



**HAL**  
open science

# Structure de variété de Hilbert et masse sur l'ensemble des données initiales relativistes faiblement asymptotiquement hyperboliques

Jérémie Fougeirol

► **To cite this version:**

Jérémie Fougeirol. Structure de variété de Hilbert et masse sur l'ensemble des données initiales relativistes faiblement asymptotiquement hyperboliques. Mathématiques [math]. Université d'Avignon et des Pays de Vaucluse, 2017. Français. NNT: . tel-01621640v1

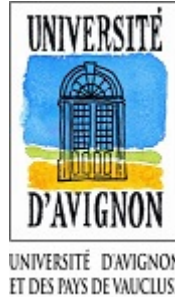
**HAL Id: tel-01621640**

**<https://theses.hal.science/tel-01621640v1>**

Submitted on 23 Oct 2017 (v1), last revised 15 Jan 2018 (v2)

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



# THÈSE

pour obtenir le grade de

**Docteur de l'Université d'Avignon  
et des pays du Vaucluse**

Spécialité: **Mathématiques**

École doctorale: **Sciences et Agrosiences (ED 536)**

présentée par

**Jérémie FOUGEIROL**

---

**Structure de variété de Hilbert et masse sur  
l'ensemble des données initiales relativistes  
faiblement asymptotiquement hyperboliques**

---

Thèse soutenue publiquement le 30 juin 2017 devant le jury composé de:

<b>Piotr CHRUSCIEL,</b>	Pr, University of Vienna	Président du Jury
<b>Emmanuel HUMBERT,</b>	Pr, Université de Tours	Rapporteur
<b>Jim ISENBERG,</b>	Pr, University of Oregon	Rapporteur
<b>Philippe BOLLE,</b>	Pr, Université d'Avignon	Examineur
<b>Romain GICQUAUD,</b>	MCF, Université de Tours	Examineur
<b>Erwann DELAY,</b>	MCF, Université d'Avignon	Directeur de thèse
<b>Marc HERZLICH,</b>	Pr, Université de Montpellier	Co-directeur de thèse

Thèse réalisée au sein des laboratoires





# Remerciements

Ce travail représente l'aboutissement de mes nombreuses années étudiantes et je profite de cette section pour remercier toutes les personnes qui, de près ou de loin (dans le temps), m'ont donné envie et permis de faire cette thèse dans de très bonnes conditions.

Pour commencer, je tiens à remercier chaleureusement Erwann Delay pour m'avoir encadré pendant les quatre années de cette thèse. Il m'est difficile de lui témoigner en quelques mots toute ma reconnaissance autant pour le partage de nombreux conseils techniques et astuces de calculs que pour cet aperçu du monde de la recherche et ses conventions, dans une ambiance toujours très conviviale. Je me suis senti à l'aise tout au long de la thèse pour poser toutes mes questions et cela a été très important pour moi. En ce qui me concerne, nos échanges se sont à chaque fois avérés fructueux et motivants. Merci enfin de m'avoir fait confiance et d'avoir tenu compte de mes soucis de santé dans cet encadrement à distance qui m'a très bien convenu.

Un grand merci à Marc Herzlich pour son co-encadrement discret mais efficace. Les quelques échanges que nous avons eus pendant la thèse ont été aussi instructifs que conviviaux et je les ai particulièrement appréciés. Ce co-encadrement m'a également permis de pouvoir vivre à Montpellier et d'être rattaché à titre secondaire à l'IMAG où j'ai pu côtoyer d'autres doctorants.

Un grand merci à Emmanuel Humbert et Jim Isenberg pour avoir accepté de rapporter cette thèse et de l'avoir fait dans les délais malgré leur emploi du temps chargé. J'ai eu l'occasion de croiser quelques fois Emmanuel à des colloques dans une ambiance toujours très sympathique et je garde un souvenir impérissable d'un exposé de Jim, au tout début de ma thèse, lors de la conférence organisée à l'IHES en l'honneur du 90ème anniversaire d'Yvonne Choquet-Bruhat. C'est donc un privilège de les compter parmi les membres du Jury.

C'est un grand honneur pour moi que Piotr Chruściel ait accepté de présider le Jury. J'ai un grand respect pour ses travaux auxquels je me suis souvent référé pendant ma thèse. Que ce soient ses collaborations avec Erwann Delay, Marc Herzlich ou Gabriel Nagy, ses travaux ont été centraux tout au long de ma thèse et je salue sa grande contribution à la recherche en Mathématiques et Physique théorique.

Merci beaucoup à Romain Gicquaud et Philippe Bolle, examinateurs, qui complètent le Jury. Romain et moi avons des parcours un peu similaires ; tout d'abord dans notre choix de passer de la Physique théorique aux Mathématiques par l'intermédiaire de Philippe Roche, puis par le fait d'avoir été tous les deux encadrés en thèse par Erwann. Quant à Philippe, je garde un souvenir impérissable de son cours d'analyse Hilbertienne de  $L^3$ , à la fois très clair et très complet.

Merci à Dinh The Luc et Thierry Barbot, directeurs successifs du Laboratoire de Mathématiques d'Avignon pendant ma thèse, qui m'ont accueilli au sein de leur unité de recherche, pour les infrastructures mises à ma disposition ainsi que le financement des missions dans les colloques et écoles d'été. Merci à Paul-Emile Paradan et Jean-Michel Marin, directeurs successifs de L'Institut Montpelliérain Alexander Grothendieck, pour

---

m'avoir accueilli dans le laboratoire et avoir mis un bureau à ma disposition. Merci à Isabelle Pecquenard de la cellule Handicap de l'Université de Montpellier pour ses conseils concernant les contrats doctoraux ayant abouti à l'obtention de cette bourse de thèse. Merci à Erwann Aubry pour s'être déplacé à Avignon pour assister aux trois comités de suivi de thèse.

Un immense merci aux enseignants-chercheurs dont j'ai assuré les TD pendant mes trois années de monitorat : Mounir Torki et Mohammed Moussaoui pour les Mathématiques pour l'ingénieur en L3 et Jean-Louis Blanchard, Florent Bonneu et Alberto Seeger pour les probabilités en L1. Cette expérience d'enseignement s'est révélée très riche et s'avérera très utile par la suite, à n'en point douter.

Je tiens à remercier particulièrement Guillaume pour son amitié et ses conseils avisés d'expert-consultant  $\text{\LaTeX}$  sans lesquels cette thèse n'aurait pas eu le même rendu.

Un grand merci à Mickaël et Gautier, interlocuteurs thésards privilégiés du Labo de Montpellier. Nous avons beaucoup discuté de nos avancées, difficultés et doutes respectifs dans le déroulement de la thèse. Ils ont donné, avec l'aide de mes co-bureau à Montpellier Myriam Tami, Arnaud Duran et Christian Spitalas, une dimension sociale non négligeable à la thèse, indispensable même si ponctuelle.

Merci à Claire pour son amitié et pour nos échanges vraiment intéressants sur la Relativité générale et la relation entre Mathématiques et Physique théorique. Cela fait vraiment plaisir de rencontrer quelqu'un qui partage le même point de vue et une approche similaire de la recherche et de l'enseignement. Nul doute que nous nous recroiserons à l'avenir.

Merci à Astrid Lamberts, astrophysicienne émérite qui m'a, au lycée, motivé pour me diriger vers les études de Physique fondamentale ayant débouché sur cette thèse en Relativité générale mathématique. Merci à Sean Bailly, co-bureau génial pendant mon stage de Master de Physique qui m'a assurément inspiré pour poursuivre en thèse.

Un merci spécial à mon oncle Patrick, le scientifique de la famille, dont j'ai encore en tête quelques astuces de Maths ou de Physique. Mon admiration pour lui, étant plus jeune, a très certainement contribué au fait de poursuivre des études scientifiques et à en arriver là.

Merci à la famille Canac qui m'a hébergé sur Cavailon lors de mes virées «boulot» dans l'ambiance toujours très conviviale et originale dont elle a le secret.

Place maintenant aux enseignants dont la personnalité et l'approche de leur discipline m'ont marqué au point de me transmettre leur passion pour leur discipline et pour l'enseignement en général. Par ordre chronologique, Isabelle Audouard, Alain Léger et Mohammed Moussa au collège. Marianne Montagnon et Martine Chevrou que je remercie particulièrement pour leur investissement dans ma remise à niveau pour le bac en raison d'absences répétées. Un grand merci à Françoise Jacob, Andrea Venturelli, Jean-

---

Louis Blanchard et Philippe Lieutaud pour la qualité de leur enseignement en Licence Maths-Info parcours Prépa à l'Université d'Avignon. Mention spéciale à Françoise Jacob pour les cours de rattrapage à domicile lors de mes absences répétées en première année.

N'ayant pas réussi à choisir entre Mathématiques et Physique, j'ai commencé par un parcours en Physique et l'idée de faire un Master de Physique fondamentale m'est venue grâce à l'enseignement de Hervé Bolvin en L3 Physique à Avignon. Merci à lui de m'avoir transmis son intérêt pour la mécanique quantique, que n'ont pas manqué d'accroître Michel Capdequi-Peyranère et Michel Dyakonov pendant le Master à Montpellier. Par la suite, les cours de cosmologie de Henri Reboul, Jean-Pierre Cordoni et David Polarski et ceux de théorie des champs de Jérôme Léon, Gilbert Moulta et Cyril Hugonie m'ont tout simplement passionné et donné l'envie de faire une thèse en Relativité générale.

J'en profite pour remercier Philippe Roche pour son amitié et m'avoir fait prendre conscience que ce que j'aimais dans la Physique théorique, c'étaient les Mathématiques.

Ceci s'est traduit par un retour en L3 Maths pour un cursus complet. Après une année de transition entre Physique et Mathématiques à La Réunion où le cours de théorie des groupes de Marc de Crisenoy m'a passionné et servi de base pour la suite, je suis revenu à Avignon pour terminer ma licence. Un merci sincère aux différents enseignants-chercheurs de mon année de L3 Maths à Avignon pour la qualité de leurs cours qui m'ont bien préparé à suivre le Master de Mathématiques de Montpellier. Je pense particulièrement à Marc Arcostanzo, Thierry Barbot, Alberto Seeger, Philippe Bolle, Marie-Claude Arnaud et Mohammed Moussaoui. Pour le Master de Maths de Montpellier, je pense particulièrement au duo exceptionnel d'analyse fonctionnelle, variationnelle et convexe Eddy Attouch et Lionel Thibaut, à Ivan Babenko pour la topologie et géométrie différentielles, ainsi qu'à Paul-Emile Paradan, Cédric Bonnafé, Constantin Vernicos et Fabien Marche qui viennent compléter la liste des enseignants-chercheurs de l'IMAG que je souhaite remercier pour leurs enseignements.

Un immense merci à ma famille et amis proches, dont le soutien a été essentiel pour venir à bout de cette thèse et me remotiver dans les moments de creux. Un merci particulier à la relectrice attentive du manuscrit de thèse qui se reconnaîtra. Pour finir, merci à Jade d'être là au quotidien et pour ses remarques pertinentes concernant l'introduction de la thèse. Son soutien indéfectible a compté pour beaucoup dans l'aboutissement de cette expérience hors du commun.



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>1</b>
1.1	Le cadre de régularité faible de la métrique . . . . .	2
1.2	Stabilité par linéarisation et structure de sous-variété . . . . .	3
1.3	Les différentes structures de l'espace des données initiales . . . . .	3
1.4	Structure de la thèse . . . . .	4
1.5	La méthode de Bartnik . . . . .	5
	<b>Notations et conventions d'écriture</b>	<b>11</b>
<b>2</b>	<b>Rappels de géométrie et contexte physique</b>	<b>13</b>
2.1	Géométrie différentielle . . . . .	13
2.2	Géométrie pseudo-Riemannienne . . . . .	17
2.3	Relativité générale . . . . .	25
<b>3</b>	<b>Origine des équations de contrainte</b>	<b>31</b>
3.1	Hypersurface Riemannienne d'une variété Lorentzienne . . . . .	31
3.2	Décomposition 3 + 1 des équations d'Einstein du vide . . . . .	36
3.3	Equations de contrainte et problème de Cauchy . . . . .	40
3.4	Approche Hamiltonienne . . . . .	41
<b>I</b>	<b>Structure de variété de Hilbert des données initiales faiblement AH</b>	<b>45</b>
<b>4</b>	<b>Cadre général et analyse préliminaire</b>	<b>47</b>
4.1	Variété conformément compacte . . . . .	47
4.2	Espaces de Sobolev et de Hölder à poids . . . . .	50
4.3	Opérateurs elliptiques . . . . .	51
4.4	Inégalités fonctionnelles . . . . .	54
<b>5</b>	<b>Opérateur de courbure scalaire : le cas Time-symmetric</b>	<b>59</b>
5.1	Expression du linéarisé et de son adjoint . . . . .	63
5.2	L'opérateur $\mathring{T}$ , de type Hessienne . . . . .	65
5.3	Estimées elliptiques relatives à l'adjoint . . . . .	70
5.4	Trivialité du noyau de l'adjoint . . . . .	78
5.5	Structure de sous-variété . . . . .	80
<b>6</b>	<b>Opérateur de contrainte : le cas général</b>	<b>89</b>
6.1	Expression du linéarisé et de son adjoint . . . . .	93
6.2	L'opérateur de Killing $\mathring{S}$ . . . . .	97
6.3	Estimées elliptiques relatives à l'adjoint . . . . .	103
6.4	L'opérateur $\mathring{U}$ . . . . .	110
6.5	Trivialité du noyau de l'adjoint . . . . .	117
6.6	Structure de sous-variété . . . . .	119



<b>II</b>	<b>Masse d'une variété faiblement AH</b>	<b>125</b>
<b>7</b>	<b>Définition et propriétés de la masse</b>	<b>127</b>
7.1	Estimation d'une formule de trace . . . . .	127
7.2	Cadre d'étude . . . . .	129
7.3	Définition de la fonctionnelle masse . . . . .	131
7.4	Régularité . . . . .	133
7.5	Invariance géométrique . . . . .	136
7.6	La masse d'une variété faiblement AH . . . . .	140
<b>8</b>	<b>Hamiltonien et points critiques de la masse</b>	<b>143</b>
8.1	Hamiltonien . . . . .	143
8.2	Points critiques de la masse . . . . .	146
<b>A</b>	<b>Inégalités de Poincaré</b>	<b>151</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>159</b>

# Chapitre 1

## Introduction

L'étude des variétés asymptotiquement hyperboliques (AH) est relativement récente par rapport à celle des variétés asymptotiquement plates, appelées également asymptotiquement euclidiennes (AE). On peut trouver l'origine de l'engouement actuel pour l'étude de ces variétés dans la correspondance AdS/CFT (Anti de-Sitter/Conformal Field Theory). Cette théorie, à l'interface entre Physique théorique et Mathématiques, s'intéresse à l'interaction entre la géométrie des variétés conformément compactes et les invariants conformes des variétés compactes. L'étude mathématique a été initiée par les travaux de Charles Fefferman et Robin Graham [26] qui cherchaient à obtenir de nouveaux invariants conformes en utilisant une correspondance entre les métriques d'Einstein asymptotiquement hyperboliques et leur bord conforme (à l'infini). Plus tard, Juan Maldacena [42], Witten et d'autres ont fait le pont entre les deux disciplines via cette correspondance. On pourra consulter [7] pour une vue d'ensemble du sujet. Les variétés asymptotiquement hyperboliques, à l'instar des variétés asymptotiquement plates, constituent également de très bons candidats comme solutions non compactes des équations d'Einstein, voir par exemple [3]. Cela justifie leur étude approfondie en relativité générale.

Le procédé consistant à faire la décomposition  $3+1$  des équations d'Einstein vérifiées par un espace-temps  $\mathcal{N}$  est appelé formulation des données initiales (ou formulation de Cauchy) de la relativité générale. Les équations de contrainte sont une condition nécessaire que doit satisfaire un triplet  $(\mathcal{M}, g, K)$  de données initiales, où  $\mathcal{M}$  est une variété,  $g$  une métrique Riemannienne et  $K$  un 2-tenseur symétrique, pour que  $\mathcal{M}$  puisse être plongé dans  $\mathcal{N}$  avec la métrique induite  $g$  et la seconde forme fondamentale  $K$ . Le théorème d'existence et unicité d'Yvonne Choquet-Bruhat pour le problème de Cauchy affirme que les équations de contraintes sont également une condition suffisante pour pouvoir "reconstruire" un espace-temps, interprété comme l'évolution temporelle des données initiales.

La méthode la plus utilisée pour construire des solutions des équations de contrainte est certainement la méthode conforme, initiée par André Lichnerowicz et développée par Yvonne Choquet-Bruhat et James York. On pourra lire avec intérêt l'excellent article de revue de Robert Bartnik et Jim Isenberg [6] dans lequel elle est décrite de manière claire. La méthode conforme est utilisée pour construire des solutions, principalement à courbure moyenne constante (CMC). Ceci est fait pour des équations d'Einstein dans le cas compact dans [9], [37] et le cas asymptotiquement plat [12]. Le cadre des équations couplées Einstein-champ scalaire est traité dans le cas compact [14], [32] et asymptotiquement plat [13].

Le cadre d'étude, les motivations de ce travail de thèse et le contexte dans lequel il s'inscrit sont spécifiés dans les sections suivantes.

## 1.1 Le cadre de régularité faible de la métrique

Pour les problèmes d'équations aux dérivées partielles, les espaces de Sobolev  $W^{k,p}$  sont particulièrement appropriés et leur version à poids  $W_\delta^{k,p}$  permet de prendre en compte le comportement à l'infini des solutions considérées. En effet, nous travaillons sur des variétés non compactes et plusieurs quantités géométriques auxquelles nous allons nous intéresser sont des intégrales de fonctions. Ces fonctions doivent avoir un comportement contrôlé à l'infini, formalisé par leur paramètre  $\delta$ , pour que ces intégrales aient un sens. L'autre raison de notre intérêt pour les espaces de Sobolev (à poids) est que pour  $p = 2$ , les espaces  $H^s := W^{s,2}$  sont des espaces de Hilbert, ce qui fait d'eux de très bons candidats pour obtenir une structure de Hilbert sur l'espace des solutions des équations de contrainte. C'est pourquoi nous travaillerons essentiellement dans ces espaces, dont la définition précise est donnée plus loin.

Une solution des équations de contrainte est un couple de données initiales  $(g, K)$  (ou  $(g, \pi)$ ), où  $g$  est une métrique Riemannienne,  $K$  un 2-tenseur symétrique (forme fondamentale) et  $\pi$  est le moment conjugué de  $K$ . Nous désignerons par  $\mathcal{F}$  l'ensemble des données initiales, appelé espace de phase et on distinguera le sous-ensemble  $\mathcal{C}$  de  $\mathcal{F}$  constitué des données initiales solutions des équations de contrainte.

Notre étude intervient dans le contexte de faible régularité de ces données initiales. En effet, la seule exigence vis à vis de la métrique (resp. seconde forme fondamentale) est d'être asymptotique au modèle hyperbolique avec la différence des métriques (resp. secondes formes fondamentales) dans  $W_\delta^{2,2}$  (resp.  $W_\delta^{1,2}$ ), où  $\delta$  est le taux de décroissance à l'infini. Les différents tenseurs de courbures étant construits à partir de la métrique et ses dérivées premières et secondes, cela implique que la différence des courbures (Riemann, Ricci ou Scalaire) est dans  $L_\delta^2$ . Ceci est précisément le critère donné comme minimal à vérifier pour pouvoir reconstruire une solution des équations d'Einstein, d'après la conjecture de courbure  $L^2$  bornée, démontrée par Sergiu Klainerman, Igor Rodnianski et Jérémie Szeftel en 2013 dans une série d'articles dont [38] est le principal. On pourra également consulter [39] pour une vue d'ensemble de cette conjecture. Ce critère de régularité minimal est un argument décisif en faveur des espaces de Sobolev à poids comme candidats idéaux pour définir un espace de phase muni d'une structure de Hilbert. Le fait que  $(g, \pi) \in H^2(\mathcal{M}) \times H^1(\mathcal{M})$  soit précisément le critère optimal (le plus faible) de régularité des données initiales pour que le problème de Cauchy soit bien posé (théorème d'existence et d'unicité valable) est une très forte motivation pour donner précisément à nos données initiales ces conditions de régularité. Noter que le fait de demander que les dérivées secondes de  $g$  ainsi que la dérivée première de  $K$  (ou  $\pi$ ) soient intégrables semble raisonnable. En effet, les équations de contrainte font intervenir des opérateurs différentiels d'ordre deux pour  $g$  (courbure scalaire) et d'ordre un pour  $\pi$ .

La preuve de la conjecture de courbure  $L^2$  bornée permet également d'établir l'équivalence entre structure de sous-variété et stabilité par linéarisation. En effet, la trop faible régularité de  $(g, \pi)$  interdisait jusqu'alors l'utilisation des théorèmes d'existence et d'unicité obtenus pour des régularités supérieures, pour montrer qu'une solution des équations de contrainte linéarisées correspondait bien à une solution des équations d'Einstein. Ainsi, en montrant la structure de sous-variété dans le cas asymptotiquement hyperbolique, on montre la stabilité par linéarisation, sous réserve que la conjecture de

courbure  $L^2$  bornée soit montrée dans le cas asymptotiquement hyperbolique. Bien que ce résultat n'ait été démontré à l'heure actuelle que pour une variété AE, il est fortement probable que le critère soit le même dans le cadre AH.

## 1.2 Stabilité par linéarisation et structure de sous-variété

Les équations d'Einstein linéarisées donnent l'évolution de la perturbation  $\delta\gamma$  de la métrique  $\gamma_0$  de l'espace-temps. On peut alors se demander si une perturbation, solution des équations linéarisées, correspond à une solution des équations non-linéaires d'origine. Une telle solution est appelée solution intégrable. Pour répondre à cette question de stabilité par linéarisation, le résultat fondamental d'existence local de Choquet-Bruhat affirme qu'une perturbation est intégrable si toutes les solutions des équations de contrainte linéarisées  $D\Phi(g, \pi)(h, p) = 0$  correspondent à des solutions des équations de contrainte  $\Phi(g, \pi) = 0$ . Ceci est équivalent au fait que  $\mathcal{C}$  soit une sous-variété de  $\mathcal{F}$ . Dans le cas compact, la question de la stabilité par linéarisation a été traitée dans les années 1970 par Fischer et Marsden [27], pour une régularité des données initiales bien supérieure (lisse), via un argument d'ellipticité de l'opérateur  $D\Phi(g, \pi)D\Phi(g, \pi)^*$ . Les équations de contrainte linéarisées étant plus faciles à résoudre que les équations de contrainte de départ, on comprend l'enjeu de montrer cette structure de sous-variété, qui vient justifier et rendre licite la résolution des équations linéarisées au lieu des non linéaires et l'équivalence de leurs solutions respectives.

## 1.3 Les différentes structures de l'espace des solutions des équations de contrainte

Il convient de différencier la structure de sous-variété que nous souhaitons obtenir pour l'ensemble des données initiales solutions des équations de contrainte, de la structure topologique Fréchet, Banach ou Hilbert, dépendante de la structure dont sont naturellement munis les espaces utilisés pour définir notre espace de phase. En dimension finie, nul besoin de faire de distinction entre les structures de Fréchet, Banach et Hilbert mais cela a de l'importance en dimension infinie. Certaines propriétés topologiques des espaces de Hilbert et certains résultats d'analyse fonctionnelle établis pour les espaces de Hilbert ne sont plus vrais dans le cas des espaces de Banach ou de Fréchet.

La structure de sous-variété de Fréchet dans le cas compact est un corollaire de la stabilité par linéarisation démontrée par Fischer-Marsden-Moncrief dans [29]. La perte de régularité inhérente à leur méthode les oblige à travailler avec des espaces de différentiabilité infinie, empêchant d'obtenir une structure plus fine (Banach ou Hilbert). Lars Andersson s'est quant à lui intéressé dans [1] au cas des variétés AE.

Concernant la structure de sous-variété de Banach, Piotr Chruściel et Erwann Delay ont traité simultanément dans l'article [18] le cas des variétés compactes avec et sans bord, conformément compactes et asymptotiquement plates sans bord intérieur. Leur méthode permet de remédier à la perte de régularité de la méthode de Fischer-Marsden-Moncrief, amenant à la structure de Banach en travaillant dans des espaces

de différentiabilité finie. Ils se servent des espaces de Hölder à poids pour obtenir leur structure de Banach globale et leur structure de Hilbert locale (au voisinage d'une solution). La perte de régularité inhérente aux opérateurs en jeu ne permet cependant pas de recoller les différents morceaux, et leur procédé de régularisation s'avère insuffisant pour obtenir la structure de Hilbert globale. Noter que leurs hypothèses de régularité sont supérieures à celles de la thèse. Par exemple,  $(g, \pi) \in W^4 \times W^3$  pour une structure Hilbert locale de type  $H^2 \times H^2$ .

Pour obtenir la structure de sous-variété de Hilbert globale, Robert Bartnik donne pour les données initiales asymptotiquement plates une méthode plus abstraite mais qui se révèle très efficace. Sa méthode, que nous souhaitons adapter dans le cas asymptotiquement hyperbolique, est expliquée en détail dans la section 1.5. Dans l'article [5], il démontre la structure de sous-variété de Hilbert pour l'ensemble des solutions des équations de contrainte associées aux équations d'Einstein du vide (sans terme de source). Le résultat a depuis été étendu, toujours dans le cadre asymptotiquement plat, aux équations d'Einstein-Yang-Mills par Stephen McCormick dans [44], et étudié sur les équations couplées Einstein-champ scalaire sans masse par Juhi H. Rai et Ravindra V. Saraykar dans [48]. Les deux articles suivent scrupuleusement la méthode de Bartnik pour étendre son résultat via le théorème des fonctions implicites et des espaces de Sobolev à poids.

Le cas des données initiales asymptotiquement hyperboliques solutions des équations de contrainte associées aux équations d'Einstein du vide est l'objet de cette thèse. La structure de sous-variété de Hilbert est prouvée dans l'article [23], conjointement avec Erwann Delay. C'est le début de ce genre d'étude en asymptotiquement hyperbolique, c'est pourquoi nous avons commencé par étudier les équations de champ les plus simples (sans source). Quelques perspectives possibles de la thèse pourraient être l'extension du résultat au système couplé Einstein-champ scalaire ou Einstein-Yang-Mills.

## 1.4 Structure de la thèse

Le chapitre 2 a pour but de fournir les rappels de géométrie et de relativité générale nécessaires à la mise en contexte de la thèse, aussi bien du point de vue du formalisme mathématique employé que de la théorie physique dans laquelle s'inscrit mon travail. Une fois ces rappels faits, on s'intéresse dans le chapitre 3 à l'origine des équations de contrainte afin de se familiariser avec l'objet central de cette thèse. En particulier, nous verrons dans la section 3.2 comment ces équations apparaissent naturellement lors de la décomposition "temps + espace" de l'espace-temps, appelée décomposition 3 + 1 de l'espace-temps.

La première partie de la thèse porte sur la structure de sous-variété de Hilbert de l'espace des données initiales asymptotiquement hyperboliques solutions des équations de contrainte pour les équations d'Einstein du vide. Le chapitre 4 introduit le cadre général de notre étude, les espaces fonctionnels dans lesquels nous travaillons, quelques résultats concernant les opérateurs elliptiques ainsi que les inégalités de base et résultats préliminaires. La partie I se divise ensuite en deux chapitres principaux : le chapitre 5 dans lequel on considère le cas totalement géodésique (seconde forme fondamentale nulle), appelé aussi Time-symmetric par la communauté scientifique anglophone, et

le chapitre 6 dans lequel le cas général est traité. Cette présentation est cohérente avec le travail effectué pendant cette thèse. En effet, mon travail de thèse a consisté en l'adaptation au cas asymptotiquement hyperbolique de l'article de Robert Bartnik [5], effectué dans le cadre asymptotiquement euclidien. Afin de bien comprendre les enjeux et les difficultés apparaissant dans le cas asymptotiquement hyperbolique, le problème a été simplifié dans un premier temps en ne considérant que le cas Time-symmetric, dans lequel les équations de contraintes se réduisent énormément, l'opérateur de contrainte  $\Phi$  étant dans ce cas la courbure scalaire plus la constante cosmologique. Cela écourte considérablement les expressions des opérateurs linéarisé  $D\Phi$  et adjoint  $D\Phi^*$  et les calculs d'estimées associés, mais a le mérite de conserver la difficulté associée au traitement du terme non linéaire qu'est la courbure scalaire, ce qui rend ce cas d'étude riche, quoique simplifié pour une première approche. Une fois ce cas traité et une connaissance des enjeux et des objets à manipuler plus étoffée, j'ai pu considérer dans un deuxième temps les équations de contraintes complètes avec seconde forme fondamentale, ce qui constitue le cas général.

La deuxième partie de mon travail de thèse, portant sur la masse d'une variété asymptotiquement hyperbolique, est exposée dans la partie II. Une fois la structure de sous-variété de Hilbert établie, on définit dans la section 7.3 dans le cas Time-symmetric une fonctionnelle masse d'une variété asymptotiquement hyperbolique. Cette définition, basée sur celle de Bartnik [5], est proche de celle donnée par Piotr Chruściel et Marc Herzlich dans [19], mais compatible avec nos conditions de faible régularité pour la métrique considérée. En effet, la fonctionnelle introduite dans [19] demande *a priori* trop de régularité pour être valable dans notre contexte mais nous montrons qu'elle est adaptable à nos hypothèses de faible régularité. Cela donne un argument en faveur de la définition de masse de type Chruściel-Herzlich par rapport à celle de Wang donnée antérieurement dans [50]. Cette dernière semble demander à la fois trop de régularité et un contrôle trop exigeant sur l'asymptotique pour être adaptable en faible régularité. On montre dans la section 7.4 que la fonctionnelle masse est lisse sur l'espace des données initiales solutions des équations de contraintes. L'invariance géométrique dans le cadre de faible régularité, objet de la section 7.5, n'est pas complètement prouvée et reste tributaire de la Conjecture 1. Cette dernière, analogue au Théorème 3.3 de [17] mais en faible régularité, stipule que les changements de cartes au voisinage de l'infini sont asymptotiques à une isométrie du modèle. Le chapitre 8 donne la définition de l'Hamiltonien classique, les motivations du besoin de régularisation de cette fonctionnelle et établit le lien entre points critiques de la masse et métriques statiques en servant des différentes définitions de l'Hamiltonien.

Ce travail de thèse étant basé sur la méthode de Bartnik, intéressons-nous en détail au principe de cette méthode afin de comprendre notamment en quoi elle est bien différente des approches antérieures pour montrer la structure de sous-variété de Hilbert globale.

## 1.5 La méthode de Bartnik

Le but de cette section est de décrire les différentes étapes de la méthode utilisée. Nous mettrons en lumière les différences fondamentales entre les cas hyperbolique et euclidien, les obstacles techniques inhérents à notre cadre d'étude et les modifications résultantes

pour pouvoir adapter sa méthode à notre cas. Cela permet enfin de comprendre la nécessité d'introduire de nouveaux opérateurs pour palier ces problèmes techniques et de motiver l'obtention des inégalités clefs pour conclure.

Pour ce qui est de la structure de sous-variété de Hilbert de  $\mathcal{C}$ , la preuve est basée sur le théorème suivant que l'on peut trouver dans [24]. C'est une conséquence du théorème des fonctions implicites et il constitue le résultat central sur lequel nous nous appuierons pour montrer que  $\mathcal{C} = \Phi^{-1}(\{0\})$  et plus généralement toute ligne de niveau de  $\Phi$  est une sous-variété de l'espace de phase  $\mathcal{F}$ , ensemble des données initiales asymptotiquement hyperboliques.

**Théorème 1:**

Soit  $f : X \rightarrow Y$  une application  $\mathcal{C}^1$  entre variétés de Banach. Fixons  $c \in Y$ . Si pour tout  $x \in K = f^{-1}(\{c\})$ , l'application  $Df(x) : X \rightarrow Y$  est surjective et son noyau possède un supplémentaire fermé, alors  $K$  est une sous-variété de  $X$ .

On souhaite appliquer ce théorème avec  $f = \Phi$  et  $x = (g, \pi) \in \Phi^{-1}(\{c\})$ . L'opérateur de contrainte  $\Phi$  est tel que

$$\begin{aligned} \Phi : \mathcal{F} &\rightarrow \mathcal{L}^* \\ (g, \pi) &\mapsto \Phi(g, \pi) \end{aligned}$$

où  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{L}^*$  sont des espaces de Hilbert définis au début du chapitre 6.

Cela explique notre étude de l'opérateur de contrainte linéarisé  $D\Phi(g, \pi)$  et permet de visualiser le lien entre structure de sous-variété et équations de contrainte linéarisées. On voit que pour prouver que  $\Phi^{-1}(\{c\})$  est une sous-variété de  $\mathcal{F}$ , il faut montrer que :

- $\Phi$  est une application (au moins)  $\mathcal{C}^1$ .
- $\ker D\Phi(g, \pi)$  possède un supplémentaire fermé.
- $D\Phi(g, \pi)$  est surjective.

Dans la Proposition 16, on montre que  $\Phi$  est une application lisse ( $\mathcal{C}^\infty$ ). De plus,  $D\Phi(g, \pi)$  étant borné sur  $\mathcal{F}$ , son noyau est fermé par continuité et admet un supplémentaire fermé, conséquence de la structure de Hilbert de  $\mathcal{F}$ . Il reste à montrer la surjectivité de  $D\Phi(g, \pi)$ . Via la définition de l'adjoint  $D\Phi(g, \pi)^*$  et la somme directe

$$\mathcal{L}^* = \overline{\text{Im } D\Phi(g, \pi)} \oplus \ker D\Phi(g, \pi)^*,$$

la surjectivité de  $D\Phi(g, \pi)$  est équivalente à montrer que :

- $\ker D\Phi(g, \pi)^*$  est trivial.
- $\text{Im } D\Phi$  est fermée.

Cela justifie notre intérêt pour l'opérateur adjoint, auquel les estimées de la section 6.3 sont consacrées. La trivialité du noyau de l'adjoint, montrée dans le Théorème 13, est l'objet de la section 6.5.

Remarque : le noyau de  $D\Phi(g, \pi)^*$  n'est pas forcément trivial sans contrainte de comportement asymptotique. La restriction de l'intervalle de poids autorisés pour définir notre espace de phase est faite de façon à rendre le noyau trivial. Nous dirons alors qu'il n'y a pas de vecteurs de Killing ou KID (pour Killing initial data) dont le comportement

asymptotique vérifie cette restriction. Nous reviendrons sur cette terminologie dans le chapitre 8.2 qui fait le lien entre les points critiques de la masse et les KID.

Concernant l'établissement de la trivialité du noyau, la partie délicate réside dans le fait de montrer que pour un vecteur  $\xi = (N, X)$  tel que  $D\Phi(g, \pi)^* \cdot \xi = 0$ , alors  $\xi = 0$  au voisinage de l'infini (bord conforme). C'est là qu'apparaît la différence fondamentale entre notre cas et celui de Bartnik qui considère comme métrique modèle la métrique euclidienne en dehors d'un compact. Par conséquent, la courbure de sa métrique modèle est nulle en dehors d'un compact et donc intégrable dans  $L^2_\delta$ . En ce qui nous concerne, nous avons choisi de travailler dans le contexte asymptotiquement hyperbolique le plus général possible et le cas où notre métrique est la métrique hyperbolique en dehors d'un compact n'est qu'un cas particulier de notre étude. La courbure de notre métrique modèle n'est dans tous les cas pas nulle en dehors d'un compact et donc pas intégrable. C'est la raison de la nécessité pour nous de donner la condition d'intégrabilité de courbure suivante<sup>1</sup> :

$$\text{Riem } \mathring{g}_{ijkl} - \mathring{g}_{il}\mathring{g}_{jk} + \mathring{g}_{ik}\mathring{g}_{jl} \in L^2_\delta.$$

Cette condition d'intégrabilité est automatiquement vérifiée pour le modèle de Bartnik, bien entendu sans le décalage dû à la courbure asymptotique non nulle. Dans  $D\Phi(g, \pi)^*$ , apparaissent deux opérateurs importants :

$$\begin{aligned} DR(g)^*N &:= \nabla\nabla N - (\Delta N)g - N \text{Ric}(g) \\ S(X)_{ij} &:= \frac{1}{2}(\nabla_i X_j + \nabla_j X_i). \end{aligned}$$

Pour conclure, nous avons besoin que sur un voisinage de l'infini la norme  $L^2$  (à poids) de  $DR(g)^*N$  contrôle la norme  $H^2$  de  $N$  et que la norme  $H^1$  de  $S(X)$  contrôle la norme  $H^2$  de  $X$  et ce, sans condition sur le bord intérieur du voisinage<sup>2</sup>. En AE, une double utilisation d'une inégalité de type Poincaré permet d'obtenir le contrôle souhaité. Dans notre contexte, les inégalités de type Poincaré ou Korn ne suffisent pas. Ceci motive la construction d'un opérateur  $T$  de type Hessienne pour contrôler  $N$

$$T(N) = \nabla\nabla N - N g,$$

et d'un opérateur  $U$ , relié à certaines dérivées premières de l'opérateur de Killing  $S$ , pour contrôler  $X$

$$U_{kji}(X) = \nabla_{kj}^2 X_i - g_{jk} X_i + g_{ik} X_j = \nabla_k S(X)_{ij} + \nabla_j S(X)_{ik} - \nabla_i S(X)_{jk} + X L^2_\delta.$$

L'estimée sur  $N$  se déduit de

$$T(N) - (\text{tr}_g T(N))g = DR^*(g)N + N L^2_\delta.$$

En effet, le contrôle de la norme  $H^2$  de  $N$  par la norme  $L^2$  de  $T(N)$  au voisinage de l'infini est obtenu dans la Proposition 8. Quant au contrôle de la norme  $H^2$  de  $X$  par la norme  $L^2$  de  $U(X)$  et  $S(X)$  au voisinage de l'infini, nous l'avons obtenu en deux temps,

---

1. On fait ici un abus de notation, en vigueur dans le reste de la thèse également. C'est en réalité la norme du tenseur, défini en coordonnées locales par l'expression suivante, qui est dans  $L^2_\delta$ .

2. Notons que le contrôle  $H^1$  de  $X$  par la norme  $L^2$  de  $S(X)$ , qui n'est autre qu'une inégalité de type Korn, n'est pas valable pour les conditions asymptotiques requises ici.



d'abord par un contrôle en norme  $H^1$  de  $X$ , établi dans la Proposition 22, complété par un contrôle en norme  $L^2$  de  $\nabla^2 X$  dans l'équation (6.100). Le travail effectué sur l'inégalité de Poincaré, qui n'a finalement pas été utilisé, est consigné dans l'appendice A pour de futures références.

Remarque importante : le poids de décroissance critique  $\delta = -n/2$ , apparaissant dans la Conjecture 1 et nécessaire pour avoir une masse invariante géométriquement, a conditionné notre étude sur la structure de sous-variété. Le but de définir une structure de sous-variété de Hilbert, en plus de résoudre la question de la stabilité par linéarisation, est de pouvoir définir sur cette sous-variété une fonctionnelle masse qui soit lisse. Il faut donc que cette structure soit valable pour des métriques dont la décroissance  $\delta$  appartient à un intervalle comprenant des valeurs inférieures au poids critique  $-n/2$ .

Pour montrer la surjectivité de  $D\Phi(g, \pi)$ , la méthode qu'utilise Bartnik est très astucieuse car relativement abstraite. Avant lui, la méthode consistait à construire un inverse à droite pour  $D\Phi(g, \pi)$ , naturellement donné par l'adjoint  $D\Phi(g, \pi)^*$ . On obtenait ainsi un opérateur  $D\Phi(g, \pi)D\Phi(g, \pi)^*$  elliptique pour lequel sont connus des résultats de propriétés Fredholm et d'isomorphisme, permettant de montrer la surjectivité de  $D\Phi(g, \pi)D\Phi(g, \pi)^*$  et donc celle de  $D\Phi(g, \pi)$ . Le problème majeur de cette technique est que le fait d'utiliser l'adjoint induit une perte de régularité puisque les coefficients de ce dernier font intervenir des dérivées de  $g$  et  $\pi$ . Ceci empêche d'avoir une structure de Hilbert globale car le recollement des sous-variétés de Hilbert locales est impossible. En effet, le voisinage d'une métrique régulière à l'ordre  $k+2$  est constitué de métriques seulement régulières à l'ordre  $k$ . Bartnik ne construit pas explicitement un inverse à droite pour  $D\Phi(g, \pi)$ , il montre seulement que l'image de  $D\Phi(g, \pi)$  est fermée. Il considère pour cela un opérateur  $F$  défini comme le linéarisé de  $\Phi$  pour des variations particulières des données initiales et se contente de montrer que l'image de  $F$  est fermée et de codimension finie. Les variations particulières considérées permettent de donner à l'opérateur  $F$  une forme elliptique ([20]), pour laquelle nous avons des propriétés Fredholm. Ainsi l'opérateur  $F$  n'a pas besoin d'être surjectif mais seulement surjectif à un espace de dimension finie près, et cela suffit pour conclure. Il nous faut alors montrer que  $\text{Im } F$  est fermée et possède un supplémentaire de dimension finie (donc fermé). La preuve de l'image fermée de  $F$  est faite dans le Théorème 16.

Considérons la projection canonique  $\pi$  (surjective) définie par :

$$\pi : \mathcal{L}^* \rightarrow \mathcal{L}^* / \text{Im } F =: \text{Coker } F.$$

$\mathcal{L}^*$  étant un espace de Hilbert, on a la somme directe suivante

$$\mathcal{L}^* = \text{Im } F \oplus (\text{Im } F)^\perp. \quad (1.1)$$

La restriction de l'application  $\pi$  à  $(\text{Im } F)^\perp$  est un isomorphisme. Puisque l'opérateur  $F$  satisfait

$$\text{Im } F \subset \text{Im } D\Phi(g, \pi) \subset \mathcal{L}^*,$$

en prenant l'intersection de (1.1) avec  $\text{Im } D\Phi(g, \pi)$ ,

$$\text{Im } D\Phi(g, \pi) = \text{Im } F \oplus ((\text{Im } F)^\perp \cap \text{Im } D\Phi(g, \pi)). \quad (1.2)$$

La dimension finie de  $(\text{Im } F)^\perp \simeq \text{Coker } F$  découle alors du Lemme 14 et de la dimension finie de  $\ker F^*$ , établie grâce au Théorème 17.

L'inclusion de  $W := (\text{Im } F)^\perp \cap \text{Im } D\Phi(g, \pi)$  dans  $(\text{Im } F)^\perp$  lui confère une dimension finie donc son caractère fermé.  $\text{Im } F$  étant également fermé, leur somme directe qui n'est autre que  $\text{Im } D\Phi(g, \pi)$  d'après (1.2), est fermée.

