HAL
open science

Contrôle de la propagation d'ondes guidées dans une plaque piézoélectrique par application de conditions aux limites électriques périodiques

Nesrine Kherraz

▶ **To cite this version:**

Nesrine Kherraz. Contrôle de la propagation d'ondes guidées dans une plaque piézoélectrique par application de conditions aux limites électriques périodiques. Acoustique [physics.class-ph]. Université François Rabelais de Tours, 2017. Français. NNT : . tel-01617398

HAL Id: tel-01617398

https://theses.hal.science/tel-01617398v1

Submitted on 16 Oct 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ FRANÇOIS RABELAIS DE TOURS

École Doctorale EMSTU

Laboratoire : GREMAN, UMR 7347, Université François-Rabelais de Tours-CNRS-INSA CVL

THÈSE présentée par :

Nesrine KHERRAZ

soutenue le 4 Mai 2017

pour obtenir le grade de : Docteur de l'université François - Rabelais de Tours

Discipline / Spécialité : Physique / Acoustique

Contrôle de la propagation d'ondes guidées dans une plaque piézoélectrique par application de conditions aux limites électriques périodiques

THÈSE CO-DIRIGÉE PAR :

LEVASSORT Franck	Professeur, Université François - Rabelais de Tours
MORVAN Bruno	Professeur, Université Le Havre Normandie

RAPPORTEURS :

KHELIF Abdelkrim	Directeur de Recherche CNRS, Université de Franche-Comté
RICHARD Claude	Professeur, INSA de Lyon

JURY :

HLADKY-HENNION Anne-Christine	Directrice de Recherche CNRS, IEMN-ISEN, présidente du jury
HAUMESSER Lionel	Maître de Conférences, Université François-Rabelais de Tours
KHELIF Abdelkrim	Directeur de Recherche CNRS, Université de Franche-Comté
LEVASSORT Franck	Professeur, Université François - Rabelais de Tours
MORVAN Bruno	Professeur, Université Le Havre Normandie
RICHARD Claude	Professeur, INSA de Lyon
ROMERO GARCIA Vicente	Chargé de Recherche CNRS, Université du Maine

INVITÉE :

PHAM THI Mai	Ingénieur R&D, Thales Research & Technology

À la mémoire de ma mère Fadila,

À mon père Rachid,

À mes soeurs Selma et Sihem.

Remerciements

Cette thèse a été réalisée en co-direction avec deux laboratoires de la Fédération Acoutique du Nord Ouest (FANO), le Groupe de Recherche en Matériaux, Micro-électronique, Acoustique et Nanotechnologies (GREMAN) à Blois et le Laboratoire Ondes et Milieux Complexes (LOMC) au Havre. À ce titre je tiens à exprimer ma gratitude à Marc Lethiecq, directeur du GREMAN, d'avoir accepté de m'accueillir au sein de son laboratoire. Je souhaite le remercier particulièrement pour sa gentillesse, sa disponibilité et de son soutien administratif à mes différentes démarches.

Je remercie également Pascal Pareige, directeur adjoint du LOMC de m'avoir accueillie au sein du groupe acoustique du laboratoire et du département GEII de l'IUT du Havre, je lui suis extrêmement reconnaissante de m'avoir remplacée d'une manière inconditionnelle en particulier durant la période stressante de fin de rédaction.

J'adresse mes sincères remerciements aux membres du jury qui ont accordé un temps précieux à l'étude de ce travail, particulièrement messieurs Abdelkrim Khelif et Claude Richard pour l'honneur qu'ils m'ont fait en acceptant de rapporter ce travail. Je remercie également madame Anne Christine Hladky-Hennion d'avoir accepter de présider ce jury et madame Pham Thi Mai ainsi que monsieur Vicente Romero Garcia pour avoir bien voulu remplir les rôles d'examinateurs.

Toute ma gratitude va aux différents partenaires du projet MIRAGES, IEMN à Lille, I2M à Bordeaux et Thales R&T à Paris pour les nombreux et riches échanges que nous avons pu avoir durant ces trois années. Je remercie l'équipe de Thales R&T pour la conception du démonstrateur 2D.

La découpe des électrodes n'a pas été une affaire facile, et la partie expérimentale de cette thèse n'aurait pas pu s'accomplir sans échantillons, pour cela j'exprime ma reconnaissance à Claire Bantignies, ingénieur de la société Vernon SA (Tours) et Christophe Brosseau, technicien à l'IUT de Blois. Mes remerciements vont également à Virginie Grimal-Perrigouas pour le traitement des électrodes ainsi qu'aux techniciens des deux sites Henri Cahingt au Havre et Pascal Visée à Blois pour la conception des différents porte-échantillons.

Je remercie également Emmanuel Le Clezio de m'avoir aidée malgré ses nombreuses responsabilités à déterminer la base de données des matériaux piézoélectriques .

Si cette thèse s'est accomplie dans de si bonnes conditions c'est avant tout grâce à mes directeurs et encadrant de thèse. Je ne saurai trouver les mots pour les remercier comme il se doit pour leur accueil chaleureux, le temps, l'énergie et les connaissances qu'ils ont partagé avec moi toujours dans la joie et la bonne humeur. Je leur suis redevable non seulement pour

la rigueur qu'ils ont essayé de m'inculquer mais aussi pour leurs patience et soutien dans les moments les plus délicats. Merci à Franck pour sa légendaire gentillesse, son imperturbable bonne humeur et d'avoir toujours veillé au bon déroulement technique et administratif de la thèse. Je remercie également Lionel pour ses précieux conseils qu'il m'a prodigués durant ces dernières années et aussi de m'avoir accompagnée tout en me laissant l'autonomie des choix. Merci à Bruno, qui m'a beaucoup apporté tout au long de ce parcours, de m'avoir mise en confiance dés le début et guidée jusqu'au bout. Travailler avec eux a été très instructif et agréable, j'espère que le futur nous réserve de belles collaborations.

Mes sincères remerciements vont à Pascal Rembert et Rebecca Sainidou pour le modèle analytique qui m'a permis de vérifier mes résultats, je les remercie aussi pour leurs regards critiques et leurs conseils pertinents. J'associe à ces remerciements, Pascal Tran et Pierre Maréchal pour toutes les discussions scientifiques qu'on a eu et le temps qu'ils m'ont toujours accordé pour répondre à mes moindres interrogations.

Merci à Paulo pour ses conseils sur l'électronique en particulier et la vie en général, des conseils bizarres certes, mais logiques ! ! Merci aussi pour les petits services rendus et surtout pour les soudures, les plus belles sont surement pas les miennes !

Je tiens aussi à remercier l'ensemble des chercheurs, personnel technique et administratif des deux laboratoires GREMAN et LOMC pour la bonne ambiance de travail, et tout particulièrement Francine pour nos longues discussions et les sorties ciné ainsi que Moncef pour sa bonne humeur communicative et les bonnes soirées culinaires qu'il nous organisait. Mes séjours au Havre ont été un vrai plaisir grâce à eux.

Mes remerciements aux collègues des IUT de Blois et du Havre avec qui j'ai eu la chance et le plaisir d'enseigner et qui ont bien aménagé mes horaires pour que je puisse m'en sortir avec mes séjours entre les deux sites.

Je tiens surtout à remercier chaleureusement mes compagnons de chemin, les doctorants et post-doctorants, avec qui j'ai partagé le meilleur et le pire. Je commence d'abord par les blaisois, mes compagnons de bureau, pour leur bonne humeur et nos discussions passionnantes, Julien.F, Nicole, Hossep, Andres, Fabrice, Oumar, Mathiew pour ses encouragements (les pires années sont derrière moi maintenant !) et le meilleur pour la fin : Julien.B, mon ami, le Big Brother qui m'a soutenue du début jusqu'à la fin et qui savait me redonner le sourire avec ses blagues pourries. Je remercie également Amel pour sa sympathie et son soutien amical. Je n'oublie pas de remercier le petit stagiaire Hugues pour son coup main expérimental.

Viennent ensuite mes camarades havrais, mon collègue de bureau qui m'a bien supportée Nacef, Sidali, Camille, Raounek, Johanna, Ronan, Barra, Koun et Bochra. Je souhaite une bonne continuation aux futurs docteurs, Latifa, Fatima, David, Athena Arnaud, Tim, Soheil, et Mahbub. Je n'oublie pas mes rayons de soleil normands, Céline, Benoit, Anthony et JB sans qui l'ambiance n'aurait pas été la même. Et surtout un grand merci au hasard qui fait si bien les choses et qui a mis dans le même laboratoire ma voisine d'enfance Nezha, merci à toi "Malika" pour les bons moments du quotidien partagés avec toi et pour ton soutien à tous les instants.

Merci à Mohamed, Adel, Hamza, Nabih, Mouhab et Marwa, les jeunes chercheurs du laboratoire GREAH au Havre, mes amis du deuxième étage pour l'ambiance particulière et avec qui j'ai partagé des moments inoubliables.

Je ne saurai oublier de remercier les personnes qui m'ont aidée de différentes façons avec mes nombreux déménagements (4 en 3 ans !), il y en a qui m'ont aidée à emballer, à porter, transporter et stoker mes affaires, un autre a conduit le camion et a fait 800 km un 31 décembre ! Et d'autres s'étaient découverts des talons d'agent immobilier en m'aidant à trouver les appartements, un GRAND MERCI en vrac à Julien.B, Céline, Bruno, Lionel, Pierre, Adel, Mohamed, Hamza, Mouheb, Nabih, Nacef, Athéna, Anthony, Hossep, Andres, Marco, Julien.F, Nezha, Sihem et Hakim. Sans vous, je ne sais vraiment pas comment j'aurai pu me débrouiller.

Je n'oublie pas de remercier Marco, mon rital préféré, pour ses encouragements et son soutien. Merci de m'avoir poussée à aller toujours plus loin et à donner le meilleur de moi même, merci de m'avoir ouvert les portes de l'Italie et bien plus encore.

Enfin, mes plus grands remerciements s'adressent à ma chère famille, mes parents, mes soeurs Selma et Sihem, mes beaux-frères Hakim et Adlène dont la patience et le soutien sans faille m'ont permis d'aller jusqu'au bout de cette expérience. Je n'oublie pas mes petites princesses Melyna et Naila qui ont été une vraie bouffée d'oxygène dans les moments les plus délicats.

Résumé

L'essor des Cristaux Phononiques (CP), structures constituées d'un arrangement périodique de différents matériaux, dans des domaines d'applications variés tels que la sismique, l'électronique ou l'imagerie, tient principalement aux propriétés exceptionnelles que ces structures possèdent pour le contrôle de la propagation des ondes.

Des travaux récents se sont intéressés à l'accordabilité en fréquence des CP. Notamment en insérant des matériaux actifs, il a été montré qu'il était possible de moduler la position en fréquence ou la largeur de bandes interdites de Bragg ou d'hybridation sans avoir à changer la géométrie du CP. Dans ce contexte, on étudie la propagation d'ondes de Lamb dans une plaque piézoélectrique homogène couverte par des électrodes disposées périodiquement sur ses deux faces. Différentes conditions aux limites électriques sont imposées sur ces électrodes afin d'agir sur la dispersion des ondes de Lamb se propageant dans la plaque piézoélectrique. On montre expérimentalement et numériquement que l'application de ces conditions aux limites permet des couplages de modes de Lamb de mêmes symétries ou de symétries différentes. Ces couplages entrainent l'ouverture de bande interdite de Bragg en bord de zone de Brillouin mais aussi au sein même de la première zone de Brillouin lorsque deux modes de Lamb contra-propagatifs différents sont en jeu.

Mots clés : Cristaux phononiques, piézoélectricité, ultrasons, ondes de Lamb, métamatériaux, bandes interdites, résonances locales.

Abstract

One of the most important properties of phononic crystals (PCs) is their ability to prohibit the propagation of acoustic waves in specific frequency ranges called band gaps (BG). Bragg scattering and mode hybridization are the two principal known mechanisms for BG nucleation. Recently, the interest for BG tunability has grown rapidly and many studies have been focused on the opening of Bragg BGs and on the control of their frequency range. This study concerns the development of a piezoelectric phononic crystal that is able to generate and control the propagation of guided Lamb waves, thus offering tunability of the phononic band structure. A piezoelectric plate covered by 1D periodic arrangement of thin metallic electrodes is investigated. It is shown that the application of various Electrical Boundary Conditions (EBCs) on the electrodes (floating potential, short-circuiting, connecting an electrical load) allows to change the effective properties of the piezoelectric plate. The dispersion of the waves is then electrically tuned and, depending on the applied EBCs, we demonstrate experimentally and numerically the possibility of opening Bragg or hybridization gaps in the sub-wavelength regime.

Keyworlds : Phononic crystals, piezoelectricity, ultrasounds, Lamb waves, Bragg band gap, metamaterials, locally resonance, hybridization gaps.

Table des matières

Introduction **15**

1 Généralités sur les cristaux phononiques **19**

1 Introduction 19

2 Généralités 20

2.1 Loi de Bragg 20

2.2 Réseaux direct et réciproque 21

2.3 Dispersion et diagrammes de bandes 22

3 Métamatériaux et cristaux phononiques à résonances locales 23

4 Accordabilité en fréquence des cristaux phononiques 25

5 Piézoélectricité : principe et équations constitutives 26

5.1 Généralités 26

5.2 Équations constitutives 27

5.3 Caractéristiques fonctionnelles 28

5.4 Schéma électrique équivalent de Krimholtz, Leedom et Matthaei (K.L.M) 30

6 Cristaux phononiques et métamatériaux piézoélectriques 36

7 Ondes guidées dans les plaques phononiques 40

8 Conclusion 46

2 Ondes de Lamb dans une plaque piézoélectrique uniforme **49**

1 Introduction 49

2 Étude numérique par éléments finis 50

2.1 Analyse des modes propres 50

2.2 Impédance électrique de la plaque piézoélectrique avec ou sans électrode 57

2.3 Impédance électrique de la plaque piézoélectrique avec ajout de charges électriques d'impédance 61

3 Étude expérimentale 64

3.1 Présentation de l'échantillon 64

3.2 Mesure sur une plaque piézoélectrique avec électrodes métallisées au potentiel flottant . . . 65
3.3 Mesure sur une plaque piézoélectrique avec d'autres conditions aux limites électriques . . . 67
3.4 Mesure sur plaque piézoélectrique sans électrode . . . 68
4 Conclusion . . . 70

3 Ondes de Lamb dans une plaque phononique piézoélectrique 71
1 Introduction . . . 71
2 Étude numérique par éléments finis . . . 72
2.1 Description du cristal phononique piézoélectrique . . . 72
2.2 Influence du facteur de recouvrement . . . 76
2.3 Modification des conditions aux limites électriques . . . 77
3 Étude expérimentale . . . 82
3.1 Échantillons . . . 82
3.2 Conditions aux limites électriques symétriques . . . 85
3.3 Conditions aux limites électriques antisymétriques . . . 90
4 Impédance électrique . . . 90
5 Conclusion . . . 94

4 Accordabilité d'une plaque phononique piézoélectrique par ajout de dipôles électriques passifs 95
1 Introduction . . . 95
2 Évaluation des capacités d'un élément . . . 96
2.1 Capacité bloquée . . . 96
2.2 Capacité en basses fréquences . . . 98
3 Accordabilité du CP par ajout d'inductances électriques . . . 101
3.1 Courbes de dispersion . . . 101
3.2 Impédance électrique . . . 112
4 Accordabilité du CP par ajout de capacités électriques . . . 115
5 Conclusion . . . 117

Conclusions et perspectives 119

Annexes 127

A Base de données des matériaux piézoélectriques utilisés 127

B Étude analytique des ondes de Lamb dans une plaque piézoélectrique

avec des surfaces uniformes **131**
1 Équation de dispersion dans un matériau piézoélectrique 131
2 Propagation dans une plaque piézoélectrique avec électrodes 134
3 Propagation dans une plaque piézoélectrique sans électrodes 136
4 Étude des fréquences de coupures 137

Introduction

Développés dans les années 70 et commercialisés dans les années 80, les systèmes Micro-Electro-Mécaniques, communément appelés *MEMS*, n'ont pris leur véritable essor qu'à partir du 21ème siècle. En moins d'une décennie, ils sont devenus des éléments fondamentaux dans la fabrication de la plupart des objets de haute technologie qui nous entourent. La richesse de ces composants réside dans leur faculté à coupler plusieurs principes physiques, ce qui leur procure des fonctionnalités multiples. Il existe différentes sortes de MEMS : magnétostrictif, thermique, électrostatique et piézoélectrique. Les deux dernières permettent une transduction réversible et sont facilement intégrables sur circuit.

D'un autre côté, depuis les années 2000, les cristaux phononiques (CP) suscitent l'intérêt de la communauté scientifique et industrielle. À l'instar des cristaux photoniques, les CP permettent un contrôle de la propagation des ondes élastiques et acoustiques grâce à des propriétés extraordinaires que les matériaux naturels ne possèdent pas. En effet, l'agencement périodique de matériaux avec des propriétés élastiques différentes permet la réalisation de structures pouvant interdire la propagation des ondes élastiques pour des longueurs d'ondes voisines de la périodicité spatiale du CP [1]. Ces bandes interdites de fréquences sont nommées *bandes interdites de Bragg*. De nombreuses fonctionnalités des CP ont été mises en évidence comme par exemple le filtrage [2], le guidage des ondes [3], la réfraction négative [4], le démultiplexage [5], la furtivité [6] ou la super-résolution [7].

L'insertion d'éléments actifs possédant, par exemple, des propriétés piézoélectriques dans les CP, offre de nouvelles fonctionnalités en particulier une accordabilité en fréquences sans avoir à procéder à des changements de géométrie. En effet, les caractéristiques des matériaux piézoélectriques permettent de changer leurs paramètres élastiques et piézoélectriques effectifs en les soumettant à des conditions aux limites électriques (CLE). Le profit de cette faculté a conduit au développement de CP piézoélectriques accordables dont la propagation des ondes change en fonction des CLE appliquées sur les électrodes.

L'objectif de cette thèse se situe dans ce contexte. Cette étude est le fruit d'une collaboration entre deux laboratoires membres de la Fédération de Recherche en Acoustique du Nord-Ouest (FANO - FR CNRS 3110) : le GREMAN (Groupement de Recherche en Matériaux Micro-electronique Acoustique et Nanotechnologies - UMR CNRS 7347) à Blois et le LOMC (Laboratoire Ondes et Milieux Complexes- UMR CNRS 6294) au Havre. Ces travaux s'inscrivent également dans le cadre du projet MIRAGES (MétamatérIaux et cRistaux phononiques Actifs contrôlés par champs électrique et maGnétiquES) financé par l'Agence Nationale de la Recherche (ANR-12-BS09-0015). Ce projet a pour objectif le développement et l'optimisation des cristaux phononiques et métamatériaux piézoélectriques et magnétos-

trictifs accordables respectivement par des champs électriques et magnétiques. Des travaux antérieurs à cette thèse ont été effectués sur des empilements 1D de barreaux ou de plaques piézoélectriques. Ils ont montré la possibilité d'ouvrir, fermer ou même décaler des bandes interdites en modifiant les conditions aux limites électriques (CLE) appliquées à des matériaux actifs (piézoélectriques) [8–13]. Cela permet un contrôle électrique sur la propagation des ondes longitudinales et transversales. Le travail présenté dans ce manuscrit exploite les propriétés des ondes guidées (ondes de Lamb) dans des plaques piézoélectriques afin de pouvoir intégrer le CP sur des dispositifs de type SAW (Surface Acoustic Wave). Nous nous sommes plus particulièrement intéressés aux effets de CLE périodiques sur la dispersion des ondes de Lamb. Des plaques piézoélectriques possédant une distribution périodique d'électrodes sur leurs deux faces ont été fabriquées et caractérisées. Elles permettent d'une part de générer les ondes de Lamb et d'autre part de contrôler leur propagation au sein de la plaque considérée.

Le présent manuscrit est organisé en quatre chapitres. Le premier est consacré aux notions élémentaires sur les cristaux phononiques (diagrammes de bandes, bande interdite de Bragg, bande interdite d'hybridation, ...) ainsi qu'à des pré-requis théoriques sur la piézoélectricité. Un état de l'art sur les cristaux phononiques et les métamatériaux à résonances locales est ensuite réalisé en mettant l'accent sur le cas particulier de la propagation des ondes guidées dans les CP réalisés avec des plaques.

Le deuxième chapitre est dédié à une étude préliminaire sur la propagation des ondes de Lamb dans une plaque piézoélectrique homogène couverte ou non d'électrodes conductrices uniformes. En effet, déterminer la dispersion des modes guidés pour différentes CLE est un pré-requis important pour la compréhension des effets observés avec des électrodes disposées périodiquement. Un modèle utilisant les éléments finis a été développé pour calculer les diagrammes de bandes et les impédances électriques de la plaque piézoélectrique avec différentes CLE. Une validation expérimentale est effectuée pour chaque cas de CLE.

Le troisième chapitre aborde le cas d'une plaque piézoélectrique possédant des électrodes périodiques sur les deux faces. La première partie du chapitre est d'abord dédiée à l'observation et la compréhension de l'ouverture des bandes interdites liées à la périodisation des électrodes, suivie d'une étude paramétrique des effets de la dimension des électrodes périodiques sur les caractéristiques des bandes interdites. La deuxième partie du chapitre est consacrée à une étude expérimentale et numérique d'une accordabilité typiquement électrique de la structure par modification des CLE. Les résultats de calculs et de mesures d'impédances électriques de la structure sont présentés à la fin du chapitre.

Dans le quatrième et dernier chapitre, on connecte les électrodes avec des composants électriques notamment des bobines et des condensateurs. En conséquence, le chapitre débute avec une évaluation de la capacité électrique associée à un élément du CP. Cette première caractérisation permet de déterminer le choix des composants électriques à connecter ainsi que la fréquence de travail adéquate.

Une conclusion résumant les résultats de ces travaux est finalement présentée. Elle est suivie par les principales perspectives qui apparaissent à l'issue des résultats déjà obtenus et décrits dans cette thèse. Une brève description d'un démonstrateur 2D d'une plaque piézoélectrique avec des électrodes disposées périodiquement suivant deux dimensions est finalement présentée dans cette partie.

Ce manuscrit s'achève par deux annexes. La première (annexe A), présente les bases de données (paramètres mécaniques, diélectriques et piézoélectriques) des matériaux piézoélectriques utilisés pour les simulations numériques réalisées tout au long de cette étude. Dans la deuxième annexe, des calculs analytiques de la dispersion des ondes de Lamb dans une plaque piézoélectrique, d'abord sans électrode, ensuite avec des électrodes uniformes sont données. Les courbes de dispersion des modes de Lamb calculées permettent une vérification analytique rigoureuse des courbes obtenues avec le modèle numérique.

Chapitre 1

Généralités sur les cristaux phononiques

1 Introduction

La structure étudiée dans cette thèse est une plaque phononique piézoélectrique accordable. Le contrôle des ondes de Lamb dans cette structure se fait par le biais des conditions aux limites électriques (CLE) qui permettent d'ouvrir des bandes interdites par des mécanismes de type diffraction de Bragg ou/et par des résonances locales.

Dans ce chapitre, nous introduirons les notions générales utiles à la compréhension des phénomènes physiques observés dans les chapitres suivants tels que la diffraction de Bragg, les notions cristallographiques sur les réseaux directs et réciproques, la dispersion et les diagrammes de bandes ainsi que la piézoélectricité.

Nous terminerons ce chapitre par un état de l'art sur les cristaux phononiques (CPs) et métamatériaux (MMs) à résonances locales ainsi que sur leur accordabilité en fréquence. En particulier, nous aborderons le cas des CPs et les MMs piézoélectriques et leur importance dans le domaine de la microélectronique notamment sous la forme de dispositifs SAW (Surface Acoustic Wave) mettant en jeu des ondes guidées dans les plaques.

2 Généralités

2.1 Loi de Bragg

La loi de la diffraction de Bragg a été initialement introduite pour décrire le phénomène de diffraction d'une onde électromagnétique lors de sa propagation dans un cristal atomique. Elle établit un lien entre la distance **d** séparant deux plans réticulaires du cristal et l'angle θ de Bragg (angle entre la direction de l'onde incidente et les plans considérés) [14]. Elle s'écrit sous la forme :

$$2dsin\theta = n\lambda \tag{1.1}$$

où n est un entier naturel et λ est la longueur d'onde. Le phénomène de diffraction est illustré sur la figure 1.1.

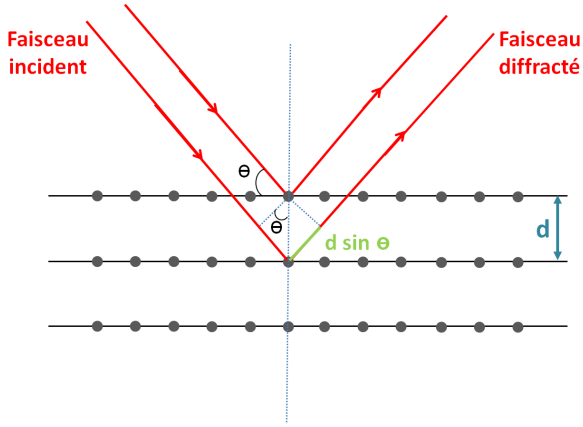


FIGURE 1.1 – Schéma décrivant les conditions de diffraction de Bragg.

Cette figure permet de déduire géométriquement la différence de parcours entre deux rayons du faisceau incident. Lorsque cette différence est un nombre entier de longueurs d'ondes λ, les rayons se combinent pour donner une interférence constructive et l'onde diffractée est de forte amplitude.

Par analogie, cette loi s'applique également à la propagation d'une onde élastique dans un milieu structuré périodiquement selon une, deux ou trois dimensions de l'espace. Cela se vérifie pour certaines valeurs particulières de la longueur d'onde vis à vis de la périodicité spatiale du milieu de propagation. La figure 1.2 illustre une structure périodique constituée de deux plans avec des masses volumiques et des modules d'Young différents. En augmentant le nombre de plans successifs, l'accumulation d'interférences constructives entraine une réflexion totale dans certaines directions de l'espace, on parlera alors de "*miroir de Bragg*" pour cette structure périodique également nommée cristal phononique (CP).

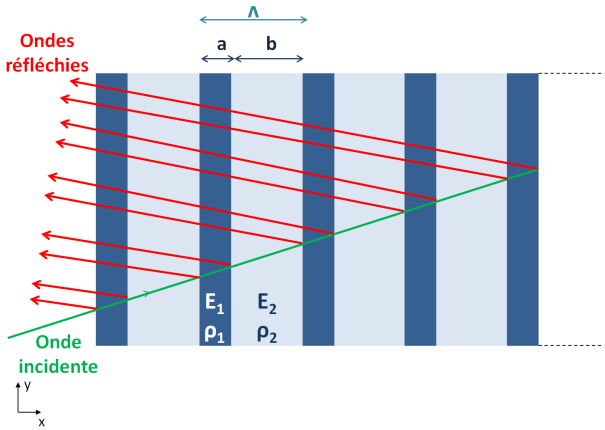


FIGURE 1.2 – Miroir de Bragg constitué d'une succession périodique de deux plans avec des masses volumiques (ρ_n) et modules d'Young (E_n) différents (n= 1 ou 2). a et b sont les épaisseurs des deux couches, le paramètre du réseau s'écrit alors comme $\Lambda = a + b$.

2.2 Réseaux direct et réciproque

Pour résoudre les équations des ondes qui se propagent dans les cristaux, les chercheurs se sont inspirés des travaux de Bloch qui a décrit les états quantiques des électrons dans un potentiel électrique périodique. En appliquant le théorème de Bloch-Floquet [15,16], la fonction d'onde ϕ s'exprime alors comme le produit d'une onde plane de vecteur d'onde $\vec{k}$ et d'une fonction périodique $u(r)$ dont la périodicité Λ est celle du réseau

$$\phi(r) = u(r)e^{j\vec{k}r} \tag{1.2}$$

où $j^2 = -1$, r est la position et $\vec{k}$ est le vecteur d'onde de Bloch. L'équation 1.2 peut s'écrire sous la forme :

$$\phi(r + \Lambda) = \phi(r)e^{jk\Lambda} \tag{1.3}$$

Le nombre d'onde de Bloch k est une grandeur du réseau réciproque. Ce dernier est défini à partir du réseau direct (voir figures 1.3(a) et 1.3(b)) par la relation :

$$\vec{a_i}.\vec{b_j}^* = 2\pi\delta_{ij} \tag{1.4}$$

où $\vec{a_i}$ et $\vec{b_j}$ sont respectivement les vecteurs de bases du réseau direct et du réseau réciproque. δ_{ij} est le symbole de Kronecker.

La maille primitive du réseau réciproque est appelée *première zone de Brillouin*, elle est définie comme étant le motif géométrique le plus simple qui se répète indéfiniment pour constituer le réseau réciproque. Elle correspond aussi à l'ensemble des points de l'espace k pouvant être atteints depuis l'origine sans croiser de plan de Bragg. La figure 1.3(c) illustre un exemple de première zone de Brillouin pour un réseau direct carré. La première zone de Brillouin est aussi un carré dont le centre est Γ. La périodicité du système permet de limiter l'étude des solutions à la première zone de Brillouin et de déduire la relation de dispersion

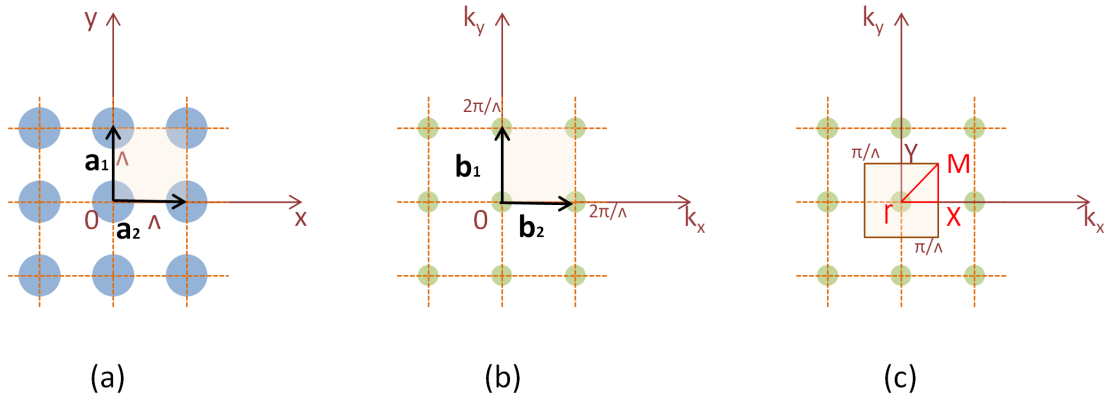


FIGURE 1.3 – Illustrations (2D) : (a) du réseau direct, (b) du réseau réciproque, (c) de la première zone de Brillouin.

dans tout l'espace réciproque [17]. Mais il est possible de restreindre encore l'étude en exploitant les symétries de la structure, d'abord dans la zone des k_x et k_y positifs, puis ensuite, dans le cas d'un matériau isotrope, on peut se contenter du triangle (ΓXM). Ces zones réduites sont appelées zones irréductibles de Brillouin.

2.3 Dispersion et diagrammes de bandes

Afin de caractériser le cristal phononique, on représente généralement les courbes de dispersion des ondes dans les principales directions cristallographiques du CP. Comme nous l'avons vu précédemment, le phénomène de diffraction de Bragg interdit la propagation des ondes dans certaines directions faisant apparaître des bandes de fréquences interdites encore appelées *bandes interdites de Bragg*. La représentation des courbes de dispersion, composée d'une alternance de bandes de fréquences passantes et de bandes de fréquences interdites, est appelée diagramme de bandes. Les bandes passantes correspondent à des ondes propagatives dont le nombre d'onde est réel, tandis que les bandes interdites sont associées à des ondes évanescentes avec un nombre d'onde complexe.

Parmi les travaux précurseurs sur les cristaux phononiques, nous pouvons citer les travaux de Kushwaha [1] qui a montré théoriquement l'existence d'une bande interdite qui s'étend dans toutes les directions cristallographiques, dite *bande interdite complète* dans un cristal bidimensionnel constitué d'un réseau de tiges infinies d'aluminium dans une matrice élastique isotrope de nickel. Les solutions sont obtenues avec la méthode de décomposition en ondes planes en prenant en compte uniquement les vecteurs d'ondes dans le plan de propagation. Le diagramme de bandes de ce calcul est présenté dans la figure 1.4. Des repliements sont observés au bord de la première zone de Brillouin qui sont dus à la périodicité introduite dans le calcul des courbes de dispersion. On peut observer sur le diagramme une bande interdite complète autour d'une fréquence réduite ($\omega a/2\pi c_0$) de 0,55. Une bande interdite plus importante est présente dans la direction ΓX. Cette première bande interdite correspond à une bande interdite de Bragg. La branche présente

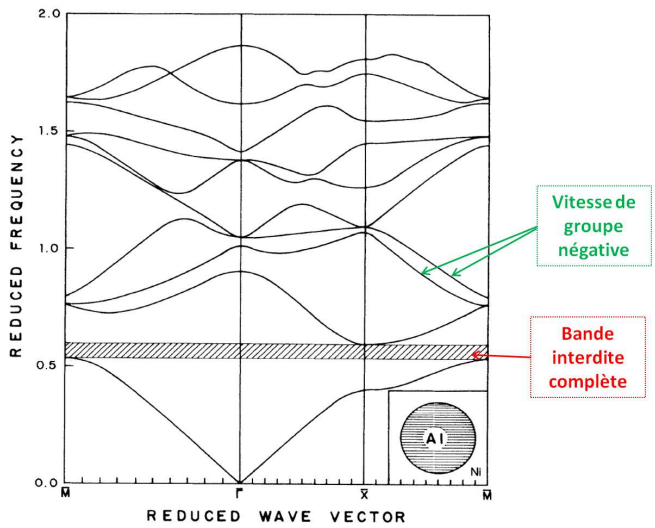


FIGURE 1.4 – Diagramme de bandes dans la première zone de Brillouin d'un cristal 2D constitué d'un réseau de tiges infinies d'aluminium dans une matrice de nickel. La figure représente les variations de la fréquence réduite ($\omega a/2\pi c_0$) en fonction du nombre d'onde réduit ($ka/2\pi$), a étant la taille de la maille élémentaire et c_0 la vitesse du son dans la structure. La bande interdite complète est matérialisée par un rectangle hachuré [1].

dans la seconde bande passante au dessus de cette première bande interdite possède une pente négative : la vitesse de groupe est négative et de signe opposé à la vitesse de phase ($k = 2\pi f/v_\phi > 0$). Ce type de bande peut être exploité pour obtenir le phénomène de réfraction négative.

3 Métamatériaux et cristaux phononiques à résonances locales

Le terme "métamatériaux" (MM) est plus général que celui de cristaux phononiques. Il désigne des matériaux artificiels avec des propriétés atypiques. Plus précisément ils possèdent des propriétés que les matériaux naturels n'ont pas. Les métamatériaux n'ont pas nécessairement de structuration périodique à l'inverse les cristaux phononiques. Leurs propriétés peuvent être simplement liées à des résonances locales. Le développement de ces matériaux a été amorcé dans le domaine des ondes électromagnétiques en 1968 avec les travaux du chercheur théoricien russe Veselago [18], qui s'est notamment intéressé aux milieux d'indices de réfraction négatifs en imaginant des matériaux ayant simultanément une constante diélectrique et une perméabilité magnétique négatives. Mais c'est une trentaine d'années plus tard que Pendry *et al.* [19–21] ont réalisé concrètement un dispositif avec un coefficient de réfraction négatif. Ils ont eu l'idée d'utiliser un réseau périodique composé d'anneaux métalliques concentriques coupés nommés *split-ring resonators* (SRR) et de fils métalliques (figure 1.5). Les fils métalliques périodiques présentent une constante diélectrique négative en basses fréquences, et à la fréquence de résonance des SSR, la perméabilité

magnétique des anneaux devient également négative. En combinant les deux systèmes, une réfraction négative se produit à la fréquence de résonance des *SRR*. Ces milieux avec un indice de réfraction négatif sont appelés matériaux *main gauche*, ils permettent la réalisation des dispositifs très innovants tels que les *lentilles super résolution* [19,22], et les *capes d'invisibilités* [20,23,24].

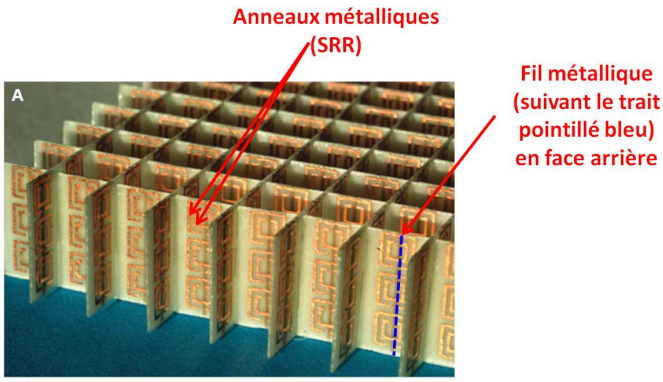
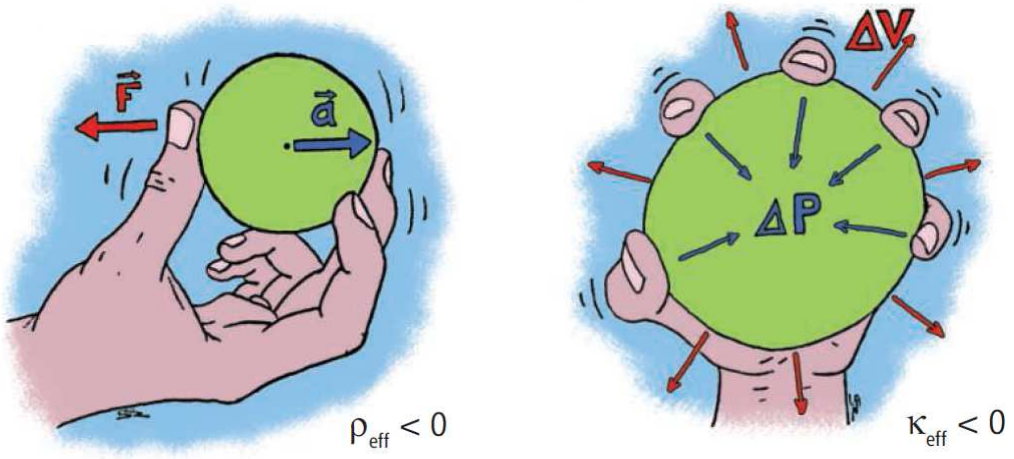


FIGURE 1.5 – Métamatériau à indice de réfraction négatif formé par un réseau périodique de *SRR* (split-ring resonators) et de fils métalliques [21].

Plus récemment les métamatériaux acoustiques ont été développés autour des mêmes concepts. Le phénomène de réfraction négative a été étudié en exploitant l'anisotropie des courbes de lenteurs [25] ou bien simplement le repliement de bandes qui induit des vitesses de groupe et de phase de signes opposés [4,25]. Nous avons introduit au paragraphe précédent les bandes interdites de Bragg dans les milieux périodiques : l'ouverture de ces bandes interdites nécessite d'avoir une périodicité du milieu du même ordre de grandeur que la longueur d'onde. Un autre type de bande interdite peut être obtenu en utilisant des inclusions résonantes, appelé *bande interdite d'hybridation* ou *bandes interdites à résonances locales*. Ces bandes interdites s'ouvrent pour des longueurs d'ondes qui peuvent atteindre 300 fois la dimension de la périodicité du réseau ou à la dimension de l'inclusion résonante [26]. Au voisinage des fréquences de ces résonances locales, on observe sous certaines conditions des propriétés hors du commun telles qu'une masse volumique effective ρ_{eff} négative et/ou des coefficients élastiques effectifs κ_{eff} négatifs [?]. Un métamatériau avec de telles propriétés a un comportement élastique inhabituel. La figure 1.6 [27] illustre le comportement dynamique de ce type de métamatériau : avec une masse volumique effective négative, un élément de volume V possède une accélération dans le sens opposé de la force exercée ; alors qu'un coefficient élastique effectif négatif entraine une dilatation comme réponse à un effort de compression.

La périodicité ne joue donc aucun rôle dans le mécanisme d'ouverture de bandes interdites à résonances locales. Ceci permet d'envisager des métamatériaux contenant des inclusions résonantes sub-longueur d'onde disposés aléatoirement comme dans les travaux de P.Sheng *et al.* [28]. Il a été démontré dans ces travaux que des sphères au coeur de plomb enrobées de silicone dans une matrice d'epoxy prohibent la propagation des ondes à la fréquence de la résonance locale à condition que les résonateurs soient suffisamment



(a) Un matériau avec une densité effective ρ_{eff} négative à une accélération $\vec{a}$ opposée à la force $\vec{F}$.

(b) Le volume d'un matériau avec un module élastique effectif κ_{eff} négatif s'étend quand une pression est appliquée.

FIGURE 1.6 – Illustration du comportement dynamique d'un métamatériau à résonance locale avec certains paramètres effectifs négatifs [27].

espacés pour ne pas interagir entre eux.

D'autres pistes ont été suivies pour ouvrir des bandes interdites avec le mécanisme de résonance locale. Des plots disposés périodiquement sur la surface d'une plaque créent un effet de masse en résonant localement. Le couplage entre les modes guidées et les résonances locales requiert un choix judicieux de géométrie et des matériaux constituants [29–33]. Un état de l'art sur ces plaques phononiques sera approfondi dans la dernière section de ce chapitre.

4 Accordabilité en fréquence des cristaux phononiques

Les fréquences et les largeurs des bandes interdites dans les cristaux phononiques, qu'elles soient engendrées par la diffraction de Bragg ou par l'action des résonances locales, dépendent de la géométrie et des propriétés des matériaux constituant de la structure. Les caractéristiques des bandes interdites sont donc définitivement fixées lors de la fabrication. Pour palier à cette limitation majeure, la communauté scientifique s'est tournée vers la conception de cristaux phononiques accordables en fréquence.

Goffaux *et al.* ont montré théoriquement que les bandes interdites d'un cristal phononique peuvent être modifiées en appliquant une rotation de ses éléments sous forme de barreaux de section rectangulaire [34]. Bertoldi *et al.* ont étudié l'effet d'un chargement axial sur un cristal phononique fabriqué avec des matériaux élastomères. Ils ont montré que la structure de bande évolue d'une manière monotone quand la force appliquée est linéaire. Une fois que la force atteint une valeur critique, le motif périodique change de même que la structure de bandes qui évolue de manière non linéaire [35].

D'autres travaux ont utilisé la température comme élément de contrôle des structures de bandes. En modifiant la température d'un composite constitué d'un matériau ferroélectrique/ résine epoxy. Jim *et al.* ont changé la vitesse de propagation des ondes lors de la phase de transition ferroélectrique et ont pu décaler la bande interdite d'au minimum 10% vers les hautes fréquences pour une élévation de la température de $10°C$ [36].

Par la suite, des cristaux phononiques comportant des éléments magnétostrictifs ont été développés pour agir sur les propriétés de la structure avec un champ magnétique [37–40]. Par exemple, Chen *et al.* [40] ont utilisé l'effet magnétostrictif inverse pour obtenir un métamatériau acoustique avec une densité de masse effective accordable. Ils ont couvert des anneaux circulaires en aluminium par un élastomère magnéto-rhéologique dont ils ont modifié la fréquence de résonance locale par un champ magnétique. Néanmoins, ces méthodes ont l'inconvénient d'être difficiles à mettre en oeuvre expérimentalement.

Les matériaux piézoélectriques ont été adoptés rapidement dans le domaine des cristaux phononiques accordables. En effet, la connexion des circuits électriques sur les électrodes d'un élément piézoélectrique permet de modifier d'une manière effective l'élasticité du matériau. La suite du chapitre est consacrée à un état de l'art des recherches établies sur les cristaux phononiques piézoélectriques accordables. Mais avant, nous allons présenter quelques généralités sur la piézoélectricité.

5 Piézoélectricité : principe et équations constitutives

5.1 Généralités

La piézoélectricité est la propriété que possède certains matériaux, d'une classe de symétrie bien définie, à convertir l'énergie mécanique résultante d'une force appliquée sur leurs faces en énergie électrique et vice-versa.

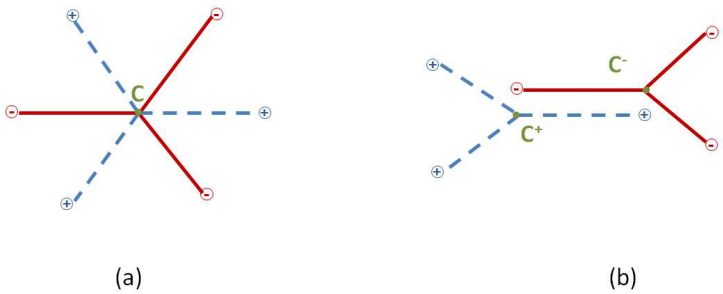


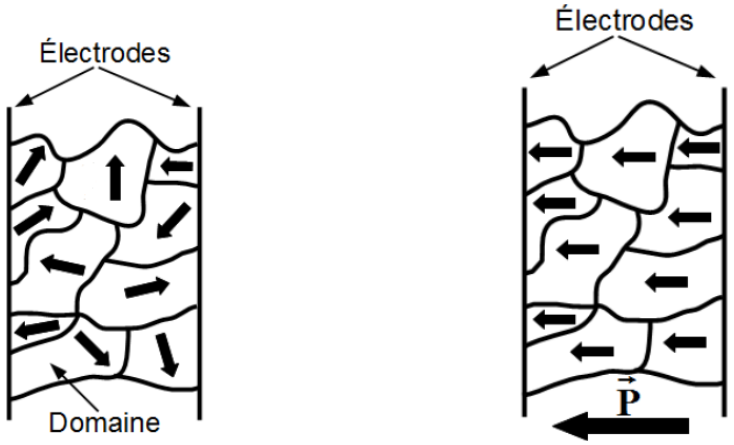
FIGURE 1.7 – Cristal ne présentant pas de centre de symétrie en (a), soumis à une contrainte en (b) : les centres de gravité C^- et C^+ se séparent et créent un dipôle électrique.

La structure cristalline d'un matériau piézoélectrique ne possède pas de centre de symétrie. Un exemple de maille ne présentant pas une symétrie entre les charges positives et négatives est montré dans la figure 1.7. Au repos, les barycentres des charges positives et négatives coïncident et un équilibre électrostatique est établit. L'application d'une force sur l'une des faces de la maille induit un déplacement des barycentres, ce qui entraine

le déséquilibre électrostatique et fait apparaître une polarisation électrique $\vec{P}$, c'est l'effet piézoélectrique direct. L'effet piézoélectrique indirect résulte de l'application d'un potentiel électrique. Ce dernier fait apparaître une contrainte interne entrainant une déformation de la maille.

Plus précisément, dans un matériau ferroélectrique (typiquement une céramique de type PZT [41]), les grains sont divisés en domaines qui possèdent leur propre axe de polarisation permanente (figure 1.8a). Les directions de ces axes sont arrangées aléatoirement et le matériau est globalement non polarisé. Si un champ électrique extérieur est appliqué au matériau entre deux électrodes (typiquement 2 kV/mm pour les PZT), les domaines orientés selon la direction du champ électrique extérieur grossissent au détriment des autres. Ce phénomène est réversible et se traduit par une courbe d'hystérésis. La polarisation globale sature pour de très fortes valeurs de champs appliqués. Enfin, une polarisation rémanente ($\vec{P}$) correspondant à la valeur de la polarisation à champ nul apparait(figure 1.8b).

Sur les 32 classes de symétries existantes, seulement 21 sont non centro-symétriques dont 20 piézoélectriques. Il existe des matériaux naturellement piézoélectriques tel que le quartz. D'autres matériaux sont rendus piézoélectriques par la génération d'une polarisation permanente sous l'effet d'un champ électrique intense tels que les céramiques ferroélectriques, les films polymères et copolymères [42] et les piézocomposites [43].



(a) Matériau férroélectrique avant polarisation.

(b) Matériau piézoélectrique obtenu après la polarisation.

FIGURE 1.8 – Orientation des dipôles électriques des domaines d'un matériau ferroélectrique avant et après polarisation.

5.2 Équations constitutives

Découvert en 1880 par les frères Jacques et Pierre Curie, l'effet piézoélectrique est décrit par un système d'équations liant les grandeurs mécaniques (contraintes T et déformations S) aux grandeurs électriques (déplacement D et champ E) [44].

On peut établir quatre systèmes d'équations de la piézoélectricité en fonction des va-

riables indépendantes choisies :

$$\begin{cases} T_{ij} &= c^E_{ijkl}S_{kl} - e_{ijk}E_i \\ D_i &= \epsilon^S_{ij}E_j + e_{ijk}S_{jk} \end{cases} \qquad \begin{cases} S_{ij} &= s^E_{ijkl}T_{kl} + d_{ijk}E_i \\ D_i &= \epsilon^T_{ij}E_j + d_{ijk}T_{ij} \end{cases} \tag{1.5}$$

$$\begin{cases} E_i &= \beta^S_{ij}D_j - h_{ijk}S_{jk} \\ T_{ik} &= c^D_{jklm}S_{lm} - h_{ijk}D_i \end{cases} \qquad \begin{cases} E_i &= \beta^T_{ij}D_j - g_{ijk}T_{jk} \\ S_{jk} &= s^D_{jklm}T_{lm} + g_{ijk}D_i \end{cases} \tag{1.6}$$

Les coefficients c_{ijkl} sont les composants du tenseur des rigidités élastiques et les coefficients s_{ijkl} sont les constantes de flexibilités (tenseurs de rang 4). Les constantes e_{ijk}, d_{ijk}, h_{ijk} et g_{ijk} sont les coefficients piézoélectriques (tenseurs de rang 3). ϵ_{ij} est la constante diélectrique et β_{ij} est son inverse.

Les exposants E, D, T et S indiquent respectivement que les grandeurs sont considérés à champ électrique constant, à déplacement électrique constant, à contrainte constante (le matériau est libre) ou à déformation constante (le matériau est encastré).

5.3 Caractéristiques fonctionnelles

Trois propriétés sont importantes pour l'étude d'un élément piézoélectrique : son impédance acoustique Z_a, son impédance électrique Z et son coefficient de couplage électromécanique suivant un mode de vibration particulier.

5.3.1 Impédance acoustique

L'impédance acoustique est une grandeur caractéristique d'un milieu, elle est définie comme étant la multiplication de la masse volumique du matériau ρ par la vitesse du son dans ce même milieu v. Elle s'exprime en *Rayleigh* (Rayl) :

$$Z_a = \rho v \tag{1.7}$$

5.3.2 Impédance électrique

L'impédance électrique mesure l'opposition d'un circuit électrique au passage d'un courant alternatif sinusoïdal. Elle est définie comme étant le rapport entre la tension électrique U et le courant I. Elle s'exprime en *Ohm* (Ω) de la manière suivante :

$$Z = \frac{U}{I} = R + jX \tag{1.8}$$

La partie réelle de l'impédance correspond à la résistance R, et la partie imaginaire est la réactance X. Notons que l'impédance électrique est largement conditionnée par la constante diélectrique du matériau en dehors de la résonance (voir paragraphe 5.4).

