



**HAL**  
open science

## Retraite et risque financier

Yannick Pradat

► **To cite this version:**

Yannick Pradat. Retraite et risque financier. Economies et finances. Université Paris sciences et lettres, 2017. Français. NNT : 2017PSLED022 . tel-01618323

**HAL Id: tel-01618323**

**<https://theses.hal.science/tel-01618323v1>**

Submitted on 17 Oct 2017

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THÈSE DE DOCTORAT

de l'Université de recherche Paris Sciences et Lettres  
PSL Research University

Préparée à l'Université Paris-Dauphine

Retraite et risque financier

École Doctorale de Dauphine — ED 543

Spécialité **Sciences économiques**

**Soutenue le 04.07.2017  
par Yannick PRADAT**

Dirigée par **Florence LEGROS**

**Stéphane HAMAYON**

## COMPOSITION DU JURY :

Mme Anne LAVIGNE  
Professeur des Universités  
France Stratégies - C.O.R.  
Rapporteur

M. Jérôme GLACHANT  
Professeur des Universités  
Université de Paris I  
Rapporteur

M. Olivier DAMETTE  
Professeur des Universités  
Université de Lorraine  
Membre du jury

Mme Florence LEGROS  
Professeur des Universités  
Directeur général d'ICN Business  
School  
Directeur de thèse

M. Stéphane HAMAYON  
Directeur de la recherche économique  
HARVEST  
Tuteur industriel



École doctorale de Dauphine : Laboratoire d'Économie de Dauphine

## Doctorat PSL

## THÈSE

pour obtenir le grade de docteur délivré par

# Université de Paris Dauphine

## Spécialité doctorale "Sciences économiques"

*présentée et soutenue publiquement par*

**Yannick PRADAT**

le 04 Juillet 2017

## Retraite et risque financier

Directeur de thèse : **Florence LEGROS**  
Co-encadrant de thèse : **Stéphane HAMAYON**

### Jury

<b>Prof. Anne LAVIGNE,</b>	France Stratégies - C.O.R.	Rapporteur
<b>Prof. Jérôme GLACHANT,</b>	Université de Paris I Panthéon-Sorbonne	Rapporteur
<b>Prof. Olivier DAMETTE,</b>	Université de Lorraine	Membre du jury
<b>Prof. Florence LEGROS,</b>	ICN Business School	Directeur de thèse
<b>Dr. Stéphane HAMAYON,</b>	HARVEST	Tuteur industriel

**UNIVERSITÉ PARIS-DAUPHINE**  
**Centre de recherche : SDFi / LEDa**  
Place du Mal de Lattre de Tassigny  
75775 Paris Cedex 16, France

*À ma fille Maya Marie-Crystal née au cours de cette thèse*

# Remerciements

*Mes premiers remerciements vont à Stéphane HAMAYON (mon responsable scientifique en entreprise) sans qui cette thèse n'aurait pas existé. J'aimerais, à ce titre, le remercier de l'envie qu'il m'a donné de faire de la recherche et de la confiance qu'il m'a accordée en me donnant l'opportunité, par l'entremise du Professeur LEGROS, de poursuivre mes études jusqu'au doctorat. Cette gratitude m'a presque fait oublier mes premières formations en lycée technique et mon CAP d'électricité. Au risque d'insister et d'oser le tutoiement, je te suis également reconnaissant pour ton encadrement scientifique et tes nombreuses relectures qui m'ont permis de rester dans le sujet.*

*Ensuite, je tiens à exprimer mon immense reconnaissance à mon directeur de thèse, le Professeur Florence LEGROS qui a manifesté beaucoup d'intérêt pour mes axes de recherche et a accepté de diriger ma thèse malgré son statut chronophage de directeur général de l'ICN Business School, tout en me laissant une grande autonomie de travail et en m'octroyant une grande confiance durant ces années. Je tiens également à la remercier pour les expériences formatrices qu'elle m'a procurées (ou volontairement imposées pour vaincre ma timidité?) par le biais d'exposés auprès de ses étudiants de master BFA et Master 218!*

*Ma volonté de poursuivre mes études doctorales n'est pas née de ma seule motivation, mais également du soutien dont j'ai pu bénéficier. Ainsi, de la genèse à la soutenance de ce rapport de thèse, toutes mes recherches ont été entièrement supportées financièrement par l'entreprise Harvest que je remercie avec l'intensité qu'il se doit. J'ai apprécié tout au long de ces années doctorales l'enthousiasme et la sympathie de ses dirigeants.*

*Je ne remercierai jamais assez Anne LAVIGNE, Responsable des études au Conseil d'Orientalion des Retraites, pour ses relectures appliquées lors de ma pré-soutenance qui m'ont permis d'améliorer ce manuscrit. Je souhaite également adresser tous mes remerciements à l'ensemble des membres du jury, en particulier au professeur Jérôme GLACHANT envers*

---

*qui je suis reconnaissant d'avoir accepté d'évaluer ce travail doctoral, ce qui, à mes yeux, est très valorisant. Je n'oublie naturellement pas de remercier le professeur Olivier DAMETTE qui a accepté de faire partie du jury malgré ses occupations.*

*Dans un tout autre registre, je tiens à exprimer ma reconnaissance auprès de mes collègues de travail chez Harvest qui, faute d'avoir pu m'enseigner toute la subtilité de la programmation orientée objet (merci à Loïc OUDOT, sans oublier toute l'équipe BIG), m'ont permis de « déconnecter » lors d'échanges amicaux à l'heure du déjeuner (en l'occurrence avec l'équipe PREMIS) pour mieux me « reconnecter » à l'univers parfois aride de mes recherches.*

*Enfin, il m'est impossible de clore ces remerciements sans évoquer ma famille auprès de laquelle j'ai toujours eu la chance de trouver soutien et réconfort, même si j'ai conscience de l'avoir quelque peu délaissée ces derniers mois pour achever cette thèse. J'ai, enfin, une pensée particulière envers celles et ceux qui me sont chers. Les mots les plus simples étant les plus forts, je remercie mes parents, pour m'avoir toujours encouragé. Enfin, j'ai une pensée toute particulière pour ma fille Marie Crystal.*

*En dernier lieu, je remercie par avance tous les lecteurs potentiels, quelles que soient leurs critiques.*

# Table des matières

<b>Remerciements</b>	<b>v</b>
<b>Table des matières</b>	<b>vii</b>
<b>Liste des figures</b>	<b>ix</b>
<b>Liste des tableaux</b>	<b>xiii</b>
<b>1 Introduction Générale</b>	<b>1</b>
1.1 Introduction . . . . .	3
1.2 Espérance de gain, risque et temps : les leçons du passé . . . . .	4
1.3 Convergence ou efficience : le débat sur la dynamique des cours reste ouvert	18
1.4 Processus de retour vers la moyenne des marchés boursiers et mesure de la demi-vie . . . . .	27
1.5 Retraite et risque financier : un essai de simulation . . . . .	30
<b>2 Distribution non gaussienne des rendements : quel impact sur les options par défaut des plans d'épargne retraite?</b>	<b>35</b>
2.1 Introduction . . . . .	37
2.2 Les instruments de l'épargne à long terme . . . . .	39
2.3 Allocation de cycle de vie paramétrique vs semi paramétrique . . . . .	61
2.4 En guise de conclusion . . . . .	90
Annexes . . . . .	91
<b>3 Convergence ou efficience : débat sur la dynamique des cours de marchés bour- siers</b>	<b>109</b>
3.1 Introduction . . . . .	111



3.2	État de l'art existant au lancement des travaux de recherche . . . . .	113
3.3	Un protocole de vérification de la robustesse des tests d'efficience . . . . .	126
3.4	Les modèles <i>Sparse VAR</i> : une spécification alternative pour évaluer la pré- visibilité des marchés . . . . .	153
3.5	Bilan des recherches . . . . .	197
	Annexes . . . . .	198
<b>4</b>	<b>Processus de retour vers la moyenne des marchés boursiers et mesure de la demi- vie</b>	<b>209</b>
4.1	Introduction . . . . .	211
4.2	Modélisation et estimation de la demi-vie . . . . .	213
4.3	Une mesure empirique de la demi-vie sur les marchés financiers . . . . .	249
4.4	Elements de conclusion . . . . .	266
	Annexes . . . . .	267
<b>5</b>	<b>Retraite et risque financier : un essai de simulation ?</b>	<b>273</b>
5.1	Introduction . . . . .	275
5.2	L'introduction du risque de marché dans un modèle démo-économique à deux classes d'agents . . . . .	277
5.3	Une application au cadre démo-économique français . . . . .	292
5.4	Eléments de conclusion et pistes de recherche . . . . .	321
	Annexes . . . . .	323
	<b>Conclusion Générale</b>	<b>333</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>339</b>
	<b>Liste des acronymes</b>	<b>361</b>
	<b>Liste des symboles</b>	<b>365</b>
	<b>Glossaire</b>	<b>367</b>

# Liste des figures

1.1	Concentration des rendements - mouvement brownien . . . . .	6
1.2	Intervalle de confiance - mouvement brownien . . . . .	7
1.3	Taux d'épargne des ménages . . . . .	14
1.4	Distributions des résultats de <i>backtesting</i> . . . . .	16
1.5	Performances relatives des FCP . . . . .	20
1.6	Volatilités conditionnelles des actifs . . . . .	25
1.7	Durée moyenne de résorption de l'écart sur le prix . . . . .	29
1.8	Retraite - Réforme 2013 et Taux Rendement Interne . . . . .	33
2.1	Performances du CAC All-Tradable . . . . .	42
2.2a	Profils de pertes en fonction de la durée de détention des actifs - Etats-Unis	44
2.2b	Profils de pertes en fonction de la durée de détention des actifs - France . .	45
2.3	Volatilité des actions et horizons des placements - France/Etats-Unis . . . .	48
2.4	Volatilité des obligations et horizons des placements - France/Etats-Unis . .	48
2.5	Volatilité des monétaires et horizons des placements - France/Etats-Unis . .	48
2.6	Fonctions de répartition - actions françaises (1895-2011) . . . . .	51
2.7	Fonctions de répartition - actions américaines (1895-2011) . . . . .	52
2.8	Volatilité des rendements sur différents horizon de temps . . . . .	53
2.9	Fonctions de répartition - actions américaines (1895-1949) . . . . .	54
2.10	Fonctions de répartition - actions américaines (1955-2015) . . . . .	54
2.11	Tests du ratio de ratios de variance . . . . .	56
2.12	Production et cours boursiers - France . . . . .	58
2.13	Production et cours boursiers - Etats-Unis . . . . .	58
2.14	Probabilité de surperformance des actions - France et Etats-Unis . . . . .	59

2.15	Frontières efficientes avec ou sans moments d'ordre supérieur à 2 . . . . .	63
2.16	<i>Increasing rearrangement procedure</i> . . . . .	68
2.17	Value-at-Risk du S&P500 (1895-2011) . . . . .	72
2.18	USA : Frontières efficientes et allocations - VaR paramétrique . . . . .	74
2.19	Programme de <i>back-test</i> des stratégies d'allocation d'actifs . . . . .	75
2.20	Histogrammes des résultats : VaR paramétrique - USA . . . . .	76
2.21	USA : Frontières efficientes et allocations - VaR semi-paramétrique . . . . .	78
2.22	Histogrammes des résultats : VaR de Cornish Fisher - USA . . . . .	79
2.23	Allocations - VaR paramétrique vs VaR semi-paramétrique : France . . . . .	80
2.24	Fonctions cumulatives de probabilités de rendements et de taux de remplacement - VaR paramétrique vs non paramétrique (CF-VaR) - USA . . . . .	83
2.25	Fonctions cumulatives de probabilités de rendements et de taux de remplacement - VaR paramétrique vs non paramétrique (CF-VaR) - France . . . . .	84
2.26	USA : Allocations - VaR 0% paramétrique . . . . .	85
2.27	USA : Allocations - VaR 0% semi-paramétrique . . . . .	86
2.28	USA : Fonctions de répartition des rendements et des taux de remplacement : VaR 0% paramétrique vs non paramétrique . . . . .	86
2.29	Profils de pertes en fonction de la durée de détention des actifs - UK . . . . .	91
2.30	Profils de pertes en fonction de la durée de détention des actifs - Japon . . . . .	92
2.31	Taux de remplacement - Durée de l'épargnes : 360 mois . . . . .	92
2.32	Taux de remplacement - Durée de l'épargnes : 240 mois . . . . .	93
2.33	Taux de remplacement & Dominance stochastique pour 120 mois . . . . .	93
2.34	Distributions de probabilités des stratégies : « Stop Loss » vs « CFVaR » . . . . .	96
2.35	Performances théorique et pratique du Stop-Loss . . . . .	97
2.36	Assurance de portefeuille par la méthode du coussin (CPPI) . . . . .	99
2.37	Distributions de probabilités des stratégies : « CPPI » vs « CFVaR » . . . . .	99
2.38	S&P500 <i>Maximum Drawdown</i> de 1900-2015 . . . . .	104
3.1	Illustration de variance autoregressive des rendements sur le S&P500 . . . . .	118
3.2	Fonction d'autocorrélation des rendements mensuels du S&P500 . . . . .	129
3.3	FAC des rendements journaliers du S&P500 . . . . .	129

3.4	Corrélogrammes croisés entre les Actions vs IPI . . . . .	168
3.5	Volatilités conditionnelles - sVAR(3) . . . . .	183
3.6	Evolutions du log dividende sur cours . . . . .	187
3.7	USA - encadrement des écart-types conditionnelles . . . . .	193
3.8	États-Unis : Volatilités conditionnelles modèle diagonale . . . . .	195
3.9	Stratégies de tests ADF . . . . .	199
3.10	France - encadrement des écart-types conditionnels . . . . .	200
3.11	UK - encadrement des écart-types conditionnels . . . . .	201
3.12	Japon - encadrement des écart-types conditionnels . . . . .	202
4.1	Évolution du logarithme du prix des actions . . . . .	219
4.2	Evolution du <i>trending OU</i> processus . . . . .	222
4.3	Evolution du <i>Shifted trending OU</i> processus . . . . .	223
4.4	Fonction de probabilité théorique . . . . .	225
4.5	Volatilité théorique suivant l'échelle temporelle . . . . .	226
4.6	Rendements sur des prix simulés . . . . .	227
4.7	Densités de probabilité : demi-vie et vitesses dans un processus d'OU . . . . .	235
4.8	Biais réalisés pour un processus d'OU : estimations suivant $\kappa$ . . . . .	246
4.9	Biais réalisés pour un processus d'OU : estimations suivant T . . . . .	247
4.10	Evolution des cours par rapport à la tendance . . . . .	255
4.11	Boîtes à moustaches des demi-vies sur données annuelles cas 1 . . . . .	261
4.12	Boîtes à moustaches des demi-vies sur données annuelles cas 2 . . . . .	262
4.13	Boîtes à moustaches des demi-vies sur données trimestrielles cas 1 . . . . .	262
4.14	Boîtes à moustaches des demi-vies sur données trimestrielles cas 2 . . . . .	263
4.15	Boîtes à moustaches des demi-vies sur données mensuelles cas 1 . . . . .	264
4.16	Boîtes à moustaches des demi-vies sur données mensuelles cas 2 . . . . .	265
4.17	Densités de probabilités de la persistance dans un processus AR(1) station- naire . . . . .	269
4.18	Densités de probabilités de la demi-vie et de la vitesses en fonction du temps	269
5.1	Processus d'OU : avec un krach survenu . . . . .	287
5.2	Processus d'OU : intervalle de confiance - l'évolution avec krach . . . . .	288

---

5.3	Trending OU <i>process</i> : avec un krach survenu . . . . .	289
5.4	Trending OU <i>process</i> : intervalle de confiance - l'évolution avec krach . . . . .	290
5.5	Population active - Projection et évolution . . . . .	294
5.6	Environnement macroéconomique . . . . .	295
5.7	Besoin de financement . . . . .	296
5.8	Projections de taux de remplacement moyen . . . . .	297
5.9	Impact de l'épargne retraite sur l'environnement macroéconomique . . . . .	301
5.10	Hypothèse de VaR nulle . . . . .	302
5.11	Proportion d'actifs risqués . . . . .	303
5.12	Accumulation de l'épargne . . . . .	304
5.13	Rentes - hypothèse d'EMH . . . . .	304
5.14	Taux de remplacement - hypothèse d'EMH . . . . .	305
5.15	Taux de rendement interne - hypothèse d'EMH . . . . .	307
5.16	PAYG - Fonction de répartition des TRI . . . . .	308
5.17	Reduction de la volatilité - Actions françaises . . . . .	310
5.18	Proportion d'actifs risqués - VaR égale à 0% . . . . .	311
5.19	VaR associée à la stratégie . . . . .	312
5.20	Accumulation de l'épargne - VaR de 0% - hypothèse de <i>mean reversion</i> . . . . .	313
5.21	Rentes pour VaR cible à 0% - Hommes & Femmes confondus . . . . .	314
5.22	Taux de remplacement à la liquidation . . . . .	314
5.23	RENTES SERVIES PAR LE FONDS . . . . .	315
5.24	TAUX DE RENDEMENT INTERNE - Hypothèse de <i>mean reversion</i> . . . . .	317
5.25	Simulation d'un Krash cas 1 . . . . .	318
5.26	Simulation d'un Krash cas 2 . . . . .	319
5.27	RENTES AVEC ET SANS KRASH . . . . .	319
5.28	Choc sur le stock de capital . . . . .	328
5.29	Croissance : modèle de Solow . . . . .	329

# Liste des tableaux

1.1	Fonction de répartition des rendements du S&P500 (1836 - 2016) . . . . .	9
1.2	ED.R d'un gaussienne de même « espérance-variance » que le S&P . . . . .	10
1.3	Valeurs médianes des demi-vies des cours des actions . . . . .	28
2.1a	Performance nominale annuelle moyenne des classes d'actifs (dividendes réinvestis) . . . . .	43
2.1b	Performance réelle annuelle moyenne des classes d'actifs (dividendes réinvestis) . . . . .	43
2.2a	Evolutions des rendements réels des actifs depuis 1895 - France . . . . .	46
2.2b	Evolutions des rendements réels des actifs depuis 1895 - Etats-Unis . . . . .	46
2.3	Tests de stationnarité des actifs . . . . .	49
2.4	Distribution du rendement des actions sur la période 1895-2011 . . . . .	51
2.5	Le <i>Polynomial goal programming</i> (PGP) détermine un large éventail de solutions . . . . .	65
2.6a	Domaine de validité de l'expansion de Cornish-Fisher et Gram-Charlier . . . . .	66
2.6b	Domaine de validité de l'expansion de Gram-Charlier . . . . .	66
2.7	Aversion relative pour le risque en % de la population totale : comparaison France-Etats-Unis . . . . .	88
2.8a	USA : Résumé des principaux résultats . . . . .	94
2.8b	France : Résumé des principaux résultats . . . . .	94
2.9	Résultats des tests de dominance stochastique de Kolmogorov-Smirnov . . . . .	102
2.10	Caractéristiques du S&P 500 de 1895 -2014 . . . . .	103
3.1	Test du ratio de variance paramétrique : CAC-All-Tradable . . . . .	131
3.2	Test du ratio de variance paramétrique : S&P500 . . . . .	132

3.3	Test du VR non-paramétrique de Wright : CAC-All-Tradable . . . . .	134
3.4	Test du VR non-paramétrique de Wright : S&P500 . . . . .	135
3.5	Test du VR de Wright - fréquence journalière . . . . .	137
3.6	Test du VR de Wright - fréquence hebdomadaire . . . . .	138
3.7	Test du ratio de variance paramétrique - fréquence journalière . . . . .	138
3.8	Test du ratio de variance paramétrique - fréquence hebdomadaire . . . . .	139
3.9	Tests du ratio de variance - Probabilité de rejet du modèle 1 . . . . .	141
3.10	Tests joints - Probabilité de rejet du modèle 1 . . . . .	143
3.11	Tests de ratio de variance - Probabilité de rejet du modèle 2 . . . . .	145
3.12	Tests joints - Probabilité de rejet du modèle 2 . . . . .	146
3.13	Tests de ratio de variance - Probabilité de rejet du modèle 3 . . . . .	148
3.14	Tests joints - Probabilité de rejet du modèle 3 . . . . .	149
3.15	Tests de ratio de variance - Probabilité de rejet du modèle 4 . . . . .	151
3.16	Tests joints - Probabilité de rejet du modèle 4 . . . . .	152
3.17	Statistiques Descriptives . . . . .	166
3.18	Tests ADF de racines unitaire pour les données du modèle . . . . .	172
3.19	Tests ADF pour le logarithme du ratio dividende sur cours . . . . .	173
3.20	Critères AIC et BIC selon le modèle . . . . .	176
3.21	Coefficients de détermination selon le modèle . . . . .	176
3.22	Coefficients $\Phi_0$ et $\Phi_1$ du VAR(1) . . . . .	177
3.23	Coefficients $\Phi_0$ et $\Phi_1$ du sVAR(3) . . . . .	179
3.24	Coefficients $\Phi_2$ du sVAR(3) . . . . .	179
3.25	Coefficients $\Phi_3$ du sVAR(3) . . . . .	180
3.26	Tests de stabilité des modèles estimés . . . . .	181
3.27	Corrélations et variances des innovations - VAR(1) . . . . .	182
3.28	Corrélations et variances des innovations - sVAR(3) . . . . .	182
3.29	Comparaisons des résultats entre études . . . . .	185
3.30	Coefficients de déterminations pour les <i>excess-returns</i> . . . . .	186
3.31	Test classique de cointégration : États-Unis . . . . .	189
3.32	Test classique de cointégration : Royaume-Uni . . . . .	190
3.33	Test du rang par méthode du bootstrap : UK . . . . .	190

3.34	Test classique de cointégration : États-Unis . . . . .	203
3.35	Test classique de cointégration : JAPON . . . . .	203
3.36	Test classique de cointégration : Royaume-Uni . . . . .	204
3.37	Test classique de cointégration : FRANCE . . . . .	204
3.38	Etats-Unis : Test de détermination du rang de co-intégration par Bootstrap .	205
3.39	Japon : Test de détermination du rang de co-intégration par Bootstrap . . .	206
3.40	Royaume-Uni : Test de détermination du rang de co-intégration par Bootstrap	206
3.41	France : Test de détermination du rang de co-intégration par Bootstrap . . .	207
4.1	Coefficients de variations : observations annuelles . . . . .	238
4.2	Coefficients de variations : observations trimestrielles . . . . .	239
4.3	Coefficients de variations : observations mensuelles . . . . .	239
4.4	Rendements réels sur les données relatives concernant la période 1926-2014	250
4.5	Vitesse sur observations annuelles avec fenêtre de taille 15. . . . .	252
4.6	Vitesse sur observations annuelles avec fenêtre de taille 50 . . . . .	252
4.7	Vitesse sur observations annuelles avec fenêtre de taille 100 . . . . .	253
4.8	Vitesse sur observations annuelles avec fenêtre de taille 200 . . . . .	253
4.9	Estimateur MCO - observations à fréquences trimestrielles : 1950-2014 . . .	256
4.10	Estimateur sans biais - observations à fréquences trimestrielles : 1950-2014	257
4.11	Estimateur MCO - observations à fréquences trimestrielles : 1925-1950 . . .	258
4.12	Estimateur sans biais - observations à fréquences trimestrielles : 1925-1950	259
4.13	Estimateur MCO - observations à fréquences trimestrielles : 1925-2014 . . .	259
4.14	Estimateur sans biais - observations à fréquences trimestrielles : 1925-2014	260
5.1	Scenario de référence - hypothèses retenues . . . . .	293
5.2	Hypothèses de gestion . . . . .	300





# Chapitre 1

## Introduction Générale

*« Je n'ai qu'une lampe pour guider  
mes pas, et c'est la lampe de  
l'expérience. Je ne connais aucun  
moyen de juger l'avenir, excepté le  
passé. »*

---

Patrick Henry, 1775

## Sommaire

---

<b>1.1 Introduction . . . . .</b>	<b>3</b>
<b>1.2 Espérance de gain, risque et temps : les leçons du passé . . . . .</b>	<b>4</b>
<b>1.3 Convergence ou efficacité : le débat sur la dynamique des cours reste ouvert . . . . .</b>	<b>18</b>
<b>1.4 Processus de retour vers la moyenne des marchés boursiers et mesure de la demi-vie . . . . .</b>	<b>27</b>
<b>1.5 Retraite et risque financier : un essai de simulation . . . . .</b>	<b>30</b>

---

## 1.1 Introduction

Le recul progressif du périmètre de la protection sociale obligatoire confère une nouvelle responsabilité aux ménages : celle de constituer une **épargne de cycle de vie** destinée à compenser la moindre prodigalité des systèmes traditionnels de mutualisation des risques sociaux (**retraite**, maladie, etc.). De fait, pour compenser le rationnement des transferts entre générations consécutif au recul de l'Etat providence, les ménages vont devoir assurer la gestion de leur **épargne** financière, notamment dans le cadre de l'**épargne retraite**. Cette appréciation doit être tempérée sur un point fondamental : un français sur deux déclare ne pas être en mesure d'épargner (FFSA / IPSOS, mars 2011). En période de ressources contraintes, ces statistiques plaident pour un changement de modèle de transferts qui, comme évoqué par DUFOURCQ [1994], consisterait à passer d'un Etat providence à un Etat providence "sélectif". Le problème de justice sociale posé par le développement de plans d'**épargne retraite** assortis d'incitations fiscales profitant en priorité aux classes aisées trouverait sa contrepartie dans la transition vers un régime obligatoire où les prestations seraient ciblées sur les besoins du milieu et du bas de la classe moyenne.

Dans ce modèle de solidarité, les salariés les plus productifs (qui peuvent travailler jusqu'à des âges élevés) contribuent davantage au régime obligatoire pour recevoir relativement moins, ce qui justifie l'existence de placements défiscalisés. Quoi qu'il en soit, la constitution de compléments de **retraite** pose la délicate question de la capacité des ménages concernés à gérer l'**épargne** au cours du **cycle de vie**. Or, si on en croit les études empiriques, les ménages - bien qu'ils fassent preuve d'une «sagesse pratique» comme le montrent ARRONDEL et MASSON [2011] - ne sont pas à proprement parler de "bons" investisseurs. L'analyse de leurs placements révèle de nombreuses formes d'inefficiences dont les plus notables sont : la faible participation aux marchés actions et le manque de diversification des placements (biais d'investissement domestique, diversification naïve). Pour limiter le risque systémique inhérent à la mauvaise gestion financière des ménages, deux concepts non exclusifs s'affrontent. Les anglo-saxons préconisent de renforcer l'éducation financière du public pour limiter le coût collectif lié au report de responsabilité vers les ménages. Toutefois, si un surcroît d'instruction financière est une condition nécessaire pour favoriser les transferts d'**épargne** volontaires des périodes à revenu élevé vers

les périodes à revenu faible, ce n'est assurément pas une condition suffisante pour les optimiser et limiter le coût global des mauvais choix financiers des ménages. C'est pourquoi, dans les directives européennes, l'exécution du « devoir de conseil et d'information » incombe aux intermédiaires financiers. Dans ce contexte, le principal enjeu pour les intermédiaires sera de proposer aux ménages des allocations d'actifs répondant à leurs nouveaux besoins en matière de [retraite](#). Ainsi, bien que les marchés financiers soient davantage complémentaires que substituts des systèmes classiques d'intermédiation des risques, les producteurs et distributeurs de produits financiers se voient attribuer de nouveaux territoires, mais également de nouvelles responsabilités centrées notamment sur la performance à long terme des [options par défaut](#) des plans d'[épargne retraite](#) qu'ils proposent.

## 1.2 Espérance de gain, risque et temps : les leçons du passé

L'espérance de rendement de ces [options par défaut](#) est largement conditionnée par l'idée de la dynamique que l'on prête aux actifs risqués. Or, les soubassements de cette relation centrale restent controversés et la nature du processus qui régit les prix des actifs financiers fait l'objet de nombreux débats. Certains auteurs considèrent, dans la mouvance de [BACHELIER \[1900\]](#), que les prix des actifs risqués suivent une marche aléatoire ([hypothèse d'efficience de marchés financiers – ou \*Efficient Market Hypothesis\* – \(EMH\)](#)), c'est-à-dire un processus sans mémoire dans lequel les chocs sont permanents, tandis que d'autres arguent que les mouvements extrêmes de prix observés sur les marchés financiers sont transitoires. C'est-à-dire qu'une forte variation dans un sens est suivie de mouvements de sens opposés qui corrigent tendanciellement la déviation initiale et ramènent les prix des actifs vers leurs valeurs fondamentales. Comme le mécanisme de correction des mouvements extrêmes est d'autant plus probable que la durée de placement est longue, l'allongement de la durée de placement conduit donc à une réduction du risque.

La première partie de notre recherche s'attache donc à tester l'hypothèse d'efficience informationnelle des marchés. Cette étape est fondamentale car dans une dynamique sans mémoire, la probabilité de perte sur actifs risqués n'est pas fonction de la durée et

un investisseur risquophobe fuira ce type de placement. Pourtant, un argument souvent mis en avant pour inciter les agents à opter pour des placements risqués repose sur l'affirmation qu'avec l'allongement de l'horizon de placement il y a réduction de la volatilité des rendements, c'est-à-dire une concentration autour de leur l'espérance. Cette justification relève du mythe entretenu et s'appuie sur l'amalgame souvent fait entre l'espérance de rendement d'un actif et sa capitalisation. On peut utilement illustrer le phénomène à partir de la théorie des marchés efficients (EMH) donnée par FAMA [1965], dans laquelle le processus qui régit la dynamique du prix des actifs risqués est le suivant :

$$\frac{dP_t}{P_t} = \mu dt + \sigma dz \quad (1.1)$$

où :  $dz = \varepsilon \sqrt{dt}$

Avec :

- $P$  = les cours de l'action.
- $\mu$  = espérance de rendement.
- $\sigma$  = écart type du taux de rendement.
- $dt$  = intervalle de temps.
- $\varepsilon$  = aléa suivant une loi normale  $\mathcal{N}(0, 1)$ .

Partant de ce processus, il est possible de représenter la réduction de la volatilité des rendements pour un couple  $(\mu; \sigma)$  donné. Dans l'illustration qui suit (graphique 1.1), nous avons retenu une espérance de rendement réel de 5% et une volatilité de 20%, soit un couple proche de celui que l'on peut calculer à partir de l'historique des marchés actions français sur longue période. S'agissant des rendements, on constate une réduction notable de leur volatilité avec l'allongement de l'horizon de placement. Cette propriété est couramment utilisée pour démontrer la dilution du risque d'un placement en actions avec le temps. La démonstration repose toutefois sur un biais d'interprétation. Par exemple, le fait que le plus mauvais rendement (au sens du seuil de probabilité retenu) soit de 10% au bout de 10 périodes, ne veut pas dire que l'on s'expose sur cette durée à une perte maximum de 10%, mais à une perte en capital de 10% l'an sur 10 ans.

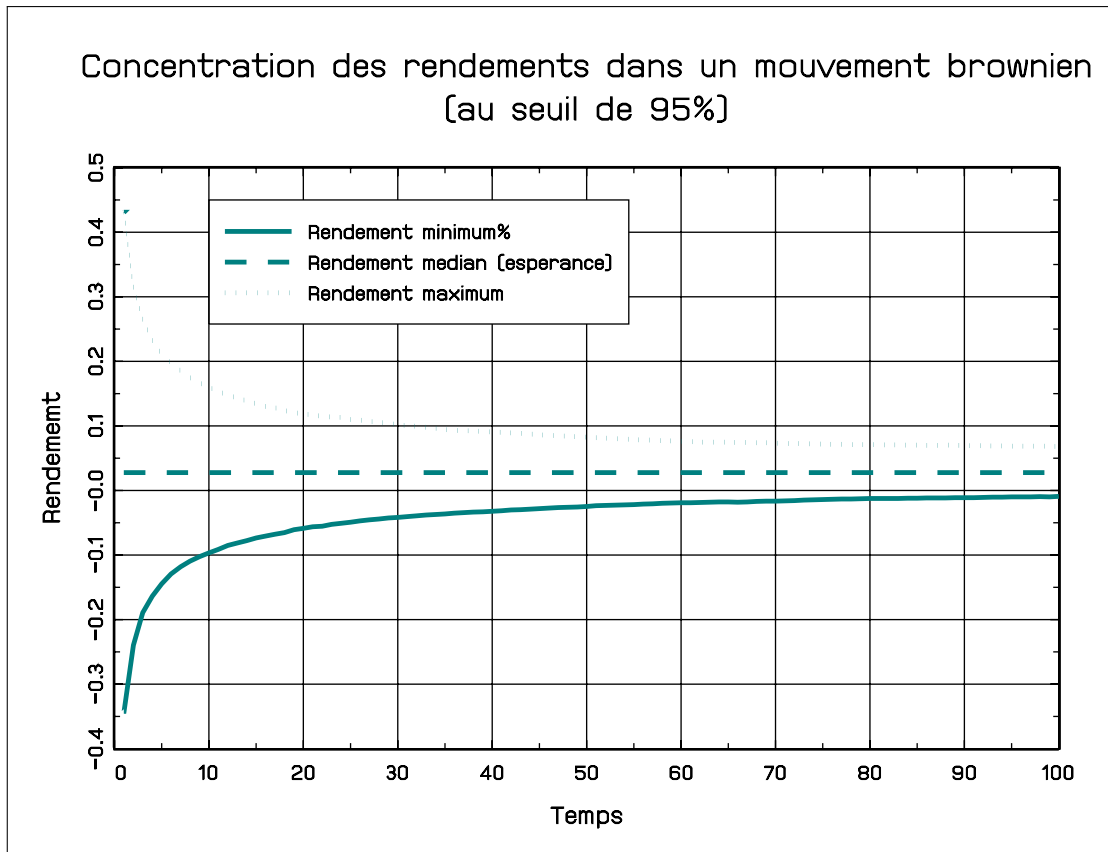


FIGURE 1.1 – Concentration des rendements - mouvement brownien

Avec l'allongement de la durée de placement on note une réduction de la volatilité des rendements, mais une augmentation de l'incertitude sur le montant du capital constitué : la variance des valeurs projetées croît linéairement avec le temps (voir graphique 1.2). Dans l'EMH, la réduction de la volatilité des actifs est similaire à celle d'un bruit blanc gaussien. Conformément au théorème central limite, elle décroît donc en fonction de la racine du temps. Cette propriété n'apporte toutefois aucune certitude à l'épargnant concernant le montant du capital constitué au terme de son investissement (sauf si le processus est déterminé par un ratio de Sharpe élevé), car, une fois intégré, un bruit blanc gaussien suit une marche aléatoire avec un drift donné par l'espérance du processus. Or, pour les épargnants, la détention d'actifs risqués à long terme ne semble avoir d'intérêt que si les prix, et non les rendements, sont caractérisés par un processus de retour à la moyenne (*Trend Stationary (TS) process*).

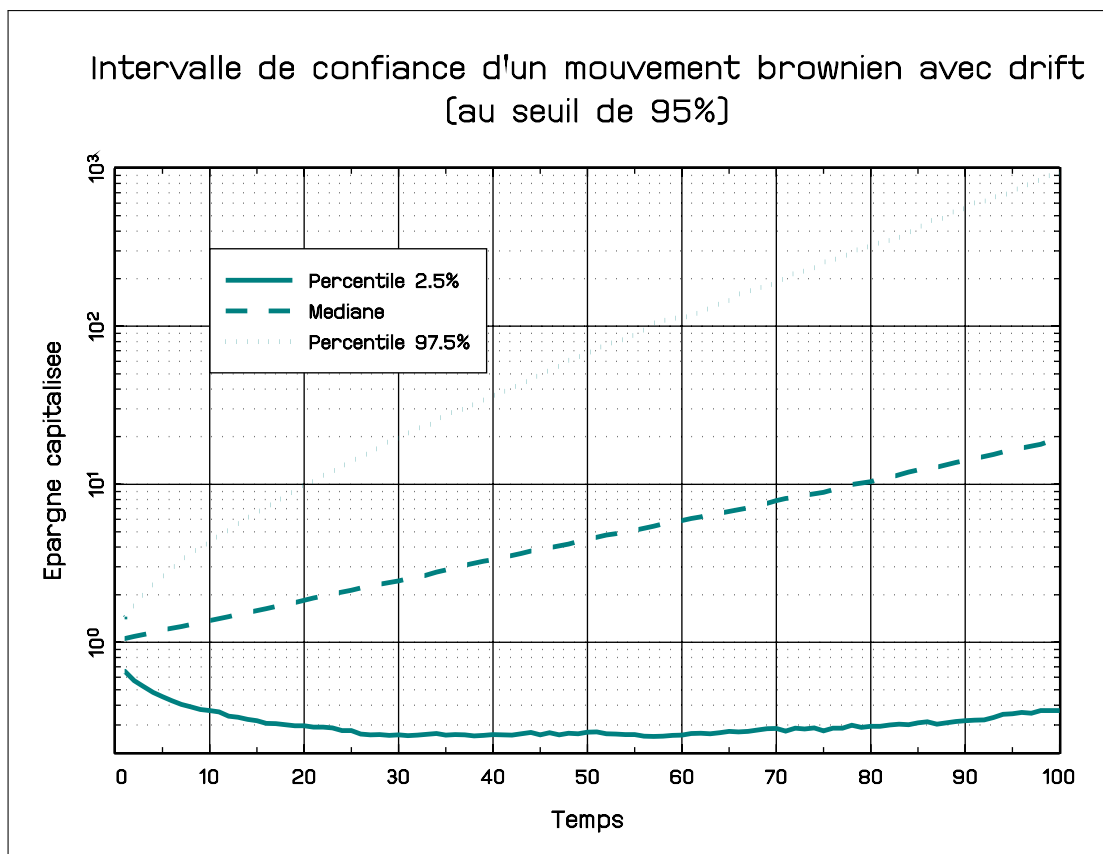


FIGURE 1.2 – Intervalle de confiance - mouvement brownien

Faute de quoi - si l'on fait abstraction de l'argument qui fait apparaître la **capitalisation** comme un moyen pour renforcer les fonds propres des entreprises - l'utilisation des revenus du capital serait trop risquée pour financer les **retraites** et les épargnants devraient se tourner vers des placements plus sécuritaires. En l'absence de contraintes de liquidité, l'investissement immobilier serait, par exemple, un véhicule adapté pour améliorer sa **retraite** comme l'atteste le taux de propriété du logement qui atteint les 70 % chez les ménages seniors français.

On objectera que ces derniers pourraient manquer de liquidités pour financer des besoins accrus consécutifs à l'allongement de la durée de vie, à la hausse du coût de la dépendance et au recul graduel des **taux de remplacement**. La vente en viager est alors une solution qui permet de rendre liquide le patrimoine immobilier : elle permet à une personne âgée d'augmenter ses ressources de façon significative tout en restant dans son logement. Les reproches traditionnellement faits à cette solution (aliénation totale du bien, aléa moral, spoliation d'héritage) sont élégamment résolus par le « viager intermédié partiel » proposé par **MASSON [2009]**.



Pour tenter de statuer sur la nature de la relation entre réduction du risque et horizon de placement, nous avons adopté une méthodologie résolument empirique reposant sur l'analyse des chroniques de prix des actifs sur très longue période en France et aux Etats-Unis. L'analyse s'appuie principalement sur une multiplicité de tests et une technique probatoire reposant davantage sur un faisceau d'indices concordants que sur le verdict d'un critère unique. Nous trouvons que sur les horizons longs, la vitesse de concentration des rendements autour de leur espérance est incontestablement plus rapide que dans une loi normale. Il est commode d'illustrer les propriétés de *retour vers la moyenne* ou *mean reversion* des rendements des actifs risqués sur longue période (en l'occurrence de l'indice S&P500 *total-returns index*, c'est-à-dire dividendes réinvestis) en calculant la probabilité de dépasser un seuil de rendement réel donné en fonction de l'horizon de placement. Les probabilités sont restituées dans des tableaux pour l'indice S&P500 et pour une loi d'une loi normale de même « espérance - variance » que l'indice de marché en question. Le tableau 1.1 montre que sur les horizons courts (de 1 à 5 ans) la fonction de répartition empirique est dominée par une loi normale de même espérance (le trait en pointillés rouges représente la frontière des probabilités égales à 100% dans une loi gaussienne), ce qui révèle l'existence de skewness négatif dans la distribution des rendements des actions. A moyen terme les queues épaisses de la distribution leptokurtique disparaissent et la distribution empirique offre une meilleure protection contre les rendements inférieurs à la moyenne qu'une distribution normale de même espérance. La frontière rouge des probabilités égales à 100% dans une loi gaussienne est enfermée dans l'aire bleue des probabilités de même valeur de la fonction de répartition empirique.

TABEAU 1.1 – Fonction de répartition des rendements du S&P500 (1836 - 2016)

		<b>Fonction de répartition des rendements du S&amp;P 500 (1836 – 2016)</b> Probabilités estimées de dépasser un seuil de rendement annuel réel (en %)									
		Durée de placement									
Rendements réels		1 an	2 ans	3 ans	4 ans	5 ans	10 ans	15 ans	20 ans	25 ans	30 ans
	-50%	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100
	-40%	99	100	100	100	100	100	100	100	100	100
	-35%	99	100	100	100	100	100	100	100	100	100
	-30%	98	100	100	100	100	100	100	100	100	100
	-25%	96	99	100	100	100	100	100	100	100	100
	-20%	93	98	99	100	100	100	100	100	100	100
	-15%	89	96	99	99	100	100	100	100	100	100
	-10%	84	91	95	98	99	100	100	100	100	100
	-8%	81	89	93	96	97	100	100	100	100	100
	-6%	78	85	90	93	95	100	100	100	100	100
	-4%	75	82	87	89	91	99	100	100	100	100
	-2%	72	77	82	84	86	94	99	100	100	100
	0%	67	72	76	78	80	89	96	100	100	100
	2%	63	66	70	71	73	80	87	94	100	100
	4%	58	61	61	63	62	69	73	82	87	93
	6%	54	54	52	53	53	56	56	57	61	66
	8%	49	48	45	43	43	41	34	30	27	22
	10%	44	40	37	35	34	26	20	13	9	2
	15%	34	27	22	19	16	5	1			
20%	25	17	12	7	6						
25%	18	9	5	3	1						
30%	12	5	1	1							
35%	8	3	1								
40%	5	1									
50%	2										

*La ligne en pointillés rouges correspond à la frontière des probabilités égales à 100 % dans une loi normale de même « espérance – variance » que l'indice S&P500.*

Sur des horizons longs, du fait d'une réduction de la volatilité empirique plus rapide, les rendements sont plus concentrés autour de la moyenne et les rendements spéculatifs sont inaccessibles. Cela indique que la vitesse de réduction de la volatilité des rendements du S&P500 au cours du temps est supérieure à la celle d'un bruit blanc gaussien.

TABLEAU 1.2 – F.D.R d’une gaussienne de même « espérance-variance » que le S&P

		<b>F.D.R d’une gaussienne de même « espérance-variance » que le S&amp;P</b> Probabilités estimées de dépasser un seuil de rendement annuel réel (en %)									
		Durée de placement									
		1 an	2 ans	3 ans	4 ans	5 ans	10 ans	15 ans	20 ans	25 ans	30 ans
Rendements réels	-50%	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100
	-40%	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100
	-35%	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100
	-30%	99	100	100	100	100	100	100	100	100	100
	-25%	98	100	100	100	100	100	100	100	100	100
	-20%	95	99	100	100	100	100	100	100	100	100
	-15%	91	97	99	100	100	100	100	100	100	100
	-10%	84	92	96	98	99	100	100	100	100	100
	-8%	81	89	93	96	97	100	100	100	100	100
	-6%	77	85	90	93	95	99	100	100	100	100
	-4%	73	80	86	89	91	97	99	100	100	100
	-2%	69	75	80	84	86	94	97	98	99	100
	0%	64	70	74	77	80	88	92	95	97	98
	2%	60	64	67	69	72	79	84	87	89	91
	4%	55	58	59	61	63	67	71	73	75	77
	6%	51	52	52	52	53	53	54	54	55	55
	8%	46	45	44	43	43	39	37	35	34	33
	10%	42	39	37	35	33	27	23	20	17	15
	15%	32	26	22	18	15	8	4	2	1	1
	20%	24	16	11	8	5	1				
25%	17	9	5	3	1						
30%	12	5	2	1							
35%	8	2	1								
40%	5	1									
50%	2										

*La ligne en pointillés bleus correspond à la frontière des probabilités égales à 100 % dans la fonction de répartition empirique de l'indice S&P 500.*

Ce diagnostic, s’il est confirmé, remet en cause l’hypothèse d’efficience des marchés et plaide pour une modélisation alternative de la dynamique des cours dans laquelle les mouvements extrêmes de prix observés sur les marchés financiers sont transitoires. C’est-à-dire qu’une forte variation dans un sens est suivie de mouvements de sens opposés qui corrigent tendanciellement la déviation initiale et ramènent les prix des actifs vers leurs valeurs fondamentales. Comme le mécanisme de correction des mouvements extrêmes

est d'autant plus probable que la durée de placement est longue, l'allongement de la durée de placement conduit donc à une réduction du risque. Naturellement, le verdict doit être nuancé car de nombreux auteurs, comme SPIERDIJK et collab. [2012], ont montré, à juste titre, que la vitesse de retour vers la moyenne est variable dans le temps. Toutefois, les résultats de notre étude attestent que le retour à la moyenne n'est pas exclusivement lié à un phénomène de rattrapage consécutif à la seconde guerre mondiale comme suggéré par KIM et collab. [1991].

On devine, une dynamique des prix régit par un processus de retour vers la moyenne détermine une stratégie de gestion à long terme de l'épargne de type *cycle de vie* différente de celle où le cours des actifs risqués suivent une marche aléatoire.

Comme le montrent STANGELAND et TURTLE [1999], lorsque les cours suivent un processus de retour à la moyenne, la stratégie la plus appropriée est celle de la « *diversification temporelle* », quelle que soit la forme de la fonction d'utilité. Dans ce cas la stratégie de diversification standard, initiée par MARKOWITZ [1952], qui consiste à répartir l'investissement sur des actifs dont les variations de prix sont décorrélées, sera couplée avec une seconde stratégie de *diversification temporelle* qui exploite l'idée que l'incertitude à long terme sur le niveau de rentabilité attendu est plus faible qu'à court terme. Pour l'épargnant, la *diversification temporelle* consiste à placer ses actifs sur plusieurs fonds (typiquement un fonds actions, un fonds obligataire et un fonds monétaire), la part du fonds actions tendant à diminuer mécaniquement avec le temps. En fonction de l'aversion au risque de l'agent, le niveau de départ du poids des actions et l'intensité du mouvement de sécurisation des avoirs seront plus ou moins importants. En revanche dans l'hypothèse de marchés efficients, la stratégie de *diversification temporelle* est plus délicate à justifier. Ainsi dans une première approche SAMUELSON [1969] et BODIE [1995] concluent à l'absence d'intérêt de ce type de diversification. Pour Samuelson, sur un marché parfait (efficient), la part des actions dans le portefeuille est indépendante de l'horizon de placement lorsque trois conditions sont respectées :

1. la rentabilité des actions suit une variable aléatoire indépendante et identiquement distribuée (IID)
2. les investisseurs ont une aversion relative pour le risque constante dans le temps, quel que soit leur niveau de richesse (fonction d'utilité *CRRRA Constante Relative*

*Risk Aversion*)

3. leur richesse est uniquement de nature financière, autrement dit le capital humain n'est pas pris en compte.

Dans ce cadre, la répartition actif non risqué/actif risqué ne dépend pas de l'horizon de placement mais de l'aversion au risque. Par la suite, comme l'analyse SÉJOURNÉ [2007], l'introduction du capital humain et de la flexibilité du marché du travail conduira BODIE et collab. [1992] et SAMUELSON [1994] à moduler leurs conclusions sur la pertinence du recours à la *diversification temporelle* dans le cadre de l'EMH. Dans une version amendée, les auteurs précités montrent que la prise en compte du capital humain (qui correspond à la valeur actualisée des revenus futurs du travail) et de la flexibilité du marché du travail permet à l'investisseur d'accroître son offre de travail dans le cas où la performance des actifs financiers risqués s'avérerait insuffisante. Cette potentialité est naturellement d'autant plus envisageable que l'individu est jeune, car en vieillissant il perd sa capacité d'accroître son effort de travail et dispose de moins de temps pour procéder à un ajustement. Cette perspective conduit l'agent économique à réduire la part des actifs financiers risqués dans son patrimoine au cours de son vieillissement. Nantis de nos deux modélisations stylisées de la dynamique du cours des actions, il est alors possible d'apprécier l'influence de ces processus antagonistes sur la stratégie d'allocation d'actifs des investisseurs. Pour cela nous nous sommes volontairement placés dans une version très simplifiée du modèle de *cycle de vie* de MODIGLIANI et BRUMBERG [1954]. Dès qu'ils sont de jeunes adultes, les ménages épargnent pour s'assurer un complément de *retraite* car ils souhaitent lisser leur consommation au cours du temps. L'épargne augmente jusqu'à la *retraite*. Une fois l'âge de la *retraite* atteint, le revenu est égal à zéro et la consommation est financée grâce à la dés-accumulation de l'épargne. Les consommateurs ont un horizon de planification correspondant à leur espérance de vie. Il n'y a pas de motifs de dons ni de legs, les préférences sont restreintes à la seule aversion au risque. En outre, nous faisons l'hypothèse forte que l'investissement en actifs risqués peut se faire sans contrainte dès l'entrée dans la vie active. Nous nous permettons cette simplification car l'objectif poursuivi se focalise sur la comparaison des propriétés « rendements - risques » de stratégies d'allocation d'actifs contrastées et non pas sur l'analyse des extensions du modèle de *cycle de vie* en environnement incertain. Nous nous intéressons précisément aux op-

tions par défaut des plans d'épargne retraite ce qui, transposé dans l'environnement réglementaire français, peut être assimilé à la structure des placements issus de l'épargne salariale. L'épargne salariale est un système d'épargne collectif mis en place au sein de certaines entreprises. Le principe consiste à verser à chaque salarié une part sur les résultats de l'entreprise (intéressement) ou sur ses bénéfices (participation), cette dernière ayant un caractère obligatoire pour les entreprises d'au moins 50 salariés. L'étude "Participation, intéressement et épargne salariale en 2013" de la DARES propose un éclairage intéressant sur les bénéficiaires de ces avantages. 56,1% des salariés du secteur marchand non-agricole (8,7 millions de salariés) ont été concernés en 2013. Au total, plus de 15,7 milliards d'euros ont été distribués par ces différents moyens. En moyenne, chaque salarié bénéficiaire a touché 2269 euros en cumulant ces différents avantages. Naturellement l'épargne salariale n'est pas strictement assimilable à un plan d'épargne retraite (le déblocage des sommes étant possible après 5 ans), à l'exception de la part, trop faible, dirigée vers les véhicules collectifs d'épargne pour la retraite avec sortie sous forme de rente viagère acquise à titre onéreux (Perco).

Nous avons conscience que la prise en compte des risques sur le revenu et l'existence de contraintes de liquidité modifient singulièrement le profil de détention d'actions durant la vie active (COCCO et collab. [2005]). A cet égard, les travaux de CARROLL [1997] sur l'épargne de précaution montrent que lorsque les ménages sont soumis à de forts risques de perte de revenus du travail (chômage), ils accumulent rapidement un stock d'épargne tampon « *buffer stock* » (en raison d'une forte préférence pour le présent) pour faire face à cette situation.

Les plus jeunes ménages sont particulièrement soumis à cet aléa en présence de contraintes de liquidité surtout s'ils ne disposent pas de réserves patrimoniales facilement disponibles. Par ailleurs, en vertu du concept de tempérance (KIMBALL [1990] et KIMBALL [1993]), cette épargne de précaution est par nature investie sur des actifs financiers facilement mobilisables à moindre coût, donc des actifs sans risque.

Cette analyse conduit à limiter, voire à proscrire la détention d'actifs risqués du patrimoine des jeunes actifs. En avançant dans la vie active, les individus accumulent progressivement un patrimoine qui leur permet d'être moins sensibles au risque de perte de revenu et peuvent alors accroître progressivement la proportion placée en actions. La

conjonction de ces phénomènes devrait engendrer un profil de détention d'actions en « U » inversé. Pour l'ensemble de ces motifs, les jeunes ménages seraient peu enclins à accumuler des actions en début de vie active et leur participation aux marchés d'actions pourrait être trop tardive pour tirer réellement parti des vertus de la **diversification temporelle** dans un marché caractérisé par un processus de retour vers la moyenne (*mean-reverting process*) sur les horizons longs.

Autre simplification assumée, nous supposons lors de nos simulations qu'en moyenne la majorité de l'épargne financière est investie pour la **retraite**. C'est-à-dire que les individus sont censés épargner 6% de leur salaire pour se constituer une épargne de **cycle de vie**. C'est effort apparaît compatible avec le taux d'épargne des ménages français, pour peu que l'on suppose qu'il y ait proximité entre le revenu disponible brut et le revenu primaire des salariés net de cotisations employeurs. Ce qui sous-entend que les prestations sociales sont, en moyenne, approximativement neutralisées par les cotisations sociales salariales, l'impôt sur le revenu et autres impôts courants.

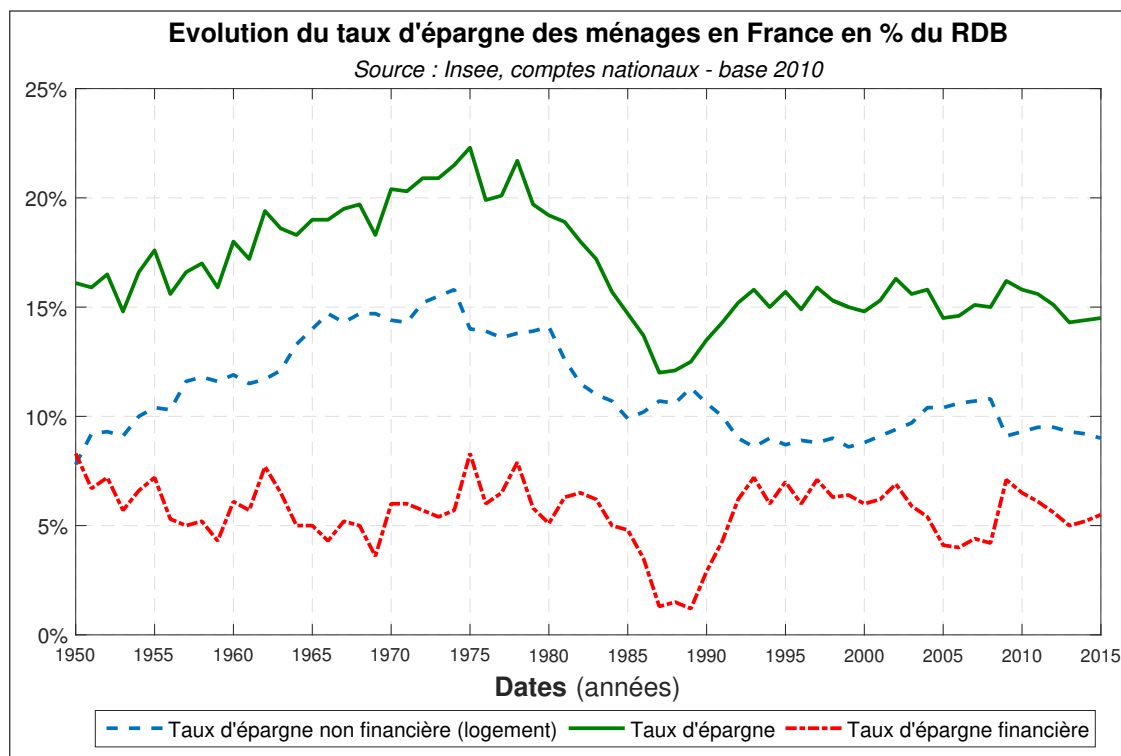


FIGURE 1.3 – Taux d'épargne des ménages

Encore une fois, cette hypothèse n'est pas exactement en ligne avec les analyses empiriques sur les comportements d'épargne des ménages. L'expérimentation montre que le maintien d'un taux d'épargne élevé aux âges très avancés ne résulte pas que d'un biais

de sélection : les ménages les plus riches (donc ceux qui ont le plus de capacités à épargner) deviennent surreprésentés du fait d'une mortalité plus faible que les ménages les plus pauvres. Par exemple, [NARDI et collab. \[2010\]](#) s'interrogent sur la faible désépargne des ménages retraités aux États-Unis (sur la période 1996-2006) et trouvent à partir d'un modèle de [cycle de vie](#) sur un échantillon de retraités que le rôle des dépenses médicales (notamment celles liées à la dépendance) et des legs altruiste (préférence des individus pour laisser un héritage), assimilables à des produits de luxe, sont un motif fondamental d'épargne avec le vieillissement. Ces conclusions rejoignent celles de [LOCKWOOD \[2014\]](#) qui montre qu'un modèle où les motifs de legs sont importants, en plus du motif de précaution pour faire face aux dépenses de maladie, peut expliquer à la fois la faible désépargne des ménages et la faible demande d'assurance dépendance.

Ces réserves étant faites, deux stratégies de « [diversification temporelle](#) » ont fait l'objet de simulations rétrospectives. L'une, paramétrique, repose sur un critère classique « espérance-variance », qui reste majoritairement préconisé par les intermédiaires financiers, l'autre, dite semi-paramétrique, prend en compte simultanément les moments d'ordre supérieur et la réduction empirique de la variance des rendements calculée à partir des chroniques longues des prix. Pour une aversion au risque donnée, le « *backtest* » des stratégies indique sans ambiguïté que sur les horizons longs la stratégie semi-paramétrique domine stochastiquement à l'ordre 1 la stratégie déterminée par une optimisation standard dans laquelle on simule la réduction du risque à partir des propriétés d'une loi normale. On peut illustrer la hiérarchie entre les stratégies en comparant les fonctions de répartition des rendements internes et des [taux de remplacement](#) (rente / dernier salaire d'activité) déterminées sur longue période pour un agent risquophobe (en l'occurrence de 1895 à 2015 aux États-Unis sur une fenêtre glissante de 480 mois).

La prise en compte des propriétés de [retour vers la moyenne](#) des chroniques boursières détermine des stratégies de [diversification temporelle](#) bien plus riches en actifs risqués que celles calculées dans un cadre gaussien qui conduit à surestimer la variance des rendements sur longue période et donc se prive du véhicule offrant le rendement le plus élevé.



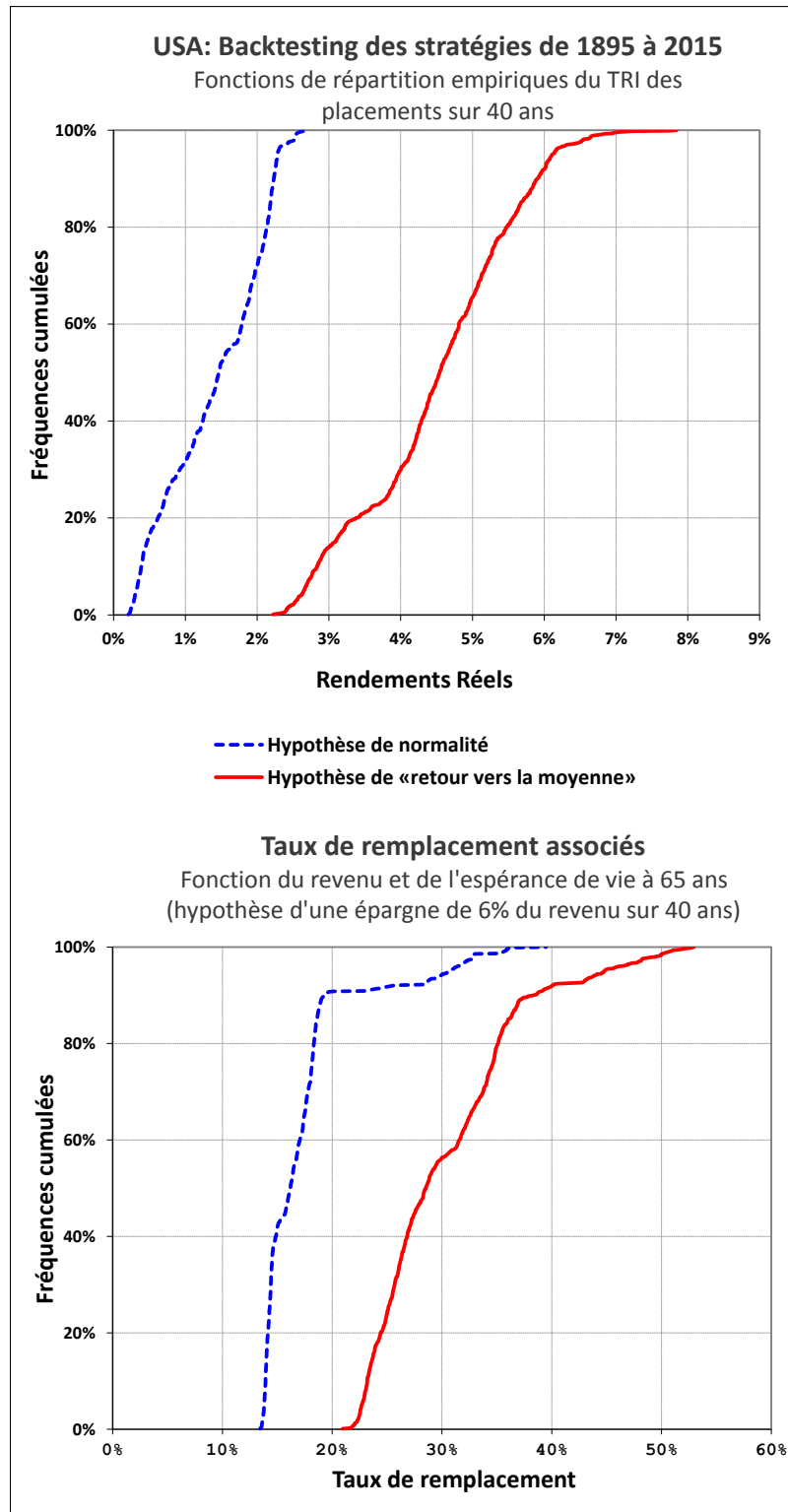


FIGURE 1.4 – Distributions des résultats de *backtesting*

En résumé, les propriétés statistiques des différents actifs, déduites de l'analyse empirique des chroniques de performances des grandes classes d'actifs, font apparaître qu'à long terme les actions procurent un risque sensiblement moins élevé que les autres actifs financiers. Par ailleurs, les propriétés de retour à la moyenne des actions justifient

qu'elles soient utilisées dans une stratégie de **cycle de vie** comme « **option par défaut** » de plans d'épargne **retraite**. Un autre argument qui milite en faveur de l'épargne en actions est qu'elle alimente de manière durable les fonds propres des entreprises, ce qui est favorable à leur croissance. Outre l'intérêt de l'épargnant, il y aurait un avantage non négligeable pour toute l'économie à inciter celui-ci à détenir des actions. Il y a donc convergence nette entre le besoin d'épargne à long terme susceptible d'augmenter les revenus de **retraite** des individus et le besoin des entreprises et donc de la macroéconomie.

## 1.3 Convergence ou efficience : le débat sur la dynamique des cours reste ouvert

En dépit de nos conclusions tranchées, le débat sur la dynamique des cours existe depuis plus d'une cinquantaine d'années et, bien qu'apaisé, n'est pas totalement refermé. Sans refaire l'histoire de l'EMH à la manière de SEWELL [2011], on peut illustrer l'ardeur de la polémique en citant quelques exemples emblématiques. A ce titre, on ne peut s'empêcher de citer SHILLER et collab. [1984] qui définit l'EMH comme « *one of the most remarkable errors in the history of economic thought* ». Dans un registre différent, on notera que dans le sillage de la publication de LO et MACKINLAY [1999] « *A Non-Random Walk Down Wall Street* » démontrant l'inconsistance de l'EMH, BURTON [2003] publiait une version révisée de son ouvrage « *A Random Walk Down Wall Street* ». Suite à de nombreux travaux empiriques toujours plus sophistiqués, alors que les tenants de l'efficience des marchés semblaient en passe de devenir minoritaires au sein du monde académique, la « Grande Récession » de 2008 (en référence à la Grande Dépression de 1929) a réveillé la controverse outre-Atlantique entre les adversaires, comme SIEGEL [2014], et les partisans de l'EMH dont BODIE [1995] est l'un des chefs de file.

La confirmation de nos résultats, qui conditionne la poursuite de nos recherches, est subordonnée à l'explication de ces visions antagonistes de la dynamique des prix. Ce nécessaire éclaircissement nous éloigne de l'économie des retraites et nous impose un détour sur le territoire de la modélisation statistique et des techniques numériques qui sont devenus les instruments indispensables de l'analyse de la dynamique des cours boursiers.

Les méthodologies utilisées pour tester l'EMH peuvent se répartir en deux grands groupes : les tests sur les séries temporelles de cours boursiers et les études d'événements.

- Les études d'événements

Les études empiriques réalisées pour tester l'EMH ont révélé différents types d'anomalies. Par exemple, des anomalies calendaires (effet lundi, effet janvier, effet de fin de mois, ...) ont été mises en évidence notamment par les travaux empiriques de GIBBONS et HESS [1981]. BANZ [1981] trouve, pour sa part, une relation négative entre la taille d'une entreprise, mesurée par sa capitalisation boursière, et le rendement de ses actions. Dans

un autre registre, **BASU [1977]** observe sur certains marchés une relation négative entre le **PER** d'une société (ratio cours sur bénéfice) et le rendement de ses titres.

Parallèlement, le développement de la finance comportementale (rangée un peu abusivement dans la rubrique « étude d'évènements ») a joué un rôle non négligeable dans la remise en cause de l'**EMH**. Le questionnement du modèle de l'efficience des marchés financiers s'est nourrie de la mise en évidence de phénomènes constituant des « anomalies » par rapport aux fondements de la théorie et d'une contestation des hypothèses de rationalité prêtées aux investisseurs. **DE BONDT et THALER [1985]** sont parmi les premiers à consacrer un article aux singularités détectées sur la rentabilité à long terme des actions. Ils concluent à l'existence d'un phénomène de sur-réaction des marchés selon lequel les titres ayant eu de plus faibles performances (perdants) sur une période passée ont des performances supérieures (gagnants) sur les périodes subséquentes et vice versa. Selon **DE BONDT et THALER**, ce phénomène serait dû au poids prépondérant des performances passées dans la formation des anticipations des agents. Cette sur-réaction à l'information passée serait conforme aux prédictions de la théorie de la décision comportementale de **KAHNEMAN [1982]**. Les tenants de l'application de la psychologie à la finance identifient ainsi l'existence de biais cognitifs qui altèrent la rationalité des investisseurs (« *framing effect* » ou biais de présentation, biais domestique, biais de conservatisme, emballement mimétique, excès de confiance, ...) et contribuent à la remise en cause de l'hypothèse selon laquelle les cours reflètent à tout moment la valeur fondamentale des titres. Notre propos n'étant pas de faire l'inventaire des biais de rationalité dans le cadre de cette étude, on se reportera avec profit aux travaux de **LAVIGNE et LEGROS [2006]** pour une présentation de l'incidence des biais cognitifs en finance.

Face à la multiplication des travaux menés sur l'efficience via les études d'événements, les défenseurs de l'**EMH** ont reconnu l'existence d'anomalies. Pour justifier l'innocuité de ces biais, ils rétorquent que la théorie n'implique pas que les prix des titres reflètent à tout instant les valeurs fondamentales, mais que les prix restent au voisinage des vraies valeurs sans que personne ne sache à coup sûr s'ils sont trop élevés ou trop bas. Les anomalies observées ne permettraient donc pas de surperformer durablement le marché. L'argument paraît recevable. L'implication principale de l'**EMH** est qu'il est impossible de « battre le marché » de manière systématique et prévisible (après les coûts de transactions), ce qui

signifie qu'un investisseur ne peut réaliser un rendement qui sera constamment supérieur à celui du marché en général, car cela impliquerait que cet investisseur dispose d'un avantage informationnel, c'est-à-dire d'informations qui ne seraient pas prises en compte par le marché. Or, comme l'atteste le classement des performances relatives des fonds de placement à gestion active sur la période 1970-2010 établi par Vanguard<sup>1</sup>, il s'avère que la grande majorité des fonds communs de placement à gestion active investis en actions n'arrivent pas à battre leur benchmark (en l'occurrence le S&P500) sur des périodes suffisamment longues pour que cela ne puisse pas être attribué au hasard. En première approche, ces résultats souvent cités pour corroborer l'EMH paraissent convaincants. D'autant plus que la hiérarchie des fonds n'est pas stable dans le temps : les fonds qui ont obtenu les meilleurs résultats sur les 5 dernières années (premier quintile), ont tendance à figurer dans le dernier quintile les 5 années suivantes. Cela indiquerait que la performance des gestionnaires n'est pas « persistante », ou qu'elle est plus ou moins aléatoire.

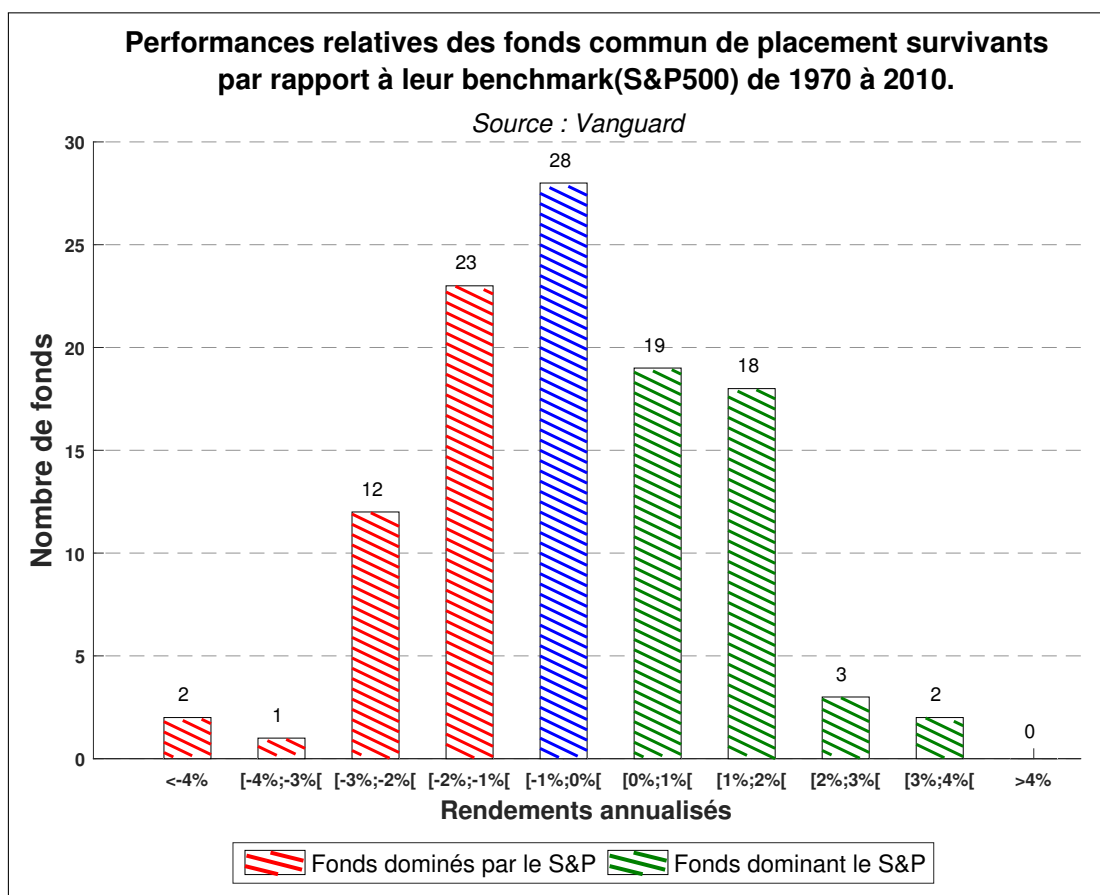


FIGURE 1.5 – Performances relatives des FCP

1. The Vanguard Group » est une société américaine de fonds d'investissement qui gérait plus de 3000 milliards de dollars d'actifs fin 2014.

Ces résultats mis en avant pour confirmer l'EMH peuvent toutefois paraître tautologiques. D'une part, la performance relative au marché est un jeu à somme nulle (avant frais), pour chaque gestionnaire qui surperformera le marché, il y aura un gestionnaire qui sous-performera et, d'autre part, si l'on garde à l'esprit que les placements collectifs représentent aux Etats-Unis environ 95% du volume des transactions, l'industrie de la gestion de fonds dans son ensemble ne peut pas surperformer le marché puisqu'elle est le marché.

- Les tests sur les séries temporelles de cours boursiers

Une autre approche pour vérifier la validité de l'EMH repose sur des tests statistiques basés sur les chroniques des cours. Depuis que la théorie mathématique des marchés financiers est devenue la référence commune pour le monde académique, les économètres n'ont eu de cesse de tester la forme faible de l'efficacité des marchés selon laquelle l'intégralité de l'information passée est déjà comprise dans le prix actuel et qu'il est donc vain d'utiliser les variations passées pour prédire les variations futures. Devant l'inaptitude des tests statistiques classiques de marche aléatoire (Dickey-Fuller, Phillips-Perron, ...) à valider l'EMH, LO et MACKINLAY [1988] développent le test du « ratio de variance » dédié spécifiquement à la vérification de l'efficacité des marchés. L'intuition derrière le test du ratio de variance est la suivante : si le cours des actifs suit une marche aléatoire, alors sa variance croît linéairement avec l'intervalle des observations. Il en découle que la variance des rendements  $r_t$  sur une période  $q$  doit être approximativement égale à  $q$  fois la variance sur une période. Si on note  $\text{Var}(r_t(q))$  la variance de la somme des différences premières du logarithme des cours sur la période  $q$ , alors le test du ratio de variance VR se note :

$$\text{VR}(q) = \frac{\text{Var}(r_t(q))}{q * \text{Var}(r_t)} \quad (1.2)$$

Lo et MacKinlay ont montré que pour  $q = 2$ ,  $\text{VR}(2) - 1 = \rho(1)$ , où  $\rho(1)$  est le coefficient d'autocorrélation du premier ordre. Un ratio proche de l'unité suggère une marche aléatoire, tandis qu'une déviation significative indique une auto corrélation des rendements. Un ratio de variance inférieur à l'unité plaide pour un processus de "retour vers la moyenne"

(*mean reversion process*).

Convaincus de la puissance de ce test, de nombreux chercheurs vont l'utiliser pour valider la théorie. **POTERBA et SUMMERS [1988]** sont les premiers à souligner la nécessité d'effectuer une distinction entre horizon court et horizon long. Les auteurs trouvent des ratios de variance supérieurs à l'unité pour les observations de fréquences inférieures à l'année, et inférieurs pour les fréquences plus longues. Cela implique des rendements corrélés positivement sur les intervalles courts et négativement sur horizons longs. **POTERBA et SUMMERS** voient dans la détection de retour vers la moyenne (*mean reversion*) une source d'inefficience des marchés. En dépit de l'apport fondamental de ces recherches, la réplique des avocats de l'efficience est rapide. **KIM et collab. [1991]** affirment que les résultats de **POTERBA et SUMMERS** ne sont détectables que sur les observations antérieures à la seconde guerre mondiale et sont imputables à la période de rattrapage de l'économie consécutive au conflit mondial. **GROENENDIJK [1994]** montre que pour parvenir à ces conclusions remarquables **POTERBA et SUMMERS** ont pris quelques libertés avec le test initial de Lo et MacKinlay, faute de quoi ils n'auraient pas détecté de *mean reversion* à long terme dans le cours des actions. **GROENENDIJK** souligne, en effet, que la signification statistique des tests utilisés par **POTERBA et SUMMERS** repose sur des simulations de Monte Carlo supposant un processus de bruit blanc avec des perturbations normales. Or, il est notoire que les rendements des actions ne sont pas normalement distribués. L'auteur en déduit que la significativité de la statistique des tests est sans doute surestimée.

Malgré l'apport incontestable du test de ratio de variance et de ses extensions (test non paramétrique de **WRIGHT [2000]**, tests de ratio de variance multiples, ...), les travaux empiriques qui y recourent pour tester l'efficience des marchés tirent des conclusions pour le moins contradictoires. Pour en comprendre la raison et cerner les limites des tests de ratio de variance, plutôt que de l'utiliser sur des chroniques financières historiques qui sont régies par un processus inconnu, nous avons créé par simulations stochastiques des échantillons dont nous avons déterminé ex ante la dynamique. Nous trouvons que les tests sont robustes pour détecter un processus dont la dynamique est proche d'un bruit blanc gaussien. En revanche, il apparaît de manière flagrante qu'ils ne sont pas efficaces pour détecter une corrélation négative raisonnable entre les fluctuations du cours des actions. Cette défaillance, d'autant plus perceptible que la taille des échantillons est pe-

tite, explique sans doute en partie la divergence des résultats rapportés dans la littérature consacrée à l'efficacité des marchés financiers. Il apparaîtrait donc illusoire de s'appuyer sur des tests sur les chroniques des cours boursiers pour détecter la nature de la dynamique des prix des actifs risqués.

- Les modèles VAR : une spécification alternative pour évaluer la prévisibilité des marchés

Pour sortir de ce débat quelque peu stérile concernant la prévisibilité des rentabilités à partir des rentabilités passées, des auteurs se sont penchés sur l'étude de la prévisibilité des rentabilités à partir d'autres variables économiques ou financières. La représentation VAR (*Vector Auto Régressive*), qui est une généralisation des modèles autorégressifs aux cas multivariés, apporte une réponse statistique intéressante pour évaluer la prévisibilité des marchés. La primeur de l'utilisation des modèles VAR comme outils d'étude de la dynamique du prix des actifs aux Etats-Unis est imputable à **CAMPBELL et VICEIRA [2005]**. Dans leur sillage, **BEC et GOLLIER [2009]** appliqueront la même méthodologie avec des résultats plus mitigés pour la France.

L'intérêt de la modélisation non structurelle, telle qu'elle est exploitée dans un modèle VAR, a pour objectif principal de révéler un ensemble de relations causales au sens de Granger, comme le soulignent **FACKLER et KRIEGER [1986]**.

Dans leurs travaux fondateurs, **CAMPBELL et VICEIRA** utilisent un VAR(1) par souci de parcimonie afin d'éviter des retards supplémentaires qui nécessiteraient un vecteur d'état étendu avec un nombre important de paramètres à estimer. Toutefois, dans de nombreux cas, une modélisation VAR plus "large" peut être préférable à un modèle dont la structure délibérément restreinte ne permettrait pas de capturer la persistance (ou la mémoire) des relations entre les variables du modèle. Pour cette raison, nous élargissons le modèle initial en estimant un VAR(p) non contraint. Cependant, comme le rappelle **CAMPBELL et VICEIRA** eux-mêmes, l'adjonction de retards supplémentaires pose la question de leurs estimations à partir de données historiques. Etant donné que la taille du modèle augmente exponentiellement avec le nombre de retards, ajouter des "retards" peut contribuer à réduire significativement la précision de l'estimation des paramètres du modèle et impacter sa stabilité. Pour contourner cette impasse et gagner des degrés de liberté afin



d'éviter les problèmes liés à la suridentification des modèles, nous avons utilisé une modélisation "*Sparse VAR*" (sVAR) dans laquelle seuls les coefficients AR significativement non nuls sont retenus.

Par ailleurs, suivant les conclusions de HARVEY [1989] qui montrent une bonne synchronisation entre les cycles conjoncturels et des cours boursiers, nous avons enrichi la liste des prédicteurs des cours en incluant la production industrielle dans le vecteur des variables d'état. La production industrielle est utilisée en tant que « *proxy* » de la croissance économique. Une phase d'expansion traduit une augmentation du niveau d'activité des entreprises, et correspond généralement à une croissance concomitante de la consommation des ménages. Dans un tel contexte, la valeur des actions des entreprises devrait augmenter, notamment parce que les perspectives de dividendes attachés à la possession d'actions augmentent. On note que la production industrielle est un indicateur retardé du prix des actions. Cependant, notre objectif dans cette recherche n'est pas de développer un modèle de prévision des cours, mais d'examiner la preuve empirique du comportement de retour vers la moyenne des cours des actions. Par ailleurs, la croissance est bien une variable causale des cours boursiers. Le fait que les marchés financiers anticipent la croissance n'inverse pas la causalité comme il en va des prévisions météorologiques et de la météo. Dès lors il suffit de synchroniser les deux variables en fonction du retard moyen calculé sur le passé. Le procédé n'altère pas l'estimation du modèle VAR.

Enfin l'étude est étendue à quatre pays (USA, Royaume-Uni, France, Japon) représentant trois continents afin de vérifier si les conclusions concernant principalement les Etats-Unis sont généralisables aux autres marchés financiers.

La calibration du modèle est basée sur des données trimestrielles, la fenêtre des observations va de 1960.Q1 à 2013.Q4. On a volontairement exclu les périodes de guerre mondiale afin de ne pas prêter le flanc à la critique de certains chercheurs, tels KIM et collab. [1991], qui postulent que les phénomènes de "*mean-reversion*" sont liés aux périodes de rattrapages consécutives aux dévastations dues aux guerres. Les indices sont fournis par *Global financial data* ([www.globalfinancialdata.com](http://www.globalfinancialdata.com)). Pour illustrer l'effet de l'horizon de placement sur les volatilités de rendements de chaque classe d'actifs, on trace sur les graphes ci-dessous les écarts-types annualisés issues des estimations de Sparse VAR(p), en fonction de l'horizon d'investissement, pour des horizons allant d'un an à 50 ans. On

remarque, et c'est le point important de notre recherche, que la volatilité des actions des différents pays suivent la même évolution à long terme : elles sont toutes décroissantes avec l'horizon de placement. Rappelons que, si les rendements des actions étaient IID, alors la volatilité annualisée de ces rendements serait indépendante de l'horizon de placement et la volatilité conditionnelle prendrait l'aspect d'une droite de pente nulle. Par conséquent, identifier des volatilités décroissantes en fonction de la durée de placement tend à confirmer la prévisibilité, du moins partielle, desdits rendements.

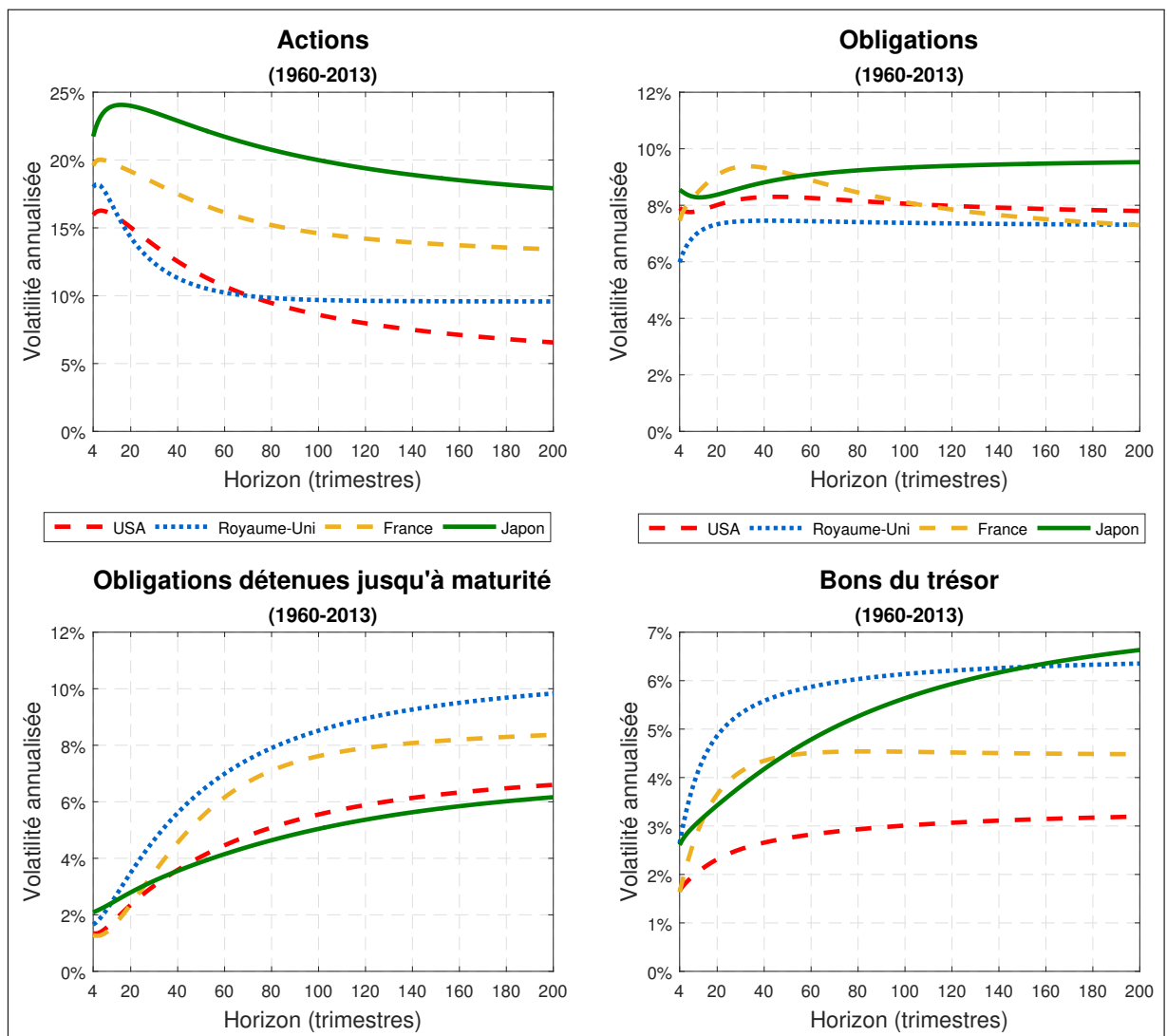


FIGURE 1.6 – Volatilités conditionnelles des actifs

A contrario, pour les autres actifs les constats sont mitigés. On décèle pour l'ensemble des autres classes d'actifs une dynamique des rendements caractérisée soit par une tendance à la divergence par rapport à la moyenne (on parle alors de phénomène de «*mean-aversion*»), soit par soit un pur mouvement brownien. Bien qu'une modélisation VAR ne

soit pas à proprement parler un test statistique d'efficience des marchés, les résultats obtenus confirment les conclusions du premier chapitre de nos recherches : le comportement des actions se distingue de celui des placements à revenus fixes. C'est le seul actif dont la réduction de la volatilité domine celle d'une loi normale de même espérance.

## 1.4 Processus de retour vers la moyenne des marchés boursiers et mesure de la demi-vie

Les évidences empiriques issues de l'étude des séries chronologiques et l'analyse de la dynamique de la variance conditionnelle des actions au moyen de modélisations VAR constituent, sinon des preuves absolues, du moins autant d'indices fortement convergents en faveur de l'existence de retour vers la moyenne ou *mean reversion* dans le processus qui régit le cours des actions. Cette propriété justifie, nous l'avons vu, le recours à des stratégies d'allocation d'actifs s'appuyant sur la diversification temporelle. Cependant, un point est d'identifier l'existence de *mean reversion* dans la dynamique des prix, un autre, tout aussi fondamental, est d'évaluer la force du mécanisme. En effet, dans le cas où la vitesse de retour vers la moyenne apparaîtrait disproportionnée au regard de la durée d'épargne d'un agent, le phénomène ne conduirait pas à des allocations stratégiques d'actifs significativement différentes que celles déterminées dans le cadre de l'EMH. Au-delà de la détection de mécanismes de convergence dans la dynamique des prix, il est donc essentiel d'évaluer la vitesse de cette convergence.

Cette estimation, complexe, prolonge notre immersion dans les techniques économétriques appliquées à la finance et retarde d'autant la phase d'analyse des relations entre *retraite* et risques financiers. La modélisation de la demi-vie est néanmoins une étape incontournable pour paramétrer la vitesse de retour vers la moyenne dans la spécification de la dynamique du prix des actifs risqués que nous souhaitons intégrer dans un modèle démo-économique afin d'évaluer le risque associé à l'utilisation des revenus du capital pour financer les *retraites*.

L'estimation des demi-vies des chroniques boursières est complexe en raison de l'existence de nombreux biais dans les procédures d'estimation. Sans insister sur ce point, on peut souligner comme CHEN et GILES [2011] que les estimations des demi-vies sont dépendantes de la taille des échantillons, des approximations sur l'ordre des processus ou encore des changements de régimes dans les chroniques de prix. Après avoir étudié les limites de la technique de modélisation proposée par BALVERS et collab. [2000] - qui s'appuie sur l'utilisation d'un benchmark unique comme valeur fondamentale pour l'ensemble des marchés, en l'occurrence le « MSCI monde » - il nous est apparu plus réaliste

de supposer qu'il existait une spécification propre à l'évolution du marché boursier dans chaque pays considéré. Dès lors, notre choix s'est porté sur des méthodes d'estimation du processus d'Ornstein-Uhlenbeck (OU). L'estimation est appliquée sur le logarithme des cours « détrendés », ce qui détermine une dynamique où le prix des actions évolue autour d'une tendance de long terme nulle. La forte asymétrie de la distribution des estimateurs des demi-vies nous a conduit à mettre en place une stratégie d'estimation MUE (« *median unbiased estimator*») à partir de l'estimateur MCO avec correction de biais donné par BAO et collab. [2015].

Sur le plan empirique, nos estimations révèlent avant tout le caractère fluctuant des mesures en fonction des périodes ou sous périodes retenues. Les écarts des résultats observés à différentes périodes sur un même marché tendent à accréditer l'existence de changement de rythme dans la correction des prix vers leur valeur de long terme en fonction des cycles économiques. Ces résultats, qui sont en phase avec ceux décrits dans la littérature académique récente (SPIERDIJK et collab. [2012]), nous ont conduit à estimer les demi-vies sur des fenêtres glissantes afin de mieux en apprécier la variance.

Si on retient l'estimateur médian calculé pour chaque pays sur la période 1950-2014 sur des observations annuelles, caractérisées par une faible persistance, on estime des demi-vies compatibles à la durée d'épargne des agents.

TABLEAU 1.3 – Valeurs médianes des demi-vies des cours des actions

Valeurs médianes des demi-vies des cours des actions		
Estimation sur des fenêtres glissantes annuelles sur la période 1950-2014		
	Vitesse	Demi-Vie
<b>Royaume-Uni</b>	0,17	4
<b>USA</b>	0,14	4,87
<b>Japon</b>	0,13	5,43
<b>France</b>	0,12	5,79

On peut illustrer graphiquement le concept de demi-vie dans le cas d'une fonction exponentielle décroissante de type :

$$N_t = N_0 e^{-\lambda t}, \quad \text{où la demi-vie est donnée par } t_{1/2} = \ln(2)/\lambda. \quad (1.3)$$

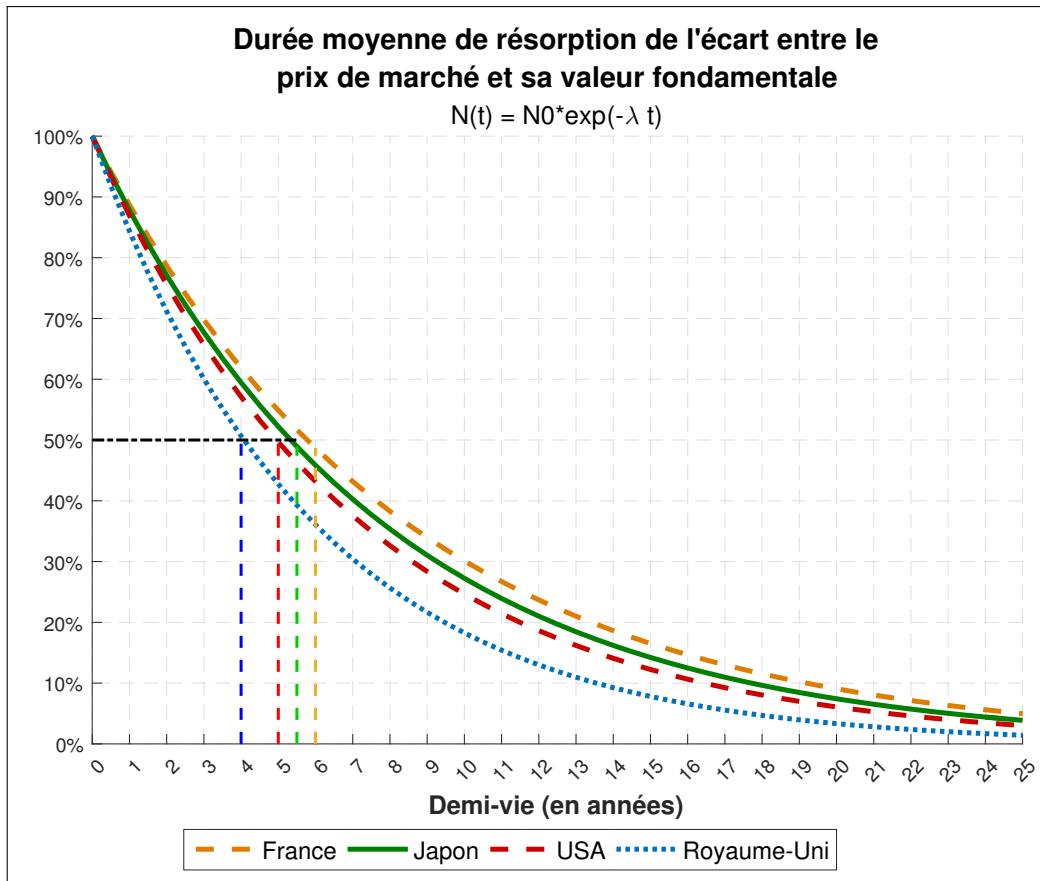


FIGURE 1.7 – Durée moyenne de résorption de l'écart sur le prix

Il s'avère que, dans l'ensemble des pays étudiés, les cours boursiers convergent vers leurs tendances de long terme en un temps raisonnable. Les résultats indiquent une vitesse d'absorption des chocs sur les marchés plus rapide dans les pays anglo-saxons, Royaume-Uni et Etats-Unis, qu'en France et au Japon. L'estimation des demi-vies des chroniques boursières nous permet de paramétrer la vitesse de retour vers la moyenne dans le processus qui régit le prix des actifs risqués, lequel détermine - pour une aversion au risque donnée - l'évolution de la structure des allocations d'actifs au cours du temps.

## 1.5 Retraite et risque financier : un essai de simulation

Dans le cas, vraisemblable, d'une transition progressive vers un Etat providence "sélectif" où les prestations seraient ciblées sur les besoins des salariés les moins qualifiés, les ménages aisés pourraient être conduits à assurer la gestion de leur épargne financière dans l'objectif de se constituer un complément de *retraite* significatif. Dans un modèle de *cycle de vie* sans contrainte de liquidité, on imagine a priori que les jeunes actifs qualifiés devraient participer fortement aux marchés actions. On sait toutefois que ce n'est pas le cas et que les ménages détiennent trop peu d'actifs risqués compte tenu de leur aversion au risque. MASSON [2010] invoque qu'une des raisons possibles pour expliquer l'*Equity Premium Puzzle* est que le risque boursier serait corrélé, positivement, avec les autres risques que supporte l'épargnant (revenu du travail, actifs non financiers, etc.). Par ailleurs, les règles qui président à l'entendement des informations sont des règles contingentes à l'état de l'environnement dans lequel se trouve l'individu. De ce fait, on peut légitimement se demander si les doutes récurrents émis sur le rendement d'un système par épargne et notamment sur la variance de son rendement dans le temps n'ont pas contribué à persuader les ménages que l'épargne serait un véhicule trop risqué pour jouer un rôle dans notre système de transfert. Afin de vérifier cette acception, nous avons incorporé une modélisation simplifiée de la dynamique du cours des actions dans un modèle démo-économique (BLANCHET [1992] et BLANCHET et MONFORT [1994]). C'est-à-dire dans un modèle d'équilibre général dans lequel seuls les comportements clés en matière de réaction au phénomène du vieillissement démographique sont spécifiés de façon détaillée (la rémunération des facteurs, l'accumulation de la richesse par âge, l'évolution des revenus au cours du *cycle de vie*, etc.). En revanche, les autres aspects macro-économiques, considérés comme accessoires compte tenu des thèmes abordés, sont considérés comme exogènes ou stylisés à l'extrême. La dynamique des cours est modélisée par une spécification de type « *Trending OU process* » qui permet de simuler : un mouvement brownien, un pur *OU process* ou une mixture des deux.

$$dP_t = (\mu - \kappa(P_t - \mu t))dt + \sigma dW_t \quad (1.4)$$

Avec :

$P$	=	prix d'un actif
$\mu$	=	<i>drift</i>
$W_t$	=	processus de Wiener
$\sigma$	=	volatilité de $x$
$\kappa$	=	paramètre de "retour vers la moyenne"

Une des propriétés importantes de la spécification « *Trending OU process* » retenue est qu'elle est **TS** (« *Trend Stationary* »). Dans un processus **TS**, en cas de choc positif ou négatif à une date donnée, toutes choses égales par ailleurs, l'influence de ce choc a tendance à s'estomper au cours du temps. Dans ce processus, les prix sont caractérisés par un processus de retour à la moyenne dès lors qu'on a  $\kappa > 0$ , soit une configuration qui semble de nature à inciter les épargnants à participer aux marchés actions. Les étapes précédentes, plus statistiques qu'économiques, qui nous ont permis d'estimer la valeur du paramètre  $\kappa$  de retour vers la moyenne, prennent alors tout leur sens. Nantis de modélisations stylisées des marchés financiers en fonction de la valeur de  $\kappa$ , «*mean reverting*» pour  $\kappa > 0$ , efficaces pour  $\kappa = 0$ , il est désormais possible d'apprécier l'influence de ces processus antagonistes sur la stratégie d'allocation temporelle d'actifs. Pour déterminer la performance des stratégies, nous avons procédé à des simulations stochastiques en y intégrant, tour à tour, les paramètres de la dynamique des cours boursiers précédemment estimés. Il est alors facile, pour un processus donné, de simuler artificiellement les trajectoires possibles des rentabilités boursières.

Les résultats déterminent des stratégies différenciées selon les propriétés que l'on prête au cours des actions. Les allocations stratégiques obtenues dans l'hypothèse où le cours des actions suit un mouvement brownien s'avèrent plus prudentes que celles déterminées dans l'hypothèse alternative où ces mêmes cours sont régis par un processus de retour vers la moyenne. Le résultat s'explique par des vitesses de réduction de la variance différentes selon les processus envisagés. La réduction de la variance des cours est fonction du temps dans un mouvement brownien, elle est plus rapide dans un processus de retour vers la moyenne. C'est donc sans surprise que l'on retrouve une moindre proportion d'actifs risqués dans les allocations stratégiques déterminées dans l'hypothèse d'un mouvement brownien.



Au-delà de la remontée mécanique du pouvoir d'achat relatif des retraités consécutive au versement d'une rente viagère additionnelle issue de l'accumulation d'un capital, la question cruciale qui se pose est celle de l'utilité ou du « bien-être » que les agents peuvent retirer de leur abondement au fonds d'épargne. On peut tenter une mesure de ce bien-être en calculant le taux de rendement interne (TRI) de « l'opération retraite » (qu'elle provienne de transferts instantanés ou d'épargne) sur leur **cycle de vie**. Un tel critère intègre à la fois le revenu tiré du régime de **retraite**, l'effort consenti lors des cotisations et la durée passée à la **retraite** relativement à celle passée au travail et peut être assimilé à une forme de « comptabilité générationnelle » restreinte à la seule question des **retraites** au sens de AUERBACH et collab. [1991].

Les stratégies d'allocation testées dans les simulations correspondent à celle d'un agent résolument averse au risque évoluant, comme dans nos simulations initiales, dans un environnement fictif dans lequel les risques sur le revenu et l'existence de contraintes de liquidité ne sont pas pris en compte. Ces stratégies visent à maintenir la valeur du capital accumulée destinée à compléter la pension de **retraite**, ce qui transcrit plus formellement correspond à une « *Value-at-Risk* » nulle au seuil de 99%. Ce seuil de risque ne doit rien au hasard. Quitte à ne retenir qu'un critère d'aversion au risque afin de ne pas multiplier les variantes, nous avons prêté au système par **répartition** les caractéristiques d'un actif sans risque. On suppose donc implicitement que l'effort de solidarité que consentent les générations en activité en faveur des retraités, trouvera sa contrepartie dans l'obligation faite aux générations futures d'actifs de réaliser un effort similaire. Les simulations réalisées dans le cadre démo-économique français sont riches d'enseignements. Elles montrent que si le prix des actifs risqués suit une marche aléatoire, c'est-à-dire un processus sans mémoire dans lequel les chocs sont permanents (EMH), les agents averses au risque ne pourront pas obtenir sur les marchés un ratio rendement / risque équivalent à celui procuré implicitement par l'édifice des régimes par **répartition** du secteur privé. Dans ce cas de figure, l'abondement à un plan d'épargne procurerait une utilité moindre que celle procurée par la **répartition**. Seul le cas où l'on admet que la dynamique des cours est gouvernée par un processus de retour vers la moyenne pourrait - au prix d'un investissement massif en actifs risqués en début et milieu de vie active - concurrencer les régimes par **répartition**.

Naturellement ces conclusions méritent d'être tempérées car elles sont fonction du paramétrage du régime par **répartition**. Les simulations reposent, en effet, sur l'hypothèse que sous le triple effet de la baisse du taux de chômage, de l'augmentation de l'espérance de vie et de l'allongement à 172 trimestres de la durée de cotisation, l'âge moyen de départ à la **retraite** passerait de 62,5 ans en 2018 et se stabiliserait au-dessus à 64 ans à partir du milieu des années 2030. Or, une telle augmentation de l'âge moyen de départ à la **retraite** détermine des taux de rentabilité interne plus élevés qu'un maintien de l'âge de départ à son niveau actuel (d'après la **CNAV** en 2015, l'âge moyen de départ à la **retraite** est de 62,4 ans). On constate sur le graphique comparant les **TRI** selon deux variantes d'âge moyen de **retraite** que les rendements actuariels les plus faibles sont associés à l'âge moyen de départ le plus précoce. A terme, la hausse du ratio «durées cotisées / périodes de retraite» est plus que compensée par l'augmentation des pensions et la stabilisation des taux de cotisation.

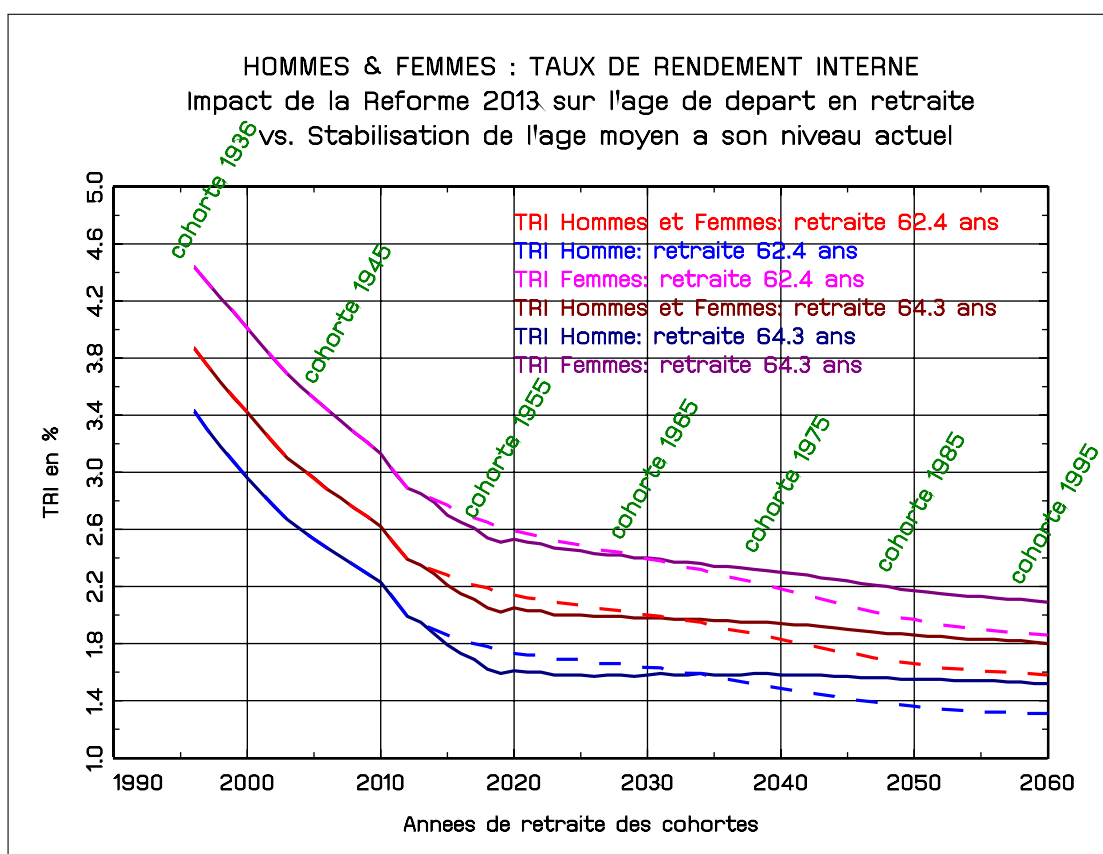


FIGURE 1.8 – Retraite - Réforme 2013 et Taux Rendement Interne

Quoi qu'il en soit, on ne manquera pas de constater que les conditions de l'alignement entre le rendement de l'épargne **retraite** et le rendement de l'édifice des régimes

par **répartition**, à savoir un investissement massif en actif risqué y compris pour les agents risquophobes, sont très loin des pratiques et de la culture des intermédiaires financiers.

## Chapitre 2

# Distribution non gaussienne des rendements : quel impact sur les options par défaut des plans d'épargne retraite ?

*« L'épargne est une magnifique  
réalité, spécialement quand nos  
parents l'ont pratiquée »*

---

Mark Twain

## Sommaire

---

<b>2.1 Introduction</b> . . . . .	<b>37</b>
<b>2.2 Les instruments de l'épargne à long terme</b> . . . . .	<b>39</b>
2.2.1 Convergence ou efficience : le débat sur la dynamique des cours reste ouvert . . . . .	39
2.2.2 Champ de l'étude et nature des données . . . . .	41
2.2.3 Risque réel et durée de détention . . . . .	45
2.2.4 Une évaluation orthodoxe de l'efficience des marchés . . . . .	54
2.2.5 Production et cours boursiers : une bonne synchronisation des cycles	57
2.2.6 Un résumé des enseignements historiques . . . . .	59
<b>2.3 Allocation de cycle de vie paramétrique vs semi paramétrique</b> . . . . .	<b>61</b>
2.3.1 Eléments de méthodologie . . . . .	62
2.3.2 Résultats : l'hypothèse d'une VaR de 3% . . . . .	72
2.3.3 Le classement des stratégies . . . . .	81
2.3.4 L'exemple d'une Value-at-Risk nulle . . . . .	85
<b>2.4 En guise de conclusion</b> . . . . .	<b>90</b>
<b>Annexes</b> . . . . .	<b>91</b>
2.A Annexe 1 : Profils de pertes en fonction de la durée de détention des actifs . . . . .	91
2.B Annexe 2 : Synthèse des résultats pour des durées de placement inférieures à 40 ans. . . . .	92
2.C Annexe 3 : Stratégies alternatives d'assurance de portefeuille . . . . .	95
2.D Annexe 4 : Portefeuille optimal moyenne-VaR et normalité . . . . .	100
2.E Annexe 5 : Test de dominance stochastique de Kolmogorov-Smirnov pour deux échantillons . . . . .	100
2.F Annexe 6 : « <i>Great Recession</i> » et « <i>Great Depression</i> » aux Etats-Unis	102
2.G Annexe 7 : Programme d'optimisation de la Value-at-Risk (VaR) de Cornish-Fisher . . . . .	104

---

## 2.1 Introduction <sup>1</sup>

Pour compenser le rationnement des transferts entre générations, les ménages vont devoir assurer la gestion de leur épargne financière. Cette appréciation doit être tempérée sur un point essentiel : 1 français sur 2 déclare ne pas être en mesure d'épargner (FFSA/IPSOS, mars 2011). En période de ressources contraintes, ces statistiques plaident pour un changement de modèle de transferts qui consisterait à passer d'un Etat providence à un Etat providence "sélectif" où les prestations seraient ciblées sur les besoins du milieu et du bas de la classe moyenne.

Quoi qu'il en soit, la nécessaire constitution de compléments de retraite pose la question de la capacité des ménages concernés à gérer l'épargne longue. A cet égard, quelques expérimentations soulignent la faiblesse du niveau d'éducation financière des ménages (*financial literacy*) : l'enquête AMF/CRÉDOC 2011 sur la culture financière des français indique qu'un individu sur deux ne maîtrise pas le calcul d'un pourcentage. Le constat, loin d'être local, a poussé les fonds de pension nord-américains à cotisations définies (DC plans) à proposer systématiquement des allocation par défaut (*default options*) qui sont souscrites par 80% des affiliés.

Ces méthodes de *nudging*, théorisées par THALER et SUNSTEIN [2008], qui consistent à inspirer la bonne décision aux ménages sans apparemment les forcer alors qu'ils arbitrent dans un univers de placements largement contraint, font l'objet de nombreuses controverses. A l'opposé ou presque, certaines études (ARRONDEL et MASSON [2011]) montrent une grande rationalité et une totale stabilité des préférences qui montreraient que les ménages font preuve d'une « sagesse pratique » (ARRONDEL et MASSON, *op. cit.*) qui pousse à conclure que la construction pure et simple d'un « épargnant nouveau » ne pourrait relever que de la manipulation intellectuelle inefficace et dangereuse pour les ménages. Il n'en demeure pas moins que la question des performances à long terme des options par défaut des plans d'épargne retraite reste posée. Loin de nous aventurer sur le terrain de la critique du « paternalisme libertaire », c'est sur le point de la performance que se focalisent les développements qui suivent. Dans une première partie, basée sur une analyse des séries longues de rendement des actifs en France et aux Etats-Unis, nous analysons

---

1. Une version résumée de cette contribution a été publiée dans the « Review of Accounting and Finance », voir HAMAYON, LEGROS et PRADAT [2016].

les propriétés statistiques des grandes classes d'actifs face au risque et au temps.

Dans une seconde partie, munis de ces caractéristiques, nous procédons au *backtesting* des stratégies d'**allocation par défaut** en fonction des dynamiques de prix identifiées, puis nous les hiérarchisons via un critère de « **taux de remplacement** » du revenu des ménages.

Nous trouvons que la prise en compte des propriétés de **retour vers la moyenne** des chroniques boursières détermine des stratégies de **diversification temporelle** bien plus riches en actifs risqués que celles calculées dans un cadre gaussien qui conduit à surestimer la variance des rendements sur longue période et donc se prive du véhicule offrant le rendement le plus élevé. Ces propriétés de retour à la moyenne des actions justifient qu'elles soient utilisées dans une stratégie de **cycle de vie** comme « **option par défaut** » de plans d'épargne retraite.

## 2.2 Les instruments de l'épargne à long terme

L'étude des propriétés « rendement - risque » des principales classes d'actifs est un préalable utile à l'analyse des stratégies d'allocation d'actifs. Cette étape permet de vérifier la validité des attributs accolés, souvent sans trop de discernement, aux classes d'actifs et reposant sur des justifications pratiques ou théoriques plus qu'incertaines. A cet égard on soulignera que la crise bancaire et financière de l'automne 2008 (dénommée « *Great Recession* » par les anglo-saxons en référence à la « *Great Depression* » de 1929) symbolisée par la chute de Lehman Brothers, a alimenté tous les fantasmes et contribué à modifier durablement les anticipations des analystes au point de les conduire - souvent - à remettre en cause la hiérarchie des rendements des actifs financiers allant même jusqu'à nier le concept de « prime de risque ». L'analyse rétrospective, malgré ses limites évidentes, permet de relativiser ces conclusions pour le moins radicales<sup>2</sup>. L'exercice permet, en effet, d'éclairer des questions simples et néanmoins fondamentales : les rendements attendus des différents actifs sont-ils stables au cours du temps, quelle est la part de l'*illusion monétaire* dans la perception de la performance, les chocs sur les marchés financiers sont-ils permanents ou transitoires, comment évolue le risque en fonction d'un horizon de placement ?

### 2.2.1 Convergence ou efficience : le débat sur la dynamique des cours reste ouvert

Depuis l'introduction par FAMA [1965] de l'EMH, concept central de la théorie financière moderne, il y a presque 50 ans ; l'EMH a été testée dans de nombreuses études empiriques. Après les travaux fondateurs de POTERBA et SUMMERS [1988] qui détectent un processus de retour vers la moyenne (*mean-reverting process*) sur les horizons longs, un débat rémanent persiste dans la littérature académique pour trancher sur la nature du processus qui régit le prix des actifs risqués. Sans prétendre être exhaustif, on peut mentionner quelques exemples afin d'illustrer l'âpreté du débat. Du côté des supporters de l'impré-

---

2. Voir annexe 2.F, la note sur la comparaison des crises boursières aux Etats-Unis.



dictibilité des marchés, de nombreux auteurs, comme FAMA et collab. [1969], confirment que les analyses empiriques prouvent que les marchés sont efficients. HAWAWINI [1984] met en évidence une forme d'efficacité faible (hypothèse qui assume que les prix reflètent toute l'information contenue dans la série historique des prix) sur les marchés financiers Européens. CHAN et collab. [1997] confirment que les marchés boursiers mondiaux vérifient la propriété d'efficacité faible. BURTON [2003], conclut pour sa part que les marchés sont toutefois moins efficients que ne le rapportent les recherches académiques tandis que JORION [2003] réfute le concept de *diversification temporelle* et plaide pour une diversification géographique. En dépit de ces hésitations, plus récemment, BORGES [2010] établit que les marchés Européens suivent une marche aléatoire, hypothèse confirmée par SEWELL [2012] dont les travaux légitiment l'EMH. Dans le camp des tenants du retour vers la moyenne, on retrouve curieusement FAMA et FRENCH [1988b] qui documentent l'existence de *mean reversion* sur les marchés boursiers pour les horizons supérieurs à l'année. Les tests empiriques de KIM et collab. [1991] mettent en évidence l'existence de composantes transitoires dans les cours des actions, ils imputent toutefois les forces de rappel dans les chroniques boursières à la dévastation consécutive à la seconde guerre mondiale. BALVERS et collab. [2000] rejettent sans ambiguïté l'EMH, tandis que SPIERDIJK et collab. [2012] décèlent des variations de la vitesse de retour vers la moyenne au cours du temps. L'importance de l'EMH est due principalement à ses implications pratiques. En effet, comme le montrent CAMPBELL et collab. [2003], la présence ou l'absence de *mean-reversion* dans le cours des actifs risqués a des conséquences majeures sur la structure des allocations stratégiques au cours du temps. Parce qu'elle induit par une autocorrélation négative des rendements, la variance des actions est moins que proportionnelle à l'horizon d'investissement, ce qui renforce l'attractivité des actions pour les investissements de long terme. Les causes du sempiternel débat sur la dynamique des cours sont souvent attribuées à la taille réduite des échantillons combinée à la faible puissance des tests statistiques utilisés pour rejeter l'EMH. Parmi les techniques disponibles pour tester l'efficacité des marchés, le test du *ratio de variance* – ou *Variance Ratio* – (VR) de LO et MACKINLAY [1988] - plus puissants que les tests de racine unitaire (Dickey-Fuller, Phillips-Perron . . .) - est de loin le plus populaire. L'intuition derrière le test du ratio de variance est la suivante : si le cours des actifs suit une marche aléatoire, alors sa variance croît linéaire-

ment avec l'intervalle des observations. Il en découle que la variance des rendements  $r(t)$  sur une période  $q$  doit être approximativement égale à  $q$  fois la variance sur une période. Depuis les travaux fondateurs de Lo-MacKinlay, de nombreuses extensions du test ont été proposées. WRIGHT [2000] documente une alternative non paramétrique du test VR en s'inspirant des tests des signes et rangs de Wilcoxon. Plus récemment, BELAIRE-FRANCH et CONTRERAS [2004] proposent de substituer le test VR par le test de Wright dans la procédure de CHOW et DENNING [1993] pour créer un test non paramétrique du ratio de variance multiple. Toutefois, en dépit de ces améliorations substantielles, la puissance des tests de ratio de variance reste faible et la statistique qui en résulte hautement incertaine. Aux USA la récente succession de « bulles » sur les marchés actions (Internet, *subprime crisis*, *debt crisis*, *quantitative easing* . . .) a fait rejaillir la polémique. Ainsi, les tenants du « retour vers la moyenne » comme WILKIE [2001] et surtout SIEGEL [2014] s'opposent toujours aussi violemment, notamment par voie de presse, aux adeptes de la marche aléatoire dont BODIE [1995] est l'un des chefs de file. Compte tenu des limites identifiées du test de ratio de variance, il paraît illusoire d'en faire l'outil central d'analyse de la dynamique des prix des actifs risqués. Partant de ce constat nous avons adopté une méthodologie résolument empirique reposant sur l'analyse des chroniques de prix des actifs sur très longue période. L'analyse s'appuie principalement sur une multiplicité de tests - qui pris isolément, ne sont pas nécessairement déterminants - et une technique probatoire reposant davantage sur un faisceau d'indices concordants que sur le verdict d'un critère unique.

### 2.2.2 Champ de l'étude et nature des données

Les enseignements tirés de l'examen des statistiques descriptives dépendent étroitement de la nature et de la profondeur des indices de performance utilisés. Précisons que nous avons utilisé les « indices bruts » (ou *total-returns* c'est-à-dire calculés dividendes ou intérêts réinvestis) des placements monétaires, obligataires et actions rétopolés sur la période 1895-2011 par Global Financial Data (GFD)<sup>3</sup>. Cette précision est indispensable.

---

3. Les calculs ont été faits à partir de chroniques de *total-returns* calculées par GFD ([www.globalfinancialdata.com](http://www.globalfinancialdata.com)). Pour des placements français les indices retenus sont : monétaires, obligataires (maturité 10 ans) et actions (SGF-Insee, SBF250 puis CAC All-Tradable). On utilise l'indice des prix à la consommation INSEE comme déflateur. Pour les Etats-Unis les indices sont les suivants : monétaires (*US Treasury Bills Total Return Index*), obligataires (*US Total Return Long-term Government Bond Index*) et

En effet, la presse financière, mais également nombre d'économistes fondent leurs analyses sur les propriétés des « indices nus » (hors dividendes), ce qui détermine des résultats pour le moins contrastés relativement aux conclusions tirés des indices bruts. Ainsi, comme l'atteste le graphique 2.1 ci-dessous, le différentiel de croissance entre l'indice nu et l'indice brut sur la période 1990-2015 est en moyenne de 3% l'an. On le devine, négliger les dividendes conduit à des conclusions radicalement différentes sur les performances d'un placement en actifs risqués.

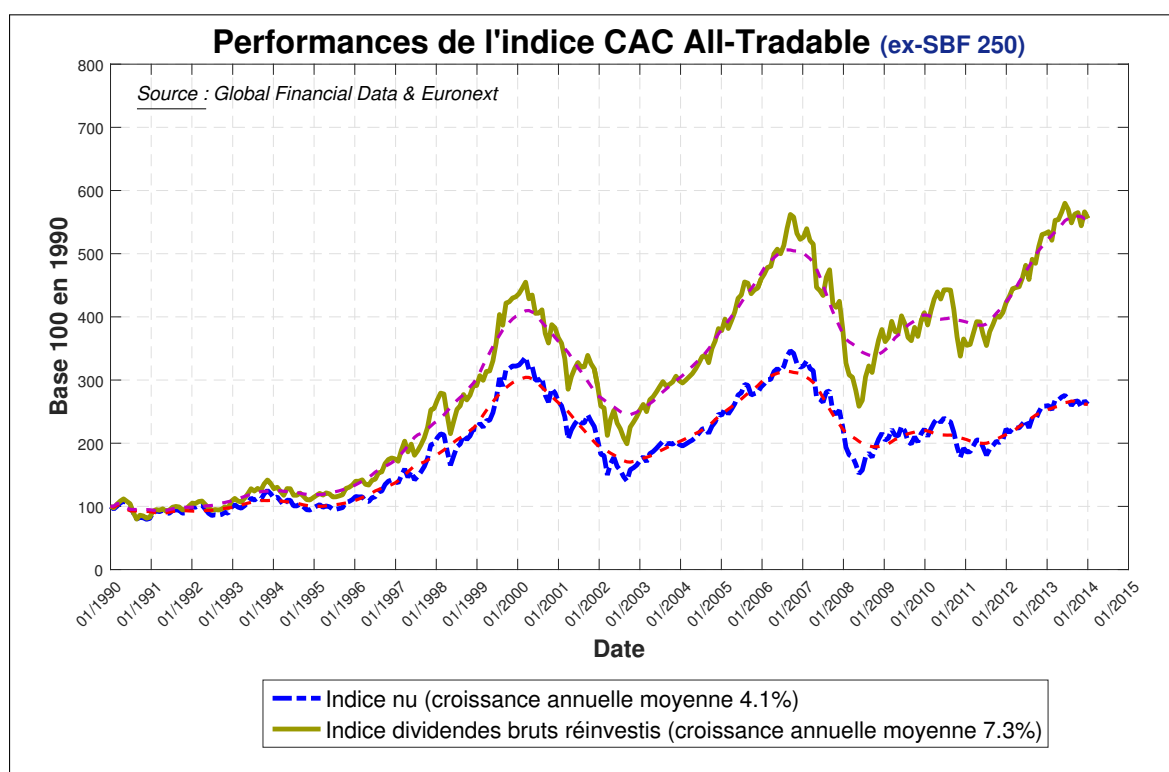


FIGURE 2.1 – Performances du CAC All-Tradable

L'étude se focalise sur deux pays aux économies différentes : la France et les USA. D'une part, il est instructif de juger du degré de convergence des performances d'une même classe d'actifs dans deux systèmes de production distincts et, d'autre part, entre 1914 et 1950, le placement en actions françaises s'est fortement dévalorisé par rapport au placement en actions américaines. Pendant cette période, durant laquelle les effets des deux guerres mondiales ont été sans commune mesure en France et aux Etats-Unis, les performances des actifs financiers nord-américains peuvent servir de référence pour évaluer l'incidence des périodes de guerre sur la dynamique du cours des actifs risqués.

actions (S&P500 *Composite Total Return Index*).

### Comment traiter les périodes de guerre ?

Lorsque l'on calcule la performance nominale des actifs financiers sur les 115 années subdivisées en trois périodes afin d'isoler les épisodes de guerres mondiales, on remarque que les actifs de même nature exprimés en monnaie locale procurent des rendements nominaux relativement similaires sur la période sous revue (Tableau 2.1a).

TABLEAU 2.1a – Performance nominale annuelle moyenne des classes d'actifs (dividendes réinvestis)

	1895-1914		1914-1950		1950-2011		1995-2011		1895-2011	
	Etats-Unis	France	Etats-Unis	France	Etats-Unis	France	Etats-Unis	France	Etats-Unis	France
Monétaires	4.3%	2.5%	2.2%	3.1%	4.6%	5.9%	3.3%	3.1%	3.8%	4.5%
Obligations	3.1%	2.2%	3.5%	3.4%	6.0%	7.3%	6.9%	6.5%	4.8%	5.3%
Actions	7.7%	6.7%	7.1%	10.8%	10.6%	10.5%	7.9%	6.8%	9.1%	10.0%
Prix	1.9%	0.5%	2.5%	13.5%	3.6%	4.7%	2.5%	1.6%	3.0%	6.8%

Néanmoins, l'examen de l'indice des prix invalide le constat; la forte inflation observée abaisse la performance réelle des actifs français (Tableau 2.1b).

