\tilde{\mathcal{L}}_\lambda$ est le revêtement universel de la feuille \mathcal{L}_λ .

Cette définition sera utile pour caractériser l'adhérence de l'espace des applications laminées dans son revêtement d'holonomie.

2.3. L'espace des applications laminées

Définition 2.13 Soient Λ et Ξ deux laminations. L'espace des applications laminées pointées de Λ dans Ξ est :

$$\mathcal{M} = \{(\lambda, \varphi) \mid \lambda \in \Lambda \text{ et } \varphi : \mathcal{L}_\lambda \rightarrow \mathcal{L}_\xi \subset \Xi\}$$

Notons quelques propriétés élémentaires :

- \mathcal{M} , l'espace des applications laminées pointées est naturellement laminé : (x, φ) et (y, ψ) sont dans la même feuille si $\mathcal{L}_x = \mathcal{L}_y$, et $\varphi = \psi$. Autrement dit, $\varphi : \mathcal{L}_x \rightarrow \Xi$ étant fixée, la feuille passant par (x, φ) est l'ensemble des (y, φ) , lorsque y parcourt \mathcal{L}_x ,
- \mathcal{M} se projette naturellement sur Λ : $\pi(x, \varphi) = x$, et cette projection est une application laminée.

Si Λ et Ξ sont deux laminations riemanniennes transversalement continûment \mathcal{C}^∞ , on peut définir une distance adaptée à la topologie \mathcal{C}^∞ sur l'espace des applications laminées et sur son revêtement d'holonomie : $\overline{\mathcal{M}} = \{(\lambda, \varphi) \mid \lambda \in \Lambda \text{ et } \varphi : \mathcal{L}_x \rightarrow \mathcal{L}_\xi \subset \Xi\}$. De même que \mathcal{M} , l'espace $\overline{\mathcal{M}}$ est naturellement laminé, se projette sur Λ et la projection est une application laminée. De plus : \mathcal{M} s'identifie à un sous espace de $\overline{\mathcal{M}}$. En effet, à $(\lambda, \varphi) \in \mathcal{M}$, on associe naturellement $(\lambda, \varphi \circ \pi)$ où π est la projection de $\overline{\mathcal{L}}_\lambda$ sur \mathcal{L}_λ .

Supposons choisi un plongement de Λ dans un espace de Hilbert \mathcal{H}_Λ . Via ce plongement, on sait alors que le revêtement d'holonomie $\overline{\mathcal{L}}_x$ est un revêtement

2.3. L'ESPACE DES APPLICATIONS LAMINÉES

asymptotique des $\overline{\mathcal{L}}_{y|y \rightarrow x}$. Supposons également choisi un plongement de la lamination Ξ dans un espace de Hilbert \mathcal{H}_Ξ . On peut alors comparer les dérivées covariantes de tout couple de fonctions $(\varphi, \psi) : \overline{\mathcal{L}}_x \rightarrow \Xi$. Une fois choisis les plongements $\Lambda \rightarrow \mathcal{H}_\Lambda$ et $\Xi \rightarrow \mathcal{H}_\Xi$, la distance sur $\overline{\mathcal{M}}$ se construit en trois étapes :

- *Comparaison locale entre $Y = (y, \varphi_y)$ et $Z \in \overline{\mathcal{M}}$* : Fixons $x \in \Lambda$. On sait (via le plongement $\Lambda \rightarrow \mathcal{H}_\Lambda$) que $\overline{\mathcal{L}}_{y|y \rightarrow x} \leq \overline{\mathcal{L}}_x$. c'est-à-dire : $r, n > 0$ étant fixés, il existe $\epsilon_x(r, n)$ tel que, si $d(x, y) \leq \epsilon_x(r, n)$, il existe $\pi_y : \overline{\mathcal{L}}_x \rightarrow \overline{\mathcal{L}}_y$ tel que : $d(\pi_y(x), y) \leq \frac{1}{r}$ et $|\pi^* g - g| \leq \frac{1}{r}$. Si y et z sont proches de x , $\varphi_y \circ \pi_y$ et $\varphi_z \circ \pi_z : B_{x,r} \subset \overline{\mathcal{L}}_x \rightarrow \mathcal{H}_\Xi$ sont bien définis, et on pose :

$$\overline{d}_x^{r,n}(Y, Z) = \sum_{k=0}^n \frac{\inf(1, \sup_{B_{x,r}} |\nabla^k \varphi_y \circ \pi_y - \nabla^k \varphi_z \circ \pi_z|)}{2^k + 1}$$

sinon, on pose $\overline{d}_x^{r,n}(Y, Z) = 1$. $\overline{d}_x^{r,n}$ est alors une pseudo-distance : c'est une fonction symétrique, qui vérifie l'inégalité triangulaire,

- *Continuité des pseudo-distances* : lorsque $\overline{\mathcal{L}}_x$ a une holonomie non triviale, en général, les fonctions $\epsilon_x(r, n)$ ne sont pas localement minorées :

$$\liminf_{y \rightarrow x} \epsilon_y(r, n) = 0$$

et les pseudo-distances $\overline{d}^{r,n}$ n'ont pas de propriété de continuité satisfaisante. On remédie à cette difficulté par un argument de moyenne : $r, n > 0$ étant fixés, on choisit un recouvrement localement fini de la lamination Λ par des ouverts de la forme B_{x_k, ϵ_k} où $\epsilon_k = \frac{1}{4} \epsilon_{x_k}(r, n)$. On définit alors la pseudo distance : $d_x^{r,n} = \sum_{k|d(x, x_k) \leq 2\epsilon_k} \overline{d}_{x_k}^{r,n}$, qui varie continûment en fonction de x :

$$\forall x, \exists \epsilon(x), K \left| d_\Lambda(x, y) \leq \epsilon(x) \Rightarrow \frac{1}{K} \leq \frac{d_x^r}{d_y^r}((\alpha, \varphi_\alpha), (\beta, \varphi_\beta)) \leq K \right.$$

dès que $d_\Lambda(x, \alpha)$ et $d_\Lambda(x, \beta) \leq \epsilon(x)$.

- *Distance \mathcal{C}^∞ sur $\overline{\mathcal{M}}$* : On sait construire une distance sur une variété à partir d'une métrique (riemannienne ou finslerienne) définie sur l'espace tangent. Dans le même esprit, on peut agréger les pseudo-distances $d_x^{r,n}$ - que l'on peut assimiler à une métrique définie sur l'espace tangent à $\overline{\mathcal{M}}$ - en une distance sur $\overline{\mathcal{M}}$: on définit la longueur d'une chaîne $(x_k, \varphi_k)_{1 \leq k \leq n+1}$:

$$\begin{aligned} \ell((x_k, \varphi_k)_{1 \leq k \leq n+1}) &= \sum_{k=1}^n \left(d_\Lambda(x_k, x_{k+1}) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{r,n=2}^{\infty} \frac{d_{x_k}^{r,n}(\varphi_k, \varphi_{k+1}) + d_{x_{k+1}}^{r,n}(\varphi_k, \varphi_{k+1})}{2^{r+n}} \right) \end{aligned}$$

puis la distance de (x, φ) à (y, ψ) comme le minimum des longueurs des chaînes les reliant.

On définit ainsi une distance sur $\overline{\mathcal{M}}$: d est symétrique et vérifie l'inégalité triangulaire par construction et la propriété de continuité des pseudo-distances permet de conclure que d est non dégénérée.

Proposition 2.14 (Topologie \mathcal{C}^∞ sur $\overline{\mathcal{M}}$) .

Soient Λ et Ξ deux lamination riemanniennes transversalement continûment \mathcal{C}^∞ . Le revêtement d'holonomie de l'espace des applications laminées :

$$\overline{\mathcal{M}} = \{(\lambda, \varphi) | \lambda \in \Lambda \text{ et } \varphi : \overline{\mathcal{L}}_\lambda \rightarrow \mathcal{L}_\xi \subset \Xi\}$$

muni de la topologie \mathcal{C}^∞ est métrisable : il existe une distance d adaptée à la topologie \mathcal{C}^∞ , telle que $(\overline{\mathcal{M}}, d)$ est un espace métrique complet à base dénombrable.

Preuve (Complétude) Par définition de $d_{\overline{\mathcal{M}}}$, la projection : $\overline{\mathcal{M}} \xrightarrow{\pi} \Lambda$ est contractante. Toute suite de Cauchy (x_n, φ_n) sur $\overline{\mathcal{M}}$ se projette donc en une suite de Cauchy sur Λ . On peut donc supposer que x_n converge vers x dans Λ . Sachant que $\overline{\mathcal{L}}_x$ est un revêtement asymptotique des $\overline{\mathcal{L}}_{x_n | x_n \rightarrow x}$, on peut relever φ_n sur $\overline{\mathcal{L}}_x$. Ces relevés forment alors une suite de Cauchy pour la topologie \mathcal{C}^∞ et convergent donc vers une limite φ . \square

Remarque 2.14.1 (Topologie $\mathcal{C}^{k,\alpha}$) .

Si Λ et Ξ sont des lamination riemanniennes $\mathcal{C}^{k,\alpha}$, on peut définir naturellement une distance sur l'espace $\overline{\mathcal{M}}$ adaptée à la topologie $\mathcal{C}^{k,\alpha}$, qui fait de $\overline{\mathcal{M}}$ un espace métrique complet à base dénombrable.

Donnons sans démonstration la :

Proposition 2.15 (Complétude de \mathcal{M}) .

Soient Λ et Ξ deux lamination riemanniennes régulières. L'espace des applications laminées :

$$\mathcal{M} = \{(\lambda, \varphi) | \lambda \in \Lambda \text{ et } \varphi : \mathcal{L}_\lambda \rightarrow \mathcal{L}_\xi \subset \Xi\}$$

est un sous espace de $\overline{\mathcal{M}}$: la distance d sur $\overline{\mathcal{M}}$ définit par restriction une distance sur \mathcal{M} adaptée à la topologie \mathcal{C}^∞ . L'adhérence de \mathcal{M} dans $\overline{\mathcal{M}}$ est l'ensemble des (x, φ) , où φ est défini sur un revêtement $\overline{\mathcal{L}}_x$ limite d'une suite de feuilles \mathcal{L}_{x_n} lorsque $x_n \rightarrow x$.

Remarque 2.15.1 Le feuilletage de Reeb de \mathbb{S}^3 -cf Godbillon [17] - est un feuilletage de dimension 2 de la sphère \mathbb{S}^3 , qui admet une feuille torique $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, et dont toutes les autres feuilles sont des plans. Le revêtement d'holonomie de la feuille torique est $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Par contre, les feuilles proches de la feuille torique ont pour limite : soit $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, soit $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$, soit $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1$. Le revêtement d'holonomie de la feuille torique n'est donc pas réalisé comme limite d'une suite de feuilles proches. Si $\Lambda = \mathbb{S}^3$, muni du feuilletage de Reeb et Ξ est une lamination quelconque, l'espace des applications laminées de Λ dans Ξ présente donc deux particularités : d'une part, \mathcal{M} n'est pas complet, d'autre part : l'adhérence de \mathcal{M} est distincte de $\overline{\mathcal{M}}$

Lorsque (Λ, g, ν) est une lamination riemannienne mesurée régulière, Λ admet une métrique h de référence telle que (Λ, h) est régulière et g et toutes ses dérivées sont bornées en norme L^∞ par rapport à h . Quitte à modifier g sur un ensemble de mesure nulle, on peut supposer g et toutes ses dérivées uniformément bornés, c'est à dire que, pour tout $k \geq 0$:

$$\sup \| \nabla_h^k g \| = \text{supess } \| \nabla_h^k g \|$$

Si Ξ est une lamination régulière, on peut définir une distance adaptée à la topologie \mathcal{C}^∞ . Le théorème d'Arzéla et Ascoli permet alors de caractériser les compacts de $\overline{\mathcal{M}}$:

Proposition 2.16 *Soit (Λ, g, ν) une lamination riemannienne mesurée régulière et Ξ une lamination riemannienne régulière. Si K_Λ est un compact de Λ , K_Ξ un compact de Ξ et si on fixe $C(r, n) > 0$ pour tout $r, n \in \mathbb{N}$, l'espace*

$$\mathcal{X} = \left\{ (x, \varphi) \left| x \in K_\Lambda, \varphi(x) \in K_\Xi, \forall r, n \in \mathbb{N}, \sup_{d(x, y) \leq r} |\nabla^n \varphi(y)| \leq C(r, n) \right. \right\}$$

est précompact dans $\overline{\mathcal{M}}$.

2.4. Mesures transverses sur $\overline{\mathcal{M}}$

Soit (Λ, g, ν) une lamination riemannienne mesurée. La mesure de volume riemannienne et la mesure transverse sur Λ définissent une mesure, que l'on notera encore ν , sur l'espace total Λ . Soient Ξ une lamination riemannienne et $f : \Lambda \rightarrow \Xi$ une application laminée. f définit une section de la projection naturelle $\overline{\mathcal{M}} \rightarrow \Lambda$: à $\lambda \in \Lambda$ est associé $f(\lambda) = (\lambda, \overline{f})$ où $\overline{f} = f|_{\mathcal{L}_\lambda} \circ \pi_{\mathcal{L}}$, si on note $\pi_{\mathcal{L}}$ la projection de $\overline{\mathcal{L}}_\lambda$ dans \mathcal{L}_λ . $\mu = f_* \nu$ définit une mesure sur $\overline{\mathcal{M}}$, qui se projette sur ν .

D'après le théorème de désintégration des mesures - cf Bourbaki [9] -, si μ est une mesure sur $\overline{\mathcal{M}}$ qui se projette sur ν , alors : $\mu = \int_\Lambda \mu_\lambda d\nu(\lambda)$, où μ_λ est une mesure de probabilité sur $\pi_{\overline{\mathcal{M}}}^{-1}(\lambda)$, c'est-à-dire une mesure sur l'espace des applications $\varphi : \overline{\mathcal{L}}_\lambda \rightarrow \Xi$. μ définit donc une section L^∞ , que l'on notera encore μ , du fibré $\mathcal{Z}^* \rightarrow \Lambda$, où $\mathcal{Z}_\lambda = \mathcal{C}_b^0[\mathcal{C}^\infty(\overline{\mathcal{L}}_\lambda, \Xi), \mathbb{R}]$ est muni de la norme sup et \mathcal{Z}_λ^* est le dual topologique de \mathcal{Z}_λ .

Une application laminée définit donc une section $\mu \in L^\infty(\mathcal{Z}^*)$. De toute évidence, $L^\infty(\mathcal{Z}^*) \subset L^1(\mathcal{Z})^*$. Les fibres de \mathcal{Z} varient de façon non triviale. Il n'est donc pas du tout évident que l'on ait l'identité :

$$L^\infty(\mathcal{Z}^*) = L^1(\mathcal{Z})^*$$

Pour contourner cette difficulté, définissons $T\mathcal{Z}_\lambda = \mathcal{C}_b^0[\mathcal{C}^\infty(T_\lambda \Lambda, \Xi), \mathbb{R}]$, muni de la norme sup. L'espace $T\mathcal{Z}$ a une structure de fibré localement trivial, de fibre : l'espace de Banach $\mathcal{C}_b^0(\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \Xi), \mathbb{R})$ des fonctions continues bornées sur l'espace des applications de \mathbb{R}^n dans Ξ . L'application exponentielle définit un plongement $\exp : T\mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{Z}$. Si $f : \overline{\mathcal{L}}_\lambda \rightarrow \Xi$ est une application \mathcal{C}^∞ et $L \in T\mathcal{Z}_\lambda$, on définit :

$$\langle \exp(L) | f \rangle = \langle L | f \circ \exp \rangle$$

où $\exp : T_\lambda \overline{\mathcal{L}}_\lambda \rightarrow \overline{\mathcal{L}}_\lambda$ est l'application exponentielle. Par dualité, on a donc une application $\exp^* : \mathcal{Z}^* \rightarrow (T\mathcal{Z})^*$. μ définit une section L^∞ de \mathcal{Z}^* : $\exp^* \mu$ définit donc une section de $T\mathcal{Z}^*$. On a ainsi démontré :

Proposition 2.17 *Soit (Λ, g, ν) une lamination riemannienne mesurée et Ξ une lamination riemannienne. Soit $T\mathcal{Z} \rightarrow \Lambda$ le fibré de fibre $T\mathcal{Z}_\lambda = \mathcal{C}_b^0[\mathcal{C}^\infty(T_\lambda \Lambda, \Xi), \mathbb{R}]$. $T\mathcal{Z}$ est un fibré en espace de Banach, et est localement trivial. Si $f : \Lambda \rightarrow \Xi$ est une application laminée, $\mu = f_* \nu$ est une mesure transverse sur l'espace $\overline{\mathcal{M}}$. μ peut également s'interpréter comme une section L^∞ du fibré $T\mathcal{Z}^*$, de norme 1 ν presque sûrement.*

D'après Ionescu-Tulcea [25], on sait de plus :

Théorème 2.18 Soit Λ un espace métrique muni d'une mesure ν et $T\mathcal{Z} \rightarrow \Lambda$ un fibré en espace de Banach localement trivial. Alors :

$$L^\infty(T\mathcal{Z}^*) = (L^1(T\mathcal{Z}))^*$$

2.5. Invariants d'homotopie des applications laminées

Dans ce paragraphe, nous introduisons deux invariants d'homotopie bornée : l'aire minimale et l'étirement, qui sont particulièrement utiles pour l'étude de la rigidité des laminations. Rappelons que si Λ est une lamination, $\Lambda \times \mathbb{R}$ est naturellement laminé et les feuilles de $\Lambda \times \mathbb{R}$ sont $\mathcal{L} \times \mathbb{R}$. On peut donc définir :

Définition 2.19 (Homotopie) .

Soient Λ et Ξ deux laminations riemanniennes, f_0 et f_1 deux applications laminées de Λ dans Ξ .

- Une homotopie bornée entre f_0 et f_1 est une application laminée $F : \Lambda \times \mathbb{R} \rightarrow \Xi$ telle que $F(\lambda, 0) = f_0(\lambda)$, $F(\lambda, 1) = f_1(\lambda)$ et

$$\sup_{\lambda \in \Lambda} \int_0^1 \left\| \frac{dF}{dt}(\lambda, t) \right\| dt < \infty$$

- Lorsque Λ est une lamination riemannienne mesurée, une homotopie mesurable entre f_0 et f_1 est une application laminée transversalement mesurable $F : \Lambda \times [0, 1] \rightarrow \Xi$ telle que, pour ν presque tout $\lambda : F(\lambda, 0) = f_0(\lambda)$, $F(\lambda, 1) = f_1(\lambda)$.

Définition 2.20 (k-volume) Soient Λ et Ξ deux laminations riemanniennes et $f : \Lambda \rightarrow \Xi$. Le k -volume de f est : $\text{vol}_k(f) = |\wedge^k df|$, où $\wedge^k df$ est une section de $\Lambda^k(T^*\Lambda) \otimes \Lambda^k(T\Xi)$. La longueur de f est son 1-volume ; et l'aire de f son 2-volume. Lorsque Λ est une lamination riemannienne mesurée, le k -volume total de f est : $\text{VOL}_k(f) = \int_\Lambda \text{vol}_k(f)$ et on définit le k -volume minimal :

$$\text{MinVOL}_k(f) = \inf_{g \sim f} \text{VOL}_k(g)$$

où $g \sim f$ si g est une application laminée mesurable, homotope à f par une homotopie bornée.

Le k -volume minimal est, par définition, un invariant d'homotopie bornée. On peut donner des critères cohomologiques permettant d'assurer que $\text{MinVOL}_k(f) \neq 0$. Par exemple :

Proposition 2.21 Soit (Λ, g, ν) une lamination riemannienne mesurée de dimension 2. Si h est une métrique riemannienne sur Λ , bornée par rapport à g , ainsi que toutes ses dérivées et de courbure pincée : $-\frac{1}{\kappa^2} \leq K(h) \leq -\kappa^2$, alors $\text{id} : (\Lambda, g) \rightarrow (\Lambda, h)$ vérifie : $\text{MinAIRE}(\text{id}) \geq \kappa^4 \text{AIRE}(\text{id})$.

On peut noter que l'aire de l'identité ne dépend pas de la métrique à la source.

Preuve D'après le théorème de Gauss-Bonnet pour les laminations :

$$\chi(\Lambda, \nu) = \int_{\Lambda} K(h) dx|_h$$

où K_h est la courbure de la métrique h et $dx|_h$ est la mesure sur Λ induite par la mesure transverse ν et la mesure de volume riemannienne associée à la métrique h . Si f est homotope, à distance bornée de l'identité :

$$\begin{aligned} \int_{\Lambda} f^* K(h) dx|_h &= \int_{\Lambda} id^* K(h) dx|_h \\ &= \chi(\Lambda, \nu) \end{aligned}$$

D'après la condition de pincement :

$$\kappa^2 AIRE(id) \leq - \int_{\Lambda} f^* K(h) dx|_h \leq \frac{1}{\kappa^2} AIRE(f)$$

Donc $AIRE(f) \geq \kappa^4 AIRE(id)$. □

Un autre invariant d'homotopie bornée intéressant est donné par l'étirement - le "stretch" de Gromov [19] - :

Définition 2.22 (Etirement) .

Soient M et N deux variétés simplement connexes et $f : M \rightarrow N$. L'étirement de f en $(x, n) \in UM$ est défini par :

$$st(x, N) = \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{d(f(\exp_x(tn)), f(\exp_x(-tn)))}{2t}$$

Soient Λ et Ξ deux laminations riemanniennes et $f : \Lambda \rightarrow \Xi$ une application laminée d'énergie bornée.

— L'étirement local de f , $st_f : U\Lambda \rightarrow \mathbb{R}^+$ est défini par :

$$st_f(\lambda, n) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\tilde{d}(\tilde{f}(\exp_{\lambda}(tn)), \tilde{f}(\exp_{\lambda}(-tn)))}{2t}$$

où $\tilde{f} : \tilde{\mathcal{L}}_{\lambda} \rightarrow \tilde{\mathcal{L}}_{\xi}$ est le relevé de f aux revêtements universel des feuilles \mathcal{L}_{λ} et \mathcal{L}_{ξ} .

— Lorsque Λ est muni d'une mesure transverse ν , l'étirement total de f est :

$$St(f) = \int_{U\Lambda} st_f(\lambda, n)$$

L'étirement contrôle la distortion asymptotique du flot géodésique. D'après Croke et Fathi [12] - dans le cas où Λ est une variété - et Gromov [19] - dans le cas des feuilletages - :

Proposition 2.23 Soit (Λ, g, ν) une lamination riemannienne mesurée et $f : \Lambda \rightarrow \Xi$ une application laminée.

- L'étirement total est un invariant d'homotopie bornée : si h est homotope, à distance bornée de f , $St(h) = St(f)$,
- L'étirement contrôle la longueur minimale : $MinL(f) \geq vol(\mathbb{S}^{n-1})St(f)$, si les feuilles de Λ sont de dimension n .

Preuve D'après la définition, l'étirement local est invariant par homotopie bornée :

$$st_f(\lambda, n) = \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{d(\tilde{f}(\exp_\lambda(tn)), \tilde{f}(\exp_\lambda(-tn)))}{2t}$$

Comme \tilde{f} est à distance bornée de \tilde{h} , à la limite, pour $t \rightarrow \infty$, on vérifie : $st_f(\lambda, n) = st_h(\lambda, n)$. L'étirement total vérifie :

$$\begin{aligned} St(f) &:= \int_{U_\Lambda} \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\tilde{d}(\tilde{f}(\exp_\lambda(tn)), \tilde{f}(\exp_\lambda(-tn)))}{2t} \\ &\leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \int_{U_\Lambda} \frac{\tilde{d}(\tilde{f}(\exp_\lambda(tn)), \tilde{f}(\exp_\lambda(-tn)))}{2t} \\ &\leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \int_{U_\Lambda} \frac{1}{2t} \int_{-t}^t |df|(\exp_\lambda(tn)) \end{aligned}$$

La mesure de Liouville étant invariante par le flot géodésique, on en déduit que :

$$\begin{aligned} St(f) &\leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \int_{-t}^t \frac{1}{2t} \int_{U_\Lambda} |df| \\ &\leq \text{vol}(\mathbb{S}^{n-1}) \int_{\Lambda} |df| \end{aligned}$$

On a un critère élémentaire de non annulation de l'étirement. D'après Quiroga [37] :

Proposition 2.24 *Soit (Λ, g, ν) une lamination riemannienne mesurée et h une métrique riemannienne sur Λ , quasi-isométrique à g , c'est-à-dire telle que les métriques associées d_h et d_g vérifient :*

$$\frac{1}{C} d_g(x, y) - K \leq d_h(x, y) \leq C d_g(x, y) + K$$

$id : (\Lambda, g) \rightarrow (\Lambda, h)$ est d'étirement non nul dès que : pour tout $\lambda \in \Lambda$, le revêtement universel $\tilde{\mathcal{L}}_\lambda$ de (\mathcal{L}_λ, g) n'a pas de points conjugués.

Preuve $id : (\Lambda, g) \rightarrow (\Lambda, h)$ étant une quasi-isométrie, $\frac{1}{C} d_g(x, y) - K \leq d_h(x, y) \leq C d_g(x, y) + K$. Si $(\tilde{\mathcal{L}}_\lambda, g)$ n'a pas de points conjugués, la géodésique $\gamma_g(t) = \exp_\lambda(tn)|_g$ est minimisante, donc : $d(\exp_\lambda(tn), \exp_\lambda(-tn))|_g = 2t$. On en déduit que l'étirement local vérifie : $st(\lambda, n) \geq \frac{1}{C}$. \square

Corollaire 2.24.1 *Si (Λ, g, ν) est une lamination riemannienne mesurée à courbure $K \leq 0$ et h une métrique quasi-isométrique à g . L'étirement de $id : (\Lambda, g) \rightarrow (\Lambda, h)$ n'est pas nul.*

Chapitre 3

Applications harmoniques laminées

CE chapitre est consacré à l'étude des applications harmoniques laminées, c'est-à-dire : aux applications $f : \Lambda \rightarrow \Xi$, où Λ et Ξ sont des laminations riemanniennes et f est harmonique feuille à feuille. Lorsque Λ est un feuilletage et Ξ une variété compacte, ce problème a été étudié par Gromov [19], qui a mis en évidence un phénomène stabilité par perturbation pour les applications harmoniques feuilletées et de décohérence transverse pour le flot de la chaleur. Nous démontrons d'abord que le phénomène de décohérence transverse pour le flot de la chaleur n'a pas lieu lorsque Λ et Ξ sont des feuilletages riemanniens, localement de la forme $(M, g) \times (N, h)$, puis nous étendons les résultats de convergence de Gromov dans le cadre des laminations riemanniennes mesurées régulières, c'est-à-dire sous des hypothèses minimales sur la structure transverse. On en déduit un résultat de rigidité pour les laminations localement symétriques.

3.1. Deux exemples

Pour motiver notre étude, examinons d'abord deux exemples très différents : celui des produits riemanniens $X \times Y$, feuilleté par $X \times \{y\}$, pour lesquels le flot de la chaleur feuilleté est bien contrôlé transversalement aux feuilles et celui du feuilletage horosphérique d'une variété hyperbolique : si $\pi : UM \rightarrow M$ est la projection sur M du fibré unitaire tangent à M feuilleté par les horosphères, le flot de la chaleur associé a un comportement ergodique. La régularité transverse du flot de la chaleur, dans le cas des produits riemanniens, peut se déduire d'une formule de Bochner.

Soient Λ une variété feuilletée, munie d'une métrique riemannienne, \mathcal{L} une feuille de Λ et $i : \mathcal{L} \rightarrow \Lambda$ l'immersion de \mathcal{L} dans Λ . Le fibré tangent à Λ est naturellement muni de la connexion de Levi-Civita ∇ associée à g_Λ . Le fibré tangent aux feuilles est également muni de la connexion de Levi-Civita $\nabla_{\mathcal{F}}$ associée à $g_{\mathcal{L}} = i^*g_\Lambda$. La différence entre $i^*\nabla$ et $\nabla_{\mathcal{F}}$ définit la seconde forme fondamentale : si X, Y sont deux sections de $T\mathcal{L}$, $\nabla_{\mathcal{F}}YX = \nabla_YX + \mathbf{II}(X, Y)$. \mathbf{II} est linéaire : c'est une section du fibré $T^*\mathcal{L} \otimes T^*\mathcal{L} \otimes N\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}$. Si e est une fonction définie sur Λ , on posera $\Delta_{\mathcal{F}}e$ le laplacien riemannien de e restreinte aux feuilles \mathcal{L} de Λ munies de la métrique i^*g_Λ .

Théorème 3.1 (Formule de Bochner feuilletée) .

Soient Λ et Ξ deux variétés riemanniennes feuilletées. Soit $f_t : \Lambda \rightarrow \Xi$ une solution \mathcal{C}^2 de l'équation de la chaleur feuilletée. L'énergie de f_t vérifie :

$$\begin{aligned} \Delta_{\mathcal{F}} e &= \frac{\partial e}{\partial t} + \|\nabla df\|_{\mathcal{F}}^2 + \text{ric}_{\mathcal{F}}^{\Lambda}(df, df) - R_{df_{\mathcal{F}}, df}^{\Xi}(df_{\mathcal{F}}, df) \\ &\quad - \langle (\nabla_* \text{tr}_{\mathcal{F}}) \nabla df \mid d_* f \rangle - \langle \nabla_* \text{tr}_{\mathcal{F}} \mathbf{II} df \mid d_* f \rangle + \text{tr}_{\mathcal{F}} \mathbf{II} \langle \nabla_* df \mid df \rangle \end{aligned}$$

où :

- $\Delta_{\mathcal{F}} e = \text{tr}_{\mathcal{F}} \nabla_{\mathcal{F}} de$ est le laplacien feuilleté,
- $\text{ric}_{\mathcal{F}}(df, df) = \text{tr}_{X \in T\mathcal{F}, Y \in T\Lambda} \frac{1}{Y^2} R_{X,Y}(X, Y) |df(Y)|^2$,
- $R_{df_{\mathcal{F}}, df}(df_{\mathcal{F}}, df) = \text{tr}_{X \in T\mathcal{F}, Y \in T\Lambda} R_{df(X), df(Y)}(df(X), df(Y))$.

Les termes $\frac{\partial e}{\partial t} + \|\nabla df\|_{\mathcal{F}}^2 + \text{ric}_{\mathcal{F}}^{\Lambda}(df, df) - R_{df_{\mathcal{F}}, df}^{\Xi}(df_{\mathcal{F}}, df)$ apparaissent dans la formule de Bochner pour l'énergie classique. Les termes supplémentaires décrivent la géométrie des feuilles plongées dans les variétés Λ et Ξ , à travers la seconde forme fondamentale \mathbf{II} et la façon dont ces plongements varient, à travers les termes $\nabla \text{tr}_{\mathcal{F}}$ et $\nabla_* \text{tr}_{\mathcal{F}} \mathbf{II} df$.