5.3.3 Couplages électromécaniques

Le coefficient de couplage d'un élément piézoélectrique traduit sa capacité à convertir l'énergie électrique en énergie mécanique et réciproquement. Il s'écrit en fonction des énergies mutuelles d'interactions élastique-électrique, élastique et diélectrique notées respectivement E_m, E_e et E_d [45] :

$$k = \frac{E_m}{E_e E_d} \tag{1.9}$$

Un élément piézoélectrique possède différents coefficients de couplages qui sont privilégiés ou non selon la polarisation et la configuration géométrique (figure 1.9). Il existe douze coefficients qui peuvent se calculer directement avec les constantes élastiques, piézoélectriques et permittivités du matériau. Leurs valeurs doivent êtres comprises entre 0 et 1. Les détails des expressions des coefficients de couplages et leurs modes de vibrations sont donnés dans le tableau 1.1 :

TABLE 1.1 – Coefficients de couplages électromécaniques exprimés en fonction des coefficients élastiques, piézoélectriques et des permittivités. Les modes de vibrations correspondants sont représentés sur la figure 1.9 [46].

(a) : $k_{31}^2 = \frac{d_{31}^2}{s_{11}^E \epsilon_{33}^T}$	(b) : $k_{33}^2 = \frac{d_{33}^2}{s_{33}^E \epsilon_{33}^T}$	(c) : $k_p^{2\ a} = \frac{2}{1-\sigma} \frac{d_{31}^2}{s_{11}^E \epsilon_{33}^T}$
(d) : $k_p^{'2\ b} = \frac{2}{1+\sigma'} \frac{e_{31}^2}{c_{11}^E \epsilon_{33}^{RT}}$	(e) : $k_{31}^{'2\ c} = \frac{e_{31}^{'2}}{\tilde{c}^E \epsilon^{'WT}}$	(f) : $k_{31}^{''2\ d} = \frac{e_{31}^{'2}}{\tilde{c}^{'E} \epsilon^{'WT}}$
(g) : $k_{33}^{'2\ e} = \frac{e_{33}^{'2}}{\tilde{c}_{33}^D \epsilon_{33}^{RT}}$	(h) : $k_t^2 = \frac{e_{33}^2}{c_{33}^D \epsilon_{33}^S}$	(i) : $k_e^2 = \frac{e_{31}^2}{c_{11}^E \epsilon_{33}^S}$
(j) : $k_{15}^2 = \frac{e_{15}^2}{c_{55}^D \epsilon_{11}^S}$	(k) : $k_{5e}^2 = \frac{e_{15}^2}{c_{55}^E \epsilon_{11}^S}$	(l) : $k_h^{2\ f} = \frac{d_h^2}{s_h^E \epsilon_{11}^T}$

a. $\sigma = -s_{12}^E / s_{11}^E$
b. $\sigma' = c_{12}^E / c_{11}^E, \epsilon_{33}^{RT} = \epsilon_{33}^T (1 - k_{33}^2)$
c. $e_{31}' = e_{31} - e_{33} c_{13}^E / c_{33}^E, \tilde{c}^E = 1/s_{11}^E (1 - \sigma^2), \epsilon^{'WT} = \epsilon_{33}^T (1 - k_{31}^2)$
d. $e_{31}'' = e_{31} - (1 - c_{12}^E / c_{11}^E), \tilde{c}^{'E} = c_{11}^E - (c_{12}^E)^2 / c_{11}^E$
e. $e_{33}' = e_{33} - e_{31} c_{13}^E / c_{11}^E, \tilde{c}_{33}^D = c_{33}^D - (c_{13}^D)^2 / c_{11}^D$
f. $d_h = 2d_{31} + d_{33}, s_h^E = 2(s_{11}^E + s_{12}^E) + 4s_{13}^E + s_{33}^E$

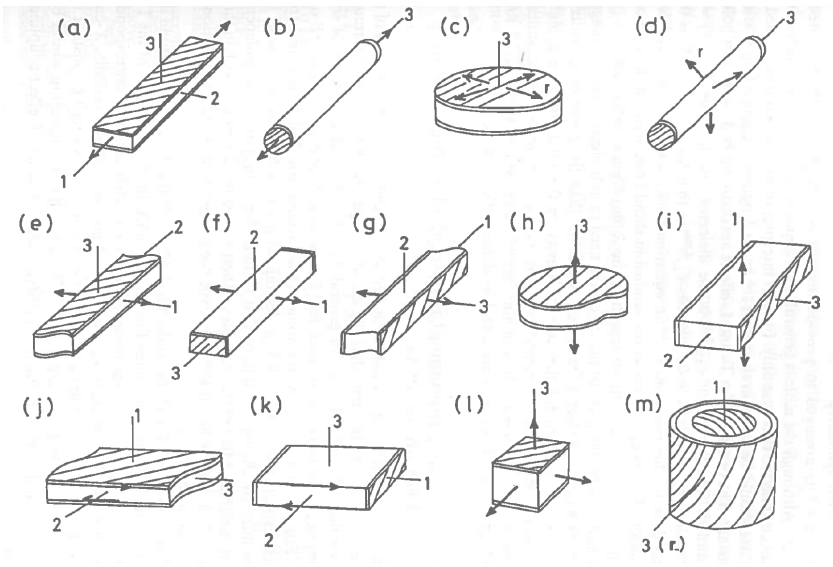


FIGURE 1.9 – Les différents modes de vibrations d'une céramique piézoélectrique polarisée suivant l'axe 3. Les électrodes sont représentées par des surfaces hachurées. Chaque mode possède un coefficient de couplage électromécanique exprimé dans le tableau (a) : k_{31} ;(b) : k_{33} ; (c) : k_p ; (d) :k'_p ; (e) : k'_{31} ; (f) : k''_{31} ; (g) : k'_{33} ; (h) : k_t ; (i) : k_e ; (j) : k_{15} ; (k) : k_{5e} ; (l) : k_h ; (m) : k_t ; k_{31} [46].

5.4 Schéma électrique équivalent de Krimholtz, Leedom et Matthaei (K.L.M)

Cette partie est consacrée à la modélisation de la vibration longitudinale d'un élément piézoélectrique par un schéma électrique équivalent. Le modèle étudié a été développé par Krimholtz, Leedom et Matthaei [47, 48], il offre l'avantage de bien séparer les ports acoustiques du port électrique ce qui apporte une plus grande souplesse d'utilisation. Pour cela, on considère une plaque mince piézoélectrique, métallisée sur ses deux faces, de surface A et d'épaisseur e, polarisée suivant $\vec{x_3}$ et vibrant en mode épaisseur (figure 1.10).

On précise sur la figure 1.10 que le milieu extérieur exerce deux forces $\vec{F_{av}}$ et $\vec{F_{ar}}$ sur les faces avant et arrière de la plaque, les vitesses de déplacement des deux faces sont notées v_{av} et v_{ar}. U_e et I sont respectivement la tension et le courant électrique appliqués aux électrodes. Dans cette modélisation, on ne prend en compte que le mode de vibration longitudinale. En effet, considérant les dimensions latérales de la plaque grandes par rapport à son épaisseur, elle est considérée comme vibrant selon le mode épaisseur. Cela implique que le champ électrique E_3 entraine une vibration longitudinale. Dans ce cas, le système d'équations constitutives 1.5 se réduit en notation contractée à :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} T_3 & = & c_{33}^E S_3 - e_{33} E_3 \\ D_3 & = & e_{33} S_3 + \epsilon_{33}^S E_3 \end{array} \right. \tag{1.10}$$

Le schéma électrique K.L.M est affiché sur la figure 1.11. L'élément piézoélectrique est représenté par une ligne de propagation non piézoélectrique de caractéristiques Z_p et γ qui

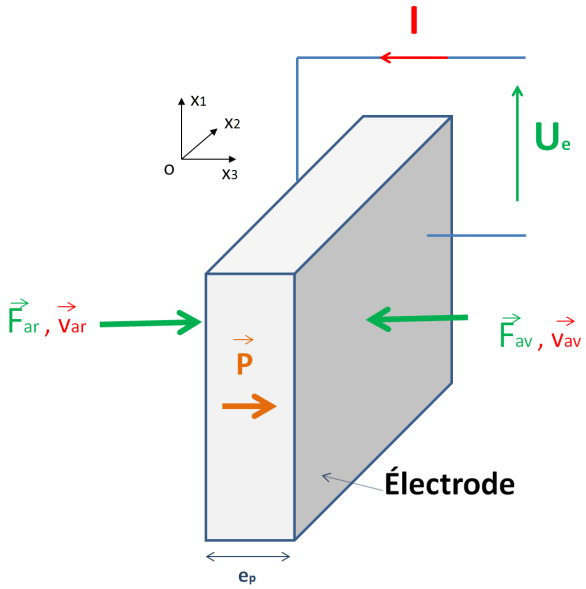


FIGURE 1.10 – Modèle unidimensionnel d'une plaque mince piézoélectrique d'épaisseur e_p ($e_p << $ dimensions latérales). $\vec{P}$ est la polarisation, $\vec{F_{av}}, \vec{F_{ar}}$ sont respectivement les forces appliquées sur les faces avant et arrière de la plaque. $\vec{v_{av}}, \vec{v_{ar}}$ sont les vitesses des deux faces. U_e et I sont respectivement la tension et le courant électrique.

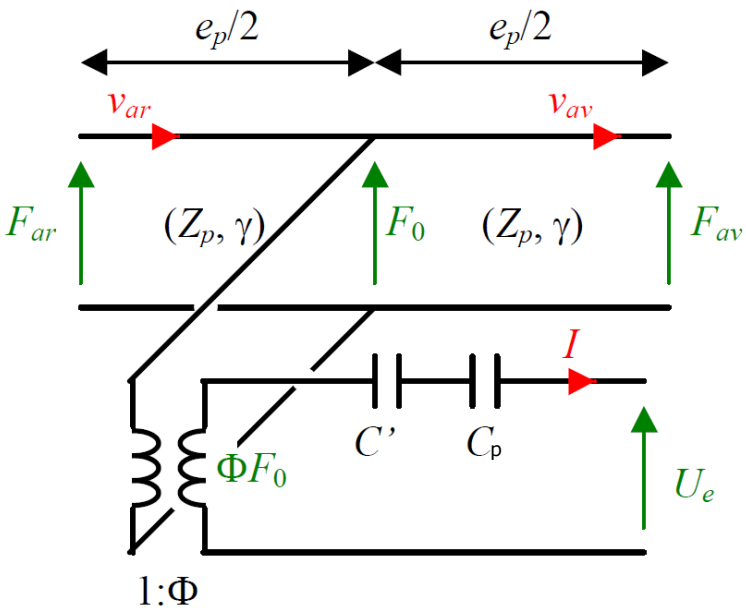


FIGURE 1.11 – Schéma électrique du modèle K.L.M.

sont les paramètres secondaires exprimés en fonction des paramètres primaires de la ligne (R,L, C' et C_p). Cette ligne de transmission représente la propagation acoustique dans le

milieu.

Le courant électrique est injecté dans le milieu par le biais d'un transformateur électromécanique parfait de rapport Φ, ce dernier modélise le phénomène piézoélectrique.

La tension aux bornes des électrodes s'écrit alors :

$$U_e = \Phi F_0 + ZI \tag{1.11}$$

Avec F_0 la force appliquée au centre de la ligne de propagation et Z l'impédance du transformateur constitué des deux capacités C_p (capacité statique ou bloquée) et C' (capacité dynamique) connectées en série.

Le potentiel électrique U_e est calculé en intégrant le champ électrique E sur l'épaisseur de la plaque (entre $-e_p/2$ et $e_p/2$). Deux termes apparaissent : un terme purement électrique correspondant à la capacité statique de l'élément piézoélectrique et un terme dépendant du déplacement au centre de la plaque. Lors de ce calcul, on applique les conditions de raccordement au centre sur les équations de propagation dans les deux demi-lignes de longueur $e_p/2$, c'est à dire, la continuité des forces et des déplacements afin d'exprimer U_e en fonction de F_0. On obtient les équations suivantes :

$$U_e = \frac{1}{jC_p\omega}I - \frac{1}{jC'\omega}I + \Phi F_0 \tag{1.12}$$

avec :

$$C_p = \frac{\epsilon_{33}^S A}{e_p} \tag{1.13}$$

$$C' = \frac{-C_p}{k_t^2 sinc(2\alpha)}, \tag{1.14}$$

$$\Phi = \frac{2e_p sin\alpha}{A\epsilon^S Z_0\omega} = k_t\sqrt{\frac{\pi}{AC_pZ_0\omega_a}}sinc(2\alpha), \tag{1.15}$$

$$\alpha = \frac{ke_p}{2} = \frac{\pi\omega}{2\omega_a}, \tag{1.16}$$

$$\omega_a = 2\pi\frac{\gamma}{2e_p}. \tag{1.17}$$

Ce schéma permet de découpler les ports acoustiques du port électrique, trois parties se distinguent :

— La partie électrique constituée de deux capacités en série dont la capacité statique (bloquée) de l'élément C_p.
— La partie électromécanique modélisée par le transformateur, cette partie introduit le coefficient de couplage électromécanique du mode épaisseur.
— La partie mécanique formée par les deux demi-lignes de propagation.

Ce schéma permet aussi de calculer la réponse électroacoustique d'un élément piézoélectrique soumis à des charges d'impédances. Si on considère deux impédances mécaniques Z_a et Z_b connectées sur ses deux faces, il suffit de ramener ces impédances de charge à travers les demi-lignes de transmission pour obtenir des caractéristiques électriques et donc de calculer la fonction de transfert globale.

Dans le cas d'un résonateur piézoélectrique libre, on néglige l'impédance de rayonnement dans l'air. On aboutit au fait que les forces auxquelles sont soumises les deux faces sont nulles, ce qui revient à court-circuiter les ports acoustiques. L'impédance électrique s'écrit alors :

$$Z = \frac{1}{jC_p\omega}\left(1 - k_t^2 \frac{tan(\frac{\omega e_p}{2v})}{\frac{\omega e_p}{2v}}\right). \tag{1.18}$$

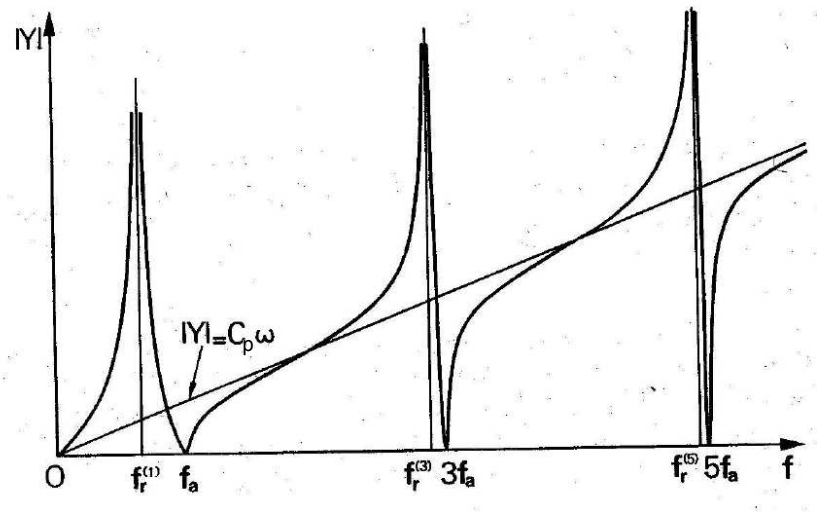


FIGURE 1.12 – Module de l'admittance d'un résonateur piézoélectrique dans l'air en fonction de la fréquence [44].

La figure 1.12 représente le module de l'admittance électrique $|Y|$ en fonction de la fréquence. On distingue sur le tracé deux fréquences caractéristiques :

— La fréquence d'anti-résonance f_a : l'admittance s'annule pour chaque multiple impair de f_a qui correspond à une condition de circuit électrique ouvert :

$$f_a = \frac{v}{2e_p} \qquad \text{et} \qquad e_p = \frac{\lambda}{2} \tag{1.19}$$

— La fréquence de résonance f_r : l'admittance est infinie pour les fréquences $f_r^{(n)}$ correspondant à une condition de circuit électrique fermé et telles que :

$$k_t^2 tan\left(\pi \frac{f_r^n e_p}{v}\right) = \pi \frac{f_r^n e_p}{v}, \tag{1.20}$$

où n est l'ordre de l'harmonique.

Si l'on considère des pertes diélectriques faibles et une constante diélectrique ne variant pas avec la fréquence, la représentation dans le plan complexe de l'admittance est un cercle qui permet de définir des fréquences caractérisant le matériau. Le cercle tracé sur la figure 1.13 montre les fréquences f_a et f_r ainsi que les fréquences parallèle f_p et série f_s qui correspondent respectivement au maximum de la partie réelle de l'impédance et l'admittance.

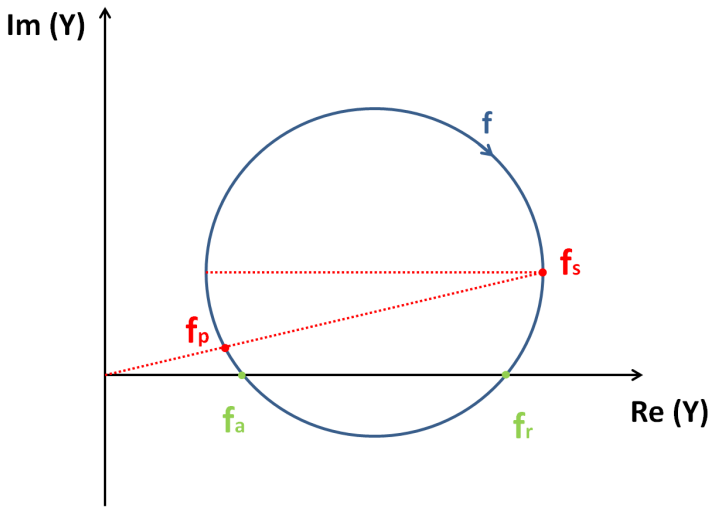


FIGURE 1.13 – Fréquences caractéristiques définies dans le plan complexe de l'admittance électrique d'une plaque piézoélectrique.

Dans le cas de très faibles pertes mécaniques, la fréquence série f_s correspond à la fréquence de résonance f_r, et la fréquence parallèle f_p est égale à la fréquence d'anti-résonance f_a. La connaissance de ces fréquences caractéristiques permet d'extraire des grandeurs caractérisant le matériau.

La vitesse de propagation des ondes ultrasonores v s'écrit alors :

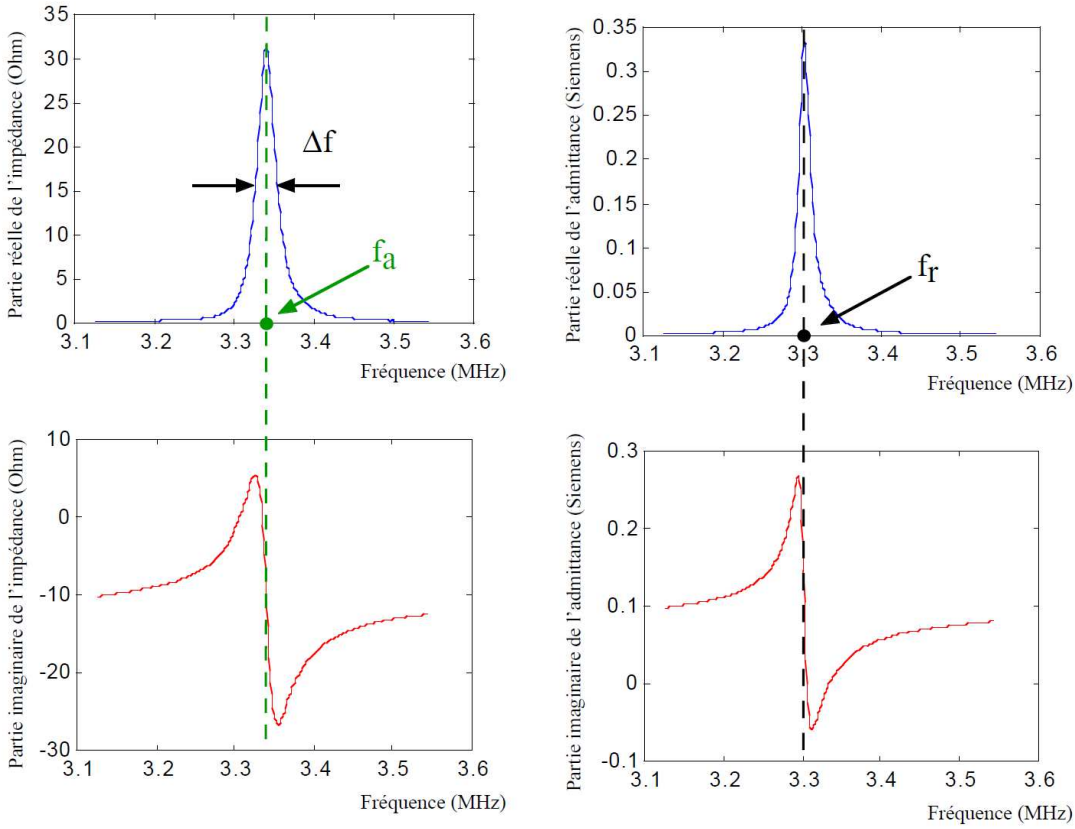
$$v = 2e_p f_a \tag{1.21}$$

Le coefficient de couplage du mode longitudinal est déduit par la relation :

$$k_t^2 = \frac{\frac{\pi f_r^n}{2f_a}}{tan\left(\frac{\pi f_r^n}{2f_a}\right)}. \tag{1.22}$$

En dehors de la fréquence de résonance (typiquement à $2f_a$), le matériau piézoélectrique se comporte comme un condensateur plan d'une capacité C_p appelée : *capacité bloquée*. Elle s'écrit en fonction de la surface de l'électrode A et de la permittivité du vide ϵ_0 de la manière suivante :

$$C_p = \frac{\epsilon_{33r}^S A \epsilon_0}{e_p} \tag{1.23}$$



(a) Parties réelle et imaginaire de Z. Les pointillés verts désignent la fréquence d'anti-résonance f_a.

(b) Parties réelle et imaginaire de Y. Les pointillés verts désignent la fréquence de résonance f_r.

FIGURE 1.14 – Impédance (Z) et admittance (Y) électriques d'une céramique dans l'air de type PZT [49].

La figure 1.14 représente l'impédance et l'admittance en fonction de la fréquence pour un matériau piézoélectrique (mode épaisseur) possédant de faibles pertes et vibrant dans l'air. Le facteur de perte δ du matériau est calculé à l'aide de la partie réelle de l'impédance à mi-hauteur Δf du pic d'anti-résonance :

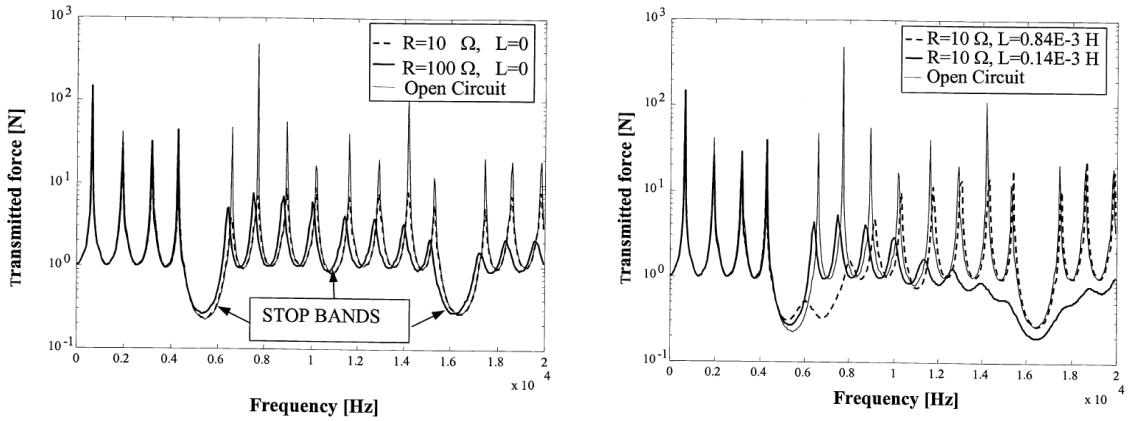
$$\delta = \frac{\Delta f}{f_a} = \frac{1}{Q} \tag{1.24}$$

où Q représente le facteur de qualité.

Dans un matériau piézoélectrique, le facteur de perte regroupe deux types de pertes : mécaniques δ_m et diélectrique δ_e. L'introduction de ces pertes dans la modélisation d'un résonateur libre, en particulier dans le schéma K.L.M, permet une caractérisation complète du matériau piézoélectrique [50].

6 Cristaux phononiques et métamatériaux piézoélectriques

L'utilisation de materiaux piézoélectriques pour le contrôle de vibrations est une idée ancienne. Le concept a été étudié brièvement par Olson [51] dans les années cinquante puis a été repris et développé par Foward pour des applications aérospatiales. En 1981, il a été montré expérimentalement l'amortissement de structures contenant des matériaux piézoélectriques en connectant ces derniers à des circuits électriques résistifs (R) ou résonants (LR) [52]. Dix ans après, Hagood et Von Flotow ont développé un modèle analytique pour prédire le comportement de ces deux types de systèmes. Ils ont calculé et validé expérimentalement les fonctions de transfert d'une poutre avec deux paires d'éléments piézoélectriques collées sur les deux faces opposées [53]. Jusque là les structures étudiées contenaient un seul élément piézoélectrique court-circuité dans le but d'amortir un mode de vibration particulier. Ce sont Edberg *et al.* [54] en 1991 et Hollkamp en 1994 [55] qui ont étendu la méthode à plusieurs modes. Ils ont utilisé des circuits électriques avec des branches résonantes multiples accordées aux fréquences de résonances des modes de vibrations de la structure.



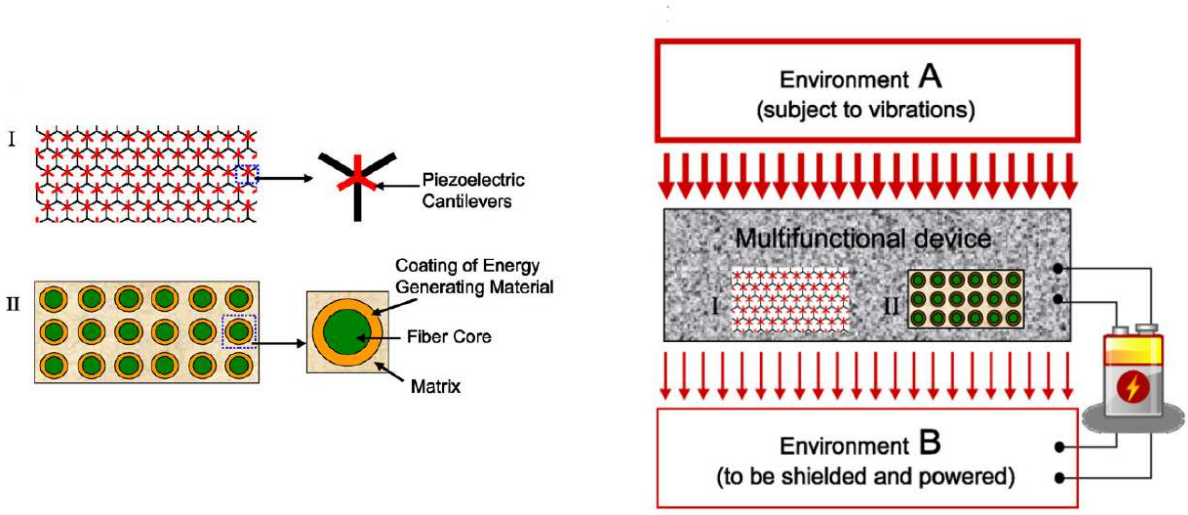
(a) (b)

FIGURE 1.15 – Force transmise à travers le système pour un élément piézoélectrique connecté à un (a) circuit résistif (b)circuit résistif/inductif (b) [56].

C'est en 2001 que Thorp *et al.* [56], sur la base de leurs travaux antérieurs sur les structures périodiques avec des alliages à mémoire de forme (AFM) [57], ont étudié un empilement de barreaux sur lesquels ils ont placé périodiquement des patchs piézoélectriques. L'objectif de cette étude est de connecter les patchs à des circuits extérieurs pour contrôler la propagation de l'onde longitudinale dans les barreaux. Les constantes de propagation sont calculées avec la méthode des matrices de transferts pour deux types de circuits électriques : un circuit résistif ou un circuit résistif/inductif. Les résultats ont montré que le circuit résistif introduit de l'amortissement dans la structure (figure 1.15a). Par contre, il n'a pas d'effet sur la fréquence et la largeur de la bande interdite. L'inductance (L) branchée en série avec le circuit piézoélectrique résisitif a un effet remarquable sur la structure de bande. Si la valeur de L est choisie de sorte que la fréquence de résonance électrique f_{RLC}

soit aux alentours de la fréquence de la bande interdite de Bragg, la bande interdite est étendue. Aussi, une bande interdite additionnelle générée par le mécanisme de résonance électrique locale est observée à la fréquence f_{RLC} fixée par la valeur de L (figure 1.15b). Dans la même étude, des valeurs aléatoires de R et de L ont été utilisées pour voir l'effet du "désordre" sur la propagation. Il a été constaté une extension de la bande interdite aux zones de fréquences adjacentes quand du "désordre" est introduit dans le système.

Hou *et al.* se sont intéressés à un cristal phononique bidimensionnel composé de céramiques piézoélectriques de formes cylindriques incorporées dans une matrice polymère [58], pour lequel ils ont calculé avec la méthode de décomposition en ondes planes la structure de bandes. L'étude a révélé que pour un facteur de remplissage volumique important, les bandes interdites sont plus larges quand les cylindres sont piézoélectriques, mais uniquement pour les modes vibrant dans la direction de polarisation des éléments piézoélectriques. Ce comportement s'explique par un changement de raideur effective des céramiques dû à l'effet piézoélectrique. Gonnela *et al.* [59] ont utilisé cet effet dans un dispositif multifonctions développé pour la récupération d'énergie. Le cristal phononique étudié a une géométrie en nid d'abeille dont la cellule élémentaire est un hexagone régulier avec trois poutres cantilevers piézoélectriques supplémentaires (figure 1.16a.I). L'idée est d'utiliser l'effet piézoélectrique des substructures (cantilevers) pour convertir en énergie électrique l'énergie cinétique résultante de la résonance des éléments aux fréquences voisines des bandes interdites. Ainsi, les substructures piézoélectriques agissent comme amortisseurs d'ondes et absorbeurs dynamiques d'énergie. Un autre concept de cellule élémentaire est proposé dans la même étude. Au lieu d'une structure en nid d'abeille, les auteurs proposent un composite en fibres renforcées, il s'agit d'une matrice avec un matériau mou contenant des fibres rigides couvertes d'un matériau piézoélectrique (figure 1.16a.II).



(a) (b)

FIGURE 1.16 – (a) Configuration interne des structures phononiques piézoélectriques I et II. (b) La structure phononique (I ou II) absorbe les vibrations de l'environnement A et convertit son énergie pour alimenter l'environnement B [59].

Ce type de structure phononique a une double fonction, elle absorbe l'énergie mécanique associée à la vibration du coeur des fibres et la convertit en énergie électrique qui pourra être utilisée ensuite pour alimenter un autre système comme illustré sur la figure 1.16b.

Des CP entièrement piézoélectriques ont été également étudiés [60]. On peut citer les travaux de Degraeve *et al.* [9, 61] qui ont étudié théoriquement et expérimentalement la propagation d'une onde longitudinale dans un empilement de barreaux piézoélectriques soumis à différentes conditions aux limites électriques. En négligeant la rupture d'impédance mécanique introduite par les électrodes entre deux barreaux consécutifs, les auteurs ont ainsi considéré une périodicité exclusivement électrique. Ils ont étudié trois configurations de conditions aux limites électriques. Dans la première, toutes les électrodes sont en circuit ouvert (CO) ; dans la deuxième, les électrodes sont connectées à des capacités C d'une valeur égale à celle de la capacité bloquée C_p d'un barreau piézoélectrique, dans le dernier cas, toutes les électrodes sont court-circuitées (CC). Ils ont ainsi mis en évidence l'ouverture d'une bande interdite de Bragg lorsque toutes les électrodes sont reliées électriquement entre elles ou bien connectées à une capacité. Les structures de bandes des trois configurations présentées sur la figure 1.17 montrent une ouverture de la bande interdite pour les deux derniers cas qui devient plus importante quand toutes les électrodes sont court-circuitées.

Cette bande interdite de Bragg appelée *bande interdite de charges* est induite par les charges électriques qui apparaissent sur les électrodes et qui créent une discontinuité du déplacement électrique entre deux barreaux adjacents.

La fréquence de la limite supérieure de la bande interdite est celle de l'anti-résonance f_a du barreau quelque soit la valeur de la charge capacitive connectée. Quant à la fréquence de la limite inférieure, elle coïncide avec la fréquence de résonance f_r quand les électrodes sont court-circuitées, et varie entre f_r et f_a quand la valeur de la capacité varie. En conséquence, la largeur due la bande interdite est directement liée au coefficient de couplage électromécanique du mode barreau k_{33} et à la valeur de la capacité C. Ainsi, le CP piézoélectrique avec des éléments connectés à des capacités est approximé par un milieu effectif avec une vitesse longitudinale effective V_{eff} qui peut être commandée en faisant varier la valeur de la capacité C. Cette vitesse effective est proportionnelle à la vitesse longitudinale V_L et s'écrit de la manière suivante :

$$V_{eff} = V_L \sqrt{1 - \frac{k_{33}^2}{1 + \frac{C_p}{C}}} \tag{1.25}$$

Par la suite, d'autres travaux ont fait état de charges inductives pour contrôler la propagation d'une onde longitudinale dans un multicouche composé d'éléments piézoélectriques alternés avec des éléments passifs [10, 62]. Mansoura *et al.* [11] ont utilisé la résonance électrique du circuit LC_p formé par le matériau piézoélectrique et l'inductance connectée à ses électrodes pour modifier la structure de bandes (figure 1.18). Quand la valeur de l'inductance choisie est telle que la résonance électrique est localisée dans une bande passante, une bande interdite d'hybridation (bande interdite ouverte par le mécanisme de résonance locale électrique du circuit LC) est ouverte à cette fréquence. Si la fréquence de résonance est située dans un une bande interdite de Bragg, ce dernier est élargi et deux bandes pas-

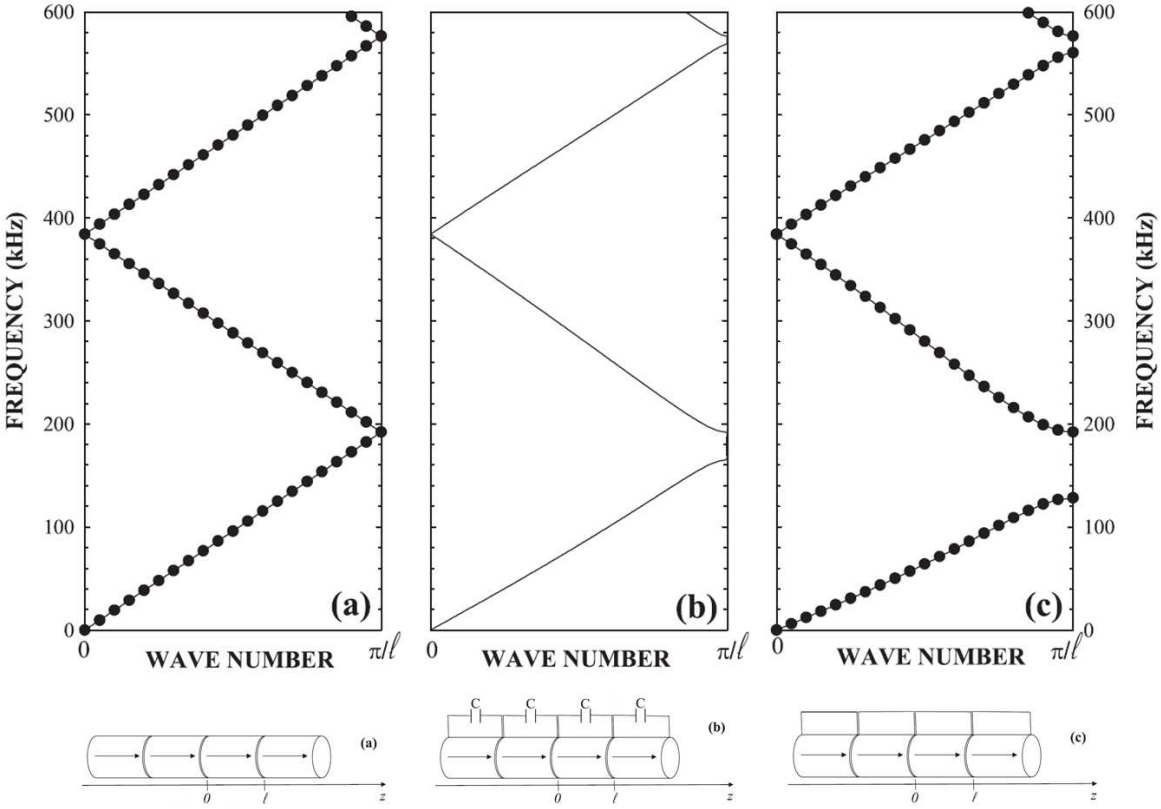
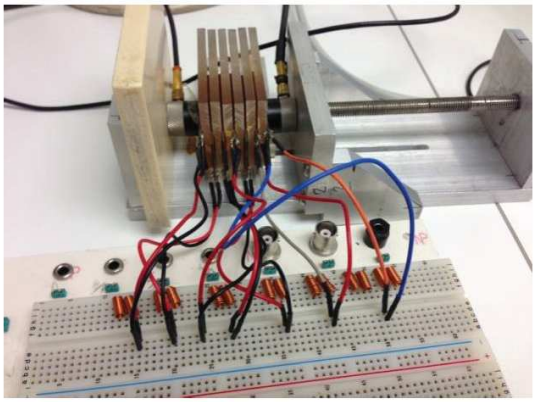


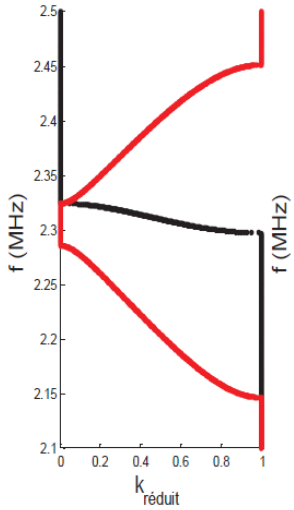
FIGURE 1.17 – Structure de bandes d'un CP avec des barreaux piézoélectriques de longueurs l en (a) CO (b), connectés à une capacité C, et (c) en CC [9].

santes apparaissent. Hou *et al.* ont également montré que la bande interdite calculée pour la même structure dépend non seulement de la fréquence de résonance électrique liée à l'inductance L mais aussi aux propriétés intrinsèques des éléments piézoélectriques. Ils ont aussi calculé analytiquement les coefficients élastiques effectifs qui deviennent négatifs aux voisinage de la bande interdite. Ce type de matériaux peut être utile dans la construction de métamatériaux acoustiques avec une double négativité (deux paramètres effectifs négatifs) [62].

Certains des travaux que l'on vient de citer sur les cristaux phononiques piézoélectriques ont utilisé des éléments sous forme de plaque, par contre, ils ne se sont consacrées qu'à l'étude des ondes de volume longitudinales et transversales. Dans la section suivante, on s'intéressera aux recherches effectuées sur les ondes guidées dans les plaques phononiques qu'elles soient élastiques ou piézoélectriques.



(a) Photographie du CP.



(b) Courbes de dispersion théorique du CP en circuit ouvert (lignes rouges), connecté à des inductance de valeur $0,7\ \mu H$ (lignes noires).

FIGURE 1.18 – CP piézoélectrique constitué d'une alternance de plaques piézoélectriques et de couches passives de Plexiglas (PMMA). Chaque plaque piézoélectrique est connectée à une inductance [11].

7 Ondes guidées dans les plaques phononiques

Un grand nombre d'applications potentielles des CP et MM concerne l'électronique et notamment le domaine des télécomunications RF (radio-fréquences) avec des fonctions de filtrage, multiplexage/démultiplexage, oscillateur [3, 5, 63–65]. Actuellement, les dispositifs SAW (Surface Acoustic Waves) ou BAW (Bulk Acoustic Waves) mettant en oeuvre des ondes acoustiques sont déjà très présents dans nos téléphones mobiles par exemple. Ils présentent en effet un très faible encombrement en comparaison des filtres diélectriques utilisant des résonances électromagnétiques [66]. C'est donc naturellement que des recherches visant à introduire des CPs dans des circuits intégrés ont été menées. A l'autre extrémité du spectre fréquentiel, le développement de MM pour isoler des infrastructures des ondes sismiques se propageant à la surface de la terre suscite un intérêt grandissant [67–71]. Dans ces deux domaines (sismique et électronique RF) le développement de CP pour ondes guidées présente un enjeu majeur.

Les premiers travaux s'intéressant à la propagation d'ondes de surface dans un CP se sont consacrés aux ondes de Rayleigh [72–75]. Meseguer *et al.* [72] ont étudié l'atténuation des ondes de Rayleigh à la surface d'un bloc de marbre à travers laquelle un réseau de trous a été percé. Dans cette étude, la hauteur des trous est supposée infinie (c'est à dire que la hauteur des trous est grande devant la profondeur de pénétration des ondes de surface,

qui dans le cas des ondes de Rayleigh est de l'ordre d'une longueur d'onde). En réalité, la propagation de ces ondes se fait en partie dans le réseau périodique et l'autre partie dans le substrat uniforme sous le réseau. D'un point de vue pratique, il est intéressant d'étudier les ondes de Lamb, qui sont des ondes guidées se propageant dans un milieu limité par deux surfaces parallèles. La distance entre les deux surfaces étant de quelques longueurs d'ondes, le couplage entre les ondes réfléchies sur les deux surfaces donnent naissance à des modes de déformations symétriques **S** et antisymétriques **A** selon l'épaisseur de la plaque.

La réalisation de circuits intégrés se fait principalement sur des substrats de silicium. Au sein de l'INSP, B. Bonello *et al.* [76] ont étudié la propagation des ondes de Lamb dans un CP réalisé sous forme d'une couche mince déposée sur un substrat de silicium. Le CP est constitué d'un arrangement périodique de cylindres de fer insérés dans une matrice en cuivre. Ils ont comparé expérimentalement deux structures avec deux coefficients de remplissage (rapport des surfaces d'un cylindre et de la maille élémentaire) différents en utilisant des lasers pour la génération et la détection des ondes de Lamb. Ils ont montré (figure 1.19) la présence de bandes interdites de Bragg dans les courbes de dispersion des modes fondamentaux symétrique S_0 et anti-symétrique A_0.

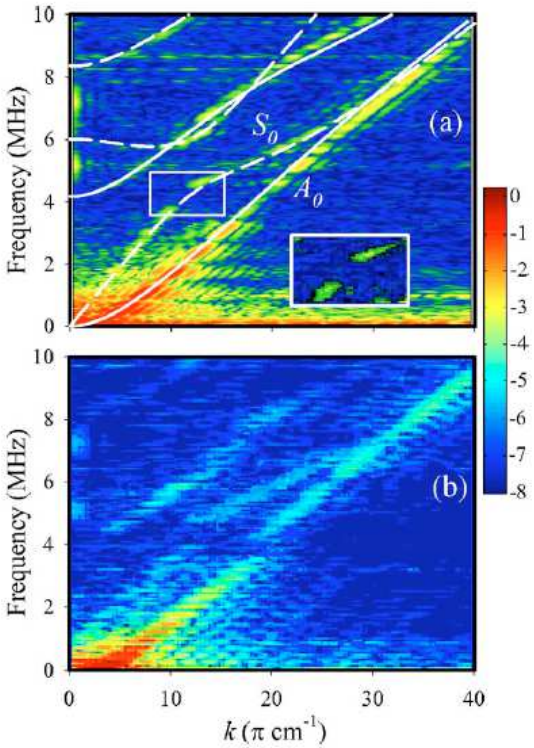


FIGURE 1.19 – Courbe de dispersion expérimentale montrant les modes de Lamb dans un structure constituée d'un film mince sous forme de CP déposé sur un substrat de Silicium. Le CP est un arrangement périodique de cylindres en fer insérés dans une matrice en cuivre. Facteur de remplissage (a) $f = 25$ % (partie encadrée est un zoom de la bande interdite du mode S_0), (b) $f = 56$ % [76].

Le cristal étudié par Wu [77] est constitué de trous remplis d'air avec des facteurs

de remplissage qui varient graduellement le long d'une plaque (plaque avec un gradient d'indice transversal) en silicium pour focaliser le premier mode de flexion (que l'on appelle A_0) dans une gamme de fréquences définie. Ils ont observé une diminution de la largeur de la bande interdite et de la vitesse de groupe de ce mode quand le facteur de remplissage augmente. L'indice de réfraction qui dépend de la vitesse de groupe est donc variable et module l'amplitude de l'onde. Ce type de structures peut avoir des applications dans le guidage des modes de Lamb notamment dans les composants MEMS.

La conception de composants de type SAW suppose de pouvoir générer et détecter des ondes guidées ultrasonores. Ceci se fait généralement par l'intermédiaire de transducteurs interdigités (IDT's) disposés à la surface d'un substrat piézoélectrique. Le quartz et le niobate de lithium ($LiNbO_3$) sont les plus couramment utilisés. On peut par exemple citer les travaux de Wu *et al.* [78, 79] qui ont conçu un CP bidimensionnel à l'échelle micrométrique constitué d'un arrangement carré de trous dans une matrice de silicium. La génération et la détection des ondes de surface sont assurées par des transducteurs interdigités confectionnés sur deux couches piézoélectriques d'oxyde de zinc (ZnO) déposées de part et d'autre du CP. Réaliser le CP directement dans le substrat piézoélectrique permet d'obtenir avec un matériau unique la transduction électrique/acoustique et la fonction de filtrage associée au CP (figure 1.20). Ainsi, Benchabane *et al.* [80] ont réalisé un CP sur une plaque piézoélectrique en $LiNbO_3$ percée de trous selon un arrangement périodique et ont caractérisé électriquement le CP en utilisant des transducteurs interdigités intégrés sur la même plaque pour générer et détecter les ondes de Rayleigh. La fréquence choisie (200 MHz) permet d'avoir une longueur d'onde correspondant à la profondeur des trous ainsi qu'une bande interdite importante. Le désavantage de ce type de structure est que les matériaux piézoélectriques sont plus difficiles à miniaturiser contrairement au silicium.

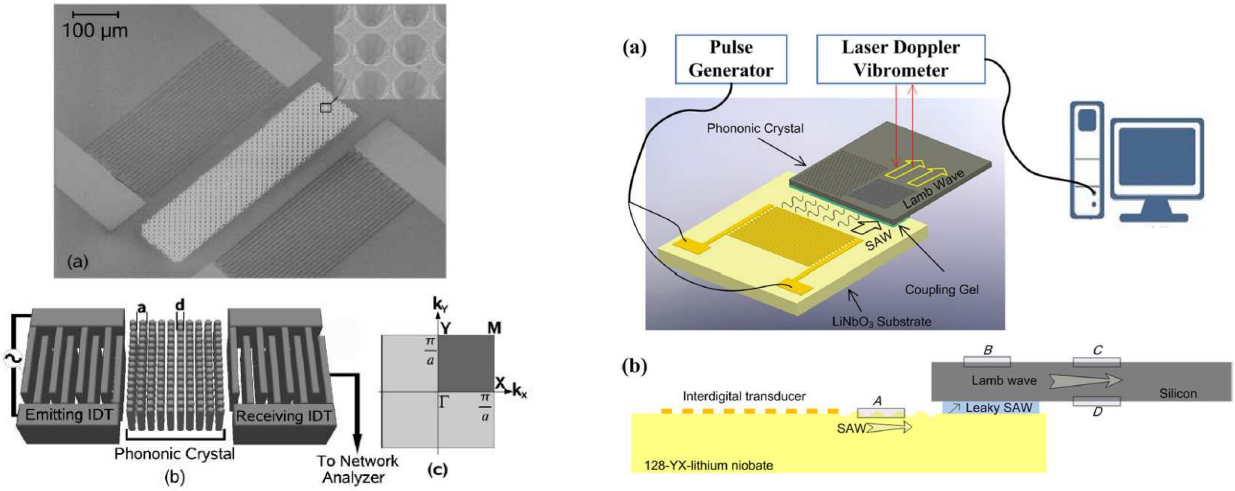


FIGURE 1.20 – Exemples de dispositifs SAW piézoélectriques [80, 81].

Le mécanisme de résonance locale a aussi été utilisé pour ouvrir des bandes interdites dans des plaques phononiques. Plusieurs travaux se sont focalisés sur l'étude de la propagation des ondes guidées dans une plaque d'épaisseur finie sur laquelle un réseau de plots cylindriques résonants a été déposé [31, 82–85]. Des bandes interdites peuvent ainsi être

ouvertes à des fréquences pour lesquelles les longueurs d'ondes sont supérieures à la périodicité du réseau. En modifiant les paramètres géométriques de la structure, en particulier le rapport entre la hauteur des plots et l'épaisseur de la plaque, on peut accorder la structure de bande et ouvrir une bande interdite à une fréquence choisie (figure 1.21). Ainsi, pour les cas (b) et (c) respectivement une bande interdite intera-bande apparait pour les rapports h_2/h_1 de 25% et 50%. Une bande interdite complète est ouverte pour la géométrie du cas (d). Ce type de CP peut être utilisé pour réaliser des guides d'ondes. On cite à titre d'exemple Oudich *et al.* [84] qui ont construit un guide d'ondes en supprimant quelques rangées d'un réseau carré périodique de plots en caoutchouc de silicone déposés sur une plaque en epoxy. Ils ont montré que la bande interdite obtenue avec les résonances locales est plus large que celle obtenu avec le mécanisme de diffraction de Bragg.

