



HAL
open science

Une nouvelle méthode de décomposition polynomiale d'un front d'onde oculaire

Damien Gatinel

► **To cite this version:**

Damien Gatinel. Une nouvelle méthode de décomposition polynomiale d'un front d'onde oculaire. Organes des sens. Université Paris Saclay (COmUE), 2017. Français. NNT : 2017SACLV042 . tel-01617820

HAL Id: tel-01617820

<https://theses.hal.science/tel-01617820>

Submitted on 17 Oct 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE DE DOCTORAT
DE
L'UNIVERSITÉ PARIS-SACLAY
PRÉPARÉE A
L'UNIVERSITÉ VERSAILLES SAINT-QUENTIN EN YVELINES

ÉCOLE DOCTORALE DE MATHÉMATIQUES HADAMARD
(EDMH, ED 574)

Spécialité de doctorat : Mathématiques aux interfaces

par

M. Damien GATINEL

Une nouvelle méthode de décomposition polynomiale
d'un front d'onde oculaire

Thèse présentée et soutenue à Versailles le 12 Juillet 2017

Composition du Jury :

- | | |
|-----------------------------|---|
| M. Laurent DUMAS | (Professeur, Université de Versailles-Saint-Quentin-en-Yvelines), <i>Directeur de thèse</i> |
| M. Pierre GABRIEL | (Maître de conférences, Université de Versailles St-Quentin-en-Yvelines) <i>Examineur</i> |
| Mme. Florence HUBERT | (Professeur, Institut de Mathématiques de Marseille) <i>Examineur</i> |
| Mme. Annie RAOULT | (Professeur, MAP5, UFR de Mathématiques et Informatique, Université Paris Descartes) <i>Examineur</i> |
| Mme. Susana MARCOS | (Professeur, Instituto de Optica, Madrid, Espagne) <i>Rapporteur</i> |
| M. Emmanuel TRÉLAT | (Professeur, Laboratoire Jacques Louis Lions, UPMC) <i>Rapporteur</i> |
| M. Jacques Malet | (Professeur de chaire supérieure) <i>Invité</i> |

Titre : Une nouvelle méthode de décomposition polynomiale d'un front d'onde oculaire

Mots Clefs : front d'onde- aberrations optiques- orthonormalisation de Gram-Schmidt - polynômes de Zernike.

Résumé :

Les défauts de la vision sont analysés et classés à partir des caractéristiques mathématiques du front d'onde de l'œil considéré. Après avoir présenté la méthode actuelle basée sur la décomposition du front d'onde dans la base orthonormale de Zernike ainsi que certaines de ses limitations, on propose ici une nouvelle base de décomposition. Celle-ci repose sur l'utilisation de l'espace des fronts d'onde polynomiaux de valuation supérieure ou égale à $L + 1$ (où L est un entier naturel) et permet de décomposer de manière unique un front d'onde polynomial en la somme d'un front d'onde polynomial de bas degré (inférieur ou égal à L) et un front d'onde polynomial de haute valuation (supérieure ou égale à $L + 1$). En choisissant $L = 2$, une nouvelle décomposition est obtenue, appelée D2V3, où le front d'onde polynomial de haut degré ne comporte pas de termes de degré radial inférieur ou égal à deux. Cette approche permet de dissocier parfaitement les aberrations optiques corrigibles ou non par le port de lunettes. Différents cas cliniques présentés dans la dernière section permettent de mettre en évidence l'intérêt de cette nouvelle base de décomposition.

Title : A new polynomial decomposition method for ocular wavefront

Keys words : wavefront- optical aberrations- Gram Schmidt method- Zernike polynomials.

Abstract : The eye vision defaults are analyzed and classified by studying the corresponding eye wavefront. After presenting the orthogonal basis, called the Zernike basis, that is currently used for the medical diagnosis, a new decomposition basis is built. It is based on the use of the space of polynomials of valuation greater or equal to $L + 1$ (for L a natural integer). It allows to uniquely decompose a polynomial wavefront into the sum of a polynomial of low degree (lesser or equal to L) and a polynomial of high valuation (greater or equal to $L + 1$). By choosing $L = 2$, a new decomposition, called D2V3, is obtained where the polynomial wavefront of high degree does not include terms of radial degree lesser or equal to 2. In particular, it allows to quantify perfectly the aberrations that can be corrected by eyeglasses or not. Various clinical examples clearly show the interest of this new basis compared to a diagnosis based on the Zernike decomposition.



Remerciements

Je remercie vivement mon directeur M. Laurent Dumas pour m'avoir fait confiance, et d'avoir accepté de diriger cette thèse, malgré mon statut particulier de chirurgien ophtalmologiste. Grâce à sa bienveillance, son travail de supervision, ses nombreux conseils et sa disponibilité, j'ai conscience d'avoir bénéficié de conditions très bénéfiques pour la réalisation de ce travail. J'espère que notre collaboration se poursuivra autour d'autres projets intéressants modélisation de l'œil et mathématiques appliquées.

J'adresse à M Jacques Malet mes remerciements chaleureux pour son aide précieuse. Il m'a accompagné avec enthousiasme et bienveillance tout au long de ce parcours, comme il l'avait fait précédemment pour d'autres travaux. Sans son expertise pour l'élaboration et la rédaction du formalisme mathématique, il ne m'aurait pas été possible de conduire cette recherche dont nous partageons les résultats. Cette expérience prouve qu'au-delà d'une tâche de longue haleine, une thèse peut aussi être le fruit d'une profonde amitié.

Je remercie Mme Susana Marcos et M. Emmanuel Trélat qui ont accepté d'être rapporteurs de mes travaux de thèse, ainsi que M. Pierre Gabriel, Mme Florence Hubert, et Mme Annie Raoult qui ont participé au jury. Je leur sais gré du temps qu'ils ont consacré à la lecture critique de ce travail.

Je remercie chaleureusement toutes les personnes qui m'ont aidé et soutenu pendant l'élaboration de ma thèse : M. Maxime Chupin qui a su résoudre mes soucis de formatage et de mise en page en LaTeX, Mme Elisabeth Malet qui a assuré un soutien logistique en théine et glucose lors des longues séances de travail avec Jacques. Je n'oublie pas mes proches collaborateurs pour la qualité de l'exercice médical et du travail de recherche clinique qu'ils accomplissent pour notre service à la Fondation Rothschild. Ils m'ont permis de dégager du temps précieux pour ce projet. J'adresse une mention spéciale à ma fidèle et très efficace secrétaire, Mme Evelyne Barbosa.

Mes profonds remerciements vont à mes parents qui ont su me donner toutes les chances de réussir, particulièrement ma maman qui m'a toujours encouragé et aidé tout au long de mon cursus, ainsi que mon frère Xavier.

Je remercie enfin Emmanuelle, Apolline, Emilie et Alexis pour leur amour et leur patience. Ils m'ont été d'un grand réconfort et ont contribué à l'aboutissement de ce travail.

TABLE DES MATIÈRES

Introduction	1
1 L'approche de Zernike	11
1.1 Modélisation polynomiale des fronts d'onde	11
1.1.1 Définition mathématique du front d'onde et métrique associée	11
1.1.2 Fronts d'onde polynomiaux	14
1.1.3 Fonctions radiales et fonctions azimutales	19
1.2 Les polynômes de Zernike	23
1.2.1 Orthonormalisation des bases de \mathcal{P}_D	23
1.2.2 La base des polynômes de Zernike de \mathcal{P}_D	24
1.2.3 La décomposition pyramidale de Zernike	28
1.3 Les limites de l'approche de Zernike	30
1.3.1 Intrication des degrés radiaux	30
1.3.2 Observations expérimentales	31
1.3.3 Effets des aberrations de Zernike sur la prédiction de la meilleure réfraction sphéro-cylindrique	34
1.3.4 Effets des aberrations de Zernike sur la profondeur de champ	36
2 Une nouvelle décomposition polynomiale du front d'onde oculaire	39
2.1 La décomposition LD-HV (<i>low degree, high valuation</i>)	39
2.1.1 L'espace $^{(L)}\mathcal{P}_D$ et la scission LD-HV	39
2.1.2 Une base orthonormale de l'espace $^{(L)}\mathcal{P}_D$	41
2.1.3 Configuration géométrique et représentation 2D	43

2.2	Le cas de la décomposition D2V3	44
2.2.1	Décomposition du front d'onde	44
2.2.2	La nouvelle pyramide D2V3	45
2.2.3	La décomposition D2V3 et sa représentation 3D	46
2.3	Comparaison des bases D2V3 et de Zernike	49
2.3.1	Aberrations de degré radial 3	50
2.3.2	Aberrations de degré radial 4	51
2.3.3	Aberrations de degré radial 5	52
2.3.4	Aberrations de degré radial supérieur ou égal à 6	52
3	Exemples et discussion clinique	61
3.1	Exemples théoriques	61
3.1.1	Conversion d'un front d'onde théorique donné dans la base azimutale	61
3.1.2	Conversion d'un front d'onde théorique donné dans la base de Zernike	65
3.2	Exemples cliniques	69
3.2.1	Exemple 1 : myopie forte	70
3.2.2	Exemple 2 : myopie opérée	72
3.2.3	Exemple 3 : keratocône	74
3.2.4	Exemple 4 : cataracte nucléaire	76
3.2.5	Exemple 5 : chirurgie PRESBY-LASIK	77
3.3	Discussion et perspectives	79
3.3.1	Pertinence de la nouvelle base D2V3	79
3.3.2	Perspectives pour la mesure du relief cornéen	81
4	Conclusion	83
A	Procédures Maple pour l'analyse d'un front d'onde	87
B	Procédures Maple pour la construction de la nouvelle base D2V3	91
B.1	Création de la nouvelle base	91
B.2	Conversion de la base Zernike à la base D2V3	93
C	Procédures Maple pour les représentations vectorielles 2D ou 3D	101
C.1	Représentation 2D pour la décomposition D2V3	102
C.2	Représentation 3D dans les 2 bases	104
	Références	110

INTRODUCTION

Les erreurs réfractives ou amétropies qui affectent l'œil humain et qui sont quantifiées en dioptries font aujourd'hui partie du quotidien de l'ophtalmologiste : myopie, astigmatisme, hypermétropie, presbytie. Il existe différents moyens de correction : les verres de lunettes, les lentilles de contact, ou la chirurgie réfractive.

Jusqu'à la fin du XXème siècle, il était seulement possible de mesurer les amétropies sphériques ou cylindriques, dont la correction par lunettes ou lentilles de contact suffit à donner à l'œil humain une qualité optique jugée acceptable. En raison des imperfections liées à la nature biologique des éléments réfractifs de l'œil, il existe d'autres aberrations optiques que les amétropies sphéro-cylindriques. La mesure et la correction de ces aberrations, dites *de haut degré*, n'est possible que depuis quelques décennies en pratique courante, et cette prise en compte tardive s'explique par différents facteurs. Si la notion d'aberration est née avec les premiers systèmes optiques comme les lunettes et télescopes, les premières descriptions analytiques et systématiques des aberrations optiques ont été effectuées au cours du 19e siècle. La distinction entre des aberrations dites de coma, d'astigmatisme, de sphéricité découle des relations entre les caractéristiques géométriques des lentilles et leur impact sur le trajet des rayons lumineux réfractés. Les aberrations de sphéricité sont ainsi dénommées parce qu'elles sont engendrées par le profil circulaire des lentilles sphériques. Le terme de "coma" a été choisi pour désigner les aberrations induites par une géométrie éventuellement asymétrique, responsable d'un étalement lumineux au sein du foyer en forme de "comète". On doit la première approche systématisée et analytique des aberrations optiques à Ludwig von Seidel, vers le milieu du XIXème siècle.

La technologie du front d'onde fut à l'origine développée en astronomie

pour améliorer la qualité des images fournies par les télescopes terrestres, au cours de la seconde moitié du XX^{ème} siècle. Son principe reposait sur la mesure de la distorsion subie par les fronts d'onde lumineux lors de la traversée de l'atmosphère terrestre, et l'établissement d'une correction en temps réel grâce à une boucle d'optique adaptative. Les progrès plus récents de l'aberrométrie médicale, et la notion d'erreur du front d'onde oculaire ont permis de classer les imperfections optiques de l'œil humain et de faire clairement la distinction entre les aberrations de bas degré et de haut degré. Les aberrations de bas degré regroupent les amétropies corrigibles par un verre de lunettes, comme la myopie et l'hypermétropie (amétropies dites sphériques), et l'astigmatisme (amétropie dite cylindrique). Les aberrations de haut degré ne peuvent faire l'objet d'une correction par un verre de lunette.

La première mesure des aberrations oculaires de haut degré fut accomplie par Smirnov, au terme de longues mesures psycho-physiques¹, suivies d'une dizaine d'heures de calculs ([1]). La première correction partielle du front d'onde oculaire par un dispositif utilisant miroir d'optique adaptative fut effectuée en 1989 ([2]). Elle fut toutefois limitée à une correction de l'astigmatisme dont le degré et l'orientation étaient fondés sur la mesure de la réfraction sphéro-cylindrique du sujet mesuré, car il n'existait pas de technique fiable pour la mesure du front d'onde oculaire.

Pour aborder la théorie du front d'onde, il faut assimiler la lumière à une onde électromagnétique qui se propage à une vitesse variable selon l'indice de réfraction du milieu de propagation (d'autant plus lentement que l'indice du milieu est élevé). Un front d'onde correspond à l'enveloppe des points des ondes qui sont en phase à un instant donné. Les rayons lumineux matérialisent la direction locale de propagation des ondes lumineuses. Dans un milieu homogène, les ondes lumineuses se propagent en ligne droite, le long des "rayons" autour desquels elles oscillent transversalement. Pour former une image fidèle d'un point source lumineux, la cornée et le cristallin doivent faire converger les trains d'onde vers un point situé dans le plan de la rétine photosensible. Les ondes incidentes émises depuis des sources ponctuelles lointaines sont planes : le ralentissement sélectif de ces ondes captées par les milieux réfractifs oculaires permet aux ondes de converger vers la rétine. Dans une situation idéale, la géométrie des fronts d'onde réfractés épouse celle de calottes sphériques centrées sur la fovéa qui est le siège de la vision fine au sein de la rétine centrale (voir figure 1). Les ondes réfractées y interfèrent alors de manière constructive. Dans la réalité, l'œil est un organe dont les imperfections inhérentes à la nature biologique de ses tissus conduisent à induire de légères distorsions au sein de l'enveloppe

1. une à deux heures par œil

des fronts d'onde réfractés. Les ondes lumineuses ne convergent pas toutes vers un même point. Les aberrations optiques correspondent à l'écart entre un front d'onde idéal et un front d'onde pourvu d'aberrations optiques. La mesure des aberrations optiques des trains d'ondes réfractés par les tissus oculaires n'est pas possible "in situ", et repose sur le principe de réversibilité du trajet de la lumière. Un faisceau de lumière infrarouge est focalisé puis réfléchi par la fovéa. Après propagation rétrograde au sein des surfaces oculaires, le front d'onde émergent est recueilli puis analysé par un aberromètre (voir figure 1).

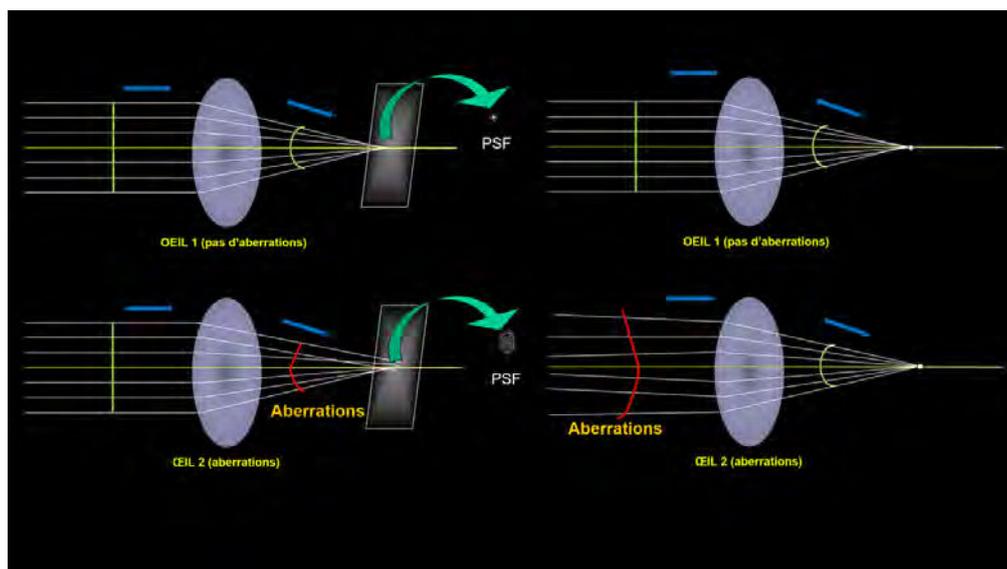


FIGURE 1 – Représentation schématique de la correspondance entre les rayons réfractés par les structures oculaires et la notion de front d'onde.

Aucun œil, même "emmétrope" (corrigé pour l'erreur sphérique ou cylindrique éventuelle), n'est exempt des imperfections relatives d'un organe biologique. Les aberrations monochromatiques résultent des irrégularités et des décentrement relatifs des différentes structures optiques de l'œil. L'impact sur la qualité de l'image rétinienne augmente avec le diamètre de la pupille de sortie du système considéré. Ces aberrations sont caractérisées par une déformation du front d'onde dans le milieu objet au niveau du plan de la pupille d'entrée, et traduites par un écart (exprimé en microns ou unités de longueur d'onde) de déphasage par rapport à un front d'onde théorique plan moyen. En général, pour un œil sain emmétrope, ces aberrations déforment principalement les bords du front d'onde, dont la partie centrale reste relativement plane. Ceci explique que lorsque le diamètre pupillaire est compris

entre 2 et 3 mm et diaphragme le front d'onde, l'œil puisse apparaître comme un système optique quasi parfait.

En 1994, Liang et son équipe ([3]) développèrent un instrument de mesure du front d'onde oculaire de type Shack-Hartmann qui permit la mesure du front d'onde oculaire et sa décomposition en une série d'harmoniques regroupées dans une classe de fonctions appelées polynômes de Zernike. Cet aberromètre permettait d'effectuer des mesures peu invasives par lumière infra-rouge et rapides (le temps d'acquisition étant de l'ordre d'une seconde). La même année, en s'inspirant des systèmes d'optique adaptative utilisés en astronomie, l'équipe de Liang mit au point une boucle d'optique adaptative en couplant un aberromètre à un miroir déformable afin de mesurer puis corriger la plupart des aberrations de haut degré ([4]). Depuis une vingtaine d'années, les applications de l'optique adaptative connaissent un essor important. Elles permettent d'explorer l'impact des aberrations optiques sur la fonction visuelle, et améliorent également la visualisation des structures fines de la rétine.

Si la correction des aberrations de haut degré par l'optique adaptative demeure un domaine encore confiné aux laboratoires de recherche et à certains centres spécialisés dans l'exploration visuelle, la simple mesure des aberrations optiques du front d'onde oculaire (aberrométrie) peut être effectuée en routine par l'ophtalmologiste et les spécialistes de la vision. Les progrès de la chirurgie réfractive ont été spectaculaires lors de l'introduction de la technologie de re-surfacement cornéen au laser excimer, et la mise à disposition du laser femtoseconde pour compléter la réalisation de certaines étapes en chirurgie réfractive cornéenne. Les techniques d'exploration oculaire comme la topographie cornéenne et la mesure du front d'onde oculaire permettent de sécuriser les indications opératoires et de concevoir des corrections personnalisées et guidées par le front d'onde. Ces options thérapeutiques reposent sur la prise en compte des imperfections optiques qui subsistent ou peuvent être accrues après la correction de l'amétropie sphéro-cylindrique.

L'aberrométrie joue ainsi un rôle majeur dans la compréhension de certains phénomènes visuels, et ses applications pour le diagnostic et la correction des défauts optiques oculaires sont nombreuses. Cette exploration est particulièrement indiquée à chaque fois que l'on soupçonne l'existence d'une réduction de la qualité optique de l'œil qui résulte en une dégradation de l'image rétinienne. Les symptômes d'appel ne se limitent pas à une réduction de l'acuité visuelle, mais associent le plus souvent une impression de dégradation de la vision qui n'est pas corrigible en lunettes, et se caractérise par des symptômes particuliers comme un dédoublement des images, des halos autour des sources de lumière vive ou une impression d'image

moins contrastée.

Ces symptômes concernent l'ensemble de la vision centrale, et non un point particulier dans le champ visuel. Ils tendent à apparaître ou à s'accroître quand la pupille irienne se dilate, ce qui survient généralement quand la luminosité ambiante diminue. Les troubles visuels liés aux imperfections optiques persistant malgré la correction d'une amétropie sphérique et/ou cylindrique furent regroupées sous le terme de « composante irrégulière de l'astigmatisme », ou encore d'« astigmatisme irrégulier ».

L'aberrométrie joue également un rôle central pour l'ensemble des techniques modernes d'étude et de correction des défauts optiques de l'œil humain. La décomposition de l'écart du front d'onde en fonctions élémentaires est une étape nécessaire et cruciale pour l'interprétation rationnelle des aberrations optiques de l'œil. Elle permet de qualifier et quantifier certaines aberrations. Cette décomposition doit fournir au clinicien un relevé pertinent et intelligible, afin de permettre de relier les symptômes visuels d'origine optique à un type d'aberration particulier, et en comprendre le mécanisme physio-pathologique.



FIGURE 2 – Examen aberrométrique effectué par un aberromètre (instrument OPD-SCAN, Nidek, Japon).

La figure 2 est un exemple d'une telle analyse : en haut de celle-ci, le dessin effectué à main levée par un patient est une interprétation de son image visuelle lors de la lecture de lettres (optotypes) utilisées pour la mesure de l'acuité visuelle de l'œil droit avec une échelle de lecture. Les lettres

"bavent", des images fantômes sont perçues comme orientées préférentiellement en haut à droite, et ce malgré une correction optimale de l'amétropie sphéro-cylindrique par une combinaison de verres correcteurs. Le recueil du front d'onde oculaire permet de simuler l'image rétinienne formée par l'œil du patient examiné, après la meilleure correction théorique de l'amétropie, grâce à des algorithmes d'optique computationnelle. On note une grande similitude entre le tracé prédit par l'aberromètre et le dessin effectué par le patient, qui accrédite l'hypothèse d'une origine optique à ces symptômes visuels. Dans cet exemple, les symptômes étaient liés au décentrement d'une lentille intra-oculaire (cristallin artificiel), responsable de l'élévation du taux d'aberrations optiques dites de haut degré. À l'aide de l'expression analytique déduite de ces relevés, l'optique computationnelle permet ainsi de prédire l'effet des aberrations sur la qualité optique de l'œil. Cette méthode utilise les ressources informatiques et logicielles pour calculer numériquement divers indices (comme la fonction d'étalement du point) destinés à une estimation objective de la qualité optique de l'œil analysé.

Bien avant l'essor de l'informatique et du calcul assisté par ordinateur, le besoin d'établir une classification des imperfections entachant les systèmes optiques fut certainement à l'origine des premiers travaux consacrés à l'expression analytique des aberrations. Ce n'est qu'au XIX^{ème} siècle qu'une théorie analytique des aberrations optiques est formulée de manière explicite, peu après que la notion de stigmatisme eut été théorisée par Gauss en 1840. En 1857, Ludwig von Seidel propose une expression analytique des aberrations optiques, définies par rapport à l'optique paraxiale, et caractérisant le fait que certains rayons ne convergent pas vers le foyer image prédit par l'optique géométrique.

Avec la généralisation du recours à l'aberrométrie pour l'étude du front d'onde oculaire, le choix d'une classification et d'une convention pour l'étude des aberrations de l'œil humain revêt une importance majeure. La décomposition en modes de Zernike de l'erreur du front d'onde oculaire a été choisie par un comité d'expert de l'Optical Society of America (OSA) au début des années 2000 [5].

L'expression analytique du front d'onde par une combinaison linéaire de polynômes de Zernike pondérés par des coefficients comporte certaines particularités intéressantes. Cette approximation polynomiale fournit en particulier une classification des imperfections optiques en modes orthonormés, ce qui n'était pas le cas pour les aberrations de la série de Seidel. La famille des polynômes de Zernike, notés Z_n^m , est représentée sous la forme d'une pyramide : à chaque ligne correspond un même ordre radial n et à chaque colonne un même ordre azimutal m (voir figure 3). La classification de Zer-

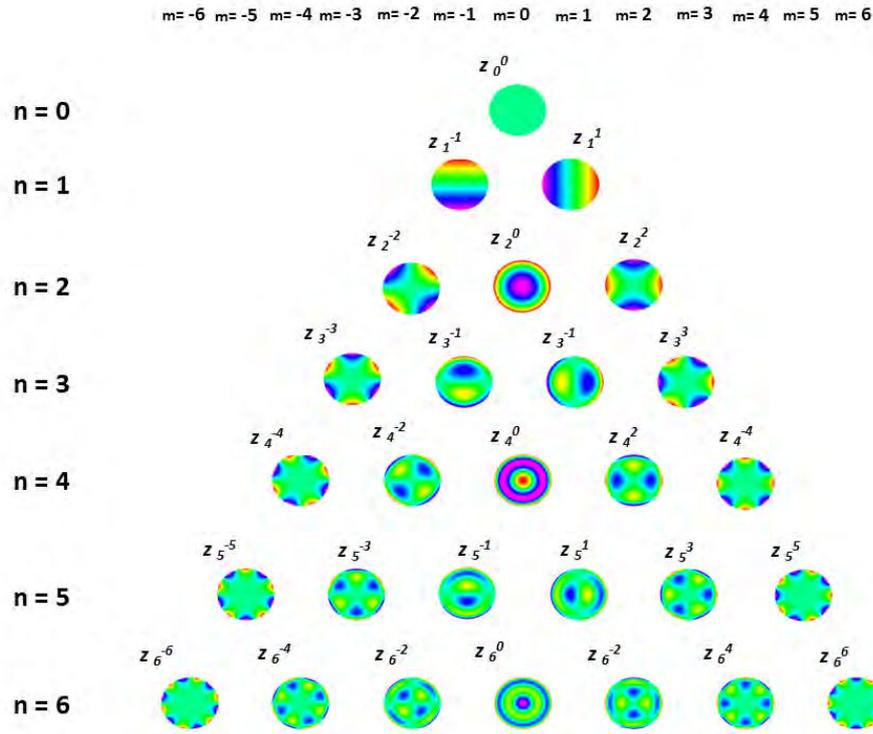


FIGURE 3 – Représentation de la pyramide des polynômes de Zernike jusqu'à l'ordre radial 6.

Le polynôme de Zernike permet de distinguer entre les aberrations dites de haut degré et celles de bas degré : les aberrations optiques de haut degré ont un degré radial supérieur ou égal à 3.

Certains polynômes de Zernike correspondent à des aberrations optiques bien connues en optique géométrique comme le défaut, l'astigmatisme, l'aberration sphérique et l'aberration de coma. Ces aberrations traduisent la présence de défauts classiques pour la conception ou la réalisation d'éléments optiques comme les lentilles et les miroirs. Plus précisément :

(i) le défaut (mode Z_2^0) correspond à la présence d'un déplacement du plan de recueil vis à vis du foyer de l'image réfractée et/ou réfléchi par un système optique. Le défaut myopique (cas d'un coefficient positif pondérant le mode Z_2^0) est observé quand la rétine est située au delà du foyer image d'une source ponctuelle située à l'infini. A l'inverse, le défaut hypermétrope (coefficient négatif pondérant le mode Z_2^0) est observé quand la rétine est située en deçà du foyer image.

(ii) l'astigmatisme (modes Z_2^{-2} et Z_2^2) est une aberration qui traduit généralement la présence d'une toricité des surfaces optiques. La cornée est le

principal pourvoyeur d'astigmatisme oculaire.

(iii) *l'aberration sphérique* (mode Z_4^0) est caractérisée par une différence de focalisation entre les rayons réfractés près de l'axe optique et ceux réfractés plus à distance (positive quand cette réfraction est trop importante, négative quand cette réfraction est insuffisante).

(iv) *l'aberration de coma* (modes Z_3^{-1} et Z_3^1) est observée quand un élément optique présente une déformation impaire, qui peut être causée par une déformation asymétrique, ou un décentrement relatif. Elle provoque un étalement lumineux asymétrique d'allure grossièrement triangulaire.

Il existe cependant au sein de l'expression analytique de certains modes de Zernike de haut degré, comme les modes relatifs à l'aberration sphérique ou de coma, des termes de plus bas degré que celui, maximum, correspondant au degré radial du mode considéré : cette propriété est une source de confusion potentielle pour scinder les effets respectifs des contingents d'aberration corrigibles ou non en lunettes. L'erreur d'un front d'onde théorique dont la décomposition ne ferait appel qu'à des modes de Zernike de haut degré comporte, en raison de termes de bas degré présents au sein de certains de ceux-ci, une part pourtant accessible à une correction en lunettes. De même, la décomposition d'une erreur de front d'onde quelconque en modes de bas et haut degré ne garantit pas que la part d'erreur du front d'onde liée à des déphasages quadratiques (contribution de l'ensemble des termes de bas degré 2) soit correctement exprimée par la combinaison des modes de Zernike de degré radial 2.

L'objectif de cette thèse est de proposer une solution à cette difficulté de classification. Le plan choisi est le suivant : dans le chapitre 1 est présenté en détail le procédé de construction de la famille des polynômes de Zernike ainsi que certaines difficultés d'interprétation inhérente à celle-ci. Le chapitre 2 propose une nouvelle méthode de décomposition polynomiale d'un front d'onde dans une base permettant de séparer strictement les effets de bas degré et les effets de haut degré. Le chapitre 3 confirme l'intérêt de cette nouvelle décomposition en comparant les résultats obtenus avec ceux issus d'une décomposition dans la base usuelle de Zernike. A travers différents exemples correspondant à plusieurs pathologies connues (myopie, kératocône), le diagnostic clinique se trouve grandement amélioré par l'utilisation de cette nouvelle base.

CHAPITRE 1

L'APPROCHE DE ZERNIKE

1.1 Modélisation polynomiale des fronts d'onde

1.1.1 Définition mathématique du front d'onde et métrique associée

Le recueil des données de l'examen par un aberromètre de type Shack-Hartmann s'effectue à partir de l'image formée par un réseau de micro-lentilles d'un front d'onde émergent sur un capteur CCD. Ces micro-lentilles possèdent un diamètre généralement compris entre 200 et 600 microns. En fonction des instruments, le nombre de micro-lentilles disponibles pour échantillonner un front d'onde propagé au travers d'une pupille de l'œil de diamètre 6 mm est compris entre 60 et 650 micro-lentilles.

A l'arrivée du front d'onde, chaque micro-lentille génère sur le capteur une tache de focalisation, dont la localisation du centroïde est fonction de la déformation locale du front d'onde. Le déplacement des centroïdes vis-à-vis d'une position attendue dans le plan focal de chacune des micro-lentilles permet d'établir un relevé de pentes locales du front d'onde incident. À chacune des M micro-lentilles correspond donc un point de la pupille de coordonnées cartésiennes (x_j, y_j) et une mesure de déphasage $\delta\phi_j$, calculée à partir de la pente locale relevée en ce point. Ces observations permettent de reconstruire le déphasage du front d'onde comme une fonction continue $\delta\phi(x, y)$ de la position (x, y) (voir [6] pp 97-119).