## Avant-propos

Dans cette thèse, j'ai travaillé en toute dimension  $n$  le plus souvent possible et sauf mention explicite contraire, les résultats présentés sont valables en toute dimension. Néanmoins, certaines démonstrations utilisent une inégalité de Sobolev qui contraint (fortement) la dimension de la variété à la dimension  $n = 3$ ; cela est alors précisé dans les résultats concernés.

Concernant les constantes dans les inégalités sur les normes, la constante  $c$  désigne en général une constante qui dépend de la métrique  $\mathring{g}$  et de  $\delta$  et son expression peut varier d'une ligne à l'autre d'une démonstration. La nature de la dépendance de la constante  $C$  sera quand à elle systématiquement précisée car elle dépendra d'autres paramètres.



# Notations et conventions d'écriture

Concernant les indices présents dans les notations tensorielles, on réservera les indices grecs aux tenseurs sur l'espace-temps  $\mathcal{N}$  de dimension  $n + 1$  et les indices prennent alors les valeurs comprises entre 0 et  $n$ . Quant aux indices latins, ils sont utilisés pour faire uniquement référence aux dimensions spatiales et concerneront les tenseurs sur l'hypersurface  $\mathcal{M}$  de dimension  $n$ . Ils prendront alors les valeurs de 1 à  $n$ . De plus, la convention de sommation d'Einstein est utilisée : si dans un monôme, un même indice apparaît deux fois, une fois covariant et une fois contravariant, alors la somme sur toutes les valeurs possibles de l'indice est sous-entendue et cet indice est dit muet.

Voici une liste des notations que nous utilisons :

- $I_n$  désigne la matrice identité de  $\mathbb{R}^n$ , dont les composantes dans une base orthonormée quelconque sont données par  $\delta_{ij}$ , où  $\delta$  est le symbole de Kronecker défini par

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}.$$

- Pour un système de coordonnées  $(x^i)_{1 \leq i \leq n}$ , on notera  $\partial_i$  l'opérateur de dérivation partielle par rapport à  $x^i$

$$\partial_i := \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

- L'opérateur dérivée partielle seconde sera désigné par

$$\partial_{ij}^2 := \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j}.$$

- Pour la dérivée covariante seconde, la même convention a lieu et

$$\nabla_{ij}^2 := \nabla_i \nabla_j.$$

- On notera  $D\Phi$  la matrice jacobienne de l'application  $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$D\Phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial \Phi^1}{\partial x^n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \Phi^n}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial \Phi^n}{\partial x^n} \end{pmatrix}.$$

- $\mathcal{C}^\infty(M)$  désigne l'ensemble des fonctions lisses sur  $M$  tandis que  $\mathcal{C}_c^\infty(M)$  (resp.  $\mathcal{C}_c^\infty(T^*M)$ ) désigne l'ensemble des fonctions lisses (resp. 1-formes) à support compact sur  $M$ .

- $\wedge$  désigne le produit extérieur.



# Chapitre 2

## Rappels de géométrie et contexte physique

Ce chapitre est dédié à l'introduction des notations et conventions de signes utilisées pour définir les notions mathématiques de base nécessaires à notre étude. La première section introduit quelques notions de base de géométrie différentielle et la suivante met l'accent sur les outils de géométrie pseudo-Riemannienne, contexte mathématique de notre travail. Ces deux sections s'appuient fortement sur le livre "Riemannian geometry" de S. Gallot, D. Hulin et J. Lafontaine [31] ainsi que sur l'appendice A du polycopié "An introduction to the Cauchy problem for the Einstein equations" de Piotr Chruściel. La dernière section donne une introduction au contexte de relativité générale et plus particulièrement à la notion de causalité.

### 2.1 Géométrie différentielle

Commençons par donner la définition d'une variété, espace général sur lequel nous allons mener notre étude.

#### Variété

Un espace topologique  $M$ , séparé au sens de Hausdorff, est appelé variété lisse de dimension  $n$  si :

- Il existe un recouvrement ouvert  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$  de  $M$  tel que pour tout  $\alpha \in \mathcal{A}$ , il existe un voisinage ouvert  $V_\alpha$  de  $\mathbb{R}^n$  et un homéomorphisme  $\phi_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha$ .
- Quels que soient  $\alpha$  et  $\beta \in \mathcal{A}$ , si  $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ , alors  $\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1}$  est un  $\mathcal{C}^\infty$ -difféomorphisme.

On appelle carte de  $M$  tout couple  $(U_\alpha, \phi_\alpha)$  et l'ensemble  $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$  constitue un atlas sur  $M$ . Une variété est dite "compacte" si elle est compacte en tant qu'espace topologique.

On dit que  $V_\alpha$  est un voisinage demi-ouvert de  $\mathbb{R}^n$  si  $V_\alpha = V'_\alpha \cap \{x \in \mathbb{R}^n / x_n \geq 0\}$  où  $V'_\alpha$  est un voisinage ouvert de  $\mathbb{R}^n$ .

Une variété  $M$  est appelée variété lisse de dimension  $n$  à bord si :

- Il existe un recouvrement ouvert  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$  de  $M$  tel que pour tout  $\alpha \in \mathcal{A}$ , il existe un voisinage ouvert ou demi-ouvert  $V_\alpha$  de  $\mathbb{R}^n$  et un homéomorphisme  $\phi_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha$ .
- Quels que soient  $\alpha$  et  $\beta \in \mathcal{A}$ , si  $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ , alors  $\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1}$  est un  $\mathcal{C}^\infty$ -difféomorphisme.

Le bord de  $M$  est défini par  $\partial M = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} \phi_\alpha^{-1}(V'_\alpha \cap \{x \in \mathbb{R}^n / x_n = 0\})$ .

## Chemins

Soit  $I$  un intervalle fermé borné de  $\mathbb{R}$ . Un chemin d'une variété  $M$  est une application  $\mathcal{C}^1$  par morceaux

$$\begin{aligned} \gamma : I &\longrightarrow M \\ t &\longmapsto \gamma(t) \end{aligned}$$

dont le support est noté  $\text{Supp}(\gamma) = \{\gamma(t), t \in I\}$ .

## Espace tangent

En tout point  $p$  de la variété  $M$ , on peut définir l'espace tangent à  $M$  au point considéré. Soit  $\mathcal{C} = \{\gamma : [-1, 1] \mapsto M / \gamma(0) = p \in M\}$  l'ensemble des chemins de  $M$  centrés en  $p$ . Soit  $(U, \phi)$  une carte de  $M$  avec  $p \in U$ .

L'espace tangent en  $p$  à  $M$ ,  $T_p M$ , est l'ensemble des classes d'équivalence dans  $\mathcal{C}$  pour la relation d'équivalence suivante :

$$\text{Soient } \gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{C}, \gamma_1 \sim \gamma_2 \iff \left( \frac{d(\phi \circ \gamma_1)(t)}{dt} \right)_{t=0} = \left( \frac{d(\phi \circ \gamma_2)(t)}{dt} \right)_{t=0}.$$

Cette définition ne dépend pas du choix de la carte (cf. [31], Def. 29). L'espace tangent à  $M$  au point  $p$  est l'espace vectoriel constitué des tangentes aux chemins de  $M$  au point  $p$ . Il est de même dimension que  $M$ . L'ensemble  $TM = \{T_p M, p \in M\}$  est appelé fibré tangent de  $M$ .

## Champs de vecteurs

Un champ de vecteurs de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $M$  est une application qui associe à tout point  $p$  de  $M$  un vecteur au dessus de  $p$  dans  $T_p M$ , de façon  $\mathcal{C}^\infty$ . C'est une section lisse du fibré tangent  $TM$ . L'espace vectoriel des champs de vecteurs sur  $M$  est noté  $\Gamma(TM)$ . On peut identifier les champs de vecteurs à des opérateurs de dérivation partielle du premier ordre agissant sur les fonctions  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ . Dans le système de coordonnées  $\{x^i\}$ , une base de  $T_p M$  est formée des vecteurs  $\{\partial_i\}_{1 \leq i \leq n}$  et on peut généralement exprimer un champ de vecteur  $X(p) = X^i(p) \partial_i$  où les  $X^i$  sont des fonctions  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $M$ . L'action de  $X$  sur une fonction  $f$  est notée  $X(f)$  ou  $X.f$  et donnée par  $X(f) := X^i \partial_i f$ .

Le crochet de Lie de deux champs de vecteurs  $X$  et  $Y$ , noté  $[X, Y]$ , est le champ de vecteurs défini par

$$[X, Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f)).$$

En coordonnées locales,

$$[X, Y](f) = X^i \partial_i (Y^j \partial_j f) - Y^i \partial_i (X^j \partial_j f) = (X^i \partial_i Y^j - Y^i \partial_i X^j) \partial_j f.$$

## Espace cotangent et 1-formes différentielles

L'ensemble des formes linéaires sur  $T_p M$  est appelé espace cotangent, dual algébrique de  $T_p M$  et noté  $T_p^* M$ . Une 1-forme différentielle de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $M$  est une application

qui associe à tout point  $p$  de  $M$  une forme linéaire sur  $T_p M$ , de façon  $\mathcal{C}^\infty$ . C'est une section lisse du fibré cotangent  $T^*M = \{T_p^*M, p \in M\}$  et on note  $\Omega M := \Gamma(T^*M)$  l'espace vectoriel des 1-formes différentielles sur  $M$ . Dans le système de coordonnées  $\{x^i\}$ , une base de ces 1-formes différentielles est  $\{dx^i\}_{1 \leq i \leq n}$ , base duale de  $\{\partial_i\}_{1 \leq i \leq n}$  et on peut généralement exprimer une 1-forme différentielle  $\alpha(p) = \alpha_i(p) dx^i$  où les  $\alpha_i$  sont des fonctions  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $M$ . On définit le crochet de dualité, action d'une 1-forme  $\alpha$  sur un vecteur  $X$ , par

$$\langle \alpha, X \rangle := \alpha(X).$$

Les deux bases sont reliées par la relation

$$dx^i(\partial_j) := \delta_j^i,$$

où  $\delta$  désigne le symbole de Kronecker.

## Tenseurs

Soient  $\alpha$  et  $\beta$  deux 1-formes sur  $TM$ . Leur produit tensoriel est l'application bilinéaire définie par la formule

$$(\alpha \otimes \beta)(X, Y) := \alpha(X)\beta(Y)$$

On notera l'exemple important :  $(dx^i \otimes dx^j)(X, Y) = dx^i(X)dx^j(Y) = X^i Y^j$ .

Le produit tensoriel anti-symétrisé

$$dx^i \wedge dx^j = \frac{1}{2}(dx^i \otimes dx^j - dx^j \otimes dx^i)$$

est une base des formes bilinéaires anti-symétriques sur  $TM$ .

Soient  $X$  et  $Y$  deux champs de vecteurs sur  $M$ . Leur produit tensoriel est l'application bilinéaire définie par la formule

$$(X \otimes Y)(\alpha, \beta) := \alpha(X)\beta(Y),$$

en posant  $X(\alpha) := \alpha(X)$ . On notera l'exemple important :  $(\partial_i \otimes \partial_j)(\alpha, \beta) = \alpha_i \beta_j$ .

Le produit tensoriel de deux 1-formes (champs de tenseurs de valence  $(0, 1)$ ) ou de deux champs de vecteur (champs de tenseurs de valence  $(1, 0)$ ) permet d'obtenir des champs de tenseurs d'ordre deux, et le procédé se généralise pour obtenir des champs de tenseurs d'ordre aussi grand que l'on veut. On peut même obtenir des champs de tenseurs mixtes de valence  $(1, 1)$  en faisant le produit tensoriel d'une 1-forme et d'un champs de vecteurs, défini comme

$$(X \otimes \alpha)(\beta, Y) := X(\beta)\alpha(Y) = \beta(X)\alpha(Y).$$

Par exemple,

$$(\partial_i \otimes dx^j)(\beta, Y) := \beta_i Y^j.$$

Là encore le procédé se généralise facilement à des champs de tenseurs d'ordre  $r + s$  et de valence  $(r, s)$ , dits  $r$  fois contravariant et  $s$  fois covariant, obtenus en faisant le produit tensoriel de  $r$   $(1, 0)$ -tenseurs et  $s$   $(0, 1)$ -tenseurs. Bien entendu, tous les champs



de tenseurs d'ordre  $r + s$  ne sont pas obtenus par ce procédé. Par abus de langage et afin d'alléger les notations, nous utiliserons dans la suite de la thèse le terme de tenseur en sous-entendant champ de tenseurs.

On notera  $(\otimes^r T_p M) = \underbrace{T_p M \otimes \cdots \otimes T_p M}_{r \text{ fois}}$  et  $(\otimes^s T_p^* M) = \underbrace{T_p^* M \otimes \cdots \otimes T_p^* M}_{s \text{ fois}}$ .

Un  $(r, s)$ -tenseur  $R$  est donc une section lisse du fibré  $T_s^r M := (\otimes^r T M) \otimes (\otimes^s T^* M)$ , un champ de formes multilinéaires

$$p \in M \longmapsto R_p : \underbrace{T_p M \times \cdots \times T_p M}_{s \text{ fois}} \times \underbrace{T_p^* M \times \cdots \times T_p^* M}_{r \text{ fois}} \longrightarrow \mathbb{R}.$$

La multilinéarité pour les tenseurs est comprise comme la linéarité par rapport à chaque variable, pour l'addition et la multiplication par une fonction. Notons que l'on peut également obtenir des tenseurs de valence  $(a + c, b + d)$  en faisant le produit tensoriel de deux tenseurs de valences respectives  $(a, b)$  et  $(c, d)$ .

Les tenseurs sont caractérisés par leur invariance par rapport au système de coordonnées dans lequel ils sont exprimés :

Soient  $(\Omega, \phi)$  et  $(\tilde{\Omega}, \psi)$  deux cartes compatibles de la variété  $M$  et  $p \in \Omega \cap \tilde{\Omega} \subset M$ .

La fonction de transition

$$\Phi = \psi \circ \phi^{-1} : \phi(\Omega \cap \tilde{\Omega}) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \psi(\Omega \cap \tilde{\Omega}) \subset \mathbb{R}^n$$

étant un difféomorphisme, on note  $\Psi$  son inverse. Les vecteurs se transforment comme suit sous l'action de  $\Phi$  :

$$\begin{aligned} D\Phi(\phi(p)) : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ V &\longmapsto \tilde{V} = D\Phi(\phi(p)) V \end{aligned}$$

Les éléments de  $(\mathbb{R}^n)^*$ , formes linéaires sur  $\mathbb{R}^n$ , se transforment quant à eux comme ceci sous l'action de  $\Psi$  :

$$\begin{aligned} D\Psi(\psi(p)) : (\mathbb{R}^n)^* &\longrightarrow (\mathbb{R}^n)^* \\ \omega &\longmapsto \tilde{\omega} = \omega D\Psi(\psi(p)) \end{aligned}$$

La propriété tensorielle de conservation par changement de coordonnées (sous l'action de  $\Phi$ ) est donc traduite par la relation suivante en coordonnées locales :

$$R^{i_1 \cdots i_r}_{j_1 \cdots j_s} = \tilde{R}^{m_1 \cdots m_r}_{k_1 \cdots k_s} \partial_{j_1} \Phi^{k_1} \cdots \partial_{j_s} \Phi^{k_s} \partial_{m_1} \Psi^{i_1} \cdots \partial_{m_r} \Psi^{i_r},$$

où  $R$  est considéré au point  $\phi(p)$  et  $\tilde{R}$  au point  $\psi(p)$ .

### Contraction tensorielle

Les contractions tensorielles  $c_{i,j}$  sont les applications linéaires

$$c_{i,j} : (\otimes^{(r+1)} T_p M) \otimes (\otimes^{(s+1)} T_p^* M) \rightarrow (\otimes^r T_p M) \otimes (\otimes^s T_p^* M),$$

définies pour tous  $X_1, \dots, X_s \in T_p M$  et  $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in T_p^* M$  par

$$\begin{aligned} & c_{i,j}(X_1 \otimes \dots \otimes X_s \otimes \alpha_1 \otimes \dots \otimes \alpha_r) \\ &= \alpha_j(X_i) X_1 \otimes \dots \otimes \hat{X}_i \otimes \dots \otimes X_s \otimes \alpha_1 \otimes \dots \otimes \hat{\alpha}_j \otimes \dots \otimes \alpha_r \quad . \end{aligned}$$

Soit  $S$  un  $(r, s)$ -tenseur dont l'expression en coordonnées locales est  $S^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s}$ . Le tenseur  $c_{i_p, j_q}(S)$  est un  $(r-1, s-1)$ -tenseur et a pour expression

$$S^{i_1 \dots i_{p-1} \nu i_{p+1} \dots i_r}_{j_1 \dots j_{q-1} \nu j_{q+1} \dots j_s}$$

### Application linéaire tangente et Pull-back d'un tenseur

Soit  $\phi : M \rightarrow N$  une application lisse entre deux variétés. L'application linéaire tangente  $T\phi$  est définie comme

$$T\phi : TM \rightarrow TN.$$

En tout point  $p \in M$ ,  $T_p\phi$  associe à un vecteur de  $T_p M$  un vecteur de  $T_{\phi(p)} N$ .

Soit  $S$  un  $(0, s)$ -tenseur sur  $N$ , le pull-back de  $S$  par  $\phi$ , noté  $\phi^* S$  est le  $(0, s)$ -tenseur sur  $M$  défini pour tous  $X_1, \dots, X_s \in T_p M$  par

$$(\phi^* S)_p(X_1, \dots, X_s) = S_{\phi(p)}(T_p\phi.X_1, \dots, T_p\phi.X_s).$$

Le pull-back vérifie la propriété suivante : Si  $\psi : N \rightarrow P$  est une autre application lisse entre les variétés  $N$  et  $P$ , alors

$$(\psi \circ \phi)^* = \phi^* \circ \psi^*.$$

## 2.2 Géométrie pseudo-Riemannienne

De façon générale, une forme bilinéaire  $g$  s'écrit en coordonnées locales  $g = g_{ij} dx^i \otimes dx^j$ . On a alors

$$g(X, Y) = (g_{ij} dx^i \otimes dx^j)(X, Y) = g_{ij} dx^i(X) dx^j(Y) = g_{ij} X^i Y^j.$$

Lorsque  $M$  est une variété  $n$ -dimensionnelle, la forme bilinéaire  $g$  sur  $TM$  est un tenseur de valence  $(0, 2)$  et  $g_{ij}$  peut être représentée en coordonnées locales par une matrice carrée de taille  $n$ . On s'intéressera particulièrement aux formes bilinéaires symétriques sur  $TM$ , pour lesquelles

$$g(X, Y) = g(Y, X) \quad \text{ou} \quad g_{ij} = g_{ji}$$

et on notera dans ce cas

$$g = g_{ij} dx^i dx^j$$

Si de plus, le déterminant de la matrice  $g_{ij}$  est non nul, on parle alors de forme bilinéaire symétrique non dégénérée. On peut dans ce cas définir la signature de sa forme quadratique associée en utilisant la loi d'inertie de Sylvester qui donne en chaque point l'existence d'une base dans laquelle la matrice  $g_{ij}$  est diagonale avec uniquement des coefficients au carré précédés de signes  $+$  ou  $-$ . Le nombre de signes  $+$  et  $-$  est indépendant de la base choisie. La signature de  $g$  est alors  $(p, q)$  où  $p$  (resp.  $q$ ) est le nombre de  $-$  (resp.  $+$ ) et  $p + q = n$ . On trouve parfois la convention inverse pour l'ordre de  $p$  et  $q$  dans la définition de la signature.

## Métrie Riemannienne

Une métrique Riemannienne  $g$  sur  $M$  est une section lisse et définie positive du fibré  $S^2T^*M$  des 2-formes bilinéaires symétriques sur  $M$ . C'est un champ de  $(0, 2)$ -tenseurs symétriques de signature  $(0, n)$ , notée également  $(+, \dots, +)$ . À chaque point  $p$  de  $M$ , la métrique associe une forme bilinéaire symétrique définie positive sur  $T_pM$ , de façon  $\mathcal{C}^\infty$ . On peut alors voir  $g$  comme un champ de produits scalaires sur  $TM$  et définir une norme associée,

$$\begin{aligned} p \in M &\longmapsto g_p : T_pM \times T_pM \longrightarrow \mathbb{R} \\ (X, Y) &\longmapsto g_p(X, Y) := \langle X, Y \rangle_g \end{aligned}$$

avec

$$\langle X, Y \rangle_{g;p} = g_{ij}(p)X^i(p)Y^j(p) \quad \text{et} \quad |X|_{g;p}^2 := g_{ij}(p)X^i(p)X^j(p)$$

Le point  $p$  étant sous-entendu la plupart du temps, on ne le fera plus apparaître dans les notations afin de les alléger.

## Métrie Lorentzienne

De manière générale, une métrique qui associe à chaque point  $p \in M$  une forme bilinéaire sur  $T_pM$  dont la forme quadratique associée à une signature  $(p, q)$  avec  $p \neq 0$  et  $p+q = n$  est appelée métrique pseudo-Riemannienne et dans les cas particuliers où  $p$  ou  $q$  égalent 1, on parle de métrique Lorentzienne, de signatures respectives  $(-, +, \dots, +)$  et  $(+, -, \dots, -)$ .

Contrairement à une métrique Riemannienne (définie positive) pour laquelle la norme  $g_{ij}X^iX^j$  de tout vecteur  $X$  est positive ou nulle, on ne peut pas définir de norme pour une métrique Lorentzienne (et plus généralement une métrique pseudo-Riemannienne) car le nombre  $g_{ij}X^iY^j$  peut être négatif compte tenu du caractère non défini positif de la métrique. On parlera dans ce cas de pseudo-norme, qui peut se révéler négative pour certains vecteurs. Sur une variété Lorentzienne de signature  $(-, +, \dots, +)$ , on distingue trois types de vecteurs :

- Les vecteurs  $X$  de genre temps tels que  $g_{ij}X^iX^j < 0$ .
- Les vecteurs  $X$  isotropes (ou de genre lumière) tels que  $g_{ij}X^iX^j = 0$ .
- Les vecteurs  $X$  de genre espace tels que  $g_{ij}X^iX^j > 0$ .

Remarque : Dans le cas Lorentzien, il existe donc des vecteurs isotropes non nuls, ce qui est impossible dans le cas d'une métrique Riemannienne. Dans la suite de la thèse, on appelle variété Riemannienne (resp. Lorentzienne) le couple  $(M, g)$  où  $M$  est une variété munie d'une métrique Riemannienne (resp. Lorentzienne)  $g$ .

## Espace de Minkowski

L'exemple le plus courant de variété Lorentzienne est l'espace de Minkowski  $\mathbb{R}^{1,3}$ , théâtre de la théorie de la relativité restreinte. C'est l'équivalent de l'espace euclidien (qui a une métrique riemannienne) avec une métrique Lorentzienne dans la mesure où celui-ci est l'espace plat de référence pour les variétés de dimension 3+1 (pour symboliser la différence entre la dimension temporelle et les 3 dimensions spatiales). Plus précisément, l'espace de Minkowski est un espace affine pseudo-euclidien de dimension

4 qui modélise l'espace-temps de la relativité restreinte. C'est la donnée d'un point origine et d'un espace vectoriel de dimension 4 dans lequel on introduit une métrique Lorentzienne. La pseudo-norme d'un vecteur  $u = (u_0, u_1, u_2, u_3)$  de  $\mathbb{R}^{1,3}$  est alors définie par

$$\eta(u, u) = -u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + u_3^2,$$

où  $\eta$  est la matrice associée à la métrique de Minkowski dans la base orthogonale ci-dessus

$$\eta = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

### Remonter et abaisser les indices : les isomorphismes musicaux

Dans le cas où la métrique  $\gamma$  est non dégénérée, son inverse existe et  $\gamma$  induit un isomorphisme

$$\begin{aligned} \flat : T_p M &\rightarrow T_p^* M \\ X &\mapsto X_\flat \end{aligned}$$

défini par

$$X_\flat(Y) := \gamma(X, Y).$$

En notation indicielle,  $X_\flat = \gamma_{\delta\nu} X^\nu$ . Ce procédé est appelé abaissement de l'indice. L'inverse de  $\flat$  est

$$\begin{aligned} \sharp : T_p^* M &\rightarrow T_p M \\ \alpha &\mapsto \alpha^\sharp \end{aligned}$$

défini par

$$\alpha(X) := \gamma(\alpha^\sharp, X).$$

En notation indicielle,

$$\alpha^\varepsilon = \gamma^{\varepsilon\mu} \alpha_\mu,$$

où  $(\gamma^{\alpha\beta})$  est la matrice inverse de  $(\gamma_{\alpha\beta})$ , reliée à la matrice de  $\gamma$  par

$$\gamma^{\alpha\nu} \gamma_{\nu\beta} = \delta^\alpha_\beta.$$

Ce procédé est quant à lui appelé remontée de l'indice. Ces deux procédés se généralisent aisément pour abaisser ou remonter plusieurs indices d'un tenseur d'ordre supérieur en utilisant respectivement  $\gamma$  et  $\gamma^{-1}$ .

Ces isomorphismes montrent que toutes les versions de valence  $(a, b)$ , avec  $a + b = r$ , d'un tenseur  $S$  d'ordre  $r$  fixé sont isomorphes et on ne fera plus la distinction entre ces différentes versions par la suite. Notons qu'un  $(a, b)$ -tenseur  $T$  agit sur tout  $(b, a)$ -tenseur  $S$  par contraction totale de sorte d'obtenir une fonction. C'est la généralisation du crochet de dualité pour les tenseurs d'ordre supérieur à un.

### Trace d'un 2-tenseur et Laplacien

Soit  $T$  un 2-tenseur. On appelle trace de  $T$  sur  $\gamma$  la fonction  $\text{tr}_\gamma T$  dont l'expression en coordonnées locales, suivant la valence de  $T$ , est la suivante

$$\text{tr}_\gamma T = \gamma^{\mu\nu} T_{\nu\mu} = \gamma_{\mu\nu} T^{\nu\mu} = \gamma_\mu^\nu T_\nu^\mu = \gamma^\mu_\nu T^\nu_\mu = T^\mu_\mu = T_\mu^\mu.$$

On définit le Laplacien d'une fonction  $N$ , pour une métrique pseudo-Riemannienne  $\gamma$

$$\Delta_\gamma N := \gamma^{\alpha\beta} \nabla_{\beta\alpha}^2 N := \nabla^\alpha \nabla_\alpha N = \nabla_\alpha \nabla^\alpha N.$$

### Pseudo-norme tensorielle d'un tenseur

D'une manière analogue à celle utilisée pour définir la norme (resp. pseudo-norme) d'un vecteur  $X$  sur une variété Riemannienne (reps. Lorentzienne), on peut définir sur une variété pseudo-Riemannienne  $(\nabla, \gamma)$  la pseudo-norme d'un  $(r, s)$ -tenseur, dont l'expression en coordonnées locales est  $S^{i_1, \dots, i_r}_{j_1, \dots, j_s}$ , à l'aide de la métrique  $\gamma_{\alpha\beta}$  et son inverse  $\gamma^{\alpha\beta}$

$$|S|_\gamma^2 := \gamma_{k_1 i_1} \dots \gamma_{k_r i_r} \gamma^{l_1 j_1} \dots \gamma^{l_s j_s} S^{k_1 \dots k_r}_{l_1 \dots l_s} S^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s}.$$

La notation  $|S|_{\gamma, x}^2$  permet de préciser le point en lequel est considérée la norme.

### $k$ -formes différentielles

À partir des 1-formes différentielles, on peut former grâce à l'algèbre extérieure, des  $k$ -formes différentielles qui associent à tout point  $p$  de  $M$  des formes  $k$ -linéaires alternées sur  $T_p M$ . Une  $k$ -forme différentielle sur  $M$  est une section lisse du fibré  $\Lambda^k T^* M$  des formes  $k$ -linéaires alternées sur  $M$  et on note  $\Omega^k M = \Gamma(\Lambda^k T^* M)$  l'espace vectoriel des  $k$ -formes différentielles sur  $M$ . Si  $T_p M$  est de dimension  $n$  et que l'on fixe un système de coordonnées locales  $\{x^i\}_{1 \leq i \leq n}$ , on peut exprimer généralement une  $k$ -forme différentielle par

$$x \longmapsto \omega(x) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \omega_{i_1 \dots i_k}(x) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$$

où  $\{dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}, 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n\}$  forme une base des formes  $k$ -linéaires alternées sur  $T_p M$ .

### Mesure de volume d'une variété pseudo-Riemannienne

Soit  $(M, g)$  une variété pseudo-Riemannienne orientée de dimension  $n$ . On peut définir une mesure de volume sur  $M$  relative à la métrique  $g$  et notée  $d\mu_g$ . c'est la  $n$ -forme différentielle non nulle ayant la forme suivante, dans le système de coordonnées  $\{x^i\}$  compatible avec l'orientation de  $M$  :

$$d\mu_g = \sqrt{|\det(g)|} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n.$$

## Dérivation sur une variété pseudo-Riemannienne

### Dérivée covariante d'un champ de vecteurs

Soit  $(N, \gamma)$  une variété pseudo-Riemannienne. Une connexion, ou dérivée covariante, permet d'introduire sur  $N$  une notion de dérivée aux propriétés tensorielles. Une connexion sur  $TN$  est une application qui permet de dériver les fonctions, les champs de vecteurs et plus généralement les tenseurs de valence quelconque.

$$\begin{aligned} D : \Gamma(TN) \times \Gamma(TN) &\longrightarrow \Gamma(TN) \\ (X, Y) &\longmapsto D_X Y \end{aligned}$$

telle que

–  $D_X Y$  est linéaire par addition pour  $X$  et  $Y$ ,

$$\forall X, Y, Z \in \Gamma(TN), D_{X+Z}(Y) = D_X(Y) + D_Z(Y) \text{ et } D_X(Y+Z) = D_X(Y) + D_X(Z).$$

–  $D_X Y$  est linéaire par multiplication par une fonction pour  $X$ ,

$$\forall f \in \mathcal{C}^\infty(N), \forall X, Y \in \Gamma(TN), D_{fX} Y = f D_X Y.$$

–  $D_X Y$  satisfait la règle de Leibniz concernant le produit par une fonction de  $Y$ ,

$$\forall f \in \mathcal{C}^\infty(N), \forall X, Y \in \Gamma(TN), D_X(fY) = (X.f)Y + f D_X Y.$$

En particulier, la dérivée covariante d'une fonction est donnée par  $D_X f = X.f$ .

Une connexion est dite sans torsion lorsque  $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$ ,

$$D_X Y - D_Y X = [X, Y],$$

où  $[X, Y]$  est le crochet de Lie des champs de vecteurs  $X$  et  $Y$ .

On dit qu'une connexion est compatible avec la métrique lorsque

$$\forall X, Y, Z \in \Gamma(TN), X.g(Y, Z) = g(D_X Y, Z) + g(Y, D_X Z).$$

**Théorème 2:** Connexion de Levi-Civita, [31]

Soit  $(N, \gamma)$  une variété pseudo-Riemannienne. Il existe une unique connexion sans torsion compatible avec la métrique  $\gamma$ , appelée connexion de Levi-Civita associée à la métrique  $\gamma$ .

Ce théorème est une conséquence du caractère non dégénéré de la métrique pseudo-Riemannienne  $\gamma$ . Dans la suite de la thèse, toutes les connexions considérées sur les variétés Lorentziennes ou Riemanniennes seront des connexions de Levi-Civita et on ne le précisera plus.

### Symboles de Christoffel

La dérivée covariante associée à deux champs de vecteurs  $X = X^i \partial_i$  et  $Y = Y^j \partial_j$  un champ de vecteurs  $D_X Y$ , défini comme la dérivée de  $Y$  dans la direction  $X$ . Compte tenu des propriétés de  $D$ , il suffit de connaître l'expression de  $D_{\partial_i} \partial_j$  pour en déduire l'expression de  $D_X Y$ .  $D_{\partial_i} \partial_j$  est un champ de vecteur dont on note  $\Gamma_{ij}^k$  les composantes en coordonnées locales,

$$D_{\partial_i} \partial_j = \Gamma_{ij}^k \partial_k.$$

Les quantités  $\Gamma_{ij}^k$  sont appelées symboles de Christoffel de deuxième espèce et sont définies pour une métrique pseudo-Riemannienne  $\gamma$  par

$$\Gamma_{ij}^k = \gamma^{kl} \Gamma_{ilj} = \frac{1}{2} \gamma^{kl} (\partial_i \gamma_{jl} + \partial_j \gamma_{il} - \partial_l \gamma_{ij}),$$

où les quantités

$$\Gamma_{ilj} = \frac{1}{2} (\partial_i \gamma_{jl} + \partial_j \gamma_{il} - \partial_l \gamma_{ij})$$

désignent les symboles de Christoffel de première espèce.

Remarque : les symboles de Christoffel ne sont pas des tenseurs car ils ne vérifient pas la relation de transformation propre aux tenseurs, sous l'action d'un difféomorphisme. Au vu de la symétrie du tenseur métrique  $\gamma$  (ou du caractère sans torsion de la connexion), on a directement les résultats suivants :

- Les symboles de Christoffel de première espèce sont symétriques par rapport à leurs indices extrêmes

$$\Gamma_{kji} = \Gamma_{ijk}.$$

- Les symboles de Christoffel de deuxième espèce sont symétriques par rapport à leurs indices inférieurs

$$\Gamma_{ki}^l = \Gamma_{ik}^l.$$

Dans le système de coordonnées  $\{x^i\}$ , on en déduit l'expression de la dérivée covariante de  $Y$  dans la direction  $X$  :

$$D_X Y = (X^i \partial_i Y^j + \Gamma_{ik}^j X^i Y^k) \partial_j.$$

Remarque : on note  $D_i := D_{\partial_i}$  et ainsi  $D_i Y = (\partial_i Y^j + \Gamma_{ik}^j Y^k) \partial_j$ .

### Dérivée covariante d'une 1-forme

En utilisant la règle de Leibniz pour le crochet de dualité

$$D_X(\alpha(Y)) = D_X \alpha(Y) + \alpha(D_X Y),$$

on obtient l'expression de la dérivée covariante d'une 1-forme

$$D_X \alpha(Y) = X.(\alpha(Y)) - \alpha(D_X Y).$$

En coordonnées locales,

$$D_X \alpha = (X^j \partial_j \alpha_i - \Gamma_{ji}^k X^j \alpha_k) dx^i.$$

### Extension de la dérivée covariante à un champ de tenseurs

On peut étendre la dérivée covariante aux tenseurs en utilisant l'opérateur  $D_X$ . Cet opérateur est un endomorphisme de l'espace des tenseurs et associe à un  $(r, s)$ -tenseur un tenseur de même type.

$$D_X(S \otimes T) = D_X S \otimes T + S \otimes D_X T.$$

Il est particulièrement pratique de connaître l'action de la dérivée covariante sur un tenseur  $S \in \Gamma(T_s^0 M)$ , car ce sont les tenseurs que nous rencontrerons le plus souvent.

$$D_X S(X_1, \dots, X_s) = X \cdot (S(X_1, \dots, X_s)) - \sum_{i=1}^s S(X_1, \dots, X_{i-1}, D_X X_i, X_{i+1}, \dots, X_s).$$

Dans le cas particulier du tenseur métrique,

$$D_X \gamma(Y, Z) = X \cdot \gamma(Y, Z) - \gamma(D_X Y, Z) - \gamma(Y, D_X Z) = 0 \quad (2.1)$$

car la connexion est compatible avec la métrique. Nous noterons cette propriété de la métrique : Soit  $(N, \gamma)$  une variété Riemannienne de connexion de Levi-Civita  $D$ , alors

$$\forall X \in \Gamma(TM), D_X \gamma = 0.$$

### Dérivée de Lie et champs vecteurs de Killing

La dérivée de Lie associée à un champ de vecteurs  $X$  sur  $N$  est l'application linéaire

$$\mathcal{L}_X : \Gamma(T_s^r N) \rightarrow \Gamma(T_s^r N)$$

telle que

- $\forall f \in \mathcal{C}^\infty(N), \mathcal{L}_X f = X \cdot f.$
- $\forall Y \in \Gamma(TN), \mathcal{L}_X(Y) = [X, Y].$
- Pour tous tenseurs  $S, T, \mathcal{L}_X(S \otimes T) = \mathcal{L}_X S \otimes T + S \otimes \mathcal{L}_X T.$

La dérivée de Lie d'un tenseur  $S \in \Gamma(T_s^0 N)$  est

$$\mathcal{L}_X S(X_1, \dots, X_s) = X \cdot (S(X_1, \dots, X_s)) - \sum_{i=1}^s S(X_1, \dots, X_{i-1}, [X, X_i], X_{i+1}, \dots, X_s). \quad (2.2)$$

Remarque : puisque  $\mathcal{L}_X(Y) = [X, Y]$ , la formule (2.2) est équivalente à

$$\mathcal{L}_X S(X_1, \dots, X_s) = X \cdot (S(X_1, \dots, X_s)) - \sum_{i=1}^s S(X_1, \dots, X_{i-1}, \mathcal{L}_X X_i, X_{i+1}, \dots, X_s).$$

En appliquant cette formule à la métrique  $\gamma$ , on obtient compte tenu de (2.1),

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_X \gamma(Y, Z) &= X \cdot \gamma(Y, Z) - \gamma([X, Y], Z) - \gamma(Y, [X, Z]) \\ &= X \cdot \gamma(Y, Z) - \gamma(D_X Y, Z) + \gamma(D_Y X, Z) - \gamma(Y, D_X Z) + \gamma(Y, D_Z X) \\ &= \gamma(D_Y X, Z) + \gamma(Y, D_Z X). \end{aligned}$$

En coordonnées locales,

$$\mathcal{L}_X \gamma_{ij} = D_i X_j + D_j X_i.$$

Sur une variété Riemannienne  $(N, \gamma)$  de connexion  $D$ , un champ de vecteur  $X \in \Gamma(TN)$  tel que  $\mathcal{L}_X \gamma = 0$  est appelé champ de vecteur de Killing.



## Courbure d'une variété pseudo-Riemannienne

Soit  $(N, \gamma)$  une variété pseudo-riemannienne de connexion  $D$ . Soient  $X, Y, Z \in \Gamma(TN)$ . Le tenseur de courbure est l'application allant de  $\Gamma(TN) \times \Gamma(TN) \times \Gamma(TN)$  dans  $\Gamma(TN)$  définie par

$$R(X, Y)Z = D_Y(D_X Z) - D_X(D_Y Z) + D_{[X, Y]}Z \quad (2.3)$$

Dans le système de coordonnées  $\{x^i\}$ , on a l'expression du tenseur de courbure

$$R^\mu_{\alpha\beta\delta} \partial_\mu = (\partial_\beta \Gamma^\mu_{\alpha\delta} - \partial_\alpha \Gamma^\mu_{\beta\delta} + \Gamma^\nu_{\alpha\delta} \Gamma^\mu_{\beta\nu} - \Gamma^\nu_{\beta\delta} \Gamma^\mu_{\alpha\nu}) \partial_\mu \quad (2.4)$$

La relation suivante, conséquence directe de (2.3), est appelée identité de Ricci

$$(D_\beta D_\alpha - D_\alpha D_\beta)Z^\varepsilon = R^\varepsilon_{\alpha\beta\delta} Z^\delta. \quad (2.5)$$

À partir du (1, 3)-tenseur de courbure, on peut obtenir sa version de valence (0, 4), appelée tenseur de courbure de Riemann et définie pour  $X, Y, Z, T \in \Gamma(TM)$  par

$$\text{Riem}(X, Y, Z, T) = \gamma(R(X, Y)Z, T),$$

ce qui donne en coordonnées locales

$$R_{\alpha\beta\delta\varepsilon} = \gamma_{\mu\varepsilon} R^\mu_{\alpha\beta\delta}.$$

La courbure de Riemann vérifie les relations d'antisymétrie suivantes :

$$R_{\alpha\beta\delta\varepsilon} = -R_{\alpha\beta\varepsilon\delta} = -R_{\beta\alpha\delta\varepsilon}. \quad (2.6)$$

D'autre part, on a aussi une relation de symétrie par bloc de deux indices comme suit :

$$R_{\alpha\beta\delta\varepsilon} = R_{\delta\varepsilon\alpha\beta}. \quad (2.7)$$

En effectuant une permutation circulaire sur les trois premiers indices du tenseur de Riemann, on obtient la première identité de Bianchi

$$R_{\alpha\beta\delta\varepsilon} + R_{\beta\delta\alpha\varepsilon} + R_{\delta\alpha\beta\varepsilon} = 0. \quad (2.8)$$

et la seconde identité de Bianchi, faisant intervenir les dérivées premières du tenseur de Riemann

$$D_\alpha R_{\beta\delta\varepsilon\sigma} + D_\beta R_{\delta\alpha\varepsilon\sigma} + D_\delta R_{\alpha\beta\varepsilon\sigma} = 0. \quad (2.9)$$

On peut trouver les preuves de (2.6), (2.7), (2.8) et (2.9) dans [31], prop 3.5 et prop 3.134. Par contraction tensorielle du tenseur de courbure par rapport à l'indice contravariant et à l'indice covariant central, on obtient le tenseur de Ricci appelé aussi courbure de Ricci, noté  $\text{Ric } g$ , dont les composantes en coordonnées locales sont

$$R_{\alpha\beta} = R^\varepsilon_{\alpha\varepsilon\beta} = \gamma^{\varepsilon\sigma} R_{\alpha\sigma\beta\varepsilon}.$$

Le tenseur de Ricci est symétrique par suite des propriétés de symétrie du tenseur de courbure (2.6) et (2.7)

$$R_{\alpha\beta} = \gamma^{\varepsilon\sigma} R_{\alpha\sigma\beta\varepsilon} = \gamma^{\sigma\varepsilon} R_{\beta\varepsilon\alpha\sigma} = R_{\beta\alpha}.$$

Par contraction du tenseur de Ricci, on obtient un scalaire  $R(g)$  appelé scalaire de Ricci ou courbure scalaire

$$R(g) = R^\alpha_\alpha = \gamma^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}.$$

À partir de la courbure de Ricci et de la courbure scalaire, on peut former le tenseur d'Einstein  $G_{ij}$

$$G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}R(\gamma)\gamma_{\alpha\beta} + \Lambda\gamma_{\alpha\beta},$$

où  $\Lambda$  est une constante appelée constante cosmologique. Ce tenseur, symétrique par suite de la symétrie de la métrique et de la courbure de Ricci, joue un rôle fondamental dans la théorie de la gravitation d'Einstein, la relativité générale. On peut montrer que c'est le seul 2-tenseur symétrique à divergence nulle faisant intervenir la métrique et ses dérivées jusqu'à l'ordre deux. Le fait que  $D_\beta G^{\alpha\beta} = 0$  est une conséquence de la deuxième identité de Bianchi (2.9) et de (2.1).