Preuve On a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial e}{\partial t} &= \langle \frac{\partial}{\partial t} df \mid df \rangle = \langle \nabla \frac{\partial f}{\partial t} \mid df \rangle \\ &= \langle \nabla \text{tr}_{\mathcal{F}} \nabla df \mid df \rangle + \langle \nabla \text{tr}_{\mathcal{F}} \mathbf{II} df \mid df \rangle \\ \Delta_{\mathcal{F}} e &= \text{tr}_{\mathcal{F}} \nabla_{\mathcal{F}} de = \text{tr}_{\mathcal{F}} \nabla \langle \nabla df \mid df \rangle + \text{tr}_{\mathcal{F}} \mathbf{II} \langle \nabla df \mid df \rangle \\ &= \|\nabla df\|_{\mathcal{F}}^2 + \text{tr}_{\mathcal{F}} \langle \nabla \nabla df \mid df \rangle + \text{tr}_{\mathcal{F}} \mathbf{II} \langle \nabla df \mid df \rangle \\ &= \frac{\partial e}{\partial t} + \|\nabla df\|_{\mathcal{F}}^2 + \langle \text{tr}_{\mathcal{F}} \nabla \nabla df - \nabla \text{tr}_{\mathcal{F}} \nabla df - \nabla \text{tr}_{\mathcal{F}} \mathbf{II} df \mid df \rangle \\ &\quad + \text{tr}_{\mathcal{F}} \mathbf{II} \langle \nabla df \mid df \rangle \end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned} \text{tr}_{\mathcal{F}} \nabla \nabla df - \nabla \text{tr}_{\mathcal{F}} \nabla df &= \sum_{X_i \in T\mathcal{F}} \nabla_{X_i} \nabla_{X_i} df - \nabla \nabla_{X_i} d_{X_i} f - (\nabla \text{tr}_{\mathcal{F}}) \nabla df \\ &= \text{ric}_{\mathcal{F}}^{\Lambda} df - R_{df_{\mathcal{F}}, df}^{\Xi} df_{\mathcal{F}} - (\nabla \text{tr}_{\mathcal{F}}) \nabla df \end{aligned}$$

D'où la formule annoncée. \square

Corollaire 3.1.1 Lorsque Λ et Ξ sont localement des produits riemanniens, on a :

$$\Delta e^{\perp} = \frac{\partial e^{\perp}}{\partial t} + \|\nabla df^{\perp}\|_{\mathcal{F}}^2 - R_{df_{\mathcal{F}}, df^{\perp}}^{\Xi}(df_{\mathcal{F}}, df^{\perp})$$

où on définit $Df^{\perp} : N\mathcal{F} \rightarrow T\Xi$ par $Df^{\perp} = df|_{N\mathcal{F}}$ et $e^{\perp} = \frac{1}{2} \|df^{\perp}\|^2$ est l'énergie transverse du flot de la chaleur.

En particulier, si Λ et Ξ sont localement des produits riemanniens et si les feuilles de Ξ sont à courbure $K \leq 0$, le flot de la chaleur est transversalement contractant. Lorsque $\Lambda = M \times \mathbb{R}$ et $\Xi = N$, cette formule a été démontrée par Hartman [23] : c'est une version locale de la formule de Bochner pour la fonction distance. En général, si Λ ou Ξ ne sont pas des produits riemanniens, la formule de Bochner feuilletée ne permet pas de contrôler le comportement transverse du flot de la chaleur : c'est ce phénomène de décohérence transverse qu'illustre de façon spectaculaire l'exemple du feuilletage horosphérique de Gromov [18].

Exemple 3.2 Le fibré unitaire tangent $U\mathbb{H}^p$ de l'espace hyperbolique \mathbb{H}^p est feuilleté par les horosphères : la feuille passant par (x, n) est l'ensemble des (y, v) tels que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} d(\exp_x(tn), \exp_y(tv)) = 0$$

Ce feuilletage est un feuilletage \mathcal{C}^∞ invariant par isométrie, et induit donc un feuilletage sur UM , si M est une variété hyperbolique compacte. Si $\pi : UM \rightarrow M$ est la projection du fibré UM feuilleté par les horosphères, sur M muni du feuilletage trivial, le flot de la chaleur associé à π est donné par l'application exponentielle : $\pi_t(x, n) = \exp_x(\frac{(p-1)t}{2}n)$.

En particulier : le flot de la chaleur π_t est bien contrôlé feuille à feuille : $d\pi_t|_{\mathcal{F}}$ tend vers 0, mais diverge transversalement. On voit sur cet exemple qu'en général il y a décohérence transverse pour le flot de la chaleur, c'est-à-dire : $d(f_t(x), f_t(y)) \rightarrow \infty$ lorsque x, y n'appartiennent pas à la même feuille.

3.2. Stabilité des applications harmoniques laminées

En exploitant la formule de Bochner pour la fonction distance, nous avons donné dans le chapitre 1 des critères de stabilité pour les applications harmoniques et nous avons démontré que les applications quasi-harmoniques sont à distance bornée d'une application harmonique. Dans le cadre des laminations, on a un critère de stabilité laminé :

Définition 3.3 (Critère de stabilité) .

Soient Λ et Ξ deux laminations riemanniennes régulières, telle que Ξ est à courbure $K \leq 0$, de rang géométrique k et $f : \Lambda \rightarrow \Xi$ est une application harmonique laminée. f vérifie le critère de stabilité laminé si f est transversalement continûment \mathcal{C}^∞ et :

- f est "propre", au sens où $\sup \lambda_1(f) \neq \infty$ et $\sup |\nabla df| \neq \infty$,
- f est de rang au moins $k + 1$: $\inf \lambda_{k+1}(f) > 0$

Avant d'énoncer le théorème de stabilité par perturbation, définissons d'abord :

Définition 3.4 (Perturbation d'une lamination) .

Soit (Λ, g) une lamination riemannienne régulière transversalement continûment \mathcal{C}^∞ . $\Lambda_{pert} = (\Lambda, g_{pert})$ est une perturbation de (Λ, g) si g_{pert} est une métrique riemannienne complète sur Λ , transversalement continûment \mathcal{C}^∞ , bornée par rapport à g :

$$\forall k \in \mathbb{N} \exists M_k > 0 \mid \|\nabla^k g_{pert}\| \leq M_k$$

où ∇ est la connexion induite par la Levi Civita associée à g et $\|_-\|$ est la norme induite par g sur les fibrés $T^*M^{\otimes k+2}$

Théorème 3.5 (Stabilité par perturbation) .

Soient (Λ, g) et (Ξ, h) deux laminations riemanniennes régulières transversalement continûment \mathcal{C}^∞ , telles que Ξ est à courbure $K \leq 0$, de rang géométrique k . Soit $f : \Lambda \rightarrow \Xi$ une application harmonique laminée, qui vérifie le critère de stabilité laminé. Soient Λ_{pert} et Ξ_{pert} des perturbations de Λ et Ξ , telles que Ξ_{pert} est à courbure $K \leq 0$. Si g_{pert} et h_{pert} sont suffisamment proches de g et h pour

la topologie $\mathcal{C}^{2+\epsilon}$ uniforme, il existe une unique application harmonique $f_{pert} : \Lambda_{pert} \rightarrow \Xi_{pert}$ homotope à distance bornée de f . De plus, f_{pert} vérifie le critère de stabilité laminé.

Preuve Remarquons tout d'abord que :

- Si Ξ_{pert} est à courbure $K \leq 0$ et h_{pert} est suffisamment proche de h pour la topologie \mathcal{C}^2 uniforme, Ξ_{pert} est encore de rang géométrique k ,
- Si Λ_{pert} et Ξ_{pert} sont des perturbations suffisamment petites, $f : \Lambda_{pert} \rightarrow \Xi_{pert}$ est quasi-harmonique. En effet, on peut calculer $\tau_{pert}(f)$ en considérant $f = g \circ h \circ \ell$, où $\ell = id : \Lambda_{pert} \rightarrow \Lambda$, $h = f : \Lambda \rightarrow \Xi$ et $g = id : \Xi \rightarrow \Xi_{pert}$. On calcule : $\tau(f)_{pert} = dg \circ dh(\tau(\ell)) + dg(tr(\ell^* \nabla dh)) + tr((h \circ \ell)^* \nabla dg)$. Sachant que : $\sup |\nabla dh| \neq \infty$ et : $\sup |dh| \neq \infty$, on en déduit que $\tau(f) \leq C(d_2(g_{pert}, g) + d_2(h_{pert}, h))$, où d_2 est la distance associée à la topologie \mathcal{C}^2 uniforme. De plus, $|\lambda_{k+1}(f)_{pert} - \lambda_{k+1}(f)| \leq C(d_1(g_{pert}, g) + d_1(h_{pert}, h))$, où d_1 est la distance associée à la topologie \mathcal{C}^1 uniforme. On en déduit que $\lambda_{k+1}(f)_{pert} \geq K\tau(f)_{pert}$, où $K \leq C(d_2(g_{pert}, g) + d_2(h_{pert}, h))$.

$f : \Lambda_{pert} \rightarrow \Xi_{pert}$ est quasi-harmonique donc à distance bornée feuille à feuille d'une application harmonique f_{pert} . Démontrons maintenant que f_{pert} vérifie le critère de stabilité laminé.

Soient $\Lambda_n = (\Lambda, g_n)$ et Ξ_n des perturbations de Λ et Ξ , telles que g_n et h_n convergent vers g et h pour la topologie $\mathcal{C}^{2+\epsilon}$ et $f_n : \Lambda_n \rightarrow \Xi_n$ une application harmonique laminée homotope, à distance bornée de f . f_n converge vers f pour la topologie \mathcal{C}^2 . En effet, pour $K < \frac{1}{\sqrt{3}}$, si $\lambda_{k+1}(f) \geq K\tau(f)$, f est homotope, à distance bornée d'une application ψ , telle que $d(f, \psi) \leq \varphi^{-1}(K) \neq \infty$. On sait donc que $\sup d(f_n(\lambda), f(\lambda)) \leq C(d_2(g_n, g) + d_2(h_n, h))$ si $(d_2(g_n, g) + d_2(h_n, h))$ est suffisamment petit. Nous pouvons affirmer que f_n converge donc vers f pour la topologie \mathcal{C}^0 uniforme. De plus, d'après le principe de Bloch, les applications f_n sont bornées pour la topologie $\mathcal{C}^{2+\epsilon}$, donc sont \mathcal{C}^2 équicontinues et convergent pour la topologie \mathcal{C}^2 vers f . En particulier, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que : pour $n \geq N$, $\inf \lambda_{k+1}(f_n) > 0$. D'après les critères de stabilité, f_n est l'unique application harmonique homotope, à distance bornée de f . De plus, $\sup \lambda_1(f) \neq \infty$ et $\sup |\nabla df| \neq \infty$. Reste à vérifier que f_{pert} est transversalement continûment \mathcal{C}^∞ . Si λ_n converge vers λ , $\tilde{f}_{pert} : \tilde{\mathcal{L}}_{\lambda_n} \rightarrow \tilde{\mathcal{L}}_{\xi_n}$, définie sur le revêtement universel de \mathcal{L}_{λ_n} , converge (à extraction près) pour la topologie \mathcal{C}^∞ locale vers $g : \tilde{\mathcal{L}}_\lambda \rightarrow \tilde{\mathcal{L}}_\xi$ à distance bornée de $f : \tilde{\mathcal{L}}_\lambda \rightarrow \tilde{\mathcal{L}}_\xi$. Par unicité, $g = f_{pert}$, c'est-à-dire : f_{pert} est transversalement continûment \mathcal{C}^∞ . \square

3.3. Flot de la chaleur laminé : convergence faible

Lorsque Λ est une lamination riemannienne, de courbure de Ricci minorée et Ξ une lamination à courbure négative ou nulle, d'après Li et Tam [29], le flot de la chaleur laminé est bien défini :

Proposition 3.6 (Existence du flot de la chaleur) .

Soit Λ une lamination riemannienne de courbure de Ricci minorée : $Ric_\Lambda \geq -\kappa^2 g_\Lambda$; Ξ une lamination riemannienne à courbure négative ou nulle. Soit $f : \Lambda \rightarrow \Xi$, d'énergie et de tension borné. L'équation de la chaleur laminée : $\frac{df_t}{dt} = \tau(f_t)$ admet une unique solution $f_t|_{t \geq 0}$ telle que $f_0 = f$.

Rappelons que le flot de la chaleur vérifie des estimées a priori :

3.3. FLOT DE LA CHALEUR LAMINÉ : CONVERGENCE FAIBLE

- $\sup(e_{f_t}) \leq \sup(e_{f_0})e^{\kappa^2 t}$ et $\sup(e_{\tau(f)_t}) \leq \sup(e_{\tau(f)_0})$,
- L'estimées en moyenne de Li et Tam [29] : $\sup_{B_{x,R}} e_{f_{t+1}}^p \leq \frac{C_p}{\text{Vol}(B_{x,R})} \int_{B_{x,R}} e_{f_t}^p$,

De plus, si Λ et Ξ sont régulières, le flot de la chaleur vérifie des estimées de Schauder sur les dérivées d'ordre supérieur : $|\nabla^k f_{t+1}|^2 \leq C_k \sup_{B_{x,R}} e_{f_t}$. Ainsi, si (Λ, g, ν) est une lamination riemannienne mesurée régulière et Ξ une lamination riemannienne régulière à courbure négative ou nulle, le flot de la chaleur est borné en temps fini pour la topologie \mathcal{C}^∞ :

$$\sup_{t \leq T} |\nabla^k f_t|_{L^\infty} \leq C_{k,T}$$

Corollaire 3.6.1 (Régularité transverse du flot de la chaleur) .

Si Λ et Ξ sont des laminations riemanniennes régulières transversalement continûment \mathcal{C}^∞ , le flot de la chaleur est transversalement continûment \mathcal{C}^∞ .

Preuve Si $x_n \rightarrow x$, d'après les estimées a priori, les flots de la chaleur sur les feuilles : $f_{t,x_n} : \mathcal{L}_{x_n} \rightarrow \mathcal{L}_{f(x_n)}$ sont \mathcal{C}^∞ équicontinus. On peut donc supposer (à extraction près) qu'ils convergent pour la topologie \mathcal{C}^∞ vers : $f_{t,x}^\infty : \overline{\mathcal{L}}_x \rightarrow \mathcal{L}_{f(x)}$, qui est solution de l'équation de la chaleur sur le revêtement d'holonomie de \mathcal{L}_x , avec f pour condition initiale. Par unicité des solutions de l'équation de la chaleur, on en déduit : $\lim_{n \rightarrow \infty} f_{t,x_n} = f_{t,x}$, c'est-à-dire : le flot de la chaleur et toute ses dérivées est transversalement continu. \square

Lorsque (Λ, g, μ) est une lamination riemannienne mesurée, Λ est naturellement munie d'une mesure, induite par la mesure transverse et par la mesure de volume riemannienne sur les feuilles. Le *volume* de (Λ, g, μ) est alors : $\text{Vol}(\Lambda) = \int_\Lambda 1$. Si Λ est de volume fini et $f : \Lambda \rightarrow \Xi$ est transversalement mesurablement \mathcal{C}^1 d'énergie bornée, on peut définir l'énergie totale de $f : E(f) = \int_\Lambda e_f(x) dx$ D'après Gromov [19] :

Proposition 3.7 (Décroissance de l'énergie) .

Soit Λ une lamination riemannienne mesurée de volume fini et Ξ une lamination riemannienne. Soit $f : \Lambda \rightarrow \Xi$ une application transversalement mesurablement \mathcal{C}^∞ , d'énergie et de tension bornée. L'énergie totale du flot de la chaleur est décroissante :

$$\frac{\partial E_{f_t}}{\partial t} = -2E_{\tau(f_t)} = - \int_\Lambda |\tau(f_t)|^2$$

De plus, si Λ est une lamination riemannienne mesurée régulière et Ξ une lamination riemannienne régulière, l'énergie de tension de f_t est décroissante :

$$\frac{\partial E_{\tau(f_t)}}{\partial t} \leq 0$$

Rappelons sans démonstration le lemme de divergence de Gromov [19, Lemme 4.C1] :

Lemme 3.8 *Soit Λ une lamination riemannienne mesurée. Si X est un champ de vecteur sur Λ tel que $X \in L^1$ et $\text{div}(X) \in L^1$, alors :*

$$\int_\Lambda \text{div}(X) = 0$$

Preuve On sait :

$$\frac{de_{f_t}}{dt} = \operatorname{div}(\tau(f)|df_t) - |\tau(f)|^2$$

ϵ étant fixé, T étant fixé, définissons : $V_\epsilon = \{x|\exists t \in [\frac{1}{2}T, \leq 2T]|\nabla\tau(f_t)| \geq \frac{1}{\epsilon}\}$ et posons : $p_\epsilon(x) = \min(1, \operatorname{dist}(x, V_\epsilon))$. On sait que (quitte à régulariser p_ϵ) : $|dp_\epsilon| \leq 1$. Par le théorème de convergence dominée : $E = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} E_\epsilon$ où : $E_\epsilon = \frac{1}{2} \int_\Lambda p_\epsilon |df|^2$. De plus :

$$\begin{aligned} \frac{de_{\epsilon f_t}}{dt} &= \operatorname{div}(p_\epsilon(\tau(f).df)^*) - \langle dp_\epsilon | (\tau(f).df)^* \rangle - p_\epsilon |\tau(f)|^2 \\ \frac{dE_{\epsilon f_t}}{dt} &= - \int_\Lambda \langle dp_\epsilon | (\tau(f).df)^* \rangle - 2E_{\epsilon \tau(f_t)} \end{aligned}$$

car p_ϵ et $\operatorname{div}(p_\epsilon(\tau(f).df)^*)$ sont intégrables. Par le théorème de convergence dominée, on conclut :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{dE_{\epsilon f_t}}{dt} = -2E_{\tau(f_t)}$$

uniformément en $t \in [\frac{T}{2}, 2T]$. On en déduit : E_{f_t} est dérivable, de dérivée :

$$\frac{\partial E_{f_t}}{\partial t} = -2E_{\tau(f_t)}$$

Si (Λ, g, ν) et (Ξ, g) sont régulières, on conclut à la décroissance de $E_{\tau(f)}$ par intégration de la formule de Bochner :

$$\Delta e_{\tau(f)} = |\nabla\tau(f)|^2 + \frac{de_{\tau(f)}}{dt} - R_{f_t f_t}^\Xi(f_t, f_t)$$

car on sait que tous les termes de la formule sont bornés (donc intégrables). Par contre, si Λ et Ξ ne sont pas régulières, l'argument de troncature ne se généralise pas. On peut démontrer :

$$\frac{dE_{\epsilon \tau(f_t)}}{dt} \leq \int_\Lambda \|dp_\epsilon \langle \nabla\tau(f) | \tau(f) \rangle\| + \frac{1}{2} \|\Delta p_\epsilon \tau(f)\|^2$$

mais on ne sait pas si $\nabla\tau(f)$ et Δp_ϵ sont intégrables. \square

Corollaire 3.8.1 (Convergence de $\tau(f_t)$) .

Sous les hypothèses de la proposition 3.7, en supposant de plus la lamination riemannienne mesurée (Λ, g, ν) et la lamination riemannienne Ξ régulières le champ de tension $\tau(f_t)$ converge vers 0 pour la norme L^2 : $\lim_{t \rightarrow \infty} E_{\tau(f_t)} = 0$

On sait qu'en général il y a un phénomène de décohérence transverse pour le flot de la chaleur. L'exemple du feuilletage horosphérique prouve que, même si l'énergie et toutes les dérivées du flot de la chaleur décroissent exponentiellement sur toutes les feuilles de Λ , le flot de la chaleur ne converge pas. Cependant, il y a un phénomène de convergence faible pour le flot de la chaleur.

Si Λ est une lamination riemannienne mesurée et $\overline{\mathcal{M}}$ est le revêtement d'holonomie de l'espace des applications laminées :

$$\overline{\mathcal{M}} = \{(\lambda, \varphi) | \lambda \in \Lambda, \varphi : \overline{\mathcal{L}}_\lambda \rightarrow \mathcal{L}_\xi\}$$

toute application laminée $f : \Lambda \rightarrow \Xi$ définit une section de la projection naturelle $\overline{\mathcal{M}} \rightarrow \Lambda$. Si π est la projection sur \mathcal{L}_λ de $\overline{\mathcal{L}}_\lambda$, le revêtement d'holonomie de \mathcal{L}_λ , on associe à $\lambda \in \Lambda$ le point de $\overline{\mathcal{M}}$, que l'on notera abusivement $f(\lambda) : f(\lambda) = (\lambda, f|_{\mathcal{L}_\lambda} \circ \pi)$. En particulier, f induit une mesure transverse $f_*\nu$ sur $\overline{\mathcal{M}}$. Lorsque Λ est un feuilletage riemannien \mathcal{C}^∞ muni d'une mesure transverse ν de volume fini et Ξ une variété riemannienne à courbure $K \leq 0$, Gromov [19] a démontré que $(f_t)_*\nu$ converge faiblement. Plus généralement :

Théorème 3.9 (Convergence vers une mesure \mathcal{F} -harmonique) .

Soit $(\Lambda, g; \nu)$ une lamination riemannienne mesurée régulière de volume fini et Ξ une lamination riemannienne compacte à courbure négative ou nulle. Soit $f_0 : \Lambda \rightarrow \Xi$ une application d'énergie e_f et de tension $\tau(f)$ bornés. Les mesures $\mu_t = (f_t)_\nu$ convergent faiblement (à extraction près) vers une mesure μ \mathcal{F} -harmonique, c'est-à-dire à support dans l'espace des applications harmoniques laminées*

$$\overline{\mathcal{H}} = \left\{ (x, \varphi) \in \overline{\mathcal{M}} \mid \tau(\varphi) = 0 \right\}$$

La démonstration utilise deux faits essentiels : d'une part, les propriétés de compacité de l'espace \mathcal{M} des applications laminées, qui permet de conclure à la convergence faible de μ_t , d'autre part l'interprétation des mesures transverses sur \mathcal{M} comme sections d'un fibré en espace de Banach, qui permet de conclure à la convergence des intégrales de la forme $\int_\Lambda S(f_t)(x)dx$:

$$\int_{\overline{\mathcal{M}}} S(f)d\mu(f) \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \int_\Lambda S(f_t)(x)dx$$

lorsque S est une fonctionnelle \mathcal{C}^∞ sur les feuilles, transversalement mesurable.

Preuve La preuve se décompose en trois parties :

- Les mesures $\mu_t = (f_t)_*\nu$ sont précompactes pour la topologie faible : Λ étant muni d'une métrique sur les feuilles, la mesure de volume riemannienne sur les feuilles et la mesure transverse ν induisent une mesure sur l'espace total Λ , que l'on notera également ν . De même, $\overline{\mathcal{M}}$ est une lamination riemannienne -les feuilles de $\overline{\mathcal{M}}$ s'identifient aux feuilles de Λ , et on peut considérer $\mu_t = (f_t)_*\nu$ comme étant une mesure sur $\overline{\mathcal{M}}$. Supposons Λ compact. Soient $\overline{e}_{f_t}^r(x) = \int_{B_{x,2r}} e_{f_t}$ et $\overline{E}_{f_t}^r = \int_\Lambda \overline{e}_{f_t}^r$. Λ étant compact, E_{f_t} et $\overline{E}_{f_t}^r$ sont équivalents :

$$\frac{1}{K^r} \leq \frac{\overline{E}_{f_t}^r}{E_{f_t}} \leq K^r$$

En particulier, $\overline{E}_{f_t}^r$ est uniformément borné. Si $\Lambda_t^n = \{x \in \Lambda \mid \forall r \in \mathbb{N}, \overline{e}_{f_t}^r(x) \geq 2^{n+r}K^r\}$, on a donc : $\lim_{n \rightarrow \infty} [\sup_t(\nu(\Lambda_t^n))] = 0$. On en déduit que μ_t est presque à support compact. En effet, d'après les estimées a priori : $\overline{e}_{f_t}^r \leq 2^{n+r} \Rightarrow \sup_{B_{x,r}} |\nabla^k f_{t+1}| \leq f^k(n, r)$. Posons $\mathcal{K}_n = \{(x, \varphi) \mid \forall (k, r) \mid \nabla^k \varphi| \leq f^k(n, r)\}$. D'après le théorème d'Arzela-Ascoli - proposition 2.16 - \mathcal{K}_n est compact dans $\overline{\mathcal{M}}$. Or : μ_{t+1} est presque à support dans \mathcal{K}_n :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_t (\mu_{t+1}(\overline{\mathcal{M}} \setminus \mathcal{K}_n)) \right) = 0$$

μ_{t+1} restreinte au compact \mathcal{K}_n est précompacte pour la topologie faible : par un procédé diagonal, on en déduit que μ_{t+1} converge faiblement, à extraction près, vers une mesure transvers μ .

Si Λ n'est pas compact, en choisissant une suite exhaustive de compacts K_p pour Λ , on démontre que μ_t est presque à support dans un compact de la forme :

$$\mathcal{K}_n = \left\{ (x, \varphi) \mid x \in K_n \text{ et } \forall k, R, |\nabla^k \varphi| \leq f^k(n, R) \right\}$$

d'où l'on conclut à la convergence (à extraction près) de μ_t vers une mesure transverse sur $\overline{\mathcal{M}}$: μ , qui se projette sur ν ,

- La mesure limite est harmonique lorsque les métriques sont transversalement continûment \mathcal{C}^2 : On sait que $\lim_{t \rightarrow \infty} E_{\tau(f_t)} = 0$. Les métriques étant transversalement \mathcal{C}^2 , $(x, f) \rightarrow |\tau(f)|(x)$ est continue. On en déduit que :

$$\int_{\overline{\mathcal{M}}} |\tau(f)(x)|^2 d\mu(x, f) \leq \lim_{t \rightarrow \infty} E_{\tau(f_t)} = 0$$

Donc : μ est à support dans les applications harmoniques laminées,

- La mesure limite est harmonique lorsque les métriques sont transversalement mesurablement \mathcal{C}^2 : On a vu à la fin du chapitre 2 que $\mu_t = (f_t)_* \nu$ peut se réinterpréter comme une section L^∞ de $T\mathcal{Z}^*$, où $T\mathcal{Z}$ est le fibré en espace de Banach, de fibre $T\mathcal{Z}_\lambda = \mathcal{C}_b^0[\mathcal{C}^\infty(T_\lambda \Lambda, \Xi), \mathbb{R}]$. De plus, d'après Ionescu-Tulcea [25] : $L^\infty(T\mathcal{Z}^*) = L^1(T\mathcal{Z})^*$. μ_t converge -à extraction près- pour la topologie faible vers $\mu \in L^\infty(T\mathcal{Z}^*)$. $f \rightarrow \inf(|\tau(f)|, 1)$ étant une section L^1 de $T\mathcal{Z}$, on déduit comme précédemment que : $\int_{\overline{\mathcal{M}}} |\tau(f)(x)| d\mu(x, f) = 0$. \square

Corollaire 3.9.1 Soit s une fonction intégrable positive sur $\overline{\mathcal{M}}$, c'est-à-dire telle que $s(\lambda, \varphi)$ dépend de façon continue de $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{L}_\lambda, \Xi)$ et de façon mesurable de $\lambda \in \Lambda$. On définit :

$$S(\mu) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\overline{\mathcal{M}}} \inf(s(f), n) d\mu(f)$$

Sous les hypothèses du théorème, la mesure \mathcal{F} -harmonique $\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} (f_{t_n})_* \nu$ est une mesure transverse sur $\overline{\mathcal{M}}$, qui se projette sur ν et telle que :

- si s est une fonction intégrable positive sur $\overline{\mathcal{M}}$, $S(\mu) \leq \lim_{t \rightarrow \infty} S(\mu_t)$,
- $S(\mu_t)$ converge vers $S(\mu)$ si $s(\mu_t)$ vérifie une estimée L^p , c'est-à-dire c'est-à-dire s'il existe $p > 1$ tel que : $\int_{\overline{\mathcal{M}}} s^p(f) d\mu_t(f)$ est borné.

Corollaire 3.9.2 Sous les hypothèses du théorème :

- La longueur du flot de la chaleur converge (à extraction près) vers la longueur de μ :

$$L(\mu) := \int_{\overline{\mathcal{M}}} |df| d\mu(f) = \lim_{t \rightarrow \infty} L(f_t)$$

- Lorsque Ξ est de rang géométrique 1 : $K \leq -\kappa^2$, l'aire et le 3-volume du flot de la chaleur convergent vers l'aire et le 3-volume de μ .

Remarque 3.9.3 (Le feuilletage horosphérique) .

Soit $\Lambda = U\Xi$ le fibré unitaire tangent d'une variété hyperbolique compacte Ξ muni du feuilletage horosphérique. La mesure de Liouville sur $U\Xi$ définit une mesure transverse sur Λ . Si $\pi : \Lambda = U\Xi \rightarrow \Xi$ est la projection naturelle, le flot de la chaleur π_t converge faiblement vers la mesure de Liouville normalisée sur Ξ .

Preuve (Corollaires) Le corollaire 3.9.1 se déduit des propriétés élémentaires de la convergence faible. Soit $\ell(f) = |df|$. On sait que $E(f_t)$ est borné, donc que $\ell(f_t)$ vérifie une estimée L^2 . On en conclut que $L(\mu) = \lim_{t \rightarrow \infty} L(f_t)$. Lorsque Ξ est de rang 1 : $K_\Xi \leq -\kappa^2 < 0$, l'énergie vérifie la formule de Bochner :

$$\begin{aligned} \Delta e &= \frac{de}{dt} + Ric(df, df) - R_{df(X_i), df(X_j)}^\Xi(df(X_i), df(X_j)) \\ &\geq \frac{de}{dt} + Ric(df, df) + \kappa^2 aire^2(f) \end{aligned}$$

On en déduit que $aire(f_t)$ vérifie une estimée L^2 :

$$\kappa^2 \int_{\Lambda} aire^2(f_t) \leq 2E_{\tau(f_t)} + \sup(-Ric)E_f$$

Comme $vol_3(f) \leq (aire^2(f))^{\frac{3}{4}}$, $vol_3(f_t)$ vérifie également une estimée $L^{\frac{4}{3}}$ et on en déduit que l'aire et le 3-volume de f_{t_n} convergent vers l'aire et le 3-volume de μ . \square

Preuve $|df_t|$ converge exponentiellement vers 0. $\mu = \lim_{t \rightarrow \infty} (f_t)_* \nu$ est donc à support dans les applications constantes $\mathcal{L}_\lambda \rightarrow \Xi$. On peut donc réinterpréter μ comme une mesure sur $\Xi \times \Lambda$, puis vérifier que $\mu = d\xi \times d\lambda$ où $d\xi$ est la mesure de Liouville normalisée sur Ξ . \square

Un cas particulier et particulièrement agréable du théorème de convergence faible pour le flot de la chaleur est celui où $f_t : \Lambda \rightarrow \Xi$ converge ν presque sûrement vers $f : \Lambda \rightarrow \Xi$. Dans ce cas, la mesure limite μ est : $\mu = f_* \nu$ et on peut démontrer un lemme qui nous sera utile dans l'étude de la convergence forte du flot de la chaleur :

Lemme 3.10 .