Un front d'onde oculaire peut ainsi être assimilé à une fonction de deux variables f qui est définie et continue sur un domaine \mathbf{D} de \mathbb{R}^2 représentant la pupille de l'œil

$$f : \begin{cases} \mathbf{D} \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \longmapsto f(x, y) \end{cases}$$

dont les mesures de déphasage $\delta\phi_j$ correspondent aux valeurs discrètes des écarts $(f - f_0)(x_j, y_j)$ à un front d'onde de référence f_0 .

En première approximation, la pupille de l'œil humain possède un périmètre globalement circulaire pour une observation de face et pour l'exploration de la qualité optique au voisinage de l'axe visuel (voir [7] 45(14) pp 2021-36). A noter que dans le règne animal, d'autres géométries comme l'ellipse ou la fente peuvent être rencontrées (voir [8] 89(12) pp 484-94).

L'observation de la pupille sous une incidence oblique lui confère en revanche une géométrie elliptique et une surface apparente qui décroît avec l'augmentation de l'angle d'incidence de l'observation (voir [9]). Le front d'onde peut néanmoins être exprimé au moyen de fonctions définies sur un domaine de périmètre elliptique (voir [6] pp 62-68 et [10] pp 767-77). L'utilisation de telles fonctions revêt un intérêt potentiel pour l'étude de la qualité optique de la vision périphérique, ainsi que pour des pathologies affectant l'iris et la géométrie de la pupille irienne.

Dans le cas de l'exploration de la qualité optique de la vision centrale, l'utilisation de fonctions définies sur un disque est pertinente dans la quasi-totalité des situations cliniques.

Dans la suite et pour cette raison, on utilisera donc une pupille circulaire que l'on pourra, sans perte de généralité, supposer de rayon égal à 1 (on parle alors de pupille normalisée) en choisissant pour origine le centre de la pupille, ce qui se traduit sur le domaine D par :

$$\mathbf{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Tout front d'onde sera donc représenté par un élément de l'espace des fonctions continues sur la pupille normalisée \mathbf{D} , à valeurs réelles.

En posant, pour tout couple (f_1, f_2) de cet espace des fronts d'onde,

$$\langle f_1, f_2 \rangle_{\mathbf{D}} = \frac{1}{\pi} \iint_{\mathbf{D}} f_1(x, y) f_2(x, y) dx dy \quad (1.1)$$

on définit un produit scalaire qui fait de l'espace vectoriel des fronts d'onde un espace préhilbertien qu'on notera $\mathcal{F}_{\mathbf{D}}$.

A noter que le coefficient de normalisation $1/\pi$ permet d'assurer que le produit scalaire d'un front d'onde quelconque f avec le front d'onde constant $(x, y) \longmapsto 1$ soit égal à la valeur moyenne de f sur la pupille, qu'on appelle

le « piston » de f et que l'on notera $p_0(f)$:

$$p_0(f) = \frac{1}{\pi} \iint_{\mathbf{D}} f(x, y) dx dy .$$

Cette moyenne "théorique" correspond à la moyenne arithmétique des valeurs mesurées de f :

$$p_0(f) \simeq \bar{f} = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M (f_0(x_j, y_j) + \delta\phi_j) .$$

Le produit scalaire précédent permet de définir une métrique sur cet espace, grâce à la distance euclidienne $d_{\mathbf{D}}$ donnée par :

$$d_{\mathbf{D}}(f_1, f_2) = \| f_1 - f_2 \|_{\mathbf{D}} \quad (1.2)$$

où la norme $\| \cdot \|_{\mathbf{D}}$ associée au produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbf{D}}$ est classiquement définie par :

$$\forall f \in \mathcal{F}_{\mathbf{D}}, \| f \|_{\mathbf{D}} = \sqrt{\langle f, f \rangle_{\mathbf{D}}} \quad (1.3)$$

La mesure d'un front d'onde oculaire conduit à une carte de déphasage vis-à-vis d'une surface de référence, qui correspond à un front d'onde qui serait mesuré en l'absence d'aberrations optiques. Dans le cas d'une mesure aberrométrique oculaire de type Shack-Hartmann, cette surface de référence est un disque plan dont le pourtour circulaire correspond à celui de la pupille de sortie de l'œil pour le front d'onde émergent après réflexion sur la rétine fovéale. A noter qu'on suppose ici que la pupille de sortie est équivalente à la pupille d'entrée de l'œil en condition physiologique.

La mesure aberrométrique oculaire est référencée vis-à-vis du centre du disque pupillaire de manière coaxiale avec la ligne de visée.

L'importance du déphasage mesuré vis-à-vis de la surface de référence peut être exprimée dans différentes métriques. Souvent utilisée, la variabilité absolue ou PV (« *Peak-to-Valley* ») correspond à l'étendue des variations du déphasage. Appliquée aux déphasages mesurés $\delta\phi_j$, cette distance s'écrit :

$$PV(\delta\phi) = \text{Max}\{\delta\phi_j; 1 \leq j \leq M\} - \text{Min}\{\delta\phi_j; 1 \leq j \leq M\} .$$

Cette valeur fournit une estimation imparfaite du déphasage considéré dans sa globalité car elle ne préjuge pas de l'importance des surfaces concernées par les déphasages extrêmes. On préférera ici une meilleure estimation de la proximité entre le front d'onde mesuré et la surface de référence, fournie par la variabilité quadratique moyenne ou RMS (« *Root Mean Square* »), qui est égale à la racine carrée de la somme des carrés des écarts mesurés :

$$RMS(\delta\phi) = \sqrt{\frac{1}{M} \sum_{j=1}^M (\delta\phi_j)^2}.$$

Un avantage important de cette mesure proviendra également du fait que son expression intégrale sera aisée à calculer à l'aide des coefficients des fronts d'onde dans une base orthonormale pour le produit scalaire défini plus haut.

Dans la modélisation adoptée ici, le produit scalaire $\langle, \rangle_{\mathbf{D}}$ permet en effet de définir le « RMS » comme une mesure de proximité entre un front d'onde f et le front d'onde de référence f_0 donnée par :

$$RMS(f, f_0) = \|f - f_0\|_{\mathbf{D}} = \sqrt{\frac{1}{\pi} \iint_{\mathbf{D}} (f(x, y) - f_0(x, y))^2 dx dy}.$$

Dans le cas où le front d'onde de référence est choisi égal au piston de f , le carré du RMS correspond à la variance du front d'onde f et est donné par :

$$RMS^2 = \|f - p_0(f)\|_{\mathbf{D}}^2 = \frac{1}{\pi} \iint_{\mathbf{D}} (f(x, y) - p_0(f))^2 dx dy \quad (1.4)$$

1.1.2 Fronts d'onde polynomiaux

On s'intéresse ici aux fronts d'onde polynomiaux, c'est à dire tels que :

$$\forall (x, y) \in \mathbf{D}, f(x, y) = \sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} a_{i,j} x^i y^j \quad (1.5)$$

où la famille $(a_{i,j})_{(i,j) \in \mathbb{N}^2}$ est à support fini.

Lorsque la fonction polynomiale f n'est pas nulle, on appelle *degré* de f , noté $d(f)$, le degré total le plus élevé des monômes $(x, y) \mapsto x^i y^j$ pour lesquels le coefficient $a_{i,j}$ ne soit pas nul. On appelle également dans ce cas *valuation* de f , notée $v(f)$ le degré total le moins élevé des monômes $(x, y) \mapsto x^i y^j$ pour lesquels le coefficient $a_{i,j}$ ne soit pas nul.

On notera $\mathcal{P}_{\mathbf{D}}$ l'espace préhilbertien obtenu en munissant l'espace vectoriel des fonctions polynomiales sur \mathbf{D} du produit scalaire induit par $\langle, \rangle_{\mathbf{D}}$ sur ce sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}_{\mathbf{D}}$.

Pour tout entier naturel N , on note $\mathcal{P}_{\mathbf{D}}^{(N)}$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{P}_{\mathbf{D}}$ constitué des fronts d'onde polynomiaux dont le degré est inférieur ou égal à N :

$$\mathcal{P}_{\mathbf{D}}^{(N)} = \text{Vect}\{(x, y) \mapsto x^i y^j; (i, j) \in \mathbb{N}^2, i + j \leq N\}.$$

Une fois muni du produit scalaire $\langle , \rangle_{\mathbf{D}}$, l'espace $\mathcal{P}_{\mathbf{D}}^{(N)}$ devient un espace euclidien, dont la dimension est égale à $\frac{(N+1)(N+2)}{2}$.

Les espaces $\mathcal{P}_{\mathbf{D}}^{(N)}$ forment une suite croissante d'espaces euclidiens dont la réunion est l'espace préhilbertien $\mathcal{P}_{\mathbf{D}}$:

$$\mathcal{P}_{\mathbf{D}} = \bigcup_{N=0}^{\infty} \mathcal{P}_{\mathbf{D}}^{(N)}$$

avec

$$\mathcal{P}_{\mathbf{D}}^{(0)} \subset \mathcal{P}_{\mathbf{D}}^{(1)} \subset \mathcal{P}_{\mathbf{D}}^{(2)} \subset \dots \subset \mathcal{P}_{\mathbf{D}}^{(N)} \subset \mathcal{P}_{\mathbf{D}}^{(N+1)} \subset \dots \subset \mathcal{P}_{\mathbf{D}}.$$

Pour exprimer cette suite d'inclusions et cette égalité, on dira que la suite des $\mathcal{P}_{\mathbf{D}}^{(N)}$ constitue une filtration sur l'ensemble $\mathcal{P}_{\mathbf{D}}$.

Approximation polynomiale des fronts d'onde

Chacun des espaces $\mathcal{P}_{\mathbf{D}}^{(N)}$ est inclus dans l'espace $\mathcal{P}_{\mathbf{D}}$, qui est lui-même un sous-espace de l'espace $\mathcal{F}_{\mathbf{D}}$ de tous les fronts d'onde :

$$\mathcal{P}_{\mathbf{D}}^{(N)} \subset \mathcal{P}_{\mathbf{D}} \subset \mathcal{F}_{\mathbf{D}}.$$

On pourra toujours assimiler un front d'onde quelconque à un élément de $\mathcal{P}_{\mathbf{D}}$ de degré total suffisamment élevé, étant donné que l'espace des fonctions polynomiales sur \mathbf{D} constitue une partie dense de $\mathcal{F}_{\mathbf{D}}$, au sens de la topologie de la convergence uniforme. Cela provient du théorème d'approximation de Weierstrass et signifie que toute fonction continue sur \mathbf{D} peut être approchée, uniformément sur \mathbf{D} avec une précision arbitraire, par une fonction polynomiale de degré suffisamment élevé.

Les fronts d'onde pourront donc être considérés comme situés dans un des sous-espaces $\mathcal{P}_{\mathbf{D}}^{(N)}$, à condition de choisir N assez grand¹. Sur un tel espace vectoriel qui est de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes et les notions de proximité uniforme et de proximité au sens de la norme euclidienne coïncident. Cela n'invalide pas l'existence de métriques plus ou moins pertinentes d'un point de vue ophtalmologique, mais cela garantit au moins qu'une expression du front d'onde à l'aide d'une base d'un espace $\mathcal{P}_{\mathbf{D}}^{(N)}$ est possible, avec un degré de précision très satisfaisant, quel que soit le critère adopté pour la mesurer.

1. Dans la pratique, on considère rarement des valeurs de N allant au delà de 6 et un front d'onde peut donc être assimilé à un élément de l'espace euclidien $\mathcal{P}_{\mathbf{D}}^{(6)}$, dont la dimension est déjà égale à 28.

Bases de \mathcal{P}_D adaptées à la filtration des $\mathcal{P}_D^{(N)}$

Sachant que la hiérarchie des aberrations, de plus ou moins haut degré, est fondée sur le degré des fonctions polynomiales qui les représentent, il est souhaitable de trouver des bases de l'espace vectoriel \mathcal{P}_D qui soient adaptées à la filtration des $\mathcal{P}_D^{(N)}$ c'est-à-dire telles que, pour tout entier naturel N , les $\frac{(N+1)(N+2)}{2}$ premières fonctions polynomiales de la base appartiennent à $\mathcal{P}_D^{(N)}$ et en constituent donc une base.

Cela signifie que le premier vecteur de la base est un front d'onde constant de valeur unité si on lui impose une norme égale à 1, les deux suivants des fonctions polynomiales de degré 1, les trois suivants des fonctions polynomiales de degré 2, et ainsi de suite. Les aberrations diagnostiquées à l'aide de coordonnées dans une telle base seront ainsi convenablement classées par degré croissant, en priorité.

Indexation des coefficients et représentations pyramidales

On introduit ici une indexation des fonctions polynomiales qui fait apparaître explicitement le degré total des monômes, tout en faisant jouer des rôles symétriques aux deux variables.

Pour tout entier naturel n , on note I_n le sous-ensemble à $n + 1$ éléments de l'ensemble \mathbb{Z} :

$$I_n = (-n + 2\mathbb{N}) \cap (n - 2\mathbb{N}) = \{-n, -n + 2, \dots, +n - 2, +n\} \quad (1.6)$$

soit par exemple :

- $I_0 = \{0\}$
- $I_1 = \{-1, +1\}$
- $I_2 = \{-2, 0, +2\}$
- $I_3 = \{-3, -1, +1, +3\}$
- ...

Soit $(p_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une base de \mathcal{P}_D adaptée à la filtration des espaces $\mathcal{P}_D^{(N)}$.

La double indexation qui consiste à poser, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $m \in I_n$

$$P_n^m = p_k \text{ pour l'entier } k = \frac{n(n+2) + m}{2}$$

permet une représentation pyramidale de la base $(p_k)_{k \in \mathbb{N}}$ dans laquelle chaque ligne de la « pyramide » correspond à un degré (voir table 1.1). Autrement dit, le degré de p_k est l'unique entier n tel que $\frac{n(n+1)}{2} \leq k < \frac{(n+1)(n+2)}{2}$ et m est égal à $2k - n(n+2)$. Par définition, on appellera m la fréquence azimutale de P_n^m .

			$p_0 = P_0^0$		
		$p_1 = P_1^{-1}$		$p_2 = P_1^{+1}$	
	$p_3 = P_2^{-2}$		$p_4 = P_2^0$		$p_5 = P_2^{+2}$
$p_6 = P_3^{-3}$		$p_7 = P_3^{-1}$		$p_8 = P_3^{+1}$	$p_9 = P_3^{+3}$
...
...

TABLE 1.1 – La représentation pyramidale d'une base adaptée à la filtration des espaces $\mathcal{P}_D^{(N)}$. Le sommet de la pyramide est un polynôme constant non nul, en dessous duquel figurent deux polynômes linéairement indépendants de degré 1, puis trois polynômes de degré 2, etc.

Représentation pyramidale canonique d'un front d'onde polynomial

La plus naturelle de ces bases adaptées est constituée des monômes X_n^m , classés prioritairement par degré et, pour chaque degré n , par valeur croissante de m (dans I_n). Plus précisément, X_n^m est le monôme $(x, y) \mapsto x^i y^j$ dont les exposants i et j sont définis par les égalités $i + j = n$ (n est donc le degré total de X_n^m) et $i - j = m$:

$$X_n^m : (x, y) \mapsto x^{\frac{n+m}{2}} y^{\frac{n-m}{2}} \quad (1.7)$$

Par exemple, les fonctions polynomiales X_n^m de degré total inférieur ou égal à deux sont donc données par :

- $(X_0^0)(x, y) = 1$
- $(X_1^{-1})(x, y) = y$
- $(X_1^1)(x, y) = x$
- $(X_2^{-2})(x, y) = y^2$
- $(X_2^0)(x, y) = xy$
- $(X_2^2)(x, y) = x^2$.

Il s'agit bien d'une base adaptée aux espaces $\mathcal{P}_D^{(N)}$, puisque X_N^m appartient à $\mathcal{P}_D^{(N)}$ (mais pas à $\mathcal{P}_D^{(N-1)}$), quel que soit N et pour tout m appartenant à I_N .

Cette base est appelée la base canonique de \mathcal{P}_D ou base de Taylor. En effet, le développement canonique d'un élément f de \mathcal{P}_D dans cette base coïncide avec le développement de Taylor de f à l'origine :

$$f(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{m \in I_n} \left[\frac{\partial^n f}{\partial x^{\frac{n+m}{2}} \partial y^{\frac{n-m}{2}}} (0, 0) \right] x^{\frac{n+m}{2}} y^{\frac{n-m}{2}} \quad (1.8)$$

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & X_0^0 & & \\
 & & & & X_1^{-1} & X_1^{+1} & \\
 & & & X_2^{-2} & X_2^0 & X_2^{+2} & \\
 & & X_3^{-3} & X_3^{-1} & X_3^{+1} & X_3^{+3} & \\
 & X_4^{-4} & X_4^{-2} & X_4^0 & X_4^{+2} & X_4^{+4} & \\
 X_5^{-5} & X_5^{-3} & X_5^{-1} & X_5^{+1} & X_5^{+3} & X_5^{+5} & \\
 X_6^{-6} & X_6^{-4} & X_6^{-2} & X_6^0 & X_6^{+2} & X_6^{+4} & X_6^{+6}
 \end{array}$$

TABLE 1.2 – La pyramide de Taylor des X_n^m jusqu'au degré 6.

En notant $x_n^m(f)$ le coefficient associé au monôme X_n^m , on obtient la décomposition suivante pour tout élément f de $\mathcal{P}_D^{(N)}$:

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{m \in I_n} x_n^m(f) X_n^m \right) \quad (1.9)$$

Dans cette expression, la somme indexée par n ne contient en réalité qu'un nombre fini de termes et chacun des termes $\sum_{m \in I_n} x_n^m(f) X_n^m$ regroupe les monômes de degré total égal à n de f . En notant $d(f)$ et $v(f)$ le degré et la valuation de f , définis plus haut, cette décomposition s'écrit aussi :

$$f = \sum_{n=v(f)}^{d(f)} \left(\sum_{m \in I_n} x_n^m(f) X_n^m \right).$$

La décomposition précédente sera appelée la décomposition canonique horizontale de f ². Elle peut aussi être écrite en inversant l'ordre des indices sous la forme³ :

$$f = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \left(\sum_{n \in J_m} x_n^m(f) X_n^m \right)$$

où $J_m = |m| + 2\mathbb{N}$ et où chaque somme interne regroupe les termes associés à une valeur constante de m .

2. Si on représente le développement de f sous forme pyramidale, cette décomposition « horizontale » correspond à une lecture ligne par ligne des harmoniques.

3. C'est une décomposition « verticale », qui correspond à une lecture colonne par colonne de la pyramide des harmoniques.

1.1.3 Fonctions radiales et fonctions azimutales

Par passage en coordonnées polaires, le produit scalaire de deux éléments f_1 et f_2 peut aussi être écrit sous la forme :

$$\langle f_1, f_2 \rangle_{\mathbf{D}} = \int_0^1 \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f_1(r \cos t, r \sin t) f_2(r \cos t, r \sin t) dt \right) 2r dr \quad (1.10)$$

On appelle fonctions radiales les fonctions f de $\mathcal{F}_{\mathbf{D}}$ dont la valeur en un point (x, y) de \mathbf{D} ne dépend que du module $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ du nombre complexe $x + iy$, c'est-à-dire pour lesquelles il existe une fonction R continue sur $[0, 1]$ telle que :

$$\forall (r, t) \in [0, 1] \times \mathbb{R}, \quad f(r \cos t, r \sin t) = R(r) \quad .$$

Un front d'onde représenté par une fonction radiale possède une symétrie de révolution autour de l'axe optique. Le défocus⁴ et l'aberration sphérique⁵ provoquent un déphasage global du front d'onde qui possède cette invariance azimutale.

Le produit scalaire de deux fonctions radiales f_1 et f_2 sera appelé le produit scalaire radial des fonctions R_1 et R_2 correspondantes, et noté : $\langle R_1, R_2 \rangle_{\text{rad}}$ ⁶ :

$$\langle R_1, R_2 \rangle_{\text{rad}} = 2 \int_0^1 R_1(r) R_2(r) r dr \quad (1.11)$$

où $R_1(r) = f_1(r \cos t, r \sin t)$ et $R_2(r) = f_2(r \cos t, r \sin t)$.

On appelle fonctions azimutales les fonctions f de $\mathcal{F}_{\mathbf{D}}$ dont la valeur en un point (x, y) de \mathbf{D} ne dépend que de l'argument du nombre complexe $x + iy$, c'est-à-dire pour lesquelles il existe une fonction T continue et 2π -périodique sur \mathbb{R} telle que :

$$\forall (r, t) \in [0, 1] \times \mathbb{R}, \quad f(r \cos t, r \sin t) = T(t) \quad (1.12)$$

Lorsque la fonction T admet pour plus petite période une fraction entière $\frac{2\pi}{m}$ de 2π , le nombre entier m est appelé la fréquence azimutale⁷ de f .

4. erreur du front d'onde induite par une erreur de focalisation ou de mise au point.

5. l'aberration de sphéricité peut être considérée comme une variation de la focale en fonction de l'écart à l'axe optique, et traduit un défaut d'excentricité des surfaces optiques.

6. $\langle, \rangle_{\text{rad}}$ est un produit scalaire sur l'espace des fonctions continues sur $[0, 1]$.

7. C'est le cas lorsque $T(t) = \cos(mt)$ ou $\sin(mt)$, avec m entier strictement positif. Pour autoriser n'importe quelle orientation au sein du disque pupillaire, il suffit de considérer des combinaisons linéaires de ces deux fonctions.

Le produit scalaire de deux fonctions azimutales f_1 et f_2 sera appelé le produit scalaire azimutal des fonctions T_1 et T_2 correspondantes, et noté $\langle T_1, T_2 \rangle_{\text{azi}}$ ⁸ :

$$\langle T_1, T_2 \rangle_{\text{azi}} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} T_1(t)T_2(t) dt \quad (1.13)$$

où $T_1(t) = f_1(r \cos t, r \sin t)$ et $T_2(t) = f_2(r \cos t, r \sin t)$.

L'astigmatisme régulier est une aberration du front d'onde qui correspond au produit d'une fonction radiale de degré 2 et d'une variation azimutale de fréquence azimutale égale à 2. L'aberration de coma est quant à elle une modulation azimutale de fréquence unité, à partir d'un déphasage radial de degré 3.

Le produit d'une fonction radiale par une fonction azimutale sera noté tensoriellement :

$$f = R \otimes T \quad (1.14)$$

et correspond à une fonction définie sur \mathbf{D} par :

$$\forall (r, t) \in [0, 1] \times [-\pi, +\pi], \quad f(r \cos(t), r \sin(t)) = R(r)T(t) \quad (1.15)$$

Le produit scalaire de deux produits tensoriels $f_1 = R_1 \otimes T_1$ et $f_2 = R_2 \otimes T_2$ se décompose sous forme de produit :

$$\langle f_1, f_2 \rangle_{\mathbf{D}} = \langle R_1, R_2 \rangle_{\text{rad}} \langle T_1, T_2 \rangle_{\text{azi}} \quad (1.16)$$

de sorte que l'orthogonalité de $R_1 \otimes T_1$ et $R_2 \otimes T_2$ peut être assurée aussi bien par l'orthogonalité de R_1 et R_2 pour le produit scalaire radial que par celle de T_1 et T_2 pour le produit scalaire azimutal. Ce point est crucial pour la construction des familles orthogonales définies par la suite.

Décomposition azimutale d'un front d'onde polynomial

Comme première étape en vue de trouver des bases orthonormales de $\mathcal{P}_{\mathbf{D}}$ adaptées à la filtration des $\mathcal{P}_{\mathbf{D}}^{(N)}$, on peut observer qu'il est facile d'utiliser la diversité des fréquences azimutales pour construire à partir de la base de Taylor une autre base adaptée à la filtration des $\mathcal{P}_{\mathbf{D}}^{(N)}$, dont l'orthogonalité de nombreux vecteurs est assurée.

La base en question est obtenue par normalisation de produits tensoriels du type (16) précédent. Plus précisément, pour tout entier relatif m , on définit d'abord la fonction 2π -périodique $T_{(m)}$ par :

8. $\langle, \rangle_{\text{azi}}$ est un produit scalaire sur l'espace des fonctions 2π -périodiques et continues sur \mathbb{R} .

$$\forall t \in [-\pi, +\pi], \quad T_{(m)}(t) = \begin{cases} \sqrt{2} \cos(mt) & \text{si } m > 0 \\ 1 & \text{si } m = 0 \\ \sqrt{2} \sin(-mt) & \text{si } m < 0 \end{cases} .$$

Les fonctions $T_{(m)}$ ($m \in \mathbb{Z}$) seront appelées les fonctions trigonométriques canoniques. Elles vérifient classiquement les relations d'orthonormalité :

$$\langle T_{(\ell)}, T_{(m)} \rangle_{\text{azi}} = \delta_{\ell}^m = \begin{cases} 0 & \text{si } \ell \neq m \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} .$$

Il en résulte que des produits tensoriels de la forme $R_1 \otimes T_{(\ell)}$ et $R_2 \otimes T_{(m)}$ de $\mathcal{F}_{\mathbb{D}}$ sont orthogonaux dès que les entiers ℓ et m sont distincts, quelles que soient les fonctions R_1 et R_2 définies et continues sur $[0, 1]$, puisqu'alors :

$$\langle R_1 \otimes T_{(\ell)}, R_2 \otimes T_{(m)} \rangle_{\mathbb{D}} = \langle R_1, R_2 \rangle_{\text{rad}} \langle T_{(\ell)}, T_{(m)} \rangle_{\text{azi}} = 0 .$$

Pour tout entier naturel n et tout élément m de I_n , on pose ensuite :

$$A_n^m = \sqrt{n+1} R_{(n)} \otimes T_{(m)}$$

où

$$R_{(n)}(r) = r^n$$

A noter que le coefficient $\sqrt{n+1}$ est destiné à obtenir des fonctions « normalisées », c'est-à-dire de norme égale à 1. Pour les valeurs de n inférieures ou égales à 2, les fonctions A_n^m s'écrivent sous forme polynomiale :

- $A_0^0(r \cos(t), r \sin(t)) = 1,$
- $A_1^{-1}(r \cos(t), r \sin(t)) = 2r \sin(t) = 2y,$
- $A_1^{+1}(r \cos(t), r \sin(t)) = 2r \cos(t) = 2x,$
- $A_2^{-2}(r \cos(t), r \sin(t)) = r^2 \sqrt{6} \sin(2t) = 2\sqrt{6} xy,$
- $A_2^0(r \cos(t), r \sin(t)) = \sqrt{3} r^2 = \sqrt{3}(x^2 + y^2),$
- $A_2^{+2}(r \cos(t), r \sin(t)) = r^2 \sqrt{6} \cos(2t) = \sqrt{6}(x^2 - y^2).$

Plus généralement, pour tout entier naturel n , les fonctions A_n^m constituent, lorsque m décrit l'ensemble I_n , une famille orthonormale de fonctions polynomiales homogènes de degré n .

En effet, pour tout entier naturel m , $\cos(mt)$ est un polynôme en $\cos(t)$ ⁹, qui est pair si m est pair et impair si m est impair.

⁹ $\cos(mt) = T_m(\cos(t))$ où T_m est le m -ième polynôme de Tchebychev de première espèce.

Quant à $\sin(mt)$, c'est un polynôme impair en $\sin(t)$ si m est impair et le produit de $\sin(t)$ par un polynôme impair en $\cos(t)$ si m est pair ¹⁰

Lorsque m est un élément strictement positif de I_n , l'entier m a la même parité que n , de sorte que

$$A_n^m(x, y) = A_n^m(r \cos(t), r \sin(t)) = \sqrt{n+1} r^n \sqrt{2} \cos(mt)$$

est une fonction polynomiale des deux variables $r^2 = x^2 + y^2$ et $r \cos(t) = x$. La fonction A_n^m est donc bien un élément de \mathcal{P}_D , composée de monômes de degré total n .

De même, lorsque m est un élément strictement négatif de I_n , l'entier positif $-m$ a la même parité que n , de sorte que

$$A_n^m(x, y) = A_n^m(r \cos(t), r \sin(t)) = \sqrt{n+1} r^n \sqrt{2} \sin(-mt)$$

est une fonction polynomiale de $r^2 = x^2 + y^2$, $r \cos(t) = x$ et $r \sin(t) = y$. La fonction A_n^m est donc bien encore une combinaison linéaire de monômes de degré total n .

Pour chaque entier n , les $n+1$ fonctions A_n^m forment donc lorsque m parcourt I_n , une famille libre donc une base de l'espace vectoriel $\text{Vect}\{X_n^m; m \in I_n\}$.

Il en résulte que les fonctions polynomiales A_n^m , classées prioritairement par degré et, pour chaque degré n , par valeur croissante de m (dans I_n) constituent une base pyramidale de \mathcal{P}_D (voir Tableau 1.3) A noter que, malgré les relations d'orthonormalité des $T_{(m)}$ indiquées plus haut, la base des A_n^m n'est pas orthogonale, puisque $\langle A_n^m, A_n^{m'} \rangle$ n'est nul que si m et m' sont distincts.

Dans cette base, tout front d'onde polynomial admet une décomposition horizontale et une décomposition verticale

$$f = \sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\sum_{m \in I_n} a_n^m(f) A_n^m \right) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \left(\sum_{n \in J_m} a_n^m(f) A_n^m \right)$$

qu'on appellera respectivement sa décomposition azimutale horizontale et sa décomposition azimutale verticale.

10. $\sin(mt) = \sin(t) \times U_{m-1}(\cos(t))$ où U_{m-1} est le $(m-1)$ -ième polynôme de Tchebychev de deuxième espèce, qui est un polynôme pair si m est impair, un polynôme impair si m est pair.

			A_0^0			
			A_1^{-1}	A_1^{+1}		
		A_2^{-2}	A_2^0	A_2^{+2}		
	A_3^{-3}	A_3^{-1}	A_3^{+1}	A_3^{+3}		
	A_4^{-4}	A_4^{-2}	A_4^0	A_4^{+2}	A_4^{+4}	
	A_5^{-5}	A_5^{-3}	A_5^{-1}	A_5^{+1}	A_5^{+3}	A_5^{+5}
A_6^{-6}	A_6^{-4}	A_6^{-2}	A_6^0	A_6^{+2}	A_6^{+4}	A_6^{+6}

TABLE 1.3 – La pyramide des A_n^m jusqu'au degré 6. Deux polynômes qui se trouvent dans des colonnes différentes sont orthogonaux, mais ils ne le sont pas s'ils se trouvent dans la même colonne.

1.2 Les polynômes de Zernike

1.2.1 Orthonormalisation des bases de \mathcal{P}_D

Le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt¹¹ permet, à partir d'une famille libre (f_1, f_2, \dots, f_m) d'un espace euclidien E , de construire une famille orthonormale (h_1, h_2, \dots, h_m) qui engendre le même sous-espace vectoriel F . L'algorithme se déroule classiquement en deux étapes :

- La construction d'une base orthogonale (g_1, g_2, \dots, g_m) de F , en posant $g_1 = f_1$ puis en obtenant de proche en proche les vecteurs g_i (pour $2 \leq i \leq m$) par soustraction à chaque vecteur f_i de sa projection orthogonale sur le sous-espace engendré par $(g_1, g_2, \dots, g_{i-1})$.
- La « normalisation » des vecteurs g_i qui consiste à poser pour tout i

$$h_i = \frac{g_i}{\|g_i\|}.$$

Dans le cas où on dispose d'une suite infinie (f_1, f_2, \dots) d'un espace préhilbertien E , le procédé de Gram-Schmidt permet de définir par récurrence une famille orthonormale (h_1, h_2, \dots) telle que, pour tout entier strictement positif m , les deux familles finies (f_1, f_2, \dots, f_m) et (h_1, h_2, \dots, h_m) engendrent le même sous-espace vectoriel de E .