TABLEAU 2.1b – Performance réelle annuelle moyenne des classes d'actifs (dividendes réinvestis)

	1895-1914		1914-1950		1950-2011		1995-2011		1895-2011		France 1895-2011 hors guerres*
	Etats-Unis	France	Etats-Unis	France	Etats-Unis	France	Etats-Unis	France	Etats-Unis	France	
Monétaires	2.4%	2.1%	-0.3%	-10.4%	1.0%	1.2%	0.8%	1.5%	0.8%	-2.2%	0.9%
Obligations	1.2%	1.8%	1.1%	-10.1%	2.3%	2.6%	4.5%	4.9%	1.8%	-1.5%	2.1%
Actions	5.8%	6.3%	4.6%	-2.8%	7.0%	5.8%	5.4%	5.2%	6.1%	3.2%	5.3%

\*Périodes de guerre exclues de l'analyse [1915-1920] et [1940-1948]

Considérant que l'avènement d'une guerre mondiale relève du concept d'incertitude radicale tel qu'établi par KNIGHT [1921], nous avons supprimé (à partir d'un critère d'écart type) les performances des actifs financiers français enregistrées sur les périodes [1915-1920] et [1940-1948]. Cette décision, radicale par rapport au travail de rétopolation conduit par les historiens de l'économie (ARBULU [1998], LE BRIS [2010], ou FRIGGIT [2010]), permet de rétablir un parallélisme de long terme entre les actifs français et nord-américains : en dehors d'une prime de risque (*excess return*) supérieure aux Etats-Unis, on note que les rendements réels des autres actifs sont proches. L'analyse rétrospective souligne les biais inhérents à l'analyse des performances nominales des actifs. La confusion entre les variations du niveau général des prix et du prix relatif des actifs conduit en outre à surévaluer les performances des actifs sans risque et à fausser les corrélations et la hiérarchie entre

les classes. Dans la mesure où l'économiste retient traditionnellement « l'effet d'encaisses réelles » comme un élément d'arbitrage des ménages entre consommation et épargne, il est naturel de conduire l'étude sur la base des performances des différentes classes d'actifs déflatées. Cette décision, ceci étant, a une conséquence remarquable : dès lors que l'objectif de l'investisseur n'est plus le gain nominal, mais le gain de pouvoir d'achat, la notion d'actif sans risque disparaît puisque la probabilité de perte n'est nulle pour aucun des actifs sous revue (graphiques 2.2a et 2.2b). Sur les horizons longs, seuls les placements à revenus variables<sup>4</sup> ont surperformé l'évolution des prix. Concernant les placements à revenus fixes, on constate que la probabilité de perte en pouvoir d'achat ne diminue pas avec le temps. On retrouve des résultats en phase avec les calculs de DE LAULANIÉ [2003].

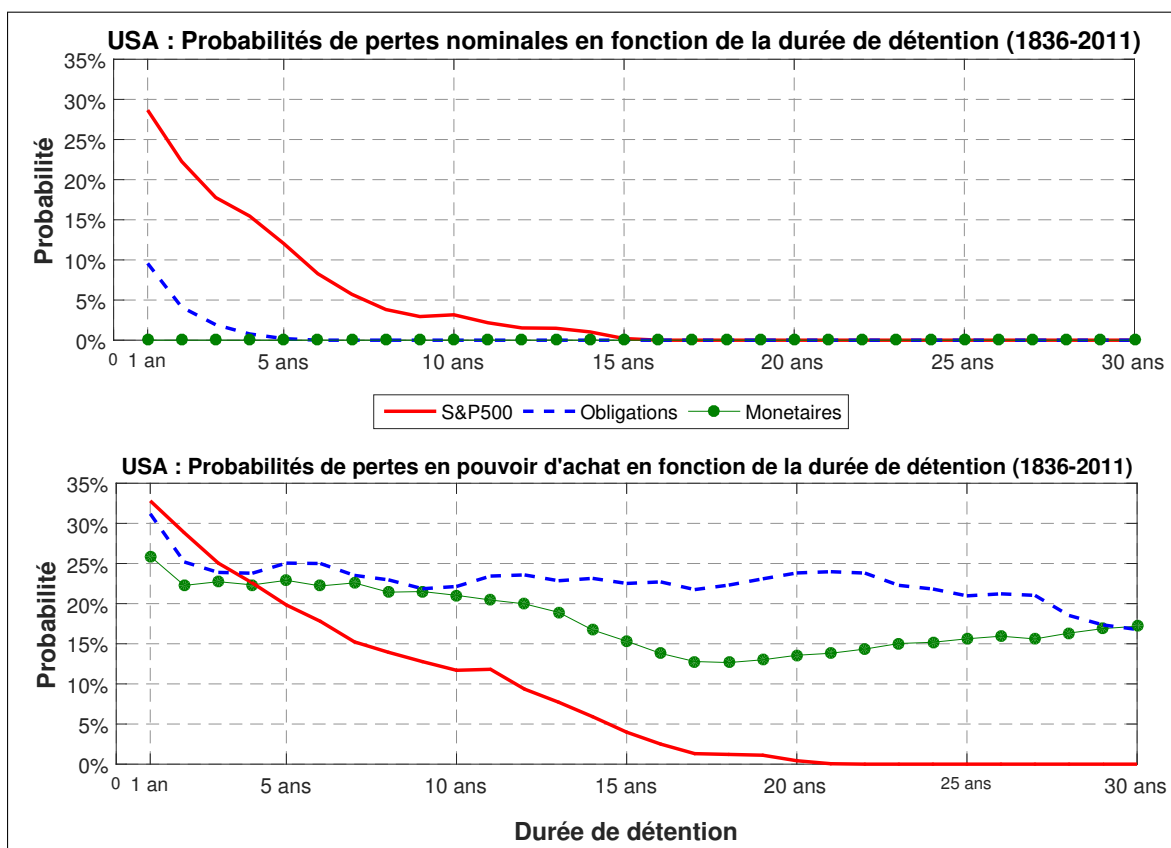


FIGURE 2.2a – Profils de pertes en fonction de la durée de détention des actifs - Etats-Unis

4. Ce constat ne se restreint pas à la France et aux Etats-Unis, comme le montrent les probabilités de perte calculées en annexe 1 pour le Royaume-Uni et le Japon.

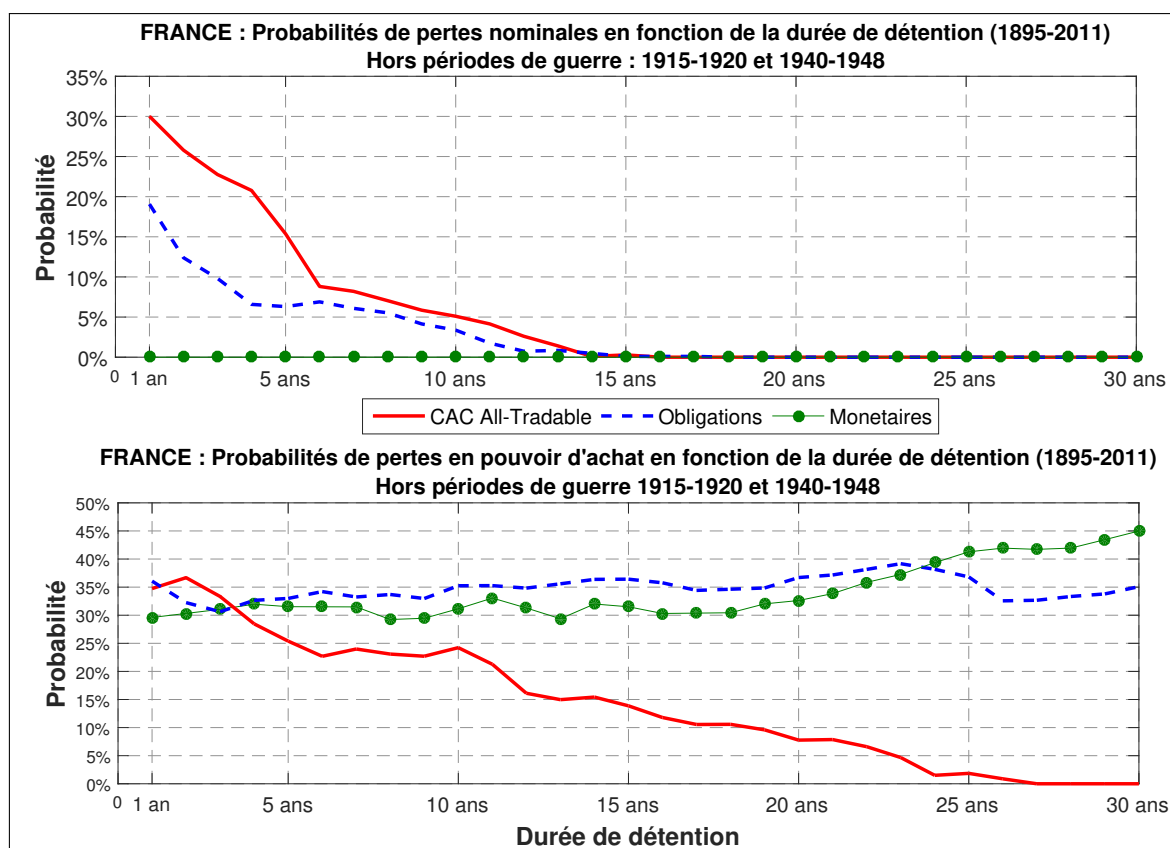


FIGURE 2.2b – Profils de pertes en fonction de la durée de détention des actifs - France

### 2.2.3 Risque réel et durée de détention

Déarrassé du phénomène d'*illusion monétaire*, il est utile d'étudier plus finement la nature des relations entre espérance de gain, risque et temps et notamment d'analyser les caractéristiques de la dispersion des rendements autour de leur espérance en fonction de l'horizon.

- Ce que montrent les statistiques descriptives

S'il est vrai que les actions sont le seul actif permettant le maintien du pouvoir d'achat des placements sur des horizons longs (proche de 30 ans en France entre 20 ans et 30 ans aux Etats-Unis) le risque de perte à court terme est beaucoup plus important que pour les valeurs à revenus fixes. Les statistiques (tableaux 2.2a et 2.2b) montrent également, sous réserve que la distribution des rendements soit raisonnablement gaussienne à long terme, que la vitesse de concentration des rendements autour de la valeur médiane est variable selon les supports d'investissement.

**CHAPITRE 2. DISTRIBUTION NON GAUSSIENNE DES RENDEMENTS : QUEL IMPACT SUR LES OPTIONS PAR DÉFAUT DES PLANS D'ÉPARGNE RETRAITE?**

TABLEAU 2.2a – Evolutions des rendements réels des actifs depuis 1895 - France

FRANCE : Rendements réels des actions (CAC All-Tradable)

	1 an	2 ans	3 ans	4 ans	5 ans	10 ans	20 ans	30 ans
1er centile	-38.8%	-26.4%	-18.3%	-14.3%	-12.3%	-5.9%	-2.9%	2.4%
médiane	5.4%	5.4%	5.3%	5.4%	5.4%	5.5%	5.5%	5.2%
99e centile	60.9%	43.7%	35.2%	33.7%	28.9%	18.4%	13.3%	10.5%

FRANCE : Rendements réels des Obligations (maturité 10 ans)

	1 an	2 ans	3 ans	4 ans	5 ans	10 ans	20 ans	30 ans
1er centile	-21.5%	-17.8%	-14.7%	-12.2%	-10.0%	-6.3%	-2.9%	-2.8%
médiane	2.1%	2.1%	2.1%	2.0%	2.0%	2.0%	1.8%	1.5%
99e centile	36.4%	25.4%	20.5%	18.4%	16.7%	12.2%	9.9%	7.5%

FRANCE : Rendements réels des monétaires

	1 an	2 ans	3 ans	4 ans	5 ans	10 ans	20 ans	30 ans
1er centile	-19.4%	-16.4%	-13.0%	-11.8%	-10.6%	-6.9%	-3.9%	-2.4%
médiane	0.9%	1.0%	1.0%	1.0%	1.0%	0.9%	0.8%	0.5%
99e centile	18.2%	14.3%	10.9%	9.9%	9.1%	6.2%	4.7%	3.4%

TABLEAU 2.2b – Evolutions des rendements réels des actifs depuis 1895 - Etats-Unis

USA : Rendements réels des actions (S&P500)

	1 an	2 ans	3 ans	4 ans	5 ans	10 ans	20 ans	30 ans
1er centile	-38.6%	-28.4%	-22.8%	-14.1%	-10.5%	-4.1%	0.1%	3.0%
médiane	6.2%	6.3%	6.2%	6.2%	6.3%	6.3%	6.5%	6.6%
99e centile	55.4%	43.0%	32.3%	31.0%	28.5%	18.3%	13.0%	10.3%

USA : Rendements réels des Obligations (*US 10-Year Government Bond Index*)

	1 an	2 ans	3 ans	4 ans	5 ans	10 ans	20 ans	30 ans
1er centile	-17.2%	-15.3%	-13.8%	-12.1%	-10.3%	-5.0%	-2.4%	-1.4%
médiane	1.8%	1.8%	1.7%	1.7%	1.7%	1.7%	1.6%	1.5%
99e centile	34.7%	23.4%	17.2%	15.5%	16.0%	10.3%	8.0%	6.4%

USA : Rendements réels des monétaires

	1 an	2 ans	3 ans	4 ans	5 ans	10 ans	20 ans	30 ans
1er centile	-13.2%	-11.4%	-10.1%	-9.1%	-7.5%	-5.0%	-2.9%	-1.6%
médiane	0.8%	0.8%	0.8%	0.8%	0.8%	0.8%	0.7%	0.7%
99e centile	13.4%	12.6%	10.6%	8.9%	7.8%	5.6%	3.7%	2.3%

La remarque est particulièrement vraie pour les actions qui n'offrent des perspectives de gain et de perte élevées que sur les horizons courts. A long terme, du fait de la réduction de la volatilité, les rendements spéculatifs sont inaccessibles.

Au-delà d'un léger surcroît de rendement, on observe ainsi le même phénomène de réduction de la variance en France et aux Etats-Unis. Pour juger si cette propriété représente un intérêt pour les investisseurs, il est nécessaire de sortir du champ de la comparaison entre actifs pour faire référence aux propriétés d'une loi paramétrique. Si la réduction de la variance des rendements des placements actions ne domine pas un bruit blanc gaussien les conclusions tirées des statistiques descriptives devront être relativisées. En effet, une fois intégré, ce processus suit une marche aléatoire, c'est-à-dire un processus sans mémoire dans lequel les chocs sont permanents. Soit des propriétés qui correspondent à la définition de l'efficience des marchés financiers donnée par FAMA [1965]. C'est en effet dans l'article fondateur « The Behavior of Stock-Market Prices » que Fama postule qu'« un marché financier est dit efficient si, et seulement si, l'ensemble des informations disponibles concernant chaque actif financier coté sur ce marché est immédiatement intégré dans le prix de cet actif ». Il découle de cette théorie que si les marchés boursiers sont efficients, ils sont imprédictibles. Dans une dynamique sans mémoire, la probabilité de perte n'est pas fonction de la durée de placement et un investisseur risquophobe fuira ce type de placement.

- Une dilution du risque variable selon les actifs

Si l'on retient la volatilité comme *proxy* du risque, on peut en comparer les valeurs historiques et théoriques au cours du temps. Un survol des graphiques (2.3 à 2.5) croisant **volatilité** et horizon pour les actifs étudiés, permet d'établir plusieurs constats. Une fois de plus, le comportement des actions se distingue de celui des placements à revenus fixes. C'est le seul actif dont la réduction de la **volatilité** domine celle d'une loi normale de même espérance. Concernant les actions, l'évolution et la valeur des volatilités historiques présentent de fortes similitudes des deux côtés de l'Atlantique. La volatilité des placements monétaires et obligataires est en revanche plus élevée en France en raison de périodes d'inflation plus marquées qu'aux Etats-Unis au cours de la période sous revue.



CHAPITRE 2. DISTRIBUTION NON GAUSSIENNE DES RENDEMENTS : QUEL IMPACT SUR LES OPTIONS PAR DÉFAUT DES PLANS D'ÉPARGNE RETRAITE ?

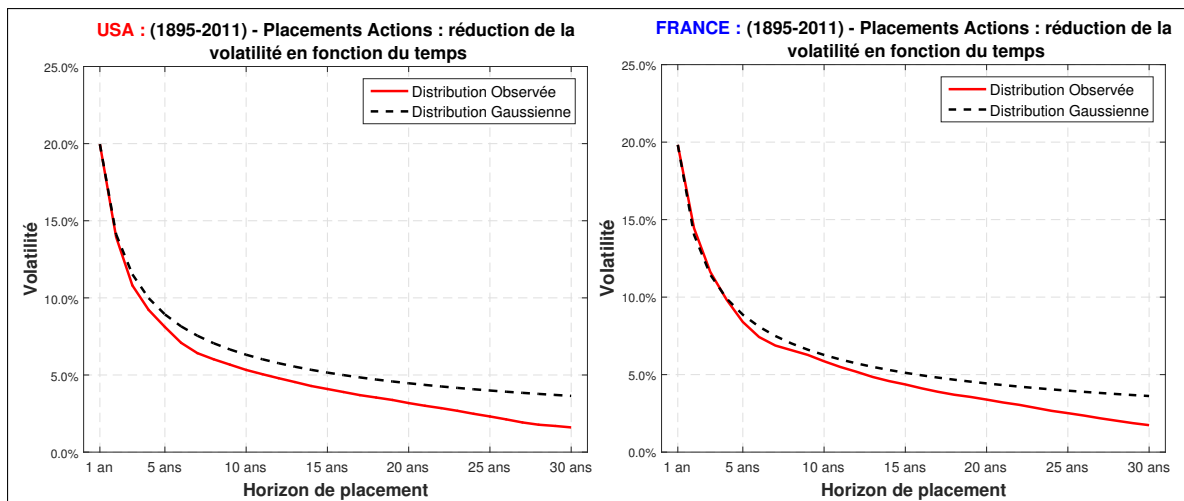


FIGURE 2.3 – Volatilité des actions et horizons des placements - France/Etats-Unis

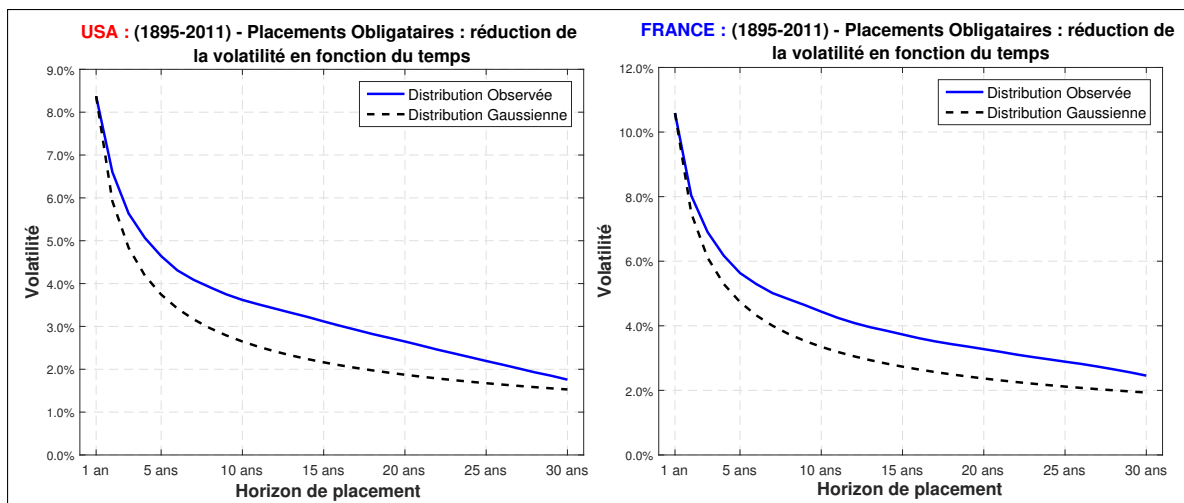


FIGURE 2.4 – Volatilité des obligations et horizons des placements - France/Etats-Unis

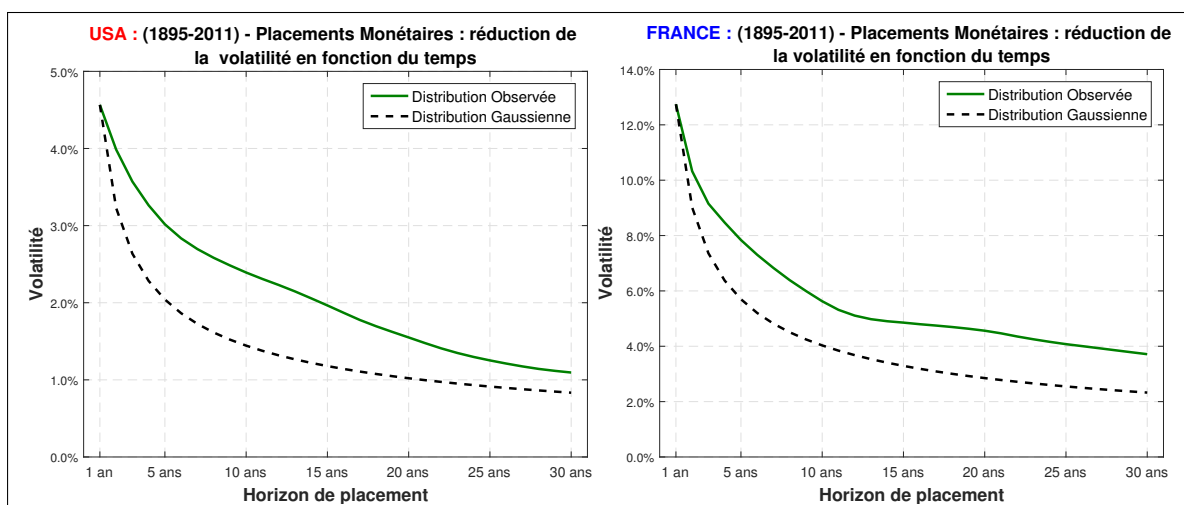


FIGURE 2.5 – Volatilité des monétaires et horizons des placements - France/Etats-Unis

Le surcroît de volatilité des actifs à revenus fixes relativement à une loi normale peut être imputé à une forte présomption de non stationnarité. Dans un processus stationnaire

au sens faible, la série oscille autour de sa moyenne avec une variance constante. Par opposition, l'origine de la non stationnarité des actifs obligataires et monétaires peut provenir d'une dépendance de leur espérance et/ou de leur variance par rapport au temps. Le fait que les actions soient qualifiées de stationnaires par les tests (tableau 2.3) démontre l'invariance de l'espérance de rendement par translation dans le temps. Cette propriété, qui distingue les actions des autres classes d'actifs, n'apporte toutefois, à elle seule, aucune certitude à l'épargnant concernant le montant du capital constitué au terme de son investissement. Rappelons que les tests de racine unitaire sont effectués sur la croissance des indices boursiers. Le verdict des tests nous apprend que les cours boursiers sont stationnaires après différentiation (*Difference Stationnary (DS)*).

TABLEAU 2.3 – Tests de stationnarité des actifs

<b>Tests de Stationnarité : rendement réel des actifs (1895 - 2011)</b>						
	<b>Dickey Fuller Augmenté</b>			<b>KPSS Test</b>		
Log-Returns USA	stat.	cValue	verdict	stat.	cValue	verdict
Action	-41.5286	-1.9416	Stationnaire	0.0252	0.1460	Stationnaire
Obligation	-39.7891	-1.9416	Stationnaire	0.3734	0.1460	Non Stationnaire
Monétaire	-38.1088	-1.9416	Stationnaire	0.9038	0.1460	Non Stationnaire
	<b>Dickey Fuller Augmenté</b>			<b>KPSS Test</b>		
Log-Returns France	stat.	cValue	verdict	stat.	cValue	verdict
Action	-30.2137	-1.9416	Stationnaire	0.0507	0.1460	Stationnaire
Obligation	-31.6050	-1.9416	Stationnaire	0.1884	0.1460	Non Stationnaire
Monétaire	-21.5008	-1.9416	Stationnaire	0.5440	0.1460	Non Stationnaire

Or, une série *DS* ne revient pas systématiquement autour de sa tendance déterministe en niveau après un choc, car le choc affecte de manière permanente la composante

stochastique de la série<sup>5</sup>. En d'autres termes, le rendement des actions est régi par un processus de retour vers la moyenne, mais le prix des actions peut être imprévisible puisqu'une fois intégrée, la série DS suivra une marche aléatoire avec dérive. Or, pour les épargnants, la détention d'actifs risqués à long terme ne semble avoir d'intérêt que si les prix, et non les rendements, sont caractérisés par un processus de retour à la moyenne (TS process).

Pour préciser la nature de la relation entre réduction du risque et durée de placement, il reste à se pencher sur la distribution des rendements au cours du temps, en effet, les déductions tirées des indicateurs de volatilité peuvent être trompeuses si les variables ne sont pas correctement décrites par leur deux premiers moments (espérance, variance). Afin de s'en assurer, nous avons comparé les distributions théoriques et historiques des rendements à des horizons contrastés. L'exercice n'est conduit que pour les actions qui sont le seul actif présentant des propriétés de réduction de la variance susceptibles de justifier les stratégies de **diversification temporelle** qui repose sur l'idée que le risque supporté par l'investisseur est d'autant plus faible que l'horizon d'investissement est long. La fonction de répartition des rendements historiques est d'abord comparée à celle d'une loi gaussienne d'espérance variance identique sur l'ensemble des placements actions de 12 mois glissants réalisables sur la période 1895-2011. Les distributions cumulatives s'avèrent légèrement plus risquées que des lois gaussiennes de même espérance-variance. En effet (tableau 2.4), on note des kurtosis élevés qui sont le propre des distributions leptokurtiques (queues de distribution épaisses) et des skewness négatifs qui traduisent des profils de risque asymétriques du côté des pertes. L'exercice, reproduit sur la même fenêtre pour les placements à 360 mois (30 ans - tableau 2.4), conforte les intuitions déduites de l'analyse de l'évolution des **volatilités**. On constate, en premier lieu, que la fonction cumulative des probabilités historiques est raisonnablement normale. La tendance leptokurtique a disparu et les skewness traduisent désormais des profils de risque asymétriques du côté des gains.

---

5. C'est le cas lorsque le rendement des actions est stationnaire sous la forme :  $(1-L)dX_t = b + \varepsilon_t$  où  $\varepsilon_t \xrightarrow{i.i.d} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ . Avec L l'opérateur retard,  $d$  l'ordre d'intégration et  $b$  la dérive. En niveau, l'expression s'écrit :  $X_t = b + X_{t-1} + \varepsilon_t = b + (b + X_{t-2} + \varepsilon_{t-1}) + \varepsilon_t = \dots = X_0 + bt + \sum_i \varepsilon_{t-i}$ . La composante stochastique correspond au cumul des innovations  $\varepsilon_{t-i}$ . Autrement dit le processus garde une mémoire permanente des innovations passées.

CHAPITRE 2. DISTRIBUTION NON GAUSSIENNE DES RENDEMENTS : QUEL IMPACT SUR LES OPTIONS PAR DÉFAUT DES PLANS D'ÉPARGNE RETRAITE ?

TABEAU 2.4 – Distribution du rendement des actions sur la période 1895-2011

	Durée de placement 12 mois		Durée de placement 360 mois	
	USA S&P 500	FRANCE CAC All-Tradable	USA S&P 500	FRANCE CAC All-Tradable
Espérance	6.20%	5.40%	6.60%	5.20%
Ecart type	20.70%	20.53%	1.61%	1.75%
Kurtosis	4.85	3.71	2.55	3.12
Skewness	-0.53	-0.35	0.12	0.70

Mais l'enseignement majeur vient de la comparaison avec la distribution théorique de paramètres  $\mu T, \sigma_1 / \sqrt{T}$  (graphiques 2.6 et 2.7). Sur les actions américaines comme sur les actions françaises, si on compare les fonctions de répartition des rendements historique (F) et théorique (G), on voit clairement que la répartition de F est moins dispersée que celle de G. G a la même distribution que  $F + \varepsilon$  avec  $E(\varepsilon/F) = 0$ . Comme les distributions ont les mêmes espérances et que  $V(F) < V(G)$ , un individu risquophobe préférera F à G.

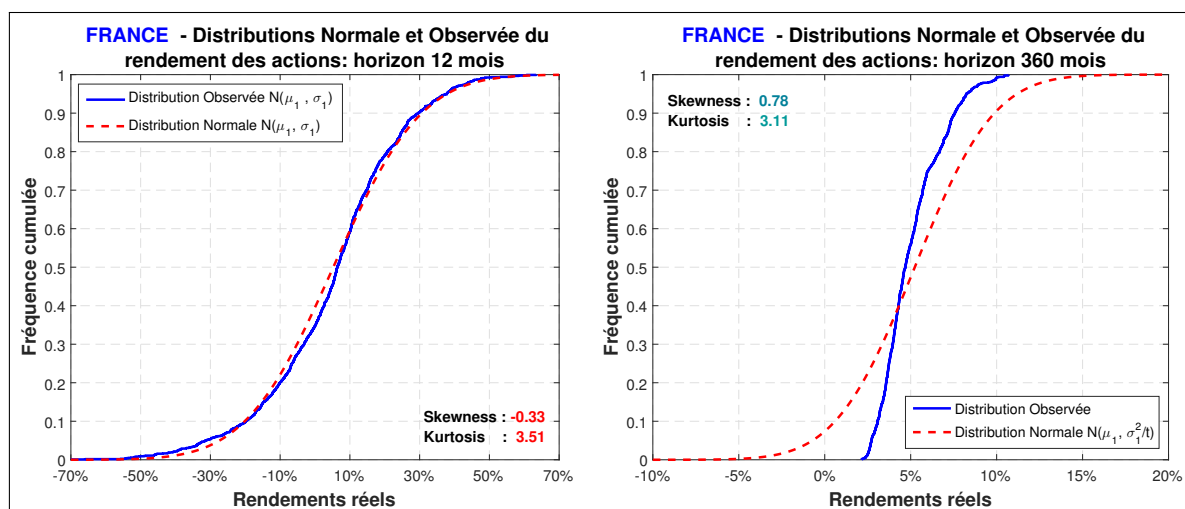


FIGURE 2.6 – Fonctions de répartition - actions françaises (1895-2011)

Sur les horizons longs, la vitesse de concentration des rendements autour de leur espérance est incontestablement plus rapide que dans une loi normale. Pour synthétiser la dynamique des rendements des actions au cours de chaque période, il est pratique d'utiliser un graphique en surface vu du dessus, similaire aux cartes topographiques 2D, où l'axe horizontal représente l'espérance de rendement, et l'axe vertical la durée de placement tandis que le troisième axe (vu du dessus) symbolise l'écart entre les valeurs de la fonction de répartition normale (G) et de celle des rendements du S&P500 (F).

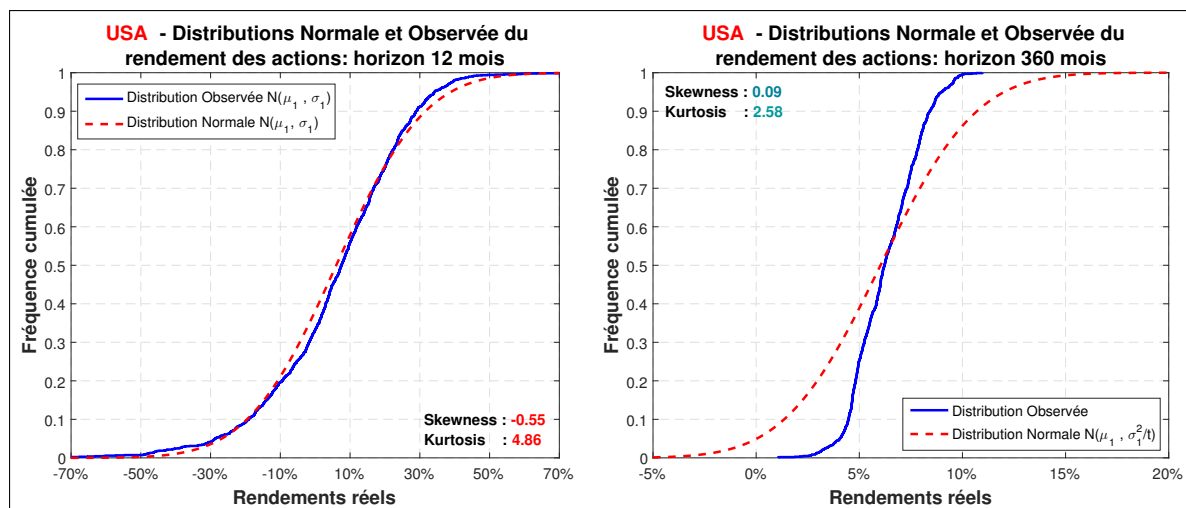


FIGURE 2.7 – Fonctions de répartition - actions américaines (1895-2011)

Le graphique 2.8 montre clairement que sur les horizons courts (de 1 à 5 ans) la fonction de répartition empirique est dominée par une loi normale de même espérance (couleur sombre sur la surface) ce qui révèle l'existence de *skewness*<sup>6</sup> négatif.

A moyen terme, les queues épaisses de la distribution leptokurtique disparaissent et la distribution empirique offre une meilleure protection contre les rendements inférieurs à la moyenne qu'une distribution normale de même espérance (couleur claire sur le graphique surface). Concomitamment la probabilité de dépasser le rendement moyen se réduit relativement à une loi normale : sur des horizons longs, du fait de la réduction de la volatilité, les rendements spéculatifs sont inaccessibles. Avec l'allongement de la durée de détention, les résultats montrent que les rendements sont plus concentrés autour de la moyenne qu'ils ne le seraient dans une gaussienne.

6. L'explication la plus communément avancée pour expliquer l'existence d'asymétrie dans le cours des actions tient à la relation entre le levier financier d'une société (apprécié par le ratio : « dette totale/capitaux propres ») et sa volatilité ([BLACK et SCHOLÉS, 1973]). En effet, en cas de retournement de tendance, une société ayant un levier élevé devient mécaniquement plus risquée, et son cours boursier enregistre une plus grande volatilité. L'effet rétroactif (ou effet « feed back ») est également considéré comme une des principales sources des variations asymétriques de la volatilité. Par exemple, BEKAERT et WU [2000] montrent qu'une volatilité en hausse incite les investisseurs à exiger une prime de risque excédentaire pour rémunérer davantage les actifs qui deviennent plus risqués. D'où une hausse du rendement exigé, et par conséquent un repli immédiat des cours. Or, ce repli est plus élevé que l'appréciation des cours causée par une baisse de la volatilité de même amplitude. Parmi l'abondante littérature sur le sujet, signalons VERONESI [1999] qui montre que les investisseurs sur-réagissent aux mauvaises nouvelles pendant les périodes favorables et sous-réagissent aux bonnes nouvelles durant les périodes défavorables ou encore la contribution originale de HIBBERT et collab. [2008] qui analysent la relation dynamique entre les rendements du S&P500 et les variations de la volatilité implicite sur des cotations à hautes fréquences. Ils ne décèlent ni « effet de levier » ni « effet de feed back ». Ils développent une explication alternative reposant sur les biais cognitifs qui affecteraient le comportement des « traders ».

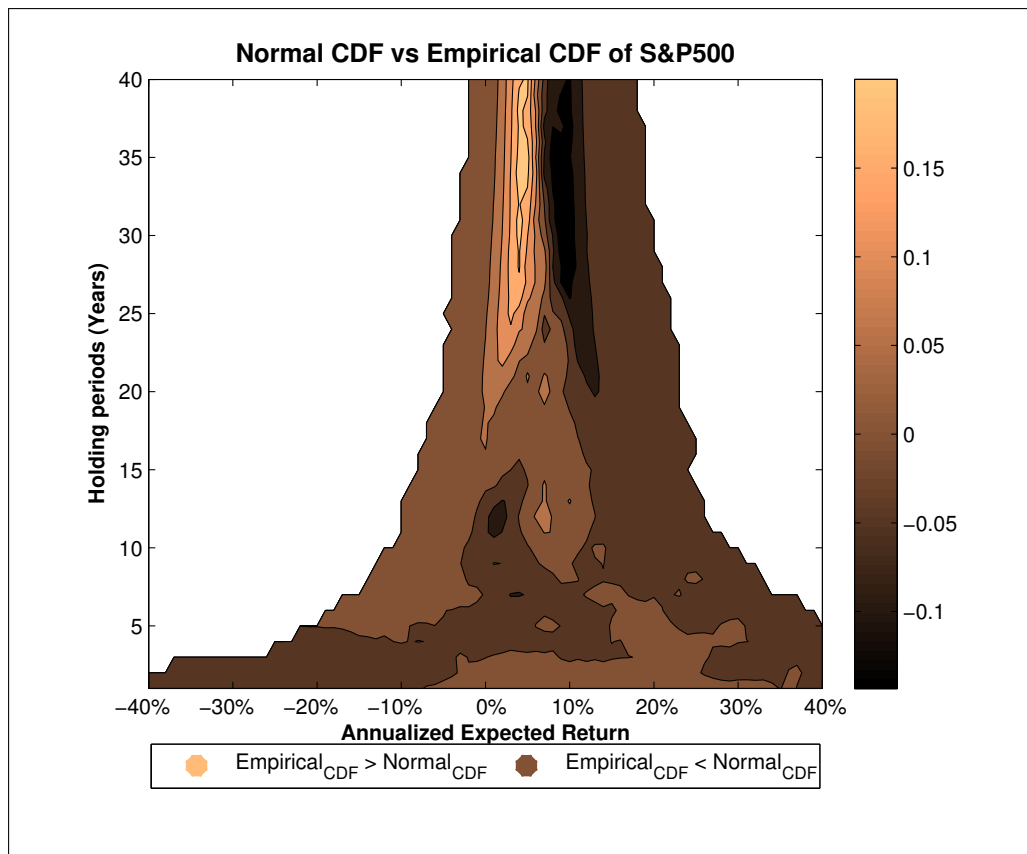


FIGURE 2.8 – Volatilité des rendements sur différents horizon de temps

Cela indique que la vitesse de réduction de la **volatilité** des rendements du S&P500 au cours du temps est supérieure à la celle d'un bruit blanc gaussien. Ce diagnostic, s'il est avéré, remet en cause l'hypothèse d'efficience des marchés et plaide pour une modélisation alternative de la dynamique des cours dans laquelle les mouvements extrêmes de prix observés sur les marchés financiers sont transitoires. C'est-à-dire qu'une forte variation dans un sens est suivie de mouvements de sens opposés qui corrigent tendanciellement la déviation initiale et ramènent les prix des actifs vers leurs valeurs fondamentales. Comme le mécanisme de correction des mouvements extrêmes est d'autant plus probable que la durée de placement est longue, l'allongement de la durée de placement conduit donc à une réduction du risque. Naturellement, ce verdict doit être nuancé car de nombreux auteurs, comme **SPIERDIJK et collab. [2012]**, ont montré que la vitesse de **retour vers la moyenne** est variable dans le temps. Toutefois, les résultats de notre étude attestent que le retour à la moyenne n'est pas exclusivement lié à un phénomène de rattrapage consécutif à la seconde guerre mondiale comme suggéré par **KIM et collab. [1991]**. La comparaison des données avant et après la Seconde Guerre mondiale (graphiques 2.9

à 2.10) montre que la période d'après-guerre est également caractérisée par un processus de concentration des rendements des actifs risqués autour de leur espérance plus rapide que dans une loi gaussienne.

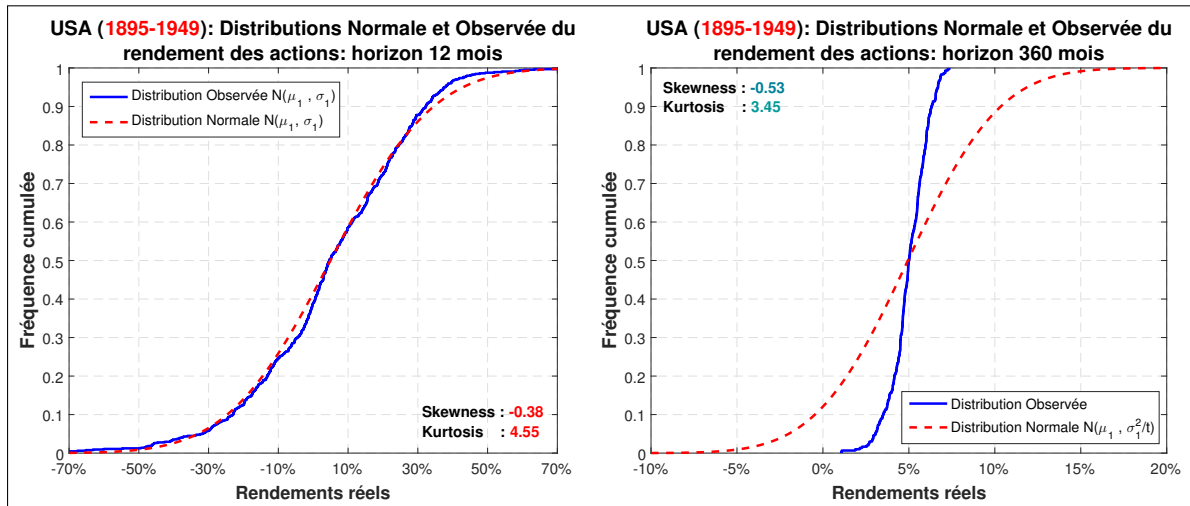


FIGURE 2.9 – Fonctions de répartition - actions américaines (1895-1949)

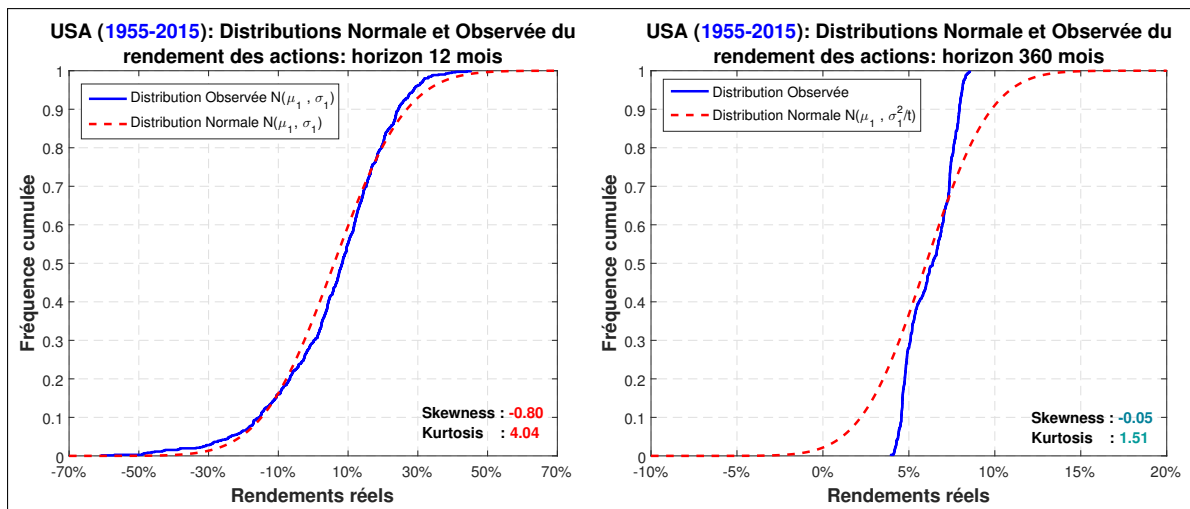


FIGURE 2.10 – Fonctions de répartition - actions américaines (1955-2015)

## 2.2.4 Une évaluation orthodoxe de l'efficacité des marchés

Afin de tester de manière plus académique l'efficacité au sens faible des marchés boursiers, nous avons complété notre analyse par des tests de « ratios de variance » sur le logarithme des cours nominaux des actions sur les marchés français et nord-américain. Depuis la contribution de **LO et MACKINLAY [1988]**, le test du « ratio de variance » et ceux qui s'inscrivent dans son prolongement - comme le test non paramétrique de **WRIGHT**

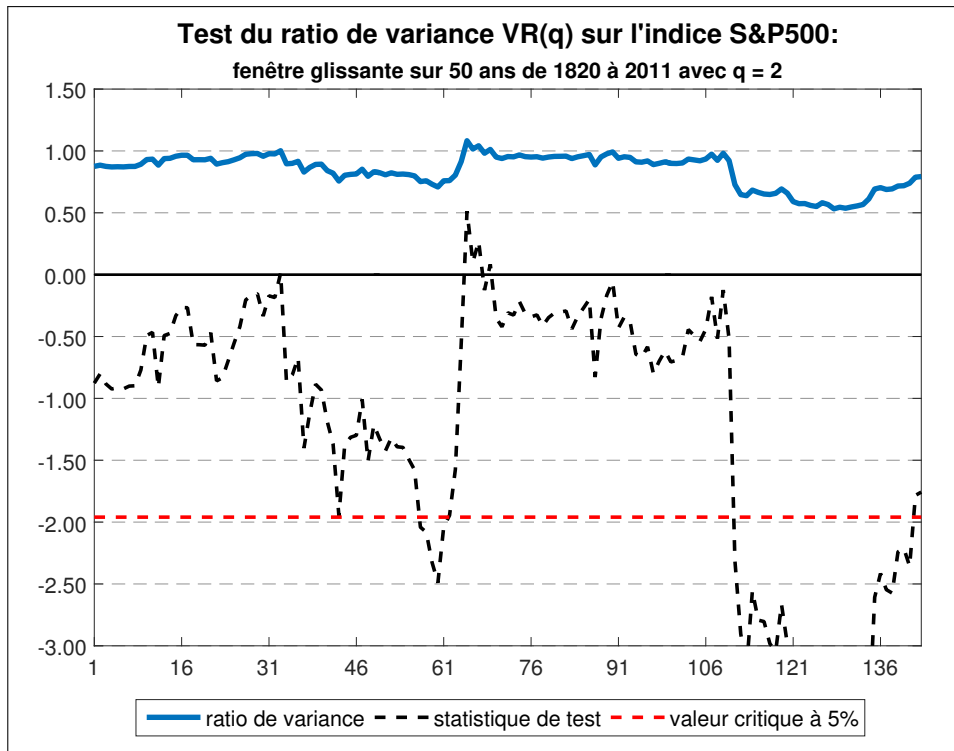
[2000] par exemple - sont devenus les outils privilégiés d'analyse de l'efficience des marchés. L'intuition derrière ce test est la suivante : si le cours des actifs suit une marche aléatoire, alors sa variance croît linéairement avec l'intervalle des observations. Il en découle que la variance des rendements  $r_t$  sur une période  $q$  doit être approximativement égale à  $q$  fois la variance sur une période unitaire. Si on note  $\text{Var}(r_t(q))$  la variance de la somme des différences premières du logarithme des cours sur la période  $q$ , alors le test du ratio de variance VR se note :

$$\text{VR}(q) = \frac{\text{Var}(r_t(q))}{q\text{Var}(r_t)} \quad (2.1)$$

LO et MACKINLAY ont montré que pour  $q = 2$ ,  $\text{VR}(2) - 1 = \rho(1)$ , où  $\rho(1)$  est le coefficient d'autocorrélation du premier ordre. Un ratio proche de l'unité suggère donc une marche aléatoire, tandis qu'une déviation significative indique une autocorrélation des rendements. Un ratio de variance inférieur à l'unité plaide pour un processus de « retour vers la moyenne ». Compte tenu de la forte sensibilité des tests, les ratios de variance ont été estimés sur une fenêtre glissante. La méthode favorise la synthèse visuelle des estimations (graphiques 2.11). La lecture des graphiques montre que les tests effectués, sur des fréquences annuelles, déterminent des ratios de variance majoritairement inférieurs à l'unité pour le CAC-All-Tradable et le S&P500, ce qui plaide pour un processus de retour vers la moyenne. Pour ne pas introduire de rupture dans l'autocorrélation sérielle des cours, les périodes de guerre ont été prises en compte dans les calculs. Ces résultats sont naturellement fragiles compte tenu des seuils de significativité calculés. Toutefois, ils sont en ligne avec les travaux de POTERBA et SUMMERS [1988], BEC et GOLLIER [2009] ou encore HAMAYON et LEGROS [2008], qui concluent que les variations excessives de prix observés sur les marchés financiers sont transitoires. Ces arguments légitiment les stratégies de diversification temporelle sur les produits d'épargne à long terme.



(a) Indice américain



(b) Indice français

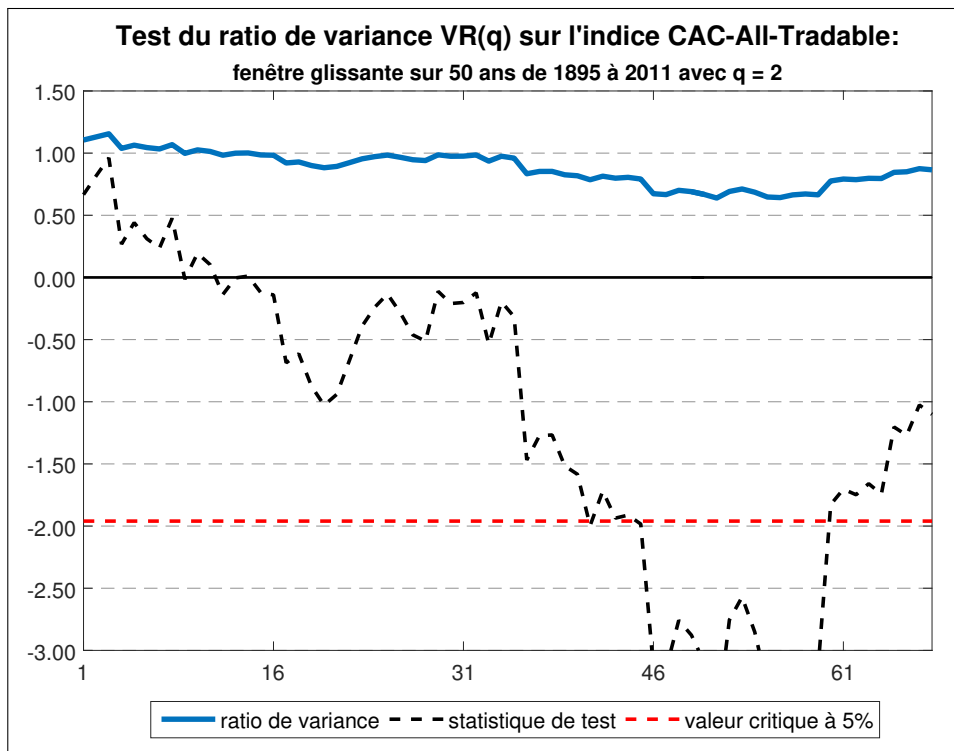


FIGURE 2.11 – Tests du ratio de ratios de variance

## 2.2.5 Production et cours boursiers : une bonne synchronisation des cycles

Si la dynamique des cours est régie par un processus de *retour vers la moyenne*, on devrait s'attendre à l'existence d'une certaine connexion entre économie réelle et sphère financière. Afin de vérifier empiriquement l'assertion, les cycles de la production industrielle sont comparés à ceux des cours boursiers. Pour établir une chronologie des cycles, on a classiquement utilisé un filtre de **HODRICK et PRESCOTT [1997]**<sup>7</sup> pour décomposer les composantes cyclique et tendancielle des séries. Puis on a utilisé l'algorithme de **BRY et BOSCHAN [1971]** pour dater les phases de récession. Pour l'essentiel, l'algorithme identifie un maximum local (pic),  $y_i$  si  $\{y_{i+k} < y_i > y_{i-k}\}$  et un minimum (creux)  $y_i$  si  $\{y_{i+k} > y_i < y_{i-k}\}$ . Dans la pratique, l'algorithme doit répondre à certaines exigences supplémentaires pour éliminer les faux points de retournement. Nous entendons par là des règles qui évitent les cycles de longueur ou d'amplitude insuffisante et une procédure pour faire en sorte que pics et creux se succèdent. L'exercice conduit en France (graphique 2.12) et aux Etats-Unis (graphique 2.13) depuis janvier 1970 détermine une bonne concordance cyclique entre la croissance économique mesurée par la production industrielle et l'évolution des cours boursiers avancés de 6 mois. C'est avec ce décalage moyen que la corrélation entre les séries est la meilleure (respectivement 0.53 et 0.65 en France et aux Etats-Unis). A l'exception notable du krach d'octobre 1987, lié non à un retournement de conjoncture mais à un relèvement brutal des taux d'intérêt outre Atlantique destiné à enrayer la baisse du dollar, les cours de bourse sont donc des indicateurs avancés de l'activité économique.

---

7. Soit  $y_t = g_t + c_t$  où  $g_t$  est la valeur du trend en  $t$ ,  $c_t$  la composante cyclique. Pour déterminer  $g_t$  l'idée de départ du filtre de **Hodrick-Prescott (HP)** est de proposer une fonction qui fait l'arbitrage entre 2 objectifs :

- trouver les valeurs de  $g_t$  qui approchent aussi bien que possible  $y_t$ ;
- trouver des valeurs  $g_t$  dont l'accélération  $(\Delta g_{t+1} - \Delta g_t)$  soit la plus faible possible.

Le programme de minimisation est le suivant :  $\min \sum (y_t - g_t)^2 + \lambda \sum (\Delta g_{t+1} - \Delta g_t)^2$ . Dans ce programme,  $\lambda$  est un paramètre ad hoc qui reflète l'importance relative que l'on accorde à la souplesse de la tendance par rapport à l'ampleur des cycles.

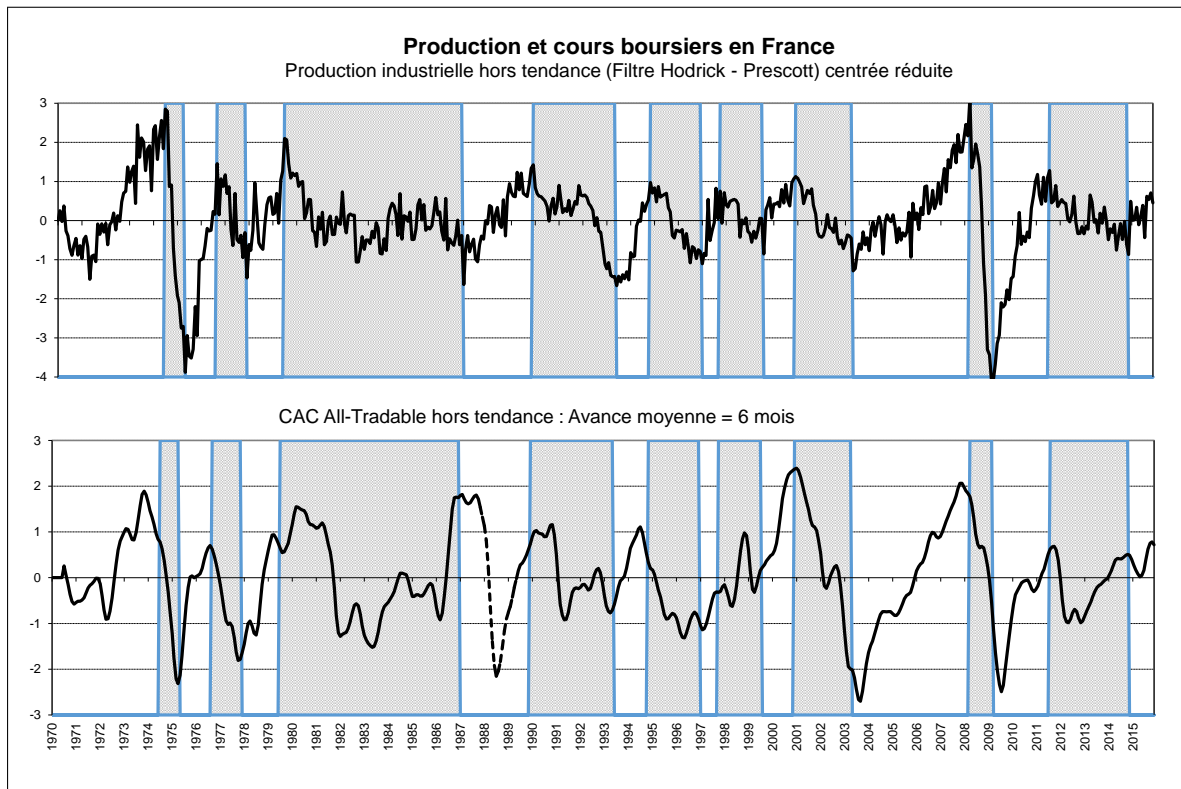


FIGURE 2.12 – Production et cours boursiers - France

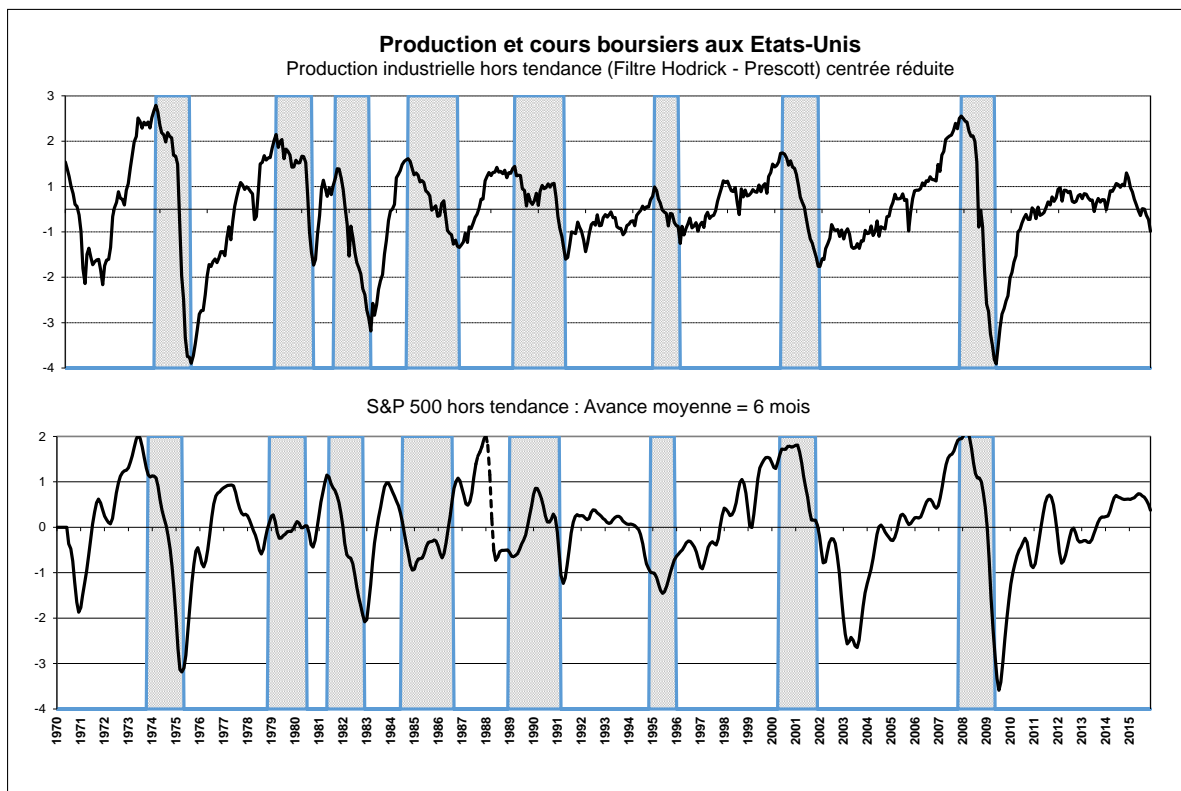


FIGURE 2.13 – Production et cours boursiers - Etats-Unis

Ces résultats sont un argument de plus à l'encontre de l'hypothèse de marche aléatoire des marchés boursiers, puisque les prix des actifs risqués semble dépendre des anticipations formulées sur la croissance économique future. L'analyse de la distribution historique des rendements, dont la vitesse de réduction de la variance domine celle d'une loi normale, la bonne concordance cyclique entre croissance et cours de bourse sont autant d'indices qui accréditent l'existence de *retour vers la moyenne* ou « *mean reversion* » dans le processus qui régit le cours des actions.

## 2.2.6 Un résumé des enseignements historiques

Si l'on s'intéresse à la performance réelle des actifs, on peut dresser plusieurs constats. Dès lors que l'on s'attache au maintien du pouvoir d'achat de l'épargne, la notion d'actif sans risque disparaît : qu'on s'intéresse à la France ou aux Etats-Unis, les supports à revenus fixes ne battent pas l'inflation sur longue période.

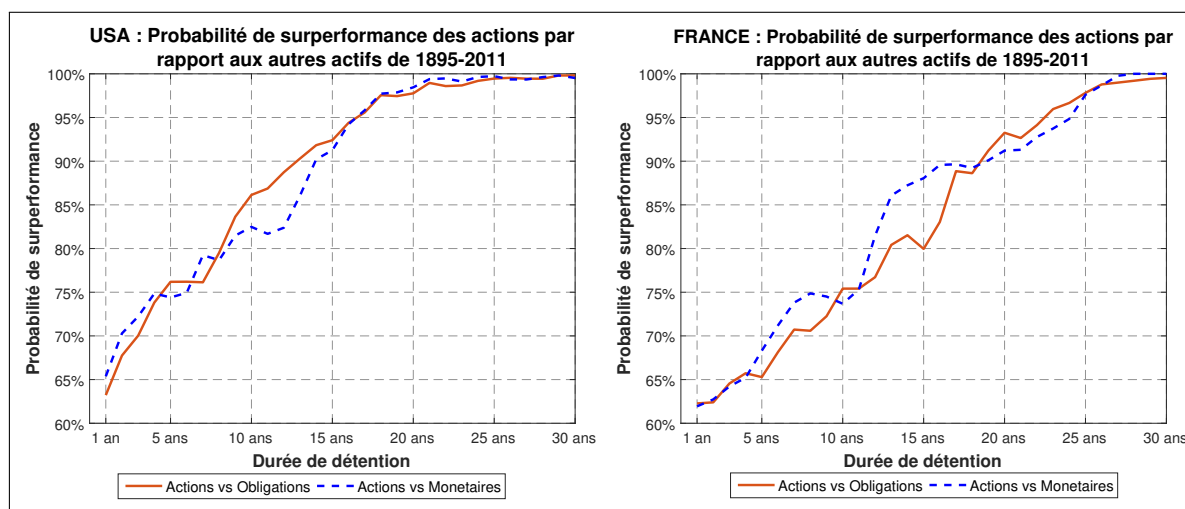


FIGURE 2.14 – Probabilité de surperformance des actions - France et Etats-Unis

En outre, hors périodes de guerre mondiale, on note une forte convergence entre les valeurs réelles des actifs en France et aux Etats-Unis. De même, l'évolution de la hiérarchie entre actifs en fonction de l'horizon de placement dans les deux pays présente de fortes similarités. Au-delà de 25 ans et 30 ans respectivement en France et aux Etats-Unis, la probabilité de surperformance des actions par rapport aux autres actifs atteint 100% (graphiques 2.14). En définitive, le focus sur les propriétés des actifs risqués s'est révélé d'une grande richesse. Les résultats de la batterie de tests effectuée sur les chroniques des

cours boursiers sont convergents. Ils indiquent que, sur le long terme, la dynamique des prix serait régie par un processus de **retour vers la moyenne**. Autrement dit, que les rendements des actions ne sont pas déconnectés de la croissance économique potentielle et, par-là, que l'allongement de l'horizon de placement conduit à une réduction du risque.

## 2.3 Allocation de cycle de vie paramétrique vs semi paramétrique

L'étude des caractéristiques des classes d'actifs nous permet de tirer de précieux enseignements sur la hiérarchie des placements en fonction du temps. Elle a toutefois une portée limitée en matière de choix de portefeuille car elle n'intègre pas les effets de la diversification sur le risque des placements. Dans cette seconde partie nous allons donc nous intéresser aux performances des placements issues de la combinaison des différentes classes d'actifs afin d'évaluer les avantages et les limites de stratégies d'**allocation par défaut** proposées par les plans d'épargne à **cotisations définies**<sup>8</sup>. En écartant des options retenues les techniques reposant sur des instruments financiers sophistiqués, de même que les placements ne garantissant qu'une performance au terme et pénalisant les sorties anticipées ont été exclus du champ de l'analyse (fonds à promesse, fonds structuré), les **options par défaut** retiennent traditionnellement quatre types de stratégies :

- les **allocations de cycle de vie** (*Life Cycle Asset Allocation*)
- la **gestion profilée**
- le **CPPI** (*Constant Proportion Portfolio Insurance*)
- la **gestion Stop-Loss**

Dans cette étude nous nous attachons aux **allocations de cycle de vie** particulièrement intéressantes dans le contexte de l'**épargne** retraite. Une des stratégies de gestion à long terme de l'épargne de type **cycle de vie** repose, en effet, sur la **diversification temporelle**. C'est-à-dire une réduction de la part du patrimoine financier investie en actifs risqués au fur et à mesure que l'horizon de désinvestissement se rapproche. On peut trouver par exemple chez **GOLLIER et ZECKHAUSER [1997]** une justification de la décroissance de la part d'actifs risqués avec l'âge. Les auteurs montrent que la flexibilité liée à l'horizon (le fait que les jeunes ont plus de temps pour la réallocation de portefeuille) l'emporte sur les risques d'arrière-plan (*background risks*, les risques professionnels ou familiaux par exemple), si la tolérance au risque est une fonction convexe et décroissante des ressources du consommateur. Dans ce cas, les jeunes seront plus tolérants à l'égard du risque que

---

8. Pour une analyse sur données annuelles aux Etats-Unis, on pourra consulter **CHETOUANE [2011]** Strategic asset allocation challenges for DC plan members, Thèse de doctorat, Université Paris Dauphine.

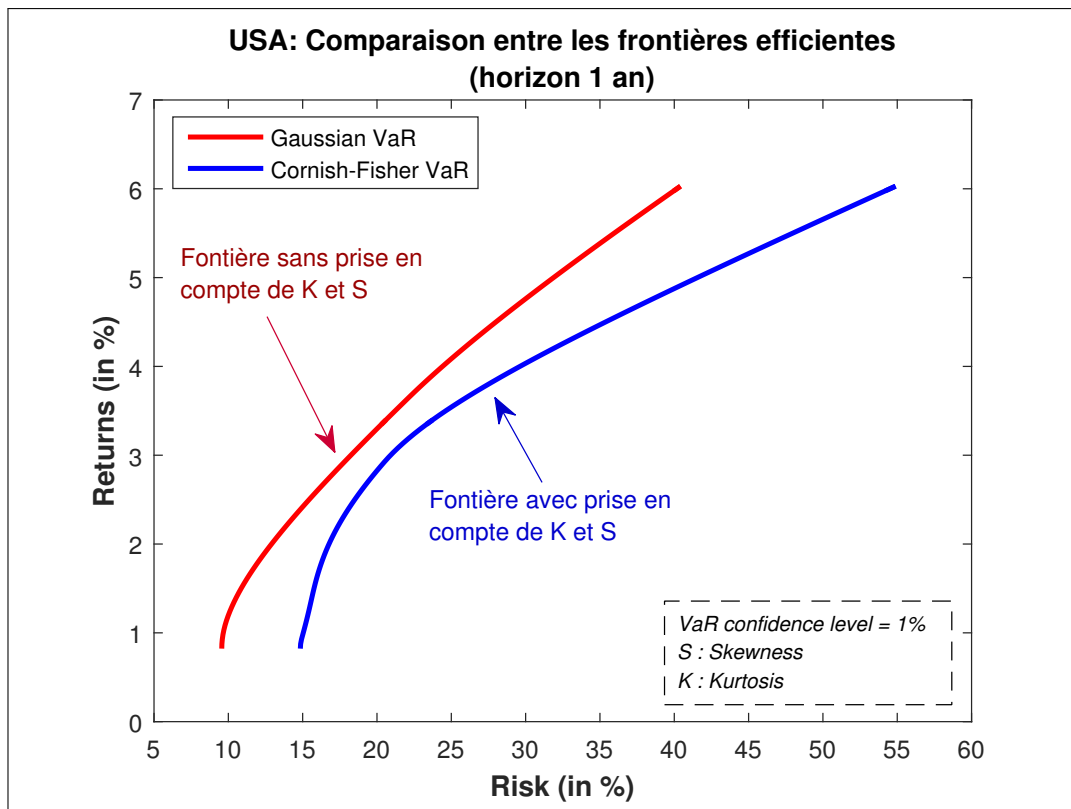
les plus âgés. Cette situation est appelée par les auteurs la clause **DER** (clause « *Duration Enhances Risk* »). Précisons par ailleurs que, par soucis de simplicité, nous n'avons pas fait d'hypothèse sur les frais liés aux investissements (droits d'entrée, de gestion, de sortie) qui certes grèvent les rendements mais n'affectent pas la classification des stratégies d'allocation. Seul sont pris en compte les frais d'arbitrage entre supports qui ont une incidence évidente sur le rendement des différentes allocations. Nous avons ainsi fait l'hypothèse subjective et relativement sommaire que les frais représenteraient 0.5% des arbitrages quel qu'en soit le montant.

### 2.3.1 Éléments de méthodologie

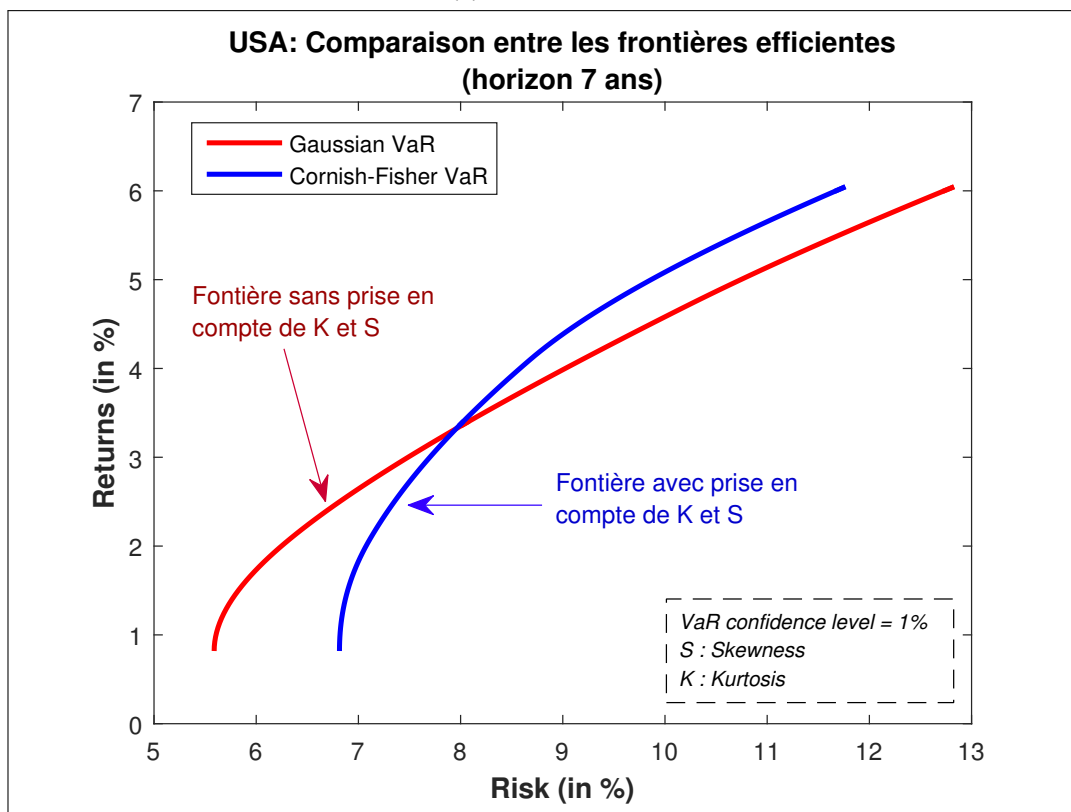
L'introduction d'une **diversification temporelle** dans les stratégies d'investissements suppose de répondre à la question suivante : comment les ménages doivent-ils modifier le poids et la structure de leur portefeuille d'actifs dans le temps? Afin de tenir compte du caractère potentiellement non gaussien de la distribution de certains actifs, nous avons voulu comparer la structure des portefeuilles déterminée à partir d'un critère classique d'« espérance-variance » et d'un mode de sélection plus achevé basé sur les moments d'ordre supérieur. Pour cela, on élargit la notion de risque proposée par Markowitz<sup>9</sup> (où le risque est évalué par la variance des rendements) pour inclure l'asymétrie de la distribution des rendements (c'est-à-dire son **skewness**) et les événements extrêmes (le **kurtosis** des rendements). En effet, on constate que selon l'horizon de placement, les allocations optimales déduites du cadre de Markowitz diffèrent des allocations optimales obtenues en utilisant des mesures de risque qui intègrent les moments d'ordre supérieur (graphiques 2.15a et 2.15b). C'est pourquoi nous avons pris en compte dans la détermination de la structure des **allocations de cycle de vie**, les ajustements liés aux risques extrêmes.

---

9. voir **MARKOWITZ** [1952]



(a)



(b)

FIGURE 2.15 – Frontières efficaces avec ou sans moments d'ordre supérieur à 2



En première approche, une solution pourrait consister à s'appuyer sur la théorie de l'utilité espérée et à supposer que les préférences d'un investisseur resteront constantes au cours du temps pour déterminer l'évolution de la structure des allocations optimales. L'idée est séduisante dans les programmes d'optimisation de types Markowitz, mais elle se heurte à la détermination de la préférence des agents dès lors que l'on introduit des moments d'ordre supérieur. Pour plus de clarté, rappelons que le problème classique de maximisation de l'utilité dans un espace rendement-risque peut se résumer par l'expression suivante :

$$\max(\mu - \lambda_2\sigma^2) \quad (2.2)$$

Avec :

- $\mu$  = l'espérance du portefeuille
- $\sigma^2$  = la variance du portefeuille
- $\lambda_2$  = le paramètre d'aversion au risque

La question de la détermination des préférences se restreint alors à l'évaluation de l'aversion au risque de l'agent. Dès lors que l'on intègre le *skewness* (S) et le *kurtosis* (K) dans la fonction d'utilité de l'agent afin de prendre en compte la structure non gaussienne de la distribution des rendements, le problème peut s'écrire :

$$\max(\mu - \lambda_2\sigma^2 + \lambda_3S - \lambda_4K) \quad (2.3)$$

Dans cette expression  $\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ , représentent respectivement l'aversion pour la variance, la préférence pour l'asymétrie et l'aversion pour le *kurtosis*. On constate que l'optimisation de portefeuille avec des moments d'ordre supérieur est un problème plus ambigu que l'approche classique. En effet, l'investisseur cherche simultanément à maximiser le rendement espéré et le *skewness* (les moments d'ordre impair) en minimisant la variance et le *kurtosis* (les moments d'ordre pair). Dans ce type de maximisation, généralement résolu par un programme multi objectifs (*Polynomial Goal Programming* (PGP)), la sélection du portefeuille dépend des objectifs et des préférences de l'investisseur. Or s'agissant des moments d'ordre supérieur, **MHIRI et PRIGENT [2010]** établissent, dans le sillage des travaux de **LAI, YU et WANG [2006]**, que l'arbitrage entre les différents objectifs reste

un exercice beaucoup plus complexe que dans un espace rendement risque. Les résultats des travaux empiriques de **MHIRI et PRIGENT** (*op. cit.*) montrent que les différentes combinaisons des préférences de l'investisseur pour l'espérance de rendement (noté  $\lambda_1$  par les auteurs), la variance  $\lambda_2$ , le *skewness*  $\lambda_3$  et le *kurtosis*  $\lambda_4$  conduisent à déterminer des portefeuilles optimaux de moments pour le moins contrastés (à moins de faire l'hypothèse que les préférences de l'investisseur sont toutes égales  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4$ ). La comparaison entre l'optimisation *Moyenne-Variance (MV)* qui dépend essentiellement de l'aversion au risque ( $\lambda_2$ ) et l'optimisation *PGP* qui dépend de trois préférences additionnelles et, en pratique, indéterminées ( $\lambda_1, \lambda_3, \lambda_4$ ), conduit à un large éventail de solutions (cf. l'exemple des solutions données par **MHIRI et PRIGENT** ci-dessous).

**Variation des moments des portefeuilles optimaux en fonction de la hiérarchie des préférences.** (Source : **MHIRI et PRIGENT** [2010])

Portefeuille	A	A1	B	B1	C	C1	D	D1
$\lambda_1$	1	2	3	3	1	2	1	2
$\lambda_2$	1	1	1	1	1	1	3	3
$\lambda_3$	3	3	1	2	0	0	0	0
$\lambda_4$	0	0	0	0	3	3	1	1
Moyenne	8,321	8,404	8,971	8,937	9,769	9,778	10,01	10,02
Variance	1,768	1,772	1,873	1,242	1,44	1,44	1,588	1,589
Skewness	0,162	0,16	-0,08	-0,051	-0,05	-0,05	-0,044	-0,044
Kurtosis	2,156	2,183	0,351	0,48	0,088	0,089	0,0695	0,0695

TABLEAU 2.5 – Le *Polynomial goal programming* (PGP) détermine un large éventail de solutions

Par conséquent quand les moments d'ordre supérieur sont pris en compte, il peut y avoir une multiplicité de portefeuilles efficients pour un même degré d'aversion au risque  $\lambda_2$ . Tester toutes les combinaisons sort clairement du cadre de notre recherche. Pour contourner la difficulté tout en intégrant les moments d'ordre supérieur dans les stratégies d'investissement de *cycle de vie*, nous avons retenu un critère de *Value-at-Risk* pour définir le risque de perte accepté par les agents. La sélection d'une mesure non équivoque favorise la comparaison des stratégies dans des univers paramétriques ou semi paramétriques. Le programme d'optimisation revient à chercher l'allocation à espérance maximum associée alternativement à un critère de *VaR* paramétrique et à une *VaR* de type Cornish-Fisher<sup>10</sup> (*CF-VaR*) qui prend en compte le *skewness* et le *kurtosis*

10. Voir **CORNISH et FISHER** [1938].

de la distribution des rendements. Naturellement l'expansion de Cornish-Fisher n'est pas la seule méthode pour intégrer les moments d'ordre supérieur. Les substituts possibles sont les expansions d'Edgeworth<sup>11</sup> et de Gram-Charlier<sup>12</sup>, la distribution de Johnson<sup>13</sup>, etc. (pour un inventaire des méthodes on pourra consulter LIEN et collab. [2016]). Les tableaux 2.6a et 2.6b ci-après montrent les couples de skewness et kurtosis qui délimitent le domaine de validité des expansions de Gram-Charlier et des expansions de Cornish-Fisher. Le domaine de validité correspond aux aires déterminées par l'intérieur des frontières. On constate que le domaine de validité de l'expansion de Gram-Charlier est relativement restreint tandis que celui de Cornish-Fisher est beaucoup plus large. L'expansion d'Edgeworth est également caractérisée par un périmètre d'applicabilité réduit (l'approximation de Gram-Charlier étant un cas particulier de l'expansion Edgeworth).

TABLEAU 2.6a – Domaine de validité de l'expansion de Cornish-Fisher et Gram-Charlier

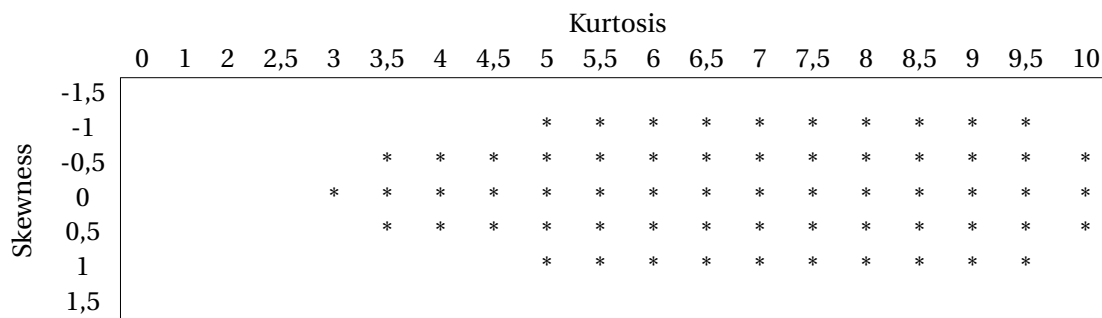
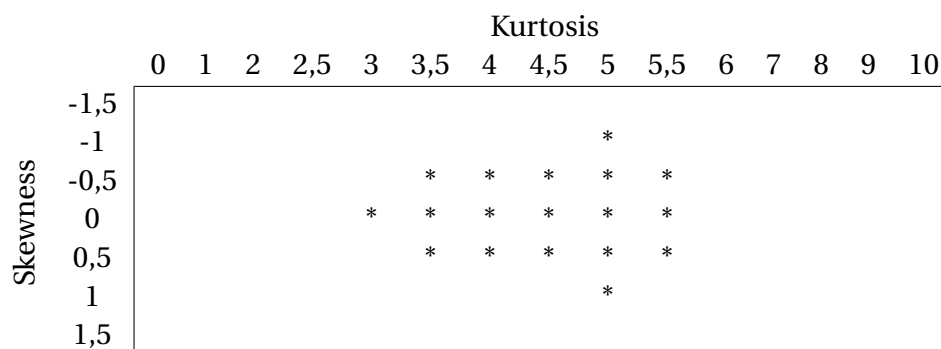


TABLEAU 2.6b – Domaine de validité de l'expansion de Gram-Charlier



L'expansion de Cornish-Fisher permet de définir une relation commode entre skewness, kurtosis et Value-at-Risk, et de plus facilite grandement le calcul numérique du por-

11. Introduit par EDGEWORTH [1908].

12. Expansion résultants des travaux de GRAM [1883] et CHARLIER [1914]

13. Se référer à JOHNSON et collab. [1970].

tefeuille moyenne-VaR optimal avec les quatre moments. En dépit de sa grande souplesse d'utilisation, comme le montre MAILLARD [2012], cette expansion n'est valide que lorsqu'elle est bijective. Cette condition est satisfaite si, pour toute valeur du quantile Z de la loi normale, la dérivée de l'expansion de Cornish-Fisher pour toute valeur de Z est positive :

$$\frac{dZ^{CF}}{dZ} > 0, \quad \forall Z \quad (2.4)$$

Ce qui se traduit directement par la condition nécessaire et suffisante suivante :

$$\frac{S^2}{9} - 4 \left( \frac{K}{8} - \frac{S^2}{6} \right) \left( 1 - \frac{K}{8} - \frac{5S^2}{36} \right) \leq 0 \quad (2.5)$$

Le non-respect de cette condition fait apparaître une importante lacune des expansions de Cornish-Fisher : les approximations qui en résultent ne sont pas nécessairement monotones. Pour pallier le problème, CHERNOZHUKOV et collab. [2010] ont présenté une méthode dénommée « *increasing rearrangement* » qui permet de restaurer la monotonie de l'expansion quand le skewness et ou le kurtosis des distributions tombent hors du domaine de validité du modèle. L'exemple de la correction par la procédure de l'« *increasing rearrangement* » est donné sur le graphique ci-dessous qui montre la fonction de distribution obtenue avec un skewness de 0,446 et un kurtosis de 1,773. La fonction est clairement non monotone (ligne continue sur le graphique 2.16) et détermine des Value-at-Risk incohérentes pour différents seuils de confiance. En appliquant la procédure de réarrangement à cette fonction, on obtient la transformation corrigée de Cornish-Fisher des quantiles gaussiens (ligne pointillée). Dans les programmes d'optimisation de la VaR semi-paramétrique, nous avons utilisé cette procédure pour rétablir la monotonie des expansions calculées avec des paires « skewness-kurtosis » invalides.

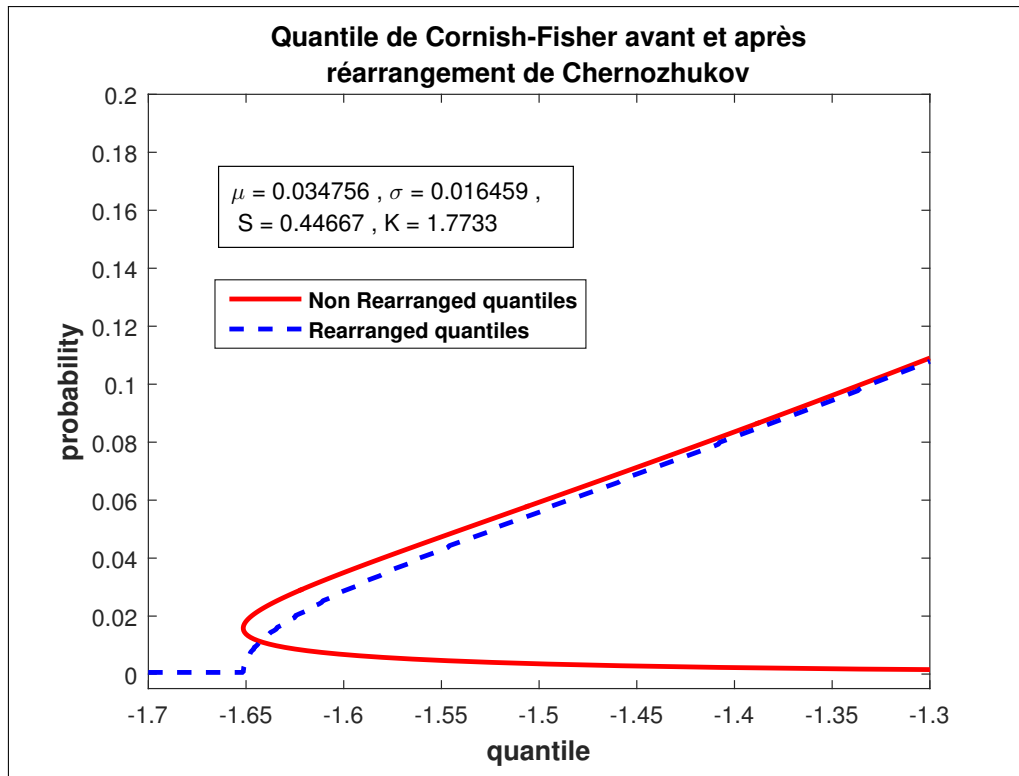


FIGURE 2.16 – Increasing rearrangement procedure

### Problème d'optimisation de la VaR paramétrique

Le problème d'optimisation de la VaR paramétrique pour un portefeuille sur la frontière efficiente (moyenne - variance) est le suivant :

$$(\mathcal{P}) \left\{ \begin{array}{l} \arg \min_W (VaR_\alpha(W)) \\ \text{S.C. : } \left\{ \begin{array}{l} W' \mu = \mu_P \\ \sum_{i=1}^3 W_i = 1 \\ 0 < W_i < 1 \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (2.6)$$

Avec :

$$\begin{aligned} VaR_\alpha &= W' \mu + Z_\alpha \sqrt{W' \Sigma W} \\ \Leftrightarrow \\ VaR_\alpha &= W' \mu + Z_\alpha \sigma \\ \Sigma &: \text{matrice de variance covariance} \end{aligned}$$

### Problème d'optimisation de la VaR de Cornish-Fisher

Le problème d'optimisation de la VaR de Cornish-Fisher d'un portefeuille sur la frontière pour un rendement donné est un problème d'optimisation non lisse (ou non différentiable). Pour le résoudre, nous nous sommes directement inspirés des travaux de CURTIS et QUE [2013] qui ont développé une variante du *gradient sampling (GS) algorithm* de BURKE et collab. [2005]. L'algorithme développé par Frank E. Curtis<sup>14</sup> diffère des précédents GS en ce qu'il s'agit d'un programme de **Minimisation à Métrique Variable (VMM)** et en ce qu'il détermine un algorithme plus efficace : selon la notation « O » de Landau, le GS développé par Curtis ramène le problème d'une complexité linéaire  $O(n)$  à une complexité constante  $O(1)$ , indépendante de la taille de la donnée (cf. présentation de l'algorithme, annexe 2.G). Pratiquement, le problème d'optimisation s'écrit :

$$(\mathcal{P}) \left\{ \begin{array}{l} \underset{W}{\operatorname{argmin}} (\widetilde{\operatorname{VaR}}_{\alpha}(W)) \\ \text{S.C. : } \left\{ \begin{array}{l} W' \mu = \mu_p \\ \sum_{i=1}^3 W_i = 1 \\ 0 < W_i < 1 \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (2.7)$$

Avec :

$$\begin{aligned} \mu_p & : \text{rendement ciblé (fixé)} \\ \widetilde{\operatorname{VaR}}_{\alpha} & = W' \mu + Z_{\alpha}^{\text{Cornish-Fisher}} \sqrt{W' \Sigma W} \\ \Leftrightarrow \\ \widetilde{\operatorname{VaR}}_{\alpha} & = W' \mu + Z_{\alpha}^{\text{Cornish-Fisher}} \sigma \\ \Sigma & : \text{matrice de variance covariance} \end{aligned}$$

Et :

$$Z_{\alpha}^{\text{Cornish-Fisher}} \approx Z_{\alpha} + \frac{1}{6}(Z_{\alpha}^2 - 1)S + \frac{1}{24}(Z_{\alpha}^3 - 3Z_{\alpha}) * K - \frac{1}{36}(2Z_{\alpha}^3 - 5Z_{\alpha})S^2 \quad (2.8)$$

14. Nous tenons à remercier particulièrement Frank E. Curtis du *Department of Industrial and Systems Engineering Lehigh University*, qui nous a personnellement aidé à implémenter « *an adaptive gradient sampling algorithm for nonsmooth optimization* » qu'il décrit dans CURTIS et QUE [2013].

Où :

- $S(X) = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$  : Skewness
- $\hat{K}(X) = \frac{\mu_4}{\sigma^4}$  : Kurtosis
- $K = \hat{K} - 3$  : excès d'aplatissement
- $\mu$  : vecteur des rendements moyens des classes d'actifs
- $W_i$  : poids de l'actif  $i$  dans le portefeuille tel que  $\sum w_i = 1$

### Prise en compte de la *mean reversion* dans la dynamique du prix des actions

Pour capturer simplement l'effet de **retour vers la moyenne** dans la **volatilité** du rendement des actions, on estime une matrice de covariance théorique dans le cas du modèle paramétrique et une matrice de covariance empirique dans l'hypothèse semi-paramétrique.

- Calcul des rendements

Soit  $(P_i^j)_{0 \leq i \leq T}$  l'indice des prix mensuel d'un actif financier  $j$ . Alors, on calcule les log-returns de l'actif  $j$  à l'horizon  $h$  par :

$$r_{i,h}^j = \frac{1}{h} \ln \left( \frac{P_i^j}{P_{i-h}^j} \right), h \leq i \leq T \quad (2.9)$$

- Estimation des covariances

Pour l'échantillon multivarié des rendements centrés  $(r_{t,h})_{h \leq t \leq T}$ , on définit le vecteur des  $K$ -actifs correspondant, au temps  $t$  et à l'horizon  $h$  par :

$$r_{t,h} = \begin{pmatrix} r_{t,h}^1 - \mu^1 \\ \vdots \\ r_{t,h}^K - \mu^K \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

Alors, dans le cas semi-paramétrique, la matrice de covariance utilisée pour estimer la  $\epsilon$ ième frontière « Mean-VaR » efficiente est la matrice empirique donnée par :

$$\Omega_h = \frac{1}{T-h} \sum_{t=h}^T r_{t,h} \times r'_{t,h} \quad (2.11)$$

Dans l'hypothèse paramétrique, on suppose que les prix suivent une marche aléatoire

dont la variance augmente linéairement avec le temps.

$$\Omega_h = \frac{h}{T-1} \sum_{t=1}^T r_{t,1} \times r'_{t,1} = h \times \Omega_1 \quad (2.12)$$

On peut montrer à travers une illustration simple que cette spécification conduit à une meilleure estimation de la « vraie » exposition au risque alors que l'optimisation « rendement-risque » peut conduire à des estimations biaisées.

- L'exemple du S&P500

On a illustré les conséquences de la prise en compte simultanée des moments d'ordre supérieur et de la réduction empirique de la variance des rendements à partir des chroniques longues des prix du S&P500. En premier lieu, nous calculons la « VaR historique ». La technique la plus fréquente pour calculer la VaR d'un actif consiste à classer ses rendements en ordre croissant sur une fenêtre glissante d'une largeur donnée. La VaR est alors définie comme la valeur en deçà de laquelle un pourcentage  $\alpha \in [0, 100]$  des observations ordonnées a une valeur plus faible. La seconde étape consiste à estimer la « VaR paramétrique », en faisant l'hypothèse que les *log-returns* suivent une loi normale, puis une « VaR semi-paramétrique » qui permet de corriger les quantiles d'une loi normale en intégrant les moments d'ordre supérieur. Dans le cas paramétrique, on suppose que la variance croît linéairement avec le temps, tandis que dans le modèle semi-paramétrique, les moments sont estimés à partir de moyennes mobiles. Sur le graphique 2.17 ci-après, le trait plein représente la « vraie » exposition au risque (VaR historique) pour différents horizons de placement. La ligne pointillée indique la VaR paramétrique au seuil de 99%. Enfin, la ligne tiretée symbolise la VaR de Cornish-Fisher pour le même seuil de confiance.

Les résultats montrent clairement que la VaR paramétrique a tendance à sous-estimer la « vraie » exposition au risque sur les horizons courts et à la surestimer sur les horizons longs. En revanche, la spécification CFVaR « capture » l'exposition au risque que l'approche moyenne-variance ne parvient pas à quantifier. L'approximation de Cornish-Fisher détermine sans conteste une mesure du « vrai » risque plus précise que la VaR paramétrique.



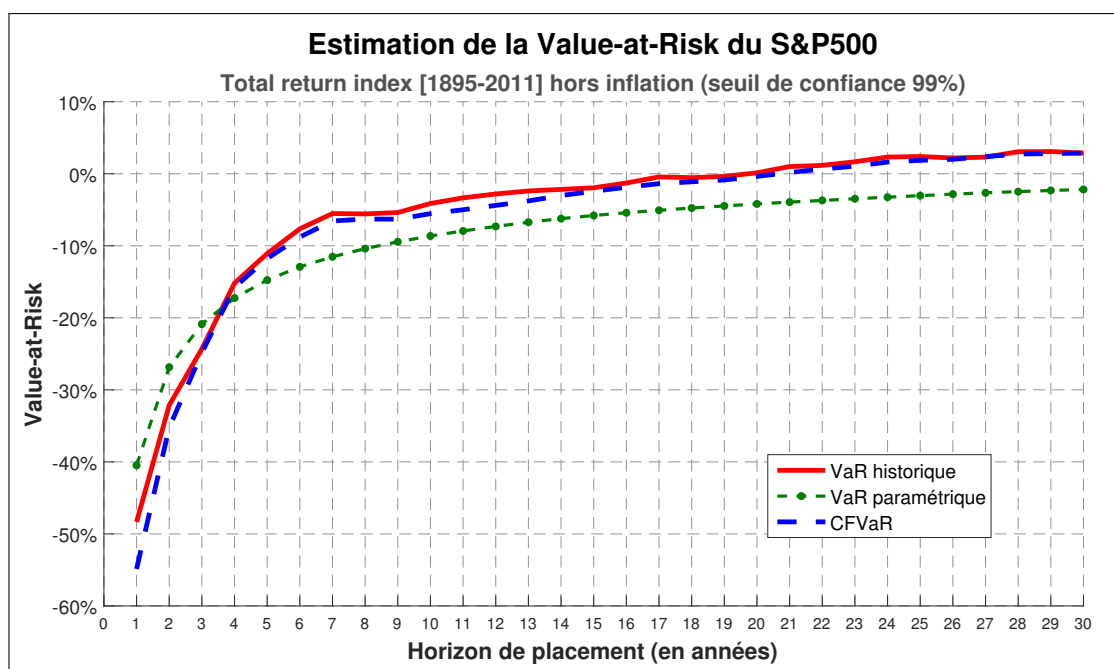


FIGURE 2.17 – Value-at-Risk du S&P500 (1895-2011)

### 2.3.2 Résultats : l'hypothèse d'une VaR de 3%

Une fois posés les programmes d'optimisation, la construction des grilles d'allocation dans le temps répond à une logique différenciée selon que l'on se place dans un univers où le risque est paramétrique ou semi-paramétrique.

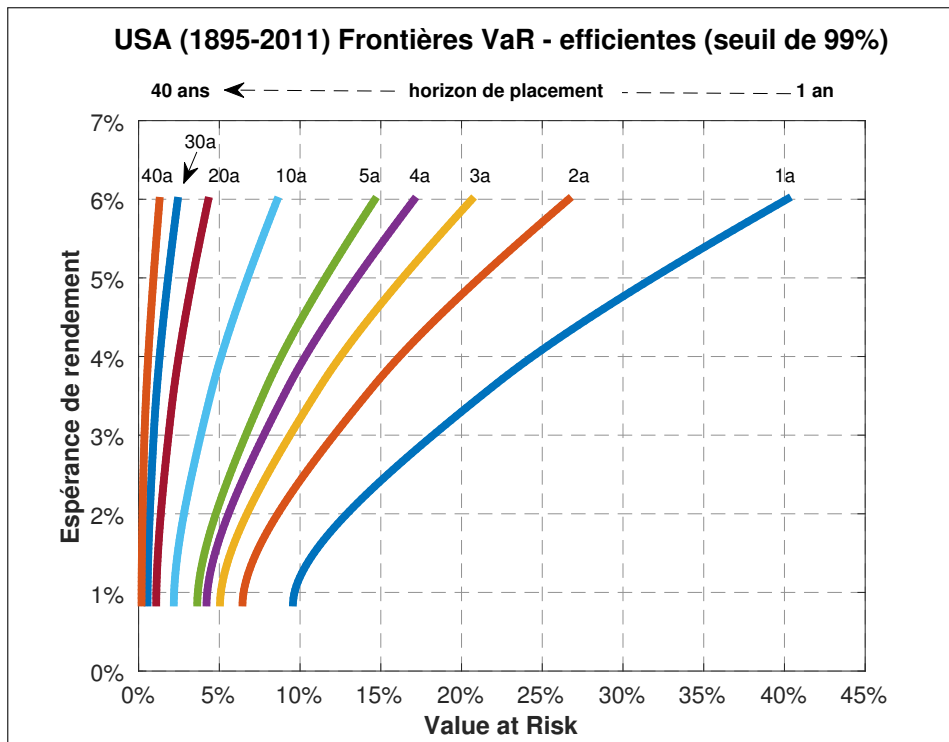
#### La conjecture d'une VaR paramétrique de 3%

Dans le cas où le risque est évalué par la variance des rendements, on simule la réduction du risque à partir des propriétés d'une loi normale. La **volatilité** des rendements se réduit donc en fonction de la racine de la durée de placement et ce, sans différenciation entre les classes d'actifs. La frontière est obtenue par minimisation de la **VaR** pour une plage de rendement donnée. Dans nos scénarios, le risque pris par un investisseur est concrétisé par une acceptation de perte en capital. Sa stratégie va consister à chercher sur chacune des frontières **VaR** efficaces qui le séparent du terme de son placement, la structure de portefeuille  $W_i$  qui respecte son critère de perte. Compte tenu de la dilution du risque avec l'horizon, la proportion d'actifs risqués du portefeuille souhaité par notre cas type sera d'autant plus importante que le terme de l'investissement est éloigné.

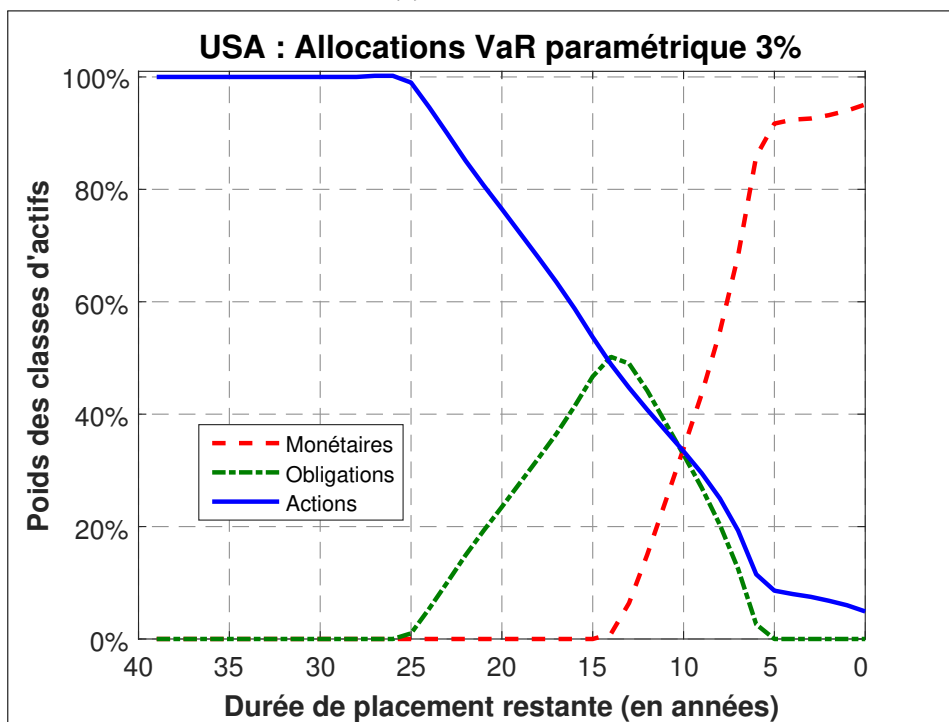
Naturellement, l'allocation présentant les caractéristiques requises par l'épargnant ne figure pas nécessairement parmi l'ensemble des allocations constitutives des frontières

de la période d'investissement. Dans ce cas, on lui attribuera logiquement l'allocation offrant la plus petite VaR de la frontière. A l'opposé, sur des horizons longs, les VaR de tous les portefeuilles d'une frontière peuvent être négatives (c'est-à-dire correspondre à des gains en capital). Lorsque cette configuration se présente, on sélectionne l'allocation à rendement maximum. Les grilles d'allocations déterminées par l'optimisation pour un profil de risque donné (une VaR), sont ensuite utilisées pour les simulations rétrospectives (*back test*) des stratégies sur des fenêtres glissantes d'une largeur fonction de la durée d'investissement sur la période de l'analyse, soit de 1895 à 2011. Dans cet exemple qui se concentre sur les performances des classes d'actifs aux Etats-Unis, on prend le cas d'un individu qui accepte une perte en capital de 3% maximum (précisément une VaR de 3% au seuil de confiance de 99%) et dont l'horizon de placement est de quarante ans. Le programme d'optimisation cherche sur chaque frontière l'allocation dont la VaR est la plus proche de la VaR désirée. On constate dans notre exemple (graphiques 2.18a et 2.18b) que la VaR minimum de la frontière calculée pour un placement d'une année est de 10%, soit un niveau bien supérieur à celui accepté par l'épargnant. Jusqu'à la cinquième année, les allocations sont trop risquées par rapport au profil de l'épargnant. Sur notre historique, après 25 ans de placement, soit avec un horizon résiduel de moins de 15 ans (à gauche du graphique 2.18b), les placements en actions nord-américaines ne présentent plus de risque de perte, notre investisseur est donc logiquement entièrement investi en actifs risqués.

La grille d'allocation déterminée en fonction du profil de risque permet de simuler la performance de la stratégie (*back test*) sur fenêtres glissantes d'une largeur de 480 mois de 1895 à 2011. Le verdict du *back test* montre qu'aucun des 912 placements distincts effectués à partir de la même grille de désensibilisation ne débouche sur une perte en capital. Le rendement réel médian des placements est estimé à 4.30% tandis que celui associé au premier percentile est de 2.3%. Cette surperformance par rapport au critère de VaR de l'investisseur est due à la règle qui veut que lorsque tous les portefeuilles d'une frontière ont une VaR négative, qui représente selon nos critères un gain minimum, on sélectionne l'allocation à rendement maximum.



(a)



(b)

FIGURE 2.18 – USA : Frontières efficaces et allocations - VaR paramétrique

Pour donner une autre illustration de la même stratégie, on a estimé les **taux de remplacement** (ratios pension/revenu) correspondant à la conversion en rentes viagères des capitaux acquis au terme. Faute de statistiques historiques disponibles, on a retenu le revenu disponible<sup>15</sup> réel par ménages comme approximation des salaires, une approximation discutable mais peu contournable. Les individus sont sensés épargner 6% de leur revenu pour se constituer une épargne de **cycle de vie**. On suppose qu'à l'âge de 65 ans, le capital est converti en rente en fonction des espérances de vie calculées par l'*United States Census Bureau*.

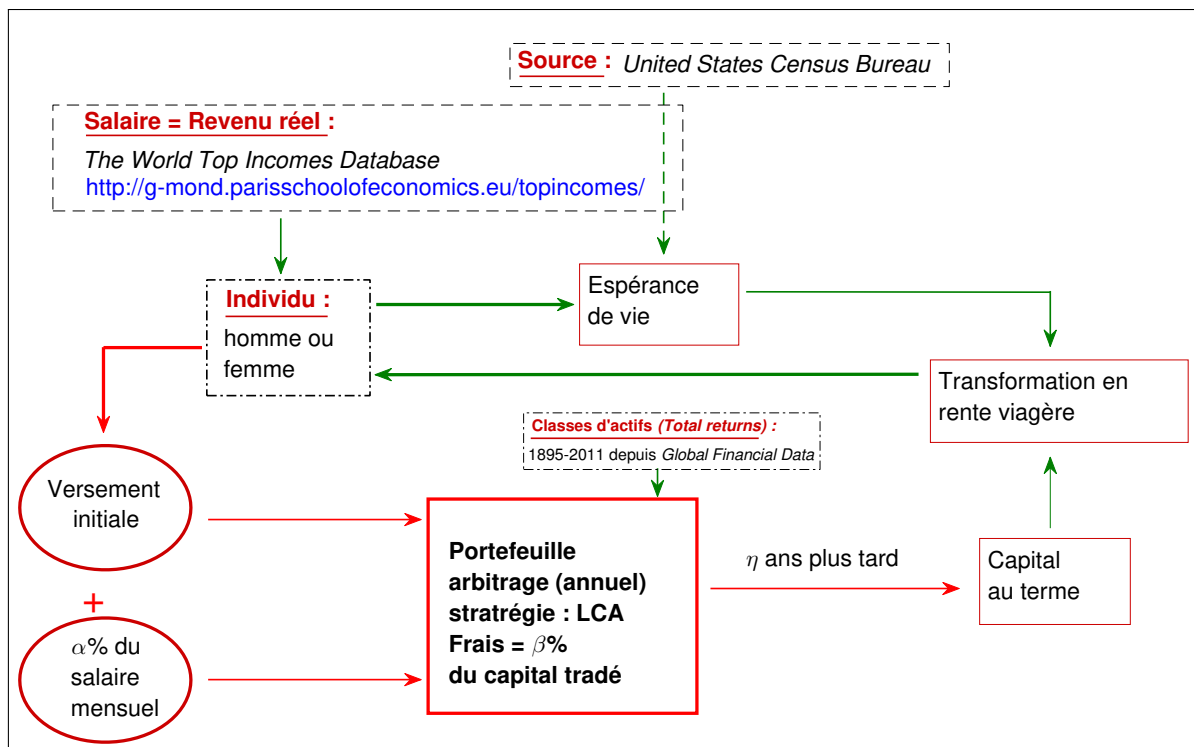
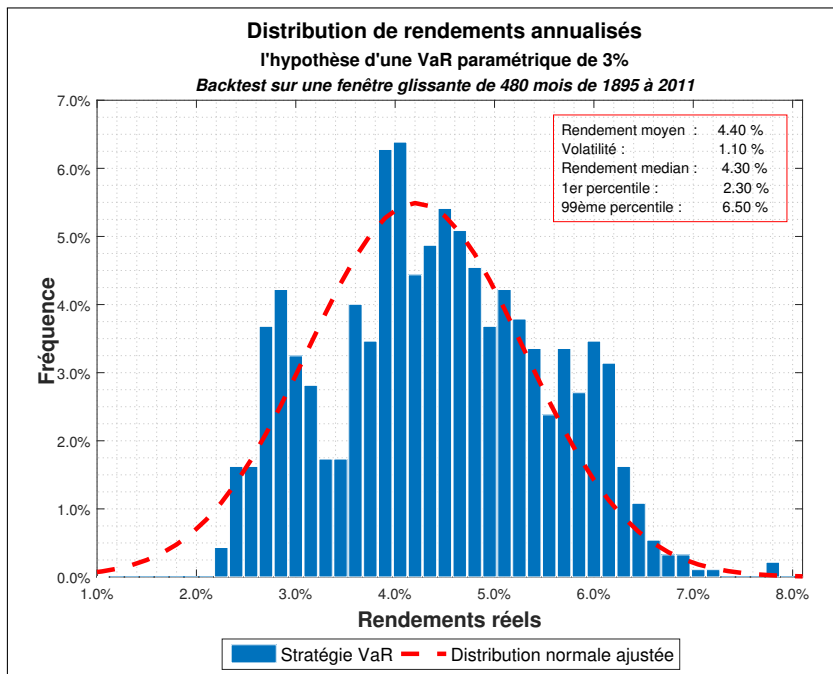


FIGURE 2.19 – Programme de *back-test* des stratégies d'allocation d'actifs

Les résultats (graphiques 2.20) déterminent un **taux de remplacement** médian de 27.9% du revenu disponible des ménages. Cette statistique n'a pas d'autre ambition que d'exprimer une distribution de rendements en une unité plus intelligible. Elle n'a pas pour objectif d'être comparée avec un calcul classique de **taux de remplacement** dans un régime à **prestations définies** qui, pour un profil de carrière donné, n'a pas de dispersion et en outre repose sur la comparaison entre une première pension de retraite et le dernier salaire d'une chronique dont la progression est généralement plus rapide que celle du salaire moyen.

15. Source : *The World Top Incomes Database* (<http://g-mond.parisschoolofeconomics.eu/>)

(a) Rendements



(b) Taux de remplacement

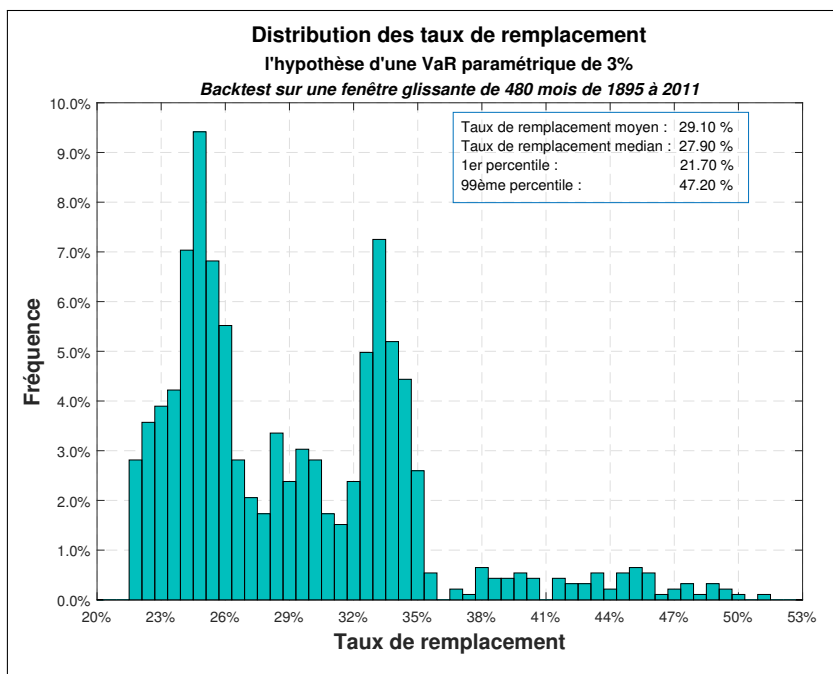
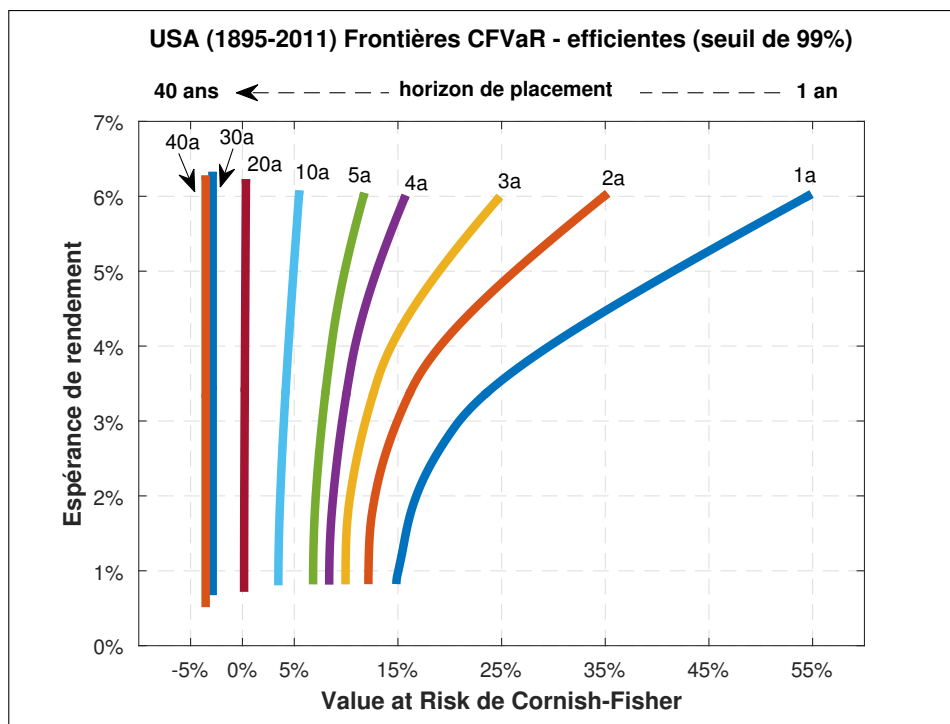


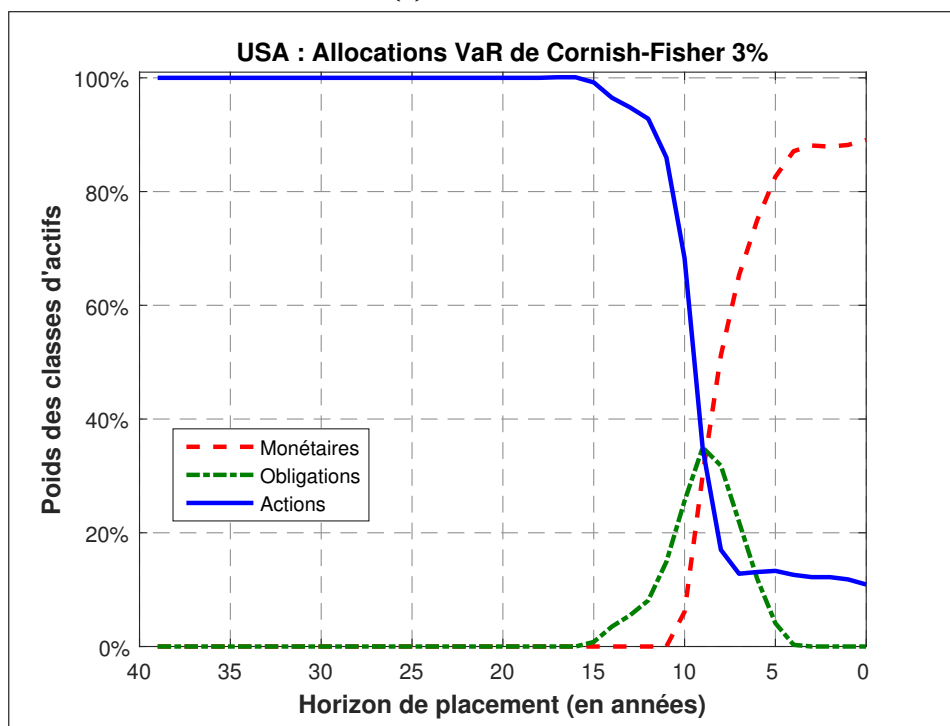
FIGURE 2.20 – Histogrammes des résultats : VaR paramétrique - USA

### La conjecture d'une CF-VaR semi-paramétrique de 3%

Dans le cas non paramétrique, les moments de la distribution sont recalculés, pour chaque horizon de placement, à partir des chroniques des rendements historiques des actifs. Il en découle notamment que la réduction de la variance des actions est plus rapide que dans une loi gaussienne. Chaque frontière est construite par minimisation de la CF-VaR en fonction des quatre premiers moments calculés sur les moyennes mobiles d'ordre  $k * 12$ , pour  $k = 1$  à 40, puisque nos chroniques de rendements sont mensuelles et que nous envisageons un horizon de 40 ans. On constate (graphique 2.21a) que les frontières se verticalisent plus rapidement que dans l'exercice paramétrique. En effet, la réduction de la variance est propre à chaque actif et n'est plus dictée par une règle gaussienne. Or nous avons vu dans l'analyse consacrée aux grandes classes d'actifs, que les actions dominaient les placements à revenus fixes. Il en découle, pour un même niveau de VaR, une structure d'allocation plus riche en actifs dit « risqués » que dans le cas paramétrique. Comme précédemment, la séquence d'allocations déterminées (graphique 2.21b) par l'optimisation semi paramétrique pour un profil de risque donné (ici une CF-VaR), est utilisée pour le *back-test* de la stratégie sur une fenêtre glissante. La structure des allocations déterminées sur les indices nord-américains montre que la prise en compte simultanée des moments d'ordre supérieur et de la vitesse effective - et non plus théorique - de la réduction de la variance dans la détermination des portefeuilles optimaux est loin d'être neutre. Pour une perte acceptée d'un maximum de 3% notre investisseur se retrouve entièrement investi en actions après 15 ans donc pendant une durée voisine de 25 ans. Le poids des supports obligataires est presque devenu négligeable.



(a)



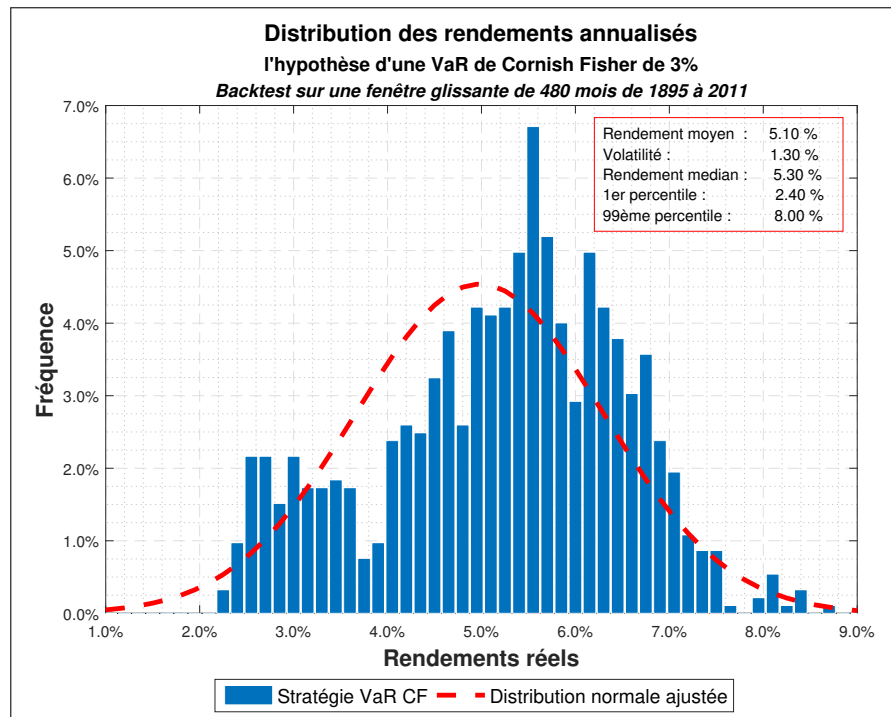
(b)

FIGURE 2.21 – USA : Frontières efficaces et allocations - VaR semi-paramétrique

La valeur médiane de la distribution des rendements est supérieure à celle déterminée par le programme paramétrique (5.30% contre 4.30%, graphiques 2.22). Il en va de même pour le premier percentile (2.4% contre 2.3%). Le **taux de remplacement** médian domine également celui estimé à partir de la grille des allocations paramétriques. Il ressort à pra-

tiquement 34.3% du revenu disponible des ménages contre 27.9% précédemment.

(a) Rendements



(b) Taux de remplacement

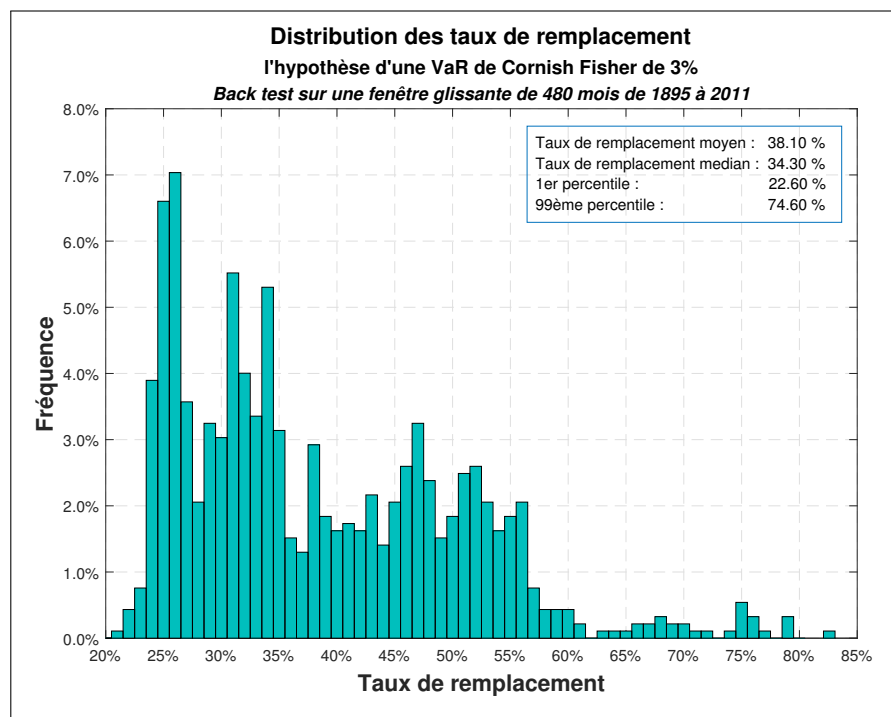
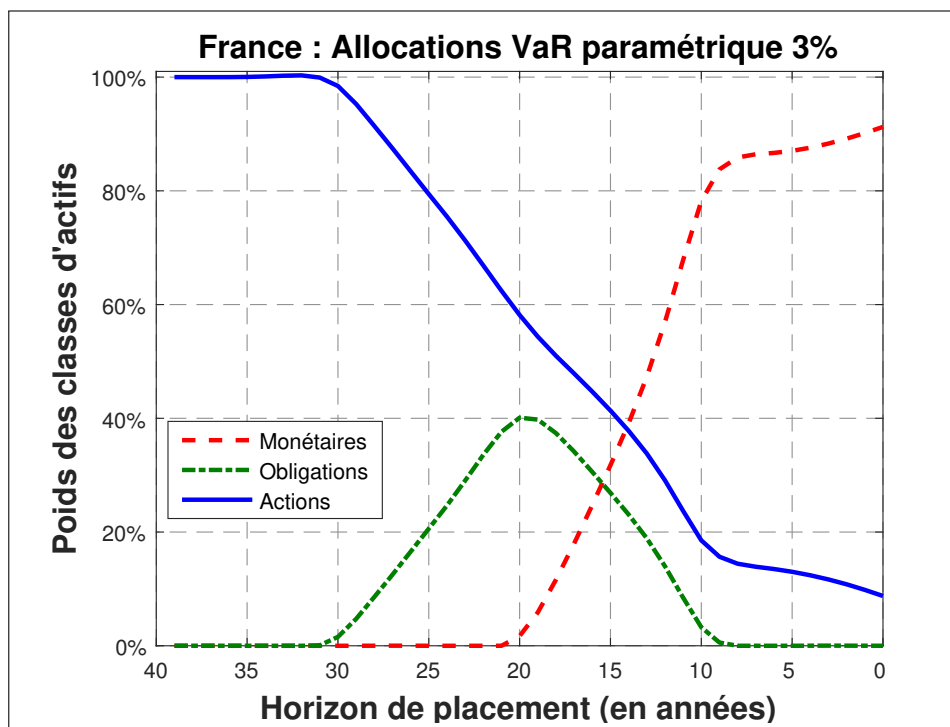


FIGURE 2.22 – Histogrammes des résultats : VaR de Cornish Fisher - USA

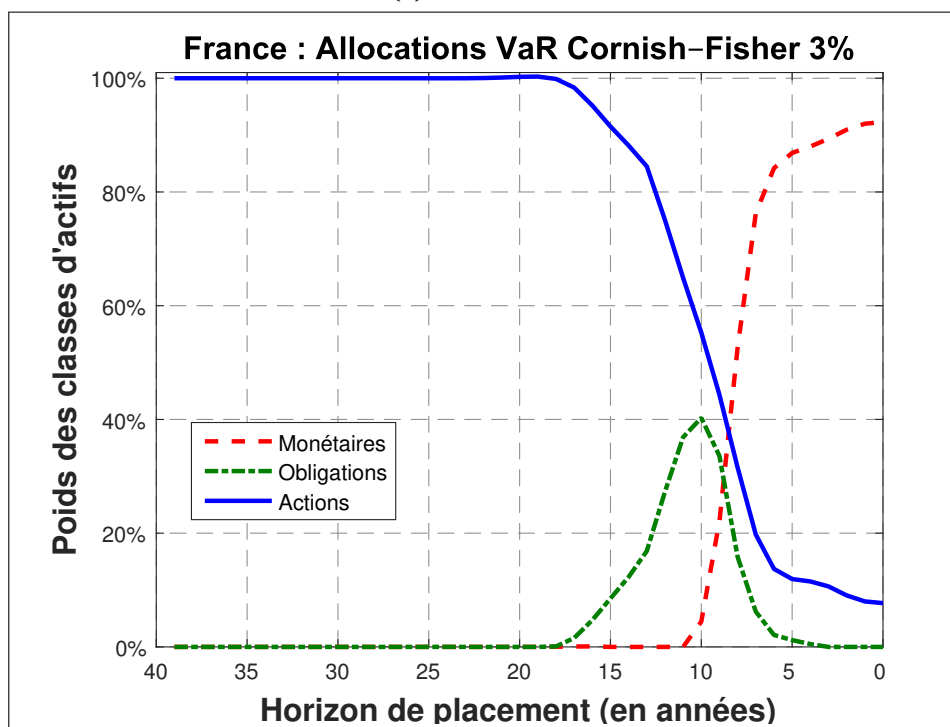
On retrouve les mêmes caractéristiques sur les séries françaises déflatées hors périodes de guerre (graphiques 2.23) : pour une probabilité de perte donnée (en l'occurrence



une VaR de 3% au seuil de confiance de 99%), les frontières VaR optimales déterminent une plus grande quantité d'actifs risqués dans le cas semi paramétrique où les moments d'ordre supérieur et la vitesse de réduction de la variance propre à chaque actif sont pris en compte.



