Contribution au développement d'une méthode de calcul rapide de propagation des ondes de souffle en présence d'obstacles

Julien Ridoux

▶ **To cite this version:**

Julien Ridoux. Contribution au développement d'une méthode de calcul rapide de propagation des ondes de souffle en présence d'obstacles. Mécanique des fluides [physics.class-ph]. Université Pierre et Marie Curie, 2017. Français. NNT : . tel-01615239

HAL Id: tel-01615239

https://theses.hal.science/tel-01615239

Submitted on 12 Oct 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UPMC SORBONNE UNIVERSITÉS

THÈSE DE DOCTORAT
DE L'UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE CURIE

Spécialité : Mécanique des fluides

École doctorale : SMAER

réalisée

à Institut Jean le Rond d'Alembert

présentée par

Julien RIDOUX

pour obtenir le grade de :

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE CURIE

Sujet de la thèse :

Contribution au développement d'une méthode de calcul rapide de propagation des ondes de souffle en présence d'obstacles

---

soutenue le 4 octobre 2017

devant le jury composé de :

M. Rémi ABGRALL	Professeur, Université de Zürich	rapporteur
M. François COULOUVRAT	Directeur de Recherche CNRS	directeur de thèse
M. Nicolas LARDJANE	Ingénieur de Recherche CEA	co-encadrant
M. Régis MARCHIANO	Professeur, UPMC	examinateur
M. Laurent MONASSE	Chargé de Recherche ENPC	co-encadrant
M. Jean-Christophe ROBINET	Professeur, ENSAM	président du jury
M. Pierre VIDAL	Chargé de Recherche CNRS	rapporteur

Abstract

La simulation directe des ondes de souffle générées par une explosion maîtrisée, ou accidentelle, est un problème délicat du fait des différentes échelles spatiales en jeu. De plus, en environnement réel (topographie, zone urbaine, ...), l'onde de souffle interagit avec les obstacles géométriques en se réfléchissant, se diffractant et se recombinant. La forme du front devient complexe, rendant difficile voire impossible une estimation a priori des effets des explosions. Ce travail de thèse contribue à la mise au point d'une méthode de calcul rapide des ondes de souffle en présence d'obstacles. Il repose sur des modèles hyperboliques simplifiés de propagation d'ondes de choc extraits de la littérature, où seul le front incident est modélisé. Ceci permet une réduction significative du coût des simulations : les 5 équations d'Euler 3D sont réduites à un problème 2D à 2 équations. L'analyse du problème de Riemann met en évidence l'absence de solution de ces modèles lors de la diffraction sur un coin convexe dans certaines configurations fréquemment rencontrées en pratique. L'extension des modèles aux ordres supérieurs ne permet pas de corriger ce défaut. Nous levons cette limitation au travers d'une modification *ad hoc*. L'effet de souffle consécutif à une explosion est ensuite introduit à partir d'une loi expérimentale pression/distance. Du point de vue numérique, un algorithme Lagrangien conservatif de suivi de front est développé en 2D. Les tests montrent que ce nouveau modèle se compare favorablement à l'expérience, avec une réduction de plusieurs ordres de grandeur du temps de calcul en comparaison des méthodes de résolution directe des équations d'Euler.

Mots clés : ondes de choc, ondes de souffle, méthode de calcul rapide, modèle simplifié, Geometrical Shock Dynamics, modèle Cinématique.

Title : Contribution to the development of a fast running method for blast waves propagation in presence of obstacles.

The direct numerical simulation of blast waves (accidental or industrial explosions) is a challenging task due to the wide range of spatial and temporal scales involved. Moreover, in a real environment (topography, urban area ...), the blast wave interacts with the geometrical obstacles resulting in reflection, diffraction and waves recombination phenomena. The shape of the front becomes complex, which limits the efficiency of simple empirical methods. This thesis aims at contributing to the development of a fast running method for blast waves propagation in presence of obstacles. This is achieved through the use of simplified hyperbolic models for shock waves propagation such as Geometrical Shock Dynamics (GSD) or Kinematic models. These models describe only the leading shock front. This leads to a drastic reduction of the computational cost, from the 5 Euler equations in 3D to a 2D problem with 2 equations. However, the study of the Riemann problem shows that a solution of these models does not always exist in the case of the diffraction over a convex corner. We propose an *ad-hoc* extension of GSD in order to remove this limitation. The blast effects are also recovered through an empirical law available in free field. From a numerical point of view, a 2D conservative Lagrangian algorithm has been implemented and validated. First comparisons with experimental data show the good behaviour of this new model at nearly free computational cost compared to direct Euler methods.

Keywords : shock waves, blast waves, fast running method, simplified model, Geometrical Shock Dynamics, Kinematic model.

À ma grand-mère, Danièle Desmaret,
qui n'a pas la chance d'apprécier
l'aboutissement de ce travail.

À mes parents, qui m'ont insufflé
le goût du travail bien fait.

Remerciements

Un doctorat est une formidable expérience à la fois humaine et professionnelle. J'ai eu la chance d'être très bien entouré pendant ces trois années.

Je tiens tout d'abord à exprimer toute ma reconnaissance et ma gratitude envers mes encadrants, François Coulouvrat, Nicolas Lardjane et Laurent Monasse, pour la qualité de leur encadrement, leur suivi constant et leurs excellents conseils. J'ai eu un plaisir immense à travailler et échanger avec eux durant ces trois années. Leur implication, leur disponibilité ainsi que leur expertise m'ont beaucoup apporté. Je souhaite à quiconque se lançant dans cette aventure difficile que représente une thèse d'être suivi par des personnes de leur qualité. Je remercie plus particulièrement Nicolas pour son encadrement avisé et exigeant, qui m'a permis de mener ce travail dans les meilleures conditions. Son implication dans mon travail ainsi que sa très grande disponibilité ont été un encouragement important. J'ai énormément appris à ses côtés, aussi bien du point de vue technique et scientifique qu'humain.

J'adresse mes remerciements au Professeur Rémi Abgrall et au Docteur Pierre Vidal pour avoir accepté la lourde tâche de rapporteur. J'exprime également ma gratitude aux Professeurs Régis Marchiano et Jean-Christophe Robinet pour avoir accepté de faire parti de mon jury.

Je remercie le Professeur Schwendeman pour sa réponse rapide et précise sur les interrogations que nous avions au sujet de l'algorithme Lagrangien.

Je souhaite également remercier le Professeur Alexandre Ern pour ses remarques et conseils constructifs lors de nos échanges.

Mes remerciements vont aussi auprès de toute l'équipe du laboratoire du CEA qui m'a accueilli chaleureusement. Je me suis pleinement épanoui à leurs côtés. J'ai apprécié chaque moment et discussion.

J'exprime mes plus vifs remerciements à mes amis qui ont répondu présent à chaque moment difficile. Vos encouragements constants ont été un moteur ; merci notamment à toi Michaël pour ton soutien permanent. J'ai aussi une pensée pour mes colocataires de Bretigny, en particulier Atou, avec qui j'ai passé d'excellents moments durant ces trois années. Je remercie également Roberto, Matthieu, Maxime et Pierre qui, de par nos discussions, ont contribué à leur manière à ce travail. Merci à toi Mini pour la vérification orthographique d'une grosse partie de ce manuscrit.

Je tiens aussi à remercier du fond du cœur ma famille qui m'a toujours porté, et cela même dans les moments les plus sombres.

Je suis reconnaissant envers toute l'équipe du Laboratoire Amiénois de Mathématique Fondamentale et Appliquée (LAMFA) qui, par le biais de leur enseignement, m'a donné le goût de la connaissance et de la recherche.

Finalement, mes remerciements vont à toutes les personnes que j'ai oublié de citer et qui m'ont suivi de près ou de loin tout au long de mon parcours.

Table des matières

Table des figures x

Liste des tableaux xviii

Introduction 1

1 Contexte de l'étude 3
1.1 Prévention des risques explosifs . . . 5
1.2 Phénoménologie des ondes de souffle . . . 6
1.3 Interaction d'une onde de choc avec une structure . . . 11
1.4 Synthèse des méthodes de calcul rapide existantes . . . 19
1.5 Modèles d'évolution de front . . . 20
1.6 Objectif et démarche de l'étude . . . 22
1.7 Contributions propres . . . 25

I Modèles simplifiés pour la propagation d'une onde de choc 29

2 Rappels sur les ondes de choc 31
2.1 Les équations d'Euler . . . 32
2.2 Relations de Rankine-Hugoniot . . . 34
2.3 Vision level-set du front de choc . . . 39

3 Le modèle Geometrical Shock Dynamics de Whitham 43
3.1 Modèle Geometrical Shock Dynamics (GSD) . . . 44
3.1.1 Relation $A - M$ pour la propagation d'un choc dans une tuyère . . . 44
3.1.2 Dérivation du modèle d'évolution du front de choc . . . 49
3.1.3 Solutions à symétrie radiale . . . 51
3.1.4 Étude du modèle en deux dimensions . . . 53
3.1.5 Application 2D : diffraction d'un choc plan sur une paroi . . . 58
3.2 Propagation d'un choc dans un milieu non-uniforme . . . 70
3.2.1 Propagation d'un choc dans un milieu hétérogène et au repos . . . 70
3.2.2 Propagation d'un choc dans un milieu en mouvement . . . 72
3.3 Conclusion . . . 76

4 Le modèle Cinématique 79
4.1 Position du problème . . . 80
4.2 La théorie des surfaces singulières . . . 82
4.2.1 Relations de compatibilité . . . 82
4.2.2 Propriétés fondamentales . . . 83

4.3 Système d'équations pour la propagation d'un choc d'intensité arbitraire 84
4.3.1 Équation d'évolution de la normale au choc 85
4.3.2 Équations instationnaires de saut 86
4.3.3 Équation d'évolution de l'intensité du choc 88
4.3.4 Synthèse 91
4.4 Nature du modèle Cinématique 92
4.4.1 Changement de base 92
4.4.2 Écriture du modèle dans la base locale 93
4.4.3 Hyperbolicité du modèle Cinématique - ordre 0 95
4.5 Équivalence structurale avec le modèle GSD 98
4.6 Conclusion 102

II Application et amélioration des modèles 105

5 Algorithme numérique 107
5.1 Algorithme Lagrangien en deux dimensions 108
5.1.1 Évolution du front 109
5.1.2 Interpolation du choc 120
5.1.3 Prise en compte des obstacles 121
5.1.4 Synthèse de l'algorithme 123
5.2 Tests numériques 123
5.2.1 Convergence en ordre 124
5.2.2 Cas tests pour le problème de Riemann 128
5.2.3 Conservativité du schéma 132
5.3 Extensions possibles de l'algorithme 133
5.3.1 Extension de l'algorithme à un milieu non-uniforme et au repos 133
5.3.2 Extension de l'algorithme en 3D 134
5.4 Conclusion 135

6 Comparaison des modèles GSD et Cinématique 139
6.1 Étude préliminaire du modèle Cinématique 140
6.1.1 Comparaison des relations $A - M$ Cinématique et GSD 140
6.1.2 Solutions à symétrie radiale 145
6.1.3 Étude du modèle à deux dimensions 146
6.2 Comparaison des modèles GSD et Cinématique 149
6.2.1 Analyse du problème de Riemann 150
6.2.2 Comparaison sur des problèmes complexes 155
6.2.3 Synthèse 158
6.3 Conclusion 160

7 Prise en compte de l'écoulement transverse au choc dans les modèles GSD et KIN 163
7.1 Loi empirique de décroissance du nombre de Mach dans le faisceau de détente . 164
7.2 Prise en compte de l'écoulement transverse 169
7.3 Intégration dans l'algorithme Lagrangien 174
7.3.1 Intégration de la relation $A - M$ avec terme transverse 174
7.3.2 Estimation de la courbure locale du front 175
7.3.3 Synthèse et convergence en maillage 179
7.4 Résultats et discussion 183
7.4.1 Problème élémentaire de diffraction sur un dièdre convexe 183
7.4.2 Combinaison d'ondes expansives 187
7.4.3 Diffraction sur un merlon 187

7.4.4 Limitation des modèles . . . 191
7.5 Conclusion . . . 193

III Prise en compte des effets arrière dans les modèles simplifiés 197

8 Extension simple aux ondes de souffle 199
8.1 Prise en compte des effets de souffle dans les modèles GSDT et KINT . . . 200
8.1.1 Modélisation des effets arrière . . . 200
8.1.2 Intégration numérique . . . 204
8.2 Résultats préliminaires . . . 206
8.2.1 Diffraction d'un choc sphérique divergent sur le sol . . . 206
8.2.2 Diffraction d'une onde de souffle sur un merlon . . . 209
8.3 Conclusion . . . 217

9 Extension mathématique des modèles GSD et KIN aux effets arrière 219
9.1 Prise en compte de l'écoulement arrière dans le modèle GSD . . . 220
9.1.1 Extension de la relation $A - M$ de Whitham aux effets arrière . . . 220
9.1.2 Système à résoudre . . . 223
9.1.3 Solutions à symétrie radiale . . . 224
9.1.4 Intégration dans l'algorithme Lagrangien . . . 229
9.2 Prise en compte de l'écoulement arrière dans le modèle KIN . . . 233
9.2.1 Relations de compatibilité d'ordre supérieur dans la théorie des surfaces singulières . . . 234
9.2.2 Relations différentielles de saut . . . 236
9.2.3 Équations instationnaires de saut . . . 238
9.2.4 Équation d'évolution des effets arrière . . . 241
9.2.5 Modèle Cinématique d'ordre $k \geq 2$ . . . 244
9.2.6 Système à résoudre . . . 244
9.2.6.1 Cas d'un milieu homogène et au repos . . . 244
9.2.6.2 Cas d'un milieu non-uniforme et en mouvement . . . 246
9.2.7 Solutions à symétrie radiale . . . 247
9.2.8 Intégration numérique . . . 252
9.3 Conclusion . . . 253

Conclusion 256

Bibliographie 262

Annexe 273

A Simulations Eulériennes 277

B Phénomènes de réflexion 279

C Interpolation spline cubique 285
C.1 Interpolation spline cubique . . . 286
C.2 Condition nécessaire de monotonie et limiteurs de pente . . . 289
C.3 Limiteurs de pente d'ordre 2 et préservation des extrema . . . 292

D Équation d'évolution des effets arrière dans le modèle de Best 299

E Résolution d'Équations Différentielles Ordinaires 305

F Équation d'évolution de la courbure locale du front de choc **309**
F.1 Résultats préliminaires 309
F.2 Équation d'évolution de la courbure locale du choc 311

G Équation d'évolution des effets arrière dans le modèle Cinématique étendue à un milieu inhomogène en mouvement **315**
G.1 Relations différentielles de saut 316
G.2 Équations instationnaires de saut 318
G.3 Équation d'évolution des effets arrière 323

Table des figures

1.1 Diffraction d'une onde de choc à nombre de Mach 2.23 autour d'un cylindre en conduite, figure issue de [66]. 4
1.2 Réflexion d'une onde de souffle sur une surface plane suite à l'explosion d'une charge de 10 mg d'$AgNO_3$ à 3 cm au-dessus du sol, d'après [67]. 4
1.3 Photographie du site industriel de l'usine AZF après l'explosion du 21 septembre 2001 et niveaux de surpression en mbar [82, 36]. 5
1.4 Exemple de zonage PPRT autour d'un site industriel fictif [133]. 6
1.5 Évolution du maximum de surpression et des seuils d'effets de la surpression pour une charge de TNT, figure extraite de [41]. 6
1.6 Évolution temporelle de la pression en un point de l'espace en champ libre d'après [64]. 7
1.7 Présentation du principe de la similitude de Hopkinson [64]. 8
1.8 Évolution de la surpression du choc en champ libre pour l'explosion d'un kilogramme de TNT selon les lois empiriques de Kinney (1.5a) et Needham (1.6). . 10
1.9 Application à l'accident de l'usine AZF de la notion de zone d'effet définie au tableau 1.1. 10
1.10 Schéma de principe de l'interaction d'une onde de choc avec un obstacle. Illustration des phénomènes de réflexion, de diffraction, et de recombinaison. 11
1.11 Représentation des états amont et aval lors du déplacement d'une onde de choc monodimensionnelle, repère lié au choc. 12
1.12 Nombre de Mach du choc calculé à partir de la loi de Needham (1.6) lors de l'explosion d'une charge sphérique de TNT en champ libre. 13
1.13 Schéma de principe de l'interaction d'un choc fort sphérique avec le sol. Réflexion régulière et réflexion de Mach. 13
1.14 Coefficients de réflexion, issus de [3], d'un choc plan sur une surface plane en fonction de l'angle d'incidence (β) pour différentes valeurs de la surpression incidente. 14
1.15 Diagramme des différents régimes de réflexions selon Ben-Dor [15]. 14
1.16 Transition entre une réflexion régulière et une réflexion irrégulière, et transition entre une simple réflexion de Mach et une double réflexion de Mach. 15
1.17 Représentation schématique de la réflexion de l'onde de souffle sphérique sur le sol. 16
1.18 Interaction d'une onde de choc plane à nombre de Mach 2.25 avec une rampe de compression/détente, figure issue de [65]. 17
1.19 Interaction d'une onde de choc plane sur une rampe convexe. Images, issues de [119], obtenues par photographie Schlieren. 18
1.20 Représentation schématique de l'interaction de type IV de chocs [86]. 18
1.21 Solution du modèle GSD pour le problème de la diffraction d'un choc plan à nombre de Mach incident 2.81 sur un cylindre, d'après [144]. 21

1.22 Simulation numérique du modèle GSD pour le problème de la diffraction d'un choc plan à nombre de Mach 2.81 sur un cylindre d'après [85]. 22
1.23 Représentation schématique de l'interaction d'une onde de souffle avec le sol et modèle simplifié. 23
1.24 Présentation de la limitation du modèle GSD pour le problème de la diffraction d'un choc plan à nombre de Mach 1.1 sur un dièdre à $-90°$. 24
1.25 Bref aperçu de l'état de l'art existant pour la modélisation simplifiée de la propagation d'une onde de choc et contributions propres. 26

2.1 Schéma de la propagation d'un choc dans un milieu potentiellement en mouvement. 32
2.2 Saut d'entropie au travers d'un choc droit en fonction du nombre de Mach du choc. 37
2.3 Nombre de Mach aval et rapports de masse volumique, de pression et de température au travers d'un choc droit en fonction du nombre de Mach du choc. . 37

3.1 Schéma de la propagation d'un choc plan dans un tube de section variable $A(r)$ d'axe (Or). 45
3.2 Tracé de la fonction $\lambda(M)$ du modèle GSD pour $\gamma = 1.4$. 48
3.3 Schéma de la décomposition de la propagation du front en tubes de rayon dans le modèle GSD. 49
3.4 Schéma de la propagation d'une onde de choc en 2D. 53
3.5 Variations géométriques élémentaires dans la théorie GSD et relations entre les coordonnées dans la base locale et la base cartésienne au voisinage d'un point P. 54
3.6 Variations géométriques élémentaires pour un choc-choc dans la théorie GSD. . 57
3.7 Schéma de la diffraction d'un choc plan sur un mur convexe et concave. 58
3.8 Nombre de Mach M_0 minimal en fonction de θ_w (en degré) pour avoir existence de la solution du problème de la diffraction d'un choc plan sur un mur convexe d'angle θ_w. 59
3.9 Solution du modèle GSD pour le problème de la diffraction d'un choc plan à nombre de Mach 1.1 sur un dièdre à $-90°$. 59
3.10 Schéma de la diffraction d'un choc plan sur un dièdre convexe et concave. . . . 61
3.11 Solution du modèle GSD pour le problème de la diffraction d'un choc plan à nombre de Mach 3 sur un dièdre à $-90°$. 62
3.12 Diffraction d'un choc plan à nombres de Mach 2 et 4 sur un dièdre d'angle $-90°$. Comparaison du modèle GSD avec les données expérimentales issues de [143] et des simulations Eulériennes. 63
3.13 Diffraction d'un choc plan sur un dièdre convexe. Nombre de Mach au niveau de la paroi, M_w, en fonction de l'angle de la rampe, θ_w, pour différents nombres de Mach initiaux M_0. Comparaison du modèle GSD avec les relevés expérimentaux issus de [120]. 64
3.14 Solution du modèle GSD pour le problème de la diffraction d'un choc plan à nombre de Mach 3 sur un dièdre à $30°$. 66
3.15 Diffraction d'un choc plan à nombres de Mach $M_0 = 1.5$ et $M_0 = 4$ sur un dièdre concave d'angle $\theta_w = 20°$. Comparaison du modèle GSD avec des simulations Eulériennes. 67
3.16 Angle de la trajectoire du choc-choc en fonction de l'angle de la rampe de compression pour $M_0 = 10$. Comparaison du modèle GSD avec la théorie des trois chocs [15] et des données issues de simulations Eulériennes. 68
3.17 Diffraction d'un choc plan sur un dièdre concave. Nombre de Mach au niveau de la paroi, M_w, en fonction de l'angle d'inclinaison de la rampe, θ_w, pour différents nombres de Mach initiaux, M_0. Comparaison du modèle GSD avec des données issues de simulations Eulériennes. 68

3.18 Angle de la trajectoire du choc-choc calculé avec le modèle GSD pour l'angle de transition théorique entre réflexion régulière et irrégulière. 69
3.19 Schéma de la décomposition de la propagation du choc en tubes de rayon pour un milieu amont en mouvement. 72
3.20 Schéma de la décomposition du milieu amont juste devant le choc en régions élémentaires uniformes. Chaque région est associée à un repère mobile. 73

4.1 Schéma de la propagation d'un choc dans un milieu potentiellement en mouvement. 81
4.2 Schéma de la base locale au choc : $\{\vec{n}_1 = \vec{n}, \vec{n}_2, \vec{n}_3\}$. Ce triplet forme une base orthonormée directe de $\mathbb{R}^3$. 92
4.3 Schéma de la propagation de l'information issue d'un point $(X_s, Y_s)^T$ sur la surface de choc. 97

5.1 Schéma de la discrétisation de l'évolution du front de choc dans l'algorithme Lagrangien. 110
5.2 Schéma de la courbe de choc de référence avant et après régularisation. 113
5.3 Effet du filtrage d'Henshaw (5.15) et du filtrage gaussien (5.16) sur une fonction test. 115
5.4 Schéma de la redéfinition des tubes de rayon après régularisation du front à l'instant $t + \Delta t$. 116
5.5 Interpolations spline cubique globale et locale, avec et sans limiteur de pente, d'un jeu de données. 120
5.6 Visualisation des feuilles de l'arbre quadtree intersectant l'obstacle. 121
5.7 Solution numérique du modèle GSD en symétrie cylindrique, obtenue avec l'algorithme Lagrangien, $\Delta s = 0.1$. 125
5.8 Résolution numérique du modèle GSD en symétrie cylindrique. Erreurs sur la position du choc et le nombre de Mach en fonction de α pour différents pas de discrétisation Δs. 125
5.9 Résolution numérique du modèle GSD en symétrie cylindrique. Nombre de points du front et erreurs sur la position du choc pour différents Δs. 126
5.10 Convergence en ordre en norme l^2 pour la solution à symétrie radiale à deux dimensions. 126
5.11 Convergence en ordre en norme l^2 pour la solution à symétrie radiale à trois dimensions. 127
5.12 Diffraction d'un choc plan sur une rampe d'angle $-90°$. Solution numérique pour différents pas de discrétisation Δs. 127
5.13 Solution numérique du modèle GSD pour le problème de la diffraction d'un choc plan à nombre de Mach 3 sur un dièdre convexe d'angle $-90°$, $\Delta s = 0.005$. . . 129
5.14 Diffraction d'un choc plan à nombre de Mach 3 sur une rampe d'angle $\theta_w = -90°$. Fig. (a) : Nombre de Mach au niveau de la paroi en fonction de la distance au coin de la rampe. Fig. (b) : Différence avec la valeur théorique. 129
5.15 Nombre de points discrétisant le front de choc en fonction du temps pour le problème de la diffraction sur une rampe convexe d'angle $\theta_w = -90°$. 129
5.16 Solution numérique du modèle GSD pour le problème de la diffraction d'un choc plan à nombre de Mach 3 sur un dièdre concave d'angle $45°$, $\Delta s = 0.005$. . . . 130
5.17 Diffraction sur une rampe d'angle $\theta_w = 45°$ à nombre de Mach 3. Fig. (a) : Comparaison de la solution numérique pour différents pas Δs avec la solution analytique à l'instant $\alpha = 1$. Fig. (b) : Formation du front de Mach pour $\Delta s = 0.05$. 130
5.18 Diffraction d'un choc plan à nombre de Mach 3 sur une rampe d'angle $\theta_w = 45°$. Fig. (a) : Nombre de Mach au niveau de la paroi en fonction de la distance au coin de la rampe. Fig. (b) : Différence avec la valeur théorique. 131
5.19 Nombre de points discrétisant le front de choc en fonction de $\alpha = c_+ t$ pour le problème de la diffraction sur une rampe concave d'angle $\theta_w = 45°$. 131

5.20 Diffraction d'un choc plan sur une rampe d'angle $\theta_w = 45°$. Fig. (a) : Pas de temps, $\Delta\alpha = c_+\Delta t$, en fonction de $\alpha = c_+ t$. Fig. (b) : $\Delta\alpha$ le long du front de choc à différents instants. La simulation est effectuée pour $\Delta s = 0.05$. 131
5.21 Schéma de la diffraction d'un choc plan sur un dièdre concave. 132
5.22 Diffraction d'un choc plan à nombre de Mach M_0 sur un dièdre concave d'angle θ_w. Fig. (a) : Nombre de Mach au niveau de la paroi en fonction de θ_w. Fig. (b) : Angle de la trajectoire du choc-choc en fonction de θ_w. 132
5.23 Description de l'algorithme Lagrangien en trois dimensions. 134
5.24 Régularisation du front de choc pour l'algorithme Lagrangien à trois dimensions. 135

6.1 Allure des coefficients de la relation $A - M$ pour les approches caractéristique et cinématique pour $\gamma = 1.4$. 143
6.2 Allure de $A(M)$ pour les approches caractéristique et cinématique en échelle semi-logarithmique, $\gamma = 1.4$ et $M_0 = 1.1$. 144
6.3 Vitesse adimensionnée des perturbations le long du choc pour le modèles GSD (a_{GSD}) et KIN (a_{KIN}) en fonction du nombre de Mach M. 147
6.4 Limitation théorique des modèles GSD et KIN pour le problème de la diffraction sur un dièdre convexe. 147
6.5 Angle de la trajectoire du choc-choc calculé avec les modèles GSD et KIN pour l'angle de transition théorique entre réflexion régulière et irrégulière. 149
6.6 Schéma de la diffraction d'un choc plan sur un dièdre convexe et concave. . . . 150
6.7 Diffraction d'un choc plan sur un dièdre d'angle $\theta_w = -\frac{\pi}{2}$ $(-90°)$ à $M_0 = 2$ et $M_0 = 4$. Comparaison des modèles GSD et KIN avec des données expérimentales [143] et des simulations Eulériennes. 151
6.8 Diffraction d'un choc plan sur un dièdre à $\theta_w = -\frac{2\pi}{9}$ $(-40°)$ à $M_0 = 2$ et $M_0 = 4$. Comparaison des modèles GSD et KIN avec des simulations Eulériennes. 151
6.9 Diffraction d'un choc plan sur un dièdre d'angle θ_w à nombre de Mach M_0. Nombre de Mach au niveau de la paroi, M_w, en fonction de θ_w, en degré, pour différents nombres de Mach incidents M_0. Comparaison des modèles GSD et KIN avec des données expérimentales [120]. 152
6.10 Diffraction d'un choc plan sur un dièdre concave d'angle $\theta_w = \frac{\pi}{9}$ $(20°)$ à nombres de Mach 1.5, 2 et 4. Comparaison des modèles GSD et KIN avec des simulations Eulériennes. 153
6.11 Diffraction d'un choc plan à nombres de Mach 2, 4 et 10 sur une rampe d'angle $\theta_w > 0$. Comparaison des modèles GSD et KIN avec des données issues de simulations Eulériennes. 154
6.12 Diffraction d'un choc plan sur un merlon à nombres de Mach 1.1, 1.5, 2 et 4. Comparaison des modèles GSD et KIN avec des simulations Eulériennes. 157
6.13 Diffraction d'un choc plan sur une cuvette à nombres de Mach 2 et 4. Comparaison des modèles GSD et KIN avec des simulations Eulériennes. 157
6.14 Diffraction d'un choc plan sur un cylindre à nombre de Mach 2.81 et sur une sphère à nombre de Mach 2.85 (simulation 2D axisymétrique). Comparaison des modèles GSD et KIN avec des données expérimentales [143] et des données issues de simulations Eulériennes. 159

7.1 Schéma de la diffraction d'un choc plan sur un dièdre convexe. 165
7.2 Diffraction d'un choc plan de nombre de Mach M_0 sur un dièdre convexe d'angle $\theta_w < 0$. Nombre de Mach au niveau de la paroi après diffraction, M_w, pour différents angles de déviation θ_w (en degré) et différents nombres de Mach incidents M_0. 166
7.3 Fig. (a) : M_w^2 en fonction de M_0^2 issues des données expérimentales de Skews [120]. Fig. (b) : Pente $p(\theta_w)$ des courbes $M_w^2 - 1 = p(\theta_w)(M_0^2 - 1)$. 167

7.4 Solutions du modèle GSD pour le problème de la diffraction d'un choc plan à nombre de Mach 1.5 sur un dièdre convexe pour différentes inclinaisons de rampe. 168
7.5 Allure de la fonction $f(M)$ (eq. (7.12)) pour les modèles GSD et KIN. 172
7.6 Diffraction d'un choc plan à nombre de Mach 1.1 sur une rampe d'angle $-90°$. Fig. (a) : Comparaison de la forme du front de choc à l'instant $\alpha = 1$. Fig. (b) : Nombre de Mach le long du choc en fonction de l'angle d'inclinaison des rayons. 173
7.7 Distribution de points convexe (figure de gauche) et concave (figure de droite). 176
7.8 Présentation de la discrétisation "gros grain" du front de choc et interpolation quadratique limitée. 177
7.9 Exemple d'activation du terme transverse dans les zones expansives du choc. . 178
7.10 Diffraction d'un choc plan à nombre de Mach 2 sur un merlon. Étude de la convergence en maillage de la résolution numérique du modèle GSDT. 180
7.11 Diffraction d'un choc plan à nombre de Mach 1.05 sur un merlon. Étude de la convergence en maillage de la résolution numérique du modèle GSDT. 181
7.12 Diffraction d'un choc plan à nombre de Mach 1.05 sur un merlon. Influence du paramètre d_c. Simulations effectuées pour $\Delta s = 0.00125$. 182
7.13 Diffraction d'un choc plan à nombre de Mach M_0 sur une rampe d'angle $-90°$. Comparaison des modèles GSD, KIN et GSDT avec des données expérimentales [143]. 184
7.14 Diffraction d'un choc plan sur une rampe convexe. Nombre de Mach à la paroi, M_w, en fonction du nombre de Mach incident, M_0, pour différents angles de rampe θ_w ($-90° \leq \theta_w \leq -15°$). Comparaison des modèles GSD, KIN et GSDT avec des données expérimentales [120]. 185
7.15 Diffraction d'un choc plan sur une rampe convexe. Nombre de Mach à la paroi, M_w, en fonction du nombre de Mach incident, M_0, pour différents angles de rampe θ_w ($-165° \leq \theta_w \leq -105°$). Comparaison des modèles GSD, KIN et GSDT avec des données expérimentales [120]. 186
7.16 Diffraction d'un choc plan à nombre de Mach 2 sur un merlon tourné. Comparaison des modèles GSD et GSDT avec des données expérimentales [121]. . . . 187
7.17 Diffraction d'un choc plan à nombre de Mach 2 sur un merlon. Comparaison des modèles GSD, KIN, GSDT et KINT avec des simulations Eulériennes. 188
7.18 Diffraction d'un choc plan à nombre de Mach 4 sur un merlon. Comparaison des modèles GSD, KIN, GSDT et KINT avec des simulations Eulériennes. 190
7.19 Diffraction d'un choc plan à nombre de Mach 1.05 sur un merlon. Comparaison des modèles GSD et GSDT avec des simulations Eulériennes. 192

8.1 Évolution de la surpression du choc en champ libre pour l'explosion d'un kilogramme de TNT. Lois empiriques de Kinney (8.3) et Needham (8.4). Solutions des modèles GSD et KIN pour $M_0 \approx 10.124$ et $r_0 = 0.25$. 201
8.2 Contribution de l'expansion géométrique, $\frac{A'(r)}{A(r)} = \frac{2}{r}$, et des effets de souffle, $\frac{E_r(r)}{M_a(r)}$, dans la relation $A - M$ (8.9) pour les modèles GSDT et KINT et les lois de Kinney (8.3) et Needham (8.4). 203
8.3 Évolution de la surpression du choc en champ libre pour l'explosion d'un kilogramme de TNT. Lois empiriques de Kinney (8.3) et Needham (8.4) et solutions numériques obtenues avec l'algorithme Lagrangien pour $\Delta s = 0.01$. 205
8.4 Explosion de 1 kg de TNT à 1.59 m au-dessus du sol. Comparaison GSDT/GBD et KINT/KBD avec la formule empirique issue de [81]. 207
8.5 Interaction avec le sol d'un choc sphérique issu de l'explosion de 1 kg de TNT à une hauteur HOB (m) du sol. Comparaison des modèles GBD et KBD fermés par les lois de Kinney (8.3) et Needham (8.4) avec la formule empirique issue de [81]. 208
8.6 Présentation du merlon de type 1A [41]. 210

8.7 Présentation du merlon de type 1B [41]. 210
8.8 Surpression à la paroi sur le sommet du merlon 1AC3d8,5. Étude de la convergence en maillage du modèle GBD avec terme transverse (fig. (a)) et sans terme transverse (fig. (b)). 211
8.9 Merlon 1AC3d8,5. Comparaison des résultats des modèles GBD et KBD ($\Delta s = 0.25 \times 10^{-3}$) avec les données expérimentales et les données de simulations Eulériennes issues de [41]. 212
8.10 Merlon 1AC6d7. Comparaison des résultats du modèle GBD ($\Delta s = 0.5 \times 10^{-3}$) avec les données expérimentales et les données de simulations Eulériennes issues de [41]. 213
8.11 Merlon 1BC6d7. Comparaison des résultats du modèle GBD ($\Delta s = 0.5 \times 10^{-3}$) avec les données expérimentales et les données de simulations Eulériennes issues de [41]. 215
8.12 Merlon 1BC6d14. Comparaison des résultats du modèle GBD ($\Delta s = 0.5 \times 10^{-3}$) avec les données expérimentales et les données de simulations Eulériennes issues de [41]. 216

9.1 Schéma résumant les différents types de solutions du modèle GSD ordre 1 en symétrie radiale dans la limite des chocs forts (système (9.21)) en fonction de δ_0. 227
9.2 Solutions du modèle GSD tronqué à l'ordre 0 et 1 en symétrie sphérique ($d = 3$) pour différents Q_0, r_0 et M_0 sont fixés : $r_0 = 0.5$ $M_0 = 10$. 227
9.3 Angle de la trajectoire du choc-choc par rapport à la paroi, donné par le modèle GSD ($Q \equiv 0$) pour un choc fort, pour différents angles d'inclinaison de la rampe. Comparaison des valeurs théoriques avec les résultats donnés par le schéma Lagrangien présenté au chapitre 5 et le schéma de Best. 230
9.4 Diffraction d'un choc plan à nombre de Mach M_0 sur un dièdre convexe d'angle $-90°$. Comparaison du front de choc entre les modèles GSD, de Best (GSD ordre 1) et les données expérimentales issues de [143]. 231
9.5 Diffraction d'un choc plan à nombre de Mach 4 sur un dièdre convexe d'angle $-90°$. Nombre de Mach à la paroi pour les modèles GSD et de Best, et effets arrière à la paroi pour le modèle de Best. 231
9.6 Diffraction d'un choc plan à nombre de Mach M_0 sur un dièdre convexe d'angle $\theta_w < 0$. Nombre de Mach au niveau de la paroi, M_w, pour différentes inclinaisons de la rampe. Comparaison des modèles GSD et de Best avec des données expérimentales [120]. 232
9.7 Schéma résumant les différents types de solutions du modèle KIN ordre 1 en symétrie radiale dans la limite des chocs forts (système (9.102)). 250
9.8 Solutions du modèle KIN tronqué à l'ordre 0 et 1 en symétrie sphérique ($d = 3$) pour différents Z_0, r_0 et M_0 sont fixés : $r_0 = 0.5$ $M_0 = 10$. 250

A.1 Exemple d'application de l'option de raffinement automatique de maillage du logiciel HERA lors de l'interaction d'un choc soutenu à M=2,81 avec un cylindre. 277
A.2 Preuve de la convergence en maillage de la solution numérique obtenue avec le code HERA et l'extraction marching square pour le cas de la diffraction d'un choc plan sur un merlon à nombre de Mach incident $M_0 = 2$. 278

B.1 Présentation schématique d'un choc oblique. 280
B.2 Polaires de choc pour différentes valeurs de nombre de Mach incident M_1 (eq. (B.3)). 280
B.3 Représentation schématique d'une réflexion normale (fig. (a)) et d'une réflexion régulière d'angle d'incidence $\beta_1 < \pi/2$ (fig. (b)). 281
B.4 Schéma d'une réflexion de Mach directe dans le repère du choc. 282

B.5 Angle de transition théorique d'une réflexion régulière à une réflexion irrégulière en fonction du nombre de Mach incident du choc. 283

C.1 Interpolations spline cubique globale et locale sans limitation. Les données sont issues de [59] (fig. (a)) et de [125] (fig. (b)). 288
C.2 Interpolation spline cubique locale sans limitation, avec le limiteur minmod (C.17) et avec le limiteur de Steffen (C.18). Les données sont issues de [59] (fig. (a)) et de [125] (fig. (b)). 292
C.3 Interpolation spline cubique globale limitée par le limiteur minmod et le limiteur de Steffen. Les données (carrés noires) sont issues du graphe de $\exp(-x^2)$ (courbe en pointillée). 292
C.4 Définition de $Q_{i+1/2}$ sur $[s_i, s_{i+1}]$. Il s'agit de la médiane entre la droite (F_iF_{i+1}), la courbe Q_i (parabole interpolant les points F_{i-1}, F_i et F_{i+1}) et la courbe Q_{i+1} (parabole interpolant les points F_i, F_{i+1} et F_{i+2}). 294
C.5 Interpolation spline cubique globale limitée par le limiteur UNO (C.37) et le limiteur M3 (C.38). Les données (carrés noires) sont issues du graphe de $\exp(-x^2)$ (courbe en pointillée). 297

Liste des tableaux

1.1 Zones de dégâts engendrés par l'explosion de 1 kg de TNT en champ libre (sans obstacle) d'après [2] et [9]. 7

6.1 Exposant calculé pour le problème d'un choc fort convergent à symétrie cylindrique ($d = 2$) et sphérique ($d = 3$), pour un gaz parfait au repos, $\gamma = 1.4$. La solution exacte, donnée par Guderley [49], est comparée avec les modèles GSD et KIN. 145

6.2 Valeurs limites de M_0 pour différents angles d'inclinaison de la rampe pour avoir existence de la solution du problème de la diffraction d'un choc plan sur un mur convexe avec les modèles GSD et KIN (relation (6.18)). 148

7.1 Diffraction d'un choc plan à nombre de Mach 2 sur un merlon. Nombres de Mach théoriques au niveau de la paroi des modèles GSD, KIN, GSDT et KINT. . . . 189

7.2 Temps de calcul de l'algorithme Lagrangien pour résoudre les modèles GSD et GSDT pour les différents cas présentés en section 7.4. Simulations menées sur *Intel(R) Xeon(R) CPU E3-1120 v5@3.00GHz* pour $\Delta s = 0.00125$. 191

7.3 Nombres de Mach théoriques et numériques au niveau de la paroi des modèles GSD et GSDT pour le problème de la diffraction d'un choc plan à nombre de Mach 1.05 sur le merlon de la figure 7.19(a). 193

8.1 Nombre de Mach du choc sphérique, issu de l'explosion de 1 kg de TNT à une hauteur HOB du sol, au moment de l'impact avec le sol selon les lois de Kinney (8.3) et Needham (8.4). 207

8.2 Caractéristiques des cas d'étude issus de [41]. 209

8.3 Temps de calcul de l'algorithme Lagrangien pour résoudre le modèle GBD sur les cas d'étude pour différents pas Δs. Simulation menée sur *Intel(R) Xeon(R) CPU E3-1120 v5@3.00GHz*. 211

9.1 Valeurs de Q_1 et Q_2 délimitant les différents types de solutions du modèle GSD ordre 1 en symétrie radiale dans la limite des chocs forts (système (9.21)) pour $\gamma = 1.4$. 226

9.2 Exposant calculé pour le problème d'un choc fort convergent à symétrie cylindrique ($d = 2$) et sphérique ($d = 3$), pour un gaz parfait au repos, $\gamma = 1.4$. La solution exacte, donnée par Guderley [49], est comparée aux différents ordres d'approximation du modèle GSD. 228

9.3 Valeurs de Z_1 et Z_2 délimitant les différents types de solutions du modèle KIN ordre 1 en symétrie radiale dans la limite des chocs forts (système (9.102)) pour $\gamma = 1.4$. 249

9.4 Exposant calculé pour le problème d'un choc fort convergent à symétrie cylindrique ($d = 2$) et sphérique ($d = 3$), pour un gaz parfait au repos, $\gamma = 1.4$. La solution exacte, donnée par Guderley [49], est comparée aux différents ordres d'approximation du modèle KIN et du modèle GSD. Les exposants du modèle KIN ordre 2 sont tirés de [115]. 251

Introduction

Chapitre 1

Contexte de l'étude

Sommaire

1.1 Prévention des risques explosifs 5
1.2 Phénoménologie des ondes de souffle 6
1.3 Interaction d'une onde de choc avec une structure 11
1.4 Synthèse des méthodes de calcul rapide existantes 19
1.5 Modèles d'évolution de front 20
1.6 Objectif et démarche de l'étude 22
1.7 Contributions propres 25

Ce travail de thèse trouve son origine dans la volonté du CEA (Commissariat à l'Énergie Atomique et aux Énergies Alternatives) de mettre au point une méthode de calcul rapide de la propagation des ondes de souffle aériennes en interaction avec des géométries complexes. L'idée est d'avoir une estimation rapide, mais néanmoins fiable, de l'effet d'une explosion en présence d'une topographie ou en environnement urbain. Les applications possibles sont nombreuses, notamment pour la prévention des accidents industriels, la définition de modèles de source pour les codes de propagation acoustique, ou encore le calcul de chargement sur une structure. Le problème est toutefois complexe car il faut gérer à la fois le caractère fini de l'énergie de la source et l'interaction d'un front de choc mobile avec son environnement. La figure 1.1 illustre la phase de diffraction, instationnaire, d'une onde de choc plane avec un cylindre. On y voit la réflexion du choc incident sur la face avant de l'obstacle, et le choc principal, après passage du cylindre, garder les stigmates de cette rencontre. Ce phénomène se retrouve lors de l'interaction d'une onde de souffle avec la géométrie de son environnement. À titre d'exemple, sont présentées, en figure 1.2, deux images du front de choc suite à l'explosion, en laboratoire, d'une charge explosive au-dessus d'un sol rigide. L'onde incidente, sphérique cette fois, se réfléchit tout d'abord de manière assez naturelle sur le sol, puis un choc supplémentaire, appelé front de Mach (ou Mach stem en anglais) apparaît. Ce choc, qui fait le lien entre la paroi, le front incident, et le front réfléchi, est similaire à celui observé après le passage du cylindre sur la figure 1.1. La méthode rapide à mettre au point devra ainsi être en mesure de restituer ces phénomènes complexes de diffraction qui modifient la vitesse du choc et donc son intensité.

Nos travaux s'inscrivent dans la continuité des actions initiées par Y. Noumir lors de son post-doctorat (2011-2013), et par A. Sarrazin lors de son année de césure de l'ENPC (2013-2014). Le premier s'est intéressé à la compréhension d'un modèle simplifié de propagation de chocs et à la mise au point d'un algorithme de résolution de type level-set [85]. Le second a travaillé sur l'optimisation de l'algorithme et son extension aux ondes de souffle [104]. À la suite

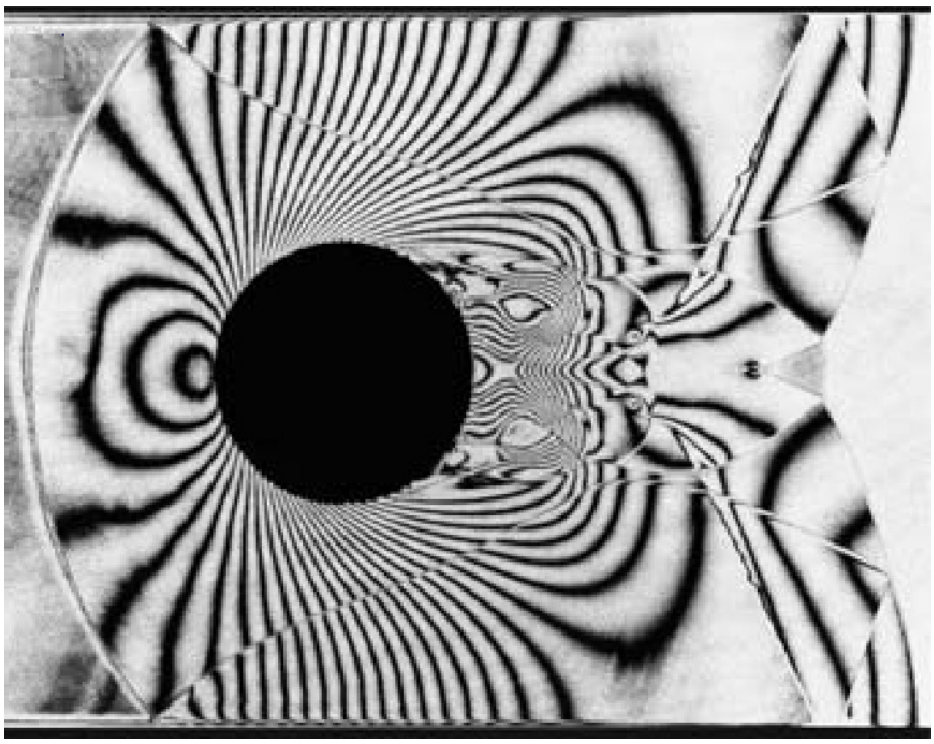


FIGURE 1.1 – Diffraction d'une onde de choc se déplaçant de la gauche vers la droite à nombre de Mach 2.23 autour d'un cylindre en conduite. Image, d'après [66], obtenue par interférométrie holographique.

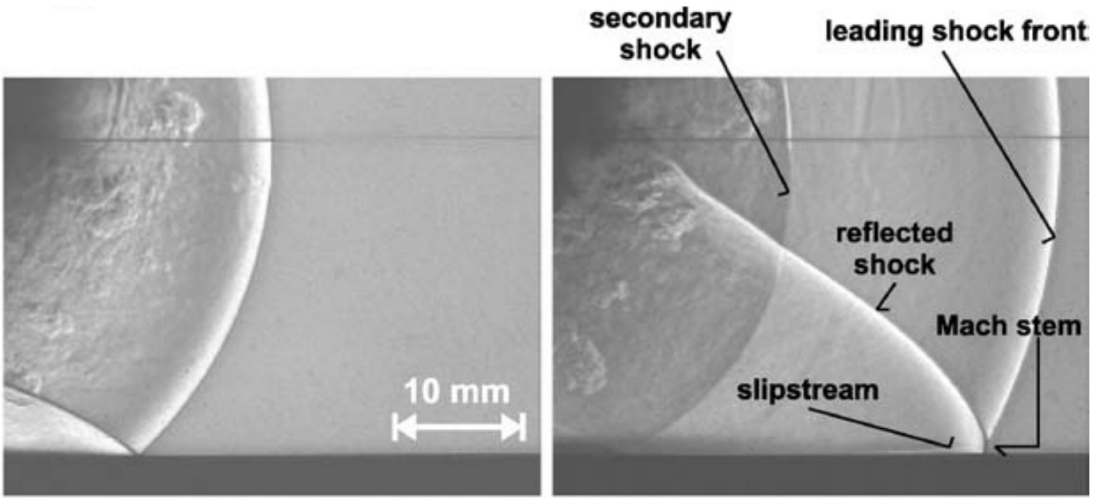


FIGURE 1.2 – Réflexion d'une onde de souffle sur une surface plane suite à l'explosion d'une charge de 10 mg d'$AgNO_3$ à 3 cm au-dessus du sol. Image d'après [67]. À gauche, à 62 µs, la réflexion est régulière. À droite, à 120 µs, un front de Mach est présent.

de ces études, deux limitations sont apparues : l'algorithme n'est pas conservatif et le modèle mathématique présente un défaut lors des détentes. Cette thèse vise à lever ces défauts.

1.1 Prévention des risques explosifs

La sécurité des biens et des personnes est un enjeu capital de nos sociétés modernes. Nous avons tous en mémoire les images de l'accident de l'usine AZF de Toulouse survenu en 2001 : 31 morts dont plusieurs à plus de 400 m du foyer, près de 2500 blessés jusqu'à plusieurs kilomètres, et des dégâts matériels considérables [82]. La figure 1.3 de droite trace les iso-niveaux de surpression reconstruits par l'INERIS à partir des dommages observés [36]. Ces courbes ne sont pas circulaires : l'environnement local a fortement affecté la propagation de l'onde de souffle. Suite à cette catastrophe, la législation sur la prévention des risques industriels a été renforcée [2]. Parmi les mesures engagées par les instances de la sécurité industrielle, on notera :

- La réduction du danger à la source (nouvelles normes pour la construction de sites sensibles et modernisation des sites existants) ;
- La maîtrise de l'urbanisation par la mise en place d'un Plan de Prévention des Risques Technologiques (PPRT) pour limiter l'exposition accidentelle de la population (*cf.* Fig. 1.4) ;
- La mise en place de barrières de protection ;
- L'information préventive des populations et l'organisation des secours.

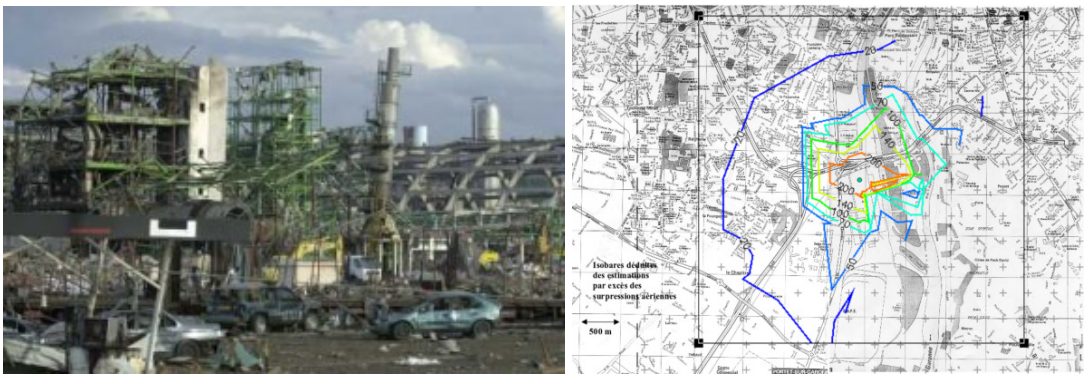


FIGURE 1.3 – À gauche, photographie du site industriel de l'usine AZF après l'explosion du 21 septembre 2001, d'après [82]. À droite, niveaux de surpression, en mbar, estimés par l'INERIS à partir des dommages observés [36].

Concernant le risque explosif, sur lequel se focalise cette thèse, la législation française définit les zones d'effet des explosions en fonction du maximum local de surpression statique, *cf.* table 1.1 et figures 1.4 et 1.5. Ce pic de surpression est ensuite traduit en distance d'effet au travers d'abaques champ libre (*i.e.* cas idéalisé en absence de tout obstacle) le plus souvent. À titre d'exemple, pour 1 kg de TNT [1], soit une sphère d'environ 5 cm de rayon, la fin de la dernière zone est à 44 m du centre de la charge. La différence d'ordre de grandeur de ces échelles spatiales rend extrêmement coûteuse la simulation 3D directe des ondes de souffle en configuration réelle, ce qui explique l'utilisation d'abaques en pratique. Pour aller plus loin, des méthodes alternatives doivent être développées afin de fournir une estimation rapide, mais fiable, de ces zones d'effet.

1. TNT : Trinitrotoluène, $C_7H_5N_3O_6$.

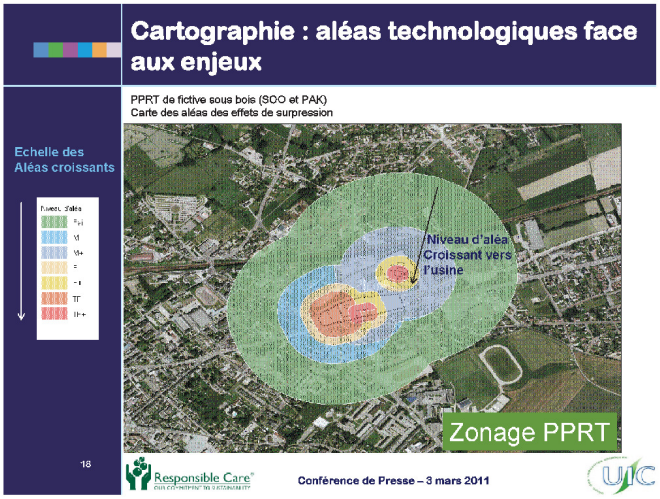


FIGURE 1.4 – Exemple de zonage PPRT autour d'un site industriel fictif [133].

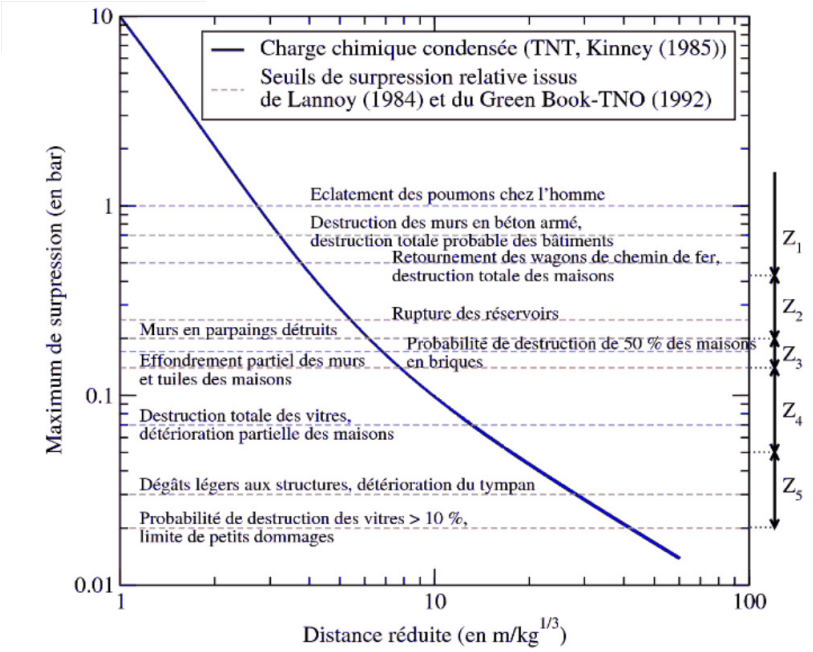


FIGURE 1.5 – Évolution du maximum de surpression et des seuils d'effets de la surpression pour une charge de TNT. Figure issue de [41].

1.2 Phénoménologie des ondes de souffle

Une explosion est caractérisée par la libération soudaine d'une quantité finie d'énergie [9]. La détente des produits de détonation conduit à la création d'une onde de choc se propageant dans le milieu ambiant. Après une certaine distance, la forme temporelle typique du profil de pression mesuré en un point de l'espace est présentée en figure 1.6. À un instant t_a, appelé *temps d'arrivée*, l'onde de choc atteint le point d'observation. Le choc incident est alors caractérisé par le pic de surpression ΔP^+. Ce pic s'atténue rapidement avec le temps pour revenir à la

Zone	Z1	Z2	Z3	Z4	Z5
Surpression maximale (bar)	0.430	0.200	0.140	0.050	0.020
Nombre de Mach du choc	1.170	1.082	1.058	1.021	1.008
Dégâts observables	Ruines	Effet domino	Graves	Légers	Bris de vitre
Conséquences sur l'Homme	Blessures mortelles ($> 50\%$ des cas)	Très graves	Graves	Significatives	Effets indirects par bris de verre
Distance champ libre pour 1 kg de TNT	< 4 m	< 6 m	< 8 m	< 18 m	< 44 m

TABLE 1.1 – Zones de dégâts engendrés par l'explosion de 1 kg de TNT en champ libre (sans obstacle) d'après [2] et [9]. Le nombre de Mach du choc est calculé à l'aide de la relation de Rankine-Hugoniot (1.7b).

valeur de la pression ambiante, p_0, sur une durée caractéristique t^+ appelée *durée de la phase positive*. À l'issue de la phase positive, la pression continue de chuter à des valeurs inférieures à la pression ambiante puis croît de nouveau pour retrouver la valeur de repos p_0, et ainsi de suite avec des variations d'amplitudes de plus en plus faibles. La phase de dépression, caractérisée par le minimum de dépression ΔP^- et l'impulsion négative I^-, est appelée *phase négative*.

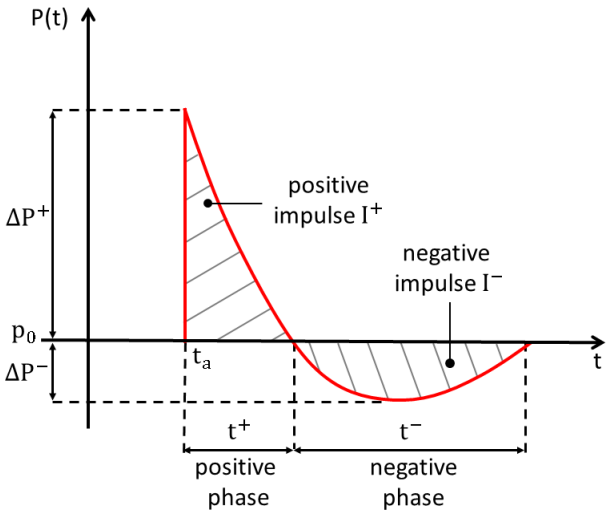


FIGURE 1.6 – Évolution temporelle de la pression en un point de l'espace en champ libre (absence de tout obstacle) d'après [64].

D'un point de vue spatial, l'onde de choc initiale est rapidement rattrapée par les détentes arrières qui affaiblissent son intensité, en plus de l'expansion géométrique. Pour une source ponctuelle en configuration idéalisée (*i.e.* sans obstacle), un régime auto-semblable s'établit théoriquement au voisinage de la source où le choc est fort, conduisant à une décroissance rapide du pic de surpression avec la distance [76, 128] :

$$\frac{\Delta p^+}{p_0} \propto \frac{1}{r^d}, \tag{1.1}$$

où r est la distance au centre de la charge, et $d = 1$ en symétrie plane, $d = 2$ en symétrie

cylindrique et $d = 3$ en symétrie sphérique. En champ lointain, l'intensité du choc atteint un régime acoustique et le profil de pression, schématisé en figure 1.6, dégénère en une onde en N pour laquelle les phases positives et négatives ont un poids similaire. On montre alors, en suivant la théorie de l'acoustique non-linéaire [50], que la surpression décroît comme :

$$\frac{\Delta p^+}{p_0} \propto \begin{cases} r^{-1/2} & \text{pour } d = 1, \\ r^{-3/4} & \text{pour } d = 2, \\ r^{-1}\ln(r)^{-1/2} & \text{pour } d = 3. \end{cases} \tag{1.2}$$

À la décroissance géométrique en $r^{-(d-1)/2}$, associée à la conservation de l'énergie, s'ajoute une décroissance supplémentaire due aux effets non-linéaires ($r^{-1/4}$ en symétrie cylindrique et $\ln(r)^{-1/2}$ en symétrie sphérique). La transition entre le régime de choc fort, près de la source, et le régime de choc faible, loin de celle-ci, n'est pas établie analytiquement. Des simulations numériques [94], ou des formules empiriques décrites plus loin, rendent compte de cette phase intermédiaire.

La *similitude de Hopkinson* [64] introduit un facteur d'échelle important pour l'étude des ondes de souffle. Comme illustré en figure 1.7, un observateur situé à une distance d du centre d'une source explosive sphérique, de rayon r_0 et d'énergie E, sera soumis à une onde de choc d'amplitudes de phases positive et négative ΔP^+ et ΔP^-, de durées t^+ et t^-, et d'impulsions I^+ et I^-. La similitude de Hopkinson indique qu'un observateur placé à une distance kd du centre d'une source de rayon kr_0, d'énergie k^3E, sera soumis à une onde de choc de mêmes amplitudes ΔP^+ et ΔP^-, mais avec des temps d'arrivée et d'application, et donc des impulsions, multipliés par le facteur d'échelle k. En pratique, la distance au centre de la charge, r, est ainsi souvent rapportée à la masse d'équivalent TNT de l'explosif, W (en kg). Le facteur d'échelle $W^{1/3}$ permet de définir la distance réduite $Z = \frac{r}{W^{1/3}}$.

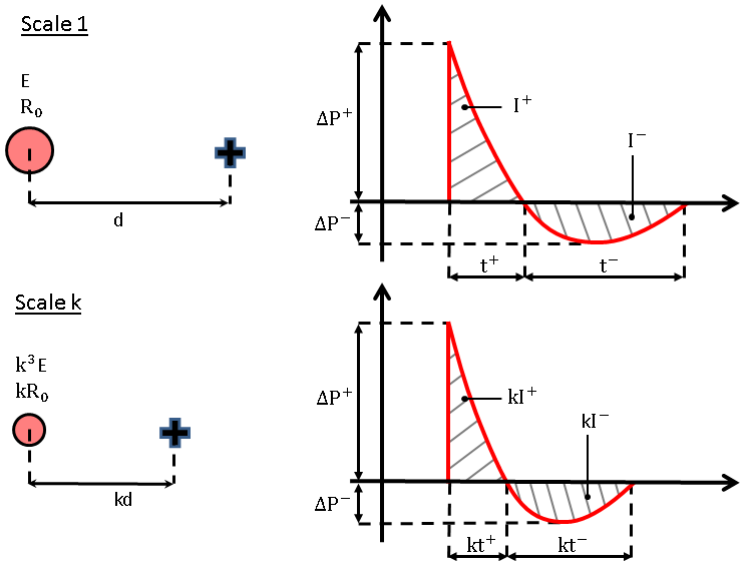


FIGURE 1.7 – Présentation du principe de la similitude de Hopkinson [64].

Dans le cas d'une charge gazeuse, la distance réduite s'exprime en fonction de l'énergie, E

en MJ, dégagée par la combustion (par exemple pour $C_xH_y + n_{O_2}O_2$) [69] :

$$\lambda = \frac{r}{E^{1/3}}. \tag{1.3}$$

On se ramène à une masse d'explosif en équivalent TNT à l'aide de l'énergie massique $E_{TNT} = 4.520$ MJ/kg [9], de sorte que les expressions de Z et λ sont liées :

$$Z = E_{TNT}^{1/3}\lambda.$$

Le pic de surpression ΔP^+ et l'impulsion positive $I^+ = \int_{t_a}^{t^+}(P(t) - p_0)\mathrm{d}t$, où $P(t)$ est le profil temporel de pression, sont les principaux facteurs qui caractérisent le chargement exercé sur une structure. La phase négative est rarement considérée en pratique. Le profil de pression schématisé en figure 1.6 est bien estimé par l'équation modifiée de Friedlander [9] :

$$P(t) = \Delta P^+ \left(1 - \frac{t - t_a}{t^+}\right) \mathrm{e}^{-\frac{t-t_a}{\theta}} + p_0 \quad \text{pour } t_a \leq t \leq t_a + t^+, \tag{1.4}$$

où θ est un temps caractéristique. Les valeurs des paramètres t_a, ΔP^+, et θ sont tabulées pour une charge sphérique de 1 kg de TNT dans [64]. Diverses formules analytiques, fonction de $Z = r/W^{1/3}$ (en m/kg$^{1/3}$), ont également été proposées. On citera notamment les lois dites de Kinney [64] :

$$\frac{\Delta P^+}{p_0} = 808 \frac{1 + \left(\frac{Z}{4.5}\right)^2}{\sqrt{\left(1 + \left(\frac{Z}{0.048}\right)^2\right)\left(1 + \left(\frac{Z}{0.32}\right)^2\right)\left(1 + \left(\frac{Z}{1.35}\right)^2\right)}} \tag{1.5a}$$

$$\frac{t^+}{W^{1/3}} = 980 \frac{1 + \left(\frac{Z}{0.54}\right)^{10}}{\left(1 + \left(\frac{Z}{0.02}\right)^3\right)\left(1 + \left(\frac{Z}{0.74}\right)^6\right)\sqrt{1 + \left(\frac{Z}{6.9}\right)^2}} \tag{1.5b}$$

$$\frac{I^+}{W^{1/3}} = 0.067 \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{Z}{0.23}\right)^4}}{Z^2\left(1 + \left(\frac{Z}{1.55}\right)^4\right)^{1/3}}. \tag{1.5c}$$

La loi (1.5a) fournit une approximation de l'évolution de la surpression maximale au passage du choc en champ libre. On notera, du fait du caractère non ponctuel de la source chimique, que le comportement en champ proche est fini, différent de la décroissance en r^{-3} attendue théoriquement (1.1). De plus, la surpression du choc décroît en r^{-1} en champ lointain contre $r^{-1}\ln(r)^{-1/2}$ pour une onde acoustique (1.2). La loi empirique de Needham [83], appliquée à un explosif chimique, décrit correctement ces comportements asymptotiques, avec un raccord intermédiaire assez proche de la loi de Kinney, *cf.* figure 1.8. Cette loi s'exprime comme

$$\Delta P^+ = \frac{3.04 \times 10^5}{Y^3} + \frac{1.13 \times 10^5}{Y^2} + \frac{7.9 \times 10^4}{Y\sqrt{\ln\left(\frac{Y}{4.454} + 3\exp\left(-\sqrt{\frac{Y}{4.454}}/3\right)\right)}}, \tag{1.6}$$

où $Y = r/(2W)^{1/3} = Z/2^{1/3}$.

À titre illustratif, les experts [36] ont estimé que l'énergie dégagée lors de l'explosion de l'usine AZF est comprise entre 20 t et 40 t d'équivalent TNT. En supposant une énergie moyenne de 30 t au sol, soit le double par effet miroir, les niveaux de pression définis à la table 1.1 sont retranscrits sous forme de cercles concentriques sur la figure 1.9. La zone Z5,

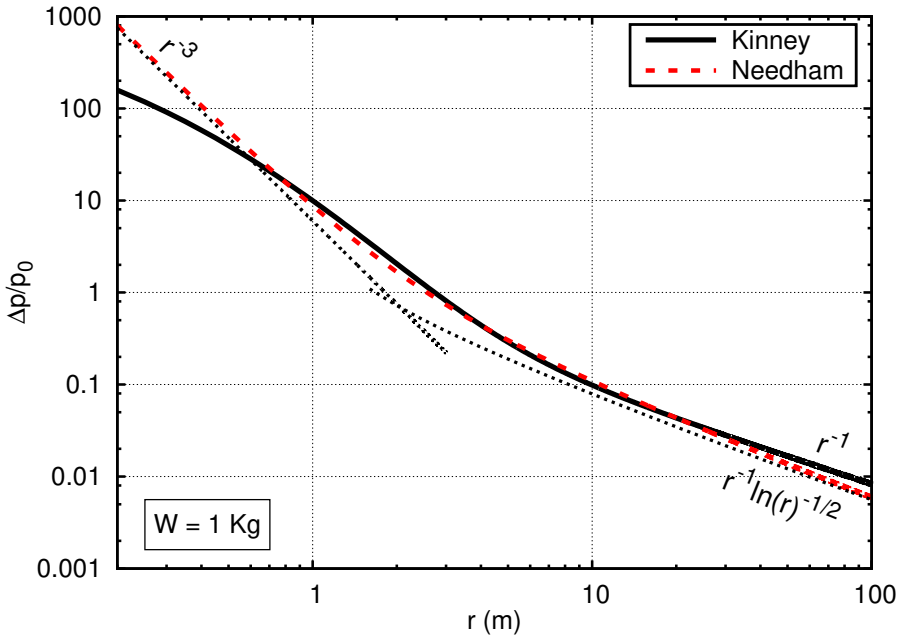


FIGURE 1.8 – Évolution de la surpression du choc en champ libre pour l'explosion d'un kilogramme de TNT selon les lois empiriques de Kinney (1.5a) et Needham (1.6).

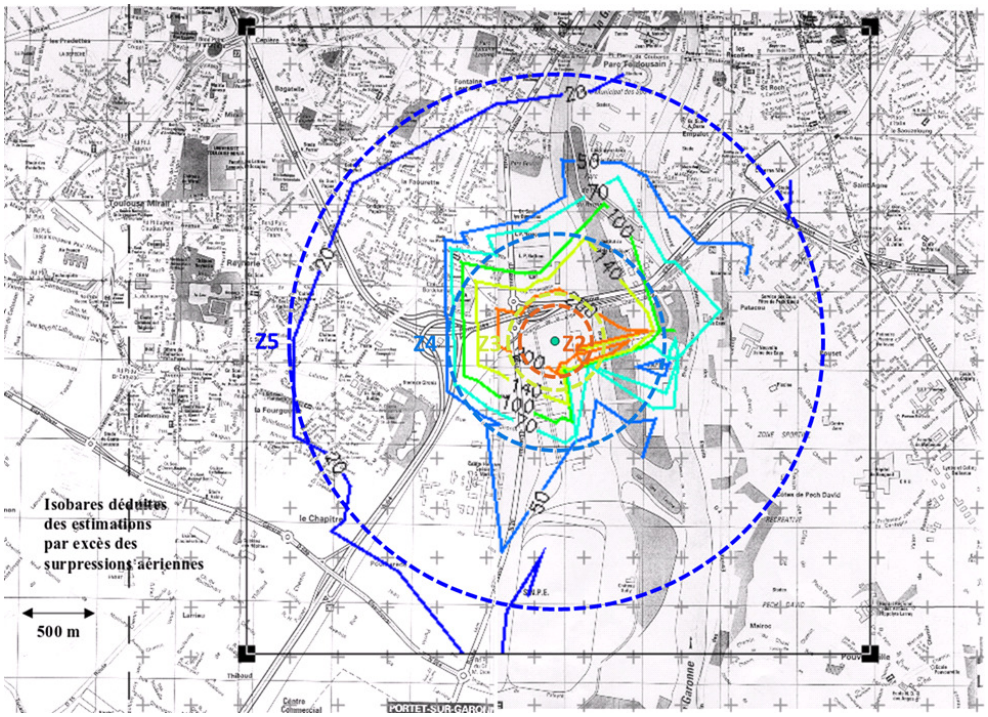


FIGURE 1.9 – Application à l'accident de l'usine AZF de la notion de zone d'effet définie au tableau 1.1. Superposition des zones relevées à celles attendues en champ libre pour une source hypothétique de 30 t de TNT au sol. Les niveaux de pression sont en mbar.

marquant la fin de la zone de bris de vitre, est globalement bien restituée, mais la zone champ proche relevée présente une forte anisotropie liée vraissemblablement à l'environnement local. Cet exemple montre les limites de l'approche par abaques. Posséder une méthode de calcul rapide, et fiable, des effets des ondes de souffle en champ proche permettrait de mieux répondre aux exigences de la réglementation sur la prévention des risques industriels. Avant cela, revenons aux fondamentaux.

1.3 Interaction d'une onde de choc avec une structure

L'interaction d'une onde de choc avec un élément géométrique, ou structure, supposé infiniment rigide, est un problème complexe qui dépend de plusieurs paramètres tels que l'intensité de l'onde, l'angle d'incidence, et la forme de la structure entre autres [15]. Plusieurs phénomènes physiques peuvent alors coexister : diffraction, recombinaison d'ondes, et réflexion (régulière ou non) sur la paroi, *cf.* figure 1.10. Des ondes réfléchies apparaissent également, conduisant à l'enregistrement potentiel de plusieurs pics de pression en un point de l'espace. Une synthèse de ces phénomènes est présentée dans cette section.

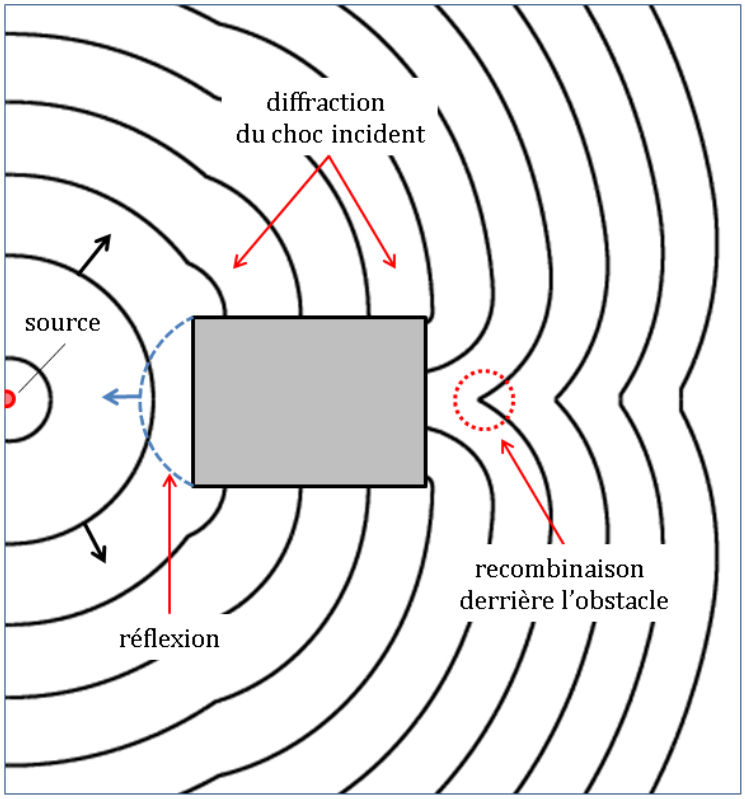


FIGURE 1.10 – Schéma de principe de l'interaction d'une onde de choc avec un obstacle. Illustration des phénomènes de réflexion, de diffraction, et de recombinaison.

Relations de saut au travers d'un choc

Comme illustré en section précédente, l'onde de choc générée par une explosion se propage dans l'air en faisant varier brutalement [2] les propriétés du milieu amont. Cela se traduit mathématiquement par une discontinuité entre deux états : l'état initial de l'atmosphère indexé par 1 (état en amont du choc) et l'état aval indexé par 2 (*cf.* Fig. 1.11). Ces états ne sont

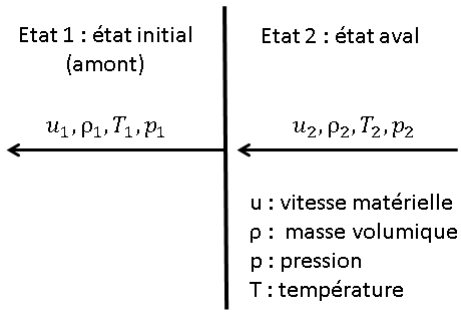


FIGURE 1.11 – Représentation des états amont et aval lors du déplacement d'une onde de choc monodimensionnelle, repère lié au choc.

toutefois pas quelconques, ils sont reliés au travers des relations de Rankine-Hugoniot. Celles-ci traduisent la conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie au travers du choc. Dans le cas d'un écoulement monodimensionnel, adiabatique, non visqueux, les variations de vitesse du fluide u, de masse volumique ρ, et de pression p s'expriment, relativement à la vitesse du choc, comme [142] :

$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{(\gamma-1)M_1^2+2}{(\gamma+1)M_1^2} \tag{1.7a}$$

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2\gamma M_1^2+1-\gamma}{\gamma+1}. \tag{1.7b}$$

Le nombre de Mach du choc, $M_1 \geq 1$, est défini comme le rapport de la vitesse du choc à celle du son dans le milieu ambiant, c_1. Dans le repère lié au choc, on a $M_1 = \frac{u_1}{c_1}$. Le saut de pression au travers du choc, $p_2 - p_1$, définit l'intensité de celui-ci.

Dans le cas des ondes de souffle, on peut tracer le nombre de Mach du choc en utilisant la loi empirique de Needham (1.6) par exemple, *cf.* figure 1.12, et constater que la vitesse du front décroît très rapidement avec la distance.

Phénomènes de réflexion

L'interaction d'une onde de choc avec une surface rigide résulte en une réflexion non triviale, comme illustré en figure 1.13.

L'intensité du choc réfléchi dépend de l'intensité de l'onde incidente et de son angle avec la paroi. En pratique, la pression réfléchie, p_r, est souvent donnée via le coefficient de réflexion, C_r, défini comme le rapport de la surpression réfléchie à la surpression incidente :

$$C_r = \frac{p_r - p_1}{p_2 - p_1},$$

p_1 étant la pression atmosphérique et p_2 la pression à l'arrière du choc incident. Des abaques graphiques, comme celui issu de la référence TM5-1300 [3], permettent d'estimer rapidement ce coefficient, *cf.* figure 1.14.

2. Nous ne discuterons pas de l'épaisseur physique du choc. Pour les applications visées, l'hypothèse de surface de discontinuité est suffisante.

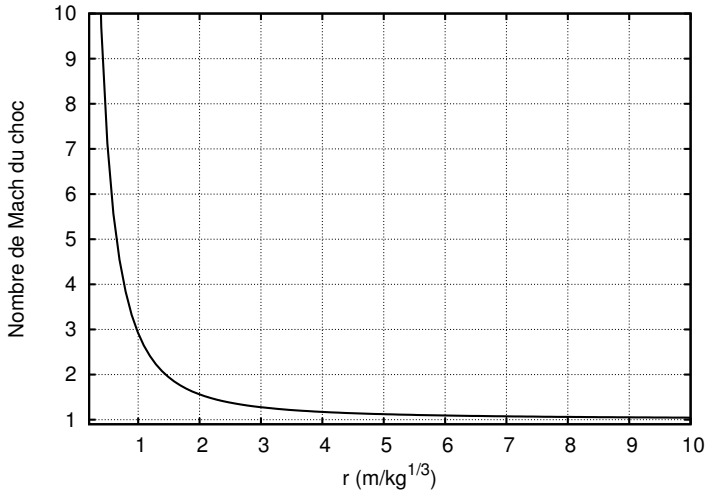


FIGURE 1.12 – Nombre de Mach du choc calculé à partir de la loi de Needham (1.6) lors de l'explosion d'une charge sphérique de TNT en champ libre.

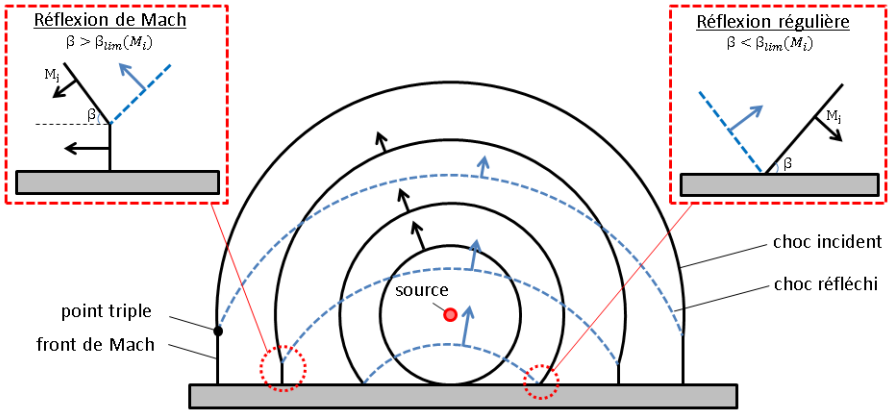


FIGURE 1.13 – Schéma de principe de l'interaction d'un choc fort sphérique avec le sol. Réflexion régulière et réflexion de Mach.

On notera tout d'abord qu'en choc fort, lors de l'interaction à incidence normale, i.e. $\beta = 0°$, le coefficient de réflexion est supérieur à huit [3]. Ces abaques tiennent ainsi compte des effets de haute température sur γ. Toutefois, le niveau de pression à considérer pour les ondes de souffle étant rapidement assez faible, inférieur à 0.43 bar d'après la table 1.1, on pourra supposer que $\gamma = 1.4$ dans le cadre de cette thèse. En choc faible, on retrouve un coefficient intuitif de deux. On notera également qu'à mesure que l'angle d'incidence augmente, le coefficient de réflexion diminue puis reforme un pic : la réflexion n'est plus régulière, un front de Mach se forme. Enfin, pour $\beta = 90°$, le choc glisse le long de la paroi et $C_r = 1$.

La transition d'une réflexion régulière à non régulière a été étudiée par de nombreux auteurs. Von Neumann s'est intéressé théoriquement à ce sujet dès 1943 [135]. Le diagramme de Ben-Dor [15], figure 1.15 issue de [41], présente les différents régimes répertoriés.

3. La surpression réfléchie est en effet donnée par $p_r - p_1 = 2(p_2 - p_1) + (\gamma + 1)q$ où q est la pression dynamique. Après calcul on obtient ainsi $C_r^{normal} = \frac{(3\gamma-1)p_2+(\gamma+1)p_1}{(\gamma-1)p_2+(\gamma+1)p_1}$ qui tend vers huit en choc fort en supposant que $\gamma = 1.4$.

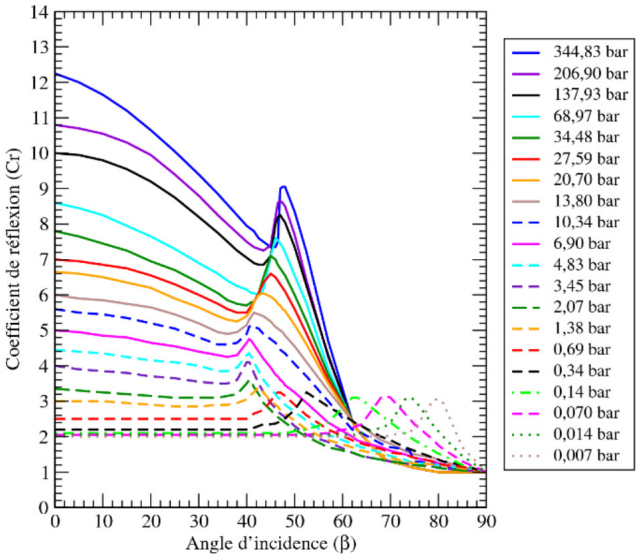


FIGURE 1.14 – Coefficients de réflexion, issus de [3], d'un choc plan sur une surface plane en fonction de l'angle d'incidence (β) pour différentes valeurs de la surpression incidente.

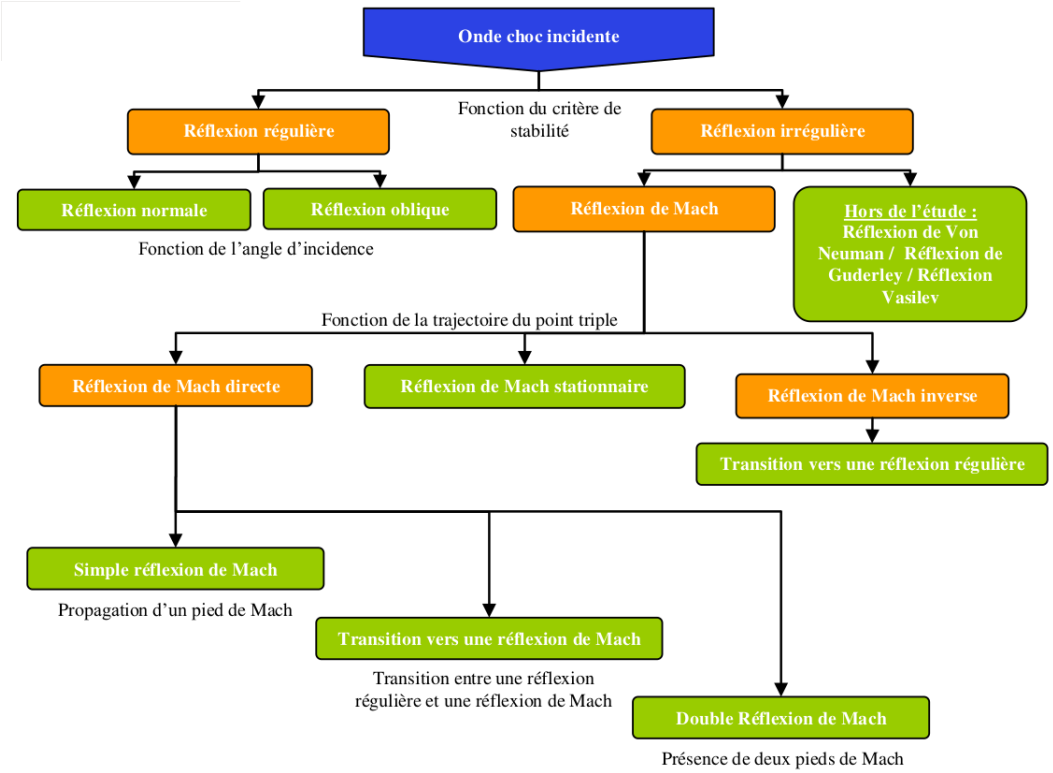


FIGURE 1.15 – Diagramme des différents régimes de réflexions selon Ben-Dor [15]. La figure est issue de [41].

L'appartenance à l'un de ces régimes dépend de la vitesse incidente du choc (le nombre de Mach incident M_i) et de son angle d'incidence β (angle entre la normale au choc incident et la tangente à la paroi). Selon la valeur de ces paramètres, deux types de réflexion sont observés (*cf.* Fig. 1.13). La réflexion régulière (RR) correspond à une réflexion spéculaire mais avec des angles d'incidence et de réflexion non égaux en général. Lorsque l'angle d'incidence est plus grand qu'un angle limite β_{lim}, dépendant de l'intensité incidente de l'onde, le choc réfléchi n'est plus attaché à la paroi. On parle alors de réflexion irrégulière (RI) ou non régulière. Dans ce cas, une troisième onde apparaît, le front de Mach, joignant la paroi et les chocs incident/réfléchi en un point dit triple. L'angle de transition entre ces deux régimes de réflexion peut être estimé théoriquement en fonction du nombre de Mach incident, M_i. Cet aspect est détaillé en annexe B. La formulation empirique établie par Kinney [64] permet d'estimer rapidement cet angle de transition :

$$\beta_{lim} = \frac{1.75}{M_i - 1} + 39.$$

En figure 1.16 sont tracés les angles de transition théorique et empirique entre une réflexion régulière et une une réflexion irrégulière. Pour un nombre de Mach incident approchant l'unité (limite du choc faible), l'angle d'incidence de transition entre ces deux régimes se rapproche de 90° et la réflexion est régulière dans la plupart des cas. Lorsque l'intensité du choc augmente, cet angle limite diminue rapidement et tend vers 40° environ. Cette transition d'un régime à l'autre a été observée expérimentalement autour de l'angle de transition théorique β_{lim}. L'expérience montre toutefois que la réflexion régulière peut persister au-delà de cet angle en raison des forces visqueuses [11].

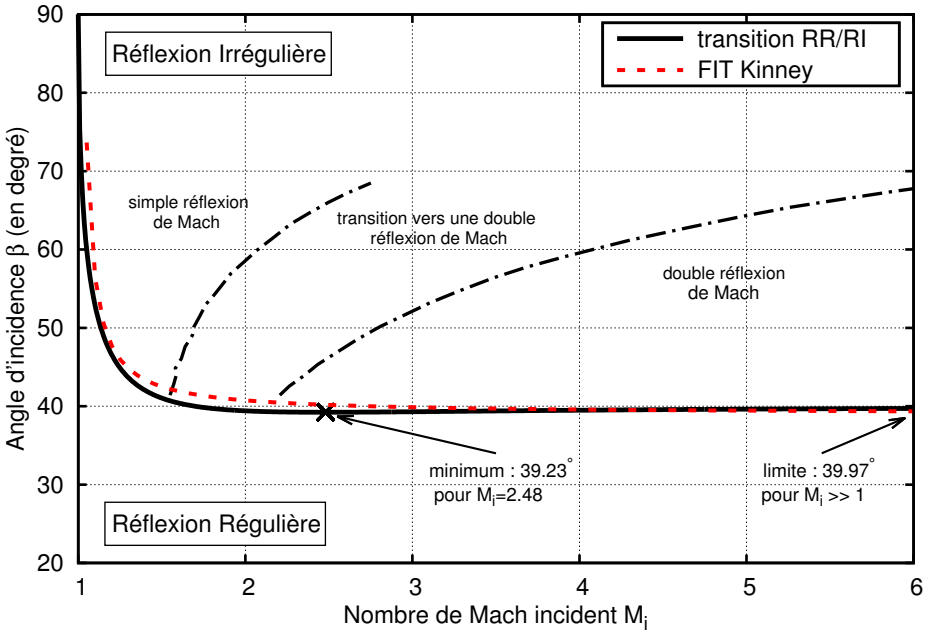


FIGURE 1.16 – Transition d'une réflexion régulière (RR) à une réflexion irrégulière (RI), et transition entre une simple réflexion de Mach et une double réflexion de Mach. Les courbes pointillées noires délimitent les régimes de simple et double réflexion de Mach et proviennent de données expérimentales [11].

La réflexion de Mach est caractérisée par un front localement perpendiculaire à la paroi, relié aux chocs incident et réfléchi par un point singulier, appelé point triple. Le front de Mach, ou pied de Mach (nommé ainsi après sa première observation expérimentale par Ernst Mach en 1878 [78]), peut être vu comme la fusion des ondes incidente et réfléchie ce qui génère une

amplification du pic de surpression, *cf.* figure 1.14. Suivant la trajectoire du point triple, on distingue trois régimes de réflexion de Mach :

- la réflexion de Mach directe, lorsque le point triple s'éloigne de la paroi. La réflexion est dite simple réflexion de Mach lorsqu'un seul front de Mach est présent. Dans le cas d'une double réflexion de Mach [14], un second pied de Mach se forme à l'arrière du premier. Ce type de réflexion n'est pas étudié dans le cadre de cette thèse. La transition entre réflexion de Mach simple et réflexion de Mach double est représentée en figure 1.16 à titre indicatif ;
- la réflexion de Mach stationnaire, lorsque la trajectoire du point triple est parallèle à la paroi ;
- la réflexion de Mach inverse, lorsque le point triple tend à se rapprocher de la paroi. Dans ce cas, on retrouve une réflexion régulière au moment où le point triple atteint la surface.

Pour un choc d'intensité faible (M_i proche de l'unité), le front de Mach est courbé et la transition entre le pied de Mach et le choc incident est continue. Il s'agit de la réflexion de von Neumann [14], qui n'est également pas traitée dans ce travail.

Pour un choc sphérique suffisamment fort, une réflexion irrégulière peut ainsi apparaître au-delà d'une certaine distance. Prenons le cas d'une charge explosive se trouvant à une hauteur HOB (Height Of Burst en anglais) au-dessus d'un sol plat, *cf.* Fig. 1.17. L'onde de choc interagit d'abord de manière normale (perpendiculaire) à la surface, puis l'angle d'interaction β augmente jusqu'à atteindre environ 40°. La réflexion devient alors non régulière à partir de la distance x_m. Des abaques permettent d'estimer cette distance de transition, ainsi que

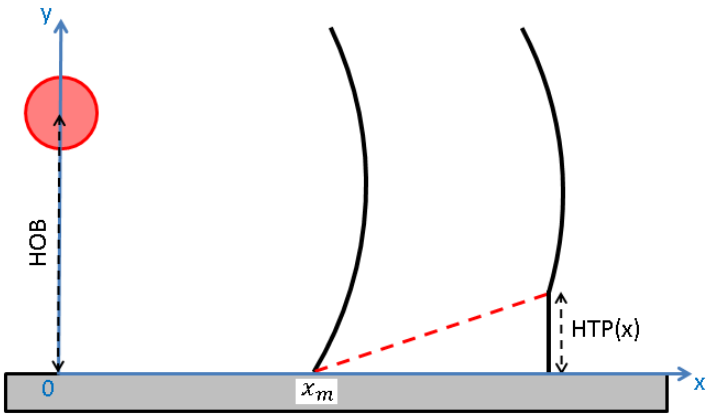


FIGURE 1.17 – Représentation schématique de la réflexion de l'onde de souffle sphérique sur le sol.

la hauteur du point triple, HTP pour Height of Triple Point, en fonction de la hauteur de la charge et de la distance à la source x. Parmi ces abaques, la formule issue de [81] et adaptée au cas des explosifs chimiques, est retenue. La distance normalisée (en m/kg$^{1/3}$) de formation du front de Mach est définie par

$$x_m = \frac{\mathrm{SHOB}^{2.5}}{5822} + 2.09 \cdot \mathrm{SHOB}^{0.75}, \tag{1.8}$$

où SHOB est la hauteur de la charge, en mètres, rapportée à la masse de l'explosif W en kg de TNT : $\mathrm{SHOB} = 100/2^{1/3}\,\mathrm{HOB}/W^{1/3}$. La hauteur physique du point triple, en mètres, est donnée par la formule :

$$\mathrm{HTP}(x) = W^{1/3} \frac{h + \left[h^2 + \left(\frac{100x}{(2W)^{1/3}} - 0.9x_m\right)^2 - \frac{x_m^2}{100}\right]^{1/2}}{5.98 \times 10^{-5} \cdot \mathrm{SHOB}^2 + 3.8 \times 10^{-3} \cdot \mathrm{SHOB} + 0.766}, \tag{1.9}$$

avec $h = 0.9x_m - 3.6 \cdot$SHOB. Pour x suffisamment grand, le point triple évolue linéairement avec la distance.

Phénomènes de diffraction

Lorsqu'un choc se diffracte sur un coin concave, i.e. une rampe de compression, un front de Mach peut apparaître au voisinage de la paroi, de manière similaire au cas précédent. Pour le cas d'un coin convexe, le choc voit son intensité diminuer de par le volume de gaz qu'il entraîne. L'écoulement à l'arrière du front devient complexe : un tourbillon apparaît au niveau du coin et un faisceau de détente se met en place, affectant le choc pendant sa propagation [11]. La figure 1.18 présente une image issue d'un cas mixte où un choc plan interagit d'abord avec une rampe de compression, puis le front de Mach se détend au passage d'un coin à 90°. Le tourbillon de coin interagit alors avec la ligne de glissement issue du point triple.

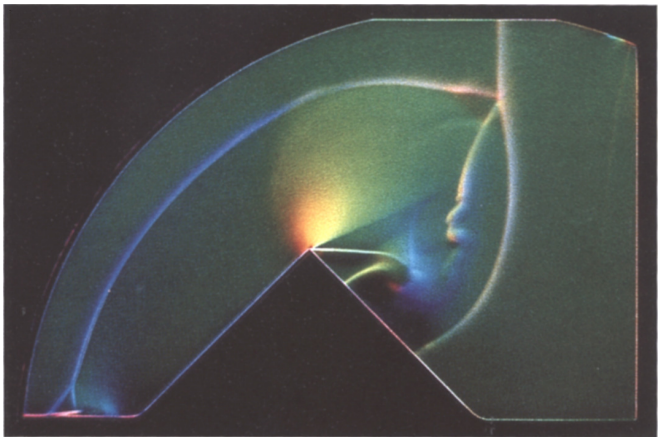
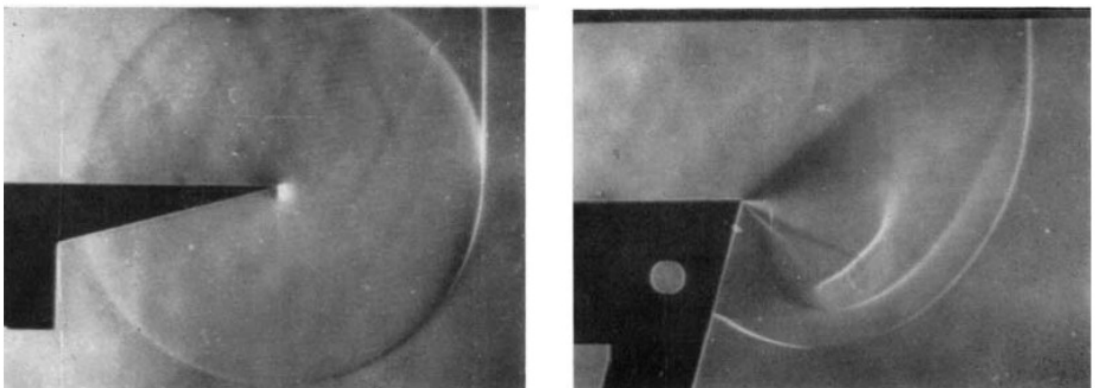


FIGURE 1.18 – Interaction d'une onde de choc plane à nombre de Mach 2.25, se déplaçant de la gauche vers la droite, avec une rampe de compression/détente. Image d'après [65].

Pour le cas élémentaire d'un choc plan se diffractant autour d'un coin, la théorie de Lighthill [75], basée sur les équations linéarisées de la dynamique des gaz, décrit correctement le phénomène de diffraction pour un choc faible et un angle de rampe petit ($< 7°$) [22, 91, 48]. Cette théorie amène notamment à la conclusion que la diffraction du choc peut être considérée comme un processus auto-similaire sous l'hypothèse que les effets de viscosité soient négligeables. De plus, suffisamment loin du coin, l'écoulement à l'arrière du choc suit localement la paroi et la forme du front de choc diffracté est convexe. Dans la limite des chocs très faibles, le front dégénère en un cercle sonique (*cf.* Fig. 1.19(a)). Toutefois, pour un nombre de Mach et un angle de déviation suffisamment importants, l'interaction de l'écoulement à l'arrière du choc avec la paroi peut conduire à un décollement de la couche limite [11] et à l'apparition d'un nouveau point triple sur le front, comme présenté en figure 1.19(b). Bazhenova *et al.* [11] et Skews [120, 119] ont montré que ce phénomène est observable pour un nombre de Mach incident supérieur à 3.5 et un angle de déviation compris entre 65° et 120°. Cet aspect, plutôt relatifs aux forts nombres de Mach, ne sera pas pris en compte dans le cadre de cette thèse.

Interaction choc-choc

Lors de la diffraction d'un choc sur un obstacle, le front incident peut se séparer en plusieurs parties qui vont se rencontrer à l'arrière de l'obstacle. L'interaction de fronts mobiles, d'intensités et de formes différentes, est un problème complexe peu étudié dans la littérature



(a) (b)

FIGURE 1.19 – Interaction d'une onde de choc plane, se déplaçant de la gauche vers la droite, sur une rampe convexe. Images, issues de [119], obtenues par photographie Schlieren. Fig. (a) : Le nombre de Mach incident est de 1.03, le choc dégénère en un cercle sonique. Fig. (b) : Le nombre de Mach incident est de 3.95, un point d'inflexion apparaît au niveau de la paroi.

à notre connaissance [14]. L'approche Geometrical Shock Dynamics [144], présentée plus loin, offre toutefois des éléments de réponse quant aux ondes se propageant sur la surface résultante. Le cas des chocs stationnaires a été plus largement investigué du fait des applications pratiques. C'est le cas notamment pour les écoulements hypersoniques, où il a été montré que l'interaction d'un choc extérieur sur le choc détaché autour d'un corps, peut conduire localement à une très forte élévation (d'un ordre de grandeur environ) du niveau de pression et du flux de chaleur à la paroi. Edney [40] a décrit six types de motifs résultant de l'interférence de chocs. L'interaction la plus néfaste pour la paroi, dite de type IV, est illustrée en figure 1.20. Pour les applications visées dans le cadre de cette thèse, où les nombres de Mach sont rapidement faibles, ces effets post-choc ne sont pas prédominants.

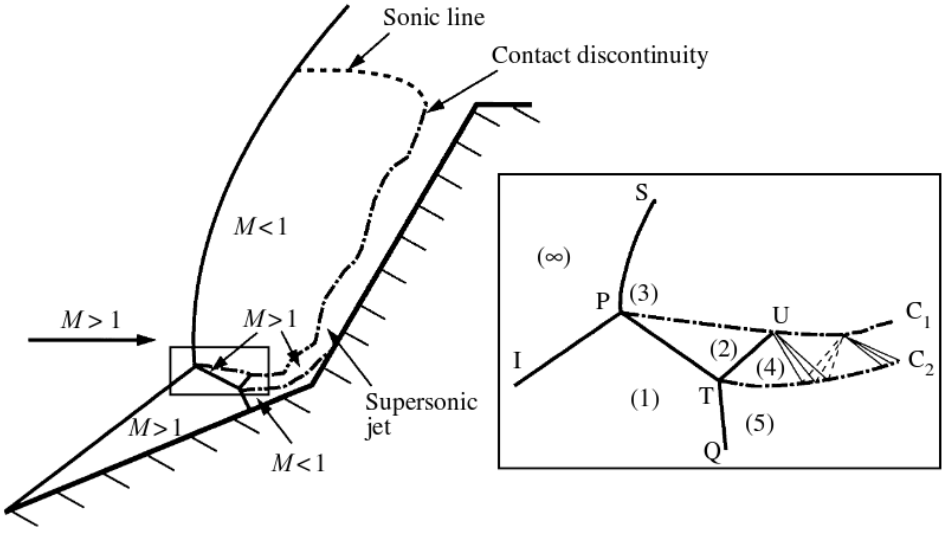


FIGURE 1.20 – Représentation schématique de l'interaction de type IV de chocs. Image d'après [86].

1.4 Synthèse des méthodes de calcul rapide existantes

La modélisation de la propagation des ondes de souffle est un thème de recherche actif depuis plusieurs décennies qui a donné lieu à de nombreux modèles, souvent empiriques. Pour tout point d'intérêt de l'espace, la méthode idéale devrait traiter la diffraction des ondes autour d'obstacles géométriques quelconques et fournir une estimation précise du pic de surpression (*cf.* table 1.1) en un temps de calcul réduit. De plus, comme nous visons à terme l'application à des géométries complexes, il faudrait qu'elle soit applicable au 3D. La résolution directe des équations d'Euler, bien que précise, ne répond évidemment pas à ces objectifs en termes de temps et de moyens de calculs. L'utilisation d'approches alternatives, idéalement basées sur des modèles mathématiques simplifiés par des considérations physiques, semble indispensable. Cette section passe en revue les principales voies identifiées dans la littérature.

Utilisation des abaques champ libre et tables de réflexion

L'utilisation d'abaques champ libre, telles que les formules de Kinney ou Needham présentées en section 1.2 et couplées aux coefficients de réflexion de la figure 1.14, permet de traiter l'interaction de l'onde de souffle avec une géométrie simple en 2D. Si l'information tirée est sûrement pertinente pour les cas en compression, la prise en compte de la détente par un coin est rarement abordée. De manière similaire à la définition des coefficients de réflexion, l'utilisation d'expériences élémentaires de diffraction d'un choc plan autour d'un coin [120] pourrait être utile pour définir ces coefficients de détente. Toutefois, la prise en compte d'obstacles de forme quelconque, et des réflexions multiples qui surviennent en zone urbaine par exemple, ne semble pas triviale.

Méthode des chemins déployés

Pour des cas de complexité intermédiaire, la méthode dite des chemins déployés est parfois employée [42, 83]. A titre d'exemple, Needham [83] utilise le principe du lancé de rayon pour déterminer le chemin géométrique le plus court entre le point d'explosion et un point d'intérêt. L'auteur applique ensuite des abaques champ libre pour déterminer les caractéristiques de l'onde de souffle, avec pour donnée d'entrée la distance en ligne brisée depuis le centre de la charge. La méthode prend en compte la réflexion sur des surfaces rigides via des sources fictives supplémentaires, images de la source principale par rapport à la paroi considérée. De ce fait, la méthode devient vite inexploitable en pratique. De plus, elle est basée sur une superposition non-linéaire empirique des champs pour des temps d'arrivée différents, ce qui est discutable lors de réflexions multiples.

Méthode des chemins déployés par plan

Dans le cadre du projet FLASH (Fast Lethality Assessment for Structures and Humans) développé au CEA Gramat [70], une nouvelle méthode empirique basée sur le principe des chemins déployés a été testée en environnement urbain. L'idée est de considérer un ensemble de problèmes plans par tranche ou par coupe, de discrétiser ces plans par une grille cartésienne, et de calculer le plus court trajet entre la source et un point d'intérêt à l'aide d'un algorithme de Dijkstra [38]. En présence d'obstacles, cette distance est modifiée à l'aide de coefficients d'amplification et d'atténuation. Les principales caractéristiques de l'onde de souffle (surpression, temps d'arrivée, impulsion positive et durée de la phase positive) sont finalement calculées à l'aide d'abaques champ libre. La méthode semble donner de bons résultats pour des problèmes élémentaires, mais reste limitée à des bâtiments parallélépipédiques.

Méthode "gros grain"-réseau de neurones

Afin d'aller au-delà des approches par abaques, Flood [43] propose de résoudre le système des équations d'Euler sur maillage grossier. La méthode est basée sur une décomposition des éléments géométriques en formes élémentaires (cube, sphère, cylindre ...) négligeant les détails géométriques. Ce modèle simplifié est corrigé par un réseau de neurones ayant été alimenté au préalable par des simulations directes détaillées. Peu de détails pratiques existent sur cette approche qui semble ne pas avoir été menée à son terme. Signalons de plus que la propagation en champ lointain pourrait s'avérer délicate compte tenu de la diffusion numérique importante sur maillage grossier.

1.5 Modèles d'évolution de front

La plupart des méthodes de calcul rapide des ondes de souffle sont basées sur le concept de chemin déployé ce qui limite leur champ d'application. La mise au point d'une méthode générale devrait selon nous s'appuyer sur un modèle mathématique d'évolution de front contraint par des considérations physiques. Parmi les modèles applicables aux ondes de choc soutenues, on pourra citer les théories Geometrical Shock Dynamics et Cinématique, qui seront détaillés dans ce rapport. Un bref aperçu de l'état de l'art des différentes approches est présenté en figure 1.25.

Modèle "Geometrical Shock Dynamics" de Whitham

La théorie "Geometrical Shock Dynamics" (GSD) a été énoncée en 1957 par Whitham [138, 140] dans le but de prédire les effets de l'environnement géométrique sur la propagation d'un front de choc. Le front y est découpé en un ensemble de tubes de rayon (*i.e.* courbes orthogonales au trajet), de section élémentaire A, évoluant à la vitesse locale M. À partir des équations d'Euler, Whitham établit une relation, dite *relation A-M*, entre la variation du nombre de Mach du choc, M, et la variation de la section d'un tube de rayon. Bien que développé plutôt dans un esprit de choc fort, de nombreux travaux, dont ceux de Baskar et Prasad [10], montrent que le modèle de Whitham donne d'assez bons résultats même lorsque le choc est plus faible. À titre illustratif, la figure 1.21 présente le front de choc obtenu avec le modèle GSD lors de l'interaction d'un choc plan à $M = 2.81$ avec un cylindre. On notera que la position des points triples est restituée avec une bonne précision par les "choc-chocs", correspondant aux discontinuités sur le front dans le modèle de Whitham.

Le modèle GSD néglige l'effet de l'écoulement post-choc, ce qui permet de réduire la dimension du problème, mais limite son application aux chocs soutenus. Le caractère fini de l'énergie de la source n'est pas pris en compte. Parmi les pistes envisageables pour palier ce défaut, on citera les travaux de Best [20] où l'hétérogénéité de l'écoulement derrière le choc est modélisée au travers d'une équation supplémentaire.

Signalons que le modèle GSD a inspiré d'autres théories, notamment pour calculer rapidement le dépôt d'énergie lors de la détonation d'un explosif, théorie "Detonation Shock Dynamics" (DSD) [13, 126, 8], ou encore pour aller au-delà des approches classiques de l'acoustique géométrique [10, 95]. On pourra aussi citer [46] qui étudie le système de Whitham dans un cadre relativiste, [58] qui analyse le comportement de l'onde réfléchie sur un axe de symétrie, et l'article de Zakeri [147] qui se penche sur la modélisation de la fonction A.

Du point de vue numérique, la résolution du modèle de Whitham se conçoit comme la solution d'une équation d'évolution de la position du front couplée à une équation de transport portant sur le champ de vitesse locale. L'éventail des méthodes numériques de propagation de front est très large. Que ce soient pour des problématiques issues de la mécanique des fluides, du traitement d'images, ou liées aux ondes sismiques, de nombreux travaux ont conduit au développement de méthodes performantes. Une classification grossière distingue deux approches

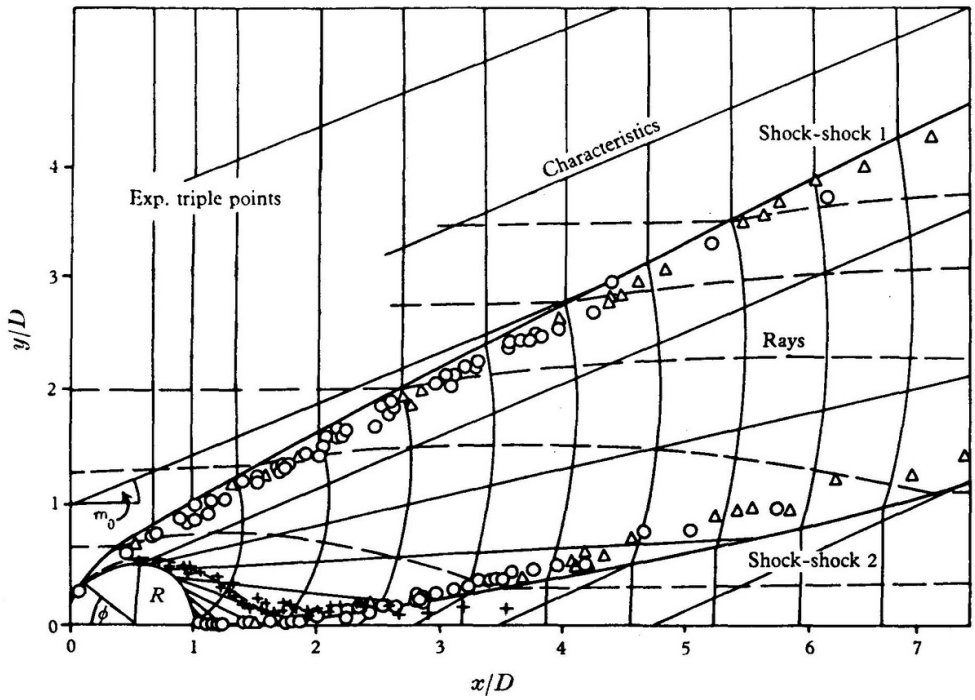


FIGURE 1.21 – Image d'après [144]. Diffraction d'un choc plan à nombre de Mach incident 2.81 sur un cylindre. Positions successives du front de choc obtenu avec le modèle GSD (lignes verticales) et comparaison avec les résultats expérimentaux (symboles).

principales en fonction de la nature du maillage utilisé : les méthodes Lagrangiennes (discrétisation explicite du front mobile) et les méthodes Eulériennes (reconstruction implicite du front sur maillage fixe).

Les méthodes Lagrangiennes, de type *Front Tracking*, sont les plus naturelles. Elles permettent un accès assez aisé aux propriétés géométriques locales du front de choc (normale, courbure moyenne) intervenant dans le modèle de Whitham, mais elles sont fastidieuses à mettre en œuvre sur des géométries complexes en 2D et plus encore en 3D. On pourra citer le travail de Henshaw *et al.* [56] concernant la mise au point d'un tel algorithme et son application à la propagation dans des conduits en 2D. Avec un algorithme similaire, Besset [18] s'intéresse à la propagation d'ondes de choc divergentes dans l'atmosphère, ce qui est assez proche de notre objectif.

Les méthodes Eulériennes permettent de masquer cette complexité, notamment lors de l'interaction de fronts, au prix d'une augmentation de la dimension du problème. La méthode de *level-set*, introduite en 1988 par Osher et Sethian [88], est la plus connue. Elle a été utilisée dans de nombreux domaines scientifiques, ce qui a permis d'améliorer sa précision et d'accélérer les calculs. On pourra consulter [87] et [114] pour plus de détails. L'approche Eulérienne a également été utilisée par Aslam *et al.* pour résoudre aussi bien le modèle de Whitham [6] que le modèle donné par la théorie DSD [7]. Ces auteurs utilisent la méthode de level-set pour capturer la position du choc, couplée à l'équation de transport donnant le nombre de Mach du front. Dans la lignée de ce travail, Yoo et Stewart [146] utilisent le même couplage mais avec une méthode accélérée et traitant des géométries 3D complexes. Il convient aussi de mentionner les travaux adoptant un autre point de vue, où le modèle de Whitham est écrit sous la forme d'un système hyperbolique stationnaire. Ce système a d'abord été résolu par des méthodes de différences finies [24, 108], puis par des schémas de type Godunov [109]. À titre d'exemple, Schwendeman [110] étudie le cas de chocs 3D convergents. Citons également le

travail de Noumir *et al.* [85] où une extension de l'approche Fast-Marching [114] au modèle GSD est proposée afin d'accélérer la résolution du problème, sans satisfaire toutefois la condition de conservativité. Cette erreur conduit à une sous-estimation de la position des points triples, comme présenté en figure 1.22.

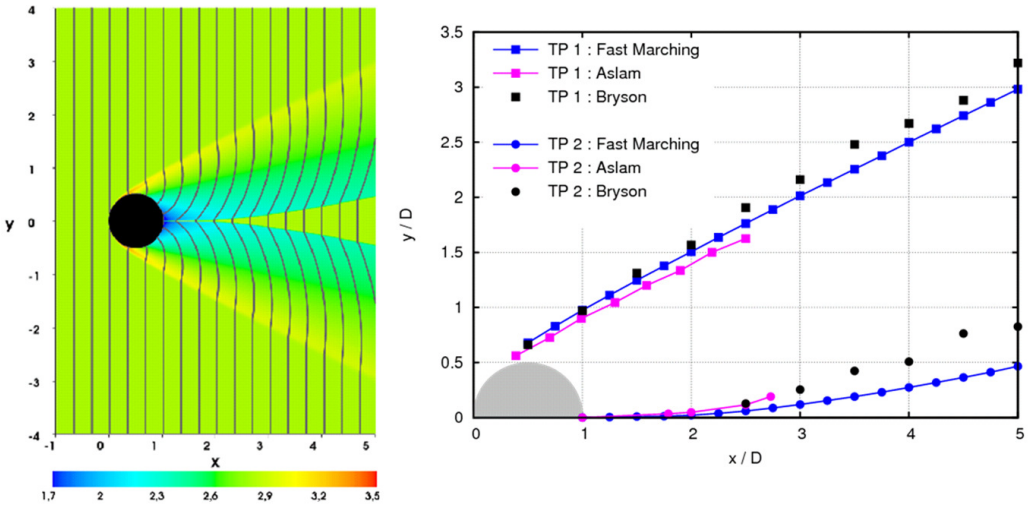


FIGURE 1.22 – À gauche, simulation numérique de la diffraction d'un choc plan à nombre de Mach 2.81 sur un cylindre avec la méthode Fast-Marching de Noumir *et al.* [85] : cartes du nombre de Mach M et positions successives du front. À droite, comparaison des lieux du point triple avec les résultats expérimentaux de Bryson [144] et la méthode level-set d'Aslam [7].

Modèle Cinématique

Une approche alternative au modèle de Whitham, dite Cinématique, a été proposée par Wright [145] en 1975. Elle consiste à assimiler l'onde de choc à une surface singulière. Ce point de vue mathématique permet de définir des relations de compatibilité au niveau du front, et de donner une description intrinsèque au mouvement de la surface. Le modèle a été étudié en détail pour un gaz parfait par Sharma & Radha en 1994 [116], et étendu au cas des gaz réels par Pandey & Sharma en 2009 [92]. L'analyse de ce modèle se limite toutefois à des considérations essentiellement théoriques. Quelques cas numériques ont été traités en symétrie radiale [116, 115, 5, 116, 92], pour le problème du piston en choc faible [96], et en deux dimensions d'espace pour un choc faible expansif [63, 10, 96]. Signalons également qu'en 1988, Srinivasan et Prasad [97] ont développé une description cinématique d'une onde de choc en utilisant la théorie des fonctions généralisées de Maslov [80]. Cette approche, plus complexe, s'avère en réalité équivalente à l'approche de Sharma & Radha [116].

1.6 Objectif et démarche de l'étude

L'objectif de ce travail de thèse est de mettre au point une méthode de calcul rapide de propagation des ondes de souffle en présence d'obstacles. Au vu des éléments de sécurité pyrotechnique rappelés, cette méthode doit décrire avec une bonne précision le niveau de surpression du choc. Ce saut de pression est lié à la vitesse du front, lui même dépendant de l'historique de l'interaction du choc avec son environnement géométrique. Afin d'aller au-delà des approches empiriques de type "chemins déployés", nous utiliserons un modèle simplifié de propagation

d'une onde de choc capable de décrire les phénomènes de diffraction, de recombinaison d'ondes et de réflexions irrégulières. Ce modèle doit suivre un cahier des charges précis :

1. Rapidité : par la réduction de la dimension du problème ;
2. Précision : par comparaison systématique avec des données expérimentales ou des résultats de simulation des équations d'Euler ;
3. Robustesse : en prenant en compte des géométries potentiellement complexes ;
4. Simplicité de mise en œuvre.

En suivant les travaux antérieurs de l'équipe [85, 104], nous choisissons de séparer le problème de propagation du front de choc de celui de la modélisation du caractère fini de la source. De plus, afin de prouver le concept de l'approche, nous ne considérerons ici que le premier passage du front, *cf.* figure 1.23. La prise en compte des réflexions post-choc, i.e. problème des temps d'arrivée multiples, pourra être considérée ultérieurement, une fois le modèle physico-numérique mis au point.

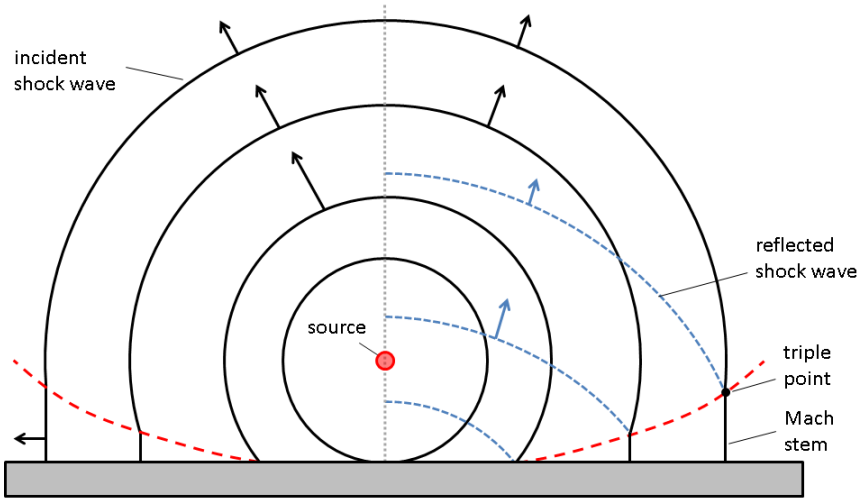


FIGURE 1.23 – Représentation schématique de l'interaction d'une onde de souffle avec le sol. À droite : choc à passage multiple (onde réfléchie). À gauche : modèle simplifié ne prenant en compte que le premier passage du choc.

Compte tenu du cahier des charges établi, l'approche GSD de Whitham est tout naturellement considérée. Ce modèle, en se concentrant sur le premier passage du choc, permet la réduction de la dimension du problème (des équations d'Euler 3D/5 équations à un système 2D constitué de 2 voire 3 équations). De multiples études ont prouvé la capacité du modèle GSD à estimer correctement la propagation d'une onde de choc dite soutenue (pas de détente arrière) [143, 105, 25, 18]. Dans ce cas, l'évolution du front dépend essentiellement de sa variation locale de géométrie. Ce modèle n'est toutefois pas parfait. Il présente un défaut d'existence de solution pour certains problèmes de détente, notamment en choc faible. Il s'agit là d'une limitation sévère que nous lèverons dans le cadre de ce travail. Afin d'illustrer cette pathologie, signalons que la solution du problème de la diffraction d'un choc plan à nombre de Mach $M_0 = 1.1$ sur une rampe d'angle $-90°$ existe seulement pour un angle de déviation supérieur à $-48.991°$ environ avec le modèle GSD, *cf.* figure 1.24. Cette limitation est problématique pour la modélisation des ondes de souffle puisque l'intensité du choc décroît rapidement.

Notre contribution vise donc, dans un premier temps, à étudier des modèles simplifiés alternatifs au modèle GSD. Parmi les pistes envisagées, le modèle Cinématique semble être un

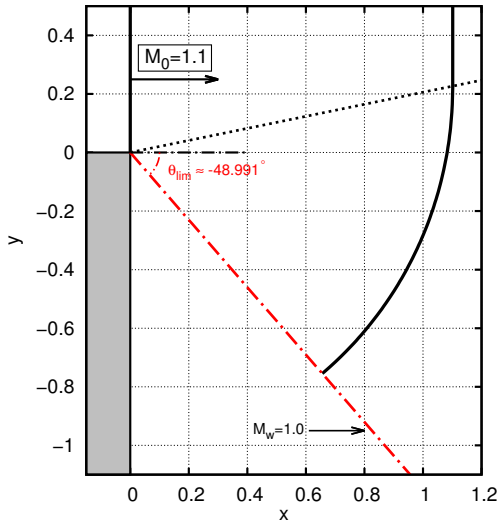


FIGURE 1.24 – Diffraction d'un choc plan à nombre de Mach 1.1 sur un dièdre à $-90°$. Solution obtenue avec le modèle GSD. Cette solution existe uniquement jusqu'à un angle de déviation de $-48.991°$.

candidat intéressant. Le modèle retenu, valable pour un choc soutenu, est ensuite étendu aux ondes de souffle en prenant en compte le caractère d'énergie finie de la source. Du point de vue numérique, afin d'éviter tout problème de conservativité observé par [85, 104], nous privilégions l'utilisation de l'algorithme Lagrangien dans le cadre de cette thèse. L'aspect conservatif est essentiel pour obtenir la bonne hauteur du point triple notamment. Un algorithme est ainsi développé en deux dimensions d'espace afin de résoudre le modèle dans des configurations variées. Cet algorithme est précis, conservatif, robuste, et rapide. Le code prend en compte les interactions choc/structure ce qui autorise de nombreuses études de validation.

Ce mémoire de thèse s'articule autour de trois parties.

La première partie est consacrée à l'analyse et au développement de modèles simplifiés de propagation d'une onde de choc soutenue. Après un rappel de la description mathématique d'une onde de choc au chapitre 2, socle de ces méthodes, l'état de l'art complet du modèle GSD est effectué au chapitre 3. Le chapitre 4 présente ensuite de manière détaillée un modèle alternatif au modèle GSD : le modèle Cinématique. Bien que la dérivation de ces deux modèles soit différente, leur équivalence structurale est prouvée, permettant une analyse et une comparaison détaillée de ces deux approches dans la deuxième partie.

La deuxième partie de ce manuscrit est consacrée à l'aspect applicatif des méthodes. L'outil numérique développé dans le cadre de cette thèse, permettant la résolution des modèles GSD et Cinématique, est décrit au chapitre 5. Une comparaison détaillée des modèles GSD et Cinématique s'en suit au chapitre 6. Nous proposons finalement une modification *ad hoc* des modèles au chapitre 7 afin de lever les limitations sous-jacentes aux méthodes.

Dans la troisième partie, les modèles GSD et Cinématique sont étendus à la prise en compte de l'écoulement arrière, aspect essentiel pour la modélisation des ondes de souffle. L'extension proposée au chapitre 8 conduit à une méthode simple, rapide et efficace. Dans un souci de complétude, le chapitre 9 est consacré aux extensions théoriques des modèles GSD et Cinématique permettant une modélisation *a priori* plus rigoureuse de l'effet de l'écoulement arrière. Seront notamment abordées les difficultés théorique et numérique d'une telle extension.

Pour finir, la conclusion dresse le bilan de nos contributions et propose de nouvelles pistes de recherche.

1.7 Contributions propres

Comme dit précédemment, ce travail de thèse s'inscrit dans un projet du CEA. Mes contributions propres sont :

- L'extension du modèle Cinématique, existant pour un gaz de van der Waals, à un milieu hétérogène et en mouvement. Le **chapitre 4** décrit cette extension à l'ordre 0 de troncature du système, *i.e.* sans prise en compte de l'écoulement arrière au choc. Cette dernière est effectuée au **chapitre 9** pour un milieu homogène et au repos, et en **annexe G** dans le cadre général ;
- La démonstration formelle et générale au **chapitre 4** de l'équivalence structurale de ce modèle avec le modèle GSD ;
- L'étude du modèle Cinématique en deux dimensions d'espace ainsi que sa comparaison avec le modèle GSD, traitées au **chapitre 6** ;
- L'extension *ad hoc* de ces deux approches à l'écoulement transversal effectuée au **chapitre 7** ;
- La finalisation de l'extension aux ondes de souffle, initiée par l'équipe, et l'application de la méthode sur des cas d'intérêts. Cette étude est menée au **chapitre 8** ;
- L'amélioration de l'algorithme Lagrangien conservatif proposé par Henshaw *et al.* [56], qui permet une intégration aisée des modifications des modèles ainsi que de leurs extensions aux milieux hétérogènes. Cet algorithme est présenté au **chapitre 5**.

La figure 1.25 résume l'ensemble de ces contributions. Celles-ci complètent l'état de l'art existant pour la modélisation simplifiée de la propagation d'une onde de choc.

Pour finir, ce travail a été valorisé au travers des communications suivantes :

⋆ International Symposium on Shock Waves (ISSW), juillet 2017, Nagoya, Japon, [101] ;

⋆ Military Aspects of Blast and Shock (MABS), septembre 2016, Halifax, Canada, [99] ;

⋆ European Fluid Mechanics Conference (EFMC), septembre 2016, Seville, Espagne ;

⋆ International Symposium on Nonlinear Acoustics (ISNA), juillet 2015, Lyon, [98] ;

et d'un article publié dans la revue Shock Waves [100].

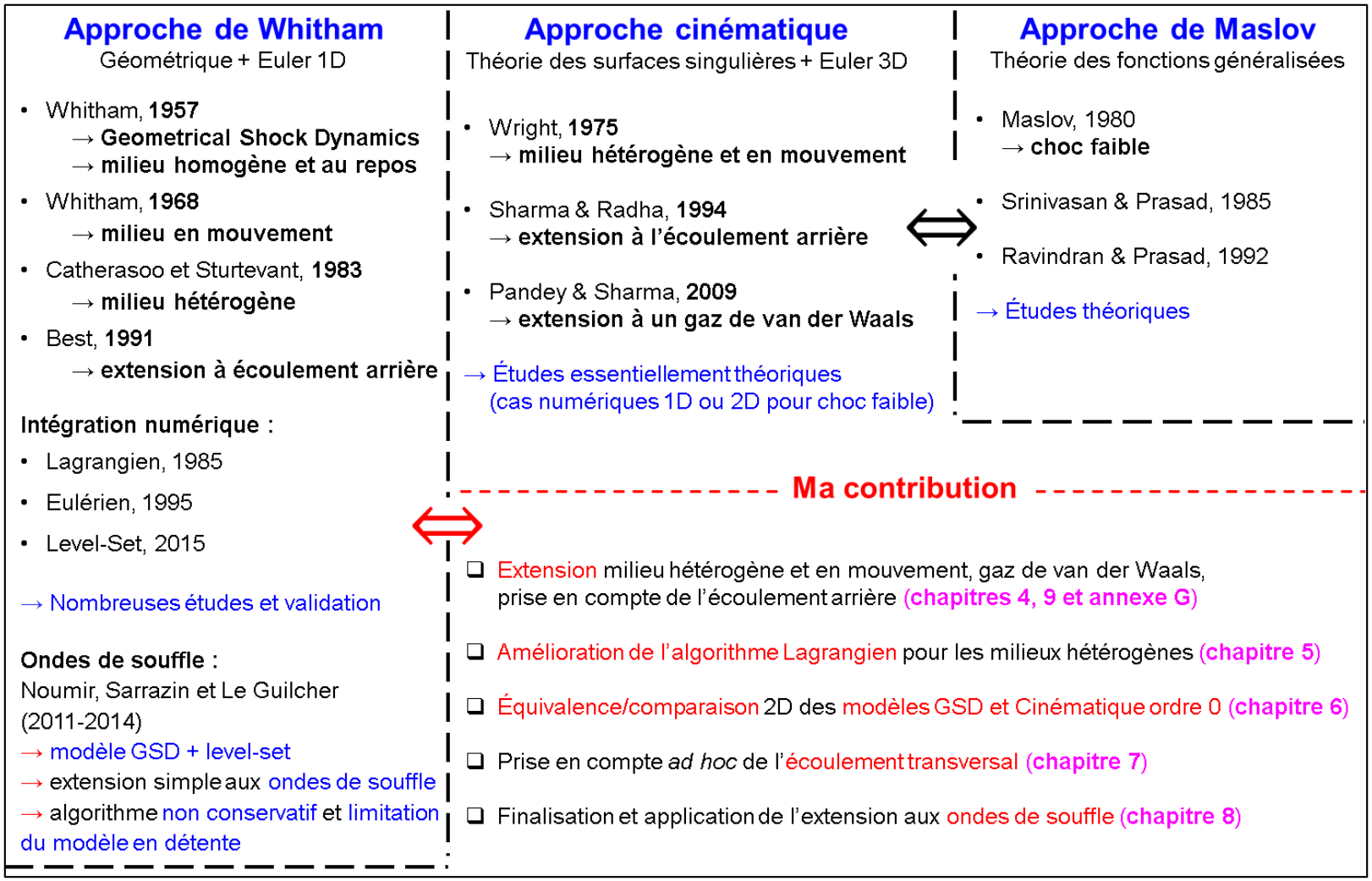


FIGURE 1.25 – Bref aperçu de l'état de l'art existant pour la modélisation simplifiée de la propagation d'une onde de choc et contributions propres.

Première partie

Modèles simplifiés pour la propagation d'une onde de choc

Chapitre 2

Rappels sur les ondes de choc

Sommaire

2.1 Les équations d'Euler 32
2.2 Relations de Rankine-Hugoniot 34
2.3 Vision level-set du front de choc 39

Ce chapitre rappelle quelques notions de base concernant les ondes de choc dans les gaz et introduit les notations nécessaires à la suite de l'étude. Le point de vue choisi ici repose principalement sur les ouvrages [33, 144, 16].

Nous considérons la propagation d'une onde de choc assimilée à une surface d'épaisseur nulle (surface singulière), se déplaçant à la vitesse $\vec{V}$ dans un milieu $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ non-uniforme potentiellement en mouvement (*cf.* Fig. 2.1). Ce milieu est constitué d'air, assimilé à un gaz parfait, pour lequel les paramètres thermodynamiques, à savoir la pression p, la masse volumique ρ et la température T, obéissent à l'équation d'état :

$$\frac{p}{\rho} = rT, \tag{2.1}$$

où r est la constante spécifique de l'air égale à 287.058 J/kg/K.

L'état à l'avant du choc (état amont) est caractérisé par l'état initial de l'atmosphère : la pression p_0, la masse volumique ρ_0, la température T_0 et le champ de vitesse du fluide $\vec{v}_0$. Le milieu amont est supposé stationnaire, ce qui revient à considérer le cas des chocs à passage unique [1]. Le cas général dépasse le cadre de cette thèse. Cet état de référence est modifié au passage du choc. On note p_-, ρ_-, T_- et $\vec{v}_-$ les paramètres du fluide juste après le passage du front (état aval), où la grandeur ψ_- est définie par

$$\psi_-(\vec{x}_{sh}(t), t) = \lim_{\|\vec{x}-\vec{x}_{sh}^-\|\to 0} \psi(\vec{x}, t),$$

pour une quantité physique ψ quelconque, et avec $\vec{x}_{sh}(t)$ la position du choc à l'instant t. Les paramètres thermodynamiques en amont du choc sont indexés par $+$ et sont définis par

$$\psi_+(\vec{x}_{sh}(t), t) = \lim_{\|\vec{x}-\vec{x}_{sh}^+\|\to 0} \psi_0(\vec{x}),$$

où ψ_0 désigne la quantité physique de l'état initial stationnaire de l'atmosphère. Le saut de ψ au travers du choc sera noté dans la suite $[\psi] = \psi_- - \psi_+$.

1. Pas de retour en arrière du front, tout point de l'espace n'est intercepté qu'une fois.

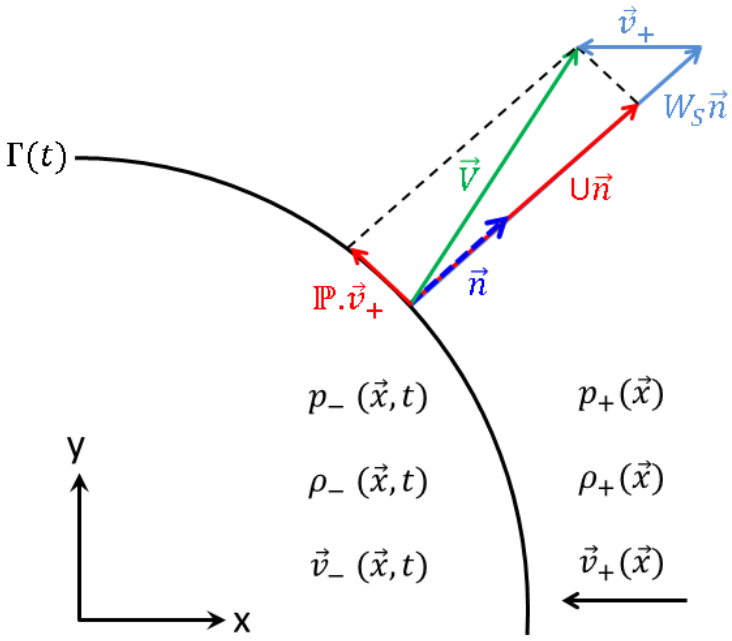


FIGURE 2.1 – Schéma de la propagation d'un choc dans un milieu potentiellement en mouvement. Le choc est matérialisé par la surface mathématique $\Gamma(t)$ et divise le milieu en deux : le milieu en amont du choc, caractérisé par l'état initial de l'atmosphère $(p_+, \rho_+, \vec{v}_+)$, et le milieu aval perturbé par le passage du choc $(p_-, \rho_-, \vec{v}_-)$. La surface de choc se propage dans le milieu amont à la vitesse locale $\vec{V}$. Celle-ci se décompose en une vitesse normale, $U\vec{n}$, et une vitesse tangentielle dépendant de l'écoulement amont : $\mathbb{P} \cdot \vec{v}_+$.

2.1 Les équations d'Euler

Soit $\mathcal{V}$ un volume élémentaire arbitraire de la région occupée par le fluide, de surface S et de vecteur normal extérieur $\vec{N}$. Les effets visqueux et les transferts thermiques sont supposés négligeables. En présence d'une force extérieure par unité de masse $\vec{f}$, les bilans de masse, de quantité de mouvement et d'énergie totale sur $\mathcal{V}$ se traduisent par les équations d'Euler [4] :

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\displaystyle\int_{\mathcal{V}} \rho \mathrm{d}\mathcal{V} + \int_S \rho \vec{v} \cdot \vec{N} \mathrm{d}S = 0 & \text{(2.2a)} \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\displaystyle\int_{\mathcal{V}} \rho v_i \mathrm{d}\mathcal{V} + \int_S \left(\rho v_i \vec{v} \cdot \vec{N} + p N_i\right) \mathrm{d}S = \int_{\mathcal{V}} \rho f_i \mathrm{d}\mathcal{V} \quad \text{pour } i = 1,2,3 & \text{(2.2b)} \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\displaystyle\int_{\mathcal{V}} \rho E \mathrm{d}\mathcal{V} + \int_S (\rho E + p)\, \vec{v} \cdot \vec{N} \mathrm{d}S = \int_V \rho \vec{f} \cdot \vec{v} \mathrm{d}\mathcal{V}. & \text{(2.2c)} \end{cases}$$

Le champ de vitesse du fluide, l'énergie interne du système et son énergie totale par unité de masse sont respectivement notés $\vec{v}$, ϵ et $E = \epsilon + \frac{\|\vec{v}\|^2}{2}$. Les équations (2.2) sont vérifiées pour

tout volume élémentaire $\mathcal{V}$. Elles se réécrivent sous la forme conservative locale :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0 & \text{(2.3a)} \\ \dfrac{\partial (\rho \vec{v})}{\partial t} + \operatorname{div}\left(\rho \vec{v} \otimes \vec{v} + p\overline{\overline{Id}}\right) = \rho \vec{f} & \text{(2.3b)} \\ \dfrac{\partial (\rho E)}{\partial t} + \operatorname{div}\left((\rho E + p)\,\vec{v}\right) = \rho \vec{f} \cdot \vec{v}, & \text{(2.3c)} \end{cases}$$

après utilisation du théorème de la divergence. L'équation d'état du fluide (2.1) permet de fermer le système.

D'après les lois de Joule, l'énergie interne ϵ et l'enthalpie $h = \epsilon + \frac{p}{\rho}$ du fluide ne dépendent que de la température :

$$\mathrm{d}\epsilon = C_V \mathrm{d}T \quad \text{et} \quad \mathrm{d}h = C_P \mathrm{d}T, \tag{2.4}$$

avec C_V et C_P les capacités thermiques isochore et isobare du fluide. Ces grandeurs sont reliées l'une à l'autre par la relation de Mayer :

$$C_P - C_V = T \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V \left(\frac{\partial (1/\rho)}{\partial T}\right)_p = r,$$

ayant utilisé l'équation d'état du fluide (2.1). On en déduit, en introduisant le rapport de chaleurs spécifiques $\gamma = \frac{C_P}{C_V}$,

$$C_V = \frac{r}{\gamma - 1} \quad \text{et} \quad C_P = \frac{\gamma r}{\gamma - 1} \ . \tag{2.5}$$

En pratique $\gamma = 1.4$ pour l'air, ce qui implique que les capacités thermiques sont constantes. Après intégration de (2.4) et utilisation des relations (2.5) et (2.1), l'énergie interne et l'enthalpie s'expriment simplement comme

$$\epsilon = \frac{p}{(\gamma - 1)\,\rho} \quad \text{et} \quad h = \frac{\gamma p}{(\gamma - 1)\,\rho}. \tag{2.6}$$

Il peut être utile de suivre une particule fluide dans son mouvement. Introduisons pour cela la dérivée Lagrangienne :

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla},$$

qui traduit l'évolution temporelle d'un champ porté par une particule fluide dans son mouvement. Les bilans de masse, de quantité de mouvement et d'énergie se réécrivent alors sous la forme non conservative suivante [4] :

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t} + \rho \operatorname{div}(\vec{v}) = 0 & \text{(2.7a)} \\ \rho \dfrac{\mathrm{D}\vec{v}}{\mathrm{D}t} = -\vec{\nabla} p + \rho \vec{f} & \text{(2.7b)} \\ \rho \dfrac{\mathrm{D}E}{\mathrm{D}t} = -\operatorname{div}(p\vec{v}) + \rho \vec{f} \cdot \vec{v}. & \text{(2.7c)} \end{cases}$$

Au cours d'une transformation quelconque d'un système fermé, le premier principe de la thermodynamique stipule que la variation d'énergie interne est égale à la quantité d'énergie échangée par transfert thermique δQ et par travail mécanique δW :

$$\mathrm{d}\epsilon = \delta Q + \delta W.$$

L'entropie s du système par unité de masse est définie par $\mathrm{d}s = \frac{\delta Q}{T}$. Puisque seules les forces de pression sont en jeu, le travail mécanique est déterminé par $\delta W = -p\mathrm{d}\left(\frac{1}{\rho}\right)$. Il vient donc :

$$\mathrm{d}\epsilon = T\mathrm{d}s - p\mathrm{d}\left(\frac{1}{\rho}\right). \tag{2.8}$$

La combinaison (2.7c)-$\vec{v}\cdot$(2.7b), suivie de l'injection de l'équation (2.7a), mène à :

$$\frac{\mathrm{D}\epsilon}{\mathrm{D}t} - \frac{p}{\rho^2}\frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t} = 0.$$

Ainsi, d'après le premier principe de la thermodynamique (2.8), l'entropie reste constante suivant la particule fluide :

$$T\frac{\mathrm{D}s}{\mathrm{D}t} = 0.$$

Selon le principe de l'état local associé, suivant lequel la loi d'état reliant les quantités thermodynamiques entre elles, par exemple $p = p(\rho, s)$, reste valable pour le fluide en écoulement, il vient alors immédiatement :

$$\frac{\mathrm{D}p}{\mathrm{D}t} - c^2\frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t} = 0, \tag{2.9}$$

avec c la célérité du son dans l'air :

$$c^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s.$$

En injectant (2.1) et (2.5) dans (2.4), la variation d'énergie interne s'exprime également comme

$$\mathrm{d}\epsilon = \frac{1}{(\gamma-1)\rho}\mathrm{d}p + \frac{p}{\gamma-1}\mathrm{d}\left(\frac{1}{\rho}\right). \tag{2.10}$$

Ce qui donne

$$T\mathrm{d}s = \frac{1}{(\gamma-1)\rho}\mathrm{d}p + \frac{\gamma p}{\gamma-1}\mathrm{d}\left(\frac{1}{\rho}\right), \tag{2.11}$$

par la relation (2.8). Cette expression permet de définir la célérité du son dans l'air en fonction de γ, ρ et p :

$$c^2 = \frac{\gamma p}{\rho}. \tag{2.12}$$

Puisque $T = \frac{p}{\rho r} = \frac{p}{C_V(\gamma-1)\rho}$, on trouve de plus l'expression de l'entropie :

$$s = C_V \ln\left(\frac{p}{\rho^\gamma}\right) + cste, \tag{2.13}$$

en intégrant (2.11) sous l'hypothèse que γ est constant.

2.2 Relations de Rankine-Hugoniot

Nous rappelons ici les relations de Rankine-Hugoniot traduisant la conservation de masse, de quantité de mouvement et d'énergie au travers du choc. Ces relations découlent de la formulation intégrale des équations d'Euler (2.2).

L'écoulement transverse au choc n'admettant pas de discontinuité au travers de celui-ci, le saut d'une quantité physique est porté par la direction normale au choc $\vec{n}$. Il suffit alors de dériver les relations de Rankine-Hugoniot pour un choc plan de vitesse U. Dans ces conditions, la vitesse v du fluide est la projection du vecteur $\vec{v}$ dans la direction $\vec{n}$, $v = \vec{v}\cdot\vec{n}$.

Selon la direction $\vec{n}$, les relations de saut s'écrivent [142] :

$$\left|\begin{array}{lcl} -U\left[\rho\right]+\left[\rho v\right] & = & 0 \\ -U\left[\rho v\right]+\left[\rho v^2+p\right] & = & 0 \\ -U\left[\rho E\right]+\left[\left(\rho E+p\right)v\right] & = & 0, \end{array}\right. \tag{2.14}$$

avec $E=\frac{v^2}{2}+\epsilon$. En introduisant $u=U-v$, la vitesse du choc relative au fluide, ces relations se réécrivent

$$\left|\begin{array}{lcl} \left[\rho u\right] & = & 0 \\ \left[p+\rho u^2-\rho u U\right] & = & 0 \\ \left[\rho u\left(\dfrac{u^2}{2}+\epsilon+\dfrac{p}{\rho}\right)+\rho u\dfrac{U^2}{2}-\left(p+\rho u^2\right)U\right] & = & 0. \end{array}\right. \tag{2.15}$$

Après simplification, on obtient :

$$\left|\begin{array}{lcl} \left[\rho u\right] & = & 0 \\ \left[p+\rho u^2\right] & = & 0 \\ \left[\rho u\left(\dfrac{u^2}{2}+\epsilon+\dfrac{p}{\rho}\right)\right] & = & 0, \end{array}\right. \tag{2.16}$$

soit encore :

$$\left|\begin{array}{lcl} \rho_- u_- & = & \rho_+ u_+ \\ p_-+\rho_- u_-^2 & = & p_++\rho_+ u_+^2 \\ \dfrac{u_-^2}{2}+\epsilon_-+\dfrac{p_-}{\rho_-} & = & \dfrac{u_+^2}{2}+\epsilon_++\dfrac{p_+}{\rho_+}. \end{array}\right. \tag{2.17}$$

Dans le cas particulier du gaz parfait, l'énergie interne et la pression se réexpriment sous la forme

$$\epsilon=\frac{c^2}{\gamma(\gamma-1)} \quad \text{et} \quad p=\frac{\rho c^2}{\gamma}, \tag{2.18}$$

d'après (2.6) et (2.12). On définit les nombres de Mach des vitesses relatives en amont et en aval du choc :

$$M=\frac{u_+}{c_+}=\frac{U-v_+}{c_+} \quad \text{et} \quad \mu=\frac{u_-}{c_-}=\frac{U-v_-}{c_-}. \tag{2.19}$$

En posant $X=\dfrac{\rho_-}{\rho_+}$, $Y=\dfrac{c_-}{c_+}$ et en utilisant (2.18), les relations de saut (2.17) s'expriment après calcul selon :

$$\left\{\begin{array}{ll} XY\mu=M & \text{(2.20a)} \\ XY^2+\gamma XY^2\mu^2=1+\gamma M^2 & \text{(2.20b)} \\ (\gamma-1)\mu^2Y^2+2Y^2=(\gamma-1)M^2+2. & \text{(2.20c)} \end{array}\right.$$

L'opération $2X\times$(2.20b)-$X^2\times$(2.20c), combinée à (2.20a), montre que la quantité X est racine du polynôme du second degré suivant :

$$\left((\gamma-1)M^2+2\right)X^2-2\left(1+\gamma M^2\right)X+(\gamma+1)M^2=0.$$

Les deux racines sont :

$$X_1 = 1 \qquad \text{et} \qquad X_2 = \frac{(\gamma+1)M^2}{(\gamma-1)M^2+2}.$$

La solution triviale $X = 1$ est exclue (dans ce cas il n'y aurait pas de choc), il en résulte que

$$X = \frac{\rho_-}{\rho_+} = \frac{(\gamma+1)M^2}{(\gamma-1)(M^2-1)+\gamma+1},$$

et les autres relations en découlent

$$\mu^2 = \frac{2+(\gamma-1)M^2}{2\gamma M^2+1-\gamma} \quad \text{et} \quad Y = \frac{c_-}{c_+} = \frac{(\gamma-1)(M^2-1)+\gamma+1}{(\gamma+1)\mu M}.$$

On en déduit également à partir de (2.20a) les expressions :

$$\begin{aligned} \frac{u_-}{c_+} &= \frac{M}{X} &&= \frac{(\gamma-1)(M^2-1)+\gamma+1}{(\gamma+1)M}, \\ \frac{v_-}{c_+} &= M + \frac{v_+}{c_+} - \frac{u_-}{c_+} &&= \frac{2(M^2-1)}{(\gamma+1)M} + \frac{v_+}{c_+}. \end{aligned}$$

De même, puisque $p = \dfrac{\rho c^2}{\gamma}$, le rapport de pression au travers du choc vérifie :

$$\frac{p_-}{p_+} = \frac{MY}{\mu} = \frac{2\gamma}{\gamma+1}\left(M^2-1\right)+1. \tag{2.21}$$

À partir de l'équation d'état du gaz (2.1), le rapport de température au travers du choc est donné par :

$$\frac{T_-}{T_+} = \frac{(2\gamma+1-\gamma)(2+(\gamma-1)M^2)}{(\gamma+1)^2M^2}.$$

Enfin, d'après (2.13), le saut d'entropie au travers du choc est défini par :

$$\begin{aligned} \frac{s_- - s_+}{C_V} = \ln\left(\frac{2\gamma}{\gamma+1}(M^2-1)+1\right) + \gamma\ln\left(\frac{(\gamma-1)(M^2-1)+\gamma+1}{(\gamma+1)M^2}\right) \\ + \gamma\ln\left(\frac{(\gamma-1)(M^2-1)+\gamma+1}{2+(\gamma-1)M^2}\right). \end{aligned} \tag{2.22}$$

En vertu du second principe de la thermodynamique, l'entropie d'un système ne peut qu'augmenter au cours du temps :

$$s_- \geq s_+.$$

Puisque l'entropie au travers du choc (2.22) est une fonction croissante de M et est positive pour $M \geq 1$ (*cf.* Fig. 2.2), le choc est nécessairement supersonique relativement à l'écoulement amont et subsonique relativement à l'écoulement aval (*cf.* Fig. 2.3(a)) :

$$\boxed{M \geq 1 \quad \text{et} \quad 0 \leq \mu \leq 1.}$$

Il en résulte en particulier que les valeurs de la masse volumique, de la pression et de la température augmentent au travers du choc (*cf.* Fig. 2.3(b)).

Remarque 2.1

D'après la figure 2.3(a), on note que $1 - \mu \sim M - 1$ pour les faibles nombres de Mach ($M \sim 1$).

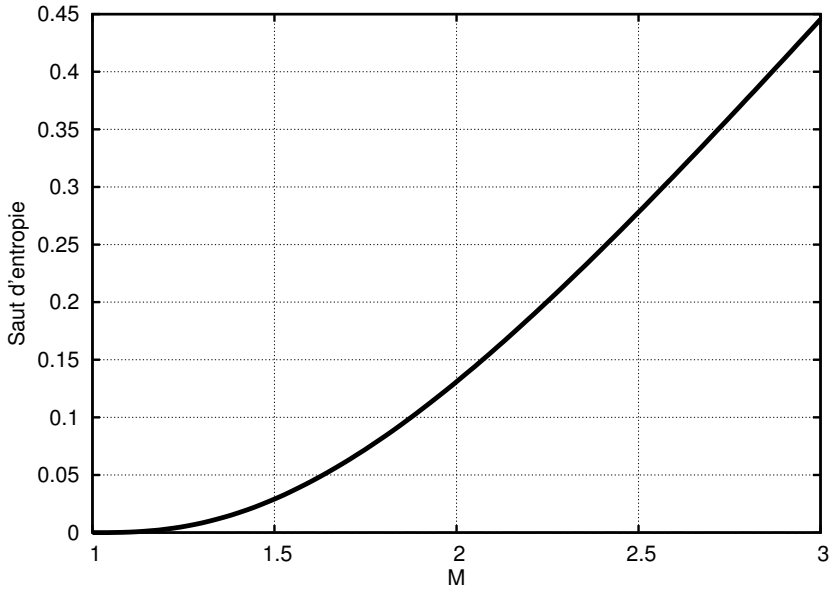
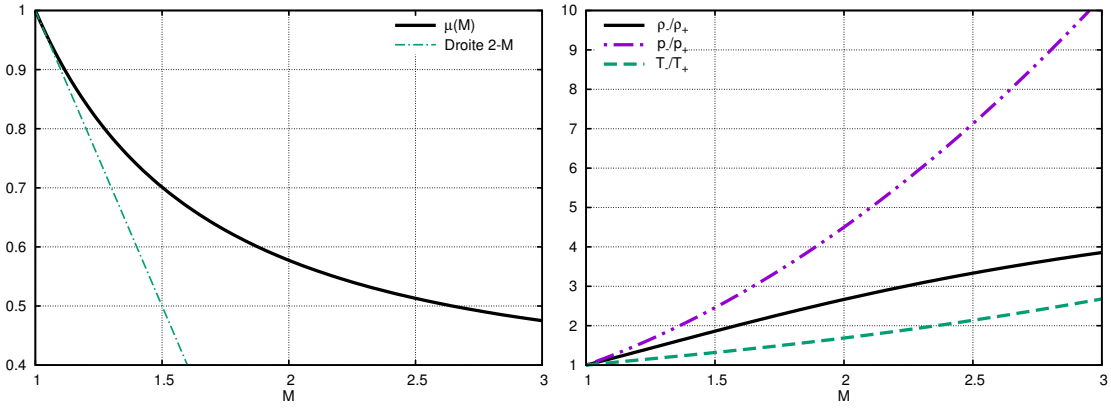


FIGURE 2.2 – Saut d'entropie au travers d'un choc droit en fonction du nombre de Mach du choc (*cf.* eq. (2.22)).



(a) (b)

FIGURE 2.3 – Fig. (a) : Nombre de Mach derrière le choc en fonction du nombre de Mach amont. Fig. (b) : Rapports de masse volumique, de pression et de température au travers d'un choc droit en fonction du nombre de Mach M du choc.

Le rapport de pression au travers du choc (2.21) définit une relation univoque entre $\zeta = \frac{[p]}{p_+}$ et le nombre de Mach du choc :

$$M = \sqrt{1 + \frac{\gamma + 1}{2\gamma}\zeta}. \tag{2.23}$$

La surpression adimensionnée du choc, ζ, caractérise l'intensité de choc. Pour un choc faible, ζ est proche de 0 et M proche de 1. Au contraire, le choc est d'intensité forte si $\zeta \gg 1$, ou de

manière équivalente $M \gg 1$.