### Courbure sectionnelle

Soit  $(M, g)$  une variété Riemannienne. Soit  $P$  est un plan tangent à  $M$  au point  $x$ , et  $V, W$  deux vecteurs indépendants non nuls de  $P$ . On définit la courbure sectionnelle comme suit :

$$\kappa_x(P) = \kappa_x(V, W) = \frac{R_{ijkl}V^iW^jV^kW^l}{g_{pq}V^pV^qg_{kl}W^kW^l - (g_{ij}V^iW^j)^2} = \frac{R_{ijkl}V^iW^jV^kW^l}{|V|_g^2|W|_g^2 - \langle V, W \rangle_g^2}$$

On peut montrer que cette définition ne dépend pas du choix des vecteurs  $V$  et  $W$  dans  $P$  indépendants mais uniquement du plan  $P$  (cf. [31]). La courbure sectionnelle détermine entièrement le tenseur de courbure d'une variété Riemannienne (cf. [31], Thm 3.8). Remarque : le fait de prendre  $V$  et  $W$  deux vecteurs indépendants et non nuls permet de s'assurer que le dénominateur ne s'annule pas.

## 2.3 Relativité générale

La théorie de la relativité générale est une théorie géométrique de la gravitation élaborée il y a un siècle par Albert Einstein. Elle donne le lien entre la gravitation et les autres interactions fondamentales dans l'univers, appelé espace-temps et modélisé par une variété  $(\mathcal{N}, \gamma)$  de dimension 4 avec une métrique Lorentzienne  $\gamma$  de signature  $(-, +, +, +)$  et de connexion  $D$ . La nature Lorentzienne de la métrique permet de comprendre que la dimension temporelle n'est pas considérée de la même manière que les dimensions spatiales dans la théorie. La métrique représente le champ gravitationnel. Elle détermine les trajectoires des particules qui se déplacent le long des géodésiques, prescrites par la métrique. Toute la géométrie de la variété est décrite par cette métrique solution des équations d'Einstein,

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}R(\gamma)\gamma_{\alpha\beta} + \Lambda\gamma_{\alpha\beta} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\alpha\beta} \quad (2.10)$$

où  $T_{ij}$  est le tenseur énergie-impulsion qui représente les interactions autres que la gravitation et  $G$  désigne la constante de la gravitation universelle.

Le membre de gauche de cette équation est le tenseur d'Einstein  $G$ , fonction de la

métrique et représentant l'interaction gravitationnelle, expliqué en détail dans une section précédente. L'équation (2.10) est une équation tensorielle faisant intervenir des 2-tenseurs symétriques sur une variété de dimension 4 et à ce titre, elle constitue en fait un ensemble de dix équations indépendantes. Cela explique que l'on parle des équations d'Einstein au pluriel. Elles donnent la relation entre la géométrie de l'espace-temps et la distribution de matière-énergie présente, qui doit vérifier une loi de conservation formalisée par  $D_j T^{ij} = 0$ . Puisque le tenseur énergie-impulsion  $T$  est égal au tenseur d'Einstein  $G$  à une constante multiplicative près, on comprend la nécessité de construire un tenseur  $G$  à divergence nulle pour décrire la géométrie de l'espace-temps. La trajectoire spatio-temporelle d'un corps massif, appelée sa ligne d'univers, est une courbe dans l'espace-temps ; mais toute courbe ne peut pas prétendre être une trajectoire réaliste (ligne d'univers) : elle doit pour cela satisfaire des propriétés que nous décrirons quand nous aborderons la causalité.

### Cône de lumière

En chaque point  $p$  de l'espace-temps  $\mathcal{N}$ , l'espace tangent  $T_p\mathcal{N}$  est isomorphe à l'espace de Minkowski et on appelle *cône causal de  $p$*  le cône passant par l'origine de  $T_p\mathcal{N}$ , qui est l'ensemble des événements passés ou futurs, causalement liés à  $p$ . Ceci peut être illustré par la Figure suivante :

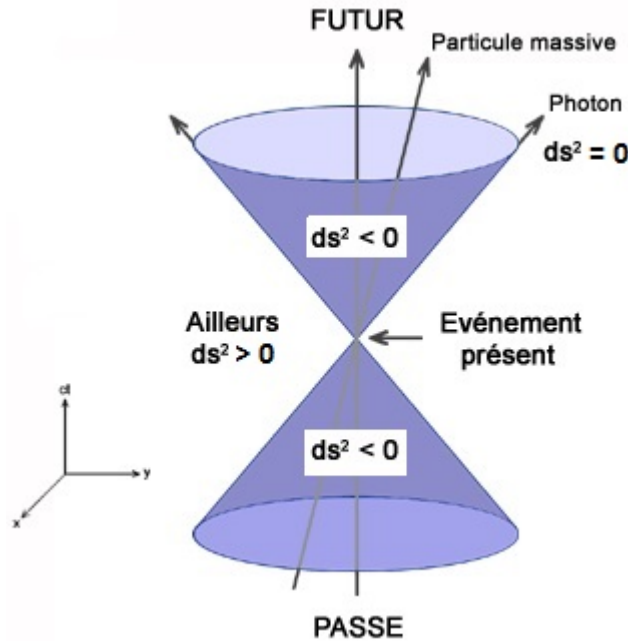


FIGURE 2.1 – Schéma du cône de lumière

Source: <http://www.astrosurf.com/luxorion/relativite-concepts-conelumiere.htm>.

Utilisé avec l'aimable autorisation de l'auteur Thierry Lombry.

La trajectoire d'une particule de masse nulle (photon) est une ligne d'univers contenue sur le bord du cône causal, dit cône de lumière. Au sein de l'espace-temps, la notion de causalité est intimement liée au fait que la lumière voyage à la vitesse finie (constante) de  $c = 299792458 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$  et que rien ne peut se déplacer plus vite qu'elle (on parlerait

alors de violation de la causalité). Ceci étant, les événements ayant pu interagir avec nous dans le passé et donc avoir une incidence quelconque sur notre existence forment notre passé absolu et sont contenus dans un demi-cône plein appelé cône causal passé et les événements que l'on est susceptible de rencontrer dans l'avenir forment notre futur absolu et sont contenus dans un demi-cône plein appelé cône causal futur. Ces deux demi-cônes causaux passé et futur forment le cône causal de chaque événement. Tous les événements hors de ce cône n'ont pas pu et ne pourront jamais avoir de lien avec l'événement considéré : ils forment ce que l'on appelle l'ailleurs. Les points de l'espace de Minkowski représentent des événements physiques repérés dans l'espace-temps par les 4 coordonnées  $(t, x, y, z)$  et choisir une base pour avoir les coordonnées revient à choisir un référentiel pour l'observateur de l'événement. La métrique de Minkowski permet de donner la "distance" ou intervalle d'espace-temps entre deux événements dans cet espace :

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

Si ces événements peuvent être causalement liés ( $ds^2 \leq 0$ ), alors cela correspond à la distance entre ces événements. On dit que deux événements sont causalement liés s'ils peuvent être reliés par une courbe de genre temps.

## Causalité

Dans cette partie, nous allons préciser cette notion de causalité et déterminer les propriétés raisonnables que doit satisfaire l'espace-temps pour être physiquement acceptable. On se base sur le chapitre 8 du livre de Robert Wald "General Relativity" [49] dans lequel tous les résultats énoncés sont démontrés. Le chapitre 6 du livre "La relativité générale expliquée aux mathématiciens" d'Emmanuel Humbert et Michel Vaugon [36] s'est avéré particulièrement utile pour la terminologie française. La nature Lorentzienne de la métrique et sa signature amènent à la définition des trois types de vecteurs tangents de genre temps, espace, ou isotrope<sup>1</sup>. Un espace-temps dans lequel on peut désigner les parties "passé" et "futur" du cône de lumière en chaque point, et ce continûment, est appelé *orientable en temps*. Un espace-temps qui ne satisferait pas cette propriété ne serait pas physiquement raisonnable car on ne pourrait alors pas définir proprement les notions d'aller "en avant" ou "en arrière" dans le temps. On appelle *vecteur causal* tout vecteur de genre temps ou lumière. Un vecteur causal se trouvant dans la partie futur (resp. passé) du cône de lumière sera désigné vecteur causal futur (resp. passé). On considère dorénavant un espace-temps  $(\mathcal{N}, \gamma)$  orienté en temps, *i.e.* orientable en temps et où l'on a choisi une orientation en temps. Une conséquence est qu'il existe un champ de vecteurs de genre temps  $t^\alpha$  lisse et non nul sur  $\mathcal{N}$ . Une courbe différentiable  $\lambda(t)$  est une *courbe de genre temps* (resp. *causale*) future (resp. passée) lorsque pour tout  $p \in \lambda(t)$ , le vecteur tangent  $t^\alpha$  est *de genre temps* (resp. *causal*) futur (resp. passé). Les courbes de genre temps représentent les trajectoires spatio-temporelles (ou lignes d'univers) des corps massifs dans l'espace-temps tandis que les courbes causales incluent également les courbes isotropes qui sont les trajectoires des rayons lumineux (photons) se déplaçant à la vitesse de la lumière. Le *futur chronologique* (resp. *passé*

---

1. Remarque : Pour la signature inverse, les définitions des vecteurs de genre espace et temps sont inversées.

*chronologique*) d'un point  $p \in \mathcal{N}$ , noté  $I^+(p)$  (resp.  $I^-(p)$ ), est l'ensemble des événements pouvant être atteints par une courbe de genre temps future (resp. passée).

$$I^+(p) = \{q \in \mathcal{N} : \exists \lambda : [0, 1] \rightarrow \mathcal{N} \text{ de genre temps future avec } \lambda(0) = p \text{ et } \lambda(1) = q\}.$$

$$I^-(p) = \{q \in \mathcal{N} : \exists \lambda : [0, 1] \rightarrow \mathcal{N} \text{ de genre temps passée avec } \lambda(0) = p \text{ et } \lambda(1) = q\}.$$

Soit  $S \subset \mathcal{N}$ , on définit

$$I^+(S) = \bigcup_{p \in S} I^+(p) \text{ et } I^-(S) = \bigcup_{p \in S} I^-(p).$$

Le *futur causal* (resp. *passé causal*) de  $p \in \mathcal{N}$ , noté  $J^+(p)$  (resp.  $J^-(p)$ ), est défini de la même manière pour des courbes causales. On définit de même

$$J^+(S) = \bigcup_{p \in S} J^+(p) \text{ et } J^-(S) = \bigcup_{p \in S} J^-(p).$$

Un sous-ensemble  $S \subset \mathcal{N}$  est dit *achronal* lorsque  $\forall p, q \in S, q \notin I^+(p)$ , *i.e.*  $I^+S \cap S = \emptyset$ . Cela traduit le fait que les événements de  $S$  ne peuvent pas s'influencer entre eux. Soit  $\lambda(t)$  une courbe causale future. On dit que  $p \in \mathcal{N}$  est une *extrémité future* de  $\lambda$  lorsque pour tout voisinage  $O$  de  $p$ , il existe  $t_0$  tel que pour tout  $t > t_0$ ,  $\lambda(t) \in O$ . Pour une courbe causale passée, on parle d'*extrémité passée* de  $\lambda$ .  $\mathcal{N}$  étant un espace séparé au sens de Hausdorff, une courbe causale future (resp. passée) a au plus une extrémité future (resp. passée). Une courbe causale future (resp. passée)  $\lambda$  est dite *inextensible vers le futur* (resp. *vers le passé*) si elle n'admet pas d'extrémité future (resp. passée). Un espace-temps est *fortement causal* lorsque pour tout point  $p \in \mathcal{N}$  et tout voisinage  $O$  de  $p$ , il existe un voisinage  $V$  de  $p$  contenu dans  $O$  tel qu'aucune courbe causale n'intersecte  $V$  plus d'une fois. Cela permet d'éviter que certaines courbes causales tendent à se recouper au voisinage de  $p$ . On dit d'un espace-temps qu'il est *causalement stable* s'il existe un champ de vecteurs de genre temps  $t^\alpha$  non nul et continu tel que  $(\mathcal{N}, \tilde{\gamma})$  ne possède pas de courbes causales fermées, où  $\tilde{\gamma} = \gamma - dt \otimes dt$ , avec  $dt$  la 1-forme différentielle associée à  $t^\alpha$ .

**Théorème 3:**

$(\mathcal{N}, \gamma)$  est causalement stable si et seulement s'il existe  $f : \mathcal{N} \rightarrow \mathbb{R}$  différentiable dont le gradient est de genre temps en tout point.  $f$  est appelée *fonction temps globale*.

On peut montrer que causalement stable implique fortement causal.  $J^+(S)$  définit l'ensemble des événements de  $\mathcal{N}$  influencés par des événements de  $S$ . Dans un souci de prédictabilité complète, on aimerait définir l'ensemble des événements de  $\mathcal{N}$  influencés uniquement par  $S$ , c'est à dire déterminés par  $S$ . Soit  $S$  un ensemble fermé achronal inclus dans  $\mathcal{N}$ , on peut définir le domaine de dépendance futur (resp. passé) de  $S$ , noté  $D^+(S)$  (resp.  $D^-(S)$ ), comme suit

$$D^+(S) = \{p \in \mathcal{N} : \text{toute courbe causale passée inextensible passant par } p \text{ intersecte } S\}.$$

$$D^-(S) = \{p \in \mathcal{N} : \text{toute courbe causale future inextensible passant par } p \text{ intersecte } S\}.$$

On définit alors le domaine de dépendance de  $S$  comme

$$D(S) = D^+(S) \cup D^-(S).$$

$D(S)$  est l'ensemble des événements de  $\mathcal{N}$  prédictibles à partir des conditions sur  $S$ .  
Remarque : on a toujours  $S \subset D^+(S) \subset J^+(S)$ .

Un signal ne pouvant se propager à une vitesse supérieure à la vitesse de la lumière, tout signal envoyé en  $p \in D^+(S)$  est passé par un point de  $S$  (et un seul car  $S$  est achronal). On peut donc penser qu'avec assez d'informations sur les conditions sur  $S$ , on puisse déterminer ce qu'il se passe en  $p \in D^+(S)$ . Prenons maintenant un événement  $p_0 \in I^+(S)$  tel que  $p_0 \notin D^+(S)$ . Par définition de  $p_0 \in I^+(S)$ ,  $\exists q \in S$  tel que  $p \in I^+(q)$ , *i.e.* il existe une courbe de genre temps future  $\lambda$  telle que  $\lambda(0) = q$  et  $\lambda(1) = p$ . Cela traduit le fait que  $p_0$  est influencé par (au moins) un événement de  $S$ . Mais  $p_0 \notin D^+(S)$ , donc il existe une courbe causale passée inextensible  $\lambda_0$  passant par  $p_0$  qui n'intersecte pas  $S$ . Autrement dit  $p_0$  est influencé par (au moins) un événement en dehors de  $S$ . Les conditions sur  $S$  ne suffisent donc pas à déterminer les conditions en  $p_0$  et on perd alors le caractère de prédictibilité sur  $p_0$  à partir des conditions sur  $S$ .

### Surface de Cauchy et espace-temps globalement hyperbolique

Une *surface de Cauchy* est un ensemble achronal fermé  $\mathcal{M}$  tel que  $D(\mathcal{M}) = \mathcal{N}$ .

**Théorème 4:**

Toute surface de Cauchy  $\mathcal{M}$  est une sous-variété  $\mathcal{C}^0$  plongée dans  $\mathcal{N}$ .

Cela justifie le terme surface car  $\mathcal{M}$  est une hypersurface de  $\mathcal{N}$ . Comme  $\mathcal{M}$  est achronale, on peut la voir comme représentant l'univers à un instant donné. Un espace-temps  $(\mathcal{N}, \gamma)$  qui admet une surface de Cauchy  $\mathcal{M}$  est dit *globalement hyperbolique* et le futur (resp. passé) de cet univers peut être prédit (resp. reconstitué) à partir des conditions à l'instant donné représenté par  $\mathcal{M}$ . Cette notion d'hyperbolicité globale est essentielle dans la suite de la thèse, dans la mesure où l'on va s'intéresser au problème de Cauchy, qui est la question de la restructurabilité d'un espace-temps de dimension  $n + 1$ , vu comme évolution temporelle d'une hypersurface de Cauchy. Cela revient à étudier les conditions d'existence d'un feuilletage global d'une variété Lorentzienne de dimension  $n + 1$  vérifiant les équations d'Einstein, par des hypersurfaces de genre espace (variétés Riemanniennes) de dimension  $n$ .

**Théorème 5:**

Globalement hyperbolique implique fortement causal et causalement stable. De plus, il existe une fonction temps globale  $f$  telle que chaque surface  $\{f = cst\}$  est une surface de Cauchy.

On peut donc feuilletter  $\mathcal{N}$  par des surfaces de Cauchy et on a la topologie  $\mathcal{N} = \mathcal{M} \times \mathbb{R}$ , où  $\mathcal{M}$  est une surface de Cauchy. Cette décomposition est unique à homéomorphisme près puisque deux surfaces de Cauchy  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{M}'$  sont homéomorphes.

### Lagrangien, Hamiltonien et équation du mouvement

La théorie de la relativité générale est une théorie du champ et à ce titre, on peut en donner une formulation Lagrangienne ou Hamiltonienne. On part de la densité Lagrangienne d'Einstein-Hilbert

$$\mathcal{L}_G := (R(\gamma) - 2\Lambda)\sqrt{-\gamma}d^4x,$$

où  $R(\gamma)$  et  $\sqrt{-\gamma}d^4x$  sont la courbure scalaire et la forme volume associées à  $\gamma$ . L'action d'Einstein-Hilbert correspondante, associée à la variable dynamique  $\gamma^{\alpha\beta}$ , est

$$S[\gamma^{\alpha\beta}] := \int_V \mathcal{L}_G, \quad (2.11)$$

où  $V$  est une partie de  $\mathcal{N}$  délimitée par deux hypersurfaces  $\mathcal{M}_{t_1}$  et  $\mathcal{M}_{t_2}$  telles que  $t_1 < t_2$ ,

$$V := \bigcup_{t=t_1}^{t_2} \mathcal{M}_t. \quad (2.12)$$

$\mathcal{L}_G$  dépend de  $\gamma$  et ses dérivées covariantes premières et secondes. On obtient l'expression des variations de l'action

$$\frac{\delta S}{\delta \gamma^{\alpha\beta}} = ({}^{\mathcal{N}}R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}R(\gamma)\gamma_{\alpha\beta} + \Lambda\gamma_{\alpha\beta})\sqrt{-\gamma},$$

Les métriques  $\gamma$  qui minimisent l'action

$$\frac{\delta S}{\delta \gamma^{\alpha\beta}} = 0$$

sont précisément les solutions des équations d'Einstein du vide, qui constituent les équations du mouvement de la théorie de la relativité générale. En ajoutant au Lagrangien  $\mathcal{L}_G$  relatif au champ gravitationnel un Lagrangien  $\mathcal{L}_E$  relatif aux autres interactions fondamentales qui apparaissent avec la présence de matière-énergie dans l'univers, les équations d'Einstein générales avec le tenseur d'Énergie-impulsion sont vérifiées par les métriques qui minimisent l'action totale correspondante

$$S_T[\gamma^{\alpha\beta}] := \int_V \mathcal{L}_G + \mathcal{L}_E.$$

# Chapitre 3

## Origine des équations de contrainte

Ce chapitre permet de revenir sur l'origine géométrique des équations de contrainte, centrales dans la thèse. Après un aperçu de la géométrie d'une hypersurface, nous verrons en quoi les équations de contrainte découlent de la décomposition 3+1 des équations d'Einstein associée au feuilletage de l'espace-temps  $\mathcal{N}$  par des hypersurfaces Riemanniennes. La dernière section s'intéresse à la formulation Hamiltonienne de la relativité et permet de faire le lien entre équations de contrainte et évolution des données initiales. Ce chapitre est un condensé des chapitres 3, 4 et 5 du livre d'Ericourgouillon "3 + 1 Formalism in General Relativity : Bases of numerical relativity" [25], à quelques conventions de signe près. Nous donnons peu de détails sur les calculs que l'on peut retrouver sous une forme très claire et détaillée dans son livre.

### 3.1 Hypersurface Riemannienne d'une variété Lorentzienne

Dans cette section, on considère une variété Lorentzienne  $(N, \gamma)$  de dimension  $n + 1$ , de signature  $(-, +, \dots, +)$  et de connexion  $D$ , au sein de laquelle  $(M, g)$  est une sous-variété Riemannienne de dimension  $n$  et de connexion  $\nabla$ .  $M$  est donc une hypersurface de  $N$  de métrique induite  $g$

$$g = \gamma|_{TM}.$$

On appelle  $g$  la première forme fondamentale de  $M$  qui, lorsque  $g$  est Riemannienne, est appelée hypersurface de genre espace de  $N$ . L'avantage de considérer une signature  $(-, +, \dots, +)$  pour  $N$  est manifeste puisque l'on va s'intéresser par la suite à une hypersurface de genre espace de  $N$  de signature  $(+, \dots, +)$  sur laquelle nous pourrons utiliser les outils de géométrie Riemannienne introduits précédemment. Étudions le lien entre les courbures de  $N$  et  $M$ . Dans cette section, on utilise la métrique  $\gamma$  pour remonter et abaisser les indices.

#### Espace normal et fibré normal

Soit  $p \in M \subset N$ . L'espace tangent  $T_pM$  est un sous espace vectoriel de  $T_pN$ . On a la décomposition

$$T_pN = T_pM \oplus (T_pM)^\perp,$$

où  $(T_pM)^\perp$  est le complément orthogonal de  $T_pM$  dans  $T_pN$ , appelé espace normal. C'est un espace vectoriel de dimension égale à la codimension de  $M$  dans  $N$ , dans notre cas 1.

La décomposition des fibrés tangents correspondante est la suivante

$$TN = TM \oplus TM^\perp,$$



où  $TM^\perp$  est le complément orthogonal de  $TM$  dans  $TN$ , appelé fibré normal.

Tout vecteur  $X \in T_pN$  a une décomposition en une composante tangentielle  $X_T \in T_pM$  et une composante normale  $X_n \in (T_pM)^\perp$ .

### Seconde forme fondamentale

Concernant le lien entre les dérivées covariantes de  $M$  et  $N$ , on a l'équation suivante appelée formule de Gauss :

$$D_X Y = \nabla_X Y + \vec{\Pi}(X, Y), \quad \forall X, Y \in \Gamma(TM) \quad (3.1)$$

qui définit un nouveau tenseur d'ordre  $(1, 2)$  appelé seconde forme fondamentale (vectorielle) de  $M$  dans  $N$ .

$$\begin{aligned} \vec{\Pi} : T_pM \times T_pM &\longrightarrow (T_pM)^\perp \\ (X, Y) &\longmapsto \vec{\Pi}(X, Y). \end{aligned}$$

Le tenseur  $\vec{\Pi}$  est symétrique en ses arguments (cf. [8], Prop 2.1). La dimension de  $(TM)^\perp$  étant égale à 1, n'importe quel champ de vecteurs  $\vec{n}$  non isotrope et normal à  $M$  en est une base et on obtient l'expression

$$\vec{\Pi}(X, Y) = \frac{\gamma(D_X Y, \vec{n})}{\gamma(\vec{n}, \vec{n})} \vec{n}$$

En pratique, puisque  $M$  est Riemannienne, le vecteur  $\vec{n}$  est de genre temps et on le choisit unitaire, *i.e.*  $\gamma(\vec{n}, \vec{n}) = -1$ . On définit alors la seconde forme fondamentale (scalaire)  $K$  comme

$$K(X, Y) := -\gamma(D_X Y, \vec{n}) = \gamma(D_X \vec{n}, Y),$$

et l'équation (3.1) devient

$$D_X Y = \nabla_X Y + K(X, Y) \vec{n}, \quad \forall X, Y \in \Gamma(TM). \quad (3.2)$$

Notons que la seconde forme fondamentale est symétrique. Dorénavant, nous ferons systématiquement référence à  $K$  quand nous parlerons de seconde forme fondamentale, ce qui évitera toute confusion entre les secondes formes fondamentales scalaire et vectorielle.

### Projecteur sur $TM$

Le vecteur  $\vec{n}$  nous permet de définir un projecteur  $\vec{g}$  sur  $TM$

$$\begin{aligned} \vec{g} : T_p\mathcal{N} &\rightarrow T_p\mathcal{M} \\ X &\mapsto \vec{g}(X) = X + \gamma(\vec{n}, X) \vec{n}, \end{aligned}$$

ce qui se traduit en coordonnées locales

$$g^\alpha_\beta = \gamma^\alpha_\beta + n^\alpha n_\beta. \quad (3.3)$$

Le projecteur  $\vec{g}$  vérifie les propriétés suivantes :

- $\vec{g}(\vec{n}) = 0$ .
- $\forall X \in \Gamma(TM)$ ,  $\vec{g}(X) = X$ .
- $\forall X \in \Gamma(TN)$ ,  $\vec{g}(\vec{g}(X)) = \vec{g}(X)$ .
- $\vec{g}$  est symétrique,  
 $\forall X, Y \in \Gamma(TN)$ ,  $\gamma(\vec{g}(X), Y) = \gamma(X, \vec{g}(Y))$ .

Grâce au crochet de dualité, on peut étendre ce projecteur à des 1-formes et plus généralement à des  $(0, S)$ -tenseurs sur  $T\mathcal{M}$  par la formule

$$\begin{aligned} \vec{g}^* S : (T_p\mathcal{N})^s &\rightarrow \mathbb{R} \\ (X_1, \dots, X_s) &\mapsto S(\vec{g}(X_1), \dots, \vec{g}(X_s)). \end{aligned}$$

Par définition de la métrique induite,  $\vec{g}^*g$  est l'extension de  $g$  à des vecteurs de  $T_p\mathcal{N}$  qui coïncide avec  $g$  sur  $T_p\mathcal{M}$  et on notera par conséquent  $g := \vec{g}^*g$ . Cela permet de faire le lien entre les métriques  $\gamma$  et  $g$  via l'égalité tensorielle

$$g = \gamma + \vec{n}_b \otimes \vec{n}_b,$$

c'est à dire en coordonnées locales

$$g_{\alpha\beta} = \gamma_{\alpha\beta} + n_\alpha n_\beta. \quad (3.4)$$

### Lien entre les courbures de $M$ et $N$ : équations des hypersurfaces

La relation de Gauss ([31], Thm 5.5) donne le lien entre les courbures de Riemann de  $N$  et  $M$ . Elle est obtenue en projetant complètement l'identité de Ricci sur  $T\mathcal{M}$  :

$${}^N\text{Riem}(X, Y, Z, T) = {}^M\text{Riem}(X, Y, Z, T) + K(X, Z) K(Y, T) - K(X, T) K(Y, Z),$$

ce qui donne en coordonnées locales

$$g^\mu_\alpha g^\nu_\beta g^\sigma_\delta g^\varepsilon_\rho {}^N R^\rho_{\mu\nu\sigma} = {}^M R^\varepsilon_{\alpha\beta\delta} + K_{\alpha\delta} K^\varepsilon_\beta - K_\alpha^\varepsilon K_{\beta\delta}.$$

Compte tenu de (3.3), en contractant cette équation par rapport aux indices  $\varepsilon$  et  $\beta$  puis en renommant  $\delta$  en  $\beta$ , on obtient l'équation de Gauss contractée

$$g^\mu_\alpha g^\nu_\beta {}^N R_{\mu\nu} + g^\mu_\alpha g_{\sigma\beta} n^\nu n^\rho {}^N R^\sigma_{\nu\mu\rho} = {}^M R_{\alpha\beta} + (\text{tr}_g K) K_{\alpha\beta} - K_\alpha^\mu K_{\mu\beta}. \quad (3.5)$$

En prenant la trace sur  $g$ , on obtient l'équation de Gauss scalaire

$$R(\gamma) + 2 {}^N R_{\mu\nu} n^\mu n^\nu = R(g) + (\text{tr}_g K)^2 - |K|_g^2, \quad (3.6)$$

où  $|K|_g^2 := g^{ki} g^{lj} K_{kl} K_{ij} = K_{ij} K^{ij}$  et  $\text{tr}_g K := g^{ij} K_{ij} = K^i_i$ .

La relation de Codazzi donne quant à elle le lien entre la courbure de  $N$  et les dérivées covariantes premières de la seconde forme fondamentale ([31], Thm 5.9). Elle est obtenue en projetant trois fois sur  $T\mathcal{M}$  l'identité de Ricci appliquée à  $n$  :

$${}^N\text{Riem}(X, Y, \vec{n}, Z) = \nabla_Y K(X, Z) - \nabla_X K(Y, Z),$$

ce qui donne en coordonnées locales

$$g^\mu_\alpha g^\nu_\beta g^\varepsilon_\rho n^\sigma {}^N R^\rho_{\mu\nu\sigma} = \nabla_\beta K_\alpha^\varepsilon - \nabla_\alpha K_\beta^\varepsilon.$$

En contractant cette équation par rapport aux indices  $\varepsilon$  et  $\alpha$ , on obtient l'équation de Codazzi contractée

$$g^\nu_\alpha n^\sigma R_{\nu\sigma} = \nabla_\mu K^\mu_\alpha - \nabla_\beta (\text{tr}_g K). \quad (3.7)$$

Les équations de Gauss scalaire et Codazzi contractée sont obtenues pour une hypersurface  $M \subset N$  quelconque car elles ne font intervenir que des champs de vecteurs et leurs dérivées dans la direction tangente à  $M$ . Ces équations donnent certaines composantes du tenseur de courbure de  $N$  en fonction de la seconde forme fondamentale de  $M$  dans  $N$ . L'équation de Gauss donne la composante tangentielle tandis que l'équation de Codazzi donne la composante normale. La seconde forme fondamentale permet donc de faire le lien entre les différentes courbures de  $N$  et  $M$ .

### Hypersurface totalement géodésique

Lorsque la seconde forme fondamentale est identiquement nulle, les connexions de Levi-Civita de  $M$  et  $N$  sont les mêmes, de même que leurs courbures. Une géodésique sur une variété pseudo-Riemannienne est un chemin dont la distance associée à la métrique est extrémal. Le cas où  $K = 0$  est un cas très particulier de sous-variétés de  $N$  dans lequel toute géodésique de  $M$  est une géodésique de  $N$ . On dit alors que  $M$  est une hypersurface totalement géodésique de  $N$ . En fait,  $M$  est totalement géodésique si et seulement si sa seconde forme fondamentale est nulle ([31], 5.8).

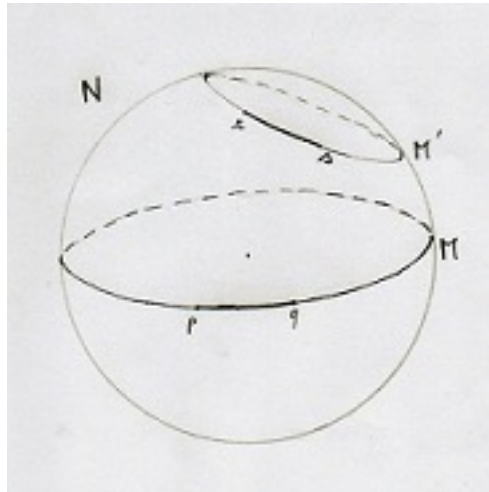


FIGURE 3.1 – Schéma de la sphère  $N$  et d'une hypersurface totalement géodésique  $M$ .

On visualise cela sur la Figure 3.1 illustrant l'exemple basique de la sphère  $N$  au sein de laquelle l'hypersurface totalement géodésique  $M$  est un grand cercle. L'hypersurface  $M'$  est l'intersection de la sphère et d'un plan ne passant pas par l'origine. Sur  $M'$ , la courbe joignant  $r$  et  $s$  est une géodésique de  $M'$  mais n'est pas une géodésique de  $N$  car ce n'est pas une partie d'un grand cercle de  $N$ . Par contre, la courbe joignant les points  $p$  et  $q$  sur  $M$  est une géodésique de  $M$  et une géodésique de  $N$ .

## Feuilletage de l'espace-temps

Dans le chapitre précédent, nous avons vu que les espace-temps globalement hyperboliques ont les propriétés physiques raisonnables concernant la causalité et c'est pour cela que nous considérerons dorénavant des espace-temps globalement hyperboliques. Soit  $(\mathcal{N}, \gamma)$  un espace-temps globalement hyperbolique. D'après ce qui précède,  $\mathcal{N}$  peut être feuilleté par une famille  $(\mathcal{M}_t)_{t \in \mathbb{R}}$  d'hypersurfaces (de Cauchy) de genre espace.

$$\mathcal{N} = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} \mathcal{M}_t$$

Il existe sur  $\mathcal{N}$  un champ scalaire lisse  $\hat{t}$  régulier (de gradient partout non nul) tel que chaque hypersurface  $\mathcal{M}_t$  est un sous-niveau de  $\hat{t}$

$$\mathcal{M}_t = \{p \in \mathcal{N} \mid \hat{t}(p) = t\}.$$

Le fait que  $\hat{t}$  soit régulier permet de s'assurer que deux hypersurfaces distinctes ne s'intersectent pas. Pour chaque valeur  $t$  de  $\hat{t}$ , la 1-forme correspondante  $dt$  est normale à la surface  $\mathcal{M}_t$ , *i.e.*  $\langle dt, v \rangle = 0, \forall v \in T\mathcal{M}_t$ . Il en est de même pour le vecteur  $\nabla t$ , dual de  $dt$  et on peut montrer que  $\nabla t$  est de genre temps lorsque  $\mathcal{M}_t$  est de genre espace. Cela permet d'avoir naturellement une métrique Riemannienne sur  $\mathcal{M}_t$ . On définit alors le vecteur unitaire  $\vec{n}$  colinéaire à  $\nabla t$

$$\vec{n} = -N\nabla t \quad \text{avec} \quad N = (\gamma(-\nabla t, \nabla t))^{-\frac{1}{2}},$$

de sorte que le vecteur  $\vec{n}$  coïncide avec celui défini dans la section 3.1, ce qui nous permet d'utiliser les définitions et résultats établis avec  $\vec{n}$  dans cette section.

Remarque :  $N > 0$  car  $\nabla t$  est de genre temps. Le signe moins permet de s'assurer que  $\vec{n}$  soit dirigé vers le futur si  $t$  est un champ scalaire qui augmente en direction du futur.

$$\gamma(\vec{n}, \vec{n}) = (\gamma(-\nabla t, \nabla t))^{-1} \gamma(-\nabla t, \nabla t) = -1$$

$N$  est appelée fonction *Lapse*. Le vecteur normal d'évolution  $m$  est défini par

$$m := N\vec{n}.$$

Notons que

$$m.m = -N^2 \quad \text{et} \quad \langle dt, m \rangle = 1.$$

On dit que  $m$  est adapté à  $t$  car le vecteur  $\delta t m$  transporte  $\mathcal{M}_t$  sur  $\mathcal{M}_{t+\delta t}$ . On peut considérer  $\vec{n}$  comme la vitesse d'un observateur. La ligne d'univers (trajectoire dans l'espace-temps) de cet observateur est par conséquent orthogonale aux hypersurfaces  $\mathcal{M}_t$ . Une interprétation physique est de dire que  $\mathcal{M}_t$  est localement l'ensemble des événements simultanés pour l'observateur. Soient  $p$  et  $p'$  deux événements sur la trajectoire d'un observateur, avec  $p = p' + \delta t m$ . Le temps propre entre ces deux événements mesuré par l'observateur est  $\delta\tau = N\delta t$ .  $N$  fait donc le lien entre la "coordonnée temporelle"  $t$  qui indexe les feuilles du feuilletage de l'espace-temps et le temps physique mesuré par l'observateur, d'où son nom de fonction Lapse. L'évolution de la métrique  $g$  de  $\mathcal{M}$  est donnée par la dérivée de Lie de  $g$  le long du vecteur d'évolution  $m$  donnée par la formule (cf. [25], eq (4.30)<sup>1</sup>)

$$\mathcal{L}_m g_{ij} = 2NK_{ij}. \tag{3.8}$$

---

1. Notons que notre convention de signe pour  $K$  est opposée.

## 3.2 Décomposition 3 + 1 des équations d'Einstein du vide

Dans le but de faire la décomposition 3 + 1 des équations d'Einstein du vide, il nous faut d'abord obtenir la décomposition 3 + 1 du tenseur de courbure de Riemann. En effet, tous les termes du membre de gauche des équations d'Einstein en découlent, à l'exception de la métrique dont nous connaissons la décomposition via l'équation (3.3). On notera dorénavant  $\mathcal{M}$  pour désigner  $\mathcal{M}_t$ , afin de simplifier les notations. On rappelle que  $(\mathcal{N}, \gamma)$  est une variété Lorentzienne de dimension 4 de signature  $(-, +, +, +)$  et de connexion  $D$  et  $(\mathcal{M}, g)$  est une hypersurface de genre espace de connexion  $\nabla$ .

### Décomposition 3 + 1 du tenseur de courbure

Nous avons déjà obtenu certaines projections du tenseur de courbure de  $\mathcal{N}$ . Tout d'abord en le projetant complètement sur  $T\mathcal{M}$ , ce qui a donné lieu à la relation de Gauss ainsi que les équations de Gauss contractée (3.5) et scalaire (3.6). Puis nous l'avons projeté une fois sur  $T\mathcal{M}$  et une fois sur  $\text{Vect}(\vec{n})$ , amenant à la relation de Codazzi et l'équation de Codazzi contractée (3.7). Il nous reste à le projeter deux fois sur  $\text{Vect}(\vec{n})$  car ses propriétés d'antisymétrie impliquent qu'à partir de trois fois, le tenseur de courbure est identiquement nul. En projetant deux fois sur  $T\mathcal{M}$  et une fois sur  $\text{Vect}(\vec{n})$  l'identité de Ricci appliquée à  $\vec{n}$ , on obtient après quelques intermédiaires de calcul l'équation de Ricci :

$$g^\mu_\alpha g_{\sigma\beta} n^\nu n^\rho {}^N R^\sigma_{\nu\mu\rho} = -\frac{1}{N} \mathcal{L}_m K_{\alpha\beta} + \frac{1}{N} \nabla_\alpha \nabla_\beta N + K_{\alpha\mu} K^\mu_\beta. \quad (3.9)$$

En combinant les équations (3.5) et (3.9), on obtient une équation qui ne fait plus intervenir le tenseur de courbure de  $\mathcal{N}$  mais seulement son tenseur de Ricci

$$g^\mu_\alpha g^\nu_\beta {}^N R_{\mu\nu} = \frac{1}{N} \mathcal{L}_m K_{\alpha\beta} - \frac{1}{N} \nabla_\alpha \nabla_\beta N + {}^M R_{\alpha\beta} + (\text{tr}_g K) K_{\alpha\beta} - 2K_{\alpha\mu} K^\mu_\beta. \quad (3.10)$$

En prenant la trace sur  $g$ , après quelques calculs intermédiaires,

$$R(\gamma) + {}^N R_{\mu\nu} n^\mu n^\nu = R(g) + D_\mu (\text{tr}_g K n^\mu) - \frac{1}{N} \nabla_i \nabla^i N$$

et compte tenu de l'équation de Gauss scalaire (3.6), on obtient la décomposition 3 + 1 de la courbure scalaire de  $\mathcal{N}$

$$R(\gamma) = R(g) - (\text{tr}_g K)^2 + |K|_g^2 + 2D_\mu (\text{tr}_g K n^\mu) - \frac{2}{N} \nabla_i \nabla^i N. \quad (3.11)$$

### Décomposition 3 + 1 des équations d'Einstein du vide

On a vu précédemment qu'afin de modéliser un espace-temps sans matière, la variété Lorentzienne  $(\mathcal{N}, g)$  de dimension 4 doit vérifier les équations d'Einstein du vide

$${}^N R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R(\gamma) \gamma_{\alpha\beta} + \Lambda \gamma_{\alpha\beta} = 0 \quad (3.12)$$

que l'on peut également mettre sous la forme

$${}^{\mathcal{N}}R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}(R(\gamma) - 2\Lambda)\gamma_{\alpha\beta} = 0. \quad (3.13)$$

En prenant la trace sur  $\gamma$ , on a  $R(\gamma) = 4\Lambda$  et (3.13) devient

$${}^{\mathcal{N}}R_{\alpha\beta} - \Lambda\gamma_{\alpha\beta} = 0. \quad (3.14)$$

### Projection complète sur $T\mathcal{M}$

En projetant (3.14) deux fois sur  $T\mathcal{M}$ , on obtient

$$g_{\alpha}^{\mu}g_{\beta}^{\nu}{}^{\mathcal{N}}R_{\mu\nu} - \Lambda \underbrace{\gamma_{\mu\nu}g_{\alpha}^{\mu}g_{\beta}^{\nu}}_{=g_{\alpha\beta}} = 0 \quad (3.15)$$

Le premier terme n'étant rien autre que le membre de gauche de (3.10),

$$\boxed{\mathcal{L}_m K_{ij} = -\nabla_i \nabla_j N + N \{ {}^{\mathcal{M}}R_{ij} - \Lambda g_{ij} + K K_{ij} - 2K_{ik} K_j^k \}.} \quad (3.16)$$

Cette équation tensorielle faisant intervenir uniquement des tenseurs d'ordre 2 symétriques définis sur  $T\mathcal{M}$  de dimension 3, il y a par conséquent 6 équations indépendantes.

### Projection complète sur $\text{Vect}(\vec{n})$

En projetant (3.13) deux fois sur  $\text{Vect}(\vec{n})$ , on obtient

$${}^{\mathcal{N}}R_{\alpha\beta}n^{\alpha}n^{\beta} - \frac{1}{2}(R(\gamma) - 2\Lambda) \underbrace{\gamma_{\alpha\beta}n^{\alpha}n^{\beta}}_{=-1} = 0 \quad (3.17)$$

En combinant les équations (3.6) et (3.17), on obtient l'équation scalaire

$$\boxed{R(g) + (\text{tr}_g K)^2 - |K|_g^2 - 2\Lambda = 0} \quad (3.18)$$

### Projection mixte

En projetant (3.13) une fois sur  $\text{vect}(n)$  et une fois sur  $T\mathcal{M}$ , on obtient

$${}^{\mathcal{N}}R_{\mu\nu}g_{\alpha}^{\mu}n^{\nu} - \frac{1}{2}({}^{\mathcal{N}}R - 2\Lambda) \underbrace{\gamma_{\mu\nu}g_{\alpha}^{\mu}n^{\nu}}_{=0} = 0 \quad (3.19)$$

En combinant les équations (3.7) et (3.19), on obtient l'équation vectorielle

$$\boxed{\nabla_j K_i^j - \nabla_i (\text{tr}_g K) = 0} \quad (3.20)$$

Remarque : Les équations (3.16), (3.18) et (3.20) ne faisant intervenir que des quantités tensorielles dans la direction tangente à  $\mathcal{M}$ , on peut mettre des indices latins sans perte de généralité. Elles forment ainsi un système de dix équations équivalent aux équations d'Einstein du vide (au nombre de dix par symétrie des tenseurs qui la composent) et constituent ainsi leur décomposition 3 + 1.