(a)



(b)

FIGURE 2.23 – Allocations - VaR paramétrique vs VaR semi-paramétrique : France

### 2.3.3 Le classement des stratégies

En dehors des représentations usuelles, afin de hiérarchiser la performance des stratégies d'allocations simulées, une solution consiste à se référer au critère de dominance stochastique du premier et du second ordre. Rappelons qu'au premier ordre, une variable aléatoire  $F$  domine une variable aléatoire  $G$  si leur fonction de répartition vérifie la relation :

$$F(x) \leq G(x), \forall x \in [a, b] \quad (2.13)$$

C'est-à-dire que la distribution de  $F$  accorde des probabilités plus faibles aux valeurs risquées (faibles) de  $x$  et des probabilités plus fortes aux valeurs élevées de  $x$ . Ce qui revient à dire que les probabilités sont faiblement concentrées sur les rendements faibles et fortement concentrés sur les forts rendements. Dans les cas plus équivoques, on peut recourir à la notion de dominance stochastique du second ordre pour trancher entre la performance des stratégies d'investissement. On parle de dominance stochastique de second ordre de  $F$  sur  $G$  si :

$$\forall x \in [a, b] \text{ , } \quad T(x) = \int_a^x (G(t) - F(t)) dt \geq 0 \quad (2.14)$$

Cela signifie que pour tout  $x$ , la masse des probabilités où  $F$  est supérieur à  $G$  est supérieure à la masse des probabilités où  $G$  est supérieur à  $F$ . On l'a vu, la prise en compte des moments d'ordre supérieur et de la vitesse observée de réduction du risque des placements, déterminent des espérances de rendement supérieures à celles calculées à partir du modèle théorique qui reproduit les caractéristiques d'une loi gaussienne. La hiérarchie des stratégies ne peut toutefois pas être établie à partir d'une simple comparaison des rendements médian ou moyen. Il est également nécessaire de tenir compte de la volatilité des rendements autour de leur moyenne. Afin de classer la performance des stratégies d'allocations simulées, une solution consiste à se référer au critère de dominance stochastique qui, au premier ordre, repose sur la comparaison des fonctions de répartition des rendements. Sur les graphiques qui représentent les fonctions cumulatives de probabilités des rendements (graphiques 2.24a et 2.25a), on constate que la stratégie CF-VaR domine stochastiquement à l'ordre 1 la stratégie déterminée par le critère de VaR. La comparaison des distributions de **taux de remplacement** (graphiques 2.24b et 2.25b)

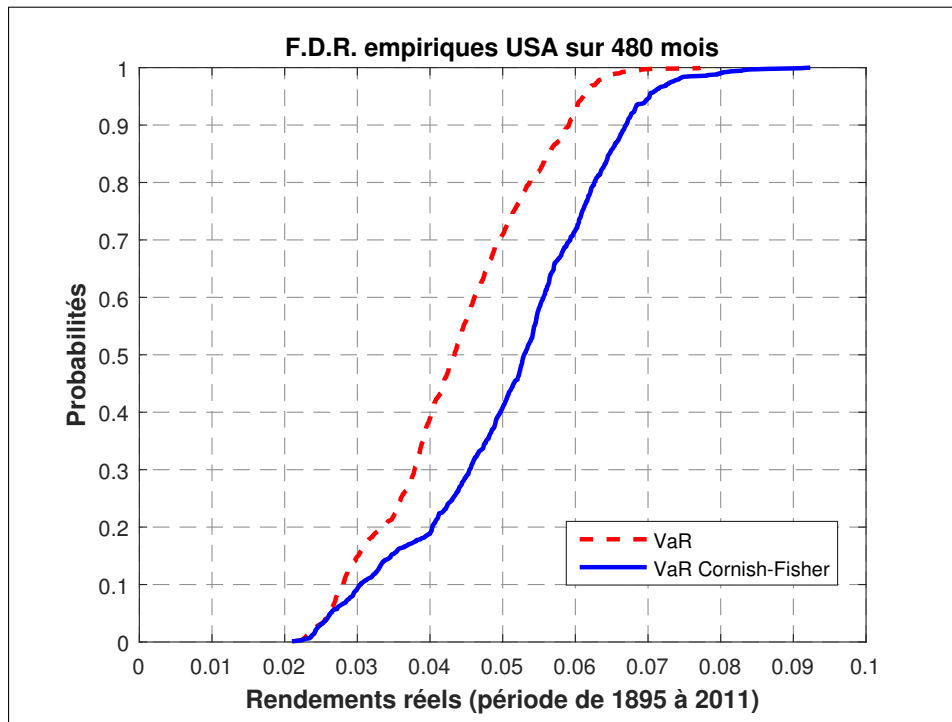
confirme sans équivoque la supériorité<sup>16</sup> des allocations calculées à partir du programme semi-paramétrique qui, en dépit d'une proportion d'actions beaucoup plus substantielle, détermine des **taux de remplacement** minimum supérieurs à ceux calculés à partir de l'autre modèle<sup>17</sup> de gestion.

En terme de dominance stochastique, nous obtenons des résultats similaires dans les deux pays, pour des investisseurs dont l'horizon de placement est compris entre 10 et 40 ans (voir en annexe 2.E).

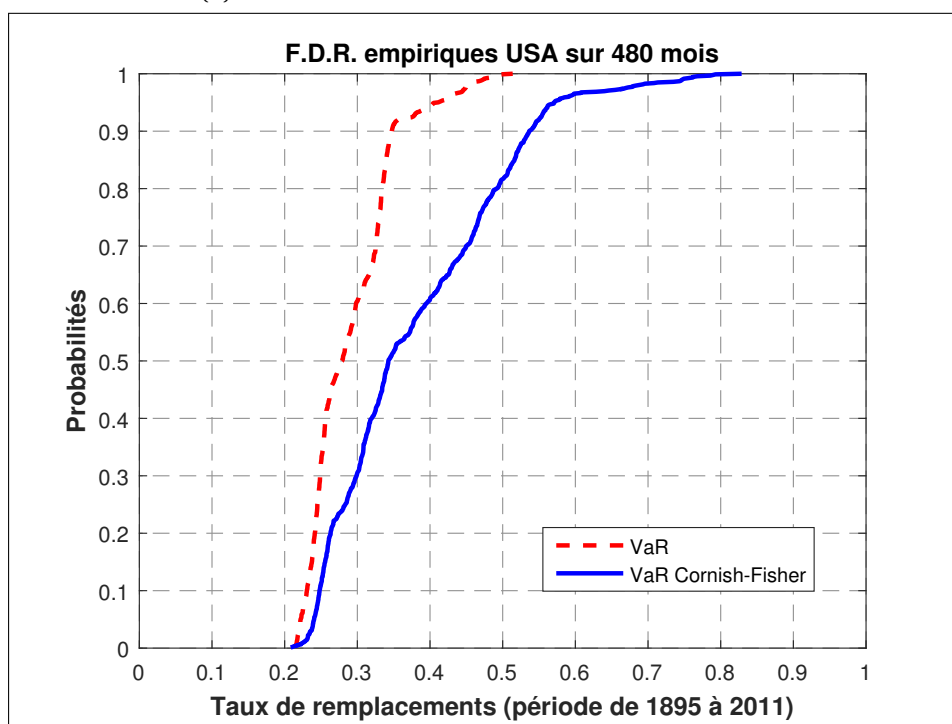
---

16. Les tests de dominance stochastique ont été corroborés par des tests de Kolmogorov-Smirnov (voir annexe 2.E en fin de document).

17. Nous avons également fait une comparaison avec les techniques les plus courantes d'assurance de portefeuille, notamment le « *Stop-Loss* » et le « *CPPI* ». Les résultats montrent que la stratégie **CFVaR** détermine des fonctions de répartition des rendements plus concentrées que les autres méthodes d'assurance (voir annexe 2.C en fin de document).

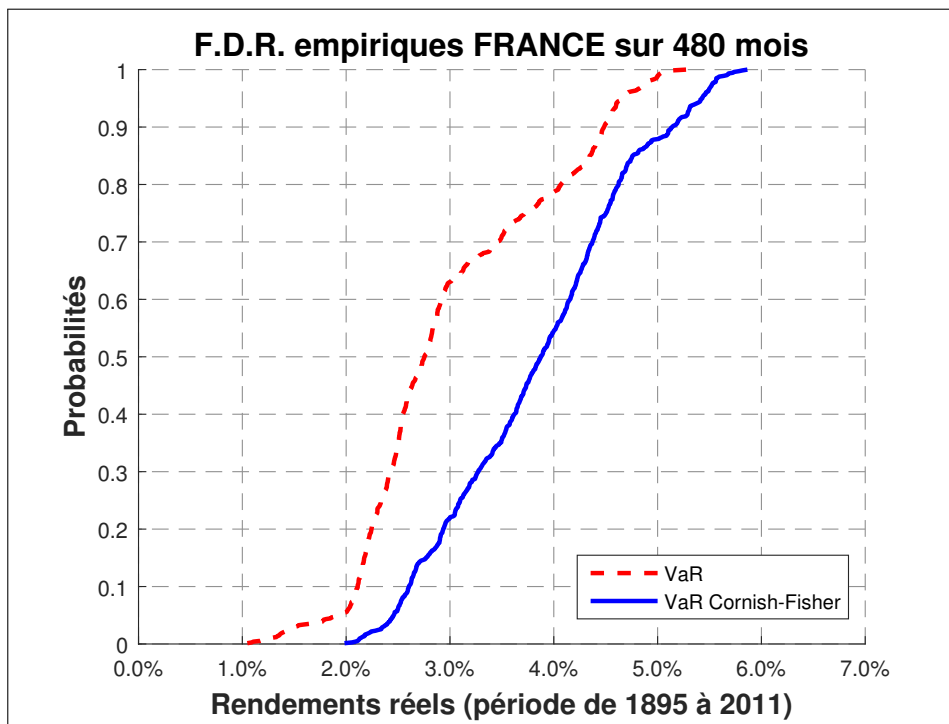


(a)

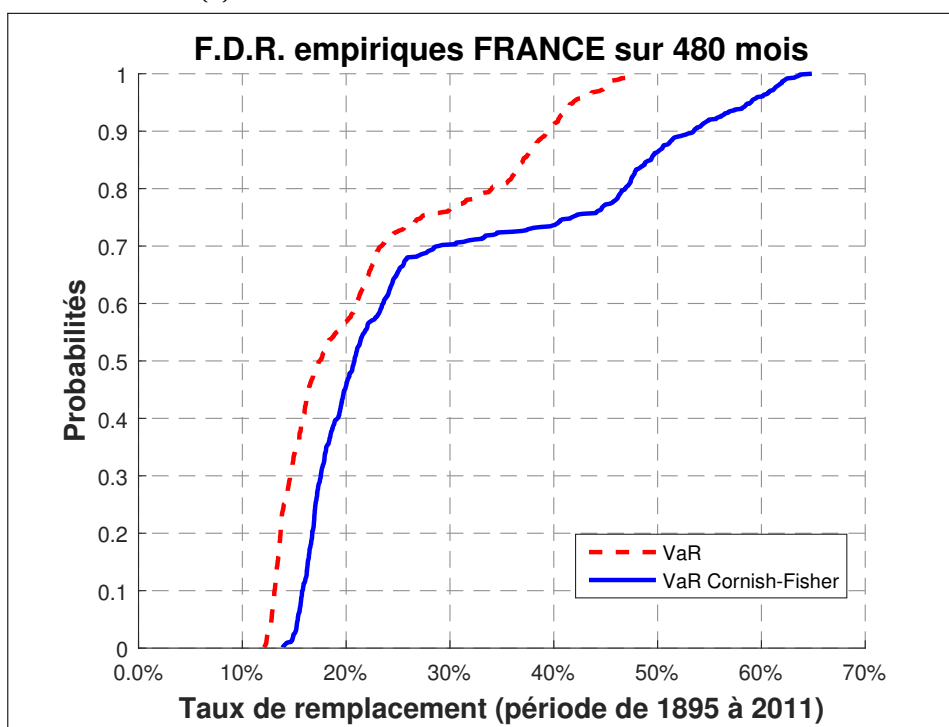


(b)

FIGURE 2.24 – Fonctions cumulatives de probabilités de rendements et de taux de remplacement - VaR paramétrique vs non paramétrique (CF-VaR) - USA



(a)



(b)

FIGURE 2.25 – Fonctions cumulatives de probabilités de rendements et de taux de remplacement - VaR paramétrique vs non paramétrique (CF-VaR) - France

### 2.3.4 L'exemple d'une Value-at-Risk nulle

Le cas où le risque de perte en capital accepté par un agent est nul (VaR de 0%) détermine des résultats beaucoup plus contrastés que pour l'exemple détaillé plus haut pour une VaR de 3%. Les grilles de désensibilisation en fonction de la distance à l'échéance sont radicalement différentes dans les cas paramétrique et semi-paramétrique (cf. graphiques 2.26 et 2.27). Pour le même agent totalement averse au risque, l'hypothèse articulée autour d'une stratégie gaussienne détermine un poids maximum de 27% pour les actions dans la structure des allocations de cycle de vie, tandis que l'hypothèse alternative définit un investissement massif en actifs risqués (100% d'actions à 25 ans du terme).

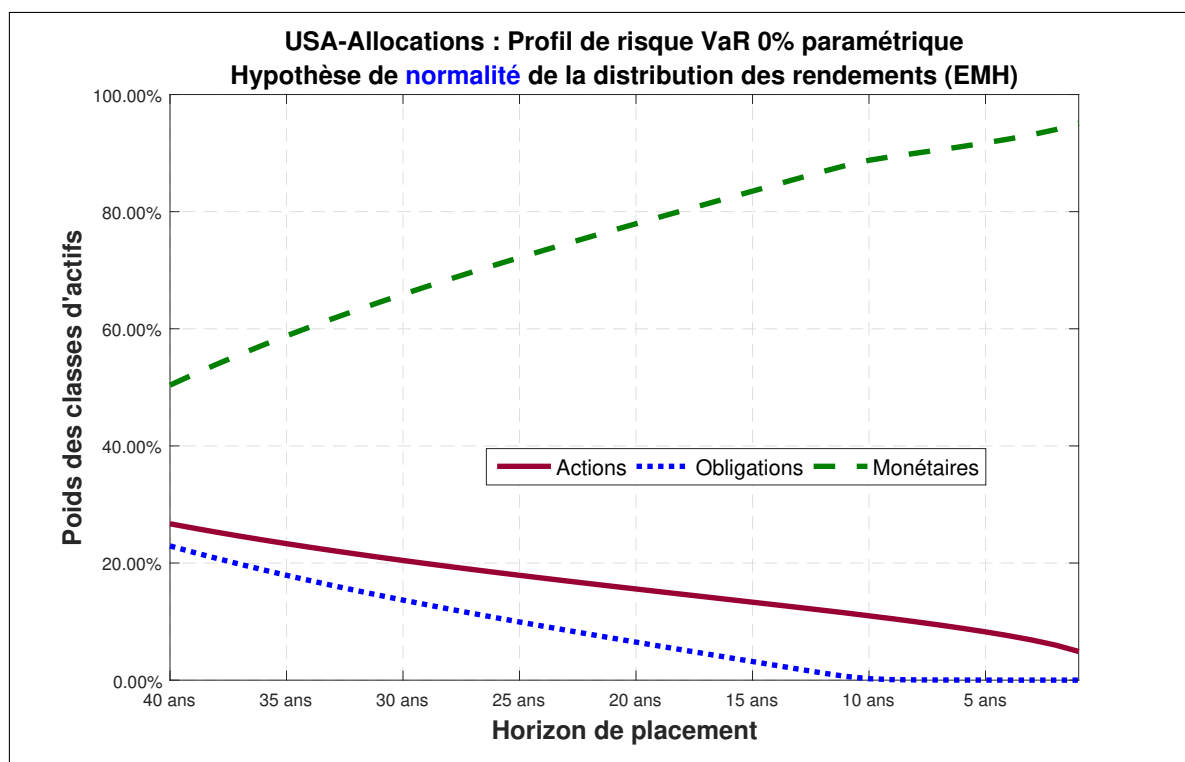


FIGURE 2.26 – USA : Allocations - VaR 0% paramétrique

Sans surprise, on constate que le *backtesting* sur une fenêtre glissante de 480 mois de 1895 à 2015 aux Etats-Unis détermine une dominance sans équivoque de la stratégie semi-paramétrique qui intègre la « vraie » réduction de la variance (graphique 2.28). On déduit de cet exercice que plus un individu aura tendance à être averse au risque, plus les résultats en termes de performances seront divergents entre les deux stratégies d'allocation envisagées. A l'inverse, le contraste entre les allocations de cycle de vie sera moins prononcé pour un agent « *risk lover* ».

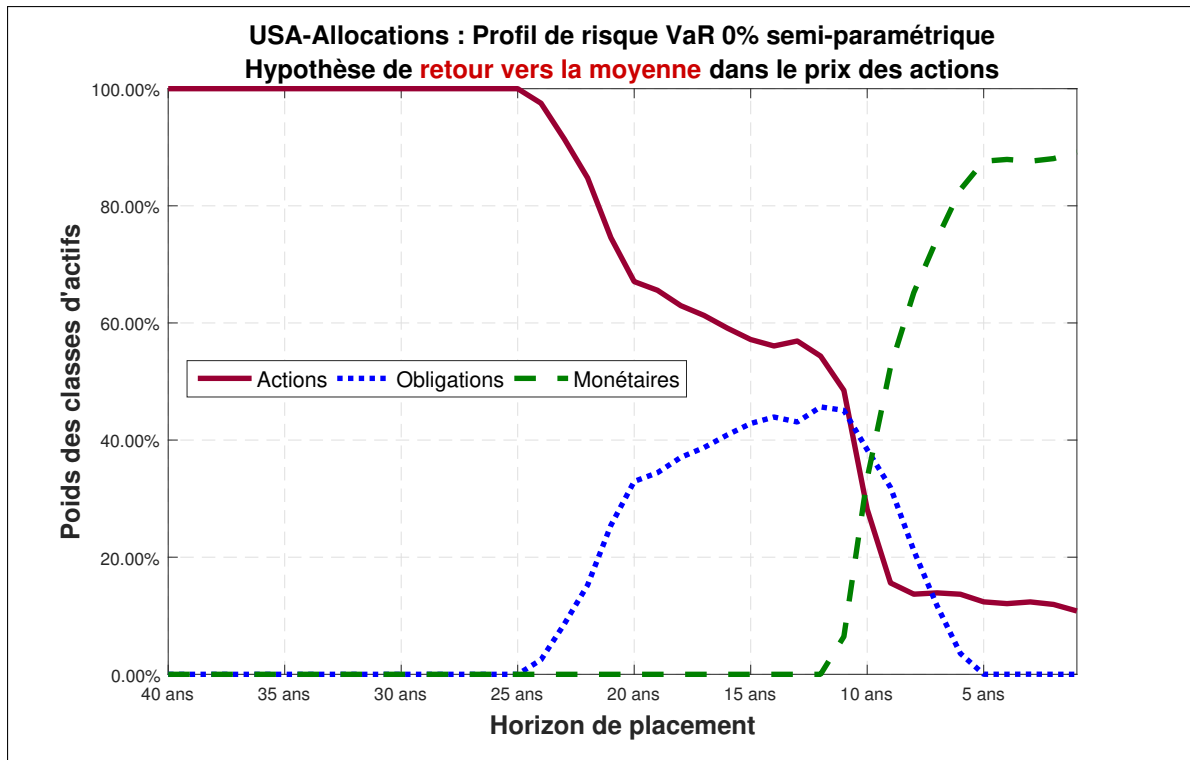


FIGURE 2.27 – USA : Allocations - VaR 0% semi-paramétrique

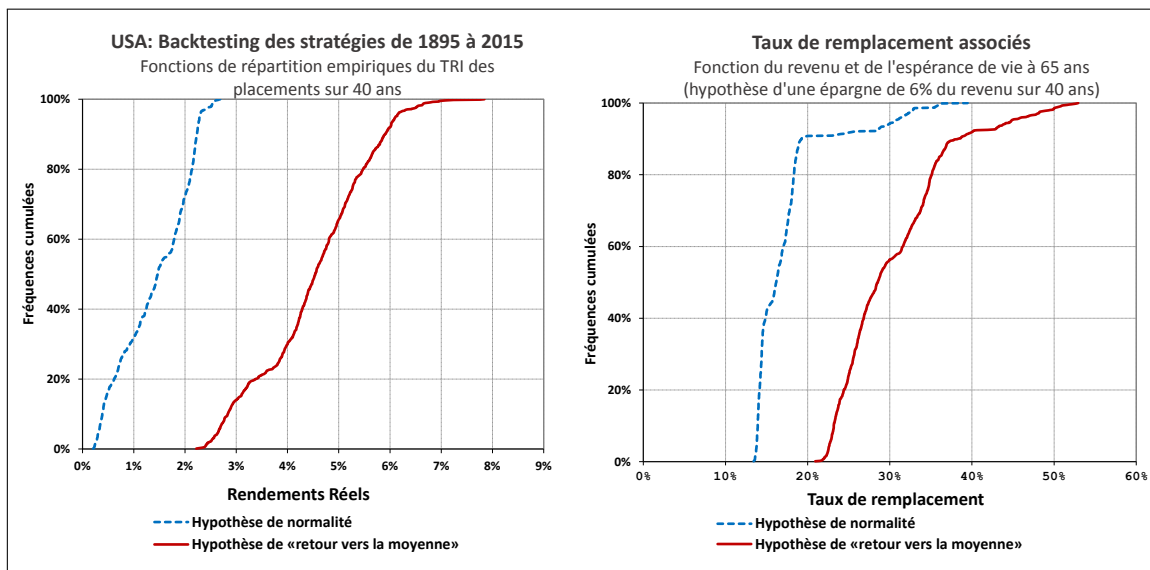


FIGURE 2.28 – USA : Fonctions de répartition des rendements et des taux de remplacement : VaR 0% paramétrique vs non paramétrique

Cette remarque n'est pas neutre car la proportion d'individus « risk averse » est prépondérante. **ARRONDEL et MASSON** (*op. cit.*) évaluent dans le cadre de l'enquête **PATER**<sup>18</sup> l'aversion au risque  $\gamma$  en s'appuyant sur la méthodologie initiée par **BARSKY et collab.** [1997]<sup>19</sup>. Elle est fondée sur des choix hypothétiques de loteries concernant le revenu

18. Enquête **PATER-CEPREMAP** : PAtrimoine et préférences vis-à-vis du TEmps et du Risque.

19. **BARSKY, JUSTER, KIMBALL et SHAPIRO** [1997], «Preference Parameters and Behavioral Heterogeneity :

permanent de l'individu. Ce dernier se voit offrir différents contrats de travail (notés A, B, C en fonction de leur caractère plus ou moins risqué) à la place de celui actuel, générant un revenu de *cycle de vie* « R » : par exemple, un contrat où il a une probabilité 1/2 de doubler ce revenu et une probabilité 1/2 de gagner seulement  $\lambda R$  (avec  $\lambda < 1$ ). Dans le cadre standard de l'utilité espérée, un individu ayant une fonction d'utilité isoélastique  $V$  d'élasticité  $\gamma$  préférera conserver son revenu  $R$  si et seulement si :  $1/2V(2R) + 1/2V(\lambda R) \geq V(R)$ . En faisant varier la valeur de  $\lambda$ , il est alors possible d'en déduire un intervalle pour l'aversion relative pour le risque  $\gamma$  : par exemple, si l'individu refuse le contrat pour  $\lambda = 2/3$  mais l'accepte pour  $\lambda = 4/5$ , la valeur de  $\gamma$  se situe dans l'intervalle  $[2; 3,76[$ .

En dépit de l'instabilité inhérente à cette méthodologie - qui découle de son caractère abstrait, artificiel et trop complexe - la ventilation des individus dans les quatre classes de risque déterminées par l'enchaînement des loteries est éloquente. Les résultats, qui sont reproduits dans le tableau 2.7, pour la France (panel *PATER*) et les Etats-Unis (*PSID*<sup>20</sup> survey) montrent que la classe des individus les plus risquophobes est prédominante (entre 44% et 53% en France d'après les enquêtes *PATER* 2007 et 2009, 49% aux Etats-Unis d'après l'enquête *Panel Study of Income Dynamics (PSID)* 1996).

L'intérêt des questionnaires basés sur des choix hypothétiques de loteries réside dans le fait qu'il existe un lien entre la valeur du paramètre quantitatif d'aversion au risque  $\gamma$ , mesuré par l'enchaînement des loteries, et la demande d'actifs risqués. En effet, dans le cas le plus simple (théorie standard), concernant le choix entre un actif risqué dont le rendement a une espérance ( $\mu$ ) et un écart-type ( $\sigma$ ), et un actif sans risque de rendement ( $r$ ), la demande ( $p$ ) d'actifs risqués dans le patrimoine s'écrit :

$$p = \frac{\mu - r}{\sigma^2 \gamma} \quad (2.15)$$

---

*An Experimental Approach in the Health and Retirement Survey*», *Quarterly Journal of Economics*, 112 (2), pp. 537-580.

20. *Panel Study of Income Dynamics PSID* (1996) - 4, 800 households.



TABEAU 2.7 – Aversion relative pour le risque en % de la population totale : comparaison France-Etats-Unis

Aversion relative pour le risque ( $\gamma$ )	Rejet du contrat <sup>21</sup> A		Acceptation du contrat A	
	Rejet du contrat C	Acceptation du contrat C	Rejet du contrat B	Acceptation du contrat B
	$3,76 \leq \gamma$	$2 \leq \gamma < 3,76$	$1 \leq \gamma < 2$	$\gamma < 1$
États-Unis, 1996 (PSID)	49,1	15,6	15,0	20,3
France, 1998 (Insee)	43,1	39,4	11,2	6,3
France, 2007 (Pater)	44,2	25,9	21,9	8,0
France, 2009 (Pater)	52,8	22,4	18,1	6,7

Source : enquêtes « Patrimoine », Insee, 1998 ; Pater, 2007 et 2009 ; PSID, 1996

La demande ( $p$ ) d'actifs risqués dépend donc :

⇒ de l'aversion relative au risque ( $\gamma$ )

Des anticipations des agents sur :

⇒ l'espérance de l'actif risqué ( $\mu$ )

⇒ la volatilité de l'actif risqué ( $\sigma$ )

⇒ l'espérance de l'actif sans risque ( $r$ )

Sous certaines hypothèses, l'aversion au risque permet donc le calcul d'une *Value-at-Risk*. Dans le cas paramétrique - hypothèse de distribution gaussienne des rendements des actifs - la VaR s'exprime en fonction de la moyenne et de la variance déterminées par la demande ( $p$ ) d'actifs risqués :

$$VaR_{(T,p)} = p \left( (\mu_T - r) + \sigma_T \cdot k_{(1-\alpha)} \right) \quad (2.16)$$

21. Le protocole consiste à déterminer séquentiellement si l'enquêté serait prêt à renoncer à son revenu actuel – supposé être le revenu sur le reste de sa vie – pour accepter d'autres contrats, proposés sous forme de loteries : soit une chance sur deux de doubler son revenu, et une chance sur deux de le voir diminuer d'un tiers (contrat A), de moitié (contrat B), et d'un cinquième (contrat C) – C est donc plus avantageux que A qui est plus avantageux que B.

Avec :  $k_{(1-\alpha)}$  le quantile de la loi  $\mathcal{N}(0, 1)$  au seuil de probabilité  $1 - \alpha$ .

Ce type de questionnaire permet donc d'estimer la *Value-at-Risk* moyenne acceptée par les individus risquophobes (rejet du contrat A et rejet du contrat C). On constate que l'aversion au risque des individus de la classe qui refusent tous les contrats n'est pas bornée  $\gamma \in [7.53; +\infty]$ . Pour évaluer la VaR moyenne de la classe, on retient la valeur moyenne estimée dans le panel PSID 1996, soit  $\gamma = 33,9$ . Sous cette hypothèse, en reprenant les valeurs moyennes de rendements réels des actifs aux Etats-Unis (Tableau 2.2b), on détermine une VaR à 95% proche de 0% pour la classe qui regroupe les plus risquophobes. Les stratégies d'allocation d'actifs reposant sur le critère classique « espérance-variance », qui restent majoritairement préconisées par les intermédiaires financiers, pénalisent donc presque 50% des individus, puisque les divergences de performances entre les stratégies paramétrique et semi-paramétrique sont d'autant plus importantes que les épargnants sont averses aux risques.

## 2.4 En guise de conclusion

Les propriétés statistiques des différents actifs font apparaître qu'à long terme les actions procurent un risque sensiblement moins élevé que les autres actifs financiers. En outre, les propriétés de retour à la moyenne des actions justifient qu'elles soient utilisées dans une stratégie de *cycle de vie* comme « *option par défaut* » de plans d'épargne *retraite*. Cela dit, la distribution non gaussienne des actions justifie également d'utiliser comme critère d'allocation non plus une *VaR* paramétrique mais une *VaR* semi-paramétrique, ici la *VaR* de Cornish-Fisher (*CF - VaR*). En comparatif, les résultats sont saisissants : la *VaR* semi paramétrique aboutit à une allocation en actions bien plus riche que l'allocation par la *VaR* paramétrique. En outre, la comparaison des distributions de *taux de remplacement* confirme sans équivoque la supériorité des allocations calculées à partir du programme semi-paramétrique, qui aboutissent à des *taux de remplacement* minimum supérieurs à ceux calculés à partir de l'autre modèle de gestion. Cette conclusion dépasse la question technique de l'estimation de la *VaR* dans un contexte de distribution non gaussienne ; elle dit que le caractère non gaussien de la distribution des actions doit être pris en compte dans toute allocation à long terme et que les simulations stochastiques traditionnelles donnent des résultats biaisés et des conclusions erronées sur les modes de gestion de l'épargne de long terme. Naturellement, les conclusions relatives à la distribution du rendement des actifs financiers sont sujettes aux critiques traditionnelles des procédures de *backtesting* et n'ont pas de caractère prédictif. Par exemple, la généralisation des politiques d'assouplissement quantitatif (*QE*) pourrait nourrir de nouvelles *bulles* spéculatives en gonflant artificiellement le prix des actifs et modifier temporairement leurs caractéristiques « rendement-risque ».

## Annexes

### 2.A Annexe 1 : Profils de pertes en fonction de la durée de détention des actifs

Le calcul des probabilités de pertes en fonction de l'horizon de placement a été réalisé pour le Royaume-Uni et le Japon afin de conforter les résultats établis pour la France et les USA.

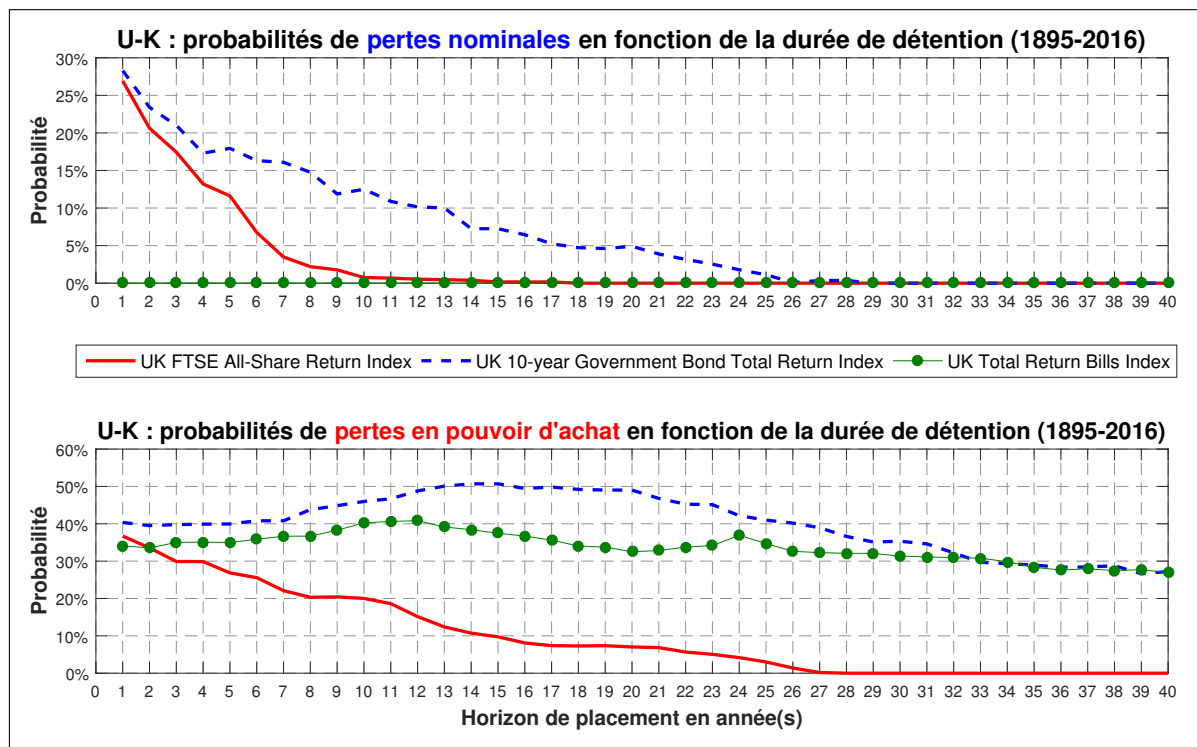


FIGURE 2.29 – Profils de pertes en fonction de la durée de détention des actifs - UK

Les probabilités calculées pour ces deux nouveaux pays situés sur des continents distincts confirment que sur les horizons longs, seuls les placements en actifs risqués ont surperformé l'évolution des prix.

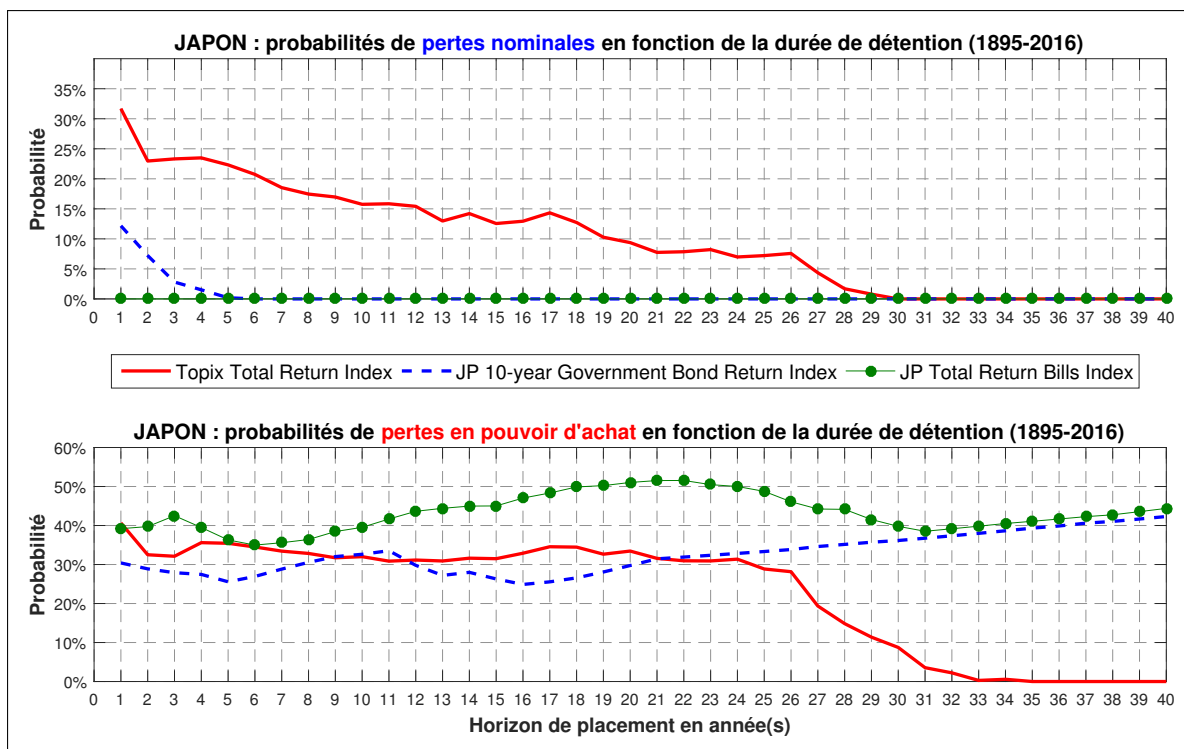


FIGURE 2.30 – Profils de pertes en fonction de la durée de détention des actifs - Japon

## 2.B Annexe 2 : Synthèse des résultats pour des durées de placement inférieures à 40 ans.

- Graphiques 2.31 à 2.33 - fonctions de répartition des taux de remplacement - VaR vs Cornish-Fisher Value-at-Risk (CFVaR)

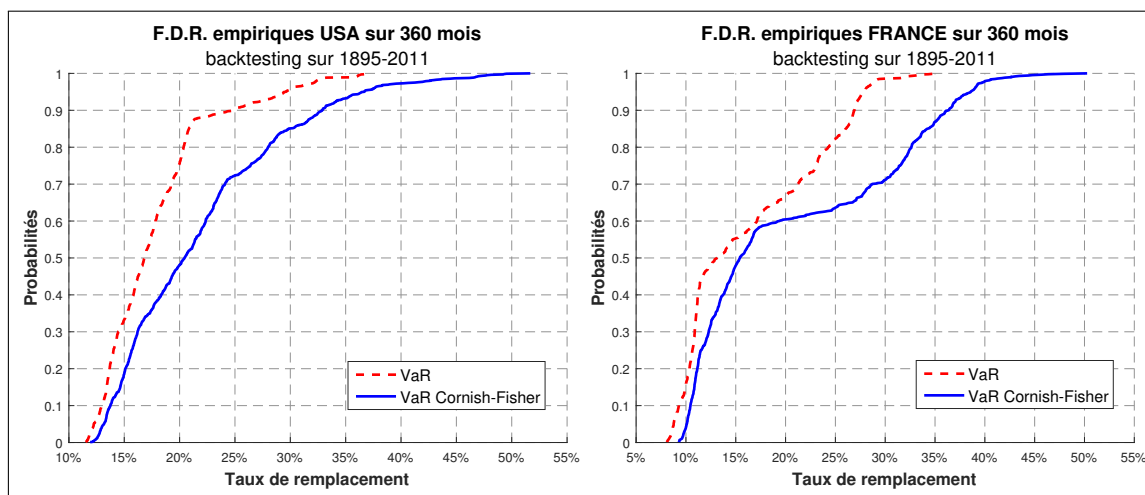


FIGURE 2.31 – Taux de remplacement - Durée de l'épargne : 360 mois

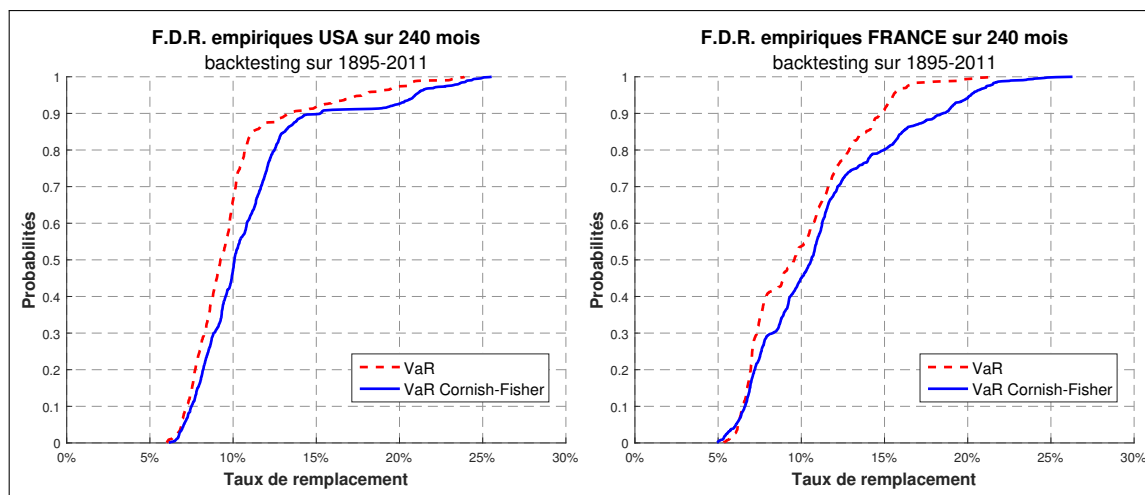


FIGURE 2.32 – Taux de remplacement - Durée de l'épargne : 240 mois

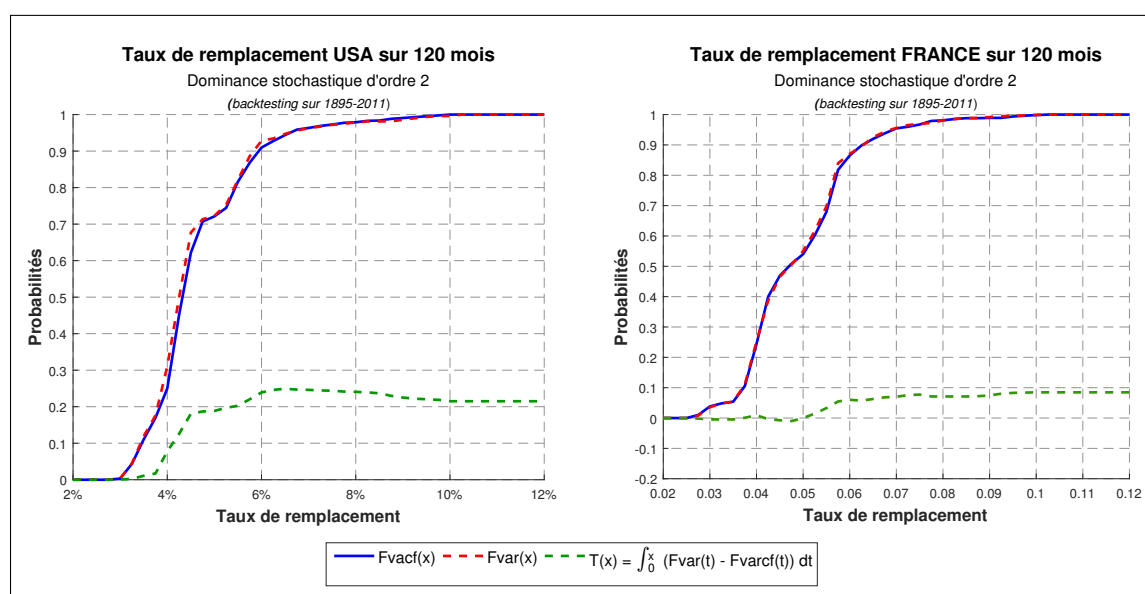


FIGURE 2.33 – Taux de remplacement & Dominance stochastique pour 120 mois

Contrairement aux horizons longs, pour les investissements sur 10 années, la lecture des graphiques des fonctions de répartition ne donne pas une information directe sur la hiérarchie des stratégies d'investissement. Il est nécessaire de recourir au critère de dominance stochastique de second ordre pour juger de la supériorité des stratégies semi-paramétriques. Concernant les USA, le test de dominance stochastique d'ordre 2 est sans ambiguïté :

$$F_{CFVaR} \text{ domine } F_{VaR} \text{ à l'ordre 2, en effet, } \forall x \in [a, b], T(x) = \int_a^x (F_{VaR}(t) - F_{CFVaR}(t)) dt \geq 0$$

Les allocations calculées à partir d'une VaR de Cornish-Fisher dominant donc celles dé-

**CHAPITRE 2. DISTRIBUTION NON GAUSSIENNE DES RENDEMENTS : QUEL IMPACT SUR LES OPTIONS PAR DÉFAUT DES PLANS D'ÉPARGNE RETRAITE ?**

terminées à partir d'une VaR paramétrique. Dans le cas de la France, les conditions de la dominance de second ordre ne sont pas respectées sur le début de la distribution des **taux de remplacement**. On ne peut donc pas établir de hiérarchie stricte des stratégies d'investissement.

TABLEAU 2.8a – USA : Résumé des principaux résultats

USA : LifeCycle Asset Allocation [1895-2011]								
Summary Statistics								
Holding periods	CF VaR strategy				VaR strategy			
	10 years	20 years	30 years	40 years	10 years	20 years	30 years	40 years
Risk criteria	CFVaR=3%	CFVaR=3%	CFVaR=3%	CFVaR=3%	VaR=3%	VaR=3%	VaR=3%	VaR=3%
Average return	1.7%	3.9%	4.7%	5.1%	1.6%	2.7%	3.7%	4.4%
Standard deviation	2.5%	2.8%	1.8%	1.3%	2.6%	2.1%	1.5%	1.1%
Median Return	2.2%	3.6%	4.2%	5.3%	2.1%	2.5%	3.5%	4.3%
1st centile (return)	-3.8%	-1.9%	1.5%	2.4%	-4.3%	-1.7%	0.5%	2.3%
99th centile (return)	7.2%	9.4%	8.5%	8.0%	7.1%	7.1%	6.7%	6.5%
Skewness	-0.15	0.08	0.46	-0.31	-0.21	0.13	0.31	0.06
Kurtosis	2.51	2.01	2.10	2.63	2.63	2.05	2.43	2.30
Average replacement rate	4.6%	11.1%	21.9%	38.1%	4.6%	9.9%	17.8%	29.1%
Median replacement rate	4.4%	10.1%	20.4%	34.3%	4.3%	9.2%	16.8%	27.9%
1st centile (replacement rate)	3.1%	6.6%	12.5%	22.6%	3.1%	6.2%	11.7%	21.7%
99th centile (replacement rate)	8.8%	24.1%	46.7%	74.6%	9.2%	21.5%	35.8%	47.2%
Stochastic dominance tests								
FCFVaR vs FVaR	10 years		20 years		30 years		40 years	
	FCFVaR SOSD FVaR		FCFVaR FOSD FVaR		FCFVaR FOSD FVaR		FCFVaR FOSD FVaR	

FODS : first-order stochastically dominates SOSD : second-order stochastically dominates

TABLEAU 2.8b – France : Résumé des principaux résultats

FRANCE : LifeCycle Asset Allocation [1895-2011] hors périodes de guerre [1915-1920] and [1940-1948]								
Summary Statistics								
Holding periods	CF VaR strategy				VaR strategy			
	10 years	20 years	30 years	40 years	10 years	20 years	30 years	40 years
Risk criteria	CFVaR=3%	CFVaR=3%	CFVaR=3%	CFVaR=3%	VaR=3%	VaR=3%	VaR=3%	VaR=3%
Average return	1.8%	3.3%	3.8%	3.9%	1.5%	2.1%	2.6%	3.0%
Standard deviation	3.2%	3.4%	2.1%	0.9%	2.8%	2.4%	1.8%	0.9%
Median Return	1.8%	3.2%	4.0%	3.9%	1.1%	1.7%	2.2%	2.8%
1st centile (return)	-6.4%	-3.6%	0.0%	2.1%	-5.7%	-2.2%	-0.7%	1.3%
99th centile (return)	9.4%	10.5%	8.9%	5.6%	7.2%	8.3%	7.5%	5.0%
Skewness	-0.07	0.06	0.28	0.05	-0.22	0.56	0.84	0.54
Kurtosis	3.24	2.33	2.51	2.16	3.26	2.82	3.41	2.31
Average replacement rate	4.9%	11.2%	20.7%	28.4%	4.9%	10.0%	16.4%	22.2%
Median replacement rate	4.7%	10.6%	15.4%	20.9%	4.7%	9.6%	13.1%	17.5%
1st centile (replacement rate)	2.7%	5.3%	9.5%	14.4%	2.8%	5.7%	8.3%	12.3%
99th centile (replacement rate)	9.3%	22.6%	42.5%	62.5%	8.9%	19.5%	31.9%	46.2%
Stochastic dominance tests								
FCFVaR vs FVaR	10 years		20 years		30 years		40 years	
	<i>Inconclusive</i>		FCFVaR FOSD FVaR		FCFVaR FOSD FVaR		FCFVaR FOSD FVaR	

FODS : first-order stochastically dominates - SOSD : second-order stochastically dominates

## 2.C Annexe 3 : Stratégies alternatives d'assurance de portefeuille

### STOP-LOSS

C'est probablement l'une des règles de gestions d'actifs les plus utilisées par les investisseurs ordinaires et les gérants de portefeuilles sur les marchés financiers. En effet, la méthode « *Stop-Loss* » est la stratégie d'assurance de portefeuille la plus intuitive. Si, par simplification, on limite l'univers de gestion à deux actifs, l'un risqué et l'autre non, alors la méthode du *Stop-Loss* consiste à vendre l'indice risqué lorsque la valeur de ce dernier touche la « valeur plancher », et consécutivement à placer l'argent au taux sans risque. La valeur plancher peut se définir comme le montant investi actualisé en fonction du taux sans risque et de l'horizon de placement. De cette façon, le plancher est progressivement désactualisé. On achètera à nouveau l'indice risqué lorsque sa rentabilité cumulée depuis l'origine, sera supérieure à celle de l'investissement sans risque.

En dépit de l'apparente logique de ce type de gestion qui semble relever du bon sens, plusieurs auteurs montrent l'inefficacité de cette méthode. Sous l'hypothèse de complétude de marché, [DYBVIG \[1988\]](#) montre que la stratégie du *Stop-Loss* fait partie des méthodes d'allocation de portefeuille inefficaces, en raison d'une diversification intertemporelle incomplète. Plus tard, en menant l'étude sur la base d'une fonction d'utilité classique d'investisseur averse au risque, [GOLLIER \[1997\]](#) montre que l'inefficacité de la stratégie du *Stop-Loss* n'est pas nécessairement liée à l'hypothèse de complétude de marché, puisque la conclusion de [DYBVIG \[1988\]](#) est confirmée sous l'hypothèse d'incomplétude des marchés financiers. Les conclusions de [GOLLIER \[1997\]](#) s'appuient sur les tests de dominances stochastiques d'ordre deux. Singulièrement, [GOLLIER \[1997\]](#) présente un cas unique où la stratégie du *Stop-Loss* a un caractère optimal. C'est le cas où les investisseurs sont caractérisés par une fonction d'utilité non-différentiable, en l'occurrence avec une fonction d'utilité linéaire par morceaux.

Pour illustrer les limites du *Stop-Loss*, nous avons procédé à un back test de la stratégie à partir des historiques des performances des placements monétaires, obligataires et actions. Nous présentons les résultats sur une fenêtre glissante de 480 mois de 1895 à 2011. La distribution des rendements au terme est comparée à celle obtenue par la stratégie [CFVaR](#). Les graphiques [2.34](#) ci-contre comparent les fonctions de répartition des rende-



ments associées à ces deux stratégies.

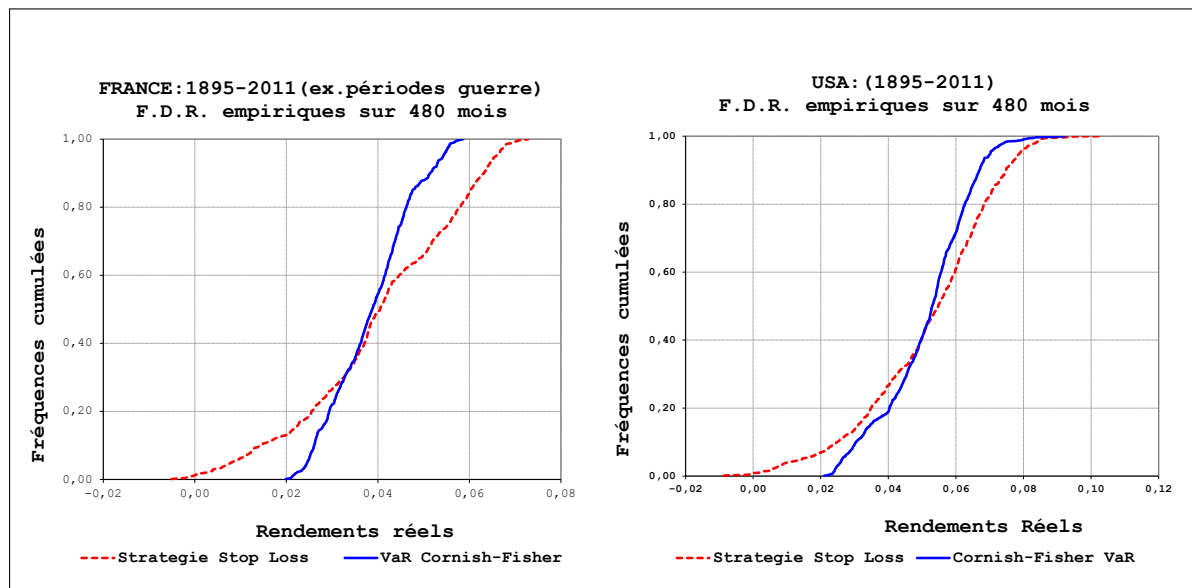


FIGURE 2.34 – Distributions de probabilités des stratégies : « Stop Loss » vs « CFVaR »

La comparaison montre qu'il n'y a pas de dominance stochastique d'une stratégie sur l'autre. Toutefois, la fonction de distribution cumulée des rendements réels est plus concentrée pour la stratégie CFVaR que pour la stratégie stop-loss. On en conclut qu'un investisseur averse au risque préférera la stratégie VaR plutôt que la stratégie Stop-Loss. La remarque est valable tant pour la France que pour les Etats-Unis.

Indépendamment des coûts de transaction qui peuvent être prohibitifs, on note que la garantie en capital n'est pas assurée avec la stratégie *Stop-Loss* dans un marché volatil, sauf à supposer que les arbitrages entre actif risqué et sans risque sont réalisés au moment où le portefeuille touche le plancher, ce qui n'est pas réaliste en pratique. Les graphiques 2.35 ci-dessous, qui présentent les performances théoriques (figure 2.35a) et pratiques (figure 2.35b) des stratégies *Stop-Loss*, illustrent clairement le phénomène.

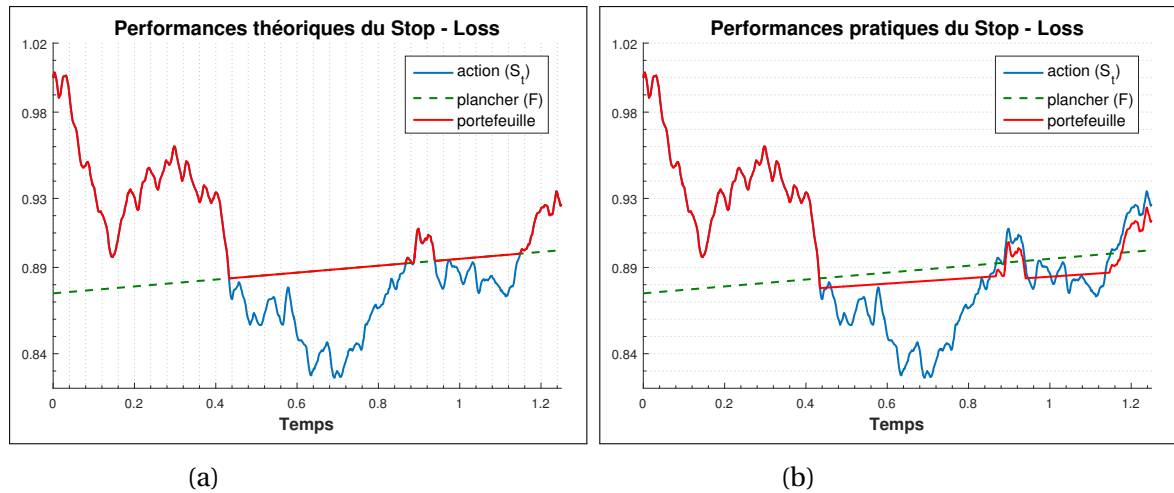


FIGURE 2.35 – Performances théorique et pratique du Stop-Loss

Si la stratégie du *stop-loss* présente localement des arbitrages en faveur de l'investisseur, ce n'est pas toujours une "*lower cost strategy*"<sup>22</sup> pour des horizons de moyen et long terme. Bon nombre d'études la jugent trop onéreuse par rapport aux stratégies de type *buy-and-hold* (à l'instar de stratégies adossées sur les fonds profilés). La vraie difficulté pour la mise en place de la stratégie du *stop-loss* est en partie liée à la difficulté d'évaluer le coût. Ce coût est naturellement fonction de la distributions des aléas et du degré de persistance des chocs sur le cours de l'action. La littérature financière montre que, dans le cas où la dynamique du prix est une *semimartingale* continue, il existe un processus croissant continu  $(L_t^F)_{t \geq 0}$ , appelé temps local<sup>23</sup> en F de  $S_t$ , tel que, en faisant abstraction des frais de transactions, le coût de la stratégie du stop-loss peut être évalué en s'appuyant sur la quantité donnée par la formule d'Itô-Tanaka suivante<sup>24</sup> :

$$\max(S_t, F) = \int_0^t \mathbb{1}_{S_s \geq F} dS_s + \frac{1}{2} L_t^F \quad (2.17)$$

Nous remarquons que l'inefficience de la règle du *stop-loss* est d'autant plus perceptible que l'on raisonne dans un cadre gaussien. C'est dans cette optique que KAMINSKI et LO [2008] montrent que, si le prix de l'actif est régi par une dynamique de marche au hasard, alors la règle du *stop-loss* conduira toujours à des niveaux de rendements réalisés inférieurs aux rendements attendus. En revanche, l'étude montre que dans l'hypothèse

22. Stratégie à moindre coût

23. Le processus  $L_t^F = L_t^F(S_t)$  ne croit que lorsque  $S_t = F$  et a pour support  $t \in \mathbb{R}^+ : S_t = F$

24. Pour approfondir, voir : Peter Tankov « Introduction to portfolio insurance » ([http://www.cmap.polytechnique.fr/IMG/pdf/Peter\\_Tankov\\_2411.pdf](http://www.cmap.polytechnique.fr/IMG/pdf/Peter_Tankov_2411.pdf)) et Hervé Guiof « Calcul Stochastique Avancé » (<http://www-ljk.imag.fr/membres/Pierre.Etore/fichiers/Cours2006.pdf>)

d'existence de *momentum*, les rendements issus de l'application de la règle du *Stop-Loss* ont une meilleure espérance que dans le cas d'hypothèses de normalité.

## CPPI

Le CPPI (*Constant Proportion Portfolio Insurance*) ou gestion à « coussin » est une méthode alternative à l'assurance de portefeuille à base d'options (OBPI). L'intérêt de la technique est qu'elle évite la manipulation d'instruments financiers sophistiqués qui sont rarement émis à des horizons longs et, de ce fait, peu adaptés aux placements de *cycle de vie*. En outre, la méthode des options ne garantit la valeur du capital qu'à l'échéance, alors que la gestion à coussin donne l'assurance théorique de ne pas descendre en dessous du plancher tout au long de la période d'épargne. La gestion CPPI est relativement récente. Elle a été introduite par PEROLD [1986] sur des instruments à taux fixes, puis BLACK et JONES [1987] ont étendu cette technique en utilisant des sous-jacents de type actions. Plus récemment, BERTRAND et PRIGENT [2002] ont utilisé la théorie des valeurs extrêmes afin de déterminer les paramètres de la méthode. En pratique, une gestion CPPI consiste à gérer de façon dynamique l'exposition aux actifs risqués et non risqués, afin de garantir un niveau prédéterminé du capital investi. La méthode peut se formaliser de la manière suivante : Soit un portefeuille composé d'un actif risqué, qui suit un mouvement brownien géométrique, en quantité A et d'un actif sans risque, qui croît au taux constant r, en quantité M, alors, au temps t, la valeur totale du portefeuille V se note :

$$V_t = A_t + M_t \quad (2.18)$$

Le coussin C est égal à la valeur V du portefeuille minoré du niveau « plancher » P.

$$C_t = V_t - P_t \quad (2.19)$$

Le plancher P à l'instant t est obtenu en calculant la valeur actuelle du capital garanti G à l'échéance T au taux sans risque r.

$$P_t = Ge^{-r(T-t)} \quad (2.20)$$

L'exposition au risque du portefeuille est déterminée par la relation  $A_t = mC_t$  dans laquelle la valeur de l'actif risqué est un multiple constant du coussin. Le reste du portefeuille est investi sur l'actif sans risque à hauteur de  $M_t = V_t - A_t$ .

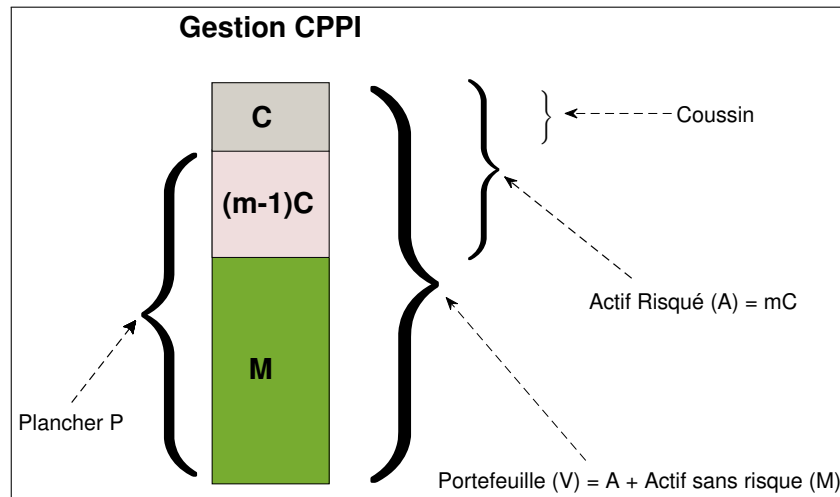


FIGURE 2.36 – Assurance de portefeuille par la méthode du coussin (CPPI)

La stratégie de gestion consiste à arbitrer entre actif risqué et non risqué afin de respecter sur toute la période d'investissement l'égalité  $A_t = mC_t$ . L'exposition au risque est fonction du levier  $m$ . La baisse maximale tolérée sur  $A$  sans mise en cause de la garantie est égale à  $1/m$ . En effet, la baisse  $\Delta A$  de la valeur de l'actif risqué qui annule le coussin correspond à un recul relatif de  $\Delta A/A = C/mC$ , soit  $1/m$ . Pour  $m$  donné, son inverse représente l'amplitude de perte maximale que l'on peut accepter sur l'actif risqué entre deux rebalancements.

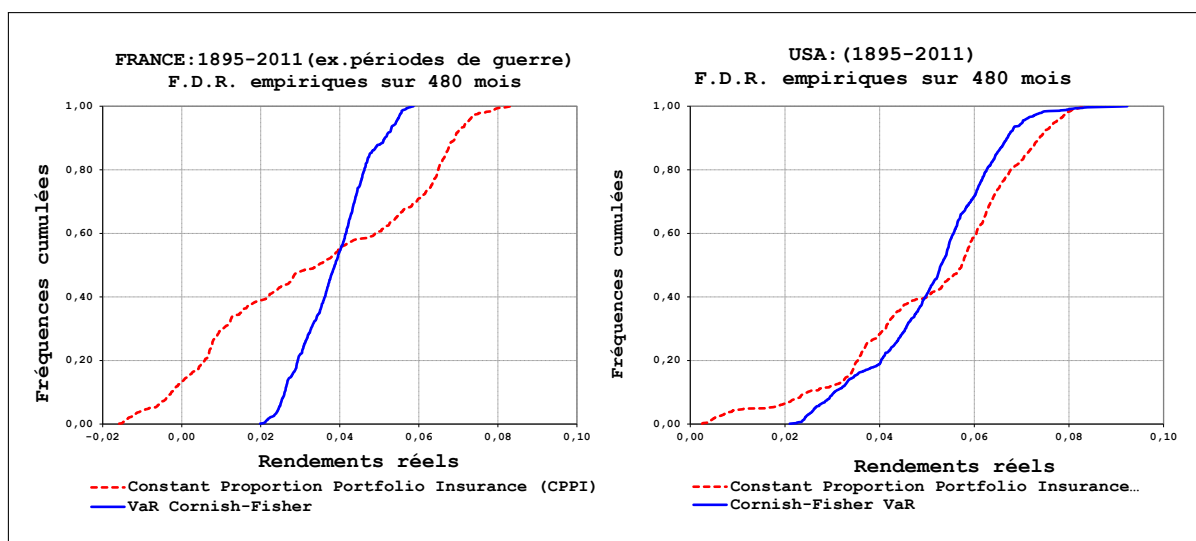


FIGURE 2.37 – Distributions de probabilités des stratégies : « CPPI » vs « CFVaR »

Comme précédemment décrit, la comparaison entre les fonctions de distribution cumulée montre que la variance des rendements au terme déterminés par la stratégie CF-VaR, est plus faible que celle induite par une assurance de type CPPI. Un épargnant averse au risque choisira la stratégie CFVaR plutôt que la « Constant Proportion Portfolio Insurance ».

## 2.D Annexe 4 : Portefeuille optimal moyenne-VaR et normalité

On pourra se référer aux exemples illustratifs dans WANG [2000] en guise de démonstrations des assertions suivantes.

**Proposition 1.** *De manière générale, un portefeuille optimal moyenne-variance n'est pas l'équivalent d'un portefeuille moyenne-VaR optimal, et vice-versa.*

**Proposition 2.** *De manière générale, un portefeuille optimal moyenne-variance ne coïncide pas à un portefeuille moyenne-VaR optimal, et vice-versa.*

**Proposition 3.** *Sans hypothèse de distribution, un ensemble de portefeuilles moyenne-variance optimaux n'est pas un sous-ensemble de portefeuilles moyenne-VaR optimaux et vice-versa.*

**Lemme.** *Sous hypothèse de normalité des rendements, un portefeuille moyenne-VaR optimal est un portefeuille moyenne-variance optimal.*

**Proposition 4.** *Sous hypothèse de normalité des rendements, la frontière efficiente moyenne-VaR coïncide avec la frontière efficiente moyenne-variance.*

## 2.E Annexe 5 : Test de dominance stochastique de Kolmogorov-Smirnov pour deux échantillons

Le test de dominance stochastique du premier ordre de F sur G suppose que  $\forall x \in \mathbb{R}, F(x) \leq G(x)$ . Ce critère détermine un classement partiel des distributions (en termes d'ordre). On peut corroborer le verdict de la méthode en faisant appel à un test statistique non paramétrique plus formel de type Kolmogorov-Smirnov. Soient F et G les fonctions

de répartition empiriques (CDF) des rendements de deux stratégies d'investissement que l'on désire comparer. On considère deux échantillons indépendants  $X_1, X_2, \dots, X_n$  i.i.d. de CDF  $F$  de taille  $n$  et  $X_{n+1}, X_{n+2}, \dots, X_{n+m}$  de CDF  $G$  de taille  $m$ . Alors le test bilatéral de test de Kolmogorov-Smirnov pour deux échantillons s'écrit :

$$\begin{cases} H_0 & : F(x) - G(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ H_1 & : F(x) - G(x) \neq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (2.21)$$

Le test d'ajustement bilatéral permet de tester si deux échantillons indépendants sont extraits de la même population (ou de populations ayant la même distribution). Le rejet de l'hypothèse nulle  $H_0$  par le test bilatéral indique que les distributions empiriques sont dissemblables. Dans ce cas, pour statuer sur la dominance stochastique de la CDF  $F$  sur celle de  $G$ , on applique le test unilatéral de Kolmogorov-Smirnov :

$$\begin{cases} H_0 & : F(x) - G(x) \leq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ H_1 & : F(x) - G(x) > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (2.22)$$

Si l'hypothèse  $H_0$  n'est pas rejetée on en déduit qu'il y a dominance stochastique de premier ordre de  $F$  sur  $G$ . L'enchaînement des deux tests permet donc de juger du degré de similarité entre les distributions empiriques des rendements associés à deux stratégies d'allocation d'actifs et de la domination stochastique potentielle de l'une des deux stratégies. Afin de développer un test formel, les tests unilatéral et bilatéral peuvent être reformulés comme suit :

$$H_0 : \sup_{x \in \mathbb{R}} |F(x) - G(x)| = 0 \quad \text{vs} \quad H_1 : \sup_{x \in \mathbb{R}} |F(x) - G(x)| \neq 0 \quad (2.23)$$

et

$$H_0 : \sup_{x \in \mathbb{R}} \{F(x) - G(x)\} = 0 \quad \text{vs} \quad H_1 : \sup_{x \in \mathbb{R}} \{F(x) - G(x)\} > 0 \quad (2.24)$$

Le test bilatéral de Kolmogorov-Smirnov s'écrit alors :

$$\delta_N = \sqrt{\frac{n * m}{N}} \max_{1 \leq t \leq N} |T_N(Z_t)|$$

Le test unilatéral est donné par la formule :

$$\eta_N = \sqrt{\frac{n * m}{N}} \max_{1 \leq t \leq N} \{T_N(Z_t)\}$$

avec  $T_N(Z_i) = F_n(X_i) - G_m(X_i)$ , et  $N = n + m$ .  $F_n$  et  $G_m$  représentant les fonctions de répartition empiriques pour  $F$  et  $G$ . Kolmogorov et Smirnov donnent la distribution asymptotique de  $\delta_N$  et  $\eta_N$  sous  $H_0$  telle que :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(\delta_N > v) = -2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \exp(-2k^2 v^2) \quad \text{et} \quad \lim_{N \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(\eta_N > v) = \exp(-2v^2) \quad (2.25)$$

Le tableau des résultats concernant les tests de dominance entre les deux stratégies d'investissement VaR et est CFVaR dans le cas des Etats-Unis est restitué ci-dessous :

TABLEAU 2.9 – Résultats des tests de dominance stochastique de Kolmogorov-Smirnov

Tests de Dominance Stochastique USA (1895-2011) : stratégies VaR vs CF-VaR (480 mois)			
Rendements			
H0 : F(x) - G(x) = 0 vs H1 : F(x) - G(x) ≠ 0		& H0 : F(x) - G(x) ≤ 0 vs H1 : F(x) - G(x) > 0	
Test bilatéral		Test unilatéral	
Diagnosis	<b>H1</b>	Diagnosis	<b>H0</b>
P-Value	0,00%	P-Value	99,89%
Test Statistic	0,3106	Test Statistic	0,0011
Taux de remplacement			
H0 : F(x) - G(x) = 0 vs H1 : F(x) - G(x) ≠ 0		& H0 : F(x) - G(x) ≤ 0 vs H1 : F(x) - G(x) > 0	
Test bilatéral		Test unilatéral	
Diagnosis	<b>H1</b>	Diagnosis	<b>H0</b>
P-Value	0,00%	P-Value	99,02%
Test Statistic	0,3971	Test Statistic	0,0032
<i>F correspond à la CDF de la stratégie CFVaR et G à celle de la stratégie VaR paramétrique.</i>			
<i>Seuil de signification : 5%</i>			

Comme on pouvait s'y attendre, tant pour la distribution des rendements que des **taux de remplacement**, les résultats montrent que le test bilatéral rejette l'hypothèse nulle de l'égalité des distributions avec une très faible p-value. Les tests unilatéraux confirment avec des p-value très élevées (> 99%) l'hypothèse nulle  $H_0$ , en d'autres termes on a :  $F(x) \leq G(x) \quad \forall x$ . On en déduit que la stratégie CFVaR domine stochastiquement à l'ordre 1 la stratégie déterminée par le critère de VaR.

## 2.F Annexe 6 : « Great Recession » et « Great Depression » aux Etats-Unis

Les conclusions relatives à la distribution du rendement des actifs financiers sont sujettes aux critiques traditionnelles des procédures de *backtesting* et notamment à la dé-

cision d'intégrer ou non les évènements rares dans l'analyse. Par exemple, la prise en compte de la période de crise de 2008 ou « *Great Recession* », est susceptible d'introduire un surcroît d'asymétrie négative. L'inclusion de cette crise exceptionnelle peut ainsi contribuer à donner plus d'importance au skewness qu'il n'en a durant les périodes de croissance « normales » ou de récessions passagères. Si la remarque est vraie, elle mérite toutefois d'être relativisée. L'effet de la « *Great Recession* » sur le prix des actifs est clairement visible : entre 2008 et 2014, le rendement des actions est caractérisé par un coefficient de skewness négatif plus prononcé et un excès de kurtosis manifeste (cf. tableau 2.10 ci-dessous).

TABLEAU 2.10 – Caractéristiques du S&P 500 de 1895 -2014

<b>S&amp;P 500 1895 -2014</b>	
<b>(Total Returns annualisés)</b>	
<b>du 31-Jan-1895 au 31-Déc-2014</b>	
	Horizon 12 mois
Nb. Observation	1428
1er percentile	-48.31%
Moyenne	6.23%
99ème percentile	45.12%
Volatilité	19.81%
Skewness	-0.57
Kurtosis (excess)	1.93
<b>du 31-Jan-1950 au 31-Déc-2007</b>	
	Horizon 12 mois
Nb. Observation.	684
1er percentile	-33.20%
Moyenne	7.36%
99ème percentile	39.36%
Volatilité	15.69%
Skewness	-0.52
Kurtosis (excess)	0.53
<b>du 31-Jan-2008 au 31-Déc-2014</b>	
	Horizon 12 mois
Nb. Observation.	72
1er percentile	-55.22%
Moyenne	8.64%
99ème percentile	40.21%
Volatilité	19.04%
Skewness	-1.8
Kurtosis (excess)	3.23



Cependant, l'impact de la crise financière sur les caractéristiques de la distribution du rendement des actions doit être tempéré. En effet, la « *Great Recession* » de 2008 concerne 72 observations mensuelles sur un total de 1428. De plus, la comparaison entre la « *Great Recession* » et la « *Great Depression* » de 1929 montre que la « *Great Depression* » reste sans conteste la plus profonde et la plus longue récession de l'histoire du monde industrialisé occidental. Le graphique qui suit représente le « *maximum drawdown*<sup>25</sup> » du S&P500 calculé sur des données mensuelles de janvier-1900 à juillet-2015. L'analyse favorise la comparaison entre les deux crises. Pendant la « *Great Depression* », le S&P500 a chuté de 83% en moins de 3 ans (33 mois). Il n'a rejoint son pic d'avant crise qu'en 1945 (soit un délai de recouvrement de 153 mois). Par comparaison, au cours de la « *Great Recession* » le S&P500 a reculé de 51% en 16 mois et a rejoint son précédent sommet en 37 mois.

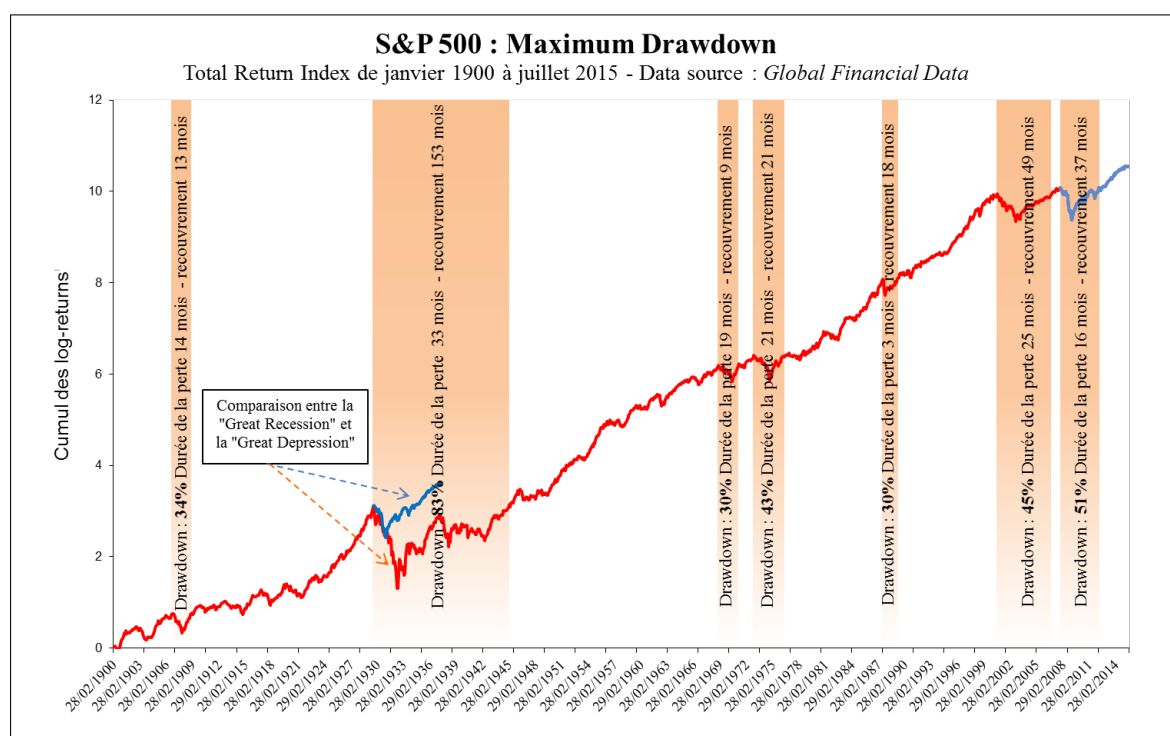


FIGURE 2.38 – S&P500 *Maximum Drawdown* de 1900-2015

## 2.G Annexe 7 : Programme d'optimisation de la VaR de Cornish-Fisher

Le problème d'optimisation qui consiste à minimiser une VaR de Cornish-Fisher sous contraintes de rendement et de répartition du capital est un problème d'optimisation

25. Le *max drawdown*, ou « perte successive maximale », mesure la plus forte baisse dans la valeur d'un portefeuille. Précisément, il correspond à la perte maximale historique supportée par un investisseur qui aurait acheté au plus haut et revendu au plus bas.

non-lisse (non-différentiable). Pour le résoudre, nous avons retenu la méthode implémentée par le Pr. Frank E. Curtis<sup>26</sup> (Lehigh University).

L'algorithme du « *Gradient Sampling* » ou **GS** pour la minimisation de fonctions non-lisses et non-convexes<sup>27</sup> a été proposé par **BURKE et collab.** [2005], dont la caractéristique la plus intéressante repose sur l'usage d'échantillons du gradient plutôt que le sous-gradient. Dans l'algorithme du **SQP-GS**, qui combine la technique du **GS** pour rendre le calcul de la direction de recherche efficace dans les régions non lisses, avec une méthode de programmation quadratique séquentielle (**programmation quadratique séquentielle – ou *Sequential Quadratic Programming* – (SQP)**), Frank E. Curtis présente un algorithme **SQP-GS** qui étend l'algorithme **GS** à l'optimisation de problèmes non-convexes, non-lisses, qui sont assujettis à des contraintes. L'algorithme **SQP-GS** permet ainsi, par approximation du sous-différentiel en tout point du domaine de la variable  $x$  (avec  $x \in \mathbb{R}^n$ ) par une enveloppe convexe de gradients générés aléatoirement au voisinage de  $x$ , de garantir que l'on ait une direction de descente. La méthode utilise une pénalité de  $l_1$  pour régulariser les contraintes. Enfin, la méthode du **SQP-GS** est globalement convergente vers l'optimum avec une probabilité égale à 100%.

Considérons le problème contraint ( $\mathcal{P}b$ ) suivant :

$$(\mathcal{P}b) \begin{cases} \min_x f(x) \\ \text{S.C. } g(x) \leq 0, \quad g \in \mathbb{R}^m \end{cases}$$

Les contraintes linéaires du sous-problème étant inconsistantes, on pénalise le sous-problème quadratique (**problème quadratique –ou *Quadratic Programming* – (QP)**) ci-dessous pour le rendre consistant et garantir la robustesse de la convergence globale dans la méthode

26. F. E. Curtis and X. Que, "An Adaptive Gradient Sampling Algorithm for Nonsmooth Optimization," *Optimization Methods and Software*, iss. DOI : 10.1080/10556788.2012.714781, 2012.

27. Potentiellement non localement lipschitziennes

du GS.

$$(QP) \left\{ \begin{array}{l} \min_d \rho z + \sum_{j=1}^m r_j + \frac{1}{2} d' H_k d \\ \text{S.C. : } \begin{cases} f(x_k) + \nabla f(x_k)' d \leq z, \quad \forall x \in \mathcal{B}_{\varepsilon, k}^f \\ g^j(x_k) + \nabla g^j(x_k)' d \leq r^j, \quad \forall x \in \mathcal{B}_{\varepsilon, k}^{g^j}, \quad r^j \geq 0, \quad j = 1, \dots, m \end{cases} \end{array} \right. \quad (2.26)$$

Avec :

$$\mathcal{B}_{\varepsilon, k}^f = \{x_{k,i}^f\}_{i=0, \dots, p}, \text{ où } x_{k,0}^f = x_k$$

$$\mathcal{B}_{\varepsilon, k}^{g^j} = \{x_{k,i}^{g^j}\}_{\substack{i=0, \dots, p \\ j=1, \dots, m}}, \text{ où } x_{k,0}^{g^j} = x_k$$

$H_k$  : la matricie Hessienne du Lagrangien du problème  $(\mathcal{P}b)$

Le sous-problème quadratique ci-dessus est bien posé et définit une direction de descente pour la fonction de pénalité  $\phi_\rho$  en  $x_k$ .

Soit  $\mathbb{B}(x_k, \varepsilon) = \{x / \|x - x_k\|_2 \leq \varepsilon\}$  la boule de centre  $x_k$  et de rayon  $\varepsilon$ .  $\mathcal{D}^f$  représente un sous-espace dense de  $\mathbb{R}^n$  dans lequel  $f$  est continûment dérivable. On peut montrer que cet ensemble est non vide et est un intervalle fermé de  $\mathbb{R}^n$ . L'hypothèse de fonction localement Lipschitzien permet de définir, pour l'application de la méthode du SQP-GS, le sous-différentiel de Clarke comme suit. Pour tout  $\varepsilon > 0$ , l'hypothèse sur le fait que la fonction  $f$  soit localement Lipschitzienne permet de définir l'espace fermé  $\mathbb{G}_\varepsilon^f(x_k) = \text{cl conv } \nabla f(\mathbb{B}(x_k, \varepsilon) \cap \mathcal{D}^f)$  comme l'ensemble des sous dérivées de  $\nabla f$ , ou sous différentiel de la fonction  $\nabla f$  en  $x_k$ . La représentation  $\bar{\partial}f(x_k) = \bigcap_{\varepsilon > 0} \mathbb{G}_\varepsilon^f(x_k)$  définit le « sous-différentiel de Clarke ».

Ainsi, on dit qu'un point  $x$  est  $\varepsilon$ -stationnaire (au sens de Clarke) pour  $f$  si  $0 \in \bar{\partial}f(x)$ .

La notion  $\varepsilon$ -stationnaire est la clé de l'approche du gradient sampling.

Considérons maintenant le problème contraint donné par  $(\mathcal{P}b)$ , où  $f$  peut être non-

lisse, mais au moins localement Lipschitzien et continûment différentiable sur un espace dense ouvert de  $\mathbb{R}^n$ .

Avec  $f$  non-lisse, mais au moins localement Lipschitzien. L'optimum s'obtient en une suite en générant un échantillon du gradient de  $f$ , soit une boule de rayon  $\varepsilon$  et de centre  $x_0$  et en choisissant un point  $\varepsilon$ -stationnaire au sens de Clarke parmi les points générés. A l'étape suivante, on réduit le rayon d'échantillonnage, puis on répète la même opération jusqu'à trouver l'optimum.

---

**Algorithme 2.1** PROGRAMME D'OPTIMISATION SQP-GS :

---

1: **(Initialisation)** : Choisir un rayon pour l'échantillonnage  $\varepsilon > 0$ , un paramètre de pénalisation  $\rho$ , un seuil de tolérance pour les contraintes  $\theta > 0$ , une taille d'échantillon  $p \geq n + 1$ , le paramètre constant pour la longueur de pas  $\eta \in (0, 1)$ , un paramètre constant de backtracking *{Les techniques du backtracking se proposent de chercher la meilleure longueur de pas.}* pour le raffinement de la longueur de pas itérativement  $\gamma \in (0, 1)$ , un facteur pour la réduction du rayon d'échantillonnage  $\beta_\varepsilon \in (0, 1)$ , un facteur de réduction pour le paramètre de pénalisation  $\beta_\rho \in (0, 1)$ , un facteur de réduction pour la tolérance des contraintes  $\beta_\theta \in (0, 1)$ , et un paramètre de tolérance pour admission de la stationnarité  $\nu > 0$ . Choisir  $x_0 \in \mathcal{D}$  et fixer  $k \leftarrow 0$ .

2: **(Gradient sampling)** : Générer

$$\mathcal{B}_{\varepsilon,k} = \{\mathcal{B}_{\varepsilon,k}^f, \mathcal{B}_{\varepsilon,k}^{g^1}, \dots, \mathcal{B}_{\varepsilon,k}^{g^m}\} \text{ satisfaisant } \mathcal{B}_{\varepsilon,k}^f \subset \mathcal{D}^f \text{ and } \mathcal{B}_{\varepsilon,k}^{g^j} \subset \mathcal{D}^{g^j}$$

3: **(Recherche de la direction de descente)** : Déterminer  $H_k > 0$  et calculer  $(d_k, z_k, r_k)$  à partir du problème (QP) posé ci-dessus.

4: **(Actualisation des paramètres)** : Si  $\Delta q_\rho(d_k; x_k, \mathcal{B}_{\varepsilon,k}, H_k) > \nu \varepsilon^2$ , alors aller à l'étape 5. Sinon, si  $\nu(x_k) \leq \theta$ , alors fixer  $\theta \leftarrow \beta_\theta \theta$ , mais si  $\nu(x_k) \geq \theta$ , alors fixer  $\rho \leftarrow \beta_\rho \rho$ . Dans d'autre cas, fixer  $\varepsilon \leftarrow \beta_\varepsilon \varepsilon$ ,  $x_{k+1} \leftarrow x_k$  et  $\alpha_k \leftarrow 0$  puis aller à l'étape 6.

5: **(Recherche de longueur de pas)** : Fixer  $\alpha_k$  comme égale au majorant de la séquence  $\{1, \gamma, \gamma^2, \dots\}$  telle que  $x_{k+1} \leftarrow x_k + \alpha_k d_k$  satisfasse la condition  $\phi(x_k + \alpha_k d_k; \rho) \leq \phi(x_k; \rho) - \eta \alpha_k \Delta q_\rho(d_k; x_k, \mathcal{B}_{\varepsilon,k}, H_k)$ . Si  $x_{k+1} \notin \mathcal{D}$ , alors remplacer  $x_{k+1}$  par n'importe quel point  $\tilde{x}_{k+1}$  de  $\mathcal{D}$  satisfaisant les conditions  $\phi(x_k + \alpha_k d_k; \rho) \leq \phi(x_k; \rho) - \eta \alpha_k \Delta q_\rho(d_k; x_k, \mathcal{B}_{\varepsilon,k}, H_k)$  et  $\|x_k + \alpha_k d_k - x_{k+1}\| \leq \min\{\alpha_k; \varepsilon\} \|d_k\|$

6: **(Incrémentation)** : Fixer  $k \leftarrow k + 1$  et retourner à l'étape 2.

---



## Chapitre 3

# Convergence ou efficacité : débat sur la dynamique des cours de marchés boursiers

*« Le marché boursier a prouvé neuf  
des cinq dernières récessions »*

---

SAMUELSON PAUL [1966]

## Sommaire

---

<b>3.1 Introduction</b> . . . . .	<b>111</b>
<b>3.2 État de l'art existant au lancement des travaux de recherche</b> . . . . .	<b>113</b>
3.2.1 L'efficience des marchés financiers . . . . .	113
<b>3.3 Un protocole de vérification de la robustesse des tests d'efficience</b> . . . . .	<b>126</b>
3.3.1 Grands principes de la solution . . . . .	127
<b>3.4 Les modèles <i>Sparse</i> VAR : une spécification alternative pour évaluer la prévisibilité des marchés</b> . . . . .	<b>153</b>
3.4.1 Les modèles vectoriels autorégressifs VAR . . . . .	154
3.4.2 L'estimation d'un modèle « <i>Sparse</i> » VAR . . . . .	157
<b>3.5 Bilan des recherches</b> . . . . .	<b>197</b>
<b>Annexes</b> . . . . .	<b>198</b>
3.A Annexe 1 : écriture des modèles pour les tests Dickey-Fuller . . . . .	198
3.B Annexe 2 : Évolutions des écart-types conditionnels et encadrements - le cas des autres pays . . . . .	200
3.C Annexe 3 : autres résultats des estimations . . . . .	203

---

### 3.1 Introduction

La nature du processus qui régit les prix des actifs financiers fait l'objet de nombreux débats. Certains auteurs considèrent, dans la mouvance de **BACHELIER [1900]**, que les prix des actifs risqués suivent une marche aléatoire, c'est-à-dire un processus sans mémoire dans lequel les chocs sont permanents, tandis que d'autres arguent que les mouvements extrêmes de prix observés sur les marchés financiers sont transitoires. C'est-à-dire qu'une forte variation dans un sens est suivie de mouvements de sens opposés qui corrigent tendanciellement la déviation initiale et ramènent les prix des actifs vers leurs valeurs fondamentales.

La théorie des marchés financiers est née au début des années 60 dans le sillage de la définition de l'efficience des marchés financiers donnée par **FAMA [1965]**. C'est, en effet, dans l'article fondateur « *The Behavior of Stock-Market Prices* » que Fama postule « qu'un marché financier est dit efficient si et seulement si l'ensemble des informations disponibles concernant chaque actif financier coté sur ce marché est immédiatement intégré dans le prix de cet actif ». Il découle de cette théorie que si les marchés sont efficients, ils sont imprédictibles et suivent une marche aléatoire. A la suite de ces travaux pionniers, beaucoup d'efforts ont été déployés pour tester l'efficience des marchés financiers. L'importance de l'**EMH** est due principalement à ses implications pratiques. En effet, la présence ou l'absence de « *mean-reversion* » dans le cours des actifs risqués a des conséquences majeures sur la structure des allocations stratégiques au cours du temps.

Si les marchés sont efficients, le principe de **diversification temporelle** ne trouve pas son fondement dans la dynamique des marchés et il faut recourir à la théorie pour la justifier. Par exemple, **BODIE et collab. [1992]** légitiment la **diversification temporelle** en introduisant le capital humain dans un modèle de choix inter-temporel de portefeuille. Les auteurs montrent notamment que la pondération optimale des actions au cours du **cycle de vie** dépend de la nature du capital humain (selon que les revenus du travail sont plus ou moins aléatoires et corrélés à la rentabilité des actions). Ils concluent que les jeunes investisseurs doivent investir dans des actifs risqués et arbitrer vers des actifs sans risque à mesure que leur stock de capital humain diminue, c'est-à-dire quand ils deviennent vieux. Si les marchés sont convergents, le problème est considérablement simplifié, la dy-



namique des cours justifie à elle seule la **diversification temporelle**, car le mécanisme de correction des mouvements extrêmes est d'autant plus probable que la durée de placement est longue, l'allongement de la durée de placement conduit donc à une réduction du risque.

L'objectif de ce chapitre est de tenter de comprendre les raisons des divergences entre les auteurs sur la nature de la dynamique des cours. S'il s'avère que la robustesse des tests d'efficience est en cause, il conviendra d'explorer des pistes alternatives pour évaluer la dynamique et la prévisibilité des actifs financiers sur des horizons longs.

La confirmation des résultats du premier chapitre est subordonnée à l'explication de ces visions antagonistes de la dynamique des prix. Ce nécessaire éclaircissement nous éloigne de l'économie des retraites et nous impose un détour sur le territoire de la modélisation statistique et des techniques numériques qui sont devenus les instruments indispensables de l'analyse de la dynamique des cours boursiers. Cette incursion nous permet d'avancer une explication raisonnable au débat sans fin qui oppose les adeptes et les détracteurs de l'EMH. Nous montrons que, sans surprise, la cause du débat peut être attribuée à la petite taille des échantillons et à la faible puissance des tests statistiques dédiés. Puis, pour prouver par une autre voie la prévisibilité à long terme du prix des actifs risqués, nous utilisons l'approche développée par **CAMPBELL et VICEIRA [2005]**. L'approche par une méthode « *Sparse VAR* » met en évidence l'existence de retour vers la moyenne dans le cours des actifs risqués, aux États-Unis, au Royaume-Uni et France ou encore au Japon.

## 3.2 État de l'art existant au lancement des travaux de recherche

### 3.2.1 L'efficience des marchés financiers

L'efficience de marché est l'un des concepts centraux de la théorie financière moderne. La théorie des marchés financiers est née au début des années 60 dans le sillage de la définition de l'efficience des marchés financiers donnée à partir de FAMA [1965]. C'est, en effet, dans l'article fondateur « The Behavior of Stock-Market Prices » que Fama postule « qu'un marché financier est dit efficient si et seulement si l'ensemble des informations disponibles concernant chaque actif financier coté sur ce marché est immédiatement intégré dans le prix de cet actif ».

#### Dynamique des marchés efficients (EMH)

Hypothèse centrale de la finance donnée par FAMA [1970]

$$\frac{dP_t}{P_t} = \mu dt + \sigma dz \quad (3.1)$$

où :

$$dz = \varepsilon \sqrt{dt}$$

Avec :

- P = les cours de l'action
- $\mu$  = espérance de rendement
- $\sigma$  = écart type du taux de rendement
- $dt$  = intervalle de temps
- $\varepsilon$  = aléa suivant une loi normale  $\mathcal{N}(0, 1)$

Il découle de cette théorie que si les marchés sont efficients, ils sont imprédictibles et suivent une marche aléatoire. Ainsi, aucun agent économique ne peut prévoir de façon certaine l'évolution des cours d'un actif financier. Partant de cette hypothèse de marche aléatoire parfaite, il serait très risqué pour les épargnants averse au risque d'investir sur des titres financiers. Cependant, comme l'indique la persistance du débat sur la dynamique des prix au cours de ces trois dernières décennies, l'hypothèse de marche aléatoire

régulièrement prêtée au cours d'actifs financiers ne s'accorde pas toujours avec les performances des cours boursiers sur le long terme. De fait, à ce jour, en dépit de la multiplication des études visant à tester l'efficacité des marchés financiers, aucune recherche n'a pu démontrer, avec impartialité, la validité de la théorie.

### Les tests d'efficacité faible des marchés boursiers

La quantification de l'hypothèse d'efficacité de marché, plus formellement, l'idée de marche aléatoire attribuée à la dynamique des cours d'actifs financiers trouve son origine dans la thèse de **BACHELIER [1900]** qui introduit l'utilisation du mouvement brownien en finance, pour soutenir l'argument selon lequel l'espérance mathématique de rendement d'un spéculateur est nulle. Paul Samuelson dans les années 1950 décrit des marchés efficaces à travers la notion de martingale. Cette idée initiale de mouvement aléatoire des prix, largement reprise dès les années cinquante, est rapidement remplacée par un modèle dans lequel les cours des actions suivent une distribution log-normale à travers un mouvement brownien géométrique. Les développements de **BLACK et SCHOLES [1973]** et le principe de non-arbitrage en sont une résultante. La théorie mathématique des marchés financiers efficaces écrite par Fama, devient la référence commune pour le monde académique et les praticiens. Depuis lors, les économistes n'ont eu de cesse de tester la forme faible de l'efficacité des marchés afin de valider ou d'infirmer la théorie. **SUMMERS [1986]**, en partant de simulations de processus aléatoires, fût l'un des premiers à montrer que les tests statistiques classiques de marche aléatoire n'étaient pas adaptés pour tester l'hypothèse d'efficacité des marchés. Les tests classiques (tests de racine unitaire et d'auto-corrélation), présentent un risque de deuxième espèce très important dans le sens où bien souvent ils ne permettent pas de distinguer une marche aléatoire pure d'un processus comportant une composante transitoire persistante. Fort de ce constat, Lo et Mackinlay développent en 1998 le test du « ratio de variance » dédié spécifiquement à la vérification de l'efficacité de marchés. Convaincus de la puissance de ce test, de nombreux chercheurs vont l'utiliser pour valider la théorie.

#### ➡ Test du ratio de variance

Le test du ratio de variance s'est imposé sur les deux dernières décennies comme le

principal élément économétrique pour tester l'hypothèse de marche aléatoire. A l'origine, développé par **LO et MAC KINLAY [1988]** spécialement pour vérifier l'hypothèse de marche aléatoire, il a donné lieu à plusieurs variantes au cours du temps afin de le rendre robuste, ce test est le test le plus utilisé dans les travaux académiques.

- Les rendements

Considérons  $P_t$  le prix d'une action, et supposons qu'il suit un mouvement brownien géométrique, de paramètres  $b$  et  $\sigma$ ,  $P_t = P_0 e^{\mu t + \sigma B_t}$ , tel que :  $y_t = \ln(P_t)$  suit un processus de marche aléatoire. On appelle  $(r_{t,1})_{t \geq 1}$  la série des log-rendements sur une période, telle que :

$$r_{t,1} = y_{t+1} - y_t \quad (3.2)$$

Alors :

$$r_{t,1} = \mu + \sigma(B_{t+1} - B_t) \Rightarrow r_{t,1} \stackrel{i.i.d}{\sim} \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$$

On appelle  $(r_{t,q})_{(t \geq 1, q > 1)}$  la série des log-rendements sur  $q$ -périodes, telle que :

$$r_{t,q} = y_{t+q} - y_t$$

Alors :

$$r_{t,q} = q\mu + \sigma(B_{t+q} - B_t) \Rightarrow r_{t,q} \stackrel{i.i.d}{\sim} \mathcal{N}(q\mu, q\sigma^2)$$

Ainsi le test de L&M<sup>1</sup> consiste à vérifier de manière empirique que la variance des rendements sur  $q$ -périodes est  $q$  fois égale à la variance des rendements sur une période.

➡ Test de Lo-Mackinlay (1988)

**LO et MAC KINLAY [1988]** développent le test du ratio de variance afin d'en faire un élément économétrique essentiel pour tester l'hypothèse de marche aléatoire, ou de manière équivalente que les log-rendements forment une séquence de différences de martingales (MDS). L'idée du test est que, si le logarithme des cours  $y_t$  suit un processus de marche

---

1. **LO et MAC KINLAY [1988]**

aléatoire, alors la variance des différences des  $y_t$  doit être une fonction linéaire de la période retenue pour calculer ces différences. Par exemple, la variance des log-rendements annuels doit être égale à douze fois la variance des taux de rentabilité mensuels. Pour un échantillon de rendements de taille  $T$ , le ratio de variance est défini par :

$$VR_q = \frac{\text{Var}(r_{t,q})}{q\text{Var}(r_{t,1})} = \frac{\text{Var}(\sum_{i=0}^{q-1} r_{t+i,1})}{q\text{Var}(r_{t,1})} \quad (3.3)$$

et pour :  $t \geq 1, \text{Var}(r_{t,1}) = \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^T (r_{t,1} - \mu)^2$ , et  $\mu = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T r_{t,1}$ .

Ainsi,  $VR_q$  devrait être égale à 1 dans le cas où les cours définis par  $y_t$  suivent une marche aléatoire. **LO et MACKINLAY [1988]** montrent que si les rendements  $r_t$  sont indépendants et identiquement distribués (et sous certaines hypothèses complémentaires), on a :

$$\sqrt{T}(VR_q - 1) \sim \mathcal{N}\left(0, \frac{2(2q-1)(q-1)}{3q}\right) \quad (3.4)$$

Par conséquent la statistique de test proposée, utilisée pour inférer une marche aléatoire est la suivante :

$$M_1(q) = (VR_q - 1) \left( \frac{2(2q-1)(q-1)}{3qT} \right)^{-1/2} \quad (3.5)$$

Cette statistique suit asymptotiquement une loi normale standard. Les hypothèses sont donc :

$H_0$  :  $y_t$  suit un processus de marche aléatoire :  $M_1 \in ]-Z_{\alpha/2}; +Z_{\alpha/2}[$

$H_1$  :  $y_t$  ne suit pas un processus de marche aléatoire :  $M_1 \in -] -\infty; -Z_{\alpha/2}[ \cup ]+Z_{\alpha/2}; +\infty[$

L'hypothèse alternative  $H_1$  évoque le fait que les incréments de  $y_t$  sont corrélés, positivement ou négativement. Cependant, il se trouve que les rendements  $r_t$  peuvent être non auto-corrélés et présentent une hétéroscédasticité<sup>2</sup>. Or, même en présence d'hétéroscédasticité, le rapport des variances devrait toujours être proche de l'unité lorsque le nombre d'observations augmente et n'est pas borné, puisque la variance de la somme des incréments doit être égale à la somme des variances sur chaque incrément, mais la statistique de test, elle, dépendra évidemment du degré d'hétéroscédasticité. Dans ce cas la statistique  $M_1$  ne suit plus asymptotiquement une loi normale standard, en utilisant la

---

2. Descriptible par un modèle à variance conditionnelle. Voir **BOLLERSLEV [1986]**

statistique  $M_1$  on risque de rejeter l'hypothèse  $H_0$  de marche aléatoire au profit de l'hypothèse alternative à tort.

Bien des études ignorent cette caractéristique en inférant directement sur des statistiques basées sur les hypothèses standard de normalité. Voilà pourquoi **LO et MACKINLAY [1988]** proposent aussi une statistique  $M_2$  robuste face au cas d'incrément hétéroscédastiques :

$$M_2(q) = (VR_q - 1) \left( \sum_{i=1}^{q-1} \left( \frac{2(q-i)}{q} \right)^2 \delta_i \right)^{-1/2} \quad (3.6)$$

$$\text{où : } \delta_i = \frac{\sum_{t=i+1}^T (r_{t,1} - \mu)^2 (r_{t-i,1} - \mu)^2}{\left( \sum_{t=1}^T (r_{t,1} - \mu)^2 \right)^2}$$

De même, la statistique  $M_2$  suit asymptotiquement une loi normale standard. **LO et MACKINLAY [1988]** montrent que le test bilatéral est celui qui donne des taux de rejet plus proches de la valeur nominale  $\alpha$  avec la statistique robuste face à l'hétéroscédasticité.

- Les limites du test de Lo-Mackinlay

Le développement du test de **LO et MACKINLAY [1988]** s'appuie fortement sur les hypothèses de loi de distributions des statistiques de tests. D'une part, la statistique  $M_1$  suppose que le prix d'une action suit un mouvement brownien géométrique, autrement dit que son logarithme est régi par un processus de marche aléatoire, et par conséquent que sa volatilité est constante au cours du temps. Et d'autre part que cette statistique est approximée par sa distribution asymptotique qui est une loi normale centrée-réduite. Or, depuis plus d'une vingtaine d'années maintenant, les travaux d'**ENGLE [1982]** et de **BOLLERSLEV [1986]** ont mis en lumière un défaut majeur de cette modélisation. Soit un phénomène de persistance dans les carrés des log-rendements : bien que les log-rendements des actions soient, a priori, indépendants dans le temps, leurs carrés ne le sont pas. Ce qui traduit une auto-corrélation des volatilités des rendements.

Pour illustrer le phénomène, nous pouvons voir sur les graphiques 3.1 les faits stylisés : le graphe de gauche présente la **Fonction d'Auto-Corrélation (FAC)** du carré du rendement journalier du S&P500. Sur une période très longue, si nous considérons qu'à l'échelle journalière le niveau du rendement moyen est quasiment nul (en réalité proche de 0.008% pour la période 1928-2014), alors la **FAC** observée décrit une variance des ren-

dements autorégressive dans le temps.

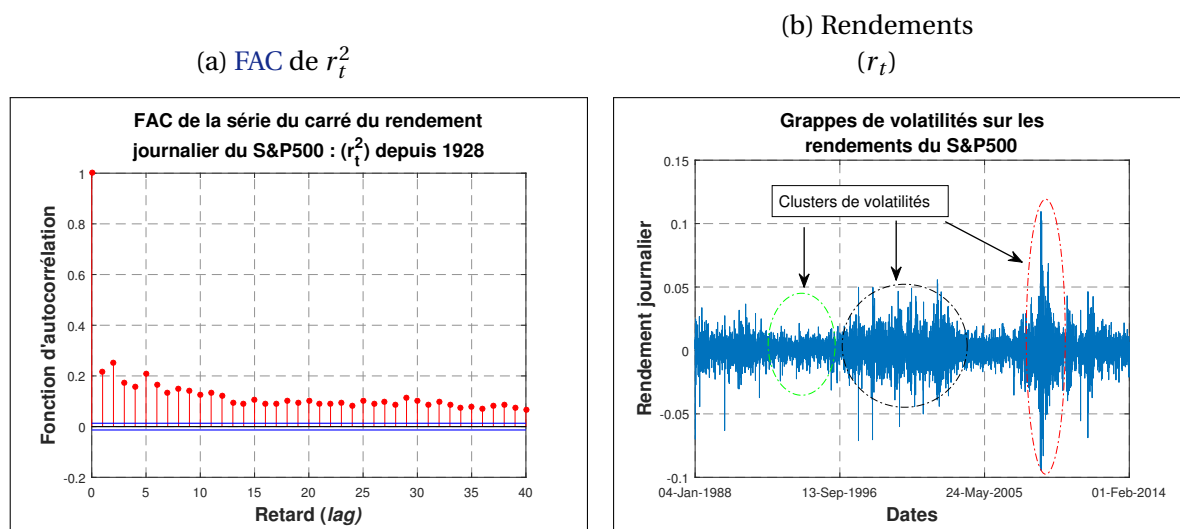


FIGURE 3.1 – Illustration de variance autorégressive des rendements sur le S&P500

Sur le graphique 3.1b présentant l'évolution des rendements journaliers, nous pouvons voir un phénomène qui lui est directement associé : les rendements sont plus volatiles sur certaines périodes que sur d'autres. Ce phénomène a été vulgarisé par **MANDELROT [1963]** qui documente l'existence de **clusters de volatilités**, qui favorise, suivant les périodes, plus de valeurs extrêmes<sup>3</sup> et moins de valeurs proches de la moyenne, par rapport au cas des rendements distribués de manière indépendantes. Remarquons que l'hétéroscédasticité conditionnelle est tout à fait compatible avec la stationnarité et qu'il est théoriquement difficile d'expliquer ce phénomène qui ne semble pas, par essence, associé aux modèles de formations de prix. Pour **CONT [2007]**, ce fait stylisé peut s'expliquer par le comportement des agents sur le marché, en particulier les agents ayant une vision de court-terme. Ces faits compromettent naturellement le caractère de distribution identique du rendement au cours du temps qui est essentiel à la construction des statistiques du test du ratio de variances.

A ce défaut d'indépendance des variances de rendements, la statistique de test M2 qui tente de remédier à ce problème est également approximée par sa distribution asymptotique, qui suit une loi normale standard. Ces problèmes d'hypothèses sur les lois de distributions des statistiques de tests rendent le test de **LO et MACKINLAY [1988]** d'autant

3. Plus grande part de valeurs élevées ou une plus grande part de valeurs faibles par rapport à une distribution standard normale.

moins concluant que l'échantillon sur lequel est effectué le test est petite. Comme le rappelle **WRIGHT [2000]** dans son étude, les distributions empiriques des statistiques de tests sont généralement asymétriques et présentent une non-normalité. Au vu des hypothèses fortes que renferment la distribution des statistiques de tests, **WRIGHT [2000]** développe un test alternatif, un test non-paramétrique du test de ratio de variance pour conclure ou non que les rendements forment une séquence de différences de martingales (MDS) tout en excluant toutes les hypothèses de normalité qui pèsent sur l'inférence.

➡ Test de Wright (2000)

Dans la mesure où le test de **LO et MACKINLAY** est un test qui fait des hypothèses très fortes sur la distribution de la statistique de test, **WRIGHT [2000]** propose un test non-paramétrique basé sur les rangs et les signes des incréments du logarithme des prix  $y_t$ . Par la suite, l'inférence statistique se fait sur les distributions exactes des statistiques de tests. Une présentation du test basé sur les rangs des rendements est faite ci-dessous, suivie d'une présentation du test basé sur les signes.

Considérons l'échantillon de log-rendements d'actions calculé sur une période suivant  $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_T)$ . Soit  $\varepsilon_t$  tel que  $E(\varepsilon_t) = \bar{\mu}$  et qu'il existe un processus  $z$  qui vérifie :  $\varepsilon_t = \mu + z_t$  avec  $z_t = \sigma_t \xi_t$  Hypothèses possibles :

A0 : Les  $(z_t)_t$  sont indépendants et identiquement distribués.

A1 :  $\xi_t$  et  $\sigma_t$  sont indépendant conditionnellement à la filtration  $F_{t-1} = \sigma(\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \varepsilon_{t-3}, \dots)$

A2 :  $E(\varepsilon_{t+1} | \mathcal{F}_t) = 0$  et  $\mathbb{1}(\varepsilon_t > 0)$  la variable binomiale qui vaut 1 si  $\varepsilon_t > 0$  et 0 sinon,

$$\mathbb{1}(\varepsilon_t > 0) = \begin{cases} 1 & \text{avec une probabilité de } \frac{1}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- Présentation du test basé sur les rangs

Pour  $t = 1, \dots, T$  définissons  $r(\varepsilon_t)$  le rang de  $\varepsilon_t$  dans l'échantillon. Ecrivons également les statistiques de rangs<sup>4</sup> suivantes :

$$r_{1t} = \frac{r(\varepsilon_t) - \frac{T+1}{2}}{\sqrt{\frac{(T-1)(T+1)}{12}}} \quad r_{2t} = \Phi^{-1} \left( \frac{r(\varepsilon_t)}{T+1} \right)$$

---

4. **WRIGHT [2000]** utilise les deux statistiques de rangs les plus répandues dans les études. Notons que  $r_{1t}$  et  $r_{2t}$  sont de moyennes nulles et de variances égales à 1.



Où  $\Phi$  est la fonction de répartition d'une loi normale centrée-réduite. En substituant les rendements par leurs statistiques de rangs  $r_{1t}$ , puis  $r_{2t}$ , dans l'expression permettant le calcul de statistiques de test M1 de **LO et MACKINLAY**, on obtient des statistiques de tests R1 et R2 suivantes<sup>5</sup> :

$$R_1(q) = \left( \frac{\frac{1}{Tq} \sum_{t=q}^T (r_{1t} + r_{1t-1} + \dots + r_{1t-q+1})^2}{\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T r_{1t}^2} - 1 \right) \times \left( \frac{2(2q-1)(q-1)}{3qT} \right)^{-1/2} \quad (3.7)$$

et :

$$R_2(q) = \left( \frac{\frac{1}{Tq} \sum_{t=q}^T (r_{2t} + r_{2t-1} + \dots + r_{2t-q+1})^2}{\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T r_{2t}^2} - 1 \right) \times \left( \frac{2(2q-1)(q-1)}{3qT} \right)^{-1/2} \quad (3.8)$$

Sous l'hypothèse A0, de rendements *i.i.d*, les statistiques  $R_1$  et  $R_2$  suivent la même distribution de probabilité. Ces deux statistiques présentent l'avantage de ne pas être influencées par des hypothèses, on peut ainsi obtenir, avec précision, les distributions exactes des statistiques  $R_1$  et  $R_2$ , sous l'hypothèse nulle, en simulant un grand nombre de fois des échantillons de taille T représentatifs des rendements  $\varepsilon_t$ . Ainsi, en utilisant les percentiles  $\bar{R}_{k\alpha/2}$  et  $\bar{R}_{k1-\alpha/2}$ ,  $k = 1, 2$ , on peut aisément définir les valeurs critiques de la distribution exacte pour l'inférence.

- Présentation du test basé sur les signes

Afin de faire face à l'hétéroscédasticité, **WRIGHT [2000]** développe d'autres statistiques de tests basés sur les signes de rendements.

Pour la série  $x_t$  soit  $u(x_t, p) = \mathbb{I}(x_t > p) - 0.5$  alors :

$$u(x_t, p) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } x_t \text{ est positif} \\ -\frac{1}{2} & \text{autre part} \end{cases}$$

Supposons que les hypothèses A1 et A2 sont satisfaites, et que  $\mu = 0$ , comme c'est souvent le cas pour les rendements à hautes fréquences. Alors la variable suivante est

---

5. Ces statistiques ont été corrigés par rapport à la version données par **WRIGHT [2000]**, car une erreur de comptage apparait aux numérateurs des formules définissant les deux statistiques.

clairement une variable IID de moyenne nulle et de variance égale à 1 : Posons

$$s_t = 2u(\epsilon_t, 0) = s_t = 2u(\xi_t, 0), \text{ telle que } s_t = \begin{cases} 1 & \text{avec la probabilité } \frac{1}{2} \\ -1 & \text{avec la probabilité } \frac{1}{2} \end{cases}$$

Ainsi une statistique robuste, utile pour tester l'hypothèse de marche aléatoire, hétéroscédastique telle que  $\sigma_t$  soit variable dans le temps, dans le cas où les rendements ne possèdent pas de drift (cas de données hautes-fréquences par exemple) est la statistique  $S_1$  définie ci-dessous :

$$S_1(q) = \left( \frac{\frac{1}{Tq} \sum_{t=q}^T (s_t + s_{t-1} + \dots + s_{t-q+1})^2}{\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T s_t^2} - 1 \right) \times \left( \frac{2(2q-1)(q-1)}{3qT} \right)^{-1/2} \quad (3.9)$$

Et dans le cas où la moyenne des rendements n'est pas nulle, on définit une autre statistique de test robuste face à l'hétéroscédasticité, en réécrivant  $s_t(\bar{\mu}) = 2u(\xi_t, \bar{\mu}) \forall \bar{\mu}$ , d'où :

$$S_2(q) = \left( \frac{\frac{1}{Tq} \sum_{t=q}^T (s_t(\bar{\mu}) + s_{t-1}(\bar{\mu}) + \dots + s_{t-q+1}(\bar{\mu}))^2}{\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T s_t^2(\bar{\mu})} - 1 \right) \times \left( \frac{2(2q-1)(q-1)}{3qT} \right)^{-1/2} \quad (3.10)$$

Si  $\bar{\mu} = \mu$ , alors  $s_t(\bar{\mu}) = 2u(\xi_t, 0)$  et  $S(\bar{\mu})$  a la même distribution que  $S_1$ .

De même que  $R_1$  et  $R_2$  on peut obtenir la distribution exacte, sous l'hypothèse nulle, des statistiques  $S_1$  et  $S_2$  en simulant des échantillons aléatoires de rendements. Sous les hypothèses A1 et A2 qui postulent que les rendements forment une séquence de différences de martingales (MDS), la probabilité que la statistique  $S_2$  rejette l'hypothèse nulle est inférieure ou égale à  $\alpha$ . Comparée aux autres statistiques de tests, cette statistique  $S_2$  reste très conservatrice vis-à-vis de l'hypothèse nulle de marche aléatoire sans dérive, l'étude de [WRIGHT \[2000\]](#) l'a démontré. Par ailleurs, lorsque l'on teste une marche aléatoire avec drift et que toutes les autres statistiques rejettent l'hypothèse nulle, la statistique  $S_2$  la rejette également. Par conséquent elle est généralement moins puissante, on préférera donc dans la pratique utiliser  $S_1$ .

➡ Tests de ratio de variance multiples

Dans certaines études, les applications du test du ratio de variance se font souvent pour des valeurs importantes de  $q$  pouvant aller<sup>6</sup> de 2 à 100. Or, le risque de deuxième espèce est plus probable lorsque l'on effectue le test de marche aléatoire pour des valeurs individuelles du retard  $q$ . Ainsi, certains auteurs conseillent de tester l'hypothèse de marche aléatoire pour un ensemble de retards, en prenant plusieurs valeurs de  $q$ , pour combler la faiblesse du test de **LO et MACKINLAY** qui ne tient pas compte de la nature conjointe des rendements calculés sur différentes périodes, pour des valeurs individuelles de  $q$ .

- Test paramétrique du ratio de variance multiple de Chow-Denning(1992)

**CHOW et DENNING [1993]** proposent une extension du test de **LO et MACKINLAY**, test qui se veut plus puissant que sa version individuelle. Le test proposé tente de remédier à l'absence de mesure du test joint pour des valeurs multiples de  $k$  du test du ratio de variance. **CHOW et DENNING [1993]** utilisent l'argument suivant : pour une plage de valeurs de  $q$  données  $Q = q_1, q_2, \dots, q_i, \dots, q_M$  avec  $q_i \in \mathbb{N}\{0, 1\}$  si  $\exists k \in Q$  telle que le test du ratio de variance individuel rejette l'hypothèse de marche aléatoire pour cette valeur  $k$  alors l'hypothèse de marche aléatoire sur la série considérée devrait directement être rejetée. Autrement dit, si la série étudiée suit un processus de marche aléatoire, la somme des ratios de variances pour cet ensemble de valeur  $Q$  doit être égale à  $M$ .

En partant des statistiques du test de ratio de variance pour un  $q$  individuelle, alors la statistique pour inférer sur le test avec un ensemble de décalage  $\{q_i\}_i$  devient :

$$M_1^* = \max_{1 \leq i \leq M} |M_1(q_i)|$$

$$M_2^* = \max_{1 \leq i \leq M} |M_2(q_i)|$$

Où  $M_2^*$  représente la version robuste face à l'hétéroscédasticité. Pour des échantillons de rendements de grandes tailles, les auteurs utilisent l'inégalité de probabilité de **ŠIDÁK [1967]** et les résultats de **HOCHBERG [1974]** et **RICHMOND [1982]**, pour définir les bornes de valeurs critiques, sous l'hypothèse nulle de marche aléatoire. Asymptotiquement, pour un seuil de probabilité  $\alpha$ , les valeurs critiques du test du ratio de variance de **CHOW et**

---

6. Exemple, **POTERBA et SUMMERS [1988]**, appliquent le test aux données de rendements mensuels pour  $q$  allant de 2 à 96 successivement. **JORION [2003]** va de 2 jusqu'à 120

**DENNING** s'obtiennent en posant  $\mathbb{P}\left(M_j^* \leq \text{SMM}(\alpha; M; \infty)\right) \geq 1 - \alpha$  où  $\text{SMM}(\alpha; M; \infty)$  est le « Module maximum studentisé » (*Studentized Maximum Modulus*) défini comme suit : Soit  $x_1, x_2, \dots, x_N$  une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi  $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ . Soit  $V$  une variable aléatoire suivant une loi du *Khi-deux* à  $m$  degré de liberté. Posons  $s_m = \sqrt{\frac{V}{m}}$  une estimation de  $\sigma$  indépendant des  $\{x_i\}_{1 \leq i \leq N}$ .

Alors :  $M_{r,m} = \frac{\max(|x_1|, \dots, |x_i|, \dots, |x_N|)}{s_m}$  est le module maximum studentisé de paramètre  $N$  et  $m$ . Les quantiles du module maximum studentisé peuvent être calculés par inversion de sa fonction de répartition. La distribution du maximum du module studentisé a pour fonction de répartition :

$$F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \int_0^\infty (2\Phi(xu) - 1)^L dg_v(u) \quad (3.11)$$

et :

$$dg_v(u) = \frac{v^{v/2}}{\Gamma(\frac{v}{2})^2} u^{v-1} e^{-\frac{vu^2}{2}} du \quad (3.12)$$

Où  $\Phi$  est la fonction de répartition de la loi normale standard. Et  $\Gamma$  est la fonction gamma. Cette fonction de répartition peut être évaluée par intégration numérique. Posons  $Z_\alpha$  le quantile de la loi normale standard d'ordre  $\alpha$  et  $\text{SMM}(\alpha; m; N)$  le quantile d'ordre  $\alpha$  de la distribution des modules maximum studentisés de degrés de liberté  $m$  sur des échantillons de taille  $N$ , des variables  $(x_i)$  définies ci-dessus. Asymptotiquement, lorsque  $N \rightarrow \infty$  en appliquant les inégalités de **HOCHBERG** et **ŠIDÁK**, on a  $\text{SMM}(\alpha; m; \infty) = Z_{\alpha^+}$ . Avec  $\alpha^+ = 1 - (1 - \alpha)^{1/m}$ .

Compte tenu de cette définition, les bornes des valeurs critiques du test de **CHOW et DENNING** s'écrivent :

$$-\text{SMM}(\alpha; M; \infty) \leq M_1^* \leq \text{SMM}(\alpha; M; \infty)$$

et

$$-\text{SMM}(\alpha; M; \infty) \leq M_2^* \leq +\text{SMM}(\alpha; M; \infty)$$

Où  $SMM$  est le module maximum studentisé,  $\alpha$  est la tolérance du test  $M$  est le cardinal de  $q$ .

- Test non-paramétrique du ratio de variance multiple de BELAIRE-FRANCH et CONTRE-RAS [2004]

A l'instar du test du ratio de variance joint proposé par CHOW et DENNING [1993] se basant sur le test individuel développé par LO et MACKINLAY, BELAIRE-FRANCH et CONTRE-RAS proposent, en 2004, un test du ratio joint basé sur le test du ratio de variance individuel, non-paramétrique développé par WRIGHT [2000]. Ainsi, ils proposent d'utiliser les mêmes règles que CHOW et DENNING [1993], c'est-à-dire de substituer dans la définition des statistiques  $\{M_j^*\}_{j=1,2}$  de CHOW et DENNING [1993] les statistiques de tests de LO et MACKINLAY  $\{M_j\}_{j=1,2}$  par les statistiques de tests de WRIGHT [2000]  $\{R_j\}_{j=1,2}$  et  $\{S_j\}_{j=1,2}$ . D'où les statistiques non-paramétriques suivantes :

$$CD_{(R_1)} = \max_{1 \leq i \leq M} (|R_1(q_i)|)$$

$$CD_{(R_2)} = \max_{1 \leq i \leq M} (|R_2(q_i)|)$$

$$CD_{(S_1)} = \max_{1 \leq i \leq M} (|S_1(q_i)|)$$

$$CD_{(S_2)} = \max_{1 \leq i \leq M} (|S_2(q_i)|)$$

Sous l'hypothèse  $A_0$  d'incrémentes indépendantes et identiquement distribuées – ou *independent and identically distributed* – (IID) de WRIGHT [2000], les statistiques de tests  $CD_{(R_1)}$  et  $CD_{(R_2)}$  ont la même distribution de probabilité. D'autre part, sous les hypothèses  $A_1$  et  $A_2$  de WRIGHT [2000], supposant que les incréments forment une séquence de différences de martingales, les statistiques de tests  $CD_{(S_1)}$  et  $CD_{(S_2)}$  ont la même distribution de probabilité.