En dimension supérieure, le saut du vecteur vitesse $\vec{v}$ de l'écoulement est dirigé selon la normale au choc. Les relations de Rankine-Hugoniot s'écrivent ainsi :

$$\boxed{\begin{aligned} \mu &= \sqrt{\frac{2+(\gamma-1)M^2}{2\gamma M^2+1-\gamma}} \\ \frac{p_-}{p_+} &= \frac{2\gamma}{\gamma+1}\left(M^2-1\right)+1 \\ \frac{c_-}{c_+} &= \frac{(\gamma-1)(M^2-1)+\gamma+1}{(\gamma+1)\mu M} \\ \frac{\rho_-}{\rho_+} &= \frac{(\gamma+1)M^2}{(\gamma-1)(M^2-1)+\gamma+1} \\ \frac{\vec{v}_-}{c_+} &= \frac{2(M^2-1)}{(\gamma+1)M}\vec{n}+\frac{\vec{v}_+}{c_+}. \end{aligned}} \tag{2.24}$$

Dans ce cas, les nombres de Mach des vitesses relatives en amont et en aval du choc sont définies par

$$M = \frac{U-\vec{v}_+\cdot\vec{n}}{c_+} \quad \text{et} \quad \mu = \frac{U-\vec{v}_-\cdot\vec{n}}{c_-}, \tag{2.25}$$

avec U la vitesse normale du front de choc.

Les expressions (2.24) peuvent s'écrire en fonction de $\zeta = \frac{2\gamma}{\gamma+1}\left(M^2-1\right)$:

$$\mu = \sqrt{\frac{2\gamma+(\gamma-1)\zeta}{2\gamma(1+\zeta)}} \quad , \quad \frac{c_- - c_+}{c_+} = \frac{(\gamma-1)\zeta+1}{2\gamma\mu\sqrt{1+\frac{\gamma+1}{2\gamma}\zeta}} - 1$$

$$\frac{\rho_- - \rho_+}{\rho_+} = \frac{2\zeta}{2\gamma+(\gamma-1)\zeta} \quad , \quad \frac{\vec{v}_- - \vec{v}_+}{c_+} = \frac{\zeta}{\gamma\sqrt{1+\frac{\gamma+1}{2\gamma}\zeta}}\vec{n}.$$

De même, le saut d'entropie (2.22) s'exprime en fonction de la surpression adimensionnée comme :

$$\frac{[s]}{C_V} = \ln(1+\zeta) + 2\gamma\ln\left(1+\frac{\gamma-1}{2\gamma}\zeta\right) - \gamma\ln\left(\left(1+\frac{\gamma+1}{2\gamma}\zeta\right)\left(1+\frac{\gamma-1}{2\gamma}\zeta\right)\right).$$

Pour des chocs faibles ($\zeta \sim 0$), le saut des quantités thermodynamiques est proportionnel à ζ :

$$\mu - 1 = -\frac{\gamma+1}{4\gamma}\zeta \quad , \quad \frac{[c]}{c_+} = \frac{(\gamma-1)}{2\gamma}\zeta$$

$$\frac{[\rho]}{\rho_+} = \frac{\zeta}{\gamma} \quad , \quad \frac{\vec{v}_-}{c_+} = \frac{\zeta}{\gamma}\vec{n},$$

tandis que le saut d'entropie est proportionnel à ζ^3 :

$$\frac{s_- - s_+}{C_V} = \frac{(\gamma-1)\left(2\gamma^2-5\gamma+1\right)}{12\gamma^2}\zeta^3 + O(\zeta^4).$$

Dans ce cas, il est raisonnable de négliger les changements d'entropie.

Dans la limite des chocs forts ($\zeta \gg 1$), les relations de Rankine-Hugoniot deviennent :

$$\mu \sim \sqrt{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} \qquad \frac{c_-}{c_+} \sim \sqrt{(\gamma-1)\zeta}$$

$$\frac{\rho_-}{\rho_+} \sim \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \qquad \frac{[\vec{v}]}{c_+} \sim \sqrt{\frac{2\zeta}{\gamma(\gamma+1)}}\vec{n}.$$

La célérité du son et la vitesse du fluide à l'avant du choc, c_+ et $\vec{v}_+$, sont alors négligeables comparées aux valeurs à l'arrière du choc dans cette approximation. En revanche, la compression est finie quelle que soit l'intensité du choc. Pour un gaz parfait et un rapport de chaleurs spécifiques de 1.4, le facteur de compression, $\frac{\rho_-}{\rho_+}$, est au maximum de 6. De même, le nombre de Mach aval du choc est borné : $\mu \approx 0.378$.

2.3 Vision level-set du front de choc

La définition mathématique d'un front de choc mobile, *i.e.* comme objet manipulable, est aisée à travers le formalisme level-set [87]. À l'instant t, la surface de choc est définie comme la ligne de niveau zéro d'une fonction scalaire Φ dite "level-set" (ou de niveau) :

$$\Gamma(t) = \{\vec{x} \in \Omega / \Phi(\vec{x}, t) = 0\}. \tag{2.26}$$

La fonction Φ est supposée régulière sur Ω et $\vec{\nabla}\Phi$ non nul au niveau du choc. La surface de choc est par conséquent continue et dérivable au moins par morceaux. On note $\vec{n}$ le vecteur normal unitaire de $\Gamma(t)$ orienté dans le sens de propagation du choc, défini par

$$\vec{n} = \frac{\vec{\nabla}\Phi}{|\vec{\nabla}\Phi|}. \tag{2.27}$$

Pour établir l'équation vérifiée par la fonction Φ, on définit les rayons comme étant les courbes intégrales de la vitesse du front de choc $\vec{V}$, *i.e.*

$$\frac{\mathrm{d}\vec{x}(t)}{\mathrm{d}t} = \vec{V}\left(\vec{x}(t), t\right). \tag{2.28}$$

En dérivant l'équation $\Phi(\vec{x}, t) = 0$ le long des rayons, il vient alors :

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \vec{V} \cdot \vec{\nabla}\Phi = 0. \tag{2.29}$$

Étant donné (2.27), il est aisé de vérifier que la vitesse normale du choc, $U = \vec{V} \cdot \vec{n}$, vérifie la relation

$$U = -\frac{\partial_t \Phi}{|\vec{\nabla}\Phi|}, \tag{2.30}$$

où ∂_t désigne la dérivée partielle par rapport au temps.

Le choc n'est pas une surface matérielle. Par conséquent, son mouvement intrinsèque n'est induit que par sa vitesse normale :

$$\vec{V}_n = U\vec{n}.$$

La composante tangentielle de sa vitesse provient de l'écoulement amont :

$$\vec{V}_t = \vec{V} - \vec{V}_n = \mathbb{P} \cdot \vec{v}_+,$$

où $\mathbb{P} = (\mathbb{I} - \vec{n} \otimes \vec{n})$ est l'opérateur de projection sur le plan tangent au choc. La vitesse du choc $\vec{V}$, dans le repère du laboratoire, s'écrit alors :

$$\vec{V} = W_S \vec{n} + \vec{v}_+, \tag{2.31}$$

où W_S, *cf.* figure 2.1, est la vitesse locale du choc relativement à l'écoulement amont :

$$W_S = U - \vec{v}_+ \cdot \vec{n}. \tag{2.32}$$

Remarque 2.2

Le nombre de Mach s'exprime $M = \frac{W_S}{c_+}$ d'après (2.25).

Le vecteur normal au choc (2.27), ainsi que la vitesse du choc (2.30) et (2.31) sont des quantités définies localement au niveau du front, *i.e.* en $(\vec{x}, t) = (\vec{x}_{sh}(t), t)$. Il est toutefois possible de les définir sur Ω tout entier. Soit

$$\mathcal{W}_\epsilon = \left\{ (\vec{x}, t) \in \Omega \times \mathbb{R}^+ \text{ tel que } |\Phi(\vec{x}, t)| < \epsilon \text{ et } |\vec{\nabla}\Phi(\vec{x}, t)| \neq 0 \right\},$$

pour $\epsilon > 0$, l'ensemble des voisinages du choc pour tous les instants t. Il existe une fonction plateau $\mathcal{P}$ définie sur $\Omega \times \mathbb{R}^+$ infiniment dérivable, et à support compact $\mathcal{K}$ dans $\mathcal{W}_\epsilon$, telle que

$$\mathcal{P}(\vec{x}, t) \equiv 1 \text{ sur } \mathcal{K} \subset \mathcal{O} \subset \mathcal{W}_\epsilon \quad \text{et} \quad \mathcal{P}(\vec{x}, t) \equiv 0 \text{ sur } \bar{\mathcal{O}} \ ,$$

avec $\mathcal{O}$ un ouvert de Ω, et $\bar{\mathcal{O}}$ son complémentaire dans Ω. Les relations (2.27) et (2.30) sont ainsi étendues sur Ω par les formulations :

$$\vec{\mathcal{N}}(\vec{x}, t) = \frac{\vec{\nabla}\Phi(\vec{x}, t)}{|\vec{\nabla}\Phi(\vec{x}, t)|}\mathcal{P}(\vec{x}, t) \quad \text{et} \quad \mathcal{U}(\vec{x}, t) = -\frac{\partial_t \Phi(\vec{x}, t)}{|\vec{\nabla}\Phi(\vec{x}, t)|}\mathcal{P}(\vec{x}, t). \tag{2.33}$$

De même, on définit l'extension de la vitesse du choc (2.31) par :

$$\vec{\mathcal{V}}(\vec{x}, t) = \left(\vec{\mathcal{U}}(\vec{x}, t) - \vec{v}_+(\vec{x}) \cdot \vec{\mathcal{N}}(\vec{x}, t) \right) \vec{\mathcal{N}}(\vec{x}, t) + \vec{v}_+(\vec{x}), \tag{2.34}$$

étant donné que le champ de vitesse initial $\vec{v}_+$ est connu sur Ω. Il est alors aisé de vérifier que l'on retrouve les définitions locales du vecteur normal et de la vitesse du choc :

$$\vec{\mathcal{N}}(\vec{x}_{sh}(t), t) = \vec{n}(\vec{x}_{sh}(t)),$$

$$\mathcal{U}(\vec{x}_{sh}(t), t) = U(\vec{x}_{sh}(t)) \quad \text{et} \quad \vec{\mathcal{V}}(\vec{x}_{sh}(t), t) = \vec{V}(\vec{x}_{sh}(t)).$$

La relation (2.34) autorise de plus à étendre la définition de $\vec{x}_{sh}$ à Ω tout entier :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\mathcal{X}}(t)}{\mathrm{d}t} = \vec{\mathcal{V}}\left(\vec{\mathcal{X}}, t\right), \tag{2.35}$$

avec $\vec{\mathcal{X}} : \mathbb{R}^+ \to \Omega$. Il en résulte en particulier : $\vec{\mathcal{X}}(\vec{x}_{sh}(t), t) = \vec{x}_{sh}(t)$.

Remarque 2.3

Les extensions (2.33)-(2.34) montrent que les quantités $\vec{n}$, U et $\vec{V}$ sont définies de manière unique au niveau du choc. Elles n'admettent par conséquent pas de discontinuité au travers de celui-ci. De surcroît, ces extensions autorisent à effectuer la dérivation de $\vec{n}$, U et $\vec{V}$ au voisinage du choc (un ouvert de $\mathcal{K}$) : on assimile alors ces quantités à leurs extensions le temps du calcul.

Soit $\psi : \Omega \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^d$ une quantité physique quelconque [2]. Il peut s'agir par exemple de la pression p à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ ou du champ de vitesse $\vec{v}$ à valeur dans $\mathbb{R}^3$. On suppose que le choc est à passage unique, ce qui induit une relation univoque entre le temps d'arrivée du choc t_{sh} et la position de celui-ci, $\vec{x}_{sh}$:

$$t_{sh}\left(\vec{x}_{sh}(t)\right) = t. \tag{2.36}$$

Soient ψ_t et ψ_x les valeurs de la quantité ψ suivant l'évolution temporelle et l'évolution spatiale du choc respectivement :

$$\psi_t(t) = \psi\left(\vec{x}_{sh}(t), t\right) \quad \text{et} \quad \psi_x(\vec{x}) = \psi\left(x, t_{sh}(\vec{x})\right).$$

L'évolution temporelle de ψ suivant le mouvement du choc est alors donnée par

$$\frac{\mathrm{d}\psi_t(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \psi}{\partial t}\left(\vec{x}_{sh}(t), t\right) + \frac{\mathrm{d}\vec{x}_{sh}(t)}{\mathrm{d}t} \cdot \vec{\nabla}\psi\left(\vec{x}_{sh}(t), t\right). \tag{2.37}$$

Sa variation spatiale est déterminée par

$$\vec{\nabla}\psi_x(\vec{x}) = \frac{\partial \psi}{\partial t}\left(\vec{x}, t_{sh}(\vec{x})\right) \vec{\nabla} t_{sh}(\vec{x}) + \vec{\nabla}\psi\left(\vec{x}, t_{sh}(\vec{x})\right). \tag{2.38}$$

En dérivant la relation (2.36) par rapport au temps, il vient immédiatement :

$$\vec{\nabla} t_{sh}\left(\vec{x}_{sh}(t)\right) \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{x}_{sh}(t)}{\mathrm{d}t} = 1.$$

Ainsi, en contractant (2.38) avec $\frac{\mathrm{d}\vec{x}_{sh}}{\mathrm{d}t}$, on trouve naturellement le changement de variable entre évolution temporelle et variation spatiale de ψ suivant le choc :

$$\frac{\mathrm{d}\psi_t(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{x}_{sh}(t)}{\mathrm{d}t} \cdot \vec{\nabla}\psi_x(\vec{x}_{sh}). \tag{2.39}$$

En particulier dans le cas 1D, cette expression s'écrit :

$$\frac{\mathrm{d}\psi_t(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x_{sh}(t)}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}\psi_x}{\mathrm{d}x}(x_{sh}). \tag{2.40}$$

En pratique, puisqu'aucune ambiguïté n'est *a priori* possible, nous ne ferons aucune distinction entre ψ et ψ_t dans la relation (2.37) :

$$\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\mathrm{d}\vec{x}_{sh}}{\mathrm{d}t} \cdot \vec{\nabla}\psi. \tag{2.41}$$

De même, aucune distinction ne sera faite entre ψ_t et ψ_x dans (2.40) :

$$\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x_{sh}(t)}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x}.$$

Dans ce dernier cas (cas 1D), les dérivées temporelle et spatiale suivant le choc sont simplement définies par :

$$\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \psi}{\partial t} + x'_{sh}(t)\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x} = \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{1}{x'_{sh}(t)}\frac{\partial \psi}{\partial t}. \tag{2.42}$$

En revanche, une attention particulière sera apporté au changement de variable (2.39), comme en section 4.5 par exemple.

2. En théorie, ψ est un tenseur d'ordre quelconque mais nous nous restreignons ici à l'ordre 0 ou 1 (fonction scalaire ou champ vectoriel). Dans le cas où $\vec{\psi}$ est un vecteur, $\vec{\vec{\nabla}}\vec{\psi}$ est un tenseur d'ordre 2 dont les composantes sont

$$\left(\vec{\vec{\nabla}}\vec{\psi}\right)_{ij} = \frac{\partial \psi_j}{\partial x_i}.$$

En conséquence, $\vec{E} \cdot \vec{\vec{\nabla}}\vec{\psi}$ est un vecteur dont la j-ième composante vaut $E_i \frac{\partial \psi_j}{\partial x_i}$ avec la convention de l'indice muet répété pour une somme.

Chapitre 3

Le modèle Geometrical Shock Dynamics de Whitham

Sommaire

3.1 Modèle Geometrical Shock Dynamics (GSD) 44
3.1.1 Relation $A - M$ pour la propagation d'un choc dans une tuyère . . . 44
3.1.2 Dérivation du modèle d'évolution du front de choc 49
3.1.3 Solutions à symétrie radiale 51
3.1.4 Étude du modèle en deux dimensions 53
3.1.5 Application 2D : diffraction d'un choc plan sur une paroi 58
3.2 Propagation d'un choc dans un milieu non-uniforme 70
3.2.1 Propagation d'un choc dans un milieu hétérogène et au repos 70
3.2.2 Propagation d'un choc dans un milieu en mouvement 72
3.3 Conclusion 76

En 1957, Whitham proposa un modèle simplifié pour la propagation d'une onde de choc à passage unique dans l'air [138, 140, 143]. Ce modèle, appelé Geometrical Shock Dynamics (GSD), est inspiré de l'optique géométrique. Il est basé sur une vision géométrique de la propagation du premier passage du choc. Dans cette approche, le front de choc est décomposé en tubes de rayon élémentaires. Chaque tube de rayon est ensuite assimilé à une tuyère à paroi rigide de section faiblement variable A. L'étude générale de propagation d'une onde de choc en deux ou trois dimensions est ainsi réduite à un problème de propagation d'un ensemble de chocs droits en tuyère. Sous l'hypothèse que l'influence des ondes voyageant à l'arrière du choc et qui le rattrapent (effets arrière) est négligeable, l'intensité du choc M est finalement reliée à l'aire A du tube par une relation différentielle. La simplicité et l'élégance de la théorie de Whitham évite ainsi le calcul coûteux de tout l'écoulement. Le modèle a été initialement développé pour un milieu uniforme et au repos par Whitham. Il a ensuite été étendu à un milieu potentiellement en mouvement en 1968 [141]. Collins & Chen [31] en 1971, puis Catherasoo & Sturtevant [25] en 1983, ont ensuite entrepris de développer le modèle pour un milieu amont non-uniforme. Une synthèse complète du modèle GSD et de ses extensions est disponible dans [53].

Le modèle GSD est un bon compromis entre simplification du problème de propagation d'une onde de choc (passage de 3D/5 équations pour les équations d'Euler (2.3) à 2D/2 équations) et précision des résultats. Il a été étudié par de nombreux auteurs pour des géométries élémentaires [143, 120] ou plus complexes [121, 56, 106, 105], pour des chocs convergents [111],

pour la propagation dans l'atmosphère [18], ou encore en prenant en compte les inhomogénéités du milieu [25, 107]. Il a prouvé sa capacité à estimer correctement le premier passage d'un choc soutenu, c'est-à-dire un choc sans effets arrière. D'autres auteurs ont proposé des modifications afin d'améliorer la précision du modèle pour des problèmes tels que la transmission de bruit [134], les explosions sous-marines [20, 21, 19], ou la diffraction sur un dièdre convexe [12, 91].

Ce chapitre est consacré au développement du modèle GSD. Dans la première section, notre attention s'est portée sur la propagation d'une onde de choc dans un milieu uniforme et au repos, configuration pour laquelle l'état de l'art est bien établi. Afin de prendre en compte les éventuelles inhomogénéités du milieu ainsi que la réflexion de l'onde de choc sur une paroi, la dérivation du modèle est détaillée pour un milieu non-uniforme et potentiellement en mouvement dans la seconde partie. Le modèle GSD étant assez peu connu, ce chapitre se veut didactique.

3.1 Modèle Geometrical Shock Dynamics (GSD)

Le modèle GSD est constitué d'équations dites géométriques décomposant l'évolution du front en tubes de rayon élémentaires auxquelles s'ajoute une relation pilotant la cinétique du choc. Cette dernière, appelée relation $A-M$, décrit comment l'intensité locale du choc évolue en fonction de sa courbure locale. Elle est développée en détail dans la première sous-section. Les relations géométriques décrivant l'évolution des positions successives du choc ainsi que l'écoulement dans les tubes de rayon sont présentées dans la deuxième sous-section. Les sous-sections suivantes sont consacrées à l'étude du problème en champ libre et en deux dimensions d'espace. Enfin, dans la dernière partie, une analyse détaillée du problème de Riemann illustre les capacités de l'approche de Whitham.

3.1.1 Relation $A-M$ pour la propagation d'un choc dans une tuyère

Lorsqu'un choc de vitesse $U = c_+ M$ se propage dans un tube à section faiblement variable, son intensité (caractérisée par le nombre de Mach M) évolue avec l'aire A de ce tube. Sous l'hypothèse d'un milieu amont homogène ($\rho_+ = \rho_0$ et $p_+ = p_0$) et au repos ($v_+ = 0$), Whitham a obtenu une relation simple entre M et A en utilisant ce qu'il nomma *la règle de la caractéristique* [139]. Chester [27] et Chisnell [29] ont obtenu de manière indépendante cette même relation, c'est pourquoi elle est également qualifiée de *relation CCW* en référence à ces trois auteurs. Cette section détaille les calculs menant à la relation $A-M$ en utilisant la règle de la caractéristique.

Dans le cas d'un tube de section lentement variable, c'est-à-dire tel que l'écoulement transversal est négligeable, les équations d'Euler peuvent être réécrites sous une formulation quasi-unidimensionnelle, de variable spatiale r, en les moyennant sur une section $A(r)$. On établit alors les équations traduisant, respectivement, la conservation de la masse, de la quantité de mouvement (écrite ici pour la vitesse) et de l'énergie (écrite ici pour la pression). En présence d'une force extérieure par unité de masse f, on obtient [33] :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + v\partial_r \rho + \rho \partial_r v + \rho v \dfrac{A'(r)}{A(r)} = 0 & \text{(3.1a)} \\ \partial_t v + v\partial_r v + \rho^{-1}\partial_r p = f & \text{(3.1b)} \\ \partial_t p + v\partial_r p - c^2\left(\partial_t \rho + v\partial_r \rho\right) = 0, & \text{(3.1c)} \end{cases}$$

où ρ, v, p sont respectivement la masse volumique, la vitesse et la pression du fluide, c est la

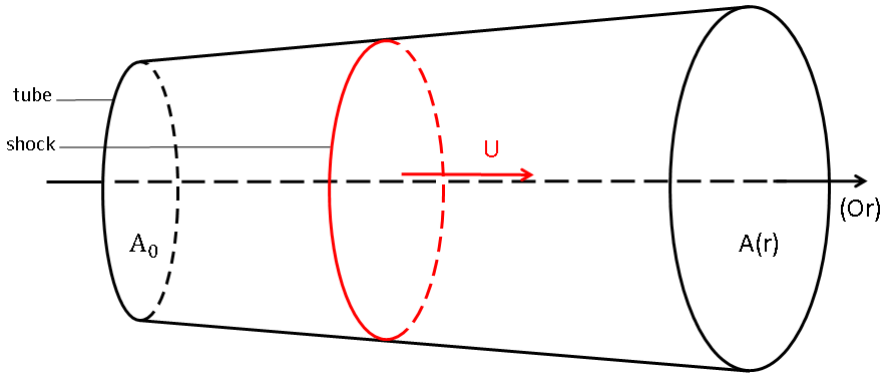


FIGURE 3.1 – Schéma de la propagation d'un choc plan dans un tube de section variable $A(r)$ d'axe (Or).

vitesse du son dans le milieu fluide, et A' est la dérivée de A par rapport à r. Les dérivées partielles par rapport à r et t sont notées respectivement ∂_r et ∂_t.

Remarque 3.1

Dans le cas où $A(r) \propto r^{d-1}$ ($d = 2$ en symétrie cylindrique, $d = 3$ en symétrie sphérique), le système (3.1) correspond à la réécriture des équations d'Euler 1D en coordonnées polaires.

Le système (3.1) est hyperbolique de valeurs propres $\{v-c, v, v+c\}$, et s'écrit sous la forme caractéristique :

$$\left|\begin{array}{lll} \dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} + \rho c \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \rho c^2 v \dfrac{A'(r)}{A} = +\rho c f & \text{sur } C^+ : & \dfrac{\mathrm{d}r(t)}{\mathrm{d}t} = v + c \\ \dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} - \rho c \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \rho c^2 v \dfrac{A'(r)}{A} = -\rho c f & \text{sur } C^- : & \dfrac{\mathrm{d}r(t)}{\mathrm{d}t} = v - c \\ \dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} - c^2 \dfrac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} = 0 & \text{sur } S : & \dfrac{\mathrm{d}r(t)}{\mathrm{d}t} = v. \end{array}\right. \tag{3.2}$$

Les combinaisons linéaires (3.1c)$\pm\rho c$(3.1b)$+c^2$(3.1a) aboutissent aux deux premières équations, tandis que la dernière relation est une réécriture de (3.1c). Puisque le milieu dans lequel le choc évolue est uniforme, aucune force extérieure n'est considérée dans la suite : $f = 0$.

L'équation sur la caractéristique C^+ (3.2) peut être écrite sous la forme équivalente suivante :

$$\partial_r p + \rho c \partial_r v + \frac{\rho c^2 v}{v+c} \frac{A'(r)}{A(r)} + \frac{1}{v+c} \left(\partial_t p + \rho c \partial_t v\right) = 0. \tag{3.3}$$

Cette relation est ensuite appliquée immédiatement à l'aval du choc. En posant $\mathrm{d}_r = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} = \partial_r + \frac{\partial_t}{U}$ (*cf.* relation (2.42)) la dérivée spatiale suivant le choc, il vient :

$$\frac{A'(r)}{A(r)} + \left(\frac{v+c}{\rho c^2 v}\right)_- \left(\mathrm{d}_r p_- + \rho_- c_- \mathrm{d}_r v_-\right) + \left(\frac{v+c}{\rho c^2 v}\right)_- \left(\frac{1}{(v+c)_-} - \frac{1}{U}\right) \left(\partial_t p + \rho c \partial_t v\right)_- = 0. \tag{3.4}$$

Les relations de Rankine-Hugoniot (2.24) sont maintenant utilisées pour introduire le nombre

de Mach. En dérivant par rapport à r les relations

$$\frac{p_-}{p_+} = \frac{2\gamma M^2 + 1 - \gamma}{\gamma + 1} \tag{3.5}$$

$$\frac{v_-}{c_+} = \frac{2(M^2-1)}{M(\gamma+1)}, \tag{3.6}$$

avec p_+ et c_+ constants, et étant donné que $c_+^2 = \frac{\gamma p_+}{\rho_+}$, on obtient :

$$\frac{\mathrm{d}p_-}{\mathrm{d}r} = \frac{4\rho_+ c_+^2 M}{\gamma+1}\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}r} \tag{3.7a}$$

$$\frac{\mathrm{d}v_-}{\mathrm{d}r} = \frac{2c_+}{\gamma+1}\left(1+\frac{1}{M^2}\right)\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}r}. \tag{3.7b}$$

En multipliant les relations

$$\frac{\rho_-}{\rho_+} = \frac{(\gamma+1)M^2}{(\gamma-1)M^2+2} \tag{3.8}$$

$$\frac{c_-}{c_+} = \frac{(\gamma-1)M^2+2}{(\gamma+1)M\mu}, \tag{3.9}$$

on peut vérifier que

$$\rho_- c_- = \rho_+ c_+ \frac{M}{\mu}. \tag{3.10}$$

Les relations (3.7), combinées à cette dernière, donnent alors :

$$\mathrm{d}_r p_- + (\rho c)_- \,\mathrm{d}_r v_- = \frac{2\rho_+ c_+^2 M}{(\gamma+1)}\left(2+\frac{1}{\mu}\left(1+\frac{1}{M^2}\right)\right)M'(r). \tag{3.11}$$

De la même manière, on utilise les relations (3.6), (3.9) et (3.10), ainsi que $\mu^2 = \frac{(\gamma-1)M^2+2}{2\gamma M^2+1-\gamma}$ (soit $M^2 = \frac{(\gamma-1)\mu^2+2}{2\gamma\mu^2+1-\gamma}$), pour obtenir :

$$\left|\begin{array}{rcl} \left(\rho c^2 v\right)_- & = & \rho_+ c_+^3 \dfrac{2(M^2-1)(2\gamma M^2+1-\gamma)}{(\gamma+1)^2 M} \\ (v+c)_- & = & c_+ \dfrac{2(M^2-1)}{(\gamma+1)M}\left(1+\dfrac{(\gamma-1)M^2+2}{2\mu(M^2-1)}\right), \end{array}\right.$$

donnant ainsi après calcul :

$$\left|\begin{array}{rcl} \left(\dfrac{v+c}{\rho c^2 v}\right)_- & = & \dfrac{(\gamma+1)\mu}{2\rho_+ c_+^2(M^2-1)}\left(1+\dfrac{2\mu(M^2-1)}{2+(\gamma-1)M^2}\right) \\ \dfrac{1}{(v+c)_-} - \dfrac{1}{U} & = & \dfrac{1}{c_+}\dfrac{\mu-1}{M\left(1+\frac{2\mu(M^2-1)}{(\gamma-1)M^2+2}\right)}. \end{array}\right. \tag{3.12}$$

La dernière relation est obtenue en rappelant que par définition $U = c_+ M$. On utilise également la relation

$$\frac{M^2-1}{(\gamma-1)M^2+2} = \frac{1}{\gamma+1}\frac{1-\mu^2}{\mu^2}, \tag{3.13}$$

permettant en particulier de déduire le comportement en choc faible de $\mu : 1-\mu \sim M-1$ (*cf.* Fig. 2.3(a)). En combinant les équations (3.4), (3.11), (3.12) et (3.13), on trouve finalement après simplification

$$\boxed{\frac{A'(r)}{A(r)} + \frac{M}{M^2-1}\left(1+\frac{2}{\gamma+1}\frac{1-\mu^2}{\mu}\right)\left(1+2\mu+\frac{1}{M^2}\right)M'(r) + R(t,r) = 0,} \tag{3.14}$$

avec

$$R(t,r) = f(M)\frac{(\partial_t p + \rho c \partial_t v)_-}{\rho_+ c_+^3} \quad \text{et} \quad f(M) = \frac{(\gamma+1)\mu(\mu-1)}{2M(M^2-1)}.$$

La fonction R modélise l'influence du champ immédiatement derrière le choc sur celui-ci (effets arrière). Elle est en particulier nulle pour un choc uniforme pour lequel le champ est stationnaire en arrière du choc.

Remarquons que $0 \leq \mu \leq 1$ et que la fonction $f(M)$ est bornée pour $M \geq 1 : f(M) \to -\frac{\gamma+1}{4}$ pour $M \to 1$ et $f(M) \sim -\frac{(\gamma+1)^2(\gamma-1)}{8\gamma^2 M^3}$ pour $M \gg 1$. Si on suppose que les dérivées temporelles de p et v restent bornées juste derrière le choc, alors la fonction R tend vers 0 quand M tend vers l'infini. Ainsi, sous l'hypothèse de choc fort, les effets arrière peuvent être négligés dans la relation $A-M$ (3.14), aboutissant ainsi à :

$$\frac{A'(r)}{A(r)} + \frac{M\lambda(M)}{M^2-1}M'(r) = 0, \tag{3.15}$$

où la fonction λ est définie par :

$$\lambda(M) = \left(1+\frac{2}{\gamma+1}\frac{1-\mu^2}{\mu}\right)\left(1+2\mu+\frac{1}{M^2}\right),$$

avec μ le nombre de Mach en aval du choc :

$$\mu(M) = \sqrt{\frac{(\gamma-1)M^2+2}{2\gamma M^2+1-\gamma}}.$$

Le modèle GSD est donc *a priori* un modèle valable principalement en choc fort, et également pour un choc uniforme pour lequel il n'y a pas d'effets arrière. Néanmoins, lors de la propagation du choc, tout changement d'intensité du front (interaction avec une paroi par exemple) génère des perturbations voyageant à l'arrière de celui-ci en direction opposée. Ces perturbations se propagent potentiellement dans un milieu non-uniforme, interagissent ensemble et donnent naissance à de nouvelles perturbations dont une partie tend à rattraper le choc et à le perturber. Ces perturbations, appelées **effets arrière**, sont contenues dans le terme $(\partial_t p + \rho c \partial_t v)_-$ de la relation (3.14). Les effets arrière influent sur le changement de l'intensité du choc, sur sa forme ainsi que sur sa direction. Chisnell a analysé en détail l'effet de ces ondes arrières sur le choc [29]. Il en a déduit que l'effet combiné des différents types de perturbations sur le front de choc mobile est faible, permettant ainsi de négliger les effets arrière en première approximation. Whitham justifie cette approximation en supposant que le choc est suffisamment fort pour les négliger dans l'équation (3.14). Une extension aux effets arrière de la relation $A-M$ a été développée par Best [20]. Leur influence sera discutée dans la dernière partie de cette thèse.

Remarque 3.2

L'équation (3.15) montre que les variations de section induisent des variations de vitesse de propagation du choc : un rétrécissement du tube de rayon induit une accélération de l'onde de choc alors qu'un élargissement du tube de rayon induit une décélération. Cette équation

montre également que l'aire, A, peut être considérée comme adimensionnelle, ce que nous supposons pour la suite.

La fonction λ est monotone pour M appartenant à l'intervalle $[1, +\infty]$. Ses valeurs varient peu, de 4 en choc faible à environ 5.074 en choc fort :

$$\lim_{M \to 1} \lambda(M) = 4$$

et

$$\lim_{M \to +\infty} \lambda(M) = \lambda_\infty = 1 + \frac{2}{\gamma} + \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma - 1}} \approx 5.074323 \text{ pour } \gamma = 1.4.$$

Son allure est tracée en figure 3.2.

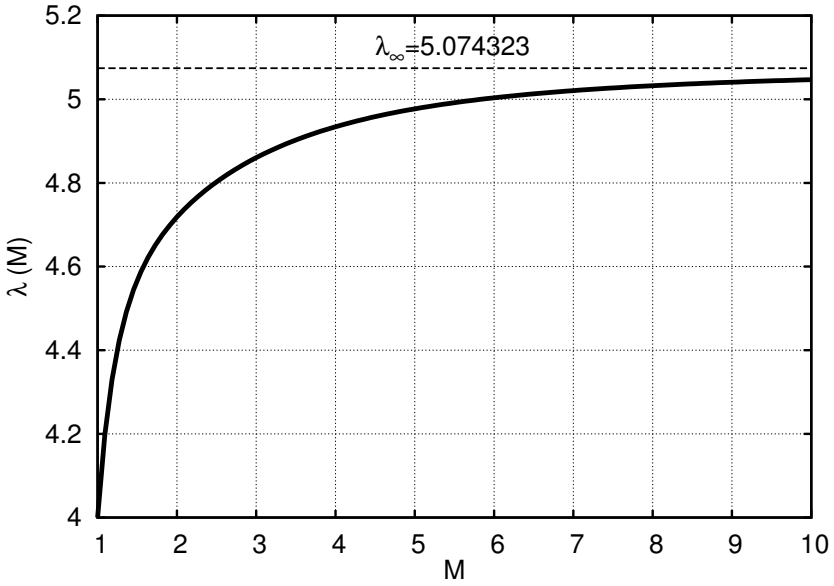


FIGURE 3.2 – Tracé de la fonction $\lambda(M)$ du modèle GSD pour $\gamma = 1.4$.

L'équation (3.15) induit une relation fonctionnelle entre l'aire de la tuyère et le nombre de Mach du choc :

$$\frac{\mathrm{d}A}{A} + \frac{M\lambda(M)}{M^2 - 1}\mathrm{d}M = 0, \tag{3.16}$$

soit

$$\frac{A(M)}{A_0} = \exp\left(-\int_{M_0}^{M} \frac{m\lambda(m)}{m^2 - 1}\mathrm{d}m \right), \tag{3.17}$$

avec A_0 et M_0 les valeurs initiales de l'aire du tube et du nombre de Mach. Il n'existe *a priori* pas de solution analytique de l'expression (3.17) pour un choc d'intensité quelconque, mais des solutions sont disponibles dans la limite des chocs faibles ($M \to 1$) et des chocs forts ($M \gg 1$). On trouve

$$\frac{A(M)}{A_0} = \left(\frac{M_0 - 1}{M - 1} \right)^2 \quad \text{pour les chocs faibles} \tag{3.18}$$

et

$$\frac{A(M)}{A_0} = \left(\frac{M_0}{M} \right)^{\lambda_\infty} \quad \text{pour les chocs forts.} \tag{3.19}$$

D'autres fermetures $A-M$ ont été étudiées dans le passé, comme [134] pour la transmission de perturbations le long d'ondes de choc, [91] où un terme de viscosité est pris en compte, ou encore [20] dans lequel l'auteur introduit les effets arrière. Notre étude se limite à la formulation $A-M$ classique (3.16) dans ce chapitre.

3.1.2 Dérivation du modèle d'évolution du front de choc

Dans cette section, nous dérivons les équations d'évolution du front de choc. Nous faisons l'hypothèse d'une onde de choc à passage unique se déplaçant dans un gaz uniforme et au repos. Sous ces hypothèses, on peut définir la fonction level-set Φ (*cf.* section 2.3) comme étant :

$$\Phi(\vec{x},t) = \alpha(\vec{x}) - c_+ t = 0, \tag{3.20}$$

et la vitesse du choc (2.31) n'est induite que par sa vitesse normale :

$$\vec{V} = U\vec{n} = W_S\vec{n}.$$

La normale au choc (2.27) est alors définie par la relation

$$\vec{n} = \frac{\vec{\nabla}\alpha}{|\vec{\nabla}\alpha|}. \tag{3.21}$$

Sous ces considérations, la relation (2.30) donne l'équation eikonale :

$$M(\vec{x})|\vec{\nabla}\alpha\,(\vec{x})\,| = 1. \tag{3.22}$$

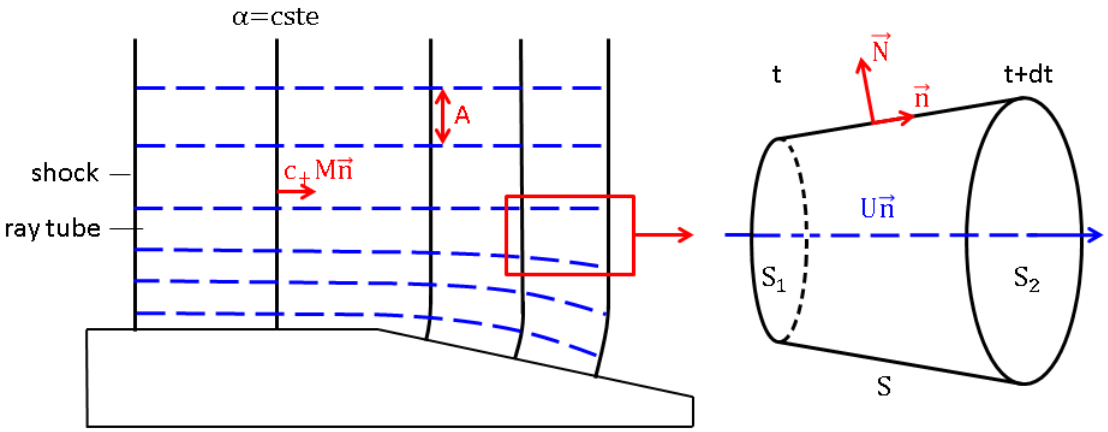


FIGURE 3.3 – Schéma de la décomposition de la propagation du front en tubes de rayon dans le modèle GSD. Les lignes noires correspondent aux positions successives du choc ($\alpha = cste$), et les lignes pointillées bleues représentent les rayons. Deux rayons délimitent un tube de rayon d'aire A.

Le modèle GSD consiste en une décomposition de la propagation du front de choc en tubes de rayon élémentaires d'aire infinitésimale A dans lesquels l'écoulement transversal est négligé (*cf.* Fig. 3.3). L'écoulement dans les tubes de rayon se traduit mathématiquement par la formulation :

$$\vec{\nabla}\cdot\left(\frac{\vec{n}}{A}\right) = 0. \tag{3.23}$$

Cette relation est une conséquence du théorème de la divergence. En effet, soit W un volume élémentaire de tube de rayon délimité par deux instants successifs du choc (*cf.* Fig. 3.3

de droite). On note S_1 et S_2 les aires obtenues par intersection du tube de rayon avec le choc à ces deux instants, et S la surface transversale du tube. Par le théorème de la divergence, il vient :

$$\int_W \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\vec{n}}{A} \right) \mathrm{d}W = \int_{S_1+S_2+S} \frac{\vec{n} \cdot \vec{N}}{A} \mathrm{d}S,$$

où $\vec{N}$ est la normale extérieure à W. Or $\vec{n} \cdot \vec{N}$ est nul sur S, vaut +1 sur S_2 et -1 sur S_1, donnant ainsi

$$\int_W \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\vec{n}}{A} \right) \mathrm{d}W = \int_{S_2} \frac{\mathrm{d}S}{A} - \int_{S_1} \frac{\mathrm{d}S}{A}. \tag{3.24}$$

Puisque A est une aire infinitésimale, nous avons $A \approx S_i$:

$$\int_{S_i} \frac{\mathrm{d}S}{A} \approx \frac{1}{S_i} \int_{S_i} \mathrm{d}S = 1,$$

et donc le membre de droite de (3.24) tend vers 0 lorsque le diamètre du tube tend vers 0, d'où

$$\int_W \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\vec{n}}{A} \right) \mathrm{d}W = 0.$$

Cette égalité étant vérifiée quel que soit le volume W, l'équation (3.23) en découle.

Remarque 3.3

La relation (3.23) s'écrit également

$$\mathrm{div}\,(\vec{n}) = \frac{\vec{n} \cdot \vec{\nabla} A}{A}, \tag{3.25}$$

où l'on rappelle que $\mathrm{div}\,(\vec{n})$ donne la courbure locale du front. Les variations locales de la forme du front (recombinaison d'onde, ou présence d'un obstacle par exemple) auront donc un effet sur A et donc M au travers de la relation $A - M$.

Chaque tube de rayon est ensuite assimilé à une tuyère 1D et la relation $A - M$ (3.16), reliant la géométrie locale du choc (courbure) à sa vitesse (nombre de Mach), ferme le système (3.22)-(3.23). Le modèle GSD de Whitham s'écrit donc :

$$\boxed{\begin{array}{rcl} M|\vec{\nabla}\alpha| & = & 1 \\ \mathrm{div}\left(\dfrac{M}{A} \vec{\nabla}\alpha \right) & = & 0 \\ \dfrac{\mathrm{d}A}{A} + \dfrac{M\lambda(M)}{M^2-1} \mathrm{d}M & = & 0, \end{array}} \tag{3.26}$$

ayant injecté les relations (3.21) et (3.22) dans (3.23).

Remarque 3.4

Puisque $\alpha = c_+ t$, on parle de α comme temps d'arrivée par abus de langage.

Remarque 3.5

Dans le cas de l'acoustique géométrique [93], $M \sim 1$, la position du front d'onde est décrite indépendamment de l'amplitude du champ :

$$|\vec{\nabla}\alpha| = 1 \quad \text{et} \quad \text{div}\left(\frac{1}{A}\vec{\nabla}\alpha\right) = 0,$$

où l'amplitude du champ $M-1$ varie comme $\frac{1}{\sqrt{A}}$. Les rayons sont tracés de manière indépendante de l'amplitude et sont des droites en milieu homogène. Ils peuvent donc se croiser et conduire à une amplitude A nulle : c'est ce que l'on appelle une caustique. Dans le théorie acoustique, les caustiques sont traitées par la prise en compte des effets de diffraction décrits par la théorie des catastrophes [17]. Pour les chocs faibles, la théorie acoustique peut être complétée en incluant les non-linéarités au premier ordre [130, 79]. Les caustiques sont évitées dans le modèle GSD car lorsque A tend vers 0, M tend vers l'infini ce qui dévie les rayons. La relation d'amplitude de l'acoustique géométrique correspond au comportement limite du modèle GSD en choc faible :

$$\frac{A}{A_0} = \left(\frac{M_0 - 1}{M - 1}\right)^2.$$

En revanche, la relation $A-M$ est valable pour l'ensemble du signal de pression, et non uniquement pour le premier passage du choc. Dans le cas faiblement non-linéaire [137, 32, 112], la relation $A - M$ est remplacée par une équation de type Burgers décrivant l'évolution non-linéaire de la forme d'onde le long de chaque rayon. Enfin, dans la théorie des rayons faiblement non-linéaire [10, 96], la relation $A-M$ est quasi-identique à l'acoustique géométrique, à un coefficient exponentiellement petit près. Cependant, l'équation eikonale dépend elle de l'amplitude du choc. Ceci permet d'éviter là encore les singularités de l'acoustique géométrique quand A tend vers 0, mais tout comme le modèle GSD la théorie est valable seulement pour le premier passage du choc.

3.1.3 Solutions à symétrie radiale

La validation du modèle GSD discret nécessite le développement de solutions de référence. Pour cela, on se place ici en géométrie radiale. La solution du système d'équations (3.26) ne dépend alors que de la variable $r = \|\vec{x} - \vec{x}_0\|$, où $\vec{x}_0$ est le centre de symétrie. Le vecteur normal au front de choc est $\vec{n} = \dfrac{\vec{x} - \vec{x}_0}{\|\vec{x} - \vec{x}_0\|}$ et la courbure moyenne s'écrit

$$\frac{1}{A}\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}r} = \frac{d-1}{r},$$

où d est la dimension de l'espace ($d = 1$ en symétrie plane, $d = 2$ en symétrie cylindrique, et $d = 3$ en symétrie sphérique). Le système d'équations (3.26) se réduit alors à

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\alpha(r)}{\mathrm{d}r} = \dfrac{1}{M(r)} & \text{(3.27a)} \\ \dfrac{\mathrm{d}M(r)}{\mathrm{d}r} = -\dfrac{M^2(r)-1}{M(r)\lambda(M(r))}\dfrac{d-1}{r}. & \text{(3.27b)} \end{cases}$$

La solution de ce système s'exprime comme

$$\begin{cases} M(r) = M_0 - (d-1)\displaystyle\int_{r_0}^{r} \frac{M^2(\ell)-1}{\ell M(\ell)\lambda(M(\ell))} d\ell & \text{(3.28a)} \\ \alpha(r) = \alpha_0 + \displaystyle\int_{r_0}^{r} \frac{1}{M(\ell)} d\ell, & \text{(3.28b)} \end{cases}$$

où $r_0 > 0$ est la position initiale du choc au temps $\alpha_0 = c_+ t_0$ et d'intensité M_0.

Remarque 3.6 (*Cas particuliers*)

Dans le cas où la fonction $\lambda \equiv \lambda_0$ où λ_0 est une constante strictement positive, une solution analytique de (3.28a) est donnée par :

$$M^2 = 1 + (M_0^2 - 1)\left(\frac{r_0}{r}\right)^{\frac{2(d-1)}{\lambda_0}}.$$

Toutefois, il n'y a pas d'expression immédiate pour la fonction α, sauf dans certains cas particuliers. Par exemple, pour $\lambda_0 = d-1$, on a :

$$\alpha(r) = \left(r^2 + (M_0^2 - 1)r_0^2\right)^{\frac{1}{2}} - M_0 r_0 + \alpha_0.$$

Dans son livre [143], Whitham considère le modèle dans la limite des chocs forts

$$\frac{M'(r)}{M} = -\frac{d-1}{\lambda_\infty r},$$

où $\lambda_\infty \approx 5.0743$ est la limite de la fonction λ quand M tend vers l'infini. Dans ce cas, le nombre de Mach s'écrit simplement

$$M(r) = M_0 \left(\frac{r_0}{r}\right)^{\frac{d-1}{\lambda_\infty}}, \tag{3.29}$$

et le temps d'arrivée du choc s'exprime comme

$$\alpha(r) = \alpha_0 + \frac{r_0}{M_0\left(\frac{d-1}{\lambda_\infty}+1\right)}\left(\left(\frac{r}{r_0}\right)^{\frac{d-1}{\lambda_\infty}+1} - 1\right), \tag{3.30}$$

Whitham considère également le cas limite des chocs faibles :

$$\frac{M'(r)}{M-1} = -\frac{d-1}{2r}, \tag{3.31}$$

qui donne la solution analytique :

$$M(r) = 1 + (M_0 - 1)\left(\frac{r_0}{r}\right)^{\frac{d-1}{2}}. \tag{3.32}$$

À ce stade, il est intéressant de noter que la surpression du choc, $\frac{[p]}{p_+} = \frac{2\gamma}{\gamma+1}\left(M^2-1\right)$, vérifie :

$$\frac{[p]}{p_+} \sim \begin{cases} \left(\frac{r_0}{r}\right)^{\frac{d-1}{2}} & \text{pour } M \sim 1 \text{ et } r \gg r_0 \\ \left(\frac{r_0}{r}\right)^{\frac{2(d-1)}{\lambda_\infty}} & \text{pour } M \gg 1 \text{ et } r \sim 0. \end{cases}$$

En choc faible, on retrouve la décroissance géométrique en $r^{-1/2}$ en deux dimensions et en r^{-1} en trois dimensions pour une onde divergente. Ces formes sont également données par les théories de l'acoustique géométrique linéaire et faiblement non-linéaire pour un choc soutenu. En revanche, dans le cas d'un choc plus réaliste (avec effets arrière), la décroissance est différente, par exemple en $r^{-3/4}$ pour une onde en N en deux dimensions.
En choc fort, la décroissance de $[p]$ est proportionelle à

$$r^{-2/\lambda_\infty} \approx r^{-0.394142} \quad \text{pour } d = 2, \tag{3.33}$$

et

$$r^{-4/\lambda_\infty} \approx r^{-0.788284} \quad \text{pour } d = 3. \tag{3.34}$$

Ces valeurs sont très différentes d'une onde de souffle en champ proche, *i.e.* du cas d'un choc fort divergent auto-semblable où l'écoulement arrière est non-uniforme fortement variable. Dans ce cas, l'intensité du choc décroît comme r^{-2} en deux dimensions [76] et r^{-3} en trois dimensions [128]. En revanche, les lois de décroissance données par le modèle GSD (3.33)-(3.34) sont très proches de celles de la solution auto-semblable de Guderley [49] établie pour un choc fort ($M \gg 1$) convergent. Le comportement de la solution est alors en $r^{-0.394588}$ à deux dimensions et $r^{-0.788728}$ à trois dimensions.

3.1.4 Étude du modèle en deux dimensions

Nous nous proposons dans cette section de dériver le modèle GSD en deux dimensions d'espace et d'en étudier les propriétés.

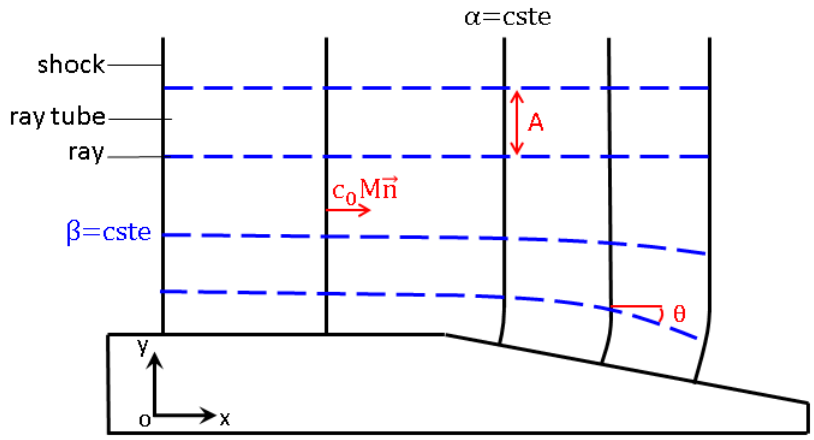
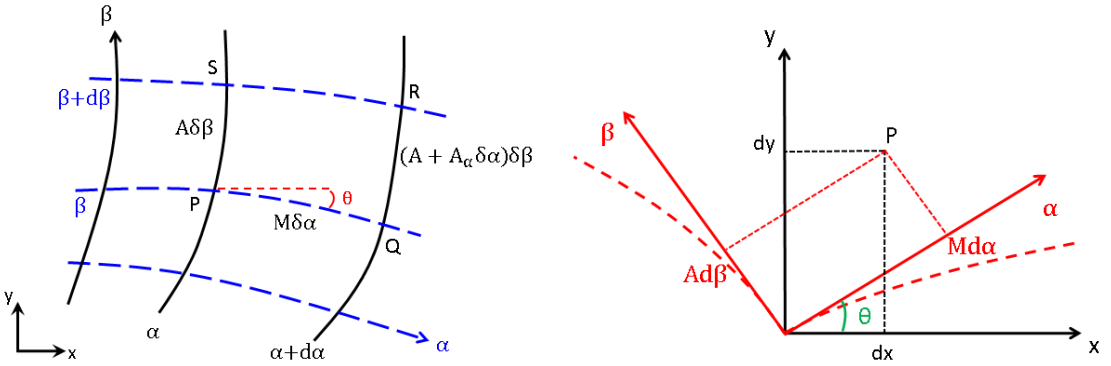


FIGURE 3.4 – Schéma de la propagation d'une onde de choc en deux dimensions. Les lignes noires et pointillées bleues représentent les positions successives du choc et les rayons. Elles correspondent aux coordonnées α et β respectivement. A est l'aire du tube de rayon délimité par deux rayons, et θ est l'angle orienté entre le rayon et l'axe (Ox).

Écriture du modèle dans la base locale au choc. Les équations en deux dimensions sont établies sur la base d'un système de coordonnées curvilignes orthogonales (α,β). Ce système découle des positions successives du front et de sa décomposition en rayons qui sont les trajectoires orthogonales au choc. Il est représenté schématiquement en figure 3.4.

Les positions du choc sont données par les courbes α=cste, et les rayons sont représentés par les courbes β=cste. Puisque la position du choc dépend du temps, α et t sont reliés par $\alpha = c_+ t$, ce qui est cohérent avec la relation level-set (3.20) définie dans le cadre général. La

distance infinitésimale séparant le choc entre les instants α et $\alpha + \mathrm{d}\alpha$ est $M\mathrm{d}\alpha$. Les rayons découpent le front de choc en tubes de rayon élémentaires d'aire A. La distance infinitésimale séparant deux rayons de coordonnées β et $\beta + \mathrm{d}\beta$ est alors $A\mathrm{d}\beta$.



(a) (b)

FIGURE 3.5 – Fig. (a) : Variations géométriques élémentaires dans la théorie GSD. Fig. (b) : Relations entre les coordonnées dans la base locale et la base cartésienne au voisinage d'un point P.

Considérons le quadrilatère curviligne PQRS de la figure 3.5(a) dont les sommets ont pour coordonnées (α, β), $(\alpha + \mathrm{d}\alpha, \beta)$, $(\alpha + \mathrm{d}\alpha, \beta + \mathrm{d}\beta)$ et $(\alpha, \beta + \mathrm{d}\beta)$. Soit $\theta = \theta(\alpha, \beta)$ l'angle orienté entre l'axe des abscisses et le rayon de coordonnée β. Puisque PS et QR ont une longueur de $A\delta\beta$ et $(A + A_\alpha \delta\alpha)\,\delta\beta$ respectivement, et que la distance entre eux est $M\delta\alpha$, le changement dans l'inclinaison du rayon de P à S est donné par

$$\delta\theta_{|PS} = \frac{QR - PS}{PQ} = \frac{1}{M}\frac{\partial A}{\partial \alpha}\delta\beta,$$

d'où

$$\frac{\partial \theta}{\partial \beta} = \frac{1}{M}\frac{\partial A}{\partial \alpha}. \tag{3.35}$$

Puisque la base associée aux coordonnées (α, β) est orthogonale, une deuxième équation s'obtient par un argument similaire :

$$\frac{\partial \theta}{\partial \alpha} = -\frac{1}{A}\frac{\partial M}{\partial \beta}. \tag{3.36}$$

Remarque 3.7

L'abscisse curviligne le long du choc, s, s'exprime comme $\mathrm{d}s = A\mathrm{d}\beta$.

Le système (3.35)-(3.36) est complété par la relation $A-M$ (3.16), en assimilant les tubes de rayon à des tuyères de section faiblement variable, *i.e.* en négligeant l'écoulement transversal. En l'injectant dans (3.35)-(3.36), le modèle GSD se réduit dans la base locale du choc en un système de deux équations à deux inconnues :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \theta}{\partial \beta} - \dfrac{A'(M)}{M}\dfrac{\partial M}{\partial \alpha} = 0 & \text{(3.37a)} \\ \dfrac{\partial \theta}{\partial \alpha} + \dfrac{1}{A(M)}\dfrac{\partial M}{\partial \beta} = 0. & \text{(3.37b)} \end{cases}$$

Ce système est hyperbolique sous la condition $A'(M) < 0$, vérifiée ici d'après (3.16) dès que $\lambda(M)$ est positif. Des ondes non-linéaires de vitesse caractéristique $\pm u(M)$, relatives aux coordonnées (α, β), se développent ainsi sur la surface de choc :

$$u(M) = \sqrt{\frac{-M}{A(M)A'(M)}} = \frac{1}{A(M)}\sqrt{\frac{M^2-1}{\lambda(M)}}. \tag{3.38}$$

Ces ondes traduisent le caractère non instantané des modifications de géométrie, et donc d'intensité du front.

En effectuant les combinaisons linéaires (3.37b)$\pm u(M)$(3.37a), le système (3.37) s'écrit sous la forme caractéristique :

$$\left|\begin{array}{lll} \mathrm{d}\theta + \dfrac{\mathrm{d}M}{Au} = 0 & \text{sur } C^+ : & \dfrac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}\alpha} = +u(M) \\ \mathrm{d}\theta - \dfrac{\mathrm{d}M}{Au} = 0 & \text{sur } C^- : & \dfrac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}\alpha} = -u(M), \end{array}\right. \tag{3.39}$$

donnant ainsi les invariants de Riemann :

$$\theta \pm \omega(M) = cste \text{ sur } C^{\pm}, \tag{3.40}$$

où

$$\omega(M) = \int_1^M \frac{\mathrm{d}m}{A(m)u(m)} = \int_1^M \sqrt{\frac{\lambda(m)}{m^2-1}}\mathrm{d}m < +\infty.$$

Remarque 3.8

Comme $\dfrac{\lambda(M)}{M^2-1} \sim \dfrac{2}{M-1}$ lorsque $M \to 1$, il est facile de vérifier que la fonction $M \to \omega(M)$ est bien définie pour tout $M \geq 1$. Cette fonction est de plus croissante sur $[1, \infty[$ puisque l'intégrant est positif.

Remarque 3.9

L'étude du modèle s'effectue pour une relation $A - M$ *a priori* quelconque, tant que la condition $A'(M) < 0$ est vérifiée.

Changement de base. Dans le voisinage d'un point P, la base locale au choc et la base cartésienne sont liées par les relations suivantes (voir Fig. 3.5(b)) :

$$\begin{array}{rcl} M\mathrm{d}\alpha & = & \cos\theta \mathrm{d}x + \sin\theta \mathrm{d}y \\ A\mathrm{d}\beta & = & -\sin\theta \mathrm{d}x + \cos\theta \mathrm{d}y. \end{array} \tag{3.41}$$

D'autre part, puisque $\alpha = \alpha(x, y)$ et $\beta = \beta(x, y)$, les différentielles totales de α et β s'écrivent :

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{d}\alpha & = & \dfrac{\partial\alpha}{\partial x}\mathrm{d}x + \dfrac{\partial\alpha}{\partial x}\mathrm{d}y \\ \mathrm{d}\beta & = & \dfrac{\partial\beta}{\partial x}\mathrm{d}x + \dfrac{\partial\beta}{\partial x}\mathrm{d}y. \end{array} \tag{3.42}$$

D'où en identifiant (3.42) avec (3.41), on obtient :

$$\left|\begin{array}{lll} \dfrac{\partial\alpha}{\partial x} = \dfrac{\cos\theta}{M} & , & \dfrac{\partial\alpha}{\partial y} = \dfrac{\sin\theta}{M} \\ \dfrac{\partial\beta}{\partial x} = -\dfrac{\sin\theta}{A} & , & \dfrac{\partial\beta}{\partial y} = \dfrac{\cos\theta}{A}, \end{array}\right. \tag{3.43}$$

ainsi que

$$\left|\begin{array}{lll} \dfrac{\partial x}{\partial \alpha} = M\cos\theta & , & \dfrac{\partial x}{\partial \beta} = -A\sin\theta \\ \dfrac{\partial y}{\partial \alpha} = M\sin\theta & , & \dfrac{\partial y}{\partial \beta} = \quad A\cos\theta. \end{array}\right. \tag{3.44}$$

Écriture du modèle dans la base cartésienne. Le passage de la base locale liée aux coordonnées (α, β) à la base canonique associée aux coordonnées (x, y) est direct à l'aide des relations (3.43). Le système (3.37) s'écrit alors sous la forme *conservative* suivante :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\sin\theta}{M}\right) - \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\cos\theta}{M}\right) = 0 & \text{(3.45a)} \\ \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\cos\theta}{A}\right) + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\sin\theta}{A}\right) = 0. & \text{(3.45b)} \end{cases}$$

Par (3.43), l'équation (3.45a) est équivalente à $\dfrac{\partial^2\alpha}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial^2\alpha}{\partial x \partial y}$. Ces relations donnent également l'équation eikonale (3.22), ainsi que l'expression du vecteur normal unitaire au choc (3.21), puisque $\vec{n} = (\cos\theta, \sin\theta)^T$ en deux dimensions. Enfin, la relation (3.45b) est identique à l'équation bilan sur les tubes de rayon (3.23).

Ayant remarqué que

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\dfrac{\partial y}{\partial \alpha} + \dfrac{\partial y}{\partial \beta}\dfrac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}\alpha}}{\dfrac{\partial x}{\partial \alpha} + \dfrac{\partial x}{\partial \beta}\dfrac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}\alpha}},$$

les caractéristiques (3.39) s'écrivent dans la base cartésienne :

$$d\theta \pm \frac{\mathrm{d}M}{Au} = 0 \text{ sur } C^{\pm} : \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \tan(\theta \pm \nu), \tag{3.46}$$

avec

$$\tan(\nu) = \frac{Au}{M} = \frac{1}{M}\sqrt{\frac{M^2-1}{\lambda(M)}}.$$

Choc-choc. Lorsque les caractéristiques C^- ou C^+ se croisent, le système (3.37) développe un choc sur le front, appelé choc-choc par Whitham. Ce choc-choc correspond au point triple lors de la formation d'un front de Mach. Il s'agit d'une discontinuité sur l'intensité du choc M et sa direction θ. Les relations de saut correspondantes peuvent être déduites des équations sous forme conservative (3.45). Nous choisissons ici de les dériver géométriquement, par préservation des distances, comme l'avait proposé initialement Whitham.

Considérons une discontinuité sur le choc à deux instants successifs séparant deux états constants (M_1, θ_1) et (M_2, θ_2) comme schématisé en figure 3.6. On note $\Delta\alpha$ et $\Delta\beta$ les différences sur les coordonnées α et β respectivement. Puisque la base locale est orthogonale, l'invariance de la distance PR parcourue par le choc-choc implique :

$$(M_1\Delta\alpha)^2 + (A_1\Delta\beta)^2 = (M_2\Delta\alpha)^2 + (A_2\Delta\beta)^2.$$

Il vient donc :

$$C^2 = \left(\frac{\Delta\beta}{\Delta\alpha}\right)^2 = -\frac{M_2^2 - M_1^2}{A_2^2 - A_1^2}, \tag{3.47}$$

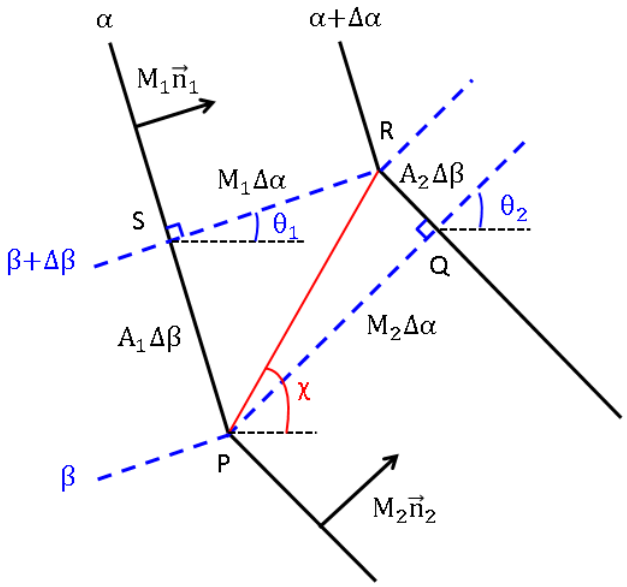


FIGURE 3.6 – Variations géométriques élémentaires pour un choc-choc dans la théorie GSD. Le choc-choc sépare les états (M_1, θ_1), (M_2, θ_2). La ligne rouge représente sa trajectoire, d'angle orienté χ par rapport à l'axe (Ox).

en notant C la vitesse adimensionnée du choc-choc. Il s'agit de la version discrète de la vitesse des ondes (3.38) :

$$C^2 = -\frac{M_2 + M_1}{\frac{A_2 - A_1}{M_2 - M_1}(A_2 + A_1)} \longrightarrow -\frac{M_1}{A'(M_1)A(M_1)} \quad \text{pour} \quad M_2 \longrightarrow M_1.$$

Soit χ l'angle orienté entre la trajectoire du choc-choc et l'axe des abscisses. À partir de la figure 3.6, il est aisé de déduire les relations :

$$\frac{A_1 C}{M_1} = \tan\left(\widehat{SRP}\right) = \tan(\chi - \theta_1) \quad , \quad \frac{A_2 C}{M_2} = \tan\left(\widehat{QPR}\right) = \tan(\chi - \theta_2), \tag{3.48}$$

$$\frac{M_1}{A_1 C} = \tan\left(\widehat{RPS}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - (\chi - \theta_1)\right), \tag{3.49}$$

et [1]

$$\cot(\theta_2 - \theta_1) = \tan\left(\widehat{QPS}\right) = \frac{\tan\left(\widehat{QPR}\right) + \tan\left(\widehat{RPS}\right)}{1 - \tan\left(\widehat{QPR}\right)\tan\left(\widehat{RPS}\right)} = \frac{\frac{A_2 C}{M_2} + \frac{M_1}{A_1 C}}{1 - \frac{A_2}{A_1}\frac{M_1}{M_2}}.$$

En simplifiant cette relation puis en injectant (3.47), on obtient :

$$\cot(\theta_2 - \theta_1) = \frac{A_1 A_2 C^2 + M_1 M_2}{C\left(A_1 M_2 - A_2 M_1\right)} = \frac{A_2 M_2 + A_1 M_1}{C\left(A_1^2 - A_2^2\right)}. \tag{3.50}$$

Substituant (3.47) dans (3.48) et (3.50), il vient finalement :

$$\tan(\theta_2 - \theta_1) = \frac{\sqrt{\left(\left(\frac{M_2}{M_1}\right)^2 - 1\right)\left(1 - \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2\right)}}{\frac{A_2}{A_1}\frac{M_2}{M_1} + 1}, \tag{3.51}$$

1. Rappelons les formules trigonométriques $\cot(x) = \frac{1}{\tan(x)} = \tan(x - \frac{\pi}{2})$ et $\tan(x + y) = \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x)\tan(y)}$.

$$\tan(\chi - \theta_i) = \frac{A_i}{M_i}\sqrt{\frac{M_2^2 - M_1^2}{A_1^2 - A_2^2}}, \text{ pour i = 1 ou 2 .} \tag{3.52}$$

Puisque le modèle GSD est hyperbolique, l'étude du problème de Riemann est essentielle en vue de la validation physique du modèle. De plus, les solutions obtenues serviront de base à la validation du schéma numérique. Cette étude est entièrement menée en deux dimensions dans [71, 85]. Les auteurs réécrivent le modèle sous la forme d'un p-système pour lequel la résolution complète du problème de Riemann est connue.

Le problème de Riemann associé au modèle GSD est équivalent au problème de la diffraction d'un choc plan sur un dièdre convexe (cas continu) et concave (apparition d'un choc-choc) comme l'explique Whitham [144]. Cette étude est effectuée dans la prochaine sous-section.

3.1.5 Application 2D : diffraction d'un choc plan sur une paroi

Cette section est consacrée à des applications spécifiques de la théorie de Whitham : la diffraction d'un choc plan se déplaçant le long d'un mur. Le mur est une condition aux limites de valeur $\theta = \theta_w$. Il s'agit d'un rayon ($\beta = 0$) dans la théorie de Whitham, impliquant que le choc lui est localement orthogonal.

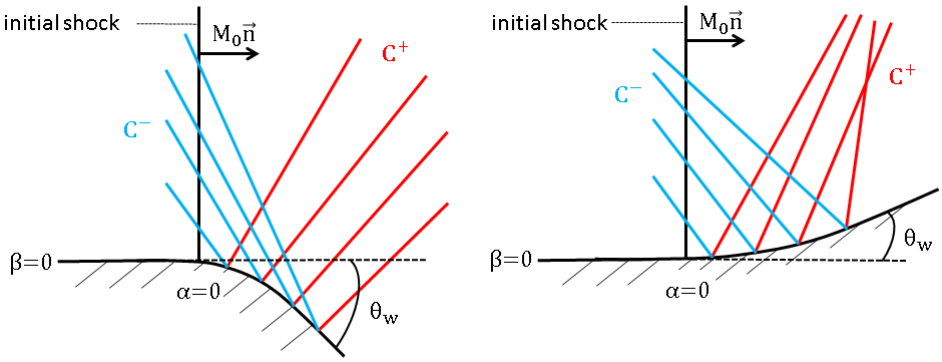


FIGURE 3.7 – Schéma de la diffraction d'un choc plan sur un mur convexe à gauche et concave à droite.

Initialement, le mur est rectiligne et le choc lui est perpendiculaire et plan ($\theta_0 = 0$), d'intensité initiale M_0. La position du choc juste avant que le mur ne change d'inclinaison définit le lieu où $\alpha = 0$. Le problème est schématisé en figure 3.7 pour un mur convexe ($\theta_w < 0$) ou concave ($\theta_w > 0$).

Tant qu'il n'y a pas apparition de discontinuité (choc-choc), la solution du problème est une onde simple. En effet, les caractéristiques C^- intersectent la région $\{\alpha = 0; \beta > 0\}$, dans laquelle $\theta = \theta_0 = 0$ et $M = M_0$. L'invariant de Riemann sur la C^- (3.40) est alors constant partout :

$$\theta - \omega(M) = -\omega(M_0). \tag{3.53}$$

En particulier, le nombre de Mach au niveau du mur, M_w, se calcule directement grâce à la relation :

$$\omega(M_w) = \theta_w + \omega(M_0), \tag{3.54}$$

puisque θ_w et M_0 sont connus. On notera que M_w est constant, indépendant de α.

Lorsque le mur est concave ($\theta_w > 0$) comme en figure 3.7 de droite, les rayons ainsi que les caractéristiques tendent à se croiser, et une onde compressive se forme sur le front de choc. Comme $0 \leq \theta \leq \theta_w$, il vient immédiatement à partir de (3.53) : $\omega(M) > \omega(M_0)$. Cela implique que $M \geq M_0 \geq 1$ puisque la fonction $M \to \omega(M)$ est croissante. Par conséquent, le

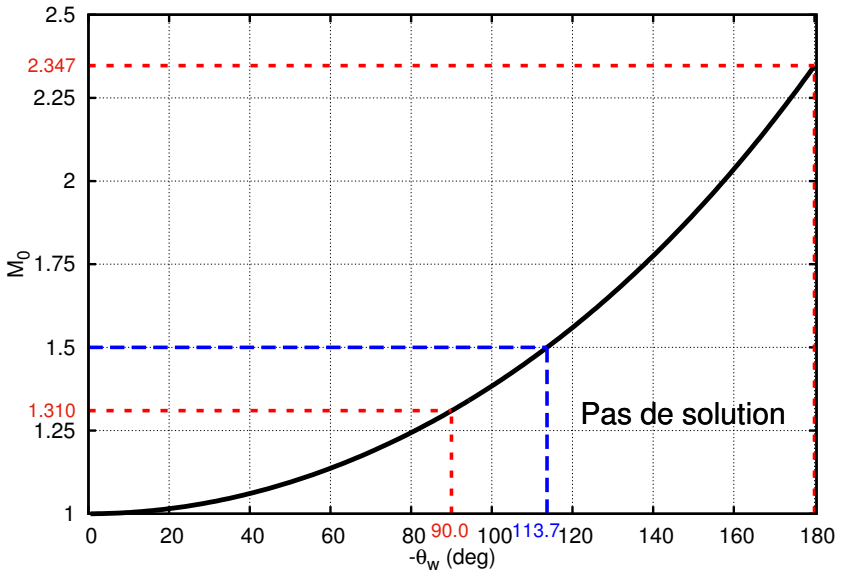


FIGURE 3.8 – Nombre de Mach M_0 minimal en fonction de θ_w (en degré) pour avoir existence de la solution du problème de la diffraction d'un choc plan sur un mur convexe d'angle θ_w (relation (3.55)). Si les données (θ_w, M_0) du problème appartiennent à la région située sous la courbe, alors il n'y a pas de solution au problème.

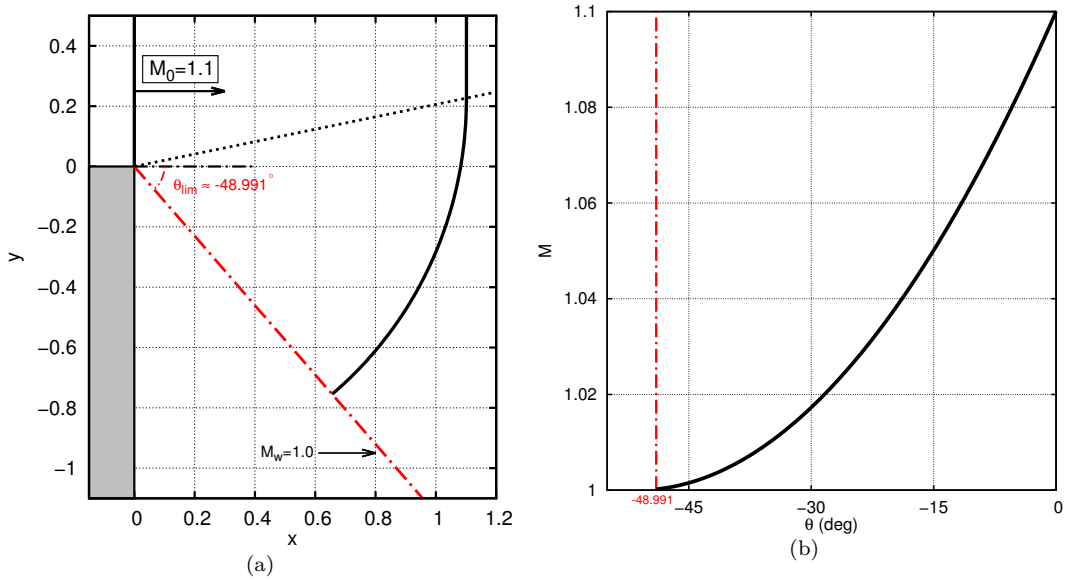


FIGURE 3.9 – Diffraction d'un choc plan à nombre de Mach 1.1 sur un dièdre à $-90°$. La solution est une onde de détente. Elle n'existe plus pour $\theta < -48.991°$. Fig. (a) : Position du choc au temps $\alpha = 1$. Fig. (b) : Distribution du nombre de Mach sur le front en fonction de l'angle orienté des rayons θ.

nombre de Mach sur le front de choc augmente jusqu'à la formation potentielle d'un choc-choc en temps fini. Inversement, pour un mur convexe (*cf.* Fig. 3.7 de gauche), les rayons et les caractéristiques divergent. Une onde expansive se crée sur le front, diminuant le nombre de

Mach du choc incident à la paroi. Dans ce cas, pour $\theta_w < 0$ donné, il n'y a pas de solution pour un choc trop faible. En effet, l'intégrale $\int_1^M \sqrt{\frac{\lambda(m)}{m^2-1}}\mathrm{d}m$ étant finie, la relation (3.53) montre qu'il existe une solution telle que $M \geq 1$ si et seulement si

$$M_0 \geq M_{lim} \geq 1 \quad \text{avec} \quad \omega\left(M_{lim}\right) = \int_1^{M_{lim}} \sqrt{\frac{\lambda(m)}{m^2-1}}\mathrm{d}m = -\theta_w. \tag{3.55}$$

Cette condition est représentée en figure 3.8. Si (M_0, θ_w) appartient à cette courbe, alors il existe une solution telle que $M = 1$. Et si cette donnée se trouve dans la région sous la courbe, alors il n'y a pas de solution au problème. De surcroît, plus l'inclinaison de la paroi est importante, plus le nombre Mach au moment de la diffraction M_0 doit être élevé.

À titre d'exemple, pour une rampe inclinée d'angle $\theta_w < 0$ telle que schématisée en figure 3.10(a), le nombre de Mach incident doit vérifier $M_0 \geq 1.310$ pour $\theta_w = -90°$, et $M_0 \geq 2.347$ pour $\theta_w = -180°$. Le problème de la diffraction d'un choc plan sur un dièdre convexe est traité dans la suite. Néanmoins, à titre illustratif, nous présentons les résultats à nombre de Mach 1.1 pour un dièdre à $-90°$ en figure 3.9. Il apparaît alors un angle limite $\theta_{lim} \approx -48.991°$ en dessous duquel la solution au problème n'existe plus. Cet angle correspond à la trajectoire pour laquelle le nombre de Mach du choc vaut 1. Passé cet angle, le nombre de Mach serait inférieur à cette valeur limite, ce qui n'est pas consistant pour un choc.

Il s'agit là d'une des principales limitations du modèle GSD. Son incidence sur la modélisation des ondes de souffle est problématique puisque ce type de configuration est rapidement rencontré en géométrie complexe. Nous verrons comment ce défaut sera corrigé dans la deuxième partie du manuscrit.

Remarque 3.10

Dans [85], le modèle GSD (3.37) est réécrit sous la forme du p-système [113] :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} - \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial p(v)}{\partial x} = 0, \end{cases}$$

en effectuant le changement de variable $x = \alpha$ et $M\mathrm{d}t = A\mathrm{d}\beta$, $u = \theta$, $v = \ln\left(A(M)\right)$, et $p(v) = \ln\left(M\right) = \ln\left(A^{-1}\left(e^v\right)\right)$. L'absence de solution observée ici est mathématiquement similaire à la formation du vide pour les solutions du p-système [113, 122].

Dans la suite de cette section, nous étudions la diffraction d'un choc plan sur un dièdre (*cf.* Fig. 3.10). Ce type de problème élémentaire s'apparente à un problème de Riemann, et permet d'exhiber des solutions simples au modèle GSD.

Diffraction sur un dièdre convexe. Considérons pour commencer la diffraction d'un choc plan sur un dièdre convexe d'angle $\theta_w < 0$ connu. Le problème est schématisé en figure 3.10(a). Une onde de détente se forme alors sur le front, *cf.* Fig. 3.11. Le nombre de Mach diminue continûment de la valeur M_0 du choc incident à M_w au niveau de la paroi (*cf.* Fig. 3.11(b)). En effet, l'angle des rayons, θ, vérifie nécessairement $\theta_w \leq \theta \leq 0$, ce qui implique $\omega(M) \leq \omega(M_0)$ d'après (3.53), et donc $M_w \leq M \leq M_0$ puisque la fonction $M \to \omega(M)$ est croissante.

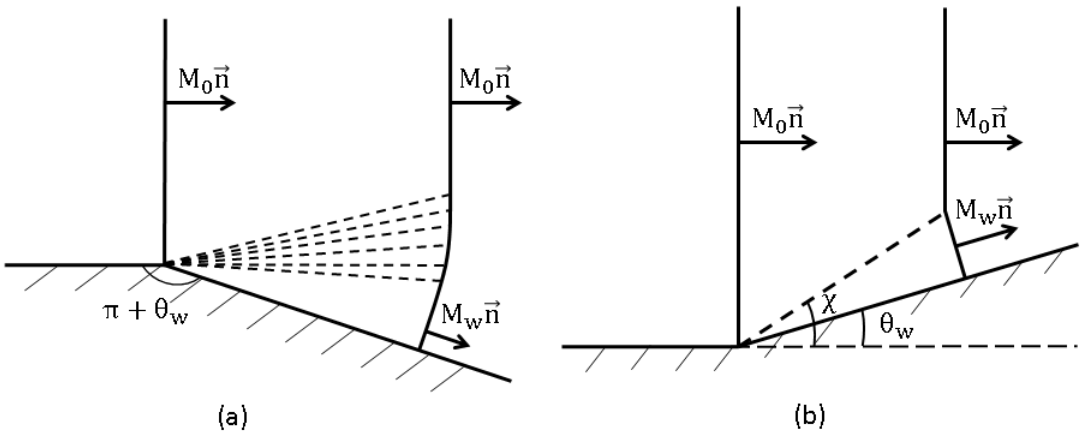


FIGURE 3.10 – Schéma de la diffraction d'un choc plan sur un dièdre convexe (Fig. (a)) et concave (Fig. (b)).

La solution du problème est une onde simple et s'écrit :

$$\left|\begin{array}{lll} M = M_0 \quad , \ \theta = \theta_0 & \text{si } u(M_0) \leq \frac{\beta}{\alpha} \\ u(M) = \frac{\beta}{\alpha} \quad , \ \theta = \displaystyle\int_{M_0}^{M} \frac{\mathrm{d}M}{Au} & \text{si } u(M_w) \leq \frac{\beta}{\alpha} \leq u(M_0) \\ \theta_w = \displaystyle\int_{M_0}^{M_w} \frac{\mathrm{d}M}{Au} \quad , \ \theta = \theta_w & \text{si } \frac{\beta}{\alpha} \leq u(M_w). \end{array}\right. \tag{3.56}$$

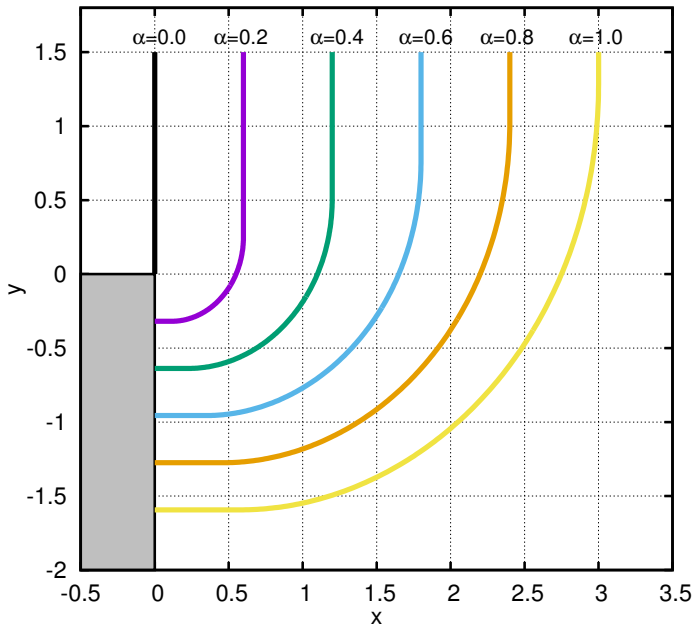
Pour $\alpha = c_+ t$ fixé, l'angle d'inclinaison des rayons et le nombre de Mach du choc sont ainsi connus en fonction de la position sur le choc β ($\beta = 0$ à la paroi). À l'aide des relations (3.44), et puisque θ_w et M_w sont indépendants de α, la position du pied du choc est donnée par :

$$\begin{array}{rcl} x_w & = & x_0 + \alpha M_w \cos\theta_w \\ y_w & = & y_0 + \alpha M_w \sin\theta_w, \end{array} \tag{3.57}$$

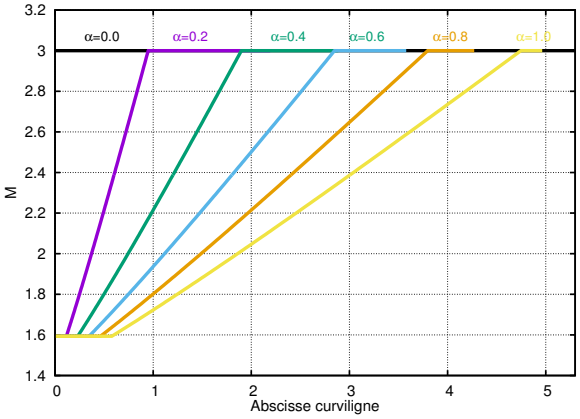
où (x_0, y_0) est la coordonnée initiale du pied du choc. Les coordonnées du choc s'expriment alors, pour $\beta > 0$, comme :

$$\left|\begin{array}{l} x(\beta) = x_w - \displaystyle\int_0^{\beta} A\left(M(\beta)\right) \sin\left(\theta(\beta)\right) \mathrm{d}\beta \\ \\ y(\beta) = y_w + \displaystyle\int_0^{\beta} A\left(M(\beta)\right) \cos\left(\theta(\beta)\right) \mathrm{d}\beta. \end{array}\right. \tag{3.58}$$

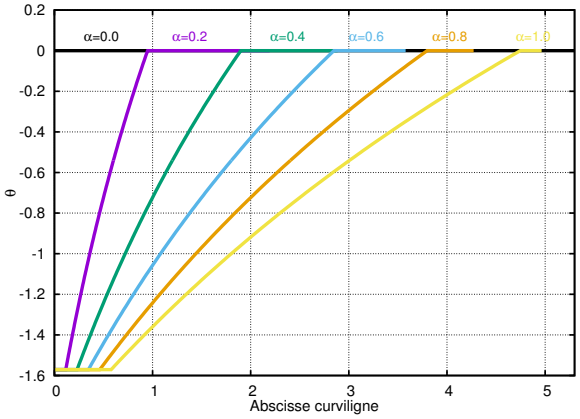
Les relations (3.56)-(3.58) sont intégrées numériquement pour un choc d'intensité quelconque, à l'aide d'une méthode de Simpson pour les intégrales et d'un algorithme de Newton pour les équations non-linéaires. Un exemple de résolution est représenté en figure 3.11 pour un angle de rampe $\theta_w = -90°$ et un nombre de Mach incident $M_0 = 3$.



(a)



(b)



(c)

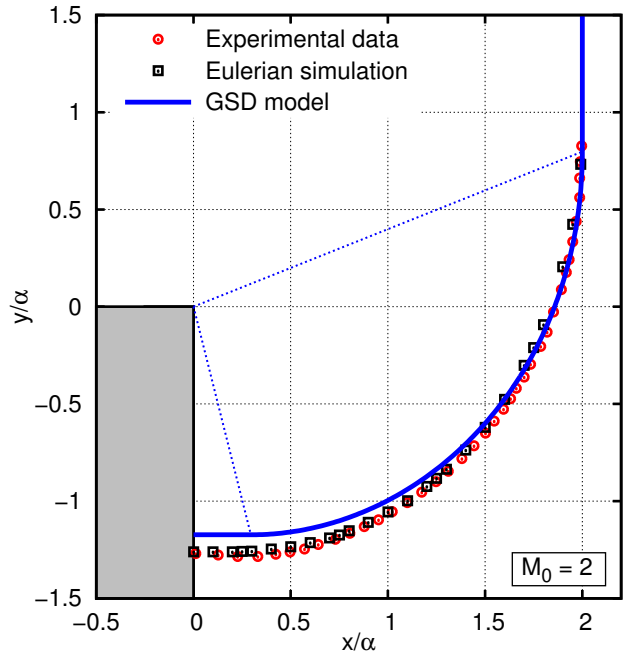
FIGURE 3.11 – Diffraction d'un choc plan à nombre de Mach 3 sur un dièdre à $-90°$. La solution est une onde de détente et s'exprime à l'aide de (3.56)-(3.58). Fig. (a) : Positions successives du choc. Fig. (b) : Nombre de Mach le long du choc. Fig. (c) : Angle orienté des rayons le long du choc. L'abscisse curviligne, s, est calculée à partir de la relation $ds = A\mathrm{d}\beta$.

Dans la limite des chocs forts, la relation $A - M$ de Whitham s'écrit (3.19) :

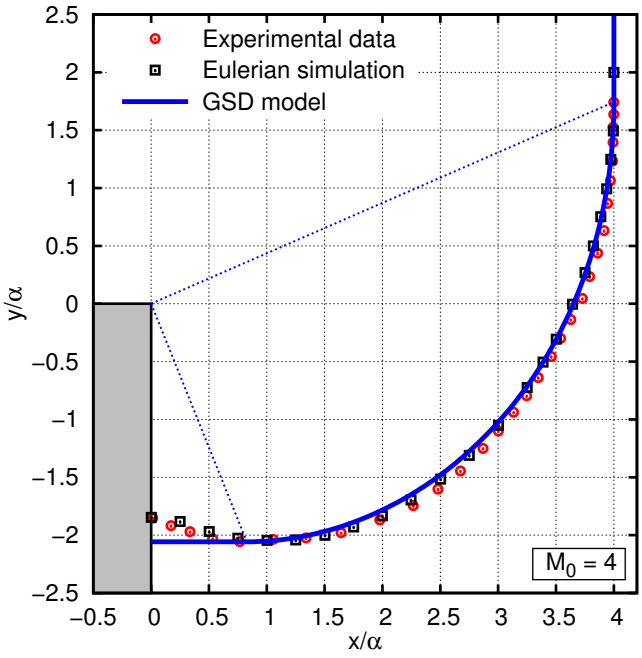
$$A(M) = \left(\frac{M_0}{M}\right)^{\lambda_\infty},$$

l'aire des tubes de rayon pouvant être considérée comme adimensionnelle, en vertu de la relation (3.16). Il est alors possible de calculer une solution analytique de (3.56)-(3.58). Le nombre de Mach au niveau du mur s'exprime comme :

$$M_w = M_0 \exp\left(\frac{\theta_w}{\sqrt{\lambda_\infty}}\right). \tag{3.59}$$



(a)



(b)

FIGURE 3.12 – Diffraction d'un choc plan à $M_0 = 2$ (Fig. (a)) et $M_0 = 4$ (Fig. (b)) sur un dièdre d'angle $-90°$. Les données expérimentales sont issues de [143]. Les pointillés délimitent la partie onde simple de la solution reliant les chocs plans de nombre de Mach M_0 et M_w. Ils correspondent à la trajectoire dans l'espace physique de la première et de la dernière perturbations sur le front.

La solution de l'onde de détente est :

$$\left| \begin{array}{rcl} M(\beta) & = & M_0^{\frac{\lambda_\infty}{1+\lambda_\infty}} \left(\frac{\beta}{\alpha} \sqrt{\lambda_\infty} \right)^{\frac{1}{1+\lambda_\infty}} \\ \theta(\beta) & = & \frac{\sqrt{\lambda_\infty}}{1+\lambda_\infty} \ln \left(\frac{\beta \sqrt{\lambda_\infty}}{\alpha M_0} \right), \end{array} \right. \tag{3.60}$$

pour $u(M_w) \leq \frac{\beta}{\alpha} \leq u(M_0)$. On montre finalement que l'équation paramétrique de la partie courbe du choc est une spirale logarithmique qui peut s'exprimer à l'aide du paramètre θ, pour $\theta_w < \theta < 0$:

$$\left| \begin{array}{rcl} \frac{x}{M_0 \alpha} & = & \sqrt{\frac{1+\lambda_\infty}{\lambda_\infty}} \exp\left(\frac{\theta}{\sqrt{\lambda_\infty}} \right) \sin(\eta - \theta) \\ \frac{y}{M_0 \alpha} & = & \sqrt{\frac{1+\lambda_\infty}{\lambda_\infty}} \exp\left(\frac{\theta}{\sqrt{\lambda_\infty}} \right) \cos(\eta - \theta), \end{array} \right. \tag{3.61}$$

avec $\eta = \text{atan}(\sqrt{\lambda_\infty})$.

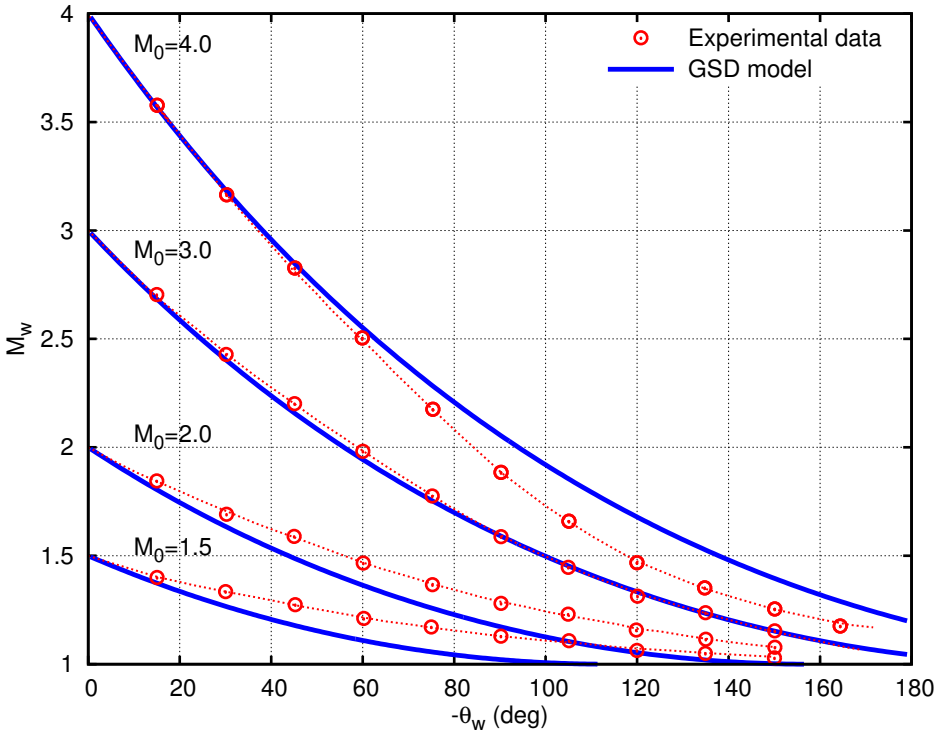


FIGURE 3.13 – Diffraction d'un choc plan sur un dièdre convexe. Nombre de Mach au niveau de la paroi, M_w, en fonction de l'angle d'inclinaison de la rampe, θ_w, pour différents nombres de Mach initiaux, M_0. Les données expérimentales sont issues de [120].

La figure 3.12 présente la solution obtenue pour une rampe d'inclinaison $\theta_w = -90°$ et un nombre de Mach initial de 2 et 4. Ces résultats sont comparés d'une part avec les données expérimentales issues de [143], et d'autre part avec des simulations numériques Eulériennes [2]. On note la bonne correspondance du modèle GSD avec l'expérience et les simulations. Ceci est tout à fait remarquable au vu de la simplicité de la méthode.

2. Le lecteur est renvoyé à l'annexe A pour les détails sur l'algorithme de simulation Eulérienne utilisé.

Lorsque le choc est fort, un point d'inflexion apparaît sur le front au niveau de la paroi [11]. Il est observable sur les données expérimentales ainsi que sur la simulation Eulérienne (Fig. 3.12(b)), mais n'est pas restitué par le modèle GSD. Ce point d'inflexion résulte de l'interaction de l'écoulement arrière avec le choc. Best [20] a étendu le modèle GSD en considérant les effets arrière et a effectivement observé l'apparition de ce point d'inflexion. Ce modèle sera étudié au chapitre 9.

Une comparaison plus globale du problème de la diffraction sur un dièdre convexe est présentée en figure 3.13. Le nombre de Mach au niveau de la paroi donné par le modèle GSD, M_w, est confronté à des données expérimentales [120] pour différents angles de rampe, θ_w, et différents nombres de Mach initiaux du choc, M_0. Pour $M_0 = 4$, le modèle surestime les résultats expérimentaux. L'estimation est par contre correcte pour un nombre de Mach initial de 3. Pour un nombre de Mach plus faible ($M_0 = 2$ et $M_0 = 1.5$) le modèle sous-estime ces résultats, et sa limitation apparaît. En effet, nous pouvons observer pour ces deux cas que la décroissance de M_w est plus rapide pour le modèle GSD que pour les données expérimentales. En particulier, M_w vaut rapidement 1 pour un angle de déviation donné ($\theta_w \approx -113.7°$ pour $M_0 = 1.5$ par exemple). Pour une rampe plus inclinée, il n'y aura pas de solution au niveau de la paroi. Il s'agit de la limitation discutée précédemment et présentée en figure 3.8.

Oshima *et al.* [91, 90] ont proposé une modification de la relation $A - M$ en tenant compte des forces de cisaillement qui pourraient exister entre les tubes de rayon. Une meilleure estimation du nombre de Mach au niveau de la paroi pour un choc faible est alors observée. Ce point sera détaillé au chapitre 7.

Diffraction sur un dièdre concave. Considérons maintenant la diffraction d'un choc plan sur un dièdre concave d'angle $\theta_w > 0$. Le problème est schématisé en figure 3.10(b). Les caractéristiques C^+ se croisent immédiatement et un choc-choc se crée sur la surface (*cf.* Fig. 3.14). Il s'agit de la trace du point triple lors de la réflexion non régulière, correspondant à l'apparition d'un front de Mach. Ce front de Mach joint le choc incident à la paroi. L'angle orienté entre la trajectoire du choc-choc et l'axe (Ox) est noté χ.

Les conditions de Rankine-Hugoniot à travers la discontinuité (3.51)-(3.52) doivent être considérées. La solution (M_w, χ) du problème est alors donnée par :

$$\begin{cases} \tan(\theta_w) = \dfrac{\sqrt{\left(\left(\frac{M_w}{M_0}\right)^2 - 1\right)\left(1 - \left(\frac{A_w}{A_0}\right)^2\right)}}{1 + \frac{A_w}{A_0}\frac{M_w}{M_0}} & \text{(3.62a)} \\ \tan(\chi - \theta_w) = \dfrac{A_w}{A_0}\sqrt{\dfrac{1 - \left(\frac{M_0}{M_w}\right)^2}{1 - \left(\frac{A_w}{A_0}\right)^2}}, & \text{(3.62b)} \end{cases}$$

où $\frac{A_w}{A_0} = \frac{A(M_w)}{A(M_0)}$ est définie par (3.17) :

$$\frac{A_w}{A_0} = \exp\left(-\int_{M_0}^{M_w} \frac{m\lambda(m)}{m^2 - 1}\mathrm{d}m\right).$$

Connaissant θ_w et M_0, la première relation fournit la vitesse du front de Mach, M_w, calculée numériquement à l'aide d'un algorithme de Newton. La seconde donne ensuite l'angle de la trajectoire du choc-choc, χ.

Remarque 3.11

Contrairement au cas précédent de détente, il existe une solution à ce problème pour toutes les configurations (θ_w, M_0). En effet, puisque les rayons convergent : $A_w \leq A_0$. Comme

$A'(M) < 0$, cela implique que $M_w \geq M_0$. La fonction

$$M \to \frac{\sqrt{\left(\left(\frac{M}{M_0}\right)^2 - 1\right)\left(1 - \left(\frac{A(M)}{A_0}\right)^2\right)}}{1 + \frac{A(M)}{A_0}\frac{M}{M_0}}$$

est une fonction continue, qui vaut 0 en $M = M_0$ et tend vers $+\infty$ lorsque $M \to +\infty$. Par conséquent, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, pour tout $\theta_w \in [0, \frac{\pi}{2}]$, il existe $M_w \in [M_0, +\infty[$ telle que la relation (3.62a) est vérifiée.

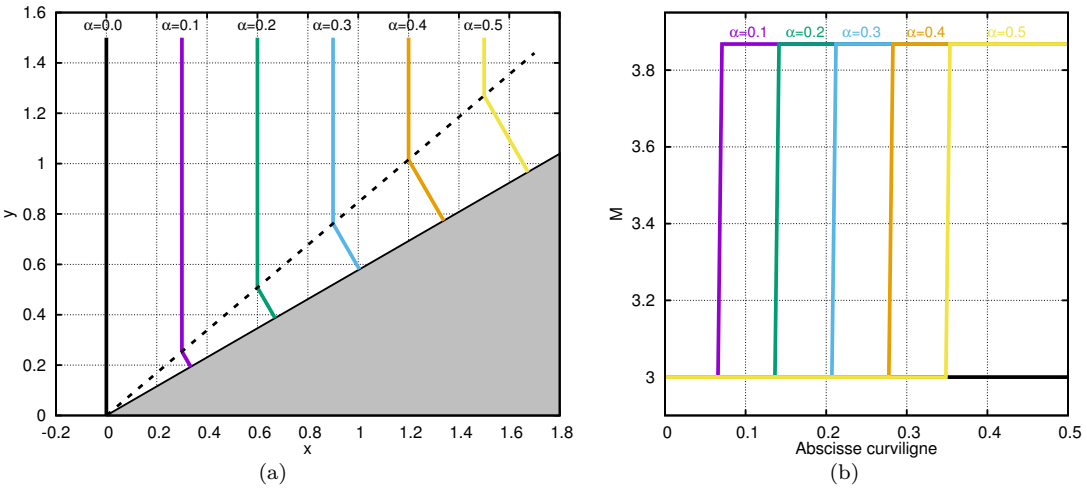
Les coordonnées du pied du front de Mach sont données par (3.57) :

$$\begin{aligned} x_w &= x_0 + \alpha M_w \cos\theta_w \\ y_w &= y_0 + \alpha M_w \sin\theta_w. \end{aligned} \tag{3.63}$$

La position du choc-choc sur le front, (x_c, y_c), se calcule directement au moyen de considérations géométriques (*cf.* Fig. 3.10(b)) :

$$\begin{aligned} x_c &= x_w - \alpha M_w \tan(\chi - \theta_w)\sin\theta_w \\ y_c &= y_w + \alpha M_w \tan(\chi - \theta_w)\cos\theta_w. \end{aligned} \tag{3.64}$$

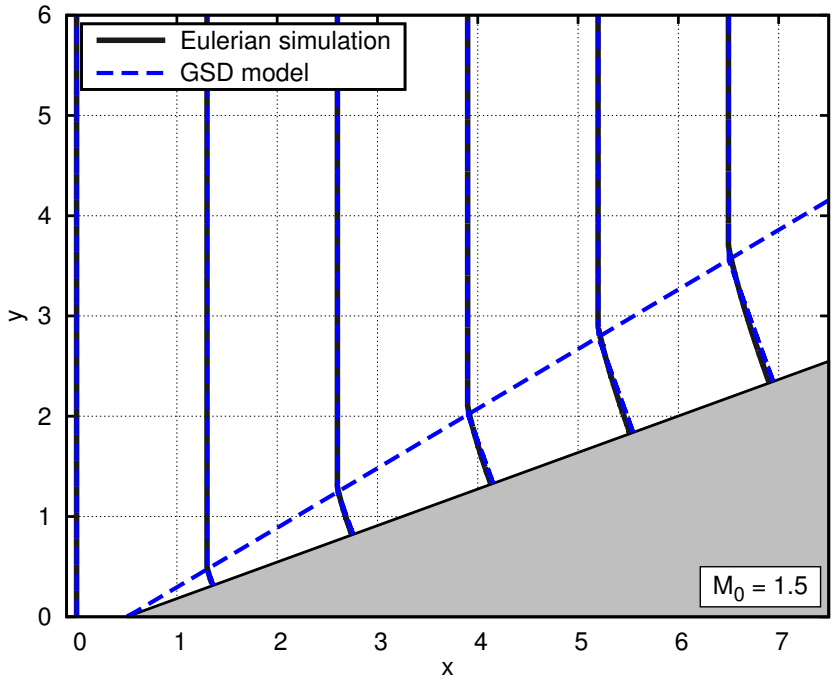
Un exemple de résolution de (3.62)-(3.64) est présenté en figure 3.14 pour un angle de rampe $\theta_w = 30°$ et un nombre de Mach incident $M_0 = 3$. Les positions successives du choc et la trajectoire du choc-choc sont également présentées en figure 3.15 pour un angle de 20° et un nombre de Mach incident de 1.5 et 4. Aucune donnée expérimentale n'est disponible pour ces cas et les simulations Eulériennes sont considérées comme solutions de référence. On note le bon accord du modèle GSD avec ces dernières.



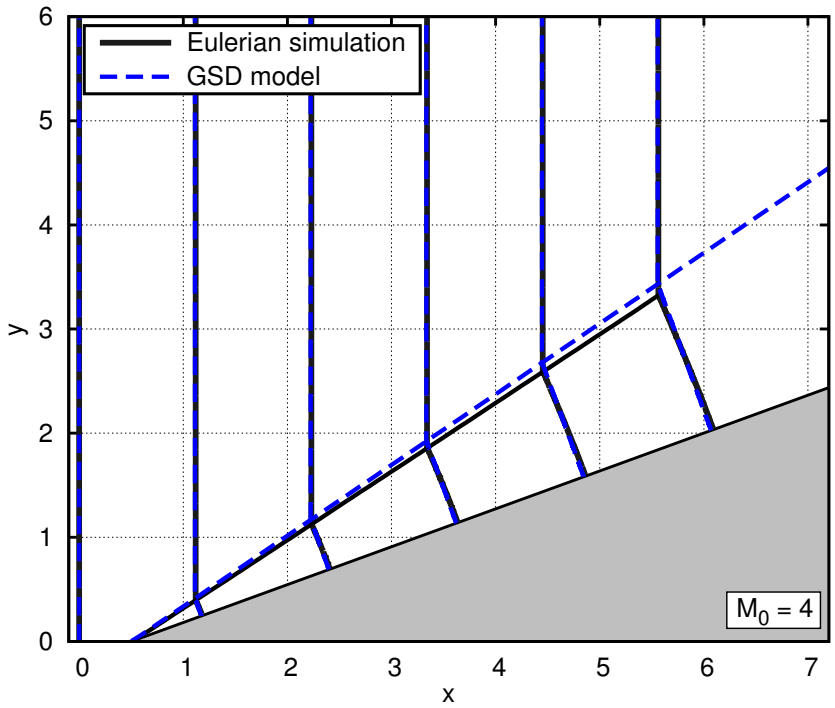
(a) (b)

FIGURE 3.14 – Diffraction d'un choc plan à nombre de Mach 3 sur un dièdre à 30°. La solution est un choc-choc et s'exprime comme (3.62)-(3.64). Fig. (a) : Positions successives du choc. Fig. (b) : Nombre de Mach le long du choc. L'abscisse curviligne s est calculée à partir de la relation $\mathrm{d}s = A\mathrm{d}\beta$.

L'angle de la trajectoire du choc-choc, $\chi - \theta_w$, est tracé en fonction de l'angle de la rampe, θ_w, en figure 3.16 pour un nombre de Mach initial de 10. La fonction λ atteignant rapidement



(a)



(b)

FIGURE 3.15 – Diffraction d'un choc plan à nombres de Mach $M_0 = 1.5$ (fig. (a)) et $M_0 = 4$ (fig. (b)) sur un dièdre concave d'angle $\theta_w = 20°$. Positions successives du choc et trajectoire du choc-choc.

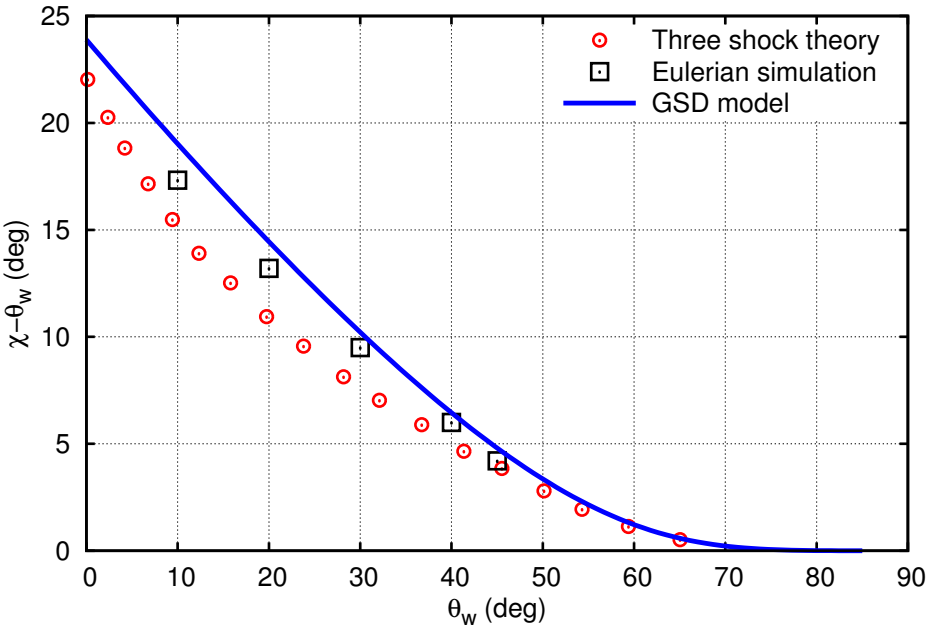


FIGURE 3.16 – Angle de la trajectoire du choc-choc en fonction de l'angle de la rampe de compression pour $M_0 = 10$. Comparaison du modèle GSD avec la théorie des trois chocs [15] et des données issues de simulations Eulériennes.

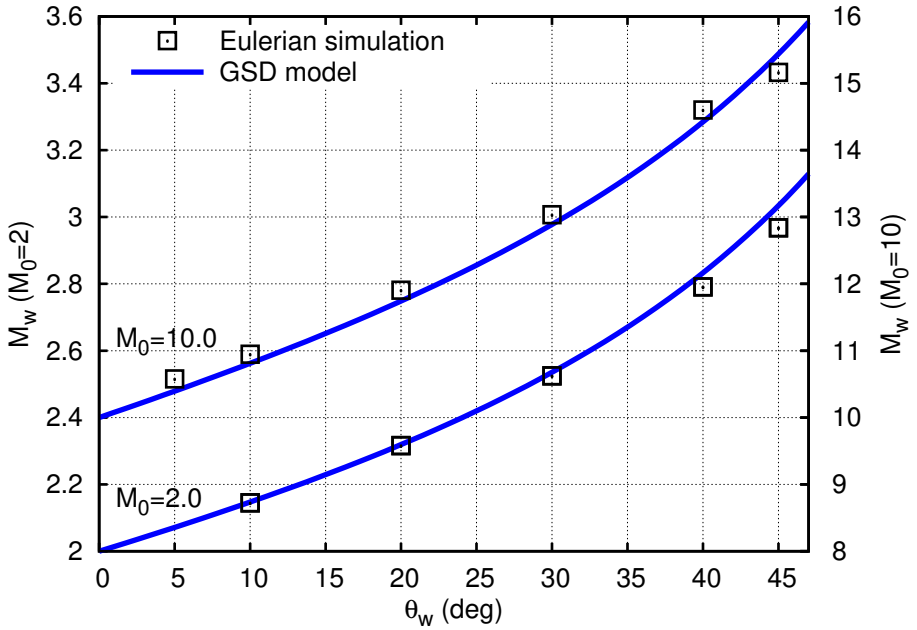


FIGURE 3.17 – Diffraction d'un choc plan sur un dièdre concave. Nombre de Mach au niveau de la paroi, M_w, en fonction de l'angle d'inclinaison de la rampe, θ_w, pour différents nombres de Mach initiaux, M_0. Comparaison du modèle GSD avec des données issues de simulations Eulériennes.

sa valeur limite, le cas $M_0 = 10$ est équivalent au cas limite du choc fort (*cf.* Fig. 3.2). Les résultats du modèle sont confrontés avec la théorie des trois chocs [15] comme suggéré par Whitham [143], et aux données issues de simulations Eulériennes. On rappelle que la théorie des trois chocs est en bon accord avec les observations expérimentales pour un choc fort [30]. L'estimation de la trajectoire est tout à fait correcte compte tenu de la simplicité du modèle GSD. Une comparaison du nombre Mach au niveau de la paroi, M_w, du modèle avec des données issues de simulations Eulériennes est présentée en figure 3.17. Les valeurs sont tracées pour différents angles de la rampe de compression, θ_w, et différentes intensités initiales du choc, M_0. Pour ces cas, l'approche de Whitham donne de très bons résultats.

Physiquement, le point triple n'existe pas pour toutes les configurations (θ_w, M_0). En effet, pour un angle d'incidence du choc β plus petit qu'une valeur limite $\beta_{lim}(M_0)$, la réflexion est régulière (RR) et le choc est attaché à la paroi (*cf.* Fig. 1.16 section 1.3). De manière équivalente, ce régime de réflexion est atteint pour une inclinaison de rampe θ_w plus élevée que $\theta_{lim} = \pi/2 - \beta_{lim}$. Dans le cas contraire, la réflexion est irrégulière (RI), et il se forme un front de Mach avec un point triple. L'angle théorique de transition entre ces deux régimes est représenté en figure 3.18 (échelle de gauche). Cet angle est d'environ 50° pour un choc fort et tend vers 0 à mesure que l'intensité du choc s'affaiblit. La réflexion irrégulière disparaît alors au profit de la réflexion régulière. Le modèle GSD restitue toujours un front de Mach, et cela même pour un angle d'inclinaison de la rampe supérieur à θ_{lim}. Néanmoins, l'angle de la trajectoire du choc-choc est faible pour cet angle de transition (*cf.* Fig. 3.18, échelle de droite), et le sera d'autant plus que l'angle d'inclinaison de la rampe est important, $\theta_w > \theta_{lim}$, ou que le choc est faible. Dans d'autres configurations, tel que le régime de réflexion de von Neumann [15], la transition entre le front de Mach et le choc incident est continue. Cette transition sera systématiquement discontinue pour le modèle GSD. Nous discuterons de l'incidence de la formation systématique du front de Mach pour la modélisation simplifiée des ondes de souffle dans la dernière partie

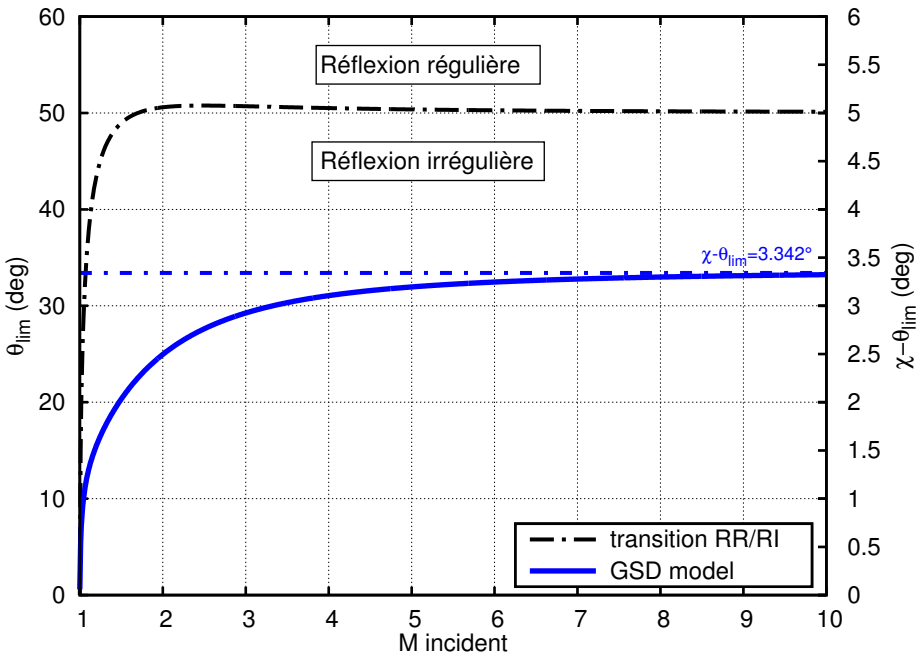


FIGURE 3.18 – Courbe noire pointillée (échelle de gauche) : Angle limite de la rampe de compression, θ_{lim}, théorique pour passer d'une réflexion régulière (RR) à une réflexion irrégulière (RI). Courbe pleine (échelle de droite) : Angle de la trajectoire du choc-choc par rapport à la rampe selon le modèle GSD pour $\theta_w = \theta_{lim}$. Cet angle tend vers 3.342° en choc fort.

du manuscrit. Signalons déjà, au vu de la figure 3.18, que le modèle GSD surestimera le niveau de pression à la paroi dans les cas où la réflexion est régulière.

3.2 Propagation d'un choc dans un milieu non-uniforme

Cette partie est consacrée à la présentation du modèle Geometrical Shock Dynamics pour un milieu amont non-uniforme et potentiellement en mouvement. Dans le cas hétérogène au repos, la première section détaille les calculs aboutissant à l'extension du modèle GSD proposé par [25]. La deuxième section reprend de manière plus synthétique la dérivation du modèle avec écoulement amont établie dans [53]. Ces extensions s'avèreront nécessaires lors de l'extension de nos travaux au cas des chocs à passages multiples, comme expliqué en introduction de ce manuscrit.

3.2.1 Propagation d'un choc dans un milieu hétérogène et au repos

Nous considérons tout d'abord le cas d'un milieu amont non-uniforme et au repos. Les variations de pression et de densité conduisent à une vitesse du son amont variable. L'écoulement étant au repos, un équilibre hydrostatique est possible. La fonction level-set du choc est alors définie par :

$$\Phi(\vec{x},t) = \alpha(\vec{x}) - c_0 t, \tag{3.65}$$

où c_0 est la vitesse du son de référence dans le milieu non perturbé. Si le milieu amont est uniforme, alors $c_0 = c_+$ et la définition (3.20) est retrouvée. Avec le même raisonnement que dans la section 3.1.2, la normale au choc et l'équation eikonale sont données par :

$$\vec{n} = \frac{\vec{\nabla}\alpha}{|\vec{\nabla}\alpha|} \quad \text{et} \quad \frac{c_+}{c_0} M |\vec{\nabla}\alpha| = 1.$$

L'écoulement dans les tubes de rayon est encore traduit par la relation (3.23) et les hétérogénéités du milieu sont prises en compte dans la relation $A - M$.

Lorsqu'un choc se propage dans une tuyère à section faiblement variable contenant un gaz non-uniforme et au repos, son intensité ne dépend plus seulement de la variation d'aire, mais aussi des paramètres du fluide en amont. Dans ce type de configuration, une force extérieure est alors requise pour maintenir l'équilibre hydrostatique dans la conduite :

$$f = \frac{1}{\rho_+} \frac{\mathrm{d}p_+}{\mathrm{d}r}. \tag{3.66}$$

Considérant cette force dans les équations d'Euler pour une tuyère (3.1), il vient en appliquant la règle de la caractéristique de Whitham (*cf.* section 3.1.1) :

$$\frac{\mathrm{d}_r A}{A} + \frac{M\lambda(M)}{M^2-1}\mathrm{d}_r M + f_1(M)\frac{\mathrm{d}_r \rho_+}{\rho_+} + f_2(M)\frac{\mathrm{d}_r p_+}{p_+} + f_3(M)\frac{(\partial_t p + \rho c \partial_t v)_-}{p_+ c_+^3} = 0, \tag{3.67}$$

avec

$$\lambda(M) = \left(1 + \frac{2}{\gamma+1}\frac{1-\mu(M)^2}{\mu(M)}\right)\left(1 + 2\mu(M) + \frac{1}{M^2}\right) \tag{3.68a}$$

$$\mu(M) = \sqrt{\frac{(\gamma-1)M^2+2}{2\gamma M^2 + 1 - \gamma}} \tag{3.68b}$$

$$f_1(M) = -\frac{2(M^2-1)+(2\gamma M^2+1-\gamma)\mu(M)}{2\mu(M)(2\gamma M^2+1-\gamma)} \tag{3.69a}$$

$$f_2(M) = \frac{1}{2\gamma}\left(\gamma+2+\mu\left(\frac{\gamma+1}{1-\mu^2}+\frac{2\gamma}{\gamma+1}\frac{1-\mu^2}{\mu^2}\right)\right) - g(M) \tag{3.69b}$$

$$g(M) = \frac{(\gamma+1)^2M^2\mu}{2\gamma(M^2-1)((\gamma-1)M^2+2)} \tag{3.69c}$$

$$f_3(M) = \frac{(\gamma+1)\mu(\mu-1)}{2M(M^2-1)}. \tag{3.69d}$$

Remarque 3.12

Pour un milieu homogène, la relation (3.14) est retrouvée.
Le terme $g(M)$ provient de la force extérieure assurant l'équilibre hydrostatique dans la conduite. Après calcul, la fonction f_2 s'écrit aussi sous la forme :

$$f_2(M) = \frac{2(\gamma+2)+(\gamma^2+\gamma-2)M^2+2(\gamma^2M^2-1)\mu(M)}{2\gamma((\gamma-1)M^2+2)}.$$

Remarque 3.13

Puisque l'évolution temporelle suivant le choc est définie par $\mathrm{d}_t = \frac{\mathrm{d}}{dt} = c_+ M \mathrm{d}_r$, la relation $A-M$ (3.67) peut s'exprimer à l'aide de la dérivée temporelle.

Finalement, en négligeant l'écoulement arrière sous l'hypothèse de choc fort, le modèle GSD pour un milieu non-uniforme et au repos s'écrit :

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{c_+}{c_0}M|\vec{\nabla}\alpha| &= 1 \\ \operatorname{div}\left(\frac{c_+}{c_0}\frac{M}{A}\vec{\nabla}\alpha\right) &= 0 \\ \frac{\mathrm{d}_n A}{A} + \frac{M\lambda(M)}{M^2-1}\mathrm{d}_n M + f_1(M)\frac{\mathrm{d}_n\rho_+}{\rho_+} + f_2(M)\frac{\mathrm{d}_n p_+}{p_+} &= 0. \end{aligned}} \tag{3.70}$$

La variation spatiale suivant le choc dans les tubes de rayon est notée abusivement d_n. En raison de la relation (2.39), elle est définie par

$$\mathrm{d}_n\psi = \vec{n}\cdot\vec{\nabla}\psi_x(\vec{x}_{sh}) = \frac{1}{c_+M}\frac{\mathrm{d}\psi_t(t)}{\mathrm{d}t},$$

pour toute quantité physique ψ. Le système (3.70) se réduit au modèle (3.26) pour un écoulement uniforme.

En 1983, Catherasoo & Sturtevant ont étudié ce modèle en deux dimensions [25]. Ils l'ont appliqué à des problèmes simples de réfraction d'une onde de choc sur une interface gazeuse plane. Tout comme dans le cas d'un milieu homogène, ils ont observé une bonne estimation

des paramètres du front en choc fort, et une sous-estimation pour un choc d'intensité plus faible. Néanmoins, ils en ont conclu que le modèle se compare favorablement aux données expérimentales. Le modèle (3.70) a également été étudié numériquement pour l'interaction choc/bulle en deux dimensions d'espace [107, 105] par Schwendeman. Cet auteur observa une bonne correspondance avec les données expérimentales. Enfin, ce modèle a servi à l'étude de la propagation d'une onde de choc acoustique dans l'atmosphère [18].

3.2.2 Propagation d'un choc dans un milieu en mouvement

Nous considérons dans cette section la propagation d'un choc dans un milieu non-uniforme instationnaire. En 1968, Whitham a étendu son modèle au cas d'un milieu amont potentiellement en mouvement [141]. Le modèle ainsi obtenu est qualifié de *modèle GSD anisotrope*. Sa dérivation est détaillée dans [53].

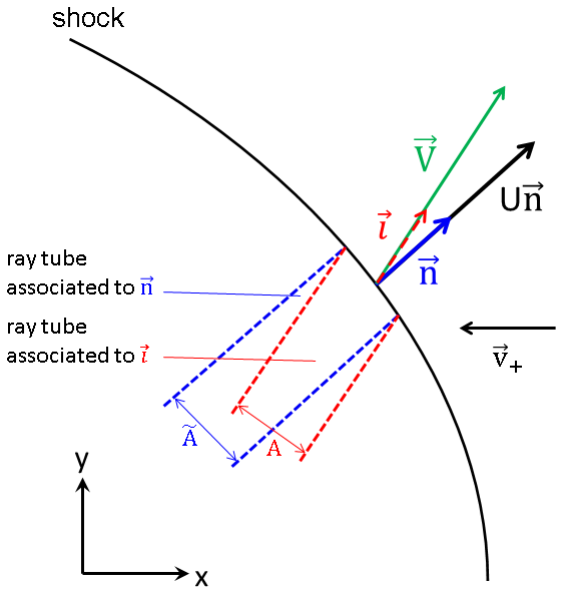


FIGURE 3.19 – Schéma de la décomposition de la propagation du choc en tubes de rayon pour un milieu amont en mouvement. Les rayons ne sont en général pas normaux au choc, mais dirigés dans le sens de propagation du choc $\vec{\imath}$. On note A l'aire des tubes de rayon portés par $\vec{\imath}$ et $\tilde{A}$ l'aire des tubes de rayon virtuels associés aux vecteurs normaux du choc $\vec{n}$.

Lorsque le choc se propage dans un gaz en mouvement de vitesse $\vec{v}_+$, les rayons ne sont en général pas normaux à la surface de choc, mais dirigés dans la direction de propagation du front. La vitesse effective du choc est définie par (2.31), donnant ainsi la direction $\vec{\imath}$ des rayons :

$$\vec{\imath} = \frac{\vec{V}}{|\vec{V}|} = \frac{M\vec{n} + \vec{m}}{|M\vec{n} + \vec{m}|}, \tag{3.71}$$

avec $\vec{m} = \frac{\vec{v}_+}{c_+}$ le vecteur de Mach de l'écoulement amont. Le schéma 3.19 illustre la différence entre les rayons portés par $\vec{\imath}$ et ceux virtuels associés à $\vec{n}$.

L'écoulement dans les tubes de rayon, portés par la direction $\vec{\imath}$ et d'aire A, se décrit mathématiquement par la relation

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\vec{\imath}}{A} \right) = 0, \tag{3.72}$$

dont la démonstration est identique à celle de la relation (3.23) du modèle GSD (3.26).

La surface de choc est toujours assimilée à la ligne de niveau 0 de la fonction scalaire Φ (3.65) :

$$\Phi\left(\vec{x},t\right)=\alpha\left(\vec{x}\right)-c_0 t,$$

où c_0 est la vitesse du son de référence dans le milieu non perturbé. De ce fait, sous les mêmes considérations qu'en section 3.1.2, le vecteur normal et la vitesse normale du choc s'expriment comme :

$$\vec{n}=\frac{\vec{\nabla}\alpha}{|\vec{\nabla}\alpha|}\quad\text{et}\quad U=\frac{c_0}{|\vec{\nabla}\alpha|}.$$

En injectant ces relations dans (2.32), on obtient l'équation eikonale :

$$\frac{c_+}{c_0}M|\vec{\nabla}\alpha|=1-\frac{c_+}{c_0}\vec{m}\cdot\vec{\nabla}\alpha. \tag{3.73}$$

Finalement, les relations géométriques (3.72)-(3.73) doivent être complétées par une relation $A-M$. Cependant, les relations dérivées jusqu'à présent sont seulement applicables pour un écoulement 1D où la normale à la surface du choc coïncide avec la direction de l'écoulement amont (*cf.* section 3.1.1). Afin de déterminer la relation Mach/Aire de chaque tube de rayon, l'idée est d'effectuer un changement de repère en se plaçant dans le référentiel de l'écoulement amont. Dans ce référentiel, l'écoulement amont est alors au repos et les rayons sont orthogonaux au choc.

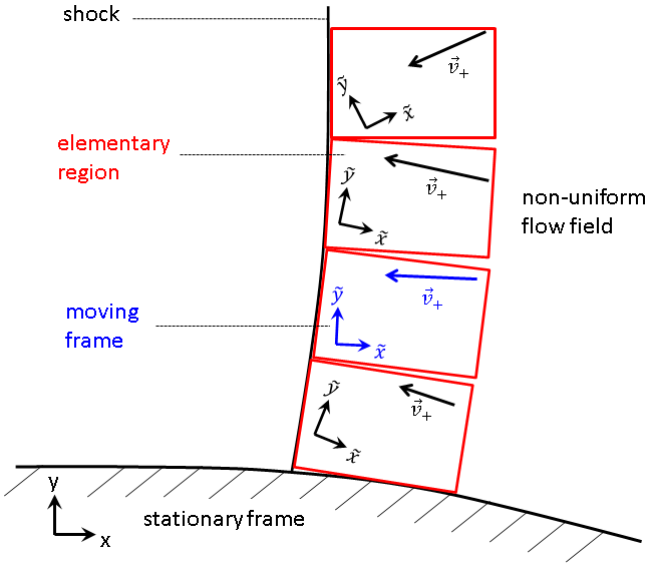


FIGURE 3.20 – Schéma de la décomposition du milieu amont juste devant le choc en régions élémentaires uniformes. Chaque région est associée à un repère mobile.

Plus précisément, on décompose l'écoulement juste devant le choc en régions élémentaires où les paramètres de l'écoulement, tels que la vitesse du fluide $\vec{v}_+$ ou la vitesse du son c_+ par exemple, sont considérés comme constants, mais diffèrent d'une région à une autre (*cf.* schéma 3.20). À chacune de ces régions est ensuite associé un repère mobile, de coordonnées $\vec{\tilde{x}}$, se déplaçant à la vitesse de l'écoulement. Le changement de référentiel entre le repère lié au laboratoire et le repère mobile s'écrit :

$$\vec{\tilde{x}}=\vec{x}-\vec{v}_+ t+C,$$

où C est une constante, qui diffère d'une région à une autre.
Plaçons nous dans une région élémentaire $\mathcal{R}$. On note $\tilde{M}$, $\tilde{A}$ et $\vec{\tilde{n}}$ le nombre de Mach, l'aire du tube de rayon et le vecteur normal au choc dans le repère mobile. Par le biais du changement de référentiel, l'écoulement amont est au repos dans ce repère et les rayons sont orthogonaux au choc, permettant ainsi de définir une relation $\tilde{A} - \tilde{M}$:

$$\tilde{A} = \tilde{A}(\tilde{M}, p_+, \rho_+).$$

L'aire du tube de rayon dans le repère mobile $\tilde{A}$ peut être interprétée comme la projection de celle du repère fixe A :

$$A = \left(\vec{i} \cdot \vec{n}\right) \tilde{A}. \tag{3.74}$$

Notons que l'intensité et la normale du choc restent les mêmes dans le repère mobile, *i.e.*

$$\tilde{M}(\vec{\tilde{x}}) = M\left(\vec{x}\right) \quad \text{et} \quad \vec{\tilde{n}}(\vec{\tilde{x}}) = \vec{n}\left(\vec{x}\right). \tag{3.75}$$

Ce n'est cependant pas le cas pour l'aire des tubes de rayon puisque $\vec{i}$ et $\vec{n}$ ne coïncident pas en général. Ainsi, en considérant les relations (3.74) et (3.71), la relation (3.72) peut être réécrite sous la forme

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{M\vec{n} + \vec{m}}{\left(M + \vec{m} \cdot \vec{n}\right) \tilde{A}} \right) = 0. \tag{3.76}$$

La relation (3.73) équivaut à

$$M + \vec{m} \cdot \vec{n} = \frac{c_0}{c_+ |\vec{\nabla}\alpha|},$$

et (3.76) devient alors :

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{c_+}{c_0} \frac{\left(M\vec{\nabla}\alpha + \vec{m}|\vec{\nabla}\alpha|\right)}{\tilde{A}} \right) = 0. \tag{3.77}$$

La relation (3.77) est similaire pour chaque région élémentaire, si bien qu'elle est définie pour l'écoulement entier.

De nouveaux tubes de rayon sont ainsi définis, d'aire transversale $\tilde{A}$, orthogonaux au choc. Chester a établi la relation $\tilde{A} - M$ pour un milieu à l'amont du choc non-uniforme en 1960 [28]. Elle s'exprime dans chaque tube de rayon de la manière suivante en négligeant les effets arrière :

$$\frac{\mathrm{d}_r \tilde{A}}{\tilde{A}} + \frac{M\lambda(M)}{M^2 - 1} \mathrm{d}_r M + h_1(M) \frac{\mathrm{d}_r \rho_+}{\rho_+} + h_2(M) \frac{\mathrm{d}_r p_+}{p_+} = 0, \tag{3.78}$$

avec

$$\lambda(M) = \left(1 + \frac{2}{\gamma + 1} \frac{1 - \mu(M)^2}{\mu(M)}\right) \left(1 + 2\mu(M) + \frac{1}{M^2}\right) \tag{3.79a}$$

$$\mu(M) = \sqrt{\frac{(\gamma - 1)M^2 + 2}{2\gamma M^2 + 1 - \gamma}} \tag{3.79b}$$

$$h_1(M) = -\frac{2(M^2 - 1) + (2\gamma M^2 + 1 - \gamma)\mu(M)}{2\mu(M)(2\gamma M^2 + 1 - \gamma)} \tag{3.79c}$$

$$h_2(M) = \frac{1}{2\gamma} \left(\gamma + 2 + \mu \left(\frac{\gamma + 1}{1 - \mu^2} + \frac{2\gamma}{\gamma + 1} \frac{1 - \mu^2}{\mu^2}\right)\right). \tag{3.79d}$$

Remarque 3.14

En l'absence de force extérieure, et en négligeant les effets arrière, on aboutit après calcul à l'équation (3.78) en utilisant la règle de la caractéristique (*cf.* section 3.1.1). Seul le coefficient h_2 diffère alors du coefficient f_2 de la relation $A - M$ définie dans la section précédente (3.67) : $h_1(M) = f_1(M)$ et $h_2(M) = f_2(M) + g(M)$. Cette différence provient de l'hypothèse d'équilibre hydrostatique de la conduite pour laquelle une force extérieure est considérée.

Le modèle *GSD anisotrope* se compose finalement de l'équation eikonale (3.73), de l'équation bilan de l'écoulement dans les tubes de rayon (3.76) et de la relation $\tilde{A} - M$ donnant l'évolution de l'intensité du choc dans chaque tube de rayon (3.78). En résumé :

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \dfrac{c_+/c_0 M|\vec{\nabla}\alpha|}{1 - c_+/c_0 \vec{m}\cdot\vec{\nabla}\alpha} & = & 1 \\ \vec{\nabla}\cdot\left(\dfrac{c_+}{c_0}\dfrac{\left(M\vec{\nabla}\alpha + \vec{m}|\vec{\nabla}\alpha|\right)}{\tilde{A}}\right) & = & 0 \\ \dfrac{\mathrm{d}_t\tilde{A}}{\tilde{A}} + \dfrac{M\lambda(M)}{M^2-1}\mathrm{d}_t M + h_1(M)\dfrac{\mathrm{d}_t\rho_+}{\rho_+} + h_2(M)\dfrac{\mathrm{d}_t p_+}{p_+} & = & 0. \end{array}} \tag{3.80}$$

Remarque 3.15

Le système (3.80) se réduit au modèle GSD (3.26) pour un écoulement uniforme et au repos.

Dérivation alternative du modèle GSD anisotrope. Plaçons nous dans le repère mobile de la région élémentaire $\mathcal{R}$. L'écoulement amont étant au repos, les équations géométriques du modèle GSD s'écrivent dans ce repère :

$$\frac{c_+}{c_0}\tilde{M}|\vec{\tilde{\nabla}}\tilde{\alpha}| = 1, \tag{3.81}$$

et

$$\vec{\tilde{\nabla}}\cdot\left(\frac{c_+}{c_0}\frac{\tilde{M}}{\tilde{A}}\vec{\tilde{\nabla}}\tilde{\alpha}\right) = 0. \tag{3.82}$$

Nous pouvons alors montrer que ces équations se réécrivent sous la forme des deux premières équations du système (3.80). En effet, soit ϕ le changement de variable entre le repère fixe et le repère mobile, défini par :

$$\vec{\tilde{x}} = \phi(\vec{x}) = \vec{x} - \alpha(\vec{x})\vec{v}/c_0 - C,$$

où $\vec{v}_+$ est noté $\vec{v}$ dans la suite pour plus de lisibilité. La jacobienne de ϕ s'exprime alors comme

$$\mathrm{Jac}\,(\phi) = \frac{1}{c_0}\begin{pmatrix} c_0 - v_1\partial_{x_1}\alpha & -v_1\partial_{x_2}\alpha & -v_1\partial_{x_3}\alpha \\ -v_2\partial_{x_1}\alpha & c_0 - v_2\partial_{x_2}\alpha & -v_2\partial_{x_3}\alpha \\ -v_3\partial_{x_1}\alpha & -v_3\partial_{x_2}\alpha & c_0 - v_3\partial_{x_3}\alpha \end{pmatrix}.$$

Il est alors aisé de vérifier que le déterminant de cette matrice est $\det = 1 - \frac{c_+}{c_0}\vec{m}\cdot\vec{\nabla}\alpha$, que l'on suppose non nul en vertu de (3.73). Cela assure à ϕ d'être un C^1 difféomorphisme. Soit ϕ^{-1} la

fonction réciproque de ϕ. Après calcul, il vient :

$$\mathrm{Jac}\left(\phi^{-1}\right) = \frac{1}{c_0 \mathrm{det}} \begin{pmatrix} c_0 - v_2\partial_{x_2}\alpha - v_3\partial_{x_3}\alpha & v_1\partial_{x_2}\alpha & v_1\partial_{x_3}\alpha \\ v_2\partial_{x_1}\alpha & c_0 - v_1\partial_{x_1}\alpha - v_3\partial_{x_3}\alpha & v_2\partial_{x_3}\alpha \\ v_3\partial_{x_1}\alpha & v_3\partial_{x_2}\alpha & c_0 - v_1\partial_{x_1}\alpha - v_2\partial_{x_2}\alpha \end{pmatrix}.$$

Cela permet d'exprimer la différentielle dans le repère mobile en fonction de celle du repère fixe :

$$\vec{\tilde{\nabla}}\psi = \left(\mathrm{Jac}\left(\phi^{-1}\right)\right)^T \vec{\nabla}\psi,$$

où ψ est une fonction scalaire quelconque. Un calcul rapide donne finalement

$$\vec{\tilde{\nabla}}\psi = \vec{\nabla}\psi + \frac{\vec{\nabla}\alpha}{1 - \frac{c_+}{c_0}\vec{m}\cdot\vec{\nabla}\alpha}\left(\frac{c_+}{c_0}\vec{m}\cdot\vec{\nabla}\psi\right). \tag{3.83}$$

Les courbes de niveau du choc dans les repères fixe et mobile s'expriment respectivement comme

$$\alpha(\vec{x}) = c_0 t \quad \text{et} \quad \tilde{\alpha}\left(\vec{\tilde{x}}\right) = c_0 t'.$$

Bien que les fonctions α et $\tilde{\alpha}$ ont *a priori* des formes différentes, le temps d'arrivée du choc est identique dans chaque référentiel : $t = t'$, donnant donc

$$\alpha\left(\vec{x}\right) = \tilde{\alpha}\left(\vec{\tilde{x}}\right). \tag{3.84}$$

En prenant $\psi = \alpha$ dans (3.83), on trouve la relation

$$\vec{\tilde{\nabla}}\tilde{\alpha} = \frac{\vec{\nabla}\alpha}{1 - \frac{c_+}{c_0}\vec{m}\cdot\vec{\nabla}\alpha}.$$

En injectant cette relation dans l'équation eikonale définie dans le repère mobile (3.81), on retrouve l'équation eikonale définie dans le référentiel du laboratoire $(3.80)_1$. De la même manière, on peut montrer que l'équation bilan sur les tubes de rayon est équivalente entre les repères mobile (3.82) et fixe $(3.80)_2$. Cela permet de définir les équations géométriques du modèle GSD dans le repère du laboratoire. Ces équations étant identiques pour chaque région élémentaire, il est possible de les étendre à l'écoulement entier.

Ce modèle a été étudié en détail dans [51, 52, 54, 74], notamment pour un choc réfléchi.

3.3 Conclusion

Ce chapitre est une description la plus exhaustive possible du modèle GSD. Ce modèle étant peu connu, la présentation se veut didactique.

Le modèle GSD est un modèle simplifié de propagation d'une onde de choc à passage unique dans l'air. Malgré sa simplicité, il démontre une remarquable précision pour les problèmes de choc convergent et de diffraction sur un dièdre convexe ou concave (formation d'un front de Mach). Cependant, seul le choc soutenu (pas de détente arrière) est pris en compte par le modèle. Nous verrons dans la dernière partie de ce manuscrit comment y introduire les effets de souffle.

Le modèle GSD est basé sur deux hypothèses importantes. La première est celle de choc fort afin de pouvoir négliger l'écoulement arrière. Ce régime s'avère effectivement mieux estimé par le modèle. La seconde hypothèse est la décomposition du front en tubes de rayon à paroi rigide, qui entraîne implicitement à négliger les effets transverses le long du front. Une limitation existe pour le problème de la diffraction d'un choc sur un dièdre convexe. Cette limitation est

problématique pour la modélisation des ondes de souffle en géométrie complexe puisqu'il s'agit d'une configuration fréquemment rencontrée.

Afin de lever ces contraintes, nous avons étudié un modèle alternatif au modèle GSD. Dans le prochain chapitre, un second modèle simplifié de propagation d'une onde de choc est établi : le modèle Cinématique.

Chapitre 4

Le modèle Cinématique

Sommaire

4.1 Position du problème 80
4.2 La théorie des surfaces singulières 82
4.2.1 Relations de compatibilité 82
4.2.2 Propriétés fondamentales 83
4.3 Système d'équations pour la propagation d'un choc d'intensité arbitraire 84
4.3.1 Équation d'évolution de la normale au choc 85
4.3.2 Équations instationnaires de saut 86
4.3.3 Équation d'évolution de l'intensité du choc 88
4.3.4 Synthèse 91
4.4 Nature du modèle Cinématique 92
4.4.1 Changement de base 92
4.4.2 Écriture du modèle dans la base locale 93
4.4.3 Hyperbolicité du modèle Cinématique - ordre 0 95
4.5 Équivalence structurale avec le modèle GSD 98
4.6 Conclusion 102

Dans ce chapitre, un modèle alternatif pour la description de la propagation d'une onde de choc est étudié : **le modèle Cinématique** [116, 92]. Il s'agit d'une approche plus récente et plus mathématique que celle de Whitham. Elle est basée sur une combinaison des équations d'Euler et des relations de Rankine-Hugoniot, rendue possible par la théorie des surfaces singulières [132]. Tout comme le modèle GSD, seul le premier passage du front est considéré. La dimension du problème est ainsi réduite : les équations d'Euler tridimensionnelles (5 équations) sont remplacées par un système de trois équations à deux dimensions. De manière similaire à l'approche de Whitham, l'influence de l'écoulement arrière sur le choc est contenu dans un seul terme. En première approximation, ce terme peut être négligé sous l'hypothèse que le choc est soutenu (pas d'effets arrière). Le modèle prend naturellement en compte l'écoulement transversal au front, et aucune hypothèse sur l'intensité du choc n'est nécessaire. Il s'agit là de propriétés désirables pour un modèle plus général que celui de Whitham.

En 1975, Wright proposa une description cinématique d'une onde de choc en utilisant la théorie des surfaces singulières [145]. Il s'agit du modèle Cinématique. Il est établi pour un milieu non-uniforme et potentiellement en mouvement, et suppose connu l'écoulement à l'arrière

du choc. Sharma & Radha proposèrent une extension à l'écoulement arrière en 1994 [116]. Ils mirent en évidence l'existence d'un système infini d'équations non-linéaires couplées qu'il convient de tronquer à un certain ordre. À l'ordre 0 de troncature, le modèle de Wright est retrouvé. À l'ordre 1 de troncature, une équation d'évolution du terme résumant l'effet de l'écoulement arrière s'ajoute au modèle, dans le cas d'un milieu homogène et au repos. Enfin, en 2009, Pandey & Sharma développèrent le modèle à l'ordre 1 en assimilant l'air à un gaz réel [92], pour un milieu hétérogène et au repos.

L'étude du modèle Cinématique est toutefois essentiellement limitée à des considérations théoriques. Seuls quelques cas numériques ont été traités en symétrie radiale [116, 115, 5, 116, 92], pour le problème du piston en choc faible [96] et en deux dimensions d'espace pour un choc faible expansif [63, 10, 96]. La propagation d'un choc dans une tuyère est également considérée dans [97, 115], aboutissant à une relation $A - M$ propre à la vision cinématique. L'analogie structurale avec le modèle GSD est par ailleurs soulignée dans [124, 92], pour un milieu homogène et au repos en deux dimensions d'espace, et n'a pas été discuté davantage. Enfin, une troncature à l'ordre 2 du système est proposée dans [63, 115].

Ce chapitre est consacré au développement du modèle Cinématique. Tout comme dans [92], l'air est assimilé à un gaz de van der Waals, mais nous choisissons ici d'étendre le modèle à un écoulement amont stationnaire potentiellement en mouvement, ce qui est une nouveauté au regard de la littérature. Le développement du modèle Cinématique fait appel aux équations d'Euler tridimensionnelles, ainsi qu'aux relations de Rankine-Hugoniot établies pour un gaz de van der Waals, rappelées en première section. L'outil indispensable de ce développement est la théorie des surfaces singulières, détaillée dans la section suivante. Seul le modèle tronqué à l'ordre 0, où l'on suppose que l'écoulement arrière est connu, est présenté ici. L'extension à l'ordre supérieur, avec une équation d'évolution supplémentaire sur les effets arrière, est décrite au chapitre 9. La dérivation détaillée du modèle est effectuée en troisième section, en supposant un milieu amont stationnaire non-uniforme et potentiellement en mouvement. La synthèse du modèle est disponible en sous-section 4.3.4. L'étude du caractère hyperbolique du modèle Cinématique suit dans la quatrième section. Finalement, nous prouvons l'équivalence structurale du modèle Cinématique avec le modèle GSD, dans un cadre général, dans la dernière partie de ce chapitre. Il s'agit de la première fois, à notre connaissance, qu'une telle étude globale est effectuée pour le modèle Cinématique, et que l'équivalence structurale avec le modèle GSD est formellement établie.

4.1 Position du problème

Comme dans [92], l'air est assimilé à un gaz de van der Waals sous hypothèse de Clausius. La pression p, la masse volumique ρ et la température T de l'air obéissent alors à l'équation d'état :

$$p(1 - b\rho) = \rho r T, \tag{4.1}$$

où b est le covolume de van der Waals et r la constante du gaz. La variation de b étant très faible dans la plupart des cas, b peut être supposé constant [131]. En pratique, b vaut 1.117×10^{-3} m^3/kg pour l'air [136]. Dans le cas où le volume des particules est négligé ($b = 0$), on retrouve l'équation d'état du gaz parfait. L'établissement de l'expression de la célérité du son et des relations de Rankine-Hugoniot, pour l'équation d'état (4.1), suit la même procédure qu'au chapitre 2 et n'est pas détaillée ici.

À l'instant t, le choc est matérialisé par la surface mathématique (2.26) :

$$\Gamma(t) = \{\vec{x} \in \Omega / \Phi(\vec{x}, t) = 0\},$$

où Φ est la fonction level-set du choc. Le front divise le milieu en deux : l'état connu à l'amont du front $(p_+, \rho_+, \vec{v}_+)$ et l'état aval perturbé par le passage du choc $(p_-, \rho_-, \vec{v}_-)$, avec $\vec{v}$ la vitesse

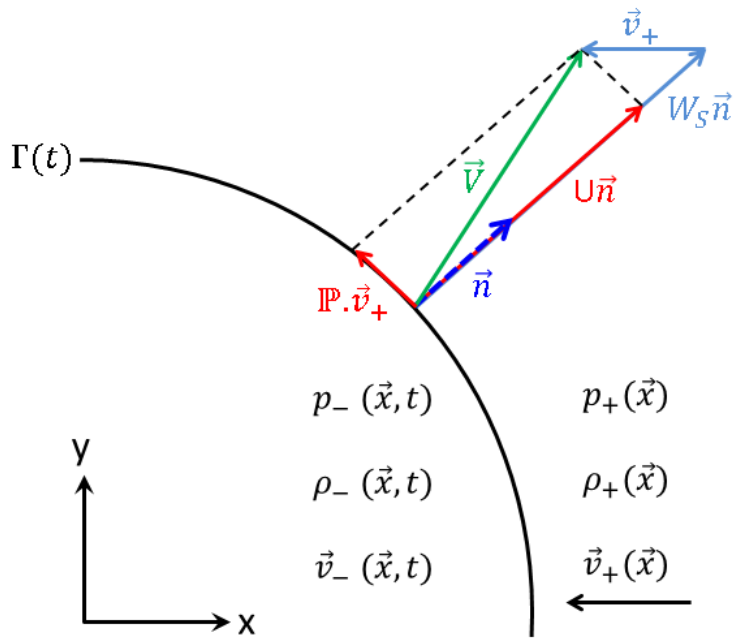


FIGURE 4.1 – Schéma de la propagation d'un choc dans un milieu potentiellement en mouvement. La surface de choc se propage dans le milieu amont à la vitesse locale $\vec{V}$. Celle-ci se décompose en une vitesse normale, $U\vec{n}$, et une vitesse tangentielle dépendant de l'écoulement amont : $\mathbb{P} \cdot \vec{v}_+$.

du fluide. Le problème est schématisé en figure 4.1. La vitesse du choc dans le référentiel du laboratoire est donnée par (2.31) :

$$\vec{V} = W_S\vec{n} + \vec{v}_+, \tag{4.2}$$

où $W_S = U - \vec{v}_+ \cdot \vec{n}$ est la vitesse normale du choc relativement à l'écoulement amont et $\vec{n}$ le vecteur normal unitaire au front. La position du choc, $\vec{x}_{sh}$, est alors solution de l'équation différentielle ordinaire (2.28) :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\vec{x}_{sh}(t)}{\mathrm{d}t} = \vec{V}\left(\vec{x}_{sh}(t), t\right).} \tag{4.3}$$

Remarque 4.1

Soit la fonction level-set définissant la position du choc :

$$\Phi\left(\vec{x}_{sh}, t\right) = \alpha\left(\vec{x}_{sh}\right) - c_0 t. \tag{4.4}$$

L'équation (4.3) est alors équivalente à l'équation eikonale (3.73) du modèle GSD anisotrope :

$$\frac{c_+}{c_0} M|\vec{\nabla}\alpha| = 1 - \frac{c_+}{c_0}\vec{m}\cdot\vec{\nabla}\alpha, \tag{4.5}$$

avec $\vec{m} = \frac{\vec{v}_+}{c_+}$. En effet, en dérivant par rapport au temps l'expression (4.4), et en utilisant (4.3), il vient :

$$\vec{V}\cdot\vec{\nabla}\alpha = 1. \tag{4.6}$$

En injectant ensuite (4.2) dans (4.6), et en utilisant la définition du vecteur normal $\vec{n} = \frac{\vec{\nabla}\alpha}{|\vec{\nabla}\alpha|}$, l'équation (4.5) en découle.

On rappelle la forme des équations d'Euler (écrite ici pour le champ de vitesse et la pression) en présence d'une force extérieure par unité de masse $\vec{f}$ (voir section 2.1) :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0 & (4.7a) \\ \dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}\right) \vec{v} + \rho^{-1} \vec{\nabla} p = \vec{f} & (4.7b) \\ \dfrac{\partial p}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} p + \rho c^2 \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{v}\right) = 0. & (4.7c) \end{cases}$$

La célérité du son s'exprime en fonction de γ, p, ρ et b comme :

$$c^2 = \frac{\gamma p}{\rho(1 - b\rho)}, \tag{4.8}$$

où $\gamma = 1.4$ est le rapport de chaleurs spécifiques. Les relations de *Rankine-Hugoniot* reliant les états amont et aval du choc sont écrites ici en fonction de la surpression adimensionnée du choc $\zeta = \frac{[p]}{p_+}$:

$$[\rho] = \rho_+ \frac{2(1 - b\rho_+)\zeta}{2\gamma + (\gamma - 1)\zeta + 2b\rho_+\zeta} \tag{4.9}$$

$$[\vec{v}] = c_+ \frac{(1 - b\rho_+)\zeta}{\gamma\sqrt{1 + \frac{\gamma+1}{2\gamma}\zeta}} \vec{n}, \tag{4.10}$$

où l'on rappelle que le saut au travers du choc d'une quantité physique ψ s'écrit $[\psi] = \psi_- - \psi_+$. Le nombre de Mach s'exprime en fonction de ζ comme :

$$M = \frac{W_S}{c_+} = \sqrt{1 + \frac{\gamma + 1}{2\gamma}\zeta}. \tag{4.11}$$

La pression et la densité directement à l'arrière du choc sont également définies par les relations :

$$\rho_- = [\rho] + \rho_+ = \frac{\rho_+(2\gamma + (\gamma + 1)\zeta)}{2\gamma + (\gamma - 1)\zeta + 2b\rho_+\zeta}$$

$$p_- = [p] + p_+ = (1 + \zeta)p_+.$$

4.2 La théorie des surfaces singulières

Le but de cette section est de définir les outils mathématiques nécessaires à l'établissement du modèle Cinématique. On pourra se référer à [132] pour une description détaillée.

4.2.1 Relations de compatibilité

Soit $\psi : \Omega \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^d$ une quantité physique quelconque. Il peut s'agir par exemple de la pression p à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ ou de la vitesse du fluide $\vec{v}$ à valeur dans $\mathbb{R}^3$.

L'évolution temporelle de ψ suivant le mouvement du choc est donnée par (2.41) :

$$\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \psi}{\partial t} + \vec{V} \cdot \vec{\nabla}\psi = \frac{\partial \psi}{\partial t} + W_S \left(\vec{n} \cdot \vec{\nabla}\psi\right) + \vec{v}_+ \cdot \vec{\nabla}\psi. \tag{4.12}$$

Sa variation transversale le long du choc est établie par :

$$\vec{\nabla}^S \psi = \mathbb{P} \cdot \vec{\nabla}\psi = \vec{\nabla}\psi - \vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{\nabla}\psi), \tag{4.13}$$

où l'on rappelle que $\mathbb{P} = (\mathbb{I} - \vec{n} \otimes \vec{n})$ est l'opérateur de projection sur le plan tangent au choc. On note $\nabla_k^S \psi$ la k-ième composante du vecteur $\vec{\nabla}^S \psi$. Pour un vecteur $\vec{\psi}$, l'opérateur de divergence tangentielle est donné par la formulation :

$$\vec{\nabla}^S \cdot \vec{\psi} = \nabla_k^S \psi_k,$$

avec la convention de l'indice muet répété pour une somme. D'après (4.13), cet opérateur s'écrit :

$$\vec{\nabla}^S \cdot \vec{\psi} = \vec{\nabla} \cdot \vec{\psi} - \vec{n} \cdot \left(\vec{n} \cdot \overline{\overline{\nabla}} \vec{\psi} \right). \tag{4.14}$$

Les relations différentielles précédentes sont définies en $\vec{x}_{sh}(t)$. Grâce aux extensions (2.33)-(2.35), il est possible de les utiliser au voisinage du choc, permettant de définir la dérivée convective ou Lagrangienne (4.12) dans ce voisinage :

$$\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t}(\vec{x}, t) = \frac{\partial \psi}{\partial t}(\vec{x}, t) + \vec{\mathcal{V}} \cdot \vec{\nabla} \psi(\vec{x}, t).$$

Cette égalité est vérifiée de part et d'autre du choc. Par passage à la limite ($\vec{x} \to \vec{x}_{sh}^-$ et $\vec{x} \to \vec{x}_{sh}^+$) et différence, l'évolution temporelle du saut de ψ est décrite par la relation de compatibilité :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}[\psi]}{\mathrm{d}t} = \left[\frac{\partial \psi}{\partial t} \right] + \left[\vec{V} \cdot \vec{\nabla} \psi \right] = \left[\frac{\partial \psi}{\partial t} \right] + W_S \left[\vec{n} \cdot \vec{\nabla} \psi \right] + \vec{v}_+ \cdot \left[\vec{\nabla} \psi \right].} \tag{4.15}$$

Rappelons que le saut de la quantité physique ψ, à savoir $[\psi]$, n'a de sens qu'au niveau du choc. La relation (4.15) exprime l'évolution de $[\psi]$ à l'aide des sauts de variations temporelles et spatiales de ψ au cours de la propagation du choc.