## Les équations d'Einstein en tant que système EDP

### Coordonnées adaptées au feuilletage

On souhaite transformer ce système d'équations tensorielles en un système d'équations aux dérivées partielles. On introduit pour cela des coordonnées adaptées au feuilletage  $(\mathcal{M}_t)_{t \in \mathbb{R}}$  sur  $\mathcal{N}$ . Pour chaque hypersurface  $\mathcal{M}_t$ , on introduit un système de coordonnées spatiales  $(x^i)$  qui varie de façon lisse d'une hypersurface à sa voisine.  $x^\alpha = (t, x^i)$  constitue donc un bon système de coordonnées sur  $\mathcal{N}$  et la base de  $T\mathcal{N}$  associée est  $\partial_\alpha = (\partial_t, \partial_i)$ . On appelle  $\partial_t$  le vecteur temps. Il est tangent aux lignes de coordonnées spatiales constantes, *i.e.* les courbes de  $\mathcal{N}$  définies par  $\{x^i = c\}$ .

La base duale associée à  $x^\alpha$  est  $dx^\alpha = (dt, dx^i)$  telle que  $\langle dx^\alpha, \partial_\beta \rangle = \delta^\alpha_\beta$ . On a donc  $\langle dt, \partial_t \rangle = 1$  et par suite,  $\partial_t$  a la même propriété que le vecteur d'évolution  $m$  de transporter  $\mathcal{M}_t$  sur  $\mathcal{M}_{t+\delta t}$ , à un décalage vectoriel près donné par le vecteur *Shift*  $X = X^i \partial_i$

$$\partial_t = m + X = N\vec{n} + X$$

Lorsque les lignes de coordonnées constantes sont orthogonales aux  $\mathcal{M}_t$ , on a  $X = 0$  et  $\partial_t = m$ . Puisque  $\gamma(\vec{n}, X) = 0$ ,

$$\gamma(\partial_t, \partial_t) = -N^2 + |X|_\gamma^2 < 0$$

car  $\partial_t$  est de genre temps. La dérivée de Lie dans la direction  $m$  peut être exprimée sous la forme suivante

$$\mathcal{L}_m = \mathcal{L}_{\partial_t} - \mathcal{L}_X = \partial_t - \mathcal{L}_X$$

### Décomposition 3+1 de la métrique $\gamma$

Regardons de plus près les composantes de la métrique  $\gamma$  :

$$\begin{aligned} \gamma_{\mu\nu} &= g(\partial_\mu, \partial_\nu). \\ \gamma_{00} &= \gamma(\partial_t, \partial_t) = -N^2 + X^k X_k. \\ \gamma_{0i} &= \gamma(\partial_t, \partial_i) = (N\vec{n} + X) \cdot \partial_i = \langle X_j dx^j, \partial_i \rangle = X_i. \\ \gamma_{j0} &= X_j. \\ \gamma_{ij} &= g_{ij}. \end{aligned}$$

On obtient donc la décomposition 3+1 des composantes de  $\gamma$  :

$$\gamma_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \gamma_{00} & \gamma_{0j} \\ \gamma_{i0} & \gamma_{ij} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -N^2 + X^k X_k & X_j \\ X_i & g_{ij} \end{pmatrix}.$$

Ceci permet d'écrire  $\gamma$  sous la forme

$$\gamma_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -N^2 dt + g_{ij} (dx^i + X^i dt)(dx^j + X^j dt). \quad (3.21)$$

Bien que l'on ait  $\gamma_{ij} = g_{ij}$ , de manière générale les matrices inverses  $\gamma^{ij}$  et  $g^{ij}$  sont différentes car les déterminants  $\det(g)$  et  $\det(\gamma)$  associés à  $g$  et  $\gamma$  sont reliés par la relation

$$\sqrt{-\det(\gamma)} = N \sqrt{\det(g)}. \quad (3.22)$$

Les équations (3.16), (3.18) et (3.20), complétées par l'équation (3.8) qui donne l'expression de  $K$  en fonction de  $g$ , forment le système d'équations suivant

$$\begin{cases} (\partial_t - \mathcal{L}_X) g_{ij} = 2NK_{ij} \\ (\partial_t - \mathcal{L}_X) K_{ij} = -\nabla_i \nabla_j N + N \{ {}^M R_{ij} - \Lambda \gamma_{ij} + (\text{tr}_g K) K_{ij} - 2K_{ik} K_j^k \} \\ R(g) - 2\Lambda + (\text{tr}_g K)^2 - |K|_g^2 = 0 \\ \nabla_j K_i^j - \nabla_i (\text{tr}_g K) = 0 \end{cases} \quad (3.23)$$

Les inconnues du système sont  $\gamma_{ij}, K_{ij}, N, X$ . Grâce aux symboles de Christoffel, on peut exprimer ce système uniquement avec des dérivées partielles. Ce système ne faisant intervenir que des tenseurs définis sur  $\mathcal{M}$  et leurs dérivées temporelles, on peut oublier son origine quadri-dimensionnelle et le considérer comme décrivant l'évolution temporelle des tenseurs sur  $\mathcal{M}$ , de dimension 3, en oubliant le plongement dans  $\mathcal{N}$ .

### Cas des coordonnées normales Gaussiennes

Lorsque l'on prend  $N = 1$  et  $X = 0$ , le système (3.23) devient

$$\begin{cases} \partial_t \gamma_{ij} = -2K_{ij} \\ \partial_t K_{ij} = {}^M R_{ij} - \Lambda \gamma_{ij} + (\text{tr}_g K) K_{ij} - 2K_{ik} K_j^k \\ R(g) - 2\Lambda + (\text{tr}_g K)^2 - |K|_g^2 = 0 \\ \nabla_j K_i^j - \nabla_i (\text{tr}_g K) = 0 \end{cases}$$

En remplaçant les expressions de  $K_{ij}$  et  ${}^M R_{ij}$  en fonction de  $\gamma_{ij}$  dans la deuxième équation, on obtient

$$\begin{cases} \partial_{tt}^2 \gamma_{ij} = F_{ij}(\gamma_{kl}, \partial_a \gamma_{kl}, \partial_t \gamma_{kl}, \partial_{ab}^2 \gamma_{kl}) \\ R(g) - 2\Lambda + (\text{tr}_g K)^2 - |K|_g^2 = 0 \\ \nabla_j K_i^j - \nabla_i (\text{tr}_g K) = 0 \end{cases} \quad (3.24)$$

Ce système est un système de 10 équations à 6 inconnues, il est donc surdéterminé. La première équation a la forme d'un problème de Cauchy dont on peut chercher une solution, étant donné des conditions initiales. Plus précisément, connaissant  $\gamma_{ij}$  et  $\partial_t \gamma_{ij}$  à  $t = 0$ , *i.e.*  $\gamma_{ij}$  et  $K_{ij}$  sur  $\mathcal{M}_0$ , on cherche une solution  $\gamma_{ij}$  pour  $t > 0$ .  $F_{ij}$  est une fonction analytique (polynomiale en les dérivées de  $\gamma_{ij}$  et au plus en fractions rationnelles en  $\gamma_{ij}$ , via la métrique inverse  $\gamma^{ij}$ ). On peut donc utiliser le théorème de Cauchy-Kovalevski pour avoir l'existence et l'unicité de la solution  $\gamma$  dans un voisinage de  $\mathcal{M}_0$ , pour des conditions initiales  $\gamma_{ij}$  et  $K_{ij}$  sur  $\mathcal{M}_0$ . Les deux autres équations (3.18) et (3.20) doivent être satisfaites pour pouvoir reconstruire  $\gamma$  à partir de  $g$ . On ne peut pas les mettre sous une forme à laquelle le théorème de Cauchy-Kovalevski s'applique et elles constituent pour cela des équations de contrainte. L'équation (3.18) est souvent appelée contrainte Hamiltonienne et (3.20) contrainte d'impulsion (ou contrainte vectorielle) en raison du fait que pour les équations d'Einstein dans un univers avec matière

$${}^N R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} {}^N R g_{\alpha\beta} + \Lambda g_{\alpha\beta} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\alpha\beta}, \quad (3.25)$$



elles deviennent

$$R(g) - 2\Lambda + (\text{tr}_g K)^2 - |K|_g^2 = \frac{16\pi G}{c^4} E.$$

$$\nabla_j K_i^j - \nabla_i (\text{tr}_g K) = \frac{8\pi G}{c^4} p_i.$$

où  $E$  et  $p$  sont respectivement la densité d'énergie et d'impulsion de matière dans l'univers, mesurées par un observateur se déplaçant à la vitesse  $\vec{n}$ . Elles sont les analogues en relativité générale de  $D.B = 0$  et  $D.E = \rho/\varepsilon_0$  en électromagnétisme dans les équations de Maxwell.

### 3.3 Equations de contrainte et problème de Cauchy

Etant donné le triplet  $(\mathcal{M}, g, K)$  où  $\mathcal{M}$  est une variété tri-dimensionnelle,  $g$  une métrique Riemannienne sur  $\mathcal{M}$  et  $K$  un champ de formes bilinéaires symétriques sur  $\mathcal{M}$  tel que le couple  $(g, K)$  soit solution des équations de contraintes. Existe-t-il un espace-temps  $(\mathcal{N}, \gamma)$  satisfaisant les équations d'Einstein et tel que  $\mathcal{M}$  soit une hypersurface (de Cauchy) de genre espace de  $\mathcal{N}$  plongée avec une métrique induite  $g$  et une seconde forme fondamentale  $K$ ? Cette question porte le nom de problème de Cauchy en relativité générale.

Au début des années 1950, Yvonne Choquet-Bruhat (Fourès-Bruhat à l'époque) a montré dans [30] le premier théorème d'existence locale pour le problème de Cauchy relatif aux équations d'Einstein du vide : Pour tout ensemble de données initiales lisses qui satisfait les équations de contrainte dans le cas asymptotiquement euclidien, on peut toujours trouver un espace-temps solution des équations d'Einstein qui contienne une hypersurface plongée dont la métrique induite et la seconde forme fondamentale coïncident avec les données initiales en question. On appelle un tel espace-temps le développement associé à ces données initiales, ou l'espace-temps généré par ces données initiales. C'est donc une réponse positive au problème de Cauchy. Son résultat généralise aux données initiales lisses (au moins  $\mathcal{C}^5$ ) les résultats précédents de Georges Darmois [22] et André Lichnérowicz [41] obtenus pour des données initiales analytiques, cas trop restrictif et physiquement inapproprié pour des raisons de causalité. Elle montrera l'existence globale et l'unicité d'un développement maximal avec Robert Geroch quelques années plus tard dans [11]. Le livre écrit par Yvonne Choquet-Bruhat "General relativity and the Einstein equations" [10] leur est consacré et donne un aperçu de son travail remarquable pendant plus de cinquante ans sur le sujet.

La formulation de Cauchy (ou des données initiales) a été depuis une des approches les plus fructueuses pour construire et étudier des solutions des équations de la relativité générale d'Einstein. Les équations de contrainte permettent de réduire le nombre d'équations à résoudre pour trouver des solutions des équations d'Einstein et permettent ainsi de réduire le nombre de données initiales possiblement solutions des équations d'Einstein. Elles jouent de plus un rôle important dans les équations d'évolution de ces données initiales, comme en témoigne leur apparition dans la formulation Hamiltonienne de la théorie de la gravitation d'Einstein, développée dans la section suivante. Le cas où  $K = 0$  sur  $\mathcal{M}$  constitue le cas totalement géodésique, que l'on appelle dans ce contexte

le cas Time-symmetric car le développement maximal  $(\mathcal{N}, \gamma)$  généré par  $(\mathcal{M}, g, K)$  possède une symétrie (réflexion) par rapport à  $\mathcal{M}$ , c'est à dire que la reconstruction  $(\mathcal{N}, \gamma)$  à partir de  $\mathcal{M}$  admet une symétrie en temps.

### 3.4 Approche Hamiltonienne

La formulation Hamiltonienne de la théorie de la gravitation, appelée aussi formulation ADM de la relativité générale en référence aux physiciens Arnowitt, Deser et Misner à l'origine de ces travaux [4], est basée sur l'analyse de l'action d'Einstein-Hilbert. Ces travaux ont été motivés par la volonté d'obtenir une théorie quantique de la gravitation. Pour cela, il nous faut obtenir la décomposition 3+1 de l'action d'Einstein-Hilbert (2.11) dans laquelle on voit apparaître la courbure scalaire de  $\mathcal{N}$  et la forme volume associée à  $\gamma$ . Grâce à l'expression (3.11) obtenue pour la décomposition 3 + 1 de la courbure scalaire de  $\mathcal{N}$  et compte tenu de la relation (3.22) entre les mesures de volume de  $\mathcal{N}$  et  $\mathcal{M}$ , on obtient

$$\begin{aligned} S &= \int_V N \left\{ R(g) - 2\Lambda - (\text{tr}_g K)^2 + |K|_g^2 + 2D_\mu(\text{tr}_g K n^\mu) - \frac{2}{N} \nabla_i \nabla^i N \right\} \sqrt{\det(g)} d^4x \\ &= \int_V N (R(g) - 2\Lambda - (\text{tr}_g K)^2 + |K|_g^2) \sqrt{\det(g)} d^4x - 2 \int_V \nabla_i \nabla^i N \sqrt{\det(g)} d^4x \\ &\quad + 2 \int_V D_\mu(\text{tr}_g K n^\mu) \sqrt{-\det(\gamma)} d^4x. \end{aligned}$$

En réécrivant l'intégrale sur  $V$  grâce à (2.12) comme une intégrale temporelle et une intégrale de volume de dimension 3, et sans tenir compte des deux derniers termes qui sont des divergences alors que nous considérons des variations à support compact, finalement

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \int_{\mathcal{M}_t} N (R(g) - 2\Lambda - (\text{tr}_g K)^2 + |K|_g^2) \sqrt{\det(g)} d^3x \right\} dt.$$

L'action est une fonctionnelle des variables  $q = (g_{ij}, N, X^i)$ , qui donnent les composantes de  $\gamma$  via l'équation (3.21), et de  $\dot{q} = \dot{g}_{ij}$ , la dérivée temporelle de  $g$ . En effet,  $K$  est une fonction de  $g_{ij}, N, X^i$  et  $\dot{g}_{ij}$  au vu de l'équation

$$K_{ij} = \frac{1}{2N} (\dot{g}_{ij} - g_{ik} \nabla_j X^k - g_{jk} \nabla_i X^k). \quad (3.26)$$

On a donc l'expression du Lagrangien

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = N (R(g) - 2\Lambda + |K|_g^2 (\text{tr}_g K)^2 - (\text{tr}_g K)^2) \sqrt{\det(g)} \quad (3.27)$$

$$= N (R(g) - 2\Lambda + (g^{ik} g^{jl} - g^{ij} g^{kl}) K_{ij} K_{kl}) \sqrt{\det(g)}, \quad (3.28)$$

où  $K_{ij}$  et  $K_{kl}$  sont exprimées par l'équation (3.26).

Le Lagrangien n'étant pas fonction de  $\dot{N}$  et  $\dot{X}^i$ , cela montre que le Lapse  $N$  et le Shift  $X$  ne sont pas des variables dynamiques du système et que seule  $g_{ij}$  en est une. Le moment conjugué de  $g_{ij}$  est par définition

$$\pi^{ij} := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{g}_{ij}}.$$

En utilisant les équations (3.27) et (3.26), on obtient l'expression du moment conjugué  $\pi$  en coordonnées locales,

$$\pi^{ij} = (K^{ij} - (\text{tr}_g K)g^{ij})\sqrt{\det(g)}. \quad (3.29)$$

La densité Hamiltonienne est donnée par

$$\mathcal{H} = \pi^{ij}\dot{g}_{ij} - \mathcal{L}.$$

En se servant des équations (3.27), (3.26) et (3.29),

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = & -\left\{N\left(R(g) - 2\Lambda + (\text{tr}_g K)^2 - |K|_g^2\right) - 2X^i\left(\nabla_j K^j_i - \nabla_i(\text{tr}_g K)\right)\right\}\sqrt{\det(g)} d^3x \\ & + 2\nabla_i\left(K^i_j X^j - (\text{tr}_g K)X^i\right)\sqrt{\det(g)} d^3x. \end{aligned}$$

Le dernier terme étant d'une divergence, on ne le considère pas et on obtient la forme suivante de la densité Hamiltonienne

$$\mathcal{H} = -\left\{N\Phi_0(g, K) - X^i\Phi_i(g, K)\right\}\sqrt{\det(g)} d^3x,$$

où  $\Phi(g, K) = (\Phi_0(g, K), \Phi_i(g, K))$  est défini par

$$\Phi_0(g, K) := R(g) - 2\Lambda - |K|_g^2 + (\text{tr}_g K)^2 \quad (3.30)$$

$$\Phi_i(g, K) := 2(\nabla^j K_{ij} - \nabla_i(\text{tr}_g K)) \quad (3.31)$$

$\Phi$  est appelé opérateur de contrainte car il est constitué des membres de gauche respectifs des équations de contraintes (3.18) et (3.20). L'Hamiltonien correspondant, appelé Hamiltonien ADM, est

$$\mathcal{H} = -\int_{\mathcal{M}_t} \left\{N\Phi_0(g, K) - 2X^i\Phi_i(g, K)\right\}\sqrt{\det(g)} d^3x. \quad (3.32)$$

Les variables  $N$  et  $X^i$  n'étant pas des variables dynamiques, leurs moments conjugués sont nuls

$$\pi^N := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{N}} = 0 \quad \text{et} \quad \pi_i^X := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}^i} = 0$$

La minimisation de l'action d'Einstein-Hilbert donne lieu aux équations Hamiltoniennes

$$\begin{cases} \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \pi^{ij}} = \dot{g}_{ij} \\ \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta g_{ij}} = -\dot{\pi}^{ij} \\ \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta N} = -\dot{\pi}^N = 0 \\ \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta X^i} = -\dot{\pi}_i^X = 0 \end{cases}$$

Le calcul des variations de  $\mathcal{H}$  grâce à l'équation (3.32) amène au système suivant

$$\begin{cases} \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \pi^{ij}} = 2NK_{ij} + \nabla_i X_j + \nabla_j X_i = \dot{g}_{ij} \\ \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta g_{ij}} = -\dot{\pi}^{ij} \\ \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta N} = -\Phi_0(g, K) = 0 \\ \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta X^i} = \Phi_i(g, K) = 0 \end{cases}$$

On peut montrer que la deuxième équation de ce système est équivalente à la deuxième équation de (3.23) et les trois autres équations sont respectivement les mêmes que dans (3.23). Ainsi les quatre équations Hamiltoniennes sont équivalentes aux quatre équations de la décomposition 3 + 1 des équations d'Einstein. Au passage, la fonction Lapse et le vecteur Shift peuvent être considérés comme des multiplicateurs de Lagrange, les variables dynamiques de systèmes étant les variables canoniques  $g$  et  $\pi$ . En fixant un Lapse-shift  $(N, X)$ , on obtient un système d'équations dynamique représentant l'évolution des données initiales dans le temps

$$\begin{aligned}\partial_t g_{ij} &= 2NK_{ij} + \mathcal{L}_X g_{ij} \\ \partial_t K_{ij} &= -\nabla_i \nabla_j N + \mathcal{L}_X K_{ij} + N \{ {}^M R_{ij} - \Lambda \gamma_{ij} + (\text{tr}_g K) K_{ij} - 2K_{ik} K^k_j \}\end{aligned}$$

En utilisant le formalisme Hamiltonien, il est possible de mettre les équations d'évolution sous la forme matricielle

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} g \\ \pi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} D\Phi_\alpha(g, \pi)^* \cdot \xi^\alpha \quad (3.33)$$

où  $D\Phi(g, \pi)^*$  est l'adjoint formel, obtenu en ignorant les termes de bord. Nous verrons que dans le cas asymptotiquement hyperbolique, comme dans le cas asymptotiquement plat, les termes de bord présents sont en étroite relation avec un invariant géométrique de la variété que l'on appellera masse de la variété.

En s'intéressant aux équations d'évolution des équations de contrainte, on se demande si des données initiales qui satisfont les équations de contrainte à un moment donné continueront de les satisfaire tout au long de leur évolution. Fixons des données initiales  $(g_0, \pi_0)$  satisfaisant les équations de contraintes du vide. Il est naturel de se demander si l'évolution de ces données initiales  $(g(t), \pi(t))$ , définie en spécifiant le Lapse-shift  $(N, X^i)$ , continuera à satisfaire les équations de contrainte du vide, et ce à chaque instant  $t$  de leur évolution. On calcule pour cela la dérivée par rapport au temps, interprétée comme la dérivée de Lie par rapport à  $t$  de l'opérateur de contrainte ( $\Phi = \Phi_0, \Phi_i$ )

$$\begin{aligned}\partial_t \Phi_0 &= \nabla_i (X^i \Phi_0) + 2g^{ij} \nabla_i N \Phi_j + N \nabla_i \Phi^i + \frac{1}{2} N g_{ij} \pi^{ij} / \sqrt{g} \\ \partial_t \Phi_i &= 2\nabla_i N \Phi_0 + N \nabla_i \Phi_0 + \nabla_j (X^j \Phi_i) + \nabla_i X^j \Phi_j\end{aligned}$$

Ces équations forment un système d'équations hyperbolique symétrique. Par un argument de conservation de l'énergie-impulsion, quadratique en  $\Phi_0$  et  $\Phi_i$ , on peut en déduire la préservation des équations de contrainte  $\Phi(t) = 0$  pour tout temps  $t$  compatible avec le feuilletage de  $\mathcal{N}$ , étant donné  $\Phi(0) = 0$  initialement. C'est une conséquence des identités de Bianchi et de la divergence nulle du tenseur d'Einstein.

Une interprétation de la formulation Hamiltonienne des équations d'évolution (3.33) consiste à considérer  $(g(t), \pi(t))$  comme une trajectoire sur le fibré  $S^2 T^* \mathcal{M}$  des formes bilinéaires symétriques sur  $\mathcal{M}$ , l'espace des métriques Riemanniennes. Soit  $\mathcal{C}$ , le sous ensemble de  $\mathcal{F}$  qui satisfait les équations de contrainte. Le fait que les équations de contrainte soient préservées se traduit par le fait que la trajectoire  $(g(t), \pi(t))$  vit dans l'ensemble des contraintes  $\mathcal{C}$  pour tout temps  $t$  compatible avec le feuilletage de  $\mathcal{N}$ , à partir du moment où  $(g(0), \pi(0))$  appartient à  $\mathcal{C}$  initialement.



## Première partie

Structure de variété de Hilbert de  
l'ensemble des données initiales  
faiblement AH



# Chapitre 4

## Cadre général et analyse préliminaire

### 4.1 Variété conformément compacte

Soit  $(\mathcal{M}, \mathring{g})$  une variété Riemannienne connexe  $\mathcal{C}^\infty$  de dimension  $n$  non compacte. La variété  $(\mathcal{M}, \mathring{g})$  est dite conformément compacte s'il existe une métrique Riemannienne  $\mathring{h}$  telle que  $\mathring{g} = \rho^{-2}\mathring{h}$  où  $(\bar{\mathcal{M}}, \mathring{h})$  est une variété Riemannienne  $\mathcal{C}^\infty$  compacte de bord  $\partial_\infty\mathcal{M}$  et  $\rho$  est une fonction sur  $\bar{\mathcal{M}}$ , appelée fonction définissante pour  $\partial_\infty\mathcal{M}$  telle que :

- $\rho \in \mathcal{C}^\infty(\bar{\mathcal{M}})$
- $\rho \geq 0$  sur  $\bar{\mathcal{M}}$
- $\partial_\infty\mathcal{M} = \{x \in \bar{\mathcal{M}} : \rho(x) = 0\}$
- $d\rho|_{\partial_\infty\mathcal{M}}$  ne s'annule jamais.

On peut montrer que la variété  $(\mathcal{M}, \mathring{g})$  est complète, puisque le facteur conforme  $\rho^{-2}$ , nul sur le bord  $\partial_\infty\mathcal{M}$ , a pour effet d'envoyer le bord de  $(\mathcal{M}, \mathring{h})$  vers l'infini de  $(\mathcal{M}, \mathring{g})$ , ce qui justifie *a posteriori* la notation  $\partial_\infty\mathcal{M}$ . On montre également que les variétés conformément compactes sont à courbure sectionnelle négative à l'infini, dans le sens suivant : prenons une suite de points  $\{x_i\}_{i=1}^\infty$  de  $\mathcal{M}$  telle que  $x_i \rightarrow y \in \partial\mathcal{M}$  lorsque  $i \rightarrow \infty$ , alors

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \kappa_{x_i} = -|d\rho|_{\mathring{h};y}^2 \quad (4.1)$$

où  $\kappa_x$  est la courbure sectionnelle de  $\mathcal{M}$  au point  $x$ .

Remarque : les variétés conformément compactes ne sont pas du tout rares et compliquées à construire. Il suffit de quotienter une métrique lisse d'une variété compacte à bord par une fonction définissante du bord. Cette fonction peut être facilement construite en prenant sur un voisinage du bord la "distance au bord", que l'on prolonge de façon lisse sur toute la variété en gardant la positivité. On peut d'ailleurs avoir en tête le modèle de l'espace hyperbolique de la boule de Poincaré comme exemple standard de variété conformément compacte.

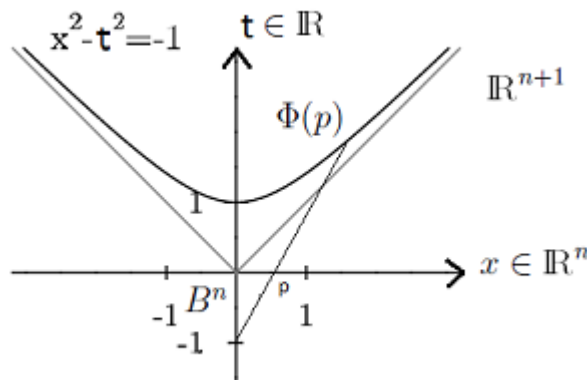
#### Modèle de la boule de Poincaré

Soit  $B^n = \{x \in \mathbb{R}^n / \|x\| < 1\}$  la boule unité ouverte de  $\mathbb{R}^n$ , où  $\|\cdot\|$  désigne la norme euclidienne standard.

On considère l'hyperboloïde  $\mathbb{H}^n$  de dimension  $n$  plongé dans  $\mathbb{R}^{n+1}$  paramétré par

$$\begin{cases} -t^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2 = -1 \\ t > 0 \end{cases}$$





où  $x^2$  est l'abréviation de  $\|x\|^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2$ .

On considère sur celui-ci la métrique induite par celle de Minkowski définie sur  $\mathbb{R}^{n+1}$  par la matrice

$$\eta = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$$

On souhaite transporter la métrique de Minkowski sur  $\mathbb{R}^n$  via la projection :

$$\begin{aligned} \phi : \quad B^n &\longrightarrow \mathbb{H}^n \subset \mathbb{R}^{n+1} \\ x = (x_1, \dots, x_n) &\longmapsto \phi(x) = \left( \frac{1+\|x\|^2}{1-\|x\|^2}, \frac{2x_1}{1-\|x\|^2}, \dots, \frac{2x_n}{1-\|x\|^2} \right) \end{aligned}$$

On obtient la métrique Riemannienne sur la boule de Poincaré au point  $x \in \mathbb{R}^n$

$$\hat{g}_{ij}(x) = \frac{4}{(1 - \|x\|^2)^2} \delta_{ij} = \rho^{-2} \delta_{ij}$$

où  $\delta_{ij}$  est l'expression de la métrique euclidienne en coordonnées locales et  $\rho(x) = \frac{1}{2}(1 - \|x\|^2)$  est bien une fonction définissante de  $\partial B^n = S^n$ .

On appelle métrique asymptotiquement hyperbolique sur  $\mathcal{M}$  toute métrique Riemannienne  $\hat{g}$  vérifiant :

- $\hat{g}$  est conformément compacte
- $|d\rho|_{\hat{g}, \partial_\infty \mathcal{M}}^2 = 1$

On comprend l'origine de la terminologie grâce à (4.1) puisque la courbure sectionnelle de  $\mathcal{M}$  est dans ce cas asymptotique à  $-1$ , ce qui n'est pas sans rappeler l'espace hyperbolique qui est à courbure sectionnelle constante égale à  $-1$ . En effet, pour le modèle de la boule de Poincaré, on obtient après calculs le tenseur de courbure suivant

$$R_{ijkl} = -g_{ik}g_{jl} + g_{il}g_{jk}$$

et on en déduit la courbure sectionnelle

$$\kappa_x(V, W) = \frac{R_{ijkl}V^iW^jV^kW^l}{g_{pq}V^pV^qg_{kl}W^kW^l - (g_{ij}V^iW^j)^2} = \frac{(-g_{ik}g_{jl} + g_{il}g_{jk})V^iW^jV^kW^l}{g_{pq}V^pV^qg_{kl}W^kW^l - (g_{ij}V^iW^j)^2} = -1.$$

Pour certains résultats,  $\mathcal{M}$  pourra avoir un bord intérieur  $\partial\mathcal{M}$  et dans ce cas,  $\bar{\mathcal{M}}$  désignera l'union disjointe de  $\mathcal{M}$ ,  $\partial\mathcal{M}$  et  $\partial_\infty\mathcal{M}$ .

L'existence de ces deux métriques sur  $\mathcal{M}$  pouvant être source de confusion dans les considérations faites par la suite, un certain nombre de notations s'imposent.  $\overset{\circ}{\nabla}, \overset{\circ}{\Delta}, \overset{\circ}{\Gamma}_{ij}^k$  et  $|u|_{\overset{\circ}{g}}$  (resp.  $(\overset{\circ}{h})\nabla, \overset{\circ}{\Delta}_{\overset{\circ}{h}}, (\overset{\circ}{h})\Gamma_{ij}^k$  et  $|u|_{\overset{\circ}{h}}$ ) désignent respectivement la connexion, le Laplacien, les symboles de Christoffel et la norme tensorielle relatifs à la métrique  $\overset{\circ}{g}$  (resp.  $\overset{\circ}{h}$ ). Il existe des correspondances pour plusieurs de ces quantités.

Pour les mesures de volume, en dimension  $n$ , on a clairement

$$d\mu(\overset{\circ}{g}) = \rho^{-n} d\mu(\overset{\circ}{h}).$$

Pour les symboles de Christoffel,

$$\overset{\circ}{\Gamma}_{ij}^k = (\overset{\circ}{h})\Gamma_{ij}^k - \frac{1}{\rho} \left( \delta_j^k \partial_i \rho + \delta_i^k \partial_j \rho - \overset{\circ}{h}{}^{kl} \overset{\circ}{h}_{ij} \partial_l \rho \right).$$

Preuve :

D'après (5.7),

$$\overset{\circ}{\Gamma}_{ij}^k - (\overset{\circ}{h})\Gamma_{ij}^k = \frac{\overset{\circ}{g}{}^{kl}}{2} \left( (\overset{\circ}{h})\nabla_i \overset{\circ}{g}_{lj} + (\overset{\circ}{h})\nabla_j \overset{\circ}{g}_{li} - (\overset{\circ}{h})\nabla_l \overset{\circ}{g}_{ij} \right).$$

Or  $\overset{\circ}{g} = \rho^{-2} \overset{\circ}{h}$  donc  $g^{-1} = \rho^2 \overset{\circ}{h}^{-1}$ . Compte tenu du fait que  $(\overset{\circ}{h})\nabla \overset{\circ}{h} = 0$ ,

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\Gamma}_{ij}^k - (\overset{\circ}{h})\Gamma_{ij}^k &= \rho^2 \frac{\overset{\circ}{h}{}^{kl}}{2} \left( \overset{\circ}{h}_{lj} (\overset{\circ}{h})\nabla_i \rho^{-2} + \overset{\circ}{h}_{li} (\overset{\circ}{h})\nabla_j \rho^{-2} - \overset{\circ}{h}_{ij} (\overset{\circ}{h})\nabla_l \rho^{-2} \right) \\ &= -\frac{1}{\rho} \left( \delta_j^k \partial_i \rho + \delta_i^k \partial_j \rho - \overset{\circ}{h}{}^{kl} \overset{\circ}{h}_{ij} \partial_l \rho \right). \quad \square \end{aligned}$$

En particulier pour la Hessienne de  $\rho$ , l'équation (C.12) de [15] donne

$$\overset{\circ}{\nabla}_{ij}^2 \rho = (\overset{\circ}{h})\overset{\circ}{\nabla}_{ij}^2 \rho + \rho \left( 2 \frac{\partial_i \rho}{\rho} \frac{\partial_j \rho}{\rho} - \overset{\circ}{g}_{ij} |d\rho|_{\overset{\circ}{h}}^2 \right). \quad (4.2)$$

La trace de (4.2) donne l'expression du Laplacien de  $\rho$

$$\overset{\circ}{\Delta} \rho = \rho^2 \overset{\circ}{\Delta}_{\overset{\circ}{h}} \rho - (n-2) \rho |d\rho|_{\overset{\circ}{h}}^2. \quad (4.3)$$

Plus généralement pour le Laplacien,

$$\forall u \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathcal{M}) \quad , \quad \overset{\circ}{\Delta} u = \rho^2 \left( \overset{\circ}{\Delta}_{\overset{\circ}{h}} u - \frac{n-2}{\rho} d\rho \cdot_{\overset{\circ}{h}} du \right), \quad (4.4)$$

où  $\cdot_{\overset{\circ}{h}}$  désigne le produit scalaire relatif à la métrique  $\overset{\circ}{h}$ .

Preuve :

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\Delta} u &= \overset{\circ}{g}{}^{ij} \overset{\circ}{\nabla}_i \partial_j u = \rho^2 \overset{\circ}{h}{}^{ij} \overset{\circ}{\nabla}_i \partial_j u \\ &= \rho^2 \overset{\circ}{h}{}^{ij} \left( \partial_i \partial_j u - \overset{\circ}{\Gamma}_{ik}^j \partial_k u \right) \\ &= \rho^2 \overset{\circ}{h}{}^{ij} \left[ \partial_i \partial_j u - (\overset{\circ}{h})\overset{\circ}{\Gamma}_{ik}^j \partial_k u + \frac{1}{\rho} \left( \delta_i^k \partial_j \rho + \delta_j^k \partial_i \rho - \overset{\circ}{h}{}^{kl} \overset{\circ}{h}_{ij} \partial_l \rho \right) \partial_k u \right] \\ &= \rho^2 \left[ \overset{\circ}{h}{}^{ij} (\overset{\circ}{h})\nabla_i \partial_j u + \frac{1}{\rho} \left( \overset{\circ}{h}{}^{jk} \partial_j \rho + \overset{\circ}{h}{}^{ik} \partial_i \rho - (\text{tr}_{\overset{\circ}{h}} \overset{\circ}{h}) \overset{\circ}{h}{}^{kl} \partial_l \rho \right) \partial_k u \right] \\ &= \rho^2 \left[ \overset{\circ}{\Delta}_{\overset{\circ}{h}} u + \frac{1}{\rho} \left( \overset{\circ}{h}{}^{jk} \partial_j \rho + \overset{\circ}{h}{}^{ik} \partial_i \rho - (\text{tr}_{\overset{\circ}{h}} \overset{\circ}{h}) \overset{\circ}{h}{}^{kl} \partial_l \rho \right) \partial_k u \right] \\ &= \rho^2 \left( \overset{\circ}{\Delta}_{\overset{\circ}{h}} u - \frac{n-2}{\rho} d\rho \cdot_{\overset{\circ}{h}} du \right). \quad \square \end{aligned}$$

Pour les normes tensorielles,

$$\forall u \in T_m^r(\mathcal{M}), |u|_{\dot{g}} = \rho^{m-r} |u|_{\dot{h}}.$$

**Définition 1:** Une fonction de troncature

Soit  $(\mathcal{M}, \dot{g})$  une variété conformément compacte de fonction définissante  $\rho$ .  
Soit  $\chi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de troncature lisse telle que :

- $\chi(\mathbb{R}) \subset [0, 1]$
- $\text{supp } \chi \subset (-\infty, 2]$
- $\chi|_{(-\infty, 1]} = 1$

Alors, pour  $R$  assez grand, on définit une fonction de troncature sur  $\mathcal{M}$  par

$$\chi_R(x) = \chi(-\ln(\rho(x))/R).$$

Soit  $\Omega_R = \{x \in \mathcal{M} : \rho(x) > e^{-2R}\}$ , alors  $\chi_R$  vérifie

$$\chi_R = \begin{cases} 1 & \text{sur } \Omega_{R/2} \\ 0 & \text{sur } \mathcal{M} \setminus \Omega_R \end{cases}$$

Autrement dit,  $\chi_R$  est une fonction de troncature au voisinage du bord à l'infini de  $\mathcal{M}$ .

## 4.2 Espaces de Sobolev et de Hölder à poids

A l'aide de la métrique asymptotiquement hyperbolique  $\dot{g}$  fixée, on définit la norme suivante

$$\forall 1 \leq p < \infty \text{ et } \delta \in \mathbb{R} : \|u\|_{p,\delta} = \left( \int_{\mathcal{M}} |u|_{\dot{g}}^p \rho^{p\delta} d\mu(\dot{g}) \right)^{1/p}$$

$$\text{Pour } p = \infty \text{ et } \delta \in \mathbb{R} : \|u\|_{\infty,\delta} = \sup_{\mathcal{M}} (\rho^\delta |u|_{\dot{g}})$$

L'espace de Lebesgue à poids  $L_\delta^p$  est alors défini comme l'espace des fonctions mesurables de  $L_{\text{loc}}^p$  dont la norme ci-dessus est finie. On peut maintenant définir l'espace de Sobolev  $W_\delta^{k,p}$  comme l'espace des fonctions mesurables de  $L_{\text{loc}}^p$  dont la norme suivante est finie :

$$\|u\|_{k,p,\delta} = \sum_{|\alpha| \leq k} \|\dot{\nabla}^\alpha u\|_{p,\delta},$$

où  $\alpha$  est un multi-indice de taille  $n$  et  $\dot{\nabla}^\alpha u = \dot{\nabla}_{i_1}^{\alpha_1} \dots \dot{\nabla}_{i_n}^{\alpha_n} u$ ,

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \text{ et } |\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i.$$

NB : *A priori*, la définition des espaces de Lebesgue et Sobolev à poids dépendent de la métrique  $\dot{g}$  utilisée pour définir les normes sur ces espaces. Pour  $\delta = 0$ , on retrouve les normes des espaces de Lebesgue et Sobolev classiques.

On note  $W_\delta^{k,p}(T_m^r \mathcal{M}, \mathring{g})$  les espaces de Sobolev sur les sections du fibré des tenseurs de type  $(r, m)$  sur  $\mathcal{M}$  relativement à  $\mathring{g}$ . On parlera de  $W_\delta^{k,p}$ - norme pour désigner la norme d'un tenseur  $u \in W_\delta^{k,p}(T_m^r \mathcal{M})$ . Pour un domaine  $U \subset \mathcal{M}$ ,  $\|u\|_{k,p,\delta;U}$  désigne la  $W_\delta^{k,p}$ - norme de  $u$  restreinte à  $U$ .

On définit également l'espace de Hölder à poids,  $C_\delta^{s,\alpha}(\mathcal{M}, g)$  avec  $0 < \alpha < 1$  à l'aide de la norme suivante

$$\|u\|_{C_\delta^{s,\alpha}} = \max_{|k| \leq s} \|\mathring{\nabla}^k u\|_{C_\delta^{0,\alpha}}$$

avec

$$\|u\|_{C_\delta^{0,\alpha}} = \sup_{x \in \mathcal{M}} \rho^\delta |u|_{\mathring{g}} + \sup_{x \in \mathcal{M}} \rho^\delta \left( \sup_{d_{\mathring{g}}(x,y) \leq 1} \frac{|\tilde{u}(x) - \tilde{u}(y)|_{\tilde{g}}}{d_{\mathring{g}}(x,y)^\alpha} \right),$$

où  $\tilde{u}$  et  $\tilde{g}$  désignent les tenseurs  $u$  et  $g$  dans une base orthonormée appropriée.

### 4.3 Opérateurs elliptiques

Nous rappelons ici des résultats classiques sur les opérateurs elliptiques, que l'on peut trouver dans [2] par exemple. Soient  $B_1$  et  $B_2$  deux fibrés tensoriels sur une variété conformément compacte  $(\mathcal{M}, \mathring{g})$  de fonction définissante  $\rho$ . Soit  $A : \mathcal{C}^\infty(B_1) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(B_2)$  un opérateur de dérivation partielle linéaire d'ordre  $m$  défini par

$$A = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \mathring{\nabla}^\alpha \tag{4.5}$$

Soit  $s \in \mathbb{N}$ . On dit que l'opérateur  $A$  de la forme (4.5) a son symbole dans  $\mathcal{OP}_s^m$  si

$$a_\alpha \in C_{-|\alpha|}^{s_\alpha} L(B_1, B_2), \quad \text{avec } s_\alpha = \max(s, |\alpha| - m + 1).$$

On dit que  $A$  est un opérateur elliptique si :

- Pour tout  $\alpha$  tel que  $|\alpha| = m$ , pour tout  $\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \dots \xi_n^{\alpha_n} \neq 0$ ,  $a_\alpha \xi^\alpha : B_1 \rightarrow B_2$  est un isomorphisme de fibrés tensoriels
- Pour tout  $\xi^\alpha$ , il existe deux constantes  $c_1$  et  $c_2$  telles que

$$\|a_\alpha \xi^\alpha\|_{\mathring{g}} < c_1 \|\xi^\alpha\|_{\mathring{g}} \quad \text{et} \quad \|(a_\alpha \xi^\alpha)^{-1}\|_{\mathring{g}} < c_2 \|\xi^\alpha\|_{\mathring{g}}.$$

**Lemme 1:**

Soit  $s_0 \in \mathbb{N}$ . Pour un opérateur elliptique  $A$  avec symbole dans  $\mathcal{OP}_{s_0}^m$ , il existe une constante  $c$  positive ne dépendant que de  $\mathring{g}$  et  $\delta$  telle que l'inégalité suivante est valable pour tout  $s \leq s_0$  :

$$\|u\|_{2,s+m,\delta} \leq c (\|Au\|_{2,s,\delta} + \|u\|_{2,0,\delta}). \tag{4.6}$$

**Théorème 6:**

Pour  $R > 0$ , soit  $\Omega_R$  comme défini dans la Définition 1. Soit  $\delta \in \mathbb{R}$  donné et  $A$  un opérateur elliptique avec symbole dans  $\mathcal{OP}_0^m$ .