En notant $\mathcal{R}_{[m]}$ l'espace des fonctions polynomiales sur $[0, 1]$, de valuation supérieure ou égale à m et de même parité que $m \in \mathbb{N}$,¹² et en regroupant

11. On en trouvera le code Maple, dans le cadre utile pour la suite, dans l'annexe A.

12. qui s'écrit donc : $\mathcal{R}_{[m]} = \text{Vect}\{R_{(m+2h)}; h \in \mathbb{N}\}$.

tant les termes qui correspondent à une même valeur de m , on peut écrire la décomposition azimutale verticale de f sous la forme :

$$f(r, t) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} R_{[m]}(r) \otimes T_{(m)}(t)$$

où le polynôme $R_{[m]}$ appartient pour tout entier relatif m à $\mathcal{R}_{[|m|]}$.

Pour trouver une famille orthonormale de l'espace préhilbertien \mathcal{P}_D , il suffit d'appliquer le procédé de Gram-Schmidt aux bases échelonnées canoniques des espaces $\mathcal{R}_{[m]}$ puis de les appairer par produit tensoriel à des polynômes trigonométriques canoniques $T_{(m)}$.

On définit tout d'abord pour tout entier naturel m , la base $(R_n^m)_{n \in J_m}$ de $\mathcal{R}_{[m]}$ obtenue par le procédé de Gram-Schmidt à partir de la base $(R_{(m+2h)})_{h \in \mathbb{N}}$.

Les fronts d'onde polynomiaux $Z_n^m = R_n^m \otimes T_{(m)}$ sont classés prioritairement par degré et, pour chaque degré n , par valeur croissante de m (dans I_n). Cette famille constitue une base pyramidale et orthonormale de \mathcal{P}_D , appelée base des polynômes de Zernike. Le calcul explicite de ces polynômes est présenté dans le paragraphe suivant.

1.2.2 La base des polynômes de Zernike de \mathcal{P}_D

Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on note $\pi_{m,p}$ le projecteur orthogonal (pour le produit scalaire radial) sur le sous-espace

$$F = \text{Vect}\{R_{(m+2h)}; 0 \leq h < p\}$$

de l'espace des fonctions polynomiales sur $[0, 1]$.

La projection orthogonale $\pi_{m,p}(R_{(m+2p)})$ de $R_{(m+2p)}$ sur F est caractérisée par les relations d'orthogonalité :

$$\forall q \in \{0, \dots, p-1\}, \quad \langle R_{(m+2p)} - \pi_{m,p}(R_{(m+2p)}), R_{(m+2q)} \rangle_{\text{rad}} = 0 \quad (3)$$

Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ de $\pi_{m,p}(R_{(m+2p)})$ les coordonnées de $\pi_{m,p}(R_{(m+2p)})$ dans la base des polynômes de degré inférieur de la même famille :

$$\pi_{m,p}(R_{(m+2p)}) = \sum_{h=1}^p \lambda_h R_{(m+2h-2)}$$

Comme le produit scalaire radial de deux polynômes de la base canonique de $\mathbb{R}[X]$ est donné par :

$$\langle R_{(i)}, R_{(j)} \rangle_{\text{rad}} = \int_0^1 r^i r^j 2r \, dr = \frac{2}{i+j+2}$$

les relations d'orthogonalité (3) s'écrivent :

$$\forall q \in \{0, \dots, p-1\}, \quad \sum_{h=1}^p \frac{2}{2m+2h+2q} \lambda_h = \frac{2}{2m+2q+2p+2} \quad .$$

Les coordonnées λ_h sont donc solutions du système :

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{m+1} & \frac{1}{m+2} & \cdots & \frac{1}{m+p} \\ \frac{1}{m+2} & \frac{1}{m+3} & \cdots & \frac{1}{m+p+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{m+p} & \frac{1}{m+p+1} & \cdots & \frac{1}{m+2p-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{m+p+1} \\ \frac{1}{m+p+2} \\ \vdots \\ \frac{1}{m+2p} \end{pmatrix} \quad (4)$$

La matrice carrée $A_{m,p}$ de ce système est la matrice de Gram du p -uplet $(R_{(m)}, R_{(m+2)}, \dots, R_{(m+2p-2)})$, composée des produits scalaires radiaux de ces polynômes, dont le déterminant est calculable. En effet, les coefficients de cette matrice sont de la forme $\frac{1}{a_i + b_j}$, pour $a_i = m + i - 1$ et $b_j = j$ et l'expression factorisée des déterminants des matrices de cette forme, appelés déterminants de Cauchy, est connue.

Quels que soient les $2p$ nombres réels $a_1, \dots, a_p, b_1, \dots, b_p$ tels que, pour tout $(i, j) \in [[1, p]]^2$, $a_i + b_j \neq 0$, on a :

$$\det \begin{pmatrix} \frac{1}{a_1 + b_1} & \frac{1}{a_1 + b_2} & \cdots & \frac{1}{a_1 + b_p} \\ \frac{1}{a_2 + b_1} & \frac{1}{a_2 + b_2} & \cdots & \frac{1}{a_2 + b_p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{a_p + b_1} & \frac{1}{a_p + b_2} & \cdots & \frac{1}{a_p + b_p} \end{pmatrix} = \frac{\prod_{1 \leq i < i' \leq p} (a_{i'} - a_i) \prod_{1 \leq j < j' \leq p} (b_{j'} - b_j)}{\prod_{1 \leq i, j \leq p} (a_i + b_j)} \quad (5)$$

Pour calculer l'unique solution $(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$ du système (4), les formules classiques de Cramer n'utilisent que des déterminants de Cauchy. Le calcul se déroule comme suit.

Soit h un nombre entier compris entre 1 et p . Pour trouver λ_h , on utilise les déterminants de Cauchy associés aux famille respectives $(a_1, \dots, a_p, b_1, \dots, b_p)$ et $(a_1, \dots, a_p, b_1^*, \dots, b_p^*)$ soit : où $a_i = m + i - 1$, $b_j = j$ et $b_j^* = \begin{cases} p + 1 & \text{si } j = h \\ j & \text{si } j \neq h \end{cases}$

$$\lambda_h = \frac{\prod_{1 \leq i < i' \leq p} (a_{i'} - a_i) \prod_{1 \leq j < j' \leq p} (b_{j'}^* - b_j^*)}{\prod_{1 \leq i, j \leq p} (a_i + b_j^*)} = \frac{\prod_{1 \leq i, j \leq p} (a_i + b_j) \prod_{1 \leq j < j' \leq p} (b_{j'}^* - b_j^*)}{\prod_{1 \leq i < i' \leq p} (a_{i'} - a_i) \prod_{1 \leq j < j' \leq p} (b_{j'} - b_j)} \times \frac{\prod_{1 \leq i, j \leq p} (a_i + b_j^*)}{\prod_{1 \leq i, j \leq p} (a_i + b_j)}$$

c'est-à-dire

$$\lambda_h = \frac{\prod_{1 \leq i \leq p} (m + i - 1 + h) \prod_{1 \leq j < h} (p + 1 - j) \prod_{h < j' \leq p} (j' - p - 1)}{\prod_{1 \leq i \leq p} (m + i - 1 + p) \prod_{1 \leq j < h} (h - j) \prod_{h < j' \leq p} (j' - h)}$$

$$= \frac{(m + h + p - 1)!}{(m + h - 1)!} \times \frac{(m + p)!}{(m + 2p)!} \times \frac{(-1)^{p-h} p!}{(h - 1)! (p - h + 1)!}$$

d'où, finalement :

$$\pi_{m,p}(R_{(m+2p)}) = \sum_{h=1}^p \frac{(m + h + p - 1)!}{(m + h - 1)!} \times \frac{(m + p)!}{(m + 2p)!} \times \frac{(-1)^{p-h} p!}{(h - 1)! (p - h + 1)!} R_{(m+2h-2)}.$$

Les polynômes

$$Q_{m,p} = R_{(m+2p)} - \sum_{h=1}^p \frac{(m + h + p - 1)!}{(m + h - 1)!} \times \frac{(m + p)!}{(m + 2p)!} \times \frac{(-1)^{p-h} p!}{(h - 1)! (p - h + 1)!} R_{(m+2h-2)} \quad (6)$$

constituent donc, lorsque p varie dans \mathbb{N} , une base orthogonale de $\mathcal{R}_{[m]}$.

Pour en faire une base orthonormale, il reste à évaluer les normes radiales

$$\| Q_{m,p} \|_{\text{rad}} = \sqrt{\langle Q_{m,p}, Q_{m,p} \rangle_{\text{rad}}}$$

ce qui est possible à partir des déterminants des matrices de Gram $A_{m,p}$:

$$\det A_{m,p} = \frac{\prod_{1 \leq i < i' \leq p} (i' - i) \prod_{1 \leq j < j' \leq p} (j' - j)}{\prod_{1 \leq i, j \leq p} (m + i + j - 1)} = \frac{\prod_{0 \leq h < p} (h!)^2}{\prod_{1 \leq i \leq p} (m + i - 1)!}.$$

On trouve ainsi :

$$\| Q_{m,p} \|_{\text{rad}}^2 = \frac{\det A_{m,p+1}}{\det A_{m,p}} = \frac{((m+p)!)^2 (p!)^2}{((m+2p)!)^2 (m+2p+1)} .$$

Le calcul précédent s'applique à tout entier $p \geq 1$, mais la formule obtenue est aussi applicable pour $p = 0$ puisque $\| Q_{m,0} \|_{\text{rad}}^2 = \| R_{(m)} \|_{\text{rad}}^2 = \frac{1}{m+1}$.

On a ainsi :

$$\forall (m,p) \in \mathbb{N}^2, \quad \| Q_{m,p} \|_{\text{rad}} = \frac{1}{\binom{m+2p}{p} \sqrt{m+2p+1}} .$$

Les polynômes

$$R_{m,p} = \frac{1}{\| Q_{m,p} \|_{\text{rad}}} Q_{m,p} = \binom{m+2p}{p} \sqrt{m+2p+1} Q_{m,p} \quad (7)$$

constituent donc, lorsque p varie dans \mathbb{N} , une base orthonormale de $\mathcal{R}_{[m]}$, pour le produit scalaire radial.

Dans le but de classer les polynômes orthonormaux précédents selon leur degré, on est amené à poser $n = m + 2p$ dans la formule (6), qui devient :

$$Q_{m,p} = R_{(n)} - \frac{\binom{\frac{n+m}{2}}{p} \binom{\frac{n-m}{2}}{p}}{n!} \sum_{h=1}^{\frac{n-m}{2}} \frac{(-1)^{\frac{n-m}{2}-h} \binom{\frac{n+m}{2}+h-1}{h-1}}{(m+h-1)!(h-1)! \binom{\frac{n-m}{2}-h+1}{h-1}} R_{(m+2h-2)} .$$

En posant ensuite $k = \frac{n-m}{2} - h + 1$, on obtient

$$Q_{m,p} = \frac{\binom{\frac{n+m}{2}}{p} \binom{\frac{n-m}{2}}{p}}{n!} \sum_{k=0}^{\frac{n-m}{2}} \frac{(-1)^k (n-k)!}{k! \binom{\frac{n+m}{2}-k}{p} \binom{\frac{n-m}{2}-k}{p}} R_{(n-2k)}$$

et pour les polynômes radiaux normalisés

$$R_{m,p} = \sqrt{m+2p+1} \sum_{k=0}^{\frac{n-m}{2}} \frac{(-1)^k (n-k)!}{k! \binom{\frac{n+m}{2}-k}{p} \binom{\frac{n-m}{2}-k}{p}} R_{(n-2k)} .$$

Dans les notations usuelles pour les polynômes de Zernike, on utilise pour l'entier m des valeurs aussi bien négatives que positives. Ainsi, pour

tout entier naturel n et tout élément m de I_n , on définit le polynôme R_n^m , de degré égal à n , par la formule :

$$\forall r \in [0, 1], \quad R_n^m(r) = \sqrt{n+1} \sum_{0 \leq k \leq \frac{n-|m|}{2}} (-1)^k \frac{(n-k)!}{k! \left(\frac{n-m}{2} - k\right)! \left(\frac{n+m}{2} - k\right)!} r^{n-2k} \quad (8)$$

Le lien avec les polynômes calculés précédemment est donné par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall m \in I_n, \quad R_n^m = R_{|m|, \frac{n-|m|}{2}}^m$$

ou, inversement

$$\forall (m, p) \in \mathbb{N}^2, \quad R_{m,p} = R_{m+2p}^m.$$

Les quinze polynômes R_n^m de degré inférieur ou égal à 4 sont donnés par :

- $R_0^0(r) = 1$
- $R_1^{-1}(r) = \sqrt{2}r, R_1^1(r) = \sqrt{2}r$
- $R_2^{-2}(r) = \sqrt{3}r^2, R_2^0(r) = \sqrt{3}(2r^2 - 1), R_2^2(r) = \sqrt{3}r^2$
- $R_3^{-3}(r) = 2r^3, R_3^{-1}(r) = 2(3r^3 - 2r), R_3^1(r) = 2(3r^3 - 2r), R_3^3(r) = 2r^3$
- $R_4^{-4}(r) = R_4^4(r) = \sqrt{5}r^4, R_4^{-2}(r) = R_4^2(r) = \sqrt{5}(4r^4 - 3r^2),$
 $R_4^0(r) = \sqrt{5}(6r^4 - 6r^2 + 1).$

Par construction, la famille $(R_n^m)_{n \in \mathbb{N}, m \in I_n}$ vérifie les relations d'orthonormalité

$$\forall (m, p, q) \in \mathbb{N}^3, \quad \int_0^1 R_{m+2p}^m(r) R_{m+2q}^m(r) 2r dr = \delta_p^q = \begin{cases} 1 & \text{si } p = q \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

ce qui assure l'orthogonalité de $R_{m+2p}^m \otimes T$ et $R_{m+2q}^m \otimes T$ pour toute fonction continue et 2π -périodique T , dès que p et q sont distincts.

1.2.3 La décomposition pyramidale de Zernike

Il résulte de ce qui précède que les fonctions polynomiales $R_n^m \otimes T_{(m)}$, appelées les polynômes de Zernike et classées prioritairement par degré et, pour chaque degré n , par valeur croissante de m (dans l'ensemble I_n) constituent une base pyramidale de \mathcal{P}_D , qu'on appellera la base de Zernike.

Le polynôme de Zernike Z_n^m est donc donné, pour tout entier naturel n et tout élément de I_n par :

$$Z_n^m = R_n^{|m|} \otimes T_{(m)}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & Z_0^0 & & \\
 & & & & Z_1^{-1} & & Z_1^{+1} \\
 & & & & Z_2^{-2} & & Z_2^0 & & Z_2^{+2} \\
 & & & & Z_3^{-3} & & Z_3^{-1} & & Z_3^{+1} & & Z_3^{+3} \\
 & & & & Z_4^{-4} & & Z_4^{-2} & & Z_4^0 & & Z_4^{+2} & & Z_4^{+4} \\
 & & & & Z_5^{-5} & & Z_5^{-3} & & Z_5^{-1} & & Z_5^{+1} & & Z_5^{+3} & & Z_5^{+5} \\
 & & & & Z_6^{-6} & & Z_6^{-4} & & Z_6^{-2} & & Z_6^0 & & Z_6^{+2} & & Z_6^{+4} & & Z_6^{+6}
 \end{array}$$

TABLE 1.4 – La pyramide des polynômes de Zernike Z_n^m jusqu'au degré 6.

c'est-à-dire, sous forme développée :

$$Z_n^m = \begin{cases} \sqrt{2(n+1)} \sum_{0 \leq k \leq \frac{n-m}{2}} (-1)^k \frac{(n-k)!}{k! \left(\frac{n-m}{2} - k\right)! \left(\frac{n+m}{2} - k\right)!} r^{n-2k} \cos(mt) & \text{si } m > 0 \\ \sqrt{n+1} \sum_{0 \leq k \leq \frac{n}{2}} (-1)^k \frac{(n-k)!}{k! \left(\frac{n}{2} - k\right)! \left(\frac{n}{2} - k\right)!} r^{n-2k} & \text{si } m = 0 \\ \sqrt{2(n+1)} \sum_{0 \leq k \leq \frac{n+m}{2}} (-1)^k \frac{(n-k)!}{k! \left(\frac{n-m}{2} - k\right)! \left(\frac{n+m}{2} - k\right)!} r^{n-2k} \sin(|m|t) & \text{si } m < 0 \end{cases}$$

Dans cette base, tout front d'onde polynomial admet une décomposition horizontale et une décomposition verticale

$$f = \sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\sum_{m \in I_n} z_n^m(f) Z_n^m \right) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \left(\sum_{n \in J_m} z_n^m(f) Z_n^m \right)$$

qu'on appellera respectivement sa décomposition horizontale de Zernike et sa décomposition verticale de Zernike.

L'orthonormalité de la base de Zernike permet alors d'écrire les produits scalaires de fronts d'onde polynomiaux à l'aide de leurs composantes dans cette base, d'où les formules applicables à tous les éléments f et g de \mathcal{P}_D

$$\langle f, g \rangle_D = \sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\sum_{m \in I_n} z_n^m(f) z_n^m(g) \right)$$

et

$$\| f \|_{\mathbb{D}} = \sqrt{\sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\sum_{m \in I_n} (z_n^m(f))^2 \right)} .$$

Elle permet aussi d'obtenir la décomposition de n'importe quel front d'onde f en calculant les produits scalaires de f par les polynômes de Zernike :

$$f = \sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\sum_{m \in I_n} \langle f, Z_n^m \rangle_{\mathbb{D}} Z_n^m \right) .$$

1.3 Les limites de l'approche de Zernike

La construction des modes de Zernike requiert la présence de termes de degré radial inférieur pour assurer l'orthogonalité des modes de même fréquence azimutale. Ce mélange est à l'origine de problèmes bien identifiés dans la littérature et présentés ici.

1.3.1 Intrication des degrés radiaux

L'impact visuel des aberrations optiques de haut degré relevées dans la décomposition de Zernike a été étudié. Il a été par exemple observé que les modes individuels de Zernike situés près de l'axe vertical de la pyramide (faible degré azimutal) ont un impact visuel plus élevé que ceux situés près des bords (degré azimutal élevé). Par exemple, à coefficient RMS égal, le coefficient de défocus (z_2^0) et celui de coma ($z_3^{\pm 1}$) induisent respectivement une diminution de l'acuité visuelle plus marquée que ceux de l'astigmatisme ($z_2^{\pm 2}$) et l'aberration trefoil ($z_3^{\pm 3}$) [11].

Comme il a été vu précédemment, la description d'un front d'onde utilisant la série des polynômes de Zernike repose sur une décomposition mathématique et fait apparaître de façon analytique une série de déformations élémentaires correspondant à des aberrations optiques prédéfinies. En pratique, les effets respectifs de chacune des aberrations mesurées se recombinent avec un effet additif ou soustractif, et rendent relativement difficile une interprétation purement qualitative de la fonction visuelle à partir des coefficients obtenus. Par exemple, quand le défocus (Z_2^0) et l'aberration sphérique (Z_4^0) sont pondérés par des coefficients de même signe, leurs effets se contrebalancent en regard de la partie centrale du front d'onde : ceci est lié à la présence de termes en r^2 au sein de l'expression analytique de (Z_4^0) (voir figure 1.1).

Ainsi, pour neutraliser le terme en r^2 au sein de Z_4^0 il faut ajouter un défocus dont le coefficient est égal à $z_2^0 = \sqrt{15} z_4^0$ (voir figure 1.2).

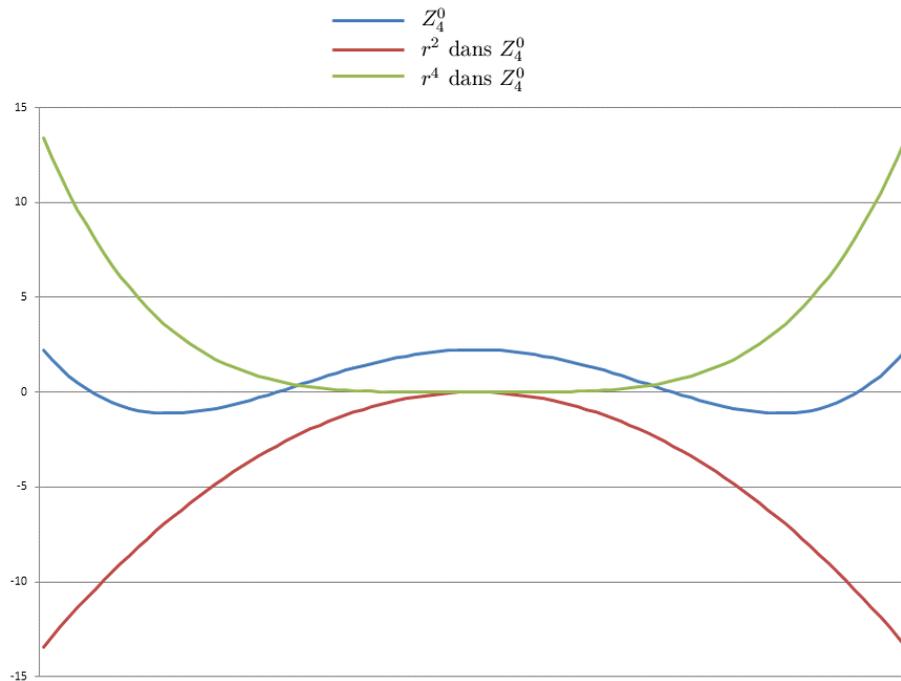


FIGURE 1.1 – Répartition des termes en r^2 et en r^4 au sein du polynôme de Zernike Z_4^0 .

1.3.2 Observations expérimentales

Atchinson et Guo ont étudié et ont comparé l'effet de flou induit par diverses aberrations optiques de haut degré (coma, trefoil, aberration sphérique) au travers d'une pupille artificielle de 5mm, grâce à un banc d'optique adaptative (Imagine Eyes, HASO 32). [12]

La présence de termes de second degré au sein de l'aberration sphérique de type Zernike a conduit les auteurs à distinguer celle-ci de l'aberration sphérique de Seidel, constituée pour sa part uniquement d'un terme de degré quatre ($S_4^0 = s_4^0 r^4$) et à comparer leurs effets respectifs. Les stimuli visuels étaient des optotypes lettres blanches sur fond noir, correspondant à différents pouvoirs de résolution.

En générant de l'aberration de type coma avec le miroir d'optique adaptative, les auteurs ont constaté la présence d'un effet de tilt (déviations de l'image), conduisant l'œil à se réaligner sur la cible qui présente alors un déplacement apparent. Ceci les a amené à ajouter un tilt de compensation

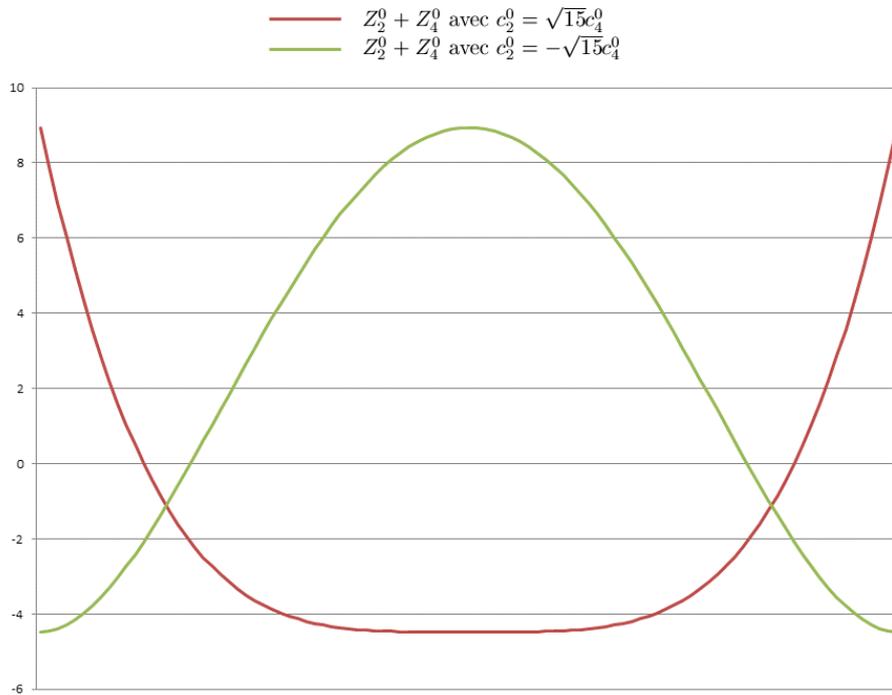


FIGURE 1.2 – Représentation du profil de deux fronts d'onde de même variance mais dont le signe du coefficient z_2^0 avec $|z_2^0| = \sqrt{15}z_4^0$ est opposé. Quand les termes en r^2 s'additionnent (z_2^0 et z_4^0 sont de signes opposés), le profil du front d'onde est parabolique, et le défocus domine. Quand les termes en r^2 s'annulent (z_2^0 et z_4^0 sont de même signe), le profil du front d'onde épouse un profil en r^4 pur et une courbure paraxiale nulle.

pour chacune des valeurs de coma testée, et ce pour chaque sujet. Ce tilt était lié à la présence de termes en r dans le terme de coma de Zernike. Cet effet de tilt n'a pas été rapporté en manipulant le miroir d'optique adaptative pour générer des taux variables d'aberration de type trefoil, qui ne contient qu'un terme en r^3 et pas de terme en r^1 . Enfin les auteurs ont observé que l'induction d'aberration sphérique de type Zernike sur une pupille de 5 mm induisait un défocus dont la valeur était proportionnelle au coefficient c_4^0 et lié à la présence de termes en r^2 .

Les seuils perçus pour le flou induit par l'aberration sphérique de type Seidel exprimés en " coefficient RMS " étaient plus élevés que ceux de l'aberration sphérique primaire de Zernike. Le calcul du RMS de l'aberration sphérique de Seidel ne tient compte que de la valeur du coefficient multiplicatif du terme en r^4 , alors qu'il est nécessaire de " soustraire " à l'expression du

polynôme de Zernike un défocus tel que $z_2^0 = \sqrt{15}z_4^0$ pour ne conserver que les termes en r^4 . Pour un même coefficient affecté au terme en r^4 , la valeur du coefficient de l'aberration sphérique de Seidel est alors 4 fois plus élevée que celle de l'aberration sphérique primaire de Zernike. Cette étude souligne la faible prédictibilité du taux RMS des termes de défocus de Zernike pour prédire la réfraction (correction sphérique), et l'importance des termes dont l'effet s'exerce dans la région centrale de la pupille. Concernant l'aberration impaire de type coma, l'effet délétère du tilt lié au terme en r^1 présent au sein de l'expression de Zernike a également été retrouvé pendant l'utilisation du miroir d'optique adaptative.

D'autres résultats d'études consacrées à l'impact visuel des aberrations monochromatiques de type Zernike et Seidel soulignent l'importance de la définition analytique de ces aberrations [13]. Dans cette étude, les auteurs ont généré des images rétinienne dégradées par des aberrations du 2e, 3e et 4e degré exprimées mathématiquement sous la forme d'aberrations de Zernike ou de la série de Seidel. Un effet linéaire de l'erreur quadratique (RMS) a été mis en évidence sur la valeur de l'angle minimum de résolution (*Minimum Angle of Resolution*, MAR), mais cet effet variait considérablement selon le type d'aberration considéré, ainsi que son expression analytique. La pente de la relation linéaire entre le MAR et le taux RMS (minutes d'arc/écart quadratique) de l'aberration sphérique de Seidel n'était mesurée qu'à une valeur comprise entre 4% et 10% de celle de l'aberration sphérique de Zernike. Ceci n'était pas lié à la différence du coefficient global affecté au terme en r^4 . En effet, en égalisant cette valeur pour les aberrations sphérique de Seidel et de Zernike, l'impact de l'aberration sphérique de Zernike était encore mesuré à environ 4 fois celui de l'aberration sphérique de Seidel. L'effet d'une aberration est plus particulièrement lié à la présence de termes de bas degré (r^2) induisant une déformation de la partie centrale du front d'onde.

L'utilisation du terme de haut degré pour qualifier un mode comme l'aberration sphérique primaire de Zernike peut être sujette à caution car une partie de l'impact de cette aberration est liée au terme en r^2 , qui serait considéré de manière isolée comme une erreur du front d'onde de bas degré. L'effet de l'aberration sphérique de Zernike résulte toutefois de l'effet combiné des modes en r^2 et r^4 . En effet, si le retentissement sur l'acuité visuelle du défocus de Zernike et de l'aberration sphérique de Zernike est comparable (environ 6 minutes d'arc par micron de RMS), le coefficient affecté à r^2 est environ quatre fois plus grand dans le mode Z_4^0 que dans le mode Z_2^0 . Il existe donc une atténuation relative de l'effet du terme en r^2 par celui du terme en r^4 au sein du mode d'aberration sphérique de Zernike Z_4^0 . L'aberration sphérique de type Seidel ne comportant qu'un terme en r^4 , son impact sur

l'acuité visuelle (pour une même valeur de coefficient affecté à r^4) est cependant nettement moins prononcé que celui de l'aberration sphérique de type Zernike. Ces tendances ont également été retrouvées en comparant les effets respectifs de l'astigmatisme secondaire de Zernike (plus prononcé) et de Seidel (moins prononcé).

Ces études soulignent la faible pertinence de l'erreur quadratique globale (RMS) du front d'onde pour prédire son impact sur la fonction visuelle, et souligne l'importance de la structure analytique des fonctions présentes au sein de la base mathématique utilisée pour scinder, décrire et quantifier les aberrations du front d'onde.

1.3.3 Effets des aberrations de Zernike sur la prédiction de la meilleure réfraction sphéro-cylindrique

La justesse et la précision du statut réfractif de l'œil jouent un rôle fondamental dans bien des domaines des sciences de la vision et en pratique clinique (prescription de lunettes, de lentilles de contact, mesure avant chirurgie réfractive). Le statut réfractif de l'œil doit être défini comme la vergence sphéro-cylindrique requise dans le plan cornéen (ou des lunettes) pour maximiser la qualité de l'image rétinienne [14, 15].

L'influence de l'aberration sphérique de Zernike pour la prédiction de la réfraction subjective met également en lumière les problèmes inhérents à la présence de termes de différent degré radial au sein de certaines harmoniques. La valeur de réfraction optimale dépend de divers paramètres, comme la fréquence spatiale considérée, l'ambiance lumineuse (conditions mésopiques ou photopiques), le diamètre de la pupille et la prise en compte du phénomène de Stiles-Crawford [16]. La prédiction de la méthode de réfraction de Zernike (qui repose sur la minimisation de l'écart du front d'onde au sein de la pupille) conduit à des erreurs (myopisation excessive) quand l'erreur du front d'onde (aberration sphérique positive) augmente [17]

En présence d'aberration sphérique, bien qu'une focalisation paraxiale ne soit pas idéale [18], plusieurs études ont révélé que la réfraction paraxiale est plus proche d'un optimum que la réfraction fondée sur la simple minimisation du RMS [19, 20].