Remarque 4.2

En raison de l'unicité de $\vec{n}$ de part et d'autre du choc (voir remarque 2.3), on peut écrire : $\left[\vec{n} \cdot \vec{\nabla} \psi \right] = \vec{n} \cdot \left[\vec{\nabla} \psi \right]$. Il en est de même pour $\vec{V}$ et $\vec{v}_+$.

Sur la base de ce raisonnement, il est également possible d'établir, à partir des relations (4.13) et (4.14), les variations spatiales le long du choc du saut de ψ :

$$\boxed{\vec{\nabla}^S [\psi] = \left[\vec{\nabla} \psi \right] - \vec{n} \left[\vec{n} \cdot \vec{\nabla} \psi \right].} \tag{4.16}$$

En particulier, pour un vecteur $\vec{\psi}$, la divergence tangentielle de son saut au travers du choc est donnée par :

$$\vec{\nabla}^S \cdot \left[\vec{\psi} \right] = \left[\vec{\nabla} \cdot \vec{\psi} \right] - \vec{n} \cdot \left[\vec{n} \cdot \overline{\overline{\nabla}} \vec{\psi} \right]. \tag{4.17}$$

4.2.2 Propriétés fondamentales

Par définition de la dérivée tangentielle au choc (4.13), il vient naturellement :

$$\vec{n} \cdot \vec{\nabla}^S \psi = 0. \tag{4.18}$$

De même, puisque $\vec{n}$ est unitaire, $\vec{n} \cdot \vec{n} = 1$, et donc

$$\vec{n} \cdot \mathrm{d}\vec{n} = 0, \tag{4.19}$$

où d est un opérateur différentiel tel que $\frac{\partial}{\partial t}$, $\vec{E} \cdot \vec{\nabla}$ avec $\vec{E}$ un champ de vecteurs, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ ou $\vec{\nabla}^S$ par exemple.

La relation (4.19) implique à partir de (4.14) que la divergence de la normale est identique à sa divergence tangentielle :

$$\vec{\nabla}^S \cdot \vec{n} = \vec{\nabla} \cdot \vec{n}. \tag{4.20}$$

Cette relation, combinée à (4.18), donne ainsi

$$\vec{\nabla}^S \cdot (f\vec{n}) = f\left(\vec{\nabla}^S \cdot \vec{n}\right) = f\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{n}\right), \tag{4.21}$$

où f est une fonction scalaire quelconque.

Enfin, il est aisé de démontrer la relation de saut suivante :

$$[fg] = [f]g_- + f_+[g] = [f][g] + f_+[g] + [f]g_+. \tag{4.22}$$

4.3 Système d'équations pour la propagation d'un choc d'intensité arbitraire

Cette section, assez technique, présente de manière suffisamment détaillée la démarche que nous avons suivie pour établir le système d'équations représentant la propagation d'un choc d'intensité quelconque. Le lecteur intéressé uniquement par les résultats pourra se rendre directement à la partie synthèse en section 4.3.4 .

Nous cherchons ici à établir les équations décrivant l'évolution du front de choc : son intensité, sa position et sa forme. La position du choc est donnée par la relation (4.3). Le vecteur normal au choc intervient dans cette équation, ce qui nous conduit dans un premier temps à écrire son équation d'évolution (eq. (4.32)). Celle-ci fait intervenir l'intensité du choc donnée par $\zeta = \frac{[p]}{p_+}$. La connaissance de $\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}t}$ est donc nécessaire à la fermeture du problème. D'après la définition de ζ, on a immédiatement :

$$\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{p_+}\frac{\mathrm{d}[p]}{\mathrm{d}t} - \frac{\zeta}{p_+}\frac{\mathrm{d}p_+}{\mathrm{d}t}. \tag{4.23}$$

L'équation d'évolution de $[p]$ s'obtient à partir des équations d'Euler et s'écrit après quelques calculs :

$$\frac{\mathrm{d}\,[p]}{\mathrm{d}t} + ([\vec{v}]\cdot\vec{n} - W_S)\left[\vec{n}\cdot\vec{\nabla}p\right] + \left(\frac{\gamma p}{1-b\rho}\right)_-\left(\vec{\nabla}^S\cdot[\vec{v}] + \vec{n}\cdot[\vec{n}\cdot\overline{\overline{\nabla}}\vec{v}]\right) + \left([\vec{v}]\cdot\vec{\nabla}p_+ + \left[\frac{\gamma p}{1-b\rho}\right]\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{v}_+\right)\right) = 0. \tag{4.24}$$

On note alors que des inconnues supplémentaires apparaissent, à savoir $\left[\vec{n}\cdot\vec{\nabla}p\right]$ et $\vec{n}\cdot[\vec{n}\cdot\overline{\overline{\nabla}}\vec{v}]$. Ce dernier terme peut être éliminé à l'aide d'une équation d'évolution sur le saut de vitesse du fluide, $[\vec{v}]$, établie dans la sous-section 4.3.2. L'équation d'évolution de l'intensité du choc est dérivée dans la sous-section suivante (eq. (4.58)). Le terme restant, $\left(\vec{n}\cdot\vec{\nabla}p\right)_-$, est associé aux effets arrière et demeure une inconnue du problème. Pour fermer le système, ce terme peut être soit négligé (modèle à l'ordre 0 étudié ici), soit modélisé de manière *ad hoc* (*cf.* chapitre 8), soit décrit par une équation d'évolution (modèle à l'ordre 1) explicitée au chapitre 9.

L'inhomogénéité du milieu dans lequel le choc se déplace apparaît dans les équations à travers le gradient des quantités amont. Ce milieu étant stationnaire, la valeur de ces paramètres dépend uniquement de la vitesse du choc $\vec{V}$:

$$\frac{\mathrm{d}\psi_+}{\mathrm{d}t} = \vec{V}\cdot\vec{\nabla}\psi_+ = W_S\left(\vec{n}\cdot\vec{\nabla}\psi_+\right) + \vec{v}_+\cdot\vec{\nabla}\psi_+. \tag{4.25}$$

Les calculs sont menés dans un voisinage du choc grâce aux extensions (2.33)-(2.34) (voir remarque 2.3). Cela assure que les définitions de la normale au choc et de la vitesse du choc ne sont pas altérées par ces extensions, et notamment que la propriété $\vec{n}\cdot\vec{n}=1$ est toujours vérifiée. Les résultats finaux sont donc établis sur ce voisinage, mais seuls les résultats au niveau du choc nous intéressent.

4.3.1 Équation d'évolution de la normale au choc

En dérivant $|\vec{\nabla}\Phi|=\sqrt{\phi_{,k}\phi_{,k}}$ par rapport à t et x_j, et en utilisant la définition de $\vec{n}$ (2.27), il est aisé de déduire :

$$\frac{\partial|\vec{\nabla}\Phi|}{\partial t}=\vec{n}\cdot\vec{\nabla}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right), \tag{4.26}$$

et

$$\frac{\partial|\vec{\nabla}\Phi|}{\partial x_j}=\vec{n}\cdot\vec{\nabla}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x_j}\right). \tag{4.27}$$

L'équation (4.27) s'écrit également sous forme vectorielle :

$$\vec{\nabla}(|\vec{\nabla}\Phi|)=(\vec{n}\cdot\overline{\overline{\nabla}})\left(\vec{\nabla}\Phi\right). \tag{4.28}$$

En dérivant (2.27) par rapport à t et x_j, et en utilisant (4.26) ainsi que (4.27), il vient après calcul :

$$\frac{\partial\vec{n}}{\partial t}=\frac{1}{|\vec{\nabla}\Phi|}\frac{\partial(\vec{\nabla}\Phi)}{\partial t}-\frac{\vec{n}}{|\vec{\nabla}\Phi|}(\vec{n}\cdot\vec{\nabla})\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right) \tag{4.29}$$

$$\frac{\partial\vec{n}}{\partial x_j}=\frac{1}{|\vec{\nabla}\Phi|}\frac{\partial(\vec{\nabla}\Phi)}{\partial x_j}-\frac{\vec{n}}{|\vec{\nabla}\Phi|}(\vec{n}\cdot\vec{\nabla})\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x_j}\right). \tag{4.30}$$

L'opération (4.29)+V_j(4.30) ainsi que la définition de la dérivée Lagrangienne (4.12) donnent ensuite :

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\vec{n}}{\mathrm{d}t}=\left\{\frac{1}{|\vec{\nabla}\Phi|}\frac{\partial(\vec{\nabla}\Phi)}{\partial t}+\frac{U}{|\vec{\nabla}\Phi|}(\vec{n}\cdot\overline{\overline{\nabla}})(\vec{\nabla}\Phi)\right\}-\vec{n}\left\{\frac{1}{|\vec{\nabla}\Phi|}(\vec{n}\cdot\vec{\nabla})\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right)+\frac{Un_j}{|\vec{\nabla}\Phi|}(\vec{n}\cdot\vec{\nabla})\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x_j}\right)\right\}\\ +\left\{\vec{v}_+\cdot\overline{\overline{\nabla}}\vec{n}-(\vec{v}_+\cdot\vec{n})\left(\vec{n}\cdot\overline{\overline{\nabla}}\vec{n}\right)\right\}.\end{aligned}$$

La définition de la vitesse normale du choc U (2.30), ainsi que la propriété (4.28), permettent d'exprimer les deux premiers termes du membre de droite en fonction de U :

$$\begin{aligned}\left\{\frac{1}{|\vec{\nabla}\Phi|}\frac{\partial(\vec{\nabla}\Phi)}{\partial t}+\frac{U}{|\vec{\nabla}\Phi|}(\vec{n}\cdot\overline{\overline{\nabla}})(\vec{\nabla}\Phi)\right\}&=\frac{1}{|\vec{\nabla}\Phi|}\vec{\nabla}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right)-\frac{1}{|\vec{\nabla}\Phi|^2}\frac{\partial\Phi}{\partial t}\vec{\nabla}(|\vec{\nabla}\Phi|)\\ &=-\vec{\nabla}U,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left\{\frac{1}{|\vec{\nabla}\Phi|}(\vec{n}\cdot\vec{\nabla})\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right)+\frac{Un_j}{|\vec{\nabla}\Phi|}(\vec{n}\cdot\vec{\nabla})\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x_j}\right)\right\}&=\frac{1}{|\vec{\nabla}\Phi|}(\vec{n}\cdot\vec{\nabla})\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right)-\frac{1}{|\vec{\nabla}\Phi|^2}\frac{\partial\Phi}{\partial t}(\vec{n}\cdot\vec{\nabla})(|\vec{\nabla}\Phi|)\\ &=-\left(\vec{n}\cdot\vec{\nabla}U\right).\end{aligned}$$

Le dernier terme s'exprime comme

$$\left\{\vec{v}_+\cdot\overline{\overline{\nabla}}\vec{n}-(\vec{v}_+\cdot\vec{n})\left(\vec{n}\cdot\overline{\overline{\nabla}}\vec{n}\right)\right\}=\vec{v}_+\cdot\overline{\overline{\nabla}}^S\vec{n}, \tag{4.31}$$

en identifiant le gradient tangentiel au choc (4.13). Finalement, l'équation d'évolution de la normale au choc s'écrit :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{n}}{\mathrm{d}t} = -\left(\vec{\nabla}U - \vec{n}(\vec{n}\cdot\vec{\nabla}U)\right) + \vec{v}_+ \cdot \overline{\overline{\nabla}}^S \vec{n},$$

ou sous la forme condensée :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\vec{n}}{\mathrm{d}t} = \vec{v}_+ \cdot \overline{\overline{\nabla}}^S \vec{n} - \vec{\nabla}^S U.} \tag{4.32}$$

Puisque $W_S = c_+\sqrt{1+\frac{\gamma+1}{2\gamma}\zeta}$, la variation de W_S vérifie

$$\frac{\mathrm{d}W_S}{W_S} = \frac{\mathrm{d}p_+}{2p_+} - \frac{1-2b\rho_+}{2(1-b\rho_+)}\frac{\mathrm{d}\rho_+}{\rho_+} + \frac{\gamma+1}{2(2\gamma+(\gamma+1)\zeta)}\mathrm{d}\zeta, \tag{4.33}$$

en utilisant la relation (4.37). Étant donné que $W_S = U - \vec{v}_+\cdot\vec{n}$, la variation tangentielle le long du choc de U s'écrit :

$$\vec{\nabla}^S U = \frac{(\gamma+1)W_S}{2\,(2\gamma+(\gamma+1)\zeta)}\vec{\nabla}^S\zeta - \frac{(1-2b\rho_+)W_S}{2\rho_+(1-b\rho_+)}\vec{\nabla}^S\rho_+ + \frac{W_S}{2p_+}\vec{\nabla}^S p_+ + \vec{\nabla}^S(\vec{v}_+\cdot\vec{n}). \tag{4.34}$$

L'évolution de $\vec{n}$ peut ainsi être exprimée en fonction de l'intensité du choc ζ, des grandeurs de l'écoulement en amont et de $\vec{n}$:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{n}}{\mathrm{d}t} = \frac{W_S}{2}\left(-\frac{\gamma+1}{(2\gamma+(\gamma+1)\zeta)}\vec{\nabla}^S\zeta + \frac{1-2b\rho_+}{1-b\rho_+}\frac{\vec{\nabla}^S\rho_+}{\rho_+} - \frac{\vec{\nabla}^S p_+}{p_+}\right) + \vec{v}_+\cdot\overline{\overline{\nabla}}^S\vec{n} - \vec{\nabla}^S(\vec{v}_+\cdot\vec{n}). \tag{4.35}$$

4.3.2 Équations instationnaires de saut

La vitesse du son dans le milieu ambiant vérifie la relation (4.8) :

$$c_+^2 = \frac{\gamma p_+}{\rho_+(1-b\rho_+)}, \tag{4.36}$$

si bien que sa variation s'exprime comme :

$$\frac{\mathrm{d}c_+}{c_+} = \frac{\mathrm{d}p_+}{2p_+} - \frac{1-2b\rho_+}{2(1-b\rho_+)}\frac{\mathrm{d}\rho_+}{\rho_+}. \tag{4.37}$$

Pour la suite des calculs, nous posons :

$$\beta_0 = c_+\frac{(1-b\rho_+)\zeta}{\gamma\sqrt{1+\frac{\gamma+1}{2\gamma}\zeta}}, \tag{4.38}$$

permettant de réécrire le saut de $\vec{v}$ sous la forme :

$$[\vec{v}] = \beta_0\vec{n}. \tag{4.39}$$

Après quelques calculs, et en utilisant la relation (4.37), la variation de β_0 vérifie :

$$\frac{\mathrm{d}\beta_0}{\beta_0} = \frac{\mathrm{d}p_+}{2p_+} - \frac{1}{2(1-b\rho_+)}\frac{\mathrm{d}\rho_+}{\rho_+} + \frac{4\gamma+(\gamma+1)\zeta}{2\zeta(2\gamma+(\gamma+1)\zeta)}\mathrm{d}\zeta. \tag{4.40}$$

De manière similaire, un autre calcul donne :

$$\mathrm{d}\left(\frac{2\rho_+(1-b\rho_+)\zeta}{2\gamma+(\gamma-1)\zeta+2b\rho_+\zeta}\right)=\frac{2\zeta\{(1-2b\rho_+)(2\gamma+(\gamma-1)\zeta)-2(b\rho_+)^2\zeta\}}{(2\gamma+(\gamma-1)\zeta+2b\rho_+\zeta)^2}\mathrm{d}\rho_+ + \frac{4\gamma\rho_+(1-b\rho_+)}{(2\gamma+(\gamma-1)\zeta+2b\rho_+\zeta)^2}\mathrm{d}\zeta. \quad (4.41)$$

Finalement, les relations de Rankine-Hugoniot (4.9)-(4.10) combinées aux relations (4.40) et (4.41) permettent d'aboutir à l'expression de l'évolution des sauts des champs suivants :

$$\frac{\mathrm{d}\,[\rho]}{\mathrm{d}t}=\frac{4\gamma\rho_+(1-b\rho_+)}{(2\gamma+(\gamma-1)\zeta+2b\rho_+\zeta)^2}\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}t}+\frac{2\zeta\{(1-2b\rho_+)(2\gamma+(\gamma-1)\zeta)-2(b\rho_+)^2\zeta\}}{(2\gamma+(\gamma-1)\zeta+2b\rho_+\zeta)^2}\frac{\mathrm{d}\rho_+}{\mathrm{d}t}, \quad (4.42)$$

et

$$\frac{\mathrm{d}\,[\vec{v}]}{\mathrm{d}t}=\beta_0\left\{\left(\frac{4\gamma+(\gamma+1)\zeta}{2\zeta(2\gamma+(\gamma+1)\zeta)}\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}t}-\frac{1}{2\rho_+(1-b\rho_+)}\frac{\mathrm{d}\rho_+}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{2p_+}\frac{\mathrm{d}p_+}{\mathrm{d}t}\right)\vec{n}+\frac{\mathrm{d}\vec{n}}{\mathrm{d}t}\right\}. \quad (4.43)$$

Les relations (4.23), (4.42) et (4.43) indiquent comment les variations Lagrangiennes des sauts de ρ, $\vec{v}$ et p sont reliées aux variations Lagrangiennes des grandeurs physiques ($\frac{\mathrm{d}p_+}{\mathrm{d}t}$ par exemple) et géométrique $\left(\frac{\mathrm{d}\vec{n}}{\mathrm{d}t}\right)$.

Les membres de gauche des équations (4.42) et (4.43) sont accessibles grâce aux équations d'Euler (4.7) :

$$\frac{\mathrm{d}\,[\rho]}{\mathrm{d}t}+([\vec{v}]\cdot\vec{n}-W_S)\left[\vec{n}\cdot\vec{\nabla}\rho\right]+\rho_-\left(\vec{\nabla}^S\cdot[\vec{v}]+\vec{n}\cdot[\vec{n}\cdot\overline{\overline{\nabla}}\vec{v}]\right) + \left([\rho]\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{v}_+\right)+[\vec{v}]\cdot\vec{\nabla}\rho_+\right)=0 \quad (4.44)$$

$$\frac{\mathrm{d}\,[\vec{v}]}{\mathrm{d}t}+([\vec{v}]\cdot\vec{n}-W_S)\left[\vec{n}\cdot\overline{\overline{\nabla}}\vec{v}\right]+\frac{1}{\rho_-}\left(\vec{\nabla}^S[p]+\vec{n}[\vec{n}\cdot\vec{\nabla}p]\right) + \left([\vec{v}]\cdot\overline{\overline{\nabla}}\vec{v}_+ + \left[\frac{1}{\rho}\right]\vec{\nabla}p_+\right)=0. \quad (4.45)$$

Afin d'illustrer la démarche, les calculs pour l'obtention de l'équation (4.44) sont détaillés. Les relations (4.24) et (4.45) se dérivent de manière similaire. Prenons le saut au travers du choc pour l'équation de conservation de la masse (4.7a) :

$$\left[\frac{\partial\rho}{\partial t}\right]+\left[\rho\vec{\nabla}\cdot\vec{v}\right]+\left[\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\rho\right]=0.$$

La relation (4.15) donne

$$\left[\frac{\partial\rho}{\partial t}\right]=\frac{\mathrm{d}\,[\rho]}{\mathrm{d}t}-W_S[\vec{n}\cdot\vec{\nabla}\rho]-\vec{v}_+\cdot\left[\vec{\nabla}\rho\right].$$

Ensuite, en utilisant (4.17) et (4.22), on a :

$$[\rho\vec{\nabla}\cdot\vec{v}]=[\rho]\vec{\nabla}\cdot\vec{v}_++\rho_-\left(\vec{\nabla}^S\cdot[\vec{v}]+\vec{n}\cdot\left[\vec{n}\cdot\overline{\overline{\nabla}}\vec{v}\right]\right).$$

En remarquant que $[\vec{v}]$ et $\vec{n}$ sont colinéaires, d'après (4.10), $[\vec{v}]=([\vec{v}]\cdot\vec{n})\,\vec{n}$, et il vient par la relation (4.16) :

$$[\vec{v}]\cdot[\vec{\nabla}\psi]=([\vec{v}]\cdot\vec{n})\,[\vec{n}\cdot\vec{\nabla}\psi]. \quad (4.46)$$

Les relations (4.46) et (4.22) conduisent alors à

$$\begin{aligned}[\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\rho] &= [\vec{v}]\cdot[\vec{\nabla}\rho] + \vec{v}_+\cdot[\vec{\nabla}\rho] + [\vec{v}]\cdot\vec{\nabla}\rho_+ \\ &= ([\vec{v}]\cdot\vec{n})[\vec{n}\cdot\vec{\nabla}\rho] + \vec{v}_+\cdot[\vec{\nabla}\rho] + [\vec{v}]\cdot\vec{\nabla}\rho_+.\end{aligned}$$

La combinaison de ces trois relations aboutit finalement à l'équation (4.44).

Remarque 4.3

La force à distance $\vec{f}$ n'admet pas de saut à travers le choc : $\left[\vec{f}\right] = \vec{0}$.

4.3.3 Équation d'évolution de l'intensité du choc

La combinaison des relations (4.24), (4.44) et (4.45) avec (4.23) permet d'obtenir l'équation vérifiée par le saut de pression au niveau du choc. Les relations nécessaires au calcul final sont mises en évidence dans le texte.

Écrivons pour commencer la contraction de (4.45) avec $\vec{n}$ ainsi que la relation (4.24) sous la forme :

$$\vec{n}\cdot\frac{\mathrm{d}\,[\vec{v}]}{\mathrm{d}t} + \beta_1\vec{n}\cdot[\vec{n}\cdot\overline{\overline{\nabla}}\vec{v}] + \beta_2[\vec{n}\cdot\vec{\nabla}p] + K_+ = 0 \tag{4.47}$$

$$\frac{\mathrm{d}\,[p]}{\mathrm{d}t} + \beta_1[\vec{n}\cdot\vec{\nabla}p] + \beta_4\left(\vec{\nabla}^S\cdot[\vec{v}] + \vec{n}\cdot[\vec{n}\cdot\overline{\overline{\nabla}}\vec{v}]\right) + H_+ = 0. \tag{4.48}$$

Les coefficients sont définis par :

$$\beta_1 = [\vec{v}]\cdot\vec{n} - W_S = -c_+\frac{2\gamma+(\gamma-1)\zeta+2b\rho_+\zeta}{2\gamma\sqrt{1+\frac{\gamma+1}{2\gamma}\zeta}}$$

$$\beta_2 = \frac{1}{\rho_-} = \frac{1}{\rho_+}\frac{2\gamma+(\gamma-1)\zeta+2b\rho_+\zeta}{2\gamma+(\gamma+1)\zeta}$$

$$\beta_3 = \left[\frac{1}{\rho}\right] = -\frac{1}{\rho_+}\frac{2(1-b\rho_+)\zeta}{2\gamma+(\gamma+1)\zeta}$$

$$\beta_4 = \frac{\gamma p_-}{1-b\rho_-} = p_+\frac{\gamma(1+\zeta)(2\gamma+(\gamma-1)\zeta+2b\rho_+\zeta)}{(1-b\rho_+)(2\gamma+(\gamma-1)\zeta)}$$

$$\beta_5 = \left[\frac{\gamma p}{1-b\rho}\right] = p_+\frac{\gamma\zeta\,(2\gamma+(\gamma-1)\zeta+2b\rho_+(1+\zeta))}{(1-b\rho_+)(2\gamma+(\gamma-1)\zeta)}$$

et

$$K_+ = \vec{n}\cdot\left([\vec{v}]\cdot\overline{\overline{\nabla}}\vec{v}_+ + \beta_3\vec{\nabla}p_+\right) = \beta_0\vec{n}\cdot\left(\vec{n}\cdot\overline{\overline{\nabla}}\vec{v}_+\right) + \beta_3\vec{n}\cdot\vec{\nabla}p_+ \tag{4.49}$$

$$H_+ = [\vec{v}]\cdot\vec{\nabla}p_+ + \beta_5\vec{\nabla}\cdot\vec{v}_+ = \beta_0\vec{n}\cdot\vec{\nabla}p_+ + \beta_5\vec{\nabla}\cdot\vec{v}_+, \tag{4.50}$$

β_0 étant définie par (4.38).

Le terme $\vec{n}\cdot\left[\vec{n}\cdot\overline{\overline{\nabla}}\vec{v}\right]$ est ensuite éliminé grâce à la combinaison $\beta_4(4.47) - \beta_1(4.48)$:

$$\left\{\beta_4\vec{n}\cdot\frac{\mathrm{d}\,[\vec{v}]}{\mathrm{d}t} - \beta_1\frac{\mathrm{d}[p]}{\mathrm{d}t}\right\} + \left\{\beta_2\beta_4 - \beta_1^2\right\}\left[\vec{n}\cdot\vec{\nabla}p\right] - \beta_1\beta_4\vec{\nabla}^S\cdot[\vec{v}] + \{\beta_4K_+ - \beta_1H_+\} = 0. \tag{4.51}$$

Les relations (4.43) et (4.23) combinées à (4.19) et (4.25) impliquent :

$$\left\{\boldsymbol{\beta_4\vec{n}\cdot\frac{\mathrm{d}\,[\vec{v}]}{\mathrm{d}t}-\beta_1\frac{\mathrm{d}\,[p]}{\mathrm{d}t}}\right\}=\boldsymbol{\omega_0\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}t}+\tilde{\alpha}_4\vec{V}\cdot\vec{\nabla}p_+-\frac{\omega_3}{W_S}\vec{V}\cdot\vec{\nabla}\rho_+}, \tag{4.52}$$

où

$$\tilde{\alpha}_4 = \frac{\beta_0\beta_4}{2p_+}-\beta_1\zeta = c_+\frac{\zeta(2\gamma+(\gamma-1)\zeta+2b\rho_+\zeta)(3\gamma+(2\gamma-1)\zeta)}{2\gamma\sqrt{1+\frac{\gamma+1}{2\gamma}\zeta}(2\gamma+(\gamma-1)\zeta)}$$

$$\omega_3 = \frac{\beta_0\beta_4}{2\rho_+(1-b\rho_+)}W_S = c_+^4\frac{\zeta(1+\zeta)(2\gamma+(\gamma-1)\zeta+2b\rho_+\zeta)}{2\gamma(2\gamma+(\gamma-1)\zeta)}.$$

Le coefficient ω_0 s'exprime comme

$$\omega_0=\frac{\beta_0\beta_4(4\gamma+(\gamma+1)\zeta)}{2\zeta(2\gamma+(\gamma+1)\zeta)}-\beta_1p_+=p_+c_+\frac{(2\gamma+(\gamma-1)\zeta+2b\rho_+\zeta)\Pi_1}{2\gamma\sqrt{1+\frac{\gamma+1}{2\gamma}\zeta}(2\gamma+(\gamma-1)\zeta)(2\gamma+(\gamma+1)\zeta)},$$

avec

$$\Pi_1=8\gamma^2+\gamma(9\gamma+1)\zeta+(2\gamma-1)(\gamma+1)\zeta^2.$$

On pose :

$$\boldsymbol{\omega_2=\{\beta_2\beta_4-\beta_1^2\}=c_+^2\frac{(\gamma+1)\zeta(2\gamma+(\gamma-1)\zeta+2b\rho_+\zeta)^2}{2\gamma(2\gamma+(\gamma-1)\zeta)(2\gamma+(\gamma+1)\zeta)}}. \tag{4.53}$$

La relation (4.39) combinée aux propriétés (4.20) et (4.21) donne

$$\vec{\nabla}^S\cdot[\vec{v}]=\beta_0\vec{\nabla}\cdot\vec{n}, \tag{4.54}$$

si bien que l'on obtient :

$$\boldsymbol{-\beta_1\beta_4\vec{\nabla}^S\cdot[\vec{v}]=\omega_1\vec{\nabla}\cdot\vec{n}}, \tag{4.55}$$

avec

$$\omega_1=-\beta_0\beta_1\beta_4=c_+^2p_+\frac{\zeta(1+\zeta)(2\gamma+(\gamma-1)\zeta+2b\rho_+\zeta)^2}{(2\gamma+(\gamma-1)\zeta)(2\gamma+(\gamma+1)\zeta)}.$$

En utilisant (4.49) et (4.50) ainsi que (4.14), il vient :

$$\boldsymbol{\{\beta_4K_+-\beta_1H_+\}=\tilde{\alpha}_1\vec{\nabla}\cdot\vec{v}_++\tilde{\alpha}_2\vec{\nabla}^S\cdot\vec{v}_++\beta_6\vec{n}\cdot\vec{\nabla}p_+}, \tag{4.56}$$

avec

$$\tilde{\alpha_1} = \beta_0\beta_4-\beta_1\beta_5 = c_+p_+\frac{(\gamma+1)\zeta(2+\zeta)(2\gamma+(\gamma-1)\zeta+2b\rho_+\zeta)}{2(1-b\rho_+)\sqrt{1+\frac{\gamma+1}{2\gamma}\zeta}(2\gamma+(\gamma-1)\zeta)}$$

$$\tilde{\alpha}_2 = -\beta_0\beta_4 = -c_+p_+\frac{\zeta(1+\zeta)(2\gamma+(\gamma-1)\zeta+2b\rho_+\zeta)}{\sqrt{1+\frac{\gamma+1}{2\gamma}\zeta}(2\gamma+(\gamma-1)\zeta)}$$

$$\beta_6 = \beta_3\beta_4-\beta_0\beta_1 = -\frac{p_+}{\rho_+}\frac{(\gamma+1)\zeta^2(2\gamma+(\gamma-1)\zeta+2b\rho_+\zeta)}{(2\gamma+(\gamma-1)\zeta)(2\gamma+(\gamma+1)\zeta)}.$$

Les relations (4.52), (4.53), (4.55) et (4.56) sont ensuite injectées dans l'équation (4.51) :

$$\omega_0\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}t}+\omega_1\vec{\nabla}\cdot\vec{n}+\omega_2\left[\vec{n}\cdot\vec{\nabla}p\right]-\omega_3\vec{n}\cdot\vec{\nabla}\rho_++\omega_4\vec{n}\cdot\vec{\nabla}p_+ + \left\{\tilde{\alpha}_1\vec{\nabla}\cdot\vec{v}_++\tilde{\alpha}_2\vec{\nabla}^S\cdot\vec{v}_++\tilde{\alpha}_3\vec{v}_+\cdot\vec{\nabla}\rho_++\tilde{\alpha}_4\vec{v}_+\cdot\vec{\nabla}p_+\right\}=0, \tag{4.57}$$

avec

$$\tilde{\alpha}_3 = -\frac{\omega_3}{W_S} = -c_+^3 \frac{\zeta(1+\zeta)(2\gamma+(\gamma-1)\zeta+2b\rho_+\zeta)}{2\gamma\sqrt{1+\frac{\gamma+1}{2\gamma}\zeta}(2\gamma+(\gamma-1)\zeta)}$$

$$\omega_4 = \tilde{\alpha}_4 W_S + \beta_6 = \frac{p_+}{\rho_+}\frac{\zeta(2\gamma+(\gamma-1)\zeta+2b\rho_+\zeta)\Pi_2}{2(1-b\rho_+)(2\gamma+(\gamma-1)\zeta)(2\gamma+(\gamma+1)\zeta)}$$

et

$$\Pi_2 = 6\gamma^2 + (7\gamma^2-\gamma-2)\zeta + (\gamma+1)(2\gamma-1)\zeta^2 + 2b\rho_+(\gamma+1)\zeta.$$

Finalement, en divisant la relation (4.57) par ω_0, et en notant $\partial_n = \vec{n}\cdot\vec{\nabla}$, l'équation d'évolution sur ζ s'écrit :

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}t} + c_+ w_1 \vec{\nabla}\cdot\vec{n} + c_+ w_2 \frac{(\partial_n p)_-}{p_+} = c_+ w_3 \frac{\partial_n \rho_+}{\rho_+} + c_+ w_4 \frac{\partial_n p_+}{p_+} \\ + \alpha_1 \vec{\nabla}\cdot\vec{v}_+ + \alpha_2 \vec{\nabla}^S\cdot\vec{v}_+ + \vec{v}_+\cdot\left(\alpha_3\frac{\vec{\nabla}\rho_+}{\rho_+} + \alpha_4\frac{\vec{\nabla}p_+}{p_+}\right).\end{aligned}} \quad (4.58)$$

Les coefficients w_i sont déterminés en fonction de ζ : $w_i = \frac{\omega_i}{\omega_0}$ pour $i = 1,2,3$ et $w_4 = \frac{\omega_2-\omega_4}{\omega_0}$. Après calcul, ils s'expriment comme :

$$w_1 = \frac{2\gamma M\zeta(1+\zeta)\,(2\gamma+(\gamma-1)\zeta+2b\rho_+\zeta)}{\Pi_1} \quad (4.59a)$$

$$w_2 = \frac{(\gamma+1)M\zeta(2\gamma+(\gamma-1)\zeta+2b\rho_+\zeta)}{\Pi_1} \quad (4.59b)$$

$$w_3 = \frac{\gamma M\zeta(1+\zeta)(2\gamma+(\gamma+1)\zeta)}{\Pi_1(1-b\rho_+)} \quad (4.59c)$$

$$w_4 = -\frac{M\zeta\left(2\gamma(2\gamma-1)+(3\gamma+1)(2\gamma-1)\zeta+(\gamma+1)(2\gamma-1)\zeta^2\right)}{\Pi_1}, \quad (4.59d)$$

où l'on rappelle que le nombre de Mach s'exprime comme $M = \sqrt{1+\frac{\gamma+1}{2\gamma}\zeta}$, ainsi que

$$\Pi_1 = 8\gamma^2 + \gamma(9\gamma+1)\zeta + (2\gamma-1)(\gamma+1)\zeta^2 > 0.$$

Les coefficients α_i sont donnés par $\alpha_i = -\frac{\tilde{\alpha}_i}{\omega_0}$:

$$\alpha_1 = -\frac{\gamma(\gamma+1)\zeta(2+\zeta)(2\gamma+(\gamma+1)\zeta)}{(1-b\rho_+)\Pi_1} \quad (4.60a)$$

$$\alpha_2 = \frac{2\gamma\zeta(1+\zeta)(2\gamma+(\gamma+1)\zeta)}{\Pi_1} \quad (4.60b)$$

$$\alpha_3 = \frac{\gamma\zeta(1+\zeta)(2\gamma+(\gamma+1)\zeta)}{\Pi_1(1-b\rho_+)} \quad (4.60c)$$

$$\alpha_4 = -\frac{\zeta(2\gamma+(\gamma+1)\zeta)(3\gamma+(2\gamma-1)\zeta)}{\Pi_1}. \quad (4.60d)$$

Dans la suite, les termes liés à la vitesse de l'écoulement amont sont rassemblés dans un même coefficient :

$$w_5 = \alpha_1 \vec{\nabla} \cdot \vec{v}_+ + \alpha_2 \vec{\nabla}^S \cdot \vec{v}_+ + \vec{v}_+ \cdot \left(\alpha_3 \frac{\vec{\nabla} \rho_+}{\rho_+} + \alpha_4 \frac{\vec{\nabla} p_+}{p_+} \right). \tag{4.61}$$

En particulier, w_5 est nul pour un milieu au repos.

L'équation (4.58) généralise celle obtenue dans [92] au cas des écoulements amonts stationnaires non-uniformes. Les coefficients w_1, w_2 et w_3 correspondent en particulier à ceux de cet article, modulo quelques fautes de frappe dans ce dernier. On notera que (4.58) est de type advection/source avec au second membre :

- $-w_1 \vec{\nabla} \cdot \vec{n}$: terme lié à la géométrie du choc ;
- $-w_2 \dfrac{(\partial_n p)_-}{p_+}$: contribution de l'écoulement arrière ;
- $w_3 \dfrac{\partial_n \rho_+}{\rho_+}$, $w_4 \dfrac{\partial_n p_+}{p_+}$ et w_5 : contributions liées à l'état initial de l'atmosphère.

4.3.4 Synthèse

Le modèle Cinématique se compose au final du système couplé d'équations (4.3), (4.58) et (4.35) décrivant respectivement l'évolution de la position du choc $\vec{x}_{sh}$, de son intensité $\zeta = \frac{[p]}{p_+}$, et de sa normale $\vec{n}$:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\vec{x}_{sh}}{\mathrm{d}t} = W_S \vec{n} + \vec{v}_+ & \text{(4.62a)} \\ \dfrac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}t} = -c_+ w_1 \vec{\nabla} \cdot \vec{n} - c_+ w_2 \dfrac{(\partial_n p)_-}{p_+} c_+ w_3 \dfrac{\partial_n \rho_+}{\rho_+} + c_+ w_4 \dfrac{\partial_n p_+}{p_+} + w_5 & \text{(4.62b)} \\ \dfrac{\mathrm{d}\vec{n}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{W_S}{2} \left(-\dfrac{\gamma+1}{(2\gamma+(\gamma+1)\zeta)} \vec{\nabla}^S \zeta + \dfrac{1-2b\rho_+}{1-b\rho_+} \dfrac{\vec{\nabla}^S \rho_+}{\rho_+} - \dfrac{\vec{\nabla}^S p_+}{p_+} \right) & \\ \qquad\qquad + \vec{v}_+ \cdot \overline{\overline{\nabla}}^S \vec{n} - \vec{\nabla}^S (\vec{v}_+ \cdot \vec{n}). & \text{(4.62c)} \end{cases}$$

Les coefficients w_i sont donnés par (4.59) et (4.61), et l'on rappelle que $W_S = c_+ \sqrt{1 + \frac{\gamma+1}{2\gamma}\zeta}$, ainsi que $c_+^2 = \frac{\gamma p_+}{\rho_+(1-b\rho_+)}$. Le gradient dans le plan tangent $\vec{\nabla}^S$ est défini par (4.13), et $\vec{v}_+ \cdot \overline{\overline{\nabla}}^S \vec{n}$ par (4.31).

Dans la limite des chocs faibles ($\zeta \sim 0$), et sous l'hypothèse que $\frac{(\partial_n p)_-}{p_+} = O(\zeta)$, on retrouve la théorie faiblement non-linéaire des rayons [96].

De manière générale, ce système n'est pas fermé puisque le terme $(\partial_n p)_- = \left(\vec{n} \cdot \vec{\nabla} p \right)_-$ est également une inconnue du problème, elle devra être modélisée (par 0 par exemple). Nous parlerons de modèle Cinématique **ordre 0** dans ce cas. Autrement, une équation d'évolution sur les effets arrière est nécessaire, ayant elle-même besoin d'une fermeture à l'ordre supérieur, *cf.* section 9.2.

Le modèle GSD découle d'une vision géométrique de la propagation du front de choc. Elle nécessite de négliger les effets transverses au choc afin de définir une relation $A - M$ dans chaque tube de rayon. Le modèle Cinématique découle d'une vision purement cinématique de la propagation du front en assimilant ce dernier à une surface singulière. Cela permet notamment

de prendre en compte les effets transverses au choc au travers du terme de gradient transversal $\vec{\nabla}^S$. Par conséquent, la physique du choc est susceptible d'être mieux prise en compte par ce modèle. On verra néanmoins dans la suite (section 4.5) que les deux modèles s'avèrent structurellement équivalents. Par ailleurs, une comparaison quantitative de ces deux approches est présentée au chapitre 6.

4.4 Nature du modèle Cinématique

Dans cette section, le caractère hyperbolique du modèle Cinématique est prouvé sous l'hypothèse de la connaissance du terme de couplage arrière $(\partial_n p)\_$. Pour cela, nous nous inspirons de [92].

Dans un premier temps, un changement de référentiel dans la base locale du choc est effectué. Le modèle se réécrit alors sous la forme d'un système 2D quasi-linéaire, ce qui autorise une étude aisée de la nature du système dans un second temps.

4.4.1 Changement de base

Le vecteur normal au choc $\vec{n}$ s'écrit sous la forme :

$$\vec{n} = \vec{n}_1 = \big(\cos\theta \sin\phi, \quad \sin\theta \sin\phi, \quad \cos\phi\big)^T,$$

où ϕ est l'angle orienté entre l'axe (Oz) et $\vec{n}$, et θ est l'angle orienté entre l'axe (Ox) et la projection de $\vec{n}$ dans le plan (Oxy) (*cf.* Fig. 4.2). Les vecteurs orthogonaux à $\vec{n}$ sont introduits :

$$\vec{n}_2 = \big(-\sin\theta, \quad \cos\theta, \quad 0\big)^T \quad \text{et} \quad \vec{n}_3 = \big(-\cos\theta\cos\phi, \quad -\sin\theta\cos\phi, \quad \sin\phi\big)^T.$$

Il est facile de vérifier que le triplet $\{\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3\}$ forme une base orthonormée directe de $\mathbb{R}^3$ et locale au choc.

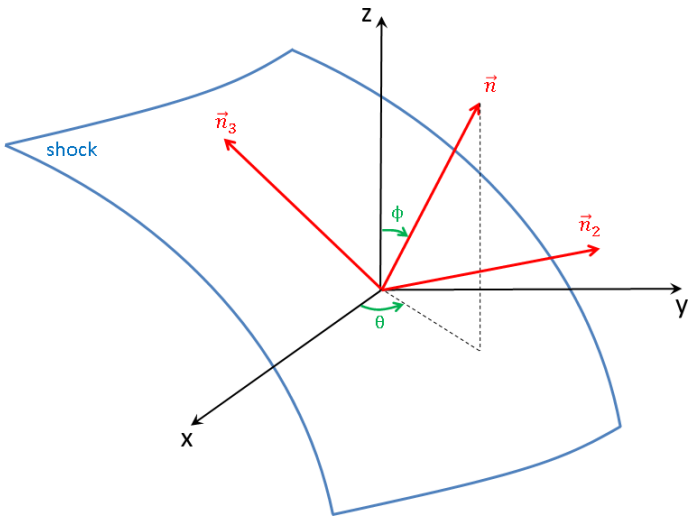


FIGURE 4.2 – Schéma de la base locale au choc : $\{\vec{n}_1 = \vec{n}, \vec{n}_2, \vec{n}_3\}$. Ce triplet forme une base orthonormée directe de $\mathbb{R}^3$.

Les dérivées partielles dans la base locale $\{\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3\}$ s'expriment comme :

$$\frac{\partial}{\partial n_k} = \vec{n}_k \cdot \vec{\nabla} \quad \text{pour } k = 1, 2, 3.$$

La transformation des dérivées directionnelles d'une base à l'autre s'écrit alors :

$$\left(\frac{\partial}{\partial n_1}, \quad \frac{\partial}{\partial n_2}, \quad \frac{\partial}{\partial n_3}\right)^T = A \cdot \vec{\nabla},$$

où $A = \left(\vec{n}_1, \quad \vec{n}_2, \quad \vec{n}_3\right)^T \in M_3(\mathbb{R})$ est une matrice 3×3 à coefficients réels et orthogonale. Son inverse est par conséquent sa transposée, et les dérivées partielles cartésiennes s'expriment en fonction des dérivées dans la nouvelle base comme :

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial n_1}\vec{n}_1 + \frac{\partial}{\partial n_2}\vec{n}_2 + \frac{\partial}{\partial n_3}\vec{n}_3. \tag{4.63}$$

La définition de la dérivée tangentielle au choc donne alors immédiatement [1] :

$$\vec{\nabla}^S = \frac{\partial}{\partial n_2}\vec{n}_2 + \frac{\partial}{\partial n_3}\vec{n}_3. \tag{4.64}$$

En considérant un vecteur $\vec{\psi}$, les opérateurs de divergence s'écrivent également dans la nouvelle base sous les formes :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\psi} = \vec{n}_1 \cdot \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial n_1} + \vec{n}_2 \cdot \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial n_2} + \vec{n}_3 \cdot \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial n_3} \tag{4.65}$$

$$\vec{\nabla}^S \cdot \vec{\psi} = \vec{n}_2 \cdot \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial n_2} + \vec{n}_3 \cdot \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial n_3}. \tag{4.66}$$

La forme différentielle des vecteurs de la nouvelle base est :

$$\mathrm{d}\vec{n}_1 = \sin\phi \, \mathrm{d}\theta \, \vec{n}_2 - \mathrm{d}\phi \, \vec{n}_3 \tag{4.67a}$$

$$\mathrm{d}\vec{n}_2 = -\sin\phi \, \mathrm{d}\theta \, \vec{n}_1 + \cos\phi \, \mathrm{d}\theta \, \vec{n}_3 \tag{4.67b}$$

$$\mathrm{d}\vec{n}_3 = \mathrm{d}\phi \, \vec{n}_1 - \cos\phi \, \mathrm{d}\theta \, \vec{n}_2 \tag{4.67c}$$

En considérant la relation (4.65) et en utilisant (4.67a) ainsi que l'orthogonalité de la nouvelle base, la courbure locale s'exprime finalement de la manière suivante :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{n} = \sin\phi \frac{\partial \theta}{\partial n_2} - \frac{\partial \phi}{\partial n_3}. \tag{4.68}$$

4.4.2 Écriture du modèle dans la base locale

Dans ce paragraphe, le modèle Cinématique (4.62) est réécrit dans la base locale au choc. Pour commencer, l'équation sur la position du choc est directement :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{x}_{sh}}{\mathrm{d}t} = W_S \vec{n} + \vec{v}_+ = W_S \left(\cos\theta \sin\phi, \sin\theta \sin\phi, \cos\phi\right)^T + \vec{v}_+.$$

Ensuite, en utilisant la relation (4.68), l'équation sur l'intensité du choc se réécrit :

$$\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}t} + c_+ w_1 \sin\phi \frac{\partial \theta}{\partial n_2} - c_+ w_1 \frac{\partial \phi}{\partial n_3} = G_1\left(\zeta, \ \theta, \ \phi, \ \vec{x}_{sh}\right), \tag{4.69}$$

où

$$G_1\left(\zeta, \ \theta, \ \phi, \ \vec{x}_{sh}\right) = -c_+ w_2 \frac{(\partial_n p)_-}{p_+} + \frac{c_+ w_3}{\rho_+}\frac{\partial \rho_+}{\partial n_1} + \frac{c_+ w_4}{p_+}\frac{\partial p_+}{\partial n_1} + w_5. \tag{4.70}$$

1. Remarquons que l'on a pour un tenseur ψ quelconque : $\vec{n}_2 \cdot \vec{\nabla}^S \psi = \frac{\partial \psi}{\partial n_2}$ et $\vec{n}_3 \cdot \vec{\nabla}^S \psi = \frac{\partial \psi}{\partial n_3}$.

La relation (4.67a) appliquée à la dérivée Lagrangienne donne :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{n}}{\mathrm{d}t} = \sin\phi\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\vec{n}_2 - \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}\vec{n}_3. \tag{4.71}$$

En contractant (4.71) et (4.35) avec $\vec{n}_i$, pour $i = 2$ et $i = 3$, et en combinant les relations obtenues, on aboutit aux équations d'évolution de θ et ϕ :

$$\sin\phi\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \frac{W_S}{2}\left(-\frac{\gamma+1}{(2\gamma+(\gamma+1)\zeta)}\frac{\partial\zeta}{\partial n_2} + \frac{1-2b\rho_+}{1-b\rho_+}\frac{1}{\rho_+}\frac{\partial\rho_+}{\partial n_2} - \frac{1}{p_+}\frac{\partial p_+}{\partial n_2}\right) + \vec{n}_2\cdot\left(\vec{v}_+\cdot\vec{\vec{\nabla}}^S\vec{n} - \vec{\nabla}^S(\vec{v}_+\cdot\vec{n})\right), \tag{4.72}$$

pour $i = 2$, et

$$-\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} = \frac{W_S}{2}\left(-\frac{\gamma+1}{(2\gamma+(\gamma+1)\zeta)}\frac{\partial\zeta}{\partial n_3} + \frac{1-2b\rho_+}{1-b\rho_+}\frac{1}{\rho_+}\frac{\partial\rho_+}{\partial n_3} - \frac{1}{p_+}\frac{\partial p_+}{\partial n_3}\right) + \vec{n}_3\cdot\left(\vec{v}_+\cdot\vec{\vec{\nabla}}^S\vec{n} - \vec{\nabla}^S(\vec{v}_+\cdot\vec{n})\right), \tag{4.73}$$

pour $i = 3$.

En considérant (4.64) et en utilisant (4.67c), il vient après calcul :

$$\vec{v}_+\cdot\vec{\vec{\nabla}}^S\vec{n} = \sin\phi\left\{(\vec{n}_2\cdot\vec{v}_+)\frac{\partial\theta}{\partial n_2} + (\vec{n}_3\cdot\vec{v}_+)\frac{\partial\theta}{\partial n_3}\right\}\vec{n}_2 - \left\{(\vec{n}_2\cdot\vec{v}_+)\frac{\partial\phi}{\partial n_2} + (\vec{n}_3\cdot\vec{v}_+)\frac{\partial\phi}{\partial n_3}\right\}\vec{n}_3 \tag{4.74}$$

et

$$\vec{\nabla}^S(\vec{v}_+\cdot\vec{n}) = \sum_{k=2}^{3}\left\{(\vec{n}_2\cdot\vec{v}_+)\sin\phi\frac{\partial\theta}{\partial n_k} - (\vec{n}_3\cdot\vec{v}_+)\sin\phi\frac{\partial\phi}{\partial n_k} + \vec{n}\cdot\frac{\partial\vec{v}_+}{\partial n}\right\}\vec{n}_k, \tag{4.75}$$

si bien que l'on a :

$$\vec{v}_+\cdot\vec{\vec{\nabla}}^S\vec{n} - \vec{\nabla}^S(\vec{v}_+\cdot\vec{n}) = \left\{(\vec{n}_3\cdot\vec{v}_+)\left(\sin\phi\frac{\partial\theta}{\partial n_3} + \frac{\partial\phi}{\partial n_2}\right) - \vec{n}\cdot\frac{\partial\vec{v}_+}{\partial n}\right\}\vec{n}_2 - \left\{(\vec{n}_2\cdot\vec{v}_+)\left(\sin\phi\frac{\partial\theta}{\partial n_3} + \frac{\partial\phi}{\partial n_2}\right) + \vec{n}\cdot\frac{\partial\vec{v}_+}{\partial n}\right\}\vec{n}_3. \tag{4.76}$$

En injectant cette dernière relation dans (4.72) et (4.73), on obtient finalement :

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} + \frac{(\gamma+1)W_S}{2\sin\phi\,(2\gamma+(\gamma+1)\zeta)}\frac{\partial\zeta}{\partial n_2} - (\vec{n}_3\cdot\vec{v}_+)\frac{\partial\theta}{\partial n_3} - \frac{(\vec{n}_3\cdot\vec{v}_+)}{\sin\phi}\frac{\partial\phi}{\partial n_2} = G_2(\zeta,\ \theta,\ \phi,\ \vec{x}_{sh}) \tag{4.77}$$

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} - \frac{(\gamma+1)W_S}{2\,(2\gamma+(\gamma+1)\zeta)}\frac{\partial\zeta}{\partial n_3} - \sin\phi\,(\vec{n}_2\cdot\vec{v}_+)\frac{\partial\theta}{\partial n_3} - (\vec{n}_2\cdot\vec{v}_+)\frac{\partial\phi}{\partial n_2} = G_3(\zeta,\ \theta,\ \phi,\ \vec{x}_{sh}), \tag{4.78}$$

avec

$$G_2(\zeta,\ \theta,\ \phi,\ \vec{x}_{sh}) = \frac{W_S}{2}\left(\frac{1-2b\rho_+}{\sin\phi(1-b\rho_+)}\frac{1}{\rho_+}\frac{\partial\rho_+}{\partial n_2} - \frac{1}{\sin\phi}\frac{1}{p_+}\frac{\partial p_+}{\partial n_2}\right) - \frac{1}{\sin\phi}\vec{n}\cdot\frac{\partial\vec{v}_+}{\partial n_2} \tag{4.79a}$$

$$G_3(\zeta,\ \theta,\ \phi,\ \vec{x}_{sh}) = \frac{W_S}{2}\left(-\frac{1-2b\rho_+}{1-b\rho_+}\frac{1}{\rho_+}\frac{\partial\rho_+}{\partial n_3} + \frac{1}{p_+}\frac{\partial p_+}{\partial n_3}\right) + \vec{n}\cdot\frac{\partial\vec{v}_+}{\partial n_3}. \tag{4.79b}$$

En définitive, le modèle Cinématique (4.62) s'écrit dans la base locale sous la forme :

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\vec{x}_{sh}}{\mathrm{d}t} = W_S\vec{n} + \vec{v}_+ \\ \dfrac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}t} + c_+ w_1 \sin\phi \dfrac{\partial\theta}{\partial n_2} - c_+ w_1 \dfrac{\partial\phi}{\partial n_3} = G_1 \\ \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} + \dfrac{(\gamma+1)W_S}{2\sin\phi\,(2\gamma+(\gamma+1)\zeta)} \dfrac{\partial\zeta}{\partial n_2} - (\vec{n}_3\cdot\vec{v}_+)\dfrac{\partial\theta}{\partial n_3} - \dfrac{(\vec{n}_3\cdot\vec{v}_+)}{\sin\phi}\dfrac{\partial\phi}{\partial n_2} = G_2 \\ \dfrac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} - \dfrac{(\gamma+1)W_S}{2\,(2\gamma+(\gamma+1)\zeta)} \dfrac{\partial\zeta}{\partial n_3} - \sin\phi\,(\vec{n}_2\cdot\vec{v}_+)\dfrac{\partial\theta}{\partial n_3} - (\vec{n}_2\cdot\vec{v}_+)\dfrac{\partial\phi}{\partial n_2} = G_3. \end{cases}} \tag{4.80}$$

où G_1, G_2 et G_3 sont des termes sources, définis par (4.70), (4.79a) et (4.79b), dépendant de l'écoulement amont et des inconnues ζ, θ, ϕ, et $\vec{x}_{sh}$.

En 2D ($\phi \equiv \frac{\pi}{2}$), dans un milieu uniforme et au repos, le modèle devient :

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = W_S\cos\theta \quad , \quad \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = W_S\sin\theta & (4.81a) \\ \dfrac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}t} + c_+ w_1 \dfrac{\partial\theta}{\partial n_2} = 0 & (4.81b) \\ \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} + \dfrac{(\gamma+1)W_S}{2\,(2\gamma+(\gamma+1)\zeta)}\dfrac{\partial\zeta}{\partial n_2} = 0. & (4.81c) \end{cases}$$

On notera la similitude avec le modèle GSD en deux dimensions d'espace (3.37). En effet puisque $M = \frac{W_S}{c_+}$ et $\alpha = c_+ t$, les relations (4.81a) sont équivalentes à (3.44). De surcroît, puisque $\zeta = \frac{2\gamma}{\gamma+1}\left(M^2-1\right)$, les relations (4.81b)-(4.81c) s'écrivent :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial M}{\partial\alpha} + \dfrac{(\gamma+1)w_1}{4\gamma}\dfrac{\partial\theta}{\partial n_2} &= 0 \\ \dfrac{\partial\theta}{\partial\alpha} + \dfrac{\partial M}{\partial n_2} &= 0. \end{cases} \tag{4.82}$$

Finalement, en notant $\mathrm{d}n_2 = A\mathrm{d}\beta$, le modèle Cinématique est similaire au modèle GSD (3.37). Ce point avait déjà été souligné dans [92], et sera étudié plus en détail dans le cadre général en section 4.5.

4.4.3 Hyperbolicité du modèle Cinématique - ordre 0

Soit $\vec{Y} = \left(\zeta, \quad \theta, \quad \phi, \quad \vec{x}_{sh}^T\right)^T \in \mathbb{R}^6$ le vecteur des inconnues du modèle. Le système (4.80) s'écrit alors sous la forme matricielle :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\vec{Y}}{\mathrm{d}t} + A^{(1)}\frac{\partial\vec{Y}}{\partial n_2} + A^{(2)}\frac{\partial\vec{Y}}{\partial n_3} = G\left(\vec{Y}\right),} \tag{4.83}$$

avec

$$G\left(\vec{Y}\right) = \left(G_1\left(\vec{Y}\right), \quad G_2\left(\vec{Y}\right), \quad G_3\left(\vec{Y}\right), \quad \vec{V}^T\right)^T \in \mathbb{R}^6,$$

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & c_+ w_1 \sin\phi & 0 & \\ \frac{(\gamma+1)W_S}{2\sin\phi(2\gamma+(\gamma+1)\zeta)} & 0 & -\frac{(\vec{n}_3\cdot\vec{v}_+)}{\sin\phi} & (0) \\ 0 & 0 & -(\vec{n}_2\cdot\vec{v}_+) & \\ & (0) & & (0) \end{pmatrix} \in M_6(\mathbb{R})$$

et

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -c_+ w_1 & \\ 0 & -(\vec{n}_3\cdot\vec{v}_+) & 0 & (0) \\ -\frac{(\gamma+1)W_S}{2(2\gamma+(\gamma+1)\zeta)} & -\sin\phi(\vec{n}_2\cdot\vec{v}_+) & 0 & \\ & (0) & & (0) \end{pmatrix} \in M_6(\mathbb{R}).$$

On rappelle que w_1 est donné par (4.59a) et que $W_S = c_+ M = c_+\sqrt{1+\frac{\gamma+1}{2\gamma}\zeta}$.

Le système (4.83) est un système 2D quasi-linéaire. On montre, suivant [45], que ce système est hyperbolique si et seulement si pour tout vecteur $\vec{\omega} = (\omega_1, \omega_2)^T \in \mathbb{R}^2$ de norme 1, la matrice $A^{(1)}\omega_1 + A^{(2)}\omega_2$ est diagonalisable dans $\mathbb{R}$. Après calcul, les valeurs propres de cette matrice sont réelles et définies comme :

$$s = 0 \quad \text{de multiplicité 3} \tag{4.84a}$$

$$s_\pm = \pm c_+\sqrt{\frac{(\gamma+1)w_1}{4\gamma M}} = \pm c_+\sqrt{\frac{(\gamma+1)\zeta(1+\zeta)(2\gamma+(\gamma-1)\zeta+2b\rho_+\zeta)}{2\Pi_1}} \tag{4.84b}$$

$$s_{v_+}(\vec{\omega}) = -(\vec{n}_2\cdot\vec{v}_+)\,\omega_1 - (\vec{n}_3\cdot\vec{v}_+)\,\omega_2 = -\vec{v}_+^S\cdot\vec{\omega}, \tag{4.84c}$$

pour tout vecteur $\vec{\omega} = (\omega_1, \omega_2)^T$ dans $\mathbb{R}^2$ de norme 1. La projection du vecteur $\vec{v}_+$ sur la surface de choc est notée $\vec{v}_+^S = (\vec{n}_2\cdot\vec{v}_+, \vec{n}_3\cdot\vec{v}_+)^T \in \mathbb{R}^2$.

Remarque 4.4

Les calculs ont été menés dans le référentiel du choc en se déplaçant selon sa normale. Cela explique la symétrie des ondes $s_\pm$ (4.84b). Il faut prendre en compte la vitesse relative pour toutes les ondes dans le cas d'un changement de référentiel.

Lorsque le système est hyperbolique, les valeurs propres s_-, s_+, s_{v_+} correspondent à la vitesse de trois ondes qui se propagent le long du choc. Ces ondes sont liées aux modifications de l'intensité, de la forme ainsi que de l'orientation du choc. L'écoulement amont est en particulier responsable de la formation d'une de ces ondes (valeur propre s_{v_+} (4.84c)). Cela signifie que l'information issue d'un point $(X_s, Y_s)^T$ sur le front de choc se propage selon les vitesses s_+, s_- et $s_{v_+}(\vec{\omega})$ dans toutes les directions unitaires $\vec{\omega}$ sur la surface de choc. Pour un incrément élémentaire de temps dt, l'information portée par les valeurs propres $s_\pm$ se situe alors sur un cercle de centre $(X_s, Y_s)^T$ et de rayon $s_+\mathrm{d}t$, puisque ces vitesses sont indépendantes de $\vec{\omega}$. La valeur propre s_{v_+} dépend de la direction unitaire $\vec{\omega}$. L'information portée par s_{v_+} se trouve alors sur un cercle de centre $\left(X_s + v_1^S/2, Y_s + v_2^S/2\right)^T$ et de rayon $\frac{\|\vec{v}_+^S\|}{2}\mathrm{d}t$. La figure 4.3 illustre l'ensemble des configurations possibles de la propagation de l'information issue du point $(X_s, Y_s)^T$. Trois cas se dégagent alors selon la rencontre ou non de ces ondes. Si l'intensité de l'écoulement amont est inférieure aux vitesses locales $s_\pm$, à savoir si l'on a $\|\vec{v}_+^S\| < s_+ = -s_-$, les ondes $s_\pm$ et s_{v_+} ne se rencontrent pas (*cf.* Fig. 4.3(a)). À l'inverse, si l'écoulement

amont est trop fort, $\|\vec{v}_+^S\| > s_+ = -s_-$, les ondes se croisent en deux points B et C (*cf.* Fig. 4.3(c)). En particulier, il existe deux vecteurs unitaires $\vec{\omega}_1$ et $\vec{\omega}_2$, non colinéaires à $\vec{v}_+^S$, tels que $s_{v_+}(\vec{\omega_1}) = s_+ = s_{v_+}(\vec{\omega_2})$. Enfin, lorsque la vitesse de l'écoulement est égale à celle des ondes $s_\pm$, *i.e.* $\|\vec{v}_+^S\| = s_+ = -s_-$, il existe une unique intersection en A comme schématisé en figure 4.3(b). On peut alors trouver un unique vecteur unitaire $\vec{\omega}$ colinéaire à $\vec{v}_+^S$ tel que $s_{v_+}(\vec{\omega}) = s_+$.

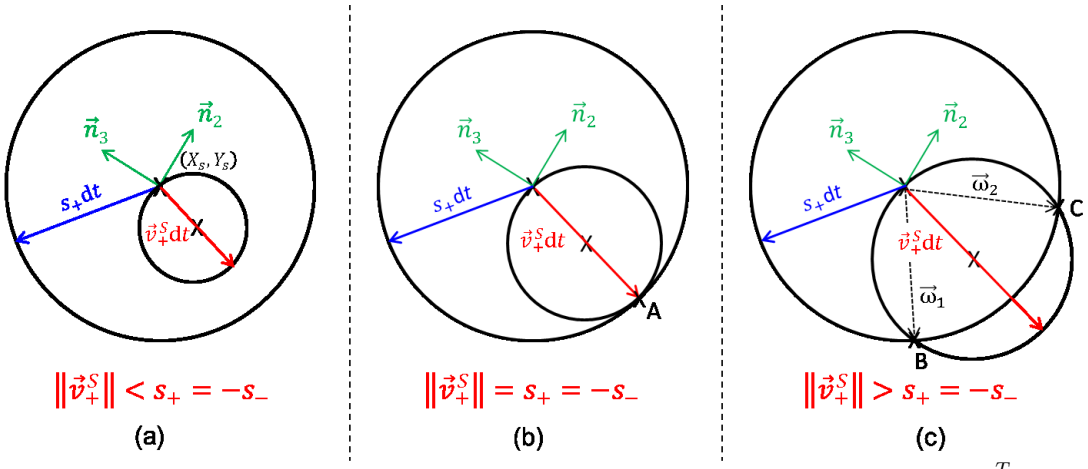


FIGURE 4.3 – Schéma de la propagation de l'information issue d'un point $(X_s, Y_s)^T$ sur la surface de choc. L'ensemble $\{\vec{n}_2, \vec{n}_3\}$ est la base locale de la surface du choc associée ici au point $(X_s, Y_s)^T$. Trois cas se dégagent selon l'intensité de la vitesse du fluide en amont du choc projetée sur la surface du choc : $\|\vec{v}_+^S\|$.

Les valeurs propres s_- et s_+ sont différentes et non nulles. Si s_{v_+} est différente des autres valeurs propres, alors le système est hyperbolique. Les seuls cas problématiques sont $s_{v_+} = s_-$, $s_{v_+} = s_+$ ou $s_{v_+} = 0$. Dans ce dernier cas, il est aisé de vérifier que le sous-espace propre associé à 0 est de dimension 4. La matrice $A^{(1)}\omega_1 + A^{(2)}\omega_2$ est alors diagonalisable dans $\mathbb{R}$ et le système reste donc hyperbolique. Le théorème qui suit assure l'hyperbolicité du système sous la condition que la vitesse $\vec{v}_+^S$ ne soit pas trop élevée par rapport à la vitesse des ondes $s_\pm$.

Théorème 4.1 (*Hyperbolicité du modèle Cinématique*)

Le modèle Cinématique est hyperbolique si et seulement si $\|\vec{v}_+^S\| \leq s_+ = -s_-$. En particulier, le modèle Cinématique est toujours hyperbolique pour un milieu au repos.

Preuve 4.1

Si $\|\vec{v}_+^S\| < s_+$, l'inégalité de Cauchy-Schwartz implique :

$$|s_{v_+}(\vec{\omega})| \leq \|\vec{v}_+^S\| < s_+, \quad \forall\, \vec{\omega} \in \mathbb{R}^2 \text{ de norme } 1.$$

Le système est donc hyperbolique.
Si $\|\vec{v}_+^S\| \geq s_+$, alors il existe $\vec{\omega} \in \mathbb{R}^2$, $\|\vec{\omega}\| = 1$, tel que $s_{v_+}(\vec{\omega}) = s_+$ ou $s_{v_+}(\vec{\omega}) = s_-$ (*cf.* Fig. 4.3). Supposons que $s_{v_+}(\vec{\omega}) = s_+ = s$. Le cas $s_{v_+}(\vec{\omega}) = s_-$ se traite de manière identique. On cherche le sous-espace propre $E_s \subset \mathbb{R}^6$ associé à s. Le système est alors hyperbolique si et seulement si $\dim(E_s) = 2$. Soit $\vec{X} = (X_i)_{i=1,\dots,6} \in E_s$. Le vecteur $(X_1, X_2, X_3)^T$ vérifie

le système :

$$\begin{cases} -sX_1 & + & c_+ w_1 \sin\phi\, \omega_1 X_2 & - & c_+ w_1 \omega_2 X_3 & = & 0 \\ \dfrac{s^2}{c_+ w_1}\omega_1 X_1 & + & (\vec{n}_2 \cdot \vec{v}_+) \sin\phi\, \omega_1 X_2 & - & (\vec{n}_3 \cdot \vec{v}_+)\, \omega_1 X_3 & = & 0. \end{cases}$$

Le sous-espace propre E_s est de dimension deux si et seulement si ces deux équations sont indépendantes, ou de manière équivalente, si et seulement le vecteur $\vec{\omega}$ est colinéaire à $\vec{v}_+^S$. Cela est possible uniquement lorsque $\|v_+^S\| = s_+$ (*cf.* Fig. 4.3).

■

Remarque 4.5

Lorsque $\|\vec{v}_+^S\| > s_+$, la matrice $A^{(1)}\omega_1 + A^{(2)}\omega_2$ n'est plus diagonalisable au voisinage des points B et C en figure 4.3(c). Le système est dit faiblement hyperbolique si les valeurs propres sont encore réelles. La solution en ces voisinages est alors un δ-choc et consiste en une combinaison entre une discontinuité et une fonction dirac [73]. Son étude et son impact pour la modélisation d'une onde de choc en présence d'un écoulement à l'amont du choc dépasse le cadre de cette thèse.

Remarque 4.6

En deux dimensions d'espace, les ondes voyagent sur le choc selon une unique direction $\vec{\omega}_1$. Le cas dégénéré schématisé en figure 4.3(c) n'existe donc pas, et le système est toujours hyperbolique.

Le caractère hyperbolique du système implique que la formation de choc sur le choc (choc-choc) est possible, tout comme dans le modèle GSD de Whitham. On rappelle que cette discontinuité correspond à la trace du point triple sur le front lors de la formation d'un front de Mach.

4.5 Équivalence structurale avec le modèle GSD

L'analogie structurale du modèle Cinématique avec le modèle GSD a déjà été soulignée dans [124, 92]. Nous nous proposons dans cette section de prouver l'équivalence formelle de ces deux modèles dans le cadre général. Il est en effet naturel de décomposer l'évolution du front de choc en tubes de rayon élémentaires d'aire transversale A, avec une relation $A - M$ propre au modèle Cinématique. Cela autorise notamment une écriture conservative du modèle Cinématique, ainsi qu'une comparaison aisée avec le modèle GSD.

Dans la suite, nous montrons que l'équation sur l'intensité du choc (4.58) se réécrit sous la forme de l'équation bilan

$$\operatorname{div}\left(\frac{\vec{i}}{A}\right) = 0,$$

et d'une relation $A - M$ spécifique. Le vecteur $\vec{i}$, défini par

$$\vec{i} = \frac{\vec{V}}{|\vec{V}|} = \frac{W_S\vec{n} + \vec{v}_+}{|W_S\vec{n} + \vec{v}_+|} = \frac{M\vec{n} + \vec{m}}{|M\vec{n} + \vec{m}|}, \tag{4.85}$$

est le vecteur unitaire dans la direction de propagation du choc, où $\vec{m}$ est le vecteur de Mach de l'écoulement amont : $\vec{m} = \vec{v}_+/c_+$.

On rappelle l'équation (4.58) :

$$\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}t} + c_+ w_1 \vec{\nabla}\cdot\vec{n} + c_+ w_2 \frac{(\partial_n p)_-}{p_+} = c_+ w_3 \frac{\partial_n \rho_+}{\rho_+} + c_+ w_4 \frac{\partial_n p_+}{p_+} + w_5, \tag{4.86}$$

où l'on a $\partial_n = \vec{n}\cdot\vec{\nabla}$, et

$$w_5 = \alpha_1 \vec{\nabla}\cdot\vec{v}_+ + \alpha_2 \vec{\nabla}^S\cdot\vec{v}_+ + \vec{v}_+\cdot\left(\alpha_3\frac{\vec{\nabla}\rho_+}{\rho_+} + \alpha_4\frac{\vec{\nabla}p_+}{p_+}\right).$$

Les coefficients w_i et α_i, pour $i = 1,\dots,4$, dépendent de ζ et sont donnés par (4.59) et (4.60). La relation de Rankine-Hugoniot (4.11), $\zeta = \frac{2\gamma}{\gamma+1}\left(M^2-1\right)$, est utilisée dans la suite afin d'exprimer les coefficients en fonction de M.

En dérivant la relation $M = \sqrt{1+\frac{\gamma+1}{2\gamma}\zeta}$, il vient :

$$\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}t} = \frac{4\gamma M}{\gamma+1}\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}.$$

Le nombre de Mach M dépend du temps d'arrivée du choc : $M = M(t_{sh})$. Soit $M_x = M_x(\vec{x}_{sh})$ le nombre de Mach fonction de la position du choc tel que $M(t_{sh}) = M_x(\vec{x}_{sh})$. Par la relation (2.39), il découle :

$$\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}t} = \frac{4\gamma M}{\gamma+1}\vec{V}\cdot\vec{\nabla}M_x = \frac{4\gamma M}{\gamma+1}|\vec{V}|\vec{i}\cdot\vec{\nabla}M_x.$$

Afin d'alléger les notations, la distinction entre M et M_x n'est pas faite dans la suite.

En multipliant la relation (4.86) par $\frac{M}{c_+ w_1}$ et en injectant la relation précédente, on trouve :

$$\frac{M\lambda_K(M)}{M^2-1}\frac{|\vec{V}|}{c_+}\vec{i}\cdot\vec{\nabla}M + M\vec{\nabla}\cdot\vec{n} + \chi_1(M)M\frac{\partial_n\rho_+}{\rho_+} + \chi_2(M)M\frac{\partial_n p_+}{p_+} + \chi_3(M)M\frac{(\partial_n p)_-}{p_+} + \frac{w_5}{c_+ w_1}M = 0, \tag{4.87}$$

où

$$\lambda_K(M) = \frac{4\gamma M(M^2-1)}{(\gamma+1)w_1} = \frac{(\gamma+1)\{2(2\gamma-1)M^4+(\gamma+5)M^2+1-\gamma\}}{(2\gamma M^2+1-\gamma)\{2+(\gamma-1)M^2+2b\rho_+(M^2-1)\}}. \tag{4.88}$$

Les coefficients $\chi_1 = -\frac{w_3}{w_1}$, $\chi_2 = -\frac{w_4}{w_1}$ et $\chi_3 = \frac{w_2}{w_1}$ s'expriment en fonction de M comme :

$$\chi_1(M) = \frac{-(\gamma+1)M^2}{2(1-b\rho_+)\{2+(\gamma-1)M^2+2b\rho_+(M^2-1)\}} \tag{4.89a}$$

$$\chi_2(M) = \frac{(\gamma+1)(2\gamma-1)M^2}{2\gamma\{2+(\gamma-1)M^2+2b\rho_+(M^2-1)\}} \tag{4.89b}$$

$$\chi_3(M) = \frac{(\gamma+1)^2}{2\gamma(2\gamma M^2+1-\gamma)}. \tag{4.89c}$$

De la même manière, le terme $\frac{w_5}{c_+ w_1}$ s'écrit comme :

$$\frac{w_5}{c_+ w_1} = \chi_4(M)\frac{\vec{\nabla}\cdot\vec{v}_+}{c_+} + \chi_5(M)\frac{\vec{\nabla}^S\cdot\vec{v}_+}{c_+} + \chi_6(M)\frac{\vec{m}\cdot\vec{\nabla}\rho_+}{\rho_+} + \chi_7(M)\frac{\vec{m}\cdot\vec{\nabla}p_+}{p_+},$$

avec

$$\chi_4(M) = -\frac{\alpha_1}{w_1} = \frac{(\gamma+1)^2(\gamma M^2+1)M}{(1-b\rho_+)(2\gamma M^2+1-\gamma)\{2+(\gamma-1)M^2+2b\rho_+(M^2-1)\}}$$

$$\chi_5(M) = -\frac{\alpha_2}{w_1} = \frac{-(\gamma+1)M}{\{2+(\gamma-1)M^2+2b\rho_+(M^2-1)\}}$$

$$\chi_6(M) = -\frac{\alpha_3}{w_1} = \frac{-\gamma(\gamma+1)M(5-\gamma+2(2\gamma-1)M^2)}{2(1-b\rho_+)(1-\gamma+2\gamma M^2)\{2+(\gamma-1)M^2+2b\rho_+(M^2-1)\}}$$

$$\chi_7(M) = -\frac{\alpha_4}{w_1} = \frac{(\gamma+1)M}{2\gamma\{2+(\gamma-1)M^2+2b\rho_+(M^2-1)\}}.$$

À partir de la relation (4.85), la divergence du vecteur $\vec{i}$ vérifie :

$$|M\vec{n}+\vec{m}|\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{i}\right) = M\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{n}\right)+\vec{n}\cdot\vec{\nabla}M+\vec{\nabla}\cdot\vec{m}-\vec{i}\cdot\vec{\nabla}\left(|M\vec{n}+\vec{m}|\right). \tag{4.90}$$

Un calcul donne de plus la relation suivante :

$$\vec{i}\cdot\vec{\nabla}\left(|M\vec{n}+\vec{m}|\right) = \frac{M+\vec{n}\cdot\vec{m}}{|M\vec{n}+\vec{m}|}\left(\vec{i}\cdot\vec{\nabla}M\right)+\frac{M\left(\vec{i}\cdot\vec{\nabla}\left(\vec{n}\cdot\vec{m}\right)\right)}{|M\vec{n}+\vec{m}|}+\frac{\vec{m}\cdot\left(\vec{i}\cdot\overline{\overline{\nabla}}\vec{m}\right)}{|M\vec{n}+\vec{m}|}. \tag{4.91}$$

En injectant ces deux dernières relations dans (4.87), il vient alors :

$$\frac{M\lambda_K(M)}{M^2-1}\frac{|\vec{V}|}{c_+}\left(\vec{i}\cdot\vec{\nabla}M\right)+\frac{|\vec{V}|}{c_+}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{i}\right)+\left(\frac{M+\vec{n}\cdot\vec{m}}{|M\vec{n}+\vec{m}|}\vec{i}-\vec{n}\right)\cdot\vec{\nabla}M+\chi_1(M)M\frac{\partial_n\rho_+}{\rho_+}$$
$$+\chi_2(M)M\frac{\partial_n p_+}{p_+}+\chi_3(M)M\frac{(\partial_n p)_-}{p_+}+\alpha_0=0, \tag{4.92}$$

où α_0 est un terme nul si l'écoulement amont est au repos, sinon :

$$\alpha_0 = \chi_4(M)M\frac{\vec{\nabla}\cdot\vec{v}_+}{c_+}+\chi_5(M)M\frac{\vec{\nabla}^S\cdot\vec{v}_+}{c_+}+\chi_6(M)M\frac{\vec{m}\cdot\vec{\nabla}\rho_+}{\rho_+}+\chi_7(M)M\frac{\vec{m}\cdot\vec{\nabla}p_+}{p_+}$$
$$+\left\{\frac{M\left(\vec{i}\cdot\vec{\nabla}\left(\vec{n}\cdot\vec{m}\right)\right)}{|M\vec{n}+\vec{m}|}+\frac{\vec{m}\cdot\left(\vec{i}\cdot\overline{\overline{\nabla}}\vec{m}\right)}{|M\vec{n}+\vec{m}|}-\vec{\nabla}\cdot\vec{m}\right\}.$$

On cherche ensuite f et K tels que $f\times$(4.92) s'écrit sous la forme $\vec{\nabla}\cdot\left(K\vec{i}\right)=0$. L'identification de cette dernière relation avec (4.92) aboutit à :

$$K=\frac{|\vec{V}|}{c_+}f,$$

et

$$\vec{i}\cdot\vec{\nabla}K=\left\{\frac{M\lambda_K(M)}{M^2-1}\frac{|\vec{V}|}{c_+}\left(\vec{i}\cdot\vec{\nabla}M\right)+\left(\frac{M+\vec{n}\cdot\vec{m}}{|M\vec{n}+\vec{m}|}\vec{i}-\vec{n}\right)\cdot\vec{\nabla}M+\chi_1(M)M\frac{\partial_n\rho_+}{\rho_+}\right.$$
$$\left.+\chi_2(M)M\frac{\partial_n p_+}{p_+}+\chi_3(M)M\frac{(\partial_n p)_-}{p_+}+\alpha_0\right\}f.$$

Cela donne :

$$-\frac{|\vec{V}|}{c_+}\frac{\vec{i}\cdot\vec{\nabla}K}{K}+\frac{M\lambda_K(M)}{M^2-1}\frac{|\vec{V}|}{c_+}\left(\vec{i}\cdot\vec{\nabla}M\right)+\left(\frac{M+\vec{n}\cdot\vec{m}}{|M\vec{n}+\vec{m}|}\vec{i}-\vec{n}\right)\cdot\vec{\nabla}M+\chi_1(M)M\frac{\partial_n\rho_+}{\rho_+}$$
$$+\chi_2(M)M\frac{\partial_n p_+}{p_+}+\chi_3(M)M\frac{(\partial_n p)_-}{p_+}+\alpha_0=0.$$

Finalement, en notant $\mathrm{d}\alpha = c_+\mathrm{d}t$ et en posant $K=\dfrac{1}{A}$, l'équation de bilan dans les tubes de rayon est retrouvée :

$$\vec{\nabla}\cdot\left(\frac{\vec{i}}{A}\right)=0,$$

ainsi qu'une relation $A-M$ propre au modèle Cinématique :

$$\boxed{\frac{1}{A}\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}\alpha}+\frac{M\lambda_K(M)}{M^2-1}\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}\alpha}+\left(\frac{M+\vec{n}\cdot\vec{m}}{|M\vec{n}+\vec{m}|}\vec{i}-\vec{n}\right)\cdot\vec{\nabla}M+\chi_1(M)M\frac{\partial_n\rho_+}{\rho_+}}$$
$$\boxed{+\chi_2(M)M\frac{\partial_n p_+}{p_+}+\chi_3(M)M\frac{(\partial_n p)_-}{p_+}+\alpha_0=0.} \quad (4.93)$$

Le modèle Cinématique est ainsi formellement équivalent au modèle GSD. Il se compose de l'équation eikonale (3.73) (*cf.* remarque 4.1) :

$$\frac{c_+}{c_0}M|\vec{\nabla}\alpha|=1-\frac{c_+}{c_0}\vec{m}\cdot\vec{\nabla}\alpha,$$

de l'équation bilan (3.72) :

$$\mathrm{div}\left(\frac{\vec{i}}{A}\right)=0, \quad (4.94)$$

et de la relation $A-M$ (4.93). Cette dernière relation est spécifique au modèle Cinématique. Pour un milieu amont au repos, elle diffère de celle du modèle GSD, équation (3.67), par l'expression des coefficients et par le terme modélisant les effets arrière. Dans ce dernier cas, l'influence de l'écoulement arrière sur le choc est contenue dans le terme $(\partial_t p+\rho c\partial_t v)_-$ pour le modèle GSD tandis qu'il est pris en compte à travers le terme $\left(\vec{n}\cdot\vec{\nabla}p\right)_-$ pour l'approche cinématique. Négliger les effets arrière dans le modèle Cinématique implique donc d'omettre une information différente de celle de l'approche de Whitham. Pour un milieu uniforme, et en négligeant les effets arrière, seule la fonction λ varie entre les deux approches. La relation $A-M$ s'écrit en effet sous la forme

$$\frac{\mathrm{d}A}{A}+\frac{M\lambda(M)}{M^2-1}\mathrm{d}M=0, \quad (4.95)$$

avec λ définie par (3.79a) pour le modèle GSD et $\lambda=\lambda_K$ donnée par (4.88) pour le modèle Cinématique. Dans ce cas, le pilotage de la vitesse du front est entièrement déterminée par la fonction λ. Cet aspect sera abordé plus en détail au chapitre 6, dans lequel les deux modèles sont comparés sur des configurations variées.

L'approche caractéristique de Whitham, applicable uniquement pour un écoulement 1D, interdit le développement d'une relation $A-M$ pour un milieu potentiellement en mouvement, comme souligné en section 3.2.2 pour le modèle GSD anisotrope. Cela nécessite notamment la réécriture de l'équation bilan (4.94) en effectuant un changement de repère. On note que cette réécriture n'est pas nécessaire pour le modèle Cinématique.

Bien que l'approche cinématique soit différente de celle de Whitham, il apparaît naturel de décomposer la propagation du front de choc en tubes de rayon élémentaires. Néanmoins, contrairement à ce dernier, l'hypothèse de paroi rigide des tubes n'est pas nécessaire pour définir une relation $A - M$. Cela se traduit alors par la prise en compte de variations tangentielles le long du choc. Dans la relation (4.93), il s'agit d'un terme lié à l'écoulement amont : $\vec{\nabla}^S \cdot \vec{v}_+$. À l'ordre supérieur de troncature du système, c'est-à-dire avec une équation supplémentaire sur le terme de couplage arrière, cette variation tangentielle apparaît plus concrètement au travers du gradient du nombre de Mach : $\vec{\nabla}^S M$. Cette extension sera traitée au chapitre 9.

L'équation d'évolution de la position du choc (4.62a) est identique à l'équation eikonale comme souligné en remarque 4.1. De surcroît, l'évolution du vecteur normal au front (4.62c) découle de la vision level-set du choc (2.26) (*cf.* section 4.3.1) et peut donc être définie pour le modèle GSD. Par conséquent, seule l'évolution de l'intensité du choc (4.62b) diffère entre les modèles. Il a été prouvé dans cette section que cette dernière équation se réécrit sous la forme de l'équation bilan sur les tubes de rayon et d'une relation $A - M$. L'écriture du modèle GSD à trois dimensions dans la base locale au choc, pour un milieu hétérogène et potentiellement en mouvement, est par conséquent identique au système (4.62), avec des coefficients différents pour l'équation d'évolution sur ζ. Dans ce cas, les ondes $s_\pm$ (4.84b) du modèle de Whitham sont données par

$$s_\pm = \pm c_+ \sqrt{\frac{M^2 - 1}{\lambda(M)}},$$

où l'on rappelle que $M = \sqrt{1 + \frac{\gamma+1}{2\gamma}\zeta}$, et avec λ définie par (3.79a). En particulier, le théorème 4.1 indique que le modèle GSD anisotrope (3.80) est hyperbolique sous la condition $\|\vec{v}_+^S\| \leq s_+ = -s_-$, donnant par cette occasion un résultat général d'hyperbolicité du modèle GSD.

L'équivalence structurale du modèle Cinématique avec le modèle GSD permet son étude complète, au travers de l'état de l'art du modèle GSD [143], ainsi qu'une comparaison détaillée des deux approches. Celles-ci feront l'objet du chapitre 6.

4.6 Conclusion

Le modèle Cinématique est un modèle simplifié de propagation d'une onde de choc aérienne. Il s'agit d'un modèle alternatif à l'approche GSD, basé sur une vision beaucoup plus mathématique de l'évolution du front du choc. Nous avons choisi dans ce chapitre d'étendre le modèle déjà existant à un milieu stationnaire assimilé à un gaz de van der Waals. Une dérivation détaillée du modèle à l'ordre 0, où l'on suppose que l'écoulement arrière est connu, a été présentée ici. À cela s'ajoute une étude globale de la nature du modèle, ainsi qu'une démonstration formelle de l'équivalence structurale du modèle Cinématique avec le modèle de Whitham. L'ensemble de l'étude menée dans ce chapitre n'a jamais été effectuée auparavant à notre connaissance.

Le modèle Cinématique est hyperbolique sous réserve que la vitesse de l'écoulement amont projetée sur la surface de choc ne soit pas trop importante par rapport à celle des ondes locales. Tout comme le modèle GSD, des discontinuités (choc-chocs) peuvent donc se développer sur le front correspondant à la trace du point triple lors de la formation du front de Mach. Bien que l'approche cinématique soit différente de celle de Whitham, il semble toutefois naturel de décomposer l'évolution du front de choc en tubes de rayon. Contrairement au modèle GSD, ceux-ci ne sont plus à paroi rigide, autorisant ainsi la prise en compte de l'écoulement transversal amont dans le modèle Cinématique au travers des gradients de $\vec{v}_+$.

L'équivalence structurale du modèle Cinématique avec le modèle GSD autorise son étude complète, tant par l'état de l'art disponible pour le modèle de Whitham [143] (*cf.* chapitre 3),

que par les schémas numériques développés pour ce dernier [56, 85]. Cette étude ainsi qu'une comparaison détaillée des modèles en deux dimensions d'espace sera effectuée au chapitre 6. Il est toutefois nécessaire de mettre au point un algorithme numérique de résolution pour les problèmes complexes. Le prochain chapitre présente l'algorithme Lagrangien développé à cette fin.

Deuxième partie

Application et amélioration des modèles

Chapitre 5

Algorithme numérique

Sommaire

5.1 Algorithme Lagrangien en deux dimensions 108
5.1.1 Évolution du front 109
5.1.2 Interpolation du choc 120
5.1.3 Prise en compte des obstacles 121
5.1.4 Synthèse de l'algorithme 123
5.2 Tests numériques 123
5.2.1 Convergence en ordre 124
5.2.2 Cas tests pour le problème de Riemann 128
5.2.3 Conservativité du schéma 132
5.3 Extensions possibles de l'algorithme 133
5.3.1 Extension de l'algorithme à un milieu non-uniforme et au repos . . . 133
5.3.2 Extension de l'algorithme en 3D 134
5.4 Conclusion 135

L'étude bibliographique montre que trois types d'algorithmes ont été développés afin de résoudre numériquement le modèle GSD. La méthode Lagrangienne naturelle, ou de front-tracking, [56, 106, 105, 107] a été employée dans les années 1980. Elle est basée sur la décomposition du front de choc en tubes de rayon discrets évoluant en temps et régulièrement rééchantillonnés. La relation $A - M$ est intégrée sur le trajet ce qui fournit la vitesse locale du front. L'algorithme a initialement été proposé en deux dimensions d'espace [56] et donne de très bons résultats pour les problèmes de diffraction sur un obstacle ou de propagation dans une conduite. La prise en compte des inhomogénéités du milieu amont est directe via une extension de la relation $A - M$ [107], ce qui modifie à la marge la méthode numérique. Ce schéma a été validé sur des problèmes de réfraction d'une onde de choc sur une interface gazeuse plane ou courbe. L'algorithme est néanmoins difficile à mettre en œuvre en 3D pour des géométries complexes [106, 105], principalement lorsque le choc se diffracte de part et d'autre d'un obstacle et se recombine. Cette difficulté est contournée par l'emploi d'algorithmes Eulériens [108, 109] dans les années 1990. Ces algorithmes ne tirent cependant pas avantage de la localité du front de choc ou supposent une connaissance *a priori* de la direction de propagation du choc. Plus récemment, l'usage de méthodes level-set [87, 114] a été proposé. Ces méthodes augmentent la dimension du problème mais permettent de traiter aisément des configurations 3D grâce à une représentation implicite du front. Aslam [7] propose une intégration directe de l'équation de niveau alors que Noumir *et al.* [85] démontrent que l'approche fast-marching peut être efficacement employée. Ces algorithmes ne sont cependant pas conservatifs et demandent des

ressources informatiques plus importantes que l'approche Lagrangienne.

Dans ce chapitre, nous présentons l'algorithme numérique développé afin de résoudre les modèles GSD et Cinématique. Conformément à l'objectif de cette thèse, cet algorithme doit être rapide, simple à mettre en œuvre et être conservatif. La méthode de front-tracking est donc naturellement considérée, en s'inspirant des travaux d'Henshaw *et al.* [56].

L'algorithme d'Henshaw se résume comme suit. À un instant donné, le front de choc est discrétisé par un ensemble fini de points. À chaque point est associé le centre d'un tube de rayon, un nombre de Mach et un vecteur normal. L'aire de chaque tube de rayon est calculée par des considérations géométriques faisant appel à un schéma centré, et les points sont avancés à l'aide d'un schéma Leap-Frog initialisé par un pas d'Euler explicite. L'algorithme a tendance à créer des oscillations de haute fréquence qu'il convient d'atténuer. À chaque nouvelle position du front, une interpolation spline cubique globale permet de calculer l'ensemble des vecteurs normaux. L'interpolation est globale dans le sens où la détermination des coefficients repose sur la continuité des dérivées premières et secondes de proche en proche ce qui conduit à résoudre un système linéaire. Le nombre de Mach est par la suite calculé dans chaque tube de rayon en intégrant numériquement la relation $A-M$ de l'instant initial à l'instant courant. L'algorithme gère dynamiquement le nombre de points du front au travers d'une procédure appelée régularisation. Des points sont ajoutés dans les zones d'expansion du choc afin de maintenir une résolution acceptable, et d'autres sont supprimés dans les zones de compression évitant ainsi une accumulation au niveau des choc-chocs. Une procédure de lissage est finalement appliquée périodiquement afin de réduire les oscillations de haute fréquence. Le pas de temps maximal est obtenu en respectant une condition de stabilité de type Courant-Friedrichs-Lewy.

Cet algorithme est précis, conservatif, et robuste, il peut toutefois être amélioré. Tout d'abord, l'interpolation spline cubique globale du front est sujette à des oscillations, notamment dans les zones de fort gradient tel que le voisinage des choc-chocs. De surcroît, la dépendance globale aux données implique qu'une petite oscillation du schéma influe sur l'ensemble du front. Afin de nous affranchir de ces problèmes, nous optons pour une interpolation spline cubique locale limitée. Ensuite, le schéma Leap-frog est régulièrement réinitialisé à la suite des procédures de régularisation et de lissage du front. Nous proposons d'utiliser un schéma en temps du type Runge-Kutta TVD (Total Variation Diminishing) d'ordre 3 afin d'éviter la rupture du schéma. Cette méthode présente de plus l'avantage d'être compatible avec un schéma centré et de limiter les oscillations. Enfin, le caractère conservatif du schéma d'Henshaw est assuré par l'intégration numérique de la relation $A-M$ depuis l'instant initial. Cela rend difficile l'estimation du nombre de Mach pour une propagation à longue distance, en particulier si le milieu est hétérogène. Cette contrainte n'est en réalité nécessaire que lors de la régularisation du front. L'intégration depuis l'instant initial assure la conservation de l'aire lors de la suppression ou de l'ajout d'un point. Dans notre algorithme, nous choisissons d'intégrer la relation $A-M$ d'un pas de temps à l'autre tout en respectant le principe de conservation.

Ce chapitre est décomposé en trois parties. L'algorithme Lagrangien à deux dimensions que nous avons développé est d'abord détaillé, puis validé. Enfin, son extension possible au 3D et à un milieu non-uniforme et au repos est rapidement discutée.

5.1 Algorithme Lagrangien en deux dimensions

Les spécificités du schéma Lagrangien développé en 2D sont détaillées ici. La synthèse de l'algorithme est présentée en sous-section 5.1.4.

5.1.1 Évolution du front

Le choc est assimilé à une surface de discontinuité mobile de l'espace. Il est supposé se propager dans un milieu uniforme et au repos. L'extension à un milieu hétérogène et au repos est directe en suivant [107] et est résumée en sous-section 5.3.1.

Remarque 5.1

Dans le cas d'un milieu homogène et au repos, on peut assimiler le temps t à $\alpha = c_+ t$. Dans ce cas, $c_+ \equiv 1$ dans toute la suite.

Soit un front de choc initial, à l'instant t_0, de nombre de Mach M_0, potentiellement non-uniforme le long du choc, et de coordonnées dans la base cartésienne données par $\vec{x}(t_0) = (x(t_0), y(t_0))^T$. La position instantanée du front $\vec{x} = (x, y)^T$ est déterminée au moyen de l'équation d'évolution :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t}(\beta, t) = c_+ M(\beta, t)\, \vec{n}(\beta, t). \tag{5.1}$$

On rappelle que c_+ est la célérité du son en amont du choc, β est la position des rayons sur le choc et $\vec{n}$ est le vecteur normal unitaire au front orienté dans le sens du mouvement. L'abscisse curviligne sur le choc, s, est reliée à la coordonnée β par la relation $\mathrm{d}s = A\mathrm{d}\beta$.

Le traitement des bords du choc n'est pas présenté dans un premier temps. Il fera l'objet de la sous-section 5.1.2. Le traitement des obstacles discrets est détaillé en sous-section 5.1.3. Rappelons toutefois que lorsque le choc interagit avec un obstacle, la direction du point sur la paroi est tangente à celle-ci et est imposée par le vecteur $\vec{N} = (N_y, -N_x)^T$, où $\vec{N}$ est le vecteur normal extérieur à l'obstacle.

Le schéma numérique est basé sur la décomposition de l'évolution du front en tubes de rayon élémentaires. L'aire de ces tubes est définie géométriquement et permet de calculer la vitesse du front (le nombre de Mach M) au travers de la relation $A - M$:

$$\frac{1}{A}\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} + \frac{M\lambda(M)}{M^2 - 1}\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} = 0. \tag{5.2}$$

La figure 5.1 présente schématiquement l'idée générale de l'évolution sur un pas de temps.

Soit $\{\beta_i\}_{i=1,\dots,N}$ une discrétisation de la coordonnée β le long du choc. Le front de choc est approximé à l'instant t par un ensemble fini de points de cordonnées $\vec{x}(\beta_i, t)$, aussi noté $\vec{x}_i(t)$ pour simplifier :

$$\vec{x}(\beta_i, t) = \vec{x}_i(t) = (x_i(t), y_i(t))^T, \quad \text{pour } i = 1, \dots, N.$$

À chaque point est associé un tube de rayon d'aire locale $A_i(t)$, calculé à partir de considérations géométriques détaillées ci-après, un nombre de Mach $M_i(t)$ et un vecteur normal $\vec{n}_i(t)$.
On définit l'abscisse curviligne discrète le long du choc $(s_i)_{i=1,\dots,N}$ par

$$s_i(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad i = 1 \\ \\ s_{i-1}(t) + \|\vec{x}_i(t) - \vec{x}_{i-1}(t)\| & \text{si} \quad i = 2, \dots, N. \end{cases} \tag{5.3}$$

Dans le cas d'un cercle, cet abscisse discrète est une approximation à l'ordre 2 de l'abscisse curviligne. L'incrément d'abscisse curviligne est noté $\Delta s_i(t) = s_i(t) - s_{i-1}(t)$. L'aire locale est ensuite calculée par des considérations géométriques simples. En 2D plan, elle s'exprime comme :

$$A_i(t) = \frac{1}{2}\begin{cases} \Delta s_2(t) & \text{si} \quad i = 1 \\ \\ \Delta s_i(t) + \Delta s_{i+1}(t) & \text{si} \quad i = 2, \dots, N-1 \\ \\ \Delta s_N(t) & \text{si} \quad i = N. \end{cases} \tag{5.4}$$

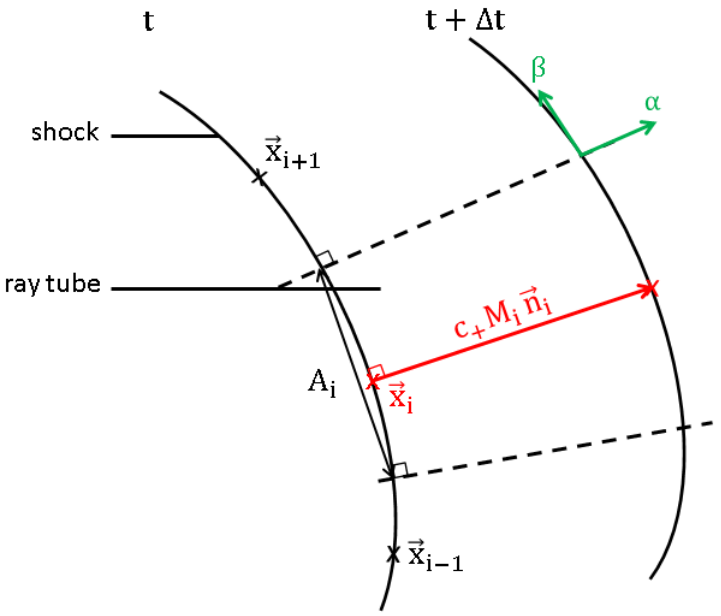


FIGURE 5.1 – Schéma de la discrétisation de l'évolution du front de choc dans l'algorithme Lagrangien. Le front de choc à l'instant t est discrétisé par un ensemble fini de points $\vec{x}_i$. Chaque point est associé à un tube de rayon d'aire A_i permettant de calculer le nombre de Mach local M_i. Les points sont ensuite avancés à partir de l'équation d'évolution (5.6)

En 2D axisymétrique d'axe de rotation (Oy), elle est définie par :

$$A_i(t) = \frac{\pi^\nu}{2} \begin{cases} \Delta s_2(t)\,(x_2 + x_1)^\nu & \text{si} \quad i = 1 \\ \Delta s_{i+1}(t)\,(x_{i+1} + x_i)^\nu + \Delta s_i(t)\,(x_i + x_{i-1})^\nu & \text{si} \quad i = 2, \ldots, N-1 \\ \Delta s_N(t)\,(x_N + x_{N-1})^\nu & \text{si} \quad i = N, \end{cases} \tag{5.5}$$

avec $\nu = 1$. Le cas 2D plan est retrouvé en fixant $\nu = 0$.
Le nombre de Mach dans chaque tube de rayon est calculé à l'aide de la version discrète de (5.2). L'évolution de $\vec{x}_i(t)$ est donnée par l'équation d'évolution (5.1) semi-discrétisée :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{x}_i\,(t)}{\mathrm{d}t} = c_+ M_i\,(t)\,\vec{n}_i\,(t). \tag{5.6}$$

Les vecteurs normaux sont déterminés suivant la procédure explicitée à l'étape 5 ci-après.

Initialisation du schéma. Soit Δs le pas de discrétisation initial du front de choc, en mètres. Usuellement, nous prenons $\Delta s = 0.01$. Le nombre de point N discrétisant le front est défini par

$$\Delta s = \frac{1}{N} \sum_{i=2}^{N} \Big(s_i(t_0) - s_{i-1}(t_0) \Big) = \frac{s_N(t_0)}{N}.$$

La position du choc $(\vec{x}_i(t_0))_{i=1,\ldots,N}$ et le nombre de Mach $(M_i(t_0))_{i=1,\ldots,N}$ sont donnés par la condition initiale du problème. L'abscisse curviligne discrète, l'aire associée à chaque tube de rayon et l'interpolation spline du front initial sont ensuite calculées. Cela détermine la courbe de choc dite de référence du schéma qui intervient au cours de l'évolution du front. Lorsque des points sont ajoutés ou supprimés sur la courbe courante à l'instant t, les mêmes points sont

ajoutés ou supprimés sur la courbe de référence en conservant l'abscisse curviligne initiale. Ainsi, malgré une redistribution des points initiaux, l'aire initiale est conservée assurant la conservativité du schéma. Ce point sera discuté en détail à l'étape 3 ci-après.

La courbe de choc initiale est finalement formée de la courbe de référence à laquelle est ajoutée l'ensemble des vecteurs normaux au front.

Les données liées au choc sont supposées connues à l'instant t. La propagation du choc jusqu'à l'instant $t + \Delta t$, où Δt est le pas de temps courant, se fait au travers des six étapes qui suivent.

Étape 1 : calcul du pas de temps Δt. Les perturbations le long du choc voyagent à la vitesse

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \frac{A\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}t} = c_+\sqrt{\frac{M^2-1}{\lambda(M)}},$$

où s est l'abscisse curviligne le long du choc. Ces perturbations ne doivent pas se propager plus loin qu'un arc élémentaire du front (condition de Courant-Friedrichs-Lewy assurant la stabilité du schéma) :

$$\Delta t \leq \Delta t_s = \frac{d_{min}\Delta s}{c_+} \min_{i=1,\dots,N} \sqrt{\frac{\lambda(M_i)}{M_i^2-1}}, \tag{5.7}$$

où d_{min} est un paramètre de tolérance inférieur à 1 précisé à l'étape 3. À cette condition est ajouté un critère évitant le croisement éventuel de pseudo points portés par les vecteurs normaux.

Proposition 5.1

Si

$$\Delta t \leq \Delta t_c = \frac{1}{c_+} \min_{i\in I} \left(\frac{l_{i-1}}{M_{i-1}}, \frac{k_i}{M_i} \right), \tag{5.8}$$

avec

$$l_{i-1} = \frac{(\overrightarrow{x_{i-1}x_i} \cdot \vec{n}_i)\,(\overrightarrow{n}_{i-1} \cdot \vec{n}_i) - \overrightarrow{x_{i-1}x_i} \cdot \vec{n}_{i-1}}{(\vec{n}_{i-1} \cdot \vec{n}_i)^2 - 1} \tag{5.9a}$$

$$k_i = -\frac{(\overrightarrow{x_{i-1}x_i} \cdot \vec{n}_{i-1})\,(\overrightarrow{n}_{i-1} \cdot \vec{n}_i) - \overrightarrow{x_{i-1}x_i} \cdot \vec{n}_i}{(\vec{n}_{i-1} \cdot \vec{n}_i)^2 - 1}, \tag{5.9b}$$

et $I = \{i = 2, \dots, N$ tel que $l_{i-1} > 0$, $k_i > 0$ et $|\vec{n}_{i-1} \cdot \vec{n}_i| \neq 1\}$, alors les rayons ne se croisent pas.

Cette condition est particulièrement nécessaire lorsque le choc interagit avec un obstacle ou tend à se pincer.

Preuve 5.1

Pour démontrer la condition (5.8), considérons deux points voisins distincts sur le choc X_{i-1} et X_i se déplaçant dans la direction $\vec{n}_{i-1}$ et $\vec{n}_i$ respectivement. Soient (D_{i-1}) (respectivement (D_i)) la droite portée par le vecteur $\vec{n}_{i-1}$ (respectivement $\vec{n}_i$) et passant par X_{i-1} (respectivement X_i), et Q le point de croisement éventuel de (D_{i-1}) avec (D_i). Si $|\vec{n}_{i-1} \cdot \vec{n}_i| = 1$, alors les droites (D_{i-1}) et (D_i) sont parallèles, et Q n'existe pas. Sous l'hypothèse que $|\vec{n}_{i-1} \cdot \vec{n}_i| \neq 1$, il existe alors l_{i-1} et k_i deux nombres réels tels que

$$\overrightarrow{X_{i-1}Q} = l_{i-1}\vec{n}_{i-1} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{X_iQ} = k_i\vec{n}_i. \tag{5.10}$$

S'il y a intersection, alors $l_{i-1} > 0$ et $k_i > 0$. Le vecteur $\overrightarrow{X_{i-1}X_i}$ vérifie :

$$\overrightarrow{X_{i-1}X_i} = \overrightarrow{X_{i-1}Q} - \overrightarrow{X_iQ} = l_{i-1}\vec{n}_{i-1} - k_i\vec{n}_i.$$

En contractant cette relation avec $\vec{n}_{i-1}$ d'une part et $\vec{n}_i$ d'autre part, (l_{i-1}, k_i) est solution du système linéaire :

$$\begin{cases} \overrightarrow{X_{i-1}X_i} \cdot \vec{n}_{i-1} &= l_{i-1} - k_i \left(\vec{n}_{i-1} \cdot \vec{n}_i\right) \\ \overrightarrow{X_{i-1}X_i} \cdot \vec{n}_i &= -k_i + l_{i-1} \left(\vec{n}_{i-1} \cdot \vec{n}_i\right). \end{cases}$$

Ce système est inversible sous la condition $\vec{n}_{i-1} \cdot \vec{n}_i \neq \pm 1$, et les relations (5.9a)-(5.9b) suivent.

Par la méthode d'intégration d'Euler, on considère une étape de propagation de X_i qui amènerait au point Q :

$$Q = X_i + \Delta t \times c_+ M_i \vec{n_i}.$$

Cela aboutit alors à $k_i = c_+ M_i \Delta t$. De même, il vient $l_{i-1} = c_+ M_{i-1} \Delta t$. Par conséquent, si le pas de temps vérifie

$$\Delta t \leq \frac{1}{c_+} \min\left(\frac{l_{i-1}}{M_{i-1}}, \frac{k_i}{M_i}\right),$$

alors les incréments sur les droites (D_{i-1}) et (D_i) ne se croisent pas. Finalement, en appliquant cette condition à l'ensemble des points du choc, la condition (5.8) est trouvée.

■

Le pas de temps Δt nécessaire à la propagation du front de choc est finalement donné par

$$\Delta t = \beta \min\left(\Delta t_s, \Delta t_c\right), \tag{5.11}$$

où $\beta \in]0, 1[$ est un coefficient de sécurité choisi à $\beta = 0.5$ ici.

Étape 2 : évolution du front de choc. La propagation du front de choc de l'instant $t^m = t$ à l'instant $t^{m+1} = t + \Delta t$ s'effectue en intégrant (5.6) à l'aide d'un schéma en temps de type Runge-Kutta TVD d'ordre 3 [47] (RK3-TVD). On note $\vec{x}_i^m$, $\vec{n}_i^m$ et M_i^m les approximations des vecteurs $\vec{x}_i$ et $\vec{n}_i$ et du nombre de Mach M_i à l'instant t^m. De la même manière, $\vec{x}_i^{m+1}$, $\vec{n}_i^{m+1}$ et M_i^{m+1} désignent les approximations de ces quantités à l'instant t^{m+1}. Le schéma RK3-TVD est défini par :

$$\vec{x}_i^{m_1} = \vec{x}_i^m + c_+ \Delta t M_i^m \vec{n}_i^m \tag{5.12a}$$

$$\vec{x}_i^{m_2} = \frac{3}{4}\vec{x}_i^m + \frac{1}{4}\left(\vec{x}_i^{m_1} + c_+ \Delta t M_i^{m_1} \vec{n}_i^{m_1}\right) \tag{5.12b}$$

$$\vec{x}_i^{m+1} = \frac{1}{3}\vec{x}_i^m + \frac{2}{3}\left(\vec{x}_i^{m_2} + c_+ \Delta t M_i^{m_2} \vec{n}_i^{m_2}\right), \tag{5.12c}$$

pour $i = 1, \ldots, N$. Pour chaque étape intermédiaire, les conditions aux limites (*cf.* sous-section 5.1.3), les vecteurs normaux et le nombre de Mach sont évalués (*cf.* étapes 5 et 6) dans le but d'effectuer l'étape suivante.

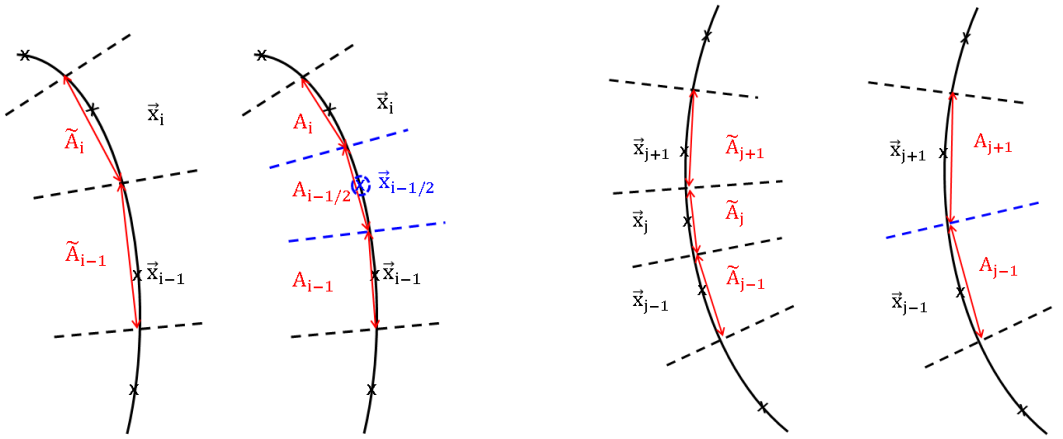
À l'origine, les points étaient avancés à l'aide d'un schéma Leap-Frog initialisé par un pas d'Euler explicite. Cela provoquait alors la réinitialisation de l'algorithme après chaque régularisation et/ou filtrage du front (*cf.* étapes 3 et 4). Contrairement à Henshaw, nous avons choisi un schéma de type Runge-Kutta du fait qu'il ne provoque pas de rupture du schéma. La zone de stabilité absolue du schéma RK3-TVD contient une partie de l'axe des imaginaires purs, évitant l'amplification des oscillations au cours de l'évolution du front de choc.

Étape 3 : régularisation du front de choc. Une fois le front de choc propagé, l'espacement des points est vérifié. Des points sont insérés dans les régions expansives du choc pour maintenir une résolution acceptable, et d'autres sont supprimés dans les régions compressives dans le but d'éviter l'accumulation au niveau des choc-chocs. Cette suppression ne s'applique pas sur les points extrêmes du choc.

Pour $i = 2, \ldots, N$, l'espacement des points doit vérifier :

$$d_{min}\Delta s \leq \Delta s_i(t + \Delta t) \leq d_{max}\Delta s, \tag{5.13}$$

où $d_{min} = \frac{1}{2}$ et $d_{max} = \frac{3}{2}$ usuellement. Si $\Delta s_i(t + \Delta t) \leq d_{min}\Delta s$, le point i est supprimé. Si $\Delta s_i(t + \Delta t) \geq d_{max}\Delta s$, un point intermédiaire noté $\vec{x}_{i-\frac{1}{2}}$ est ajouté en évaluant la spline en l'abscisse curviligne moyenne $\frac{1}{2}\left(s_{i-1}(t + \Delta t) + s_i(t + \Delta t)\right)$. Dans ce cas, les mêmes points sont ajoutés ou supprimés sur la courbe de référence afin de préserver le ratio d'aire $\frac{A_i(t+\Delta t)}{A_i(t_0)}$.



(a) (b)

FIGURE 5.2 – Schéma de la courbe de choc de référence avant et après régularisation. Une redistribution de l'aire est nécessaire. Fig. (a) : Ajout d'un point intermédiaire entre $\vec{x}_{i-1}$ et $\vec{x}_i$. Fig. (b) : Suppression du point $\vec{x}_j$.

Proposition 5.2

L'aire est conservée sur la courbe de référence.

Preuve 5.2

Supposons que l'on ajoute un point entre les indices *i-1* et *i* (*cf.* Fig. 5.2(a)). On note $\tilde{A}_{i-1}(t_0)$ et $\tilde{A}_i(t_0)$ les anciennes aires associées à ces points sur la courbe de référence, $s_{i-1/2}(t_0) = \frac{1}{2}\left(s_{i-1}(t_0) + s_i(t_0)\right)$ l'abscisse curviligne du nouveau point, et $A_{i-1}(t_0)$, $A_{i-1/2}(t_0)$ et $A_i(t_0)$ les nouvelles aires associées. Par la définition de l'aire plane, (5.4), ces dernières sont données par

$$\begin{aligned} A_{i-1}(t_0) &= \frac{1}{2}\left(s_{i-1/2}(t_0) - s_{i-2}(t_0)\right) \\ A_{i-1/2}(t_0) &= \frac{1}{2}\left(s_i(t_0) - s_{i-1}(t_0)\right) \\ A_{i+1}(t_0) &= \frac{1}{2}\left(s_{i+1}(t_0) - s_{i-1/2}(t_0)\right), \end{aligned}$$

en supposant qu'il ne s'agit pas de points de bord du choc. Il est alors facile de vérifier que

l'aire est conservée :

$$A_{i-1}(t_0) + A_{i-1/2}(t_0) + A_i(t_0) = \tilde{A}_{i-1}(t_0) + \tilde{A}_i(t_0).$$

Supposons maintenant que l'on supprime le point j (*cf.* Fig. 5.2(b)). On note $\tilde{A}_{j-1}(t_0)$ et $\tilde{A}_{j+1}(t_0)$ les anciennes aires associées à ses points voisins sur la courbe de référence, et $A_{j-1}(t_0)$ et $A_{j+1}(t_0)$ leurs nouvelles aires associées après suppression du point. Elles sont données par

$$\begin{aligned} A_{j-1}(t_0) &= \frac{1}{2}\left(s_{j+1}(t_0) - s_{j-2}(t_0)\right) = \tilde{A}_{j-1} + \frac{1}{2}\left(s_{j+1} - s_j\right) \\ A_{j+1}(t_0) &= \frac{1}{2}\left(s_{j+2}(t_0) - s_{j-1}(t_0)\right) = \tilde{A}_{j+1} + \frac{1}{2}\left(s_j - s_{j-1}\right), \end{aligned}$$

pour les points intérieurs du choc. On vérifie de la même manière que l'aire est ainsi conservée :

$$A_{j-1}(t_0) + A_{j+1}(t_0) = \tilde{A}_{j-1}(t_0) + \tilde{A}_j(t_0) + \tilde{A}_{j+1}(t_0).$$

La conservation de l'aire est également effective pour les points de bord du choc ainsi qu'en configuration axisymétrique.

■

Étape 4 : filtrage des points. L'utilisation d'un filtrage spatial pour atténuer les oscillations de haute fréquence, que peut générer un schéma centré, est classique en mécanique des fluides [23, 72]. On choisit ici d'utiliser le filtre originel d'Henshaw qui correspond à une itération de Jacobi appliquée au système discret d'équations :

$$\frac{\mathrm{d}^2\vec{x}_i}{\mathrm{d}s^2} \equiv 0, \quad \text{pour } i = 1, \ldots, N. \tag{5.14}$$

Après n_s itérations en temps (entre 10 et 50 en pratique), on applique :

$$\vec{x}_i \leftarrow \frac{h_r}{h_l + h_r}\vec{x}_{i-1} + \frac{h_l}{h_l + h_r}\vec{x}_{i+1}, \quad \text{pour } i = 2, \ldots, N-1, \tag{5.15}$$

avec

$$h_l = \|\vec{x}_i - \vec{x}_{i-1}\| \quad \text{et} \quad h_r = \|\vec{x}_{i+1} - \vec{x}_i\|.$$

Les i pairs sont d'abord traités, suivis des i impairs en considérant les points associés aux i pairs modifiés. La relation (5.15) est un développement limité de (5.14). L'approximation est d'ordre 2 si l'espacement des points sur le front est régulier et d'ordre 1 sinon.

Des filtres alternatifs peuvent être considérés, tels que les filtres à moments gaussiens [103]. Par exemple, le filtre gaussien à 3 points est défini par

$$\vec{x}_i \to 0.5\vec{x}_i + 0.25\left(\vec{x}_{i-1+}\vec{x}_{i+1}\right), \tag{5.16}$$

pour une discrétisation uniforme. Néanmoins, une étude préliminaire a montré l'efficacité du filtre d'Henshaw par rapport à ce type de filtre sur les cas que nous avons testés. Il ne nous a donc pas semblé utile d'explorer davantage ce point.

À titre d'exemple, l'effet de ces deux filtres est représenté en figure 5.3. On note que le filtre d'Henshaw lisse plus fortement pour cette fonction test.

Étape 5 : détermination des vecteurs normaux. L'abscisse curviligne discrète du choc est déterminée par la relation (5.3). Le front de choc est alors interpolé à partir des données $(s_i(t), x_i(t))_{i=1,\ldots,N}$ et $(s_i(t), y_i(t))_{i=1,\ldots,N}$ à l'aide d'une spline cubique locale limitée. Cet aspect du problème est détaillé en section 5.1.2. La courbe obtenue est notée $(X(s), Y(s))^T$

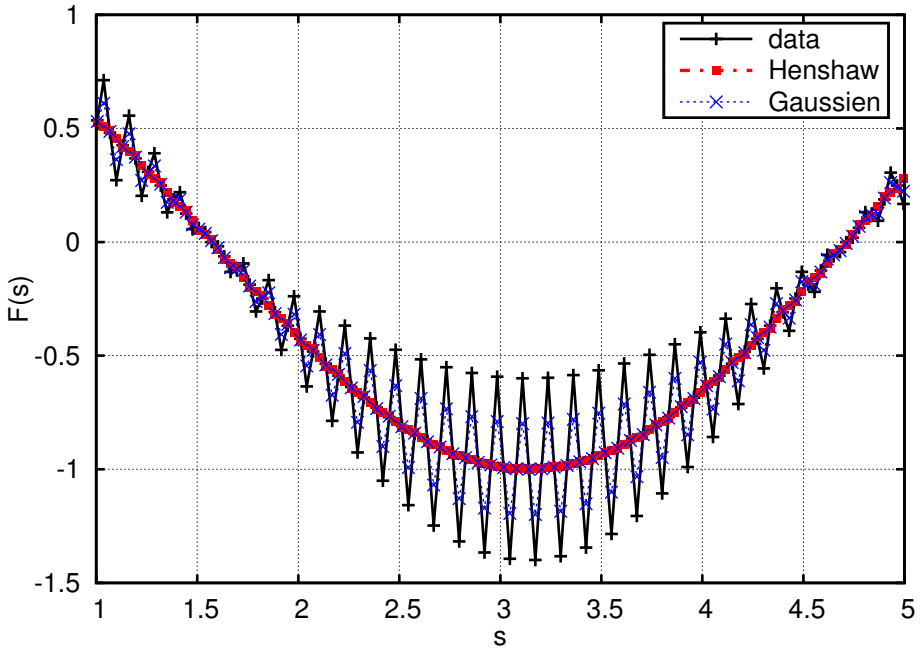


FIGURE 5.3 – Effet du filtrage d'Henshaw (5.15) et du filtrage gaussien (5.16) sur une fonction test.

et est au moins de classe C^1. Cela autorise le calcul des vecteurs normaux unitaires au choc $\{\vec{n}_i\}_{i=1,\dots,N}$ à partir de la formule analytique :

$$\vec{n}_i = \frac{(Y'(s_i), -X'(s_i))^T}{\|X'(s_i)^2 + Y'(s_i)^2\|}, \quad \text{pour } i = 1, \dots, N. \tag{5.17}$$

Étape 6 : calcul du nombre de Mach. Cette étape cruciale n'est pas détaillée dans la littérature. Nous proposons de procéder comme suit.

L'aire de chaque tube de rayon est calculée par la relation (5.4) en 2D plan ou (5.5) en 2D axisymétrique. Le nombre de Mach est ensuite déterminé en intégrant la relation $A - M$ (5.2) sur chaque tube de rayon entre les instants t et $t + \Delta t$:

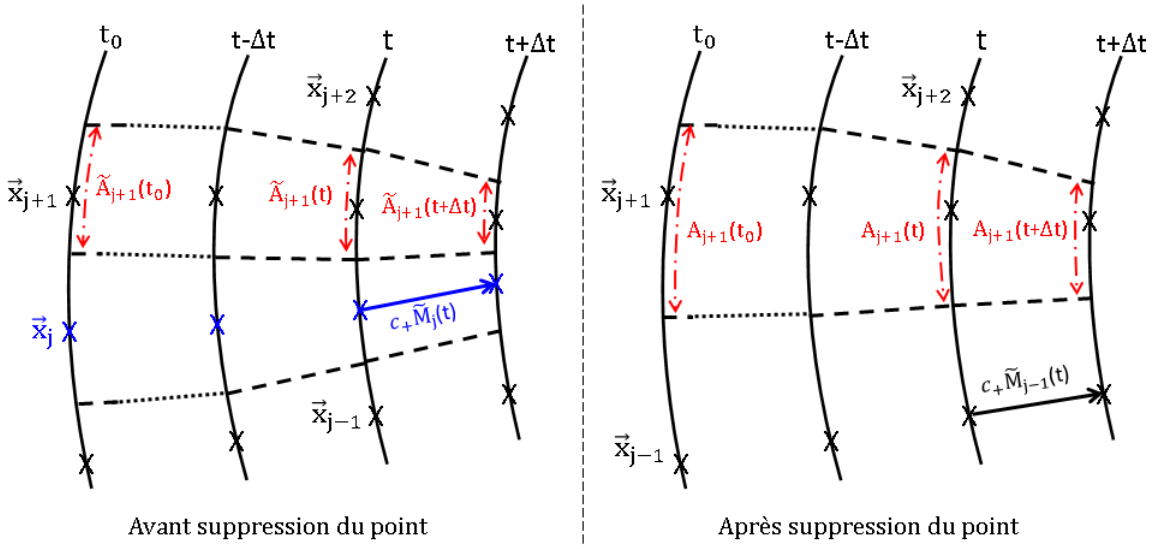
$$\ln\left(\frac{A_i(t+\Delta t)}{A_i(t)}\right) + \int_{M_i(t)}^{M_i(t+\Delta t)} \frac{m\lambda(m)}{m^2-1}\mathrm{d}m = 0, \quad \text{pour } i = 1, \dots, N. \tag{5.18}$$

Tant qu'il n'y a pas eu ajout ou suppression de points, la formulation (5.18) est exacte dans le sens où l'on reste sur le même rayon. Nous avons ainsi pour $i = 1, \dots, N$:

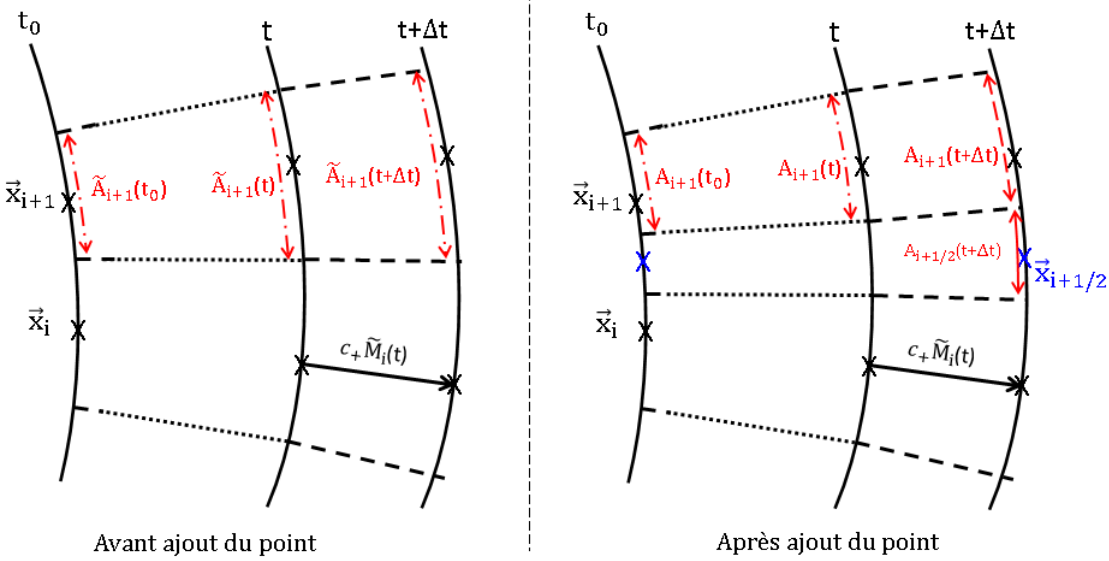
$$\ln\left(\frac{A_i(t)}{A_i(t_0)}\right) + \int_{M_i(t_0)}^{M_i(t)} \frac{m\lambda(m)}{m^2-1}\mathrm{d}m = 0, \tag{5.19}$$

et

$$\ln\left(\frac{A_i(t+\Delta t)}{A_i(t_0)}\right) + \int_{M_i(t_0)}^{M_i(t+\Delta t)} \frac{m\lambda(m)}{m^2-1}\mathrm{d}m = 0. \tag{5.20}$$



(a)



(b)

FIGURE 5.4 – Schéma de la redéfinition des tubes de rayon après régularisation du front à l'instant $t + \Delta t$. Fig. (a) : Suppression du point $\vec{x}_j$. Fig. (b) : Ajout du point $\vec{x}_{i+1/2}$.

Maintenant, supposons que l'on régularise pour la première fois le front et faisons l'hypothèse que le point $\vec{x}_j$ est supprimé sur la courbe de choc à l'instant $t + \Delta t$ (*cf.* Fig. 5.4(a)). On note $\tilde{A}_i$ et $\tilde{M}_i$ l'aire et le nombre de Mach associés au point i avant cette suppression, et A_i et M_i ces mêmes quantités après. La suppression du point $\vec{x}_j$ modifie l'aire des tubes de rayon voisins *j-1* et *j+1*. Ainsi, en appliquant naïvement la relation (5.18) le long du rayon *j+1*, le

nombre de Mach au point j+1 vérifierait :

$$\ln\left(\frac{A_{j+1}(t+\Delta t)}{A_{j+1}(t)}\right)+\int_{\tilde{M}_{j+1}(t)}^{M_{j+1}(t+\Delta t)}\frac{m\lambda(m)}{m^2-1}\mathrm{d}m=0. \tag{5.21}$$

Ce nombre de Mach devrait être identique en intégrant depuis l'instant initial :

$$\ln\left(\frac{A_{j+1}(t+\Delta t)}{A_{j+1}(t_0)}\right)+\int_{M_{j+1}(t_0)}^{M_{j+1}(t+\Delta t)}\frac{m\lambda(m)}{m^2-1}\mathrm{d}m=0. \tag{5.22}$$

Seulement, $\tilde{M}_{j+1}(t)$ est associé au rayon *j+1* avant la suppression du point j. Il vérifie nécessairement :

$$\ln\left(\frac{\tilde{A}_{j+1}(t)}{\tilde{A}_{j+1}(t_0)}\right)+\int_{M_{j+1}(t_0)}^{\tilde{M}_{j+1}(t)}\frac{m\lambda(m)}{m^2-1}\mathrm{d}m=0. \tag{5.23}$$

Appliquer (5.23) puis (5.21) mène alors à la relation :

$$\ln\left(\frac{\tilde{A}_{j+1}(t)}{A_{j+1}(t)}\frac{A_{j+1}(t_0)}{\tilde{A}_{j+1}(t_0)}\right)+\ln\left(\frac{A_{j+1}(t+\Delta t)}{A_{j+1}(t_0)}\right)+\int_{M_{j+1}(t_0)}^{M_{j+1}(t+\Delta t)}\frac{m\lambda(m)}{m^2-1}\mathrm{d}m=0, \tag{5.24}$$

qui diffère de l'intégration depuis l'instant initial (5.22). Il y a donc une perte d'information qui conduit à une perte de conservativité du schéma. Ce raisonnement est identique si l'on ajoute un point (*cf.* Fig. 5.4(b)).

L'intégration directe d'un pas à l'autre (5.18) nécessite donc une modification lors de la régularisation du front. Les deux propriétés qui suivent assurent le bon comportement du schéma lors du calcul du nombre de Mach.

Proposition 5.3

Soient $\tilde{A}_i$ et $\tilde{M}_i$ l'aire et le nombre de Mach associés à un point i avant régularisation, et soient A_i et M_i ces mêmes quantités après régularisation. Le nombre de Mach $M_i(t+\Delta t)$ est calculé avec la relation suivante afin d'assurer la cohérence du schéma :

$$\ln\left(\frac{A_i(t+\Delta t)}{\tilde{A}_i(t)}\frac{\tilde{A}_i(t_0)}{A_i(t_0)}\right)+\int_{\tilde{M}_i(t)}^{M_i(t+\Delta t)}\frac{m\lambda(m)}{m^2-1}\mathrm{d}m=0. \tag{5.25}$$

Remarque 5.2

Si aucune suppression ou aucun ajout de point n'a été effectué dans le voisinage du point i, nous retrouvons $\tilde{A}_i=A_i$ et $\tilde{M}_i=M_i$ et la relation (5.25) se réduit à (5.18). Dans le cas contraire, ces relations diffèrent et la relation (5.25) assure la préservation de l'aire.

Preuve 5.3

La conservation du schéma est assurée par l'intégration de la relation $A-M$ depuis l'instant initial. Le nombre de Mach à l'instant t vérifie avant régularisation :

$$\ln\left(\frac{\tilde{A}_i(t)}{\tilde{A}_i(t_0)}\right)+\int_{M_i(t_0)}^{\tilde{M}_i(t)}\frac{m\lambda(m)}{m^2-1}\mathrm{d}m=0, \tag{5.26}$$

et, après régularisation, le nombre de Mach à l'instant $t + \Delta t$ devrait être calculé par la formulation :

$$\ln\left(\frac{A_i(t+\Delta t)}{A_i(t_0)}\right) + \int_{M_i(t_0)}^{M_i(t+\Delta t)} \frac{m\lambda(m)}{m^2-1}\mathrm{d}m = 0. \tag{5.27}$$

La relation (5.25) découle finalement de la soustraction de (5.27) avec (5.26).

■

Remarque 5.3

Lorsque la relation $A - M$ (5.2) comporte un terme supplémentaire :

$$\frac{1}{A}\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} + \frac{M\lambda(M)}{M^2-1}\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} + R(t,\beta) = 0,$$

la relation (5.25) devient :

$$\ln\left(\frac{A_i(t+\Delta t)}{\tilde{A}_i(t)}\frac{\tilde{A}_i(t_0)}{A_i(t_0)}\right) + \int_{\tilde{M}_i(t)}^{M_i(t+\Delta t)} \frac{m\lambda(m)}{m^2-1}\mathrm{d}m + \int_{t}^{t+\Delta t} R(\tau,\beta_i)\mathrm{d}\tau = 0.$$

L'intégration pas à pas évite de considérer l'historique des termes sources sur les rayons.

La relation (5.25) n'est pas applicable lorsque l'on ajoute un point *i+1/2* puisque $M_{i+1/2}(t)$ n'est pas connu. L'information connue aux points i et *i+1* après application de (5.25) est alors utilisée.

Proposition 5.4

Soient A_i et M_i l'aire et le nombre de Mach associés à un point i après régularisation. Si *i+1/2* est un point ajouté sur la courbe de choc à l'instant $t + \Delta t$, le nombre de Mach associé, $M_{i+1/2}(t+\Delta t)$, est calculé via la relation :

$$I + \int_{M_i(t+\Delta t)}^{M_{i+1/2}(t+\Delta t)} \frac{m\lambda(m)}{m^2-1}\mathrm{d}m + \int_{M_{i+1}(t+\Delta t)}^{M_{i+1/2}(t+\Delta t)} \frac{m\lambda(m)}{m^2-1}\mathrm{d}m = 0, \tag{5.28}$$

avec

$$I = 2\ln\left(\frac{A_{i+1/2}(t+\Delta t)}{A_{i+1/2}(t_0)}\sqrt{\frac{A_i(t_0)}{A_i(t+\Delta t)}\frac{A_{i+1}(t_0)}{A_{i+1}(t+\Delta t)}}\right) + \int_{M_{i+1/2}(t_0)}^{M_i(t_0)} \frac{m\lambda(m)}{m^2-1}\mathrm{d}m + \int_{M_{i+1/2}(t_0)}^{M_{i+1}(t_0)} \frac{m\lambda(m)}{m^2-1}\mathrm{d}m. \tag{5.29}$$

Preuve 5.4

Le nombre de Mach associé aux points i et *i+1* vérifie de manière exacte :

$$\ln\left(\frac{A_i(t+\Delta t)}{A_i(t_0)}\right)+\int_{M_i(t_0)}^{M_i(t+\Delta t)}\frac{m\lambda(m)}{m^2-1}\mathrm{d}m=0 \tag{5.30a}$$

$$\ln\left(\frac{A_{i+1}(t+\Delta t)}{A_{i+1}(t_0)}\right)+\int_{M_{i+1}(t_0)}^{M_{i+1}(t+\Delta t)}\frac{m\lambda(m)}{m^2-1}\mathrm{d}m=0. \tag{5.30b}$$

De plus, le nombre de Mach associé au point *i+1/2* doit vérifier :

$$\ln\left(\frac{A_{i+1/2}(t+\Delta t)}{A_{i+1/2}(t_0)}\right)+\int_{M_{i+1/2}(t_0)}^{M_{i+1/2}(t+\Delta t)}\frac{m\lambda(m)}{m^2-1}\mathrm{d}m=0. \tag{5.31}$$

En effectuant la pondération (5.31)-$\frac{1}{2}$ (5.30a)-$\frac{1}{2}$ (5.30b), la relation (5.28) suit après calcul. ■

Remarque 5.4

Si la relation $A-M$ (5.2) s'écrit :

$$\frac{1}{A}\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}+\frac{M\lambda(M)}{M^2-1}\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}+R(t,\beta)=0,$$

alors un terme supplémentaire intervient dans la relation (5.28) :

$$\int_{t_0}^{t+\Delta t}\left\{R(\tau,\beta_{i+1/2})-\frac{R(\tau,\beta_i)+R(\tau,\beta_{i+1})}{2}\right\}\mathrm{d}\tau. \tag{5.32}$$

Puisque le rayon $\beta_{i+1/2}$ se trouve à égale distance des rayons β_i et β_{i+1}, alors

$$R(\tau,\beta_{i+1/2})=\frac{R(\tau,\beta_i)+R(\tau,\beta_{i+1})}{2}$$

à l'ordre 2. Le terme (5.32) peut donc être négligé à l'ordre 1 de troncature.

Finalement, le nombre de Mach sur la courbe de choc à l'instant $t+\Delta t$ est calculé avec la procédure suivante :

1. La relation (5.25) est considérée pour tous les points du choc non ajoutés.
2. Si des points ont été ajoutés, leur nombre de Mach est estimé à l'aide de la relation (5.28).

Cette procédure est identique à une intégration depuis l'instant initial (5.20). Elle assure la conservativité du schéma. Si aucune régularisation n'est effectuée, on retrouve l'intégration classique (5.18).

En pratique, les intégrales des relations (5.25) et (5.28) sont approchées à l'aide d'une méthode de Simpson. Connaissant les ratios d'aire et la distribution du nombre de Mach sur la surface de choc à l'instant t, le nombre de Mach à l'instant $t+\Delta t$ est ensuite calculé à l'aide d'un algorithme de Newton.

Le front de choc est propagé à l'instant suivant en considérant à nouveau les étapes 1–6. La synthèse de l'algorithme est donnée en section 5.1.4.

5.1.2 Interpolation du choc

L'interpolation du choc se fait à l'aide d'une spline cubique sur les données $\{s_i, x_i\}_{i=1,\dots,N}$ et $\{s_i, y_i\}_{i=1,\dots,N}$. Le schéma d'origine d'Henshaw utilise une spline globale qui consiste à imposer une régularité C^2 de l'interpolant. En contrepartie, un système linéaire est à résoudre impliquant une dépendance globale aux données. Une petite perturbation dans une zone isolée du choc influence alors l'ensemble du front. L'algorithme étant naturellement sujet aux oscillations, il est préférable d'éviter cette propriété. Par conséquent, nous optons pour une spline cubique locale à laquelle est appliqué un limiteur de pente de type Monotonic third order (M3) défini par Huynh [59]. L'interpolation est alors de classe C^1 et les oscillations du schéma sont atténuées. Le détail des interpolations splines cubiques globale et locale, ainsi que des limiteurs de pente, est présenté en annexe C.

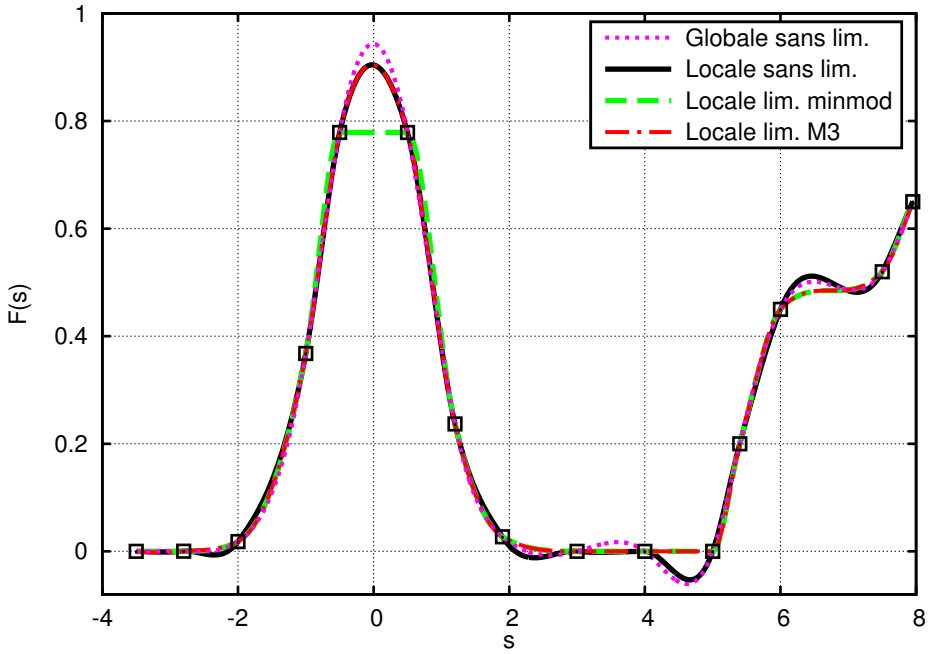


FIGURE 5.5 – Interpolations spline cubique globale et locale, avec et sans limiteur de pente, d'un jeu de données.

Un exemple d'interpolation est présenté en figure 5.5. On note que la spline globale est plus sujette aux oscillations que son homologue locale. Sans limiteur, la spline cubique locale à tout de même tendance à créer de nouveaux extrema dans des zones où les données sont pourtant monotones. Ce problème est évité en appliquant un limiteur de pente de type minmod. Néanmoins, cette limitation a la particularité de réduire l'ordre de l'interpolation au niveau des extrema "physiques". Le limiteur M3 est un bon compromis entre limitation de la pente, évitant ainsi les oscillations de l'interpolant, et la prise en compte des extrema locaux. Ce type d'approche est classique en mécanique des fluides [127, 34].

Les bords de l'interpolation du choc, d'abscisses curvilignes $s_{bord} = 0$ et $s_{bord} = s_N = \sum_{i=1}^{N-1} \|\vec{x}_{i+1}(t) - \vec{x}_i(t)\|$, n'interagissant pas avec une paroi sont libres. On impose alors à l'interpolation spline de vérifier

$$X''(s_{bord}) = 0 \quad \text{et} \quad Y''(s_{bord}) = 0,$$

pour une courbe de choc ouverte. L'interaction d'un bord avec une paroi se traduit par une condition aux limites de type mur et est traitée dans la section suivante. Pour une courbe de choc fermée, une condition périodique est considérée :

$$X'(s_N) = X'(0) \quad \text{et} \quad Y'(s_N) = Y'(0)\,.$$

5.1.3 Prise en compte des obstacles

Lorsqu'un obstacle géométrique, infiniment rigide, est présent dans le domaine de calcul, une arbre de type quadtree est mis en place afin de localiser efficacement la zone d'interaction choc/obstacle. Soit une grille de niveau 1 décomposant le domaine de calcul en cellules. Cette grille initiale est ensuite divisée en quatre au niveau des cellules mixtes (cellules comportant à la fois de l'air et une partie de l'obstacle) jusqu'à un certain niveau de raffinement p. Un exemple de grille est présenté en figure 5.6 pour $p = 5$.

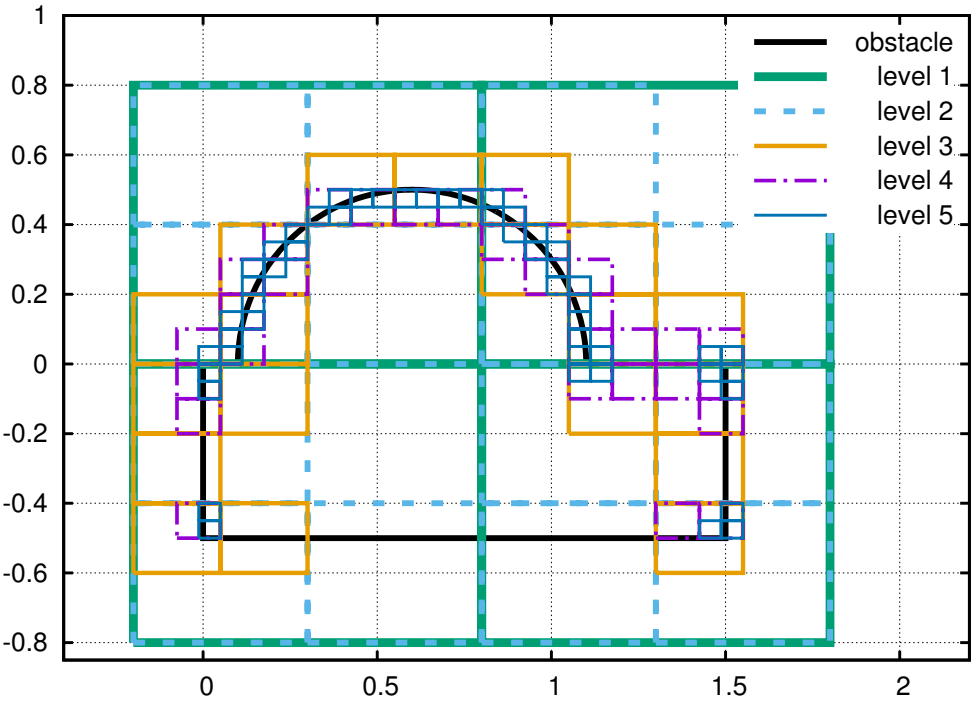


FIGURE 5.6 – Visualisation des feuilles de l'arbre intersectant l'obstacle. Le domaine de calcul est découpé en une grille mère (niveau 1 de raffinement) correspondant ici aux cellules vertes. Les cellules mixtes (cellules comportant à la fois de l'air et une partie de l'obstacle) sont ensuite raffinées jusqu'à un certain niveau. Sur cet exemple, le niveau le plus élevé vaut 5, soit des cellules d'arête 16 fois plus petites que celles de niveau 1.

La paroi de l'obstacle coïncide avec le rayon au pied du choc dans la théorie de Whitham. Par conséquent, le choc y est localement orthogonal et la condition limite est de type mur. Si $\vec{x}_{bord}$ est un point du choc sur l'obstacle, et s_{bord} l'abscisse curviligne associée, alors le nombre de Mach vérifie :

$$\frac{\partial M}{\partial s}(s_{bord}) = 0. \tag{5.33}$$

Cette condition de bord découle de la condition de glissement d'un écoulement à la paroi :

$$\rho \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} \cdot \vec{N} = -\vec{\nabla} p \cdot \vec{N} = 0,$$

où $\vec{N}$ est le vecteur normal unitaire à la paroi. En particulier, le saut de variation transversale de pression le long du choc est nul au niveau de la paroi, ou de manière équivalente la variation transversale du saut de pression est nulle au bord :

$$\left[\frac{\partial p}{\partial s}\right] = \frac{\partial [p]}{\partial s} = 0, \text{ pour } s = s_{bord}.$$

La relation de Rankine-Hugoniot, $M = \sqrt{1 + \frac{\gamma+1}{2\gamma}\frac{[p]}{p_+}}$, donne finalement la condition de bord (5.33). Seule l'interaction du choc avec un obstacle au travers de ses points de bord est considéré, $s_{bord} = 0$ et $s_{bord} = s_N$. Les autres cas ne sont pas traités dans cette thèse.

La prise en compte de l'obstacle dans l'algorithme s'effectue après l'étape de filtrage (étape 4). Lors de l'interaction du choc avec l'obstacle, le quadtree permet de définir efficacement quel point du choc se trouve à l'intérieur, sur, ou en dehors de l'obstacle. Les points se trouvant à l'intérieur ou sur l'obstacle sont supprimés, et le point du choc le plus proche de l'obstacle est projeté orthogonalement sur la paroi. Dans le cas où la géométrie est convexe, il est possible que le choc ne puisse être orthogonal à l'obstacle. Dans ce cas, le point est projeté sur le sommet le plus proche. Deux exemples de géométrie convergente (projection orthogonale) et géométrie convexe (projection initiale sur le sommet le plus proche) sont présentés en sous-section 5.2.2.

La condition à la limite est prise en compte dans l'interpolation spline par la connaissance des dérivées premières de X et Y en s_{bord}. Celles-ci sont imposées par le vecteur normal $\vec{N} = (N_x, N_y)^T$ à la paroi :

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}s}(s_{bord}) = N_x \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}s}(s_{bord}) = N_y.$$

Il en résulte que le vecteur normal $\vec{n}_{bord}$ associé à $\vec{x}_{bord}$ est défini par $\vec{N}$:

$$\vec{n}_{bord} = (N_y, -N_x)^T,$$

imposant ainsi à $\vec{x}_{bord}$ de se déplacer le long de la paroi.

5.1.4 Synthèse de l'algorithme

Le schéma Lagrangien se résume ainsi :

Initialisation : $t = t_0$.

Courbe de référence :
- $(\vec{x}_i(t_0))_{i=1,\dots,N}$ et $M_i = M_0(\beta_i)$, pour $i = 1, \dots, N$.
- Calcul de l'abscisse curviligne et des aires locales.
- Calcul de l'interpolation spline.

Choc initial : courbe de référence + vecteurs normaux : $(\vec{n}_i)_{i=1,\dots,N}$.

Tant que $(t < t_{\text{fin}})$ **faire**

Calcul du pas de temps Δt.

Propagation du front de choc : $\dfrac{\mathrm{d}\vec{x}_i}{\mathrm{d}t} = c_+ M_i \vec{n}_i$, pour $i = 1, \dots, N$.

Vérification de l'espacement moyen des points.
Si (régularisation) **Alors**
  Nouvelle distribution de points sur la courbe de référence.
  Calcul des nouvelles aires.
Fin Si

Si (mod(nb itération, n_s)=0) **Alors**
  Filtrage des points.
Fin Si

Prise en compte des obstacles : application des conditions aux limites.

Calcul de l'abscisse curviligne, interpolation spline du choc et calcul des vecteurs normaux : $(\vec{n}_i)_{i=1,\dots,N}$.

Calculs de l'aire A_i et du nombre de Mach M_i associés à chaque point.
Fait

Cet algorithme est naturel, simple à mettre en œuvre, facilement parallélisable, robuste et conservatif. Les extensions à un milieu non-uniforme mais au repos d'une part et au 3D d'autre part sont évoquées en section 5.3.

5.2 Tests numériques

L'algorithme développé est validé et sa précision évaluée sur une série de cas tests décrits au chapitre 3. Nous considérons ici le modèle GSD pour lequel la relation $A - M$ est définie par (3.16). Ce choix n'enlève rien aux résultats. On rappelle en effet que le modèle Cinématique partage la même relation $A - M$ mais avec une fonction λ différente (*cf.* eq. (6.9)).

On vérifie dans un premier temps l'ordre numérique du schéma pour un problème régulier de type expansion radiale, avant de s'intéresser au problème de Riemann continu (diffraction d'un choc plan sur un dièdre convexe) puis discontinu (diffraction d'un choc plan sur un dièdre concave). L'étude se termine par la vérification du caractère conservatif de la méthode.

L'ensemble des cas traités ici suppose une distribution homogène du nombre de Mach sur la courbe de choc initiale. Le milieu est supposé uniforme et au repos, et la variable de temps t est assimilée à son homologue $\alpha = c_+ t$, avec $c_+ = 340.29$ m/s dans des conditions normales de pression et température ($p_0 = 101325$ Pa et $\rho_0 = 1.225$ kg/m^3). En particulier, nous qualifierons par abus α et $\Delta\alpha$ de temps et pas de temps respectivement dans la suite. Sauf précision, le filtrage du choc est effectué toutes les 10 itérations.

5.2.1 Convergence en ordre

Afin de valider le schéma numérique, la solution numérique obtenue est comparée avec la solution analytique en symétrie radiale (*cf.* section 3.1.3). Dans la limite des chocs forts ($M \gg 1$), la distance au centre, r_a, et le nombre de Mach, M_a, s'expriment en fonction de α par (3.29)-(3.30) :

$$\left| \begin{array}{lcl} r_a(\alpha) & = & r_0 \left((\alpha - \alpha_0) \dfrac{M_0}{r_0} \left(\dfrac{d-1}{\lambda_\infty} + 1 \right) + 1 \right)^{1/\left(\frac{d-1}{\lambda_\infty}+1\right)} \\ & & \\ M_a(\alpha) & = & M_0 \left(\dfrac{r_0}{r(\alpha)} \right)^{\frac{d-1}{\lambda_\infty}}. \end{array} \right. \tag{5.34}$$

Le problème est traité en deux dimensions, soit $d = 2$. Le coefficient λ_∞ est la limite en choc fort de la fonction λ : $\lambda_\infty = 1 + \frac{2}{\gamma} + \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1}} \approx 5.074$. La relation $A - M$ (3.16) utilisée dans l'algorithme est définie dans la limite des chocs fort par :

$$\frac{1}{A}\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} + \frac{\lambda_\infty}{M}\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} = 0.$$

On considère un choc cylindrique à l'instant initial $\alpha_0 = 0$, de rayon $r_0 = 0.5$ m et de nombre de Mach $M_0 = 10$. Ce choc se propage dans l'air jusqu'à une distance de 10 m, soit un temps d'arrivée final de $t_{\text{fin}} = \frac{\alpha_{\text{fin}}}{c_+}$ s, avec $\alpha_{\text{fin}} \approx 0.146579$ m. La distance radiale r et le nombre de Mach M sont relevés des simulations numériques à différents α_k dans la direction d'angle $\pi/4$ (*cf.* Fig. 5.7(a)). L'évolution du nombre de Mach et de la distance radiale dans cette direction sont présentées en figure 5.7. Les résultats sont obtenus pour un pas $\Delta s = 0.1$. On note le très bon accord avec la solution analytique. L'erreur sur la distance radiale s'accumule avec l'expansion du choc mais converge comme nous pouvons le voir en figure 5.8(a). À l'inverse, l'erreur sur le nombre de Mach s'atténue avec le temps après une brusque augmentation (*cf.* Fig. 5.8(b)). Comme attendu, ces erreurs diminuent avec le pas de discrétisation Δs. Les erreurs sont calculées selon la direction d'angle $\pi/4$. Néanmoins, celles-ci sont invariantes quelle que soit la direction choisie comme il est observé en figure 5.9(b). L'onde de choc étant expansive, le nombre de points est régulièrement doublé (*cf.* Fig. 5.9(a)).