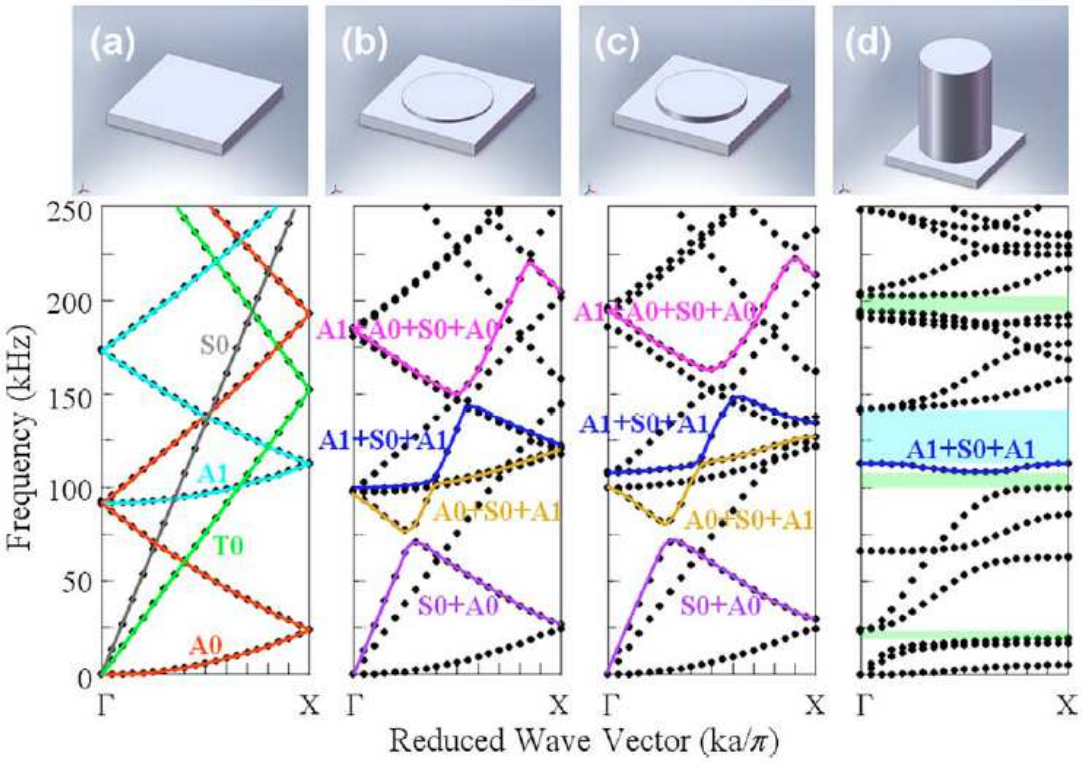
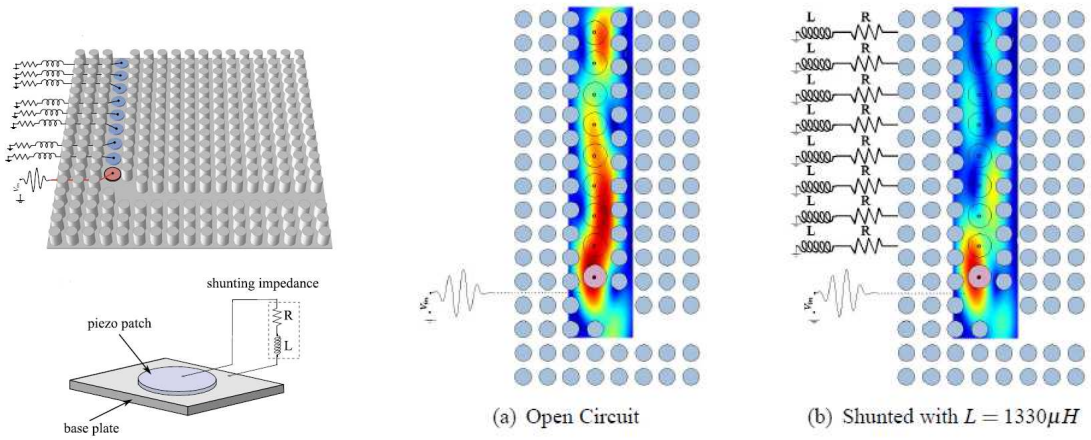


FIGURE 1.21 – Courbes de dispersion d'une plaque phononique d'épaisseur $h_1 = 1\ mm$ avec des plots de différentes hauteurs h_2 suivant la directions ΓX. (a) $h_2 = 0$, (b) $h_2 = 0,25h_1$, (c) $h_2 = 0,5h_1$, (d) $h_2 = 10h_1$ [82].

Des plaques phononiques à résonances locales ont aussi été développés avec des matériaux piézoélectriques. Que ce soit pour la génération et la détection de SAW à la surface des dispositifs, comme dans le cas des travaux d'Achaoui *et al.* [86] qui ont conçu un dispositif contenant un arrangement hexagonal de plots déposés sur un substrat piézoélectrique en niobate de lithium. Ils ont ensuite comparé les résultats à ceux de la même plaque mais avec des plots posés d'une manière aléatoire. Ils ont montré que dans la première configuration, deux bandes interdites sont observées, la première à la fréquence de résonance locale

et la deuxième à la fréquence de Bragg. Cette dernière bande interdite a disparu pour la seconde configuration par contre, la bande interdite liée à la résonance locale a bien été maintenu.

L'autre intérêt d'utiliser les matériaux piézoélectriques dans la conception des cristaux phononiques est leur aptitude à accorder les bandes interdites en fréquences grâce au couplage électromécanique comme il a été vu dans la section précédente. Plusieurs études se sont consacrées à l'atténuation des vibrations de plaques et de poutres en collant des éléments piézoélectriques connectés à des circuits électriques [87–97]. Casadei *et al.* [87] ont utilisé cette méthode pour contrôler les vibrations d'une plaque en aluminium en collant des patchs piézoélectriques d'une manière périodique sur la surface de la plaque. Chaque élément piézoélectrique de capacité bloquée C_p est connecté à un circuit RL. Ensuite, ils ont calculé les courbes de dispersion pour différentes valeurs d'inductances et ont remarqué l'ouverture de trois bandes interdites. Deux bandes sont présentes quelque soit la valeur de l'inductance choisie car elles sont créées par la rupture d'impédance mécanique due à l'effet de masse des éléments piézoélectriques collés périodiquement sur la plaque. La troisième bande interdite est directement liée à la résonance électrique locale induite par l'inductance connectée à chaque élément piézoélectrique. Sa localisation fréquentielle peut être contrôlée par la valeur de l'inductance.



(a) Le cellule élémentaire est constituée d'une élément piézoélectrique collé à la plaque d'Al et connecté à un circuit RL [92].

(b) Quand les éléments piézoélectriques sont en CO (image à gauche), l'onde se propage dans le guide d'onde. Sur l'image de droite, le circuit résonant RLC absorbe l'énergie de l'onde et l'empêche de se propager [93].

FIGURE 1.22 – Guide d'onde phononique piézoélectrique accordable [92, 93].

En se basant sur les travaux de Wu [82] qui a collé des plots cylindriques sur une plaque d'aluminium pour ouvrir une bande interdite de Bragg à une fréquence inhérente aux paramètres géométriques de la structure, certains auteurs [92,93] ont ouvert une bande passante localisée spatialement pour confiner l'onde de flexion A_0 en supprimant une rangée de plots. Ils ont ensuite remplacé cette rangée par un réseau 1D de huit pastilles piézoélectriques et ont montré que la propagation de l'onde dans le guide n'est pas influencée par l'effet de masse des pastilles piézoélectriques en circuit ouvert. Par contre, la connexion d'induc-

tances sur chaque pastille permet l'ouverture d'une bande interdite localisée à la fréquence de résonance électrique du circuit LC (figure 1.22).

Bergamini [94] *et al.* ont combiné l'effet de masse des plots et le couplage électromécanique des matériaux piézoélectriques pour contrôler la propagation des ondes dans une poutre. Le système est constitué d'une poutre en aluminium avec des plots de la même matière déposés dessus en un réseau 1D. Des patchs piézoélectriques ont été collés entre la poutre et chaque plot. Quand les éléments piézoélectriques sont en circuit ouvert, le système est une structure phononique caractérisée par une bande interdite ouverte par la résonance locale des plots. Par contre, la connexion des inductances aux patchs piézoélectriques induit une résonance électrique de type LC et ouvre une bande passante au sein de la bande interdite initiale. En effet, les éléments piézoélectriques interagissent avec la résonance mécanique locale de chaque plot et transforment l'énergie de cette résonance mécanique en une résonance électrique dissipée dans le circuit LC. En d'autres termes, au voisinage de la fréquence de résonance, la raideur effective de l'élément piézoélectrique devient faible, il en résulte une déconnexion mécanique entre les plots et la poutre. Les auteurs ont réussi ainsi à diminuer l'effet des plots résonants et adapter les bandes de fréquences sans avoir à changer la géométrie de la structure.

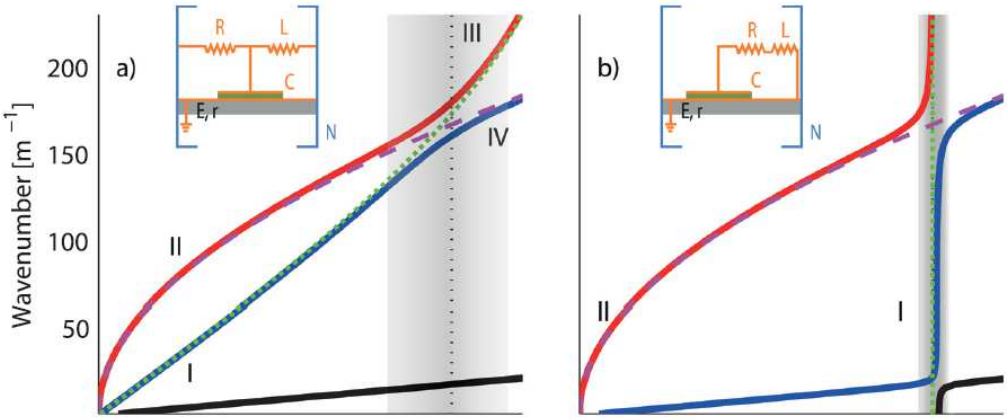


FIGURE 1.23 – Courbes de dispersion d'un cristal phononique piézoélectrique avec (a) une cellule élémentaire hybride avec une périodicité mécanique et électrique, (b) une cellule élémentaire résonante localement [97].

Les mêmes auteurs se sont inspirés récemment des travaux d'Airoldi et Ruzzene [90]. Ils ont collé des éléments piézoélectriques de façon périodique sur une poutre en aluminium en rajoutant à cette périodicité mécanique une périodicité électrique [97]. La cellule élémentaire hybride est composée d'une partie électrique (circuit électrique), une partie mécanique (poutre en aluminium) et un élément de couplage entre les deux parties (patch piézoélectrique). La partie électrique du système est une ligne de transmission réalisée en combinant des inductances avec les éléments piézoélectriques. La périodicité est définie non seulement par les valeurs des inductances de la ligne de transmission mais aussi par la périodicité spatiale des éléments piézoélectriques. Les courbes de dispersion montrent qu'en

basses fréquences, chacun des deux modes du milieu hybride correspond à des modes mécanique ou électrique découplés. Les deux modes interagissent et se couplent à la fréquence de résonance du circuit LC (figure 1.23). Le nombre et l'intensité des couplages augmentent quand on considère une maille élémentaire constituée d'une double cellule électrique avec deux valeurs différentes d'inductances.

Le couplage entre les modes de Lamb a été également étudié par Zou *et al.* [98]. Ils ont développé une plaque composite piézoélectrique faite d'une alternance d'éléments piézoélectriques et d'éléments en polymère (résine d'epoxy). L'épaisseur des électrodes sur les parties piézoélectriques est négligée et n'a aucun effet sur les ondes élastiques qui se propagent dans la plaque. Des conditions aux limites électriques de court-circuit et circuit ouvert sont appliquées d'une manière antisymétrique ou symétriques sur les électrodes des éléments piézoélectriques pour obtenir les fonctions de conversion et de sélection des modes de Lamb suivant leurs symétries. Pour une transmission ou une interdiction de propagation dans les deux sens de propagation, les auteurs ont montré que les conditions aux limites de court circuit ou de circuit ouvert doivent être appliquées sur toutes les électrodes de la plaque. Cette structure peut donc avoir plusieurs fonctions de contrôle de propagation des ondes de Lamb. Il est possible de passer d'une fonction à une autre uniquement en changeant les conditions aux limites électriques sans avoir à changer les paramètres géométriques ou élastiques de la plaque.

8 Conclusion

Dans ce chapitre, on a présenté les cristaux phononiques en commençant par quelques concepts fondamentaux. Tout d'abord, on a rappelé une des propriétés principales des cristaux phononiques qui, grâce à la diffraction de Bragg, ont la capacité d'interdire la propagation des ondes dans une gamme de fréquences particulière appelée bande interdite. Le phénomène de résonance locale a été également utilisé pour ouvrir des bandes interdites dans des structures périodiques à des longueurs d'ondes largement plus importantes que la taille du réseau et développer ainsi différents types de métamatériaux.

On a également fait un état de l'art sur les cristaux phononiques et métamatériaux accordables, en particulier, les structures piézoélectriques qui sont facilement accordables et plus pratiques à réaliser.

L'objectif de la thèse étant l'étude d'une plaque phononique piézoélectrique, on a consacré une partie du chapitre à rappeler les principes de la piézoélectricité et définir les grandeurs qui seront utilisées dans les chapitres suivants.

Enfin, on a donné quelques exemples sur les plaques phononiques et leurs applications dans le domaine de la microélectronique notamment les composants à ondes acoustiques de surfaces (SAW). Les travaux présentés situent l'utilisation des matériaux piézoélectriques suivant deux axes : la génération des ondes acoustiques de surfaces dans la même structure phononique et le contrôle de la propagation des ondes guidées avec des circuits électriques connectés aux électrodes des éléments piézoélectriques constituants le CP. Dans le cadre de cette thèse, on exploite l'effet piézoélectrique pour les deux utilisations : les électrodes découpées périodiquement à la surface de la plaque permettent la génération des ondes de Lamb symétriques et antisymétriques ainsi que le contrôle de la dispersion en changeant

localement les conditions aux limites électriques.

Chapitre 2

Ondes de Lamb dans une plaque piézoélectrique uniforme

1 Introduction

Le cristal phononique étudié dans ces travaux est une plaque piézoélectrique possédant des électrodes disposées périodiquement sur ses deux faces. Ces électrodes sont alternées avec des surfaces sans électrode pour créer un contraste acoustique. Pour mieux comprendre le mécanisme d'ouverture des bandes interdites dans ce type de structure, il est important d'étudier tout d'abord la propagation des ondes de Lamb dans une plaque piézoélectrique avec des faces uniformes.

Jusqu'au début des années soixante, les solutions des relations de dispersion des plaques piézoélectriques avec un couplage électromécanique relativement faible ont été assimilées aux solutions des plaques purement élastiques [99–101]. Ces solutions étaient alors inadéquates pour les plaques piézoélectriques avec des coefficients de couplage plus importants. C'est Tiersten en 1963 qui a traité le problème analytique de propagation des ondes dans une plaque piézoélectrique infinie avec des électrodes (de chaque côté de la plaque) court-circuitées [102, 103]. Quelques années plus tard, Bleustein a calculé les solutions pour une plaque piézoélectrique infinie sans électrodes et dans le vide [104].

Le guide d'onde étudié ici est une plaque piézoélectrique en Pz26 [105](Titano-Zirconate de Plomb) polarisée suivant son épaisseur e_p. Sa longueur L et sa largeur l sont très grandes par rapport à son épaisseur (figure 2.1). Bien que le milieu de propagation ait des propriétés de couplages électromécaniques, les ondes harmoniques guidées qui se propagent selon la direction (Ox) peuvent être assimilées aux ondes de Lamb classiquement définies dans une plaque élastique. Dans ce chapitre, le cas d'une plaque piézoélectrique sans électrode métallique sera tout d'abord étudié numériquement. Ensuite, on abordera le cas d'une plaque piézoélectrique avec électrodes métalliques soumises à différentes conditions aux limites électriques. On calculera pour chaque cas, les courbes de dispersion et l'impédance électrique à l'aide du logiciel d'éléments finis *COMSOL Multiphysics* ® (version 4.4). Une validation expérimentale des résultats sera proposée à la fin de ce chapitre. Une étude analytique de la dispersion des modes de Lamb dans une plaque piézoélectrique avec et

sans électrodes est développée dans l'annexe B et comparée aux résultats précédents.

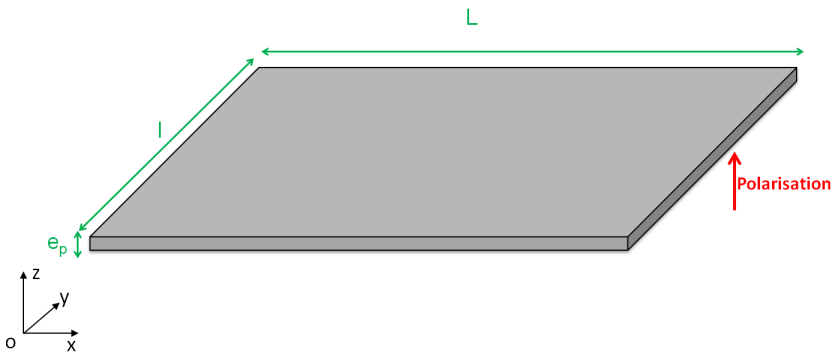


FIGURE 2.1 – Représentation schématique de la plaque piézoélectrique sans électrode de longueur **L**, largeur **l** et d'épaisseur $\mathbf{e_p}$.

2 Étude numérique par éléments finis

Comme dans chaque étude par la méthode des éléments finis (MEF), la géométrie étudiée est découpée en un nombre fini d'éléments discrets de faible dimension devant la longueur d'onde. Ce découpage est usuellement appelé *maillage*. Le calcul des solutions du système est réduit à la détermination des solutions pour chaque noeud, il est donc important que le maillage soit optimisé et bien adapté à la géométrie et la méthode de résolution.

2.1 Analyse des modes propres

Les courbes de dispersion des ondes de Lamb dans une plaque infinie sont déterminées à partir d'une analyse modale dans le plan xOz (étude réalisée dans un plan bi-dimensionnel) d'une plaque de dimension limitée sur laquelle des conditions de périodicité de type Bloch-Floquet sont appliquées. Ceci sera décrit en détail au chapitre 3 lorsque nous nous intéresserons au cas d'une plaque possédant des électrodes déposées périodiquement. Ainsi, pour ce deuxième chapitre, la plaque est assimilée à une succession infinie de cellules élémentaires de dimension Λ suivant l'axe (Ox) comme le montre la figure 2.2. Pour éviter d'observer les repliements de courbes de dispersion associés à la périodicité fictive utilisée dans le calcul, une longueur de plaque très courte est utilisée. Cette étude prend en compte les modes de Lamb générés à des fréquences inférieures à $1,3\ MHz$. On choisit donc de prendre une cellule élémentaire de taille $\Lambda = 1\ mm$. Les fréquences propres de la plaque sont déterminées pour chaque valeur de la composante selon **x** du nombre d'onde. La partie imaginaire des fréquences est due aux pertes mécaniques $\delta_m = 1\ \%$ prises en compte dans le matériau. Cette valeur a été choisie en accord avec la base de données du matériau piézoélectrique choisi (Pz26).

La plaque est maillée avec des éléments triangulaires. La taille de l'élément fini est directement liée à la plus petite longueur d'onde du problème λ_{min}. Pour avoir une bonne

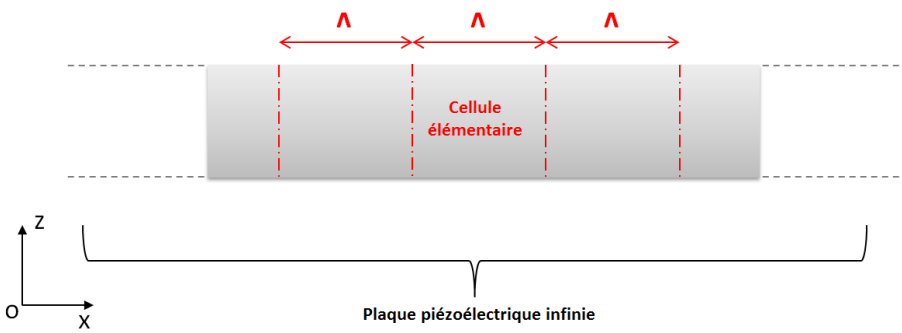


FIGURE 2.2 – Schéma représentant le découpage "fictif" de la plaque infinie en une infinité de cellules élémentaires identiques Λ suivant l'axe Ox.

précision de calcul, il est nécessaire d'avoir au minimum 6 éléments par longueur d'onde [106, 107]. Dans ce calcul, les éléments sont choisis de sorte à ce que le rapport entre λ_{min} et la taille maximale d'un élément du maillage soit égal à 25. Le solveur retenu pour le calcul est PARDISO.

Le module *dispositifs piézoélectriques* disponible dans *COMSOL Multiphysics*® prend en compte les équations de la piézoélectricité en combinant les deux modules : *Mécanique du Solide* et *Électrostatique*. Cette interface définit deux variables dépendantes : le champ de déplacement **u** et le potentiel électrique V.

Les propriétés du matériau piézoélectrique Pz26 [105] utilisées pour les calculs (coefficients élastiques, piézoélectriques et diélectriques) ont été déterminées à partir des échantillons utilisés par la suite. La démarche utilisée pour obtenir les caractéristiques des matériaux ainsi que les tableaux récapitulatifs de ces valeurs sont donnés en annexe A.

2.1.1 Plaque piézoélectrique sans électrode

a. Courbes de dispersion

La figure 2.3 représente la partie réelle des fréquences calculées pour une plaque infinie suivant la direction x, sans électrode métallisée, en fonction du nombre d'onde k_x. Comme dans une plaque élastique, on distingue les modes de Lamb symétriques **S** et antisymétriques **A**. On recense sur la figure cinq modes : le mode fondamental de flexion A_0, le mode fondamental de compression S_0 et les modes d'ordres supérieurs A_1, S_1 et S_2. Les modes fondamentaux A_0 et S_0 sont toujours des solutions des équations de Lamb, alors que les fréquences de coupure des autres modes dépendent de l'épaisseur de la plaque et des paramètres du milieu de propagation.

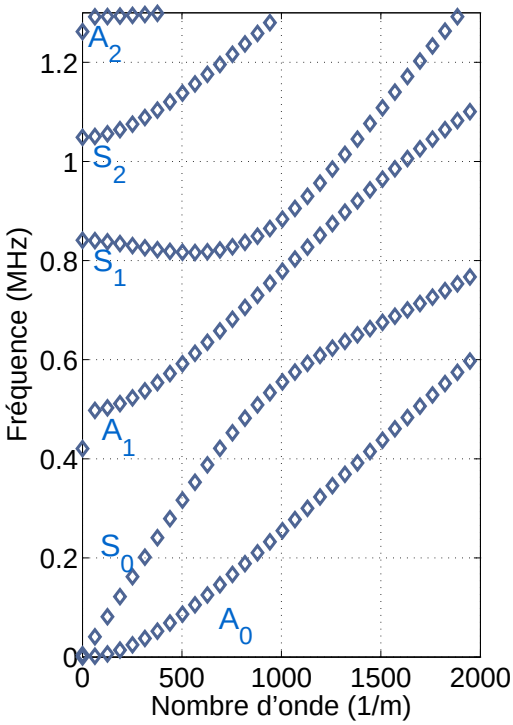


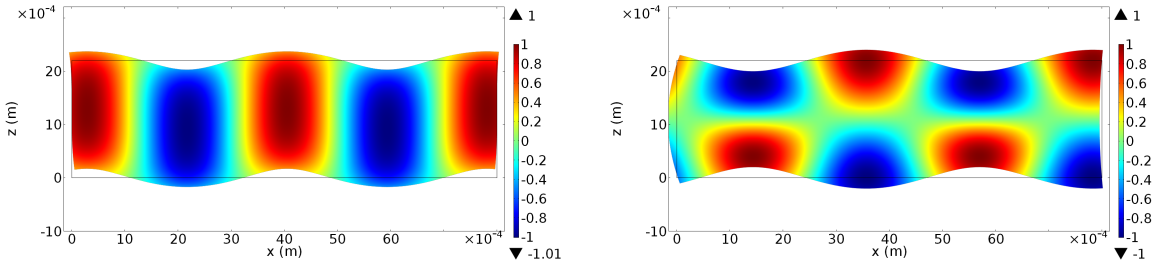
FIGURE 2.3 – Courbes de dispersion d'une plaque piézoélectrique en PZT (Pz26) infinie sans électrodes, d'épaisseur $e = 2,2\ mm$.

b. Étude du potentiel électrique

L'analyse du potentiel électrique et de la déformée des modes de Lamb permet une meilleure compréhension de leur sensibilité aux différentes conditions aux limites électriques appliquées sur les deux faces de la plaque piézoélectrique. Pour des raisons pratiques, on a choisi de focaliser notre étude sur les deux modes fondamentaux A_0 et S_0. Le potentiel électrique et la déformée des modes A_0 et S_0 dans le plan xOz sont illustrés par la figure 2.4. Les potentiels électriques sont donnés aux fréquences pour lesquelles le nombre d'onde des modes A_0 et S_0 vaut $k_x = 1571\ m^{-1}$. Cette valeur a été choisie car elle correspond à un cas particulier étudié au chapitre 3 consacré à l'étude d'une plaque phononique.

On représente la déformée et le champ de potentiel pour une longueur d'onde complète ($8mm$). La déformation et le potentiel électrique dans la plaque étant couplés, les extrema du potentiel électrique coïncident avec ceux du déplacement mécanique de l'onde. Le déplacement mécanique du mode de flexion A_0 est quasiment uniforme suivant l'épaisseur. En conséquence, son potentiel électrique représenté sur la figure 2.4a en niveaux de couleurs est symétrique par rapport au plan médian de la plaque, ceci entraine une différence de potentiel électrique nulle entre les deux faces de la plaque. Dans le cas du mode de compression S_0, la propagation de l'onde s'accompagne d'une variation d'épaisseur, c'est pourquoi une différence de potentiel apparaît entre les surfaces de la plaque, le champ de

potentiel est antisymétrique vis à vis du plan médian (figure 2.4b).



(a) Mode A_0 représenté à la fréquence $f = 496,2\ kHz$. (b) Mode S_0 représenté à la fréquence $f = 668\ kHz$.

FIGURE 2.4 – Potentiels électriques (en niveaux de couleurs) et déformées des modes fondamentaux pour une plaque piézoélectrique sans électrode dans le plan xOz.

2.1.2 Plaque piézoélectrique avec électrodes uniformes

On s'intéresse maintenant au cas d'une plaque piézoélectrique recouverte d'électrodes uniformes. Dans les calculs qui vont suivre, l'épaisseur des électrodes déposées sur les deux faces de la plaque est négligée vis à vis de l'épaisseur de la plaque. Typiquement, pour les échantillons étudiés par la suite, l'épaisseur de l'électrode est de l'ordre d'une dizaine de μm tandis que l'épaisseur de la plaque est de l'ordre du mm. Ainsi, seuls les conditions aux limites électriques seront modélisées dans les calculs par éléments finis. On supposera les électrodes parfaitement conductrices et donc le potentiel uniforme sur toute la surface (figure 2.5).

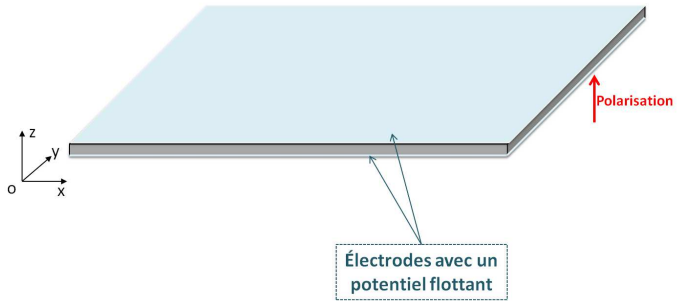


FIGURE 2.5 – Application de potentiels flottants (PF) sur les deux faces de la plaque avec électrodes (circuit ouvert).

a. Courbes de dispersion

Les courbes de dispersion d'une plaque avec des électrodes ayant un potentiel flottant (PF) sont représentées en rouge sur la figure 2.6. Cette CLE correspond à laisser la valeur du potentiel libre sur chaque électrode. Les courbes de dispersion de la même plaque sans électrode (figure 2.3) sont superposées en bleu. On peut constater que le fait d'avoir un

potentiel électrique uniforme et donc une densité de charge uniforme sur toute la surface de la plaque influe sur la dispersion des modes. On observe un décalage plus ou moins important des courbes de dispersion des modes de Lamb vers les basses fréquences. Ce décalage des modes témoigne de leur sensibilité aux conditions aux limites électriques sur les faces de la plaque.

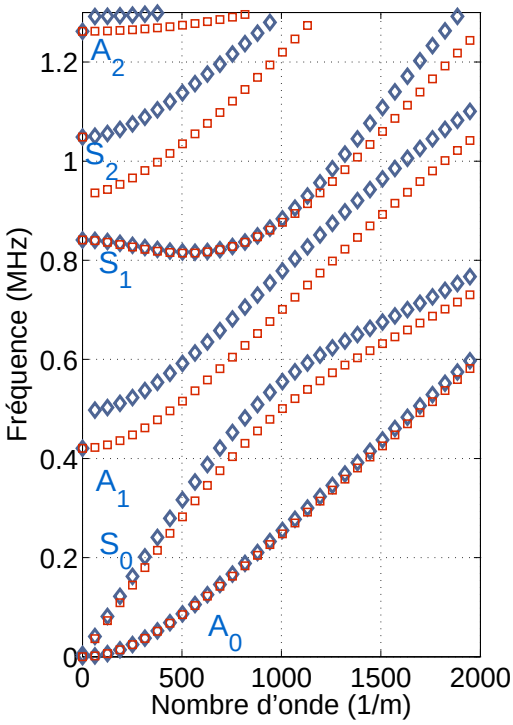


FIGURE 2.6 – Courbes de dispersion d'une plaque piézoélectrique infinie, d'épaisseur : $e = 2,2\ mm$. Courbes bleues : plaque sans électrode. Courbes rouges : plaque avec électrodes (PF).

Il est intéressant d'étudier le cas particulier des fréquences de coupures f_c de chaque mode. La fréquence f_c d'un mode est définie comme étant la fréquence d'un mode lorsque son nombre d'onde k tend vers zéro [44].

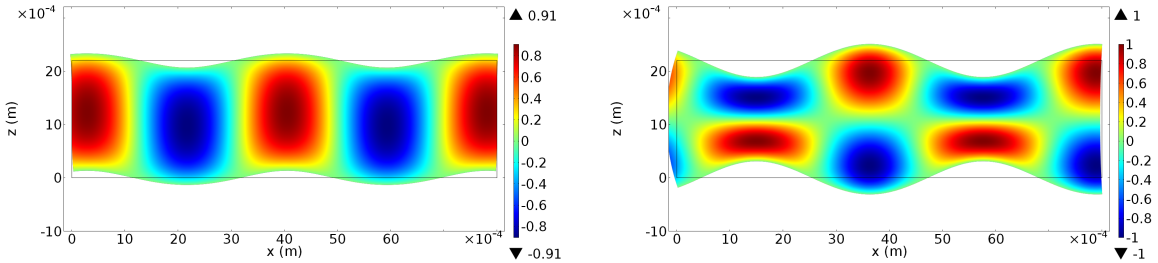
Un calcul analytique des équations de dispersion des ondes de Lamb dans une plaque piézoélectrique infinie d'épaisseur e polarisée suivant l'axe Oz a été développé (voir annexe B). Les deux cas de conditions aux limites électriques avec et sans électrodes sont considérés.

Les fréquences de coupures calculées à partir des relations (B.32) et (B.33) obtenues dans l'annexe B pour les modes A_1, S_1, S_2 et A_2 sont respectivement : $0,421\ MHz$, $0,841\ MHz$, $1,049\ MHz$ et $1,262\ MHz$. Elles coïncident avec celles des modes calculés numériquement dont les fréquences de coupures correspondent à des fréquences réelles. On note que pour $k = 0$, les modes A_1 et A_2 de la plaque sans électrodes et le mode S_2 ne sont pas réels.

Ainsi les fréquences de coupures dépendent des vitesses des ondes de volume, ce qui explique leur insensibilité aux conditions aux limites électriques.

b. Étude du potentiel électrique

La figure 2.7 représente les cartographies des potentiels électriques et des déformées des modes A_0 et S_0 pour une plaque piézoélectrique avec des électrodes libres électriquement (PF). On remarque que le potentiel électrique est nul sur les deux surfaces de la plaque. En effet, la propagation des ondes de Lamb génère une distribution sinusoïdale de charges sur les surfaces. Les électrodes étant parfaitement conductrices, les charges en surface se neutralisent et le potentiel s'annule au voisinage des surfaces. En s'éloignant de la surface, le potentiel électrique a la même allure que dans une plaque sans électrode. C'est cette discontinuité du potentiel au voisinage des surfaces qui modifie la dispersion des modes. On peut considérer que l'onde qui se propage dans une plaque avec des électrodes est "confinée" dans une épaisseur effective réduite. Cette épaisseur correspond à l'épaisseur de la plaque sans la partie au voisinage des deux faces où le potentiel est nul. Ce changement d'épaisseur effective du guide d'onde induit un décalage en fréquence des courbes de dispersion [108].



(a) Mode A_0 représenté à la fréquence $f = 482,7\ kHz$. (b) Mode S_0 représenté à la fréquence $f = 667\ kHz$.

FIGURE 2.7 – Potentiels électriques (en niveaux de couleurs) et déformées des modes fondamentaux pour une plaque piézoélectrique avec électrodes au PF dans le plan xOz.

2.1.3 Influence d'une charge d'impédance électrique connectée aux électrodes

Nous nous intéressons dans cette partie aux modifications induites sur la dispersion des ondes de Lamb par l'ajout de charges d'impédances électriques connectées aux électrodes. Une charge d'impédance électrique Z est connectée aux deux électrodes de la plaque comme montré sur la figure 2.8. Deux cas sont présentés. Le premier cas correspond à la mise en court-circuit (CC) des électrodes en connectant une masse sur les deux bords de la plaque ($Z_1 = 0$). Le second cas est l'ajout d'un condensateur de capacité **C** en parallèle à la plaque piézoélectrique ($Z_2 = 1/jC\omega$). Les simulations numériques sont faites en utilisant le module mathématique *EDO et EAD globales*[1] (*COMSOL Multiphysics* ®).

Les courbes de dispersion sont calculées pour les deux cas décrits précédemment avec Z_1 et Z_2 ($C = 69\ nF$). La comparaison des courbes de dispersion de ces deux cas (croix

1. Le détail de l'implémentation des équations correspondantes au module *EDO et EAD globales* sera expliqué dans le chapitre 4.

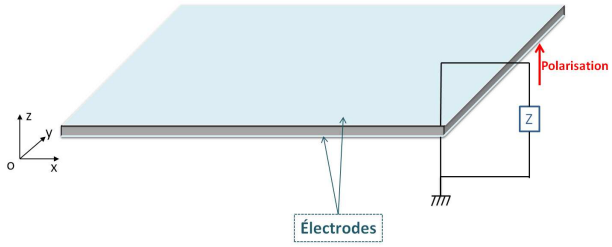


FIGURE 2.8 – Une charge d'impédance Z est connectée en parallèle aux deux faces de la plaque piézoélectrique avec électrodes.

vertes sur la figure 2.9) avec celles d'une plaque avec électrodes en potentiels flottants (superposées en carrés rouges) ne montre aucune différence. Le choix de la valeur de la capacité est arbitraire, le résultat est le même avec n'importe quelle autre valeur choisie. Dans le cas d'une plaque uniforme infinie avec électrodes comme dans le cas d'une charge d'impédance ajoutée, les charges se compensent sur les surfaces et la différence de potentiel est nulle entre les deux surfaces de la plaque piézoélectrique. Quelques soient les conditions aux limites électriques appliquées, aucun courant ne circule dans la charge d'impédance **Z**.

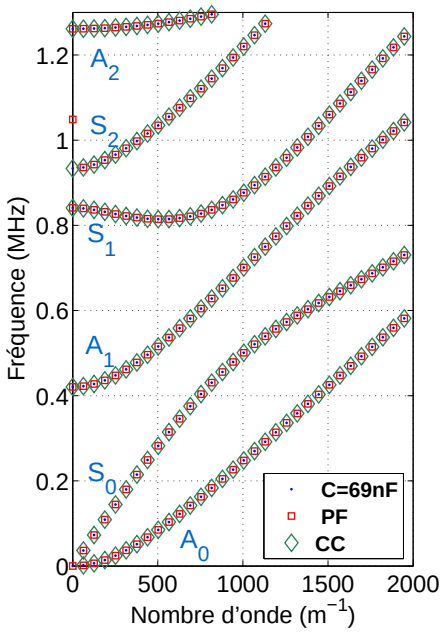
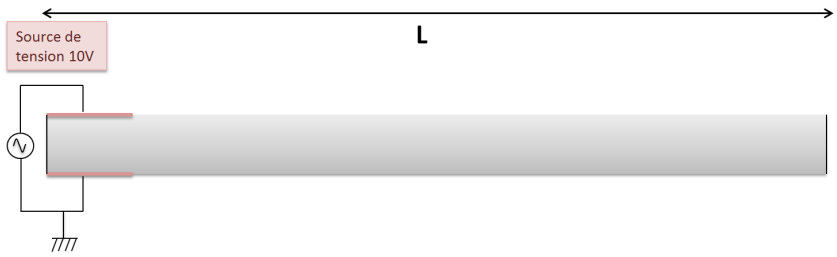


FIGURE 2.9 – Comparaison des courbes de dispersion d'une plaque piézoélectrique infinie d'épaisseur $e = 2,2\ mm$ avec électrodes en potentiel flottant avec la même plaque connectée à une charge Z. Carrés rouges : potentiel flottant. Losanges verts : $Z_1 = 0$. Points bleus : $Z_2 = 1/jC\omega$.

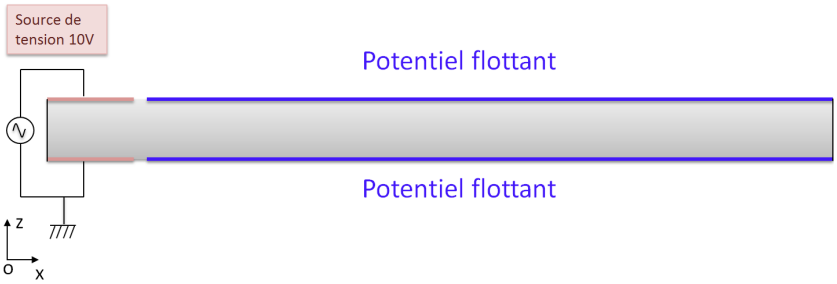
2.2 Impédance électrique de la plaque piézoélectrique avec ou sans électrode

Comme indiqué dans le chapitre précédent, l'impédance électrique est généralement utilisée pour caractériser les éléments piézoélectriques. Il est intéressant de la calculer pour étudier la sensibilité des modes de Lamb aux différentes conditions aux limites électriques.

Les simulations en régime harmonique permettent une étude de la réponse fréquentielle de la plaque piézoélectrique en fonction des conditions aux limites électriques en employant les modules *dispositifs piézoélectriques* et *circuit électrique* de *COMSOL Multiphysics* ®.



(a) Représentation schématique de la plaque piézoélectrique sans électrodes.

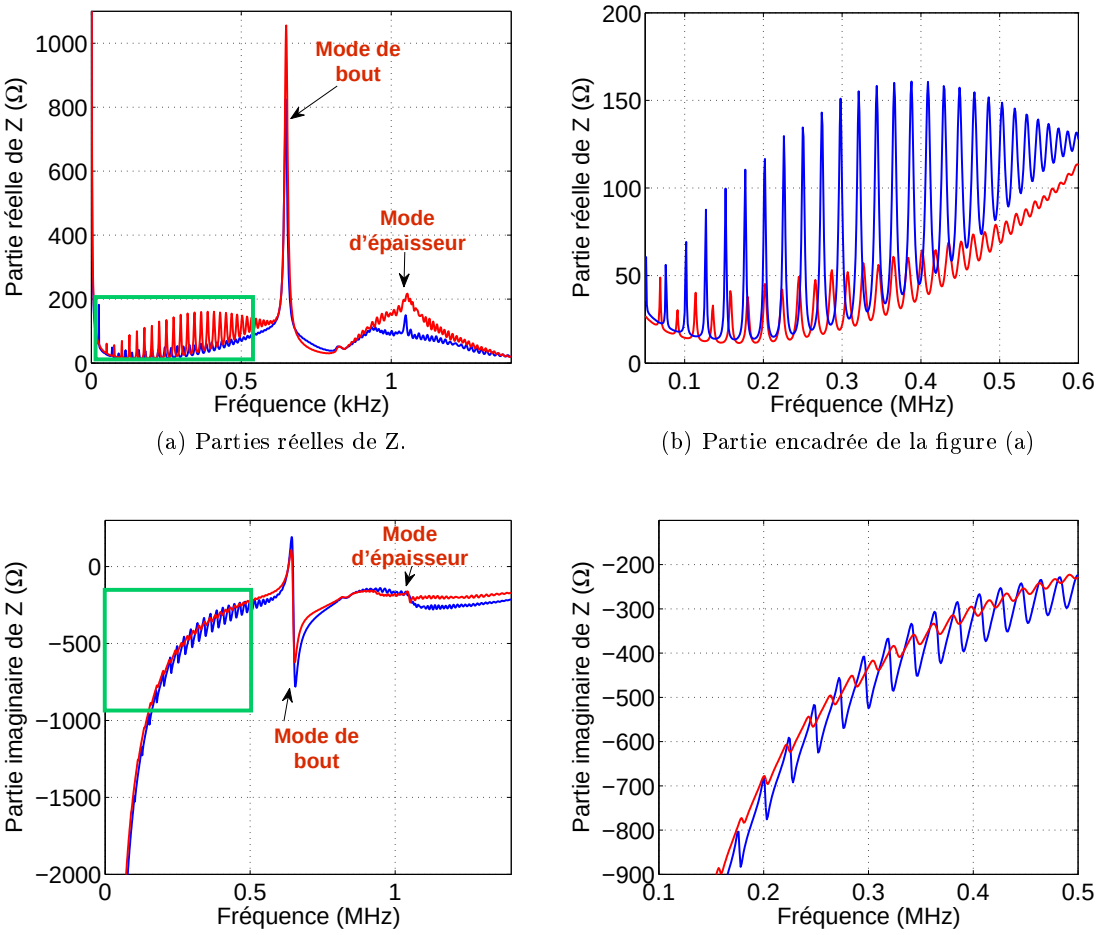


(b) Représentation schématique de la plaque piézoélectrique avec des électrodes uniformes au potentiel flottant.

FIGURE 2.10 – Plaques piézoélectriques modélisées pour le calcul d'impédance électrique : plaque piézoélectrique de longueur finie ($L = 80\ mm$) dans le plan xOz. Les deux électrodes rouges au bord de la plaque sont connectées à une source de tension alternative d'amplitude égale à 10V.

La plaque piézoélectrique de longueur L présentée dans la figure 2.10 est modélisée avec une géométrie finie dans le plan xOz. Les longueur et largeur de la plaque ont une valeur de 80 mm et son épaisseur $e = 2,2\ mm$. Bien que la modélisation soit effectuée dans un plan 2D, il est possible de définir dans le logiciel *COMSOL Multiphysics* ® une *profondeur* qui correspondrait dans notre cas à la largeur de la plaque. Une électrode de 2 mm de longueur est modélisée sur chaque face pour l'excitation des ondes. Ces électrodes sont connectées via le module *circuit électrique* à une source de tension alternative d'amplitude 10 V. La disposition des électrodes d'excitation (symétrique par rapport au plan médian de la plaque) permet de générer uniquement le mode S_0. On calcule l'impédance électrique à partir de l'évaluation du courant I et de la tension U au niveau des électrodes d'excitation avec la loi d'Ohm $Z = U/I$.

Dans un premier temps, les cas d'une plaque piézoélectrique avec et sans électrode métallisée sont considérés. D'autres conditions aux limites électriques seront étudiées en utilisant les composants électriques disponibles dans le module *circuit électrique* du logiciel *COMSOL Multiphysics* ®.



(a) Parties réelles de Z.

(b) Partie encadrée de la figure (a)

(c) Parties imaginaires de Z.

(d) Partie encadrée de la figure (c)

FIGURE 2.11 – Impédance électrique complexe Z de la plaque piézoélectrique. Courbe bleue : plaque sans électrode. Courbe rouge : plaque avec électrodes au potentiel flottant.

La figure 2.11 montre les parties réelles (figure 2.11a) et imaginaires (figure 2.11c) de l'impédance électrique pour une plaque sans électrode (courbe bleue) et une plaque avec ses électrodes au potentiel flottant (courbe rouge).

La position en fréquence de l'anti-résonance de la plaque est approximée par la fréquence parallèle f_p qui est proche de celle-ci à cause des faibles pertes. Comme nous l'avons vu au chapitre précédent (relation (1.19)), elle s'écrit de la manière suivante :

$$f_p = \frac{1}{2e_p}\sqrt{\frac{c_{33}^D}{\rho}} \tag{2.1}$$

où c_{33}^D est le coefficient élastique suivant l'axe d'épaisseur de la plaque (axe Oz ou axe 3) à déplacement électrique constant, ρ la masse volumique et e_p l'épaisseur de la plaque. Les valeurs utilisées dans ce calcul sont : $\rho = 7500\ kg.m^{-3}$, $c_{33}^D = 150,4\ GPa$ et $e_p = 2,2\ mm$ (le tableau des coefficients est donné dans l'annexe A).

On obtient théoriquement pour les plaques étudiées $f_p = 1,03\ MHz$. Les courbes d'impédances calculées numériquement montrent un maximum d'amplitude autour de $1,04\ MHz$ pour les plaques avec et sans électrode.

L'allure de la partie imaginaire de l'impédance électrique de la plaque montre le comportement capacitif de celle-ci (figure 2.11c). La capacité bloquée de la plaque C_p est évaluée à partir de la formule (1.23) en fonction de la permittivité diélectrique relative ϵ_{33}^S, la permittivité du vide ϵ_0, la surface d'une électrode A et l'épaisseur de la plaque e_p. Le côté de la plaque étant de 80 mm, la surface est estimée à 6400 mm^2.

On définit la capacité *basse fréquence* C_b de la plaque piézoélectrique comme étant la capacité évaluée à des fréquences inférieures à f_p. On l'estime également avec la formule de la capacité d'un condensateur plan (1.23) mais en utilisant cette fois ci la permittivité diélectrique à contrainte constante ϵ_{33}^T

$$C_b = \frac{\epsilon_{33}^T \epsilon_0 A}{e_p} \tag{2.2}$$

La relation entre C_p et C_b s'écrit en fonction du coefficient de couplage k_t :

$$C_b = \frac{C_p}{1 - k_t^2} \tag{2.3}$$

Les valeurs des capacités C_p et C_b ainsi que les valeurs des constantes qui ont permis de les évaluer sont récapitulées dans la Table 2.1.

e_p (mm)	ϵ_{33}^S	ϵ_{33}^T	ϵ_0 $(F.m^{-1})$	A (m^2)	C_p (nF)	C_b (nF)
2,2	768	1067	$8,85.10^{-12}$	64.10^{-4}	19,7	27,5

TABLE 2.1 – Épaisseur de la plaque e_p, constantes diélectriques ϵ_{33}^S et ϵ_{33}^T, permittivité du vide ϵ_0, surface d'une électrode S, capacités C_p et C_b.

Le pic observé à la fréquence 653 kHz est un mode de bout. Ce type de mode a été étudié par le passé [109]. Il reste localisé à l'extrémité de la plaque et est évanescent dans la direction Ox. Le pic d'impédance associé à ce mode disparaît donc lorsqu'on s'éloigne de l'extrémité de la plaque.

En basses fréquences, on observe des pics également liés à la présence de modes de Lamb se propageant dans la plaque et donnant naissance à des modes stationnaires aux fréquences d'accord de phase suivant la longueur de la plaque.

La figure 2.12 donne une représentation schématique des premiers modes stationnaires. La condition de stationnarité des ondes de Lamb se propageant dans la direction (Ox) s'écrit :

$$2L = n\lambda \tag{2.4}$$

où λ est la longueur d'onde, L la longueur de la plaque piézoélectrique et n un entier. Ceci conduit à la condition suivante pour les nombres d'ondes

$$k_n = \frac{n\pi}{L} \tag{2.5}$$

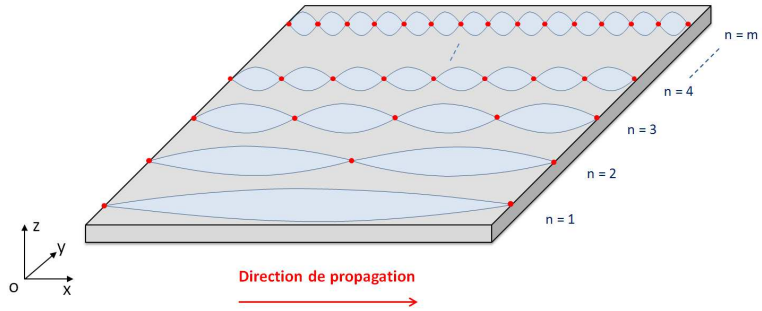


FIGURE 2.12 – Schéma des ondes stationnaires dans le plan xOz de la plaque.

On détermine la fréquence et le nombre d'onde k_n des 28 premiers pics d'anti-résonance sur la figure 2.11b pour la plaque avec électrodes. La valeur du nombre d'onde pour chaque fréquence est superposée aux courbes de dispersion d'une plaque piézoélectrique avec électrodes. Le résultat est présenté sur la figure 2.13. On vérifie ainsi que chaque pic de résonance de l'impédance électrique pour des fréquences inférieures à $f = 600\ kHz$ est un mode stationnaire de l'onde S_0. Le même raisonnement aurait pu s'appliquer sur le mode antisymétrique A_0 avec une excitation électrique adéquate.

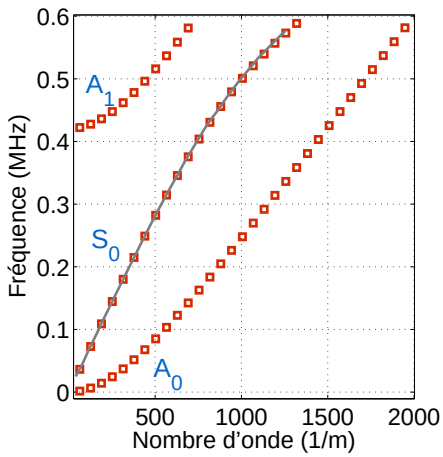


FIGURE 2.13 – Courbes de dispersion théoriques d'une plaque avec électrodes en potentiel flottant (carrés rouges). Le mode S_0 est superposé avec la ligne construite avec les points (k, f_n) extraits de la courbe d'impédance électrique correspondante (courbe grise).

Le décalage fréquentiel entre les pics observés sur les spectres d'impédances électriques calculés pour les plaques avec et sans électrode (figures 2.11b et 2.11d) est la conséquence de la sensibilité des ondes de Lamb aux conditions aux limites électriques qui se traduit par un changement de vitesse. Il est donc possible d'établir un lien entre le décalage fréquentiel de ces pics et le décalage observé sur les courbes de dispersion des ondes de Lamb (figure 2.6).