Soient (Λ, g, ν) une lamination riemannienne mesurée régulière de volume fini et Ξ une lamination riemannienne régulière. Si $f : \Lambda \rightarrow \Xi$ est une application laminée d'énergie et de tension bornée, telle que le flot de la chaleur associé f_t converge ν presque sûrement vers f_∞ , alors $(f_t)_* \nu$ converge faiblement vers $\mu = (f_\infty)_* \nu$. De plus, si s est une fonction intégrable positive sur \mathcal{M} , telle que $S(\mu) = \lim_{n \rightarrow \infty} S(f_n)$ alors : $s(f_t)$ converge (à extraction près) presque partout vers $s(f_\infty)$.

Preuve Puisque $(f_\infty)_* \nu = \lim_{t \rightarrow \infty} (f_t)_* \nu$, pour toute fonction g bornée :

$$\int_{\Lambda} s(f_\infty)^{\frac{1}{2}} g = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{\Lambda} s(f_t)^{\frac{1}{2}} g$$

c'est-à-dire $s(f_t)^{\frac{1}{2}}$ converge faiblement dans L^2 vers $s(f_\infty)^{\frac{1}{2}}$. Comme de plus :

$$|s(f_\infty)^{\frac{1}{2}}|^2 = \lim_{t \rightarrow \infty} |s(f_t)^{\frac{1}{2}}|^2$$

la convergence faible implique la convergence L^2 , donc à extraction près, la convergence presque partout de $s(f_t)$ vers $s(f_\infty)$. \square

3.4. Flot de la chaleur laminé : convergence forte

Soit Λ une lamination riemannienne mesurée. Si $f : \Lambda \rightarrow \Xi$ une application laminée et f_t le flot de la chaleur associé, le but de cette section est d'étudier la convergence v presque sûrement de f_t lorsque $t \rightarrow \infty$. Un préalable est de vérifier que la limite éventuelle est unique :

Proposition 3.11 *Soit Λ une lamination riemannienne mesurée - de volume fini ou non -, Ξ une lamination riemannienne compacte à courbure négative ou nulle, de rang géométrique k . Soit $f : \Lambda \rightarrow \Xi$ une application laminée d'énergie finie. La classe d'homotopie mesurable de f admet au plus un représentant harmonique $\varphi : \Lambda \rightarrow \Xi$ de rang presque sûrement supérieur à $k + 1$ et d'énergie finie.*

Preuve Ξ étant compacte, il existe ζ tel que : $-\zeta^2 \leq K^\Xi$. Si $f_t|_{t \in [0,1]}$ est une homotopie entre f_0 et f_1 , on définit $d(f_0(\lambda), f_1(\lambda)) = \inf \ell(\gamma)$, où $\gamma(t)$ est un chemin reliant $f_0(\lambda)$ et $f_1(\lambda)$, homotope à $f_t(\lambda)$. Posons : $d_\epsilon = \epsilon \varphi(\frac{d}{\epsilon})$ où φ est une fonction convexe \mathcal{C}^∞ , telle que $\varphi(x) = 0$ pour $x \leq 1$ et $\varphi_\epsilon(x) = x - 1$ pour $x \geq 3$. On sait que $\nabla(d_\epsilon) \in L^1$. De plus : $\Delta d_\epsilon = \frac{1}{\epsilon} \dot{\varphi} + \dot{\varphi} \Delta d \geq 0$. D'après le corollaire 1.9.2 de la formule de Bochner pour la fonction distance :

$$0 \leq \Delta d \leq 4\zeta(|df_0|^2 + |df_1|^2) \coth\left(\frac{\zeta d}{2}\right)$$

On en déduit que : Δd_ϵ est intégrable, donc : $\int_\Lambda \Delta d_\epsilon = 0$. Puisque $\Delta d_\epsilon \geq 0$, on a donc : $\Delta d_\epsilon = 0$, puis $\Delta d = 0$. Or, d'après la formule de Bochner pour la fonction distance :

$$\Delta d \geq \kappa \lambda_{k+1}(f_0)^2 \varphi(\kappa d)$$

D'où : $d = 0$ presque-partout. \square

Avant d'énoncer le théorème de convergence forte, posons la :

Définition 3.12 (k-support) *Soient Λ et Ξ deux laminations riemanniennes et μ une mesure transverse sur $\overline{\mathcal{M}}$. On définit le k -support de μ , noté : $supp_k(\mu)$ par : $\lambda \in supp_k(\mu)$ s'il existe $\varphi : \mathcal{L}_\lambda \rightarrow \Xi$ tel que $\text{rang}(d\varphi)_\lambda \geq k$ et $(\lambda, \varphi) \in supp(\mu)$*

Remarque 3.12.1 Sous les hypothèses de la définition, si μ est une mesure \mathcal{F} -harmonique, on sait :

- le 2-support de μ est invariant par holonomie, à un ensemble de mesure nulle près,
- lorsque μ est rigide, c'est-à-dire : $\int |\nabla df| d\mu(f) = 0$, le k -support de μ est invariant par holonomie.

Preuve D'après le principe de prolongement de Sampson [38], une application harmonique est entièrement déterminée par son jet en un point. En particulier, si toute ses dérivées sont parallèles en un point, elle est de rang 1 partout. A contrario, s'il existe un point où elle est de rang supérieur à 2, elle sera presque-partout de rang supérieur à 2. Λ_2 est donc invariant par holonomie, à un ensemble de mesure nulle près. Lorsque μ est rigide, si $(\lambda, \varphi) \in supp(\mu)$, φ est de rang constant : $supp_k(\mu)$ est donc invariant par holonomie. \square

En général, pour $k \geq 3$, le principe de prolongement de Sampson ne permet pas de conclure que lorsque f est de rang k en un point, f est de rang au moins k sur un ouvert dense. En particulier, $\text{supp}_k(\mu)$ n'est a priori pas invariant par holonomie - à un ensemble de mesure nulle près -.

Une fois posés ces préliminaires, nous pouvons énoncer le :

Théorème 3.13 (Convergence forte du flot de la chaleur) .

Soit (Λ, ν) une lamination riemannienne mesurée régulière de volume fini et Ξ une lamination riemannienne régulière compacte à courbure $K \leq 0$. Soit $f_0 : \Lambda \rightarrow \Xi$ une application laminée d'énergie et de tension bornée. Si la mesure transverse ν est ergodique, le flot de la chaleur f_t :

- converge à extraction près, ν -presque partout pour la topologie \mathcal{C}^∞ sur les feuilles, vers une application harmonique laminée $f : \Lambda \rightarrow \Xi$ mesurablement homotope à f_0 de rang supérieur à k sur le $(k+1)$ -support de μ ,
- converge globalement pour la topologie L^1 sur le $(k+1)$ -support de μ au sens où :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{\Lambda} \lambda_{k+1}^2(f) \varphi(d(f_t, f)) = 0$$

où φ est la fonction donnée par la formule de Bochner pour la distance.

lorsque l'une des hypothèses suivantes est vérifiée :

- Ξ est de rang géométrique 1, et f est d'aire minimale non nulle. Dans ce cas, $\text{supp}_2(\mu)$ est de mesure pleine,
- Ξ est de rang géométrique k et $f_t|_{*\nu}$ converge (à extraction près) vers une mesure \mathcal{F} -harmonique μ de rang au moins $k+1$.

De plus : f est l'unique représentant harmonique de la classe d'homotopie mesurable de f_0 .

Preuve Les mesures $f_t|_{*\nu}$ convergent, à extraction près, vers une mesure μ . On sait que la mesure limite μ se désintègre par rapport à ν - cf Bourbaki [9] - :

$$d\mu(\lambda, f) = d\mu_\lambda(f) \otimes d\nu(\lambda)$$

où $d\mu_\lambda$ est à support dans $\nu^{-1}(\lambda) = \{(\lambda, \psi)|\psi : \mathcal{L}_\lambda \rightarrow \Xi\}$ et est invariante par holonomie. La preuve du théorème se décompose alors en trois lemmes :

- *Unicité* : Pour ν -presque tout λ , il existe au plus une application harmonique de rang supérieur à $k+1$ en λ dans le support de μ_λ .

D'après le corollaire 1.9.2 de la formule de Bochner pour la fonction distance :

$$\Delta d_{\mathcal{L}}(f_t, f_{t+h}) \geq -|\tau(f_t)| - |\tau(f_{t+h})| + \kappa \lambda_{k+1}(f_{t+h})^2 \varphi(\kappa d_{\mathcal{L}}(f_t, f_{t+h}))$$

où $d_{\mathcal{L}}$ est la distance sur les feuilles de Ξ . On a alors :

$$\int_{\Lambda} \kappa \lambda_{k+1}(f_{t+h})^2 \varphi(\kappa d_{\mathcal{L}}(f_t, f_{t+h})) \leq \sqrt{\text{vol}(\Lambda)} \left(\left(\int_{\Lambda} |\tau(f_t)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right. \quad (3.1)$$

$$\left. + \left(\int_{\Lambda} |\tau(f_{t+h})|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right)$$

$$\leq \sqrt{2 \text{vol}(\Lambda)} \left(E_{\tau(f_t)}^{\frac{1}{2}} + E_{\tau(f_{t+h})}^{\frac{1}{2}} \right) \quad (3.2)$$

On peut trouver une distance d_{Ξ} sur Ξ telle que : $d_{\Xi} \leq d_{\mathcal{L}_t}$. On peut alors passer à la limite, pour $h \rightarrow \infty$:

$$\int_{\mathcal{M}} \kappa \lambda_{k+1}(f)^2 \varphi(\kappa d_{\Xi}(f_t, f)) d\mu(f) \leq \sqrt{2 \text{vol}(\Lambda) E_{\tau(f_t)}} \quad (3.3)$$

Définissons $\delta(\lambda) = \inf_{\xi \in \Xi} \int \lambda_{k+1}(f)^2(\lambda) \varphi(\kappa d_{\mathcal{L}}(\xi, f(\lambda))) d\mu_{\lambda}(f)$. D'après l'inégalité 3.3, on sait :

$$\int_{\Lambda} \delta(\lambda) d\nu(\lambda) = \sqrt{2 \text{vol}(\Lambda) E_{\tau(f_t)}}$$

En passant à la limite, pour $t \rightarrow \infty$, on en déduit :

$$\int_{\Lambda} \delta(\lambda) d\nu(\lambda) = 0$$

Donc $\delta(\lambda) = 0$ presque partout. On en déduit que, si $(f_1, f_2) \in \text{supp}(\mu_{\lambda})$ vérifient $\text{rang}(f_i)(\lambda) \geq k+1$, alors $f_1(\lambda) = f_2(\lambda)$, puis : f_1 et f_2 coïncident sur un voisinage de λ . D'après le principe de prolongement de Sampson, on en déduit : $f_1 = f_2$.

- *Convergence pour la topologie initiale : le flot de la chaleur converge à extraction près, pour la topologie initiale de Ξ sur $\text{supp}_{k+1}(\mu)$ et la mesure limite est $\mu = f_* \nu$.*

La mesure limite μ a une composante μ_k de rang inférieur ou égal à k , et une composante μ_{k+1} tel que toute application dans le support de μ_{k+1} est de rang au moins $k+1$. D'après le lemme d'unicité, μ_{k+1} est localement de la forme $\mu_{k+1} = \psi(\lambda) f_* \nu$. L'inégalité 3.3 se réécrit alors :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{\Lambda} \psi(\lambda) \lambda_{k+1}^2(f) \varphi(\kappa d_{\Xi}(f_t, f)) d\nu(\lambda) = 0$$

c'est-à-dire, à extraction près d'une suite $t_n : \lim_{n \rightarrow \infty} f_{t_n} = f$ sur $\text{supp}(\psi)$. On en déduit que $\mu = f_* \nu$ sur $\text{supp}(\psi)$. Le support de ψ s'identifie au $k+1$ -support de μ . Comme μ est de rang au moins $k+1$, $\nu(\text{supp}_{k+1}(\mu)) \neq 0$. ν étant ergodique, le saturé de $\text{supp}_{k+1}(\mu)$ est de mesure pleine. μ étant invariante par holonomie, $\mu = f_* \nu$ partout,

- *Convergence pour la topologie fine : on a vu que le flot de la chaleur converge à extraction près pour la topologie initiale de Ξ sur $\text{supp}_{k+1}(\mu)$. A priori, la limite $f|_{\overline{\mathcal{L}}_{f(x)}}$ de $f_t|_{\overline{\mathcal{L}}_{f(x)}}$ peut être à valeur dans une feuille dans l'adhérence de $\mathcal{L}_{f(x)}$. En fait : nous allons montrer que le flot de la chaleur converge ν -presque-partout, à extraction près, pour la topologie fine de Ξ : en particulier la limite $f|_{\overline{\mathcal{L}}_{f(x)}}$ est à valeur dans la même feuille que $f_0|_{\overline{\mathcal{L}}_{f(x)}}$.*

D'après le lemme 3.10, comme $\mu = f_* \nu$, $\lambda_{k+1}(f_t)$ converge vers $\lambda_{k+1}(f)$ ν presque sûrement si $\lambda_{k+1}(f_t)$ converge en norme L^1 . La convergence de l'énergie : $E(f) = \lim_{t \rightarrow \infty} E(f_t)$ permet de conclure que $\lambda_{k+1}(f_{t_n})$ vérifie une estimée L^2 , donc, d'après le corollaire 3.9.1 du théorème de convergence faible, $\lambda_{k+1}(f_t)$ converge en norme L^1 vers $\lambda_{k+1}(f)$. La formule 3.2 s'écrit alors :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_p \int_{\Lambda} \lambda_{k+1}^2(f_{t_{n+p}})(x) \varphi(\kappa d(f_{t_n}, f_{t_{n+p}})(x)) d\nu(x) = 0$$

d'où : $f_{t_n}(x)$ est une suite de Cauchy ν -presque-partout. On en déduit que f_{t_n} converge vers f pour la topologie fine sur le $(k+1)$ -support de f .

Démontrons maintenant qu'en fait, pour ν presque toute feuille, f_{t_n} converge vers f . Soit $\bar{e}_f(x) = \int_{B_{x,1}} e_f$ l'énergie moyenne de f . Si on note $\bar{E}^\beta(f) = \int_\Lambda \bar{e}_f^\beta(x) d\nu(x)$, on sait que $\bar{E}^\beta(\mu) = \bar{E}^\beta(f) = \lim_{t \rightarrow \infty} \bar{E}^\beta(f_t)$ pour $\beta < 1$. On en déduit qu'à extraction près : $\bar{e}^\beta(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{e}^\beta(f_{t_n})$ ν -presque partout. D'après les estimées L^p de Li et Tam (cf page 44), on en déduit : f_t est \mathcal{C}^∞ équicontinue. En particulier, la convergence sur un ouvert implique la convergence \mathcal{C}^∞ . f_t converge donc ν presque partout vers f pour la topologie fine. De plus, f est nécessairement définie sur les feuilles \mathcal{L}_x , et non sur leur revêtement d'holonomie. \square

Corollaire 3.13.1 (Convergence en dimension 2) .

Sous les hypothèses du théorème, si (Λ, g, ν) est une lamination de dimension 2 et $\Xi = (\Lambda, h)$ est une lamination à courbure pincée $-\frac{1}{\kappa^2} \leq K \leq -\kappa^2$, le flot de la chaleur associé à $id : (\Lambda, g) \rightarrow (\Lambda, h)$ converge vers une application harmonique laminée $f : (\Lambda, g) \rightarrow (\Lambda, h)$

Corollaire 3.13.2 (Laminations localement symétriques) .

Sous les hypothèses du théorème, si Λ est une lamination localement symétrique de dimension n , c'est-à-dire : si les feuilles de Λ sont modelées sur un espace symétrique Ω , le flot de la chaleur laminé associé à $f : \Lambda \rightarrow \Xi$, d'énergie et de tension borné, converge vers une application laminée totalement géodésique lorsque $MinL(f) > 0$ et de plus :

- l'espace modèle Ω est un espace symétrique non compact, irréductible, de rang $k \geq 2$ et Ξ est à courbure $K \leq 0$,
- Ω est l'espace hyperbolique quaternionien $\mathbb{H}_{\mathbb{H}}^2$ ou le plan hyperbolique de Cayley $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ et Ξ est à courbure complexe négative ou nulle.

Corollaire 3.13.3 (Rigidité des laminations localement symétriques) .

Si (Λ, g, ν) est une lamination localement symétrique de dimension n et $\Xi = (\Lambda, h)$, il existe une homothétie $f : \Lambda \rightarrow \Xi$ lorsque :

- l'espace modèle Ω est un espace symétrique non compact, irréductible, de rang $k \geq 2$ et Ξ est à courbure $K \leq 0$,
- Ω est l'espace hyperbolique quaternionien $\mathbb{H}_{\mathbb{H}}^2$ ou le plan hyperbolique de Cayley $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ et Ξ est à courbure complexe négative ou nulle.

Preuve En dimension 2, d'après la formule de Gauss-Bonnet,

$$MinAIRE(id) > 0$$

d'où l'on conclut à la convergence du flot de la chaleur. Si Λ est une lamination localement symétrique, il existe un tenseur rigide positif Q adapté à Λ et on sait que :

$$\int_{\mathcal{M}} \left[Q(\nabla df, \nabla df) - \frac{1}{2} Q(f^* R^\Xi) \right] d\mu(f) = 0$$

D'après les conditions de positivité sur Q , on en déduit que μ est à support dans les applications totalement géodésiques. Ω étant irréductible, ces applications sont soit constantes, soit de rang maximum. Comme $L(\mu) = \lim_{t \rightarrow \infty} L(f_t) > MinL(f)$, on en déduit que le support de μ contient des applications de rang au moins 1, donc de rang maximum et on peut appliquer le théorème de convergence forte du flot de la chaleur.

On en déduit le résultat de rigidité pour les laminations localement symétriques : en effet, sous les hypothèses du corollaire 3.13.3, le stretch de l'identité est non nul. Comme $MinL(id) \geq CSt(id) > 0$, on en déduit que le flot de la chaleur converge vers une application laminée f totalement géodésique, donc une homothétie feuille à feuille. De plus : $f^*g = Kg$, où K est une application mesurable, invariante sur les feuilles. Par ergodicité, K est constante. \square

3.5. Conclusion

Nous avons généralisé dans le cadre des laminations riemanniennes les théorèmes de convergence faible et de convergence forte du flot de la chaleur démontrés par Gromov [19]. Rappelons que Gromov se plaçait dans un cadre plus restreint : il supposait que Λ était un feuilletage mesuré d'une variété riemannienne \mathcal{C}^∞ et Ξ une variété riemannienne compacte. Pour le théorème de convergence forte, il supposait de plus Ξ de rang géométrique 1.

Lorsque Λ est un feuilletage transversalement \mathcal{C}^∞ à feuilles localement symétriques, le théorème de convergence faible du flot de la chaleur a été démontré par Quiroga [37], qui en a déduit [37, theorem 4.15] une version plus faible du corollaire 3.13.3 :

Théorème 3.14 *Si (Λ, g, ν) est un feuilletage mesuré, de feuilles localement symétriques modelées sur Ω et $\Xi = (\Lambda, h)$ lorsque :*

- *l'espace modèle Ω est un espace symétrique non compact, irréductible, de rang $k \geq 2$ et Ξ est à courbure $K \leq 0$,*
- *Ω est l'espace hyperbolique quaternionien $\mathbb{H}_{\mathbb{H}}^n$ ou le plan hyperbolique de Cayley $\mathbb{H}_{\mathbb{O}}^2$ et Ξ est à courbure complexe négative ou nulle.*

alors g et h sont homothétiques pour ν presque toute feuille.

Les résultats que nous avons démontrés laissent ouvertes trois énigmes :

- *La propriété de rigidité est elle stable par perturbation ? Si (Λ, g) est une lamination localement symétrique de rang supérieur, et h une métrique à courbure $K \leq 0$ proche de g , on sait qu'il existe une application harmonique $f : (\Lambda, g) \rightarrow (\Lambda, h)$ homotope, à distance bornée de l'identité. Cette application est elle rigide ? Lorsque Λ est munie d'une mesure transverse ν , par intégration de la formule de Mok Siu et Yeung, on sait que f est rigide sur le support de ν . En général, compte tenu de la remarque 1.16, faute de mesure transverse on ne peut pas affirmer a priori que f est rigide,*
- *Le $k+1$ -support de la mesure \mathcal{F} -harmonique μ est il invariant par holonomie (à un ensemble de mesure nulle près) ? Autrement dit :*

Conjecture 3.15 (Sampson [38]) *Soient M et N deux variétés riemanniennes, et $f : M \rightarrow N$ une application harmonique. Si $\text{rang}(f)(x) \geq k$, f est de rang au moins k sur un ouvert dense.*

Lorsque $k = 1$ ou $k = 2$, c'est un corollaire du principe de prolongement des applications harmoniques. Pour $k \geq 3$, à ma connaissance, le problème reste ouvert,

- *Peut on trouver des critères pour vérifier que μ est de rang au moins $k+1$? Sauf en rang $k = 1$, le critère homologique : $MinVOL_{k+1}(f_t) \neq 0$ ne permet*

pas de conclure que μ est de rang au moins $k + 1$. En effet : en l'absence d'estimées L^p sur $|df_t|$ pour $p > k + 1$ ou d'estimées L^p sur $vol_{k+1}(df_t)$ pour $p > 1$, on ne peut affirmer que $VOL_{k+1}(\mu) = \lim_{t \rightarrow \infty} VOL_{k+1}(f_t)$.

Chapitre 4

Applications harmoniques fibré-laminées

LE but de ce chapitre est d'étendre les résultats d'existence d'applications harmoniques et de convergence du flot de la chaleur laminé au cadre fibré-laminé.

Définition 4.1 (Espace fibré-laminé)

Soient Λ et Ξ deux laminations riemanniennes et $\pi : \Xi \rightarrow \Lambda$ une application laminée. $\Xi := (\Xi, \Lambda, \pi)$ est un espace fibré-laminé de fibre type N si π est un fibration riemannienne de fibre N : pour tout $\lambda \in \Lambda$, il existe un voisinage V de λ pour la topologie fine tel que $\pi^{-1}(V)$ est le produit riemannien $V \times N$ et π est la projection sur V .

Par exemple, fixons M et N deux variétés riemanniennes et notons \mathbb{G} le groupe d'isométrie de N . A tout morphisme $\rho : \pi_1(M) \rightarrow \mathbb{G}$, est associé un fibré-laminé de fibre N au dessus de M : $P_\rho = \tilde{M} \times_\rho N / \pi_1(M)$. Réciproquement, tout fibré-laminé de fibre N au dessus d'une lamination Λ est induit feuille à feuille par un morphisme $\rho : \pi_1(\mathcal{L}) \rightarrow \mathbb{G}$.

Remarque 4.1.1 Soit Ξ un espace fibré-laminé de fibre type N et $\sigma : \Lambda \rightarrow \Xi$ une section de Ξ . Fixons $\lambda \in \Lambda$. Le groupe fondamental de la feuille \mathcal{L}_λ , $\pi_1(\lambda)$, agit par isométrie sur $\tilde{\mathcal{L}}_\lambda$ et N . La section σ induit donc une application $\sigma_\lambda : \tilde{\mathcal{L}}_\lambda \rightarrow N$ $\pi_1(\lambda)$ -équivariante. Dans une carte locale où $\Lambda = \mathbb{R}^n \times Y$, la section σ s'écrit sous la forme : $\sigma(x, y) = (x, \sigma_y(x))$. σ_λ décrit donc la composante non triviale de la section σ . L'étude des sections de Ξ est équivalente, feuille à feuille, à celles des applications $\pi_1(\lambda)$ -équivariantes $\sigma_\lambda : \tilde{\mathcal{L}}_\lambda \rightarrow N$ associées. Par exemple, une section σ est une application harmonique laminée si et seulement si les applications associées $(\sigma_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ sont harmoniques. De même, si $\sigma_{t|\lambda} \geq 0$ est solution de l'équation de la chaleur, les applications associées $\sigma_{t|\lambda}$ sont solutions de l'équation de la chaleur. Par abus de langage, on notera par la suite $\lambda_i(\sigma)$ les coefficients de dilatation de σ_λ .

Le problème que nous étudions est de savoir, étant donné un espace fibré-laminé Ξ , si Ξ admet des sections harmoniques $\sigma : \Lambda \rightarrow \Xi$. Dans la première section, nous donnons une version fibré-laminé du théorème de stabilité par perturbation des applications harmoniques. La seconde section donne une générali-

sation du théorème de convergence faible du flot de la chaleur dans cadre fibré-laminé, qui se résume en la dichotomie : soit le flot de la chaleur converge faiblement vers une mesure \mathcal{F} -harmonique, soit il converge vers une mesure sur le bord à l'infini de Ξ . Le problème de divergence vers le bord à l'infini de Ξ est étudié dans la troisième section : nous décrivons divers critères de réductivité, qui permettent d'éviter la divergence du flot de la chaleur.

4.1. Stabilité des sections harmoniques fibré-feuilletées

Dans le cadre fibré-feuilleté, le phénomène de stabilité des applications harmoniques permet de démontrer un théorème de perturbation qui est un prototype élémentaire du théorème de stabilité des actions superrigides que nous démontrerons au chapitre 5. Lorsque Λ et Ξ sont des feuilletages, on a la notion de :

Définition 4.2 (Fibré feuilleté) .

Soient Λ et Ξ deux variétés riemanniennes \mathcal{C}^∞ feuilletées et $\pi : \Xi \rightarrow \Lambda$ une submersion \mathcal{C}^∞ . Ξ est fibré feuilleté si π est une fibration riemannienne sur les feuilles de Λ , c'est-à-dire, pour tout $\lambda \in \Lambda$, il existe un voisinage V de λ pour la topologie fine tel que $\pi^{-1}(V)$ est le produit riemannien $V \times N$.

On peut alors poser le critère de stabilité :

Définition 4.3 (Critères de stabilité) .

Soit Ξ un fibré feuilleté de rang géométrique k , c'est-à-dire tel que les fibres types de $\Xi \rightarrow \Lambda$ sont des variétés d'Hadamard de rang géométrique k et $\sigma : \Lambda \rightarrow \Xi$ une section harmonique de Ξ .

- σ vérifie le critère de stabilité fort si σ est \mathcal{C}^∞ -pour la structure de variété \mathcal{C}^∞ de Λ et Ξ -, de rang au moins $k + 1 : \inf \lambda_{k+1}(\sigma) > 0$,
- σ vérifie le critère de stabilité faible si σ est transversalement continûment \mathcal{C}^∞ , de rang au moins $k + 1 : \inf \lambda_{k+1}(\sigma) > 0$.

Avant d'énoncer le théorème de stabilité par perturbation, définissons :

Définition 4.4 (Perturbation d'un fibré-feuilleté) .

Soient Ξ un espace fibré feuilleté. Une perturbation Ξ_{pert} de Ξ est définie par :

- un feuilletage \mathcal{F}' et une métrique g' \mathcal{C}^∞ sur Λ ,
- une métrique \mathcal{C}^∞ pour le feuilletage $\pi^{-1}(\mathcal{F}')$, telle que $\pi : \Xi_{pert} \rightarrow \Lambda_{pert}$ est un fibré feuilleté.

Remarquons que l'espace des perturbations du fibré feuilleté Ξ est naturellement muni de la topologie \mathcal{C}^∞ uniforme. Nous pouvons maintenant énoncer le :

Théorème 4.5 (Perturbation fibré feuilleté) .

Soit Ξ un fibré feuilleté \mathcal{C}^∞ de rang géométrique k et $\sigma : \Lambda \rightarrow \Xi$ une section harmonique \mathcal{C}^∞ de Ξ . Si Λ est compact et si σ vérifie le critère de stabilité fort, il existe un voisinage \mathcal{V} de Ξ dans l'espace des perturbations fibré-feuilletées tel que, si $\Xi_{pert} \in \mathcal{V}$, $\Xi_{pert} \rightarrow \Lambda_{pert}$ admet une unique section harmonique σ_{pert} , homotope, à distance bornée de σ . De plus : σ_{pert} vérifie le critère de stabilité faible.

Remarquons qu'il y a une perte de régularité transverse : si σ est supposé transversalement \mathcal{C}^∞ , σ_{pert} est seulement transversalement continu.

Preuve $f : \Lambda \rightarrow \Xi$ est \mathcal{C}^∞ . On en déduit que, si Ξ_{pert} est une perturbation de $\Xi : \inf \lambda_{k+1}(f)_{pert}$ et $\sup |\tau(f)_{pert}|$ dépendent continûment de la perturbation. De plus, la condition : Ξ_{pert} est de rang géométrique k est une condition ouverte. f étant une section fortement stable de Ξ , ce sera une section quasi-harmonique de Ξ_{pert} . $f : \Lambda_{pert} \rightarrow \Xi_{pert}$ est donc homotope, à distance bornée d'une section harmonique f_{pert} . Par le même argument que pour le théorème de stabilité laminé 3.5 on démontre que f_{pert} vérifie le critère de stabilité : $\inf \lambda_{k+1}(f_{pert}) > 0$, si la perturbation Ξ_{pert} est proche de Ξ , puis que f_{pert} est définie de façon unique et est transversalement continûment \mathcal{C}^∞ ; c'est-à-dire : f_{pert} vérifie le critère de stabilité faible. \square

4.2. Convergence du flot de la chaleur

4.2.1. Bord à l'infini de Ξ

Rappelons la définition du bord à l'infini d'une variété d'Hadamard :

Définition 4.6 Soit (M, x_0) une variété riemannienne pointée. M est une variété d'Hadamard si M est complète, simplement connexe, à courbure $K \leq 0$. A $x \in M$ est associée la fonction de Busemann $\varphi_x(y) = d(x, y) - d(x, x_0)$. M s'injecte dans $\mathcal{C}^0(M, \mathbb{R})$: à $x \in M$ est associé φ_x . L'image de cette application est précompacte. Si (\bar{M}, x_0) est l'adhérence de $\varphi(M)$, le bord à l'infini de (M, x_0) est :

$$\partial_\infty M = \bar{M} \setminus \varphi(M)$$

De plus : si x_1 est un autre point de x_0 , (\bar{M}, x_1) et (\bar{M}, x_0) sont canoniquement homéomorphes.

Dans le cadre des espaces fibrés laminés, on a :

Proposition 4.7 Soit Ξ un espace fibré-laminé, de fibre type N , une variété d'Hadamard. Ξ admet une compactification naturelle par les fonctions de Busemann : si σ est une section locale de Ξ , $(\Xi_\lambda, \sigma(\lambda))$ se compactifie en $(\Xi \cup \partial_\infty \Xi_\lambda, \sigma(\lambda))$. De plus, l'espace $\Xi \cup \partial_\infty \Xi$ ne dépend pas de la section σ choisie. $\Xi \cup \partial_\infty \Xi$ est naturellement muni d'une topologie \mathcal{C}^0 et est un espace fibré-laminé au dessus de Λ , de fibre type : \bar{N} . Le bord à l'infini de Ξ est l'espace fibré-laminé $\partial_\infty \Xi$, et a pour fibre type $\partial_\infty N$.