Supposons qu'il existe  $R$  assez grand pour que  $A$  satisfasse l'inégalité

$$\forall u \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathcal{M} \setminus \bar{\Omega}_R) \quad , \quad \|u\|_{2,\delta} \leq C \|Au\|_{2,\delta}, \quad (4.7)$$

où  $C$  dépend de l'opérateur.

Alors on peut choisir  $R$  assez grand pour que l'inégalité suivante

$$\|u\|_{m,2,\delta} \leq C (\|Au\|_{2,\delta} + \|u\|_{2,\delta;\Omega_R}) \quad (4.8)$$

soit valable pour tout  $u \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathcal{M})$ . En particulier,  $A : W_\delta^{m,2} \rightarrow L_\delta^2$  est semi-Fredholm, *i.e.*  $A$  a un noyau de dimension finie et une image fermée.

Preuve :

Soit  $\Omega_R$  comme dans la Définition 1, alors pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ , il existe une constante  $C_k$  telle que

$$\forall x \in \mathcal{M} \quad , \quad \forall 0 < |\alpha| \leq k \quad , \quad |\mathring{\nabla}^\alpha \chi_R|_g(x) \leq C_k/R.$$

Par conséquent, l'opérateur  $A$  vérifie

$$\forall u \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathcal{M}) \quad , \quad \|A(\chi_R u)\|_{2,\delta} \leq \|\chi_R(Au)\|_{2,\delta} + B/R \|u\|_{m-1,2,\delta} \quad , \quad (4.9)$$

où  $B$  est une constante dépendant de  $m$ ,  $|a_\alpha|_g$  et  $\mathring{g}$ .

Preuve de (4.9) :

$$A(\chi_R u) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \mathring{\nabla}^\alpha (\chi_R u).$$

Or

$$\mathring{\nabla}^\alpha (\chi_R u) = \sum_{\nu \leq \alpha} C_\alpha^\nu \mathring{\nabla}^\nu \chi_R \mathring{\nabla}^{\alpha-\nu} u \quad ,$$

où  $\alpha$  et  $\nu$  sont des multi-indices de taille  $n$  et

$$C_\alpha^\nu = \prod_{k=1}^n C_{\alpha_k}^{\nu_k}.$$

On a donc

$$A(\chi_R u) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \sum_{\nu \leq \alpha} C_\alpha^\nu \mathring{\nabla}^\nu \chi_R \mathring{\nabla}^{\alpha-\nu} u$$

que l'on peut réécrire

$$A(\chi_R u) = \chi_R(Au) + (A\chi_R)u + \sum_{|\alpha| < m} a_\alpha \sum_{0 < \nu \leq \alpha} C_\alpha^\nu \mathring{\nabla}^\nu \chi_R \mathring{\nabla}^{\alpha-\nu} u.$$

$$\begin{aligned} \|A(\chi_R u)\|_{2,\delta} &\leq \|\chi_R(Au)\|_{2,\delta} + \|(A\chi_R)u\|_{2,\delta} + \sum_{|\alpha| \leq m-1} \|a_\alpha \sum_{0 < \nu \leq \alpha} C_\alpha^\nu \mathring{\nabla}^\nu \chi_R \mathring{\nabla}^{\alpha-\nu} u\|_{2,\delta} \\ &\leq \|\chi_R(Au)\|_{2,\delta} + \|(A\chi_R)u\|_{2,\delta} + C/R \|u\|_{m-1,2,\delta} \quad , \end{aligned}$$

où  $C = C(m, |a_\alpha|_g)$  est une constante.

$$\|(A\chi_R)u\|_{2,\delta} \leq \|A\chi_R\|_{\infty,0} \|u\|_{2,\delta} \leq c/R \|u\|_{2,\delta}.$$

Finalement, on obtient

$$\|A(\chi_R u)\|_{2,\delta} \leq \|\chi_R(Au)\|_{2,\delta} + B/R \|u\|_{m-1,2,\delta}. \quad \square$$

Par hypothèse,  $R$  est choisi assez grand pour que

$$\forall u \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathcal{M} \setminus \bar{\Omega}_R), \quad \|u\|_{2,\delta} \leq C \|Au\|_{2,\delta}.$$

C'est le cas de  $(1 - \chi_R)u$  et par conséquent

$$\forall u \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathcal{M}), \quad \|(1 - \chi_R)u\|_{2,\delta} \leq C \|A[(1 - \chi_R)u]\|_{2,\delta}. \quad (4.10)$$

$\forall u \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathcal{M}),$

$$\begin{aligned} \|u\|_{2,\delta} &\leq \|(1 - \chi_R)u\|_{2,\delta} + \|\chi_R u\|_{2,\delta} \\ &\stackrel{(4.10)}{\leq} C \|A[(1 - \chi_R)u]\|_{2,\delta} + \|\chi_R u\|_{2,\delta} \\ &\leq C (\|Au\|_{2,\delta} + \|A(\chi_R u)\|_{2,\delta}) + \|\chi_R u\|_{2,\delta} \\ &\stackrel{(4.9)}{\leq} C \|Au\|_{2,\delta} + \|\chi_R u\|_{2,\delta} + C (\|\chi_R(Au)\|_{2,\delta} + B/R \|u\|_{m-1,2,\delta}) \\ &\leq C \|Au\|_{2,\delta} + CB/R \|u\|_{m-1,2,\delta} + \|u\|_{2,\delta;\Omega_R} + C \|Au\|_{2,\delta;\Omega_R} \\ &\leq C \|Au\|_{2,\delta} + CB/R \|u\|_{m-1,2,\delta} + \|u\|_{2,\delta;\Omega_R}. \end{aligned}$$

Pour  $R$  assez grand, il existe  $\varepsilon > 0$  tel que  $\varepsilon \ll 1$  et

$$CB/R \|u\|_{m-1,2,\delta} \leq \varepsilon \|u\|_{m-1,2,\delta} \leq \varepsilon \|u\|_{m,2,\delta}.$$

Il reste juste à conclure avec le Lemme 1 pour obtenir

$$\|u\|_{m,2,\delta} \leq C (\|Au\|_{2,\delta} + \|u\|_{2,\delta;\Omega_R}).$$

Montrons maintenant que  $A$  est semi-Fredholm. Pour montrer que le noyau de  $A$  est de dimension finie, on utilise le théorème de Riesz en montrant que tout ensemble borné de  $\ker A$  est  $\|\cdot\|_{m,2,\delta}$ -compact. Soit  $\{u_k\}$  une suite de  $\ker A$  telle que  $\|u_k\|_{m,2,\delta} = 1$ . Le théorème de Rellich nous dit que l'on peut extraire de  $\{u_k\}$  une sous-suite, notée également  $\{u_k\}$ , qui converge dans  $L_\delta^2(\Omega_R)$  vers une limite  $\bar{u}$ . La suite  $\{u_k\}$  est donc de Cauchy dans  $L_\delta^2(\Omega_R)$ . D'après (4.8), compte tenu du fait que  $\{u_k\} \in \ker A$ , la suite  $\{u_k\}$  est donc de Cauchy dans  $W_\delta^{m,2}$ , donc convergente vers  $\bar{u}$  dans  $W_\delta^{m,2}$ , par unicité de la limite, ce qui conclut la preuve de la dimension finie de  $\ker A$ .

Montrons maintenant que l'image de  $A$  est fermée.  $\ker A$  étant un sous espace vectoriel fermé de l'espace de Hilbert  $W_\delta^{m,2}$  comme sous espace vectoriel de dimension finie d'un espace vectoriel normé, il admet par suite un supplémentaire fermé, noté  $W$ . On peut donc écrire

$$W_\delta^{m,2} = \ker A \oplus W.$$

Supposons maintenant qu'il existe une suite  $\{v_k\}$  dans  $W$  telle que  $\|v_k\|_{m,p,\delta} = 1$  et  $\|Av_k\|_{2,\delta} \rightarrow 0$ . En appliquant de nouveau le théorème de Rellich, il existe une sous-suite de  $\{v_k\}$  qui converge dans  $L^2_\delta(\Omega_R)$  vers une limite  $v_*$ .  $\{v_k\}$  est donc de Cauchy dans  $L^2_\delta(\Omega_R)$ . L'application de (4.8) à  $v_n - v_m$  donne

$$\begin{aligned} \|v_n - v_m\|_{m,2,\delta} &\leq C (\|Av_n - Av_m\|_{2,\delta} + \|v_n - v_m\|_{2,\delta;\Omega_R}) \\ &\leq C (\|Av_n\|_{2,\delta} + \|Av_m\|_{2,\delta} + \|v_n - v_m\|_{2,\delta;\Omega_R}). \end{aligned}$$

En passant à la limite, et compte tenu du fait que  $\|Av_k\|_{2,\delta} \rightarrow 0$ ,  $\{v_k\}$  est de Cauchy dans  $W_\delta^{m,2}$  et converge donc vers  $v_*$  dans  $W_\delta^{m,2}$ , par unicité de la limite. Comme  $W$  est fermé dans  $W_\delta^{m,2}$ ,  $v_* \in W$ . L'opérateur  $A$  étant continu, la suite  $\{Av_k\}$  converge vers  $Av_*$  dans  $L^2_\delta$ . Par unicité de la limite,  $Av_* = 0$ , *i.e.*  $v_* \in \ker A$ , ce qui contredit  $W \cap \ker A = \{0\}$ . Mettons tout d'abord en avant le lemme suivant.

**Lemme 2:**

Il existe une constante  $C$  telle que pour tout  $v \in W$ ,

$$\|v\|_{m,2,\delta} \leq C \|Av\|_{2,\delta}. \quad (4.11)$$

Preuve :

Supposons par l'absurde que pour toute constante  $C > 0$ , il existe  $v_c \in W$  tel que  $\|v_c\|_{m,2,\delta} > C \|Av_c\|_{2,\delta}$ . Remarque :  $v_c \neq 0$ . Soit  $v_c = \lambda_c u_c \in W$ , avec  $\|u_c\|_{m,2,\delta} = 1$ .

$$\forall C > 0, \exists v_c \in W \text{ tel que } \|v_c\|_{m,2,\delta} = \lambda_c \|u_c\|_{m,2,\delta} > C \|Av_c\|_{2,\delta} = C \lambda_c \|Au_c\|_{2,\delta},$$

ce qui est équivalent à  $\forall C > 0, \exists u_c \in W, \|u_c\|_{m,2,\delta} = 1$  tel que  $\|Au_c\|_{2,\delta} \leq \frac{1}{C}$ ,  
encore équivalent à  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists u_n \in W, \|u_n\|_{m,2,\delta} = 1$  tel que  $\|Au_n\|_{2,\delta} \leq \frac{1}{n}$ .

Nous avons donc trouvé une suite  $\{u_n\}$  de  $W$  telle que  $\|u_n\|_{m,2,\delta} = 1$  et  $\|Au_n\|_{2,\delta} \rightarrow 0$  mais ceci est en contradiction avec  $W \cap \ker A = \{0\}$  d'après l'argument de contradiction précédent le lemme.  $\square$

Reprenons maintenant la preuve du théorème 6. Soit  $\{v_k\}$  une suite de  $W$  et notons  $f_k = Av_k$  la suite image. Supposons que  $\{f_k\}$  converge dans  $L^2_\delta$  vers  $\tilde{f}$ , alors  $\{f_k\}$  est une suite de Cauchy dans  $L^2_\delta$ . D'après (4.11), la suite  $\{v_k\}$  est de Cauchy dans  $W_\delta^{m,2}$ , complet en tant qu'espace de Hilbert.  $W$  étant complet en tant que fermé dans  $W_\delta^{m,2}$ , la suite  $\{v_k\}$  converge dans  $W$  vers  $\tilde{u}$ . L'opérateur  $A$  étant continu, la suite  $\{Av_k\}$  converge vers  $A\tilde{u}$ . Par unicité de la limite,  $\tilde{f} = A\tilde{u}$  et ainsi  $\tilde{f} \in \text{Im } A$  : l'image de  $A$  est fermée.  $\square$

## 4.4 Inégalités fonctionnelles

Le théorème suivant donne quelques inclusions et inégalités utiles par la suite (voir Théorème 2.3 de [2] par exemple).

**Théorème 7:**

Soit  $(\mathcal{M}, \mathring{g})$  une variété  $n$ -dimensionnelle conformément compacte.

Inclusion de Sobolev à poids :

Pour tout  $1 \leq p \leq q < \infty$ , pour tout  $k \geq k'$ , si  $\delta \leq \delta' - \frac{n}{p} \frac{(q-p)}{q}$ , alors  $W_\delta^{k,q} \subset W_{\delta'}^{k',p}$ , et il existe une constante positive  $c = c(\mathring{g}, \delta, \delta', k, k', n, p, q)$  telle que

$$\|u\|_{k',p,\delta'} \leq c \|u\|_{k,q,\delta}.$$

Si  $q = \infty$ , pour tout  $1 \leq p \leq \infty$ ; pour tout  $k \geq k'$ , si  $\delta \leq \delta' - \frac{n}{p}$ , alors  $W_\delta^{k,\infty} \subset W_{\delta'}^{k',p}$ , et il existe une constante positive  $c = c(\mathring{g}, \delta, \delta', k, k', n, p)$  telle que

$$\|u\|_{k',p,\delta'} \leq c \|u\|_{k,\infty,\delta}.$$

Théorème de Rellich :

Pour tout  $k > k'$  et  $\delta < \delta'$ , l'inclusion  $W_\delta^{k,2} \subset W_{\delta'}^{k',2}$  est compacte.

Inclusion de Hölder :

Soit  $k \in \mathbb{N}$ ,  $n = 3$  et  $p = 2$ , alors pour tout  $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$ , pour tout  $\delta \leq \delta'$ , il existe une constante positive  $c = c(\mathring{g}, \delta, \delta', k, k', \alpha)$  telle que

$$\forall u \in W_\delta^{2,2}(\mathcal{M}) \quad , \quad \|u\|_{C_{\delta'}^{0,\alpha}} \leq c \|u\|_{2,2,\delta}. \quad (4.12)$$

Inégalité de Sobolev à poids :

Soit  $1 \leq p < \infty$ , soient  $k, j$  des entiers naturels. Dans chacun des cas suivants, il existe une constante positive  $c = c(\mathring{g}, \delta, k, n, j, p, q)$  telle que pour tout  $u \in W_\delta^{j+k,p}(\mathcal{M})$ ,

- Si  $pk < n$ ,  $\|u\|_{j,q,\delta} \leq c \|u\|_{j+k,p,\delta}$ ,  $\forall p \leq q \leq \frac{np}{n-kp}$ .
- Si  $pk = n$ ,  $\|u\|_{j,q,\delta} \leq c \|u\|_{j+k,p,\delta}$ ,  $\forall p \leq q < \infty$ .
- Si  $pk > n$ ,  $\|u\|_{j,q,\delta} \leq c \|u\|_{j+k,p,\delta}$ ,  $\forall p \leq q \leq \infty$ .

Inégalité de Ehrling :

Pour tout  $\varepsilon > 0$ , pour tous  $j, k$  entiers naturels tels que  $0 < j < k$ , il existe une constante  $C(\varepsilon)$  telle que :

$$\forall u \in W_\delta^{k,p} \quad , \quad \|u\|_{j,p,\delta} \leq \varepsilon \|u\|_{k,p,\delta} + C(\varepsilon) \|u\|_{p,\delta}. \quad (4.13)$$

Une conséquence de l'inégalité de Sobolev à poids (voir [15] par exemple) est

**Proposition 1:**

En dimension  $n = 3$ , pour tout  $k > \frac{3}{2}$ ,

$$u \in W_\delta^{k,2} \Rightarrow u = o(\rho^{-\delta}). \quad (4.14)$$



**Proposition 2:** Inégalités de Hölder à poids (en toute dimension)

- Soit  $\delta \in \mathbb{R}$  tel que  $\delta = \delta_1 + \delta_2$ , soient  $p, q, r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$  tels que

$$1 \leq p \leq q \leq r \leq \infty \text{ et } \frac{1}{p} = \frac{1}{q} + \frac{1}{r},$$

alors

$$\|uv\|_{p,\delta} \leq \|u\|_{q,\delta_1} \|v\|_{r,\delta_2}. \quad (4.15)$$

- Soit  $\delta \in \mathbb{R}$ , soit  $\lambda \in [0, 1]$ , soient  $p, q, r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$  tels que

$$1 \leq p \leq q \leq r \leq \infty \text{ et } \frac{1}{p} = \frac{\lambda}{q} + \frac{1-\lambda}{r},$$

alors

$$\|u\|_{p,\delta} \leq \|u\|_{q,\delta}^\lambda \|u\|_{r,\delta}^{1-\lambda}. \quad (4.16)$$

Preuve de (4.15) :

$$\begin{aligned} \|uv\|_{p,\delta}^p &= \int_{\mathcal{M}} |uv|_{\dot{g}}^p \rho^{p\delta} d\mu(\dot{g}) \\ &= \int_{\mathcal{M}} |u|_{\dot{g}}^p \rho^{p\delta_1} |v|_{\dot{g}}^p \rho^{p\delta_2} d\mu(\dot{g}) \text{ , avec } \delta_1 + \delta_2 = \delta \\ &\leq \left( \int_{\mathcal{M}} (|u|_{\dot{g}}^p \rho^{p\delta_1})^a d\mu(\dot{g}) \right)^{1/a} \left( \int_{\mathcal{M}} (|v|_{\dot{g}}^p \rho^{p\delta_2})^b \rho^{(1-\lambda)p\delta} d\mu(\dot{g}) \right)^{1/b}, \end{aligned}$$

où l'on a utilisé l'inégalité de Hölder pour la mesure  $d\mu(\dot{g})$  avec  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$ ,  $a, b > 0$ .

Posons  $pa = q$  et  $pb = r$ . On a donc

$$\frac{1}{q} + \frac{1}{r} = \frac{1}{pa} + \frac{1}{pb} = \frac{1}{p}$$

et

$$\|u\|_{p,\delta}^p \leq \left( \int_{\mathcal{M}} |u|_{\dot{g}}^q \rho^{q\delta_1} d\mu(\dot{g}) \right)^{p/q} \left( \int_{\mathcal{M}} |v|_{\dot{g}}^r \rho^{r\delta_2} d\mu(\dot{g}) \right)^{p/r} = \|u\|_{q,\delta_1}^p \|v\|_{r,\delta_2}^p. \quad \square$$

Preuve de (4.16) :

$$\begin{aligned} \|u\|_{p,\delta}^p &= \int_{\mathcal{M}} |u|_{\dot{g}}^p \rho^{p\delta} d\mu(\dot{g}) \\ &= \int_{\mathcal{M}} |u|_{\dot{g}}^{\lambda p + (1-\lambda)p} \rho^{\lambda p\delta + (1-\lambda)p\delta} d\mu(\dot{g}) \\ &= \int_{\mathcal{M}} |u|_{\dot{g}}^{\lambda p} \rho^{\lambda p\delta} |u|_{\dot{g}}^{(1-\lambda)p} \rho^{(1-\lambda)p\delta} d\mu(\dot{g}) \\ &\leq \left( \int_{\mathcal{M}} (|u|_{\dot{g}}^{\lambda p} \rho^{\lambda p\delta})^a d\mu(\dot{g}) \right)^{1/a} \left( \int_{\mathcal{M}} (|u|_{\dot{g}}^{(1-\lambda)p})^b \rho^{(1-\lambda)p\delta} d\mu(\dot{g}) \right)^{1/b}, \end{aligned}$$

où l'on a utilisé l'inégalité de Hölder pour la mesure  $d\mu(\mathring{g})$  avec  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$ ,  $a, b > 0$ . Posons  $p\lambda a = q$  et  $p(1 - \lambda)b = r$ . On a donc

$$\frac{\lambda}{q} + \frac{1 - \lambda}{r} = \frac{1}{pa} + \frac{1}{pb} = \frac{1}{p}$$

et

$$\|u\|_{p,\delta}^p \leq \left( \int_{\mathcal{M}} |u|_{\mathring{g}}^q \rho^{q\delta} d\mu(\mathring{g}) \right)^{\lambda p/q} \left( \int_{\mathcal{M}} |u|_{\mathring{g}}^r \rho^{r\delta} d\mu(\mathring{g}) \right)^{(1-\lambda)p/r} = \|u\|_{q,\delta}^{\lambda p} \|u\|_{r,\delta}^{(1-\lambda)p}. \quad \square$$

**Lemme 3:**

En dimension 3, pour tout  $\delta \in \mathbb{R}$ , il existe une constante  $c$  dépendant de  $\mathring{g}, \delta_1$  et  $\delta_2$  telle que

$$\|uv\|_{2,\delta} \leq c \|u\|_{1,2,\delta_1} \|v\|_{1,2,\delta_2}, \quad \text{avec } \delta_1 + \delta_2 = \delta. \quad (4.17)$$

Preuve :

En utilisant l'inégalité de Hölder (4.15) et l'inégalité de Sobolev, on obtient directement le résultat.

$$\begin{aligned} \|uv\|_{2,\delta} &\leq \|u\|_{4,\delta_1} \|v\|_{4,\delta_2} \\ &\leq c \|u\|_{1,2,\delta_1} \|v\|_{1,2,\delta_2}. \quad \square \end{aligned}$$

Remarque : Dans le cas particulier où  $\delta_1, \delta_2$  et  $\delta$  sont négatifs ou nuls, alors  $\delta_1$  et  $\delta_2$  sont tous les deux supérieurs à  $\delta$ . L'inclusion de Sobolev donne l'inégalité suivante

$$\|uv\|_{2,\delta} \leq c \|u\|_{1,2,\delta} \|v\|_{1,2,\delta}. \quad (4.18)$$

**Lemme 4:**

Pour chacune des inégalités suivantes, en dimension 3, il existe une constante  $c$  dépendant de  $\mathring{g}$  et  $\delta$  telle que

$$\forall u \in W_{\delta}^{2,2}(\mathcal{M}), \quad \|u\|_{\infty,\delta} \leq \varepsilon \|u\|_{2,2,\delta} + c\varepsilon^{-3} \|u\|_{1,2,\delta}. \quad (4.19)$$

$$\forall u \in W_{\delta}^{1,2}(\mathcal{M}), \quad \|u\|_{3,\delta} \leq \varepsilon \|u\|_{1,2,\delta} + c\varepsilon^{-1} \|u\|_{2,\delta}. \quad (4.20)$$

Preuve :

On utilise l'inégalité de Sobolev et l'inégalité de Hölder (4.16) pour obtenir

$$\begin{aligned} \|u\|_{\infty,\delta} &\leq c \|u\|_{1,4,\delta} \\ &\leq c \|u\|_{1,2,\delta}^{\frac{1}{4}} \|u\|_{1,6,\delta}^{\frac{3}{4}} \\ &\leq c \|u\|_{1,2,\delta}^{\frac{1}{4}} \|u\|_{2,2,\delta}^{\frac{3}{4}}. \end{aligned}$$

On utilise maintenant l'inégalité de Ehrling (4.13)

$$(b^3 a)^{\frac{1}{4}} \leq \varepsilon b + \varepsilon^{-3} a, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \forall a, b \geq 0 \quad \text{avec } a = \|u\|_{1,2,\delta} \quad \text{et } b = \|u\|_{2,2,\delta}.$$

$$\begin{aligned} \|u\|_{\infty,0} &\leq c\varepsilon \|u\|_{2,2,\delta} + c\varepsilon^{-3} \|u\|_{1,2,\delta} \\ &\leq \varepsilon \|u\|_{2,2,\delta} + c\varepsilon^{-3} \|u\|_{1,2,\delta}. \end{aligned}$$

Concernant la deuxième inégalité,

$$\begin{aligned} \|u\|_{3,\delta} &\leq \|u\|_{2,\delta}^{\frac{1}{2}} \|u\|_{6,\delta}^{\frac{1}{2}} \\ &\leq c \|u\|_{2,\delta}^{\frac{1}{2}} \|u\|_{1,2,\delta}^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

On utilise maintenant l'inégalité de Ehrling (4.13)

$$(ba)^{\frac{1}{2}} \leq \varepsilon b + \varepsilon^{-1}a, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \forall a, b \geq 0 \quad \text{avec } a = \|u\|_{2,\delta} \text{ et } b = \|u\|_{1,2,\delta}$$

$$\begin{aligned} \|u\|_{3,\delta} &\leq c\varepsilon \|u\|_{1,2,\delta} + c\varepsilon^{-1}\|u\|_{2,\delta} \\ &\leq \varepsilon \|u\|_{1,2,\delta} + c\varepsilon^{-1}\|u\|_{2,\delta}. \quad \square \end{aligned}$$

**Lemme 5:**

En toute dimension  $n$ , définissons pour  $R$  réel suffisamment grand,

$$E_R := \mathcal{M} \setminus \Omega_R = \{\rho \leq e^{-2R}\}.$$

Alors pour tout  $u \in L_\delta^p(E_R)$ , pour tout  $\delta \in \mathbb{R}$ ,

$$\|u\|_{p,\eta;E_R} \leq e^{2R(\delta-\eta)} \|u\|_{p,\delta;E_R}, \quad \forall \delta \leq \eta, \quad \forall 1 \leq p \leq \infty. \quad (4.21)$$

Preuve :

- Pour tout  $1 \leq p < \infty$ ,

$$\begin{aligned} \|u\|_{p,\eta;E_R}^p &= \int_{E_R} |u|_{\dot{g}}^p \rho^{p\eta} = \int_{E_R} |u|_{\dot{g}}^p \rho^{p\delta} \rho^{p(\eta-\delta)} \\ &\leq \sup_{E_R}(\rho^{p(\eta-\delta)}) \int_{E_R} |u|_{\dot{g}}^p \rho^{p\delta} \\ &\leq e^{2Rp(\delta-\eta)} \|u\|_{p,\delta;E_R}^p. \end{aligned}$$

- Pour  $p = \infty$ ,

$$\begin{aligned} \|u\|_{\infty,\eta;E_R} &= \sup_{E_R}(|u|_{\dot{g}} \rho^\eta) = \sup_{E_R}(|u|_{\dot{g}} \rho^\delta \rho^{(\eta-\delta)}) \\ &\leq e^{2R(\delta-\eta)} \|u\|_{\infty,\delta;E_R}. \quad \square \end{aligned}$$

# Chapitre 5

## Opérateur de courbure scalaire : le cas Time-symmetric

Soit  $\mathcal{M}$  une variété  $n$ -dimensionnelle connexe orientée non compacte. Dans ce chapitre, on considère  $\mathcal{M}$  en tant qu'hypersurface de genre espace totalement géodésique d'une variété Lorentzienne  $(n+1)$ -dimensionnelle  $\mathcal{N}$  appelée espace-temps. La seconde forme fondamentale de  $\mathcal{M}$  dans  $\mathcal{N}$ , notée  $K$ , est nulle. On distinguera les deux variétés par des indices différents : les indices latins prendront les valeurs de 1 à  $n$  et désigneront les indices spatiaux. Les indices grecs prendront quant à eux les valeurs 0 à  $n$  et désigneront les indices relatifs à l'espace-temps. Nous considérons une métrique modèle  $\mathring{g}$  asymptotiquement hyperbolique, lisse et polyhomogène sur  $\mathcal{M}$ . C'est à dire que la métrique peut s'écrire comme une somme de produits de puissances de  $\rho$  et  $\ln \rho$ . De plus, on demande à la métrique  $\mathring{g}$  de satisfaire la condition d'intégrabilité suivante

$$\text{Ric } \mathring{g} + (n-1)\mathring{g} \in L^2_{\mathring{g}}. \quad (5.1)$$

On définit la mesure de volume relative à  $\mathring{g}$  à l'aide du tenseur de Levi-Civita  $T_{LC}$

$$d\mu(\mathring{g}) = T_{LC}.$$

Dans une base directe, en dimension 3, les composantes du tenseur de Levi-Civita sont données par

$$T_{abc} = \sqrt{\det(\mathring{g})} \tilde{\varepsilon}_{abc},$$

où  $\tilde{\varepsilon}$  est le symbole de Levi-Civita d'ordre 3 (ou pseudo-tenseur complètement antisymétrique).

Pour une métrique Riemannienne  $g$  sur  $\mathcal{M}$  suffisamment régulière, on définit l'opérateur de contraintes scalaire  $\Phi_0$  comme suit :

$$\Phi_0(g) := (R(g) - 2\Lambda)\sqrt{g}, \quad (5.2)$$

où  $\sqrt{g}$  désigne la mesure de volume relative à la métrique  $g$ ,

$$\sqrt{g} = \frac{\sqrt{\det(g)}}{\sqrt{\det(\mathring{g})}} d\mu(\mathring{g}).$$

$\Lambda$  est la constante cosmologique, et en dimension  $n$ ,

$$2\Lambda = -n(n-1), \quad (5.3)$$

de façon à ce que l'équation de contrainte (5.2) soit vérifiée par le modèle hyperbolique, c'est à dire  $\Phi_0(\mathring{g}) = 0$ , et donc à l'infini par les données initiales asymptotiquement hyperboliques. Si l'espace-temps satisfait les équations d'Einstein, la normalisation choisie

assure que l'opérateur de contrainte et le tenseur énergie-impulsion sont reliés par la relation

$$\Phi_0 = 16\pi GT_{\vec{n}0}\sqrt{\mathring{g}},$$

où  $\vec{n}$  est le vecteur unitaire normal à  $\mathcal{M}$  dans  $\mathcal{N}$  dirigé vers le futur.  $G$  est la constante de gravitation de Newton.

N.B : Dans le cas Time-symmetric, l'opérateur de contrainte scalaire est, au décalage près de la constante cosmologique, l'opérateur de courbure scalaire associé à la métrique  $g$ . On étudie alors l'opérateur de contrainte  $\Phi_0(g)$  pour des métriques Riemanniennes de la forme  $g = \mathring{g} + h$ , où la métrique  $g$  est *faiblement* asymptotique à  $\mathring{g}$ , i.e.  $|g - \mathring{g}|_{\mathring{g}} = |h|_{\mathring{g}} \xrightarrow{\infty} 0$ , dans le sens où  $h \in W_{\delta}^{2,2}$ , avec  $\delta \leq 0$ . La trace sur  $\mathring{g}$  de (5.1) donne la condition d'intégrabilité suivante, compte tenu de (5.3)

$$R(\mathring{g}) - 2\Lambda \in L_{\delta}^2. \quad (5.4)$$

Il est temps de définir notre espace de phase sur lequel est défini l'opérateur de contrainte : On note  $\mathcal{S} := S^2T^*\mathcal{M}$  le fibré des formes bilinéaires symétriques sur  $\mathcal{M}$  et  $\Lambda^n T^*\mathcal{M}$  celui des densités ( $n$ -formes) sur  $\mathcal{M}$ . On notera  $\tilde{\mathcal{S}} := S^2T\mathcal{M} \otimes \Lambda^n T^*\mathcal{M}$  le fibré des densités sur  $\mathcal{M}$  à valeurs dans les 2-tenseurs symétriques. Dans la suite de notre étude, on s'intéressera particulièrement aux espaces suivants :

$$\begin{aligned} \mathcal{G} &:= W_{\delta}^{2,2}(\mathcal{S}). \\ \mathcal{G}^+ &:= \{g : g - \mathring{g} \in \mathcal{G}, g > 0\}. \\ \mathcal{G}_{\lambda}^+ &:= \{g \in \mathcal{G}^+ : \lambda \mathring{g} < g < \lambda^{-1} \mathring{g}\}, \quad 0 < \lambda < 1. \\ \mathcal{L}^* &:= L_{\delta}^2(\Lambda^n T^*\mathcal{M}) \text{ est l'espace dual de } \mathcal{L} := L_{-\delta}^2(\mathcal{M}). \end{aligned}$$

Notons que d'après (4.12), les tenseurs dans  $\mathcal{G}$  sont Hölder-continus d'exposant  $\frac{1}{2}$  et par conséquent, les relations matricielles des espaces  $\mathcal{G}^+$  et  $\mathcal{G}_{\lambda}^+$  sont vérifiées point par point. En particulier, pour toute métrique  $g \in \mathcal{G}_{\lambda}^+$ , les métriques  $g$  et  $\mathring{g}$  sont équivalentes au sens suivant

$$\lambda \mathring{g}_{ij}(x) v^i v^j < g_{ij}(x) v^i v^j < \lambda^{-1} \mathring{g}_{ij}(x) v^i v^j, \quad \forall x \in \mathcal{M}, \forall v \in T\mathcal{M}. \quad (5.5)$$

On a donc  $|g|_{\mathring{g}} \simeq c |\mathring{g}|_{\mathring{g}} \simeq c |g|_g \simeq \sqrt{n}$ .

Dans le cas Time-symmetric,  $\mathcal{F} = \mathcal{G}^+$  sera l'espace de phase de l'opérateur de contrainte scalaire  $\Phi_0$ .

Nous aurons besoin des notations et des lemmes suivants pour montrer la Proposition 3 : soient  $\mathring{\Gamma}$  et  $\mathring{\nabla}$  (resp.  $\Gamma$  et  $\nabla$ ) les symboles de Christoffel et la connexion de Levi-Civita pour  $\mathring{g}$  (resp.  $g$ ). On définit

$$A_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k - \mathring{\Gamma}_{ij}^k \quad (5.6)$$

Remarque :  $A$  est un tenseur symétrique par suite de la symétrie des symboles de Christoffel. On montre facilement que

$$A_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kl} (\mathring{\nabla}_i g_{jl} + \mathring{\nabla}_j g_{il} - \mathring{\nabla}_l g_{ij}) \quad (5.7)$$

et on a le résultat suivant sur la différence des tenseurs de Ricci :

**Lemme 6:**

$$(\text{Ric } g)_{jk} - (\text{Ric } \mathring{g})_{jk} = \mathring{\nabla}_i A_{jk}^i - \mathring{\nabla}_j A_{ik}^i + A_{jk}^\mu A_{i\mu}^i - A_{j\mu}^i A_{ki}^\mu. \quad (5.8)$$

Preuve de (5.8) :

$$\begin{aligned} (\text{Ric } g)_{jk} - (\text{Ric } \mathring{g})_{jk} &= \partial_i A_{jk}^i - \partial_j A_{ik}^i + [\Gamma_{li}^i \Gamma_{jk}^l - \mathring{\Gamma}_{li}^i \mathring{\Gamma}_{jk}^l] - [\Gamma_{ki}^l \Gamma_{jl}^i - \mathring{\Gamma}_{ki}^l \mathring{\Gamma}_{jl}^i] \\ &= \partial_i A_{jk}^i - \partial_j A_{ik}^i + [A_{li}^i A_{jk}^l + \mathring{\Gamma}_{li}^i A_{jk}^l + \mathring{\Gamma}_{jk}^l A_{li}^i] \\ &\quad - [A_{ki}^l A_{jl}^i + \mathring{\Gamma}_{ki}^l A_{jl}^i + \mathring{\Gamma}_{jl}^i A_{ki}^l] \\ &= [\partial_i A_{jk}^i + \mathring{\Gamma}_{li}^i A_{jk}^l - \mathring{\Gamma}_{ji}^l A_{lk}^i - \mathring{\Gamma}_{ki}^l A_{jl}^i] \\ &\quad - [\partial_j A_{ik}^i + \mathring{\Gamma}_{lj}^i A_{ik}^l - \mathring{\Gamma}_{ji}^l A_{lk}^i - \mathring{\Gamma}_{ki}^l A_{jl}^i] \\ &\quad + A_{li}^i A_{jk}^l - A_{ki}^l A_{jl}^i \\ &= \mathring{\nabla}_i A_{jk}^i - \mathring{\nabla}_j A_{ik}^i + A_{jk}^l A_{li}^i - A_{jl}^i A_{ki}^l, \quad \square \end{aligned}$$

où l'on a ajouté et retranché le terme en gras pour la troisième égalité.

Cela nous permet d'obtenir la forme suivante de la courbure scalaire :

**Lemme 7:**

La courbure scalaire peut être exprimée en fonction de  $\mathring{\nabla}$  et  $A_{ik}^j$  sous la forme

$$\begin{aligned} R(g) &= g^{jk} \text{Ric } \mathring{g}_{jk} + g^{jk} (\mathring{\nabla}_i A_{jk}^i - \mathring{\nabla}_j A_{ik}^i + A_{jk}^l A_{li}^i - A_{jl}^i A_{ki}^l) \\ &= g^{jk} \text{Ric } \mathring{g}_{jk} + Q(g^{-1} \mathring{\nabla} g) + g^{ik} g^{jl} (\mathring{\nabla}_{ij}^2 g_{kl} - \mathring{\nabla}_{ik}^2 g_{jl}), \end{aligned} \quad (5.9)$$

où  $Q$  est une somme de termes quadratiques en  $g^{-1} \mathring{\nabla} g$ .

Preuve :

$$R(g) = g^{jk} \text{Ric } \mathring{g}_{jk} + g^{jk} [(\text{Ric } g)_{jk} - (\text{Ric } \mathring{g})_{jk}].$$

Le lemme 6 donne directement la première ligne.

$$\begin{aligned} &g^{jk} (\mathring{\nabla}_i A_{jk}^i - \mathring{\nabla}_j A_{ik}^i) \\ &= g^{jk} \left( \mathring{\nabla}_i \left[ \frac{1}{2} g^{il} (\mathring{\nabla}_j g_{kl} + \mathring{\nabla}_k g_{il} - \mathring{\nabla}_l g_{ij}) \right] - \mathring{\nabla}_j \left[ \frac{1}{2} g^{kl} (\mathring{\nabla}_i g_{jl} + \mathring{\nabla}_j g_{il} - \mathring{\nabla}_l g_{ij}) \right] \right) \\ &= \frac{1}{2} g^{il} g^{jk} \left( \mathring{\nabla}_i [\mathring{\nabla}_j g_{kl} + \mathring{\nabla}_k g_{il} - \mathring{\nabla}_l g_{ij}] - \mathring{\nabla}_j [\mathring{\nabla}_i g_{jl} + \mathring{\nabla}_j g_{il} - \mathring{\nabla}_l g_{ij}] \right) + Q(g^{-1} \mathring{\nabla} g) \\ &= \frac{1}{2} g^{il} g^{jk} (\mathring{\nabla}_{ik}^2 g_{jl} - \mathring{\nabla}_{il}^2 g_{jk} - \mathring{\nabla}_{jk}^2 g_{il} + \mathring{\nabla}_{jl}^2 g_{ik}) + Q(g^{-1} \mathring{\nabla} g) \\ &= g^{ik} g^{jl} (\mathring{\nabla}_{ij}^2 g_{kl} - \mathring{\nabla}_{ik}^2 g_{jl}) + Q(g^{-1} \mathring{\nabla} g). \end{aligned}$$

D'autre part,  $A \simeq g^{-1} \mathring{\nabla} g$  et par suite  $A^2 \simeq g^{-2} (\mathring{\nabla} g)^2 \simeq Q(g^{-1} \mathring{\nabla} g)$ . La première ligne est donc égale à la deuxième.  $\square$

La proposition suivante montre que  $\Phi_0 : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{L}^*$  est une application bien définie entre les variétés de Hilbert  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{L}^*$ .

**Proposition 3:**

Soit  $g \in \mathcal{G}_\lambda^+$ , avec  $0 < \lambda < 1$ . Alors en dimension  $n = 3$ , pour tout  $\delta \leq 0$ , il existe une constante  $c > 0$  dépendant de  $\lambda, \mathring{g}$  et  $\delta$  telle que

$$\|\Phi_0(g)\|_{2,\delta} \leq c(1 + \|g - \mathring{g}\|_{2,2,\delta}^2). \quad (5.10)$$

Preuve :

Puisque  $g \in \mathcal{G}_\lambda^+$ , on peut se servir de (5.5) et d'après l'expression de  $R(g)$  sous la forme (5.9), on peut écrire en utilisant (5.4),

$$\begin{aligned} \|R(g) - 2\Lambda\|_{2,\delta}^2 &\leq c \int_{\mathcal{M}} \left( |\mathring{\nabla}^2 g|_{\mathring{g}}^2 + |\mathring{\nabla} g|_{\mathring{g}}^4 + |R(\mathring{g}) - 2\Lambda|_{\mathring{g}}^2 \right) \rho^{2\delta} d\mu(\mathring{g}) \\ &\leq c \left( 1 + \|\mathring{\nabla}^2 g\|_{2,\delta}^2 + \|(\mathring{\nabla} g)^2\|_{2,\delta}^2 \right). \end{aligned}$$

En utilisant la relation  $2a \leq 1 + a^2$  avec  $a = \|\mathring{\nabla}^2 g\|_{2,\delta}^2$  et (4.18) pour le dernier terme, il vient

$$\begin{aligned} \|R(g) - 2\Lambda\|_{2,\delta}^2 &\leq c \left( 1 + \|\mathring{\nabla}^2 g\|_{2,\delta}^4 + \|\mathring{\nabla} g\|_{1,2,\delta}^4 \right) \\ &\leq c \left( 1 + \|g - \mathring{g}\|_{2,2,\delta}^4 \right). \end{aligned}$$

Par conséquent,  $\|\Phi_0(g)\|_{2,\delta} \leq \|\sqrt{g}\|_{\infty,0} \|R(g) - 2\Lambda\|_{2,\delta} \leq c(1 + \|g - \mathring{g}\|_{2,2,\delta}^2)$  et  $\Phi_0(g) \in \mathcal{L}^*$ .  $\square$

La proposition suivante nous indique que la première hypothèse pour pouvoir appliquer le Théorème 1 est vérifiée :

**Proposition 4:**

Soit  $g \in \mathcal{G}^+$ . Alors en dimension  $n = 3$ , pour tout  $\delta \leq 0$ ,  $\Phi_0 : \mathcal{G}^+ \rightarrow \mathcal{L}^*$  est une application lisse ( $\mathcal{C}^\infty$ ) entre variétés de Hilbert.