La présence d'une aberration sphérique positive au sens de Seidel (augmentation du terme en r^4) provoque une augmentation de la myopie du centre vers les bords de la pupille. L'étude de la réfraction au travers de pupilles annulaires confirme ce phénomène de myopisation périphérique [21] [22], cependant l'étude de la réfraction sur des pupilles de pourtour circulaire et de diamètre variable montre que la valeur de la réfraction optimale

n'est pas très sensible à celle du diamètre pupillaire, au moins en conditions photopiques.

Tout se passe comme si la valeur de la réfraction de l'œil était directement liée aux propriétés réfractives de la région paraxiale de la pupille, et de manière conjointe relativement insensible à la présence de déphasages situés plus aux bords du front d'onde et démasqués par la dilatation pupillaire. Ces observations renforcent le fait que la minimisation de l'erreur quadratique du front d'onde n'est pas une méthode très prédictive pour estimer la valeur de la réfraction oculaire. La réfraction paraxiale (front d'onde plat dans la région centrale) permet d'optimiser la fonction de modulation du contraste pour les fréquences spatiales élevées (30 cycles par degré, soit une acuité visuelle égale à 1 mn d'arc, ou 10/10). La prise en compte de l'effet de Stiles-Crawford suggère une réfraction optimale légèrement plus myopique si le contraste des fréquences spatiales plus faibles (1.7 ou 5.2 cycles par degré) est utilisé comme critère d'optimisation de la qualité de l'image rétinienne. En utilisant un modèle théorique, Xu et coll ont récemment montré que le phénomène de Stiles-Crawford n'intervient pas dans la myopisation de la réfraction en condition mésopique, et donc ne peut être invoqué pour le biais paraxial de la réfraction oculaire [16].

Pour une valeur donnée du coefficient z_4^0 d'aberration sphérique de Zernike, il existe une valeur optimale du coefficient de défocus z_2^0 à même de maximiser l'acuité visuelle. Cette valeur est comprise entre celle qui permet d'obtenir une réfraction paraxiale (compensation parfaite des termes en r^2) pour les valeurs modérées de z_4^0 , et celle qui permet de minimiser l'erreur du front d'onde dans une région centrale de la pupille [16]. Autrement dit, la valeur du coefficient z_2^0 qui maximise la qualité de l'image rétinienne est comprise entre celle qui minimise le RMS et celle qui permet d'obtenir une réfraction paraxiale nulle.

Il est légitime de postuler que cette influence paraxiale pour la réfraction paraxiale persiste pour les yeux présentant un taux élevé d'aberration sphérique positive ou négative (ceci concerne en particulier les yeux opérés de chirurgie réfractive cornéenne). Pour les yeux emmétropes après l'intervention (réfraction paraxiale égale à 0, front d'onde " plat " au centre) mais dont le front d'onde oculaire présente un taux élevé d'aberration sphérique, l'expression du front d'onde en expansion de polynômes de Zernike fait nécessairement intervenir du défocus Z_2^0 pour compenser le terme en r^2 présent dans l'expression analytique de Z_4^0 . L'aberration sphérique impliquée dans l'erreur du front d'onde chez les yeux corrigés pour la réfraction paraxiale est pourtant simplement expliquée par les termes de la série de Seidel de degré 4, sans qu'il soit besoin d'utiliser des termes en r^2 .

1.3.4 Effets des aberrations de Zernike sur la profondeur de champ

L'effet des aberrations de sphéricité sur la profondeur de champ a été particulièrement étudié, et plusieurs études ont montré que l'induction d'aberration sphérique primaire et/ou secondaire induit une augmentation de la profondeur de champ [23] [24] [25] [26] [27].

En particulier, la combinaison d'aberration sphérique primaire et secondaire, chacune affectée d'un coefficient de signe opposé, provoque une augmentation de la profondeur de champ plus élevée que lorsque ces coefficients sont de même signe. L'aberration sphérique primaire est l'une des principales aberrations optiques de haut degré de l'œil humain. Le déphasage qu'elle provoque peut être défini par l'utilisation d'un polynôme de Seidel ($S_4^0 = s_4^0 \cdot r^4$) ou d'un polynôme de Zernike $Z_4^0 = z_4^0 \sqrt{5}(6r^4 - 6r^2 + 1)$. Comme souligné récemment, malgré le fait que le terme en r^4 caractérise l'aberration sphérique, l'effet principal de cette aberration sur l'erreur réfractive de l'œil et la qualité optique de l'image rétinienne dépend également de la présence du terme de plus bas degré en r^2 . L'œil humain peut également présenter de l'aberration sphérique secondaire, qui est caractérisée par la présence d'un terme en r^6 dans son expression analytique. Elle s'exprime dans la classification des aberrations de Seidel comme ($S_6^0 = a_6^0 r^6$), et dans la classification de Zernike comme $Z_6^0 = z_6^0 \sqrt{7}(20r^6 - 30r^4 + 12r^2 - 1)$. En raison du coefficient affecté au terme en r^4 , la présence de taux très modestes d'aberration sphérique secondaire peut impacter la qualité de l'image rétinienne. Il faut que la valeur de son coefficient z_4^0 soit au moins égale à $\sqrt{35}z_6^0$ pour que le mode Z_4^0 "apporte" au front d'onde un terme plus élevé en r^4 que le coefficient z_6^0 . Un raisonnement similaire révèle que la contribution aux termes en r^2 du coefficient z_6^0 n'est pas négligeable ($12\sqrt{7}z_6^0$).

Une étude récente [16] a montré qu'en présence d'autres aberrations de haut degré, l'expansion de la profondeur de foyer observée après introduction d'aberration sphérique secondaire était principalement liée aux termes en r^2 et en r^4 . Inversement, l'induction isolée d'un déphasage en r^6 réduit plutôt qu'étend la profondeur de foyer. L'induction d'une élévation du taux d'aberration sphérique primaire semble suffisante pour augmenter la profondeur de champ de l'œil, ce qui peut s'avérer utile pour concevoir des systèmes de correction multifocale. Cependant, la présence de termes en r^2 modifie la réfraction paraxiale : une myopisation est observée en cas d'élévation du taux d'aberration sphérique de signe négatif, en raison du terme $-r^2$, alors que l'élévation du taux d'aberration sphérique de signe positif est responsable d'une hypermétropisation (terme $+r^2$).

En résumé, la présence de termes de degré inférieur au degré radial au sein de certains modes de Zernike est responsable de :

- difficultés d'alignement lors de l'induction ou la compensation d'aberration de type coma de Zernike en optique adaptative, en raison de la présence d'un tilt (terme en r^1) au sein de l'aberration de coma,
- variations de la réfraction paraxiale lors de l'induction de termes d'aberration sphérique primaire et secondaire de Zernike, liée à la présence de termes en r^2 au sein de ces modes,
- prédiction suboptimale de la réfraction sphéro-cylindrique par les seuls modes de Zernike de degré radial 2 ($Z_2^0, Z_2^{\pm 2}$), en raison de la présence de termes en r^2 dans certains modes de degré radial pair supérieur ou égal à 4. L'utilisation de la réfraction objective paraxiale, fondée sur le recueil de l'ensemble des termes en r^2 pour l'estimation du défocus et en $r^2 \cos(2\theta)$ et $r^2 \sin(2\theta)$ pour l'estimation de l'astigmatisme est plus pertinente que la réfraction utilisant les termes de degré radial 2 de la classification de Zernike,
- confusion entre les effets respectifs des termes en r^2, r^4 et r^6 sur la profondeur de champ de l'œil non accommodant lors de l'induction d'aberration sphérique secondaire.

Le chapitre suivant s'attache à construire une nouvelle base de décomposition polynomiale permettant de s'affranchir des difficultés précédentes.

CHAPITRE 2

UNE NOUVELLE DÉCOMPOSITION POLYNOMIALE DU FRONT D'ONDE OCULAIRE

On présente ici une nouvelle représentation pyramidale du front d'onde oculaire f , fondée sur une scission en deux composantes, l'une de bas degré, l'autre de haute valuation :

$$f = f_l + f_h \quad (2.1)$$

où f_l est un élément de l'espace des fronts d'ondes polynomiaux de degré inférieur ou égal à un entier L et f_h un élément de l'espace des fronts d'ondes polynomiaux ne possédant aucun terme de degré inférieur ou égal à L .

La construction d'une base orthonormale de ce dernier espace permet alors d'obtenir des coefficients dont la signification est plus pertinente en termes ophtalmologiques que celle des coefficients de Zernike, qui mêlent le haut et le bas degré.

2.1 La décomposition LD-HV (*low degree, high valuation*)

2.1.1 L'espace ${}^{(L)}\mathcal{P}_D$ et la scission LD-HV

Pour tout entier naturel L , on note ${}^{(L)}\mathcal{P}_D$ l'espace des fronts d'ondes polynomiaux de valuation supérieure ou égale à $L + 1$:

$${}^{(L)}\mathcal{P}_D = \text{Vect}\{X_n^m; n \geq L + 1, m \in I_n\}$$

où, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = (-n + 2\mathbb{N}) \cap (n - 2\mathbb{N})$ et pour tout $m \in I_n$:

$$X_n^m : (x, y) \mapsto x^{\frac{n+m}{2}} y^{\frac{n-m}{2}} .$$

2.1. La décomposition LD-HV (low degree, high valuation)

Une fois l'entier L choisi (on prendra par la suite $L = 2$ pour définir la décomposition D2V3, étudiée en détail plus loin), la décomposition en somme directe suivante :

$$\mathcal{P}_{\mathbf{D}} = \mathcal{P}_{\mathbf{D}}^{(L)} \oplus {}^{(L)}\mathcal{P}_{\mathbf{D}}.$$

Cette décomposition sera appelée la *scission* LD-HV parce qu'elle permet de scinder de manière unique un front d'onde polynomial f en la somme d'un front d'onde polynomial f_l de bas degré ($\deg(f_l) \leq L$) et d'un front d'onde polynomial f_h de haute valuation ($v(f_h) \geq L + 1$), appelé la composante de haut degré de f . Le front d'onde f_l sera appelé quant à lui la composante de bas degré de f :

$$\forall f \in \mathcal{P}_{\mathbf{D}}, \exists ! (f_l, f_h) \in \mathcal{P}_{\mathbf{D}}^{(L)} \times {}^{(L)}\mathcal{P}_{\mathbf{D}}, f = f_l + f_h.$$

Dans toute la suite, les notations sont celles du chapitre 1 précédent.

On peut écrire les composantes de bas degré et de haut degré de f à l'aide de la décomposition azimutale de f vue au chapitre précédent, grâce aux formules :

$$\begin{cases} f_l = \sum_{n=0}^L \left(\sum_{m \in I_n} a_n^m(f) A_n^m \right) \\ f_h = \sum_{n=L+1}^{\infty} \left(\sum_{m \in I_n} a_n^m(f) A_n^m \right) \end{cases}.$$

On observera que f_l s'écrit aussi comme le début du développement de Taylor de f :

$$f_l = \sum_{n=0}^L \left(\sum_{m \in I_n} x_n^m(f) X_n^m \right).$$

A noter par contre que la composante f_l ne coïncide pas avec le début de son développement de Zernike, à cause des termes "parasites" de bas degré présents dans les polynômes de Zernike de haut degré.

Le calcul des coefficients $a_n^m(f)$ utilise la collecte des coefficients de Zernike associés aux termes de degré fixé et de la décomposition verticale de f dans la base de Zernike.

La formule (8) du chapitre 1 permet d'écrire le coefficient de r^n dans le polynôme $R_{n+2p}^m(r)$, que l'on notera $c_{n+2p}^m(n)$:

$$c_{n+2p}^m(n) = \sqrt{n+2p+1} \frac{(-1)^p (n+p)!}{p! \left(\frac{n-m}{2}\right)! \left(\frac{n+m}{2}\right)!}.$$

La collecte de termes de même degré permet, par cumul, d'obtenir les coefficients $a_n^m(f)$ à l'aide des coefficients de Zernike :

$$a_n^m(f) = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \sum_{p \geq 0} z_{n+2p}^m(f) c_{n+2p}^m(n) .$$

La composante de bas degré f_l du front d'onde f s'écrit donc à l'aide des seuls coefficients de Zernike sous la forme :

$$f_l = \sum_{n=0}^L \frac{1}{\sqrt{n+1}} \left(\sum_{m \in I_n} \left(\sum_{p \geq 0} z_{n+2p}^m(f) c_{n+2p}^m(n) \right) A_n^m \right) .$$

2.1.2 Une base orthonormale de l'espace ${}^{(L)}\mathcal{P}_D$

La construction d'une base orthonormale $({}^{(L)}G_n^m)_{n \geq 3, m \in I_n}$ de l'espace ${}^{(L)}\mathcal{P}_D$ par un procédé tout-à-fait analogue à celui employé pour définir la base de Zernike de \mathcal{P}_D , permet de décomposer le front d'onde f sous la forme :

$$f = \sum_{n=0}^L \left(\sum_{m \in I_n} z_n^m(f_l) Z_n^m \right) + \sum_{n=L+1}^{\infty} \left(\sum_{m \in I_n} ({}^{(L)}g_n^m(f_h)) ({}^{(L)}G_n^m) \right) \quad (2.2)$$

où les coefficients $z_n^m(f_l)$ sont les coordonnées de f_l dans la base des polynômes de Zernike de degré inférieur ou égal à L , et les coefficients $({}^{(L)}g_n^m(f_h))$ les coordonnées de f_h dans la base orthonormale des $({}^{(L)}G_n^m)$, qui contrairement aux polynômes de Zernike de degré élevé ne contiennent jamais de terme de bas degré.

Pour construire une base orthonormale de polynômes $({}^{(L)}G_n^m)$ (avec $n \geq L+1$ et $m \in I_n$) de l'espace ${}^{(L)}\mathcal{P}_D$, on procède comme pour la base de Zernike, en apparaissant par produit tensoriel les fonctions trigonométriques canoniques $T_{(m)}$ à des polynômes orthogonaux de valuation supérieure ou égale à $L+1$ construits par le procédé de Gram-Schmidt.

Les polynômes de Zernike Z_n^m dont la fréquence azimutale $|m|$ est supérieure ou égale à $L+1$ appartiennent tous à l'espace ${}^{(L)}\mathcal{P}_D$ ¹ et forment une famille orthonormale. Comme ils sont orthogonaux aux polynômes de Zernike dont la fréquence azimutale $|m|$ est inférieure ou égale à L , on peut les conserver dans la base cherchée et n'appliquer le procédé indiqué qu'aux colonnes dont l'indice m est en valeur absolue inférieur ou égal à L .

Dans une telle colonne, la famille de polynômes à orthonormaliser pour le produit scalaire radial est constituée des $R_{(L+2+2p)}$ (pour p décrivant \mathbb{N}) si

1. Puisque $n \geq |m| \geq L+1$.

2.1. La décomposition LD-HV (low degree, high valuation)

L et m ont la même parité, et des $R_{(L+1+2p)}$ dans le cas contraire. En effet, pour un polynôme de valuation supérieure ou égale $L + 1$ à placer dans la colonne m , le plus bas degré possible est égal à $L + 1$ si m est pair et à $L + 2$ si m est impair.

On a déjà appliqué le procédé de Gram-Schmidt à ces familles de polynômes pour construire les polynômes de Zernike. Les mêmes formules s'appliqueront, avec des décalages d'indices convenables.

On trouve ainsi la base orthonormale de ${}^{(L)}\mathcal{P}_{\mathbf{D}}$ constituée des fronts d'ondes polynomiaux :

$${}^{(L)}G_n^m = \begin{cases} R_n^{L+1+1_{L+2\mathbb{N}}(n)} \otimes T_{(m)} & \text{si } |m| \leq L \\ Z_n^m & \text{sinon} \end{cases} .$$

pour tout $m \in \mathbb{Z}$ et $n \in (|m| + 2\mathbb{N}) \cap (L + 1 + \mathbb{N})$. Dans cette formule, les polynômes R_n^k ont été définis dans le chapitre précédent et où $1_{L+2\mathbb{N}}(n)$ est égal à 1 si l'entier $n - L$ est pair, à 0 sinon.

Dans une représentation pyramidale de cette base, les premières lignes disparaissent et on obtient par exemple pour $L = 2$ le tableau 2.1 ci-après.

	Z_3^{-3}		${}^{(2)}G_3^{-1}$		${}^{(2)}G_3^{+1}$		Z_3^{+3}				
		Z_4^{-4}		${}^{(2)}G_4^{-2}$		${}^{(2)}G_4^0$		${}^{(2)}G_4^{+2}$		Z_4^{+4}	
			Z_5^{-5}	Z_5^{-3}		${}^{(2)}G_5^{-1}$		${}^{(2)}G_5^{+1}$		Z_5^{+3}	Z_5^{+5}
Z_6^{-6}		Z_6^{-4}		${}^{(2)}G_6^{-2}$		${}^{(2)}G_6^0$		${}^{(2)}G_6^{+2}$		Z_6^{+4}	Z_6^{+6}

TABLE 2.1 – La pyramide des polynômes ${}^{(2)}G_n^m$ jusqu'au degré 6. Pour les fréquences azimutales supérieures ou égales à 3, les polynômes ${}^{(2)}G_n^m$ coïncident avec les polynômes de Zernike.

Dans la base des ${}^{(L)}G_n^m$, appelées harmoniques de haut degré, un front d'onde h de ${}^{(L)}\mathcal{P}_{\mathbf{D}}$ se décompose sous la forme :

$$h = \sum_{n=L+1}^{\infty} \left(\sum_{m \in I_n} ({}^{(L)}g_n^m(h)) {}^{(L)}G_n^m \right)$$

où, grâce à l'orthonormalité des harmoniques de haut degré, les coordonnées ${}^{(L)}g_n^m(h)$ sont données par :

$${}^{(L)}g_n^m(h) = \langle {}^{(L)}G_n^m, h \rangle_{\mathbf{D}} .$$

Dès lors, la décomposition annoncée d'un front d'onde f s'écrit sous la forme :

$$f = \sum_{n=0}^L \left(\sum_{m \in I_n} \langle Z_n^m, f_l \rangle_{\mathbb{D}} \right) Z_n^m + \sum_{n=L+1}^{\infty} \left(\sum_{m \in I_n} \langle {}^{(L)}G_n^m, f_h \rangle_{\mathbb{D}} \right) {}^{(L)}G_n^m \quad (2.3)$$

qui montre bien qu'une fois effectuée la scission bas degré-haute valuation de f , il est aisé d'obtenir les coefficients de la décomposition pyramidale associée.

2.1.3 Configuration géométrique et représentation 2D

Comme les deux sous-espaces $\mathcal{P}_{\mathbb{D}}^{(L)}$ et ${}^{(L)}\mathcal{P}_{\mathbb{D}}$ ne sont pas orthogonaux, les composantes f_l et f_h d'un front d'onde f ne sont en général pas orthogonales et il est important de visualiser leur configuration géométrique. À cette fin, on décompose le couple formé par les deux vecteurs dans une base orthonormale, de manière à donner une représentation fidèle de leurs longueurs et de l'angle qu'ils forment.

On appellera variance du haut degré d'un front d'onde f la variance de sa composante de haut degré, qui est égale à :

$$\|f_h - p_0(f_h)\|_{\mathbb{D}}^2 = \left(\sum_{n=L+1}^{\infty} \sum_{m \in I_n} ({}^{(L)}g_n^m(f_h))^2 \right) - (p_0(f_h))^2.$$

On définit de même la variance du bas degré de f par :

$$\|f_l - p_0(f_l)\|_{\mathbb{D}}^2 = \sum_{n=1}^L \sum_{m \in I_n} (z_n^m(f_l))^2.$$

La variance de f ne peut pas être obtenue par simple cumul des variances de haut et de bas degré, mais doit faire intervenir une covariance :

$$\text{Var}(f) = \text{Var}(f_l) + \text{Var}(f_h) + 2 \text{Cov}(f_l, f_h)$$

où $\text{Cov}(f_l, f_h) = \langle f_l - p_0(f_l), f_h - p_0(f_h) \rangle_{\mathbb{D}}$, qu'on appellera la covariance LD-HV de f .

Les variances du bas et du haut degré de f caractérisent avec sa covariance LD-HV la configuration géométrique des composantes f_l et f_h , délivrées de leurs pistons, , dans l'espace $\mathcal{P}_{\mathbb{D}}$. Cette configuration est résumée par la matrice de variance-covariance :

$$\begin{pmatrix} \text{Var}(f_l) & \text{Cov}(f_l, f_h) \\ \text{Cov}(f_l, f_h) & \text{Var}(f_h) \end{pmatrix}$$

qui fournit les longueurs des vecteurs $f_l - p_0(f_l)$ et $f_h - p_0(f_h)$, ainsi que leur angle, avec lesquels on peut faire une représentation plane, géométriquement fidèle, de la décomposition LD-HV qui sera affinée plus loin.

2.2 Le cas de la décomposition D2V3

2.2.1 Décomposition du front d'onde

Dans la suite de ce chapitre, on ne s'intéressera qu'au cas où $L = 2$, particulièrement utile d'un point de vue clinique, ce qui permet d'écrire les équations (2.1) et (2.2) sous la forme

$$f = f_l + f_h = \sum_{n=0}^2 \left(\sum_{m \in I_n} z_n^m(f_l) Z_n^m \right) + \sum_{n=3}^{\infty} \left(\sum_{m \in I_n} {}^{(2)}g_n^m(f_h) {}^{(2)}G_n^m \right) \quad (2.4)$$

Pour simplifier les notations, on pose

$$G_n^m = \begin{cases} Z_n^m & \text{si } n \leq 2 \\ {}^{(2)}G_n^m & \text{si } n \geq 3 \end{cases}$$

et

$$g_n^m(f) = \begin{cases} z_n^m(f_l) & \text{si } n \leq 2 \\ {}^{(2)}g_n^m(f_h) & \text{si } n \geq 3 \end{cases}.$$

Dès lors, la décomposition d'un front d'onde f dans la base des G_n^m s'écrit comme la somme

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{m \in I_n} g_n^m(f) G_n^m \right)$$

dont les six premiers termes correspondent à la composante de bas degré f_l de f et les suivants à sa composante de haut degré f_h :

$$\begin{cases} f_l = \sum_{n=0}^2 \left(\sum_{m \in I_n} g_n^m(f) G_n^m \right) \\ f_h = \sum_{n=3}^{\infty} \left(\sum_{m \in I_n} g_n^m(f) G_n^m \right) \end{cases}$$

Le développement (2.4) sera appelé la décomposition D2V3 du front d'onde f .

2.2.2 La nouvelle pyramide D2V3

Pour les fréquences azimutales $|m|$ supérieures à 3, les G_n^m coïncident avec les polynômes de Zernike correspondants.

Pour les fréquences azimutales inférieures ou égales à 3, les polynômes G_n^m de degré inférieur ou égal à 6 sont donnés par les formules suivantes :

$$\begin{aligned}
 &— G_3^{-1}(r \cos(t), r \sin(t)) = 2\sqrt{2} r^3 \sin(t) \\
 &— G_3^{+1}(r \cos(t), r \sin(t)) = 2\sqrt{2} r^3 \cos(t) \\
 &— G_4^{-2}(r \cos(t), r \sin(t)) = \sqrt{10} r^4 \sin(2t) \\
 &— G_4^0(r \cos(t), r \sin(t)) = \sqrt{5} r^4 \\
 &— G_4^2(r \cos(t), r \sin(t)) = \sqrt{10} r^4 \cos(2t) \\
 &— G_5^{-1}(r \cos(t), r \sin(t)) = 2\sqrt{3} (5r^5 - 4r^3) \sin(t) \\
 &— G_5^{+1}(r \cos(t), r \sin(t)) = 2\sqrt{3} (5r^5 - 4r^3) \cos(t) \\
 &— G_6^{-2}(r \cos(t), r \sin(t)) = \sqrt{14} (6r^6 - 5r^4) \sin(2t) \\
 &— G_6^0(r \cos(t), r \sin(t)) = \sqrt{7} (6r^6 - 5r^4) \\
 &— G_6^2(r \cos(t), r \sin(t)) = \sqrt{14} (6r^6 - 5r^4) \cos(2t)
 \end{aligned}$$

Le développement (2.4) correspond à l'écriture de f dans une base pyramidale composée des polynômes de Zernike de degré inférieur ou égal à deux, complétée pour les hauts degrés par la base des harmoniques G_n^m dont la valuation est supérieure ou égale à trois. Cette base pyramidale est représentée dans le tableau 2.2.

La figure 2.1 représente le profil radial des aberrations de degré radial pair et impair de la base D2V3.

Pour obtenir la composante de bas degré f_l à partir de décomposition de Zernike de f , on utilise le fait que f_l correspond au début de la décomposition azimutale horizontale de f

$$f_l = \sum_{n=0}^2 \left(\sum_{m \in I_n} a_n^m(f) A_n^m \right) \quad (2.5)$$

où les six coefficients $a_n^m(f)$ utiles sont obtenus à partir des formules générales données précédemment, permettant la collecte des termes de bas degré des polynômes de Zernike.

Connaissant f_l , on dispose de tous les coefficients de la décomposition D2V3, puisque les coefficients $z_m^n(f_l)$ et $g_m^n(f_h)$ sont donnés par :

$$z_m^n(f_l) = \langle Z_n^m, f_l \rangle_{\mathbb{D}} \quad (2.6)$$

$$g_m^n(f_h) = \langle G_n^m, f - f_l \rangle_{\mathbb{D}} \quad (2.7)$$

grâce à l'orthonormalité des Z_n^m d'une part, des G_n^m d'autre part.²

2. Voir code Maple en annexe B.

			Z_0^0			
			Z_1^{-1}		Z_1^{+1}	
		Z_2^{-2}		Z_2^0		Z_2^{+2}
		***	***	***	***	***
	Z_3^{-3}		G_3^{-1}		G_3^{+1}	Z_3^{+3}
	Z_4^{-4}	G_4^{-2}		G_4^0		G_4^{+2}
			Z_4^{+4}			
	Z_5^{-5}	Z_5^{-3}	G_5^{-1}		G_5^{+1}	Z_5^{+3}
						Z_5^{+5}
Z_6^{-6}	Z_6^{-4}	G_6^{-2}		G_6^0		G_6^{+2}
					Z_6^{+4}	Z_6^{+6}

TABLE 2.2 – La pyramide D2V3, composée des polynômes de Zernike Z_n^m jusqu’au degré 2 et des harmoniques G_n^m de degré supérieur ou égal à 3. L’absence d’orthogonalité de certaines harmoniques de haut degré par rapport aux harmoniques de Zernike de même fréquence azimutale est matérialisée par la présence d’une ligne de démarcation.

2.2.3 La décomposition D2V3 et sa représentation 3D

Pour donner une représentation géométrique spatiale fidèle des composantes de bas et de haut degré dans chacune des décompositions, on exprimera leur coordonnées cartésiennes dans des espaces de dimension 3 appropriés. Ces coordonnées sont calculables à partir de « matrices de variances-covariances » qui caractérisent leur configuration géométrique (angles et longueurs).

Pour visualiser les corrélations de fronts d’ondes, il convient non seulement de les centrer, en leur retranchant leurs pistons, mais aussi de les « aligner » c’est-à-dire de les purger de leurs harmoniques de degré 1.

Dans ce but, on introduit ici les notions de variance et de covariance généralisées, qui permettent d’éliminer les harmoniques de degré inférieur ou égal à 1.

On appellera *covariance généralisée* de deux fronts d’ondes f et g la quantité

$$\mathcal{C}(f, g) = \langle f - p_0(f) - z_1^{-1}(f) Z_1^{-1} - z_1^1(f) Z_1^1, g - p_0(g) - z_1^{-1}(g) Z_1^{-1} - z_1^1(g) Z_1^1 \rangle_{\mathbf{D}}$$

et *variance généralisée* d’un front d’onde f la covariance généralisée de ce

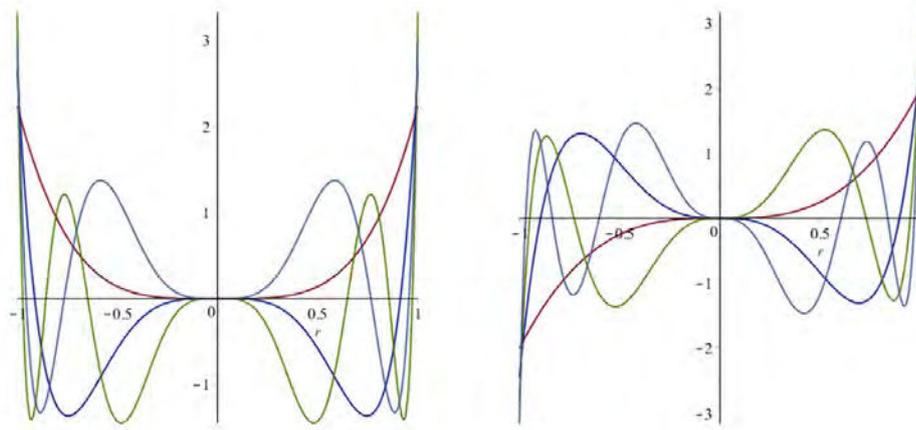


FIGURE 2.1 – Représentation du profil des 4 premiers modes de degré radial pairs (à gauche) et de degré radial impair (à droite) de la base D2V3.

front d'onde avec lui-même

$$\mathcal{V}(f) = \| f - p_0(f) - z_1^{-1}(f)Z_1^{-1} - z_1^1(f)Z_1^1 \|_{\mathbf{D}}^2$$

On appellera *variance du haut degré* d'un front d'onde f la variance généralisée de sa composante de haut degré, notée $V_h(f)$:

$$V_h(f) = \mathcal{V}(f_h) .$$

On définit de même la *variance du bas degré* de f

$$V_l(f) = \mathcal{V}(f_l)$$

et la *covariance LD-HV*, qui est la covariance généralisée des composantes de haut degré et de bas degré de f :

$$C_{l,h}(f) = C_{h,l}(f) = \mathcal{C}(f_l, f_h) = \mathcal{C}(f_h, f_l) .$$

Comme les deux sous-espaces $\mathcal{P}_{\mathbf{D}}^{(2)}$ et ${}^{(2)}\mathcal{P}_{\mathbf{D}}$ ne sont pas orthogonaux, la variance généralisée de f ne peut pas être obtenue par simple cumul des variances de haut et de bas degré :

$$\mathcal{V}(f) = V_l(f) + V_h(f) + 2 C_{l,h}(f) .$$

Les variances du bas et du haut degré de f caractérisent avec sa covariance LD-HV la configuration géométrique plane des composantes f_l et f_h ³ dans l'espace \mathcal{P}_D , résumée par la matrice de variance-covariance :

$$G(f_l, f_h) = \begin{pmatrix} V_l(f) & C_{l,h}(f) \\ C_{l,h}(f) & V_h(f) \end{pmatrix}$$

qui fournit les longueurs et l'angle $\theta_{l,h}$ des deux composantes déterminé par :

$$\cos(\theta_{l,h}) = \frac{\mathcal{V}(f) - V_l(f) - V_h(f)}{2\sqrt{V_l(f)V_h(f)}}$$

avec lesquels on peut faire une représentation plane, géométriquement fidèle, de la décomposition LD-HV du front d'onde.