### Tests d'efficience : des résultats largement indéterminés

En dépit de l'apport fondamental des travaux de Lo et Mackinlay sur les tests de ratio de variance dont la supériorité par rapport aux tests de racine unitaire (Dickey-Fuller, Phillips-Perron, ...) est reconnue, les travaux empiriques qui ont recours au ratio de va-

riance pour tester l'efficacité des marchés tirent des conclusions pour le moins contradictoires. La querelle qui oppose les partisans des tendances à ceux de la marche au hasard dans la théorie financière est aussi ancienne que la théorie elle-même. La violence des débats est proportionnée aux enjeux des choix qui y sont liés. Du côté des auteurs qui réfutent l'hypothèse d'efficacité, on trouve POTERBA et SUMMERS [1988]. Les auteurs mettent en évidence l'existence d'auto-corrélation négative dans les séries de rendements de long terme et attestent qu'il existe une composante de retour vers la moyenne dans le cours des actions. Ces travaux, restés emblématiques, invalident l'hypothèse d'efficacité posée par Eugène Fama. Plus récemment, les études de CAMPBELL et VICEIRA [2002] puis BEC et GOLLIER [2009] pour la France vont dans le même sens et mettent en évidence un phénomène de retour vers la moyenne sur longue période. Toutefois, la réplique est rapide et KIM, NELSON et STARTZ [1991] affirment que les résultats de POTERBA et SUMMERS ne sont détectables que sur les observations antérieures à la seconde guerre mondiale et sont imputables à la période de rattrapage de l'économie consécutive au conflit mondial. GRAFLUND et collab. [2001] valident pour leur part l'hypothèse d'efficacité des marchés en Europe du Nord. Partant toujours des mêmes tests de ratio de variance, JORION [2003] (*University of California*) réfute violemment la thèse de diversification temporelle des risques (qui incline à détenir des allocations d'autant plus risquées que l'horizon de placement est long) et établit que la seule diversification efficace est géographique.

Plus récemment, SPIERDIJK et collab. [2012] identifient des vitesses de retour vers la moyenne variables dans le temps. On peut encore citer les travaux de CHETOUANE [2011] qui conduisent au rejet de l'hypothèse d'efficacité des marchés mais déterminent des ratios de variance supérieurs à l'unité, comme beaucoup d'auteurs, décelant un comportement *mean averting* des cours, c'est-à-dire « explosif ». Aux USA, la récente succession de « bulles » sur les marchés actions (Internet, subprime crisis, debt crisis, quantitative easing, ...) a fait rejaillir la polémique. Ainsi, les tenants du « retour vers la moyenne » comme WILKIE [2001] et surtout SIEGEL et COXE [2002] s'opposent toujours aussi violemment, notamment par voie de presse, aux adeptes de la marche aléatoire dont BODIE [1995] est l'un des chefs de file.

### 3.3 Un protocole de vérification de la robustesse des tests d'efficience

L'efficience des marchés financiers est un des thèmes les plus débattus de la recherche en finance. La formalisation de ce concept est réalisée à travers le modèle de la marche au hasard. De nombreux tests ont été développés pour valider l'hypothèse selon laquelle l'innovation est IID (détection de la racine unitaire, tests de ratio de variance simples ou multiples, tests statistiques non paramétriques de types rangs et des signes ...). Le problème est que chaque méthodologie, pour un même ensemble d'hypothèses, aboutit à des résultats souvent opposés. Les résultats des travaux empiriques sont donc loin d'être unanimes; l'acceptation de l'hypothèse de marche au hasard n'est pas systématique. L'état de l'art montre clairement que le débat sur l'efficience des marchés financiers reste ouvert entre les économistes qui considèrent, dans la mouvance de **BACHELIER [1900]**, que les prix des actifs risqués suivent une marche aléatoire, c'est-à-dire un processus sans mémoire dans lequel les chocs sont permanents et ceux qui arguent que les mouvements extrêmes de prix observés sur les marchés financiers sont transitoires, c'est-à-dire qu'une forte variation dans un sens est suivie de mouvements de sens opposés qui corrigent tendanciellement la déviation initiale et ramènent les prix des actifs vers leurs valeurs fondamentales. Les travaux de **HAMAYON, LEGROS et PRADAT [2016]** sur la dynamique des prix des actifs risqués et la détermination d'allocations optimales de **cycle de vie** concluent en faveur d'une présomption de *mean reversion* dans la dynamique du prix des actifs risqués. Toutefois, cette mise en évidence s'appuyait sur des constats empiriques et n'était pas étayée par des tests statistiques formels. Or, les conclusions des chercheurs qui se sont attelés à tester l'efficience des marchés en utilisant la statistique du ratio de variance, principal test de marche aléatoire, sont largement antagonistes. Un point fondamental est de comprendre si la puissance du test est en cause ou si ces divergences proviennent d'autres facteurs (sélection, fréquence, traitement des données, ...). S'il s'avère que la méthodologie des tests est en cause, il conviendra d'identifier un protocole alternatif formel pour évaluer l'efficience au sens faible des marchés.

### 3.3.1 Grands principes de la solution

Afin de cerner les limites des tests statistiques utilisés pour tester l'EMH, nous avons dans un premier temps appliqué une batterie complète de tests aux chroniques boursières sur des historiques longs. La méthode permet, d'une part, de pointer assez précisément dans quelle mesure les résultats des tests dépendent du modèle d'évaluation retenu et, d'autre part, de révéler l'incapacité des tests à valider la théorie. Toutefois, cette démarche peut se révéler quelque peu « circulaire ». En effet, si la démarche permet de constater le manque de concordance des résultats, elle ne permet pas de statuer car la dynamique des chroniques boursières soumises aux tests est inconnue. Pour statuer sur la puissance des tests, plutôt que de l'utiliser sur des chroniques financières historiques qui sont régies par un processus inconnu, nous avons créé par simulations stochastiques des échantillons dont nous avons déterminé ex ante la dynamique. Nous avons donc généré des processus de marche aléatoire, exploré des situations de volatilité stochastique, reproduit des processus de retour vers la moyenne ou encore d'Ornstein-Uhlenbeck. Cette étape devrait nous permettre d'identifier sans trop d'ambiguïté (les dynamiques fictives des prix étant connues a priori) la capacité des différents tests d'efficience à détecter tels ou tels processus. Si l'exercice permet de déceler les limites des tests statistiques de marche aléatoire dédiés à tester l'hypothèse d'efficience des marchés financiers, il sera alors illusoire de s'appuyer sur de tels outils pour analyser la dynamique des prix des actifs risqués. Si le constat est avéré, il faudra trouver une méthodologie alternative ne souffrant pas des mêmes biais que les tests de marche au hasard. Dans cette perspective, les recherches empiriques initiées outre-Atlantique, qui reposent sur des méthodes d'estimation de moments conditionnels (basées sur l'utilisation des modèles *Vecteur AutoRégressif* – ou *Vector Autoregressive* – (VAR)), semblent être une piste à explorer afin d'évaluer la dynamique et la prévisibilité des actifs financiers pour des horizons de placement longs.

#### Tests empiriques sur des indices de marchés boursiers

Dans cette partie, nous appliquons les tests de ratio de variance décrits ci-dessus aux indices boursiers afin de vérifier si l'hypothèse de marche aléatoire que l'on prête communément aux actifs risqués est vérifiable. Dans la multitude d'articles académiques qui



existent sur le sujet, on constate que l'accès à l'information (aux indices sur un historique long) a été une contrainte forte pour l'analyse de la propriété de marche aléatoire des marchés financiers. Or le choix de données doit retenir une attention particulière. Car, en plus de la sensibilité des méthodologies utilisées pour diagnostiquer une marche aléatoire, des sources de données différentes peuvent déterminer des résultats différents. Concernant les travaux dans lesquels les sources sont citées par les auteurs, on remarque les limites récurrentes suivantes :

- Les observations sur les prix sont des observations moyennes<sup>7</sup>.
- Les séries sont discontinues<sup>8</sup>, c'est-à-dire qu'il existe des sauts de dates dans les observations.
- Les séries sont nues : elles n'incluent que le rendement en capital, le surcroît de rendement engendré par les dividendes est omis.
- L'effet de l'inflation n'est pas testé sur les séries.

On peut par exemple évoquer **WORKING** [1960], dont l'étude conclut que, pour une série donnée, le fait d'agréger des plages d'observations via des moyennes pour construire une autre série de fréquence plus basse introduit de manière artificielle une auto-corrélation d'ordre un, plus importante que dans la série initiale, d'environ 25% et une baisse de la volatilité de la série agrégée par rapport à la série initiale. Sur les graphiques 3.2a et 3.2b ci-dessous on observe successivement les coefficients d'auto-corrélation du S&P500. A gauche, on observe une faible corrélation des rendements du S&P500 calculées à partir des observations des vrais cours de fin de mois.

Sur le graphique de droite, conformément aux conclusions de **WORKING**, on observe une augmentation de l'auto-corrélation d'ordre un pour les rendements qui sont calculés à partir d'observations mensuelles moyennes sur les valeurs des cours journaliers du mois. Or, on voit sur le graphique 3.3 ci-dessous que, pour la représentation des coefficients d'auto-corrélation des rendements calculés sur les cours journaliers, aucune corrélation, sur les quarante premières estimées, n'est statistiquement significative. On ima-

---

7. Pour ne citer que les plus connus : **POTERBA et SUMMERS** [1988] en font usage ; **JORION** [2003] utilise également ce type de données en justifiant le fait que les effets de **WORKING** [1960] sont moins importants si on utilise des moyennes annuelles.

8. **JORION** [2003] utilise une interpolation linéaire pour obtenir de la continuité dans les données, il remplace ainsi de manière non conventionnelle l'auto-corrélation historique par linéarisation des cours manquant.

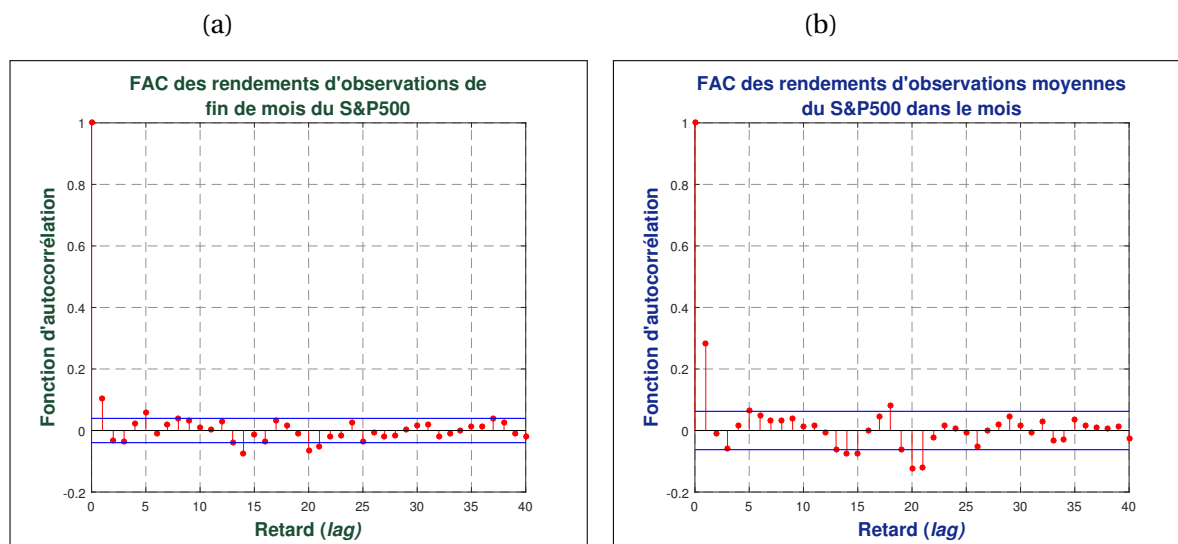


FIGURE 3.2 – Fonction d'autocorrélation des rendements mensuels du S&P500

gine que tester une hypothèse de marche aléatoire sur le logarithme des prix dont les rendements moyens seraient dépendants, comme dans le cas du corrélogramme de droite (graphiques 3.2 ci-dessus), reviendrait à mal poser le problème et les conclusions d'un tel test seraient biaisées.

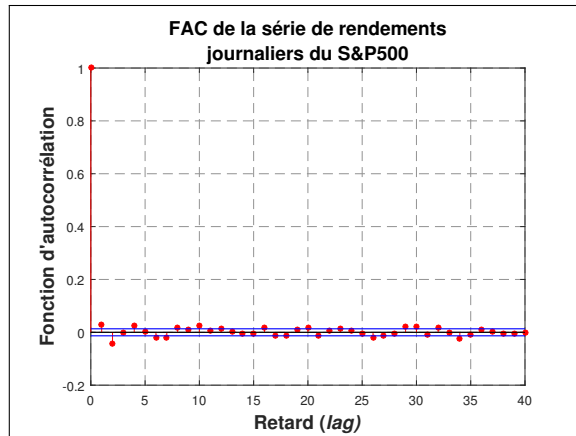


FIGURE 3.3 – FAC des rendements journaliers du S&P500

Une autre source d'erreur consiste à tester l'efficacité des marchés sur des échantillons de prix de courtes longueurs. En effet, au vu de la littérature, l'analyse de la puissance des tests montre clairement que les tests sont d'autant plus significatifs qu'ils sont pratiqués sur des échantillons de grande taille. Compte tenu de l'influence de la qualité des données sur les tests d'efficacité, nous avons prêté une attention particulière à la source des données utilisées afin de tenter de limiter les biais inhérents à la provenance et au traitement des log-returns des cours (chainage, mode d'agrégation des données, etc.).

Les données proviennent de la base de Global Financial Data, qui est le principal fournisseur de données historiques et spécialisé dans les séries économiques et financières sur le très long terme<sup>9</sup>.

Via cette base de données, nous avons accès à des niveaux de prix d'actifs avec et hors inflations, raisonnablement fidèles au passé et proposant des prix en « *total-returns* », c'est-à-dire dividendes réinvestis ou en « *capital-returns* », c'est-à-dire les évolutions de prix n'incluant que le gain en capital (ou plus-value). A ce stade de l'analyse, nous nous sommes concentrés sur les prix des actifs risqués en France (CaC-All-Tradable) et aux Etats-Unis (S&P500). En effet, sur ces deux pays, *Global Financial* nous fournit des historiques depuis 1895.

► Ratios de variance : l'exemple du CAC-All-Tradable et du S&P500

Dans les tableaux 3.1 et 3.2, on donne les résultats des tests individuels du ratio de variances réalisés successivement sur les indices du CAC-All-Tradable et du S&P500 sur des observations de rendements à fréquences mensuelles, calculés à partir des cours de fin de mois disponibles sur plus de cent ans.

- Test de Lo-Mackinlay : CAC-All-Tradable

Dans le tableau 3.1 figuré, on note  $H_0$  l'hypothèse de marche aléatoire et  $H_1$  l'hypothèse alternative de rejet d'une marche aléatoire au seuil de 5%.

La valeur du test est restituée pour deux dynamiques de marché :

1. Le cas M1 qui suppose que le prix d'une action suit un mouvement brownien géométrique, autrement dit que son logarithme est régi par un processus de marche aléatoire, et par conséquent que sa volatilité est constante au cours du temps.
2. Le cas M2 qui suppose une auto-corrélation des variances de rendements est robuste face au cas d'incrémentes hétéroscédastiques.

---

9. Convenons toutefois que sur des horizons profonds, compte tenu des approximations inhérentes à la rétropolation de séries, les rendements et leurs dispersions ne doivent pas être considérés comme des valeurs « exactes » mais comme des ordres de grandeurs.

TABLEAU 3.1 – Test du ratio de variance paramétrique : CAC-All-Tradable

Test du VR sur données mensuelles - hypothèse de rendements IID									
	Date	Nombre d'obs.	Écart-type annualisé	2 mois	5 mois	1 an	2 ans	5 ans	8 ans
				(p = 2)	(p = 5)	(p = 12)	(p = 24)	(p = 60)	(p = 96)
<b>CAC-All-Tradable nominal</b>	31/01/1895 - 31/12/2013	1428	18,64%	<b>H1</b>	<b>H1</b>	<b>H1</b>	<b>H1</b>	<b>H0</b>	<b>H0</b>
	ratio			<b>1,144</b>	<b>1,216</b>	<b>1,33</b>	<b>1,501</b>	<b>1,452</b>	<b>1,451</b>
	stats. M1			3,9717	2,9697	2,751	2,9352	1,6634	1,269
	pValue			0,0001	0,003	0,0059	0,0033	0,0962	0,2045
	Cvalue +/-			1,96	1,96	1,96	1,96	1,96	1,96
Test du VR sur données mensuelles - hypothèse d'hétéroscédasticité des rendements									
<b>CAC-All-Tradable nominal</b>	31/01/1895 - 31/12/2013	1428	18,64%	<b>H1</b>	<b>H1</b>	<b>H1</b>	<b>H1</b>	<b>H0</b>	<b>H0</b>
	ratio			<b>1,144</b>	<b>1,216</b>	<b>1,33</b>	<b>1,501</b>	<b>1,452</b>	<b>1,451</b>
	stats. M2			5,4228	3,7223	3,3089	3,4404	1,9025	1,4731
	pValue			0	0,0002	0,0009	0,0006	0,0571	0,1407
	Cvalue +/-			1,96	1,96	1,96	1,96	1,96	1,96
Test du VR sur données mensuelles - hypothèse de rendements IID									
<b>CAC-All-Tradable déflaté</b>	31/01/1895 - 31/12/2013	1428	19,23%	<b>H1</b>	<b>H1</b>	<b>H1</b>	<b>H1</b>	<b>H1</b>	<b>H0</b>
	ratio			<b>1,121</b>	<b>1,163</b>	<b>1,35</b>	<b>1,567</b>	<b>1,65</b>	<b>1,629</b>
	stats. M1			3,705	2,4084	3,0436	3,4109	2,4119	1,7865
	pValue			0,0002	0,016	0,0023	0,0006	0,0159	0,074
	Cvalue +/-			1,96	1,96	1,96	1,96	1,96	1,96
Test du VR sur données mensuelles - hypothèse d'hétéroscédasticité des rendements									
<b>CAC-All-Tradable déflaté</b>	31/01/1895 - 31/12/2013	1428	19,23%	<b>H1</b>	<b>H1</b>	<b>H1</b>	<b>H1</b>	<b>H1</b>	<b>H1</b>
	ratio			<b>1,121</b>	<b>1,163</b>	<b>1,35</b>	<b>1,567</b>	<b>1,65</b>	<b>1,629</b>
	stats. M2			4,5719	2,8123	3,5153	3,8962	2,7352	2,0548
	pValue			0	0,0049	0,0004	0,0001	0,0062	0,0399
	Cvalue +/-			1,96	1,96	1,96	1,96	1,96	1,96

*Seuil de signification : 5% - M1 et M2 deux versions de la statistique de LO et MACKINLAY*

Les résultats montrent que l'hypothèse de marche aléatoire à tendance à être rejetée sur les horizons courts. La remarque est vraie pour la statistique classique (M1) comme pour celle robuste face au cas d'incrément hétéroscédastiques (M2). Sur les horizons longs (5 et 8 ans) les tests acceptent l'hypothèse  $H_0$  de marche aléatoire, que les cours soient déflatés ou non. Seule la statistique M2 sur le CAC-All-Tradable déflaté renvoie systématiquement un verdict de variables aléatoires IID.

- Test de Lo-Mackinlay : S&P500

Concernant le cas des cours boursiers nord-américains, les résultats (cf. tableau 3.2) sont encore plus ambigus. A ce titre, la statistique non corrigée de l'hétéroscédasticité semble particulièrement fragile : pour les valeurs de  $p=2$ ,  $p=5$ ,  $p=12$ , c'est-à-dire pour des écarts allant de 2 mois à 1 an, l'hypothèse de marche aléatoire est respectivement rejetée, acceptée puis rejetée. Pour  $p=96$  (sur 8 ans), les deux tests (M1, M2) concluent que les cours nominaux et réels suivent une marche aléatoire, ce qui va à l'encontre des évidences empiriques.

TABLEAU 3.2 – Test du ratio de variance paramétrique : S&P500

Test du VR sur données mensuelles - hypothèse de rendements IID									
	Date	Nombre d'obs.	Écart-type annualisé	2 mois	5 mois	1 an	2 ans	5 ans	8 ans
				(p = 2)	(p = 5)	(p = 12)	(p = 24)	(p = 60)	(p = 96)
<b>S&amp;P500 nominal</b>	31/01/1800 - 31/12/2013	2570	15,15%	<b>H1</b>	<b>H0</b>	<b>H1</b>	<b>H0</b>	<b>H0</b>	<b>H0</b>
	ratio			<b>1,117</b>	<b>1,15</b>	<b>1,299</b>	<b>1,308</b>	<b>1,119</b>	<b>0,925</b>
	stats. M1			3,01	1,7774	2,1405	1,5415	0,4021	-0,2087
	pValue			0,0026	0,0755	0,0323	0,1232	0,6876	0,8346
	Cvalue +/-			1,96	1,96	1,96	1,96	1,96	1,96
Test du VR sur données mensuelles - hypothèse d'hétéroscédasticité des rendements									
<b>S&amp;P500 nominal</b>	31/01/1800 - 31/12/2013	2570	15,15%	<b>H1</b>	<b>H1</b>	<b>H1</b>	<b>H1</b>	<b>H0</b>	<b>H0</b>
	ratio			<b>1,117</b>	<b>1,15</b>	<b>1,299</b>	<b>1,308</b>	<b>1,119</b>	<b>0,925</b>
	stats. M2			5,9054	3,4678	4,0405	2,8447	0,6772	-0,3339
	pValue			0	0,0005	0,0001	0,0044	0,4983	0,7384
	Cvalue +/-			1,96	1,96	1,96	1,96	1,96	1,96
Test du VR sur données mensuelles - hypothèse de rendements IID									
<b>S&amp;P500 déflaté</b>	31/01/1800 - 31/12/2013	2570	15,84%	<b>H1</b>	<b>H0</b>	<b>H0</b>	<b>H0</b>	<b>H0</b>	<b>H0</b>
	ratio			<b>1,104</b>	<b>1,11</b>	<b>1,236</b>	<b>1,211</b>	<b>1,012</b>	<b>0,872</b>
	stats. M1			2,9132	1,4247	1,8588	1,1588	0,0445	-0,3854
	pValue			0,0036	0,1543	0,0631	0,2465	0,9645	0,7
	Cvalue +/-			1,96	1,96	1,96	1,96	1,96	1,96
Test du VR sur données mensuelles - hypothèse d'hétéroscédasticité des rendements									
<b>S&amp;P500 déflaté</b>	31/01/1800 - 31/12/2013	2570	15,84%	<b>H1</b>	<b>H1</b>	<b>H1</b>	<b>H0</b>	<b>H0</b>	<b>H0</b>
	ratio			<b>1,104</b>	<b>1,11</b>	<b>1,236</b>	<b>1,211</b>	<b>1,012</b>	<b>0,872</b>
	stats. M2			5,2669	2,5395	3,1918	1,951	0,0689	-0,5682
	pValue			0	0,0111	0,0014	0,0511	0,9451	0,5699
	Cvalue +/-			1,96	1,96	1,96	1,96	1,96	1,96

*Seuil de signification : 5% - M1 et M2 deux versions de la statistique de LO et MACKINLAY*

- Test de Wright : CAC-All-Tradable

Les défauts des tests de **LO et MACKINLAY** ont été identifiés par d'**ENGLE [1982]** et **BOLLERSLEV [1986]**. Le test de non paramétrique de **WRIGHT [2000]**, qui ne nécessite pas d'hypothèses fortes sur les distributions de la statistique de test, devrait a priori s'avérer plus conclusif.

Les résultats des estimations (cf. tableau 3.3) pour le CAC All-Tradable montrent, en effet, une grande convergence des résultats. Que l'on se réfère aux tests basés sur les rangs ou les signes, les statistiques rejettent l'hypothèse  $H_0$  de marche aléatoire. On notera cependant que la statistique  $R^2$  dans le cas des cours nominaux accepte l'hypothèse de marche aléatoire.

- Test de Wright : S&P500

Les résultats des tests de ratios de variance non paramétriques de **WRIGHT** pour les USA sont moins unanimes (voir tableau 3.4). Sur des horizons longs (8 ans dans nos exemples), les tests ne sont pas conclusifs : 3 tests acceptent  $H_0$  tandis que les 3 autres rejettent l'hypothèse de marche aléatoire.

TABLEAU 3.3 – Test du VR non-paramétrique de Wright : CAC-All-Tradable

VR Wright test non-paramétrique sur données mensuelles										
	Date	Nb obs.	Volatilité	2 mois	5 mois	1 an	2 ans	5 ans	8 ans	
<b>CAC-All-Tradable nominal</b>	31/01/1895 - 31/12/2013	1428	18,64%	(p = 2)	(p = 5)	(p = 12)	(p = 24)	(p = 60)	(p = 96)	
	stats. R1			5,7985	4,0793	4,632	4,6098	3,7273	2,9408	
	stats. R2			5,6216	3,8191	3,7663	3,6357	2,308	1,5412	
	stats. S1			8,6034	10,2462	14,9998	18,801	20,9921	22,7476	
	<b>Cvalue R1</b>	<b>Inf</b>			-2,0488	-1,9824	-1,9865	-1,9404	-1,8787	-1,8515
		<b>Sup</b>			1,883	1,9234	1,9082	1,8284	1,7472	1,6167
	<b>Cvalue R2</b>	<b>Inf</b>			-2,0507	-1,9733	-1,9849	-1,9481	-1,8762	-1,8676
		<b>Sup</b>			1,9207	1,8864	1,8604	1,816	1,7578	1,6273
	<b>Cvalue S1</b>	<b>Inf</b>			-1,9582	-1,9422	-1,9764	-1,8339	-1,7885	-1,7547
		<b>Sup</b>			1,9582	2,0002	1,9928	1,9538	1,9611	1,9339
	Décision R1				<b>H1</b>	<b>H1</b>	<b>H1</b>	<b>H1</b>	<b>H1</b>	<b>H1</b>
	Décision R2				<b>H1</b>	<b>H1</b>	<b>H1</b>	<b>H1</b>	<b>H1</b>	<b>H0</b>
	Décision S1				<b>H1</b>	<b>H1</b>	<b>H1</b>	<b>H1</b>	<b>H1</b>	<b>H1</b>
	VR Wright test non-paramétrique sur données mensuelles									
	Date	Nb obs.	Volatilité	2 mois	5 mois	1 an	2 ans	5 ans	8 ans	
<b>CAC-All-Tradable déflaté</b>	31/01/1895 - 31/12/2013	1428	18,64%	(p = 2)	(p = 5)	(p = 12)	(p = 24)	(p = 60)	(p = 96)	
	stats. R1			5,1409	3,5387	4,6014	4,7776	3,7684	3,1438	
	stats. R2			4,7548	3,0137	3,795	3,8711	2,7105	2,0539	
	stats. S1			6,3798	7,385	10,4714	12,8461	12,9293	13,6514	
	<b>Cvalue R1</b>	<b>Inf</b>			-2,0488	-1,9824	-1,9865	-1,9404	-1,8787	-1,8515
		<b>Sup</b>			1,883	1,9234	1,9082	1,8284	1,7472	1,6167
	<b>Cvalue R2</b>	<b>Inf</b>			-2,0507	-1,9733	-1,9849	-1,9481	-1,8762	-1,8676
		<b>Sup</b>			1,9207	1,8864	1,8604	1,816	1,7578	1,6273
	<b>Cvalue S1</b>	<b>Inf</b>			-1,9582	-1,9422	-1,9764	-1,8339	-1,7885	-1,7547
		<b>Sup</b>			1,9582	2,0002	1,9928	1,9538	1,9611	1,9339
	Décision R1				<b>H1</b>	<b>H1</b>	<b>H1</b>	<b>H1</b>	<b>H1</b>	<b>H1</b>
	Décision R2				<b>H1</b>	<b>H1</b>	<b>H1</b>	<b>H1</b>	<b>H1</b>	<b>H1</b>
	Décision S1				<b>H1</b>	<b>H1</b>	<b>H1</b>	<b>H1</b>	<b>H1</b>	<b>H1</b>

Seuil de signification : 5% - R1, R2 et S1 les trois versions de la statistique de WRIGHT

TABLEAU 3.4 – Test du VR non-paramétrique de Wright : S&P500

VR Wright test non-paramétrique sur données mensuelles										
	Date	Nb obs.	Volatilité	2 mois	5 mois	1 an	2 ans	5 ans	8 ans	
<b>S&amp;P500 nominal</b>	31/01/1800 - 31/12/2013	2570	15,14%	(p = 2)	(p = 5)	(p = 12)	(p = 24)	(p = 60)	(p = 96)	
	stats. R1			5,0873	5,0701	6,3559	5,0389	2,9654	2,1491	
	stats. R2			4,8629	4,4935	5,4734	4,1259	2,0159	1,1451	
	stats. S1			7,1618	11,2386	15,4771	18,0982	22,19	26,3643	
	Cvalue R1	Inf			-2,0418	-1,9958	-2,0134	-2,039	-1,9567	-1,9786
		Sup			1,9026	1,9206	1,9388	1,9669	1,817	1,8237
	Cvalue R2	Inf			-1,9952	-2,0033	-2,0049	-2,0233	-1,9334	-1,9285
		Sup			1,9061	1,874	1,9303	1,9418	1,7906	1,8106
	Cvalue S1	Inf			-2,012	-1,9736	-1,9432	-1,9244	-1,8159	-1,8175
		Sup			1,9726	1,9448	1,9994	1,9955	1,9991	1,9785
	Décision R1				<b>H1</b>	<b>H1</b>	<b>H1</b>	<b>H1</b>	<b>H1</b>	<b>H1</b>
	Décision R2				<b>H1</b>	<b>H1</b>	<b>H1</b>	<b>H1</b>	<b>H1</b>	<b>H0</b>
	Décision S1				<b>H1</b>	<b>H1</b>	<b>H1</b>	<b>H1</b>	<b>H1</b>	<b>H1</b>
VR Wright test non-paramétrique sur données mensuelles										
	Date	Nb obs.	Volatilité	2 mois	5 mois	1 an	2 ans	5 ans	8 ans	
<b>S&amp;P500 déflaté</b>	31/01/1800 - 31/12/2013	2570	15,84%	(p = 2)	(p = 5)	(p = 12)	(p = 24)	(p = 60)	(p = 96)	
	stats. R1			4,9167	4,456	5,7137	4,247	2,1125	1,3941	
	stats. R2			4,5605	3,6618	4,7	3,3003	1,2722	0,6001	
	stats. S1			6,7672	9,524	13,0598	14,8614	17,6443	21,0477	
	Cvalue R1	Inf			-2,0418	-1,9958	-2,0134	-2,039	-1,9567	-1,9786
		Sup			1,9026	1,9206	1,9388	1,9669	1,817	1,8237
	Cvalue R2	Inf			-1,9952	-2,0033	-2,0049	-2,0233	-1,9334	-1,9285
		Sup			1,9061	1,874	1,9303	1,9418	1,7906	1,8106
	Cvalue S1	Inf			-2,012	-1,9736	-1,9432	-1,9244	-1,8159	-1,8175
		Sup			1,9726	1,9448	1,9994	1,9955	1,9991	1,9785
	Décision R1				<b>H1</b>	<b>H1</b>	<b>H1</b>	<b>H1</b>	<b>H1</b>	<b>H0</b>
	Décision R2				<b>H1</b>	<b>H1</b>	<b>H1</b>	<b>H1</b>	<b>H0</b>	<b>H0</b>
	Décision S1				<b>H1</b>	<b>H1</b>	<b>H1</b>	<b>H1</b>	<b>H1</b>	<b>H1</b>

Seuil de signification : 5% - R1, R2 et S1 les trois versions de la statistique de WRIGHT



Rappelons, à toutes fins utiles, que le phénomène de retour vers la moyenne, s'il existe, est une correction de long terme qui stipule qu'une forte variation dans un sens est suivie de mouvements de sens opposé qui corrigent tendanciellement la déviation initiale et ramènent les prix des actifs vers leurs valeurs fondamentales. Comme le mécanisme de correction des mouvements extrêmes est d'autant plus probable que la durée de placement est longue, l'allongement de la durée de placement conduit donc à une réduction du risque. Le fait que le test de **WRIGHT** ait tendance à assimiler le cours des actifs risqués à une marche aléatoire à long terme et à un processus non brownien (*mean reverting* ou *mean averting*) à court terme contredit donc l'idée de l'existence d'une tendance dans le cours des actions.

► Sensibilité des tests : l'exemple de la fréquence

Le verdict des expérimentations n'est pas concluant. Les tests ne permettent pas de déterminer la nature du processus qui régit les prix des actifs risqués. La batterie de test révèle toutefois une grande sensibilité des statistiques aux paramètres d'entrée des modèles. Pour s'en convaincre, nous avons calculé les ratios de variances pour des intervalles de durée identique mais construits à partir de plus ou moins hautes fréquences. L'exercice est fait pour un même indice boursier à partir de rendements journaliers puis hebdomadaires. On exprime alors un assortiment d'intervalles de temps en périodes  $p$  en fonction de la fréquence retenue. Par exemple, sur des données journalières, une durée de 1 an correspond à une valeur de  $p=252$ , tandis que sur des données hebdomadaires, ce même intervalle coïncide avec une valeur de  $p$  assignée à 50. On a alors estimé pour les deux fréquences les ratios de variance de **LO et MACKINLAY** et de **WRIGHT** sur le S&P500 pour des intervalles communs de 2 mois, 6 mois, 1an et 2ans. Les résultats qui figurent dans les tableaux ci-dessous montrent clairement l'influence du choix initial de la fréquence sur les résultats des tests. Les différences sont plus notables sur les horizons courts pour le test de **WRIGHT**. Les conclusions de la statistique M2 de **LO et MACKINLAY**, robuste à l'hétéroscédasticité, sont quant à elles déroutantes.

TABLEAU 3.5 – Test du VR de Wright - fréquence journalière

VR Wright test observations de rendements journaliers									
	Date	Nb obs.	Volatilité	2 semaines	2 mois	6 mois	1 an	2 ans	
	03/01/1918-31/12/2013	22682	18.41%	( $p = 10$ )	( $p = 42$ )	( $p = 126$ )	( $p = 252$ )	( $p = 500$ )	
<b>S&amp;P 500 total-returns déflaté</b>	stats. R1			1.73	3.59	6.20	7.51	6.70	
	stats. R2			0.90	2.58	3.92	4.85	4.09	
	stats. S1			2.85	5.62	10.11	12.28	12.68	
	<b>Cvalue R1</b>	<b>min</b>		-1.97	-1.97	-1.99	-1.94	-2.02	
		<b>max</b>		1.90	1.92	1.82	1.75	1.91	
	<b>Cvalue R2</b>	<b>min</b>		-1.95	-2.02	-2.01	-1.97	-2.01	
		<b>max</b>		1.89	1.89	1.85	1.79	1.82	
	<b>Cvalue S1</b>	<b>min</b>		-2.01	-1.93	-1.93	-1.82	-1.97	
		<b>max</b>		1.92	2.09	2.04	1.95	2.06	
	Décision R1			<b>H0</b>	<b>H1</b>	<b>H1</b>	<b>H1</b>	<b>H1</b>	<b>H1</b>
	Décision R2			<b>H0</b>	<b>H1</b>	<b>H1</b>	<b>H1</b>	<b>H1</b>	<b>H1</b>
	Décision S1			<b>H1</b>	<b>H1</b>	<b>H1</b>	<b>H1</b>	<b>H1</b>	<b>H1</b>

Seuil de signification : 5% - R1, R2 et S1 les trois versions de la statistique de **WRIGHT**

TABLEAU 3.6 – Test du VR de Wright - fréquence hebdomadaire

VR Wright test observations de rendements hebdomadaires									
S&P 500 total- returns déflaté	Date	Nb obs.	Volatilité	2 semaines	2 mois	6 mois	1 an	2 ans	
	31/12/1918- 31/12/2013	5006	0,1823	(p = 2)	(p = 8)	(p = 25)	(p = 50)	(p = 100)	
	stats. R1			-0,14	1,26	2,53	3,79	2,96	
	stats. R2			-0,64	1,05	1,71	2,74	1,9	
	stats. S1			1,78	3,98	6,84	9,19	10,59	
	<b>Cvalue R1</b>	<b>min</b>		-1,98	-1,94	-2	-1,97	-1,95	
		<b>max</b>		1,94	1,96	1,87	1,91	1,88	
	<b>Cvalue R2</b>	<b>min</b>		-2	-1,96	-2,01	-1,97	-1,93	
		<b>max</b>		1,96	1,94	1,88	1,95	1,89	
	<b>Cvalue S1</b>	<b>min</b>		-1,96	-1,94	-1,84	-1,89	-1,84	
		<b>max</b>		1,95	1,96	1,98	1,99	2	
	Décision R1			<i>H0</i>	<i>H0</i>	<i>H1</i>	<i>H1</i>	<i>H1</i>	
	Décision R2			<i>H0</i>	<i>H0</i>	<i>H0</i>	<i>H1</i>	<i>H1</i>	
	Décision S1			<i>H0</i>	<i>H1</i>	<i>H1</i>	<i>H1</i>	<i>H1</i>	

Seuil de signification : 5% - R1, R2 et S1 les trois versions de la statistique de WRIGHT

TABLEAU 3.7 – Test du ratio de variance paramétrique - fréquence journalière

Test du VR - hypothèse de rendements IID									
S&P 500 total- returns déflaté	Date	Nombre d'obs.	Écart-type annualisé	2 semaines	2 mois	6 mois	1 an	2 ans	
	03/01/1918- 31/12/2013	22683	18.41%	(p = 10)	(p = 42)	(p = 126)	(p = 252)	(p = 500)	
	ratio			<b>0.99</b>	<b>1.07</b>	<b>1.09</b>	<b>1.18</b>	<b>1.19</b>	
	stats. M1			-0.15	0.75	0.57	0.91	0.69	
	Cvalue			1.96	1.96	1.96	1.96	1.96	
	Test du VR - hypothèse d'hétéroscédasticité des rendements								
	03/01/1918- 31/12/2013	22683	18.41%	<i>H0</i>	<i>H0</i>	<i>H0</i>	<i>H0</i>	<i>H0</i>	
	ratio			<b>0.99</b>	<b>1.07</b>	<b>1.09</b>	<b>1.18</b>	<b>1.19</b>	
	stats. M2			-0.35	1.51	1.00	1.51	1.08	
	Cvalue			1.96	1.96	1.96	1.96	1.96	

Seuil de signification : 5% - M1 et M2 deux versions de la statistique de LO et MACKINLAY

TABLEAU 3.8 – Test du ratio de variance paramétrique - fréquence hebdomadaire

		Test du VR - hypothèse de rendements IID						
		Date	Nombre d'obs.	Écart-type annualisé	2 semaines (p = 2)	2 mois (p = 8)	6 mois (p = 25)	1 an (p = 50)
<b>S&amp;P 500 total-returns déflaté</b>	31/12/1918-31/12/2013	5007	18,23%	H0	H0	H0	H0	H0
	ratio			0,9969617	1,09	1,0932	1,2316	1,24917
	stats. M1			-0,1148938	1,1781	0,67172	1,19994	0,93869
	Cvalue			1,96	1,96	1,96	1,96	1,96
	Test du VR - hypothèse d'hétéroscédasticité des rendements							
	31/12/1918-31/12/2013	5007	18,23%	H0	H1	H0	H1	H0
	ratio			0,9969617	1,09	1,0932	1,2316	1,24917
	stats. M2			-0,2149673	2,1426	1,17653	2,03659	1,537395
	Cvalue			1,96	1,96	1,96	1,96	1,96

Seuil de signification : 5% - M1 et M2 deux versions de la statistique de LO et MAC KINLAY

Soulignons que nous avons également effectué les mêmes tests sur les séries de « *capital-returns* » des actifs risqués, qui reflètent les évolutions de prix n'incluant que le gain en capital (ou plus-value). Les résultats sont très proches et aussi instables que sur les chroniques de *total-returns*. Les ratios de variance ont été calculés sur le logarithme du cours nominal des actions sur différentes profondeurs et à plus ou moins haute fréquence. Le verdict des différents tests est pour le moins contrasté. Ce constat démontre la forte sensibilité des tests de ratios de variance et soulève la question de la fiabilité des données, ou encore de l'homogénéité économique de la période sous revue. De fait, les résultats de ces tests sont assez instables dans le temps et fournissent des éléments pour le moins contradictoires selon la fréquence des données utilisées.

### Les limites des tests de ratio de variance

Les conclusions des chercheurs qui se sont attelés à tester l'efficacité des marchés en utilisant la statistique du ratio de variance sont largement antagonistes. Un point fondamental est de comprendre si la puissance du test est en cause ou si ces divergences proviennent d'autres facteurs (sélection, fréquence, traitement des données, ...). Pour statuer sur le test de ratio de variance, objet de controverse depuis les développements de LO et MAC KINLAY [1988], plutôt que de l'utiliser sur des chroniques financières his-

toriques qui sont régies par un processus inconnu, nous avons créé par simulations stochastiques des échantillons dont nous avons déterminé ex ante la dynamique (certains processus sont issus de [WRIGHT \[2000\]](#)<sup>10</sup>). Afin d'évaluer numériquement les limites des tests de ratio de variance, nous avons développé des programmes de simulation capables de générer des échantillons en fonction d'une dynamique donnée. La procédure consiste à simuler 5000 fois, pour les modèles proposés ci-dessous, des échantillons de tailles 100, 500, 1000, 5000.

► **Modèle 1 : le cas d'une marche aléatoire**

- Test de ratio de variance

Dans ce premier exemple, on génère un processus autorégressif AR(1) de forme  $y_t = y_{t-1} + r_t$ . Dans chaque cas les innovations  $r_t$  sont régies par une dynamique différente. Les modèles sont les suivants :

$$r_t = \varepsilon_t \tag{3.13}$$

Cas des innovations  $r_t$  homoscédastiques :

$$\varepsilon_t \xrightarrow{\text{IID}} \mathcal{N}(0; 1) \tag{3.14}$$

Cas des innovations  $r_t$  hétéroscédastiques de type GARCH(1,1) avec :

$$\sigma_t^2 = 0.25 + 0.59\sigma_{t-1}^2 + 0.4\varepsilon_{t-1}^2 \tag{3.15}$$

Le tableau ci-dessous contient les probabilités de rejets avec chacune des statistiques de tests du ratio de variance paramétrique et non paramétrique : M1 et M2 pour les statistiques homoscédastique et hétéroscédastique proposée par le test de [LO et MACKINLAY \[1988\]](#) et R1, R2 et S1 pour les deux premières statistiques des cas homoscédastiques et la première statistique basée sur les signes robuste à l'hétéroscédasticité.

Conformément à la description des tests, dans le cas d'homoscédasticité, on constate que les statistiques M1, M2, R1, R2 et S1 rejettent l'hypothèse de marche aléatoire à un taux

---

<sup>10</sup>. On peut aussi se référer à [LO et MACKINLAY \[1989\]](#) pour avoir plus amples informations sur les dynamiques d'évolutions

très proche du seuil nominal de 5% lorsque les innovations d'une marche aléatoire pure sont homoscédastiques, soit en moyenne 250 rejets, sur 5000 tests effectués. Par ailleurs, on peut également remarquer qu'on observe quasiment pas d'effet taille d'échantillon, ni d'effet sur l'horizon pour le calcul des incréments  $q$ . Aussi bien pour des petits échantillons que pour des grands échantillons : la moyenne des rejets est de 5.2% et s'étalent de 4.1% à 6.9%. Individuellement, il y a presque une équivalence entre les tests paramétriques et non-paramétriques pour cette marche aléatoire hétéroscédastique.

TABLEAU 3.9 – Tests du ratio de variance - Probabilité de rejet du modèle 1

Test du modèle 1 : $y_t = y_{t-1} + r_t$											
Taille	q	Homoscédasticité $\varepsilon_t \stackrel{\text{IID}}{\rightarrow} \mathcal{N}(0;1)$					Hétéroscédasticité $\sigma_t^2 = 0.25 + 0.59\sigma_{t-1}^2 + 0.4\varepsilon_{t-1}^2$				
		M1	M2	R1	R2	S1	M1	M2	R1	R2	S1
100	2	5,30%	5,90%	5,00%	4,90%	4,50%	19,20%	5,20%	8,10%	11,40%	4,90%
	5	5,40%	5,80%	5,30%	5,00%	5,00%	16,00%	5,50%	7,70%	10,00%	4,60%
	12	5,30%	5,80%	4,60%	4,70%	5,40%	9,60%	5,70%	6,60%	7,40%	4,70%
	24	6,20%	6,90%	4,60%	4,40%	4,70%	7,80%	6,10%	6,00%	6,40%	5,00%
500	2	5,40%	5,10%	5,10%	5,20%	4,40%	33,60%	4,80%	9,30%	15,40%	4,90%
	5	6,30%	5,90%	5,50%	6,40%	4,70%	31,20%	4,50%	9,10%	14,50%	5,50%
	12	5,50%	5,40%	5,60%	5,60%	4,50%	25,00%	4,60%	7,10%	10,70%	4,50%
	24	4,90%	5,10%	5,00%	4,70%	4,40%	19,30%	4,70%	6,90%	9,00%	5,20%
	60	4,50%	4,90%	4,80%	5,60%	4,10%	10,30%	5,40%	6,30%	7,50%	4,10%
	96	5,00%	5,10%	4,40%	4,90%	5,00%	7,90%	5,50%	5,40%	5,60%	5,30%
1000	2	4,80%	5,00%	5,20%	5,10%	4,60%	42,00%	4,50%	8,80%	16,00%	4,40%
	5	5,00%	5,00%	5,10%	4,70%	4,90%	39,50%	4,90%	8,60%	14,90%	4,80%
	12	4,90%	5,10%	5,30%	5,20%	4,70%	35,10%	4,30%	8,00%	13,70%	4,70%
	24	5,00%	5,00%	5,20%	4,90%	5,30%	29,60%	4,50%	7,50%	11,40%	4,80%
	60	5,10%	5,10%	4,70%	5,10%	4,50%	18,60%	5,00%	5,90%	8,50%	4,30%
	96	5,30%	5,60%	4,90%	5,30%	4,50%	13,00%	5,10%	5,60%	7,00%	5,00%
5000	2	5,60%	5,60%	5,60%	5,80%	5,00%	61,40%	5,40%	8,20%	17,90%	4,90%
	5	5,30%	5,40%	5,50%	5,30%	5,70%	59,10%	4,50%	9,40%	15,40%	4,90%
	12	5,40%	5,40%	5,50%	5,70%	6,20%	56,00%	4,30%	7,40%	14,30%	5,40%
	24	5,80%	5,90%	5,00%	5,00%	6,10%	50,30%	4,20%	7,50%	12,40%	4,60%
	60	5,10%	5,00%	5,20%	5,60%	6,20%	39,90%	4,00%	6,40%	9,80%	4,80%
	96	5,00%	5,00%	4,70%	5,00%	5,80%	33,00%	4,10%	5,50%	8,30%	5,00%

Par contre, pour le cas où les innovations sont hétéroscédastiques, on distingue une différence nette pour la statistique M1 du test paramétrique et la statistique R2 du test non paramétrique. Ces deux statistiques rejettent beaucoup plus la marche aléatoire qu'elles

ne devraient, le taux de rejet de  $H_0$  diminue inversement à la valeur de  $q$  pour chacune des tailles d'échantillon observées. En revanche, M2 et S1 sont pratiquement inaffectées par l'introduction de l'hétéroscédasticité dans les incréments de la marche aléatoire. Le risque de première espèce est proche de la marge définie. R1 est également affectée, avec un taux de rejet qui va jusqu'à 9,4% ( $T = 5000$  et  $q = 5$ ) et s'avère moins efficace que M2 et S1 pour tester ce cas d'une marche aléatoire. On peut donc dire que, sous l'hypothèse qu'une série financière suit un processus pure de marche aléatoire homoscédastique ou hétéroscédastique, les statistiques M2 et S2 sont les plus efficaces pour les distinguer dans le cas des tests individuels du ratio de variance. Les tests de ratio de variance (robustes à l'hétéroscédasticité) détectent bien la dynamique d'un marché efficient au sens de **FAMA [1965]**, y compris sur des échantillons de petites tailles.

- Tests de ratio de variance multiples

On peut également faire le parallèle des résultats précédents avec ceux obtenus via les versions « multiples » du test de ratio de variance portant sur le modèle 1. Les résultats sont fournis dans le tableau ci-dessous. Les statistiques  $M_1^*$  et  $M_2^*$  correspondent respectivement aux statistiques pour l'homoscédasticité et l'hétéroscédastique dans **CHOW et DENNING [1993]**, et CDR1, CDR2 et CDS1 correspondent aux statistiques du test multiple dans **BELAIRE-FRANCH et CONTRERAS [2004]**, avec CDS1 la statistique pour les cas d'hétéroscédasticité.

Le verdict des tests multiples est relativement similaire à celui des tests de **LO et MAC-KINLAY** et des tests non paramétriques simples. Sans surprise, les statistiques  $M_1^*$  et CDR2 adaptées aux variables aléatoires i.i.d affichent un taux de rejet de  $H_0$  beaucoup trop fréquent (zones grisées dans le tableau). Contrairement aux résultats des tests simples, la taille  $T$  de l'échantillon n'améliore pas la performance des tests. Pour  $T = 5000$ , le taux de rejet de  $H_0$  donné par la statistique  $M_1^*$  est de 74%.

TABLEAU 3.10 – Tests joints - Probabilité de rejet du modèle 1

<b>Test sur le modèle 1 : <math>y_t = y_{t-1} + r_t</math></b>						
<b>q</b>	<b>T</b>	<b>M<sub>1</sub>*</b>	<b>M<sub>2</sub>*</b>	<b>CD<sub>R1</sub></b>	<b>CD<sub>R2</sub></b>	<b>CD<sub>S1</sub></b>
<b>Homoscédasticité</b>						
<b><math>q = \{2, 5, 12, 24\}</math></b>	100	6,90%	7,70%	5,00%	5,00%	5,00%
<b><math>q = \{2, 5, 12, 24, 60, 96\}</math></b>	500	5,40%	5,40%	5,00%	5,40%	4,10%
<b><math>q = \{2, 5, 12, 24, 60, 96\}</math></b>	1000	5,00%	5,10%	5,80%	5,20%	4,70%
<b><math>q = \{2, 5, 12, 24, 60, 96\}</math></b>	5000	3,50%	3,50%	4,60%	4,40%	4,40%
<b>Hétéroscédasticité</b>						
<b><math>q = \{2, 5, 12, 24\}</math></b>	100	17,80%	6,80%	8,10%	11,70%	4,90%
<b><math>q = \{2, 5, 12, 24, 60, 96\}</math></b>	500	34,60%	5,50%	9,40%	16,70%	5,30%
<b><math>q = \{2, 5, 12, 24, 60, 96\}</math></b>	1000	47,60%	4,90%	9,50%	17,70%	4,90%
<b><math>q = \{2, 5, 12, 24, 60, 96\}</math></b>	5000	73,90%	4,40%	8,50%	18,90%	3,90%



► **Modèle 2 : une situation de volatilité stochastique**

Ce modèle correspond à une situation de volatilité stochastique. On testera successivement deux cas. Un premier cas classique. Où  $\varepsilon_t$  est distribué selon la loi normale et n'a aucune influence sur les queues de distributions et un second cas où  $\varepsilon_t$  est distribué selon la loi de Student à trois degrés de liberté. Cette dernière configuration est utilisée pour examiner les propriétés des tests lorsqu'ils sont appliqués sur des variables avec des queues de distributions importantes, telles les caractéristiques souvent observées sur les séries financières (distribution leptokurtique).

$$r_t = e^{\frac{h_t}{2}} \quad (3.16)$$

$$h_t = 0.95h_{t-1} + \xi_t, \quad \xi_t \stackrel{\text{IID}}{\longrightarrow} \mathcal{N}\left(0; \frac{1}{10}\right) \text{ et indépendant de } \varepsilon_t \quad (3.17)$$

- Premier cas :  $\varepsilon_t \stackrel{\text{IID}}{\longrightarrow} \mathcal{N}(0; 1)$
- Second cas :  $\varepsilon_t \longrightarrow \mathcal{S}t(3)$  une loi de student à trois degré de liberté.

Les résultats de la simulation des taux de rejets sont contenus dans les tableaux suivants pour ce modèle.

- Test de ratio de variance

Le premier cas conduit à des résultats analogues à ceux estimés dans le cas d'une marche aléatoire. Le taux de rejet de l'hypothèse  $H_0$  est en phase avec le seuil de probabilité retenu (en l'occurrence 5%).

Dans le second cas, la simulation de queues de distribution épaisses (signe patent d'excès de Kurtosis) devrait conduire au rejet de l'hypothèse de normalité des rendements. En situation de volatilité stochastique, les queues des distributions des rendements sont, en effet, plus épaisses que celles d'une loi gaussienne. Or, à la lecture des tableaux, on constate qu'aucune des statistiques ne détecte les échantillons ayant des queues plus épaisses que la normale aux extrémités.

TABLEAU 3.11 – Tests de ratio de variance - Probabilité de rejet du modèle 2

		Test du modèle 2									
Taille	q	$\varepsilon_t$ : Homoscédasticité					$\varepsilon_t$ : Student à 3 degré de liberté				
		M <sub>1</sub>	M <sub>2</sub>	R <sub>1</sub>	R <sub>2</sub>	S <sub>1</sub>	M <sub>1</sub>	M <sub>2</sub>	R <sub>1</sub>	R <sub>2</sub>	S <sub>1</sub>
100	2	5,20%	5,90%	5,40%	5,50%	4,70%	5,50%	5,70%	5,20%	5,60%	5,00%
	5	6,00%	5,90%	5,10%	5,10%	4,80%	5,30%	6,40%	5,20%	5,50%	4,80%
	12	5,80%	5,60%	4,90%	4,80%	5,10%	4,90%	6,50%	5,20%	5,10%	5,00%
	24	6,90%	6,50%	4,80%	4,90%	5,50%	5,70%	7,00%	5,60%	5,50%	5,50%
500	2	6,10%	5,40%	6,00%	6,40%	4,90%	5,40%	4,70%	5,80%	5,80%	5,10%
	5	6,40%	5,40%	6,30%	6,70%	5,00%	6,20%	5,90%	6,50%	6,30%	5,80%
	12	6,20%	5,40%	6,90%	6,40%	5,50%	5,20%	5,00%	5,80%	5,20%	4,90%
	24	5,50%	4,80%	5,50%	6,30%	5,30%	5,60%	5,70%	5,60%	5,20%	5,40%
	60	5,40%	5,40%	5,50%	5,40%	4,80%	5,00%	5,50%	5,00%	5,40%	4,60%
	96	6,00%	6,20%	4,80%	5,30%	5,20%	5,90%	6,50%	4,80%	4,30%	5,10%
1000	2	5,80%	7,10%	6,20%	6,90%	4,50%	5,20%	6,60%	6,60%	6,20%	4,50%
	5	5,50%	6,80%	5,50%	6,00%	4,50%	5,00%	5,80%	5,90%	5,20%	4,90%
	12	5,70%	6,80%	6,10%	6,40%	4,90%	5,30%	5,90%	5,10%	5,60%	5,10%
	24	5,50%	6,30%	6,30%	6,40%	5,10%	5,50%	5,60%	6,40%	5,80%	5,50%
	60	5,70%	5,90%	5,10%	5,90%	4,80%	5,90%	5,90%	5,20%	5,60%	4,70%
	96	5,30%	5,30%	4,80%	5,30%	4,80%	5,80%	5,70%	4,80%	5,00%	4,80%
5000	2	4,40%	5,60%	5,10%	5,60%	3,80%	5,00%	6,00%	4,40%	4,60%	4,40%
	5	5,10%	6,10%	5,80%	6,00%	4,80%	3,80%	5,40%	4,50%	5,40%	5,30%
	12	4,30%	6,10%	5,10%	5,50%	5,90%	5,50%	5,80%	5,00%	5,90%	5,40%
	24	4,90%	5,90%	5,70%	5,40%	6,00%	4,90%	5,20%	4,70%	4,70%	5,50%
	60	5,20%	6,00%	5,70%	6,00%	7,00%	4,50%	4,60%	5,70%	6,10%	6,00%
	96	5,80%	6,00%	5,90%	5,20%	6,50%	4,60%	4,80%	5,30%	4,60%	6,30%

- Tests de ratio de variance multiples

Les tests multiples montrent les mêmes faiblesses que les tests classiques de ratio de variance. Ils ne détectent pas l'excès d'aplatissement des distributions et ce, quel que soit la taille des échantillons simulés.

TABLEAU 3.12 – Tests joints - Probabilité de rejet du modèle 2

<b>Test du modèle 2</b>						
<b>q</b>	<b>T</b>	<b>M<sub>1</sub><sup>*</sup></b>	<b>M<sub>2</sub><sup>*</sup></b>	<b>CD<sub>R1</sub></b>	<b>CD<sub>R2</sub></b>	<b>CD<sub>S1</sub></b>
<b><math>\varepsilon_t</math> : Homoscédastique</b>						
<b><math>q = \{2, 5, 12, 24\}</math></b>	100	7,20%	7,60%	5,20%	5,50%	5,20%
<b><math>q = \{2, 5, 12, 24, 60, 96\}</math></b>	500	6,60%	6,20%	5,90%	6,50%	5,30%
<b><math>q = \{2, 5, 12, 24, 60, 96\}</math></b>	1000	6,00%	5,20%	5,80%	6,70%	4,70%
<b><math>q = \{2, 5, 12, 24, 60, 96\}</math></b>	5000	5,10%	4,00%	4,70%	6,20%	5,10%
<b><math>\varepsilon_t</math> : Student à 3 degré de liberté</b>						
<b><math>q = 2, 5, 12, 24</math></b>	100	6,60%	8,10%	5,40%	5,60%	5,40%
<b><math>q = 2, 5, 12, 24, 60, 96</math></b>	500	6,50%	6,50%	5,40%	6,10%	5,30%
<b><math>q = 2, 5, 12, 24, 60, 96</math></b>	1000	5,50%	4,70%	6,00%	6,00%	4,90%
<b><math>q = 2, 5, 12, 24, 60, 96</math></b>	5000	3,80%	3,10%	4,30%	4,40%	4,50%

► Modèle 3 : le cas d'un processus de retour vers la moyenne AR(1)

- Test de ratio de variance

Dans ce troisième test, on génère un processus stationnaire autorégressif AR(1) de forme :

$$y_t = \rho * y_{t-1} + r_t \quad (3.18)$$

pour différentes valeurs de  $\rho$ . Ce dernier paramètre permet d'introduire une force de rappel plus ou moins importante dans la dynamique du processus. Plus la valeur de  $\rho$  s'écarte de l'unité moins les marchés sont efficients. Le tableau ci-dessous contient les statistiques des taux de rejet déterminés par les tests du ratio de variance paramétrique et non paramétrique : M1 et M2 pour les statistiques homoscédastique et hétéroscédastique proposées par le test de **LO et MACKINLAY [1988]** et R1, R2 et S1 pour les deux premières statistiques des cas homoscédastiques et la première statistique basée sur les signes robustes à l'hétéroscédasticité conformément au test de **WRIGHT [2000]**.

On peut tirer plusieurs enseignements forts de ces simulations. Une valeur de  $\rho$  (coefficient d'autocorrélation du premier ordre) proche de l'unité correspond à une marche aléatoire, tandis qu'une déviation significative indique une autocorrélation des rendements. Une valeur de  $\rho$  inférieure à l'unité plaide pour un processus de « retour vers la moyenne » (mean reversion process). En premier, lieu lorsque la valeur de  $\rho$  est très faible (0.25), on constate que le taux de rejet de l'hypothèse  $H_0$  d'efficience des marchés est proche de 100% dès que la taille des échantillons est supérieure à 100. Seule la statistique du Signe S1 du test non paramétrique reste très conservatrice vis-à-vis de l'hypothèse nulle. Le problème est qu'un processus de mean reversion aussi fort (la force de la *mean reversion* est inversement proportionnelle à  $\rho$ ), bien détecté par les tests, n'existe pas sur les marchés boursiers. Si l'on fixe une valeur de  $\rho$  plus forte (0.925) et donc plus conforme à des processus de retour vers la moyenne observables, le verdict des tests est beaucoup plus hésitant. On constate que, pour les échantillons de taille inférieure à 5000 et pour les petites valeurs de  $q$  (largeur de l'intervalle entre les observations), les tests, qu'ils soient paramétriques ou non, robustes à hétéroscédasticité ou pas, acceptent à tort l'hypothèse  $H_0$  d'efficience dans des proportions trop importantes (la zone grisée sur le tableau correspond au taux de rejet inférieur à 50%). On remarque que le diagnostic des

**CHAPITRE 3. CONVERGENCE OU EFFICIENCE : DÉBAT SUR LA  
DYNAMIQUE DES COURS DE MARCHÉS BOURSIERS**

TABLEAU 3.13 – Tests de ratio de variance - Probabilité de rejet du modèle 3

<b>Test du modèle 3 : <math>y(t) = \rho y_{t-1} + r_t</math></b>											
<b>Taille</b>	<b>Q</b>	<b><math>\rho = 0,25</math></b>					<b><math>\rho = 0,925</math></b>				
		<b>M1</b>	<b>M2</b>	<b>R1</b>	<b>R2</b>	<b>S1</b>	<b>M1</b>	<b>M2</b>	<b>R1</b>	<b>R2</b>	<b>S1</b>
<b>100</b>	<b>2</b>	98,20%	97,60%	96,60%	97,60%	69,30%	6,00%	6,30%	5,40%	5,50%	4,60%
	<b>5</b>	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	80,50%	4,50%	4,80%	6,70%	6,80%	5,60%
	<b>12</b>	100,00%	99,40%	100,00%	100,00%	52,50%	0,90%	1,40%	7,70%	8,30%	6,30%
	<b>24</b>	0,00%	0,00%	98,80%	100,00%	31,60%	0,20%	0,30%	8,20%	8,80%	7,10%
<b>500</b>	<b>2</b>	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	12,40%	12,40%	11,90%	12,80%	8,40%
	<b>5</b>	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	25,10%	25,10%	26,60%	28,50%	13,30%
	<b>12</b>	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	45,20%	46,00%	51,30%	55,70%	24,50%
	<b>24</b>	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	97,30%	60,00%	61,20%	76,90%	81,50%	31,60%
	<b>60</b>	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	64,80%	30,20%	39,20%	91,20%	96,50%	31,00%
	<b>96</b>	0,00%	58,70%	100,00%	100,00%	44,70%	0,00%	0,00%	90,30%	97,60%	25,40%
<b>1000</b>	<b>2</b>	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	20,00%	19,90%	17,40%	19,70%	9,40%
	<b>5</b>	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	49,60%	49,20%	48,90%	51,40%	23,00%
	<b>12</b>	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	85,50%	85,80%	85,20%	89,70%	41,70%
	<b>24</b>	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	98,50%	98,40%	98,50%	99,50%	60,50%
	<b>60</b>	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	94,20%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	62,10%
	<b>96</b>	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	79,70%	99,90%	100,00%	100,00%	100,00%	55,10%
<b>5000</b>	<b>2</b>	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	75,50%	75,40%	71,50%	75,80%	37,60%
	<b>5</b>	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	99,90%	99,90%	99,70%	99,90%	85,00%
	<b>12</b>	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	99,80%
	<b>24</b>	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%
	<b>60</b>	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%
	<b>96</b>	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	99,90%

tests de ratio de variance est d'autant plus fiable que la taille de l'échantillon est grande et que les processus générés se distinguent de manière marquée d'un bruit blanc gaussien. La forte sensibilité du test à la taille des échantillons pose un problème qui peut se révéler rédhibitoire lors de tests empiriques sur les prix des actifs risqués. En effet, les statistiques sur le sujet sont relativement récentes et ne sont disponibles qu'à cadence mensuelle sur longue période. Autrement dit; ces résultats indiquent qu'il faudrait disposer de cours boursiers sur une profondeur de 400 ans pour s'assurer de la fiabilité des tests d'efficience robustes.

- Tests de ratio de variance multiples

Une fois encore, les résultats des tests de ratio de variance multiples sont en phase avec le verdict des tests classiques. Les tests multiples peinent à identifier les processus de mean reversion d'ampleurs « raisonnables ». Comme précédemment, la remarque est d'autant plus vraie que la taille de l'échantillon est faible. Les tests multiples sont toutefois légèrement moins sensibles à la profondeur des historiques que les tests simples : hormis la statistique CDS1, les tests sont globalement fiables à partir de chroniques mensuelles de l'ordre 1000 observations.

TABLEAU 3.14 – Tests joints - Probabilité de rejet du modèle 3

Test du modèle 3 : $y_t = \rho y_{t-1} + r_t$						
q	T	M <sub>1</sub> *	M <sub>2</sub> *	CD <sub>R1</sub>	CD <sub>R2</sub>	CD <sub>S1</sub>
<b><math>\rho = 0,25</math></b>						
$q = \{2, 5, 12, 24\}$	100	99,80%	99,40%	100,00%	100,00%	75,40%
$q = \{2, 5, 12, 24, 60, 96\}$	500	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%
$q = \{2, 5, 12, 24, 60, 96\}$	1000	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%
$q = \{2, 5, 12, 24, 60, 96\}$	5000	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%
<b><math>\rho = 0,925</math></b>						
$q = \{2, 5, 12, 24\}$	100	2,00%	2,30%	6,30%	6,80%	4,10%
$q = \{2, 5, 12, 24, 60, 96\}$	500	15,30%	16,60%	49,30%	55,50%	10,80%
$q = \{2, 5, 12, 24, 60, 96\}$	1000	86,90%	88,10%	98,70%	99,70%	31,40%
$q = \{2, 5, 12, 24, 60, 96\}$	5000	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%

► Modèle 4 : le cas d'un processus d'Ornstein-Uhlenbeck

Le dernier processus étudié correspond au cas où les prix ont tendance à retourner vers un niveau moyen à plus ou moins long terme.

$$\Delta y_t = \kappa(\mu - y_t)\Delta t + \sigma d\varepsilon_t \quad (3.19)$$

Dans cette équation différentielle stochastique,  $\kappa$  est la vitesse de retour vers  $y_t$  (ou force de rappel),  $\mu$  représente le niveau de long terme de  $y_t$ , et  $\sigma$  la volatilité. On est en présence d'un processus d'Ornstein-Uhlenbeck (OU), et  $y_t$  est souvent appelé processus de retour vers la moyenne. Dans ce processus, plus  $\kappa$  est faible, plus la volatilité de  $y_t$  est grande,  $y_t$  met alors plus de temps pour retourner vers sa moyenne de long terme  $\mu$ . D'un autre côté, plus la force de rappel  $\kappa$  est importante, plus les fluctuations de  $y_t$  autour de sa moyenne de long terme sont faibles, et par conséquent, plus la volatilité de  $y_t$  est faible. Nous procéderons à la simulation de ce processus pour deux cas : un premier cas avec une vitesse de retour vers la moyenne faible, et un deuxième cas avec une vitesse de retour vers la moyenne rapide.

- Test de ratio de variance

Comme dans le cas du processus stationnaire autorégressif AR(1), les tests acceptent trop fréquemment l'hypothèse d'une marche aléatoire lorsque la vitesse de retour vers la moyenne  $\kappa$  est faible.

Pour une force de rappel faible ( $\kappa=0.1$ ), les tests sont tous défaillants sur les échantillons de taille  $< 100$ . Il s'avère, par ailleurs, que les tests paraissent moins fiables pour les petites valeurs de  $q$ . On parvenait à des conclusions similaires avec une valeur de  $\rho = 0.925$  dans le processus décrit par l'équation (3.18). En revanche, lorsque la force de rappel est forte ( $\kappa=0.9$ ), l'hypothèse de marché aléatoire est, à quelques exceptions près, rejetée avec une fréquence proche de 100%. Ces résultats sont compatibles avec ceux obtenus dans le modèle autorégressif précédent pour une faible valeur de  $\rho$ .

TABLEAU 3.15 – Tests de ratio de variance - Probabilité de rejet du modèle 4

Test du modèle 4 : $\Delta y_t = \alpha(\mu - y_t)\Delta t + \sigma \varepsilon_t$											
Taille	q	$y_t = y_{t-1} + 0.1(\mu - y_{t-1})\Delta t + \sigma \varepsilon_t$					$y_t = y_{t-1} + 0.9(\mu - y_{t-1})\Delta t + \sigma \varepsilon_t$				
		M1	M2	R1	R2	S1	M1	M2	R1	R2	S1
100	2	6,70%	6,80%	5,90%	6,40%	5,10%	99,80%	99,80%	99,60%	99,80%	85,20%
	5	5,30%	6,00%	8,40%	8,70%	6,60%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	88,50%
	12	0,80%	1,60%	10,50%	11,50%	7,40%	100,00%	99,60%	100,00%	100,00%	57,80%
	24	0,10%	0,10%	10,60%	12,20%	8,50%	0,00%	0,00%	99,20%	100,00%	33,20%
500	2	18,00%	17,90%	17,10%	18,00%	10,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%
	5	41,70%	41,90%	42,40%	45,40%	20,30%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%
	12	73,20%	73,40%	77,50%	81,90%	37,60%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%
	24	88,00%	88,80%	94,20%	97,20%	44,50%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	98,10%
	60	67,60%	76,10%	98,80%	99,90%	37,90%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	67,10%
	96	0,00%	0,00%	97,30%	100,00%	29,00%	0,00%	67,10%	100,00%	100,00%	46,20%
1000	2	32,80%	32,80%	29,90%	33,00%	15,60%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%
	5	76,90%	76,90%	75,10%	78,40%	38,30%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%
	12	98,80%	98,80%	98,50%	99,30%	64,80%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%
	24	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	81,40%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%
	60	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	72,90%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	95,50%
	96	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	61,70%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	81,70%
5000	2	94,50%	94,40%	92,60%	94,50%	65,80%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%
	5	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	97,30%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%
	12	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%
	24	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%
	60	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%
	96	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%



- Tests de ratio de variance multiples

Sans surprise, les tests de ratio de variance multiples livrent le même diagnostic que les tests classiques de **LO et MACKINLAY** et de **WRIGHT**. On notera encore une fois que la fiabilité des tests de variance joints augmente légèrement plus rapidement avec la taille des échantillons que celle des tests simples.

TABLEAU 3.16 – Tests joints - Probabilité de rejet du modèle 4

Test du modèle 4 : $\Delta y_t = \alpha(\mu - y_t)\Delta t + \sigma d\varepsilon_t$						
<b>q</b>	<b>T</b>	<b>M<sub>1</sub><sup>*</sup></b>	<b>M<sub>2</sub><sup>*</sup></b>	<b>CD<sub>R1</sub></b>	<b>CD<sub>R2</sub></b>	<b>CD<sub>S1</sub></b>
$y_t = y_{t-1} + 0.1(\mu - y_{t-1})\Delta t + \sigma d\varepsilon_t$						
<b>q = 2, 5, 12, 24</b>	<b>100</b>	2,00%	2,20%	7,80%	8,50%	4,50%
<b>q = 2, 5, 12, 24, 60, 96</b>	<b>500</b>	38,70%	40,60%	77,60%	84,60%	18,60%
<b>q = 2, 5, 12, 24, 60, 96</b>	<b>1000</b>	99,80%	99,90%	100,00%	100,00%	54,60%
<b>q = 2, 5, 12, 24, 60, 96</b>	<b>5000</b>	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%
$y_t = y_{t-1} + 0.9(\mu - y_{t-1})\Delta t + \sigma d\varepsilon_t$						
<b>q = 2, 5, 12, 24</b>	<b>100</b>	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	88,20%
<b>q = 2, 5, 12, 24, 60, 96</b>	<b>500</b>	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%
<b>q = 2, 5, 12, 24, 60, 96</b>	<b>1000</b>	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%
<b>q = 2, 5, 12, 24, 60, 96</b>	<b>5000</b>	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%

Cet exercice de simulation a été extrêmement instructif. Il montre sans ambiguïté que les tests de ratio de variance sont robustes pour détecter un processus dont la dynamique est proche d'un bruit blanc gaussien. En revanche, il apparait de manière flagrante que les tests ne sont pas efficaces pour détecter une corrélation négative raisonnable entre les fluctuations du cours des actions. Cette défaillance, d'autant plus perceptible que la taille des échantillons est petite, explique sans doute une grande partie de la divergence des résultats rapportés dans la littérature consacrée à l'efficacité des marchés financiers.

### 3.4 Les modèles *Sparse* VAR : une spécification alternative pour évaluer la prévisibilité des marchés

Dans les développements précédents, on a pu identifier - pour partie - la raison de la divergence entre les conclusions des économistes sur l'efficacité des marchés au moyen d'un prototype dédié à l'analyse de la robustesse des tests de ratio de variance, outils privilégiés pour en tester l'efficacité. Les résultats de la batterie de tests effectuée sur les chroniques des cours boursiers ont confirmé les carences des expérimentations articulées autour de statistiques orthodoxes de marche aléatoire. Compte tenu des limites identifiées du test de ratio de variance, qui est l'outil privilégié pour tester l'efficacité, il est indispensable de se tourner vers des techniques alternatives de modélisation pour tester l'hypothèse d'efficacité informationnelle des marchés. Les tentatives de modélisation reposant sur les techniques économétriques classiques à plusieurs équations structurelles ont montré leur limite (GRANGER [1969] et SIMS [1980]) face à un environnement économique perturbé. Les prévisions élaborées à l'aide de ces modèles se sont relevées très médiocres. Les critiques principales formulées à l'encontre de ces modèles structurels concernent la simultanéité des relations et la notion de variable « exogène ». La représentation VAR (Vecteur AutoRégressif), qui est une généralisation des modèles autorégressifs aux cas multivariés, apporte une réponse statistique à l'ensemble de ces critiques. Dans cette représentation, les variables sélectionnées en fonction du problème étudié ont toutes a priori le même statut et on s'intéresse alors à des relations purement statistiques. Partant de ce constat nous avons évalué l'apport de la modélisation non structurelle, telle qu'elle est exploitée dans un modèle VAR pour tester l'EMH. L'utilisation des modèles VAR comme outils d'étude de la dynamique du prix des actifs s'inspire des travaux pionniers de CAMPBELL et VICEIRA [2005]. Les pistes d'amélioration proposées dans ce chapitre s'articulent autour de la recherche de nouveaux prédicteurs du cours des actifs risqués, de l'estimation de modèles VAR non contraints et des techniques d'estimation « *Subset* » ou « *Sparse* » VAR qui s'y rattachent. Enfin, l'étude s'étend à quatre pays représentant trois continents afin de vérifier si les conclusions concernant principalement les Etats-Unis sont généralisables aux autres marchés financiers.

### 3.4.1 Les modèles vectoriels autorégressifs VAR

Les causes du sempiternel débat sur la dynamique des cours sont souvent attribuées à la taille réduite des échantillons combinée à la faible puissance des tests statistiques utilisés pour rejeter l'EMH. Pour sortir de ces impasses, **CAMPBELL et VICEIRA [2005]** ou encore **BEC et GOLLIER [2009]** utilisent la richesse des modèles VAR comme outils d'étude de la dynamique du prix des actifs risqués.

La méthodologie de **CAMPBELL et VICEIRA (op. cit.)**, repose sur un modèle stylisé susceptible de capturer l'espérance et la volatilité des rendements des actifs à différents horizons : On note  $z_t$  le vecteur colonne contenant les rendements sur d'un ensemble arbitraire d'actifs échangés sur les marchés et les valeurs des variables d'état à l'instant  $t$  qui ont été identifiées comme prédicteurs des rendements dans la littérature. Nous écrivons ce vecteur comme suit :

$$z_t = \begin{pmatrix} r_{0,t} \\ x_t \\ s_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{0,t} \\ r_t - r_{0,t} \\ s_t \end{pmatrix} \quad (3.20)$$

Avec  $r_{0,t}$  le log total return des t-Bills hors inflation, qui est utilisé pour calculer les *excess returns* des autres classes d'actifs  $x_t$  et  $s_t$  le vecteur des réalisations des variables d'état. Si on note  $L$  l'opérateur retard,  $p \in \mathbb{N}$  le nombre de retards déterminé à partir d'un critère d'information, alors le modèle VAR(p) peut être écrit :

$$\Phi(L)z_t = \Phi_0 + v_t \text{ tel que } \Phi(L) = I_n - \sum_{i=1}^p \Phi_i L^i \quad (3.21)$$

Où  $\Phi_0$  est un vecteur de constant et  $\Phi$  est la matrice carrée des coefficients des pentes. Pour compléter la description de la dynamique des rendements, on suppose que le vecteur des innovations  $v_t$  est distribué normalement :  $v_t \sim \mathcal{N}(0, \Sigma_v)$ , avec  $\Sigma_v$  la matrice des covariances.

On montre <sup>11</sup> alors par l'écriture **VMA** (Vecteur Moyenne Mobile) des modèles **VAR(p)** estimés que l'estimateur de variances conditionnelles est donné par l'expression suivante :

$$\text{Var}_t(z_{t+1} + \dots + z_{t+k}) = \sum_{l=0}^{k-1} \left[ \left( \sum_{i=1}^{k-l} C_i \right) \Sigma_v \left( \sum_{i=1}^{k-l} C_i \right)^t \right] \quad (3.22)$$

Ce qui n'est valable que lorsque l'équation caractéristique a toute ses racines en dehors du cercle unité :

$$0 = |\Phi(L)| = \left| I_n - \sum_{i=1}^p \Phi_i L^i \right| \quad (3.23)$$

Nous appelons  $C_i$  les coefficients du polynôme  $C(L) = \sum_{i=1}^{\infty} C_i L^i$  tels que :

$$\begin{aligned} z_t &= (\Phi(L))^{-1} (\Phi_0 + v_t) \\ &= \mu + (\Phi(L))^{-1} v_t \\ &= \mu + C(L) v_t \end{aligned}$$

La diagonale de l'estimateur  $\text{Var}_t(z_{t+1} + \dots + z_{t+k})$  représentant les variances conditionnelles des « *excess returns* » à l'horizon  $k$ , il suffit d'appliquer la matrice de sélection  $M_r$  suivante (à la matrice de variance-covariance) pour trouver les variances des « *returns* » :

$$M_r = \begin{pmatrix} 1 & 0_{1 \times m} & 0_{1 \times (n-m-1)} \\ i_{m \times 1} & I_{m \times m} & 0_{n \times (n-m-1)} \end{pmatrix} \quad (3.24)$$

D'où après annualisation, la matrice de sélection devient :

$$H_{r,k} = \frac{1}{k} M_r \quad (3.25)$$

Le vecteur des volatilités conditionnelles sur  $k$ -périodes des rendements des actifs

---

11. en s'appuyant sur l'isomorphisme entre les écritures **VMA** et **VAR**.

dans le modèle est :

$$\text{Var}_t \begin{pmatrix} r_{0,t+1}^{(k)} \\ r_{e,t+1}^{(k)} \\ r_{b,t+1}^{(k)} \end{pmatrix} = H_r \text{Var}_t (z_{t+1} + \dots + z_{t+k}) H_r' \quad (3.26)$$

Cette formulation est appliquée en fonction de l'ordre d'entrée des variables dans  $z_t$ . L'intérêt de la modélisation non structurelle, telle qu'elle est exploitée dans un modèle VAR, a pour objectif principal de révéler un ensemble de relations causales au sens de Granger, comme le soulignent **FACKLER et KRIEGER [1986]**. Elle se différencie de la modélisation classique parce qu'elle exploite sans contrainte tous les liens de causalité entre les composantes d'un phénomène, et ce dans un espace temporel. La modélisation VAR respecte à la fois la dimension de mutation intrasystémique et la dimension temporelle que requiert l'investigation causale. Le modèle VAR rapporte des liens de causalité apparus au cours d'une période  $p$  donnée et dans les  $n$  directions possibles (chaque variable est endogène dans une équation du modèle). La combinaison de ces deux aspects, sous lesquels l'information causale est révélée, doit permettre de mieux discerner les causes fictives des causes réelles.

Dans leurs travaux, **CAMPBELL et VICEIRA** utilisent un VAR(1) par souci de parcimonie afin d'éviter des retards supplémentaires qui nécessiteraient un vecteur d'état étendu avec un nombre important de paramètres à estimer. Toutefois, dans de nombreux cas, une modélisation VAR plus « large » peut être préférable à un modèle dont la structure est délibérément restreinte et qui ne permettrait pas de capturer la persistance (ou de la mémoire) des relations entre les variables du modèle. Pour cette raison, nous élargissons le modèle initial en estimant un VAR( $p$ ) non contraint. Cependant, comme le rappellent **CAMPBELL et VICEIRA** eux-mêmes, l'adjonction de retards supplémentaires pose la question de leurs estimations à partir de données historiques. Etant donné que la taille

du modèle augmente exponentiellement avec le nombre de retards, ajouter des « lags » peut contribuer à réduire significativement la précision de l'estimation des paramètres du modèle et impacter sa stabilité. En outre, certaines variables couramment utilisées pour prévoir les rendements des actifs sont très persistantes et ont des innovations qui sont fortement corrélées avec les rendements des actions, ce qui implique que les estimations par Moindres Carrés Ordinaire (MCO) des paramètres VAR peuvent être biaisées dans les échantillons finis (STAMBAUGH [1999]). Pour contourner cette impasse et gagner des degrés de liberté afin d'éviter les problèmes liés à la suridentification des modèles, il est préférable de recourir à une modélisation « *Sparse VAR* » ou encore « *Subset VAR* » (sVAR) dans laquelle seuls les coefficients AR significativement non nuls sont retenus. Toutefois, la méthode la plus couramment utilisée dans les techniques de contraction des coefficients d'une régression (méthode « Lasso » pour *Least Absolute Shrinkage and Selection Operator*) proposée par TIBSHIRANI [1996] présente des faiblesses identifiées. Tout d'abord, la méthode Lasso a tendance à surestimer l'ordre des modèles autorégressifs. Ce problème a été rapporté dans de nombreux travaux empiriques, notamment par SHOJAIE et MICHAILIDIS [2010]. Par ailleurs, l'estimateur Lasso repose sur une hypothèse implicite de faible dépendance des variables explicatives. Ainsi, dans des problèmes d'estimation avec de fortes corrélations entre les variables, l'algorithme échoue alors à reconstituer le modèle. Par ailleurs, la pertinence des modélisations VAR repose sur la stationnarité des variables du modèle (au sens des tests ADF - *Augmented Dickey-Fuller Unit Root Tests*). L'amélioration de la prédictibilité de la variance conditionnelle des actifs financiers, via l'enrichissement de la liste des variables d'état (des prédicteurs des cours), devra composer avec cette contrainte supplémentaire.

### 3.4.2 L'estimation d'un modèle « *Sparse* » VAR

Notre recherche suit les travaux pionniers proposés par CAMPBELL et VICEIRA [2005] ou encore BEC et GOLLIER [2009]. Cependant, nous complétons cette approche de trois façons. Premièrement, nous estimons un modèle VAR(p) non contraint plutôt qu'un VAR(1). Concernant les estimations de modèles de grande taille et même de taille intermédiaire, les estimations VAR sont souvent discutables dès lors que la taille de l'échantillon des données utilisées n'est pas très importante par rapport au nombre de paramètres. Cet

écueil conduit la plupart des études économétriques à privilégier des estimations de modèles VAR avec des ordres faibles, ou restreints à 1, alors même que les ordres retenus ne sont pas les meilleurs au sens de Critère d'information d'Akaike – ou *Akaike Information Criterion* – (AIC) ou Critère d'information bayésien – ou *Bayesian Information Criterion* – (BIC) par exemple. Pour remédier à ces choix arbitraires, sans contraindre l'ordre du modèle, nous explorons une méthode d'estimation permettant d'augmenter le nombre de degré de liberté afin d'améliorer la fiabilité des estimations. L'utilisation d'une méthode d'estimation permettant d'augmenter le nombre de degré de liberté peut-être un moyen d'améliorer la fiabilité de l'estimation des modélisations VAR « larges ».

Deuxièmement, nous introduisons l'Indice de la Production Industrielle (IPI) comme prédicteur supplémentaire de la volatilité du log « *excess return* » des actifs financiers. Enfin, l'étude est étendue à quatre pays (Etats-Unis, Royaume-Uni, France, Japon) représentant trois continents afin de vérifier si les conclusions concernant principalement les Etats-Unis sont généralisables aux autres marchés financiers.

Considérons que le vecteur  $Y_t$  est généré par le modèle autorégressif d'ordre  $p$  suivant :

$$Y_t = \mu + \sum_{k=1}^p A_k Y_{t-k} + Z_t, \text{ pour } t = 0, \pm 1, \dots \quad (3.27)$$

Où les coefficients caractérisant les dépendances temporelles  $A_1, \dots, A_p$  sont les vrais coefficients des matrices de taille  $k \times k$  et avec  $Z_t$  un bruit blanc vectoriel gaussien IID de moyenne nulle et de matrice de variance-covariance non dégénérée  $\Sigma_Z$ .

Considérons maintenant une estimation de ce modèle :

$$\hat{Y}_{t+h} = \hat{\mu} + \sum_{k=1}^{\hat{p}} \hat{A}_k Y_{t-k+h} + \hat{Z}_{t+h}, \text{ pour } t = 0, \pm 1, \dots \quad (3.28)$$

Où les coefficients caractérisant les dépendances temporelles  $\hat{A}_1, \dots, \hat{A}_p$  sont les vrais coefficients, des matrices de taille  $k \times k$  et avec  $\hat{Z}_t$  un bruit blanc vectoriel gaussien IID de moyenne nulle et de matrice de variance covariance non dégénérée  $\Sigma_Z$ . Nous savons qu'une telle estimation du modèle VAR capture la structure de dépendance temporelle de toutes les variables dans le modèle à la fois par le biais des corrélations sérielles contenues dans chacune des séries marginales et par les corrélations croisées des facteurs mar-

ginaux. Les paramètres estimés dans les  $\hat{A}_i$  peuvent être nuls ou non significativement différents de zéro dans les modèles VAR. Deux cas de figure se présentent alors :

- le cas où une des variables « ne cause pas » les autres variables au sens de Granger dans le « vrai » modèle.
- le cas où nous n'avons pas assez de données pour avoir une estimation robuste et des intervalles de confiance ne contenant pas 0.

Dans ce dernier cas, il est nécessaire de concevoir une meilleure façon d'extraire de l'information à partir des données disponibles, car il est communément montré qu'une grande incertitude sur la mesure des coefficients de paramètres du modèle VAR conduit à de mauvaises prévisions du modèle (grands intervalles de confiance), à des estimations imprécises des réponses impulsionnelles ou encore à des imprécisions sur les erreurs de prévisions constituantes de la variance.

On fait donc face à un problème pratique communément rencontré en finance, car il est fréquent que le nombre de paramètres du modèle à estimer soit important relativement à la taille de l'échantillon disponible. La faible profondeur des séries chroniques économiques et financières explique donc la majorité des approximations et des erreurs classiques inhérentes à l'utilisation des modèles VAR non contraints. Diverses méthodes ont été proposées dans la littérature afin de faire face à ce problème. Elles équivalent, dans toutes les alternatives, à rajouter des contraintes sur les paramètres des matrices lors des estimations. Dans de rares cas de non-causalité instantanée entre les variables du modèle, on peut également ajouter des contraintes sur les coefficients de la matrice de variance-covariances. Une des méthodes les plus couramment utilisées dans les techniques de contraction des coefficients d'une régression est la méthode « Lasso » mentionnée plus haut. Toutefois, comme nous l'avons souligné, la technique souffre d'un certain nombre de biais : surestimation de l'ordre des modèles, sensibilité à la colinéarité entre variables ... Pour ces raisons, nous avons retenu la méthode développée par **DAVIS et collab. [2016]**, qui documente une procédure d'estimation en deux étapes des paramètres d'un VAR(p). Dans la première étape, on prend en charge la liaison spectrale des séries marginales deux à deux puis, dans un deuxième temps, certains éléments sont contraints à zéros lors de l'estimation pour éviter numériquement l'introduction de bruits préjudiciables dans les estimations. Dans cette procédure, la première étape d'estimation consiste à sélection-



ner les coefficients significativement différents de zéros. A cette fin, **DAVIS et collab.** (*op. cit.*) procèdent à une analyse de la cohérence spectrale partielle (PSC). Le PSC permet de quantifier dans le domaine fréquentiel la dépendance conditionnelle par couple de variables dans un système multivarié. Soit le filtre optimal suivant :

$$\{D_{k,i}^{opt} \in \mathbb{R}^{K-2}, k \in \mathbb{Z}\} = \underset{D_{k,i}, k \in \mathbb{Z}}{\operatorname{argmin}} \mathbb{E} \left( Y_{t,i} - \sum_{k=-\infty}^{\infty} D_{k,i}^{opt} Y_{t-k,-ij} \right)^2 \quad (3.29)$$

les résidus issus du filtre optimal sont définis comme suit.

$$\varepsilon_{t,i} = Y_{t,i} - \sum_{k=-\infty}^{\infty} D_{k,i}^{opt} Y_{t-k,-ij} \quad (3.30)$$

Alors la corrélation conditionnelle entre les séries marginales  $Y_{t,i}$  et  $Y_{t,j}$  est caractérisée par la corrélation entre les résidus  $\varepsilon_{t,i}$ .

Soit le vecteur autorégressif  $Y_t$  défini par  $Y_t = \begin{pmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_2 \end{pmatrix}$ , la mesure de l'intensité entre deux va-

riables marginales du modèle requiert l'estimation des corrélations conditionnelles entre les séries prises deux à deux. Le calcul de la corrélation conditionnelle entre les deux séries marginales  $Y_{t,i}$  et  $Y_{t,j}$  se fait en supprimant l'effet linéaire des autres séries marginales persistant dans le système, représentées par le vecteur  $Y_{t,-ij}$  de format  $K-2$ , donc ne contenant pas  $i$  et  $j$ . Ces corrélations conditionnelles peuvent être obtenues par l'application d'un filtre linéaire entre les deux variables  $Y_{t,i}$  et  $Y_{t,j}$ . Nous appliquons alors un filtre optimal obtenu par les MCO du modèle de régression linéaire :

$$\{D_{k,i}^{opt} \in \mathbb{R}^{K-2}, k \in \mathbb{Z}\} = \underset{D_{k,i}, k \in \mathbb{Z}}{\operatorname{argmin}} \mathbb{E} \left( Y_{t,i} - \sum_{k=-\infty}^{\infty} D_{k,i} Y_{t-k,-ij} \right)^2 \quad (3.31)$$

Les résidus issus du filtre optimal pour la variable  $i$ , en ne considérant que l'influence de

$j$ , sont définis comme suit :

$$\varepsilon_{t,i} = Y_{t,i} - \sum_{k=-\infty}^{\infty} D_{k,i}^{opt} Y_{t-k,-ij} \quad (3.32)$$

Une fois chacune des séries  $Y_{t,i}$  et  $Y_{t,j}$  filtrées par  $D_{k,i}^{opt}$  et  $D_{k,j}^{opt}$ , on dit qu'elles sont conditionnellement non-corrélées si et seulement si les résultantes  $\varepsilon_{t,i}$  et  $\varepsilon_{t,j}$  ont des corrélations croisées nulles, telles que  $\forall h \in \mathbb{Z}, corr\{\varepsilon_{t+h,i}, \varepsilon_{t,j}\} = 0$ . Dans le domaine fréquentiel, cela se traduit par le fait que la densité spectrale croisée des résidus de la filtration de  $i$  et  $j$   $f_{i,j}^{\varepsilon}(\omega)$  est nulle pour toutes les fréquences  $\omega$ . Elle est définie par :

$$f_{i,j}^{\varepsilon}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{h=-\infty}^{\infty} \gamma_{i,j}^{\varepsilon}(h) e^{-ih\omega}, \omega \in [-\pi, \pi] \quad (3.33)$$

$$\gamma_{i,j}^{\varepsilon}(h) = cov(\varepsilon_{t+h,i}, \varepsilon_{t,j}) \quad (3.34)$$

Notons que  $f_{i,j}^{\varepsilon}$  reflète la corrélation conditionnelle (appelée aussi corrélation partielle en statistique) entre  $Y_{t,i}$  et  $Y_{t,j}$  pour un ensemble de séries temporelles données  $Y_{t,-ij}$ . Enfin, on définit à partir de cette quantité  $f_{i,j}^{\varepsilon}$  la cohérence spectrale partielle entre les deux séries qui s'interprète comme une mesure normalisée de la densité spectrale partielle (mesure normalisée de la corrélation) entre  $\varepsilon_{t,i}$  et  $\varepsilon_{t,j}$ . Elle est donnée par :

$$PSC_{ij}(\omega) = \frac{f_{i,j}^{\varepsilon}(\omega)}{f_{i,i}^{\varepsilon}(\omega) f_{j,j}^{\varepsilon}(\omega)}, \omega \in [-\pi, \pi] \quad (3.35)$$

### Les étapes de la procédure d'estimation

On note que les coefficients des matrices d'ordre caractérisant la relation entre deux composantes dans les équations peuvent être contraints à zéro lors de l'estimation si leur cohérence spectrale partielle est nulle. Nous verrons dans les paragraphes suivants les deux étapes qui permettent de profiter de l'information spectrale sur la cohérence entre les composantes du système prises deux à deux.

#### ► Etape 1

i) La première démarche consiste à estimer les **Cohérence Spectrale Partielle – ou Partial Spectral Coherence – (PSC)** pour chacune des  $\frac{k(k-1)}{2}$  paires distinctes de composantes (l'utilisation de l'estimateur non paramétrique de la densité spectrale est plus ra-

pide). Ce premier point a pour but de nous permettre de trouver parmi les  $p \times k^2$  coefficients à estimer du modèle VAR ceux qui sont nuls. Soit encore déceler  $i$  et  $j$  tels que  $A_k(i, j) = A_k(j, i) = 0 (i \neq j, k = 1, \dots, p)$ .

ii) Compte tenu de la variabilité des tailles d'échantillon et du contenu d'informations qu'ils proposent, il se peut que les PSC estimées soient non identiquement nulles. Alors pour quantifier l'importance de l'information fournie par chaque PSC, DAHLHAUS [2000] propose d'utiliser le supremum par rapport à  $\omega$  suivant :

$$\hat{S}_{i,j} = \sup_{\omega} |\widehat{\text{PSC}}_{i,j}(\omega)|^2, \text{ avec } \{\omega = \frac{2\pi k}{T}, k = 1, \dots, T\} \quad (3.36)$$

comme la statistique d'information, de sorte que les valeurs élevées de  $\hat{S}_{i,j}$  indiquent une probable corrélation entre les séries marginales  $i$  et  $j$ . A partir de là, on peut créer une séquence  $Q_1$  de  $\hat{S}_{i,j}$  pour les  $\binom{k}{2}$  paires différentes de séries marginales, rangées en ordre décroissant.

iii) On définit arbitrairement un nombre  $M$  de valeurs dans la séquence  $Q_1$  qui sont considérées comme suffisamment significatives pour être considérées dans le modèle. Ce nombre est compté en partant des valeurs les plus élevées vers les plus faibles dans la séquence ordonnée  $Q_1$ . Ainsi, pour les  $\frac{k(k-1)}{2} - M$  valeurs non considérées représentant les paires non sélectionnées, les coefficients AR correspondants sont contraints à zéro lors de l'estimation. Le nombre de paramètres retenu non nul du modèle sera  $(k + 2M)p$ . Soient les paramètres  $p$  et  $M$  définissant la complexité du modèle, on estimera, pour chaque couple  $(p, M) \in \mathbb{P} \times \mathbb{M}$ , le modèle VAR avec les coefficients AR correspondants contraints à zéro. Puis on calculera l'AIC.

iv) Enfin, on choisit le couple  $(\tilde{p}, \tilde{M})$  qui minimise le critère AIC dans l'univers  $\mathbb{P} \times \mathbb{M}$ . Le modèle obtenu à l'issue de la première étape possède  $(k + 2\tilde{M})\tilde{p}$  coefficients Processus AutoRégressif (AR) non-nuls. Donc le nombre de coefficients n'est réduit significativement que si  $\tilde{M} \ll \frac{k(k-1)}{2}$ , sachant que le nombre de paramètres dans le modèle standard est de  $k^2 p$ .

► Etape 2

La seconde étape a pour objectif de contrôler et d'épurer les résultats de la première étape, car la procédure est susceptible de conserver des coefficients biaisés dans les estimations.

Les phases de la seconde étape sont les suivantes :

- i) On calcule la  $t$ -statistique  $t_{i,j,k} = \frac{\hat{A}_k(i,j)}{SE(\hat{A}_k(i,j))}$  pour tous les  $(k + 2\tilde{M})\tilde{p}$  coefficients non-nuls, estimés dans l'étape 1 pour les régresseurs AR; telle que  $\hat{A}_k(i, j)$  avec  $k = 1, \dots, \tilde{p}$  et  $i \neq j$ .
- ii) On crée une séquence  $Q_2$  de  $(k + 2\tilde{M})\tilde{p}$  du triplet  $(i, j, k)$  en rangeant  $|t_{i,j,k}|$  en ordre décroissant.
- iii) Pour chaque  $m \in 0, 1, \dots, (k + 2\tilde{M})\tilde{p}$ , on estime le modèle contraint ne considérant que les  $m$  premières valeurs dans la séquence  $Q_2$  des coefficients AR. Pour chaque estimation, on calcule l'AIC.
- iv) Reste alors à choisir le  $m^*$  qui minimise l'AIC.

Le modèle final est celui obtenu à l'issue des deux étapes précédentes.

### Les données du modèle

► Les prédicteurs du rendement des actifs risqués

L'économétrie récente met en question l'efficacité informationnelle des marchés financiers et détermine des relations statistiques significatives entre, d'une part, le rendement des actifs risqués et certaines variables macroéconomiques et, d'autre part, entre les classes d'actifs elles-mêmes; sous l'hypothèse d'existence de deux composantes pour le prix des actions : cyclique et tendancielle. A ce titre, les études de **CAMPBELL et SHILLER [1988]** identifient à partir d'une approximation log-linéaire, le ratio dividende sur cours (*dividend yield*<sup>12</sup>) comme un prédicteur des rendements réels des actions. Cet indicateur technique, qui exprime en pourcentage le ratio du dividende distribué sur le cours de l'action, est également identifié comme prédicteur des rendements actions dans **FAMA et FRENCH [1988a]**. En effet, considérant l'étude **CAMPBELL et SHILLER [1988]**, il est plus explicite de comprendre sur les marchés actions l'existence d'une relation algébrique entre le logarithme du ratio dividende-cours et « l'*excess return* ». Par ailleurs, les travaux de

---

12. Encore appelé en anglais « *dividend-price ratio* »

CHALLE [2004], puis COCHRANE [2008] nous conduisent à formuler les équations suivantes concernant la dynamique du logarithme du dividende et du logarithme du prix des actions. Soit  $P_t$  le cours réel d'un indice action, versant un dividende  $D_t$  au temps  $t$ . Nous savons que le rendement ex-post peut être approximé par le log-rendement  $r_{t+1}$  de la manière suivante :  $R_{t+1} = (P_{t+1} + D_{t+1})/P_t$ , tel que  $r_{t+1} = \ln(R_{t+1})$ . Si on appelle  $\lambda_t = d_t - p_t$  le logarithme du ratio dividende sur cours (ou encore *ldmp*) et  $\rho = (1 + \mathbb{E}(\Delta d_t))/(1 + \mathbb{E}r_t)$  une constante, alors l'approximation log-linéaire du rendement des actions donnée dans CAMPBELL et SHILLER [1988], puis dans CAMPBELL et collab. [1997], montre que l'écart entre le rendement ex-post et son espérance peut s'écrire :

$$r_{t+1} - \mathbb{E}(r_t) = (\lambda_t - \mathbb{E}(\lambda_t)) - \rho(\lambda_{t+1} - \mathbb{E}(\lambda_t)) + (\Delta d_{t+1} - \mathbb{E}(\Delta d_t)) \quad (3.37)$$

Par substitution, réarrangement et itération de cette dernière équation, on en déduit la formule d'évaluation rationnelle log-linéaire suivante :

$$p_t = d_t - \mathbb{E}(\lambda_t) + \sum_{j=1}^{\infty} \rho^{j-1} \mathbb{E}_t(\Delta d_{t+j} - \mathbb{E}(\Delta d_t)) - \sum_{j=1}^{\infty} \rho^{j-1} \mathbb{E}_t(r_{t+j} - \mathbb{E}(r_t)) - \lim_{j \rightarrow \infty} \rho^j \lambda_{t+j} \quad (3.38)$$

Soit encore la relation suivante, sous la condition  $\lim_{j \rightarrow \infty} \rho^j \lambda_{t+j} = 0$  :

$$p_t = d_t - \mathbb{E}(\lambda_t) + \sum_{j=1}^{\infty} \rho^{j-1} \mathbb{E}_t(\Delta d_{t+j} - \mathbb{E}(\Delta d_t)) - \sum_{j=1}^{\infty} \rho^{j-1} \mathbb{E}_t(r_{t+j} - \mathbb{E}(r_t)) \quad (3.39)$$

Par déduction, l'équation ci-dessus nous dit que le niveau du prix des actions  $p_t$  est une fonction linéaire et croissante du dividende courant  $d_t$ , aussi de la croissance anticipée des dividendes, à contrario  $p_t$  est fonction linéaire décroissante des taux d'escompte  $(\mathbb{E}_t(r_{t+j}))_{j \geq 1}$ . Notons que cette formulation log-linéaire présume que le logarithme du ratio dividende sur cours,  $\lambda_t = d_t - p_t$ , est stationnaire, comme l'a formalisé COCHRANE [2008]. Cette conclusion vient conforter les conclusions de la littérature et des études empiriques sur la stationnarité du logarithme du ratio dividende sur cours en tant que prédicteur des marchés actions. Cette stationnarité conduit à une interprétation orientée vers l'existence d'une relation de cointégration entre la série du dividende  $d_t$  et la série du prix des actions  $p_t$ . Pour une extension sur les arguments de cette stationnarité, on pourra se référer à CAMPBELL et SHILLER [1988], COCHRANE [2009]. Finalement, en associant les

résultats sur la formule log-linéaire d'évaluation rationnelle ci-dessus et en utilisant la définition de la tendance du cours des actions au sens de BEVERIDGE et NELSON, on peut formaliser la relation entre la tendance du prix des actions et celle de leurs dividendes. Ainsi la tendance du logarithme du cours des actions déduite de cette analyse est donnée par :

$$\tau_t^q = -\mathbb{E}(\lambda) + \tau_t^d = -\mathbb{E}(\lambda) + d_t + \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{E}_t(\Delta d_{t+j} - g) \quad (3.40)$$

Ce qui littéralement traduit le fait que les dividendes influencent l'évolution de long terme du prix des actions. COCHRANE [2009] ajoute que dans les modèles d'évaluation des actions, le prix réel d'une action fluctue avec les révisions des dividendes réels futurs anticipés. De plus COCHRANE [2008] insiste sur le lien entre l'évolution des dividendes et le cours des actions de sorte que si le rendement des actions et les taux de croissance des dividendes sont imprévisibles, alors le ratio dividende-cours est constant. De même, le spread de taux entre les intérêts sur les obligations de long-terme et les intérêts de court-terme est donné par CAMPBELL et SHILLER [1991] et par FAMA et FRENCH [1989] comme prédicteurs des rendements des actifs financiers. En amont de ces facteurs, le taux d'intérêt réel à court-terme était déjà connu comme une variable corrélée à l'évolution des rendements des actifs financiers, comme l'attestent les travaux de FAMA et SCHWERT [1977] et GLOSTEN et collab. [1993].

- Les classes d'actifs du modèle

On note dans notre modélisation  $r_{0,t}$  le taux d'intérêt réel de court terme capitalisé. Ce taux d'intérêt correspond, pour chacun des quatre pays étudiés, à celui des emprunts d'État à 3 mois (« *t-bills* »). A partir de ce taux d'intérêt réel capitalisé et du logarithme du rendement réel (ou « *real total return* »),  $r_{e,t}$  pour les actions et  $r_{b,t}$  pour les obligations, on définit, par soustraction, la prime de risque « *excess return* » pour les actions et les obligations à 10 ans, soit respectivement  $x_{e,t} = r_{e,t} - r_{0,t}$  et  $x_{b,t} = r_{b,t} - r_{0,t}$ . Le logarithme du ratio dividende-cours est noté  $ldmp_t$ , il correspond aux taux de dividendes versés pour chacun des indices actions retenus. Le spread de taux  $spr_t$  correspond, pour sa part, à la différence entre les taux à 10 ans  $Y_{10,t}$  et les taux à 3 mois  $R_{0,t}$  (« *t-bills* ») sur les obligations d'État. Enfin, on approxime le rendement des obligations détenues jusqu'à maturité

$rb_t^{nom}$  à partir de la relation fixée par **CAMPBELL et collab. [1997]** :

$$rb_{t+1}^{nom} = D_{nt}y_{n,t} - (D_{nt} - 1)y_{n-1,t+1} \quad (3.41)$$

Avec  $D_{nt}$  la durée de l'obligation, correspondante à la maturité  $n$  et  $y_{nt} = \ln(1 + Y_{nt})$ ,

$$D_{nt} \approx \frac{1 - (1 + Y_{nt})^{-n}}{1 - (1 + Y_{nt})^{-1}} \quad (3.42)$$

Le tableau 3.17 présente quelques statistiques de variables qui seront utilisées pour prédire l'évolution de la variance conditionnelle dans les modèles. On constate que les statistiques relatives aux classes d'actifs sont relativement proches dans les quatre pays étudiés.

TABLEAU 3.17 – Statistiques Descriptives

Période : 1960-2013					
FRANCE			UNITED-STATES		
	<i>Mean</i>	<i>Standard deviation</i>		<i>Mean</i>	<i>Standard deviation</i>
$r_0(t)$	1,83	1,593	$r_0(t)$	1,073	1,627
$x_e(t)$	2,701	21,49	$x_e(t)$	4,668	16,49
$x_b(t)$	1,622	6,309	$x_b(t)$	1,759	8,815
$rb_{nom}(t)$	7,09	2,109	$rb_{nom}(t)$	6,226	2,343
$\Delta cpi(t)$	4,325	1,962	$\Delta cpi(t)$	3,852	1,841
$\Delta ipi(t+2)$	1,949	9,428	$\Delta ipi(t+2)$	2,707	3,396
$dmp(t)$	3,849	-	$dmp(t)$	3,036	-
$ldmp(t)$	-3,336	0,399	$ldmp(t)$	-3,571	0,401
$spr(t)$	1,109	1,414	$spr(t)$	1,548	1,21
United Kingdom			JAPAN		
	<i>Mean</i>	<i>Standard deviation</i>		<i>Mean</i>	<i>Standard deviation</i>
$r_0(t)$	1,323	2,548	$r_0(t)$	0,327	2,084
$x_e(t)$	3,981	19,234	$x_e(t)$	3,278	20,1
$x_b(t)$	1,14	5,37	$x_b(t)$	3,151	7,631
$rb_{nom}(t)$	7,621	2,475	$rb_{nom}(t)$	5,414	2,302
$\Delta cpi(t)$	5,292	2,896	$\Delta cpi(t)$	3,172	2,495
$\Delta ipi(t+2)$	2,332	1,952	$\Delta ipi(t+2)$	3,952	6,546
$dmp(t)$	4,3	-	$dmp(t)$	1,875	-
$ldmp(t)$	-3,186	0,282	$ldmp(t)$	-4,202	0,684
$spr(t)$	0,898	1,59	$spr(t)$	1,838	1,274

Avec :

$r_0(t)$  : taux sans risque

$x_e(t)$  : *excess return* des actions

$x_b(t)$  : *excess return* des obligations

$rb^{nom}(t)$  : rendement nominal des obligations détenues jusqu'à maturité

$\Delta cpi_t$  : taux de variation de l'indice des prix à la consommation

$i pi_t$  : taux de variation de l'indice de production industriel

$dmp_t$  : dividende sur cours

$ldmp_t$  : logarithme dividende sur cours

$spr_t$  : spread de taux

► L'introduction de la production industrielle dans le modèle de base

Comme indiqué plus haut, nous avons introduit le taux de variation de l'indice de la production industrielle notée IPI comme prédicteur supplémentaire de la volatilité du *log excess return* des actifs financiers. Cette sélection est justifiée dans les développements qui suivent. Dans nos précédentes recherches, nous identifions la présence de retour vers la moyenne dans le rendement des actions relativement aux autres variables financières. Nous avons voulu élargir la structure du modèle de CAMPBELL et VICEIRA en y introduisant une variable reflétant la croissance économique. En effet, de nombreuses recherches empiriques identifient un lien significatif entre les rendements de marchés actions d'un pays et son activité économique. La justification d'une telle relation repose sur le raisonnement suivant : si l'on pense que le cours d'une action est constitué de la valeur actualisée de tous les dividendes futurs anticipés et que ces dividendes sont influencés par la vigueur de la demande à venir, alors il existe une corrélation entre la croissance économique et la valeur des dividendes anticipés.

Ces relations ont été documentées dans la littérature économique notamment par HARVEY [1989]. Plus récemment, BACKUS et collab. [2008] montrent que les deux variables financières les plus utilisés dans les modèles de prévisions de l'activité économique à savoir : le rendement des actions et le spread de taux long-court, ont une forte synchronisation avec les cycles conjoncturels. En l'occurrence, il ressort de cette étude que l'*excess return* des actions est un indicateur avancé de l'activité économique. Par ailleurs, cette capacité des rendements actions à prédire les fluctuations conjoncturelles suggère qu'il existe des facteurs macroéconomiques dans la composante cyclique du rendement des actions et en particulier la prime de risque. Pour vérifier cette assertion, on a calculé les corrélogrammes croisés entre croissance économique (évaluée par la production industrielle IPI en raison de sa disponibilité à plus haute fréquence) et les cours boursiers



pour les quatre pays étudiés. Les résultats plaident en faveur d'une bonne synchronisation entre les deux séries lorsque la date de début de l'indice de production industrielle est avancée par rapport à celle de la série des rendements des actions. Ce qui traduit le fait que le rendement en actions est un indicateur avancé de l'activité industrielle. Rappelons que l'avance ou le retard est l'intervalle de temps  $k$  qui maximise la valeur absolue de l'expression suivante :

$$ccf_{r_y}(k) = \text{corr}(r_t, y_{t-k}) \quad (3.43)$$

Où  $r$  est une variable financière supposée prédire l'économie, et  $y$  une mesure de l'économie. Les graphiques présentés ci-dessous illustrent bien le pouvoir prédictif des rendements actions sur la croissance de la production industrielle.

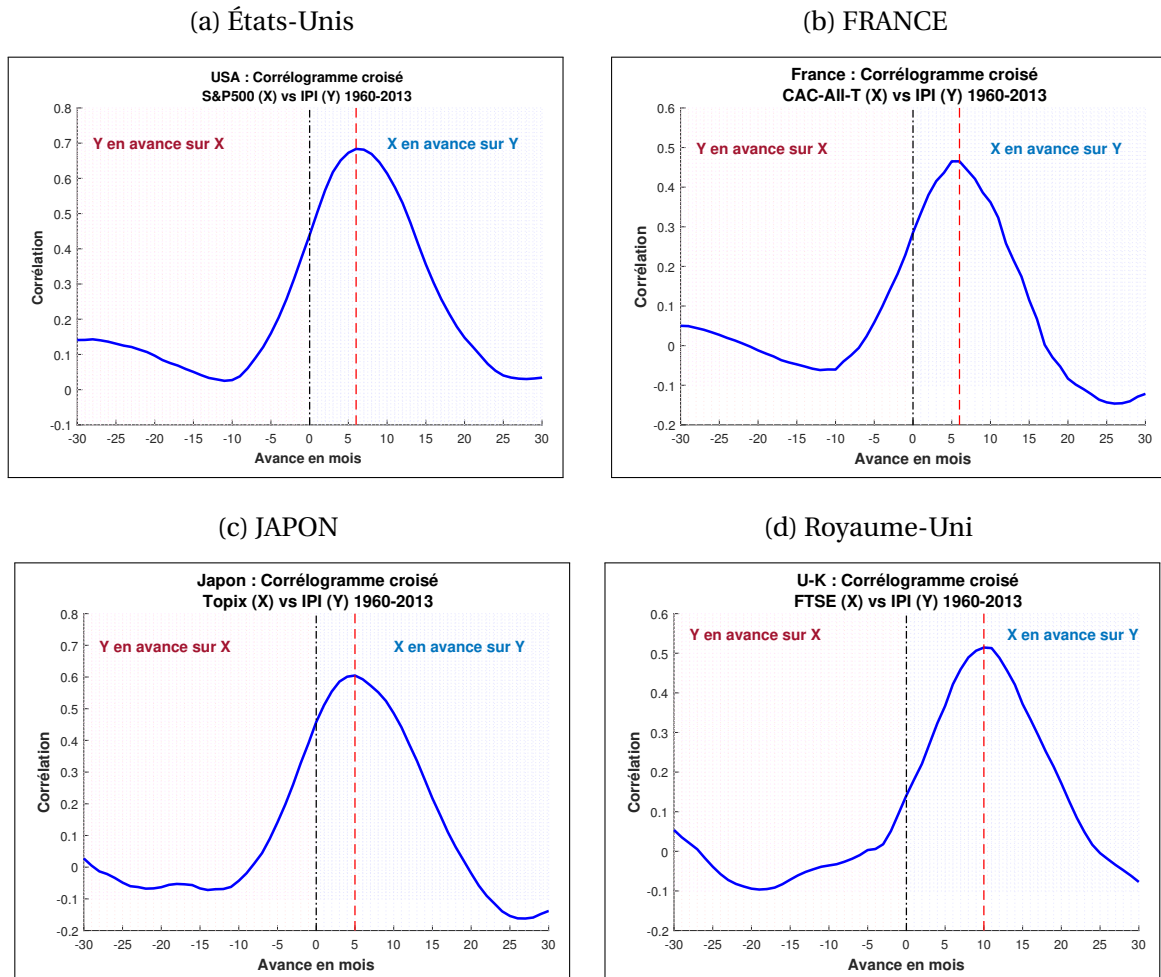


FIGURE 3.4 – Corrélogrammes croisés entre les Actions vs IPI

L'avance s'avère variable entre les pays. Elle est de 6 mois pour les Etats-Unis et la France, de 5 mois pour le Japon et de 10 mois dans le cas du Royaume-Uni (cf. graphiques

3.4). On notera que la corrélation, proche de 60% en moyenne, est loin d'être négligeable. En définitive, la production industrielle en tant que proxy du PIB peut être assimilée - à un ajustement affine près - à la somme des valeurs ajoutées par la production (et la consommation) de biens et de services produits. Une expansion économique traduit une augmentation du niveau d'activité des entreprises, et correspond généralement à une croissance concomitante de la consommation des ménages. Dans un tel contexte, la valeur des actions des entreprises devrait augmenter, notamment parce que les perspectives de dividendes attachés à la possession d'actions augmentent.

On note que la production industrielle est un indicateur retardé du prix des actions. Cependant, notre objectif dans cette recherche n'est pas de développer un modèle de prévision des cours, mais d'examiner la preuve empirique du comportement de retour vers la moyenne des cours des actions. Nous incluons donc le taux de variation de l'indice de la production industrielle comme indicateur de l'activité économique, ce qui étend l'ensemble des prédicteurs.

### La stationnarité des variables

La pertinence des modélisations VAR repose sur la stationnarité des variables du modèle. C'est pourquoi l'évaluation de la stabilité de chacune des composantes du vecteur autorégressif est une bonne source d'appréciation de la stabilité globale des estimations. Pour cet exercice, nous recourons aux tests *Augmented Dickey-Fuller (ADF)* (Dickey-Fuller Augmenté).

Si on suppose que la dynamique d'une variable  $\lambda_t$  satisfait une représentation autorégressive d'ordre  $p + 1$  inconnu, le test de Dickey-Fuller Augmenté construit sa statistique de test après avoir au préalable fait l'hypothèse que le vrai processus générateur de données est fourni par l'un des trois modèles suivants <sup>13</sup> :

$$\lambda_t = \rho\lambda_{t-1} + \sum_{i=1}^p \beta_i \Delta\lambda_{t-i} + \varepsilon_t \quad (3.44)$$

$$\lambda_t = c + \rho\lambda_{t-1} + \sum_{i=1}^p \beta_i \Delta\lambda_{t-i} + \varepsilon_t \quad (3.45)$$

$$\lambda_t = c + \delta t + \rho\lambda_{t-1} + \sum_{i=1}^p \beta_i \Delta\lambda_{t-i} + \varepsilon_t \quad (3.46)$$

C'est-à-dire soit encore faire l'hypothèse que la variable  $\lambda_t$  incorpore une constante non nulle au cours du temps (3.45), ou sans dérive selon le modèle 3.44, où encore que cette variable financière intègre à la fois une dérive et une tendance déterministe (3.46). Dès lors, puisque à priori, on ne sait pas si l'on doit inclure cette constante et ce trend, il convient d'appliquer non pas un test simple, mais une stratégie de tests de Dickey-Fuller Augmenté. C'est pour cette raison que nous appliquons la stratégie de test 3.9 décrite en annexe pour tester l'existence de racine unitaire sur chaque composante des vecteurs autorégressifs.

Pour les données couvrant la période 1960-2013 étudiée, le tableau 3.18 présente les résultats des tests pour les quatre pays. Les statistiques de tests et les verdicts sont présentés dans ce tableau logiquement en suivant la hiérarchie de la stratégie de test décrite en annexe, en se référant : soit au dernier modèle dans lequel le test ADF n'a pas rejeté l'hypothèse nulle, soit au premier modèle dans lequel l'hypothèse alternative est rejetée.

En l'occurrence ici, puisque les tests de racines unitaires sur l'ensemble des trois mo-

---

13. L'ordre est choisi entre 0 et  $p_{max}$ , avec  $p_{max}$  comme expliqué dans SCHWERT [1989]

dèles de Dickey-Fuller Augmenté conduisent aux mêmes conclusions (cf. première ligne de chaque bloc du tableau 3.18), alors, par souci d'homogénéité, toutes les statistiques du tableau 3.18 sont issues des tests du modèle 3.44, c'est-à-dire que l'étape 7 de la stratégie de test (décrite en annexe 3.A) permet de conclure.

Les tests ADF de racines unitaires présentés dans le tableau 3.18 montrent clairement que les taux d'intérêt réel à court terme  $r_0$ , les primes de risque,  $x_e$ ,  $x_b$ , la production industrielle  $ipi_t$ , le taux d'intérêt nominal sur les obligations  $rb^{nom}$  et le spread  $spr$  sont fortement stationnaires pour l'ensemble des quatre pays. A contrario, ils détectent une non-stationnarité significative pour le ratio dividende sur cours  $ldmp_t$  (pour le Japon, cette variable est toutefois considérée comme stationnaire par le test ADF à un seuil de probabilité de 10%).

En résumé, on constate que les tests indiquent que toutes les variables de l'étude sont stationnaires, à l'exception du logarithme du ratio dividende sur cours qui présente une non-stationnarité systématique pour les quatre pays sous revue. Cette conclusion mérite d'être discutée, car elle n'est pas en ligne avec l'hypothèse standard de stationnarité du ratio dividende sur cours proposée par la théorie financière, et, par ailleurs, elle peut conduire à une mauvaise spécification statistique des modèles VAR. Afin de conserver un univers d'estimation adapté pour nos modèles, nous avons le choix, d'après la littérature économétrique, de stationnariser le logarithme dividende sur cours ou de l'exclure tout simplement dans notre modélisation. Or, comme l'ont souligné BEC et GOLLIER [2009], ni l'une ni l'autre de ces alternatives n'est satisfaisante. En effet, le retrait de la variable du modèle comme sa transformation en différence première de logarithme (qui contribue à sa stationnarisation) conduisent à dégrader le pouvoir prédictif des modèles. Bien que partagé pour les quatre pays, ce diagnostic laisse planer une incertitude sur la nature de la non stationnarité du ratio dividende sur cours. Les données du tableau 3.18 suggèrent une non-stationnarité de nature stochastique ( $ldmp_t$  serait alors un processus dit DS, pour «Difference Stationary»).

TABLEAU 3.18 – Tests ADF de racines unitaire pour les données du modèle

Période 1960-2013								
	r0(t)	xe(t)	xb(t)	rb_nom(t)	ipi(t)	ldmp(t)	spr(t)	
<b>ETATS-UNIS</b>	<i>Result</i>	H1	H1	H1	H1	H1	H0	H1
	<i>Stats</i>	-2,6	-13	-15,1	-4,8	-8,9	-1,4	-4,2
	<i>pvalue</i>	0,90%	0,10%	0,10%	0,10%	0,10%	14,40%	0,10%
	<i>Lags (p)</i>	3	0	0	2	0	0	3
		r0(t)	xe(t)	xb(t)	rb_nom(t)	ipi(t)	ldmp(t)	spr(t)
<b>FRANCE</b>	<i>Result</i>	H1	H1	H1	H1	H1	H0	H1
	<i>Stats</i>	-2,3	-14	-11,4	-5	-7,6	-0,5	-3,9
	<i>pvalue</i>	2,20%	0,10%	0,10%	0,10%	0,10%	45,50%	0,10%
	<i>Lags (p)</i>	3	0	0	1	3	0	5
		r0(t)	xe(t)	xb(t)	rb_nom(t)	ipi(t)	ldmp(t)	spr(t)
<b>ROYAUME-UNIS</b>	<i>Result</i>	H1	H1	H1	H1	H1	H0	H1
	<i>Stats</i>	-2,7	-13,3	-14,5	-6,5	-12,9	0	-4,1
	<i>pvalue</i>	0,70%	0,10%	0,10%	0,10%	0,10%	66,00%	0,10%
	<i>Lags (p)</i>	3	0	0	1	0	0	5
		r0(t)	xe(t)	xb(t)	rb_nom(t)	ipi(t)	ldmp(t)	spr(t)
<b>JAPON</b>	<i>Result</i>	H1	H1	H1	H1	H1	H0	H1
	<i>Stats</i>	-3,4	-12,9	-13,7	-4,2	-10,6	-1,7	-3,9
	<i>pvalue</i>	0,10%	0,10%	0,10%	0,10%	0,10%	8,00%	0,10%
	<i>Lags (p)</i>	3	0	0	2	0	0	5
		r0(t)	xe(t)	xb(t)	rb_nom(t)	ipi(t)	ldmp(t)	spr(t)

NOTE : On sélectionne le retard pour chaque test à partir de critère d'information AIC, confirmé par le critère HQC. Nous choisissons  $p$  entre 0 et  $p_{max}$  comme expliqué dans SCHWERT [1989]. D'autres valeurs de  $p$  ont aussi été utilisées, mais elles ne modifient pas la conclusion du test. H1 : indique rejet de l'hypothèse nulle. Notons aussi que le test est fait à un seuil de 5%, et  $cValue = 1,942$  pour la statistique courante que l'on utilise.