Preuve :

D'après (5.10),  $\|\Phi_0(g)\|_{\mathcal{L}^*} \leq c(1 + \|g - \mathring{g}\|_{\mathcal{F}}^2)$ , *i.e.*  $\Phi_0$  est localement bornée sur  $\mathcal{F}$ . La structure polynomiale de l'opérateur de courbure scalaire nous permet de montrer que  $\Phi_0$  est lisse, *i.e.* dérivable indéfiniment au sens de Fréchet. D'après l'expression (5.9) de la courbure scalaire, on remarque que  $\Phi_0(g)$  peut être exprimée comme une fonction polynomiale

$$\Phi_0(g) = F(g, g^{-1}, \sqrt{g}, \mathring{\nabla} g, \mathring{\nabla}^2 g),$$

où  $F = F(a_1, \dots, a_5)$  est une fonction polynomiale quadratique en  $a_4$  et linéaire en les paramètres restants. L'application  $g \mapsto (g, g^{-1}, \sqrt{g})$  est analytique sur l'espace des matrices définies positives et les applications  $g \mapsto \mathring{\nabla} g$  et  $g \mapsto \mathring{\nabla}^2 g$  sont linéaires bornées donc lisses de  $\mathcal{F}$  vers  $\mathcal{L}^*$ , qui sont des variétés de Hilbert. Un résultat de Hille [35] sur les fonctionnelles polynomiales localement bornées montre que  $\Phi_0$  admet des dérivées au sens de Fréchet, continues et de tout ordre.  $\square$

Soit  $\mathcal{C} = \{g \in \mathcal{G}^+ : \Phi_0(g) = 0\} := \Phi_0^{-1}(\{0\}) \subset \mathcal{F}$ . C'est l'ensemble des données initiales solutions de l'équation de contrainte (5.2) associée aux équations d'Einstein du vide. Pour montrer que  $\mathcal{C}$  est une sous-variété de  $\mathcal{F}$ , on montre que 0 est une valeur régulière de  $\Phi_0(g)$ . On commence pour cela par calculer la différentielle de  $\Phi_0(g)$  afin de montrer qu'elle est surjective.

## 5.1 Expression du linéarisé et de son adjoint

Cette section donne le détail des calculs amenant aux expressions des opérateurs de contrainte linéarisé  $D\Phi_0(g)$  et adjoint formel  $D\Phi_0(g)^*$ .

**Proposition 5:**

$$D\Phi_0(g).h = (\nabla^i \nabla^j h_{ij} - \Delta_g \text{tr}_g h) \sqrt{g} - h_{ij} [R^{ij} - \frac{1}{2}(R(g) - 2\Lambda)g^{ij}] \sqrt{g}. \quad (5.11)$$

Preuve :

$$D\Phi_0(g).h = D(\sqrt{g}).h(R(g) - 2\Lambda) + DR(g).h\sqrt{g}.$$

$$\begin{aligned} D(\sqrt{g}).h &= \frac{d\mu(\hat{g})}{\sqrt{\det \hat{g}}} D(\sqrt{\det(g)}).h \\ &= \frac{d\mu(\hat{g})}{\sqrt{\det(\hat{g})}} \frac{D(\det(g))}{2\sqrt{\det(g)}}.h \\ &= \frac{d\mu(\hat{g})}{\sqrt{\det(\hat{g})}} \frac{\det(g) \text{tr}_g h}{2\sqrt{\det(g)}} \\ &= \frac{\sqrt{g}}{2} \text{tr}_g h = \frac{\sqrt{g}}{2} g^{ij} h_{ij}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} DR(g).h &= D[g^{-1} \text{Ric } g].h \\ &= D(g^{-1}).h \text{Ric } g + g^{-1} D \text{Ric } g.h. \end{aligned}$$

En coordonnées,

$$D(g^{-1}).h = \frac{d}{dt} [(g - th)^{ij} - g^{ij}] \Big|_{t=0} = -h^{ij}.$$

$$DR(g).h = -h^{ij} \text{Ric } g_{ij} + g^{-1} D \text{Ric } g.h.$$

Il nous reste à calculer  $D \text{Ric } g.h$  et pour ce faire, on introduit la fonction  $\tilde{\Gamma}$  définie par

$$\tilde{\Gamma}(t) = \Gamma(g + th) - \Gamma(g),$$

où les  $\Gamma(g + th)$  sont les symboles de Christoffel pour la métrique  $g + th$ .

$$D \text{Ric } g.h = \frac{d}{dt} (\text{Ric } (g + th) - \text{Ric } g) \Big|_{t=0}.$$

En suivant la formule (5.8), on obtient

$$[\text{Ric } (g + th)]_{km} - (\text{Ric } g)_{km} = \nabla_i \tilde{\Gamma}_{km}^i(t) - \nabla_m \tilde{\Gamma}_{ki}^i(t) + \tilde{\Gamma}_{ji}^i(t) \tilde{\Gamma}_{km}^j(t) - \tilde{\Gamma}_{jm}^i(t) \tilde{\Gamma}_{ki}^j(t).$$

$$D \text{Ric } (g).h = \nabla_i \frac{d}{dt} \tilde{\Gamma}_{km}^i(t) \Big|_{t=0} - \nabla_m \frac{d}{dt} \tilde{\Gamma}_{ki}^i(t) \Big|_{t=0} + \frac{d}{dt} [\tilde{\Gamma}_{ji}^i(t) \tilde{\Gamma}_{km}^j(t) - \tilde{\Gamma}_{jm}^i(t) \tilde{\Gamma}_{ki}^j(t)] \Big|_{t=0}.$$



Le dernier terme du membre de droite étant nul car  $\tilde{\Gamma}(0) = 0$ , on obtient

$$D \operatorname{Ric} g.h = \nabla_i \frac{d}{dt} \tilde{\Gamma}_{k m}^i(t) \Big|_{t=0} - \nabla_m \frac{d}{dt} \tilde{\Gamma}_{k i}^i(t) \Big|_{t=0}.$$

Au vu de la définition de  $\tilde{\Gamma}$ , on peut appliquer (5.7)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \tilde{\Gamma}_{k m}^i(t) \Big|_{t=0} &= \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} [(g + th)^{-1}]^{il} [\nabla_k (g + th)_{ml} + \nabla_m (g + th)_{kl} - \nabla_l (g + th)_{km}] \right) \Big|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} (g^{il} - th^{il}) t [\nabla_k h_{ml} + \nabla_m h_{kl} - \nabla_l h_{km}] \right) \Big|_{t=0} \quad \text{car } \nabla g = 0 \\ &= \frac{1}{2} g^{il} [\nabla_k h_{ml} + \nabla_m h_{kl} - \nabla_l h_{km}]. \end{aligned}$$

Avec une expression similaire pour le terme  $\frac{d}{dt} \tilde{\Gamma}_{k i}^i(t) \Big|_{t=0}$ , on obtient

$$\begin{aligned} D \operatorname{Ric} g.h &= \nabla_i \frac{d}{dt} \tilde{\Gamma}_{k m}^i(t) \Big|_{t=0} - \nabla_m \frac{d}{dt} \tilde{\Gamma}_{k i}^i(t) \Big|_{t=0} \\ &= \frac{1}{2} g^{il} [\nabla_i \nabla_k h_{ml} + \nabla_i \nabla_m h_{kl} - \nabla_i \nabla_l h_{km}] \\ &\quad - \frac{1}{2} g^{il} [\nabla_m \nabla_k h_{il} + \nabla_m \nabla_i h_{kl} - \nabla_m \nabla_l h_{ki}] \end{aligned}$$

Par conséquent, puisque  $h$  est symétrique,

$$\begin{aligned} g^{-1} D \operatorname{Ric} g.h &= \frac{1}{2} g^{il} g^{km} [\nabla_i \nabla_k h_{ml} + \cancel{\nabla_i \nabla_m h_{kl}} - \nabla_i \nabla_l h_{km}] \\ &\quad - \frac{1}{2} g^{il} g^{km} [\nabla_m \nabla_k h_{il} + \cancel{\nabla_m \nabla_i h_{kl}} - \nabla_m \nabla_l h_{ki}] \\ &= g^{il} g^{km} [\nabla_i \nabla_k h_{ml} - \nabla_m \nabla_k h_{il}] + \nabla^l \nabla^m h_{ml} - \nabla^k \nabla_k g^{il} h_{il} \\ &= \nabla^l \nabla^m h_{ml} - \Delta_g \operatorname{tr}_g h. \end{aligned}$$

Finalement, on obtient

$$D\Phi_0(g).h = (\nabla^l \nabla^m h_{ml} - \Delta_g \operatorname{tr}_g h) \sqrt{g} - h_{ij} [R^{ij} - \frac{1}{2} (R(g) - 2\Lambda) g^{ij}] \sqrt{g}. \quad \square$$

Pour montrer la surjectivité de la différentielle de  $\Phi_0(g)$ , on s'intéresse à l'injectivité de l'opérateur adjoint. Dans la suite,  $N$  peut être naturellement interprété comme étant la fonction *lapse* associée au feuilletage de l'espace-temps. En intégrant par partie et en ignorant les termes de bord, on obtient (cf. [28] par exemple) l'expression du  $L^2(d\mu(\dot{g}))$ -adjoint formel de  $D\Phi_0$  :

$$\int_{\mathcal{M}} N D\Phi_0(g).h = \int_{\mathcal{M}} h \bullet D\Phi_0(g)^* N, \quad (5.12)$$

où  $\bullet$  désigne la contraction tensorielle.

**Proposition 6:**

$$D\Phi_0(g)^*.N = [\nabla_i \nabla_j N - g_{ij} \Delta_g N - [R_{ij} - \frac{1}{2} (R(g) - 2\Lambda) g_{ij}] N] \sqrt{g}. \quad (5.13)$$

Preuve :

En regroupant les termes avec et sans dérivée covariante dans l'expression de  $D\Phi_{\mathbf{0}}(g).h$ ,

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{M}} N D\Phi_{\mathbf{0}}(g).h &= \int_{\mathcal{M}} (\nabla^i \nabla^j h_{ij} - g^{ij} \nabla^k \nabla_k h_{ij}) N \sqrt{g} \\ &\quad - \int_{\mathcal{M}} h_{ij} [R^{ij} - \frac{1}{2}(R(g) - 2\Lambda)g^{ij}] N \sqrt{g}. \end{aligned}$$

La deuxième intégrale étant linéaire en  $h$ , sa contribution à l'expression de l'adjoint est directe. Pour les deux termes de la première intégrale, on intègre par partie en ignorant les termes de bord

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{M}} \nabla^i \nabla^j h_{ij} N \sqrt{g} &= - \int_{\mathcal{M}} \nabla^j h_{ij} \nabla^i N \sqrt{g} \\ &= \int_{\mathcal{M}} h_{ij} (\nabla^i \nabla^j N \sqrt{g}). \\ \int_{\mathcal{M}} g^{ij} \nabla^k \nabla_k h_{ij} N d\mu(g) &= - \int_{\mathcal{M}} \nabla_k h_{ij} g^{ij} \nabla^k N \sqrt{g} \\ &= \int_{\mathcal{M}} h_{ij} (g^{ij} \nabla^k \nabla_k N \sqrt{g}). \end{aligned}$$

La somme des différents termes donne le résultat.  $\square$

## 5.2 L'opérateur $\mathring{T}$ , de type Hessienne

Dans le but d'utiliser le théorème des fonctions implicites, on s'intéresse au noyau de  $D\Phi_{\mathbf{0}}(g)^*$ . Cela nécessite les quelques résultats préliminaires suivants relatifs à l'opérateur  $\mathring{T}$  défini pour une fonction  $N$ , par :

$$\mathring{T} = \mathring{T}(N) := \mathring{\nabla}^2 N - N \mathring{g}. \quad (5.14)$$

### Lemme 8:

Pour tout  $\delta \in \mathbb{R}$ , il existe une constante  $c > 0$  dépendant de  $\mathring{g}$  telle que pour toute fonction  $N \in W_{-\delta}^{2,2}(\mathcal{M})$ ,

$$\|\mathring{T}(N)\|_{2,-\delta} \geq \|\mathring{\nabla}^2 N\|_{2,-\delta} - c \|N\|_{2,-\delta}. \quad (5.15)$$

Preuve :

Le résultat découle directement de la définition de  $\mathring{T}$ , l'inégalité triangulaire et l'inégalité de Hölder (4.15).  $\square$

### Lemme 9:

Pour tout  $\delta \in ]-(n+1)/2, 0]$ , il existe une constante  $c > 0$  dépendant de  $\mathring{g}$  et  $\delta$  telle que pour toute fonction  $N \in W_{-\delta}^{2,2}(\mathcal{M})$ ,

$$\|N\|_{1,2,-\delta} \leq c \|\mathring{T}(N)\|_{2,-\delta}. \quad (5.16)$$

Preuve :

Par densité, on peut supposer  $N$  lisse et à support compact. On utilise la preuve de la Proposition 8 qui établit (5.16) si le support de  $N$  est au voisinage du bord à l'infini. On ignore ici la restriction sur  $\delta$  pour la positivité du terme de bord intérieur puisque celui-ci est absent (support compact de  $N$ ). Cela nous donne le résultat près du bord pour  $\delta \in ]-(n+1)/2; 0]$  et on conclut avec la trivialité du noyau de  $\mathring{T}$  pour  $-\delta < \frac{n+1}{2}$  (voir [16]) grâce à une preuve similaire à celle du Théorème 6.  $\square$

La combinaison des Lemmes 8 et 9 donne

**Proposition 7:**

Pour tout  $\delta \in ]-(n+1)/2, 0]$ , il existe une constante  $c > 0$  dépendant de  $\mathring{g}$  et  $\delta$  telle que pour toute fonction  $N \in W_{-\delta}^{2,2}(\mathcal{M})$ ,

$$\|N\|_{2,2,-\delta} \leq c \|\mathring{T}(N)\|_{2,-\delta}. \quad (5.17)$$

Nous aurons besoin des trois lemmes suivants qui sont des inégalités générales sur  $(\mathcal{M}, \mathring{g})$ , une variété AH  $n$ -dimensionnelle avec  $\mathring{g} = \rho^{-2}\mathring{h}$ . On autorise ici un bord intérieur  $\partial\mathcal{M}$ . Par la suite  $d\sigma(\mathring{g})$  désignera la mesure induite par  $\mathring{g}$  sur le bord  $\partial\mathcal{M}$ . Le terme  $o(1)$  tend vers 0 à l'approche de  $\partial_\infty\mathcal{M}$ .

**Lemme 10:**

Soit  $(M, \mathring{g})$  une variété AH et  $\delta \in \mathbb{R}$ .  $\forall N \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathcal{M})$ ,

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{M}} 2N \langle dN, \frac{d\rho}{\rho} \rangle_{\mathring{g}} \rho^{2\delta} d\mu(\mathring{g}) &= - \int_{\mathcal{M}} [2\delta + 1 - n + o(1)] N^2 \rho^{2\delta} d\mu(\mathring{g}) \\ &\quad + \int_{\partial\mathcal{M}} N^2 \langle \frac{d\rho}{\rho}, \eta \rangle_{\mathring{g}} \rho^{2\delta} d\sigma(\mathring{g}) \end{aligned}$$

où  $\eta$  est la normale extérieure à  $\partial\mathcal{M}$ .

Preuve :

Une intégration par parties donne

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{M}} \mathring{\nabla}_i(-N^2 \mathring{\nabla}^i(\rho^{-1}) \rho^{2\delta+1}) d\mu(\mathring{g}) &= \int_{\mathcal{M}} \left( 2N \langle dN, \frac{d\rho}{\rho} \rangle_{\mathring{g}} \rho^{2\delta} - N^2 \mathring{\Delta}(\rho^{-1}) \rho^{2\delta+1} \right) d\mu(\mathring{g}) \\ &\quad + \int_{\mathcal{M}} (2\delta + 1) N^2 |d\rho|_{\mathring{h}}^2 \rho^{2\delta} d\mu(\mathring{g}). \end{aligned} \quad (5.18)$$

Or d'après [15], (D.4)

$$\mathring{\nabla}^2(\rho^{-1}) = \rho^{-1} |d\rho|_{\mathring{h}}^2 - \rho^{-2} \mathring{\nabla}^2 \rho. \quad (5.19)$$

En prenant la trace sur  $\mathring{g}$ , on obtient

$$\mathring{\Delta}(\rho^{-1}) = n\rho^{-1} |d\rho|_{\mathring{h}}^2 - \Delta_{\mathring{h}} \rho.$$

La métrique  $\mathring{h}$  étant définie (et par conséquent bornée) sur  $\partial_\infty\mathcal{M}$  et  $\rho$  étant une fonction lisse sur  $\bar{\mathcal{M}}$ , il s'ensuit que  $\Delta_{\mathring{h}} \rho$  est une fonction lisse bornée sur  $\bar{\mathcal{M}}$  et on peut écrire  $\Delta_{\mathring{h}} \rho = o(\rho^{-1})$  au voisinage de  $\partial_\infty\mathcal{M}$ . On obtient donc

$$\mathring{\Delta}(\rho^{-1}) = \rho^{-1} (n |d\rho|_{\mathring{h}}^2 + o(1)). \quad (5.20)$$

En utilisant de plus que  $|d\rho|_h^2 = 1 + o(1)$  au voisinage du bord sur une variété AH, l'équation (5.18) devient

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{M}} \mathring{\nabla}_i(-N^2 \mathring{\nabla}^i(\rho^{-1})\rho^{2\delta+1}) d\mu(\mathring{g}) &= \int_{\mathcal{M}} 2N \langle dN, \frac{d\rho}{\rho} \rangle_{\mathring{g}} \rho^{2\delta} d\mu(\mathring{g}) \\ &+ \int_{\mathcal{M}} [2\delta + 1 - n + o(1)] N^2 \rho^{2\delta} d\mu(\mathring{g}). \end{aligned} \quad (5.21)$$

Or d'après le théorème de Divergence-Flux,

$$\int_{\mathcal{M}} \mathring{\nabla}_i(-N^2 \mathring{\nabla}^i(\rho^{-1})\rho^{2\delta+1}) d\mu(\mathring{g}) = \int_{\partial\mathcal{M}} N^2 \langle \frac{d\rho}{\rho}, \eta \rangle_{\mathring{g}} \rho^{2\delta} d\sigma(\mathring{g}). \quad (5.22)$$

En remplaçant le membre de gauche de (5.21) par son expression (5.22), on obtient le résultat souhaité.  $\square$

**Lemme 11:**

Soit  $(M, \mathring{g})$  une variété AH et  $\delta \in \mathbb{R}$ .  $\forall N \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathcal{M})$ ,

$$\begin{aligned} -2 \int_{\mathcal{M}} \mathring{T}(dN, \frac{d\rho}{\rho}) \rho^{2\delta} d\mu(\mathring{g}) &= \int_{\mathcal{M}} \{2\delta + 1 - n + o(1)\} |dN|_{\mathring{g}}^2 \rho^{2\delta} d\mu(\mathring{g}) \\ &- \int_{\mathcal{M}} [2\delta + 1 - n + o(1)] N^2 \rho^{2\delta} d\mu(\mathring{g}) \\ &+ \int_{\partial\mathcal{M}} (N^2 - |dN|_{\mathring{g}}^2) \langle \frac{d\rho}{\rho}, \eta \rangle_{\mathring{g}} \rho^{2\delta} d\sigma(\mathring{g}), \end{aligned} \quad (5.23)$$

où  $\eta$  est la normale extérieure à  $\partial\mathcal{M}$ .

Preuve :

Une intégration par parties donne

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{M}} \mathring{\nabla}_i(|dN|_{\mathring{g}}^2 \mathring{\nabla}^i(\rho^{-1})\rho^{2\delta+1}) d\mu(\mathring{g}) &= -2 \int_{\mathcal{M}} \mathring{\nabla}^2 N(dN, \frac{d\rho}{\rho}) \rho^{2\delta} d\mu(\mathring{g}) \\ &- \int_{\mathcal{M}} |dN|_{\mathring{g}}^2 \mathring{\Delta}(\rho^{-1}) \rho^{2\delta+1} d\mu(\mathring{g}) \\ &+ \int_{\mathcal{M}} (2\delta + 1) |dN|_{\mathring{g}}^2 |d\rho|_h^2 \rho^{2\delta} d\mu(\mathring{g}). \end{aligned} \quad (5.24)$$

Or d'après le théorème de Divergence-Flux,

$$\int_{\mathcal{M}} \mathring{\nabla}_i(|dN|_{\mathring{g}}^2 \mathring{\nabla}^i(\rho^{-1})\rho^{2\delta+1}) d\mu(\mathring{g}) = - \int_{\partial\mathcal{M}} |dN|_{\mathring{g}}^2 \langle \frac{d\rho}{\rho}, \eta \rangle_{\mathring{g}} \rho^{2\delta} d\sigma(\mathring{g}). \quad (5.25)$$

En remplaçant le membre de gauche de (5.24) par son expression (5.25), on obtient compte tenu de (5.20)

$$\begin{aligned} -2 \int_{\mathcal{M}} \mathring{\nabla}^2 N(dN, \frac{d\rho}{\rho}) \rho^{2\delta} d\mu(\mathring{g}) &= \int_{\mathcal{M}} [2\delta + 1 - n + o(1)] |dN|_{\mathring{g}}^2 \rho^{2\delta} d\mu(\mathring{g}) \\ &- \int_{\partial\mathcal{M}} |dN|_{\mathring{g}}^2 \langle \frac{d\rho}{\rho}, \eta \rangle_{\mathring{g}} \rho^{2\delta} d\sigma(\mathring{g}). \end{aligned} \quad (5.26)$$

On obtient le résultat souhaité en ajoutant de chaque côté de (5.26)

$$\int_{\mathcal{M}} 2N\mathring{g}\langle dN, \frac{d\rho}{\rho} \rangle \rho^{2\delta} d\mu(\mathring{g}) = \int_{\mathcal{M}} 2N\langle dN, \frac{d\rho}{\rho} \rangle \rho^{2\delta} d\mu(\mathring{g})$$

et en remplaçant dans le membre de droite par l'expression trouvée au Lemme 10.  $\square$

**Lemme 12:**

Soit  $(M, \mathring{g})$  une variété AH et  $\delta \in \mathbb{R}$ .  $\forall N \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$ ,

$$\begin{aligned} - \int_{\mathcal{M}} \text{tr}_{\mathring{g}} \mathring{T} N \rho^{2\delta} d\mu(\mathring{g}) &= - \int_{\mathcal{M}} [\delta(2\delta + 1 - n) - n + o(1)] N^2 \rho^{2\delta} d\mu(\mathring{g}) \\ &\quad + \int_{\mathcal{M}} |dN|_{\mathring{g}}^2 \rho^{2\delta} d\mu(\mathring{g}) - \int_{\partial\mathcal{M}} N \langle dN, \eta \rangle_{\mathring{g}} \rho^{2\delta} d\sigma(\mathring{g}) \\ &\quad + \int_{\partial\mathcal{M}} \delta N^2 \langle \frac{d\rho}{\rho}, \eta \rangle_{\mathring{g}} \rho^{2\delta} d\sigma(\mathring{g}), \end{aligned} \quad (5.27)$$

où  $\eta$  est la normale extérieure à  $\partial\mathcal{M}$ .

Preuve :

Une intégration par parties donne

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{M}} \mathring{\nabla}_i (N \mathring{\nabla}^i N \rho^{2\delta}) d\mu(\mathring{g}) &= \int_{\mathcal{M}} |dN|_{\mathring{g}}^2 \rho^{2\delta} d\mu(\mathring{g}) + \int_{\mathcal{M}} N \mathring{\Delta} N \rho^{2\delta} d\mu(\mathring{g}) \\ &\quad + \int_{\mathcal{M}} 2\delta N \langle dN, \frac{d\rho}{\rho} \rangle \rho^{2\delta} d\mu(\mathring{g}). \end{aligned} \quad (5.28)$$

Or d'après le théorème de Divergence-Flux,

$$\int_{\mathcal{M}} \mathring{\nabla}_i (N \mathring{\nabla}^i N \rho^{2\delta}) d\mu(\mathring{g}) = \int_{\partial\mathcal{M}} N \langle dN, \eta \rangle_{\mathring{g}} \rho^{2\delta} d\sigma(\mathring{g}). \quad (5.29)$$

En remplaçant le membre de gauche de (5.28) par son expression (5.29), on obtient

$$\begin{aligned} - \int_{\mathcal{M}} N \mathring{\Delta} N \rho^{2\delta} d\mu(\mathring{g}) &= \int_{\mathcal{M}} [ |dN|_{\mathring{g}}^2 + 2\delta N \langle dN, \frac{d\rho}{\rho} \rangle ] \rho^{2\delta} d\mu(\mathring{g}) \\ &\quad - \int_{\partial\mathcal{M}} N \langle dN, \eta \rangle_{\mathring{g}} \rho^{2\delta} d\sigma(\mathring{g}). \end{aligned} \quad (5.30)$$

On obtient le résultat souhaité en ajoutant

$$\int_{\mathcal{M}} n N^2 \rho^{2\delta} d\mu(\mathring{g})$$

de chaque côté de (5.30) et en utilisant le Lemme 10.  $\square$

Les lemmes 11 et 12 nous permettent d'obtenir l'inégalité suivante, cruciale dans la démonstration de la triviale du noyau de l'opérateur adjoint.

**Proposition 8:**

Soit  $\delta \in ] - (n + 1)/2, -1[$ . Il existe deux constantes positives  $c_\delta$  et  $R_\delta$  tel que pour tout  $R > R_\delta$ ,

$$\forall N \in \mathcal{C}_c^\infty(E_R), \quad \|N\|_{2,2,-\delta;E_R} \leq c \|\mathring{T}\|_{2,-\delta;E_R}. \quad (5.31)$$

Preuve :

D'après les expressions de  $\mathring{T}$  et  $\text{tr}_{\mathring{g}}\mathring{T}$  et en notant  $\mathring{\nabla}_n N$  (resp.  $\mathring{\nabla}_T N$ ) la composante de  $dN$  normale (resp. tangentielle) à  $\partial\mathcal{M}$ ,

$$\mathring{\nabla}_n N := \langle dN, \eta \rangle_{\mathring{g}} \quad \text{et} \quad |dN|_{\mathring{g}}^2 = |\mathring{\nabla}_n N|_{\mathring{g}}^2 + |\mathring{\nabla}_T N|_{\mathring{g}}^2.$$

(5.27) –  $\frac{1}{2}$ (5.23) donne

$$\begin{aligned} & \int_{\mathcal{M}} \mathring{T}(dN, \frac{d\rho}{\rho}) \rho^{2\delta} d\mu(\mathring{g}) - \int_{\mathcal{M}} N \text{tr}_{\mathring{g}} \mathring{T} \rho^{2\delta} d\mu(\mathring{g}) \\ &= \int_{\mathcal{M}} \left\{ \frac{n+1}{2} - \delta + o(1) \right\} |dN|_{\mathring{g}}^2 \rho^{2\delta} d\mu(\mathring{g}) + \int_{\mathcal{M}} [-2\delta^2 + n\delta + \frac{n+1}{2} + o(1)] N^2 \rho^{2\delta} d\mu(\mathring{g}) \\ &+ \int_{\partial\mathcal{M}} \left\{ (\delta - \frac{1}{2})N^2 + \frac{1}{2}|dN|_{\mathring{g}}^2 \right\} \langle \frac{d\rho}{\rho}, \eta \rangle_{\mathring{g}} \rho^{2\delta} d\sigma(\mathring{g}) - \int_{\partial\mathcal{M}} N \mathring{\nabla}_n N \rho^{2\delta} d\sigma(\mathring{g}). \end{aligned} \quad (5.32)$$

Application sur  $E_R$  :  $E_R$  possède deux composantes de bord disjointes. Un bord à l'infini noté  $\partial E_\infty = \partial_\infty \mathcal{M}$ , et un bord intérieur  $\partial E_R = \partial\Omega_R = \{\rho = e^{-2R}\}$ . Comme  $N \in \mathcal{C}_c^\infty(E_R)$ ,  $N$  est nécessairement nul au voisinage de  $\partial E_\infty$  mais pas forcément sur  $\partial E_R$  et c'est la raison pour laquelle les termes de bord présents dans (5.32) ne vont concerner que  $\partial\Omega_R$ . Si l'on note  $\eta_R$  la normale à  $\partial\Omega_R$  extérieure à  $E_R$  et compte tenu du fait que lorsque  $R \rightarrow +\infty$ ,  $\eta_R - \frac{d\rho}{\rho} \rightarrow 0$ , ainsi  $\langle \frac{d\rho}{\rho}, \eta_R \rangle_{\mathring{g}} = \frac{|d\rho|_{\mathring{g}}^2}{\rho^2} + o(1) = 1 + o(1)$ .

$$\begin{aligned} & \int_{E_R} \mathring{T}(dN, \frac{d\rho}{\rho}) \rho^{2\delta} d\mu(\mathring{g}) - \int_{E_R} N \text{tr}_{\mathring{g}} \mathring{T} \rho^{2\delta} d\mu(\mathring{g}) \\ &= \int_{E_R} \left\{ \frac{n+1}{2} - \delta + o(1) \right\} |dN|_{\mathring{g}}^2 \rho^{2\delta} d\mu(\mathring{g}) + \int_{E_R} [-2\delta^2 + n\delta + \frac{n+1}{2} + o(1)] N^2 \rho^{2\delta} d\mu(\mathring{g}) \\ &+ \int_{\partial E_R} \left\{ (\delta - \frac{1}{2} + o(1))N^2 + \frac{1}{2}|dN|_{\mathring{g}}^2 - N \mathring{\nabla}_n N + o(1) \right\} \rho^{2\delta} d\mu(\mathring{g}). \end{aligned}$$

En se servant des inégalités suivantes

$$\begin{cases} |\text{tr}_{\mathring{g}} \mathring{T}|_{\mathring{g}}^2 \leq n |\mathring{T}|_{\mathring{g}}^2. \\ \mathring{T}(dN, \frac{d\rho}{\rho}) \leq \frac{a}{2} |\mathring{T}|_{\mathring{g}}^2 + \frac{1}{2a} |dN|_{\mathring{g}}^2 |d\rho|_{\mathring{h}}^2, \quad \forall a > 0, a \gg 1. \\ -N \text{tr}_{\mathring{g}} \mathring{T} \leq \frac{b}{2} |\text{tr}_{\mathring{g}} \mathring{T}|_{\mathring{g}}^2 + \frac{1}{2a} N^2 |d\rho|_{\mathring{h}}^2, \quad \forall b > 0, b \gg 1. \end{cases}$$

On obtient  $\forall \varepsilon > 0, \exists R_\varepsilon > 0$  tel que  $\forall R > R_\varepsilon$ ,

$$\begin{aligned} & \left( \frac{a + bn}{2} \right) \int_{E_R} |\mathring{T}|_{\mathring{g}}^2 \rho^{2\delta} d\mu(\mathring{g}) \\ & \geq \int_{E_R} \left\{ \frac{n+1}{2} - \delta - \varepsilon \right\} |dN|_{\mathring{g}}^2 \rho^{2\delta} d\mu(\mathring{g}) + \int_{E_R} [-2\delta^2 + n\delta + \frac{n+1}{2} - \varepsilon] N^2 \rho^{2\delta} d\mu(\mathring{g}) \\ & + \int_{\partial E_R} \left\{ (\delta - 1 - \varepsilon)N^2 + \frac{1}{2} |\mathring{\nabla}_T N|_{\mathring{g}}^2 + \frac{1}{2} (N - \mathring{\nabla}_n N)^2 - \varepsilon \right\} \rho^{2\delta} d\mu(\mathring{g}). \end{aligned}$$

- Pour le terme intérieur en  $N^2$ , nous avons un trinôme du second degré en  $\delta$  dont le discriminant est

$$\Delta = n^2 + 4(n+1) = (n+2)^2 > 0$$

et dont les racines sont

$$\delta_{\pm} = \frac{n \pm (n+2)}{4} = \left\{ -\frac{1}{2}; \frac{n+1}{2} \right\}.$$

Ce terme est donc positif ou nul si et seulement si  $\delta \in ]-\frac{1}{2}; \frac{n+1}{2}[$ .

- Le terme intérieur en  $|dN|_{\dot{g}}^2$  est positif ou nul si et seulement si  $\delta < (n+1)/2$ .
  - Le terme de bord est positif ou nul si et seulement si  $\delta > 1$ .
- De plus, un rapide calcul montre que sur l'intervalle  $[0; \frac{n+1}{2}[$ , on a

$$\frac{n+1}{2} - \delta \leq -2\delta^2 + n\delta + \frac{n+1}{2}.$$

Par conséquent, pour  $\delta$  appartenant à l'intervalle  $]1; \frac{n+1}{2}[$ , on obtient  $\forall \varepsilon > 0, \exists R_{\varepsilon} > 0$  tel que  $\forall R > R_{\varepsilon}$ ,

$$\left(\frac{a+bn}{2}\right) \int_{E_R} |\dot{T}|_{\dot{g}}^2 \rho^{2\delta} d\mu(\dot{g}) \geq \int_{E_R} \left\{ \frac{n+1}{2} - \delta - \varepsilon \right\} \left( N^2 + |dN|_{\dot{g}}^2 \right) \rho^{2\delta} d\mu(\dot{g}).$$

C'est à dire

$$\|N\|_{1,2,\delta;E_R} \leq c \|\dot{T}\|_{2,\delta;E_R}.$$

En combinant cette inégalité avec le Lemme 8 valable en particulier sur  $E_R$ , on conclut la preuve de (5.31).  $\square$

### 5.3 Estimées elliptiques relatives à l'adjoint

Cette section regroupe les différents résultats obtenus concernant l'opérateur adjoint  $D\Phi_{\mathbf{0}}(g)^*$ . On commence par montrer la coercivité de l'adjoint dans la proposition suivante :

**Proposition 9:**

Soit  $\delta \in ]-(n+1)/2, 0]$ , avec  $n = 3$ . Il existe  $C$  dépendant de  $\dot{g}, \lambda, \delta$  et  $\|g\|_{\mathcal{F}}$  telle que l'estimée elliptique suivante soit vérifiée :

$$\forall N \in W_{-\delta}^{2,2}(\mathcal{M}), \quad \|N\|_{2,2,-\delta} \leq c \|D\Phi_{\mathbf{0}}(g)^* \cdot N\|_{2,-\delta} + C \|N\|_{1,2,-2\delta}, \quad (5.33)$$

Preuve :

Soit l'opérateur  $T$  défini par

$$T = T(N) := \nabla^2 N - Ng. \quad (5.34)$$

D'après la définition de  $\dot{T}$  (5.14), on a

$$\dot{T} = T - A\nabla N + (g - \dot{g})N$$

et par suite

$$\begin{aligned} \|\mathring{T}\|_{2,-\delta} &\leq \|T\|_{2,-\delta} + \|A\mathring{\nabla}N\|_{2,-\delta} + \|(g - \mathring{g})N\|_{2,-\delta} \\ &\leq c\|T - \text{tr}_g T g\|_{2,-\delta} + \|A\mathring{\nabla}N\|_{2,-\delta} + \|(g - \mathring{g})N\|_{2,-\delta}, \end{aligned} \quad (5.35)$$

en utilisant que

$$|T|_g^2 \leq |T|_g^2 + (n-2)(\text{tr}_g T g)^2 = |T - \text{tr}_g T g|_g^2$$

et donc

$$|T|_g^2 \leq c|T - \text{tr}_g T g|_g^2.$$

Notons que la trace sur  $g$  de  $T$  est donnée par

$$\text{tr}_g T = \Delta_g N - nN.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} T - \text{tr}_g T g &= \nabla^2 N - g \Delta_g N + (n-1)gN \\ &= D\Phi_0(g)^* . N / \sqrt{g} + [\text{Ric } g - \frac{1}{2}(R(g) - 2\Lambda)g]N + (n-1)gN \\ &= D\Phi_0(g)^* . N / \sqrt{g} + N(\text{Ric } g - \text{Ric } \mathring{g}) + \mathbf{N}(\text{Ric } \mathring{g} + (\mathbf{n} - \mathbf{1})\mathring{g}) \\ &\quad + (n-1)(g - \mathring{g})N - \frac{1}{2}(R(g) - 2\Lambda)gN. \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Hölder (4.15) et (4.19), il vient

$$\begin{aligned} \|T - \text{tr}_g T g\|_{2,-\delta} &\leq c\|D\Phi_0(g)^* . N\|_{2,-\delta} + \|N(\text{Ric } g - \text{Ric } \mathring{g})\|_{2,-\delta} + c\|(g - \mathring{g})N\|_{2,-\delta} \\ &\quad + \|N(\text{Ric } \mathring{g} + (n-1)\mathring{g})\|_{2,-\delta} + c\|(R(g) - 2\Lambda)gN\|_{2,-\delta} \\ &\leq c\|D\Phi_0(g)^* . N\|_{2,-\delta} + \|\text{Ric } g - \text{Ric } \mathring{g}\|_{2,\delta} \|N\|_{\infty,-2\delta} \\ &\quad + c\|g - \mathring{g}\|_{2,\delta} \|N\|_{\infty,-2\delta} + \|\text{Ric } \mathring{g} + (n-1)\mathring{g}\|_{2,\delta} \|N\|_{\infty,-2\delta} \\ &\quad + c\|R(g) - 2\Lambda\|_{2,\delta} \|N\|_{\infty,-2\delta} \\ &\leq c\|D\Phi_0(g)^* . N\|_{2,-\delta} + C\|N\|_{\infty,-2\delta} \\ &\leq c\|D\Phi_0(g)^* . N\|_{2,-\delta} + \varepsilon\|N\|_{2,2,-2\delta} + C\|N\|_{1,2,-2\delta}. \end{aligned}$$

L'inéquation (5.35) devient

$$\begin{aligned} \|\mathring{T}\|_{2,-\delta} &\leq c\|D\Phi_0(g)^* . N\|_{2,-\delta} + \varepsilon\|N\|_{2,2,-2\delta} + C\|N\|_{1,2,-2\delta} + \|A\mathring{\nabla}N\|_{2,-\delta} \\ &\leq c\|D\Phi_0(g)^* . N\|_{2,-\delta} + \varepsilon\|N\|_{2,2,-2\delta} + C\|N\|_{1,2,-2\delta} + \|A\|_{1,2,\delta} \|N\|_{1,2,-2\delta} \\ &\leq c\|D\Phi_0(g)^* . N\|_{2,-\delta} + C\|N\|_{1,2,-2\delta} + \varepsilon\|N\|_{2,2,-2\delta}, \end{aligned} \quad (5.36)$$

où l'on a utilisé (4.17) pour le passage de la première à la deuxième ligne.

En combinant (5.36) avec la Proposition 7, on obtient

$$\|N\|_{2,2,-\delta} \leq c\|D\Phi_0(g)^* . N\|_{2,-\delta} + C\|N\|_{1,2,-2\delta} + \varepsilon\|N\|_{2,2,-2\delta}$$

et le résultat apparaît après avoir fait passer le terme en  $\varepsilon\|N\|_{2,2,-2\delta}$  de l'autre côté et en utilisant l'inclusion de Sobolev  $W_{-2\delta}^{2,2} \subset W_{-\delta}^{2,2}$  pour  $\delta \leq 0$ .  $\square$

Remarque : en combinant la Proposition 9 et l'inégalité de Ehrling (4.13), on obtient



**Corollaire 1:**

Soit  $N \in W_{-\delta}^{2,2}(\mathcal{M})$ , avec  $\delta \in ] - (n + 1)/2, 0]$  et  $n = 3$ . Alors  $D\Phi_{\mathbf{0}}(g)^*.N$  satisfait l'estimée elliptique suivante :

$$\|N\|_{2,2,-\delta} \leq c \|D\Phi_{\mathbf{0}}(g)^*.N\|_{2,-\delta} + C \|N\|_{2,-2\delta}, \quad (5.37)$$

où  $C$  dépend de  $\dot{g}$ ,  $\lambda$ ,  $\delta$  et  $\|g\|_{\mathcal{F}}$ .

Par souci de complétude, et même si nous ne nous en servons pas, notons la dépendance de  $D\Phi_{\mathbf{0}}^*$  par rapport à  $g$  mesurée par la proposition suivante :

**Proposition 10:**

En dimension  $n = 3$ , soit  $\delta \leq 0$ , alors l'opérateur  $D\Phi_{\mathbf{0}}(g)^* : W_{-\delta}^{2,2}(\mathcal{M}) \rightarrow L_{-\delta}^2(\tilde{\mathcal{S}})$  est borné. De plus,  $D\Phi_{\mathbf{0}}(g)^*$  dépend de  $g$  de manière Lipschitzienne,

$$\left\| [D\Phi_{\mathbf{0}}(g)^* - D\Phi_{\mathbf{0}}(\tilde{g})^*] N \right\|_{2,-\delta} \leq C \|g - \tilde{g}\|_{\mathcal{F}} \|N\|_{2,2,-\delta}, \quad (5.38)$$

où la constante  $C$  dépend de  $\dot{g}$ ,  $\delta$ ,  $\|g\|_{\mathcal{F}}$  et  $\|\tilde{g}\|_{\mathcal{F}}$ .

Preuve :

Commençons par montrer que  $D\Phi_{\mathbf{0}}(g)^*$  est borné.