Soit N une variété d'Hadamard, $x \in N$ et $B_x N = \{X \in T_x N \mid \|X\| < 1\}$, l'application $K_x : B_x N \rightarrow N$ définie par : $K_x(X) = \exp_x(\frac{X}{\sqrt{1-|X|^2}})$ s'étend en un homéomorphisme $K_x : \bar{B}_x N \rightarrow \bar{N}$. De même :

Proposition 4.8 Soit Ξ un espace fibré-laminé et σ une section de Ξ . L'espace $\Xi \cup \partial_\infty \Xi$ s'identifie naturellement au fibré $\bar{B}_\sigma \Xi$ de fibre $\bar{B}_{\sigma(\lambda)} \Xi_\lambda$, la boule unité fermée de $T_{\sigma(\lambda)} \Xi_\lambda$, via :

$$K_\sigma(X) = \exp_x\left(\frac{X}{\sqrt{1-|X|^2}}\right)$$

Cette identification nous sera utile pour étudier les propriétés de compacité de l'espace des sections fibré-laminées.

4.2.2. L'espace des sections fibré-laminées

Définition 4.9 (Sections fibré-laminées) .

Soit $\Xi = (\Xi, \Lambda, \pi)$ un espace fibré-laminé. L'espace des sections fibré-laminées de Ξ est :

$$\Gamma(\Xi) = \{(\lambda, \sigma) | \sigma : \mathcal{L}_\lambda \rightarrow \Xi/\pi \circ \sigma = id|_{\mathcal{L}_\lambda}\}$$

Le revêtement d'holonomie de l'espace des sections laminées est :

$$\bar{\Gamma}(\Xi) = \{(\lambda, \sigma) | \sigma : \bar{\mathcal{L}}_\lambda \rightarrow \Xi/\pi \circ \sigma = id|_{\mathcal{L}_\lambda}\}$$

où $\bar{\mathcal{L}}_\lambda$ est le revêtement d'holonomie de la feuille \mathcal{L}_λ .

Par le même procédé qu'au chapitre 2, on démontre :

Proposition 4.10 Soit Ξ un espace fibré-laminé. Le revêtement d'holonomie de l'espace des sections laminées de Ξ , est un espace fibré-laminé au dessus de Λ , et est naturellement muni d'une distance adaptée à la topologie \mathcal{C}^∞ . De même, le revêtement d'holonomie de l'espace des sections laminées de $\Xi \cup \partial_\infty \Xi$, est un espace fibré-laminé au dessus de Λ et est naturellement muni d'une distance adaptée à la topologie \mathcal{C}^0 sur $\Xi \cup \partial_\infty \Xi$. De plus, l'injection naturelle $\bar{\Gamma}(\Xi) \rightarrow \bar{\Gamma}(\Xi \cup \partial_\infty \Xi)$ est continue.

Preuve $\bar{\mathcal{M}}$, le revêtement d'holonomie des applications laminées de Λ dans Ξ est muni d'une métrique adaptée à la topologie \mathcal{C}^∞ . Pour cette métrique, $\bar{\Gamma}(\Xi)$ est un sous espace fermé dans $\bar{\mathcal{M}}$. Pour définir la métrique sur $\bar{\Gamma}(\Xi \cup \partial_\infty \Xi)$, Choisissons une section σ de Ξ , $\Xi \cup \partial_\infty \Xi$ s'identifie au fibré en boule fermées $\bar{B}_\sigma \Xi$ et $\bar{\Gamma}(\Xi \cup \partial_\infty \Xi)$ s'identifie à un sous espace fermé de $\bar{\mathcal{M}}$, muni de la topologie \mathcal{C}^0 . \square

De même, on a une propriété de compacité :

Proposition 4.11 Soit (Ξ, Λ, π) un espace fibré-laminé, K_Λ un compact de Λ . Pour tout $r, n \in \mathbb{N}$ fixons $C(r, n) > 0$ et définissons :

$$\mathcal{K} = \left\{ (\lambda, \varphi) \in \bar{\Gamma}(\Xi) \mid \lambda \in K_\Lambda, \forall (r, n) \in \mathbb{N} \sup_{d(\lambda, y) \leq r} |\nabla^n \varphi(y)| \leq C(r, n) \right\}$$

L'adhérence de \mathcal{K} dans $\bar{\Gamma}(\Xi \cup \partial_\infty \Xi)$ est compacte. De plus, l'adhérence de \mathcal{K} est $\mathcal{K} = \mathcal{K}_{reg} \cup \mathcal{K}_{sing}$ où :

- la partie régulière \mathcal{K}_{reg} est l'adhérence de \mathcal{K} dans $\bar{\Gamma}(\Xi)$,
- la partie singulière \mathcal{K}_{sing} s'identifie avec $\partial_\infty \Xi$:

$$\mathcal{K}_{sing} = \{(\lambda, f) | f : \bar{\mathcal{L}}_\lambda \rightarrow \partial_\infty \Xi, f \text{ constante}\}$$

4.2.3. Convergence du flot de la chaleur

Théorème 4.12 (Convergence vers une mesure \mathcal{F} -harmonique) .

Soit $\Xi \rightarrow \Lambda$ un fibré-laminé à courbure négative ou nulle, muni d'une mesure transverse de volume fini. Si σ est une section de Ξ d'énergie et de tension bornée, le flot de la chaleur σ_t induit une famille $\mu_t = \bar{\sigma}_t \nu$ de mesures transverses sur l'espace des section fibrées laminées de Ξ , qui convergent faiblement, à extraction près, vers une mesure $\mu = \mu_{reg} + \mu_{sing}$ sur $\bar{\Gamma}(\Xi \cup \partial_\infty \Xi)$, où :

- μ_{reg} , la composante régulière de μ , est à support dans l'espace des applications harmoniques laminées : $\overline{\mathcal{H}} = \{(x, \varphi) | \tau(\varphi) = 0\}$,
- μ_{sing} , la composante singulière de μ , est à support dans les applications constantes $\overline{\mathcal{L}}_\lambda \rightarrow \partial_\infty \Xi$. μ_{sing} s'identifie à une mesure transverse sur $\partial_\infty \Xi$.

Preuve L'énergie de σ_t étant bornée, on en déduit que $\sigma_{t*} \nu$ est presque à support dans :

$$\mathcal{K} = \left\{ (\lambda, \varphi) \in \overline{\Gamma}(\Xi) \mid \lambda \in K_\Lambda, \sup_{d(\lambda, y) \leq R} |\nabla^n \varphi(y)| \leq C(r, n) \right\}$$

qui est précompact dans $\overline{\Gamma}(\Xi \cup \partial_\infty \Xi)$, d'adhérence : $\mathcal{K} \cup \partial_\infty \mathcal{K}$ où

$$\partial_\infty \mathcal{K} = \{(x, \varphi) | \varphi : \overline{\mathcal{L}}_x \rightarrow \partial_\infty \Xi \text{ constante}\}$$

On en déduit que $\sigma_{t*} \nu$ converge faiblement vers une mesure μ sur $\overline{\Gamma}(\Xi \cup \partial_\infty \Xi)$. \square

Définition 4.13 (Condition de réductivité mesurable) .

Un fibré-laminé $\Xi \rightarrow (\Lambda, \nu)$ est mesurablement réductif si, pour presque toute composante ergodique ν_s de ν , il n'existe pas de mesure transverse μ sur $\partial_\infty \Xi$ qui se projette sur ν_s .

Si $\Xi \rightarrow (\Lambda, \nu)$ est mesurablement réductif, la mesure associée au flot de la chaleur $\mu_t = \sigma_{t*} \nu$ converge vers une mesure \mathcal{F} -harmonique sur $\overline{\Gamma}(\Xi)$. En particulier, la mesure limite jouit des propriétés énoncées dans le cas feuilleté, et on a :

Corollaire 4.13.1 (Convergence forte) Soit $\Xi \rightarrow \Lambda$ un fibré-laminé à courbure négative ou nulle, muni d'une mesure transverse de volume fini. Soit σ une section de Ξ d'énergie et de tension bornée., Si la mesure transverse ν est ergodique et Ξ vérifie la condition de réductivité mesurable, le flot de la chaleur σ_t :

- converge à extraction près, ν -presque partout pour la topologie \mathcal{C}^∞ sur les feuilles, vers une section harmonique laminée $f : \Lambda \rightarrow \Xi$ mesurablement homotope à f_0 de rang supérieur à k sur le $k+1$ -support de μ ,
- converge globalement pour la topologie L^1 sur le $k+1$ -support de μ au sens où :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_\Lambda \lambda_{k+1}^2(f) \varphi(d(f_t, f)) = 0$$

où φ est la fonction donnée par la formule de Bochner pour la distance.

lorsque :

- Ξ est de rang géométrique 1, et σ est d'aire minimale non nulle. Dans ce cas, $\text{supp}_2(\mu)$ est de mesure pleine,
- Ξ est de rang géométrique k et $\sigma_{t*} \nu$ converge (à extraction près) vers une mesure \mathcal{F} -harmonique sur $\overline{\Gamma}(\Xi)$, de rang au moins $k+1$.

De plus : σ est l'unique représentant harmonique de la classe d'homotopie mesurable de σ_0 .

4.3. Conditions de réductivité

Le but de ce paragraphe est de donner des conditions de réductivité qui impliquent l'existence de sections harmoniques fibré-laminées.

4.3.1. Structure du bord à l'infini d'une variété d'Hadamard

Avant d'énoncer une condition de réductivité géométrique, rappelons les structures du bord à l'infini d'une variété d'Hadamard. On pourra se référer à Ballman, Gromov et Schroeder [4] ou à Eberlein [14] pour plus de détails.

Si M est une variété d'Hadamard et $x \in M$, $\partial_\infty M$ s'identifie naturellement à $U_x M$: à $N \in U_x M$ est associé $\theta = \lim_{t \rightarrow +\infty} \exp_x(tN)$. On peut donc définir deux topologies sur $\partial_\infty M$:

- la *topologie visuelle*, qui est induite par la topologie de $U_x M$. On note $\partial_\infty M$ le bord à l'infini, muni de la topologie visuelle,
- la *topologie de Tits*, induite par la distance de Tits définie par : $\angle(\alpha, \beta) = \sup_{x \in M} \angle_x(\alpha, \beta)$, où $\angle_x(\alpha, \beta)$ est l'angle, sur la sphère $U_x M$, entre les vecteurs représentant α et $\beta \in \partial_\infty M = U_x M$. On note $\partial_{\text{Tits}} M$ le bord à l'infini de M , muni de la distance de Tits.

Proposition 4.14 *Soit M une variété d'Hadamard. La topologie de Tits est plus fine que la topologie visuelle : $\partial_{\text{Tits}} M \rightarrow \partial_\infty M$ est continue. La distance de Tits est semi continue inférieurement pour la topologie visuelle : si $(\alpha_n, \beta_n) \rightarrow (\alpha, \beta)$ dans $\partial_\infty M$,*

$$\angle(\alpha, \beta) \leq \liminf \angle(\alpha_n, \beta_n)$$

Nous pouvons maintenant énoncer le :

Lemme 4.15 (Centre de masse) .

Soit Γ un ensemble de diamètre $\angle_{\text{Tits}}(\Gamma) \leq \frac{\pi}{2}$ dans le bord à l'infini d'une variété M à courbure négative ou nulle. Il existe un unique $\gamma \in \partial_{\text{Tits}} M$ tel que : $\Gamma \subset B_{\gamma, r}$ avec r minimal. γ est le centre de masse de Γ .

Preuve (D'après Eberlein [14]) On vérifie facilement que les sous ensembles de diamètre $d \leq \frac{\pi}{2}$ de la sphère \mathbb{S}^n admettent un unique centre de masse. Si $x \in M$, posons $\Gamma_x \subset SM_x \sim \partial_\infty M$ la trace de Γ sur le fibré unitaire tangent en x . On sait que $\angle_x(\alpha, \beta) \leq \angle_{\text{Tits}}(\alpha, \beta)$, donc Γ_x est de diamètre $d \leq \frac{\pi}{2}$ et admet un unique centre de masse γ_x . De plus, si $n = \dim(M)$, pour tout $\beta \in \Gamma_x$, on a :

$$\angle_x(\gamma_x, \beta) \leq C(n) < \frac{\pi}{2}$$

$x \rightarrow \gamma_x$ définit un unique champ de vecteur sur M , dont le flot φ_t diverge. Si $\theta = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{t_n}(x)$, d'après la semi continuité de la distance de Tits, on déduit que $\Gamma \subset B_{\theta, C(n)}$ où $C(n) < \frac{\pi}{2}$.

Posons $r = \inf\{C \mid \exists \tau \Gamma \subset B_{\tau, C}\}$. Il existe une suite (θ_n, r_n) telle que $\Gamma \subset B_{\theta_n, r_n}$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = r$. $\partial_\infty M$ est compact pour la topologie visuelle : on peut donc supposer que θ_n converge vers θ . La distance de Tits étant semi continue inférieurement, on en déduit qu'il existe un point minimisant. Le rayon minimal étant $r < \frac{\pi}{2}$, ce point est unique : par comparaison avec \mathbb{S}^2 , s'il existait deux points minimisant θ_0 et θ_1 , pour γ milieu de $[\theta_0, \theta_1]$, on aurait : $\Gamma \subset B_{\gamma, \rho}$ avec $\rho < r$. \square

Définition 4.16 (Demi bande plate) .

Soit M une variété d'Hadamard. M est sans demi bande plate si toute sous variété totalement géodésique isométrique à $\mathbb{R}^+ \times [0, 1]$ s'étend en un plat, isométrique à $\mathbb{R} \times [0, 1]$.

Proposition 4.17 *Soit M une variété d'Hadamard. Soit $\theta \in \partial_\infty M$, de fonction de Busemann B_θ . S'il existe un point où $\nabla dB = 0$, M se décompose en : $M = \mathbb{R} \times M_\theta$, où $\theta = \partial_\infty \mathbb{R}^+$*

Preuve Si $\nabla dB(x) = 0$, l'ensemble $M^+ = B^{-1}] - \infty, B(x)]$ factorise en : $M^+ = \mathbb{R}^+ \times M_\theta$. Compte tenu de l'hypothèse : M n'a pas de demi bande plate, on en déduit que $M = \mathbb{R} \times M_\theta$ \square

4.3.2. Condition de réductivité géométrique

Soit M une variété d'Hadamard, et \mathbb{G} un groupe agissant sur M . D'après Labourie [28] l'action de \mathbb{G} sur M est géométriquement réductive si M contient un convexe C \mathbb{G} -invariant, tel que

- C se décompose en $C_1 \times \mathbb{E}$ ou \mathbb{E} est euclidien,
- $\mathbb{G} = \mathbb{G}_1 \times \mathbb{G}_2$ où \mathbb{G}_2 agit isométriquement sur \mathbb{E} , \mathbb{G}_1 sur C_1 ,
- \mathbb{G}_1 ne fixe pas de point à l'infini de C_1 .

Par analogie, :

Définition 4.18 (Réductivité géométrique) .

Le fibré-laminé $\Xi \rightarrow \Lambda$ est géométriquement réductif s'il existe un sous-fibré convexe invariant Γ , qui se décompose en $\Gamma = Y \times \Sigma$, où :

- $\Sigma \rightarrow \Lambda$ est un fibré-laminé mesurable, à fibres euclidiennes,
- $Y \rightarrow \Lambda$ est un fibré-laminé mesurable, tel que : $\partial_\infty Y \rightarrow \Lambda$ n'admet pas de section mesurable invariante.

La notion de barycentre d'une mesure permet d'établir un lien entre la condition de réductivité géométrique et l'existence de mesures \mathcal{F} -harmoniques :

Proposition 4.19 (Barycentre d'une mesure) .

Soit M une variété d'Hadamard sans demi bande plate. A une mesure μ sur $M \cup \partial_\infty M$, on associe B_μ , la moyenne des fonctions de Busemann :

$$B_\mu(x) = \int_{M \cup \partial_\infty M} b(x, \theta) d\mu(\theta)$$

On a les trois possibilités suivantes :

- B_μ atteint son minimum sur un compact K . Si σ est le barycentre de K , on dira que μ est elliptique, et σ est le barycentre de μ ,
- B_μ atteint son minimum sur un convexe non compact C . On dira que μ est hyperbolique, et C est l'enveloppe convexe de μ . De plus, si $C = M$, M se décompose sous la forme d'un produit riemannien $\Sigma \times \mathbb{R}^p$ et μ est à support dans $\partial_\infty \mathbb{R}^p$,
- B_μ n'atteint pas son minimum. On peut associer à μ un unique point à l'infini σ . On dira que μ est parabolique, et σ est le barycentre à l'infini de μ .

Preuve Posons $C_\Lambda = \{x \in M / B_\mu(x) \leq \Lambda\}$. C_Λ est une famille de convexes emboîtés fermés. Soit $\alpha = \inf B_\mu$. On a les trois possibilités :

- $C_\alpha \neq \emptyset$ est compact : la mesure μ est elliptique,

- $C_\alpha \neq \emptyset$ est non compact : μ est hyperbolique. Supposons que $C_\alpha = M$. On sait alors que la moyenne des Hessiens des fonctions de Busemann dans le support de μ est nulle :

$$\nabla dB_\mu = \int_{\partial_\infty M} \nabla db(\cdot, \theta) d\mu(\theta) |_{C_\alpha} = 0$$

Ainsi, les fonctions de Busemann dans le support de μ sont affines. En particulier, si θ est dans le support de μ , $\theta \in \partial_\infty M$ et, compte tenu de l'hypothèse : sans demi bande plate, on peut décomposer M sous la forme : $M = \mathbb{R}_\theta \times M_\theta$. Supposons que l'on décompose $M = \mathbb{R}^n \times \Sigma_0$. On définit alors sur M pour chaque direction de \mathbb{R}^n n champ de vecteurs (X_1, \dots, X_n) parallèles, orthormés, qui commutent entre eux. Soit $\theta \in \text{supp}(\mu)$. Si $\theta \notin \partial_\infty \mathbb{R}^n$ on peut lui associer un champ de vecteur parallèle X sur C_α . X étant parallèle, X commute avec (X_1, \dots, X_n) . En effet : $[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X = 0$. A orthonormalisation près, on peut donc définir un $(n+1)^{\text{ème}}$ vecteur orthormé X_{n+1} qui commute avec (X_1, \dots, X_n) , d'où l'on déduit que M se décompose en $M = \mathbb{R}^{n+1} \times C$. Par récurrence, on en déduit la décomposition $C_\alpha = \Sigma \times \mathbb{R}^p$, et le fait que μ est à support dans $\partial_\infty \mathbb{R}^p$.

- Cas où $C_\alpha = \emptyset$: μ est parabolique. Posons d_λ la fonction distance à C_λ (normalisée par $d_\lambda(x_0) = 0$). Les fonctions d_λ sont convexes, de gradient $|\nabla d_\lambda| = 1$ en dehors de C_λ . D'après Gromov [4], les fonctions d_λ convergent (à extraction près) lorsque $\lambda \rightarrow \alpha$ vers une fonction de Busemann. Définissons Γ l'ensemble des valeurs d'adhérences des fonctions d_λ , et démontrons que le diamètre de Tits de Γ est majoré par $\frac{\pi}{2}$:

$$\angle_{\text{Tits}}(\Gamma) \leq \frac{\pi}{2}$$

Fixons $x \in M$. Si x_λ est la projection de x sur C_λ , Γ est aussi l'ensemble des valeurs d'adhérence de x_λ . Choisissons $\lambda \gg 1$, de sorte que $x \notin C_\lambda$. On sait alors que, pour tout $y \in C_\lambda$, $\angle_x(x_\lambda, y) \leq \frac{\pi}{2}$. En effet, si $\angle_x(x_\lambda, y) > \frac{\pi}{2}$, x_λ n'est pas le projeté de x sur le segment $[x_\lambda, y]$, ce qui est contradictoire, C_λ étant convexe. Pour $y \rightarrow \infty$, on en déduit : $\angle_x(x_\lambda, \gamma) \leq \frac{\pi}{2}$, pour tout $\gamma \in \Gamma$, puis, pour $\lambda \rightarrow \infty$, on conclut : $\angle(\alpha, \gamma) \leq \angle_x(\alpha, \gamma) \leq \frac{\pi}{2}$ pour tout $\alpha, \gamma \in \Gamma$. Γ est donc de diamètre $D \leq \frac{\pi}{2}$: d'après le lemme 4.15, Γ admet un unique centre de masse, qui définit le barycentre à l'infini de μ . \square

Corollaire 4.19.1 (Cas des variétés de rang un) .

Lorsque M est à courbure négative : $K \leq -\kappa^2 < 0$, la mesure μ est :

- hyperbolique si μ a deux atomes μ_\pm de poids $\frac{1}{2}$ sur $\partial_\infty M$. L'enveloppe convexe de μ est l'unique géodésique reliant μ_\pm ,
- parabolique si μ a un unique atome ξ de poids $\mu(\xi) \geq \frac{1}{2}$. ξ est alors le barycentre à l'infini de μ ,
- elliptique dans tous les autres cas.

Preuve La mesure est elliptique si et seulement si $\lim_{t \rightarrow +\infty} B_\mu(\gamma(t)) = +\infty$ pour toute géodésique γ . Si on suppose que $\mu(\gamma_\infty) < \frac{1}{2}$, M étant à courbure négative : $K < -\kappa^2$, on vérifie que, en dehors d'un voisinage V de γ_∞ sur $\partial_\infty M$, on a : $b(\gamma(t), \theta) \simeq t$. On a alors :

$$B_\mu(\gamma(t)) \geq \mu(V)t - \mu(\partial_\infty N - V)t + o(t)$$

Comme on peut choisir V tel que $\mu(V) < \frac{1}{2}$, on en déduit : $\lim_{t \rightarrow +\infty} B_\mu(\gamma(t)) = +\infty$. \square

Théorème 4.20 (Existence de mesures \mathcal{F} -harmoniques) .

Soit $\Xi \rightarrow (\Lambda, \nu)$ un fibré feuilleté mesuré ergodique, de courbure $K \leq 0$. On a les trois possibilités suivantes :

- $\bar{\Gamma}(\Xi)$ admet une mesure \mathcal{F} -harmonique (qui se projette sur ν),
- Il existe un sous-fibré convexe invariant $\Gamma = Y \times \Sigma$, où $\Sigma \rightarrow \Lambda$ est un fibré-laminé mesurable, à fibres euclidiennes, et $Y \rightarrow \Lambda$ est un fibré-laminé mesurable tel que $\bar{\Gamma}(Y)$ admet une mesure \mathcal{F} -harmonique,
- Il existe un sous-fibré convexe invariant $\Gamma = Y \times \Sigma$, où $\Sigma \rightarrow \Lambda$ est un fibré-laminé mesurable, à fibres euclidiennes, et $\partial_\infty Y \rightarrow \Lambda$ est un fibré-laminé mesurable qui admet une section invariante.

Preuve Soit σ une section (d'énergie et de tension bornée) de Ξ . Le flot de la chaleur σ_t converge faiblement vers une mesure μ_∞ . La composante singulière μ définit une mesure transverse sur $\partial_\infty \Xi$, que l'on supposera non triviale. μ se désintègre par rapport à $\nu : \mu = d\mu_\lambda \otimes d\nu(\lambda)$. ν étant ergodique, les mesures μ_λ sont presque sûrement toutes du même type. On dira suivant les cas que μ est elliptique, hyperbolique ou parabolique.

- Si μ est elliptique, pour presque tout λ , μ_λ admet un barycentre $\sigma(\lambda)$, ce qui définit une section invariante de Ξ ,
- Si μ est parabolique, le barycentre à l'infini de μ_λ définit une section invariante de $\partial_\infty \Xi$,
- Si μ est hyperbolique, on définit Γ_1 , l'enveloppe convexe des mesures μ_λ . Définissons σ_0 , le projeté orthogonal de σ sur Γ_1 . Le flot de la chaleur associé σ_t est bien défini, et converge faiblement vers μ_∞ , la partie singulière de μ_∞ définissant une mesure transverse μ_1 sur $\partial_\infty \Gamma_1$. Si $\mu_1 = 0$ ou μ_1 est elliptique, Γ_1 admet une section totalement géodésique, si μ_1 est parabolique, $\partial_\infty \Gamma_1$ admet une section invariante.

Si le flot de la chaleur sur Γ_1 converge vers une mesure hyperbolique μ_1 , on définit Γ_2 , l'enveloppe convexe de la mesure μ_1 , puis (tant que le flot de la chaleur converge vers une mesure hyperbolique) par récurrence une suite décroissante de convexes Γ_n , de dimension strictement décroissante. Γ_n se stabilise nécessairement. Si Γ^1 est le convexe stable, Γ^1 admet une mesure hyperbolique d'enveloppe maximale, donc se décompose en : $\Gamma^1 = Y_1 \times \Sigma_1$, où Σ_1 est à fibre plates. Par récurrence : soit $\bar{\Gamma}(Y_1)$ admet une mesure \mathcal{F} -harmonique, soit $\partial_\infty Y_1$ admet une section invariante, soit Y_1 contient un convexe invariant Γ qui se décompose en $Y_2 \times \Sigma_2^1$. On définit par récurrence une suite de convexes $\Gamma^{n+1} = Y_{n+1} \times \Sigma_{n+1}$ (en posant $\Sigma_{n+1} = \Sigma_{n+1}^n \times \Sigma_n$), contenu dans Γ^1 , tels que Y_n est de dimension décroissante. Lorsque la suite Y_n se stabilise, on obtient la décomposition annoncée. \square

4.3.3. Condition cohomologique de réductivité en rang un

Si σ est une section de l'espace fibré-laminé Ξ , σ s'écrit localement : $\lambda \rightarrow (\lambda, \bar{\sigma}(\lambda))$. On définit alors le k -volume ponctuel de $\sigma : \text{vol}_k(\sigma)(\lambda) = |\wedge^k \bar{\sigma}|(\lambda)$, puis, si ν est une mesure transverse sur $\Lambda : \text{VOL}_k(\sigma) = \int_\Lambda \text{vol}_k(\sigma) d\mu(\lambda)$.

Définition 4.21 (k-volume minimal) .

Soit $\Xi \rightarrow (\Lambda, \nu)$ un fibré-laminé mesuré et σ une section de Ξ , d'énergie bornée.

- Le k -volume minimal de σ : $MinVOL_k(\sigma)$, est le minimum des k -volumes des sections $\bar{\sigma}$ d'énergie bornée, homotopes, à distance bornée de σ ,
- Le k -volume minimal de Ξ : $MinVOL_k(\Xi)$ est le minimum des k -volumes des sections de Ξ d'énergie bornée.

Proposition 4.22 (k-volume minimal d'un fibré-laminé) .

Soit $\Xi \rightarrow (\Lambda, \nu)$ un fibré-laminé mesuré. Soit σ une section de Ξ d'énergie bornée. Le k -volume minimal de Ξ et celui de σ sont égaux.

Preuve Soit σ une section de Ξ , d'énergie bornée. On sait que :

$$MinVOL_k(\sigma) \geq MinVOL_k(\Xi)$$

Réciproquement : soit ζ une section de Ξ , telle que $VOL_k(\zeta) = MinVOL_k(\Xi) + \epsilon$. Pour $\xi \neq \zeta(\lambda) \in \Xi_\lambda$, on définit le champ de vecteur X_0 unitaire, pointant vers $\zeta(\lambda)$, qu'on régularise en $X = \varphi \circ d[\xi, \zeta(\lambda)]X_0$. Soit φ_t le flot associé à X : $\sigma_t = \varphi_t(\sigma)$ est une section de Ξ , d'énergie bornée, à distance bornée de σ , qui converge vers ζ . On en conclut : $MinVOL_k(\sigma) \leq \lim_{t \rightarrow \infty} VOL_k(\sigma_t) = VOL_k(\zeta)$. \square

Lorsque $\Xi \rightarrow (\Lambda, \nu)$ est un fibré-laminé mesuré ergodique, a courbure strictement négative, la condition de réductivité mesurable : il n'existe pas de mesure transverse sur $\partial_\infty \Xi$ se projetant sur ν , est équivalente à la condition de réductivité géométrique : il n'existe ni section invariante de $\partial_\infty \Xi$, ni section invariante de Ξ , ni géodésique invariante $\Gamma \subset \Xi$. On a un critère cohomologique :

Proposition 4.23 (Critère cohomologique de réductivité en rang un) .

Soit $\Xi \rightarrow (\Lambda, \nu)$ un fibré-laminé mesuré ergodique, de rang géométrique 1 : $K_\Xi \leq -\kappa^2$. Si Ξ est d'aire minimale positive, Ξ est réductif.

Preuve Supposons que $\partial_\infty \Xi$ admette une mesure transverse invariante μ . Trois cas sont à considérer :

- μ est elliptique. Le barycentre de μ définit une section invariante de Ξ : $MinAIRE(\Xi) = 0$,
- μ est hyperbolique. L'enveloppe convexe Γ de μ définit une géodésique invariante : par projection d'une section de Ξ sur Γ , on obtient une section de rang 1, donc d'aire nulle,
- μ est parabolique. Le barycentre à l'infini de μ définit une section invariante θ de $\partial_\infty \Xi$. Soit σ une section de Ξ d'énergie bornée. Posons X le champ de vecteur unitaire pointant vers θ et φ_t le flot associé. φ_t est contractant sur les horosphères : à la limite, $\sigma_t = \varphi_t \circ \sigma$ est essentiellement de rang 1, et $\lim_{t \rightarrow \infty} AIRE(\sigma_t) = 0$

Par contraposée, si $MinAIRE(\Xi) \neq 0$, Ξ est réductif. \square

Corollaire 4.23.1 (Flot de la chaleur fibré-laminé en rang un) .

Soit $\Xi \rightarrow (\Lambda, \nu)$ un fibré-laminé mesuré ergodique, de rang géométrique 1 et d'aire minimale positive. Soit σ une section de Ξ d'énergie bornée, de tension bornée. Le flot de la chaleur σ_t converge ν presque sûrement vers une section harmonique, d'aire positive.

Chapitre 5

Superrigidité

NOUS étudions dans ce chapitre les actions de groupe sur des fibrés principaux. Commençons par fixer le cadre général de notre étude :

Soit \mathbb{H} un groupe de Lie semi-simple et $P_{\mathbb{H}} \rightarrow M$ un fibré principal (à droite) de fibre \mathbb{H} . Un groupe de Lie \mathbb{G} semi-simple, de type non compact, de rang réel $r \geq 2$ agit par automorphisme de fibré sur $P_{\mathbb{H}} \rightarrow M$, si \mathbb{G} agit sur $P_{\mathbb{H}}$ et l'action de \mathbb{G} commute avec l'action de \mathbb{H} . En particulier, l'action de \mathbb{G} sur $P_{\mathbb{H}}$ se projette en une action sur M . Dans des trivialisations locales U et V , l'action de \mathbb{G} est donnée par un cocycle : $g.(m, h) = (g.m, \alpha_V^g(m, g)h)$.