Pour obtenir des représentations spatiales, on peut procéder de la même manière, en calculant des « matrices de configuration » dont les coefficients diagonaux sont des variances généralisées et les autres coefficients des covariances généralisées. Les deux décompositions du front d'onde expurgé s'écrivent :

$$\tilde{f} = Z_{ld} + Z_{hd} = G_{ld} + G_{hd}$$

où

$$\begin{cases} Z_{ld} = \sum_{m \in I_2} z_2^m(f) Z_2^m \\ Z_{hd} = \sum_{n=3}^{\infty} \left(\sum_{m \in I_n} z_n^m(f) Z_n^m \right) \end{cases} .$$

et

$$\begin{cases} G_{ld} = \sum_{m \in I_2} g_2^m(f) G_2^m \\ G_{hd} = \sum_{n=3}^{\infty} \left(\sum_{m \in I_n} g_n^m(f) G_n^m \right) \end{cases} .$$

Pour visualiser leur structure géométrique, on utilise la matrice de configuration :

$$G(Z_{ld}, Z_{hd}, G_{ld}, G_{hd}) = \begin{pmatrix} \mathcal{V}(Z_{ld}) & 0 & \mathcal{C}(Z_{ld}, G_{ld}) & \mathcal{C}(Z_{ld}, G_{hd}) \\ 0 & \mathcal{V}(Z_{hd}) & 0 & \mathcal{C}(Z_{hd}, G_{hd}) \\ \mathcal{C}(G_{ld}, Z_{ld}) & 0 & \mathcal{V}(G_{ld}) & \mathcal{C}(G_{ld}, G_{hd}) \\ \mathcal{C}(G_{hd}, Z_{ld}) & \mathcal{C}(G_{hd}, Z_{hd}) & \mathcal{C}(G_{hd}, G_{ld}) & \mathcal{V}(G_{hd}) \end{pmatrix} .$$

3. Délivrées de leurs harmoniques de degré inférieur ou égal à 1.

REPRESENTATIONS SPATIALES

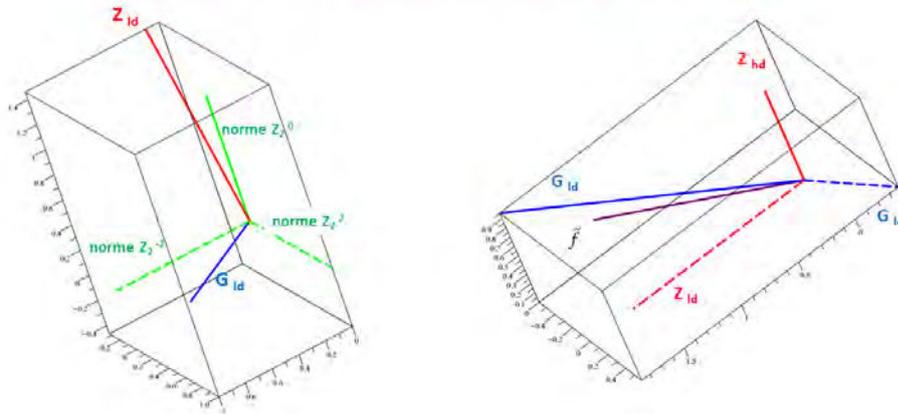


FIGURE 2.2 – Représentation spatiale de la composante de bas degré et du front d'onde total centré et aligné.

Par nécessité de se limiter à la dimension 3, on a choisi pour les figures de la partie 3 deux représentations spatiales interprétables d'un point de vue ophtalmologique, dont le calcul est détaillé dans l'annexe B :

- la représentation des fronts d'ondes Z_{ld}, G_{ld} dans l'espace vectoriel des fronts d'ondes centrés et alignés de degré 2, dont les polynômes de Zernike $Z_2^0, Z_2^{-2}, Z_2^{+2}$ constituent une base orthonormale (dont les vecteurs sont notés « norme Z_2^m » sur la figure) ;
- la représentation des fronts d'ondes $Z_{ld}, G_{ld}, Z_{hd}, G_{hd}$ dans l'espace vectoriel engendré par les fronts d'ondes centrés et alignés associés à Z_{ld}, G_{ld} et au front d'onde \tilde{f} .

2.3 Comparaison des bases D2V3 et de Zernike

L'écart du front d'onde à un front d'onde de référence est exprimé comme une somme de fonctions polynomiales élémentaires (appelées aussi harmoniques), dont chacune peut être considérée comme un type d'aberration particulier. Il est souhaitable que ces fonctions permettent une explication physique de l'écart du front d'onde en question.

L'orthogonalité des harmoniques de Zernike et leur moyenne nulle (sauf pour le piston) permet de décomposer un écart de front d'onde de manière unique, quel que soit l'ordre radial maximal utilisé pour la décomposition.

Les polynômes de Zernike contiennent des termes de divers degré radial, contrairement à ceux des séries de Seidel ou de Taylor. Cette particularité ne facilite pas l'interprétation des conséquences engendrées par les variations de certains coefficients sur la qualité optique, ou sur la réfraction de l'œil considéré. En pratique, l'introduction d'un mode d'aberration sphérique de Zernike (Z_4^0) induit une variation du défocus, en raison de du terme en r^2 . De même, une modulation isolée de l'aberration de coma de Zernike $Z_3^{\pm 1}$ provoque une modification automatique du tilt du front d'onde, en raison du terme en r^1 présent au sein de cette aberration.

La nouvelle base D2V3 combine les avantages procurés par les termes de la série de Seidel pour les aberrations de degré 3 et 4, qui sont respectivement " purs " pour ces degrés radiaux, mais elle y ajoute l'orthogonalité avec les aberrations de plus haut degré radial. La base D2V3 préserve de plus l'orientation globale des harmoniques de Zernike, et n'en diffère dans l'expression analytique que pour les modes situés au centre de la pyramide (de degré azimutal 0, 1 ou 2).

Les figures insérées dans le paragraphe suivant permettent de comparer l'expression analytique et la géométrie globale du déphasage engendré par les harmoniques D2V3 et celles de Zernike qu'elles remplacent.

2.3.1 Aberrations de degré radial 3

Les aberrations de coma primaire D2V3, G_3^{-1} et G_3^1 sont dépourvues de tilt (terme en r^1) et présentent une portion centrale dont la dérivée s'annule au centre de la pupille, contrairement aux aberrations de coma primaire Z_3^{-1} et Z_3^1 de Zernike (voir Figures 2.3 et 2.4).

En l'absence de compensation par des termes contenus dans des modes de degré radial impair plus élevé, la présence d'un terme de tilt au sein d'un front d'onde suggère a priori une déviation entre le rayon principal (qui relie le centre de la pupille et le point de fixation) et l'axe optique de l'instrument de mesure. Pourtant, dans le cas de l'œil, la mesure du front d'onde s'effectue de manière coaxiale avec l'axe optique de l'instrument. Ainsi, la présence d'un mode de tilt isolé soulève un problème d'interprétation et suggère un décalage significatif entre l'axe de la mesure, et l'axe de fixation.

Les aberrations de trefoil $G_3^{\pm 1}$ de la base D2V3 sont identiques à celles de la classification de Zernike, l'orthogonalité avec les autres termes de degré radial inférieur ou égal à 3 étant assurée par la fonction azimutale de degré $m=3$.

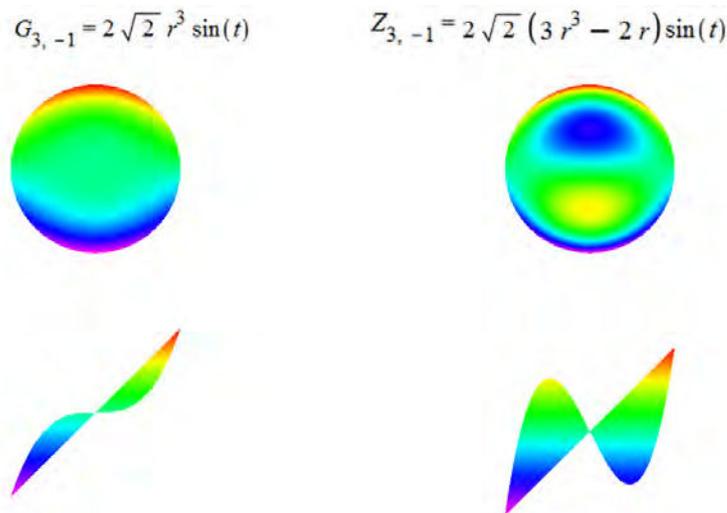


FIGURE 2.3 – Représentation bi et tri-dimensionnelle de l'enveloppe des écarts de phase pour les fonctions G_3^{-1} de la base D2V3 et Z_3^{-1} de la base de Zernike.

2.3.2 Aberrations de degré radial 4

L'aberration sphérique primaire G_4^0 de la classification D2V3 est dépourvue de terme en r^2 et présente une géométrie différente de l'aberration sphérique Z_4^0 de Zernike (voir Figure 2.5).

L'enveloppe de l'aberration G_4^0 est globalement identique à celle de l'aberration sphérique de Seidel égale à $S_4^0 = r^4$ et dépourvue de l'inflexion centrale induite par le terme en r^2 présent au sein de l'aberration Z_4^0 .

Le profil des aberrations $G_4^{\pm 2}$, correspondant aux modes de l'astigmatisme secondaire de la base D2V3, diffère de celui des termes d'astigmatisme secondaire qui leur correspondent dans les séries de Seidel (leur terme azimutal est différent) et de Zernike (absence de terme en r^2), voir figures 2.6 et 2.7.

Le profil des aberrations d'astigmatismes secondaires G_4^{-2} et G_4^2 ne comporte pas de lobes centraux, en l'absence de termes en $r^2 \sin(2t)$ et $r^2 \cos(2t)$ au sein de leur expression analytique. Ces différences sont équivalentes à celles que l'on rencontre avec les modes à symétrie de révolution G_4^0 et Z_4^0 (absence vs présence d'un terme en r^2).

Les modes de quadrafoil de la base D2V3 ($G_4^{\pm 4}$) sont identiques avec ceux

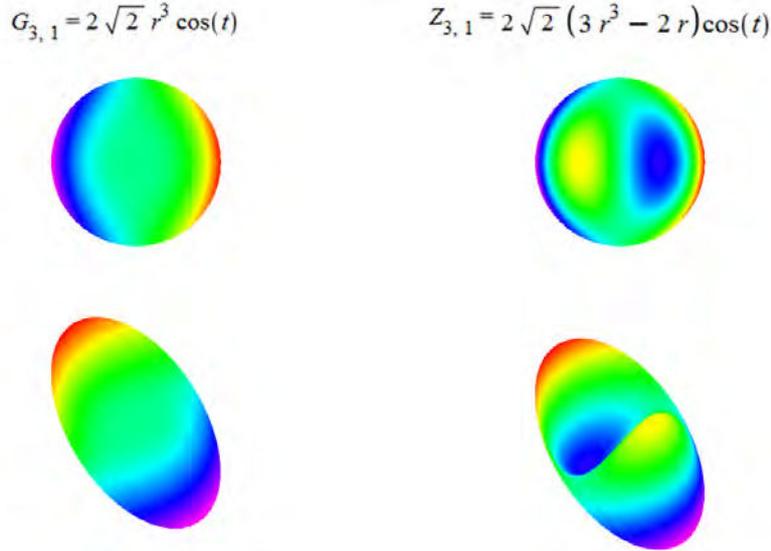


FIGURE 2.4 – Représentation bi et tri-dimensionnelle de l'enveloppe des écarts de phase pour les fonctions G_3^1 de la base D2V3 et Z_3^1 de la base de Zernike.

de quadrafoil de la base de Zernike ($Z_4^{\pm 4}$).

2.3.3 Aberrations de degré radial 5

L'aberration de coma secondaire de la base D2V3 $G_5^{\pm 1}$ ne comporte pas de terme de tilt, mais des termes en r^5 et en r^3 (voir Figures 2.8 et 2.9).

La géométrie résultante est marquée par la présence de pics et creux additionnels dans la zone paracentrale de ces aberrations. Leur amplitude est toutefois moins prononcée que ceux que présente l'aberration de coma secondaire de Zernike $Z_5^{\pm 1}$. L'aberration $G_5^{\pm 1}$ conserve une dérivée nulle au point $(0, 0)$.

Les autres termes de degré radial 5 de la base D2V3 5, $G_5^{\pm 3}$ et $G_5^{\pm 5}$, sont identiques à leurs homologues de la base de Zernike $Z_5^{\pm 3}$ et $Z_5^{\pm 5}$.

2.3.4 Aberrations de degré radial supérieur ou égal à 6

Les modes de la base D2V3 dont le degré radial $n \geq 6$ épousent un profil globalement similaire à ceux de modes de la base de Zernike de degré

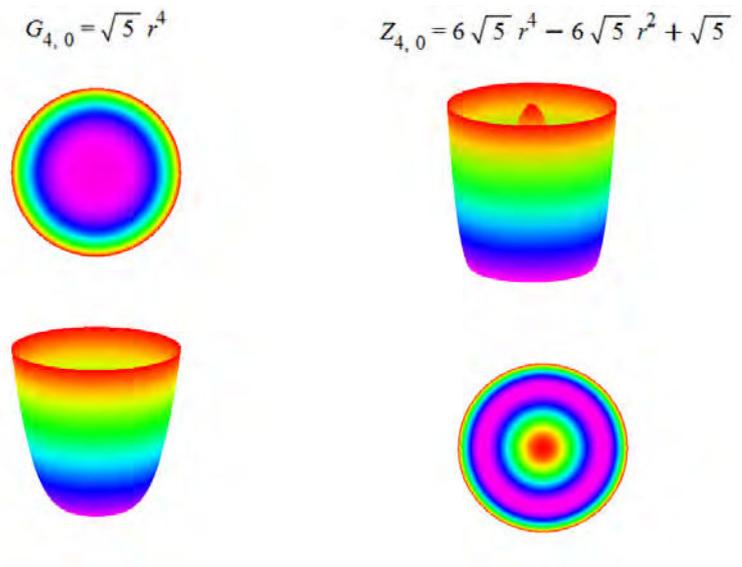
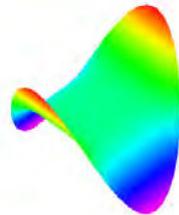
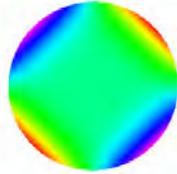


FIGURE 2.5 – Représentation bi et tri-dimensionnelle de l'enveloppe des écarts de phase pour les fonctions G_4^0 de la base D2V3 et Z_4^0 de la base de Zernike

radial égal à $n - 2$ (voir Figures 2.10, 2.11, 2.12, 2.13, 2.14 et 2.15).

$$G_{4,-2} = \sqrt{10} r^4 \sin(2t)$$



$$Z_{4,-2} = \sqrt{10} (4r^4 - 3r^2) \sin(2t)$$

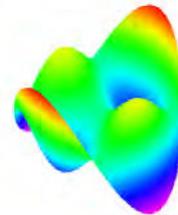
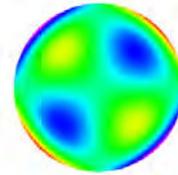


FIGURE 2.6 – Représentation bi et tri-dimensionnelle de l'enveloppe des écarts de phase pour les fonctions G_4^{-2} de la base D2V3 et Z_4^{-2} de la base de Zernike.

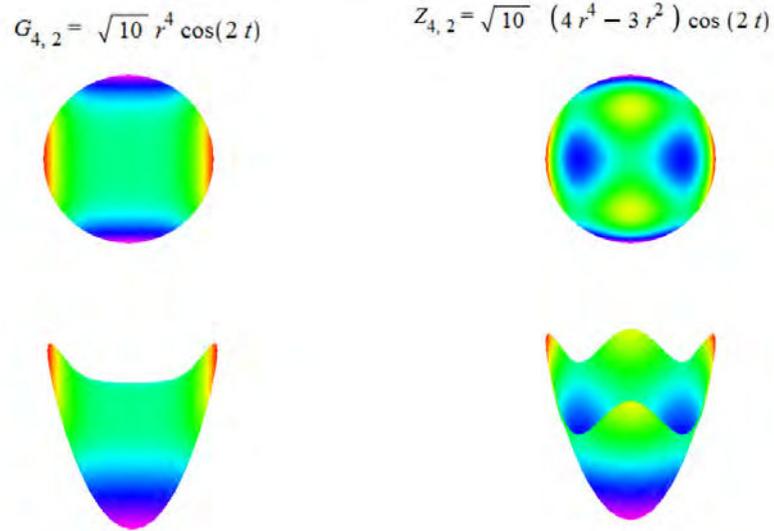


FIGURE 2.7 – Représentation bi et tri-dimensionnelle de l'enveloppe des écarts de phase pour les fonctions G_4^2 de la base D2V3 et Z_4^2 de la base de Zernike.

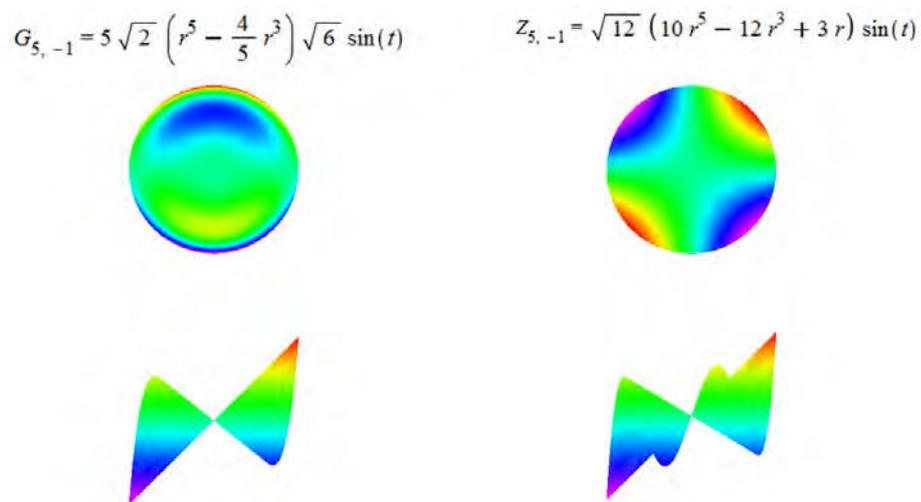


FIGURE 2.8 – Représentation bi et tri-dimensionnelle de l'enveloppe des écarts de phase pour les fonctions G_5^{-1} de la base D2V3 et Z_5^{-1} de la base de Zernike

$$G_{5,1} = 5\sqrt{2} \left(r^5 - \frac{4}{5} r^3 \right) \sqrt{6} \cos(t)$$

$$Z_{5,1} = \sqrt{12} (10 r^5 - 12 r^3 + 3 r) \cos(t)$$

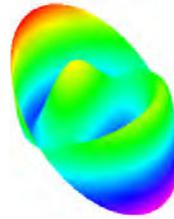
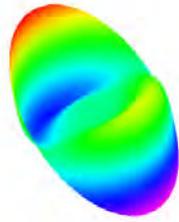
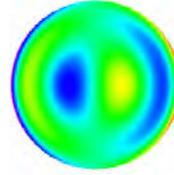
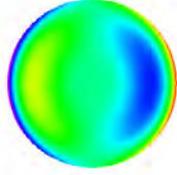


FIGURE 2.9 – Représentation bi et tri-dimensionnelle de l'enveloppe des écarts de phase pour les fonctions G_5^1 de la base D2V3 et Z_5^1 de la base de Zernike.

$$G_{6,-2} = 6\sqrt{14} \left(r^6 - \frac{6}{5} r^4 \right) \sin(2t)$$

$$Z_{6,-2} = \sqrt{14} (15 r^6 - 20 r^4 + 6 r^2) \sin(2t)$$

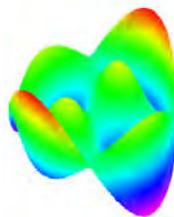
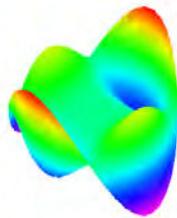
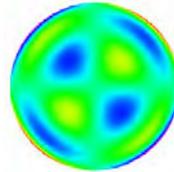
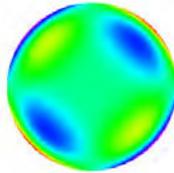


FIGURE 2.10 – Représentation bi et tri-dimensionnelle de l'enveloppe des écarts de phase pour les fonctions G_6^{-2} de la base D2V3 et Z_6^{-2} de la base de Zernike.

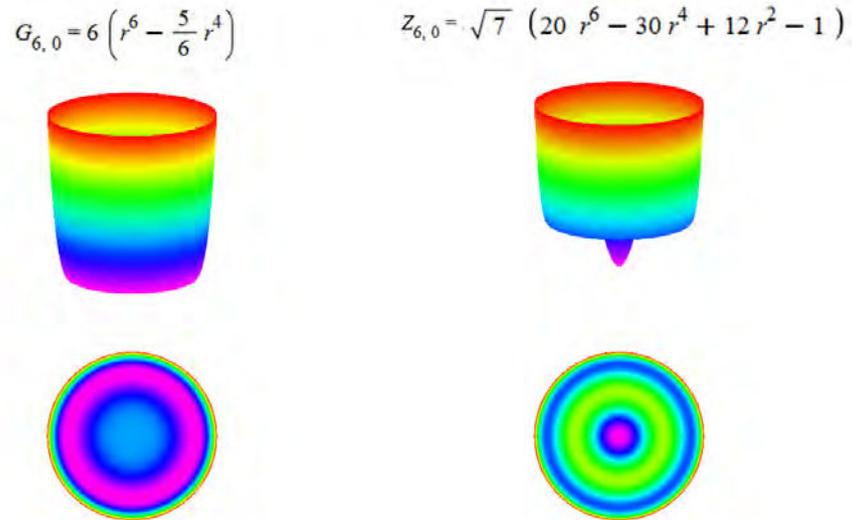


FIGURE 2.11 – Représentation bi et tri-dimensionnelle de l'enveloppe des écarts de phase pour les fonctions G_6^0 de la base D2V3 et Z_6^0 de la base de Zernike.

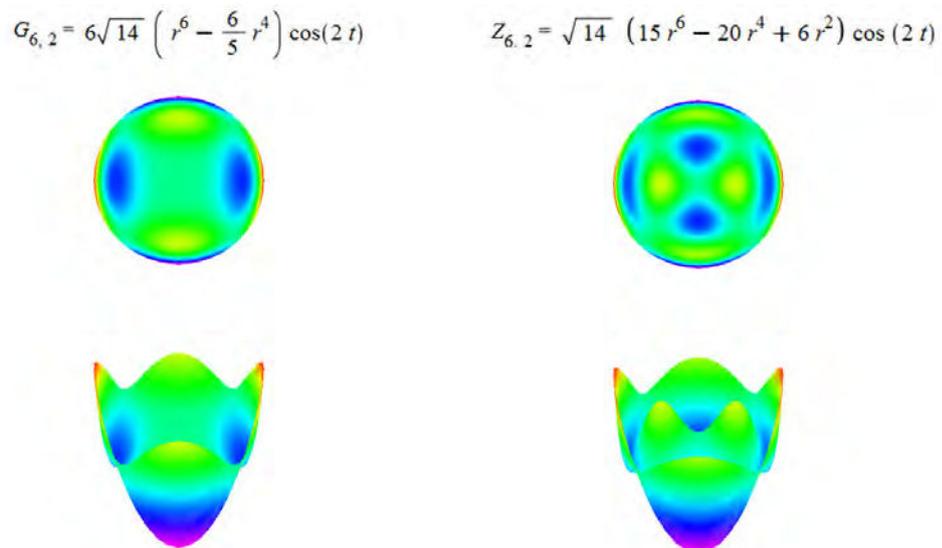


FIGURE 2.12 – Représentation bi et tri-dimensionnelle de l'enveloppe des écarts de phase pour les fonctions G_6^2 de la base D2V3 et Z_6^2 de la base de Zernike.

$$G_{7,-1} = 84 \left(r^7 - \frac{10}{7} r^5 + \frac{10}{21} r^3 \right) \sin(t) \quad Z_{7,-1} = \sqrt{16} (35 r^7 - 60 r^5 + 30 r^3 - 4 r) \sin(t)$$

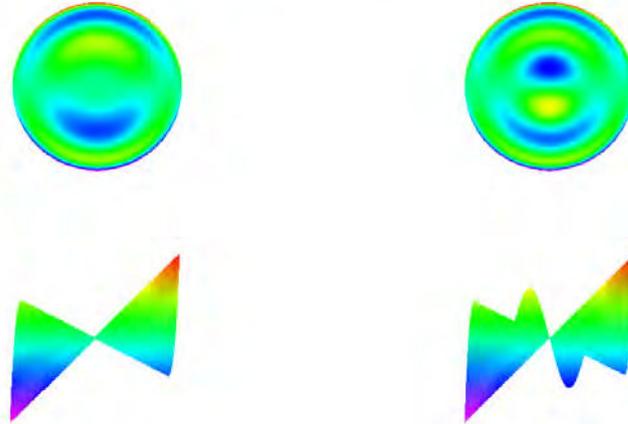


FIGURE 2.13 – Représentation bi et tri-dimensionnelle de l’enveloppe des écarts de phase pour les fonctions G_7^{-1} de la base D2V3 et Z_7^{-1} de la base de Zernike.

$$G_{7,1} = 84 \left(r^7 - \frac{10}{7} r^5 + \frac{10}{21} r^3 \right) \cos(t) \quad Z_{7,1} = \sqrt{16} (35 r^7 - 60 r^5 + 30 r^3 - 4 r) \cos(t)$$

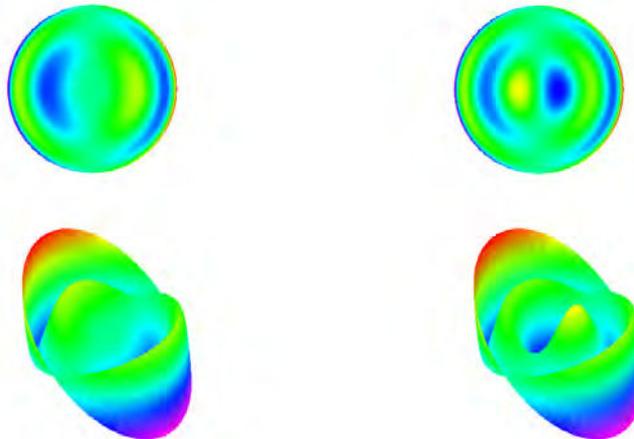


FIGURE 2.14 – Représentation bi et tri-dimensionnelle de l’enveloppe des écarts de phase pour les fonctions G_7^1 de la base D2V3 et Z_7^1 de la base de Zernike.

$$G_{8,0} = 84 r^8 - 126 r^6 + 45 r^4 \quad Z_{8,0} = \sqrt{9} (70 r^8 - 140 r^6 + 90 r^4 - 20 r^2 + 1)$$

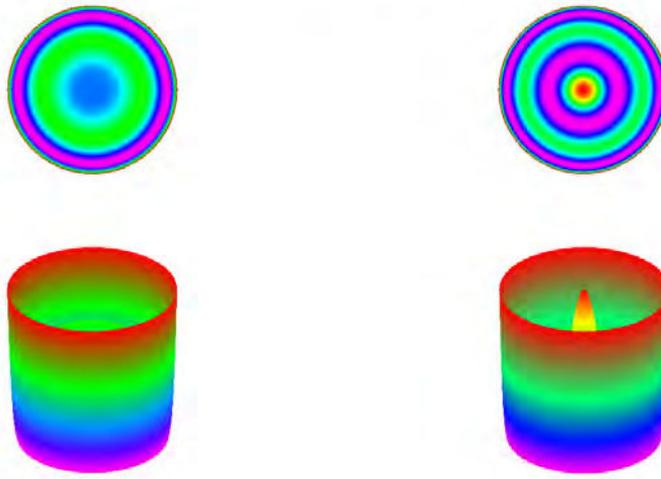


FIGURE 2.15 – Représentation bi et tri-dimensionnelle de l'enveloppe des écarts de phase pour les fonctions G_8^0 de la base D2V3 et Z_8^0 de la base de Zernike.

CHAPITRE 3

EXEMPLES ET DISCUSSION CLINIQUE

3.1 Exemples théoriques

Pour comparer les décompositions polynomiales d'un front d'onde en fonction des différentes bases présentées lors des deux chapitres précédents (base azimutale, base de Zernike et base D2V3), des fronts d'ondes théoriques ont été générés, soit dans la base azimutale, soit dans la base de Zernike puis convertis dans les deux autres bases. Ces fronts d'onde comportent tous au moins un mode de degré supérieur ou égal à 3 non nul. Dans tous les exemples donnés, les résultats sont exposés sous la forme de diagrammes en bâtons représentant les coefficients de la décomposition dans les trois bases considérées.

3.1.1 Conversion d'un front d'onde théorique donné dans la base azimutale

Cas d'un front avec des modes radiaux de degré 3

Un front d'onde modélisé par des coefficients unité dans la base azimutale pour les modes d'ordre radial égal à 3 génère des coefficients non nuls pour les modes de degré 3 de la base de Zernike et D2V3 (voir figure 3.1). Il génère également des coefficients non nuls pour les modes de degré 1 dans la base de Zernike. Ces coefficients correspondent à l'expression d'un tilt de "compensation", nécessaire pour annuler les termes en degré 1 issus de l'expression analytique des modes $Z_3^{\pm 1}$. Ces coefficients de tilt de la base de Zernike correspondent ainsi à des artefacts numériques sans signification

physique.

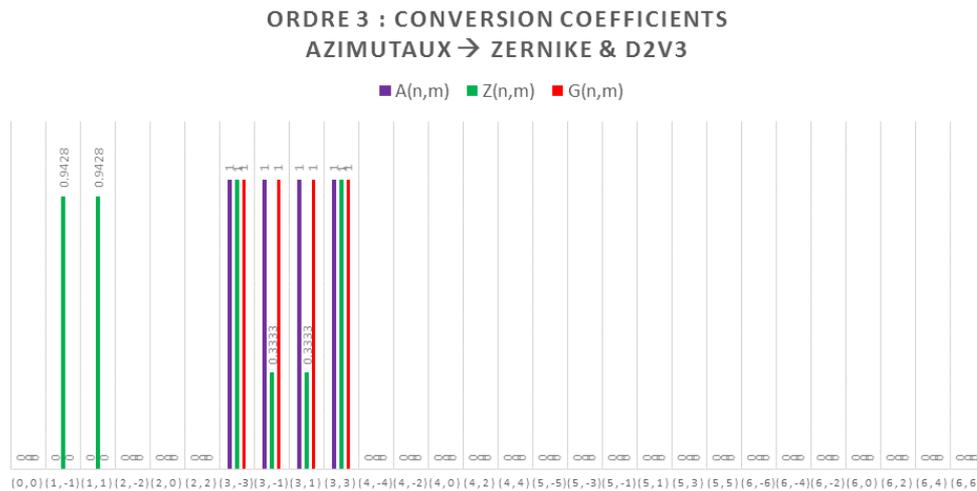


FIGURE 3.1 – Conversion de coefficients azimutaux de valeur unitaire et de degré radial égal à 3.

Cas d'un front avec des modes radiaux de degré 4

Un front d'onde modélisé par des coefficients unité pour les modes d'ordre radial égal à 4 génère des coefficients non nuls pour les modes de degré 4 de la base de Zernike et D2V3 (voir figure 3.2). Il génère également des coefficients non nuls pour les modes de degré 2 et 0 dans la base de Zernike. Les coefficients de degré 2 correspondent à l'expression d'un défocus et d'un astigmatisme de "compensation", nécessaire pour annuler les termes en degré 2 issus de l'expression analytique des modes Z_4^0 et $Z_4^{\pm 2}$. De même, ces coefficients de défocus de la base de Zernike ne correspondent pas à un réel défocus sphéro-cylindrique du front d'onde.