On introduit pour cela l'opérateur  $O$  agissant sur les fonctions :

$$O(N) = \nabla^2 N - g \Delta_g N \quad (5.39)$$

On remarque que  $O(N) = L(\nabla^2 N)$  avec  $L$  opérateur linéaire inversible, on a

$$\begin{aligned} \|O\|_{2,-\delta} &\leq c \|\nabla^2 N\|_{2,-\delta} = c \left( \|\overset{\circ}{\nabla}^2 N\|_{2,-\delta} + \|A dN\|_{2,-\delta} \right) \\ &\leq C \|N\|_{2,2,-\delta}. \end{aligned}$$

En effet, on a  $A dN \simeq g^{-1} \overset{\circ}{\nabla} g dN$ . En utilisant l'inégalité de Hölder (4.15) , (4.17) et l'inclusion de Sobolev ( $\delta \leq 0$ ) ,

$$\begin{aligned} \|A dN\|_{2,-\delta} &\leq \|g^{-1}\|_{\infty,0} \|\overset{\circ}{\nabla} g dN\|_{2,-\delta} \\ &\leq c \|\overset{\circ}{\nabla} g\|_{1,2,\delta} \|dN\|_{1,2,-2\delta} \\ &\leq C \|N\|_{2,2,-\delta}. \end{aligned} \quad (5.40)$$

En utilisant l'expression (5.13) de  $D\Phi_{\mathbf{0}}(g)^*$ ,

$$\begin{aligned} \|D\Phi_{\mathbf{0}}(g)^* N / \sqrt{g}\|_{2,-\delta} &\leq \|O\|_{2,-\delta} + \|(\text{Ric } g - \text{Ric } \dot{g})N\|_{2,-\delta} + \|(n-1)\dot{g}N\|_{2,-\delta} \\ &\quad + \|[\text{Ric } \dot{g} + (n-1)\dot{g}]N\|_{2,-\delta} + \frac{1}{2}\|(R(g) - 2\Lambda)gN\|_{2,-\delta}. \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Hölder (4.15), l'inclusion des espaces de Sobolev ( $\delta \leq 0$ ) et l'inégalité de Sobolev,

$$\begin{aligned} \|(\text{Ric } g - \text{Ric } \dot{g})N\|_{2,-\delta} &\leq \|\text{Ric } g - \text{Ric } \dot{g}\|_{2,\delta} \|N\|_{\infty,-2\delta} \\ &\leq c \|\text{Ric } g - \text{Ric } \dot{g}\|_{2,\delta} \|N\|_{2,2,-\delta}. \end{aligned}$$

D'après (5.8),  $\text{Ric } g - \text{Ric } \dot{g} \simeq \dot{\nabla} A + A^2 \simeq (\dot{\nabla} g)^2 + g \dot{\nabla}^2 g + g^{-2} (\dot{\nabla} g)^2$ .  
 En utilisant (4.17),

$$\begin{aligned} \|(\text{Ric } g - \text{Ric } \dot{g})N\|_{2,-\delta} &\leq c \left( \|\dot{\nabla} g\|_{1,2,\delta}^2 + \|\dot{\nabla}^2 g\|_{2,\delta} \right) \|N\|_{2,2,-\delta} \\ &\leq C \|N\|_{2,2,-\delta}. \end{aligned}$$

En particulier, on a les conditions d'intégrabilité suivantes

$$\text{Ric } g - \text{Ric } \dot{g} \in L_\delta^2. \quad (5.41)$$

$$R(g) - R(\dot{g}) \in L_\delta^2. \quad (5.42)$$

En utilisant l'inégalité de Hölder (4.15), l'inclusion des espaces de Sobolev ( $\delta \leq 0$ ), l'inégalité de Sobolev et (5.1)

$$\begin{aligned} \|[\text{Ric } \dot{g} + (n-1)\dot{g}]N\|_{2,-\delta} &\leq \|\text{Ric } \dot{g} + (n-1)\dot{g}\|_{2,\delta} \|N\|_{\infty,-2\delta} \\ &\leq \|\text{Ric } \dot{g} + (n-1)\dot{g}\|_{2,\delta} \|N\|_{2,2,-\delta} \\ &\leq c \|N\|_{2,2,-\delta}. \end{aligned}$$

Pour le terme avec la courbure scalaire et la constante cosmologique, la même procédure donne

$$\begin{aligned} \|(R(g) - 2\Lambda)gN\|_{2,-\delta} &\leq \|g\|_{\infty,0} \|(R(g) - 2\Lambda)N\|_{2,-\delta} \\ &\leq c \|R(g) - 2\Lambda\|_{2,\delta} \|N\|_{\infty,-2\delta} \\ &\leq C \|N\|_{2,2,-\delta}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|(n-1)\dot{g}N\|_{2,-\delta} &\leq (n-1)\|\dot{g}\|_{\infty,0} \|N\|_{2,-\delta} \\ &\leq c \|N\|_{2,2,-\delta}. \end{aligned}$$

On obtient donc

$$\|D\Phi_0(g)^*N/\sqrt{g}\|_{2,-\delta} \leq C \|N\|_{2,2,-\delta} \quad (5.43)$$

et enfin

$$\|D\Phi_0(g)^*.N\|_{2,-\delta} \leq C \|\sqrt{g}\|_{\infty,0} \|N\|_{2,2,-\delta} \leq C \|N\|_{2,2,-\delta}, \quad (5.44)$$

où  $C$  est une constante dépendant de  $\dot{g}$ ,  $\delta$  et  $\|g\|_{\mathcal{F}}$ .

Preuve de (5.38) :

On note  $\tilde{\nabla}$ ,  $\tilde{\Delta}$ ,  $\text{Ric}(\tilde{g})$  et  $R(\tilde{g})$  la connexion de Levi-Civita, le Laplacien, le tenseur de Ricci et la courbure scalaire associés à la métrique Riemannienne  $\tilde{g}$ .

$$[D\Phi_0(g)^* - D\Phi_0(\tilde{g})^*]N = (\sqrt{g} - \sqrt{\tilde{g}}) \frac{D\Phi_0(g)^*N}{\sqrt{g}} + \sqrt{\tilde{g}} \left[ \frac{D\Phi_0(g)^*N}{\sqrt{g}} - \frac{D\Phi_0(\tilde{g})^*N}{\sqrt{\tilde{g}}} \right].$$

$$\begin{aligned}
 \left\| [D\Phi_0(g)^* - D\Phi_0(\tilde{g})^*]N \right\|_{2,-\delta} &\leq \|\sqrt{g} - \sqrt{\tilde{g}}\|_{\infty,\delta} \left\| \frac{D\Phi_0(g)^*N}{\sqrt{g}} \right\|_{2,-2\delta} \\
 &\quad + \|\sqrt{\tilde{g}}\|_{\infty,0} \left\| \frac{D\Phi_0(g)^*N}{\sqrt{g}} - \frac{D\Phi_0(\tilde{g})^*N}{\sqrt{\tilde{g}}} \right\|_{2,-\delta} \\
 &\leq \|g - \tilde{g}\|_{\mathcal{F}} \left\| \frac{D\Phi_0(g)^*N}{\sqrt{g}} \right\|_{2,-2\delta} \\
 &\quad + c \left\| \frac{D\Phi_0(g)^*N}{\sqrt{g}} - \frac{D\Phi_0(\tilde{g})^*N}{\sqrt{\tilde{g}}} \right\|_{2,-\delta}. \tag{5.45}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \left( \frac{D\Phi_0(g)^*N}{\sqrt{g}} - \frac{D\Phi_0(\tilde{g})^*N}{\sqrt{\tilde{g}}} \right) &= (\nabla - \tilde{\nabla})dN + g\Delta_g N - \tilde{g}\tilde{\Delta}N - [\text{Ric}(g) - \text{Ric}(\tilde{g})]N \\
 &\quad + \frac{1}{2}[(R(g) - 2\Lambda)g - (R(\tilde{g}) - 2\Lambda)\tilde{g}]N.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \left\| \frac{D\Phi_0(g)^*N}{\sqrt{g}} - \frac{D\Phi_0(\tilde{g})^*N}{\sqrt{\tilde{g}}} \right\|_{2,-\delta} &\leq \|(\nabla - \tilde{\nabla})dN\|_{2,-\delta} + \|g\Delta_g N - \tilde{g}\tilde{\Delta}N\|_{2,-\delta} \\
 &\quad + \frac{1}{2} \left\| [(R(g) - 2\Lambda)g - (R(\tilde{g}) - 2\Lambda)\tilde{g}]N \right\|_{2,-\delta} \\
 &\quad - \|[\text{Ric}(g) - \text{Ric}(\tilde{g})]N\|_{2,-\delta}.
 \end{aligned}$$

- Pour la Hessienne :

$$\nabla - \tilde{\nabla} = (g^{-1} - \tilde{g}^{-1})\mathring{\nabla}g + \tilde{g}^{-1}\mathring{\nabla}(g - \tilde{g}). \tag{5.46}$$

En utilisant les inégalités de Hölder et Sobolev à poids ainsi que l'inclusion de Sobolev ( $\delta \leq 0$ ),

$$\begin{aligned}
 \|(\nabla - \tilde{\nabla})dN\|_{2,-\delta} &\leq \|(g^{-1} - \tilde{g}^{-1})\mathring{\nabla}g\,dN\|_{2,-\delta} + \|\tilde{g}^{-1}\mathring{\nabla}(g - \tilde{g})\,dN\|_{2,-\delta} \\
 &\leq c\|g - \tilde{g}\|_{\infty,\delta} \|\mathring{\nabla}g\,dN\|_{2,-2\delta} + \|\tilde{g}^{-1}\|_{\infty,0} \|\mathring{\nabla}(g - \tilde{g})\,dN\|_{2,-\delta} \\
 &\leq c\|g - \tilde{g}\|_{2,2,\delta} \|\mathring{\nabla}g\,dN\|_{2,0} + c\|\mathring{\nabla}(g - \tilde{g})\,dN\|_{2,0}.
 \end{aligned}$$

En utilisant (4.17),

$$\begin{aligned}
 \|(\nabla - \tilde{\nabla})dN\|_{2,-\delta} &\leq c\|g - \tilde{g}\|_{2,2,\delta} \|\mathring{\nabla}g\|_{1,2,\delta} \|dN\|_{1,2,-\delta} + c\|\mathring{\nabla}(g - \tilde{g})\|_{1,2,\delta} \|dN\|_{1,2,-\delta} \\
 &\leq C\|g - \tilde{g}\|_{2,2,\delta} \|N\|_{2,2,-\delta}. \tag{5.47}
 \end{aligned}$$

- Pour le Laplacien :

$$\begin{aligned}
 g\Delta_g N - \tilde{g}\tilde{\Delta}N &= g\Delta_g N - \tilde{g}\Delta_g N + \tilde{g}\Delta_g N - \tilde{g}\tilde{\Delta}N \\
 &= (g - \tilde{g})\Delta_g N + \tilde{g}(\Delta_g N - \tilde{\Delta}N) \\
 &= (g - \tilde{g})g^{-1}\nabla dN + \tilde{g}(g^{-1}\nabla dN - \tilde{g}^{-1}\tilde{\nabla}dN) \\
 &= (g - \tilde{g})g^{-1}\nabla dN + \tilde{g}(g^{-1} - \tilde{g}^{-1})\nabla dN + \tilde{g}\tilde{g}^{-1}(\nabla - \tilde{\nabla})dN.
 \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Hölder à poids (4.15) , l'inclusion de Sobolev ( $\delta \leq 0$ ) et l'inégalité de Sobolev à poids,

$$\begin{aligned}
 \|g \Delta_g N - \tilde{g} \tilde{\Delta} N\|_{2,-\delta} &\leq \|(g - \tilde{g})g^{-1} \nabla dN\|_{2,-\delta} + \|\tilde{g}(g^{-1} - \tilde{g}^{-1}) \nabla dN\|_{2,-\delta} \\
 &\quad + \|\tilde{g} \tilde{g}^{-1} (\nabla - \tilde{\nabla}) dN\|_{2,-\delta} \\
 &\leq c \|g - \tilde{g}\|_{\infty,\delta} \|g^{-1}\|_{\infty,0} \|\nabla dN\|_{2,-2\delta} \\
 &\quad + \|\tilde{g}\|_{\infty,0} \|\tilde{g}^{-1}\|_{\infty,0} \|(\nabla - \tilde{\nabla}) dN\|_{2,-\delta} \\
 &\leq c \|g - \tilde{g}\|_{2,2,\delta} \|\nabla dN\|_{2,-\delta} + c \|(\nabla - \tilde{\nabla}) dN\|_{2,-\delta}.
 \end{aligned}$$

Une conséquence de (5.40) est

$$\|\nabla dN\|_{2,-\delta} \leq C \|N\|_{2,2,-\delta}. \quad (5.48)$$

En utilisant (5.47) et (5.48), on obtient

$$\|g \Delta_g N - \tilde{g} \tilde{\Delta} N\|_{2,\delta} \leq C \|g - \tilde{g}\|_{2,2,\delta} \|N\|_{2,2,-\delta}.$$

- Pour le Ricci :

On définit  $\tilde{A}_{ij}^k = \tilde{\Gamma}_{ij}^k - \dot{\Gamma}_{ij}^k$ .

On pose  $T := \tilde{\nabla} - \nabla = \tilde{g}^{-1} \dot{\nabla} \tilde{g} - g^{-1} \dot{\nabla} g = (g^{-1} - \tilde{g}^{-1}) \dot{\nabla} g + \tilde{g}^{-1} \dot{\nabla} (g - \tilde{g})$ .

En utilisant l'inégalité de Hölder à poids(4.15), l'inclusion de Sobolev ( $\delta \leq 0$ ) et l'inégalité de Sobolev à poids,

$$\begin{aligned}
 \|T\|_{1,2,\delta} &\leq \|(g^{-1} - \tilde{g}^{-1})\|_{\infty,\delta} \|\dot{\nabla} g\|_{2,\delta} + \|g^{-1}\|_{\infty,0} \|\dot{\nabla} (g - \tilde{g})\|_{2,\delta} \\
 &\leq c \|g - \tilde{g}\|_{\infty,\delta} \|\dot{\nabla} g\|_{2,\delta} + c \|\dot{\nabla} (g - \tilde{g})\|_{2,\delta} \\
 &\leq C \|g - \tilde{g}\|_{2,2,\delta}.
 \end{aligned} \quad (5.49)$$

On peut montrer, en ajoutant et retranchant  $\text{Ric}(\dot{g})$  et en utilisant (5.8), que

$$[\text{Ric}(g) - \text{Ric}(\tilde{g})]N \simeq (\dot{\nabla} T + \tilde{A}T + T^2)N,$$

ce qui entraîne

$$\|[\text{Ric}(g) - \text{Ric}(\tilde{g})]N\|_{2,-\delta} \leq \|\dot{\nabla} T N\|_{2,-\delta} + \|\tilde{A}T N\|_{2,-\delta} + \|T^2 N\|_{2,-\delta}. \quad (5.50)$$

En utilisant les inégalités de Hölder et Sobolev à poids ainsi que l'inclusion de Sobolev ( $\delta \leq 0$ ),

$$\begin{aligned}
 \|\dot{\nabla} T N\|_{2,-\delta} &\leq \|\dot{\nabla} T\|_{2,0} \|N\|_{\infty,-\delta} \\
 &\leq \|\dot{\nabla} T\|_{2,\delta} \|N\|_{\infty,-\delta} \\
 &\leq c \|T\|_{1,2,\delta} \|N\|_{2,2,-\delta} \\
 &\leq C \|g - \tilde{g}\|_{2,2,\delta} \|N\|_{2,2,-\delta} \quad \text{d'après (5.49)}.
 \end{aligned}$$

Le même procédé pour le terme  $\tilde{A}T N$  donne, en utilisant (4.17)

$$\begin{aligned}
 \|\tilde{A}T N\|_{2,-\delta} &= \|\tilde{g}^{-1} \dot{\nabla} \tilde{g} T N\|_{2,-\delta} \leq \|\tilde{g}^{-1}\|_{\infty,0} \|\dot{\nabla} \tilde{g} T N\|_{2,-\delta} \\
 &\leq c \|\dot{\nabla} \tilde{g}\|_{1,2,\delta} \|T N\|_{1,2,-2\delta} \\
 &\leq c \|\dot{\nabla} \tilde{g}\|_{1,2,\delta} \|T N\|_{1,2,0} \\
 &\leq C \|T\|_{1,2,\delta} \|N\|_{1,2,-\delta} \\
 &\leq C \|g - \tilde{g}\|_{2,2,\delta} \|N\|_{2,2,-\delta} \quad \text{d'après (5.49)}.
 \end{aligned}$$

En utilisant (4.15) et (4.18) puis l'inclusion des Sobolev ( $\delta \leq 0$ ) puis l'inégalité de Sobolev à poids et (5.49),

$$\begin{aligned} \|T^2 N\|_{2,-\delta} &\leq \|T^2\|_{2,0} \|N\|_{\infty,-\delta} \\ &\leq \|T^2\|_{2,\delta} \|N\|_{\infty,-\delta} \\ &\leq c \|T\|_{1,2,\delta}^2 \|N\|_{2,2,-\delta} \\ &\leq C \|g - \tilde{g}\|_{2,2,\delta}^2 \|N\|_{2,2,-\delta}. \end{aligned}$$

En remplaçant dans (5.50), on obtient donc

$$\|[\text{Ric}(g) - \text{Ric}(\tilde{g})]N\|_{2,-\delta} \leq C \|g - \tilde{g}\|_{2,2,\delta} \|N\|_{2,2,-\delta}. \quad (5.51)$$

- Pour la courbure scalaire,

$$\begin{aligned} &(R(g) - 2\Lambda)g - (R(\tilde{g}) - 2\Lambda)\tilde{g} \\ &= (g - \tilde{g})(R(g) - 2\Lambda) + \tilde{g}\tilde{g}^{-1}(\text{Ric } g - \text{Ric } \tilde{g}) + \tilde{g}(g^{-1} - \tilde{g}^{-1}) \text{Ric } g \\ &= (g - \tilde{g})(R(g) - 2\Lambda) + \tilde{g}\tilde{g}^{-1}(\text{Ric } g - \text{Ric } \tilde{g}) - (n-1)\tilde{g}(g^{-1} - \tilde{g}^{-1})\mathring{g} \\ &\quad + \tilde{g}(g^{-1} - \tilde{g}^{-1})\{(\text{Ric } g - \text{Ric } \mathring{g}) + (\text{Ric } \mathring{g} + (n-1)\mathring{g})\}. \end{aligned}$$

Les inégalités de Hölder et Sobolev à poids ainsi que l'inclusion des Sobolev ( $\delta \leq 0$ ) et (5.51) donnent

$$\|[(R(g) - 2\Lambda)g - (R(\tilde{g}) - 2\Lambda)\tilde{g}]N\|_{2,-\delta} \leq C \|g - \tilde{g}\|_{2,2,\delta} \|N\|_{2,2,\delta},$$

compte tenu du fait que  $\forall u \in L^\infty, \forall v \in L_\delta^2$  tel que  $\|vN\|_{2,-\delta} \leq C \|N\|_{2,2,-\delta}$ ,

$$\begin{aligned} \|(g - \tilde{g})uvN\|_{2,-\delta} &\leq \|g - \tilde{g}\|_{\infty,0} \|u\|_{\infty,0} \|vN\|_{2,-\delta} \\ &\leq C \|g - \tilde{g}\|_{2,2,\delta} \|v\|_{2,\delta} \|N\|_{2,2,-\delta}, \end{aligned}$$

où  $C$  est une constante positive dépendante de  $\mathring{g}, \delta$  et  $\|g\|_{\mathcal{F}}$ .

En recollant tous les morceaux dans (5.45), compte tenu de (5.43), il vient

$$\|[D\Phi_0(g)^* - D\Phi_0(\tilde{g})^*]N\|_{2,-\delta} \leq C \|g - \tilde{g}\|_{2,2,\delta} \|N\|_{2,2,\delta}. \quad \square$$

On montre dans la proposition suivante que l'estimée elliptique (5.37) du Corollaire 1 est également vérifiée par des solutions faibles  $N$  seulement dans  $L_{-\delta}^2(\mathcal{T})$ . Ce passage de solution faible à solution forte est indispensable pour montrer la triviale du noyau de l'adjoint. On dit que  $N \in \mathcal{L}$  est une solution faible de  $D\Phi_0(g)^*N = f$ , avec  $f \in L_{-\delta}^2(\tilde{\mathcal{S}})$  lorsque

$$\int_{\mathcal{M}} \langle N, D\Phi_0(g).h \rangle_{\tilde{g}} = \int_{\mathcal{M}} \langle f, h \rangle_{\tilde{g}}, \quad \forall h \in \mathcal{G}.$$

Il suffit de tester avec  $h \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathcal{S})$  puisque cet espace est dense dans  $\mathcal{G}$ .

**Proposition 11:**

Soit  $\delta \in ]-(n+1)/2, 0]$ , avec  $n = 3$ . Soient  $g \in \mathcal{G}^+, f \in L_{-\delta}^2(\tilde{\mathcal{S}})$  et  $N \in \mathcal{L}$ , une solution faible de  $D\Phi_0(g)^*N = f$ .

Alors  $N \in W_{-\delta}^{2,2}(\mathcal{M})$  est une solution forte et satisfait l'estimée elliptique (5.37).

Preuve :

Dans [5], Bartnik montre que  $N \in W_{\text{loc}}^{2,2}$ .

On peut trouver une fonction régularisante  $\chi_R$  comme dans la Définition 1 telle que

- $\chi_R \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega_R)$ .
- $\chi_R = 1$  sur  $\Omega_{R/2}$ .

En particulier,  $\chi_R N \in W_{-\delta}^{2,2}(\mathcal{T})$ . On peut donc écrire d'après le Corollaire 1

$$\begin{aligned} \|\chi_R N\|_{2,2,-\delta} &\leq c \|D\Phi_0(g)^*(\chi_R N)\|_{2,-\delta} + C \|\chi_R N\|_{2,-2\delta} \\ &\leq c \|D\Phi_0(g)^*(\chi_R N)\|_{2,-\delta} + C \|N\|_{2,-\delta}, \end{aligned} \quad (5.52)$$

en utilisant l'inclusion de Sobolev ( $\delta \leq 0$ ) et compte tenu que  $\chi_R N$  converge vers  $N$  dans  $L_{-\delta}^2$ . Il nous faut montrer que  $\chi_R N$  est uniformément borné dans  $W_{-\delta}^{2,2}$ , c'est à dire contrôle indépendamment de  $R$ . On s'inspire pour ce faire de la méthode de McCormick [45].

$$D\Phi_0(g)^*(\chi_R N) \simeq \chi_R (D\Phi_0(g)^* N) + N \nabla^2 \chi_R + \nabla \chi_R \partial N.$$

En remarquant que les dérivées de  $\chi_R$  sont à support dans  $A_R := \Omega_R \setminus \Omega_{R/2}$  et en utilisant (4.15), (4.19), (4.20), l'inclusion de Sobolev ( $\delta \leq 0$ ) et l'inégalité de Ehrling,

$$\begin{aligned} \|D\Phi_0(g)^*(\chi_R N)\|_{2,-\delta} &\leq \|\chi_R (D\Phi_0(g)^* N)\|_{2,-\delta} + c \|d\chi_R dN\|_{2,-\delta} + \|N \nabla^2 \chi_R\|_{2,-\delta} \\ &\leq \|D\Phi_0(g)^* N\|_{2,-\delta} + c \|dN\|_{2,-\delta;A_R} + c \|N\|_{2,-\delta;A_R} \\ &\leq \|D\Phi_0(g)^* N\|_{2,-\delta} + \varepsilon \|\mathring{\nabla}^2 N\|_{2,-\delta;A_R} + C \|N\|_{2,-\delta;A_R}, \end{aligned}$$

où  $C$  est une constante dépendant de  $\mathring{g}, \lambda, \varepsilon, \delta$  et  $\|g\|_{\mathcal{F}}$ . L'inéquation (5.52) devient

$$\|\chi_R N\|_{2,2,-\delta} \leq c \|D\Phi_0(g)^* N\|_{2,-\delta} + \varepsilon \|\mathring{\nabla}^2 N\|_{2,-\delta;A_R} + C \|N\|_{2,-\delta}. \quad (5.53)$$

D'après (5.13) et les conditions d'intégrabilité (5.1), (5.41) et (5.4),

$$O = D\Phi_0(g)^*.N/\sqrt{g} - (n-1)\mathring{g}N + L_\delta^2 N. \quad (5.54)$$

Puisque  $O(N) = L(\nabla^2 N)$  avec  $L$  opérateur linéaire inversible, on a

$$\|\nabla^2 N\|_{2,-\delta} \leq c \|O\|_{2,-\delta}$$

et par conséquent

$$\|\mathring{\nabla}^2 N\|_{2,-\delta} \leq c (\|O\|_{2,-\delta} + \|A dN\|_{2,-\delta}). \quad (5.55)$$

D'après (5.54) et en utilisant (4.15), (4.19), (4.20), l'inclusion de Sobolev ( $\delta \leq 0$ ) et l'inégalité de Ehrling, il existe une constante  $C$  dépendant de  $\mathring{g}, \lambda, \varepsilon, \delta$  et  $\|g\|_{\mathcal{F}}$  telle que

$$\|\mathring{\nabla}^2 N\|_{2,-\delta} \leq c \|D\Phi_0(g)^* N\|_{2,-\delta} + C \|N\|_{2,-\delta}. \quad (5.56)$$

Etant donné que  $N \in W_{-\delta}^{2,2}(A_R)$  et que toutes les inégalités utilisées pour obtenir (5.56) sont valables en particulier sur tout compact, on a la version locale suivante sur  $A_R$

$$\begin{aligned} \|\mathring{\nabla}^2 N\|_{2,-\delta;A_R} &\leq c \|D\Phi_0(g)^* N\|_{2,-\delta;A_R} + C \|N\|_{2,-\delta;A_R} \\ &\leq c \|D\Phi_0(g)^* N\|_{2,-\delta} + C \|N\|_{2,-\delta}. \end{aligned} \quad (5.57)$$

En insérant (5.57) dans (5.53), il vient

$$\begin{aligned} \|\chi_R N\|_{2,2,-\delta} &\leq c \|D\Phi_0(g)^* N\|_{2,-\delta} + C \|N\|_{2,-\delta} \\ &\leq c \|f\|_{2,-\delta} + c \|N\|_{2,-\delta}. \end{aligned}$$

La suite  $\chi_R N$  est de Cauchy dans  $W_{-\delta}^{2,2}$ , donc convergente dans  $W_{-\delta}^{2,2}$ . Comme  $\chi_R N$  converge vers  $N$  dans  $L_{-\delta}^2$ , par unicité de la limite,  $\chi_R N$  converge vers  $N$  dans  $W_{-\delta}^{2,2}(\mathcal{T})$ . Donc  $N \in W_{-\delta}^{2,2}(\mathcal{T})$  et par suite  $N$  vérifie (5.33).  $\square$

## 5.4 Trivialité du noyau de l'adjoint

On montre maintenant que le noyau de  $D\Phi_0(g)^*$  est trivial, et cela constitue le point clé de la démonstration. Nous aurons besoin des différents lemmes et propositions suivants dans la démonstration du Théorème 8.

### Lemme 13:

Soient  $\delta \in \mathbb{R}$  et  $N \in W_{-\delta}^{2,2}(\mathcal{M})$  une solution de l'équation  $D\Phi_0(g)^* N = 0$ , alors  $N$  satisfait une équation du type

$$\mathring{T} = b_0 N + b_1 \mathring{\nabla} N,$$

avec  $b_0 \in L_{\delta}^2$  et  $b_1 \in W_{\delta}^{1,2}$ .

Preuve :

$$\mathring{T} = \mathring{\nabla}^2 N - N \mathring{g}. \quad (5.58)$$

$$\begin{aligned} D\Phi_0(g)^* . N / \sqrt{g} &= \nabla^2 N - g \Delta_g N - [\text{Ric } g - \frac{1}{2}(R(g) - 2\Lambda)g]N \\ &= \nabla^2 N - g \Delta_g N + \mathbf{N}(\mathbf{n} - \mathbf{1})\mathring{g} - N(\text{Ric } g - \text{Ric } \mathring{g}) \\ &\quad + \frac{1}{2}(R(g) - 2\Lambda)gN - \mathbf{N}(\text{Ric } \mathring{g} + (\mathbf{n} - \mathbf{1})\mathring{g}) \\ &= \nabla^2 N - g \Delta_g N + N(n - 1)\mathring{g} + NL_{\delta}^2 \end{aligned} \quad (5.59)$$

$$\text{tr}_g D\Phi_0(g)^* . N / \sqrt{g} = (1 - n)\Delta_g N + Nn(n - 1) + NL_{\delta}^2.$$

$$\begin{aligned} \text{tr}_g D\Phi_0(g)^* . N = 0 &\Rightarrow \Delta_g N = nN + NL_{\delta}^2 \\ D\Phi_0(g)^* . N = 0 &\Rightarrow \nabla^2 N = nNg - N(n - 1)\mathring{g} + NL_{\delta}^2 \\ &\Rightarrow \mathring{\nabla}^2 N = A\mathring{\nabla} N + N\mathring{g} + NL_{\delta}^2 \\ &\Rightarrow \mathring{T} = NL_{\delta}^2 + A\mathring{\nabla} N, \end{aligned} \quad (5.60)$$

avec  $A \in W_{\delta}^{1,2}$  d'après sa définition (5.7).  $\square$

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer et démontrer le théorème suivant :

**Théorème 8:** Trivialité de  $\ker D\Phi_0(g)^*$

Soit  $\Omega \subset \mathcal{M}$  un ouvert connexe tel que  $E_R \subset \Omega$  avec  $E_R := \mathcal{M} \setminus \Omega_R$ , pour un ouvert borné  $\Omega_R$  quelconque. Soit  $g \in \mathcal{F}$  fixée, avec  $\delta \in ]-(n+1)/2, -1]$ ,  $n = 3$ .  
Si  $N \in L^2_{-\delta}(\mathcal{M})$  satisfait  $D\Phi_0(g)^*N = 0$  sur  $\Omega$ , alors  $N \equiv 0$  sur  $\Omega$ .

Preuve :

D'après la Proposition 11,  $N \in W_{-\delta}^{2,2}(\mathcal{M})$ . D'après le Lemme 13, puisque  $N$  est solution de  $D\Phi_0(g)^*N = 0$ ,  $N$  satisfait une équation du type

$$\overset{\circ}{T} = b_0 N + b_1 \overset{\circ}{\nabla} N, \quad (5.61)$$

avec  $b_0 \in L^2_{\delta}$  et  $b_1 \in W_{\delta}^{1,2}$ .

Il nous faut montrer qu'une solution  $N$  de (5.61) telle que  $N = o(\rho^{\delta})$  (d'après (4.14)) s'annule. Avant de poursuivre, rappelons la Proposition 3.9 de [5] :

**Proposition 12:**

En dimension  $n = 3$ , soit  $\delta \leq 0$  et  $g \in \mathcal{F}$ . Soit  $\Omega$  un sous-ensemble connexe de  $\mathcal{M}$ . Soit  $N$  satisfaisant  $D\Phi_0(g)^*N = 0$  sur  $\Omega$ . Si de plus  $N \equiv 0$  sur un ouvert  $U \subset \Omega$ , alors  $N \equiv 0$  sur  $\Omega$ .

Compte tenu de ce résultat, il nous reste à montrer que  $N$  s'annule près du bord. Au vu de (5.61), on a

$$\|\overset{\circ}{T}\|_{2,-\delta;E_R} \leq \|b_0\|_{2,\delta} \|N\|_{\infty,-2\delta;E_R} + c \|b_1\|_{6,\delta} \|\overset{\circ}{\nabla} N\|_{3,-2\delta;E_R} \quad (5.62)$$

et le membre de droite est fini car par l'inégalité de Sobolev,  $\|b_1\|_{6,\delta} \leq c \|b_1\|_{1,2,\delta}$  et  $b_1 \in W_{\delta}^{1,2}$ .

$$\begin{aligned} \|\overset{\circ}{\nabla} N\|_{3,-2\delta;E_R} &\leq e^{2R\delta} \|\overset{\circ}{\nabla} N\|_{3,-\delta;E_R} \\ &\leq c e^{2R\delta} \|\overset{\circ}{\nabla} N\|_{1,2,-\delta;E_R} \\ &\leq c e^{2R\delta} \|N\|_{2,2,-\delta;E_R}, \end{aligned} \quad (5.63)$$

où on a utilisé l'inégalité de Sobolev et (4.21) avec  $\delta \leq 0$ .

De la même façon, on obtient

$$\begin{aligned} \|N\|_{\infty,-2\delta;E_R} &\leq e^{2R\delta} \|N\|_{\infty,-\delta;E_R} \\ &\leq c e^{2R\delta} \|N\|_{2,2,-\delta;E_R}. \end{aligned} \quad (5.64)$$

L'utilisation de (5.63) et (5.64) dans (5.62) donne

$$\|\overset{\circ}{T}\|_{2,-\delta;E_R} \leq C e^{2R\delta} \|N\|_{2,2,-\delta;E_R}.$$

En combinant l'inégalité que l'on vient d'obtenir avec la Proposition 8, on obtient  $\forall \delta \in ]-(n+1)/2, -1[$ ,

$$\|N\|_{2,2,-\delta;E_R} \leq C e^{2R\delta} \|N\|_{2,2,-\delta;E_R}.$$



Pour  $R$  assez grand,  $\|N\|_{2,2,-\delta;E_R} = 0$  et d'après (5.64),  $N$  s'annule donc sur  $E_R$ , pour  $R \gg 1$ . D'après la Prop.12,  $N \equiv 0$  sur  $\Omega$ , car  $\Omega$  est connexe par hypothèse. Ceci conclut la preuve du Théorème 8.  $\square$

Pour de futures références, et même si nous ne l'utiliserons pas, soulignons le résultat important suivant qui découle aisément de ce qui précède.

**Corollaire 2:**

Soit  $\delta \in ]-(n+1)/2, 0]$  avec  $n = 3$ . Il existe une constante  $C > 0$  dépendant de  $\|g\|_{\mathcal{F}}$  telle que pour tout  $N \in W_{-\delta}^{2,2}(\mathcal{M})$ ,

$$\|N\|_{2,2,-\delta} \leq C \|D\Phi_0(g)^* N\|_{2,-\delta}. \quad (5.65)$$

Preuve :

Pour montrer que le noyau de  $D\Phi_0(g)^*$  est de dimension finie, on utilise le théorème de Riesz en montrant que tout ensemble borné de  $\ker D\Phi_0(g)^*$  est  $\|\cdot\|_{2,2,-\delta}$ -compact. Soit  $\{N_k\}$  une suite de  $\ker D\Phi_0(g)^*$  telle que  $\|N_k\|_{2,2,-\delta} = 1$ . Le théorème de Rellich nous dit que l'on peut extraire de  $\{N_k\}$  une sous-suite, notée également  $\{N_k\}$ , qui converge dans  $W_{-2\delta}^{1,2}$  vers une limite  $\bar{N}$ . La suite  $\{N_k\}$  est donc de Cauchy dans  $W_{-2\delta}^{1,2}$ . D'après (5.33), compte tenu du fait que  $\{N_k\} \in \ker D\Phi_0(g)^*$ , la suite  $\{N_k\}$  est donc de Cauchy dans  $W_{-\delta}^{2,2}$ , donc convergente vers  $\bar{N}$  dans  $W_{-\delta}^{2,2}$ , par unicité de la limite, ce qui conclut la preuve de la dimension finie de  $\ker D\Phi_0(g)^*$ .  $\ker D\Phi_0(g)^*$  est donc un sous espace vectoriel fermé de l'espace de Hilbert  $W_{-\delta}^{2,2}$  en tant que sous espace vectoriel de dimension finie d'un espace vectoriel normé. Il admet par suite un supplémentaire fermé, noté  $W$ . Par conséquent, on peut écrire

$$W_{-\delta}^{2,2} = \ker D\Phi_0(g)^* \oplus W.$$

D'après le même argument que dans la preuve du Lemme 2, il existe une constante  $C > 0$  dépendant de  $\|g\|_{\mathcal{F}}$  telle que pour tout  $N \in W$ ,

$$\|N\|_{2,2,-\delta} \leq C \|D\Phi_0(g)^* N\|_{2,-\delta}. \quad (5.66)$$

On conclut grâce à la trivialité de  $\ker D\Phi_0(g)^*$ , d'après le Théorème 8.  $\square$

## 5.5 Structure de sous-variété

**Lemme 14:**

Soit  $X, Y$  deux espaces de Banach et  $T$  un opérateur linéaire tel que  $\text{Im } T$  est fermée.

$$\begin{aligned} T : X &\rightarrow Y \\ T^* : Y^* &\rightarrow X^* \end{aligned}$$

alors  $(\text{Coker } T)^* \simeq \ker T^*$ , où  $\text{Coker } T = Y / \text{Im } T$

Preuve :

On définit

$$\begin{aligned} \psi: \ker T^* &\rightarrow (\text{Coker } T)^* = \mathcal{L}(Y/\text{Im } T, \mathbb{R}) \\ \rho &\mapsto (\lambda: y + TX \mapsto \rho(y)) \end{aligned}$$

L'application  $\lambda$  est bien définie car  $\forall x \in X, \rho(Tx) = T^*(\rho)(x) = 0$ .

L'application  $\psi$  est inversible et

$$\begin{aligned} \psi^{-1}: (\text{Coker } T)^* &\rightarrow \ker T^* \\ \lambda &\mapsto \rho \quad \text{où } \rho(y) := \lambda(y + TX). \end{aligned}$$

Notons que  $\rho \in \ker T^*$  car  $T^*(\rho)(x) = \rho(Tx) = \lambda(\bar{0}) = 0$ .  $\square$

Remarque : le fait que  $\text{Im } T$  soit fermée implique que  $\text{Coker } T$  est un espace de Banach. Le théorème suivant est le résultat central de cette première partie, dans le cas Time-symmetric : la structure de sous-variété de Hilbert de  $\mathcal{C}$ .

**Théorème 9:**

Soit  $\Phi_0 : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{L}^*$  l'opérateur de contrainte dans le cas Time-symmetric.

Pour chaque  $\varepsilon \in \mathcal{L}^*$ , pour tout  $\delta \in ] - (n + 1)/2, -1]$  avec  $n = 3$ , l'ensemble des solutions des équations de contrainte

$$\mathcal{C}(\varepsilon) := \{g \in \mathcal{F} : \Phi_0(g) = \varepsilon\}$$

est une sous-variété de la variété de Hilbert  $\mathcal{F}$ . En particulier, l'espace des solutions des équations de contrainte dans le vide  $\mathcal{C} = \mathcal{C}(0) = \Phi_0^{-1}(\{0\})$  a une structure de sous-variété de Hilbert.

Pour démontrer le Théorème 9, nous allons utiliser le théorème des fonctions implicites, pour lequel il faut montrer :

- $\ker D\Phi_0(g)$  possède un supplémentaire fermé.
- $D\Phi_0(g)$  est surjective.

Pour montrer que le noyau de  $D\Phi_0(g)$  possède un supplémentaire fermé, on montre qu'il est fermé.  $D\Phi_0(g)$  étant un opérateur borné, son noyau est fermé par continuité et puisque  $\mathcal{F}$  est un espace Hilbertien,  $\ker D\Phi_0(g)$  admet un supplémentaire fermé, que l'on peut prendre ici égal à son orthogonal.

Pour montrer que  $D\Phi_0(g)$  est surjective, il suffit de montrer que  $\text{Im } D\Phi_0(g)$  est fermée. En effet, puisque  $\mathcal{L}^*$  est un espace de Hilbert dont  $\overline{\text{Im } D\Phi_0(g)}$  est un sous-espace vectoriel fermé, le théorème du supplémentaire orthogonal d'un fermé dans un espace de Hilbert nous donne la décomposition en somme directe suivante

$$\mathcal{L}^* = \overline{\text{Im } D\Phi_0(g)} \oplus \left( \overline{\text{Im } D\Phi_0(g)} \right)^\perp.$$

En utilisant la relation suivante, découlant directement de (5.12)

$$\ker D\Phi_0(g)^* = \left( \overline{\text{Im } D\Phi_0(g)} \right)^\perp,$$

on obtient

$$\mathcal{L}^* = \overline{\text{Im } D\Phi_0(g)} \oplus \ker D\Phi_0(g)^*.$$

On a prouvé la trivialité de  $\ker D\Phi_0(g)^*$  dans le Théorème 13, ce qui entraîne

$$\overline{\text{Im } D\Phi_0(g)} = \mathcal{L}^*.$$

Pour montrer que  $\text{Im } D\Phi_0(g)$  est fermée, on considère des variations particulières  $h$  de  $g$ , de la forme  $h_{ij} = 2y g_{ij}$ , déterminées à l'aide du champ scalaire  $y$ . Cela nous conduit à définir un opérateur  $F$  comme suit

$$\begin{aligned} F(y) = D\Phi_0(g)h &= 2(1-n)\sqrt{g}\Delta y + n(R(g) - 2\Lambda)y\sqrt{g} - 2R(g)y\sqrt{g} \\ &= 2(n-1)\sqrt{g}\left[-\Delta y - \frac{4\Lambda}{2(n-1)}y\right] + (n-2)(R(g) - 2\Lambda)y\sqrt{g} \\ &= 2(n-1)\sqrt{g}\left[-\Delta y + ny\right] + (n-2)(R(g) - 2\Lambda)y\sqrt{g}. \end{aligned}$$

L'intérêt de ces variations particulières, inspirées par la méthode conforme, est de donner à l'opérateur  $F$  la forme d'un opérateur elliptique, dont  $\mathring{\Delta}$  est l'exemple typique, car nous avons ensuite des estimées et des propriétés sur les opérateurs elliptiques qui pourront nous permettre de conclure en montrant que  $\text{Im } F$  est fermée et Coker  $F$  est de dimension finie. Intéressons-nous pour cela aux opérateurs asymptotiques à  $\mathring{\Delta}$ .

**Définition 2:** Opérateur asymptotique à  $\mathring{\Delta}$

On dit qu'un opérateur  $P$  de la forme

$$Pu = a^{ij}(x)\mathring{\nabla}_{ij}^2 u + b^i(x)\partial_i u + c(x)u$$

est asymptotique à  $\mathring{\Delta}$  avec un taux de décroissance  $\tau$  s'il existe  $n < q < \infty$ ,  $\tau \leq 0$  et deux constantes  $C_1, \lambda$  strictement positives telles que

$$\begin{aligned} \lambda|\xi|_g^2 &\leq a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \leq \lambda^{-1}|\xi|_g^2, \forall x \in \mathcal{M}, \xi \in T\mathcal{M}. \\ \|a^{ij} - \mathring{g}^{ij}\|_{1,q,\tau} + \|b^i\|_{q,\tau} + \|c\|_{q/2,\tau} &\leq C_1. \end{aligned}$$

La proposition suivante affirme que le Laplacien  $\Delta$  défini pour la métrique  $g$  est bien asymptotique à  $\mathring{\Delta}$  :

**Proposition 13:**

Soit  $g \in \mathcal{G}^+$  avec  $\delta \leq 0$ . Alors l'opérateur  $\Delta$  est asymptotique à  $\mathring{\Delta}$  avec un taux de décroissance  $\delta$ .

Preuve :

En effet

$$\begin{aligned} \Delta &= g^{ij}\nabla_{ij}^2 = g^{ij}\mathring{\nabla}_{ij}^2 + g^{ij}(\nabla_i - \mathring{\nabla}_i)\mathring{\nabla}_j \\ &= g^{ij}\mathring{\nabla}_{ij}^2 - g^{ij}A_{ij}^k \mathring{\nabla}_k. \end{aligned} \tag{5.67}$$

Les métriques  $g$  et  $\mathring{g}$  étant équivalentes, l'équation (5.5) donne directement

$$\lambda|\xi|_g^2 \leq g^{ij}(x)\xi_i\xi_j \leq \lambda^{-1}|\xi|_g^2, \forall x \in \mathcal{M}, \xi \in T\mathcal{M}.$$

Si on pose

$$b^k = g^{ij} A_i^k,$$

alors  $b \in W_\delta^{1,2}$  d'après (5.7). De plus, compte tenu de l'inégalité de Sobolev à poids, il existe une constante  $C_1 > 0$  telle que

$$\|g^{ij} - \mathring{g}^{ij}\|_{1,6,\delta} + \|b^k\|_{6,\delta} \leq c (\|g^{ij} - \mathring{g}^{ij}\|_{2,2,\delta} + \|b^k\|_{1,2,\delta}) \leq C_1. \quad \square$$

Nous justifierons par la suite la terminologie "asymptotique" utilisée dans cette définition. On s'intéresse à l'opérateur  $\mathcal{A} = -\Delta + n$ , agissant sur les fonctions et présent dans l'expression de  $F$ , puisque

$$F(y) = 2(n-1)\sqrt{g}\mathcal{A}y + (n-2)(R(g) - 2\Lambda)y\sqrt{g}. \quad (5.68)$$

L'estimée (5.69) obtenue au Théorème 10 pour l'opérateur  $\mathcal{A}$  sera cruciale pour montrer que l'image de  $F$  est fermée au Théorème 11. Nous aurons besoin de la proposition suivante :

**Proposition 14:**

Soit  $g \in \mathcal{G}^+$  avec  $\delta \leq 0$ . Soit l'opérateur  $\mathcal{A} = -\Delta + n$ , soit  $s \in \mathbb{R}$ . Il existe une constante  $C = C(n, p, q, s, \delta, C_1, \lambda)$  telle que si  $u \in L_s^2$  et  $\mathcal{A}u \in L_s^2$ , alors  $u \in W_s^{2,2}$  et

$$\|u\|_{2,2,s} \leq C (\|\mathcal{A}u\|_{2,s} + \|u\|_{2,s}).$$

Preuve :

Par régularité elliptique,  $u \in W_{loc}^{2,2}$  et l'estimée découle d'estimations intérieures (voir [33] par exemple) et de scaling.  $\square$

**Théorème 10:**

Soit  $g \in \mathcal{G}^+$  avec  $\delta \leq 0$  de sorte que  $\Delta$  est asymptotique à  $\mathring{\Delta}$ .