L'erreur du schéma est représentée pour différents pas de discrétisation Δs en figure 5.10. Cette erreur est exprimée en norme l^2, version discrète de la norme L^2, définie par :

$$\|\psi\|_{l^2} = \sqrt{\sum_{k=1}^{M} |\psi_k|^2 (\alpha_k - \alpha_{k-1})},$$

où ψ_k est la valeur de la fonction $\psi(\alpha)$ en α_k. Les résultats sont similaires avec les normes l^1 ou l^∞. Sans filtrage du front, on constate que l'ordre de convergence du schéma est de 3

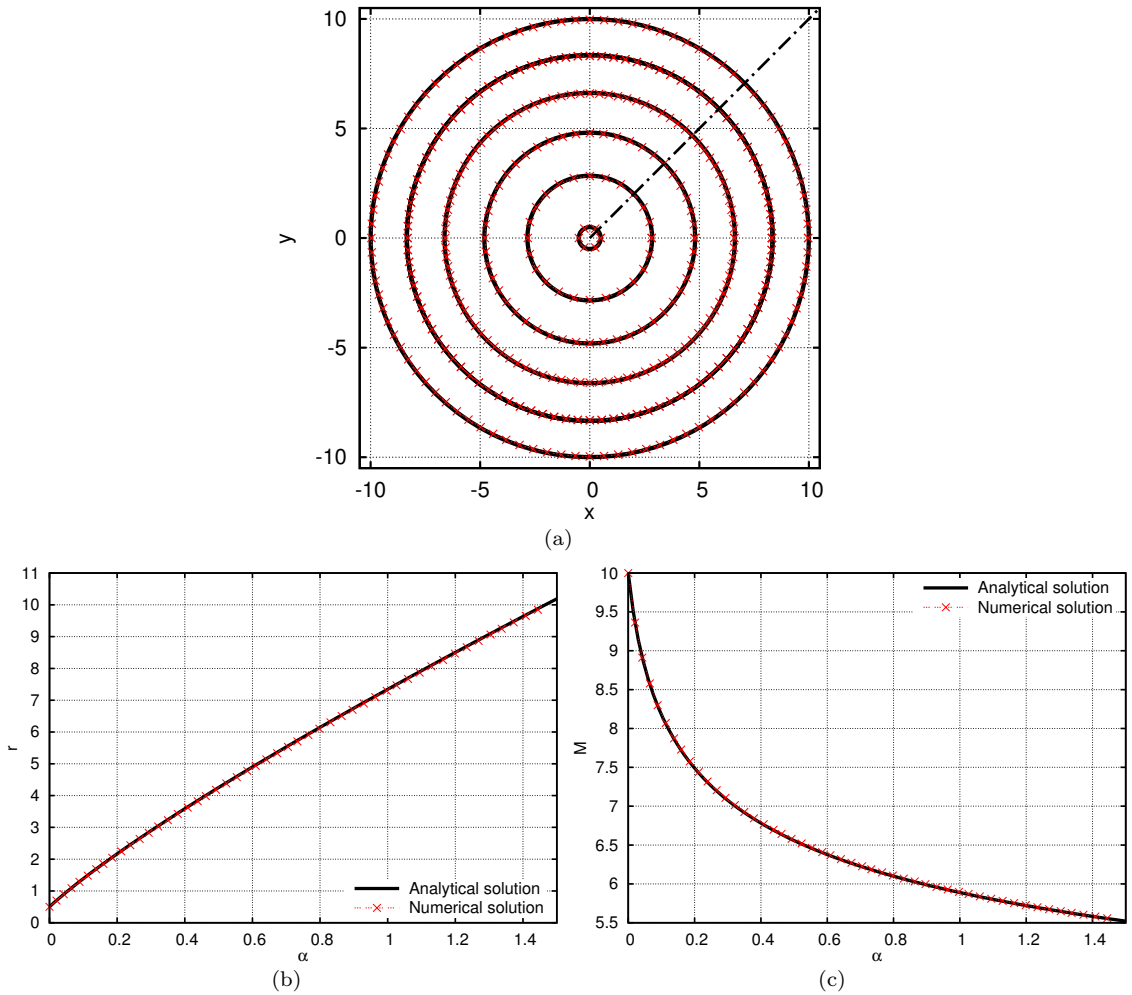


FIGURE 5.7 – Expansion radiale à deux dimensions, pas de discrétisation : $\Delta s = 0.1$. Fig. (a) : Positions successives du choc. On présente ici un point sur 5. Fig. (b) et (c) : Évolution du nombre de Mach et de la distance dans la direction d'angle $\pi/4$.

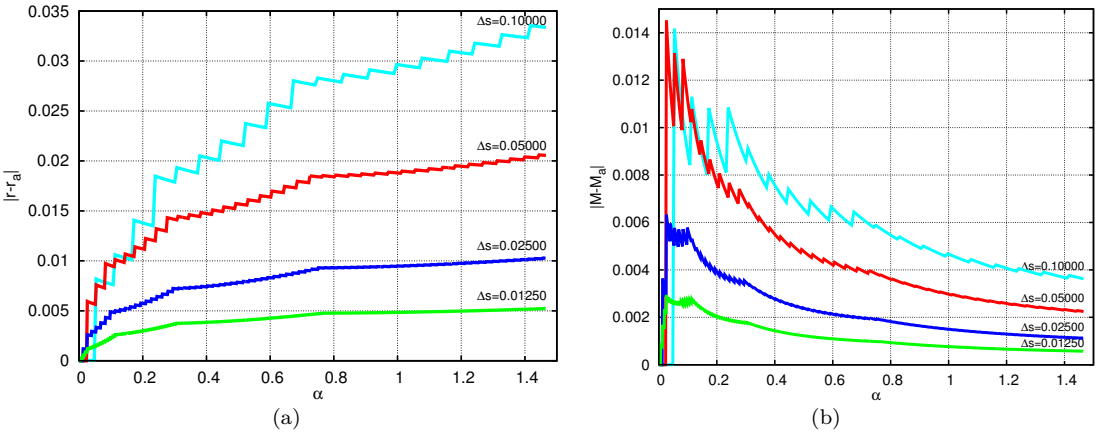
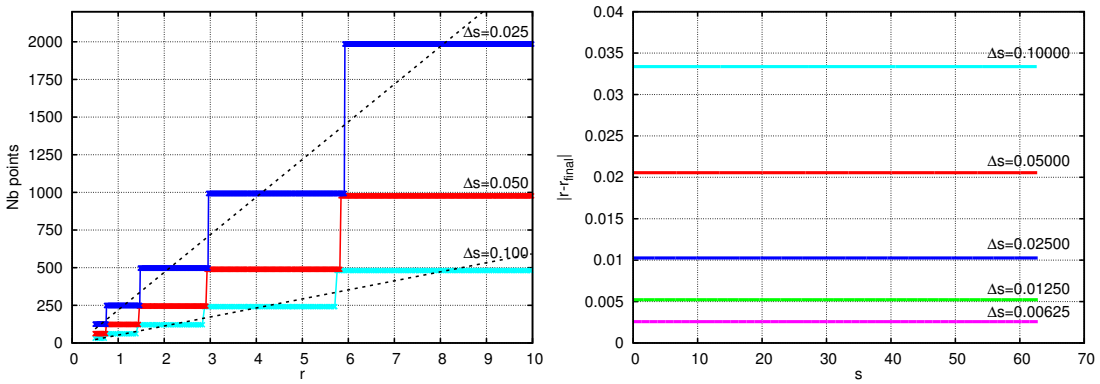
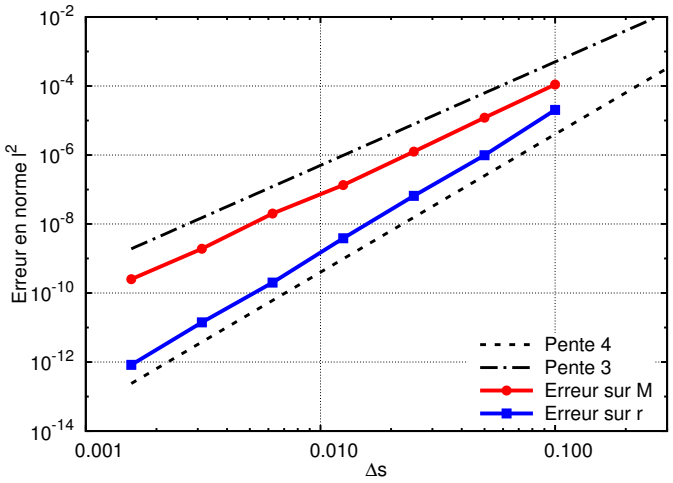


FIGURE 5.8 – Erreurs sur la position du choc (fig. (a)) et le nombre de Mach (fig. (b)) en fonction de α pour différents pas de discrétisation Δs.

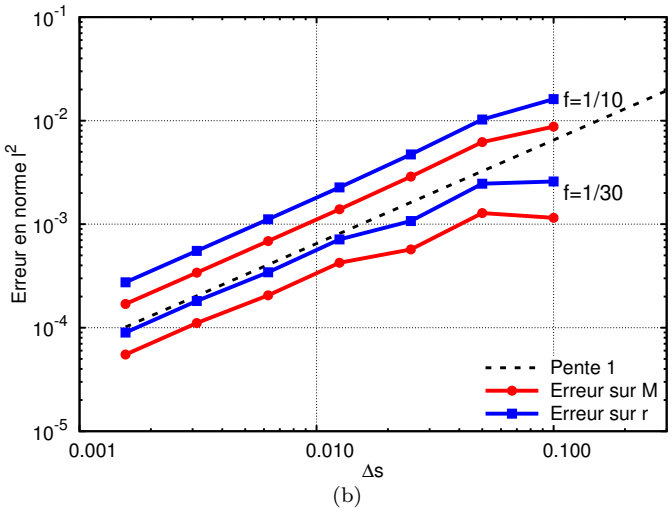


(a) (b)

FIGURE 5.9 – Fig. (a) : Nombre de points discrétisant le front de choc en fonction de la distance à la source pour le problème d'expansion radiale. Fig. (b) : Erreur sur la position du choc en fonction de l'abscisse sur le choc, s, à l'instant final α_{fin}.



(a)



(b)

FIGURE 5.10 – Convergence en ordre en norme l^2 pour la solution à symétrie radiale à deux dimensions. Fig. (a) : Sans lissage. Fig (b) : Avec lissage toutes les 10 et 30 itérations.

pour le calcul du nombre de Mach et de 4 pour l'estimation de la position du choc (*cf.* Fig. 5.10(a)). Cette différence d'ordre est normale compte tenu de la dérivée dans la relation (5.1). Si le nombre de Mach est estimé à l'ordre p, $M = M_a + O((\Delta t)^p)$, alors la position du choc est estimée à l'ordre $p+1$: $r = r_a + O((\Delta t)^{p+1})$. Du fait que le lissage détériore la solution, l'ordre du schéma chute à 1 lorsqu'il est activé (*cf.* Fig. 5.10(b)). La fréquence du filtrage influence alors la précision des résultats : l'erreur commise par l'algorithme augmente avec cette première. De surcroît, pour une fréquence de filtrage donnée, le nombre d'itérations doit être suffisamment important afin d'observer une convergence en maillage. Pour une fréquence de

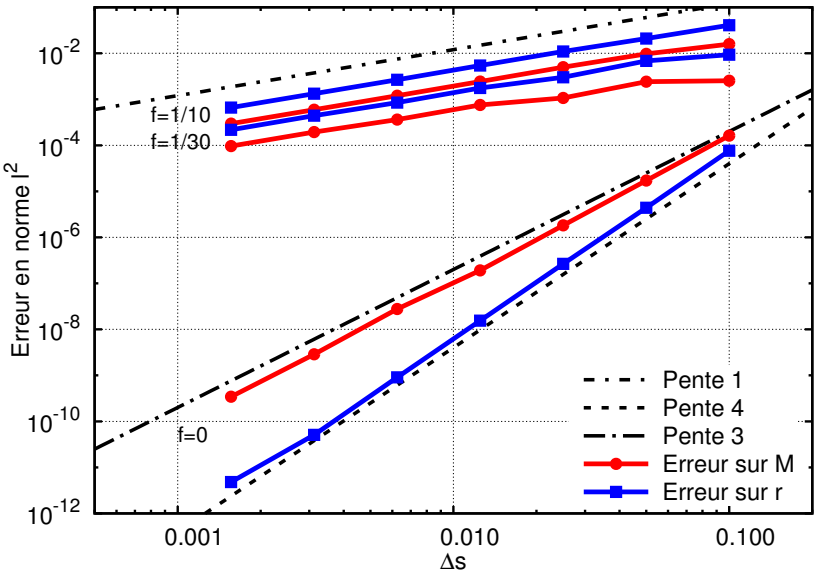


FIGURE 5.11 – Convergence en ordre en norme l^2 pour la solution à symétrie radiale à trois dimensions. La solution numérique est obtenue en 2D axisymétrie.

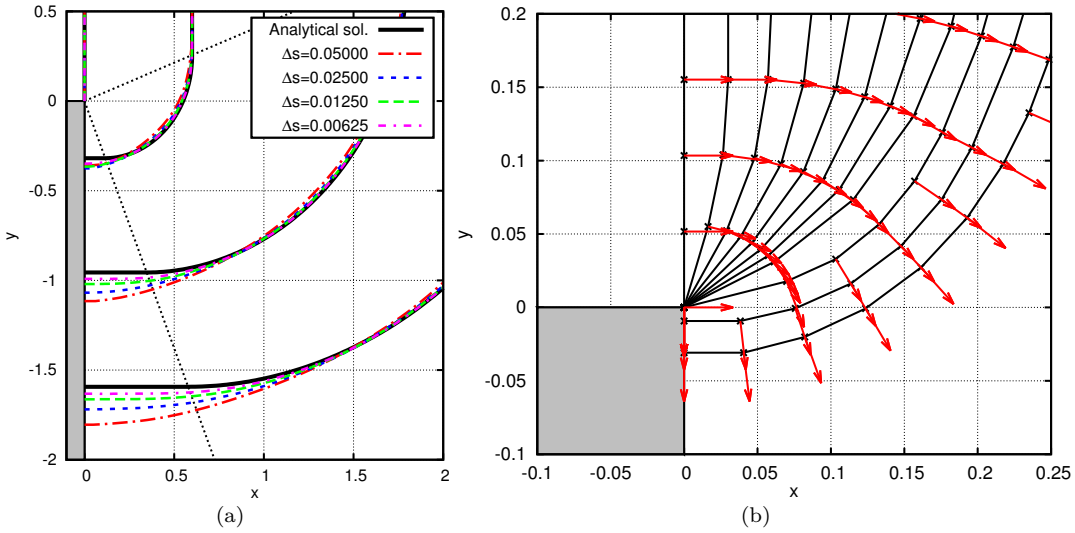


FIGURE 5.12 – Diffraction d'un choc plan sur une rampe d'angle $-90°$. Fig. (a) : Solution numérique obtenue pour différents pas de discrétisation Δs. Fig. (b) : Zoom au niveau du coin de la solution numérique pour $\Delta s = 0.05$.

1/30 par exemple, nous remarquons en figure 5.10(b) que l'erreur augmente avec la diminution du pas (ici $\Delta s = 0.1$ et $\Delta s = 0.05$). Pour le cas considéré, le nombre total d'itérations est de 196 pour $\Delta s = 0.1$ et de 385 pour $\Delta s = 0.05$. Ce problème n'est pas rencontré si la distance de simulation est doublée. En pratique, la fréquence de filtrage sera $f = 1/10$.

La même étude peut être menée en 2D axisymétrie ($d = 3$). La convergence en ordre pour ce cas est présentée en figure 5.11. Les conclusions sont rigoureusement identiques au cas 2D plan.

5.2.2 Cas tests pour le problème de Riemann

Le problème de Riemann élémentaire est maintenant considéré. Ce problème consiste à trouver la solution auto-semblable reliant deux états initiaux constants. Il est largement étudié dans [71, 85] et est équivalent au problème de la diffraction d'un choc plan sur un dièdre comme l'explique Whitham [144]. On rappelle que cette étude est menée en section 3.1.5.

Pour un dièdre convexe, la solution est une onde de détente et est donnée par (3.56). On considère ici un choc de nombre de Mach 3 interagissant avec une rampe d'angle $-90°$. Cette géométrie conduit à un changement important de la forme du choc qui permet de tester la robustesse du schéma. La longueur initiale du choc est de 1.5 m et le temps final est $t_{\text{fin}} = \frac{\alpha_{\text{fin}}}{c_+}$ s, avec $\alpha_{\text{fin}} = 1$ m. La paroi est traitée comme un obstacle.

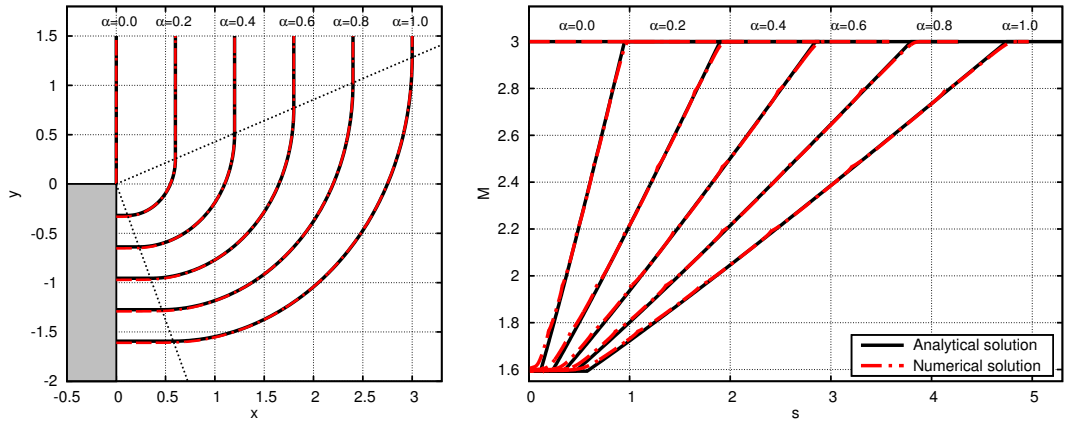
Les premiers instants de la simulation sont représentés en figure 5.12(b) avec $\Delta s = 0.05$ pour mettre en évidence le passage du coin. On notera l'apparition de nouveaux points sur le front. Lors de la diffraction autour du coin, le choc n'est pas orthogonal à la paroi de l'obstacle tant que le second point n'a pas passé l'angle. Ce point est alors projeté sur le coin de la rampe, imposant ainsi la bonne direction à ses voisins. La solution numérique, obtenue pour un pas de discrétisation $\Delta s = 0.005$, est comparée avec la solution analytique en figure 5.13. On note le très bon accord avec cette dernière.

La variation brutale de géométrie rend difficile l'approximation numérique de la position du choc au niveau de la paroi. Cela induit une erreur plus forte de la solution numérique dans cette zone, qui s'estompe en diminuant le pas d'espace (*cf.* Fig. 5.12(a)). On observe par ailleurs la convergence en maillage du schéma sur cette dernière figure. Le nombre de Mach au niveau du mur, M_w, est présenté en figure 5.14(a) pour différentes résolutions spatiales. Le problème étant auto-semblable, toutes les courbes convergent vers la valeur théorique, $M_w \approx 1.593$, mais avec une distance qui dépend de la résolution du front. L'erreur sur M_w commise par le schéma est affichée en figure 5.14(b). On note la convergence plus rapide vers la solution avec la diminution du pas de discrétisation. Le pic local observé pour $\Delta s = 0.00625$ est une conséquence des oscillations du schéma.

En raison de l'expansion du choc, l'algorithme Lagrangien ajoute régulièrement des points afin de maintenir une résolution acceptable du front comme nous pouvons le voir en figure 5.15. La croissance du nombre de points est alors linéaire.

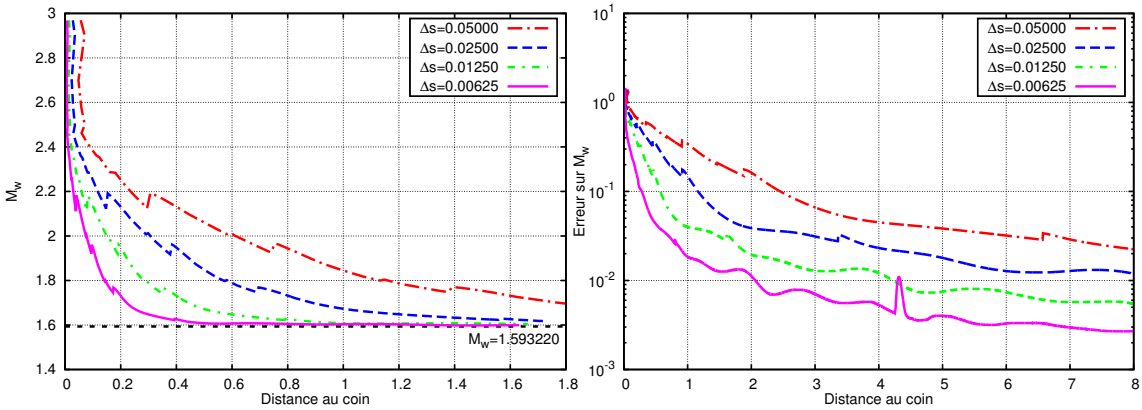
Pour un dièdre concave, la solution est discontinue (choc-choc) et est définie par les relations de Rankine-Hugoniot (3.62). On considère la diffraction sur une rampe à $\theta_w = 45°$ de nombre de Mach incident $M_0 = 3$. Il s'agit d'un cas difficile pour lequel les méthodes Eulériennes sur grille cartésienne peuvent avoir des difficultés à reproduire la bonne solution [85]. La longueur initiale du choc est de 4 m et le temps final est $t_{\text{fin}} = \frac{\alpha_{\text{fin}}}{c_+}$ s, avec $\alpha_{\text{fin}} = 1$ m.

L'algorithme est confronté à la solution analytique en figure 5.16 pour un pas de discrétisation $\Delta s = 0.005$. Les positions successives du choc sont superposées à la solution (*cf.* Fig. 5.16(a)). L'accord visuel semble parfait. Néanmoins, des oscillations du schéma sont observables pour la distribution du nombre de Mach le long du choc (*cf.* Fig. 5.16(b)). Elles sont dues à la formation du choc-choc et sont atténuées avec la distance. Un zoom sur le choc montre que le



(a) (b)

FIGURE 5.13 – Diffraction d'un choc plan à nombre de Mach 3 sur un dièdre convexe d'angle $-90°$. Solution numérique pour $\Delta s = 0.005$. Fig. (a) : Positions successives du choc. Les droites en pointillées sont les trajectoires de la première et de la dernière perturbation sur le front et délimitent l'onde de détente. Fig. (b) : Distribution du nombre de Mach le long du choc à différents instants.



(a) (b)

FIGURE 5.14 – Diffraction d'un choc plan à nombre de Mach 3 sur une rampe d'angle $\theta_w = -90°$. Fig. (a) : Nombre de Mach au niveau de la paroi en fonction de la distance au coin de la rampe. Fig. (b) : Différence avec la valeur théorique.

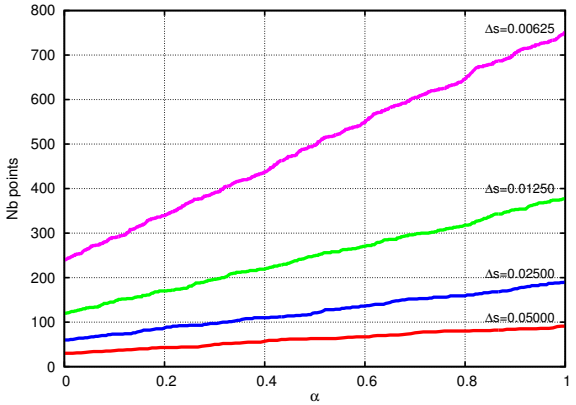


FIGURE 5.15 – Nombre de points discrétisant le front de choc en fonction du temps pour le problème de la diffraction sur une rampe convexe d'angle $\theta_w = -90°$.

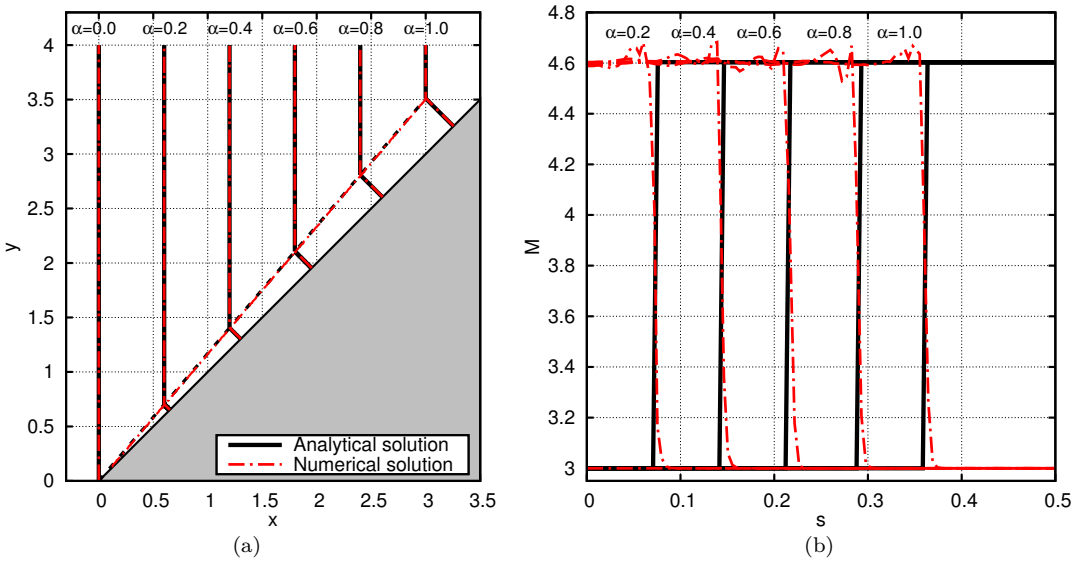


FIGURE 5.16 – Diffraction d'un choc plan à nombre de Mach 3 sur un dièdre concave d'angle 45°. Solution numérique pour $\Delta s = 0.005$. Fig. (a) : Positions successives du choc. Fig. (b) : Distribution du nombre de Mach le long du choc à différents instants.

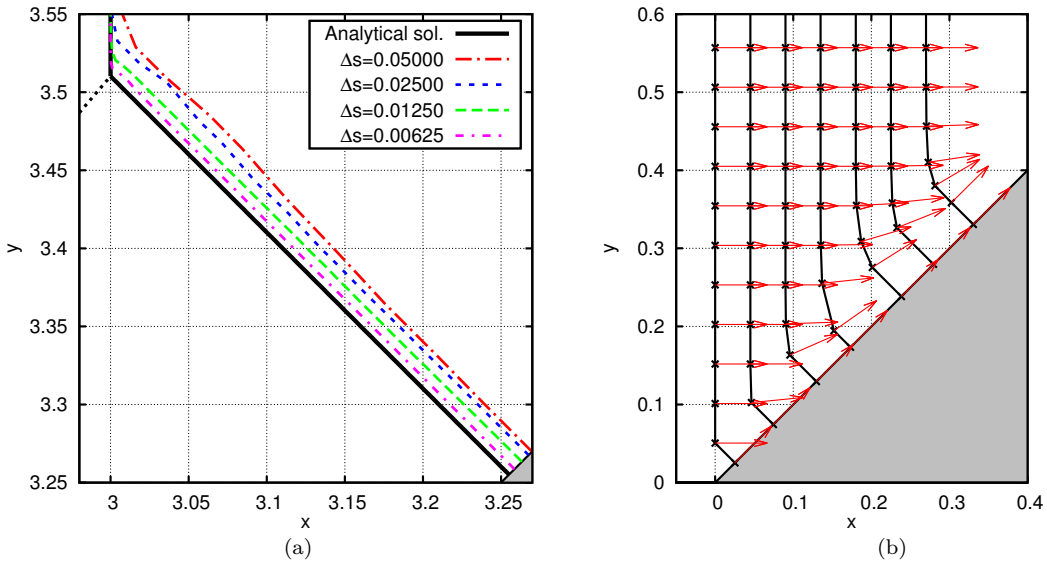
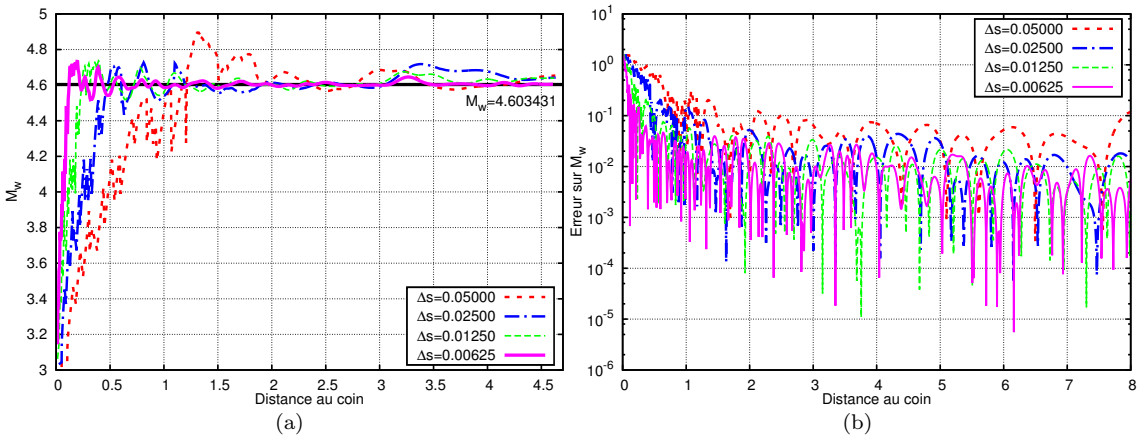


FIGURE 5.17 – Diffraction sur une rampe d'angle $\theta_w = 45°$ à nombre de Mach 3. Fig. (a) : Comparaison de la solution numérique pour différents pas Δs avec la solution analytique à l'instant $\alpha = 1$. Fig. (b) : Formation du front de Mach pour $\Delta s = 0.05$.

front de Mach est bien restitué (*cf.* Fig. 5.17(a)). En particulier, le nombre de Mach au niveau de la paroi converge bien vers la valeur théorique, $M_w \approx 4.603$, comme nous pouvons le voir en figure 5.18.

Lors de l'interaction du choc avec la rampe de compression, le point du front le plus proche de l'obstacle y est projeté orthogonalement. Le point sur l'obstacle se déplace alors tangentiellement à la paroi et impose progressivement la direction à ses voisins jusqu'à la formation du front de Mach (*cf.* Fig. 5.17(b)). La géométrie étant convergente, les points ont tendance à se



(a) (b)

FIGURE 5.18 – Diffraction d'un choc plan à nombre de Mach 3 sur une rampe d'angle $\theta_w = 45°$. Fig. (a) : Nombre de Mach au niveau de la paroi en fonction de la distance au coin de la rampe. Fig. (b) : Différence avec la valeur théorique.

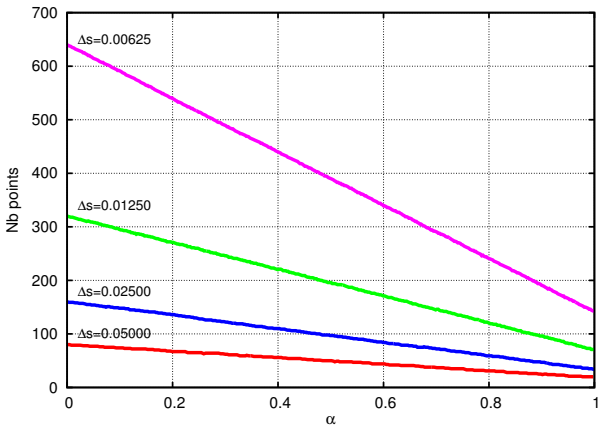
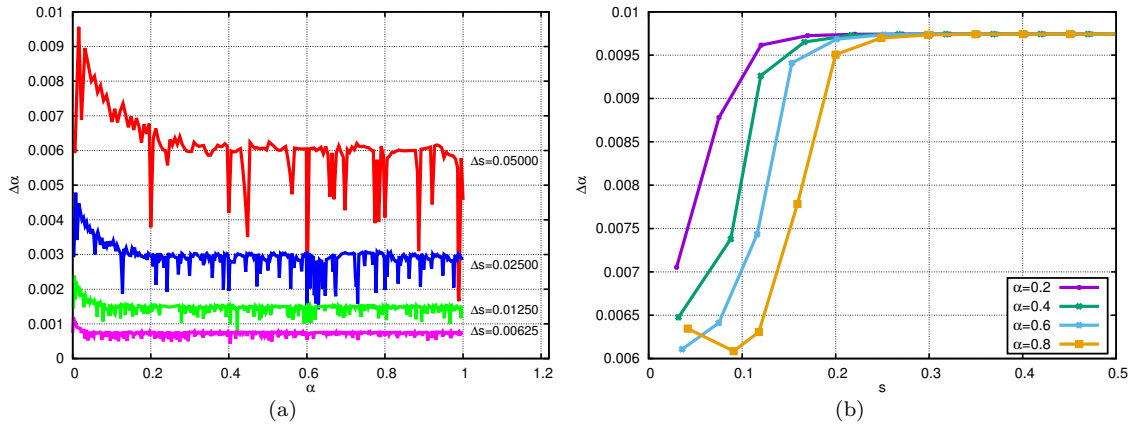


FIGURE 5.19 – Nombre de points discrétisant le front de choc en fonction de $\alpha = c_+ t$ pour le problème de la diffraction sur une rampe concave d'angle $\theta_w = 45°$.



(a) (b)

FIGURE 5.20 – Diffraction d'un choc plan sur une rampe d'angle $\theta_w = 45°$. Fig. (a) : Pas de temps, $\Delta\alpha = c_+ \Delta t$, en fonction de $\alpha = c_+ t$. Fig. (b) : $\Delta\alpha$ le long du front de choc à différents instants. La simulation est effectuée pour $\Delta s = 0.05$.

rapprocher au niveau du choc-choc. L'algorithme supprime alors régulièrement des points afin d'éviter leur accumulation. Pour le cas considéré ici, le nombre de points du front est divisé par 3 en fin de calcul (*cf.* Fig. 5.19). Au niveau du front de Mach, le pas de temps $\Delta\alpha$ diminue en raison du croisement éventuel des rayons (*cf.* Fig. 5.20(b)). La suppression de points au voisinage du choc-choc évite ainsi la chute du pas de temps. Globalement, $\Delta\alpha$ converge vers une valeur moyenne comme nous pouvons le voir en figure 5.20(a).

5.2.3 Conservativité du schéma

La conservation du schéma Lagrangien passe par la conservation de l'aire des tubes de rayon. Celle-ci est notamment vérifiée au travers des propriétés 5.3 et 5.4. Afin de s'assurer que les relations de Rankine-Hugoniot soient respectées, le problème de la diffraction d'un choc plan sur un dièdre concave est considéré pour divers angles de rampe $\theta_w > 0$. La configuration du problème est rappelée en figure 5.21 et est résolu en section 3.1.5.

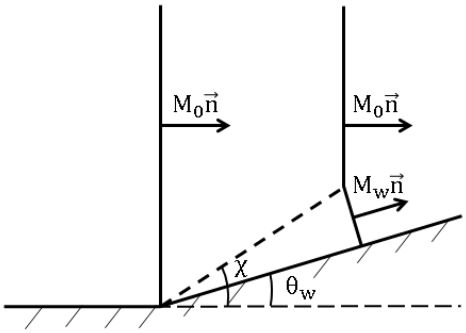
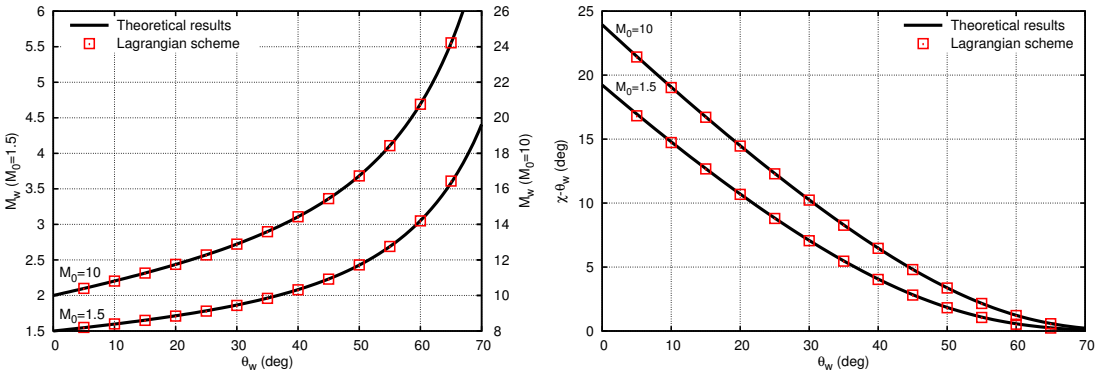


FIGURE 5.21 – Schéma de la diffraction d'un choc plan à nombre de Mach M_0 sur un dièdre concave d'angle $\theta_w > 0$. L'angle orienté de la trajectoire du choc-choc par rapport à l'axe (Ox) est noté χ.

Le nombre de Mach au niveau de la paroi, M_w, est calculé avec l'algorithme Lagrangien pour $\Delta s = 0.01$ et comparé à la solution analytique (3.62a) en figure 5.22(a). Nous observons l'excellent accord pour un choc fort ($M_0 = 10$), ou un choc d'intensité plus faible ($M_0 = 1.5$). L'estimation de l'angle de la trajectoire du choc-choc est également correcte comme nous



(a) (b)

FIGURE 5.22 – Diffraction d'un choc plan à nombre de Mach M_0 sur un dièdre concave d'angle θ_w. Fig. (a) : Nombre de Mach au niveau de la paroi en fonction de θ_w. Fig. (b) : Angle de la trajectoire du choc-choc en fonction de θ_w.

pouvons le voir en figure 5.22(b). On en conclut que l'algorithme est conservatif, ce qui lève la limitation observée avec l'algorithme Eulérien décrit dans [85].

5.3 Extensions possibles de l'algorithme

Nous avons présenté et validé l'algorithme Lagrangien en deux dimensions d'espace. Les extensions de l'algorithme à un milieu non-uniforme ainsi qu'à trois dimensions d'espace sont rapidement évoquées dans cette partie. Ces extensions dépassent le cadre de notre étude et ne sont pas mises en pratique, mais pourraient s'avérer utiles dans l'optique de la mise au point d'une méthode de calcul rapide des effets de souffle.

5.3.1 Extension de l'algorithme à un milieu non-uniforme et au repos

L'extension de l'algorithme Lagrangien à un milieu non-uniforme, mais au repos, est directe. Nous proposons dans cette section une amélioration du schéma initialement proposé par Schwendeman [107]. Cette étude se limitera à des considérations théoriques par manque de temps.

L'extension du modèle GSD à un milieu non-uniforme et au repos nécessite de revoir la relation $A-M$ (*cf.* section 3.2.1). On rappelle la forme de cette équation donnée par (3.67) en l'absence d'effets arrière :

$$\frac{1}{A}\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} + \frac{M\lambda(M)}{M^2-1}\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} + f_1(M)\frac{1}{\rho_+}\frac{\mathrm{d}\rho_+}{\mathrm{d}t} + f_2(M)\frac{1}{p_+}\frac{\mathrm{d}p_+}{\mathrm{d}t} = 0. \tag{5.35}$$

Les fonctions f_1 et f_2 dépendent uniquement de M et sont définies par (3.69). Les champs $+$ caractérisent le milieu amont local, ici la pression p_+ et la masse volumique ρ_+. La formulation (5.35) est identique pour le modèle Cinématique avec des coefficients λ et f_i différents donnés par (4.88) et (4.89).

Le schéma originel de Schwendeman consiste à intégrer la relation $A-M$ (5.35) depuis l'instant initial. La connaissance de l'historique des termes sources sur chaque rayon est alors nécessaire, ce qui rend difficile la résolution numérique du modèle hors cas triviaux. Dans [107], la méthode est appliquée pour des configurations de type choc-bulle non déformable où l'auteur suppose des propriétés uniformes dans les différents milieux. Dans ce cas particulier, une intégration simple de la relation $A-M$ depuis l'instant initial est possible.

Les propriétés 5.3 et 5.4 que nous avons développées autorisent l'intégration de la relation $A-M$ d'un pas de temps à l'autre tout en respectant la conservation de l'aire des tubes de rayon, ce qui simplifie la résolution et autorise tout type de configuration. Hors modification de ces tubes lors de l'étape de régularisation du front, l'intégration entre les instants t et $t+\Delta t$ s'écrit :

$$\ln\left(\frac{A(t+\Delta t)}{A(t)}\right) + \int_{M(t)}^{M(t+\Delta t)} \frac{m\lambda(m)}{m^2-1}\mathrm{d}m + \int_t^{t+\Delta t} f_1(M(\tau))\frac{1}{\rho_+}\frac{\mathrm{d}\rho_+}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}\tau + \int_t^{t+\Delta t} f_2(M(\tau))\frac{1}{p_+}\frac{\mathrm{d}p_+}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}\tau = 0. \tag{5.36}$$

Il existe différentes manières d'approcher les deux dernières intégrales de cette relation. Puisque les fonctions f_i sont bornées (*cf.* Fig. 6.1), la méthode la plus simple est de supposer que ces fonctions sont constantes sur l'intervalle $[M(t), M(t+\Delta t)]$. On écrit alors par exemple :

$$f_i(M) \equiv f_i(\bar{M}), \quad \text{pour} \quad M \in [M(t), M(t+\Delta t)],$$

où $\bar{M}$ est une pondération de $M(t)$ et $M(t+\Delta t)$: $\bar{M} = xM(t) + (1-x)M(t+\Delta t)$, avec $x \in [0,1]$. Faisant cela, la relation (5.36) est alors remplacée par :

$$\ln\left(\frac{A(t+\Delta t)}{A(t)}\right) + \int_{M(t)}^{M(t+\Delta t)} \frac{m\lambda(m)}{m^2-1}\mathrm{d}m + f_1(\bar{M})\ln\left(\frac{\rho_+\left(\vec{x}_{sh}(t+\Delta t)\right)}{\rho_+\left(\vec{x}_{sh}(t)\right)}\right) + f_2(\bar{M})\ln\left(\frac{p_+\left(\vec{x}_{sh}(t+\Delta t)\right)}{p_+\left(\vec{x}_{sh}(t)\right)}\right) = 0, \quad (5.37)$$

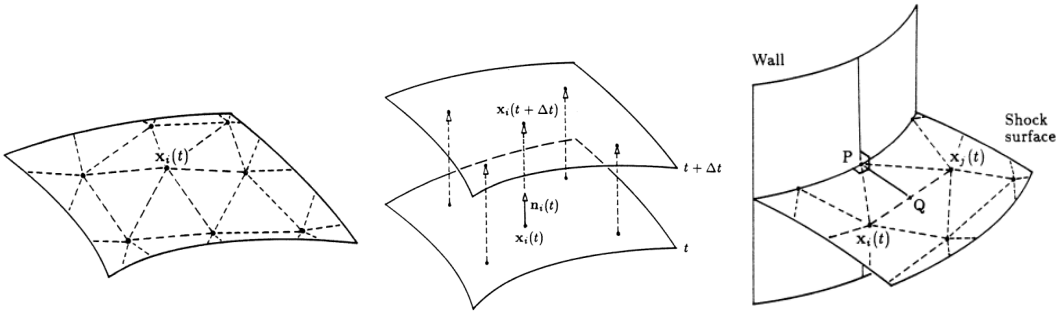
où l'on rappelle que $\vec{x}_{sh}(t)$ est la position du choc à l'instant t. Il est alors aisé de résoudre (5.37) en approchant l'intégrale restante par une méthode de Simpson par exemple et en cherchant une racine de l'équation non-linéaire à l'aide d'un algorithme de Newton.

Afin d'assurer la conservativité du schéma lors de la régularisation du front, il conviendrait ensuite d'adapter les propriétés 5.3 et 5.4 à la relation (5.37).

5.3.2 Extension de l'algorithme en 3D

L'extension de l'algorithme au 3D n'est pas traitée dans le cadre de cette thèse. Schwendeman a proposé une méthode [105] que l'on rappelle ici dans un souci de complétude. La procédure est identique à celle décrite précédemment à l'exception que l'auteur n'effectue pas d'interpolation spline du choc, la définition cohérente des coordonnées tangentielles de la surface de choc étant une tâche délicate dans ce cas.

Dans cet algorithme, le front de choc est approché par un ensemble fini de points formant un maillage triangulaire (*cf.* Fig. 5.23(a)). Chaque point est le centre d'un tube de rayon et possède un certain nombre de triangles voisins. Pour un point donné $\vec{x}_i$, l'aire du tube de rayon associé est déterminée en moyennant l'ensemble des aires de ses faces voisines. Le nombre de Mach est ensuite calculé comme précédemment à l'aide de la relation $A - M$ (5.18). L'estimation du vecteur normal associé à $\vec{x}_i$ s'effectue en moyennant les vecteurs normaux de chaque face voisine. Chaque point est finalement propagé en considérant l'équation (5.6) (*cf.* Fig. 5.23(b)). Lors de l'interaction du choc avec un obstacle, on impose au front d'être localement orthogonal à la paroi. Schwendeman propose pour cela d'utiliser la projection orthogonale sur la paroi du barycentre des deux points les plus proches, comme schématisé en figure 5.23(c).



(a) (b) (c)

FIGURE 5.23 – Algorithme Lagrangien en trois dimensions. Fig. (a) : Maillage triangulaire du front. Fig. (b) : Propagation du front de choc. Fig. (c) : Interaction du choc avec un mur. Les figures sont issues de [105].

Une procédure de régularisation du front est également présente dans l'algorithme. Des points peuvent être supprimés ou ajoutés, et la connectivité entre les points est également susceptible d'être modifiée afin de limiter l'apparition de triangles de mauvaise qualité. Ces trois

actions de base sont effectuées sur chaque paire de triangle comme schématisé en figure 5.24. Cette étape nécessite une attention particulière afin d'éviter l'apparition de triangles dégénérés (*i.e.* sommets alignés).
Finalement, la procédure de filtrage spatial décrite précédemment est étendue à trois dimensions afin d'éliminer les oscillations de haute fréquence en $\vec{x}_i(t)$.

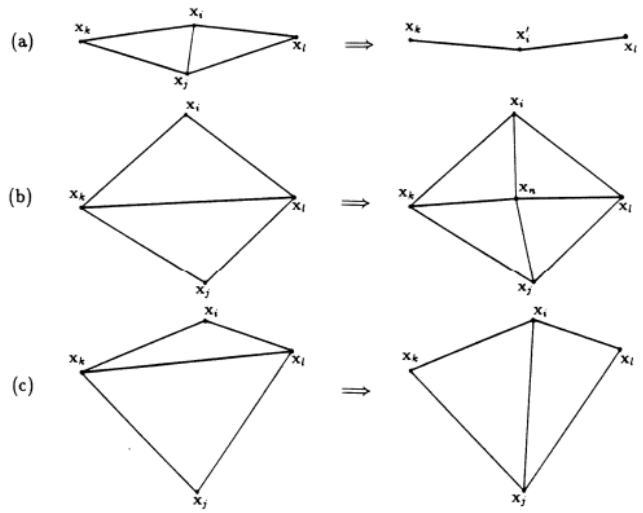


FIGURE 5.24 – Régularisation du front de choc pour l'algorithme Lagrangien à trois dimensions. Fig. (a) : Des points sont fusionnés. Fig. (b) : Un point est ajouté. Fig. (c) : Échange de la connectivité des points. La figure est issue de [105].

L'algorithme en trois dimensions est toutefois difficile à mettre en œuvre pour des géométries complexes, principalement lors de la séparation du front de part et d'autre d'un obstacle et de sa recombinaison à l'arrière de celui-ci. Cette difficulté pourrait être contournée par l'utilisation de la bibliothèque de front tracking FronTier [1].

5.4 Conclusion

L'algorithme Lagrangien [56] est une approche naturelle de résolution numérique du modèle GSD (ou Cinématique). Il est basé sur la décomposition du front de choc en tubes de rayon, assurant la conservativité du schéma. Cet algorithme a été initialement proposé par Henshaw, Smyth et Schwendeman [56]. Dans ce chapitre, nous avons proposé et validé une amélioration à deux dimensions.

L'interpolation spline cubique globale est tout d'abord remplacée par une interpolation spline locale à laquelle un limiteur de pente de type Monotonic third order est appliqué. Cela permet ainsi d'atténuer les oscillations numériques du schéma. La rupture régulière de l'algorithme original, causée par l'utilisation d'un schéma en temps du type Leap-Frog, est ensuite évitée en propageant le front à l'aide d'un schéma du type Runge-Kutta d'ordre 3. L'intégration de la relation $A - M$ s'effectue originellement depuis l'instant initial, ce qui assure la conservativité du schéma lors de la procédure de régularisation du front. Nous proposons ici une réécriture de cette intégration d'un pas de temps à l'autre avec respect de la conservation. La prise en compte d'un terme source dans la relation $A - M$ en devient aisée. En particulier, l'extension de l'algorithme à un milieu hétérogène et au repos est directe. Enfin, l'algorithme est étendu à la prise en compte d'obstacles quelconques. Un arbre de type quadtree est mis en place, permettant de définir efficacement les zones d'interaction choc/paroi.

La comparaison de la solution numérique avec la solution analytique pour les problèmes

d'expansion radiale, de diffraction sur un dièdre convexe et de diffraction sur un dièdre concave montre les capacités de l'algorithme. L'étude approfondie de ce dernier problème met de plus en évidence le caractère conservatif du schéma. La seule limitation est la convergence d'ordre 1 en présence du lissage. Ce point pourra être amélioré à l'avenir, en mettant au point un algorithme monotone par exemple, mais est secondaire au regard de l'objectif de cette thèse.

L'ensemble de l'étude menée dans ce chapitre est effectuée pour le modèle GSD. L'analogie structurale du modèle Cinématique avec ce dernier, prouvée en section 4.5, autorise la même étude pour ce modèle alternatif. En particulier, l'algorithme Lagrangien sera utilisé pour comparer ces deux modèles dans des configurations variées et complexes au chapitre suivant.

Chapitre 6

Comparaison des modèles GSD et Cinématique

Sommaire

6.1 Étude préliminaire du modèle Cinématique 140
6.1.1 Comparaison des relations $A - M$ Cinématique et GSD 140
6.1.2 Solutions à symétrie radiale 145
6.1.3 Étude du modèle à deux dimensions 146
6.2 Comparaison des modèles GSD et Cinématique 149
6.2.1 Analyse du problème de Riemann 150
6.2.2 Comparaison sur des problèmes complexes 155
6.2.3 Synthèse 158
6.3 Conclusion 160

L'analyse bibliographique montre que la comparaison du modèle GSD avec le modèle Cinématique (ou KIN pour Kinematic) se limite à des cas élémentaires : écoulement dans une tuyère [115], choc divergent en symétrie radiale [115], ou encore choc faible divergent en deux dimensions d'espace [10, 96]. Nous présentons dans ce chapitre une comparaison détaillée et plus générale de ces deux modèles. À notre connaissance, il s'agit de la première fois qu'une telle étude est menée pour le modèle Cinématique.

Il a été prouvé au chapitre 4 que le modèle Cinématique est équivalent au modèle GSD avec une relation $A - M$ spécifique. Cela autorise son étude à l'aide des solutions analytiques [143] et des schémas numériques [56, 108, 85] déjà existants pour le modèle GSD. En particulier, la comparaison des relations $A - M$, le comportement en 1D, et la vitesse des ondes sur le front de chacun des modèles sont discutés dans la première section. Le problème de Riemann est étudié dans la section suivante et l'algorithme Lagrangien décrit au chapitre 5 est utilisé pour des problèmes plus complexes ne présentant, *a priori*, pas de solution analytique. Dans tous les cas, le milieu amont est supposé uniforme, au repos, et l'air est assimilé à un gaz parfait de rapport de chaleurs spécifiques γ égal à 1.4, sauf mention contraire.

Les résultats sont systématiquement comparés avec des données expérimentales lorsque cela est possible, ainsi qu'avec des résultats de simulations Eulériennes. Ces calculs sont menés à l'aide du logiciel de mécanique des fluides HERA [62] développé au CEA (*cf.* annexe A). Signalons simplement que ce logiciel permet la résolution des équations d'Euler, avec détonique, en variables conservatives par une méthode de type Lagrange+Projection sur une grille cartésienne. HERA dispose d'un module d'adaptation dynamique de maillage (AMR en anglais),

piloté par les gradients de l'écoulement. Durant les simulations Eulériennes, le premier temps d'arrivée du choc est conservé dans chaque cellule de calcul [1]. Le front de choc à l'instant t (correspondant à l'isovaleur t) est ensuite extrait à l'aide d'un algorithme dit de marching square [77]. Cela autorise également l'estimation géométrique du nombre de Mach local du choc en calculant la vitesse instantanée du front des instants t à $t + dt$.

6.1 Étude préliminaire du modèle Cinématique

Le modèle Cinématique (4.62) se réécrit sous la forme du système GSD :

$$\begin{cases} M|\vec{\nabla}\alpha| = 1 & \text{(6.1a)} \\ \\ \operatorname{div}\left(\dfrac{M}{A}\vec{\nabla}\alpha\right) = 0, & \text{(6.1b)} \end{cases}$$

fermé par la relation $A - M$ (4.93). Dans la suite, le milieu dans lequel le choc se propage est supposé au repos ($\vec{v}_+ = \vec{0}$), ce qui implique $\alpha_0 \equiv 0$ dans la relation (4.93). Dans cette section, nous comparons tout d'abord les relations $A-M$ des approches cinématique et GSD, puis nous étudions le cas d'un choc divergent à symétrie radiale. Cette section se termine par l'étude du modèle Cinématique en deux dimensions d'espace.

6.1.1 Comparaison des relations $A - M$ Cinématique et GSD

Puisque le milieu est au repos et supposé stationnaire, $\partial_n\psi_+ = \vec{n}\cdot\vec{\nabla}\psi_+ = \mathrm{d}_n\psi_+$ pour toute quantité physique ψ_+ du milieu. La variation spatiale suivant la normale au choc le long des rayons est alors définie par

$$\mathrm{d}_n\psi = \frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}n} = \vec{n}\cdot\vec{\nabla}\psi_x(\vec{x}_{sh}) = \frac{1}{c_+M}\frac{\mathrm{d}\psi_t(t)}{\mathrm{d}t},$$

en raison de la relation (2.39). Ayant remarqué que $\mathrm{d}_n = \frac{1}{c_+M}\mathrm{d}_t = \frac{1}{M}\mathrm{d}_\alpha$, la relation $A - M$ cinématique (4.93) s'écrit :

$$\frac{\mathrm{d}_nA}{A} + \frac{M\lambda_K(M)}{M^2-1}\mathrm{d}_nM + \chi_1(M)\frac{\mathrm{d}_n\rho_+}{\rho_+} + \chi_2(M)\frac{\mathrm{d}_np_+}{p_+} + \chi_3(M)Z = 0, \tag{6.2}$$

où le terme $Z = \dfrac{(\partial_np)_-}{p_+}$ modélise les effets arrière. Les coefficients λ_K et χ_i sont donnés par (4.88) et (4.89) et sont rappelés ici :

$$\lambda_K(M) = \frac{(\gamma+1)\{2(2\gamma-1)M^4 + (\gamma+5)M^2 + 1 - \gamma\}}{(2\gamma M^2 + 1 - \gamma)\{2 + (\gamma-1)M^2 + 2b\rho_+(M^2-1)\}}, \tag{6.3}$$

1. Pour rappel, le choc est détecté pour la première fois dans une cellule lorsque la densité ρ est plus élevée que la densité atmosphérique ρ_0. Sauf mention explicite, le critère choisi est : $\frac{\rho-\rho_0}{\rho_0} \geq 0.2$, ce qui permet de localiser efficacement la position du choc dans la plupart des cas.

et

$$\chi_1(M) = \frac{-(\gamma+1)M^2}{2(1-b\rho_+)\{2+(\gamma-1)M^2+2b\rho_+(M^2-1)\}} \tag{6.4a}$$

$$\chi_2(M) = \frac{(\gamma+1)(2\gamma-1)M^2}{2\gamma\{2+(\gamma-1)M^2+2b\rho_+(M^2-1)\}} \tag{6.4b}$$

$$\chi_3(M) = \frac{(\gamma+1)^2}{2\gamma(2\gamma M^2+1-\gamma)}. \tag{6.4c}$$

On rappelle également la relation $A-M$ provenant de l'approche caractéristique de Whitham, définie pour un milieu en équilibre hydrostatique (3.67) :

$$\frac{\mathrm{d}_n A}{A} + \frac{M\lambda_W(M)}{M^2-1}\mathrm{d}_n M + f_1(M)\frac{\mathrm{d}_n\rho_+}{\rho_+} + f_2(M)\frac{\mathrm{d}_n p_+}{p_+} + f_3(M)Q = 0, \tag{6.5}$$

où $Q = \dfrac{(\partial_t p + \rho c \partial_t v)_-}{p_+ c_+^3}$ est le terme modélisant l'écoulement à l'arrière du choc, avec

$$\lambda_W(M) = \left(1+\frac{2}{\gamma+1}\frac{1-\mu(M)^2}{\mu(M)}\right)\left(1+2\mu(M)+\frac{1}{M^2}\right) \tag{6.6a}$$

$$\mu(M) = \sqrt{\frac{(\gamma-1)M^2+2}{2\gamma M^2+1-\gamma}}, \tag{6.6b}$$

et

$$f_1(M) = -\frac{2(M^2-1)+(2\gamma M^2+1-\gamma)\mu(M)}{2\mu(M)(2\gamma M^2+1-\gamma)} \tag{6.7a}$$

$$f_2(M) = \frac{2(\gamma+2)+(\gamma^2+\gamma-2)M^2+2(\gamma^2M^2-1)\mu(M)}{2\gamma((\gamma-1)M^2+2)} \tag{6.7b}$$

$$f_3(M) = \frac{(\gamma+1)\mu(\mu-1)}{2M(M^2-1)}. \tag{6.7c}$$

La structure de la relation $A-M$ cinématique (6.2) est identique à celle de l'approche caractéristique (6.5), mais avec des coefficients différents. Pour un gaz parfait ($b=0$) et un rapport de chaleurs spécifiques $\gamma = 1.4$, les coefficients des modèles s'écrivent dans la limite des chocs faibles ($M \to 1$) :

Modèle GSD			**Modèle KIN**		
λ_W	$\sim$	4	λ_K	$\sim$	4
f_1	$\sim$	$-\frac{1}{2}$	χ_1	$\sim$	$-\frac{1}{2}$
f_2	$\sim$	$\frac{3}{2} = \frac{21}{14}$	χ_2	$\sim$	$\frac{2\gamma-1}{2\gamma} = \frac{9}{14}$
f_3	$\sim$	$-\frac{\gamma+1}{4} = -\frac{21}{35}$	χ_3	$\sim$	$\frac{\gamma+1}{2\gamma} = \frac{30}{35}$.

(6.8)

Dans la limite des chocs forts ($M \gg 1$), ils deviennent :

Modèle GSD		**Modèle KIN**	
λ_W	$\sim 1+\frac{2}{\gamma}+\sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1}} = \lambda_W^\infty \approx 5.074$	λ_K	$\sim \frac{(\gamma+1)(2\gamma-1)}{\gamma} = \lambda_K^\infty \approx 7.714$
f_1	$\sim -\frac{\gamma-1+2\sqrt{\frac{\gamma-1}{2\gamma}}}{2(\gamma-1)} \approx -1.445$	χ_1	$\sim -\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)} = -3$
f_2	$\sim \frac{\gamma-2+\left(1+2\sqrt{\frac{\gamma-1}{2\gamma}}\right)\gamma^2}{2\gamma(\gamma-1)} \approx 2.537$	χ_2	$\sim \frac{(\gamma+1)(2\gamma-1)}{2\gamma(\gamma-1)} \approx 3.857$
f_3	$\sim \frac{(\gamma+1)\left(\gamma-1-2\gamma\sqrt{\frac{\gamma-1}{2\gamma}}\right)}{4\gamma M^3} \approx -\frac{0.2821}{M^3}$	χ_3	$\sim \frac{(\gamma+1)^2}{4\gamma^2M^2} \approx \frac{0.7347}{M^2}$.

L'allure de ces coefficients est tracée en figures 6.1. En dépit de leurs limites en choc fort, nous pouvons souligner une différence fondamentale entre les deux approches. Le modèle GSD atteint rapidement le régime de choc fort, ce qui en ce sens est cohérent avec l'hypothèse sous-jacente au modèle. Le modèle Cinématique a une phase transitoire plus longue, et atteint son régime de choc fort pour des nombres de Mach plus élevés. Cette tendance est indépendante du covolume $b\rho_+$. Notons que ce paramètre a un effet important sur les coefficients : il tend à atténuer leurs valeurs lorsque sa valeur augmente.

On note que les coefficients f_3 et χ_3, associés à l'écoulement arrière dans chaque modèle, sont de signe différent. De plus, la fonction f_3 décroît comme $1/M^3$ en choc fort tandis que χ_3 décroît comme $1/M^2$. Ces différences sont liées directement aux termes Q et Z. En effet, $Q = \dfrac{(\partial_t p + \rho c \partial_t v)_-}{p_+ c_+^3}$ est un terme faisant jouer la dérivée temporelle alors que $Z = \dfrac{(\partial_n p)_-}{p_+}$ fait intervenir la dérivée spatiale. Selon (4.15) et étant donné que $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n} = c_+ M \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$, on a pour un milieu uniforme :

$$\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}t} = \frac{(\partial_t p)_-}{c_+ p_+} + M\frac{(\partial_n p)_-}{p_+},$$

soit

$$Z = \frac{(\partial_n p)_-}{p_+} = \frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}n} - \frac{1}{M}\frac{(\partial_t p)_-}{c_+ p_+},$$

d'où le comportement observé. La relation $A - M$ propre à chaque modèle ne contient pas la même information. Rappelons que l'approche de Whitham consiste à appliquer la caractéristique C^+ des équations d'Euler pour une tuyère 1D au niveau du choc. L'approche cinématique est plus générale puisqu'elle combine les équations d'Euler 3D au niveau du choc, considérant ainsi toute l'information disponible. Il en résulte que les termes modélisant les effets arrière, à savoir Q pour le modèle GSD et Z pour le modèle Cinématique, sont différents : ces deux approches ne négligent donc pas la même information.

Whitham choisit de négliger le terme $f_3(M)Q$ dans (6.5) sous l'hypothèse que le choc est suffisamment fort et que les effets arrière sont bornés. Pour le modèle KIN, nous choisissons de négliger le terme $\chi_3(M)Z$ dans (6.2) sous l'hypothèse que le choc est soutenu, sans aucune autre hypothèse supplémentaire sur l'intensité du choc. En effet, le signal spatial de pression de ce type de choc peut être modélisé par une "marche de pression" en première approximation. En supposant ainsi que le terme $(\partial_n p)_-$ est proche de 0, et en remarquant que le coefficient χ_3 est inférieur à 1 et tend vers 0 pour $M \gg 1$, les effets arrière peuvent être négligés dans le modèle Cinématique. Cela évite, tout comme pour le modèle GSD, le calcul de l'écoulement arrière et permet une comparaison facile entre les deux modèles.

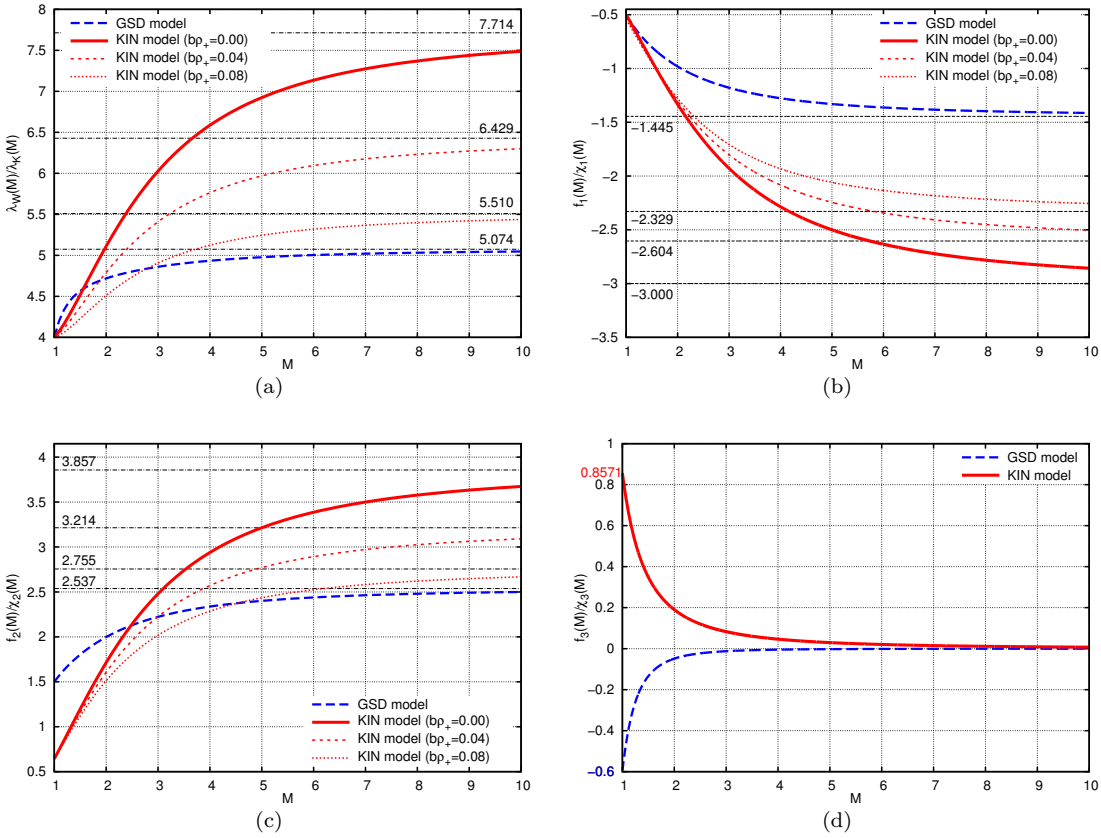


FIGURE 6.1 – Allure des coefficients de la relation $A - M$ pour les approches caractéristique (bleu) et cinématique (rouge) pour $\gamma = 1.4$. Fig. (a) : fonctions λ_W et λ_K, Fig. (b) : f_1 et χ_1, Fig. (c) : f_2 et χ_2, et Fig. (d) : f_3 et χ_3. Les coefficients du modèle GSD sont établis pour un gaz parfait ($b = 0$). Les coefficients du modèle Cinématique sont calculés pour différentes valeurs de $b\rho_+$. L'état limite en choc fort est tracé en pointillé noir.

Pour un milieu uniforme, la relation $A - M$ des deux approches s'écrit sous la forme :

$$\frac{\mathrm{d}A}{A} + \frac{M\lambda(M)}{M^2 - 1}\mathrm{d}M = 0, \tag{6.9}$$

avec $\lambda = \lambda_W$ (6.6a) pour le modèle GSD et $\lambda = \lambda_K$ (6.3) pour le modèle Cinématique. L'évolution de l'intensité du choc est ainsi uniquement pilotée par la fonction λ. Pour un gaz parfait, les valeurs de λ_W et λ_K ont la même limite en choc faible, et possèdent des valeurs similaires pour un nombre de Mach inférieur à 2 (*cf.* Fig. 6.1(a)). Pour un nombre de Mach plus élevé, une différence apparaît entre les coefficients. Ainsi, les deux modèles donneront des solutions similaires en choc faible et modéré ($M \leq 2$), et des solutions distinctes pour des chocs d'intensité plus forte.

La solution de (6.9) est donnée par :

$$\frac{A(M)}{A_0} = \frac{f(M)}{f(M_0)}, \quad \text{avec } f(M) = \exp\left(-\int \frac{M\lambda(M)}{M^2 - 1}\mathrm{d}M\right), \tag{6.10}$$

où on note $f = f_W$ et $f = f_K$ pour les modèles GSD et Cinématique respectivement. Il n'y a pas, *a priori*, d'expression analytique de (6.10) pour le modèle GSD, mais pour la relation

cinématique, on a :

$$f_K(M) = \frac{\left(2\gamma M^2 + 1 - \gamma\right)^{\frac{\gamma^2-1}{2\gamma(\gamma+1-2b\rho_+)}}}{\left(M^2-1\right)^2 \left(2 + (\gamma-1)M^2 + 2b\rho_+(M^2-1)\right)^{\frac{(\gamma+1)(3-\gamma)-2b\rho_+(\gamma+9-8b\rho_+)}{2(\gamma^2-(1-2b\rho_+)^2)}}}. \tag{6.11}$$

À titre indicatif, la variation d'aire du tube en fonction du nombre de Mach est tracée en figure 6.2 pour un nombre de Mach initial $M_0 = 1.1$. La relation (6.11) est considérée pour le modèle Cinématique tandis qu'une méthode numérique d'intégration de type Simpson est utilisée pour le modèle GSD. Pour un gaz parfait, comme attendu, les valeurs de l'aire du tube sont similaires entre les deux approches pour un choc faible à modéré en raison de la proximité des valeurs des fonctions λ. Pour un choc plus fort, l'aire diminue plus rapidement avec le modèle Cinématique. Cela s'explique par l'allure des fonctions λ (*cf.* Fig. 6.1(a)). En effet, d'après (6.9), la variation d'aire s'exprime comme :

$$A'(M) = -\frac{M\lambda(M)}{M^2-1}, \tag{6.12}$$

et pour un nombre de Mach suffisamment élevé, on a $\lambda_K(M) > \lambda_W(M)$. De surcroît, la décroissance de l'aire du tube pour l'approche cinématique tend à s'estomper avec l'augmentation du paramètre $b\rho_+$ puisque les valeurs de λ_K diminuent lorsque $b\rho_+$ augmente.

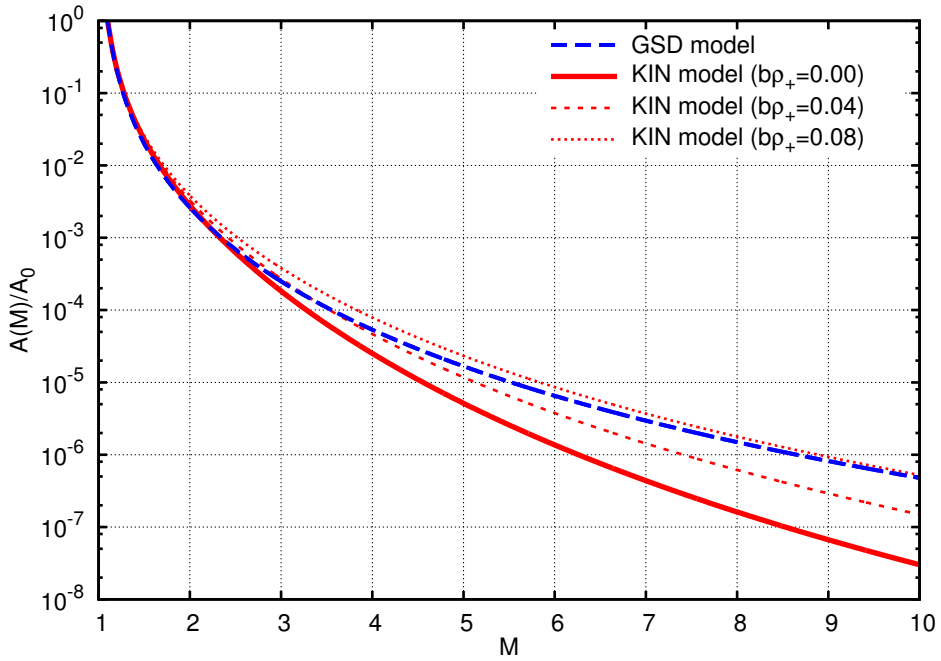


FIGURE 6.2 – Allure de $A(M)$ pour les approches caractéristique (bleu) et cinématique (rouge) en échelle semi-logarithmique pour $\gamma = 1.4$ et $M_0 = 1.1$.

Dans la limite des chocs faibles, la décroissance de l'aire du tube est identique pour les deux modèles :

$$\frac{A(M)}{A_0} = \left(\frac{M_0 - 1}{M - 1}\right)^2, \tag{6.13}$$

puisque les fonctions λ_W et λ_K ont la même valeur (6.8). Dans la limite des chocs forts, la variation d'aire est différente entre les deux approches :

$$\frac{A(M)}{A_0} = \left(\frac{M_0}{M}\right)^{\lambda_\infty}, \tag{6.14}$$

avec $\lambda_\infty = \lambda_W^\infty \approx 5.0743$ pour le modèle GSD et $\lambda_\infty = \lambda_K^\infty \approx 7.7143$ pour le modèle Cinématique ($b = 0$).

Dans la suite, le milieu est supposé homogène et l'air est assimilé à un gaz parfait, nous prenons donc $b = 0$.

6.1.2 Solutions à symétrie radiale

En symétrie plane ($d = 1$), cylindrique ($d = 2$) ou sphérique ($d = 3$), la solution dépend uniquement de la distance au centre de la symétrie située en $\vec{x}_0$: $r = \|\vec{x} - \vec{x}_0\|$. Dans le cas du système (6.1) avec une relation $A - M$ du type (6.9), le problème se réécrit sous la forme (*cf.* section 3.1.3) :

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\alpha(r)}{\mathrm{d}r} = \dfrac{1}{M(r)} & \text{(6.15a)} \\ \dfrac{\mathrm{d}M(r)}{\mathrm{d}r} = -\dfrac{M^2(r)-1}{M(r)\lambda(M(r))}\dfrac{d-1}{r}, & \text{(6.15b)} \end{cases}$$

où l'on rappelle que $\lambda = \lambda_W$ pour le modèle GSD et $\lambda = \lambda_K$ pour le modèle KIN.

Dans la limite des chocs forts ($M \gg 1$) et des chocs faibles ($M \sim 1$), la décroissance de la surpression du choc, $\frac{[p]}{p_+} = \frac{2\gamma}{\gamma+1}\left(M^2 - 1\right)$, vérifie pour les deux approches :

$$\frac{[p]}{p_+} \sim \begin{cases} \left(\dfrac{r_0}{r}\right)^{\frac{d-1}{2}} & \text{pour } M \sim 1 \text{ et } r \gg r_0 \\ \left(\dfrac{r_0}{r}\right)^{\frac{2(d-1)}{\lambda_\infty}} & \text{pour } M \gg 1 \text{ et } r \sim 0, \end{cases}$$

où $\lambda_\infty = \lambda_W^\infty \approx 5.0743$ pour le modèle GSD et $\lambda_\infty = \lambda_K^\infty \approx 7.7143$ pour le modèle Cinématique. Le comportement en choc faible est similaire pour les deux approches et l'on retrouve la décroissance géométrique pour une onde de choc soutenue divergente. Dans le cas d'une onde de souffle, de type onde en N, la décroissance attendue est différente, en $r^{-3/4}$ et en $r^{-1}\ln(r)^{-1/2}$ en deux et trois dimensions respectivement. Cet aspect sera détaillé au chapitre 8.

Exposant	Valeur exacte p_g	modèle GSD $(d-1)/\lambda_W^\infty$	modèle KIN $(d-1)/\lambda_K^\infty$
$d = 2$	0.394142	0.394141	0.259259
$d = 3$	0.788284	0.788283	0.518519

TABLE 6.1 – Exposant calculé pour le problème d'un choc fort convergent à symétrie cylindrique ($d = 2$) et sphérique ($d = 3$), pour un gaz parfait au repos, $\gamma = 1.4$. La solution exacte, donnée par Guderley [49], est comparée avec les modèles GSD et KIN.

En choc fort, les exposants sont comparés en table 6.1 avec ceux de la solution autosemblable de Guderley [49] établie pour un choc convergent :

$$\frac{[p]}{p_+} \sim \left(\frac{r_0}{r}\right)^{p_g}.$$

Les exposants donnés par le modèle GSD sont très proches de ceux de Guderley, comme souligné en section 3.1.3, tandis que le modèle KIN est mis en défaut dans ce cas. Le modèle GSD est meilleur pour ce type de problème du fait de la nature différente des termes Q et Z qui ont

été négligés. [115] montre qu'il faut considérer des ordres supérieurs du modèle KIN pour bien restituer ce problème. Ce comportement n'est toutefois pas rédhibitoire car nous souhaitons nous intéresser à des chocs divergents, donc rapidement en régime faible.

6.1.3 Étude du modèle à deux dimensions

En 2D, les modèles GSD et Cinématique s'écrivent dans la base locale au choc comme (3.37) :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \theta}{\partial \beta} - \dfrac{A'(M)}{M}\dfrac{\partial M}{\partial \alpha} = 0 \\ \dfrac{\partial \theta}{\partial \alpha} + \dfrac{1}{A(M)}\dfrac{\partial M}{\partial \beta} = 0. \end{cases} \tag{6.16}$$

On rappelle que $\alpha = c_+ t$, β et θ désignent respectivement la position du choc, la coordonnée le long du choc et l'angle orienté des rayons avec l'axe des abscisses. L'étude de ce modèle a été effectuée en section 3.1.4.

Le système (6.16) est hyperbolique sous la condition $A'(M) < 0$ et s'écrit sous forme caractéristique (3.39) :

$$\theta \pm \int \frac{\mathrm{d}M}{A(M)u(M)} = cste, \quad \text{sur } C^{\pm} : \frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}\alpha} = \pm u(M),$$

où $u(M)$ est la vitesse de propagation des perturbations le long du choc :

$$u(M) = \frac{1}{A(M)}\sqrt{\frac{M^2-1}{\lambda(M)}}.$$

La vitesse physique de ces perturbations est :

$$A\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}t} = \pm c_+ A(M)u(M) = \pm c_+\sqrt{\frac{M^2-1}{\lambda(M)}}. \tag{6.17}$$

Remarque 6.1

La condition d'hyperbolicité $A'(M) < 0$ est vérifiée pour le modèle Cinématique puisque $\lambda_K(M) > 0$ pour $M \geq 1$. De surcroît, compte tenu de la définition de λ_K (6.3), à savoir $\lambda_K(M) = \dfrac{4\gamma M(M^2-1)}{(\gamma+1)w_1}$, il est aisé de vérifier que les vitesses des perturbations (6.17) sont identiques aux vitesses $s_\pm$ (4.84b) calculées en section 4.4.3. Ceci est cohérent avec l'étude du caractère hyperbolique du modèle effectuée en section 4.4.3.
On remarque également, en notant $\mathrm{d}n_2 = A\mathrm{d}\beta$, que le système (6.16) est équivalent à (4.82).

Vitesse des ondes. On note a_{GSD} et a_{KIN} la vitesse adimensionnée des ondes dans le repère lié au choc, équation (6.17), pour les modèles GSD et Cinématique (KIN) respectivement :

$$a_{\mathrm{GSD}} = \sqrt{\frac{M^2-1}{\lambda_W(M)}} \quad \text{et} \quad a_{\mathrm{KIN}} = \sqrt{\frac{M^2-1}{\lambda_K(M)}}.$$

Ces vitesses sont tracées en figure 6.3. Dans la limite des chocs faibles, la vitesse des perturbations le long du choc est identique pour les deux approches :

$$a_{\mathrm{GSD}} \sim a_{\mathrm{KIN}} \sim \sqrt{\frac{M-1}{2}}.$$

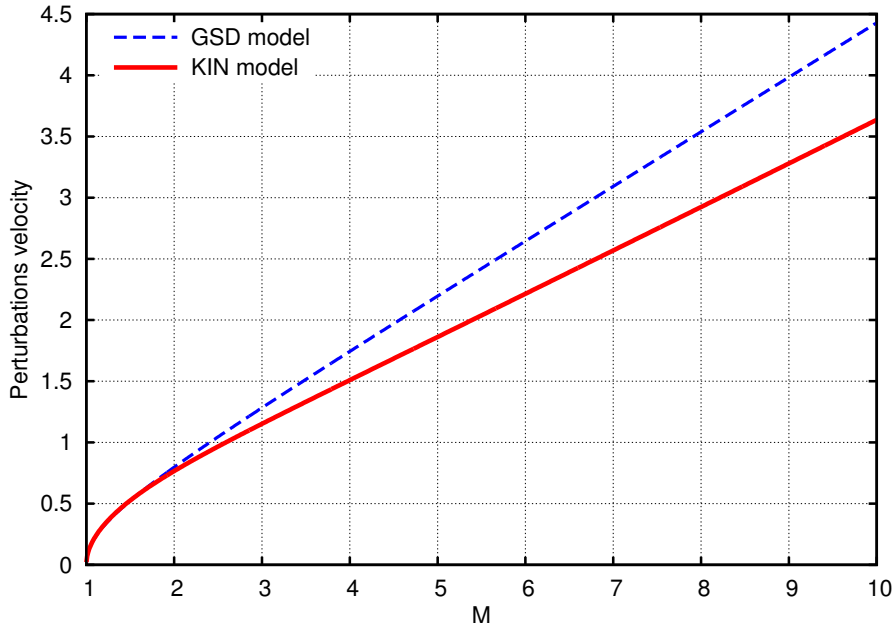


FIGURE 6.3 – Vitesse adimensionnée des perturbations le long du choc pour le modèles GSD (a_{GSD}) et KIN (a_{KIN}) en fonction du nombre de Mach M.

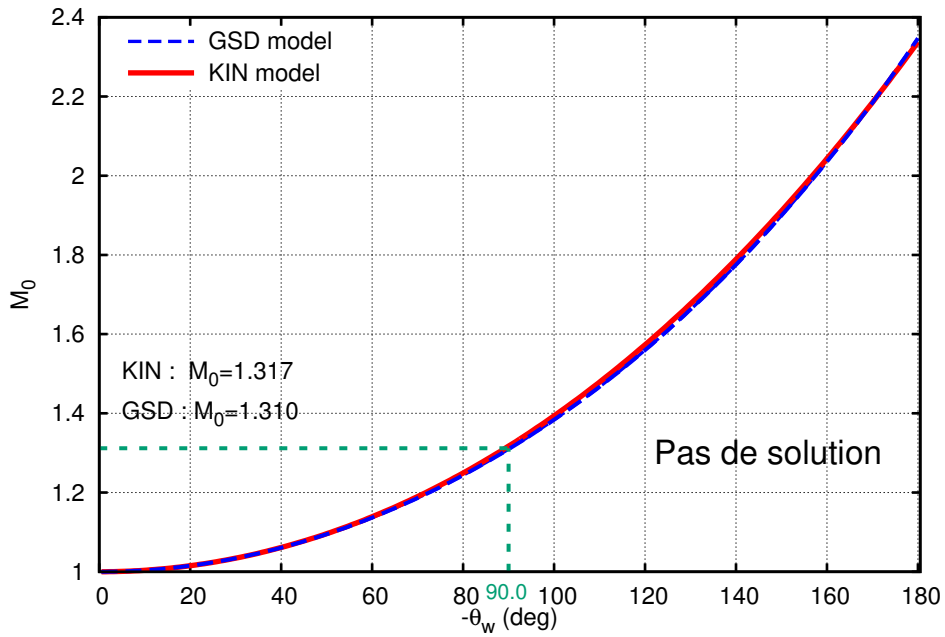


FIGURE 6.4 – Nombre de Mach M_0 minimal en fonction de θ_w (en degré) pour avoir existence de la solution du problème de la diffraction d'un choc plan sur un mur convexe d'angle θ_w (relation (6.18)).

Elles restent proches pour $M \leq 2$ et diffèrent graduellement ensuite. La différence de vitesse est la plus marquée dans la limite des chocs forts :

$$a_{\text{GSD}} \sim 0.443926 \times M \quad \text{et} \quad a_{\text{KIN}} \sim 0.360041 \times M,$$

pour $\gamma = 1.4$ et $b = 0$. Ces tendances sont une conséquence directe de l'allure des fonctions λ comme il peut être observé en figure 6.1(a). En conséquence, les deux modèles donneront des résultats similaires pour un choc d'intensité faible à modérée ($M \leq 2$).
Les ondes voyagent plus vite sur le front de choc pour le modèle GSD que pour pour le modèle Cinématique. Puisque ces ondes sont notamment responsables du changement d'intensité du choc, cela signifie que le choc est moins sensible au changement de géométrie avec ce dernier modèle. Pour une onde de détente, la décroissance du nombre de Mach est moins importante pour le modèle KIN, impliquant un front de choc plus rapide que celui estimé par le modèle GSD. Pour une onde compressive, l'effet est inverse : la croissance du nombre de Mach est moins élevée pour l'approche Cinématique, impliquant un front moins rapide que l'approche GSD. En particulier, lors de la formation d'un choc-choc, la position du front de Mach est sous-estimée par le modèle Cinématique par rapport au modèle de Whitham. Ces propriétés sont mises en évidence au travers de l'étude du problème de Riemann, menée en section 6.2.1.

Limitation du modèle Cinématique. Le modèle GSD est sujet à une limitation pour le problème de la diffraction d'un choc d'intensité M_0 sur un coin convexe. Rappelons qu'à un angle de déviation donné de la rampe $\theta_w < 0$, une solution telle que $M \geq 1$ existe si et seulement si

$$M_0 \geq M_{lim} \geq 1 \quad \text{avec} \quad \int_1^{M_{lim}} \sqrt{\frac{\lambda(m)}{m^2-1}}\mathrm{d}m = -\theta_w, \tag{6.18}$$

où $\lambda = \lambda_W$ ou $\lambda = \lambda_K$ ici. Ce problème est discuté en section 3.1.5 pour $\lambda = \lambda_W$. Puisque la fonction λ_K est bornée, le même type de limitation existe pour le modèle Cinématique.

La condition (6.18) est tracée en figure 6.4 pour les modèles GSD ($\lambda = \lambda_W$) et Cinématique ($\lambda = \lambda_K$). Pour le modèle KIN, il n'y a pas de solution au problème lorsque (M_0, θ_w) appartient à la région située sous la courbe pleine rouge. Nous remarquons que la condition d'existence est quasiment identique pour les deux approches. Cela n'est pas étonnant dans la mesure où les deux modèles sont similaires pour $M \leq 2$. Quelques valeurs du nombre de Mach limite, M_{lim}, sont présentées en table 6.2 pour plusieurs angles θ_w. Nous remarquons leur proximité pour les deux modèles.

θ_w (degré)	-10	-30	-50	-70	-90	-110	-130	-150
GSD model	1.004	1.034	1.095	1.186	1.310	1.467	1.662	1.899
KIN model	1.004	1.034	1.096	1.190	1.317	1.479	1.676	1.911

TABLE 6.2 – Valeurs limites de M_0 pour différents angles d'inclinaison de la rampe pour avoir existence de la solution du problème de la diffraction d'un choc plan sur un mur convexe avec les modèles GSD et KIN (relation (6.18)).

Transition réflexion régulière (RR)/réflexion irrégulière (RI). Tout comme le modèle GSD, le modèle KIN forme systématiquement un front de Mach lors de la diffraction d'un choc plan sur une rampe concave d'angle $\theta_w > 0$. Rappelons que pour ce type de problème, présenté en introduction (section 1.3), la réflexion physique est régulière tant que l'angle d'incidence du choc, β, est plus petit qu'un angle limite, β_{lim}, dépendant du nombre de Mach incident M_0. De manière équivalente, pour un choc plan, la réflexion est régulière tant que l'angle de la rampe est plus grand qu'un angle limite : $\theta_w = \pi/2 - \beta > \theta_{lim} = \pi/2 - \beta_{lim}$. Il se forme

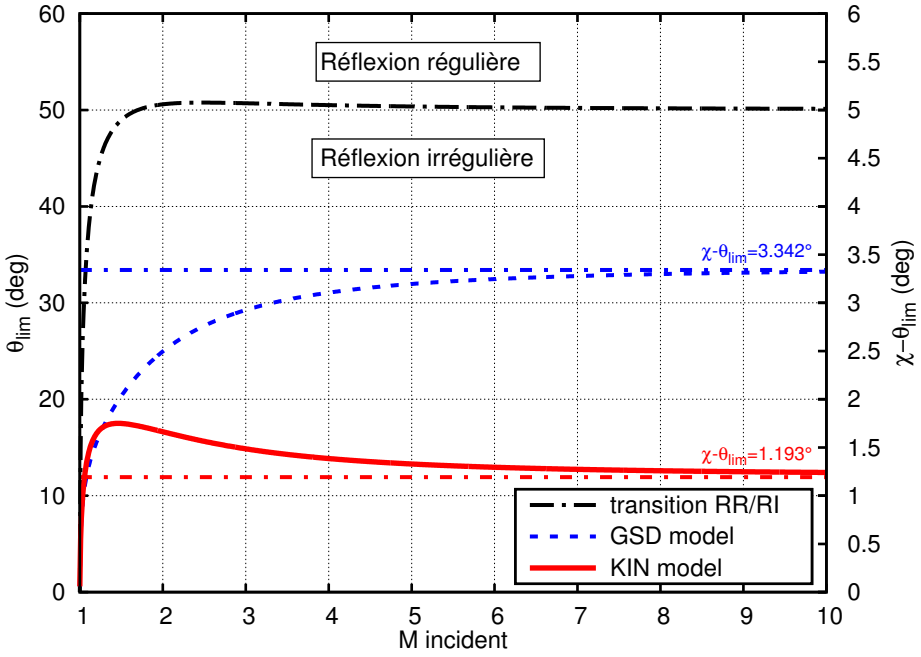


FIGURE 6.5 – La courbe la plus haute correspond à l'angle limite théorique de la rampe de compression, noté θ_{lim}, de transition entre une réflexion régulière (RR) et une réflexion irrégulière (RI). L'échelle associée est celle de gauche. Les deux autres courbes (échelle de droite) correspondent à l'angle de la trajectoire du choc-choc par rapport à la rampe au moment de la transition RR/RI pour les modèles GSD et KIN. Dans la limite des chocs forts, cet angle tend vers 3.342° et 1.193° pour les modèles GSD et KIN respectivement.

un front de Mach pour un angle inférieur à cette valeur limite (réflexion de Mach ou de von Neumann). L'angle limite théorique de cette transition RR/RI est représenté en figure 6.5 (échelle de gauche). Pour un choc fort, cet angle limite vaut environ 50°, tandis que pour un choc faible la transition RR/RI tend à disparaître au profit de la réflexion régulière. Pour cet angle de transition, θ_{lim}, pour lequel il n'y a théoriquement pas de front de Mach, les modèles GSD et KIN présentent une trajectoire du choc-choc proche de la paroi (*cf.* Fig. 6.5 (échelle de droite)). Cette trajectoire est d'autant plus proche que l'angle de la rampe est élevé. Cet aspect a déjà été souligné pour le modèle GSD en section 3.1.5. On constate ici que le modèle KIN réduit la hauteur du front de Mach dans ce cas. L'apparition systématique d'un front de Mach avec les modèles GSD et KIN est une limitation qui pourrait être levée à l'avenir au travers de l'ajout d'un terme de viscosité dans la relation $A - M$, terme d'autant plus actif que le nombre de Mach est faible. Faute de temps, ce développement n'a pas pu être entrepris dans le cadre de cette thèse.

6.2 Comparaison des modèles GSD et Cinématique

Les modèles GSD et KIN sont maintenant comparés au travers d'un panel d'exemples de complexité croissante. Cette étude commence par l'analyse du problème de Riemann, à savoir la diffraction d'un choc plan sur un dièdre convexe (cas continu) et sur un dièdre concave (cas discontinu). Des problèmes plus complexes, tels que la diffraction d'un choc plan sur un merlon ou un cylindre, sont ensuite traités. Le milieu est supposé uniforme et au repos.

6.2.1 Analyse du problème de Riemann

Le problème de Riemann associé aux modèles GSD et KIN correspond à la diffraction d'un choc plan sur un dièdre (*cf.* Fig. 6.6) où une zone de transition sépare deux chocs à vitesse constante. L'étude de ce problème est effectuée en section 3.1.5 pour le modèle GSD et est similaire pour le modèle Cinématique avec la relation $A - M$ correspondante.

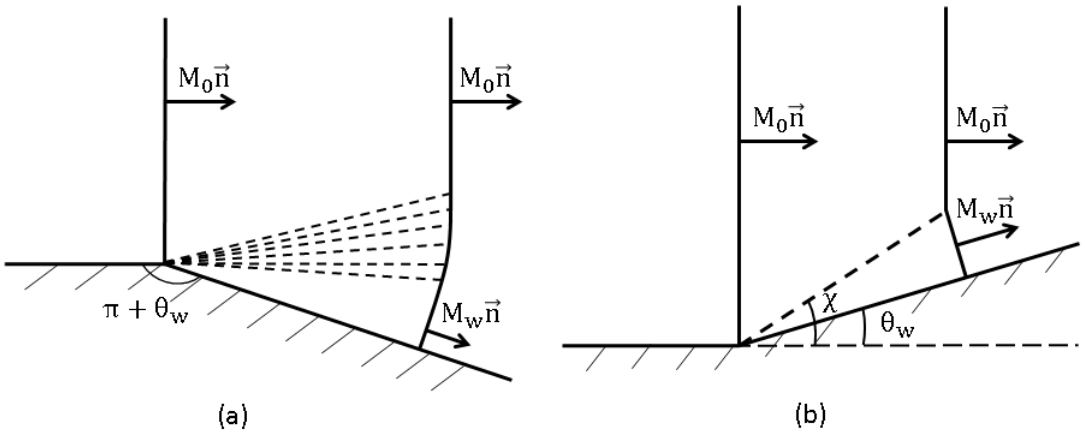


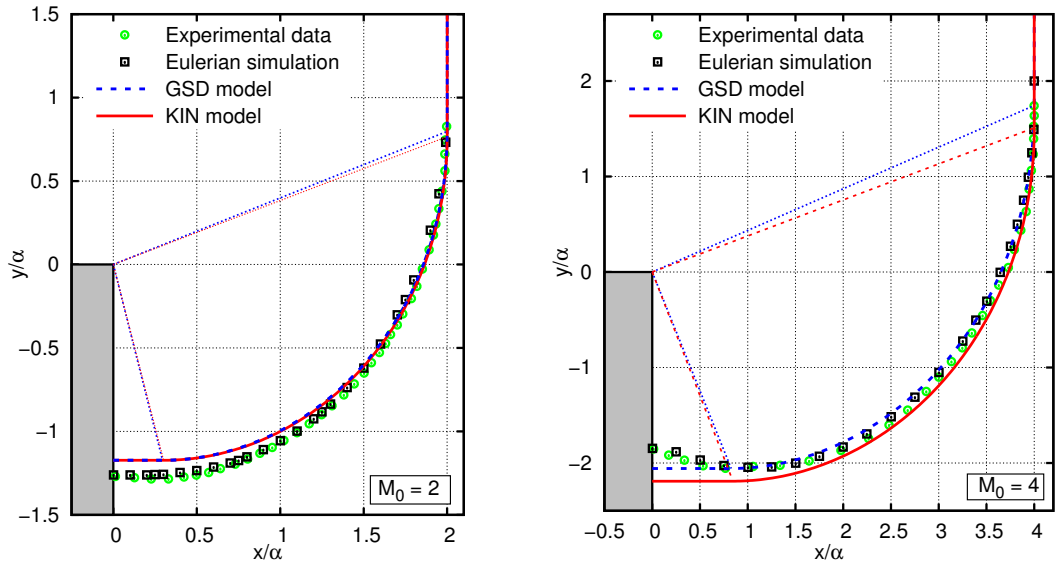
FIGURE 6.6 – Schéma de la diffraction d'un choc plan sur un dièdre. Fig. (a) : Diffraction sur un dièdre convexe. La solution est continue. Fig. (b) : Diffraction sur un dièdre concave. La solution est discontinue (choc-choc).

Diffraction par un dièdre convexe. Considérons la diffraction d'un choc plan d'intensité M_0 sur un dièdre convexe d'angle de déviation $\theta_w < 0$ (*cf.* Fig. 6.6(a)). La solution est une onde simple et est donnée par (3.56).

On présente en figure 6.7 le front de choc après diffraction sur une rampe à $-90°$ pour un nombre de Mach incident, M_0, de 2 et 4. Nous observons le bon accord des modèles GSD et KIN avec les données expérimentales [143] et les données issues de simulations Eulériennes. Les résultats des modèles sont proches pour un choc d'intensité modérée (*cf.* Fig. 6.7(a)). Ils exhibent une différence pour un nombre Mach initial plus élevé, de 4, en figure 6.7(b). Ces observations sont une conséquence de la différence de vitesse des ondes entre les modèles comme souligné en section 6.1.3. Les perturbations des modèles GSD et KIN voyagent à une vitesse similaire pour un nombre de Mach inférieur à 2, ce qui conduit à des solutions proches. Pour un choc fort ($M_0 \geq 2$), les perturbations voyagent moins vite avec le modèle KIN. Le front est alors moins perturbé, impliquant une diminution moins importante de la vitesse du choc. Le front est ainsi surestimé par le modèle KIN par rapport à l'approche de Whitham comme nous pouvons l'observer en figure 6.7(b). De surcroît, un point d'inflexion apparaît au niveau de la paroi sur les données expérimentales et la simulation Eulérienne pour cet exemple. Il se forme lors de l'interaction de l'écoulement arrière avec le choc [11]. De manière similaire au modèle GSD, il n'est pas reproduit par le modèle KIN puisque les effets arrière sont également négligés.

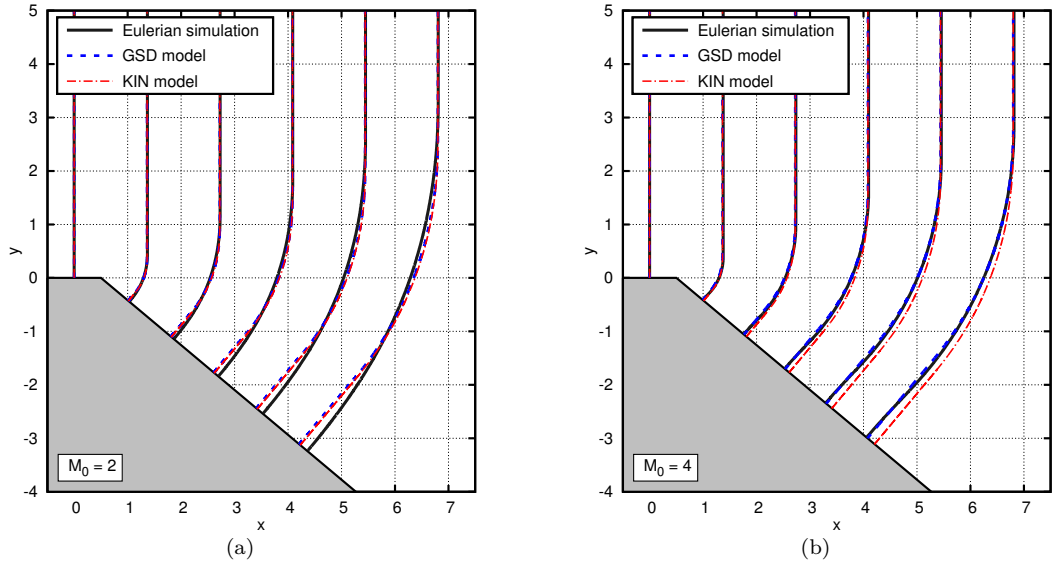
Les conclusions précédentes sont identiques pour la diffraction d'un choc plan sur un dièdre à $-40°$ (*cf.* Fig. 6.8). Aucune donnée expérimentale sur la forme du front n'est disponible pour cet exemple, et seule une comparaison avec des simulations Eulériennes est faite. Le modèle GSD semble légèrement meilleur pour ces cas.

Une étude plus générale de ce problème est présentée en figure 6.9. Nous y traçons le nombre de Mach relevé au niveau de la paroi, M_w, en fonction de l'angle de la rampe θ_w pour différents nombres de Mach initiaux, M_0. Les données expérimentales sont issues de [120]. On constate une nouvelle fois que les deux approches sont similaires pour un nombre de Mach faible



(a) (b)

FIGURE 6.7 – Diffraction d'un choc plan sur un dièdre d'angle $\theta_w = -\frac{\pi}{2}$ $(-90°)$ à $M_0 = 2$ (fig. (a)) et $M_0 = 4$ (fig. (b)). Les droites en pointillées délimitent "l'éventail de la choc-détente". Les données expérimentales sont issues de [143].



(a) (b)

FIGURE 6.8 – Diffraction d'un choc plan sur un dièdre à $\theta_w = -\frac{2\pi}{9}$ $(-40°)$ à $M_0 = 2$ (fig. (a)) et $M_0 = 4$ (fig. (b)). Simulation Eulérienne menée avec un pas $\Delta x = 0.005$ dans les deux directions de l'espace.

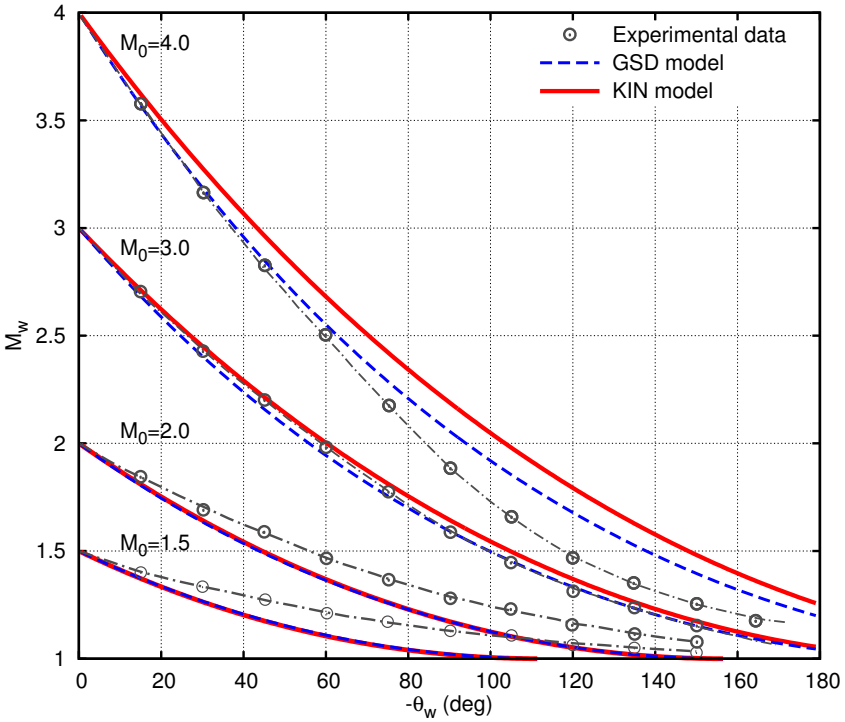
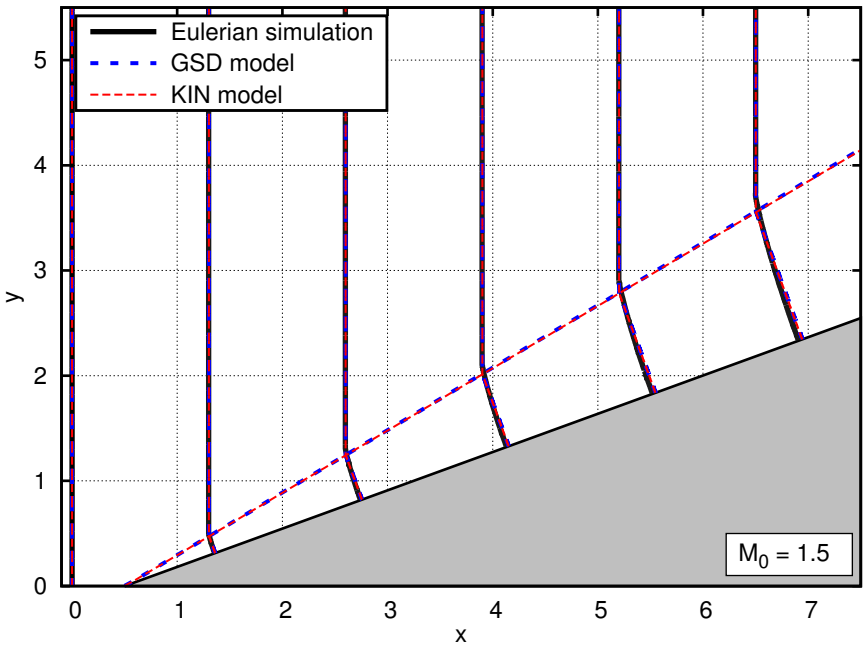


FIGURE 6.9 – Diffraction d'un choc plan sur un dièdre d'angle θ_w à nombre de Mach M_0. Nombre de Mach au niveau de la paroi, M_w, en fonction de θ_w, en degré, pour différents nombres de Mach incidents M_0. Les données expérimentales sont issues de [120].

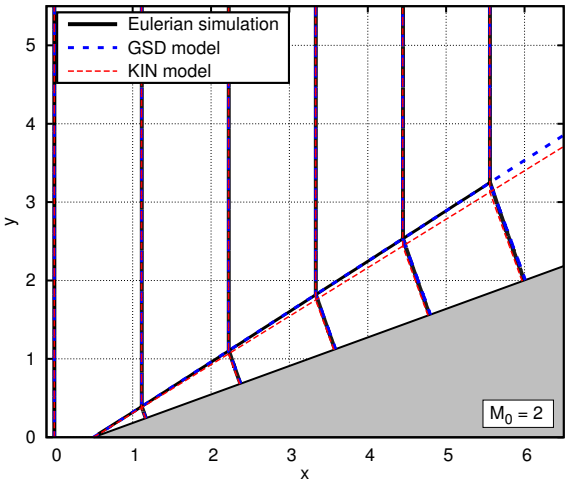
($M_0 = 1.5$ et $M_0 = 2$). Dans ces cas, les résultats sont clairement sous-estimés par rapport à l'expérience. On y observe également la limitation des modèles. En effet, pour $M_0 = 1.5$ et $\theta_w \approx -113.7°$ par exemple, le nombre de Mach à la paroi vaut 1. Il n'y a pas de solution jusqu'à la paroi pour les deux approches lorsque la rampe est plus inclinée : $\theta_w < -113.7°$. Les résultats des deux modèles sont très bons pour $M_0 = 3$ en comparaison aux données expérimentales. Ces données sont néanmoins surestimées pour un nombre de Mach de 4 par le modèle GSD, et surestimées davantage pour le modèle KIN. Le modèle GSD donne là encore de meilleurs résultats pour ce problème.

Diffraction par un dièdre concave. Considérons désormais le cas où une discontinuité apparaît sur le choc (choc-choc). Il s'agit du problème de la diffraction d'un choc plan d'intensité M_0 sur une rampe d'angle $\theta_w > 0$ (*cf.* Fig. 6.6(b)). La solution est alors discontinue et est donnée par (3.62). Rappelons que dans ce cas la solution physique peut donner lieu à une réflexion de von Neumann en choc faible, sans discontinuité de pente entre le choc incident et le front de Mach.

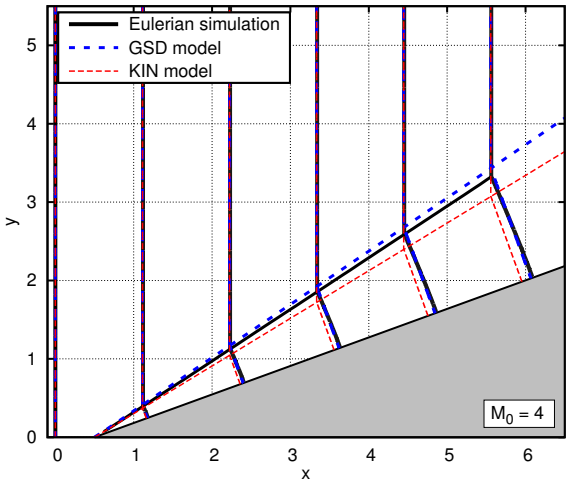
Les positions successives du choc, ainsi que la trajectoire du point triple, sont présentées en figure 6.10 pour une rampe inclinée à 20°, et comparées avec des simulations Eulériennes. Pour un choc faible, $M_0 = 1.5$, les solutions des deux modèles sont confondues (fig. 6.10(a)) en raison de la proximité de la vitesse des ondes des deux approches. Pour ce cas, la simulation Eulérienne montre une transition apparemment régulière entre le front de Mach et le choc incident, sans doute liée à la résolution numérique. Un choc-choc se forme par contre sur le front avec les modèles GSD et Cinématique pour toutes les configurations (M_0, θ_w). En dépit de cela, la position du choc-choc estime correctement cette transition pour ce cas et on note le bon accord avec la simulation Eulérienne. Une différence apparaît entre les modèles à partir



(a)



(b)



(c)

FIGURE 6.10 – Diffraction d'un choc plan sur un dièdre concave d'angle $\theta_w = \frac{\pi}{9}$ (20°) à nombres de Mach 1.5 (fig. (a)), 2 (fig. (b)) et 4 (fig. (c)). Comparaison des positions successives du choc et de la trajectoire du point triple avec des simulations Eulériennes ($\Delta x = 0.005$).

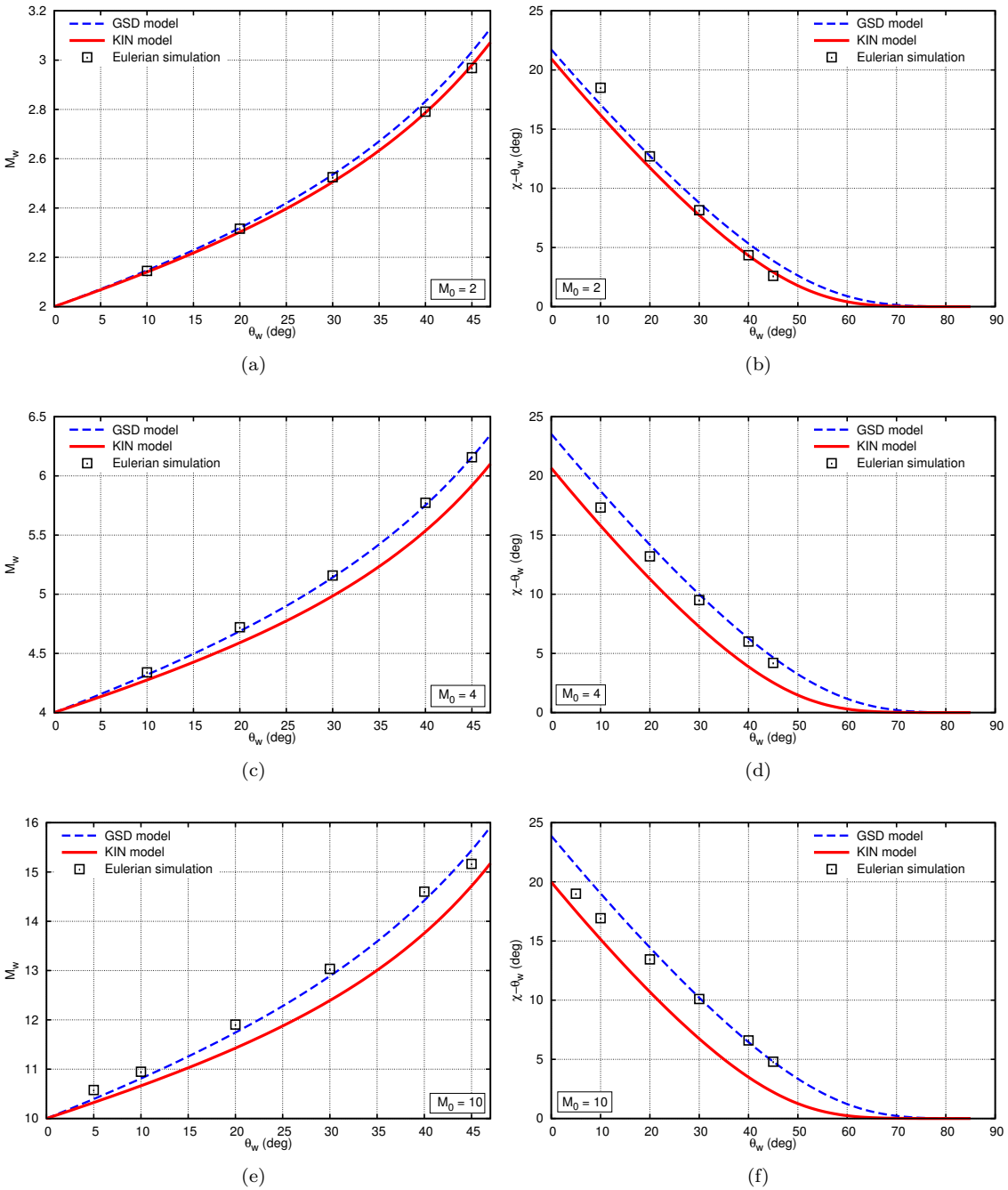


FIGURE 6.11 – Diffraction d'un choc plan à nombre de Mach M_0 sur une rampe d'angle $\theta_w > 0$. Fig. (a), (c) et (e) : Nombre de Mach à la paroi. Fig. (b), (d) et (f) : Angle de la trajectoire du choc-choc par rapport à la rampe.

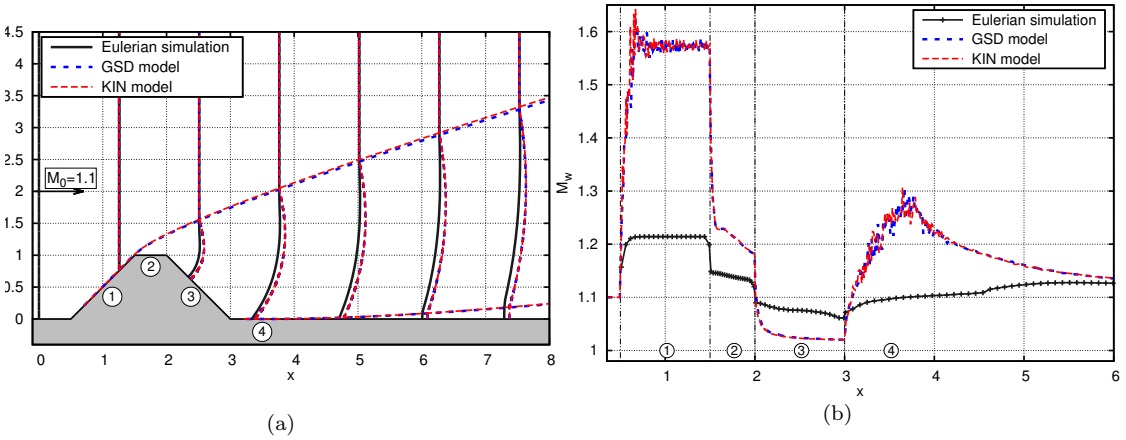
d'un nombre de Mach de 2 (*cf.* Fig. 6.10(b)). Le modèle GSD est confondu avec les résultats de simulations Eulériennes pour cet exemple. Pour un choc fort, $M_0 = 4$ (Fig. 6.10(c)), le modèle GSD reste très proche des simulations Eulériennes tandis que le modèle KIN sous-estime légèrement la position du front ainsi que la trajectoire du point triple de quelques degrés du fait de la différence de la vitesse des ondes des modèles (*cf.* section 6.1.3). En effet, les perturbations voyagent moins rapidement avec le modèle KIN par rapport au modèle GSD. Cette sous-estimation est observable en figure 6.11. On y présente le nombre de Mach au niveau de la paroi, M_w, et l'angle de la trajectoire du choc-choc par rapport à la paroi, $\chi - \theta_w$, en fonction de l'inclinaison de la rampe, θ_w, pour différentes intensités du choc incident. Dans cette étude, la vitesse du front et la trajectoire du choc-choc sont sous-estimées par l'approche cinématique par rapport au modèle de Whitham. Aucune donnée expérimentale n'est reportée pour les cas envisagés. Seuls des résultats de simulations Eulériennes sont considérés, ainsi que la théorie des trois chocs [15] lorsque le choc est fort, comme suggéré par Whitham [143]. Pour un nombre de Mach de 2 (*cf.* Fig. 6.11(a)-(b)), les résultats entre les deux approches sont légèrement différents. On note toutefois le bon accord avec les simulations Eulériennes. La vitesse du front de Mach est clairement mieux estimée par le modèle GSD comme nous pouvons le voir en figures 6.11(c) pour $M_0 = 4$ et 6.11(e) pour $M_0 = 10$. L'estimation de l'angle de la trajectoire du choc-choc semble équivalente pour les deux approches (*cf.* Fig. 6.11(e) pour $M_0 = 4$ et Fig. 6.11(f) pour $M_0 = 10$). Pour un angle faible ($\theta_w < 20°$), le modèle KIN est plus proche des simulations Eulériennes et de la théorie des trois chocs, et pour un angle plus élevé ($\theta_w > 35°$), le modèle GSD semble meilleur. Il faut toutefois relativiser ces écarts. Rappelons que l'objectif est de travailler sur des ondes de souffle pour lesquelles l'intensité décroît rapidement. Pour 1 kg de TNT, on atteint Mach 2 à une distance de seulement 1.59 m du centre de la charge.

6.2.2 Comparaison sur des problèmes complexes

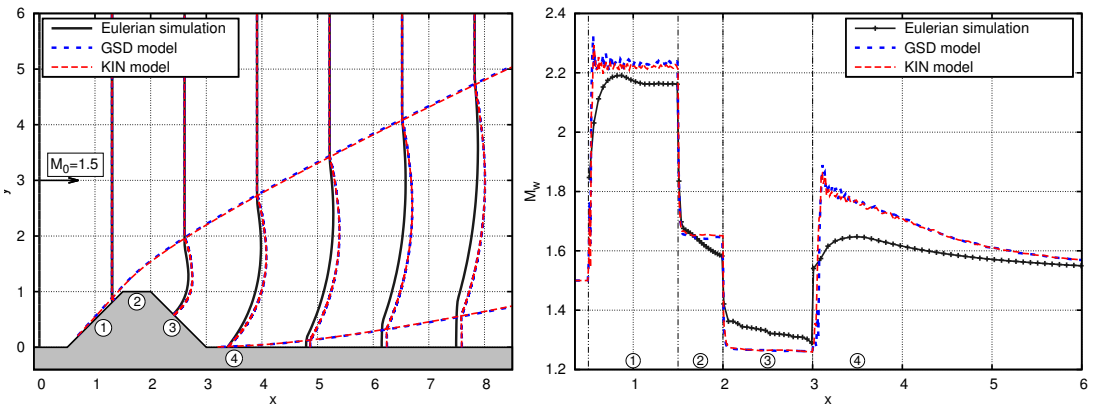
Nous considérons maintenant des problèmes plus complexes de diffraction d'un choc sur un obstacle faisant intervenir la combinaison d'ondes expansives et d'ondes compressives. Cela nécessite l'utilisation de l'algorithme numérique présenté au chapitre 5. Toutes les simulations ont été menées avec un pas de discrétisation, Δs, de 0.00125, pour lequel la convergence en maillage a été préalablement vérifiée. Sauf mention contraire, les simulations Eulériennes ont été effectuées pour un pas de discrétisation $\Delta x = 0.0025$ dans les deux directions de l'espace. Pour l'ensemble des cas, le choc initial est plan et se propage de la gauche vers la droite. Une condition de symétrie (sol) est appliquée sur l'axe (Ox), les bords sont libres ailleurs.

Diffraction sur un merlon. Considérons pour commencer la diffraction d'un choc plan à nombre de Mach M_0 sur un merlon. Ce cas est inspiré de ceux expérimentés pour une source explosive dans la thèse de S. Éveillard [41]. Pour ce cas, deux choc-chocs apparaissent sur le front pendant sa propagation. Le premier, lors de l'interaction avec la face avant de l'obstacle, le second, quand le choc touche le sol à l'arrière du merlon. Entre la formation de ces deux discontinuités, deux ondes expansives se développent sur le front lors de la diffraction sur le sommet et la face arrière du merlon. Ces ondes se combinent, faisant évoluer la forme et l'intensité de la surface de choc. Les différentes faces de la géométrie sont numérotées de 1, pour la face avant, à 4, pour le sol à l'arrière de ce dernier. Les résultats pour des nombres de Mach incident de 1.1, 1.5, 2 et 4 sont présentés [2] en figure 6.12. Pour un choc faible, $M_0 = 1.1$ et $M_0 = 1.5$, les deux modèles sont confondus comme nous pouvons le constater en figures 6.12(a)-(d), et surestiment légèrement la position du front. La réflexion est théoriquement régulière pour la diffraction du choc à nombre de Mach 1.1 sur une rampe inclinée à 45°. Les modèles GSD et KIN créent cependant un front de Mach, impliquant une surestimation très importante du nombre de Mach à la paroi sur la face avant du merlon (face 1) en comparaison à

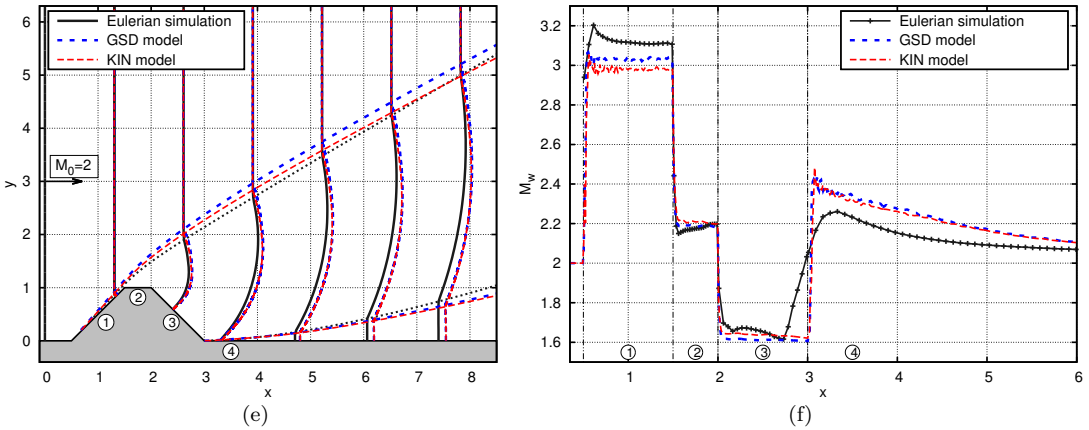
2. Pour le cas $M_0 = 1.1$, le critère d'extraction des données de simulations Eulériennes est : $\frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} \geq 0.05$.


Eulerian simulation
GSD model
KIN model
M0=1.1
x
Mw

(a) (b)


Eulerian simulation
GSD model
KIN model
M0=1.5
x
Mw

(c) (d)


Eulerian simulation
GSD model
KIN model
M0=2
x
Mw

(e) (f)

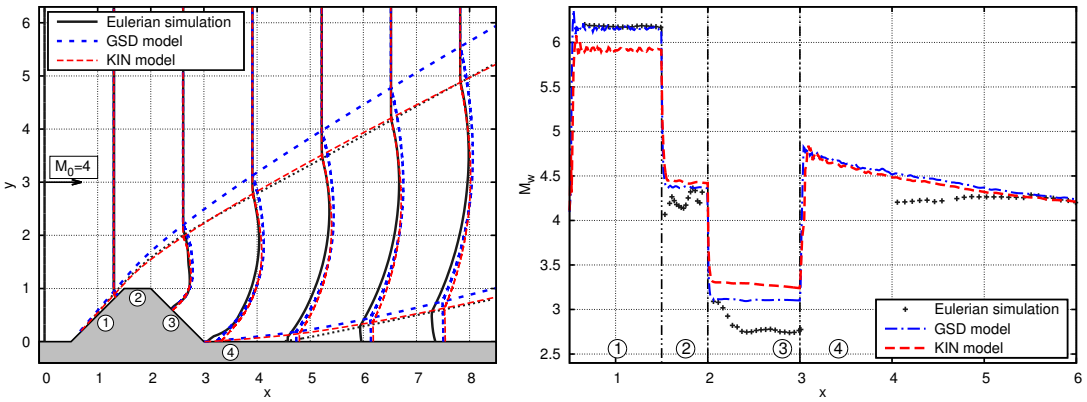


FIGURE 6.12 – Diffraction d'un choc plan sur un merlon à différents nombres de Mach. Le choc se propage de la gauche vers la droite. Fig. (a), (c), (e), (g) : Positions successives du choc et trajectoires du point triple. Fig. (b), (d), (f), (h) : Nombre de Mach à la paroi. Simulation menée avec l'algorithme Lagrangien : $\Delta s = 0.00125$, simulation Eulérienne : $\Delta x = 0.0025$ pour $M_0 = 1.1,\ 1.5,$ et 2, $\Delta x = 0.00125$ pour $M_0 = 4$.

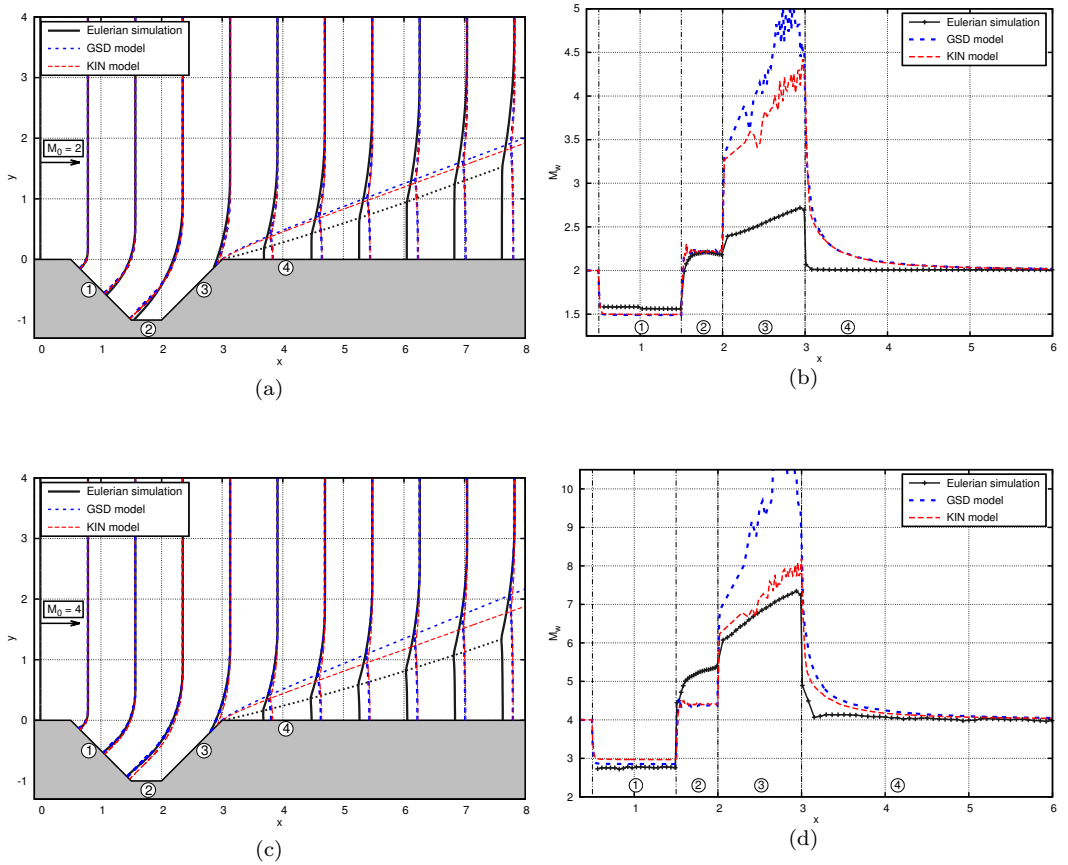


FIGURE 6.13 – Diffraction d'un choc plan sur une cuvette à nombres de Mach 2 et 4. Le choc se propage de la gauche vers la droite. Fig. (a) et (c) : Positions successives du choc et trajectoires du point triple. Fig. (b) et (d) : Nombre de Mach à la paroi. Simulation menée avec l'algorithme Lagrangien : $\Delta s = 0.00125$, simulation Eulérienne : $\Delta x = 0.0025$.

la simulation Eulérienne, figure 6.12(b). Les détentes successives sur le sommet et la face arrière du merlon (faces 2 et 3) diminuent ensuite la valeur de M_w, donnée par les modèles GSD et KIN, jusqu'à une valeur inférieure à celle obtenue par la simulation Eulérienne. La réflexion sur la quatrième face est encore une fois régulière théoriquement, et les modèles surestiment M_w. L'expansion géométrique du front diminue ensuite l'intensité du choc, et semble faire tendre M_w vers la valeur calculée par la simulation Eulérienne. Le nombre de Mach à la paroi est mieux estimé pour un choc plus fort (*cf.* Fig. 6.12(d) et 6.12(f)).

Une différence entre les modèles GSD et KIN apparaît pour un nombre de Mach incident de 2, figures 6.12(e)-(f). Pour ce cas, la position du front est encore une fois surestimée par les deux modèles comparativement à la simulation Eulérienne, et le premier point triple est mieux estimé par le modèle KIN. Pour un choc fort, $M_0 = 4$, le front de choc calculé par les simulations Eulériennes est beaucoup plus perturbé (*cf.* Fig. 6.12(g)-(h)) en raison de l'influence de l'écoulement arrière sur le front. Pour ce cas, une double réflexion de Mach se produit sur la face avant du merlon (*cf.* Fig. 1.16). Le pas de discrétisation doit être plus petit ici afin de capturer correctement le phénomène, et est pris égal à 0.00125. On note l'apparition d'un point d'inflexion sur le choc à l'arrière du merlon sur la simulation Eulérienne. Sur cet exemple, la position du point triple calculée par le modèle KIN est plus proche de la simulation Eulérienne (*cf.* Fig. 6.12(g)). En dépit de cela, le nombre de Mach à la paroi est mieux estimé par le modèle GSD (*cf.* Fig. 6.12(h)).

Les deux modèles surestiment globalement la position du front. De plus, même si le modèle KIN semble mieux estimer la trajectoire du point triple, en comparaison aux simulations Eulériennes, il s'agit en fait d'une compensation d'erreur.

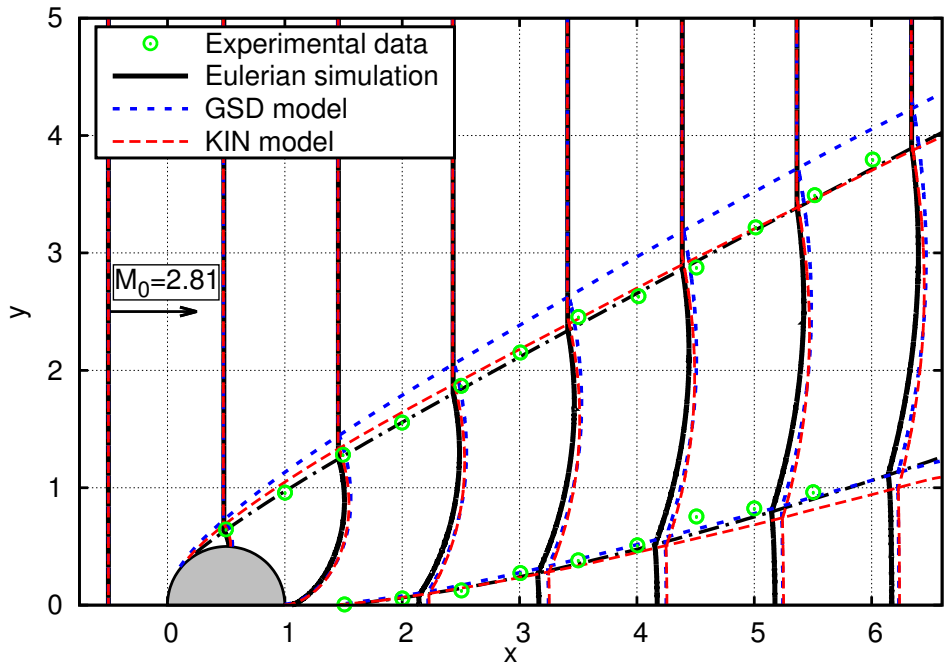
Diffraction sur une cuvette. Comme deuxième exemple d'étude, nous proposons la diffraction d'un choc plan sur une cuvette. Il s'agit là du problème miroir au précédent : le choc est ici successivement expansif, compressif et expansif, et l'on peut observer un seul choc-choc.

Les modèles GSD et KIN sont une nouvelle fois comparés à des simulations Eulériennes pour un nombre de Mach incident de 2 et 4 en figure 6.13. On observe là encore une surestimation de la position du choc ainsi que de la trajectoire du point triple par les deux modèles. Le modèle KIN est légèrement meilleur pour cette configuration particulière, mais affiche des différences importantes avec la simulation Eulérienne.

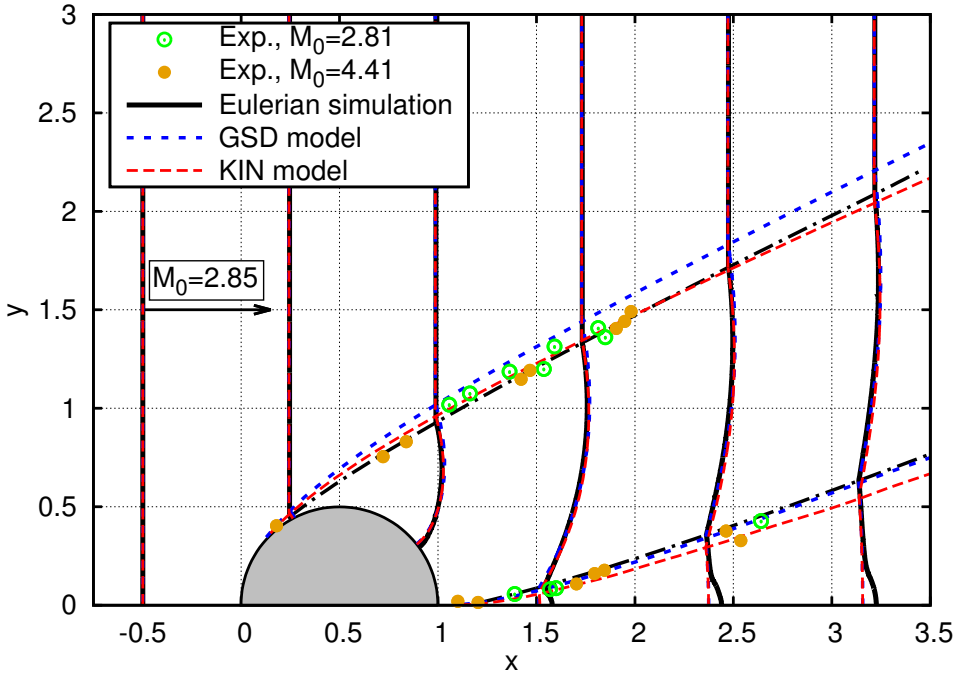
Diffraction sur un cylindre et une sphère. Considérons la diffraction d'un choc plan sur un cylindre à nombre de Mach 2.81. Ce problème s'apparente à la diffraction d'un choc plan sur un merlon. En effet, un premier choc-choc se forme lorsque le choc interagit avec l'obstacle, suivi d'une onde de détente et d'un second choc-choc lors de la diffraction sur le sol à l'arrière de l'obstacle. Les positions successives du choc et les trajectoires des points triples sont présentées en figure 6.14(a). On note l'excellent accord du modèle KIN avec les données expérimentales et les données issues d'une simulation Eulérienne. La figure 6.14(b) présente les résultats pour la diffraction sur une sphère à nombre de Mach 2.85. Pour ce cas, le problème 2D axisymétrique est considéré. Les deux modèles estiment correctement la position des points triples ainsi que la position du front par rapport aux données expérimentales [143] et à la simulation Eulérienne. On note ici que les données expérimentales sont proches pour un nombre de Mach incident de 2.85 et 4.41 comme souligné par Henshaw *et al.* [56]. Sur cet exemple, le front de Mach est fortement perturbé par l'écoulement arrière comme nous pouvons le voir sur la simulation Eulérienne.

6.2.3 Synthèse

L'étude du problème de Riemann montre que le modèle GSD est plus précis que le modèle Cinématique lorsqu'une seule onde est en jeu dans le problème, à savoir une onde de détente ou une onde compressive. Le modèle GSD est en effet plus proche des données expérimentales et



(a)



(b)

FIGURE 6.14 – Diffraction d'un choc plan sur un cylindre à nombre de Mach 2.81 (fig. (a)) et sur une sphère à nombre de Mach 2.85 (fig. (b)) (simulation 2D axisymétrique). Le choc se propage de la gauche vers la droite. Comparaison de la trajectoire du point triple des modèles GSD et KIN avec des données expérimentales issues de [143] et des simulations Eulériennes. Simulation menée avec l'algorithme Lagrangien : $\Delta s = 0.00125$, simulation Eulérienne : $\Delta x = 0.0025$.

des simulations Eulériennes sur l'ensemble de cette étude. Le modèle est bon mais pas parfait. Il surestime le front lorsque le choc est expansif et estime correctement la vitesse du front de Mach lors de la formation du choc-choc.

En dépit de cela, sur l'ensemble des configurations testées, le modèle KIN s'avère légèrement plus précis pour des problèmes complexes combinant ces deux types d'ondes. Cela est principalement dû à la compensation des erreurs dans ce modèle. Dans les régions expansives du choc, la position du front est davantage surestimée par l'approche KIN que par le modèle GSD. Lorsque le choc est compressif, la vitesse du choc-choc est sous-estimée par le modèle KIN par rapport à l'approche de Whitham, impliquant un front de Mach plus lent. Cette surestimation de l'onde de détente d'une part et cette sous-estimation de la discontinuité d'autre part tendent finalement à se compenser dans le modèle KIN pour les cas testés ici. Le modèle GSD, quant à lui, a tendance à surestimer le développement de ces deux types d'ondes. Il donne cependant de meilleurs résultats que le modèle KIN sur les cas élémentaires, ce qui est plus rassurant pour des configurations quelconques.

6.3 Conclusion

Le modèle KIN est un modèle alternatif au modèle GSD pour le problème de la propagation d'une onde de choc. Contrairement à l'approche de Whitham, celui-ci autorise la prise en compte de l'écoulement transversal au front, et aucune hypothèse sur l'intensité du choc n'est nécessaire. En effet, les effets arrière peuvent être négligés dans ce modèle sous l'hypothèse d'une onde de choc soutenue (pas de détente arrière). Ces propriétés font du modèle Cinématique un candidat alternatif intéressant pour l'approximation de la propagation d'une onde de choc.

Ce chapitre expose une comparaison détaillée de ces deux approches, principalement pour un milieu homogène et au repos. Les deux modèles s'avèrent strictement équivalents dans la limite des chocs faibles, mais donnent des solutions différentes pour des chocs d'intensité plus forte. Au vu de l'étude menée dans ce chapitre, l'estimation par les modèles GSD et KIN de la propagation d'une onde de choc soutenue est globalement similaire. Tantôt les résultats apportés par l'approche GSD seront meilleurs, tantôt ceux donnés par la vision cinématique seront plus précis. Le modèle KIN est ainsi une approche complémentaire au modèle GSD. Considérant sa simplicité, les résultats sont corrects et du même ordre de précision que ceux du modèle de Whitham.

Cette étude permet une meilleure compréhension du modèle GSD et de l'influence du choix de la relation $A - M$. Cette dernière pilote l'évolution de la vitesse des perturbations sur le front, responsables de la modification de l'intensité, de la forme et de l'orientation du choc.

Les deux approches souffrent d'une limitation similaire pour le problème de la diffraction d'un choc faible sur un dièdre convexe. Étant donné la différence fondamentale intervenant dans la dérivation de ces deux modèles, il semble que cette limitation soit intrinsèque à la méthode. En conséquence, en nous fondant sur l'expérience acquise par l'étude du modèle KIN, nous proposons une modification des modèles GSD et KIN dans le prochain chapitre.

Chapitre 7

Prise en compte de l'écoulement transverse au choc dans les modèles GSD et KIN

Sommaire

7.1 Loi empirique de décroissance du nombre de Mach dans le faisceau de détente 164
7.2 Prise en compte de l'écoulement transverse 169
7.3 Intégration dans l'algorithme Lagrangien 174
7.3.1 Intégration de la relation $A - M$ avec terme transverse 174
7.3.2 Estimation de la courbure locale du front 175
7.3.3 Synthèse et convergence en maillage 179
7.4 Résultats et discussion 183
7.4.1 Problème élémentaire de diffraction sur un dièdre convexe 183
7.4.2 Combinaison d'ondes expansives 187
7.4.3 Diffraction sur un merlon 187
7.4.4 Limitation des modèles 191
7.5 Conclusion 193

L'ensemble de l'étude menée dans les chapitres précédents témoigne de l'efficacité des modèles Geometrical Shock Dynamics (GSD) et Cinématique (KIN) à estimer correctement l'évolution d'une onde de choc soutenue (pas de détente arrière) en interaction avec des obstacles rigides. Ces modèles sont toutefois mis en défaut dans le cas d'un choc expansif comme il a été discuté en sections 3.1.5 et 6.1. L'étude du problème élémentaire de diffraction d'un choc plan sur une rampe convexe met en évidence que pour un nombre de Mach incident donné M_0, inférieur à 2.35 environ, la solution n'existe plus au-delà d'un angle limite d'inclinaison de la rampe $\theta_w < \theta_{lim}(M_0)$. Le choc dégénère en une onde acoustique pour les modèles.

Skews [120] démontre expérimentalement que contrairement à la prédiction de la théorie de Whitham, l'onde de choc diffractée ne dégénère pas en une onde acoustique, et cela même pour une intensité initiale faible ($M_0 = 1.2$) et un angle de diffraction important (θ_w jusqu'à $-165°$). Plusieurs auteurs ont proposé des modifications du modèle GSD afin de lever cette limitation. Oshima [90, 91] introduit un terme de cisaillement transverse dans l'équation de la tuyère 1D, menant à une relation $A - M$ modifiée. Le terme de viscosité est alors fermé par une hypothèse de type longueur de mélange par analogie à un modèle de turbulence. Une

meilleure estimation du nombre de Mach à la paroi est alors observée pour M_0 allant de 1.5 à 2.8, mais cette correction se limite à des considérations purement théoriques. Bazhenova [12] propose une modification de la condition aux limites dans le modèle GSD en n'assimilant plus la paroi à un rayon. L'onde de détente se poursuit alors jusqu'à cette dernière amenant à une éventuelle réflexion du choc. Cela aboutit potentiellement à l'apparition d'un point triple, correspondant au point d'inflexion que l'on observe expérimentalement. Le nombre de Mach au niveau du mur et la forme du choc sont évalués à l'aide de considérations géométriques. Cette modification donne de meilleurs résultats que la méthode de Whitham conventionnelle, mais diffère énormément de l'expérience pour un angle inférieur à $-40°$. Enfin, Best [20, 21] étend le modèle GSD à la prise en compte de l'écoulement à l'arrière du choc. Lors d'une détente à fort nombre de Mach, le point d'inflexion au voisinage de la paroi est alors restitué dans ce modèle, mais il s'avère que le nombre de Mach à la paroi est davantage sous-estimé. Cet aspect sera discuté plus en détail au chapitre 9.

Ces différentes études montrent que la modification de la relation $A - M$ est essentielle à l'amélioration des modèles simplifiés. Les différentes corrections apportées à ce jour semblent toutefois incapables de restituer systématiquement la solution au problème de la diffraction sur une rampe convexe.

Bien que les modèles GSD et KIN découlent de deux visions différentes, ils ont le même comportement en choc faible ainsi qu'une limitation similaire. limite d'inclinaison de la rampe est sensiblement le même, de l'ordre du dixième de degré au maximum. Il semble donc que le problème de diffraction découle d'une hypothèse commune à la dérivation des deux approches. Tout comme Oshima [90, 91], nous proposons de prendre en compte les forces de cisaillement qui pourraient exister entre les tubes de rayon. Mais contrairement à cet auteur qui les modélise par une viscosité turbulente, nous choisissons une fermeture plus pragmatique basée sur l'observation expérimentale.

Ici, les forces de cisaillement sont modélisées par la variation du nombre de Mach le long du choc dans la relation $A - M$. Cette contribution est naturellement prise en compte dans le modèle Cinématique, mais n'apparaît qu'à partir de l'ordre 1 de troncature du système. Néanmoins, celui-ci est instable comme nous le verrons au chapitre 9.

La correction de la relation $A - M$ que nous apportons est plus simple que celle d'Oshima, de Best ou l'extension à l'ordre 1 du modèle Cinématique, et plus naturelle que celle proposée par Bazhenova. Elle est basée sur une modification du faisceau de détente du choc expansif. Pour cela, nous établissons une loi empirique pour la détente d'un choc autour d'un coin dans la première section. Cette loi servira ensuite à la modélisation de l'écoulement transversal au choc dans la deuxième section. La relation $A - M$ revisitée nécessite une légère modification de l'algorithme Lagrangien. Ce point sera abordé dans la troisième section de ce chapitre, suivi d'une présentation des résultats obtenus.

7.1 Loi empirique de décroissance du nombre de Mach dans le faisceau de détente

Dans cette section, nous définissons une loi simple de décroissance du nombre de Mach le long d'un choc expansif. Cette loi est basée sur l'étude expérimentale menée par Skews [120], ainsi que l'hypothèse que la solution du problème de la diffraction d'un choc plan sur un dièdre convexe est auto-semblable.

Lorsqu'un choc plan, de nombre de Mach M_0 et de direction initiale $\theta_0 = 0$, se diffracte sur une rampe convexe d'angle $\theta_w < 0$, les modèles GSD et KIN prévoient une solution auto-semblable. Le front se décompose alors en trois parties (*cf.* schéma 7.1) :

- une partie non perturbée correspondant au choc incident ;

- une partie plane orthogonale à la paroi, de nombre de Mach constant M_w ;
- et une zone de transition continue entre les deux, liée au faisceau de détente.

Le nombre de Mach décroît alors le long du choc de M_0, valeur incidente, à M_w, valeur au niveau de la paroi. Le faisceau d'ondes de raréfaction prend son origine au coin de la rampe. Sur chaque caractéristique C^+ du faisceau, le nombre de Mach, M, et l'angle du rayon, θ, vérifient la relation différentielle suivante (*cf.* section 3.1.5) :

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\alpha} = \sqrt{\frac{\lambda(M)}{M^2-1}}\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}\alpha} \quad \text{sur } C^+ : \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \tan(\theta+\nu), \tag{7.1}$$

avec $\tan(\nu) = \dfrac{1}{M}\sqrt{\dfrac{M^2-1}{\lambda(M)}}$. On rappelle que $\lambda = \lambda_W$ pour le modèle GSD et $\lambda = \lambda_K$ pour le modèle KIN, avec :

$$\lambda_W(M) = \left(1 + \frac{2}{\gamma+1}\frac{1-\mu(M)^2}{\mu(M)}\right)\left(1 + 2\mu(M) + \frac{1}{M^2}\right) \tag{7.2a}$$

$$\mu(M) = \sqrt{\frac{(\gamma-1)M^2+2}{2\gamma M^2+1-\gamma}} \tag{7.2b}$$

$$\lambda_K(M) = \frac{(\gamma+1)\{2(2\gamma-1)M^4+(\gamma+5)M^2+1-\gamma\}}{(2\gamma M^2+1-\gamma)\{2+(\gamma-1)M^2\}}. \tag{7.2c}$$

En intégrant la relation (7.1) depuis l'instant initial, où $\theta = \theta_0 = 0$ et $M = M_0$, une relation simple relie M à θ sur chaque caractéristique :

$$\theta - \theta_0 = \int_{M_0}^{M} \sqrt{\frac{\lambda(m)}{m^2-1}}\mathrm{d}m.$$

En particulier, puisque $\theta_w - \theta_0$ est connu, le nombre de Mach au niveau de la paroi, M_w, est

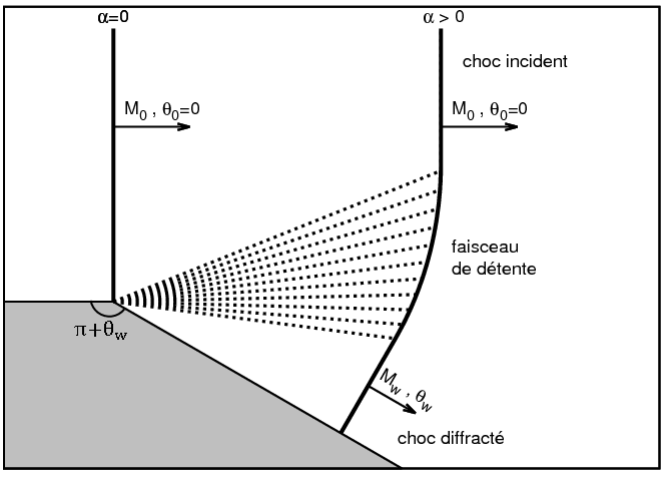


FIGURE 7.1 – Schéma de la diffraction d'un choc plan sur un dièdre convexe.

calculé via la relation sur la dernière caractéristique :

$$\int_{M_0}^{M_w} \sqrt{\frac{\lambda(m)}{m^2-1}}\mathrm{d}m = \theta_w - \theta_0 < 0.$$

Maintenant, puisque $M_w \geq 1$ pour un choc et que cette intégrale est bien définie au voisinage de $M = 1$, on en déduit que, pour un nombre de Mach M_0 donné, l'angle d'inclinaison de la rampe θ_w ne peut pas excéder une valeur limite. On peut observer cette limitation sur la figure 7.2. Pour un nombre de Mach incident de 1.5 par exemple, la solution au problème, pour les deux modèles, existe jusqu'à un angle de déviation d'environ $-113.7°$. Passé cet angle limite, $M_w < 1$ et la solution est rejetée. On note que les valeurs expérimentales du nombre de Mach à la paroi [120] sont toutes supérieures à 1. En fait, comme discuté en introduction, l'onde de choc diffractée ne dégénère pas en une onde acoustique même pour une intensité initiale faible ($M_0 = 1.2$) et un angle de diffraction important (θ_w jusqu'à $-165°$).

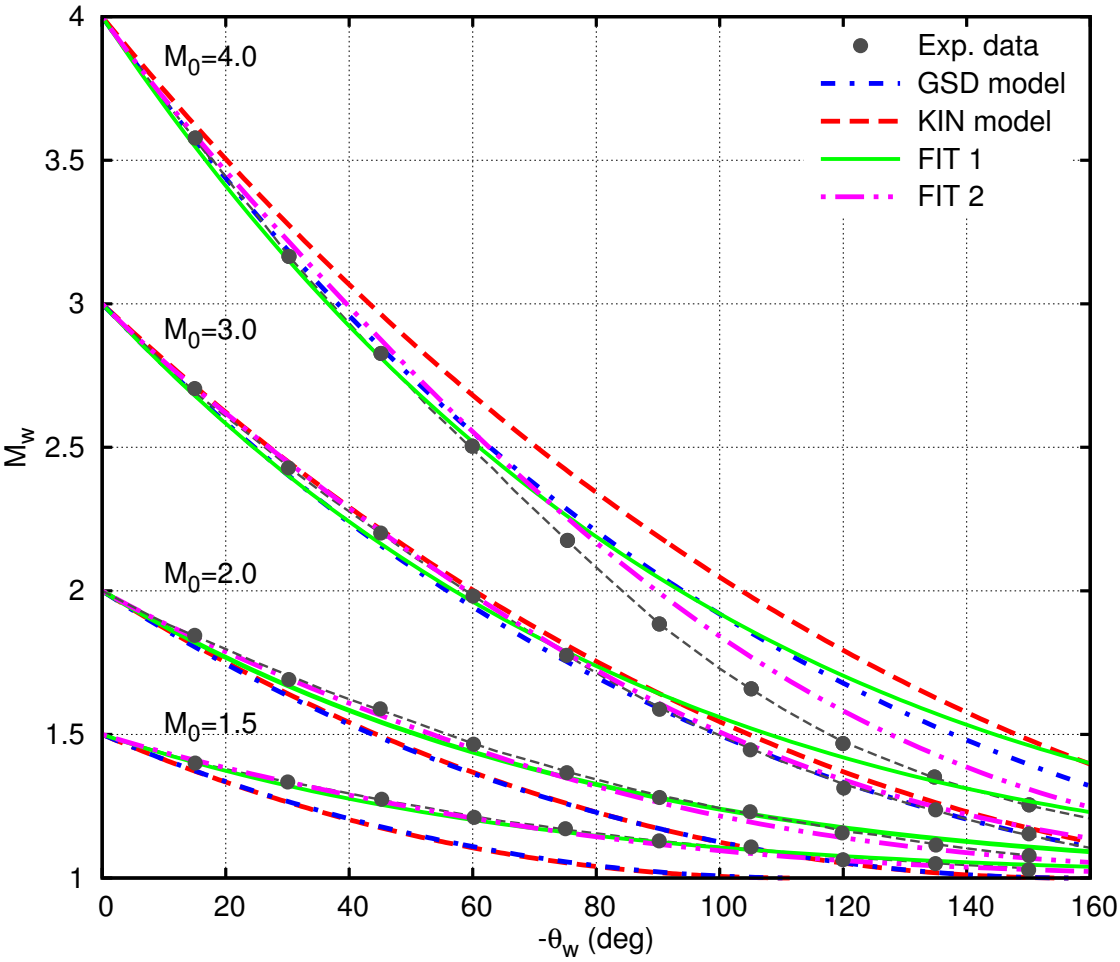


FIGURE 7.2 – Diffraction d'un choc plan de nombre de Mach M_0 sur un dièdre convexe d'angle $\theta_w < 0$. Nombre de Mach au niveau de la paroi après diffraction, M_w, pour différents angles de déviation θ_w (en degré) et différents nombres de Mach incidents M_0.