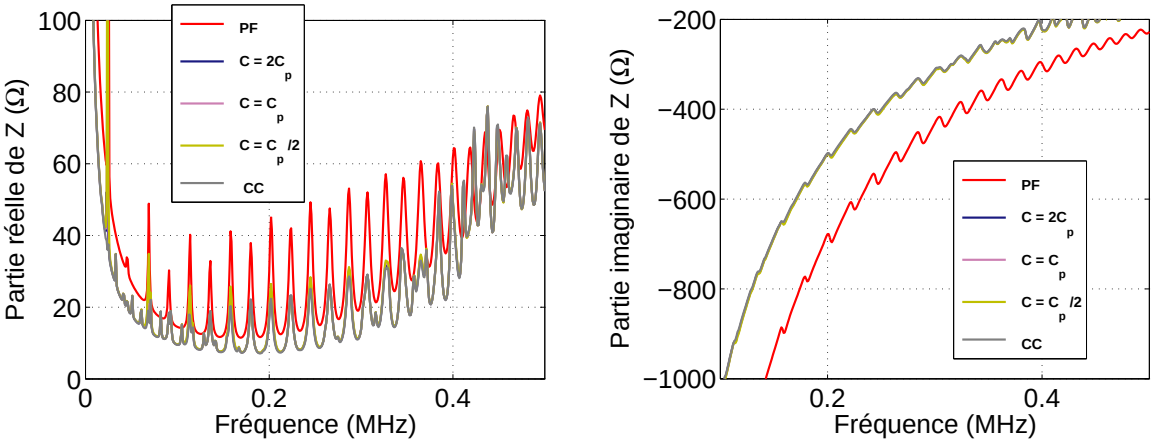
2.3 Impédance électrique de la plaque piézoélectrique avec ajout de charges électriques d'impédance

On a vu précédemment (section (2.1.3)) que la dispersion des modes de Lamb se propageant dans une plaque piézoélectrique n'était pas modifiée par l'ajout d'une capacité à ses bornes. Afin de consolider ce résultat, on calcule l'impédance électrique d'une plaque piézoélectrique sur laquelle est connectée un condensateur ou une bobine. On reprend la configuration précédemment utilisée pour calculer l'impédance sur une plaque seule en y ajoutant une charge d'impédance Z (figure 2.14)

FIGURE 2.14 – Impédance de charge (Z) connectée aux électrodes (en bleue) de la plaque. Les électrodes représentées en rouge sont connectées à une source de tension alternative.

a. Ajout d'un condensateur

Les spectres d'impédances électriques avec condensateurs pour différentes valeurs de capacités C sont calculés numériquement. Les parties réelles et imaginaires sont représentées sur la figure 2.15. Les valeurs des capacités choisies sont respectivement égales à l'∞ (court-circuit CC), $2C_p, C_p, C_p/2$, la capacité bloquée C_p étant de $19,2\ nF$ (Table 2.1). Les courbes pour les différentes valeurs de C se superposent parfaitement. On remarque une diminution de l'amplitude des pics par rapport à la plaque avec PF mais aucun décalage fréquentiel des pics. Ceci peut être expliqué par la mise à la masse des électrodes lors de la connexion d'une charge d'impédance qui permet aux charges de circuler à l'extérieur du système. Ce résultat est en accord avec les courbes de dispersion des ondes de Lamb obtenues précédemment, aucune variation de vitesse de propagation des ondes de Lamb n'est observée (figure 2.9).



(a) Parties réelles de Z. (b) Parties imaginaires de Z.

FIGURE 2.15 – Impédance électrique complexe pour différentes valeurs de charges capacitives connectées aux électrodes. Les courbes calculées pour les différentes valeurs de C sont parfaitement superposées.

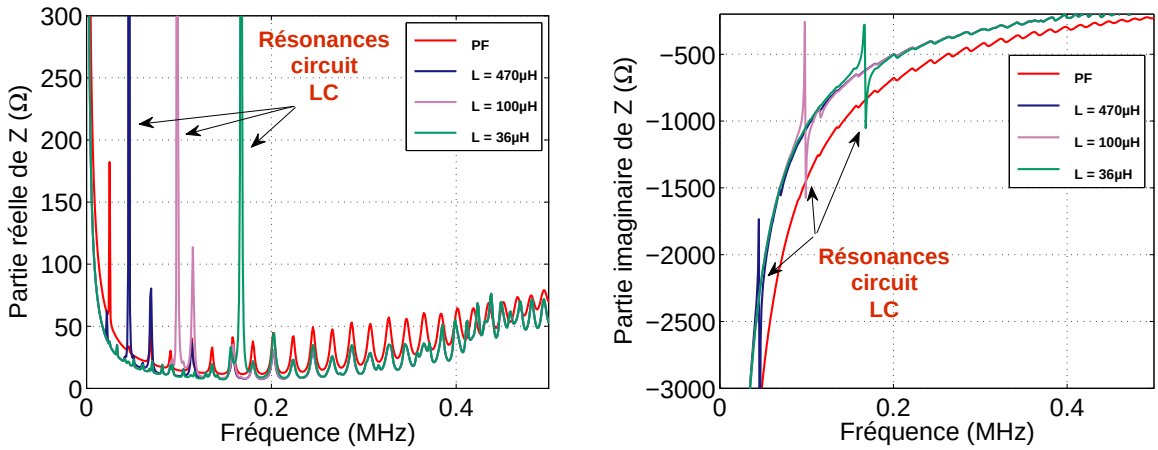
b. Ajout d'une bobine

Le branchement d'une bobine d'inductance L avec la plaque piézoélectrique produit une résonance électrique à la fréquence f_e :

$$f_e = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \tag{2.6}$$

Trois valeurs d'inductances sont étudiées, $L = 36\ \mu H$, $L = 100\ \mu H$ et $L = 470\ \mu H$. Les spectres d'impédances pour les trois valeurs de L et le cas d'électrodes avec PF sont tracés sur la figure 2.16. Comme précédemment, les amplitudes des pics diminuent lorsqu'on ajoute une charge d'impédance. Les courbes pour les différentes valeurs de L se superposent parfaitement, on observe cependant une résonance supplémentaire sur chaque spectre qui correspond à la résonance électrique f_e.

On calcule les fréquences de résonances électriques à partir de la formule (2.6) en considérant les deux valeurs de capacités C_p et C_b pour chaque valeur d'inductance. On regroupe ces valeurs ainsi que celles relevées sur les spectres d'impédances électriques dans la Table 2.2. Un bon accord est observé entre les valeurs relevées et celles calculées à partir de C_b. Par contre on remarque un décalage (entre 11 % et 15 %) entre les valeurs relevées et celles calculées à partir de C_p. Ceci s'explique car la fréquence de résonance électrique apparaît à une fréquence inférieure à f_p, elle est donc associée à la valeur *basse fréquence* C_b de la capacité de la plaque.



(a) Parties réelles de Z. (b) Parties imaginaires de Z.

FIGURE 2.16 – Impédance électrique complexe pour différentes valeurs de charges inductives connectées aux électrodes.

L (μH)	36	100	470
f_e relevée (kHz)	167	98	46
f_e théorique à partir de C_p (kHz)	188,7	113,2	52,2
Δf_e à partir de C_p (%)	11,5	13,4	11,8
f_e théorique à partir de C_b (kHz)	160	96	44,2
Δf_e à partir de C_b (%)	4	2	3,9

TABLE 2.2 – Valeurs des inductances et fréquences de résonance électrique correspondante. Δf_e est l'erreur relative.

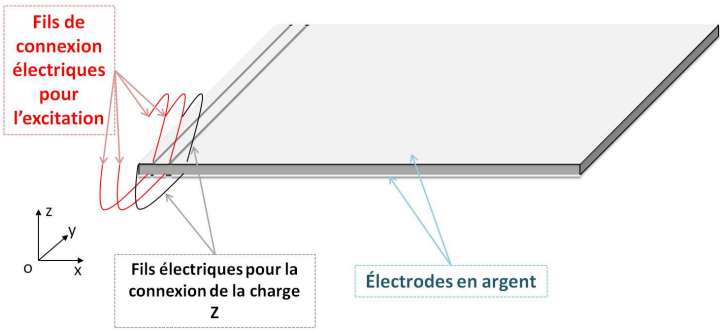
Mis à part le pic de résonance électrique supplémentaire, on remarque que le branchement d'une inductance n'a aucun effet sur la position fréquentielle des pics correspondant aux modes de Lamb S_0. On peut donc conclure que l'inductance n'a pas non plus d'effet sur la dispersion des modes de Lamb.

On présente dans la prochaine section une étude expérimentale de la dispersion des modes de Lamb sur une plaque piézoélectrique avec différentes conditions aux limites électriques.

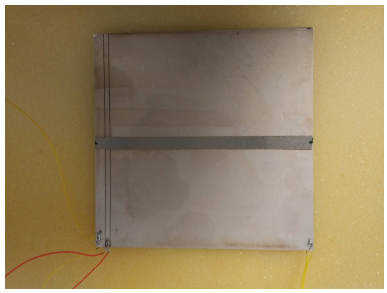
3 Étude expérimentale

3.1 Présentation de l'échantillon

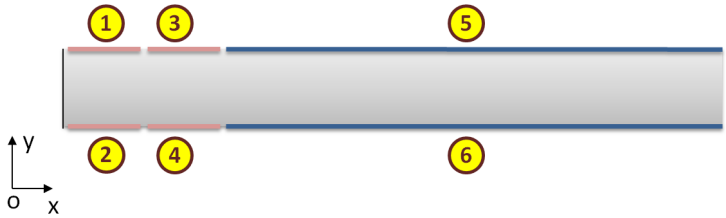
L'échantillon est une plaque piézoélectrique Pz26 [105] polarisée selon son épaisseur de longueur $L = 80\ mm$, de largeur $l = 80\ mm$ et d'épaisseur $e_p = 2,2\ mm$. Ses surfaces sont couvertes de deux électrodes en argent, l'épaisseur de chaque électrode ne dépasse pas une dizaine de micromètres [105]. Deux bandes rectangulaires en vis à vis de $2\ mm$ de largeur chacune et espacées de $0,3\ mm$ ont été découpées sur chaque électrode initiale. Elles sont utiles pour l'excitation électrique des ondes de Lamb (figure 2.17a). La caractérisation des ondes de Lamb se fait sur la surface restante des deux électrodes qui couvrent la plaque.



(a) Deux électrodes rectangulaires sont découpées sur chaque face pour l'excitation électrique des modes symétriques et antisymétriques.



(b) Photographie de l'échantillon 1. Une bande (horizontale) de scotch réfléchissant est collée sur la surface pour la mesure optique.



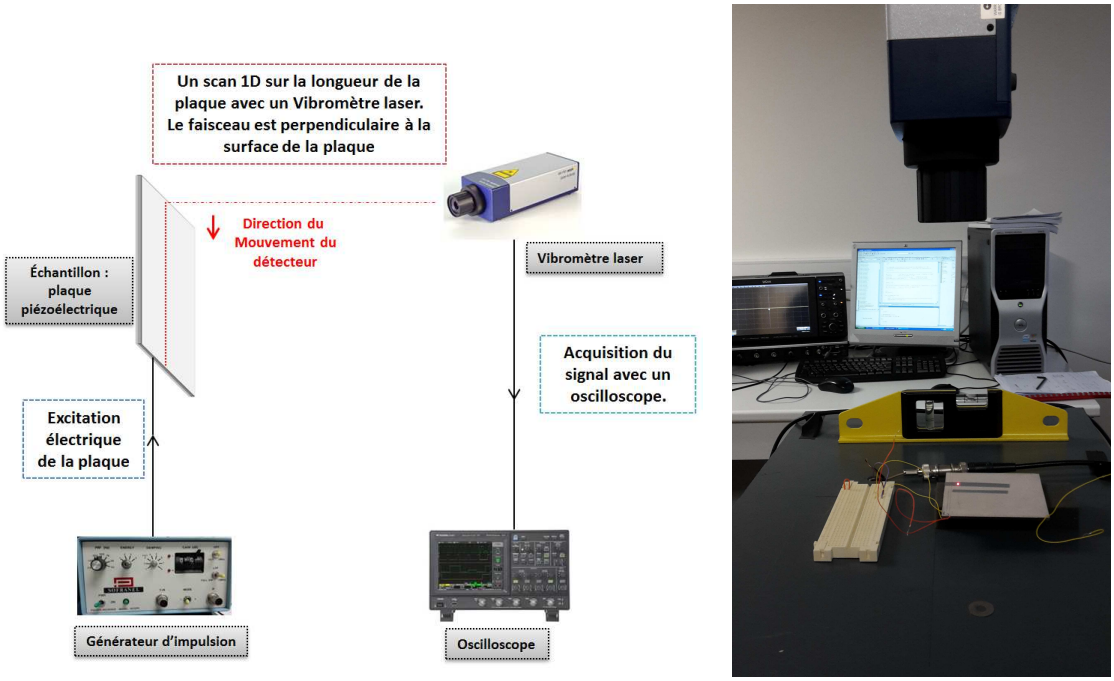
(c) Schéma (coupe) du dispositif. Les électrodes 1, 2, 3 et 4 sont utilisées pour la génération des ondes de Lamb. Les conditions aux limites électriques sont appliquées sur les électrodes 5 et 6.

FIGURE 2.17 – Schémas (a) et (c) et photographie du dispositif utilisé.

Un dispositif expérimental a été mis en place pour mesurer la dispersion des ondes de Lamb dans la plaque piézoélectrique. Un générateur d'impulsions *Sofranel*® délivrant une impulsion électrique de l'ordre de $200\ V$ sur une durée de $50\ ns$ environ est connecté aux électrodes en bord de plaque. L'excitation étant symétrique vis à vis du plan médian de la plaque (on utilise les électrodes 1 et 2 sur la figure 2.17c pour la génération des ondes), on favorise ainsi la génération des ondes de Lamb symétriques.

Un vibromètre laser *Polytec*® mesure la composante normale de la vitesse de vibration à la surface de la plaque. Il est placé sur un axe perpendiculaire à la surface de la plaque sur

un module de translation motorisé dans le sens de la propagation de l'onde (figure 2.18). Un balayage est effectué suivant l'axe (Ox) sur une longueur de 44 mm par pas de $0,1$ mm. On enregistre un signal temporel à chaque point de mesure pour obtenir une matrice de signaux spatiotemporels que l'on traitera par la suite. Chaque signal temporel enregistré est le résultat d'une moyenne de 512 acquisitions effectuées avec un oscilloscope numérique *LeCroy*®, afin d'améliorer le rapport signal à bruit. La sensibilité du vibromètre laser est réglée à la valeur 25 $mm/s/V$, elle permet de détecter un signal jusqu'à une fréquence maximale de $1,5$ MHz (figure 2.18).



(a) Schéma du dispositif. (b) Photographie du dispositif.

FIGURE 2.18 – Dispositif expérimental pour la mesure de la composante normale de la vitesse de vibration.

3.2 Mesure sur une plaque piézoélectrique avec électrodes métallisées au potentiel flottant

La première mesure s'effectue avec les deux électrodes en PF (circuit ouvert). Les signaux spatiotemporels sont présentés sur la figure 2.19. La partie du signal encadrée en pointillés bleus correspond aux ondes de Lamb incidentes générées au bord de la plaque. Le balayage a été effectué au milieu de la plaque. On observe les ondes réfléchies par l'autre extrémité à partir de 40 μs. Ces ondes réfléchies sont encadrées en rouge sur la figure.

Le signal est fenêtré spatialement et temporellement pour ne prendre en compte que les ondes incidentes encadrées en bleu sur la figure 2.19. Une double transformée de Fourier est ensuite appliquée sur les signaux temporels pour obtenir une représentation dans l'espace des fréquences et des nombres d'ondes. Son module est représenté en niveaux de couleurs

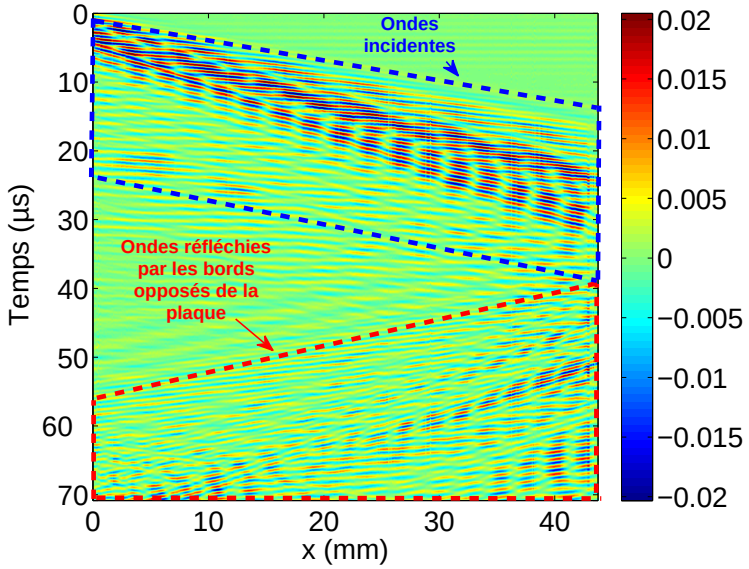


FIGURE 2.19 – Signaux spatiotemporels pour la plaque piézoélectrique avec des électrodes en PF. Les ondes incidentes sont encadrées en bleu et les ondes réfléchies en rouge.

sur la figure 2.20. Les courbes de dispersion calculées numériquement pour une plaque piézoélectrique avec des électrodes ayant un potentiel flottant et présentées dans la section 2.1.2 y sont superposées. On constate un bon accord entre le modèle numérique et les données expérimentales. L'excitation électrique par les deux électrodes à l'extrémité de la plaque permet de générer les deux modes symétriques S_0 et S_2, le mode S_1 est généré également mais en plus hautes fréquences autour de $f = 1,3\ MHz$.

Pour générer les modes antisymétriques, il suffit d'exciter les modes de Lamb d'une manière asymétrique : au lieu d'utiliser le couple d'électrodes (1,2) dont les électrodes sont l'une en face de l'autre, on utilise les électrodes 1 et 4 qui sont décalées suivant l'axe Ox (figure 2.17c). Ce décalage permet de générer les deux types de modes de Lamb, symétriques et antisymétriques. Une mesure est réalisée avec ce type d'excitation dans les mêmes conditions expérimentales que la première mesure. Le balayage 1D est effectué sur toute la longueur de la plaque. Les signaux sont analysés avec le même traitement des signaux que précédemment. L'image de la double transformée de Fourier est présentée sur la figure 2.21.

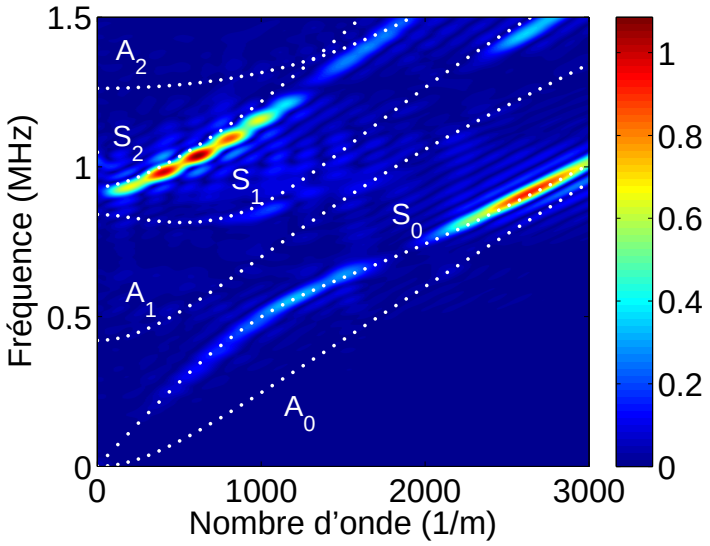


FIGURE 2.20 – Transformée de Fourier 2D du signal fenêtré mesuré sur une plaque avec électrodes excitées d'une manière symétrique (représentée en niveaux de couleurs). Les courbes obtenues par MEF sont superposées en pointillés blancs.

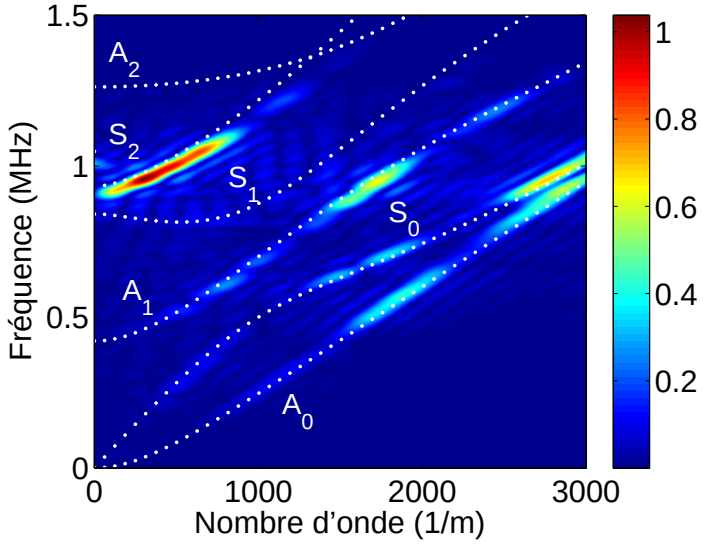


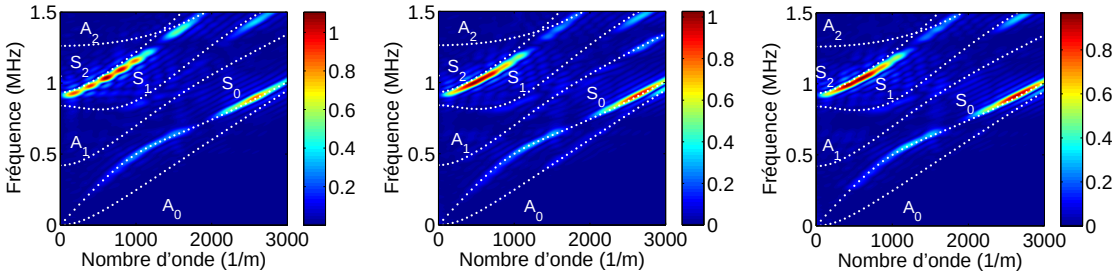
FIGURE 2.21 – Transformée de Fourier 2D du signal fenêtré mesuré sur la plaque avec électrodes excitées d'une manière asymétrique. Les courbes obtenues par MEF sont superposées (pointillés blancs).

3.3 Mesure sur une plaque piézoélectrique avec d'autres conditions aux limites électriques

Une impédance de charge est connectée entre les deux électrodes comme illustré sur la figure 2.10. Un suivi de mode guidé est réalisé comme précédemment.

Trois conditions aux limites électriques différentes sont étudiées. Dans un premier temps, les électrodes sont en court circuit et mises à la masse. Ensuite, les deux électrodes sont connectées en parallèle à une bobine d'inductance $L = 470\ \mu H$ et dans la dernière mesure, elles sont branchées en parallèle avec un condensateur d'une capacité $C = 69\ nF$ en accord avec les valeurs théoriques discutées dans les partie 2.1.3. Les courbes de dispersion pour ces trois cas d'études sont affichées dans les figures 2.22a, 2.22b et 2.22c respectivement. Les modes de Lamb calculés numériquement pour le cas des électrodes avec un potentiel flottant sont superposés en pointillés blancs sur les trois figures.

La comparaison de ces résultats avec le cas expérimental d'une plaque avec des électrodes avec un potentiel flottant montrent une différence d'amplitude des modes générés mais aucun décalage fréquentiel. Un bon accord est observé entre les modes expérimentaux et les courbes de dispersion théoriques. Ceci démontre d'une manière expérimentale que la dispersion des ondes de Lamb dans une plaque piézoélectrique avec des électrodes uniformes n'est pas sensible aux conditions aux limites électriques appliquées sur celles-ci.



(a) Électrodes court-circuitées (CC). (b) Ajout d'une charge capacitive $C = 69\ nF$. (c) Ajout d'une charge inductive $L = 470\ \mu H$.

FIGURE 2.22 – Transformée de Fourier 2D du signal fenêtré mesuré sur une plaque avec des électrodes connectées à une charge d'impédance Z. Les courbes obtenues par MEF sont superposées pour le cas des électrodes avec un PF (pointillés blancs).

3.4 Mesure sur plaque piézoélectrique sans électrode

Afin de vérifier les calculs par éléments finis des courbes de dispersion présentées dans la section **2.1.1**, une plaque piézoélectrique sans électrode a été réalisée.

Pour retirer les électrodes en argent de l'échantillon dont on dispose, la plaque a été plongée dans un bain d'acide nitrique à $69,5$ %. Ensuite, pour générer les ondes de Lamb d'une manière électrique, deux bandes d'électrodes en aluminium ont été déposées sur chacune des faces. La largeur de chaque électrode est $2\ mm$ et l'espace entre deux électrodes est de quelques centaines de micromètres. Les fils pour les prises de contact sont fixés à l'aide d'une colle conductrice. Une photographie de l'échantillon est montrée sur la figure 2.23.

Le même protocole de mesure est suivi. Avec une excitation asymétrique, on génère les deux types de modes de Lamb (A et S). La figure 2.24 représente le module de la double transformée de Fourier des signaux spatiotemporels. Les courbes de dispersion calculées

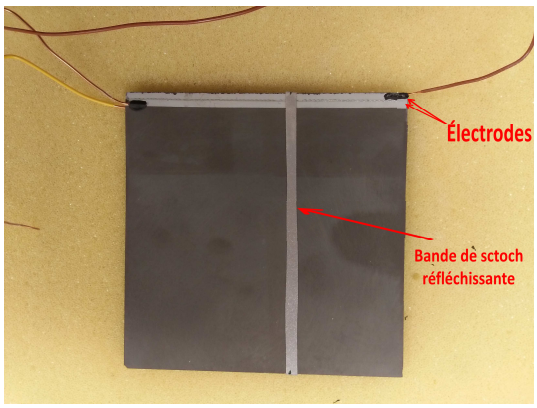


FIGURE 2.23 – Photographie de l'échantillon 2 : plaque piézoélectrique sans électrode de dimension $80 \times 80 \times 2.2\ mm^3$. Deux électrodes en aluminium de largeur de 2 mm sont déposées sur chaque face. Une bande (verticale) de scotch réfléchissante est collée sur la face pour la mesure optique.

numériquement pour une plaque piézoélectrique sans électrodes sont superposées en pointillés blancs. À nouveau, on constate un bon accord entre le modèle numérique et les relevés expérimentaux.

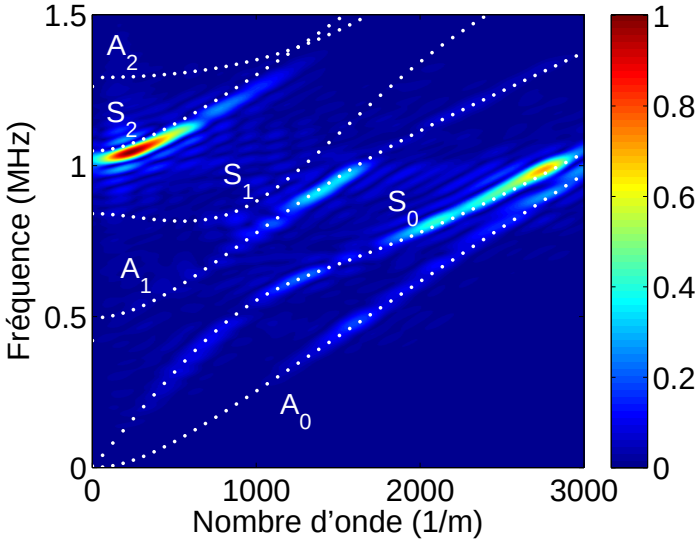


FIGURE 2.24 – Transformée de Fourier 2D du signal fenêtré mesuré sur la plaque sans électrode (représentée en niveaux de couleurs). Les courbes numériques correspondantes sont superposées (pointillés blancs).

4 Conclusion

Dans ce chapitre on a étudié numériquement et expérimentalement la propagation des ondes de Lamb dans une plaque piézoélectrique avec différentes conditions aux limites électriques : plaque sans électrode, électrodes avec un potentiel flottant, électrodes connectées à des charges d'impédances capacitive et inductive. La sensibilité des ondes de Lamb à ces différentes conditions aux limites électriques a été analysée pour chacun des cas en examinant théoriquement et expérimentalement les diagrammes de bandes et les impédances électriques.

Les résultats obtenus ont montré que la dispersion des ondes de Lamb dans une plaque piézoélectrique sans électrode est différente de celle d'une plaque avec électrodes. Cependant, les diagrammes de bandes et les spectres d'impédance électrique ont montré que la connexion d'une charge capacitive aux bornes des électrodes de la plaque n'a aucun effet sur la dispersion des ondes de Lamb. Bien qu'un pic supplémentaire apparaisse sur le spectre d'impédance à la fréquence de résonance électrique lors de la connexion d'une charge inductive, les vitesses du mode S_0 ne sont pas affectées.

Ce travail sur une plaque piézoélectrique avec des surfaces uniformes est indispensable à la compréhension de la propagation des ondes de Lamb dans une plaque avec des électrodes périodiques soumises aux différents types de conditions aux limites électriques. Cette plaque phononique est l'objet d'étude des prochains chapitres de ce manuscrit.

Chapitre 3

Ondes de Lamb dans une plaque phononique piézoélectrique

1 Introduction

Nous nous sommes intéressés dans le chapitre précédent aux ondes de Lamb dans une plaque piézoélectrique. Nous avons vu que la dispersion de ces ondes est modifiée selon qu'une plaque piézoélectrique est couverte ou non d'électrodes. Ces changements sont liés aux modifications des conditions aux limites électriques (CLE) et non à un effet de masse ajoutée. Il est donc possible de contrôler la propagation des ondes de Lamb dans la plaque en modifiant le potentiel électrique à sa surface.

Dans ce chapitre, la plaque piézoélectrique sera recouverte sur chacune de ses faces d'une succession d'électrodes disposées de façon périodique. Ces configurations permettent de nouvelles fonctionnalités à partir des conditions aux limites électriques appliquées. Une étude théorique sera suivie d'une confrontation expérimentale à travers la superposition des courbes de dispersion. Dans ce cadre, plusieurs grandeurs seront étudiées comme le taux de recouvrement des électrodes sur la plaque piézoélectrique ainsi que différentes combinaisons de conditions aux limites électriques (court-circuit et circuit ouvert). Pour terminer, les effets observés seront confirmés avec des mesures d'impédances électriques.

2 Étude numérique par éléments finis

2.1 Description du cristal phononique piézoélectrique

Le cristal phononique étudié ici est une plaque piézoélectrique homogène de PZT (avec la même composition que celle utilisée dans le chapitre précédent) possédant un réseau d'électrodes disposées périodiquement sur ses deux faces. Le motif élémentaire est composé d'une électrode de largeur **a** et d'une partie sans électrodes de largeur **b** qui correspond à l'espace entre deux électrodes successives. La taille de la maille élémentaire est donc : $\Lambda = a + b$ (figure 3.1).

Le rapport entre **a** et Λ caractérise le facteur de recouvrement **r** défini de la manière suivante :

$$r(\%) = \frac{a}{\Lambda} \times 100 \tag{3.1}$$

Ainsi on a un facteur de recouvrement de 0 % pour une plaque sans électrodes et de 100 % pour une plaque avec des électrodes uniformes.

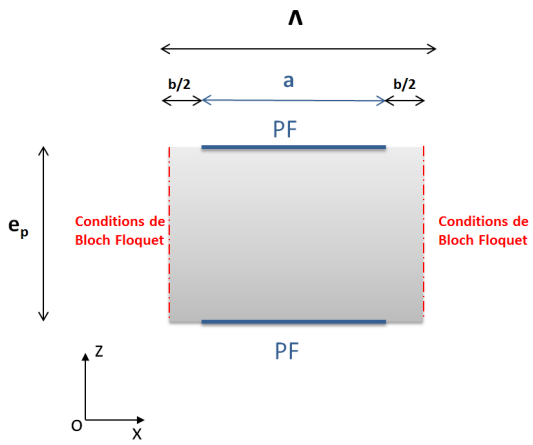


FIGURE 3.1 – Représentation de la cellule élémentaire. La périodicité Λ est la somme de la longueur de l'électrode **a** et de l'espace entre deux électrodes successives **b**. Les électrodes ont un potentiel flottant (PF). Des conditions aux limites périodiques de Bloch-Floquet sont appliquées de chaque côté de la cellule élémentaire.

2.1.1 Courbes de dispersion

Un modèle numérique bi-dimensionnel de la plaque phononique est développé. Les caractéristiques du modèle sont les mêmes que celles du chapitre précédent. Une étude modale est effectuée en appliquant les conditions de Bloch-Floquet sur le déplacement **u** et le potentiel électrique **V** suivant la direction (Ox) :

$$\mathbf{u}(x + \Lambda, k_x) = \mathbf{u}(x, k_x)e^{-ik_x\Lambda} \tag{3.2}$$

$$\mathbf{V}(x + \Lambda, k_x) = \mathbf{V}(x, k_x)e^{-ik_x\Lambda} \tag{3.3}$$

Ces conditions mécanique de périodicité sont appliquées sur les extrémités de la cellule élémentaire, comme représenté sur la figure 3.1. On choisit de présenter le cas d'une cellule élémentaire d'épaisseur $e_p = 2,2\ mm$ et de longueur $\Lambda = 2\ mm$ ($a = 1,7\ mm$ et $b = 0,3\ mm$). Cette géométrie correspond à un facteur de recouvrement de 85%.

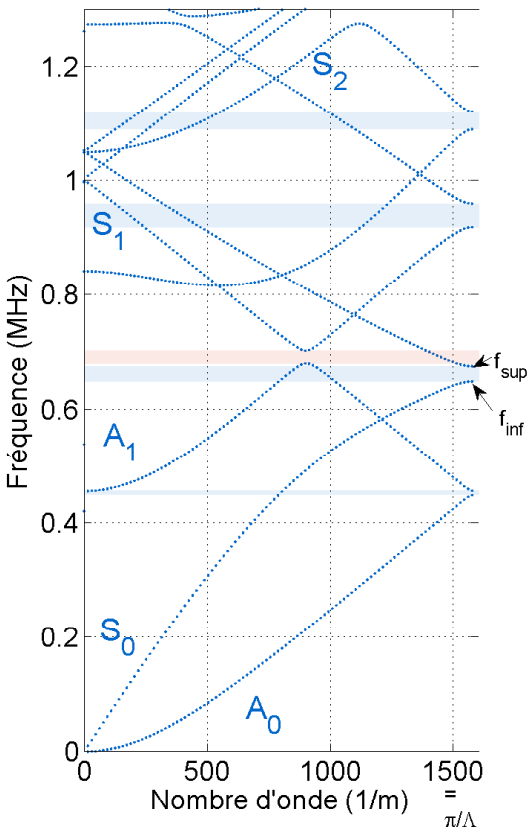


FIGURE 3.2 – Diagramme de bandes d'une plaque phononique avec des électrodes en potentiel flottant (PF) de périodicité $\Lambda = 2\ mm$ et un facteur de recouvrement $r = 85$ %. les bandes bleues indiquent les bandes d'arrêts et la bande rouge une mini bande d'arrêt. Les fréquences f_{inf} et f_{sup} sont précisées pour le mode S_0.

L'étude modale est réalisée en faisant varier la composante selon **x** du nombre d'onde sur la demi-zone de Brillouin (ZDB) par pas de $\pi/100\Lambda$ ($k_x \in [0;\pi/\Lambda]$). Le résultat de ce calcul modal donne les fréquences (valeurs propres) pour chaque nombre d'onde. On représente sur la figure 3.2 les parties réelles des fréquences calculées en fonction du nombre d'onde. On observe les repliements des courbes de dispersion des modes de Lamb aux bords de la ZDB ($k = 0$ et $k = \pi/\Lambda$).

La figure 3.2 présente le diagramme de bandes de cinq modes A_0, S_0, A_1, S_1 et S_2 sur une plage fréquentielle [0 ;1,25 MHz]. Nous pouvons observer que la répartition périodique des électrodes change la dispersion des modes de Lamb par rapport à une plaque avec

des électrodes uniformes (figure 2.6) et induit l'ouverture de bandes de fréquences dans lesquelles la propagation est interdite. Ces bandes d'arrêts peuvent être de deux natures différentes. D'une part on observe des bandes d'arrêt à la limite de la ZDB. Elles sont désignées par des rectangles bleus sur le diagramme de bande de la figure 3.2 et ne font intervenir qu'un seul mode. D'autre part, des bandes d'arrêts apparaissent à l'intérieur de la zone de Brillouin, encore appelées mini-bandes d'arrêts, et font intervenir deux modes différents contra-propagatifs [108, 110]. Le terme *mini bande d'arrêt* a été introduit en électromagnétisme pour désigner des bandes interdites faisant intervenir des modes de natures différentes [111].

Certains auteurs [112] définissent deux types d'intersections des courbes de dispersion : Le premier phénomène appelé *blocage* ou *locking* en anglais se produit lorsque deux modes ont des vitesses de groupe de signes opposés au point de croisement, c'est ce que l'on observe ici aux niveaux de la mini-bande d'arrêt. On a matérialisé par une bande rouge la mini-bande d'arrêt entre le mode A_0 et le mode A_1 comprise entre les fréquences $678,8\ kHz$ et $702,4\ kHz$. Le second phénomène est l'*écartement* des modes, encore appelé *veering* en anglais. Il résulte de l'interaction de deux modes ayant des vitesses de groupe du même signe.

Chaque bande interdite est caractérisée par les deux fréquences qui la délimitent. On note les fréquences des branches inférieures et supérieures respectivement f_{inf} et f_{sup}. La fréquence centrale de la bande interdite f_c et sa largeur relative L_{gap} sont définies par les relations suivantes :

$$f_c = \frac{f_{inf} + f_{sup}}{2} \tag{3.4}$$

$$L_{gap}(\%) = \frac{f_{sup} - f_{inf}}{f_c} \times 100 \tag{3.5}$$

Les valeurs des fréquences caractéristiques et des largeurs relatives des bandes d'arrêts présentes sur la figure 3.2 sont présentées dans la Table 3.1.

Mode	f_{inf} (kHz)	f_{sup} (kHz)	f_c(kHz)	L_{gap} (%)
A_0	448,3	456,1	452,2	1,72
S_0	647,6	674,4	661	4,05
A_1	917,7	958,9	938,3	4,39
S_1	1089	1120	1104	2,8
A_0/A_1	678,8	702,4	690,9	3,42

TABLE 3.1 – Fréquences caractéristiques et largeurs des bandes interdites.

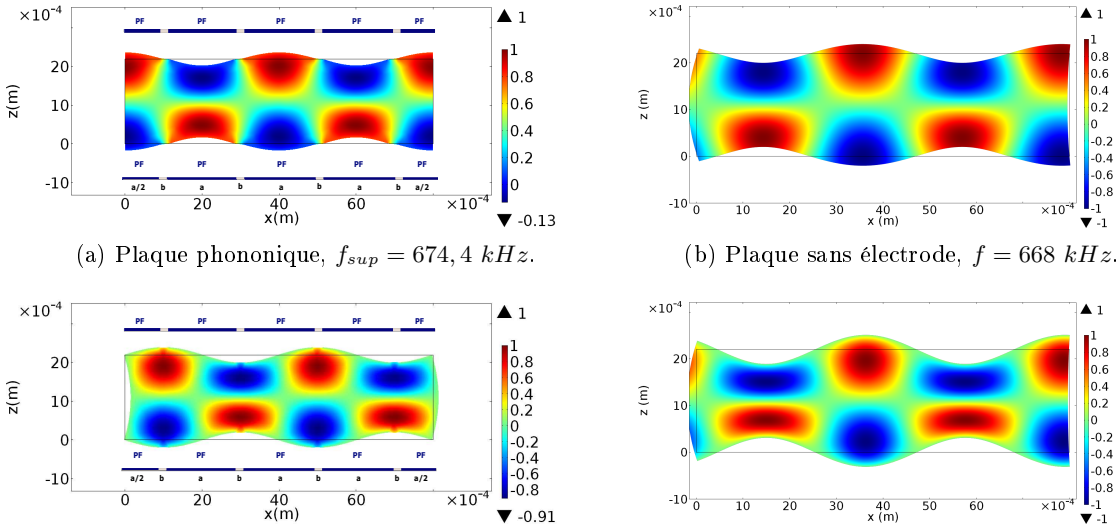
On constate que les largeurs des bandes interdites différent d'un mode à un autre. Pour comprendre le mécanisme d'ouverture d'une bande d'arrêt, nous pouvons étudier la représentation du potentiel électrique de la plaque phononique associé à un mode. Étant donné qu'on a montré dans le chapitre précédent que les résonances des impédances électriques

en basses fréquences (avant 400 kHz) correspondent au mode S_0, on a choisi de considérer le cas de ce mode dans la suite de ces travaux.

2.1.2 Interprétation physique - Étude du potentiel électrique

On a vu dans le chapitre précédent que le potentiel électrique d'une plaque piézoélectrique infinie recouverte d'électrodes uniformes s'annule au voisinage de la surface, ce n'est pas le cas du potentiel électrique d'une plaque sans électrode. Dans le cas de la plaque phononique piézoélectrique étudiée ici, chacune de ses surfaces est une alternance entre une partie métallisée a et une partie non métallisé b. Cette alternance crée une discontinuité périodique du potentiel électrique au voisinage des surfaces pour certaines fréquences, ce qui favorise l'ouverture des bandes de fréquences interdites.

On calcule numériquement les potentiels électriques aux deux fréquences f_{inf} et f_{sup} de la bande interdite du mode S_0 à $k = \pi/\Lambda$ et on les compare aux potentiels électriques du même mode au point de son premier repliement pour une plaque sans électrode et une plaque avec électrodes uniformes. La figure 3.3 représente le potentiel électrique (en niveaux de couleurs et la déformée du mode S_0 dans le plan Oxz, sur une distance correspondant à deux longueurs d'onde (8 mm).



(a) Plaque phononique, $f_{sup} = 674,4\ kHz$.

(b) Plaque sans électrode, $f = 668\ kHz$.

(c) Plaque phononique, $f_{inf} = 647,6\ kHz$.

(d) Plaque avec électrodes uniformes, $f = 668\ kHz$.

FIGURE 3.3 – Potentiels électriques et déformées du mode S_0 calculés aux bords de la ZDB avec $k = \pi/\Lambda = 392,7\ m^{-1}$.

Sur la figure 3.3a, on représente le potentiel électrique à la fréquence f_{sup} de la bande interdite du mode S_0 de la plaque phononique, les valeurs du potentiel électrique sous les électrodes alternent entre des maximums et des minimums car en bord de ZDB la longueur de la cellule élémentaire est égale à une demi-longueur d'onde. Le potentiel prend une valeur intermédiaire entre deux électrodes successives. Ce comportement est similaire au cas d'une plaque sans électrodes (figure 3.3b). Le potentiel électrique calculé à la fréquence f_{inf} de la

bande interdite représenté sur la figure 3.3c s'annule sous les électrodes et sa valeur absolue est maximale entre les électrodes. Ce comportement au voisinage des électrodes rappelle la répartition du potentiel électrique à l'intérieur d'une plaque couverte avec des électrodes uniformes pour laquelle le potentiel électrique est nul au voisinage des électrodes (figure 3.3d). Ainsi, les fréquences f_{inf} et f_{sup} des bandes interdites s'apparentent à deux cas de propagation équivalents respectivement à la plaque piézoélectrique avec et sans électrodes, ce qui conduit à l'ouverture de la bande interdite.

Le mécanisme d'ouverture de la bande interdite de Bragg pour les autres modes est similaire à celui du mode S_0. On obtient donc des répartitions spatiales des potentiels électriques comparables à celles de ce mode.

2.2 Influence du facteur de recouvrement

On étudie dans cette partie l'évolution des paramètres de la bande interdite définie précédemment en fonction du facteur de recouvrement r dans une maille élémentaire de dimension fixe $\Lambda = 2\ mm$.

Les courbes de dispersion sont calculées pour chaque valeur de **r** par pas de $0,5$ %. Pour chaque valeur du facteur de recouvrement, on prélève les fréquences f_{inf} et f_{sup} de la première bande interdite du mode S_0 et on calcule les vitesses de phases V_ϕ de la manière suivante :

$$V_{\phi.inf/sup} = \frac{2\pi.f_{inf/sup}}{k_\Lambda} \tag{3.6}$$

où k_Λ, le nombre d'onde estimé au bord de la zone de Brillouin, est donné par

$$k_\Lambda = \frac{\pi}{\Lambda} \tag{3.7}$$

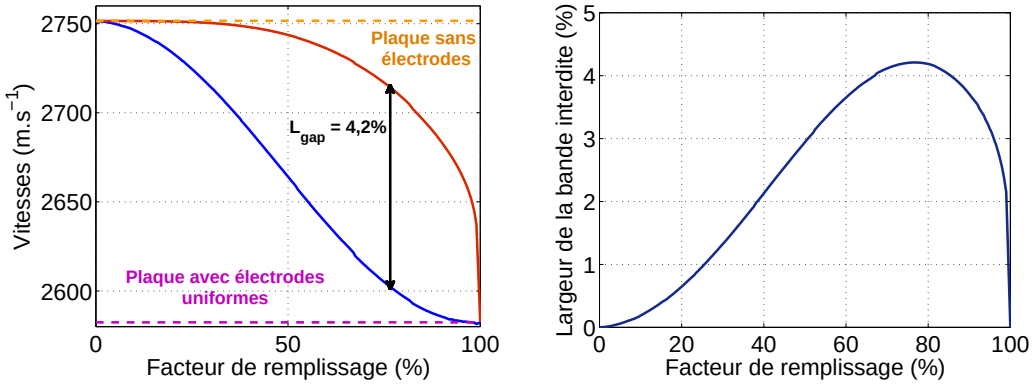
En combinant les expressions 3.6 et 3.7 on obtient :

$$V_{\phi.inf/sup} = 2\Lambda.f_{inf/sup} \tag{3.8}$$

On représente les vitesses de phases $V_{\phi.inf}$ et $V_{\phi.sup}$ sur la figure 3.4a. Les valeurs maximales des deux vitesses sont égales à la vitesse de phase d'une plaque piézoélectrique sans électrode : $V_{\phi.SE} = 2752\ m.s^{-1}$. À partir de cette valeur, les deux vitesses diminuent avec le facteur de recouvrement jusqu'à ce qu'elles atteignent la vitesse de phase d'une plaque avec des électrodes uniformes : $V_{\phi.EU} = 2582\ m.s^{-1}$.

L'évolution de la largeur bande interdite montre qu'elle atteint une valeur maximale pour $r = 77\%$ (figure 3.4b) correspondant à une largeur relative de $4,2\%$. Par la suite, elle s'annule logiquement pour $r = 100\%$. Ceci signifie qu'il faut des électrodes de largeur $a = 1,54\ mm$ espacées de $b = 0,46\ mm$ pour créer le maximum de contraste de vitesses entre les deux milieux effectifs définis par ces conditions aux limites électriques.

Cette étude a montré l'influence des paramètres géométriques sur les bandes interdites. On étudie dans la section suivante la sensibilité de ces bandes interdites aux conditions aux limites électriques appliquées sur les électrodes.



(a) Vitesses de phase. Courbe bleue :$V_{\phi.inf}$ et courbe rouge : $V_{\phi.sup}$.

(b) Largeur de la bande interdite L_{gap}.

FIGURE 3.4 – Évolution des vitesses de phase ($V_{\phi.inf}$ et $V_{\phi.sup}$) et de la largeur de la bande interdite (L_{gap}) en fonction du facteur de recouvrement (r) pour le mode S_0.

2.3 Modification des conditions aux limites électriques

2.3.1 Mise en court circuit

a. Structure de bande

L'intérêt d'étudier cette structure phononique piézoélectrique est le contrôle de la dispersion des ondes de Lamb dans la plaque en changeant les conditions aux limites électriques sans changer la géométrie de la structure. Pour vérifier cette accordabilité électrique, on court-circuite toutes les électrodes des deux faces en les mettant à la masse (figure 3.5).

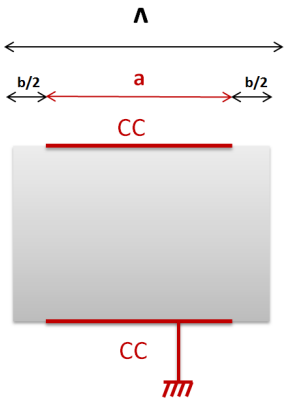
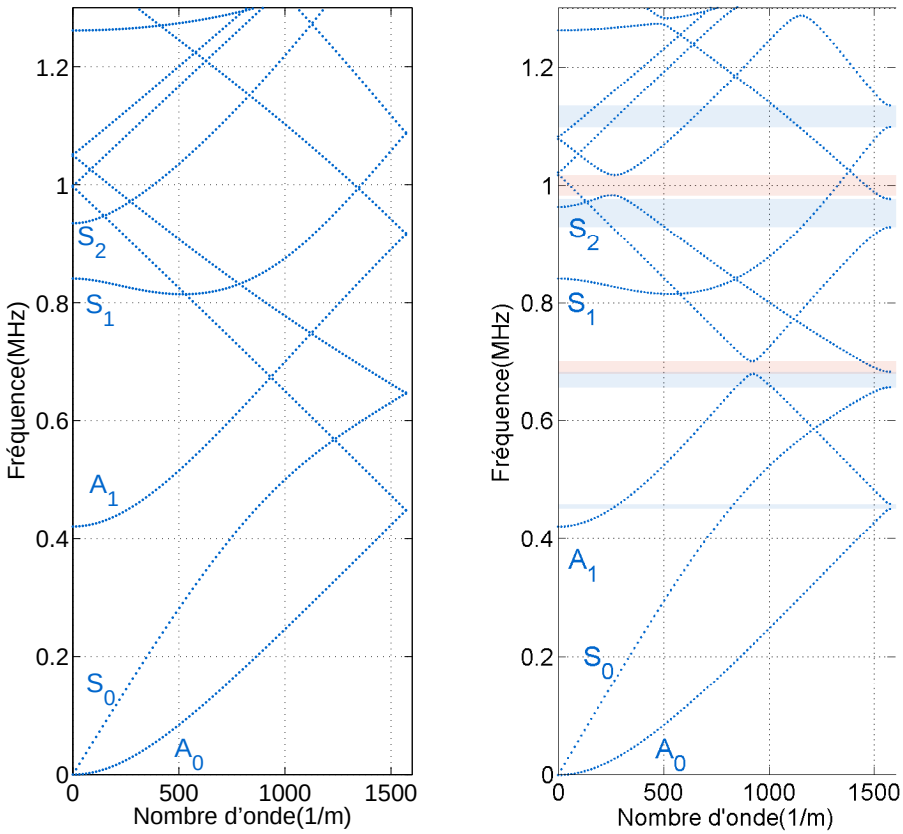


FIGURE 3.5 – Représentation de la cellule élémentaire. CC : Court Circuit et mise à la masse.

La figure 3.6a présente le diagramme de bande calculé numériquement pour la maille élémentaire de la figure 3.5 avec $r = 85\%$. Toutes les bandes interdites observées dans le

cas où les électrodes ont un potentiel flottant se ferment partiellement. La largeur relative de la première bande d'arrêt du mode S_0 est maintenant très faible et égale à $0,25\%$. L'application d'un potentiel nul sur toutes les électrodes décale alors la fréquence f_{inf} de la bande interdite. Si on augmente la distance entre les électrodes à $b = 1,6\ mm$ en diminuant la taille de l'électrode $a = 0,4\ mm$ (ce qui correspond à un facteur de recouvrement de 20%, Λ étant inchangée.), on décale principalement la fréquence f_{sup} de la bande interdite et on retrouve un contraste de vitesses effectives. On observe à nouveau l'ouverture des bandes d'arrêts de tous les modes en bord de ZDB et deux mini-bandes d'arrêts à $f_c = 700\ kHz$ entre A_0 et A_1 et $f_c = 1\ MHz$ entre S_0 et S_2 (figure 3.6b).