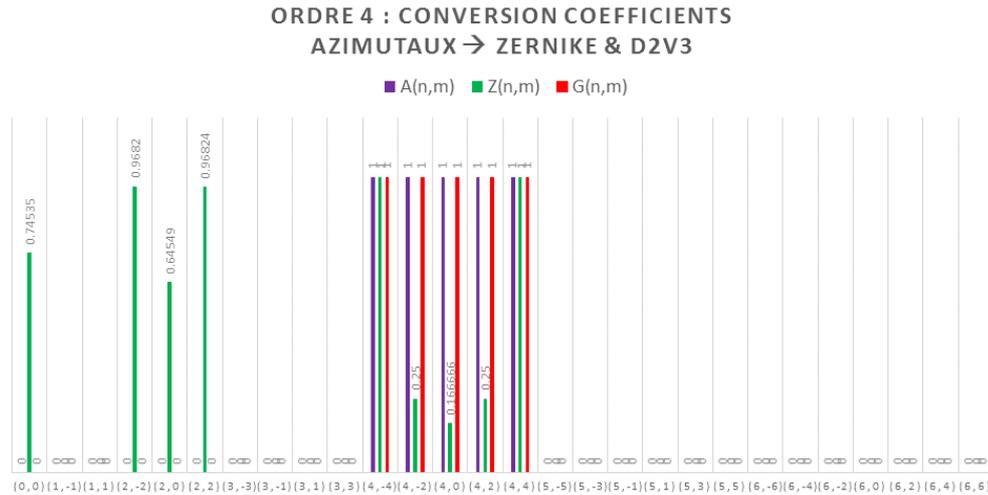


FIGURE 3.2 – Conversion de coefficients azimutaux de valeur unitaire et de degré radial égal à 4.

Cas d'un front avec des modes radiaux de degré 5

Un front d'onde modélisé par des coefficients unité pour les modes d'ordre radial égal à 5 génère des coefficients non nuls pour les modes de degré 5 de la base de Zernike et D2V3 (voir figure 3.3). Il génère également des coefficients non nuls pour les modes de degré 3 et 1 dans la base de Zernike, ainsi que des coefficients non nuls pour les modes de degré 3 dans la base D2V3. Ces coefficients correspondent à l'expression de modes de "compensation", nécessaire pour annuler les termes en degré 3 et 1 issus de l'expression analytique des modes $Z_5^{\pm 1}$ et $Z_5^{\pm 3}$ (base de Zernike) et les termes en degré 3 issus de l'expression analytique des modes $G_5^{\pm 3}$ et $G_5^{\pm 1}$.

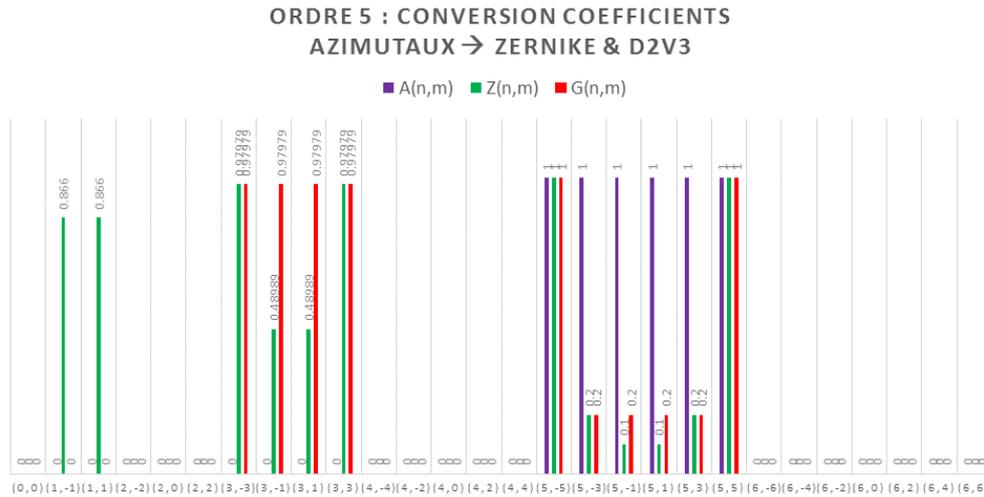


FIGURE 3.3 – Conversion de coefficients azimutaux de valeur unitaire et de degré radial égal à 5.

Cas d'un front avec des modes radiaux de degré 6

Un front d'onde modélisé par des coefficients unité pour les modes d'ordre radial égal à 6 génère des coefficients non nuls pour les modes de degré 6 de la base de Zernike et D2V3 (voir figure 3.4). Il génère également des coefficients non nuls pour les modes de degré 4, 2 et 0 dans la base de Zernike, ainsi que des coefficients non nuls pour les modes de degré 4 dans la base D2V3. Ces coefficients correspondent à l'expression de modes de compensation. Ils sont nécessaires pour annuler les termes en degré 4 et 2 issus de l'expression analytique des modes Z_6^0 , $Z_6^{\pm 2}$, $Z_6^{\pm 4}$ (base de Zernike) et les termes en degré 4 issus de l'expression analytique des modes G_4^0 et $G_4^{\pm 2}$.

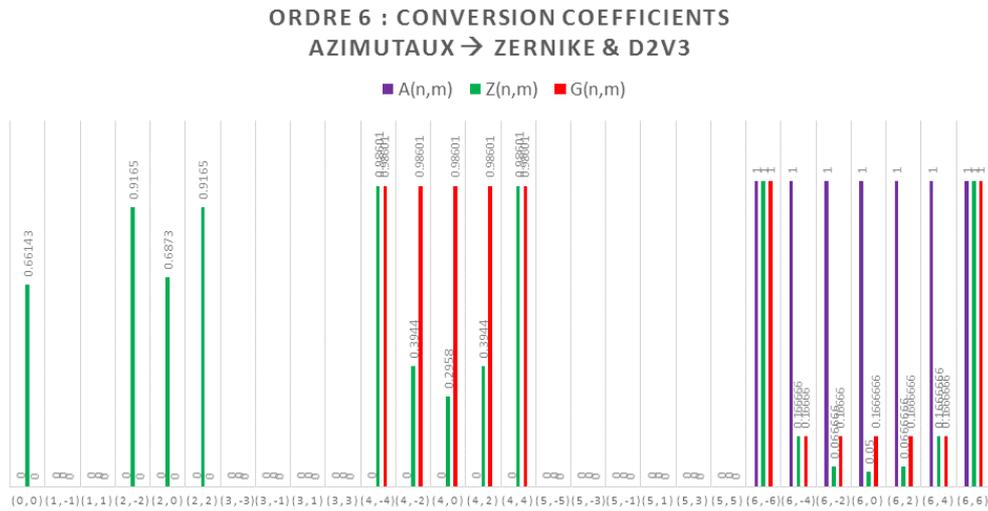


FIGURE 3.4 – Conversion de coefficients azimutaux de valeur unitaire et de degré radial égal à 6.

3.1.2 Conversion d'un front d'onde théorique donné dans la base de Zernike

Cas d'un front avec des modes radiaux de degré 3

Un front d'onde modélisé par des coefficients unité pour les modes de Zernike d'ordre 3 génère des coefficients non nuls pour les modes de degré 3 de la base Azimutale et D2V3 (voir figure 3.5). Il génère également des coefficients non nuls pour certains modes de degré 1 dans ces bases. Ces coefficients correspondent à l'expression du tilt (terme en r^1) au sein de l'expression analytique des modes $Z_3^{\pm 1}$.

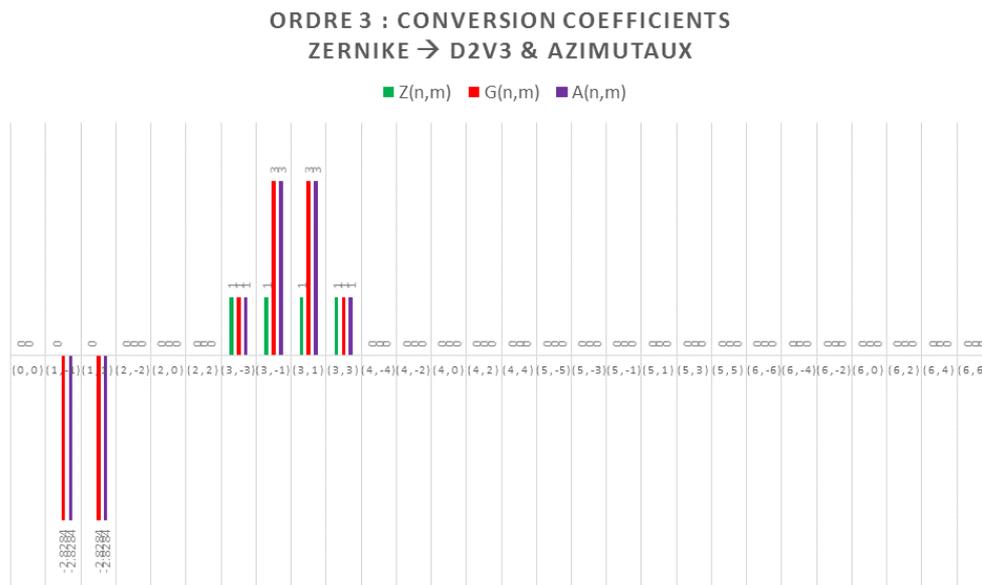


FIGURE 3.5 – Conversion de coefficients de Zernike de valeur unitaire et de degré radial égal à 3.

Cas d'un front avec des modes radiaux de degré 4

Un front d'onde modélisé par des coefficients unité pour les modes d'ordre 4 génère des coefficients non nuls pour les modes de degré 4 de la base azimutale et D2V3 (voir figure 3.6). Il génère également des coefficients non nuls pour les modes de degré 2 et 0 dans ces bases. Ces coefficients correspondent à l'expression de défocus et d'astigmatisme (termes en r^2) et d'un terme constant au sein de l'expression analytique des modes Z_4^0 et $Z_4^{\pm 2}$.

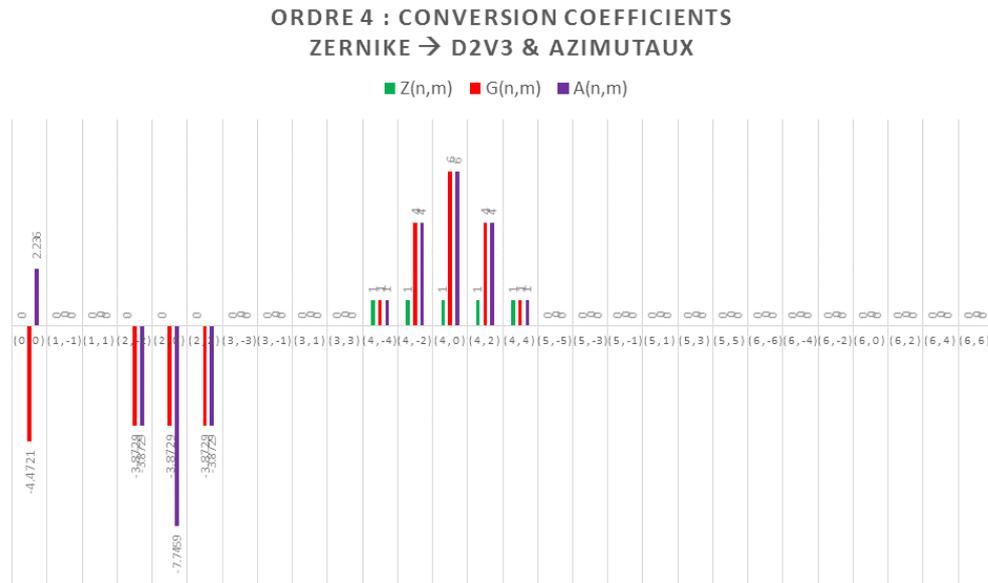


FIGURE 3.6 – Conversion de coefficients de Zernike de valeur unitaire et de degré radial égal à 4.

Cas d'un front avec des modes radiaux de degré 5

Un front d'onde modélisé par des coefficients unité pour les modes d'ordre 5 génère des coefficients non nuls pour les modes de degré 5 de la base azimutale et D2V3 (voir figure 3.7). Il génère également des coefficients non nuls pour les modes de degré 3 et 1 dans ces bases. Ces coefficients correspondent à la présence de termes en r^3 et r^1 au sein de l'expression analytique des modes $Z_5^{\pm 1}$ et $Z_5^{\pm 3}$.

Cas d'un front avec des modes radiaux de degré 6

Un front d'onde modélisé par des coefficients unité pour les modes d'ordre 6 génère des coefficients non nuls pour les modes de degré 6 de la base Azimutale et D2V3 (voir figure 3.8) Il génère également des coefficients non nuls pour les modes de degré 4, 2 et 0 dans ces bases. Ces coefficients correspondent à la présence de termes en r^4 , r^2 et constants au sein de l'expression analytique des modes Z_6^0 , $Z_6^{\pm 2}$ et $Z_6^{\pm 4}$.

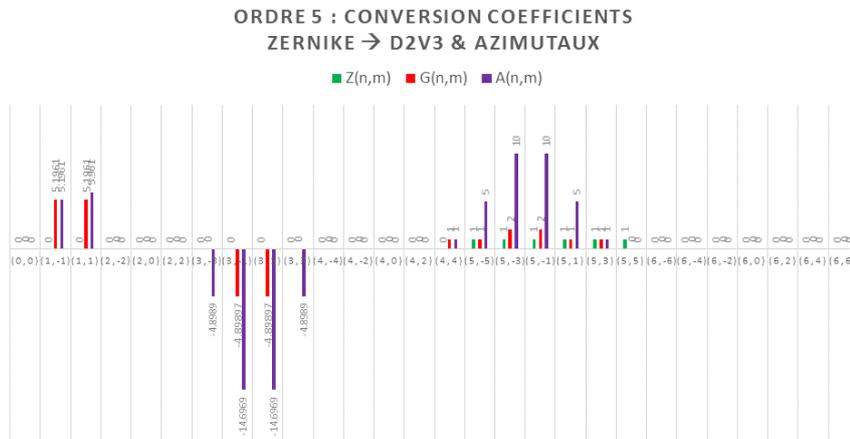


FIGURE 3.7 – Conversion de coefficients de Zernike de degré radial égal à 5.

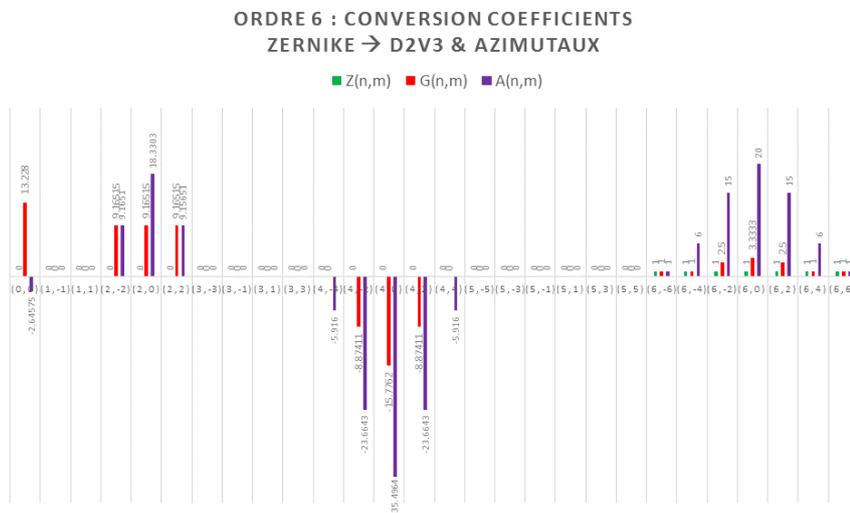


FIGURE 3.8 – Conversion de coefficients de Zernike de degré radial égal à 6.

3.2 Exemples cliniques

La base de Zernike sert actuellement de référence pour l'étude du front d'onde oculaire et est utilisée pour la décomposition de l'écart mesuré avec un front d'onde idéal par l'ensemble des logiciels qui équipent les aberromètres destinés à une utilisation clinique. Ces instruments fournissent un relevé des coefficients affectés aux modes de Zernike. Ceux-ci sont établis sur un diamètre pupillaire particulier qui peut être modifié par l'utilisateur. L'ordre maximal de la décomposition est généralement fixé à 6 mais peut être modifié. L'OPD-Scan III (Nidek, Gamagori, Japon) est un aberromètre couplé à un topographe cornéen dont le principe de recueil du front d'onde est celui de la skiascopie dynamique [28]. Comme pour les systèmes Shack Hartmann, les mesures sont objectives et portent sur le recueil d'un signal lumineux émergeant de l'œil après réflexion rétinienne. La mesure de la différence de chemin optique (Optical Path Difference : OPD) repose sur l'analyse de données temporelles recueillies par des photodétecteurs placés sur un bras rotatif, qui balaye l'ensemble de la pupille d'entrée. L'instrument utilise les données recueillies pour établir une prédiction de la réfraction sphéro-cylindrique optimale de l'œil mesuré (fonction d'auto-réfractométrie), à partir des données recueillies dans la région paracentrale de la pupille [29]. La mesure du front d'onde oculaire par skiascopie automatisée possède une plage dynamique supérieure à celle des systèmes Shack Hartmann, mais requiert une durée d'acquisition plus longue (de l'ordre de la seconde).

Dans les exemples cliniques suivants, l'OPD-Scan III a permis d'établir un relevé d'aberration du front d'onde oculaire de l'œil étudié sur un diamètre pupillaire fixé à 6 mm, et sa projection sur une base de polynômes de Zernike d'ordre radial maximal fixé à 6 (28 modes). Les coefficients obtenus pour chacune des harmoniques de Zernike ont été insérés dans une série de procédures Maple (voir annexes A, B et C) pour générer la décomposition du front d'onde dans la nouvelle base D2V3.

Par ailleurs, les coefficients affectés aux modes de Zernike de degré radial 2 obtenus pour chaque décomposition ont été utilisés pour estimer la réfraction sphéro-cylindrique objective ([6]).

Cinq exemples cliniques sont présentés ci-dessous, correspondant tous à une situation connue mais dont le diagnostic après une décomposition du front d'onde dans la base de Zernike peut être faussé du fait des particularités de celle-ci.

3.2.1 Exemple 1 : myopie forte

Un relevé aberrométrique a été effectué pour un œil présentant une myopie forte, pour lequel la valeur de l'aberration sphérique cornéenne est légèrement positive. Dans cet exemple, le défaut optique de l'œil est largement dominé par le défocus (aberration de degré radial égal à 2).

La figure 3.9 permet une comparaison directe entre les coefficients obtenus pour la décomposition dans la base de Zernike et dans la base D2V3.

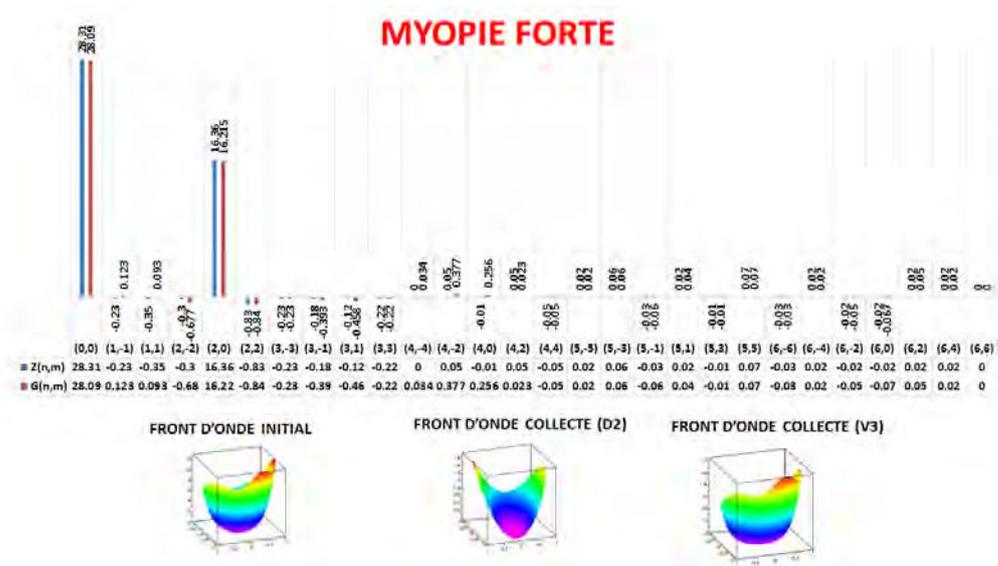


FIGURE 3.9 – Exemple 1 (myopie forte). Coefficients du front d'onde dans les bases de Zernike et D2V3 (haut) et décomposition du front d'onde entre sa composante bas degré et haute valuation (bas).

Cette comparaison permet d'observer la forte réduction des coefficients des modes correspondant au tilt dans la base D2V3 (en particulier pour le tilt vertical). Ceci peut être anticipé car la technique de mesure aberrométrique porte sur un œil fixant une cible coaxiale avec l'axe optique de l'aberromètre, sans décentrement particulier selon l'axe vertical. La valeur des coefficients de degré radial 2 n'est pas significativement différente dans les deux bases considérées. Dans cet exemple typique d'un œil où les aberrations de degré 2 expliquent l'essentiel de l'erreur du front d'onde oculaire, la valeur des termes en r^2 présents au sein des modes de haut degré ne suffit pas à modifier significativement la valeur du défocus sphérique et cylindrique entre les deux bases.

Les légères différences observées pour les coefficients des modes de haut degré (coma de degré 3, aberration sphérique et astigmatisme secondaire)

résultent de la différence d'expression analytique entre les modes des bases utilisées et les valeurs des facteurs de normalisation. Pour obtenir une même valeur de coefficient numérique affecté au terme en r^3 de l'aberration de coma de la base Zernike, il est nécessaire de multiplier la valeur du coefficient $g_3^{\pm 1}$ de haut degré par 3. Pour obtenir une même valeur de coefficient affecté au terme en r^4 de l'aberration sphérique primaire de Zernike, il est nécessaire de multiplier le coefficient g_4^0 de haut degré par 6. Ainsi, pour une même erreur du front d'onde, les valeurs respectives des coefficients affectés aux aberrations optiques de coma primaire, d'aberration sphérique et d'astigmatisme secondaire de la base D2V3 sont logiquement plus importants que ceux de la base de Zernike, et ce dans des rapports proches de ceux cités précédemment. La dilatation apparente de ces coefficients a l'avantage de souligner la présence de ces aberrations dont les effets prédominent généralement sur le plan clinique au sein de la liste des coefficients.

Les deux représentations présentées sur la figure 3.10 soulignent d'une part, la proximité des composantes de degré 2 et d'autre part la prépondérance de la composante bas degré dans les deux décompositions de Zernike et D2V3. Plus précisément, quelle que soit la base utilisée ici, l'erreur du front d'onde est largement dominée par le coefficient de défocus, présent en quantité égale dans les deux bases. La réfraction subjective était plus proche de la réfraction prédite par les coefficients des modes de degré 2 de la base D2V3 que ceux de la base de Zernike.

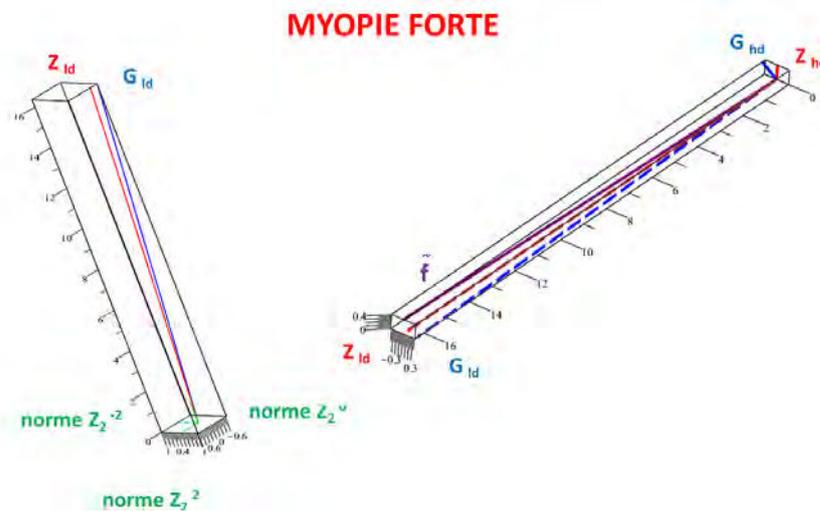


FIGURE 3.10 – Exemple 1 (myopie forte). Représentation spatiale des composantes de degré 2 (gauche) et des composantes bas degré/haut degré du front d'onde dans les bases de Zernike et D2V3 (droite).

Sur ces figures, l'indice 'bd' fait référence à la composante bas degré (inférieure ou égale à 2) et 'hd' à la composante haut degré du front d'ond dans la base de Zernike (vecteur Z) ou dans la base D2V3 (vecteur G).

3.2.2 Exemple 2 : myopie opérée

L'œil analysé a été opéré de chirurgie réfractive (LASIK) pour une myopie de -5 dioptries. Il est à présent emmétrope, l'acuité visuelle étant mesurée à 12/10" sans correction en lunettes. La réfraction mesurée par la fonction auto-réfractomètre est égale à $0.00(-0.50 \times 135^\circ)$. Cependant, le patient signale la perception de halos lumineux autour des lumières vives en conditions de basse luminosité (conditions mésopiques). Le relevé aberrométrique comparatif est présenté sur la figure 3.11. Quelle que soit la base utilisée, l'erreur du front d'onde est largement dominée par l'aberration sphérique et le coma de degré radial égal à 3. Les valeurs numériques des coefficients g_3^1 et g_4^0 sont supérieures à celles des coefficients z_3^1 et z_4^0 , ce qui permet l'identification rapide par le clinicien des modes impliqués dans la déformation du front d'onde liée au haut degré.

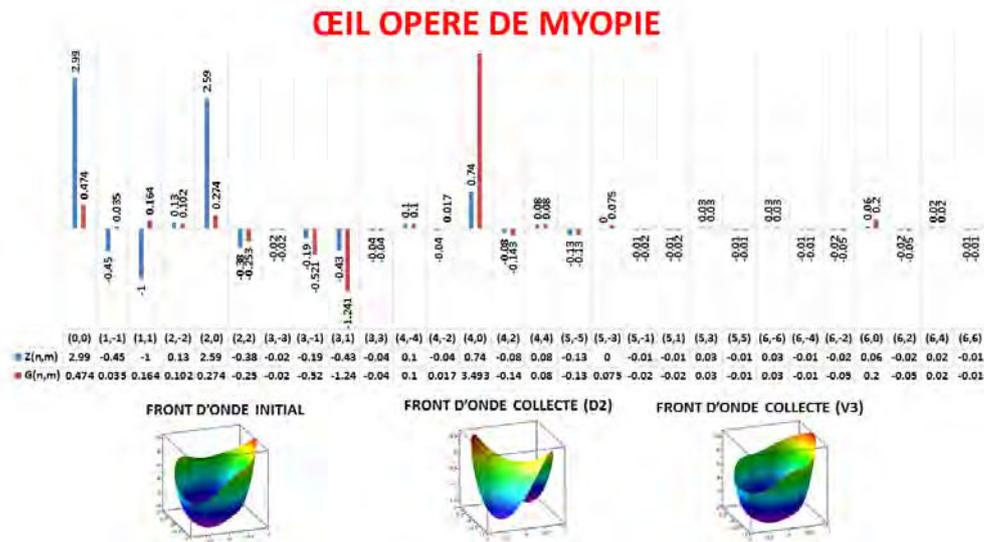


FIGURE 3.11 – Exemple 2 (myopie opérée). Coefficients du front d'onde dans les bases de Zernike et D2V3 (haut) et décomposition du front d'onde entre sa composante bas degré et haute valuation (bas).

L'œil présente un taux élevé d'aberration sphérique d'origine cornéenne. Ce taux résulte du profil postopératoire oblate de la cornée (le facteur d'asphé-

ricité Q est positif et égal à 1.66). A l'inverse, la collecte des termes de bas degré altère peu la morphologie globale de l'écart du front d'onde.

Si l'on se réfère à la valeur des coefficients de la base de Zernike, l'écart du front d'onde est expliqué par un coefficient dominant pour le degré 2 traduisant la présence d'un défocus myopique ($z_2^0 = 2.59\mu$). Il existe également un taux élevé d'aberration sphérique primaire positive ($z_4^0 = 0.74\mu$) ainsi qu'un taux élevé de coma verticale ($z_3^{-1} = -0.43\mu$). Cette décomposition suggère la persistance d'une myopie légère, qui contredit les données de l'examen visuel (bonne acuité visuelle sans correction lunettes). Dans la décomposition D2V3, la valeur des coefficients affectés au tilt et au défocus est faible, alors que la valeur des coefficients de certains termes de haut degré (aberration sphérique et coma primaire) est plus élevée. L'expression du front d'onde dans la base D2V3 paraît mieux refléter la situation clinique, car la réduction de la qualité visuelle (perception de halos en conditions mésopiques) n'est pas liée aux aberrations de bas degré mais bien à une augmentation de certaines aberrations de haut degré.

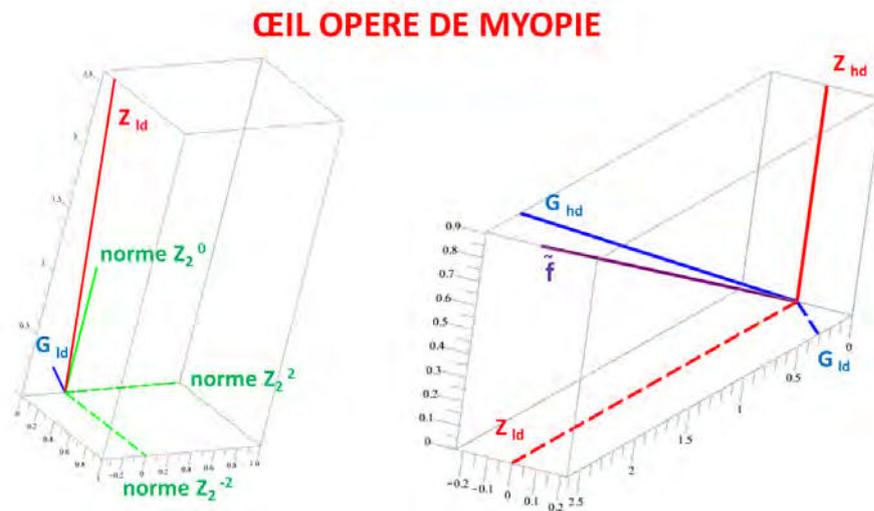


FIGURE 3.12 – Exemple 2 (myopie opérée). Représentation spatiale des composantes de degré 2 (gauche) et des composantes bas degré/haut degré du front d'onde dans les bases de Zernike et D2V3 (droite).

La représentation vectorielle présentée sur la figure 3.12 souligne les différences entre la décomposition de Zernike et celle dans la base D2V3, notamment pour la répartition de l'erreur du front d'onde entre le bas et le haut degré. La décomposition dans la base D2V3 souligne en particulier la proximité entre f et f_h en accord avec les symptômes visuels observés (halos

nocturnes) induits par une aberration de haut degré du front d'onde.

3.2.3 Exemple 3 : keratocône

L'œil analysé présente un astigmatisme et une irrégularité importante consécutifs à la présence d'un kératocône. Le kératocône correspond à une déformation et un amincissement progressif de la cornée. La toricité accrue du dioptré cornéen induit un astigmatisme de bas degré, et l'irrégularité et les déformations asymétriques du galbe cornéen provoquent une élévation des aberrations optiques de haut degré radial impair (coma, trefoil), et de l'astigmatisme secondaire (Z_4^2 et Z_4^{-2}).