Pour un angle de rampe donné, les relevés expérimentaux [120], présentés en figure 7.2,

peuvent être regroupés le long de courbes, partant du point $(M_0, M_w) = (1, 1)$, ayant pour expression :

$$\frac{M_w^n - 1}{M_0^n - 1} = p\left(\theta_w\right), \quad \theta_w \text{ exprimé en rad},$$

pour $n > 0$. En pratique, les données expérimentales sont bien décrites pour $n = 2$, *cf.* Fig. 7.3(a), soit

$$\frac{M_w^2 - 1}{M_0^2 - 1} = p\left(\theta_w\right), \tag{7.3}$$

s'écrivant aussi

$$M_w\left(\theta_w, M_0\right) = \sqrt{1 + p\left(\theta_w\right)\left(M_0^2 - 1\right)}. \tag{7.4}$$

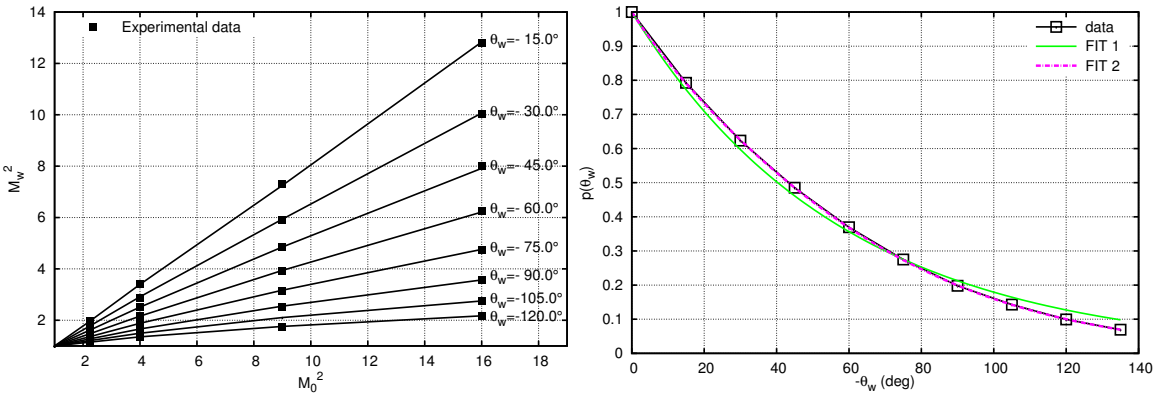
La pente moyenne, $p\left(\theta_w\right)$, est tracée en figure 7.3(b). Une expression analytique de p est obtenue à partir d'une régression non-linéaire. Pour un angle de rampe nul, le nombre de Mach ne subit pas de changement : $M_w = M_0$. On impose donc à p de vérifier $p(0) = 1$. Une expression simple de p consiste à définir une variation exponentielle de la pente par rapport à θ_w (en rad) :

$$p\left(\theta_w\right) = \exp\left(k\theta_w\right), \qquad \text{avec } k = 0.984943. \tag{7.5}$$

Cette expression, nommée FIT 1, conduit à une légère différence avec les pentes calculées (*cf.* Fig. 7.3(b)). Une sophistication, que l'on note FIT 2, s'exprime comme :

$$p\left(\theta_w\right) = \exp\left(a_1\theta_w\right)\left(a_2\theta_w^2 - a_3\theta_w + 1\right), \tag{7.6}$$

avec a_1=2.033, a_2=0.861 et a_3=1.102. Ces fonctions sont établies pour M_0 allant de 1.5 à 4 et $-140° \leq \theta_w \leq 0$, mais appliquées à tout $\theta_w \leq 0$ et $M_0 \geq 1$ en pratique. On observe globalement une bonne restitution des données expérimentales, avec une surestimation en choc fort et une inclinaison de rampe importante ($M_0 = 3$, $M_0 = 4$ et $\theta_w < -80°$). Bien que le FIT 2 estime mieux les données expérimentales, le FIT 1 sera retenue en pratique car plus facile à manipuler mathématiquement, comme expliqué ci-après (*cf.* remarque 7.2).



(a) (b)

FIGURE 7.3 – Fig. (a) : M_w^2 en fonction de M_0^2 issues des données expérimentales de Skews [120]. Fig. (b) : Pente $p(\theta_w)$ des courbes $M_w^2 - 1 = p(\theta_w)(M_0^2 - 1)$.

Du point de vue du modèle, il est souhaitable que le nombre de Mach au niveau de la paroi, et *a fortiori* sur la dernière caractéristique du faisceau de détente, vérifie la loi (7.4), avec l'expression (7.5) ou (7.6). Puisque la solution du problème est auto-semblable, alors à

un nombre de Mach donné M_0, le profil du front de choc à l'instant α décrit une portion de la même courbe pour les différents angles de diffraction (*cf.* Fig. 7.4). Les solutions pour divers angles θ_w partagent ainsi le même faisceau d'ondes de raréfaction. On impose donc que la relation (7.4) soit vérifiée sur chaque caractéristique C^+ :

$$M\left(\theta, M_0\right) = \sqrt{1 + p\left(\theta\right)\left(M_0^2 - 1\right)}. \tag{7.7}$$

Cette expression se réécrit sous la forme intégrale suivante :

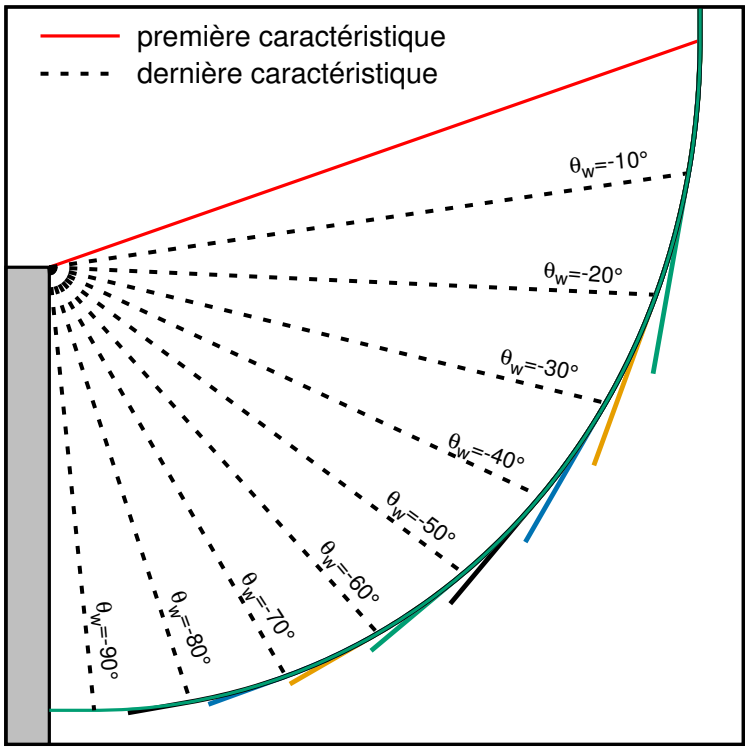


FIGURE 7.4 – Diffraction d'un choc plan à nombre de Mach $M_0 = 1.5$ sur une rampe convexe. Présentation de la forme du front de choc, obtenu pour le modèle GSD, pour différentes inclinaisons de la rampe, θ_w. On rappelle que la solution du problème est auto-semblable.

$$\int_{M_0}^{M} \frac{2m}{m^2 - 1}\mathrm{d}m = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{p'\left(s\right)}{p\left(s\right)}\mathrm{d}s,$$

ou de manière équivalente sous la forme d'une relation différentielle reliant θ et M, valable sur le faisceau de détente :

$$\boxed{\frac{2M}{M^2 - 1}\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}\alpha} = \frac{p'\left(\theta\right)}{p\left(\theta\right)}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\alpha} \quad \text{sur } C^+.} \tag{7.8}$$

Pour les fonctions introduites précédemment, cette formulation s'écrit

$$\frac{2M}{M^2 - 1}\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}\alpha} = k\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\alpha} \quad \text{sur } C^+, \tag{7.9}$$

avec le FIT 1 (7.5), et

$$\frac{2M}{M^2-1}\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}\alpha} = \frac{a_1a_2\theta^2 + (2a_2 - a_1a_3)\theta + a_1 - a_3}{a_2\theta^2 - a_3\theta + 1}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\alpha} \quad \text{sur } C^+, \tag{7.10}$$

avec le FIT 2 (7.6). Ces lois sont définies pour $1.5 \leq M_0 \leq 4$ et $-140.0° \leq \theta_w \leq 0$, mais nous supposerons en pratique qu'elles s'étendent pour une gamme plus large : $-180.0° \leq \theta_w \leq 0$ et $M_{min} \leq M_0$, avec $M_{min} > 1$ à déterminer. Ce point sera discuté en section 7.4.

7.2 Prise en compte de l'écoulement transverse

Oshima [91] a étudié de manière approfondie différentes extensions de la relation $A - M$ de Whitham. Il en ressort que toutes ces modifications, basées sur l'analyse d'un écoulement 1D, sont incapables de reproduire le comportement observé expérimentalement pour le problème de la diffraction d'un choc faible sur une rampe convexe (*cf.* Fig. 7.2). L'auteur en conclut que l'atténuation plus faible du choc diffracté pourrait être causée par l'interaction des tubes de rayon entre eux et dont le tourbillon attaché au coin serait une sorte de trace. Il propose donc une correction de la relation $A - M$ en prenant en compte les forces de cisaillement dans les équations d'Euler sur la tuyère, avec une fermeture de type viscosité turbulente. Bien qu'il n'y ait aucune raison physique permettant de justifier cette approche, l'écart entre la théorie et l'expérience est réduit. Ce même auteur propose une dérivation différente dans [90] sans autre hypothèse que celle de communication entre les tubes de rayon. La relation $A - M$ modifiée obtenue est complexe à résoudre et requiert une étude détaillée.

L'interaction entre les tubes de rayon voisins se traduit par la prise en compte de la variation transversale du nombre de Mach dans la relation $A - M$. Puisque le modèle Cinématique n'est pas basé sur un découpage du front de choc en tubes de rayon, celui-ci est naturellement considéré dans le système à l'ordre 1 de troncature (équation supplémentaire sur l'écoulement arrière). Seulement, l'instabilité naturelle du modèle, expliquée au chapitre 9, rend impossible une estimation correcte de l'évolution du front de choc avec cette extension. À l'ordre 0 de troncature du système (*cf.* chapitre 4), et sous l'hypothèse d'un milieu amont au repos, l'écoulement transversal n'apparaît pas dans le modèle Cinématique qui est alors identique au modèle GSD à la fonction λ près.

Il semble naturel de considérer la variation du nombre de Mach le long du choc. Nous proposons ici une modification de la relation $A - M$, plus simple que celle d'Oshima [91, 90], basée sur la connaissance empirique de la décroissance du nombre de Mach dans le faisceau de détente (7.8). On réécrit ainsi la relation $A - M$ sous la forme :

$$\frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial \alpha} + \frac{M\lambda(M)}{M^2-1}\frac{\partial M}{\partial \alpha} + H(\kappa)\, f(M)\left|\frac{\partial M}{A\partial \beta}\right| = 0, \tag{7.11}$$

avec $\lambda = \lambda_W$ (eq. (7.2a)) pour le modèle GSD et $\lambda = \lambda_K$ (eq. (7.2c)) pour l'approche KIN. L'idée est de n'appliquer ce terme supplémentaire que dans les zones de détente, les zones de compression étant bien restituées par le modèle de base. La fonction f dépend exclusivement de M et est modélisée à l'aide de la loi empirique (7.9) :

$$f(M) = \frac{k\lambda(M)}{2} - \frac{2M^2}{k(M^2-1)}, \tag{7.12}$$

avec $k = 0.984943$. Le choix de la valeur absolue s'explique par une question de symétrie des ondes dans le modèle. Puisque les modèles GSD et KIN estiment correctement le front de Mach, on souhaite que la modification soit effective uniquement pour les problèmes liés à l'expansion du choc. Dans cet esprit, la fonction H est nulle pour un choc compressif, soit pour

une courbure locale κ négative, et vaut 1 dans le cas contraire :

$$H(\kappa) = \begin{cases} 0 & \text{si } \kappa \leq 0 \\ \\ 1 & \text{si } \kappa > 0. \end{cases}$$

Remarque 7.1

En configuration radiale, la variation transversale au choc étant nulle par symétrie, on retrouve le comportement donné par les modèles GSD et KIN.

Le raisonnement aboutissant à la fermeture (7.12) est présenté dans la suite pour le modèle GSD. Ce raisonnement est identique pour le modèle KIN.

La modification de la relation $A - M$ induit une modification de l'onde de détente dans le modèle GSD. Pour la caractériser, on se base sur le problème élémentaire de la diffraction d'un choc plan sur un dièdre convexe. Le lecteur désireux de détails supplémentaires concernant la dérivation qui va suivre est invité à consulter les sections 3.1.4 et 3.1.5.

On rappelle les équations géométriques du modèle GSD en deux dimensions d'espace (3.35)-(3.36) :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \theta}{\partial \beta} - \dfrac{1}{M}\dfrac{\partial A}{\partial \alpha} = 0 & \text{(7.13a)} \\ \\ \dfrac{\partial \theta}{\partial \alpha} + \dfrac{1}{A}\dfrac{\partial M}{\partial \beta} = 0, & \text{(7.13b)} \end{cases}$$

écrites dans la base locale au choc. En injectant la relation $A - M$ modifiée (7.11) dans ce système, il vient

$$\begin{cases} \dfrac{\partial M}{\partial \alpha} + \dfrac{M^2-1}{\lambda(M)A}\dfrac{\partial \theta}{\partial \beta} + \eta \dfrac{f(M)\left(M^2-1\right)}{M\lambda(M)A}\dfrac{\partial M}{\partial \beta} = 0 & \text{(7.14a)} \\ \\ \dfrac{\partial \theta}{\partial \alpha} + \dfrac{1}{A}\dfrac{\partial M}{\partial \beta} = 0, & \text{(7.14b)} \end{cases}$$

ayant posé

$$\eta = H(\kappa)\,\text{sign}\left(\frac{\partial M}{\partial \beta}\right) = \begin{cases} H(\kappa) & \text{si } \dfrac{\partial M}{\partial \beta} \geq 0 \\ \\ -H(\kappa) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Le système (7.14) s'écrit sous la forme matricielle :

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}\begin{pmatrix} M \\ \theta \end{pmatrix} + \frac{1}{A}\begin{pmatrix} \eta\frac{f(M)\left(M^2-1\right)}{M\lambda(M)} & \frac{M^2-1}{\lambda(M)} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial \beta}\begin{pmatrix} M \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres de la matrice sont données par l'équation du second degré :

$$u^2 - \frac{\eta f(M)\left(M^2-1\right)}{M\lambda(M)A}u - \frac{M^2-1}{\lambda(M)A^2} = 0,$$

conduisant à la vitesse des ondes dans le modèle modifié :

$$Au_{\pm}(M) = \frac{\eta_{\pm} f(M)\left(M^2-1\right)}{2M\lambda(M)} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{M^2-1}{\lambda(M)}}\sqrt{\frac{\left(\eta_{\pm}\right)^2 f(M)^2(M^2-1)}{M^2\lambda(M)} + 4}, \qquad \text{(7.15)}$$

avec η_+ et η_- la valeur de η suivant la direction portée par la caractéristique C^+ : $\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}\alpha} = u_+(M)$ et C^- : $\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}\alpha} = u_-(M)$ respectivement. La perturbation portée par les caractéristiques C^+ augmente le nombre de Mach le long du choc : $\frac{\partial M}{\partial \beta} \geq 0$, comme nous le voyons pour le problème de diffraction sur une rampe convexe schématisé en figure 7.1. En étudiant le problème symétrique par rapport à l'axe (Ox), il vient que l'information portée par les caractéristiques C^- diminue le nombre de Mach le long du choc, de sorte que $\eta_- \leq 0$. Les ondes sont par conséquent symétriques dans le modèle : $Au_+(M) = -Au_-(M)$. Sous réserve que la fonction $M \mapsto f(M)$ soit réelle, les valeurs propres $Au_\pm$ sont donc différentes et réelles, assurant l'hyperbolicité du système. En particulier, si $\eta f(M)$ est nulle, on retrouve le modèle GSD à deux dimensions.

Le système (7.14) s'écrit sous la forme caractéristique suivante :

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\alpha} \pm \frac{1}{Au_+(M)} \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}\alpha} = 0 \quad \text{sur } C^\pm : \frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}\alpha} = \pm u_+(M), \tag{7.16}$$

aboutissant aux invariants de Riemann :

$$\left| \begin{array}{l} \theta - \theta_0 + \displaystyle\int_{M_0}^{M} \frac{\mathrm{d}m}{Au_+(m)} = \text{cste} \quad \text{sur } C^+ \\ \\ \theta - \theta_0 - \displaystyle\int_{M_0}^{M} \frac{\mathrm{d}m}{Au_+(m)} = \text{cste} \quad \text{sur } C^-. \end{array} \right.$$

Considérons le problème de la diffraction d'un choc plan sur un dièdre convexe, de données initiales $\theta = \theta_0 = 0$ et $M = M_0$. La solution du problème est une onde simple : toutes les caractéristiques C^- prennent origine dans la région initiale du problème : $\{\alpha = 0; \beta > 0\}$. La solution du faisceau de détente est alors définie par :

$$u_+(M) = \frac{\beta}{\alpha} \quad \text{et} \quad \theta - \theta_0 = \int_{M_0}^{M} \frac{\mathrm{d}m}{Au_+(m)},$$

ce qui donne en particulier :

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\alpha} = \frac{1}{Au_+(M)} \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}\alpha} \quad \text{sur } C^+. \tag{7.17}$$

Afin de modéliser la fonction f, on identifie cette relation avec la loi empirique (7.9) :

$$k\frac{M^2-1}{2M} = Au_+(M) = \frac{f(M)\left(M^2-1\right)}{2M\lambda(M)} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{M^2-1}{\lambda(M)}}\sqrt{\frac{f(M)^2(M^2-1)}{M^2\lambda(M)} + 4}, \tag{7.18}$$

où $\eta_+ = 1$ pour ce problème. Après calcul, on trouve finalement l'expression (7.12).

Remarque 7.2 (*Choix de l'expression empirique*)

De part la simplicité de la loi empirique (7.9), la fonction f dépend exclusivement de M. Le choix d'une autre loi, telle que (7.10), implique de considérer l'angle du rayon θ dans la relation $A-M$. Une telle expression est rejetée dans le but de conserver une relation simple entre l'aire du tube de rayon, A, et le nombre de Mach du choc, M.

L'allure de la fonction $M \mapsto f(M)$ est présentée en figure 7.5 pour les modèles GSD et KIN. En choc faible ($M \sim 1$), cette fonction est identique pour les deux approches :

$$f(M) \sim -\frac{1}{k(M-1)},$$

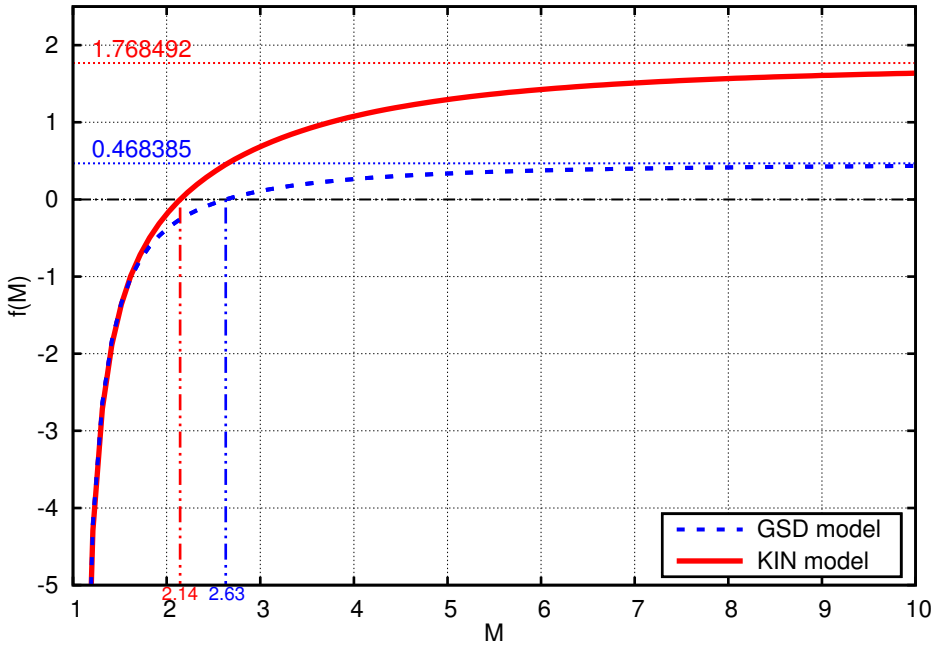


FIGURE 7.5 – Allure de la fonction $f(M)$ (eq. (7.12)) pour les modèles GSD et KIN.

puisque $\lambda_W \sim \lambda_K \sim 4$. Le changement de signe de cette fonction se traduit par le changement de correction des modèles pour une variation d'aire fixée. Pour le modèle GSD, un nombre de Mach inférieur à $M_W^c \approx 2.631$ amène la correction à accélérer le front par rapport au modèle initial, tandis que pour un nombre de Mach supérieur, le front est ralenti par la correction. Pour le modèle KIN, le changement de contribution de la correction intervient pour un nombre de Mach plus faible : $M_K^c \approx 2.144$. Puisque le modèle KIN surestime davantage l'expérience que le modèle GSD pour un nombre de Mach au moins supérieur à 2, la correction apportée est plus importante. En choc fort ($M \gg 1$), on a :

$$f(M) \sim \frac{k\lambda_\infty}{2} - \frac{2}{k} \approx \begin{cases} 0.468385 & \text{pour le modèle GSD} \\ \\ 1.768492 & \text{pour le modèle KIN} \end{cases}, \quad \text{pour } \gamma = 1.4,$$

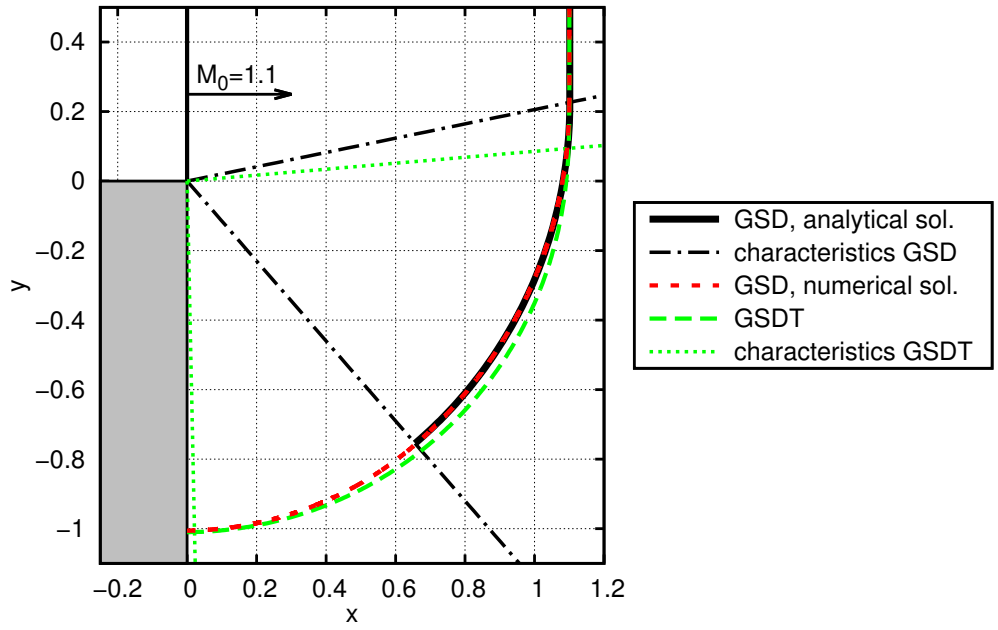
où l'on rappelle que

$$\lambda_\infty \sim 1 + \frac{2}{\gamma} + \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma - 1}} \approx 5.074 \quad \text{pour l'approche GSD,}$$

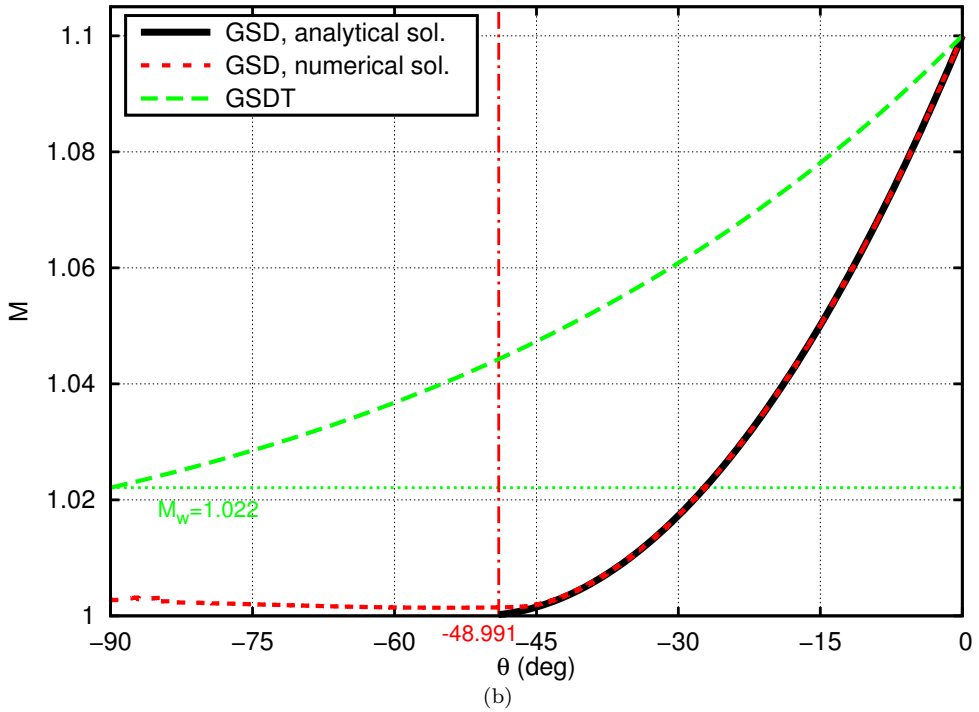
$$\lambda_\infty \sim \frac{(\gamma+1)(2\gamma-1)}{\gamma} \approx 7.714 \quad \text{pour le modèle Cinématique.}$$

Dans la suite, on qualifie de modèle GSDT (GSD Transverse) et KINT (KIN Transverse) les modèles GSD et KIN avec la correction $f(M)$ correspondante. En pratique, ces deux modèles sont identiques pour les problèmes ne faisant intervenir que des ondes de détente puisque la solution est imposée. Des différences apparaîtront pour des problèmes avec alternance de phases en compression et détente comme il sera montré sur des cas particuliers en section 7.4.

Le résultat du problème de la diffraction d'un choc plan à nombre de Mach $M_0 = 1.1$ sur une rampe d'angle $\theta_w = -90°$ est présenté en figure 7.6. Pour ce problème, la solution du modèle GSD (ou KIN) existe jusqu'à la dernière caractéristique pour laquelle le nombre de



(a)



(b)

FIGURE 7.6 – Diffraction d'un choc plan à nombre de Mach 1.1 sur une rampe d'angle −90°. Fig. (a) : Comparaison de la forme du front de choc à l'instant $\alpha = 1$. Fig. (b) : Nombre de Mach le long du choc en fonction de l'angle d'inclinaison des rayons.

Mach vaut 1, soit un angle d'inclinaison d'environ $-49°$. Néanmoins, l'algorithme Lagrangien est suffisamment robuste pour fournir une solution au-delà de cette limite. Le nombre de Mach de cette portion supplémentaire du choc converge alors vers 1. Le faisceau de détente est modifié avec la prise en compte de l'écoulement transverse (7.11). Dans ce cas les caractéristiques sont données par (7.18) :

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \tan(\theta + \nu), \quad \text{avec } \tan(\nu) = \frac{Au_+(M)}{M} = k\frac{M^2-1}{2M^2}.$$

En particulier, la solution au problème existe jusqu'à la paroi au niveau de laquelle le nombre de Mach vaut environ 1.022, valeur calculée à l'aide de l'expression du FIT 1 (7.4)-(7.5). Bien que les nombres de Mach en jeu semblent faibles, cela fait une différence importante sur la surpression adimensionnée du choc ζ. En effet, pour $M = 1.022$, $\zeta = 0.053$ bar ce qui correspond à la fin de la zone Z4 définie en table 1.1, alors qu'avec $M \sim 1$, $\zeta \sim 0$, nous sommes au-delà de la zone Z5.

7.3 Intégration dans l'algorithme Lagrangien

Du point de vue numérique, seule l'approximation de la relation $A - M$ est modifiée dans l'algorithme Lagrangien du chapitre 5. Cette section détaille l'intégration de la relation (7.11). La connaissance de la courbure locale au front est nécessaire pour cela. Il s'agit d'une tâche non triviale puisque cette quantité est sensible aux oscillations du schéma.

Les résultats numériques présentés ici sont obtenus pour le modèle GSD. La procédure est identique pour le modèle KIN en sélectionnant la fonction λ correspondante.

7.3.1 Intégration de la relation $A - M$ avec terme transverse

Puisque l'abscisse curviligne le long du choc, s, vérifie la relation différentielle $\mathrm{d}s = A\mathrm{d}\beta$, le terme transversal de la relation (7.11) se réexprime comme :

$$f(M)\left|\frac{\partial M}{A\partial\beta}\right| = \mathrm{sign}(f(M))\left|\frac{\partial F(M)}{\partial s}\right|, \tag{7.19}$$

où $\mathrm{sign}(x) = 1$ si $x > 0$ et -1 sinon, et avec $F(M) = \int f(m)\mathrm{d}m$. Ce terme est approché à l'ordre 1 par l'expression

$$f(M)\left|\frac{\partial M}{A\partial\beta}\right|_{|M=M_i} \approx \mathrm{sign}(f(M_i))\max(\Delta_l F_i, -\Delta_r F_i, 0), \tag{7.20}$$

où $\Delta_l F_i$ et $\Delta_r F_i$ sont des estimations de la pente de $F(M)$ à gauche et à droite de M_i :

$$\Delta_l F_i = \frac{F(M_i) - F(M_{i-1})}{s_i - s_{i-1}} \quad \text{et} \quad \Delta_r F_i = \frac{F(M_{i+1}) - F(M_i)}{s_{i+1} - s_i}.$$

Ce schéma décentré, inspiré de l'Hamiltonien numérique de Godunov [89], présente l'avantage de limiter les oscillations de l'algorithme. Au niveau d'un obstacle, on impose une condition de bord de type paroi rigide (eq. (5.33)). La variation du nombre de Mach d'un point de bord du choc, d'abscisse curviligne s_{bord}, se trouvant sur une paroi est par conséquent nulle :

$$\frac{\partial M}{\partial s}(s_{bord}) = 0.$$

On suppose que le front est localement plan pour les parties libres du choc, impliquant également une variation du nombre de Mach nulle au bord. On a ainsi aux extrémités du choc :

$$\frac{\partial F(M)}{\partial s}(s_{bord}) = 0.$$

Sur chaque tube de rayon, l'intégration de la relation $A-M$ (7.11) des instants α à $\alpha+\Delta\alpha$ s'écrit

$$\ln\left(\frac{A_i(\alpha+\Delta\alpha)}{A_i(\alpha)}\right)+\int_{M_i(\alpha)}^{M_i(\alpha+\Delta\alpha)}\frac{m\lambda(m)}{m^2-1}\mathrm{d}m+\int_{\alpha}^{\alpha+\Delta\alpha}\eta_i\max\left(\Delta_l F_i,-\Delta_r F_i,0\right)\mathrm{d}\tau=0, \quad (7.21)$$

avec $\eta_i = H\left(\kappa_i\right)\mathrm{sign}\left(f(M_i)\right)$. La première intégrale est approchée par une méthode de Simpson et la seconde par une méthode de trapèze. Connaissant, $\ln\left(\frac{A_i(\alpha+\Delta\alpha)}{A_i(\alpha)}\right)$, $H(\kappa_i)$ et $M_i(\alpha)$ pour $i=1,\ldots,N$, on obtient alors un système non-linéaire d'inconnues $\left(M_i\left(\alpha+\Delta\alpha\right)\right)_{i=1,\ldots,N}$ que l'on résout à l'aide d'un algorithme de Newton. Cette résolution augmente le temps de calcul par rapport au schéma originel comme nous le verrons en section 7.4 (*cf.* table 7.2).

Remarque 7.3

Rappelons que l'on veille à la conservation de l'aire dans la relation $A-M$ suivant les propriétés 5.3 et 5.4. L'extension de ces propriétés à la prise en compte d'un terme supplémentaire dans la relation $A-M$ est directe comme souligné en remarques 5.3 et 5.4.

Posons

$$K_i=\int_{M_i(\alpha)}^{M_i(\alpha+\Delta\alpha)}\frac{m\lambda(m)}{m^2-1}\mathrm{d}m+\int_{\alpha}^{\alpha+\Delta\alpha}\eta_i\max\left(\Delta_l F_i,-\Delta_r F_i,0\right)\mathrm{d}\tau.$$

Lorsque l'aire du tube de rayon i diminue, $\ln\left(\frac{A_i(\alpha+\Delta\alpha)}{A_i(\alpha)}\right)\leq 0$, le nombre de Mach augmente localement et le terme transverse est désactivé dans la relation $A-M$ discrète (7.21). À l'inverse, le nombre de Mach diminue lorsque l'aire augmente et le terme transverse est activé afin de lever la limitation du modèle. Dans ce cas, le terme K_i est nécessairement positif. Ce n'est cependant pas un critère suffisant pour activer le terme transverse. Il peut en effet être vérifié dans des zones compressives du choc, lors de la formation du front de Mach par exemple, en raison des oscillations du schéma. Au final, la condition nécessaire de désactivation du terme transverse retenue est :

Si ($\ln\left(\frac{A_i(\alpha+\Delta\alpha)}{A_i(\alpha)}\right)\leq 0$) **Alors**
  $H\left(\kappa_i\right)=0$
Sinon
  Si ($K_i<0$) **Alors**
    $H\left(\kappa_i\right)=0$
  Fin Si
Fin Si

(7.22)

Du reste, la résolution du système (7.21) nécessite l'estimation de la courbure locale au front de choc, κ. La procédure que nous avons développée à cette fin est présentée dans la prochaine sous-section.

7.3.2 Estimation de la courbure locale du front

Soit $(X_i)_{i=1,\ldots,N}$ l'ensemble des points du front de choc discret à un instant donné $\alpha=c_+t$. La courbure locale au front $\mathrm{div}\left(\vec{n}_i\right)=\kappa_i$, associée au point X_i, est estimée en 2D plan à l'aide

de la relation géométrique [102] :

$$\kappa_i = \frac{4\sin(\theta_i/2)}{\|\overrightarrow{X_{i-1}X_i}\| + \|\overrightarrow{X_iX_{i+1}}\|}, \tag{7.23}$$

où θ_i est l'angle orienté entre les vecteurs $\overrightarrow{X_iX_{i+1}}$ et $\overrightarrow{X_{i-1}X_i}$. La courbure locale discrète est nulle si les points X_{i-1}, X_i et X_{i+1} sont alignés, positive si la distribution est convexe (zone expansive du choc) et négative si elle est concave (zone compressive du choc), figure 7.7. Cette

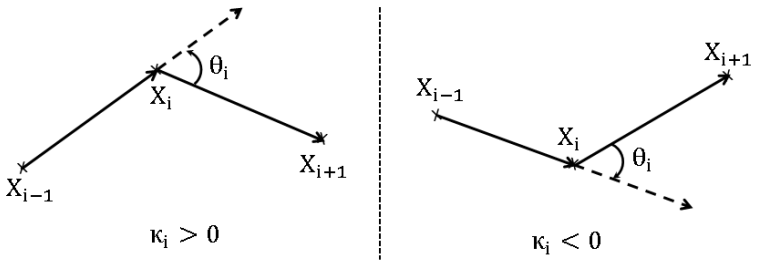


FIGURE 7.7 – Distribution de points convexe (figure de gauche) et concave (figure de droite).

formule est cependant sensible aux oscillations du schéma. Elle peut en effet conduire localement à une valeur de κ_i négative dans des zones expansives du choc où elle devrait être positive, et inversement pour les zones compressives. Pour éviter cela, on se donne une discrétisation grossière, ou "gros grain", du front de choc donnant la tendance globale de la courbe, en s'inspirant d'un algorithme de simplification de ligne [118]. Les points sont choisis de sorte à ce que la courbure entre deux points de cette discrétisation soit de signe constant. Les valeurs aux points intermédiaires sont ensuite interpolées à l'aide d'une spline locale quadratique limitée, qui a l'avantage de conserver le signe de la courbure, contrairement à une spline cubique. La courbure locale du nouveau front est calculée à l'aide de la relation (7.23), donnant ainsi une estimation de κ_i pour la relation $A-M$ discrète (7.21). Pour finir, il convient de désactiver le terme transverse dans un voisinage fixe des zones compressives, afin d'éviter une dépendance numérique de la solution pour les problèmes combinant à la fois des ondes expansives et des ondes compressives. Ces différentes étapes sont détaillées ci-après.

Remarque 7.4

Puisque seul le signe de la courbure compte, la courbure est calculée à l'aide de l'expression (7.23) en 2D axisymétrie.

• **Étape 1 : Discrétisation "gros grain" du front**. La discrétisation "gros grain" du front contient nécessairement les points de bords du choc. Considérons $X_{i-1} = (x_{i-1}, y_{i-1})^T$ un point de cette discrétisation (un point de bord du choc pour commencer). Soit (D_i) la droite passant par X_{i-1} et de direction $\overrightarrow{X_{i-1}X_i}$. Les points X_j dont la distance à (D_i) est inférieure à une tolérance ϵ fixée ne sont pas conservés dans la discrétisation "gros grain" :

$$dist = \sqrt{\|\overrightarrow{X_{i-1}X_j}\|^2 - \left(\frac{\overrightarrow{X_{i-1}X_i}\cdot\overrightarrow{X_{i-1}X_j}}{\|\overrightarrow{X_{i-1}X_i}\|}\right)^2} < \epsilon. \tag{7.24}$$

Le critère de tolérance, ϵ, est pris égal à $0.4\Delta s$ en pratique, où Δs est le pas de discrétisation. Afin de conserver un nombre suffisant de points, notamment pour les parties planes du choc, on ajoute au critère ci-dessus la contrainte suivante. Si la distance entre les points X_{i-1} et X_j dépasse une certaine longueur, $0.1 \times s_N$ en pratique, avec s_N la longueur du front, le point X_{j-1}

est également conservé. Au final, lorsque $dist > \epsilon$ ou $\|\overrightarrow{X_{i-1}X_j}\| > 0.1 \times s_N$, le point X_{j-1} est ajouté à la discrétisation "gros grain" du front et la procédure est réitérée avec $X_{i-1} = X_{j-1}$. On note dans la suite $(s_j, x_j)_{j=1,\dots,M}$ et $(s_j, y_j)_{j=1,\dots,M}$, pour $M < N$, l'ensemble des points de la discrétisation "gros grain", l'abscisse curviligne discrète, $(s_j)_{j=1,\dots,M}$, correspondant à celle de la courbe de choc d'origine.

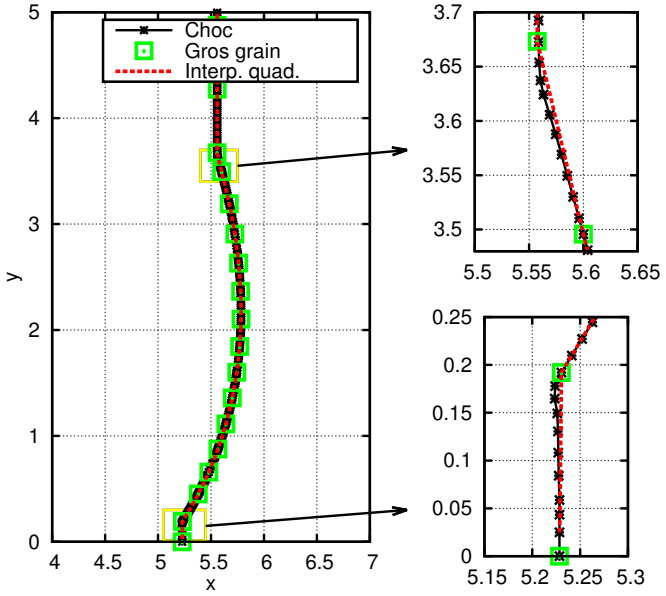


FIGURE 7.8 – Présentation de la discrétisation "gros grain" du front de choc et interpolation quadratique limitée.

Suite à cette première passe, la discrétisation "gros grain" est raffinée au niveau des éventuels points d'inflexion de la courbe de choc. Il s'agit de zones sensibles du front pour lesquelles la courbure change de signe (*cf.* Fig. 7.10(a), zone 2 encadrée). Les pentes locales limitées de la discrétisation grossière sont calculées ainsi :

$$x'_j = \text{minmod}\left(\Delta_l x_j, \Delta_r x_j\right) \quad \text{et} \quad y'_j = \text{minmod}\left(\Delta_l y_j, \Delta_r y_j\right), \tag{7.25}$$

où le minmod de deux réels x et y est défini par

$$\text{minmod}\left(x, y\right) = \frac{1}{2}\left(\text{sign}(x) + \text{sign}(y)\right) \min\left(|x|, |y|\right).$$

Les quantités $\Delta_l \psi_j$ et $\Delta_r \psi_j$ sont les estimations linéaires de la pente de ψ à gauche et à droite de s_j :

$$\Delta_l \psi_j = \frac{\psi_j - \psi_{j-1}}{s_j - s_{j-1}} \quad \text{et} \quad \Delta_r \psi_j = \frac{\psi_{j+1} - \psi_j}{s_{j+1} - s_j}. \tag{7.26}$$

Un changement de convexité de la courbe de choc se situe entre les points $j-1$, j et $j+1$ si

$$\left(x'_j - x'_{j-1}\right)\left(x'_{j+1} - x'_j\right) \leq 0 \quad \text{et} \quad \left(y'_j - y'_{j-1}\right)\left(y'_{j+1} - y'_j\right) \leq 0.$$

Le point du front de choc originel appartenant à cette région et ayant la plus forte variation en x et en y (par rapport à s) est ensuite ajouté à la discrétisation "gros grain", ce qui permet une meilleure localisation de la zone de changement de signe de la courbure locale.

En raison des oscillations du schéma Lagrangien, des points censés être alignés fluctuent en réalité autour d'une valeur centrale. C'est par exemple le cas lors de la formation du front de Mach. Afin d'aligner les points du front grossier se trouvant sensiblement sur un même axe,

une troisième passe est effectuée. Soit $\overrightarrow{X_{j-1}X_j}$ un vecteur de référence du front "gros grain". Si l'orientation du vecteur qui suit, $\overrightarrow{X_jX_{j+1}}$, est quasiment identique au vecteur de référence, le point X_{j+1} est projeté sur la droite (D_j) passant par X_{j-1} et portée par $\overrightarrow{X_{j-1}X_j}$. Les points X_{j-1}, X_j et X_{j+1} sont ainsi alignés. On réitère cette procédure sur les segment suivants, que l'on note $\overrightarrow{X_{k-1}X_k}$. Le point X_k est alors aligné avec les autres points. Le vecteur $\overrightarrow{X_{k-1}X_k}$ est quasiment colinéaire au vecteur de référence si leur produit scalaire normalisé est proche de 1 :

$$z = \frac{\overrightarrow{X_{j-1}X_j} \cdot \overrightarrow{X_{k-1}X_k}}{\|\overrightarrow{X_{j-1}X_j}\|\|\overrightarrow{X_{k-1}X_k}\|} = \cos\left(\overrightarrow{X_{j-1}X_j}, \overrightarrow{X_{k-1}X_k}\right) \approx 1 - \delta.$$

En pratique, nous exigeons que l'angle entre ces vecteurs soit inférieur à 1°, soit $\delta \approx 0.017453$. Lorsque $z - 1 < \delta$, le point X_k est projeté sur la droite (D_j) :

$$x_k = x_{j-1} + (s_k - s_{j-1})N_1 \quad \text{et} \quad y_k = y_{j-1} + (s_k - s_{j-1})N_2,$$

où $\vec{N}$ est le vecteur de référence unitaire : $\vec{N} = \overrightarrow{X_{j-1}X_j}/\|\overrightarrow{X_{j-1}X_j}\| = (N_1, N_2)^T$. L'alignement des points est stoppé lorsque la différence de direction entre le vecteur courant et le vecteur de référence est trop importante, ou que le point X_k est trop éloigné de la droite (D_j), soit

$$z - 1 > \delta \quad \text{ou} \quad \text{dist}\left((D_j), X_k\right) > 0.2\Delta s,$$

avec $\text{dist}\left((D_j), X_k\right)$ la distance du point X_k à (D_j). La procédure est ensuite réitérée en prenant le dernier vecteur comme vecteur de référence. La figure 7.8 présente un exemple de discrétisation "gros-grain" du front.

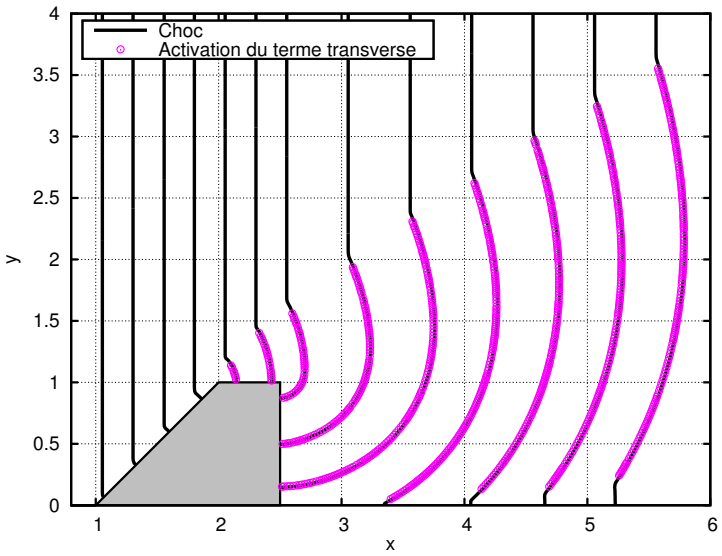


FIGURE 7.9 – Activation du terme transverse de la relation (7.11) dans les zones expansives du choc. La simulation numérique a été menée pour $M_0 = 2$ et $\Delta s = 0.02$.

• **Étape 2 : Interpolation du front "gros grain"**. À la suite de cette première étape, la discrétisation "gros grain" se constitue de l'ensemble des points $(s_j, x_j)_{j=1,\ldots,M}$ et $(s_j, y_j)_{j=1,\ldots,M}$, pour $M < N$. Une interpolation spline quadratique limitée de cette discrétisation grossière est alors introduite pour reconstruire les points intermédiaires sur le choc. Elle s'écrit sur chaque segment $[s_j, s_{j+1}]$:

$$p_j(t) = (1-t)f_j + tf_{j+1} + t(1-t)a_j, \quad \text{avec } a_j = \frac{1}{2}\frac{f'_j - f'_{j+1}}{s_{j+1} - s_j},$$

pour une quantité $(f_j)_{j=1,\dots,M}$ (x_j et y_j ici), avec $t = \frac{s-s_j}{s_{j+1}-s_j}$. La dérivée f'_j, des quantités x_j et y_j, est estimée par (7.25). Le front est ainsi moins perturbé par les oscillations tout en conservant un signe de courbure constant sur chaque segment gros grain $[s_j, s_{j+1}]$.

La courbure locale du nouveau front est calculée via la relation (7.23). Néanmoins, l'interpolation du front "gros grain" n'étant que de classe C^1, il se peut que la courbure ait un signe inapproprié au niveau des points de jonctions, X_l. La courbure en ces points est alors recalculée en moyennant celle des points voisins :

$$\kappa_l = \frac{\kappa_{l-1} + \kappa_{l+1}}{2}.$$

Cela assure un signe de courbure locale en X_l cohérent avec les interpolations quadratiques voisines.

• **Étape 3 : Identification des zones à risque**. Les oscillations du schéma Lagrangien ne sont pas entièrement inhibées par la nouvelle distribution de points. Il se peut ainsi que la courbure locale soit positive près d'une zone de compression, activant par la même occasion le terme transverse. C'est par exemple le cas près d'un point d'inflexion comme observé en figure 7.10(c). Cependant, la variation transversale du nombre de Mach dans de telles zones est très importante en raison de la présence d'un choc-choc à proximité. Cela conduit alors à une surévaluation du nombre de Mach, et à une perte de convergence numérique. Il convient donc de désactiver le terme transverse dans les zones à risque. Ces régions sont identifiées comme étant les zones où la courbure de la discrétisation "gros grain" est négative. Dans une zone à risque, on identifie ensuite la position du choc-choc comme étant le point de plus forte variation du nombre de Mach. Le terme transverse est alors désactivé sur l'ensemble des points X_l du front se trouvant à une distance d_c de la discontinuité : $H(\kappa_l) = 0$. Sur l'ensemble des exemples traités dans ce chapitre, nous prenons $d_c = 0.05$.

7.3.3 Synthèse et convergence en maillage

La procédure décrite précédemment permet d'identifier efficacement les zones expansives du choc. Le terme de variation transversale du nombre de Mach est activé dans de telles zones, modulo la condition nécessaire (7.22) et l'étape 3. Le calcul de $H(\kappa_i)$ est résumé dans l'encadré (7.27).

• **Étapes 1 et 2 :**
Discrétisation "gros grain" du front et interpolation des points originaux ;
Estimation de la courbure par (7.23) → calcul de $H(\kappa_i)$.

• **Étape 3 :** (7.27)
Zones à risque : distance d_c des choc-chocs ;
→ Désactivation du terme transverse dans ces zones : $H(\kappa_i) = 0$.

• Désactivation du terme transverse selon la condition (7.22).

Dans les zones compressives ou planes du choc, la relation $A - M$ classique est retrouvée, tandis que le terme transverse est activé dans les régions expansives. La figure 7.9 présente les résultats numériques obtenus pour le problème de la diffraction d'un choc plan à nombre de Mach 2 sur un merlon posé sur le sol. Le pas de discrétisation est $\Delta s = 0.02$. Les zones couvertes par des cercles correspondent aux points pour lesquels le terme transverse est activé.

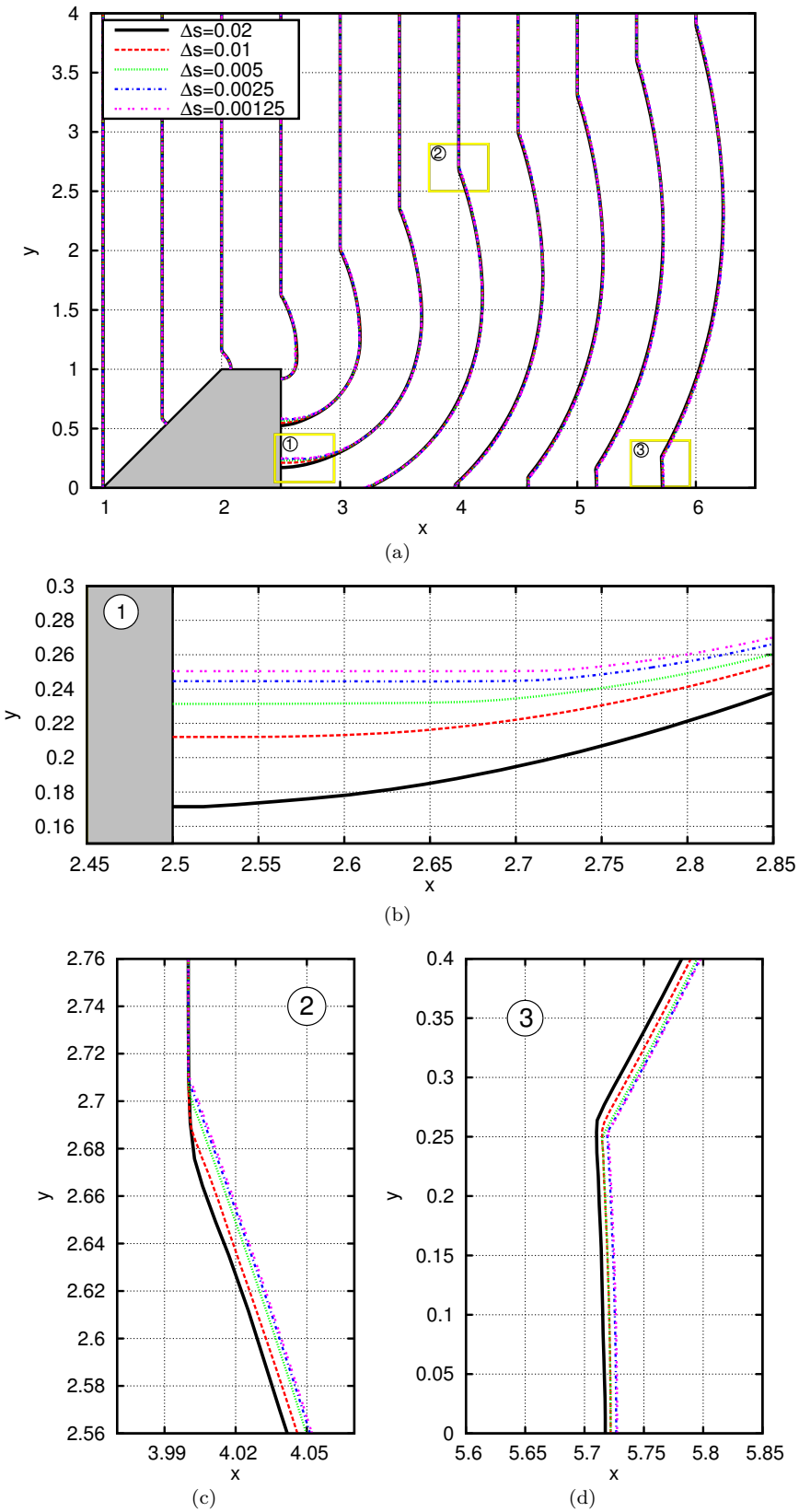


FIGURE 7.10 – Effet du pas d'espace sur la diffraction d'un choc plan à nombre de Mach 2 sur un merlon. Le choc se déplace de la gauche vers la droite, l'axe (Ox) est le sol. Fig. (a) : Positions successives du choc. Fig. (b) : Zoom du front de choc au niveau de la paroi à l'arrière du merlon. Fig. (c) : Zoom sur le premier choc-choc du front. Fig. (d) : Zoom sur le front de Mach au niveau du sol.

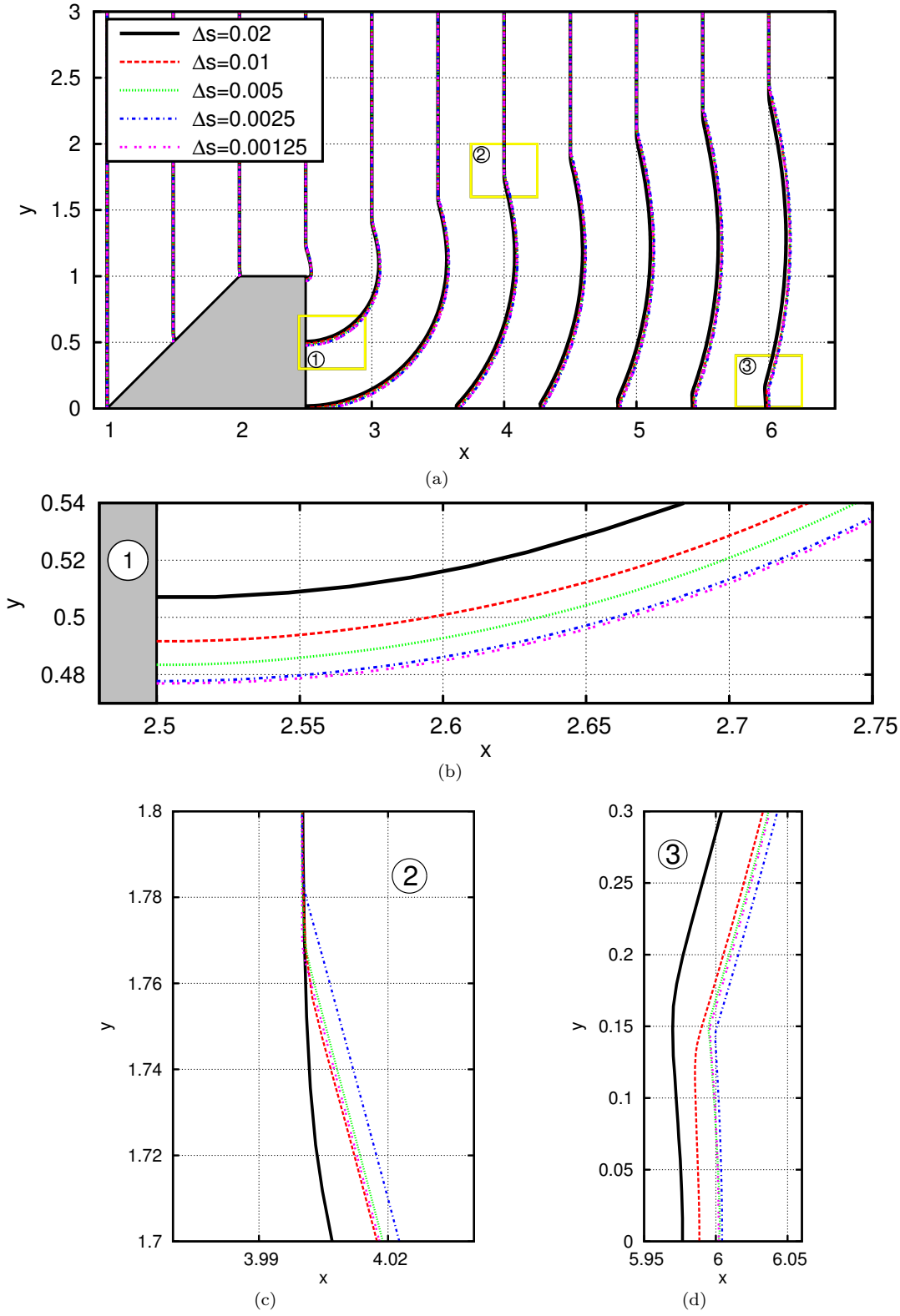


FIGURE 7.11 – Effet du pas d'espace sur la diffraction d'un choc plan à nombre de Mach 1.05 sur un merlon. Fig. (a) : Positions successives du choc. Fig. (b) : Zoom du front de choc au niveau de la paroi à l'arrière du merlon. Fig. (c) : Zoom sur le premier choc-choc du front. Fig. (d) : Zoom sur le front de Mach au niveau du sol.

L'algorithme Lagrangien adapté à la relation $A - M$ modifiée (7.11) a été validé pour les problèmes élémentaires de diffraction d'un choc plan sur un dièdre convexe (cas continu) et concave (cas discontinu). Pour ce dernier cas, le terme transverse est activé de manière occasionnelle mais n'influence pas le calcul de la vitesse du front de Mach. Les oscillations du schéma ne sont pas entièrement inhibées par notre procédure d'estimation de la courbure. Celle-ci mériterait une amélioration, voire le développement d'un algorithme Lagrangien monotone, ce qui n'a pas été fait par manque de temps.

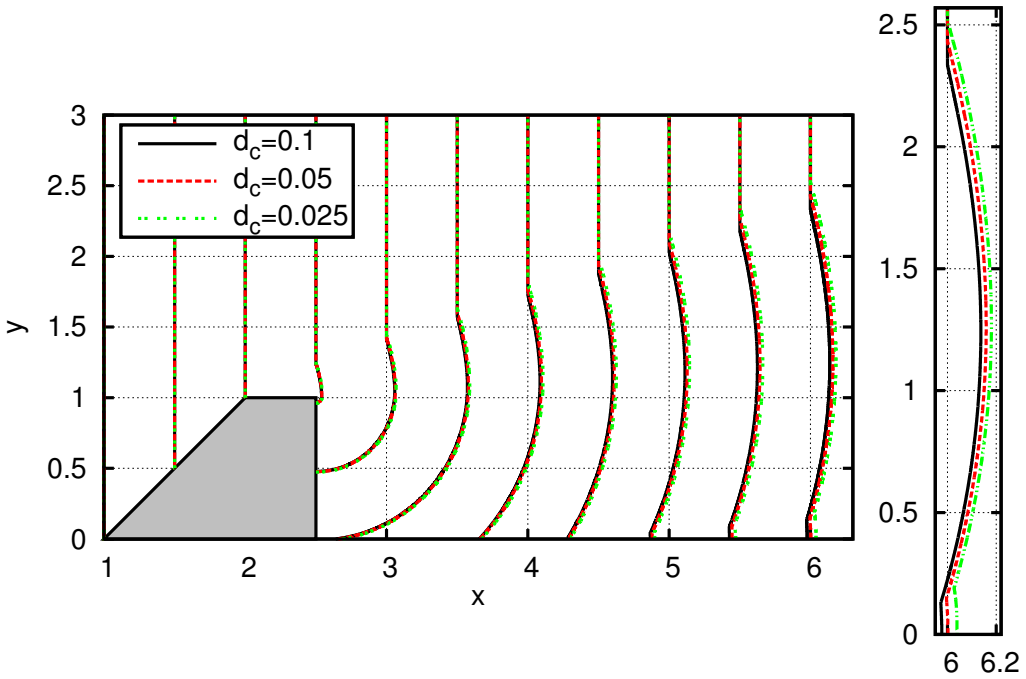


FIGURE 7.12 – Diffraction d'un choc plan à nombre de Mach 1.05 sur un merlon. Influence du paramètre d_c. Simulations effectuées pour $\Delta s = 0.00125$.

Une étude de convergence en maillage est présentée en figure 7.10 pour le problème de la diffraction d'un choc plan à nombre de Mach 2 sur un merlon. La résolution de ce problème est délicate en raison de la variation brutale de géométrie : diffraction d'angle $-90°$ à l'arrière du merlon puis interaction avec le sol, le choc étant quasiment parallèle à ce dernier. On observe la convergence en maillage du schéma pour cet exemple. Pour ce cas, le choc est plutôt fort et le terme transverse a une influence minime dans les calculs. En effet, le nombre de Mach varie entre 1.3 et 3.5 ici, et les valeurs de la fonction $f(M)$ sont faibles (*cf.* Fig. 7.5).

Le terme transverse est dominant dans la relation $A - M$ pour un nombre de Mach plus faible, puisque la fonction $f(M)$ n'est pas bornée. L'algorithme est alors plus sensible aux oscillations. La figure 7.11 présente le problème précédent à nombre de Mach 1.05. Puisque le choc est faible, le front de Mach est correctement établi sur la face avant du merlon à partir d'un pas de discrétisation plus petit que précédemment, soit $\Delta s = 0.005$ pour cet exemple. La convergence du schéma est globalement vérifiée. La solution numérique semble toutefois osciller au niveau du point d'inflexion comme nous pouvons le voir en figure 7.11(c). En pratique, la solution au voisinage de ce point dépend de la valeur du paramètre d_c, ce qui a une conséquence sur la position du reste du front. Nous présentons en figure 7.12 les positions successives du choc obtenues pour $d_c = 0.1$, $d_c = 0.05$ et $d_c = 0.025$. On note une différence certaine sur la position du front à l'arrière du merlon. Il n'y a pas de convergence numérique en pratique sur cet exemple pour une valeur de d_c inférieure à 0.025. Dans ce cas, le terme transverse pour

les points où la variation du nombre de Mach est importante est activé, expliquant cette non convergence. Le choix de la valeur de d_c est délicat puisqu'il doit être suffisamment important pour couvrir l'ensemble des points à risque, mais rester faible pour ne pas détériorer la solution. Ce paramètre joue donc un rôle crucial dans l'obtention de la solution numérique. Ce point mériterait une étude approfondie, ce qui n'a pas été fait à ce jour. L'étude préliminaire menée pour les exemples de ce chapitre montre que le choix $d_c = 0.05$ donne des résultats conformes à nos attentes.

7.4 Résultats et discussion

Nous finissons ce chapitre avec des exemples de comparaison entre les modèles GSD, KIN, GSDT et KINT. Les deux premières sous-sections présentent des études où seules des ondes expansives sont considérées. Dans ce cas, on vérifie que les solutions des modèles GSDT et KINT sont identiques puisque ces ondes sont imposées par la fonction $f(M)$ (7.12). On considère dans la troisième sous-section le problème de la diffraction d'un choc plan sur un merlon. Ce problème, plus complexe, fait intervenir à la fois des ondes expansives et compressives. Une différence est alors observable entre les modèles. Dans la dernière sous-section, l'étude de la diffraction d'un choc faible sur un deuxième type de merlon est analysée et met en évidence le défaut majeur des modèles : la formation systématique du front de Mach en choc faible.

7.4.1 Problème élémentaire de diffraction sur un dièdre convexe

On considère à nouveau le problème de la diffraction d'un choc plan à nombre de Mach M_0 sur une rampe convexe d'angle $\theta_w < 0$. Puisque ce problème élémentaire ne fait intervenir qu'une onde de détente, les résultats des modèles GSDT et KINT doivent être identiques. Par conséquent, nous traitons uniquement le modèle GSDT pour cet exemple.

La forme du front de choc est présentée pour $\theta_w = -90°$ et différents nombres de Mach incidents en figure 7.13. On note une meilleure concordance avec les données expérimentales lorsque le terme transverse est activé comparativement aux modèles GSD et KIN. Pour $M_0 = 1.5$ et $M_0 = 2$, ces derniers sous-estiment le nombre de Mach à la paroi, M_w, tandis que le modèle GSDT prévoit un nombre de Mach proche de celui de l'expérience. Pour $M_0 = 3$, la valeur de M_w est similaire entre les modèles GSDT et KIN faisant coïncider le pied du choc. Loin de la paroi, le front donné par le modèle GSDT est superposé à celui du modèle GSD. À $M_0 = 4$, il n'y a plus de différence notable entre les modèles GSD et GSDT.

Le nombre de Mach relevé au niveau du mur est globalement mieux estimé par le modèle GSDT comme nous pouvons le voir en figures 7.14 et 7.15. Ces résultats sont obtenus avec le FIT 1 (eqs. (7.4)-(7.5)). Le modèle GSDT affiche un excellent accord pour un nombre de Mach inférieur à 2.5. Pour une rampe inclinée à plus de 60°, la limitation des approches GSD et KIN est observable, alors que le modèle GSDT reste valide. Au vu de cette étude, la validité de l'approche semble acquise au moins pour $M_0 \geq M_{min} = 1.2$. En pratique, nous supposerons que notre fermeture (7.11) est valable pour tout $M \geq 1$.

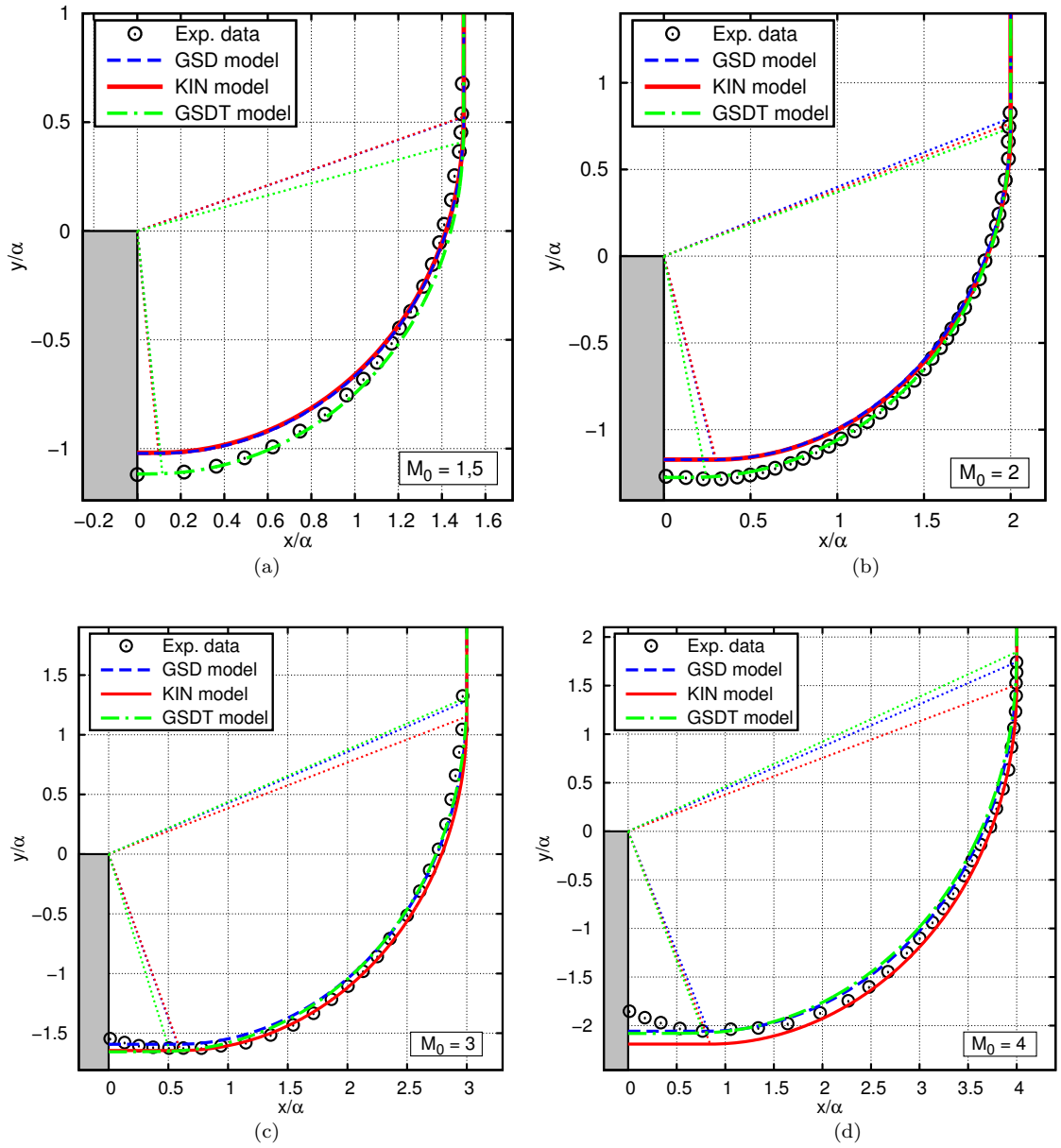


FIGURE 7.13 – Diffraction d'un choc plan à nombre de Mach M_0 sur une rampe d'angle $-90°$. Les données expérimentales sont tirées de [143].

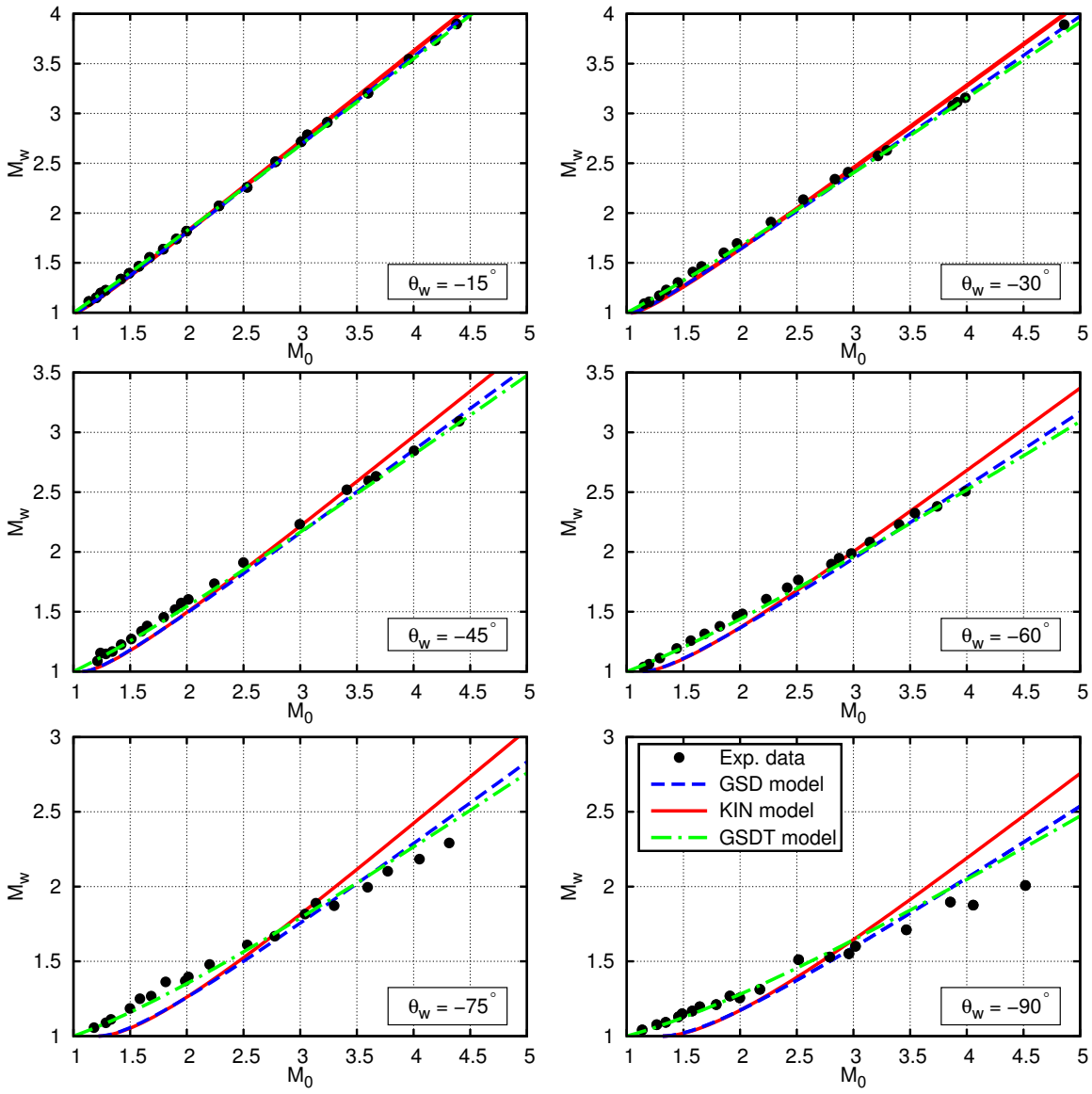


FIGURE 7.14 – Problème de la diffraction d'un choc plan sur une rampe convexe. Nombre de Mach à la paroi, M_w, en fonction du nombre de Mach incident, M_0, pour différents angles de rampe θ_w. Les données expérimentales sont extraites de [120].

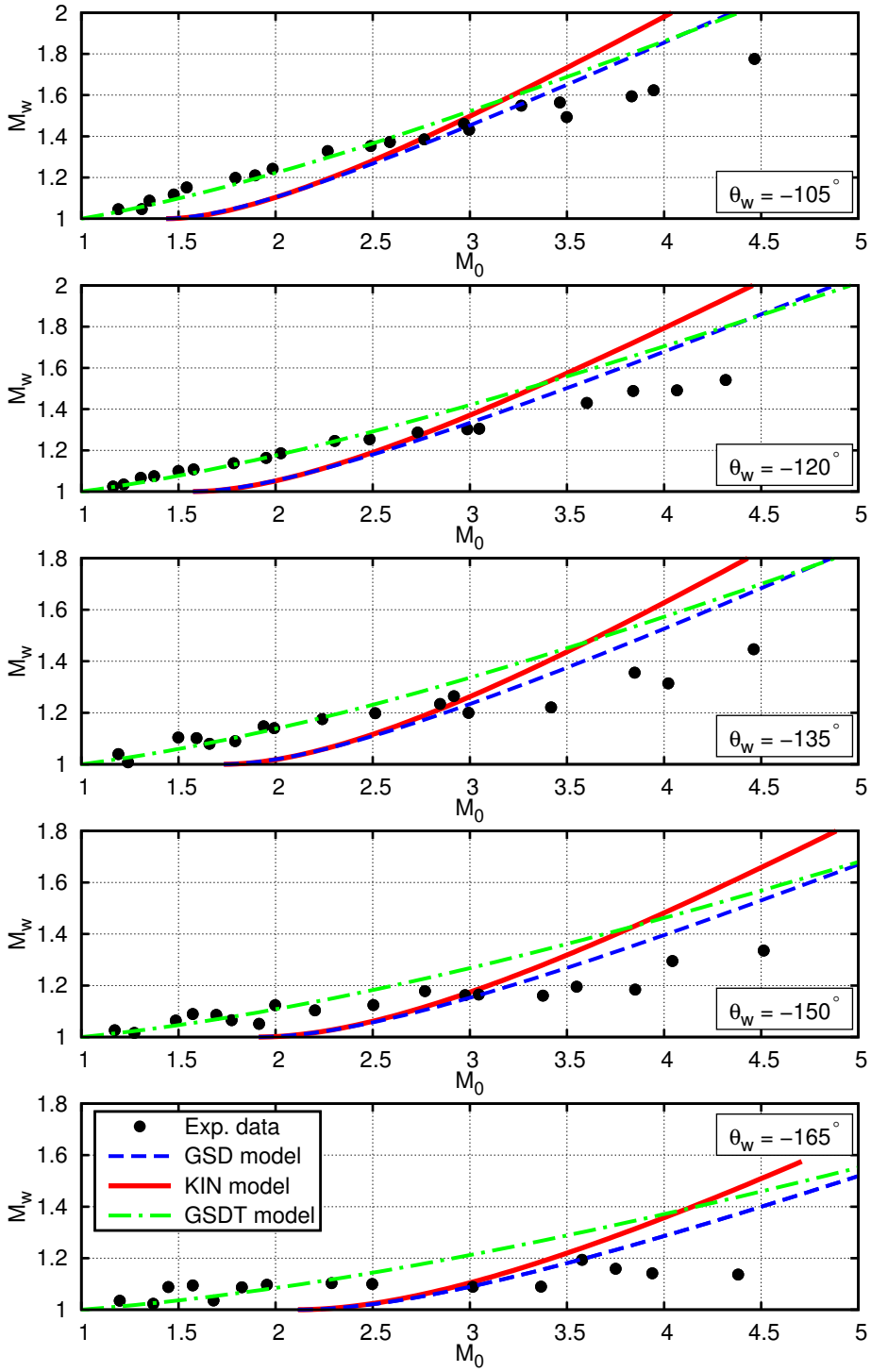


FIGURE 7.15 – Problème de la diffraction d'un choc plan sur une rampe convexe. Nombre de Mach à la paroi, M_w, en fonction du nombre de Mach incident, M_0, pour différents angles de rampe θ_w. Les données expérimentales sont extraites de [120].

7.4.2 Combinaison d'ondes expansives

On considère la diffraction d'un choc plan à nombre de Mach 2 sur un merlon tourné comme expérimenté par Skews [121]. Le choc initial se déplace de la gauche vers la droite et se diffracte sur trois rampes de détente successives, donnant une solution combinant uniquement des ondes de détente sur le front. Les modèles GSDT et KINT sont par conséquent identiques pour ce problème et seul le modèle GSDT est présenté ici, figure 7.16. La position du front à trois instants différents est comparée avec les données expérimentales extraites de [121]. On notera que la prise en compte du terme transverse dans les modèles améliore significativement la solution.

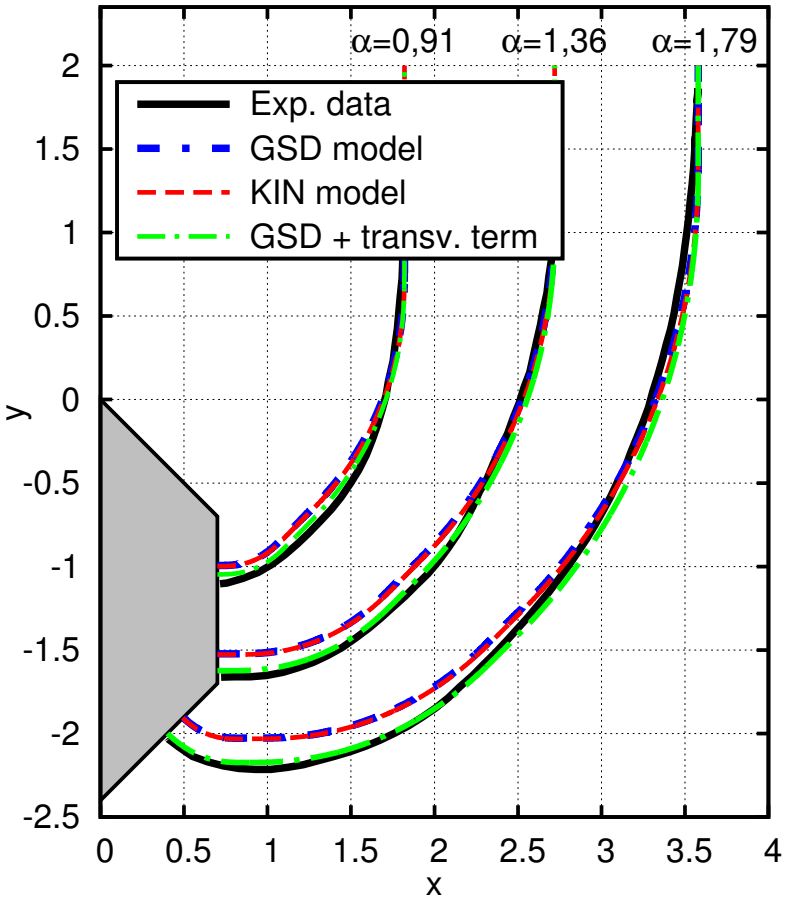


FIGURE 7.16 – Diffraction d'un choc plan à nombre de Mach 2 sur un merlon tourné. Le choc se déplace de la gauche vers la droite. Simulation effectuée pour $\Delta s = 0.00125$. Les données expérimentales sont issues de [121].

7.4.3 Diffraction sur un merlon

Nous finissons ce chapitre avec un exemple plus complexe faisant intervenir à la fois des ondes expansives et compressives (choc-choc). On considère la diffraction d'un choc plan de nombre de Mach incident M_0 sur un merlon, dit merlon 1, (voir Fig. 7.17 pour une configuration type). Il se produit alors quatre diffractions successives sur chaque face de l'obstacle. Ces faces sont numérotées 1 pour la face avant, 2 pour le sommet, 3 pour la face arrière et 4 pour le sol

à l'arrière du merlon. La taille du merlon est choisie en cohérence avec les expériences de S. Éveillard [41, 42] réalisées pour une onde de souffle, qui seront détaillées en section 8.2.2.

Étant donné que le choc est localement orthogonal à la paroi, ces quatre diffractions peuvent être assimilées au niveau de l'obstacle, et pour un choc suffisamment fort, aux problèmes élémentaires de diffraction d'un choc plan sur une rampe. Les rampes sont alors concaves pour les faces 1 et 4 et convexes pour les faces 2 et 3. La valeur du nombre de Mach au niveau du mur, M_w, peut ainsi être évaluée théoriquement pour chaque modèle. On rappelle ci-après les expressions reliant M_w au nombre de Mach incident, M_i, et à l'angle de déviation de la rampe, θ_w, pour ce type de problème.

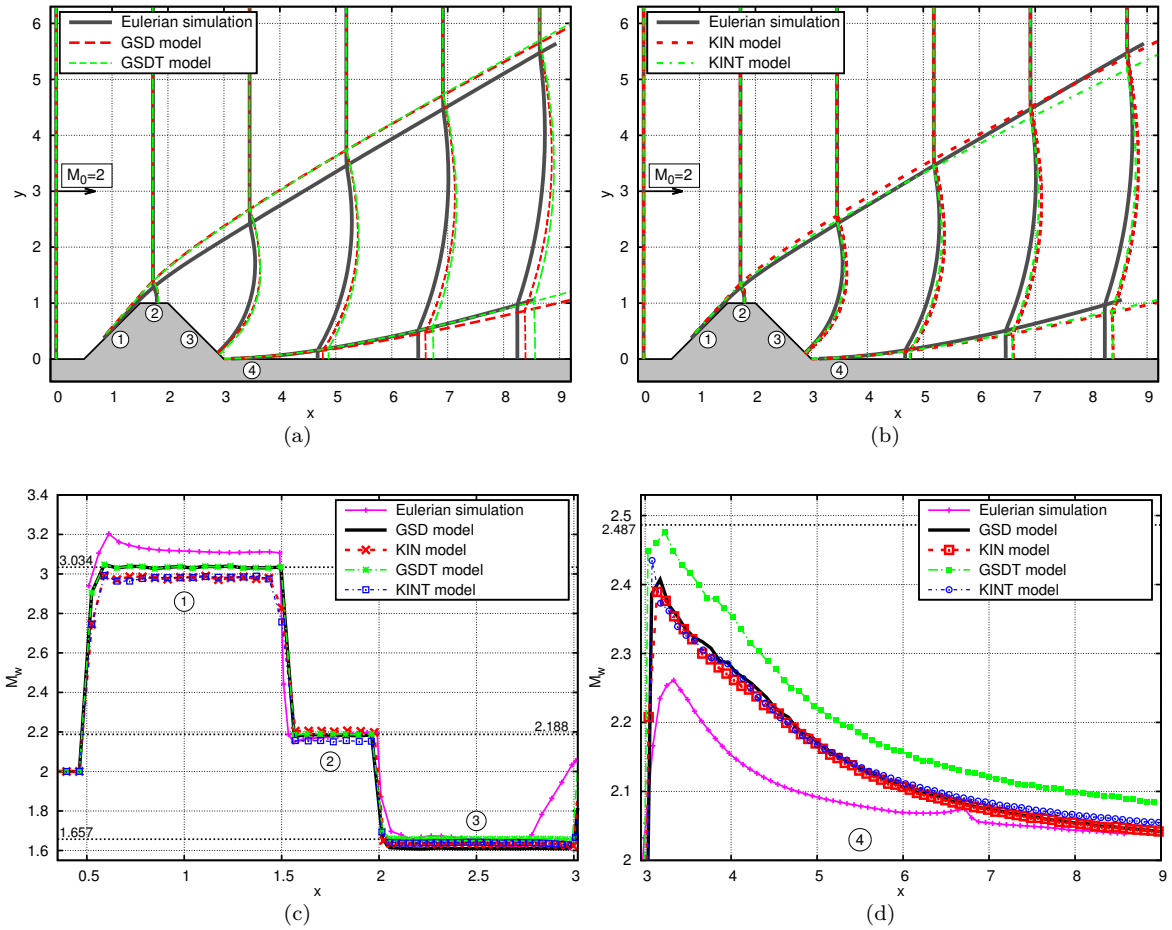


FIGURE 7.17 – Diffraction d'un choc plan à nombre de Mach 2 sur un merlon. Fig. (a) et (b) : Positions successives du choc pour GSD et GSDT, et KIN et KINT respectivement. Fig. (c) : Nombre de Mach au niveau de la paroi, M_w, le long du merlon (faces 1 à 3). Fig. (d) : M_w à l'arrière du merlon (face 4). Simulation avec l'algorithme Lagrangien : $\Delta s = 0.00125$, simulation Eulérienne : $\Delta x = 0.0025$.

Lors de la diffraction sur une rampe concave d'angle $\theta_w > 0$ (cas compressif), un choc-choc se forme et la vitesse du front de Mach est donnée par la relation de Rankine-Hugoniot (3.62a) :

$$\tan(\theta_w) = \frac{\sqrt{\left(\left(\frac{M_w}{M_i}\right)^2 - 1\right)\left(1 - \left(\frac{A_w}{A_i}\right)^2\right)}}{1 + \frac{A_w}{A_i}\frac{M_w}{M_i}}, \qquad \text{avec } \frac{A_w}{A_i} = \exp\left(-\int_{M_i}^{M_w} \frac{m\lambda(m)}{m^2-1}\mathrm{d}m\right), \quad (7.28)$$

où $\lambda = \lambda_W$ (eq. (7.2a)) pour le modèle GSD et $\lambda = \lambda_K$ (eq. (7.2c)) pour le modèle KIN. Cette expression est identique pour les modèles GSDT et KINT, avec la fonction λ correspondante, puisque la fermeture *ad hoc* est activée uniquement pour un choc expansif. Pour une détente sur un coin convexe d'angle $\theta_w < 0$, la valeur de M_w est définie par (3.54) :

$$\theta_w = \int_{M_0}^{M_w} \sqrt{\frac{\lambda(m)}{m^2-1}} \mathrm{d}m, \tag{7.29}$$

pour les modèles GSD et KIN, *i.e.* sans prise en compte du terme transverse. Dans ce dernier cas, le nombre de Mach à la paroi s'exprime comme (7.4)-(7.5) :

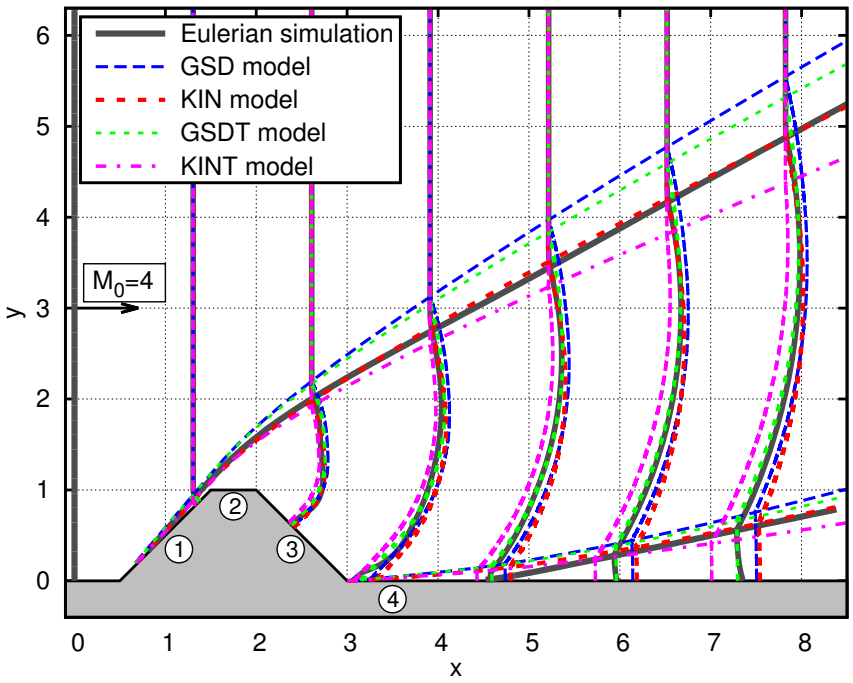
$$M_w = \sqrt{1 + \exp\left(k\theta_w\right)\left(M_0^2 - 1\right)}, \quad \text{avec } k = 0.984943. \tag{7.30}$$

La figure 7.17 présente l'interaction du choc avec le merlon pour un nombre de Mach incident égal à 2. L'algorithme Lagrangien, détaillé au chapitre 5, est utilisé pour obtenir la solution des modèles GSD et KIN, et l'algorithme modifié, décrit en section 7.3, est considéré pour les modèles GSDT et KINT. Le pas de discrétisation, Δs, est pris égal à 0.00125. Pour cet exemple, la partie plane du pied du choc est suffisamment grande pour assimiler localement l'interaction avec l'obstacle à un problème de diffraction sur une rampe concave d'angle 45° pour les faces 1 et 4, et convexe d'angle −45° pour les faces 2 et 3. La valeur théorique du nombre de Mach à la paroi après chaque diffraction, calculée à l'aide des relations (7.28)-(7.30), est donnée pour les différents modèles en table 7.1. Nous y présentons également la valeur moyenne de M_w sur chaque face calculée à l'aide d'une simulation Eulérienne pour un pas $\Delta x = 0.0025$ dans les 2 directions de l'espace. On note que le modèle GSDT restitue correctement cette valeur pour les faces 1, 2 et 3 en comparaison à la simulation Eulérienne.

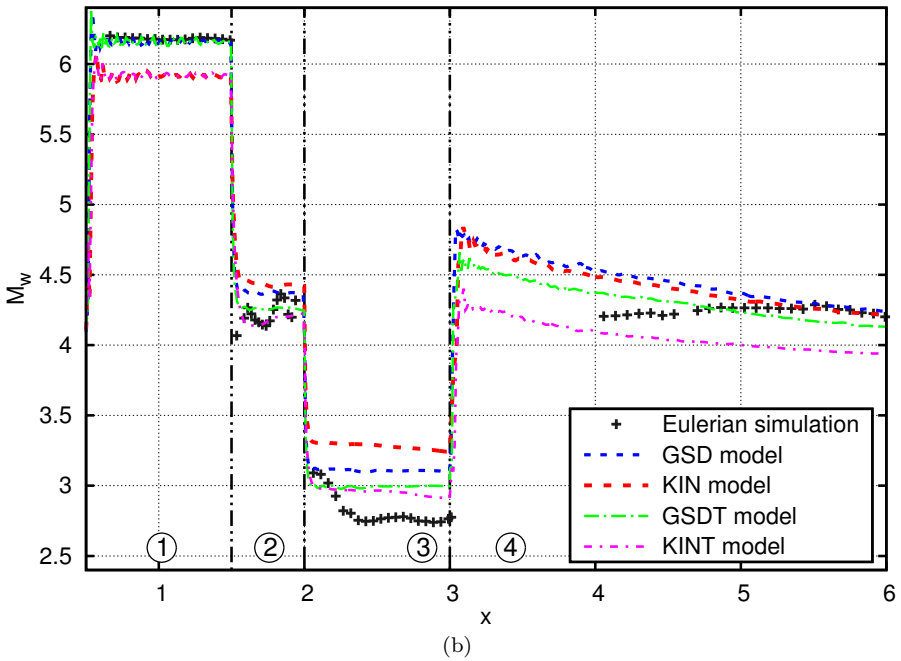
Face/M_w	GSD	GSDT	KIN	KINT	Simu. Euler ($\Delta x = 0.0025$)
1	3.034	3.034	2.980	2.980	3.110
2	2.183	2.188	2.201	2.153	2.180
3	1.609	1.657	1.635	1.636	1.640
4	2.408	2.487	2.429	2.431	2.250

TABLE 7.1 – Diffraction d'un choc plan à nombre de Mach 2 sur le merlon de la figure 7.17(a). Nombres de Mach théoriques au niveau de la paroi après diffraction sur chaque face. Les valeurs théoriques sont calculées à l'aide des relations (7.28)-(7.30).

À chaque diffraction sur les faces 1, 2, et 3, le choc reste plan sur une portion suffisamment importante pour que le nombre de Mach à la paroi conserve sa valeur théorique stationnaire (*cf.* Fig. 7.17(c)). Au niveau de la face 4, après avoir atteint sa valeur théorique, le nombre de Mach à la paroi décroît en raison de l'expansion géométrique du choc (*cf.* Fig. 7.17(d)). La diffraction sur la face avant du merlon (face 1) génère un front de Mach, et puisque le choc est compressif, les modèles GSD et GSDT sont équivalents. Le choc survient alors au niveau de la face 2 avec un nombre de Mach à la paroi égal à environ 3.034. La valeur de M_w après la diffraction sur cette face est sensiblement similaire : environ 2.183 pour l'approche de Whitham et 2.188 avec la correction du modèle. Le modèle avec terme transverse surestime davantage le nombre de Mach par rapport au modèle GSD lors de la diffraction sur la face 3, 1.657 contre 1.609. L'estimation de la vitesse du front de Mach lors de l'interaction du choc avec la face 4 est par conséquent plus importante avec le modèle GSDT comme nous pouvons le voir en figure



(a)



(b)

FIGURE 7.18 – Diffraction d'un choc plan à nombre de Mach 4 sur un merlon. Fig. (a) : Positions successives du choc. Fig. (b) : Nombre de Mach au niveau de la paroi. Simulation avec l'algorithme Lagrangien : $\Delta s = 0.00125$, simulation Eulérienne : $\Delta x = 0.00125$.

7.17(a). On note une avancée plus importante du front par rapport à la simulation Eulérienne pour ce dernier modèle. Une même étude peut être effectuée pour les modèles KIN et KINT.

Pour cette configuration, la correction apportée au modèle KIN modifie peu la solution, bien que la trajectoire du premier point triple soit différente.

Sur l'exemple précédent, la prise en compte du terme transverse dans le modèle GSD conduit à une surestimation de la position du front à l'arrière du merlon en comparaison à la simulation Eulérienne. L'estimation est meilleure dans d'autres configurations comme nous pouvons le voir en figure 7.18 pour la diffraction d'un choc à nombre de Mach 4 sur le même merlon. Ce problème est complexe en raison de la forte influence de l'écoulement arrière sur le front, et explique les fortes variations du nombre de Mach à la paroi pour la simulation Eulérienne en figure 7.18(b). Pour cet exemple, la position du front est mieux restituée par le modèle GSDT comparativement à la simulation Eulérienne (*cf.* Fig. 7.18(a)). Ce n'est en revanche pas le cas pour le modèle KINT. La sous-estimation constatée est une conséquence directe de la tendance de l'approche cinématique à sous-évaluer la vitesse du front de Mach.

Le temps de calcul de résolution de chaque cas étudié dans cette section est reporté en table 7.2. Le dernier cas est traité dans la sous-section suivante. La prise en compte du terme transverse dans la relation $A - M$ augmente significativement le coût de calcul, jusqu'à un facteur 8 par rapport au modèle originel, en raison du système non-linéaire à résoudre. Cela est dommageable en choc fort puisque les modèles GSD et KIN donnent des solutions correctes, mais est nécessaire en choc faible afin de s'assurer de l'existence d'une solution. Le coût de calcul reste toutefois raisonnable.

Cas	Longueur du choc (m)	α final (m)	Temps simu. GSD	Temps simu. GSDT
Merlon retourné $- M_0 = 2$	3	2.00	42 s	3 min 54 s
Merlon $1 - M_0 = 2$	7	4.00	2 min 17 s	16 min 10 s
Merlon $1 - M_0 = 4$	7	2.00	2 min 15 s	15 min 51 s
Merlon $1 - M_0 = 1.10$	4	7.27	1 min 08 s	11 min 09 s
Merlon $2 - M_0 = 1.05$	3	5.71	42 s	6 min 19 s

TABLE 7.2 – Temps de calcul de l'algorithme Lagrangien pour résoudre les modèles GSD et GSDT pour les différents cas présentés en section 7.4. Simulations menées sur *Intel(R) Xeon(R) CPU E3-1120 v5@3.00GHz* pour $\Delta s = 0.00125$. Les durées sont similaires pour les modèles KIN et KINT.

7.4.4 Limitation des modèles

On considère pour finir la diffraction d'un choc plan à nombre de Mach 1.05 sur un deuxième type de merlon (merlon 2) : la première face est inclinée d'un angle de 45° et la troisième est inclinée d'un angle de −90° (*cf.* Fig. 7.19(a)). Le choc étant faible pour cet exemple, les modèles GSD et KIN sont similaires. Par conséquent, seul le modèle GSD, avec et sans terme transverse, est étudié ici. Nous présentons en figure 7.19 les résultats numériques obtenus pour un pas de discrétisation de 0.00125. La table 7.3 donne les valeurs théoriques et numériques du nombre de Mach à la paroi sur les faces 1 et 2.

La diffraction sur la face avant du merlon correspond au problème de la diffraction d'un choc plan sur une rampe concave d'angle 45°. Bien que la réflexion soit théoriquement régulière pour ce type de configuration, les modèles GSD et GSDT restituent un front de Mach. La valeur théorique du nombre de Mach après diffraction, environ 1.490, est observée numériquement

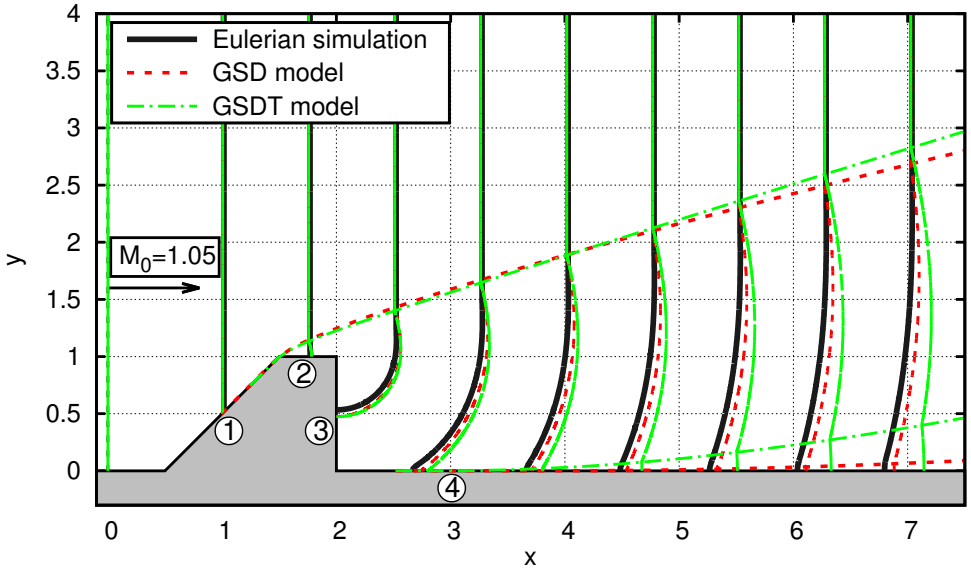


FIGURE 7.19 – Diffraction d'un choc plan à nombre de Mach 1.05 sur un merlon. Fig. (a) : Positions successives du choc. Fig. (b) : Nombre de Mach le long de la paroi. Simulation avec l'algorithme Lagrangien : $\Delta s = 0.00125$, simulation Eulérienne : $\Delta x = 0.0025$.

pour ces deux modèles en dépit des oscillations du schéma, figure 7.19(b). Cette valeur est très largement surestimée en comparaison à la simulation Eulérienne, 1.10 environ. Puisque le front de Mach est petit, la diffraction sur le sommet du merlon n'est pas équivalente à la diffraction d'un choc plan sur un coin convexe d'angle $-45°$. L'expansion géométrique du

choc sur le sommet diminue fortement la valeur du nombre de Mach à la paroi, en deçà de la valeur estimée (*cf.* table 7.3). L'écart entre les valeurs de M_w des modèles GSD et GSDT avec la simulation Eulérienne se réduit sur cette face. On note que le modèle GSDT surestime le nombre de Mach à la paroi par rapport au modèle GSD, 1.104 contre 1.093.

Face/M_w	Théo. GSD	Num. GSD	Théo. GSDT	Num. GSDT	Simu. Euler ($\Delta x = 0.0025$)
1	1.490	1.490	1.490	1.490	1.103
2	1.174	1.093	1.250	1.104	1.060

TABLE 7.3 – Diffraction d'un choc plan à nombre de Mach 1.05 sur le merlon de la figure 7.19(a). Nombres de Mach théoriques et numériques au niveau de la paroi après diffraction sur les faces 1 et 2. Les valeurs théoriques sont calculées à l'aide des relations (7.28)-(7.30).

Le modèle GSD tombe dans sa limitation lors de la diffraction sur la troisième face du merlon, puisque localement le problème est équivalent à la diffraction d'un choc plan sur un coin à $-90°$. On rappelle, voir section 3.1.5, que la solution existe jusqu'à la paroi si et seulement si le nombre de Mach incident est supérieur ou égal à 1.310 environ. Le schéma Lagrangien est suffisamment robuste pour fournir une solution numérique mais non correcte. Le nombre de Mach de la partie du choc non physique tend alors vers 1. Cela résulte en une non convergence de la solution à l'arrière du merlon. En revanche, le modèle GSDT n'a pas de limitation et la solution numérique converge. Dans ce cas, le nombre de Mach à la paroi sur la troisième face tend vers la valeur 1.022 environ, qui est similaire à la simulation Eulérienne (*cf.* Fig. 7.19(b)).

On observe une forte surévaluation de la position du front à l'arrière du merlon pour le modèle GSDT en comparaison à la simulation Eulérienne. Puisque le nombre de Mach incident est similaire pour ces deux approches, on conclut que cette surestimation est une conséquence de la formation du front de Mach par le modèle GSDT. Théoriquement, et on l'observe sur la simulation Eulérienne, la réflexion est régulière au moins dans un premier temps. Le modèle GSD semble mieux restituer le front pour ce cas, bien que la solution ne converge pas en pratique.

Il apparaît clairement sur cet exemple que la formation systématique du front de Mach par le modèle GSD, et donc par le modèle GSDT, aura pour conséquence de surévaluer la vitesse du front de choc lorsque la réflexion est régulière. Afin d'éviter cela, il faudrait imaginer un mécanisme empêchant la formation du front de Mach. Dans une perspective d'améliorer le modèle, nous pourrions par exemple introduire un terme de viscosité dans la relation $A - M$ qui serait d'autant plus actif que le choc serait faible. Une perspective alternative serait de modifier la condition de bord à la paroi afin d'éviter la formation du front de Mach lorsque cela est nécessaire [7].

7.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons proposé une modification des modèles GSD et KIN afin de lever l'indétermination qui existe pour le problème de détente. Cette modification consiste à modéliser de manière *ad hoc* un écoulement transversal le long du choc dans la relation $A-M$. Cette fermeture n'est effective que dans les régions expansives du choc (problème de détente). Dans les zones compressives, notamment au niveau des choc-chocs, la relation $A-M$ classique est appliquée. Les modèles modifiés sont qualifiés de GSDT et KINT (T pour Transverse).

Du point de vue numérique, seule l'intégration de la relation $A - M$ est modifiée dans l'algorithme Lagrangien. Elle s'effectue très simplement puisque l'intégration se fait d'un pas

de temps à l'autre. L'activation ou non du terme transverse nécessite la connaissance de la courbure locale au front. Celle-ci ne peut être calculée directement en raison des oscillations du schéma. Par conséquent, une procédure d'estimation du signe de la courbure a été mise en place. À cela s'ajoute une désactivation systématique du terme transverse dans les zones compressives, à une distance d_c du point de plus forte variation du nombre de Mach. Ce paramètre influence la solution numérique et mérite une étude approfondie qui n'a pas pu être effectuée dans le cadre de ce travail faute de temps.

Pour les cas étudiés ici, la prise en compte d'un terme transverse donne d'excellents résultats pour les problèmes n'impliquant que des ondes expansives. La fermeture affecte la solution pour les problèmes combinant à la fois des ondes expansives et compressives, tels que le problème de la diffraction d'un choc plan sur un merlon. Pour un choc fort, les résultats obtenus sont alors tantôt plus proches des simulation Eulériennes, tantôt plus éloignés. Les erreurs commises sont globalement du même ordre de grandeur que celles des modèles GSD et KIN. Une limitation des modèles apparaît pour le problème de la diffraction d'un choc faible sur un coin concave : un front de Mach est systématiquement restitué par les modèles, et cela même lorsque la réflexion est théoriquement régulière. Cela conduit à une surestimation importante de la vitesse du front de choc, accentuée par la prise en compte du terme transverse. Ce défaut pourrait être corrigé à l'avenir en introduisant un terme de viscosité dans la relation $A - M$, ou en modifiant la condition de bord à la paroi.

La fermeture que nous proposons présente toutefois l'avantage de lever la limitation des modèles GSD et KIN pour les problèmes de diffraction d'un choc sur une géométrie convexe. Il s'agissait de la principale limitation à la modélisation des ondes de souffle. Dans le prochain chapitre, nous présentons l'extension des modèles GSDT et KINT aux ondes de souffle.

Troisième partie

Prise en compte des effets arrière dans les modèles simplifiés

Chapitre 8

Extension simple aux ondes de souffle

Sommaire

8.1 Prise en compte des effets de souffle dans les modèles GSDT et KINT 200

8.1.1 Modélisation des effets arrière 200

8.1.2 Intégration numérique 204

8.2 Résultats préliminaires 206

8.2.1 Diffraction d'un choc sphérique divergent sur le sol 206

8.2.2 Diffraction d'une onde de souffle sur un merlon 209

8.3 Conclusion 217

Les modèles GSD et KIN fournissent une approximation assez satisfaisante pour la propagation d'une onde de choc soutenue, notamment avec l'extension *ad hoc* à l'écoulement transversal le long du choc présentée au chapitre précédent. Ces modèles sont basés sur l'hypothèse que l'influence de l'écoulement à l'arrière du choc sur celui-ci (effets arrière) est faible. On rappelle que Whitham néglige ces effets arrière dans son modèle sous l'hypothèse de choc fort, tandis que nous choisissons de les négliger dans le modèle KIN sous l'hypothèse que le signal spatial de pression est une "marche". Dans les deux cas, l'énergie de la source est supposée infinie.

La prise en compte des effets de souffle (source d'énergie finie) remet en cause cette hypothèse. La modélisation des effets arrière peut être effectuée par le développement d'une équation d'évolution complétant les modèles existants (modèle à l'ordre 1). Le comportement asymptotique attendu en champ lointain est alors retrouvé. Néanmoins, ces extensions semblent difficiles à mettre en œuvre en raison de complications théoriques et numériques qui seront détaillées dans le prochain chapitre.

Nous proposons ici une extension simple aux ondes de souffle des modèles dit à l'ordre 0 (*i.e.* sans équation d'évolution sur les effets arrière). Celle-ci consiste à modéliser de manière *ad hoc* les effets arrière dans la relation $A - M$. Cette modélisation, ainsi que sa prise en compte dans l'algorithme Lagrangien, sont détaillées dans la première section. La seconde section présente les résultats d'une étude préliminaire de l'apport de la méthode au travers d'exemples 2D axisymétriques de la diffraction d'une onde de souffle sphérique sur le sol et sur un merlon.

8.1 Prise en compte des effets de souffle dans les modèles GSDT et KINT

La relation $A-M$ pilote l'évolution de la vitesse des perturbations sur le front, qui sont responsables de la modification de l'intensité, de la forme et de l'orientation du choc. En tenant compte des effets arrière et transverses, la relation $A-M$ s'écrit pour un milieu homogène et au repos sous la forme :

$$\frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial \alpha}+\frac{M\lambda(M)}{M^2-1}\frac{\partial M}{\partial \alpha}+H\left(\kappa\right)f(M)\left|\frac{\partial M}{A\partial \beta}\right|+E=0. \tag{8.1}$$

La fonction λ est égale à λ_W pour le modèle GSD (eq. (7.2a)) et λ_K pour le modèle KIN (eq. (7.2c)). Le terme transverse est actif uniquement dans les régions expansives du choc, soit $H(\kappa)=1$, pour une courbure locale du choc, κ, positive, et est nul sinon. La fonction f est modélisée de manière *ad hoc* et est donnée par (7.12), ce qui lève la limitation existante pour le problème de détente soulevé en section 6.1.3. Le terme E contient les effets arrière pour chaque modèle. Il s'exprime comme

$$E=f_3(M)\frac{(\partial_t p+\rho c\partial_t v)_-}{\rho_+ c_+^3} \quad \text{pour le modèle GSD}$$

$$E=\chi_3(M)\frac{\left(\vec{n}\cdot\vec{\nabla}p\right)_-}{p_+} \qquad \text{pour le modèle KIN,}$$

où f_3 et χ_3 sont des fonctions dépendant uniquement de M et définies par (6.4c) et (6.7c) respectivement.

Les modèles GSD, KIN, GSDT et KINT décrivent avec une bonne approximation la propagation d'une onde de choc soutenue comme le démontre l'ensemble de l'étude menée jusqu'à présent. Pour les ondes de souffle, les formules simplifiées de Kinney (1.5a) et Needham (1.6) montrent que le saut de pression décroît bien plus vite que par la simple expansion géométrique en champ proche comme nous pouvons le voir en figure 8.1. La modélisation du terme E devient nécessaire. La prochaine sous-section présente une modélisation simple de ces effets arrière, suivie brièvement, dans la seconde sous-section, de l'intégration numérique de la relation $A-M$ (8.1) dans l'algorithme Lagrangien.

8.1.1 Modélisation des effets arrière

Nous proposons ici de modéliser le terme contenant les effets arrière, E, à partir d'une loi empirique pression/distance à la charge, r, valable en champ libre. Cette approche avait été suivie par A. Sarrazin lors de son stage de césure au CEA-DAM [104], mais n'a pas été étudiée en détail. En supposant que E dépende uniquement de α, l'évolution du nombre de Mach dans le tube de rayon résulte d'une compétition entre les effets géométriques, $\frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial \alpha}$, et les effets de souffle, $E(\alpha)$:

$$\overbrace{\underbrace{\frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial \alpha}}_{\text{effets géométriques}}+\frac{M\lambda(M)}{M^2-1}\frac{\partial M}{\partial \alpha}+H\left(\kappa\right)f(M)\left|\frac{\partial M}{A\partial \beta}\right|}^{\text{choc soutenu}}+\underbrace{E\left(\alpha\right)}_{\text{effets de souffle}}=0. \tag{8.2}$$

Remarque 8.1

On rappelle que $A\mathrm{d}\beta=\mathrm{d}s$, où s est l'abscisse curviligne du choc. On a de plus en champ libre $\frac{\partial}{\partial s}\equiv 0$ en raison de la symétrie du problème.

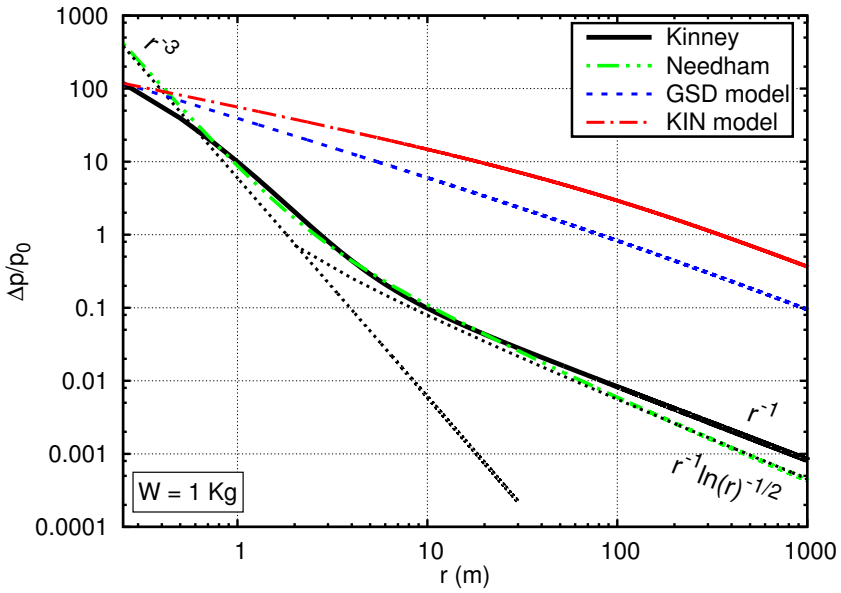


FIGURE 8.1 – Évolution de la surpression du choc en champ libre pour l'explosion d'un kilogramme de TNT. Lois empiriques de Kinney (8.3) et Needham (8.4). Solutions des modèles GSD et KIN pour $M_0 \approx 10.124$ et $r_0 = 0.25$. La surpression est calculée à l'aide de la relation de Rankine-Hugoniot $\frac{\Delta p}{p_0} = \frac{2\gamma}{\gamma+1}(M^2-1)$ pour $\gamma = 1.4$.

Deux lois empiriques sont considérées pour la modélisation d'une onde de souffle issue de l'explosion d'une charge sphérique de TNT de masse W (en kg) en champ libre [1]. La première est celle issue des abaques de Kinney. On rappelle son expression (1.5a), en notant $\zeta = \frac{[p]}{p_0}$ la surpression adimensionnée et avec $p_0 = 101325$ Pa la pression atmosphérique de l'air au repos :

$$\zeta_K(Z) = \frac{808\left(1+\left(\frac{Z}{4.5}\right)^2\right)}{\sqrt{\left(1+\left(\frac{Z}{0.048}\right)^2\right)\left(1+\left(\frac{Z}{0.32}\right)^2\right)\left(1+\left(\frac{Z}{1.35}\right)^2\right)}}, \tag{8.3}$$

où Z est la distance rapportée à la masse de l'explosif : $Z = r/W^{1/3}$ en $\mathrm{m/kg^{1/3}}$. Cette loi, communément utilisée dans le domaine pyrotechnique, ne donne pas les comportements théoriques attendus, r^{-3} en champ proche, et $r^{-1}\ln(r)^{-1/2}$ en champ lointain. Pour cette raison, la loi empirique de Needham (1.6), qui respecte ces asymptotes, est également considérée. Cette loi est écrite ici pour une charge W (en kg) de TNT :

$$\zeta_N(Z) = \frac{6.0005}{Z^3} + \frac{1.7703}{Z^2} + \frac{0.9823}{Z\sqrt{\ln\left(\frac{Z}{5.6117}+3\exp\left(-\sqrt{\frac{Z}{5.6117}}/3\right)\right)}}. \tag{8.4}$$

Elle possède un régime intermédiaire similaire à celui de la loi de Kinney entre les champs proche et lointain. Ces deux fonctions sont tracées en figure 8.1. À titre indicatif, la décroissance en champ libre des modèles GSD et KIN, en l'absence d'effets arrière, y est également présentée en symétrie sphérique. On rappelle que celle-ci est donnée par le système (6.15), que l'on résout ici numériquement à l'aide d'un algorithme de Runge-Kutta d'ordre 4. La condition initiale correspond au nombre de Mach obtenu à $r = 0.25$ avec la loi de Kinney. Sans effets arrière, seule l'expansion géométrique est responsable de la décroissance de la surpression de l'onde

1. Le champ libre est un cas idéalisé sans obstacle.

de choc dans ces modèles. On notera un écart d'environ deux ordres de grandeur en fin de domaine.

Remarque 8.2

D'autres modélisations de la source sont possibles, comme le cas d'une charge gazeuse, par exemple, qui sera abordé en section 8.2.2.

En champ libre, l'évolution de la distance du choc à la source, r, est donnée par l'équation différentielle ordinaire :

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\alpha} = M(r), \tag{8.5}$$

où l'on rappelle que $\alpha = c_+ t$ est assimilé au temps d'arrivée du choc t par abus. De surcroît, la variation transversale est nulle pour cette configuration idéalisée, et la variation d'aire dans chaque tube de rayon ne dépend que de r :

$$\frac{\partial M}{\partial \beta} \equiv 0 \quad \text{et} \quad \frac{A'(r)}{A(r)} = \frac{d-1}{r},$$

avec $d = 1$ en symétrie plane, $d = 2$ en symétrie cylindrique, et $d = 3$ en symétrie sphérique. La relation $A - M$ (8.2) s'exprime alors sous la forme :

$$M\left(\frac{d-1}{r} + \frac{M\lambda(M)}{M^2-1}\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}r}\right) + E(\alpha) = 0. \tag{8.6}$$

Dans la suite, la loi pression/distance est notée $r/\zeta_a(r)$ dans un souci de généralité. On a alors $\zeta_a(r) = \zeta_K(r/W^{1/3})$ pour la loi de Kinney ou $\zeta_a(r) = \zeta_N(r/W^{1/3})$ pour la loi de Needham par exemple. La loi ζ_a est injectée dans la relation $A - M$ (8.6), pour $M = M_a$, en considérant la relation de Rankine-Hugoniot (2.23) :

$$M_a(r) = \sqrt{1 + \frac{\gamma+1}{2\gamma}\zeta_a(r)}. \tag{8.7}$$

Finalement, les effets de souffle s'expriment de la manière suivante dans la relation (8.2) pour $d = 3$:

$$\boxed{E(\alpha) = E_r(r_a(\alpha)) \quad \text{avec} \quad E_r(r) = -M_a(r)\left(\frac{2}{r} + \frac{M_a(r)\lambda(M_a(r))}{M_a(r)^2-1}M_a'(r)\right),} \tag{8.8}$$

où r_a est la distance à la source. Cette distance est reliée au temps d'arrivée du choc par la relation différentielle (8.5), donnant après intégration depuis l'instant initial α_0 :

$$r_a(\alpha) = r_0 + \int_{\alpha_0}^{\alpha} M_a(r_a(\tau))\mathrm{d}\tau,$$

où r_0 est la position initiale du choc. Dans la suite, on qualifie de modèles GBD (Geometrical Blast Dynamics) et KBD (Kinematic Blast Dynamics) les modèles GSDT et KINT définis par la relation $A - M$ (8.2) et fermés par l'expression empirique de E (8.8).

Remarque 8.3

En champ libre, la relation $A - M$ (8.2) s'exprime en fonction de r comme :

$$\frac{d-1}{r} + \frac{M\lambda(M)}{M^2-1}\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}r} + \frac{E_r(r)}{M} = 0. \tag{8.9}$$

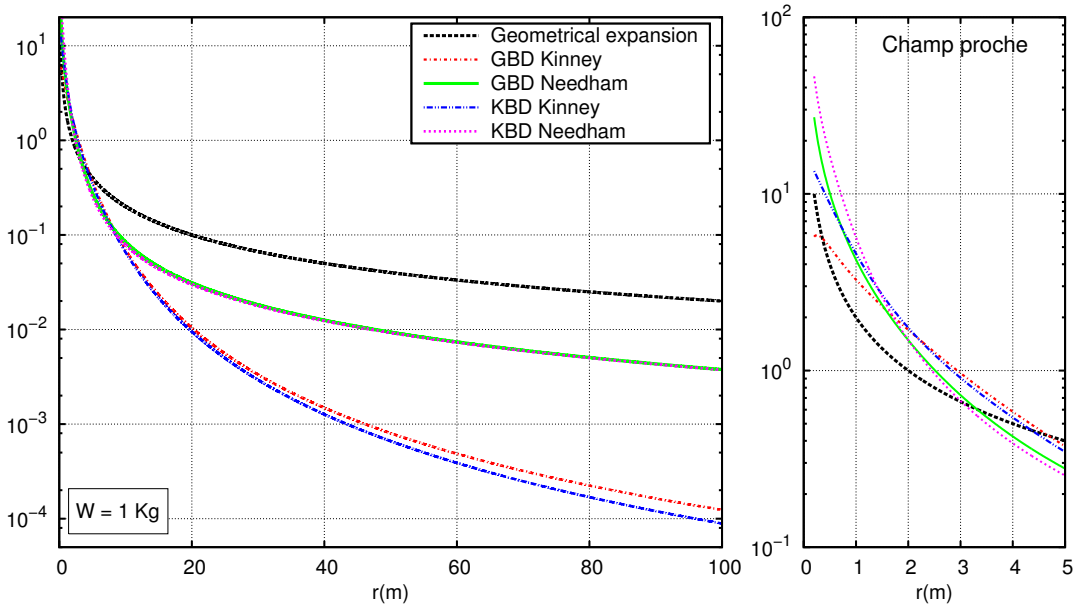


FIGURE 8.2 – Contribution de l'expansion géométrique, $\frac{A'(r)}{A(r)} = \frac{2}{r}$, et des effets de souffle, $\frac{E_r(r)}{M_a(r)}$, dans la relation $A - M$ (8.9) pour les modèles GSDT et KINT et les lois de Kinney (8.3) et Needham (8.4).

En champ libre, les contributions de l'expansion géométrique et des effets de souffle sont tracées en figure 8.2 pour les modèles GBD et KBD fermés avec les lois de Kinney (8.3) et Needham (8.4). On note qu'à fermeture égale, la contribution des effets de souffle est similaire entre ces deux modèles. En champ proche, les effets de souffle sont du même ordre de grandeur que l'expansion géométrique, ce qui justifie et impose leur prise en compte. Le terme géométrique domine ensuite rapidement les effets arrière au fur et à mesure que l'on s'éloigne de la source. Par exemple à 100 m de distance, on observe un facteur 100 entre ces deux contributions pour la fermeture de Kinney et un facteur 10 pour la fermeture de Needham.

En champ lointain ($r \gg 1$), l'intensité du choc est faible : $M_a \sim 1$, ou de manière équivalente $\zeta_a \sim 0$, et $\lambda \sim 4$ pour chaque modèle (*cf.* section 6.1.1). D'après (8.7), on a :

$$\frac{\zeta_a'(r)}{\zeta_a(r)} \sim \frac{M_a'(r)}{M_a(r) - 1},$$

si bien que E_r vérifie :

$$E_r(r) = -\frac{2}{r} - 2\frac{\zeta_a'(r)}{\zeta_a(r)}.$$

Par un développement limité des lois (8.3) et (8.4), il est aisé d'obtenir :

$$\frac{\zeta_K'(Z)}{\zeta_K(Z)} \sim -\frac{3 \times 4.5^2}{Z^3} - \frac{1}{Z} \quad \text{et} \quad \frac{\zeta_N'(Z)}{\zeta_N(Z)} \sim -\frac{1}{Z}\left(1 + \frac{1}{2 \times 5.6117 \ln\left(\frac{Z}{5.6117}\right)}\right),$$

donnant le comportement asymptotique de E_r en champ lointain :

$$E_r(r) = \frac{6 \times 4.5^2 W^{2/3}}{r^3} \qquad \text{pour la loi de Kinney}$$

$$E_r(r) = \frac{1}{5.6117 r \ln\left(\frac{r}{5.6117 W^{1/3}}\right)} \qquad \text{pour la loi de Needham.}$$

En particulier, les effets de souffle sont positifs en champ lointain et paradoxalement plus faible avec le modèle de Kinney.

En champ proche ($r \sim 0$) où le choc est fort ($M \gg 1$), on a d'après (8.7) :

$$M_a(r) = \sqrt{\frac{\gamma+1}{2\gamma}\zeta_a(r)} \quad \text{et} \quad \frac{M_a'(r)}{M_a(r)} = \frac{\zeta_a'(r)}{2\zeta_a(r)}.$$

Le terme d'effets de souffle, E_r, vérifie donc :

$$E_r(r) = -\sqrt{\frac{\gamma+1}{2\gamma}\zeta_a(r)}\left(\frac{2}{r} + \frac{\lambda_\infty}{2}\frac{\zeta_a'(r)}{\zeta_a(r)}\right),$$

avec $\lambda_\infty \approx 5.074$ pour le modèle GSD et $\lambda_\infty \approx 7.714$ pour le modèle KIN (*cf.* section 6.1.1). Par un développement limité des lois (8.3) et (8.4), il vient :

$$\frac{\zeta_K'(Z)}{\zeta_K(Z)} \sim \frac{2CZ}{1+CZ^2} \quad \text{et} \quad \frac{\zeta_N'(Z)}{\zeta_N(Z)} \sim -\frac{3}{Z},$$

avec $C = \frac{1}{4.5^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{0.048^2} + \frac{1}{0.32^2} + \frac{1}{1.35^2}\right) \approx -222.12$. Finalement, E_r s'exprime comme :

$$E_r(r) = -\sqrt{\frac{\gamma+1}{2\gamma}808}\frac{2}{r} \qquad \text{pour la loi de Kinney}$$

$$E_r(r) = -\sqrt{\frac{\gamma+1}{2\gamma}6.0005W} \times \frac{2-\frac{3}{2}\lambda_\infty}{r^{5/2}} \qquad \text{pour la loi de Needham.}$$

En champ proche, les effets de souffle sont donc négatifs avec la loi de Kinney et positifs avec avec la loi de Needham.

D'après (8.8), les effets de souffle sont positifs si et seulement si

$$\frac{2}{r} + \frac{M_a(r)\lambda(M_a(r))}{M_a(r)^2-1}M_a'(r) \leq 0,$$

donnant en champ proche la condition :

$$\frac{\zeta_a'(r)}{\zeta_a(r)} \leq -\frac{4}{\lambda_\infty}\frac{1}{r}.$$

Ce critère est vérifié inconditionnellement avec la loi de Needham. Les effets de souffle sont positifs avec la loi de Kinney sous la condition que r soit plus grand qu'une valeur limite dépendant de W :

$$r > \sqrt{-\frac{2W^{1/3}}{C\lambda_\infty\left(1+\frac{2}{\lambda_\infty W^{1/3}}\right)}} = r_c.$$

À titre d'exemple, pour 1 kg de TNT, soit une sphère de rayon $r_0 = 0.053$ m, r_c vaut 0.035 m pour le modèle GBD et 0.032 m pour le modèle KBD. Le changement de signe de E_r est une conséquence de la dimension non négligeable de l'explosif pour la loi de Kinney. En pratique, $r \geq r_0$, ce qui assure la positivité de E_r pour cette fermeture.

Le signe de E est donc positif dans la relation $A - M$ (8.2), ce qui assure aux effets de souffle d'atténuer le nombre de Mach en comparaison aux modèles sans effets arrière.

8.1.2 Intégration numérique

La prise en compte du terme E dans l'algorithme ne présente pas de difficulté particulière. Seule l'intégration de la relation $A - M$ est légèrement modifiée dans l'algorithme Lagrangien

présenté au chapitre 5. La résolution de la relation $A - M$ avec effets de souffle est directe en suivant la procédure décrite en section 7.3.1 sur le tube de rayon i, pour $i = 1, \ldots, N$. Après approximation du terme transverse par l'expression

$$f(M)\left|\frac{\partial M}{A\partial\beta}\right| \approx \text{sign}\left(f(M_i)\right)\max\left(\Delta_l F_i, -\Delta_r F_i, 0\right),$$

avec $F(M) = \int f(m)\mathrm{d}m$, $\text{sign}\,(x) = 1$ si $x > 0$ et -1 sinon, et

$$\Delta_l F_i = \frac{F(M_i) - F(M_{i-1})}{s_i - s_{i-1}} \quad \text{et} \quad \Delta_r F_i = \frac{F(M_{i+1}) - F(M_i)}{s_{i+1} - s_i},$$

l'intégration de la relation (8.2) entre les instants α à $\alpha + \Delta\alpha$ s'écrit :

$$\ln\left(\frac{A_i(\alpha+\Delta\alpha)}{A_i(\alpha)}\right) + \int_{M_i(\alpha)}^{M_i(\alpha+\Delta\alpha)} \frac{m\lambda(m)}{m^2-1}\mathrm{d}m + \int_{\alpha}^{\alpha+\Delta\alpha} \eta_i \max\left(\Delta_l F_i, -\Delta_r F_i, 0\right)\mathrm{d}\tau + \int_{\alpha}^{\alpha+\Delta\alpha} E(r_a(\tau))\mathrm{d}\tau = 0. \quad (8.10)$$

La première intégrale est approchée par une méthode de Simpson, tandis que les autres intégrales sont approximées par une méthode de trapèze. Connaissant la position champ libre du choc à l'instant α, $r_a(\alpha)$, la position à l'instant $\alpha + \Delta\alpha$ est calculée en intégrant la relation (8.5) :

$$r_a(\alpha+\Delta\alpha) = r_a(\alpha) + \int_{\alpha}^{\alpha+\Delta\alpha} M_a(r_a(\tau))\mathrm{d}\tau.$$

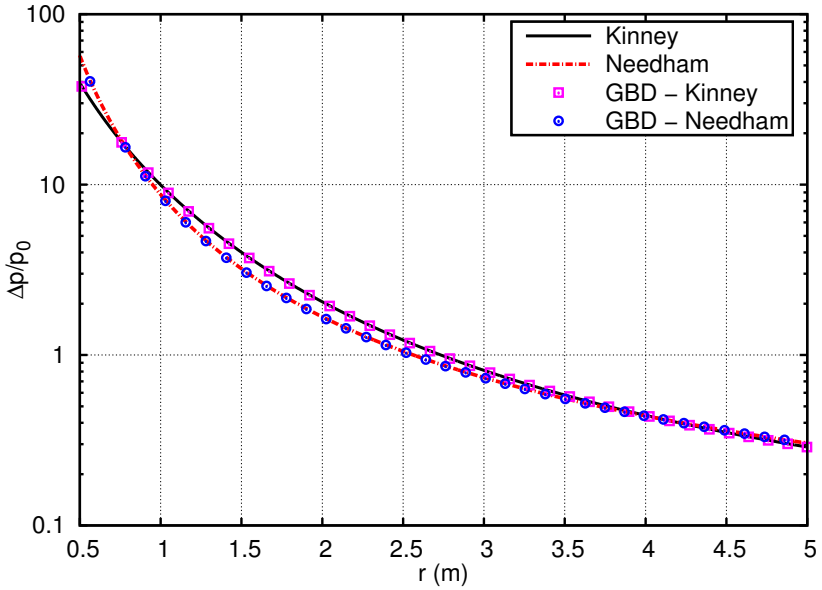


FIGURE 8.3 – Évolution de la surpression du choc en champ libre pour l'explosion d'un kilogramme de TNT. Lois empiriques de Kinney (8.3) et Needham (8.4) et solutions numériques obtenues avec l'algorithme Lagrangien pour $\Delta s = 0.01$.

Cette nouvelle intégrale est également approchée numériquement par une méthode de Simpson. Finalement, connaissant, $\ln\left(\frac{A_i(\alpha+\Delta\alpha)}{A_i(\alpha)}\right)$, $H(\kappa_i)$, $M_i(\alpha)$ pour $i = 1, \ldots, N$, et une approximation de $\int_{\alpha}^{\alpha+\Delta\alpha} E(r_a(\tau))\mathrm{d}\tau$, on obtient un système non-linéaire d'inconnues $\left(M_i\left(\alpha+\Delta\alpha\right)\right)_{i=1,\ldots,N}$ que l'on résout à l'aide d'un algorithme de Newton.

Remarque 8.4

Le terme d'effets de souffle, calculé en 1D sphérique, est appliqué tel quel à des configurations géométriques brisant la symétrie mais toujours pour une charge sphérique. Cette approximation nous semble acceptable au regard des courbes de la figure 8.2.

La méthode est validée en champ libre en 2D axisymétrie. Le comportement imposé au travers de E est bien retrouvé, comme nous pouvons le voir en figure 8.3.

8.2 Résultats préliminaires

Nous présentons dans cette section quelques résultats préliminaires d'application de la méthode. Les simulations numériques sont effectuées avec l'algorithme Lagrangien, décrit en section 8.1.2, en configuration 2D axisymétrique. Les calculs sont menés en quelques minutes sur un processeur du type *Intel(R) Xeon(R) CPU E3-1120 v5@3.00GHz*.

Dans la première sous-section, nous comparons la trajectoire du point triple généré lors de l'impact d'une onde de souffle sur le sol, avec la formule empirique issue de [81]. Dans la seconde sous-section, nous comparons la méthode aux résultats expérimentaux obtenus lors du projet ANR BARPPRO [42] (BARrière Physiques de PROtection) qui visait à évaluer l'effet protecteur d'un merlon. La source explosive est, dans ce cas particulier, modélisée par une loi valable pour une décharge gazeuse.

8.2.1 Diffraction d'un choc sphérique divergent sur le sol

On considère dans cette section l'explosion d'une charge de 1 kg de TNT à une hauteur HOB (Heigh Of Burst), en mètres, au-dessus du sol. Une onde sphérique est alors générée et interagit avec le sol, formant un front de Mach à partir d'une certaine distance. La formule empirique issue de [81] donne l'évolution de la hauteur du point triple en fonction de HOB et de la distance à la source. Nous comparons ici les trajectoires du point triple calculées par les modèles GBD et KBD, fermés par les lois de Kinney ou Needham, avec cette formule empirique.

La prise en compte des effets de souffle dans les modèles GSDT et KINT conduit à un ralentissement du front de choc par rapport aux modèles d'origine. En figure 8.4, nous présentons les résultats numériques des modèles GSDT, KINT, GBD et KBD pour une charge de 1 kg de TNT et une hauteur HOB=1.59 m. Le pas de discrétisation est pris égal à 0.0025, valeur pour laquelle la solution est convergée. Le modèle GSD d'origine surestime la position du choc, et la trajectoire du point triple diverge clairement par rapport au modèle avec effets arrière (*cf.* Fig. 8.4(a)). La trajectoire du point triple est correctement estimée par le modèle GBD en comparaison à la formule empirique [81]. L'estimation est légèrement surévaluée et semble meilleure avec la fermeture de Kinney. Les conclusions sont identiques pour les modèles KINT et KBD (*cf.* Fig. 8.4(b)). Les positions du front sont dans ce cas similaires à celles calculées par les modèles GSDT et GBD. Sur cet exemple, la trajectoire du point triple semble légèrement plus proche de la formule empirique avec le modèle GBD fermé par la loi de Kinney.

Une comparaison plus globale de ce problème est effectuée en figure 8.5. La trajectoire du point triple y est représentée pour différentes hauteurs HOB. L'intensité du choc lors de la diffraction sur le sol dépend de la hauteur de la source. Plus celle-ci sera élevée, moins le choc sera fort. Le tableau 8.1 donne le nombre de Mach de l'onde de souffle au moment de l'impact

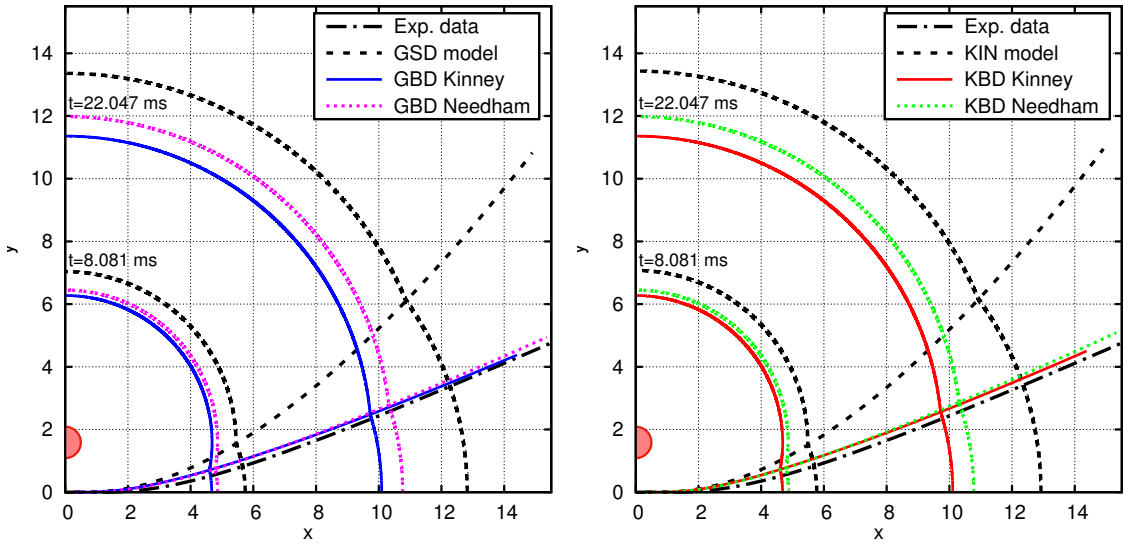


FIGURE 8.4 – Explosion de 1 kg de TNT à 1.59 m au-dessus du sol. Comparaison GSDT/GBD (fig. (a)) et KINT/KBD (fig. (b)) avec la formule empirique issue de [81]. Les simulations numériques ont été menées avec un pas de discrétisation $\Delta s = 0.0025$.

sur le sol. Pour une hauteur de 0.5 m, le choc est très fort avec un nombre de Mach supérieur à 5, tandis que pour une hauteur de 3 m, il est faible avec un nombre de Mach d'environ 1.3. La validité de la méthode peut ainsi être testée sur une large gamme d'intensités incidentes du choc. À grande distance, on note une surestimation systématique de la trajectoire du point triple

HOB (m)	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
Kinney	5.905	3.088	2.106	1.661	1.432	1.303
Needham	7.062	2.914	1.937	1.561	1.379	1.277

TABLE 8.1 – Nombre de Mach du choc sphérique, issu de l'explosion de 1 kg de TNT à une hauteur HOB du sol, au moment de l'impact avec le sol selon les lois de Kinney (8.3) et Needham (8.4).

par nos modèles en comparaison à la formule empirique, figure 8.5(a). Les résultats diffèrent légèrement d'un modèle à l'autre ainsi que d'une fermeture à l'autre. Pour une hauteur de 1 m, les résultats sont similaires et l'écart avec la formule empirique est minime.

La réflexion de l'onde de choc sur le sol est régulière jusqu'à une certaine distance x_m, à partir de laquelle un front de Mach se forme. Cette distance peut être évaluée à l'aide de la formule (1.8) issue de [81] :

$$x_m = \frac{\mathrm{SHOB}^{2.5}}{5822} + 2.09 \cdot \mathrm{SHOB}^{0.75}, \qquad \text{avec SHOB=HOB}/W^{1/3} \ .$$

La réflexion est systématiquement de Mach avec les modèles GBD et KBD, générant ainsi un point triple dès la rencontre du choc avec le sol, *cf.* figures 8.5(b) et 8.5(c). Cet aspect avait déjà été souligné pour les modèles GSD et KIN en section 6.1.3, ainsi que pour les modèles GSDT et KINT en section 7.4.4. La surestimation de la trajectoire du point triple est d'autant plus importante que la charge est haute. En effet, le front de Mach se forme plus tardivement

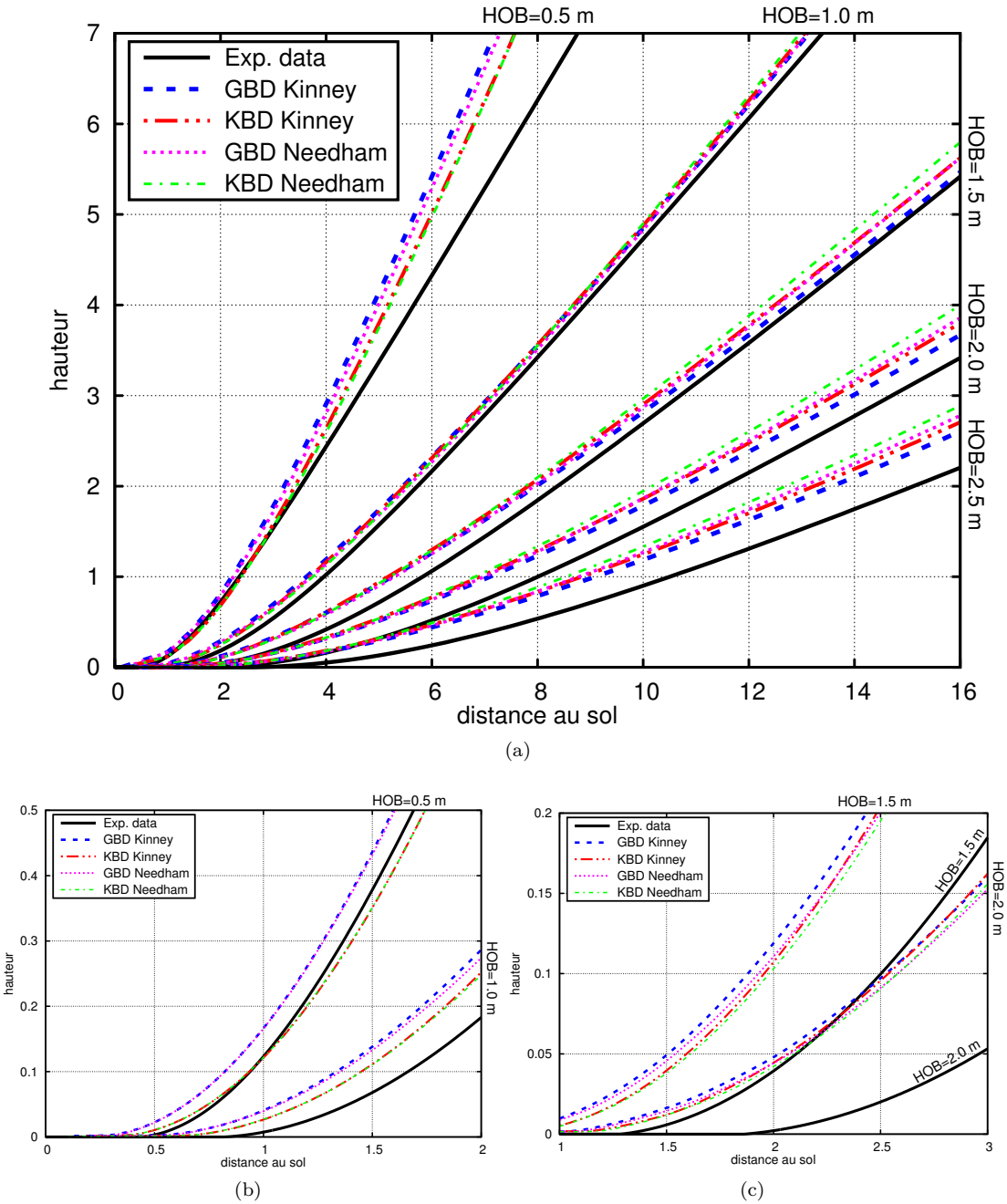


FIGURE 8.5 – Interaction avec le sol d'un choc sphérique issu de l'explosion de 1 kg de TNT à une hauteur HOB (m) du sol. Simulations numériques menées pour $\Delta s = 0.0025$. Comparaison de la trajectoire du point triple entre la loi empirique [81] et les modèles GBD, KBD, et les fermetures de Kinney (8.3) et de Needham (8.4). Fig. (a) : Comparaison jusqu'à 16 m. Fig. (b) : Zoom près de la source pour HOB=0.5 m et HOB=1.0 m. Fig. (c) : Zoom près de la source pour HOB=1.5 m et HOB=2.0 m.

en raison de la diminution du nombre de Mach avec la hauteur. On rappelle qu'à un nombre de Mach incident donné M_i, l'angle d'incidence du choc de transition entre réflexion régulière et irrégulière peut être évalué théoriquement et est donné en figure 1.16. Plus le nombre de Mach

est faible, plus cet angle de transition est important. Pour aller plus loin, il faudrait introduire un mécanisme empêchant la formation du front de Mach. En prenant en compte, par exemple, un terme de viscosité dans la relation $A - M$ qui serait d'autant plus actif que le choc serait faible.

Bien que la méthode que nous proposons surestime légèrement la trajectoire du point triple, ce n'est pas gênant dans un contexte de sécurité pyrotechnique où il vaut mieux surestimer que sous-estimer un effet. Les résultats nous semblent très satisfaisants au vu de la simplicité et de la rapidité de la méthode. En pratique, nous proposons de considérer le modèle GBD-Kinney puisque l'intensité de l'onde de souffle diminue rapidement avec la distance, et que les modèles GSD et KIN sont alors équivalents.

8.2.2 Diffraction d'une onde de souffle sur un merlon

Comme exemple concret d'application de la méthode, nous considérons dans cette section le problème de la diffraction d'une onde de souffle sur un merlon. Cet exemple est tiré de la thèse de Sébastien Éveillard, soutenue en 2013 [41], et coencadrée par le CEA et le laboratoire PRISME de Bourges dans le cadre de l'ANR BARPPRO [42]. Dans son travail, cet auteur s'est intéressé à l'effet protecteur d'une barrière, aussi appelée merlon, et a notamment étudié l'influence de la forme du merlon et de la charge initiale (distance au merlon et énergie libérée) sur l'onde de souffle. Des expériences à échelle réduite (1/15) ont été menées au sein du laboratoire PRISME, avec une charge gazeuse propane-oxygène à stoechiométrie. Une loi empirique valable en champ libre a de plus été définie pour cette charge gazeuse dégageant une énergie E en MJ. La surpression adimensionnée, ζ_E, s'exprime alors comme :

$$\ln\left(\zeta_E(\lambda)\right) = 0.0895 - 1.7633\ln\left(\lambda\right) + 0.1528\ln\left(\lambda\right)^2 - 0.0066\ln\left(\lambda\right)^3 - 0.0021\ln\left(\lambda\right)^4, \quad (8.11)$$

où λ est la distance à la charge rapportée à l'énergie dégagée : $\lambda = r/E^{1/3}$ (m/MJ$^{1/3}$). Cette formule empirique est valide pour $0.84 < \lambda < 17,5$ m/MJ$^{1/3}$, limite de la zone d'étude. On se ramène à la masse d'explosif en équivalent TNT à l'aide de l'énergie massique du TNT, $E_{TNT} = 4.520$ (MJ/kg) [9]. La figure 8.6, issue de [41], présente un exemple de configurations mises en place dans cette thèse. Des capteurs, notés Gi et GH, sont situés au niveau de la paroi du merlon et en arrière de celui-ci. Ils enregistrent le signal de pression lors du passage du choc. Ces résultats expérimentaux sont ensuite comparés à des simulations Eulériennes, avec détonique, en 2D axisymétrie finement résolues. Ces simulations, effectuées avec le code HERA du CEA, avaient nécessité 256 cœurs de la machine TERA100 pendant 12 heures [42].

Nous proposons de comparer le modèle simplifié que nous avons mis au point avec certains de ces résultats. Les effets de souffle dans la relation $A - M$ (8.2) (le terme E) sont modélisés par la loi (8.11). Quatre cas d'étude sont considérés ici, nommés de manière identique aux originaux [41] par souci de cohérence. On considère l'explosion d'une charge gazeuse de rayon r_0, dégageant une énergie E (de masse W en équivalent TNT), et située à une distance d de deux types de merlon. Les caractéristiques de ces merlons, dits de type 1A et 1B, sont

Cas	r_0 (m)	E (MJ)	W (g)	M_0	d (m)	M_i
1AC3d8,5	0.03	1.72×10^{-3}	0.38	3.95	0.085	1.66
1AC6d7	0.06	13.75×10^{-3}	3.04	3.95	0.070	3.38
1BC6d7	0.06	13.75×10^{-3}	3.04	3.95	0.070	3.38
1BC6d14	0.06	13.75×10^{-3}	3.04	3.95	0.140	1.88

TABLE 8.2 – Caractéristiques des cas d'étude issus de [41]. On se ramène à une masse d'explosif en équivalent TNT à l'aide de l'énergie massique $E_{TNT} = 4.520$ MJ/kg [9].

présentées en figures 8.6 et 8.7 respectivement. Les caractéristiques des différents cas sont données en table 8.2. Ils ont été choisis de sorte que l'intensité de l'onde de souffle initiale, M_0, soit identique d'un cas à l'autre. Pour un merlon donné, au moment de la première interaction, l'onde de souffle incidente, de nombre de Mach M_i, est soit plutôt forte, $M_i > 3$, soit plutôt faible, $M_i < 2$. Cette étude préliminaire permet de mettre en lumière les apports et les limites de la méthode.

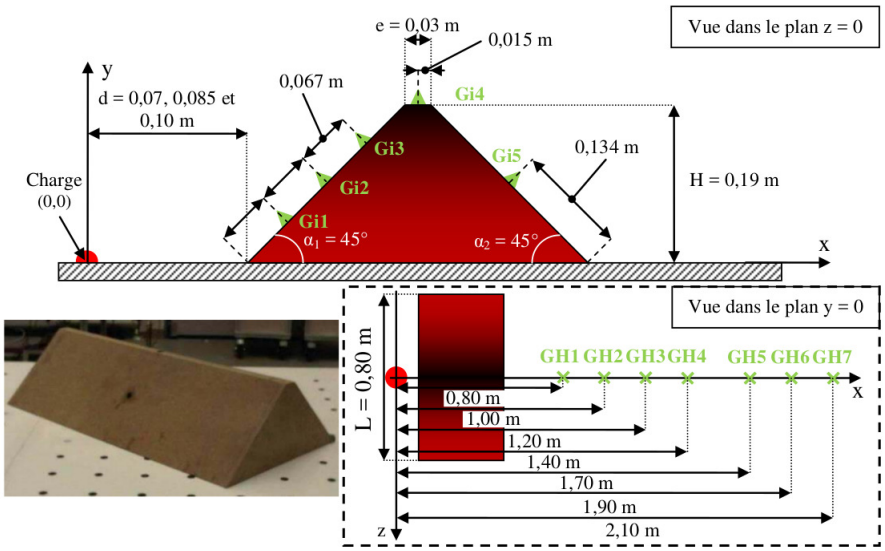


FIGURE 8.6 – Exemple de configuration d'étude menée dans la thèse [41]. Merlon de type 1A. Figure extraite de [41].

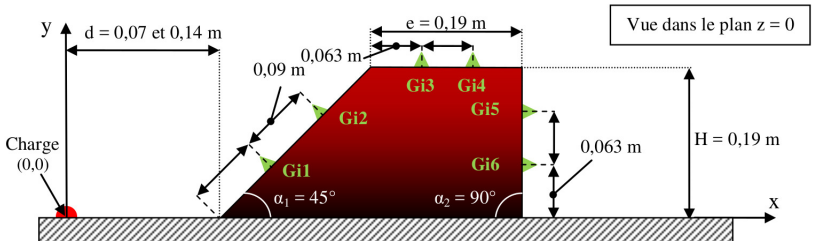


FIGURE 8.7 – Configuration du merlon de type 1B. Figure issue de [41].

Les simulations numériques avec l'algorithme Lagrangien ont été effectuées en 2D axisymétrie sur un processeur *Intel(R) Xeon(R) CPU E3-1120 v5@3.00GHz*. Le tableau 8.3 présente le temps de calcul pour chaque cas et différents pas de discrétisation Δs. En pratique, une quasi-convergence en maillage est observée pour $\Delta s = 5.0 \times 10^{-4}$ m. Les temps de calcul sont de l'ordre de la minute avec ce choix. Diminuer par 2 le pas moyen Δs conduit à une augmentation d'un facteur 4 du temps de simulation, car les calculs sont multipliés par 2 pour chaque itération et le pas de temps est divisé par 2. Nous avons fixé ici le paramètre d_c à 0.02 (voir section 7.3.2 pour plus de détails concernant ce paramètre).

Merlon 1A. La première étude porte sur la diffraction d'une onde de souffle sur le merlon de type 1A à un nombre de Mach incident d'environ 1.66 au niveau du pied de l'obstacle. Les résultats sont présentés en figure 8.9. On note que les modèles GBD et KBD fournissent des résultats similaires sur cet exemple. Ils le seront en fait sur l'ensemble des cas étudiés dans cette section. Les ondes de souffle dominant en champ proche, la différence qui existe entre les

Cas/Δs (m)	10.0×10^{-4}	5.0×10^{-4}	2.5×10^{-4}
1AC3d8,5 $r_\mathrm{f} = 0.88$ m, $d_\mathrm{f} = 0.8$ m	22 s	1 min 22 s	5 min 28 s
1AC6d7 $r_\mathrm{f} = 2.55$ m, $d_\mathrm{f} = 2.5$ m	2 min 50 s	11 min 16 s	44 min 10 s
1BC6d7 $r_\mathrm{f} = 2.29$ m, $d_\mathrm{f} = 2.25$ m	2 min 20 s	9 min 19 s	36 min 57 s
1BC6d14 $r_\mathrm{f} = 2.29$ m, $d_\mathrm{f} = 2.27$ m	2 min 22 s	9 min 15 s	37 min 17 s

TABLE 8.3 – Temps de calcul de l'algorithme Lagrangien pour résoudre le modèle GBD sur les cas d'étude pour différents pas Δs. Simulation menée sur *Intel(R) Xeon(R) CPU E3-1120 v5@3.00GHz*. r_f : distance radiale théorique finale, d_f : distance finale du choc à l'arrière du merlon.

modèles pour le problème de la diffraction sur la face avant (rampe de compression) n'est pas significative. De plus, à l'arrière du merlon, le choc est faible ce qui induit un comportement similaire entre les modèles GSD et KIN, et donc entre les modèles GBD et KBD. La surpression au niveau de la paroi de chaque face du merlon est présentée en figures 8.9(b)-8.9(d). On observe le bon accord avec la simulation Eulérienne et les données expérimentales sur la face avant du merlon, figure 8.9(b). Une légère surestimation existe toutefois, qui s'accentue sur le sommet du merlon, figure 8.9(c), et sa face arrière, figure 8.9(d). Le modèle GSDT a tendance à surestimer le nombre de Mach pour cette configuration, ce qui se retrouve avec le modèle GBD. L'onde de choc se diffracte ici sur une rampe inclinée à $-45°$ avec une surpression incidente inférieure à 0.5, soit un nombre de Mach inférieur à 1.19. On note que l'estimation avec le modèle GBD est bien meilleure sur les faces avant et arrière en comparaison à une estimation champ libre (8.11). La simulation du modèle GBD est effectuée avec un pas de discrétisation, Δs, de 0.25×10^{-3} m, et dure environ 5 minutes. En comparaison, les résultats issus d'une simulation Eulérienne sont obtenus après plusieurs heures de calcul sur plusieurs processeurs. Les résultats sont tout à fait satisfaisants au vu de la simplicité de la méthode, et du gain important en temps de calcul.