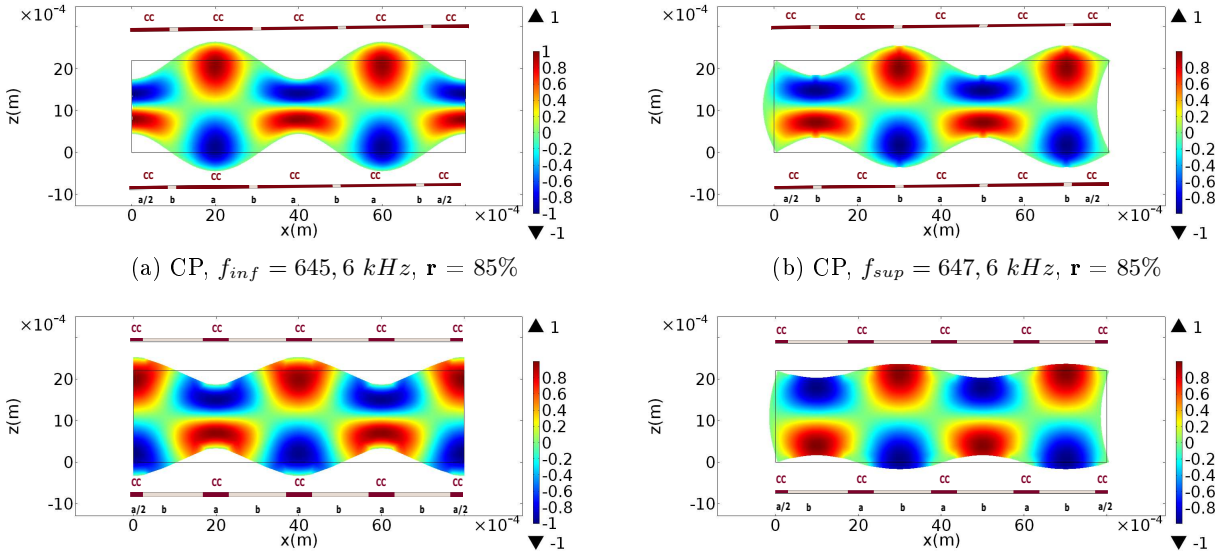


(a) Facteur de recouvrement **r** = 85 % (b) Facteur de recouvrement **r** = 20 %

FIGURE 3.6 – Diagrammes de bandes d'une plaque phononique avec des électrodes en court circuit pour (a) $r = 85\%$ et (b) $r = 20\%$. Les bandes bleues indiquent les bandes d'arrêts et les bandes rouges deux mini-bandes d'arrêt.

On représente les déformées et les potentiels d'une plaque infinie avec des électrodes à la masse sur une longueur de 8 mm pour un facteur de recouvrement de 85% aux fréquences du mode S_0 au bord de la première zone de Brillouin f_{inf} et f_{sup} respectivement sur les figures 3.7a et 3.7b. Ces images montrent que le potentiel dans la plaque à la fréquence f_{sup} est identique à celui obtenu dans le cas où toutes les électrodes sont au potentiel flottant à la fréquence f_{inf} (figure 3.3c).

Si on compare les potentiels du cas des électrodes avec un potentiel flottant avec des électrodes mises à la masse pour un facteur de recouvrement de 85%, on remarque que dans le premier cas on a bien un potentiel électrique périodique au niveau des surfaces : il est nul sous l'électrode à f_{inf} et nul sous la partie non métallisée à f_{sup} (figures 3.3a et 3.3c). Cette périodicité du potentiel aux deux fréquences s'accompagne de l'ouverture d'une bande interdite. Dans le cas où on met les électrodes à la masse (figure 3.7a), on retrouve un potentiel nul partout sous les électrodes à f_{inf}, exactement comme dans le cas d'une plaque couverte d'électrodes uniformes. Cette absence de périodicité s'accompagne d'une fermeture de la bande interdite.



(a) CP, $f_{inf} = 645,6\ kHz$, $\mathbf{r} = 85\%$

(b) CP, $f_{sup} = 647,6\ kHz$, $\mathbf{r} = 85\%$

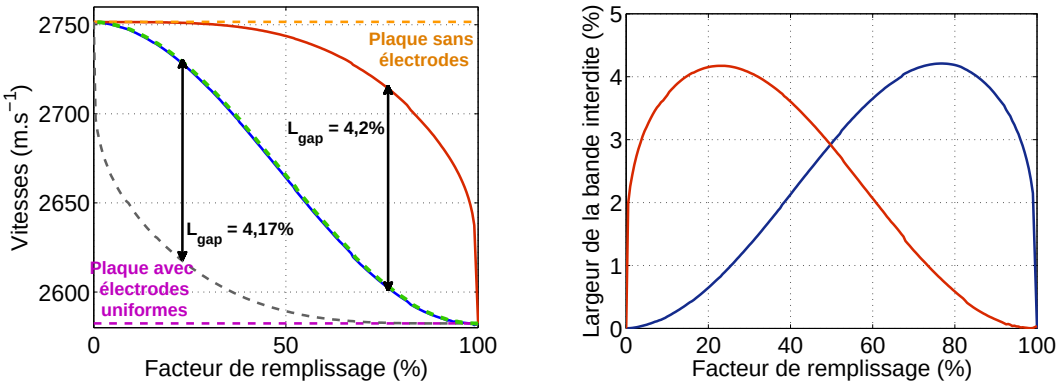
(c) CP, $f_{inf} = 655,8\ kHz$, $\mathbf{r} = 20\%$

(d) CP, $f_{sup} = 680,1\ kHz$, $\mathbf{r} = 20\%$

FIGURE 3.7 – Potentiels électriques et déformées du mode S_0 calculés au bord de la première ZDB pour un CP avec des électrodes mises à la masse. (a) et (b) : $r = 85\%$. (c) et (d) : $r = 20\%$.

Comme dans le cas d'une plaque phononique avec des électrodes ayant un potentiel flottant, on calcule les fréquences f_{inf}, f_{sup} et f_c en fonction du facteur de recouvrement $\mathbf{r}$ et on déduit $V_{\phi.inf}$, $V_{\phi.sup}$, $V_{\phi.c}$ et la largeur relative de la bande interdite L_{gap} du mode S_0. Ces quatre dernières grandeurs sont représentées en fonction de $\mathbf{r}$ sur la figure 3.8. Comme précédemment, les vitesses de phase limites inférieure et supérieure sont respectivement celles de la plaque piézoélectrique avec et sans électrode. On obtient des courbes parfaitement symétriques à celles du CP avec des conditions aux limites électriques (CLE) aux potentiels flottants, La largeur de la bande interdite atteint sa valeur maximale pour un

facteur de recouvrement de 23% et diminue jusqu'à sa fermeture pour $r = 100\%$. Partant de ce fait, il faut autant de partie métallisée a dans un cas que de partie non métallisée b dans l'autre cas pour obtenir le même contraste d'impédances des milieux effectifs, nécessaire pour une ouverture similaire de la bande interdite du mode S_0.



(a) Vitesses de phase. Trait rouge continu : $V_{\phi.sup}$ en PF, trait bleu continu : $V_{\phi.inf}$ en PF, trait vert en pointillés : $V_{\phi.sup}$ en CC, trait gris en pointillés : $V_{\phi.inf}$ en CC.

(b) Largeur de la bande interdite. courbe rouge : CC. Courbe bleu : PF.

FIGURE 3.8 – Évolution des vitesses de phase ($V_{\phi.inf}$ et $V_{\phi.sup}$) et de la largeur de la bande interdite (L_{gap}) du mode S_0 en fonction du facteur de recouvrement (r) pour des électrodes en CC et PF.

2.3.2 Accordabilité du CP en fonction de la taille de la cellule élémentaire

Dans cette partie on étudie la possibilité de contrôler la position des bandes de fréquences interdites de la plaque phononique en changeant la taille de la maille élémentaire. En effet, il est possible de considérer simplement de nouvelles mailles élémentaires en modifiant simplement les conditions aux limites électriques tout en modifiant la périodicité Λ.

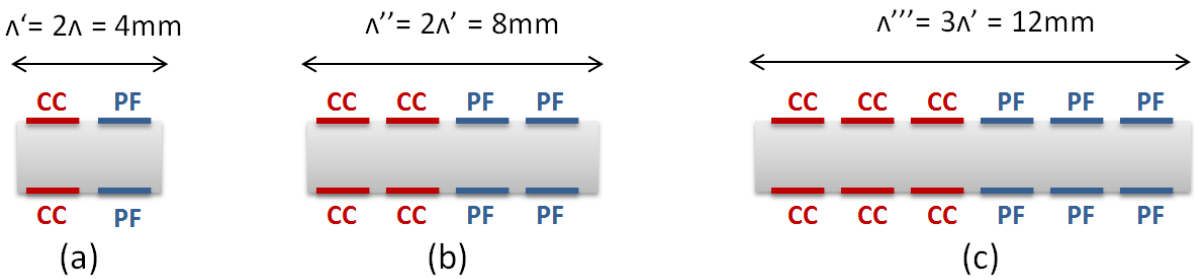
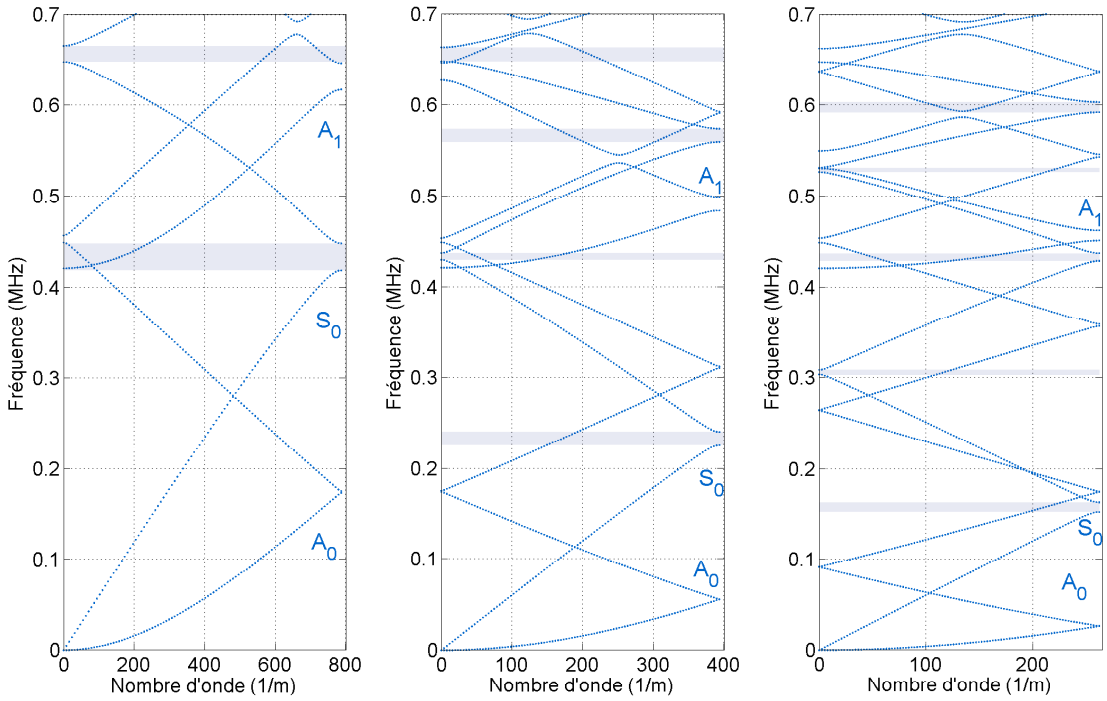


FIGURE 3.9 – Mailles élémentaires de différentes tailles.(a) :$\Lambda' = 4\ mm$, (b) :$\Lambda'' = 8\ mm$, (c) :$\Lambda''' = 12\ mm$. Les électrodes bleues ont un potentiel flottant et les électrodes rouges sont mises à la masse (court-circuit).

On considère une maille élémentaire composée de deux couples d'électrodes successifs $\Lambda' = 4\ mm$, le premier couple a un potentiel flottant et les électrodes du deuxième couple sont court-circuitées et mises à la masse comme le montre la figure 3.9a. La structure de bande calculée pour cette maille élémentaire est représentée sur la figure 3.10a. Le repliement des courbes de dispersion est maintenant observé pour $k = \pi/\Lambda = 785,4\ m^{-1}$.

La fréquence centrale de la première bande interdite de Bragg du mode S_0 est $f_c = 432,8\ kHz$. La seconde bande interdite de Bragg pour ce même mode s'ouvre au deuxième repliement ($k = 0\ m^{-1}$) à une fréquence $656,3\ kHz$ proche de la première bande interdite de Bragg d'une cellule élémentaire de longueur $\Lambda = 2\ mm$.



(a) $\Lambda' = 4\ mm$ (b) $\Lambda'' = 2\Lambda' = 8\ mm$ (c) $\Lambda''' = 3\Lambda' = 12\ mm$

FIGURE 3.10 – Courbes de dispersion pour différentes tailles de cellules élémentaires en combinant les deux CLE. (a) :Λ', (b) :Λ'', (c) :Λ'''. Les bandes bleues indiquent la présence des bandes d'arrêt du mode S_0.

La combinaison de deux conditions aux limites électriques différentes dans la même maille élémentaire permet donc une réelle maîtrise de la fréquence centrale de la bande interdite. Si on prend des mailles élémentaires composées de deux ou trois électrodes successives avec un potentiel flottant et deux ou trois électrodes successives mises à la masse (figure3.9b et figure3.9c) on décale la fréquence centrale de la bande interdite de Bragg vers les basses fréquences.

Les courbes de dispersion des cellules élémentaires de tailles 4, 8 et 12 mm sont re-

présentées respectivement sur les figures 3.10a, 3.10b et 3.10c. La fréquence centrale de la bande interdite du mode S_0 pour la cellule élémentaire de $\Lambda'' = 8\ mm$ est $216,7\ kHz$, et celle de la cellule élémentaire de $\Lambda''' = 12\ mm$ est à $146,7\ kHz$. Le décalage de la fréquence centrale de la bande interdite en fonction de la taille de la maille élémentaire suit la relation suivante :

$$f_c^{\Lambda'} = \frac{f_c^{\Lambda}}{n} \tag{3.9}$$

avec $\Lambda' = n\Lambda$ et n un nombre entier correspondant au nombre d'électrodes successives avec les mêmes conditions aux limites électriques.

D'autres combinaisons de conditions aux limites électriques des mailles élémentaires peuvent être imaginées, comme par exemple alterner deux électrodes ayant un potentiel flottant avec une électrode à la masse. Ceci permet de descendre encore vers les basses fréquences où on peut agir sur les modes fondamentaux S_0 et A_0 qui sont des modes sans fréquence de coupure.

2.3.3 Conditions aux limites électriques antisymétriques

Jusque là nous avons considéré des conditions aux limites symétriques, c'est à dire qu'on appliquait la même condition aux limites électriques sur une électrode et celle en vis à vis. Ce type de CLE symétriques a permis le couplage entre des modes de même parité (modes de type S ou de type A).

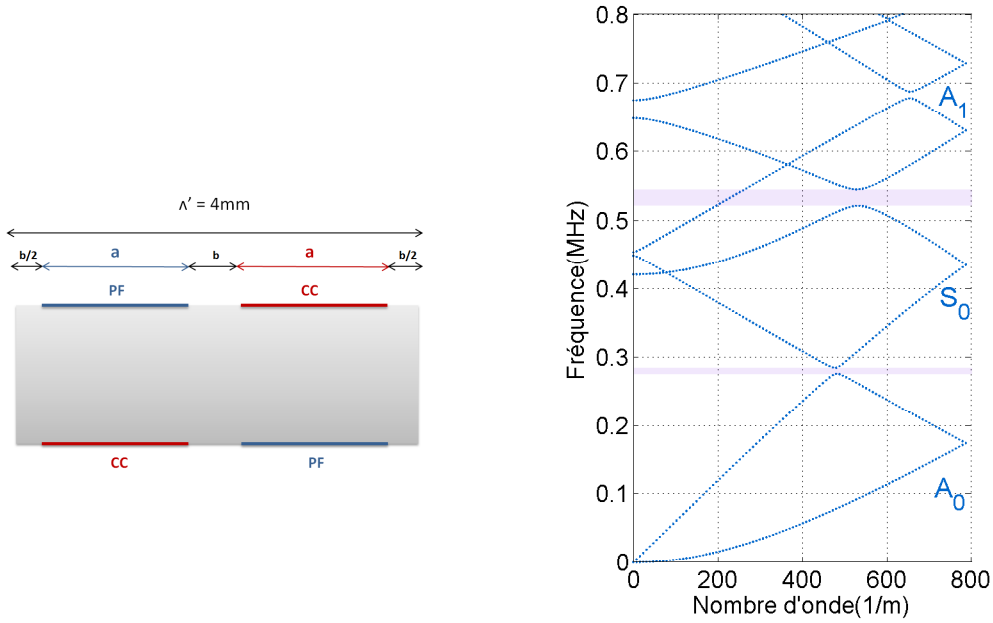
On étudie maintenant une configuration avec des conditions aux limites antisymétriques. La cellule élémentaire de $\Lambda' = 4\ mm$ est maintenant composée de quatre électrodes, une électrode sur deux est mise à la masse et les autres ont un potentiel flottant. Chaque électrode a une condition aux limites électriques différente de celle en vis-à-vis comme le montre la figure 3.11a. Le diagramme de bandes présenté sur la figure 3.11b montre un couplage entre des modes de Lamb de parités différentes (un mode de type S avec un mode de type A). En effet, on observe l'ouverture d'une mini-bande d'arrêt entre le mode A_0 et le mode S_0 au milieu de la première zone de Brillouin à $f_c = 280\ kHz$. On observe aussi l'ouverture d'une autre mini bande d'arrêt plus importante entre les modes S_0 et A_1 à la fréquence $f_c = 533\ kHz$.

Les représentations des potentiels électriques sur la figure 3.12 pour les branches des deux mini-bandes d'arrêt A_0/S_0 et S_0/A_1 montrent une forte dissymétrie par rapport au plan médian de la plaque. Les déformations modales ne sont ni symétriques ni antisymétriques, c'est un mode hybride qui est généré par l'application de ces CLE antisymétriques.

3 Étude expérimentale

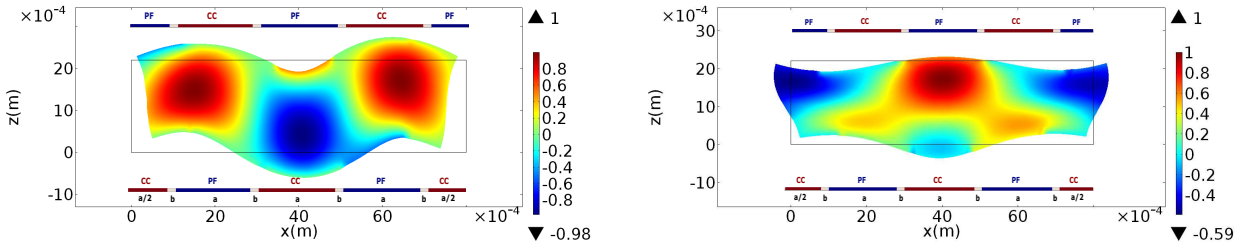
3.1 Échantillons

Les échantillons utilisés pour les mesures ont été obtenus à partir de plaques piézoélectriques initialement couvertes d'électrodes uniformes en argent. Les plaques sont en



(a) Maille élémentaire Λ' (b) Courbes de dispersion.

FIGURE 3.11 – Cellule élémentaire (a) et courbes de dispersion (b) correspondantes à des conditions aux limites électriques antisymétriques.



(a) Interaction entre les modes A_0 et S_0 à $f_{inf} = 275\ kHz$. (b) Interaction entre les modes S_0 et A_1 à $f_{sup} = 544\ kHz$.

FIGURE 3.12 – Potentiels électriques et déformées des modes au niveau des mini-bandes d'arrêts.

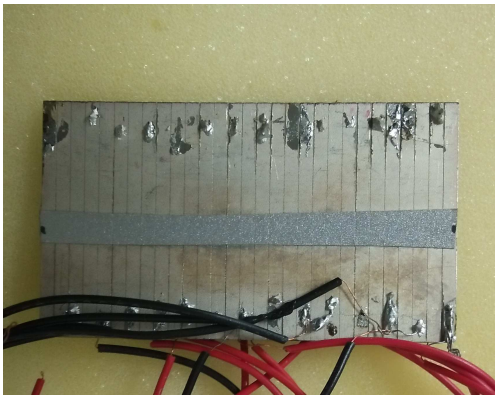
Pz26 [105] et sont polarisées selon l'épaisseur. Les caractéristiques élastiques, diélectriques et piézoélectriques de la plaque sont données dans l'annexe **B**.

Le premier échantillon $\mathbf{CP_1}$, a été usiné par la société VERMON (Tours, France) à partir d'une plaque rectangulaire d'épaisseur $e_p = 2\ mm$, de longueur $L = 58mm$ et de largeur $l = 33\ mm$ possédant des électrodes uniformes (figure 3.13a). On a découpé avec une scie à disque diamantée chaque électrode afin d'obtenir une série d'électrodes rectangulaires de plus petites dimensions en prenant garde à ce que les électrodes des deux côtés de la plaque soient bien en vis-à-vis. La largeur de chaque électrode est $a = 1.7\ mm$ et l'espace entre deux électrodes consécutives est $b = 0,3\ mm$, ce qui fait une périodicité

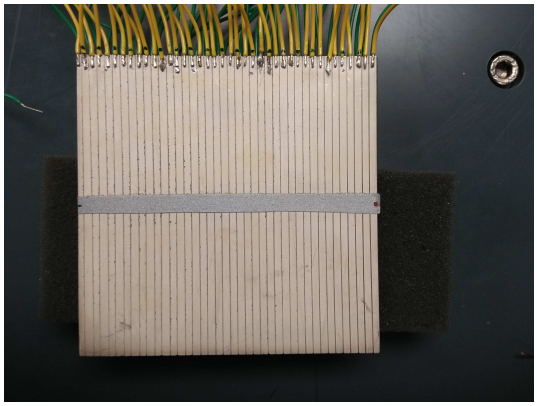
$\Lambda = 2\ mm$ avec un facteur de remplissage de 85%.

Le deuxième échantillon $\mathbf{CP_2}$ est un cristal phononique réalisé avec une plaque piézoélectrique carrée en PZT(Pz26), de côté 80 mm et d'épaisseur $2,2\ mm$. Le réseau d'électrodes a été réalisé différemment avec un graveur de circuits imprimés, il possède les mêmes caractéristiques Λ, a et b que le $\mathbf{CP_1}$. Ses dimensions permettent de suivre les ondes guidées sur des distances supérieures afin de mieux observer la formation des bandes interdites de Bragg (figure 3.13b).

Pour chaque échantillon, des fils électriques ont été soudés sur chaque électrode afin de pouvoir modifier les conditions aux limites électriques à notre convenance.



(a) Échantillon $\mathbf{CP_1}$: sa longueur $L = 58\ mm$, sa largeur $l = 33\ mm$, épaisseur $e_p = 2\ mm$. La largeur de chaque électrode est $1,7\ mm$.



(b) Échantillon $\mathbf{CP_2}$: $L = l = 80\ mm$ et $e_p = 2,2\ mm$. La largeur de chaque électrode est $1,7\ mm$.

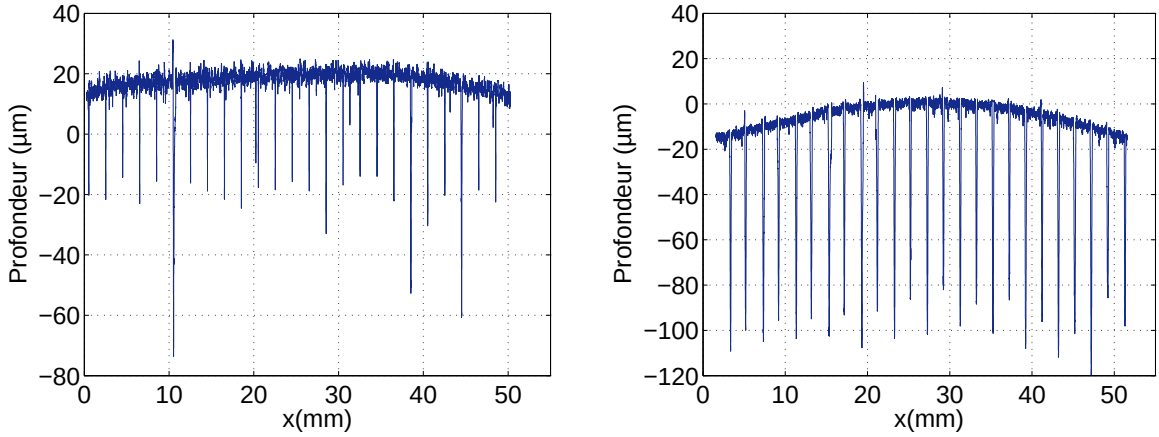
FIGURE 3.13 – Photographies des échantillons. Une bande de scotch réfléchissante est collée sur la face pour les mesures optiques (visible sur les deux photographies). (a) $\mathbf{CP_1}$, (b) $\mathbf{CP_2}$.

Un relevé du profil de surface a été réalisé sur les deux échantillons en utilisant un rugosimètre *Mitutoyo*®. Les deux échantillons $\mathbf{CP_1}$ et $\mathbf{CP_2}$ ont été analysés sur une longueur $\Delta x = 55\ mm$ avec une résolution d'environs $0,5\ mm$. Ces profils sont montrés sur la figure 3.14. On remarque un défaut de planéité de l'ordre de quelques μm sur les deux surfaces, produit au cours de la fabrication des plaques.

À partir de ces relevés, on détermine aisément la périodicité et la profondeur des stries réalisées dans les électrodes. Les résultats sont donnés dans la Table 3.2.

Les électrodes du $\mathbf{CP_1}$ sont plus régulières avec un écart type faible ($\sigma_p = 11,7\ \mu m$). Les électrodes ont été coupées avec une scie à disque qui a creusé en moyenne une profondeur P_m de $27,7\ \mu m$. Sachant que l'épaisseur des électrodes donnée par le constructeur varie de 10 à 15 μm, on a donc une rugosité de surface sur le matériau piézoélectrique qui peut influer sur la propagation des ondes. Nous verrons par la suite que cette "rugosité" est négligeable vis à vis des effets induits par les conditions aux limites électriques sur la propagation des ondes de Lamb.

Concernant le second échantillon $\mathbf{CP_2}$ qui a été usiné avec un graveur de circuits imprimés, la profondeur moyenne des parties sans électrodes est en moyenne 10 fois plus grandes



(a) Échantillon $\mathbf{CP_1}$. (b) Échantillon $\mathbf{CP_2}$.

FIGURE 3.14 – Profils des surfaces des deux échantillons.

Grandeur	$\mathbf{CP_1}$	$\mathbf{CP_2}$
Λ_m (mm)	2	1,99
σ_Λ (mm)	0,01	0,1
P_m (μm)	27,7	98,6
σ_P (μm)	15,1	9,1

TABLE 3.2 – Périodicités et profondeurs des électrodes des échantillons $\mathbf{CP_1}$ et $\mathbf{CP_2}$. Λ_m : la périodicité moyenne et σ_Λ est son écart type. P_m : profondeur moyenne des parties sans électrodes et σ_P est son écart type.

que l'épaisseur des électrodes. On s'attend donc à observer des bandes interdites supplémentaires associées à cette périodicité "mécanique" surtout vers les hautes fréquences. Les écarts à la périodicité sont également plus importants que pour le $\mathbf{CP_1}$.

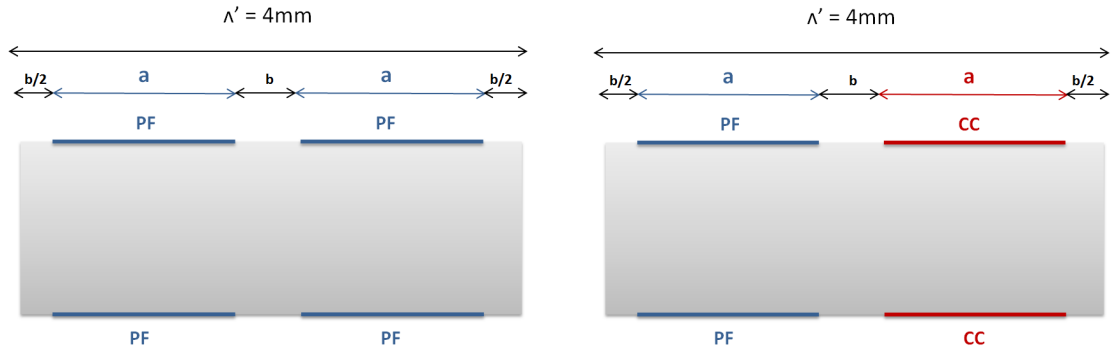
3.2 Conditions aux limites électriques symétriques

3.2.1 Excitation symétrique

Deux mesures ont été réalisée sur l'échantillon $\mathbf{CP_1}$, chacune correspondant à une configuration de conditions aux limites électriques différentes. La première mesure est effectuée pour des électrodes en circuit ouvert avec un potentiel flottant (configuration 1). Dans la deuxième mesure, une électrode sur deux est mise à la masse et les autres électrodes ont un potentiel flottant (configuration 2). Ces deux configurations correspondent aux mailles élémentaires représentées sur la figure 3.15. La structure de bande calculée pour la deuxième configuration correspond à une cellule élémentaire de taille $\Lambda = 4\ mm$ (figure 3.10a) et montre une ouverture de la 1re bande interdite de Bragg pour le mode S_0 à la fréquence

centrale $f_c = 405\ kHz$.

Pour observer cette bande interdite, on connecte la première paire d'électrodes du CP à un générateur basses fréquences. La tension imposée est un train d'ondes de 5 périodes d'amplitude 10 V à la fréquence de 400 kHz. Cette excitation symétrique favorise la génération des modes de Lamb symétriques. Le vibromètre laser est utilisé pour effectuer un balayage 1D sur toute la longueur de la plaque par pas de $0,1\ mm$ (même procédure expérimentale utilisée dans le chapitre 2). Un schéma du dispositif expérimental de mesure est présenté sur la figure 2.18.



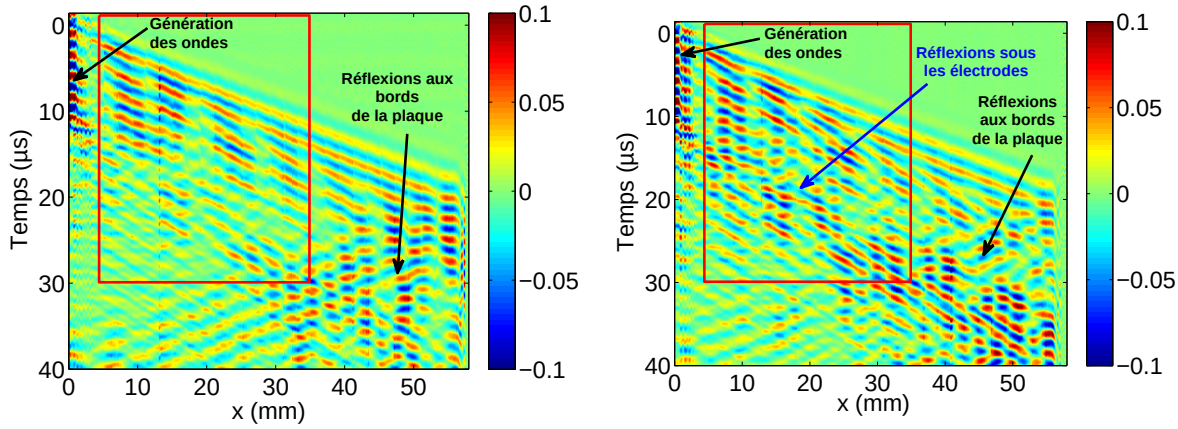
(a) Configuration 1. (b) Configuration 2.

FIGURE 3.15 – Cellules élémentaires des CPs étudiés expérimentalement.

Les signaux spatiotemporels mesurés pour les deux types de conditions aux limites électriques sont présentés à la figure 3.16. On observe sur les deux figures l'excitation des ondes au bord de la plaque en x =0 mm ainsi qu'une réflexion sur l'extrémité opposées en x =58 mm. On remarque également des réflexions d'amplitudes plus faibles tout au long de la propagation lorsqu'une électrode sur deux est court-circuitée (3.16b). Ces réflexions sont la signature d'une sensibilité de l'onde à la mise à la masse des électrodes.

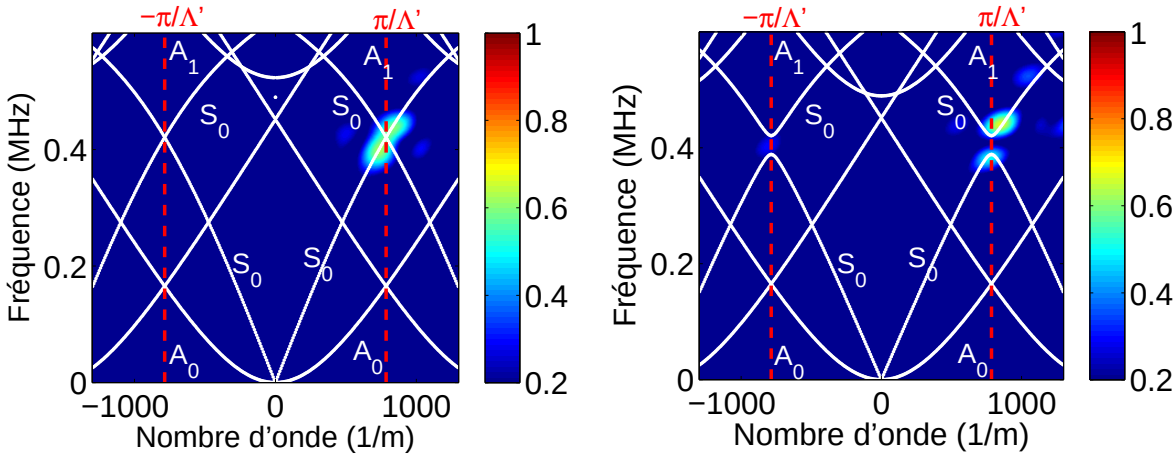
On considère la partie fenêtrée du signal spatio-temporel encadrée en rouge sur les images de la figure 3.16. On exclut ainsi la partie liée à l'excitation et celle qui correspond aux réflexions à l'extrémité de la plaque. Le signal fenêtré correspond à une propagation de l'onde sur 10 cellules élémentaires environ (avec $\Lambda' = 4\ mm$). Les modules des transformées de Fourier 2D (TF2D) appliquées au signaux fenêtrés sont représentés en niveaux de couleurs sur la figure **??**. Les diagrammes de bandes calculés numériquement pour chaque cellule élémentaire (figure 3.15) sont superposés en traits blancs. La première zone de Brillouin ($k = \pm\pi/\Lambda$) est délimitée par des traits rouges verticaux sur chaque image.

On observe sur la figure 3.17a un maximum d'amplitude autour de la fréquence 400 kHz associé au mode symétrique S_0. La propagation de l'onde S_0 dans la plaque avec des électrodes ayant un PF n'est pas affectée par la présence du réseau d'électrodes. Par contre, sur la figure 3.17b correspondant à la maille élémentaire de la figure 3.15b, on observe l'ouverture d'une bande interdite autour de 400 kHz située au bord de la zone de Brillouin. Une autre zone de plus faible amplitude est observée à cette même fréquence 400 kHz pour des nombres d'onde négatifs. Elle correspond aux réflexions du mode S_0 liées à la présence de la bande interdite de Bragg.



(a) Configuration 1. (b) Configuration 2.

FIGURE 3.16 – Signaux spatiotemporels obtenus avec l'échantillon $\mathbf{CP_1}$ pour deux configurations de CLE (voir figure 3.15) symétriques.



(a) Configuration 1. (b) Configuration 2.

FIGURE 3.17 – Transformée de Fourier 2D des signaux expérimentaux fenêtrés obtenus avec une excitation symétrique($\mathbf{CP_1}$) pour deux configurations de CLE (voir figure 3.15). Les amplitudes sont représentées en niveaux de couleurs. Les courbes de dispersion numériques sont superposées en traits blancs. La première zone de Brillouin est délimitée par les pointillés rouges [113].

Pour quantifier l'atténuation au niveau de la bande interdite. On définit un coefficient d'atténuation α de la manière suivante :

$$\alpha(f) = 20log\frac{A_1}{A_2} \tag{3.10}$$

Avec A_1 et A_2 les amplitudes maximales du mode S_0 respectivement pour la première et la deuxième configuration.

Le coefficient α en fonction de la fréquence (figure 3.18) montre une atténuation de 10 dB à la fréquence 408 kHz. La bande de fréquence interdite est représentée par un rectangle gris. Un décalage de $0,7\%$ par rapport à la fréquence centrale de la bande interdite calculée numériquement (405 kHz) est observé. Ceci peut s'expliquer par le fait que la mesure est effectuée sur une structure finie (10 périodes) alors que les calculs numériques considèrent une structure infinie. Les caractéristiques élastiques et piézoélectriques de la plaque $\mathbf{CP_1}$, utilisées pour réaliser les simulations numériques, peuvent également être légèrement différentes des valeurs réelles.

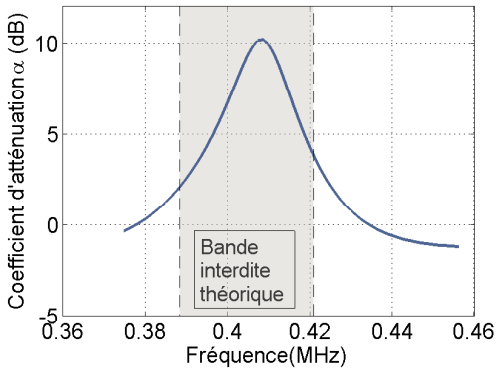


FIGURE 3.18 – Coefficient d'atténuation expérimental (courbe bleue). Bande interdite calculée numériquement est représentée en rectangle gris.

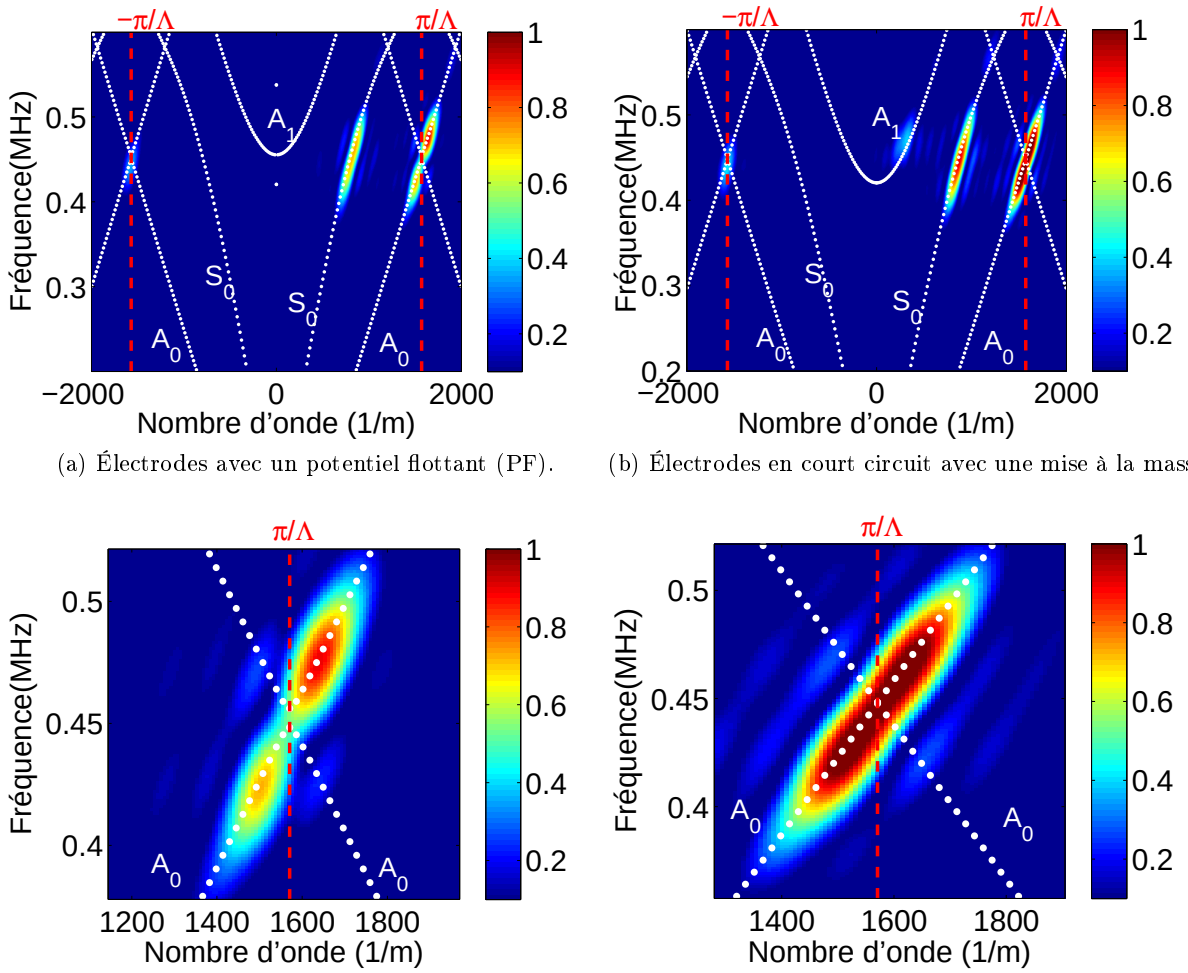
3.2.2 Excitation antisymétrique

Nous avons vu au §2.1.1 de ce chapitre qu'une bande interdite s'ouvrait lors du second repliement du mode A_0 pour une cellule élémentaire de 2 mm avec des conditions aux limites PF. Cette bande interdite étant très faible, nous travaillerons avec le $\mathbf{CP_2}$. En effet la longueur du $\mathbf{CP_2}$ étant plus importante que celle du $\mathbf{CP_1}$, nous maximisons de cette manière l'interaction de l'onde A_0 avec le réseau et favoriserons l'observation d'une bande d'arrêt, même de faible largeur. Comme précédemment un signal électrique sinusoïdal de 5 périodes (10 V) à la fréquence de 440 kHz est appliqué. Afin de favoriser la génération du mode antisymétrique A_0, le signal électrique est appliqué sur deux électrodes qui ne sont plus en vis à vis mais décalées comme indiqué dans la figure 2.17c.

Les signaux spatio-temporels fenêtrés sont traités suivant la même procédure qu'au (§3.2). Sur la figure 3.19a, on peut observer une tache qui correspond à l'excitation du mode A_0. Celle ci s'accompagne d'une onde S_0 qui ne perturbera pas notre étude car ces deux modes sont parfaitement découplés. Deux mesures avec deux conditions aux limites électriques différentes ont été effectuées, la première consiste à laisser toutes les électrodes avec un potentiel flottant. La structure de bande théorique donnée à la figure 3.2 indique qu'une bande interdite de Bragg s'ouvre pour le mode A_0 autour de la fréquence $452,2$ kHz. C'est bien ce que l'on observe sur la figure 3.19c avec une atténuation du mode A_0 autour de la fréquence 450 kHz. La mise en court circuit de l'ensemble des électrodes referme cette bande interdite comme l'indique les figures 3.19b et 3.19d en accord avec la structure

de bande théorique donnée à la figure 3.6a.

L'application de conditions aux limites simples de type CC et PF suffit donc à contrôler l'ouverture et la fermeture de la bande interdite de Bragg pour les modes fondamentaux symétriques et antisymétriques. Comme nous l'avons déjà signalé dans la section 3.1, l'usinage des électrodes de l'échantillon $\mathbf{CP_2}$ a entrainé une rugosité de surface liée à la profondeur des stries au delà de l'épaisseur des électrodes. Nous avons donc montré que cette rugosité de surface n'entraine pas de modification significative dans la propagation des ondes pour cette gamme de fréquences, les changements dans la structure de bandes sont induits uniquement par les changements de conditions aux limites électriques.



(a) Électrodes avec un potentiel flottant (PF).

(b) Électrodes en court circuit avec une mise à la masse.

(c) Zoom sur la figure (a).

(d) Zoom sur la figure (b).

FIGURE 3.19 – Transformée de Fourier 2D des signaux expérimentaux fenêtrés obtenus avec une excitation antisymétrique ($\mathbf{CP_2}$). Les amplitudes sont représentées en niveaux de couleurs. Les courbes de dispersion numériques sont superposées en traits blancs. La première zone de Brillouin est délimitée par les pointillés rouges.

3.3 Conditions aux limites électriques antisymétriques

Dans cette partie, on applique sur les électrodes du $\mathbf{CP_2}$ des conditions aux limites antisymétriques comme indiqué sur la figure 3.11.a. Nous souhaitons ici confirmer expérimentalement les résultats numériques obtenus à la section 2.3.3 (figure 3.11.b). Nous avions alors constaté l'ouverture de mini-bandes d'arrêts traduisant le couplage de deux modes de symétries différentes. Les courbes de dispersion calculées numériquement sont superposées aux TF2D des signaux expérimentaux.

On observe sur la figure 3.20 comme attendu, l'interaction entre les deux modes de symétries différentes S_0 et A_1, et l'ouverture de la bande interdite intra-bande à la fréquence 530 kHz ainsi qu'un signal lié à une réflexion à la même fréquence (nombres d'ondes négatifs).

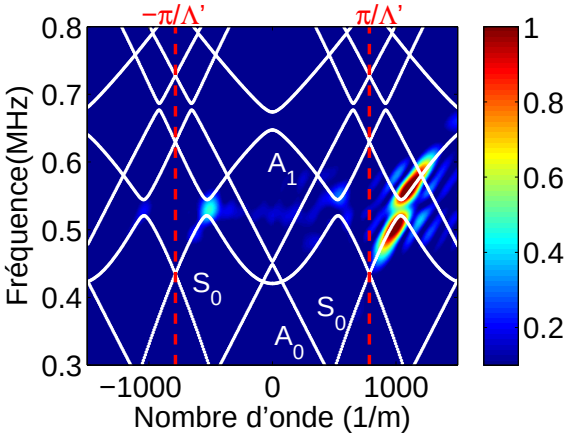


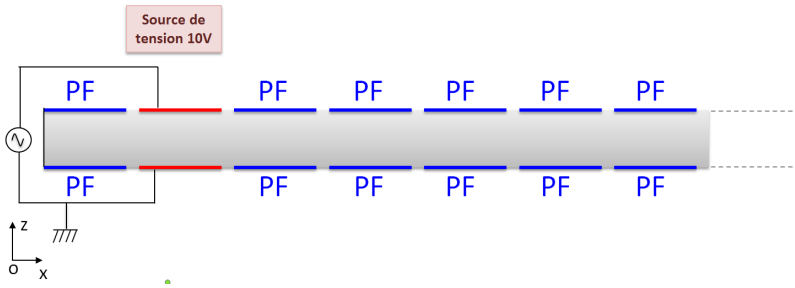
FIGURE 3.20 – Transformée de Fourier 2D des signaux expérimentaux fenêtrés d'une mesure avec des CLE antisymétriques ($\mathbf{CP_2}$). Les amplitudes sont représentées en niveaux de couleurs. Les courbes de dispersion numériques sont superposées en traits blancs. La première zone de Brillouin est délimitée par les pointillés rouges.

4 Impédance électrique

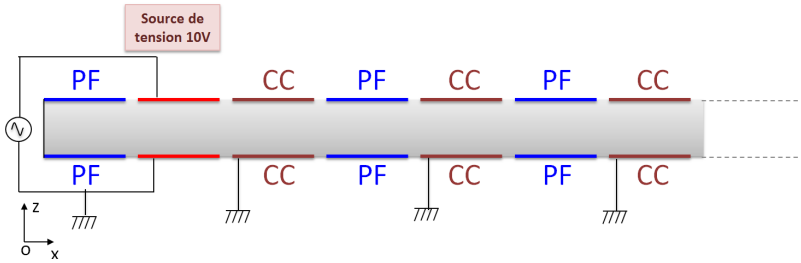
L'impédance électrique de la plaque phononique piézoélectrique finie est calculée numériquement à partir de calculs harmoniques comme indiqué dans le chapitre 2. Les caractéristiques de la plaque étudiée dans cette partie correspondent à celles de l'échantillon $\mathbf{CP_1}$. Les calculs numériques sont effectués pour deux configurations de conditions aux limites électriques : dans la première configuration, l'ensemble des électrodes a un potentiel flottant et pour la deuxième configuration, un couple d'électrodes sur deux est court-circuité et mis à la masse (figure 3.21).

La génération des ondes de Lamb s'effectue sur le deuxième couple du CP pour éviter la génération du mode de bout par l'excitation en bords de plaque [109] étant donné qu'il empêche l'observation des bandes interdites dans ce cas d'étude.

On présente les parties réelle et imaginaire de l'impédance électrique calculée au niveau



(a) Configuration 1.



(b) Configuration 2.

FIGURE 3.21 – Schémas pour l'évaluation numérique de l'impédance électrique sur la plaque phononique $\mathbf{CP_1}$ pour les deux configurations de CLE.

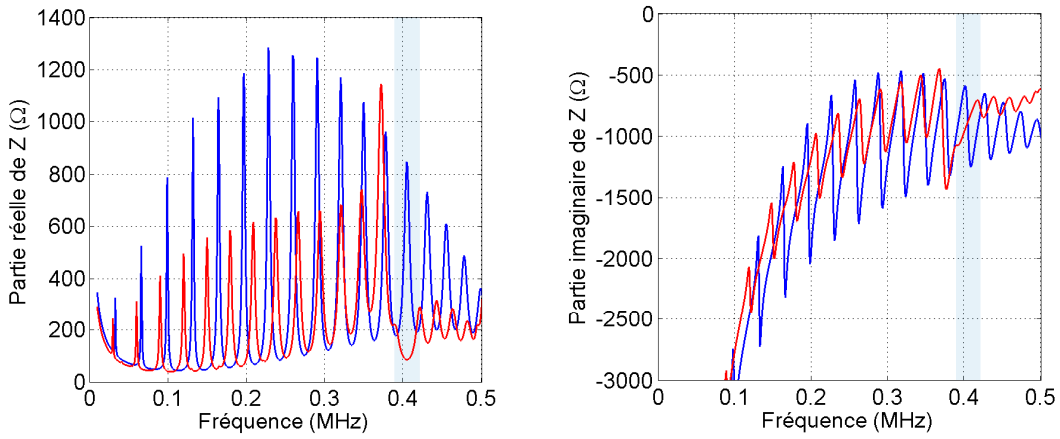
du deuxième élément du CP respectivement sur les figures 3.22a et 3.22b. Les courbes sont tracées jusqu'à $f = 500\ kHz$ car après cette fréquence, il devient difficile de distinguer les résonances du mode S_0.

Les résonances sur les tracés des parties réelle et imaginaire de l'impédance électrique (figure 3.22) correspondent aux modes stationnaires du mode S_0 dans la longueur de la plaque comme il a déjà été montré dans la partie 2.2 du chapitre 2. Les courbes bleues et rouges sont respectivement celles du calcul avec les configurations 1 et 2.

Le décalage en fréquence entre les pics rouges et bleus sur les deux figures témoigne de la sensibilité du mode S_0 aux conditions aux limites électriques.

On observe sur les courbes d'impédance de la configuration 2 l'extinction d'un pic à la fréquence 404 kHz. Cette bande interdite indiquée avec une bande bleue sur les figures 3.22a et 3.22b correspond à la bande interdite de Bragg déjà observée sur les courbes de dispersions théoriques et expérimentales (figure 3.17b).

À cet effet, on superpose la partie réelle de l'impédance électrique de la configuration 2 en rouge avec le diagramme de bandes calculé pour le $\mathbf{CP_1}$ avec les mêmes CLE en bleu sur la figure 3.23. Un bon accord est constaté entre la bande interdite de Bragg du mode S_0 ouverte à la fréquence $f_c = 405\ kHz$ sur le diagramme de bandes et celle calculée avec l'impédance électrique (indiquée en rectangle bleu).



(a) Partie réelle de Z. Courbe bleue : configuration 1, courbe rouge : configuration 2

(b) Partie imaginaire de Z. Courbe bleue : configuration 1, courbe rouge : configuration 2

FIGURE 3.22 – Impédance électrique de la plaque phononique $\mathbf{CP_1}$ calculée numériquement en fonction de la fréquence. (a) : partie réelle, (b) : partie imaginaire. La bande bleue indique la bande interdite observée sur les courbes de dispersion théoriques.