On peut donner différents exemples de telles actions :

- Action associée à un morphisme $\rho : \mathbb{G} \rightarrow \mathbb{H}$. Si on fixe une action de \mathbb{G} sur M , \mathbb{G} agit sur le fibré trivial $P_{\mathbb{H}} = M \times \mathbb{H}$ par : $g.(m, h) = (g.m, \rho(g)h)$,
- Action obtenue par suspension : si \mathbb{G} agit sur le fibré $P_{\mathbb{K}} \rightarrow M$ de fibre \mathbb{K} , un sous groupe de \mathbb{H} , \mathbb{G} agit naturellement sur le fibré $P_{\mathbb{H}} = P_{\mathbb{K}} \times \mathbb{H}/\mathbb{K}$ de fibre \mathbb{H} (où $(p, h) \simeq (pk, k^{-1}h)$) par : $g.[p, h] = [g.p, h]$. On dira que *l'on peut réduire l'action de \mathbb{G} au sous fibré $P_{\mathbb{K}}$* ,

Moyennant une condition de réductivité algébrique, le théorème de superrigidité de Zimmer [48] classe à conjugaison mesurable près les actions de groupe \mathbb{G} semi-simples non compacts de rang $r \geq 2$ sur des fibrés principaux $P_{\mathbb{H}} \rightarrow M$: l'action de \mathbb{G} (ou, plus généralement, d'un réseau $\Gamma \subset \mathbb{G}$) est conjuguée au produit de deux actions qui commutent :

- Une action associée à un morphisme $\rho : \mathbb{G} \rightarrow \mathbb{H}$,
- Une action de \mathbb{G} qui se réduit à un sous-fibré $P_{\mathbb{K}}$ à fibre compacte \mathbb{K} .

Définition 5.1 (Action superrigide) .

Soient \mathbb{G} et \mathbb{H} deux groupes de Lie, $P_{\mathbb{H}} \rightarrow M$ un fibré principal de fibre \mathbb{H} et ρ une action de \mathbb{G} par automorphisme de fibré. L'action ρ de \mathbb{G} sur le fibré $P_{\mathbb{H}}$ est superrigide si ρ est le produit de deux actions qui commutent :

$$\rho(g).p = \rho_{\varphi}(g)\rho_{\mathbb{K}}(g).p$$

où ρ_{φ} est associée à un morphisme φ de \mathbb{G} dans \mathbb{H} et $\rho_{\mathbb{K}}$ se réduit à un sous fibré à fibre compacte \mathbb{K} .

On dira que l'action de \mathbb{G} est \mathcal{C}^k superrigide si les actions ρ_{φ} et $\rho_{\mathbb{K}}$ sont \mathcal{C}^k et que l'action de \mathbb{G} est fortement superrigide si $\rho_{\mathbb{K}}$ est triviale : $\mathbb{K} = \{id\}$.

Exemple 5.2 Si $\Gamma = SL_n(\mathbb{Z})$, il existe de nombreux morphismes de Γ dans des groupes compacts $\mathbb{K} : \Gamma \rightarrow SL_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ ou $\Gamma \rightarrow SL_n(\mathbb{Z}_p)$ où \mathbb{Z}_p est l'anneau des entiers p -adiques. Si Γ agit librement sur M , Γ agit donc sur $P_{\mathbb{K}} = M \times \mathbb{K}$. Par suspension, on en déduit que $\mathbb{G} = SL_n(\mathbb{R})$ agit sur $Q_{\mathbb{K}} \rightarrow N$, où $N = M \times \mathbb{G}/\Gamma$ est de volume fini, et $Q_{\mathbb{K}} = P_{\mathbb{K}} \times \mathbb{G}/\Gamma$. $SL_n(\mathbb{R})$ agit donc par automorphisme de fibré sur de nombreux fibrés (de volume fini) à fibre compacte. Comme les morphismes $SL_n(\mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{G}$ ne s'étendent pas à $SL_n(\mathbb{R})$, on obtient des exemples d'actions sur des fibrés à fibre compacte, qui ne sont pas associés à un morphisme $\mathbb{G} \rightarrow \mathbb{K}$.

D'après le théorème d'arithmécité de Margulis, les réseaux Γ des groupes de Lie simple de type non compact, de rang $r \geq 2$ s'obtiennent virtuellement (à extension ou quotient par un groupe compact près) par $\Gamma = \rho^{-1}(SL_n(\mathbb{Z}))$ pour un morphisme $\rho : \mathbb{G} \rightarrow SL_n(\mathbb{R})$. On a donc par ce procédé des exemples d'actions de \mathbb{G} sur des fibrés à fibre compacte qui ne sont pas associés à un morphisme $\mathbb{G} \rightarrow \mathbb{K}$.

Le but de ce chapitre est de donner un résultat de stabilité topologique pour les action superrigides. Je commence par rappeler le lien entre les applications harmoniques et les actions superrigides, tel que l'expliquent par exemple Corlette et Zimmer [11]. Je donne un rapide aperçu sur la propriété T de Kazhdan, qui joue un rôle essentiel pour l'étude de la superrigidité, puis je démontre une version du théorème de superrigidité de Zimmer [48], sous une condition de réductivité géométrique. Je donne ensuite un théorème de stabilité des actions superrigide. Notons que Margulis et Qian [32] ont indépendamment démontré, par des méthodes différentes, un théorème analogue à notre théorème de stabilité.

5.1. Action superrigide sur un fibré

D'après l'interprétation par Mok, Siu et Yeung de la rigidité de Mostow, on sait que les applications harmoniques entre espaces localement symétriques sont généralement totalement géodésiques. On peut donc leur associer naturellement un morphisme de groupe, comme le prouve la :

Proposition 5.3 *Soient \mathbb{G} et \mathbb{H} deux groupes semi-simples connexes, de type non compact, sans facteur euclidien, d'espace symétrique associé $X_{\mathbb{G}} = \mathbb{G}/\mathbb{K}_{\mathbb{G}}$ et $X_{\mathbb{H}} = \mathbb{H}/\mathbb{K}_{\mathbb{H}}$. Si $f : X_{\mathbb{G}} \rightarrow X_{\mathbb{H}}$ est une application totalement géodésique, il existe un morphisme de groupe $\rho : \mathbb{G} \rightarrow \mathbb{H}$ tel que pour tout $x_{\mathbb{G}} \in X_{\mathbb{G}}$:*

$$f(g.x_{\mathbb{G}}) = \rho(g)f(x_{\mathbb{G}})$$

Réciproquement, à tout morphisme de groupe est associée une application totalement géodésique.

Preuve On peut supposer \mathbb{G} irréductible. Dans ce cas, f est constante, ou f est une immersion. Si f est constante, on définit $\rho(g) = id$.

— Si f est une immersion, on peut définir $\bar{\mathbb{G}} = Stab(f(X_{\mathbb{G}}))$, le stabilisateur de $X_{\mathbb{G}}$. $h \in \bar{\mathbb{G}}$ si, pour tout $x \in X_{\mathbb{G}}$, $h.f(x_{\mathbb{G}}) \in f(X_{\mathbb{G}})$. On définit également $\mathbb{K} = Fix(f(X_{\mathbb{G}}))$ le fixateur de $f(X_{\mathbb{G}})$. $k \in \mathbb{K}$ si, pour tout $x \in X_{\mathbb{G}}$, $k.f(x_{\mathbb{G}}) = f(x_{\mathbb{G}})$. Si on fixe $x_{\mathbb{G}} \in X_{\mathbb{G}}$, \mathbb{K} est un sous groupe du stabilisateur de $f(x_{\mathbb{G}})$, donc \mathbb{K} est un sous groupe compact de \mathbb{H} . f étant une immersion totalement géodésique, $\bar{\mathbb{G}}$ est le groupe des isométries de $f(X_{\mathbb{G}})$. Par restriction de l'action de $\bar{\mathbb{G}} \in \bar{\mathbb{G}}$ à $f(X_{\mathbb{G}}) \subset X_{\mathbb{H}}$, on définit un morphisme $\bar{\mathbb{G}} \rightarrow \mathbb{G}$ de noyau \mathbb{K} .

Ce morphisme est surjectif : $\mathbb{G} = \text{isom}(f(X_{\mathbb{G}}))$ est en effet engendré par les symétries ponctuelles, qui s'étendent sur $X_{\mathbb{H}}$ en une symétrie ponctuelle $\sigma_{x_{\mathbb{H}}} \in \overline{\mathbb{G}} \subset \mathbb{H}$. On a donc la suite exacte :

$$1 \rightarrow \mathbb{K} \rightarrow \overline{\mathbb{G}} \rightarrow \mathbb{G} \rightarrow 0$$

- Si $g \in \mathbb{G}$, et \bar{g} est un relevé de g , \bar{g} définit un automorphisme de $\mathbb{K} : \bar{g}.k = \bar{g}k\bar{g}^{-1}$. Si on choisit un autre relevé \tilde{g} , l'action de \bar{g} et de \tilde{g} diffèrent par un automorphisme intérieur : on a donc défini naturellement un morphisme de \mathbb{G} dans $\text{Out}(\mathbb{K}) = \text{Aut}(\mathbb{K})/\text{Int}(\mathbb{K})$. $\text{Out}(\mathbb{K})$ étant compact, \mathbb{G} semi-simple, connexe, de type non compact, ce morphisme est nécessairement trivial. On en déduit que, si $g \in \mathbb{G}$, il existe un relevé $\bar{g} \in \overline{\mathbb{G}}$ qui commute avec \mathbb{K} . Notons $Z(\mathbb{K})$ le centralisateur de \mathbb{K} . Si $\tilde{\mathbb{K}} = \mathbb{K} \cap Z(\mathbb{K})$ et $\tilde{\mathbb{G}} = Z(\mathbb{K})$, on a donc la suite exacte :

$$1 \rightarrow \tilde{\mathbb{K}} \rightarrow \tilde{\mathbb{G}} \rightarrow \mathbb{G} \rightarrow 0$$

ou $\tilde{\mathbb{K}} \subset Z(\mathbb{G})$.

Les commutateurs d'éléments de $\tilde{\mathbb{G}}$ ne dépendent que de leurs projections sur \mathbb{G} . Si $(\tilde{g}_{\pm}, \tilde{h}_{\pm}) \in \tilde{\mathbb{G}}$ se projettent sur g et $h \in \mathbb{G}$, il existe k et κ , qui commutent avec tous les éléments de $\tilde{\mathbb{G}}$, tels que $g_+ = kg_-$ et $h_+ = \kappa h_-$. On en déduit que $[\tilde{g}_+, \tilde{h}_+] = [\tilde{g}_-, \tilde{h}_-]$. Le groupe dérivé $[\tilde{\mathbb{G}}, \tilde{\mathbb{G}}]$ s'identifie donc avec $[\mathbb{G}, \mathbb{G}]$. \mathbb{G} étant semi-simple, $\mathbb{G} = [\mathbb{G}, \mathbb{G}]$. On définit ainsi un morphisme $\rho : \mathbb{G} \rightarrow \overline{\mathbb{G}} \subset \mathbb{H}$, qui vérifie les propriétés annoncées. Pour la réciproque : cf Gromov-Pansu [20, proposition 4.6.A]. \square

Le problème de superrigidité peut se ramener à l'étude de sections totalement géodésiques. Soient \mathbb{G} et \mathbb{H} deux groupes de Lie semi-simples, de type non compact, d'espaces symétriques associés $X_{\mathbb{G}}$ et $X_{\mathbb{H}}$. Si ρ est une action de \mathbb{G} par automorphisme de fibré sur un fibré principal $P_{\mathbb{H}} \rightarrow M$ de fibre \mathbb{H} , on peut définir naturellement un espace fibré feuilleté associé à ρ . Posons $\Lambda = M \times X_{\mathbb{G}}$ et $\Xi = [(P_{\mathbb{H}} \times X_{\mathbb{H}})_{/\mathbb{H}}] \times X_{\mathbb{G}}$. L'espace fibré feuilleté associé à ρ est défini par (Ξ, Λ, π) où π est la projection naturelle de Ξ sur Λ . Λ est feuilleté par $\{m\} \times X_{\mathbb{G}}$: les feuilles de Λ sont donc isométriques à $X_{\mathbb{G}}$ et les fibres de Ξ isométriques à $X_{\mathbb{H}}$. L'action de \mathbb{G} sur $P_{\mathbb{H}}$ induit une action de \mathbb{G} sur l'espace fibré feuilleté Ξ . Cette action préserve le feuilletage de Λ , et est une isométrie sur les fibres. La proposition suivante permet de faire un lien entre les sections totalement géodésiques de Ξ et les propriétés du fibré $P_{\mathbb{H}}$:

Proposition 5.4 (Sections totalement géodésiques et superrigidité) .

Soient \mathbb{G} et \mathbb{H} deux groupe de Lie semi-simples de type non compact et $P_{\mathbb{H}} \rightarrow M$ un fibré principal (à droite) de fibre \mathbb{H} . Soit ρ une action de \mathbb{G} par automorphisme de fibré sur $P_{\mathbb{H}}$, telle que l'action de \mathbb{G} sur M est transitive. On associe naturellement à ρ un espace fibré-feuilleté (Ξ, Λ, π) , sur lequel agit le groupe $\mathbb{G} : \Lambda = M \times X_{\mathbb{G}}$ feuilleté par $\{m\} \times X_{\mathbb{G}}$ et $\Xi = [(P_{\mathbb{H}} \times X_{\mathbb{H}})_{/\mathbb{H}}] \times X_{\mathbb{G}}$. A σ , une section \mathbb{G} invariante, totalement géodésique, du fibré feuilleté $\Xi \rightarrow \Lambda$, on peut associer :

- un morphisme $\varphi : \mathbb{G} \rightarrow \mathbb{H}$,
- un sous fibré $P_Z \subset P_{\mathbb{H}}$ de fibre le centralisateur de $\varphi(\mathbb{G})$:

$$Z = \{h \in \mathbb{H} / \forall g \in \mathbb{G}, h\varphi(g)h^{-1} = \varphi(g)\}$$

tels que, pour tout $p \in P_Z$, $\rho(g).p.\varphi(g^{-1}) \in P_Z$.

On peut déduire de cette proposition une version faible de la superrigidité. Définissons les *actions faiblement superrigides* par la propriété : *il existe une morphisme $\varphi : \mathbb{G} \rightarrow \mathbb{H}$ et un sous fibré à fibre compacte P_Z tels que, pour tout $p \in P_Z$, $\rho(g).p.\varphi(g^{-1}) \in P_Z$. S'il existe une section \mathbb{G} -invariante, totalement géodésique, qui n'est pas déplaçable, on déduit de cette proposition que l'action de \mathbb{G} est faiblement superrigide.*

Preuve Définissons $Geo(X_{\mathbb{G}}, X_{\mathbb{H}})$ l'espace des applications totalement géodésiques de $X_{\mathbb{G}}$ dans $X_{\mathbb{H}}$. La proposition se démontre en deux temps :

- *Définition d'un application $P_{\mathbb{H}} \rightarrow Geo(X_{\mathbb{G}}, X_{\mathbb{H}})$ (\mathbb{G}, \mathbb{H}) équivariante associée à σ .* Une section \mathbb{G} équivariante $\sigma : M \times X_{\mathbb{G}} \rightarrow (P_{\mathbb{H}} \times X_{\mathbb{H}})/\mathbb{H} \times X_{\mathbb{G}}$ définit naturellement une application \mathbb{G} équivariante, \mathbb{H} équivariante : $f : P_{\mathbb{H}} \rightarrow F(X_{\mathbb{G}}, X_{\mathbb{H}})$. A $p \in P_{\mathbb{H}}$ qui se projette sur $m \in M$, et à $x_{\mathbb{G}} \in X_{\mathbb{G}}$, on associe l'unique $f(p, x_{\mathbb{G}}) \in X_{\mathbb{H}}$ tel que : $\sigma(m, x_{\mathbb{G}}) = ([p, f(p, x_{\mathbb{G}})]_{\mathbb{H}}, x_{\mathbb{G}})$.
- *Définition du fibré P_Z :* Par hypothèse, $f(p, _) : X_{\mathbb{G}} \rightarrow X_{\mathbb{H}}$ est une application totalement géodésique. Il existe donc un morphisme $\eta_p : \mathbb{G} \rightarrow \mathbb{H}$ tel que : $f(p, g.x_{\mathbb{G}}) = \eta_p(g)f(p, x_{\mathbb{G}})$. De plus, $f(g.p, g.x_{\mathbb{G}}) = f(p, x_{\mathbb{G}})$, et $f(p.h, x_{\mathbb{G}}) = h^{-1}f(p, x_{\mathbb{G}})$. On en déduit que :

$$\begin{aligned} \eta_{ph} &= h^{-1}\eta_p h \\ \eta_{\rho(g)p} &= \eta_p(g^{-1}\gamma g) \\ &= \eta_p(g^{-1}\eta_p(\gamma)\eta_p(g)) \\ &= \eta_{p\eta_p(g)} \end{aligned}$$

Fixons $p \in P_{\mathbb{H}}$, posons $\varphi = \eta_p$. et définissons le fibré $P_Z = \eta^{-1}(\varphi)$. C'est un fibré de fibre type le centralisateur de $\varphi(\mathbb{G})$:

$$Z = \{h \in \mathbb{H} \mid \forall g \in \mathbb{G}, h\varphi(g)h^{-1} = \varphi(g)\}$$

et tel que : si $p \in P_Z$, $\rho(g)p\varphi(g)^{-1} \in P_Z$. □

Corollaire 5.4.1 (Superrigidité \mathcal{C}^k) .

Soient \mathbb{G} et \mathbb{H} deux groupe de Lie semi-simples de type non compact et $P_{\mathbb{H}} \rightarrow M$ un fibré principal (à droite) de fibre \mathbb{H} . Soit ρ une action de \mathbb{G} par automorphisme de fibré sur $P_{\mathbb{H}}$. L'action ρ est \mathcal{C}^k superrigide dès que :

- M est simplement connexe,
- l'action de \mathbb{G} sur M est topologiquement transitive, c'est-à-dire : il existe une orbite dense pour l'action de \mathbb{G} sur M
- il existe une section σ de l'espace fibré feuilleté associé à ρ qui vérifie les propriétés suivantes : σ est \mathcal{C}^k , \mathbb{G} équivariante, totalement géodésique, et σ n'est pas déplaçable.

Corollaire 5.4.2 (Superrigidité mesurable) .

Sous les hypothèses du corollaire précédent, si ρ préserve une mesure de probabilité ergodique sur M , l'action ρ est mesurablement superrigide dès que l'espace fibré feuilleté associé à ρ admet une section mesurable σ qui vérifie les propriétés suivantes : σ est \mathbb{G} équivariante, totalement géodésique et σ n'est pas déplaçable.

Preuve (Corollaire 5.4.1) Reprenons les notations de la démonstration précédente. Soit $m \in M$ d'orbite dense, $p \in P_{\mathbb{H}}$ qui se projette sur M et φ le morphisme

associé à p . Le centralisateur Z de $\varphi(\mathbb{G})$ est un groupe compact, puisque l'on suppose que la section σ n'est pas déplaçable. On peut définir $P_Z = \eta^{-1}(\varphi)$. P_Z restreint à l'orbite de m est un Z fibré principal. Si ϕ est l'application totalement géodésique associée à φ , on sait également que $P_Z = f^{-1}(\phi)$, où f est la fonction $P_{\mathbb{H}} \rightarrow \text{Geo}(X_{\mathbb{G}}, X_{\mathbb{H}})$ induite par σ . Puisque $f(ph) = h^{-1}f(p)$, on sait que $f(ph)[id] \rightarrow \infty$ lorsque $h \rightarrow \infty$. L'application $p \rightarrow (f(p), \pi(p)) \in \text{Geo}(X_{\mathbb{G}}, X_{\mathbb{H}}) \times M$ est donc propre : l'image réciproque d'un compact est compact. L'orbite de m étant dense, on en déduit que P_Z est un Z fibré principal au dessus de l'adhérence de l'orbite de m , donc : au dessus de M . De plus : P_Z est \mathcal{C}^k si la section σ est \mathcal{C}^k .

M étant simplement connexe, le fibré P_Z admet une section σ_Z . On peut identifier $P_{\mathbb{H}}$ au fibré trivial $M \times \mathbb{H}$ via σ_Z . Si ρ_φ est l'action induite par le morphisme φ sur $P_{\mathbb{H}} = M \times \mathbb{H}$, $\rho_Z(g) = \rho(g)\rho_\varphi^{-1}(g)$ se réduit à une action de \mathbb{G} sur le fibré P_Z , qui commute avec ρ_φ . La décomposition $\rho = \rho_\varphi\rho_Z$ est donc superrigide. \square

Le corollaire 5.4.2 est démontré par Corlette et Zimmer dans [11, theorem 4.2].

5.2. La propriété T de Kazhdan

La propriété T de Kazhdan est une propriété des groupes de type non compact, de rang $r \geq 2$, qui nous sera utile pour étudier la stabilité des actions superrigides et pour donner une version du théorème de superrigidité mesurable de Zimmer.

Définition 5.5 (Propriété T)

Soit \mathbb{G} un groupe localement compact et $\pi : G \rightarrow U(\mathcal{H})$ une représentation unitaire dans un espace de Hilbert séparable. Soient K un compact de \mathbb{G} et $\epsilon > 0$. π a des vecteurs (ϵ, K) invariants s'il existe $v \in \mathcal{H}$ tel que $|v| = 1$ et $|\pi(g)v - v| \leq \epsilon$ pour tout $g \in K$. π a des vecteurs presque invariants si, pour tout $\epsilon > 0$ et $K \subset \mathbb{G}$ compact, il existe des vecteurs (ϵ, K) invariants. \mathbb{G} vérifie la propriété T de Kazhdan si toute représentation unitaire de \mathbb{G} qui admet des vecteurs presque invariants admet des vecteurs invariants non nuls.

D'après Kazhdan [27] :

Proposition 5.6 Si \mathbb{G} est un groupe de Lie semi simple connexe, de centre fini et dont tous les facteurs sont de rang au moins 2. \mathbb{G} et les réseaux Γ de \mathbb{G} vérifient la propriété T. De plus, il existe $\epsilon(\mathbb{G}) > 0$ et $K(\mathbb{G})$ compact, tels que toute représentation unitaire qui admet des vecteurs (ϵ, K) invariants admet des vecteurs invariants non nuls.

Les deux propriétés suivantes nous seront utiles :

Proposition 5.7 (Seydoux [41]) Soit Γ un groupe de Kazhdan discret, M une variété compacte et ρ un action \mathcal{C}^1 de Γ sur M . Supposons que ρ_0 préserve une mesure absolument continue. Alors : il existe un voisinage \mathcal{V} de $\rho \in R(\Gamma, M)$ pour la topologie \mathcal{C}^1 , telle que toute action $\rho_1 \in \mathcal{V}$ préserve une mesure absolument continue.

Proposition 5.8 Soit $\Xi = (\Xi, (\Lambda, \nu), \pi)$ un fibré-laminé mesurable à fibre euclidienne, tel que (Λ, ν) est ergodique, de volume fini. Soit \mathbb{G} un groupe de Kazhdan agissant sur Ξ , telle que l'action sur les fibres est isométrique. Alors : \mathbb{G} préserve une section mesurable de Ξ , constante feuille à feuille.

Preuve (Proposition 5.7 d'après Katok, Lewis et Zimmer [26]) Soit π_ρ la représentation unitaire sur $\mathcal{H} = L^2(M) : \pi_\rho(g).\varphi(x) = |D\rho|^{-\frac{1}{2}}\varphi(\rho(g).x)$. La densité invariante δ est telle que $\sqrt{\delta}$ est un vecteur invariant de π . On sait qu'il existe $\epsilon > 0$ et K compact tel que toute représentation unitaire de \mathbb{G} qui admet des vecteurs (ϵ, K) invariant admet des vecteurs invariants. Si ρ_1 est proche de ρ , $\sqrt{\delta}$ sera (ϵ, K) invariant pour π_{ρ_1} . Donc π_{ρ_1} admet un vecteur invariant unitaire φ . La mesure $\varphi^2 dx$ est une mesure ρ_1 invariante. \square

Preuve (Proposition 5.8) Soit \mathcal{H} l'espace de Hilbert des sections L^2 du fibré $L^2(\Xi)$, de fibre $L^2(\Xi_\lambda)$. \mathbb{G} agit naturellement sur \mathcal{H} . Si σ est une section de Ξ , on définit $\sigma_r = \mathbb{1}_{B_{\sigma,r}}$. Les vecteurs σ_r sont presque-invariant sous l'action de \mathbb{G} . \mathbb{G} étant de Kazhdan, il existe donc une section invariante φ de $L^2(\Xi)$. Si on fixe $\lambda \in \Lambda$, on peut définir sur la fibre

$$B(x) = \int_{t \in \Xi_\lambda} b(x, t) \varphi^2(t) dt$$

où $b(x, t)$ est la fonction de Busemann : $b(x, t) = d(x, t) - d(t, \sigma(\lambda))$. $B(x)$ est strictement convexe. Par ergodicité, $\varphi \neq 0$ pour presque tout λ et est constante feuille à feuille. On en déduit que $\lim_{x \rightarrow \infty} B(x) = +\infty$, donc B admet un unique minimum $\bar{\sigma}(\lambda)$. $\bar{\sigma}(\lambda)$ est donc une section \mathbb{G} invariante de Ξ . \square

La proposition 5.8 est un cas particulier d'une proposition plus générale, dont nous aurons besoin plus tard :

Proposition 5.9 Soit \mathbb{H} un groupe moyennable, \mathbb{G} un groupe de Kazhdan et $P_{\mathbb{H}} \rightarrow M$ un \mathbb{H} fibré principal. Si \mathbb{G} agit par automorphisme de fibré sur $P_{\mathbb{H}}$ en préservant une mesure de probabilité ergodique sur M , l'action de \mathbb{G} se réduit à une action sur un fibré à fibre compacte.

Cette proposition est démontrée par Zimmer [48, proposition 9.1.1].

5.3. Stabilité topologique des actions superrigides

Avant d'énoncer le théorème de stabilité, posons les définitions :

Définition 5.10 (Morphisme réductif) Soient \mathbb{G}, \mathbb{H} deux groupes de Lie et ρ un morphisme de \mathbb{G} dans \mathbb{H} . Soit $Z(\rho) := \{h \in \mathbb{H} | \forall g \in \mathbb{G}, h\rho(g) = \rho(g)h\}$ le centralisateur de $\rho(g)$ dans \mathbb{H} et $Z_0(\rho)$ la composante connexe de l'identité dans $Z(\rho)$. ρ est un morphisme réductif si $Z_0(\rho)$ est un sous groupe compact de \mathbb{H} . ρ est un morphisme fortement réductif si $Z(\rho)$ est discret.

Définition 5.11 (Action d'Anosov) Soient M une variété compacte, \mathbb{G} un groupe de Lie et ρ une de \mathbb{G} sur M . L'action ρ est une action d'Anosov s'il existe un élément $g \in \mathbb{G}$ et un scindage de TM en deux sous fibré $\rho(g)$ invariants

$$TM = T^s M \oplus T^u M$$

tels que $\rho(g)$ est contractant sur $T^s M$, dilatant sur $T^u M$. Autrement dit il existe $C > 0$ et $\lambda < 1$ tel que, pour tout $X \in T^s M$ et $n \in \mathbb{N}$:

$$|D\rho^n(g).X| \leq C\lambda^n |X|$$

et il existe $D > 0$ et $\mu > 1$ tel que, pour tout $X \in T^s M$ et $n \in \mathbb{N}$

$$|D\rho^n(g).X| \geq D\mu^n |X|$$

Les actions d'Anosov ont deux propriétés importantes. D'une part, elles vérifient une propriété de perturbation : elles sont ouvertes pour la topologie \mathcal{C}^1 ; d'autre part, elles ont des propriétés d'ergodicité : si μ est une mesure absolument continue, invariante par un difféomorphisme d'Anosov, μ est positive sur les ouverts et ergodique. En particulier presque toute orbite est dense - cf par exemple Zimmer [48, prop 2.1.7]-.

Nous pouvons désormais démontrer le :

Théorème 5.12 (Stabilité des actions superrigides) .

Soient \mathbb{G}, \mathbb{H} deux groupes de Lie semi-simples connexes de type non compact M une variété compacte, simplement connexe et ρ_M une action \mathcal{C}^∞ de \mathbb{G} sur M . Soit ρ un morphisme de \mathbb{G} dans \mathbb{H} et $\rho_{P_{\mathbb{H}}}$ l'action induite par ρ_M et ρ sur le fibré $P_{\mathbb{H}} := M \times \mathbb{H} \rightarrow M$. Soit η_M une action de \mathbb{G} sur M et η une action de \mathbb{G} sur $P_{\mathbb{H}}$ par automorphisme de fibré, qui se projette sur η_M . Supposons que :

- \mathbb{G} est irréductible, de rang supérieur $r \geq 2$ ou $\mathbb{G} = \text{isom}(\mathbb{H}_{\mathbb{H}}^n)$, $\mathbb{G} = \text{isom}(\mathbb{H}_0^2)$,
- le morphisme ρ est réductif,
- l'action ρ_M de \mathbb{G} sur M est d'Anosov et préserve une mesure absolument continue,

Alors, si η est \mathcal{C}^2 proche de $\rho_{P_{\mathbb{H}}}$, η est \mathcal{C}^0 superrigide.

Les hypothèse sur l'action ρ_M nous seront utiles pour deux raisons. D'une part, l'existence d'une mesure invariante permet de conclure que les sections harmoniques que nous construirons sont totalement géodésiques. D'autre part, l'hypothèse d'Anosov permet de conclure à l'existence d'une orbite dense et donc d'appliquer la proposition 5.4.

On peut remarquer que ce résultat de superrigidité est très proche du théorème 4.5 de perturbation fibré feuilleté. La différence entre les deux théorèmes provient de la construction de la section quasi-harmonique σ : dans le cadre fibré feuilleté, σ est donnée a priori, alors que pour le théorème de stabilité des actions superrigides, il faudra construire σ de façon à ce que σ soit \mathbb{G} -invariante.