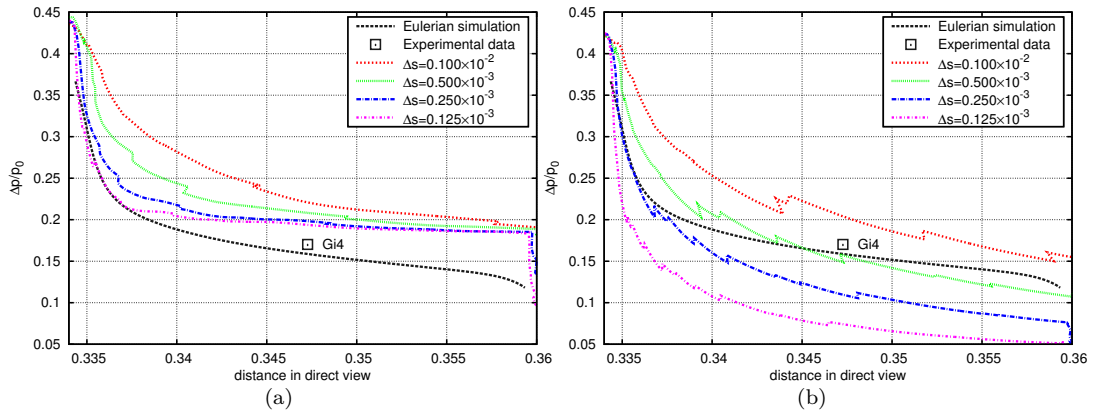
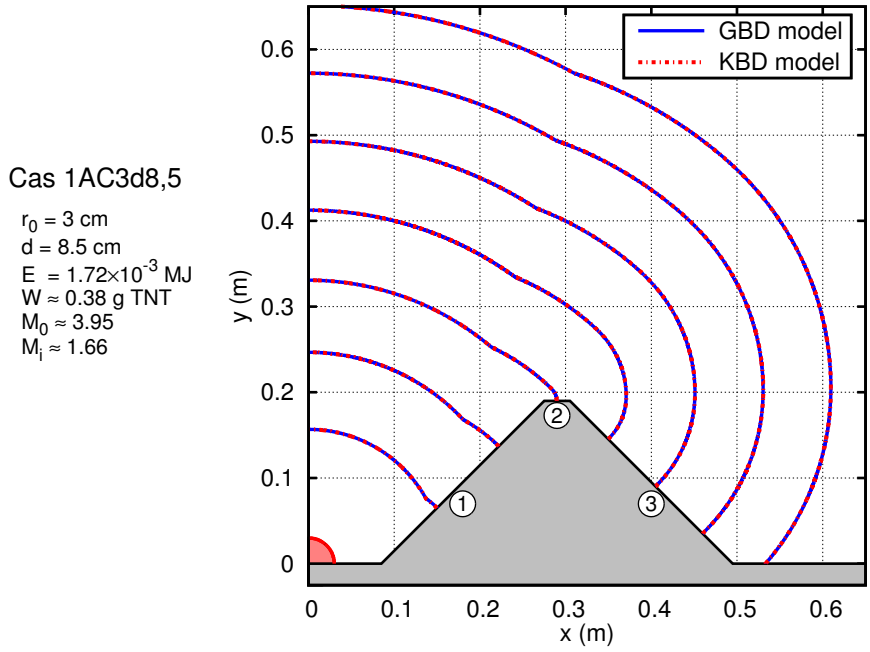
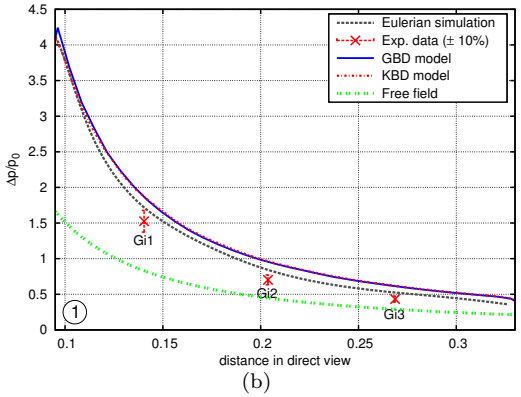


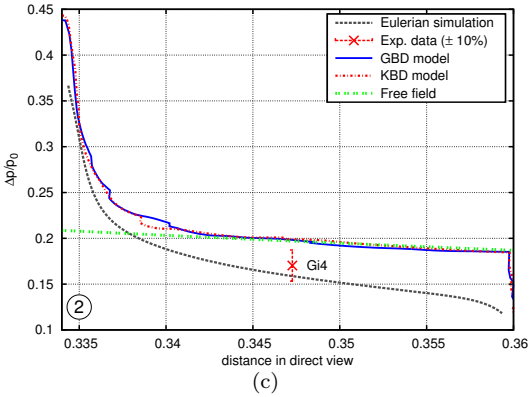
FIGURE 8.8 – Surpression à la paroi sur le sommet du merlon 1AC3d8,5. Étude de la convergence en maillage du modèle GBD avec terme transverse (fig. (a)) et sans terme transverse (fig. (b)).



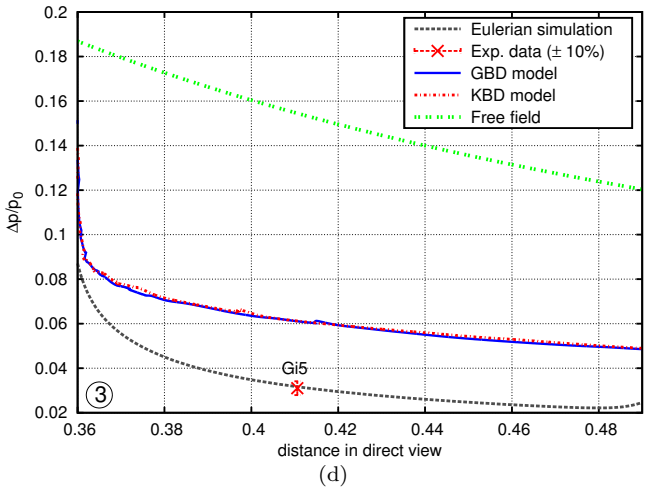
(a)



(b)



(c)



(d)

FIGURE 8.9 – Merlon 1AC3d8,5. Comparaison des résultats des modèles GBD et KBD, obtenus pour $\Delta s = 0.25 \times 10^{-3}$, avec les données expérimentales et les données de simulations Eulériennes issues de [41]. Fig. (a) : Positions successives du choc. Fig. (b) à (d) : Surpression adimensionnée au niveau de la paroi sur la face avant, le sommet et la face arrière du merlon respectivement. La courbe champ libre est également tracée à titre indicatif.

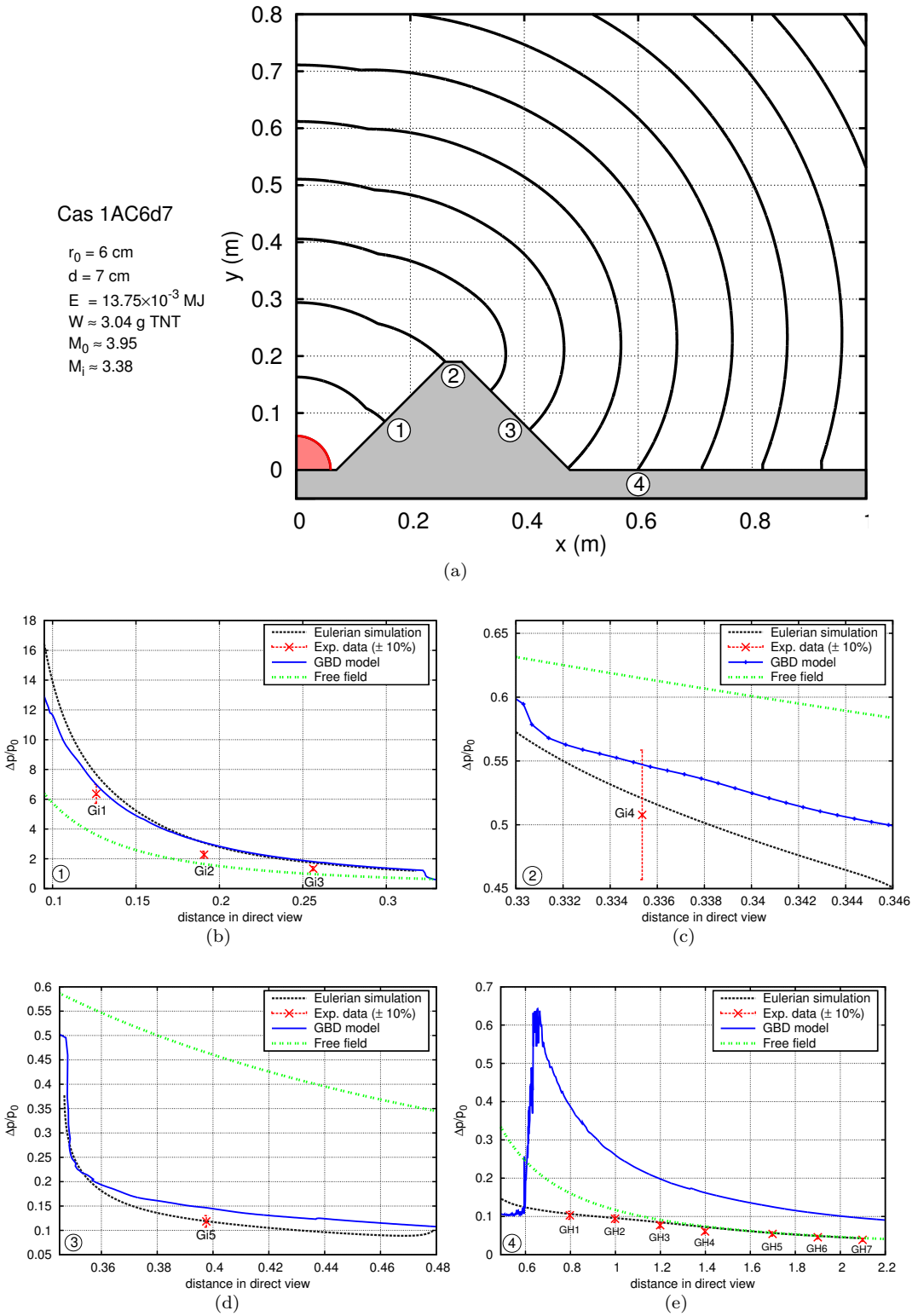


FIGURE 8.10 – Merlon 1AC6d7. Comparaison des résultats du modèle GBD ($\Delta s = 0.5 \times 10^{-3}$) avec les données expérimentales et les données de simulations Eulériennes issues de [41]. Fig. (a) : Positions successives du choc. Fig. (b) à (e) : Surpression adimensionnée au niveau de la paroi sur la face avant, le sommet, la face arrière et l'arrière du merlon respectivement. La courbe champ libre est également tracée à titre indicatif.

Nous présentons en figure 8.8 les courbes de convergence en maillage de la surpression adimensionnée à la paroi au sommet du merlon pour le modèle GBD avec et sans terme transverse. Sans terme transverse, figure 8.8(b), le modèle n'a plus de solution pour le problème de détente du choc sur le sommet. L'algorithme Lagrangien est néanmoins suffisamment robuste pour qu'une solution soit calculée, mais ne converge pas à proprement dit : la surpression tend vers 0 dans ce cas. Ce problème est corrigé avec la prise en compte du terme transverse dans le modèle. La surpression adimensionnée à la paroi du sommet tend alors vers la valeur 0.185, proche du relevé expérimental.

Les résultats du cas 1AC6d7 sont présentés en figure 8.10. L'onde de souffle se diffracte sur le merlon 1A avec une intensité plus forte que le cas précédent, $M_i = 3.38$ contre 1.66. Une nouvelle fois, les résultats sont corrects, et plus précis qu'une estimation champ libre, pour la face avant, le sommet et la face arrière du merlon, figures 8.10(b) à 8.10(d). Cependant, la surpression est très largement surestimée sur le sol à l'arrière du merlon comme nous pouvons le voir en figure 8.10(d). C'est une conséquence de la formation systématique du front de Mach par le modèle. La surpression adimensionnée de l'onde de souffle juste avant son interaction avec la face 4 est d'environ 0.108, soit un nombre de Mach de 1.045 environ. L'angle d'incidence du choc étant de 45°, la réflexion est théoriquement régulière (*cf.* Fig. 1.16), au moins dans un premier temps. La surestimation du modèle GBD n'est néanmoins pas rédhibitoire dans un contexte de sécurité pyrotechnique.

Merlon 1B. On considère maintenant la diffraction d'une onde de souffle sur le merlon de type 1B. La géométrie diffère de celle du merlon 1A par la longueur de son sommet (0.19 m ici contre 0.03 m précédemment) et l'inclinaison de sa face arrière (90° contre 45°). La détente de l'onde de souffle sera donc plus importante pour les exemples que nous allons traiter. En revanche, les résultats sur la face avant du merlon seront identiques et ne sont donc pas présentés ici. Dans les deux cas d'étude qui suivent, le nombre de Mach incident du front sur le merlon est de 3.38 pour le cas 1BC6d7 et 1.88 pour le cas 1BC6d14. Les simulations numériques avec l'algorithme Lagrangien ont été menées pour $\Delta s = 5 \times 10^{-3}$ et ont abouti en une dizaine de minutes.

Les résultats du premier cas sont représentés en figure 8.11. On observe une nouvelle fois une bonne estimation de la surpression à la paroi sur le sommet et la face arrière du merlon en comparaison à la simulation Eulérienne et aux données expérimentales. Sur la face arrière, figure 8.11(c), l'augmentation de la surpression dans les données issues de la simulation Eulérienne provient de l'onde réfléchie sur le sol. Une nouvelle fois, la surpression à l'arrière du merlon est surestimée par le modèle GBD en raison de la formation quasi-instantanée du front de Mach par le modèle.

Les conclusions sont identiques pour le cas 1BC6d14, figure 8.12. Le nombre de Mach incident de l'onde de souffle sur le merlon est de 1.88. Les résultats sur la face avant du merlon ne sont donc pas tout à fait identiques au cas 1AC3d8,5, pour lequel le nombre de Mach incident est de 1.66. Cependant, ils sont très proches en pratique et ne sont donc pas présentés ici. À titre indicatif, les points pour lesquels le terme transverse est activé sont tracés en magenta. Ils correspondent aux portions de courbe où le choc est expansif. Numériquement, la variation du nombre de Mach est petite pour les zones en symétrie radiale (parties gauches du choc), et l'influence du terme transverse y est donc faible.

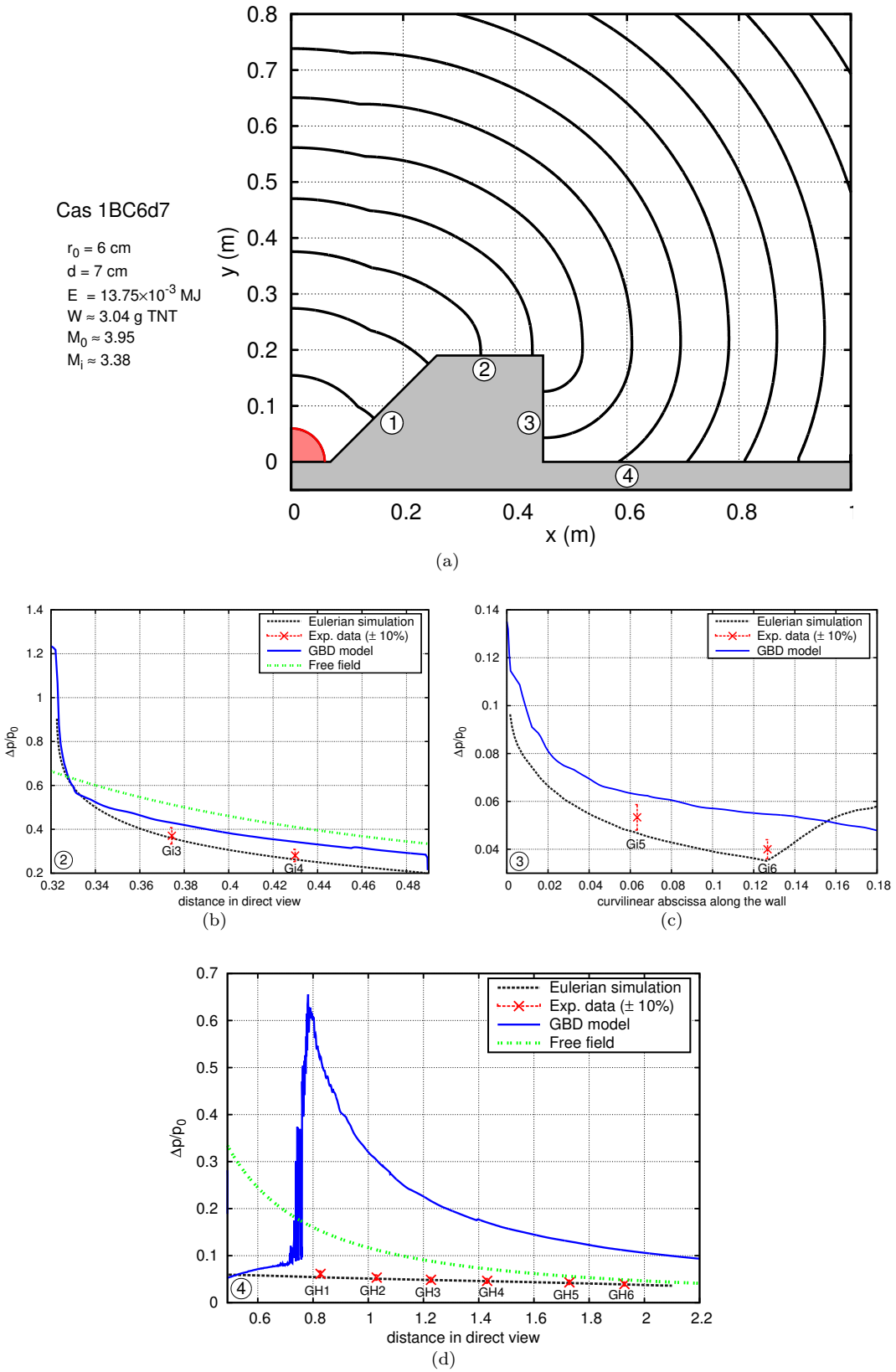
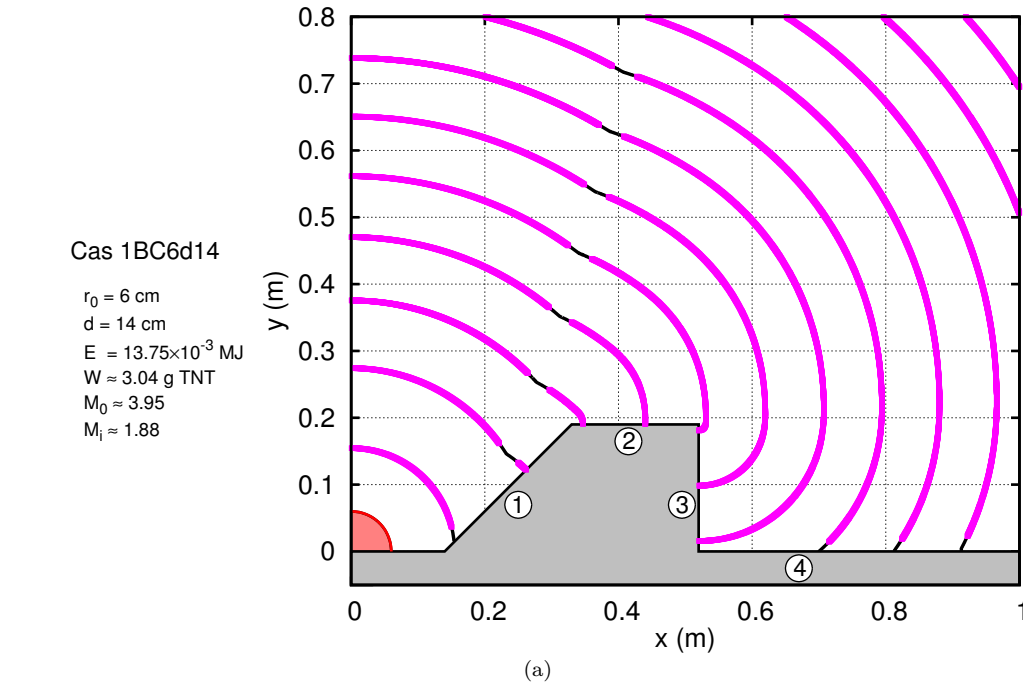
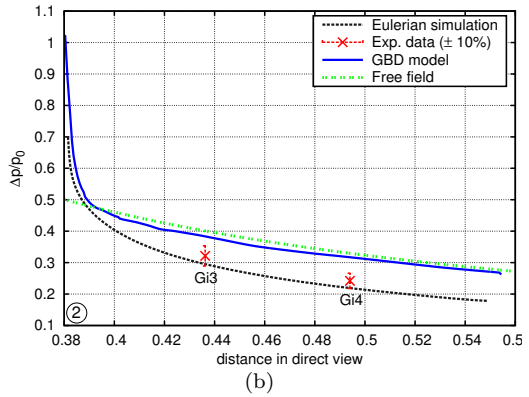


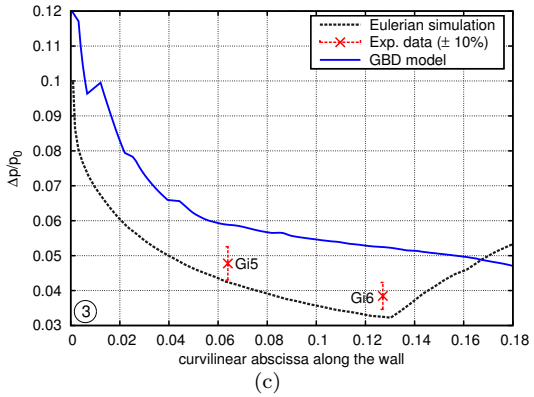
FIGURE 8.11 – Merlon 1BC6d7. Comparaison des résultats du modèle GBD ($\Delta s = 0.5 \times 10^{-3}$) avec les données expérimentales et les données de simulations Eulériennes issues de [41]. Fig. (a) : Positions successives du choc. Fig. (b) à (d) : Surpression adimensionnée au niveau de la paroi sur le sommet, la face arrière et l'arrière du merlon respectivement. La courbe champ libre est également tracée à titre indicatif.



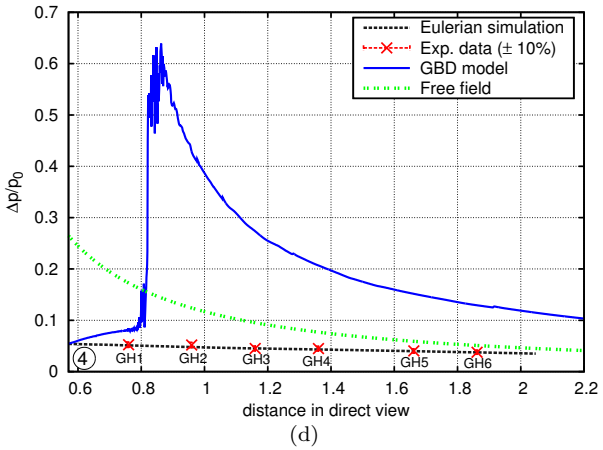
(a)



(b)



(c)



(d)

FIGURE 8.12 – Merlon 1BC6d14. Comparaison des résultats du modèle GBD ($\Delta s = 0.5 \times 10^{-3}$) avec les données expérimentales et les données de simulations Eulériennes issues de [41]. Fig. (a) : Positions successives du choc. Les courbes épaisses magenta correspondent aux points pour lesquels le terme transverse est activé. Fig. (b) à (d) : Surpression adimensionnée au niveau de la paroi sur le sommet, la face arrière et l'arrière du merlon respectivement. La courbe champ libre est également tracée à titre indicatif.

8.3 Conclusion

Une extension simple des modèles GSDT et KINT à la prise en compte des effets de souffle est étudiée dans ce chapitre. Elle consiste à modéliser les effets arrière dans chaque modèle par une loi empirique pression/distance à la charge, valable en champ libre, en supposant que les effets géométriques et les effets de souffle sont découplés dans la relation $A-M$. L'incorporation de cette extension dans l'algorithme Lagrangien est directe, et permet une étude préliminaire du modèle. On montre que l'on retrouve bien la formation du front de Mach sur sol plat, et que la méthode est applicable à tout type de source, notamment gazeuse.

Les premiers résultats montrent toutefois une légère surestimation de la trajectoire du point triple et de l'intensité du choc. Cette dernière est accentuée pour un choc faible convergent par la formation systématique d'un front de Mach. Néanmoins, les résultats obtenus sont prometteurs au vu de la simplicité de la méthode et du gain en temps de calcul conséquent. Notre méthode nécessite quelques minutes de calcul sur un simple processeur, contre plusieurs heures en calcul parallèle pour la résolution des équations d'Euler avec détonique. Une optimisation de l'algorithme diminuerait encore davantage ce temps de calcul.

Une comparaison avec des résultats expérimentaux d'interaction d'une onde de souffle avec des barrières de protection a été réalisée. Les résultats obtenus sont comparables à ceux des simulations Eulériennes tant que le choc est suffisamment fort. Cette étude se limite à quelques exemples faute de temps, et mériterait d'être poussée plus en avant à l'avenir. Une amélioration du modèle pourrait notamment être apportée. La formation du front de Mach en choc faible, responsable d'une amplification trop importante de la surpression du choc, pourrait par exemple être évitée par l'ajout d'un terme de viscosité dans la relation $A-M$, terme d'autant plus actif que le choc serait faible, ou bien par la modification de la condition de bord à la paroi.

Chapitre 9

Extension mathématique des modèles GSD et KIN aux effets arrière

Sommaire

9.1 Prise en compte de l'écoulement arrière dans le modèle GSD . . 220
9.1.1 Extension de la relation $A - M$ de Whitham aux effets arrière . . . 220
9.1.2 Système à résoudre . . . 223
9.1.3 Solutions à symétrie radiale . . . 224
9.1.4 Intégration dans l'algorithme Lagrangien . . . 229
9.2 Prise en compte de l'écoulement arrière dans le modèle KIN . . 233
9.2.1 Relations de compatibilité d'ordre supérieur dans la théorie des surfaces singulières . . . 234
9.2.2 Relations différentielles de saut . . . 236
9.2.3 Équations instationnaires de saut . . . 238
9.2.4 Équation d'évolution des effets arrière . . . 241
9.2.5 Modèle Cinématique d'ordre $k \geq 2$ . . . 244
9.2.6 Système à résoudre . . . 244
9.2.6.1 Cas d'un milieu homogène et au repos . . . 244
9.2.6.2 Cas d'un milieu non-uniforme et en mouvement . . . 246
9.2.7 Solutions à symétrie radiale . . . 247
9.2.8 Intégration numérique . . . 252
9.3 Conclusion . . . 253

Bien qu'en fin de manuscrit, c'est par cette étude que nous avons commencé ce travail de thèse. L'idée est de voir si les modèles GSD et Cinématique (KIN) à l'ordre supérieur, *i.e.* sans négliger le terme de reste dans la relation $A - M$, sont capables de simuler correctement les écoulements avec effets arrière. Cela limiterait le recours aux fermetures *ad hoc* des chapitres précédents.

Les modèles GSD et KIN, présentés aux chapitres 3 et 4, décrivent de manière simplifiée, et avec une bonne approximation, la propagation du premier passage d'une onde de choc. Ces modèles sont basés sur l'hypothèse que l'influence de l'écoulement arrière sur le choc (effets arrière) est négligeable par rapport à la contribution des effets géométriques. Cette approximation est correcte pour un choc soutenu, pour lequel l'énergie de la source est intrinsèquement

supposée infinie. Toutefois, dans le cas des ondes de souffle, le nombre de Mach est très rapidement proche de 1 en raison des ralentissements dûs aux détentes arrière, qui dépassent la contribution géométrique en champ proche.

En 1991, Best [20, 21, 19] proposa une extension de la relation $A - M$ de Whitham à la prise en compte des effets arrière, pour un milieu uniforme et au repos. Celle-ci est basée sur un développement limité des effets arrière sur la C^+, conduisant à un système infini d'équations non-linéaires couplées. À l'ordre 0, on obtient une relation entre la variation d'aire dans le tube de rayon, la variation du nombre de Mach et les effets arrière. En négligeant ces derniers, la relation $A - M$ de Whitham est retrouvée. À partir de l'ordre 1, des équations supplémentaires sur les effets arrière sont disponibles, autorisant leur prise en compte dans le modèle GSD.

La prise en compte des effets arrière dans le modèle KIN aboutit également à un système infini d'équations non-linéaires couplées. Cette extension fut proposée pour la première fois par Sharma & Radha [116] en 1994. Contrairement au développement de Best, l'extension à l'ordre supérieur s'effectue directement sur les équations d'Euler tridimensionnelles par le biais de la théorie des surfaces singulières [132]. Cela mène en particulier à l'apparition de termes de variation transversale et de diffusion transversale du nombre de Mach le long du choc, absents dans l'extension de Best.

Dans le chapitre précédent, une extension simple des modèles GSD et KIN aux ondes de souffle a été proposée. Celle-ci est basée sur la modélisation des effets arrière dans les modèles tronqués à l'ordre 0, par une loi expérimentale valable en champ libre. L'étude préliminaire que nous avons menée montre l'efficacité de cette méthode.

Dans un souci de complétude dans la recherche de la meilleure modélisation simplifiée des ondes de souffle, nous proposons dans ce chapitre d'analyser les développements à l'ordre 1 des modèles GSD et KIN. Dans la première section, le développement du modèle GSD à l'ordre 1, appelé aussi *modèle de Best*, est effectué en s'appuyant sur [20]. Ce développement est suivi d'une discussion de la solution en symétrie radiale, déjà effectuée par Best [20] pour un choc fort convergent. À cela s'ajoute l'étude de la solution en champ lointain qui n'a jamais été faite à notre connaissance. Cette section se termine par la modification de l'algorithme Lagrangien pour la prise en compte de l'extension à l'ordre 1 du modèle, comme proposée par Best [20]. Dans la deuxième section du chapitre, nous proposons une extension détaillée du modèle Cinématique à l'ordre 1, pour un milieu homogène et au repos, qui s'est trouvée être absente dans la littérature. Nous proposons, pour la première fois à notre connaissance, l'extension du modèle à un milieu inhomogène potentiellement en mouvement. Les détails de calcul, assez complexes mais suivant le fil directeur identique au cas du milieu homogène et au repos, sont présentés en annexe G. Cette partie se finie par une étude de la solution en symétrie radiale, et une brève discussion de l'implémentation numérique du modèle dans l'algorithme Lagrangien.

9.1 Prise en compte de l'écoulement arrière dans le modèle GSD

Nous rappelons dans cette section le développement de Best [20], et analysons le comportement du modèle sur quelques cas élémentaires. Le milieu amont est supposé uniforme et au repos.

9.1.1 Extension de la relation $A - M$ de Whitham aux effets arrière

Afin d'assurer la consistance du chapitre, nous redonnons tout d'abord les grandes lignes du modèle GSD à l'ordre 0.

Relation $A-M$ à l'ordre 0. On rappelle l'équation sur la caractéristique C^+ des équations d'Euler dans une tuyère (*cf.* section 3.1.1) :

$$\partial_t p + (v+c)\partial_r p + \rho c\left(\partial_t v + (v+c)\partial_r v\right) + \rho c^2 v \frac{A'(r)}{A} = 0, \tag{9.1}$$

qui s'écrit de manière équivalente :

$$\frac{\partial_t p}{v+c} + \partial_r p + \rho c\left(\frac{\partial_t v}{v+c} + \partial_r v\right) + \frac{\rho c^2 v}{v+c}\frac{A'(r)}{A(r)} = 0.$$

Cette relation est appliquée au niveau du choc, ce qui conduit à :

$$\frac{\partial_t p}{U} + \partial_r p + \rho c\left(\frac{\partial_t v}{U} + \partial_r v\right) + \frac{\rho c^2 v}{v+c}\frac{A'(r)}{A(r)} + \left(\frac{1}{v+c} - \frac{1}{U}\right) Q_1 = 0, \tag{9.2}$$

en notant $Q_1 = (\partial_t p + \rho c \partial_t v)_-$ et en omettant l'indice – des quantités au niveau du choc pour plus de lisibilité. Cette relation est ensuite multipliée par $U = c_+ M$, ce qui donne

$$\mathrm{d}_t p_- + \rho c \mathrm{d}_t v_- = c_+ M\left(-\frac{\rho c^2 v}{v+c}\frac{A'(r)}{A(r)} + \left(\frac{1}{c_+ M} - \frac{1}{v+c}\right) Q_1\right), \tag{9.3}$$

en notant $\mathrm{d}_t = \partial_t + c_+ M \partial_r$ la dérivée Lagrangienne suivant le mouvement du choc.

Rappelons les relations de Rankine-Hugoniot reliant les états amont et aval du choc (2.24) :

$$\begin{aligned}
\bar{p} &= \frac{p_-}{p_+} = \frac{2\gamma M^2 + 1 - \gamma}{\gamma + 1} \\
\bar{u} &= \frac{v_-}{c_+} = \frac{2(M^2-1)}{M(\gamma+1)} + \frac{v_+}{c_+} \\
\bar{\rho} &= \frac{\rho_-}{\rho_+} = \frac{(\gamma+1)M^2}{(\gamma-1)M^2+2}.
\end{aligned} \tag{9.4}$$

Étant donné que le milieu amont est uniforme, les quantités p_-, v_- et ρ_- dépendent exclusivement de M, ce qui permet d'écrire :

$$\mathrm{d}_t p_- = \mathrm{d}_M p_- \mathrm{d}_t M, \quad \mathrm{d}_t v_- = \mathrm{d}_M v_- \mathrm{d}_t M, \quad \text{et} \quad \mathrm{d}_t \rho_- = \mathrm{d}_M \rho_- \mathrm{d}_t M, \tag{9.5}$$

avec

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}p_-}{\mathrm{d}M} &= \frac{4\rho_+ c_+^2 M}{\gamma+1} \\
\frac{\mathrm{d}v_-}{\mathrm{d}M} &= \frac{2c_+}{\gamma+1}\left(1 + \frac{1}{M^2}\right) \\
\frac{\mathrm{d}\rho_-}{\mathrm{d}M} &= \frac{4(\gamma+1)M}{((\gamma-1)M^2+2)^2}.
\end{aligned} \tag{9.6}$$

En injectant les relations (9.5) dans (9.3), on trouve l'équation d'évolution du nombre de Mach :

$$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} = \frac{c_+ M}{\mathrm{d}_M p_- + \rho c \mathrm{d}_M v_-}\left(-\frac{\rho c^2 v}{v+c}\frac{A'(r)}{A(r)} + \left(\frac{1}{c_+ M} - \frac{1}{v+c}\right) Q_1\right). \tag{9.7}$$

Finalement, en remarquant que $\mathrm{d}r = c_+ M \mathrm{d}t$ au niveau du choc, en utilisant les relations (9.4) et (9.6), et en notant $\bar{Q}_1 = \frac{Q_1}{\rho_+ c_+^3}$, on obtient après calcul :

$$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}r} = k_1(M)\frac{A'(r)}{A(r)} + k_2(M)\bar{Q}_1, \tag{9.8}$$

avec

$$\begin{aligned} k_1(M) &= -\frac{\rho c^2 v}{(\mathrm{d}_M p_- + \rho c \mathrm{d}_M v_-)(v+c)} &&= -\frac{M^2-1}{M\lambda(M)} \\ k_2(M) &= \frac{1}{\mathrm{d}_M p_- + \rho c \mathrm{d}_M v_-}\left(\frac{1}{c_+ M} - \frac{1}{v+c}\right) &&= -\frac{(\gamma+1)\mu(\mu-1)}{2M^2\lambda(M)} > 0, \end{aligned} \tag{9.9}$$

et

$$\lambda(M) = \left(1 + \frac{2}{\gamma+1}\frac{1-\mu^2}{\mu}\right)\left(1 + 2\mu + \frac{1}{M^2}\right), \quad \text{avec} \quad \mu(M) = \sqrt{\frac{(\gamma-1)M^2+2}{2\gamma M^2 + 1 - \gamma}}.$$

Remarque 9.1

La relation (9.8) est identique à (3.14) définie en section 3.1.1. Dans ce cas, on a

$$f(M) = \frac{k_2(M)}{k_1(M)}.$$

Deux contributions interviennent dans l'équation d'évolution du nombre de Mach du choc (9.8) : les effets géométriques à travers le terme $\frac{A'(r)}{A(r)}$ d'une part, et les effets liés à l'écoulement arrière modélisés par le terme $\bar{Q}_1$ d'autre part. Ce dernier est une inconnue du problème et nécessite une équation supplémentaire. La troncature à l'ordre 0, consistant à prendre $\bar{Q}_1 \equiv 0$, donne la relation $A - M$ classique (3.15).

Remarque 9.2

Puisque le coefficient $k_2(M)$ est positif pour tout $M \geq 1$, les effets arrière atténuent la vitesse du choc s'ils sont négatifs et l'amplifient s'ils sont positifs en comparaison au modèle GSD (eq. (9.8)).

Relation $A - M$ à l'ordre 1. Nous cherchons maintenant à établir l'équation d'évolution de $\bar{Q}_1$. Best propose d'appliquer la dérivée Lagrangienne d_t sur $Q_1 = (\partial_t p + \rho c \partial_t v)_-$, ce qui donne :

$$\mathrm{d}_t Q_1 = \partial_t\left(\partial_t p + \rho c \partial_t v\right) + c_+ M\left\{\partial_{xt} p + \partial_r(\rho c)\partial_t v + \rho c \partial_{xt} v\right\}. \tag{9.10}$$

On note $Q_2 = \left(\partial_t\left(\partial_t p + \rho c \partial_t v\right)\right)_-$ le terme d'effets arrière d'ordre supérieur. En réarrangeant les termes, l'équation (9.10) se réécrit :

$$\mathrm{d}_t Q_1 = Q_2 + c_+ M\left\{\partial_t\left(\partial_r p + \rho c \partial_r v\right) - \partial_t(\rho c)\partial_r v + \partial_r(\rho c)\partial_t v\right\}. \tag{9.11}$$

Or, par la relation (9.1) sur la caractéristique C^+, on a :

$$\partial_r p + \rho c \partial_r v = -\frac{1}{v+c}\left(\partial_t p + \rho c \partial_t v\right) - \frac{\rho c^2 v}{v+c}\frac{A'(r)}{A}.$$

En dérivant cette relation par rapport à t, il vient alors au niveau du choc :

$$\partial_t\left(\partial_r p + \rho c \partial_r v\right) = -\partial_t\left(\frac{1}{v+c}\right) Q_1 - \frac{1}{v+c} Q_2 - \partial_t\left(\frac{\rho c^2 v}{v+c}\right)\frac{A'(r)}{A}. \tag{9.12}$$

En injectant cette relation dans l'équation (9.11), et en utilisant $\mathrm{d}r = c_+ M \mathrm{d}t$, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}Q_1}{\mathrm{d}r} = -\partial_t\left(\frac{1}{v+c}\right) Q_1 + \left(\frac{1}{c_+ M} - \frac{1}{u+c}\right) Q_2 - \partial_t\left(\frac{\rho c^2 v}{v+c}\right)\frac{A'(r)}{A} \\ - \partial_t(\rho c)\partial_r v + \partial_r(\rho c)\partial_t v. \end{aligned} \tag{9.13}$$

Finalement, après développement des termes et de longs calculs détaillés en annexe D, l'équation d'évolution des effets arrière s'écrit :

$$\frac{\mathrm{d}\bar{Q}_1}{\mathrm{d}r} = h_0(M)\bar{Q}_2 + h_1(M)\bar{Q}_1^2 + h_2(M)\bar{Q}_1\frac{A'(r)}{A} + h_3(M)\left(\frac{A'(r)}{A}\right)^2, \tag{9.14}$$

où les fonctions h_i sont explicitées en annexe D. Cette équation fait intervenir une nouvelle inconnue d'ordre supérieur, $\bar{Q}_2 = \frac{Q_2}{\rho_+ c_+^4}$, nécessitant une équation supplémentaire que l'on peut obtenir par un raisonnement similaire.

Relation $A - M$ à l'ordre $k \geq 2$. Par un développement analogue du terme Q_2 sur la C^+, puis des termes d'ordre supérieur $Q_k = \left(\partial_t^k \left(\partial_t + \rho c \partial v\right)\right)_-$, on met en évidence un système infini d'équations couplées d'inconnues Q_k, pour $k \in \mathbb{N}^*$. Ce système a été écrit par Best dans [20]. Nous choisissons dans notre étude de le tronquer à l'ordre 1 en posant $\bar{Q}_2 \equiv 0$. La prise en compte des effets de souffle nécessiterait une modélisation plus complexe de ce terme. Le modèle tronqué à l'ordre 1 est qualifié de modèle *GSD ordre 1* ou *modèle de Best* dans la suite.

9.1.2 Système à résoudre

L'obtention de l'équation eikonale (3.22) :

$$M|\vec{\nabla}\alpha| = 1, \tag{9.15}$$

où $\alpha\left(\vec{x}\right) = c_+ t$, et de l'équation bilan sur les tubes de rayon (3.23) :

$$\mathrm{div}\left(\frac{\vec{n}}{A}\right) = 0, \tag{9.16}$$

ne change pas (*cf.* section 3.1.2). Seule la relation $A - M$ dans les tubes de rayon est modifiée par rapport au modèle GSD. La relation $A - M$ d'ordre 1 définie sur chaque tube de rayon est composée des équations (9.8) et (9.14), dans lesquelles les effets arrière d'ordre supérieur, $\bar{Q}_2$, sont négligés. Afin d'alléger l'écriture, on note dans la suite : $Q = \bar{Q}_1 = \frac{\left(\partial_t p + \rho c \partial_t v\right)_-}{\rho_+ c_+^3}$.

Remarque 9.3

On rappelle, comme souligné en remarque 3.3, que la courbure locale du front et la variation d'aire dans un tube de rayon sont liées par :

$$\mathrm{div}\left(\vec{n}\right) = \frac{\vec{n}\cdot\vec{\nabla}A}{A}.$$

Le système à résoudre s'écrit finalement :

$$\boxed{\begin{array}{c} M|\vec{\nabla}\alpha| = 1 \\ \\ \mathrm{div}\left(\dfrac{\vec{n}}{A}\right) = 0 \\ \\ \dfrac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}n} = k_1(M)\dfrac{\mathrm{d}_n A}{A} + k_2(M)Q \\ \\ \dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}n} = h_1(M)Q^2 + h_2(M)Q\dfrac{\mathrm{d}_n A}{A} + h_3(M)\left(\dfrac{\mathrm{d}_n A}{A}\right)^2, \end{array}} \tag{9.17}$$

où l'on note abusivement par une dérivée droite, $\mathrm{d}_n = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n} = \partial_t + c_+ M\vec{n}\cdot\vec{\nabla}$, la variation spatiale le long des rayons suivant le choc. Cette variation est liée au temps t par la relation $\mathrm{d}_n = c_+ M \mathrm{d}t$. En particulier, on a dans chaque tube de rayon :

$$\frac{\mathrm{d}_n A}{A} = \frac{1}{c_+ M A}\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}.$$

D'après la remarque 9.3, la variation d'aire dans un tube de rayon est égale à la courbure locale du front : $\kappa = \mathrm{div}\,(\vec{n})$. La relation $A - M$ peut s'écrire alors, pour $\alpha = c_+ t$, sous la forme :

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}\alpha} = M\Big(k_1(M)\kappa + k_2(M)Q\Big) & \text{(9.18a)} \\ \dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}\alpha} = M\Big(h_1(M)Q^2 + h_2(M)Q\kappa + h_3(M)\kappa^2\Big). & \text{(9.18b)} \end{cases}$$

Comme le modèle GSD à l'ordre 0, cette version à l'ordre 1 ne prend pas en compte de terme transverse dans la relation $A - M$, ce qui laisse présager des mêmes limites pour le problème de la diffraction sur un coin convexe. Ce point sera abordé en section 9.1.4.

9.1.3 Solutions à symétrie radiale

Dans cette partie, on cherche des solutions à symétrie radiale du système (9.17). La solution ne dépend alors que de la variable $r = \|\vec{x} - \vec{x}_0\|$, où $\vec{x}_0$ est le centre de la symétrie. Le vecteur normal au front de choc est donné par $\vec{n} = \dfrac{\vec{x} - \vec{x}_0}{\|\vec{x} - \vec{x}_0\|}$ et la courbure moyenne s'écrit

$$\kappa = \mathrm{div}(\vec{n}) = \frac{d-1}{r},$$

où d est la dimension de l'espace ($d = 1$, 2 et 3 en symétrie plane, cylindrique et sphérique respectivement).

Le système d'équations (9.17) se réduit à

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}r} = \dfrac{1}{M} & \text{(9.19a)} \\ \dfrac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}r} = k_1(M)\dfrac{d-1}{r} + k_2(M)Q & \text{(9.19b)} \\ \dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}r} = h_1(M)Q^2 + h_2(M)Q\dfrac{d-1}{r} + h_3(M)\left(\dfrac{d-1}{r}\right)^2, & \text{(9.19c)} \end{cases}$$

pour $r \geq r_0$, et a pour condition initiale :

$$\alpha(r_0) = \alpha_0, \quad M(r_0) = M_0 \quad \text{et} \quad Q(r_0) = Q_0. \tag{9.20}$$

Le système (9.19) est composé de trois équations non-linéaires couplées. Il n'est *a priori* pas possible d'en exhiber une solution analytique, excepté dans certains cas comme la limite des chocs forts, traité par Best [20], ou des chocs faibles. Ce dernier cas n'a jamais été étudié auparavant à notre connaissance. Nous en proposons une solution inspirée de [117].

Cas limite des chocs forts. Pour $M \gg 1$, l'évolution du nombre de Mach et des effets arrière est décrite par :

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}r} = k_1^\infty M\dfrac{d-1}{r} + \dfrac{k_2^\infty}{M^2}Q & \text{(9.21a)} \\ \dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}r} = \dfrac{h_1^\infty}{M^3}Q^2 + h_2^\infty Q\dfrac{d-1}{r} + h_3^\infty M^3\left(\dfrac{d-1}{r}\right)^2, & \text{(9.21b)} \end{cases}$$

avec

$$k_1^\infty = -\frac{(\gamma-1)\gamma}{\gamma-2+(1+2\mu_\infty)\gamma^2} \quad \text{et} \quad k_2^\infty = -\frac{(\gamma^2-1)(\gamma-1-2\gamma\mu_\infty)}{4(\gamma^2+\gamma-2+2\gamma^2\mu_\infty)}.$$

La quantité μ_∞ est la valeur limite en choc fort de μ : $\mu_\infty = \sqrt{\frac{\gamma-1}{2\gamma}}$. Les valeurs limites des fonctions h_i, notées h_1^∞, h_2^∞ et h_3^∞, dépendent également de γ et sont définies en annexe D.

En dérivant (9.21a) par rapport à r, il vient :

$$M''(r) = k_1^\infty M'(r)\frac{d-1}{r} - k_1^\infty M\frac{d-1}{r^2} - 2k_2^\infty\frac{M'(r)Q}{M^3} + k_2^\infty\frac{Q'(r)}{M^2}. \tag{9.22}$$

En injectant la relation (9.21b) dans (9.22), puis en utilisant (9.21a) afin d'éliminer Q de l'équation résultante, on obtient une EDO (Équation Différentielle Ordinaire) d'ordre 2 sur M à coefficients constants :

$$M''(r) + \chi_1\frac{M'(r)^2}{M} + \chi_2\frac{M'(r)}{r} + \chi_3\frac{M(r)}{r^2} = 0, \tag{9.23}$$

ayant pour condition initiale :

$$M(r_0) = M_0 \quad \text{et} \quad M'(r_0) = M_0' = k_1^\infty M_0\frac{d-1}{r_0} + \frac{k_2^\infty}{M_0^2}Q_0. \tag{9.24}$$

Les coefficients χ_i sont définis par :

$$\chi_1 = 2 - \frac{h_1^\infty}{k_2^\infty} \quad , \quad \chi_2 = (d-1)\left(2\frac{k_1^\infty h_1^\infty}{k_2^\infty} - 3k_1^\infty - h_2^\infty\right),$$

$$\chi_3 = (d-1)k_1^\infty + (d-1)^2\left(h_2^\infty k_1^\infty - \frac{h_1^\infty (k_1^\infty)^2}{k_2^\infty} - k_2^\infty h_3^\infty\right).$$

Le problème (9.23)-(9.24) est résolu en annexe E. Les hypothèses de la propriété E.1 sont vérifiées. On a pour tout $\gamma > 1$:

$$\chi_1 > -1, \quad \Delta = (\chi_2-1)^2 - 4\chi_3(\chi_1+1) > 0,$$

et

$$f_1 = \frac{1-\chi_2-\sqrt{\Delta}}{2(\chi_1+1)} < 0 < f_2 = \frac{1-\chi_2+\sqrt{\Delta}}{2(\chi_1+1)}.$$

L'évolution du nombre de Mach est alors donnée par

$$M(r) = M_0\left(\frac{r}{r_0}\right)^{f_1}\left(\frac{f_2 - f_0 + (f_0-f_1)\left(\frac{r}{r_0}\right)^{(\chi_1+1)(f_2-f_1)}}{f_2-f_1}\right)^{\frac{1}{\chi_1+1}}, \tag{9.25}$$

tant que $f_0 \leq f_2$, avec

$$f_0 = r_0 M_0'/M_0 = k_1^\infty(d-1) + k_2^\infty Q_0\frac{r_0}{M_0^3}.$$

Remarque 9.4

Les effets arrière peuvent être exprimés en fonction de r en injectant la solution (9.25) ainsi que sa dérivée dans (9.21a). Toutefois, une expression de α n'est pas disponible analytiquement.

Le terme sous l'exposant $1/(\chi_1+1)$ doit être positif ou nul afin que la solution soit réelle. La propriété E.1 liste le comportement de la solution en fonction du choix de f_0. Après manipulations algébriques, ces choix s'expriment en fonction du paramètre $\delta_0 = \frac{Q_0 r_0}{M_0^3}$ dépendant de la condition initiale :

. si $\delta_0 < Q_1 = \frac{f_1 - k_1^\infty(d-1)}{k_2^\infty}$, la solution est strictement décroissante et existe en temps fini :

$$r \leq r_\star = \left(\frac{f_0 - f_2}{f_0 - f_1}\right)^{1/\sqrt{\Delta}} r_0,$$

avec $f_0 = k_1^\infty(d-1) + k_2^\infty \delta_0$;

. si $\delta_0 = Q_1$, la solution est strictement décroissante $\forall r \geq r_0$:

$$M(r) = M_0 \left(\frac{r}{r_0}\right)^{f_1}; \tag{9.26}$$

. si $Q_1 < \delta_0 < Q_2 = \frac{f_2 - k_1^\infty(d-1)}{k_2^\infty}$, la solution est strictement décroissante sur $[r_0, r_{\star\star}]$, puis strictement croissante sur $[r_{\star\star}, +\infty]$, avec

$$r_{\star\star} = \left(\frac{f_1(f_0 - f_2)}{f_2(f_0 - f_1)}\right)^{1/\sqrt{\Delta}} r_0;$$

. si $\delta_0 = Q_2$, la solution est strictement croissante $\forall r \geq r_0$:

$$M(r) = M_0 \left(\frac{r}{r_0}\right)^{f_2};$$

. enfin si $\delta_0 > Q_2$, il n'existe pas de solution réelle.

Remarque 9.5

L'égalité $\delta_0 = Q_1$ correspond en fait à l'égalité $f_0 = f_1$. De même, $\delta_0 = Q_2$ est équivalent à $f_0 = f_2$.

Le tableau 9.1 présente les valeurs de Q_1 et Q_2 pour les différentes symétries de la solution et un rapport de chaleurs spécifiques $\gamma = 1.4$. On note que l'on a $0 \leq Q_1 < Q_2$. La figure 9.1

d	1	2	3
Q_1	0	1.694×10^{-2}	4.660×10^{-2}
Q_2	6.935	12.731	18.514

TABLE 9.1 – Valeurs de Q_1 et Q_2 délimitant les différents types de solutions du modèle GSD ordre 1 en symétrie radiale dans la limite des chocs forts (système (9.21)) pour $\gamma = 1.4$.

résume les différents domaines d'existence de la solution du système (9.21) en fonction de δ_0.

Les différentes solutions sont illustrées en figure 9.2 pour le système (9.21) (Fig. (a) et (b)), dans la limite des chocs forts, et le système (9.19) (Fig. (c)), pour une intensité quelconque du choc. La position initiale du choc et le nombre de Mach initial sont fixés à $r_0 = 0.5$ et $M_0 = 10$; seule la valeur de Q_0 varie. Les valeurs de $r_\star$ et $r_{\star\star}$ sont données par :

$$r_\star \approx 4.731 \quad \text{et} \quad r_{\star\star} \approx 3.938, \quad \text{pour } \gamma = 1.4.$$

Dans la limite des chocs forts, le comportement théorique de la variation du nombre de Mach est bien retrouvé (*cf.* Fig. 9.2(a)). Dans ce cas, la solution est donnée par (9.25). On note que la solution pour $\delta_0 = Q_1$, définie par (9.26), est proche de celle du modèle GSD. On rappelle la solution de ce dernier dans la limite des chocs forts (3.29) :

$$M(r) = M_0 \left(\frac{r_0}{r}\right)^{\frac{d-1}{\lambda_W^\infty}}, \quad \text{avec } \lambda_W^\infty = 1 + \frac{2}{\gamma} + \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma - 1}}.$$

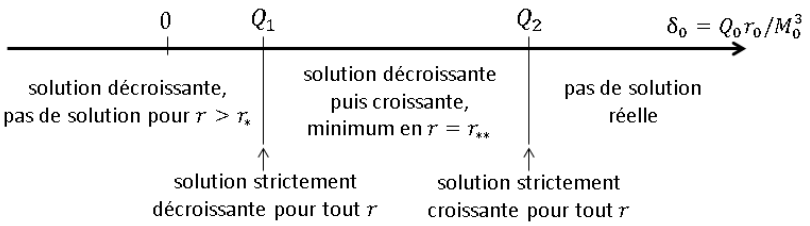
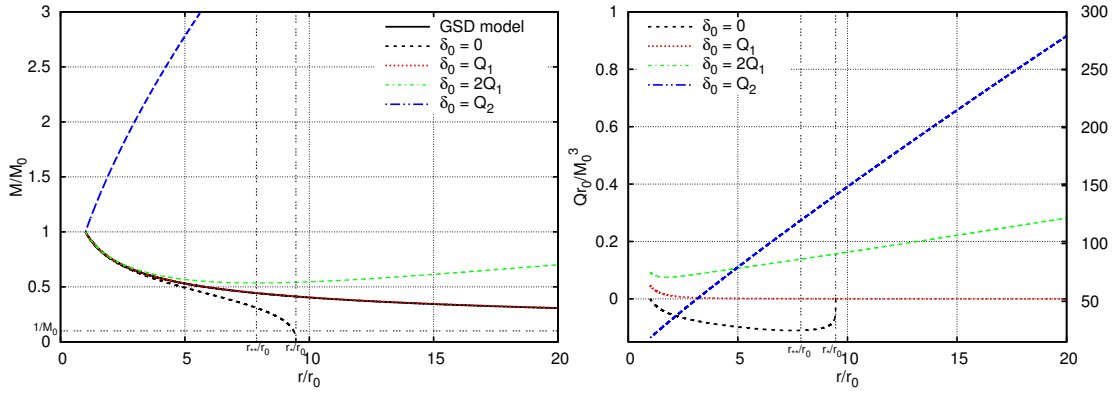
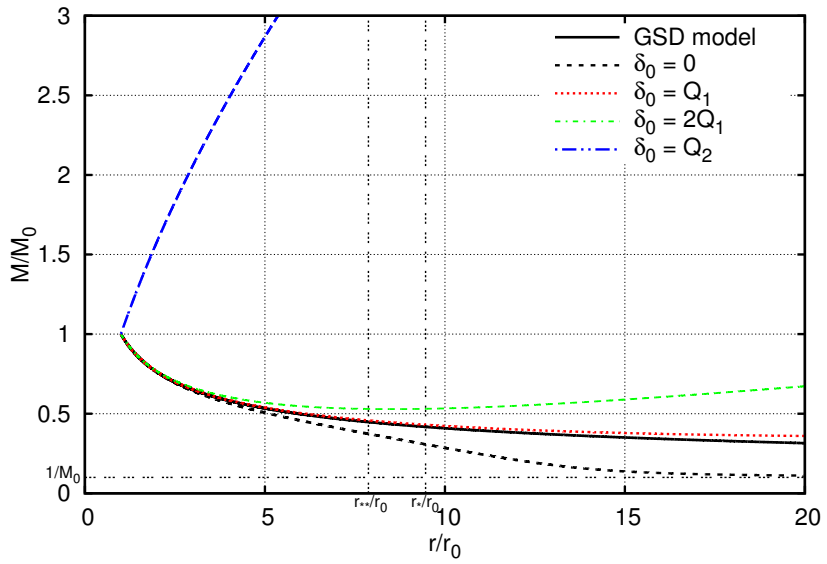


FIGURE 9.1 – Schéma résumant les différents types de solutions du modèle GSD ordre 1 en symétrie radiale dans la limite des chocs forts (système (9.21)) en fonction de δ_0.



(a) (b)



(c)

FIGURE 9.2 – Solutions du modèle GSD tronqué à l'ordre 0 et 1 en symétrie sphérique ($d = 3$) pour différents Q_0, r_0 et M_0 sont fixés : $r_0 = 0.5$ $M_0 = 10$. Fig. (a)-(b) : Nombre de Mach et effets arrière dans la limite des chocs forts. Fig. (c) : Nombre de Mach pour un choc d'intensité quelconque.

Nous verrons dans la suite que les valeurs de l'exposant de ces deux solutions sont très proches. La solution peut être décroissante même pour des valeurs positives des effets arrière, comme nous pouvons le voir en figure 9.2(b). Par exemple pour $\delta_0 = Q_1$, la solution est décroissante et les effets arrière sont positifs et diminuent avec la distance. Néanmoins, en raison du caractère non-linéaire du système, la solution diverge en temps fini pour $\delta_0 > Q_1$.
L'étude de la solution dans la limite des chocs forts donne une idée des propriétés de la solution du système (9.19), défini pour un choc d'intensité quelconque. La figure 9.2(c) présente la solution de ce système pour différentes valeurs de δ_0. Le système est résolu numériquement à l'aide d'un algorithme de Runge-Kutta d'ordre 4. Pour $\delta_0 < Q_1$, la solution existe cette fois-ci pour tout r. Le nombre de Mach décroît et converge vers 1 dans ce cas. On observe alors un changement de convexité de la solution en r_*. En pratique, la divergence de la solution est observée à partir de valeurs de δ_0 et de r proches de celles définies dans le cas limite des chocs forts. On en conclut que la solution diverge en temps fini pour $\delta_0 > Q_1$.

Dans le cas d'un choc soutenu, comme pour le problème de la diffraction d'un choc plan sur un dièdre convexe par exemple, les effets arrière sont uniquement générés par la géométrie. Les effets arrière initiaux sont donc nuls : $Q_0 = 0$, et sont alimentés par l'interaction du choc avec les obstacles présents dans le milieu. Au vu de l'étude menée ici, on s'attend à ce que le modèle de Best soit stable pour ce type de problème, dans le sens où le nombre de Mach ne diverge pas. En pratique, le signe des effets arrière est négatif pour les cas que nous avons considéré, ce qui a pour conséquence de diminuer l'intensité du choc en comparaison au modèle GSD (*cf.* remarque 9.2). Cet aspect est traité plus en détail en sous-section 9.1.4. Nous verrons, en sous-section 9.2.7, que cette propriété n'est pas triviale pour le modèle KIN ordre 1.

En champ proche, $r \in]0, r_0]$ avec r voisin de 0, la solution (9.25) s'exprime comme :

$$M(r) = M_0 \left(\frac{r}{r_0}\right)^{f_1} \left(\frac{f_2 - f_0}{f_2 - f_1}\right)^{\frac{1}{\chi_1 + 1}}. \tag{9.27}$$

La surpression du choc, $\frac{[p]}{p_+} = \frac{2\gamma}{\gamma+1}\left(M^2 - 1\right)$, est alors proportionnelle à r^{2f_1}. La valeur de cet exposant est donnée en table 9.2 pour une symétrie cylindrique ($d = 2$) et sphérique ($d = 3$). Tout comme le modèle GSD, ces valeurs sont très différentes d'un choc fort divergent auto-

exposant	Exact value p_g	GSD - ordre 0 $2(d-1)/\lambda_W^\infty$	GSD - ordre 1 $-2f_1$
$d = 2$	0.394588	0.394142	0.392258
$d = 3$	0.788728	0.788284	0.783102

TABLE 9.2 – Exposant calculé pour le problème d'un choc fort convergent à symétrie cylindrique ($d = 2$) et sphérique ($d = 3$), pour un gaz parfait au repos, $\gamma = 1.4$. La solution exacte, donnée par Guderley [49], est comparée aux différents ordres d'approximation du modèle GSD.

semblable pour lequel la surpression décroît comme r^{-d} [76, 128]. En revanche, elles sont très proches de celles de la solution auto-semblable de Guderley [49] établies pour un choc fort convergent :

$$\frac{[p]}{p_+} \propto \frac{1}{r^{p_g}},$$

où l'exposant p_g est donné en table 9.2. Ce point avait déjà été souligné pour le modèle GSD en section 3.1.3, pour lequel les valeurs de l'exposant sont rappelées en table 9.2. Cette valeur est paradoxalement meilleure pour le modèle à l'ordre 0 de troncature (GSD). Néanmoins, le modèle de Best semble également bien adapté pour ce type de problème.

Cas limite des chocs faibles. Dans la limite des chocs faibles ($M \sim 1$), le système (9.19) s'écrit :

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}r} = 1 \\ \dfrac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}r} + \dfrac{d-1}{2}\dfrac{M}{r} - \dfrac{\gamma+1}{8}MQ = 0 \\ \dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}r} - \dfrac{\gamma+1}{4}Q^2 + \dfrac{d-1}{2}\dfrac{Q}{r} = 0. \end{cases}$$

Ce système est résolu en annexe E (propriété E.2) ; dans ce cas le terme d'effets arrière est $-Q$. Sous l'hypothèse que $Q_0 \leq 0$, la solution est alors donnée par :

$$\begin{cases} M(r) = \dfrac{M_0}{\left(\frac{r}{r_0}\right)^{\frac{d-1}{2}} \sqrt{1 - \frac{\gamma+1}{4} Q_0 r_0 J\left(\frac{r}{r_0}\right)}} \\ Q(r) = \dfrac{Q_0}{\left(1 - \frac{\gamma+1}{4} Q_0 r_0 J\left(\frac{r}{r_0}\right)\right)\left(\frac{r}{r_0}\right)^{\frac{d-1}{2}}} \end{cases}, \quad \forall r \geq r_0,$$

avec

$$J(\bar{r}) = \int_1^{\bar{r}} \frac{\mathrm{d}x}{x^{\frac{d-1}{2}}}.$$

Dans le cas où $Q_0 > 0$, l'existence d'une solution réelle décroissante n'est pas toujours assurée.

En champ lointain ($r \gg r_0$), M et Q se comportent comme

$$Q(r) = \frac{-4}{(\gamma+1)r_0} \begin{cases} \dfrac{r_0}{r} & d=1 \\ \dfrac{r_0}{2r} & d=2 \\ \dfrac{r_0}{r\ln\left(\frac{r}{r_0}\right)} & d=3 \end{cases}, \quad M(r) = \frac{2M_0}{\sqrt{-(\gamma+1)Q_0 r_0}} \begin{cases} \sqrt{\dfrac{r_0}{r}} & d=1 \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\dfrac{r_0}{r}\right)^{3/4} & d=2 \\ \dfrac{r_0}{r\sqrt{\ln\left(\frac{r}{r_0}\right)}} & d=3. \end{cases}$$

La décroissance attendue pour une onde acoustique est alors retrouvée (1.2), ayant noté que $\frac{[p]}{p_+} \propto M$. On rappelle qu'à l'ordre 0 de troncature, *i.e.* sans effets arrière dans le modèle, la décroissance de la surpression du choc est géométrique : $\frac{[p]}{p_+} \propto r^{-(d-1)/2}$ (*cf.* section 3.1.3).

La prise en compte des effets arrière est donc nécessaire au bon comportement acoustique du modèle en champ lointain. Cependant, les effets non-linéaires près de la source ne sont pas correctement décrits à l'ordre 1 de troncature. Il faudrait donc tronquer le modèle à un ordre supérieur, ou bien modéliser de manière non triviale le terme Q_2 dans (9.19c).

9.1.4 Intégration dans l'algorithme Lagrangien

L'algorithme de résolution du modèle GSD, présenté au chapitre 5, peut être utilisé pour résoudre le modèle tronqué à un ordre supérieur. Seulement, en raison des termes non-linéaires

de l'équation d'évolution sur les effets arrière (9.18b), à savoir

$$Q\frac{\vec{n}\cdot\vec{\nabla}A}{A} = \frac{Q}{MA}\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}\alpha} \quad \text{et} \quad \left(\frac{\vec{n}\cdot\vec{\nabla}A}{A}\right)^2 = \left(\frac{1}{MA}\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}\alpha}\right)^2,$$

l'intégration de l'aire le long d'un tube de rayon est impossible. Best [20] propose de réécrire la variation d'aire dans chaque tube de rayon en terme de courbure locale au front, κ. La relation $A - M$ s'écrit dans ce cas sous la forme (9.18) et est résolue en même temps que l'équation d'évolution du choc (5.1) :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}\alpha} = M\vec{n}, \tag{9.28}$$

à l'aide d'un schéma en temps de Runge-Kutta d'ordre 4. Les étapes intermédiaires de l'algorithme, à savoir l'interpolation spline, la régularisation et le lissage du front, restent identiques.

Le front de choc est interpolé à l'aide d'une spline globale dans l'algorithme de Best, qui présente l'avantage d'être au moins de classe C^2. En notant $(X(s), Y(s))^T$ l'interpolation du choc, la courbure locale au point i, κ_i, en l'abscisse curviligne s_i, se calcule à l'aide de la formulation analytique :

$$\kappa_i = \frac{X'(s_i)Y''(s_i) - Y'(s_i)X''(s_i)}{\left(X'(s_i)^2 + Y'(s_i)^2\right)^{3/2}}. \tag{9.29}$$

Nous avons choisi d'interpoler le front de choc par une interpolation spline locale limitée dans notre algorithme (*cf.* section 5.1.2). Cette interpolation est au moins de classe C^1, mais pas nécessairement de classe C^2, rendant impossible l'utilisation de l'expression (9.29). Nous optons alors pour une estimation géométrique de cette quantité [102]. En notant $(X_i)_{i=1,\dots,N}$ l'ensemble des points du front discret, la courbure locale se calcule alors comme (*cf.* eq. (7.23)) :

$$\kappa_i = \frac{4\sin(\theta_i/2)}{\|\overrightarrow{X_{i-1}X_i}\| + \|\overrightarrow{X_iX_{i+1}}\|}, \tag{9.30}$$

où θ_i est l'angle orienté entre les vecteurs $\overrightarrow{X_iX_{i+1}}$ et $\overrightarrow{X_{i-1}X_i}$.

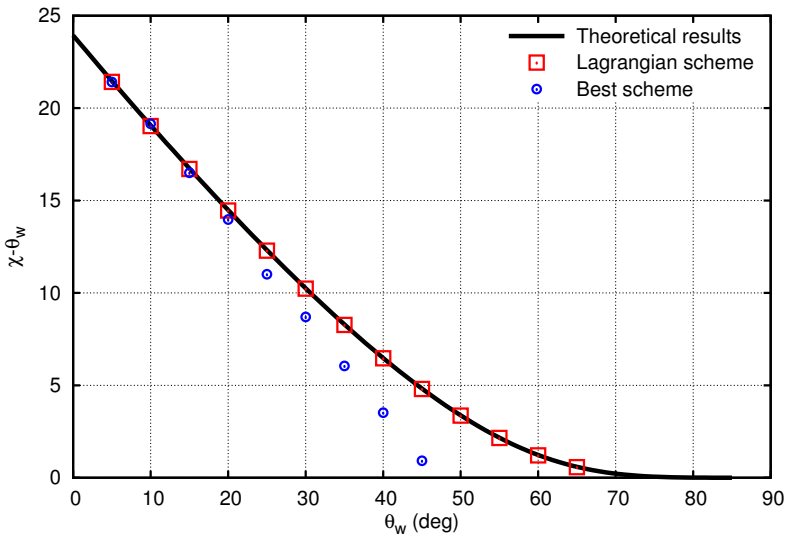


FIGURE 9.3 – Angle de la trajectoire du choc-choc par rapport à la paroi, donné par le modèle GSD ($Q \equiv 0$) pour un choc fort, pour différents angles d'inclinaison de la rampe. Comparaison des valeurs théoriques avec les résultats donnés par le schéma Lagrangien présenté au chapitre 5 et le schéma de Best.

Le schéma décrit ci-dessus, consistant à utiliser la courbure locale du front à la place de l'aire des tubes de rayon est appelé **schéma de Best** dans la suite.

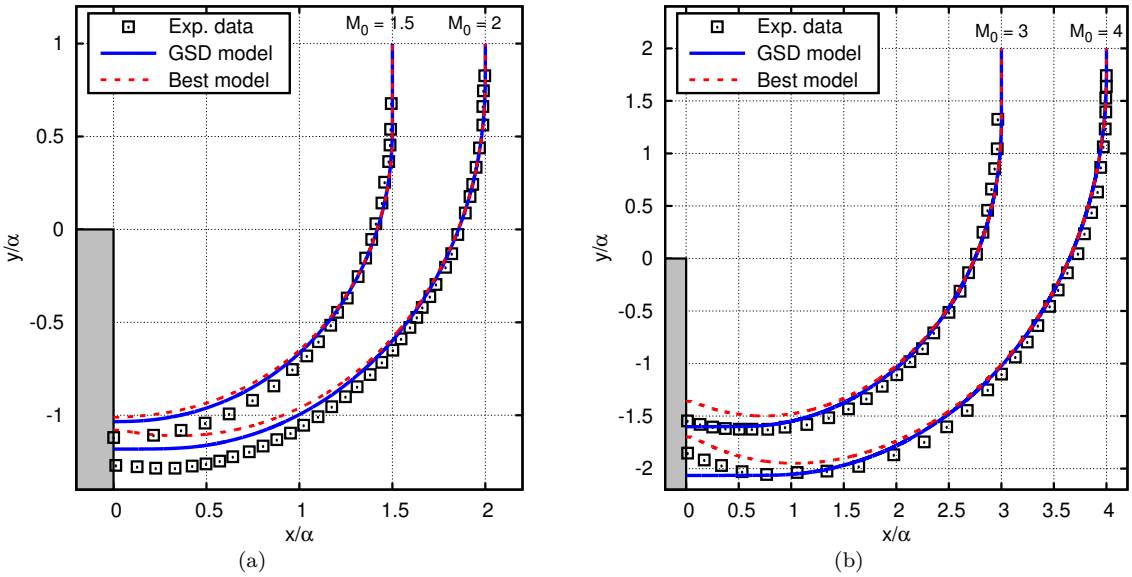


FIGURE 9.4 – Diffraction d'un choc plan à nombre de Mach M_0 sur un dièdre convexe d'angle $-90°$. Le choc se déplace de la gauche vers la droite. Résultats numériques obtenus avec l'algorithme de Best pour $\Delta s = 0.00125$. Comparaison du front de choc entre les modèles GSD, de Best (GSD ordre 1) et les données expérimentales issues de [143].

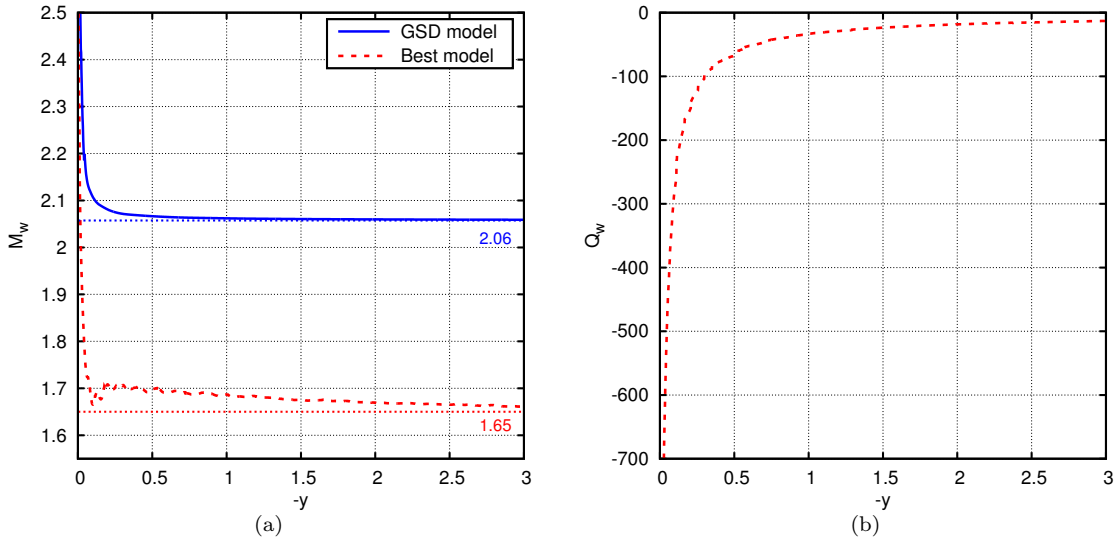


FIGURE 9.5 – Diffraction d'un choc plan à nombre de Mach 4 sur un dièdre convexe d'angle $-90°$. Résultats numériques obtenus avec l'algorithme de Best pour $\Delta s = 0.00125$. Fig. (a) : Nombre de Mach à la paroi en fonction de la distance au coin. Fig. (b) : Effets arrière à la paroi, pour le modèle GSD tronqué à l'ordre 1, en fonction de la distance au coin.

Remarque 9.6

Soulignons que la courbure locale est très sensible aux oscillations du schéma. En pratique, l'approche géométrique combinée à une interpolation spline locale limitée est moins sujette à ces oscillations.

La conservation de l'aire dans les tubes de rayon est l'essence même du modèle GSD. Par conséquent, la considération de la courbure locale au front en lieu et place de l'aire des tubes de rayon conduit à une perte de conservativité du schéma, comme nous pouvons le voir en figure 9.3. Cette figure présente l'angle de la trajectoire du choc-choc, donné par le modèle GSD (pas d'effets arrière), pour le problème de la diffraction d'un choc plan sur un dièdre concave. On rappelle que ce problème est résolu analytiquement en section 3.1.5. L'angle théorique est bien restitué par l'algorithme Lagrangien comme il avait été souligné en section 5.2.3. L'algorithme de Best, pour Q identiquement nul, est incapable de reproduire la bonne solution. Notons que la courbure locale est la formulation non conservative de l'équation bilan sur les tubes de rayon (9.16), comme souligné en remarque 9.3.

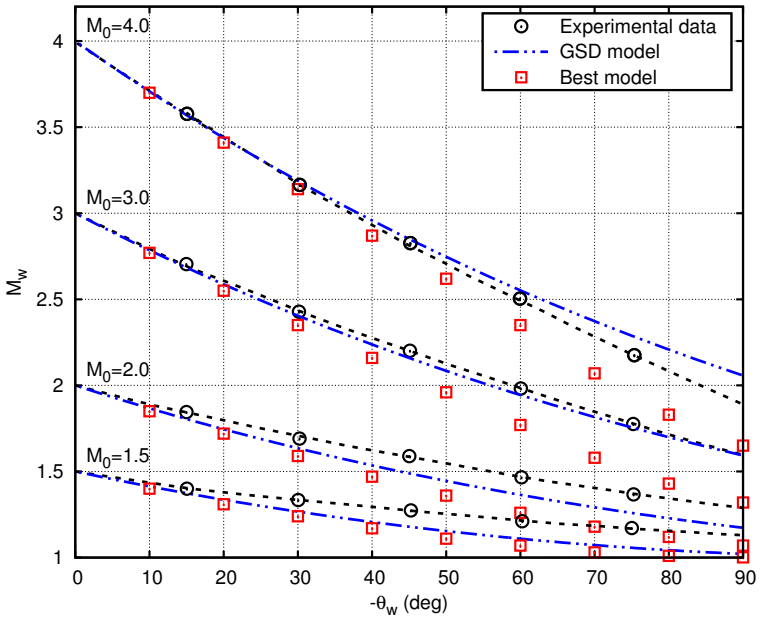


FIGURE 9.6 – Diffraction d'un choc plan à nombre de Mach M_0 sur un dièdre convexe d'angle $\theta_w < 0$. Nombre de Mach au niveau de la paroi, M_w, pour différentes inclinaisons de la rampe. Les données expérimentales sont issues de [120]. Modèle de Best : résultats numériques obtenus avec le schéma de Best pour $\Delta s = 0.01$. La solution converge lentement, l'algorithme est donc arrêté lorsque $|Q| < 1$.

La non conservativité du schéma de Best rend impossible une approximation de la solution lorsqu'un choc-choc apparaît sur le front. Seules les solutions continues peuvent être estimées par ce schéma. On vérifie alors que le schéma de Best donne bien la solution du modèle GSD pour $Q \equiv 0$.

Nous présentons en figure 9.4 le problème de la diffraction d'un choc plan sur un dièdre incliné à $-90°$. Rappelons que ce type de problème est résolu analytiquement pour le modèle GSD en section 3.1.5. Le modèle de Best est résolu numériquement à l'aide du schéma décrit ci-dessus. On constate que le modèle de Best restitue le point d'inflexion observé expérimentalement, là où le modèle GSD échoue. On note également un net ralentissement du front avec la prise en compte des effets arrière (*cf.* Fig. 9.5(a)). L'interaction du choc avec le coin génère des effets arrière sur le front, de valeurs négatives ici, qui sont responsables de ce ralentissement

(*cf.* remarque 9.2). Ces effets arrière s'atténuent avec la distance faisant converger la solution vers un profil auto-similaire. À titre d'exemple, le nombre de Mach et les effets arrière à la paroi, M_w et Q_w, sont présentés en figure 9.5 pour $M_0 = 4$, en fonction de la distance au coin ($-y$ ici). On note une convergence plus lente de la valeur de M_w pour le modèle de Best (*cf.* Fig. 9.5(a)) en raison de la contribution des effets arrière dans le modèle. Ces effets arrière s'atténuent avec la distance (*cf.* Fig. 9.5(b)). Le nombre de Mach tend alors vers 1.65, valeur plus faible que celle du modèle GSD, qui est de 2.06.

Une étude plus approfondie du problème de la diffraction d'un choc plan sur un dièdre convexe est présentée en figure 9.6. Le nombre de Mach à la paroi après diffraction, M_w, est tracé pour différents angles d'inclinaison de la rampe, θ_w, et différents nombres de Mach incidents, M_0. Les données expérimentales sont issues de [120], et la valeur théorique de M_w pour le modèle GSD est calculée à l'aide de la relation (3.54). Les résultats du modèle de Best sont obtenus à l'aide du schéma de Best pour un pas de discrétisation $\Delta s = 0.01$. La convergence vers la solution étant lente, on choisit d'arrêter l'algorithme lorsque l'amplitude des effets arrière est inférieure à 1 : $|Q| < 1$. Cela donne une valeur de M_w assez proche de celle que l'on obtiendrait à plus longue distance. On observe que l'estimation du nombre de Mach à la paroi est plus faible avec le modèle de Best en comparaison au modèle GSD, en raison du ralentissement provoqué par les effets arrière. Cela laisse présager d'une limitation similaire ou plus importante du modèle tronqué à l'ordre 1 pour le problème de la diffraction sur un dièdre convexe. On rappelle que la limitation du modèle GSD pour ce type de problème est discutée en section 3.1.5.

Remarque 9.7

Les résultats obtenus pour le modèle de Best (*cf.* Fig. 9.6) sont différents de ceux présentés par Best [20] pour $M_0 = 4$. Il pourrait s'agir d'une erreur d'implémentation de notre part ou de la part de cet auteur, ou encore de la manière dont la valeur M_w est extraite, ce dernier point n'étant pas clair dans [20]. Cet aspect n'a pas été investigué davantage.

9.2 Prise en compte de l'écoulement arrière dans le modèle KIN

Le modèle Cinématique (4.62) est rappelé :

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\vec{x}_{sh}}{\mathrm{d}t} = W_S\vec{n} + \vec{v}_+ & \text{(9.31a)} \\ \dfrac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}t} = -c_+w_1\vec{\nabla}\cdot\vec{n} - c_+w_2\dfrac{(\partial_n p)_-}{p_+} + c_+w_3\dfrac{\partial_n\rho_+}{\rho_+} + c_+w_4\dfrac{\partial_n p_+}{p_+} + w_5 & \text{(9.31b)} \\ \dfrac{\mathrm{d}\vec{n}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{W_S}{2}\left(-\dfrac{\gamma+1}{(2\gamma+(\gamma+1)\zeta)}\vec{\nabla}^S\zeta + \dfrac{1-2b\rho_+}{1-b\rho_+}\dfrac{\vec{\nabla}^S\rho_+}{\rho_+} - \dfrac{\vec{\nabla}^S p_+}{p_+}\right) & \\ \qquad\qquad +\vec{v}_+\cdot\overline{\overline{\nabla}}^S\vec{n} - \vec{\nabla}^S(\vec{v}_+\cdot\vec{n}), & \text{(9.31c)} \end{cases}$$

où $\vec{x}_{sh}$ est la position du choc, $\vec{n}$ est le vecteur normal au front, $\zeta = \frac{[p]}{p_+}$ désigne l'intensité du choc et $W_S = c_+\sqrt{1+\frac{\gamma+1}{2\gamma}\zeta}$ est la vitesse locale du choc relativement à l'écoulement amont. L'opérateur ∂_n désigne la dérivée suivant la direction normale : $\partial_n = \vec{n}\cdot\vec{\nabla}$. Les coefficients w_i dépendent de ζ et sont donnés par (4.59) et (4.61).

Le système (9.31) fait intervenir un terme de couplage arrière : $(\partial_n p)_- = \left(\vec{n}\cdot\vec{\nabla}p\right)_-$, dont l'équation d'évolution peut être exprimée à partir des équations d'Euler (4.7) dérivées le long

des normales. Le raisonnement est analogue à l'obtention de l'équation sur l'intensité du choc effectué en section 4.3. Ce raisonnement fait appel à la théorie des surfaces singulières (section 4.2), et nécessite des relations de compatibilité d'ordre supérieur, développées en première sous-section.

À partir de l'équation sur la pression des équations d'Euler (4.7c), on obtient après calcul l'équation d'évolution de $[\partial_n p] = (\partial_n p)_-$ valable pour un milieu uniforme et au repos :

$$\frac{\mathrm{d}\left[\partial_n p\right]}{\mathrm{d}t} + c_+\sigma_1\left[n_j n_k p_{,jk}\right] + \left[\left(\vec{n}\cdot\vec{\nabla}v_j\right)p_{,j}\right] + \left[\vec{n}\cdot\vec{\nabla}\left(\frac{\gamma p}{1-b\rho}\right)\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{v}\right)\right] + \left[\frac{\gamma p}{1-b\rho}\vec{n}\cdot\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{v}\right)\right] - \frac{\mathrm{d}n_k}{\mathrm{d}t}\left[p_{,k}\right] = 0, \quad (9.32)$$

où

$$\sigma_1 = \frac{[\vec{v}]\cdot\vec{n} - W_S}{c_+} = -\frac{(2\gamma + (\gamma-1)\zeta + 2b\rho_+\zeta)}{2\gamma\sqrt{1+\frac{\gamma+1}{2\gamma}\zeta}}.$$

On note alors que des inconnues supplémentaires apparaissent. La connaissance des termes $\left[\vec{n}\cdot\vec{\nabla}\rho\right]$ et $\left[\vec{n}\cdot\overline{\overline{\nabla}}\vec{v}\right]$ est nécessaire. L'établissement des équations adéquates est réalisé en deuxième sous-section. Injectant les relations ainsi obtenues dans (9.32), une inconnue demeure toujours, hors terme $[n_j n_k p_{,jk}]$, nécessitant une deuxième équation. Ces calculs sont détaillés dans la troisième sous-section. Une combinaison linéaire est ensuite effectuée dans la quatrième sous-section, aboutissant à l'équation d'évolution sur les effets arrière, qui fait intervenir l'inconnue supplémentaire $(n_i n_j p_{,ij})_-$. Par un raisonnement similaire à l'ordre supérieur, on met finalement en évidence l'existence d'un système infini d'équations non-linéaires couplées, d'inconnues $(n_{i_1} n_{i_2} ... n_{i_k} p_{,i_1 i_2 ... i_k})_-$ pour $k \geq 1$, faisant intervenir un terme d'ordre $k+1$.

Nous présentons dans cette partie le modèle Cinématique à l'ordre 1, *i.e.* avec une équation sur les effets arrière en plus. Ces développements ont été publiés, pour un milieu homogène et au repos, par Sharma & Radha en 1994 [116] pour un gaz parfait, et Pandey & Sharma en 2009 [92] pour un gaz de van der Waals. Afin de présenter simplement les étapes de calculs, nous supposons dans un premier temps que le milieu à l'amont du choc est uniforme et au repos. Ainsi la variation d'une quantité à l'amont du choc, ψ_0, est nulle : $\mathrm{d}\psi_0 = 0$, avec d un opérateur différentiel quelconque. Le lecteur intéressé uniquement par l'équation finale peut se référer directement à la sous-section 9.2.6.1. L'extension à un milieu inhomogène en mouvement, qui est l'une de nos contributions, est présentée en section 9.2.6.2.

9.2.1 Relations de compatibilité d'ordre supérieur dans la théorie des surfaces singulières

Le développement du modèle Cinématique repose sur la théorie des surfaces singulières et ses relations de compatibilité au niveau du choc. Ces relations ont été développées pour les formes différentielles $\partial_n = \vec{n}\cdot\vec{\nabla}$ et ∂_t en section 4.2. L'obtention d'une équation d'évolution sur les effets arrière nécessite des relations de compatibilité d'ordre supérieur au niveau du choc.

Soit ψ un tenseur d'ordre quelconque. On rappelle l'expression de la dérivée Lagrangienne de ψ :

$$\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial\psi}{\partial t} + \vec{V}\cdot\vec{\nabla}\psi = \frac{\partial\psi}{\partial t} + W_S\left(\vec{n}\cdot\vec{\nabla}\psi\right) + \left(\vec{v}_+\cdot\vec{\nabla}\psi\right), \quad (9.33)$$

ainsi que de sa dérivée tangentielle au choc :

$$\vec{\nabla}^S\psi = \vec{\nabla}\psi - \vec{n}(\vec{n}\cdot\vec{\nabla}\psi). \quad (9.34)$$

Par souci de simplicité, on notera à notre convenance dans la suite

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \partial_t \psi \quad , \quad \nabla_i \psi = \partial_i \psi = \psi_{,i} \quad \text{pour } i = 1, 2, 3,$$

et

$$\partial_i^S \psi = \nabla_i^S \psi \quad \text{pour } i = 1, 2, 3.$$

Les dérivées d'ordre 2 s'écrivent :

$$\partial_{jt} \psi = \frac{\mathrm{d} \partial_j^S \psi}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(n_j \left(\vec{n} \cdot \vec{\nabla} \psi \right) \right) - \vec{V} \cdot \vec{\nabla} \psi_{,j}, \tag{9.35}$$

et

$$\psi_{,ij} = \partial_{ij}^S \psi + \nabla_i^S \left(n_j \left(\vec{n} \cdot \vec{\nabla} \psi \right) \right) + n_i \left(n_k \psi_{,kj} \right). \tag{9.36}$$

La relation (9.35) s'obtient à partir de (9.33) pour la fonction $\psi_{,j}$:

$$\partial_{tj} \psi = \frac{\mathrm{d} \psi_{,j}}{\mathrm{d}t} - \vec{V} \cdot \vec{\nabla} \psi_{,j}.$$

Le terme $\psi_{,j} = \nabla_j \psi$ est ensuite remplacé par $\partial_j^S \psi$ à l'aide de la relation (9.34). Le même raisonnement s'applique pour (9.36) en partant de la relation (9.34).

Remarque 9.8

Les dérivées Lagrangienne et tangentielle ne commutent pas :

$$\vec{\nabla}^S \left(\vec{\nabla} \psi \right) \neq \vec{\nabla} \left(\vec{\nabla}^S \psi \right) \quad , \quad \vec{\nabla}^S \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right) \neq \frac{\partial}{\partial t} \left(\vec{\nabla}^S \psi \right)$$

$$\vec{\nabla}^S \left(\frac{\mathrm{d} \psi}{\mathrm{d}t} \right) \neq \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\vec{\nabla}^S \psi \right) \quad , \quad \vec{\nabla}_k^S \left(\vec{\nabla}_i^S \psi \right) \neq \vec{\nabla}_i^S \left(\vec{\nabla}_k^S \psi \right).$$

L'opérateur Laplacien tangentiel au choc est défini par :

$$\Delta^S \psi = \vec{\nabla}^S \cdot \left(\vec{\nabla}^S \psi \right) = \nabla_k^S \nabla_k^S \psi,$$

avec la convention de l'indice muet répété pour une somme. Il suit alors immédiatement, en contractant sur i la relation (9.36), ainsi qu'en tenant compte des propriétés (4.18) et (4.20) :

$$\Delta \psi = \Delta^S \psi + \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{n} \right) \left(\vec{n} \cdot \vec{\nabla} \psi \right) + n_i n_k \psi_{,ik}. \tag{9.37}$$

Partant de la relation (9.34) et utilisant au besoin les relations (4.18), (4.20) et (9.37), on trouve également :

$$\nabla_k^S \nabla_k \psi = \Delta^S \psi + \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{n} \right) \left(\vec{n} \cdot \vec{\nabla} \psi \right) = \Delta \psi - n_i n_k \psi_{,ik}, \tag{9.38}$$

et, pour deux fonctions ψ_1 et ψ_2 :

$$\nabla_k^S \psi_1 \nabla_k^S \psi_2 = \nabla_k^S \psi_1 \nabla_k \psi_2 = \nabla_k \psi_1 \nabla_k \psi_2 - \left(\vec{n} \cdot \vec{\nabla} \psi_1 \right) \left(\vec{n} \cdot \vec{\nabla} \psi_2 \right). \tag{9.39}$$

La formule de dérivation d'un produit, suivie de la propriété $\vec{n}\cdot\vec{\nabla}^S = 0$, puis de la définition (4.13) combinée à (4.19), impliquent :

$$n_k \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\nabla_k^S \psi\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(n_k \nabla_k^S \psi\right) - \frac{\mathrm{d}n_k}{\mathrm{d}t}\nabla_k^S \psi = -\frac{\mathrm{d}n_k}{\mathrm{d}t}\nabla_k^S \psi = -\frac{\mathrm{d}n_k}{\mathrm{d}t}\nabla_k \psi, \tag{9.40}$$

et

$$n_j \nabla_i^S\left(\nabla_j^S \psi\right) = -\left(\nabla_i^S n_j\right)\left(\nabla_j^S \psi\right) = -\left(\nabla_i^S n_j\right)\left(\nabla_j \psi\right). \tag{9.41}$$

En contractant (9.35) et (9.36) avec n_j, les dérivées le long de la direction normale des quantités $\psi_{,t}$ et $\psi_{,i}$ s'expriment comme :

$$\vec{n}\cdot\vec{\nabla}\left(\psi_{,t}\right) = n_j \frac{\mathrm{d}\partial_j^S \psi}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\vec{n}\cdot\vec{\nabla}\psi\right) - n_j\left(\vec{V}\cdot\vec{\nabla}\psi_{,j}\right), \tag{9.42}$$

et

$$n_j \psi_{,ij} = n_j \nabla_i^S\left(\nabla_j^S \psi\right) + \nabla_i^S\left(\vec{n}\cdot\vec{\nabla}\psi\right) + n_i\left(n_j n_k \psi_{,jk}\right). \tag{9.43}$$

En injectant finalement les propriétés (9.40) et (9.41), on obtient :

$$\vec{n}\cdot\vec{\nabla}\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\vec{n}\cdot\vec{\nabla}\psi\right) - n_j\left(\vec{V}\cdot\vec{\nabla}\psi_{,j}\right) - \frac{\mathrm{d}n_j}{\mathrm{d}t}\nabla_j^S \psi \tag{9.44}$$

$$n_j \psi_{,ij} = \nabla_i^S\left(\vec{n}\cdot\vec{\nabla}\psi\right) + n_i\left(n_j n_k \psi_{,jk}\right) - \left(\nabla_i^S n_j\right)\psi_{,j}. \tag{9.45}$$

Relations de compatibilité. Par un raisonnement similaire à l'obtention de la relation de compatibilité au niveau du choc (4.15), les relations de compatibilité d'ordre supérieur le long du choc s'écrivent :

$$\vec{n}\cdot\left[\vec{\nabla}\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)\right] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\vec{n}\cdot\vec{\nabla}\psi\right] - n_j\left[V_k \psi_{,jk}\right] - \frac{\mathrm{d}n_j}{\mathrm{d}t}\nabla_j^S\left[\psi\right] \tag{9.46}$$

$$\left[n_j \psi_{,ij}\right] = \nabla_i^S\left[\vec{n}\cdot\vec{\nabla}\psi\right] + n_i\left[n_j n_k \psi_{,jk}\right] - \left(\nabla_i^S n_j\right)\left[\psi_{,j}\right], \tag{9.47}$$

découlant des équations (9.44) et (9.45). On rappelle que V_k est définie par

$$V_k = W_S n_k + v_{+k},$$

où v_{+k} est la k-ième composante du vecteur $\vec{v}_+$, supposé nul dans cette section.

9.2.2 Relations différentielles de saut

Par une combinaison appropriée des équations (4.42)–(4.45) et (4.58), on trouve après calcul :

$$\left[\vec{n}\cdot\overline{\overline{\nabla}}\vec{v}\right] = c_+\left(\epsilon_1\frac{(\partial_n p)_-}{p_+} + \epsilon_2\vec{\nabla}\cdot\vec{n}\right)\vec{n} + \tau_1\frac{\mathrm{d}\vec{n}}{\mathrm{d}t} + c_+\tau_2\vec{\nabla}^S\zeta \tag{9.48}$$

$$\vec{n}\cdot\left[\vec{n}\cdot\overline{\overline{\nabla}}\vec{v}\right] = c_+\left(\epsilon_1\frac{(\partial_n p)_-}{p_+} + \epsilon_2\vec{\nabla}\cdot\vec{n}\right) \tag{9.49}$$

$$\left[\vec{n}\cdot\vec{\nabla}\rho\right] = \rho_+\left(\eta_1\frac{(\partial_n p)_-}{p_+} + \eta_2\vec{\nabla}\cdot\vec{n}\right), \tag{9.50}$$

avec

$$\epsilon_1 = \frac{(1-b\rho_+)(2\gamma+(\gamma-1)\zeta)(8\gamma+3(\gamma+1)\zeta)}{2\gamma\sqrt{1+\frac{\gamma+1}{2\gamma}\zeta\Pi_1}}, \qquad \tau_1 = \frac{2(1-b\rho_+)\zeta}{(2\gamma+(\gamma-1)\zeta+2b\rho_+\zeta)},$$

$$\epsilon_2 = -\frac{(1-b\rho_+)\zeta(1+\zeta)(4\gamma+(\gamma+1)\zeta)}{\sqrt{1+\frac{\gamma+1}{2\gamma}\zeta\Pi_1}}, \qquad \tau_2 = \frac{1-b\rho_+}{\gamma\sqrt{1+\frac{\gamma+1}{2\gamma}\zeta}},$$

et

$$\eta_1 = \frac{(1-b\rho_+)(2\gamma+(\gamma+1)\zeta)(16\gamma^2+2\gamma(5\gamma-3)\zeta+3(\gamma^2-1)\zeta^2)}{(2\gamma+(\gamma-1)\zeta+2b\rho_+\zeta)^2\Pi_1}$$

$$\eta_2 = \frac{2(1-b\rho_+)(\gamma^2-1)\zeta^3(2\gamma+(\gamma+1)\zeta)}{(2\gamma+(\gamma-1)\zeta+2b\rho_+\zeta)^2\Pi_1}.$$

Le calcul aboutissant à la relation (9.48) est détaillé dans la suite. L'équation (9.50) s'obtient de manière analogue, et la relation (9.49) est directe à partir de (9.48) puisque $\vec{n}\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{n}}{\mathrm{d}t}=0$ et $\vec{n}\cdot\vec{\nabla}^S=0$.

On rappelle les équations d'évolution de l'intensité du choc (4.58) et du saut de $\vec{v}$ (4.43), écrites ici pour un milieu uniforme et au repos :

$$\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}t} = -c_+\left(w_1\vec{\nabla}\cdot\vec{n}+w_2\frac{(\partial_n p)_-}{p_+}\right) \tag{9.51}$$

$$\frac{\mathrm{d}\,[\vec{v}]}{\mathrm{d}t} = c_+\left(\mathrm{d}_\zeta\beta_0\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}t}\vec{n}+\beta_0\frac{\mathrm{d}\vec{n}}{\mathrm{d}t}\right), \tag{9.52}$$

où w_1 et w_2 sont définis par (4.59a) et (4.59b), et avec

$$\beta_0 = \frac{[\vec{v}]\cdot\vec{n}}{c_+} = \frac{(1-b\rho_+)\zeta}{\gamma\sqrt{1+\frac{\gamma+1}{2\gamma}\zeta}} \quad \text{et} \quad \mathrm{d}_\zeta\beta_0 = \frac{\beta_0\,(4\gamma+(\gamma+1)\zeta)}{2\zeta\,(2\gamma+(\gamma+1)\zeta)},$$

d_ζ désignant la dérivée par rapport à ζ.

En injectant l'expression (9.51) dans la relation (9.52), il vient :

$$\frac{\mathrm{d}\,[\vec{v}]}{\mathrm{d}t} = -c_+^2\mathrm{d}_\zeta\beta_0\left(w_1\vec{\nabla}\cdot\vec{n}+w_2\frac{(\partial_n p)_-}{p_+}\right)\vec{n}+c_+\beta_0\frac{\mathrm{d}\vec{n}}{\mathrm{d}t}. \tag{9.53}$$

La relation (4.45) se réécrit ensuite :

$$\left[\vec{n}\cdot\overline{\overline{\nabla}}\vec{v}\right] = -\frac{1}{c_+\sigma_1}\left\{\frac{\mathrm{d}\,[\vec{v}]}{\mathrm{d}t}+c_+^2\frac{\rho_+}{\rho_-}\frac{(1-b\rho_+)}{\gamma}\left(\vec{\nabla}^S\zeta+\frac{(\partial_n p)_-}{p_+}\vec{n}\right)\right\}. \tag{9.54}$$

Finalement, en injectant (9.53) dans (9.54), il vient :

$$\left[\vec{n}\cdot\overline{\overline{\nabla}}\vec{v}\right] = c_+\left(\epsilon_1\frac{(\partial_n p)_-}{p_+}+\epsilon_2\vec{\nabla}\cdot\vec{n}\right)\vec{n}+\tau_1\frac{\mathrm{d}\vec{n}}{\mathrm{d}t}+c_+\tau_2\vec{\nabla}^S\zeta, \tag{9.55}$$

avec

$$\epsilon_1 = \frac{w_2\mathrm{d}_\zeta\beta_0-\frac{\rho_+}{\rho_-}\frac{(1-b\rho_+)}{\gamma}}{\sigma_1}, \qquad \tau_1 = -\frac{\beta_0}{\sigma_1},$$

$$\epsilon_2 = \frac{w_1\mathrm{d}_\zeta\beta_0}{\sigma_1}, \qquad \tau_2 = -\frac{\rho_+}{\rho_-}\frac{(1-b\rho_+)}{\gamma\sigma_1}.$$

Ces coefficients donnent après calcul les coefficients présentés en début de sous-section. Par un raisonnement analogue avec les relations (9.51), (4.42), (4.44) et (9.55), on trouve (9.50) avec

$$\eta_1 = \frac{w_2 \mathrm{d}_\zeta \beta_1 - \frac{\rho_-}{\rho_+}\epsilon_1}{\sigma_1} \quad , \quad \eta_2 = \frac{w_1 \mathrm{d}_\zeta \beta_1 - \frac{\rho_-}{\rho_+}(\beta_0 + \epsilon_2)}{\sigma_1},$$

où

$$\beta_1 = \frac{2(1-b\rho_+)\zeta}{2\gamma + (\gamma-1)\zeta + 2b\rho_+\zeta} \quad \text{et} \quad \mathrm{d}_\zeta \beta_1 = \frac{4\gamma(1-b\rho_+)}{(2\gamma + (\gamma-1)\zeta + 2b\rho_+\zeta)^2}.$$

Les relations de Rankine-Hugoniot (4.9)-(4.10) et $[p] = p_+\zeta$, combinées à la relation de compatibilité (4.16), aboutissent à :

$$[p_{,j}] = p_+ \left(\nabla_j^S \zeta + n_j \frac{(\partial_n p)_-}{p_+} \right) \tag{9.56}$$

$$[\rho_{,j}] = \rho_+ \left(\mathrm{d}_\zeta \beta_1 \nabla_j^S \zeta + n_j \frac{[\partial_n \rho]}{\rho_+} \right) \tag{9.57}$$

$$[v_{i,j}] = c_+ \left(\beta_0 \nabla_j^S n_i + \mathrm{d}_\zeta \beta_0 n_i \nabla_j^S \zeta \right) + n_j \left[\vec{n} \cdot \vec{\nabla} v_i \right]. \tag{9.58}$$

En prenant $j = i$ dans (9.58) et en utilisant la relation (9.49), il vient directement :

$$\left[\vec{\nabla} \cdot \vec{v} \right] = c_+ \left(\epsilon_1 \frac{(\partial_n p)_-}{p_+} + (\beta_0 + \epsilon_2) \vec{\nabla} \cdot \vec{n} \right). \tag{9.59}$$

Par la définition de $\vec{\nabla}^S$ (4.13), à savoir $\nabla_k^S = \nabla_k - n_k \left(\vec{n} \cdot \vec{\nabla} \right)$, et la propriété (4.19), $\vec{n} \cdot \mathrm{d}\vec{n} = 0$ pour un opérateur différentiel quelconque d, on trouve :

$$\nabla_i^S n_j \nabla_j^S n_i = n_{i,j} n_{j,i}. \tag{9.60}$$

Finalement, par définition de $\vec{\nabla}^S$, et puisque $n_k \nabla_k^S \equiv 0$, on a pour une quantité physique ψ :

$$\frac{\mathrm{d}n_k}{\mathrm{d}t} \nabla_k^S [\psi] = \frac{\mathrm{d}n_k}{\mathrm{d}t} [\psi_{,k}]. \tag{9.61}$$

9.2.3 Équations instationnaires de saut

Les relations nécessaires à l'établissement de l'équation sur les effets arrière sont mises en évidence dans le texte.

Les équations d'Euler portant sur la pression et la vitesse (4.7b)-(4.7c) sont dérivées le long des normales. Après application des équations au niveau du choc, on obtient :

$$\vec{n} \cdot \left[\vec{\nabla} \left(\frac{\partial p}{\partial t} \right) \right] + \left[\left(\vec{n} \cdot \vec{\nabla} v_j \right) p_{,j} \right] + n_k \left[v_j p_{,jk} \right] + \left[\vec{n} \cdot \vec{\nabla} \left(\frac{\gamma p}{1 - b\rho} \right) \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{v} \right) \right] + \left[\frac{\gamma p}{1 - b\rho} \vec{n} \cdot \vec{\nabla} \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{v} \right) \right] = 0 \tag{9.62}$$

et, pour $i = 1, 2, 3$,

$$\vec{n} \cdot \left[\vec{\nabla} \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} \right) \right] + \left[\left(\vec{n} \cdot \vec{\nabla} v_j \right) v_{i,j} \right] + n_k \left[v_j v_{i,jk} \right] + n_k \left[\frac{p_{,ik}}{\rho} \right] - \left[\frac{p_{,i}}{\rho^2} \left(\vec{n} \cdot \vec{\nabla} \rho \right) \right] = 0. \tag{9.63}$$

Puisque le milieu est uniforme et au repos, on a, pour une quantité f, l'égalité suivante : $[v_j f_{,k}] = [v_j]\,[f_{,k}]$, donnant ainsi

$$\begin{aligned} n_k\,[v_j p_{,jk}] &= n_k\,[v_j]\,[p_{,jk}] &= c_+\beta_0\,[n_j n_k p_{,jk}] \\ n_i n_k\,[v_j v_{i,jk}] &= n_i n_k\,[v_j]\,[v_{i,jk}] &= c_+\beta_0 n_k n_i n_j\,[v_{i,jk}]\,, \end{aligned}$$

où l'on rappelle que $\beta_0 = \frac{[\vec{v}]\cdot\vec{n}}{c_+}$. La relation de compatibilité d'ordre 2 (9.46) et les relations ci-dessus sont ensuite injectées dans (9.62) et (9.63). Cela aboutit alors à l'équation (9.32) et à

$$\vec{n}\cdot\frac{\mathrm{d}\,[\partial_n\vec{v}]}{\mathrm{d}t} + c_+\sigma_1 n_i\,[n_j n_k v_{i,jk}] + n_i n_k\left[\frac{p_{,ik}}{\rho}\right] + n_i\left[\left(\vec{n}\cdot\vec{\nabla}v_j\right)v_{i,j}\right] - \left[\frac{\left(\vec{n}\cdot\vec{\nabla}p\right)\left(\vec{n}\cdot\vec{\nabla}\rho\right)}{\rho^2}\right] - \frac{\mathrm{d}n_k}{\mathrm{d}t}n_i\,[v_{i,k}] = 0, \quad (9.64)$$

après projection sur la direction normale au choc et en notant $\partial_n\vec{v} = \vec{n}\cdot\overline{\overline{\nabla}}\vec{v}$.

L'équation (9.32) est explicitée dans la suite. Afin d'exprimer chacun des termes de cette équation, la propriété $[fg] = [f]\,g_- + f_+\,[g]$, où f et g sont deux fonctions, et les relations (9.56), (9.59), (9.50) et (9.48) sont utilisées. Après calcul, ces termes s'expriment comme :

$$\left[\left(\vec{n}\cdot\vec{\nabla}v_j\right)p_{,j}\right] = c_+p_+\left\{\epsilon_1\left(\frac{(\partial_n p)_-}{p_+}\right)^2 + \epsilon_2\vec{\nabla}\cdot\vec{n}\frac{(\partial_n p)_-}{p_+} + \vec{\nabla}^S\zeta\cdot\left(\frac{\tau_1}{c_+}\frac{\mathrm{d}\vec{n}}{\mathrm{d}t} + \tau_2\vec{\nabla}^S\zeta\right)\right\}, \quad (9.65)$$

$$\left[\vec{n}\cdot\vec{\nabla}\left(\frac{\gamma p}{1-b\rho}\right)\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{v}\right)\right] = c_+p_+\left(\left(\sigma_2+\sigma_3\eta_1\right)\frac{(\partial_n p)_-}{p_+} + \sigma_3\eta_2\vec{\nabla}\cdot\vec{n}\right) \times\left(\epsilon_1\frac{(\partial_n p)_-}{p_+} + \left(\beta_0+\epsilon_2\right)\vec{\nabla}\cdot\vec{n}\right), \quad (9.66)$$

avec

$$\begin{aligned} \sigma_2 &= \frac{\gamma}{1-b\rho_-} &= \frac{\gamma(2\gamma+(\gamma-1)\zeta+2b\rho_+\zeta)}{(1-b\rho_+)(2\gamma+(\gamma-1)\zeta)} \\ \sigma_3 &= \frac{b\rho_+\gamma p_-}{p_+(1-b\rho_-)^2} &= \frac{b\rho_+\gamma(1+\zeta)(2\gamma+(\gamma-1)\zeta+2b\rho_+\zeta)^2}{(1-b\rho_+)^2(2\gamma+(\gamma-1)\zeta)^2}, \end{aligned}$$

et

$$\left[\frac{\gamma p}{1-b\rho}\vec{n}\cdot\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{v}\right)\right] = p_+\sigma_4\left[\vec{n}\cdot\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{v}\right)\right] \quad (9.67)$$

$$-\frac{\mathrm{d}n_k}{\mathrm{d}t}\,[p_{,k}] = -p_+\frac{\mathrm{d}\vec{n}}{\mathrm{d}t}\cdot\vec{\nabla}^S\zeta, \quad (9.68)$$

où

$$\sigma_4 = \frac{\gamma p_-}{p_+(1-b\rho_-)} = \frac{\gamma(1+\zeta)(2\gamma+(\gamma-1)\zeta+2b\rho_+\zeta)}{(1-b\rho_+)(2\gamma+(\gamma-1)\zeta)}.$$

Finalement, en injectant les relations (9.65)-(9.68) dans (9.32), il vient :

$$\boldsymbol{\frac{1}{c_+p_+}\frac{\mathrm{d}\,(\partial_n p)_-}{\mathrm{d}t} + \sigma_1\frac{[n_j n_k p_{,jk}]}{p_+} + \frac{\sigma_4}{c_+}\left[\vec{n}\cdot\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{v}\right)\right] + K_1\left(\frac{(\partial_n p)_-}{p_+}\right)^2 + K_2\vec{\nabla}\cdot\vec{n}\frac{(\partial_n p)_-}{p_+} + K_3\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{n}\right)^2 + K_4 = 0,} \quad (9.69)$$

avec

$$K_1 = \epsilon_1 \left(1 + \sigma_2 + \sigma_3 \eta_1\right) \tag{9.70a}$$

$$K_2 = \epsilon_2 + \left(\sigma_2 + \sigma_3 \eta_1\right)\left(\beta_0 + \epsilon_2\right) + \epsilon_1 \sigma_3 \eta_2 \tag{9.70b}$$

$$K_3 = \sigma_3 \eta_2 \left(\beta_0 + \epsilon_2\right) \tag{9.70c}$$

$$K_4 = \tau_2 |\vec{\nabla}^S \zeta|^2 + \frac{\tau_1 - 1}{c_+} \frac{\mathrm{d}\vec{n}}{\mathrm{d}t} \cdot \vec{\nabla}^S \zeta. \tag{9.70d}$$

L'équation (9.64) est maintenant développée. En remarquant que

$$\vec{n} \cdot \frac{\mathrm{d}\left[\partial_n \vec{v}\right]}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\vec{n} \cdot \left[\vec{n} \cdot \overline{\overline{\nabla}} \vec{v}\right]\right) - \frac{\mathrm{d}\vec{n}}{\mathrm{d}t} \cdot \left[\vec{n} \cdot \overline{\overline{\nabla}} \vec{v}\right],$$

et en considérant les relations (9.49), (9.51) et (9.48), on obtient après calcul :

$$\begin{aligned} \vec{n} \cdot \frac{\mathrm{d}\left[\partial_n \vec{v}\right]}{\mathrm{d}t} = c_+ \Bigg\{ \epsilon_1 \frac{\mathrm{d}_t \left(\partial_n p\right)_-}{p_+} + \epsilon_2 \mathrm{d}_t \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{n}\right) - c_+ w_2 \mathrm{d}_\zeta \epsilon_1 \left(\frac{\left(\partial_n p\right)_-}{p_+}\right)^2 - c_+ w_1 \mathrm{d}_\zeta \epsilon_2 \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{n}\right)^2 \\ - c_+ \left(w_1 \mathrm{d}_\zeta \epsilon_1 + w_2 \mathrm{d}_\zeta \epsilon_2\right) \vec{\nabla} \cdot \vec{n} \frac{\left(\partial_n p\right)_-}{p_+} \Bigg\} - \frac{\mathrm{d}\vec{n}}{\mathrm{d}t} \cdot \left\{ \tau_1 \frac{\mathrm{d}\vec{n}}{\mathrm{d}t} + c_+ \tau_2 \vec{\nabla}^S \zeta \right\}. \end{aligned} \tag{9.71}$$

La relation de compatibilité d'ordre 2 (9.47) est utilisée pour $\psi = v_i$, ce qui donne :

$$n_i \left[n_j n_k v_{i,jk}\right] = \left[\vec{n} \cdot \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{v}\right)\right] - \nabla_i^S \left[\vec{n} \cdot \vec{\nabla} v_i\right] + \nabla_i^S n_j \left[v_{i,j}\right]. \tag{9.72}$$

Les relations (9.48) et (4.20) sont combinées pour obtenir après développement :

$$\begin{aligned} \nabla_i^S \left[\vec{n} \cdot \vec{\nabla} v_i\right] = c_+ \epsilon_1 \vec{\nabla} \cdot \vec{n} \frac{\left(\partial_n p\right)_-}{p_+} + c_+ \epsilon_2 \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{n}\right)^2 + \mathrm{d}_\zeta \tau_1 \vec{\nabla}^S \zeta \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{n}}{\mathrm{d}t} + \tau_1 \nabla_i^S \frac{\mathrm{d}n_i}{\mathrm{d}t} \\ + c_+ \mathrm{d}_\zeta \tau_2 |\vec{\nabla}^S \zeta|^2 + c_+ \tau_2 \Delta^S \zeta. \end{aligned} \tag{9.73}$$

De plus, puisque $n_i \nabla_i^S \equiv 0$ et $n_j \nabla_i^S n_j = 0$, on a immédiatement :

$$\nabla_i^S n_j \left[v_{i,j}\right] = c_+ \beta_0 \nabla_i^S n_j \nabla_j^S n_i = c_+ \beta_0 n_{i,j} n_{j,i}, \tag{9.74}$$

en utilisant (9.58) et (9.60). Les relations (9.73) et (9.74) sont ensuite injectées dans (9.72), d'où :

$$\begin{aligned} n_i \left[n_j n_k v_{i,jk}\right] = \left[\vec{n} \cdot \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{v}\right)\right] - c_+ \epsilon_1 \vec{\nabla} \cdot \vec{n} \frac{\left(\partial_n p\right)_-}{p_+} - c_+ \epsilon_2 \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{n}\right)^2 + c_+ \beta_0 n_{i,j} n_{j,i} \\ - \mathrm{d}_\zeta \tau_1 \vec{\nabla}^S \zeta \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{n}}{\mathrm{d}t} - \tau_1 \nabla_i^S \frac{\mathrm{d}n_i}{\mathrm{d}t} - c_+ \mathrm{d}_\zeta \tau_2 |\vec{\nabla}^S \zeta|^2 - c_+ \tau_2 \Delta^S \zeta. \end{aligned} \tag{9.75}$$

Par des calculs analogues à l'obtention des relations (9.65)-(9.68), les termes de l'équation (9.64) s'expriment comme :

$$n_i \left[\left(\vec{n} \cdot \vec{\nabla} v_j\right) v_{i,j}\right] = c_+^2 \left(\epsilon_1 \frac{\left(\partial_n p\right)_-}{p_+} + \epsilon_2 \vec{\nabla} \cdot \vec{n}\right)^2 + c_+ \mathrm{d}_\zeta \beta_0 \vec{\nabla}^S \zeta \cdot \left(\tau_1 \frac{\mathrm{d}\vec{n}}{\mathrm{d}t} + c_+ \tau_2 \vec{\nabla}^S \zeta\right), \tag{9.76}$$

$$-\left[\frac{\left(\vec{n}\cdot\vec{\nabla}p\right)\left(\vec{n}\cdot\vec{\nabla}\rho\right)}{\rho^2}\right]=-\frac{p_+}{\rho_+}\sigma_6\left\{\eta_1\left(\frac{(\partial_n p)_-}{p_+}\right)^2+\eta_2\vec{\nabla}\cdot\vec{n}\frac{(\partial_n p)_-}{p_+}\right\}, \tag{9.77}$$

$$n_i n_k\left[\frac{p_{,ik}}{\rho}\right] = \frac{\sigma_5}{\rho_+}\left[n_j n_k p_{,jk}\right], \tag{9.78}$$

$$-\frac{\mathrm{d}n_k}{\mathrm{d}t}n_i\left[v_{i,k}\right] = -c_+\mathrm{d}_\zeta\beta_0\frac{\mathrm{d}\vec{n}}{\mathrm{d}t}\cdot\vec{\nabla}^S\zeta, \tag{9.79}$$

avec

$$\sigma_5 = \frac{\rho_+}{\rho_-} = \frac{2\gamma+(\gamma-1)\zeta+2b\rho_+\zeta}{2\gamma+(\gamma+1)\zeta}$$

$$\sigma_6 = \left(\frac{\rho_+}{\rho_-}\right)^2 = \frac{(2\gamma+(\gamma-1)\zeta+2b\rho_+\zeta)^2}{(2\gamma+(\gamma+1)\zeta)^2}.$$

Finalement, les relations (9.71), (9.75) et (9.76)-(9.79) sont injectées dans (9.64). On obtient alors, après réarrangement des termes, l'équation suivante :

$$\frac{\boldsymbol{\epsilon_1}}{\boldsymbol{c_+p_+}}\frac{\mathbf{d}\left(\boldsymbol{\partial_n p}\right)_-}{\mathbf{d}t}+\frac{\boldsymbol{\sigma_5(1-b\rho_+)}}{\boldsymbol{\gamma}}\frac{\boldsymbol{[n_j n_k p_{,jk}]}}{\boldsymbol{p_+}}+\frac{\boldsymbol{\sigma_1}}{\boldsymbol{c_+}}\left[\vec{\boldsymbol{n}}\cdot\vec{\boldsymbol{\nabla}}\left(\vec{\boldsymbol{\nabla}}\cdot\vec{\boldsymbol{v}}\right)\right]+\boldsymbol{H_1}\left(\frac{\boldsymbol{(\partial_n p)_-}}{\boldsymbol{p_+}}\right)^{\mathbf{2}}$$
$$+\boldsymbol{H_2}\vec{\boldsymbol{\nabla}}\cdot\vec{\boldsymbol{n}}\frac{\boldsymbol{(\partial_n p)_-}}{\boldsymbol{p_+}}+\boldsymbol{H_3}\left(\vec{\boldsymbol{\nabla}}\cdot\vec{\boldsymbol{n}}\right)^{\mathbf{2}}+\boldsymbol{H_4}=\mathbf{0}, \tag{9.80}$$

avec

$$H_1 = \epsilon_1^2-w_2\mathrm{d}_\zeta\epsilon_1-\sigma_6\eta_1\frac{1-b\rho_+}{\gamma} \tag{9.81a}$$

$$H_2 = 2\epsilon_1\epsilon_2-\sigma_1\epsilon_1-w_1\mathrm{d}_\zeta\epsilon_1-w_2\mathrm{d}_\zeta\epsilon_2-\sigma_6\eta_2\frac{1-b\rho_+}{\gamma} \tag{9.81b}$$

$$H_3 = \epsilon_2^2-\sigma_1\epsilon_2-w_1\mathrm{d}_\zeta\epsilon_2, \tag{9.81c}$$

et

$$H_4 = \frac{\epsilon_2}{c_+}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{n}\right)+\beta_0\sigma_1 n_{i,j}n_{j,i}+\left(\tau_2\mathrm{d}_\zeta\beta_0-\sigma_1\mathrm{d}_\zeta\tau_2\right)\left|\vec{\nabla}^S\zeta\right|^2-\frac{\tau_1\sigma_1}{c_+}\nabla_i^S\left(\frac{\mathrm{d}n_i}{\mathrm{d}t}\right)$$
$$-\sigma_1\tau_2\Delta^S\zeta+\frac{1}{c_+}\frac{\mathrm{d}\vec{n}}{\mathrm{d}t}\cdot\left\{-\frac{\tau_1}{c_+}\frac{\mathrm{d}\vec{n}}{\mathrm{d}t}+\left(-\sigma_1\mathrm{d}_\zeta\tau_1-\tau_2+(\tau_1-1)\mathrm{d}_\zeta\beta_0\right)\vec{\nabla}^S\zeta\right\}. \tag{9.82}$$

9.2.4 Équation d'évolution des effets arrière

La combinaison des équations (9.69) et (9.80) aboutit finalement à l'équation d'évolution vérifiée par les effets arrière au niveau du choc.

Afin d'éliminer le terme $\left[\vec{n}\cdot\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{v}\right)\right]$, nous effectuons la combinaison linéaire (9.69)-$\frac{\sigma_4}{\sigma_1}$(9.80). Après réarrangement des termes, il vient :

$$\frac{1}{c_+p_+}\frac{\mathrm{d}\left(\partial_n p\right)_-}{\mathrm{d}t}+\phi_0\frac{\left(n_j n_k p_{,jk}\right)_-}{p_+}+\phi_1\left(\frac{(\partial_n p)_-}{p_+}\right)^2+\phi_2\vec{\nabla}\cdot\vec{n}\frac{(\partial_n p)_-}{p_+}+\phi_3\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{n}\right)^2$$
$$+\frac{K_4+\lambda_0 H_4}{\lambda_1}=0, \tag{9.83}$$

ayant remarqué que $[n_j n_k p_{,jk}] = (n_j n_k p_{,jk})_-$ puisque l'écoulement amont est au repos, et avec

$$\lambda_0 = -\frac{\sigma_4}{\sigma_1} \qquad = \frac{2\gamma^2\sqrt{1+\frac{\gamma+1}{2\gamma}\zeta}(1+\zeta)}{(1-b\rho_+)(2\gamma+(\gamma-1)\zeta)} \tag{9.84a}$$

$$\lambda_1 = 1+\lambda_0\epsilon_1 = 1+\frac{\gamma(1+\zeta)(8\gamma+3(\gamma+1)\zeta)}{\Pi_1}, \tag{9.84b}$$

et

$$\phi_0 = \frac{\sigma_1+\lambda_0\frac{\sigma_5(1-b\rho_+)}{\gamma}}{\lambda_1} = M\frac{(\gamma+1)\zeta(2\gamma+(\gamma-1)\zeta+2b\rho_+\zeta)}{\lambda_1(2\gamma+(\gamma-1)\zeta)(2\gamma+(\gamma+1)\zeta)} \tag{9.85a}$$

$$\phi_1 = \frac{K_1+\lambda_0 H_1}{\lambda_1} \qquad = \frac{1}{\lambda_1}\left\{\epsilon_1\left(1+\sigma_2+\sigma_3\eta_1\right)+\lambda_0\left(\epsilon_1^2 - w_2 \mathrm{d}_\zeta\epsilon_1 - \sigma_6\eta_1\frac{1-b\rho_+}{\gamma}\right)\right\} \tag{9.85b}$$

$$\begin{aligned}\phi_2 = \frac{K_2+\lambda_0 H_2}{\lambda_1} \qquad &= \frac{1}{\lambda_1}\Bigg\{\epsilon_2+\left(\sigma_2+\sigma_3\eta_1\right)\left(\beta_0+\epsilon_2\right)+\epsilon_1\sigma_3\eta_2 \\ &+\lambda_0\left(2\epsilon_1\epsilon_2-\sigma_1\epsilon_1-w_1\mathrm{d}_\zeta\epsilon_1-w_2\mathrm{d}_\zeta\epsilon_2-\sigma_6\eta_2\frac{1-b\rho_+}{\gamma}\right)\Bigg\}\end{aligned} \tag{9.85c}$$

$$\phi_3 = \frac{K_3+\lambda_0 H_3}{\lambda_1} \qquad = \frac{1}{\lambda_1}\Big\{\sigma_3\eta_2\left(\beta_0+\epsilon_2\right)+\lambda_0\left(\epsilon_2^2-\sigma_1\epsilon_2-w_1\mathrm{d}_\zeta\epsilon_2\right)\Big\}. \tag{9.85d}$$

Le terme $\dfrac{K_4+\lambda_0 H_4}{\lambda_1}$ est développé dans la suite. Un premier calcul donne :

$$\frac{K_4+\lambda_0 H_4}{\lambda_1} = \frac{\lambda_0}{\lambda_1}\left\{\frac{\epsilon_2}{c_+}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{n}\right)+\beta_0\sigma_1 n_{i,j}n_{j,i}-\sigma_1\tau_2\Delta^S\zeta-\frac{\tau_1\sigma_1}{c_+}\nabla_i^S\left(\frac{\mathrm{d}n_i}{\mathrm{d}t}\right)\right\}+(\star), \tag{9.86}$$

avec

$$\begin{aligned}(\star) = \frac{1}{\lambda_1 c_+}\frac{\mathrm{d}\vec{n}}{\mathrm{d}t}\cdot\Bigg\{-\frac{\lambda_0\tau_1}{c_+}\frac{\mathrm{d}\vec{n}}{\mathrm{d}t}+\left\{\tau_1-1+\lambda_0\left(-\sigma_1\mathrm{d}_\zeta\tau_1-\tau_2+(\tau_1-1)\mathrm{d}_\zeta\beta_0\right)\right\}\vec{\nabla}^S\zeta\Bigg\} \\ +\frac{1}{\lambda_1}\Big\{\tau_2+\lambda_0\left(\tau_2\mathrm{d}_\zeta\beta_0-\sigma_1\mathrm{d}_\zeta\tau_2\right)\Big\}|\vec{\nabla}^S\zeta|^2.\end{aligned}$$

On rappelle l'équation d'évolution de la normale (4.35) écrite ici pour un milieu homogène et au repos :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{n}}{\mathrm{d}t} = c_+ N_1\vec{\nabla}^S\zeta, \quad \text{avec } N_1 = -\frac{(\gamma+1)\sqrt{1+\frac{\gamma+1}{2\gamma}\zeta}}{2\left(2\gamma+(\gamma+1)\zeta\right)}. \tag{9.87}$$

En injectant cette relation dans $(\star)$, il vient :

$$(\star) = \tilde{\phi}_4|\vec{\nabla}^S\zeta|^2, \tag{9.88}$$

avec

$$\tilde{\phi}_4 = \frac{1}{\lambda_1}\Big\{\tau_2+N_1\left(\tau_1-1\right)+\lambda_0\Big(-N_1^2\tau_1-N_1\left(\sigma_1\mathrm{d}_\zeta\tau_1+\tau_2-(\tau_1-1)\mathrm{d}_\zeta\beta_0\right)+\tau_2\mathrm{d}_\zeta\beta_0-\sigma_1\mathrm{d}_\zeta\tau_2\Big)\Big\}.$$

Partant de la relation (9.87), on trouve de plus :

$$\frac{1}{c_+}\nabla_i^S\left(\frac{\mathrm{d}n_i}{\mathrm{d}t}\right) = \mathrm{d}_\zeta N_1|\vec{\nabla}^S\zeta|^2 + N_1\Delta^S\zeta, \tag{9.89}$$

où $\mathrm{d}_\zeta N_1$ est la dérivée de N_1 par rapport à ζ :

$$\mathrm{d}_\zeta N_1 = -\frac{(\gamma+1)^2 M}{4(2\gamma+(\gamma+1)\zeta)^2}.$$

La dérivation de l'équation d'évolution de la courbure locale du choc, $\vec{\nabla}\cdot\vec{n}$, est détaillée en annexe F (eq. (F.27) et (F.31)). Pour un milieu uniforme et au repos, elle s'écrit :

$$\frac{1}{c_+}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{n}\right) = N_1\Delta^S\zeta + \mathrm{d}_\zeta N_1|\vec{\nabla}^S\zeta|^2 - Mn_{i,j}n_{j,i}. \tag{9.90}$$

Les relations (9.88)-(9.90) sont injectées dans (9.86), aboutissant à :

$$\frac{K_4+\lambda_0 H_4}{\lambda_1} = \phi_4|\vec{\nabla}^S\zeta|^2 + \phi_5\Delta^S\zeta + \phi_6 n_{i,j}n_{j,i}, \tag{9.91}$$

où

$$\begin{aligned}\phi_4 &= \tilde{\phi}_4 + \frac{\lambda_0}{\lambda_1}\left(\epsilon_2-\tau_1\sigma_1\right)\mathrm{d}_\zeta N_1 \\ &= \frac{1}{\lambda_1}\Bigg\{\tau_2 + N_1\left(\tau_1-1\right) + \lambda_0\Bigg(-N_1^2\tau_1 - N_1\left(\sigma_1\mathrm{d}_\zeta\tau_1 + \tau_2 - (\tau_1-1)\mathrm{d}_\zeta\beta_0\right) \\ &\qquad + \tau_2\mathrm{d}_\zeta\beta_0 - \sigma_1\mathrm{d}_\zeta\tau_2 + \mathrm{d}_\zeta N_1\left(\epsilon_2-\tau_1\sigma_1\right)\Bigg)\Bigg\},\end{aligned} \tag{9.92}$$

et

$$\phi_5 = \frac{\lambda_0}{\lambda_1}\left(N_1\left(\epsilon_2-\tau_1\sigma_1\right)-\sigma_1\tau_2\right) \quad \text{et} \quad \phi_6 = \frac{\lambda_0}{\lambda_1}\left(\beta_0\sigma_1 - M\epsilon_2\right). \tag{9.93}$$

Finalement, en remplaçant la relation (9.91) dans (9.83), l'équation d'évolution des effets arrière s'écrit :

$$\boxed{\begin{aligned}&\frac{1}{c_+p_+}\frac{\mathrm{d}\left(\partial_n p\right)_-}{\mathrm{d}t} + \phi_0\frac{\left(n_jn_kp_{,jk}\right)_-}{p_+} + \phi_1\left(\frac{\left(\partial_n p\right)_-}{p_+}\right)^2 + \phi_2\vec{\nabla}\cdot\vec{n}\frac{\left(\partial_n p\right)_-}{p_+} \\ &\qquad + \phi_3\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{n}\right)^2 + \phi_4|\vec{\nabla}^S\zeta|^2 + \phi_5\Delta^S\zeta + \phi_6 n_{i,j}n_{j,i} = 0.\end{aligned}} \tag{9.94}$$

L'équation (9.94) traduit l'évolution des effets arrière $\left(\partial_n p\right)_- = \left(\vec{n}\cdot\vec{\nabla}p\right)_-$ dans le modèle Cinématique (4.62). Cette équation comporte des termes non-linéaires $\left(\frac{\left(\partial_n p\right)_-}{p_+}\right)^2$, $\vec{\nabla}\cdot\vec{n}\frac{\left(\partial_n p\right)_-}{p_+}$ et $\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{n}\right)^2$, ainsi que des termes liés à l'écoulement transversal le long du choc : $\vec{\nabla}^S\zeta$, $\Delta^S\zeta$ et

$$n_{i,j}n_{j,i} = \nabla_j^S n_i \nabla_i^S n_j,$$

d'après (9.60).

Le terme $\left(n_jn_kp_{,jk}\right)_-$ est une inconnue du problème et nécessite donc une équation supplémentaire. Le modèle est qualifié de *modèle Cinématique ordre 1* si ce terme est négligé ou modélisé.

9.2.5 Modèle Cinématique d'ordre $k \geq 2$

Une répétition de la procédure décrite précédemment permet de définir une équation d'évolution du terme $(n_j n_k p_{,jk})_-$. Cette équation fait intervenir une nouvelle inconnue : $(n_i n_j n_k p_{,ijk})_-$. On met alors en évidence l'existence d'un système infini d'équations non-linéaires couplées de la forme

$$\frac{\mathrm{d}\Lambda_{(k)}}{\mathrm{d}t} + \Psi_k \Lambda_{(k+1)} + F_k\left(\vec{n},\ \zeta,\ \Lambda_{(1)},\ \Lambda_{(2)},\ ...,\ \Lambda_{(k)}\right) = 0,$$

pour $k \geq 2$, où $\Lambda_{(k)} = (n_{i_1} n_{i_2} ... n_{i_k} p_{,i_1 i_2 ... i_k})_-$ et les fonctions F_k sont définies par le calcul. Il est alors nécessaire de tronquer ce système à un certain ordre afin de fermer le problème. Nous choisissons dans notre étude de le tronquer à l'ordre 1, *i.e.* de considérer seulement l'équation (9.94) en plus du système (4.62).

À notre connaissance, auncun développement général à l'ordre supérieur de troncature n'est donné dans la littérature. Sharma & Radha ont proposé un développement jusqu'à l'ordre 2 du système en configuration 1D [115]. Ils ont notamment démontré la dépendance de la stabilité du modèle Cinématique ordre 1 aux données initiales. L'extension à l'ordre 2 semble affranchir le modèle de cette dépendance. Cet aspect essentiel est discuté en section 9.2.7.

9.2.6 Système à résoudre

Une synthèse du modèle Cinématique tronqué à l'ordre 1 est effectuée dans cette section. On rappelle le modèle décrit précédemment pour un milieu homogène et au repos dans la première sous-section. La seconde sous-section présente brièvement l'extension du modèle aux atmosphères non homogènes en mouvement. La dérivation de ce dernier est réalisée en annexe G.

9.2.6.1 Cas d'un milieu homogène et au repos

On pose $Z = \dfrac{(\partial_n p)_-}{p_+}$ dans la suite. En l'absence d'effets arrière et pour un milieu uniforme et au repos, le modèle Cinématique à l'ordre 1 s'écrit :

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\vec{x}_{sh}}{\mathrm{d}t} = W_S \vec{n} & \text{(9.95a)} \\ \dfrac{\mathrm{d}\vec{n}}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{(\gamma+1)W_S}{2\left(2\gamma+(\gamma+1)\zeta\right)} \vec{\nabla}^S \zeta & \text{(9.95b)} \\ \dfrac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}t} = -c_+ \left(w_1 \vec{\nabla}\cdot\vec{n} + w_2 Z \right) & \text{(9.95c)} \\ \dfrac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}t} = -c_+ \Big(\phi_1 Z^2 + \phi_2 Z \vec{\nabla}\cdot\vec{n} + \phi_3 \left(\vec{\nabla}\cdot\vec{n}\right)^2 \\ \qquad\qquad + \phi_4 |\vec{\nabla}^S \zeta|^2 + \phi_5 \Delta^S \zeta + \phi_6 n_{i,j} n_{j,i} \Big). & \text{(9.95d)} \end{cases}$$

Les coefficients ϕ_i dépendent de ζ et sont donnés par (9.85), (9.92) et (9.93). Les coefficients w_1 et w_2 sont définis par (4.59a) et (4.59b), et l'on rappelle que $W_S = \sqrt{1 + \frac{\gamma+1}{2\gamma}\zeta}$.

Remarque 9.9

Puisque le coefficient $w_2(\zeta)$ est positif pour tout $\zeta \geq 0$ (relation (4.59b)), les effets arrière atténuent la vitesse du choc s'ils sont positifs et l'amplifient s'ils sont négatifs en comparaison au modèle KIN (eq. (9.95c)).

Comme prouvé en section 4.5, le modèle Cinématique peut se réécrire sous la forme du modèle GSD. Il est alors constitué de l'équation eikonale et de la relation bilan sur les tubes de rayon :

$$\begin{cases} M|\vec{\nabla}\alpha| = 1 & \text{(9.96a)} \\ \\ \text{div}\left(\dfrac{\vec{n}}{A}\right) = 0. & \text{(9.96b)} \end{cases}$$

La relation (9.96b) s'écrit sous la forme non conservative suivante :

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{n} = \frac{\vec{n}\cdot\vec{\nabla}A}{A} = \frac{\mathrm{d}_n A}{A}, \tag{9.97}$$

où l'on écrit abusivement par une dérivée droite, $\mathrm{d}_n\psi$, la variation d'une quantité ψ le long d'un tube de rayon de direction $\vec{n}$.
Aux relations géométriques (9.96) s'ajoute finalement une relation $A-M$ définie dans chaque tube de rayon (9.95c)-(9.95d) :

$$\left|\begin{array}{rcl} \dfrac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}n} & = & \bar{k}_1(M)\dfrac{\mathrm{d}_n A}{A} + \bar{k}_2(M)Z \\ \\ \dfrac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}n} & = & \bar{h}_1(M)Z^2 + \bar{h}_2(M)Z\dfrac{\mathrm{d}_n A}{A} + \bar{h}_3(M)\left(\dfrac{\mathrm{d}_n A}{A}\right)^2 \\ & & +\bar{h}_4(M)|\vec{\nabla}^S M|^2 + \bar{h}_5(M)\Delta^S M + \bar{h}_6(M)n_{i,j}n_{j,i}, \end{array}\right. \tag{9.98}$$

avec

$$\begin{aligned} \bar{k}_1(M) &= -\frac{M^2-1}{M\lambda_K(M)} \\ \bar{k}_2(M) &= -\frac{(\gamma+1)^2\left(M^2-1\right)}{2\gamma M\lambda_K(M)\left(2\gamma M^2+1-\gamma\right)}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \bar{h}_1(M) &= -\frac{\phi_1}{M} \quad , \quad \bar{h}_4(M) = -\frac{4\gamma}{\gamma+1}\left(\frac{4\gamma M\phi_4}{\gamma+1}+\frac{\phi_5}{M}\right) \\ \bar{h}_2(M) &= -\frac{\phi_2}{M} \quad , \quad \bar{h}_5(M) = -\frac{4\gamma\phi_5}{\gamma+1} \\ \bar{h}_3(M) &= -\frac{\phi_3}{M} \quad , \quad \bar{h}_6(M) = -\frac{\phi_6}{M}, \end{aligned}$$

en considérant les relations (9.97) et $\zeta = \dfrac{2\gamma}{\gamma+1}\left(M^2-1\right)$.

La relation $A-M$ cinématique à l'ordre 1 (9.98) est similaire à celle de Best (9.17) (GSD ordre 1). Comme cette dernière, cette équation comporte des termes non-linéaires Z^2, $Z\dfrac{\mathrm{d}_n A}{A}$ et $\left(\dfrac{\mathrm{d}_n A}{A}\right)^2$, où Z joue le rôle de Q ici. Néanmoins, l'équation portant sur Z fait intervenir des termes de gradient transverse supplémentaires : $\vec{\nabla}^S M$, $\Delta^S M$ et $n_{i,j}n_{j,i} = \nabla_i^S n_j \nabla_j^S n_i$ (*cf.* eq. (9.60)), inexistants pour le modèle de Best.

9.2.6.2 Cas d'un milieu non-uniforme et en mouvement

L'équation sur les effets arrière (9.94) est étendue à un milieu non-uniforme en mouvement en annexe G. Cette équation est présentée ici à titre indicatif. En suivant les mêmes étapes de calcul que pour l'obtention de (9.94), il vient après de longs et fastidieux calculs :

$$\boxed{\begin{aligned}&\frac{1}{c_+p_+}\frac{\mathrm{d}\left(\partial_n p\right)_-}{\mathrm{d}t}+\phi_0\frac{\left(n_jn_kp_{,jk}\right)_-}{p_+}+\phi_1\left(\frac{\left(\partial_n p\right)_-}{p_+}\right)^2+\left(\phi_2\vec{\nabla}\cdot\vec{n}+\phi_2^+\right)\frac{\left(\partial_n p\right)_-}{p_+}\\&\quad+\phi_3\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{n}\right)^2+\phi_3^+\vec{\nabla}\cdot\vec{n}+\phi_4|\vec{\nabla}^S\zeta|^2+\phi_5\Delta^S\zeta+\left(\phi_6+\frac{\lambda_0}{\lambda_1}\frac{\vec{v}_+\cdot\vec{n}}{c_+}\right)n_{i,j}n_{j,i}\\&\qquad+\vec{\nabla}^S\zeta\cdot\vec{W}_++Y_++Z_+=0,\end{aligned}} \tag{9.99}$$

où les coefficients $\{\phi_i\}_{i=0,\dots,6}$, λ_0 et λ_1 sont identiques à ceux de la section 9.2.4. Par souci de simplicité d'écriture, on définit :

$$\left(\chi_k\right)_{k=1,\dots,6}=\left(\frac{\partial_n\rho_+}{\rho_+},\frac{\partial_n p_+}{p_+},\frac{\vec{\nabla}\cdot\vec{v}_+}{c_+},\frac{\vec{\nabla}^S\cdot\vec{v}_+}{c_+},\frac{\vec{v}_+\cdot\vec{\nabla}\rho_+}{\rho_+},\frac{\vec{v}_+\cdot\vec{\nabla}p_+}{p_+}\right)^T.$$

Les termes ϕ_2^+, ϕ_3^+, $\vec{W}_+$, Y_+ dépendent de l'écoulement en amont du choc et sont définis par

$$\phi_2^+=\sum_{k=1}^{6}\Psi_k^{(1)}\chi_k\quad\text{et}\quad\phi_3^+=\sum_{k=1}^{6}\Psi_k^{(2)}\chi_k,$$

$$\vec{W}_+=\Psi_1^{(3)}\frac{\vec{\nabla}^S\rho_+}{\rho_+}+\Psi_2^{(3)}\frac{\vec{\nabla}^S p_+}{p_+}+\Psi_3^{(3)}\frac{\vec{n}\cdot\overline{\overline{\nabla}}\vec{v}_+}{c_+}+\Psi_4^{(3)}\frac{\vec{v}_+\cdot\overline{\overline{\nabla}}^S\vec{n}-\vec{\nabla}^S\left(\vec{v}_+\cdot\vec{n}\right)}{c_+},$$

et

$$\begin{aligned}Y_+=&\,d_1\frac{\Delta^S p_+}{p_+}+d_2\frac{\Delta^S\rho_+}{\rho_+}+d_3\frac{n_jn_kp_{+,jk}}{p_+}-\frac{\lambda_0}{\lambda_1}\left(\epsilon_3n_i+\epsilon_7\frac{v_{+i}}{c_+}\right)\frac{V_k\rho_{+,ik}}{c_+\rho_+}+\sum_{i=1}^{6}\sum_{j=i}^{6}\Psi_{ij}^{(5)}\chi_i\chi_j\\&-\frac{\lambda_0}{\lambda_1}\left(\epsilon_4n_i+\epsilon_8\frac{v_{+i}}{c_+}\right)\frac{V_kp_{+,ik}}{c_+p_+}+\Psi_1^{(4)}\frac{|\vec{\nabla}^S\rho_+|^2}{\rho_+^2}+\Psi_2^{(4)}\frac{\vec{\nabla}^S\rho_+}{\rho_+}\cdot\frac{\vec{\nabla}^S p_+}{p_+}+\Psi_3^{(4)}\frac{|\vec{\nabla}^S p_+|^2}{p_+^2}.\end{aligned}$$

Le terme Z_+ dépend plus particulièrement de $\vec{v}_+$ et est nul pour un écoulement est au repos :

$$\begin{aligned}Z_+=&-\frac{\lambda_0\tau_1}{\lambda_1}\left(\frac{\vec{v}_+\cdot\overline{\overline{\nabla}}^S\vec{n}-\vec{\nabla}^S\left(\vec{v}_+\cdot\vec{n}\right)}{c_+}\right)^2+\frac{\sigma_8-\lambda_0\left(\epsilon_5+\epsilon_6\right)}{\lambda_1}\frac{\vec{n}\cdot\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{v}_+\right)}{c_+}\\&+\frac{\lambda_0\epsilon_2}{\lambda_1}\frac{\vec{v}_+\cdot\vec{\nabla}^S\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{n}\right)}{c_+}+\frac{\vec{v}_+\cdot\overline{\overline{\nabla}}^S\vec{n}-\vec{\nabla}^S\left(\vec{v}_+\cdot\vec{n}\right)}{c_+}\cdot\vec{Q}_1+\frac{\vec{n}\cdot\overline{\overline{\nabla}}\vec{v}_+}{c_+}\cdot\vec{Q}_2+\vec{n}\cdot\left(\vec{Q}_3\cdot\overline{\overline{\nabla}}\vec{v}_+\right)\\&-\frac{\lambda_0\sigma_1\tau_1}{\lambda_1}\frac{\nabla_i^S\left(\vec{v}_+\cdot\vec{\nabla}^Sn_i\right)+\nabla_i^S\left(\vec{n}\cdot\vec{\nabla}^Sv_{+i}\right)}{c_+}+\frac{\lambda_0}{\lambda_1}n_in_j\left(\beta_0n_k+\epsilon_6\frac{V_k}{c_+}\right)\frac{v_{+i,jk}}{c_+}\\&-\frac{\lambda_0\left(\epsilon_2-\tau_1\sigma_1\right)}{\lambda_1}\frac{\Delta^S\left(\vec{v}_+\cdot\vec{n}\right)}{c_+}-\frac{\lambda_0}{\lambda_1}\frac{\vec{v_+}\cdot\overline{\overline{\nabla}}\vec{v}_+}{c_+^2}\cdot\left(\epsilon_7\frac{\vec{\nabla}\rho_+}{\rho_+}+\epsilon_8\frac{\vec{\nabla}p_+}{p_+}\right),\end{aligned}$$

avec

$$\vec{Q}_1=\Psi_1^{(6)}\frac{\vec{\nabla}^S\rho_+}{\rho_+}+\Psi_2^{(6)}\frac{\vec{\nabla}^S p_+}{p_+}+\Psi_3^{(6)}\frac{\vec{n}\cdot\overline{\overline{\nabla}}\vec{v}_+}{c_+}\quad,\quad\vec{Q}_2=\Psi_4^{(6)}\frac{\vec{\nabla}^S\rho_+}{\rho_+}+\Psi_5^{(6)}\frac{\vec{\nabla}^S p_+}{p_+},$$

et

$$\vec{Q}_3 = \frac{\lambda_0}{\lambda_1}\Bigg\{ \left(N_1(\tau_1+\epsilon_6)+\tau_2\right)\vec{\nabla}^S\zeta + N_2(\tau_1+\epsilon_6)\frac{\vec{\nabla}^S\rho_+}{\rho_+} + \left(N_3(\tau_1+\epsilon_6)+\tau_2\zeta+\tau_3\right)\frac{\vec{\nabla}^S p_+}{p_+} + \tau_3\vec{n}\frac{\partial_n p_+}{p_+} + \tau_1\frac{\vec{n}\cdot\overline{\overline{\nabla}}\vec{v}_+}{c_+} + \left(\tau_1+\epsilon_6\right)\frac{\vec{v}_+\cdot\overline{\overline{\nabla}}^S\vec{n} - \vec{\nabla}^S\left(\vec{v}_+\cdot\vec{n}\right)}{c_+}\Bigg\}.$$

Les coefficients $\left(\Psi_i^{(k)}\right)_{i=1,\dots,6}$, pour $k = 1,\dots,4,6$, $\left(\Psi_{ij}^{(5)}\right)_{i=1,\dots,6,j=i,\dots,6}$, d_i, ϵ_i, N_i, τ_1 et σ_8 sont des coefficients dépendant de γ, ζ et $b\rho_+$ et sont donnés en annexe G.

9.2.7 Solutions à symétrie radiale

Dans cette section, on cherche des solutions à symétrie radiale du système (9.95). La solution dépend alors uniquement de la distance à la source, de centre $\vec{x}_0$: $r = \|\vec{x}-\vec{x}_0\|$. La variation d'une quantité ψ le long de la normale au choc est alors identique à sa variation par rapport à r et sa variation tangentielle est nulle :

$$\vec{n}\cdot\vec{\nabla}\psi = \frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}r} \quad \text{et} \quad \vec{\nabla}^S\psi = \vec{0}.$$

Le vecteur $\vec{n}$ et le temps t sont donc indépendants, et la position du choc est définie par l'équation

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = c_+ M.$$

Après calcul, nous obtenons de plus les relations :

$$\kappa = \vec{\nabla}\cdot\vec{n} = \frac{d-1}{r} \quad \text{et} \quad n_{i,j}n_{j,i} = \frac{d-1}{r^2} = -\kappa',$$

où $d = 1$, 2 ou 3 en symétrie plane, cylindrique et sphérique respectivement, et avec κ' la dérivée de κ par rapport à r.

En symétrie radiale, le système d'équations (9.95) s'écrit finalement :

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = c_+ M & \text{(9.100a)} \\ \dfrac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}r} = \bar{k}_1(M)\kappa + \bar{k}_2(M)Z & \text{(9.100b)} \\ \dfrac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}r} = \bar{h}_1(M)Z^2 + \bar{h}_2(M)Z\kappa + \left(\bar{h}_3(M)\kappa^2 - \bar{h}_6(M)\kappa'\right), & \text{(9.100c)} \end{cases}$$

pour $r \geq r_0$, et a pour condition initiale :

$$r(t_0) = r_0, \quad M(r_0) = M_0 \quad \text{et} \quad Z(r_0) = Z_0. \tag{9.101}$$

Remarque 9.10

On note la ressemblance du système (9.100) avec le système GSD ordre 1 (9.19), ayant noté que (9.100a) est identique à (9.19a). Seuls les coefficients des équations portant sur M et les effets arrière (Q pour GSD et Z pour KIN) diffèrent.

Le système (9.100) est composé de trois équations non-linéaires couplées. Il n'est *a priori* pas possible d'en exhiber une solution analytique, excepté dans certains cas comme dans la limite des chocs forts ou des chocs faibles. Le cas limite des chocs forts est traité dans [115], tandis que le cas limite des chocs faibles est étudié dans [117, 5].

Cas limite des chocs forts. Pour $M \gg 1$, l'évolution du nombre de Mach et des effets arrière du choc s'écrit :

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}r} = \bar{k}_1^\infty \dfrac{M}{r} + \dfrac{\bar{k}_2^\infty}{M} Z & (9.102a) \\ \dfrac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}r} = \bar{h}_1^\infty \dfrac{Z^2}{M^2} + \bar{h}_2^\infty \dfrac{Z}{r} + \bar{h}_3^\infty \dfrac{M^2}{r^2}, & (9.102b) \end{cases}$$

avec

$$\bar{k}_1^\infty = -\frac{(d-1)\gamma(\gamma-1+2b\rho_+)}{(2\gamma-1)(\gamma+1)} \quad , \quad \bar{k}_2^\infty = -\frac{(\gamma+1)\,(\gamma-1+2b\rho_+)}{4\gamma(2\gamma-1)},$$

et

$$\begin{aligned} \bar{h}_1^\infty &= -\frac{3(\gamma+1)\left\{5\gamma^2-9\gamma+2+2b\rho_+\,(7\gamma-1)\right\}}{4\gamma(5\gamma-1)(2\gamma-1)} \\ \bar{h}_2^\infty &= -\frac{(d-1)\gamma\left\{(\gamma-1)(14\gamma^2-41\gamma+11)+4b\rho_+(16\gamma^2-16\gamma+1)\right\}}{(\gamma^2-1)(5\gamma-1)(2\gamma-1)} \\ \bar{h}_3^\infty &= \frac{4(d-1)\gamma^2\left\{(d\gamma+\gamma-1)(\gamma^2-4\gamma+1)+2b\rho_+((d+3)\gamma^2-(d+3)\gamma+d)\right\}}{(\gamma+1)(\gamma^2-1)(5\gamma-1)(2\gamma-1)}. \end{aligned}$$

L'équation (9.102a) se réécrit

$$Z(r) = \frac{M(r)M'(r)}{\bar{k}_2^\infty} - \frac{\bar{k}_1^\infty}{\bar{k}_2^\infty}\frac{M(r)^2}{r}. \tag{9.103}$$

La dérivée de Z par rapport à r est donnée par :

$$Z'(r) = \frac{M(r)M''(r)}{\bar{k}_2^\infty} + \frac{M'(r)^2}{\bar{k}_2^\infty} - 2\frac{\bar{k}_1^\infty}{\bar{k}_2^\infty}\frac{M(r)M'(r)}{r} + \frac{\bar{k}_1^\infty}{\bar{k}_2^\infty}\frac{M(r)^2}{r^2}. \tag{9.104}$$

En injectant (9.103)-(9.104) dans (9.102b), on obtient l'EDO d'ordre 2 sur M à coefficients constants suivante :

$$M''(r) + \alpha_1\frac{M'(r)^2}{M} + \alpha_2\frac{M'(r)}{r} + \alpha_3\frac{M(r)}{r^2} = 0, \tag{9.105}$$

où

$$\alpha_1 = 1 - \frac{\bar{h}_1^\infty}{\bar{k}_2^\infty}, \quad \alpha_2 = 2\frac{\bar{k}_1^\infty\bar{h}_1^\infty}{\bar{k}_2^\infty} - 2\bar{k}_1^\infty - \bar{h}_2^\infty \quad \text{et} \quad \alpha_3 = \bar{k}_1^\infty - \frac{\left(\bar{k}_1^\infty\right)^2\bar{h}_1^\infty}{\bar{k}_2^\infty} + \bar{h}_2^\infty\bar{k}_1^\infty - \bar{k}_2^\infty\bar{h}_3^\infty,$$

avec pour condition initiale :

$$M(r_0) = M_0 \quad \text{et} \quad M'(r_0) = \bar{k}_1^\infty\frac{M_0}{r_0} + \frac{\bar{k}_2^\infty}{M_0}Z_0. \tag{9.106}$$

Le problème (9.105)-(9.106) est résolu en annexe E. Les hypothèses de la propriété E.1 sont bien vérifiées. On a en effet pour tout $\gamma > 1$:

$$\alpha_1 > -1, \quad \Delta = (\alpha_2-1)^2 - 4\alpha_3(\alpha_1+1) > 0,$$

et pour tout $1 < \gamma < 2.7$:

$$g_1 = \frac{1-\alpha_2-\sqrt{\Delta}}{2(\alpha_1+1)} < 0 < g_2 = \frac{1-\alpha_2+\sqrt{\Delta}}{2(\alpha_1+1)}.$$

L'évolution du nombre de Mach est ainsi donnée par

$$M(r) = M_0 \left(\frac{r}{r_0}\right)^{g_1} \left(\frac{g_2 - g_0 + (g_0 - g_1)\left(\frac{r}{r_0}\right)^{(\alpha_1+1)(g_2-g_1)}}{g_2 - g_1} \right)^{\frac{1}{\alpha_1+1}}, \tag{9.107}$$

pour $g_0 \leq g_2$, où

$$g_0 = r_0 M_0' / M_0 = k_1^\infty + r_0 k_2^\infty \frac{Z_0}{M_0^2}.$$

Le terme sous l'exposant $1/(\alpha_1 + 1)$ doit être positif ou nul afin que la solution soit réelle. La propriété E.1 liste le comportement de la solution en fonction du choix de g_0. Après manipulations algébriques, ces choix s'expriment en fonction de la condition initiale $\delta_0 = \frac{Z_0 r_0}{M_0^2}$:

. si $\delta_0 > Z_1 = \frac{g_1 - \bar{k}_1^\infty}{k_2^\infty}$, la solution est strictement décroissante et existe en temps fini :

$$r \leq r_\star = \left(\frac{g_0 - g_2}{g_0 - g_1}\right)^{1/\sqrt{\Delta}} r_0,$$

avec $g_0 = k_1^\infty + k_2^\infty \delta_0$;

. si $\delta_0 = Z_1$, la solution est strictement décroissante $\forall r \geq r_0$:

$$M(r) = M_0 \left(\frac{r}{r_0}\right)^{g_1}$$

. si $Z_2 < \delta_0 < Z_1 = \frac{g_2 - k_1^\infty}{k_2^\infty}$, la solution est strictement décroissante sur $[r_0, r_{\star\star}]$, puis strictement croissante sur $[r_{\star\star}, +\infty]$, avec

$$r_{\star\star} = \left(\frac{g_1(g_0 - g_2)}{g_2(g_0 - g_1)}\right)^{1/\sqrt{\Delta}} r_0;$$

. si $\delta_0 = Z_2$, la solution est strictement croissante $\forall r \geq r_0$:

$$M(r) = M_0 \left(\frac{r}{r_0}\right)^{g_2};$$

. enfin si $\delta_0 < Z_2$, il n'existe pas de solution réelle.