On observe sur la figure 3.13 des différences importantes pour les valeurs des coefficients affectés aux aberrations des bases de Zernike et D2V3 : la décomposition D2V3 permet de mieux estimer la magnitude de l'astigmatisme de bas degré corrigible en lunettes, grâce à la collecte des termes azimutaux en $r^2 \sin(2\theta)$ et $r^2 \cos(2\theta)$. Dans le cas de la base de Zernike, l'intrication de ces termes avec les modes de haut degré aboutit dans cet exemple à une sous-estimation de la valeur des coefficients des modes de l'astigmatisme de bas degré. Cette discordance est liée à la présence de termes de bas degré intriqués dans les modes de haut degré. L'écart global du front d'onde résulte ici de la combinaison de la composante régulière de l'astigmatisme (mieux soulignée par la collecte des termes de degré inférieur ou égal à 2), et d'une composante irrégulière provoquée par les modes de haut degré (polynômes de Zernike de valuation 3).

Quelle que soit la base utilisée, l'erreur du front d'onde est répartie entre les modes de bas et de haut degré. Cependant, les valeurs de coefficients pour les modes de bas degré dans la base D2V3 fournissent une meilleure estimation de la réfraction objective. Les valeurs de coefficients des modes de haut degré (coma du 3e et du 5e degré radial, astigmatisme secondaire) sont "dilatées". Ceci est le produit des différences qui existent entre les bases D2V3 et Zernike pour la répartition des termes et les valeurs respectives des facteurs de normalisation des modes affectés du même ordre radial et azimutal. Enfin, les coefficients des termes de tilt ont des valeurs proches de zéro dans la base D2V3, ce qui est attendu dans le cadre d'une mesure aberrométrique coaxiale.

La représentation vectorielle spatiale présentée sur la figure 3.14 met en évidence les différences entre les deux décompositions de f , dont la variance est principalement liée à des termes de haut degré, ce qui est mieux reflété dans la base D2V3. Les différences de variance des modes de degré 2 entre les deux décompositions expliquent la présence d'un angle important entre

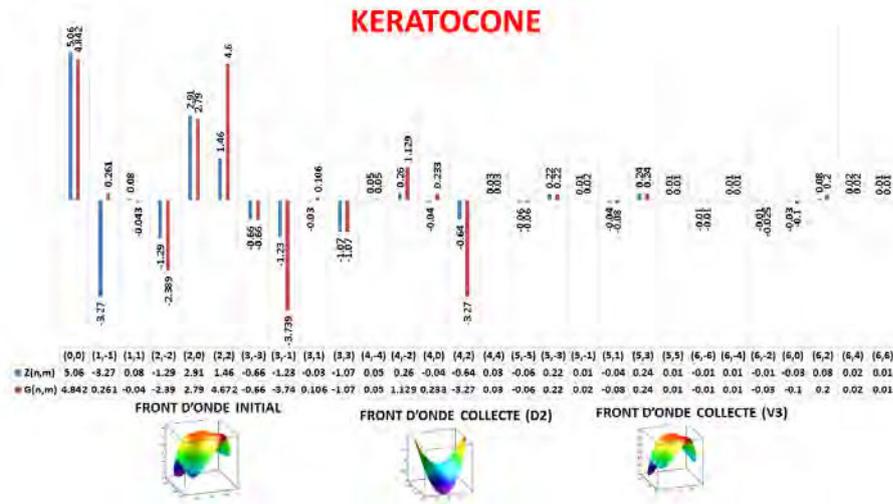


FIGURE 3.13 – Exemple 3 (KERATOCONE). Coefficients du front d'onde dans les bases de Zernike et D2V3 (haut) et décomposition du front d'onde entre sa composante bas degré et haute valuation (bas).

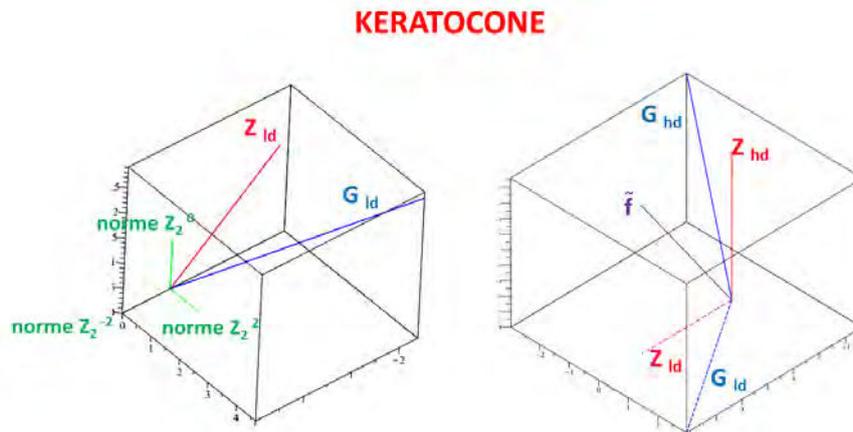


FIGURE 3.14 – Exemple 3 (KERATOCONE). Représentation spatiale des composantes de degré 2 (gauche) et des composantes bas degré/haut degré du front d'onde dans les bases de Zernike et D2V3 (droite).

les plans contenant les vecteurs f , Z_{hd} et Z_{bd} d'une part et f , G_{bd} , G_{hd} d'autre part.

3.2.4 Exemple 4 : cataracte nucléaire

L'œil analysé sur la figure 3.15 présente une cataracte nucléaire, caractérisée par une augmentation de l'indice de réfraction du noyau du cristallin. Il existe un important gradient de vergence entre le centre et la périphérie de la pupille. De ce fait, l'aberration sphérique négative subit une élévation importante au sein de l'erreur du front d'onde.

La décomposition D2V3 permet de mieux souligner l'élévation de la magnitude de l'aberration sphérique négative grâce à l'augmentation du coefficient c_4^0 . La présence de termes de degré radial 2 au sein du mode Z_4^0 explique la différence entre les coefficients c_2^0 et z_2^0 . Une partie du déphasage quadratique de l'erreur du front d'onde est portée par l'aberration sphérique de Zernike. L'utilisation de la décomposition dans la base D2V3 permet ainsi de mieux rendre compte de l'importance respective du défocus et de l'aberration sphérique négative, cette dernière n'y est pas contaminée par les termes de degré 2.

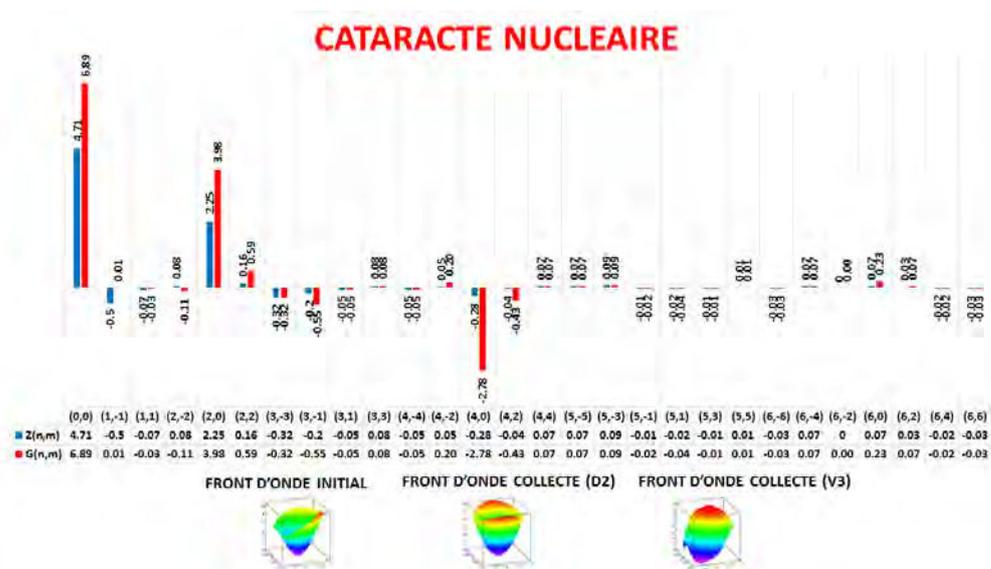


FIGURE 3.15 – Exemple 4 (cataracte nucléaire). Coefficients du front d'onde dans les bases de Zernike et D2V3 (haut) et décomposition du front d'onde entre sa composante bas degré et haute valuation (bas).

Quelle que soit la base utilisée, l'erreur du front d'onde est répartie entre les modes de bas et de haut degré. Cependant, les valeurs de coefficients pour les modes de bas degré dans la base D2V3 fournissent à nouveau une meilleure estimation de la réfraction objective.

La représentation vectorielle de la figure 3.16 illustre ces différences : les

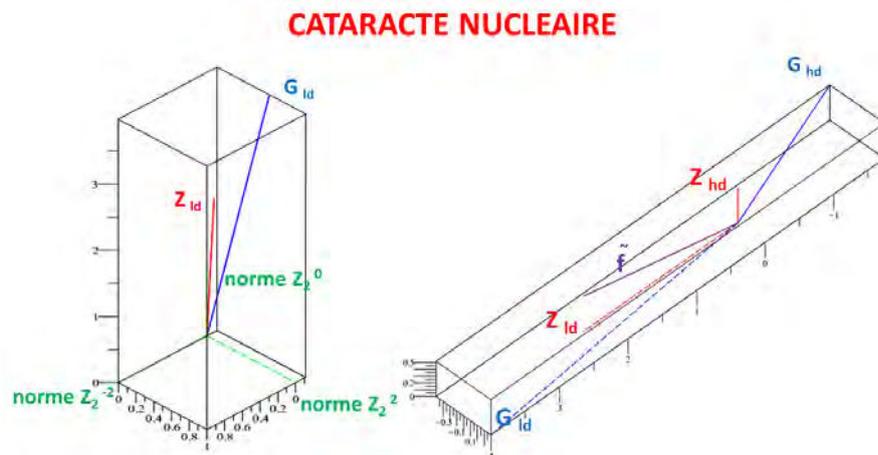


FIGURE 3.16 – Exemple 4 (cataracte nucléaire). Représentation spatiale des composantes de degré 2 (gauche) et des composantes bas degré/haut degré du front d'onde dans les bases de Zernike et D2V3 (droite).

normes des vecteurs correspondant à la fois aux contingents de bas et haut degré de la décomposition D2V3 sont plus importantes que celles affectés à ces mêmes contingents dans la classification de Zernike.

Les différences de variance des modes de degré 2 et 4 entre les deux décomposition expliquent aussi la présence d'un angle prononcé entre les plans contenant les vecteurs f , Z_h et Z_b et f , G_b , G_h . On constate aussi que les normes des vecteurs G_b et G_h sont plus importantes que celles des vecteurs Z_b et Z_h .

3.2.5 Exemple 5 : chirurgie PRESBY-LASIK

L'œil dont l'erreur du front d'onde est représentée sur la figure 3.17 a été opéré avec une technique de remodelage cornéen au laser excimer pour compenser la presbytie (appelée "presby-LASIK"). Cette technique vise à introduire une myopisation centrale et une réduction progressive de celle-ci vers les bords du disque pupillaire, cela pour ne pas trop pénaliser l'acuité visuelle non corrigée en vision de loin.

Dans cet exemple, avec la décomposition de Zernike, le mode Z_4^0 est affecté d'un coefficient négatif et permet d'expliquer une part importante de l'erreur du front d'onde. Le terme de défocus est très faible, alors que la réfraction centrale est myopique. Dans la base D2V3, le terme de défocus est pondéré par un coefficient important, comme le mode G_4^0 .

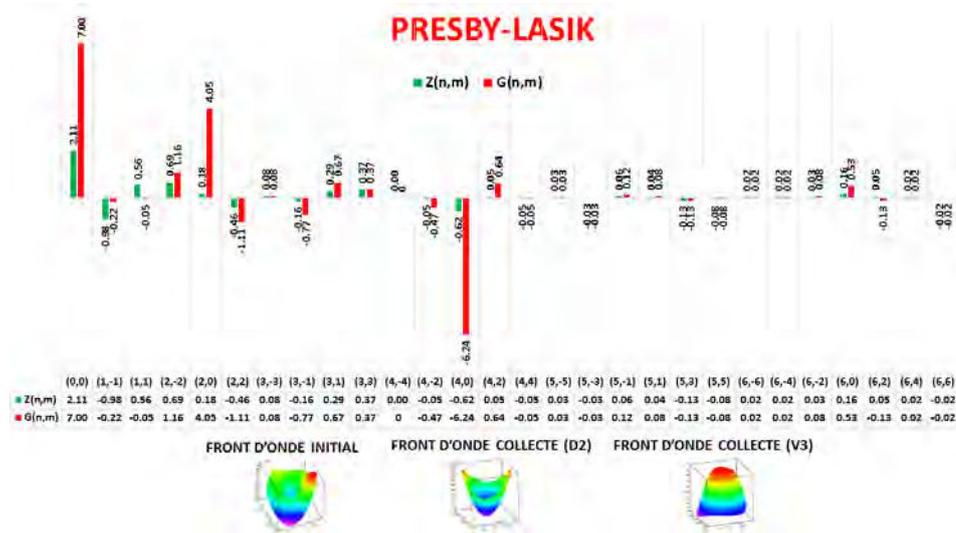


FIGURE 3.17 – Exemple 5 (chirurgie PRESBY-LASIK). Coefficients du front d'onde dans les bases de Zernike et D2V3 (haut) et décomposition du front d'onde entre sa composante bas degré et haute valuation (bas).

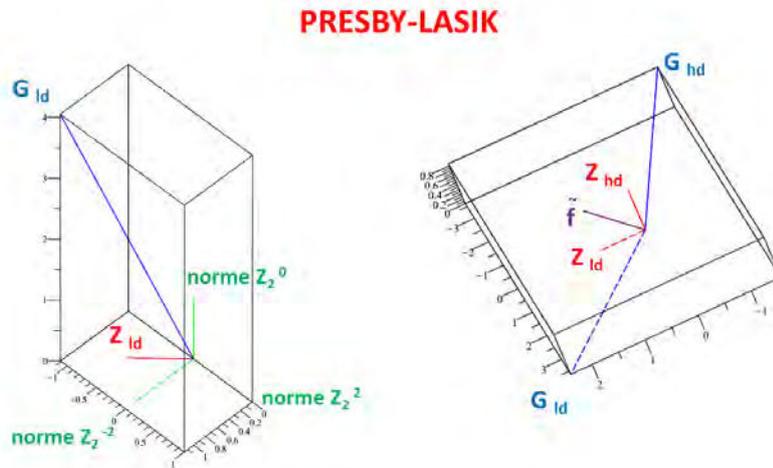


FIGURE 3.18 – Exemple 5 (chirurgie PRESBY-LASIK). Représentation spatiale des composantes de degré 2 (gauche) et des composantes bas degré/haut degré du front d'onde dans les bases de Zernike et D2V3 (droite).

Le mélange des termes de degré 2 et 4 au sein du mode Z_4^0 a pour effet de dissimuler l'erreur de degré 2 présente au sein du front d'onde. Ainsi, alors que l'œil présente une myopie importante en réfraction subjective, la valeur du coefficient du mode de haut degré correspondant au défocus z_2^0 est quasi nulle dans la décomposition de Zernike.

La représentation vectorielle de la figure 3.18 permet de visualiser les différences importantes entre les décompositions de Zernike et D2V3.

La différence entre les décompositions est soulignée par l'angle important formé entre les vecteurs G_b et G_h dont la norme est nettement plus élevée que celle des vecteurs Z_b, Z_h . Cette exemple représente un cas extrême où la décomposition de Zernike masque la présence d'une erreur quadratique élevée du front d'onde.

3.3 Discussion et perspectives

3.3.1 Pertinence de la nouvelle base D2V3

On distingue ici différentes situations suivant le degré radial considéré :

(i) *Cas des aberrations de degré radial égal à 2 :*

La collecte dans la base D2V3 des termes en r^2 permet une meilleure estimation de la réfraction subjective que l'utilisation des coefficients pondérant les modes de Zernike de degré 2 (Z_2^0, Z_2^{-2}, Z_2^2). La prise en compte de cette particularité est pourtant absente de la décomposition d'un écart de front d'onde en harmoniques de Zernike. Au contraire, le processus de minimisation de l'erreur quadratique d'un écart de front d'onde à sa moyenne nulle (après retrait du piston) résulte en l'utilisation d'un jeu de fonctions qui comportent des polynômes d'un autre degré radial.

(ii) *Cas des aberrations de degré radial égal à 1 :*

Certains polynômes de Zernike de degré radial supérieur ou égal à 3, appartenant au contingent des aberrations de haut degré, possèdent des termes de tilt (r^1) et constants (r^0). La présence de ceux-ci au sein du front d'onde ne modifie pas la valeur de métriques destinées à évaluer la qualité optique, comme le ratio de Strehl. Elle découle de la procédure de Gram-Schmidt, qui s'effectue à partir du mode de piston (degré radial nul). Elle peut toutefois induire un biais d'interprétation dans la décomposition de Zernike.

Les valeurs des coefficients affectés aux modes de tilt au sein de l'expansion de Zernike correspondent à la compensation des termes en r^1 présents dans les modes de haut degré dont la valeur absolue de la fréquence azimutale est égale à 1. Dans la décomposition D2V3, la valeur affectée au tilt est

obtenue en collectant tous les termes en degré r^1 présents dans le développement du front d'onde. Un coefficient affecté au tilt total proche de zéro est attendu car il indique que la direction de propagation du front d'onde est très proche de celle de l'axe optique de l'instrument de mesure. Dans les exemples présentés, la valeur des coefficients des modes de tilt fournie par la méthode de projection du front d'onde dans la décomposition D2V3 était effectivement beaucoup plus faible, et peu corrélée à celle des termes impairs de plus haute fréquence azimutale. Cette tendance doit être confirmée sur un plus grand nombre de cas, et est attendue, dans la mesure où l'examen aberrométrique est effectué de manière coaxiale entre l'axe optique de l'instrument de recueil du front d'onde et la ligne de visée de l'œil examiné.

Ainsi, les valeurs élevées des coefficients du tilt obtenues dans la décomposition dans la base de Zernike ne sont pas pertinentes sur un plan fonctionnel, et reflètent les conséquences du procédé de projection de l'erreur du front d'onde dans une base dont certains modes impairs de haut degré radial contiennent un terme en r^1 . L'induction d'une aberration de coma primaire ou secondaire de Zernike par un miroir d'optique adaptative provoque par exemple un déplacement apparent du point de fixation, qui est la conséquence du tilt contenu dans ces modes [30]. L'inspection du profil central de l'aberration de coma primaire de Zernike $z_3^{\pm 1}$ permet de visualiser l'influence du terme en r^1 qu'il contient. Cet aspect ne répond pas aux conditions de mesures et d'alignement du front d'onde oculaire.

(iii) *Cas des aberrations de degré radial égal à 4 :*

La présence de termes en r^2 au sein des modes de degré radial supérieur ou égal à 4 expose à une mauvaise corrélation entre la réfraction prédite et la réfraction subjective, ainsi qu'à une prédiction erronée de la qualité optique de l'œil à partir de la mesure de l'écart de front d'onde. Les données de la littérature confirment l'influence des aberrations de haut degré, en particulier l'aberration sphérique, sur la mesure aberrométrique de la réfraction [31, 32, 33]. L'utilisation du terme de Zernike z_4^0 pour quantifier le terme d'aberration sphérique positive conduit à des tendances bien identifiées dans la littérature. Le taux d'aberration sphérique positive est corrélé avec une réfraction prédite comme légèrement plus hypermétropique selon un critère d'évaluation paraxial, et plus myopique selon un critère de minimisation du RMS. Cette tendance s'explique par la conjonction de l'effet des termes en r^4 et en r^2 présents au sein de l'aberration sphérique de Zernike. Pour un œil qui présenterait une aberration sphérique de Zernike isolée, la région centrale de la pupille présente un défaut de puissance optique, alors que la périphérie présente un excès de puissance optique. Or, l'induction d'une aberration sphérique ne modifie pas la réfraction paraxiale d'un point

de vue théorique, même si des modifications mineures de la réfraction subjective ont été observées.

3.3.2 Perspectives pour la mesure du relief cornéen

Une autre application prometteuse de la nouvelle base D2V3 consiste à utiliser la nouvelle décomposition associée pour l'analyse du relief cornéen mesuré en topographie cornéenne. Actuellement, la base de Zernike est déjà utilisée en routine pour modéliser l'écart de la surface cornéenne étudiée avec une surface de référence qui peut être plane, sphérique, ellipsoïdale, ou encore quadrique selon le choix de l'examineur et les options offertes par le logiciel du topographe cornéen [34, 35]. Le choix de la surface de référence est primordial et gouverne directement les caractéristiques de la fonction mesurant l'écart entre cette surface et le relief cornéen étudié [36]. La base D2V3 pourrait être utilisée dans ce contexte, afin de fournir une interprétation plus pertinente vis-à-vis de la présence de modes comme le tilt (inclinaison moyenne du dioptre cornéen), le defocus (courbure apicale) et l'astigmatisme (toricité apicale de la surface cornéenne).

L'estimation de l'orientation globale de la cornée, et de ses propriétés optiques dans le domaine paraxial sont d'autant plus difficiles à apprécier que la surface étudiée présente une asphéricité et des irrégularités qui s'écartent des moyennes physiologiques. Une approche consistant à effectuer une reconstruction cornéenne en 2 étapes peut être envisagée. Dans la première, après recueil des données brutes, la collecte des termes de degré 1 et 2 conduit à la construction d'une surface quadrique de référence dont le sommet est osculateur vis-à-vis du sommet du relief cornéen mesuré. La fonction correspondant à l'écart entre le relief analysé et cette surface quadrique osculatrice de référence peut être ensuite projetée dans la base V3 afin d'obtenir des coefficients permettant de mieux extraire et quantifier l'irrégularité du relief cornéen. Comme pour le front d'onde oculaire, cette approche laisse augurer d'une décomposition plus pertinente. Avec les modes de la base de Zernike, les liens entre les coefficients des aberrations paires avec le rayon de courbure apical et l'asphéricité qui sont les deux principales constantes utilisées pour la modélisation du profil cornéen, ne sont pas intuitives. Il est licite de postuler que de meilleures corrélations entre les modifications de la courbure apicale et les termes de degré radial 2, ainsi qu'entre les variations de l'asphéricité et les termes en degré radial 4 pourraient être retrouvées.

Une modélisation plus pertinente pourrait être également envisagée favorablement pour la mise au point de profils d'ablation laser asphériques. Ces profils sont destinés à augmenter la profondeur de champ chez les sujets

atteints de presbytie (réduction du pouvoir d'accommodation), en modifiant le pouvoir optique de la cornée par le biais d'une altération de la géométrie du profil cornéen. Quand le profil cornéen est assimilé à une section conique, deux variables permettent d'en moduler la courbure : le rayon du cercle osculateur R_o (courbure apicale) et le paramètre d'asphéricité (souvent désigné par la variable Q). Les variations de l'asphéricité cornéenne permettent de modifier la courbure cornéenne en dehors de la région apicale, ce qui modifie la réfraction des rayons lumineux périphériques vis à vis des rayons paraxiaux. Cette différence de focalisation permet d'augmenter la profondeur de foyer de l'œil et compenser les effets de la presbytie. En termes aberrométriques, la variation de l'asphéricité cornéenne induit une variation de l'aberration sphérique. L'absence de termes en r^2 dans le mode G_4^0 laisse augurer que celui-ci présente une meilleure corrélation avec les variations de Q que le mode Z_4^0 . De même, on devrait observer conjointement la faible variation du mode G_2^0 quand l'asphéricité est modulée, alors que le mode Z_2^0 est affecté par les variations de Q , pour compenser les variations du terme en r^2 contenu dans le mode Z_4^0 .

L'interprétation du monde par nos sens suppose l'interaction de nos cellules sensorielles avec les signaux émis par notre environnement. Dans le cadre de la vision, la formation d'une image rétinienne à partir de la captation de lumière est l'étape initiatrice de la cascade visuelle. De nombreux siècles furent nécessaires pour établir ce qui nous semble aujourd'hui une simple constatation. La manière dont fut conçu le trajet de la lumière au sein des structures oculaires a beaucoup évolué en fonction des théories en cours du processus de la vision et des découvertes successives de l'optique. Pour les grecs Anciens, il n'y avait pas de véritable distinction entre optique et vision, comme l'illustre l'étymologie du mot « optikos », « relatif à la vue ». D'un point de vue conceptuel, leurs représentations de la vision fondées sur la captation des Eidola, ces fines enveloppes d'atomes émanées de la surface des objets et qui nous les font voir en pénétrant dans nos yeux, préfigurent admirablement la théorie du front d'onde.

Comme tout instrument destiné à capter et restituer une information lumineuse, l'œil humain n'est pas exempt de défauts optiques et présente les mêmes aberrations que ceux-ci. Depuis la première réalisation d'un verre de lunette cylindrique sous l'impulsion d'Airy au cours de la seconde moitié du 19^e siècle, la mesure des amétropies sphéro-cylindriques comme la myopie, l'hypermétropie ou l'astigmatisme constitue l'objectif principal de l'examen de la réfraction. En effet, ces aberrations de défocus et d'astigmatisme sont accessibles à la correction par un verre de lunettes. Si le taux d'imperfections optiques résiduelles est similaire au sein de la population amétrope et emmétrope [37, 38], il existe certaines situations non-physiologiques et/ou pathologiques pour lesquelles la prescription d'une correction optique standard ne permet pas toujours de rétablir une qualité optique suffisante en

raison de l'élévation persistante d'aberrations optiques de haut degré.

La décomposition d'un front d'onde en différentes aberrations monochromatiques est une méthode couramment employée pour étudier la qualité des images formées par un système optique et porte sur l'analyse de l'écart entre le front d'onde mesuré à la sortie du système et le front d'onde de référence. Les données issues du recueil et celles de l'analyse du front d'onde doivent permettre de prédire la valeur de la réfraction optimale et simuler la qualité de l'image rétinienne de l'œil mesuré (avec ou sans correction sphéro-cylindrique). Pour atteindre cet objectif, il convient de scinder de manière pertinente le contingent d'aberrations de bas degré avec celui de haut degré. Cette étape est un prérequis pour l'établissement d'une mesure de la réfraction pertinente à partir de l'étude du front d'onde oculaire, et plus généralement pour l'obtention d'une estimation fidèle de la qualité de l'image rétinienne avec et sans correction par lunettes.

L'interprétation de l'écart du front d'onde oculaire est facilitée par la décomposition de celui-ci en un ensemble de fonctions ou modes harmoniques élémentaires affectés d'un coefficient. Cette interprétation repose sur l'appréciation et la comparaison des valeurs des coefficients affectés à chacun des modes utilisés. Avec l'avènement récent de l'aberrométrie en pratique clinique, la base des polynômes de Zernike s'est imposée depuis deux décennies comme le standard pour l'étude des aberrations optiques oculaires. Néanmoins, les caractéristiques physiologiques qui influent sur la mesure et la correction des aberrations de bas degré imposent certaines précautions et réduisent la pertinence de la projection du front d'onde oculaire dans la base de Zernike.

Notre travail offre au clinicien une base de fonctions alternatives pour apprécier les contributions respectives des contingents d'aberrations de bas et de haut degré. Pour un même front d'onde, les coefficients affectés aux principales aberrations de haut degré (coma, aberration sphérique, astigmatisme secondaire) possèdent des valeurs plus élevées dans la base D2V3. Leur ordre de grandeur étant plus proche de celui des coefficients affectés aux modes de bas degré, l'interprétation du relevé des coefficients d'aberrations de haut degré pourrait être facilitée par l'utilisation de la base D2V3, et permettre de mieux comparer plusieurs examens. En dehors de situations particulières, l'absence d'orthogonalité entre les contingents de bas et haut degré nécessaire à la réalisation de la scission D2V3 n'apparaît pas comme une limite à son utilisation. Au contraire, cette dissociation peut s'interpréter comme une analogie avec la distinction clinique et fonctionnelle entre aberrations optiques de défocalisation, et aberrations de degré supérieur.

En introduisant les notions de variance et covariance généralisées, nous

avons fourni une représentation géométrique spatiale de certaines composantes respectives relatives à chaque décomposition. Les figures obtenues après centrage et alignement (soustraction des pistons et harmoniques de degré 1) permettent de visualiser les différences entre les décompositions de Zernike et D2V3 dans un espace à trois dimensions. Cette représentation originale offre au clinicien une méthode complémentaire pour étudier la distribution des coefficients et apprécier les différences entre les contingents d'aberration de bas et de haut degré. Nous avons également effectué une représentation restreinte aux modes de degré 2 qui permet d'apprécier les différences entre les décompositions afin d'établir la valeur du défocus et des composantes d'astigmatisme.

Le travail présenté dans cette thèse a eu pour objectif principal de proposer une nouvelle approche fondée sur l'élaboration d'une base de fonctions polynomiales permettant une meilleure distinction entre les aberrations oculaires de bas et de haut degré. Les résultats présentés dans différentes situations cliniques sont particulièrement encourageants, mais des études de validation seront nécessaires pour évaluer et confirmer l'intérêt pratique de la nouvelle base D2V3.

ANNEXE A

PROCÉDURES MAPLE POUR L'ANALYSE D'UN FRONT D'ONDE

On présente dans cette première annexe les principales procédures Maple permettant d'analyser mathématiquement un front d'onde.

On munit tout d'abord l'ensemble des fonctions continues sur $[0, 1]$ de sa structure vectorielle usuelle et du produit scalaire :

```
scal := (a, f) -> (r -> (a * f(r)));  
som := (f, g) -> (r -> (f(r) + g(r)));  
b := (f, g) -> int(2 * r * f(r) * g(r), r = 0 .. 1);
```

puis de même pour les fonctions continues sur le disque D :

```
scal2 := (a, f) -> ((r, t) -> (a * f(r, t)));  
som2 := (f, g) -> ((r, t) -> (f(r, t) + g(r, t)));  
b2 := (f, g) -> int(int(r * f(r, t) * g(r, t), r = 0 .. 1), t = -Pi .. Pi) / Pi;
```

On définit ensuite l'algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt d'une base quelconque de $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$:

```
schmidt := proc(Base)  
global scal, som, b;  
local base, n, k, j;  
n := nops(Base);  
base := map(P -> unapply(P, r), Base);  
for k from 2 to n  
do
```

```

for j from 1 to k-1
do
base[k]:=som(base[k],
scal(-b(base[j],base[k])/b(base[j],base[j]),base[j]))
od
od;
base:=map(f->f(r),base);
map(sort,%)
end;

```

La famille des polynômes azimutaux normalisés, notés A_n^m dans la thèse, est définie par :

```

azim:=proc(n,m)
local a;
global r,t;
if m>0 then a:=sqrt(2*(n+1))*r^n*cos(m*t)
elif m<0 then a:=sqrt(2*(n+1))*r^n*sin(-m*t)
else a:=sqrt(n+1)*r^n fi ;
end;

```

ainsi que la pyramide associée (pour les 7 premières lignes), rangée dans la partie inférieure d'une matrice 7×7 :

```

pyrazim:=proc()
local M,i,j,k;
M:=matrix(7,7,0);
k:=1;
for i from 1 to 7 do
for j from 1 to i do
M[i,j]:=a[i-1,2*j-i-1]=azim(i-1,2*j-i-1);
k:=k+1
od od;
evalm(M);
end;

```

La famille des polynômes de Zernike Z_n^m est ensuite construite (par orthonormalisation des parties radiales de la famille A_n^m) :

```

zerni:=proc(n,m)
local z,pr;
global r,t;

```

```

pr:=mm->sum('(-1)^s
*factorial(n-s)/(factorial(s)*factorial((n+mm)/2-s)
*factorial((n-mm)/2-s))*r^(n-2*s)', 's'=0..(n-mm)/2);
if m>0 then z:=sqrt(2*(n+1))*pr(m)*cos(m*t)
elif m<0 then z:=sqrt(2*(n+1))*pr(-m)*sin(-m*t)
else z:=sqrt(n+1)*pr(0) fi ;
z:=expand(z,trig);
end;

```

La procédure suivante extrait des coefficients placés dans une matrice "pyramidale" (28 coefficients pour une matrice 7×7) :

```

coef_extr:=proc(M)
local V,i,j,k;
V:=[seq(0,i=1..28)];
k:=1;
for i from 1 to 7 do
for j from 1 to i do
V[k]:=op(2,M[i,j]);
k:=k+1
od;od;
V
end;

```

Enfin, on reconstruit ci-dessous un front d'onde à partir de ses coefficients de Zernike :

```

front_zern:=proc(Z)
local n_Z,n,i,j,k,f;
global zerni;
n_Z:=nops(Z);
n:=(sqrt(8*n_Z+1)-1)/2-1;
k:=1;
f:=0.;
for i from 1 to (n+1) do
for j from 1 to i do
f:=f+Z[k]*zerni(i-1,2*j-i-1);
k:=k+1
od od;
unapply(f,r,t);
end;

```

ANNEXE B

PROCÉDURES MAPLE POUR LA CONSTRUCTION DE LA NOUVELLE BASE D2V3

On reproduit ici les algorithmes de construction de la nouvelle base $D2V3$ présentée au chapitre 2 (dont les éléments sont notés ici GMP) ainsi que la conversion entre cette nouvelle décomposition et la décomposition de Zernike.