Preuve Posons $\Lambda = M \times X_{\mathbb{G}}$, feuilleté par $\{m\} \times X_{\mathbb{G}}$ et $\Xi = P_{X_{\mathbb{H}}} \times X_{\mathbb{G}}$. Ξ est un fibré feuilleté au dessus de Λ , de fibre type $X_{\mathbb{H}}$. D'après la proposition 5.4, on est ramené à démontrer l'existence d'une section σ de Ξ , qui est \mathbb{G} invariante, totalement géodésique et transversalement continue. La preuve se décompose en plusieurs parties :

- *Définition d'une section σ de $X_{\mathbb{H}}$ \mathbb{G} invariante.* Si $\eta = \rho_{P_{\mathbb{H}}}$ est l'action induite par ρ , on sait qu'il existe une section \mathbb{G} invariante σ_ρ de $\Xi \rightarrow \Lambda$, totalement géodésique. Si on pose $\sigma_M(m) = \sigma_\rho(m, [id])$, on sait de plus que :

$$\sigma_\rho(m, x_{\mathbb{G}}) = \int_{g \in x_{\mathbb{G}}} \rho(g) \sigma_M(g^{-1}m) dg$$

où $\int f(g)dg$ est le barycentre dans la fibre - isométrique à $X_{\mathbb{H}}$ - des points $f(g)$ pour la mesure de Haar sur $\mathbb{K} = \text{stab}(id)$ - qui s'identifie à $x_{\mathbb{G}} = g\mathbb{K}$ -. Si η est une action générale de \mathbb{G} par automorphisme de fibré sur $P_{\mathbb{H}}$ on définit une section σ \mathbb{G} invariante pour l'action η par :

$$\sigma(m, x_{\mathbb{G}}) = \int_{g \in x_{\mathbb{G}}} \eta(g) \sigma_M(g^{-1}m) dg$$

σ_ρ est \mathcal{C}^∞ , de dérivée bornée : $\sup \lambda_1(\sigma) \neq \infty$. De plus, ρ étant réductif, σ_ρ n'est pas localement déplaçable, c'est-à-dire qu'il existe $\kappa > 0$ tel que :

$$\forall X \in \sigma_\rho^* U \Xi, \exists Y \in U \wedge |R_{X, d\sigma_\rho(Y)} X, d\sigma_\rho(Y) \leq -\kappa^2$$

- σ est quasi-harmonique lorsque η est une perturbation de l'action induite par ρ . L'action de \mathbb{G} est isométrique sur les fibres. De plus, σ est \mathbb{G} invariante :

$$\sigma(m, x_{\mathbb{G}}) = \eta(g^{-1})\sigma(gm, g.x_{\mathbb{G}})$$

Il suffit donc de vérifier les conditions de quasi-harmonicité sur le compact $M \times \{[id]\}$. M étant compacte

$$\| \tau(\sigma) \| (m, [id]) \leq C d_2(\eta, \rho)$$

où d_2 est la distance associée à la topologie \mathcal{C}^2 . De plus,

$$\forall X \in \sigma^* U \Xi, \exists Y \in U \wedge |R_{X, d\sigma(Y)} X, d\sigma(Y) \leq -\kappa^2 + C d_1(\eta, \rho)$$

Si $d_2(\eta, \rho) \ll 1$, on sait donc que $\sup |\tau(f)| \ll 1$ et :

$$\forall X \in \sigma^* U \Xi, \exists Y \in U \wedge |R_{X, d\sigma(Y)} X, d\sigma(Y) \leq -\frac{\kappa^2}{2}$$

σ est donc quasi-harmonique. D'après le théorème 1.20, σ est homotope, à distance bornée d'un section harmonique $\bar{\sigma}$. Comme dans le théorème de stabilité fibré-laminé, on vérifie que $\bar{\sigma}$ est stable, c'est-à-dire :

$$\sup \lambda_1(\bar{\sigma}) \neq \infty \quad \text{et} \quad \forall X \in \bar{\sigma}^* U \Xi, \exists Y \in U \wedge |R_{X, d\bar{\sigma}(Y)} X, d\bar{\sigma}(Y) \leq -\bar{\kappa}^2$$

$\bar{\sigma}$ est donc l'unique application harmonique homotope à distance bornée de σ . On en déduit que $\bar{\sigma}$ est transversalement continûment \mathcal{C}^0 \mathbb{G} invariante et n'est pas déplaçable.

- $\bar{\sigma}$ est totalement géodésique : Soit Γ un sous groupe co-compact de \mathbb{G} - on sait qu'il existe de tels sous groupes -. $\bar{\sigma}$ est Γ invariant, donc définit une section harmonique de l'espace fibré-feuilleté $P_{X_{\mathbb{H}}} \times X_{\mathbb{G}}/\Gamma \rightarrow M \times X_{\mathbb{G}}/\Gamma$. On sait que l'action initiale ρ_M de \mathbb{G} préserve une mesure absolument continue sur M . En utilisant la propriété T de Kazhdan, on déduit que l'action perturbée η_M préserve également une mesure absolument continue. L'action perturbée étant d'Anosov, cette mesure est positive sur les ouverts. L'espace $M \times X_{\mathbb{G}}/\Gamma$ est donc muni d'une mesure transverse de volume finie, positive sur les ouverts. En intégrant la formule de Mok, Siu et Yeung, sachant que $X_{\mathbb{H}}$ est à courbure $K \leq 0$ et à courbure complexifiée $K_{\mathbb{C}} \leq 0$, on en déduit que $\bar{\sigma}$ est totalement géodésique. \square

Corollaire 5.12.1 *Sous les hypothèses du théorème, en supposant de plus que M est compacte, pas nécessairement simplement connexe et ρ est fortement réductive, si η est une action \mathcal{C}^2 proche de $\rho_{P_{\mathbb{H}}}$, η est \mathcal{C}^0 fortement superrigide.*

Preuve A une section totalement géodésique est associé un sous fibré $P_{Z(\eta)}$ de $P_{\mathbb{H}}$, à fibre compacte. Pour le théorème de perturbation : $\lim_{\eta \rightarrow \rho} P_{Z(\eta)} = P_{Z(\rho)}$. Lorsque η est proche de ρ , $Z(\eta)$ est donc discret et $P_{Z(\eta)}$ admet une section, σ . On sait qu'il existe un morphisme -que l'on notera encore η - de \mathbb{G} dans \mathbb{H} tel que : $\sigma(g.m) = g.\sigma(m)\eta(g^{-1})\gamma(m, g)$, où $\gamma(m, g) \in Z(\eta)$. Comme $\gamma(m, id) = id$, par connexité de \mathbb{G} on sait que $\gamma(m, g) = id$: η est donc fortement superrigide. \square

Lorsque l'on ne perturbe pas l'action sur M , on peut affaiblir les hypothèses sur M :

Théorème 5.13 (Stabilité des actions superrigides) .

Soient \mathbb{G}, \mathbb{H} deux groupes de Lie semi-simple de type non compact et M un espace métrique compact, sur lequel \mathbb{G} agit continûment. Soit ρ un morphisme de \mathbb{G} dans \mathbb{H} et $\rho_{P_{\mathbb{H}}}$ l'action induite par ρ sur le fibré $P_{\mathbb{H}} := M \times \mathbb{H} \rightarrow M$. Soit η une action de \mathbb{G} sur $P_{\mathbb{H}}$ par automorphisme de fibré. Supposons que :

- \mathbb{G} est irréductible, de rang supérieur,
- le morphisme ρ est réductif,
- l'action de \mathbb{G} sur M est topologiquement transitive, et préserve une mesure absolument continue,

Alors, si η est \mathcal{C}^2 proche de $\rho_{P_{\mathbb{H}}}$, η est \mathcal{C}^0 superrigide.

5.4. Superrigidité mesurable

Définition 5.14 Soient \mathbb{G} et \mathbb{H} deux groupes de Lie semi-simple. \mathbb{G} n'est pas déplaçable dans \mathbb{H} si pour tout morphisme immersif $\varphi : \mathbb{G} \rightarrow \mathbb{H}$, $Z_{\mathbb{H}}(\varphi(\mathbb{G}))$ est compact.

Sous la condition que \mathbb{G} n'est pas déplaçable dans \mathbb{H} , on a un théorème de superrigidité mesurable. Commençons par en donner la version fibré-feuilletée :

Théorème 5.15 Soit \mathbb{G} un groupe de Lie semi-simple irréductible, de type non compact, de rang $r \geq 2$. Soit \mathbb{H} un groupe de Lie semi-simple de type non compact et $P_{\mathbb{H}} \rightarrow M$ un \mathbb{H} fibré principal, sur lequel \mathbb{G} agit par automorphisme de fibré en préservant une mesure de probabilité ergodique sur M . Soit (Ξ, Λ) l'espace fibré feuilleté associé à l'action de $\mathbb{G} : \Xi = (P_{\mathbb{H}} \times X_{\mathbb{H}})/\mathbb{H} \times X_{\mathbb{G}}$ et $\Lambda = M \times X_{\mathbb{G}}$. On a la dichotomie suivante :

- il existe une section \mathbb{G} -invariante, totalement géodésique, de l'espace fibré feuilleté Ξ ,
- il existe une section \mathbb{G} -invariante, constante sur les feuilles, de $\partial_{\infty}\Xi$.

Preuve Fixons une section mesurable \mathbb{G} invariante de Ξ , d'énergie et de tension bornée et appliquons le flot de la chaleur. Si Γ est un réseau cocompact de \mathbb{G} , on peut appliquer le théorème 4.20 au fibré feuilleté $\Xi/\Gamma \rightarrow \Lambda/\Gamma$. On a alors trois possibilités : Ξ admet une mesure \mathcal{F} -harmonique, ou bien il existe un sous fibré totalement géodésique $Y \times \Sigma$, où Σ est un fibré à fibre euclidienne et Y admet une mesure \mathcal{F} -harmonique, ou bien il existe une section de $\partial_{\infty}Y$, constante feuille à feuille. Toutes les constructions sont naturellement invariantes sous l'action de \mathbb{G} . D'après la proposition 5.8, Σ admet une section \mathbb{G} invariante, constante sur les feuilles. On est donc ramené à étudier deux possibilités : soit Ξ_0 admet une mesure \mathcal{F} -harmonique \mathbb{G} invariante, soit il existe une section \mathbb{G} invariante de $\partial_{\infty}\Xi$.

Supposons que Ξ admette une mesure μ \mathcal{F} -harmonique. Par intégration de la formule de Mok, Siu et Yeung, on vérifie que μ est à support dans les fonctions totalement géodésiques. Distinguons deux cas :

- *Le support de μ ne contient que des applications constantes.* On définit une section constante de Ξ en posant $\sigma(\lambda) = \int_{\overline{\mathcal{M}}_{\lambda}} f(\lambda) d\mu_{\lambda}(f)$, le barycentre de $f(\lambda)$ pour la mesure μ_{λ} . Il existe donc une section σ de Ξ qui est constante et \mathbb{G} invariante.

- Le support de μ contient des applications de rang au moins 1. \mathbb{G} étant irréductible, il existe des applications de rang maximum dans le support de μ . Dans la construction du théorème 4.20 :

$$\mu = \lim_{t \rightarrow \infty} \sigma_{t*} \nu$$

où σ_t est solution de l'équation de la chaleur feuilleté. Comme \mathbb{G} n'est pas déplaçable dans \mathbb{H} , les applications totalement géodésiques dans le support de μ sont stables. On peut donc démontrer que le flot de la chaleur converge fortement, c'est à dire : il existe une section totalement géodésique de Ξ , de rang maximum. \square

Corollaire 5.15.1 (Superrigidité de Zimmer-Margulis) .

Soit \mathbb{G} un groupe de Lie semi-simple irréductible, de type non compact, de rang $r \geq 2$. Soit \mathbb{H} un groupe de Lie semi-simple de type non compact et $P_{\mathbb{H}} \rightarrow M$ un \mathbb{H} fibré principal. Si \mathbb{G} agit par automorphisme de fibré sur $P_{\mathbb{H}}$ en préservant une mesure de probabilité ergodique et si \mathbb{G} n'est pas déplaçable dans \mathbb{H} , l'action de \mathbb{G} est superrigide.

Preuve Soit $\Xi \rightarrow \Lambda$ l'espace fibré feuilleté associé à l'action de \mathbb{G} . On a deux possibilités : soit Ξ admet une mesure \mathcal{F} -harmonique \mathbb{G} invariante, soit il existe une section \mathbb{G} invariante de $\partial_{\infty}\Xi$.

Si Ξ admet une mesure μ \mathcal{F} -harmonique, on a vu de plus qu'il existe une section de Ξ \mathbb{G} -invariante, totalement géodésique. Deux cas sont à distinguer :

- σ est constante sur les feuilles. A $p \in P_{\mathbb{H}}$, on associe alors l'unique point $f(p) \in X_{\mathbb{H}}$ tel que $\sigma(m, x_{\mathbb{G}}) = [p, f(p)]$. De plus, $f(ph) = h^{-1}f(p)$. Soit $P_{\mathbb{K}} = f^{-1}([id])$. $P_{\mathbb{K}} \rightarrow M$ est un fibré principal, de fibre \mathbb{K} , le stabilisateur de $[id]$ dans $X_{\mathbb{H}}$. $P_{\mathbb{K}}$ est invariant sous l'action de \mathbb{G} : l'action de \mathbb{G} sur $P_{\mathbb{H}}$ est l'action induite par suspension de l'action de \mathbb{G} sur $P_{\mathbb{K}}$,
- σ est de rang au moins 1. \mathbb{G} étant irréductible, compte tenu de la condition : \mathbb{G} n'est pas déplaçable dans \mathbb{H} , σ n'est pas déplaçable, et on déduit de la proposition 5.8 que l'action de \mathbb{G} sur $P_{\mathbb{H}}$ est superrigide.

Supposons que $\partial_{\infty}\Xi$ admette une section \mathbb{G} invariante. Dans ce cas, l'action de \mathbb{G} se réduit à une action sur un sous fibré P_Z , où Z est le stabilisateur d'un point à l'infini de $X_{\mathbb{H}}$. Si Z est un groupe moyennable, sachant que \mathbb{G} vérifie la propriété T de Kazhdan, on conclut par la proposition 5.9 - cf Zimmer [48, proposition 9.1.1] - que l'action de \mathbb{G} se réduit à un fibré à fibre compacte. Ce n'est pas nécessairement le cas, mais Corlette et Zimmer [11] ont démontré que l'on a une dichotomie plus précise : soit Ξ admet une mesure \mathcal{F} -harmonique \mathbb{G} invariante, soit il existe une section \mathbb{G} invariante de $\partial_F\Xi$ où $\partial_F\Xi$ est le bord de Furstenberg de Ξ . D'après Moore [34], si le groupe Z est le stabilisateur d'un point de $\partial_F\Xi$, Z est un groupe moyennable, et on conclut à la superrigidité de l'action de \mathbb{G} . \square

5.5. Conclusion

On a démontré dans ce chapitre :

- Un résultat de stabilité pour les actions superrigides, sous une condition algébrique sur le morphisme associé :
- Lorsque M est compacte, simplement connexe, $Z(\rho(\mathbb{G}))$ est compact,

— Lorsque M est compacte, pas nécessairement simplement connexe : $Z(\rho(\mathbb{G}))$ est discret.

Un résultat de stabilité analogue a été démontré récemment, par des méthodes différentes, par Margulis et Tian [32],

— Une version du théorème de superrigidité de Zimmer-Margulis ;

Une question reste ouverte : peut-on améliorer les conditions de régularité pour le théorème de superrigidité ? On a démontré qu'une perturbation $C^{2+\epsilon}$ d'une action superrigide est \mathcal{C}^0 superrigide. Plus généralement, une perturbation \mathcal{C}^k d'une action superrigide est-elle \mathcal{C}^k superrigide ? Dans la formulation fibré-laminé, pour $k > 2$, on est ramené à démontrer que les sections harmoniques σ sont transversalement continûment \mathcal{C}^k , ce qui est loin d'être évident.

Chapitre 6

Espace de Teichmüller laminé

Ce chapitre est consacré à l'étude des liens entre les applications harmoniques et l'espace de Teichmüller d'une lamination par des surfaces de Riemann hyperboliques. Après un bref rappel des propriétés des surfaces de Riemann, et des applications harmoniques entre surfaces de Riemann, je définis la notion de *métrique harmonique* : g_1 est une métrique harmonique par rapport à g_0 si $g_1 = f^*g$, où $f : (M, g_0) \rightarrow (N, g)$ est une injection harmonique. Cette notion permet d'exposer rapidement les résultats de Wan et al. [45] [44] sur le lien entre applications harmoniques et espace universel de Teichmüller. Dans un exposé par ailleurs classique, je signale un principe du maximum pour le facteur de distortion, qui ne me paraît pas avoir été remarqué et je discute les cas de dégénérescence des métriques harmoniques. Enfin, je démontre une généralisation du théorème d'existence de difféomorphismes harmoniques dans le cadre laminé, suivi d'une brève discussion de l'espace de Teichmüller laminé.

6.1. Métriques harmoniques

6.1.1. Surfaces de Riemann

Définition 6.1 Une surface de Riemann Σ est une variété de dimension 2, munie d'une structure complexe J . Si Σ_1 et Σ_2 sont deux surfaces de Riemann, une application $f : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$ est holomorphe si et seulement si : $J_2 \circ df = df \circ J_1$. Une métrique g sur Σ est une métrique conforme si, pour tout $X \in T\Sigma$, $g(J(X), J(X)) = g(X, X)$.

L'étude des surfaces de Riemann est basée sur le théorème d'uniformisation de Riemann :

Théorème 6.2 Soit Σ une surface de Riemann. Le revêtement universel de Σ est biholomorphe soit à la sphère de Riemann \mathbb{S}^2 , on dit alors que Σ est elliptique, soit au plan \mathbb{C} , Σ est alors parabolique, soit au demi plan $\mathbb{U} = \{y > 0\}$: Σ est alors hyperbolique.

Le groupe des biholomorphismes de \mathbb{U} s'identifie à $PSL_2^{\mathbb{R}}$, agissant par homographie. Il laisse invariant une unique famille de métrique conforme : $g_t =$

$t \frac{dx^2+dy^2}{y^2}$, de courbure $K_t = -t^{-1}$. Si (Σ, J) est une surface de Riemann hyperbolique, Σ est donc canoniquement muni d'une métrique conforme à courbure -1 . On appellera cette métrique la *métrique de Poincaré* de (Σ, J) .

Définition 6.3 (Espace de Teichmüller) .

Soit (Σ, g) une surface de Riemann, c'est-à-dire : une variété de dimension 2 munie d'une structure complexe J et d'une métrique conforme g . Si :

- \mathcal{C} est la composante connexe de J dans l'espace des structures complexes sur (Σ, g) , muni de la topologie \mathcal{C}^∞ uniforme,
- $Diff_0$ la composante connexe de l'identité dans le groupe des difféomorphismes de Σ , muni de la topologie \mathcal{C}^∞ uniforme,

l'espace de Teichmüller de Σ est : $Teich(\Sigma, g) = \mathcal{C}/Diff_0$.

D'après le théorème d'Ahlfors-Bers, si J_2 est une structure complexe quasi-conforme à J_1 , (Σ, J_1) et (Σ, J_2) ont même type. De plus, si (Σ, J_1) est hyperbolique, la métrique de Poincaré dépend continûment de $J \in \mathcal{C}$. On en déduit :

Proposition 6.4 Soit Σ une surface de Riemann hyperbolique. Notons \mathcal{M}_{-1} l'ensemble des métriques hyperboliques sur Σ et $Diff_0$ le groupe des difféomorphismes homotopes à l'identité. Les deux définitions suivantes sont équivalentes :

- l'espace de Teichmüller de Σ est l'espace des modules des structures complexes sur Σ , où deux structures complexes sont identifiées s'il existe un difféomorphisme $f : \Sigma \rightarrow \Sigma$ homotope à l'identité, tel que $f^* J_2 = J_1$,
- l'espace de Teichmüller de Σ est l'espace des modules des structures hyperboliques : $Teich(\Sigma) = \mathcal{M}_{-1}/Diff_0$.

Soit M une variété de dimension 2. Le choix d'une métrique riemannienne et d'une orientation de M déterminent une structure complexe sur M , telle que dans une carte holomorphe, la métrique g s'écrive $g = \sigma^2 |dz|^2$. Réciproquement, la donnée d'une structure complexe induit une structure conforme $[g]$: celle des métrique localement de la forme $\sigma^2 |dz|^2$. D'après les propriétés d'homogénéité de l'énergie, l'étude des applications harmoniques $f : M \rightarrow N$ ne dépend que du choix de la classe conforme de la métrique g à la source, c'est-à-dire (au choix d'une orientation près) : de la structure complexe sur M .

Proposition 6.5 Soit (M^2, g) une variété riemannienne de dimension 2 et $f : M \rightarrow N^n$.

- L'énergie totale ne dépend que de la classe conforme sur M ,
- La 2-forme de tension : $\tau(f)dx \in \Lambda^2(T^*M) \otimes f^*TN$ est invariante par changement conforme sur M ,
- La différentielle de Hopf $\phi = \varphi(z)dz^2 := f^*g_N^{2,0}$ est holomorphe lorsque f est harmonique.

Preuve Soit $\sigma : M \rightarrow \mathbb{R}^+$. Après un changement conforme : $g_\sigma = \sigma^2 g$, l'énergie de $f : (M, g_\sigma) \rightarrow N$ devient : $e_f|_{g_\sigma} = \frac{1}{\sigma^2} e_f$ et la forme volume : $dx|_{g_\sigma} = \sigma^2 dx$. Donc : $E(f)|_{g_\sigma} = E(f)|_g$. En écrivant l'équation d'Euler Lagrange associée, on en déduit que la forme de tension est invariante. Dans une carte conforme, on définit la différentielle de Hopf $\Phi = \varphi(z)dz^2 = f^*g^{2,0}$ par : $f^*g = \varphi dz^2 + e_f \sigma^2 |dz|^2 + \bar{\varphi} d\bar{z}^2$. Si $(M, g^M) = (\mathbb{R}^2, dx^2 + dy^2)$ et $(N, g^N) = (\mathbb{R}^n, dx_1^2 + \dots + dx_n^2)$, on vérifie sans difficulté que Φ est holomorphe lorsque f est harmonique. Plus généralement, en calculant dans des coordonnées exponentielles, on est exactement ramené au cas où $(M, g) = (\mathbb{R}^2, dx^2 + dy^2)$ et $(N, g) = (\mathbb{R}^n, dx_1^2 + \dots + dx_n^2)$. \square

Proposition 6.6 *Soient M et N deux variétés riemanniennes de dimension 2 et $f : M \rightarrow N$ un difféomorphisme local. f est harmonique si et seulement si sa différentielle de Hopf est holomorphe.*

Preuve Si ϕ est holomorphe et $\phi(x) \neq 0$, on peut choisir une carte conforme où $\phi = dz^2$. Dans ce cas, $f^*g = (\alpha(z) + 2)dx^2 + (\alpha(z) - 2)dy^2$. On peut alors calculer explicitement les symboles de Christoffel de la connexion de Levi-Civita associée à f^*g et vérifier que $\tau(f) = 0$. \square

Par contre, si $\psi : M \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction harmonique (non constante) et $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow N$ est une courbe paramétrée par l'arc (i.e : $|\dot{\gamma}| = 1$), la différentielle de Hopf de $f = \gamma \circ \psi$ est holomorphe, mais f n'est harmonique que si γ est une géodésique.

6.1.2. Métriques harmoniques

Définition 6.7 (Métrique harmonique) .

Soit (Σ^2, g_0) une variété hyperbolique, de dimension 2. g est une métrique harmonique par rapport à (Σ, g_0) si l'application identité : $(\Sigma, g_0) \rightarrow (\Sigma, g)$ est harmonique.

On sait qu'en dimension 2, un difféomorphisme $f : M^2 \rightarrow N^2$ est harmonique si et seulement si sa différentielle de Hopf est holomorphe. On en déduit :

Proposition 6.8 (Caractérisation des métriques harmoniques) .

Soit (M, g_0) une surface de Riemann, munie d'une métrique conforme g_0 . g est une métrique harmonique non dégénérée si et seulement si il existe une forme différentielle quadratique holomorphe ϕ , une fonction h tels que :

- $g = \phi + (e^h + |\phi|^2 e^{-h})g_0 + \bar{\phi}$
- $\forall x, u(x) := h(x) - \log|\phi(x)| \neq 0$

où on pose $|\phi| = \frac{|\phi|}{\sigma^2}$ si $\phi = \phi(z)dz^2$ et $g_0 = \sigma^2(z)dzd\bar{z}$ dans une carte conforme.

L'espace des métriques harmoniques hyperboliques $g_{h,\phi}$ sur \mathbb{H}^2 est en bijection avec les immersions harmoniques $f_{h,\phi} : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$, modulo l'action des isométries au but. En particulier : $f_{h,\phi}$ est surjective si et seulement si $g_{h,\phi}$ est complète ; $f_{h,\phi}$ est quasi-conforme (resp. une quasi-isométrie) si et seulement si $g_{h,\phi}$ est quasi-conforme (resp. quasi-isométrique) à la métrique de Poincaré.

A une métrique harmonique $g = \phi + (e^h + |\phi|^2 e^{-h})g_0 + \bar{\phi}$ sont associés :

- *La différentielle de Hopf ϕ .* Cette différentielle définit une métrique plate $g_{|\phi|} = |\phi||dz|^2$, et une paire de feuilletages, avec des singularités aux points où $\phi = 0$. Le feuilletage horizontal est caractérisé par $\phi(X_h, X_h) \in \mathbb{R}^+$, le feuilletage vertical par : $\phi(X_v, X_v) \in \mathbb{R}^-$. Si $\phi(x) \neq 0$, il existe une carte dans laquelle $\phi = dz^2$. Le feuilletage horizontal est défini par les courbes $y = \mathcal{C}^{te}$, le feuilletage vertical par les courbes $x = \mathcal{C}^{te}$. La métrique harmonique s'écrit :

$$g = 4 \left[\cosh^2\left(\frac{u}{2}\right)dx^2 + \sinh^2\left(\frac{u}{2}\right)dy^2 \right]$$

Le feuilletage horizontal correspond aux directions de dilatation maximale : $\lambda_1^2 = e^h(1 + e^{-u})^2$, et le feuilletage vertical aux directions de dilatation minimale : $\lambda_2^2 = e^h(1 - e^{-u})^2$,

- Le facteur de distortion quasi-conforme $u = h - \log|\phi|$. $u = \infty$ lorsque $\phi = 0$, c'est-à-dire aux points où la métrique harmonique $g_{h,\phi}$ est conforme ; et $u = 0$ aux points où $g_{h,\phi}$ est de rang un. Il existe deux fonctions h_{\pm} telles que : $g = g_{h,\phi}$, qui se déduisent l'une de l'autre par : $h_+ = 2 \log|\phi| - h_-$. Les coefficients de distortion associés sont $u_+ = -u_-$, et on peut donc toujours supposer que : $u > 0$,
- La métrique conforme $g_h = e^h g_0$. Les coefficients de dilatation de $g_{h,\phi}$ sont : $\lambda_{\pm}^2 = e^h(1 \pm e^{-u})^2 \leq 4e^h$; d'où l'on déduit : $g_{h,\phi} \leq 4g_h$, et g_h est (à une constante près) la plus petite métrique conforme majorant $g_{h,\phi}$,
- Le coefficient de Beltrami $\mu = e^{-u} \frac{\bar{\phi}}{|\phi|}$.

Proposition 6.9 (Courbure des métriques harmoniques) .

Soit (M, g_0) une surface de Riemann, $\phi \in QD(M, g_0)$ une différentielle quadratique holomorphe et $h \in \mathcal{C}^{\infty}(M)$ telle que : $\forall x, h(x) - \log|\phi(x)| \neq 0$. La métrique $g_{h,\phi} = \phi + (e^h + |\phi|^2 e^{-h})g_0 + \bar{\phi}$ a pour courbure :

$$K_{g_{h,\phi}} = \frac{-\frac{1}{2}\Delta h + K_{g_0}}{e^h - |\phi|^2 e^{-h}}$$

Preuve Si $\phi \neq 0$, on se place dans une carte conforme, dans laquelle $\phi = dz^2$. Le laplacien associé à $g_0 = \sigma^2(dx^2 + dy^2)$ est : $\Delta = \frac{1}{\sigma}(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2})$. $g_{h,\phi}$ est de la forme $g_{h,\phi} = \alpha dx^2 + \beta dy^2$ et on sait que $d\alpha = d\beta = 2 \sinh(u) du$. En calculant explicitement les symboles de Christoffel, on vérifie que la courbure de g est :

$$\begin{aligned} K &= -\frac{1}{2\alpha\beta} \left(\alpha_{yy} + \beta_{xx} - \frac{1}{2} \left(\frac{\beta_x^2}{\beta} + \frac{\alpha_y^2}{\alpha} + \frac{\alpha_x\beta_x}{\alpha} + \frac{\alpha_y\beta_y}{\beta} \right) \right) \\ &= -\frac{1}{2\alpha\beta} \left(\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \alpha - \frac{|d\alpha|^2(\alpha + \beta)}{2\alpha\beta} \right) \\ &= -\frac{1}{4 \sinh(u)} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) u \\ &= \frac{\Delta h + \Delta \log \sigma}{2e^h - 2|\phi|^2 e^{-h}} \end{aligned}$$

D'où le résultat, en notant que, pour $h = 0, \phi = 0$, on retrouve (par continuité) : $K_{g_0} = -\frac{1}{2}\Delta \log \sigma$ □

D'après Wan [45], les métriques harmoniques hyperboliques vérifient un principe du maximum :

Proposition 6.10 Soit ϕ une différentielle quadratique holomorphe. Si $g_{h,\phi}$ est une métrique hyperbolique telle que la métrique conforme associée $g_h = e^h g$ est complète, $g_{h,\phi}$ est maximale : si g est une métrique harmonique hyperbolique de même différentielle de Hopf ϕ , $g \leq g_{h,\phi}$.

Preuve Si $\Delta_h = e^{-h}\Delta$ est le laplacien par rapport à g_h , en posant $w = \ell - h$, on a :

$$\frac{1}{2}\Delta_h w = (e^w - 1)(1 + e^{-2w} e^{-2w})$$

g_h étant complète, de courbure minorée : $K = -(1 - e^{-2u}) \geq -1$, on peut appliquer la principe du maximum d'Omori et Yau :

— pour $\alpha = e^{-\frac{1}{3}w}$, on déduit que w est majorée. En effet :

$$\Delta_h \alpha = e^{\frac{1}{3}w} |d\alpha|^2 - \frac{1}{3} e^{-\frac{1}{3}w} \Delta_h w$$

α étant minorée par 0, il existe une suite minimisante x_n telle que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d\alpha(x_n) = 0$$

et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta_h \alpha(x_n) \geq 0$$

Si w n'est pas majorée, le terme $e^{\frac{1}{3}w} |d\alpha|^2$ est négligeable devant $\frac{1}{3} e^{-\frac{1}{3}w} \Delta_h w \geq \frac{2}{3} e^{\frac{2}{3}w} + o(e^{\frac{2}{3}w})$. On en déduit que $\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta_h \alpha(x_n) = -\infty$, ce qui est contradictoire,

— pour w , on déduit que : $e^{\sup w} - 1 \leq 0$, c'est-à-dire : $\ell \leq h$.