Le tableau 9.3 donne les valeurs de Z_1 et Z_2 pour les différentes symétries de la solution et un rapport de chaleurs spécifiques $\gamma = 1.4$. On remarque alors que $Z_2 < 0 \leq Z_1$. Les différents domaines de solution du modèle KIN ordre 1 sont résumés en figure 9.7.

d	1	2	3
Z_1	-3.5	-9.024	-14.350
Z_2	0	1.032	1.866

TABLE 9.3 – Valeurs de Z_1 et Z_2 délimitant les différents types de solutions du modèle KIN ordre 1 en symétrie radiale dans la limite des chocs forts (système (9.102)) pour $\gamma = 1.4$.

La figure 9.8 illustre les différents types de solutions donnés par le système (9.102), dans la limite des chocs forts, et le système (9.100), pour un choc d'intensité quelconque, pour

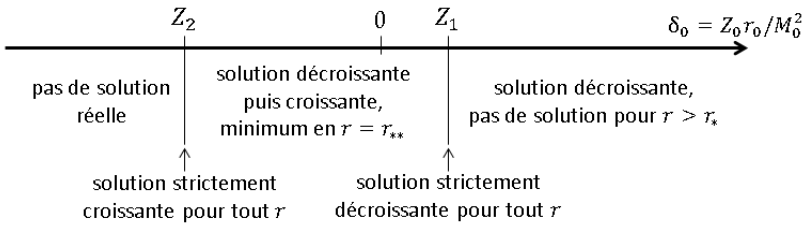
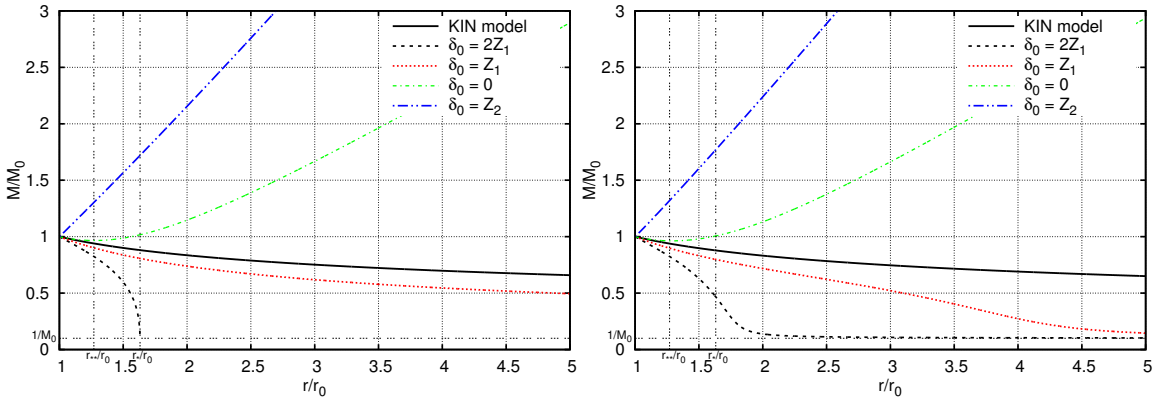


FIGURE 9.7 – Schéma résumant les différents types de solutions du modèle KIN ordre 1 en symétrie radiale dans la limite des chocs forts (système (9.102)).



(a) (b)

FIGURE 9.8 – Solutions du modèle KIN tronqué à l'ordre 0 et 1 en symétrie sphérique ($d = 3$) pour différents Z_0, r_0 et M_0 sont fixés : $r_0 = 0.5$ $M_0 = 10$. Fig. (a) : Nombre de Mach dans la limite des chocs forts. Fig. (b) : Nombre de Mach pour un choc d'intensité quelconque.

différentes conditions initiales. La position initiale du choc et le nombre de Mach initial, r_0 et M_0, sont fixées à 0.5 et 10 respectivement, et la valeur de Z_0 varie. On trouve pour $\gamma = 1.4$:

$$r_\star \approx 0.816 \quad \text{et} \quad r_{\star\star} \approx 0.635.$$

Dans la limite des chocs forts, le comportement théorique attendu est bien retrouvé comme nous pouvons l'observer en figure 9.8(a). Ce comportement donne une idée des propriétés de la solution pour un choc d'intensité quelconque. Le système (9.100) est résolu numériquement à l'aide d'un algorithme de Runge-Kutta d'ordre 4, et les solutions sont présentées en figure 9.8(b) pour différentes valeurs de δ_0. Pour le cas particulier $\delta_0 > Z_2$, la solution existe cette fois-ci pour tout r, est décroissante, et converge vers 1. On observe par ailleurs un changement de convexité en $r = r_*$. En pratique, la divergence de la solution est observée pour des valeurs de δ_0 et r proches de celles données dans le cas limite des chocs forts. On en conclut que la solution du système (9.100) diverge en temps fini pour $\delta_0 < Z_1$.

Dans le cas d'un choc soutenu, les effets arrière sont uniquement générés par l'interaction du choc avec un obstacle. Les effets arrière initiaux sont donc nuls : $Z_0 = 0$. Pour les cas considérés dans notre étude, à savoir la diffraction d'un choc plan sur un dièdre convexe, l'interaction du choc avec l'obstacle génère des effets arrière de signe négatif. Cela implique une amplification du nombre de Mach en comparaison au modèle tronqué à l'ordre 0 (*cf.* remarque 9.9), qui engendre une divergence de la solution. Cet aspect est brièvement discuté en sous-section 9.2.8. Ce comportement n'est pas étonnant compte tenu des résultats obtenus ici. En effet, le modèle KIN ordre 1 diverge en temps fini pour $Z_0 = 0$, contrairement au modèle GSD ordre 1 qui présente une solution décroissante pour $Q_0 = 0$, comme discuté en sous-section 9.1.3.

En champ proche, $r \in]0, r_0]$ avec r proche de 0, la solution (9.107) s'exprime :

$$M(r) = M_0 \left(\frac{r}{r_0}\right)^{g_1} \left(\frac{g_2 - g_0}{g_2 - g_1}\right)^{\frac{1}{\alpha_1+1}}. \tag{9.108}$$

La surpression du choc, $\frac{[p]}{p_+} = \frac{2\gamma}{\gamma+1}\left(M^2 - 1\right)$, est alors proportionnelle à r^{2g_1}. La valeur de cet exposant est donnée en table 9.4 pour une symétrie cylindrique ($d = 2$) et sphérique ($d = 3$). Nous présentons dans cette même table les valeurs de l'exposant de la solution auto-similaire de Guderley [49] pour un choc fort convergent, ainsi que celles du modèle GSD tronqué à l'ordre 0 et 1 données en table 9.2, et du modèle KIN tronqué à l'ordre 0 et 2. On rappelle que cette étude est menée pour le modèle KIN à l'ordre 0 de troncature en section 6.1.2 (table 6.1). Les valeurs de l'exposant du modèle KIN ordre 2 sont issues de [115].

Les lois de décroissance du modèle KIN ordre 1 et ordre 2 sont différentes d'un choc fort divergent auto-semblable issue d'une explosion, calculées par [76, 128] : r^{-d}. En revanche, les exposants donnés par le modèle KIN semble converger, en augmentant l'ordre de troncature, vers ceux de la loi de Guderley. Ils sont cependant moins proches que ceux calculés par le modèle GSD. On note qu'il est nécessaire de monter au moins à l'ordre 2 de troncature du système KIN afin d'avoir des résultats satisfaisants pour ce type de problème.

	Exact value	GSD - ordre 0	GSD - ordre 1	KIN - ordre 0	KIN - ordre 1	KIN - ordre 2
$d = 2$	0.394588	0.394142	0.392258	0.259259	0.455900	0.371836
$d = 3$	0.788728	0.788284	0.783102	0.518519	0.874038	0.793302

TABLE 9.4 – Exposant calculé pour le problème d'un choc fort convergent à symétrie cylindrique ($d = 2$) et sphérique ($d = 3$), pour un gaz parfait au repos, $\gamma = 1.4$. La solution exacte, donnée par Guderley [49], est comparée aux différents ordres d'approximation du modèle KIN et du modèle GSD. Les exposants du modèle KIN ordre 2 sont tirés de [115].

Cas limites des chocs faibles. Dans la limite des chocs faibles ($M \sim 1$), le système (9.100) s'écrit :

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}r} + \dfrac{d-1}{2}\dfrac{M}{r} + \dfrac{\gamma+1}{4\gamma} MZ = 0 \\ \dfrac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}r} + \dfrac{\gamma+1}{2\gamma} Z^2 + \dfrac{d-1}{2}\dfrac{Z}{r} = 0. \end{cases}$$

Ce système d'EDOs est résolu en annexe E (propriété E.2). Sous l'hypothèse que $Z_0 \geq 0$, la solution est donnée par :

$$\begin{cases} M(r) = \dfrac{M_0}{\left(\frac{r}{r_0}\right)^{\frac{d-1}{2}} \sqrt{1 + \frac{\gamma+1}{2\gamma} Z_0 r_0 J\left(\frac{r}{r_0}\right)}} & \text{(9.109a)} \\ Z(r) = \dfrac{Z_0}{\left(1 + \frac{\gamma+1}{2\gamma} Z_0 r_0 J\left(\frac{r}{r_0}\right)\right)\left(\frac{r}{r_0}\right)^{\frac{d-1}{2}}}, & \text{(9.109b)} \end{cases}$$

pour $r \geq r_0$, et avec

$$J(\bar{r}) = \int_1^{\bar{r}} \frac{\mathrm{d}x}{x^{\frac{d-1}{2}}}.$$

Dans le cas où $Z_0 < 0$, l'existence d'une solution réelle décroissante n'est pas toujours assurée.

En champ lointain ($r \gg r_0$), le comportement de M et Z vérifie :

$$Z(r) = \frac{2\gamma}{(\gamma+1)r_0} \begin{cases} \dfrac{r_0}{r} & d=1 \\ \dfrac{r_0}{2r} & d=2 \\ \dfrac{r_0}{r\ln\left(\frac{r}{r_0}\right)} & d=3 \end{cases}, \qquad M(r) = \frac{M_0}{\sqrt{\frac{\gamma+1}{2\gamma}Z_0 r_0}} \begin{cases} \sqrt{\dfrac{r_0}{r}} & d=1 \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\dfrac{r_0}{r}\right)^{3/4} & d=2 \\ \dfrac{r_0}{r\sqrt{\ln\left(\frac{r}{r_0}\right)}} & d=3. \end{cases}$$

La décroissance attendue pour une onde acoustique (1.2) est ainsi retrouvée, ayant noté que $\frac{[p]}{p_+} \propto M$. On rappelle qu'à l'ordre 0 de troncature, *i.e.* sans effets arrière dans le modèle KIN, la décroissance de la surpression du choc est géométrique : $\frac{[p]}{p_+} \propto r^{-(d-1)/2}$ (*cf.* section 6.1.2).

Les conclusions de cette étude sont identiques à celles du modèle GSD ordre 1 (*cf.* sous-section 9.1.3). La prise en compte des effets arrière dans le modèle KIN est nécessaire afin de reproduire le comportement acoustique attendu en champ lointain pour une onde de souffle. Cependant, les effets non-linéaires près de la source ne sont pas correctement décrits à l'ordre 1 de troncature. Il est nécessaire de développer le modèle à un ordre supérieur de troncature, ce qui est une tâche délicate en raison de la complexité des calculs, ou bien de modéliser de manière non triviale le terme Z_2 dans (9.100c).

9.2.8 Intégration numérique

L'intégration numérique du modèle Cinématique ordre 1 (9.95) est directe à l'aide du schéma de Best décrit en section 9.1.4. Néanmoins, il est nécessaire d'approximer les termes transverses dans l'équation (9.95d).

En 2D, la dérivée du nombre de Mach est approchée par un schéma décentré [89] :

$$|\vec{\nabla}^S M|^2_{|s=s_i} = \left|\frac{\partial M}{\partial s}\right|^2_{|s=s_i} \approx \max\left(\Delta_l M_i, -\Delta_r M_i, 0\right)^2,$$

où $\Delta_l M_i$ et $\Delta_r M_i$ sont les approximations à gauche et à droite de la dérivée première de M en s_i :

$$\Delta_l M_i = \frac{M_i - M_{i-1}}{s_i - s_{i-1}} \quad \text{et} \quad \Delta_r M_i = \frac{M_{i+1} - M_i}{s_{i+1} - s_i}.$$

Le terme de diffusion est approché à l'ordre 1 (en raison du caractère non-uniforme du maillage) par un schéma aux différences finies :

$$\Delta M_{|s=s_i} = \frac{\partial^2 M}{\partial s^2}_{|s=s_i} \approx \frac{2}{s_{i+1} - s_{i-1}}\left(\frac{M_{i+1} - M_i}{s_{i+1} - s_i} - \frac{M_i - M_{i-1}}{s_i - s_{i-1}}\right).$$

Puisque le vecteur normal au front est défini à l'aide de l'interpolation spline du choc, notée $(X(s), Y(s))^T$, la direction normale unitaire au front en s_i est donnée par (*cf.* relation (5.17)) :

$$\vec{n}_i = \frac{(Y'(s_i), -X'(s_i))^T}{|X'(s_i)^2 + Y'(s_i)^2|}. \tag{9.110}$$

On montre alors, après calcul, que le terme de dérivée croisée $n_{k,j}n_{j,k}$ s'exprime en s_i comme :

$$n_{k,j}n_{j,k|s=s_i} = \frac{\left(X'(s_i)Y''(s_i) - Y'(s_i)X''(s_i)\right)^2}{\left(X'(s_i)^2 + Y'(s_i)^2\right)^3}. \tag{9.111}$$

Les dérivées premières sont données par l'interpolation spline locale limitée du front, et les dérivées secondes sont approchées à l'aide d'un schéma aux différences finies.

En fonction de la condition initiale, il a été mise en évidence en sous-section 9.2.7, que le modèle KIN ordre 1 diverge en temps fini pour le problème à symétrie radiale. Cette divergence de la solution se retrouve pour les problèmes plus complexes d'interaction du choc avec un obstacle, tel que la diffraction d'un choc plan sur un dièdre convexe. Pour un choc soutenu, soit des effets arrière initiaux nuls, $Z_0 = 0$, la solution du modèle KIN ordre 1 diverge en pratique. Dans ces conditions, il est notamment impossible de comparer ce modèle au modèle GSD ordre 1 sur ce type de problème. Il est à noter que le modèle GSD ordre 1 est soumis à une difficulté similaire. Seulement, le domaine de stabilité de ce modèle est différent de celui du modèle KIN et aucune divergence n'est observée dans les configurations considérées dans ce chapitre.
L'extension du modèle KIN à l'ordre 2 serait à envisager afin de palier cette difficulté, comme il est souligné pour le problème à symétrie radiale dans [115]. Cet aspect n'a pas été envisagé ici en raison de la complexité des calculs et de l'objectif de ce travail : la mise au point d'une méthode simple et rapide. L'étude du modèle KIN ordre 1 se limite donc aux considérations théoriques précédentes.

9.3 Conclusion

Ce chapitre, assez technique, présente de manière détaillée l'extension des modèles GSD et Cinématique (KIN) à la prise en compte des effets arrière. L'extension à l'écoulement arrière du modèle GSD consiste à développer à l'ordre supérieur la relation $A - M$ dans chaque tube de rayon, tandis que l'extension du modèle KIN est basée sur la dérivation des équations d'Euler tridimensionnelles le long des rayons. Cela aboutit, pour chaque approche, à un système infini d'équations non-linéaires couplées, faisant intervenir un terme de troncature d'ordre supérieur. Nous présentons dans ce chapitre la troncature à l'ordre 1 des modèles : une équation d'évolution sur les effets arrière s'ajoute aux systèmes respectifs.
Un soin particulier est apporté à la dérivation de l'équation d'évolution sur les effets arrière du modèle KIN, pour laquelle aucun détail n'est disponible dans la littérature. Notre principale contribution à ce modèle est son extension, pour un gaz de van der Waals, au cas des atmosphères non homogènes en mouvement.

Du point de vue numérique, une modification de l'algorithme Lagrangien, basée sur les travaux de Best, est proposée. Celle-ci consiste à utiliser la courbure locale au front de choc à la place de l'aire des tubes de rayon. L'algorithme n'est alors plus conservatif. Néanmoins, il permet une étude préliminaire du problème élémentaire de la diffraction d'un choc plan sur un dièdre convexe, la solution étant continue.

Une étude des modèles en symétrie radiale est présentée. En champ lointain, la décroissance de la surpression des modèles tronqués à l'ordre 0 est uniquement géométrique. Les effets non-linéaires de l'écoulement arrière sur le choc s'ajoutent à cette décroissance géométrique à partir de l'ordre 1 de troncature. Le comportement acoustique d'une onde en N, attendu pour une onde de souffle, est ainsi retrouvé pour chaque modèle. Néanmoins, les modèles décrivent le comportement d'un choc fort convergent en champ proche. Le modèle GSD, tronqué à l'ordre 0 ou 1, décrit avec une excellente approximation ce type de problème. Ce n'est pas le cas pour le modèle KIN pour lequel il est nécessaire de considérer une troncature au moins à l'ordre 2 du système afin de restituer correctement ce problème. Dans tous les cas, une modélisation non triviale des effets arrière est nécessaire afin de rendre compte du comportement d'un choc fort divergent en champ proche. De surcroît, l'étude des systèmes tronqués à l'ordre 1 révèle une dépendance de la solution aux données initiales. Selon ce jeu de données initiales, la solution divergera en temps fini. Cette étude est intéressante puisque ce type de limitation se retrouve pour des problèmes plus complexes faisant intervenir l'interaction du choc avec une structure.

Pour les cas considérés ici, seul le modèle KIN est soumis à ce défaut.

Pour le problème de la diffraction d'un choc plan sur un dièdre convexe, le point d'inflexion observé expérimentalement est restitué par le modèle GSD ordre 1. Le front de choc est de plus ralenti en comparaison au modèle GSD. Il semble notamment que la limitation existante pour le modèle GSD soit davantage accentuée à l'ordre 1 de troncature, faisant de cette extension du modèle un mauvais candidat pour la modélisation simplifiée des ondes de souffle. Le modèle KIN ordre 1 fait intervenir des termes de variation transversale dans l'équation sur les effets arrière, susceptibles de lever cette limitation. Cependant, la solution du modèle pour ce type de problème à tendance à diverger. L'extension à l'ordre 2 du modèle KIN serait à prévoir afin de contourner cette difficulté, mais semble trop complexe à considérer.

L'étude des extensions à l'ordre 1 des modèles GSD et KIN, menée dans ce chapitre, montre toute la complexité de leur mise en œuvres, à la fois théorique et numérique, pour la modélisation des ondes de souffle. La levée des limitations existantes pour les problèmes de détente n'est pas assurée. De plus, ces modèles ne restituent pas les lois de décroissance attendues pour une onde de souffle d'intensité forte et modérée. Une modélisation du terme de troncature d'ordre supérieur, *a priori ad hoc*, serait donc nécessaire. Toutes ces complications ne justifient pas, selon nous, un développement à l'ordre supérieur des modèles simplifiés présentés au chapitre 8.

Conclusion

Les travaux présentés dans ce mémoire de thèse portent sur le développement d'une méthode de calcul rapide des ondes de souffle en présence d'obstacles. À cette fin, nous nous sommes concentrés sur trois axes principaux :

1. le développement et l'étude de modèles simplifiés de propagation d'une onde de choc soutenu (énergie infinie de la source),
2. l'extension simple de ces modèles aux ondes de souffle (énergie finie de la source),
3. la mise au point d'un algorithme rapide de résolution.

Deux modèles simplifiés de propagation des ondes de choc ont été étudiés. Ces modèles se distinguent par le point de vue adopté pour leur établissement. Ils négligent l'influence de l'écoulement arrière sur le front de choc (effets arrière) en première approximation, et ne sont *a priori* valables que pour un choc soutenu.

Le premier modèle, précurseur dans ce domaine, est le modèle Geometrical Shock Dynamics (GSD) de Whitham. Il est basé sur une vision géométrique de la propagation du choc, consistant à décomposer le front en parties élémentaires planes se déplaçant le long de tubes de rayon. Un tube de rayon est traité comme une tuyère à paroi rigide de section faiblement variable, notée A. La combinaison des relations de Rankine-Hugoniot et des équations d'Euler, établies sur la tuyère, conduit à une relation simple entre l'aire du tube et le nombre de Mach du choc, M, connue sous le nom de relation $A-M$. Cette relation ferme le système sous l'hypothèse de choc fort, évitant le calcul de l'écoulement arrière. Le modèle GSD a fait l'objet de nombreuses études qui ont démontré sa capacité à estimer correctement et rapidement la propagation d'une onde de choc, même lorsque son intensité est faible. Néanmoins, ce modèle admet une limitation en détente : l'existence d'une solution au problème de diffraction sur une rampe convexe est contrainte. Concernant la prise en compte des effets arrière, Best a montré que prendre en compte cette contribution dans le modèle GSD mène à un système infini d'équations non-linéaires couplées. Ces équations, définies sur chaque tube de rayon, font intervenir un terme d'ordre supérieur à modéliser. À l'ordre 0 de troncature, le modèle de Whitham est retrouvé. À partir de l'ordre 1, un équation supplémentaire portant sur les effets arrière s'ajoute au modèle. L'étude du système à l'ordre 1 montre une amélioration notable du profil de l'onde de choc pour les chocs forts : le point d'inflexion observé expérimentalement au niveau de la paroi est retrouvé. Cependant, lors des détentes, le front de choc est nettement ralenti, conduisant à une limitation plus importante de la solution qu'avec le modèle GSD de base.

Un approche alternative au modèle de Whitham est le modèle Cinématique (KIN). Il s'agit d'une méthode plus récente pour la propagation d'une onde de choc qui a fait l'objet de peu d'études, restées essentiellement théoriques. L'hypothèse sous-jacente au développement du modèle GSD, à savoir la décomposition en tubes de rayon à paroi rigide, semble levée, ce qui en fait un candidat idéal pour les applications visées. Nous avons entrepris dans ce travail d'étendre le modèle existant (pour un gaz de van der Waals), au cas des atmosphères non homogènes, et d'en étudier les propriétés. Le modèle KIN est basé sur une vision mathématique de l'évolution d'une onde de choc, assimilant le front à une surface singulière. Cela conduit notamment, par une combinaison des équations d'Euler tridimensionnelles et des relations de Rankine-Hugoniot, à une équation d'évolution de l'intensité du choc. En première approximation (ordre 0 de troncature), l'écoulement à l'arrière du choc est négligé sous l'hypothèse que le signal spatial de pression est une marche. Tout comme le modèle de Whitham, la prise en compte des effets arrière dans le modèle aboutit à un système infini d'équations non-linéaires couplées qu'il convient de tronquer à un certain ordre. À l'ordre 1 de troncature, une équation d'évolution sur les effets arrière complète le modèle. Cette équation fait notamment intervenir des termes de gradient transverse inexistants pour le modèle de Best. Une étude préliminaire de ce système en symétrie radiale montre que la stabilité du modèle est toutefois soumise à une dépendance très forte à la condition initiale. Cette difficulté devrait être *a priori* contournée à l'ordre 2 de troncature du système mais limite finalement l'intérêt de ce modèle.

L'étude des systèmes GSD et KIN à l'ordre 1 montre que la prise en compte des effets arrière est essentielle à la restitution du comportement acoustique attendu en champ lointain pour une onde de souffle. Toutefois, en raison des complexités à la fois théorique et numérique de l'extension des modèles GSD et KIN à l'écoulement arrière, nous proposons dans ce travail une étude approfondie des modèles à l'ordre 0, et une extension *ad hoc* aux ondes de souffle. On rappelle que l'objectif est de mettre au point une méthode simple et rapide d'estimation de la propagation d'une onde de souffle.

Les modèles GSD et KIN partagent un point de vue similaire pour l'évolution de l'onde de choc : seul le front incident est modélisé, ce qui réduit la dimension du problème. Ces modèles surfaciques sont hyperboliques, ce qui signifie que des ondes non-linéaires, responsables du changement d'intensité et de forme du choc, se propagent sur le front. Les interactions choc/structure sont notamment bien prises en compte par ces deux approches. En particulier, le front de Mach est bien restitué ; le point triple correspond alors à l'apparition d'une discontinuité dans les modèles.

Bien que les modèles GSD et KIN découlent de deux approches différentes, nous prouvons dans cette thèse leur équivalence structurale : le modèle KIN se réécrit sous la forme du système GSD avec une relation $A - M$ qui lui est propre. La décomposition du front en tubes de rayon est donc naturelle avec ce type d'approche. Mais contrairement au modèle GSD, aucune hypothèse de paroi rigide n'est nécessaire dans le modèle KIN, autorisant la prise en compte d'une variation transversale le long du choc.
Une étude approfondie du modèle Cinématique, ainsi qu'une comparaison détaillée entre les modèles, sont ainsi menées en deux dimensions d'espace, pour la première fois à notre connaissance. Cette étude révèle que les modèles GSD et Cinématique décrivent correctement la propagation d'une onde de choc soutenue, avec une meilleure estimation pour le modèle GSD pour les problèmes élémentaires de Riemann. Cette analyse permet une meilleure compréhension des modèles ainsi que de l'influence de la relation $A - M$. Les modèles GSD et KIN souffrent notamment de la même limitation pour le problème de détente : selon l'angle de déviation et le nombre de Mach incident du choc, aucune solution n'existe pour le problème de diffraction sur une rampe convexe. L'étude de ces deux modèles suggère que l'origine de cette limitation provient d'une hypothèse commune aux deux approches : la non prise en compte des forces de cisaillement pouvant exister dans l'écoulement. Les modèles GSD et KIN d'ordre supérieur ne semblant pas palier ce défaut, nous proposons une modélisation *ad hoc* de l'écoulement transversal le long du choc dans la relation $A - M$. Cette contribution est active uniquement dans les zones expansives du choc. Les modèles modifiés sont qualifiés de GSDT et KINT (T pour Transverse). Les résultats obtenus pour les problèmes purement expansifs sont très bons, par construction, en comparaison avec les modèles originaux. En particulier, la solution est correctement établie sur les configurations pour lesquelles les modèles initiaux n'ont pas de solutions.

Du point de vue numérique, un algorithme Lagrangien conservatif est développé et validé en deux dimensions d'espace. Il s'agit d'une approche naturelle, qui, tout comme le modèle GSD, est basée sur la décomposition de l'évolution du front en tubes de rayon. Nous avons entrepris dans ce travail d'améliorer l'algorithme existant de Schwendeman. La conservativité du schéma d'origine est assurée par l'intégration de la relation $A-M$ depuis l'instant initial. Nous proposons ici une intégration de la relation $A-M$ d'un pas de temps à l'autre avec respect de la conservation de l'aire. Cela permet une implémentation simple des modifications apportées aux modèles, ainsi qu'une extension directe de l'algorithme à un milieu hétérogène et au repos. L'algorithme est précis, robuste, rapide, et prend en compte des géométries arbitraires à l'aide de la gestion des contacts par un arbre de type quadtree. Le code a été utilisé pour comparer les modèles GSD et KIN sur un large éventail d'exemples.
Le calcul du nombre de Mach est indépendant d'un tube de rayon à l'autre avec les modèles GSD et KIN, mais la prise en compte du terme transverse dans la relation $A - M$ conduit

à un système non-linéaire, que l'on résout à l'aide d'un algorithme de Newton. Le coût de calcul est augmenté en comparaison avec les modèles initiaux, mais reste raisonnable. Il est de l'ordre de quelques minutes sur un simple processeur avec cette méthode, là où plusieurs heures de calcul sont nécessaires à la résolution des équations d'Euler sur plusieurs processeurs.

La fermeture initialement proposée, consistant à négliger l'écoulement arrière, est limitée aux chocs soutenus. Une modélisation du terme de troncature est donc nécessaire afin de prendre en compte les effets de souffle. L'effet de souffle consécutif à une explosion ponctuelle est introduit à partir d'une loi empirique pression/distance à la source valable en champ libre. Cela autorise la modélisation de différentes sources explosives telles qu'une charge chimique de TNT ou une charge gazeuse (propane/oxygène ici). Les modèles GSDT et KINT ainsi étendus sont nommés GBD (Geometrical Blast Dynamics) et KBD (Kinematic Blast Dynamics).
L'étude préliminaire, menée en configuration 2D axisymétrique, montre la capacité de ces modèles à estimer correctement, et en un temps réduit, les caractéristiques principales de l'onde de souffle. Les résultats sont similaires entre les modèles sur les cas étudiés ici. Le gain en temps de calcul est conséquent. Pour les cas de diffraction d'une onde de souffle sur un merlon par exemple, seules quelques minutes sur un PC de bureau sont nécessaires, contre une douzaine d'heures sur 256 cœurs pour la résolution des équations d'Euler avec détonique.

Il est à noter toutefois que les modèles GSD/KIN, et par conséquent les modèles GSDT/KINT et GBD/KBD, conduisent systématiquement à la formation d'un front de Mach, et ce même pour un choc faible pour lequel la réflexion serait théoriquement régulière. Cela a pour conséquence une surestimation importante de l'intensité de l'onde de souffle lors de la réflexion d'un choc faible. Cette limitation devra être levée avant de pouvoir employer ces modèles sur des configurations d'intérêt. Nous suggérons pour cela d'introduire un terme de diffusion dans la relation $A - M$ par exemple, terme qui serait d'autant plus actif que le choc serait faible. Une autre perspective serait de traiter différemment la condition à la limite du choc sur la paroi de l'obstacle. Parmi les autres perspectives envisagées pour la suite de ce travail, on peut citer :

1. Le développement d'un algorithme Lagrangien monotone qui permettrait d'intégrer plus simplement le terme transverse dans la relation $A - M$;
2. L'extension de la méthode aux temps d'arrivée multiples. Le modèle simplifié serait alors également appliqué aux ondes réfléchies ce qui nécessite de considérer un modèle de type GSD avec écoulement amont variable pour le second choc ;
3. L'estimation des paramètres principaux de l'onde de souffle (durée de phase positive t^+ et impulsion positive I^+). Cela pourrait s'effectuer, par exemple, par l'utilisation de lois expérimentales en champ libre, de manière similaire à la modélisation des effets de souffle présentée au chapitre 8, ou par la reconstruction de proche en proche d'un pseudo rayon de la source au point d'intérêt sur lequel une équation de type Burgers serait intégrée. Une autre approche pourrait être d'injecter un profil de pression de type Friedlander dans le modèle Cinématique tronqué à l'ordre 1.
4. L'extension au 3D constitue un défi intéressant. Elle pourra être réalisée en s'inspirant de la thèse de Schwendeman [105]. La principale difficulté est la gestion des conditions limites et surtout la recombinaison de fronts. La bibliothèque informatique FronTier [1] fournit des outils qui pourraient aider à simplifier cette tâche. L'utilisation d'une méthode level-set trouverait là tout son sens également. Si ce choix était retenu, il conviendrait de mettre au point un algorithme de type Fast-Marching conservatif et de paralléliser la méthode ce qui n'est pas trivial. L'approche Fast Iterative Method (FIM) [61] pourrait alors avantageusement être envisagée.

Bibliographie

[1] Frontier++. c/c++ library for front tracking. http ://www.ams.sunysb.edu/%7Echenx.

[2] Arrêté du 20/04/2007 fixant les règles relatives à l'évaluation des risques et à la prévention des accidents dans les établissements pyrotechniques. www.legifrance.gouv.fr, 2007.

[3] Structures to resist the effects of accidental explosions. Technical report, U.S. Department of the Army, Army TM 5-1300, Navy NAVFAC P-397, AFR 88-22, Washington, D.C, 2008.

[4] J.D. Anderson and J. Wendt. *Computational fluid dynamics*, volume 206. Springer, 1995.

[5] R. Arora and M.J. Siddiqui. Evolutionary behavior of weak shocks in a non-ideal gas. *Journal of Theorical and Applied Physics*, 7(1) :1–6, 2013.

[6] T.D. Aslam. *Investigations on detonation shock dynamics*. University of Illinois at Urbana-Champaign, 1996.

[7] T.D. Aslam, J.B. Bdzil, and D.S. Stewart. Level set methods applied to modeling detonation shock dynamics. *Journal of Computational Physics*, 126(2) :390–409, 1996.

[8] T.D. Aslam and D.S. Stewart. Detonation Shock Dynamics and comparisons with direct numerical simulation. *Combustion Theory and Modelling*, 3(1) :77–101, 1999.

[9] W.E. Baker. *Explosions in air*. University of Texas Press, 1973.

[10] S. Baskar and P. Prasad. Propagation of curved shock fronts using shock ray theory and comparison with other theories. *Journal of Fluid Mechanics*, 523 :171–198, 2005.

[11] T.V. Bazhenova, L.G. Gvozdeva, and M.A. Nettleton. Unsteady interactions of shock waves. *Progress in Aerospace Sciences*, 21 :249–331, 1984.

[12] T.V. Bazhenova, L.G. Gvozdeva, and Y.V. Zhilin. Change in the shape of the diffracting shock wave at a convex corner. *Acta Astronautica*, 6(3) :401–412, 1979.

[13] J.B. Bdzil, T.D. Aslam, and R.J. Henninger. Detonation front models : theories and methods. *Preprint*, 2000.

[14] G. Ben-Dor. In *Handbook of Shock Waves*, volume 2, chapter 8.1 : Oblique Shock Wave Reflections, pages 68–179. Academic Press, 2000.

[15] G. Ben-Dor. *Shock wave reflection phenomena*, volume 2. Springer, 2007.

[16] G. Ben-Dor, O. Igra, and T. Elperin. *Handbook of Shock Waves, Three Volume Set*. Academic Press, 2000.

[17] M.V. Berry. Waves and thom's theorem. *Advances in Physics*, 25(1) :1–26, 1976.

[18] C. Besset and E. Blanc. Propagation of vertical shock waves in the atmosphere. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 95(4) :1830–1839, 1994.

[19] J.P. Best. *The dynamics of underwater explosions*. PhD thesis, University of Wollongong, 1991.

[20] J.P. Best. A generalisation of the theory of Geometrical Shock Dynamics. *Shock Waves*, 1(4) :251–273, 1991.

[21] J.P. Best. Accounting for transverse flow in the theory of Geometrical Shock Dynamics. *Proceedings of the Royal Society of London Series A*, 442 :585–598, 1993.

[22] W. Bleakney, D.R. White, and W.C. Griffith. Measurements of diffraction of shock waves and resulting loading of structures. *Journal Of Applied Mechanics*, 17(4) :439–445, 1950.

[23] C. Bogey and C. Bailly. A family of low dispersive and low dissipative explicit schemes for flow and noise computations. *Journal of Computational Physics*, 194(1) :194–214, 2004.

[24] J.E. Cates and B. Sturtevant. Shock wave focusing using Geometrical Shock Dynamics. *Physics of Fluids*, 9(10) :3058–3068, 1997.

[25] C.J. Catherasoo and B. Sturtevant. Shock dynamics in non-uniform media. *Journal of Fluid Mechanics*, 127 :539–561, 1983.

[26] A. Chaudhuri, A. Hadjadj, and A. Chinnayya. On the use of immersed boundary methods for shock/obstacle interactions. *Journal of Computational Physics*, 230(5) :1731–1748, 2011.

[27] W. Chester. The quasi-cylindrical shock tube. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 45(371) :1293–1301, 1954.

[28] W. Chester. The propagation of shock wave along ducts. *Advances in Applied Mechanics*, 6 :119–152, 1960.

[29] R.F. Chisnell. The motion of shock wave in a channel, with applications to cylindrical and spherical shock waves. *Journal of Fluid Mechanics*, 2(3) :286–298, 1957.

[30] P. Colella and L.F. Henderson. The von neumann paradox for the diffraction of weak shock waves. *Journal of Fluid Mechanics*, 213 :71–94, 1990.

[31] R. Collins and H.T. Chen. Motion of a shock wave through a nonuniform fluid. In *Proceedings of the Second International Conference on Numerical Methods in Fluid Dynamics*, pages 264–269. Springer, 1971.

[32] F. Coulouvrat. Parabolic approximation in ray coordinates for high-frequency nonlinear waves in a inhomogeneous and high speed moving fluid. *Wave Motion*, 45(6) :804–820, 2008.

[33] R. Courant and K.O. Friedrichs. *Supersonic flow and shock waves*, volume 21. Springer Science & Business Media, 1999.

[34] V. Daru and C. Tenaud. High order one-step monotonicity-preserving schemes for unsteady compressible flow calculations. *Journal of computational physics*, 193(2) :563–594, 2004.

[35] C. De Boor. *A practical guide to splines*, volume 27. Springer-Verlag New York, 1978.

[36] N. Dechy, D. Gaston, and O. Salvi. AZF : les leçons d'une catastrophe industrielle. *Revue Responsabilité & Environnement, Les Annales des Mines*, 45 :10–17, 2007.

[37] S. Del Pino and H. Jourdren. Arbitrary high-order schemes for linear advection and waves equations : application to hydrodynamics and aeroacoustics. *Comptes Rendus Mathématiques de l'Académie des Sciences*, 342(6) :441–446, 2006.

[38] E.W. Dijkstra. A note on two problems in connexion with graphs. *Numerische Mathematik*, 1(1) :269–271, 1959.

[39] F. Duboc, C. Enaux, S. Jaouen, H. Jourdren, and M. Wolff. High-order dimensionally split Lagrange-remap schemes for compressible hydrodynamics. *Comptes Rendus Mathematiques*, 348(1) :105–110, 2010.

[40] B. Edney. Anomalous heat transfer and pressure distributions on blunt bodies at hypersonic speeds in the presence of an impinging shock. Technical Report 115, The Aerospace Research Institute of Sweden, 1968.

[41] S. Éveillard. *Propagation d'une onde de choc en présence d'une barrière de protection.* PhD thesis, Université d'Orléans, 2013.

[42] S. Éveillard, N. Lardjane, J.Y. Vinçont, and I. Sochet. Towards a fast-running method for blast-wave mitigation by a prismatic blast wall. *Comptes Rendus Mécanique*, 341(8) :625–635, 2013.

[43] I. Flood, B.T. Bewick, and R.J. Dinan. A new method for very fast simulation of blast wave propagation in complex built environments. Technical report, DTIC Document, 2010.

[44] F.N. Fritsch and R.E. Carlson. Monotone piecewise cubic interpolation. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 17(2) :238–246, 1980.

[45] E. Godlewski and P.A. Raviart. *Numerical Approximation of Hyperbolic Systems of Conservation Laws*, chapter IV : The case of multidimensional systems, pages 303–343. Springer Science & Business Media, 1996.

[46] J. Goodman and A. Macfadyen. Ultra-relativistic Geometrical Shock Dynamics and vorticity. *Journal of Fluid Mechanics*, 604 :325–338, 2008.

[47] S. Gottlieb and C.W. Shu. Total variation diminishing runge-kutta schemes. *Mathematics of computation of the American Mathematical Society*, 67(221) :73–85, 1998.

[48] W. Griffith and D.E. Brickl. The diffraction of strong shock waves. *Physical Review*, 89(2) :451, 1953.

[49] K.G. Guderley. Starke kugelige und zylindrische verdichtungsstösse in der nähe des kugelmittelpunktes bzw. der zylinderachse. *Luftfahrtforschung*, 19(9) :302–312, 1942.

[50] M.F. Hamilton and D.T. Blackstock. *Nonlinear acoustics*, volume 427. Academic Press San Diego, 1998.

[51] Y.Z. Han and X.Z. Yin. Three-dimensional equations of shock dynamics for moving gas ahead of shock wave. In *AIP Conference Proceedings*, volume 208, pages 921–927. AIP, 1990.

[52] Z.Y. Han and X.Z. Yin. 2-dimensional equations of shock dynamics for moving gas ahead of shock wave. *Science China Series Mathematics Physics Astronomy Technological Sciences*, 32 :1333–1344, 1989.

[53] Z.Y. Han and X.Z. Yin. In *Handbook of Shock Waves*, volume 1, chapter 3.7 : Geometrical Shock Dynamics, pages 485–550. Academic Press, 2000.

[54] Z.Y. Han and X.Z. Yin. *Shock dynamics*, volume 11. Springer Science & Business Media, 2013.

[55] L.F. Henderson, W.Y. Crutchfield, and R.J. Virgona. The effects of thermal conductivity and viscosity of argon on shock waves diffracting over rigid ramps. *Journal of Fluid Mechanics*, 331 :1–36, 1997.

[56] W.D. Henshaw, N.F. Smyth, and D.W. Schwendeman. Numerical shock propagation using Geometrical Shock Dynamics. *Journal of Fluid Mechanics*, 171 :519–545, 1986.

[57] O. Heuzé, S. Jaouen, and H. Jourdren. Dissipative issue of high-order shock capturing schemes with non-convex equations of state. *Journal of Computational Physics*, 228(3) :833–860, 2009.

[58] H.G. Hornung and D.W. Schwendeman. Oblique shock reflection from an axis of symmetry : shock dynamics and relation to the guderley singularity. *Journal of Fluid Mechanics*, 438 :231–245, 2001.

[59] H.T. Huynh. Accurate monotone cubic interpolation. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 30(1) :57–100, 1993.

[60] Y. Iwashita. Piecewise polynomial interpolations. *OpenGamma Quant Res*, 15, 2013.

[61] W.K. Jeong and R.T. Whitaker. A fast iterative method for eikonal equations. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 30(5) :2512–2534, 2008.

[62] H. Jourdren. Hera : a hydrodynamic amr platform for multi-physics simulations. In *Adaptive Mesh Refinement-Theory and Applications*, pages 283–294. Springer, 2005.

[63] N.K.R. Kevlahan. The propagation of weak shocks in non-uniform flows. *Journal of Fluid Mechanics*, 327 :161–197, 1996.

[64] G.F. Kinney and K.J. Graham. *Explosive shocks in air*. Springer Science & Business Media, 2013.

[65] H. Kleine and H. Grönig. Color schlieren methods in shock wave research. *Shock Waves*, 1(1) :51–63, 1991.

[66] H. Kleine and G. S. Settles. The art of shock waves and their flowfields. *Shock Waves*, 17(5) :291–307, 2008.

[67] H. Kleine, E. Timofeev, and K. Takayama. Laboratory-scale blast wave phenomena – optical diagnostics and applications. *Shock Waves*, 14(5) :343–357, 2005.

[68] S. Kobayashi, T. Adachi, and T. Suzuki. Non-self-similar characteristics of weak mach reflection : the von neumann paradox. *Fluid Dynamics Research*, 35(4) :275–286, 2004.

[69] A. Lannoy. *Analyse des explosions air-hydrocarbure en milieu libre : études déterministe et probabiliste du scénario d'accident : prévision des effets de surpression*. Electricité de France, Direction des études et recherches, 1984.

[70] E. Lapébie, R. Soulié, and L. Youinou. Flash : Fast lethality assessment for structures and humans. In *Proceedings of the Military Aspects of Blast and Shock*, 2016.

[71] A. Le Guilcher. *Front propagation methods*. PhD thesis, Université Paris-Est, 2014.

[72] S.K. Lele. Compact finite difference schemes with spectral-like resolution. *Journal of computational physics*, 103(1) :16–42, 1992.

[73] R.J. LeVeque. *Finite volume methods for hyperbolic problems*, volume 31, chapter Some Nonclassical Hyperbolic Problems, pages 358–374. Cambridge University Press, 2002.

[74] H. Li and G. Ben-Dor. Reconsideration of the shock-shock relations for the case of a non-quiescent gas ahead of the shock and verification with experiments. In *Proceedings of the Royal Society of London Series A*, volume 451, pages 383–397. The Royal Society, 1995.

[75] M.J. Lighthill. The diffraction of blast. i. In *Proceedings of the Royal Society of London Series A*, volume 198, pages 454–470. The Royal Society, 1949.

[76] S.C. Lin. Cylindrical shock waves produced by instantaneous energy release. *Journal of Applied Physics*, 25(1) :54–57, 1954.

[77] W.E. Lorensen and H.E. Cline. Marching cubes : A high resolution 3d surface construction algorithm. In *ACM siggraph computer graphics*, volume 21, pages 163–169. ACM, 1987.

[78] E. Mach. Uber den verlauf von funkenwellen in der ebene und im raume. *Sitzungsbr. Akad. Wiss. Wien*, 78 :819–838, 1878.

[79] R. Marchiano and J.L. Thomas. Synthesis and analysis of linear and nonlinear acoustical vortices. *Physical Review E*, 71(6) :066616, 2005.

[80] V.P. Maslov. Propagation of shock waves in an isentropic, nonviscous gas. *Journal of Soviet Mathematics*, 13(1) :119–163, 1980.

[81] M. McKinzie, T.B. Cochran, R.S. Norris, and W.M. Arkin. *The US nuclear war plan : A time for change*. Natural Resources Defense Council Washington, DC, 2001.

[82] Médiathèque interactive de référence en accidentologie industrielle. Explosion d'un stock de nitrate d'ammonium dans une usine d'engrais. Technical Report 21329, Ministère du Développement durable / Direction générale de la prévention des risques / Bureau d'Analyse des Risques et Pollutions Industriels, 2001.

[83] C.E. Needham. Blast wave propagation. In *Blast Waves*, pages 87–99. Springer, 2010.

[84] M. Nguyen-Dinh, N. Lardjane, C. Duchenne, and O. Gainville. Direct simulations of outdoor blast wave propagation from source to receiver. *Shock Waves*, 2017.

[85] Y. Noumir, A. Le Guilcher, N. Lardjane, R. Monneau, and A. Sarrazin. A fast-marching like algorithm for Geometrical Shock Dynamics. *Journal of Computational Physics*, 284 :206–229, 2015.

[86] J. Olejniczak, M.J. Wright, and G.V. Candler. Numerical study of inviscid shock interactions on double-wedge geometries. *Journal of Fluid Mechanics*, 352 :1–25, 1997.

[87] S. Osher and R. Fedkiw. *Level set methods and dynamic implicit surfaces*, volume 153. Springer Science & Business Media, 2006.

[88] S. Osher and J.A. Sethian. Fronts propagating with curvature-dependent speed : algorithms based on hamilton-jacobi formulations. *Journal of Computational Physics*, 79(1) :12–49, 1988.

[89] S. Osher and C.W. Shu. High-order essentially nonoscillatory schemes for hamilton–jacobi equations. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 28(4) :907–922, 1991.

[90] K. Oshima. Propagation of spacially non-uniform shock waves. *ISAS report*, 30(6) :195, 1965.

[91] K. Oshima, K. Sugaya, M. Yamamoto, and T. Totoki. Diffraction of a plane shock wave around a corner. *ISAS report*, 30(2) :51–82, 1965.

[92] M. Pandey and V.D. Sharma. Kinematics of a shock wave of arbitrary strength in a non-ideal gas. *Quarterly of Applied Mathematics*, 67(3) :401–418, 2009.

[93] A.D. Pierce. *Acoustics : an introduction to its physical principles and applications*, volume 20. McGraw-Hill New York, 1981.

[94] M.N. Plooster. Shock waves from line sources. numerical solutions and experimental measurements. *The Physics of Fluids*, 13(11) :2665–2675, 1970.

[95] P. Prasad. An asymptotic derivation of weakly nonlinear ray theory. *Proceedings Mathematical Sciences*, 110(4) :431–447, 2000.

[96] P. Prasad. *Nonlinear Hyperbolic Waves in Multidimensions*. CRC Press, 2001.

[97] P. Prasad and R. Srinivasan. On methods of calculating successive positions of a shock front. *Acta mechanica*, 74(1-4) :81–93, 1988.

[98] J. Ridoux, N. Lardjane, T. Gomez, and F. Coulouvrat. Revisiting geometrical shock dynamics for blast wave propagation in complex environment. In *AIP Conference Proceedings*, volume 1685, page 090010. AIP Publishing, 2015.

[99] J. Ridoux, N. Lardjane, L. Monasse, and F. Coulouvrat. Extension of geometrical shock dynamics to blast waves propagation. In *Proceedings of the 24th Military Aspects of Blast and Shock Conference*, 2016.

[100] J. Ridoux, N. Lardjane, L. Monasse, and F. Coulouvrat. Comparison of Geometrical Shock Dynamics and Kinematic models for shock wave propagation. *Shock Waves*, 27(5) :1–16, 2017.

[101] J. Ridoux, N. Lardjane, L. Monasse, and F. Coulouvrat. Contribution to the development of a fast running method for blast waves propagation. In *Proceedings of the 31st International Symposium on Shock Waves*, 2017.

[102] P. Romon. *Introduction à la géométrie différentielle discrète*. Ellipses, 2013.

[103] P. Sagaut. *Introduction à la simulation des grandes échelles pour les écoulements de fluide incompressible*, volume 30. Springer Science & Business Media, 1998.

[104] A. Sarrazin. Contribution à la mise au point d'une méthode de calcul rapide pour la simulation des ondes de souffle en environnement complexe. Rapport de stage (CERMICS), 2014.

[105] D.W. Schwendeman. *Numerical shock propagation using Geometrical Shock Dynamics*. PhD thesis, California Institute of Technology, 1986.

[106] D.W. Schwendeman. A numerical scheme for shock propagation in three dimensions. In *Proceedings of the Royal Society of London Series A*, volume 416, pages 179–198. The Royal Society, 1988.

[107] D.W. Schwendeman. Numerical shock propagation in non-uniform media. *Journal of Fluid Mechanics*, 188 :383–410, 1988.

[108] D.W. Schwendeman. A new numerical method for shock wave propagation based on Geometrical Shock Dynamics. In *Proceedings of the Royal Society of London Series A*, volume 441, pages 331–341. The Royal Society, 1993.

[109] D.W. Schwendeman. A higher-order Godunov method for the hyperbolic equations modelling shock dynamics. In *Proceedings of the Royal Society of London Series A*, volume 455, pages 1215–1233. The Royal Society, 1999.

[110] D.W. Schwendeman. On converging shock waves of spherical and polyhedral form. *Journal of Fluid Mechanics*, 454 :365–386, 2002.

[111] D.W. Schwendeman and G.B. Whitham. On converging shock waves. In *Proceedings of the Royal Society of London Series A*, volume 413, pages 297–311. The Royal Society, 1987.

[112] J.F. Scott, P. Blanc-Benon, and O. Gainville. Weakly nonlinear propagation of small-wavelength, impulsive acoustic waves in a general atmosphere. *Wave Motion*, 2017.

[113] D. Serre. *Systems of Conservation Laws 1 : Hyperbolicity, entropies, shock waves*. Cambridge University Press, 1999.

[114] J.A. Sethian. *Level set methods and fast marching methods : evolving interfaces in computational geometry, fluid mechanics, computer vision, and materials science*, volume 3. Cambridge University Press, 1999.

[115] V.D. Sharma and C. Radha. On one-dimensional planar and nonplanar shock waves in a relaxing gas. *Physics of Fluids*, 6(6) :2177–2190, 1994.

[116] V.D. Sharma and C. Radha. Three dimensional shock wave propagation in an ideal gas. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 30(3) :305–322, 1995.

[117] V.D. Sharma and R. Venkatraman. Evolution of weak shocks in one dimensional planar and non-planar gasdynamics flows. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 47(8) :918–926, 2012.

[118] W. Shi and C.K. Cheung. Performance evaluation of line simplification algorithms for vector generalization. *The Cartographic Journal*, 43(1) :27–44, 2006.

[119] B.W. Skews. The perturbed region behind a diffracting shock wave. *Journal of Fluid Mechanics*, 29(04) :705–719, 1967.

[120] B.W. Skews. The shape of a diffracting shock wave. *Journal of Fluid Mechanics*, 29(02) :297–304, 1967.

[121] B.W. Skews. Shock wave diffraction on multi-facetted and curved walls. *Shock Waves*, 14(3) :137–146, 2005.

[122] J. Smoller. *Shock Waves and reaction-diffusion equations*, volume 258. Springer Science & Business Media, 2012.

[123] H. Späth. *One dimensional spline interpolation algorithms*. AK Peters/CRC Press, 1995.

[124] R. Srinivasan and P. Prasad. On the propagation of a multi-dimensional shock of arbitrary strength. In *Proceedings of the Indian Academy of Sciences-Mathematical Sciences*, volume 94, pages 27–42. Springer, 1985.

[125] M. Steffen. A simple method for monotonic interpolation in one dimension. *Astronomy and Astrophysics*, 239 :443, 1990.

[126] D.S. Stewart and J.B. Bdzil. The shock dynamics of stable multidimensional detonation. *Combustion and Flame*, 72(3) :311–323, 1988.

[127] A. Suresh and H.T. Huynh. Accurate monotonicity-preserving schemes with runge–kutta time stepping. *Journal of Computational Physics*, 136(1) :83–99, 1997.

[128] G. Taylor. The formation of a blast wave by a very intense explosion. i. theorical discussion. *Proceedings of the Royal Society of London Series A*, pages 159–174, 1950.

[129] A.M. Tesdall and J.K. Hunter. Self-similar solutions for weak shock reflection. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 63(1) :42–61, 2002.

[130] J.L. Thomas and R. Marchiano. Pseudo angular momentum and topological charge conservation for nonlinear acoustical vortices. *Physical review letters*, 91(24) :244–302, 2003.

[131] E.F. Toro. *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics*, page 14. Berlin, Heidelberg : Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 3rd edition, 2009.

[132] C. Truesdell and R. Toupin. The classical field theories. In *Principles of Classical Mechanics and Field Theory/Prinzipien der Klassischen Mechanik und Feldtheorie*, pages 226–858. Springer, 1960.

[133] Union des Industries Chimiques. Rapport sécurité industrielle. http ://www.uic.fr. Accessed : 2010-09-30.

[134] P.A. Varadarajan. *Noise transmission along shock-waves*. PhD thesis, The University of Michigan, 2011.

[135] J. von Neumann. Oblique reflection of shocks. *John von Neumann Collected Works*, 6 :238–299, 1943.

[136] R.C. Weast. *Handbook of Chemistry and Physics 53rd Edition*. Chemical Rubber Pub., 1972.

[137] G.B. Whitham. On the propagation of weak shock waves. *Journal of Fluid Mechanics*, 1(03) :290–318, 1956.

[138] G.B. Whitham. A new approach to problems of shock dynamics. part I : Two-dimensional problems. *Journal of Fluid Mechanics*, 2(2) :145–171, 1957.

[139] G.B. Whitham. On the propagation of shock waves through regions of non-uniform area or flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 4(04) :337–360, 1958.

[140] G.B. Whitham. A new approach to problems of shock dynamics. part II : Three-dimensional problems. *Journal of Fluid Mechanics*, 5(3) :369–386, 1959.

[141] G.B. Whitham. A note on shock dynamics relative to a moving frame. *Journal of Fluid Mechanics*, 31(03) :449–453, 1968.

[142] G.B. Whitham. In *Linear and Nonlinear Waves*, chapter 6 : Gas dynamics. John Wiley & Sons, Inc., 3rd edition, 1999.

[143] G.B. Whitham. In *Linear and Nonlinear Waves*, chapter 8 : Shock Dynamics, pages 263–311. John Wiley & Sons, Inc., 3rd edition, 1999.

[144] G.B. Whitham. *Linear and Nonlinear Waves*. John Wiley & Sons, Inc., 3rd edition, 1999.

[145] T.W. Wright. An intrinsic description of unsteady shock waves. *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, 29(3) :311–324, 1976.

[146] S. Yoo and D.S. Stewart. A hybrid level set method for modelling detonation and combustion problems in complex geometries. *Combustion Theory and Modelling*, 9(2) :219–254, 2005.

[147] G.A. Zakeri. Analysis of ray tube area in Geometrical Shock Dynamics. *Applied Mathematics and Computation*, 217(2) :830–836, 2010.

Annexe

Table des matières (Annexe)

A Simulations Eulériennes **277**

B Phénomènes de réflexion **279**

C Interpolation spline cubique **285**
C.1 Interpolation spline cubique 286
C.2 Condition nécessaire de monotonie et limiteurs de pente 289
C.3 Limiteurs de pente d'ordre 2 et préservation des extrema 292

D Équation d'évolution des effets arrière dans le modèle de Best **299**

E Résolution d'Équations Différentielles Ordinaires **305**

F Équation d'évolution de la courbure locale du front de choc **309**
F.1 Résultats préliminaires 309
F.2 Équation d'évolution de la courbure locale du choc 311

G Équation d'évolution des effets arrière dans le modèle Cinématique étendue à un milieu inhomogène en mouvement **315**
G.1 Relations différentielles de saut 316
G.2 Équations instationnaires de saut 318
G.3 Équation d'évolution des effets arrière 323

Annexe A

Simulations Eulériennes

Les simulations Eulériennes présentées dans cette thèse ont été réalisées avec le logiciel HERA. HERA est un code HPC [1] d'hydrodynamique résolvant les équations d'Euler multi-matériaux sur maillage cartésien en formalisme Lagrange-Projection volumes finis [62, 39]. Ce logiciel, développé au CEA/DAM, intègre de nombreux modèles physiques et schémas numériques, notamment d'ordre élevé [37, 57]. HERA dispose d'une gestion automatisée du raffinement de maillage (AMR en anglais) qui permet de focaliser l'effort informatique sur certaines zones du domaine de calcul. Cette option rend le code particulièrement adapté au suivi de fronts. Les obstacles rigides, non mobiles, sont pris en compte au travers d'une méthode de frontière immergée [26]. La figure A.1 illustre la capacité AMR du code sur un cas académique.

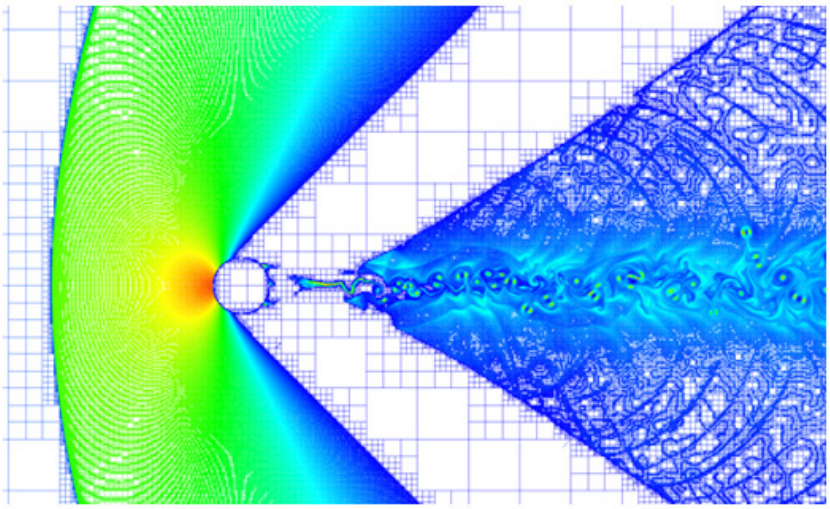


FIGURE A.1 – Exemple d'application de l'option de raffinement automatique de maillage du logiciel HERA lors de l'interaction d'un choc soutenu à M=2,81 avec un cylindre.

HERA a déjà été utilisé avec succès aussi bien pour l'interaction d'un choc fort avec des obstacles [42], que pour la propagation d'un choc à longue distance [84]. Le lecteur est invité à consulter [62] pour les détails techniques.

Extraction du front de choc. Durant une simulation Eulérienne, le premier passage du choc est détecté dans une maille lorsque la densité adimensionnée ρ/ρ_0, avec ρ_0 la densité de

1. High Performance Computing pour calcul haute performance.

l'atmosphère au repos, est plus élevée qu'un critère ϵ. Usuellement, ce paramètre est fixé à 0.2 pour un choc suffisamment fort (nombre de Mach supérieur à 1.5), et est adapté pour un choc plus faible. Le premier instant d'arrivée du choc est ensuite enregistré dans la maille. Une fois le calcul terminé, le front de choc à l'instant t (correspondant à l'isovaleur t) est extrait à l'aide d'un algorithme dit de marching square [77]. Cela autorise également l'estimation géométrique du nombre de Mach local du choc en calculant la vitesse instantanée du front entre les instants t à $t + \mathrm{d}t$. La figure A.2 fournit une preuve de la convergence en maillage de la méthode sur l'exemple de la diffraction d'un choc plan à nombre de Mach 2 sur un merlon.

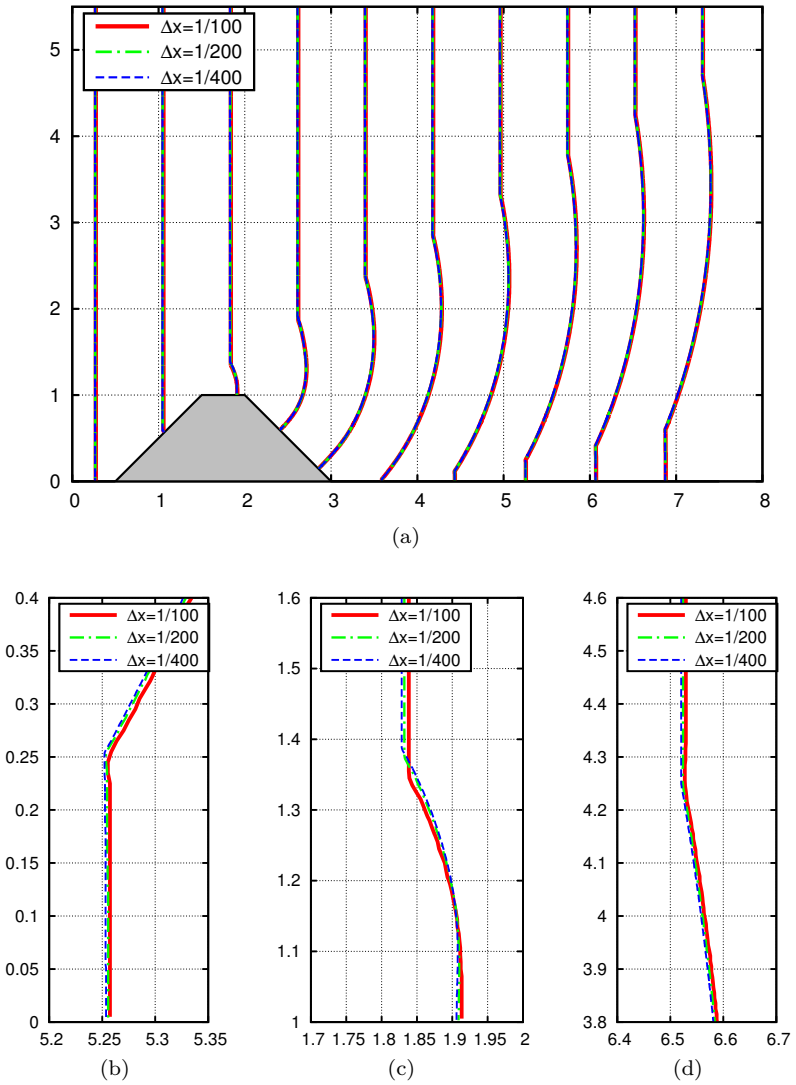


FIGURE A.2 – Preuve de la convergence en maillage de la solution numérique obtenue avec le code HERA et l'extraction marching square pour le cas de la diffraction d'un choc plan sur un merlon à nombre de Mach incident $M_0 = 2$. Fig. (a) : Positions successives du choc à différents instants pour une taille de cellule de 1/100, en rouge, 1/200 en vert, et 1/400 en bleu. Fig. (b)-(d) : Zoom sur des parties spécifiques du front.

Annexe B

Phénomènes de réflexion

L'étude théorique de la réflexion d'une onde de choc plane sur une surface plane pour un gaz parfait non visqueux a été menée par von Neumann en 1943 [135]. Dans la cadre de cette thèse, seuls les régimes de réflexion régulière (réflexion normale et réflexion oblique) et irrégulière (réflexion de Mach) sont analysés. Les autres types de réflexion, tel que la réflexion de von Neumann, ne sont pas abordés. Le lecteur désireux de plus de précision sur ces phénomènes est invité à consulter l'ouvrage [15]. Le point de vue adopté ici repose sur [64].

L'analyse des régimes de réflexion régulière et irrégulière nécessite pour commencer l'étude de l'écoulement au travers d'un choc oblique.

Choc oblique. L'écoulement est dévié d'un angle θ au travers un choc oblique, et la composante tangentielle de la vitesse, u_T, est conservée. Les relations de Rankine-Hugoniot sont alors établies le long de la composante normale au choc (indexée par n) en tenant compte de l'angle d'incidence β du choc, *cf.* figure B.1. On montre alors suivant [64] que :

$$\frac{u_{n2}}{u_{n1}} = \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{(\gamma-1)M_1^2\sin^2\beta + 2}{(\gamma+1)M_1^2\sin^2\beta} \tag{B.1a}$$

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2\gamma M_1^2\sin^2\beta + 1 - \gamma}{\gamma+1} \tag{B.1b}$$

$$M_2^2\sin^2(\beta-\theta) = \frac{2+(\gamma-1)M_1^2\sin^2\beta}{2\gamma M_1^2\sin^2\beta + 1 - \gamma}, \tag{B.1c}$$

où ρ est la masse volumique du fluide, p la pression et γ le rapport de chaleurs spécifiques. La quantité M_k désigne le nombre de Mach de l'écoulement relatif au milieu : $M_k = u_k/c_k$, c_k étant la célérité du son dans le milieu définie pour un gaz parfait, $c_k = \sqrt{\frac{\gamma p_k}{\rho_k}}$. L'état à l'avant du choc (état amont) est indexé par 1 et l'état à l'arrière du choc (état aval) est indexé par 2. Compte tenu de la géométrie du problème, on trouve :

$$\tan(\beta) = \frac{u_{n1}}{u_T} \quad \text{et} \quad \tan(\beta-\theta) = \frac{u_{n2}}{u_T}, \tag{B.2}$$

et

$$M_{n1} = M_1\sin(\beta) \quad \text{et} \quad M_{n2} = M_2\sin(\beta-\theta).$$

Puisque $M_{n1} = \frac{u_{n1}}{c_1} \geq 1$, l'écoulement amont est nécessairement supersonique, $M_1 \geq 1$, impliquant une inclinaison minimale $\beta_{min} = \arcsin\left(\frac{1}{M_1}\right)$ du choc. L'inclinaison maximale corres-

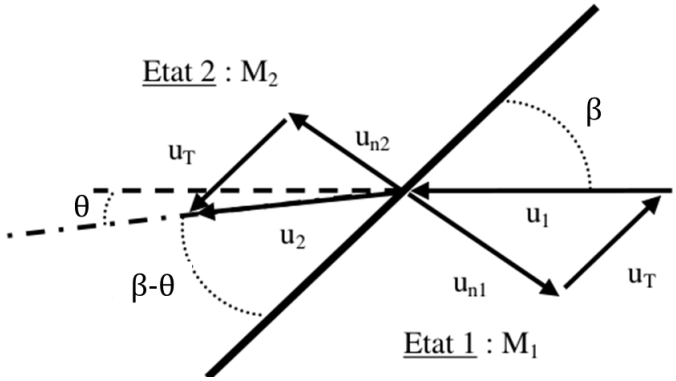


FIGURE B.1 – Présentation schématique d'un choc oblique.

pond au choc normal : $\beta = \frac{\pi}{2}$. L'écoulement, après le passage du choc, peut être quant-à-lui subsonique ou supersonique.

Connaissant le nombre de Mach M_1 et l'angle d'incidence $\beta \in [\arcsin\left(\frac{1}{M_1}\right), \frac{\pi}{2}]$, l'angle de déviation θ est calculé via la relation $\theta - \beta - M_1$:

$$\frac{\tan(\beta - \theta)}{\tan(\beta)} = \frac{(\gamma - 1)M_1^2 \sin^2\beta + 2}{(\gamma + 1)M_1^2 \sin^2\beta}, \tag{B.3}$$

qui découle de la combinaison des relations (B.2) et (B.1a). L'expression (B.3) détermine les courbes $\theta = \theta(\beta, M_1)$, représentées pour différentes valeurs de M_1 en figure B.2. Ces courbes,

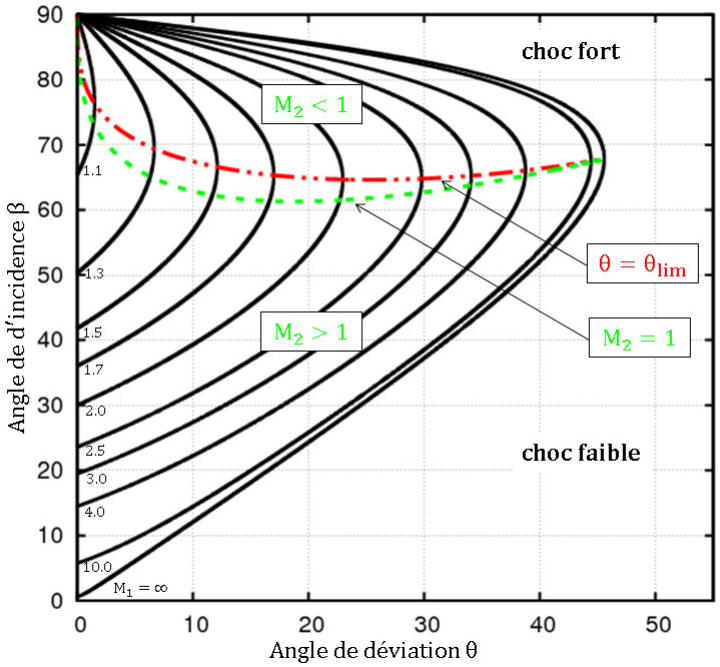


FIGURE B.2 – Polaires de choc pour différentes valeurs de nombre de Mach incident M_1 (eq. (B.3)).

appelées polaires de choc, suggèrent quelques commentaires. À un nombre de Mach incident

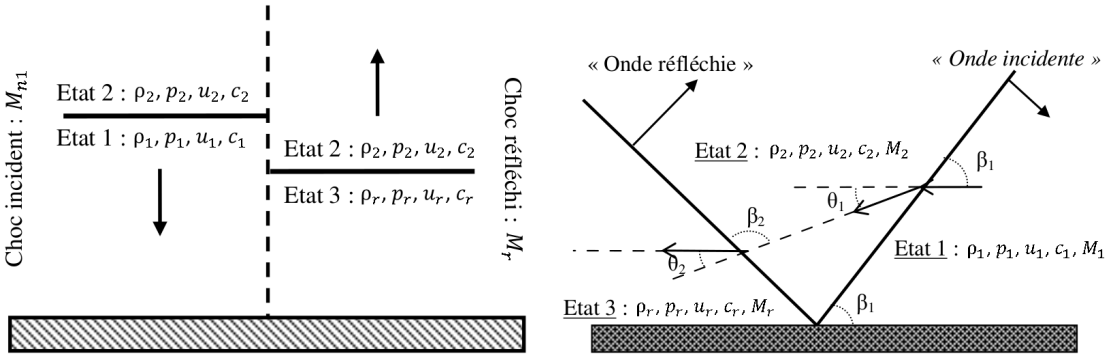
M_1 donné, la déviation de l'écoulement ne peut pas dépasser un angle limite θ_{lim} pour lequel une unique solution au problème existe. À un angle de déviation plus faible, $0 \leq \theta < \theta_{lim}$, correspond alors deux solutions possibles d'angle d'incidence β' et β'' :

$$\arcsin\left(\frac{1}{M_1}\right) < \beta' < \beta'' < \frac{\pi}{2}.$$

Puisque le saut de pression (B.1b) est une fonction croissante de β, le choc avec l'angle d'incidence le plus élevé, β'', est identifié comme le choc oblique "fort" et induit un écoulement aval subsonique. Dans l'autre cas, un choc oblique "faible" est solution, et l'écoulement aval est généralement supersonique sauf pour un angle de déviation proche de θ_{lim}, pour lequel le nombre de Mach de l'écoulement aval est légèrement plus petit que 1. Ces deux solutions deviennent identiques lorsque l'angle de déviation est maximal. L'angle d'incidence commun, β_{lim}, vérifie alors [64] :

$$\sin^2(\beta_{lim}) = \frac{1}{4\gamma M_1^2}\left((\gamma+1)M_1^2 - 4 + \sqrt{(\gamma+1)\left((\gamma+1)M_1^4 + 8(\gamma-1)M_1^2 + 16\right)}\right). \quad \text{(B.4)}$$

Le problème du choc oblique n'a finalement pas de solution si $\theta > \theta_{lim}$.



(a) (b)

FIGURE B.3 – Représentation schématique d'une réflexion normale (fig. (a)) et d'une réflexion régulière d'angle d'incidence $\beta_1 < \pi/2$ (fig. (b)).

L'intensité du choc réfléchi dépend de l'intensité de l'onde incidente et de son angle avec la paroi. En pratique, la pression réfléchie, p_r, est souvent donnée via le coefficient de réflexion, C_r, défini comme le rapport de la surpression réfléchie à la surpression incidente :

$$C_r = \frac{p_r - p_1}{p_2 - p_1}.$$

Réflexion normale (RN). Dans le cas d'une réflexion normale, l'angle d'incidence et l'angle de déviation de l'écoulement sont nuls. L'onde réfléchie se propage dans la direction opposée à l'onde de choc incident (*cf.* Fig. B.3(a)). Le coefficient de réflexion peut être déterminé en fonction du nombre de Mach incident du choc, M_{n1}, à l'aide des relations de Rankine-Hugoniot [64] :

$$C_{RN} = \frac{(3\gamma-1)M_{n1}^2 + 3 - \gamma}{(\gamma-1)M_{n1}^2 + 2}.$$

Réflexion régulière (RR). Lorsqu'une onde de choc, de nombre de Mach $M_{n1} \geq 1$ et d'angle d'incidence $\beta_1 > 0$, arrive sur une paroi, le choc subit une réflexion oblique comme schématisé en figure B.3(b). Trois états se distinguent alors dans le repère lié au choc :

- l'état initial en amont du choc (état 1), où l'écoulement est parallèle à la paroi ;
- l'état 2 perturbé en aval du choc incident, dans lequel l'écoulement est dévié ;
- et l'état 3 réfléchi en aval de l'onde réfléchie, où l'écoulement est redirigé parallèlement à la paroi.

Le problème se décompose en deux problèmes de choc oblique. L'angle de déviation θ_1 à travers le premier choc oblique est donné par la relation $\theta - \beta - M_1$ (B.3) pour $\beta = \beta_1$ et $M_1 = M_{n1}/\sin\beta_1$. L'écoulement dans l'état 2, de nombre de Mach M_2, rencontre ensuite le second choc oblique avec un angle d'incidence β_2. Le nombre de Mach M_2 à l'aval du choc incident est défini par la relation de Rankine-Hugoniot (B.1c) et β_2 est calculé via la relation (B.3) puisque $\theta_2 = \theta_1$. Le nombre de Mach du choc réfléchi est finalement donné par la relation géométrique :

$$M_r = M_2 \sin\beta_2.$$

Le coefficient de réflexion, noté C_{RR} pour la réflexion régulière, peut être obtenu à partir des relations de Rankine-Hugoniot entre les trois états [64] :

$$C_{RR} = \frac{\left(2\gamma M_r^2 + 1 - \gamma\right)\left(2\gamma M_{n1}^2 + 1 - \gamma\right) - (\gamma+1)^2}{2\gamma(\gamma+1)\left(M_{n1}^2 - 1\right)}.$$

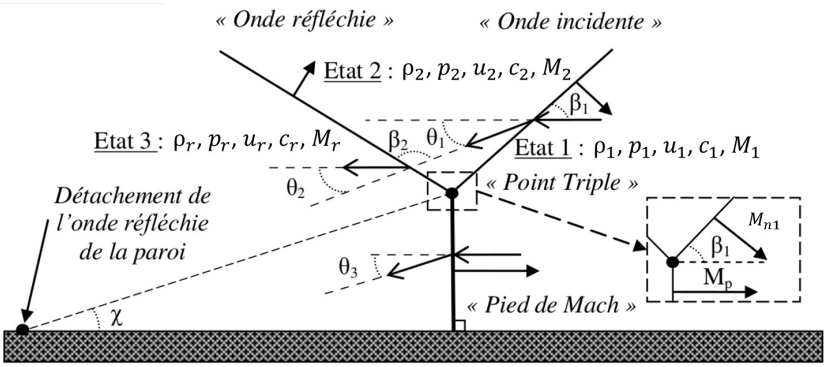


FIGURE B.4 – Schéma d'une réflexion de Mach directe dans le repère du choc.

Apparition d'un front de Mach. Le nombre de Mach de l'écoulement de l'état 1 étant défini par la géométrie du problème, $M_1 = M_{n1}/\sin\beta_1$, la solution liée au premier choc oblique existe toujours. Ce n'est toutefois pas le cas pour le second choc oblique (l'onde réfléchie), pour lequel l'angle de déviation de l'écoulement ne doit pas excéder une valeur limite. L'existence d'une réflexion régulière est donc soumise à la condition que l'angle de déviation du choc réfléchi vérifie :

$$0 \leq \theta_2 \leq \theta_{2lim}.$$

Dans le cas contraire, le choc est détaché de la paroi et il se forme un front de Mach (*cf.* Fig. B.4) joignant les chocs incident et réfléchi à la paroi. La réflexion est dans ce cas dite irrégulière.

La formation du front de Mach est une conséquence de l'incapacité du choc réfléchi à redirigé complètement l'écoulement dans sa direction initiale [64]. L'angle maximal de déviation de l'onde réfléchie est dans ce cas plus petit que celui du choc incident, orientant légèrement l'écoulement vers la surface. Le pied de Mach émerge alors pour assurer le contact avec la surface. Une quatrième région en aval du front de Mach apparaît, différente de l'état 3 et

séparée par une discontinuité de contact, aussi appelée ligne de glissement, comme schématisé en figure B.4.

L'angle d'incidence du choc de transition entre réflexion régulière et réflexion irrégulière, noté β_{lim}, correspond théoriquement à l'angle maximal de déviation de l'écoulement derrière l'onde de choc réfléchie, θ_{2lim}, via la relation (B.3). Celle-ci est donnée implicitement en fonction du nombre de Mach d'incidence, M_{n1}, en combinant les relations (B.1c), (B.3) et (B.4) :

$$\left|\begin{array}{l} \theta_1 = \beta_{lim} - \tan^{-1}\left(\tan(\beta_{lim})\dfrac{(\gamma-1)M_{n1}^2+2}{(\gamma+1)M_{n1}^2}\right) \\ \\ M_2 = \dfrac{1}{\sin\left(\beta_{lim}-\theta_1\right)}\sqrt{\dfrac{2+(\gamma-1)M_{n1}^2}{2\gamma M_{n1}^2+1-\gamma}} \\ \\ \beta_2 = \sin^{-1}\left(\sqrt{\dfrac{(\gamma+1)M_2^2-4+\sqrt{(\gamma+1)\left((\gamma+1)M_2^4+8(\gamma-1)M_2^2+16\right)}}{4\gamma M_2^2}}\right) \\ \\ \theta_1 = \theta_{2lim} = \beta_2 - \tan^{-1}\left(\tan(\beta_2)\dfrac{(\gamma-1)M_2^2\sin^2\beta_2+2}{(\gamma+1)M_2^2\sin^2\beta_2}\right), \end{array}\right. \tag{B.5}$$

et est tracée en figure B.5. Pour un nombre de Mach incident approchant l'unité (limite du choc

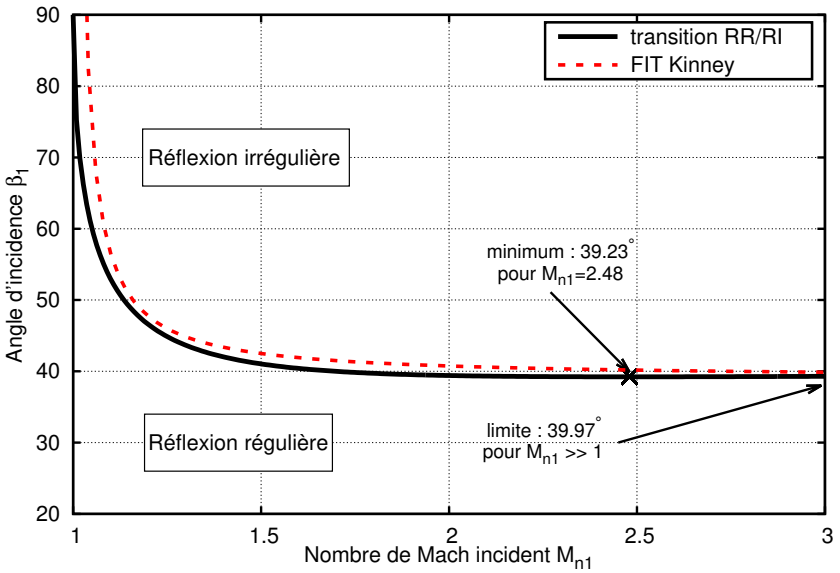


FIGURE B.5 – Angle de transition théorique d'une réflexion régulière (RR) à une réflexion irrégulière (RI) en fonction du nombre de Mach incident du choc. Courbe pleine : transition théorique (relations (B.5)). Courbe pointillée : formule empirique proposée par Kinney [64] (relation (B.6)).

faible), l'angle d'incidence de transition entre ces deux régimes se rapproche de 90°. Lorsque l'intensité du choc augmente, cet angle limite diminue rapidement. Il vaut par exemple environ 52° pour un nombre de Mach incident de 1.1. L'angle d'incidence varie peu pour un nombre de Mach plus important. Pour un choc fort, correspondant à un nombre de Mach élevé, une réflexion irrégulière apparaît systématiquement au-delà d'un angle d'incidence de 39.97°. Une formule empirique établie par Kinney permet d'estimer l'angle de transition en fonction de

M_{n1} [64] :

$$\beta_t = \frac{1.75}{M_{n1} - 1} + 39. \tag{B.6}$$

Elle est tracée en figure B.5. Cette transition d'un régime à l'autre a été observée expérimentalement autour de l'angle de transition théorique β_{lim}. On note toutefois que la réflexion régulière persiste au-delà de cet angle en raison des forces visqueuses [11].

La théorie des trois chocs [15] est un modèle analytique qui décrit l'écoulement près du point triple de la réflexion de Mach. La configuration type est schématisée en figure B.4. Cette théorie est en bon accord avec les observations expérimentales pour un nombre de Mach incident supérieur à 1.47 [30]. Elle repose sur les hypothèses que la solution est auto-semblable, que les chocs sont droits et que les forces de viscosité peuvent être négligées. Pour les chocs faibles (avec un nombre de Mach incident inférieur à 1.035), la théorie des trois chocs mène à la conclusion que la réflexion de Mach est irréalisable physiquement alors qu'elle est observée expérimentalement. Cet écart entre théorie et expérience est connu sous le nom de paradoxe de von Neumann. La structure de la réflexion est plus complexe [129]. Il a été mis en évidence, au travers d'études expérimentales et numériques, l'importance de la viscosité et de la conduction thermique [55] ainsi que la nature non auto-similaire de la réflexion pour un choc faible [68]. Dans ce cas, le choc est courbe et la transition entre le front de Mach et le choc incident est continue. On parle alors de réflexion de von Neumann, en distinction de la réflexion de Mach pour lequel le pied de Mach est droit et la transition discontinue. Cet aspect n'est pas traité dans le cadre de notre étude.

Annexe C

Interpolation spline cubique

L'interpolation d'un champ discret défini par un nuage de points est un problème classique de l'analyse numérique. Elle consiste à définir une fonction au minimum continue passant par l'ensemble de ces points. En pratique, il est souvent impératif d'obtenir des courbes ne présentant pas d'oscillation au niveau des forts gradients.

Soit $\{s_i, f_i\}_{i=1,\dots,N}$, tel que $s_1 < s_2 < \cdots < s_N$, un ensemble de points. L'interpolation de ces données consiste à construire une fonction $s \in [s_1, s_N] \to F(s)$ telle que pour tout $i = 1, \dots, N$, $F(s_i) = f_i$. De nombreuses méthodes existent pour cela [35, 123]. On peut évoquer l'interpolation polynomiale, consistant à faire passer un polynôme, de degré au moins $N-1$, par l'ensemble de ces points. L'approximation n'est toutefois pas toujours fiable. Dans le cas de l'interpolation de Lagrange ou de Newton par exemple, l'interpolation en des points équirépartis peut osciller très fortement en dehors de ces points. Il s'agit du phénomène de Runge.

L'interpolation spline est souvent préférée à l'interpolation polynomiale. Elle permet d'obtenir des résultats similaires en utilisant des polynômes locaux de degré inférieur, tout en évitant les oscillations liées au phénomène de Runge. Une courbe spline sur $[s_1, s_N]$ est une fonction polynomiale par morceaux :

$$F(s) = \sum_{i=1}^{N-1} P_i(s) \chi_{[s_i, s_{i+1}]}(s), \tag{C.1}$$

où P_i est un polynôme, et $\chi_{[s_i,s_{i+1}]}$ est la fonction indicatrice sur $[s_i, s_{i+1}]$ qui vaut 1 si s appartient à $[s_i, s_{i+1}]$ et 0 sinon. Chaque polynôme interpole les données localement dans l'intervalle $[s_i, s_{i+1}]$. La continuité de la spline est assurée en imposant :

$$P_i(s_i) = f_i \quad \text{et} \quad P_i(s_{i+1}) = f_{i+1}, \quad \text{pour } i = 1, \dots, N-1.$$

Et étant donné qu'un polynôme est de classe C^∞, la régularité de la spline dépend de la continuité des dérivées des polynômes au niveau des noeuds s_i. L'interpolation spline sera de classe C^p si pour tout $k = 1, \dots, p$, on a

$$P_{i-1}^{(k)}(s_i) = P_i^{(k)}(s_i), \quad \text{pour } i = 2, \dots, N-1,$$

avec $P^{(k)}$ la dérivée k-ième de P.

Lorsque le degré des polynômes P_i est identique, le degré de la spline correspond à ce degré. La spline la plus simple est de degré 1. Elle correspond à l'interpolation linéaire sur chaque intervalle $[s_i, s_{i+1}]$:

$$P_i(s) = f_i + \frac{f_{i+1} - f_i}{s_{i+1} - s_i}(s - s_i), \quad \text{pour } i = 1, \dots, N-1.$$

Cette spline est alors seulement continue et d'ordre 1. Si les données $\{f_i\}$ sont issues d'une fonction f de classe C^p, on rappelle qu'une interpolation $Q(s)$ de ces données est d'ordre p si

$$Q(s) = f(s) + O(\Delta s_{max}^p),$$

où $\Delta s_{max} = \max_{i=1,\dots,N-1} |s_{i+1} - s_i|$ est le pas maximum de discrétisation.

La spline cubique est un bon compromis entre régularité de la courbe et degré des polynômes. L'interpolant est au moins de classe C^1, et a possiblement, mais pas nécessairement, une dérivée seconde continue. Cette continuité, ainsi que l'ordre de l'interpolation, dépendent du calcul des pentes $\{f'_i\}$. La première section décrit en détail la construction de la spline cubique.

Pour des données monotones, l'interpolation spline cubique résultante n'est pas nécessairement monotone. Une correction des pentes $\{f'_i\}$ est alors à apporter afin de rendre compte de cette monotonie. Les limiteurs de pente sont décrits dans la deuxième section. Néanmoins, ces limiteurs sont seulement d'ordre 1 et réduisent l'interpolation au niveau des extrema, diminuant la précision de l'interpolation. Cela nous mène finalement, dans la troisième section, à étudier une extension des limiteurs de pente prenant en compte les potentiels extrema.

L'étude présentée dans cette annexe repose principalement sur [60, 59].

C.1 Interpolation spline cubique

Dans cette section, nous présentons l'interpolation spline cubique. Celle-ci repose sur la connaissance des pentes $\{f'_i\}_{i=1,\dots,N}$ aux points de jonction $\{s_i\}_{i=1,\dots,N}$. Lorsqu'elles ne sont pas connues, deux approches existent afin de les estimer. La première consiste à imposer la continuité de la dérivée seconde de la spline, mettant en évidence un système linéaire d'inconnues $(f'_i)_{i=1,\dots,N}$ à résoudre. La seconde est basée sur le calcul approximatif des pentes au moyen de considérations locales telles que des développements limités.

Sur l'intervalle $[s_i, s_{i+1}]$, on définit l'interpolant d'Hermite cubique connectant les points (s_i, f_i) et (s_{i+1}, f_{i+1}) par :

$$P_i(t_i) = (1-t_i)f_i + t_i f_{i+1} + t_i(1-t_i)(a_i(1-t_i) + b_i t_i), \tag{C.2}$$

avec

$$t_i = \frac{s - s_i}{s_{i+1} - s_i} \in [0,1], \tag{C.3}$$

$$a_i = \quad f'_i\,(s_{i+1} - s_i) - (f_{i+1} - f_i) \tag{C.4a}$$

$$b_i = -f'_{i+1}\,(s_{i+1} - s_i) + (f_{i+1} - f_i)\,. \tag{C.4b}$$

Le terme f'_i est une estimation de la dérivée première de F au point s_i : $f'_i \approx F'(s_i)$. Il est aisé de vérifier que $P'_i(0) = f'_i$ et $P'_{i+1}(1) = f'_{i+1}$. L'interpolation (C.2) est au moins d'ordre 4 si les dérivées $\{f'_i\}$ sont exactes ou calculées approximativement à l'ordre 3. Elle est d'ordre 3 si leurs calculs approchés sont d'ordre 2, et ainsi de suite. La spline cubique est ainsi définie par

$$F(s) = \sum_{i=1}^{N-1} P_i(t_i(s)), \tag{C.5}$$

et est au moins de classe C^1.

L'ensemble des pentes $\{f'_i\}_{i=1,\dots,N}$ peut être estimé de différentes manières. Une première méthode consiste à imposer la régularité de la dérivée seconde de la spline aux points de jonction. On aboutit alors à un système linéaire à résoudre, résultant en une dépendance non locale de l'interpolation sur les données. La spline cubique obtenue est qualifiée de *spline cubique globale*.

Spline cubique globale. Soit $i \in \{1, \dots, N-1\}$. En dérivant deux fois la relation (C.2) par rapport à s, il vient :

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}\Big(P_i(t_i)\Big) = \frac{2}{(s_{i+1}-s_i)^2}\Big\{(1-2t_i)(b_i-a_i) - a_i(1-t_i) - b_i t_i\Big\}.$$

En particulier, la dérivée seconde de P_i vérifie aux noeuds s_i ($t_i = 0$) et s_{i+1} ($t_i = 1$) :

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2 P_i}{\mathrm{d}s^2}\right|_{t_i=0} = \frac{2}{(s_{i+1}-s_i)^2}\,(b_i - 2a_i) \tag{C.6a}$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2 P_i}{\mathrm{d}s^2}\right|_{t_i=1} = \frac{2}{(s_{i+1}-s_i)^2}\,(a_i - 2b_i). \tag{C.6b}$$

La fonction F est alors de classe C^2 sur $[s_1, s_N]$ si et seulement si

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2 P_{i-1}}{\mathrm{d}s^2}\right|_{t_{i-1}=1} = \left.\frac{\mathrm{d}^2 P_i}{\mathrm{d}s^2}\right|_{t_i=0}, \quad \text{pour } i = 2, \dots, N-1.$$

En considérant (C.6), cela aboutit à :

$$\frac{a_{i-1} - 2b_{i-1}}{(s_i - s_{i-1})^2} = \frac{b_i - 2a_i}{(s_{i+1}-s_i)^2}. \tag{C.7}$$

Finalement, en injectant les relations (C.4) dans (C.7), les pentes $(f'_i)_{i=2,..,N-1}$ vérifient le système linéaire tridiagonal suivant :

$$\frac{f'_{i-1}}{s_i - s_{i-1}} + 2\left(\frac{1}{s_i - s_{i-1}} + \frac{1}{s_{i+1}-s_i}\right) f'_i + \frac{f'_{i+1}}{s_{i+1}-s_i} = 3\left(\frac{f_i - f_{i-1}}{s_i - s_{i-1}} + \frac{f_{i+1}-f_i}{s_{i+1}-s_i}\right). \tag{C.8}$$

Le système (C.8) est complété par des conditions de bord en s_1 et s_N. Elles peuvent être de différentes natures :

1. Les dérivées aux bords, f'_1 et f'_N, sont connues ou estimées. L'estimation se fait par exemple à l'aide d'un développement limité à l'ordre 1 :

$$f'_1 = \frac{f_2 - f_1}{s_2 - s_1} \quad \text{et} \quad f'_N = \frac{f_N - f_{N-1}}{s_N - s_{N-1}}, \tag{C.9}$$

   ou à l'ordre 2 :

$$f'_1 = \frac{f_2 - f_1}{s_2 - s_1}\left(1 + \frac{s_2 - s_1}{s_3 - s_1}\right) - \frac{f_3 - f_2}{s_3 - s_2}\frac{s_2 - s_1}{s_3 - s_1} \tag{C.10a}$$

$$f'_N = \frac{f_N - f_{N-1}}{s_N - s_{N-1}}\left(1 + \frac{s_N - s_{N-1}}{s_N - s_{N-2}}\right) - \frac{f_{N-1} - f_{N-2}}{s_{N-1} - s_{N-2}}\frac{s_N - s_{N-1}}{s_N - s_{N-2}}; \tag{C.10b}$$

2. Les dérivées secondes sont nulles aux bords : $f_1'' = 0$ et $f_N'' = 0$. On parle alors de spline naturelle. Par (C.6) et (C.4), ces conditions s'expriment comme :

$$\frac{2}{s_2 - s_1} f_1' + \frac{1}{s_2 - s_1} f_2' \qquad = 3 \frac{f_2 - f_1}{(s_2 - s_1)^2} \tag{C.11a}$$

$$\frac{1}{s_N - s_{N-1}} f_{N-1}' + \frac{2}{s_N - s_{N-1}} f_N' = 3 \frac{f_N - f_{N-1}}{(s_N - s_{N-1})^2}; \tag{C.11b}$$

3. La condition de bord est périodique :

$$f_1' = f_N'. \tag{C.12}$$

Du fait de la résolution d'un système linéaire, les résultats de l'interpolation dans un intervalle pourront dépendre des données loin de ce dernier en principe. En présence de forts gradients dans les données, typiquement un choc, l'interpolation spline cubique mène à de sévères oscillations sur les variables interpolées. Cette dépendance globale des données peut être évitée en déterminant les pentes au moyen de considérations locales. Dans ce cas, la continuité de la dérivée seconde est perdue en général.

Spline cubique locale. La détermination locale des pentes de la spline peut s'effectuer par un développement limité à l'ordre 2. Nous avons dans ce cas, pour $i = 2, \ldots, N-1$:

$$f_i' = \frac{1}{s_{i+1} - s_{i-1}} \left(\frac{f_i - f_{i-1}}{s_i - s_{i-1}} (s_{i+1} - s_i) + \frac{f_{i+1} - f_i}{s_{i+1} - s_i} (s_i - s_{i-1}) \right). \tag{C.13}$$

Les relations (C.13) sont ensuite complétées par les conditions de bord en s_1 et s_N (C.10), (C.11) ou (C.12) par exemple. Cette approximation n'utilise que les données voisines pour calculer f_i'. Il en résulte que l'interpolation spline est définie localement. L'expression (C.13) est parfois appelée formule parabolique puisqu'il s'agit en réalité de la pente en s_i de la parabole interceptant les points (s_{i-1}, f_{i-1}), (s_i, f_i) et (s_{i+1}, f_{i+1}).

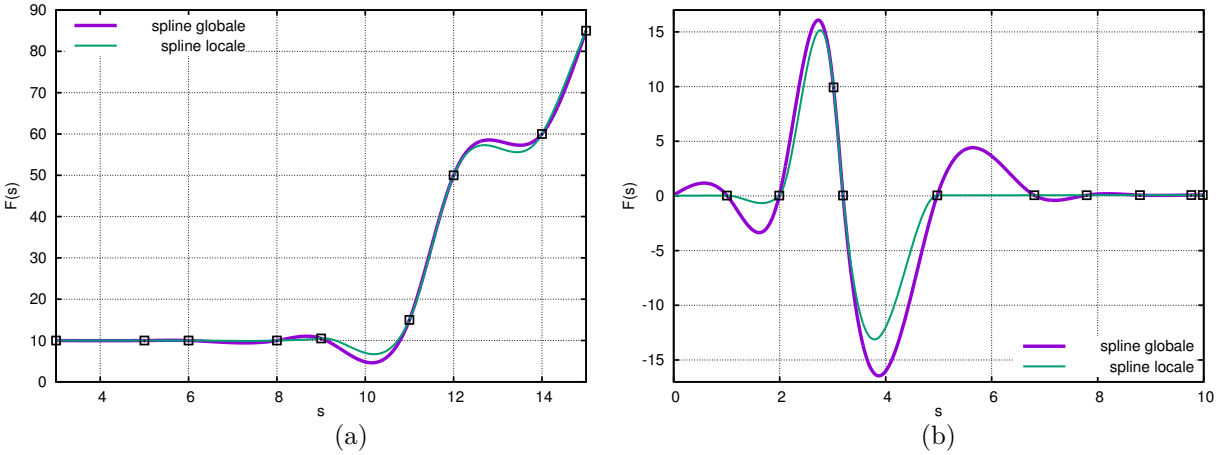


FIGURE C.1 – Interpolations spline cubique globale et locale sans limitation. Les données sont issues de [59] (fig. (a)) et de [125] (fig. (b)).

Lorsque les données sont monotones sur $[s_i, s_{i+1}]$, l'interpolant (C.2) ne l'est pas obligatoirement. Ce phénomène est observable en figure C.1(a). Sur cet exemple, les données sont

croissantes tandis que l'interpolation spline, qu'elle soit globale ou locale, présente un minimum local et un maximum local. De surcroît, l'interpolation spline peut mener à de sévères oscillations près des zones de fort gradient, *cf.* Fig. C.1(b). La spline globale oscille sur une plus grande distance que la spline locale.

La monotonie de l'interpolation peut être imposée en limitant les valeurs que peuvent prendre les pentes f'_i.

C.2 Condition nécessaire de monotonie et limiteurs de pente

Lorsque les données sont monotones, il existe une condition sur les pentes $\{f'_i\}$ afin d'assurer la monotonie de l'interpolation spline cubique (C.5). Cela mène alors aux limiteurs de pente. Nous en présentons quelques uns dans cette section. La plupart des résultats sont issus de [59].

Il convient tout d'abord de définir la monotonie des données. Les données $\{f_i\}$ sont dites croissantes en s_i si $f_{i-1} \leq f_i \leq f_{i+1}$. Elles sont croissantes sur $[s_i, s_{i+1}]$ si elles le sont en s_i et s_{i+1} : $f_{i-1} \leq f_i \leq f_{i+1} \leq f_{i+2}$. La même définition tient pour des données décroissantes en inversant les inégalités. Les données sont finalement dites monotones en s_i (respectivement sur $[s_i, s_{i+1}]$) si elles sont croissantes ou décroissantes en s_i (respectivement sur $[s_i, s_{i+1}]$).

Soit la fonction médiane de trois nombres a, b et c :

$$\text{median}\,(a,b,c) = \begin{cases} a & \text{si} \quad \min(b,c) < a < \max(b,c) \\ b & \text{si} \quad \min(a,c) < b < \max(a,c) \\ c & \text{si} \quad \min(a,b) < c < \max(a,b). \end{cases}$$

On définit la fonction minmod de deux nombres réels x et y comme étant la médiane de x, y et 0 :

$$\text{minmod}\,(x,y) = \text{median}\,(x,y,0) = \frac{1}{2}\Big(\text{sign}(x) + \text{sign}(y)\Big)\min\left(|x|,|y|\right),$$

avec $\text{sign}(x) = 1$ si x est positif, et $\text{sign}(x) = -1$ sinon.

On note également $I\left[x_1, x_2, \ldots, x_n\right]$ le plus petit intervalle contenant $x_1, \ldots, x_n$:

$$I\left[x_1, x_2, \ldots, x_n\right] = \left[\min(x_1, x_2, \ldots, x_n), \max(x_1, x_2, \ldots, x_n)\right].$$

Enfin, la pente de l'interpolation linéaire entre les points (s_i, f_i) et (s_{i+1}, f_{i+1}) est notée

$$p_{i+1/2} = \frac{f_{i+1} - f_i}{s_{i+1} - s_i}.$$

Lemme C.1 (*Condition nécessaire de monotonie*)

On suppose que les données sont monotones sur $[s_i, s_{i+1}]$.

$$\text{Si } f'_i \text{ et } f'_{i+1} \in I\left[0, 3p_{i+1/2}\right], \tag{C.14}$$

alors l'interpolation (C.2) est monotone sur $[s_i, s_{i+1}]$.

Preuve C.1

Le cas $f_i = f_{i+1}$ est trivial puisqu'alors l'interpolation est constante. On suppose donc dans la suite que $f_i \neq f_{i+1}$, et on effectue le changement de variable $g(t_i) = \frac{f_i(t_i) - f_{i+1}}{f_{i+1} - f_i}$:

$$g(t) = t + t(1-t)\left[(g'_i - 1)(1-t) + \left(1 - g'_{i+1}\right)t\right], \tag{C.15}$$

avec

$$g'_i = f'_i p_{i+1/2} \quad \text{et} \quad g'_{i+1} = f'_{i+1} p_{i+1/2}.$$

Ainsi, la monotonie de (C.2) sur $[s_i, s_{i+1}]$ est équivalente à celle de g sur $[0,1]$, et la condition (C.14) est équivalente à

$$g'_i \text{ et } g'_{i+1} \in [0,3]\,.$$

Chaque paire (g'_i, g'_{i+1}) définit un interpolant. Les quatres paires

$$(g'_i, g'_{i+1}) \in \{(0,0),(3,0),(0,3),(3,3)\}$$

forment les coins du carré de De Boor et Schwartz, et donnent les interpolants suivants

$$g_{(0,0)}(t) = -2t^3 + 3t^2, \quad g_{(3,0)}(t) = t^3 - 3t^2 + 3t,$$

$$g_{(0,3)}(t) = t^3, \quad g_{(3,3)}(t) = 4t^3 - 6t^2 + 3t.$$

Il est aisé de vérifier que ces quatre polynômes sont croissants sur $[0,1]$. De plus, toute combinaison linéaire avec des coefficients positifs de ces polynômes donne un polynôme croissant sur $[0,1]$. Par conséquent pour tout $(\alpha,\beta) = \left(g'_i, g'_{i+1}\right) \in [0,3]$, les fonctions suivantes sont croissantes :

$$g_{(\alpha,0)} = \frac{\alpha}{3} h_{(3,0)} + \left(1 - \frac{\alpha}{3}\right) h_{(0,0)},$$

$$g_{(\alpha,3)} = \frac{\alpha}{3} h_{(3,3)} + \left(1 - \frac{\alpha}{3}\right) h_{(0,3)},$$

$$g_{(\alpha,\beta)} = \frac{\beta}{3} h_{(\alpha,3)} + \left(1 - \frac{\beta}{3}\right) h_{(\alpha,0)}.$$

Cela montre la monotonie de la fonction g (C.15), et par conséquent celle de l'interpolation (C.2).

■

Remarque C.1

Fritsch et Carlson [44] ont trouvé une condition nécessaire et suffisante de monotonie de l'interpolation spline cubique. Celle-ci est une extension du lemme C.1. Il est cependant beaucoup plus aisé d'utiliser la condition (C.14).

Remarque C.2

Si la spline est quadratique, alors l'interpolation est monotone sur $[s_i, s_{i+1}]$ si et seulement si f'_i et $f'_{i+1} \in I\left[0, 2p_{i+1/2}\right]$ (voir lemme C.2).

La condition (C.14) implique

$$f'_i \in I[0, 3p_{i-1/2}] \quad \text{et} \quad f'_i \in I[0, 3p_{i+1/2}].$$

La pente f'_i appartient alors à l'intersection des deux intervalles $I[0, 3p_{i-1/2}]$ et $I[0, 3p_{i+1/2}]$:

$$f'_i \in I[0, 3p_i], \tag{C.16}$$

où $p_i = \text{minmod}\left(p_{i-1/2}, p_{i+1/2}\right)$. La condition (C.16) est appelée *condition MP* (Monotonicity Preserving), et $I[0, 3p_i]$ *intervalle MP*. Lorsque les données sont monotones en s_i et que la condition MP est vérifiée, alors la spline cubique (C.5) est monotone en s_i.

Proposition C.1

On suppose que l'ensemble $\{f_i\}$ est issu d'une fonction f de classe C^p et que f'_i approxime $f'(s_i)$ à l'ordre $p \geq 1$:

$$f'(s_i) = f'_i + O(h^p),$$

où h est le pas de discrétisation. Loin des extrema, la condition MP n'affecte pas f'_i pour une discrétisation suffisamment fine.

Preuve C.2

On suppose $f'(s_i) \neq 0$. Puisque $p_{i-1/2}$ et $p_{i+1/2}$ approchent $f'(s_i)$ à l'ordre $O(h)$, ils sont du même signe que $f'(s_i)$ pour h assez petit. Par conséquent, quitte à raffiner davantage, l'intervalle MP contient $f'(s_i)$ et, comme f'_i approche $f'(s_i)$ à l'ordre $p \geq 1$, la condition (C.16) est nécessairement vérifiée.

Près d'un point d'inflexion ($f'(s_*) = 0$, $f''(s_*) = 0$, f'' change de signe en s_* et s_i est près de s_*), f est localement croissante ou décroissante, et le raisonnement précédent s'applique.

■

Remarque C.3

Si f_i et f_{i+1} sont de part et d'autre d'un extrema mais non égales à ce dernier, alors $p_i = 0$ et donc l'intervalle $I[0, 3p_i]$ se réduit à $\{0\}$. Dans ce cas $f'(s_i) = 0$ et une perte de précision apparaît.

Différents algorithmes, appelés *limiteurs de pente*, existent dans la littérature, imposant aux dérivées f'_i de vérifier la condition MP. Citons par exemple le limiteur minmod qui est une conséquence directe de (C.16) :

$$f'_i \leftarrow \text{minmod}\left(f'_i, 3p_i\right), \tag{C.17}$$

ou bien le limiteur de Steffen [125] :

$$f'_i \leftarrow \left(\text{sign}(p_{i-1/2}) + \text{sign}(p_{i+1/2})\right) \min\left(|p_{i-1/2}|, |p_{i+1/2}|, \frac{1}{2}f'_i\right). \tag{C.18}$$

La condition (C.16) conduit à une théorie générale sur les limiteurs de pente [59], permettant de définir plusieurs types de limiteurs. Cette théorie n'est pas développée ici.

Les limiteurs de pente tels que (C.17) ou (C.18) sont définis à l'intérieur du domaine (ici pour $i = 2, \ldots, N-1$). Si les pentes sont estimées aux bords du domaine, il convient de les limiter afin d'assurer la monotonie de l'interpolation. En $i = 1$, la limitation s'effectue en imposant $p_{3/2} = p_{1/2}$. Pour l'exemple, le limiteur minmod donne alors

$$f'_1 \leftarrow \text{minmod}\left(f'_1, 3p_{3/2}\right).$$

De la même manière, la limitation en $i = N$ se fait en prenant $p_{N+1/2} = p_{N-1/2}$.

Les résultats des limiteurs minmod (C.17) et de Steffen (C.18) sont présentés en figure C.2. Il s'agit des mêmes exemples qu'en figure C.1. L'interpolation spline locale limitée est bien monotone dans les zones où les données le sont, là où l'interpolation sans limiteur oscille. Les résultats sont similaires pour la spline cubique globale.

Pour un maillage non-uniforme, on montre [59] que les limiteurs issus de la condition (C.16) sont d'ordre 1. L'interpolation spline cubique est alors d'ordre 2. De plus, par la contrainte (C.14), l'interpolation cubique se réduit à une interpolation linéaire au niveau des extrema. En effet, soient deux points sur une parabole tels que $f_i = f_{i+1}$. La condition (C.14) implique $f'_i = f'_{i+1} = 0$, et l'interpolation est linéaire dans cette zone. Ce fait est observable en figure C.3. Dans cet exemple, l'interpolation ne tient pas compte de l'extrema, induisant ainsi une perte de précision. Il est nécessaire de relaxer la condition MP (C.16).

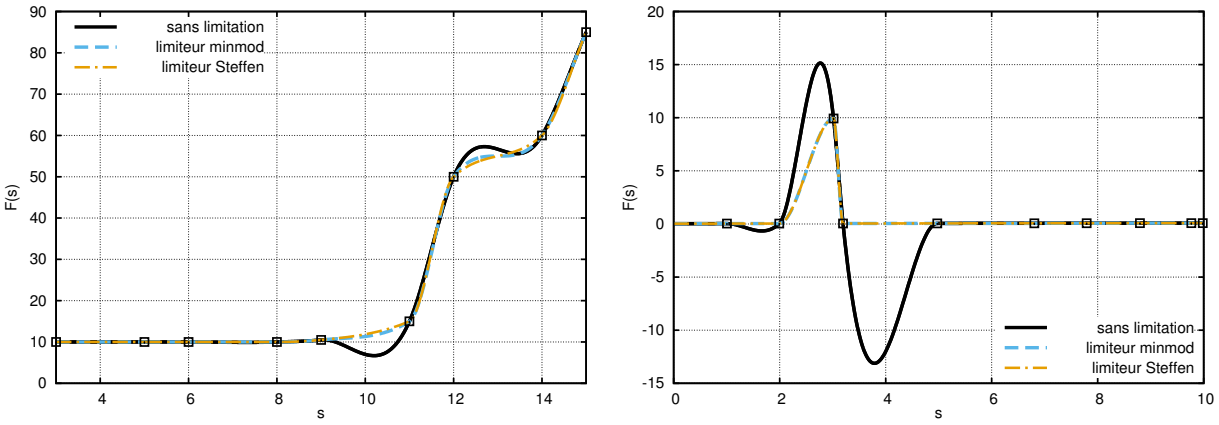


FIGURE C.2 – Interpolation spline cubique locale sans limitation, avec le limiteur minmod (C.17) et avec le limiteur de Steffen (C.18). Les données sont issues de [59] (fig. (a)) et de [125] (fig. (b)).

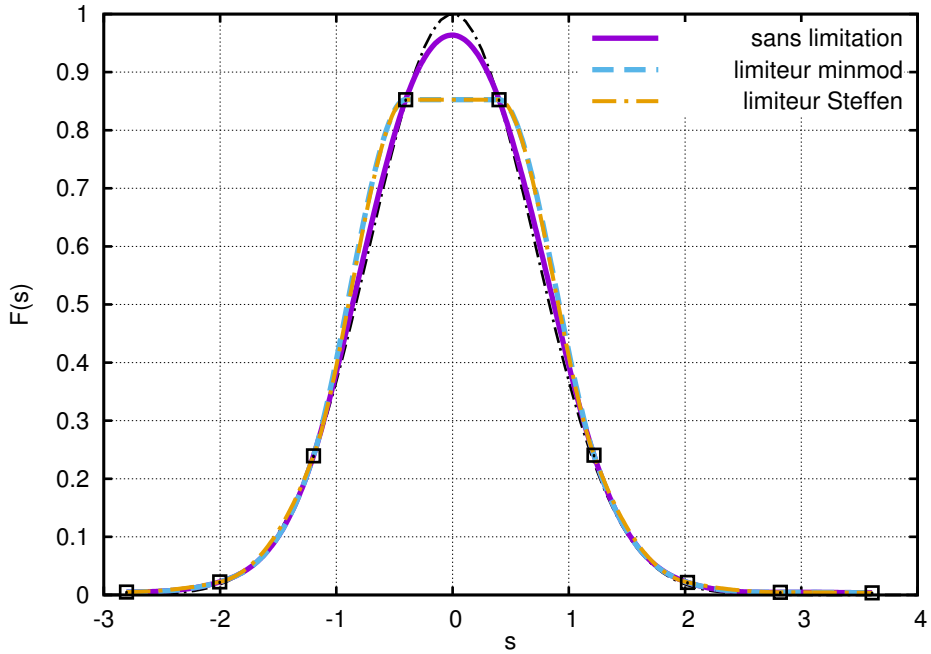


FIGURE C.3 – Interpolation spline cubique globale limitée par le limiteur minmod et le limiteur de Steffen. Les données (carrés noires) sont issues du graphe de $\exp(-x^2)$ (courbe en pointillée).

C.3 Limiteurs de pente d'ordre 2 et préservation des extrema

Pour obtenir une précision au moins d'ordre 2 sur les pentes et tenir compte des potentiels extrema, l'approximation linéaire des pentes est remplacée par une approximation parabolique.

Sur l'intervalle $[s_i, s_{i+1}]$, on considère les paraboles provenant de l'interpolation de Newton [35] :

$$q_i(s) = f_i + p_{i+1/2}(s - s_i) + d_i(s - s_i)(s - s_{i+1}), \tag{C.19}$$

et

$$q_{i+1}(s) = f_i + p_{i+1/2}(s - s_i) + d_{i+1}(s - s_i)(s - s_{i+1}). \tag{C.20}$$

La première interpole les points $F_{i-1} = (s_{i-1}, f_{i-1})$, $F_i = (s_i, f_i)$ et $F_{i+1} = (s_{i+1}, f_{i+1})$, tandis que la deuxième interpole les points F_i, F_{i+1} et $F_{i+2} = (s_{i+2}, f_{i+2})$. Les coefficients d_i et d_{i+1} correspondent aux secondes différences divisées de Newton :

$$d_i = \frac{p_{i+1/2} - p_{i-1/2}}{s_{i+1} - s_{i-1}} \quad \text{et} \quad d_{i+1} = \frac{p_{i+3/2} - p_{i+1/2}}{s_{i+2} - s_i}.$$

Si les données $\{f_i\}$ sont un échantillon d'une fonction f de classe C^3, cette interpolation est précise à l'ordre 3, pour tout $s \in [s_{i-1}, s_{i+1}]$:

$$q_i(s) = f(s) + O(\max(h_i, h_{i+1})^3) \quad \text{et} \quad q_i'(s) = f'(s) + O(\max(h_i, h_{i+1})^2), \tag{C.21}$$

où $h_i = s_i - s_{i-1}$.

Soient Q_i et Q_{i+1} les graphes des polynômes (C.19) et (C.20) respectivement. L'équation de la courbe $Q_{i+1/2}$, médiane des courbes Q_i et Q_{i+1} et de la droite (F_iF_{i+1}) (cf Fig. C.4), est définie par :

$$q_{i+1/2}(s) = f_i + p_{i+1/2}(s - s_i) + d_{i+1/2}(s - s_i)(s - s_{i+1}). \tag{C.22}$$

Ayant remarqué que l'équation de la droite (F_iF_{i+1}) est donnée par (C.19) avec $d_i = 0$, le coefficient $d_{i+1/2}$ est naturellement la médiane de 0, d_i et d_{i+1} :

$$d_{i+1/2} = \text{minmod}\left(d_i, d_{i+1}\right).$$

La dérivée du polynôme (C.22) est donnée par

$$q_{i+1/2}'(s) = p_{i+1/2}(s - s_i) + d_{i+1/2}(2s - s_i - s_{i+1}). \tag{C.23}$$

Il vient alors, par la définition de $d_{i+1/2}$, que $q_{i+1/2}'(s)$ est la médiane de $p_{i+1/2}$, $q_i'(s)$ et $q_{i+1}'(s)$. Il en résulte donc

$$q_{i+1/2}(s) = f(s) + O(h_{i+1}^3) \quad \text{et} \quad q_{i+1/2}'(s) = f'(s) + O(h_{i+1}^2),$$

ainsi que

$$q_{i-1/2}'(s_i) \in I[p_{i-1/2}, q_i'(s_i)] \quad \text{et} \quad q_{i+1/2}'(s_i) \in I[p_{i+1/2}, q_i'(s_i)]. \tag{C.24}$$

Remarque C.4

La détermination locale des pentes de la spline $\{f_i'\}$ telle que discutée en section C.1 peut se faire également par la formulation

$$f_i' = \frac{1}{2}\left(q_{i-1/2}'(s_i) + q_{i+1/2}'(s_i)\right),$$

au lieu de (C.13). Il s'agit également d'une approximation à l'ordre 2.

Si les données sont monotones sur $[s_i, s_{i+1}]$, nous allons démontrer que le polynôme $q_{i+1/2}$ est monotone sur $[s_i, s_{i+1}]$. Pour cela, le lemme qui suit est nécessaire.

Lemme C.2

Soit q une parabole passant par les points F_i et F_{i+1} :

$$q(s) = f_i + p_{i+1/2}(s - s_i) + d(s - s_i)(s - s_{i+1}). \tag{C.25}$$

La fonction q est croissante en s_i si et seulement si

$$p_{i+1/2} > d\left(s_{i+1} - s_i\right), \tag{C.26}$$

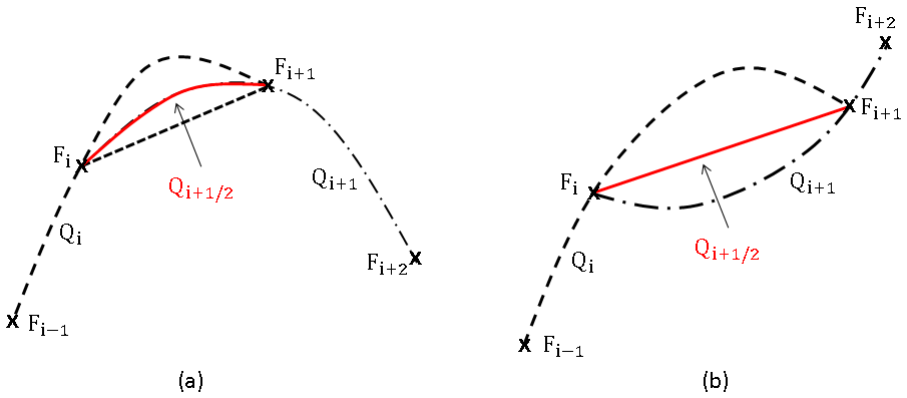


FIGURE C.4 – Définition de $Q_{i+1/2}$ sur $[s_i, s_{i+1}]$. Il s'agit de la médiane entre la droite (F_iF_{i+1}), la courbe Q_i (parabole interpolant les points F_{i-1}, F_i et F_{i+1}) et la courbe Q_{i+1} (parabole interpolant les points F_i, F_{i+1} et F_{i+2}).

et elle y est décroissante si et seulement si

$$-p_{i+1/2} > -d\,(s_{i+1} - s_i)\,.$$

Elle est monotone sur $[s_i, s_{i+1}]$ si et seulement si l'une des conditions suivantes est vérifiée :

1.
$$|d| \leq \frac{|p_{i+1/2}|}{s_{i+1} - s_i}, \tag{C.27}$$

2.
$$q'(s_i) \in I[0, 2p_{i+1/2}], \tag{C.28}$$

3.
$$q'(s_{i+1}) \in I[0, 2p_{i+1/2}]. \tag{C.29}$$

Preuve C.3

La dérivée de q s'exprime comme :

$$q'(s) = p_{i+1/2} + d\,(2s - s_i - s_{i+1})\,,$$

donnant en particulier en s_i et s_{i+1} :

$$q'(s_i) = p_{i+1/2} - d\,(s_{i+1} - s_i) \quad \text{et} \quad q'(s_{i+1}) = p_{i+1/2} + d\,(s_{i+1} - s_i)\,. \tag{C.30}$$

Puisque q est une parabole, elle est croissante sur $[s_i, s_{i+1}]$ si et seulement si $q'(s_i) > 0$ et $q'(s_{i+1}) > 0$, *i.e.* si et seulement si

$$p_{i+1/2} > d(s_{i+1} - s_i) \quad \text{et} \quad p_{i+1/2} > -d(s_{i+1} - s_i).$$

Par un raisonnement analogue pour q décroissante, la condition (C.27) suit.

Les conditions (C.28) et (C.29) découlent ensuite de cette relation et de (C.30).

■

Proposition C.2

Si les données sont monotones sur $[s_i, s_{i+1}]$, alors $q_{i+1/2}$ est monotone sur $[s_i, s_{i+1}]$ et

$$q'_{i-1/2}(x_i)q'_{i+1/2}(x_i) \geq 0 \quad , \quad q'_{i+1/2}(x_{i+1})q'_{i+3/2}(x_{i+1}) \geq 0. \tag{C.31}$$

En particulier, si elles sont monotones en s_i, alors $q_{i+1/2}$ l'est également en s_i et

$$q'_{i-1/2}(x_i)q'_{i+1/2}(x_i) \geq 0. \tag{C.32}$$

Preuve C.4

On suppose que les données sont monotones sur $[s_i, s_{i+1}]$. Le cas $f_i = f_{i+1}$ est trivial car alors $q_{i+1/2}$ se réduit à une fonction constante sur $[s_i, s_{i+1}]$. On considère donc dans la suite le cas $f_i \neq f_{i+1}$. En faisant les changements linéaires

$$t = \frac{s - s_i}{s_{i+1} - s_i} \quad \text{et} \quad g(t) = \frac{q_{i+1/2}(s) - f_i}{f_{i+1} - f_i},$$

il est clair que la monotonie de $q_{i+1/2}$ sur $[s_i, s_{i+1}]$ est équivalente à celle de g sur $[0, 1]$. Sans perte de généralité, on suppose dans la suite que $s_i = 0$, $s_{i+1} = 1$, $f_i = 0$ et $f_{i+1} = 1$. Par conséquent, on a $f_{i-1} \leq 0$, $f_{i+2} \geq 1$, ainsi que $p_{i-1/2} \geq 0$, $p_{i+1/2} = 1$ et $p_{i+3/2} \geq 0$. Comme $s_{i+1} - s_{i-1} > 1$ et $s_{i+2} - s_i > 1$, il vient

$$d_i = \frac{p_{i+1/2} - p_{i-1/2}}{s_{i+1} - s_{i-1}} < 1 \quad \text{et} \quad d_{i+1} = \frac{p_{i+3/2} - p_{i+1/2}}{s_{i+2} - s_i} > -1.$$

Puisque $d_{i+1/2}$ est la médiane de 0, d_i et d_{i+1}, alors $-1 < d_{i+1/2} < 1$. Il s'agit de la condition (C.27) appliquée à $q_{i+1/2}$. La fonction $q_{i+1/2}$ est donc croissante sur $[0, 1]$.
Les inégalités $d_i < 1$ et $d_{i+1} > -1$ impliquent :

$$q'_i(s_i) \geq 0 \quad \text{et} \quad q'_{i+1}(s_{i+1}) \geq 0,$$

par (C.30). Comme $p_{i-1/2} \geq 0$ et $p_{i+3/2} \geq 0$, il en résulte par (C.24) :

$$q'_{i-1/2}(s_i) \geq 0 \quad \text{et} \quad q'_{i+3/2}(s_{i+1}) \geq 0.$$

Enfin, ces dernières relations et la croissance de $q_{i+1/2}$ sur $[s_i, s_{i+1}]$ donnent les inégalités (C.31), et la première partie de la proposition est démontrée.

Supposons maintenant que les données soient monotones en s_i. Si elles le sont également en s_{i+1}, le résultat découle directement de ce qui vient d'être prouvé. De plus, le cas $f_i = f_{i+1}$ est encore une fois trivial. On suppose donc que $f_i \neq f_{i+1}$ et que les données ne sont pas monotones en s_{i+1}.
Par le même raisonnement que précédemment, on peut supposer $s_i = 0$, $s_{i+1} = 1$, $f_i = 0$ et $f_{i+1} = 1$, ce qui implique $f_{i-1} \leq 0$, $p_{i-1/2} \geq 0$ et $p_{i+1/2} = 1$. On prouve encore une fois $d_i < 1$ et donc $q'(s_i) \geq 0$. Comme les données ne sont pas monotones en s_{i+1}, il vient cette fois-ci : $p_{i+3/2} \leq 0$. Il en résulte alors :

$$d_{i+1} = \frac{p_{i+3/2} - p_{i+1/2}}{s_{i+2} - s_i} \leq \frac{-1}{s_{i+2} - s_i} < 1,$$

et la condition (C.26) est retrouvée. On a donc $q'_{i+1}(s_i) \geq 0$. Finalement, puisque $q'_{i+1/2}(s_i)$ est la médiane de $p_{i+1/2} \geq 0$, $q'_i(s_i) \geq 0$ et $q'_{i+1}(s_i) \geq 0$, $q_{i+1/2}$ est donc croissante en s_i. ■

Afin de relaxer la condition MP, (C.14) est remplacée par

$$f'_i \in I\left[0, 3p_{i+1/2}, \frac{3}{2}q'_{i+1/2}(s_i)\right] \quad \text{et} \quad f'_{i+1} \in I\left[0, 3p_{i+1/2}, \frac{3}{2}q'_{i+1/2}(s_{i+1})\right]. \tag{C.33}$$

Si les données sont monotones, la contrainte (C.33) se réduit à (C.14). En effet, par la propriété C.2, $q_{i+1/2}$ est croissante sur $[s_i, s_{i+1}]$, et d'après le lemme C.2, cela est équivalent à (C.28) et (C.29) :

$$\frac{3}{2}q'_{i+1/2}(s_i) \in I[0, 3p_{i+1/2}] \quad \text{et} \quad \frac{3}{2}q'_{i+1/2}(s_{i+1}) \in I[0, 3p_{i+1/2}]. \tag{C.34}$$

La condition (C.33) implique

$$f'_i \in I\left[0, 3p_{i+1/2}, \frac{3}{2}q'_{i+1/2}(s_i)\right] \quad \text{et} \quad f'_i \in I\left[0, 3p_{i-1/2}, \frac{3}{2}q'_{i-1/2}(s_i)\right];$$

i.e. f'_i appartient à l'intersection de ces deux intervalles. Cette intersection contient l'intervalle $I\left[0, 3p_i, \frac{3}{2}q_i\right]$, avec $q_i = \text{minmod}\left(q'_{i-1/2}(s_i), q'_{i+1/2}(s_i)\right)$. Finalement, la condition MP (C.16) est remplacée par la condition suivante :

$$f'_i \in I\left[0, 3p_i, \frac{3}{2}q_i\right]. \tag{C.35}$$

Ainsi, lorsque les données sont monotones en s_i, la relation (C.32) assure que $q_i \neq 0$. De plus, par (C.34) : $I\left[0, 3p_i, \frac{3}{2}q_i\right] \subset I\left[0, 3p_i\right]$, et la condition MP est retrouvée. Sinon, l'intervalle peut être plus large. La condition (C.35) est appelée *condition MEP* (Monotonicity and Extrema Preserving), et l'intervalle $I\left[0, 3p_i, \frac{3}{2}q_i\right]$ intervalle MEP.

La condition MEP n'affecte pas l'approximation de f'_i pour un maillage suffisamment fin. En particulier il n'y a pas de perte de précision près des extrema contrairement à la condition MP (remarque C.3).

Proposition C.3

On suppose que l'ensemble $\{f_i\}$ est issu d'une fonction f de classe C^p et que f'_i approxime $f'(s_i)$ à l'ordre $p \geq 1$:

$$f'(s_i) = f'_i + O(h^p),$$

où h est le pas de discrétisation. La condition MEP n'affecte pas f'_i pour une discrétisation suffisamment fine.

Preuve C.5

La démonstration est analogue à celle de la proposition C.1 si $f'(s_i) \neq 0$ ou près d'un point d'inflexion.

Supposons que f_i et f_{i+1} se trouvent de part et d'autre d'un extrema : $s_i < s_* < s_{i+1}$ tel que $f'(s_*) = 0$ et $f''(s_*) \neq 0$. Alors de part et d'autre de s_* les pentes sont de signes différents : $p_{i-1/2}p_{i+1/2} \leq 0$, et donc $p_i = 0$. Puisque d_i et d_{i+1} approximent respectivement $f''(s_i)$ et $f''(s_{i+1})$ au moins à l'ordre $O(h)$, ils sont du même signe que $f''(s_*)$ quitte à raffiner le maillage. Ainsi $q_i \neq 0$ et l'intervalle MEP n'est pas réduit à zéro. Comme $q'_{i-1/2}(s_i)$ et $q'_{i+1/2}(s_i)$ approchent $f'(s_i)$ à l'ordre $O(h^2)$, $f'(s_i)$ appartient à l'intervalle MEP pour un pas suffisamment petit. Finalement, le résultat suit puisque f'_i approxime $f'(s_i)$ à l'ordre $p \geq 1$.

■

Proposition C.4

On a

$$I\left[0, 3p_i, \frac{3}{2}q_i\right] = I\left[0, \text{sign}(q_i)\max\left(3|p_i|, \frac{3}{2}|q_i|\right)\right].$$

Preuve C.6

Si les données ne sont pas monotones en s_i, alors $p_{i-1/2}p_{i+1/2} \leq 0$, et donc $p_i = 0$. Le résultat suit. Il suffit alors de démontrer que p_i et q_i sont du même signe lorsque les données sont monotones.

On suppose que les données sont croissantes en s_i. Le raisonnement sera analogue si elles sont décroissantes. Alors $p_{i-1/2} \geq 0$ et $p_{i+1/2} \geq 0$, et il vient immédiatement que $p_i \geq 0$. La propriété C.2 implique également $q'_{i-1/2}(s_i) \geq 0$ et $q'_{i+1/2}(s_i) \geq 0$. q_i est ainsi nul. ■

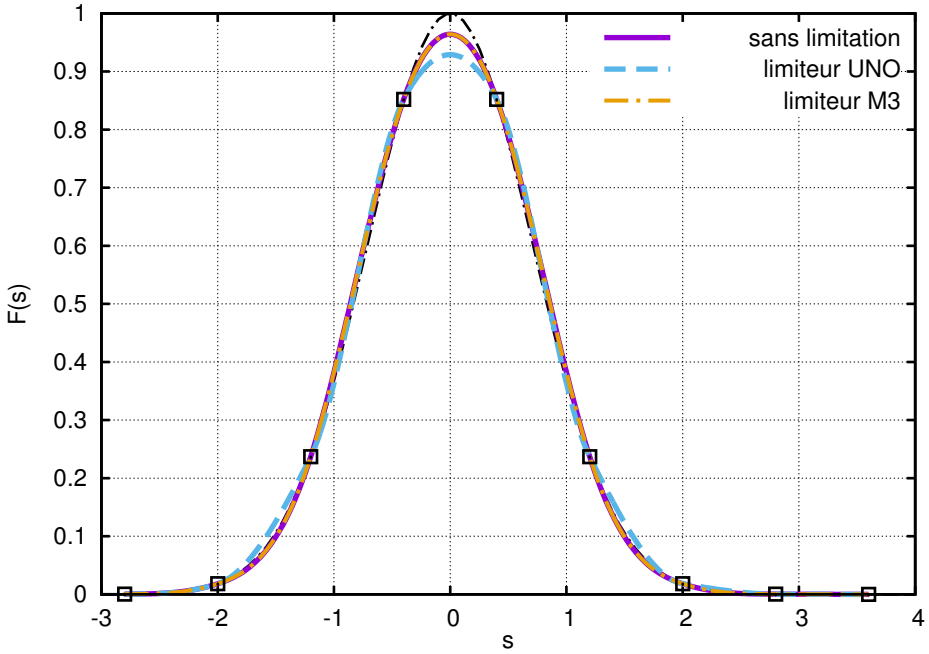


FIGURE C.5 – Interpolation spline cubique globale limitée par le limiteur UNO (C.37) et le limiteur M3 (C.38). Les données (carrés noires) sont issues du graphe de $\exp(-x^2)$ (courbe en pointillée).

La condition MEP se réécrit ainsi sous la forme

$$f'_i \in I\left[0, \text{sign}(q_i)\max\left(3|p_i|, \frac{3}{2}|q_i|\right)\right]. \tag{C.36}$$

Cette condition permet de définir un certain nombre de limiteur d'ordre 2 [59] tel que le limiteur UNO (Uniformly Non Oscillatory) :

$$f'_i \leftarrow \text{minmod}\left(f'_i, q_i\right), \tag{C.37}$$

ou le limiteur M3 (Monotonicity third order).

$$f'_i \leftarrow \text{minmod}\left(f'_i, \text{sign}(q_i)\max\left(3|p_i|, \frac{3}{2}|q_i|\right)\right). \tag{C.38}$$

L'exemple d'un jeu de donnée avec un extrema est maintenant considéré. Il s'agit du cas traité précédemment (cf Fig. C.3). Les résultats pour la spline cubique globale sans et avec ces limiteurs sont présentés en figure C.5. L'interpolation limitée préserve bien les extrema, là où les limiteurs minmod et de Steffen ont une perte de précision (cf Fig. C.3). Les résultats sont similaires pour une interpolations spline locale.

Annexe D

Équation d'évolution des effets arrière dans le modèle de Best

Cette annexe présente de manière détaillée les étapes de calcul aboutissant à l'équation d'évolution des effets arrière du modèle de Best (GSD ordre 1), écrite pour un milieu homogène et au repos. Ces calculs sont amorcés en section 9.1.1 et s'appuient sur [20].

Développement de l'équation sur les effets arrière (9.13)**.** On rappelle l'équation (9.13) :

$$\frac{\mathrm{d}Q_1}{\mathrm{d}r} = -\partial_t\left(\frac{1}{v+c}\right)Q_1 + \left(\frac{1}{c_+M} - \frac{1}{v+c}\right)Q_2 - \partial_t\left(\frac{\rho c^2 v}{v+c}\right)\frac{A'(r)}{A} - \partial_t(\rho c)\partial_r v + \partial_r(\rho c)\partial_t v, \quad \text{(D.1)}$$

où $Q_1 = (\partial_t p + \rho c \partial_t v)_-$ et $Q_2 = (\partial_t(\partial_t p + \rho c \partial_t v))_-$. Cette équation se tient au niveau du choc, mais les indices – ont été omis pour plus de lisibilité. Les termes $\partial_t p = (\partial_t p)_-$, $\partial_r p = (\partial_r p)_-$, etc ..., sont exprimés en fonction de M, $\mathrm{d}_t M$, où d_t désigne la dérivée Lagrangienne suivant le mouvement du choc, et $\frac{A'(r)}{A(r)}$ dans la suite.

Les équations d'Euler écrites pour une tuyère en l'absence de forces extérieures s'écrivent sous forme caractéristique comme (3.2) :

$$C^+ : \quad \partial_t p + (v+c)\partial_r p + \rho c\Big(\partial_t v + (v+c)\partial_r v\Big) + \rho c^2 v\frac{A'(r)}{A} = 0 \quad \text{(D.2a)}$$

$$C^- : \quad \partial_t p + (v-c)\partial_r p - \rho c\Big(\partial_t v + (v-c)\partial_r v\Big) + \rho c^2 v\frac{A'(r)}{A} = 0 \quad \text{(D.2b)}$$

$$S : \quad \partial_t p + v\partial_r p - c^2\Big(\partial_t \rho + v\partial_r \rho\Big) = 0. \quad \text{(D.2c)}$$

Dans toute la suite, les équations caractéristiques (D.2) sont appliquées immédiatement à l'aval du choc. Les quantités sont indexées par –, que l'on omet dans la plupart des cas dans un souci de lisibilité.

Le terme $(\partial_t p)_-$ est exprimé ci-après. L'idée est d'effectuer une combinaison linéaire adéquate entre les caractéristiques C^+ et C^- afin de ne faire intervenir que les termes $(\partial_t p)_-$,

$\mathrm{d}_t M$ et $\frac{A'(r)}{A(r)}$. En injectant la relation $\partial_t v = \mathrm{d}_t v - c_+ M \partial_r v$ dans les équations sur la C^+ et la C^- (D.2a)-(D.2b), on trouve :

$$\partial_t p + (v+c)\partial_r p + \rho c \left\{ \mathrm{d}_t v + (v + c - c_+ M)\partial_r v \right\} + \rho c^2 v \frac{A'(r)}{A} = 0, \tag{D.3}$$

et

$$\partial_t p + (v-c)\partial_r p - \rho c \left\{ \mathrm{d}_t v + (v - c - c_+ M)\partial_r v \right\} + \rho c^2 v \frac{A'(r)}{A} = 0. \tag{D.4}$$

Afin d'éliminer le terme $\partial_r v$, on effectue ensuite la combinaison linéaire

$$(v + c - c_+ M)(D.4) - (v - c - c_+ M)(D.3),$$

donnant ainsi après calcul :

$$(\partial_t p)_- = p_+ \epsilon_1 \mathrm{d}_t M + p_+ c_+ \eta_1 \frac{A'(r)}{A(r)}, \tag{D.5}$$

où ϵ_1 et η_1 sont des coefficients sans dimension définis par :

$$\epsilon_1 = \frac{\left\{c^2 + v(c_+ M - v)\right\} \mathrm{d}_M p_- + \rho c^2 c_+ M \mathrm{d}_M v_-}{p_+ \left(c^2 - (c_+ M - v)^2\right)} \quad \text{et} \quad \eta_1 = \frac{\rho c^2 v (c_+ M - v) c_+ M}{c_+ p_+ \left(c^2 - (c_+ M - v)^2\right)}.$$

Puisque le milieu est homogène, les relations de Rankine-Hugoniot (9.4), ainsi que leurs dérivées par rapport à M (9.6), dépendent uniquement du nombre de Mach M. Par conséquent, les coefficients ϵ_1 et η_1 s'expriment également en fonction de M uniquement.

À partir de calculs similaires sur les équations caractéristiques (D.2a)-(D.2b), on trouve également les relations :

$$(\partial_r p)_- = c_+ \rho_+ \epsilon_2 \mathrm{d}_t M + p_+ \eta_2 \frac{A'(r)}{A(r)}, \tag{D.6}$$

$$\epsilon_2 = -\frac{\left\{c_+ M - v\right\} \mathrm{d}_M p_- + \rho c^2 \mathrm{d}_M v_-}{c_+ \rho_+ \left(c^2 - (c_+ M - v)^2\right)} \quad , \quad \eta_2 = -\frac{\rho c^2 v (c_+ M - v)}{p_+ \left(c^2 - (c_+ M - v)^2\right)},$$

$$(\partial_t v)_- = c_+ \epsilon_3 \mathrm{d}_t M + \frac{p_+}{\rho_+} \eta_3 \frac{A'(r)}{A(r)}, \tag{D.7}$$

$$\epsilon_3 = \frac{\frac{c_+ M}{\rho} \mathrm{d}_M p_- + \left\{c^2 + v(c_+ M - v)\right\} \mathrm{d}_M v_-}{c_+ \left(c^2 - (c_+ M - v)^2\right)} \quad , \quad \eta_3 = \frac{\rho_+ c^2 v c_+ M}{p_+ \left(c^2 - (c_+ M - v)^2\right)},$$

et

$$(\partial_r v)_- = \epsilon_4 \mathrm{d}_t M + c_+ \eta_4 \frac{A'(r)}{A(r)}, \tag{D.8}$$

$$\epsilon_4 = -\frac{\frac{1}{\rho} \mathrm{d}_M p_- + (c_+ M - v) \mathrm{d}_M v_-}{\left(c^2 - (c_+ M - v)^2\right)} \quad , \quad \eta_4 = -\frac{c^2 v}{c_+ \left(c^2 - (c_+ M - v)^2\right)}.$$

Les termes $(\partial_t \rho)_-$ et $(\partial_r \rho)_-$ sont développés dans la suite. En injectant la relation $\partial_r \rho = \frac{1}{c_+ M} \left(\mathrm{d}_t \rho - \partial_t \rho\right)$ dans l'équation caractéristique (D.2c), on obtient :

$$\frac{c^2}{c_+ M}(c_+ M - v)\partial_t \rho = \partial_t p + v \partial_r p - \frac{c^2 v}{c_+ M} \mathrm{d}_t \rho.$$

En considérant les relations (D.5) et (D.6), il vient après calcul :

$$(\partial_t \rho)_- = \rho_+ \epsilon_5 \mathrm{d}_t M + c_+ \rho_+ \eta_5 \frac{A'(r)}{A(r)}, \tag{D.9}$$

avec

$$\epsilon_5 = \frac{c_+ M \mathrm{d}_M p_- + \rho c_+ M \left(c_+ M - v\right) \mathrm{d}_M v_- - v \left(c^2 - (c_+ M - v)^2\right) \mathrm{d}_M \rho_-}{\rho_+ \left(c_+ M - v\right) \left(c^2 - (c_+ M - v)^2\right)}$$

$$\eta_5 = \frac{c_+ M \left(c_+ M - v\right) \rho v}{c_+ \rho_+ \left(c^2 - (c_+ M - v)^2\right)}.$$

De manière similaire, en considérant la relation $\partial_t \rho = \mathrm{d}_t \rho - c_+ M \partial_r \rho$ dans l'équation (D.2c), on trouve :

$$(\partial_r \rho)_- = \frac{\rho_+}{c_+} \epsilon_6 \mathrm{d}_t M + \rho_+ \eta_6 \frac{A'(r)}{A(r)}, \tag{D.10}$$

avec

$$\epsilon_6 = -\frac{c_+ \left(\mathrm{d}_M p_- + \rho \left(c_+ M - v\right) \mathrm{d}_M v_- - \left(c^2 - (c_+ M - v)^2\right) \mathrm{d}_M \rho_-\right)}{\rho_+ \left(c_+ M - v\right) \left(c^2 - (c_+ M - v)^2\right)}$$

$$\eta_6 = -\frac{\rho v \left(c_+ M - v\right)}{\rho_+ \left(c^2 - (c_+ M - v)^2\right)}.$$

Pour finir, les termes $(\partial_t c)_-$ et $(\partial_r c)_-$ sont maintenant exprimés. Sachant que $c^2 = \frac{\gamma p}{\rho}$, on a :

$$\partial_t c = \frac{\gamma \partial_t p - c^2 \partial_t \rho}{2 \rho c},$$

donnant après injection de (D.5) et (D.9) :

$$(\partial_t c)_- = c_+ \epsilon_7 \mathrm{d}_t M + \frac{p_+}{\rho_+} \eta_7 \frac{A'(r)}{A(r)}, \tag{D.11}$$

avec

$$\epsilon_7 = \frac{\gamma p_+ \epsilon_1 - \rho_+ \epsilon_5 c^2}{2 c_+ \rho c} \quad \text{et} \quad \eta_7 = \frac{\rho_+ \left(\gamma p_+ c_+ \eta_1 - c^2 c_+ \rho_+ \eta_5\right)}{2 p_+ \rho c}.$$

De la même manière, la dérivée de c par rapport à r s'écrit :

$$\partial_r c = \frac{\gamma \partial_r p - c^2 \partial_r \rho}{2 \rho c},$$

et en injectant (D.6) et (D.10), on trouve :

$$(\partial_r c)_- = \epsilon_8 \mathrm{d}_t M + c_+ \eta_8 \frac{A'(r)}{A(r)}, \tag{D.12}$$

avec

$$\epsilon_8 = \frac{\gamma c_+ \rho_+ \epsilon_2 - \frac{\rho_+}{c_+} c^2 \epsilon_6}{2 \rho c} \quad \text{et} \quad \eta_8 = \frac{\gamma p_+ \eta_2 - c^2 \rho_+ \eta_6}{2 c_+ \rho c}.$$

Les relations (D.5)-(D.12) sont ensuite injectées dans l'équation (D.1). On obtient après calcul :

$$\frac{\mathrm{d}\bar{Q}_1}{\mathrm{d}r} = c_3 \left(\mathrm{d}_r M\right)^2 + c_4 \mathrm{d}_r M \frac{A'(r)}{A} + c_5 \left(\frac{A'(r)}{A}\right)^2 + c_6 \mathrm{d}_r M \bar{Q}_1 + c_7 \frac{A'(r)}{A} \bar{Q}_1 + \left(\frac{1}{M} - \frac{c_+}{v + c}\right) \bar{Q}_2, \tag{D.13}$$

où d_r désigne la dérivée spatiale suivant le mouvement du choc, et ayant noté $\bar{Q}_1 = \frac{Q_1}{\rho_+ c_+^3}$ et $\bar{Q}_2 = \frac{Q_2}{\rho_+ c_+^4}$. Les coefficients s'expriment comme :

$$c_3 = -M^2 \Big\{ \bar{c}\,(\epsilon_4\epsilon_5 - \epsilon_3\epsilon_6) + \bar{\rho}\,(\epsilon_4\epsilon_7 - \epsilon_3\epsilon_8) \Big\},$$

$$c_4 = -\frac{M}{\gamma\,(\bar{c}+\bar{v})^2} \Big\{ \bar{\rho}\bar{v}^2 M d_1 + \bar{c}\bar{v}\,(2\bar{\rho}M d_1 + \bar{v} d_2 + 2\bar{\rho}\bar{v}\epsilon_7\gamma) + \bar{c}^2\left(\bar{\rho}M d_1 + 2\bar{v}d_2 + \bar{\rho}\bar{v}\epsilon_7\gamma + \bar{v}^2\epsilon_5\gamma\right) + \bar{c}^3\,(d_2 + \bar{\rho}\epsilon_3\gamma + \bar{v}\epsilon_5\gamma) \Big\},$$

$$d_1 = \frac{1}{M}\left(\epsilon_4\eta_7 - \epsilon_8\eta_3 + \gamma\,(\epsilon_7\eta_4 - \epsilon_3\eta_8)\right) = -\frac{2\gamma(\gamma-1)(M^2-1)}{(\gamma+1)^2 M^2 \mu(M)},$$

$$d_2 = -\epsilon_6\eta_3 + \gamma\,(\epsilon_5\eta_4 + \epsilon_4\eta_5 - \epsilon_3\eta_6) = \frac{4\gamma(M^2-1)((\gamma-1)M^2 - 2\gamma)}{(\gamma+1)(2+(\gamma-1)M^2)^2},$$

$$c_5 = -\frac{1}{\gamma\,(\bar{c}+\bar{v})^2} \Big\{ \bar{\rho}\bar{v}^2 d_3 + \bar{c}\bar{v}\,(2\bar{\rho}d_3 + \bar{v}d_4 + 2\bar{\rho}\bar{v}\eta_7) + \bar{c}^2\left(\bar{\rho}d_3 + 2\bar{v}d_4 + \bar{\rho}\bar{v}\eta_7 + \bar{v}^2\eta_5\gamma\right) + \bar{c}^3\,(d_4 + \bar{\rho}\eta_3 + \bar{v}\eta_5\gamma) \Big\},$$

$$d_3 = \eta_4\eta_7 - \eta_3\eta_8 \quad , \quad d_4 = -\eta_3\eta_6 + \eta_4\eta_5\gamma,$$

et

$$c_6 = M\frac{(\epsilon_3+\epsilon_7)}{(\bar{c}+\bar{v})^2} \quad \text{et} \quad c_7 = \frac{(\eta_3+\eta_7)}{\gamma\,(\bar{c}+\bar{v})^2}.$$

Après calcul, on trouve $d_3 = 0$ et $d_4 = 0$, si bien que c_5 se réduit à l'expression suivante :

$$c_5 = -\frac{1}{\gamma\,(\bar{c}+\bar{v})^2} \Big\{ 2\bar{c}\bar{v}^2\bar{\rho}\eta_7 + \bar{c}^2\left(\bar{\rho}\bar{v}\eta_7 + \bar{v}^2\eta_5\gamma\right) + \bar{c}^3\,(\bar{\rho}\eta_3 + \bar{v}\eta_5\gamma) \Big\}.$$

Finalement, en injectant la relation (9.8) dans (D.13), l'équation d'évolution sur les effets arrière $\bar{Q}_1$ s'écrit :

$$\frac{\mathrm{d}\bar{Q}_1}{\mathrm{d}r} = h_0(M)\bar{Q}_2 + h_1(M)\bar{Q}_1^2 + h_2(M)\bar{Q}_1\frac{A'(r)}{A} + h_3(M)\left(\frac{A'(r)}{A}\right)^2, \tag{D.14}$$

avec

$$h_0(M) = \frac{1}{M} - \frac{c_+}{v_- + c_-} \quad , \quad h_2(M) = c_6k_1 + c_4k_2 + 2c_3k_1k_2 + c_7$$

$$h_1(M) = k_2\,(c_6 + c_3k_2) \quad , \quad h_3(M) = c_5 + (c_4 + c_3k_1)k_1,$$

et où les coefficients k_1 et k_2 sont donnés par (9.9).

Cas limite des chocs forts. Nous exprimons ici l'équation (D.14) dans la limite des chocs forts. Ce cas limite a déjà été traité par Best [20].

Pour un choc supposé fort ($M \gg 1$), les coefficients (9.9) s'écrivent :

$$k_1 = k_1^\infty M, \quad \text{avec} \quad k_1^\infty = -\frac{(\gamma-1)\gamma}{\gamma - 2 + (1+2\mu_\infty)\gamma^2},$$

$$k_2 = \frac{k_2^\infty}{M^2}, \quad \text{avec} \quad k_2^\infty = -\frac{(\gamma^2-1)(\gamma-1-2\gamma\mu_\infty)}{4(\gamma^2+\gamma-2+2\gamma^2\mu_\infty)},$$

où μ_∞ est la valeur limite du nombre de Mach post-choc : $\mu_\infty = \sqrt{\frac{\gamma-1}{2\gamma}}$. On trouve également

$$c_3 = c_3^\infty M, \quad \text{avec} \quad c_3^\infty = \frac{2\,(\gamma-5)}{(\gamma^2-1)\mu_\infty},$$

et

$$c_4 = c_4^\infty M^2,$$

avec

$$c_4^\infty = -\frac{1}{2\,(1+\gamma\mu_\infty)^2\,\gamma(\gamma+1)}\Bigg\{(4\gamma(\gamma-1)+2\gamma(2+(\gamma-1)\gamma)\mu_\infty)\,d_2^\infty + (\gamma+1)^2\left(\gamma+\frac{2}{\gamma-1}+\frac{2}{\mu_\infty}\right)d_1^\infty + 2\gamma^2\left(\frac{4(3\gamma-2)}{\gamma-1}+\frac{7\gamma-3}{\mu_\infty}\right)\Bigg\},$$

où d_1^∞ et d_2^∞ sont les valeurs limites de d_1 et d_2 :

$$d_1^\infty = -\frac{2\gamma(\gamma-1)}{(\gamma+1)^2\mu_\infty} \quad \text{et} \quad d_2^\infty = \frac{4\gamma}{\gamma^2-1}.$$

On a également :

$$c_5 = c_5^\infty M^3, \quad , \quad c_5^\infty = -\frac{\gamma(3\gamma^2-4\gamma+1)+4\gamma^2\mu_\infty(1+\mu_\infty)}{(1+\gamma\mu_\infty)^2\mu_\infty(\gamma+1)^2}$$

$$c_6 = \frac{c_6^\infty}{M}, \quad , \quad c_6^\infty = \frac{(\gamma+1)(3\gamma-5+8\mu_\infty)}{4(1+\gamma\mu_\infty)^2\mu_\infty}$$

$$c_7 = c_7^\infty, \quad , \quad c_7^\infty = \frac{(\gamma-1)^2+4\gamma\mu_\infty}{4(1+\gamma\mu_\infty)^2\mu_\infty}.$$

L'équation (D.14) s'exprime finalement dans la limite des chocs forts comme :

$$\frac{\mathrm{d}\bar{Q}_1}{\mathrm{d}r} = \frac{h_0^\infty}{M}\bar{Q}_2 + \frac{h_1^\infty}{M^3}\bar{Q}_1^2 + h_2^\infty\bar{Q}_1\frac{A'(r)}{A} + h_3^\infty M^3\left(\frac{A'(r)}{A}\right)^2, \tag{D.15}$$

avec

$$h_0^\infty = -\frac{1-\mu_\infty}{\gamma-1+2\mu_\infty} \quad , \quad h_2^\infty = c_6^\infty k_1^\infty + c_4^\infty k_2^\infty + 2c_3^\infty k_1^\infty k_2^\infty + c_7^\infty$$

$$h_1^\infty = k_2^\infty\,(c_6^\infty + c_3^\infty k_2^\infty) \quad , \quad h_3^\infty = c_5^\infty + (c_4^\infty + c_3^\infty k_1^\infty)k_1^\infty.$$

Remarque D.1

Les coefficients calculés ici dans la limite des chocs forts coïncident avec ceux donnés par Best [20].