Or, COCHRANE [1991] montre que les tests de racines unitaires sur les échantillons de petites tailles ont des statistiques de tests de faible puissance pour détecter la nature de la non-stationnarité. Il se trouve que notre base de données contient, pour certains pays, des chroniques plus longues que celles retenues pour l'estimation des tests de stationnarité. Il paraît donc opportun d'utiliser toute l'information disponible concernant le ratio dividende sur cours connu afin d'obtenir des statistiques de tests plus puissantes pour caractériser la non stationnarité de cette variable. En effet, nous disposons dans la base de données GFD des chroniques remontant au 19ème siècle. Dans le cas des Etats-Unis, par exemple, la fenêtre d'observation la plus large couvre la période 1871-2013, ce qui représente plus du double de la taille de l'échantillon retenu pour l'estimation des VAR. Il en va de même pour le marché britannique dont les premières observations remontent à 1923. En revanche, les séries sur les marchés français et japonais présentent des discontinuités (changement de fréquence en fonction de la date des observations, données manquantes pendant les périodes de guerre mondiale,...) qui les rendent inexploitable sur des fenêtres aussi profondes. L'existence de ces discontinuités, notamment pour les données françaises, ne nous permet pas d'effectuer de nouveaux tests de racine unitaire. Nous avons donc réestimé les tests de Dickey-Fuller pour les Etats-Unis et le Royaume-Uni en utilisant toute la profondeur des chroniques exploitables. Le tableau 3.19 présente les résultats des tests de Dickey-Fuller sur des fenêtres plus larges.

TABLEAU 3.19 – Tests ADF pour le logarithme du ratio dividende sur cours

Test pour ( $ldmp_t = \lambda_t$ )			
$\lambda_t = c + \delta t + \rho \lambda_{t-1} + \varepsilon_t,  \rho  < 1$	Result	Stats	pvalue
<b>USA (1871Q1-2013Q4)</b>	<b>H1</b>	<b>-3,76</b>	<b>1,90%</b>
<b>UK (1923Q4-2013Q4)</b>	<b>H1</b>	<b>-3,79</b>	<b>1,83%</b>
$\tilde{\lambda}_t = \lambda_t - \hat{c} - \hat{\delta}t = \rho \tilde{\lambda}_{t-1} + \varepsilon_t$	Result	Stats	pvalue
<b>France (1941Q1-2013Q4)</b>	<b>H1</b>	<b>-2,44</b>	<b>1,46%</b>
<b>JAPAN (1949Q1-2013Q4)</b>	<b>H0</b>	<b>0,34</b>	<b>77,45%</b>

*Note : remarquons que nous sommes sur des processus autorégressif d'ordre 1 pour les écritures ADF. La colonne « Result » affiche le verdict pour un seuil de probabilité à 5%*

Les nouveaux tests de racines unitaires sur séries longues pour les Etats-Unis, le Royaume-

Uni montrent clairement que la variable  $ldmp_t$  est régie par un processus TS (*Trend stationary*), puisque les p-values nous conduisent à rejeter les hypothèses nulles du modèle (3.46) des tests ADF : le logarithme du ratio dividende sur cours est stationnaire autour d'un trend déterministe, car la série détrendée par les MCO est stationnaire au seuil de 5%. En somme, la non-stationnarité décelée dans la première version des tests était due à l'existence d'une tendance déterministe dans la dynamique du logarithme du ratio dividende sur cours et non pas à une non-stationnarité de nature stochastique. En fin de compte, les tests sur les modèles (3.45) et (3.44) confirment que la série détrendée  $\widetilde{ldmp}_t = ldmp_t - \hat{c} - \hat{\delta}t$  est stationnaire pour les deux pays. L'approfondissement des tests de racines unitaires sur des séries longues, révèle que l'origine de la non-stationnarité de la variable  $ldmp_t$  est de nature déterministe. Dans ce type de modélisation, l'effet produit par un choc aléatoire à un instant  $t$  est transitoire. Le modèle étant déterministe, la chronique retrouve son mouvement de long terme qui est ici la droite de tendance. Cette nouvelle conclusion sur la stationnarité de la variable dividende sur cours est un argument pour le maintien de la série  $ldmp_t$  non stationnaire en niveau dans la modélisation VAR. En effet, CAMPBELL et PERRON [1991] mentionnent que la présence d'une variable TS (*trend stationary*) peut impliquer l'existence de co-intégration du vecteur  $z_t$ . Ce point sera approfondi dans la partie consacrée à l'analyse de la robustesse des estimations. En définitive, compte tenu de son lien avec le cours des actions (les cours des actions sont fonction de la valeur actualisée des dividendes futurs « raisonnablement » anticipés) et des travaux précités, nous avons conservé le ratio dividende sur cours en niveau dans le modèle. Mentionnons que l'estimation direct de séries temporelles intégrées en niveau augmente considérablement la probabilité de commettre une erreur de seconde espèce (coefficient de détermination élevé,  $t$  de student surestimé, etc.). Ainsi, il est important de noter que dans les cas d'existence de co-intégrations, nous obtenons l'estimation des paramètres du modèle VAR via ceux des modèles VECM (un estimateur consistant est l'estimateur des moindres carrés, à ce sujet on pourra se référer à LÜTKEPOHL [2005]). En effet, remarquons qu'il existe un *isomorphisme*, deux à deux, entre les trois écritures vectorielles VAR, VMA et VECM et une des conséquences est qu'il y a équivalence de la variance conditionnelle en passant de l'une à l'autre des écritures du modèle vectoriel de données. En s'appuyant sur cette *isomorphisme* entre les écritures, nous ne présentons

que des résultats structurés sur la base des représentations VAR.

### Résultats de la modélisation « *Sparse VAR* »

La calibration du modèle est basée sur des données trimestrielles des marchés financiers pour la France, le Japon, le Royaume-Uni et les Etats-Unis. La fenêtre des observations va de 1960.Q1 à 2013.Q4. On a volontairement exclu les périodes de guerre mondiale afin de ne pas prêter le flanc à la critique de certains chercheurs<sup>14</sup> qui postulent que les phénomènes de « *mean-reversion* » sont liés aux périodes de rattrapages consécutives aux dévastations dues aux guerres. Les indices sont fournis par Global financial data ([www.globalfinancialdata.com](http://www.globalfinancialdata.com)), principal fournisseur de données historiques à ce jour.

#### ► L'ordre des modèles VAR

En analysant les séries chronologiques, nous nous sommes posé la question qui consiste à savoir comment les événements passés influencent la situation présente. Lorsque nous faisons des choix sur l'ordre  $p$  d'un processus autorégressif, nous devons évaluer le bénéfice marginal tiré de l'introduction d'un plus grand nombre de retards par rapport au coût marginal lié à l'augmentation de l'incertitude de l'estimation. Si nous ne retenons pas assez de retards, nous courons le risque d'omettre des informations potentiellement importantes contenues dans les décalages les plus éloignés. D'autre part, avec trop de retards, nous estimons plus de coefficients que nécessaire. Une approche rationnelle pour déterminer le nombre de retards  $p$  consiste à utiliser un critère de l'information, tel que le critère d'information d'Akaike (AIC). Le modèle choisi est celui qui minimise la distance de Kullback-Leibler entre le modèle et le « vrai » modèle. Ainsi, on doit sélectionner le modèle qui donne la plus petite valeur de l'AIC, parce que ce modèle sera le plus proche du « vrai » modèle inconnu parmi les modèles candidats.

Nous avons également testé le critère d'information bayésien (BIC) qui est une alternative classique au critère AIC. Pour schématiser, on peut dire, en première approche, que l'AIC est un critère prédictif tandis que le BIC est un critère explicatif. Le calcul du BIC est basé sur le log-vraisemblance empirique et ne nécessite la spécification des lois a priori. Il est bien connu que le critère de pénalisation du BIC est plus sévère que celui de

---

14. KIM, NELSON et STARTZ [1991]



l'AIC. Par conséquent, le critère BIC a tendance à déterminer des modèles plus petits que l'AIC. On notera que notre démarche n'est pas ici de déterminer si le critère AIC domine ou non le critère BIC. En l'occurrence, le critère BIC suggère un VAR(1) qui a été modelé par plusieurs auteurs. Par conséquent, nous choisissons l'AIC comme critère d'information. Nous sélectionnons l'ordre VAR qui minimise le critère AIC et maximise le R2 ajusté. Comme le montre le tableau 3.20 ci-après, qui précise les résultats pour les États-Unis, le critère AIC suggère un VAR(3) pour l'estimation classique du modèle. Rappelons que le choix de l'ordre du modèle dans le cas de l'estimation d'un sVAR est interne à la procédure d'estimation, telle que décrite plus haut.

TABLEAU 3.20 – Critères AIC et BIC selon le modèle

USA 1960.Q2 - 2013.Q4 : Information Criterion			
	VAR(1)	VAR(2)	VAR(3)
<b>AIC</b>	2501.31	2389.48	2321.96
<b>BIC</b>	2774.06	2821.34	2912.92

TABLEAU 3.21 – Coefficients de détermination selon le modèle

USA 1960.Q2 - 2013.Q4 : R2			
	VAR(1)	VAR(3)	sVAR(3)
$r_0(t)$	24.61%	28.32%	32.34%
$x_e(t)$	<b>17.05%</b>	<b>27.57%</b>	<b>29.16%</b>
$x_b(t)$	10.18%	14.26%	27.27%
$rb_{nom}(t)$	40.48%	42.92%	51.05%
$ipi(t+2)$	33.75%	33.87%	36.40%
$ldmp(t)$	96.81%	97.20%	97.26%
$spr(t)$	66.04%	69.49%	73.03%

*r<sub>0</sub>* = total return on t-bills; *x<sub>e</sub>* = excess stock return; *x<sub>b</sub>* = excess bond return; *rb<sub>nom</sub>* = return on a bond held to maturity; *ipi* = industrial production; *ldmp* = dividend-price ratio; *spr* = yield spread

► Variance conditionnelle des classes d'actifs et horizon de placement

L'analyse des estimations de modèles VAR(p) est généralement plus simple lorsque l'ordre du modèle est égal à 1, bien qu'elle puisse être incomplète par rapport à un modèle VAR d'ordre supérieur présentant naturellement une meilleure inférence. C'est pourquoi nous présentons ci-dessous le tableau 3.22 de l'estimations du VAR(1) pour le cas des Etats-Unis qui précède ceux de l'estimation du sVAR(3), la principale spécification dans cette étude.

TABLEAU 3.22 – Coefficients  $\Phi_0$  et  $\Phi_1$  du VAR(1)

Tableau : Estimation VAR(1) USA 1960.Q2 - 2013.Q4							
Estimation de : $Z_t = \Phi_0 + \Phi_1 Z_{t-1} + v_t$							
	$r_0(t)$	$x_e(t)$	$x_b(t)$	$rb_{nom}(t)$	$ipi(t+2)$	$ldmp(t)$	$spr(t)$
$\Phi_0$							
<i>Const.</i>	<b>-2,08</b> (-2,86)	<b>4,18</b> (0,51)	<b>-11,40</b> (-2,46)	<b>-1,99</b> (-2,15)	<b>5,35</b> (3,42)	<b>0,02</b> (0,25)	<b>-0,98</b> (-1,23)
$\Phi_1$							
$r_0(t-1)$	<b>0,21</b> (2,80)	<b>-0,30</b> (-0,36)	<b>-0,21</b> (-0,44)	<b>-0,03</b> (-0,32)	<b>0,40</b> (2,52)	<b>0,00</b> (0,09)	<b>-0,05</b> (-0,61)
$x_e(t-1)$	<b>0,00</b> (-0,14)	<b>-0,04</b> (-0,59)	<b>-0,07</b> (-1,87)	<b>-0,01</b> (-1,74)	<b>0,01</b> (0,81)	<b>0,00</b> (0,97)	<b>-0,01</b> (-1,09)
$x_b(t-1)$	<b>-0,11</b> (-3,68)	<b>0,22</b> (0,66)	<b>-0,48</b> (-2,60)	<b>-0,31</b> (-8,35)	<b>0,20</b> (3,14)	<b>0,00</b> (-0,01)	<b>-0,07</b> (-2,10)
$rb_{nom}(t-1)$	<b>0,58</b> (4,45)	<b>0,22</b> (0,15)	<b>1,93</b> (2,31)	<b>1,32</b> (7,90)	<b>-0,93</b> (-3,29)	<b>-0,01</b> (-0,89)	<b>0,29</b> (2,02)
$ipi(t+2)$	<b>0,07</b> (2,41)	<b>1,79</b> (5,17)	<b>0,34</b> (1,75)	<b>0,06</b> (1,51)	<b>0,38</b> (5,82)	<b>-0,02</b> (-5,28)	<b>0,04</b> (1,30)
$ldmp(t-1)$	<b>-0,38</b> (-2,35)	<b>1,38</b> (2,76)	<b>-2,16</b> (-2,09)	<b>-0,37</b> (-1,82)	<b>1,13</b> (3,23)	<b>1,00</b> (53,96)	<b>-0,23</b> (-1,30)
$spr(t-1)$	<b>0,03</b> (0,78)	<b>0,10</b> (0,21)	<b>0,79</b> (3,04)	<b>0,18</b> (3,40)	<b>0,21</b> (2,37)	<b>0,00</b> (-0,09)	<b>0,81</b> (18,22)
<b>R2</b>	<i>0,246</i>	<i>0,170</i>	<i>0,102</i>	<i>0,405</i>	<i>0,338</i>	<i>0,968</i>	<i>0,660</i>
NOTE : Entre parenthèse (.) la statistique de Student.							

Concernant ces estimations de VAR(1), nous avons discerné des résultats<sup>15</sup> analogues à ceux fournis par la littérature, soit dans CAMPBELL et VICEIRA [2005] (cela a également été vérifié pour les résultats de BEC et GOLLIER [2009] dans le cas de la France). En ef-

15. Pour des raisons de volumétrie, les autres résultats d'estimations pour les autres cas ne sont donnés que sur demande.

fet, on constate que le rendement des actions est amplement causé par le logarithme dividende-cours. De plus, l'IPI, qui est un indicateur retardé des actions, a l'un des effets les plus importants sur la dynamique de son équation, car un lien non-négligeable s'établit entre le rendement des actions et la production industrielle à venir dans les 6 mois. On remarque également que le rendement réel des actions est difficilement expliqué par son passé, à l'horizon d'un trimestre comme nous le prouve les estimations, en accord avec la littérature économétrique à ce sujet. On pourra même dire, d'après les estimations du tableau 3.22, que le logarithme du ratio dividende-cours est une variable exogène du rendement des actions. Le logarithme du dividende-cours est un processus autorégressif ne dépendant que de ses valeurs passées et avec une très forte persistance. C'est de cette façon qu'elles sont caractérisées par CAMPBELL et collab. [2003] puis CAMPBELL et VICEIRA [2005]. Concernant les variables de rendements sur les obligations, on constate que l'historique sur chacun de ces rendements contribue à prédire sa valeur future, le *spread* de taux permet d'améliorer cette prédiction. En particulier pour le rendement des obligations détenues jusqu'à maturité, en plus d'être prédit par sa valeur passée et le *spread* de taux, il a comme prédicteur l'*excess return* des taux à 10 ans. Le *spread* de taux, comme le logarithme du ratio dividende-cours, est un processus autorégressif ne dépendant quasiment que de sa valeur passée et avec une persistance moins forte que celle du logarithme dividende-cours. Ces constats sont encore vrais lorsqu'on estime le VAR(1) dans chacun des quatre cas étudiés. Ces constats représentant le cas des Etats-Unis se sont avérés proches de ceux des trois autres pays dans le cadre de l'estimation d'un VAR(1), toutes choses égales par ailleurs.

De même, l'estimation des coefficients du *sparse* VAR(3) pour les Etats-Unis (cf. tableau 3.23 à 3.25) montre que l'évolution du rendement des actions est principalement régie par le logarithme du ratio dividende-cours du trimestre passé et par les évolutions de la production industrielle à venir dans les 6 mois. Le rendement réel des actions reste toujours difficilement expliqué par son niveau d'il y a 3 mois, comme nous le prouve l'équation de la deuxième colonne : ces constats sont vrais pour les quatre cas étudiés.

TABLEAU 3.23 – Coefficients  $\Phi_0$  et  $\Phi_1$  du sVAR(3)

Tableau : Estimation Sparse VAR(3) USA 1960.Q2 - 2013.Q4							
Estimation de : $Z_t = \Phi_0 + \Phi_1 Z_{t-1} + \Phi_2 Z_{t-2} + \Phi_3 Z_{t-3} + v_t$							
	$r_0(t)$	$x_e(t)$	$x_b(t)$	$rb_{nom}(t)$	$ipi(t+2)$	$ldmp(t)$	$spr(t)$
$\Phi_0$							
Const.	-	<b>11,2</b> (-2,48)	-	<b>1,28</b> (-12,34)	<b>3,96</b> (-4,42)	-	<b>0,23</b> (-2,95)
$\Phi_1$							
$r_0(t-1)$	-	-	-	-	<b>0,34</b> (-2,43)	-	-
$x_e(t-1)$	<b>-0,1</b> (-3,05)	-	<b>-0,16</b> (-1,93)	-	-	-	-
$x_b(t-1)$	-	-	-	-	-	-	-
$rb_{nom}(t-1)$	-	-	<b>-2,57</b> (-22,02)	-	-	-	-
$ipi(t+2)$	-	<b>1,11</b> (-3,21)	<b>0,27</b> (-3,85)	-	<b>0,43</b> (-7,14)	<b>-0,01</b> (-3,30)	-
$ldmp(t-1)$	<b>-10,69</b> (-3,32)	<b>3,29</b> -2,61	<b>-16,56</b> (-2,00)	-	<b>1,05</b> (-4,21)	<b>0,98</b> (-75,78)	-
$spr(t-1)$	-	-	-	-	-	-	<b>0,84</b> (-21,22)

NOTE : Entre parenthèse (.) la t-value ou statistique de Student

TABLEAU 3.24 – Coefficients  $\Phi_2$  du sVAR(3)

$\Phi_2$							
	$r_0(t)$	$x_e(t)$	$x_b(t)$	$rb_{nom}(t)$	$ipi(t+2)$	$ldmp(t)$	$spr(t)$
$r_0(t-2)$	-	-	<b>0,88</b> (-5,19)	-	-	-	<b>0,29</b> (-4,47)
$x_e(t-2)$	-	-	-	-	-	-	-
$x_b(t-2)$	-	-	-	-	-	-	-
$rb_{nom}(t-2)$	-	-	<b>-1,26</b> (-10,70)	-	-	-	-
$ipi(t+1)$	-	<b>0,89</b> (-2,5)	-	-	-	<b>-0,01</b> (-2,26)	-
$ldmp(t-2)$	<b>10,56</b> (-3,28)	-	<b>17,4</b> (-2,09)	-	-	-	-
$spr(t-2)$	-	-	-	-	-	-	-

NOTE : Entre parenthèse (.) la t-value ou statistique de Student

TABLEAU 3.25 – Coefficients  $\Phi_3$  du sVAR(3)

		$\Phi_3$						
		$r_0(t)$	$x_e(t)$	$x_b(t)$	$rb_{nom}(t)$	$ipi(t+2)$	$ldmp(t)$	$spr(t)$
$r_0(t-3)$	<b>0,35</b>	-	<b>1,27</b>	<b>0,35</b>	-	-	-	-
	-5,29	-	-3,27	-3,88	-	-	-	-
$x_e(t-3)$	-	-	-	-	-	-	-	-
	-	-	-	-	-	-	-	-
$x_b(t-3)$	-	-	-	<b>-0,02</b>	-	-	-	-
	-	-	-	(-2,07)	-	-	-	-
$rb_{nom}(t-3)$	-	-	-	-	-	-	-	-
	-	-	-	-	-	-	-	-
$ipi(t)$	-	-	<b>-0,91</b>	<b>-0,24</b>	-	-	-	<b>-0,12</b>
	-	-	(-5,37)	(-6,36)	-	-	-	(-4,17)
$ldmp(t-3)$	-	-	-	-	-	-	-	-
	-	-	-	-	-	-	-	-
$spr(t-3)$	-	-	<b>1,05</b>	<b>0,27</b>	-	-	-	-
	-	-	(-4,52)	(-5,21)	-	-	-	-
<b>R2</b>		0,323	0,291	0,2727	0,510	0,364	0,972	0,730

NOTE : Entre parenthèse (.) la t-value ou statistique de Student

Remarquons que malgré la faiblesse des  $R^2$  ci-contre, déterminés à partir des données trimestrielles, le pouvoir prédictif du modèle estimé peut être sous évalué, comme souligné dans CAMPBELL [2001]. Car celui-ci est déterminé pour des observations à faibles fréquences et donc peut induire en erreur, puisque dans le même temps le  $R^2$  implicite des fréquences annuelles peut être égal à plusieurs fois le  $R^2$  trimestriel.

Les conclusions sur le caractère autoregressif, du logarithme du ratio dividende-cours (facteur exogène, et coefficient AR proches de l'unité) confirment la nécessité de faire des tests de stabilité. A cette fin, nous avons effectué des tests visant à évaluer le déterminant du polynôme caractéristique donné dans l'équation (3.23). Les tests figurés dans le tableau 3.26 ont confirmé la stabilité du modèle.

TABLEAU 3.26 – Tests de stabilité des modèles estimés

<b>Stability check : Eigenvalue of largest magnitude from the companion matrix of AR component</b>			
<b>Country</b>	<b>VAR(1)</b>	<b>VAR(3)</b>	<b>sVAR(3)</b>
<b>USA</b>	0,967 <i>Stable</i>	0,958 <i>Stable</i>	0,955 <i>Stable</i>
<b>France</b>	0,942 <i>Stable</i>	0,945 <i>Stable</i>	0,962 <i>Stable</i>
<b>UK</b>	0,911 <i>Stable</i>	0,938 <i>Stable</i>	0,952 <i>Stable</i>
<b>JAPAN</b>	0,978 <i>Stable</i>	0,983 <i>Stable</i>	0,985 <i>Stable</i>

*Note :  $\max_i |eigenvalue_i| < 1, i = [1, n] \rightarrow$  a stable VAR; Stability implies stationarity, even if the converse is not true.*

On peut également déceler dans les tableaux 3.27 et 3.28 ci-contre la forte corrélation négative entre les chocs des rendements actions et ceux du logarithme du ratio dividende-cours. En d'autres termes, l'augmentation du taux de dividende conduit instantanément à une baisse du rendement espéré de l'action, et inversement, l'augmentation du rendement de l'action conduit instantanément à une baisse du dividende espéré (cette seconde assertion pourrait nécessiter une analyse plus fine de la causalité instantanée entre les deux variables). Ces remarques qui concernent les résultats obtenus pour les Etats-Unis sont transposables aux autres pays (France, Royaume-Uni, Japon).

TABLEAU 3.27 – Corrélations et variances des innovations - VAR(1)

Standard deviation(in %) & cross-correlation of residuals							
	$r_0(t)$	$x_e(t)$	$x_b(t)$	$rb_{nom}(t)$	$ipi(t+2)$	$ldmp(t)$	$spr(t)$
$r_0(t)$	<b>0,645</b>	0,178	0,173	0,205	0,087	-0,189	-0,189
$x_e(t)$	0,178	<b>7,247</b>	0,145	0,143	0,055	-0,986	-0,052
$x_b(t)$	0,173	0,145	<b>4,098</b>	0,989	0,004	-0,141	0,018
$rb_{nom}(t)$	0,205	0,143	0,989	<b>0,818</b>	-0,001	-0,142	-0,044
$ipi(t+2)$	0,087	0,055	0,004	-0,001	<b>1,382</b>	-0,062	0,012
$ldmp(t)$	-0,189	-0,986	-0,141	-0,142	-0,062	<b>0,073</b>	0,055
$spr(t)$	-0,189	-0,052	0,018	-0,044	0,012	0,055	<b>0,702</b>

TABLEAU 3.28 – Corrélations et variances des innovations - sVAR(3)

Standard deviation(in %) & cross-correlation of residuals							
	$r_0(t)$	$x_e(t)$	$x_b(t)$	$rb_{nom}(t)$	$ipi(t+2)$	$ldmp(t)$	$spr(t)$
$r_0(t)$	<b>0,666</b>	0,153	0,168	0,325	-0,037	-0,170	-0,238
$x_e(t)$	0,153	<b>7,234</b>	0,090	0,008	0,077	-0,981	-0,118
$x_b(t)$	0,168	0,090	<b>3,847</b>	0,822	-0,004	-0,087	-0,115
$rb_{nom}(t)$	0,325	0,008	0,822	<b>0,924</b>	-0,182	-0,052	-0,151
$ipi(t+2)$	-0,037	0,077	-0,004	-0,182	<b>1,479</b>	-0,054	-0,004
$ldmp(t)$	-0,170	-0,981	-0,087	-0,052	-0,054	<b>0,073</b>	0,125
$spr(t)$	-0,238	-0,118	-0,115	-0,151	-0,004	0,125	<b>0,671</b>

Pour illustrer l'effet de l'horizon de placement sur les volatilités de rendements de chaque classe d'actifs, on trace sur les graphes 3.5 ci-dessous les écart-types annualisés issus des estimations de *Sparse VAR(3)*, en fonction de l'horizon d'investissement, pour des horizons allant d'un an à 50 ans. On remarque, et c'est le point important de notre

recherche, que la volatilité des actions des différents pays suivent la même évolution à long terme : elles sont toutes décroissantes avec l'horizon de placement. Rappelons que si les rendements des actions étaient IID, alors la volatilité annualisée de ces rendements serait indépendante de l'horizon de placement. Par conséquent, identifier des volatilités liées à la durée de placement tend à confirmer la prévisibilité, du moins partielle, des rendements.

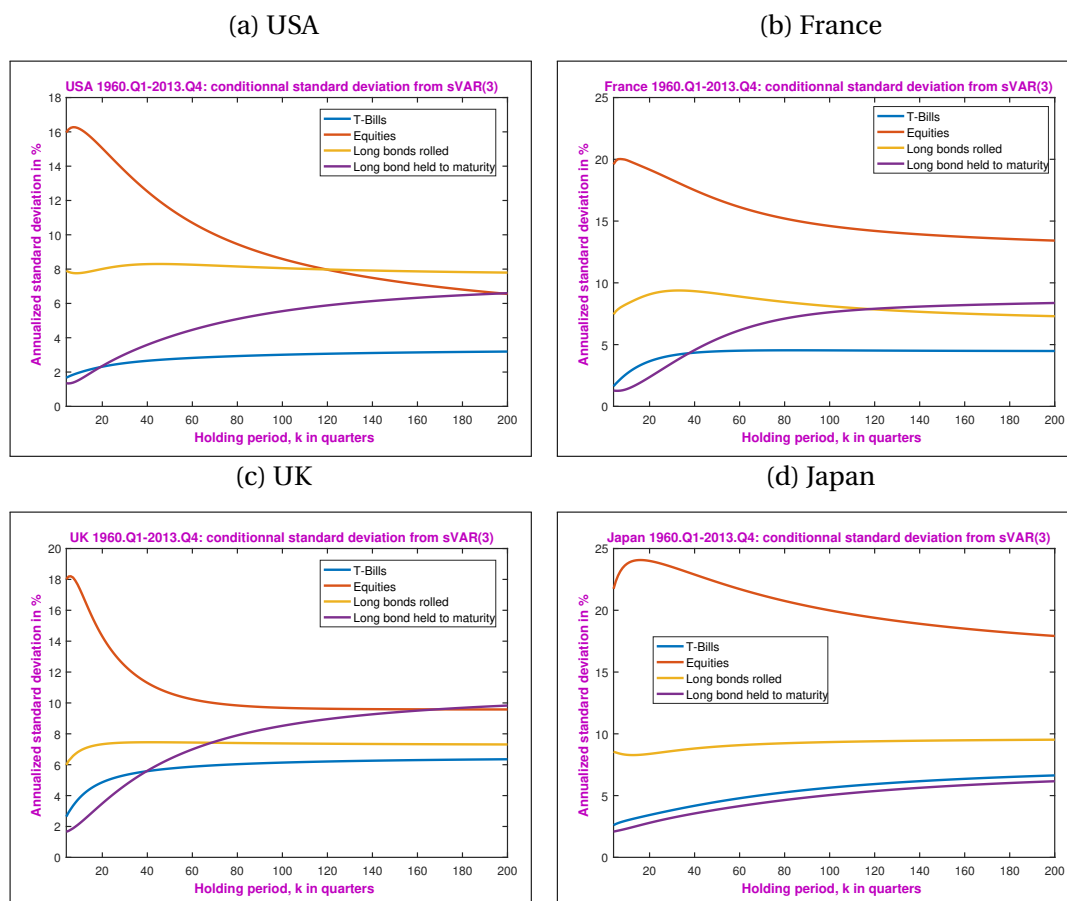


FIGURE 3.5 – Volatilités conditionnelles -  $sVAR(3)$

Comme dans les études de **CAMPBELL et VICEIRA [2005]** et **BEC et GOLLIER [2009]**, nous observons que les volatilités conditionnelles des rendements aux Etats-Unis et en France sont décroissantes avec l'horizon de placement. On constate que les estimations de modèles  $sVAR(3)$  dans le cas du Royaume-Uni et du Japon présentent également la même dynamique que dans les deux pays précités : à savoir que les rendements actions ont des volatilités conditionnelles décroissantes et faibles pour les horizons de placements longs, ce qui traduit un phénomène de retour vers la moyenne (*mean-reversion*) du rendement des actions pour les durées de détention longues.



C'est aux Etats-Unis et au Royaume-Uni que l'on constate la plus forte mean-reversion sur les actions. En effet, dans le cas des Etats-Unis, la volatilité conditionnelle passe environ de 16% pour l'horizon de placement à un an à environ 8% à 25 ans (100 trimestres), soit une volatilité divisée par deux en 25 ans. Il en va de même au Royaume-Uni où la volatilité conditionnelle des actions passe de 19.5% à l'horizon un an à environ 9.5%. En France, la volatilité conditionnelle des rendements à un an va d'un peu moins de 21% à environ 14% pour l'horizon de placement proche de 25 ans, ce qui dénote une force de rappel moins importante que celle calculée pour les pays anglo-saxons. Sans surprise, le Japon est le cas où la réduction de la volatilité est la plus faible. Elle passe à environ 21.2% sur un an, pour s'établir à environ 16.8% pour l'horizon 25 ans. En dépit d'une force de rappel moindre, la réduction de la volatilité des actions n'en est pas moins beaucoup plus rapide que dans le cas où les rendements des actifs risqués sont régis par un pur bruit blanc gaussien. D'après nos estimations, on peut donc conclure que les mouvements extrêmes de prix observés sur les marchés financiers sont vraisemblablement transitoires. C'est-à-dire que la dynamique de leur prix est régie par un phénomène de « retour vers la moyenne » qui présume que les chocs sur les marchés boursiers ont un caractère éphémère et que, à plus ou moins long terme, un mouvement de sens opposé viendra corriger la déviation initiale pour rapprocher les prix des actifs de leur moyenne historique. On remarque toutefois que selon la nature des systèmes productifs, le processus de retour vers la moyenne est associé à des vitesses d'ajustements variables (rapides dans les pays anglo-saxons, moins rapides en France et notamment au Japon). A contrario, pour les autres actifs, les constats sont mitigés. On décèle pour l'ensemble des autres classes d'actifs une dynamique des rendements caractérisée soit par une tendance à la divergence par rapport à la moyenne (on parle alors de phénomène de « *mean-aversion* »), soit par un pur mouvement brownien. Le phénomène de mean-aversion est plus marqué dans le cas des Etats-Unis. Concernant les autres pays, on note que les volatilités conditionnelles pour les rendements d'obligations à maturités constantes sont stables quel que soit l'horizon de placement confortant l'EMH. Les rendements sur les taux de court-termes *t-bills* sont ceux qui ont les plus faibles volatilités conditionnelles, les estimations indiquent que le prix de ces actifs suit une marche aléatoire.

- Une spécification qui conduit à une amélioration notable des R2

Concernant l'*excess return* des actions, qui est l'actif que nous privilégions dans notre analyse, on peut comparer l'apport de notre spécification relativement aux travaux fondateurs de **CAMPBELL et VICEIRA** pour les Etats-Unis et de **BEC et GOLLIER** pour la France (*op. cit.*). Rappelons que les auteurs précités estimaient un VAR(1). Nous avons donc, dans un premier temps, à des fins de comparaison, estimé un VAR du même ordre, sur une fenêtre d'observation cependant différente. Puis nous avons déterminé l'ordre, sans a priori, avec un critère d'information AIC qui nous a conduit à estimer un VAR(3). Finalement, afin de gagner des degrés de liberté, nous avons estimé un *sparse* VAR (sVAR). Concernant l'estimation du sVAR(3), rappelons que nous avons enrichi le nombre des prédicteurs, en incluant la production industrielle (IPI) dans le vecteur des variables d'état. Enfin, notre analyse est élargie à trois pays représentant trois continents (Etats-Unis, France, Royaume-Uni, Japon).

TABEAU 3.29 – Comparaisons des résultats entre études

Période d'estimation des modélisations VAR(p)			
Auteurs	Période d'estimation	Pays	Ordre du VAR
Campbell-Viceira	1952.Q2 à 2002.Q4	USA	VAR(1)
Bec-Gollier	1970.Q4 à 2006.Q4	France	VAR(1)
Etude courante	1960.Q1 à 2013.Q4	USA, France, UK, Japan	VAR(1), VAR(3), sVAR(3)

La lecture des résultats concernant l'*excess return* des actions montre que les  $R^2$  (non corrigés à des fins de comparaison) sont supérieurs dans notre analyse au regard des précédents travaux. Cette amélioration, alors que la spécification des variables d'état et l'ordre du VAR sont inchangés, est imputable à la période d'estimation. L'estimation d'un sVAR(3) et l'ajout de la production industrielle dans les prédicteurs contribuent à une forte augmentation des coefficients de détermination ( $R^2$ ) par rapport aux résultats obtenus en utilisant la modélisation initiale VAR(1). En dépit de la faiblesse des ( $R^2$ ), résultat classique dans le cas des actifs risqués, on notera que notre spécification conduit à une amélioration notable par rapport aux études antérieures qui reposent sur l'estimation d'un VAR(1). Dans le cas des États-Unis, **CAMPBELL et VICEIRA** estiment un ( $R^2$ ) de 9,5%, tandis que notre spécification la plus aboutie détermine un ( $R^2$ ) de 29,2%. Pour la France, **BEC et GOLLIER** estiment un coefficient de détermination de 10% contre 19,1%

dans la présente analyse.

TABLEAU 3.30 – Coefficients de déterminations pour les *excess-returns*

Coefficient of determination R2 of excess returns equations from VAR models						
Country	Source / Author	Model	$r_0(t)$	$x_e(t)$	$x_b(t)$	$rb_{nom}(t)$
USA	Campbell-Viceira (2005)	VAR(1)	0,299	0,095	0,097	0,872
	Current study	VAR(1)	0,246	0,170	0,102	0,405
		VAR(3)	0,283	0,275	0,142	0,429
		sVAR(3)	0,323	0,292	0,273	0,511
France	Bec-Gollier (2009)	VAR(1)	0,88	0,10	0,12	0,93
	Current study	VAR(1)	0,472	0,114	0,258	0,616
		VAR(3)	0,575	0,183	0,168	0,627
		sVAR(3)	0,582	0,191	0,314	0,639
UK	Current study	VAR(1)	0,229	0,114	0,077	0,318
		VAR(3)	0,365	0,129	0,132	0,402
		sVAR(3)	0,463	0,185	0,177	0,428
JAPAN	Current study	VAR(1)	0,191	0,096	0,112	0,327
		VAR(3)	0,246	0,140	0,142	0,428
		sVAR(3)	0,288	0,157	0,161	0,459

*Note : To gain a better understanding compared to the existing literature, we use R-squared instead adjusted R-squared.*

### Robustesse des modélisations

- Stabilité du système et non-stationnarité de la variable «  $ldmp$  »

Un des problèmes de cette étude se polarise sur la définition d'un univers d'information stable pour l'estimation du modèle VAR. Or les tests ADF concluent à la stationnarité de l'ensemble des variables à l'exception de la série du logarithme dividende sur cours  $ldmp_t$  qui est non-stationnaire comme l'atteste la représentation graphique ci-dessous.

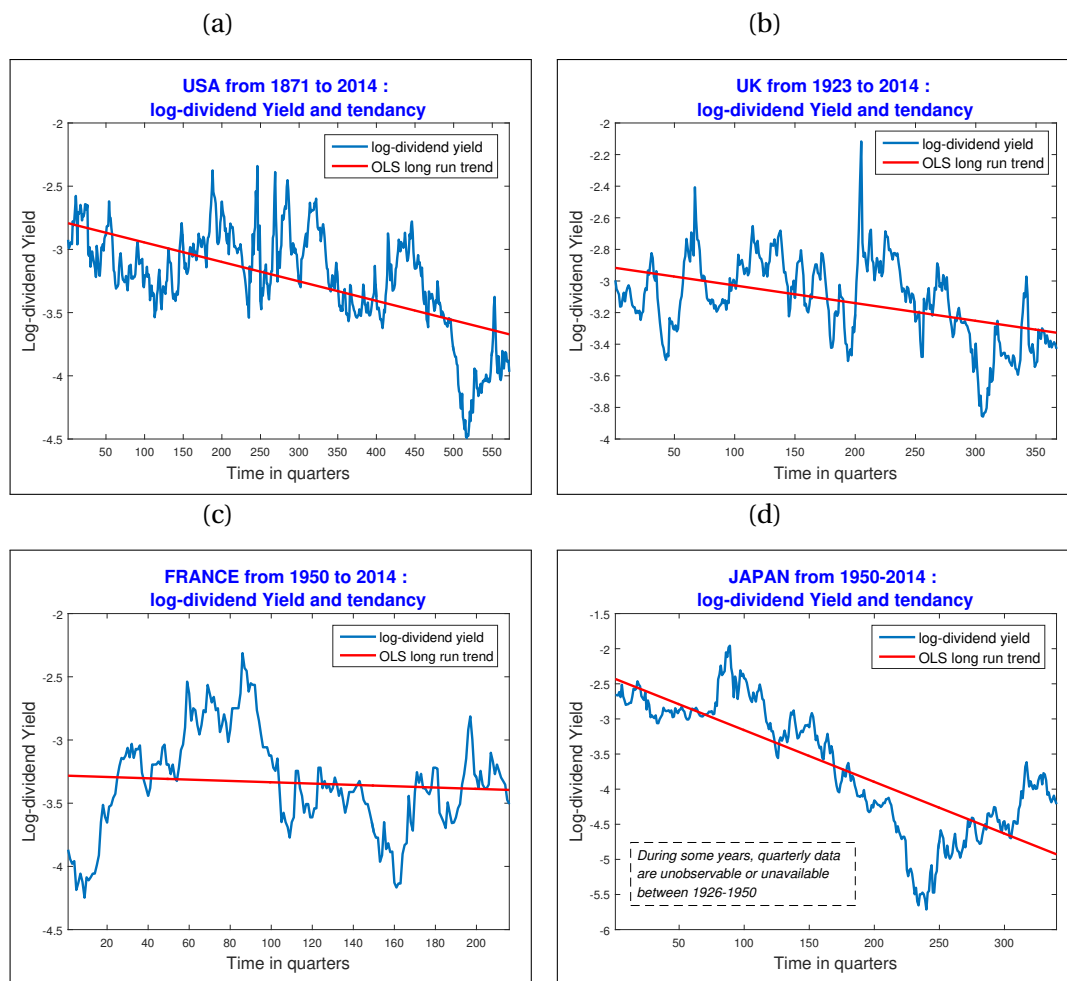


FIGURE 3.6 – Evolutions du log dividende sur cours

Compte tenu du rôle central de cette variable comme prédicteur du cours des actifs risqués, l'idée préconisée par l'économétrie pour éliminer la racine unitaire détectée par les tests est de différencier la série. Toutefois, nous avons vu lors des estimations que la stationnarisation en différence première du logarithme de  $ldmp_t$  n'apportait pas d'information supplémentaire et contribuait à augmenter l'instabilité du modèle. Cependant, sous certaines conditions, un argument plaide pour le maintien de la série en niveau dans la modélisation VAR. Une définition du concept de co-intégration très peu évoquée

dans la littérature est donnée dans **CAMPBELL et PERRON [1991]** et nous dit qu'un vecteur  $z_t \in \mathbb{R}^{n \times 1}$  est co-intégré s'il existe au moins un vecteur  $\beta_i \in \mathbb{R}^{n \times 1}$  telle que  $\beta_i' \times z_t$  est stationnaire et s'il existe  $r$  relations, caractérisées par les vecteurs  $(\beta_i)_{(1 \leq i \leq r)}$  linéairement indépendants. Les mêmes **CAMPBELL et PERRON** mentionnent que la présence d'une variable **TS** (*trend stationary*) dans le vecteur  $z_t$  implique de manière triviale l'existence de co-intégration du vecteur  $z_t$ . Identiquement si toutes les séries sont non-stationnaires de type **TS**, alors il y a là encore co-intégration triviale du vecteur  $z_t$ . Cette définition de la notion de co-intégration dans la modélisation **VAR** est plus large que celle donnée par **ENGLE et GRANGER [1987]**, dans la mesure où le système co-intégré ne requiert plus que toutes les composantes du système soient, chacune, intégrées du même ordre, on peut ainsi avoir une ou plusieurs composantes stationnaires associées à une ou plusieurs composantes **I(1)**, avec une non-stationnarité de nature **TS**. Selon **PERRON et CAMPBELL [1994]** puis **OGAKI et PARK [1997]** qui dissocient les deux définitions par les notions de co-intégration stochastique et co-intégration déterministe, on pourrait qualifier<sup>16</sup> cette seconde définition de co-intégration déterministe.

Etant donné que notre modélisation intègre une variable avec une non-stationnarité de type **TS** dans le vecteur  $z_t$ , à savoir le ratio dividende sur cours  $ldmp_t$ , il convient de tester la co-intégration du vecteur  $z_t$ . Les graphiques 3.6 nous permettent d'observer les évolutions dans le temps de la variable du « logarithme dividende sur cours » pour chaque pays étudié. Sur les quatre graphiques, la courbe en rouge est obtenue par régression linéaire (**MCO**) de la variable au cours du temps. Nous remarquons que dans l'ensemble des pays, la droite de régression a une tendance décroissante dans le temps. Pour ce test, nous suivons **PERRON et CAMPBELL [1994]** qui utilisent une variante du test de Johansen. Comme pour les tests de stationnarités des composantes du vecteur  $z_t$  menées plus haut dans la partie de description des données, il est important de mener ces tests en considérant les statistiques pour des vecteurs incluant une composante **TS**. En effet, nous avons vu qu'une stationnarisation de type **TS** par un filtre en différence première était possible. De même, en présence d'une co-intégration déterministe, comme c'est le cas dans notre étude, un vecteur de co-intégration qui élimine la non-stationnarité stochas-

---

16. La définition de la notion de co-intégration donnée par **ENGLE et GRANGER** serait alors une définition de la co-intégration stochastique.

tique dans une combinaison linéaire du vecteur  $z_t$  évince également la non-stationnarité déterministe dans une combinaison linéaire de  $z_t$ . L'écriture **VECM** pour les tests de co-intégration de type Johansen dans nos modèles est le suivant :

$$\Delta z_t = \Pi z_{t-1} + \sum_{i=1}^q B_i \Delta z_{t-i} + DX + v_t \quad (3.47)$$

Pour  $\Pi z_{t-1} + DX$  se présentant sous la forme  $A(B' z_{t-1} + c_0 + d_0 t) + c_1$ . Les résultats<sup>17</sup> pour le cas des Etats-Unis sont reportés dans le tableau suivant :

TABLEAU 3.31 – Test classique de cointégration : États-Unis

USA Johansen test for VAR(3)					
rang	Hypothèse	stat.	cValue	pValue	eigVal
0	1	1266,694	150,553	0,001	0,957
1	1	594,025	117,710	0,001	0,747
2	1	300,017	88,804	0,001	0,474
3	1	162,367	63,877	0,001	0,413
4	1	48,488	42,915	0,013	0,129
5	<b>0</b>	18,913	25,872	0,316	0,063
6	<b>0</b>	4,990	12,517	0,636	0,023

*Seuil de signification : 5%*

Les résultats des tests montrent qu'il y a 4 relations de co-intégration dans le modèle étudié. Concernant les autres pays, les résultats obtenus ne sont pas tous concluants. En effet, on ne décèle aucune relation de co-intégration dans le cas du Royaume-Uni.

Toutefois, à l'instar des tests de racine unitaire de type Dickey-Fuller, la faiblesse du test du rang de Johansen pour les systèmes VAR basés sur des échantillons de tailles faibles est aujourd'hui communément admise (cf. JOHANSEN [2002]). Afin de limiter l'influence de la taille des échantillons sur les tests de co-intégration, nous avons utilisé la méthode<sup>18</sup> prescrite par CAVALIERE et collab. [2012], qui développe une méthode d'inférence dite « bootstrap du pseudo-ratio de vraisemblance » pour la statistique du test du rang de co-intégration, associée avec la procédure de test de la trace de Johansen définie dans PERRON et CAMPBELL [1994], pour déterminer le rang de co-intégration.

17. Les tableaux pour les autres pays étudiés sont fournis en annexe.

18. Voir la description de la méthode en annexe.

TABLEAU 3.32 – Test classique de cointégration : Royaume-Uni

UK Johansen test for VAR(3)					
rang	Hypothèse	stat.	cValue	pValue	eigVal
0	1	967.9417	150.553	0.001	0.8658
1	1	538.194	117.7103	0.001	0.6
2	1	342.1283	88.8042	0.001	0.4837
3	1	200.641	63.8766	0.001	0.3932
4	1	93.7456	42.9154	0.001	0.2546
5	1	30.8717	25.8723	0.0111	0.0782
6	1	13.4376	12.5174	0.035	0.0609

*Seuil de signification : 5%*

Cette procédure atteste l'existence de relation de co-intégration dans les quatre systèmes de données des pays étudiés et justifie conjointement l'écriture **VECM** des modèles estimés (ci-dessous, tableau 3.33, l'exemple du Royaume-Uni où on détecte désormais une relation de co-intégration à la différence du verdict du précédent test de Johansen).

TABLEAU 3.33 – Test du rang par méthode du bootstrap : UK

U-K case : Bootstrap determination of the co-integration rank in VAR						
rang	Nombre de tests	stat. Initiale	pValue initiale	Nb de fois où $H_0$ est OK	p-Value empirique	Résultat bootstrap (= $H_0$ si pValue empirique > 0.05)
0	500	967.9417	0.10%	0	0.00%	H1
1	500	538.194	0.10%	0	0.00%	H1
2	500	342.1283	0.10%	0	0.00%	H1
3	500	200.641	0.10%	0	0.00%	H1
4	500	93.7456	0.10%	0	0.00%	H1
5	500	30.8717	1.11%	71	14.20%	<b>H0</b>
6	500	13.4376	3.50%	385	77.00%	<b>H0</b>

*\*La valeur (colonne 5) correspond au nombre de fois où la statistique bootstrap est > à la statistique initiale*

Ces tests légitiment l'intégration de la variable dividende sur cours  $ldmp_t$  dans les modélisations **VAR** en dépit de sa non stationnarité en niveau. Cette justification un peu

rébarbative est un point important de notre recherche, car la prise en compte de  $ldmp_t$ , variable non stationnaire, dans les modèles VAR sur la volatilité du rendement des actifs n'est pas clairement explicitée ni dans les publications de CAMPBELL et VICEIRA ou de BEC et GOLLIER.

### Bootstrap de l'intervalle de confiance des volatilités annualisés

Les estimations des modèles VAR dans cette étude utilisent l'estimateur du maximum de vraisemblance pour les paramètres du modèle, dans le cas de chaque pays. Par conséquent, dans le cas d'un VAR(p), les paramètres  $\Phi_0$ ,  $\Phi_1$  et  $\Sigma_v$  font apparaître des erreurs d'estimations dont nous ne maîtrisons pas la forme. En effet, les tests de Kolmogorov-Smirnov n'ont pas pu détecter dans leur globalité le caractère Gaussien des distributions présentes dans chaque cas d'estimation. D'autant plus que les lois de distribution dans les échantillons n'ont pas été catégorisées. Toutes ces difficultés peuvent être en partie attribuées à la profondeur des échantillons et/ou au phénomène non-standard dans les échantillons tel que la présence d'hétéroscédasticité dans les échantillons par exemple. Comme il est courant en économétrie, pour ne pas conserver ce biais associés aux hypothèses formulées sur les lois de probabilités de notre analyse, nous avons directement recours à la simulation numérique afin affiner l'inférence sur les prévisions de volatilité données plus haut. La mise en oeuvre de cette simulation s'appuie sur la méthode du « *Residual-based moving block bootstrap* » développée dans BRÜGGEMANN et collab. [2016]. Par rapport au « *Wild bootstrap* » qui se présente comme la méthode de bootstrap par défaut pour les cas présentant l'hétéroscédasticité, cette procédure de bootstrap par blocs a l'avantage d'être plus puissante dans l'inférence que la procédure du *Wild bootstrap*, tout en prenant en charge l'hétéroscédasticité conditionnelle des innovations (qui sont stationnaires ici pour tous les cas estimés) des modèles VAR et de plus la dépendance des distributions asymptotiques de la matrice  $\Sigma_v$  de variance-covariance.



Les étapes de la procédure du « *Residual-based moving block bootstrap* » sont les suivantes :

---

**Algorithme 3.1** RESIDUAL-BASED MOVING BLOCK BOOTSTRAP :

---

- 1: **(Etape1)** : Estimer les paramètres  $\hat{A}_0, \hat{A}_1, \dots, \hat{A}_p$  du modèle VAR(p) et calculer les résidus d'estimations  $\hat{u}_t = y_t - \hat{A}_0 - \sum_{i=1}^p \hat{A}_i y_{t-i}$  pour  $t = 1, \dots, T$ .
- 2: **(Etape2)** : Choisir la longueur des blocs  $l$  telle que  $l < T$  et poser  $N = \lceil T/l \rceil$  qui est le nombre de blocs désirés et pour que  $N \times l \geq T$ . Définir les blocs de formats  $K \times l$  suivants :  $B_{i,l} = (\hat{u}_{i+1}, \dots, \hat{u}_{i+l})$ ,  $i = 0, \dots, T-l$  et soient les variables aléatoires  $i_0, i_1, \dots, i_{N-1}$  telles que  $i \sim \mathcal{U}(0, 1, 2, \dots, T-l)$  Associer les blocs  $B_{i_0,l}, B_{i_1,l}, \dots, B_{i_{N-1},l}$  de bout en bout et supprimer la dernière attribution  $Nl - T$  pour obtenir les résidus  $\hat{u}_1^*, \dots, \hat{u}_T^*$ .
- 3: **(Etape3)** : Centrer les innovations  $\hat{u}_1^*, \dots, \hat{u}_T^*$  selon la règle suivante :

$$\begin{aligned} u_{jl+s}^* &= \hat{u}_{jl+s}^* - \mathbb{E}(\hat{u}_{jl+s}^*) \\ &= \hat{u}_{jl+s}^* - \frac{1}{T-l+1} \sum_{r=0}^{T-l} \hat{u}_{s+r} \end{aligned}$$

Pour  $s = 1, 2, \dots, l$  et  $j = 0, 1, 2, \dots, N-1$  de telle sorte que  $\mathbb{E}(\hat{u}_t^*) = 0, \forall t = 1, \dots, T$

- 4: **(Etape4)** : Fixer le pré-échantillon Bootstrap :  $y_{-p+1}^*, \dots, y_0^*$  égal à zéro et générer les échantillons Bootstrap selon la formule :  $y_t^* = \hat{A}_1 y_{t-1}^* + \dots + \hat{A}_p y_{t-p}^* + u_t^*$
  - 5: **(Etape5)** : Calcul de l'estimateur bootstrap  $\beta^* = \text{vec}(\hat{A}_0, \hat{A}_1, \dots, \hat{A}_p, \Sigma_v^*)$
  - 6: **(Etape6)** : Répéter les étapes 2 à 5 B fois. Ainsi nous disposons d'une distribution de l'estimateur bootstrap  $\hat{\beta}^*$  qui nous permet d'obtenir une distribution de prévision de volatilité à chaque horizon donnée.
  - 7: **(Etape7)** : Enfin nous prenons comme valeurs critiques les percentiles de la distribution des prévisions obtenus avec les échantillons bootstrap.
- 

Nous mettons en oeuvre la simulation bootstrap selon la procédure décrite ci-dessus et effectuons 5000 tirages afin d'affiner la distribution empirique de chaque volatilité conditionnelle pour tous les horizons T de 4 à 200 trimestres présentés ci-dessus. On choisit une longueur de blocs  $l = 10$  trimestres. Comme présenté sur les figures suivantes pour les différents pays, nous avons encadré chaque prévision de volatilité par des valeurs critiques choisies comme étant les percentiles à 5% et 95% de leurs distributions. On peut constater dans le cas des Etats-Unis, par exemple, (cf. graphique 3.7), que les courbes de couleur verte représentant les écart-types annualisés pour chaque classe d'actifs sont contenues dans l'intervalle de confiance à 10% de leur distribution. Sous l'hypothèse que le DGP (Processus Générateur de Données) bootstrap implémenté ici est le vrai

DGP, les écart-types annualisés des quatre classes d'actifs présentés plus haut sont statistiquement proches des vraies prévisions des écart-types annualisés. Ce constat n'est pas seulement validé pour le cas des Etats-Unis présenté ci-dessus, mais pour tous les pays étudiés (cf. graphiques en annexe 3.B).

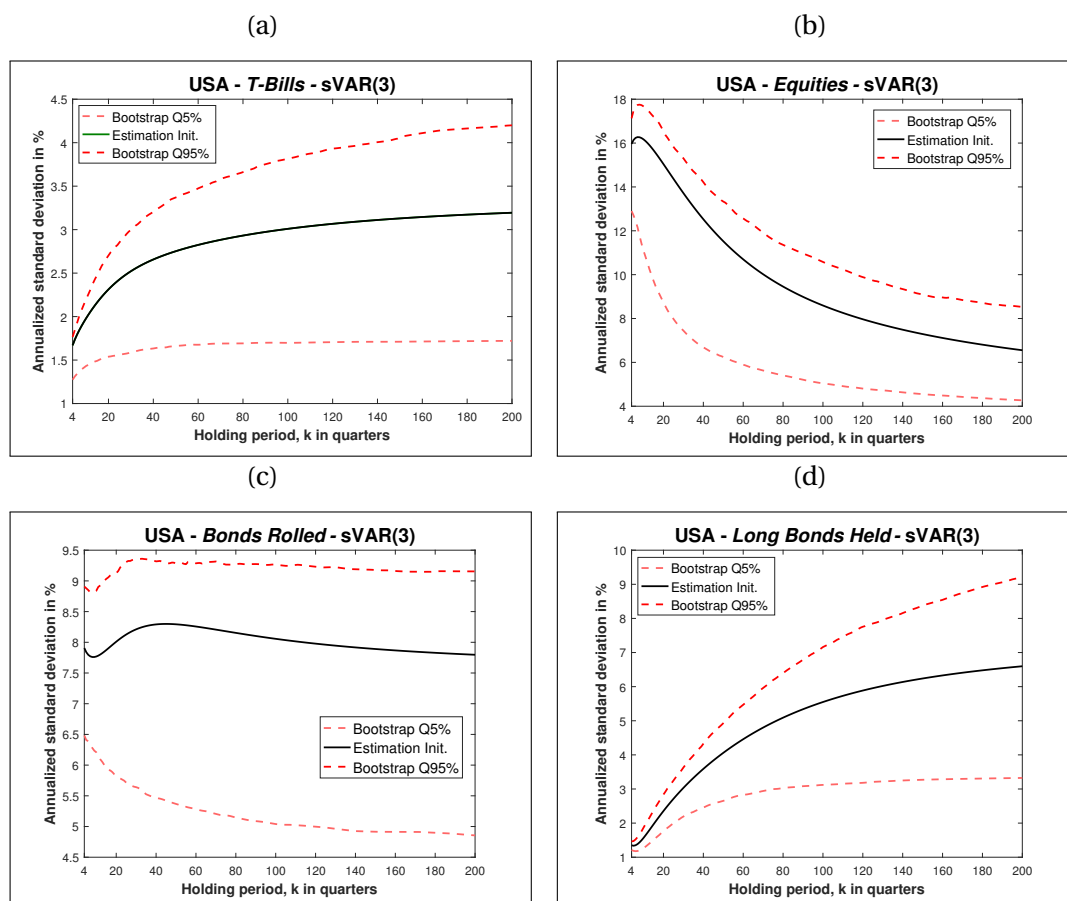


FIGURE 3.7 – USA - encadrement des écart-types conditionnels

### Corrélations et interdépendance entre séries temporelles

Ces résultats graphiques résultants des prévisions de la modélisation d'interdépendances dans les séries temporelles économiques et financières illustrent de manière synthétique (bien qu'imparfaite) une réalité complexe, déjà constatée de manière empirique dans HAMAYON, LEGROS et PRADAT [2016] à partir de données à long terme de marchés actions. Cette réalité du retour vers la moyenne des marchés actions, ou encore de leur prévisibilité est donc formulée de différente manière, mais les deux approches concluent à la convergence des cours.

Afin de mesurer la part de l'interconnexion des divers facteurs dans les variations de volatilités présentées (voir 3.5), nous avons voulu vérifier que dans le contexte de l'efficience de marchés financiers, le caractère IID des rendements ne permettrait pas d'observer les mêmes évolutions des écart-types. Si à court terme les rendements semblent être distribués de manière indépendante (voir graphe 3.3 plus haut), il n'en va pas de même à long terme (voir les graphes 3.5). La constatation à long terme de la prévisibilité pour le cas des marchés actions est une résultante à la fois : de l'existence d'une vitesse de retour vers la moyenne à court-terme (bien que sur les hautes fréquences l'outil statistique ne permet pas de capter suffisamment le phénomène, comme c'est le cas pour les fréquences journalières), et de l'information apportée par les autres prédicteurs. Ces constats impliquent économétriquement deux choses : la première est qu'un bootstrap naïf<sup>19</sup> conduirait à s'affranchir de la mémoire de long terme des rendements ; la deuxième serait que l'estimation d'un modèle vectoriel ne capturant pas l'interdépendance entre les variables explicatives conduirait à considérer que seul le passé de chacune des séries est nécessaire pour modéliser leur évolution. C'est pour ces raisons que nous avons estimé un modèle SUR (voir ZELLNER [1962]) d'*excess-returns* à partir des échantillons de rendements de tailles raisonnables, issus d'un DGP *bootstrap* non-paramétrique<sup>20</sup>, de la matrice des rendements. Pour simplifier, nous estimons ce modèle en nous limitant à un ordre 1 pour les variables explicatives, chaque composante n'est alors régie à priori que par un seul prédicteur, l'observation du dernier trimestre.

---

19. Méthode de bootstrap non-paramétrique classique, voir CHERNICK et collab. [2011].

20. *Bootstrap* naïf composante par composante et avec remise

La figure 3.8 suivante présente les résultats graphiques des échantillons de données *bootstrap* pour les États-Unis, calibrée sur la période 1960-2013, sur lequel nous présentons les écart-types conditionnels (et annualisés) pour les différents actifs, pour chaque horizon de prévision.

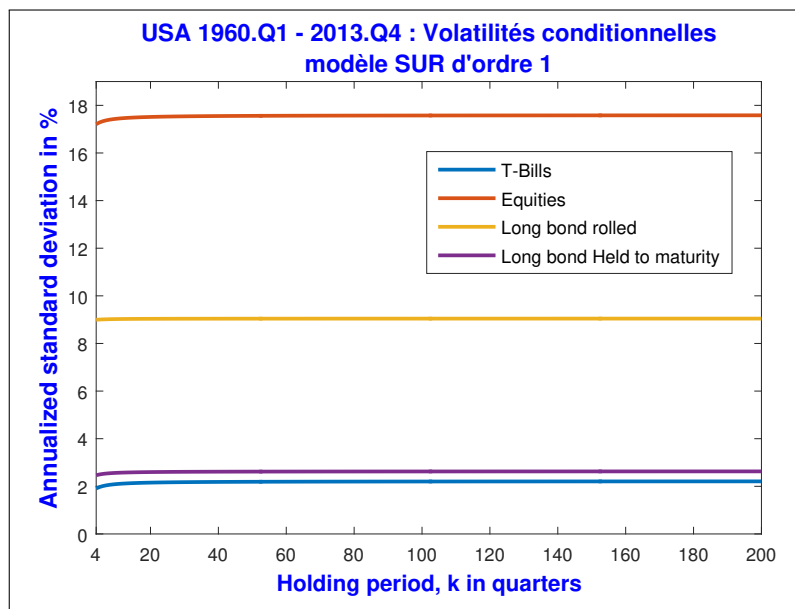


FIGURE 3.8 – États-Unis : Volatilités conditionnelles modèle diagonale

Les observations des différentes courbes nous poussent à conclure à la non-prévisibilité des différents rendements *bootstrap* des actifs lorsque les interactions entre les rendements ne sont pas capturées par le modèle. Contrairement aux estimations sur données réelles<sup>21</sup> présentées plus haut qui font apparaître, via la prise en compte des relations entre les actifs et prédicteurs, une évolution non linéaire de la volatilité selon la classe d'actifs considérée, il s'avère donc qu'en prenant en compte uniquement l'information passée d'une classe d'actifs donnée, on conclut à la non prédictibilité des marchés. On en déduit que le processus de retour vers la moyenne provient, en partie, de la corrélation des facteurs et non seulement des corrélations sérielles. Notons qu'il est évident qu'en prenant comme variable explicative des rendements sur des horizons plus longs, nous trouverions certainement des résultats sensiblement décroissants<sup>22</sup> relativement à ceux présentés sur le graphique 3.8. Cela ne serait évidemment qu'une conséquence d'une propriété stochastique de l'évolution des rendements confirmée par FAMA et FRENCH [1988b], selon laquelle le rendement des marchés actions serait négativement autocor-

21. Données dans leurs chronologie initiales.

22. C'est-à-dire *mean reverting*.

réfé sur des horizons proches de cinq ans.

### 3.5 Bilan des recherches

Cette recherche inspirée des travaux de **CAMPBELL et VICEIRA [2005]** en confirme les principaux résultats et en élargit la portée. En effet, notre analyse portant sur 4 pays symbolisant 3 continents, utilise une fenêtre d'analyse plus large (Q1.1960-Q4.2013) que celle des études précédentes et repose sur une détermination non contrainte de l'ordre des modèles VAR à partir d'un critère d'information (AIC). Toutefois, concernant les modèles de grande taille et même de taille intermédiaire, les estimations VAR sont souvent discutables dès lors que la taille de l'échantillon des données utilisées n'est pas très importante par rapport au nombre de paramètres. Afin de contourner les problèmes inhérents à la suridentification des modèles, nous avons exploré avec succès les modélisations « *Sparse VAR* » ou encore « *Subset VAR* » (sVAR) qui sont des techniques de contraction des coefficients d'une régression. Enfin, nous avons enrichi le nombre des prédicteurs, en incluant le taux de variation de la production industrielle (*ipi*) dans le vecteur des variables d'état. Il s'avère que l'estimation d'un sVAR(3) et l'ajout de la production industrielle dans les prédicteurs contribuent à une forte augmentation des coefficients de détermination par rapport aux résultats (R<sup>2</sup>) obtenus par les auteurs qui utilisent une modélisation VAR(1) et une spécification moins riche. Sur la base de nos estimations, on peut conclure que les mouvements extrêmes de prix observés sur les marchés financiers sont vraisemblablement transitoires. C'est-à-dire que la dynamique de leur prix est régie par un phénomène de **retour vers la moyenne** qui présume que les chocs sur les marchés boursiers ont un caractère éphémère et que, à plus ou moins long terme, un mouvement de sens opposé viendra corriger la déviation initiale pour rapprocher les prix des actifs de leur moyenne historique. Le verdict de notre étude qui détecte - avec des tests statistiques plus probants que dans les études antérieures - la présence de retour vers la moyenne dans le rendement des actifs risqués relativement aux autres classes d'actifs, est déterminant. En effet, la présence de *mean reversion* dans le cours des actions a des conséquences majeures sur la structure des allocations stratégiques au cours du temps. Parce qu'elle induit une autocorrélation négative des rendements, la variance des actions est moins que proportionnelle à l'horizon d'investissement, ce qui renforce l'attractivité des actions pour les investissements de long terme.

## Annexes

### 3.A Annexe 1 : écriture des modèles pour les tests Dickey-Fuller

Dynamiques possibles pour le processus à tester :

$$\lambda_t = \sum_{i=1}^{p+1} \Phi_i \lambda_{t-i} + \varepsilon_t \quad (3.48')$$

$$\lambda_t = C + \sum_{i=1}^{p+1} \Phi_i \lambda_{t-i} + \varepsilon_t \quad (3.49')$$

$$\lambda_t = C + D \times t + \sum_{i=1}^{p+1} \Phi_i \lambda_{t-i} + \varepsilon_t \quad (3.50')$$

Représentation de Sims et collab. [1990] des trois modèles ci-dessus :

$$\lambda_t = \rho \lambda_{t+1} + \sum_{i=1}^p \beta_i \Delta \lambda_{t-i} + \varepsilon_t \quad (3.48'')$$

$$\lambda_t = \alpha + \rho \lambda_{t+1} + \sum_{i=1}^p \beta_i \Delta \lambda_{t-i} + \varepsilon_t \quad (3.49'')$$

$$\lambda_t = \alpha + \delta t + \rho \lambda_{t+1} + \sum_{i=1}^p \beta_i \Delta \lambda_{t-i} + \varepsilon_t \quad (3.50'')$$

Hypothèses nulles et alternatives dans les tests Dickey-Fuller Augmenté, avec  $|\varphi| < 1$  :

$$\Delta \lambda_t = \sum_{i=1}^p \beta_i \Delta \lambda_{t-i} + \varepsilon_t \quad \text{vs} \quad \Delta \lambda_t = \varphi \lambda_{t-1} + \sum_{i=1}^p \beta_i \Delta \lambda_{t-i} + \varepsilon_t \quad (3.48)$$

$$\Delta \lambda_t = \alpha + \sum_{i=1}^p \beta_i \Delta \lambda_{t-i} + \varepsilon_t \quad \text{vs} \quad \Delta \lambda_t = \varphi \lambda_{t-1} + \sum_{i=1}^p \beta_i \Delta \lambda_{t-i} + \varepsilon_t \quad (3.49)$$

$$\Delta \lambda_t = \alpha + \sum_{i=1}^p \beta_i \Delta \lambda_{t-i} + \varepsilon_t \quad \text{vs} \quad \Delta \lambda_t = \alpha + \delta t + \varphi \lambda_{t-1} + \sum_{i=1}^p \beta_i \Delta \lambda_{t-i} + \varepsilon_t \quad (3.50)$$

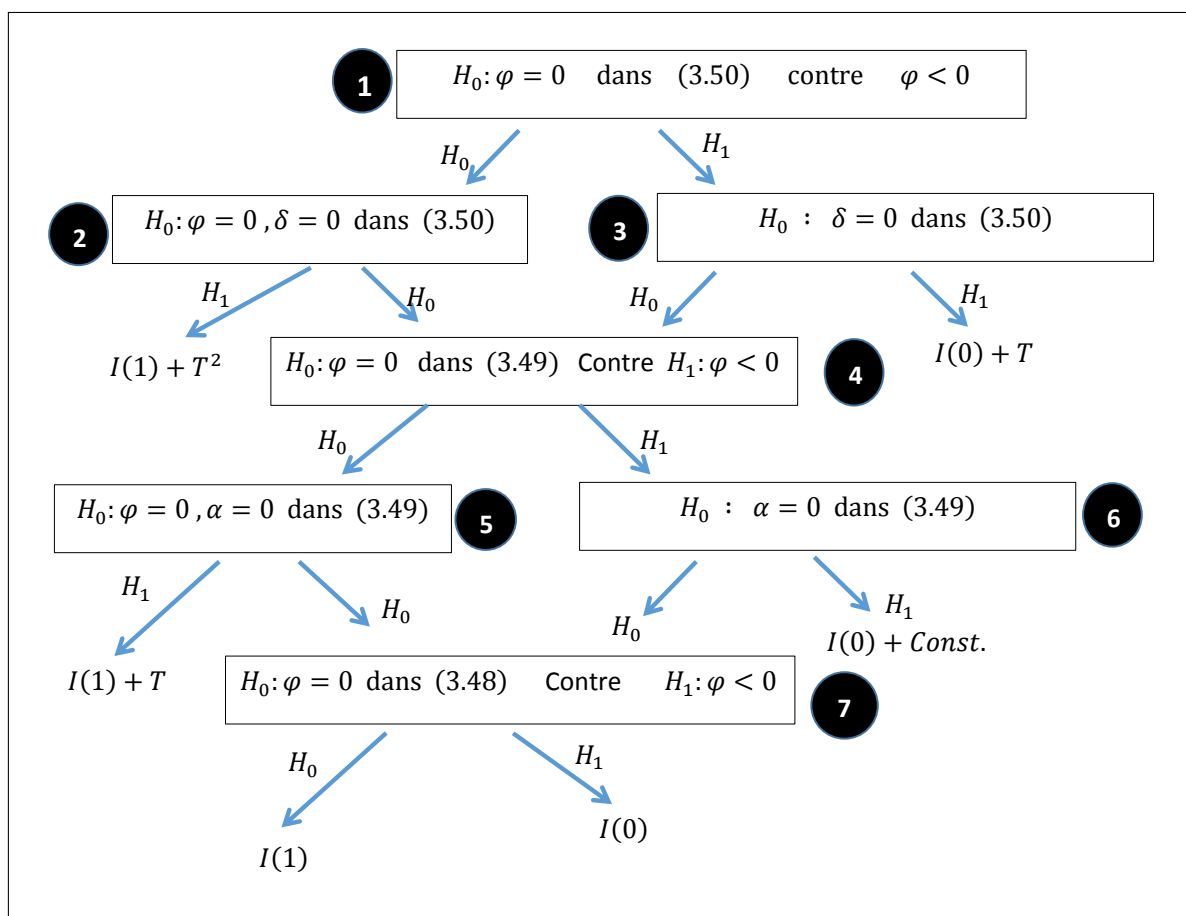


FIGURE 3.9 – Stratégies de tests ADF



### 3.B Annexe 2 : Évolutions des écart-types conditionnels et encadrements

#### - le cas des autres pays

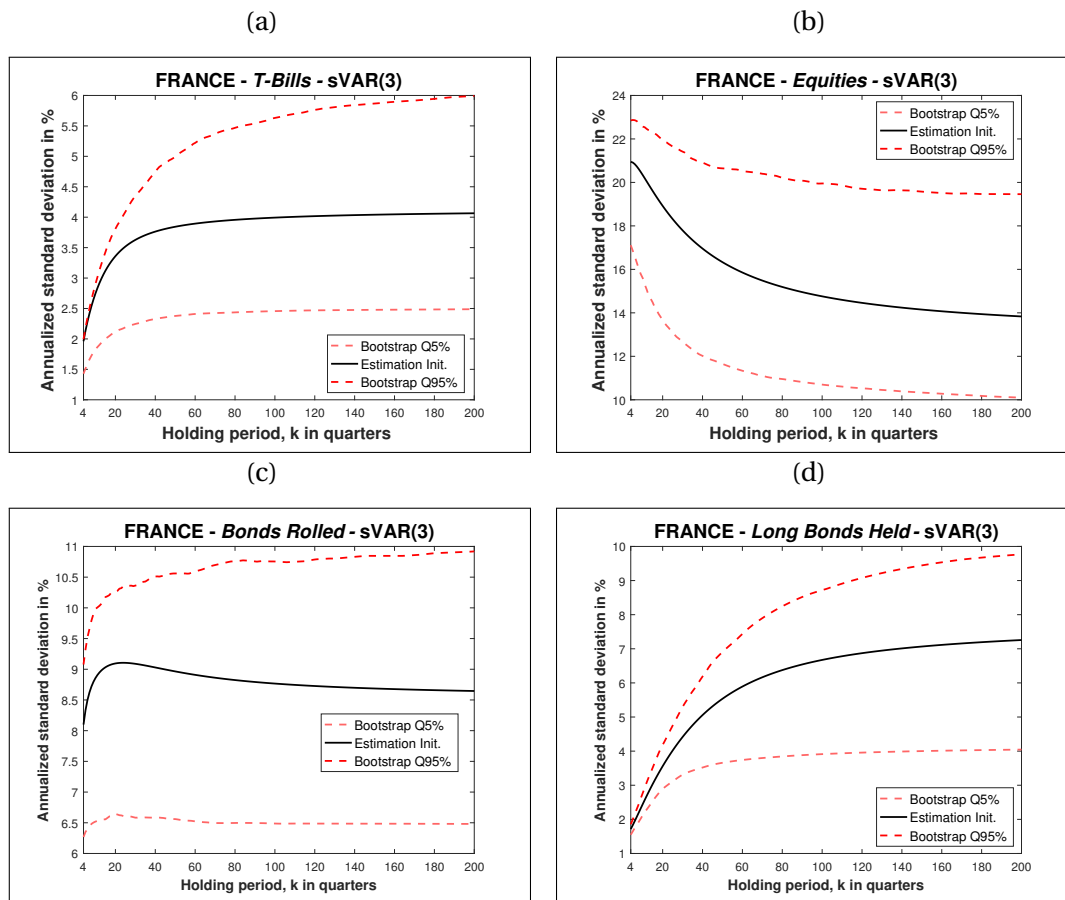


FIGURE 3.10 – France - encadrement des écart-types conditionnels

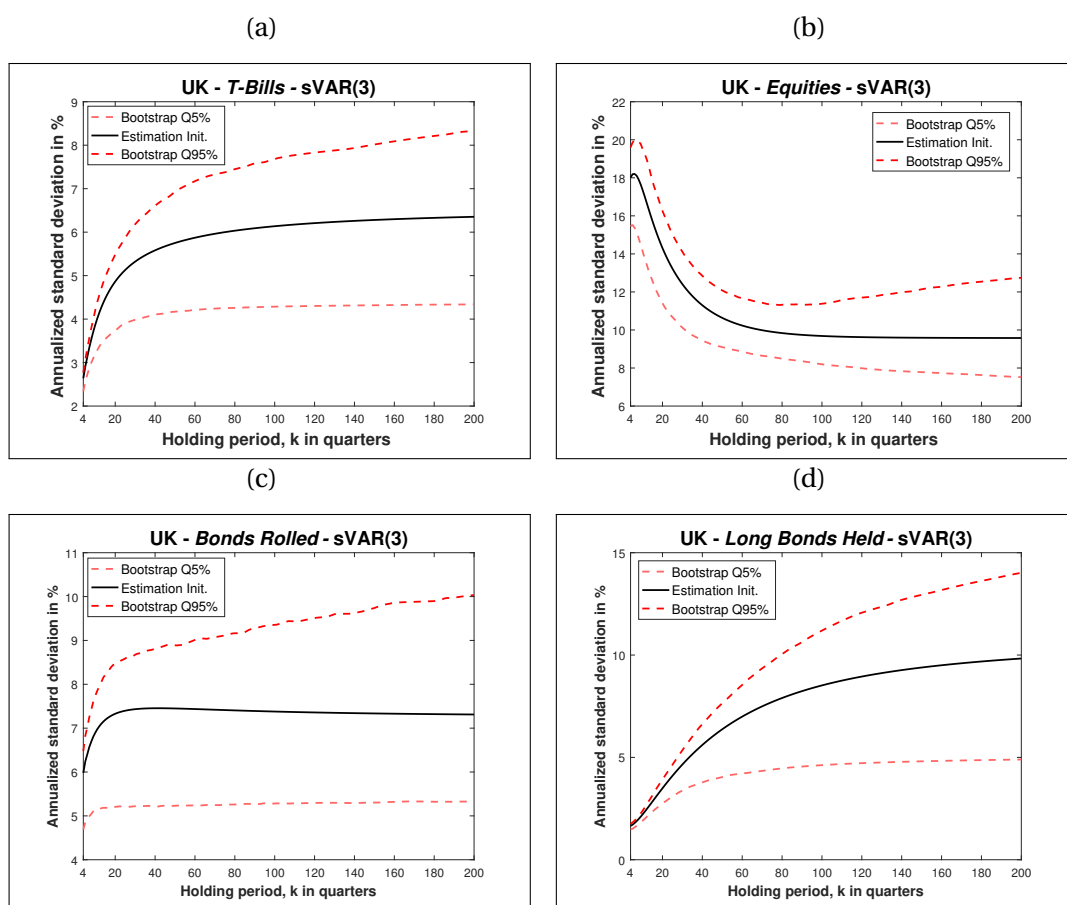


FIGURE 3.11 – UK - encadrement des écart-types conditionnels

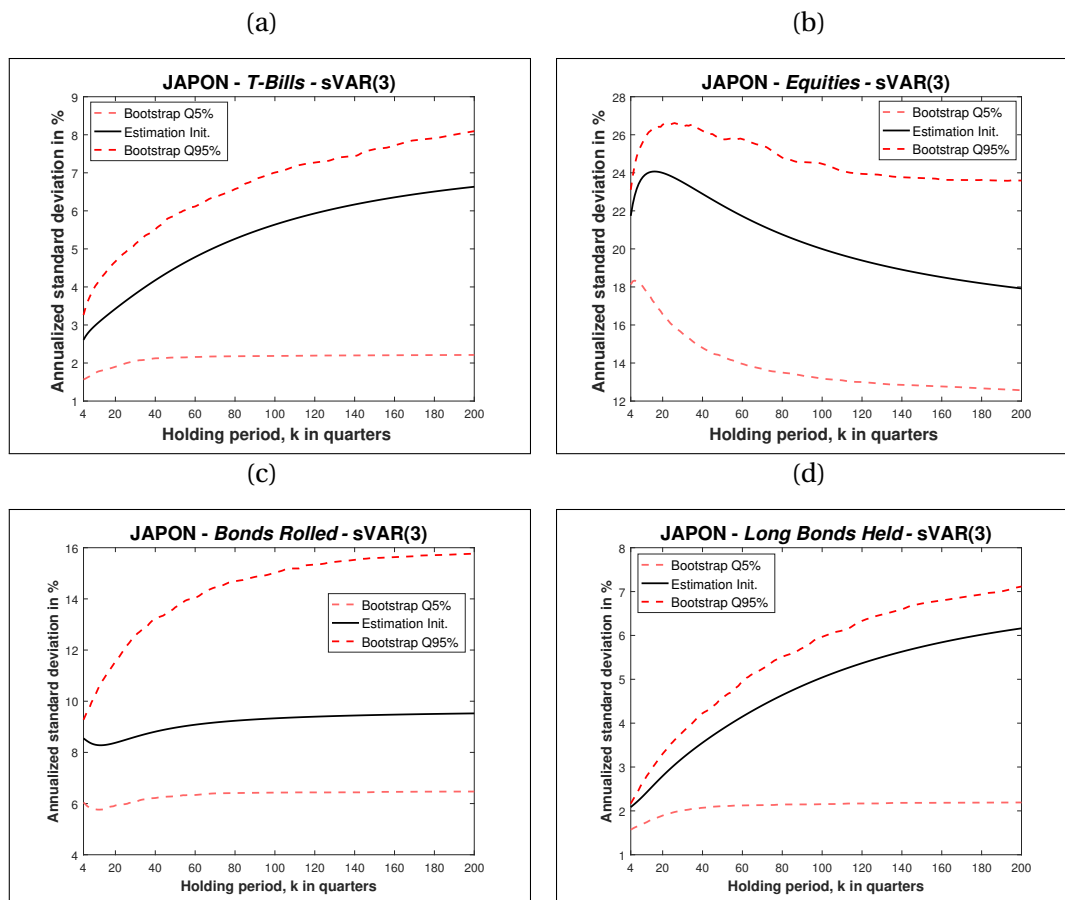


FIGURE 3.12 – Japon - encadrement des écart-types conditionnels

### 3.C Annexe 3 : autres résultats des estimations

#### Tests de co-intégration de Johansen

TABLEAU 3.34 – Test classique de cointégration : États-Unis

USA Johansen test for VAR(3)					
rang	Hypothèse	stat.	cValue	pValue	eigVal
0	1	1266,694	150,553	0,001	0,957
1	1	594,025	117,710	0,001	0,747
2	1	300,017	88,804	0,001	0,474
3	1	162,367	63,877	0,001	0,413
4	1	48,488	42,915	0,013	0,129
5	<b>0</b>	18,913	25,872	0,316	0,063
6	<b>0</b>	4,990	12,517	0,636	0,023

*Seuil de signification : 5%*

TABLEAU 3.35 – Test classique de cointégration : JAPON

JAPAN Johansen test for VAR(3)					
rang	Hypothèse	stat.	cValue	pValue	eigVal
0	1	907.7341	150.553	0.10%	0.7499
1	1	611.1925	117.7103	0.10%	0.6922
2	1	359.015	88.8042	0.10%	0.4645
3	1	225.3533	63.8766	0.10%	0.4299
4	1	105.0812	42.9154	0.10%	0.3432
5	0	15.1359	25.8723	58.74%	0.0543
6	0	3.1886	12.5174	85.33%	0.0148

*Seuil de signification : 5%*

TABLEAU 3.36 – Test classique de cointégration : Royaume-Uni

<b>UK Johansen test for VAR(3)</b>					
<b>rang</b>	<b>Hypothèse</b>	<b>stat.</b>	<b>cValue</b>	<b>pValue</b>	<b>eigVal</b>
0	1	967.9417	150.553	0.001	0.8658
1	1	538.194	117.7103	0.001	0.6
2	1	342.1283	88.8042	0.001	0.4837
3	1	200.641	63.8766	0.001	0.3932
4	1	93.7456	42.9154	0.001	0.2546
5	1	30.8717	25.8723	0.0111	0.0782
6	1	13.4376	12.5174	0.035	0.0609
<i>Seuil de signification : 5%</i>					

TABLEAU 3.37 – Test classique de cointégration : FRANCE

<b>FRANCE Johansen test for VAR(3)</b>					
<b>rang</b>	<b>Hypothèse</b>	<b>stat.</b>	<b>cValue</b>	<b>pValue</b>	<b>eigVal</b>
0	1	880.8665	150.553	0.10%	0.826
1	1	506.6516	117.7103	0.10%	0.6759
2	1	265.5477	88.8042	0.10%	0.4728
3	1	128.5318	63.8766	0.10%	0.3375
4	0	40.4271	42.9154	8.69%	0.0881
5	0	20.7018	25.8723	19.27%	0.0596
6	0	7.5534	12.5174	33.42%	0.0347
<i>Seuil de signification : 5%</i>					

**Détermination bootstrap du rang de co-intégration**

TABLEAU 3.38 – Etats-Unis : Test de détermination du rang de co-intégration par Bootstrap

Bootstrap determination of the co-integration rank in VAR (USA case)						
rang	Nombre	Stat.	pValue	Nb de fois où	p-Value	Résultat **
	de tests	Initiale	initiale	H0 est OK *	empirique	bootstrap
0	500	1266,69417	0,10%	0	0,00%	H1
1	500	594,024802	0,10%	0	0,00%	H1
2	500	300,0166	0,10%	0	0,00%	H1
3	500	162,366987	0,10%	0	0,00%	H1
4	500	48,4879775	1,28%	1	1,00%	H1
5	500	18,9127761	31,64%	30	34,00%	H0
6	500	4,98976101	63,56%	60	65,00%	H0

\* Note : C'est le nombre de fois où la statistique bootstrap est supérieure à la statistique initiale (voir CAVALIERE et collab. [2012]). \*\* Égale à H0 si pValue empirique > 5,0%

**CHAPITRE 3. CONVERGENCE OU EFFICIENCE : DÉBAT SUR LA  
DYNAMIQUE DES COURS DE MARCHÉS BOURSIERS**

TABLEAU 3.39 – Japon : Test de détermination du rang de co-intégration par Bootstrap

<b>Bootstrap determination of the co-integration rank in VAR (JAPAN Case)</b>						
rang	Nombre	Stat.	pValue	Nb de fois où	p-Value	Résultat **
	de tests	Initiale	initiale	H0 est OK *	empirique	bootstrap
0	500	907,7341	0,10%	0	0,00%	H1
1	500	611,1925	0,10%	0	0,00%	H1
2	500	359,015	0,10%	0	0,00%	H1
3	500	225,3533	0,10%	0	0,00%	H1
4	500	105,0812	0,10%	0	0,00%	H1
5	500	15,1359	58,74%	280	56,00%	H0
6	500	3,1886	85,33%	420	84,00%	H0

\* Note : C'est le nombre de fois où la statistique bootstrap est supérieure à la statistique initiale (voir CAVALIERE et collab. [2012]). \*\* Égale à H0 si pValue empirique > 5,0%

TABLEAU 3.40 – Royaume-Uni : Test de détermination du rang de co-intégration par Bootstrap

<b>Bootstrap determination of the co-integration rank in VAR (UK Case)</b>						
rang	Nombre	Stat.	pValue	Nb de fois où	p-Value	Résultat **
	de tests	Initiale	initiale	H0 est OK *	empirique	bootstrap
0	500	967,9417	0,10%	0	0,00%	H1
1	500	538,194	0,10%	0	0,00%	H1
2	500	342,1283	0,10%	0	0,00%	H1
3	500	200,641	0,10%	0	0,00%	H1
4	500	93,7456	0,10%	0	0,00%	H1
5	500	30,8717	1,11%	71	14,20%	H0
6	500	13,4376	3,50%	385	77,00%	H0

\* Note : C'est le nombre de fois où la statistique bootstrap est supérieure à la statistique initiale (voir CAVALIERE et collab. [2012]). \*\* Égale à H0 si pValue empirique > 5,0%

TABLEAU 3.41 – France : Test de détermination du rang de co-intégration par Bootstrap

Bootstrap determination of the co-integration rank in VAR (France case)						
rang	Nombre	Stat.	pValue	Nb de fois où	p-Value	Résultat **
	de tests	Initiale	initiale	H0 est OK *	empirique	bootstrap
0	500	880,8665	0,10%	0	0,00%	H1
1	500	506,6516	0,10%	0	0,00%	H1
2	500	265,5477	0,10%	0	0,00%	H1
3	500	128,5318	0,10%	0	0,00%	H1
4	500	40,4271	8,69%	0	0,00%	H1
5	500	20,7018	19,27%	270	54,00%	H0
6	500	7,5534	33,42%	440	88,00%	H0

\* Note : C'est le nombre de fois où la statistique bootstrap est supérieure à la statistique initiale (voir CAVALIERE et collab. [2012]). \*\* Égale à H0 si pValue empirique > 5,0%





## Chapitre 4

# Processus de retour vers la moyenne des marchés boursiers et mesure de la demi-vie

*« A long terme nous serons tous  
morts »*

---

John Maynard Keynes

## Sommaire

---

<b>4.1 Introduction</b> . . . . .	<b>211</b>
<b>4.2 Modélisation et estimation de la demi-vie</b> . . . . .	<b>213</b>
4.2.1 Des estimations fortement dépendantes des choix méthodologiques	213
4.2.2 Retour vers la moyenne et processus d'Ornstein-Uhlenbeck . . . . .	216
4.2.3 Le choix d'un « <i>Trending Ornstein-Uhlenbeck process</i> » . . . . .	221
4.2.4 Les méthodes d'estimation . . . . .	228
4.2.5 Les biais des procédures d'estimation des demi-vies . . . . .	234
<b>4.3 Une mesure empirique de la demi-vie sur les marchés financiers</b> . . . . .	<b>249</b>
4.3.1 Le choix de la procédure d'estimation . . . . .	249
4.3.2 Les données . . . . .	254
4.3.3 Les résultats des estimations empiriques . . . . .	255
<b>4.4 Elements de conclusion</b> . . . . .	<b>266</b>
<b>Annexes</b> . . . . .	<b>267</b>
4.A Estimateur point col de la densité de probabilité de la vitesse dans un processus AR(1) . . . . .	267
4.B Estimateur MUE de la médiane sans biais « median unbiased esti- mator » . . . . .	270
4.C Méthode d'estimation de la vitesse dans un OU processus par les MCO avec la MUE « median unbiased estimator » . . . . .	271

---

## 4.1 Introduction

A la suite de Krach boursiers, certains théoriciens ont tenté d'expliquer le **retour vers la moyenne** des marchés en des délais « raisonnables » par l'existence de forces de rappel associées à la dynamique des prix, tandis que d'autres ont continué à soutenir l'hypothèse d'efficience de marchés financiers ( **EMH** ). Les études empiriques et statistiques menées dans les premiers développements de notre thèse ont détecté des preuves en faveur de l'existence de **retour vers la moyenne** dans le cours des marchés actions ce qui justifie corrélativement les stratégies basées sur la **diversification temporelle**. Cependant, un point est d'identifier l'existence de *mean reversion* dans le processus qui régit les prix, un autre, tout aussi fondamental, est d'évaluer la force du mécanisme. En effet, dans le cas où la vitesse de retour vers la moyenne apparaîtrait disproportionnée au regard de la durée d'épargne d'un agent, le phénomène ne conduirait pas à des allocations stratégiques d'actifs significativement différentes que celles déterminées dans le cadre de l'**EMH**. Au-delà de la détection de mécanismes de convergence dans la dynamique des prix, il est donc essentiel d'évaluer la vitesse de cette convergence. Cette information, complexe à mesurer en raison de son instabilité dans le temps (*time varying*), est traditionnellement estimée par la demi-vie du processus, soit la durée moyenne du temps nécessaire pour que l'écart entre le prix de marché et sa valeur fondamentale soit résorbée de moitié. Plus formellement, en économétrie, la demi-vie d'un processus stochastique est la durée de temps  $h$  qu'il faut au processus pour que la valeur de sa réponse impulsionnelle en  $t + h$  due à un choc apparu en  $t$  soit diminuée de moitié. Contrairement à son acception dans d'autres domaines scientifiques comme en sciences physiques, la réponse impulsionnelle après un choc ne se résorbe pas toujours de manière monotone. L'objectif de ce chapitre est d'estimer les demi-vies des chroniques boursières dans quatre pays (Etats-Unis, France, Japon et Royaume-Uni) afin de juger du niveau de convergence et de stabilité des vitesses de retour vers la moyenne dans des pays caractérisés par des systèmes de production différents.

Cette estimation, complexe, prolonge notre immersion dans les techniques économétriques appliquées à la finance et retarde d'autant plus la phase d'analyse des relations entre retraite et risques financiers. La modélisation de la demi-vie est néanmoins une

étape incontournable pour paramétrer la vitesse de retour vers la moyenne dans la spécification de la dynamique du prix des actifs risqués que nous souhaitons intégrer dans un modèle démo-économique afin d'évaluer le risque associé à l'utilisation des revenus du capital pour financer les retraites. Il s'avère que, dans l'ensemble des pays étudiés, les cours boursiers convergent vers leurs tendances de long terme en un temps raisonnable. En comparant les indices boursiers de quatre pays développés (États-Unis, Royaume-Uni, France et Japon) sur la période 1950-2014, nous établissons une vitesse de convergence significative, avec une demi-vie entre 4.0 et 5.8 ans.

## 4.2 Modélisation et estimation de la demi-vie

### 4.2.1 Des estimations fortement dépendantes des choix méthodologiques

Il est courant au plan académique de supposer l'absence de [retour vers la moyenne](#) sur les marchés actions. Du moins, cela est implicitement admis, comme l'attestent les hypothèses gaussiennes qui sont faites de manière courante dans les échanges de titres sur les marchés. Cependant, dans le sillage des travaux de [POTERBA et SUMMERS \[1988\]](#) et [FAMA et FRENCH \[1988b\]](#), un certain nombre d'auteurs se sont intéressés aux conséquences de l'existence d'une vitesse de retour vers la moyenne non-nulle dans la gestion de portefeuilles financiers.

Les conclusions des études relatives à l'estimation des demi-vies sur les marchés actions montrent généralement que la prise en compte de la prédictibilité des cours permettrait aux investisseurs d'accroître leur espérance de rendement en déterminant des stratégies d'allocations qui surperforment le marché ([AKARIM et SEVIM \[2013\]](#)). Ce type de travaux vient contredire l'hypothèse d'efficience.

Pour [SPIERDIJK et BIKKER \[2012\]](#), les vertus du retour vers la moyenne sur la rentabilité des placements devraient pousser les investisseurs de long terme à évaluer le degré de [mean reversion](#) des marchés. Cependant, si l'existence de retour vers la moyenne semble démontrée, la littérature ne nous permet pas d'être fixée sur la vitesse de retour vers la moyenne tant les estimations sont divergentes d'un auteur à l'autre. [SPIERDIJK et BIKKER \[2012\]](#) reconnaissent toutefois que la littérature financière peine à démontrer efficacement l'existence de ce phénomène.

On trouve, par exemple, des contradictions dans les conclusions d'un même auteur dans le temps. Ainsi, [SERLETIS et collab. \[2008\]](#) établissent en utilisant la méthode DFA « *Detrended Fluctuation Analysis* » sur des observations journalières du « *Dow Jones Industrial Average* » (sur une fenêtre de Janvier 1928 à Mars 2006) que les marchés actions aux Etats-Unis sont compatibles à l'hypothèse d'efficience. Un an plus tard, [SERLETIS et ROSENBERG \[2009\]](#) présentent une version révisée de leur précédente étude sur une pé-

riode allant de Février 1971 à Décembre 2006. Les séries sont détrendées à partir d'une approche élaborée de physique statistique dite DMA<sup>1</sup> pour « *Detrending Moving Average* ». Les auteurs détectent la présence d'« anti-persistance » dans les chroniques étudiées et concluent à l'existence de retour vers la moyenne dans le prix des actions.

L'hétérogénéité des mesures est également patente parmi les auteurs utilisant la même méthodologie appliquée aux marchés financiers des mêmes pays. A ce titre, on pourrait par exemple citer **SPIERDIJK et collab. [2012]** qui, dans une réplique des travaux de **BALVERS et collab. [2000]**, déterminent une demi-vie de 18.5 ans, alors que Balvers estime une valeur moyenne de la demi-vie de 3.5 ans.

On peut encore mentionner les travaux de **SAUER et CHEN [1996]** qui, s'appuyant sur la méthodologie de **FAMA et FRENCH [1988b]**, ne décèlent pas de processus de retour vers la moyenne sur le FTSE « footsie » au Royaume-Uni sur la période 1919-1990. En revanche, ils concluent à l'existence de « *mean reversion* » lorsque l'historique de l'indice est scindé en deux en fonction des périodes de guerres mondiales, soit la même conclusion que **KIM et collab. [1991]** selon laquelle le phénomène de retour vers la moyenne serait lié à un effet de rattrapage consécutif aux périodes de guerres mondiales.

Traditionnellement, la mesure de la force de rappel est fondée sur une représentation simple du processus d'évolution du cours du marché, comme un processus autorégressif stationnaire d'ordre un ou d'un processus d'Ornstein-Uhlenbeck. Cependant, les études récentes identifient différents biais qui conditionnent la qualité de l'estimation de la vitesse de concentration des rendements et tentent de les corriger.

Par exemple, **BALVERS et collab. [2000]**, **AKARIM et SEVIM [2013]** utilisent le MSCI World comme indice de référence. Le fait de tester les écarts d'une chronique boursière par rapport à un indice de référence permet d'éviter l'étape de spécification de la composante fondamentale (ou permanente) du prix des actions. Par ailleurs, l'estimation sur les don-

---

1. C'est une amélioration de l'approche DFA citée plus haut, voir **CARBONE [2009]** pour plus d'information

nées de Panel est généralement privilégiée parce qu'elle permet d'utiliser les variations croisées de différents cours et augmente la puissance statistique des tests de retour vers la moyenne sur des échantillons courts.

Considérons les modèles d'évolution autorégressifs stationnaires suivants :

$$p_t = \phi p_{t-1} + \varepsilon_t, \text{ d'espérance nulle} \quad (4.1)$$

$$p_t = c + \phi p_{t-1} + \varepsilon_t, \text{ d'espérance non-nulle} \quad (4.2)$$

La formule d'estimation de la demi-vie couramment utilisée dans la littérature pour le cas de processus de prix autorégressifs stationnaires  $p_t$  tels que décrits ci-dessus a pour expression  $hl = -\ln(2)/\ln(\phi)$ . Cette formulation n'est valide que lorsque le coefficient de persistance du processus  $\phi$ , les innovations, et la constante dans le cas du processus décrit par l'équation (4.2) remplissent les conditions suivantes :

$$0 < \phi < 1; \quad c \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \varepsilon_t \stackrel{iid}{\rightarrow} \mathcal{N}(0, \sigma_\varepsilon)$$

On sait que le processus AR(1) décrit admet une représentation moyenne mobile infinie donnée par l'expression :

$$p_t = \frac{c}{(1-\phi)} + \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j} \quad (4.3)$$

Les coefficients  $\psi_j$  du processus dans cette écriture sont définis comme des réponses impulsionnelles. Soit  $\psi_0 = 1$  et  $\varepsilon$  un bruit blanc, la demi-vie est quantifiée par la durée  $hl$  telle qu'on ait  $\psi_{hl} = 1/2$ . C'est-à-dire la durée qu'il faut au processus pour absorber de moitié le choc  $\varepsilon_t$  subit en  $t$  (le temps avec lequel l'amplitude du choc atteint 50% de sa valeur). Dans le cas d'un AR(1) on a  $\psi_j = \phi^j$ , d'où :  $\psi_{hl} = 1/2 \Leftrightarrow \phi^{hl} = 1/2$  Soit encore :

$$hl = \frac{\ln(0.5)}{\ln(\phi)} \quad (4.4)$$

A l'aide des chroniques de cours sur longues périodes provenant de la base de données « Global Financial Data », nous procédons à des estimations de la vitesse de retour vers la moyenne pour les marchés boursiers de quatre pays différents répartis sur trois



continents : les Etats-Unis, la France, le Royaume-Uni et le Japon.

Pour tester l'hypothèse d'efficience des marchés, l'économétrie a eu besoin d'associer un modèle probabiliste à la dynamique des prix, la référence privilégiée dans le milieu académique au cours des précédentes décennies est le modèle de marche aléatoire. En effet, les divers articles à l'origine du concept d'efficience, de BACHELIER [1900] à FAMA [1965] et FAMA [1970] ou encore SAMUELSON [1965], reposent sur l'hypothèse d'un marché sans opportunité d'arbitrage. Les cours sont assimilés à une marche aléatoire dépourvue de tendance, haussière comme baissière, dont les observations à chaque instant sont égales aux espérances des valeurs futures. Ainsi, le concept d'efficience des marchés, qui s'explique par le caractère rationnel des agents, est joint au modèle de marche aléatoire et n'admet pas de retour des prix vers une valeur fondamentale, puisque à chaque temps  $t$  toute nouvelle information impacte les cours et détermine un nouveau prix d'équilibre. Il en découle que le test d'efficience (FAMA 1970 et 1976) ne peut être réalisé sans faire au préalable (explicitement ou implicitement) une hypothèse alternative, sur la dynamique des cours. Par conséquent, le risque du test est assujéti à l'hypothèse faite sur le processus qui régit les prix.

### 4.2.2 Retour vers la moyenne et processus d'Ornstein-Uhlenbeck

La présence de retour vers la moyenne est délicate à détecter dans les séries de prix. En effet, le mécanisme n'est pas propre à une seule dynamique, mais à une classe de processus statistiques dont le plus simple à analyser est le processus en temps continu dit d'Ornstein-Uhlenbeck (OU en abrégé). Ce processus de retour vers la moyenne répond à la dynamique donnée par l'équation différentielle stochastique suivante :

$$dp_t = \kappa(\mu - p_t)dt + \sigma dW_t \quad (4.5)$$

Où  $\kappa > 0$  et  $W_t$  est un processus de Wiener. Pour résoudre l'équation, on pose  $f = p_t e^{\kappa t}$ , d'où  $\frac{\partial f}{\partial t} = \kappa p_t e^{\kappa t}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial p_t} = e^{\kappa t}$  et  $\frac{\partial^2 f}{\partial p_t^2} = 0$ . Ce qui conduit à l'application du lemme d'Itô de la formule  $df = \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial p_t} dp_t + \frac{\partial^2 f}{\partial p_t^2} dp_t^2$  telle que  $df = \kappa_t e^{\kappa t} dt + e^{\kappa t} dp_t$ , qui nous donne :

$$d(p_t e^{\kappa t}) = \kappa p_t e^{\kappa t} dt + e^{\kappa t} (\kappa(\mu - p_t) dt + \sigma dW_t) \quad (4.6)$$

$$d(p_t e^{\kappa t}) = \kappa \mu e^{\kappa t} dt + \sigma e^{\kappa t} dW_t \quad (4.7)$$

Par intégration entre 0 et  $t$ , nous avons :

$$p_t e^{\kappa t} - p_0 = \int_0^t \kappa \mu e^{\kappa s} ds + \int_0^t \sigma e^{\kappa s} dW_s \quad (4.8)$$

Soit encore :

$$p_t = p_0 e^{-\kappa t} + e^{-\kappa t} \int_0^t \kappa \mu e^{\kappa s} ds + \int_0^t \sigma e^{\kappa(s-t)} dW_s \quad (4.9)$$

Après simplification de l'intégrale de Lebesgue, la solution de l'EDS ci-dessus est donnée par la formule suivante :

$$p_t = e^{-\kappa t} p_0 + \mu(1 - e^{-\kappa t}) + \int_0^t \sigma e^{\kappa(s-t)} dW_s \quad (4.10)$$

De laquelle se déduisent les quantités suivantes :

$$\mathbb{E}(p_t) = e^{-\kappa t} p_0 + \mu(1 - e^{-\kappa t}), \text{ d'où } \lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(p_t) = \mu \quad (4.11)$$

$$\mathbb{V}(p_t) = \frac{\sigma^2}{2\kappa} (1 - e^{-2\kappa t}), \text{ d'où } \lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbb{V}(p_t) = \frac{\sigma^2}{2\kappa} \quad (4.12)$$

Ainsi, le coefficient  $\kappa$  représente la vitesse d'ajustement, ou le taux de retour vers la moyenne, et la quantité  $\mu$  représente la cible de long terme. Plus  $\kappa$  est grand, plus les déviations autour de  $\mu$  sont absorbées rapidement. On représente par  $\sigma$  l'écart-type des chocs qui sont modélisés par un mouvement brownien  $W_t$ . L'amplitude moyenne des fluctuations autour de  $\mu$  est conditionnée par la valeur de la vitesse  $\kappa$  et de l'écart-type  $\sigma$ , soit - à long terme - la quantité suivante  $\frac{\sigma^2}{2\kappa}$ . Si on considère les horizons longs, cela correspond à la durée nécessaire au processus pour que l'amplitude de la déviation à la tendance de long terme causée par un choc au temps  $t$ , quantifié par  $p_t - \mu$ , soit réduite de moitié, formellement on a :  $p_t^{t+hl} - \mu = \frac{1}{2}(p_t - \mu)$ . En effet, en omettant le terme stochastique, on obtient en  $t$  l'écart à la tendance de long terme :  $p_t - \mu = (p_0 - \mu)e^{-\kappa t}$ . Le problème consiste alors à estimer le laps de temps  $hl$  tel que l'écart à la valeur précédente diminue

de moitié. Soit :

$$(p_0 - \mu)e^{-k(t+hl)} = \frac{1}{2}(p_0 - \mu)e^{-\kappa t} \quad (4.13)$$

La demi-vie du processus est donnée par :

$$hl = \frac{\ln(2)}{\kappa} \quad (4.14)$$

On notera que lorsque l'objectif est d'estimer la demi-vie du retour vers la moyenne d'une série, il est courant de s'appuyer uniquement sur l'écriture autorégressive du processus stationnaire des prix, bien que l'expression de la dynamique de retour décrite par l'équation d'Ornstein-Uhlenbeck - qui représente la version continue du modèle d'évolution des prix - soit plus intéressante sur le plan analytique.

Par conséquent, la mesure du retour vers la moyenne est souvent directement liée à l'évaluation du degré de persistance des chocs sur la série des prix, ce qui revient à estimer le coefficient  $\phi$  dans l'équation (4.1). L'écriture autorégressive stationnaire du processus converge vers la formulation (4.10) en temps continu si l'on considère des subdivisions fines du temps  $h = \delta t$ . Le passage de l'une vers l'autre se fait juste par conversion des paramètres. Sur la fenêtre de temps  $[0, T]$ , si on considère une échelle de temps  $h$  à haute fréquence pour les observations, alors l'écriture autorégressive de (4.1) vers (4.10) est donnée par les conversions suivantes :

$$p_{th} = c + \phi p_{(t-1)h} + \varepsilon_{th} \quad (4.15)$$

On a  $n = \frac{T}{h}$  observations au total sur l'ensemble du temps  $(0, h, 2h, \dots, nh)$ . Et :

$$c = \mu(1 - e^{-\kappa h}), \phi = e^{-\kappa h}, \text{ et } \varepsilon_{th} = \sigma \int_{(t-1)h}^{th} e^{-\kappa(th-s)} dW_s$$

Par conséquent, on montre que l'estimateur des MCO de la persistance  $\hat{\phi}$  dans l'écriture autorégressive d'ordre un du processus permet de donner une estimation de la vitesse de retour vers la moyenne dans l'écriture du processus d'Ornstein-Uhlenbeck. Soit une vitesse estimée de :

$$\hat{\kappa} = -\frac{\ln(\hat{\phi})}{h} \quad (4.16)$$

Cependant, même si la série des rendements des actions correspond à celle des incréments du processus d'Ornstein-Uhlenbeck, on peut montrer que le logarithme des prix ne suit pas une dynamique conforme à l'écriture classique de retour vers la moyenne donnée par Ornstein-Uhlenbeck. Les représentations graphiques des évolutions du cours des marchés boursiers tendent à montrer qu'à long terme, les marchés boursiers sont portés par une tendance linéaire. Cette conclusion plaide en faveur d'une origine déterministe des tendances observées sur les marchés, fonction de la croissance économique au fil des décennies.

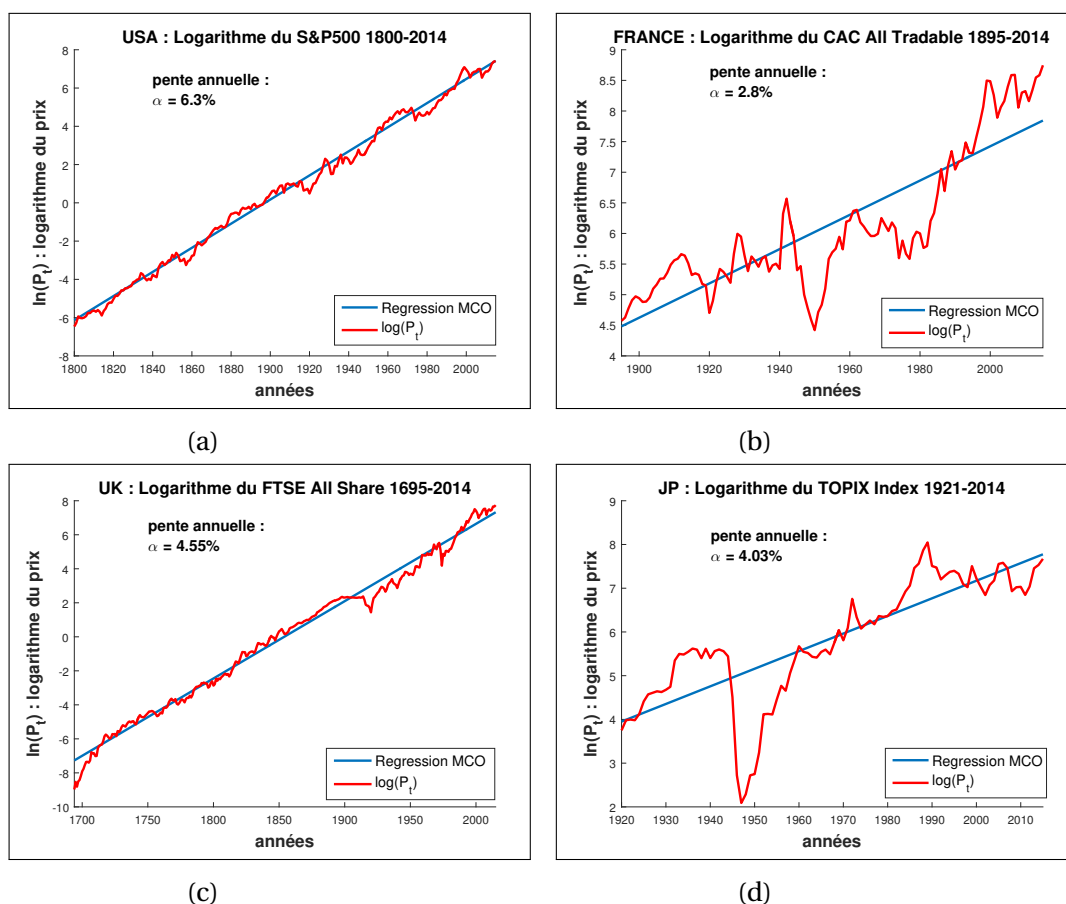


FIGURE 4.1 – Évolution du logarithme du prix des actions

Partant de cette remarque, nous nous sommes intéressés à la littérature récente qui essaye de prendre en considération cette limitation de l'expression classique d'Ornstein-Uhlenbeck pour modéliser l'évolution stationnaire du logarithme des prix de marchés boursiers autour d'une tendance croissante à très long terme. Dans la lignée des travaux de [GRUNDY \[1991\]](#), [METCALF et HASSETT \[1995\]](#), [LO et WANG \[1995\]](#), nous avons retenu la modélisation de [THIERFELDER \[2015\]](#) qui envisage une dynamique de retour vers la

moyenne autour d'un trend pour le prix des actions.

### 4.2.3 Le choix d'un « *Trending Ornstein-Uhlenbeck process* »

Pour prendre en compte le caractère linéaire<sup>2</sup> de l'évolution du log des prix au cours du temps, les travaux de Thierfelder spécifient une modélisation « tendancielle » du processus d'Ornstein-Uhlenbeck (« *trending OU process* »). Comme dans le cas du processus d'Ornstein-Uhlenbeck standard, la cible de long terme  $\mu$  est constante au court du temps. Cela peut être généralisé à un processus à trend linéaire  $\mu t$  :

$$d(p_t - \mu t) = -\kappa(p_t - \mu t)dt + \sigma dW_t \quad (4.17)$$

On constate sous cette écriture que le taux de retour du processus vers sa tendance  $\mu t$  est proportionnel à l'intensité de la déviation, avec la vitesse d'ajustement  $\kappa$ . Remarquons que le processus hors tendance  $\tilde{p}_t = p_t - \mu t$  est un processus d'Ornstein-Uhlenbeck classique ayant pour cible de long terme une constante égale à 0, telle qu'on ait :  $d\tilde{p}_t = -\kappa\tilde{p}_t dt + \sigma dW_t$ . Contrairement à un mouvement brownien ou à une marche aléatoire qui sont des processus à « différences stationnaires » (DS) ou encore des processus à « tendance stochastique », le processus d'Ornstein-Uhlenbeck avec tendance est un processus à « tendance stationnaire » (TS). Son équation différentielle stochastique est la suivante :

$$dp_t = (\mu - \kappa(p_t - \mu t))dt + \sigma dW_t \quad (4.18)$$

Partant de la condition initiale  $p_{t=0} = p_0$ , on détermine la solution suivante :

$$p_t = \mu t + p_0 e^{-\kappa t} + \sigma \int_0^t e^{\kappa(s-t)} dW_s \quad (4.19)$$

On note que lorsque la vitesse tend vers zéro, le processus avec tendance linéaire d'Ornstein-Uhlenbeck tend vers un mouvement brownien arithmétique. Cependant, comme le rappelle Thierfelder, les simulations montrent que pour des valeurs de  $\kappa$  proches de zéro, l'écart entre la trajectoire d'un mouvement brownien arithmétique et celle d'un trending OU process reste non-négligeable. Comme on peut le voir sur la figure 4.2 ci-dessous<sup>3</sup>, le

---

2. La linéarité se révèle sur l'évolution de long terme, voir graphiques 4.1 pour les évolutions des marchés actions

3. Remarquons que, pour faciliter la comparaison, les réalisations du processus brownien sont les mêmes sur chacune des trajectoires ci-dessus. L'espérance de l'écart entre les deux processus peut être estimée par la quantité :  $|p_0(e^{-\kappa t} - 1)|$ . Cette écart croît avec le temps pour s'établir à  $|p_0|$  lorsque  $t$  est très

mouvement brownien arithmétique n'est approché par le trending OU process que pour des valeurs extrêmement faibles de la vitesse  $\kappa$ .

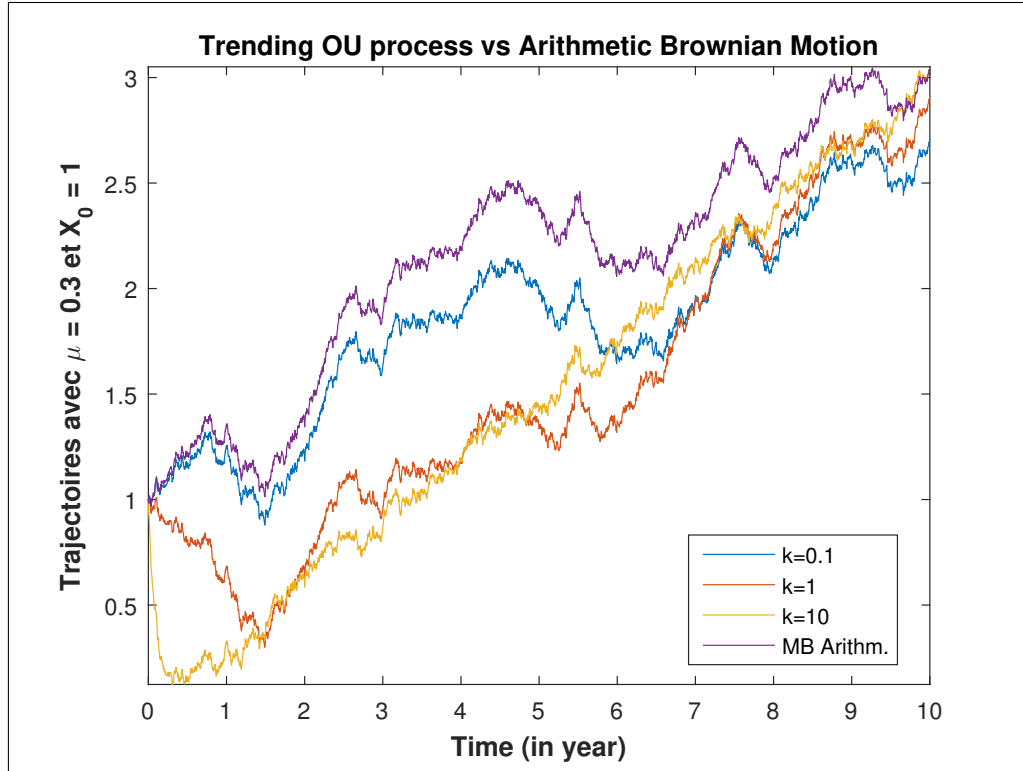


FIGURE 4.2 – Evolution du *trending OU* processus

L'origine de cette écart entre les deux processus pour des petites valeurs de  $\kappa$  vient de ce que le processus converge vers une tendance linéaire  $\mu t$ . L'écart peut être réduit si le processus converge vers une tendance affine :  $p_0 + \mu t$ . L'écriture du processus de retour vers la moyenne devient :

$$dp_t = (\mu - \kappa[p_t - (p_0 + \mu t)])dt + \sigma dW_t \quad (4.20)$$

Une illustration des évolutions de dynamiques de l'équation (4.20) est donnée sur la figure 4.3.

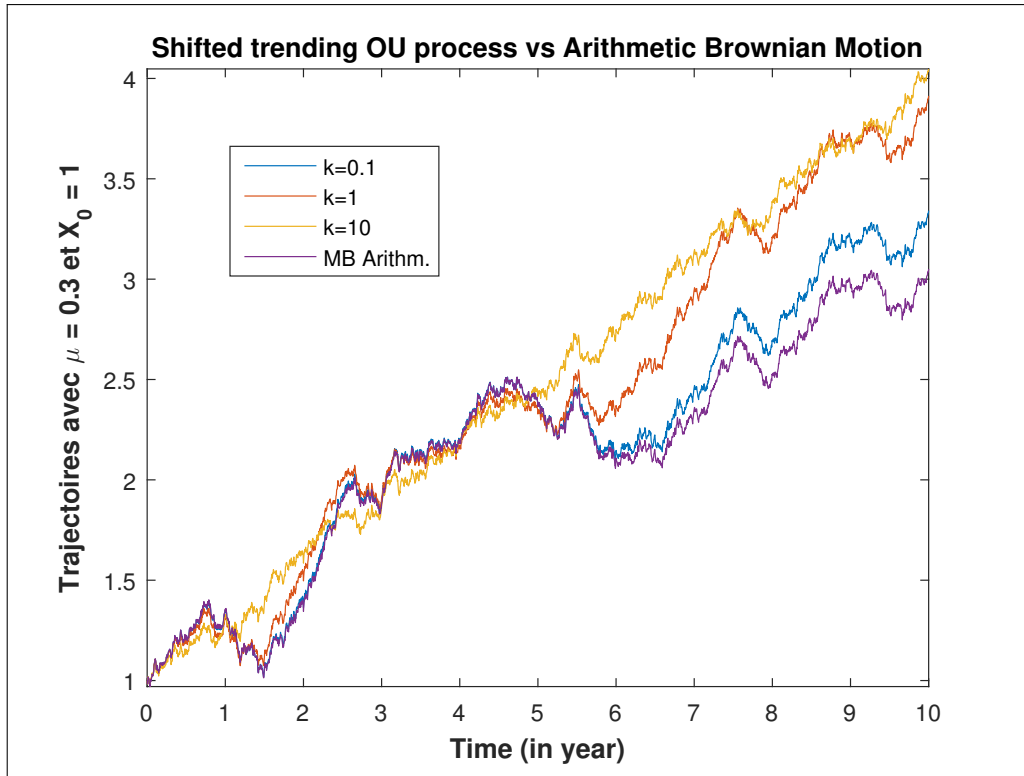


FIGURE 4.3 – Evolution du *Shifted trending OU* processus

La solution analytique peut être obtenue en exploitant la solution de l'équation différentielle stochastique du processus d'Ornstein-Uhlenbeck classique. On obtient alors :

$$p_t = p_0 + \mu t + \sigma \int_0^t e^{\kappa(s-t)} dW_s \quad (4.21)$$

Les moments d'ordre un et deux sont donnés par le Lemme d'Itô :

$$\mathbb{E}(p_t) = p_0 + \mu t \quad (4.22)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(p_t) &= \mathbb{E}([p_t - \mathbb{E}(p_t)]^2) \\ &= \sigma^2 \int_0^t e^{-2\kappa(t-s)} ds \end{aligned}$$

$$\mathbb{V}(p_t) = \frac{\sigma^2}{2\kappa} (1 - e^{-2\kappa t}) \quad (4.23)$$

A partir des moments caractéristiques de l'évolution du prix, on remarque que l'évo-



lution des cours est stationnaire autour d'un trend, car l'espérance de rendement est une fonction affine du temps. Ce qui se traduit par des tests de stationnarité en faveur d'une racine unité sur le logarithme du cours. Le retrait de la tendance linéaire permet de stationnariser la série :

$$\begin{aligned}\tilde{p}_t &= p_t - \mathbb{E}(p_t) = \sigma \int_0^t e^{\kappa(s-t)} dW_s \\ \mathbb{E}(\tilde{p}_t) &= 0, \quad \mathbb{V}(\tilde{p}_t) = \frac{\sigma^2}{2\kappa} (1 - e^{-2\kappa t})\end{aligned}$$

Contrairement au modèle d'Ornstein-Uhlenbeck classique et au modèle à deux composantes proposé par SUMMERS [1986] ou encore FAMA et FRENCH [1988b], ce processus capte mieux la dynamique des séries chronologiques. La fonction de densité est donnée par :

$$\xi(p_t, t; p_0, 0) = \sqrt{\frac{\kappa}{1 - e^{-2\kappa t}}} \frac{1}{\sigma\sqrt{\pi}} e^{-\frac{\kappa}{1 - e^{-2\kappa t}} \left(\frac{p_t - p_0 - \mu t}{\sigma}\right)^2} \quad (4.24)$$

De même, en supposant que  $s < t$ , la covariance s'obtient par la formule classique :

$$\begin{aligned}cov(V_s, V_t) &= \mathbb{E}[(V_s - \mathbb{E}(V_s))(V_t - \mathbb{E}(V_t))] \\ &= \sigma^2 \mathbb{E}\left[\int_0^s e^{\kappa(u-s)} dW_u \times \int_0^t e^{\kappa(u-t)} dW_u\right] \\ &= \frac{\sigma^2}{2\kappa} e^{-\kappa(s+t)} (e^{2\kappa \min\{s,t\}} - 1)\end{aligned}$$

D'où on en déduit :

$$cov(p_s, p_t) = \frac{\sigma^2}{2\kappa} e^{-\kappa(s+t)} (e^{2\kappa s} - 1) \quad (4.25)$$

A partir de la solution :

$$p_t = p_0 + \mu t + \sigma \int_0^t e^{\kappa(s-t)} dW_s \quad (4.26)$$

Nous définissons les rendements composés continus sur un horizon de  $t$  périodes

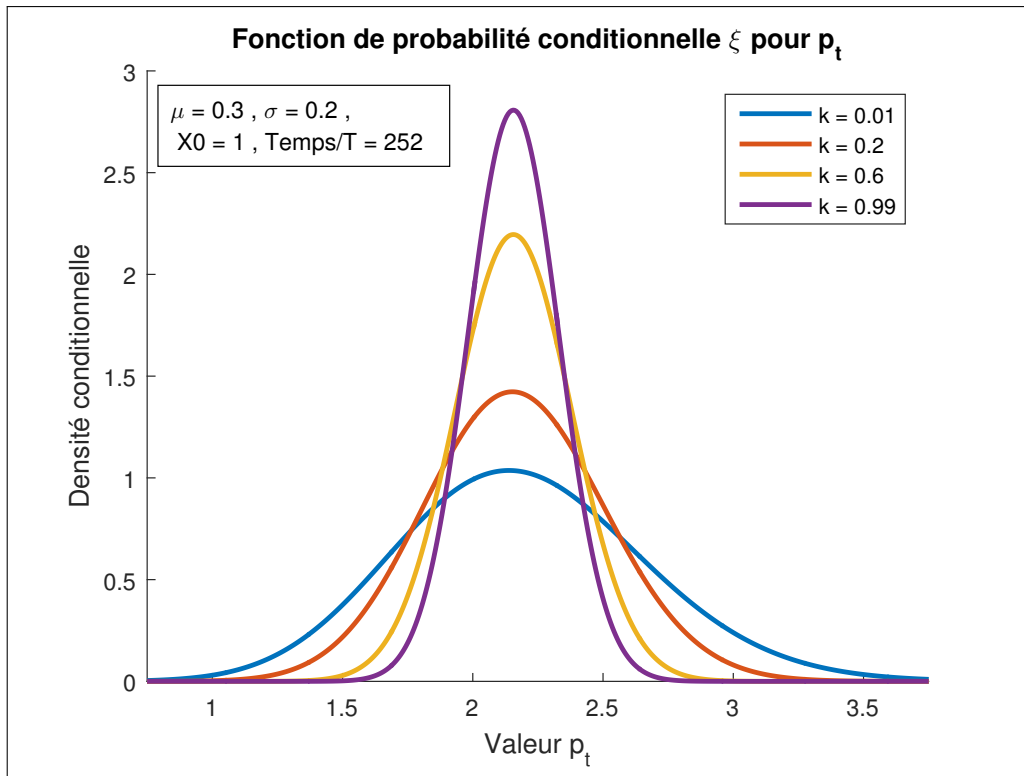


FIGURE 4.4 – Fonction de probabilité théorique

par :

$$\begin{aligned} r_t(t) &= p_t - p_{t-\tau} \\ &= \mu\tau + \sigma \int_0^t e^{\kappa(s-t)} dW_s - e^{\kappa\tau} \sigma \int_0^{t-\tau} e^{\kappa(s-t)} dW_s \end{aligned}$$

L'espérance des rendements est alors donnée par :

$$\mathbb{E}[r_\tau(t)] = \mu\tau \quad (4.27)$$

Et la variance conditionnelle  $\mathbb{V}(r_\tau(t)) = \mathbb{E}[(r_\tau(t) - \mathbb{E}(r_\tau(t)))^2]$  est donnée (après démonstration) par :

$$\mathbb{V}[r_\tau(t)] = \frac{\sigma^2}{\kappa} \left( (1 - e^{-\kappa\tau}) - \frac{1}{2} e^{-2\kappa t} (1 - e^{\kappa\tau})^2 \right) \quad (4.28)$$

Par ailleurs, comme il y a stationnarité, les moments conditionnels s'obtiennent lorsque  $t \rightarrow \infty$  :

$$\mathbb{V}[r_\tau(t)] = \frac{\sigma^2}{\kappa} (1 - e^{-\kappa\tau}) \quad (4.29)$$

Nous avons donc une convergence vers un processus brownien arithmétique lorsque

la vitesse tend vers 0, soit la propriété de la variance d'une marche aléatoire :

$$\lim_{\kappa \rightarrow 0} \frac{\sigma^2}{\kappa} (1 - e^{-\kappa\tau}) = \sigma^2\tau \quad (4.30)$$

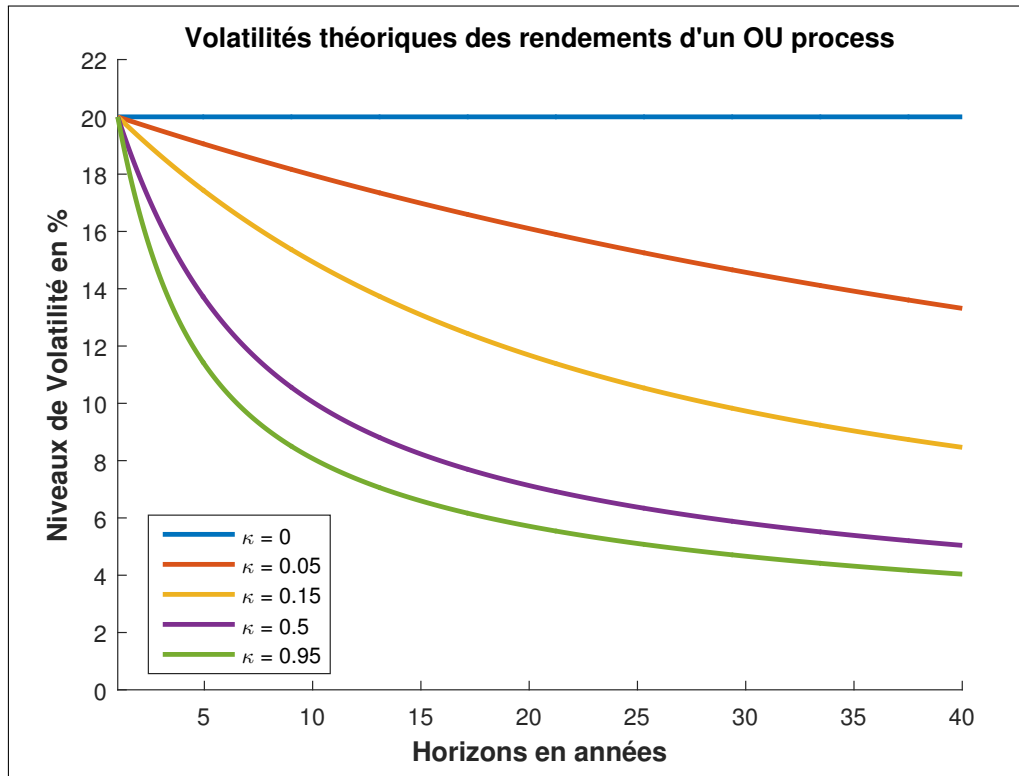


FIGURE 4.5 – Volatilité théorique suivant l'échelle temporelle

Ainsi, on détermine l'expression, après démonstration, de la covariance des rendements  $r_\tau$ , pour  $t - \tau \geq s$  :

$$\begin{aligned} cov(r_\tau(s), r_\tau(t)) &= \mathbb{E}[(r_\tau(s) - \mathbb{E}(r_\tau(s)))(r_\tau(t) - \mathbb{E}(r_\tau(t)))] \\ &= -\frac{\sigma^2}{2\kappa} e^{-\kappa(t-s-\tau)} (1 - e^{-\kappa\tau})^2 (1 + e^{\kappa(\tau-2s)}) \end{aligned}$$

D'où l'on déduit la fonction de corrélation qui est donnée par :

$$\begin{aligned} corr(r_\tau(t-j\tau), r_\tau(t)) &= \frac{-\frac{\sigma^2}{2\kappa} e^{-\kappa(t-(t-j\tau)-\tau)} (1 - e^{-\kappa\tau})^2 (1 + e^{\kappa(\tau-2(t-j\tau))})}{\left(\sqrt{\frac{\sigma^2}{\kappa} [1 - e^{-\kappa\tau} - \frac{1}{2}e^{-2\kappa t} (1 - e^{\kappa\tau})^2]}\right) \left(\sqrt{\frac{\sigma^2}{\kappa} [1 - e^{-\kappa\tau} - \frac{1}{2}e^{-2\kappa(t-j\tau)} (1 - e^{\kappa\tau})^2]}\right)} \\ &= \frac{-\frac{\sigma^2}{2\kappa} e^{-\kappa(j-1)\tau} (1 - e^{-\kappa\tau})^2 (1 + e^{-2\kappa t + \kappa(2j+1)\tau})}{\left(\sqrt{\frac{\sigma^2}{\kappa} [1 - e^{-\kappa\tau} - \frac{1}{2}e^{-2\kappa t} (1 - e^{\kappa\tau})^2]}\right) \left(\sqrt{\frac{\sigma^2}{\kappa} [1 - e^{-\kappa\tau} - \frac{1}{2}e^{-2\kappa(t-j\tau)} (1 - e^{\kappa\tau})^2]}\right)} \end{aligned}$$

Dans ce cas, on obtient la fonction d'autocorrélation inconditionnelle lorsque  $t \rightarrow \infty$  :

$$\rho_{\tau,j} = -\frac{1}{2} e^{-\kappa(j-1)\tau} (1 - e^{-\kappa\tau}) \quad (4.31)$$

En particulier, la fonction d'autocorrélation d'ordre un est donnée en posant  $j = 1$  dans l'équation ci-dessus, soit :

$$\rho_{\tau,1} = -\frac{1}{2} (1 - e^{-\kappa\tau}) \quad (4.32)$$

On constate que  $\rho_{\tau,k}$  est une fonction strictement négative et bornée par  $-\frac{1}{2}$ . Pour l'ordre un, lorsque la vitesse d'ajustement à la tendance de long terme est infinie, l'amplitude maximale de corrélation est atteinte et égale à  $\frac{1}{2}$ . Après simulations, on peut tracer le graphique des rendements observés et prédits, duquel on déduit un certain degré de prévisibilité. Dans cette illustration, les paramètres de la courbe orange (dont l'estimation de la corrélation sérielle) sont issus d'une régression linéaire.