$g_{h,\phi} - g_{\ell,\phi} = [f(h) - f(\ell)]g_0$ si on pose $f(x) = e^x + e^{-x}|\phi|^2$. $\frac{df}{dx} = e^x(1 - e^{-v(x)})$ où $v(x) = x - \log|\phi|$. Quitte à changer ℓ en $2\log|\phi| - \ell$, ce qui ne change pas la métrique associée, on peut supposer que $v(\ell) \geq 0$ et on en déduit que $f(h) \geq f(\ell)$, donc : $g_{h,\phi} \geq g_{\ell,\phi}$. \square

On en déduit :

Théorème 6.11 (Wan [45]) *Soit ϕ une différentielle quadratique holomorphe bornée sur \mathbb{H}^2 . Il existe une unique métrique harmonique hyperbolique complète g_ϕ , de différentielle de Hopf ϕ .*

- g_ϕ est maximale : toute métrique harmonique hyperbolique de même différentielle de Hopf est majorée par g_ϕ ,
- g_ϕ est quasi-isométrique à la métrique de Poincaré,
- $g_\phi = \phi + (e^h + |\phi|^2 e^{-h})g_0 + \bar{\phi}$ où h est l'unique solution bornée de :

$$\frac{1}{2} \Delta h = e^h - |\phi|^2 e^{-h} - 1$$

Remarquons qu'en général, il existe une infinité de métriques harmoniques hyperboliques quasi-conformes (non complètes) de différentielle de Hopf ϕ . En effet, si on identifie \mathbb{H}^2 avec le disque $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$ et si ϕ s'étend sur un domaine Ω contenant \mathbb{D} , à tout ouvert Δ relativement compact dans Ω , on peut associer une métrique harmonique hyperbolique g_ϕ^Δ , complète sur Δ , de différentielle de Hopf ϕ , quasi-conforme (car quasi-isométrique à la métrique de Poincaré de Δ). Remarquons que, d'après le principe du maximum, cette famille de métriques est décroissante : si $\Delta \subset \Lambda$, $g_\phi^\Delta|_\Lambda \leq g_\phi^\Lambda$. Pour $\phi = 0$, on retrouve la propriété de monotonie pour la métrique de Poincaré des domaines du plan complexe !

Preuve La preuve se décompose en trois étapes principales :

- L'unicité découle du principe du maximum : dès que $g_{h,\phi}$ est complète, la métrique conforme associée g_h est complète : $g_h \geq 4g_{h,\phi}$,
- L'existence d'une solution bornée à l'équation $\frac{1}{2} \Delta h = e^h - |\phi|^2 e^{-h} - 1$ se déduit en appliquant la méthode de Perron. Posons $Q(h) = -\frac{1}{2} \Delta h + F(h)$ où $F(h) = e^h - |\phi|^2 e^{-h} - 1$. Si $h^+ = \log \frac{1 + \sqrt{1 + 4 \sup |\phi|^2}}{2}$ et $h^- = 0$, on vérifie que $Q(h^+) \geq 0 \geq Q(h^-)$. F étant croissante, par la méthode de Perron (cf Wan

[45]), on en déduit qu'il existe une solution $h \in [h^-, h^+]$. h étant bornée, la métrique conforme g_h est complète : d'après le principe du maximum, on en déduit que $g_{h,\phi}$ est l'unique métrique harmonique hyperbolique maximale de différentielle de Hopf ϕ ,

- La quasi-conformité de la métrique se ramène à vérifier que son coefficient de distortion $u = h - \log|\phi|$ vérifie

$$\inf(u) > 0$$

Sachant que :

$$(1 - e^{-\inf u})^2 g_0 \leq g_\phi \leq 4e^{\sup h} g_0$$

et que h est bornée, si l'on prouve que g_ϕ est quasi-conforme, on en déduit également que g_ϕ est quasi-isométrique à la métrique de Poincaré (donc en particulier complète).

Il reste à montrer que : $\inf(u) > 0$. Pour cela, rappelons le :

Lemme 6.12 (Principe de prolongement d'Aronszajn [2]) .

Soit \mathcal{O} un ouvert connexe de \mathbb{H}^2 et $u : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}^+$, tel que : $u(0) = 0$ et $0 \leq \Delta u \leq \kappa u$. Alors : $u = 0$.

Preuve Si $f(r) := \int_{B_r} u$, on a : $f' = \sinh(r)\varphi(r)$, où : $\varphi(r) = \int_{|x|=1} u(rx)$ et $\varphi(0) = 2\pi u(0)$ par continuité. La formule de Green nous donne : $\sinh(r)\dot{\varphi} = \int_{B_r} \Delta u$. On sait que : $0 \leq \Delta u \leq \kappa u$. Donc : $\dot{\varphi} \geq 0$ et : $\sinh(r)\dot{\varphi} \leq \kappa \int_{B_r} u$. On en déduit : $\dot{\varphi} \leq r\kappa \sup_{[0,r]} \varphi$. En particulier : $\dot{\varphi}(0) = 0$ par continuité. Si $u(0) = 0$, on a alors : $0 \leq \dot{\varphi} \leq r^2\kappa \sup_{[0,r]} \varphi$. D'où l'on conclut : $u = 0$. \square

Fin de la preuve du théorème :

On sait que h est minoré et $\log|\phi|$ est majoré : $u = h - \log|\phi|$ est donc minoré. Quitte à faire agir le groupe des isométries de \mathbb{H}^2 , on peut supposer : $u(0) = \inf(u)$. En effet, si x_n est une suite minimisante pour u , posons $(u_n, h_n, \phi_n) = (u, h, \phi) \circ \varphi_n$ où φ_n est une isométrie de \mathbb{H}^2 qui envoie 0 sur le point x_n . La suite $(h_n, \phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est \mathcal{C}^∞ équicontinue, donc converge (à extraction près) vers (h_∞, ϕ_∞) tels que : $u_\infty(0) = \inf(u_\infty) = \inf(u)$. On sait que :

$$\frac{1}{2}\Delta u = e^h(1 - e^{-2u})$$

Comme $u(0) = \inf(u)$, on a : $\Delta u(0) \geq 0$, c'est-à-dire : $e^{h(0)}(1 - e^{-2u(0)}) \geq 0$ et donc $u(0) \geq 0$. Reste à vérifier $u(0) \neq 0$. Or, d'après le principe de prolongement d'Aronszajn [2], si \mathcal{O} est un ouvert connexe de \mathbb{H}^2 , si $u : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}^+$ vérifie $0 \leq \Delta u \leq \kappa u$ et $u(0) = 0$, alors $u = 0$ sur \mathcal{O} . On sait que :

$$0 \leq \frac{1}{2}\Delta u = e^h(1 - e^{-2u}) \leq \kappa u$$

Si $u(0) = 0$, on déduit par le principe de prolongement que $u = 0$ partout, c'est-à-dire : $h = \log|\phi|$, donc :

$$\frac{1}{2}\Delta h = -1$$

h étant minorée, d'après le principe du maximum d'Omori et Yau il existe x_n tel que : $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2}\Delta h(x_n) \geq 0$. Par la contraposée, on en déduit que $h \neq \log|\phi|$ donc $u(0) \neq 0$. \square

Corollaire 6.12.1 (Wan) *Soit $f : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$ un difféomorphisme harmonique. f est quasi-conforme si et seulement si f est une quasi-isométrie, c'est à dire : $\inf(\lambda_2(f)) \neq 0$ et $\sup(\lambda_1(f)) \neq \infty$.*

Preuve Soit ϕ la différentielle de Hopf de f . On sait que f^*g est une métrique harmonique complète.

- Si ϕ est bornée, f^*g est quasi-isométrique à la métrique de Poincaré, donc f est quasi-conforme. De plus, le facteur de distortion u vérifie : $\inf(u) \leq \frac{1}{\sup|\phi|}$. En effet, on a vu que :

$$\begin{aligned} h &\leq h^+ := \log \frac{1 + \sqrt{1 + 4 \sup|\phi|^2}}{2} \\ &\leq \log(1 + \sup|\phi|) \end{aligned}$$

Comme $u = h - \log|\phi|$,

$$\begin{aligned} u &\leq \log(1 + \sup|\phi|) - \log|\phi| \\ \inf(u) &\leq \log(1 + \sup|\phi|) - \log \sup|\phi| \\ &\leq \frac{1}{\sup|\phi|} \end{aligned}$$

- Supposons que ϕ n'est pas bornée. Soit $\Omega_n = B_{x,n}$ une suite exhaustive de compact de \mathbb{H}^2 . $\phi|_{\Omega_n}$ est bornée pour la métrique de Poincaré de Ω_n : on peut lui associer une métrique harmonique maximale g_n . D'après le principe du maximum : $f^*g|_{\Omega_n} \leq g_n$. On en déduit que les coefficients de distortions vérifient : $u \leq u_n$, donc : $\inf(u) \leq \frac{1}{\sup|\phi|_{\Omega_n}}$. Pour $n \rightarrow \infty$, on en conclut : $\inf(u) = 0$, c'est à dire : f n'est pas quasi-conforme. \square

Avant de terminer cette présentation de la théorie de Wan en donnant un exemple pour lequel on peut calculer explicitement la métrique harmonique hyperbolique associée à une différentielle de Hopf, nous pouvons remarquer que le facteur de distortion vérifie également un principe du maximum. Bien que je n'utilise pas cette propriété par la suite, le résultat me semble digne d'être signalé :

Proposition 6.13 (Principe du maximum pour le facteur de distortion) .

Soient $\phi_{\pm} \in \mathcal{QD}_b(\mathbb{H}^2)$, de métrique harmonique associée $g_{\phi_{\pm}}$ et de coefficient de distortion u_{\pm} . Les coefficients de distortion vérifient le principe du maximum suivant : si $|\phi_+(x)| \geq |\phi_-(x)|$ pour tout $x \in \mathbb{H}^2$, alors : $u_+ \leq u_-$.

Remarquons que les principes du maximum pour les métriques et pour le facteur de distortion permettent de conclure que l'on peut majorer localement les métriques harmoniques hyperboliques et leur facteur de distortion. Au contraire, trouver une minoration est un problème global.

Preuve Posons $Q(h) = -\frac{1}{2}\Delta h + e^h - |\phi_+|^2 e^{-h} - 1$ et $w = u_- + |\phi_+| \geq 0$. On vérifie que :

$$Q(w) = e^{h_-} (1 - e^{-2u_-}) \left[\left| \frac{\phi_+}{\phi_-} \right| - 1 \right] \geq 0$$

D'après la méthode de Perron, on en déduit : $h_+ \leq u_- + |\phi_+|$, c'est-à-dire : $u_+ \leq u_-$. \square

Exemple 6.14 On peut chercher les différentielles quadratiques holomorphes invariantes par un sous groupe à un paramètre d'isométries \mathbb{G} , puis les métriques harmoniques associées. Trois possibilités sont à envisager :

- \mathbb{G} est hyperbolique, donc conjuguée à un sous groupe de la forme : $z \rightarrow e^t z$ dans le modèle du demi-plan. Les différentielles invariantes par \mathbb{G} sont bornées : $\phi = (\alpha + i\beta) \frac{dz^2}{z^2}$,
- \mathbb{G} est parabolique, donc conjuguée à sous groupe de la forme : $z \rightarrow z + t$ dans le modèle du demi-plan. Les différentielles associées ne sont pas bornées : $\phi = (\alpha + i\beta) dz^2$. Elles donnent des exemples intéressants d'injection harmoniques $f : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$ (cf Li et Tam [31] lorsque $\phi = -\alpha^2 dz^2$, et la section suivante),
- \mathbb{G} admet un point fixe, donc est conjugué à un sous groupe de la forme : $z \rightarrow e^{it} z$ dans le modèle du disque. Les différentielles quadratiques holomorphes invariantes sous \mathbb{G} ont une singularité au point fixe : $\phi = (\alpha + i\beta) \frac{dz^2}{z^2}$.

On peut calculer le difféomorphisme harmonique associé à une différentielle de Hopf ϕ invariante par un sous groupe hyperbolique. Dans le modèle $\mathbb{H}^2 = \mathbb{W} := \{im(w) \in]0, \pi[\}$ muni de la métrique $g = \frac{1}{\sin^2(y)}(dx^2 + dy^2)$, les différentielles quadratiques holomorphe invariantes sous l'action du sous groupe d'isométrie hyperbolique $z \rightarrow z + t$ sont de la forme : $\phi = (\alpha + i\beta) dz^2 \in \mathcal{QD}_b(\mathbb{W})$ et le difféomorphisme harmonique associé vérifie : $f(z + t) = f(z) + \lambda t$. Il est donc de la forme : $f(x + iy) = \lambda x + \varphi(y) + i\psi(y)$. Par identification, on trouve :

$$\begin{aligned} \lambda d\varphi &= -2\beta \sin^2(\psi) dy \\ d\psi &= \sqrt{\lambda^2 - \frac{4\beta^2}{\lambda^2} \sin^4(\psi) - 4\alpha \sin^2(\psi)} dy \end{aligned}$$

α et β étant fixés, on calcule $\lambda(\alpha, \beta)$ par la condition : $\int d\psi = \pi$, c'est à dire :

$$\int_0^\pi \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 - \frac{4\beta^2}{\lambda^2} \sin^4(\psi) - 4\alpha \sin^2(\psi)}} d\psi = \pi$$

On peut vérifier que l'on décrit ainsi tous les difféomorphismes harmoniques quasi-conformes, dont l'extension au bord du tube est une application quasi-symétrique, invariante sous l'action du sous groupe hyperbolique $z \rightarrow z + t$: $f(x) = \lambda x$ et $f(x + i\pi) = (\lambda x + i\pi) + K$.

6.2. Dégénérescence des métriques harmoniques

Ce paragraphe est consacré à l'étude des métriques harmoniques hyperboliques dégénérées, c'est à dire des métriques harmoniques hyperboliques définies sur \mathbb{C} et des métriques définies sur \mathbb{H} et de différentielle de Hopf non bornée. Notons d'abord le :

Théorème 6.15 (Wan [45], Wan et Au [3]) .

Soit $\phi \in \mathcal{QD}(\Sigma)$ une différentielle quadratique holomorphe sur $\Sigma = \mathbb{H}^2$ ou \mathbb{R}^2 .

- Si $\Sigma = \mathbb{R}^2$ et $\phi = C dz^2$, il n'existe pas de métrique harmonique hyperbolique de différentielle de Hopf ϕ ,

- Dans les autres cas, il existe une unique métrique harmonique hyperbolique g_ϕ de différentielle de Hopf ϕ , telle que la métrique conforme associée est complète. Cette métrique est maximale : si g a même différentielle de Hopf, $g \leq g_\phi$.

Preuve Si Ω est un ouvert relativement compact, $\phi|_\Omega$ est borné pour la métrique de Poincaré de Ω : il existe donc une métrique harmonique hyperbolique complète sur Ω , de différentielle de Hopf ϕ . A tout domaine relativement compact Ω , on associe donc g_Ω . On sait que les métriques g_Ω sont décroissantes et on définit alors $g_\phi = \lim_{\Omega \rightarrow \Sigma} g_\Omega$.

- Lorsque $\Sigma = \mathbb{H}^2$, on vérifie que la fonction h associée est positive : $h = \lim_{\Omega \rightarrow \Sigma} h_\Omega$, et on sait $h_\Omega \geq 0$. On en déduit que la métrique conforme g_h est complète, et que le facteur de distortion ne s'annule jamais. En effet : $u = \lim_{\Omega \rightarrow \Sigma} u_\Omega \geq 0$, et si $u(x) = 0$, par le principe de prolongement d'Aronszajn, $u = 0$ partout. Dans ce cas, $\Delta h = -2$, ce qui contredit (d'après le principe du maximum) : $\inf(h) \geq 0$,
- Lorsque $\Sigma = \mathbb{R}^2$, la complétude de la métrique conforme $e^h g_0$ a été démontrée par Wan et Au [3] (en exploitant la méthode de Perron). Lorsque $\phi = Cdz^2$, la métrique g_ϕ est de rang un et $h = \log|C|$ est l'unique solution de

$$\frac{1}{2}\Delta h = e^h - e^{-h}|\phi|^2$$

Dans les autres cas, comme $u = \lim_{\Omega \rightarrow \Sigma} u_\Omega \geq 0$, si u s'annule en un point, $u = 0$, donc $h = \log|\phi|$ partout. Lorsque ϕ admet des zéros, on en déduit que u ne s'annule jamais, donc que g_ϕ n'est pas dégénérée. Le cas général est résolu par Wan et Tam [43, p. 600]. \square

On sait qu'à toute différentielle quadratique bornée sur une surface de Riemann hyperbolique Σ est associée une unique métrique harmonique hyperbolique complète. Lorsque (Σ, ϕ) dégénère, c'est à dire lorsque Σ est parabolique, ou lorsque ϕ n'est pas bornée, on peut se poser la question naturelle : la métrique harmonique maximale g_ϕ est elle complète? Autrement dit, lorsque $\Sigma = \mathbb{C}$ ou \mathbb{H}^2 : existe-t-il un difféomorphisme harmonique $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{H}^2$ de différentielle de Hopf ϕ ? La question reste ouverte en général. Lorsque $\Sigma = \mathbb{C}$, Han Tam Treibergs et Wan [22] ont démontré, en exploitant les feuilletages horizontaux et verticaux associés à ϕ que g_ϕ n'est pas complète si ϕ est polynomiale. Lorsque $\Sigma = \mathbb{H}^2$ et ϕ n'est pas bornée, la question n'a pas encore été étudiée.

Lorsque ϕ est invariant sous l'action d'un sous groupe à un paramètre d'isométries paraboliques, on peut calculer explicitement g_ϕ :

Théorème 6.16 Dans le modèle du demi plan $\mathbb{U} = \{z | \text{Im}(z) > 0\}$, si $\phi = \alpha dz^2$ la métrique harmonique maximale associée à ϕ est :

$$g_\phi = \frac{1 + \cosh^2(2\beta y)}{2 \sinh^2(y)} (dx^2 + dy^2) + \phi + \bar{\phi}$$

où $\beta = \sqrt{|\alpha|}$.

- Si $\alpha \in \mathbb{R}^-$, g_ϕ est complète,
- Si $\alpha \notin \mathbb{R}^-$, g_ϕ n'est pas complète. Les images feuilles du feuilletage horizontal ont une extrémité de longueur finie, les points limites associés décrivant une géodésique.

Si $\phi = \frac{1}{4}dz^2$, on peut calculer l'immersion harmonique associée à ϕ :

$$f_\phi(x+iy) = e^x \left[\frac{1+i \sinh(y)}{\cosh(y)} \right]$$

f_ϕ n'est pas surjective : l'image de f_ϕ est le quart de plan $\{z | \operatorname{Re}(z) > 0, \operatorname{Im}(z) > 0\}$.

Preuve ϕ est une différentielle quadratique non bornée, stable par le sous groupe d'isométries paraboliques : $z \rightarrow z+t$. La métrique g_ϕ associée est donc également stable et l'immersion harmonique associée à ϕ est invariante par un sous groupe à un paramètre : $f_\phi(z+t) = \gamma(t)f_\phi(z)$.

— Si ce sous groupe est parabolique, donc conjugué à $z \rightarrow z + \lambda t$, f_ϕ est de la forme : $x+iy \rightarrow \lambda x + g(y)$. Ou encore (après action de l'homothétie $z \rightarrow \lambda^{-1}z$), $f_\phi(x+iy) = x + \rho(y) + i\zeta(y)$. La différentielle de Hopf est : $\phi = (\frac{1-\rho^2-\zeta^2}{4\zeta^2} - i\frac{\rho}{2\zeta^2})dz^2 = (a+ib)dz^2$. On en déduit que :

$$dy = \frac{d\zeta}{\sqrt{1-4a\zeta^2-4b^2\zeta}}$$

Comme $\int dy = \infty$, on conclut que : $\phi = -\beta^2 dz^2$ et : $\rho(y) = 0$, $\zeta(y) = \frac{1}{2\beta} \sinh(2\beta y)$. La métrique g_ϕ s'écrit alors :

$$g_\phi = \frac{1 + \cosh^2(2\beta y)}{2 \sinh^2(y)} (dx^2 + dy^2) + \phi + \bar{\phi}$$

— Si ce sous groupe est hyperbolique, donc conjugué à $z \rightarrow e^t z$, f est de la forme : $x+iy \rightarrow e^x \psi(y)$. C'est le cas dès que $\phi = \alpha dz^2$ si $\alpha \notin \mathbb{R}^-$.

La métrique g_ϕ s'écrit $g_\phi = \phi + (e^h + |\phi|^2 e^{-h})g_0 + \bar{\phi}$, où h est l'unique solution de $\frac{1}{2}\Delta h = e^h - |\phi|^2 e^{-h} - 1$ telle que $e^h g_0$ est complète. h ne dépend que de $|\phi|$.

Si $\phi = -\beta^2 e^{2i\theta} dz^2$ En posant $u+iv = e^{-i\theta}(x+iy)$, la métrique harmonique hyperbolique associée à ϕ est donc :

$$\psi^* g = \frac{4\beta^2 (du^2 + \cosh^2(2\beta y) dv^2)}{\sinh^2(2\beta y)}$$

Le feuilletage vertical est donné par les courbes $v = \mathcal{C}^{te}$. L'extrémité $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$ qui tend vers l'infini (i.e : $y \rightarrow \infty$) a pour longueur :

$$\ell = \int_{u_0}^{\infty} \frac{2\beta dt}{\sinh(2\beta t |\sin[\frac{\theta}{2}]|)}$$

$$\ell \neq +\infty$$

La métrique g_ϕ n'est donc pas complète. De plus : on sait que le facteur de distortion u (et toutes ses dérivées) tend vers zéro lorsque $y \rightarrow \infty$. Dans une carte où $\phi = dz'^2$, on peut vérifier que le feuilletage horizontal a pour courbure géodésique :

$$K_h = -\frac{1}{4 \cosh(\frac{u}{2})} \frac{du}{dy'}$$

En particulier :

$$|K_h| \leq \frac{1}{4} \frac{|du|}{\sqrt{|\phi|}}$$

Si $(\Gamma_t, \gamma(t))$ est la feuille horizontale pointée passant par $\gamma(t)$, on en déduit que la courbure de Γ_t converge (uniformément sur tout compact) vers 0, donc que Γ_t converge vers une géodésique Γ_∞ . \square

Remarque 6.16.1 On voit sur cet exemple que la complétude de la métrique g_ϕ est liée au comportement du feuilletage vertical de ϕ . On peut trouver de nombreux exemples de différentielles ϕ telles que la métrique harmonique associée g_ϕ n'est pas complète, par exemple lorsque $\phi = e^z dz^2$ sur $\mathbb{U} = \mathbb{H}^2$ ou, comme l'ont montré Han Tam Treibergs et Wan [22], lorsque $\phi(z) = P(z)dz^2$ si P est un polynôme de degré $d \geq 1$ sur $\mathbb{U} = \mathbb{H}^2$. Dans ces deux cas, on peut trouver une feuille verticale qui diverge dans la métrique de Poincaré, mais qui est de longueur bornée pour la métrique harmonique g_ϕ .

Un test intéressant serait de caractériser les métriques harmoniques hyperboliques complètes sur \mathbb{H}^2 :

Conjecture 6.17 Soit $\phi \in QD(\mathbb{H}^2)$. La métrique harmonique hyperbolique de différentielle de Hopf ϕ est complète si et seulement si ϕ est bornée, ou $\phi = -dz^2$ sur $\mathbb{H}^2 \simeq \mathbb{U}$, à l'action de PSL_2 près.

6.3. Espace universel de Teichmüller

L'étude du problème de Dirichlet asymptotique est crucial pour comprendre le lien entre métriques harmoniques hyperboliques et espace universel de Teichmüller : étant donné $f : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$, existe-t-il une application harmonique à distance bornée de f ?

Théorème 6.18 Soit $f : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$ une quasi-isométrie, asymptotiquement quasi-harmonique : $\lambda_2(f) > (1 + \epsilon)|\tau(f)|$ en dehors d'un compact. Il existe un difféomorphisme harmonique stable φ à distance bornée de f . De plus : il n'existe pas d'autre application harmonique à distance bornée de f .

Preuve D'après le théorème 1.20, il existe une application harmonique φ à distance bornée de f . En appliquant judicieusement la méthode d'exhaustion de Gromov [19], on peut également vérifier que φ est un difféomorphisme et vérifie la condition de stabilité $\inf(\lambda_2) > 0$:

- Posons $K_n = f^{-1}(B_{0,n})$. $f(K_n)$ est un ouvert à bord convexe : d'après le théorème de Schoen-Yau [40], il existe un unique difféomorphisme harmonique $f_n : K_n \rightarrow B_{0,n}$ tel que : $f_n = f$ sur ∂K_n . f étant quasi-harmonique, on sait que f_n reste à distance bornée de f : $d(f_n, f) \leq \rho$. D'après le principe de Bloch, f_n est \mathcal{C}^∞ équicontinue. On peut donc supposer, à extraction près, que f_n converge vers φ , application harmonique à distance bornée de f . On sait alors que le Jacobien de φ est positif ou nul : $J(\varphi) = \lim_{n \rightarrow \infty} J(f_n) \geq 0$. En posant $h = \log(e(\varphi) + J(\varphi))$, on a : $\varphi^*g = \phi + (e^h + |\phi|^2 e^{-h})g_0 + \bar{\phi}$, et $J(\varphi) = e^h(1 - e^{-2u})$. On en déduit que $u \geq 0$.
- Supposons que $\inf u = 0$. Quitte à faire agir le groupe d'isométrie de \mathbb{H}^2 , on peut supposer $u(0) = 0$: si x_k est une suite minimisante pour u , on définit $f_k = \gamma_k \circ f \circ \bar{\gamma}_k$, quasi-conforme, $\varphi_k = \gamma_k \circ \varphi \circ \bar{\gamma}_k$ harmonique, à distance bornée de f_k , tels que $u_k(x) = u(x_k)$, et tel que f_k envoie 0 sur 0. Par compacité des applications quasi-conformes, en passant à la limite, on peut donc supposer que φ , à distance bornée de f quasi-conforme, est telle

que : $u \geq 0$ et $u(0) = 0$. Par le principe de prolongement d'Aronszajn, on en déduit que $u = 0$, donc que φ est de rang un. D'après le principe de prolongement de Sampson [38], on sait que φ factorise à travers une géodésique. Or : φ est à distance bornée de f , donc se prolonge en un homéomorphisme quasi-conforme du cercle... ce qui est contradictoire,

- On en déduit que $\inf u > 0$, donc : φ est un difféomorphisme harmonique quasi-conforme, donc une quasi-isométrie. En particulier, si ψ est harmonique, à distance bornée de φ , d'après la formule de Bochner pour la distance : $\Delta d(\varphi, \psi) \geq \epsilon \tanh(d(\varphi, \psi))$, où : $\epsilon := \inf \lambda_2(\varphi) > 0$ d'après la condition de stabilité. Par le principe du maximum, on en déduit : $\varphi = \psi$. \square

Corollaire 6.18.1 *Soit $f : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$ un difféomorphisme quasi-conforme, Si f est à distance bornée d'une application harmonique φ , φ est un difféomorphisme harmonique stable.*

Corollaire 6.18.2 *Si f est un homéomorphisme K quasi-symétrique de $\mathbb{S}^1 = \partial_\infty \mathbb{H}^2$, pour $|K - 1| \ll 1$, f admet une unique extension harmonique quasi-conforme.*

Preuve (Corollaire 6.18.1) f est à distance bornée de φ : on peut résoudre le problème de Dirichlet asymptotique par la méthode d'exhaustion de Gromov. On définit une suite $f_n : K_n \rightarrow B_{0,n}$, qui reste à distance bornée de φ , donc converge (à extraction près) vers f_∞ harmonique, de Jacobien $J \geq 0$. Par le même raisonnement que précédemment, on vérifie que f_∞ est un difféomorphisme harmonique stable, donc unique dans sa classe d'homotopie bornée. \square

Preuve (Corollaire 6.18.2) D'après Douady-Earle [13], tout homéomorphisme quasi-symétrique du cercle $\mathbb{S}^1 = \partial_\infty \mathbb{H}^2$ admet une extension naturelle quasi-conforme sur \mathbb{H}^2 . L'extension de Douady-Earle dépend continûment (pour la topologie \mathcal{C}^∞) de la valeur au bord. Lorsque K est proche de 1, l'extension de Douady-Earle est \mathcal{C}^∞ proche de l'identité, donc quasi-harmonique et on peut résoudre le problème de Dirichlet asymptotique associé à l'extension de Douady-Earle. \square

Définition 6.19 *Soit \mathcal{M}_{-1} l'espace des métriques hyperboliques, complètes sur \mathbb{H}^2 , quasi-isométriques à la métrique de Poincaré. L'espace universel de Teichmüller est :*

$$\text{Teich}(\mathbb{H}^2) = \mathcal{M}_{-1} / \text{Diff}_0$$

où Diff_0 est le groupe des difféomorphismes quasi-isométriques, à distance bornées de l'identité et \mathcal{M}_{-1} et Diff_0 sont munis de la topologie \mathcal{C}^∞ uniforme sur \mathbb{H}^2 .

Les métriques harmoniques hyperboliques définissent une application de l'espace des différentielles quadratiques holomorphes bornées sur \mathbb{H}^2 dans l'espace universel de Teichmüller : à ϕ est associée la classe de g_ϕ , l'unique métrique harmonique hyperbolique complète de différentielle de Hopf ϕ .

Théorème 6.20 (Tam-Wan [44]) *L'espace universel de Teichmüller est localement paramétré par les différentielles quadratiques holomorphes bornées. Si $\phi \in \text{QD}_b(\mathbb{H}^2)$, et h est l'unique solution bornée de :*

$$\frac{1}{2} \Delta h = e^h - |\phi|^2 e^{-h} - 1$$

L'application $\text{QD}_b(\mathbb{H}^2) \rightarrow \text{Teich}(\mathbb{H}^2)$ qui à ϕ associe la métrique harmonique : $g_\phi = \phi + (e^h + |\phi|^2 e^{-h})g_0 + \bar{\phi}$ est injective, d'image ouverte.