B.1 Création de la nouvelle base

On construit tout d'abord la base orthonormale associée aux hauts degrés pairs (entre 4 et 10) :

```
schmidt([r^4,r^6,r^8,r^10]):  
GMP:=map(pol->pol/sqrt(b(unapply(pol,r),unapply(pol,r))),%):  
GMP;
```

$$\left[\begin{array}{l} r^4 \sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{1}{6}} \left(r^5 - \frac{5}{6} r^3 \right) \sqrt{\frac{1}{2}}, 84 r^8 - 126 r^6 + 45 r^4, \\ \sqrt{\frac{1}{6}} \left(r^6 - \frac{5}{6} r^4 \right) \sqrt{\frac{1}{2}}, \\ 120 \sqrt{\frac{1}{10}} \left(r^{10} - \frac{21}{10} r^8 + \frac{7}{5} r^6 - \frac{7}{24} r^4 \right) \sqrt{\frac{1}{2}}, \\ \sqrt{\frac{1}{10}} \left(r^{11} - \frac{11}{5} r^9 + \frac{11}{24} r^7 - \frac{11}{24} r^5 \right) \sqrt{\frac{1}{2}} \end{array} \right]$$

puis aux hauts degrés impairs (entre 3 et 9) :

```

schmidt([r^3,r^5,r^7,r^9]):
GMI:=map(pol->pol/sqrt(b(unapply(pol,r),unapply(pol,r))),%):
GMI;

[ 3 / 5 4 3\ (1/2) / 7 10 5 10 3\ (1/2)
[2 r , 5 |r - - r | 6 , 42 |r - -- r + -- r | 2 ,
[ \ 5 / \ 7 21 /

/ 9 7 5 5 5 3\ (1/2)]
84 |r - 2 r + - r - -- r | 10 ]
\ 4 21

/ ]

```

et enfin l'ensemble des nouveaux polynômes de la base (de degré inférieur ou égal à 6) :

```

gm:=proc(n,m)
local pgm,GI,GP;
global zerni,azim;
GI:=5*(r^5-(4/5)*r^3)*sqrt(6);
GP:=6*(r^6-(5/6)*r^4)*sqrt(7);
pgm:=zerni(n,m);
if n=3 then if abs(m)<=1 then pgm:=azim(n,m) fi fi;
if n=4 then if abs(m)<=4 then pgm:=azim(n,m) fi fi;
if n=5 then if m=-1 then pgm:=GI*sin(t)*sqrt(2)
else if m=1 then pgm:=GI*cos(t)*sqrt(2)fi fi fi;
if n=6 then if m=-2 then pgm:=GP*sin(2*t)*sqrt(2)
else if m=0 then pgm:=GP
else if m=-2 then pgm:=GP*cos(2*t)*sqrt(2)fi fi fi fi;
pgm;
end proc;

```

La procédure suivante permet de reconstruire un front d'onde à partir de sa décomposition D2V3 :

```

front_gm:=proc(G)
local n_G,n,i,j,k,f;
global gm;
n_G:=nops(G);
n:=(sqrt(8*n_G+1)-1)/2-1;
k:=1;

```

```
f:=0.;
for i from 1 to (n+1) do
for j from 1 to i do
f:=f+G[k]*gm(i-1,2*j-i-1);
k:=k+1
od od;
unapply(f,r,t);
end;
```

B.2 Conversion de la base Zernike à la base D2V3

La conversion des coefficient de Zernike en coefficients dans la base D2V3 est présentée ici. Dans les procédures suivantes, la matrice carrée de taille 7 notée M représente les coefficients de Zernike rentrés dans une matrice sous une forme triangulaire inférieure (par exemple $M(1,1)$ représente le coefficient constant de Zernike).

Le principe général consiste à construire tout d'abord la partie bas degré (inférieur ou égal à 2), notée f_b , en collectant ses 6 termes de manière séparée.

On commence par la collecte des coefficients constants :

```
cum_zern_0:=proc(M_z)
local cumul, coefs_0,M_c;
cumul:=proc(M)
local i,j,n, c;
c:=0;
n:=rowdim(M);
for i from 1 to n do
for j from 1 to i do
c:=c+op(2,M[i,j]) od od;
c
end;
coefs_0:=proc(M_zern)
local n,M,i,j,m,lm;
n:=rowdim(M_zern);
M:=M_zern;
for i from 1 to n do for j from 1 to i do
m:=M[i,j]; lm:=[op(1,m),op(2,m)];
if op(2,lm[1])=0 then
lm[2]:=lm[2]*(-1)^((i-1)/2)*sqrt(i);
```

```

    M[i,j] := (lm[1]=lm[2])
else lm[2] := 0; M[i,j] := (lm[1]=lm[2])
fi od od;
evalm(M)
end;
M_c := coefs_0(M_z);
cumul(M_c)
end;

```

puis la collecte des coefficients en r^2 :

```

cum_zern_2 := proc(M_z)
local cumul, coefs_2, M_c;
cumul := proc(M)
local i, j, n, c;
c := 0;
n := rowdim(M);
for i from 1 to n do for j from 1 to i do
c := c + op(2, M[i,j]) od od;
c
end;
coefs_2 := proc(M_zern)
local n, M, i, j, m, lm;
n := rowdim(M_zern);
M := M_zern;
for i from 1 to n do for j from 1 to i do
m := M[i,j]; lm := [op(1,m), op(2,m)];
if op(2, lm[1]) = 0 then
lm[2] := lm[2] * (-1)^((i+1)/2) * sqrt(i) * (i^2-1)/4;
M[i,j] := (lm[1]=lm[2])
else lm[2] := 0; M[i,j] := (lm[1]=lm[2])
fi od od;
evalm(M)
end;
M_c := coefs_2(M_z);
cumul(M_c)
end;

```

la collecte des coefficients en $r \cos t$:

```

cum_zern_p1 := proc(M_z)

```

```
local cumul, coefs_p1, M_c;
cumul:=proc(M)
local i, j, n, c;
c:=0;
n:=rowdim(M);
for i from 1 to n do for j from 1 to i do
  c:=c+op(2, M[i, j]) od od;
c
end;
coefs_p1:=proc(M_zern)
local n, M, i, j, m, lm;
n:=rowdim(M_zern);
M:=M_zern;
for i from 1 to n do for j from 1 to i do
  m:=M[i, j]; lm:=[op(1, m), op(2, m)];
if op(2, lm[1])=1 then
  lm[2]:=lm[2]*(-1)^((i-2)/2)*sqrt(2*i)*i/2;
  M[i, j]:=(lm[1]=lm[2])
else lm[2]:=0; M[i, j]:=(lm[1]=lm[2])
fi od od;
evalm(M)
end;
M_c:=coefs_p1(M_z);
cumul(M_c)
end;
```

la collecte des coefficients en $r \sin t$:

```
cum_zern_m1:=proc(M_z)
local cumul, coefs_m1, M_c;
cumul:=proc(M)
local i, j, n, c;
c:=0;
n:=rowdim(M);
for i from 1 to n do
for j from 1 to i do
  c:=c+op(2, M[i, j]) od od;
c
end;
coefs_m1:=proc(M_zern)
local n, M, i, j, m, lm;
```

```

n:=rowdim(M_zern);
M:=M_zern;
for i from 1 to n do for j from 1 to i do
  m:=M[i,j]; lm:=[op(1,m),op(2,m)];
  if op(2,lm[1])=-1 then
    lm[2]:=lm[2]*(-1)^((i-2)/2)*sqrt(2*i)*i/2;
  M[i,j]:=(lm[1]=lm[2])
  else lm[2]:=0; M[i,j]:=(lm[1]=lm[2])
  fi od od;
evalm(M)
end;
M_c:=coefs_m1(M_z);
cumul(M_c)
end;

```

la collecte des coefficients en $r^2 \cos 2t$:

```

cum_zern_p2:=proc(M_z)
local cumul, coefs_p2,M_c;
cumul:=proc(M)
local i,j,n, c;
c:=0;
n:=rowdim(M);
for i from 1 to n do
for j from 1 to i do
  c:=c+op(2,M[i,j]) od od;
c
end;
coefs_p2:=proc(M_zern)
local n,M,i,j,m,lm;
n:=rowdim(M_zern);
M:=M_zern;
for i from 1 to n do
for j from 1 to i do
  m:=M[i,j]; lm:=[op(1,m),op(2,m)];
  if op(2,lm[1])=2 then
    lm[2]:=lm[2]*(-1)^((i+1)/2)*sqrt(2*i)*(i^2-1)/8;
    M[i,j]:=(lm[1]=lm[2])
  else lm[2]:=0; M[i,j]:=(lm[1]=lm[2])
  fi od od;
evalm(M)

```

```
end;  
M_c:=coefs_p2(M_z);  
cumul(M_c)  
end;
```

et enfin la collecte des coefficients en $r^2 \sin 2t$:

```
cum_zern_m2:=proc(M_z)  
local cumul, coefs_m2, M_c;  
cumul:=proc(M)  
local i, j, n, c;  
c:=0;  
n:=rowdim(M);  
for i from 1 to n do for j from 1 to i do  
  c:=c+op(2, M[i, j]) od od;  
c  
end;  
coefs_m2:=proc(M_zern)  
local n, M, i, j, m, lm;  
n:=rowdim(M_zern);  
M:=M_zern;  
for i from 1 to n do for j from 1 to i do  
  m:=M[i, j]; lm:=[op(1, m), op(2, m)];  
if op(2, lm[1])=-2 then  
  lm[2]:=lm[2]*(-1)^((i+1)/2)*sqrt(2*i)*(i^2-1)/8;  
  M[i, j]:=(lm[1]=lm[2])  
else lm[2]:=0; M[i, j]:=(lm[1]=lm[2])  
fi od od;  
evalm(M)  
end;  
M_c:=coefs_m2(M_z);  
cumul(M_c)  
end;
```

La reconstruction de la composante bas degré dans la base D2V3 s'effectue alors comme suit :

```
low_degree:=proc(Z_test)  
local c0, c2, cp1, cm1, cp2, cm2, q, M;  
global cum_zern_0, cum_zern_2,  
cum_zern_p1, cum_zern_m1, cum_
```

```
zern_p2,cum_zern_m2,matrice_zern;  
M:=matrice_zern(Z_test);  
c0:=cum_zern_0(M);  
M:=matrice_zern(Z_test);  
c2:=cum_zern_2(M);  
M:=matrice_zern(Z_test);  
cp1:=cum_zern_p1(M);  
M:=matrice_zern(Z_test);  
cm1:=cum_zern_m1(M);  
M:=matrice_zern(Z_test);  
cp2:=cum_zern_p2(M);  
M:=matrice_zern(Z_test);  
cm2:=cum_zern_m2(M);  
q:=c0+cm1*r*sin(t)  
+cp1*r*cos(t)+c2*r^2  
+cm2*r^2*sin(2*t)  
+cp2*r^2*cos(2*t);  
unapply(evalf(q),r,t);  
end;
```

La composante de haute valuation (supérieure ou égale à 3) s'en déduit aisément :

```
f_low:=low_degree(Z_test);  
f_high:=(r,t)->f(r,t)-f_low(r,t);
```


ANNEXE C

PROCÉDURES MAPLE POUR LES REPRÉSENTATIONS VECTORIELLES 2D OU 3D

On présente ici un exemple de représentations géométriques d'un front d'onde donné par sa matrice dans la base de Zernike (M_init) et dans la base D2V3 (GGMM, obtenue par conversion, voir annexes 1 et 2) :

#M_init = matrice des coefficients de Zernike,

```
M_init:= Matrix(7, 7,
{(1, 1) = z[0, 0] = .61,
(1, 2) = 0, (1, 3) = 0, (1, 4) = 0, (1, 5) = 0, (1, 6) = 0, (1, 7) = 0,
(2, 1) = z[1, -1] = -.92, (2, 2) = z[1, 1] = 1.09,
(2, 3) = 0, (2, 4)=0, (2, 5)=0, (2, 6)=0, (2, 7)=0,
(3, 1)= z[2, -2] =-.46, (3, 2)= z[2, 0] = .65, (3, 3)= z[2, 2]=0.7e-1,
(3, 4) = 0, (3, 5) = 0, (3, 6) = 0, (3, 7) = 0,
(4, 1) = z[3, -3] = 0.9e-1, (4, 2) = z[3, -1]=-.43,
(4, 3) = z[3, 1] = .41, (4, 4) = z[3, 3]=-.49,
(4, 5) = 0, (4, 6) = 0, (4, 7) = 0,
(5, 1) = z[4, -4] = .15, (5, 2) = z[4, -2] = -0.3e-1,
(5, 3) = z[4, 0] = .24, (5, 4) = z[4, 2] = -.32,
(5, 5) = z[4, 4] = .13,
(5, 6) = 0, (5, 7) = 0,
(6, 1) = z[5, -5] = -0.1e-1, (6, 2) = z[5, -3] = 0.6e-1,
(6, 3) = z[5, -1] = -0.3e-1, (6, 4) = z[5, 1] = -0.2e-1,
(6, 5) = z[5, 3] = 0.4e-1, (6, 6) = z[5, 5] = 0.1e-1,
(6, 7) = 0,
```

(7, 1) = z[6, -6] = -0.1e-1, (7, 2) = z[6, -4] = -0.3e-1,
(7, 3) = z[6, -2] = 0.2e-1, (7, 4) = z[6, 0] = 0.1e-1,
(7, 5) = z[6, 2] = 0, (7, 6) = z[6, 4] = 0.1e-1,
(7, 7) = z[6, 6] = 0}

C.1 Représentation 2D pour la décomposition D2V3

On calcule tout d'abord les variances bas et haut degré pour la décomposition de Zernike :

```
s:=0:
for i from 2 to 7 do for j from 1 to i do
s:=s+(op(2,M_init[i,j]))^2 od od:
var_totale:=s;
```

var_totale := 3.483

```
s:=0:
for i from 2 to 3 do for j from 1 to i do
s:=s+(op(2,M_init[i,j]))^2 od od:
var_zern_bd:=s;
```

var_zern_bd = 2.673

```
s:=0:
for i from 4 to 7 do for j from 1 to i do
s:=s+(op(2,M_init[i,j]))^2 od od:
var_zern_hd:=s;
```

var_zern_hd = 0.809

```
contribution_hd_apparente:= var_zern_hd/var_totale;
0.232
```

```
contribution_bd_apparente:= var_zern_bd/var_totale;
0.767
```

puis on procède de même pour la base D2V3 :

```
s:=0:
for i from 2 to 3 do for j from 1 to i do
s:=s+(op(2,GGMM[i,j]))^2 od od:
```

```

var_gm_bd:=s;

                                var_gm_bd = 1.825
s:=0:
for i from 4 to 7 do for j from 1 to i do
s:=s+(op(2,GGMM[i,j]))^2 od od:
var_gm_hd:=s-(op(2,M_zern_hd[1,1]))^2;

                                var_gm_hd = 5.858
contribution_hd_corrige:=var_gm_hd/var_totale;
                                1.682
contribution_bd_corrige:=var_gm_bd/var_totale;
                                0.524

```

On calcule alors l'angle entre les deux composantes (non orthogonales) :

```

cosinus:=(var_totale-var_gm_hd-var_gm_bd)/
          (2*sqrt(var_gm_bd)*sqrt(var_gm_hd));
#cosinus de l'angle BD-HD
                                -0.6422561195
evalf(180/Pi*arccos(cosinus));#angle en degrés
                                129.9602591

```

La procédure suivante permet de représenter le front d'onde sous forme d'un vecteur à deux composantes f_b et f_h non orthogonales, associées à la base D2V3 :

```

ABD:=[sqrt(var_gm_bd),0];#coordonnées de f_bd-p_0(f_bd)
AHD:=[sqrt(var_gm_hd)*cosinus,
      sqrt(var_gm_hd)*sqrt(1-cosinus^2)];
#coordonnées de f_hd-p_0(f_hd)
A:=[ABD[1]+AHD[1],ABD[2]+AHD[2]];#coordonnées de f-p_0(f)
                                [1.351032868, 0]
                                [-1.554533335, 1.855232482]
                                [-0.203500467, 1.855232482]
plot({[[0,0],ABD],[[0,0],AHD],[[0,0],A]});

```

C.2 Représentation 3D dans les 2 bases

Sur un exemple simple, on présente le script Maple conduisant aux figures servant d'illustration dans le chapitre 3 (par exemple la figure 3.12) de la différence entre une décomposition dans la base de Zernike et dans la base D2V3 :

```
U1:=[1,0,0];#z(2,-2)=premier vecteur de base;
      [1, 0, 0]
U2:=[0,1,0];#z(2,2)=deuxième vecteur de base;
      [0, 1, 0]
U3:=[0,0,1];#z(2,0)=troisième vecteur de base;
      [0, 0, 1]
z_ld:=[z_test[4],z_test[6],z_test[5]];
      [2.000000001, 1.000000002, 1.000000001]
gm_ld:=[evalf(b2(f_low,unapply(zerni(2,-2),(r,t))),
evalf(b2(f_low,unapply(zerni(2,2),(r,t))),
evalf(b2(f_low,unapply(zerni(2,0),(r,t)))));
      [7.292168034, 6.292168414, -1.453798638]
```

On trace tout d'abord les 2 composantes de degré 2 dans les deux bases :

```
display({line([0,0,0],U1,color=GREEN,linestyle=dash),
line([0,0,0],U2,color=GREEN,linestyle=dash),
line([0,0,0],U3,color=GREEN),
line([0,0,0],z_ld,color=RED),
line([0,0,0],gm_ld,color=BLUE)},coords=c);
```

puis les deux décompositions du front d'onde avec leurs deux composantes bas/haut degré :

```
norme_z_ld:=((z_ld[1])^2+(z_ld[2])^2+(z_ld[3])^2)^.5;
norme_gm_ld:=((gm_ld[1])^2+(gm_ld[2])^2+(gm_ld[3])^2)^.5;
scal_z_gm_ld:=z_ld[1]*gm_ld[1]+z_ld[2]*gm_ld[2]+z_ld[3]*gm_ld[3];
cos_z_gm_ld:=scal_z_gm_ld/norme_z_ld/norme_gm_ld;
sin_z_gm_ld:=(1-(cos_z_gm_ld)^2)^.5;
      2.449489745
      9.740668790
      19.42270587
      0.8140392237
      0.5808099020
zz_ld:=[norme_z_ld,0,0];
```

Annexe C. Procédures Maple pour les représentations vectorielles 2D ou 3D

```
ggmm_ld:=[norme_gm_ld*cos_z_gm_ld,norme_gm_ld*sin_z_gm_ld,0];
U3:=[0,0,1];
      [2.449489745, 0, 0]
      [7.929286460, 5.657476885, 0]
      [0, 0, 1]

norme_z_hd:=(sum((z_test['i'])^2,'i'=7..28))^.5;
      5.744562648

zz_hd:=[0,0,norme_z_hd];
f_c:=[zz_ld[1]+zz_hd[1],zz_ld[2]+zz_hd[2],zz_ld[3]+zz_hd[3]];
ggmm_hd:=[f_c[1]-ggmm_ld[1],f_c[2]-ggmm_ld[2],f_c[3]-ggmm_ld[3]];
      [0, 0, 5.744562648]
      [2.449489745, 0, 5.744562648]
      [-5.479796715, -5.657476885, 5.744562648]

display({line([0,0,0],zz_ld,color=RED,linestyle=dash),
line([0,0,0],ggmm_ld,color=BLUE,linestyle=dash)
,line([0,0,0],zz_hd,color=RED),line([0,0,0],f_c,color=BLACK),
line([0,0,0],ggmm_hd,color=BLUE)},coords=c);
addcoords(z_cylindrical,[z,r,theta],[r*cos(theta),r*sin(theta),z]);
plot3d(f(r,t),r=0..1,t=0..2*Pi,coords=z_cylindrical,
title='front d'onde initial',orientation=[160,70,0],
axes=boxed,shading=zhue,style=surface,
lightmodel=none,numpoints=100000):
```


BIBLIOGRAPHIE

- [1] Smirnov. Measurement of the wave aberration of the human eye. *Biophysics*, 24 :766–795, 1962.
- [2] WA Dreher, JF Bille, and RN Weinreb. Active optical depth resolution improvement of the laser tomographic scanner. *Appl Opt*, 24 :804–808, 1989.
- [3] J Liang, B Grimme, S Goelz, and JF Bille. Objective measurement of the wave aberration of the human eye using a shack-hartmann wavefront sensor. *J Opt Soc Am*, 11 :1949–1957, 1994.
- [4] J Liang, DR Williams, and Miller DT. Supernormal vision and high resolution retinal imaging through adaptive optics. *J Opt Soc Am*, 14 :2884–2892, 1997.
- [5] LN Thibos, RA Applegate, JT Schwiegerling, and R Webb. Vsia standards taskforce members. vision science and its applications. standards for reporting the optical aberrations of eyes. *J Refract Surg*, 18(5) :652–60, 2002.
- [6] GM Dai. *Wavefront Optics for Vision Correction*. Spie Press, 2006.
- [7] HJ Wyatt. The form of the human pupil. *Vision Res*, 35(14) :2021–36, 1995.
- [8] J González-Martín-Moro, F Gómez-Sanz, A Sales-Sanz, E Huguet-Baudin, and J Murube-del Castillo. Pupil shape in the animal kingdom : from the pseudopupil to the vertical pupil. *Vision Res*, 89(12) :484–94, 2014.
- [9] DA Atchinson and G Smith. *Optics of the human eye*. Butterworth-Heinemann, 200.

-
- [10] X Wei and LN Thibos. Modal estimation of wavefront phase from slopes over elliptical pupils. *Vision Res*, 87(10) :767–77, 2010.
- [11] RA Applegate, C Ballentine, BA Gross, EJ Sarver, and CA Sarver. Visual acuity as a function of zernike mode and level of root mean square error. *Optom Vis Sci*, 80 :97–105, 2003.
- [12] DA Atchison and H Guo. Subjective blur limits for higher order aberrations. *Optom Vis Sci*, 87(11) :890–8, 2010.
- [13] X Cheng, A Bradley, S Ravikumar, and LN Thibos. Visual impact of zernike and seidel forms of monochromatic aberrations. *Optom Vis Sci*, 87(5) :300–12, 2010.
- [14] N Lopez-Gil, V Fernandez-Sanchez, L Thibos, and R Montes-Mico. Objective amplitude of accommodation computed from optical quality metrics applied to wavefront outcomes. *J Optom*, 2 :223–234, 2009.
- [15] GD Hastings, JD Marsack, LC Nguyen, H Cheng, and RA Applegate. Is an objective refraction optimised using the visual strehl ratio better than a subjective refraction? *Ophthalmic Physiol Opt*, 3 :317–325, 2017.
- [16] R Xu, A Bradley, N López Gil, and LN. Thibos. Modelling the effects of secondary spherical aberration on refractive error, image quality and depth of focus. *Ophthalmic Physiol Opt*, 35(1) :28–38, 2015.
- [17] X Cheng, A Bradley, and LN. Thibos. Predicting subjective judgment of best focus with objective image quality metrics. *Journal of Vision*, 4(4) :223–234, 2004.
- [18] A Guirao and DR Williams. A method to predict refractive errors from wave aberration data. *Optim Vis Sci*, 80(1) :36–42, 2003.
- [19] Y Benard, N Lopez-Gil, and R Legras. Optimizing the subjective depth-of-focus with combinations of fourth- and sixth-order spherical aberration. *Vision Res*, 8(51) :2471–7, 2011.
- [20] L Chen, B Singer, A Guirao, J Porter, and DR Williams. Image metrics for predicting subjective image quality. *Optim Vis Sci*, 82(5) :358–69, 2005.
- [21] R Tousey, M Koomen, and R Scolnik. Accommodation and night myopia. *J Opt Soc Am*, 43(10) :926–7, 1953.
- [22] WN Charman, JA Jennings, and H Whitefoot. The refraction of the eye in the relation to spherical aberration and pupil size. *Br J Physiol Opt*, 32 :78–93, 1978.

- [23] F Yi, DR Iskander, and M Collins. Depth of focus and visual acuity with primary and secondary spherical aberration. *Vision Res*, 51(14) :1648–58, 2011.
- [24] R Legras, Y Benard, and N Lopez-Gil. Effect of coma and spherical aberration on depth-of-focus measured using adaptive optics and computationally blurred images. *J Cataract Refract Surg*, 38(3) :458–69, 2012.
- [25] L Zheleznyak, R Sabesan, JS Oh, S MacRae, and G. Yoon. Modified monovision with spherical aberration to improve presbyopic through-focus visual performance. *Invest Ophthalmol Vis Sci*, 54(5) :3157–65, 2013.
- [26] L Zheleznyak, H Jung, and G Yoon. Impact of pupil transmission apodization on presbyopic through-focus visual performance with spherical aberration. *Invest Ophthalmol Vis Sci*, 3(55) :70–7, 2014.
- [27] Leray B, Cassagne M, V Soler, EA Villegas, C Triozon, GM Perez, J Letsch, E Chapotot, P Artal, and F Malecaze. Relationship between induced spherical aberration and depth of focus after hyperopic lasik in presbyopic patients. *Ophthalmology*, 122(2) :233–43, 2015.
- [28] N Visser, TT Berendschot, F Verbakel, AN Tan, J de Brabander, and Nuijts RM. Evaluation of the comparability and repeatability of four wavefront aberrometers. *Invest Ophthalmol Vis Sci*, 52(3) :1302–11, 2011.
- [29] S McGinnigle, SA Naroo, and F Eperjesi. Evaluation of the auto-refraction function of the nidek opd-scan3. *Clin Exp Optom*, 97(2) :160–3, 2014.
- [30] A Guirao, J Porter, DR Williams, and IG Cox. Calculated impact of higher-order monochromatic aberrations on retinal image quality in a population of human eyes. *J Opt Soc Am A*, 19 :1–9, 2002.
- [31] R Navarro, V Fernández-Sánchez, and N López-Gil. Refractive status in eyes with inhomogeneous or irregular pupils. *Optom Vis Sci*, 91(2) :221–30, 2014.
- [32] J Martin, B Vasudevan, N Himebaugh, A Bradley, and L Thibos. Unbiased estimation of refractive state of aberrated eyes. *Vision Res*, 51(17) :1932–40, 2011.
- [33] M Faria-Ribeiro, R Navarro, and JM González-Méijome. Effect of pupil size on wavefront refraction during orthokeratology. *Optom Vis Sci*, 93(11) :399–1408, 2016.

- [34] Iskander DR. Modeling videokeratoscopic height data with spherical harmonics. *Optom Vis Sci*, 86(5) :542–7, 2009.
- [35] A Guirao and P Artal. Corneal wave aberration from videokeratography : accuracy and limitations of the procedure. *J Opt Soc Am A*, 17 :955–965, 2000.
- [36] D Gatinel, J Malet, M, T Hoang-Xuan, and DT Azar. Corneal elevation topography : best fit sphere, elevation distance, asphericity, toricity, and clinical implications. *Cornea*, 30(5) :508–15, 2011.
- [37] JA Little, SJ McCullough, KM Breslin, and KJ Saunders. Higher order ocular aberrations and their relation to refractive error and ocular biometry in children. *Invest Ophthalmol Vis Sci*, 55(8) :4791–800, 2014.
- [38] L Wang and DD. Koch. Ocular higher-order aberrations in individuals screened for refractive surgery. *J Cataract Refract Surg*, 29(10) :1896–903, 2003.

Titre : Une nouvelle méthode de décomposition polynomiale d'un front d'onde oculaire

Mots Clefs : front d'onde- aberrations optiques- orthonormalisation de Gram-Schmidt - polynômes de Zernike.

Résumé : Les défauts de la vision sont analysés et classés à partir des caractéristiques mathématiques du front d'onde de l'œil considéré. Après avoir présenté la méthode actuelle basée sur la décomposition du front d'onde dans la base orthonormale de Zernike ainsi que certaines de ses limitations, on propose ici une nouvelle base de décomposition. Celle-ci repose sur l'utilisation de l'espace des fronts d'onde polynomiaux de valuation supérieure ou égale à $L + 1$ (où L est un entier naturel) et permet de décomposer de manière unique un front d'onde polynomial en la somme d'un front d'onde polynomial de bas degré (inférieur ou égal à L) et un front d'onde polynomial de haute valuation (supérieure ou égal à $L + 1$). En choisissant $L = 2$, une nouvelle décomposition est obtenue, appelée D2V3, où le front d'onde polynomial de haut degré ne comporte pas de termes de degré radial inférieur ou égal à deux. Cette approche permet de dissocier parfaitement les aberrations optiques corrigibles ou non par le port de lunettes. Différents cas cliniques présentés dans la dernière section permettent de mettre en évidence l'intérêt de cette nouvelle base de décomposition.

Title : A new polynomial decomposition method for ocular wavefront

Keys words : wavefront- optical aberrations- Gram Schmidt method- Zernike polynomials.

Abstract : The eye vision defaults are analyzed and classified by studying the corresponding eye wavefront. After presenting the orthogonal basis, called the Zernike basis, that is currently used for the medical diagnosis, a new decomposition basis is built. It is based on the use of the space of polynomials of valuation greater or equal to $L + 1$ (for L a natural integer). It allows to uniquely decompose a polynomial wavefront into the sum of a polynomial of low degree (lesser or equal to L) and a polynomial of high valuation (greater or equal to $L + 1$). By choosing $L = 2$, a new decomposition, called D2V3, is obtained where the polynomial wavefront of high degree does not include terms of radial degree lesser or equal to 2. In particular, it allows to quantify perfectly the aberrations that can be corrected by eyeglasses or not. Various clinical examples clearly show the interest of this new basis compared to a diagnosis based on the Zernike decomposition.