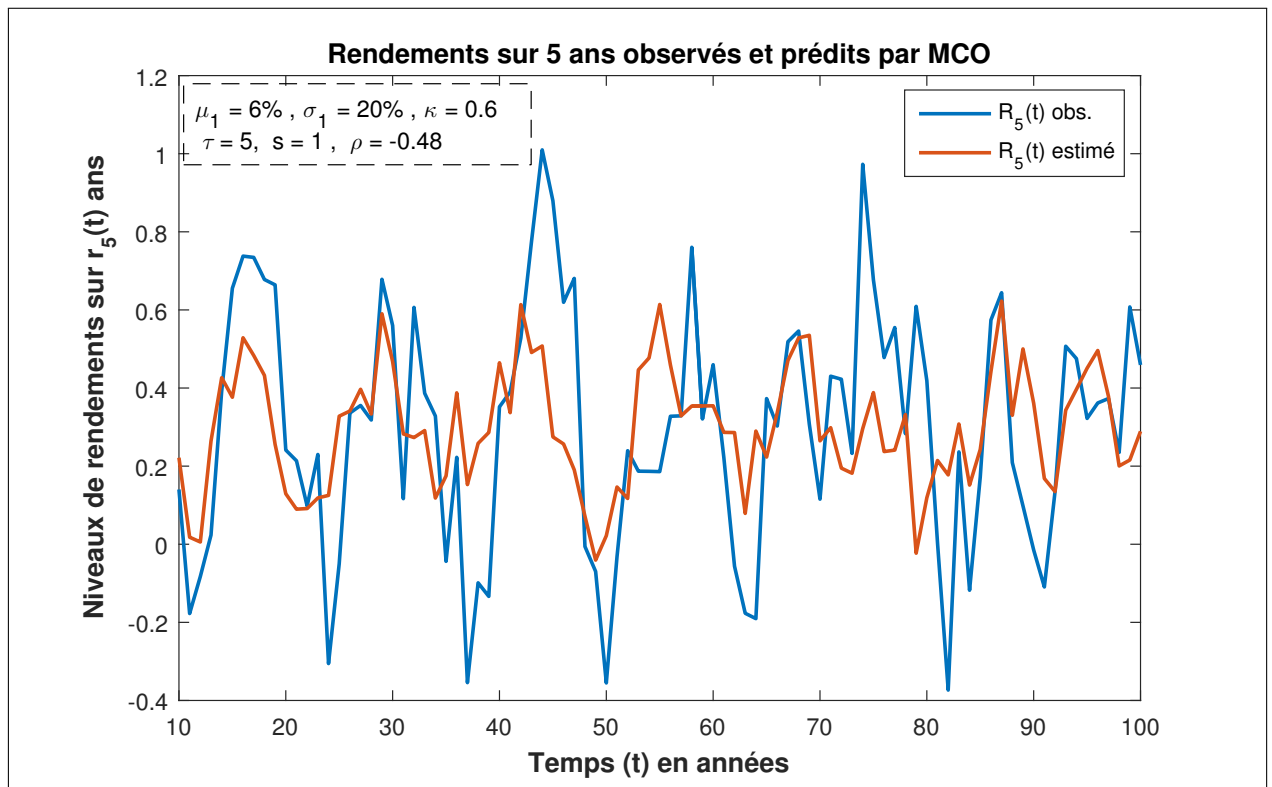


FIGURE 4.6 – Rendements sur des prix simulés

Même lorsque la prévisibilité reste faible, l'estimation de cette corrélation entre les rendements peut nous permettre de prédire une augmentation ou une diminution des

rendements glissants pour la période suivante. Contrairement au modèle à deux composantes, ce processus capte bien mieux la dynamique observée dans les données historiques. L'existence de retour vers la moyenne dans la chronique des cours est symbolisée, d'une part, par une corrélation négative fonction de la force de rappel, et, d'autre part, par la réduction de la volatilité lorsque l'horizon s'accroît. En fin de compte, cette représentation peut se substituer à d'autres modélisations proposées dans la littérature et notamment à celle de FAMA et FRENCH [1988b], qui modélisent la dynamique des cours à partir de deux composantes en fonction de la persistance des chocs dans la composante transitoire. Ici, en l'absence de retour vers la moyenne, la vitesse est nulle et le processus converge vers un mouvement brownien arithmétique; soit un processus conforme à la théorie classique d'efficience de marchés.

#### 4.2.4 Les méthodes d'estimation

Pour des raisons pratiques, l'estimation de la vitesse de retour vers la moyenne des marchés boursiers est généralement documentée dans la littérature via la formule de conversion de la valeur de persistance des chocs en vitesse (4.16), par l'estimateur des MCO de la persistance  $\hat{\phi}$  dans l'équation (4.1).

##### Les procédures standards d'estimation

Le passage de la première spécification (4.1) représentant l'évolution en temps discret vers la seconde spécification en temps continu (4.10) se fait par identification et conversion des paramètres des modèles. Pour  $h = \delta t$ , lorsque  $\delta t$  tend vers une valeur infinitésimale, on a l'équivalence suivante :

$$dp(t) = \kappa(\mu - p(t))dt + \sigma dW(t) \iff p_{th} = \alpha + \phi p_{(t-1)h} + \varepsilon_{th}$$

Avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{\kappa} = -\frac{\ln(\hat{\phi})}{h} \\ \hat{\mu} = \frac{\hat{\alpha}}{1 - e^{-\hat{\kappa}h}} \\ \varepsilon_{th} = \sigma \int_{(t-1)h}^{th} e^{-\hat{\kappa}(th-s)} dW_s \implies \hat{\sigma}^2 = \frac{\hat{\sigma}_\varepsilon^2 \times 2\hat{\kappa}}{1 - e^{-2\hat{\kappa}h}} \end{array} \right. \quad (4.33)$$

Par l'apport de certains travaux en physique, la littérature économétrique accrédite l'idée selon laquelle la précision de la mesure du retour vers la moyenne est meilleure lorsqu'elle est estimée par la modélisation en temps discret,  $\Delta t \gg \delta t$ , autrement dit, il est la plus part du temps préférable de calibrer le paramètre  $\kappa$  de l'équation d'Ornstein-Uhlenbeck par les estimations de l'équation AR(1) correspondante, en suivant les conventions d'écriture ci-dessus. Par conséquent, l'estimation naturelle de la vitesse dans le processus de retour vers la tendance de long terme dans l'hypothèse où les prix suivent un « *trending OU process* » (4.20), repose sur l'estimation par les MCO de l'équation (4.1) qui peut aussi s'écrire comme un processus d'Ornstein-Uhlenbeck classique avec une tendance de long terme nulle. Cette conception suppose implicitement que la « valeur » de long terme se confond avec la « tendance » de long terme. Il existe cependant une autre présentation de cette position relative à l'estimation du retour vers la moyenne dans la littérature.

En effet, l'estimation de la force de rappel qui n'intègre pas l'estimation de la valeur fondamentale est caractérisée dans la littérature récente par l'appellation de « retour vers la moyenne absolue », contrairement aux méthodes qui définissent la force de rappel relativement à une valeur estimée au préalable. Ainsi, dans le souci de clarifier la définition de la dynamique du cours des actions à deux composantes - introduite et popularisée par SUMMERS [1986], puis développée par FAMA et FRENCH [1988b] - et d'améliorer la mesure de la vitesse de retour vers la moyenne, les travaux académiques récents proposent de mesurer la part de la valeur fondamentale, représentative de la composante permanente du prix des actions, pour ne s'intéresser qu'aux variations des chocs erratiques dans le temps, qui sont identifiées par la composante transitoire.

Toutefois, cette valeur fondamentale étant intrinsèque, la difficulté de cette approche réside dans l'identification d'un proxy pour la composante fondamentale. Depuis la publication de l'étude de BALVERS et collab. [2000], il est courant d'utiliser l'indice « action monde » (en l'occurrence le MSCI World) comme benchmark. Le fait de tester les écarts d'une chronique boursière par rapport à un indice de référence permet d'éviter l'étape de spécification de la composante fondamentale (ou permanente) du prix des actions.

**La méthode alternative de Balvers et al.<sup>4</sup> (2000)**

Pour **BALVERS et collab. [2000]**, la formulation typique du processus stochastique du prix d'un actif caractérisé par un phénomène de retour vers la moyenne s'écrit :

$$P_{t+1}^i - P_t^i = a^i + \lambda^i (P_{t+1}^{*i} - P_t^i) + \epsilon_{t+1}^i \quad (4.34)$$

Où  $P_t^i$  représente le logarithme du prix de l'indice actions dans le pays  $i$  et  $P_t^{( * i)}$  représente le logarithme de la valeur fondamentale dans l'indice actions (ou la valeur tendancielle de l'indice actions) dans le pays  $i$ , notons que cette dernière valeur est en pratique inobservable. Ce qui implique donc que  $P_{t+1}^i - P_t^i$  représente le rendement composé en continu (le rendement du capital, dividendes réinvestis) entre les dates  $t$  et  $t + 1$  de l'indice actions  $i$ . Dans l'écriture du modèle (4.1), pour déceler la présence de retour vers la moyenne dans le processus d'évolution du logarithme du cours de marché  $P_t^i$ , il est nécessaire que qu'on ait  $\lambda^i > 0$  :

- $\epsilon_t^i$  représente un choc stationnaire d'espérance nulle, mais pouvant contenir de la corrélation sérielle;
- Le coefficient  $a^i$  représente une constante positive dans le modèle;
- $\lambda^i$  mesure la vitesse de réversion telle que :  $0 < \lambda^i < 1$  indique que les déviations du logarithme des cours retournent vers leur valeur fondamentale  $P_{t+1}^{*i}$  (ou vers leur tendance de long terme) avec le temps. Dans le cas  $\lambda^i = 0$ , il n'y pas de correction des déviations et les chocs sont permanents, ce qui correspond au cas classique d'efficience de marché selon lequel le logarithme du cours de l'indice action suit une marche aléatoire. Enfin lorsque  $\lambda^i = 1$ , il y a ajustement intégral à chaque unité de temps.

La spécification du problème de l'estimation de la vitesse de retour vers la moyenne telle que présentée ci-dessus est révélatrice de deux points importants. Le premier est lié à la difficulté de définir sans ambiguïté un modèle statistique du processus d'évolution de la composante fondamentale (souvent confondue avec la valeur permanente) du cours de l'action. Par ailleurs, comme mentionné plus haut dans les cas des quatre marchés actions étudiés, le logarithme de la valeur de long-terme du marché évolue a priori autour

---

4. Voir **BALVERS et collab. [2000]**

d'une tendance croissante - dont la pente caractérise le taux de rendement annuel moyen - ce qui soulève le second point lié à cette spécification, à savoir l'idée selon laquelle la valeur fondamentale est peut-être confondue à la valeur permanente du prix, mais ne s'identifie pas nécessairement par un processus décrivant les tendances observées. S'il y a égalité entre valeur fondamentale et composante permanente du prix, alors on peut considérer que le processus stochastique de la composante fondamentale du prix est celui qui génère la tendance croissante dans le prix dont la pente est donnée par le taux de rendement moyen par unité de temps, comme représenté dans les cas étudiés plus haut. Il serait alors plus simple de se ramener à l'estimation d'un « trending OU process » ou de poser le problème à estimer à partir de la représentation à double composante proposée par SUMMERS [1986] dans laquelle la composante permanente est une marche aléatoire avec drift et la composante transitoire un processus stochastique stationnaire. En effet, le choix d'un benchmark induit un biais potentiel dans l'estimation si la composante permanente du benchmark dévie de celle du processus de prix étudié. Pour cette raison, l'estimation dudit modèle repose sur les hypothèses « fortes » suivantes :

- la vitesse de retour vers la moyenne peut être détectée à partir des indices de prix des actions et à partir d'un indice de référence.
- la différence entre la tendance du cours de l'indice d'un pays et celle de l'indice de référence (le benchmark) est stationnaire.

Suivant les énoncés précédents, et sous l'hypothèse de stationnarité des différences entre l'indice de marché et son benchmark, on postule que la relation entre les valeurs fondamentales des indices du marché et du benchmark satisfait l'expression suivante :

$$P_t^{*i} = P_t^{*r} + z^i + \eta_t^i \quad (4.35)$$

Où  $z^i$  est une constante, positive ou négative,  $\eta_t^i$  est un processus stationnaire pouvant contenir de la corrélation sérielle. Enfin, l'indice  $r$  indique la référence. La combinaison de (4.34) et (4.35) donne l'équation suivante :

$$R_{t+1}^i - R_{t+1}^r = \alpha^i - \lambda(P_t^i - P_t^r) + \omega_{t+1}^i \quad (4.36)$$



Dans laquelle la variable  $R_t^i$  représente le rendement composé en continu de l'indice du pays  $i$  telle que  $R_t^i = P_t^i - P_{t-1}^i$ . De plus, on pose  $\alpha^i = a^i - a^r + \lambda z^i$  et  $\omega_t^i = \epsilon_t^i - \epsilon_t^r + \lambda \eta_t^i$  avec  $\alpha^i$  une constante et  $\omega_t^i$  un processus stationnaire d'espérance nulle. Comme  $\omega_t^i$  dépend des propriétés statistiques de  $\epsilon_t^i$  et de  $\eta_t^i$ , il peut contenir de la corrélation sérielle. Ainsi, dans l'équation (4.36) on décrit l'évolution des prix de l'actif par rapport à leur référence. Typiquement, l'équation (4.36) est l'écriture de Dickey-Fuller pour le test de racine unitaire sur l'évolution croisée du rendement composé en continu du marché  $i$  par rapport au marché  $r$ , soit  $\sum_{s=0}^t R_s^i - R_s^r$ . Par ailleurs, si le terme  $\omega_t^i$  ne contient pas de corrélation sérielle, l'équation (4.36) peut être estimée par les MCO en utilisant le  $t$  de student en partant du cas  $\lambda = 0$  pour tester l'hypothèse nulle  $H_0$  qui conclut à l'absence de retour vers la moyenne, contre l'alternative  $H_1$  d'existence de retour vers la moyenne du cours des actions. Cette dynamique traduit d'ailleurs pour **BALVERS et collab. [2000]** l'expression visible d'une stratégie d'arbitrage de portefeuille prenant des positions sur des marchés boursiers internationaux. En effet, en cas de retour vers la moyenne, c'est-à-dire si  $0 < \lambda < 1$ , Balvers souligne la possibilité de mettre en place une stratégie d'arbitrage du portefeuille basée sur l'évolution des marchés internationaux telle que définie par l'équation (4.36), en déterminant un seuil d'alerte caractérisé par l'observation des niveaux de surperformance et/ou de sous-performance à partir des niveaux d'accumulation des rendements déterminés par  $P_i - P_r$ . Une réallocation du portefeuille vers un marché international qui a sous-performé par rapport à la référence serait alors nécessaire si, pendant la même période, la position sur le marché domestique actuel, défini par l'indice  $i$ , a surperformé la référence. Le portefeuille sous gestion devrait donc être l'objet d'arbitrages périodiques en fonction des évolutions des marchés, dans le cas où le terme d'erreur de l'équation (4.36), c'est-à-dire  $\omega_t^i$ , contient de la corrélation sérielle qu'il convient d'éliminer. Ce peut être fait en ajoutant à l'équation (4.5) les valeurs retardées des différences de rendement entre l'indice action  $i$  et sa référence  $r$ . Une expression de type Dickey-Fuller Augmentée est alors plus adaptée pour estimer le paramètre  $\lambda$ . Soit :

$$R_{t+1}^i - R_{t+1}^r = \alpha^i - \lambda(P_t^i - P_t^r) + \sum_{j=1}^k \phi_j^i (R_{t+1-j}^i - R_{t+1-j}^r) + \omega_{t+1}^i \quad (4.37)$$

Dans ce cas, la demi-vie est donnée par la formule :

$$hl = \frac{\ln(1/2)}{\ln(1 - \lambda)} \quad (4.38)$$

Remarquons que cet estimateur de la demi-vie prend en compte le biais éventuel qui pourrait résulter d'une contrainte unitaire sur l'ordre du modèle d'évolution des prix à estimer. Dans la pratique, les études économétriques<sup>5</sup> ont formellement montré que les tests de racines unitaires de types Dickey-Fuller ont de faibles puissances statistiques contre l'hypothèse alternative quand l'échantillon de test est de petite taille. De fait, les recherches préconisent - en raison de cette faiblesse - de structurer les données sous forme de panel, afin de gagner en puissance. Or, **BALVERS et collab. [2000]** ne possède que 28 observations de prix annuels (de 1969 à 1996), pour chaque indice par pays, ce qui induit une trop faible puissance du test d'estimation du retour vers la moyenne. Pour cette raison, les données des 18 pays sont associées sous forme d'un panel sous l'hypothèse que la vitesse de retour vers la moyenne de l'indice est la même dans tous les pays, relativement à la référence qui est l'indice *MSCI World*. Les auteurs utilisent alors une technique d'estimation de type **SUR** « *Seemingly Unrelated Regression* ». Pour tester l'hypothèse nulle, on dispose des deux statistiques suivantes :  $z_\lambda = T\hat{\lambda}$  et  $t_\lambda = \frac{\hat{\lambda}}{s(\hat{\lambda})}$  ; Où  $\hat{\lambda}$  est une estimation SUR de  $\lambda$  et  $s(\lambda)$  est l'erreur standard de  $\hat{\lambda}$  et T la taille de l'échantillon. Comme sous l'hypothèse nulle,  $\lambda = 0$ ,  $\hat{\lambda}$  est biaisé car il ne suit pas asymptotiquement une loi normale, alors **BALVERS et collab. [2000]** estiment le biais et génèrent la valeur critique exacte correspondante à la taille de l'échantillon par l'utilisation de simulation de Monte-Carlo.

Le fait de considérer l'indice du cours des actions par rapport à un indice de référence permet d'éviter l'étape de spécification de la composante fondamentale (ou permanente) du prix des actions. Néanmoins, cette méthode porte un risque latent difficile à évaluer car elle repose explicitement sur des hypothèses fortes qui supposent que la valeur fondamentale intrinsèque au benchmark est égale à celle du marché étudié et qu'il y a, en outre, équivalence entre les valeurs fondamentales des marchés internationaux qui servent aux estimations de panel.

---

5. **CAMPBELL et PERRON [1991]**, **COCHRANE [1991]** et **DEJONG et collab. [1992]**

## 4.2.5 Les biais des procédures d'estimation des demi-vies

### Les distributions des estimateurs fortement asymétriques

Si, dans beaucoup des cas pratiques proposés par la littérature, on note de fortes divergences dans les valeurs proposées pour les estimations des demi-vies de marchés actions, il est unanimement reconnu chez les statisticiens que l'utilisation de la méthode des MCO induit un biais dans la mesure de la demi-vie. Pour évaluer l'impact de cette erreur d'estimation sur la mesure de la demi-vie, on s'est appuyé dans un premier temps sur les travaux de CHEN et GILES [2011], qui ont suivi les résultats et le formalisme mathématique de LIEBERMAN [1994] pour caractériser la distribution de probabilité de l'estimateur de la demi-vie. En effet, LIEBERMAN [1994] a donné une approximation point col de la densité de probabilité pour l'estimateur MCO du niveau de la persistance des chocs dans un processus autorégressif d'ordre 1 ; CHEN et GILES [2011], pour leur part, ont déduit une approximation du point col de la densité de probabilité pour la demi-vie dans un processus AR(1). Pour l'équation (4.1), les fonctions de densités de probabilité pour les estimateurs du coefficient de persistance et de la demi-vie sont données par les formules respectives suivantes :

$$\hat{f}(\hat{\alpha}) = \frac{\text{Tr}(\hat{A}^{-1}R'_\alpha C_2 R_\alpha)^2 |\hat{A}|^{-1/2}}{[4\pi \times \text{Tr}\{(\hat{A}^{-1}\hat{D})^2\}]^{1/2}} \quad (4.39)$$

$$\hat{f}(\widehat{hl}) = \frac{\text{Tr}(\tilde{A}^{-1}R'_\alpha C_2 R_\alpha)^2 |\tilde{A}|^{-1/2}}{[4\pi \times \text{Tr}\{(\tilde{A}^{-1}\tilde{D})^2\}]^{1/2}} \frac{0.5^{1/2} \ln(2)}{C \cdot \widehat{hl}^2} \quad (4.40)$$

Avec :

$$\hat{A} = A(w) = I_{T+1} - 2\hat{w}\hat{D}, \text{ avec } \hat{w}, \text{ telle que } \text{Tr}(\hat{A}^{-1}\hat{D}) = 0$$

$$\hat{D} = D(\hat{\alpha}) = R'_\alpha (C_1 - \hat{\alpha}C_2)R_\alpha$$

$$\tilde{A} = A(w) = I_{T+1} - 2\tilde{w}\tilde{D}, \text{ avec } \tilde{w}, \text{ telle que } \text{Tr}(\tilde{A}^{-1}\tilde{D}) = 0$$

$$\tilde{D} = D(\widehat{hl}) = R'_\alpha (C_1 - 0.5^{1/\widehat{hl}}C_2)R_\alpha$$

Dans lesquelles les matrices carrées  $C_1$ ,  $C_2$  et  $R_\alpha$  de tailles  $T + 1$  sont définies en annexes <sup>6</sup> 4.A.

---

6. Pour des raisons de volumétrie les matrices sont décrites en annexe.

On détermine C par la probabilité  $C = \mathbb{P}(0 < \hat{\alpha} < 1)$  de la fonction de répartition suivante :

$$\hat{F}(\hat{\alpha}) = \mathbb{P}(\hat{\alpha} < x) = \Phi(\hat{\varepsilon}) - \phi(\hat{\varepsilon})\left(\frac{1}{\hat{z}} - \frac{1}{\hat{\varepsilon}}\right)$$

Où :  $\hat{\varepsilon} = [\ln(|\hat{A}|)]^{\frac{1}{2}} \times \text{sign}(\hat{w})$  et  $\hat{z} = \hat{w} \times [2 \times \text{Tr}((\hat{A}^{-1}\bar{D})^2)]^{\frac{1}{2}}$

En gardant la même logique, on déduit la fonction densité de probabilité de  $\hat{\kappa}$ , soit l'estimateur MCO de la vitesse dans le processus d'OU. En effet, en usant d'un changement de variable dans l'équation (4.39) de  $\hat{\alpha}$  par  $\hat{\kappa}$  qui sont liées par la relation  $\hat{\alpha}(\hat{\kappa}) = e^{-\hat{\kappa}}$ , nous obtenons donc la fonction suivante :

$$\hat{f}(\hat{\kappa}) = \frac{\text{Tr}(\bar{A}^{-1}\bar{R}'_{\alpha}C_2R_{\alpha})^2|\bar{A}|^{-1/2}}{[4\pi \times \text{Tr}\{(\bar{A}^{-1}\bar{D})^2\}]^{1/2}} \times (-e^{-\hat{\kappa}}) \quad (4.41)$$

Avec :

$$\bar{A} = A(w) = I_{T+1} - 2\bar{w}\bar{D}, \text{ avec } \bar{w}, \text{ telle que } \text{Tr}(\bar{A}^{-1}\bar{D}) = 0$$

$$\bar{D} = D(\hat{\kappa}) = R'_{\alpha}(C_1 - e^{-\hat{\kappa}}C_2)R_{\alpha}$$

Plus de détails sur ce résultat sont donnés en annexe 4.A.

On peut observer sur les figures 4.7a et 4.7b les résultats des représentations graphiques de densités de probabilités des demi-vies et des vitesses d'ajustement données par les formules (4.40) et (4.41) définies ci-dessus<sup>7</sup>.

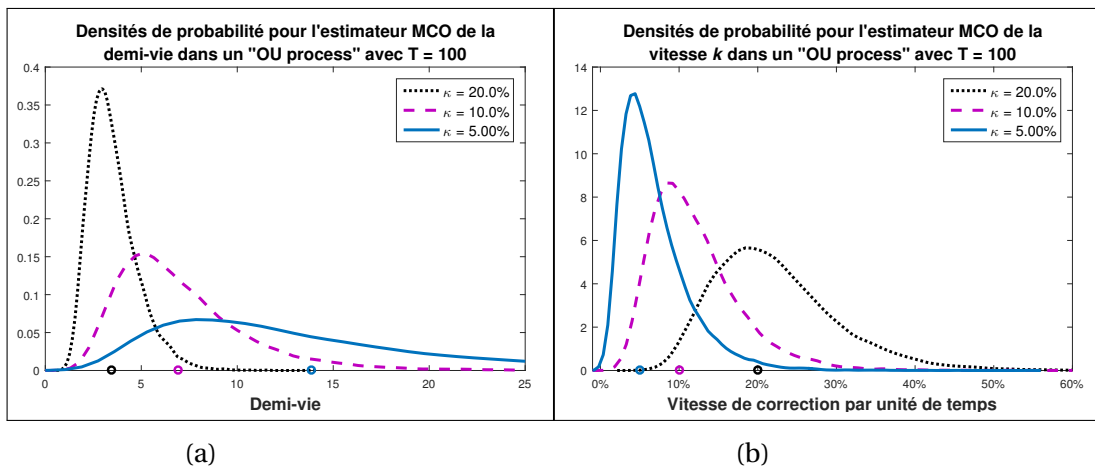


FIGURE 4.7 – Densités de probabilité : demi-vie et vitesses dans un processus d'OU

7. On peut également visualiser les densités de probabilités du coefficient de persistance en annexe 4.A

On constate à première vue qu'à taille d'échantillon identique, ces distributions sont fortement asymétriques, avec une asymétrie orientée vers la droite, de manière à ce que le mode de la distribution de probabilités de l'estimateur de la vitesse soit translaté vers la droite lorsque sa vraie valeur augmente, et inversement lorsque cette valeur diminue, la distribution de probabilité de l'estimateur de la demi-vie est translaturée vers la droite. Cette observation est naturellement due au fait que la demi-vie soit inversement proportionnelle à la vitesse, ce qui détermine des queues de distributions de plus en plus épaisses.

Sur la base de ces observations sur l'étalement des distributions de demi-vies, on identifie un argument de poids pour discréditer les valeurs élevées de demi-vies rapportées dans la littérature, puisque ces distributions de probabilités théoriques définissent des estimateurs de demi-vies qui prennent des valeurs dans des espaces de définitions non bornées lorsque le coefficient de la persistance est proche. On peut logiquement juger, d'après l'analyse visuelle de ces densités de probabilités de la demi-vie, que la médiane de cette dernière est préférable à la moyenne pour caractériser sa distribution de probabilité. Sous l'hypothèse que la distribution de probabilité empirique soit similaire à la distribution de probabilité théorique à queues épaisses, l'estimateur de l'espérance de la force de rappel est biaisé et est donc sous optimal par rapport à la médiane du paramètre pour caractériser sa distribution. Ce qui donne l'avantage à l'estimateur de la médiane, qui est par définition objectif, dans le sens où il caractérise la distribution de probabilité suivant les profils de densités de probabilités qui sont présentées sur les graphiques 4.7 avec des probabilités de surestimations et de sous-estimations du paramètre égales.

C'est dans cette logique que nous suivons les conclusions de CHEN et GILES [2011], qui déterminent le théorème suivant :

**Théorème.** *Soit une série chronologique dont la dynamique est donnée par un processus autorégressif stationnaire d'ordre 1, AR(1) :  $y_t = \alpha y_{t-1} + u_t$ , avec  $u_t \xrightarrow{i.i.d.} N(0, \sigma^2)$ . Alors, la moyenne de l'estimateur de la demi-vie défini comme suit n'existe pas :  $\widehat{hl} = \ln(0.5) / \ln(\widehat{\alpha})$  où  $\widehat{\alpha}$  est l'estimateur MCO de  $\alpha$  telle que  $\alpha \in ]0, 1[$ .*

On pourrait approfondir sur l'idée de CHEN et GILES [2011] qui concluent dans la suite de leurs études sur la non existence de moments d'ordre entier supérieur à 1 pour l'estimateur MCO de la demi-vie. Mais d'un point de vue analytique, nous savons que ces mo-

ments dépendent de l'estimateur **MCO** du coefficient de la persistance des chocs (ou de la vitesse d'absorption), qui lui est bien moins volatile, quoique toujours assujéti aux difficultés de l'estimateur des **MCO** comme le décrit **ANDREWS [1993]**, pour qui l'estimateur **MCO** du paramètre d'un modèle autorégressif a toujours tendance à surestimer la vraie valeur, alors que cet estimateur est par définition l'estimateur impartial de la médiane sans biais lorsque le modèle à estimer est un modèle de régression linéaire classique dans les conditions standards<sup>8</sup>. Ainsi, en cas d'existence de retour vers la moyenne dans un processus de prix de coefficient de persistance proche de l'unité, même un faible biais dans l'estimation **MCO** de la persistance conduira à un biais bien plus important dans l'estimation de la demi-vie à cause de transformation logarithmique. Remarquons à juste titre que tout économètre fait implicitement l'hypothèse selon laquelle la distribution de  $\hat{\alpha}_{\text{MCO}}$  ne dépend uniquement que de  $\alpha$  lorsque le modèle estimé est égal au vrai processus générateur de données. Par conséquent, il ne dépend pas de l'écart-type des innovations  $\sigma$  et en particulier de la taille de l'échantillon  $T$ . En conséquence, compte tenu des formes de distributions de probabilités présentées ci-dessus, **CHEN et GILES [2011]** suggèrent comme alternative de recourir à l'**estimateur de la médiane sans biais – ou Median Unbiased Estimator – (MUE)**<sup>9</sup> pour obtenir une estimation vraisemblable de la demi-vie.

Ces conclusions de **CHEN et GILES [2011]** étayent bien les démonstrations connexes données par **SEONG et collab. [2006]**. En effet, ces derniers auteurs identifient ce biais parmi trois autres qu'ils jugent souvent joints aux procédés d'estimation de la demi-vie, lorsque cette dernière est associée à l'estimateur **MCO** de la persistance dans une série modélisée par un processus autorégressif d'ordre un. Ils qualifient ce biais comme une erreur d'échantillonnage, plutôt que comme une erreur induite uniquement par la méthode des **MCO**. En partant de la variance de l'estimateur de la persistance d'un processus autorégressif univarié, puis en utilisant le développement limité à l'ordre 1 de Taylor, **SEONG et collab. [2006]** montrent formellement que lorsque la dynamique du processus est un AR(1), la variance de l'erreur d'estimation par rapport à la taille de l'échantillon de

---

8. Variable explicative exogène

9. voir la description de la méthode en annexe 4.B

la série observée, est la suivante :

$$\text{Var}(\hat{hl} - hl) = \left( \frac{\ln(2)}{\phi(\ln(\phi))^2} \right)^2 \frac{1 - \phi^2}{n} \quad (4.42)$$

Nous déterminons à partir de (4.42) les interactions entre la taille de l'échantillon et la variance de l'estimateur MCO de la demi-vie. Les valeurs<sup>10</sup> sont données dans les tableaux 4.1 à 4.3.

TABLEAU 4.1 – Coefficients de variations : observations annuelles

Approximation des CV et erreurs standards de l'estimateur de la demi-vie : observations annuelles										
$\rho$	$\kappa$	$hl$	n = 15		n = 50		n = 100		n = 200	
			$\sigma(\hat{hl} - hl)$	CV(%)	$\sigma(\hat{hl} - hl)$	CV(%)	$\sigma(\hat{hl} - hl)$	CV(%)	$\sigma(\hat{hl} - hl)$	CV(%)
0,5	0,69	1	0,65	64,52	0,35	35,34	0,25	24,99	0,18	17,67
0,6	0,51	1,36	0,91	67,39	0,5	36,91	0,35	26,1	0,25	18,46
0,7	0,36	1,94	1,44	73,85	0,79	40,45	0,56	28,6	0,39	20,23
0,8	0,22	3,11	2,7	86,78	1,48	47,53	1,04	33,61	0,74	23,77
0,9	0,11	6,58	7,81	118,69	4,28	65,01	3,02	45,97	2,14	32,5
0,975	0,03	27,38	63,63	232,42	34,85	127,3	24,64	90,02	17,43	63,65

*Note : On sous-entend ici qu'on a n observations annuelles.*

10. Nous avons vérifié ces valeurs par l'estimation des écart-types des demi-vies obtenus par une technique de Monte-Carlo, à partir de séries temporelles AR(1) dont les paramètres ont été fixés arbitrairement.

TABEAU 4.2 – Coefficients de variations : observations trimestrielles

Approximation des CV et erreurs standards de l'estimateur de la demi-vie : observations trimestrielles											
$\rho$	$\kappa$	$hl$	n = 60(15 ans)		n = 200(50 ans)		n = 400(100 ans)		n = 800(200 ans)		
			$\sigma(\hat{hl} - hl)$	CV(%)	$\sigma(\hat{hl} - hl)$	CV(%)	$\sigma(\hat{hl} - hl)$	CV(%)	$\sigma(\hat{hl} - hl)$	CV(%)	
0,841	0,17	4	1,92	47,95	1,05	26,26	0,74	18,57	0,53	13,13	
0,88	0,13	5,43	2,96	54,53	1,62	29,87	1,15	21,12	0,81	14,93	
0,915	0,09	7,77	4,97	63,97	2,72	35,04	1,93	24,78	1,36	17,52	
0,946	0,06	12,43	9,88	79,51	5,41	43,55	3,83	30,79	2,71	21,77	
0,974	0,03	26,32	30	113,99	16,43	62,44	11,62	44,15	8,22	31,22	
0,994	0,01	109,51	252,11	230,21	138,09	126,09	97,64	89,16	69,04	63,05	

*Les coefficients de persistance et de vitesse ont été trimestrialisés à partir de ceux du tableau 4.1*

TABEAU 4.3 – Coefficients de variations : observations mensuelles

Approximation des CV et erreurs standards de l'estimateur de la demi-vie : observations mensuelles											
$\rho$	$\kappa$	$hl$ (en mois)	n = 180(15 ans)		n = 600(50 ans)		n = 1200(100 ans)		n = 2400(200 ans)		
			$\sigma(\hat{hl} - hl)$	CV(%)	$\sigma(\hat{hl} - hl)$	CV(%)	$\sigma(\hat{hl} - hl)$	CV(%)	$\sigma(\hat{hl} - hl)$	CV(%)	
0,944	0,06	12	5,42	45,16	2,97	24,73	2,1	17,49	1,48	12,37	
0,958	0,04	16,28	8,5	52,2	4,66	28,59	3,29	20,22	2,33	14,29	
0,971	0,03	23,32	14,47	62,06	7,93	33,99	5,61	24,04	3,96	17	
0,982	0,02	37,28	29,08	78,02	15,93	42,74	11,26	30,22	7,96	21,37	
0,991	0,01	78,95	89,2	112,99	48,86	61,89	34,55	43,76	24,43	30,94	
0,998	0	328,53	754,74	229,73	413,39	125,83	292,31	88,97	206,69	62,91	

*Les coefficients de persistance et de vitesse ont été mensualisés à partir de ceux du tableau 4.1*



Par exemple, on peut déduire de cette expression que pour une série temporelle caractérisée par une demi-vie de  $h = 3.1063$  ans dans un échantillon à 100 observations, le coefficient de variation associé à l'estimateur  $\hat{h}l$  de cette demi-vie sera de 33.61%, alors que, toutes choses égales par ailleurs, dans un échantillon contenant 200 observations de cette même série, le coefficient de variation de l'estimateur  $\hat{h}l$  s'établirait à 23.77%, soit un tiers de moins (dix points de moins) que dans le premier échantillon. On en déduit logiquement que la précision de l'estimation s'affine avec la taille de l'échantillon. Ce calcul illustre la grande sensibilité de l'estimation de la demi-vie à la taille de l'échantillon. Cette observation n'est pas étonnante (elle reflète d'un certain point de vue la loi des grands nombres) et justifie le recours aux estimations sur panels dans de nombreuses études<sup>11</sup>.

On sait que cette erreur d'estimation dépend aussi du niveau de persistance dans la série. Plus ce coefficient de persistance est proche de l'unité et plus le coefficient de variation est important. Or, nous savons que la persistance détectable dans le logarithme du cours des actions est souvent fonction de la fréquence des observations. C'est le constat que nous pouvons faire en comparant les tableaux 4.1 à 4.3. Par exemple, pour un historique de 15 ans, on remarque que la valeur de la persistance annuelle, lorsqu'elle est exprimée en valeur mensuelle, se rapproche de l'unité et la variance de l'estimateur augmente fortement, bien que le coefficient de variation soit moins important. De même, sur un historique de 15 ans, une persistance forte, mais détectable en fréquence annuelle, conduira en une forte variance de l'erreur d'estimation si on s'appuie sur des données mensuelles. Cette dernière illustration va dans le sens des études académiques qui concluent souvent à l'existence d'une force de retour vers la moyenne du logarithme du prix sur des chroniques annuelles marquées par une faible persistance et à des conclusions proches de l'efficience de marché sur des observations à haute fréquence. Nous savons, d'après d'autres études de la littérature économétrique, par exemple COCHRANE [1991], qu'augmenter la fréquence dans une fenêtre de données délimitée par deux dates, afin d'obtenir un plus grand échantillon, ne permet pas d'améliorer l'inférence statistique dans l'estimation d'un modèle autorégressif. Mais compte tenu de l'approche analytique donnée par SEONG et collab. [2006] il serait intéressant de savoir, à demi-vie égale, quelle est la fréquence permettant de minimiser la variance de l'estimateur MCO de la demi-vie.

---

11. Cf. BALVERS et collab. [2000] ou plus récemment SPIERDIJK et collab. [2012]

Pour cela, les tableaux 4.1 à 4.3 nous permettent de visualiser les coefficients de variation pour des niveaux de demi-vie identiques pour différentes fréquences d'échantillonnage. La lecture de ces tableaux nous permet de dire que lorsque la demi-vie associée à la force de *retour vers la moyenne* dans le processus est inférieure ou égale à 1.36 ans et que son estimation est basée sur un historique couvrant une période de moins de cent ans, alors le coefficient de variation traduisant l'erreur systématique de l'échantillonnage a des proportions similaires dans les trois cas, que la fréquence soit annuelle, trimestrielle ou mensuelle. Cependant, pour toutes les valeurs de la demi-vie supérieures à un an, l'estimation sera plus fiable sur des fréquences annuelles, si la taille de l'échantillon couvre une période d'au moins cinquante ans. Enfin, notons que lorsque la fenêtre des observations ne couvre qu'une période de quinze ans, par exemple, les estimations de la demi-vie seront plus fiables à partir de fréquences trimestrielles ou mensuelles qui permettent de réduire significativement le coefficient de variation. Pour une demi-vie de 3,11 ans, on passe d'une variation de 86.78% en fréquence annuelle (15 observations) à 79.51% et 78.02% respectivement en fréquence trimestrielle (60 observations) et mensuelle (180 observations). Bien que, dans le dernier cas, la variance de l'estimateur soit plus forte que dans le cas annuel. Cela est largement dû au fait que les observations de données en hautes fréquences présentent généralement, a priori, des persistances, proches de l'unité.

#### **Les autres biais identifiés dans l'estimation des demi-vies**

SEONG et collab. [2006] identifient un certain nombre d'autres biais associés à l'estimation de la demi-vie dans les séries temporelles modélisées par des processus autorégressifs univariés. Les auteurs soulignent qu'en dehors du biais d'échantillonnage décrit précédemment, l'estimation de la demi-vie pourrait également être affectée par :

- Les approximations incorrectes de l'ordre du processus
- Les changements de régimes dans la chronique

A part le biais d'estimation qu'on peut qualifier de systématique déjà exposé, la deuxième source d'erreur mentionnée, qui, s'apparentant souvent à une erreur de modélisation, est une approximation couramment pratiquée en économétrie concernant l'estimation du processus générateur des données étudiées. En effet, pour des raisons de simplicité, la

formule (4.1) est souvent utilisée, pour traduire l'idée que le processus générateur de données suit une logique autorégressive avec un ordre d'auto-régression proche de un. Nous savons que les séries temporelles correctement transformées sont la plupart du temps modélisées par des processus de type ARMA, AR, ou MA. En supposant que les modèles sont stationnaires, on peut représenter ces séries temporelles sous la forme d'un processus autorégressif d'ordre  $p$  :  $AR(p)$ . Cependant, l'expression d'une formule pour le calcul de la demi-vie lorsque l'ordre du processus est supérieur ou égal à 2 est difficile à déterminer par une formule fermée. L'économétrie préconise alors une approximation en utilisant la représentation des équations de Dickey-Fuller « augmenté » :

$$\Delta p_t = \beta p_{t-1} + \sum_{j=1}^{p-1} \phi_j^* \Delta p_{t-j} + \varepsilon_t \quad (4.43)$$

Puis en approximant la demi-vie par :

$$hl = -\frac{\ln(2)}{\ln(1 + \beta)} \quad (4.44)$$

Nous noterons d'ailleurs que les expressions employées pour estimer la demi-vie dans [BALVERS et collab. \[2000\]](#) se prêtent à cette approximation. Les auteurs utilisent la formule d'approximation de la demi-vie pour les processus autorégressifs avec des ordres pouvant être supérieurs à un.

La mise en évidence dans la littérature économétrique de faiblesses dans l'estimation des équations de Dickey-Fuller, lorsque le processus à estimer comporte à la fois une tendance de type déterministe et un changement de régime, conduit à de gros biais dans l'évaluation de la demi-vie. Par conséquent, partant du principe qu'un grand nombre de séries macro-économiques sont influencées par des ajustements structurels, [SEONG et collab. \[2006\]](#) concluent que les analyses économétriques ne tenant pas compte de ces changements de régime dans la tendance globale du processus conduisent à surestimer la demi-vie. Afin de ne pas complexifier l'analyse des ruptures de régime dans la série, une solution consiste, en présence d'échantillons suffisamment grands, à implémenter des estimations sur des fenêtres glissantes.

Enfin, un dernier biais, moins difficile à gérer, pour mesurer la valeur de la vitesse

de retour vers la moyenne, concerne l'agrégation temporelle des observations. En effet, un grand nombre d'études reposent sur des chroniques de cours directement agrégées par leurs auteurs, ou sur des séries temporelles provenant de bases qui fournissent des données agrégées.

Supposant que  $p_t$  est décrit par l'équation (4.1) :

$$Q_t = \frac{1}{M}(p_t + p_{t-1} + \dots + p_{t-M-1}) \quad (4.45)$$

On montre que  $Q_t$  satisfait l'équation autorégressive suivante :

$$Q_t = BQ_{t-1} + E_n \quad (4.46)$$

De manière analytique, dans le cadre de la modélisation d'un processus AR(1), **CHAMBERS [2005]** montre que l'estimateur des **MCO** du coefficient de persistance des chocs à partir des séries temporelles agrégées induit un biais asymptotique qui est d'autant plus grand que la fenêtre d'agrégation est importante. **CHAMBERS [2005]** montre de manière formelle l'inconsistance de l'estimateur **MCO** de la demi-vie à partir d'une telle agrégation :

$$\mathbb{P}lim(\hat{B}) = B + \frac{\phi(1 - \phi^{2M}) - M\phi^M(1 - \phi^2)}{M(1 - \phi^2) - 2\phi(1 - \phi^M)} \quad (4.47)$$

Où  $\phi$  est le coefficient de persistance dans le modèle d'évolution de données non agrégées telle que définit par le modèle (4.1). Naturellement, l'estimateur de la demi-vie est biaisé si la mesure de la persistance est biaisée :

$$\mathbb{P}lim(\hat{h}l) = \frac{\ln(1/2)}{\ln(\mathbb{P}lim \hat{B})} \quad (4.48)$$

Par conséquent, l'estimateur de la persistance sur les données agrégées est inconsistant, et ne converge en probabilité vers la vraie valeur que lorsque la persistance est proche de l'unité. On note également que plus le nombre  $M$  de données agrégées est grand, plus l'estimation de la persistance sera inconsistante, et par conséquent la demi-vie aussi. En effet, dans tous les autres cas, la mesure de la force de rappel est faussée par la corrélation sérielle artificielle existant entre les données agrégées  $Q_t$ . Malgré l'identifi-

cation de tous ces biais dans les procédures d'estimation, il parait possible de les réduire sans pour autant les éliminer totalement. Ainsi proposons-nous une procédure réduisant au maximum l'ensemble des biais cités ci-dessus.

### Les techniques d'estimation avec correction de biais

L'argumentation employée par [BAO et collab. \[2015\]](#) montre que lorsque la dérive du processus est considérée comme linéaire et que la vitesse de retour vers la moyenne à estimer est lente, alors presque toutes les méthodes d'estimation de cette valeur sont entachées de biais significatifs. En s'appuyant sur les constats de [PHILLIPS et YU \[2005\]](#) pour les processus de Lévy à temps continus, [BAO et collab. \[2015\]](#) proposent un estimateur sans biais de la force de rappel dans un processus de retour vers la moyenne, en s'appuyant sur une méthode d'estimation par les [MCO](#) reposant sur l'expression du biais définie par [BAO \[2013\]](#).

Soit le processus de prix de type d'Ornstein-Uhlenbeck tel que donné par l'équation (4.5) :

$$dp(t) = \kappa(\mu - p(t))dt + \sigma dW(t) , \text{ avec } p(0) = p_0$$

Bien que le développement de [BAO et collab. \[2015\]](#) soit valable pour un processus de Lévy de la même forme, nous considérons que nous sommes dans le cas d'un processus d'Ornstein-Uhlenbeck avec la variable  $W(t)$  ,  $t \geq 0$ , tel que  $W(0) = 0$ , qui définit un mouvement brownien. Notons que, lorsque  $1 \geq \kappa \geq 0$  dans l'équation (4.43), le processus décrit est stationnaire, par conséquent  $\mu$  exprime la moyenne de long terme du processus et  $\kappa$  capture la vitesse de retour du processus vers cette moyenne. L'estimateur [MCO](#) de  $\kappa$  se fait en utilisant l'estimateur [MCO](#) de  $\phi$  dans le processus autorégressif décrit par l'équation (4.1) :

$$p_{th} = \alpha + \phi p_{(t-1)h} + \varepsilon_{th} , \text{ avec } \{\varepsilon_{th}\}_{t=1}^n \xrightarrow{i.i.d} \mathcal{N}(0, \sigma_\varepsilon^2)$$

Dans cette équation, on suppose que les moments de  $\varepsilon_{th}$  existent au moins jusqu'à l'ordre 4 : avec pour *skewness* et pour excès de *kurtosis* les valeurs respectives  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$ . Ainsi, à partir de cette équation, on a vu que l'estimateur [MCO](#) de la vitesse de retour vers la

moyenne était égal à :  $\hat{\kappa} = \frac{\ln \hat{\phi}}{h}$ . Alors, une formule fermée pour l'approximation du biais de l'estimateur de  $\kappa$ , soit  $\mathbb{E}(\hat{\kappa}) - \kappa$ , est déduite en utilisant la structure des expressions du biais donnée dans BAO [2013]. On peut en donner une approximation par un développement limité à l'ordre 2 :

$$\mathbb{E}(\hat{\kappa}) - \kappa = B(\hat{\kappa}) + o(n^{-1}) \quad (4.49)$$

Le biais  $B(\hat{\kappa})$  dépend des paramètres du modèle d'Ornstein-Uhlenbeck, plusieurs cas se présentent pour en établir la formule. Nous ne fournirons que des formules fermées finales selon les cas données dans BAO et collab. [2015]. Dans les cas où l'on suppose la tendance de long terme  $\mu$  connu et  $p_0$  fixé, le biais de l'estimateur MCO de  $\hat{\kappa}$  est donnée par :

$$\begin{aligned} B(\hat{\kappa}) = & \frac{(1 + 3e^{-2\kappa h} + 4e^{-2n\kappa h})}{2Te^{-2\kappa h}} - \frac{(1 - e^{-2n\kappa h})(1 + 7e^{-2\kappa h})}{2Tne^{-2\kappa h}(1 - e^{-2\kappa h})} \\ & - \frac{4e^{-2n\kappa h}(1 - e^{-2\kappa h})p_0^2}{2T\sigma_\varepsilon^2 e^{-2\kappa h}} + \frac{(1 + 3e^{-2\kappa h})(1 - e^{-2n\kappa h})p_0^2}{2Tn\sigma_\varepsilon^2 e^{-2\kappa h}} \\ & + \frac{2(1 + e^{-\kappa h})(1 - e^{-n\kappa h})(e^{-\kappa h} - e^{-n\kappa h})p_0\gamma_1}{2Tn\sigma_\varepsilon e^{-2\kappa h}} \end{aligned} \quad (4.50)$$

Avec un effet important du coefficient d'asymétrie des innovations sur le biais de la vitesse estimée. Cette influence de l'asymétrie disparaît cependant lorsque la valeur initiale  $p_0$  de la série est nulle,  $p_0 = 0$ , alors l'effet de l'asymétrie des innovations sur le biais de la vitesse de retour vers la moyenne s'annule. Comme on peut le remarquer à partir de la formule ci-dessus, l'estimation du biais devient :

$$B(\hat{\kappa}) = \frac{1 + 3e^{-2\kappa h} + 4e^{-2n\kappa h}}{2Te^{-2\kappa h}} - \frac{(1 - e^{-2n\kappa h})(1 + 7e^{-2\kappa h})}{2Tne^{-2\kappa h}(1 - e^{-2\kappa h})} \quad (4.51)$$

Dans le cas où  $p_0$  est une variable aléatoire, le biais est estimé par :

$$B(\hat{\kappa}) = \frac{1}{2T}(3 + e^{2\kappa h}) - \frac{2(1 - e^{-2n\kappa h})}{Tn(1 - e^{-2\kappa h})} \quad (4.52)$$

D'autres variantes de cet estimateur du biais de la vitesse estimée sont fournies lorsque la tendance de long terme  $\mu$  est inconnue, mais nous savons que ce paramètre est facilement estimable par les MCO à partir de l'équation (4.1) et en utilisant les règles de conversion vers la forme continue décrite par (4.5). Par conséquent, nous ne nous intéresserons

qu'aux cas décrits ci-dessus. De la même manière, on sait qu'en pratique, les paramètres de l'estimateur de  $B(\hat{\kappa})$  peuvent être calibrés par les estimateurs des MCO de l'écriture autorégressive d'ordre un (1) de la série temporelle étudiée. Après conversion, le paramètre  $\mu$  est estimé par  $\hat{\mu} = \frac{\hat{\alpha}}{1-\hat{\phi}}$  et les paramètres  $\sigma_\varepsilon^2$  et  $\gamma_1$  par l'estimateur empirique de la variance et du skewness dans la série des résidus  $\{\varepsilon_t\}_t$ . Numériquement, nous utilisons la solution du problème suivant comme estimateur de la vitesse corrigée du biais :

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{\kappa}_{bc} = \underset{\kappa}{\operatorname{argmin}} \|\hat{\kappa} - \kappa - \hat{B}(\kappa)\| \\ \text{telle que : } 0 < \kappa < 1 \end{array} \right. \quad (4.53)$$

Pour une meilleure compréhension, nous avons voulu visualiser graphiquement la part du biais dans une estimation MCO de la vitesse  $\kappa$  et la part du biais dans une estimation obtenue par la méthode corrigée du biais de  $\kappa$  dont la méthode est présentée ci-dessus. Pour cela, on simule arbitrairement des processus de dynamiques connues dont on admet naïvement que l'estimateur de la vitesse ne dépend que de sa vraie valeur. Les figures 4.8a à 4.9b suivantes présentent les résultats à partir d'utilisations du Monte-Carlo <sup>12</sup> :

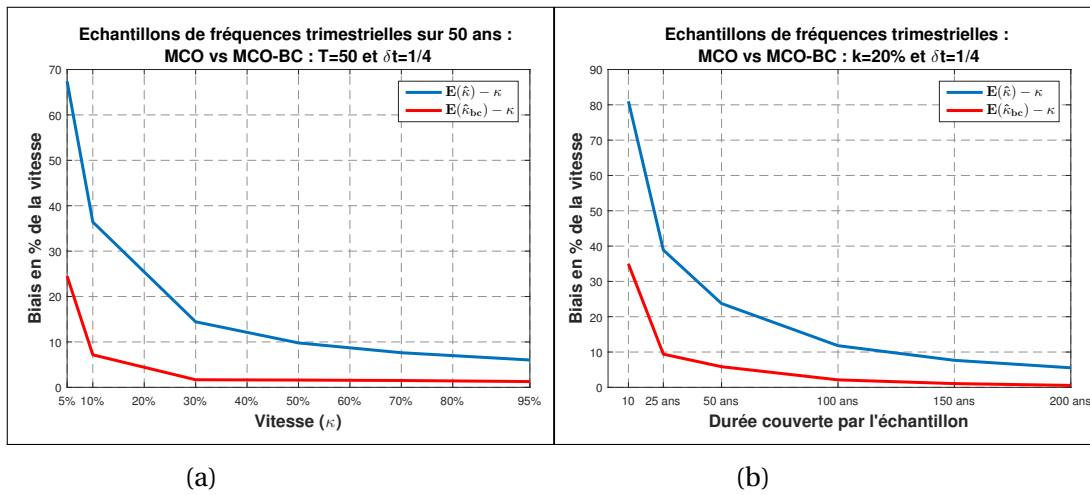


FIGURE 4.8 – Biais réalisés pour un processus d'OU : estimations suivant  $\kappa$

12. Les chocs sont modélisés par une loi normale d'écart-type égal à l'unité et distribués de manière IID

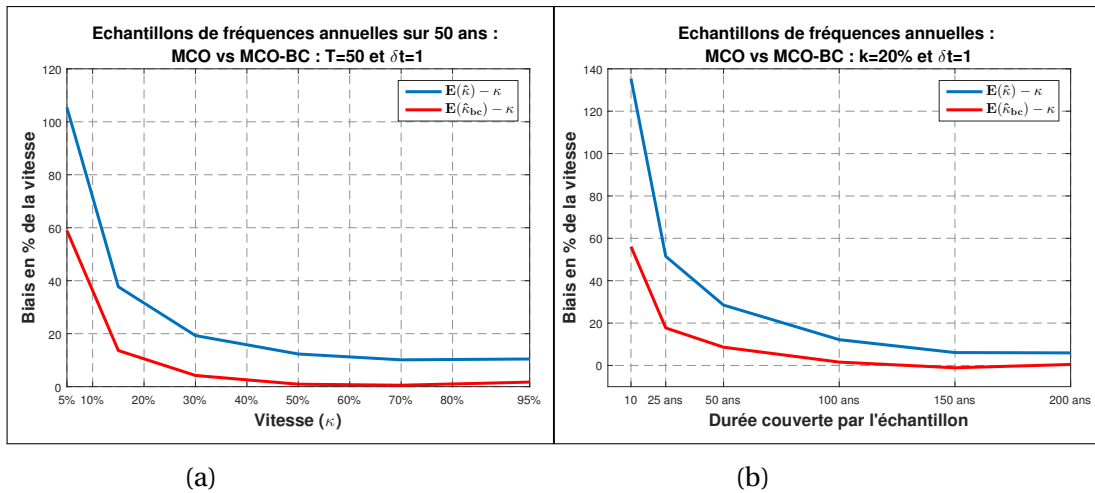


FIGURE 4.9 – Biases réalisés pour un processus d'OU : estimations suivant T

Les figures font clairement paraître la sous-optimalité de l'estimateur  $\hat{\kappa}_{MCO}$  des MCO de la vitesse par rapport à l'estimateur  $\hat{\kappa}_{bc}$  corrigé du biais. En effet, à taille d'échantillon identique comme on peut lire sur les figures 4.8a et 4.9a, l'estimateur MCO induit un biais dont l'espérance est toujours supérieure à l'espérance du biais de l'estimateur non biaisé et ceci se présente quelle que soit la valeur de la vitesse comprise entre 5% et 95%. Cependant, le niveau du biais de l'estimateur est d'autant plus élevé que la vitesse dans le processus est faible : là encore des illustrations sont données par les graphiques résultants de nos simulations. Pour les cas des processus de données générés à fréquences trimestrielles (figure 4.8a), le biais de l'estimateur des MCO prend des valeurs en moyenne 70% plus élevées lorsque la vraie valeur de la vitesse est de 5%, contre un dépassement de 25% environ si l'on utilise un estimateur corrigé du biais. En revanche, lorsque la vitesse est grande, les estimateurs des deux biais ont plutôt tendance à prendre des valeurs proches. Pour un exemple avec des données annuelles sur la figure 4.9a construite dans les mêmes conditions qu'à la figure 4.8a, les espérances de biais prennent des valeurs encore plus extrêmes pour des niveaux de vitesse faibles, et naturellement plus faibles lorsque le niveau de la vitesse dans le processus augmente. A l'évidence, ce dernier cas n'est dû qu'à la question de la fréquence de l'échantillon. Puisque la taille de l'échantillon est plus importante avec une fréquence trimestrielle, retrouve alors la conclusion des paragraphes précédents, selon laquelle le coefficient de variation est une fonction décroissante de la taille de l'échantillon toute chose égale par ailleurs. Ce dernier point est aisément vérifiable à la lecture des figures 4.8b et 4.9b qui présentent des biais décroissants avec la



taille des échantillons.

Dans tout les cas présentés ci-dessus, nous retenons que l'estimateur corrigé du biais est plus efficace que l'estimateur classique des [MCO](#).

Soulignons qu'un choix naturel, qui pourrait se positionner comme une alternative aux estimateurs par les [MCO](#) pour évaluer la vitesse dans les processus autorégressifs, consisterait à utiliser l'[estimateur du maximum de vraisemblance \(EMV\)](#). Toutefois, il est bien documenté dans la littérature économétrique que l'estimateur du maximum de vraisemblance n'est intéressant que lorsque l'on connaît sa vraie distribution. De plus, on montre généralement que si les données étudiées sont gaussiennes, alors l'[EMV](#) est efficace, si ce n'est pas le cas, l'[EMV](#) n'est pas plus efficace que les [MCO](#). Pour [BAO et collab. \[2015\]](#), la procédure du quasi-maximum de vraisemblance a même tendance à surestimer la vitesse dans le processus d'Ornstein-Uhlenbeck. Pour plus de détails sur les caractéristiques de l'estimateur du maximum de vraisemblance, on pourra se référer à [PHILLIPS et YU \[2005\]](#).

### 4.3 Une mesure empirique de la demi-vie sur les marchés financiers

L'objectif de la seconde partie de cette étude est d'estimer les demi-vies des chroniques boursières dans quatre pays (Etats-Unis, France, Japon et Royaume-Uni) afin de juger du niveau de convergence et de stabilité des vitesses de retour vers la moyenne dans des pays caractérisés par des systèmes de production différents.

#### 4.3.1 Le choix de la procédure d'estimation

Une des solutions possibles pour estimer les demi-vies des chroniques boursières des quatre pays retenus dans l'étude (Etats-Unis, France, Japon et Royaume-Uni) est de s'appuyer sur la méthodologie établie par **BALVERS et collab. [2000]**. Toutefois, le recours à l'estimation sur données de panel, destinée à contrebalancer la perte de puissance des tests inhérente aux échantillons de petites tailles, introduit des hypothèses peu vraisemblables dans la méthode. Elle suppose en effet qu'il y a équivalence entre les valeurs fondamentales des marchés internationaux et que la différence entre la tendance du cours de l'indice d'un pays et celle de l'indice de référence (le benchmark) est stationnaire. Or, si les tests ADF indiquent que les cours détrendés des séries de prix sont stationnaires, ces mêmes tests ADF montrent que les prix relatifs ne sont pas systématiquement stationnaires. Par ailleurs, l'utilisation d'un benchmark unique comme valeur fondamentale pour l'ensemble des marchés ne semble acceptable que pour l'indice américain qui, du fait du poids relatif de la capitalisation boursière des Etats-Unis, a tendance à déterminer le benchmark (soit le MSCI monde pour Balvers). Pour les autres marchés, sur des horizons profonds, on ne décèle pas de parallélisme avec l'indice des cours mondiaux. On constate (tableau 4.4) que les variances empiriques relativement à l'indice monde qui sont calculées pour les différents pays ne coïncident pas. Or, nous avons vu dans les modélisations présentées plus haut que la volatilité dans un processus régit par une force de rappel était fonction de la vitesse de retour vers la moyenne. Or si la vitesse était identique, on devrait avoir des niveaux de volatilité relative à peu près égaux dans les différents pays.

TABLEAU 4.4 – Rendements réels sur les données relatives concernant la période 1926-2014

Rendements relatifs par rapport à l'indice « World »			
Pays	Référence	Moyenne	Ecart-type
US	World	1,64%	9,61%
FR	World	0,89%	23,37%
UK	World	1,61%	17,15%
JP	World	1,81%	27,08%

L'hypothèse posée par **BALVERS et collab.** peut avoir un sens sur des historiques récents en raison de la globalisation et de l'interconnexion croissante des marchés boursiers des pays développés. Mais l'utilisation de données correspondant à cette période nous conduirait à réduire de manière importante la profondeur de l'historique et par conséquent à perdre de la puissance statistique dans les estimations. Adopter l'idée d'une vitesse de retour vers la moyenne similaire revient à considérer que le processus générateur des prix relatifs observés par rapport à l'indice monde dans les quatre pays est identique. Ce qui suppose l'introduction d'une étape préalable de vérification pour tester l'homogénéité des spécifications sur l'ensemble des quatre pays. Ce qui s'avère bien plus complexe en considérant la modélisation de **BALVERS et collab. [2000]** suivant l'équation (4.37).

Sur le plan économétrique, à partir de l'application d'un test statistique et d'une analyse formelle des résultats, l'exercice peut avoir un sens statistique. Mais sur le plan économique, il est fort peu probable que l'on ait le droit de faire de telles hypothèses au vu des statistiques du tableau 4.4.

$$\forall i \in \{1, 2, 3, 4\} \quad \alpha^i = \alpha \quad \text{et} \quad \lambda^i = \lambda$$

Compte tenu de ces constats, il paraît plus réaliste de supposer qu'il existe une spécification propre à l'évolution du marché boursier dans chaque pays considéré. Notre choix se porte logiquement sur les méthodes alternatives d'estimation de l'équation d'Ornstein-

Uhlenbeck.

Nous avons vu plus haut que le modèle le plus naturel pour identifier la dynamique de l'évolution des marchés boursiers correspondait à un « *trending OU process* » donné par l'équation (4.21). Pour notre part, comme nous avons choisi de nous appuyer sur les méthodes classiques d'estimation, nous avons été amenés à soustraire du logarithme des cours la tendance linéaire estimée par les MCO conformément à l'équation (4.21). Ce qui détermine une dynamique où le cours des actions évolue autour d'une tendance de long terme nulle. Cette transformation nous ramène à l'estimation de l'équation (4.5) via l'estimation des paramètres de l'équation (4.1) par les MCO.

Comme nous l'avons souligné, il n'est pas possible d'éliminer l'ensemble des biais identifiés dans les procédures d'estimation de la demi-vie. Nous avons toutefois cherché à les réduire sans compliquer la méthodologie. Par exemple, concernant la question du changement de régime dans la dynamique des marchés, nous avons choisi de mettre en évidence les périodes de ruptures dans l'évaluation des demi-vies, en recourant à des estimations sur des fenêtres de données glissantes. Cela reste une méthode naturelle pour identifier les changements de régime sans complexifier l'analyse par l'introduction de nouveaux tests statistiques. Dans la méthode retenue pour évaluer la dynamique et l'ordre du processus de retour vers la moyenne, la validation des estimations des vitesses et des persistances est effectuée par le biais de tests de blancheurs des résidus d'estimations par la méthode de Ljung-Box de tests d'autocorrélation.

Pour évaluer l'impact de la réduction du biais sur la vitesse de retour vers la moyenne, nous avons - à partir de l'estimateur autocorrigé du biais donné dans [BAO et collab. \[2015\]](#) - utilisé des simulations de Monte-Carlo pour générer des processus de dynamiques connues.

Les tableaux ci-dessous présentent quelques résultats significatifs permettant de comparer la qualité de l'estimateur MCO et de l'estimateur autocorrigé du biais systématique induit. Dans les tableaux 4.5 à 4.8, les trois premières colonnes donnent de gauche à droite : la vraie persistance, la vitesse de retour vers la moyenne et la demi-vie du processus générateur des prix. Dans les autres colonnes, nous comparons le coefficient de variation théorique avec ceux issus des estimations.

TABLEAU 4.5 – Vitesse sur observations annuelles avec fenêtre de taille 15.

<i>OU process (estimé avec BC)</i>							
$\rho$	$\kappa$	$hl$	$\widehat{hl}$	$\widehat{hl}_{bc}$	$CV_{th}$	$CV_{emp}$	$CV_{emp}^{bc}$
0,5	0,69	1	0,69	0,98	64,52	304,43	56,89
0,6	0,51	1,36	0,9	1,26	67,39	978,05	60,38
0,7	0,36	1,94	1,2	1,67	73,85	1596,05	69,41
0,8	0,22	3,11	1,68	2,35	86,78	40668,67	138,11
0,9	0,11	6,58	2,56	3,58	118,69	5030,05	2647,64
0,975	0,03	27,38	4,03	5,45	232,42	1365,87	9819,46
<i>Les coefficients de variations sont données en %, les demi-vies en années et l'estimateur MCO pour <math>\rho</math></i>							

TABLEAU 4.6 – Vitesse sur observations annuelles avec fenêtre de taille 50

<i>OU process (estimé avec BC)</i>							
$\rho$	$\kappa$	$hl$	$\widehat{hl}$	$\widehat{hl}_{bc}$	$CV_{th}$	$CV_{emp}$	$CV_{emp}^{bc}$
0,5	0,69	1	0,89	0,99	35,34	38,13	23,18
0,6	0,51	1,36	1,2	1,33	36,91	39,92	24,71
0,7	0,36	1,94	1,67	1,9	40,45	44,36	28,13
0,8	0,22	3,11	2,53	2,98	47,53	57,26	35,26
0,9	0,11	6,58	4,59	5,79	65,01	428,66	52,1
0,975	0,03	27,38	10,41	13,82	127,3	7678,3	1941,59
<i>Les coefficients de variations sont données en %, les demi-vies en années et l'estimateur MCO pour <math>\rho</math></i>							

TABLEAU 4.7 – Vitesse sur observations annuelles avec fenêtre de taille 100

OU process (estimé avec BC)							
$\rho$	$\kappa$	$hl$	$\widehat{hl}$	$\widehat{hl}_{bc}$	$CV_{th}$	$CV_{emp}$	$CV_{emp}^{bc}$
0,5	0,69	1	0,95	1	24,99	25,99	19,13
0,6	0,51	1,36	1,28	1,36	26,1	27,16	20,32
0,7	0,36	1,94	1,82	1,94	28,6	29,83	22,86
0,8	0,22	3,11	2,82	3,09	33,61	35,41	28,36
0,9	0,11	6,58	5,48	6,43	45,97	52,46	45,38
0,975	0,03	27,38	15,42	20,33	90,02	6225,38	400,14
<i>Les coefficients de variations sont données en %, les demi-vies en années et l'estimateur MCO pour <math>\rho</math></i>							

TABLEAU 4.8 – Vitesse sur observations annuelles avec fenêtre de taille 200

OU process (estimé avec BC)							
$\rho$	$\kappa$	$hl$	$\widehat{hl}$	$\widehat{hl}_{bc}$	$CV_{th}$	$CV_{emp}$	$CV_{emp}^{bc}$
0,5	0,69	1	0,97	1	17,67	17,83	10,57
0,6	0,51	1,36	1,32	1,36	18,46	18,57	11,08
0,7	0,36	1,94	1,88	1,94	20,23	20,32	12,24
0,8	0,22	3,11	2,95	3,1	23,77	23,89	14,7
0,9	0,11	6,58	5,98	6,53	32,5	33,06	21,61
0,975	0,03	27,38	19,67	24,75	63,65	1303,33	52,28
<i>Les coefficients de variations sont données en %, les demi-vies en années et l'estimateur MCO pour <math>\rho</math></i>							

Nous constatons à la lecture des tableaux que l'estimateur classique des MCO sous-estime la demi-vie par rapport à l'estimateur MCO autocorrigé du biais. Pour des échantillons supérieurs à 200 observations, les coefficients de variation se réduisent et l'estimateur corrigé du biais propose une valeur réaliste pour la demi-vie. Enfin, l'identification de queues épaisses dans la distribution de l'estimateur de la demi-vie en fonction du niveau de persistance nous a conduit à mettre en place une stratégie d'estimation MUE (« *median unbiased estimator*») à partir de l'estimateur MCO avec correction de biais donné par BAO et collab. [2015]. Remarquons que ces derniers évoquent l'idée de calibrer la vitesse de retour vers la moyenne du « OU process » via l'estimation préalable du coefficient de persistance de l'équation autorégressive d'ordre 1 associée.

### 4.3.2 Les données

Les mesures empiriques de la demi-vie sont effectuées sur les chroniques des marchés financiers de quatre pays, représentant 3 continents (Etats-Unis, France, Royaume-Uni et Japon). Ils ont été sélectionnés en fonction de leur représentativité. Dans cette optique, nous avons retenu le CAC-All Tradable (ex SBF 250) pour représenter le marché des actions en France, l'indice S&P500 pour les Etats-Unis, le FTSE All Share Index ou « footsie » pour le Royaume-Uni et enfin le Tokyo Japan Topix Index pour le marché japonais. Les calculs ont été réalisés à partir de chroniques de « *total return* » calculées par *Global Financial Data* ([www.globalfinancialdata.com](http://www.globalfinancialdata.com)). Lorsque l'on s'intéresse aux caractéristiques des marchés actions, il est raisonnable d'utiliser les chroniques des indices bruts » (ou « *total return* » c'est-à-dire calculés dividendes réinvestis). Cette précision est importante car de nombreuses analyses s'appuient sur les propriétés des « indices nus » (hors dividendes), ce qui détermine des résultats contrastés relativement aux conclusions tirées des indices bruts. En effet, le différentiel de croissance entre les indices bruts et nus est de l'ordre de 3% l'an sur longue période. Afin de se débarrasser du phénomène d'*illusion monétaire*, qui conduit à amalgamer hausse du niveau général des prix et accroissement des rendements financiers, toutes les séries de total return sont déflatées par les indices de prix à la consommation locaux.

La représentation graphique du logarithme des cours détrendés révèle une forte variabilité des écarts à la moyenne consécutive aux périodes de guerres. Le phénomène est

particulièrement visible sur les cours au Japon. D'où la nécessité d'estimer les demi-vies sur des périodes débarrassées des perturbations liées à la seconde guerre mondiale. Ce choix conduit naturellement à réduire le nombre des observations disponibles à basse fréquence.

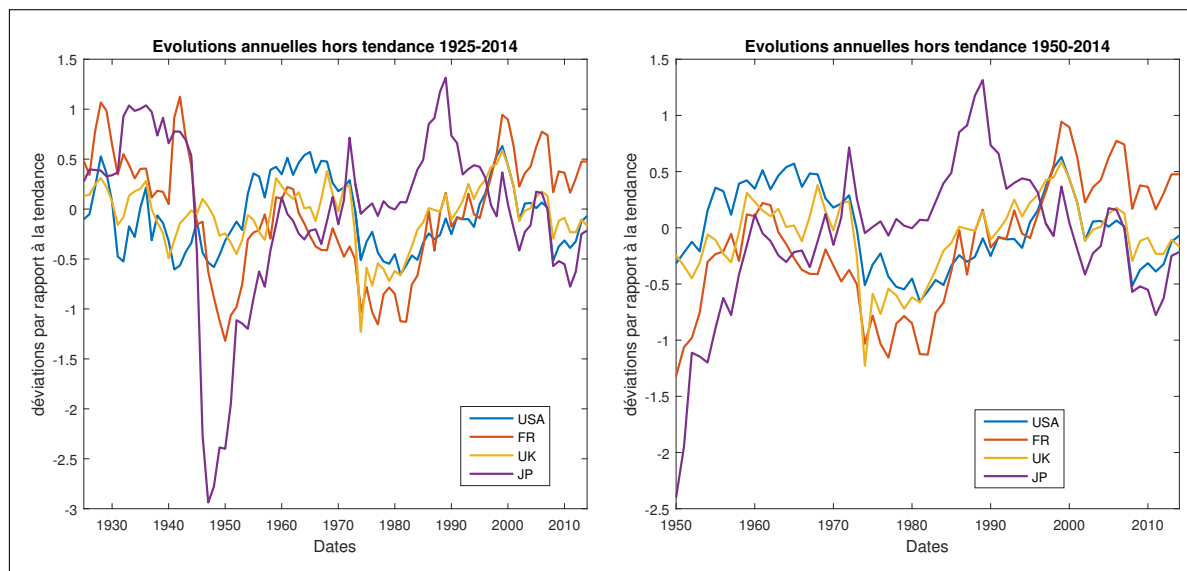


FIGURE 4.10 – Evolution des cours par rapport à la tendance

Nous savons qu'en présence d'historique long, il est préférable d'utiliser des observations annuelles. Cependant, lorsque la profondeur des chroniques historiques homogènes est trop faible, alors on est confronté à un biais d'estimation systématique. Dans ce cas de figure, nous privilégierons l'utilisation de d'observations disponibles à plus haute fréquence sur des historiques plus courts dans le but de réduire la variance de l'estimateur de la demi-vie.

### 4.3.3 Les résultats des estimations empiriques

Dans la procédure de calcul, l'estimateur corrigé des biais des MCO est associé à la méthode de la médiane sans biais MUE décrite en annexe. Cette méthodologie nous a permis d'évaluer les demi-vies des cours des différents marchés pour des périodes et des fréquences distinctes. Dans les tableaux dans lesquels les résultats sont consignés, tous les résultats ont été annualisés de façon à en faciliter la comparaison.



### Une estimation de la convergence sur la période 1950-2014

Les deux tableaux suivants présentent les premiers résultats des estimations de la vitesse et de la demi-vie, pour les quatre pays étudiés. Les fréquences des observations sont trimestrielles et la fenêtre d'estimation concerne la période 1950-2014. Le tableau 4.9 présente les résultats obtenus par la méthode d'estimation classique des MCO. Il permet de comparer les résultats à ceux obtenus à partir d'un estimateur sans biais (tableau 4.10).

Il apparaît clairement dans le tableau 4.9, basé sur l'estimation académique classique, que les vitesses de retour vers la moyenne des marchés boursiers sont très proches avec un taux d'absorption annuel moyen de l'ordre de 13% pour les cas des Etats-Unis, de la France et du Japon. Seul le marché boursier du Royaume-Uni paraît légèrement plus rapide avec un taux de 17%. On en déduit que les demi-vies sont très proches d'un marché financier à l'autre sur la période 1950-2014 et s'établissent - à l'exception notable du Royaume-Uni - autour de 5 années. Si on s'arrête aux résultats de cette estimation, on est tenté de conclure, dans la lignée des hypothèses posées par **BALVERS et collab. [2000]**, que la vitesse de retour vers la moyenne est identique pour l'ensemble des pays en raison de l'interconnexion des marchés.

TABLEAU 4.9 – Estimateur MCO - observations à fréquences trimestrielles : 1950-2014

VITESSE ET ESTIMATION DE LA DEMI-VIE : 1950-2014					
PAYS	T	N	VITESSE	PERSISTENCE	DEMI-VIE
USA	65	260	0,1368	0,8722	5,0687
FR	65	260	0,1252	0,8823	5,5375
UK	65	260	0,1775	0,8374	3,9054
JP	65	260	0,135	0,8737	5,1355

Cependant, les estimations présentées dans le tableau 4.10 à partir d'une estimation non biaisée, révèlent un rythme de convergence vers la moyenne différent pour le même ensemble de marchés boursiers. Alors que les résultats du tableau 4.9 décrivaient une

convergence des demi-vies, ceux du tableau 4.10 présentent une vitesse d'absorption des chocs plus rapide dans les pays anglo-saxons, Royaume-Uni et Etats-Unis, qu'en France et au Japon. Par ailleurs, on note d'une manière globale que les résultats issus de cette deuxième méthode d'estimation sont légèrement supérieurs à ceux du tableau 4.9.

TABEAU 4.10 – Estimateur sans biais - observations à fréquences trimestrielles : 1950-2014

VITESSE ET ESTIMATION DE LA DEMI-VIE : 1950-2014					
PAYS	T	N	VITESSE	PERSISTENCE	DEMI-VIE
USA	65	260	0,1078	0,8978	6,4293
FR	65	260	0,0965	0,908	7,1803
UK	65	260	0,1478	0,8626	4,6903
JP	65	260	0,1061	0,8994	6,5345

Ce constat n'est pas étonnant. Nous avons souligné dans l'étude des biais de l'estimateur MCO que l'estimateur classique surestimait la vitesse de retour vers la moyenne et par là sous-estimait les demi-vies. Par conséquent, l'utilisation d'un estimateur non biaisé conduit à estimer des demi-vies supérieures. Bien que les valeurs des vitesses de convergence soient réduites, la hiérarchie entre les pays reste identique. Les marchés financiers au Royaume-Uni restent caractérisés par une vitesse de correction des prix vers leur valeur de long terme plus rapide que pour les autres pays : environ 15% des écarts à la valeur de long terme, consécutifs à des chocs, sont absorbés chaque année. Cette vitesse permet l'absorption de la moitié d'une perturbation sur une durée moyenne de 4,7 ans. On notera que c'est sur le marché français que l'on estime la plus faible *mean reversion*.

#### La prise en compte des périodes de guerres mondiales

Ces résultats sont le reflet d'une période économique « relativement » sereine. Pour mieux apprécier la stabilité du phénomène de retour vers la moyenne au cours du temps, nous avons jugé bon de reproduire l'exercice sur des fenêtres d'observation incluant les

périodes de destruction et reconstruction consécutives aux périodes de guerre mondiale. A cette fin, les échantillons ont été scindés en deux périodes. La première couvre la période 1925-1950 tandis que la seconde s'intéresse à l'ensemble des observations disponibles de 1925 à 2014.

Les tableaux 4.11 et 4.12 présentent les estimations moyennes des vitesses et des demi-vies pour les pays étudiés sur la période 1925-1950. On doit noter que sur cette période aussi nous disposons de moins de données ce qui, on le sait, augmente sensiblement le coefficient de variation de l'estimateur et donc l'erreur d'estimation. Les estimations doivent, de ce fait, être interprétées avec davantage de réserve que précédemment.

TABLEAU 4.11 – Estimateur MCO - observations à fréquences trimestrielles : 1925-1950

VITESSE ET ESTIMATION DE LA DEMI-VIE : 1925-1950					
PAYS	T	N	VITESSE	PERSISTENCE	DEMI-VIE
USA	26	104	0,7508	0,472	0,9232
FR	26	104	0,1294	0,8786	5,3555
UK	26	104	0,3304	0,7187	2,0981
JP	26	104	0,0764	0,9264	9,0713

Les résultats opposent encore plus clairement les pays anglo-saxons et le reste des pays étudiés. Les Etats-Unis et Royaume-Uni sont caractérisés par des vitesses d'absorption des chocs étonnamment rapides. A contrario, la persistance des chocs serait beaucoup plus importante sur les marchés français et japonais. Sur ce dernier marché, la durée de retour vers la moyenne est estimée à environ 20 ans, seulement 3% de la valeur des écarts au prix de long terme étant absorbée chaque année. Les conclusions concernant les méthodes d'estimation restent identiques : les vitesses de retour vers la moyenne sont sous-estimées avec l'estimateur classique. Les résultats des estimations des demi-vies sur l'ensemble des données disponibles (soit de 1925 à 2014) sont reportés dans les tableaux 4.13 et 4.14.

TABLEAU 4.12 – Estimateur sans biais - observations à fréquences trimestrielles : 1925-1950

VITESSE ET DEMI-VIE : 1925-1950					
PAYS	T	N	VITESSE	PERSISTENCE	DEMI-VIE
USA	26	104	0,6689	0,5123	1,0363
FR	26	104	0,0722	0,9304	9,6036
UK	26	104	0,2569	0,7734	2,6977
JP	26	104	0,0349	0,9657	19,8464

TABLEAU 4.13 – Estimateur MCO - observations à fréquences trimestrielles : 1925-2014

VITESSE ET ESTIMATION DE LA DEMI-VIE : 1925-2014					
PAYS	T	N	VITESSE	PERSISTENCE	DEMI-VIE
USA	90	360	0,1852	0,8309	3,7421
FR	90	360	0,0765	0,9264	9,0651
UK	90	360	0,1772	0,8376	3,9118
JP	90	360	0,0489	0,9523	14,1745

TABLEAU 4.14 – Estimateur sans biais - observations à fréquences trimestrielles : 1925-2014

VITESSE ET ESTIMATION DE LA DEMI-VIE : 1925-2014					
PAYS	T	N	VITESSE	PERSISTENCE	DEMI-VIE
USA	90	360	0,1633	0,8493	4,2441
FR	90	360	0,0563	0,9453	12,3104
UK	90	360	0,1553	0,8561	4,4619
JP	90	360	0,0306	0,9698	22,6243

On constate toujours la même division entre les marchés financiers des pays anglo-saxons et ceux des autres pays. L'estimation sans biais détermine une demi-vie inférieure à 5 ans aux Etats-Unis et au Royaume-Uni. Les marchés français et surtout japonais dénotent une plus faible capacité d'intégration des perturbations. La demi-vie est respectivement estimée à 12 et 22 ans pour les marchés français et japonais. Les valeurs des demi-vies calculées s'inscrivent à mi-chemin entre celles déterminées par **BALVERS et collab. [2000]** et les résultats obtenus par **SPIERDIJK et collab. [2012]**.

Plus que la mesure brute de la valeur des demi-vies, la singularité de ces estimations tient avant tout au caractère fluctuant des mesures en fonction des périodes ou sous périodes retenues. Les écarts des résultats observés à différentes périodes sur un même marché tendent à accréditer l'existence de changement de rythme dans la correction des prix vers leur valeur de long terme en fonction des cycles économiques. Ces résultats, qui sont en phase avec ceux décrits dans la littérature académique récente<sup>13</sup>, nous ont conduit à estimer les demi-vies sur des fenêtres glissantes afin de mieux en apprécier la variance.

### Une estimation sur des fenêtres glissantes

Les estimations sur des fenêtres glissantes de 25 ans sont réalisées sur la période 1925-2014 et sur les années d'après-guerre, soit de 1950-2014. Les estimations sont calculées

13. **SPIERDIJK et collab. [2012]** parlent de « *time varying mean reversion* »

pour trois fréquences : annuelles, trimestrielles et mensuelles. Pour faciliter la lecture, les résultats des simulations sont représentés sous la forme de diagramme en boîte ou « *Box plot* ». Cette représentation commode est un récapitulatif graphique de la distribution d'un échantillon, dont il indique la forme, la tendance centrale et la variabilité. Sur nos diagrammes, le premier quartile Q1, la médiane et le troisième quartile Q3 sont représentés et les extrémités (ou « moustaches ») symbolisent les 5ème et 95ème percentiles, ce qui permet d'éliminer les « *outliers* », c'est-à-dire les données aberrantes, qui conduiraient à écraser les diagrammes.

Sur la période 1925-2014 aucune des valeurs médianes des demi-vies n'excèdent 6 ans. L'étalement des distributions est toutefois très variable selon les pays. La concentration des demi-vies dans le cas du Royaume-Uni est notamment remarquable. Assez étonnamment, en dépit d'une valeur médiane relativement faible de l'ordre de 4 années, la distribution des demi-vies calculée pour les Etats-Unis apparait plus dispersée et le 95ème percentile coïncide avec une valeur de l'ordre de 17 ans.

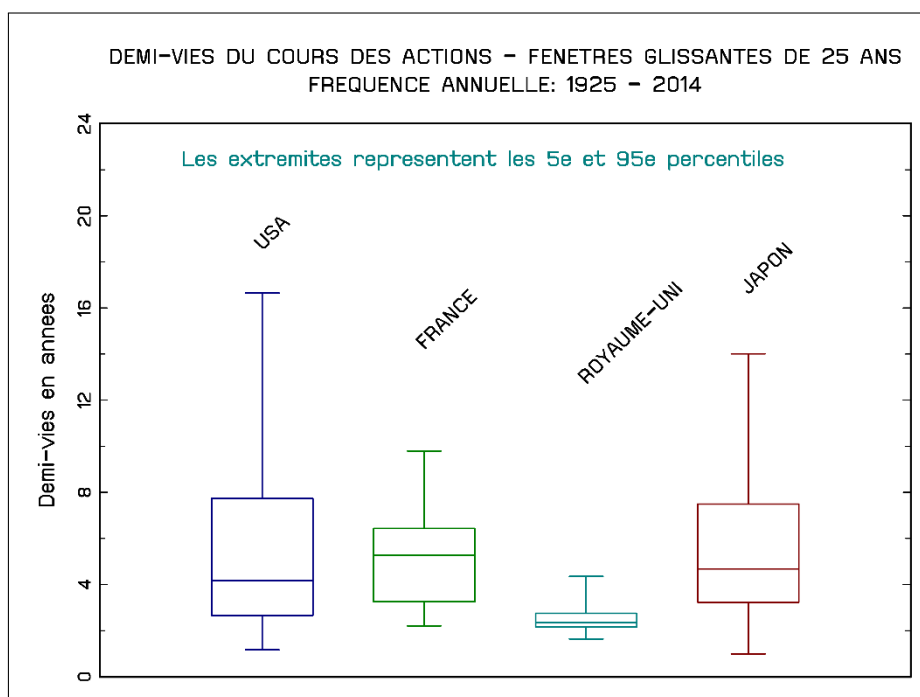


FIGURE 4.11 – Boîtes à moustaches des demi-vies sur données annuelles cas 1

Sur données annuelles, les distributions des demi-vies calculées pour les quatre pays (à l'exception notable du Japon, qui est caractérisé par une forte variabilité des écarts à la moyenne pendant les périodes de guerres) apparaissent relativement stables sur les périodes 1925-2014 et 1950-2014.

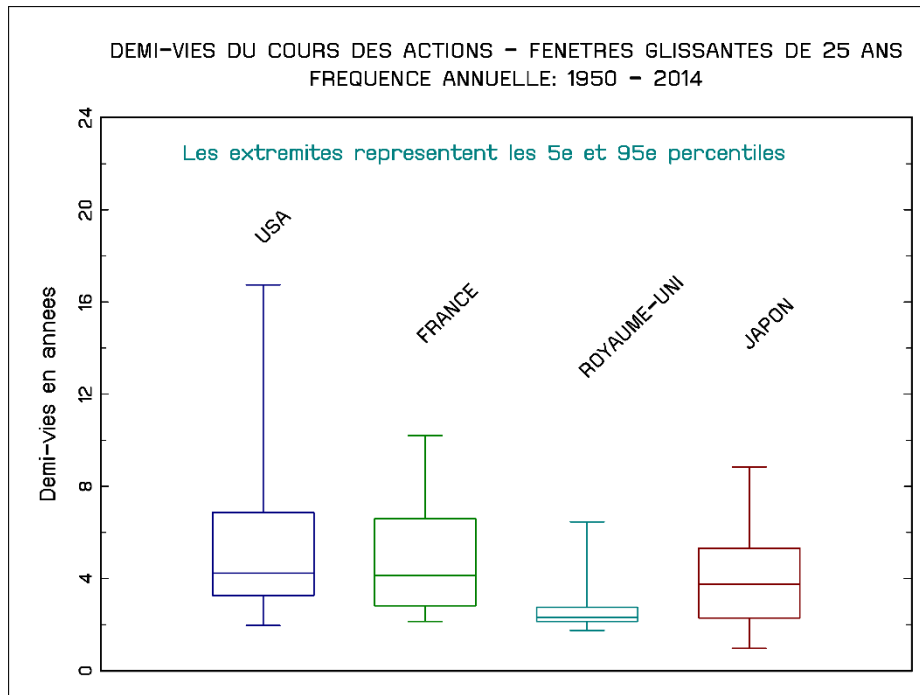


FIGURE 4.12 – Boîtes à moustaches des demi-vies sur données annuelles cas 2

Le calcul des demi-vies sur des fréquences trimestrielles (que nous privilégions) sur l'ensemble de la période révèle un étalement légèrement plus important des distributions. La valeur du 95ème percentile est de 24 ans au Japon. Outre l'augmentation de l'étalement des queues de distribution vers la droite, le changement de fréquence n'apporte pas de bouleversement relativement aux mesures réalisées sur fréquences annuelles.

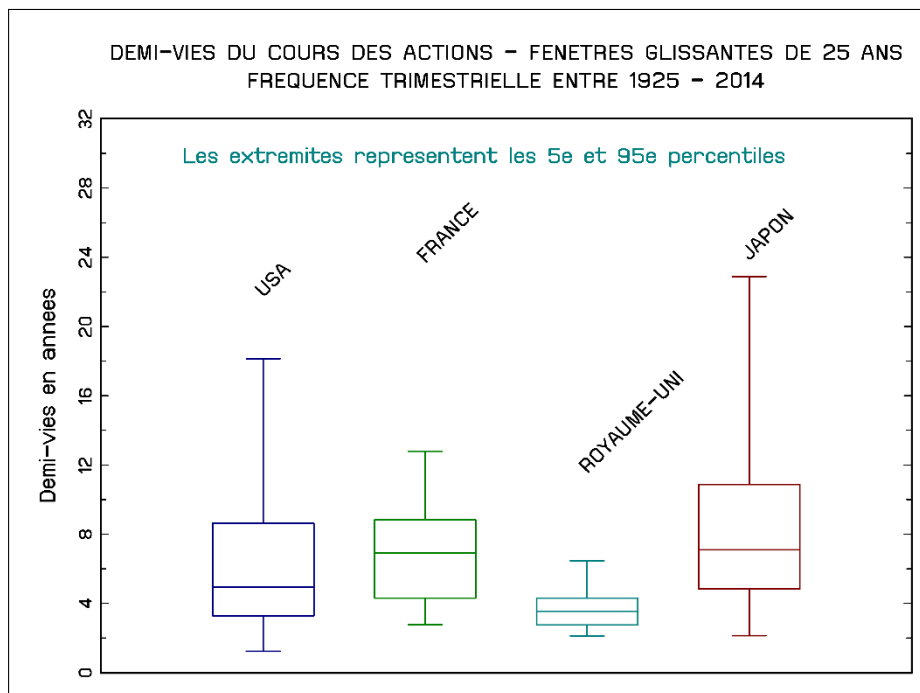


FIGURE 4.13 – Boîtes à moustaches des demi-vies sur données trimestrielles cas 1

L'estimation sur la période 1950-2014 se traduit par une concentration des distributions. La dispersion des demi-vies au Japon revient dans la norme.

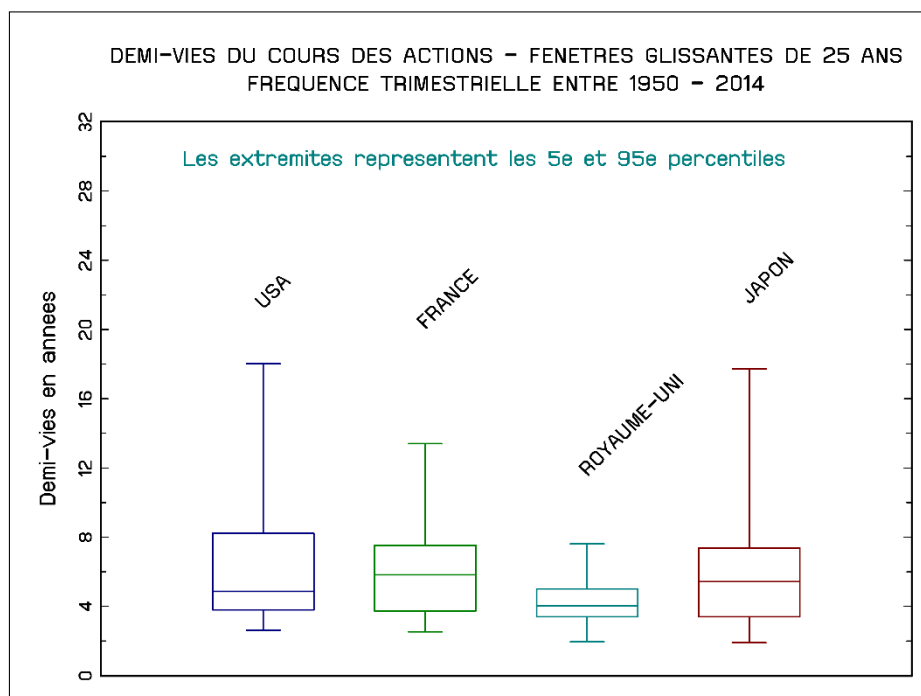


FIGURE 4.14 – Boîtes à moustaches des demi-vies sur données trimestrielles cas 2

Les estimations au Royaume-Uni paraissent insensibles à la taille de la fenêtre d'estimation. On constate que les demi-vies sont légèrement supérieures à celles estimées sur des données annuelles, mais l'écart reste faible.

Comme attendu, sur fréquences trimestrielles, l'augmentation de la fréquence conduit à des distributions plus étalées des demi-vies. Le résultat n'est pas surprenant car nous savons que la persistance dans le logarithme du cours des actions est souvent fonction de la fréquence des observations. Les hautes fréquences sont généralement caractérisées par des coefficients de persistances élevés (proches de l'unité).

De fait, on constate sur la période 1925-2014 une élévation des demi-vies associées au du 95ème percentile. Une fois de plus le Royaume-Uni échappe à ce constat : la concentration des demi-vies autour de la médiane est surprenante au regard des autres marchés financiers étudiés.



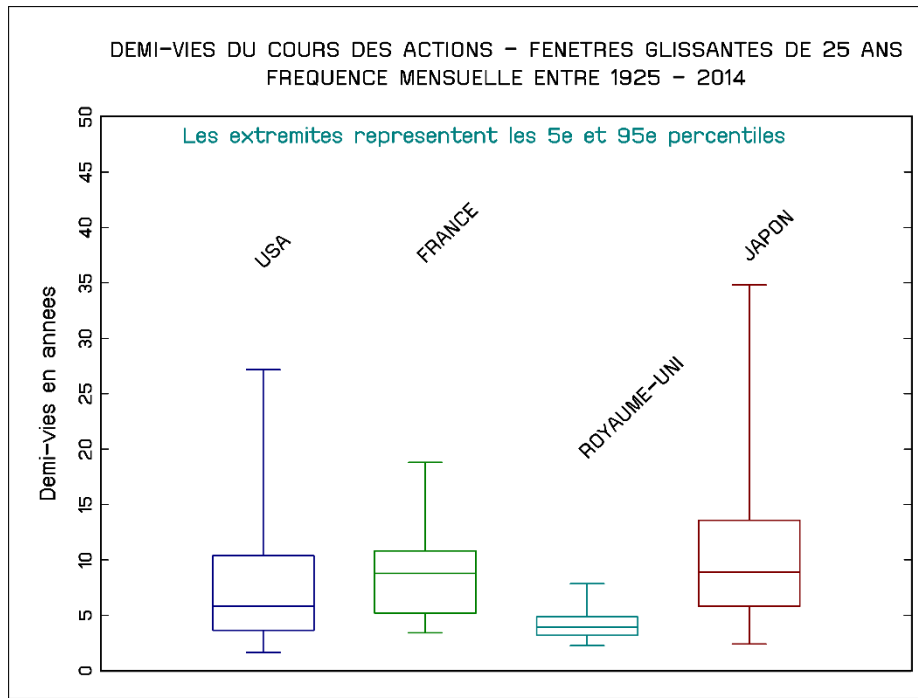


FIGURE 4.15 – Boîtes à moustaches des demi-vies sur données mensuelles cas 1

La réduction de la fenêtre d'estimation à la période 1950-2014 ne change pas fondamentalement la donne. Les demi-vies médianes et la dispersion des distributions restent similaires. Naturellement, le choix d'un intervalle de confiance différent pour les extrémités des diagrammes en boîte (1er et 99ème percentiles par exemples) aurait conduit - notamment dans le cas de fréquences mensuelles - à des queues de distribution (des moustaches en l'occurrence) beaucoup plus étalées.

Il apparait que la comparaison des résultats obtenus à partir de fréquences différentes (et un nombre d'observations allant de 1 à 12) ne conduit pas à une modification profonde du diagnostic porté sur la vitesse de concentration des rendements vers la moyenne d'une fréquence à l'autre. Ce constat tend à démontrer la robustesse de la méthode d'estimation adoptée.

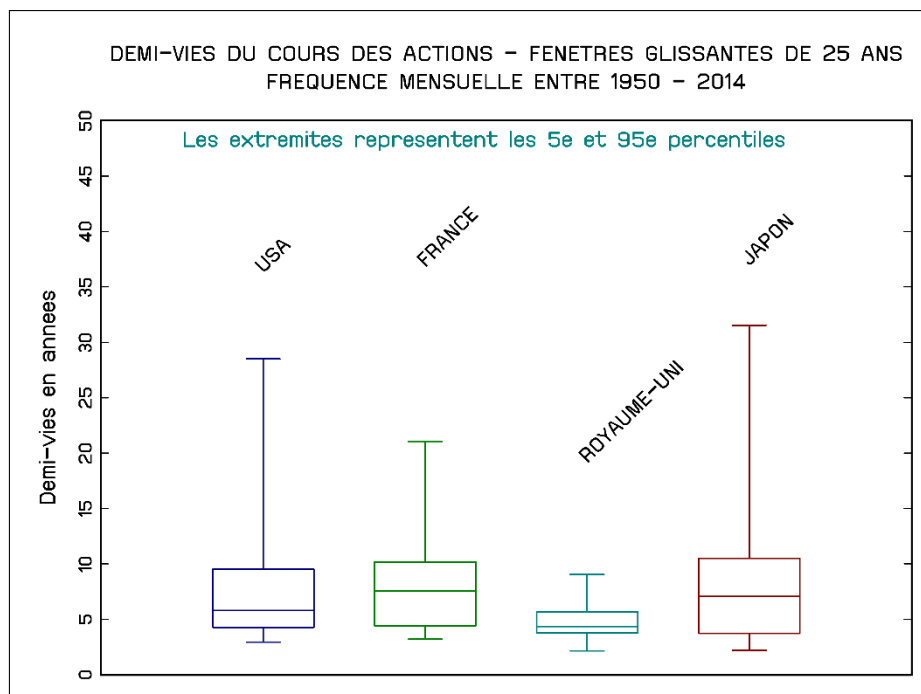


FIGURE 4.16 – Boîtes à moustaches des demi-vies sur données mensuelles cas 2

## 4.4 Elements de conclusion

Après avoir défini un processus adéquat de type Ornstein-Uhlenbeck, nous avons mesuré la demi-vie, soit la durée moyenne du temps nécessaire pour que l'écart entre le prix de marché et sa valeur fondamentale soit résorbée de moitié, à l'aide d'une méthode d'estimation par MCO avec correction du biais systématique. La procédure d'estimation a, en effet, été enrichie par l'étude analytique des différents biais inhérents à l'estimation de la demi-vie. Les estimations empiriques des demi-vies à partir des indices de total return des marchés actions de quatre pays (Etats-Unis, France, Royaume-Uni et Japon) sur des périodes avant et après-guerre et à plus ou moins haute fréquence nous ont permis d'estimer des valeurs réalistes et convergentes. Il s'avère que, dans l'ensemble des pays étudiés, les cours boursiers convergent vers leurs tendances de long terme en un temps raisonnable, compatible avec la durée d'épargne d'un agent. Les valeurs de demi-vies pour un même marché se sont révélées fluctuantes au cours du temps en fonction des cycles économiques. Plutôt que de donner une valeur précise pour caractériser la demi-vie, il est plus significatif d'en encadrer la valeur au moyen d'un intervalle de confiance. Ainsi, on peut conclure que, sur des fréquences trimestrielles et sur la période courant de 1950 à 2014, les demi-vies pour l'ensemble des pays étudiés sont respectivement associées à des valeurs du premier (Q1) et du troisième quartile (Q3) de 4 ans et 8 ans. Ces valeurs estimées légitimement, à elles seules, les stratégies de [diversification temporelle](#).

## Annexes

### 4.A Esimateur **point col** de la densité de probabilité de la vitesse dans un processus AR(1)

#### Complément sur les formules de densités de probabilités d'un processus de retour vers la moyenne

Les matrices  $C_1$ ,  $C_2$  et  $R_\alpha$  mentionnées dans les formules (4.39) , (4.40) et (4.41) ci-dessus s'écrivent comme suit :

$$C_1 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}_{(T+1) \times (T+1)}$$

et

$$C_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}_{(T+1) \times (T+1)}$$

$$R_\alpha = \begin{pmatrix} b & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \alpha b & 1 & \cdots & \cdots & \vdots \\ \alpha^2 b & \alpha & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \alpha^T b & \alpha^{T-1} & \cdots & \alpha & 1 \end{pmatrix}_{(T+1) \times (T+1)}$$

Avec :

$$b = \begin{cases} (1 - \alpha^2)^{-1/2} & \text{si } \alpha \in ]-1; 1[ \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Nous avons vu que le niveau de persistance pouvait s'écrire comme une fonction de la vitesse,  $\hat{\alpha} = e^{-\hat{\kappa}}$ . Cette expression a pour jacobien la quantité  $J = -e^{-\kappa}$ . En considérant les implications du théorème suivant, on retrouve la formule de la densité de probabilité de l'estimateur de la vitesse du processus d'OU donnée plus haut :

**Théorème.** Soient  $S$  et  $T$  deux ouverts de  $\mathbb{R}$  et  $X$  une variable aléatoire réelle absolument continue à valeur dans  $S$  et de densité de probabilité  $f_X$ . Soit  $\varphi$  une bijection de  $S$  vers  $T = \text{Image}(\varphi)$  de classe  $\mathcal{C}^1$ , ainsi que son inverse ( $\varphi$  est  $\mathcal{C}^1$ ). Alors, la variable aléatoire réelle  $Y = \varphi(X)$  est absolument continue, à valeurs dans  $T$  et de densité :

$$f_Y(y) = f_X(\varphi^{-1}(y)) |(\varphi^{-1})'(y)| \mathbb{1}_{\text{Image}_\varphi(y)}$$

### Autres présentations graphiques de la densité de probabilité

Les figures 4.17a et 4.17b suivantes présentent les densités de probabilités de la persistance. On remarque (à taille d'échantillon identique) que plus le coefficient de persistance est proche de l'unité, plus son estimateur aura une forte probabilité de prendre des valeurs qui tendent vers l'unité, et ce d'autant plus (comme nous l'avons vu à l'analyse des figures 4.7a et 4.7b plus haut), que l'estimateur de la demi-vie présente un aplatissement important.

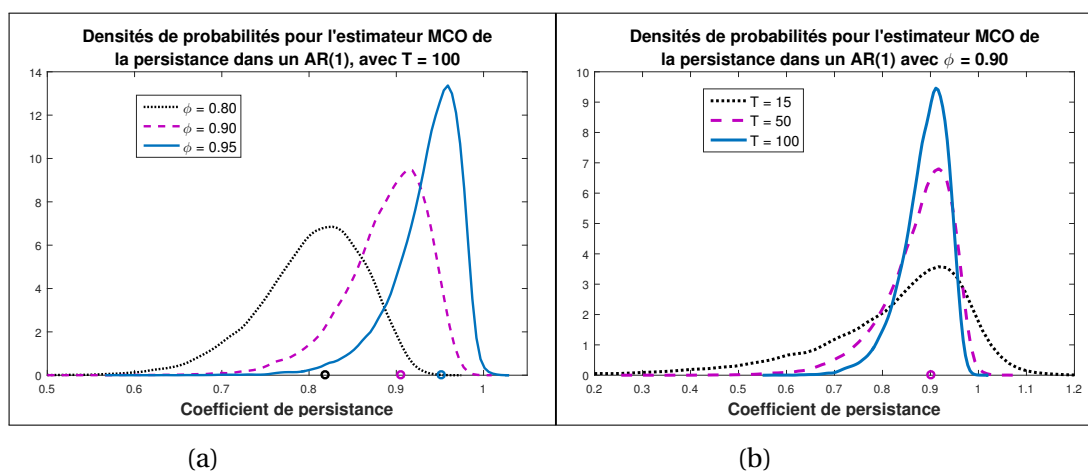


FIGURE 4.17 – Densités de probabilités de la persistance dans un processus AR(1) stationnaire

On peut également voir sur les graphiques 4.18a et 4.18b les densités de probabilités de l'estimateur de la demi-vie et de la vitesse d'ajustement de la série en fonction de la taille de l'échantillon. On constate naturellement que plus la taille de l'échantillon devient petite plus la distribution de probabilité présente un étalement fort :

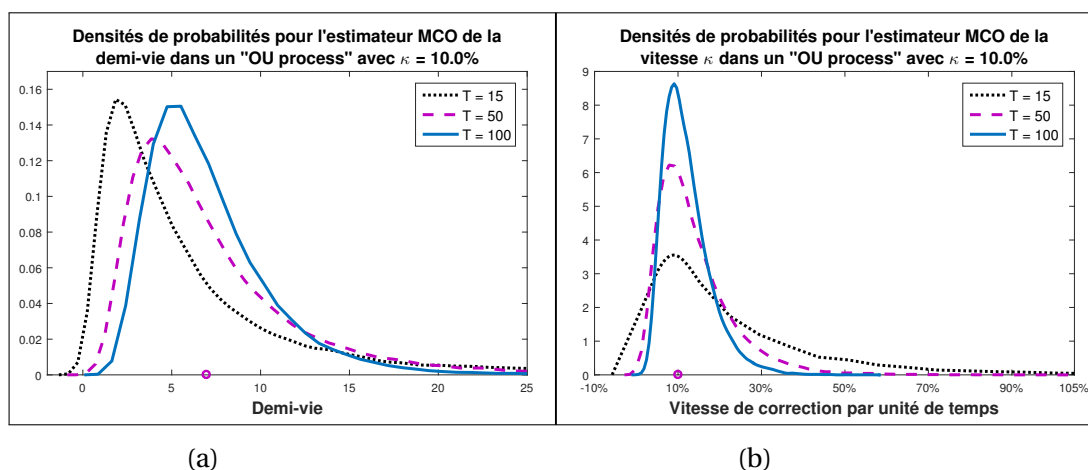


FIGURE 4.18 – Densités de probabilités de la demi-vie et de la vitesses en fonction du temps

## 4.B Estimateur MUE de la médiane sans biais « median unbiased estimator »

Considérons une variable aléatoire  $X$  de médiane  $m$ , telle que les probabilités sur  $X$  ne soient pas définies par une fonction de masse, alors :

$$\mathbb{P}(X > m) = \mathbb{P}(X < m) = \frac{1}{2} \quad (4.54)$$

Ainsi, cette définition statue sur l'unicité de la médiane de  $X$ . C'est dans cette définition de la médiane que le développement qui suit s'appuie.

Si le concept d'estimateur de la médiane sans biais se généralise dans la littérature économétrique à plusieurs modèles autorégressifs, nous nous limiterons aux modèles autorégressifs d'ordre 1 étudiés dans ce rapport. Soient ceux donnés pour  $t = 1, \dots, T$ , et  $\alpha \in ]-1; 1]$ , et  $u_t \xrightarrow{i.i.d} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$  par<sup>14</sup> :

$$y_t = \alpha y_{t-1} + u_t, \quad y_0 \xrightarrow{i.i.d} \mathcal{N}(0, \sigma^2) \quad (4.55)$$

$$y_t = \mu + \alpha y_{t-1} + u_t, \quad y_0 \xrightarrow{i.i.d} \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \quad (4.56)$$

Dans cette équation, on a  $y_0 \xrightarrow{i.i.d} \mathcal{N}(0, \frac{\sigma^2}{1-\alpha^2})$ . Remarquons également que lorsque le modèle estimé est égal au vrai processus générateur de données, la distribution de  $\hat{\alpha}_{MCO}$ , l'estimateur MCO, ne dépend uniquement que de  $\alpha$ . En particulier ici, il ne dépend<sup>15</sup> pas de  $\sigma$ .

Supposons  $\hat{\alpha}$  un estimateur dont l'unique médiane est donnée par la fonction  $m(\cdot)$  strictement croissante dans l'espace  $\mathcal{A}$ , espace de définition du paramètre  $\alpha$ , lequel est supposé fini. Définissons par exemple  $\mathcal{A} = ]-1; 1]$ . Alors on appelle  $\hat{\alpha}_{MU}$  le MUE de  $\alpha$ , où :

$$\hat{\alpha}_{MU} = \begin{cases} 1 & \text{si } \hat{\alpha} > m(1) \\ m(\hat{\alpha})^{-1} & \text{si } m(-1) < \hat{\alpha} \leq m(1) \\ -1 & \text{si } \hat{\alpha} \leq m(-1) \end{cases} \quad (4.57)$$

14. voir ANDREWS [1993] pour les autres perspectives

15. Remarquons que dans la pratique il est fortement dépendant de la taille de l'échantillon  $T$

Dans cette écriture,  $m(-1) = \lim_{\alpha \rightarrow -1} m(\alpha)$  et  $m^{-1} : ]m(-1), m(1)] \rightarrow ]-1, 1]$  c'est l'inverse de la fonction  $m(\cdot)$  qui satisfait  $m^{-1}(m(\alpha)) = \alpha \forall \alpha \in ]-1, 1]$

Pour montrer que  $\hat{\alpha}_{\text{MU}}$  est le MUE, on doit vérifier que  $\forall \alpha \in ]-1, 1], \hat{\alpha}_{\text{MU}} \geq \alpha$  ssi  $m(\hat{\alpha}_{\text{MU}}) \geq m(\alpha)$  et ssi  $\hat{\alpha} \geq m(\alpha)$ . Où la première condition ssi est vérifiée car  $m(\cdot)$  est une fonction croissante, et la seconde condition ssi est respectée par la définition de  $\hat{\alpha}_{\text{MU}}$  donnée en 4.57. Puisque ces conditions conduisent aux mêmes résultats lorsque les inégalités  $\geq$  sont remplacées par les inégalités  $\leq$ , alors nous obtenons le MUE.

#### 4.C Méthode d'estimation de la vitesse dans un OU processus par les MCO avec la MUE « median unbiased estimator »

Cet algorithme pour obtenir l'estimateur de la médiane sans biais du paramètre kappa est basé sur les développements présentés par ANDREWS et CHEN [1994] et FAIR [1996] et le Wild bootstrap de MAMMEN [1993]. Pour l'estimation de la vitesse de retour vers la moyenne à partir de l'échantillon d'observations du marché  $\{x_1, \dots, x_N\}$ , considérons l'équation du paramètre à estimer suivant :

$$dx(t) = \kappa(\mu - x(t))dt + \sigma dW(t), \text{ avec } x(0) = x_0$$

$$x_{th} = \alpha + \phi x_{(t-1)h} + \varepsilon_{th}, \{\varepsilon_{th}\}_{t=1}^n \xrightarrow{i.i.d} \mathcal{N}(0, \sigma_\varepsilon^2)$$

On considère également que les coefficients de variations présentés dans les tableaux 4.5 à 4.8 nous donnent de bonnes approximations des intervalles dans lesquels les vraies valeurs des vitesses se trouvent. Les étapes de la méthode d'estimation sont alors les suivantes :

- (0) Définir une fenêtre approximant l'intervalle contenant la vraie valeur de la vitesse, soit la subdivision suivante :  $\kappa_{0,1}; \kappa_{0,2}; \dots; \kappa_{0,n}$
- (1) Estimer la vitesse corrigée du biais  $\hat{\kappa}_{bc}$  via la procédure décrite dans BAO et collab. [2015]. C'est-à-dire, en estimant l'équation autorégressive associée  $\{\hat{\alpha}, \hat{\phi}, \hat{\sigma}_\varepsilon\}$  par laquelle on calibre les estimateurs de l'équation d'Ornstein-Uhlenbeck  $\{\hat{\kappa}, \hat{\mu}, \hat{\sigma}_\varepsilon\}$ . Enfin on obtient  $\hat{\kappa}_{bc}$  par la résolution de :



$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{\kappa}_{bc} = \underset{\kappa}{\operatorname{arg\,min}} \|\hat{\kappa} - \kappa - \hat{B}(\kappa)\| \\ \text{telle que} \quad : \quad 0 < \kappa < 1 \end{array} \right. \quad (4.58)$$

- (2) Contraindre  $\kappa = \hat{\kappa}_{bc}$  dans l'équation d'OU et re-estimer les paramètres  $\hat{\mu}_{bc}$  et  $\hat{\sigma}_{bc}$  associés (voir l'argument orientant l'estimation vers l'équation autorégressive d'ordre 1 qui capture mieux le retour vers la moyenne).
- (3) Pour chacune des valeurs  $j \in \{1, \dots, n\}$ , appliquer la méthode du « Median Unbiased Estimator » pour déterminer l'estimateur MUE de  $\hat{\kappa}_{bc}$  :
- i) Stocker les résidus d'estimation de la dernière estimation ci-dessus dans un vecteur E de dimension  $N - 1$ .
  - ii) Re-échantillonner par la méthode du Wild Block Bootstrap les résidus du vecteur E.
  - iii) Utiliser les paramètres  $\hat{\mu}_{bc}$ ,  $\hat{\sigma}_{bc}$  obtenus à l'étape (2) et les résidus bootstrapés de l'étape précédente pour générer de manière récursive un nouvel échantillon bootstrap du cours des marchés en imposant  $\kappa = \kappa_{0,j}$  dans l'équation d'OU pour  $t = 2, \dots, N$ .
  - iv) Réaliser l'estimation bootstrap  $\hat{\kappa}_{bc}^*$  de la vitesse, par l'estimateur MCO avec correction du biais de l'équation d'OU à partir de l'échantillon bootstrap obtenu à l'étape précédente.
- (4) Répéter les sous-étapes du point (3) de i à iv précédentes B-fois, par exemple  $B = 5000$  fois. Puis stocker les estimations bootstrap  $\hat{\kappa}_{bc,1}^*$ ,  $\hat{\kappa}_{bc,2}^*$ ,  $\dots$ ,  $\hat{\kappa}_{bc,B}^*$  pour chaque valeur  $j \in \{1, \dots, n\}$ .
- (5) Pour chacune des valeurs  $\kappa_{0,j}$ , calculer la médiane  $m(\hat{\kappa}_{bc}^*)$  de  $\{\hat{\kappa}_{bc,1}^*, \hat{\kappa}_{bc,2}^*, \dots, \hat{\kappa}_{bc,B}^*\}$ . Et déterminer au moyen d'interpolations linéaires sur  $m(\hat{\kappa}_{bc,1}^*), \dots, m(\hat{\kappa}_{bc,B}^*)$  la valeur  $\kappa_0$  pour laquelle les observations bootstrapées ont une médiane égale à  $\hat{\kappa}_{bc}$ ; où  $\hat{\kappa}_{bc}$  est la valeur du paramètre initialement estimée par les MCO avec biais corrigé.

## Chapitre 5

# Retraite et risque financier : un essai de simulation ?

*« Pension Funds in France : Still a  
Dead-End? »*

---

Anne Lavigne

## Sommaire

---

<b>5.1 Introduction</b> . . . . .	<b>275</b>
<b>5.2 L'introduction du risque de marché dans un modèle démo-économique à deux classes d'agents</b> . . . . .	<b>277</b>
5.2.1 Une brève typologie des modèles . . . . .	278
5.2.2 La prise en compte de la volatilité des actifs risqués . . . . .	283
<b>5.3 Une application au cadre démo-économique français</b> . . . . .	<b>292</b>
5.3.1 Une simulation de référence . . . . .	292
5.3.2 L'introduction d'un dispositif d'épargne retraite pour compenser la baisse des pensions . . . . .	298
<b>5.4 Eléments de conclusion et pistes de recherche</b> . . . . .	<b>321</b>
<b>Annexes</b> . . . . .	<b>323</b>
5.A Description synthétique des maquettes de simulation . . . . .	323
5.B La fonction de production . . . . .	323
5.C Régimes de retraite . . . . .	329

---

## 5.1 Introduction

De façon générale, il y a deux sources sur lesquelles peuvent être prélevées les **retraites** : le revenu du travail (**retraite** par **répartition**) et les revenus du capital (**retraite** par **capitalisation**). En théorie, aucune des deux techniques ne présente de supériorité intrinsèque mais chacune présente une sensibilité différente aux principaux risques auxquels les régimes de **retraites** sont exposés (risques économiques, démographiques, politiques). Le débat sur l'avenir des **retraites** en France divise généralement les défenseurs de la **répartition** pure des adeptes d'une transition vers des systèmes mixant **répartition** et **capitalisation**. Dans la controverse qui les oppose, les tenants des deux camps recourent à un certain nombre de bons et de mauvais arguments pour défendre leur position. Au chapitre des arguments récurrents allant à l'encontre de la **capitalisation** quelle que soit sa forme, des doutes sont souvent émis sur le rendement d'un système par épargne et notamment sur la variance de son rendement dans le temps. En d'autres termes, en dépit de la multiplication des exemples à l'étranger, l'**épargne** serait un véhicule trop risqué pour jouer un rôle dans notre système de transfert comme l'atteste le titre évocateur de l'article de LAVIGNE [2003] « *Pension Funds in France : Still a Dead End?* ». L'objectif de ce chapitre est d'analyser les fondements d'un tel argument, d'apprécier s'ils sont justifiés ou s'ils font partie des mythes entretenus. La question n'est pas de remettre en cause la légitimité d'un système par **répartition** que personne ne conteste et qui restera le socle principal de la **retraite**, ni de s'interroger sur son mode de gestion mais davantage d'identifier le bien fondé des obstacles et rigidités qui pourraient conduire à des choix de politique économique inopportuns.