Preuve La preuve se décompose en deux parties :

- Si $g_\phi = g_\psi$ dans $Teich(\mathbb{H}^2)$, il existe une isométrie à distance bornée de l'identité $f : (\mathbb{H}^2, g_\phi) \rightarrow (\mathbb{H}^2, g_\psi)$. Or $id : (\mathbb{H}^2, g_0) \rightarrow (\mathbb{H}^2, g_\phi)$ est harmonique, stable. $f = f \circ id : (\mathbb{H}^2, g_0) \rightarrow (\mathbb{H}^2, g_\psi)$ est harmonique stable, à distance bornée du difféomorphisme harmonique $id : (\mathbb{H}^2, g_0) \rightarrow (\mathbb{H}^2, g_\psi)$. On a donc : $f = id$, c'est-à-dire $\phi = \psi$. L'application : $\phi \rightarrow [g_\phi]$ est donc injective,
- Soit $g \in \mathcal{M}_{-1}$ tel que $[g]$ contient une métrique harmonique g_ϕ . Il existe un difféomorphisme harmonique, à distance bornée d' l'identité : $f : (\mathbb{H}^2, g_0) \rightarrow (\mathbb{H}^2, g)$. f est une quasi-isométrie :

$$\inf \lambda_2(f) \geq \epsilon > 0 \text{ et } \sup \lambda_1(f) = M < \infty$$

Si $\tilde{g} \in \mathcal{M}_{-1}$, on peut calculer le champ de tension de $f : (\mathbb{H}^2, g_0) \rightarrow (\mathbb{H}^2, \tilde{g})$:

$$\tau(f)|_{g_0, \tilde{g}} = tr_{g_0}(f^* \nabla|_{g, \tilde{g}} id)$$

$\mathcal{O} = \{\tilde{g} \in \mathcal{M}_{-1} \text{ tel que } \sup \|\nabla|_{g, \tilde{g}} id\| < \frac{\epsilon}{4M} \text{ et } \lambda_2(f)|_{g_0, \tilde{g}} > \frac{\epsilon}{2}\}$ est un voisinage ouvert de g dans \mathcal{M}_{-1} . Si $\tilde{g} \in \mathcal{O}$, $f : (\mathbb{H}^2, g_0) \rightarrow (\mathbb{H}^2, \tilde{g})$ est quasi-harmonique, au sens où : $\lambda_2(f) \geq 2\tau(f)$. On en déduit que f est à distance bornée d'un unique difféomorphisme harmonique quasi-conforme \tilde{f} . Si $\tilde{\phi}$ est la différentielle de Hopf de \tilde{f} , on sait donc que $[\tilde{g}] = [g_{\tilde{\phi}}]$. \square

Remarque 6.20.1 Lorsque Σ est une surface compacte, Sampson [38] et Wolf [46] ont démontré que l'application $\phi \rightarrow [g_\phi]$ est un difféomorphisme $QD(\Sigma, g_0) \rightarrow Teich(\Sigma)$. Pour l'instant, le problème reste ouvert de savoir si les métriques harmoniques permettent d'identifier l'espace universel de Teichmüller et les différentielles quadratiques bornées sur \mathbb{H}^2 .

Le problème de démontrer la surjectivité de l'application de Wan est équivalent à la conjecture de Schoen [39] :

Conjecture 6.21 Soit φ un homéomorphisme quasi-symétrique de $\partial_\infty \mathbb{H}^2$. φ s'étend en un difféomorphisme harmonique de \mathbb{H}^2 .

Remarquons que nous avons indiqué dans l'exemple 6.14 que cette conjecture est vérifiée dans le cas très particulier où φ est invariant sous l'action d'un sous groupe hyperbolique. Lorsque φ est \mathcal{C}^1 , le problème a été résolu par Li et Tam [31]. Le cas général reste ouvert.

6.4. Espace de Teichmüller d'une lamination hyperbolique

Définition 6.22 (Espace de Teichmüller \mathcal{C}^∞ d'une lamination) .

Soit (Λ, g) une lamination \mathcal{C}^∞ de dimension 2 hyperbolique, c'est-à-dire : qui admet une métrique g transversalement continûment \mathcal{C}^∞ de courbure $K = -1$. Soit \mathcal{M}_{-1} l'espace des métriques transversalement continûment \mathcal{C}^∞ hyperboliques sur Λ et $Diff_0$ l'ensemble des difféomorphismes transversalement continûment \mathcal{C}^∞ laminés, homotopes à distance bornée de l'identité. L'espace de Teichmüller \mathcal{C}^∞ est $Teich(\Lambda) = \mathcal{M}_{-1}/Diff_0$.

Définition 6.23 (Espace de Teichmüller mesurable) .

Si (Λ, g, ν) est une lamination mesurée, de dimension 2, hyperbolique, l'espace de Teichmüller mesurable est : $Teich(\Lambda, \nu) = \mathcal{M}_{-1}/Diff_0$ où \mathcal{M}_{-1} est l'espace des métriques hyperboliques g telles qu'il existe une homotopie mesurable f_t telle que f_1^*g est quasi-conforme et $Diff_0$ l'espace des difféomorphismes laminés mesurables homotopes à l'identité.

D'après le théorème de Tam et Wan, l'espace universel de Teichmüller est localement homéomorphe à l'espace des différentielles quadratiques bornées. Si Λ est une lamination, on en déduit que si on fixe une métrique hyperbolique de référence g , l'espace des différentielles quadratiques holomorphes par rapport à g , \mathcal{C}^∞ (resp. mesurables) et bornées s'injecte dans l'espace de Teichmüller \mathcal{C}^∞ (resp. mesurable) de Λ :

$$QD_b(\Lambda, g) \rightarrow Teich(\Lambda)$$

De plus, l'image de cette application est ouverte dans l'espace de Teichmüller \mathcal{C}^∞ .

Dans le cadre des surfaces de Riemann compactes, la surjectivité de l'application de Wan : $QD \rightarrow Teich$ se ramène à démontrer que toute application de degré 1 est homotope à un difféomorphisme harmonique : c'est le théorème de Sampson [38] et Schoen et Yau [40]. Dans le cadre des laminations mesurables, on a l'analogie du théorème d'existence de difféomorphismes harmoniques :

Théorème 6.24 Soit (Λ, g, ν) une lamination riemannienne mesurée régulière de dimension 2, de volume fini, et telle que g est hyperbolique. Soit g_1 une métrique hyperbolique régulière sur Λ . Le flot de la chaleur laminé :

$$\varphi_t|_{t \geq 0} : (\Lambda, g) \rightarrow (\Lambda, g_1)$$

avec pour condition initiale $\varphi_0 = id$ converge vers un difféomorphisme harmonique laminé f . De plus, f est l'unique représentant harmonique de la classe d'homotopie mesurable de l'identité.

Démontrons d'abord :

Lemme 6.25 Soit Λ_ϵ une partie de Λ , telle que, feuille à feuille, $\partial\Lambda_\epsilon$ est une variété avec des singularités isolées. Si $h : \Lambda \rightarrow \mathbb{R}$ vérifie : $dh \in L^1(\Lambda_\epsilon)$ et $\Delta h \in L^1(\Lambda_\epsilon)$, on a :

$$\int_{\Lambda_\epsilon} \Delta h = \int_{\partial\Lambda_\epsilon} \langle dh|N \rangle$$

Preuve (Lemme) On peut décomposer h en $h = \sum \chi_i h$ où χ_i est une partition de l'unité. On est donc ramené à prouver le lemme sur un ouvert trivialisant $\mathcal{O} = \mathcal{L} \times X$. Sur cet ouvert : $dh_i = \chi_i dh + d\chi_i h$ et $\Delta h_i = \Delta \chi_i h + \langle d\chi_i|dh \rangle + \chi_i \Delta h$. Si $dh \in L^1(\Lambda_\epsilon)$, on sait que $dh_i \in L^1(\Lambda_\epsilon)$ et $\Delta h_i \in L^1(\Lambda_\epsilon)$. Si X est une transversale de Λ , on sait que :

$$\int_{\mathcal{O} \cap \Lambda_\epsilon} \Delta h_i = \int_{x \in X} \left(\int_{\lambda \in \mathcal{L} \cap \Lambda_\epsilon} \Delta h_i(\lambda, x) d\lambda \right) d\nu(x)$$

On peut intégrer par partie feuille à feuille :

$$\int_{\mathcal{O} \cap \Lambda_\epsilon} \Delta h_i = \int_{x \in X} \left(\int_{\lambda \in \mathcal{L} \cap \partial\Lambda_\epsilon} \langle dh_i(\lambda, x)|N \rangle d\lambda \right) d\nu(x)$$

en tenant compte du fait que $dh_i = 0$ sur $\partial\mathcal{L}$. □

Preuve (Théorème) Quitte à décomposer ν en composantes ergodiques, on peut supposer que la mesure transverse ν est ergodique. La preuve se décompose en quatre étapes :

- *Le flot de la chaleur converge ν presque sûrement.* D'après la formule de Gauss Bonnet, adaptée au feuilletage Λ , $AIRE(\varphi_t) = AIRE(\varphi) - \chi(\Lambda, \nu) > 0$. En particulier, si ν est ergodique, on en déduit que φ_t converge ν presque sûrement vers une application harmonique laminée f . En général, en décomposant ν en composantes ergodiques, on vérifie que φ_t converge ν presque sûrement vers une application harmonique laminée f . Si e_f et j_f sont l'énergie et le jacobien de f , ϕ est la différentielle de Hopf de f , on définit $H = \frac{e_f + j_f}{2} \geq 0$, $L = \frac{e_f - j_f}{2}$. Si $h = \log(H)$ on a donc $f^*g = g_{h, \phi} = \phi + (e^h + e^h |\phi|^2)g + \bar{\phi}$, et $u = h - \log|\phi|$ est le coefficient de distortion associé à f .
- *Les zéros de H sont isolés feuille à feuille.* On sait en effet que $HL = |\phi|^2$. Par ergodicité, nous avons deux cas à considérer :
 - $\phi = 0$ pour ν presque toute feuille. Dans ce cas, f est holomorphe et $H = |df|^2$. Puisque $AIRE(f) \neq 0$, on sait que, pour ν presque toute feuille, f est une fonction holomorphe non constante. En particulier : les zéros de f , donc ceux de $H = |df|^2$ sont isolés,
 - $\phi \neq 0$ pour ν presque toute feuille. Dans ce cas, les zéros de ϕ , donc ceux de H sont isolés,
- *$h := \log(H)$ vérifie le théorème de Stokes.* Pour $\epsilon > 0$, définissons $\Lambda_\epsilon = \{\lambda/H(\lambda) \geq \epsilon\}$ et $\Lambda_0 = \cup_{\epsilon > 0} \Lambda_\epsilon$. Pour $\epsilon < 1$, $\partial\Lambda_\epsilon$ est feuille à feuille une variété avec éventuellement des singularités isolées. En effet, lorsque $dH(\lambda) \neq 0$, $\partial\Lambda_\epsilon$ a pour espace tangent $Ker(df)$ et lorsque $dH(\lambda) = 0$, comme $\frac{1}{2}\Delta \log(H) = H - 1 - \frac{|\phi|^2}{H} < 0$, on sait que $\Delta H < 0$, donc $H(x, y) = \epsilon + ax^2 + by^2 + o(x^2 + y^2)$, où $a + b < 0$ et $dH \neq 0$ sur un voisinage de λ . On sait que $\Delta h = 2(j_f - 1) \in L^1$. De plus, $dh = \frac{dH}{H} = \frac{de + dj}{2H}$. D'après les estimées de Schauder, comme $e \in L^1$, $(de, dj) \in L^1$ donc $dH \in L^1(\Lambda)$. Puisque $|dh| \leq \frac{1}{\epsilon}|dH|$ sur Λ_ϵ , $dh \in L^1(\Lambda_\epsilon)$, et on peut appliquer le théorème de Stokes : $\int_{\Lambda_\epsilon} \Delta h = - \int_{\partial\Lambda_\epsilon} |dh|$,
- *H vérifie $infess(H) \geq 1$.* On sait que :

$$\frac{1}{2}\Delta \log(H) = j_f - 1$$

D'après le théorème de Gauss Bonnet laminé $\int_\Lambda j_f - 1 = AIRE(f) + \chi(\Lambda, \nu) = 0$. Puisque les zéros de H sont isolés feuilles à feuille, Λ_0 est de mesure pleine, donc : $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Lambda_\epsilon} j_f - 1 = 0$. C'est à dire :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Lambda_\epsilon} \Delta \log(H) = 0$$

D'après le théorème de Stokes : $\int_{\Lambda_\epsilon} \Delta \log(H) = - \int_{\partial\Lambda_\epsilon} |d \log(H)|$. On sait donc que :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\partial\Lambda_\epsilon} |d \log(H)| = 0$$

Définissons $\Lambda_\epsilon^\alpha = \{\lambda/\epsilon \leq H(\lambda) < \alpha\}$ et $\Lambda^\alpha = \{\lambda/H(\lambda) < \alpha\}$. Pour $\alpha < 1$, on peut appliquer le théorème de Stokes :

$$\int_{\Lambda_\epsilon^\alpha} \frac{1}{2}\Delta \log(H) = \int_{\partial\Lambda^\alpha} |d \log(H)| - \int_{\partial\Lambda_\epsilon} |d \log(H)|$$

Lorsque $\epsilon \rightarrow 0$ et $\alpha \rightarrow 1$, on en déduit : $\int_{\Lambda^1} j_f - 1 \geq 0$. Or : $j_f = H - 1 - \frac{|\phi|^2}{H} < 0$ sur Λ^1 . On en déduit que Λ^1 est de mesure nulle, donc $H \geq 1$ ν presque sûrement.

On a démontré que $f^*g = g_{h,\phi}$, avec : $\inf h \geq 0$. D'après le principe du maximum pour les métriques harmoniques, on sait que l'équation :

$$\frac{1}{2}\Delta h = e^h - e^{-h}|\phi|^2 - 1$$

admet une unique solution $h = \log(H)$ telle que $\inf(h) \geq 0$. De plus, le facteur de distortion associé vérifie $u > 0$. On en déduit que f^*g est non dégénérée et f est un difféomorphisme feuille à feuille. \square

Remarque 6.25.1 Cette démonstration reprend le schéma de preuve utilisé par Sampson [38] et Schoen et Yau [40]. Cependant, outre l'extension aux laminations, nous introduisons une amélioration à cette preuve : contrairement à Sampson et Schoen et Yau, nous n'avons pas besoin d'établir que, lorsque H s'annule, $H(z) = |z^n| + o(|z^n|)$ et nous démontrons directement que, comme l'a remarqué Wolf [46], H vérifie : $\inf(H) \geq 1$.

Corollaire 6.25.2 Soit (Λ, g, ν) une lamination mesurée régulière de volume fini par des surfaces de Riemann hyperbolique. L'espace de Teichmüller s'injecte dans l'espace des différentielles quadratiques holomorphes L^1 sur (Λ, g, ν) : à $g_1 \in \mathcal{M}_{-1}$, on associe la différentielle de Hopf de l'unique difféomorphisme harmonique laminaire homotope à l'identité $f : (\Lambda, g) \rightarrow (\Lambda, g_1)$.

Preuve Il y a deux points à vérifier :

- L'injectivité de $g_1 \rightarrow \phi(g_1)$. Si $\phi(g_2) = \phi(g_1)$, d'après le principe du maximum : $f_1^*g_1 = f_2^*g_2$. En posant $\psi = f_2^{-1} \circ f_1$, on en déduit qu'il existe $\psi \in \text{Diff}_0$ tel que $g_2 = \psi^*g_1$,
- $\phi(g_1)$ est intégrable. L'énergie de f s'écrit : $e_f = H + H^{-1}|\phi|^2 \geq 2|\phi|$. Comme e_f est intégrable, on en déduit que $\phi \in L^1$. \square

6.5. Conclusion

Cette étude de l'espace de Teichmüller laisse ouverte plusieurs questions :

- L'espace universel de Teichmüller s'identifie-t-il, via l'application de Wan, à l'espace des différentielles quadratiques bornées sur \mathbb{H}^2 ? Une autre formulation est :

Conjecture 6.26 Soit φ un homéomorphisme quasi-symétrique de $\partial_\infty \mathbb{H}^2$. φ admet une extension harmonique $f : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$.

- Peut-on caractériser les métriques harmoniques hyperboliques complètes sur $\Sigma = \mathbb{H}^2$ ou sur \mathbb{C} ? Autrement dit : comment caractériser les difféomorphismes harmoniques $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{H}^2$? Schoen [39] a conjecturé :

Conjecture 6.27 Il n'existe pas de difféomorphisme harmonique $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{H}^2$.

- L'espace de Teichmüller laminaire mesurable s'identifie-t-il aux différentielles quadratiques intégrables? On sait qu'à $\varphi \in \text{QD}(\Lambda, g, \nu)$, on peut associer une unique métrique maximale. Cette métrique est-elle complète pour presque toute feuille? Est-elle homotope à une métrique quasi-conforme?

Bibliographie

- [1] S. Adams and L. Hernández, *A foliated metric rigidity theorem for higher rank irreducible symmetric spaces.*, *Geom. Funct. Anal.* **4** (1994), no. 5, 483–521 (English), <http://dz-srv1.sub.uni-goettingen.de/sub/digbib/loader?ht=VIEW&did=D179300>.
- [2] N. Aronszajn, *A unique continuation theorem for solutions of elliptic partial differential equations or inequalities*, *J. Maths. pures et appl.* **36** (1957), 235–249.
- [3] T.K.K Au and T.Y.H Wan, *Parabolic constant mean curvature spacelike surfaces*, *Proc. of the AMS* **120** (1994), 559–564.
- [4] W. Ballman, M. Gromov, and V. Schroeder, *Manifolds of non positive curvature*, Birkhäuser, 1985.
- [5] V. Bangert, *The existence of gaps in minimal foliations.*, *Aequationes Math.* **34** (1987), 153–166 (English).
- [6] ———, *On minimal laminations of the torus.*, *Ann. inst. Henri Poincaré, Anal. non linéaire* **6** (1989), 95–138 (English).
- [7] ———, *Laminations of 3-tori by least area surfaces.*, *Analysis, et cetera, Res. Pap. in Honor of J. Moser's 60th Birthd.*, 85–114 , , 1990 (English).
- [8] ———, *Minimal foliations and laminations.*, Chatterji, S. D. (ed.), *Proceedings of the international congress of mathematicians, ICM '94, August 3-11, 1994, Zürich, Switzerland. Vol. I.* Basel : Birkhäuser. 453-464 , Basel : Birkhäuser, 1995, 1995 (English).
- [9] N. Bourbaki, *Integration*, Hermann, 1957.
- [10] K. Corlette, *Archimedean superrigidity and hyperbolic geometry*, *Ann. of Math.* **135** (1992), 165–182.
- [11] Kevin Corlette and Robert J. Zimmer, *Superrigidity for cocycles and hyperbolic geometry.*, *Int. J. Math.* **5** (1994), no. 3, 273–290 (English).
- [12] C. Croke and A. Fathi, *An inequality between energy and intersection*, *Bull. London Math. Soc.* **22** (1990), 489–494.
- [13] A. Douady and C.J. Earle, *Conformally natural extension of homeomorphisms of the circle*, *Acta Math.* **157** (1986), 23–48. <http://www.actamathematica.org/contents/157.htm>
- [14] P.B Eberlein, *Geometry of non positively curved manifolds*, Chicago lectures in math, 1996.
- [15] J.jun. Eells and J.H. Sampson, *Harmonic mappings of Riemannian manifolds*, *Am. J. Math.* **86** (1964), 109–160 (English).

BIBLIOGRAPHIE

- [16] Gilbarg and Trudinger, *Elliptic partial differential equations of second order*, second ed., Springer New York, 1983.
- [17] C. Godbillon, *Feuilletages - etudes geometriques*, Progress in Math., vol. 98, Birkhäuser, 1991.
- [18] M. Gromov, *Foliated Plateau problem. I : Minimal varieties.*, Geom. Funct. Anal. **1** (1991), no. 1, 14–79 (English), <http://dz-srv1.sub.uni-goettingen.de/sub/digbib/loader?ht=VIEW&did=D179219>.
- [19] ———, *Foliated Plateau problem. II : Harmonic maps of foliations.*, Geom. Funct. Anal. **1** (1991), no. 3, 253–320 (English), <http://dz-srv1.sub.uni-goettingen.de/sub/digbib/loader?ht=VIEW&did=D179227>.
- [20] M. Gromov and P. Pansu, *Rigidity of lattices : an introduction*, Lecture notes in Math. **1504** (1991), 39–137.
- [21] R.S. Hamilton, *Harmonic maps of manifolds with boundary*, Lecture notes in Math., vol. 471, Springer Berlin, 1975.
- [22] Z.C Han, L.F Tam, A. Treibergs, and T.Y.H. Wan, *Harmonic maps from the complex plane into surfaces with nonpositive curvature*, Comm. Anal. Geom. **3** (1995), 85–114.
- [23] P. Hartman, *On homotopic harmonic maps*, Canad. journal of Maths **19** (1967), 673–687.
- [24] Frédéric Hélein, *Regularity of weakly harmonic maps from a surface into a manifold with symmetries.*, Manuscr. Math. **70** (1991), no. 2, 203–218 (English).
- [25] A. Ionescu-Tulcea and C. Ionescu-Tulcea, *Topics in the theory of lifting*, Springer-Verlag New York, 1969.
- [26] A. Katok, J. Lewis, and R. Zimmer, *Cocycle superrigidity and rigidity for lattices actions on tori*, Topology **35** (1996), 27–38.
- [27] D. Kazhdan, *Connection on the dual space of a group with the structure of its closed subgroups*, Funct. Anal. Appl. **1** (1967), 63–65.
- [28] F. Labourie, *Existence d'applications harmoniques tordues a valeur dans les varietes a courbure negative*, Proceedings of the AMS **111** (1991), 877–882.
- [29] P. Li and L.F Tam, *The heat equation and harmonic maps of complete manifolds*, Inventiones mathematicae **105** (1991), 1–46. <http://dz-srv1.sub.uni-goettingen.de/sub/digbib/loader?ht=VIEW&did=D178692>
- [30] ———, *Uniqueness and regularity of proper harmonic maps I*, Annals of Math. **137** (1992), 167–201.
- [31] ———, *Uniqueness and regularity of proper harmonic maps II*, Indiana university journal **2** (1993), 591–635. <http://www.iuj.indiana.edu/IUMJ/fulltext.php?artid=42027&year=1993&volume=42>
- [32] G. Margulis and Qian, *Rigidity of weakly hyperbolic actions of higher real rank semi-simple Lie groups and lattices*, preprint, 1998.
- [33] Ngaiming Mok, Yum-Tong Siu, and Sai-Kee Yeung, *Geometric superrigidity.*, Invent. Math. **113** (1993), no. 1, 57–83 (English).
- [34] C.C. Moore, *Amenable subgroups of semisimple groups and proximal flows*, Israel J. Math. **34** (1979), 121–138.

-
- [35] C.D. Mostow, *Strong rigidity of locally symmetric spaces*, Am. Math. Studies, vol. 78, Princeton, 1973.
- [36] H. Omori, *Isometric immersions of Riemannian manifolds*, J. Math. Soc. Jap **19** (1967), 205–214.
- [37] R. Quiroga-Barranco, *The stretch of a foliation and geometric superrigidity*, Trans. of the AMS **349** (1997), 2391–2426.
- [38] J.H. Sampson, *Some properties and applications of harmonic mappings*, Ann. scient. ENS **11** (1978), 211–228. http://www.numdam.org/numdam-bin/search?h=nc&id=ASENS_1978_4_11_2_211_0&format=complete
- [39] R. Schoen, *The role of harmonic mappings in rigidity and deformation problems*, Complex geometry (Osaka 1990), vol. 143, Dekker, New York, 1993, pp. 179–200.
- [40] R. Schoen and S.T. Yau, *On univalent harmonic maps between surfaces*, Invent. Math. **44** (1978), 265–278. <http://dz-srv1.sub.uni-goettingen.de/sub/digbib/loader?did=D171788>
- [41] K. Seydoux, *doctoral dissertation*, Ph.D. thesis, Chicago, 1991.
- [42] Yum-Tong Siu, *The complex-analyticity of harmonic maps and the strong rigidity of compact Kaehler manifolds.*, Ann. of Math. **112** (1980), 73–111 (English).
- [43] L.F. Tam and T.Y.H. Wan, *Harmonic diffeomorphisms into Cartan-Hadamard surfaces with prescribed Hopf differentials*, Comm. Anal. Geom. **2** (1994), 593–625.
- [44] ———, *Quasi-conformal harmonic diffeomorphisms and the universal Teichmuller space*, J. Diff Geom **42** (1995), 368–410. <http://www.intlpress.com/JDG/archive/jdg-v42.php>
- [45] Tom Y.H. Wan, *Constant mean curvature surface, harmonic maps and universal Teichmuller space*, J. Diff Geom **35** (1992), 643–657.
- [46] M. Wolf, *The Teichmuller theory of harmonic maps*, J. Diff Geom **29** (1989), 449–479.
- [47] S.T. Yau, *Harmonic functions on complete Riemannian manifolds*, Comm. Pure Appl. Math **28** (1975), 201–228.
- [48] R.J. Zimmer, *Ergodic theory and semisimple groups*, Birkhäuser, Boston, 1984.

BIBLIOGRAPHIE

Index

A

- Action d'Anosov, 72
- Action superrigide, 67
- Application
 - Asympt. quasi-harmonique, 26
 - Quasi-harmonique, 25
- Applications laminées
 - Définition, 34
 - Topologie, 36

B

- Barycentre, 63
- Bord
 - A l'infini, 59
 - De Tits, 62

C

- Coefficients de dilatation, 11
- Conjecture
 - Sampson, 54
 - Schoen, 91
- Critère de stabilité
 - d'Hartman, 20
 - Fibré feuilleté, 58
 - Général, 19
 - Laminations, 43

D

- Déplaçabilité
 - Application déplaçable, 15
 - Groupe déplaçable, 75
- Différentielle de Hopf, 80
- Distortion
 - Principe du maximum, 85

E

- Espace de Teichmüller
 - Espace universel de Teichmüller, 90
 - Lamination, 92
 - Surface de Riemann, 80
- Etirement, 39

F

- Feuilletage riemannien, 42
- Fibré-Laminé, 57
- Flot de la chaleur
 - Convergence faible, 47
 - Convergence faible fibré-laminée, 60
 - Convergence forte, 51
 - Existence, 23
 - Variété à bord, 24
- Formule de Bochner
 - Distance, 16
 - Energie et tension, 23
 - Flot de la chaleur, 18
- Formule de Mok Siu et Yeung, 21

G

- Gauss Bonnet, 38

H

- Holonomie, 30

K

- k-Support, 50

L

- Lamination
 - Lamination, 29
 - Lamination mesurée, 31
 - Lamination régulière, 32
 - Lamination riemannienne, 31

M

- Métriques harmoniques
 - Courbure, 82
 - Définition, 81
 - Dégénérescence, 87
 - Existence, 83
- Mesure transverse, 31

P

- Principe

INDEX

de Bloch, [12](#)
de prolongement, [14](#)
Propriété T de Kazhdan, [71](#)

R

Réductivité
Morphisme réductif, [72](#)
Réductivité fibré-laminée
Géométrie, [63](#)
Mesurable, [61](#)
Rang un, [66](#)
Rang géométrique, [15](#)
Revêtement asymptotique, [32](#)
Rigidité, [21](#)

S

Sections laminées, [60](#)
Surface de Riemann, [79](#)

T

Tenseur rigide positif, [21](#)

Table des matières

Introduction	4
0.1 Applications harmoniques et rigidité	5
0.2 Flot de la chaleur	6
0.3 Superrigidité	8
0.4 Espace de Teichmüller	9
0.5 Plan de la thèse	9
1 Applications harmoniques	11
1.1 Compacité : principe de Bloch	12
1.2 Stabilité des applications harmoniques	14
1.2.1 Principe de prolongement	14
1.2.2 Formules de Bochner pour la fonction distance	15
1.3 Rigidité : les formules de Mok, Siu et Yeung	20
1.4 Existence : le flot de la chaleur	23
1.5 Stabilité par perturbation	25
2 Laminations	29
2.1 Généralités sur les laminations	29
2.2 Revêtements asymptotiques et holonomie	32
2.3 L'espace des applications laminées	34
2.4 Mesures transverses sur $\overline{\mathcal{M}}$	37
2.5 Invariants d'homotopie des applications laminées	38
3 Applications harmoniques laminées	41
3.1 Deux exemples	41
3.2 Stabilité des applications harmoniques laminées	43
3.3 Flot de la chaleur laminé : convergence faible	44
3.4 Flot de la chaleur laminé : convergence forte	50
3.5 Conclusion	54
4 Applications harmoniques fibré-laminées	57
4.1 Stabilité des sections harmoniques fibré-feuilletées	58
4.2 Convergence du flot de la chaleur	59
4.2.1 Bord à l'infini de Ξ	59
4.2.2 L'espace des sections fibré-laminées	60
4.2.3 Convergence du flot de la chaleur	60
4.3 Conditions de réductivité	61
4.3.1 Structure du bord à l'infini d'une variété d'Hadamard	62
4.3.2 Condition de réductivité géométrique	63

TABLE DES MATIÈRES

4.3.3	Condition cohomologique de réductivité en rang un	65
5	Superrigidité	67
5.1	Action superrigide sur un fibré	68
5.2	La propriété T de Kazhdan	71
5.3	Stabilité topologique des actions superrigides	72
5.4	Superrigidité mesurable	75
5.5	Conclusion	76
6	Espace de Teichmüller laminé	79
6.1	Métriques harmoniques	79
6.1.1	Surfaces de Riemann	79
6.1.2	Métriques harmoniques	81
6.2	Dégénérescence des métriques harmoniques	86
6.3	Espace universel de Teichmüller	89
6.4	Espace de Teichmüller d'une lamination hyperbolique	91
6.5	Conclusion	94
	Bibliographie	95

Résumé : Si Λ et Ξ sont des laminations munies de métriques riemanniennes, une application $f : \Lambda \rightarrow \Xi$ est une application harmoniques laminée si f envoie les feuilles de Λ sur celles de Ξ et si f est harmonique feuille à feuille. Dans cette thèse, nous étudions l'existence d'applications harmoniques laminées, et leurs propriétés de rigidité. Nous généralisons les théorèmes de convergence de Gromov - démontrés initialement lorsque Λ est un feuilletage, et Ξ une variété riemannienne - et nous démontrons que lorsque Λ est munie d'une mesure transverse de volume fini et Ξ est compacte, à courbure négative ou nulle sur les feuilles, le flot de la chaleur converge faiblement vers une mesure \mathcal{F} -harmonique. De plus, il y a convergence forte sous des conditions homotopiques. Nous étudions également le problème fibré-laminé : trouver des sections harmoniques de $\Xi \rightarrow \Lambda$ lorsque les feuilles de Ξ sont des fibrés plats au dessus des feuilles de Λ . En étudiant la structure des mesures sur le bord à l'infini des variétés d'Hadamard, nous généralisons un critère de réductivité géométrique de Labourie, et nous démontrons un théorème de convergence faible pour le flot de la chaleur fibré-laminé. Nous donnons également des critères de stabilité pour les applications harmoniques, basés sur une formule de Bochner pour la fonction distance. Ces résultats d'existence et de stabilité peuvent s'appliquer pour étudier la rigidité des feuilletages. Nous démontrons ainsi une extension du théorème d'existence de difféomorphismes harmoniques de Sampson et Schoen-Yau lorsque Λ et Ξ sont des laminations par des surfaces de Riemann hyperboliques. Ce résultat permet d'envisager une description de l'espace de Teichmüller mesurable grâce aux applications harmoniques. Enfin, nous utilisons l'interprétation fibré-laminée de la superrigidité et les critères de stabilité pour les applications harmoniques pour démontrer un résultat de stabilité pour les actions de groupes superrigides sur des fibrés principaux. Un résultat du même type a été démontré indépendamment par Margulis et Quian, et des méthodes complètement différentes.

Mots clés : applications harmoniques ; laminations ; feuilletages ; mesures transverses ; superrigidité ; espace de Teichmüller.

Classification *A.M.S.* : 58E20 (25A33 30F60 53C12 53C35 58G11)