Annexe E

Résolution d'Équations Différentielles Ordinaires

Cette annexe est consacrée à la résolution de deux types d'Équations Différentielles Ordinaires (EDOs) à coefficients constants :

- l'équation différentielle d'ordre 2

$$y''(r) + \alpha_1 \frac{y'(r)^2}{y(r)} + \alpha_2 \frac{y'(r)}{r} + \alpha_3 \frac{y(r)}{r^2} = 0, \quad r \geq r_0 > 0, \tag{E.1}$$

avec α_1, α_2 et $\alpha_3 \in \mathbb{R}$, et ayant pour condition initiale

$$y(r_0) = y_0 \quad \text{et} \quad y'(r_0) = y'_0; \tag{E.2}$$

et

- le système d'EDOs d'ordre 1

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}r} + k_1 \dfrac{y}{r} + k_2 y w = 0 & \text{(E.3a)} \\ \dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}r} + h_1 w^2 + h_2 \dfrac{w}{r} = 0, & \text{(E.3b)} \end{cases}$$

pour $r \geq r_0 > 0$, k_1, k_2, h_1, $h_2 \in \mathbb{R}$, et avec

$$y(r_0) = y_0 \quad \text{et} \quad w(r_0) = w_0. \tag{E.4}$$

Ces types d'EDOs sont rencontrés au chapitre 9 lors de l'étude des modèles GSD et KIN à l'ordre 1 de troncature dans la limite des chocs forts et des chocs faibles.

Proposition E.1 (*Résolution de* (E.1)-(E.2))

On suppose que $\alpha_1 > -1$ et on pose $f_0 = r_0 y'_0 / y_0$. Soit

$$\Delta = (\alpha_2 - 1)^2 - 4(\alpha_1 + 1)\alpha_3,$$

que l'on suppose positif, et soient

$$f_1 = \frac{1 - \alpha_2 - \sqrt{\Delta}}{2(\alpha_1 + 1)} \quad < \quad f_2 = \frac{1 - \alpha_2 + \sqrt{\Delta}}{2(\alpha_1 + 1)}.$$

Si $f_0 \leq f_2$, alors le problème (E.1)-(E.2) admet une unique solution réelle définie par

$$y(r) = y_0 \left(\frac{r}{r_0}\right)^{f_1} \left(\frac{f_2 - f_0 + (f_0 - f_1)\left(\frac{r}{r_0}\right)^{(\alpha_1+1)(f_2-f_1)}}{f_2 - f_1} \right)^{\frac{1}{\alpha_1+1}}. \tag{E.5}$$

De plus, si $f_1 < 0 < f_2$, alors

. si $f_0 < f_1$, la solution est strictement décroissante et existe en temps fini :

$$r \leq r_\star = \left(\frac{f_0 - f_2}{f_0 - f_1}\right)^{1/\sqrt{\Delta}} r_0;$$

. si $f_0 = f_1$, la solution est strictement décroissante $\forall r \geq r_0$:

$$y(r) = y_0 \left(\frac{r}{r_0}\right)^{f_1};$$

. si $f_1 < f_0 < f_2$, la solution est strictement décroissante sur $[r_0, r_{\star\star}]$, puis strictement croissante sur $[r_{\star\star}, +\infty]$, avec

$$r_{\star\star} = \left(\frac{f_1(f_0 - f_2))}{f_2(f_0 - f_1)}\right)^{1/\sqrt{\Delta}} r_0;$$

. et si $f_0 = f_2$, la solution est strictement croissante $\forall r \geq r_0$:

$$y(r) = y_0 \left(\frac{r}{r_0}\right)^{f_2}.$$

Preuve E.1

Après le changement de variable $z = \ln\left(\frac{r}{r_0}\right)$ et division par y, l'équation (E.1) se réécrit sous la forme :

$$\frac{y''(z)}{y(z)} + \alpha_1 \left(\frac{y'(z)}{y(z)}\right)^2 + (\alpha_2 - 1)\frac{y'(z)}{y(z)} + \alpha_3 = 0.$$

Le second changement de variable, $f(z) = \frac{y'(z)}{y}$, conduit alors à une équation de type Riccati :

$$f'(z) + (\alpha_1 + 1) f(z)^2 + (\alpha_2 - 1) f(z) + \alpha_3 = 0, \tag{E.6}$$

pour $z \geq 0$ et $f(0) = f_0 = \frac{r_0 y_0'}{y_0}$. La résolution de cette EDO est aisée en effectuant une décomposition en élément simple. En effet, par la factorisation :

$$(\alpha_1 + 1)f^2 + (\alpha_2 - 1)f + \alpha_3 = (\alpha_1 + 1)(f - f_1)(f - f_2),$$

avec

$$f_1 = \frac{1 - \alpha_2 - \sqrt{\Delta}}{2(\alpha_1 + 1)} \quad < \quad f_2 = \frac{1 - \alpha_2 + \sqrt{\Delta}}{2(\alpha_1 + 1)},$$

et

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{(\alpha_2 - 1)^2 - 4\alpha_3(\alpha_1 + 1)} = (\alpha_1 + 1)(f_2 - f_1),$$

la relation (E.6) devient

$$\frac{\mathrm{d}f}{f-f_1} - \frac{\mathrm{d}f}{f-f_2} = \sqrt{\Delta}\mathrm{d}z. \tag{E.7}$$

La solution de cette équation est donnée par

$$f(z) = f_1 + (f_1 - f_2)\frac{K(z)}{1-K(z)}, \tag{E.8}$$

avec

$$K(z) = K_0 \exp\left((\alpha_1+1)(f_2-f_1)z\right) \quad \text{et} \quad K_0 = \frac{f_0-f_1}{f_0-f_2}.$$

En faisant les changements de variable inverses, on trouve après calcul :

$$y(r) = y_0 \left(\frac{r}{r_0}\right)^{f_1} \left(\frac{1 - K_0\left(\frac{r}{r_0}\right)^{(\alpha_1+1)(f_2-f_1)}}{1-K_0}\right)^{\frac{1}{\alpha_1+1}}.$$

La relation (E.5) est finalement retrouvée en injectant $K_0 = \dfrac{f_0-f_1}{f_0-f_2}$.

La dérivée de y par rapport à r est donnée par :

$$y'(r) = \frac{y(r)}{r}\frac{f_1 - f_2 L(r)}{1-L(r)} \quad \text{avec} \quad L(r) = K_0\left(\frac{r}{r_0}\right)^{(\alpha_1+1)(f_2-f_1)}.$$

Le terme

$$\frac{f_2 - f_0 + (f_0-f_1)\left(\frac{r}{r_0}\right)^{(\alpha_1+1)(f_2-f_1)}}{f_2-f_1}$$

doit être positif ou nul afin d'assurer que la solution soit à valeur réelle. La deuxième partie de la propriété découle de cette condition.

■

Proposition E.2 (*Résolution de* (E.3)-(E.4))

On suppose que les coefficients h_1, h_2, k_1 et k_2 sont positifs. Sous l'hypothèse que $y_0 \geq 0$ et $w_0 \geq 0$, le problème (E.3)-(E.4) admet une unique solution décroissante réelle positive définie $\forall r \geq r_0$:

$$\begin{cases} y(r) = \dfrac{y_0}{\left(\frac{r}{r_0}\right)^{k_1}\left(1 + w_0 C\left(\frac{r}{r_0}\right)\right)^{\frac{k_2}{h_1}}} & \text{(E.9a)} \\ w(r) = \dfrac{w_0}{\left(1 + w_0 C\left(\frac{r}{r_0}\right)\right)\left(\frac{r}{r_0}\right)^{h_2}}, & \text{(E.9b)} \end{cases}$$

avec

$$C(\bar{r}) = h_1 r_0 \int_1^{\bar{r}} \frac{\mathrm{d}x}{x^{h_2}}.$$

Preuve E.2

On effectue pour commencer le changement de variable $\bar{r} = \frac{r}{r_0}$. Le système (E.3) se réécrit

alors :

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\bar{r}} + k_1 \dfrac{y}{\bar{r}} + k_2 y w r_0 = 0 & \text{(E.10a)} \\ \dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}\bar{r}} + h_1 w^2 r_0 + h_2 \dfrac{w}{\bar{r}} = 0 & \text{(E.10b)} \end{cases}$$

L'équation (E.10b) est une équation de type Riccati. En la divisant par w^2, et en faisant le changement de variable $f = \frac{1}{w}$, on trouve l'EDO d'ordre 1 à coefficients constants suivante :

$$f'(\bar{r}) - h_2 \frac{f(\bar{r})}{\bar{r}} - h_1 r_0 = 0, \quad \bar{r} \geq 1, \tag{E.11}$$

ayant pour condition initiale $f(1) = f_0 = \frac{1}{w_0}$. La résolution est alors directe :

$$f(\bar{r}) = \left(f_0 + C(\bar{r})\right) \bar{r}^{h_2}, \qquad \text{avec} \qquad C(\bar{r}) = h_1 r_0 \int_1^{\bar{r}} \frac{\mathrm{d}x}{x^{h_2}}. \tag{E.12}$$

Le changement de variable inverse $w = \frac{1}{f}$ donne finalement

$$w(\bar{r}) = \frac{w_0}{\left(1 + w_0 C(\bar{r})\right) \bar{r}^{h_2}} = \frac{w_0 C'(\bar{r})}{h_1 r_0 \left(1 + w_0 C(\bar{r})\right)}. \tag{E.13}$$

On injecte ensuite cette relation dans l'équation (E.10a), donnant une nouvelle EDO d'ordre 1 à coefficients constants :

$$y'(\bar{r}) + y(\bar{r}) \left(\frac{k_1}{\bar{r}} + \frac{k_2 w_0 C'(\bar{r})}{h_1 \left(1 + w_0 C(\bar{r})\right)} \right) = 0.$$

On trouve après résolution :

$$y(\bar{r}) = \frac{y_0}{\bar{r}^{k_1} \left(1 + w_0 C\left(\bar{r}\right)\right)^{\frac{k_2}{h_1}}}.$$

En notant que $\bar{r} = \frac{r}{r_0}$, et puisque les coefficients h_1, h_2, k_1 et k_2 sont positifs, la propriété est démontrée.

■

Annexe F

Équation d'évolution de la courbure locale du front de choc

Nous développons dans cette annexe l'équation d'évolution de la courbure locale du front de choc, $\vec{\nabla} \cdot \vec{n}$, pour un milieu inhomogène et en mouvement. Cette équation est nécessaire à l'obtention de l'équation d'évolution sur les effets arrière du modèle Cinématique en section 9.2. De manière similaire au développement de l'équation d'évolution de la normale au choc (voir section 4.3.1), les calculs sont effectués dans un voisinage du choc (voir remarque 2.3 en section 2.3), et seule l'équation appliquée au niveau du choc nous intéresse.

Les relations nécessaires à l'établissement de l'équation finale sont mises en évidence dans le texte.

On rappelle la définition du vecteur normal au choc (2.27) :

$$n_k = \frac{\nabla_k \Phi}{|\vec{\nabla}\Phi|} \quad \text{pour } k = 1, 2, 3, \tag{F.1}$$

ainsi que de la composante normale de la vitesse du front (2.30) :

$$U = -\frac{\partial_t \Phi}{|\vec{\nabla}\Phi|}, \tag{F.2}$$

le front de choc étant défini par la courbe de niveau 0 de Φ (2.26) :

$$\Gamma(t) = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^d \text{ tel que } \Phi(\vec{x}, t) = 0 \right\}.$$

On rappelle également les relations (4.26) et (4.27) écrites ici sous la forme condensée :

$$\mathrm{d}|\vec{\nabla}\Phi| = \vec{n} \cdot \vec{\nabla}(\mathrm{d}\Phi), \tag{F.3}$$

où d est l'opérateur différentiel ∂_t ou ∂_{x_j}.

F.1 Résultats préliminaires

Nous développons dans cette section les relations préliminaires servant à l'établissement de l'équation d'évolution de la courbure locale du front de choc.

Expression de ΔU. À partir de la définition de la vitesse U (F.2), on a :

$$U_{,k} = -\frac{\partial_t \nabla_k \Phi}{|\vec{\nabla}\Phi|} - \frac{U}{|\vec{\nabla}\Phi|}\nabla_k |\vec{\nabla}\Phi|. \tag{F.4}$$

En dérivant cette relation par rapport à x_i et en utilisant la relation (F.4), il vient :

$$U_{,ik} = -\frac{\partial_t \Phi_{,ik}}{|\vec{\nabla}\Phi|} - \frac{U}{|\vec{\nabla}\Phi|}|\vec{\nabla}\Phi|_{,ik} + \left(\frac{\partial_t \Phi_{,k}}{|\vec{\nabla}\Phi|^2}\nabla_i |\vec{\nabla}\Phi| + \frac{\partial_t \Phi_{,i}}{|\vec{\nabla}\Phi|^2}\nabla_k |\vec{\nabla}\Phi|\right) + \frac{2U}{|\vec{\nabla}\Phi|^2}\nabla_i |\vec{\nabla}\Phi| \nabla_k |\vec{\nabla}\Phi|. \tag{F.5}$$

La contraction sur i de cette relation mène alors à :

$$\boldsymbol{\Delta U = -\frac{\partial_t \Delta \Phi}{|\vec{\nabla}\Phi|} - \frac{U}{|\vec{\nabla}\Phi|}\Delta|\vec{\nabla}\Phi| + 2\frac{\partial_t \Phi_{,k}}{|\vec{\nabla}\Phi|^2}\nabla_k |\vec{\nabla}\Phi| + \frac{2U}{|\vec{\nabla}\Phi|^2}\nabla_k |\vec{\nabla}\Phi| \nabla_k |\vec{\nabla}\Phi|.} \tag{F.6}$$

Expression de $n_i n_k U_{,ik}$. En contractant (F.5) avec $n_i n_k$, il vient :

$$n_i n_k U_{,ik} = -\frac{n_i n_k}{|\vec{\nabla}\Phi|}\partial_t \Phi_{,ik} - \frac{U}{|\vec{\nabla}\Phi|} n_i n_k |\vec{\nabla}\Phi|_{,ik} + \frac{2}{|\vec{\nabla}\Phi|^2}\left(\vec{n}\cdot\vec{\nabla}\partial_t\Phi\right)\left(\vec{n}\cdot\vec{\nabla}|\vec{\nabla}\Phi|\right) + \frac{2U}{|\vec{\nabla}\Phi|^2}\left(\vec{n}\cdot\vec{\nabla}|\vec{\nabla}\Phi|\right)^2. \tag{F.7}$$

En dérivant par rapport à x_k la relation (F.3) pour $\mathrm{d} = \partial_{x_j}$, et en contractant la relation obtenue avec $n_j n_k$, on obtient de plus :

$$n_j n_k |\vec{\nabla}\Phi|_{,jk} = n_j\left(\vec{n}\cdot\vec{\nabla}n_i\right)\Phi_{,ij} + n_i n_j n_k \Phi_{,ijk}. \tag{F.8}$$

Par définition de $\vec{n}$, (F.1), on a $\Phi_{,i} = n_i|\vec{\nabla}\Phi|$ et $n_k\left(\vec{n}\cdot\vec{\nabla}n_k\right) = 0$, donnant ainsi :

$$n_j\left(\vec{n}\cdot\vec{\nabla}n_i\right)\Phi_{,ij} = \left(\vec{n}\cdot\vec{\nabla}n_i\right)\left(\vec{n}\cdot\vec{\nabla}\left(n_i|\vec{\nabla}\Phi|\right)\right) = \left(\vec{n}\cdot\overline{\overline{\nabla}}\vec{n}\right)^2|\vec{\nabla}\Phi|. \tag{F.9}$$

En injectant (F.9) dans (F.8), puis le résultat dans (F.7), il vient alors :

$$\boldsymbol{n_i n_k U_{,ik} = \left\{-\frac{n_i n_k}{|\vec{\nabla}\Phi|}\partial_t \Phi_{,ik} - \frac{U}{|\vec{\nabla}\Phi|} n_i n_j n_k \Phi_{,ijk} + \frac{2}{|\vec{\nabla}\Phi|^2}\left(\vec{n}\cdot\vec{\nabla}\partial_t\Phi\right)\left(\vec{n}\cdot\vec{\nabla}|\vec{\nabla}\Phi|\right) + \frac{2U}{|\vec{\nabla}\Phi|^2}\left(\vec{n}\cdot\vec{\nabla}|\vec{\nabla}\Phi|\right)^2\right\} - U\left(\vec{n}\cdot\overline{\overline{\nabla}}\vec{n}\right)^2.} \tag{F.10}$$

Expression du terme $n_{i,j}n_{j,i}$. Montrons que

$$\boldsymbol{-n_{i,j}n_{j,i} = -n_{j,k}n_{j,k} + \left(\vec{n}\cdot\overline{\overline{\nabla}}\vec{n}\right)^2.} \tag{F.11}$$

À partir de la définition de la normale (F.1), il vient en utilisant (F.3) pour $\mathrm{d} = \partial_{x_j}$, (F.1) et (4.13) :

$$\vec{n}\cdot\vec{\nabla}n_k = \frac{\vec{n}\cdot\vec{\nabla}\Phi_{,k}}{|\vec{\nabla}\Phi|} - \frac{\vec{n}\cdot\vec{\nabla}|\vec{\nabla}\Phi|}{|\vec{\nabla}\Phi|^2}\Phi_{,k} = \frac{\nabla_k|\vec{\nabla}\Phi|}{|\vec{\nabla}\Phi|} - n_k\frac{\vec{n}\cdot\vec{\nabla}|\vec{\nabla}\Phi|}{|\vec{\nabla}\Phi|} = \frac{\nabla_k^S|\vec{\nabla}\Phi|}{|\vec{\nabla}\Phi|},$$

d'où

$$\left(\vec{n}\cdot\vec{\vec{\nabla}}\vec{n}\right)^2=\left(\frac{\vec{\nabla}^S|\vec{\nabla}\Phi|}{|\vec{\nabla}\Phi|}\right)^2. \tag{F.12}$$

De manière similaire en partant de la relation (F.1), un rapide calcul donne :

$$n_{i,j}=\frac{\Phi_{,ij}}{|\vec{\nabla}\Phi|}-n_i\frac{\nabla_j|\vec{\nabla}\Phi|}{|\vec{\nabla}\Phi|}.$$

Cela aboutit en utilisant au besoin la relation (F.3) pour $\mathrm{d}=\partial_{x_j}$:

$$\begin{aligned} n_{i,j}n_{i,j} &= \frac{\Phi_{,ij}\Phi_{,ij}}{|\vec{\nabla}\Phi|^2}-\frac{\nabla_j|\vec{\nabla}\Phi|\nabla_j|\vec{\nabla}\Phi|}{|\vec{\nabla}\Phi|^2} \\ n_{i,j}n_{j,i} &= \frac{\Phi_{,ij}\Phi_{,ij}}{|\vec{\nabla}\Phi|^2}-2\frac{\nabla_j|\vec{\nabla}\Phi|\nabla_j|\vec{\nabla}\Phi|}{|\vec{\nabla}\Phi|^2}+\frac{\left(\vec{n}\cdot\vec{\nabla}|\vec{\nabla}\Phi|\right)^2}{|\vec{\nabla}\Phi|^2}. \end{aligned}$$

Finalement, en utilisant la définition de la dérivée tangentielle (4.13), ainsi que la relation (9.39), on obtient :

$$n_{i,j}n_{i,j}-n_{i,j}n_{j,i}=\frac{\nabla_j|\vec{\nabla}\Phi|}{|\vec{\nabla}\Phi|^2}\left(\nabla_j|\vec{\nabla}\Phi|-n_j\vec{n}\cdot\vec{\nabla}|\vec{\nabla}\Phi|\right)=\frac{\nabla_j|\vec{\nabla}\Phi|\nabla_j^S|\vec{\nabla}\Phi|}{|\vec{\nabla}\Phi|^2}=\left(\frac{\vec{\nabla}^S|\vec{\nabla}\Phi|}{|\vec{\nabla}\Phi|}\right)^2.$$

La relation (F.11) est retrouvée en considérant (F.12).

F.2 Équation d'évolution de la courbure locale du choc

L'équation d'évolution sur $\vec{\nabla}\cdot\vec{n}$ est dérivée dans cette section.

En différentiant la relation (F.1), puis en utilisant la relation (F.3), on trouve :

$$\mathrm{d}n_k=\frac{\nabla_k\mathrm{d}\Phi}{|\vec{\nabla}\Phi|}-\frac{n_k}{|\vec{\nabla}\Phi|}\mathrm{d}|\vec{\nabla}\Phi|=\frac{\nabla_k\mathrm{d}\Phi}{|\vec{\nabla}\Phi|}-\frac{n_k}{|\vec{\nabla}\Phi|}\left(\vec{n}\cdot\vec{\nabla}\mathrm{d}\Phi\right), \tag{F.13}$$

ce qui donne pour $\mathrm{d}=\nabla_k$:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{n}=\frac{\Delta\Phi}{|\vec{\nabla}\Phi|}-\frac{n_k}{|\vec{\nabla}\Phi|}\left(\vec{n}\cdot\vec{\nabla}\Phi_{,k}\right). \tag{F.14}$$

En différentiant la relation (F.14) par rapport à t et x_j, on a ensuite :

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{n}\right)=\frac{\Delta\left(\partial_t\Phi\right)}{|\vec{\nabla}\Phi|}-\frac{\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{n}\right)}{|\vec{\nabla}\Phi|}\left(\vec{n}\cdot\vec{\nabla}\partial_t\Phi\right)-\frac{1}{|\vec{\nabla}\Phi|}\frac{\partial}{\partial t}\left(n_k\left(\vec{n}\cdot\vec{\nabla}\Phi_{,k}\right)\right), \tag{F.15}$$

et

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{n}\right)=\frac{\Delta\left(\partial_{x_j}\Phi\right)}{|\vec{\nabla}\Phi|}-\frac{\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{n}\right)}{|\vec{\nabla}\Phi|}\left(\vec{n}\cdot\vec{\nabla}\partial_{x_j}\Phi\right)-\frac{1}{|\vec{\nabla}\Phi|}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(n_k\left(\vec{n}\cdot\vec{\nabla}\Phi_{,k}\right)\right), \tag{F.16}$$

ayant utilisé (F.3) pour $\mathrm{d}=\partial_t$ et $\mathrm{d}=\partial_{x_j}$ respectivement.

Finalement, l'opération (F.15)+V_j(F.16) aboutit à l'équation :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{n}\right) = \underbrace{\left\{\frac{\Delta\left(\partial_t\Phi\right)}{|\vec{\nabla}\Phi|}+\frac{U}{|\vec{\nabla}\Phi|}\left(\vec{n}\cdot\vec{\nabla}\left(\Delta\Phi\right)\right)\right\}}_{\text{terme 1}} \underbrace{-\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{n}\right)\left\{\frac{\left(\vec{n}\cdot\vec{\nabla}\partial_t\Phi\right)}{|\vec{\nabla}\Phi|}+\frac{U}{|\vec{\nabla}\Phi|}n_j\left(\vec{n}\cdot\vec{\nabla}\partial_{x_j}\Phi\right)\right\}}_{\text{terme 2}}$$
$$\underbrace{-\frac{1}{|\vec{\nabla}\Phi|}\left\{\frac{\partial}{\partial t}\left(n_k\left(\vec{n}\cdot\vec{\nabla}\Phi_{,k}\right)\right)+U\vec{n}\cdot\vec{\nabla}\left(n_k\left(\vec{n}\cdot\vec{\nabla}\Phi_{,k}\right)\right)\right\}}_{\text{terme 3}}$$
$$+\underbrace{\left\{-\left(\vec{v}_+\cdot\vec{n}\right)\left(\vec{n}\cdot\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{n}\right)\right)+\vec{v}_+\cdot\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{n}\right)\right\}}_{\text{terme 4}}. \quad \text{(F.17)}$$

Chacun des termes est développé dans la suite.

Développement du terme 1. La relation (F.3), pour $\mathrm{d} = \partial_{x_j}$, s'écrit :

$$\frac{\partial|\vec{\nabla}\Phi|}{\partial x_j} = \vec{n}\cdot\vec{\nabla}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x_j}\right).$$

En dérivant cette relation par rapport à x_j, on obtient après un rapide calcul :

$$\vec{n}\cdot\vec{\nabla}\left(\Delta\Phi\right) = \Delta\left(|\vec{\nabla}\Phi|\right) - \nabla_j n_k \Phi_{,jk}. \quad \text{(F.18)}$$

La relation (F.13), pour $\mathrm{d} = \nabla_j$, donne ensuite

$$\Phi_{,jk} = |\vec{\nabla}\Phi|\nabla_j n_k + n_k n_i \Phi_{,ij}.$$

En utilisant la propriété $n_k\nabla_j n_k = 0$, on a alors

$$\nabla_j n_k \Phi_{,jk} = |\vec{\nabla}\Phi| n_{k,j} n_{k,j}. \quad \text{(F.19)}$$

En injectant (F.19) dans (F.18), il vient :

$$\vec{n}\cdot\vec{\nabla}\left(\Delta\Phi\right) = \Delta\left(|\vec{\nabla}\Phi|\right) - |\vec{\nabla}\Phi| n_{k,j} n_{k,j}.$$

Le premier terme se réécrit ainsi comme :

$$\left\{\frac{\boldsymbol{\Delta\left(\partial_t\Phi\right)}}{\boldsymbol{|\vec{\nabla}\Phi|}}+\frac{\boldsymbol{U}}{\boldsymbol{|\vec{\nabla}\Phi|}}\left(\boldsymbol{\vec{n}\cdot\vec{\nabla}\left(\Delta\Phi\right)}\right)\right\} = \left\{\frac{\boldsymbol{\Delta\left(\partial_t\Phi\right)}}{\boldsymbol{|\vec{\nabla}\Phi|}}-\frac{\boldsymbol{\partial_t\Phi}}{\boldsymbol{|\vec{\nabla}\Phi|^2}}\boldsymbol{\Delta\left(|\vec{\nabla}\Phi|\right)}\right\} \boldsymbol{- U n_{k,j} n_{k,j},} \quad \text{(F.20)}$$

ayant utilisé (F.2).

Développement du terme 2. En combinant les relations (F.2) et (F.3), pour $\mathrm{d} = \partial_{x_j}$, on trouve directement :

$$\begin{aligned}
&-\left(\boldsymbol{\vec{\nabla}\cdot\vec{n}}\right)\left\{\frac{\left(\boldsymbol{\vec{n}\cdot\vec{\nabla}\partial_t\Phi}\right)}{\boldsymbol{|\vec{\nabla}\Phi|}}+\frac{\boldsymbol{U}}{\boldsymbol{|\vec{\nabla}\Phi|}}\boldsymbol{n_j}\left(\boldsymbol{\vec{n}\cdot\vec{\nabla}\partial_{x_j}\Phi}\right)\right\}\\
&=-\left(\boldsymbol{\vec{\nabla}\cdot\vec{n}}\right)\left\{\frac{\left(\boldsymbol{\vec{n}\cdot\vec{\nabla}\partial_t\Phi}\right)}{\boldsymbol{|\vec{\nabla}\Phi|}}-\frac{\boldsymbol{\partial_t\Phi}}{\boldsymbol{|\vec{\nabla}\Phi|^2}}\left(\boldsymbol{\vec{n}\cdot\vec{\nabla}}\right)\boldsymbol{|\vec{\nabla}\Phi|}\right\}\\
&=\left(\boldsymbol{\vec{\nabla}\cdot\vec{n}}\right)\left(\boldsymbol{\vec{n}\cdot\vec{\nabla}U}\right). \quad \text{(F.21)}
\end{aligned}$$

Développement du terme 3. En considérant les relations (F.3) pour $\mathrm{d} = \partial_{x_j}$ et (F.13), il vient :

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\left(n_k\left(\vec{n}\cdot\vec{\nabla}\Phi_{,k}\right)\right) &= \mathrm{d}\left(n_k n_i \Phi_{,ik}\right)\\ &= 2\mathrm{d}n_k\left(\vec{n}\cdot\vec{\nabla}\Phi_{,k}\right) + n_i n_k \mathrm{d}\Phi_{,ik}\\ &= 2\mathrm{d}n_k \nabla_k|\vec{\nabla}\Phi| + n_i n_k \mathrm{d}\Phi_{,ik}\\ &= \frac{2}{|\vec{\nabla}\Phi|}\left(\nabla_k \mathrm{d}\Phi\right)\left(\nabla_k|\vec{\nabla}\Phi|\right) - \frac{2}{|\vec{\nabla}\Phi|}\left(\vec{n}\cdot\vec{\nabla}\mathrm{d}\Phi\right)\left(\vec{n}\cdot\vec{\nabla}|\vec{\nabla}\Phi|\right) + n_i n_k \mathrm{d}\Phi_{,ik},\end{aligned}$$

pour un opérateur différentiel d. On obtient alors pour $\mathrm{d} = \frac{\partial}{\partial t}$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\left(n_k\left(\vec{n}\cdot\vec{\nabla}\Phi_{,k}\right)\right) = \frac{2}{|\vec{\nabla}\Phi|}\left(\nabla_k\partial_t\Phi\right)\left(\nabla_k|\vec{\nabla}\Phi|\right) - \frac{2}{|\vec{\nabla}\Phi|}\left(\vec{n}\cdot\vec{\nabla}\partial_t\Phi\right)\left(\vec{n}\cdot\vec{\nabla}|\vec{\nabla}\Phi|\right)\\ + n_i n_k \partial_t\Phi_{,ik}. \quad \text{(F.22)}\end{aligned}$$

De même, pour $\mathrm{d} = \nabla_j$ et en contractant avec n_j, on aboutit à :

$$\begin{aligned}\vec{n}\cdot\vec{\nabla}\left(n_k\left(\vec{n}\cdot\vec{\nabla}\Phi_{,k}\right)\right) = \frac{2}{|\vec{\nabla}\Phi|}\left(\nabla_k|\vec{\nabla}\Phi|\right)\left(\nabla_k|\vec{\nabla}\Phi|\right) - \frac{2}{|\vec{\nabla}\Phi|}\left(\vec{n}\cdot\vec{\nabla}|\vec{\nabla}\Phi|\right)^2\\ + n_i n_j n_k \Phi_{,ijk}. \quad \text{(F.23)}\end{aligned}$$

En injectant (F.22) et (F.23) dans le troisième terme, il vient après calcul et identification du terme $n_i n_j U_{,ij}$ (F.10) :

$$\begin{aligned}-\frac{\mathbf{1}}{|\vec{\boldsymbol{\nabla}}\boldsymbol{\Phi}|}\left\{\frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial t}}\left(\boldsymbol{n_k}\left(\vec{\boldsymbol{n}}\cdot\vec{\boldsymbol{\nabla}}\boldsymbol{\Phi_{,k}}\right)\right) + \boldsymbol{U}\left(\vec{\boldsymbol{n}}\cdot\vec{\boldsymbol{\nabla}}\right)\left(\boldsymbol{n_k}\left(\vec{\boldsymbol{n}}\cdot\vec{\boldsymbol{\nabla}}\boldsymbol{\Phi_{,k}}\right)\right)\right\} =\\ \left\{-\frac{\boldsymbol{2U}}{|\vec{\boldsymbol{\nabla}}\boldsymbol{\Phi}|^{\mathbf{2}}}\left(\boldsymbol{\nabla_k\partial_t\Phi}\right)\left(\boldsymbol{\nabla_k}|\vec{\boldsymbol{\nabla}}\boldsymbol{\Phi}|\right) - \frac{\mathbf{2}}{|\vec{\boldsymbol{\nabla}}\boldsymbol{\Phi}|^{\mathbf{2}}}\left(\boldsymbol{\nabla_k}|\vec{\boldsymbol{\nabla}}\boldsymbol{\Phi}|\right)\left(\boldsymbol{\nabla_k}|\vec{\boldsymbol{\nabla}}\boldsymbol{\Phi}|\right)\right\}\\ + \boldsymbol{n_i n_j U_{,ij}} + \boldsymbol{U}\left(\vec{\boldsymbol{n}}\cdot\overline{\overline{\boldsymbol{\nabla}}}\vec{\boldsymbol{n}}\right)^{\mathbf{2}}. \quad \text{(F.24)}\end{aligned}$$

Développement du terme 4. Le quatrième terme s'écrit directement

$$\left\{-\left(\vec{\boldsymbol{v}}_+\cdot\vec{\boldsymbol{n}}\right)\left(\vec{\boldsymbol{n}}\cdot\vec{\boldsymbol{\nabla}}\left(\vec{\boldsymbol{\nabla}}\cdot\vec{\boldsymbol{n}}\right)\right) + \vec{\boldsymbol{v}}_+\cdot\vec{\boldsymbol{\nabla}}\left(\vec{\boldsymbol{\nabla}}\cdot\vec{\boldsymbol{n}}\right)\right\} = \vec{\boldsymbol{v}}_+\cdot\vec{\boldsymbol{\nabla}}^{\boldsymbol{S}}\left(\vec{\boldsymbol{\nabla}}\cdot\vec{\boldsymbol{n}}\right), \quad \text{(F.25)}$$

par définition de $\vec{\nabla}^S$ (4.13), $\vec{\nabla}^S = \vec{\nabla} - \vec{n}\left(\vec{n}\cdot\vec{\nabla}\right)$.

En additionnant les quatre résultats (F.20), (F.21), (F.24) et (F.25), et en identifiant les termes de la relation (F.6), l'équation (F.17) s'écrit :

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{n}\right) = \left\{-\Delta U + \left(\vec{\nabla}\cdot\vec{n}\right)\left(\vec{n}\cdot\vec{\nabla}U\right) + n_i n_j U_{,ij}\right\}\\ -U n_{j,k} n_{j,k} + U\left(\vec{n}\cdot\overline{\overline{\nabla}}\vec{n}\right)^2 + \vec{v}_+\cdot\vec{\nabla}^S\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{n}\right). \quad \text{(F.26)}\end{aligned}$$

Finalement, en considérant la définition du Laplacien transversale (9.37), et en utilisant la relation (F.11), on exprime l'équation d'évolution de la courbure sous la forme plus condensée :

$$\boxed{\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}\boldsymbol{t}}\left(\vec{\boldsymbol{\nabla}}\cdot\vec{\boldsymbol{n}}\right) = -\boldsymbol{\Delta}^{\boldsymbol{S}}\boldsymbol{U} - \boldsymbol{U}\boldsymbol{n_{i,j}}\boldsymbol{n_{j,i}} + \vec{\boldsymbol{v}}_+\cdot\vec{\boldsymbol{\nabla}}^{\boldsymbol{S}}\left(\vec{\boldsymbol{\nabla}}\cdot\vec{\boldsymbol{n}}\right).} \quad \text{(F.27)}$$

Différentes contributions participent à l'évolution de la courbure locale du front de choc dans l'équation (F.27) :

- une diffusion de l'intensité du choc le long de la surface de choc, ou de manière équivalente du nombre de Mach d'après (2.32) :

$$U = W_S + \vec{v}_+ \cdot \vec{n}, \tag{F.28}$$

  avec $W_S = c_+\sqrt{1+\frac{\gamma+1}{2\gamma}\zeta} = c_+ M$;

- une variation transversale au choc (9.60) :

$$n_{i,j}n_{j,i} = \nabla_i^S n_j \nabla_j^S n_i. \tag{F.29}$$

  En deux dimensions d'espace, cette variation s'exprime comme (9.111) :

$$n_{i,j}n_{j,i} = \frac{\left(X'(s)Y''(s) - Y'(s)X''(s)\right)^2}{\left(X'(s)^2 + Y'(s)^2\right)^3},$$

  où $(X(s), Y(s))^T$ est une interpolation du front au moins de classe C^2, paramétrée par l'abscisse curviligne du choc s ;

- et, dans le cas d'un milieu en mouvement, une variation transversale de la courbure du front : $\vec{v}_+ \cdot \vec{\nabla}^S \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{n}\right)$.

D'après (F.28), $\Delta^S U$ dépend de l'intensité du choc, ζ, et de l'écoulement en amont du choc : la pression p_+, la masse volumique ρ_+, la célérité du son dans le milieu, c_+, et la vitesse du milieu $\vec{v}_+$. Ce terme est développé dans la suite.

Expression de $\Delta^S U$. On rappelle la relation (4.34) :

$$-\nabla_k^S U = c_+ \left(N_1 \nabla_k^S \zeta + N_2 \frac{\nabla_k^S \rho_+}{\rho_+} + N_3 \frac{\nabla_k^S p_+}{p_+} \right) - \nabla_k^S (\vec{v}_+ \cdot \vec{n}), \tag{F.30}$$

où les coefficients N_i dépendent de ζ :

$$N_1 = -\frac{(\gamma+1)M}{2\left(2\gamma + (\gamma+1)\zeta\right)} \quad , \quad N_2 = \frac{(1-2b\rho_+)M}{2(1-b\rho_+)} \quad \text{et} \quad N_3 = -\frac{M}{2}.$$

On rappelle également que $M = \sqrt{1+\frac{\gamma+1}{2\gamma}\zeta}$. En différentiant la relation (F.30) par rapport à ∇_k^S, et en utilisant la définition de l'opérateur Laplacien transverse, $\Delta^S = \nabla_k^S \nabla_k^S$, le terme $\Delta^S U$ s'exprime après calcul comme :

$$\begin{aligned}
\frac{-\boldsymbol{\Delta^S U}}{\boldsymbol{c_+}} = \frac{-\boldsymbol{\Delta^S}\left(\vec{\boldsymbol{v}}_+ \cdot \vec{\boldsymbol{n}}\right)}{\boldsymbol{c_+}} + \boldsymbol{N_1}\boldsymbol{\Delta^S}\boldsymbol{\zeta} + \boldsymbol{N_2}\frac{\boldsymbol{\Delta^S}\boldsymbol{\rho_+}}{\boldsymbol{\rho_+}} + \boldsymbol{N_3}\frac{\boldsymbol{\Delta^S}\boldsymbol{p_+}}{\boldsymbol{p_+}} + \mathbf{d}_{\boldsymbol{\zeta}}\boldsymbol{N_1}|\vec{\boldsymbol{\nabla}}^{\boldsymbol{S}}\boldsymbol{\zeta}|^{\mathbf{2}} \\
+ \left(\boldsymbol{b\rho_+}\mathbf{d}_{\boldsymbol{b\rho_+}}\boldsymbol{N_2} - \boldsymbol{N_2}\right)\frac{|\vec{\boldsymbol{\nabla}}^{\boldsymbol{S}}\boldsymbol{\rho_+}|^{\mathbf{2}}}{\boldsymbol{\rho_+^2}} - \boldsymbol{N_3}\frac{|\vec{\boldsymbol{\nabla}}^{\boldsymbol{S}}\boldsymbol{p_+}|^{\mathbf{2}}}{\boldsymbol{p_+^2}} + \frac{\vec{\boldsymbol{\nabla}}^{\boldsymbol{S}}\boldsymbol{c_+}}{\boldsymbol{c_+}} \cdot \left(\boldsymbol{N_2}\frac{\vec{\boldsymbol{\nabla}}^{\boldsymbol{S}}\boldsymbol{\rho_+}}{\boldsymbol{\rho_+}} + \boldsymbol{N_3}\frac{\vec{\boldsymbol{\nabla}}^{\boldsymbol{S}}\boldsymbol{p_+}}{\boldsymbol{p_+}}\right) \\
+ \vec{\boldsymbol{\nabla}}^{\boldsymbol{S}}\boldsymbol{\zeta} \cdot \left(\boldsymbol{N_1}\frac{\vec{\boldsymbol{\nabla}}^{\boldsymbol{S}}\boldsymbol{c_+}}{\boldsymbol{c_+}} + \mathbf{d}_{\boldsymbol{\zeta}}\boldsymbol{N_2}\frac{\vec{\boldsymbol{\nabla}}^{\boldsymbol{S}}\boldsymbol{\rho_+}}{\boldsymbol{\rho_+}} + \mathbf{d}_{\boldsymbol{\zeta}}\boldsymbol{N_3}\frac{\vec{\boldsymbol{\nabla}}^{\boldsymbol{S}}\boldsymbol{p_+}}{\boldsymbol{p_+}}\right),
\end{aligned} \tag{F.31}$$

où d_ζ et $\mathrm{d}_{b\rho_+}$ désignent les dérivées par rapport à ζ et $b\rho_+$ respectivement.

Finalement, en injectant (F.31) dans la relation (F.27), on montre que l'évolution de la courbure du front de choc dépend du vecteur normal au choc, $\vec{n}$, de son intensité, ζ, et des grandeurs de l'écoulement en amont du front.

Annexe G

Équation d'évolution des effets arrière dans le modèle Cinématique étendue à un milieu inhomogène en mouvement

Cette annexe est consacrée à l'extension de l'équation d'évolution des effets arrière du modèle Cinématique, définie pour un gaz de van der Waals, équation (9.94), à un milieu hétérogène et potentiellement en mouvement. Les étapes de calcul suivent celles de la section 9.2. Il s'agit de la première fois à notre connaissance que cette extension est présentée.

On rappelle l'équation sur l'intensité du choc écrite pour un écoulement amont non-uniforme (4.58) :

$$\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}t} = -c_+ \left(w_1 \vec{\nabla} \cdot \vec{n} + w_2 \frac{(\partial_n p)_-}{p_+} \right) + c_+ R_0, \tag{G.1}$$

où l'on note ∂_n la dérivée suivant la direction normale : $\partial_n = \vec{n} \cdot \vec{\nabla}$, et avec

$$R_0 = w_3 \frac{\partial_n \rho_+}{\rho_+} + w_4 \frac{\partial_n p_+}{p_+} + \alpha_1 \frac{\vec{\nabla} \cdot \vec{v}_+}{c_+} + \alpha_2 \frac{\vec{\nabla}^S \cdot \vec{v}_+}{c_+} + \frac{\vec{v}_+}{c_+} \cdot \left(\alpha_3 \frac{\vec{\nabla} \rho_+}{\rho_+} + \alpha_4 \frac{\vec{\nabla} p_+}{p_+} \right). \tag{G.2}$$

Les coefficients w_i et α_i sont donnés par (4.59) et (4.60) respectivement. On rappelle également l'équation d'évolution de la normale (4.32) :

$$\frac{\mathrm{d}n_i}{\mathrm{d}t} = \vec{v}_+ \cdot \vec{\nabla}^S n_i - \nabla_i^S U, \tag{G.3}$$

pour $i = 1, 2, 3$, où $-\nabla_i^S U$ s'exprime comme (4.34) :

$$-\nabla_i^S U = c_+ \left(N_1 \nabla_i^S \zeta + N_2 \frac{\nabla_i^S \rho_+}{\rho_+} + N_3 \frac{\nabla_i^S p_+}{p_+} \right) - \nabla_i^S (\vec{v}_+ \cdot \vec{n}). \tag{G.4}$$

Les coefficients N_i sont identiques à ceux utilisés en annexe F pour l'équation d'évolution de la courbure locale au front de choc :

$$N_1 = -\frac{(\gamma+1)M}{2\left(2\gamma + (\gamma+1)\zeta\right)} \quad , \quad N_2 = \frac{(1-2b\rho_+)M}{2(1-b\rho_+)} \quad \text{et} \quad N_3 = -\frac{M}{2},$$

où le nombre de Mach, M, vérifie $M = \frac{W_S}{c_+} = \sqrt{1 + \frac{\gamma+1}{2\gamma}\zeta}$. Avec cette écriture, l'équation (G.3) s'exprime :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{n}}{\mathrm{d}t} = \vec{v}_+ \cdot \overline{\overline{\nabla}}^S \vec{n} - \vec{\nabla}^S (\vec{v}_+ \cdot \vec{n}) + c_+ \left(N_1 \vec{\nabla}^S \zeta + N_2 \frac{\vec{\nabla}^S \rho_+}{\rho_+} + N_3 \frac{\vec{\nabla}^S p_+}{p_+} \right). \tag{G.5}$$

G.1 Relations différentielles de saut

En effectuant un calcul similaire à celui effectué en section 9.2.2, la relation (9.48) est étendue à un milieu inhomogène en mouvement :

$$\left[\vec{n} \cdot \overline{\overline{\nabla}} \vec{v} \right] = c_+ \left(\epsilon_1 \frac{(\partial_n p)_-}{p_+} + \epsilon_2 \vec{\nabla} \cdot \vec{n} + R_1 \right) \vec{n} + \tau_1 \frac{\mathrm{d}\vec{n}}{\mathrm{d}t} + c_+ \left(\tau_2 \vec{\nabla}^S \zeta + \vec{W}_0 \right), \tag{G.6}$$

où

$$R_1 = \epsilon_3 \frac{\partial_n \rho_+}{\rho_+} + \tau_4 \frac{\partial_n p_+}{p_+} + \tau_5 \frac{\vec{\nabla} \cdot \vec{v}_+}{c_+} + \tau_6 \frac{\vec{\nabla}^S \cdot \vec{v}_+}{c_+} + \epsilon_7 \frac{\vec{v}_+ \cdot \vec{\nabla} \rho_+}{c_+ \rho_+} + \epsilon_8 \frac{\vec{v}_+ \cdot \vec{\nabla} p_+}{c_+ p_+}, \tag{G.7}$$

et

$$\vec{W}_0 = \tau_1 \frac{\vec{n} \cdot \overline{\overline{\nabla}} \vec{v}_+}{c_+} + \tau_2 \zeta \frac{\vec{\nabla}^S p_+}{p_+} + \tau_3 \frac{\vec{\nabla} p_+}{p_+}. \tag{G.8}$$

Les coefficients sont donnés par :

$$\epsilon_1 = \frac{w_2 \mathrm{d}_\zeta \beta_0 - \frac{\rho_+}{\rho_-} \frac{(1-b\rho_+)}{\gamma}}{\sigma_1} \quad , \quad \epsilon_2 = \frac{w_1 \mathrm{d}_\zeta \beta_0}{\sigma_1} \quad , \quad \epsilon_3 = \frac{\frac{\beta_0 M}{2(1-b\rho_+)} - w_3 \mathrm{d}_\zeta \beta_0}{\sigma_1}$$

$$\tau_4 = \frac{\frac{\rho_+}{\rho_-} \frac{(1-b\rho_+)}{\gamma} - \frac{\beta_0 M}{2} - w_4 \mathrm{d}_\zeta \beta_0}{\sigma_1} \quad , \quad \tau_5 = -\frac{\alpha_1 \mathrm{d}_\zeta \beta_0}{\sigma_1} \quad , \quad \tau_6 = -\frac{\alpha_2 \mathrm{d}_\zeta \beta_0}{\sigma_1}$$

$$\epsilon_7 = \frac{\frac{\beta_0}{2(1-b\rho_+)} - \alpha_3 \mathrm{d}_\zeta \beta_0}{\sigma_1} \quad , \quad \epsilon_8 = -\frac{\frac{\beta_0}{2} + \alpha_4 \mathrm{d}_\zeta \beta_0}{\sigma_1},$$

où d_ζ désigne la dérivée par rapport à ζ, et

$$\tau_1 = -\frac{\beta_0}{\sigma_1} \quad , \quad \tau_2 = -\frac{\rho_+}{\rho_-} \frac{(1-b\rho_+)}{\gamma\sigma_1} \quad \text{et} \quad \tau_3 = -\left[\frac{\rho_+}{\rho} \right] \frac{(1-b\rho_+)}{\gamma\sigma_1}.$$

On rappelle les expressions des coefficients β_0, $\mathrm{d}_\zeta \beta_0$ et σ_1 données en section 9.2 :

$$\beta_0 = [\vec{v}] \cdot \vec{n} = \frac{(1-b\rho_+)\zeta}{\gamma \sqrt{1 + \frac{\gamma+1}{2\gamma}\zeta}} \quad , \quad \mathrm{d}_\zeta \beta_0 = \frac{\beta_0 \left(4\gamma + (\gamma+1)\zeta\right)}{2\zeta \left(2\gamma + (\gamma+1)\zeta\right)},$$

et

$$\sigma_1 = \frac{[\vec{v}] \cdot \vec{n} - W_S}{c_+} = -\frac{(2\gamma + (\gamma-1)\zeta + 2b\rho_+\zeta)}{2\gamma \sqrt{1 + \frac{\gamma+1}{2\gamma}\zeta}}.$$

Puisque $\vec{n} \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{n}}{\mathrm{d}t} = 0$, $\vec{n} \cdot \vec{\nabla}^S \equiv 0$ et $\vec{n} \cdot \left(\vec{n} \cdot \overline{\overline{\nabla}} \vec{v}_+ \right) = \vec{\nabla} \cdot \vec{v}_+ - \vec{\nabla}^S \cdot \vec{v}_+$, on obtient :

$$\vec{n} \cdot \left(\tau_1 \frac{\mathrm{d}\vec{n}}{\mathrm{d}t} + c_+ \tau_2 \vec{\nabla}^S \zeta + c_+ \vec{W}_0 \right) = \tau_1 \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{v}_+ - \vec{\nabla}^S \cdot \vec{v}_+ \right) + c_+ \tau_3 \frac{\left(\vec{n} \cdot \vec{\nabla} p_+ \right)}{p_+}.$$

Ainsi en contractant (G.6) avec $\vec{n}$, il vient immédiatement

$$\vec{n}\cdot\left[\vec{n}\cdot\vec{\vec{\nabla}}\vec{v}\right]=c_+\left(\epsilon_1\frac{(\partial_n p)_-}{p_+}+\epsilon_2\vec{\nabla}\cdot\vec{n}+R_2\right), \tag{G.9}$$

où $R_2=R_1+\vec{n}\cdot\vec{W}_0$:

$$R_2=\epsilon_3\frac{\partial_n\rho_+}{\rho_+}+\epsilon_4\frac{\partial_n p_+}{p_+}+\epsilon_5\frac{\vec{\nabla}\cdot\vec{v}_+}{c_+}+\epsilon_6\frac{\vec{\nabla}^S\cdot\vec{v}_+}{c_+}+\epsilon_7\frac{\vec{v}_+\cdot\vec{\nabla}\rho_+}{c_+\rho_+}+\epsilon_8\frac{\vec{v}_+\cdot\vec{\nabla}p_+}{c_+p_+}, \tag{G.10}$$

et avec

$$\epsilon_4=\tau_3+\tau_4\quad,\quad\epsilon_5=\tau_6+\tau_1\quad\text{et}\quad\epsilon_6=\tau_6-\tau_1.$$

De la même manière, la relation (9.50) étendue à un milieu non-uniforme et en mouvement s'écrit :

$$\left[\vec{n}\cdot\vec{\nabla}\rho\right]=\rho_+\left(\eta_1\frac{(\partial_n p)_-}{p_+}+\eta_2\vec{\nabla}\cdot\vec{n}+R_3\right), \tag{G.11}$$

où

$$R_3=\eta_3\frac{\partial_n\rho_+}{\rho_+}+\eta_4\frac{\partial_n p_+}{p_+}+\eta_5\frac{\vec{\nabla}\cdot\vec{v}_+}{c_+}+\eta_6\frac{\vec{\nabla}^S\cdot\vec{v}_+}{c_+}+\eta_7\frac{\vec{v}_+\cdot\vec{\nabla}\rho_+}{c_+\rho_+}+\eta_8\frac{\vec{v}_+\cdot\vec{\nabla}p_+}{c_+p_+}, \tag{G.12}$$

avec

$$\eta_1=\frac{w_2\mathrm{d}_\zeta\beta_1-\frac{\rho_-}{\rho_+}\epsilon_1}{\sigma_1}\quad,\quad\eta_2=\frac{w_1\mathrm{d}_\zeta\beta_1-\frac{\rho_-}{\rho_+}(\beta_0+\epsilon_2)}{\sigma_1}$$

$$\eta_3=-\frac{w_3\mathrm{d}_\zeta\beta_1+M(\beta_1+b\rho_+\mathrm{d}_{b\rho_+}\beta_1)+\beta_0+\frac{\rho_-}{\rho_+}\epsilon_3}{\sigma_1}\quad,\quad\eta_4=-\frac{w_4\mathrm{d}_\zeta\beta_1+\frac{\rho_-}{\rho_+}\epsilon_4}{\sigma_1}$$

$$\eta_5=-\frac{\alpha_1\mathrm{d}_\zeta\beta_1+\beta_1+\frac{\rho_-}{\rho_+}\epsilon_5}{\sigma_1}\quad,\quad\eta_6=-\frac{\alpha_2\mathrm{d}_\zeta\beta_1+\frac{\rho_-}{\rho_+}\epsilon_6}{\sigma_1}$$

$$\eta_7=-\frac{\alpha_3\mathrm{d}_\zeta\beta_1+\beta_1+b\rho_+\mathrm{d}_{b\rho_+}\beta_1+\frac{\rho_-}{\rho_+}\epsilon_7}{\sigma_1}\quad,\quad\eta_8=-\frac{\alpha_4\mathrm{d}_\zeta\beta_1+\frac{\rho_-}{\rho_+}\epsilon_8}{\sigma_1}.$$

On rappelle l'expression de β_1 et $\mathrm{d}_\zeta\beta_1$:

$$\beta_1=\frac{2(1-b\rho_+)\zeta}{2\gamma+(\gamma-1)\zeta+2b\rho_+\zeta}\quad\text{et}\quad\mathrm{d}_\zeta\beta_1=\frac{4\gamma(1-b\rho_+)}{(2\gamma+(\gamma-1)\zeta+2b\rho_+\zeta)^2}.$$

La dérivée de β_1 par rapport à $b\rho_+$ s'écrit :

$$\mathrm{d}_{b\rho_+}\beta_1=-\frac{2(2\gamma+(\gamma+1)\zeta)}{(2\gamma+(\gamma-1)\zeta+2b\rho_+\zeta)^2}.$$

Les relations de Rankine-Hugoniot (4.9)-(4.10) et $[p]=p_+\zeta$, combinées à la relation de

compatibilité (4.16) et à (4.37), donnent :

$$[p_{,j}] = p_+\left(\nabla_j^S\zeta + n_j\frac{(\partial_n p)_-}{p_+} + \zeta\frac{\nabla_j^S p_+}{p_+} - n_j\frac{\partial_n p_+}{p_+}\right) \tag{G.13}$$

$$[\rho_{,j}] = \rho_+\left(\mathrm{d}_\zeta\beta_1\nabla_j^S\zeta + n_j\frac{[\partial_n\rho]}{\rho_+} + \left(\beta_1 + b\rho_+\mathrm{d}_{b\rho_+}\beta_1\right)\frac{\nabla_j^S\rho_+}{\rho_+}\right) \tag{G.14}$$

$$\begin{aligned}[v_{i,j}] = {} & c_+\left(\beta_0\nabla_j^S n_i + \mathrm{d}_\zeta\beta_0 n_i\nabla_j^S\zeta\right) + n_j\left[\vec{n}\cdot\vec{\nabla}v_i\right] \\ & + c_+\beta_0\left(\frac{1}{2}\frac{\nabla_j^S p_+}{p_+} - \frac{1-2b\rho_+}{2(1-b\rho_+)}\frac{\nabla_j^S\rho_+}{\rho_+}\right)n_i.\end{aligned} \tag{G.15}$$

En particulier, en contractant (G.15) avec n_i et en utilisant (G.9), on a :

$$\begin{aligned}n_i\,[v_{i,j}] = {} & c_+\left(\epsilon_1\frac{(\partial_n p)_-}{p_+} + \epsilon_2\vec{\nabla}\cdot\vec{n} + R_2\right)n_j + c_+\mathrm{d}_\zeta\beta_0\nabla_j^S\zeta \\ & + c_+\beta_0\left(\frac{1}{2}\frac{\nabla_j^S p_+}{p_+} - \frac{1-2b\rho_+}{2(1-b\rho_+)}\frac{\nabla_j^S\rho_+}{\rho_+}\right),\end{aligned} \tag{G.16}$$

puisque $n_i n_i = 1$ et $n_i\nabla_j^S n_i = 0$. De même, en contractant sur i la relation (G.15), et en utilisant (G.9), on obtient :

$$\left[\vec{\nabla}\cdot\vec{v}\right] = c_+\left(\epsilon_1\frac{(\partial_n p)_-}{p_+} + (\beta_0+\epsilon_2)\,\vec{\nabla}\cdot\vec{n} + R_2\right). \tag{G.17}$$

G.2 Équations instationnaires de saut

On rappelle les équations instationnaires de saut (9.62) et (9.63) obtenues en section 9.2.3 :

$$\begin{aligned}\vec{n}\cdot\left[\vec{\nabla}\left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)\right] + \left[\left(\vec{n}\cdot\vec{\nabla}v_j\right)p_{,j}\right] + n_k\left[v_j p_{,jk}\right] + \left[\vec{n}\cdot\vec{\nabla}\left(\frac{\gamma p}{1-b\rho}\right)\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{v}\right)\right] \\ + \left[\frac{\gamma p}{1-b\rho}\vec{n}\cdot\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{v}\right)\right] = 0\end{aligned} \tag{G.18}$$

et, pour $i = 1..3$,

$$\vec{n}\cdot\left[\vec{\nabla}\left(\frac{\partial v_i}{\partial t}\right)\right] + \left[\left(\vec{n}\cdot\vec{\nabla}v_j\right)v_{i,j}\right] + n_k\left[v_j v_{i,jk}\right] + n_k\left[\frac{p_{,ik}}{\rho}\right] - \left[\frac{p_{,i}}{\rho^2}\left(\vec{n}\cdot\vec{\nabla}\rho\right)\right] = 0. \tag{G.19}$$

Puisque $[fg] = [f]\,g_- + f_+\,[g] = [f]\,[g] + f_+\,[g] + [f]\,g_+$ pour deux quantités physiques f et g, on a :

$$\begin{aligned}n_k\left[v_j p_{,jk}\right] &= \left(c_+\beta_0 n_k + v_{+k}\right)\left[n_j p_{,jk}\right] + c_+\beta_0\left(n_j n_k p_{+,jk}\right) \\ n_i n_k\left[v_j v_{i,jk}\right] &= \left(c_+\beta_0 n_k + v_{+k}\right)n_i n_j\left[v_{i,jk}\right] + c_+\beta_0 n_i\left(n_j n_k v_{+i,jk}\right).\end{aligned}$$

En injectant ensuite la relation de compatibilité d'ordre 2 (9.46), ainsi que ces dernières relations, dans (G.18) et (G.19), on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\left[\partial_n p\right]}{\mathrm{d}t} + c_+\sigma_1\left[n_j n_k p_{,jk}\right] + \left[\left(\vec{n}\cdot\vec{\nabla}v_j\right)p_{,j}\right] + \left[\vec{n}\cdot\vec{\nabla}\left(\frac{\gamma p}{1-b\rho}\right)\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{v}\right)\right] \\ + \left[\frac{\gamma p}{1-b\rho}\vec{n}\cdot\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{v}\right)\right] - \frac{\mathrm{d}n_k}{\mathrm{d}t}\left[p_{,k}\right] + c_+\beta_0\left(n_j n_k p_{+,jk}\right) = 0,\end{aligned} \tag{G.20}$$

et

$$\vec{n}\cdot\frac{\mathrm{d}\left[\partial_n\vec{v}\right]}{\mathrm{d}t}+c_+\sigma_1 n_i\left[n_j n_k v_{i,jk}\right]+n_i n_k\left[\frac{p_{,ik}}{\rho}\right]+n_i\left[\left(\vec{n}\cdot\vec{\nabla}v_j\right)v_{i,j}\right]$$
$$-\left[\frac{\left(\vec{n}\cdot\vec{\nabla}p\right)\left(\vec{n}\cdot\vec{\nabla}\rho\right)}{\rho^2}\right]-\frac{\mathrm{d}n_k}{\mathrm{d}t}n_i\left[v_{i,k}\right]+c_+\beta_0 n_i\left(n_j n_k v_{+,jk}\right)=0. \quad \text{(G.21)}$$

Les équations (G.20) et (G.21) sont développées dans la suite. Les relations nécessaires au calcul final sont mises en évidence dans le texte.

Développement de l'équation (G.20)**.** En utilisant les relations $[fg]=[f]g_-+f_+[g]$, $(p_{,j})_-=[p_{,j}]+\nabla_j p_+$, (G.6) et (G.13), et en remarquant que $R_1+\vec{n}\cdot\vec{W}_0=R_2$ ainsi que $n_j\nabla_j^S\equiv 0$ et $n_j\frac{\mathrm{d}n_j}{\mathrm{d}t}\equiv 0$, on obtient après calcul :

$$\frac{\left[\left(\vec{n}\cdot\vec{\nabla}v_j\right)p_{,j}\right]}{c_+p_+}=\epsilon_1\left(\frac{(\partial_n p)_-}{p_+}\right)^2+\epsilon_2\vec{\nabla}\cdot\vec{n}\frac{(\partial_n p)_-}{p_+}+\vec{\nabla}^S\zeta\cdot\left(\frac{\tau_1}{c_+}\frac{\mathrm{d}\vec{n}}{\mathrm{d}t}+\tau_2\vec{\nabla}^S\zeta\right)$$
$$+R_2\frac{(\partial_n p)_-}{p_+}+\tau_2\vec{\nabla}^S\zeta\cdot\left(\zeta\frac{\vec{\nabla}^S p_+}{p_+}+\frac{\vec{\nabla}p_+}{p_+}+\vec{W}_0\right)$$
$$+\left(\frac{\tau_1}{c_+}\frac{\mathrm{d}\vec{n}}{\mathrm{d}t}+\vec{W}_0\right)\cdot\left(\zeta\frac{\vec{\nabla}^S p_+}{p_+}+\frac{\vec{\nabla}p_+}{p_+}\right)-\vec{n}\cdot\vec{W}_0\frac{\partial_n p_+}{p_+}. \quad \text{(G.22)}$$

Après développement en utilisant (G.11) et (G.17), on a de plus :

$$\frac{\left[\vec{n}\cdot\vec{\nabla}\left(\frac{\gamma p}{1-b\rho}\right)\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{v}\right)\right]}{c_+p_+}=\left(\left(\sigma_2+\sigma_3\eta_1\right)\frac{(\partial_n p)_-}{p_+}+\sigma_3\eta_2\vec{\nabla}\cdot\vec{n}\right)\times\left(\epsilon_1\frac{(\partial_n p)_-}{p_+}+\left(\beta_0+\epsilon_2\right)\vec{\nabla}\cdot\vec{n}\right)$$
$$+\left\{\left(\sigma_2+\sigma_3\eta_1\right)\left(R_2+\frac{\vec{\nabla}\cdot\vec{v}_+}{c_+}\right)+\epsilon_1 R_4\right\}\frac{(\partial_n p)_-}{p_+}+K_3^+\vec{\nabla}\cdot\vec{n}$$
$$+R_2R_4+\left(\sigma_3R_3-\frac{\gamma}{1-b\rho_+}\frac{\partial_n p_+}{p_+}+\sigma_7\frac{\partial_n\rho_+}{\rho_+}\right)\frac{\vec{\nabla}\cdot\vec{v}_+}{c_+}, \quad \text{(G.23)}$$

avec

$$\sigma_2=\frac{\gamma}{1-b\rho_-}\quad,\quad \sigma_3=\frac{b\rho_+\gamma p_-}{p_+(1-b\rho_-)^2}\quad,\quad \sigma_7=\frac{b\rho_+}{p_+}\left[\frac{\gamma p}{(1-b\rho)^2}\right],$$

et

$$R_4 = \sigma_3R_3+\left(\sigma_7+\frac{\gamma b\rho_+}{(1-b\rho_+)^2}\right)\frac{\partial_n\rho_+}{\rho_+}, \quad \text{(G.24)}$$

$$K_3^+ = \sigma_3\eta_2\left(R_2+\frac{\vec{\nabla}\cdot\vec{v}_+}{c_+}\right)+(\beta_0+\epsilon_2)R_4. \quad \text{(G.25)}$$

Un calcul direct donne

$$\left[\frac{\gamma p}{1-b\rho}\vec{n}\cdot\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{v}\right)\right]=p_+\left\{\sigma_4\left[\vec{n}\cdot\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{v}\right)\right]+\sigma_8\vec{n}\cdot\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{v}_+\right)\right\}, \quad \text{(G.26)}$$

avec

$$\sigma_4=\frac{\gamma p_-}{p_+(1-b\rho_-)}\quad,\quad \sigma_8=\frac{1}{p_+}\left[\frac{\gamma p}{1-b\rho}\right].$$

De même, on obtient directement en utilisant (G.13) :

$$-\frac{\mathrm{d}n_k}{\mathrm{d}t}\left[p_{,k}\right] = -p_+\frac{\mathrm{d}\vec{n}}{\mathrm{d}t}\cdot\left(\vec{\nabla}^S\zeta + \zeta\frac{\vec{\nabla}^S p_+}{p_+}\right). \tag{G.27}$$

En injectant les relations (G.22), (G.23), (G.26) et (G.27) dans (G.20), il vient finalement :

$$\begin{aligned}\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{c_+p_+}}\frac{\mathbf{d}\left(\boldsymbol{\partial_n p}\right)_-}{\mathbf{d}\boldsymbol{t}} + \boldsymbol{\sigma_1}\frac{\left(\boldsymbol{n_j n_k p_{,jk}}\right)_-}{\boldsymbol{p_+}} + \frac{\boldsymbol{\sigma_4}}{\boldsymbol{c_+}}\left[\vec{\boldsymbol{n}}\cdot\vec{\boldsymbol{\nabla}}\left(\vec{\boldsymbol{\nabla}}\cdot\vec{\boldsymbol{v}}\right)\right] + \boldsymbol{K_1}\left(\frac{\left(\boldsymbol{\partial_n p}\right)_-}{\boldsymbol{p_+}}\right)^{\mathbf{2}}\\ + \left(\boldsymbol{K_2}\vec{\boldsymbol{\nabla}}\cdot\vec{\boldsymbol{n}} + \boldsymbol{K_2^+}\right)\frac{\left(\boldsymbol{\partial_n p}\right)_-}{\boldsymbol{p_+}} + \boldsymbol{K_3}\left(\vec{\boldsymbol{\nabla}}\cdot\vec{\boldsymbol{n}}\right)^{\mathbf{2}} + \boldsymbol{K_3^+}\vec{\boldsymbol{\nabla}}\cdot\vec{\boldsymbol{n}} + \boldsymbol{K_4} + \boldsymbol{K_5} = \mathbf{0},\end{aligned} \tag{G.28}$$

où K_1, K_2, K_3 et K_4 sont définis par (9.70) et K_3^+ est donné par (G.25). Les termes K_2^+ et K_5 s'expriment comme :

$$K_2^+ = \left(1+\sigma_2+\sigma_3\eta_1\right)R_2 + \left(\sigma_2+\sigma_3\eta_1\right)\frac{\vec{\nabla}\cdot\vec{v}_+}{c_+} + \epsilon_1 R_4,$$

et

$$\begin{aligned}K_5 = \tau_2\vec{\nabla}^S\zeta\cdot\left(\zeta\frac{\vec{\nabla}^S p_+}{p_+} + \frac{\vec{\nabla}p_+}{p_+} + \vec{W}_0\right) + \frac{1}{c_+}\frac{\mathrm{d}\vec{n}}{\mathrm{d}t}\cdot\left(\zeta(\tau_1-1)\frac{\vec{\nabla}^S p_+}{p_+} + \tau_1\frac{\vec{\nabla}p_+}{p_+}\right)\\ +\vec{W}_0\cdot\left(\zeta\frac{\vec{\nabla}^S p_+}{p_+} + \frac{\vec{\nabla}p_+}{p_+}\right) + \left(\sigma_3 R_3 - \frac{\gamma}{1-b\rho_+}\frac{\partial_n p_+}{p_+} + \sigma_7\frac{\partial_n\rho_+}{\rho_+}\right)\frac{\vec{\nabla}\cdot\vec{v}_+}{c_+}\\ +R_2R_4 + \frac{\sigma_8}{c_+}\vec{n}\cdot\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{v}_+\right) - \vec{n}\cdot\vec{W}_0\frac{\partial_n p_+}{p_+} + M\frac{n_j n_k p_{+,jk}}{p_+},\end{aligned}$$

ayant remarqué $\left[n_j n_k p_{,jk}\right] = \left(n_j n_k p_{,jk}\right)_- - n_j n_k p_{+,jk}$ et $\beta_0 - \sigma_1 = \frac{W_S}{c_+} = M$. En considérant (G.5) et (G.8), ainsi que les relations $\vec{\nabla}^S = \vec{\nabla} - \vec{n}\partial_n$, $\vec{n}\cdot\vec{\nabla}^S \equiv 0$ et $\vec{n}\cdot\mathrm{d}\vec{n} = 0$, K_5 se réécrit sous la forme :

$$K_5 = \vec{\nabla}^S\zeta\cdot\vec{W}_1 + X_1 + Y_1 + Z_1 + M\frac{n_j n_k p_{+,jk}}{p_+}, \tag{G.29}$$

avec

$$\vec{W}_1 = \left((1+\zeta)(\tau_2+N_1\tau_1) - N_1\zeta\right)\frac{\vec{\nabla}^S p_+}{p_+} + \tau_2\vec{W}_0 \tag{G.30}$$

$$X_1 = N_2\left((1+\zeta)\tau_1 - 1\right)\frac{\vec{\nabla}^S\rho_+}{\rho_+}\cdot\frac{\vec{\nabla}^S p_+}{p_+} + \left((1+\zeta)(\tau_2\zeta+\tau_3+N_3\tau_1) - N_3\zeta\right)\frac{\left|\vec{\nabla}^S p_+\right|^2}{p_+^2} \tag{G.31}$$

$$Y_1 = \left(\sigma_3 R_3 - \frac{\gamma}{1-b\rho_+}\frac{\partial_n p_+}{p_+} + \sigma_7\frac{\partial_n\rho_+}{\rho_+}\right)\frac{\vec{\nabla}\cdot\vec{v}_+}{c_+} + R_2R_4, \tag{G.32}$$

ayant remarqué que $\vec{n}\cdot\vec{W}_0 = \tau_1\frac{\vec{\nabla}\cdot\vec{v}_+ - \vec{\nabla}^S\cdot\vec{v}_+}{c_+} + \tau_3\frac{\partial_n p_+}{p_+}$. Le terme Z_1 s'écrit :

$$\begin{aligned}Z_1 = \left((1+\zeta)\tau_1 - \zeta\right)\frac{\vec{v}_+\cdot\overline{\overline{\nabla}}^S\vec{n} - \vec{\nabla}^S\left(\vec{v}_+\cdot\vec{n}\right)}{c_+}\cdot\frac{\vec{\nabla}^S p_+}{p_+}\\ +\tau_1\left(1+\zeta\right)\frac{\vec{n}\cdot\overline{\overline{\nabla}}\vec{v}_+}{c_+}\cdot\frac{\vec{\nabla}^S p_+}{p_+} + \sigma_8\frac{\vec{n}\cdot\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{v}_+\right)}{c_+}.\end{aligned} \tag{G.33}$$

Développement de l'équation (G.21)**.** Puisque l'on a

$$\vec{n}\cdot\frac{\mathrm{d}\left[\partial_n\vec{v}\right]}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\vec{n}\cdot\left[\vec{n}\cdot\overline{\overline{\nabla}}\vec{v}\right]\right)-\frac{\mathrm{d}\vec{n}}{\mathrm{d}t}\cdot\left[\vec{n}\cdot\overline{\overline{\nabla}}\vec{v}\right],$$

on obtient après avoir utilisé les relations (G.6), (G.9), (G.1) et $\vec{n}\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{n}}{\mathrm{d}t}\equiv 0$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{c_+}\vec{n}\cdot\frac{\mathrm{d}\left[\partial_n\vec{v}\right]}{\mathrm{d}t}=&-\frac{\mathrm{d}\vec{n}}{\mathrm{d}t}\cdot\left\{\frac{\tau_1}{c_+}\frac{\mathrm{d}\vec{n}}{\mathrm{d}t}+\tau_2\vec{\nabla}^S\zeta\right\}-\mathrm{d}_t R_2+R_2\frac{\mathrm{d}_t c_+}{c_+}-\frac{\mathrm{d}\vec{n}}{\mathrm{d}t}\cdot\vec{W}_0\\&+\epsilon_1\frac{\mathrm{d}_t\left(\partial_n p\right)_-}{p_+}+\epsilon_2\mathrm{d}_t\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{n}\right)-c_+\left(\mathrm{d}_\zeta\epsilon_1\frac{(\partial_n p)_-}{p_+}+\mathrm{d}_\zeta\epsilon_2\vec{\nabla}\cdot\vec{n}\right)\left(w_1\vec{\nabla}\cdot\vec{n}+w_2\frac{(\partial_n p)_-}{p_+}\right)\\&+\left(c_+\mathrm{d}_\zeta\epsilon_1 R_0+b\rho_+\mathrm{d}_{b\rho_+}\epsilon_1\frac{\mathrm{d}_t\rho_+}{\rho_+}+\epsilon_1\left(\frac{\mathrm{d}_t c_+}{c_+}-\frac{\mathrm{d}_t p_+}{p_+}\right)\right)\frac{(\partial_n p)_-}{p_+}\\&+\left(c_+\mathrm{d}_\zeta\epsilon_2 R_0+b\rho_+\mathrm{d}_{b\rho_+}\epsilon_2\frac{\mathrm{d}_t\rho_+}{\rho_+}+\epsilon_2\frac{\mathrm{d}_t c_+}{c_+}\right)\vec{\nabla}\cdot\vec{n},\end{aligned}\quad\text{(G.34)}$$

où $\mathrm{d}_t=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ est la dérivée temporelle suivant le choc. La relation de compatibilité d'ordre 2 (9.47) avec $\psi=v_i$ donne :

$$n_i\left[n_j n_k v_{i,jk}\right]=\left[\vec{n}\cdot\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{v}\right)\right]-\nabla_i^S\left[\vec{n}\cdot\vec{\nabla}v_i\right]+\nabla_i^S n_j\left[v_{i,j}\right].$$

En utilisant les relations (G.6), (G.15) et (9.60), ainsi que les propriétés $n_k\nabla_k^S\equiv 0$ et $n_k\mathrm{d}n_k=0$ pour un opérateur différentiel d quelconque, on obtient après calcul :

$$\begin{aligned}\frac{n_i\left[n_j n_k v_{i,jk}\right]}{c_+}=&\frac{\left[\vec{n}\cdot\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{v}\right)\right]}{c_+}-\left(\epsilon_1\frac{(\partial_n p)_-}{p_+}+\epsilon_2\vec{\nabla}\cdot\vec{n}\right)\vec{\nabla}\cdot\vec{n}+\beta_0 n_{i,j}n_{j,i}-\mathrm{d}_\zeta\tau_2|\vec{\nabla}^S\zeta|^2\\&-\tau_2\Delta^S\zeta-\frac{\mathrm{d}_\zeta\tau_1}{c_+}\vec{\nabla}^S\zeta\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{n}}{\mathrm{d}t}-\frac{\tau_1}{c_+}\nabla_i^S\frac{\mathrm{d}n_i}{\mathrm{d}t}-R_1\vec{\nabla}\cdot\vec{n}-\vec{\nabla}^S\zeta\cdot\left(\tau_2\frac{\vec{\nabla}^S c_+}{c_+}+b\rho_+\mathrm{d}_{b\rho_+}\tau_2\frac{\vec{\nabla}^S\rho_+}{\rho_+}\right)\\&-\frac{b\rho_+\mathrm{d}_{b\rho_+}\tau_1}{c_+}\frac{\mathrm{d}\vec{n}}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\vec{\nabla}^S\rho_+}{\rho_+}-\frac{\vec{\nabla}^S c_+}{c_+}\cdot\vec{W}_0-\vec{\nabla}^S\cdot\vec{W}_0.\end{aligned}\quad\text{(G.35)}$$

À partir des relations $[fg]=[f]g_-+f_+[g]$, $(v_{i,j})_-=[v_{i,j}]+v_{+i,j}$, (G.16), (G.6) et (G.9), on trouve également :

$$\begin{aligned}\frac{n_i\left[\left(\vec{n}\cdot\vec{\nabla}v_j\right)v_{i,j}\right]}{c_+^2}=&\left(\epsilon_1\frac{(\partial_n p)_-}{p_+}+\epsilon_2\vec{\nabla}\cdot\vec{n}\right)^2+\mathrm{d}_\zeta\beta_0\vec{\nabla}^S\zeta\cdot\left(\frac{\tau_1}{c_+}\frac{\mathrm{d}\vec{n}}{\mathrm{d}t}+\tau_2\vec{\nabla}^S\zeta\right)\\&+2R_5\left(\epsilon_1\frac{(\partial_n p)_-}{p_+}+\epsilon_2\vec{\nabla}\cdot\vec{n}\right)+R_2R_5+\frac{\vec{n}\cdot\left(\vec{n}\cdot\overline{\overline{\nabla}}\vec{v}_+\right)}{c_+}R_1+\frac{\vec{n}\cdot\left(\vec{W}_2\cdot\overline{\overline{\nabla}}\vec{v}_+\right)}{c_+}\\&+\vec{\nabla}^S\zeta\cdot\left(\mathrm{d}_\zeta\beta_0\left(\vec{W}_0+\frac{\vec{n}\cdot\overline{\overline{\nabla}}\vec{v}_+}{c_+}\right)+\tau_2\beta_0\left(\frac{1}{2}\frac{\vec{\nabla}^S p_+}{p_+}-\frac{1-2b\rho_+}{2(1-b\rho_+)}\frac{\vec{\nabla}^S\rho_+}{\rho_+}\right)\right)\\&+\beta_0\left(\frac{1}{2}\frac{\vec{\nabla}^S p_+}{p_+}-\frac{1-2b\rho_+}{2(1-b\rho_+)}\frac{\vec{\nabla}^S\rho_+}{\rho_+}\right)\cdot\left(\frac{\tau_1}{c_+}\frac{\mathrm{d}\vec{n}}{\mathrm{d}t}+\vec{W}_0+\frac{\vec{n}\cdot\overline{\overline{\nabla}}\vec{v}_+}{c_+}\right),\end{aligned}\quad\text{(G.36)}$$

avec

$$R_5=R_2+\frac{\vec{n}\cdot\left(\vec{n}\cdot\overline{\overline{\nabla}}\vec{v}_+\right)}{c_+}\quad\text{et}\quad\vec{W}_2=\frac{\tau_1}{c_+}\frac{\mathrm{d}\vec{n}}{\mathrm{d}t}+\tau_2\vec{\nabla}^S\zeta+\vec{W}_0.\quad\text{(G.37)}$$

Par définition du saut au travers du choc d'une quantité ψ, $[\psi] = \psi_- - \psi_+$, et en utilisant l'égalité $\left(\vec{n}\cdot\vec{\nabla}\rho\right)_- = \left[\vec{n}\cdot\vec{\nabla}\rho\right] + \vec{n}\cdot\vec{\nabla}\rho_+$ ainsi que (G.11), on a après un rapide calcul

$$-\left[\frac{\left(\vec{n}\cdot\vec{\nabla}p\right)\left(\vec{n}\cdot\vec{\nabla}\rho\right)}{\rho^2}\right] = \frac{p_+}{\rho_+}\Bigg\{-\sigma_6\left(\eta_1\frac{(\partial_n p)_-}{p_+} + \eta_2\vec{\nabla}\cdot\vec{n}\right)\frac{(\partial_n p)_-}{p_+} - \sigma_6\left(R_3 + \frac{\partial_n\rho_+}{\rho_+}\right)\frac{(\partial_n p)_-}{p_+} + \frac{\partial_n\rho_+}{\rho_+}\frac{\partial_n p_+}{p_+}\Bigg\}. \quad \text{(G.38)}$$

De même, toujours avec la relation $[\psi] = \psi_- - \psi_+$, il vient directement

$$n_i n_k\left[\frac{p_{,ik}}{\rho}\right] = \frac{p_+}{\rho_+}\left(\sigma_5\frac{(n_j n_k p_{,jk})_-}{p_+} - \frac{n_j n_k p_{+,jk}}{p_+}\right), \quad \text{(G.39)}$$

avec

$$\sigma_5 = \frac{\rho_+}{\rho_-} \quad \text{et} \quad \sigma_6 = \left(\frac{\rho_+}{\rho_-}\right)^2.$$

Enfin, en considérant (G.16) ainsi que $n_k\frac{\mathrm{d}n_k}{\mathrm{d}t} = 0$, on obtient également :

$$-\frac{\mathrm{d}n_k}{\mathrm{d}t}n_i\left[v_{i,k}\right] = -c_+\frac{\mathrm{d}\vec{n}}{\mathrm{d}t}\cdot\left(\mathrm{d}_\zeta\beta_0\vec{\nabla}^S\zeta + \frac{\beta_0}{2}\frac{\vec{\nabla}^S p_+}{p_+} - \frac{\beta_0(1-2b\rho_+)}{2(1-b\rho_+)}\frac{\vec{\nabla}^S\rho_+}{\rho_+}\right). \quad \text{(G.40)}$$

En injectant les relations (G.34), (G.35), (G.36), (G.38), (G.39) et (G.40) dans (G.21), on obtient finalement après réarrangement des termes :

$$\boldsymbol{\frac{\epsilon_1}{c_+p_+}\frac{\mathrm{d}\left(\partial_n p\right)_-}{\mathrm{d}t} + \frac{\sigma_5(1-b\rho_+)}{\gamma}\frac{(n_j n_k p_{,jk})_-}{p_+} + \frac{\sigma_1}{c_+}\left[\vec{n}\cdot\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{v}\right)\right] + H_1\left(\frac{(\partial_n p)_-}{p_+}\right)^2 + \left(H_2\vec{\nabla}\cdot\vec{n} + H_2^+\right)\frac{(\partial_n p)_-}{p_+} + H_3\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{n}\right)^2 + H_3^+\vec{\nabla}\cdot\vec{n} + H_4 + H_5 = 0,} \quad \text{(G.41)}$$

où H_1, H_2, H_3 et H_4 sont définis par (9.81)-(9.82). Les termes H_2^+, H_3^+ et H_5 s'expriment comme :

$$H_2^+ = \mathrm{d}_\zeta\epsilon_1 R_0 + \frac{b\rho_+\mathrm{d}_{b\rho_+}\epsilon_1}{c_+}\frac{\mathrm{d}_t\rho_+}{\rho_+} + \frac{\epsilon_1}{c_+}\left(\frac{\mathrm{d}_t c_+}{c_+} - \frac{\mathrm{d}_t p_+}{p_+}\right) + 2\epsilon_1 R_5 - \frac{1-b\rho_+}{\gamma}\sigma_6\left(R_3 + \frac{\partial_n\rho_+}{\rho_+}\right),$$

$$H_3^+ = \mathrm{d}_\zeta\epsilon_2 R_0 + \frac{b\rho_+\mathrm{d}_{b\rho_+}\epsilon_2}{c_+}\frac{\mathrm{d}_t\rho_+}{\rho_+} + \frac{\epsilon_2}{c_+}\frac{\mathrm{d}_t c_+}{c_+} - \sigma_1 R_1 + 2\epsilon_2 R_5,$$

et

$$H_5 = \frac{1}{c_+}\frac{\mathrm{d}\vec{n}}{\mathrm{d}t}\cdot\left\{-\vec{W}_0 + \frac{\beta_0(\tau_1-1)}{2}\frac{\vec{\nabla}^S p_+}{p_+} - \left(\sigma_1 b\rho_+\mathrm{d}_{b\rho_+}\tau_1 + \frac{\beta_0(\tau_1-1)(1-2b\rho_+)}{2(1-b\rho_+)}\right)\frac{\vec{\nabla}^S\rho_+}{\rho_+}\right\}$$
$$+\vec{\nabla}^S\zeta\cdot\left\{\mathrm{d}_\zeta\beta_0\left(\vec{W}_0 + \frac{\vec{n}\cdot\overline{\overline{\nabla}}\vec{v}_+}{c_+}\right) + \frac{\beta_0\tau_2}{2}\frac{\vec{\nabla}^S p_+}{p_+} - \left(\sigma_1 b\rho_+\mathrm{d}_{b\rho_+}\tau_2 + \frac{\beta_0\tau_2(1-2b\rho_+)}{2(1-b\rho_+)}\right)\frac{\vec{\nabla}^S\rho_+}{\rho_+}\right.$$
$$\left.-\sigma_1\tau_2\frac{\vec{\nabla}^S c_+}{c_+}\right\} + \vec{W}_0\cdot\left(-\sigma_1\frac{\vec{\nabla}^S c_+}{c_+} + \frac{\beta_0}{2}\frac{\vec{\nabla}^S p_+}{p_+} - \frac{\beta_0(1-2b\rho_+)}{2(1-b\rho_+)}\frac{\vec{\nabla}^S\rho_+}{\rho_+}\right) + Y_2$$
$$-\sigma_1\vec{\nabla}^S\cdot\vec{W}_0 - \frac{\mathrm{d}_t R_2}{c_+} - \frac{1-b\rho_+}{\gamma}\frac{n_j n_k p_{+,jk}}{p_+} + \beta_0\frac{n_i\left(n_j n_k v_{+i,jk}\right)}{c_+} + \frac{\vec{n}\cdot\left(\vec{W}_2\cdot\overline{\overline{\nabla}}\vec{v}_+\right)}{c_+}$$
$$+\beta_0\frac{\vec{n}\cdot\overline{\overline{\nabla}}\vec{v}_+}{c_+}\cdot\left(\frac{1}{2}\frac{\vec{\nabla}^S p_+}{p_+} - \frac{1-2b\rho_+}{2(1-b\rho_+)}\frac{\vec{\nabla}^S\rho_+}{\rho_+}\right),$$

où

$$Y_2 = R_2\left(\frac{\mathrm{d}_t c_+}{c_+^2} + R_5\right) + \frac{1-b\rho_+}{\gamma}\frac{\partial_n \rho_+}{\rho_+}\frac{\partial_n p_+}{p_+} + R_1\frac{\vec{n}\cdot\left(\vec{n}\cdot\overline{\overline{\nabla}}\vec{v}_+\right)}{c_+}. \tag{G.42}$$

En considérant (G.5) et (G.8), ainsi que les relations $\vec{\nabla}^S = \vec{\nabla} - \vec{n}\partial_n$, $\vec{n}\cdot\vec{\nabla}^S \equiv 0$ et $\vec{n}\cdot\mathrm{d}\vec{n} = 0$, H_5 se réécrit sous la forme :

$$H_5 = \vec{\nabla}^S\zeta\cdot\vec{W}_3 + X_2 + Y_2 + Z_2 - \frac{1-b\rho_+}{\gamma}\frac{n_j n_k p_{+,jk}}{p_+} - \sigma_1\vec{\nabla}^S\cdot\vec{W}_0 - \frac{\mathrm{d}_t R_2}{c_+}, \tag{G.43}$$

avec

$$\begin{aligned}\vec{W}_3 = {} & \left(\mathrm{d}_\zeta\beta_0 - N_1\right)\vec{W}_0 + \mathrm{d}_\zeta\beta_0\frac{\vec{n}\cdot\overline{\overline{\nabla}}\vec{v}_+}{c_+} + \frac{\beta_0\left(N_1(\tau_1-1)+\tau_2\right)}{2}\frac{\vec{\nabla}^S p_+}{p_+} - \sigma_1\tau_2\frac{\vec{\nabla}^S c_+}{c_+} \\ & - \left\{\sigma_1 b\rho_+\left(N_1\mathrm{d}_{b\rho_+}\tau_1 + \mathrm{d}_{b\rho_+}\tau_2\right) + \frac{\beta_0(N_1(\tau_1-1)+\tau_2)(1-2b\rho_+)}{2(1-b\rho_+)}\right\}\frac{\vec{\nabla}^S\rho_+}{\rho_+},\end{aligned} \tag{G.44}$$

$$\begin{aligned}X_2 = {} & \left(\tau_2\zeta+\tau_3\right)\frac{\vec{\nabla}^S p_+}{p_+}\cdot\left\{-\sigma_1\frac{\vec{\nabla}^S c_+}{c_+} + \frac{\beta_0}{2}\frac{\vec{\nabla}^S p_+}{p_+} - \frac{\beta_0(1-2b\rho_+)}{2(1-b\rho_+)}\frac{\vec{\nabla}^S\rho_+}{\rho_+}\right\} \\ & + \left(N_2\frac{\vec{\nabla}^S\rho_+}{\rho_+} + N_3\frac{\vec{\nabla}^S p_+}{p_+}\right)\cdot\left\{-\left(\sigma_1 b\rho_+\mathrm{d}_{b\rho_+}\tau_1 + \frac{\beta_0(\tau_1-1)(1-2b\rho_+)}{2(1-b\rho_+)}\right)\frac{\vec{\nabla}^S\rho_+}{\rho_+}\right. \\ & \left. + \left(\frac{\beta_0(\tau_1-1)}{2} - \tau_2\zeta - \tau_3\right)\frac{\vec{\nabla}^S p_+}{p_+}\right\},\end{aligned} \tag{G.45}$$

et

$$\begin{aligned}Z_2 = {} & \beta_0\frac{n_i\left(n_j n_k v_{+i,jk}\right)}{c_+} + \frac{\vec{n}\cdot\left(\vec{W}_2\cdot\overline{\overline{\nabla}}\vec{v}_+\right)}{c_+} + \frac{\vec{v}_+\cdot\overline{\overline{\nabla}}^S\vec{n} - \vec{\nabla}^S\left(\vec{v}_+\cdot\vec{n}\right)}{c_+}\cdot\left\{-\vec{W}_0 + \frac{\beta_0\left(\tau_1-1\right)}{2}\frac{\vec{\nabla}^S p_+}{p_+}\right. \\ & \left. - \left(\sigma_1 b\rho_+\mathrm{d}_{b\rho_+}\tau_1 + \frac{\beta_0(\tau_1-1)(1-2b\rho_+)}{2(1-b\rho_+)}\right)\frac{\vec{\nabla}^S\rho_+}{\rho_+}\right\} + \frac{\vec{n}\cdot\overline{\overline{\nabla}}\vec{v}_+}{c_+}\cdot\left\{-\sigma_1\tau_1\frac{\vec{\nabla}^S c_+}{c_+}\right. \\ & \left. + \left(\frac{(\tau_1+1)\beta_0}{2} - \tau_1 N_3\right)\frac{\vec{\nabla}^S p_+}{p_+} - \left(\frac{\beta_0(\tau_1+1)(1-2b\rho_+)}{2(1-b\rho_+)} + \tau_1 N_2\right)\frac{\vec{\nabla}^S\rho_+}{\rho_+}\right\}.\end{aligned} \tag{G.46}$$

G.3 Équation d'évolution des effets arrière

La combinaison des équations (G.28) et (G.41) permet finalement d'obtenir l'équation d'évolution vérifiée par les effets arrière au niveau du choc. Afin d'éliminer le terme $\left[\vec{n}\cdot\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{v}\right)\right]$, nous effectuons la combinaison linéaire (G.28)-$\frac{\sigma_4}{\sigma_1}$(G.41), donnant ainsi l'équation :

$$\begin{aligned}\frac{1}{c_+ p_+}\frac{\mathrm{d}\left(\partial_n p\right)_-}{\mathrm{d}t} + \phi_0\frac{\left(n_j n_k p_{,jk}\right)_-}{p_+} + \phi_1\left(\frac{\left(\partial_n p\right)_-}{p_+}\right)^2 + \left(\phi_2\vec{\nabla}\cdot\vec{n} + \tilde{\phi}_2^+\right)\frac{\left(\partial_n p\right)_-}{p_+} + \phi_3\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{n}\right)^2 \\ + \tilde{\phi}_3^+\vec{\nabla}\cdot\vec{n} + \frac{K_4+\lambda_0 H_4}{\lambda_1} + \frac{K_5+\lambda_0 H_5}{\lambda_1} = 0,\end{aligned} \tag{G.47}$$

avec

$$\tilde{\phi}_2^+ = \frac{K_2^+ + \lambda_0 H_2^+}{\lambda_1} \quad \text{et} \quad \tilde{\phi}_3^+ = \frac{K_3^+ + \lambda_0 H_3^+}{\lambda_1}.$$

Les termes $\tilde{\phi}_2^+$ et $\tilde{\phi}_3^+$ sont incomplets et sont développés à la fin de cette annexe. Les coefficients λ_0, λ_1, ϕ_0, ϕ_1, ϕ_2 et ϕ_3 sont identiques à ceux calculés pour un milieu homogène et au repos (9.84)-(9.85) :

$$\lambda_0 = -\frac{\sigma_4}{\sigma_1} \quad , \quad \lambda_1 = 1 + \lambda_0 \epsilon_1,$$

et

$$\phi_0 = \frac{\sigma_1 + \lambda_0 \frac{\sigma_5(1-b\rho_+)}{\gamma}}{\lambda_1} = M \frac{(\gamma+1)\zeta(2\gamma + (\gamma-1)\zeta + 2b\rho_+\zeta)}{\lambda_1(2\gamma+(\gamma-1)\zeta)(2\gamma+(\gamma+1)\zeta)}$$

$$\phi_1 = \frac{K_1 + \lambda_0 H_1}{\lambda_1} = \frac{1}{\lambda_1}\left\{\epsilon_1\left(1+\sigma_2+\sigma_3\eta_1\right) + \lambda_0\left(\epsilon_1^2 - w_2 \mathrm{d}_\zeta \epsilon_1 - \sigma_6\eta_1\frac{1-b\rho_+}{\gamma}\right)\right\}$$

$$\begin{aligned}\phi_2 = \frac{K_2 + \lambda_0 H_2}{\lambda_1} &= \frac{1}{\lambda_1}\Bigg\{\epsilon_2 + \left(\sigma_2+\sigma_3\eta_1\right)\left(\beta_0+\epsilon_2\right) + \epsilon_1\sigma_3\eta_2 \\ &\quad \lambda_0\left(2\epsilon_1\epsilon_2 - \sigma_1\epsilon_1 - w_1\mathrm{d}_\zeta\epsilon_1 - w_2\mathrm{d}_\zeta\epsilon_2 - \sigma_6\eta_2\frac{1-b\rho_+}{\gamma}\right)\Bigg\}\end{aligned}$$

$$\phi_3 = \frac{K_3 + \lambda_0 H_3}{\lambda_1} = \frac{1}{\lambda_1}\Bigg\{\sigma_3\eta_2\left(\beta_0+\epsilon_2\right) + \lambda_0\left(\epsilon_2^2 - \sigma_1\epsilon_2 - w_1\mathrm{d}_\zeta\epsilon_2\right)\Bigg\}.$$

Les termes $\frac{K_4+\lambda_0 H_4}{\lambda_1}$, $\vec{\nabla}^S \cdot \vec{W}_0$, $\frac{\mathrm{d}_t R_2}{c_+}$ et $\frac{K_5+\lambda_0 H_5}{\lambda_1}$ sont développés ci-après.

Étant donné que le milieu en amont du choc est supposé stationnaire, on rappelle que l'on a pour une quantité physique en amont du choc ψ_+ (4.25) :

$$\frac{\mathrm{d}\psi_+}{\mathrm{d}t} = \vec{V}\cdot\vec{\nabla}\psi_+ = W_S\partial_n\psi_+ + \vec{v}_+\cdot\vec{\nabla}\psi_+. \tag{G.49}$$

On rappelle également la relation (4.37) :

$$\frac{\mathrm{d}c_+}{c_+} = \frac{\mathrm{d}p_+}{2p_+} - \frac{1-2b\rho_+}{2(1-b\rho_+)}\frac{\mathrm{d}\rho_+}{\rho_+}. \tag{G.50}$$

Expression du terme $\frac{K_4+\lambda_0 H_4}{\lambda_1}$. Un premier développement donne :

$$\frac{K_4+\lambda_0 H_4}{\lambda_1} = \frac{\lambda_0}{\lambda_1}\left\{\frac{\epsilon_2}{c_+}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{n}\right) + \beta_0\sigma_1 n_{i,j}n_{j,i} - \sigma_1\tau_2\Delta^S\zeta - \frac{\tau_1\sigma_1}{c_+}\nabla_i^S\left(\frac{\mathrm{d}n_i}{\mathrm{d}t}\right)\right\} + (\star), \tag{G.51}$$

avec

$$\begin{aligned}(\star) = \frac{1}{\lambda_1 c_+}\frac{\mathrm{d}\vec{n}}{\mathrm{d}t}\cdot\Bigg\{-\frac{\lambda_0\tau_1}{c_+}\frac{\mathrm{d}\vec{n}}{\mathrm{d}t} + \Big(\tau_1 - 1 + \lambda_0\left(-\sigma_1\mathrm{d}_\zeta\tau_1 - \tau_2 + (\tau_1-1)\mathrm{d}_\zeta\beta_0\right)\Big)\vec{\nabla}^S\zeta\Bigg\} \\ + \frac{1}{\lambda_1}\Bigg\{\tau_2 + \lambda_0\left(\tau_2\mathrm{d}_\zeta\beta_0 - \sigma_1\mathrm{d}_\zeta\tau_2\right)\Bigg\}|\vec{\nabla}^S\zeta|^2.\end{aligned}$$

En utilisant (G.5), ($\star$) s'écrit :

$$(\star) = -\frac{\lambda_0\tau_1}{\lambda_1}\left(\frac{\vec{v}_+\cdot\vec{\vec{\nabla}}^S\vec{n}-\vec{\nabla}^S\left(\vec{v}_+\cdot\vec{n}\right)}{c_+}\right)^2+\frac{1}{\lambda_1}\Big(\tau_2+N_1N_4+\lambda_0\left(\tau_2\mathrm{d}_\zeta\beta_0-\sigma_1\mathrm{d}_\zeta\tau_2\right)\Big)|\vec{\nabla}^S\zeta|^2$$
$$+\frac{1}{\lambda_1}\left(\frac{\vec{v}_+\cdot\vec{\vec{\nabla}}^S\vec{n}-\vec{\nabla}^S\left(\vec{v}_+\cdot\vec{n}\right)}{c_+}\right)\cdot\left(\left(N_4-\lambda_0\tau_1N_1\right)\vec{\nabla}^S\zeta-2\lambda_0\tau_1N_2\frac{\vec{\nabla}^S\rho_+}{\rho_+}-2\lambda_0\tau_1N_3\frac{\vec{\nabla}^S p_+}{p_+}\right)$$
$$+\frac{\left(N_4-\lambda_0\tau_1N_1\right)}{\lambda_1}\vec{\nabla}^S\zeta\cdot\left(N_2\frac{\vec{\nabla}^S\rho_+}{\rho_+}+N_3\frac{\vec{\nabla}^S p_+}{p_+}\right),\quad\text{(G.52)}$$

avec

$$N_4=\tau_1-1+\lambda_0\left(-N_1\tau_1-\sigma_1\mathrm{d}_\zeta\tau_1-\tau_2+(\tau_1-1)\mathrm{d}_\zeta\beta_0\right).$$

En différentiant (G.3) par rapport à ∇_i^S, et en utilisant l'équation d'évolution de la courbure locale du front de choc développée en annexe F, équation (F.27), on a :

$$\frac{\epsilon_2}{c_+}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{n}\right)-\frac{\tau_1\sigma_1}{c_+}\nabla_i^S\left(\frac{\mathrm{d}n_i}{\mathrm{d}t}\right)=-\left(\epsilon_2-\sigma_1\tau_1\right)\frac{\Delta^S U}{c_+}-\frac{U\epsilon_2}{c_+}n_{i,j}n_{j,i}$$
$$+\epsilon_2\frac{\vec{v}_+}{c_+}\cdot\vec{\nabla}^S\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{n}\right)-\tau_1\sigma_1\frac{\nabla_i^S\left(\vec{v}_+\cdot\vec{\nabla}^S n_i\right)}{c_+}.\quad\text{(G.53)}$$

En injectant (G.52), (G.53) et (F.31) dans (G.51), on obtient finalement :

$$\frac{K_4+\lambda_0H_4}{\lambda_1}=\phi_4|\vec{\nabla}^S\zeta|^2+\phi_5\Delta^S\zeta+\left(\phi_6+\frac{\lambda_0}{\lambda_1}\frac{\vec{v}_+\cdot\vec{n}}{c_+}\right)n_{i,j}n_{j,i}+\frac{1}{\lambda_1}\vec{\nabla}^S\zeta\cdot\vec{W}_4$$
$$+\frac{\lambda_0}{\lambda_1}\left(\epsilon_2-\sigma_1\tau_1\right)\left(N_2\frac{\Delta^S\rho_+}{\rho_+}+N_3\frac{\Delta^S p_+}{p_+}\right)+\frac{1}{\lambda_1}\left(X_3+Z_3\right),\quad\text{(G.54)}$$

avec

$$\phi_4=\frac{1}{\lambda_1}\Big\{\tau_2+N_1N_4+\lambda_0\left(\mathrm{d}_\zeta N_1\left(\epsilon_2-\sigma_1\tau_1\right)+\tau_2\mathrm{d}_\zeta\beta_0-\sigma_1\mathrm{d}_\zeta\tau_2\right)\Big\}$$
$$=\frac{1}{\lambda_1}\Big\{\tau_2+N_1\left(\tau_1-1\right)+\lambda_0\Big(-N_1^2\tau_1-N_1\left(\sigma_1\mathrm{d}_\zeta\tau_1+\tau_2-(\tau_1-1)\mathrm{d}_\zeta\beta_0\right)$$
$$+\tau_2\mathrm{d}_\zeta\beta_0-\sigma_1\mathrm{d}_\zeta\tau_2+\mathrm{d}_\zeta N_1\left(\epsilon_2-\tau_1\sigma_1\right)\Big)\Big\},$$

$$\phi_5=\frac{\lambda_0}{\lambda_1}\left(N_1\left(\epsilon_2-\tau_1\sigma_1\right)-\sigma_1\tau_2\right)\quad,\quad\phi_6=\frac{\lambda_0}{\lambda_1}\left(\beta_0\sigma_1-M\epsilon_2\right),$$

$$\vec{W}_4=\left(N_4-\lambda_0\tau_1N_1\right)\left(\frac{\vec{v}_+\cdot\vec{\vec{\nabla}}^S\vec{n}-\vec{\nabla}^S\left(\vec{v}_+\cdot\vec{n}\right)}{c_+}\right)+\lambda_0\left(\epsilon_2-\sigma_1\tau_1\right)N_1\frac{\vec{\nabla}^S c_+}{c_+}$$
$$+\Big(N_2(N_4-\lambda_0\tau_1N_1)+\lambda_0(\epsilon_2-\sigma_1\tau_1)\mathrm{d}_\zeta N_2\Big)\frac{\vec{\nabla}^S\rho_+}{\rho_+}$$
$$+\Big(N_3(N_4-\lambda_0\tau_1N_1)+\lambda_0(\epsilon_2-\sigma_1\tau_1)\mathrm{d}_\zeta N_3\Big)\frac{\vec{\nabla}^S p_+}{p_+},\quad\text{(G.55)}$$

$$X_3 = \lambda_0 \left(\epsilon_2 - \sigma_1\tau_1\right)\left\{\left(b\rho_+ \mathrm{d}_{b\rho_+} N_2 - N_2\right)\frac{|\vec{\nabla}^S\rho_+|^2}{\rho_+^2} - N_3\frac{|\vec{\nabla}^S p_+|^2}{p_+^2} + \frac{\vec{\nabla}^S c_+}{c_+}\cdot\left(N_2\frac{\vec{\nabla}^S\rho_+}{\rho_+} + N_3\frac{\vec{\nabla}^S p_+}{p_+}\right)\right\}, \quad \text{(G.56)}$$

et

$$Z_3 = \left(\frac{\vec{v}_+\cdot\overline{\overline{\nabla}}^S\vec{n} - \vec{\nabla}^S\left(\vec{v}_+\cdot\vec{n}\right)}{c_+}\right)\cdot\left(-2\lambda_0\tau_1 N_2\frac{\vec{\nabla}^S\rho_+}{\rho_+} - 2\lambda_0\tau_1 N_3\frac{\vec{\nabla}^S p_+}{p_+}\right) + \lambda_0\left\{\epsilon_2\frac{\vec{v}_+}{c_+}\cdot\vec{\nabla}^S\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{n}\right)\right.$$
$$\left. - \left(\epsilon_2 - \tau_1\sigma_1\right)\frac{\Delta^S\left(\vec{v}_+\cdot\vec{n}\right)}{c_+} - \sigma_1\tau_1\frac{\nabla_i^S\left(\vec{v}_+\cdot\vec{\nabla}^S n_i\right)}{c_+} - \tau_1\left(\frac{\vec{v}_+\cdot\overline{\overline{\nabla}}^S\vec{n} - \vec{\nabla}^S\left(\vec{v}_+\cdot\vec{n}\right)}{c_+}\right)^2\right\}. \quad \text{(G.57)}$$

Expression du terme $\vec{\nabla}^S\cdot\vec{W}_0$. On rappelle les propriétés (9.38) et (9.39) :

$$\nabla_k^S\nabla_k\psi_1 = \Delta^S\psi_1 + \partial_n\psi_1\vec{\nabla}\cdot\vec{n}, \quad , \quad \nabla_k^S\psi_1\nabla_k^S\psi_2 = \nabla_k^S\psi_1\nabla_k\psi_2,$$

pour deux quantités physiques ψ_1 et ψ_2. En contractant la k-ième composante de (G.8) par ∇_k^S, et en utilisant les propriétés ci-dessus, il vient :

$$\vec{\nabla}^S\cdot\vec{W}_0 = \tau_3\frac{\partial_n p_+}{p_+}\vec{\nabla}\cdot\vec{n} + \vec{\nabla}^S\zeta\cdot\left(\mathrm{d}_\zeta\left(\tau_2\zeta+\tau_3\right)\frac{\vec{\nabla}^S p_+}{p_+} + \mathrm{d}_\zeta\tau_1\vec{\nabla}^S\zeta\frac{\vec{n}\cdot\overline{\overline{\nabla}}\vec{v}_+}{c_+}\right) + \left(\tau_2\zeta+\tau_3\right)\frac{\Delta^S p_+}{p_+} + X_4 + Z_4, \quad \text{(G.58)}$$

avec

$$X_4 = b\rho_+\mathrm{d}_{b\rho_+}\left(\tau_2\zeta+\tau_3\right)\frac{\vec{\nabla}^S\rho_+}{\rho_+}\cdot\frac{\vec{\nabla}^S p_+}{p_+} - \left(\tau_2\zeta+\tau_3\right)\frac{|\vec{\nabla}^S p_+|^2}{p_+^2}, \quad \text{(G.59)}$$

et

$$Z_4 = \frac{\vec{n}\cdot\overline{\overline{\nabla}}\vec{v}_+}{c_+}\cdot\left(b\rho_+\mathrm{d}_{b\rho_+}\tau_1\frac{\vec{\nabla}^S\rho_+}{\rho_+} - \tau_1\frac{\vec{\nabla}^S c_+}{c_+}\right) + \tau_1\frac{\nabla_k^S\left(\vec{n}\cdot\vec{\nabla}v_{+k}\right)}{c_+}. \quad \text{(G.60)}$$

Expression du terme $\dfrac{\mathrm{d}_t R_2}{c_+}$. Puisque le milieu est supposé stationnaire, on montre :

$$\left|\begin{array}{lcl}
\dfrac{\mathrm{d}\partial_n\psi_+}{\mathrm{d}t} & = & \dfrac{\mathrm{d}\vec{n}}{\mathrm{d}t}\cdot\vec{\nabla}\psi_+ + n_i V_k\psi_{+,ik} \\
\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\vec{v}_+\cdot\vec{\nabla}\psi_+\right) & = & \vec{\nabla}\psi_+\cdot\left(\vec{V}\cdot\overline{\overline{\nabla}}\vec{v}_+\right) + v_{+i}V_k\psi_{+,ik} \\
\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{v}_+\right) & = & \vec{V}\cdot\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{v}_+\right) \\
\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\vec{\nabla}^S\cdot\vec{v}_+\right) & = & \vec{V}\cdot\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{v}_+\right) - \dfrac{\mathrm{d}\vec{n}}{\mathrm{d}t}\cdot\left(\vec{n}\cdot\overline{\overline{\nabla}}\vec{v}_+\right) - \vec{n}\cdot\left(\dfrac{\mathrm{d}\vec{n}}{\mathrm{d}t}\cdot\overline{\overline{\nabla}}\vec{v}_+\right) - n_i n_k V_j v_{+i,jk},
\end{array}\right.$$

avec $\vec{V} = c_+ M\vec{n} + \vec{v}_+$. En dérivant suivant le mouvement du choc la relation (G.10), et en utilisant les relations ci-dessus et (G.5), on obtient après réarrangement des termes :

$$\frac{\mathrm{d}_t R_2}{c_+} = -R_6\left(w_1\vec{\nabla}\cdot\vec{n} + w_2\frac{(\partial_n p)_-}{p_+}\right) + N_1\vec{\nabla}^S\zeta\cdot\vec{W}_5 + X_5 + Y_3 + Z_5 + \left(\epsilon_3 n_i + \epsilon_7\frac{v_{+i}}{c_+}\right)\frac{V_k\rho_{+,ik}}{c_+\rho_+} + \left(\epsilon_4 n_i + \epsilon_8\frac{v_{+i}}{c_+}\right)\frac{V_k p_{+,ik}}{c_+ p_+}, \quad \text{(G.61)}$$

où

$$\vec{W}_5 = \epsilon_3\frac{\vec{\nabla}^S\rho_+}{\rho_+} + \epsilon_4\frac{\vec{\nabla}^S p_+}{p_+} - \epsilon_6\frac{\vec{n}\cdot\overline{\overline{\nabla}}\vec{v}_+}{c_+}, \quad \text{(G.62)}$$

$$X_5 = \left(N_2\frac{\vec{\nabla}^S\rho_+}{\rho_+} + N_3\frac{\vec{\nabla}^S p_+}{p_+}\right)\cdot\left(\epsilon_3\frac{\vec{\nabla}^S\rho_+}{\rho_+} + \epsilon_4\frac{\vec{\nabla}^S p_+}{p_+}\right). \quad \text{(G.63)}$$

Les autres termes s'expriment de la manière suivante :

$$\begin{aligned} Y_3 = R_0 R_6 + b\rho_+\Bigg(&\mathrm{d}_{b\rho_+}\epsilon_3\frac{\partial_n\rho_+}{\rho_+} + \mathrm{d}_{b\rho_+}\epsilon_4\frac{\partial_n p_+}{p_+} + \mathrm{d}_{b\rho_+}\epsilon_5\frac{\vec{\nabla}\cdot\vec{v}_+}{c_+} + \mathrm{d}_{b\rho_+}\epsilon_6\frac{\vec{\nabla}^S\cdot\vec{v}_+}{c_+} \\ &+\mathrm{d}_{b\rho_+}\epsilon_7\frac{\vec{v}_+\cdot\vec{\nabla}\rho_+}{c_+\rho_+} + \mathrm{d}_{b\rho_+}\epsilon_8\frac{\vec{v}_+\cdot\vec{\nabla}p_+}{c_+p_+}\Bigg)\left(M\frac{\partial_n\rho_+}{\rho_+} + \frac{\vec{v}_+\cdot\vec{\nabla}\rho_+}{c_+\rho_+}\right) \\ &-\frac{\mathrm{d}_t\rho_+}{c_+\rho_+}\left(\epsilon_3\frac{\partial_n\rho_+}{\rho_+} + \epsilon_7\frac{\vec{v}_+\cdot\vec{\nabla}\rho_+}{c_+\rho_+}\right) - \frac{\mathrm{d}_t p_+}{c_+ p_+}\left(\epsilon_4\frac{\partial_n p_+}{p_+} + \epsilon_8\frac{\vec{v}_+\cdot\vec{\nabla}p_+}{c_+p_+}\right) \\ &-\frac{\mathrm{d}_t c_+}{c_+^2}\left(\epsilon_5\frac{\vec{\nabla}\cdot\vec{v}_+}{c_+} + \epsilon_6\frac{\vec{\nabla}^S\cdot\vec{v}_+}{c_+} + \epsilon_7\frac{\vec{v}_+\cdot\vec{\nabla}\rho_+}{c_+\rho_+} + \epsilon_8\frac{\vec{v}_+\cdot\vec{\nabla}p_+}{c_+p_+}\right) \\ &+M\left(\epsilon_7\frac{\partial_n\rho_+}{\rho_+} + \epsilon_8\frac{\partial_n p_+}{p_+}\right)\frac{\vec{n}\cdot\left(\vec{n}\cdot\overline{\overline{\nabla}}\vec{v}_+\right)}{c_+}, \end{aligned} \quad \text{(G.64)}$$

$$R_6 = \mathrm{d}_\zeta\epsilon_3\frac{\partial_n\rho_+}{\rho_+} + \mathrm{d}_\zeta\epsilon_4\frac{\partial_n p_+}{p_+} + \mathrm{d}_\zeta\epsilon_5\frac{\vec{\nabla}\cdot\vec{v}_+}{c_+} + \mathrm{d}_\zeta\epsilon_6\frac{\vec{\nabla}^S\cdot\vec{v}_+}{c_+} + \mathrm{d}_\zeta\epsilon_7\frac{\vec{v}_+\cdot\vec{\nabla}\rho_+}{c_+\rho_+} + \mathrm{d}_\zeta\epsilon_8\frac{\vec{v}_+\cdot\vec{\nabla}p_+}{c_+p_+}, \quad \text{(G.65)}$$

et

$$\begin{aligned} Z_5 = &\left(\frac{\vec{v}_+\cdot\overline{\overline{\nabla}}^S\vec{n} - \vec{\nabla}^S(\vec{v}_+\cdot\vec{n})}{c_+}\right)\cdot\vec{W}_5 + \frac{\vec{v_+}\cdot\overline{\overline{\nabla}}\vec{v}_+}{c_+^2}\cdot\left(\epsilon_7\frac{\vec{\nabla}\rho_+}{\rho_+} + \epsilon_8\frac{\vec{\nabla}p_+}{p_+}\right) \\ &-\frac{\epsilon_6}{c_+^2}\vec{n}\cdot\left(\frac{\mathrm{d}\vec{n}}{\mathrm{d}t}\cdot\overline{\overline{\nabla}}\vec{v}_+\right) - \epsilon_6\frac{n_i n_k V_j v_{+i,jk}}{c_+^2} + \frac{(\epsilon_5+\epsilon_6)}{c_+}\vec{n}\cdot\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{v}_+\right) \\ &+\frac{\vec{n}\cdot\overline{\overline{\nabla}}\vec{v}_+}{c_+}\cdot\left\{(M\epsilon_7 - \epsilon_6 N_2)\frac{\vec{\nabla}^S\rho_+}{\rho_+} + (M\epsilon_8 - \epsilon_6 N_3)\frac{\vec{\nabla}^S p_+}{p_+}\right\}. \end{aligned} \quad \text{(G.66)}$$

En combinant les relations (G.29), (G.43), (G.54), (G.58) et (G.61), il vient alors

$$\frac{K_4+\lambda_0 H_4}{\lambda_1}+\frac{K_5+\lambda_0 H_5}{\lambda_1}=\phi_4|\vec{\nabla}^S\zeta|^2+\phi_5\Delta^S\zeta+\left(\phi_6+\frac{\lambda_0}{\lambda_1}\frac{\vec{v}_+\cdot\vec{n}}{c_+}\right)n_{i,j}n_{j,i}+\vec{\nabla}^S\zeta\cdot\vec{W}_+ \\ +Y_++Z_+-\frac{\lambda_0}{\lambda_1}\sigma_1\tau_3\frac{\partial_n p_+}{p_+}\vec{\nabla}\cdot\vec{n}+\frac{\lambda_0}{\lambda_1}R_6\left(w_1\vec{\nabla}\cdot\vec{n}+w_2\frac{(\partial_n p)_-}{p_+}\right), \quad \text{(G.67)}$$

avec

$$\vec{W}_+=\frac{1}{\lambda_1}\left\{\vec{W}_1+\vec{W}_4+\lambda_0\left(\vec{W}_3-\sigma_1\mathrm{d}_\zeta\left(\tau_2\zeta+\tau_3\right)\frac{\vec{\nabla}^S p_+}{p_+}-\sigma_1\mathrm{d}_\zeta\tau_1\vec{\nabla}^S\zeta\frac{\vec{n}\cdot\overline{\overline{\nabla}}\vec{v}_+}{c_+}-N_1\vec{W}_5\right)\right\},$$

$$Y_+=d_1\frac{\Delta^S p_+}{p_+}+d_2\frac{\Delta^S\rho_+}{\rho_+}+d_3\frac{n_jn_kp_{+,jk}}{p_+}-\frac{\lambda_0}{\lambda_1}\left(\epsilon_3n_i+\epsilon_7\frac{v_{+i}}{c_+}\right)\frac{V_k\rho_{+,ik}}{c_+\rho_+} \\ -\frac{\lambda_0}{\lambda_1}\left(\epsilon_4n_i+\epsilon_8\frac{v_{+i}}{c_+}\right)\frac{V_kp_{+,ik}}{c_+p_+}+\frac{1}{\lambda_1}\left\{X_1+X_3+\lambda_0\left(X_2-\sigma_1X_4-X_5\right)\right\} \\ +\frac{1}{\lambda_1}\left\{Y_1+\lambda_0\left(Y_2-Y_3\right)\right\},$$

où

$$d_1=\frac{\lambda_0}{\lambda_1}\left\{(\epsilon_2-\sigma_1\tau_1)N_3-\sigma_1(\tau_2\zeta+\tau_3)\right\},\quad d_2=\frac{\lambda_0}{\lambda_1}\left\{\epsilon_2-\sigma_1\tau_1\right\}N_2,\quad d_3=\frac{M-\lambda_0\frac{1-b\rho_+}{\gamma}}{\lambda_1},$$

et

$$Z_+=\frac{1}{\lambda_1}\left\{Z_1+Z_3+\lambda_0\left(Z_2-\sigma_1Z_4-Z_5\right)\right\}.$$

Les termes $\vec{W}_+$, Y_+ et Z_+ sont développés dans la suite.

En utilisant (G.30), (G.44), (G.55), (G.62), (G.8) et (G.50), $\vec{W}_+$ s'exprime tout d'abord comme :

$$\vec{W}_+=\Psi_1^{(3)}\frac{\vec{\nabla}^S\rho_+}{\rho_+}+\Psi_2^{(3)}\frac{\vec{\nabla}^S p_+}{p_+}+\Psi_3^{(3)}\frac{\vec{n}\cdot\overline{\overline{\nabla}}\vec{v}_+}{c_+}+\Psi_4^{(3)}\frac{\vec{v}_+\cdot\overline{\overline{\nabla}}^S\vec{n}-\vec{\nabla}^S\left(\vec{v}_+\cdot\vec{n}\right)}{c_+},$$

avec

$$\begin{aligned}
\lambda_1\Psi_1^{(3)} &= N_2N_4+\lambda_0\Big\{-N_1\left(N_2\tau_1+\epsilon_3\right)+\left(\epsilon_2-\sigma_1\tau_1\right)\mathrm{d}_\zeta N_2-\sigma_1 b\rho_+\left(N_1\mathrm{d}_{b\rho_+}\tau_1+\mathrm{d}_{b\rho_+}\tau_2\right) \\
&\qquad -\left(\beta_0\left(N_1(\tau_1-1)+\tau_2\right)+\frac{1}{2}\left(-\sigma_1\tau_2+N_1(\epsilon_2-\sigma_1\tau_1)\right)\right)\frac{1-2b\rho_+}{2(1-b\rho_+)}\Big\} \\
\lambda_1\Psi_2^{(3)} &= \tau_2\left(\tau_2\zeta+\tau_3\right)+(1+\zeta)\left(\tau_2+N_1\tau_1\right)-N_1\zeta+N_3N_4+\lambda_0\Big\{\left(\mathrm{d}_\zeta\beta_0-N_1\right)\left(\tau_2\zeta+\tau_3\right)-N_1N_3\tau_1 \\
&+ \frac{-\sigma_1\tau_2+N_1(\epsilon_2-\sigma_1\tau_1)}{2}+\left(\epsilon_2-\sigma_1\tau_1\right)\mathrm{d}_\zeta N_3+\frac{\beta_0(N_1(\tau_1-1)+\tau_2)}{2}-\sigma_1\mathrm{d}_\zeta\left(\tau_2\zeta+\tau_3\right)-N_1\epsilon_4\Big\} \\
\lambda_1\Psi_3^{(3)} &= \tau_1\tau_2+\lambda_0\Big\{\left(\mathrm{d}_\zeta\beta_0-N_1\right)\tau_1+\mathrm{d}_\zeta\beta_0+N_1\epsilon_6-\sigma_1\mathrm{d}_\zeta\tau_1\Big\} \\
\lambda_1\Psi_4^{(3)} &= N_4-\lambda_0\tau_1N_1.
\end{aligned}$$

La combinaison des relations (G.31), (G.45), (G.56), (G.59), (G.63) et (G.50) donne ensuite

$$\frac{1}{\lambda_1}\left\{X_1+X_3+\lambda_0\left(X_2-\sigma_1X_4-X_5\right)\right\}=\Psi_1^{(4)}\frac{|\vec{\nabla}^S\rho_+|^2}{\rho_+^2}+\Psi_2^{(4)}\frac{\vec{\nabla}^S\rho_+}{\rho_+}\cdot\frac{\vec{\nabla}^S p_+}{p_+}+\Psi_3^{(4)}\frac{|\vec{\nabla}^S p_+|^2}{p_+^2},$$

où

$$\begin{aligned}\lambda_1\Psi_1^{(4)}=\lambda_0\Bigg\{&\left(\epsilon_2-\sigma_1\tau_1\right)\left(b\rho_+\mathrm{d}_{b\rho_+}N_2-N_2\right)-N_2\left(\sigma_1 b\rho_+\mathrm{d}_{b\rho_+}\tau_1+\epsilon_3\right)\\&-\frac{N_2(1-2b\rho_+)}{2(1-b\rho_+)}\left(\beta_0(\tau_1-1)+\epsilon_2-\sigma_1\tau_1\right)\Bigg\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lambda_1\Psi_2^{(4)}=N_2\left((1+\zeta)\tau_1-1\right)+\lambda_0\Bigg\{&-N_3\left(\sigma_1 b\rho_+\mathrm{d}_{b\rho_+}\tau_1+\epsilon_3\right)-\sigma_1 b\rho_+\mathrm{d}_{b\rho_+}\left(\tau_2\zeta+\tau_3\right)\\&-\frac{1-2b\rho_+}{2(1-b\rho_+)}\Big(N_3\left(\epsilon_2-\sigma_1\tau_1+\beta_0(\tau_1-1)\right)+\left(\tau_2\zeta+\tau_3\right)\left(\beta_0-\sigma_1\right)\Big)\Bigg\}\\&+N_2\left(\frac{\beta_0(\tau_1-1)}{2}-\tau_2\zeta-\tau_3-\epsilon_4+\frac{\epsilon_2-\sigma_1\tau_1}{2}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lambda_1\Psi_3^{(4)}=&\left(1+\zeta\right)\left(\tau_2\zeta+\tau_3+N_3\tau_1\right)-N_3\zeta\\&+\lambda_0\Bigg\{N_3\left(\frac{\beta_0(\tau_1-1)-\epsilon_2+\sigma_1\tau_1}{2}-\tau_2\zeta-\tau_3-\epsilon_4\right)+\frac{\sigma_1\left(\tau_2\zeta+\tau_3\right)}{2}\Bigg\}.\end{aligned}$$

De même, en utilisant les relations (G.32), (G.42), (G.64), (G.2), (G.10), (G.12), (G.24), (G.37), (G.65), (G.49) et (G.50), on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{1}{\lambda_1}\left\{Y_1+\lambda_0\left(Y_2-Y_3\right)\right\}=&\frac{\partial_n\rho_+}{\rho_+}\Bigg\{\Psi_{11}^{(5)}\frac{\partial_n\rho_+}{\rho_+}+\Psi_{12}^{(5)}\frac{\partial_n p_+}{p_+}+\Psi_{13}^{(5)}\frac{\vec{\nabla}\cdot\vec{v}_+}{c_+}+\Psi_{14}^{(5)}\frac{\vec{\nabla}^S\cdot\vec{v}_+}{c_+}\\&+\Psi_{15}^{(5)}\frac{\vec{v}_+\cdot\vec{\nabla}\rho_+}{c_+\rho_+}+\Psi_{16}^{(5)}\frac{\vec{v}_+\cdot\vec{\nabla}p_+}{c_+p_+}\Bigg\}\\&+\frac{\partial_n p_+}{p_+}\Bigg\{\Psi_{22}^{(5)}\frac{\partial_n p_+}{p_+}+\Psi_{23}^{(5)}\frac{\vec{\nabla}\cdot\vec{v}_+}{c_+}+\Psi_{24}^{(5)}\frac{\vec{\nabla}^S\cdot\vec{v}_+}{c_+}+\Psi_{25}^{(5)}\frac{\vec{v}_+\cdot\vec{\nabla}\rho_+}{c_+\rho_+}+\Psi_{26}^{(5)}\frac{\vec{v}_+\cdot\vec{\nabla}p_+}{c_+p_+}\Bigg\}\\&+\frac{\vec{\nabla}\cdot\vec{v}_+}{c_+}\Bigg\{\Psi_{33}^{(5)}\frac{\vec{\nabla}\cdot\vec{v}_+}{c_+}+\Psi_{34}^{(5)}\frac{\vec{\nabla}^S\cdot\vec{v}_+}{c_+}+\Psi_{35}^{(5)}\frac{\vec{v}_+\cdot\vec{\nabla}\rho_+}{c_+\rho_+}+\Psi_{36}^{(5)}\frac{\vec{v}_+\cdot\vec{\nabla}p_+}{c_+p_+}\Bigg\}\\&+\frac{\vec{\nabla}^S\cdot\vec{v}_+}{c_+}\Bigg\{\Psi_{44}^{(5)}\frac{\vec{\nabla}^S\cdot\vec{v}_+}{c_+}+\Psi_{45}^{(5)}\frac{\vec{v}_+\cdot\vec{\nabla}\rho_+}{c_+\rho_+}+\Psi_{46}^{(5)}\frac{\vec{v}_+\cdot\vec{\nabla}p_+}{c_+p_+}\Bigg\}\\&+\frac{\vec{v}_+\cdot\vec{\nabla}\rho_+}{c_+\rho_+}\Bigg\{\Psi_{55}^{(5)}\frac{\vec{v}_+\cdot\vec{\nabla}\rho_+}{c_+\rho_+}+\Psi_{56}^{(5)}\frac{\vec{v}_+\cdot\vec{\nabla}p_+}{c_+p_+}\Bigg\}+\Psi_{66}^{(5)}\left(\frac{\vec{v}_+\cdot\vec{\nabla}p_+}{c_+p_+}\right)^2,\end{aligned}$$

avec

$$\lambda_1\Psi_{11}^{(5)} = \epsilon_3\left(\sigma_3\eta_3+\sigma_7+\frac{\gamma b\rho_+}{(1-b\rho_+)^2}\right)+\lambda_0\Big\{\epsilon_3\left(\epsilon_3-\frac{M(1-2b\rho_+)}{2(1-b\rho_+)}+M\right)-w_3\mathrm{d}_\zeta\epsilon_3-b\rho_+\mathrm{d}_{b\rho_+}\epsilon_3M\Big\}$$

$$\lambda_1\Psi_{12}^{(5)} = \epsilon_3\sigma_3\eta_4+\epsilon_4\left(\sigma_3\eta_3+\sigma_7+\frac{\gamma b\rho_+}{(1-b\rho_+)^2}\right)+\lambda_0\Big\{\epsilon_3\left(\epsilon_4+\frac{M}{2}\right)+\epsilon_4\left(\epsilon_3-\frac{M(1-2b\rho_+)}{2(1-b\rho_+)}\right)$$
$$+\frac{1-b\rho_+}{\gamma}-w_4\mathrm{d}_\zeta\epsilon_3-w_3\mathrm{d}_\zeta\epsilon_4-b\rho_+\mathrm{d}_{b\rho_+}\epsilon_4M\Big\}$$

$$\lambda_1\Psi_{13}^{(5)} = \sigma_3\left(\eta_3+\epsilon_3\eta_5\right)+\sigma_7+\sigma_5\left(\sigma_3\eta_3+\sigma_7+\frac{\gamma b\rho_+}{(1-b\rho_+)^2}\right)+\lambda_0\Big\{\epsilon_3\left(\epsilon_5+2\right)-w_3\mathrm{d}_\zeta\epsilon_5-\alpha_1\mathrm{d}_\zeta\epsilon_3$$
$$+\epsilon_5\left(\epsilon_3-2\frac{M(1-2b\rho_+)}{2(1-b\rho_+)}\right)-b\rho_+\mathrm{d}_{b\rho_+}\epsilon_5M-M\epsilon_7\Big\}$$

$$\lambda_1\Psi_{14}^{(5)} = \epsilon_3\sigma_3\eta_6+\epsilon_6\left(\sigma_3\eta_3+\sigma_7+\frac{\gamma b\rho_+}{(1-b\rho_+)^2}\right)+\lambda_0\Big\{\epsilon_3\left(\epsilon_6-2\right)-w_3\mathrm{d}_\zeta\epsilon_6-\alpha_2\mathrm{d}_\zeta\epsilon_3-b\rho_+\mathrm{d}_{b\rho_+}\epsilon_6M$$
$$+\epsilon_6\left(\epsilon_3-2\frac{M(1-2b\rho_+)}{2(1-b\rho_+)}\right)+M\epsilon_7\Big\}$$

$$\lambda_1\Psi_{15}^{(5)} = \epsilon_3\sigma_3\eta_7+\epsilon_7\left(\sigma_3\eta_3+\sigma_7+\frac{\gamma b\rho_+}{(1-b\rho_+)^2}\right)+\lambda_0\Big\{\epsilon_3\left(\epsilon_7-\frac{1-2b\rho_+}{2(1-b\rho_+)}+1\right)-w_3\mathrm{d}_\zeta\epsilon_7-\alpha_3\mathrm{d}_\zeta\epsilon_3$$
$$+\epsilon_7\left(\epsilon_3-2\frac{M(1-2b\rho_+)}{2(1-b\rho_+)}\right)-b\rho_+\left(\mathrm{d}_{b\rho_+}\epsilon_7M+\mathrm{d}_{b\rho_+}\epsilon_3\right)+M\epsilon_7\Big\}$$

$$\lambda_1\Psi_{16}^{(5)} = \epsilon_3\sigma_3\eta_8+\epsilon_8\left(\sigma_3\eta_3+\sigma_7+\frac{\gamma b\rho_+}{(1-b\rho_+)^2}\right)+\lambda_0\Big\{\epsilon_3\left(\epsilon_8+\frac{1}{2}\right)-w_3\mathrm{d}_\zeta\epsilon_8-\alpha_4\mathrm{d}_\zeta\epsilon_3$$
$$+\epsilon_8\left(\epsilon_3-2\frac{M(1-2b\rho_+)}{2(1-b\rho_+)}\right)-b\rho_+\mathrm{d}_{b\rho_+}\epsilon_8M\Big\}$$

$$\lambda_1\Psi_{22}^{(5)} = \epsilon_4\sigma_3\eta_4+\lambda_0\Big\{\epsilon_4\left(\epsilon_4+\frac{3}{2}M\right)-w_4\mathrm{d}_\zeta\epsilon_4\Big\}$$

$$\lambda_1\Psi_{23}^{(5)} = \sigma_3\left(\eta_4+\epsilon_4\eta_5+\epsilon_5\eta_4\right)-\frac{\gamma}{1-b\rho_+}+\lambda_0\Big\{\epsilon_4\left(\epsilon_5+1\right)+\epsilon_5\left(\epsilon_4+M\right)-w_4\mathrm{d}_\zeta\epsilon_5-\alpha_1\mathrm{d}_\zeta\epsilon_4+\tau_4-M\epsilon_8\Big\}$$

$$\lambda_1\Psi_{24}^{(5)} = \sigma_3\left(\epsilon_4\eta_6+\epsilon_6\eta_4\right)+\lambda_0\Big\{\epsilon_6\left(\epsilon_4+M\right)+\epsilon_4\left(\epsilon_6-1\right)-w_4\mathrm{d}_\zeta\epsilon_6-\alpha_2\mathrm{d}_\zeta\epsilon_4-\tau_4+M\epsilon_8\Big\}$$

$$\lambda_1\Psi_{25}^{(5)} = \sigma_3\left(\epsilon_4\eta_7+\epsilon_7\eta_4\right)+\lambda_0\Big\{\epsilon_7\left(\epsilon_4+M\right)+\epsilon_4\left(\epsilon_7-\frac{1-2b\rho_+}{2(1-b\rho_+))}\right)-w_4\mathrm{d}_\zeta\epsilon_7-\alpha_3\mathrm{d}_\zeta\epsilon_4-b\rho_+\mathrm{d}_{b\rho_+}\epsilon_4\Big\}$$

$$\lambda_1\Psi_{26}^{(5)} = \sigma_3\left(\epsilon_4\eta_8+\epsilon_8\eta_4\right)+\lambda_0\Big\{\epsilon_8\left(\epsilon_4+M\right)+\epsilon_4\left(\epsilon_8+\frac{3}{2}\right)-w_4\mathrm{d}_\zeta\epsilon_8-\alpha_4\mathrm{d}_\zeta\epsilon_4+M\epsilon_8\Big\}$$

$$\lambda_1\Psi_{33}^{(5)} = \sigma_3\eta_5\left(\epsilon_5+1\right)+\lambda_0\Big\{\epsilon_5\left(\epsilon_5+1\right)-\alpha_1\mathrm{d}_\zeta\epsilon_5+\tau_5\Big\}$$

$$\lambda_1\Psi_{34}^{(5)} = \sigma_3\left(\eta_6+\epsilon_5\eta_6+\epsilon_6\eta_5\right)+\lambda_0\Big\{\epsilon_5\left(\epsilon_6-1\right)+\epsilon_6\left(\epsilon_5+1\right)-\alpha_1\mathrm{d}_\zeta\epsilon_6-\alpha_2\mathrm{d}_\zeta\epsilon_5+\tau_6-\tau_5\Big\}$$

$$\lambda_1\Psi_{35}^{(5)} = \sigma_3\left(\eta_7+\epsilon_5\eta_7+\epsilon_7\eta_5\right)+\lambda_0\Big\{\epsilon_5\left(\epsilon_7-2\frac{1-2b\rho_+}{2(1-b\rho_+)}\right)+\epsilon_7\left(\epsilon_5+2\right)-\alpha_1\mathrm{d}_\zeta\epsilon_7-\alpha_3\mathrm{d}_\zeta\epsilon_5-b\rho_+\mathrm{d}_{b\rho_+}\epsilon_5\Big\}$$

$$\lambda_1\Psi_{36}^{(5)} = \sigma_3\left(\eta_8+\epsilon_5\eta_8+\epsilon_8\eta_5\right)+\lambda_0\Big\{\epsilon_5\left(\epsilon_8+\frac{3}{2}\right)+\epsilon_8\left(\epsilon_5+2\right)-\alpha_1\mathrm{d}_\zeta\epsilon_8-\alpha_4\mathrm{d}_\zeta\epsilon_5\Big\}$$

$$\lambda_1\Psi_{44}^{(5)} = \epsilon_6\sigma_3\eta_6+\lambda_0\Big\{\epsilon_6\left(\epsilon_6-1\right)-\alpha_2\mathrm{d}_\zeta\epsilon_6-\tau_6\Big\}$$

$$\lambda_1\Psi_{45}^{(5)} = \sigma_3\left(\epsilon_6\eta_7+\epsilon_7\eta_6\right)+\lambda_0\Big\{\epsilon_6\left(\epsilon_7-2\frac{1-2b\rho_+}{2(1-b\rho_+)}\right)+\epsilon_7\left(\epsilon_6-2\right)-\alpha_2\mathrm{d}_\zeta\epsilon_7-\alpha_3\mathrm{d}_\zeta\epsilon_6-b\rho_+\mathrm{d}_{b\rho_+}\epsilon_6\Big\}$$

$$\lambda_1\Psi_{46}^{(5)} = \sigma_3\left(\epsilon_6\eta_8+\epsilon_8\eta_6\right)+\lambda_0\Big\{\epsilon_6\left(\epsilon_8+\frac{3}{2}\right)+\epsilon_8\left(\epsilon_6-2\right)-\alpha_2\mathrm{d}_\zeta\epsilon_8-\alpha_4\mathrm{d}_\zeta\epsilon_6\Big\}$$

$$\lambda_1\Psi_{55}^{(5)} = \epsilon_7\sigma_3\eta_7+\lambda_0\Big\{\epsilon_7\left(\epsilon_7-2\frac{1-2b\rho_+}{2(1-b\rho_+)}+1\right)-\alpha_3\mathrm{d}_\zeta\epsilon_7-b\rho_+\mathrm{d}_{b\rho_+}\epsilon_7\Big\}$$

$$\lambda_1\Psi_{56}^{(5)} = \sigma_3\left(\epsilon_7\eta_8+\epsilon_8\eta_7\right)+\lambda_0\Big\{\epsilon_7\left(\epsilon_8+\frac{3}{2}\right)+\epsilon_8\left(\epsilon_7-2\frac{1-2b\rho_+}{2(1-b\rho_+)}\right)-\alpha_3\mathrm{d}_\zeta\epsilon_8-\alpha_4\mathrm{d}_\zeta\epsilon_7-b\rho_+\mathrm{d}_{b\rho_+}\epsilon_8\Big\}$$

$$\lambda_1\Psi_{66}^{(5)} = \epsilon_8\sigma_3\eta_8+\lambda_0\Big\{\epsilon_8\left(\epsilon_8+2\right)-\alpha_4\mathrm{d}_\zeta\epsilon_8\Big\}.$$

Enfin, en considérant les relations (G.33), (G.46), (G.57), (G.60), (G.66), (G.8), (G.37) et (G.5), Z_+ s'écrit :

$$\begin{aligned}Z_+ = -\frac{\lambda_0\tau_1}{\lambda_1}\left(\frac{\vec{v}_+\cdot\overline{\overline{\nabla}}^S\vec{n}-\vec{\nabla}^S\left(\vec{v}_+\cdot\vec{n}\right)}{c_+}\right)^2+\frac{\vec{v}_+\cdot\overline{\overline{\nabla}}^S\vec{n}-\vec{\nabla}^S\left(\vec{v}_+\cdot\vec{n}\right)}{c_+}\cdot\vec{Q}_1+\frac{\vec{n}\cdot\overline{\overline{\nabla}}\vec{v}_+}{c_+}\cdot\vec{Q}_2\\ +\vec{n}\cdot\left(\vec{Q}_3\cdot\overline{\overline{\nabla}}\vec{v}_+\right)+\frac{\sigma_8-\lambda_0\left(\epsilon_5+\epsilon_6\right)}{\lambda_1}\frac{\vec{n}\cdot\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{v}_+\right)}{c_+}+\frac{\lambda_0\epsilon_2}{\lambda_1}\frac{\vec{v}_+\cdot\vec{\nabla}^S\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{n}\right)}{c_+}\\ -\frac{\lambda_0\sigma_1\tau_1}{\lambda_1}\frac{\nabla_i^S\left(\vec{v}_+\cdot\vec{\nabla}^Sn_i\right)+\nabla_i^S\left(\vec{n}\cdot\vec{\nabla}^Sv_{+i}\right)}{c_+}+\frac{\lambda_0}{\lambda_1}n_in_j\left(\beta_0n_k+\epsilon_6\frac{V_k}{c_+}\right)\frac{v_{+i,jk}}{c_+}\\ -\frac{\lambda_0\left(\epsilon_2-\tau_1\sigma_1\right)}{\lambda_1}\frac{\Delta^S\left(\vec{v}_+\cdot\vec{n}\right)}{c_+}-\frac{\lambda_0}{\lambda_1}\frac{\vec{v_+}\cdot\overline{\overline{\nabla}}\vec{v}_+}{c_+^2}\cdot\left(\epsilon_7\frac{\vec{\nabla}\rho_+}{\rho_+}+\epsilon_8\frac{\vec{\nabla}p_+}{p_+}\right),\end{aligned}$$

avec

$$\vec{Q}_1 = \Psi_1^{(6)}\frac{\vec{\nabla}^S\rho_+}{\rho_+}+\Psi_2^{(6)}\frac{\vec{\nabla}^Sp_+}{p_+}+\Psi_3^{(6)}\frac{\vec{n}\cdot\overline{\overline{\nabla}}\vec{v}_+}{c_+}\quad,\quad\vec{Q}_2 = \Psi_4^{(6)}\frac{\vec{\nabla}^S\rho_+}{\rho_+}+\Psi_5^{(6)}\frac{\vec{\nabla}^Sp_+}{p_+},$$

$$\lambda_1\Psi_1^{(6)} = -\lambda_0\left(\sigma_1 b\rho_+ \mathrm{d}_{b\rho_+}\tau_1 + \frac{\beta_0\left(\tau_1-1\right)\left(1-2b\rho_+\right)}{2(1-b\rho_+)} + \epsilon_3\right),$$

$$\lambda_1\Psi_2^{(6)} = \lambda_0\left(\frac{\beta_0\left(\tau_1-1\right)}{2} - \epsilon_4 - \tau_2\zeta - \tau_3\right) \qquad , \quad \lambda_1\Psi_3^{(6)} = \lambda_0\left(\epsilon_6-\tau_1\right),$$

$$\lambda_1\Psi_4^{(6)} = \lambda_0\left(-\frac{\beta_0\left(\tau_1+1\right)\left(1-2b\rho_+\right)}{2(1-b\rho_+)} + N_2\left(\epsilon_6-\tau_1\right) - \sigma_1 b\rho_+\mathrm{d}_{b\rho_+}\tau_1 - M\epsilon_7\right)$$

$$\lambda_1\Psi_5^{(6)} = \tau_1\left(1+\zeta\right) + \lambda_0\left(\frac{(\tau_1+1)\beta_0}{2} + N_3\left(\epsilon_6-\tau_1\right) - M\epsilon_8\right),$$

et

$$\vec{Q}_3 = \frac{\lambda_0}{\lambda_1}\Bigg\{\left(N_1(\tau_1+\epsilon_6)+\tau_2\right)\vec{\nabla}^S\zeta + N_2(\tau_1+\epsilon_6)\frac{\vec{\nabla}^S\rho_+}{\rho_+} + \left(N_3(\tau_1+\epsilon_6)+\tau_2\zeta+\tau_3\right)\frac{\vec{\nabla}^S p_+}{p_+} + \tau_3\vec{n}\frac{\partial_n p_+}{p_+} + \tau_1\frac{\vec{n}\cdot\overline{\overline{\nabla}}\vec{v}_+}{c_+} + \left(\tau_1+\epsilon_6\right)\frac{\vec{v}_+\cdot\overline{\overline{\nabla}}^S\vec{n} - \vec{\nabla}^S\left(\vec{v}_+\cdot\vec{n}\right)}{c_+}\Bigg\}.$$

En injectant (G.67) dans (G.47), on obtient finalement l'équation d'évolution des effets arrière pour un milieu inhomogène et en mouvement :

$$\boxed{\begin{aligned}&\frac{1}{c_+p_+}\frac{\mathrm{d}\left(\partial_n p\right)_-}{\mathrm{d}t} + \phi_0\frac{\left(n_j n_k p_{,jk}\right)_-}{p_+} + \phi_1\left(\frac{\left(\partial_n p\right)_-}{p_+}\right)^2 + \left(\phi_2\vec{\nabla}\cdot\vec{n} + \phi_2^+\right)\frac{\left(\partial_n p\right)_-}{p_+}\\ &\quad+\phi_3\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{n}\right)^2 + \phi_3^+\vec{\nabla}\cdot\vec{n} + \phi_4|\vec{\nabla}^S\zeta|^2 + \phi_5\Delta^S\zeta + \left(\phi_6 + \frac{\lambda_0}{\lambda_1}\frac{\vec{v}_+\cdot\vec{n}}{c_+}\right)n_{i,j}n_{j,i}\\ &\qquad\qquad+\vec{\nabla}^S\zeta\cdot\vec{W}_+ + Y_+ + Z_+ = 0,\end{aligned}} \quad \text{(G.68)}$$

avec

$$\phi_2^+ = \tilde{\phi}_2^+ + \frac{\lambda_0 w_2}{\lambda_1}R_6 = \frac{K_2^+ + \lambda_0\left(H_2^+ + w_2R_6\right)}{\lambda_1},$$

$$\phi_3^+ = \tilde{\phi}_3^+ + \frac{\lambda_0}{\lambda_1}\left(w_1R_6 - \sigma_1\tau_3\frac{\partial_n p_+}{p_+}\right) = \frac{K_3^+ + \lambda_0\left(H_3^+ + w_1R_6 - \sigma_1\tau_3\frac{\partial_n p_+}{p_+}\right)}{\lambda_1}.$$

Le calcul se termine par le développement des termes ϕ_2^+ et ϕ_3^+.

En utilisant les relations (G.49), (G.50), (G.2), (G.10), (G.12), (G.24), (G.37) et (G.65), ϕ_2^+ s'exprime comme :

$$\phi_2^+ \quad = \Psi_1^{(1)}\frac{\partial_n\rho_+}{\rho_+} + \Psi_2^{(1)}\frac{\partial_n p_+}{p_+} + \Psi_3^{(1)}\frac{\vec{\nabla}\cdot\vec{v}_+}{c_+} + \Psi_4^{(1)}\frac{\vec{\nabla}^S\cdot\vec{v}_+}{c_+} + \Psi_5^{(1)}\frac{\vec{v}_+\cdot\vec{\nabla}\rho_+}{c_+\rho_+} + \Psi_6^{(1)}\frac{\vec{v}_+\cdot\vec{\nabla}p_+}{c_+p_+},$$

avec

$$\lambda_1\Psi_1^{(1)} =\epsilon_3\left(1+\sigma_2+\sigma_3\eta_1\right)+\epsilon_1\left(\sigma_3\eta_3+\sigma_7+\frac{\gamma b\rho_+}{(1-b\rho_+)^2}\right)$$
$$+\lambda_0\Bigg\{w_2\mathrm{d}_\zeta\epsilon_3+w_3\mathrm{d}_\zeta\epsilon_1+M\left(b\rho_+\mathrm{d}_{b\rho_+}\epsilon_1-\frac{\epsilon_1(1-2b\rho_+)}{2(1-b\rho_+)}\right)+2\epsilon_1\epsilon_3-\frac{1-b\rho_+}{\gamma}\sigma_6\left(1+\eta_3\right)\Bigg\}$$

$$\lambda_1\Psi_2^{(1)} =\epsilon_4\left(1+\sigma_2+\sigma_3\eta_1\right)+\epsilon_1\sigma_3\eta_4+\lambda_0\Bigg\{w_2\mathrm{d}_\zeta\epsilon_4+w_4\mathrm{d}_\zeta\epsilon_1+\epsilon_1\left(2\epsilon_4-\frac{M}{2}\right)-\frac{1-b\rho_+}{\gamma}\sigma_6\eta_4\Bigg\}$$

$$\lambda_1\Psi_3^{(1)} =\epsilon_5\left(1+\sigma_2+\sigma_3\eta_1\right)+\sigma_2+\sigma_3\left(\eta_1+\epsilon_1\eta_5\right)+\lambda_0\Bigg\{w_2\mathrm{d}_\zeta\epsilon_5+\alpha_1\mathrm{d}_\zeta\epsilon_1+2\epsilon_1\left(\epsilon_5+1\right)-\frac{1-b\rho_+}{\gamma}\sigma_6\eta_5\Bigg\}$$

$$\lambda_1\Psi_4^{(1)} =\epsilon_6\left(1+\sigma_2+\sigma_3\eta_1\right)+\epsilon_1\sigma_3\eta_6+\lambda_0\Bigg\{w_2\mathrm{d}_\zeta\epsilon_6+\alpha_2\mathrm{d}_\zeta\epsilon_1+2\epsilon_1\left(\epsilon_6-1\right)-\frac{1-b\rho_+}{\gamma}\sigma_6\eta_6\Bigg\}$$

$$\lambda_1\Psi_5^{(1)} =\epsilon_7\left(1+\sigma_2+\sigma_3\eta_1\right)+\epsilon_1\sigma_3\eta_7+\lambda_0\Bigg\{w_2\mathrm{d}_\zeta\epsilon_7+\alpha_3\mathrm{d}_\zeta\epsilon_1+\left(b\rho_+\mathrm{d}_{b\rho_+}\epsilon_1-\frac{\epsilon_1(1-2b\rho_+)}{2(1-b\rho_+)}\right)$$
$$+2\epsilon_1\epsilon_7-\frac{1-b\rho_+}{\gamma}\sigma_6\eta_7\Bigg\}$$

$$\lambda_1\Psi_6^{(1)} =\epsilon_8\left(1+\sigma_2+\sigma_3\eta_1\right)+\epsilon_1\sigma_3\eta_8+\lambda_0\Bigg\{w_2\mathrm{d}_\zeta\epsilon_8+\alpha_4\mathrm{d}_\zeta\epsilon_1+\epsilon_1\left(2\epsilon_8-\frac{1}{2}\right)-\frac{1-b\rho_+}{\gamma}\sigma_6\eta_8\Bigg\}.$$

En utilisant ces mêmes relations et (G.7), on a également :

$$\phi_3^+ \quad =\Psi_1^{(2)}\frac{\partial_n\rho_+}{\rho_+}+\Psi_2^{(2)}\frac{\partial_n p_+}{p_+}+\Psi_3^{(2)}\frac{\vec{\nabla}\cdot\vec{v}_+}{c_+}+\Psi_4^{(2)}\frac{\vec{\nabla}^S\cdot\vec{v}_+}{c_+}+\Psi_5^{(2)}\frac{\vec{v}_+\cdot\vec{\nabla}\rho_+}{c_+\rho_+}+\Psi_6^{(2)}\frac{\vec{v}_+\cdot\vec{\nabla}p_+}{c_+p_+},$$

où

$$\lambda_1\Psi_1^{(2)} =\sigma_3\eta_2\epsilon_3+\left(\beta_0+\epsilon_2\right)\left(\sigma_3\eta_3+\sigma_7+\frac{\gamma b\rho_+}{(1-b\rho_+)^2}\right)$$
$$+\lambda_0\Bigg\{w_1\mathrm{d}_\zeta\epsilon_3+w_3\mathrm{d}_\zeta\epsilon_2+M\left(b\rho_+\mathrm{d}_{b\rho_+}\epsilon_2-\frac{\epsilon_2(1-2b\rho_+)}{2(1-b\rho_+)}\right)+\epsilon_3\left(2\epsilon_2-\sigma_1\right)\Bigg\}$$

$$\lambda_1\Psi_2^{(2)} =\sigma_3\eta_2\epsilon_4+\left(\beta_0+\epsilon_2\right)\sigma_3\eta_4+\lambda_0\Bigg\{w_1\mathrm{d}_\zeta\epsilon_4+w_4\mathrm{d}_\zeta\epsilon_2-M\frac{\epsilon_2}{2}-\sigma_1(\tau_3+\tau_4)+2\epsilon_2\epsilon_4\Bigg\}$$

$$\lambda_1\Psi_3^{(2)} =\sigma_3\eta_2\left(\epsilon_5+1\right)+\left(\beta_0+\epsilon_2\right)\sigma_3\eta_5+\lambda_0\Bigg\{w_1\mathrm{d}_\zeta\epsilon_5+\alpha_1\mathrm{d}_\zeta\epsilon_2-\sigma_1\tau_5+2\epsilon_2\left(\epsilon_5+1\right)\Bigg\}$$

$$\lambda_1 \Psi_4^{(2)} = \sigma_3\eta_2\epsilon_6 + (\beta_0+\epsilon_2)\,\sigma_3\eta_6 + \lambda_0\Big\{ w_1 \mathrm{d}_\zeta\epsilon_6 + \alpha_2\mathrm{d}_\zeta\epsilon_2 - \sigma_1\tau_6 + 2\epsilon_2\,(\epsilon_6-1)\Big\}$$

$$\lambda_1 \Psi_5^{(2)} = \sigma_3\eta_2\epsilon_7 + (\beta_0+\epsilon_2)\,\sigma_3\eta_7 + \lambda_0\Big\{ w_1 \mathrm{d}_\zeta\epsilon_7 + \alpha_3\mathrm{d}_\zeta\epsilon_2 + \epsilon_7\,(2\epsilon_2-\sigma_1) + \left(b\rho_+\mathrm{d}_{b\rho_+}\epsilon_2 - \frac{\epsilon_2(1-2b\rho_+)}{2(1-b\rho_+)}\right)\Big\}$$

$$\lambda_1 \Psi_6^{(2)} = \sigma_3\eta_2\epsilon_8 + (\beta_0+\epsilon_2)\,\sigma_3\eta_8 + \lambda_0\Big\{ w_1 \mathrm{d}_\zeta\epsilon_8 + \alpha_4\mathrm{d}_\zeta\epsilon_2 - \frac{\epsilon_2}{2} + \epsilon_8\,(2\epsilon_2-\sigma_1)\Big\}.$$