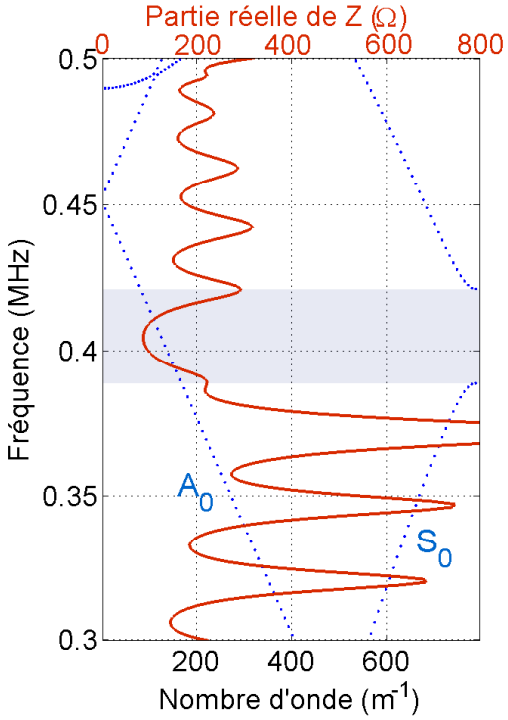


FIGURE 3.23 – Diagramme de bandes du $\mathbf{CP_1}$ calculé pour la configuration 2 superposé avec la partie réelle de l'impédance électrique (en rouge) calculée pour la même configuration. La zone bleue indique la bande interdite du mode S_0.

Une démonstration expérimentale de l'impédance électrique de l'échantillon $\mathbf{CP_1}$ est effectuée avec un analyseur d'impédance de marque *ZCheck 16777K* qui mesure une impédance complexe dans une gamme de fréquences allant de 10 Hz à 16 MHz. On effectue la mesure sur le premier élément du CP (figure 3.24).

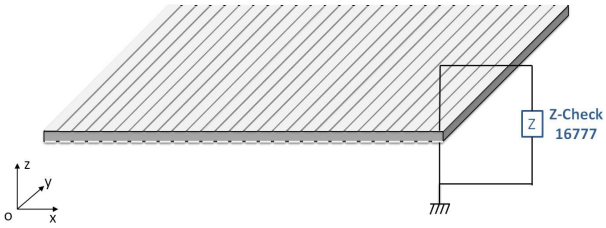
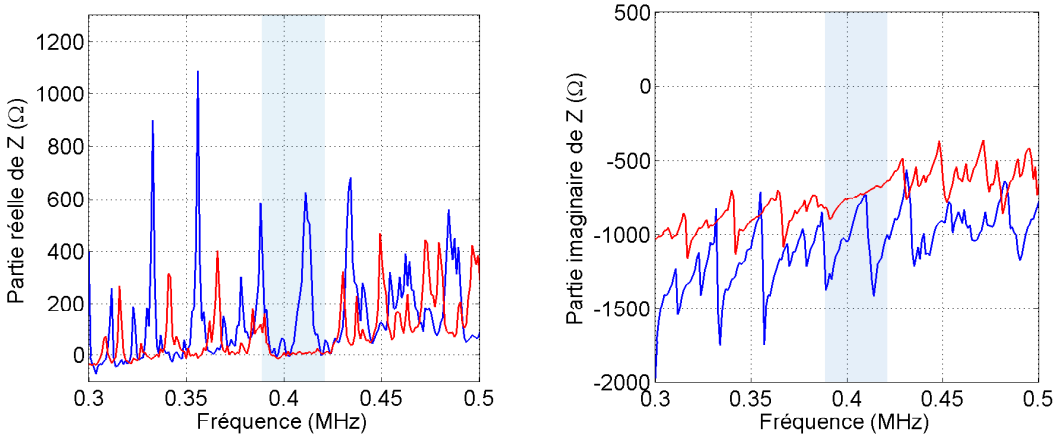


FIGURE 3.24 – Schéma de la mesure de l'impédance électrique.

Les parties réelles et imaginaires de l'impédance électrique sont présentées sur la figure 3.25. Les courbes expérimentales sont bruitées surtout en basses fréquences. On observe néanmoins le décalage fréquentiel des pics rouges et bleus ainsi que l'extinction du pic du mode S_0 à la fréquence de la bande interdite de Bragg aux alentours de 400 kHz.



(a) Partie réelle de Z.Courbe bleue : configuration 1, courbe rouge : configuration 2

(b) Partie imaginaire de Z.Courbe bleue : configuration 1, courbe rouge : configuration 2

FIGURE 3.25 – Mesure de l'impédance électrique (Z) de la plaque phononique $\mathbf{CP_1}$ en fonction de la fréquence. (a) : partie réelle, (b) : partie imaginaire. La bande bleue indique la bande interdite observée sur les courbes de dispersion théoriques.

Ainsi, on a démontré dans cette partie du chapitre qu'il était possible de mesurer la bande interdite du mode S_0 à travers la mesure de l'impédance électrique. Par contre, il sera plus difficile d'utiliser cet outil pour mesurer les bandes interdites des modes d'ordres supérieurs, puisque le nombre élevé de modes rend difficilement lisible les courbes relevées.

5 Conclusion

Au cours de ce troisième chapitre, une plaque phononique piézoélectrique a été réalisée et étudiée en disposant des électrodes périodiquement sur les deux faces de la plaque. Nous avons montré numériquement et expérimentalement qu'une bande interdite de Bragg s'ouvre grâce au motif périodique du potentiel électrique induit par la disposition des électrodes.

Deux types de bandes interdites ont été observées, des *bandes arrêts* localisées aux bords de la ZDB qui sont propres à un seul mode de Lamb et des *mini-bandes d'arrêts* intra-bandes qui traduisent une interaction entre deux modes de même parité. La position fréquentielle et la largeur de ces bandes interdites sont liées au facteur de recouvrement des électrodes sur la plaque ainsi qu'au type de conditions aux limites électriques appliqué sur celles-ci.

D'un point de vue pratique, il est plus simple de modifier les CLE que de modifier la géométrie de la plaque phononique. Cette propriété a été exploitée pour contrôler la dispersion des ondes de Lamb en modifiant la maille élémentaire de façon électrique : mettre les électrodes à la masse (court-circuit) agit sur la largeur des bandes interdites, alors que l'augmentation de la taille de la maille élémentaire diminue la largeur des bandes interdites et les décale vers les basses fréquences. De plus, la di-symétrisation des CLE favorise l'ouverture des mini-bandes d'arrêt entre des modes de Lamb de symétries différentes.

Enfin, une caractérisation de la bande interdite de Bragg du mode S_0 a été réalisée à partir de l'impédance électrique. Cette observation a été confirmée par des résultats théoriques obtenus avec des éléments finis. Les fréquences des pics des modes stationnaires correspondant au mode S_0 sont sensibles aux CLE. Dans la gamme de fréquences de la bande interdite, une extinction des pics a ainsi été observée.

Un autre type de CLE qui engendre un mécanisme de résonance locale sera étudié dans le chapitre suivant.

Chapitre 4

Accordabilité d'une plaque phononique piézoélectrique par ajout de dipôles électriques passifs

1 Introduction

Ce chapitre prolonge l'étude de l'accordabilité en fréquence de la structure phononique étudiée au chapitre précédent. Pour cela, des charges d'impédances électriques différentes (inductances, capacités) sont connectées aux électrodes disposées périodiquement sur la plaque piézoélectrique. Ce type d'accordabilité a été étudié précédemment sur des CP formés d'un empilement unidimensionnel de plaques piézoélectriques [61, 114]. Il a été montré que l'ajout d'impédances de charges capacitives ou inductives modifie la structure de bandes du CP. Une charge capacitive branchée en parallèle sur une plaque piézoélectrique entraine un décalage de la fréquence d'anti-résonance alors que, comme nous l'avons vu dans le second chapitre, la connexion d'une inductance (L) en parallèle à la plaque piézoélectrique produit une résonance électrique.

Ce chapitre débute par une évaluation de la capacité électrique associée à un élément du CP. La détermination de cette grandeur est fondamentale pour le choix des composants électriques à connecter par la suite et la détermination de la fréquence de travail adéquate. Des études expérimentales et numériques sont menées ensuite sur un CP avec des électrodes connectées à des inductances pour évaluer l'effet de celle-ci sur la dispersion des modes de Lamb. Des mesures d'impédances électriques viennent compléter cette étude. Enfin, une étude numérique sur l'influence de charges capacitives connectées au CP sur la propagation des ondes sera présentée à la fin de ce chapitre.

2 Évaluation des capacités d'un élément

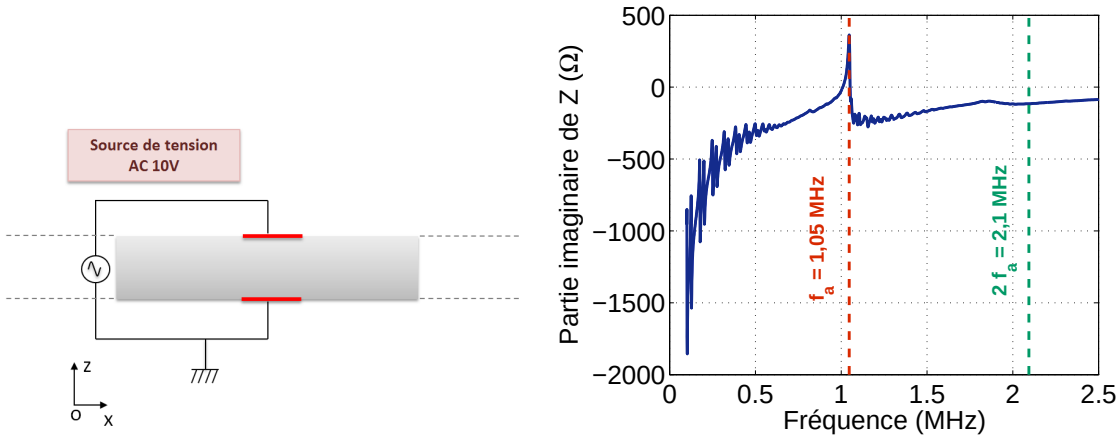
Une plaque piézoélectrique couverte de deux électrodes uniformes possède un comportement capacitif. La valeur de cette capacité associée à la plaque varie en fonction de la fréquence. On appelle ici la capacité *"basse fréquence"* C_b, la capacité évaluée pour des valeurs de fréquences inférieures à la valeur de la fréquence d'anti-résonance f_a. La capacité bloquée C_p s'estime à la fréquence $2f_a$ comme spécifié dans le standard IEEE [115]. Il est important d'évaluer ces deux capacités afin de déterminer la fréquence de travail ainsi que le choix des composants électriques à connecter aux éléments du CP.

2.1 Capacité bloquée

Une plaque piézoélectrique couverte de deux électrodes uniformes possède une capacité bloquée définie par la relation (1.23).

Cette expression de la capacité est celle d'un condensateur plan avec des électrodes de longueurs l grandes devant l'épaisseur e_p ($l >> e_p$). Dans le cas du CP étudié ici, la largeur de chaque électrode ($a = 1,7\ mm$) est inférieure ou égale à l'épaisseur de la plaque ($e_p = 2,2\ mm$) et l'utilisation de l'expression (1.23) n'est plus licite. Les effets de bord doivent être pris en compte. Nous allons donc évaluer expérimentalement et numériquement cette capacité.

On commence par évaluer la capacité bloquée C_p d'un élément du CP isolé placé au milieu de la plaque piézoélectrique sans électrode comme montré sur la figure 4.1a. Pour ce faire, nous calculons par la méthode des éléments finis l'impédance électrique Z d'une plaque piézoélectrique de côté égal à 80 mm, d'épaisseur $2,2\ mm$ avec une électrode de largeur $a = 1,7\ mm$ (figure 4.1a).



(a) Schéma du modèle par éléments finis pour le calcul de Z.

(b) Im(Z) en fonction de la fréquence. f_a : fréquence d'anti-résonance.

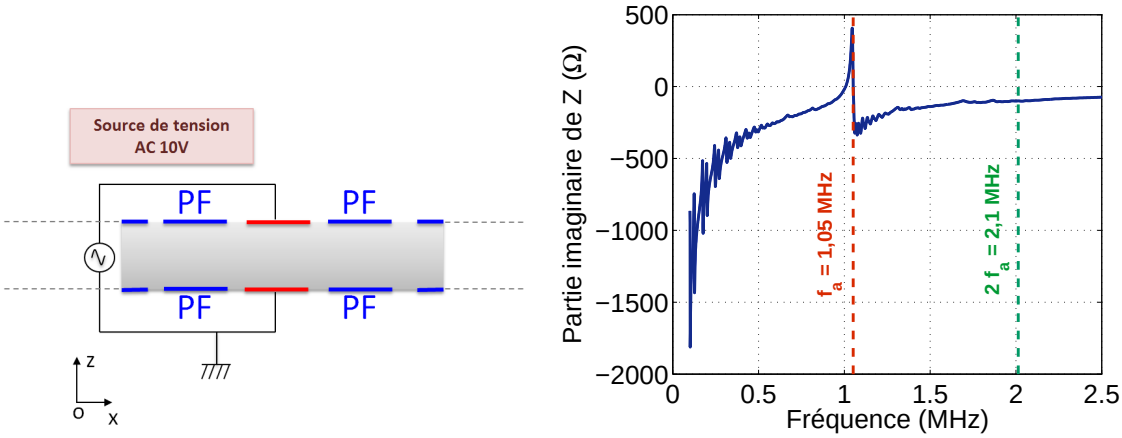
FIGURE 4.1 – Évaluation de la capacité C_p d'un élément au milieu d'une plaque sans électrode par le biais de la partie imaginaire de Z calculée numériquement.

La partie imaginaire de l'impédance électrique est tracée en bleu sur la figure 4.1b. La capacité bloquée C_p est évaluée à la fréquence $2f_a$ correspondant à un mode rejeté où la plaque piézoélectrique se comporte comme un condensateur plan.

En utilisant l'expression de l'impédance électrique d'un condensateur à la fréquence $2f_a = 2,1\ MHz$:

$$C_p = \frac{-1}{4\pi f_a Im[Z(2f_a)]} \tag{4.1}$$

On obtient une valeur de capacité $C_p = 0,65\ nF$. Cette valeur est bien supérieure à celle obtenue avec la formule (1.23) qui est de $0,5\ nF$. L'écart entre ces deux valeurs s'explique par la non prise en compte dans le deuxième cas des effets de bords.



(a) Schéma du modèle par éléments finis pour le calcul de Z.

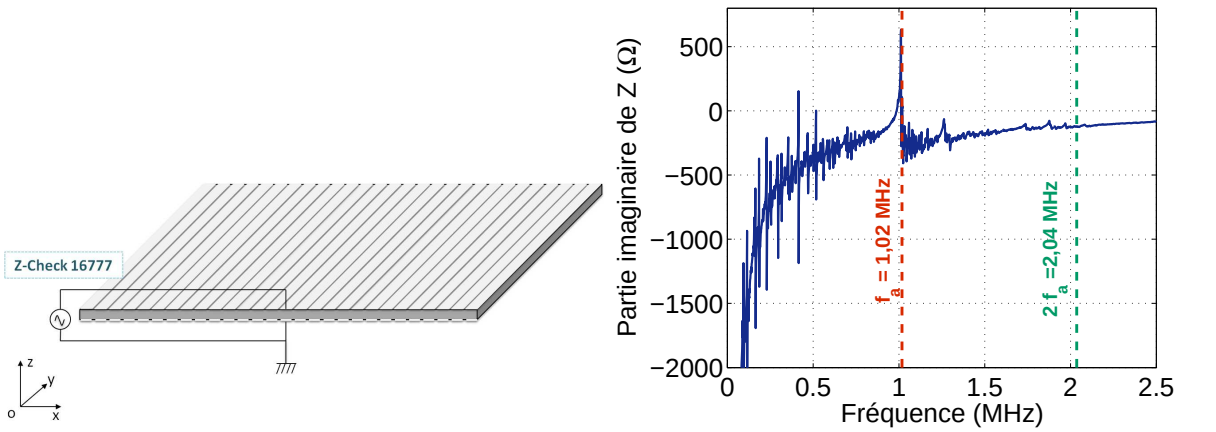
(b) Im(Z) en fonction de la fréquence (f_a : fréquence d'anti-résonance).

FIGURE 4.2 – Évaluation de la capacité C_p du 14ème élément du $\mathbf{CP_2}$ par le biais de la partie imaginaire de Z calculée numériquement.

Par la suite nous étudions une plaque piézoélectrique sur laquelle sont disposées périodiquement des électrodes. Chaque élément piézoélectrique subira donc une influence de ses proches voisins. On calcule l'impédance électrique du 14ème élément du $\mathbf{CP_2}$ comme illustré sur le schéma de la figure 4.2a. On voit sur la courbe de la figure 4.2b que la partie imaginaire de l'impédance à la fréquence $2f_a$ prend la valeur de $-98,9\ \Omega$ ce qui donne une valeur de la capacité estimée à partir de la formule (4.1) de $0,77\ nF$.

Expérimentalement on détermine l'impédance électrique d'un élément situé au centre du CP. L'analyseur d'impédance *Z-check* est connecté au 14ème élément du $\mathbf{CP_2}$ (figure 4.3a). Comme nous l'avons fait à partir du calcul numérique, une estimation de la capacité bloquée est établie à partir de la mesure de la partie imaginaire de l'impédance électrique. La partie imaginaire tracée sur la figure 4.3b permet d'estimer C_p à $0,64\ nF$. Cette valeur est sensiblement différente de celle calculée numériquement. Cette différence peut s'expliquer par le fait que nous observons dans la mesure de l'impédance des pics d'amplitudes plus importantes liés à la présence de modes de Lamb stationnaires. L'estimation de la capacité

est donc plus difficile à réaliser et sujette à une plus grande incertitude (17 %).



(a) Schéma de la mesure de Z du $\mathbf{CP_2}$.

(b) Im(Z) en fonction de la fréquence. f_a : fréquence d'anti-résonance.

FIGURE 4.3 – Évaluation de la capacité C_p du 14ème élément du $\mathbf{CP_2}$ par le biais de la partie imaginaire de Z mesurée.

Par la suite nous considérons l'influence de l'inductance sur la propagation des deux modes fondamentaux S_0 et A_0 en basses fréquences (inférieure à f_a). Or, le comportement électrique en basses fréquences de la plaque piézoélectrique s'évalue non pas avec la permittivité à déformation constante mais avec la permittivité à contrainte constante T ϵ_{33}^T. Nous évaluons donc dans la section suivante une capacité que nous appelons *"Basse fréquence"* C_b, associée à un élément piézoélectrique du CP.

2.2 Capacité en basses fréquences

La capacité d'un élément piézoélectrique en basses fréquences C_b est évaluée avec la formule (2.2). La relation qui relie C_p et C_b pour un élément du CP s'écrit en fonction s'écrit en fonction du coefficient de couplage k'_{33}

$$C_b = \frac{C_p}{1 - k'_{33}} \tag{4.2}$$

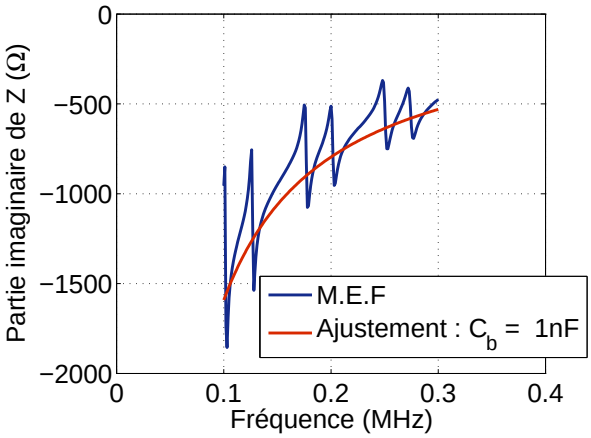
On évalue la capacité C_b d'un élément du CP en effectuant un ajustement de la partie imaginaire pour des fréquences inférieures à 400 kHz par une courbe théorique d'impédance d'un condensateur en fonction de la fréquence tracée à partir de l'expression :

$$Im[Z] = \frac{-1}{2\pi C_b f} \tag{4.3}$$

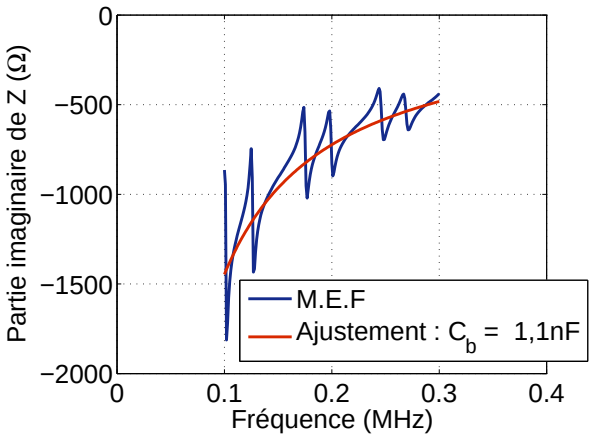
On considère les deux cas d'un élément placé au milieu d'une plaque piézoélectrique sans électrode (figure 4.1a) et du 14ème élément du $\mathbf{CP_2}$ (figure 4.2a). Les parties imaginaires des impédances électriques sont présentées respectivement sur les figures 4.4a et 4.4b.

L'ajustement des courbes bleues par les courbes théoriques (points rouges) donne une valeur de capacité $C_b = 1\ nF$ pour le premier cas et $C_b = 1,1\ nF$ dans le second. L'estimation par ajustement est difficile à réaliser et sujet à une grande incertitude à cause de l'amplitude importante des résonances liés à la présence de modes de Lamb stationnaires en basses fréquences.

La capacité calculée avec la formule (2.2) est de $0.67\ nF$. Encore une fois, l'écart entre cette valeur théorique et celles estimées avec les parties imaginaires s'explique, outre l'erreur liée à une estimation sur une courbe "parasitée" par des résonances, par la non prise en compte des effets de bords dans l'expression théorique.



(a) Im(Z) en fonction de la fréquence. Courbe bleue : calcul par MEF. Points rouges : ajustement par la formule (4.3), $C_b = 1\ nF$



(b) Im(Z) en fonction de la fréquence. Courbe bleue : calcul par MEF. Points rouges : ajustement par la formule (4.3), $C_b = 1.1\ nF$.

FIGURE 4.4 – Évaluation de C_b à partir de la partie imaginaire calculée par MEF d'un élément (a) au milieu de la plaque sans électrode (b) : du $\mathbf{CP_2}$.

On évalue expérimentalement la capacité C_b du 14ème élément du $\mathbf{CP_2}$ par la même méthode. On obtient à partir de l'ajustement de la courbe de la figure 4.5 une valeur de $0,97\ nF$.

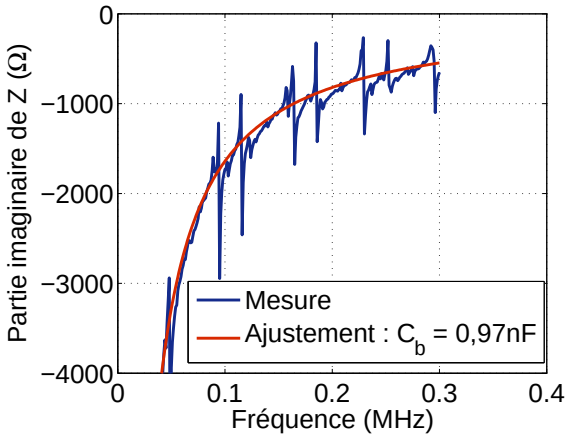


FIGURE 4.5 – Évaluation expérimentale de C_b du 14ème élément du $\mathbf{CP_2}$ par le biais de la partie imaginaire de Z.

La Table 4.1 regroupe les différentes évaluations des capacités bloquées C_p et *basses fréquences* C_b effectuées dans cette partie. Par la suite, nous prendrons comme estimation de la capacité bloquée associée à un élément du $\mathbf{CP_2}$ la valeur de $C_p = 0,77\ nF$ et une capacité *basse fréquence* $C_b = 1,1\ nF$.

	$C_p(\ nF)$	$C_b(\ nF)$
Élément seul (formules (1.23) et (2.2))	0,5	0,67
Élément au milieu de la plaque sans électrode (numérique)	0,65	1
Élément au milieu du $\mathbf{CP_2}$ (numérique)	0,77	1,1
Élément au milieu du $\mathbf{CP_2}$ (expérimental)	0,64	0,97

TABLE 4.1 – Différentes estimations des capacités C_p et C_b d'un élément du CP.

3 Accordabilité du CP par ajout d'inductances électriques

3.1 Courbes de dispersion

La modélisation des composants électriques connectés aux électrodes de la plaque piézoélectrique pour le calcul fréquentiel de l'impédance électrique a été réalisée dans le second chapitre en utilisant le module *circuit électrique*. Or, une incompatibilité existe entre ce module et l'analyse des fréquences propres dans le logiciel d'éléments finis *COMSOL Multiphysics* ® (version 4.4). Pour contourner ce problème, on utilise le module mathématique *EDO et EAD globales* (équation aux dérivées ordinaires et équation algébro-différentiels globales) qui permet de définir les équations régissant les grandeurs électriques du modèle [97].

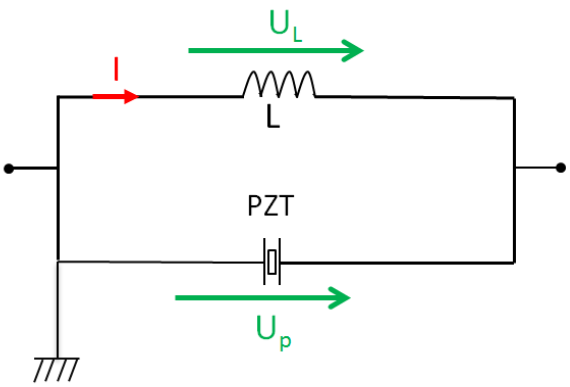


FIGURE 4.6 – Schéma du circuit électrique de la plaque piézoélectrique PZT connectée à une inductance.

Si une inductance est connectée en parallèle sur chaque élément du CP comme précisé sur le schéma du circuit représenté sur la figure 4.6, on écrit la loi des mailles entre la tension aux bornes de l'inductance U_L et la tension aux bornes de l'élément piézoélectrique U_p

$$U_p - U_L = 0 \tag{4.4}$$

En régime harmonique :

$$U_p + jL\omega I = 0, \tag{4.5a}$$
$$U_p - L\omega^2 q_p = 0, \tag{4.5b}$$

I étant le courant électrique et q_p la charge présente sur une électrode de l'élément piézoélectrique.

On applique la charge calculée via le module mathématique *EDO et EAD globales* sur l'électrode de l'élément piézoélectrique défini avec le module *dispositifs piézoélectriques* puis une analyse des fréquences propres est réalisée permettant une étude modale de la structure avec ces nouvelles conditions aux limites électriques (figure 4.7).

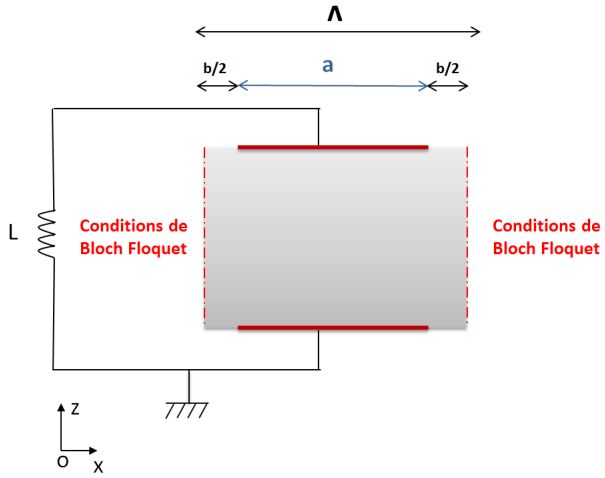


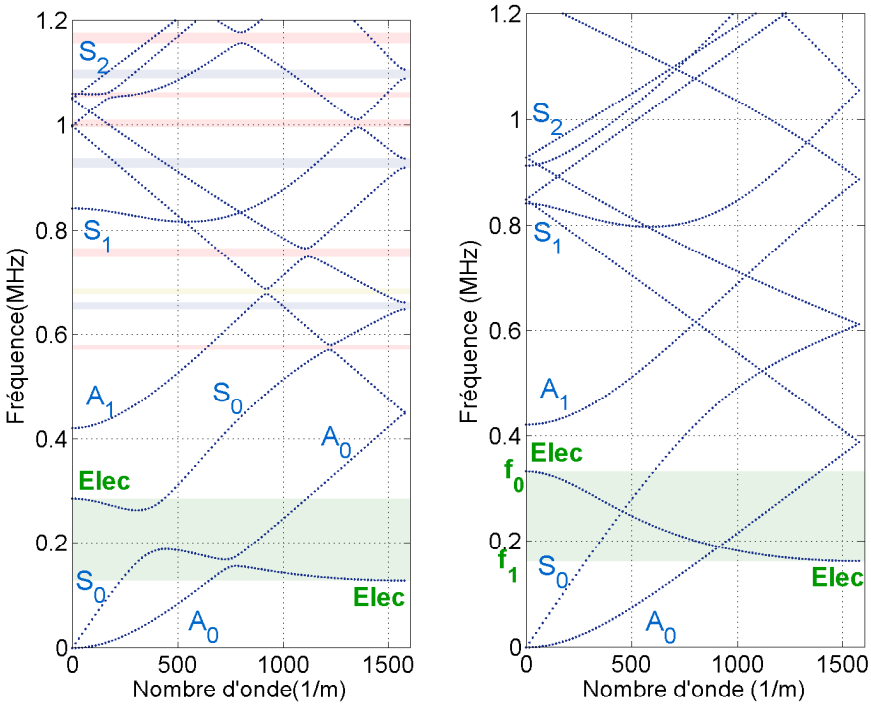
FIGURE 4.7 – Maille élémentaire simulée.

Le diagramme de bandes théorique du $\mathbf{CP_2}$ obtenu pour une valeur d'inductance de $L = 470\ \mu H$ est présentée sur la figure 4.8a. Cette valeur est choisie de sorte à générer une résonance électrique qui favorise une interaction principale avec le mode S_0 en basses fréquences. On remarque la génération d'un mode dispersif supplémentaire par rapport à la figure 3.2 d'origine électrique entre les fréquences $f_1 = 127,9\ kHz$ et $f_0 = 285,7\ kHz$. Ce mode se couple avec les modes de Lamb qu'il croise et induit l'ouverture de deux bandes interdites d'hybridation, le premier avec le mode A_0 à la fréquence centrale [1] $f_c = 162,1\ kHz$, et le second avec le mode S_0 à la fréquence $f_c = 225,2\ kHz$. Le couplage de la résonance électrique avec le mode S_0 est très important et induit une bande interdite de largeur relative [2] $L_{gap} = 35,5\%$.

Les largeurs des bandes d'arrêts en bords de la ZDB représentées en bleu ont réduit par rapport à celles d'un CP avec des électrodes aux PF étudié dans le chapitre précédent (figure 3.2). En effet, loin de la résonance, l'ajout d'une inductance entraine des effets qui s'apparentent à la mise en court circuit des électrodes. On remarque également que des mini-bandes d'arrêts entre des modes de parités différentes sont ouvertes (indiquées en rouge), ceci est lié à la dissymétrie des CLE par rapport au plan médian de la plaque, une électrode est à la masse et l'autre pas. Nous avions déjà observé ce phénomène dans le chapitre 3. Nous observons également l'ouverture d'une mini-bande d'arrêt indiquée en jaune à l'intersection des courbes de dispersion des modes de même symétrie A_0 et A_1 à la fréquence $676,6\ kHz$.

Le potentiel électrique d'une cellule élémentaire de la plaque phononique piézoélectrique infinie suivant Ox avec des électrodes connectées à des inductances ($L = 470\ \mu H$) est donné sur la figure 4.9. Il est représenté au point correspondant à $k = 0\ m^{-1}$ du mode électrique à la fréquence f_0 (la fréquence f_0 sera définie dans la section suivante). Le potentiel électrique est constant suivant la direction Ox, la longueur d'onde de ce mode étant infinie en k=0.

1. La fréquence centrale f_c d'une bande interdite a été définie dans le chapitre 3 avec la relation (3.4).
2. La largeur relative d'une bande interdite L_{gap} a été définie dans le chapitre 3 avec la relation (3.5).



(a) **CP₂**.

(b) **CP₂** sans la prise en compte de l'effet piézoélectrique.

FIGURE 4.8 – Diagrammes de bandes du $\mathbf{CP_2}$ dont chaque élément est connecté à des inductances ($L = 470\ \mu H$). **Elec** : mode électrique encadré en vert. (a) : $\mathbf{CP_2}$, (b) : $\mathbf{CP_2}$ sans la prise en compte de l'effet piézoélectrique.

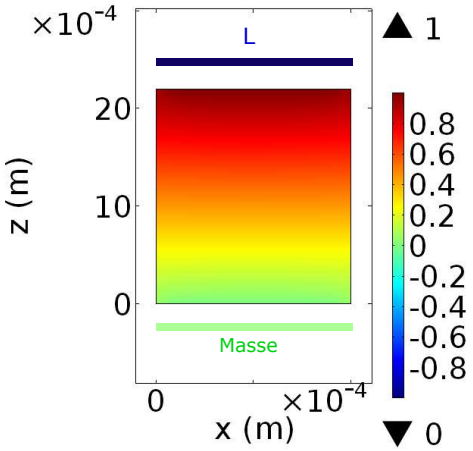


FIGURE 4.9 – Potentiel électrique du mode électrique pour une cellule élémentaire du $\mathbf{CP_2}$ connecté à des inductances, représenté à $k = 0\ m^{-1}$ et $f_0 = 285,7\ kHz$.

La dispersion en fréquences du mode électrique semble étonnante. Nous nous attendions à voir apparaitre une branche "plate" associée au mode électrique supplémentaire lié à la résonance LC du circuit électrique formé par l'élément piézoélectrique et l'inductance. Pour comprendre l'origine de cette dispersion, nous effectuons un second calcul en supprimant le couplage piézoélectrique. Nous modélisons une plaque avec les mêmes paramètres élastiques et géométriques que la plaque étudiée mais en annulant les coefficients piézoélectriques (e_{ij}). Le diagramme de bande calculé avec les mêmes CLE est présenté sur la figure 4.8b.

Sans effet piézoélectrique, les CLE n'ont aucun effet sur la dispersion des ondes de Lamb, comme nous pouvions nous y attendre, aucune bande interdite n'a été ouverte. De plus, nous observons toujours le mode électrique dispersif (encadré en vert) découplé des modes de propagation élastiques. Pour comprendre ce comportement dispersif du mode électrique, on se propose de modéliser le système étudié par une ligne électrique dans la section suivante.

3.1.1 Modélisation de la ligne électrique

Afin de comprendre le caractère dispersif de la branche électrique générée par la connexion des inductances, on modélise notre système par une ligne électrique (figure 4.10). Chaque élément du CP est modélisé par un condensateur dont la capacité est égale à la capacité électrique C associée à un élément piézoélectrique. Une inductance L est connectée en parallèle à ce condensateur. Sur une même face, nous avons une succession d'électrodes séparées les unes des autres dont le comportement électrique s'apparente à des condensateurs placés en série. Un condensateur supplémentaire C' est donc ajouté entre deux motifs élémentaires.

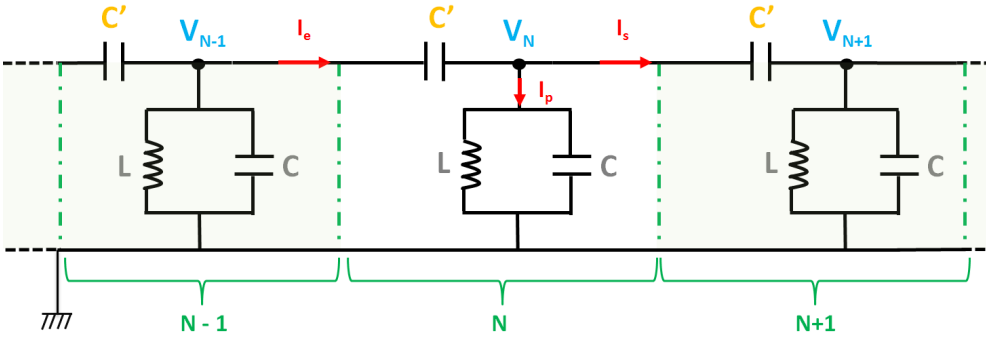


FIGURE 4.10 – Schéma électrique équivalent du modèle de la plaque piézoélectrique avec des électrodes périodiques connectées à des inductances.

La différence de potentiel entre une cellule N et ses proches voisines (N-1) et (N+1) s'écrit

$$\frac{1}{jC'\omega} I_e = V_{N-1} - V_N, \tag{4.6a}$$

$$\frac{1}{jC'\omega} I_s = V_N - V_{N+1}, \tag{4.6b}$$

où I_e et I_s sont respectivement les courants entrant et sortant de la cellule N, ils sont liés par la loi des noeuds de la manière suivante :

$$I_p = I_e - I_s, \tag{4.7}$$

où :

$$V_N = Z_{eq} I_p, \tag{4.8}$$

avec

$$\frac{1}{Z_{eq}} = jC\omega + \frac{1}{jL\omega}. \tag{4.9}$$

Les tensions V_{N-1} et V_{N+1} peuvent s'exprimer en fonction de la tension V_N en exploitant les conditions de Bloch-Floquet

$$V_{N-1} = V_N e^{j\Lambda k}, \tag{4.10a}$$
$$V_{N+1} = V_N e^{-j\Lambda k}. \tag{4.10b}$$

Alors les équations (4.6) deviennent

$$\frac{1}{jC'\omega} I_e = V_N (e^{j\Lambda k} - 1), \tag{4.11a}$$
$$\frac{1}{jC'\omega} I_s = V_N (1 - e^{-j\Lambda k}), \tag{4.11b}$$

La combinaison de ces deux équations s'écrit

$$\frac{1}{jC'\omega}(I_s - I_e) = V_N (2 - e^{j\Lambda k} - e^{-j\Lambda k}) \tag{4.12}$$

$$sin^2\left(\frac{\Lambda k}{2}\right) = \frac{-1}{4jC'\omega}\left(jC\omega - \frac{j}{L\omega}\right) \tag{4.13}$$

On obtient la relation de dispersion

$$k = \frac{2}{\Lambda} asin\left(\sqrt{\frac{1}{4C'}\left(\frac{1}{L\omega^2} - C\right)}\right) \tag{4.14}$$

Si on remplace $k = 0$ dans la relation (4.13), on obtient une fréquence de coupure f_0 du mode électrique correspondant à la fréquence de résonance du circuit LC

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}. \tag{4.15}$$

Donc, dans le cas de grandes longueurs d'ondes $\lambda >> \Lambda$, le mode électrique est uniquement déterminé par la capacité d'un élément et la valeur de l'inductance L. C' ne joue aucun rôle comme illustré sur la figure 4.11a.

A partir de la figure 4.8b, nous pouvons prélever cette fréquence f_0 et déduire la valeur de C sachant que $L = 470\mu F$. On obtient $C = 0,49\ nF$.

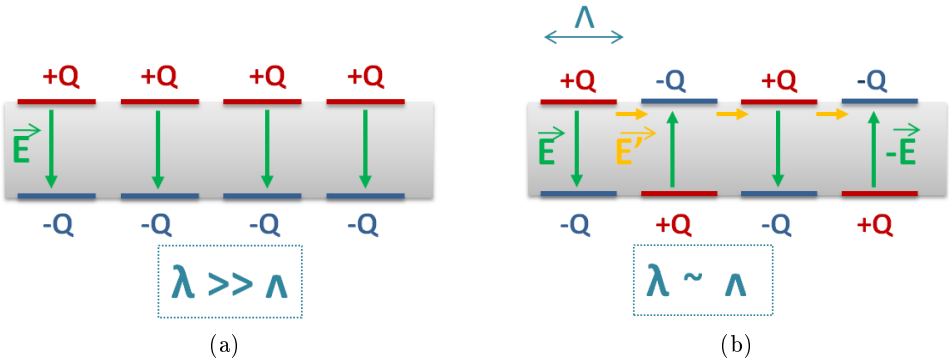
Cette valeur est proche de la capacité basse fréquence d'un élément définie dans la section précédente.

Dans le cas où la valeur de k s'approche de π/Λ, la fréquence s'écrit

$$f_1 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{L(4C' + C)}}. \tag{4.16}$$

On se situe dans la configuration de la figure 4.11b et la valeur de C' peut être déduite à partir de la fréquence $f_1 = 127,9\ kHz$ de la figure 4.8b.

$$C' = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{L\omega_1^2} - C\right) = 0.4\ nF \tag{4.17}$$



(a) (b)

FIGURE 4.11 – Orientation des champs électriques entre les électrodes périodiques de la plaque piézoélectrique pour (a) $\lambda >> \Lambda$ et (b) $\lambda \approx \Lambda$.

À l'aide de la relation (4.14), les parties réelle et imaginaire du nombre d'onde sont tracées en fonction de la fréquence sur la figure 4.12 pour les valeurs de C et C' égales respectivement à $0,49\ nF$ et $0,4\ nF$. On remarque que le mode électrique se propage dans une gamme de fréquences comprises entre les fréquences f_0 et f_1 pour laquelle la partie imaginaire est nulle. Dans le but d'illustrer l'influence des capacités C et C' sur les fréquences de coupures (4.15) et (4.16), on calcule la partie réelle du mode électrique pour d'autres valeurs de C' et C qu'on présente sur la figure 4.12a. La courbe bleue est calculée pour $C = 0,38\ nF$ et $C' = 0,4\ nF$. On remarque que son décalage par rapport à la courbe initiale est plus important pour les faibles longueurs d'ondes ($k = \pi/\Lambda$). Par contre, le décalage de la courbe orange calculée pour $C' = 1\ nF$ et $C = 0,49\ nF$, est plus prononcé au voisinage des grandes longueurs d'ondes ($k = 0$).

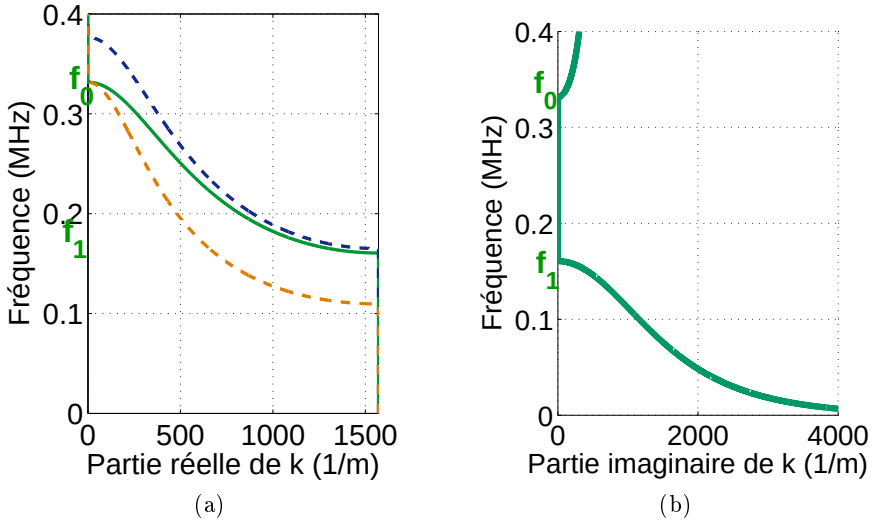


FIGURE 4.12 – Courbes de dispersion calculées à partir du modèle électrique. (a) Partie réelle du nombre d'onde k en fonction de la fréquence, trait continu vert : $C_p = 0,49$; $C' = 0,4\ nF$, pointillés bleus : $C = 0,38\ nF$; $C' = 0,4\ nF$, pointillés oranges : $C = 0,49\ nF$; $C' = 1\ nF$. (b) Partie imaginaire de k en fonction de la fréquence pour $C_p = 0,49\ nF$; $C' = 0,4\ nF$. Les fréquences f_0 et f_1 sont respectivement définies avec les relations (4.15) et (4.16).

Afin de superposer le mode électrique calculé par éléments finis dans le cas d'une plaque phononique sans effet piézoélectrique avec des électrodes connectées à des inductances de valeur $L = 470\ \mu H$, on attribue aux capacités C et C' la valeur $0,49\ nF$ et $0,4\ nF$. Le résultat est représenté sur la figure 4.13a où le mode électrique calculé avec la relation de dispersion (4.14) est également représenté.

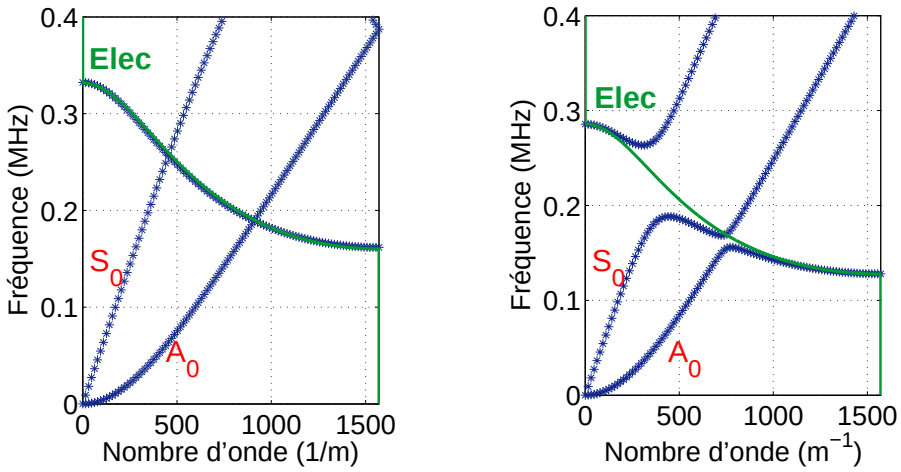
Le cas de la plaque phononique piézoélectrique $\mathbf{CP_2}$ est représenté sur la figure 4.13b, la courbe de dispersion théorique du mode électrique a été calculée pour $C = C' = 0,66\ nF$.

La valeur de la capacité C' du condensateur formé par deux électrodes juxtaposées prise en compte dans la modélisation par une ligne électrique peut paraître excessive car elle est proche de la capacité C qui correspond à un condensateur formé par deux électrodes face à face. En réalité la capacité C' est effective et la condensation des charges se fait principalement par influence entre deux électrodes face à face aux petites longueurs d'ondes ($\lambda \approx \Lambda$).

Une étude expérimentale de la bande interdite d'hybridation induite par l'interaction du mode électrique avec le mode S_0 est présentée dans la section suivante.

3.1.2 Étude expérimentale

Les mesures des courbes de dispersion s'effectuent sur deux types de cellules élémentaires. D'abord, une cellule élémentaire Λ' de longueur 4 mm est considérée. Celle-ci est constituée d'une paire d'électrode connectée à une inductance et la voisine avec un potentiel



(a) **CP₂** sans effet piézoélectrique. (b) **CP₂**.

FIGURE 4.13 – Courbes de dispersion superposées avec le mode électrique dans le cas (a) **CP₂** sans effet piézoélectrique, (b) **CP₂**.

flottant (figure 4.14a).

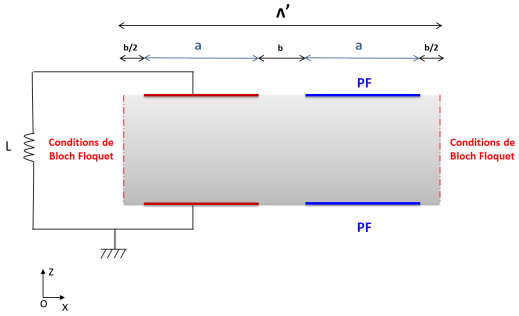
Nous travaillerons ensuite avec une cellule élémentaire élémentaire $\Lambda = 2\ mm$ composée d'un couple d'électrodes étudiée dans la partie précédente de ce chapitre (figure 4.7).

Le diagramme de bandes calculé par éléments finis correspondant à Λ' avec une valeur d'inductance de 470 μH est présenté sur la figure 4.14b. On remarque un décalage de la bande interdite d'hybridation par rapport au cas où chaque paire d'électrodes est reliée à une inductance. Cette bande interdite est maintenant centrée sur une fréquence d'environ 200 kHz.

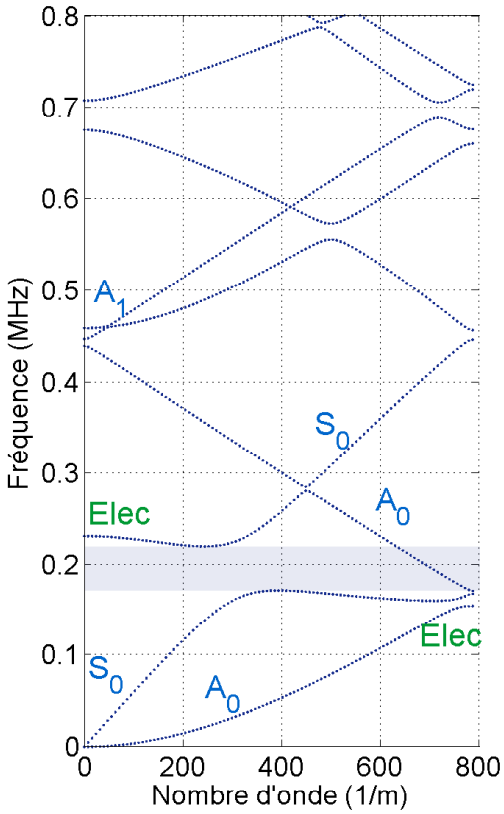
On applique au premier couple d'électrodes du **CP₂** un signal sinusoïdale de 5 cycles d'amplitude 10 V à la fréquence 270 kHz. Comme pour les mesures présentées dans les chapitres précédents, le vibromètre laser est utilisé pour effectuer un balayage 1D sur toute la longueur de l'échantillon par pas de $0,1\ mm$ afin de suivre la propagation des ondes guidées (figure 2.18).

Les signaux spatiotemporels sont fenêtrés afin d'exclure des traitements TF2D les signaux liés aux réflexions à l'extrémité de la plaque. On représente le module de la transformée de Fourier 2D appliquée aux signaux fenêtrés en niveaux de couleurs sur la figure 4.15a. Les diagrammes de bandes calculés pour la cellule élémentaire Λ' (figure 4.14b) sont superposés en pointillés blancs. La première zone de Brillouin ($k = \pm\pi/\Lambda'$) est délimitée par des pointillés rouges.

On remarque la génération du mode S_0 à la fréquence $f = 286\ kHz$. En effet, cette fréquence se situe au dessus de la bande interdite d'hybridation du mode S_0 avec la résonance électrique. Bien que l'excitation soit symétrique, on génère aussi le mode A_0 autour de la fréquence 250 kHz. Une troisième tache à $f = 260\ kHz$ pour un nombre d'onde négatif indique qu'un mode de Bloch S_0 d'ordre $n = -1$ est généré. Bien que ce mode ait un nombre d'onde négatif, il se propage dans le sens des $x > 0$ et a une vitesse de groupe



(a) Maille élémentaire Λ' simulée.