Les simulations réalisées dans le cadre démo-économique français sont riches d'enseignement. Elles montrent que si le prix des actifs risqués suit une marche aléatoire, c'est-à-dire un processus sans mémoire dans lequel les chocs sont permanents (EMH), les agents averses au risque ne pourront pas obtenir sur les marchés un ratio rendement / risque équivalent à celui procuré implicitement par l'édifice des régimes par **répartition** du secteur privé. Dans ce cas de figure, l'abondement à un plan d'épargne procurerait une utilité moindre que celle procurée par la **répartition**. Seul le cas où l'on admet que la dynamique des cours est gouvernée par un processus de **retour vers la moyenne** pourrait

- au prix d'un investissement massif en actifs risqués en début et milieu de vie active -  
concurrencer les régimes par [répartition](#).

## 5.2 L'introduction du risque de marché dans un modèle démographique à deux classes d'agents

Schématiquement, on peut relever deux types de risque inhérents à la **capitalisation**. Le risque macroéconomique ou structurel, perceptible à long terme et largement lié aux évolutions démographiques. Le risque de court terme, lié à l'imperfection des marchés, qui se traduit par une forte **volatilité** des actifs financiers. C'est sur ces deux types de risque que se concentrera notre analyse.

A moyen - long terme, les grandeurs économiques sont dépendantes les unes des autres. Le modèle néoclassique de base nous apprend qu'en règle générale, le surplus de production retiré de l'utilisation d'une unité de capital supplémentaire est d'autant plus faible que le stock de capital est important relativement au travail. On parle alors de décroissance de la « productivité marginale » du capital. Dans cette théorie de la croissance, le rendement brut du capital est égal à la productivité marginale du capital. Un choc démographique est donc de nature à accroître le poids relatif du capital et par conséquent à réduire son rendement (théorie de l'« *Asset Meltdown Hypothesis* »).

On identifie donc une première catégorie de risques associée à l'utilisation des revenus du capital pour financer les retraites. Ces risques sont de nature structurelle par opposition aux risques conjoncturels liés à l'imperfection des marchés (processus cumulatifs, emballements mimétiques, les contagions spéculatives...). L'excessive **volatilité** des marchés financiers et leur comportement irrationnel sont, à juste titre, des arguments souvent mis en avant pour démontrer la supériorité d'une gestion par **répartition** des systèmes de retraite.

Les travaux pionniers de **BLANCHET [1992]** ont largement contribué à tracer la carte des risques en évaluant la sensibilité du rendement du capital au choc démographique en utilisant un modèle cambridgien à deux classes d'épargnants. L'exercice reste toutefois perfectible car il n'intègre pas le **risque de marché**, qui peut représenter un péril pour le financement des retraites.

Afin d'encadrer le risque lié à l'introduction d'une dose de **capitalisation** dans les transferts intergénérationnels en intégrant simultanément les risques structurels et ceux liés à la **volatilité** des marchés, une solution consiste à intégrer dans une maquette démo-

économique un module supplémentaire permettant de simuler le processus de détermination du prix des actions selon les propriétés de convergence ou d'efficience que l'on prête à la dynamique du prix des actifs risqués. La nature présumée du processus qui régit les cours a un impact direct sur la gestion de l'épargne, car elle détermine le lien entre rendement et risque et son évolution au cours du temps. Il est donc nécessaire de simuler des stratégies d'allocations d'actifs associées aux visions antagonistes du fonctionnement des marchés financiers.

### 5.2.1 Une brève typologie des modèles

Pour comprendre l'environnement dans lequel s'inscrit notre recherche, il est utile de dresser un état de l'art stylisé des modèles de simulations à la manière de **BAC et CHATEAU [2004]** mais loin de l'impressionnante typologie des modèles établie par **DUPONT et collab. [2003]** ou plus récemment par **BLANCHET [2014]**.

Les outils ayant pour vocation l'analyse de conséquences macro-économiques du vieillissement démographique font essentiellement l'objet de modélisations académiques ou institutionnelles. Ces dernières se distinguent les unes des autres par la nature des variables exogènes qu'elles utilisent ou, dit autrement, par les choix effectués concernant l'endogénéité de chaque variable. Une première distinction de fond peut alors être proposée entre les catégories de modèle : les modèles d'équilibre général, d'une part, et les modèles « comptables », d'autre part, dans lesquels la plupart des grandeurs macro-économiques sont exogènes, ce qui revient schématiquement à considérer des analyses d'équilibre partiel. Une autre source de distinction des modèles, les uns par rapport aux autres, porte sur la nature, plus ou moins précise, des fondements théoriques à l'origine des comportements économiques des agents du modèle.

#### Les modèles d'équilibre partiel

Les modèles d'équilibre partiel utilisent des scénarios démographiques et économiques exogènes (activité, emploi, productivité, coût des facteurs). Parmi ces outils, on peut distinguer les modèles ayant une vocation strictement comptable de ceux visant à analyser de façon plus fine les réactions des agents aux mutations exogènes ainsi que leur situation individuelle (où modèles de microsimulation).

➡ Les modèles d'optique comptable

A l'origine, les évaluations concernant l'avenir des retraites se sont souvent résumées à des projections du taux de dépendance, dont le principal mérite était de révéler, à législation sociale inchangée, les déséquilibres financiers induits par l'allongement de la durée de la vie. Progressivement les modèles agrégés d'optique comptable se sont enrichis afin de mieux rendre compte de la réalité. Ainsi pour le compte de la [DREES](#), [BAC et collab.](#) [2003], développent une maquette qui simule le fonctionnement d'un régime de retraites fictif unique en [répartition](#) qui agrège l'ensemble des régimes publics et privés obligatoires, pour projeter l'ensemble des dépenses de retraites. Ce choix de modélisation permet de simuler les conséquences globales d'hypothèses économiques exogènes ou encore les implications d'un relèvement de l'âge moyen de liquidation ou d'une baisse des pensions. Cette catégorie de modèles raisonne implicitement avec un agent représentatif et sous une hypothèse de stabilité du ratio capital-travail. Mais le creusement de déficits requiert une segmentation plus fine des régimes de retraite et notamment une séparation entre secteurs public et privé. La Direction de la Prévision implémente la maquette Mars pour les régimes de retraite du secteur privé [CNAV](#), [Arrco](#) et [Agirc](#). La population totale est ventilée en classes supposées homogènes (génération sexe catégorie sociale ou âge de fin d'études, par exemple) et la projection porte sur les individus présentant les caractéristiques économiques et démographiques moyennes de leur classe. Citons encore les travaux de la Direction Générale du Trésor qui se matérialiseront par le développement de la maquette Venus<sup>1</sup> (2007). Cette modélisation constitue une voie intermédiaire entre les maquettes macroéconomiques et les modèles de microsimulation. Le coeur de la maquette repose sur un échantillon aléatoire de cas-types qui a pour objet de représenter la population réelle des cotisants et des pensionnés de la [CNAV](#). A ce titre on peut également mentionner le modèle [PROMESS](#) (PROjection MESo du Système de retraite) développé par la [DREES](#) en 2010, conçu pour étudier et modéliser les trajectoires de sortie d'emploi et de départ à la retraite. Malgré des améliorations continues et une grande maniabilité, ces approches atteignent leurs limites dès que l'on cherche à désagréger les projections macro au niveau individuel. La remarque est d'autant plus vraie que le calcul

---

1. Voir [FERRARI et PÉRIGORD](#) [2007].



du montant des retraites est complexe et individualisé. Or, en 2003, la réforme Fillon introduit plusieurs innovations en matière de barèmes d'acquisition et de liquidation des droits à la retraite. Il s'agit pour l'essentiel de l'introduction des mécanismes de décote et de surcote, destinés à favoriser la flexibilité des choix de départ à la retraite et à encourager l'allongement de l'activité au-delà de l'âge légal d'ouverture des droits à pension.

Les approches agrégées se justifient lorsqu'on s'intéresse à des résultats globaux et que la référence à des agents représentatifs agrégés est pertinente. Par exemple, dans le modèle Mars, l'âge de départ à la retraite correspond à l'âge du taux plein, car les auteurs supposent - à juste titre - que les règles antérieures à la réforme de 2003 (décote de 10% par année manquante, pas de surcote) incitent très fortement l'individu à liquider sa pension au taux plein. Or les nouvelles modalités de calcul des droits à la retraite introduites par la réforme de 2003, limitent la validité de l'hypothèse. Dans ce nouvel environnement, pour des raisons évidentes d'hétérogénéité, il est sans doute plus fructueux de partir des comportements individuels pour comprendre le fonctionnement d'ensemble du système. C'est à dire d'utiliser l'apport des modèles de microsimulation.

#### ➡ Les modèles de microsimulation

L'avantage comparatif principal des modèles de microsimulation est la production de résultats désagrégés par catégories de population. En l'occurrence, l'incidence des mécanismes de décote et de surcote passe par une analyse des effets de la mesure au niveau des individus ou des ménages. La démarche la plus intuitive pour traiter ces problèmes est de partir des informations individuelles stockées dans les fichiers de gestion des régimes. Pour reprendre l'exemple de l'âge de liquidation, les techniques de microsimulation permettent de modéliser les comportements de cessation d'activité pour chaque individu à partir, d'une part, de la comparaison entre les revenus attendus de la poursuite de l'activité professionnelle et les revenus à la retraite et, d'autre part, de l'utilité accordée au temps ou, plus prosaïquement; la préférence pour le loisir (cf. **STOCK et WISE [1990]**). Ainsi, dans le sillage des travaux pionniers de **BLANCHET et CHANUT [1998]**, les interactions croissantes entre la réglementation et les comportements individuels ont conduit la **CNAV** à développer le modèle de micro-simulation Prisme en 2005 pour répondre aux besoins exprimés à la suite de la réforme de 2003. La taille des échantillons obtenus par ti-

rage dans les bases de gestion de la [CNAV](#) (soit près de 4 millions d'individus pour Prisme) est justifiée par l'attente de projections financières à court terme pour lesquelles le besoin de précision est fort. Depuis, les modèles de microsimulation, considérés comme incontournables pour aborder les questions de redistribution, ont vu leur application progressivement étendue à des champs de plus en plus variés. Citons, à titre d'illustration, le modèle de microsimulation statique Caliper de la [DREES](#)<sup>2</sup> (2013) dédié aux pensions des polypensionnés. Toutefois, la plupart des recherches sont polarisées sur les modélisations dynamiques qui permettent de simuler des mesures dont l'incidence s'apprécie dans la durée (cf. [DEKKERS \[2015\]](#)). Les développements récents du modèle Pensipp - qui dérive du modèle Destinie - conduits par [BLANCHET, BOZIO et RABATÉ \[2015\]](#) préfigurent les pistes de développement fonctionnelles de la microsimulation. En effet, les modèles de microsimulation qui s'appuient classiquement sur des scénarios macroéconomiques prédéfinis afin de ventiler leurs effets au niveau individuel ont tendance à s'éloigner de cet appariement systématique. On note une propension croissante à l'endogénéisation du comportement des agents et à la modélisation des effets de bouclage qui vise à parvenir à un bouclage général sur la base des interactions se nouant au niveau individuel. Ce type de recherche illustre le rôle central de la microsimulation dans l'analyse des réformes des systèmes de retraites. Ce rôle sera d'autant plus prépondérant que les principaux inconvénients de la méthode seront contrôlés (à défaut d'être résolus). A savoir, la question de la calibration des modèles de grande taille et le caractère stochastique des simulations qui introduit une variabilité artificielle dans les résultats agrégés.

### **Les modèles d'équilibre général**

En matière de système de retraite l'évaluation des réformes envisagées exige la prise en compte d'effets économiques à un horizon temporel lointain. L'interaction entre les évolutions démographiques et les variables économiques individuelles et agrégées en constitue un élément déterminant. Développés dans le sillage des travaux de [AUERBACH et KOTLIKOFF \[1987\]](#) appliqués à l'étude des réformes fiscales, les modèles d'équilibre général calculables à générations imbriquées (MEGCGI) constituent l'un des outils d'analyse et d'évaluation à long terme des régimes de retraite. Le MEGCGI s'appuie sur le cadre

---

2. cf. [DUC et LERMECHIN \[2013\]](#).

théorique du modèle à générations imbriquées d'agents proposé par SAMUELSON [1958] dans le cadre d'économies en croissance avec accumulation de capital. Alimentée par des projections démographiques exogènes la dynamique de l'économie est alors entièrement expliquée par les réactions des agents rationnels et en particulier par leur comportement d'épargne pour motif de *cycle de vie* à la MODIGLIANI [1966]. Parce qu'ils permettent d'évaluer les conséquences économiques sur les individus et sur la société dans son ensemble des évolutions démographiques, les MEGCGI offrent un cadre d'analyse approprié à l'étude des régimes de retraite. Ils permettent notamment d'en évaluer les effets en termes de *répartition* entre les générations. Toutefois, la notion d'individu dans un modèle MEGCGI est abstraite. Il s'agit d'un individu représentatif de l'ensemble d'une cohorte qui maximise son bien-être sur l'ensemble de son *cycle de vie* compte tenu de ses anticipations de revenus. De ce fait, en dehors de l'âge, cette classe de modèle ne permet pas d'étudier l'hétérogénéité des individus au sein d'une même cohorte. Cela signifie que les propriétés redistributives des systèmes de retraite sont difficiles à saisir. Certains travaux récents cherchent cependant à rendre compte de façon conjointe de l'hétérogénéité des trajectoires individuelles, de la distribution des richesses et des grandeurs des variables agrégées (Hairault et al. 2004). Cependant la grande complexité du calcul numérique des dynamiques endogènes de l'économie conduit en général à simplifier à l'extrême certains mécanismes macroéconomiques clés. Du fait de la prédominance accordée à la cohérence théorique par rapport au contenu empirique, ces modèles perdent une grande partie de leur vertu en termes de prospective quantitative.

### **Les modèles « hybrides »**

Afin d'intégrer des considérations macro-économiques, et non exclusivement comptables, dans les questions liées au financement des régimes de retraite, des modèles « hybrides » ont été développés. Il s'agit de modèles d'équilibre général dans lesquels seuls les comportements clés en matière de réaction au phénomène du vieillissement démographique sont spécifiés de façon détaillée (la rémunération des facteurs, l'accumulation de la richesse par âge, l'évolution des revenus au cours du *cycle de vie*, ...). En revanche, d'autres aspects macro-économiques, considérés comme accessoires compte tenu des

thèmes abordés, sont considérés comme exogènes ou stylisés à l'extrême. Les travaux de BLANCHET [1992] et BLANCHET et MONFORT [1994] constituent un exemple emblématique de la démarche. L'auteur propose une maquette démo-économique simple, caractérisée par un degré d'intégration démoéconomique intermédiaire entre les modèles d'optique comptable (qui ne tiennent pas compte des phénomènes de rétroaction entre un scénario macroéconomique exogène et les réformes simulées, elles-mêmes susceptibles de modifier les variables économiques du cadrage initial) et les modèles d'équilibre général calculables dont le principal avantage est de permettre la prise en compte de diverses interactions économiques au prix d'un certain nombre de simplifications qui en limitent la portée pratique.

Construit à l'origine dans le but d'étudier les réactions de la **capitalisation** et de la **répartition** face au vieillissement démographique dans le cas français, le modèle reprend les perspectives démographiques usuelles pour simuler un régime fictif unique par **répartition** et les complète par un modèle de croissance néo-classique de type Solow. Les variables économiques endogénéisées sont donc en nombre limité : l'intensité capitalistique, les rémunérations des facteurs, un chômage de déséquilibre transitoire. Le modèle ne prend donc pas en compte les préférences des agents. Cette ambition réduite confère en contrepartie une grande maniabilité à ce type d'outil et permet d'étudier les interactions entre réformes des retraites et variables macroéconomiques tout en conservant des hypothèses à fort contenu empirique.

Nos recherches s'inspirent et s'inscrivent clairement dans le cadre déterminé par les travaux fondateurs de Blanchet. En effet, ce type de modèles très souples peut facilement être adapté pour analyser la problématique des risques inhérents à l'utilisation des revenus du capital pour financer les retraites : le risque macroéconomique, perceptible à long terme, et largement lié aux évolutions démographiques et le risque de court terme, lié à l'imperfection des marchés, qui se traduit par une forte **volatilité** des actifs financiers.

### 5.2.2 La prise en compte de la volatilité des actifs risqués

Le processus décisionnel pour déterminer une allocation stratégique requiert des hypothèses à long terme sur les rendements des classes d'actifs, des **volatilités** et des corrélations.

lations. Une méthode classique, dite « inconditionnelle », consiste à utiliser les informations historiques comme guide pour l'avenir. Cette méthode suppose que les rendements anticipés sont basés uniquement sur les rendements historiques et ne tiennent donc pas compte des chocs globaux ou des changements économiques ou démographiques structurels qui pourraient survenir. L'autre façon de générer des rendements anticipés est « conditionnelle », ce qui signifie que le rendement attendu des actifs est fonction d'un scénario macro-économique. Dans ce dernier cas, le raisonnement est que les rendements attendus doivent être déterminés afin d'être cohérents avec ce scénario. Inspiré par la théorie néo-classique de la production, le modèle de Solow est largement reconnu pour sa capacité à formaliser une tendance à long terme suivie par l'économie. Elle suppose que la croissance de la production est stimulée par la croissance de la population active (ou de la démographie) et l'accumulation de capital physique. Le modèle suppose également implicitement l'existence d'une productivité exogène des facteurs, c'est-à-dire la partie résiduelle de la croissance qui ne peut être attribuée aux deux facteurs de production précédents. Fondamentalement, **SOLOW [1956]** conjecture que la croissance de la production doit converger vers un état d'équilibre, où la croissance n'est due qu'à des facteurs de production constants à long terme et exogènes, à savoir la croissance de la population active et la croissance de la productivité.

C'est cette seconde voie, plus féconde pour générer des rendements conditionnels, que nous avons retenue afin d'encadrer le risque inhérent à l'utilisation des revenus du capital pour financer les retraites. A l'instar des premiers travaux de **HAMAYON et LEGROS [1999]** et **HAMAYON et LEGROS [2008]** dans les cas roumain et français, on a cherché à intégrer la **volatilité** des actifs financiers dans un modèle démo-économique simple. Les auteurs utilisent un modèle démo-économique, complété par un modèle de croissance de type Solow permettant d'endogénéiser la dynamique des rémunérations des facteurs pour encadrer le risque associé aux fonds capitalisés en fonction de scénarios macro-économiques contrastés. Le périmètre de nos simulations se focalise sur les régimes des salariés du secteur privé français.

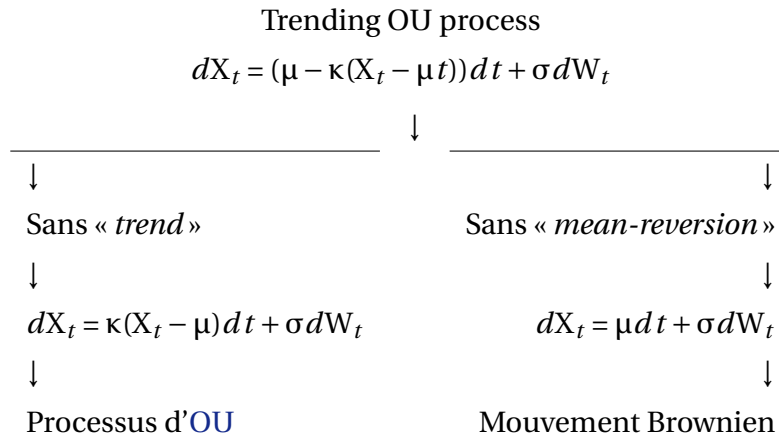
### Une dynamique stylisée du cours des actions

Dans la maquette de référence mentionnée plus haut et décrite en annexe, l'accumulation du capital est notamment fonction de la productivité marginale du capital, dont on déduit le rendement net à partir du taux de dépréciation  $\delta$ . Bien qu'il soit sensible aux évolutions démographiques, le rendement du capital physique, fonction de sa productivité marginale, reste relativement inerte dans ce type de modèle. En effet, dans le cadre de l'analyse néo-classique, le capital physique se résume à un stock de biens et de services servant à la production se dépréciant au taux  $\delta$ . Afin de prendre en compte le risque de court terme, lié à l'imperfection des marchés, qui se traduit par une forte **volatilité** des actifs financiers, il est primordial de « mimer » la dynamique du cours des actifs risqués. La nature du processus qui régit les prix des actifs financiers fait toujours l'objet de nombreux débats. Cette incertitude justifie la démarche consistant à analyser la sensibilité de l'épargne retraite face aux aléas boursiers au travers d'une double modélisation proposant une carte simple mais contrastée du processus de détermination du prix des actions. La première hypothèse suppose assez classiquement que les marchés suivent une marche aléatoire, ce qui revient à s'inscrire dans le cadre de la théorie des marchés efficients (EMH), posé par FAMA [1965], qui argue qu'il n'est pas possible de tirer parti des informations passées pour prévoir l'évolution future du prix d'un actif. Toutefois, la mise en évidence récurrente de **retour vers la moyenne** (*mean reversion*) dans le cours des actions dans les précédents chapitres justifie une modélisation alternative à celle qui suppose l'efficience faible des marchés. Ce type de processus présume que les chocs sur les marchés boursiers ont un caractère transitoire et qu'à plus ou moins long terme un mouvement de sens opposé viendra corriger la déviation initiale pour rapprocher les prix des actifs de leur valeur d'équilibre.

La mise en évidence de *mean reversion* dans la dynamique du prix des actifs risqués, pose la question de sa mesure. Pour cela, il convient en premier lieu de définir une version en temps discret d'un processus de retour vers la moyenne et d'en estimer les paramètres. Pour définir une version en temps discret de la dynamique des prix, nous nous sommes inspirés des travaux de METCALF et HASSETT [1995], d'ONALAN [2009] ou, plus récemment, de THIERFELDER [2015]. La constante qui ressort des recherches des auteurs précités est que le prix des actifs risqués suit un processus dans lequel la composante

permanente est un mouvement brownien standard et la composante transitoire est un processus stationnaire d'Ornstein-Uhlenbeck (OU process).

Après différentes vérifications empiriques, suivant les développements de Thierfelder, nous avons retenu une spécification de type « *Trending OU process* » qui permet de simuler : un mouvement brownien, un pur OU process ou une mixture des deux.



Avec :

- X = prix d'un actif
- $\mu$  = le *drift*
- $W_t$  = processus de Wiener
- $\sigma$  = volatilité de  $x$
- $\kappa$  = paramètre de « retour vers la moyenne »

Concernant la dynamique de retour vers la moyenne, le verdict des expérimentations à favoriser l'arbitrage entre les spécifications de type « *Trending OU process* » et « *OU process* ». La première piste consiste à assimiler la dynamique des actifs risqués à un pur processus d'Ornstein-Uhlenbeck. Pour vérifier la compatibilité de ce processus avec la dynamique du prix des actions déduite des analyses effectuées sur les chroniques des cours boursiers, on a simulé un grand nombre de trajectoires par tirages aléatoires pour un triplet  $\mu, \sigma, \kappa$  donné. Puis on a généré arbitrairement une séquence négative de log-returns. Abstraction faite de la période de krach, on constate que les rendements médians sont stationnaires autour de leur espérance.

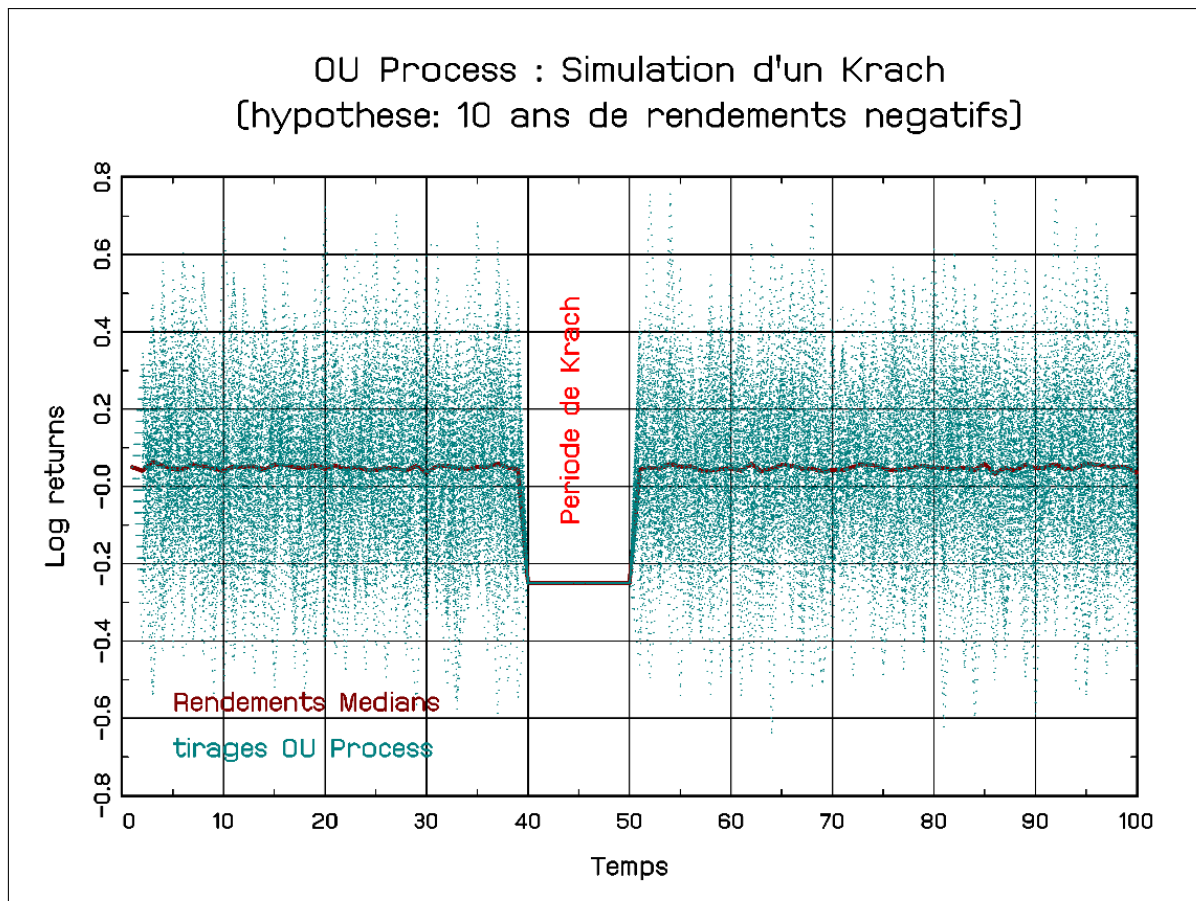


FIGURE 5.1 – Processus d'OU : avec un krach survenu

Le krach n'affecte pas la dynamique du processus DS (*Difference Stationnary*) et les cours sont stationnaires après différentiation. Toutefois, quand on examine l'intervalle de confiance de l'épargne capitalisée dans notre univers fictif, on constate qu'une fois intégrée, la série ne revient pas autour de sa tendance déterministe en niveau après le choc simulé. Or, pour les épargnants, la détention d'actifs risqués n'a d'intérêt que si les prix, et non les rendements, sont caractérisés par un processus de retour à la moyenne.



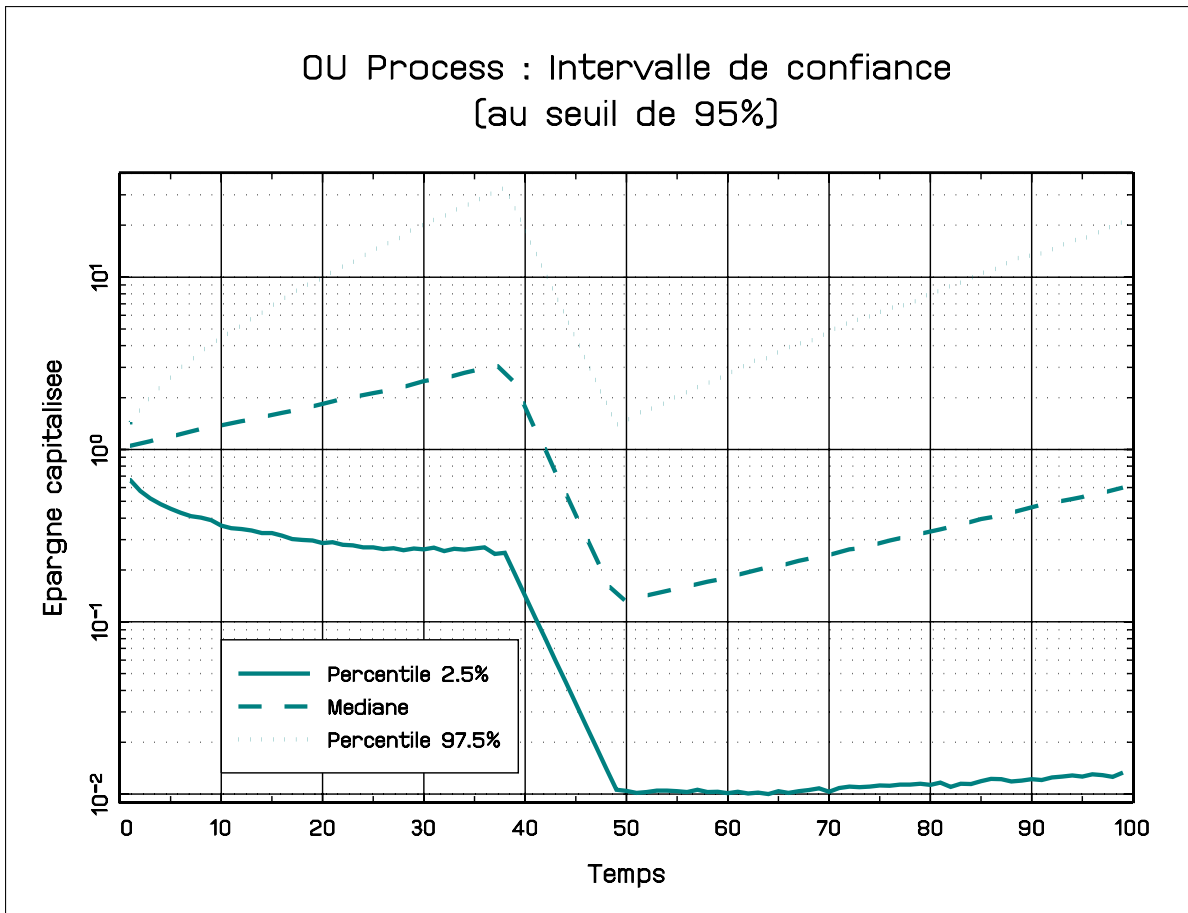


FIGURE 5.2 – Processus d’OU : intervalle de confiance - l’évolution avec krach

Dans les processus *DS*, il existe une propriété de persistance des chocs qui n’existe pas dans les processus *TS* (*Trend Stationary*). Cela signifie que lorsque l’on a un processus *TS*, en cas de choc positif ou négatif à une date donnée, toutes choses égales par ailleurs, l’influence de ce choc a tendance à s’estomper au cours du temps. La variable considérée rejoint alors sa dynamique de long terme. Afin de vérifier les propriétés d’une dynamique de type « *Trending OU process* », on effectue une simulation stochastique en se plaçant dans le même environnement espérance-variance que précédemment (seule la valeur de  $\kappa$  est ajustée à la spécification du processus). Une des propriétés importantes de la spécification « *Trending OU process* » retenue, réside dans l’influence des innovations stochastiques  $dW_t$ . Contrairement au processus d’Ornstein-Uhlenbeck précédemment étudié, on constate sur le graphique 5.3 que les rendements médians simulés sont affectés par la période de krach : la valeur médiane des rendements est supérieure à sa valeur d’avant crise, jusqu’à ce que le niveau de la série rejoigne graduellement le trend déterministe.

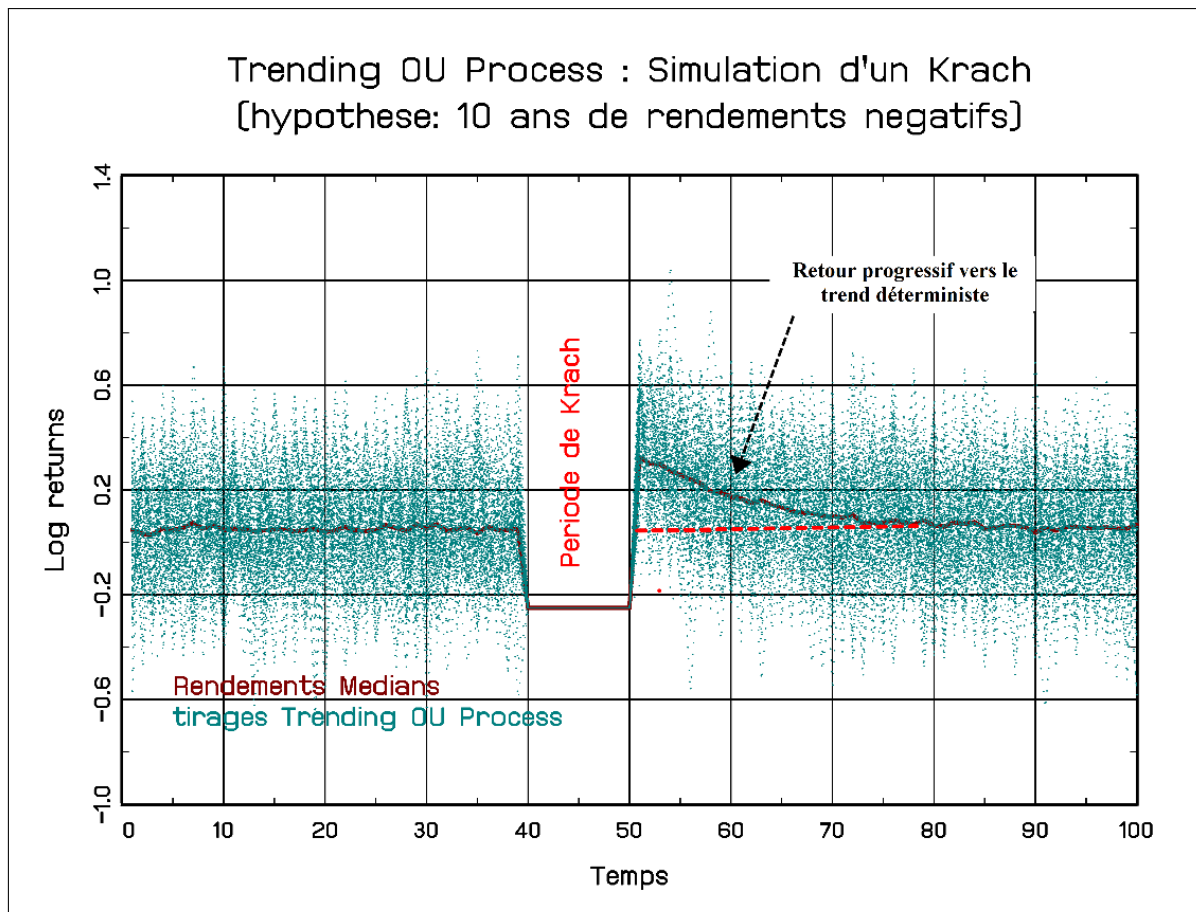


FIGURE 5.3 – Trending OU *process* : avec un krach survenu

On constate que lorsque un processus TS est affecté par un choc stochastique, l'effet de ce choc tend à disparaître au fur et à mesure que le temps passe : c'est la propriété de non persistance des chocs. Les mouvements extrêmes de prix observés sur les marchés financiers sont donc transitoires, c'est-à-dire qu'une forte variation dans un sens est suivie de mouvements de sens opposé qui corrigent tendanciellement la déviation initiale et ramènent les prix des actifs vers leurs valeurs fondamentales. Le mécanisme est clairement résumé par l'intervalle de confiance construit à partir des simulations aléatoires.

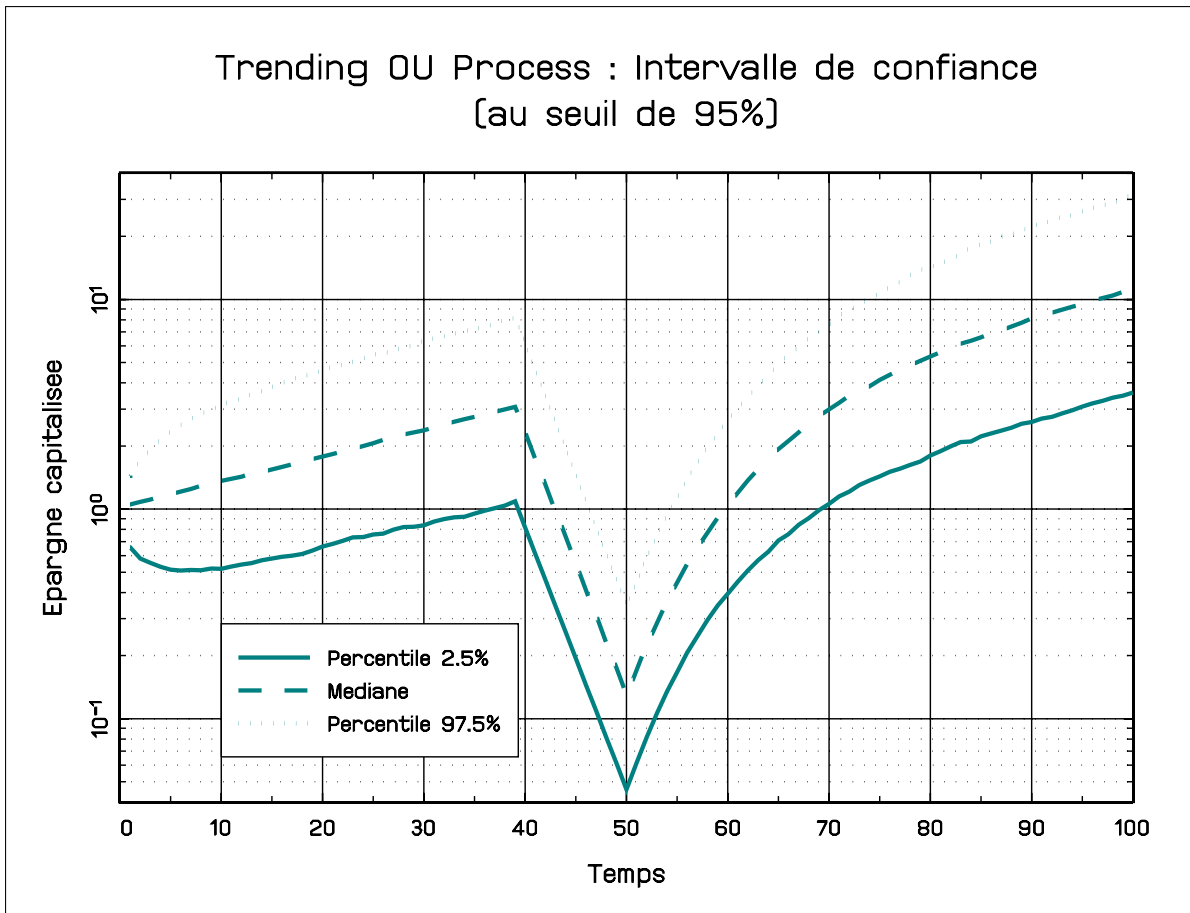


FIGURE 5.4 – Trending OU *process* : intervalle de confiance - l'évolution avec krach

### Les stratégies d'allocations d'actifs

Les résultats des simulations précédentes nous conduisent à retenir deux hypothèses distinctes pour décrire la dynamique du cours des actifs risqués. L'une suppose que les différences premières du logarithme des cours suivent un bruit blanc gaussien (EMH), l'autre que la dynamique des *log-returns* est déterminée par un « *Trending OU process* ». Naturellement, ces conjectures ont un impact direct sur les stratégies de gestion de l'épargne.

Comme dans l'ensemble de nos recherches, nous avons retenu un critère de VaR pour définir le risque de perte accepté par les agents. De plus, par souci de simplification, on suppose, à l'instar de BARBERIS [2000], que le marché est constitué d'un actif sans risque et d'un actif risqué, conformément au théorème de la séparation.

#### ➡ L'hypothèse d'efficience des marchés

Dans le cas paramétrique - hypothèse de distribution gaussienne des rendements - la VaR s'exprime en fonction de la moyenne et de la variance déterminées par la proportion (p) d'actifs risqués :

$$VaR_{(T,p)} = p \left( (\mu_T - r) + \sigma_T k_{(1-\alpha)} \right) \quad (5.1)$$

Avec :  $k_{(1-\alpha)}$  : le quantile de la loi  $\mathcal{N}(0, 1)$  au seuil de probabilité  $1 - \alpha$

Dans le cas d'un gaussien, on déduit facilement l'évolution de la VaR en fonction de l'horizon de placement :

$$VaR_{(T,p)} = p \left( (\mu_T - r) + \frac{\sigma}{\sqrt{T}} k_{(1-\alpha)} \right) \quad (5.2)$$

#### ➡ L'hypothèse de retour vers la moyenne

Dans le cas où la dynamique des cours est régie par un « *Trending OU process* » l'expression de la VaR en fonction de l'horizon T devient :

$$VaR_{(T,p)} = p \left( (\mu_T - r) + \frac{\sigma}{\sqrt{T}} \frac{\sqrt{\frac{\sigma^2}{k} * (1 - \exp(-k * T))}}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{k} * (1 - \exp(-k))}} k_{(1-\alpha)} \right) \quad (5.3)$$

## 5.3 Une application au cadre démo-économique français

### 5.3.1 Une simulation de référence

Cette première analyse évalue les perspectives des régimes de retraite par **répartition (PAYG)** dans un environnement démo-économique « tendanciel ». Les simulations issues de ce scénario serviront de référence et faciliteront les comparaisons ultérieures avec des scénarios alternatifs. Le fonctionnement des systèmes de retraite est stylisé et empreinte les principales caractéristiques réglementaires et démographiques des régimes du secteur marchand.

L'exercice est conduit au moyen d'un modèle démo-économique<sup>3</sup> simple, complété par un modèle de croissance permettant d'endogénéiser la dynamique des rémunérations des facteurs. Avant de détailler les résultats des simulations qui en sont issues, il est nécessaire de préciser les principales hypothèses retenues concernant les paramètres clés des projections.

---

3. La maquette utilisée dans les projections est décrite dans **HAMAYON et LEGROS [2001]**, « *Construction and impact of a buffer fund within the French PAYG pension scheme in a demo-economic model* », CESifo Working Paper, n° 531.

TABLEAU 5.1 – Scenario de référence - hypothèses retenues

<b>Scenario de référence</b>	
<b>Economie</b>	
Taux de progrès technique exogène	1,50%
Taux de chômage de long terme	5,00%
<b>Démographie</b>	
Hypothèse de mortalité	Projection tendancielle INSEE
Descendance finale par femme	1,95 enfant
Solde migratoire net annuel	70000
<b>Régimes de retraites</b>	
Age légal de départ à la retraite	62 ans en 2017
Age moyen de départ à la retraite	64 ans en 2025
Durée de cotisation	172 trimestres en 2035
Indexation	Pensions et salaires de référence revalorisés en fonction des prix

Dans nos projections, l'hypothèse de productivité du travail est fixée à 1,5% l'an, soit un pronostic similaire à celui retenu par le Conseil d'orientation des retraites (COR) et en phase avec le ralentissement de la croissance de la productivité du travail observée depuis le début des années 1990. Parallèlement, le chômage convergerait vers son niveau frictionnel. L'analyse des sorties du modèle montre que la hausse de la population active contribuerait mécaniquement à l'augmentation de la croissance économique. Toutefois, à partir des années 2030, le chômage atteindrait son taux incompressible et contribuerait au ralentissement de la croissance de la population salariée.

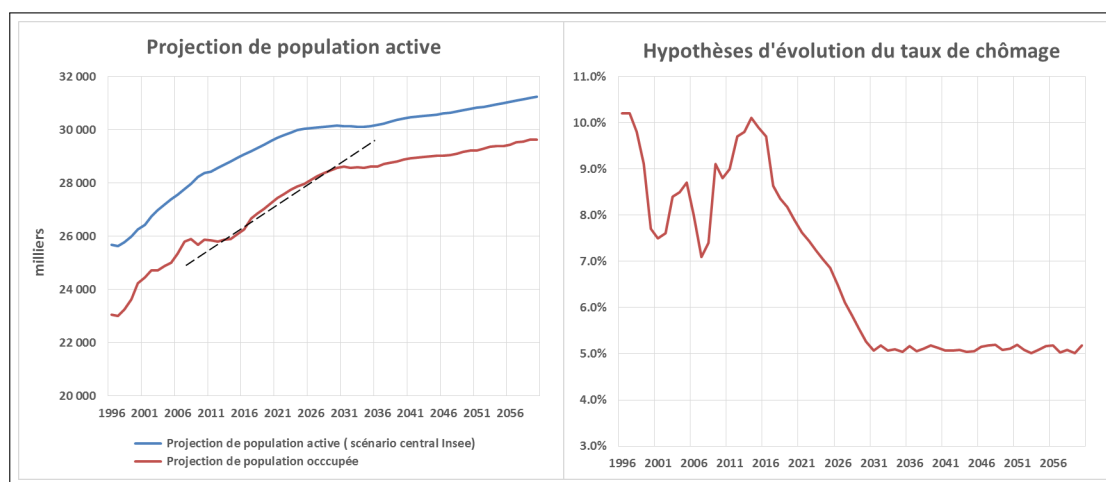


FIGURE 5.5 – Population active - Projection et évolution

Cette évolution se traduirait par un léger fléchissement du rendement du capital net jusqu'à ce que la croissance du capital par tête converge vers son niveau d'équilibre. On constate, par ailleurs, que le rendement du capital déterminé par la maquette démographique est relativement inerte sur la période de simulation. Cette propriété résulte directement des hypothèses néo-classiques qui supposent que la rémunération des facteurs est égale à leur productivité marginale. Cette spécification n'est pas adaptée à l'analyse des risques inhérents à la **capitalisation** et justifie l'introduction ultérieure d'une dynamique stylisée du cours des actifs risqués dans le prototype de simulation.

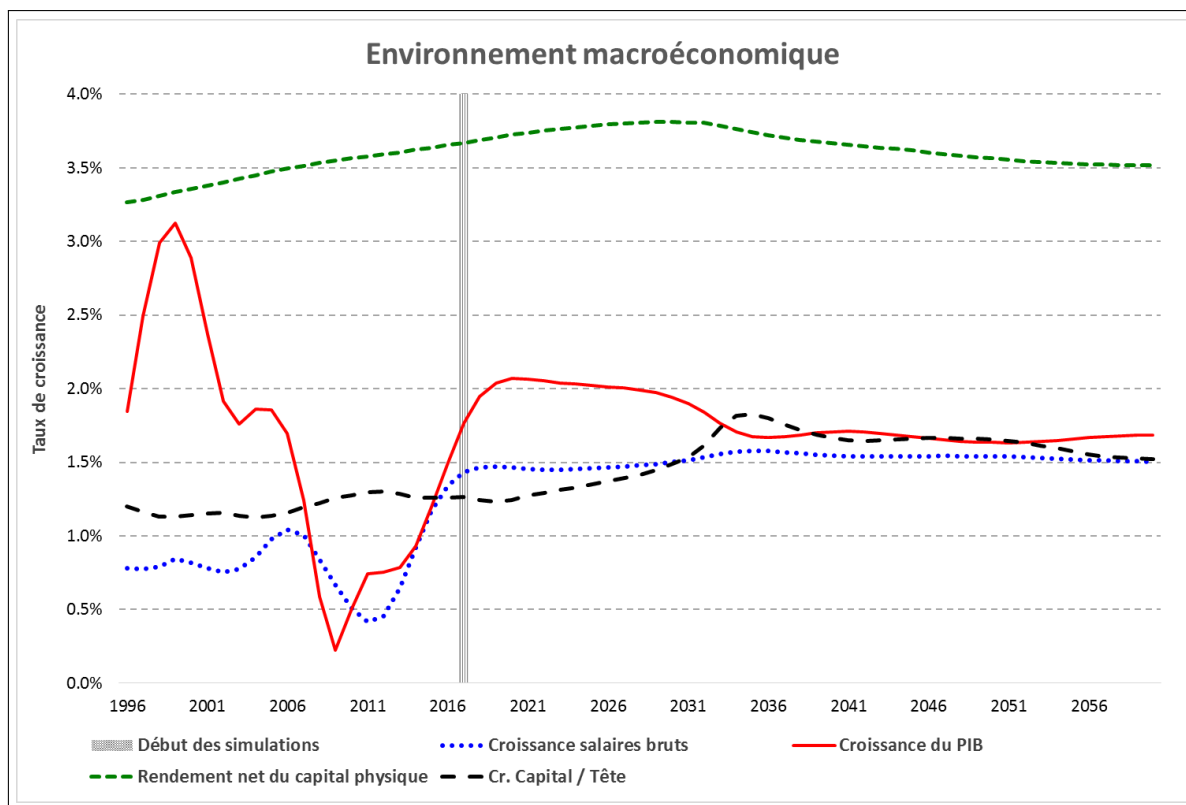


FIGURE 5.6 – Environnement macroéconomique

Couplées aux mesures d'âge, d'allongement des durées cotisées et aux transferts en provenance de l'assurance chômage, ces perspectives assureraient pratiquement l'équilibre financier des régimes à l'horizon 2060. Dans ce scénario, conformément à l'incidence de la réforme de 2003, l'équilibre des régimes serait tributaire des transferts instantanés de cotisations chômage libérées par une forte reprise de l'emploi. Dans un mode de gestion classique où les ressources des régimes proviennent essentiellement des cotisations des affiliés, le besoin de financement serait de l'ordre de 20 milliards d'euros constants en 2060, au terme des simulations (courbe rouge pointillée sur le graphique 5.7 ci-contre).

La projection à la législation 2013 constante montre que la succession des réformes entamées depuis 1993 va se traduire par une poursuite de la baisse du niveau des pensions relativement aux salaires. Pour s'en convaincre, analysons l'évolution des **taux de remplacement** projetés pour les différentes générations tout au long de la durée de leur retraite.



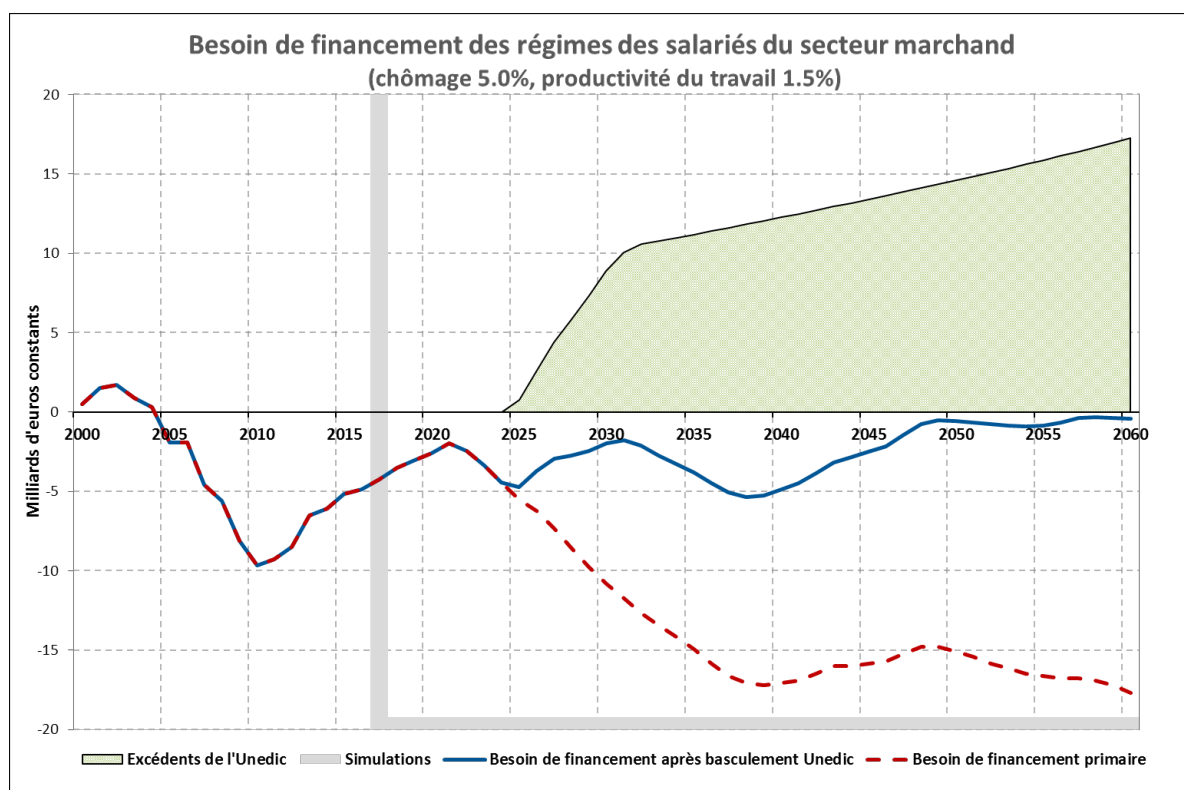


FIGURE 5.7 – Besoin de financement

Par exemple, les salariés nés en 1936 ont perçu en 1996 une retraite moyenne supérieure à 70% du salaire net moyen des actifs du moment. Les **taux de remplacement** des individus de la même cohorte vont diminuer au cours du temps en raison de la sous indexation des pensions par rapport aux salaires. Pour les générations plus jeunes, l'impact de la réforme sera encore plus perceptible puisque les **taux de remplacement** à la liquidation vont baisser progressivement d'une vingtaine de points entre les salariés de la génération 1936 et ceux de la génération 1995 qui prendront leur retraite en 2060.

Dans la maquette, la baisse des **taux de remplacement** serait plus prononcée pour les hommes que pour les femmes. En effet, au plan sociodémographique, l'allongement des carrières professionnelles des femmes au fil des générations tire à la hausse les durées moyennes validées (ce qui contribue à enrayer la baisse des **taux de remplacement**), tandis que les hommes, ont dans une proportion plus élevée, cotisé sur la base de carrières longues. En outre, on a considéré que l'écart de salaire entre les hommes et les femmes (évalué par l'Insee à 19% en 2013) continuerait à se réduire au cours du temps.

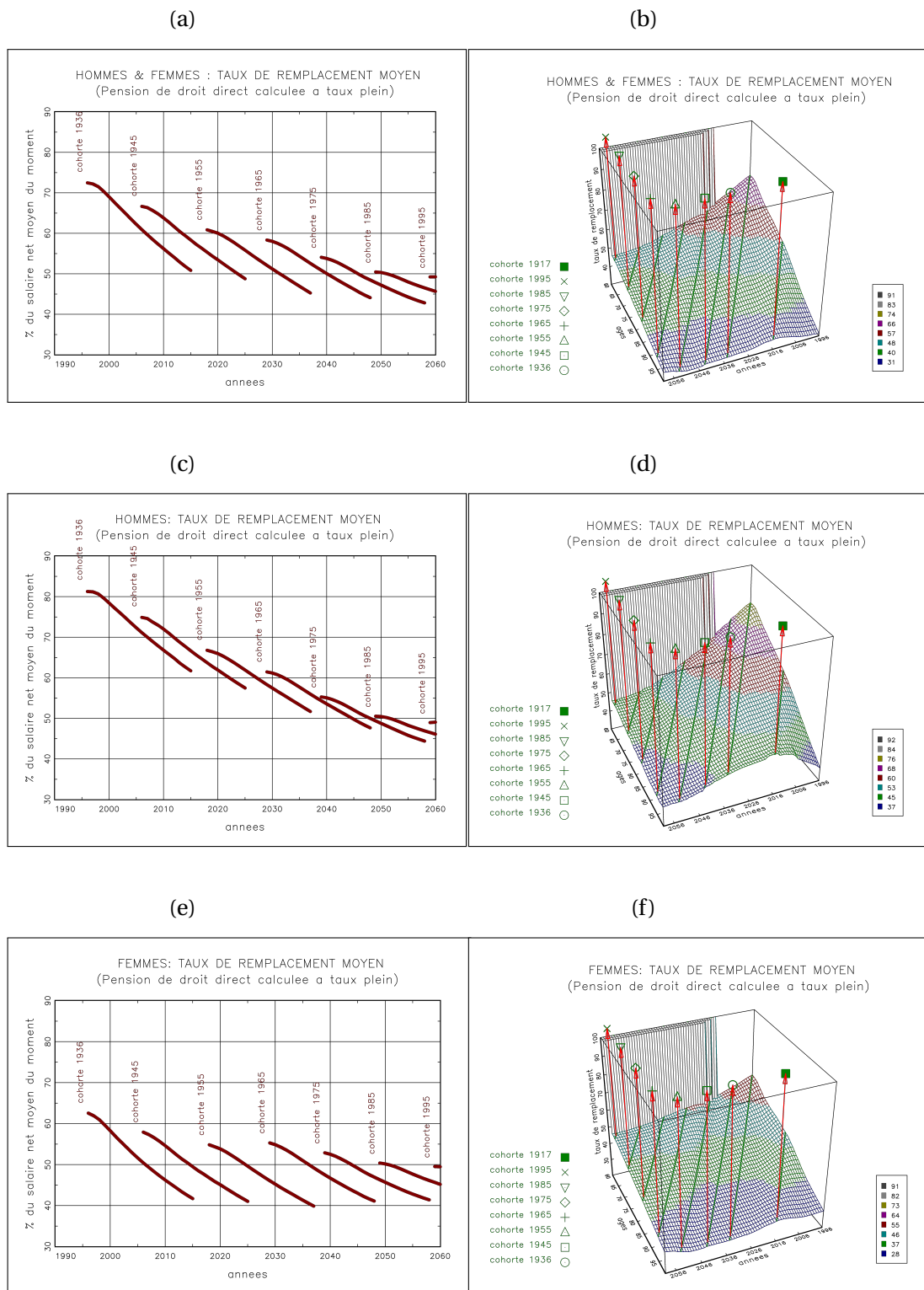


FIGURE 5.8 – Projections de taux de remplacement moyen

L'indexation des salaires de référence et des pensions sur les prix va se traduire par un recul notable des **taux de remplacement**. Or, l'évolution du **taux de remplacement** est le critère d'insertion sociale sur le long terme. La référence à un système de prix peut,

en cas de croissance rapide, se traduire par une paupérisation des retraités. Rappelons, à titre d'exemple, qu'entre 1990 et 2014, la croissance du minimum vieillesse pour personne seule a augmenté de 80% tandis que l'indice des prix n'a évolué que de 48%.

Au vu des résultats de l'exercice de simulation, on constate que l'indexation des retraites sur l'inflation permet aux gains de productivité de ne pas se retrouver dans les pensions. Ce mécanisme, décrit en détail par [HAMAYON et LEGROS \[2014\]](#), se traduit par une baisse du pouvoir d'achat relatif des retraités par rapport aux actifs et participe massivement au rééquilibrage du système de retraite sans que ne soit affichée dans la réforme une baisse explicite des [taux de remplacement](#). Dans la stratégie de rééquilibrage financier des régimes, le recul de la place des retraités dans l'échelle des revenus ne résulte pas d'un choix ouvertement assumé, mais du solde d'une opération comptable.

### **5.3.2 L'introduction d'un dispositif d'épargne retraite pour compenser la baisse des pensions**

La volonté de freiner la dérive des [taux de remplacement](#) pourrait conduire les pays caractérisés par une démographie vieillissante à accélérer le développement des compléments de retraite par épargne afin de limiter les conséquences de la baisse du rendement des régimes par [répartition](#). Les arguments traditionnellement avancés par les partisans du développement d'un système mixte reposent sur les vertus de "lissage intertemporel" propres aux transferts d'épargne et sur l'observation des chroniques passées qui tend à montrer que le rendement des actifs financiers est supérieur à la croissance de la masse salariale. Toutefois, compte tenu du mode indirect de ces transferts, les engagements contractés au titre des retraites pourraient vite représenter des sommes considérables dont la neutralité macro-économique n'est pas avérée. Les interactions entre épargne retraite, accumulation du capital et croissance limitent donc la pertinence des approches reposant sur l'extrapolation des tendances passées et plaident en faveur de celles s'appuyant sur un bouclage macro-économique. Nous inscrivant dans cette logique, on a étudié l'influence du développement d'une épargne de [cycle de vie](#) sur la dynamique de l'économie au moyen d'un modèle de type Solow à deux classes d'épargnants. L'investiga-

tion est enrichie par l'introduction dans la maquette démo-économique d'une volatilité liée à l'imperfection des marchés par le biais d'une double modélisation du processus de détermination du prix des actions.

### **Caractéristiques du plan d'épargne retraite fictif**

Afin d'évaluer l'incidence de la constitution d'un plan d'épargne retraite sur la rémunération des facteurs et sur le niveau de vie des retraités, les hypothèses suivantes ont été faites : On suppose que le fonds de retraite est abondé à partir de 2017 par les différentes cohortes de salariés. Tous les salariés du secteur privé dont l'âge est inférieur de 20 ans à l'âge de la retraite à la date de démarrage du fonds y accumulent 6% de leurs salaires bruts. Ce taux correspond à l'augmentation nécessaire pour réindexer les pensions liquidées sur la croissance des salaires nets (hors transferts des cotisations chômage). Nous supposons donc dans nos simulations, qu'en moyenne, la majorité de l'épargne financière est investie pour la retraite. Cet effort apparaît compatible avec le taux d'épargne des ménages français (15.5 % des revenus disponibles en 2015), pour peu que l'on suppose qu'il y ait proximité entre le revenu disponible brut et le revenu primaire des salariés net de cotisations employeurs. Ce qui sous-entend que les prestations sociales sont, en moyenne, approximativement neutralisées par les cotisations sociales salariales, l'impôt sur le revenu et autres impôts courants.

Les cohortes dont l'âge est compris entre l'âge de la retraite moins 20 ans et l'âge de la retraite moins 10 ans, adhèrent de manière facultative au fonds. On a supposé que 50% des salariés concernés cotiseraient au fonds. Le fonds est décapitalisé en fonction de l'arrivée à l'âge de la retraite des cohortes qui y sont affiliées, auxquelles des rentes sont allouées. La volatilité des actifs risqués est fixée, assez arbitrairement, en fonction des normes de long terme à 18%. Le rendement des actifs risqués est, en revanche, fonction de la productivité marginale du capital  $r_g$  à la période ( $t$ ) à laquelle on ajoute, par simplicité, une pseudo « prime de risque » constante de 1,5%. Compte tenu du niveau moyen du rendement net du capital issu du bouclage déterminé dans un contexte de « sous accumulation » (autour de 3,5% en moyenne sur la période de projection), notre prime de risque permet d'obtenir une espérance de rendement proche de celle calculée

sur les chroniques longues de cours analysées dans le premier chapitre de nos recherches, c'est-à-dire environ 5% en terme réel.

Pour le reste, les hypothèses relatives au taux technique des rentes ou encore aux frais de gestion sur les flux et le stock de capital sont précisées dans le tableau ci-dessous.

TABLEAU 5.2 – Hypothèses de gestion

Gestion du fonds d'épargne	
Effort d'épargne en % du salaire brut	6%
Part du fonds dédié à la gestion	0.5%
Part des flux consacrée à la gestion du fonds	5%
Rendement réel de l'actif sans risque	0%
Volatilité des actifs risqués	18%
Rendement réel des actifs risqués	Rendement d'équilibre $r_g + 1.5\%$
taux d'intérêt technique des rentes	0%

Pour apprécier l'impact de la **capitalisation** retraite, on fait l'hypothèse forte que l'épargne génère intégralement et instantanément de l'investissement productif. Dans le modèle avec croissance à la Solow, la croissance de la production (courbe rouge sur le graphique 5.9) est transitoirement accélérée pendant la phase de montée en puissance du fonds. Toutefois, les effets de la croissance du stock de capital retraite sont limités dans le temps en raison de la baisse du rendement du capital qui contribue à réduire rapidement le poids du capital structurel dans la production. L'introduction d'une dose de **capitalisation** contribue donc à réduire le rendement du capital relativement à la projection initiale effectuée sans épargne retraite (ligne verte en pointillé versus ligne grisée). Le graphique 5.9 ci-après précise l'impact de la constitution d'un plan d'épargne retraite sur les facteurs de production.

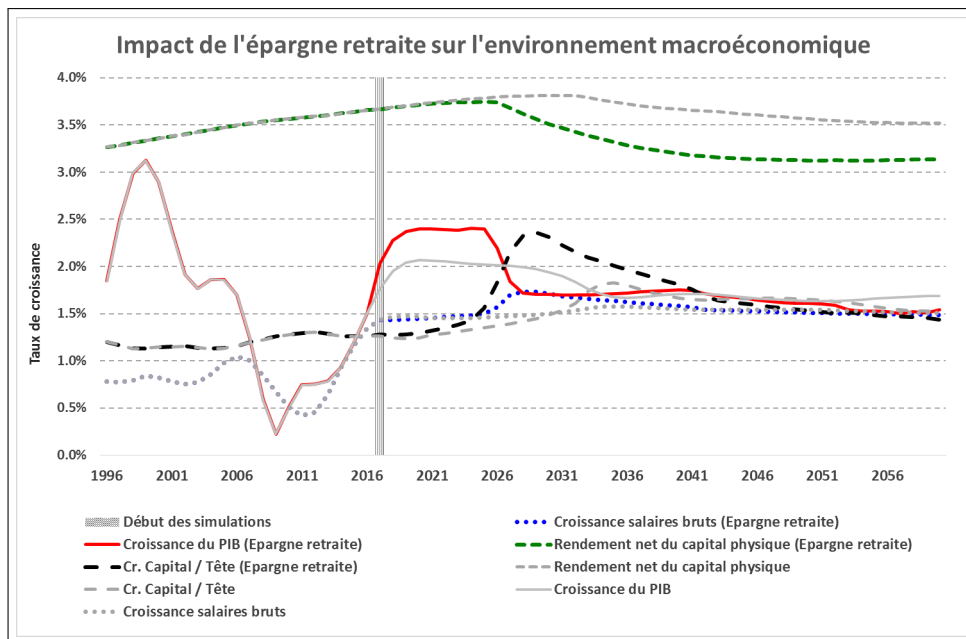


FIGURE 5.9 – Impact de l’épargne retraite sur l’environnement macroéconomique

➡ La conjecture d’une *Value-at-Risk* nulle

La stratégie d’allocation testée dans les simulations correspond à celle d’un agent résolument averse au risque. Elle vise à maintenir la valeur du capital accumulée destinée à compléter la pension de retraite, ce qui transcrit plus formellement correspond à une *Value-at-Risk* nulle au seuil de 99%. Comme les grandeurs sont exprimées en termes réels dans la maquette de simulation, l’objectif revient à maintenir le pouvoir d’achat de l’épargne retraite. L’objectif est de maintenir une VaR constante pendant toute la période d’accumulation. Cette tactique présente l’avantage de ne pas enfreindre le critère de perte posé en début d’investissement contrairement à une allocation profilée constante correspondant à une VaR calculée en fonction de la durée d’investissement totale (voir l’illustration en rouge sur le graphique 5.10 ci-dessous). La stratégie qui vise à maintenir une VaR constante impose des réallocations périodiques afin de réduire graduellement le poids relatif des actifs risqués (en bleu sur le graphique 5.10).

Naturellement, l’évolution de la proportion d’actifs risqués dépend des hypothèses faites sur la dynamique du cours de ces actifs (espérance, variance, convergence ou efficacité).

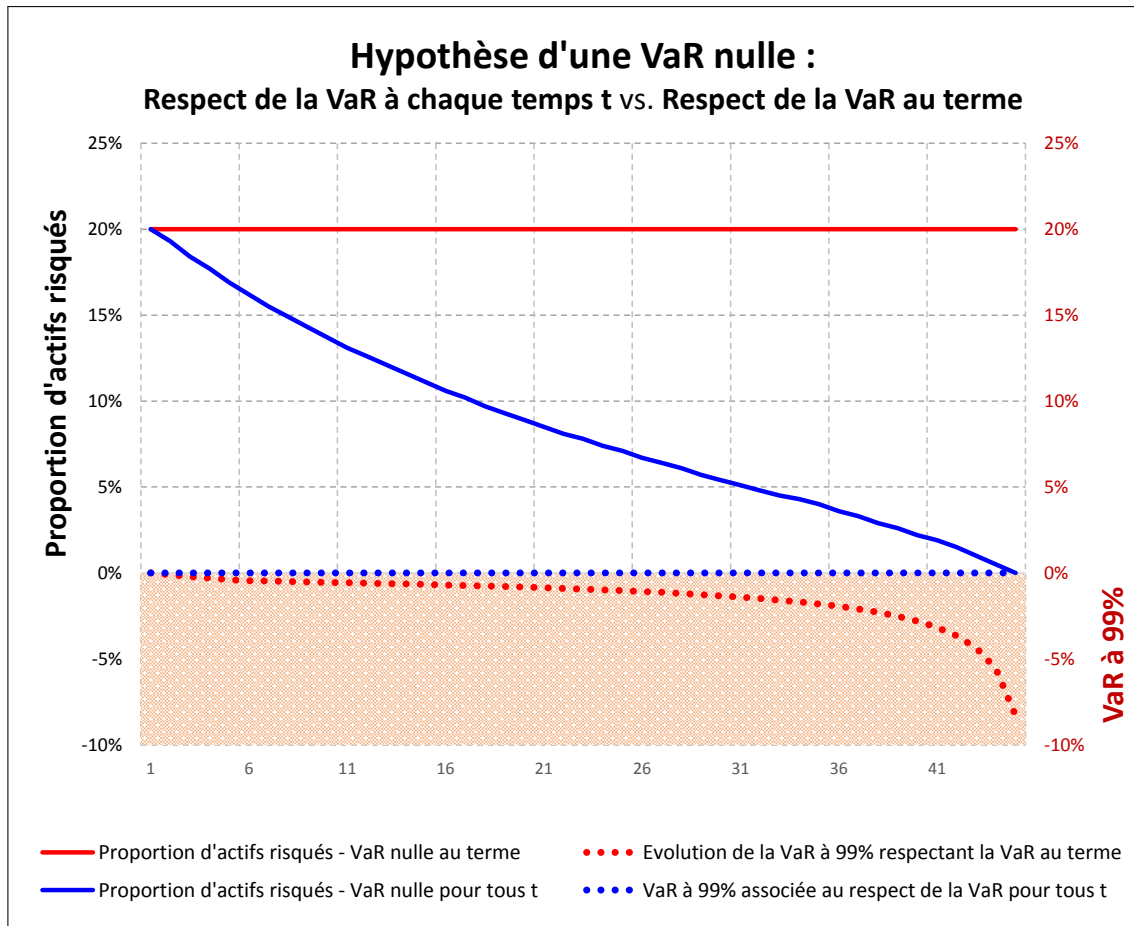


FIGURE 5.10 – Hypothèse de VaR nulle

### L'hypothèse d'efficience des marchés

Afin de déterminer la stratégie de placement minimisant le risque associé à l'aversion des agents dans notre environnement stylisé, nous avons procédé à des simulations stochastiques en y intégrant, tour à tour, les paramètres de la dynamique des cours boursiers précédemment estimés. Il est alors facile, pour un processus donné, de simuler artificiellement les trajectoires possibles des rentabilités boursières. Les résultats déterminent des stratégies différenciées selon les propriétés que l'on prête au cours des actions. Dans ce premier cas, on suppose classiquement que le processus des prix suit une marche aléatoire avec drift. Compte tenu du critère de perte maximum retenu (une VaR nulle au seuil de 99%), l'évolution du poids des actifs risqués dans les allocations des épargnants passerait d'un maximum de l'ordre de 10% au début de la phase d'accumulation (à l'âge de 20 ans par hypothèse) et tendrait rapidement vers zéro à l'âge du départ à la retraite. On a supposé que les différentes générations ajusteraient leur grille de désensibilisation au risque en fonction du rendement d'équilibre  $r_g$  précédant le début de leur

effort d'épargne. Comme le surcroît d'épargne retraite a un impact sur le rendement net du capital, le poids maximum investi en actifs risqués varie légèrement selon les générations.

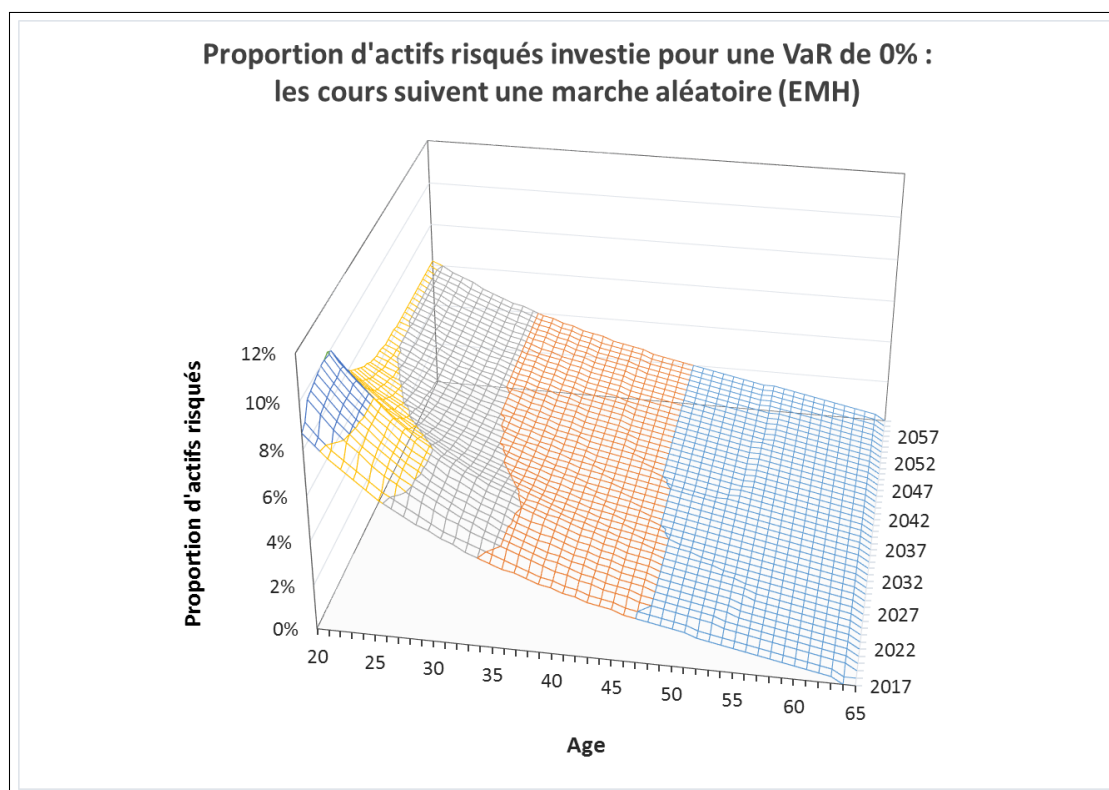


FIGURE 5.11 – Proportion d'actifs risqués

En dehors des sauts provoqués par les taux de participation différenciés selon les générations, on constate le caractère relativement stable du niveau d'épargne accumulée pendant la période d'activité. Cette apparence résulte de la faible proportion d'actifs risqués dans les *allocations de cycle de vie* des épargnants. Les allocations stratégiques optimales obtenues dans l'hypothèse où le prix des actions suit une marche aléatoire avec drift s'avèrent très prudentes. Le résultat s'explique par la faible vitesse de réduction de la variance (en l'occurrence fonction du temps) dans le processus envisagé.

Les rentes attribuées par le fonds de retraite - qui sont fonction de la durée d'abonnement, de l'espérance de vie des différentes générations et du rendement net du capital - progresseraient et se stabiliseraient à niveau équivalent à 9% du salaire moyen du moment pour les cohortes nées en 1995, qui seront les premières à avoir cotisé sur l'ensemble de leur période d'activité. En observant le graphique représentant les rentes moyennes attribuées aux différentes cohortes, on note que le critère de VaR est respecté pour toutes



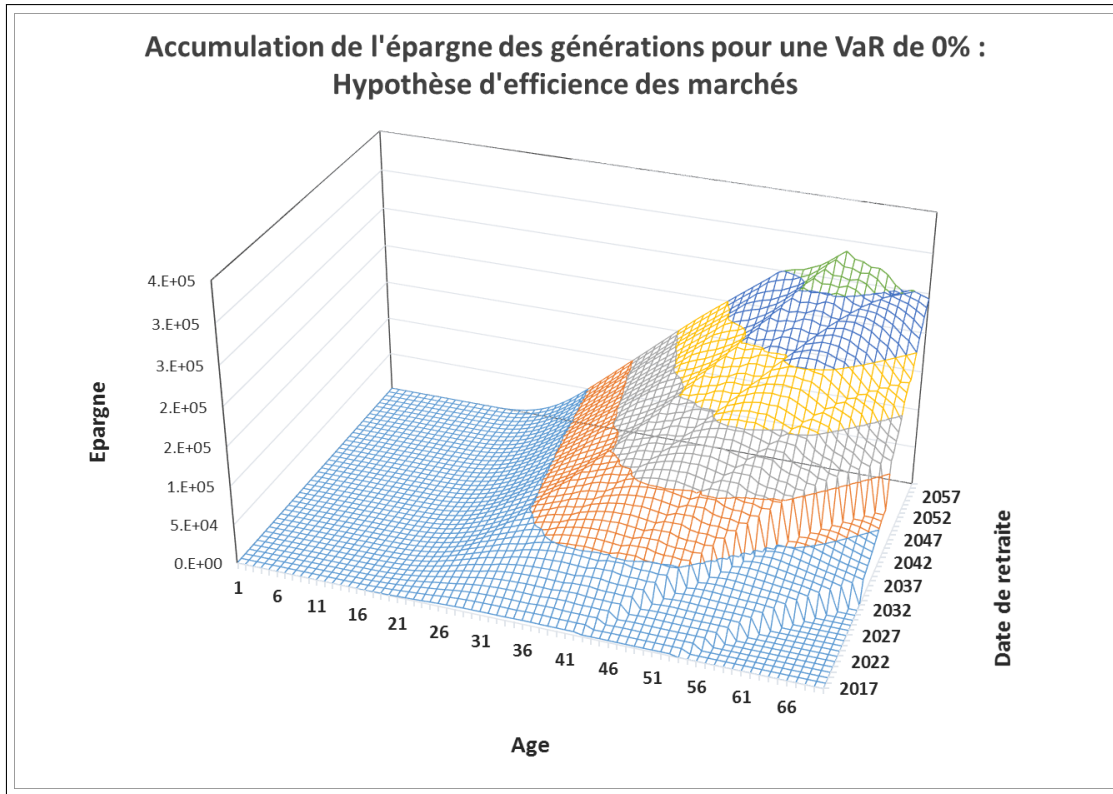


FIGURE 5.12 – Accumulation de l'épargne

les cohortes de cotisants.

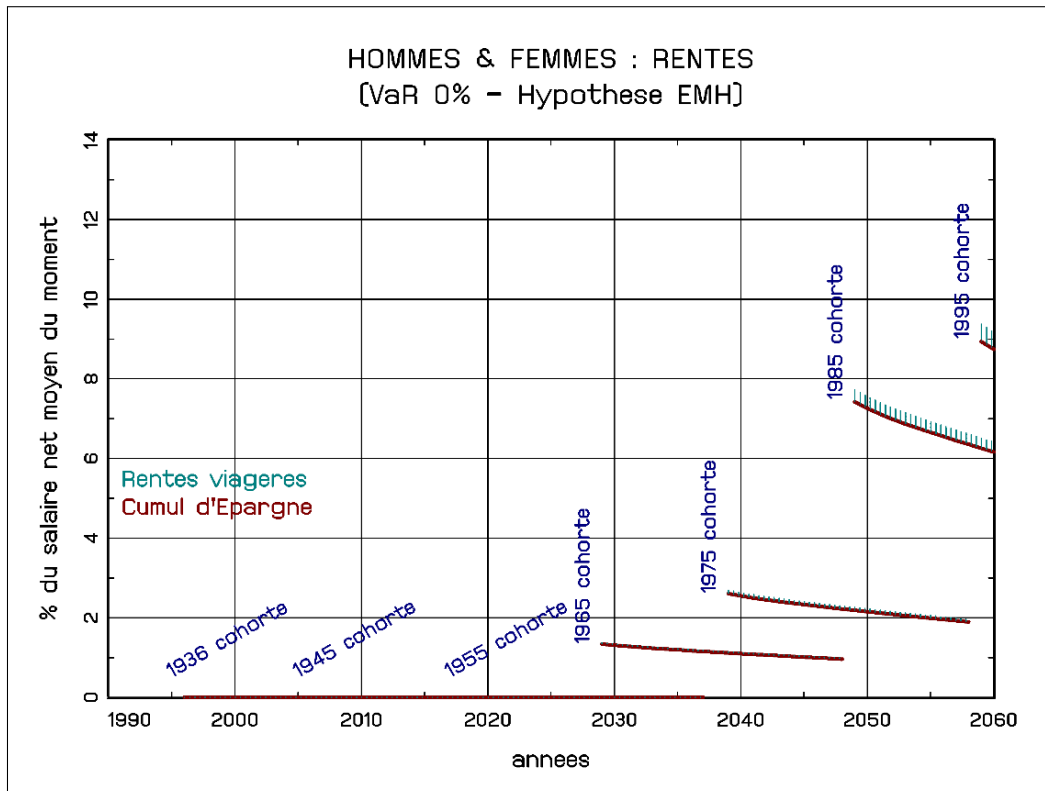


FIGURE 5.13 – Rentes - hypothèse d'EMH

En effet, la dispersion des rentes viagères est faible et n'est jamais inférieure au montant de l'épargne cumulée, ce qui indique que le rendement des placements est supérieur ou égal à zéro pour tous les épargnants.

Les rentes sont exprimées en pourcentage du salaire net du moment, soit le même dénominateur que les **taux de remplacement**. On peut donc, par simple addition, étudier l'impact du plan d'épargne retraite sur les niveaux de vie comparés des retraités et des actifs. Il apparaît qu'à partir de l'année 2040, les rentes issues de l'effort d'épargne permettraient d'enrayer la baisse des **taux de remplacement** des régimes par **répartition**. Au-delà de ce terme, les **taux de remplacement**, effort d'épargne compris, progresseraient légèrement et reviendraient en 2060 à des niveaux proches de ceux calculés pour 2030.

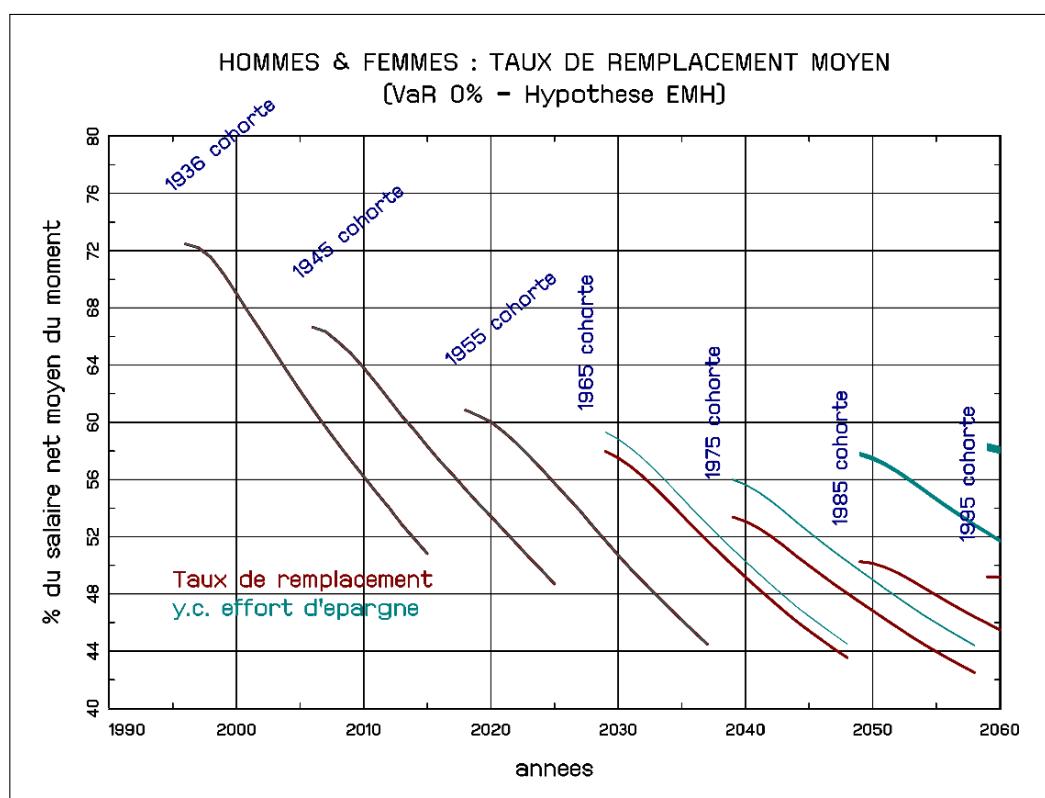


FIGURE 5.14 – Taux de remplacement - hypothèse d'EMH

Cette remontée du pouvoir d'achat relatif des retraités consécutif à un effort d'épargne relativement important n'a rien d'étonnant. La question qui se pose est davantage celle du bilan de l'utilité ou du « bien-être » que les agents peuvent retirer de leur abondement au fonds d'épargne. On peut tenter une mesure de ce bien-être en calculant le rendement de « l'opération retraite » sur leur **cycle de vie**. Un tel critère intègre à la fois le revenu tiré du régime de retraite, l'effort consenti lors des cotisations et la durée passée à la retraite

relativement à celle passée au travail. Pour les affiliés qui liquident et qui prennent leur retraite, on peut approximer, par génération et par sexe, le taux de rendement interne (TRI) de « l'opération retraite » par la formule suivante :

$$\frac{\tau_{(t)} \times w_{(a,t)} \times ar_{(a,t)} \times \prod_{i=d}^a \times px_{(i,t-i)}}{(1+ir)^t} = \frac{p_{(r,t)} \times \prod_{i=d}^r \times px_{(i,t-i)}}{(1+ir)^t} \quad (5.4)$$

Avec :

$ir$  = taux de rentabilité interne ,  $\tau$  = taux de cotisation

$w$  = salaire moyen ,  $ar$  = taux d'activité

$p$  = pension de retraite ,  $px$  = probabilité de survie

$a$  = âge sur la période d'activité ,  $r$  = âge sur la période de retraite

Pour tenir compte de l'impact de la **capitalisation**, il suffit d'augmenter le taux de cotisation de l'effort d'épargne en proportion du salaire et d'intégrer la rente viagère à la pension de retraite.

La comparaison des taux de rendement interne du bilan retraite avec et sans effort d'épargne montre clairement que les générations qui participent au plan d'épargne avec comme critère de perte une VaR nulle sur un marché efficient bénéficient de rendements inférieurs à ceux offerts par l'édifice des régimes par **répartition** qui dépendent, toutes choses égales par ailleurs, des évolutions démographiques et des progrès de productivité. L'écart est plus prononcé pour les femmes qui, du fait d'une espérance de vie supérieure à celle des hommes, bénéficient du rendement actuariel le plus élevé. Compte tenu de la très faible proportion d'actifs risqués dans les **allocations de cycle de vie** des affiliés, la rentabilité des investissements est pratiquement nulle (0,20% en moyenne sur la phase d'épargne) et ce d'autant plus que les taux d'intérêt technique des rentes sont nuls dans nos simulations et font baisser le TRI des générations qui abondent. Sur le graphique qui représente simultanément l'évolution des rendements des régimes par **répartition** avec et sans effort d'épargne, le recul des rendements est fonction du poids relatif des deux régimes. On en déduit que si les marchés sont efficients, la préservation dans 100% des cas

de la valeur du capital accumulée ne peut être atteinte qu'au prix d'un rendement dérisoire, largement inférieur à celui de la *répartition*. Sous l'hypothèse d'EMH, les marchés financiers ne seraient pas capables d'offrir le même couple « rendement - risque » que les régimes par *répartition*.

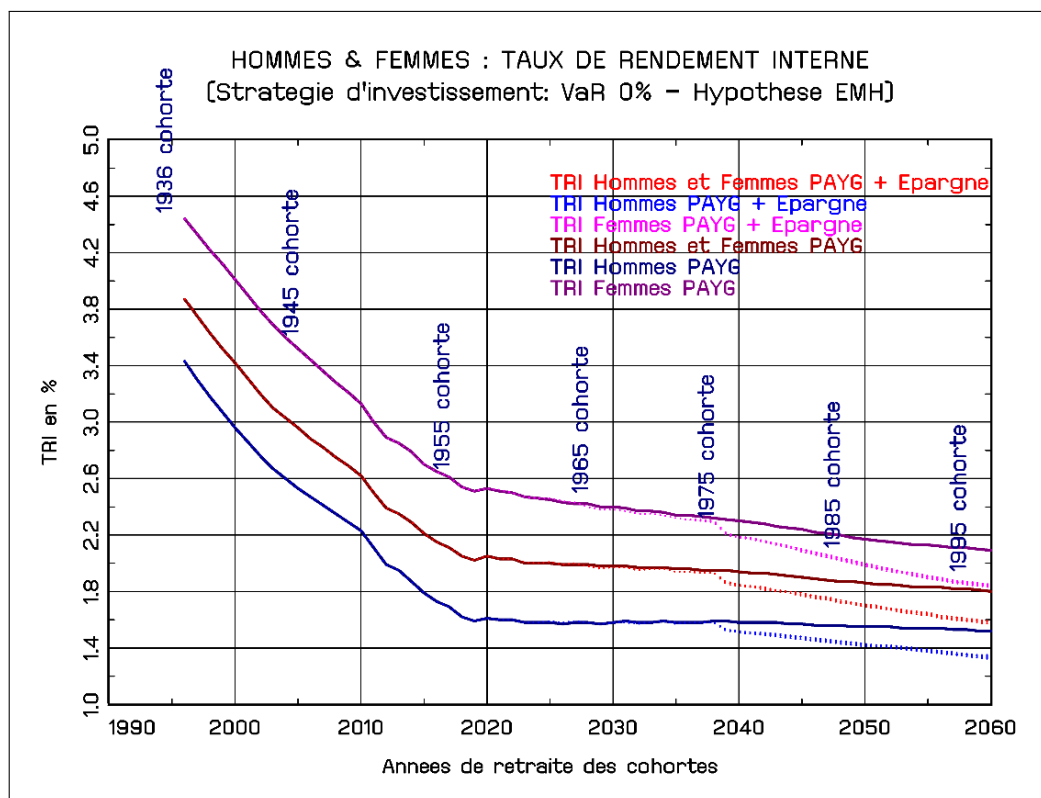


FIGURE 5.15 – Taux de rendement interne - hypothèse d'EMH

Cette conclusion, qui reste évidemment fragile, est liée aux conséquences des réformes de 2010 et de 2013 sur le comportement de départ à la retraite des salariés du secteur marchand. Lesdites réformes vont conduire à une augmentation de l'âge moyen de départ à la retraite au-delà de 64 ans. Or, l'augmentation de l'âge de la retraite a des effets complexes sur le rendement actuariel des régimes par *répartition*. Contrairement à une idée intuitive, dans le cadre réglementaire français, l'augmentation à 64 ans de l'âge moyen de départ à la retraite débouche sur des TRI plus élevés en fin de période de simulation qu'un maintien de l'âge de départ à son niveau actuel (d'après la CNAV en 2015, l'âge moyen de départ à la retraite est de 62,4 ans). En effet, on constate sur le graphique comparant les TRI selon deux variantes d'âge moyen de retraite que les rendements actuariels les plus faibles sont associés à l'âge moyen de départ le plus précoce. A terme, la hausse du ratio « durées cotisées / période de retraite » est plus que compensée par la hausse des pensions

et la stabilisation des taux de cotisation.

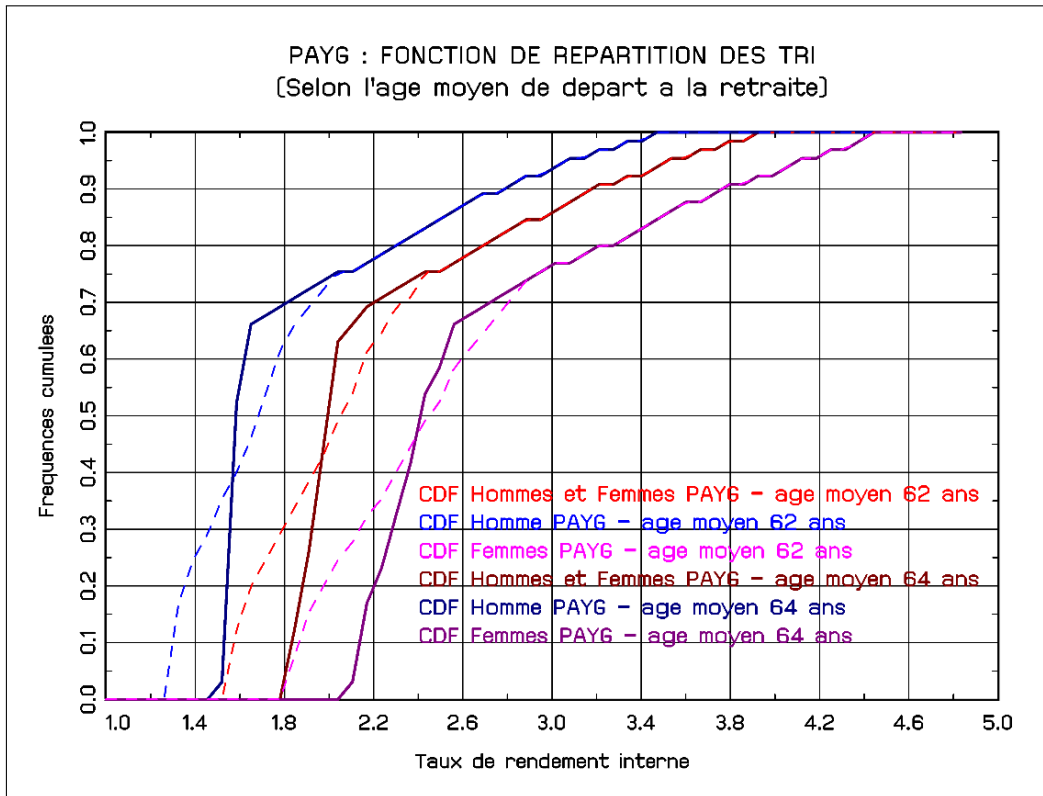


FIGURE 5.16 – PAYG - Fonction de répartition des TRI

A la lecture des résultats, on pourrait être tenté d'augmenter les taux de cotisation des régimes par **répartition** plutôt que de recourir à l'épargne pour couvrir le risque retraite. Toutefois, la France consacre 14% de son PIB aux dépenses consacrées à la retraite contre 7,9% pour la moyenne des pays de l'OCDE. Cet écart laisse penser qu'une dérive des taux de cotisation obligatoires n'est pas neutre sur l'emploi. La hausse des cotisations accroît le coût du travail et encourage la substitution du capital au travail. La solution, souvent évoquée, qui consisterait à faire supporter l'augmentation des cotisations vieillesse par les seuls salariés pour neutraliser la substitution repose sur une vision plus mécanique qu'économique de la question des retraites appelle un certain nombre de remarques. En premier lieu, l'idée qu'une hausse graduelle des cotisations n'aurait qu'un impact réduit sur la croissance des salaires nets suppose implicitement que la dispersion des gains de productivité autour de la productivité moyenne est faible. Cette vision, assez normative, paraît éloignée de la réalité du marché du travail, comme l'attestent les politiques d'allègement de cotisations sociales sur les bas salaires.

Par ailleurs, en économie ouverte, le transfert d'une partie des gains de productivité des actifs vers les générations de retraités risque d'encourager la fuite des salariés qualifiés vers des pays qui n'auront pas opté pour une hausse des cotisations vieillesse dans la perspective de recevoir un salaire net plus important, ce qui conduirait à déprimer la population active. On peut également envisager que les salariés n'acceptent pas le ralentissement de la croissance de leur salaire net. Dans ce cas, la hausse des taux de cotisation n'est plus neutre et réduit proportionnellement la vitesse d'ajustement entre salaire d'équilibre (ou de plein emploi) et salaire effectif. Cette résistance se traduirait par une augmentation du chômage et une perte de compétitivité. En dernier lieu, si l'épargne des ménages est relativement élevée, elle est insuffisamment tournée vers l'épargne financière. La structure de l'allocation de l'épargne est mal adaptée au financement de la croissance. Dans ce contexte, il paraît primordial de favoriser l'orientation de l'épargne vers le financement à long terme des entreprises. La faible part du fonds investie en actifs risqués ne limite nécessairement pas le poids du stock de capital accumulé par les individus qui épargnent pour leur retraite. En effet, par simplicité, on a considéré que les montants investis sur l'actif sans risque (en obligations souveraines par exemple) viendraient augmenter le stock de capital retraite au même titre que les investissements en actifs risqués.

On fait donc l'hypothèse forte que la dette est utilisée exclusivement pour des dépenses d'investissement et non de fonctionnement.

### L'introduction de *mean reversion* dans la dynamique du prix des actions

Dans cette modélisation alternative, on suppose que la dynamique des *log-returns* est déterminée par un « *Trending OU process* ». La valeur du paramètre de retour vers la moyenne  $\kappa$  est fixée à 0,1 ce qui correspond à une demi-vie  $\frac{\ln(2)}{\kappa}$  de l'ordre de 7 ans, soit une valeur compatible avec les mesures effectuées sur les chroniques des cours. Le graphique ci-dessous trace la réduction observée de la volatilité des *log-returns* du CAC All-Tradable sur la période 1895-2016 en fonction de la durée de placement, puis la compare successivement avec la celle d'un bruit gaussien et d'un *Trending OU process* de même espérance-variance. La valeur 0,1 assignée à  $\kappa$  permet un bon ajustement entre la volatilité du processus et la volatilité historique.

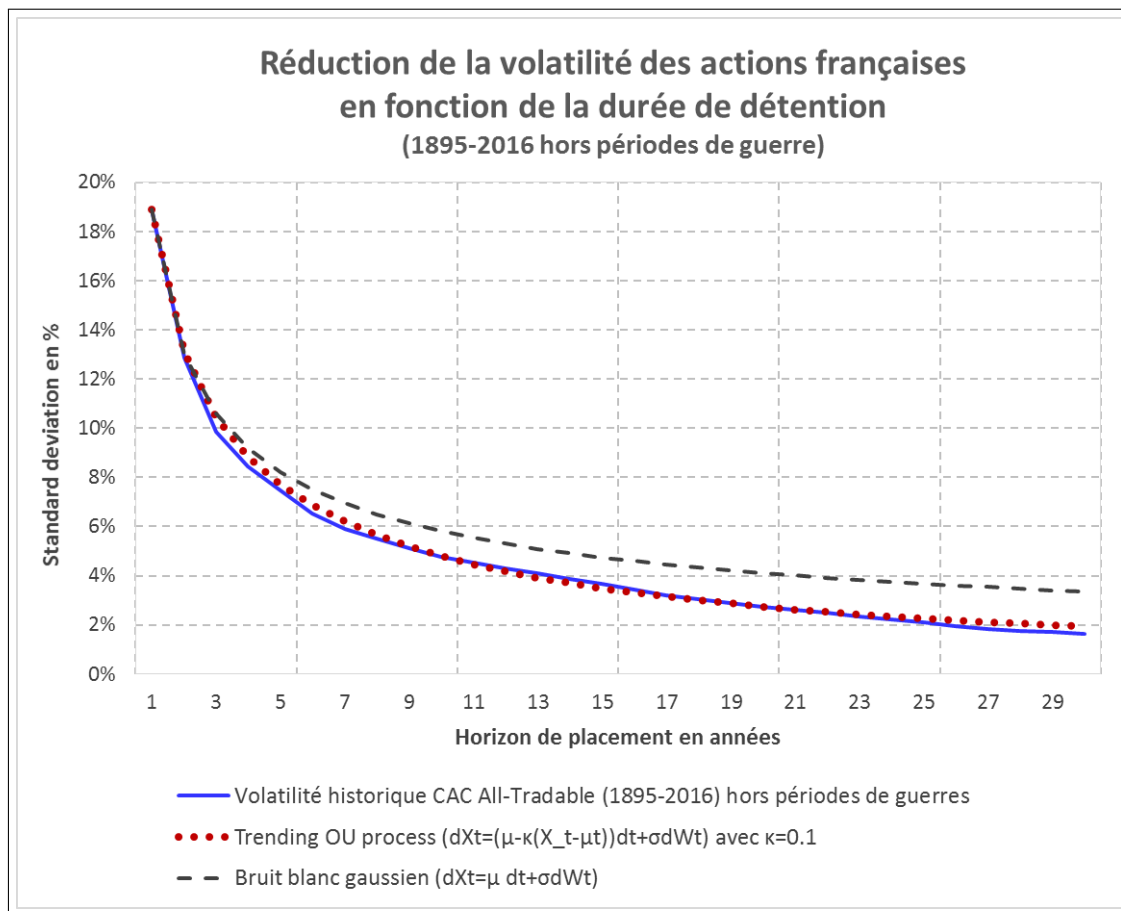


FIGURE 5.17 – Réduction de la volatilité - Actions françaises

Le critère de risque retenu pour piloter la stratégie d'allocation d'actifs est identique au précédent (une VaR nulle au seuil de 99%). Les allocations stratégiques optimales obtenues dans le cas où la dynamique des cours est régie par ce type de processus sont radicalement différentes de celles déterminées dans le cas gaussien et s'avèrent beaucoup plus riches en actifs risqués. Ce résultat s'explique par des vitesses de réduction de la variance différentes selon les modélisations envisagées. La réduction de la variance des cours est fonction du temps dans un mouvement brownien, elle est plus rapide dans un processus de retour vers la moyenne. D'après les simulations, les jeunes actifs seraient conduits à détenir des portefeuilles investis 100% en actifs risqués pendant une durée d'une quinzaine d'années. Au-delà, c'est-à-dire environ 25 ans avant l'âge de départ à la retraite, l'arbitrage entre actifs risqués et actifs sans risque serait brusque.

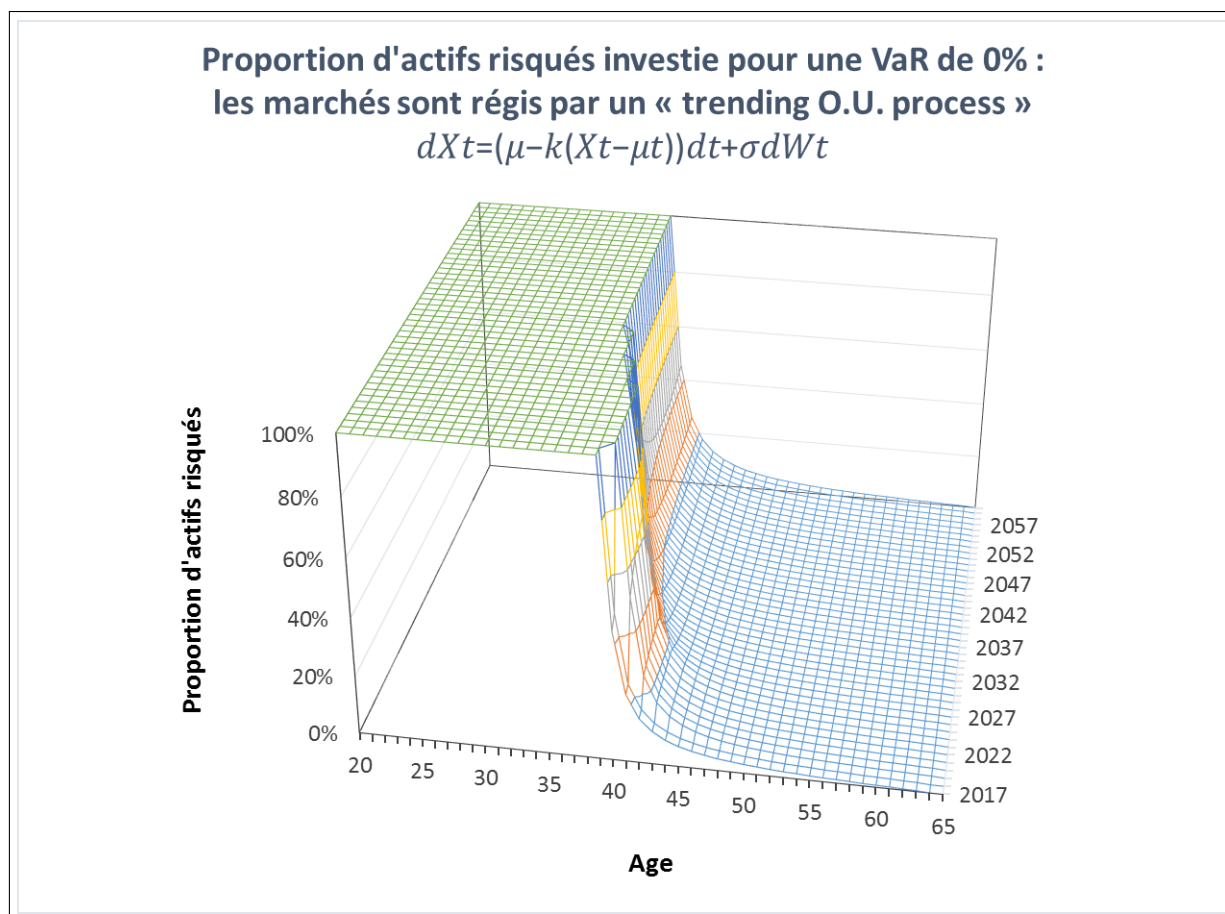


FIGURE 5.18 – Proportion d'actifs risqués - VaR égale à 0%



Pour comprendre les ressorts de cette stratégie, il est utile d'examiner les valeurs des *Value-at-Risk* des allocations stratégiques en fonction de l'horizon de placement. L'objectif est de piloter les allocations afin de maintenir une VaR de 0% au seuil de 99%. Cependant, sur les horizons longs, les caractéristiques requises par l'épargnant ne figurent pas nécessairement parmi l'ensemble des allocations constitutives des frontières de la période d'investissement. C'est notamment le cas lorsque toutes les allocations d'une frontière ont une VaR positive (ce qui correspond à un gain en capital). Lorsque cette configuration se présente, on sélectionne assez logiquement l'allocation à rendement maximum.

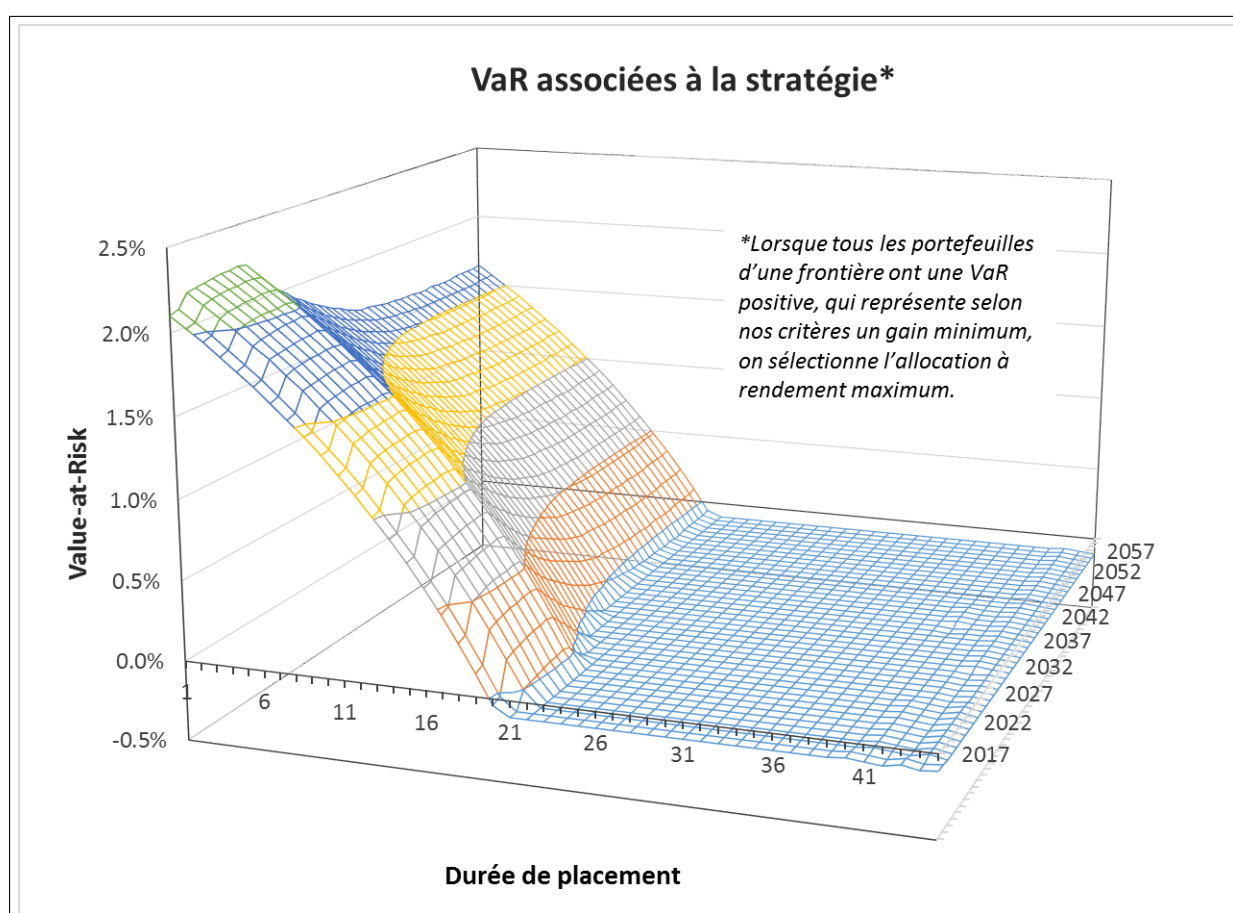


FIGURE 5.19 – VaR associée à la stratégie

Les grilles d'allocations déterminées sont ensuite utilisées pour simuler le processus d'accumulation de l'épargne. Du fait de la forte proportion d'actifs risqués dans les portefeuilles, on constate que le capital accumulé par les différentes générations sur leur période d'activité est beaucoup plus « bruité » que dans l'hypothèse gaussienne. La volatilité de 18% retenu pour les actifs risqués joue à plein sur les périodes où les allocations sont riches en actions.

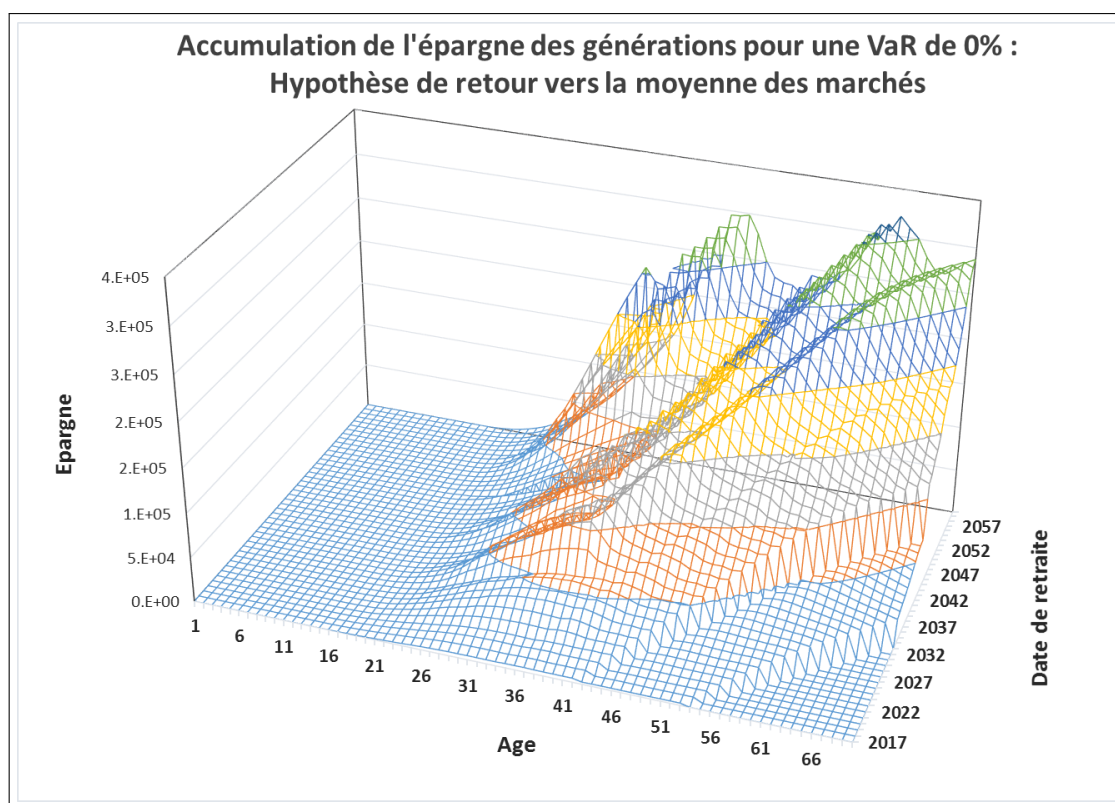


FIGURE 5.20 – Accumulation de l'épargne - VaR de 0% - hypothèse de *mean reversion*

Dans cette variante, qui paraît plus proche du fonctionnement effectif des marchés, les rentes délivrées par le plan d'épargne retraite seraient plus élevées que dans l'hypothèse d'efficience des marchés financiers. Le niveau médian des rentes attribuées à la cohorte née en 1985 s'établirait à 9% du salaire net moyen du moment, la cohorte née dix années plus tard bénéficierait, pour sa part, de rentes médianes de 11% du salaire du moment en 2060 (soit 2 points de plus que dans l'hypothèse d'efficience des marchés).

La dispersion des rentes serait plus importante du fait de la proportion notable d'actifs risqués dans les allocations. La représentation sous forme de diagrammes en boîte des **taux de remplacement** à la liquidation, incluant pensions et rentes issues du plan d'épargne, illustre le phénomène. Si on retient comme indicateur les **taux de remplacement** compris dans l'écart interquartile (Q3 - Q1), le complément de retraite assuré par les rentes servies par le plan d'épargne à l'horizon 2060 permettrait de revenir au **taux de remplacement** alloué par l'édifice des régimes obligatoires en 2017.

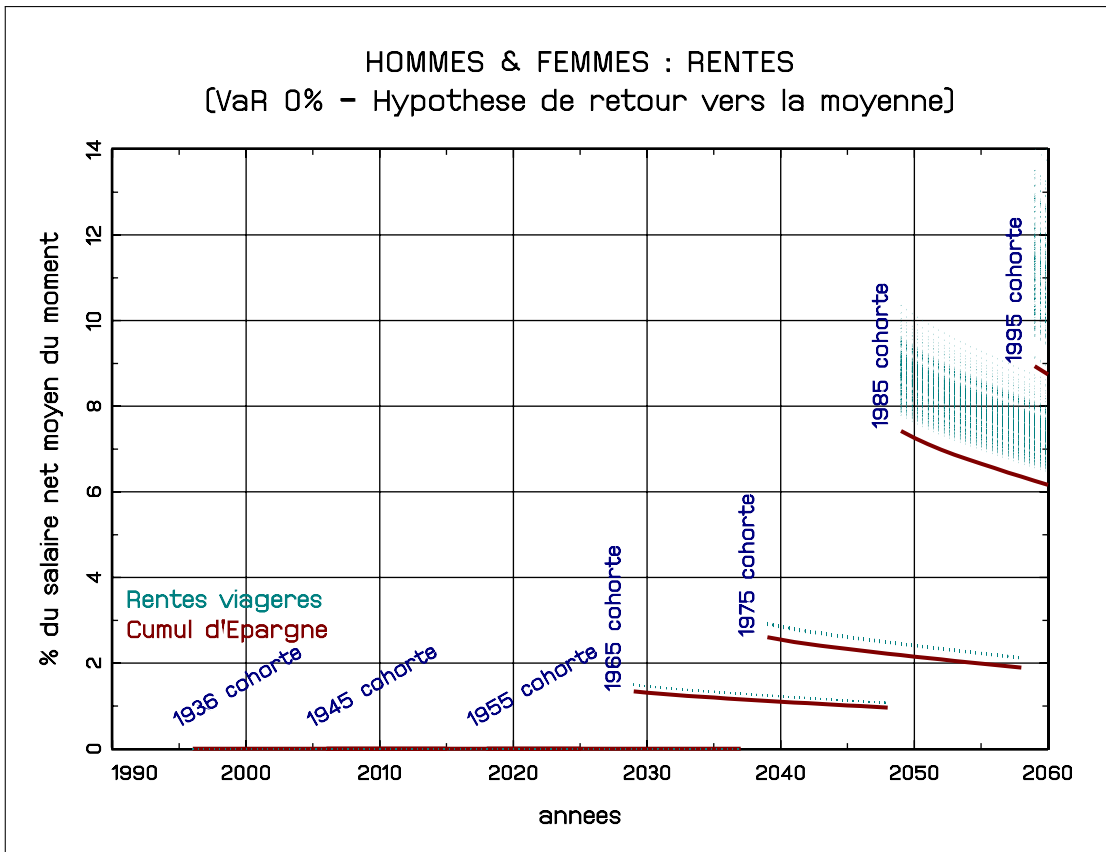


FIGURE 5.21 – Rentes pour VaR cible à 0% - Hommes & Femmes confondus

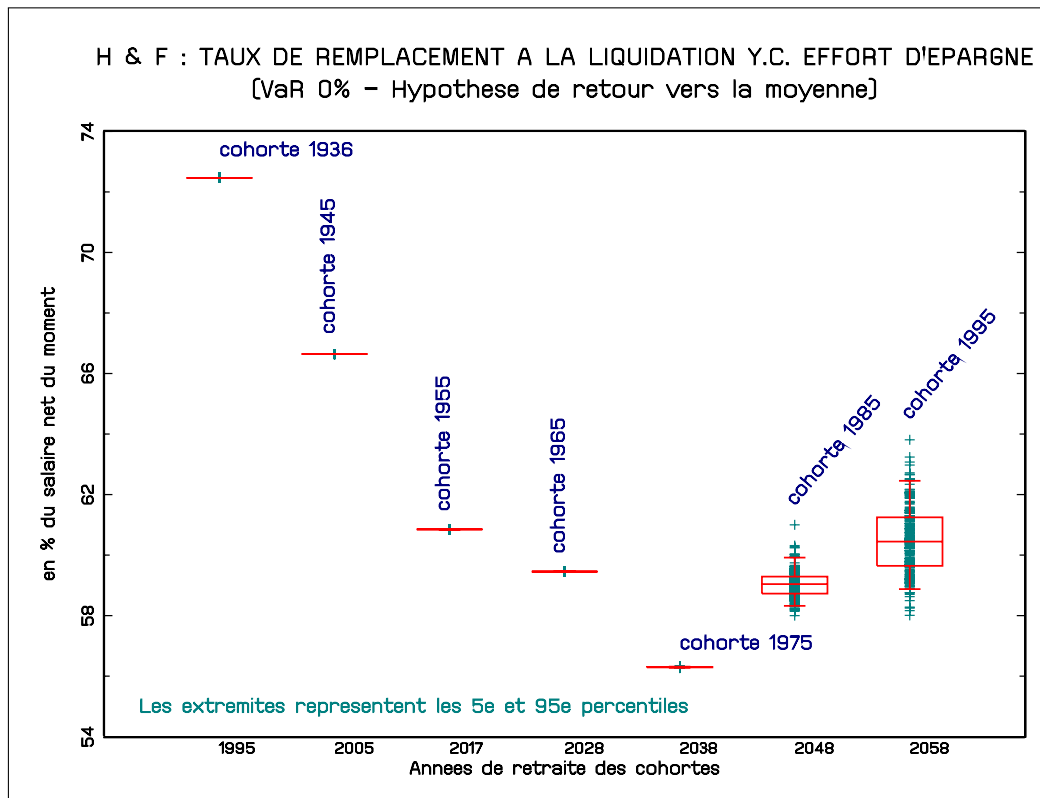


FIGURE 5.22 – Taux de remplacement à la liquidation

On notera qu'une mauvaise estimation de la valeur du paramètre de « retour vers la moyenne »  $\kappa$  ne conduit pas à une « violation » du critère de perte maximum accepté par les agents. Comme le calcul de la VaR tient compte de  $\kappa$ , l'incidence d'une sur ou sous-évaluation du paramètre impacte uniquement le poids des actifs risqués dans les portefeuilles. Le vrai risque est de considérer que le marché est « mean reverting » ( $\kappa > 0$ ) alors qu'il est efficient ( $\kappa = 0$ ). Dans ce cas, les allocations calculées ne respectent plus le critère de risque assigné et déterminent des rentes pour partie inférieures à celles calculées à partir du simple cumul de l'épargne. Pour illustrer ce risque, on a tracé les rentes déterminées par une stratégie d'allocations fonction d'un paramètre de retour vers la moyenne  $\kappa = 0,1$  dans un marché où sa valeur serait nulle (EMH). Dans ce cas de figure, plus de 16% des rentes servies violeraient le critère de VaR fixé par les agents (en rouge sur le graphique).

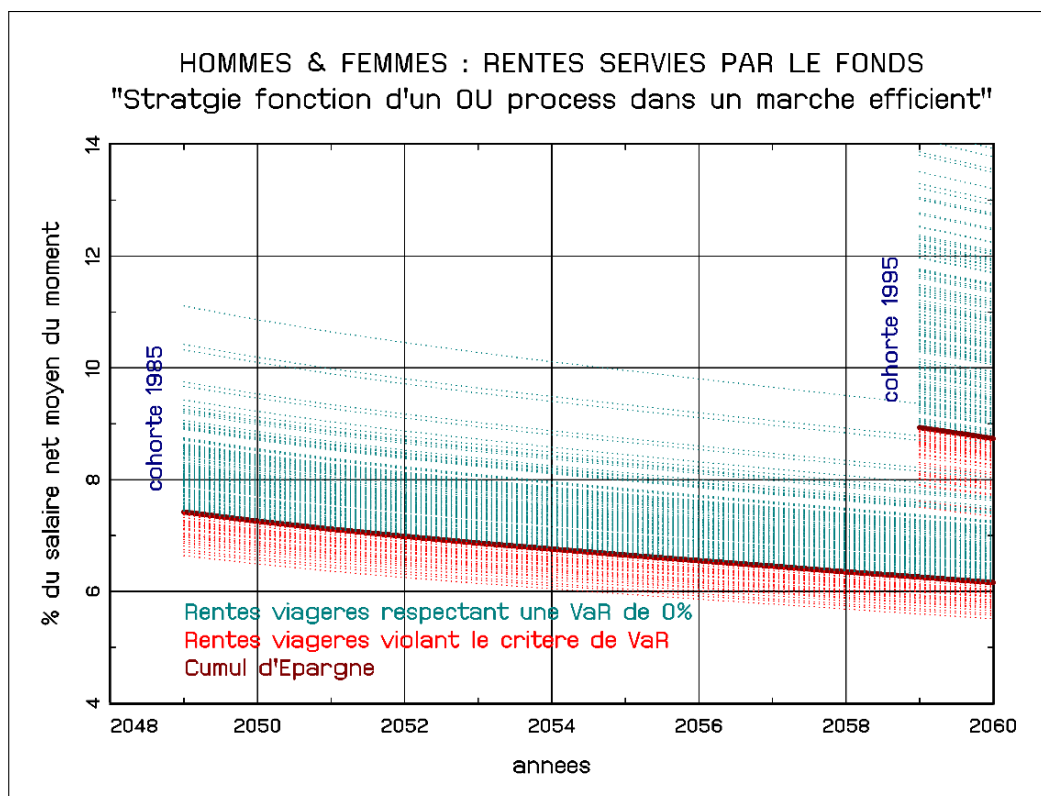


FIGURE 5.23 – RENTES SERVIES PAR LE FONDS

La question essentielle pour l'épargnant n'en demeure pas moins celle de l'utilité que les agents peuvent retirer de leur affiliation au fonds d'épargne. Si l'on prend le taux de rendement interne comme proxy du « bien-être » des agents, on constate une nette amélioration des TRI des cohortes relativement à l'hypothèse d'EMH testée précédemment. La prise en compte des rentes issues du plan d'épargne contribuerait toutefois à une dégradation du rendement actuariel de l'opération retraite pour les femmes, tandis que pour les hommes, les TRI des régimes de retraite et des rentes seraient équivalents. Du fait de la plus grande proportion de femmes au sein des retraités, le rendement moyen se détériorerait légèrement. Dans l'hypothèse où la dynamique des cours serait régie par un processus « raisonnable » de *retour vers la moyenne*, le rendement actuariel du plan d'épargne resterait légèrement inférieur à celui de la *répartition* dans le cas des pensions de droit direct calculées à taux plein. Pourtant, l'espérance de rendement réel des placements déterminée par le *Trending OU process* est de 2,3%, soit un rendement supérieur au rendement moyen de la *répartition* en fin de projection (1,8% dans nos simulations). Toutefois, la volonté de se rapprocher du fonctionnement pratique du marché impose la prise en compte d'un minimum de « frais de chargement ». Ainsi dans les maquettes, les frais de gestion prélevés sur les encours et les flux (respectivement 0,5% et 5%) couplés à l'impact d'un taux d'intérêt technique des rentes fixé à 0%, contribuent à la réduction de la performance du plan d'épargne.