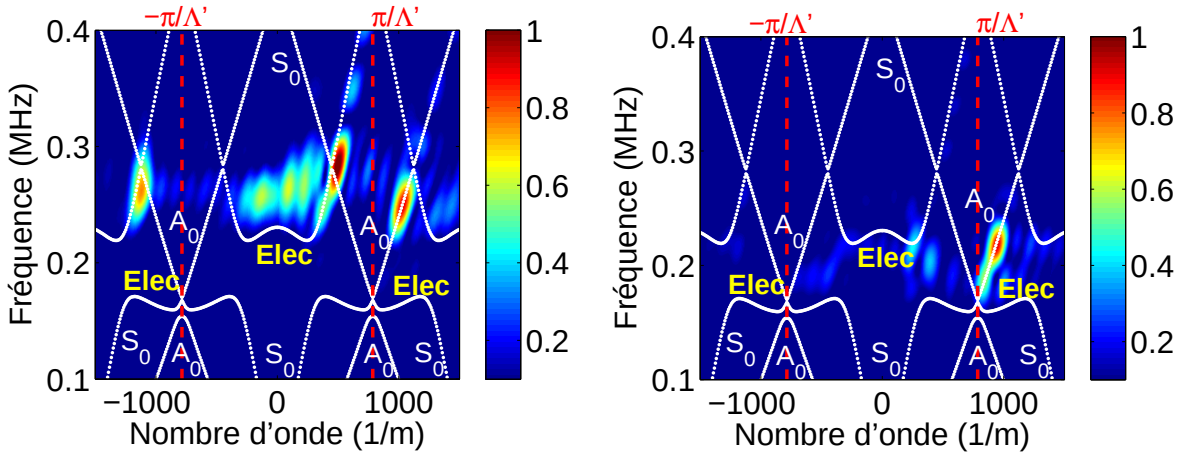
(b) Diagramme de bandes. **Elec** : mode électrique.

FIGURE 4.14 – (a) Schéma de la maille élémentaire Λ' (b) Diagramme de bandes correspondant à Λ' pour $L = 470\ \mu H$.

positive ($d\omega/dk > 0$).

Le traitement des signaux issus d'une mesure effectuée dans les mêmes conditions mais avec un signal d'excitation centré sur 200 kHz est présenté sur la figure 4.15b. En accord avec la structure de bandes théorique, le mode S_0 est atténué à la fréquence de la bande interdite d'hybridation. On l'observe avec une faible amplitude et toute l'énergie est portée par le mode A_0. Par contre nous n'observons pas la réflexion du mode S_0 à la fréquence de la bande interdite comme c'était le cas pour l'ouverture d'une bande interdite de Bragg dans les mesures avec des CLE étudiées dans le chapitre précédent. En effet, la bande interdite de Bragg se construit au fur et à mesure que le nombre de périodes augmente, contrairement à la bande interdite d'hybridation produite par des résonances locales qui absorbent l'énergie de l'onde incidente dès les premières électrodes.

Afin d'observer la réflexion du mode S_0 à la fréquence de la bande interdite d'hybridation, il est nécessaire de permettre la propagation du mode dans une première partie de la plaque. Pour cela, on laisse les 15 premières électrodes en circuit ouvert (avec un PF),



(a) Mesure à 270 kHz. (b) Mesure à 200 kHz.

FIGURE 4.15 – Transformée de Fourier 2D des signaux expérimentaux. $\mathbf{CP_2}$ avec une maille élémentaire Λ' de la figure 4.14a ($L = 470\ \mu H$). Les amplitudes sont représentées en niveaux de couleurs. Les courbes de dispersions numériques sont superposées en traits blancs. La première zone de Brillouin est délimitée avec des pointillés rouges.

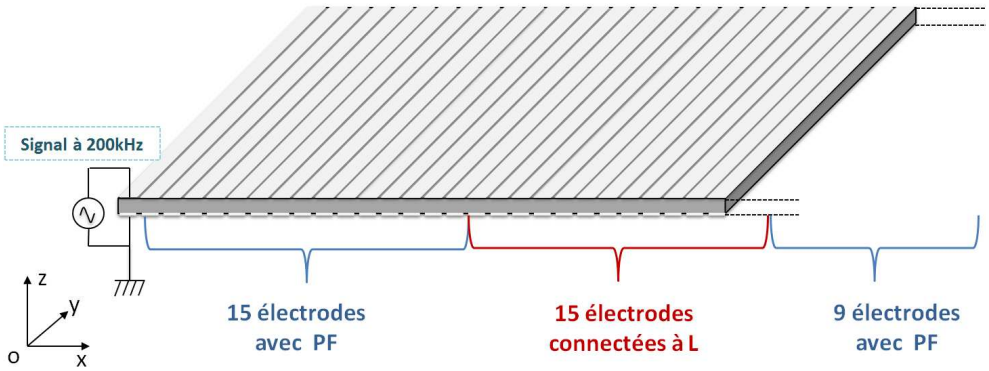


FIGURE 4.16 – Schéma de branchement des inductances.

ensuite, on connecte les 15 électrodes suivantes avec des inductances ($L = 470\ \mu H$), et on laisse les 9 dernières électrodes de la plaque en PF (figure 4.16).

Les signaux spatiotemporels de cette mesure sont représentés sur la figure 4.17. La partie du signal se propageant sous le réseau d'électrodes connectées aux inductances est encadrée en rouge. On observe en $x = 0$ la génération des modes de Lamb qui se propagent tout au long de la plaque. Les ondes se réfléchissent d'abord en rencontrant le réseau d'électrodes branchées aux inductances (localisées par deux droites en pointillés bleus sur la figure). Ensuite, elles se réfléchissent à nouveau mais sur les bords de la plaque. On observe également sur cette figure l'atténuation de l'onde S_0 à fur et à mesure qu'elle se propage sous le réseau d'inductances. D'ailleurs on observe dans le rectangle rouge des ondes stationnaires S_0 et A_0 d'amplitude importante piégées par les résonances locales

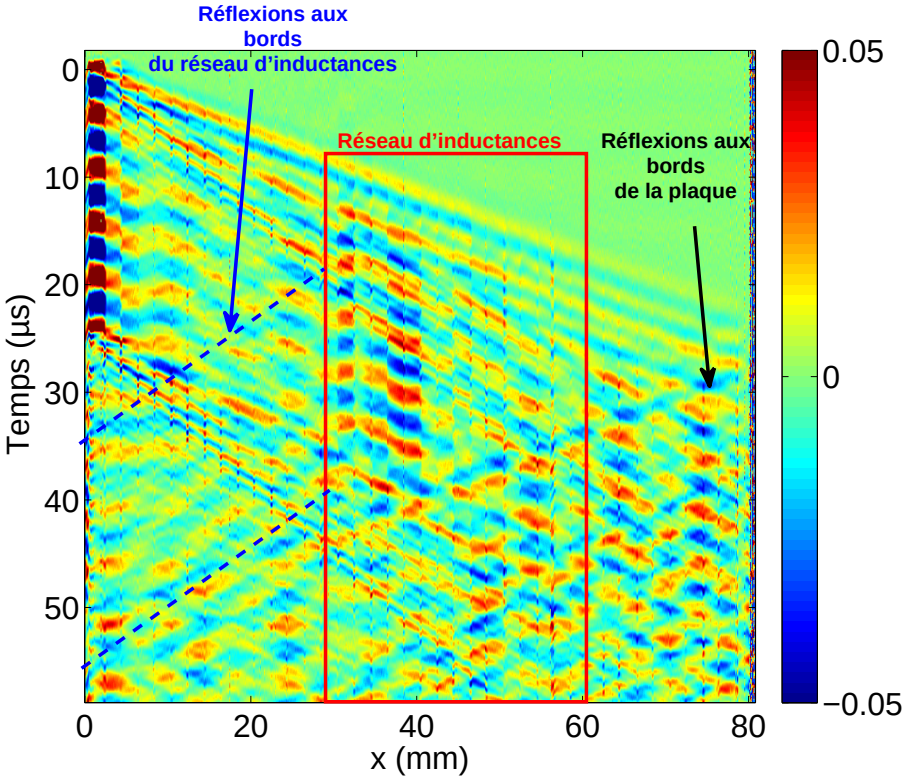


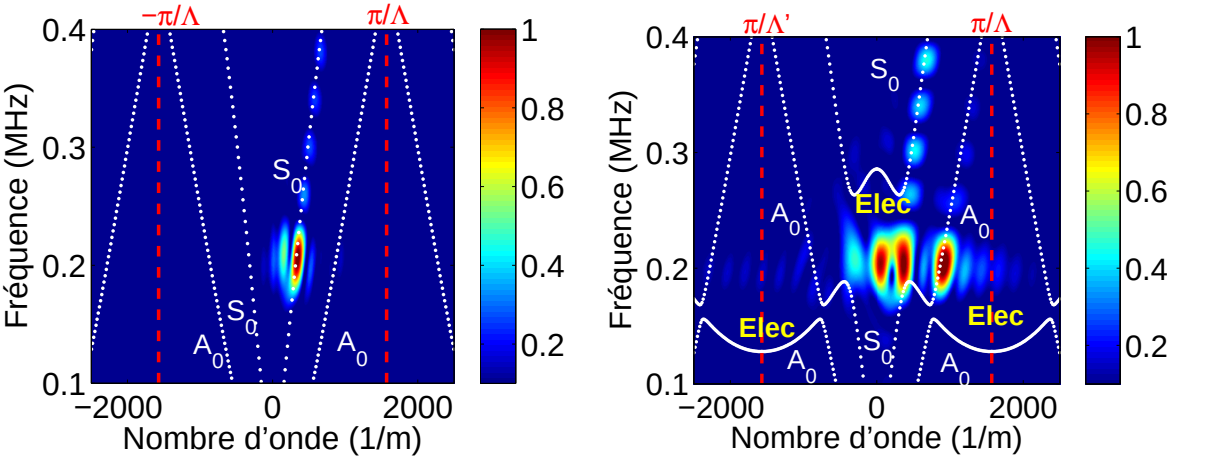
FIGURE 4.17 – Signaux spatiotemporels de la mesure effectuée avec les CLE du schéma 4.16.

électriques.

À présent, on fenêtre ces signaux spatiotemporels pour ne prendre en compte que les signaux se propageant avant le réseau d'électrodes connectées aux inductances. Les réflexions sur l'extrémité de la plaque ne sont pas prises en compte. La TF2D des signaux temporels fenêtrés est représentée sur la figure 4.18b. Les diagrammes de bandes calculés pour la cellule élémentaire correspondante Λ (figure 4.8a) sont superposés en blanc.

Lorsqu'aucune inductance n'est connectée (figure 4.18a), l'onde S_0 est générée et se propage sans se réfléchir dans le CP. Si les inductances sont connectées (figure 4.18b), on observe un signal à $k = 0$. ce signal correspond à la présence d'onde stationnaire par la réflexion de l'onde S_0 au niveau de l'interface entre la partie du CP où les électrodes sont au PF et celle où les électrodes sont connectées aux inductances. Une réflexion du mode S_0 est observée avec une faible amplitude dans l'espace des nombres d'ondes négatifs au centre de la bande interdite d'hybridation, et encore une fois, une partie de l'énergie est transmise au mode A_0.

La longueur d'onde du mode S_0 se propageant dans le $\mathbf{CP_2}$ avec des électrodes ayant des potentiels flottants est $\lambda = 2\ cm$ à la fréquence 200 kHz. Celle-ci correspond à 10 fois la longueur de la maille du réseau $\Lambda = 2\ mm$. Nous avons donc réalisé ici un métamatériau localement résonant qui interagit à une échelle sub-longueur d'onde avec les ondes guidées



(a) Toutes les électrodes ont un PF.

(b) Signaux correspondant aux ondes se propageant sous les 15 premiers électrodes. CLE représentées dans le schéma de la figure 4.16 ($L = 470\ \mu H$).

FIGURE 4.18 – Transformée de Fourier 2D des signaux expérimentaux fenêtrés du $\mathbf{CP_2}$ avec la maille élémentaire Λ de la figure 4.7. Les amplitudes sont représentées en niveaux de couleurs. Les courbes de dispersion numériques sont superposées en traits blancs. La première zone de Brillouin est délimitée avec des pointillés rouges.

se propageant dans la structure.

3.2 Impédance électrique

L'impédance électrique de la plaque phononique avec des électrodes connectées aux inductances est déterminée par la méthode d'éléments finis en régime harmonique de la même manière que dans les chapitres précédents.

Deux configurations sont étudiées : le premier calcul est effectué pour l'échantillon $\mathbf{CP_2}$ dans le cas où toutes les électrodes ont un potentiel flottant. Le second calcul est réalisé pour le même échantillon mais avec une électrode sur deux connectée à une inductance d'une valeur $L = 470\ \mu H$. Les autres électrodes restent à un potentiel flottant (figure 4.19).

Les parties réelle et imaginaire de l'impédance électrique sont représentées respectivement sur les figures 4.20a et 4.20b. Les courbes bleues représentent l'impédance du $\mathbf{CP_2}$ avec des électrodes ayant un PF et les courbes rouges sont celles du calcul avec les inductances.

Les courbes rouges (figure 4.20) présentent une bande interdite d'hybridation (indiquée par un fond bleu). Des résonances correspondantes au couplage du mode S_0 avec le mode électrique sont observées autour de cette bande interdite.

On superpose la partie réelle de l'impédance sur le diagramme de bandes calculé pour les mêmes CLE (figure 4.8a) sur la figure 4.21. La bande de fréquences interdite liée à la présence de la bande interdite d'hybridation est parfaitement identifiée sur la mesure

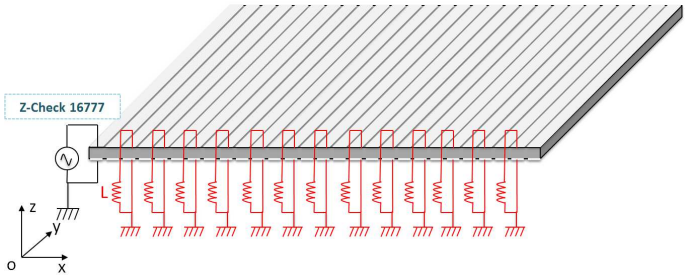
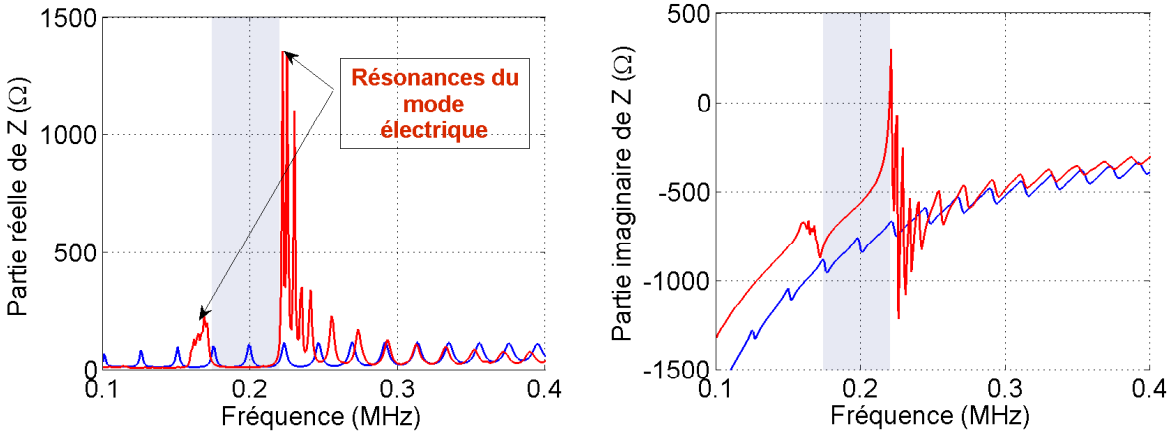


FIGURE 4.19 – Mesure d'impédance : une électrode sur deux est connectée à une inductance $L = 470\ \mu H$, les autres électrodes ont un PF.



(a) Partie réelle de Z. (b) Partie imaginaire de Z.

FIGURE 4.20 – Impédance électrique Z calculée numériquement. Courbes bleues : électrodes avec PF, courbes rouges : configuration du schéma de la figure 4.19. La bande interdite d'hybridation est indiquée par la zone bleue.

d'impédance et en accord avec le diagramme de bande matérialisée par un rectangle à fond bleu sur la figure.

Les rectangles à fond jaunes mettent en évidence la correspondance fréquentielle entre les résonances électriques de la partie réelle de l'impédance générées par le branchement des inductances et la branche du mode électrique sur le diagramme de bande avant et après la bande interdite d'hybridation.

Deux mesures de l'impédance électrique ont été effectuées sur le premier couple d'électrodes du $\mathbf{CP_2}$. Pour la première, toutes les électrodes sont en circuit ouvert, et dans la seconde les électrodes ont les mêmes conditions électriques que sur le schéma de la figure 4.19. Les parties réelle et imaginaire sont tracées respectivement sur les figures 4.22a et 4.22b. Les courbes bleues correspondent à la première mesure et les rouges à la seconde.

On observe sur les courbes expérimentales un "massif" de pics correspondant à un nombre important de pics autour de 238 kHz. Ces pics sont associés aux ondes S_0 stationnaire dans la longueur dont la vitesse de groupe s'annule en bord de gag. Le premier

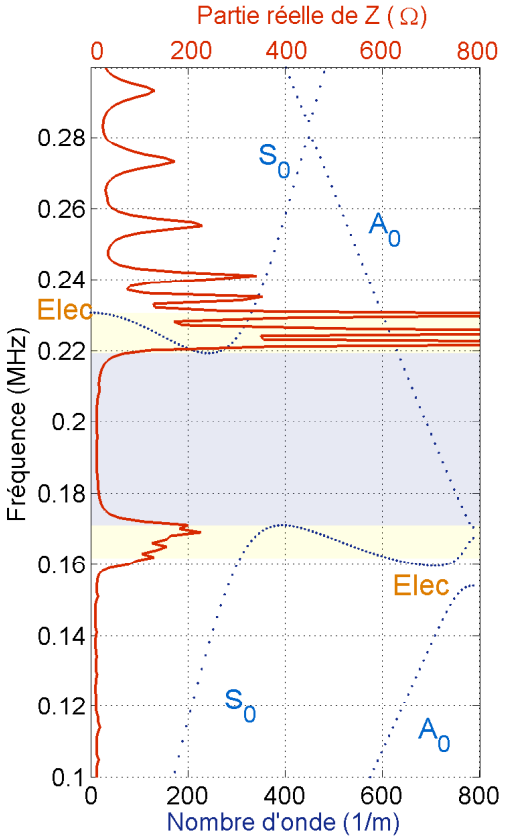
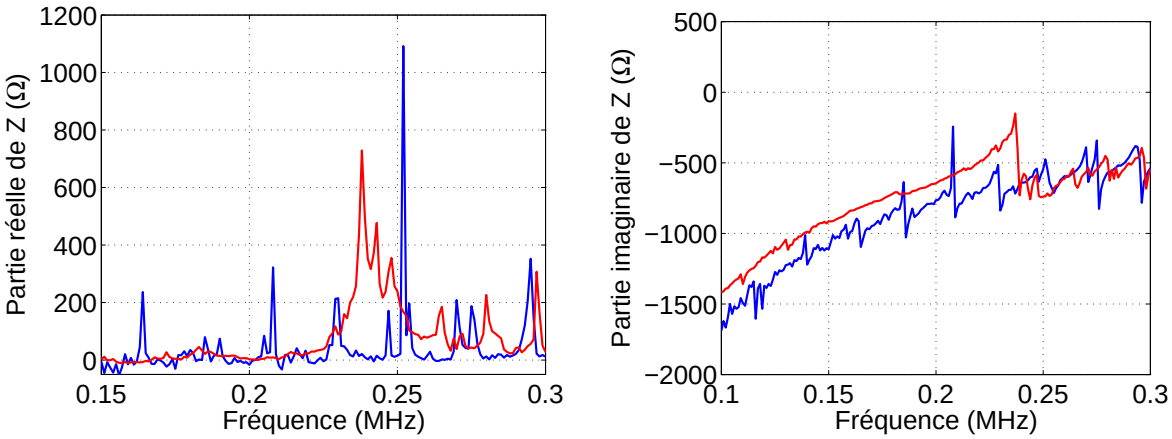


FIGURE 4.21 – Diagramme de bandes du $\mathbf{CP_2}$ calculé pour la maille Λ' (figure 4.14a) superposé avec la partie réelle de l'impédance électrique (en rouge) calculée pour la même configuration. La bande bleue indique la bande interdite d'hybridation et les bandes jaunes encadrent les branches du mode électrique (**Elec**).

pic est décalé d'environs 7% par rapport au pic observé numériquement. Ceci est probablement lié aux différences d'estimation de la capacité bloquée d'un élément du CP entre un calcul d'éléments finis et une mesure comme il a déjà discuté dans la première section de ce chapitre.

Il est difficile d'observer les autres pics de ce mode en plus basses fréquences ni la bande interdite d'hybridation à cause du bruit important qui perturbe les mesures à ces fréquences.

Dans cette partie, on a montré que l'influence des inductances connectées aux éléments du CP se caractérise par une génération d'un mode électrique dispersif. L'interaction de ce mode avec les ondes de Lamb produit une bande interdite d'hybridation aux alentours de la fréquence du circuit LC. Alors, l'utilisation des valeurs plus petites de L permettrait le décalage du mode électrique vers les hautes fréquences, ce qui produirait des bandes interdites d'hybridation avec des modes de Lamb d'ordres supérieurs. Dans la partie suivante, on étudiera l'effet de la connexion d'une charge capacitive sur la dispersion des ondes de



(a) Partie réelle de l'impédance électrique en fonction de la fréquence.

(b) Partie imaginaire de l'impédance électrique en fonction de la fréquence.

FIGURE 4.22 – Mesure d'impédance électrique Z. Courbes bleues : électrode avec PF, courbes rouges : alternance d'électrodes avec PF et d'électrodes connectées à L.

Lamb.

4 Accordabilité du CP par ajout de capacités électriques

Nous nous intéressons maintenant à l'effet de condensateurs (de capacité C) connectés en parallèle aux électrodes périodiques de la plaque piézoélectrique $\mathbf{CP_2}$. Le modèle est construit en utilisant les modules *dispositifs piézoélectriques* ainsi que *EDO et EAD globales* comme on l'a déjà fait pour le cas d'une charge inductive étudiée précédemment.

L'équation (4.4) devient :

$$U_p - U_c = 0 \tag{4.18}$$

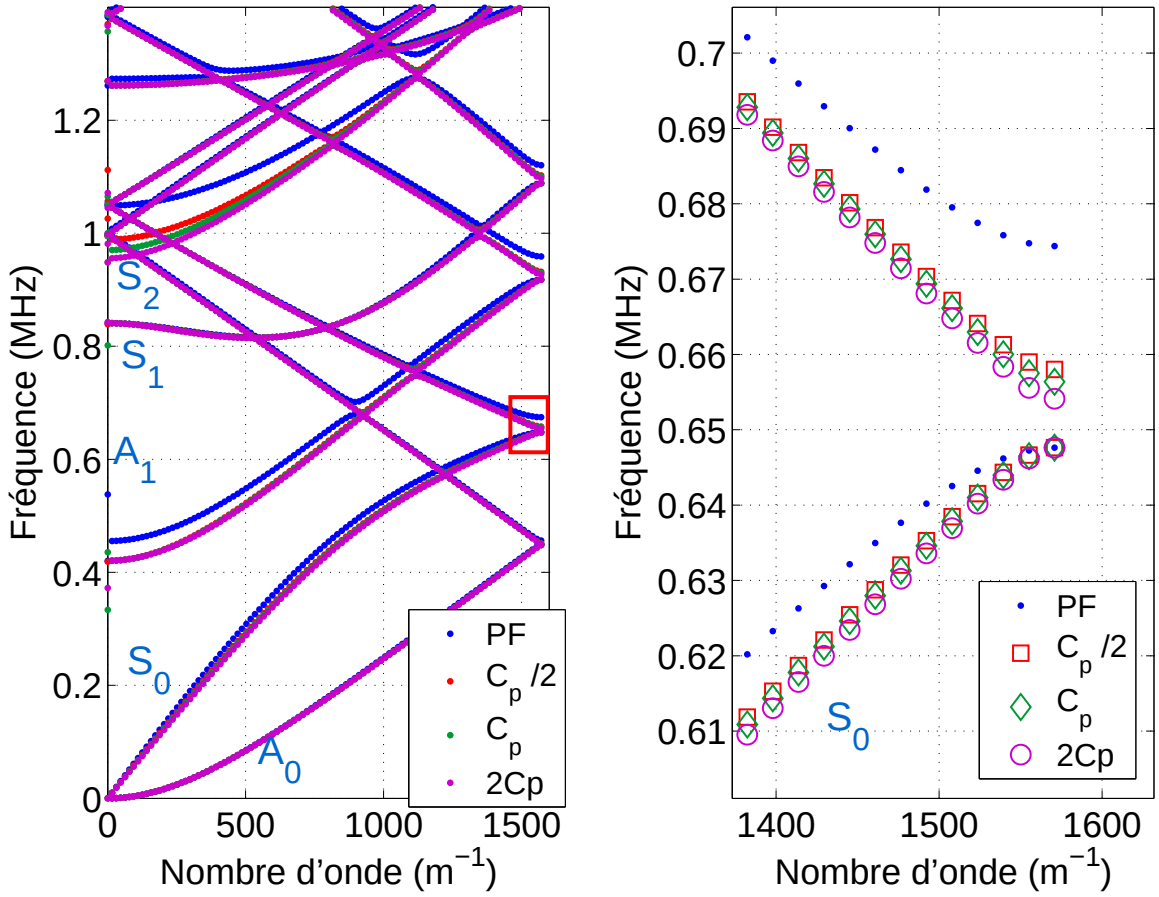
où U_c est la tension aux bornes du condensateur.

En régime harmonique :

$$U_p - \frac{1}{C} q_p = 0. \tag{4.19}$$

Comme dans le cas des inductances, on applique la charge résultante sur l'électrode. La maille élémentaire étudiée ici est constitué d'une seule paire d'électrodes. On calcule les diagrammes de bandes pour trois condensateurs ajoutés de valeurs $C_p/2, C_p$, et $2C_p$, en prenant $C_p = 1,1\ nF$. Les résultats obtenus sont présentés sur la figure 4.23 et le diagramme de bandes de la plaque avec des électrodes au PF est superposé en bleu.

La bande interdite du mode S_0 encadrée en rouge est représentée sur la figure 4.23b. On remarque un décalage de quelques kHz entre les bornes supérieures de la bande interdite pour les différentes valeurs de C. En effet, la largeur de la bande interdite est inversement proportionnelle à la valeur de la capacité connectée. Plus on diminue la valeur de la capacité



(a) **CP₂** avec des électrodes connectées à des charges capacitives.

(b) Partie encadrée en rouge dans la figure (a).

FIGURE 4.23 – (a) Diagramme de bandes théorique du $\mathbf{CP_2}$ dont les électrodes sont connectées à des capacités. Points bleus : PF, carrés rouges : $C = C_p/2$, losanges verts : $C = C_p$, cercles en magenta : $C = 2C_p$. (b) grossissement de la partie encadrée dans la figure (a).

connectée et plus la bande interdite s'ouvre. Pour une charge d'impédance correspondant à une capacité nulle on se retrouve dans le cas limite d'un circuit ouvert et on retrouve la bande interdite obtenue lorsque les électrodes du CP sont au PF.

Ce léger décalage entre les courbes de dispersion devient plus important aux alentours de 1 MHz, valeur qui correspond à la fréquence du mode épaisseur de la plaque piézoélectrique. En effet, la connexion d'une capacité aux bornes d'une plaque piézoélectrique décale le pic correspondant ici à la résonance du mode épaisseur [61, 114].

Ces résultats sont en accord avec des travaux antérieurs réalisés sur des empilements 1D d'éléments piézoélectriques connectés à des charges capacitives [61,114]. Il a été montré dans ces travaux que l'alternance du branchement d'une capacité avec un autre type de

CLE (circuit ouvert ou court circuit) permet le contrôle en fréquence d'une borne de la bande interdite. Dans cette étude, on alterne la connexion des capacités avec des longueurs de la plaque sans électrode dont le potentiel électrique est libre.

La connexion des charges capacitives permet donc une accordabilité en fréquence de la largeur des bandes interdites. Bien que la position en fréquence d'une des deux bornes de la bande interdite soit fixée par le choix du facteur de recouvrement, les capacités connectées permettent de contrôler la position de la deuxième borne ainsi que la vitesse du mode de Lamb généré à la fréquence de résonance du mode épaisseur de la plaque.

5 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons étudié l'effet de la connexion d'une charge d'impédance sur la dispersion des ondes de Lamb dans une plaque phononique piézoélectrique.

Une étude numérique et expérimentale de la dispersion des ondes de Lamb dans le $\mathbf{CP_2}$ avec des électrodes connectées à des inductances a été réalisée. Les résultats ont montré l'ouverture d'une bande interdite d'hybridation induite par les mécanismes de résonances locales électriques. Un modèle électrique a été développé pour calculer la dispersion du mode électrique généré par la connexion des inductances aux électrodes périodiques de la plaque piézoélectrique. Ces CLE ont permis la réalisation d'un métamatériau qui fonctionne à une longueur d'onde 10 fois plus importante que le paramètre de la maille du réseau. L'impédance électrique calculée et mesurée pour ces CLE a permis la caractérisation de l'interaction entre ce mode électrique et le mode S_0.

Enfin, un autre type d'accordabilité des bandes interdites de Bragg a été démontré par la connexion des charges capacitives aux électrodes du CP. En effet, la connexion d'un condensateur change la vitesse de phase des ondes de Lamb en permettant ainsi de modifier la fréquence de la borne supérieure des bandes interdites.

Conclusions et perspectives

Conclusions

Les travaux réalisés dans cette thèse sont consacrés à l'étude du contrôle de la propagation des ondes de Lamb dans un cristal phononique piézoélectrique. Nous avons conçu un CP en disposant simplement de façon périodique des électrodes conductrices sur les deux faces d'une plaque piézoélectrique. L'avantage de guides d'ondes conçus à partir de matériaux piézoélectriques est qu'ils permettent à la fois la génération sélective d'ondes guidées, en utilisant des peignes interdigités, mais également le contrôle de ces ondes. En effet, nous avons montré que l'application de différentes conditions aux limites électriques permet d'accorder très simplement en fréquence les propriétés des ondes de Lamb se propageant dans le CP. Différents démonstrateurs ont été réalisés durant cette thèse qui nous ont permis de valider expérimentalement un certain nombre de propriétés mises en évidence avec des études numériques par la méthode des éléments finis.

Les études expérimentales s'appuient sur deux types de mesure :

— une caractérisation acoustique des propriétés élastiques des ondes guidées par des mesures de déplacements de surface à l'aide d'un vibromètre laser. On obtient ainsi des courbes de dispersion expérimentales comparables aux structures de bandes théoriques obtenues par des calculs modaux sur une cellule élémentaire du CP.

— des mesures d'impédances électriques pour lesquelles la présence de pics est associée à des modes de Lamb stationnaires se propageant dans le CP. La présence ou l'absence de pics d'impédance permet de caractériser respectivement des bandes de fréquences permises ou interdites de propagation.

L'augmentation du nombre de modes propagatifs avec la fréquence nous a amené à nous limiter dans cette étude aux modes de Lamb présents à des fréquences inférieures à la résonance d'épaisseur de la plaque, et plus particulièrement aux deux modes fondamentaux symétriques S_0 et antisymétriques A_0.

Les principaux résultats obtenus dans cette thèse sont les suivants :

Après avoir présenté les notions fondamentales sur la piézoélectricité et les cristaux phononiques au chapitre 1, nous avons dans le chapitre 2 étudié la propagation des ondes de Lamb dans des plaques piézoélectriques avec et sans électrodes. Nous avons mis en évidence que les vitesses de propagation des ondes variaient suivant la présence ou non des électrodes sur les faces de la plaque. Ceci nous a permis par la suite d'interpréter les résultats obtenus avec des alternances de conditions aux limites électriques (CLE). Sur une plaque piézoélectrique couverte d'électrodes conductrices sur la totalité de ses

surfaces, la connexion d'une charge d'impédance (capacité ou inductance) en parallèle n'a aucun effet sur la dispersion des ondes de Lamb. Les charges se neutralisent et le potentiel reste nul au voisinage de la surface. Nous avons également dans ce chapitre caractérisé complètement les plaques piézoélectriques utilisées par la suite en ajustant les constantes piézoélectriques, électriques et mécaniques fournies par le fabricant. Une comparaison avec un modèle analytique a permis de valider les modèles numériques utilisés.

Les résultats importants de cette thèse se concentrent dans le chapitre 3, traitant du cas périodique. Nous avons montré que l'alternance de surfaces avec et sans électrodes crée des discontinuité de potentiels électriques qui se traduisent via un couplage électromécanique par une périodicité de paramètres effectifs du matériau. Cette discontinuité permet d'ouvrir des bandes interdites de Bragg aux bords de la première zone de Brillouin mais aussi des bandes interdites "intra-bandes" impliquant des modes de Lamb différents. Une étude paramétrique a montré que les positions et les largeurs des bandes interdites dépendent du facteur de recouvrement pour une configuration de CLE donnée. La bande interdite du mode S_0 du $\mathbf{CP_2}$ avec des électrodes ayant un potentiel flottant atteint une largeur de $4,2\%$ pour un facteur de recouvrement de 77 %. Quand les électrodes sont court-circuitées et mises à la masse, la largeur est alors maximale ($4,17$ %) pour un facteur de recouvrement de 23 %. On obtient également une accordabilité du CP sans avoir à changer la géométrie de la plaque et des électrodes mais en modifiant uniquement les CLE. Cette accordabilité s'effectue par une modification de la cellule élémentaire du CP en changeant par exemple la périodicité spatiale avec laquelle une cellule est mise à la masse. L'augmentation de la taille de la cellule élémentaire a pour effet de décaler vers les basses fréquences les bandes interdites. De plus, le contrôle des mini-bandes interdites (bande interdite impliquant deux modes de Lamb différents dans la ZDB) se fait par le biais du contrôle de la symétrie des CLE par rapport au plan médian de la plaque. En effet, si la maille élémentaire est symétrique électriquement, on obtient un couplage entre les modes de même parité. Tandis que la di-symétrisation des CLE favorise l'interaction entre les modes de parités différentes.

La dernière partie de la thèse est consacrée à l'influence de charges d'impédances connectées aux électrodes sur la dispersion des ondes de Lamb. Pour cela, il nous a fallu caractériser électriquement un élément du CP et évaluer la capacité électrique associée à cet élément. La présence d'effets de bords pour les dimensions d'électrodes considérées (largeur d'électrode inférieure à l'épaisseur de la plaque piézoélectrique) ont été mis en évidence. La position de l'élément au sein du CP ainsi que la longueur d'onde de travail influe sur la capacité électrique qui possède à la fois une composante statique mais également dynamique. Nous avons montré que si nous associons à la capacité de l'élément une inductance et ce, périodiquement sur le CP, alors on observe la propagation d'un mode électrique dispersif autour de la fréquence de résonance du circuit LC. Des calculs par la méthode d'éléments finis ont montré le couplage de ce mode avec les modes de Lamb. Ce couplage entraine l'ouverture d'une bande interdite d'hybridation. Cette bande interdite d'hybridation est induite par les résonances électriques locales "déclenchées" par le passage de l'onde mécanique dont la propagation est ainsi empêchée. Il est important de noter que cette bande interdite d'hybridation est ouverte à une longueur d'onde 10 fois supérieure à la taille de la maille élémentaire. Le CP se comporte donc ici comme un mématériau. Le comportement électrique du dispositif a été modélisé par une ligne électrique dans laquelle le couplage entre les éléments du CP se traduit par la prise en compte d'une capacité élec-

trique effective entre deux électrodes adjacentes. Ceci a permis d'expliquer la dispersion du mode électrique généré par la connexion des inductances. Pour terminer ce chapitre, nous nous sommes intéressés au branchement de capacités sur les électrodes. Ceci permet également le contrôle de la dispersion des modes de Lamb. Les valeurs de capacités utilisées permettent d'accorder les positions fréquentielles des bornes supérieures des bandes interdites, les positions des bandes inférieures sont définies quant à elles par le facteur de recouvrement. Cependant cette accordabilité des bandes interdites est faible, elle est de l'ordre de quelques kilohertz pour des valeurs des capacités allant jusqu'à 10 fois la valeur de la capacité bloquée. Les variations de vitesses des modes sont plus notables au voisinage de la fréquence de résonance d'épaisseur de la plaque.

Perspectives

Les travaux menés dans cette thèse ouvrent de nombreuses perspectives. En effet, nous n'avons étudié que des dispositifs électriques passifs pour contrôler la propagation des ondes, des circuits électriques actifs peuvent être envisagés tels que des capacités négatives. Ces dernières autorisent des modulations très importantes des constantes effectives du matériau piézoélectrique et ont démontré leur efficacité dans le cas de CP constitué d'un empilement 1D de plaques piézoélectriques [116,117].

Une autre perspective consiste à réaliser des structures accordables bi et tri-dimensionnelles. Ceci permettra d'étendre les fonctionnalités du dispositif. On peut par exemple envisager de réaliser un guide d'onde sur un CP avec une répartition 2D d'électrodes soumises à un potentiel flottant. En court-circuitant certaines rangées d'électrodes ont peut ouvrir des bandes passantes et créer des "chemins" sur lesquels pourront se propager les ondes. On obtient ainsi des guides d'ondes très confinés pouvant être utilisés pour des applications du type multiplexeur/demultiplexeur.

Nous avons au cours des derniers mois de Thèse commencé à développer un modèle de plaque piézoélectrique avec des électrodes périodiques dans un plan bi-dimensionnel à partir du modèle déjà étudié pour une périodicité 1D. L'analyse des modes propres d'une plaque piézoélectrique d'épaisseur $e = 2,2\ mm$ avec des électrodes carrées disposées périodiquement dans le plan xOy a été réalisée suivant les directions ΓX, XM et ΓM de la première zone de Brillouin. Les paramètres des constantes élastiques, piézoélectriques et diélectriques sont celles du $\mathbf{CP_2}$ donnée en annexe B. La périodicité Λ_x suivant l'axe Ox est égale à celle suivant l'axe Oy Λ_y ($\Lambda_x = \Lambda_y = \Lambda = 2\ mm$). Les paramètres de la maille élémentaire a et b sont les mêmes que ceux de la maille étudié dans les chapitres précédents ($a = 1,7\ mm$ et $b = 0,3\ mm$). Des conditions de Bloch-Floquet ont été appliquées selon la direction Ox (C.B-F.x) et suivant la direction Oy (C.B-F.x)comme montré sur la figure 4.24. Le diagramme de bandes résultant est présenté sur la figure 4.25.

Des bandes interdites pour certains modes sont observées en bord de bandes pour les directions cristallographiques ΓX et ΓM étudiées ainsi que des mini-bandes d'arrêts entre des modes de même symétrie. Par contre, aucune bande interdite n'est observée suivant la direction XM. L'ouverture d'une bande interdite complète peut nécessiter une optimisation des paramètres géométriques. Nous pouvons également envisager d'utiliser des résonances locales obtenues en connectant des inductances aux électrodes.

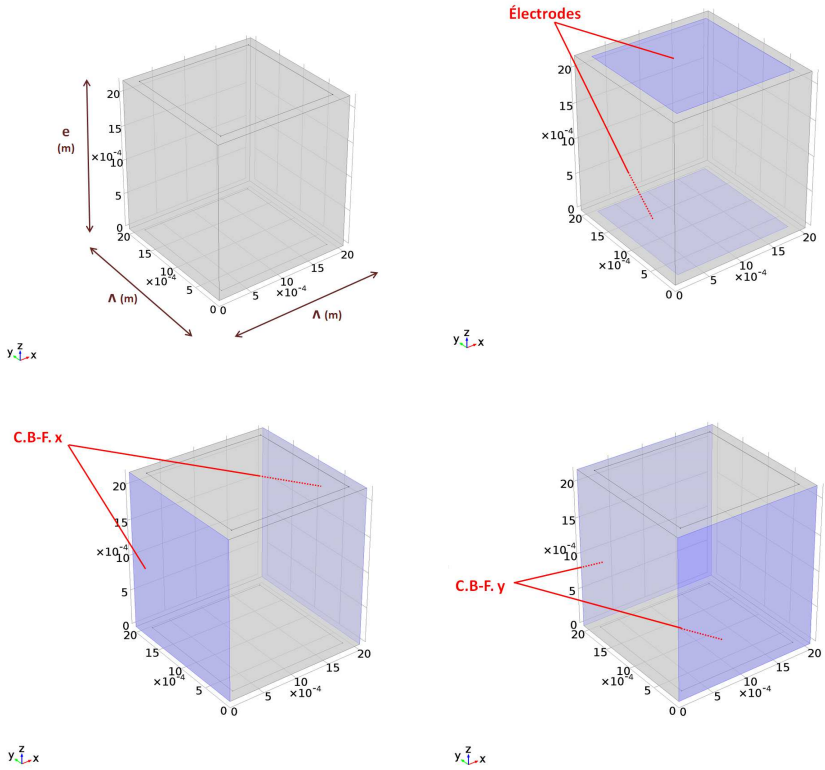


FIGURE 4.24 – Schémas représentant la maille élémentaire. C.B-F.x et C.B-F.y sont respectivement les conditions de Bloch-Floquet suivant les axes Ox et Oy.

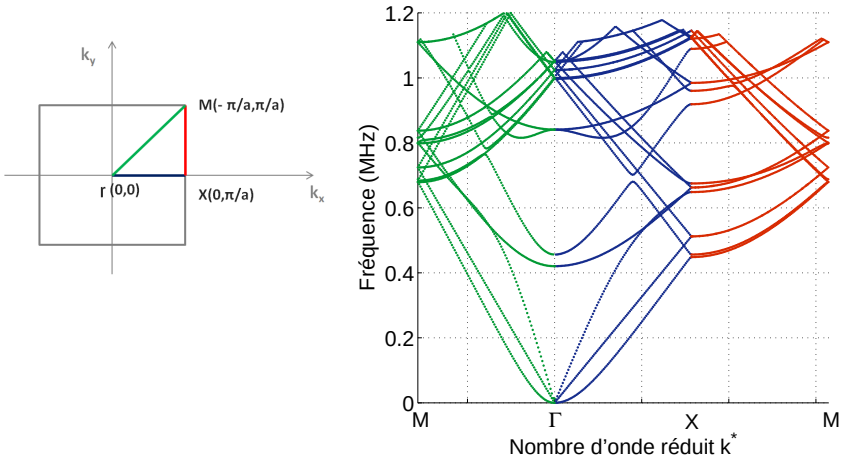


FIGURE 4.25 – Courbes de dispersion de la plaque phononique piézoélectrique avec des électrodes périodiques en PF dans le plan xOy.

Un prototype d'une plaque phononique piézoélectrique avec des électrodes périodiques suivant deux dimensions est en cours de réalisation par Thales Research & Technology

France à partir d'une plaque en PZT (Pz26) polarisée suivant son épaisseur [105]. Il a été réalisé afin que la face supérieure de la plaque contienne un réseau d'électrodes carrées disposées périodiquement dans le plan xOy. Des électrodes pour l'excitation et la réception des ondes ont été faites sur deux côtés de la plaque. Les deux autres extrémités contiennent des reprises de contact pour chaque électrode qui serviront à la connexion des CLE. La face inférieure de la plaque contient une électrode uniforme pour connecter une masse.

Une photographie du prototype est présentée sur la figure 4.26, ses dimensions sont 80 x 80 x 1,6 mm^3. 13 x 13 électrodes en or ont été déposées sur une surface de la plaque de 52 x 52 mm^2. Le côté de chaque électrode est $a = 3,7\ mm$ et l'espace entre deux électrodes est de $0,3\ mm$ dans les deux directions, cela conduit à des périodicités Λ_x et Λ_y de 4 mm chacune.

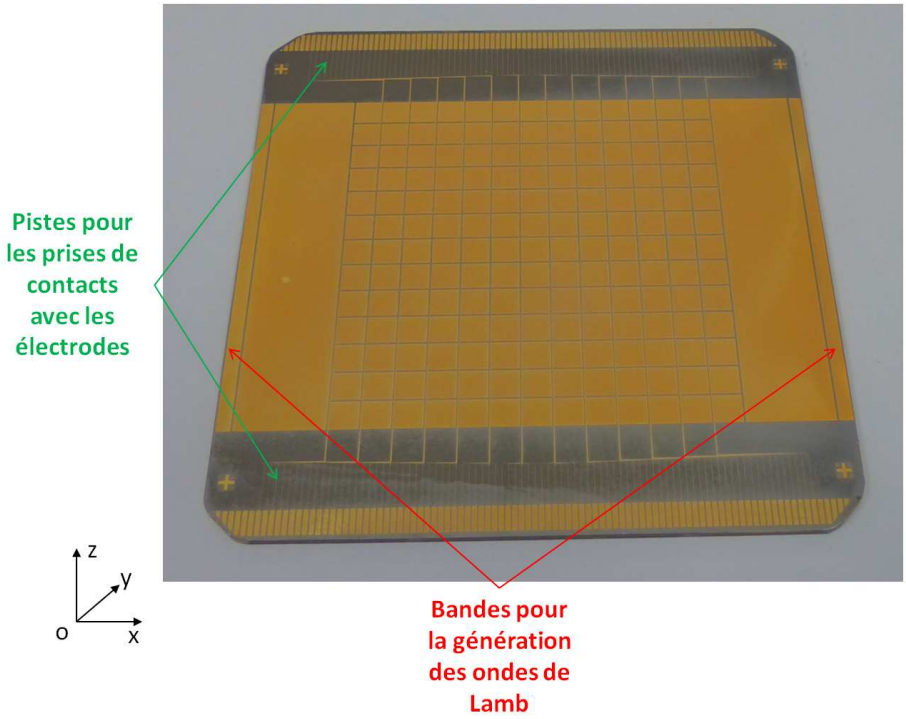


FIGURE 4.26 – Prototype d'une plaque phononique piézoélectrique avec des électrodes périodiques dans le plan yOx.

Annexes

Annexe A

Base de données des matériaux piézoélectriques utilisés

Les matériaux piézoélectriques choisis sont des céramiques de type PZT (Titano-Zirconate de Plomb). Plus exactement, la référence du fabricant *MEGGITT A/S* est le Pz26 [105]. Ces céramiques sont considérées de classe de symétrie *6mm*. Les composantes des trois tenseurs élastiques ($C^E_{\alpha\beta}$), diélectriques (ϵ^S_{ij}) et piézoélectriques ($e_{i\alpha}$) sont données par :

$$\left[\begin{array}{cccccc|ccc}
C^E_{11} & C^E_{12} & C^E_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_{31} \\
C^E_{12} & C^E_{11} & C^E_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_{31} \\
C^E_{13} & C^E_{13} & C^E_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_{33} \\
0 & 0 & 0 & C^E_{44} & 0 & 0 & 0 & e_{51} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & C^E_{44} & 0 & e_{51} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C^E_{66} & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & e_{51} & 0 & \epsilon^S_{11} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & e_{51} & 0 & 0 & 0 & \epsilon^S_{11} & 0 \\
e_{31} & e_{31} & e_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \epsilon^S_{33}
\end{array}\right]$$

La classe de symétrie du PZT permet d'écrire :

$$C^E_{66} = \frac{C^E_{11} + C^E_{12}}{2}. \tag{A.1}$$

Les valeurs des coefficients élastiques, piézoélectriques et diélectriques, fournies avec une incertitude de ±15% par le fabricant, sont regroupées dans la Table A.1.

TABLE A.1 – Constantes élastiques, piézoélectriques et diélectriques fournis par le fabricant avec une incertitude de ±15% pour le matériau Pz26 (PZT) [105].

Coeff. élastiques (GPa)	
C_{11}^E	168
C_{12}^E	110,3
C_{13}^E	99,9
C_{33}^E	122,6
C_{44}^E	30,1
C_{66}^E	28,8

Coeff. piézoélectriques ($C.m^{-2}$)	
e_{31}	-2,8
e_{33}	14,7
e_{15}	9,86

Permittivité électrique relative	
ϵ_{11}	828
ϵ_{33}	700

Les coefficients de couplage électromécaniques définis dans le premier chapitre dans la Table1.1 sont calculés à partir des paramètres de la Table A.1 et leurs valeurs sont regroupées dans la Table A.2.

TABLE A.2 – Coefficients de couplage électromécaniques calculés à partir des valeurs de référence de la Table A.1.

Coefficient de couplage	k_{33}	k_{31}	k_p	k'_p	k'_{31}	k_t	k'_{33}	k_{5e}	k_e	k_{15}	k_h
(%)	66,6	29,2	51,9	8,4	44,9	49,4	62,6	73,2	7,6	59	26,4

Cette base de données a été utilisée pour toutes les simulations numériques du cristal phononique CP_1 (chapitre 3). Pour les autres plaques étudiées et provenant d'un autre lot, des différences ont été observées sur les caractéristiques du matériau et en particulier sur le mode d'épaisseur. Cette constatation a été faite notamment sur la plaque CP_2 avant la découpe des électrodes réparties périodiquement. Ceci nous a conduit à définir un nouveau jeu de constantes. Cette modification s'est principalement effectuée par ajustements successifs des courbes de dispersion expérimentales.

Certains paramètres ont très peu d'influence sur les courbes de dispersion mais une nouvelle base de données a ainsi été définie de façon réaliste (Table A.3). Les variations des constantes restent dans la marge d'erreur donnée par le fabricant. De plus, les différents coefficients de couplages ont été recalculés pour vérifier la plausibilité de ce nouveau jeu

de constantes.

Dans la Table A.4 sont d'ailleurs données les variations de ces coefficients de couplage entre les deux bases de données Δk

$$\Delta k = \frac{|k^e - k^n|}{max(k^e, k^n)} \tag{A.2}$$

où k^e représentent les coefficients de couplages donnés dans la Table A.2 et k^n sont les coefficients calculés à partir de la nouvelle base de données.

TABLE A.3 – Constantes élastiques, piézoélectriques et diélectriques ajustés pour le matériau Pz26 (PZT).

Coefficients élastiques (GPa)	
C_{11}^E	175
C_{12}^E	110,3
C_{13}^E	95
C_{33}^E	124
C_{44}^E	26,4
C_{66}^E	32,3

Coefficients piézoélectriques ($C.m^{-2}$)	
e_{31}	-2,6
e_{33}	16,5
e_{15}	10

Permittivité électrique relative	
ϵ_{11}	800
ϵ_{33}	767

TABLE A.4 – Coefficients de couplage électromécaniques calculés à partir de coefficients de la Table A.3.

Coefficient de couplage	k_{33}	k_{31}	k_p	k'_p	k'_{31}	k_t	k'_{33}	k_{5e}	k_e	k_{15}	k_h
(%)	68,3	29,2	56,7	9,5	49	47	63,5	66,3	8,7	55,3	23,8
Δk(%)	2,9	10	8,4	11,6	8,3	4,7	1,37	9,38	12,4	6,4	9,7

Ce jeu de paramètres n'est a priori pas unique mais donne un bon accord entre les courbes de dispersion numérique et expérimentale comme cela est montré sur la figure A.1 qui correspond aux courbes de dispersion de la plaque piézoélectrique avec des électrodes uniformes étudiée dans le chapitre 2.

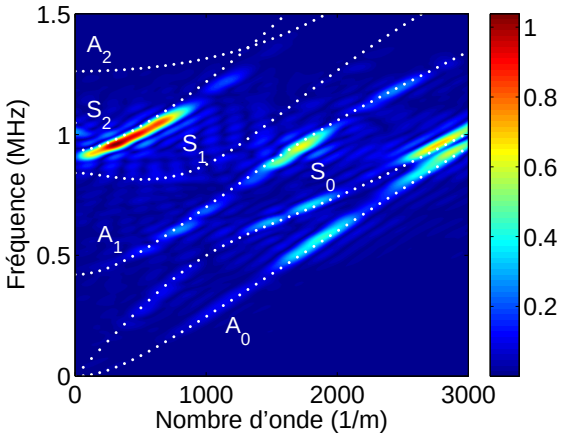


FIGURE A.1 – Courbes de dispersion expérimentales d'une plaque piézoélectrique avec des électrodes en CO en niveaux de couleurs. Les courbes de dispersion numérique calculées avec les coefficients de la Table A.3 sont superposées en blanc.

En résumé, la première base de donnée (Table A.1) a été utilisée dans le chapitre 3 pour les calculs sur l'échantillon CP_1. Alors que la seconde base de données ajustée (Table A.3) a été employée dans le reste des travaux.

Annexe B

Étude analytique des ondes de Lamb dans une plaque piézoélectrique avec des surfaces uniformes

Dans cette annexe sont données les équations de dispersion des ondes de Lamb dans une plaque piézoélectrique avec des surfaces uniformément recouvertes d'électrodes conductrices ou non. Cette modélisation théorique a été développée par Pascal Rembert, maître de conférences au LOMC, en se basant sur les travaux de Tiersten [102].

1 Équation de dispersion dans un matériau piézoélectrique

On rappelle que les équations constitutives de la piézoélectricité peuvent être exprimées par (chapitre 1, équations (1.5))

$$T_{ij} = c^E_{ijkl} S_{kl} - e_{kij} E_k \tag{B.1a}$$

$$D_i = e_{ikl} S_{kl} + \epsilon^S_{ik} E_k \tag{B.1b}$$

Le champ électrique (E_k) et la déformation (S_{ij}) s'écrivent respectivement en fonction du potentiel électrique φ et du déplacement u

$$E_k = -\varphi_{,k} \tag{B.2a}$$

$$S_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right) \tag{B.2b}$$

(avec $a_{,j} \equiv \partial a / \partial x_j$). Les contraintes ($T_{ij}$) et les déplacements électriques (D_i) se développent alors :

$$
\begin{aligned}
T_1 &= c_{11}^E u_{1,1} + c_{12}^E u_{2,2} + c_{13}^E u_{3,3} + e_{31}\varphi_{,3} && \text{(B.3a)}\\
T_2 &= c_{12}^E u_{1,1} + c_{11}^E u_{2,2} + c_{13}^E u_{3,3} + e_{31}\varphi_{,3} && \text{(B.3b)}\\
T_3 &= c_{13}^E u_{1,1} + c_{13}^E u_{2,2} + c_{33}^E u_{3,3} + e_{33}\varphi_{,3} && \text{(B.3c)}\\
T_4 &= c_{44}^E u_{3,2} + c_{44}^E u_{2,3} + e_{15}\varphi_{,2} && \text{(B.3d)}\\
T_5 &= c_{44}^E u_{3,1} + c_{44}^E u_{1,3} + e_{15}\varphi_{,1} && \text{(B.3e)}\\
T_6 &= c_{66}^E u_{2,1} + c_{66}^E u_{1,2} && \text{(B.3f)}\\
D_1 &= e_{15} u_{3,1} + e_{15} u_{1,3} - \epsilon_{11}^S \varphi_{,1} && \text{(B.3g)}\\
D_2 &= e_{15} u_{3,2} + e_{15} u_{2,3} - \epsilon_{11}^S \varphi_{,2} && \text{(B.3h)}\\
D_3 &= e_{31} u_{1,1} + e_{31} u_{2,2} + e_{33} u_{3,3} - \epsilon_{33}^S \varphi_{,3} && \text{(B.3i)}
\end{aligned}
$$

On écrit l'équation du mouvement du système

$$T_{ij,i} = \rho \ddot{u}_j \tag{B.4}$$

ρ étant la masse volumique.

On considère une onde monochromatique progressive selon l'axe Ox_3 dont l'expression du déplacement est

$$u_i = B_i e^{\mathrm{j}\omega(t - s_1 x_1 - s_2 x_2 - s_3 x_3)} \tag{B.5}$$

avec $\omega s_i = k_i$ projections du vecteur d'onde dans le matériau selon x_i. Les B_i sont les amplitudes du déplacement.

L'équation (B.4) devient

$$T_{ij,i} = -\rho\omega^2 u_j \tag{B.6}$$

On écrit également l'équation de la charge

$$D_{i,i} = 0. \tag{B.7}$$

On obtient avec la relation (B.6)

$$
\begin{aligned}
T_{11,1} + T_{21,2} + T_{31,3} &= -\rho\omega^2 u_1 && \text{(B.8a)}\\
T_{12,1} + T_{22,2} + T_{32,3} &= -\rho\omega^2 u_2 && \text{(B.8b)}\\
T_{13,1} + T_{23,2} + T_{33,3} &= -\rho\omega^2 u_3 && \text{(B.8c)}\\
D_{1,1} + D_{2,2} + D_{3,3} &= 0. && \text{(B.8d)}
\end{aligned}
$$

En remplaçant le déplacement $\mathbf{u}$ donné par la relation (B.5), on obtient un système indépendant de la pulsation ω. De plus, la propagation étant uniquement considérée dans le plan x_1Ox_3, et supposée indépendante de x_2, s_2 doit être nulle, le système s'écrit alors

$$\begin{bmatrix} c_{11}^E s_1^2 + c_{44}^E s_3^2 - \rho & 0 & [c_{13}^E + c_{44}^E] s_1 s_3 & [e_{31} + e_{15}] s_1 s_3 \\ 0 & c_{66}^E s_1^2 + c_{44}^E s_3^2 - \rho & 0 & 0 \\ [c_{44}^E + c_{13}^E] s_1 s_3 & 0 & c_{44}^E s_1^2 + c_{33}^E s_3^2 - \rho & e_{15} s_1^2 + e_{33} s_3^2 \\ [e_{31} + e_{15}] s_1 s_3 & 0 & e_{15} s_1^2 + e_{33} s_3^2 & -[\epsilon_{11}^S s_1^2 + \epsilon_{33}^S s_3^2] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ B_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{B.9}$$

Ainsi, l'équation aux valeurs propres relative au déplacement u_2 se découple du reste du système et peut être traitée d'une manière indépendante. Dans le reste du calcul, on se focalise uniquement sur le sous-système $\mathbf{M}(s_1, s_3)\hat{\mathbf{B}} = \mathbf{0}$

$$\begin{bmatrix} c_{11}^E s_1^2 + c_{44}^E s_3^2 - \rho & [c_{13}^E + c_{44}^E] s_1 s_3 & [e_{31} + e_{15}] s_1 s_3 \\ [c_{44}^E + c_{13}^E] s_1 s_3 & c_{44}^E s_1^2 + c_{33}^E s_3^2 - \rho & e_{15} s_1^2 + e_{33} s_3^2 \\ [e_{31} + e_{15}] s_1 s_3 & e_{15} s_1^2 + e_{33} s_3^2 & -[\epsilon_{11}^S s_1^2 + \epsilon_{33}^S s_3^2] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_3 \\ B_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{B.10}$$

Afin de préparer le calcul des ondes de Lamb se propageant dans la direction Ox_1, on va considérer les solutions de valeurs propres du système précédent pour une valeur s_1 donnée, c'est à dire en considérant s_3 comme l'inconnue de ce problème. Dans ce cas le sous-système se résume à $\mathbf{M}(s_3)\hat{\mathbf{B}} = \mathbf{0}$, $\hat{\mathbf{B}}$ étant le vecteur propre droit associé à s_3. Le déterminant de la matrice précédente est alors le polynôme

$$\alpha s_3^6 + \beta s_3^4 + \gamma s_3^2 + \delta = 0 \tag{B.11}$$

avec :

$$\alpha = c_{44}^E(\epsilon_{33}^S c_{33}^E + e_{33}^2) \tag{B.12a}$$

$$\begin{aligned} \beta = & \big[-(c_{13}^E + c_{44}^E)^2 \epsilon_{33}^S - 2e_{33}(e_{31} + e_{15})(c_{13}^E + c_{44}^E) \\ & +(e_{31} + e_{15})^2 c_{33}^E + c_{44}^E(\epsilon_{33}^S c_{44}^E + \epsilon_{11}^S c_{33}^E + 2e_{15}e_{33}) + c_{11}^E(c_{33}^E \epsilon_{33}^S + e_{33}^2)\big]\, s_1^2 \\ & -\rho(\epsilon_{33}^S c_{33}^E + {e_{33}}^2 + \epsilon_{33}^S c_{44}^E) \end{aligned} \tag{B.12b}$$

$$\begin{aligned} \gamma = & \Big[e_{15}^2 c_{44}^E + \epsilon_{11}^S[{c_{44}^E}^2 + c_{11}^E c_{33}^E - (c_{44}^E + c_{13}^E)^2] + \epsilon_{33}^S c_{11}^E c_{44}^E \\ & +2c_{11}^E e_{15} e_{33} + (e_{31} + e_{15})^2 c_{44}^E - 2(e_{31} + e_{15})(c_{13}^E + c_{44}^E) e_{15}\Big]\, s_1^4 \\ & -\rho(\epsilon_{33}^S c_{44}^E + \epsilon_{11}^S c_{33}^E + 2e_{15}e_{33} + c_{11}^E \epsilon_{33}^S + \epsilon_{11}^S c_{44}^E + (e_{31} + e_{15})^2) s_1^2 \\ & +\rho^2 \epsilon_{33}^S \end{aligned} \tag{B.12c}$$

$$\delta = (c_{11}^E e_{15}^2 + c_{11}^E \epsilon_{11}^S c_{44}^E) s_1^6 - \rho[e_{15}^2 + \epsilon_{11}^S(c_{44}^E + c_{11}^E)] s_1^4 + \rho^2 \epsilon_{11}^S s_1^2 \tag{B.12d}$$

Les trois valeurs propres s_{3p} $(p = 1, 2, 3)$ ainsi que leurs opposées sont des solutions du système (B.10) :

$$s_{31} = \sqrt{\frac{\Delta}{3\alpha 2^{1/3}} - \frac{2^{1/3}\left(3\alpha\gamma - \beta^2\right)}{3\alpha\Delta} - \frac{\beta}{3\alpha}}, \tag{B.13a}$$

$$s_{32} = \sqrt{-\frac{\left(1 - i\sqrt{3}\right)\Delta}{6\alpha 2^{1/3}} + \frac{\left(1 + i\sqrt{3}\right)\left(3\alpha\gamma - \beta^2\right)}{3\ \alpha 2^{2/3}\Delta} - \frac{\beta}{3\alpha}}, \tag{B.13b}$$

$$s_{33} = \sqrt{-\frac{\left(1 + i\sqrt{3}\right)\Delta}{6\alpha 2^{1/3}} + \frac{\left(1 - i\sqrt{3}\right)\left(3\alpha\gamma - \beta^2\right)}{3\ \alpha 2^{2/3}\Delta} - \frac{\beta}{3\alpha}}, \tag{B.13c}$$

où

$$\Delta = \left\{[(-27\alpha^2\delta + 9\alpha\beta\gamma - 2\beta^3)^2 + 4(3\alpha\gamma - \beta^2)^3]^{1/2} - 27\alpha^2\delta + 9\alpha\beta\gamma - 2\beta^3\right\}^{1/3} \tag{B.14}$$

On utilisera pour la suite les vecteurs propres normalisés $\mathbf{B}_p = \hat{\mathbf{B}}_p/\|\hat{\mathbf{B}}_p\|$, $\hat{\mathbf{B}}_p = \begin{bmatrix}\hat{B}_{1p} & \hat{B}_{3p} & \hat{B}_{4p}\end{bmatrix}^t$ étant le vecteur propre associé à s_{3p}.

2 Propagation dans une plaque piézoélectrique avec électrodes

On considère la propagation d'ondes de Lamb selon la direction Ox_1 dans une plaque piézoélectrique infinie dans les directions Ox_1 et Ox_2 comme présenté sur la figure B.1. La plaque d'épaisseur h est de classe de symétrie *6mm*, elle est polarisée suivant l'axe Ox_3. On considère dans un premier temps que deux électrodes métalliques d'une épaisseur négligeable e ($e <<< h$) ont été déposées sur les deux faces de la plaque.

FIGURE B.1 – Géométrie de la plaque et conventions utilisées.

Pour développer les équations de Lamb, on admet les hypothèses suivantes :

1. Les deux faces parallèles de la plaque sont localisées à $\pm h/2$,
2. Les contraintes sur ces deux faces sont nulles : $T_{3j}(x_3 = \pm h/2) = 0$ (conditions de vibration libre),
3. Le potentiel électrique sur chaque face est également nul : $\varphi(x_3 = \pm h/2) = 0$.

Les composantes u_i ($i = 1, 3, 4$) du champ de déplacement $\mathbf{u} = \begin{bmatrix}u_1 & u_3 & u_4 = \varphi\end{bmatrix}^t$ s'écrivent en fonction des valeurs et vecteurs propres notés respectivement $\pm s_{3n}$ et $B_{in}^{\pm}$:

$$u_i = e^{(-\mathrm{i}\omega s_1 x_1 + \mathrm{i}\omega t)} \sum_{n=1}^{3} C_n^+ B_{in}^+ e^{-\mathrm{i}\omega s_{3n} x_3} + C_n^- B_{in}^- e^{+\mathrm{i}\omega s_{3n} x_3} \tag{B.15}$$

Les six inconnues du problème sont les amplitudes $C_n^{\pm}$. À partir de ce point, on omet le terme $e^{-i\omega(s_1 x_1 + t}$ de l'expression des champs étudiés. En posant : $B_{1n}^- = B_{1n}^+$

L'introduction de ces expressions dans les formules des tractions normales T_3 et tangentielle T_5 données dans les équations (B.3) aboutit à :

$$T_3 = \sum_{n=1}^{3} C_n^+ U_n e^{-\mathrm{i}\omega s_{3n} x_3} + C_n^- U_n e^{+\mathrm{i}\omega s_{3n} x_3} \tag{B.16}$$

$$T_5 = \sum_{n=1}^{3} C_n^+ V_n e^{-\mathrm{i}\omega s_{3n} x_3} + C_n^- \left(-V_n\right) e^{+\mathrm{i}\omega s_{3n} x_3} \tag{B.17}$$

$$\varphi = \sum_{n=1}^{3} C_n^+ B_{4n}^+ e^{-\mathrm{i}\omega s_{3n} x_3} - C_n^- B_{4n}^+ e^{+\mathrm{i}\omega s_{3n} x_3} \tag{B.18}$$

avec :

$$U_n = i\omega s_1 c_{13}^E B_{1n}^+ - C_{33}^E B_{3n}^+ (i\omega s_{3n}) - e_{33} B_{4n}^+ (i\omega s_{3n}) \tag{B.19}$$

$$V_n = c_{44}^E B_{1n}^+ (-i\omega s_{3n}) - i\omega s_1 C_{44}^E B_{3n}^+ - i\omega s_1 e_{15} B_{4n}^+ \tag{B.20}$$

La solution non triviale du système

$$T_3(x_3 = \pm h/2) = 0 \tag{B.21a}$$

$$T_5(x_3 = \pm h/2) = 0 \tag{B.21b}$$

$$\varphi(x_3 = \pm h/2) = 0 \tag{B.21c}$$

donne les deux équations découplées des modes Lamb symétriques et antisymétriques :

$$U_1 \cot\phi_1 \left[V_2 B_{43}^+ - V_3 B_{42}^+\right] - U_2 \cot\phi_2 \left[V_1 B_{43}^+ - V_3 B_{41}^+\right] + U_3 \cot\phi_3 \left[V_1 B_{42}^+ - V_2 B_{41}^+\right] = 0 \tag{B.22a}$$

$$U_1 \tan\phi_1 \left[V_2 B_{43}^+ - V_3 B_{42}^+\right] - U_2 \tan\phi_2 \left[V_1 B_{43}^+ - V_3 B_{41}^+\right] + U_3 \tan\phi_3 \left[V_1 B_{42}^+ - V_2 B_{41}^+\right] = 0 \tag{B.22b}$$

avec

$$\phi_n = \omega s_{3n} \frac{h}{2} \tag{B.23}$$

Les équations (B.22a) et (B.22b) correspondent respectivement aux modes de Lamb symétriques S_n et antisymétriques A_n.

L'accord entre les courbes de dispersion obtenues avec le calcul par éléments finis (présentées dans le chapitre 2) et celles tracées à l'aide des solutions réelles des équations de dispersion de Lamb (B.22) est parfait comme montré sur la figure B.2a.

3 Propagation dans une plaque piézoélectrique sans électrodes

Dans ce cas d'étude, les conditions aux limites électriques en $x_3 = \pm h/2$ sont :

$$T_3 = 0 \tag{B.24a}$$
$$T_5 = 0 \tag{B.24b}$$
$$D_3 = 0 \tag{B.24c}$$

La troisième composante du déplacement électrique D_3 s'écrit

$$\begin{aligned} D_3 &= e_{31}u_{1,1} + e_{33}u_{3,3} - \epsilon_{33}^S \varphi_{,3} \\ &= \sum_{n=1}^{3} C_n^+ W_n e^{-\mathrm{i}\omega s_{3n} x_3} + C_n^- W_n e^{+\mathrm{i}\omega s_{3n} x_3} \end{aligned} \tag{B.25}$$

avec :

$$W_n = (-\mathrm{i}) \left[e_{31} B_{1n}^+ \omega s_1 + e_{33} B_{3n}^+ \omega s_{3n} - \epsilon_{33}^S B_{4n}^+ \omega s_{3n} \right] \tag{B.26}$$

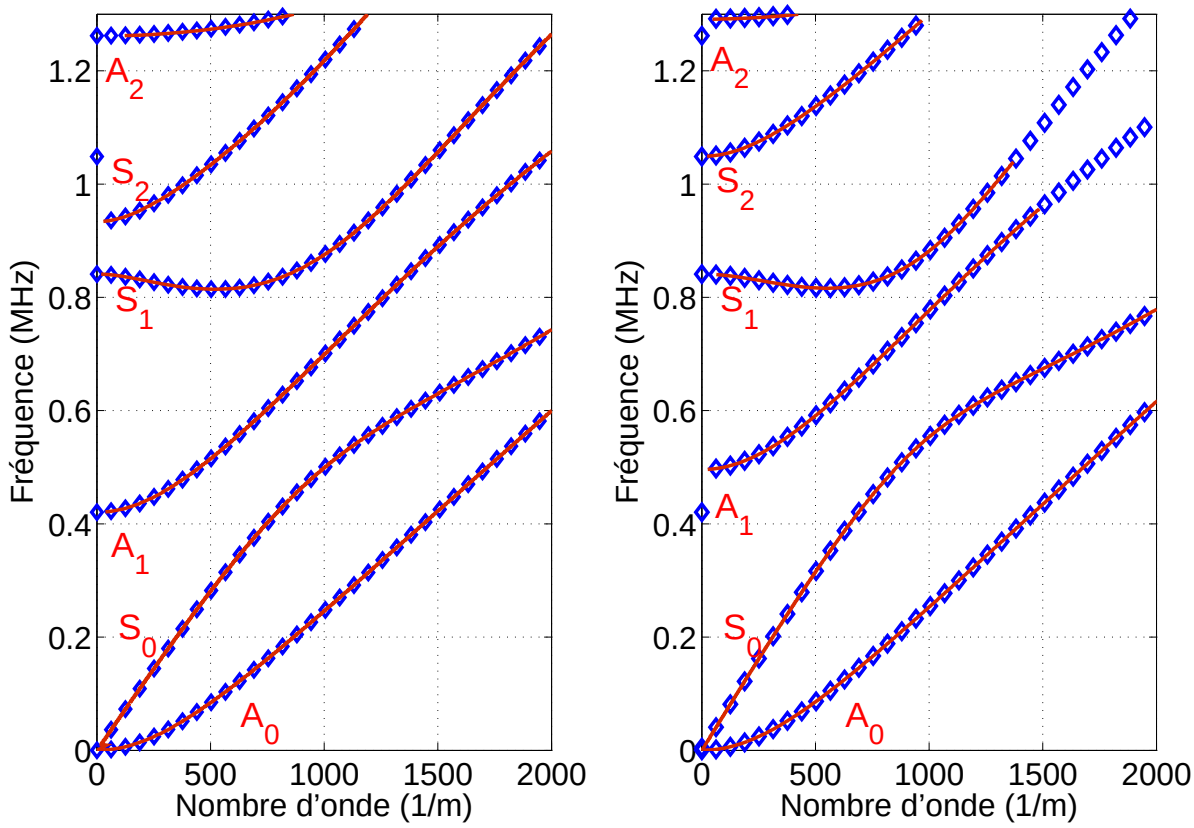
En suivant les mêmes démarches de calcul que pour une plaque avec électrodes, on obtient les équations de Lamb pour une plaque piézoélectrique sans électrodes

$$V_1 \tan\phi_1 \left[U_2 W_3 - W_2 U_3\right] - V_2 \tan\phi_2 \left[U_1 W_3 - W_1 U_3\right] + V_3 \tan\phi_3 \left[U_1 W_2 - W_1 U_2\right] = 0 \tag{B.27a}$$

$$V_1 \cot\phi_1 \left[U_2 W_3 - W_2 U_3\right] - V_2 \cot\phi_2 \left[U_1 W_3 - W_1 U_3\right] + V_3 \cot\phi_3 \left[U_1 W_2 - W_1 U_2\right] = 0 \tag{B.27b}$$

La première équation correspond aux modes de Lamb symétriques S_n et la deuxième est celle des modes antisymétriques A_n.

Comme dans le cas de la plaque avec électrodes, on observe une totale concordance entre les courbes de dispersion obtenues avec le calcul par éléments finis (présentées dans le chapitre 2) et celles tracées à l'aide des solutions réelles des équations de dispersion de Lamb (B.27) comme montré sur la figure B.2b.



(a) Plaque piézoélectrique avec électrodes.

(b) Plaque piézoélectrique sans électrode.

FIGURE B.2 – Courbes de dispersion analytiques (trait rouge) superposées avec les courbes de dispersion numériques (losanges bleus) calculées pour une plaque piézoélectrique en Pz26 d'épaisseur $2,2\ mm$: (a) sans électrodes, (b) avec électrodes.

4 Étude des fréquences de coupures

Il est intéressent d'étudier le cas particulier des fréquences de coupures f_c de chaque mode, c'est à dire examiner le cas particulier $s_1 = 0$ [44]. Dans ce cas, les coefficients de l'équation (B.11) deviennent

$$\alpha = c_{44}^E(\epsilon_{33}^S c_{33}^E + e_{33}^2), \tag{B.28a}$$
$$\beta = -\rho(\epsilon_{33}^S c_{33}^E + {e_{33}}^2 + \epsilon_{33}^S c_{44}^E), \tag{B.28b}$$
$$\gamma = \rho^2 \epsilon_{33}^S, \tag{B.28c}$$
$$\delta = 0, \tag{B.28d}$$

et l'équation aux valeurs propres se réduit à

$$s_3^2(\alpha s_3^4 + \beta s_3^2 + \gamma s_3) = 0. \tag{B.29}$$

Elle admet pour solutions $s_3 = 0$ comme valeur propre double, $s_{3L} = \pm 1/v_L$ et $s_{3T} = \pm 1/v_T$ où

$$v_L = \sqrt{\frac{c_{33}^E + \frac{e_{33}^2}{\epsilon_{33}^S}}{\rho}} = \sqrt{\frac{c_{33}^D}{\rho}}, \tag{B.30a}$$

$$v_T = \sqrt{\frac{c_{44}^E}{\rho}}. \tag{B.30b}$$

$$\tag{B.30c}$$

sont respectivement les vitesses longitudinale et transversale définies en fonction des coefficients du matériau piézoélectrique.

Les équations de dispersion pour une plaque avec électrodes se simplifient alors

$$\begin{cases} -cos\frac{\omega s_{3L} h}{2} sin\frac{\omega s_{3T} h}{2} = 0 \\ -sin\frac{\omega s_{3L} h}{2} cos\frac{\omega s_{3T} h}{2} = 0 \end{cases} \tag{B.31}$$

et celles pour une plaque sans électrode étant rigoureusement identiques.

La première équation du système (B.31) fournit les branches symétriques S_n, et l'autre permet de calculer les branches antisymétriques A_n.

Les deux premiers modes symétrique S_0 et antisymétrique A_0 se distinguent des autres modes d'ordres supérieurs car ils ne présentent pas de fréquences de coupures.

Les expressions des fréquences de coupures pour la plaque piézoélectrique avec les deux conditions aux limites électriques pour les branches symétriques S_n sont

$$f_c = \begin{cases} (2p+1)\frac{v_L}{2e} \\ p\frac{v_T}{e} \end{cases} \tag{B.32}$$

et celles des branches antisymétriques A_n

$$f_c = \begin{cases} (2p+1)\frac{v_T}{2e} \\ p\frac{v_L}{e} \end{cases} \tag{B.33}$$

où p est un entier.

Les expressions (B.33) et (B.32) sont discutées dans le second chapitre en fonction des CLE considérées.

Bibliographie

[1] M. S. Kushwaha, P. Halevi, L. Dobrzynski, et B. Djafari-Rouhani, "Acoustic band structure of periodic elastic composites," *Physical Review Letters*, vol. 71, no. 13, p. 2022, 1993.

[2] M. Su, R. Olsson III, Z. Leseman, et I. El-Kady, "Realization of a phononic crystal operating at gigahertz frequencies," *Applied Physics Letters*, vol. 96, no. 5, p. 053111, 2010.

[3] A. Khelif, A. Choujaa, S. Benchabane, B. Djafari-Rouhani, et V. Laude, "Experimental study of guiding and filtering of acoustic waves in a two dimensional ultrasonic crystal," *Zeitschrift für Kristallographie-Crystalline Materials*, vol. 220, no. 9-10, pp. 836–840, 2005.

[4] B. Morvan, A. Tinel, A.-C. Hladky-Hennion, J. Vasseur, et B. Dubus, "Experimental demonstration of the negative refraction of a transverse elastic wave in a two-dimensional solid phononic crystal," *Applied Physics Letters*, vol. 96, no. 10, p. 101905, 2010.

[5] Y. Pennec, B. Djafari-Rouhani, J. Vasseur, A. Khelif, et P. Deymier, "Tunable filtering and demultiplexing in phononic crystals with hollow cylinders," *Physical Review E*, vol. 69, no. 4, p. 046608, 2004.

[6] D. Torrent et J. Sánchez-Dehesa, "Acoustic cloaking in two dimensions : a feasible approach," *New Journal of Physics*, vol. 10, no. 6, p. 063015, 2008.

[7] A. Sukhovich, B. Merheb, K. Muralidharan, J. Vasseur, Y. Pennec, P. Deymier, et J. Page, "Experimental and theoretical evidence for subwavelength imaging in phononic crystals," *Physical review letters*, vol. 102, no. 15, p. 154301, 2009.

[8] S. Degraeve, C. Granger, B. Dubus, J. Vasseur, A.-C. Hladky, et M. P. Thi, "Contrôle électrique de la propagation d'ondes élastiques dans des cristaux phononiques piézoélectriques," *21ème Congrès Français de Mécanique, 26 au 30 août 2013, Bordeaux, France (FR)*, 2013.

[9] S. Degraeve, C. Granger, B. Dubus, J.-O. Vasseur, M. P. Thi, et A.-C. Hladky-Hennion, "Bragg band gaps tunability in an homogeneous piezoelectric rod with periodic electrical boundary conditions," *Journal of applied Physics*, vol. 115, no. 19, p. 194508, 2014.

[10] S. Mansoura, P. Maréchal, B. Morvan, A. Hladky-Hennion, et B. Dubus, "Active control of a piezoelectric phononic crystal using electrical impedance," in *2014 IEEE International Ultrasonics Symposium*. IEEE, 2014, pp. 951–954.

[11] S. Mansoura, B. Morvan, P. Marechal, J. Vasseur, A. Hladky-Hennion, et B. Dubus, "Gap d'hybridation dans un cristal phononique 1d constitue de materiaux piezoelctriques," in *12 eme Congres Francais d'Acoustique, CFA 2014*, 2014, pp. Session–APUS1.

[12] M.-F. Ponge, B. Dubus, C. Granger, J. Vasseur, M. P. Thi, et A.-C. Hladky-Hennion, "Optimization of a tunable piezoelectric resonator using phononic crystals with periodic electrical boundary conditions," *Physics Procedia*, vol. 70, pp. 258–261, 2015.

[13] S. Degraeve, C. Granger, B. Dubus, J. Vasseur, M. P. Thi, et A.-C. Hladky, "Tunability of bragg band gaps in one-dimensional piezoelectric phononic crystals using external capacitances," *Smart Materials and Structures*, vol. 24, no. 8, p. 085013, 2015.

[14] W. Bragg et W. Bragg, "X rays and crystal structure," *Archives of the Roentgen Ray*, vol. 19, no. 12, pp. 446–446, 1915.

[15] G. Floquet, "Sur les équations différentielles linéaires à coefficients périodiques," in *Annales scientifiques de l'École normale supérieure*, vol. 12, 1883, pp. 47–88.

[16] F. Bloch, "Quantum mechanics of electrons in crystal lattices," *Z. Phys*, vol. 52, pp. 555–600, 1928.

[17] L. Brillouin, "La mécanique ondulatoire de schrödinger ; une méthode générale de résolution par approximations successives," *CR Acad. Sci*, vol. 183, no. 11, pp. 24–26, 1926.

[18] V. G. Veselago, "The electrodynamics of substances with simultaneously negative values of and," *Soviet physics uspekhi*, vol. 10, no. 4, p. 509, 1968.

[19] J. B. Pendry, "Negative refraction makes a perfect lens," *Physical review letters*, vol. 85, no. 18, p. 3966, 2000.

[20] D. Schurig, J. Mock, B. Justice, S. A. Cummer, J. B. Pendry, A. Starr, et D. Smith, "Metamaterial electromagnetic cloak at microwave frequencies," *Science*, vol. 314, no. 5801, pp. 977–980, 2006.

[21] D. R. Smith, J. B. Pendry, et M. C. Wiltshire, "Metamaterials and negative refractive index," *Science*, vol. 305, no. 5685, pp. 788–792, 2004.

[22] C. Luo, S. G. Johnson, J. Joannopoulos, et J. Pendry, "All-angle negative refraction without negative effective index," *Physical Review B*, vol. 65, no. 20, p. 201104, 2002.

[23] T. Ergin, N. Stenger, P. Brenner, J. B. Pendry, et M. Wegener, "Three-dimensional invisibility cloak at optical wavelengths," *Science*, vol. 328, no. 5976, pp. 337–339, 2010.

[24] S. A. Cummer, B.-I. Popa, D. Schurig, D. R. Smith, et J. Pendry, "Full-wave simulations of electromagnetic cloaking structures," *Physical Review E*, vol. 74, no. 3, p. 036621, 2006.

[25] S. Yang, J. Page, Z. Liu, M. Cowan, C. Chan, et P. Sheng, "Focusing of sound in a 3d phononic crystal," *Physical review letters*, vol. 93, no. 2, p. 024301, 2004.

[26] Z. Liu, X. Zhang, Y. Mao, Y. Zhu, Z. Yang, C. Chan, et P. Sheng, "Locally resonant sonic materials," *Science*, vol. 289, no. 5485, pp. 1734–1736, 2000.

[27] T. Brunet, J. Leng, et O. Mondain-Monval, "Soft acoustic metamaterials," *Science*, vol. 342, no. 6156, pp. 323–324, 2013.

[28] P. Sheng, X. Zhang, Z. Liu, et C. Chan, "Locally resonant sonic materials," *Physica B : Condensed Matter*, vol. 338, no. 1, pp. 201–205, 2003.

[29] G. Wang, X. Wen, J. Wen, L. Shao, et Y. Liu, "Two-dimensional locally resonant phononic crystals with binary structures," *Physical review letters*, vol. 93, no. 15, p. 154302, 2004.

[30] J.-C. Hsu et T.-T. Wu, "Lamb waves in binary locally resonant phononic plates with two-dimensional lattices," *Applied physics letters*, vol. 90, no. 20, p. 201904, 2007.

[31] Y. Pennec, B. Djafari-Rouhani, H. Larabi, J. Vasseur, et A. Hladky-Hennion, "Low-frequency gaps in a phononic crystal constituted of cylindrical dots deposited on a thin homogeneous plate," *Physical Review B*, vol. 78, no. 10, p. 104105, 2008.

[32] M. Oudich, Y. Li, B. M. Assouar, et Z. Hou, "A sonic band gap based on the locally resonant phononic plates with stubs," *New Journal of Physics*, vol. 12, no. 8, p. 083049, 2010.

[33] O. R. Bilal et M. I. Hussein, "Trampoline metamaterial : Local resonance enhancement by springboards," *Applied Physics Letters*, vol. 103, no. 11, p. 111901, 2013.

[34] C. Goffaux et J. Vigneron, "Theoretical study of a tunable phononic band gap system," *Physical Review B*, vol. 64, no. 7, p. 075118, 2001.

[35] K. Bertoldi et M. Boyce, "Mechanically triggered transformations of phononic band gaps in periodic elastomeric structures," *Physical Review B*, vol. 77, no. 5, p. 052105, 2008.

[36] K. Jim, C. Leung, S. Lau, S. Choy, et H. Chan, "Thermal tuning of phononic band-structure in ferroelectric ceramic/epoxy phononic crystal," *Applied Physics Letters*, vol. 94, no. 19, p. 193501, 2009.

[37] Y.-Z. Wang, F.-M. Li, K. Kishimoto, Y.-S. Wang, et W.-H. Huang, "Elastic wave band gaps in magnetoelectroelastic phononic crystals," *Wave Motion*, vol. 46, no. 1, pp. 47–56, 2009.

[38] Y.-Z. Wang, F.-M. Li, W.-H. Huang, X. Jiang, Y.-S. Wang, et K. Kishimoto, "Wave band gaps in two-dimensional piezoelectric/piezomagnetic phononic crystals," *International Journal of Solids and Structures*, vol. 45, no. 14, pp. 4203–4210, 2008.

[39] J.-F. Robillard, O. B. Matar, J. Vasseur, P. A. Deymier, M. Stippinger, A.-C. Hladky-Hennion, Y. Pennec, et B. Djafari-Rouhani, "Tunable magnetoelastic phononic crystals," *Applied Physics Letters*, vol. 95, no. 12, p. 124104, 2009.

[40] X. Chen, X. Xu, S. Ai, H. Chen, Y. Pei, et X. Zhou, "Active acoustic metamaterials with tunable effective mass density by gradient magnetic fields," *Applied Physics Letters*, vol. 105, no. 7, p. 071913, 2014.

[41] B. Jaffe, R. Roth, et S. Marzullo, "Piezoelectric properties of lead zirconate-lead titanate solid-solution ceramics," *Journal of Applied Physics*, vol. 25, no. 6, pp. 809–810, 1954.

[42] H. Kawai, "The piezoelectricity of poly (vinylidene fluoride)," *Japanese Journal of Applied Physics*, vol. 8, no. 7, p. 975, 1969.

[43] R. Newnham, D. Skinner, et L. Cross, "Connectivity and piezoelectric-pyroelectric composites," *Materials Research Bulletin*, vol. 13, no. 5, pp. 525–536, 1978.

[44] E. Dieulesaint et D. Royer, *Ondes élastiques dans les solides : application au traitement du signal.* Masson, 1974, vol. 1.

[45] D. A. Berlincourt, D. R. Curran, et H. Jaffe, "Piezoelectric and piezomagnetic materials and their function in transducers," *Physical Acoustics : Principles and Methods*, vol. 1, no. Part A, pp. 169–270, 1964.

[46] T. Ikeda, *Fundamentals of piezoelectricity.* Oxford university press, 1996.

[47] R. Krimholtz, D. A. Leedom, et G. L. Matthaei, "New equivalent circuits for elementary piezoelectric transducers," *Electronics Letters*, vol. 13, no. 6, pp. 398–399, 1970.

[48] S. Van Kervel et J. Thijssen, "A calculation scheme for the optimum design of ultrasonic transducers," *Ultrasonics*, vol. 21, no. 3, pp. 134–140, 1983.

[49] R. Desmare, "Optimisation de transducteurs ultrasonores à structure multicouche." Ph.D. dissertation, Université de Nantes et Université du Maine, 1999.

[50] M. Lethiecq, F. Patat, L. Pourcelot, et L. Tran-Huu-Hue, "Measurement of losses in five piezoelectric ceramics between 2 and 50 mhz," *IEEE transactions on ultrasonics, ferroelectrics, and frequency control*, vol. 40, no. 3, pp. 232–237, 1993.

[51] H. F. Olson, "Electronic control of noise, vibration, and reverberation," *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 28, no. 5, pp. 966–972, 1956.

[52] R. L. Forward, "Electronic damping of orthogonal bending modes in a cylindrical mast-experiment," *Journal of Spacecraft and Rockets*, vol. 18, no. 1, pp. 11–17, 1981.

[53] N. W. Hagood et A. von Flotow, "Damping of structural vibrations with piezoelectric materials and passive electrical networks," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 146, no. 2, pp. 243–268, 1991.

[54] D. Edberg, A. Bicos, et J. Fechter, "On piezoelectric energy conversion for electronic passive damping enhancement," in *Proceedings of Damping*, vol. 91, 1991, pp. 717–724.

[55] J. J. Hollkamp, "Multimodal passive vibration suppression with piezoelectric materials and resonant shunts," *Journal of intelligent material systems and structures*, vol. 5, no. 1, pp. 49–57, 1994.

[56] O. Thorp, M. Ruzzene, et A. Baz, "Attenuation and localization of wave propagation in rods with periodic shunted piezoelectric patches," *Smart Materials and Structures*, vol. 10, no. 5, p. 979, 2001.

[57] M. Ruzzene et A. M. Baz, "Attenuation and localization of wave propagation in periodic rods using shape memory inserts," in *SPIE's 7th Annual International Symposium on Smart Structures and Materials.* International Society for Optics and Photonics, 2000, pp. 389–407.

[58] Z. Hou, F. Wu, et Y. Liu, "Phononic crystals containing piezoelectric material," *Solid State Communications*, vol. 130, no. 11, pp. 745–749, 2004.

[59] S. Gonella, A. C. To, et W. K. Liu, "Interplay between phononic bandgaps and piezoelectric microstructures for energy harvesting," *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 57, no. 3, pp. 621–633, 2009.

[60] I. Ostrovskii, V. Klymko, et A. Nadtochiy, "Plate wave stop-bands in periodically poled lithium niobate," *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 125, no. 4, pp. EL129–EL133, 2009.

[61] S. Degraeve, "Cristaux phononiques accordables." Ph.D. dissertation, L'UNIVERSITE LILLE 1, 2013.

[62] Z. Hou et B. M. Assouar, "Tunable solid acoustic metamaterial with negative elastic modulus," *Applied Physics Letters*, vol. 106, no. 25, p. 251901, 2015.

[63] T. Miyashita et C. Inoue, "Numerical investigations of transmission and waveguide properties of sonic crystals by finite-difference time-domain method," *Japanese Journal of Applied Physics*, vol. 40, no. 5S, p. 3488, 2001.

[64] Y. Pennec, B. Djafari-Rouhani, J. O. Vasseur, H. Larabi, A. Khelif, A. Choujaa, S. Benchabane, et V. Laude, "Acoustic channel drop tunneling in a phononic crystal," *Applied Physics Letters*, vol. 87, no. 26, p. 261912, 2005.

[65] T. Miyashita, "Sonic crystals and sonic wave-guides," *Measurement Science and Technology*, vol. 16, no. 5, p. R47, 2005.

[66] G. Caruyer, "Modélisation, conception et caractérisation de résonateurs et filtres à onde acoustique de volume pour le filtrage rf en téléphonie mobile," Ph.D. dissertation, Lille 1, 2005.

[67] S.-H. Kim et M. P. Das, "Seismic waveguide of metamaterials," *Modern Physics Letters B*, vol. 26, no. 17, p. 1250105, 2012.

[68] S.-H. Kim, "Seismic wave attenuator made of acoustic metamaterials," *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 131, no. 4, pp. 3292–3292, 2012.

[69] S. Brulé, E. Javelaud, S. Enoch, et S. Guenneau, "Experiments on seismic metamaterials : Molding surface waves," *Physical review letters*, vol. 112, no. 13, p. 133901, 2014.

[70] M. Miniaci, A. Krushynska, F. Bosia, et N. M. Pugno, "Large scale mechanical metamaterials as seismic shields," *New Journal of Physics*, vol. 18, no. 8, p. 083041, 2016.

[71] A. Colombi, P. Roux, S. Guenneau, P. Gueguen, et R. V. Craster, "Forests as a natural seismic metamaterial : Rayleigh wave bandgaps induced by local resonances," *Scientific reports*, vol. 6, 2016.

[72] F. Meseguer, M. Holgado, D. Caballero, N. Benaches, J. Sánchez-Dehesa, C. López, et J. Llinares, "Rayleigh-wave attenuation by a semi-infinite two-dimensional elastic-band-gap crystal," *Physical Review B*, vol. 59, no. 19, p. 12169, 1999.

[73] R. Vines, J. Wolfe, et A. Every, "Scanning phononic lattices with ultrasound," *Physical Review B*, vol. 60, no. 17, p. 11871, 1999.

[74] L. Dhar et J. A. Rogers, "High frequency one-dimensional phononic crystal characterized with a picosecond transient grating photoacoustic technique," *Applied Physics Letters*, vol. 77, no. 9, pp. 1402–1404, 2000.

[75] D. M. Profunser, O. B. Wright, et O. Matsuda, "Imaging ripples on phononic crystals reveals acoustic band structure and bloch harmonics," *Physical review letters*, vol. 97, no. 5, p. 055502, 2006.

[76] B. Bonello, C. Charles, et F. Ganot, "Lamb waves in plates covered by a two-dimensional phononic film," *Applied physics letters*, vol. 90, no. 2, p. 021909, 2007.

[77] T.-T. Wu, Y.-T. Chen, J.-H. Sun, S.-C. S. Lin, et T. J. Huang, "Focusing of the lowest antisymmetric lamb wave in a gradient-index phononic crystal plate," *Applied Physics Letters*, vol. 98, no. 17, p. 171911, 2011.

[78] T.-T. Wu, Z.-C. Hsu, et Z.-G. Huang, "Band gaps and the electromechanical coupling coefficient of a surface acoustic wave in a two-dimensional piezoelectric phononic crystal," *Physical Review B*, vol. 71, no. 6, p. 064303, 2005.

[79] T.-T. Wu, L.-C. Wu, et Z.-G. Huang, "Frequency band-gap measurement of two-dimensional air/silicon phononic crystals using layered slanted finger interdigital transducers," *Journal of Applied Physics*, vol. 97, no. 9, p. 094916, 2005.

[80] S. Benchabane, A. Khelif, J.-Y. Rauch, L. Robert, et V. Laude, "Evidence for complete surface wave band gap in a piezoelectric phononic crystal," *Physical Review E*, vol. 73, no. 6, p. 065601, 2006.

[81] D. Feng, W. Jiang, D. Xu, B. Xiong, et Y. Wang, "Acoustic wave characterization of silicon phononic crystal plate," *Applied Physics Letters*, vol. 107, no. 9, p. 091907, 2015.

[82] T.-T. Wu, Z.-G. Huang, T.-C. Tsai, et T.-C. Wu, "Evidence of complete band gap and resonances in a plate with periodic stubbed surface," *Applied Physics Letters*, vol. 93, no. 11, p. 111902, 2008.

[83] A. Khelif, Y. Achaoui, S. Benchabane, V. Laude, et B. Aoubiza, "Locally resonant surface acoustic wave band gaps in a two-dimensional phononic crystal of pillars on a surface," *Physical Review B*, vol. 81, no. 21, p. 214303, 2010.

[84] M. Oudich, M. B. Assouar, et Z. Hou, "Propagation of acoustic waves and waveguiding in a two-dimensional locally resonant phononic crystal plate," *Applied Physics Letters*, vol. 97, no. 19, p. 193503, 2010.

[85] M. Oudich, M. Senesi, M. B. Assouar, M. Ruzenne, J.-H. Sun, B. Vincent, Z. Hou, et T.-T. Wu, "Experimental evidence of locally resonant sonic band gap in two-dimensional phononic stubbed plates," *Physical Review B*, vol. 84, no. 16, p. 165136, 2011.

[86] Y. Achaoui, V. Laude, S. Benchabane, et A. Khelif, "Local resonances in phononic crystals and in random arrangements of pillars on a surface," *Journal of Applied Physics*, vol. 114, no. 10, p. 104503, 2013.

[87] F. Casadei, M. Ruzzene, L. Dozio, et K. Cunefare, "Broadband vibration control through periodic arrays of resonant shunts : experimental investigation on plates," *Smart materials and structures*, vol. 19, no. 1, p. 015002, 2009.

[88] A. Spadoni, M. Ruzzene, et K. Cunefare, "Vibration and wave propagation control of plates with periodic arrays of shunted piezoelectric patches," *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, vol. 20, no. 8, pp. 979–990, 2009.

[89] F. Casadei, L. Dozio, M. Ruzzene, et K. A. Cunefare, "Periodic shunted arrays for the control of noise radiation in an enclosure," *Journal of sound and vibration*, vol. 329, no. 18, pp. 3632–3646, 2010.

[90] L. Airoldi et M. Ruzzene, "Design of tunable acoustic metamaterials through periodic arrays of resonant shunted piezos," *New Journal of Physics*, vol. 13, no. 11, p. 113010, 2011.

[91] B. S. Beck, K. A. Cunefare, M. Ruzzene, et M. Collet, "Experimental analysis of a cantilever beam with a shunted piezoelectric periodic array," *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, p. 1045389X11411119, 2011.

[92] F. Casadei, T. Delpero, A. Bergamini, P. Ermanni, et M. Ruzzene, "Piezoelectric resonator arrays for tunable acoustic waveguides and metamaterials," *Journal of Applied Physics*, vol. 112, no. 6, p. 064902, 2012.

[93] T. Delpero, P. Ermanni, F. Casadei, M. Ruzzene, et A. Bergamini, "Experimental characterization of two-dimensional tunable metamaterials," in *ASME 2012 Conference on Smart Materials, Adaptive Structures and Intelligent Systems.* American Society of Mechanical Engineers, 2012, pp. 187–193.

[94] A. Bergamini, T. Delpero, L. D. Simoni, L. D. Lillo, M. Ruzzene, et P. Ermanni, "Phononic crystal with adaptive connectivity," *Advanced Materials*, vol. 26, no. 9, pp. 1343–1347, 2014.

[95] Y. Chen, G. Huang, et C. Sun, "Band gap control in an active elastic metamaterial with negative capacitance piezoelectric shunting," *Journal of Vibration and Acoustics*, vol. 136, no. 6, p. 061008, 2014.

[96] L. Dai, S. Jiang, Z. Lian, H. Hu, et X. Chen, "Locally resonant band gaps achieved by equal frequency shunting circuits of piezoelectric rings in a periodic circular plate," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 337, pp. 150–160, 2015.

[97] A. E. Bergamini, M. Zündel, E. A. F. Parra, T. Delpero, M. Ruzzene, et P. Ermanni, "Hybrid dispersive media with controllable wave propagation : A new take on smart materials," *Journal of Applied Physics*, vol. 118, no. 15, p. 154310, 2015.

[98] X.-Y. Zou, B. Liang, Y. Yuan, X.-F. Zhu, et J.-C. Cheng, "Controllable acoustic rectification in one-dimensional piezoelectric composite plates," *Journal of Applied Physics*, vol. 114, no. 16, p. 164504, 2013.

[99] E. G. Newman et R. Mindlin, "Vibrations of a monoclinic crystal plate," *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 29, no. 11, pp. 1206–1218, 1957.

[100] R. Kaul et R. Mindlin, "Frequency spectrum of a monoclinic crystal plate," *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 34, no. 12, pp. 1902–1910, 1962.

[101] R. K. Kaul et R. Mindlin, "Vibrations of an infinite, monoclinic crystal plate at high frequencies and long wavelengths," *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 34, no. 12, pp. 1895–1901, 1962.

[102] H. F. Tiersten, "Wave propagation in an infinite piezoelectric plate," *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 35, no. 2, pp. 234–239, 1963.

[103] H. Tiersten, *Linear Piezoelectric Plate Vibrations : Elements of the Linear Theory of Piezoelectricity and the Vibrations Piezoelectric Plates.* Springer, 2013.

[104] J. L. Bleustein, "Some simple modes of wave propagation in an infinite piezoelectric plate," *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 45, no. 3, pp. 614–620, 1969.

[105] *http ://www.ferroperm-piezo.com.*

[106] B. R. Mace et E. Manconi, "Modelling wave propagation in two-dimensional structures using finite element analysis," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 318, no. 4, pp. 884–902, 2008.

[107] M. Ichchou, S. Akrout, et J.-M. Mencik, "Guided waves group and energy velocities via finite elements," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 305, no. 4, pp. 931–944, 2007.

[108] M. Bavencoffe, A.-c. Hladky-Hennion, B. Morvan, et J.-l. Izbicki, "Attenuation of lamb waves in the vicinity of a forbidden band in a phononic crystal," *IEEE transactions on ultrasonics, ferroelectrics, and frequency control*, vol. 56, no. 9, pp. 1960–1967, 2009.

[109] N. Wilikie-Chancellier, "Refléxion et conversion d'une onde de lamb à l'extrémité biseautée d'une plaque." Ph.D. dissertation, Université du Havre, 2003.

[110] M. Bavencoffe, "Propagation d'ondes de lamb dans un guide d'ondes à interface périodique," Ph.D. dissertation, Université du Havre, 2009.

[111] J.-M. Lourtioz, H. Benisty, V. Berger, J.-M. Gerard, D. Maystre, et A. Tchelnokov, "Photonic crystals," *Towards Nanoscale Photonic Devices*, 2005.

[112] B. R. Mace et E. Manconi, "Wave motion and dispersion phenomena : Veering, locking and strong coupling effects," *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 131, no. 2, pp. 1015–1028, 2012.

[113] N. Kherraz, L. Haumesser, F. Levassort, P. Benard, et B. Morvan, "Controlling bragg gaps induced by electric boundary conditions in phononic piezoelectric plates," *Applied Physics Letters*, vol. 108, no. 9, p. 093503, 2016.

[114] S. Mansoura, "Contrôle de la propagation des ondes ultrasonores dans des cristaux phononiques piézoélectriques." Ph.D. dissertation, UNIVERSITE DU HAVRE, 2015.

[115] "Publication and proposed revision of ansi/ieee standard 176-1987," *IEEE Transactions on Ultrasonics Ferroelectrics and Frequency Control*, vol. 43, no. 5, pp. 717–772, 1996.

[116] S. Mansoura, P. Benard, B. Morvan, P. Maréchal, A. Hladky-Hennion, et B. Dubus, "Theoretical and experimental analysis of a piezoelectric plate connected to a negative capacitance at mhz frequencies," *Smart Materials and Structures*, vol. 24, no. 11, p. 115032, 2015.

[117] A. A. Kutsenko, A. L. Shuvalov, O. Poncelet, et A. N. Darinskii, "Quasistatic stopband and other unusual features of the spectrum of a one-dimensional piezoelectric phononic crystal controlled by negative capacitance," *Comptes Rendus Mécanique*, vol. 343, no. 12, pp. 680–688, 2015.