### **Simulation d'un Krach de 2017 à 2028**

Afin d'apprécier le risque conjoncturel lié à l'imperfection des marchés, qui se traduit par une forte volatilité des actifs, on a simulé les conséquences d'un krach boursiers sur les rentes délivrées par le plan d'épargne. La séquence de rendements utilisée pour mimer le krach correspond à celle enregistrée de 2000 à 2011 sur le CAC All-Tradable (ex SBF 250). Etant donné que dans nos simulations, le fonds d'épargne retraite est abondé à partir de 2017, la crise boursière a été décalée aux années 2017-2028. L'exercice n'est conduit que dans le cas d'un processus mean reverting. En effet, compte tenu du critère de VaR adopté, l'hypothèse EMH détermine des stratégies d'allocation d'actifs trop prudentes pour que l'expérimentation présente un intérêt.

Les générations les plus anciennes ne sont pas affectées par le krach simulé en rai-

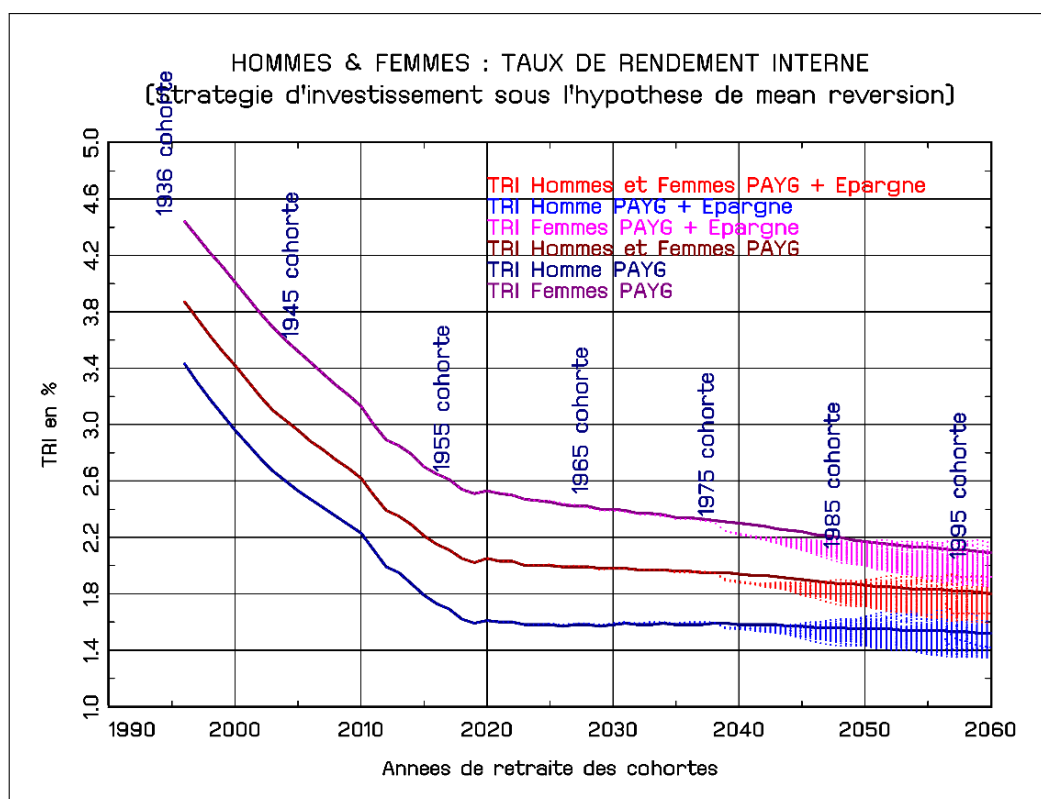


FIGURE 5.24 – TAUX DE RENDEMENT INTERNE - Hypothèse de *mean reversion*

son de la structure de leurs allocations majoritairement investies en actifs sans risque. Les cohortes jeunes détentrices de portefeuilles massivement investis en actifs risqués sont donc les plus impactées par la crise boursière. L'analyse des résultats pour les cohortes 1985 et 1995 montrent toutefois que l'incidence du krach resterait limitée. Si on trace les intervalles de confiance du cumul des *log-returns* des tirages, qui en l'absence de versement, ont un profil proche de ceux du capital constitué, on constate qu'à partir des années 2045 les corridors des intervalles associés à une simulation « normale » et à un krach boursier convergent.

L'effet de rattrapage, lié à l'existence d'une force de rappel dans la dynamique des cours permet aux générations les plus jeunes (cohorte née en 1995) de n'être pratiquement pas impactées par la crise simulée. Les affiliés nés en 1985, qui liquideraient leur retraite en 2049, toucheraient cependant des rentes inférieures à celles calculées dans l'environnement « normal », dans lequel le *Trending OU process* n'est pas artificiellement perturbé.

La prise en considération de la dynamique d'accumulation, en l'occurrence des flux d'épargne, permet d'établir un diagnostic plus précis. Si on examine l'évolution de l'épargne

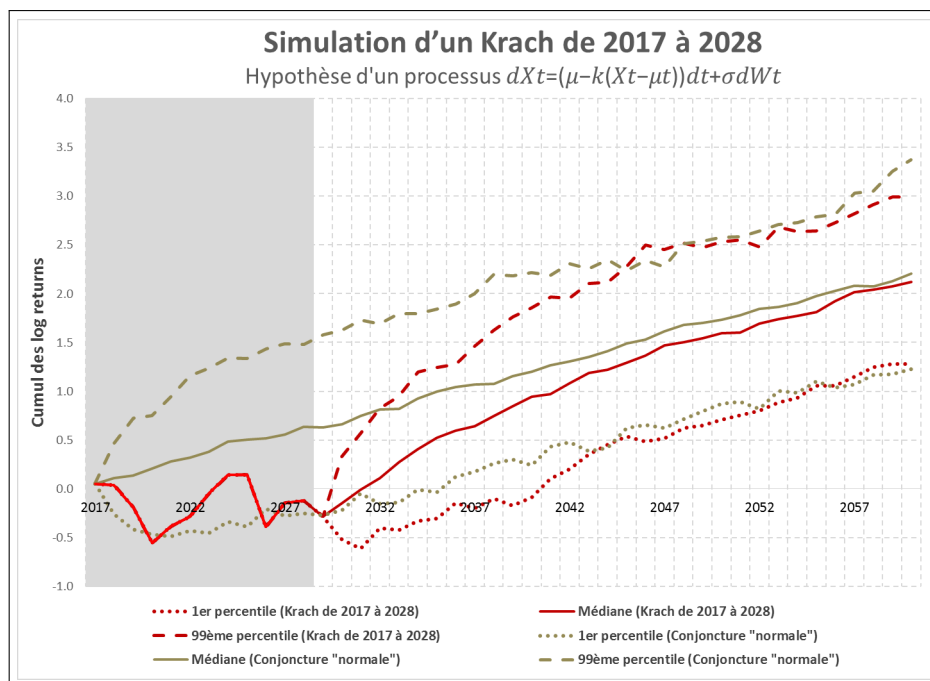


FIGURE 5.25 – Simulation d'un Krash cas 1

accumulée par la cohorte 1985 au titre de sa retraite, on constate une baisse brutale du capital en 2025. Ce recul correspond à la transposition de la baisse de 53% enregistrée sur le marché français en 2008. A cet horizon, les individus de la cohorte atteignent l'âge (40 ans) à partir duquel leur stratégie de maintien d'une VaR nulle constante les conduit à réduire rapidement le poids des actifs risqués dans leurs allocations. Ils ne bénéficient donc de la phase de retour vers la moyenne des actions.

En cas de krach, l'intervalle de confiance des rentes pour la cohorte née en 1985 serait inscrit entre la borne inférieure (correspondant au 1er percentile) et la médiane de la simulation effectuée dans l'hypothèse d'une conjoncture « normale ». La cohorte née en 1995 ne serait pas pénalisée par la crise simulée. Les rentes médianes de la cohorte seraient équivalentes avec ou sans krach, seul l'écart type des distributions différencierait.

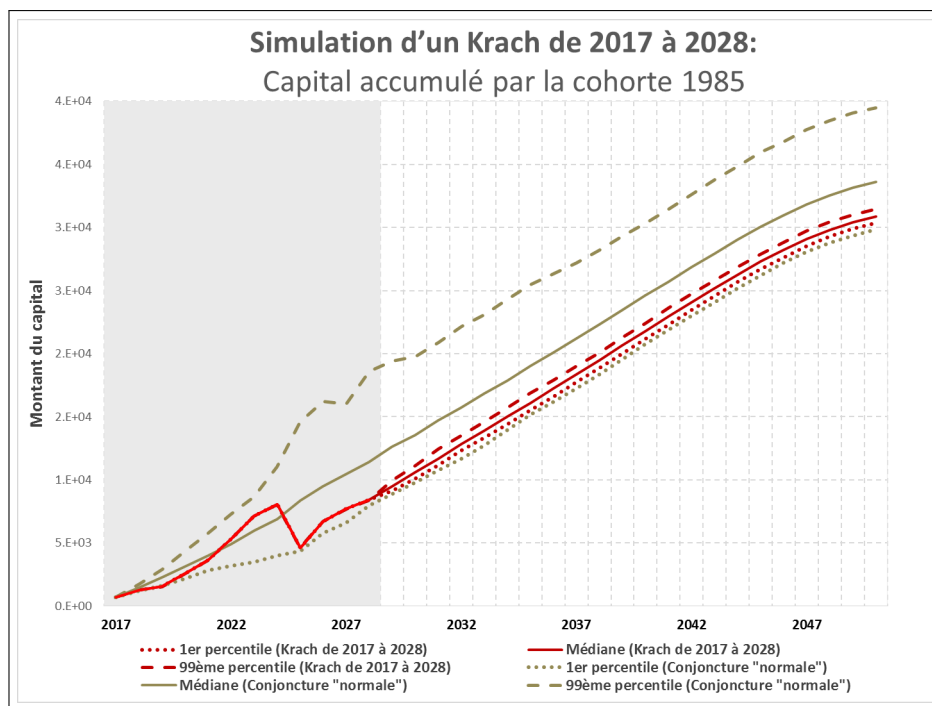


FIGURE 5.26 – Simulation d'un Krash cas 2

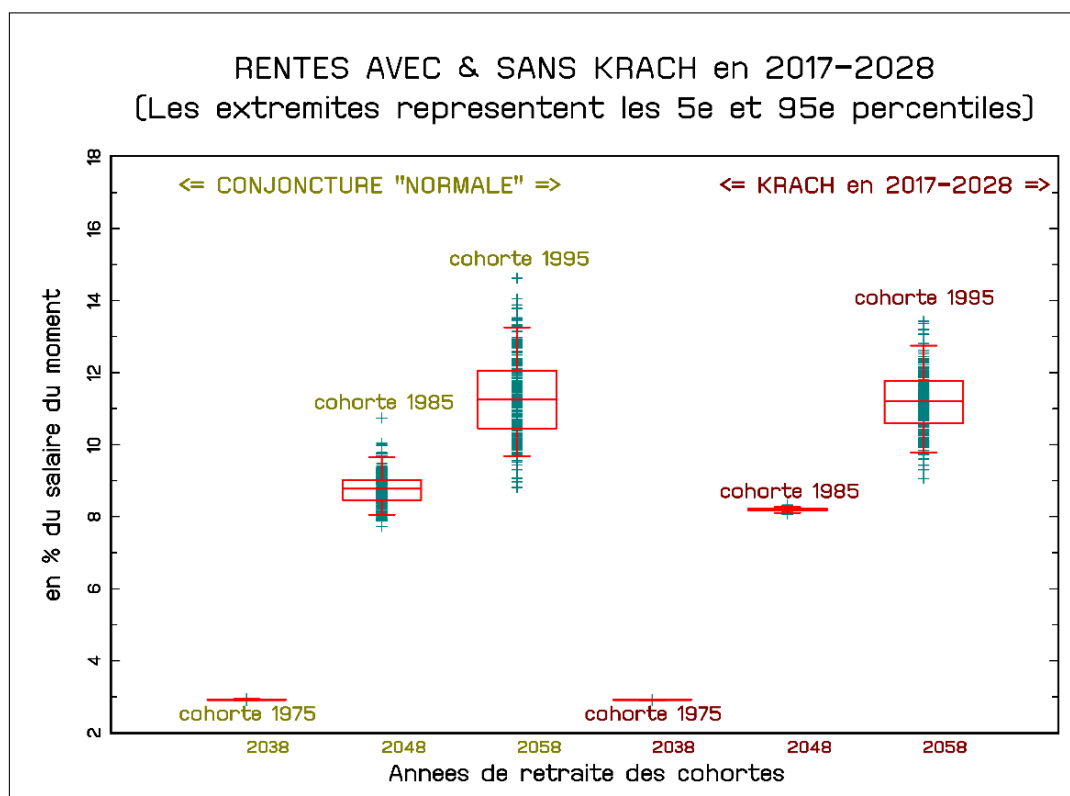


FIGURE 5.27 – RENTES AVEC ET SANS KRASH

La transposition aux années 2017-2028 de la crise boursière enregistrée sur le CAC-All-Tradable de 2000 à 2011 aurait un impact sur les trentenaires dont les rentes seraient réduites. Mais réduction ne veut pas dire baisse de pouvoir d'achat, le niveau des rentes



viagères ne serait jamais inférieur au montant de l'épargne cumulée. Cet exercice montre - sous l'hypothèse d'une dynamique de *mean reversion* raisonnable - la bonne résistance de la *capitalisation* face aux risques liés aux imperfections des marchés. Naturellement, les recherches empiriques (SPIERDIJK et collab. [2012]) montrent que les vitesses de retour vers la moyenne ne sont pas stables dans le temps (« *time varying mean reversion process* »). Les résultats des simulations ne prétendent pas à l'exactitude, mais ils représentent un ordre de grandeur raisonnable qui permet d'illustrer les interactions entre les propriétés que l'on prête au cours des actions et l'efficacité des stratégies de diversification temporelle des risques.

## 5.4 Éléments de conclusion et pistes de recherche

Les simulations réalisées dans le cadre démo-économique français sont riches d'enseignement. Elles montrent que si le prix des actifs risqués suit une marche aléatoire, c'est-à-dire un processus sans mémoire dans lequel les chocs sont permanents (EMH), les agents averses au risque ne pourront pas obtenir sur les marchés un ratio rendement / risque équivalent à celui procuré implicitement par l'édifice des régimes par **répartition** du secteur privé. Si l'on prend le taux de rendement interne comme proxy du « bien-être » des agents, alors l'abondement à un plan d'épargne procurerait une utilité moindre que celle procurée par la **répartition**.

Le recours à la hausse des taux de cotisation des régimes par **répartition** plutôt qu'à l'épargne pour couvrir le risque retraite n'est pas pour autant une solution satisfaisante, car la hausse des cotisations accroît le coût du travail et encourage la substitution du capital au travail.

Quoi qu'il en soit, les résultats n'ont pas pour ambition d'évaluer les avantages et les limites des ajustements possibles pour couvrir le risque vieillesse. Les simulations sont focalisées avant tout sur la mesure du risque associée à l'utilisation des revenus du capital pour financer les retraites.

En la matière, elles soulignent que les raisonnements simplistes consistant à comparer directement l'espérance des rendements des marchés financiers à celle des régimes par **répartition** pour en déduire une hiérarchie comportent une faille majeure car ils font abstraction de la volatilité des marchés et des évolutions démographiques.

Ces premières remarques doivent être modulées si l'on suppose - comme nous le pensons - que la dynamique des cours est gouvernée par un processus de retour vers la moyenne. C'est-à-dire que les mouvements extrêmes de prix observés sur les marchés financiers sont transitoires et qu'une forte variation dans un sens est suivie de mouvements de sens opposé qui corrigent tendanciellement la déviation initiale et ramènent les prix des actifs vers leurs valeurs fondamentales. Dans cette seconde hypothèse, toujours dans le cas d'un agent qui opterait pour probabilité nulle perte en capital, le marché pourrait concurrencer les régimes par **répartition** - sans toutefois offrir un surcroît de rendement - au prix d'un investissement massif en actifs risqués en début et milieu de vie active.

Toujours dans le cas d'une dynamique de retour vers la moyenne et sous l'hypothèse forte d'une force de rappel stable, les simulations montrent qu'un dispositif d'épargne retraite résisterait bien à un krach boursier équivalent à celui enregistré sur les marchés de 2000 à 2011.

Naturellement, ces simulations ne prétendent pas examiner l'ensemble des configurations possibles et pourraient être enrichies par de nombreuses variantes. Elles reposent, par exemple, sur des hypothèses assez conservatrices en matière de substitution capital / travail. Rappelons que le paramètre de substitution  $\gamma$  de la fonction CES est fixé à 0 ce qui détermine une élasticité de substitution capital / travail unitaire. Or, l'analyse historique nous montre que le poids des revenus du capital dans le revenu est croissant, ce qui accrédite l'idée que l'élasticité de substitution entre le capital et le travail est supérieure à 1. **PIKETTY [2013]** estime que l'élasticité de substitution est comprise entre 1,3 et 1,6. Plus récemment, partant d'une fonction CES, **ARTUS [2015]** trouve les élasticités de substitution capital / travail comprise entre 1,3 pour les Etats-Unis, et 1,87 pour la France. Des variantes retenant ces élasticités pourraient compléter les simulations.

Sur un autre plan, le développement de l'économie du savoir laisse supposer que des mécanismes de croissance endogène sont à l'oeuvre dans les pays développés. L'introduction dans les maquettes d'une fonction de production avec croissance endogène pourrait enrichir l'analyse des liens entre retraite et risque financier. **HAMAYON et LEGROS [2001]** montrent clairement que les mécanismes d'éviction sont moins violents dans les fonctions de croissance endogène. Ces dernières déterminent une relation plus forte et plus durable entre capitalisation, production et rémunération des facteurs. Dans un tel cadre, l'utilité tirée de la constitution d'une épargne retraite pourrait être augmentée.

## Annexes

### 5.A Description synthétique des maquettes de simulation

Le modèle est composé d'une fonction de production à deux facteurs, le capital et le travail, et d'une équation décrivant le marché du travail où le chômage possède une composante structurelle et une composante conjoncturelle. Le modèle ignore les phénomènes cycliques temporaires et les contraintes de demande sur le long terme.

### 5.B La fonction de production

La fonction de production choisie est une fonction de type *Constant Elasticity of Substitution (CES)*, plus générale que les fonctions de type Cobb-Douglas ou à facteurs strictement complémentaires, qui correspondent à des cas particuliers de la fonction CES. Le progrès technique est supposé incorporé au facteur travail (« *Labor-Augmenting* »). Cette fonction s'écrit :

$$Y = F(K, L) = A [\alpha K^{-\gamma} + \beta ((1 + g)^{t-t_0} L)^{-\gamma}]^{-\frac{1}{\gamma}} \quad (5.5)$$

Avec :

Y = la valeur ajoutée totale

K = quantité de capital utilisée

L = quantité de travail utilisée

$\alpha$  = paramètre de distribution, tel que :  $0 < \alpha < 1$

$\beta = 1 - \alpha$

A = le niveau de la technologie

$\gamma$  = paramètre de substitution  $\geq -1$

g = le rythme du progrès technique

t = la dimension temporelle

L'élasticité de substitution, notée  $\sigma$ , est liée au paramètre  $\gamma$  par la relation suivante :

$$\sigma = \frac{1}{1 + \gamma} \quad (5.6)$$

$A$ ,  $\alpha$  et  $\beta$ , sont déterminés de manière à être compatibles avec un rapport  $K/Y$  exogène :

$$\beta = \left( \left( \frac{Y}{K} \right)^{(1+\gamma)} \left( \frac{Y}{L} \right)^{-(1+\gamma)} \right) \times \left( \frac{\partial f}{\partial K} + \left( \left( \frac{Y}{K} \right)^{(1+\gamma)} \left( \frac{Y}{L} \right)^{-(1+\gamma)} \right) \right)^{-1} \quad (5.7)$$

$$A = \left( \frac{(1-\beta) \left( \frac{Y}{K} \right)^{(1+\gamma)}}{\frac{\partial f}{\partial K}} \right)^{1/\gamma} \quad (5.8)$$

### Salaires, marché du travail et rendement du capital

#### ➡ Valeurs d'équilibre

Conformément au programme « classique » de maximisation du profit en concurrence pure et parfaite, on suppose qu'à l'équilibre, la rémunération de chaque facteur est égale à sa productivité marginale. On a donc, en notant  $w^*$  le salaire d'équilibre de plein-emploi correspondant une population employée  $L^*$  <sup>4</sup>

$$w^* = \frac{\partial f(K, L)}{\partial L} = \frac{\beta(1+g)^{(t-t_0)}}{AY} \left( \frac{Y^*}{(1+g)^{(t-t_0)} L^*} \right)^{1+\gamma} \quad (5.9)$$

En notant respectivement  $r_g$  le rendement brut du capital,  $r_n$  le rendement net, et  $\delta$  le taux de dépréciation du capital, on obtient :

$$r_g = \frac{\partial f}{\partial K} = \frac{\alpha}{AY} \left( \frac{Y}{K} \right)^{(1+\gamma)} = (r_n + \delta) \quad (5.10)$$

#### ➡ Salaire effectif et volume d'emploi

On suppose que le salaire effectif diffère du salaire d'équilibre en raison de rigidités qui conduisent à des délais d'ajustement. Pour tenir compte de ces délais d'ajustement, on définit le salaire effectif en  $t$  comme une moyenne pondérée du salaire d'équilibre en  $t$  et du salaire effectif en  $t-1$ . On suppose en outre que les salaires sont rigides à la baisse. Le salaire effectif ne peut être inférieur au salaire d'équilibre :

$$W_t = \max\{(1-\lambda) \times (1+g) \times W_{t-1} + \lambda \times W_t^*, W_t^*\} \quad (5.11)$$

4. On a  $\frac{L^*}{N} = 1 - U_0$ , avec  $N$  la population active et  $U_0$  le taux de chômage structurel. L'équilibre de plein-emploi est celui compatible avec le taux de chômage structurel.

Avec :

$w_t$  : le salaire effectif

$w_t^*$  : le salaire d'équilibre de plein-emploi

$\lambda$  : paramètre d'ajustement

Le volume d'emploi se déduit ensuite du salaire effectif. Il est estimé de manière itérative : on recherche le volume d'emploi  $\hat{L}_t$  qui, à partir de l'équation (5.9), conduise à un salaire effectif  $\hat{w}$  qui soit le plus proche possible du salaire effectif  $w_t$ .

$$\hat{w}_t = \frac{\beta(1+g)^{(t-t_0)}}{A^\gamma} \left( \frac{A \left[ \alpha K_t^{-\gamma} + \beta [(1+g) \times \hat{L}_t]^{-\gamma} \right]^{-\frac{1}{\gamma}}}{(1+g)^{t-t_0} \hat{L}_t} \right), \text{ avec } 1 - \frac{\hat{w}_t}{w_t} < \varepsilon \quad (5.12)$$

Au terme du processus itératif, on obtient  $\hat{L}_t$  volume d'emploi en  $t$ .

#### ➡ Stock de capital

Le modèle considère deux classes d'individus. D'une part les « capitalistes » ou « héritiers » qui accumulent de l'épargne dynastique et d'autre part les salariés qui épargnent en fonction de leur anticipation sur le rendement des régimes par **répartition**. Corrélativement, une différence est faite entre le stock de capital « structurel » ( $K_s$ ) et le capital destiné à la retraite ( $K_r$ ). Le capital total ( $K$ ) est donné par  $K_{(t)} = K_{s(t)} + K_{r(t)}$ .

- Capital structurel

Le stock de capital structurel est déterminé par l'équation d'accumulation suivante :

$$K_{s_{t+1}} = K_{s_t} (1 - \delta + s\nu \times r_{g_t}) \quad (5.13)$$

Avec :

$K$  : le stock de capital

$\delta$  : le taux de dépréciation

$s\nu$  : proportion du revenu brut du capital réinvesti

Le comportement d'épargne des « capitalistes » consiste donc à réinvestir une part constante ( $sv$ ) du revenu brut du capital. Les différentes valeurs du taux d'épargne de cette classe d'agents permettent de jouer sur les rendements du capital en se plaçant de manière déterministe dans un contexte de « règle d'or » ou de « sous-accumulation ».

- Capital retraite

Au sujet du capital retraite, on suppose que les salariés dirigent vers un fonds une fraction  $\theta_f$  de leur salaire brut courant  $w_{(s,a,t)}$ .

L'épargne accumulée dans le fonds par les différentes cohortes est donnée par l'équation d'accumulation :

$$Kr_{(s,a,t)} = Kr_{(s,a-1,t-1)} \times (1 - \delta + r_{g(t)}) + (\hat{a}r_{(s,a,t)} \times (1 - u_{(s,a,t)}) \times P_{(s,a,t)}) \times \theta_f \times w_{(s,a,t)} \quad (5.14)$$

Avec :

$Kr$  : stock de capital retraite

$r_g$  : rendement brut du capital

$\theta_f$  : fraction du salaire brut consacré à l'épargne retraite

$\hat{a}r$  : taux d'activité salarié

$w$  : salaire brut moyen de la cohorte

$P$  : population totale

$u$  : taux de chômage

- Calcul des rentes du plan de retraite

Les rentes issues du **fonds de pension** sont calculées très simplement. La valeur de la rente est déterminée en fonction du capital accumulé par les différentes cohortes, du rendement net du capital et de l'espérance de vie prospective. Les rentes sont indexées sur les prix.

$$pr_{(s,a,t)} = Kr_{(s,a,t)} \times \left( P_{(s,a,t)} \sum_{(i=r)}^{99} (1 + r_n)^{r-i} \times \prod_{k=r}^i (1 - Q_{(s,k,t+(i-r))}) \right)^{-1} \quad (5.15)$$

Avec :

$pr$  : rentes attribuées par le **fonds de pension**

$Q$  : probabilité pour un individu d'âge  $k$  de décéder avant la fin de l'intervalle d'âge  $(k, k + n)$

Après la liquidation de la retraite, le fonds  $Kr$  est décapitalisé en fonction de l'équation de dé-accumulation suivante :

$$Kr_{(s,a,t)} = Kr_{(s,a-1,t-1)} \times (1 + r_n) - (P_{(s,a,t)} \times pr_{(s,a,t)}) \quad (5.16)$$

- L'impact d'un choc sur le stock de capital

Afin d'illustrer les propriétés dynamiques du bouclage utilisé dans la maquette de projection, l'impact d'un choc sur le stock de capital ( $K$ ) qui découlerait d'une accumulation de capital retraite est simulé. On considère l'économie à deux classes d'épargnants décrite dans l'introduction - dans laquelle coexistent un stock de capital « structurel » accumulé par les « capitalistes » ou « héritiers » et un stock de capital retraite accumulé par les individus qui épargnent pour leur retraite -. On suppose que les capitalistes réinvestissent la totalité des revenus bruts du capital.

On suppose ici, par simplicité, que le paramètre de substitution  $\gamma$  de la fonction CES est fixé à 0, ce qui détermine une fonction de production de type Cobb-Douglas et une élasticité de substitution capital / travail unitaire :  $\gamma \rightarrow 0 \Rightarrow Y \rightarrow AK^\alpha L^{(1-\alpha)}$  et  $\sigma \rightarrow 1$ .

Dans le cas d'un modèle de Solow avec un progrès technique exogène croissant au taux  $g$ , le choc sur le stock de capital conduit, à partir d'une situation équilibrée, à une progression du poids du capital retraite dans la production en début de période, puis à une stabilisation à partir du moment où le fonds est décapitalisé par le service des rentes. Dans ce modèle, le poids du stock de capital structurel au sein du capital total se réduit. On peut conclure à une éviction des héritiers par le fonds capitalisé.



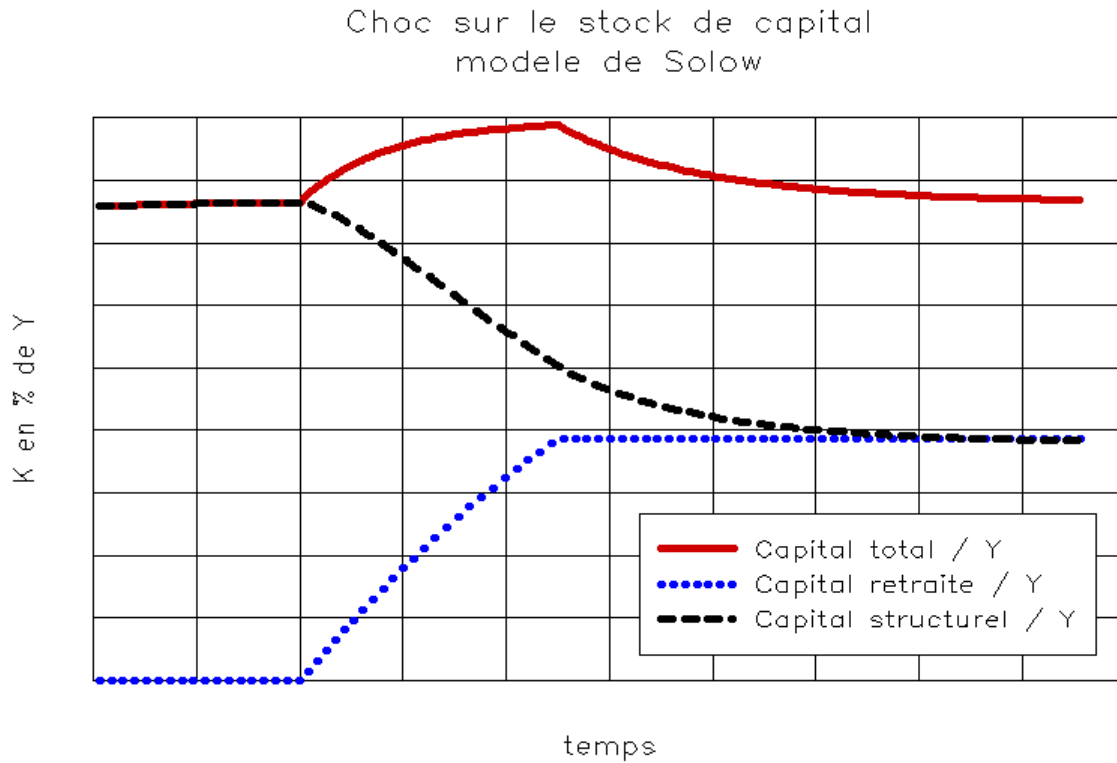


FIGURE 5.28 – Choc sur le stock de capital

L'incidence de l'augmentation du stock de capital sur la croissance est transitoire et l'excès de capital par tête est rapidement corrigé par la baisse du rendement du capital. Après quoi, le système retrouve un sentier de croissance équilibré. La croissance du capital par tête comme la rémunération du facteur travail convergent vers le rythme du progrès technique  $g$ . Le taux de croissance de la production et le rendement net du capital  $f'k(L, K) - \delta$  convergent vers  $(n + g)$ , avec  $n$ , le rythme de croissance du facteur travail.

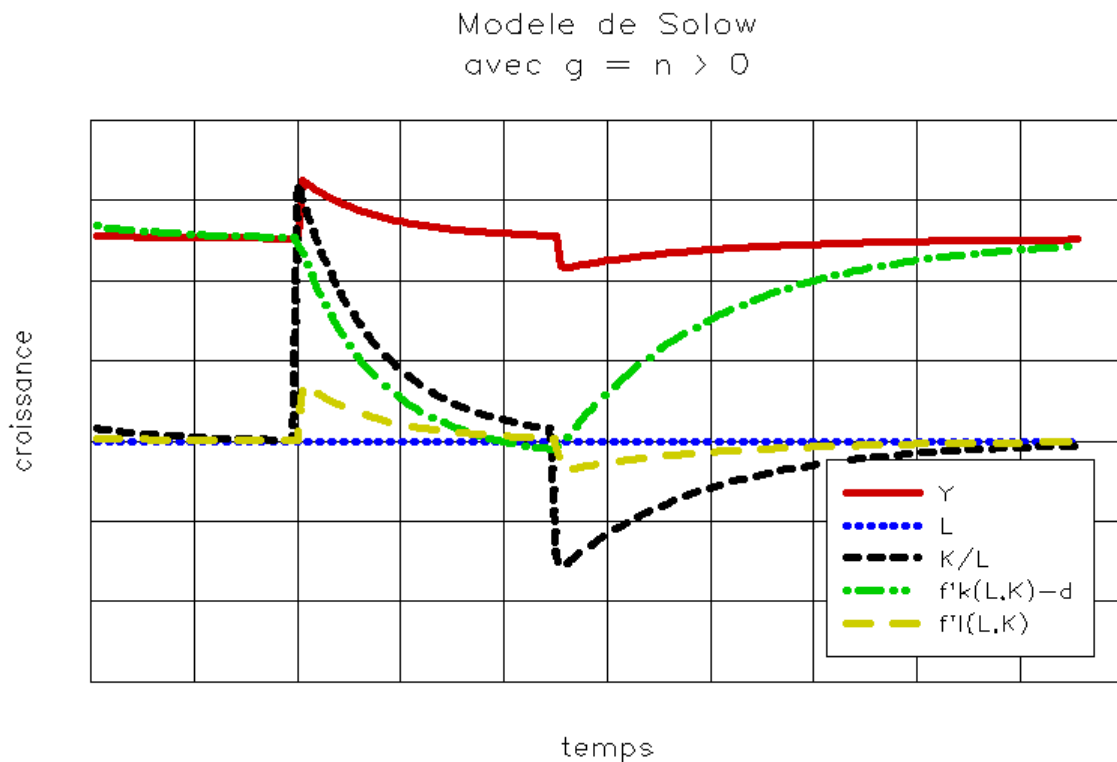


FIGURE 5.29 – Croissance : modèle de Solow

### 5.C Régimes de retraite

Lorsqu'on ne dispose pas des fichiers individuels, un problème qui intervient lors de la projection des charges des régimes par **répartition** est l'estimation des charges à venir des régimes. Pour contourner ce problème et estimer le montant des droits validés par les futurs retraités (et donc des charges théoriques du régime), une solution consiste à passer par le biais des taux d'activité des générations conformément à la contribution méthodologique majeure de MALABOUCHE [1987a] et MALABOUCHE [1987b] exposée dans « Retraites : les périls de l'an 2030 ». Considérons par exemple les hommes de la génération G dans un régime par **répartition** R. On suppose que la proportion d'hommes de la génération, actifs au temps T dans le régime R, est de  $\mu\%$ . Il est alors équivalent de dire que chaque homme de la génération G a cotisé en moyenne  $\mu/100$  année dans le régime au cours de l'année T. Si l'on fait le cumul des taux d'activité sur l'ensemble de la vie active d'une génération, on détermine approximativement la durée moyenne de cotisation d'un individu quelconque de la génération. Il est par la suite possible d'estimer pour chaque génération les droits validés dans un régime donné. Dans la pratique, la méthode doit naturellement être affinée pour tenir compte du taux de chômage.

### Régimes par annuités

Schématiquement, les différentes étapes du calcul des pensions servies par un régime par annuités sont les suivantes :

$$Rp_{(s,g,t)} = \min \left( \sum_{a=\max\{15; dcr-t+g\}}^{a=g-1} ar_{s,a,t-g+a} QL \right) \times anr \quad (5.17)$$

Avec :

$Rp$  : le taux de remplacement moyen des générations

$QL$  : la durée de cotisation pour une carrière complète

$anr$  : le taux de l'annuité

$t$  : la dimension temporelle

$s$  : le sexe

$g$  : l'âge des retraités

$dcr$  : la date de création du régime

$ar$  : le taux d'activité dans le régime

Le montant des pensions de retraite se calcule alors à partir de la relation suivante :

$$Pold_{s,g,t} = Rp_{s,g,t} \times \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N w_{s,g-k,t-k} \times prf_{s,g-k,t-k} \times \left( \frac{w_{s,g-1,t-1}}{w_{s,g-k,t-k}} \right)^\lambda \quad (5.18)$$

Avec :

$Pold$  : le montant de la pension de retraite

$prf$  : le profil de carrière

$w(s, g - k, t - k)$  : la séquence des N meilleurs salaires

$\lambda$  : permet de régler l'indexation des pensions

En  $t$ , les dépenses du régime sont égales à :

$$EX_t = \sum_{s=1}^2 \sum_{g=r}^{99} pold_{s,g,t} \times P_{s,g,t} \times (1 - ar_{s,g,t}) \quad (5.19)$$

Avec :

EX : les dépenses du régime (pensions vieillesse)

P : la population

ar : le taux d'activité

r : l'âge légal de la retraite

### ➡ Indexation des pensions

Notons  $Pold_{s,a,t}$  le niveau des pensions pour les individus d'âge  $a$  au temps  $t$ . Pour les individus déjà retraités à la période  $t - 1$ , la pension sera réévaluée selon la formule :

$$Pold_{(s,a,t)} = Pold_{(s,a-1,t-1)} \times \left( 1 + \lambda \times \left( \frac{W_{n(s,t-1)}}{W_{n(s,t-2)}} - 1 \right) \right) \quad (5.20)$$

Avec :  $W_n$  , le salaire net moyen.

Où  $\lambda$  mesure le degré d'indexation des pensions. Une valeur de 1 indique une indexation totale sur les salaires, une valeur de 0 une indexation sur les prix.

### Régimes par points

Lorsque l'on s'intéresse aux régimes par points, les chroniques de taux contractuels, de salaire de référence et de salaire différentiel, permettent de transformer les durées d'activité, calculées par l'intermédiaire des taux d'activité, en masse de points validés par les différentes générations.

$$PN_t = \sum_{s=1}^2 \sum_{g=r}^{99} P_{s,g,t} \times \sum_{d=\max\{15; dcr-t+g\}}^{g-1} ar_{s,d,t-g+d} \times \frac{SD_{s,d,t-g+d} \times TC_{s,d,t-g+d}}{SR_{s,d,t-g+d}} \quad (5.21)$$

Avec :

PN : le nombre de points acquis par les individus à la date  $t$  dans un régime par points

SD : le salaire différentiel

TC : le taux de cotisation contractuel

SR : le salaire de référence

# **Conclusion Générale**

Les travaux menés au cours de cette recherche concluent invariablement au rejet de l'EMH. En effet, les différents tests, qu'ils reposent sur l'observation des distributions historiques des rendements boursiers ou qu'ils soient économétriques, tranchent en faveur de l'existence d'une dynamique de retour vers la moyenne dans le prix des actifs risqués. La conclusion est vérifiée pour plusieurs pays représentant trois continents. Bien sûr, la réalité est plus subtile et la force de rappel qui tend à rapprocher les prix des actifs de leur moyenne historique n'est pas constante dans le temps comme l'atteste la distribution log normale des demi-vies des prix des actions. Toutefois, les demi-vies médianes paraissent compatibles avec le cycle d'épargne d'un individu et légitime, contrairement à l'hypothèse des marchés efficients, les stratégies basées sur la **diversification temporelle**. En effet, si l'on raisonne dans une version sommaire du modèle de **cycle de vie** où l'individu n'est pas sujet à d'autres risques « background risk », les allocations stratégiques optimales obtenues dans le cas où la dynamique des cours est régie par un processus de retour vers la moyenne sont radicalement différentes de celles déterminées dans le cas gaussien et s'avèrent beaucoup plus riches en actifs risqués. En première lecture, les différentes étapes de nos recherches peuvent paraître disparates tant elles envisagent des sujets éloignés. De l'économie des retraites à la finance de marché, le lien est lâche. Toutefois, loin de nous éloigner du sujet principal qui reste l'analyse des risques inhérents à l'utilisation des revenus du capital pour financer les retraites, ces va-et-vient entre différentes branches de l'économie ont été nécessaires à plus d'un titre. D'une part, pour déterminer une modélisation simplifiée de la dynamique des actifs risqués (en l'occurrence une spécification de type « *Trending OU process* ») et d'en estimer les paramètres et, d'autre part, pour intégrer cette dynamique dans un modèle démo-économique simple complété par un modèle de croissance permettant d'endogénéiser la dynamique des rémunérations des facteurs. L'exercice a permis de simuler une volatilité des rendements autour d'une tendance fondamentale matérialisée par le rendement macroéconomique du capital lui-même fonction de sa productivité marginale. Il est alors possible, pour un processus donné, de simuler artificiellement les trajectoires possibles des rentabilités boursières. Nous définissons alors les caractéristiques d'un plan d'épargne retraite fictif. L'objectif étant de comparer les performances du plan d'épargne à celles des régimes par **répartition**, les stratégies d'allocation testées dans les simulations correspondent à

celle d'un agent résolument averse au risque, optant pour probabilité nulle perte en capital. Nous considérons donc implicitement que les cotisations versées aux régimes par **répartition** sont équivalentes à un investissement sur un actif sans risque. Ce qui revient à considérer qu'à l'avenir, l'effort de solidarité que consentent les générations en activité en faveur des retraités, trouvera sa contrepartie dans l'obligation faite aux générations futures d'actifs de réaliser un effort similaire. Pour comparer les performances des deux modes de transfert, il faut disposer d'un indicateur commun traduisant le rendement de l'un comme de l'autre. Comme le souligne **BLANCHET [1992]**, une comparaison correcte doit s'appuyer sur la notion de rendement actuariel. Les résultats des simulations sont relativement surprenants. Sous la contrainte d'une **VaR** (*Value-at-Risk*) nulle, les stratégies d'allocation structurelles d'actifs déterminées sous l'hypothèse d'efficience des marchés sont incapables de rivaliser avec le rendement des régimes par **répartition**. Autrement dit, si l'on considère un peu schématiquement que le rendement actuariel est un proxy du « bien-être », alors opter pour l'abondement d'un plan d'épargne retraite par **capitalisation** comme alternative à une hausse des cotisations contribuerait à dégrader le bien-être des agents. Les résultats s'avèrent singulièrement différents si l'on raisonne dans un cadre où le prix des actions est régi par un processus de retour vers la moyenne. Sous cette hypothèse, la stratégie de **diversification temporelle** visant à maintenir une **VaR** nulle pour tout temps  $t$  détermine un investissement massif en actions en début de vie active. Cette stratégie conduit à des rendements internes qui rivalisent avec ceux, implicites, de la **répartition** sans toutefois les dominer. Il est vraisemblable que l'introduction d'une fonction de production endogène, à l'instar des travaux d'**HAMAYON et collab. [2001]**, conduirait à des rendements supérieurs. En effet, dans le modèle de croissance à la Solow que nous avons utilisé, la croissance de la production est transitoirement accélérée pendant la phase de montée en puissance de l'épargne retraite. Toutefois, les effets de la croissance du stock de capital retraite sont limités dans le temps en raison de la baisse du rendement du capital qui contribue à réduire rapidement le poids du capital structurel dans la production. Même si les effets de l'accumulation du capital restent transitoires, les mécanismes d'éviction entre capital retraite et capital structurel sont moins violents dans les fonctions de croissance endogène. Ces dernières déterminent donc une relation plus forte et plus durable entre capitalisation, production et rémunération des facteurs.



On pourrait, par ailleurs, vraisemblablement tirer parti de la mise en évidence de vitesses de convergence des cours vers leur valeur fondamentale, différente selon les pays. Ce qui plaiderait pour une **diversification temporelle** et géographique des allocations d'actifs, non pas tant pour des raisons de décorrélations des cours en fonction des marchés comme le suggère JORION [2003], mais davantage en raison de demi-vies plus courtes, que nous mesurons notamment sur les indices boursiers anglo-saxons.

Naturellement, ces éléments de conclusion restent parcellaires et sont à tempérer à plusieurs titres. En premier lieu, nous abordons l'arbitrage entre abondement à un plan d'épargne retraite et hausse des cotisations des régimes par **répartition** sans prendre explicitement en considération les conséquences de la dérive des cotisations obligatoires sur le marché du travail. Par ailleurs, pour ne pas multiplier les variantes, nous n'avons pas exploré l'impact des ajustements paramétriques possibles (modalités de l'indexation des pensions, relèvement de l'âge de la retraite, etc.) sur le rendement actuariel de la **répartition**. De plus, nous avons bien conscience que les stratégies d'allocation déterminées dans le cas non gaussien, qui conduisent à une participation précoce aux marchés actions, cadrent mal avec les observations empiriques qui montrent qu'en début de **cycle de vie**, la prudence conduit les agents à se constituer un patrimoine tampon relativement liquide. Enfin, notre modélisation stylisée des marchés ne considère que deux actifs : l'un sans risque et l'autre auquel on a prêté les caractéristiques des actions. La spécification pourrait être enrichie par l'introduction d'une troisième classe de type obligataire qui déterminerait possiblement des résultats différents. En dépit de toutes ces réserves, il n'en demeure pas moins que nos recherches montrent clairement que les seules stratégies d'allocation d'actifs capables de délivrer des rentes viagères comparables avec celles attribuées par l'édifice des régimes de retraite du secteur privé doivent s'adosser à des stratégies de **diversification temporelle** riches en actifs risqués.

Cependant, alors que les ménages français, conscients du glissement vers un Etat-providence sélectif, ont déjà commencé à épargner pour compléter leur retraite, leur taux de participation aux marchés actions reste marginal. Comment expliquer une telle désaffection alors que l'on observe un différentiel important, à long terme, entre les taux de rendement des actions et celui des autres classes d'actifs? On sait que ni les contraintes de liquidité, le risque non assurable sur le revenu du travail (*background risk*) ou encore

l'existence de coûts fixes de transaction ne peuvent à eux seuls expliquer la faiblesse de la diffusion des actions auprès des ménages. Bien que l'explication de la faible détention d'actions (*Equity Premium Puzzle*) soit hors du champ de nos recherches, on peut ajouter deux motifs supplémentaires à la longue liste de ceux identifiés par les économistes. L'un est factuel, l'autre, un peu provocateur, s'inspire des réflexions d'ARRONDEL et MASSON [2011].

La confirmation de la stabilité dans le temps des préférences face au risque sur données de panel par ARRONDEL et MASSON [2014], permet d'identifier les anticipations des épargnants comme paramètre clé à activer pour augmenter la proportion d'actifs risqués dans le patrimoine financier des ménages. L'éducation financière des ménages peut certes contribuer à modifier leur anticipation, mais comme le montre BENARTZI [2006], les expérimentations laissent penser que le rôle de l'éducation financière restera marginal. En effet, les décisions d'allocation des ménages reposent davantage sur des « anticipations adaptatives » (sur la base des observations du passé) que sur des « anticipations rationnelles ». Cette lacune n'est pas totalement surprenante eu égard à la complexité croissante des marchés financiers. Le constat, loin d'être local, a poussé les fonds de pension nord-américains à cotisations définies à proposer systématiquement des allocations par défaut qui sont souscrites par 80% des affiliés. C'est donc l'intermédiaire financier qui, par une meilleure formation, doit contribuer à rectifier les anticipations des prix des actifs lorsqu'elles sont injustifiées. A ce stade, un chantier immense reste ouvert, car les stratégies d'allocation préconisées par les intermédiaires financiers reposent majoritairement sur l'hypothèse d'efficience des marchés. La désaffection des marchés actions est donc également imputable à un effet d'offre.

Par ailleurs, les travaux d'ARRONDEL et MASSON [2001] montrent que les choix de portefeuille des individus sont également conditionnés par l'exposition aux risques non assurables. Partant de ce constat, on peut - un peu paradoxalement - identifier une condition susceptible de sécuriser l'environnement de l'épargnant et, par-là, d'augmenter la demande d'actifs risqués : assurer la pérennité des régimes par répartition en procédant à une réforme d'envergure plutôt qu'à des ajustements paramétriques au fil de l'eau qui entretiennent une instabilité réglementaire permanente.



## Bibliographie

- AKARIM, Y. D. et S. SEVIM. 2013, «The impact of mean reversion model on portfolio investment strategies : Empirical evidence from emerging markets», *Economic Modelling*, vol. 31, p. 453–459. URL <http://doi.org/10.1016/j.econmod.2012.11.028>. 213, 214
- ANDREWS, D. W. et H.-Y. CHEN. 1994, «Approximately median-unbiased estimation of autoregressive models», *Journal of Business & Economic Statistics*, vol. 12, n° 2, p. 187–204. URL <http://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/07350015.1994.10510007>. 271
- ANDREWS, D. W. K. 1993, «Exactly median-unbiased estimation of first order autoregressive/unit root models», *Econometrica*, vol. 61, n° 1, p. 139–165, ISSN 00129682, 14680262. URL <http://www.jstor.org/stable/2951781>. 237, 270
- ARBULU, P. 1998, *Le marché parisien des actions au XIXe siècle : performance et efficience d'un marché émergent*, thèse de doctorat, Orléans. 43
- ARRONDEL, L. et A. MASSON. 2001, «Transferts sur trois générations en france», *Revue d'Economie Politique*. URL [http://www.statec.lu/html\\_fr/bibliographie/Periodiques/REVUE\\_DECONOMIE\\_POLITIQUE.html](http://www.statec.lu/html_fr/bibliographie/Periodiques/REVUE_DECONOMIE_POLITIQUE.html). 337
- ARRONDEL, L. et A. MASSON. 2011, «L'épargnant dans un monde en crise : ce qui a changé», Post-Print halshs-00654662, HAL. URL <https://ideas.repec.org/p/hal/journal/halshs-00654662.html>. 3, 37, 86, 337
- ARRONDEL, L. et A. MASSON. 2014, «Mesurer les préférences des épargnants : comment et pourquoi (en temps de crise)?», *Economie et Statistique*, , n° 467-468, p. 5–49. URL <https://halshs.archives-ouvertes.fr/halshs-01027785>. 337
- ARTUS, P. 2015, «Evolution de la part des salaires dans le pib : y a-t-il aussi un effet de l'évolution de l'intensité capitalistique?», *Flash Economie*. URL <https://www.research.natixis.com>. 322
- AUERBACH, A. J., J. GOKHALE et L. J. KOTLIKOFF. 1991, «Generational accounts : A meaningful alternative to deficit accounting», *Tax Policy and the Economy*, vol. 5,

- doi :10.1086/tpe.5.20061801, p. 55–110. URL <http://dx.doi.org/10.1086/tpe.5.20061801>. 32
- AUERBACH, A. J. et L. J. KOTLIKOFF. 1987, *Dynamic fiscal policy*, vol. 11, Cambridge University Press Cambridge. URL <http://www.kotlikoff.net/content/dynamic-fiscal-policy>. 281
- BAC, C., C. BONNET, O. BONTOUT et G. CORNILLEAU. 2003, «Exercices de simulation de l'évolution à long terme du système de retraite», *Document de travail, Série Etude*, vol. 38. URL <http://fulltext.bdsp.ehesp.fr/Ministere/Drees/SerieEtudes/2003/38/serieetud38.pdf>. 279
- BAC, C. et J. CHATEAU. 2004, «Vieillesse démographique, épargne et retraite : une analyse à l'aide d'un modèle d'équilibre général à agents hétérogènes», *Dossiers solidarité et santé*. URL [http://ceprii.fr/PDF\\_PUB/wp/2004/wp2004-14.pdf](http://ceprii.fr/PDF_PUB/wp/2004/wp2004-14.pdf). 278
- BACHELIER, L. 1900, *Théorie de la spéculation*, Gauthier-Villars. URL [http://www.numdam.org/item?id=ASENS\\_1900\\_3\\_17\\_\\_21\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1900_3_17__21_0). 4, 111, 114, 126, 216
- BACKUS, D. K., B. R. ROUTLEDGE et S. E. ZIN. 2008, «The cyclical component of us asset returns», *Society for Economic Dynamics*. URL [https://www.banque-france.fr/fileadmin/user\\_upload/banque\\_de\\_france/Economie\\_et\\_Statistiques/La\\_recherche/EN/Backus.pdf](https://www.banque-france.fr/fileadmin/user_upload/banque_de_france/Economie_et_Statistiques/La_recherche/EN/Backus.pdf). 167
- BALVERS, R., Y. WU et E. GILLILAND. 2000, «Mean reversion across national stock markets and parametric contrarian investment strategies», *The Journal of Finance*, vol. 55, n° 2, p. 745–772, ISSN 1540-6261. URL <http://dx.doi.org/10.1111/0022-1082.00225>. 27, 40, 214, 229, 230, 232, 233, 240, 242, 249, 250, 256, 260
- BANZ, R. W. 1981, «The relationship between return and market value of common stocks», *Journal of financial economics*, vol. 9, n° 1, p. 3–18. URL [https://doi.org/10.1016/0304-405X\(81\)90018-0](https://doi.org/10.1016/0304-405X(81)90018-0). 18
- BAO, Y. 2013, «Finite-sample bias of the qmle in spatial autoregressive models», *Econometric Theory*, vol. 29, n° 01, p. 68–88. URL <https://doi.org/10.1017/S0266466612000229>. 244, 245

- BAO, Y., A. ULLAH, Y. WANG et J. YU. 2015, «Bias in the estimation of mean reversion in continuous-time lévy processes», *Economics Letters*, vol. 134, p. 16–19. URL <http://doi.org/10.1016/j.econlet.2015.06.002>. 28, 244, 245, 248, 251, 254, 271
- BARBERIS, N. 2000, «Investing for the long run when returns are predictable», *The Journal of Finance*, vol. 55, n° 1, p. 225–264, ISSN 1540-6261. URL <http://dx.doi.org/10.1111/0022-1082.00205>. 291
- BARSKY, R. B., F. T. JUSTER, M. S. KIMBALL et M. D. SHAPIRO. 1997, «Preference parameters and behavioral heterogeneity : An experimental approach in the health and retirement study», *The Quarterly Journal of Economics*, vol. 112, n° 2, p. 537–579, ISSN 00335533, 15314650. URL <http://www.jstor.org/stable/2951245>. 86
- BASU, S. 1977, «Investment performance of common stocks in relation to their price-earnings ratios : A test of the efficient market hypothesis», *The Journal of Finance*, vol. 32, n° 3, p. 663–682, ISSN 1540-6261. URL <http://dx.doi.org/10.1111/j.1540-6261.1977.tb01979.x>. 19
- BEC, F. et C. GOLLIER. 2009, «Assets returns volatility and investment horizon : The french case», CESifo Working Paper Series 2622, CESifo Group Munich. URL [http://EconPapers.repec.org/RePEc:ces:ceswps:\\_2622](http://EconPapers.repec.org/RePEc:ces:ceswps:_2622). 23, 55, 125, 154, 157, 171, 177, 183, 185, 191
- BEKAERT, G. et G. WU. 2000, «Asymmetric volatility and risk in equity markets», *The Review of Financial Studies*, vol. 13, n° 1, doi :10.1093/rfs/13.1.1, p. 1. URL <http://dx.doi.org/10.1093/rfs/13.1.1>. 52
- BELAIRE-FRANCH, J. et D. CONTRERAS. 2004, «Ranks and signs-based multiple variance ratio tests», *University of Valencia, Unveröffentlichtes Manuskript*. URL [https://www.researchgate.net/profile/Jorge\\_BELAIRE-FRANCH/publication/228583649\\_Ranks\\_and\\_signs-based\\_multiple\\_variance\\_ratio\\_tests/links/00b4951920895f04f6000000.pdf](https://www.researchgate.net/profile/Jorge_BELAIRE-FRANCH/publication/228583649_Ranks_and_signs-based_multiple_variance_ratio_tests/links/00b4951920895f04f6000000.pdf). 41, 124, 142
- BENARTZI, S. 2006, «Financial education and retirement savings plans : A behavioral finance perspective», dans *Financial Risks Borne by Households, Colloque AMF*, 15

- May, Paris. URL [http://www.amf-france.org/technique/multimedia?docId=workspace://SpacesStore/fccd8475-7d18-4dbb-976a-93799bbebc20\\_fr\\_1.0\\_rendition](http://www.amf-france.org/technique/multimedia?docId=workspace://SpacesStore/fccd8475-7d18-4dbb-976a-93799bbebc20_fr_1.0_rendition). 337
- BERTRAND, P. et J.-L. PRIGENT. 2002, «Portfolio insurance : the extreme value approach to the cpqi method», *FINANCE-PARIS*, vol. 23, n° 2, p. 69–86. URL <https://ssrn.com/abstract=299690>. 98
- BEVERIDGE, S. et C. R. NELSON. 1981, «A new approach to decomposition of economic time series into permanent and transitory components with particular attention to measurement of the ‘business cycle’», *Journal of Monetary economics*, vol. 7, n° 2, p. 151–174. URL [https://doi.org/10.1016/0304-3932\(81\)90040-4](https://doi.org/10.1016/0304-3932(81)90040-4). 165
- BLACK, F. et R. W. JONES. 1987, «Simplifying portfolio insurance», *The Journal of Portfolio Management*, vol. 14, n° 1, p. 48–51. URL <http://dx.doi.org/10.3905/jpm.1987.409131>. 98
- BLACK, F. et M. SCHOLES. 1973, «The pricing of options and corporate liabilities», *Journal of Political Economy*, vol. 81, n° 3, p. 637–654. URL <http://dx.doi.org/10.1086/260062>. 52, 114
- BLANCHET, BOZIO et RABATÉ. 2015, «Modèle pensipp de l’institut des politiques publiques», *Notes IPP*. URL <http://www.ipp.eu/outils/pensipp-simulation/>. 281
- BLANCHET, D. 1992, «Retraites et croissance à long terme. un essai de simulation», *Économie & prévision*, vol. 105, n° 4, p. 1–16. URL [http://www.persee.fr/doc/ecop\\_0249-4744\\_1992\\_num\\_105\\_4\\_5298](http://www.persee.fr/doc/ecop_0249-4744_1992_num_105_4_5298). 30, 277, 283, 335
- BLANCHET, D. 2014, «La microsimulation dynamique : principes généraux et exemples en langage r», *Insee, Documents de travail «Méthodologie statistique M*, vol. 2014. URL <https://www.insee.fr/fr/statistiques/1381162>. 278
- BLANCHET, D. et J.-M. CHANUT. 1998, «Les retraites individuelles à long terme : une projection par microsimulation», *Economie et statistique*, vol. 315, n° 1, p. 95–106. URL [http://www.persee.fr/doc/estat\\_0336-1454\\_1998\\_num\\_315\\_1\\_2643](http://www.persee.fr/doc/estat_0336-1454_1998_num_315_1_2643). 280

- BLANCHET, D. et J. MONFORT. 1994, «Pensions and generational histories in a simple demo-economic model.», *Liege Belgium International Union for the Scientific Study of Population [IUSSP] Commitee on Economic Demography 1996*. 30, 283
- BODIE, Z. 1995, «On the risk of stocks in the long run», *Financial Analysts Journal*, vol. 51, n° 3, doi :10.2469/faj.v51.n3.1901, p. 18–22. URL <http://dx.doi.org/10.2469/faj.v51.n3.1901>. 11, 18, 41, 125
- BODIE, Z., R. C. MERTON et W. F. SAMUELSON. 1992, «Labor supply flexibility and portfolio choice in a life cycle model», *Journal of economic dynamics and control*, vol. 16, n° 3-4, p. 427–449. URL [https://doi.org/10.1016/0165-1889\(92\)90044-F](https://doi.org/10.1016/0165-1889(92)90044-F). 12, 111
- BOLLERSLEV, T. 1986, «Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity», *Journal of econometrics*, vol. 31, n° 3, p. 307–327. URL [https://doi.org/10.1016/0304-4076\(86\)90063-1](https://doi.org/10.1016/0304-4076(86)90063-1). 116, 117, 133
- BORGES, M. R. 2010, «Efficient market hypothesis in european stock markets», *The European Journal of Finance*, vol. 16, n° 7, doi :10.1080/1351847X.2010.495477, p. 711–726. URL <http://dx.doi.org/10.1080/1351847X.2010.495477>. 40
- BRÜGGEMANN, R., C. JENTSCH et C. TRENKLER. 2016, «Inference in vars with conditional heteroskedasticity of unknown form», *Journal of Econometrics*, vol. 191, n° 1, p. 69–85. URL <http://doi.org/10.1016/j.jeconom.2015.10.004>. 191
- BRY, G. et C. BOSCHAN. 1971, *Cyclical Analysis of Time Series : Selected Procedures and Computer Programs*, National Bureau of Economic Research, Inc. URL [http://EconPapers.repec.org/RePEc:nbr:nberbk:bry\\_71-1](http://EconPapers.repec.org/RePEc:nbr:nberbk:bry_71-1). 57
- BURKE, J. V., A. S. LEWIS et M. L. OVERTON. 2005, «A robust gradient sampling algorithm for nonsmooth, nonconvex optimization», *SIAM Journal on Optimization*, vol. 15, n° 3, doi :10.1137/030601296, p. 751–779. URL <http://dx.doi.org/10.1137/030601296>. 69, 105
- BURTON, M. G. 2003, *A random walk down Wall Street*, WW Norton & Company. Completely revised and updated Eighth Edition. 18, 40



- CAMPBELL, J., A. LO et A. C. MACKINLAY. 1997, «The econometrics of financial markets-princeton univ», *Press, Princeton*. URL [http://press.princeton.edu/about\\_pup/PUP100/book/8bCampbell.pdf](http://press.princeton.edu/about_pup/PUP100/book/8bCampbell.pdf). 164, 166
- CAMPBELL, J. Y. 2001, «Why long horizons? a study of power against persistent alternatives», *Journal of Empirical Finance*, vol. 8, n° 5, p. 459–491. URL [http://doi.org/10.1016/S0927-5398\(01\)00037-8](http://doi.org/10.1016/S0927-5398(01)00037-8). 181
- CAMPBELL, J. Y., Y. L. CHAN et L. M. VICEIRA. 2003, «A multivariate model of strategic asset allocation», *Journal of financial economics*, vol. 67, n° 1, p. 41–80. URL [http://doi.org/10.1016/S0304-405X\(02\)00231-3](http://doi.org/10.1016/S0304-405X(02)00231-3). 40, 178
- CAMPBELL, J. Y. et P. PERRON. 1991, «Pitfalls and opportunities : what macroeconomists should know about unit roots», *NBER macroeconomics annual*, vol. 6, p. 141–201. URL <http://dx.doi.org/10.1086/654163>. 174, 188, 233
- CAMPBELL, J. Y. et R. J. SHILLER. 1988, «The dividend-price ratio and expectations of future dividends and discount factors», *Review of financial studies*, vol. 1, n° 3, p. 195–228. URL <https://doi.org/10.1093/rfs/1.3.195>. 163, 164
- CAMPBELL, J. Y. et R. J. SHILLER. 1991, «Yield spreads and interest rate movements : A bird's eye view», *The Review of Economic Studies*, vol. 58, n° 3, p. 495–514. URL <https://doi.org/10.2307/2298008>. 165
- CAMPBELL, J. Y. et L. M. VICEIRA. 2002, *Strategic asset allocation : portfolio choice for long-term investors*, Oxford University Press, USA. URL <http://EconPapers.repec.org/RePEc:oxp:obooks:9780198296942>. 125
- CAMPBELL, J. Y. et L. M. VICEIRA. 2005, «The term structure of the risk–return trade-off», *Financial Analysts Journal*, vol. 61, n° 1, p. 34–44. URL <http://dx.doi.org/10.2469/faj.v61.n1.2682>. 23, 112, 153, 154, 156, 157, 167, 177, 178, 183, 185, 191, 197
- CARBONE, A. 2009, «Detrending moving average algorithm : a brief review», dans *Science and Technology for Humanity (TIC-STH), 2009 IEEE Toronto International Conference*, IEEE, p. 691–696. URL <https://doi.org/10.1109/TIC-STH.2009.5444412>. 214

- CARROLL, C. D. 1997, «Buffer-stock saving and the life cycle/permanent income hypothesis\*», *The Quarterly Journal of Economics*, vol. 112, n° 1, p. 1. URL <http://dx.doi.org/10.1162/003355397555109>. 13
- CAVALIERE, G., A. RAHBEK et A. TAYLOR. 2012, «Bootstrap determination of the cointegration rank in vector autoregressive models», *Econometrica*, vol. 80, n° 4, p. 1721–1740. URL <http://dx.doi.org/10.3982/ECTA9099>. 189, 205, 206, 207
- CHALLE, É. 2004, «Une décomposition du cycle boursier», *Revue économique*, vol. 55, n° 3, p. 395–405. URL <http://www.cairn.info/revue-economique-2004-3-page-395.htm>. 164
- CHAMBERS, M. J. 2005, «The purchasing power parity puzzle, temporal aggregation, and half-life estimation», *Economics Letters*, vol. 86, n° 2, p. 193–198. URL <https://doi.org/10.1016/j.econlet.2004.07.011>. 243
- CHAN, K. C., B. E. GUP et M.-S. PAN. 1997, «International stock market efficiency and integration : A study of eighteen nations», *Journal of Business Finance & Accounting*, vol. 24, n° 6, p. 803–813. URL <http://dx.doi.org/10.1111/1468-5957.00134>. 40
- CHARLIER, C. V. L. 1914, «Contributions to the mathematical theory of statistics 6. the correlation function of type a», *Meddelanden fran Lunds Astronomiska Observatorium Serie I*, vol. 58, p. 1–18. 66
- CHEN, Q. et D. E. GILES. 2011, «A saddlepoint approximation to the distribution of the half-life estimator in a stationary autoregressive model», *Communications in Statistics-Theory and Methods*, vol. 40, n° 21, p. 3903–3916. URL <http://dx.doi.org/10.1080/03610926.2010.501941>. 27, 234, 236, 237
- CHERNICK, M. R., W. GONZÁLEZ-MANTEIGA, R. M. CRUJEIRAS et E. B. BARRIOS. 2011, *Bootstrap Methods*, Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, ISBN 978-3-642-04898-2, p. 169–174. URL [http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-04898-2\\_150](http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-04898-2_150). 194
- CHERNOZHUKOV, V., I. FERNÁNDEZ-VAL et A. GALICHON. 2010, «Rearranging edgeworth–cornish–fisher expansions», *Economic theory*, vol. 42, n° 2, doi :

- 10.1007/s00199-008-0431-z, p. 419–435, ISSN 1432-0479. URL <http://dx.doi.org/10.1007/s00199-008-0431-z>. 67
- CHETOUANE, M. 2011, *Strategic asset allocation challenges for DC plan members*, thèse de doctorat, Université Paris Dauphine. 61, 125
- CHOW, K. et K. C. DENNING. 1993, «A simple multiple variance ratio test», *Journal of Econometrics*, vol. 58, n° 3, doi :[http://dx.doi.org/10.1016/0304-4076\(93\)90051-6](http://dx.doi.org/10.1016/0304-4076(93)90051-6), p. 385 – 401, ISSN 0304-4076. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0304407693900516>. 41, 122, 123, 124, 142
- COCCO, J. F., F. J. GOMES et P. J. MAENHOUT. 2005, «Consumption and portfolio choice over the life cycle», *The Review of Financial Studies*, vol. 18, n° 2, doi :10.1093/rfs/hhi017, p. 491. URL <http://dx.doi.org/10.1093/rfs/hhi017>. 13
- COCHRANE, J. H. 1991, «A critique of the application of unit root tests», *Journal of Economic Dynamics and Control*, vol. 15, n° 2, p. 275–284. URL [https://doi.org/10.1016/0165-1889\(91\)90013-Q](https://doi.org/10.1016/0165-1889(91)90013-Q). 173, 233, 240
- COCHRANE, J. H. 2008, «The dog that did not bark : A defense of return predictability», *Review of Financial Studies*, vol. 21, n° 4, p. 1533–1575. URL <https://doi.org/10.1093/rfs/hhm046>. 164, 165
- COCHRANE, J. H. 2009, *Asset Pricing : (Revised Edition)*, Princeton university press. URL <http://press.princeton.edu/titles/7836.html>. 164, 165
- CONT, R. 2007, «Volatility clustering in financial markets : empirical facts and agent-based models», dans *Long memory in economics*, Springer, p. 289–309. URL [http://dx.doi.org/10.1007/978-3-540-34625-8\\_10](http://dx.doi.org/10.1007/978-3-540-34625-8_10). 118
- CORNISH, E. A. et R. A. FISHER. 1938, «Moments and cumulants in the specification of distributions», *Revue de l'Institut international de Statistique*, p. 307–320. URL <http://www.jstor.org/stable/1400905>. 65
- CURTIS, F. E. et X. QUE. 2013, «An adaptive gradient sampling algorithm for non-smooth optimization», *Optimization Methods and Software*, vol. 28, n° 6, doi :10.1080/

- 10556788.2012.714781, p. 1302–1324. URL <http://dx.doi.org/10.1080/10556788.2012.714781>. 69
- DAHLHAUS, R. 2000, «Graphical interaction models for multivariate time series1», *Metrica*, vol. 51, n° 2, p. 157–172. URL <http://dx.doi.org/10.1007/s001840000055>. 162
- DAVIS, R. A., P. ZANG et T. ZHENG. 2016, «Sparse vector autoregressive modeling», *Journal of Computational and Graphical Statistics*, vol. 25, n° 4, p. 1077–1096. URL <http://dx.doi.org/10.1080/10618600.2015.1092978>. 159, 160
- DE BONDT, W. F. M. et R. THALER. 1985, «Does the stock market overreact?», *The Journal of Finance*, vol. 40, n° 3, doi :10.1111/j.1540-6261.1985.tb05004.x, p. 793–805, ISSN 1540-6261. URL <http://dx.doi.org/10.1111/j.1540-6261.1985.tb05004.x>. 19
- DE LAULANIÉ, J.-F. 2003, *Les Placements de l'Épargne à long terme : Tome 2*, Paris Economica. URL <https://www.economica.fr/livre-les-placements-de-l-epargne-a-long-terme-3e-ed,fr,4,9782717868739.cfm>. 44
- DEJONG, D. N., J. C. NANKERVIS, N. E. SAVIN et C. H. WHITEMAN. 1992, «The power problems of unit root test in time series with autoregressive errors», *Journal of Econometrics*, vol. 53, n° 1-3, p. 323–343. URL [https://doi.org/10.1016/0304-4076\(92\)90090-E](https://doi.org/10.1016/0304-4076(92)90090-E). 233
- DEKKERS, G. 2015, «The simulation properties of microsimulation models with static and dynamic ageing - a brief guide into choosing one type of model over the other», *International Journal of Microsimulation*, vol. 8, n° 1, p. 97–109. URL <http://EconPapers.repec.org/RePEc:ijm:journl:v:8:y:2015:i:1:p:97-109>. 281
- DUC, C. et H. LERMECHIN. 2013, «Caliper-un outil de simulation pour le calcul interrégimes des pensions de retraite», *Dossier Solidarité Santé*. URL <http://drees.social-sante.gouv.fr/IMG/pdf/article37.pdf>. 281
- DUFOURCQ, N. 1994, «Vers un État-providence sélectif», *Esprit (1940-)*, , n° 207 (12), p. 55–75, ISSN 00140759. URL <http://www.jstor.org/stable/24275745>. 3

- DUPONT, G., C. HAGNERÉ et V. TOUZÉ. 2003, «Les modèles de microsimulation dynamique dans l'analyse des réformes des systèmes de retraites : une tentative de bilan», *Economie & prévision*, p. 167–191. URL [www.cairn.info/resume.php?ID\\_ARTICLE=ECOP\\_160\\_0167](http://www.cairn.info/resume.php?ID_ARTICLE=ECOP_160_0167). 278
- DYBVIIG, P. H. 1988, «Inefficient dynamic portfolio strategies or how to throw away a million dollars in the stock market», *Review of Financial studies*, vol. 1, n° 1, p. 67–88. URL <https://doi.org/10.1093/rfs/1.1.67>. 95
- EDGEWORTH, F. Y. 1908, «The law of error. part i», *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, vol. 20, p. 36. 66
- ENGLE, R. F. 1982, «Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of united kingdom inflation», *Econometrica*, vol. 50, n° 4, p. 987–1007, ISSN 00129682, 14680262. URL <http://www.jstor.org/stable/1912773>. 117, 133
- ENGLE, R. F. et C. W. GRANGER. 1987, «Co-integration and error correction : representation, estimation, and testing», *Econometrica : journal of the Econometric Society*, p. 251–276. URL <http://www.jstor.org/stable/1913236>. 188
- FACKLER, J. S. et S. C. KRIEGER. 1986, «An application of vector time series techniques to macroeconomic forecasting», *Journal of Business & Economic Statistics*, vol. 4, n° 1, p. 71–80. URL <http://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/07350015.1986.10509495>. 23, 156
- FAIR, R. C. 1996, «Computing median unbiased estimates in macroeconomic models», *Journal of Applied Econometrics*, p. 431–435. URL <http://www.jstor.org/stable/2284934>. 271
- FAMA, E. F. 1965, «The behavior of stock-market prices», *The journal of Business*, vol. 38, n° 1, p. 34–105. URL <http://www.jstor.org/stable/2350752>. 5, 39, 47, 111, 113, 142, 216, 285
- FAMA, E. F. 1970, «Efficient capital markets : A review of theory and empirical work», *The journal of Finance*, vol. 25, n° 2, p. 383–417. URL <http://www.jstor.org/stable/2325486>. 113, 216

- FAMA, E. F., L. FISHER, M. C. JENSEN et R. ROLL. 1969, «The adjustment of stock prices to new information», *International Economic Review*, vol. 10, n° 1, p. 1–21, ISSN 00206598, 14682354. URL <http://www.jstor.org/stable/2525569>. 40
- FAMA, E. F. et K. R. FRENCH. 1988a, «Dividend yields and expected stock returns», *Journal of financial economics*, vol. 22, n° 1, p. 3–25. URL [https://doi.org/10.1016/0304-405X\(88\)90020-7](https://doi.org/10.1016/0304-405X(88)90020-7). 163
- FAMA, E. F. et K. R. FRENCH. 1988b, «Permanent and temporary components of stock prices», *Journal of Political Economy*, vol. 96, n° 2, p. 246–273, ISSN 00223808, 1537534X. URL <http://www.jstor.org/stable/1833108>. 40, 195, 213, 214, 224, 228, 229
- FAMA, E. F. et K. R. FRENCH. 1989, «Business conditions and expected returns on stocks and bonds», *Journal of financial economics*, vol. 25, n° 1, p. 23–49. URL [https://doi.org/10.1016/0304-405X\(89\)90095-0](https://doi.org/10.1016/0304-405X(89)90095-0). 165
- FAMA, E. F. et G. W. SCHWERT. 1977, «Asset returns and inflation», *Journal of financial economics*, vol. 5, n° 2, p. 115–146. URL [https://doi.org/10.1016/0304-405X\(77\)90014-9](https://doi.org/10.1016/0304-405X(77)90014-9). 165
- FERRARI, N. et A. PÉRIGORD. 2007, «Maquette venant de projection des dépenses de retraite», *DGTPE*. URL <https://www.tresor.economie.gouv.fr/File/331597>. 279
- FRIGGIT, J. 2010, «Le prix des logements sur le long terme», *CGEDD*. URL [http://www.cgedd.developpement-durable.gouv.fr/IMG/pdf/evolution-prix-immobilier-friggitt\\_cle0c611b.pdf](http://www.cgedd.developpement-durable.gouv.fr/IMG/pdf/evolution-prix-immobilier-friggitt_cle0c611b.pdf). 43
- GIBBONS, M. R. et P. HESS. 1981, «Day of the week effects and asset returns», *The Journal of Business*, vol. 54, n° 4, p. 579–596, ISSN 00219398, 15375374. URL <http://www.jstor.org/stable/2352725>. 18
- GLOSTEN, L. R., R. JAGANNATHAN et D. E. RUNKLE. 1993, «On the relation between the expected value and the volatility of the nominal excess return on stocks», *The journal of finance*, vol. 48, n° 5, p. 1779–1801. URL <http://dx.doi.org/10.1111/j.1540-6261.1993.tb05128.x>. 165

- GOLLIER, C. 1997, «On the inefficiency of bang-bang and stop-loss portfolio strategies», *Journal of Risk and Uncertainty*, vol. 14, n° 2, p. 143–154, ISSN 1573-0476. URL <http://dx.doi.org/10.1023/A:1007725428360>. 95
- GOLLIER, C. et R. J. ZECKHAUSER. 1997, «Horizon length and portfolio risk», Working Paper 216, National Bureau of Economic Research, doi :10.3386/t0216. URL <http://www.nber.org/papers/t0216>. 61
- GRAFLUND, A. et collab.. 2001, *Are the Nordic Stock Markets Mean Reverting?*, Lund University. URL [http://EconPapers.repec.org/RePEc:hhs:lunewp:2001\\_015](http://EconPapers.repec.org/RePEc:hhs:lunewp:2001_015). 125
- GRAM, J. 1883, «Om rackendvilklinger bestemte ved hjaelp af de minfste kvadraters metode, copenhagen, 1879, translated in german as : Über die entwicklung reeller funktionen in reihen mittels der methode der kleinsten quadrate», *Journal für reihe und angewandte Mathematik*, vol. 94, p. 41–73. 66
- GRANGER, C. W. 1969, «Investigating causal relations by econometric models and cross-spectral methods», *Econometrica : Journal of the Econometric Society*, p. 424–438. URL <http://www.jstor.org/stable/1912791>. 153
- GROENENDIJK, A. A. 1994, «Mean reversion at the dutch stock exchange?», dans *Operations Research Models in Quantitative Finance*, Springer, p. 235–248. URL [http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-46957-2\\_12](http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-46957-2_12). 22
- GRUNDY, B. D. 1991, «Option prices and the underlying asset's return distribution», *The Journal of Finance*, vol. 46, n° 3, p. 1045–1069. URL <http://dx.doi.org/10.1111/j.1540-6261.1991.tb03776.x>. 219
- HAMAYON, S. et F. LEGROS. 1999, «Transition des systèmes de retraite et mesure du risque des fonds capitalisés : Une méthode appliquée à l'exemple roumain», *Revue économique*, p. 1275–1292. URL <http://www.jstor.org/stable/3502649>. 284
- HAMAYON, S. et F. LEGROS. 2001, «Construction and impact of a buffer fund within the french payg pension scheme in a demo-economic model», CESifo Working Paper Series 531, CESifo Group Munich. URL [http://EconPapers.repec.org/RePEc:ces:ceswps:\\_531](http://EconPapers.repec.org/RePEc:ces:ceswps:_531). 292, 322

- HAMAYON, S. et F. LEGROS. 2008, «La gestion stratégique d'actifs d'un fonds de réserve face au risque financier», *Revue d'économie financière*, p. 205–217, ISSN 09873368, 17775744. URL <http://www.jstor.org/stable/42905384>. 55, 284
- HAMAYON, S. et F. LEGROS. 2014, «Réforme des retraites 2013 : la contribution implicite du pouvoir d'achat des retraités», *Revue de l'OFCE*, p. 133–149. URL <http://www.ofce.sciences-po.fr/pdf/revue/01-137.pdf>. 298
- HAMAYON, S., F. LEGROS et Y. PRADAT. 2016, «Non gaussian returns and pension funds asset allocation», *Review of Accounting and Finance*, vol. 15, n° 4, doi :10.1108/RAF-01-2016-0005, p. 416–444. URL <http://dx.doi.org/10.1108/RAF-01-2016-0005>. 37, 126, 194
- HAMAYON, S., F. LEGROS et A. SYLVAIN. 2001, «Modélisation à long terme des retraites : un bouclage macroéconomique avec croissance endogène dans le cas français», *Conseil National du Crédit et du Titre, Paris, mars*. URL [https://www.banque-france.fr/ccsf/fr/avant\\_ccsf/telechar/der\\_pub\\_cc\\_cnct/asp\\_finan\\_vieil\\_pop.pdf](https://www.banque-france.fr/ccsf/fr/avant_ccsf/telechar/der_pub_cc_cnct/asp_finan_vieil_pop.pdf). 335
- HARVEY, C. R. 1989, «Forecasts of economic growth from the bond and stock markets», *Financial Analysts Journal*, vol. 45, n° 5, p. 38–45, ISSN 0015198X. URL <http://www.jstor.org/stable/4479257>. 24, 167
- HAWAWINI, G. A. 1984, *European equity markets : risk, return, and efficiency*, Garland. URL <https://books.google.fr/books?id=9k1JAAAAAYAAJ>. 40
- HIBBERT, A. M., R. T. DAIGLER et B. DUPOYET. 2008, «A behavioral explanation for the negative asymmetric return–volatility relation», *Journal of Banking & Finance*, vol. 32, n° 10, doi :<http://doi.org/10.1016/j.jbankfin.2007.12.046>, p. 2254–2266, ISSN 0378-4266. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0378426608000356>. 52
- HOCHBERG, Y. 1974, «Some generalizations of the t-method in simultaneous inference», *Journal of Multivariate Analysis*, vol. 4, n° 2, p. 224–234. URL [https://doi.org/10.1016/0047-259X\(74\)90015-3](https://doi.org/10.1016/0047-259X(74)90015-3). 122, 123



- HODRICK, R. J. et E. C. PRESCOTT. 1997, «Postwar u.s. business cycles : An empirical investigation», *Journal of Money, Credit and Banking*, vol. 29, n° 1, p. 1–16, ISSN 00222879, 15384616. URL <http://www.jstor.org/stable/2953682>. 57
- JOHANSEN, S. 2002, «A small sample correction for the test of cointegrating rank in the vector autoregressive model», *Econometrica*, vol. 70, n° 5, p. 1929–1961. URL <http://dx.doi.org/10.1111/1468-0262.00358>. 189
- JOHNSON, R. A. et collab.. 1970, «Asymptotic expansions associated with posterior distributions», *The annals of mathematical statistics*, vol. 41, n° 3, p. 851–864. URL <http://www.jstor.org/stable/2239239>. 66
- JORION, P. 2003, «The long-term risks of global stock markets», *Financial Management*, vol. 32, n° 4, p. 5–26, ISSN 00463892, 1755053X. URL <http://www.jstor.org/stable/3666134>. 40, 122, 125, 128, 336
- KAHNEMAN, D. 1982, «The simulation heuristic. in d. kahneman, p. slovic, & a. tversky (eds.), judgment under uncertainty : Heuristics and biases (pp. 201-208)», . 19
- KAMINSKI, K. et A. W. LO. 2008, «When Do Stop-Loss Rules Stop Losses?», Sifr research report series, Institute for Financial Research. URL <https://ideas.repec.org/p/hhs/sifrrp/0063.html>. 97
- KIM, M. J., C. R. NELSON et R. STARTZ. 1991, «Mean reversion in stock prices? a reappraisal of the empirical evidence», *The Review of Economic Studies*, vol. 58, n° 3, p. 515–528, ISSN 00346527, 1467937X. URL <http://www.jstor.org/stable/2298009>. 11, 22, 24, 40, 53, 125, 175, 214
- KIMBALL, M. S. 1990, «Precautionary saving in the small and in the large», *Econometrica*, vol. 58, n° 1, p. 53–73, ISSN 00129682, 14680262. URL <http://www.jstor.org/stable/2938334>. 13
- KIMBALL, M. S. 1993, «Standard risk aversion», *Econometrica*, vol. 61, n° 3, p. 589–611, ISSN 00129682, 14680262. URL <http://www.jstor.org/stable/2951719>. 13

- KNIGHT, F. 1921, «Risk, uncertainty, and profit. hart schaffner and marx prize essays no 31», *Boston and New York : Houghton Mifflin*. URL <http://www.jstor.org/stable/1884757>. 43
- LAI, K. K., L. YU et S. WANG. 2006, «Mean-variance-skewness-kurtosis-based portfolio optimization», dans *Computer and Computational Sciences, 2006. IMSCCS'06. First International Multi-Symposiums on*, vol. 2, IEEE, p. 292–297. URL <https://doi.org/10.1109/IMSCCS.2006.239>. 64
- LAVIGNE, A. 2003, «Pension funds in france : Still a dead end?», *The Geneva Papers on Risk and Insurance - Issues and Practice*, vol. 28, n° 1, doi :10.1111/1468-0440.00214, p. 127–150, ISSN 1468-0440. URL <http://dx.doi.org/10.1111/1468-0440.00214>. 275
- LAVIGNE, A. et F. LEGROS. 2006, «Finance comportementale et fonds de pension», URL <https://halshs.archives-ouvertes.fr/halshs-00135480>, working paper or preprint. 19
- LE BRIS, D. 2010, «Les krachs boursiers en france depuis 1854», *Revue économique*, vol. 61, n° 3, doi :10.3917/reco.613.0421, p. 421–430. URL <http://www.cairn.info/revue-economique-2010-3-page-421.htm>. 43
- LIEBERMAN, O. 1994, «Saddlepoint approximation for the least squares estimator in first-order autoregression», *Biometrika*, vol. 81, n° 4, p. 807–811. URL <https://doi.org/10.1093/biomet/81.4.807>. 234
- LIEN, D., C. STROUD et K. YE. 2016, «Comparing var approximation methods that use the first four moments as inputs», *Communications in Statistics - Simulation and Computation*, vol. 45, n° 2, doi :10.1080/03610918.2013.863921, p. 491–503. URL <http://dx.doi.org/10.1080/03610918.2013.863921>. 66
- LO, A. W. et A. C. MACKINLAY. 1988, «Stock market prices do not follow random walks : Evidence from a simple specification test», *Review of financial studies*, vol. 1, n° 1, p. 41–66. URL <https://doi.org/10.1093/rfs/1.1.41>. 21, 40, 54, 55, 115, 116, 117, 118, 119, 120, 122, 124, 131, 132, 133, 137, 138, 139, 140, 142, 147, 152

- LO, A. W. et A. C. MACKINLAY. 1989, «The size and power of the variance ratio test in finite samples : A monte carlo investigation», *Journal of econometrics*, vol. 40, n° 2, p. 203–238. URL [https://doi.org/10.1016/0304-4076\(89\)90083-3](https://doi.org/10.1016/0304-4076(89)90083-3). 140
- LO, A. W. et A. C. MACKINLAY. 1999, *A Non-Random Walk Down Wall Street*, Princeton University Press, ISBN 9780691092560. URL <http://www.jstor.org/stable/j.ctt7tccx>. 18
- LO, A. W. et J. WANG. 1995, «Implementing option pricing models when asset returns are predictable», *The Journal of Finance*, vol. 50, n° 1, p. 87–129. URL <http://dx.doi.org/10.1111/j.1540-6261.1995.tb05168.x>. 219
- LOCKWOOD, L. M. 2014, «Incidental bequests : Bequest motives and the choice to self-insure late-life risks», Working Paper 20745, National Bureau of Economic Research, doi:10.3386/w20745. URL <http://www.nber.org/papers/w20745>. 15
- LÜTKEPOHL, H. 2005, *New introduction to multiple time series analysis*, Springer Science & Business Media. URL <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-540-27752-1>. 174
- MAILLARD, D. 2012, «A user's guide to the cornish fisher expansion», *Working paper*. URL <http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.1997178>. 67
- MALABOUCHE, G. 1987a, «L'évolution à long terme du système de retraites : une nouvelle méthode de projection», *Population (french edition)*, p. 9–38. URL <http://www.jstor.org/stable/1532755>. 329
- MALABOUCHE, G. 1987b, «Retraites : les périls de l'an 2030», *Commissariat général au plan. Études et recherches*. URL <http://www.bdsp.ehesp.fr/Base/21073/>. 329
- MAMMEN, E. 1993, «Bootstrap and wild bootstrap for high dimensional linear models», *The Annals of Statistics*, vol. 21, n° 1, p. 255–285, ISSN 00905364. URL <http://www.jstor.org/stable/3035590>. 271
- MANDELBROT, B. 1963, «The variation of certain speculative prices», *The Journal of Business*, vol. 36, n° 4, p. 394–419. URL <http://www.jstor.org/stable/2350970>. 118, 368

- MARKOWITZ, H. 1952, «Portfolio selection\*», *The Journal of Finance*, vol. 7, n° 1, doi : 10.1111/j.1540-6261.1952.tb01525.x, p. 77–91, ISSN 1540-6261. URL <http://dx.doi.org/10.1111/j.1540-6261.1952.tb01525.x>. 11, 62
- MASSON, A. 2009, «Le viager intermédié partiel (VIP), produit d'avenir?», *Risques*, , n° 79, p. 103–112. URL <https://hal-pjse.archives-ouvertes.fr/halshs-00754681>. 7
- MASSON, A. 2010, «La vie pour l'épargnant ne se réduit pas à un exercice de calcul», *Revue française d'économie*, vol. 25, n° 1, p. 117–173. URL <http://www.cairn.info/revue-francaise-d-economie-2010-1-page-117.htm>. 30
- METCALF, G. E. et K. A. HASSETT. 1995, «Investment under alternative return assumptions comparing random walks and mean reversion», *Journal of Economic Dynamics and Control*, vol. 19, n° 8, p. 1471 – 1488, ISSN 0165-1889. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0165188994008389>. 219, 285
- MHIRI, M. et J.-L. PRIGENT. 2010, «International portfolio optimization with higher moments», *International Journal of Economics and Finance*, vol. 2, n° 5, p. 157. URL <http://dx.doi.org/10.5539/ijef.v2n5p157>. 64, 65
- MODIGLIANI, F. 1966, «The life cycle hypothesis of saving, the demand for wealth and the supply of capital», *Social Research*, p. 160–217. URL <http://www.jstor.org/stable/40969831>. 282
- MODIGLIANI, F. et R. BRUMBERG. 1954, «Utility analysis and the consumption function : An interpretation of cross-section data», *Franco Modigliani*, vol. 1. URL [https://www.researchgate.net/profile/Jean\\_Fitoussi/publication/45125476\\_An\\_economists'\\_Manifesto\\_on\\_unemployment\\_in\\_the\\_European\\_Union/links/55d1bb8308ae95c3504d5a78.pdf](https://www.researchgate.net/profile/Jean_Fitoussi/publication/45125476_An_economists'_Manifesto_on_unemployment_in_the_European_Union/links/55d1bb8308ae95c3504d5a78.pdf). 12
- NARDI, M. D., E. FRENCH et J. B. JONES. 2010, «Why do the elderly save? the role of medical expenses», *Journal of Political Economy*, vol. 118, n° 1, doi :10.1086/651674, p. 39–75. URL <http://dx.doi.org/10.1086/651674>. 15
- OGAKI, M. et J. Y. PARK. 1997, «A cointegration approach to estimating preference para-

- meters», *Journal of Econometrics*, vol. 82, n° 1, p. 107–134. URL [https://doi.org/10.1016/S0304-4076\(97\)00053-5](https://doi.org/10.1016/S0304-4076(97)00053-5). 188
- ONALAN, O. 2009, «Financial modelling with ornstein-uhlenbeck processes driven by lévy process», dans *Proceedings of the World Congress on Engineering*, vol. 2, p. 1–3. URL [http://iaeng.org/publication/WCE2009/WCE2009\\_pp1350-1355.pdf](http://iaeng.org/publication/WCE2009/WCE2009_pp1350-1355.pdf). 285
- PEROLD, A. 1986, «Constant proportion portfolio insurance», *HBS*. URL <http://www.hbs.edu/faculty/Pages/item.aspx?num=4800>. 98
- PERRON, P. et J. Y. CAMPBELL. 1994, «A note on johansen's cointegration procedure when trends are present», dans *New Developments in Time Series Econometrics*, Springer, p. 221–233. URL [http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-48742-2\\_11](http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-48742-2_11). 188, 189
- PHILLIPS, P. C. et J. YU. 2005, «Jackknifing bond option prices», *Review of Financial Studies*, vol. 18, n° 2, p. 707–742. URL <https://doi.org/10.1093/rfs/hhi018>. 244, 248
- PIKETTY, T. 2013, *Le capital au XXIe siècle*, Le Seuil. URL <http://EconPapers.repec.org/RePEc:hal:journl:halshs-00944865>. 322
- POTERBA, J. M. et L. H. SUMMERS. 1988, «Mean reversion in stock prices : Evidence and implications», *Journal of financial economics*, vol. 22, n° 1, p. 27–59. URL [https://doi.org/10.1016/0304-405X\(88\)90021-9](https://doi.org/10.1016/0304-405X(88)90021-9). 22, 39, 55, 122, 125, 128, 213
- RICHMOND, J. 1982, «A general method for constructing simultaneous confidence intervals», *Journal of the American Statistical Association*, vol. 77, n° 378, p. 455–460. URL <http://www.jstor.org/stable/2287267>. 122
- SAMUELSON, P. A. 1958, «An exact consumption-loan model of interest with or without the social contrivance of money», *Journal of political economy*, vol. 66, n° 6, p. 467–482. URL <http://www.jstor.org/stable/1826989>. 282
- SAMUELSON, P. A. 1965, «Proof that Properly Anticipated Prices Fluctuate Randomly», dans *THE WORLD SCIENTIFIC HANDBOOK OF FUTURES MARKETS*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., p. 25–38. URL [https://ideas.repec.org/h/wsi/wschap/9789814566926\\_0002.html](https://ideas.repec.org/h/wsi/wschap/9789814566926_0002.html). 216

- SAMUELSON, P. A. 1969, «Lifetime portfolio selection by dynamic stochastic programming», *The Review of Economics and Statistics*, vol. 51, n° 3, p. 239–246, ISSN 00346535, 15309142. URL <http://www.jstor.org/stable/1926559>. 11
- SAMUELSON, P. A. 1994, «The long-term case for equities», *The Journal of Portfolio Management*, vol. 21, n° 1, p. 15–24. URL <http://dx.doi.org/10.3905/jpm.1994.409499>. 12
- SAMUELSON PAUL. 1966, «Science and stocks», *Newsweek, September*, vol. 19, p. 92. 109
- SAUER, D. A. et C. R. CHEN. 1996, «Mean reversion in the united kingdom stock market and its implications for a profitable trading strategy», *Journal of Business Finance & Accounting*, vol. 23, n° 9-10, p. 1379–1395. URL <http://dx.doi.org/10.1111/1468-5957.00085>. 214
- SCHWERT, G. W. 1989, «Tests for unit roots : A monte carlo investigation», *Journal of Business & Economic Statistics*, p. 147–159. URL <http://www.jstor.org/stable/1391432>. 170, 172
- SÉJOURNÉ, B. 2007, «Comment les épargnants français intègrent-ils le paramètre temps dans la gestion de leur portefeuille?», *Cahiers scientifiques de l'Autorité des marchés financiers*, , n° 4. URL [http://www.amf-france.org/technique/multimedia?docId=workspace://SpacesStore/9a7f48d7-1faa-4b0b-9ea1-627b011faf19\\_fr\\_1.0\\_rendition](http://www.amf-france.org/technique/multimedia?docId=workspace://SpacesStore/9a7f48d7-1faa-4b0b-9ea1-627b011faf19_fr_1.0_rendition). 12
- SEONG, B., A. M. MORSHED et S. K. AHN. 2006, «Additional sources of bias in half-life estimation», *Computational Statistics & Data Analysis*, vol. 51, n° 3, p. 2056–2064. URL <http://doi.org/10.1016/j.csda.2005.12.016>. 237, 240, 241, 242
- SERLETIS, A. et A. A. ROSENBERG. 2009, «Mean reversion in the us stock market», *Chaos, Solitons & Fractals*, vol. 40, n° 4, p. 2007–2015. URL <http://doi.org/10.1016/j.chaos.2007.09.085>. 213
- SERLETIS, A., O. Y. URITSKAYA et V. M. URITSKY. 2008, «Detrended fluctuation analysis of the us stock market», *International Journal of Bifurcation and Chaos*, vol. 18, n° 02, p. 599–603. URL <http://dx.doi.org/10.1142/S0218127408020525>. 213

- SEWELL, M. 2011, «History of the efficient market hypothesis», *RN*, vol. 11. URL [http://www.cs.ucl.ac.uk/fileadmin/UCL-CS/images/Research\\_Student\\_Information/RN\\_11\\_04.pdf](http://www.cs.ucl.ac.uk/fileadmin/UCL-CS/images/Research_Student_Information/RN_11_04.pdf). 18
- SEWELL, M. 2012, «The efficient market hypothesis : Empirical evidence», *International Journal of Statistics and Probability*, vol. 1, n° 2, p. 164. URL <http://dx.doi.org/10.5539/ijsp.v1n2p164>. 40
- SHILLER, R. J., S. FISCHER et B. M. FRIEDMAN. 1984, «Stock prices and social dynamics», *Brookings Papers on Economic Activity*, vol. 1984, n° 2, p. 457–510, ISSN 00072303, 15334465. URL <http://www.jstor.org/stable/2534436>. 18
- SHOJAIE, A. et G. MICHAILIDIS. 2010, «Discovering graphical granger causality using the truncating lasso penalty», *Bioinformatics*, vol. 26, n° 18, p. i517–i523. URL <https://doi.org/10.1093/bioinformatics/btq377>. 157
- ŠIDÁK, Z. 1967, «Rectangular confidence regions for the means of multivariate normal distributions», *Journal of the American Statistical Association*, vol. 62, n° 318, p. 626–633. URL <http://dx.doi.org/10.1080/01621459.1967.10482935>. 122, 123
- SIEGEL, J. J. 2014, *Stocks for the Long Run 5 : The Definitive Guide to Financial Market Returns & Long-Term Investment Strategies*, McGraw Hill Professional. URL <https://books.google.fr/books?id=ep01An7hCDUC&printsec=frontcover&hl=fr>. 18, 41
- SIEGEL, J. J. et D. G. COXE. 2002, *Stocks for the long run*, vol. 3, McGraw-Hill New York. URL <http://www.bwts.com.au/download/reviews/Stocks%20For%20the%20Long%20Run%20-%20Jeremy%20Siegel.pdf>. 125
- SIMS, C. A. 1980, «Macroeconomics and reality», *Econometrica : Journal of the Econometric Society*, p. 1–48. URL <http://www.jstor.org/stable/1912017>. 153
- SIMS, C. A., J. H. STOCK et M. W. WATSON. 1990, «Inference in linear time series models with some unit roots», *Econometrica*, vol. 58, n° 1, p. 113–144, ISSN 00129682, 14680262. URL <http://www.jstor.org/stable/2938337>. 198

- SOLOW, R. M. 1956, «A contribution to the theory of economic growth», *The quarterly journal of economics*, vol. 70, n° 1, p. 65–94. URL <http://www.jstor.org/stable/1884513>. 284
- SPIERDIJK, L. et J. BIKKER. 2012, «Mean Reversion in Stock Prices : Implications for Long-Term Investors», Working Papers 12-07, Utrecht School of Economics. URL <https://ideas.repec.org/p/use/tkiwps/1207.html>. 213
- SPIERDIJK, L., J. A. BIKKER et P. VAN DEN HOEK. 2012, «Mean reversion in international stock markets : an empirical analysis of the 20th century», *Journal of International Money and Finance*, vol. 31, n° 2, p. 228–249. URL <http://doi.org/10.1016/j.jimonfin.2011.11.008>. 11, 28, 40, 53, 125, 214, 240, 260, 320
- STAMBAUGH, R. F. 1999, «Predictive regressions», *Journal of Financial Economics*, vol. 54, n° 3, p. 375–421. URL [http://doi.org/10.1016/S0304-405X\(99\)00041-0](http://doi.org/10.1016/S0304-405X(99)00041-0). 157
- STANGELAND, D. A. et H. J. TURTLE. 1999, «Time diversification : Fact or fallacy», *Journal of Financial Education*, p. 1–13. URL <http://www.jstor.org/stable/41948308>. 11
- STOCK, J. et D. WISE. 1990, «Pensions, the option value of work, and retirement», *Econometrica*, vol. 58, n° 5, p. 1151–1180. URL <http://www.jstor.org/stable/2938304>. 280
- SUMMERS, L. H. 1986, «Does the stock market rationally reflect fundamental values?», *The Journal of Finance*, vol. 41, n° 3, p. 591–601, ISSN 1540-6261. URL <http://dx.doi.org/10.1111/j.1540-6261.1986.tb04519.x>. 114, 224, 229, 231
- THALER, R. H. et C. R. SUNSTEIN. 2008, «Nudge : Improving decisions about health, wealth, and happiness.», URL <http://brookscollegeprep.org/sites/default/files/pictures/nudgechapter1.pdf>. 37
- THIERFELDER, C. 2015, «The trending ornstein-uhlenbeck process and its applications in mathematical finance», *Mathematical Finance*. URL [https://www.maths.ox.ac.uk/system/files/attachments/Thierfelder\\_v1.08.pdf](https://www.maths.ox.ac.uk/system/files/attachments/Thierfelder_v1.08.pdf). 219, 285



- TIBSHIRANI, R. 1996, «Regression shrinkage and selection via the lasso», *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, p. 267–288. URL <http://www.jstor.org/stable/2346178>. 157
- VERONESI, P. 1999, «Stock market overreactions to bad news in good times : A rational expectations equilibrium model», *The Review of Financial Studies*, vol. 12, n° 5, doi : 10.1093/rfs/12.5.975, p. 975. URL <http://dx.doi.org/10.1093/rfs/12.5.975>. 52
- WANG, J. 2000, «Mean-variance-var based portfolio optimization», URL <http://ww2.valdosta.edu/~jwang/paper/PortfolioOpt.pdf>. 100
- WILKIE, D. 2001, «On the risk of stocks in the long run : a response to zvi bodie», dans *Proceedings of the 11th International AFIR Colloquium*, p. 741–762. URL <http://www.actuaries.org/AFIR/colloquia/Toronto/Wilkie.pdf>. 41, 125
- WORKING, H. 1960, «Note on the correlation of first differences of averages in a random chain», *Econometrica : Journal of the Econometric Society*, p. 916–918. URL <http://www.jstor.org/stable/1907574>. 128
- WRIGHT, J. H. 2000, «Alternative variance-ratio tests using ranks and signs», *Journal of Business & Economic Statistics*, vol. 18, n° 1, p. 1–9. URL <http://amstat.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/07350015.2000.10524842>. 22, 41, 54, 119, 120, 121, 124, 133, 134, 135, 136, 137, 138, 140, 147, 152
- ZELLNER, A. 1962, «An efficient method of estimating seemingly unrelated regressions and tests for aggregation bias», *Journal of the American statistical Association*, vol. 57, n° 298, p. 348–368. URL <http://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/01621459.1962.10480664>. 194

# Liste des acronymes

**ADF** *Augmented Dickey-Fuller*. 157, 170, 171, 174, 187

**Agirc** Association Générale des Institutions de Retraite complémentaire des Cadres. 279

**AIC** Critère d'information d'Akaike – ou *Akaike Information Criterion* –. 158, 162, 163, 175, 176, 185, 197

**AMF** Autorité des Marchés Financiers. 37

**AR** Processus AutoRégressif. 157, 162

**Arrco** Association pour le Régime de Retraite COmplémentaire des salariés. 279

**BC** *Bias Corrected estimator*. 252, 253

**BIC** Critère d'information bayésien – ou *Bayesian Information Criterion* –. 158, 175, 176

**CDF** *Cumulative Distribution Function*. 101, 102

**CEPREMAP** Centre pour la Recherche Economique et ses Applications. 86

**CES** *Constant Elasticity of Substitution*. 323

**CF** Cornish-Fisher. x, 65, 77, 83, 84, 90

**CFVaR** Cornish-Fisher Value-at-Risk. 71, 81, 82, 92, 95, 96, 100, 102

**CNAV** Caisse Nationale d'Assurance Vieillesse. 33, 279–281, 307

**CPPI** *Constant Proportion Portfolio Insurance*. x, 61, 82, 98–100

**CRÉDOC** Centre de Recherche pour l'Étude et l'Observation des Conditions de Vie. 37

**CRRA** Constante Relative Risk Aversion. 11

**CV** Coefficients de Variations. 238, 239

**DARES** Direction de l'Animation de la Recherche des Études et des Statistiques. 13

- DC** cotisations définies – ou *Defined Contribution* –. 37, 61
- DER** *Duration Enhances Risk*. 62
- DGP** Processus Générateur de Données – ou *Data Generation Process* –. 194
- DREES** Direction de la Recherche, des Études, de l'Évaluation et des Statistiques. 279, 281
- DS** *Difference Stationnary*. 49, 50, 171, 221, 288
- EMH** hypothèse d'efficience de marchés financiers – ou *Efficient Market Hypothesis* –. xii, 4–6, 12, 18–21, 27, 32, 39, 40, 111–113, 127, 153, 154, 184, 211, 275, 285, 291, 304, 305, 307, 315, 316, 321, 334
- EMV** estimateur du maximum de vraisemblance. 248
- FAC** Fonction d'Auto-Corrélation. 117, 118
- FFSA** Fédération Française des Sociétés d'Assurances. 3, 37
- GFD** Global Financial Data. 41, 173
- GS** *Gradient Sampling*. 69, 105–107
- HP** Hodrick-Prescott. 57
- IID** indépendantes et identiquement distribuées – ou *independent and identically distributed* –. 11, 25, 124, 126, 131, 132, 138, 139, 158, 183, 194, 246
- IPI** Indice de la Production Industrielle. 158, 167, 178, 185
- IPSOS** entreprise de sondages française. 3, 37
- MCO** Moindres Carrés Ordinaire. xv, 28, 157, 160, 188, 218, 228, 229, 232, 234–238, 240, 243–248, 251, 254, 256–259, 266, 270, 272
- MDS** séquence de différences de martingales – ou *Martingale Difference Sequence* –. 115, 119, 121
- MUE** estimateur de la médiane sans biais – ou *Median Unbiased Estimator* –. 28, 237, 254, 255, 271, 272
- MV** Moyenne-Variance. 65
- OBPI** *Option Based Portfolio Insurance*. 98

- OU** Ornstein–Uhlenbeck. xi, 28, 30, 31, 150, 221, 222, 235, 252–254, 272, 286, 291
- PATER** PAtrimoine et préférences vis-à-vis du TEmps et du Risque. 86, 87
- PAYG** *Pay As You Go*. xii, 292, 308
- PER** ratio cours sur bénéfice. 19
- PGP** *Polynomial Goal Programming*. 64, 65
- PIB** Produit Intérieur Brut. 169
- PROMESS** PROjection MESo du Système de retraite. 279
- PSC** Cohérence Spectrale Partielle – ou *Partial Spectral Coherence* –. 160–162
- PSID** *Panel Study of Income Dynamics*. 87, 89
- QE** *Quantitative Easing*. 90
- QP** problème quadratique –ou *Quadratic Programming* –. 105, 106
- SMM** module maximum studentisé – ou *Student Maximum Modulus* –. 123, 124
- SQP** programmation quadratique séquentielle – ou *Sequential Quadratic Programming* –. 105–107
- ssi** si et seulement si. 271
- SUR** *Seemingly Unrelated Regressions*. 194, 233
- sVAR** *Sparse Vector AutoRegression*. xi, 24, 157, 176, 177, 183, 185, 197
- TRI** Taux de Rendement Interne. xii, 32, 33, 306, 308, 316
- TS** *Trend Stationary*. 6, 31, 50, 174, 188, 221, 288
- VAR** Vecteur AutoRégressif – ou *Vector AutoRegressive* –. 24, 27, 127, 153–159, 162, 170, 171, 173–178, 182, 185, 187, 188, 190, 191, 197
- VaR** Value-at-Risk. x, xii, 36, 65, 67–74, 76–78, 80, 81, 83–86, 88–90, 92–94, 102, 104, 291, 301, 311–313, 335
- VECM** *Vector Error Correction Model*. 174, 189, 190
- VMA** Vecteur Moyenne Mobile – ou *Vector Moving Average* –. 155, 174
- VMM** Minimisation à Métrique Variable. 69
- VR** ratio de variance – ou *Variance Ratio* –. 21, 40, 41, 55



# Liste des symboles

$\Sigma$  matrice de variance covariance. 68, 69

*corr* fonction pour le calcul du coefficient de corrélation entre deux variables aléatoires réelles. 168

$H_0$  Hypothèse nulle des tests statistiques, choisir  $H_0$  c'est affirmer que l'hypothèse testée est vraie. 101, 102, 130, 131, 133, 144, 147

$H_1$  Hypothèse alternative des tests statistiques, postule que l'hypothèse  $H_0$  testée est fausse. 101, 130

$\kappa$  paramètre de retour vers la moyenne (vitesse). 30, 31, 150

$\lambda_1$  paramètre de préférence pour le rendement. 65

$\lambda_2$  paramètre d'aversion pour la variance. 64, 65

$\lambda_3$  paramètre de préférence pour l'asymétrie. 65

$\lambda_4$  paramètre d'aversion pour le kurtosis. 65

$\mu$  espérance du rendement par unité de temps (ou niveau de long terme). 5, 64, 113

$\mathcal{N}$  loi de distribution normale. 50, 89

P Cours des marchés boursiers. 5, 31, 113

*ldmp* logarithme du ratio dividende sur cours. 164

$\mathbb{P}$  mesure de probabilité. 102

( $\mathcal{P}$ ) Problème d'optimisation. 68, 69

**q** largeur de l'incrément. 41, 55, 188

**R<sup>2</sup>** Coefficient de détermination. 181, 185

**r** variable du rendement des actions. 41

$\mathbb{R}$  ensemble des nombres réels. 97

$\rho$  Coefficient de corrélation sérielle (ou niveau de persistance des chocs sur la série). 21, 55, 147, 150

$\sigma$  Volatilité ou écart-type. 5, 64, 113

*Var* fonction de la variance. 55

# Glossaire

**allocation par défaut** voir option par défaut. [37](#), [38](#), [61](#)

**allocations de cycle de vie** stratégie d'investissement à long terme dans laquelle l'allocation du portefeuille est fonction du cycle de vie de l'investisseur. Le cycle de vie peut se définir ici comme la succession des trois (ou quatre) grandes périodes : l'enfance, l'âge adulte, troisième âge, éventuellement, le quatrième âge (« *The Meanings of Age: Selected Papers* » Neugarten, 1996). Cependant, l'analyse du cycle de vie ne peut-être basée uniquement sur l'âge, bien que la plupart des fonds du cycle de vie sont basés sur l'âge. [61](#), [62](#), [85](#), [303](#), [306](#)

**Asset Meltdown Hypothesis** c'est une hypothèse qui décrit un scénario catastrophe : l'effondrement de la valeur des actifs en fonction de l'évolution de la démographie. [277](#)

**bulles** (spéculative) pour un actif, qualifie un niveau du prix d'échanges démesuré par rapport à sa valeur intrinsèque sur le marché. [41](#), [90](#), [125](#)

**capitalisation (système de retraite)** dans un régime par capitalisation l'individu accumule des actifs financiers durant sa période d'activité, généralement auprès d'organismes *ad hoc*, les fonds de pensions, et touche une rente viagère durant sa retraite. C'est la sortie obligatoire en rente viagère qui distingue la capitalisation de l'épargne à long terme (Source : [Les cinq piliers de la retraite - 2003](#)). [7](#), [275](#), [277](#), [283](#), [294](#), [300](#), [306](#), [320](#), [335](#)

**capital-returns** *A capital index, sometimes referred to as a price index, measures the average price of constituents usually weighted according to the constituents' investability weights. Comparing the index at different points in time provides a capital return, a measure of the change in the value of the market or segment the index is designed to*



*represent. In contrast to a total return Index, a capital index does not take account of dividend income accruing to the constituents.*) (Source : [www.ftse.com](http://www.ftse.com)). 130, 139

**clusters de volatilités** les rendements de fortes amplitudes ont tendance d'être suivis de rendements de fortes amplitudes, de signes opposés, et les rendements de faibles amplitudes ont tendance d'être suivis par des rendements de faibles amplitudes (Voir [MANDELBROT \[1963\]](#)). 118

**cotisations définies** le régime de cotisations définies est l'un des deux types des dispositifs de retraite supplémentaire. Dans un régime à cotisations définies, l'engagement est pris sur le montant de la cotisation à verser régulièrement à un fonds de pension. Le montant des pensions versées à la retraite n'est pas à priori connu, et n'est donc pas garanti. Ce dernier dépend des cotisations effectivement versées - augmentées des revenus de leur placement (Source : [Lexique Financier - Les Echos](#)). 37, 61, 337

**cycle de vie** peut se définir ici comme la succession des trois (ou quatre) grandes périodes : l'enfance, l'âge adulte, le troisième âge, éventuellement, le quatrième âge (« *The Meanings of Age: Selected Papers* » Neugarten, 1996). Cependant, l'analyse du cycle de vie ne peut-être basée uniquement sur l'âge, bien que la plupart des fonds du cycle de vie sont basés sur l'âge. 3, 11, 12, 14, 15, 17, 30, 32, 38, 61, 65, 75, 87, 90, 98, 111, 126, 282, 298, 305, 334, 336

**diversification temporelle** c'est le concept selon lequel les investissements en action sont moins risqués sur de longues périodes que sur de courtes périodes. 11, 12, 14, 15, 38, 40, 50, 55, 61, 62, 111, 112, 125, 211, 266, 334–336

**épargne** dans la thèse, on restreint la définition à l'épargne individuelle dédiée à la préparation de la retraite (dans le sens du troisième pilier du système de retraite). 3, 4, 59, 61, 275

**Equity Premium Puzzle** *A phenomenon that describes the anomalously higher historical real returns of stocks over government bonds* (Source : [www.investopedia.com](http://www.investopedia.com)). 30, 337

**expansion de Cornish-Fisher** donne une relation approximative entre les percentiles d'une distribution et ses moments. 66, 67

**fonds de pension** organismes auxquels des personnes physiques ou morales versent des cotisations, qu'ils doivent faire fructifier en réalisant des placements adéquats, dans le but de procurer des rentes à des bénéficiaires. (*Source* : « Retraites - le dictionnaire de la réforme » - Jacques Bichot - 2010). Le fonds gère (généralement) un portefeuille d'actifs financiers. 37, 326, 327, 337

**gestion profilée** C'est une option de gestion qui se fait en fonction du niveau de risque (on définit traditionnellement trois niveaux : prudent, équilibré, dynamique). En fonction des profils d'investisseurs va s'opérer une pondération des placements entre les différents supports : monétaire, obligataire, actions. La comparaison est difficile entre les différents produits, il n'y a pas de règles communes pour définir les notions de risque. *Source* : [www.fortuneo.fr](http://www.fortuneo.fr).

Dans le cas des contrats grand public, la gestion profilée est assurée par un fonds appelé « fonds profilé », dont l'orientation de gestion suivant le niveau de risque est fixe dans le temps. 61

**illusion monétaire** L'illusion monétaire est le comportement par lequel un agent économique confond une variation du niveau général des prix avec une variation des prix relatifs.) (*Source* : [fr.wikipedia.org](http://fr.wikipedia.org)). 39, 45, 254

**increasing rearrangement** procédure de rangement monotone d'une fonction initialement non-monotone. 67

**isomorphisme** En mathématiques, un isomorphisme entre deux ensembles structurés est une application bijective qui préserve la structure et dont la réciproque préserve aussi la structure (*Source* : [fr.wikipedia.org](http://fr.wikipedia.org)). 155, 174

**kurtosis** (coefficient d'aplatissement) correspond à une mesure de l'aplatissement, ou a contrario de la forme pointue, de la distribution d'une variable aléatoire réelle. 62, 64–67, 244

**mean reversion** voir : retour vers la moyenne. 8, 22, 27, 40, 59, 197, 211, 213, 257, 285, 320

**nudging** littéralement «coup de pouce», c'est une démarche qui consiste à orienter subtilement, sans contrainte, le comportement des agents vers la bonne solution. Cette

philosophie soutient l'idée qu'il est possible de préserver la liberté de choix des individus (libertaire) tout en faisant évoluer le comportement de ces derniers pour les rendre plus sages (paternalisme). 37

**option par défaut** Option de placement par défaut proposée par les fonds de pensions. 4, 12, 17, 38, 61, 90

**paternalisme libertaire** C'est l'autre expression employée pour désigner la philosophie du *nudging*. 37

**point col** La méthode du « point col » est une méthode mathématique couramment utilisée en combinatoire analytique et en mécanique statique. 210, 234, 267

**prestations définies** Un régime à prestations définies vise un montant de pension, et ajuste les versements réclamés aux cotisants en fonction de cet objectif (*Source* : [fr.wikipedia.org](http://fr.wikipedia.org)). 75

**prime de risque** c'est l'écart de rendement attendu d'une action par rapport à un actif dit sans risque. C'est le surcroît de rémunération qu'un investisseur attend d'une action pour la détenir. *Source* : [www.morningstar.fr](http://www.morningstar.fr). 39, 43, 52, 165, 167, 299

**répartition (système de retraite)** un régime de retraite fonctionne en répartition s'il paye les pensions de l'année  $n$  à l'aide des cotisations vieillesse reçues la même année (désigné par l'acronyme *PAYG* chez les anglo-saxons). 32–34, 275–277, 279, 282, 283, 292, 298, 305–307, 309, 316, 321, 325, 329, 334–337

**retour vers la moyenne** la tendance pour une série chronologique de retourner vers sa valeur de long terme après avoir subi un choc, à une certaine période. 8, 15, 38, 41, 53, 55, 57, 59, 60, 70, 197, 211, 213, 241, 257, 275, 285, 310, 316

**retraite** retrait de la vie active (cessation d'activité professionnelle). 3, 4, 7, 12–14, 17, 18, 27, 30, 32, 33, 90, 275

**risque de marché** le risque de marché peut se définir comme le risque de pertes induit par les variations de valeur sur le marché. Pour un titre, le risque de marché est le risque corrélé à l'état du marché. Il évolue en fonction des différents paramètres de l'économie, de la fiscalité, des taux d'intérêt, de l'inflation ... (*Source* : "Allocation d'actifs" - Pierre Hervé - 2012). 277

**semimartingale** c'est un processus qui peut-être décomposé comme la somme d'une martingale locale et d'un processus à variation finie. 97

**skewness** (coefficient d'asymétrie) est un moment standardisé qui mesure l'asymétrie de la densité de probabilité d'une variable aléatoire définie sur les nombre réels. 52, 62, 64–67, 244

**taux de remplacement** le taux de remplacement est le rapport entre le montant de la retraite (ici la rente), au moment du départ à la retraite, et le salaire de fin de carrière (définition du [Conseil d'Orientation des Retraites](#)). 7, 15, 38, 75, 78, 81, 82, 90, 94, 102, 295–298, 305, 313

**total-returns** *total return or total return index seeks to replicate the return from holding the index portfolio; it gives the market value weighted return of the index constituents, taking into account price movements, accrued interest and cash-flows from the bonds (including coupon payments, redemptions or repurchases) (Source: [http://www.ftse.com/products/downloads/FTSE\\_Fixed\\_Income\\_Index\\_Guide\\_to\\_Calculation\\_new.pdf](http://www.ftse.com/products/downloads/FTSE_Fixed_Income_Index_Guide_to_Calculation_new.pdf)).*

*An index that calculates the performance of its constituents assuming that equity dividends or bond coupons are re-invested into the index on the ex-dividend date (Source: [www.ftse.com](http://www.ftse.com)).* 8, 41, 130, 139

**Value-at-Risk** est la perte potentielle maximale que l'on peut encourir sur une position donnée durant une certaine période avec une probabilité donnée. 32, 65–67, 88, 89, 301, 312

**VaR de Cornish-Fisher** c'est une VaR « normale » corrigée du skewness et de l'excès de kurtosis. 69, 71

**volatilité** désigne l'écart-type annualisé des rendements d'une série historique représentant un fonds, un indice, etc (Source: [http://www.europereformance.fr/upload/documents/espace\\_engine/concepts\\_et\\_formules.pdf](http://www.europereformance.fr/upload/documents/espace_engine/concepts_et_formules.pdf)) plural. 47, 50, 53, 70, 72, 277, 283–285

## Résumé

Le premier chapitre examine les caractéristiques statistiques à long terme des rendements financiers en France et aux USA. Les propriétés des différents actifs font apparaître qu'à long terme les actions procurent un risque sensiblement moins élevé. En outre, les propriétés de retour à la moyenne des actions justifient qu'elles soient utilisées dans une stratégie de cycle de vie comme « option par défaut » de plans d'épargne retraite.

Le chapitre deux fournit une explication au débat sur l'hypothèse d'efficience des marchés. La cause du débat est souvent attribuée à la petite taille des échantillons et à la faible puissance des tests statistiques dédiés. Afin de contourner ce problème, nous utilisons l'approche développée par Campbell et Viceira (2005) qui utilisent une méthode VAR pour mettre en évidence l'existence de retour vers la moyenne dans le cours des actifs risqués.

Le troisième chapitre évalue la vitesse de convergence des cours des actions. Un moyen classique pour caractériser la vitesse de retour vers la moyenne est la « demi-vie ». En comparant les indices boursiers de quatre pays développés (États-Unis, Royaume-Uni, France et Japon) sur la période 1950-2014, nous établissons une vitesse de convergence significative, avec une demi-vie entre 4,0 et 5,8 ans.

Le dernier chapitre présente les résultats d'un modèle conçu pour étudier les interactions entre la démographie et les régimes de retraite. Afin d'étudier les risques inhérents à l'utilisation des revenus du capital pour financer les retraites, nous utilisons un « Trending OU process » au lieu d'un MBG classique pour modéliser les rendements. Pour un épargnant averse au risque le marché pourrait concurrencer les régimes par répartition.

## Mots Clés

Epargne retraite, CF-VaR, Options par défaut, retour vers la moyenne, Marchés efficients, "Rearrangement procedure", "Trending OU process", Demi-vie, "Sparse VaR", Ratio de Variance, Allocation d'actifs de cycle de vie

## Abstract

Chapter one examines the long run statistical characteristics of financial returns in France and the USA for selected assets. This study clearly shows that the returns' distributions diverge from the Gaussian strategy as regards long holding periods. Thereafter we analyze the consequences of the non-Gaussian nature of stock returns on default-option retirement plans. Chapter two provides a reasonable explanation to the strong debate on the Efficient Market Hypothesis. The cause of the debate is often attributed to small sample sizes in combination with statistical tests for mean reversion that lack power. In order to bypass this problem, we use the approach developed by Campbell and Viceira (2005) who have settled a vectorial autoregressive methodology (VAR) to measure the mean reversion of asset returns.

The third chapter evaluates the speed of convergence of stock prices. A convenient way to characterize the speed of mean reversion is the half-life. Comparing the stock indexes of four developed countries (US, UK, France and Japan) during the period 1950-2014, we establish significant mean reversion, with a half-life lying between 4,0 and 5,8 years.

The final chapter provides some results from a model built in order to study the linked impacts of demography and economy on the French pension scheme. In order to reveal the risks that are contained in pension fund investment, we use a Trending Ornstein-Uhlenbeck process instead of the typical GBM for modeling stock returns. We find that funded scheme returns, net of management fees, are slightly lower than the PAYG internal rate of return.

## Keywords

Pension plans, CF-VaR, Default option, Mean reversion, EMH, Rearrangement procedure, Trending OU process, Half-life, Sparse Vector Autoregressive Modeling, Variance ratio, Life-cycle Asset Allocation