Soit l'opérateur  $\mathcal{A} = -\Delta + n$ , avec  $n = 3$ .

Soit  $|s| < (n+1)/2$ . Alors  $\mathcal{A} : W_s^{2,2}(\mathcal{M}) \rightarrow L_s^2(\mathcal{M})$  est borné.

De plus, il vérifie l'estimée elliptique

$$\|u\|_{2,2,s} \leq C (\|\mathcal{A}u\|_{2,s} + \|u\|_{2,s;\Omega_R}). \quad (5.69)$$

En particulier,  $\mathcal{A}$  est un opérateur semi-Fredholm, *i.e.*  $\mathcal{A}$  a un noyau de dimension finie et son image est fermée.

Preuve :

On définit la norme d'opérateur suivante :

$$\|\Delta - \mathring{\Delta}\|_{op} = \sup_{\mathcal{M}} \{ \|(\Delta - \mathring{\Delta})u\|_{2,s} : u \in W_s^{2,2}, \|u\|_{2,2,s} = 1 \}$$

et  $\|\bullet\|_{op,R}$  désigne la même norme restreinte aux fonctions à support dans  $E_R = \mathcal{M} \setminus \Omega_R$ . Si  $\text{supp}(u) \subset E_R$ , alors d'après l'expression (5.67) de  $\Delta$ ,

$$\begin{aligned} \|(\Delta - \mathring{\Delta})u\|_{2,s} &\leq \|(g^{ij} - \mathring{g}^{ij})\mathring{\nabla}_{ij}^2 u\|_{2,s} + \|b^k \mathring{\nabla}_k u\|_{2,s} \\ &\leq \sup_{E_R} \{g^{ij} - \mathring{g}^{ij}\} \|\mathring{\nabla}_{ij}^2 u\|_{2,s} + \|b^k \mathring{\nabla}_k u\|_{2,s} \\ &\leq c \|g - \mathring{g}\|_{\infty,0;E_R} \|\mathring{\nabla}^2 u\|_{2,s} + \|b \mathring{\nabla} u\|_{2,s}. \end{aligned}$$

En utilisant (4.15), l'inégalité de Sobolev et l'inclusion de Sobolev ( $\delta \leq 0$ ),

$$\begin{aligned} \|(\Delta - \mathring{\Delta})u\|_{2,s} &\leq c \|g - \mathring{g}\|_{\infty,\delta;E_R} \|\mathring{\nabla}^2 u\|_{2,s} + \|b\|_{6,\delta;E_R} \|\mathring{\nabla} u\|_{3,s} \\ &\leq c (\|g - \mathring{g}\|_{2,2,\delta;E_R} + \|b\|_{1,2,\delta;E_R}) \|u\|_{2,2,s}. \end{aligned}$$

Rappelons que  $\|g - \mathring{g}\|_{2,2,\delta} + \|b\|_{1,2,\delta}$  est borné car  $g \in \mathcal{G}^+$ .

Par conséquent,

$$\|\Delta - \mathring{\Delta}\|_{op,R} = o(1) \text{ quand } R \rightarrow +\infty. \quad (5.70)$$

Cela justifie *a posteriori* la terminologie employée dans la définition 2.

Prenons  $\chi_R$  une fonction de troncature comme dans la Définition 1

$$\chi_R = \begin{cases} 1 & \text{sur } \Omega_{R/2} \\ 0 & \text{sur } \mathcal{M} \setminus \Omega_R \end{cases}$$

On peut alors décomposer  $u = u_0 + u_\infty$ , avec  $u_\infty = (1 - \chi_R)u$ .

Soit l'opérateur  $\mathring{\mathcal{A}} = -\mathring{\Delta} + n$ . En utilisant le Corollaire 3.13 de [2] avec  $\lambda = n$  pour l'opérateur  $\mathring{\mathcal{A}}$ , on obtient que  $\forall |s| < (n+1)/2$ ,  $\mathring{\mathcal{A}} : W_s^{2,2}(\mathcal{M}) \rightarrow L_s^2(\mathcal{M})$  est un opérateur Fredholm et un isomorphisme. Il existe donc une constante positive  $C = C(n, s)$  telle que

$$\|u\|_{2,2,s} \leq C \|\mathring{\mathcal{A}}u\|_{2,s}. \quad (5.71)$$

En appliquant (5.71) à  $u_\infty$ , il vient

$$\begin{aligned} \|u_\infty\|_{2,2,s} &\leq C \|\mathring{\mathcal{A}}u_\infty\|_{2,s} \\ &\leq C \|\mathcal{A}u_\infty\|_{2,s} + \|\Delta - \mathring{\Delta}\|_{op,R} \|u_\infty\|_{2,2,s}. \end{aligned} \quad (5.72)$$

Or  $\mathcal{A}u_\infty = \mathcal{A}u - \mathcal{A}u_0 = \mathcal{A}u - \chi_R \mathcal{A}u + \chi_R \mathcal{A}u - \mathcal{A}u_0$ .

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \|\mathcal{A}u_\infty\|_{2,s} &\leq \|\mathcal{A}u\|_{2,s} + \|\chi_R \mathcal{A}u\|_{2,s} + \|\chi_R \mathcal{A}u - \mathcal{A}u_0\|_{2,s} \\ &\leq C \|\mathcal{A}u\|_{2,s} + \|\chi_R \mathcal{A}u - \mathcal{A}u_0\|_{2,s;\Omega_R}. \end{aligned}$$

Or d'après l'expression (5.67) de  $\Delta$ ,

$$\begin{aligned} \chi_R \mathcal{A}u - \mathcal{A}u_0 &= -u \mathcal{A} \chi_R + n \chi_R u + 2g^{ij} \partial_i u \partial_j \chi_R \\ &= 2g^{ij} \partial_i u \partial_j \chi_R + (g^{ij} \mathring{\nabla}_{ij}^2 \chi_R + b^i \partial_i \chi_R) u, \end{aligned}$$

ce qui entraîne

$$\|\chi_R \mathcal{A}u - \mathcal{A}u_0\|_{2,s;\Omega_R} \leq c \|u\|_{1,2,s;\Omega_R}.$$

Finalement

$$\|\mathcal{A}u_\infty\|_{2,s} \leq C (\|\mathcal{A}u\|_{2,s} + \|u\|_{1,2,s;\Omega_R}).$$

En remplaçant dans (5.72) et compte tenu de (5.70), on obtient pour  $R$  suffisamment grand

$$\|u_\infty\|_{2,\delta} \leq \|u_\infty\|_{2,2,s} \leq C (\|\mathcal{A}u\|_{2,s} + \|u\|_{1,2,s;\Omega_R}). \quad (5.73)$$

En utilisant (5.73) et le fait que sur  $\Omega_R$ ,  $|u_0|_{\dot{g}} \leq |u|_{\dot{g}}$

$$\begin{aligned} \|u\|_{2,s} &\leq \|u_\infty\|_{2,s} + \|u_0\|_{2,s} \\ &\leq C (\|\mathcal{A}u\|_{2,s} + \|u\|_{1,2,s;\Omega_R}) + \|u\|_{2,s;\Omega_R}. \end{aligned}$$

Grâce à l'inégalité de Ehrling (4.13),

$$\begin{aligned} \|u\|_{2,s} &\leq C (\|\mathcal{A}u\|_{2,s} + \|u\|_{2,s;\Omega_R}) + \varepsilon \|u\|_{2,2,s;\Omega_R} \\ &\leq C (\|\mathcal{A}u\|_{2,s} + \|u\|_{2,s;\Omega_R}) + \varepsilon \|u\|_{2,2,s}. \end{aligned}$$

et on conclut avec la Proposition 14.  $\square$

Le théorème suivant montre que l'image de  $F$  est fermée, ce dont nous aurons besoin pour appliquer le Lemme 14 à  $F$  plus tard.

**Théorème 11:**

Soit  $\delta \in ] - (n+1)/2, 0]$  avec  $n = 3$ . L'opérateur  $F : W_\delta^{2,2}(\mathcal{M}) \rightarrow L_\delta^2(\Lambda^n T^* \mathcal{M}) := \mathcal{L}^*$  est borné. De plus, il vérifie l'estimée elliptique

$$\|y\|_{2,2,\delta} \leq C (\|F(y)\|_{2,\delta} + \|y\|_{2,0} + \|y\|_{2,\delta;\Omega_R}). \quad (5.74)$$

En particulier,  $F$  est un opérateur semi-Fredholm, *i.e.*  $F$  a un noyau de dimension finie et son image est fermée.

Preuve :

En partant de la définition de  $F$ , l'inégalité triangulaire, (5.10) et l'inclusion de Sobolev ( $\delta \leq 0$ ) donnent directement

$$\|F(y)\|_{2,\delta} \leq C \|y\|_{2,2,\delta},$$

où  $C$  est une constante dépendant de  $\dot{g}$  et  $\|g\|_{\mathcal{F}}$ .

Ainsi  $F$  est un opérateur borné (continu). D'autre part, d'après l'estimée (5.69) du Théorème 10 et en se servant de l'inégalité de Hölder (4.15), (4.19) et l'inégalité de Ehrling (4.13),

$$\begin{aligned} \|y\|_{2,2,\delta} &\leq C (\|\mathcal{A}y\|_{2,\delta} + \|y\|_{2,\delta;\Omega_R}) \\ &\leq C (\|F(y)\|_{2,\delta} + \|(R(g) - 2\Lambda)y\|_{2,\delta} + \|y\|_{2,\delta;\Omega_R}) \\ &\leq C (\|F(y)\|_{2,\delta} + \|R(g) - 2\Lambda\|_{2,\delta} \|y\|_{\infty,0} + \|y\|_{2,\delta;\Omega_R}) \\ &\leq C (\|F(y)\|_{2,\delta} + C [\varepsilon \|y\|_{2,2,0} + c\varepsilon^{-3} \|y\|_{1,2,0}] + \|y\|_{2,\delta;\Omega_R}) \\ &\leq C (\|F(y)\|_{2,\delta} + C [\varepsilon \|y\|_{2,2,0} + c \|y\|_{2,0}] + \|y\|_{2,\delta;\Omega_R}). \end{aligned}$$

Finalement, en utilisant l'inclusion de Sobolev avec  $\delta \leq 0$ , l'opérateur  $F$  vérifie (5.74). Pour tout  $\delta \in ] - (n+1)/2, 0]$ , l'estimée (5.74) vérifiée par  $F$  est analogue à celle du Théorème 6 et par une démonstration similaire, on montre que  $F$  est semi-Fredholm, *i.e.*  $F$  a un noyau de dimension finie et son image est fermée.  $\square$

Notons que  $F$  et son adjoint  $F^*$  ont la même structure

$$F^* : L_{-\delta}^2(\mathcal{M}) \rightarrow W_{-\delta}^{-2,2}(\Lambda^n T^* \mathcal{M}).$$

Soit  $\widetilde{F}^*$  la restriction de  $F^*$  définie comme suit :

$$\widetilde{F}^* : W_{-\delta}^{2,2}(\mathcal{M}) \rightarrow L_{-\delta}^2(\Lambda^n T^* \mathcal{M}) := \mathcal{L}.$$

On peut appliquer le Théorème 11 à  $\widetilde{F}^*$  pour montrer que  $\ker F^*$  est de dimension finie.

**Théorème 12:**

Soit  $\delta \in ]-(n+1)/2, 0]$  avec  $n = 3$ . L'opérateur  $\widetilde{F}^* : W_{-\delta}^{2,2}(\mathcal{M}) \rightarrow \mathcal{L}$  est borné. De plus, il vérifie l'estimée elliptique

$$\|y\|_{2,2,-\delta} \leq C \left( \|\widetilde{F}^*(y)\|_{2,-\delta} + \|y\|_{2,-2\delta} + \|y\|_{2,-\delta;\Omega_R} \right). \quad (5.75)$$

En particulier,  $\widetilde{F}^*$  est un opérateur semi-Fredholm, *i.e.*  $\widetilde{F}^*$  a un noyau de dimension finie et son image est fermée.

Preuve :

En partant de la définition de  $\widetilde{F}^*$ , l'inégalité triangulaire, (5.10) et l'inclusion de Sobolev ( $\delta \leq 0$ ) donnent directement

$$\|\widetilde{F}^*(y)\|_{2,-\delta} \leq C \|y\|_{2,2,-\delta},$$

D'autre part, d'après (5.69) et en se servant de l'inégalité de Hölder (4.15), (4.19) et l'inégalité d'interpolation,

$$\begin{aligned} \|y\|_{2,2,-\delta} &\leq C (\|\mathcal{A}y\|_{2,-\delta} + \|y\|_{2,-\delta;\Omega_R}) \\ &\leq C \left( \|\widetilde{F}^*(y)\|_{2,-\delta} + \|(R(g) - 2\Lambda)y\|_{2,-\delta} + \|y\|_{2,-\delta;\Omega_R} \right) \\ &\leq C \left( \|\widetilde{F}^*(y)\|_{2,-\delta} + \|R(g) - 2\Lambda\|_{2,\delta} \|y\|_{\infty,-2\delta} + \|y\|_{2,-\delta;\Omega_R} \right) \\ &\leq C \left( \|\widetilde{F}^*(y)\|_{2,-\delta} + C[\varepsilon \|y\|_{2,2,-2\delta} + c\varepsilon^{-3} \|y\|_{1,2,-2\delta}] + \|y\|_{2,-\delta;\Omega_R} \right) \\ &\leq C \left( \|\widetilde{F}^*(y)\|_{2,-\delta} + C[\varepsilon \|y\|_{2,2,-2\delta} + c \|y\|_{2,-2\delta}] + \|y\|_{2,-\delta;\Omega_R} \right). \end{aligned}$$

Finalement, en utilisant l'inclusion de Sobolev avec  $\delta \leq 0$ , l'opérateur  $\widetilde{F}^*$  vérifie (5.75) et pour tout  $\delta \in ]-(n+1)/2, 0]$ ,  $\widetilde{F}^*$  est un opérateur semi-Fredholm.  $\square$

Par régularité elliptique,  $\ker F^* = \ker \widetilde{F}^*$  est aussi de dimension finie.

Nous avons maintenant tous les outils pour démontrer le Théorème 9. Puisque l'image de  $F$  est fermée d'après le Théorème 11, on peut appliquer le Lemme 14 à  $F$ , obtenant ainsi  $(\text{Coker } F)^* \simeq \ker F^*$  et par suite du Théorème 12,  $(\text{Coker } F)^*$  est de dimension finie. En dimension finie, un espace vectoriel et son espace dual sont isomorphes et  $\text{Coker } F$  est donc de dimension finie. L'opérateur  $F$  satisfait

$$\text{Im } F \subset \text{Im } D\Phi_0(g) \subset \mathcal{L}^*.$$

Soit  $\pi$  la projection canonique :

$$\pi : \mathcal{L}^* \rightarrow \text{Coker } F$$

$\pi(\text{Im } D\Phi_0(g))$  est fermé comme sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie (Coker  $F$ ).  $\text{Im } (D\Phi_0(g))$  est fermée comme image réciproque d'un fermé par une application continue. Ceci conclut la preuve de la structure de variété de  $\mathcal{C}$  en tant que sous-variété lisse de  $\mathcal{F}$ . En fait, toutes les lignes de niveaux de  $\Phi_0(g)$  sont des sous-variétés lisses de  $F$ .  $\square$





# Chapitre 6

## Opérateur de contrainte : le cas général

Soit  $\mathcal{M}$  une variété  $n$ -dimensionnelle connexe orientée non compacte. On considère  $\mathcal{M}$  en tant qu'hypersurface de genre espace d'une variété Lorentzienne  $(n+1)$ -dimensionnelle  $(\mathcal{N}, \gamma)$  appelée espace-temps, de signature  $(-, +, \dots, +)$  et de connexion  $D$ . On note  $K$  la seconde forme fondamentale de  $\mathcal{M}$  dans  $\mathcal{N}$  définie par

$$K(X, Y) = \gamma(D_X \vec{n}, Y), \quad (6.1)$$

où  $X, Y \in T\mathcal{M}$  et  $\vec{n}$  est le vecteur unitaire normal à  $\mathcal{M}$  dans  $\mathcal{N}$  dirigé vers le futur.

Il est pratique de considérer le moment conjugué  $\pi$  comme reparamétrisation de  $K$

$$\pi^{ij} = \tilde{\pi}^{ij} \sqrt{g} \quad \text{avec} \quad \tilde{\pi}^{ij} = K^{ij} - \text{tr}_g K g^{ij}. \quad (6.2)$$

Remarquons que  $\tilde{\pi}$  est une section du fibré  $S^2 T\mathcal{M}$  tandis que  $\pi$  est une section du fibré  $\tilde{S} = S^2 T\mathcal{M} \otimes \Lambda^n T^* \mathcal{M}$ . Nous considérons une métrique modèle  $\mathring{g}$  asymptotiquement hyperbolique, lisse et polyhomogène sur  $\mathcal{M}$ . On demande à la métrique  $\mathring{g}$  de satisfaire les conditions d'intégrabilité suivantes

$$\text{Riem } \mathring{g}_{ijkl} - \mathring{g}_{il} \mathring{g}_{jk} + \mathring{g}_{ik} \mathring{g}_{jl} \in L_\delta^2. \quad (6.3)$$

En particulier,

$$\text{Ric } \mathring{g}_{jl} + (n-1) \mathring{g}_{jl} \in L_\delta^2. \quad (6.4)$$

On définit la mesure de volume relative à  $\mathring{g}$  à l'aide du tenseur de Levi-Civita  $T_{LC}$

$$d\mu(\mathring{g}) = T_{LC}.$$

Dans une base directe, en dimension 3, les composantes du tenseur de Levi-Civita sont donnée par

$$T_{abc} = \sqrt{\det(\mathring{g})} \tilde{\varepsilon}_{abc},$$

où  $\tilde{\varepsilon}$  est le symbole de Levi-Civita d'ordre 3 (ou pseudo-tenseur complètement antisymétrique)

**Lemme 15:**

La dérivée covariante du tenseur de Levi-Civita est nulle

Preuve :

$$\begin{aligned} \mathring{\nabla}_i T_{abc} &= \partial_i T_{abc} - \mathring{\Gamma}_{ai}^k T_{kbc} - \mathring{\Gamma}_{bi}^k T_{ack} - \mathring{\Gamma}_{ci}^k T_{abk} \\ &= \tilde{\varepsilon}_{abc} \partial_i \sqrt{\det(\mathring{g})} - \sqrt{\det(\mathring{g})} [\mathring{\Gamma}_{ai}^k \tilde{\varepsilon}_{kbc} - \mathring{\Gamma}_{bi}^k \tilde{\varepsilon}_{ack} - \mathring{\Gamma}_{ci}^k \tilde{\varepsilon}_{abk}] \\ &= \tilde{\varepsilon}_{abc} \partial_i \sqrt{\det(\mathring{g})} - \sqrt{\det(\mathring{g})} \mathring{\Gamma}_{ki}^k \tilde{\varepsilon}_{abc} \\ &= \tilde{\varepsilon}_{abc} [\partial_i \sqrt{\det(\mathring{g})} - \mathring{\Gamma}_{ki}^k \sqrt{\det(\mathring{g})}] \\ &= 0, \end{aligned}$$

en utilisant l'expression de la contraction du symbole de Christoffel

$$\mathring{\Gamma}_{k i}^k = \frac{\partial_i \sqrt{\det(\mathring{g})}}{\sqrt{\det(\mathring{g})}} \quad \square$$

Pour une métrique Riemannienne  $g$  sur  $\mathcal{M}$  suffisamment régulière, on définit l'opérateur de contraintes  $\Phi = (\Phi_0, \Phi_i) = \Phi(g, \pi)$  comme suit :

$$\begin{aligned} \Phi_0(g, \pi) &:= (R(g) - 2\Lambda - |K|_g^2 + (\text{tr}_g K)^2) \sqrt{g} \\ &= (R(g) - 2\Lambda) \sqrt{g} - (|\pi|_g^2 - \frac{1}{n-1} (\text{tr}_g \pi)^2) / \sqrt{g}. \end{aligned} \quad (6.5)$$

$$\begin{aligned} \Phi_i(g, \pi) &:= 2(\nabla^j K_{ij} - \nabla_i (\text{tr}_g K)) \sqrt{g} \\ &= 2g_{ij} \nabla_k \pi^{jk} = 2g_{ij} \nabla_k \tilde{\pi}^{jk} \sqrt{g}. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Une conséquence du Lemme 15 dont nous nous sommes servi dans (6.6) est que

$$\nabla(\sqrt{g}) = 0. \quad (6.7)$$

Si l'espace-temps satisfait les équations d'Einstein, la normalisation choisie assure que l'opérateur de contrainte et le tenseur énergie-impulsion sont reliés par la relation

$$\Phi_\alpha = 16\pi G T_{\tilde{n}\alpha} \sqrt{g},$$

où  $G$  est la constante de gravitation de Newton.

L'espace hyperbolique peut être vu au choix comme une donnée initiale de l'espace de Minkowski, anti de Sitter (AdS) ou de Sitter (dS) suivant la seconde forme fondamentale choisie, puisque dans les trois cas la métrique induite est la métrique hyperbolique. En fait, ces trois cas correspondent respectivement à une constante cosmologique  $\Lambda$  nulle, négative ou positive (seul le signe de  $\Lambda$  importe). Afin de traiter tous ces cas à la fois, on donne ici une formule générale en fonction d'une paramètre réel  $\tau$ , pour la seconde forme fondamentale

$$\mathring{K} = \tau \mathring{g}, \quad (6.8)$$

et pour la constante cosmologique  $\Lambda$ , normalisée en dimension  $n$  par

$$2\Lambda = n(n-1)(\tau^2 - 1). \quad (6.9)$$

Notons que le moment conjugué correspondant  $\mathring{\pi}$  est alors

$$\mathring{\pi}^{ij} = (\mathring{K}^{ij} - \text{tr}_{\mathring{g}} \mathring{K} \mathring{g}^{ij}) d\mu(\mathring{g}) = \tau(1-n) \mathring{g}^{ij} d\mu(\mathring{g}). \quad (6.10)$$

Remarque :  $\mathring{\nabla} \mathring{\pi} = \mathring{\nabla} \mathring{K} = 0$ .

On étudie alors l'opérateur de contrainte  $\Phi$  pour des données initiales de la forme  $(g, K) = (\mathring{g} + h, \mathring{K} + p)$ . Les données initiales  $(g, K)$  sont *faiblement* asymptotiques à  $(\mathring{g}, \mathring{K})$  dans le sens où  $(h, p) \in W_\delta^{2,2} \times W_\delta^{1,2}$  avec  $\delta \leq 0$ .

La formule (6.9) pour  $\Lambda$  fait en sorte que les équations de contrainte (6.5) et (6.6) soient vérifiées par le modèle hyperbolique, c'est à dire  $\Phi(\mathring{g}, \mathring{K}) = 0$ , et donc à l'infini par les données initiales asymptotiquement hyperboliques. Le signe de  $\Lambda$  est donné par  $\tau$  et les espaces de Minkowski, anti de Sitter et de Sitter correspondent respectivement

à  $\mathring{K} = \tau \mathring{g}$  avec  $\tau^2 = 1, 0$  et  $2$ . En prenant la trace sur  $\mathring{g}$  de (6.4) et compte tenu de (6.9), on obtient la condition d'intégrabilité

$$R(\mathring{g}) - 2\Lambda + n(n-1)\tau^2 \in L_\delta^2. \quad (6.11)$$

On note  $\mathcal{S} := S^2T^*\mathcal{M}$  le fibré des formes bilinéaires symétriques sur  $\mathcal{M}$  tandis que  $\tilde{\mathcal{S}} := S^2T\mathcal{M} \otimes \Lambda^n T^*\mathcal{M}$  désigne le fibré des densités ( $n$ -formes) sur  $\mathcal{M}$  à valeurs dans les 2-tenseurs symétriques.  $\mathcal{T} := T\mathcal{N}|_{\mathcal{M}}$  est le fibré tangent de l'espace-temps  $\mathcal{N}$  restreint à  $\mathcal{M}$ . On s'intéressera par la suite particulièrement aux espaces suivants :

$$\begin{aligned} \mathcal{G} &:= W_\delta^{2,2}(\mathcal{S}). \\ \mathcal{K} &:= W_\delta^{1,2}(\tilde{\mathcal{S}}). \\ \mathring{\mathcal{K}} &:= \{\pi : \pi - \mathring{\pi} \in \mathcal{K}\}. \\ \mathcal{G}^+ &:= \{g : g - \mathring{g} \in \mathcal{G}, g > 0\}. \\ \mathcal{G}_\lambda^+ &:= \{g \in \mathcal{G}^+ : \lambda \mathring{g} < g < \lambda^{-1} \mathring{g}\}, \quad 0 < \lambda < 1. \\ \mathcal{L}^* &:= L_\delta^2(\mathcal{T}^* \otimes \Lambda^n T^*\mathcal{M}) \text{ est l'espace dual de } \mathcal{L} := L_{-\delta}^2(\mathcal{T}). \end{aligned}$$

$\mathcal{F} = \mathcal{G}^+ \times \mathring{\mathcal{K}}$  sera l'espace des phase de l'opérateur de contraintes  $\Phi$ . On utilisera aussi bien  $(g, \pi)$  que  $(g, K)$  pour désigner les coordonnées sur  $\mathcal{F}$ .

On montre dans la proposition suivante que  $\Phi$  est une application bien définie entre les variétés de Hilbert  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{L}^*$ .

**Proposition 15:**

Soit  $(g, \pi) \in \mathcal{G}_\lambda^+ \times \mathring{\mathcal{K}}$ , avec  $0 < \lambda < 1$ . Alors en dimension  $n = 3$ , pour tout  $\delta \leq 0$ , il existe une constante  $c$  dépendant de  $\lambda, \mathring{g}$  et  $\delta$  telle que

$$\|\Phi_0(g, \pi)\|_{2,\delta} \leq c(1 + \|g - \mathring{g}\|_{2,2,\delta}^2 + \|\pi - \mathring{\pi}\|_{1,2,\delta}^2) \quad (6.12)$$

$$\|\Phi_i(g, \pi)\|_{2,\delta} \leq c(\|\mathring{\nabla}(\pi - \mathring{\pi})\|_{2,\delta} + \|\mathring{\nabla}g\|_{1,2,\delta}(1 + \|\pi - \mathring{\pi}\|_{1,2,\delta})) \quad (6.13)$$

Preuve :

D'après l'expression de  $R(g)$  sous la forme (5.9), on peut écrire

$$\begin{aligned} \Phi_0(g, \pi) &= (R(g) - 2\Lambda)\sqrt{g} - (|\pi|_g^2 - \frac{1}{n-1}(\text{tr}_g \pi)^2)/\sqrt{g} \\ &= (R(g) - \mathbf{R}(\mathring{g}) + \mathbf{R}(\mathring{g}) - 2\Lambda + \mathbf{n}(\mathbf{n}-1)\tau^2 - \mathbf{n}(\mathbf{n}-1)\tau^2)\sqrt{g} \\ &\quad - (|\pi - \mathring{\pi}|_g^2 - |\mathring{\pi}|_g^2 + 2(\pi - \mathring{\pi})_{ij}\mathring{\pi}^{ij} + 2|\mathring{\pi}|_g^2)/\sqrt{g} \\ &\quad + \frac{1}{n-1}[(\text{tr}_g(\pi - \mathring{\pi}))^2 + (\text{tr}_g \mathring{\pi})^2 + 2\text{tr}_g(\pi - \mathring{\pi})\text{tr}_g \mathring{\pi}]/\sqrt{g} \\ &= [R(g) - \mathbf{R}(\mathring{g}) + \mathbf{R}(\mathring{g}) - 2\Lambda + \mathbf{n}(\mathbf{n}-1)\tau^2 - \mathbf{n}(\mathbf{n}-1)\tau^2]\sqrt{g} \\ &\quad - [|\pi - \mathring{\pi}|_g^2 + 2(\pi - \mathring{\pi})_{ij}\mathring{\pi}^{ij} + |\mathring{\pi}|_g^2 - \frac{1}{n-1}(\text{tr}_g \mathring{\pi})^2]/\sqrt{g} \\ &\quad + \frac{1}{n-1}[(\text{tr}_g(\pi - \mathring{\pi}))^2 + ((g - \mathring{g})_{ij}\mathring{\pi}^{ij})^2 + 2(g - \mathring{g})_{ij}\mathring{\pi}^{ij}\text{tr}_g \mathring{\pi}]/\sqrt{g} \\ &\quad + \frac{2}{n-1}\text{tr}_g(\pi - \mathring{\pi})\text{tr}_g \mathring{\pi}/\sqrt{g} \\ &= [R(g) - R(\mathring{g}) + R(\mathring{g}) - 2\Lambda + n(n-1)\tau^2]\sqrt{g} + \frac{2}{n-1}\text{tr}_g(\pi - \mathring{\pi})\text{tr}_g \mathring{\pi}/\sqrt{g} \\ &\quad + \frac{1}{n-1}[(\text{tr}_g(\pi - \mathring{\pi}))^2 + ((g - \mathring{g})_{ij}\mathring{\pi}^{ij})^2 + 2(g - \mathring{g})_{ij}\mathring{\pi}^{ij}\text{tr}_g \mathring{\pi}]/\sqrt{g} \\ &\quad - [|\pi - \mathring{\pi}|_g^2 + 2(\pi - \mathring{\pi})_{ij}\mathring{\pi}^{ij}]/\sqrt{g}. \end{aligned}$$

Puisque  $g \in \mathcal{G}_\lambda^+$ , on peut se servir de (5.5) et en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et la relation  $2ab \leq a^2 + b^2$ ,

$$|\Phi_0(g, \pi)|_{\dot{g}} \leq [|R(g) - R(\dot{g})|_{\dot{g}} + |R(\dot{g}) - 2\Lambda + n(n-1)\tau^2|_{\dot{g}}]\sqrt{g} \\ + c[1 + |\pi - \dot{\pi}|_g^2 + |g - \dot{g}|_g^2]/\sqrt{g}.$$

Grâce à (5.42), (6.11) et (4.18) il vient

$$\|\Phi_0(g, \pi)\|_{2,\delta} \leq c(1 + \|(\pi - \dot{\pi})^2\|_{2,\delta} + \|(g - \dot{g})^2\|_{2,\delta}) \\ \leq c(1 + \|\pi - \dot{\pi}\|_{1,2,\delta}^2 + \|g - \dot{g}\|_{2,2,\delta}^2).$$

Par conséquent,  $\Phi_0(g, \pi) \in \mathcal{L}^*$ .

Pour  $\Phi_i(g, \pi)$ , on utilise (5.6) et

$$\Phi_i(g, \pi) = 2g_{ij}(\overset{\circ}{\nabla}_k(\pi - \dot{\pi})^{jk} + A_{kl}^j(\pi - \dot{\pi})^{kl}) + A_{kl}^j \dot{\pi}^{kl}.$$

D'après (5.7),  $\Phi_i(g, \pi)$  est donc de la forme

$$\Phi_i(g, \pi) \simeq g(\overset{\circ}{\nabla}(\pi - \dot{\pi}) + g^{-1}\overset{\circ}{\nabla}g(\pi - \dot{\pi}) + g^{-1}\overset{\circ}{\nabla}g\dot{\pi}). \quad (6.14)$$

$$\|\Phi_i(g, \pi)\|_{2,\delta} \leq c(\|\overset{\circ}{\nabla}(\pi - \dot{\pi})\|_{2,\delta} + \|\overset{\circ}{\nabla}g(\pi - \dot{\pi})\|_{2,\delta} + \|\overset{\circ}{\nabla}g\dot{\pi}\|_{2,\delta}) \\ \leq c(\|\overset{\circ}{\nabla}(\pi - \dot{\pi})\|_{2,\delta} + \|\overset{\circ}{\nabla}g\|_{1,2,\delta}\|\pi - \dot{\pi}\|_{1,2,\delta} + \|\overset{\circ}{\nabla}g\|_{2,\delta}\|\dot{\pi}\|_{\infty,0}) \\ \leq c(\|\overset{\circ}{\nabla}(\pi - \dot{\pi})\|_{2,\delta} + \|\overset{\circ}{\nabla}g\|_{1,2,\delta}(1 + \|\pi - \dot{\pi}\|_{1,2,\delta})). \quad \square$$

La proposition suivante nous indique que la première hypothèse pour pouvoir appliquer le Théorème 1 est vérifiée :

**Proposition 16:**

Soit  $(g, \pi) \in \mathcal{F}$ . Alors en dimension  $n = 3$ , pour tout  $\delta \leq 0$ ,  $\Phi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{L}^*$  est une application lisse entre variétés de Hilbert.

Preuve :

D'après la Proposition 15,  $\|\Phi(g, \pi)\|_{\mathcal{L}^*} \leq c(1 + \|g - \dot{g}\|_{\mathcal{G}}^2 + \|\pi - \dot{\pi}\|_{\mathcal{K}}^2)$ , *i.e.*  $\Phi$  est localement bornée sur  $\mathcal{F}$ . La structure polynomiale de l'opérateur de contrainte nous permet de montrer que  $\Phi$  est lisse, *i.e.* dérivable indéfiniment au sens de Fréchet. D'après l'expression (5.9) de la courbure scalaire et au vu de (6.14), on remarque que  $\Phi$  peut être exprimée comme une fonction polynomiale

$$\Phi(g, \pi) = F(g, g^{-1}, \sqrt{g}, 1/\sqrt{g}, \overset{\circ}{\nabla}g, \overset{\circ}{\nabla}^2g, \pi, \overset{\circ}{\nabla}\pi),$$

où  $F = F(a_1, \dots, a_8)$  est une fonction polynomiale quadratique en  $a_5$  et  $a_7$  et linéaire en les paramètres restants. L'application  $g \mapsto (g, g^{-1}, \sqrt{g}, 1/\sqrt{g})$  est analytique sur l'espace des matrices définies positives et les applications  $g \mapsto \overset{\circ}{\nabla}g$ ,  $g \mapsto \overset{\circ}{\nabla}^2g$  et  $\pi \mapsto \overset{\circ}{\nabla}\pi$  sont linéaires bornées donc lisses de  $\mathcal{F}$  vers  $\mathcal{L}^*$ , qui sont des variétés de Hilbert. Un résultat de Hille [35] sur les fonctionnelles polynomiales localement bornées montre que  $\Phi$  admet des dérivées au sens de Fréchet, continues et de tout ordre.  $\square$

Soit  $\mathcal{C} = \{(g, \pi) \in \mathcal{G}^+ \times \mathcal{K} : \Phi(g, \pi) = 0\} := \Phi^{-1}(\{0\}) \subset \mathcal{F}$ . C'est l'ensemble des données initiales pour les équations d'Einstein du vide. Pour montrer que  $\mathcal{C}$  est une sous-variété de  $\mathcal{F}$ , on montre que 0 est une valeur régulière de  $\Phi$ . On s'intéresse à la surjectivité de la différentielle de  $\Phi$ .

## 6.1 Expression du linéarisé et de son adjoint

**Proposition 17:**

$$\begin{aligned} D\Phi_0(g, \pi).(h, p) &= (\nabla^i \nabla^j h_{ij} - \Delta_g \text{tr}_g h) \sqrt{g} - h_{ij} [R^{ij} - \frac{1}{2}(R(g) - 2\Lambda)g^{ij}] \sqrt{g} \\ &\quad + h_{ij} \left( \frac{2}{n-1} \text{tr}_g \pi \pi^{ij} - 2\pi^i_k \pi^{kj} + \frac{1}{2} |\pi|_g^2 g^{ij} - \frac{1}{2(n-1)} (\text{tr}_g \pi)^2 g^{ij} \right) / \sqrt{g} \\ &\quad + p^{ij} \left( \frac{2}{n-1} \text{tr}_g \pi g_{ij} - 2\pi_{ij} \right) / \sqrt{g}. \end{aligned} \quad (6.15)$$

$$D\Phi_1(g, \pi).(h, p) = \pi^{jk} (2\nabla_k h_{ij} - \nabla_i h_{jk}) + 2h_{ij} \nabla_k \pi^{jk} + 2g_{ik} \nabla_j p^{jk}. \quad (6.16)$$

Preuve :

$$\begin{aligned} D\Phi_0(g, \pi).(h, p) &= D\Phi_0(g, 0).(h, 0) - D(1/\sqrt{g}).h (|\pi|_g^2 - \frac{1}{n-1} (\text{tr}_g \pi)^2) \\ &\quad - D(|\pi|_g^2 - \frac{1}{n-1} (\text{tr}_g \pi)^2).(h, p) / \sqrt{g}. \end{aligned} \quad (6.17)$$

D'après (5.11),

$$D\Phi_0(g, 0).(h, 0) = (\nabla^i \nabla^j h_{ij} - \Delta_g \text{tr}_g h) \sqrt{g} - h_{ij} [R^{ij} - \frac{1}{2}(R(g) - 2\Lambda)g^{ij}] \sqrt{g}.$$

De plus,

$$D(\sqrt{g}).h = \frac{1}{2} g^{ij} h_{ij} \sqrt{g}.$$

On en déduit

$$\begin{aligned} D(1/\sqrt{g}).h &= -\frac{1}{(\sqrt{g})^2} D(\sqrt{g}).h \\ &= -\frac{1}{2\sqrt{g}} g^{ij} h_{ij}. \end{aligned}$$

En coordonnées,

$$|\pi|_g^2 - \frac{1}{n-1} (\text{tr}_g \pi)^2 = (g_{lk} \pi^{jk})^2 - \frac{1}{n-1} (g_{kl} \pi^{kl})^2.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} D(|\pi|_g^2 - \frac{1}{n-1} (\text{tr}_g \pi)^2).(h, p) &= 2g_{lk} \pi^{jk} (h_{ij} \pi^{il} + g_{ij} p^{il}) - \frac{2}{n-1} g_{kl} \pi^{kl} (h_{ij} \pi^{ij} + g_{ij} p^{ij}) \\ &= h_{ij} (2\pi^i_k \pi^{jk} - \frac{2}{n-1} \text{tr}_g \pi \pi^{ij}) + p^{ij} (2\pi_{ij} - \frac{2}{n-1} \text{tr}_g \pi g_{ij}). \end{aligned}$$

L'expression de  $D\Phi_0(g, \pi).(h, p)$  est obtenue en remplaçant les différents termes de (6.17). On pose  $\Phi_1(g, \tilde{\pi}) := 2g_{ij} \nabla_k \tilde{\pi}^{jk}$  de sorte que  $\Phi_1(g, \pi) = \Phi_1(g, \tilde{\pi}) \sqrt{g}$ .

Puisque  $\pi^{ij} = \tilde{\pi}^{ij} \sqrt{g}$ , on a la relation suivante entre leurs variations respectives  $p$  et  $\tilde{p}$

$$\begin{aligned} p^{ij} = D(\pi^{ij}).p &= D(\tilde{\pi}^{ij}).\tilde{p} \sqrt{g} + \tilde{\pi}^{ij} D(\sqrt{g}).h \\ &= \tilde{p}^{ij} \sqrt{g} + \frac{1}{2} \text{tr}_g h \pi^{ij} \sqrt{g}. \end{aligned}$$

En ce qui concerne les dérivées covariantes de  $p$  et  $\tilde{p}$ , compte tenu de (6.7),

$$\nabla_k p^{jk} = [\nabla_k \tilde{p}^{jk} + \frac{1}{2} \text{tr}_g h \nabla_k \tilde{\pi}^{jk} + \frac{1}{2} \tilde{\pi}^{ij} \nabla_k \text{tr}_g h] \sqrt{g}. \quad (6.18)$$

$$D\Phi_{\mathbf{i}}(g, \pi).(h, p) = D\Phi_{\mathbf{i}}(g, \tilde{\pi}).(h, \tilde{p}) \sqrt{g} + \Phi_{\mathbf{i}}(g, \tilde{\pi}) D(\sqrt{g}).h \quad (6.19)$$

Soient  $\hat{\Gamma} = {}^{(g+th)}\Gamma$  et  $\hat{\nabla} = {}^{(g+th)}\nabla$  les symboles de Christoffel et la connexion pour la métrique  $g + th$ .

$$D\Phi_{\mathbf{i}}(g, \tilde{\pi}).(h, \tilde{p}) = \frac{d}{dt} \left( 2(g + th)_{ij} \hat{\nabla}_k (\tilde{\pi} + t\tilde{p})^{jk} - 2g_{ij} \nabla_k \tilde{\pi}^{jk} \right) \Big|_{t=0}.$$

En posant  $\hat{A} = {}^{(g+th)}\Gamma - \Gamma$  et en adaptant (5.7), on obtient

$$D\Phi_{\mathbf{i}}(g, \tilde{\pi}).(h, \tilde{p}) = 2g_{ij} (\nabla_k \tilde{p}^{jk} + \frac{1}{2} \tilde{\pi}^{jk} \nabla_k \text{tr}_g h) + 2h_{ij} \nabla_k \tilde{\pi}^{jk} + \tilde{\pi}^{jk} (2\nabla_k h_{ij} - \nabla_i h_{jk}).$$

En remplaçant les différents termes dans (6.19)

$$\begin{aligned} D\Phi_{\mathbf{i}}(g, \pi).(h, p) &= [2g_{ij} (\nabla_k \tilde{p}^{jk} + \frac{1}{2} \tilde{\pi}^{jk} \nabla_k \text{tr}_g h + \frac{1}{2} \text{tr}_g h \nabla_k \tilde{\pi}^{jk}) + 2h_{ij} \nabla_k \tilde{\pi}^{jk}] \sqrt{g} \\ &\quad + \tilde{\pi}^{jk} (2\nabla_j h_{ik} - \nabla_i h_{jk}) \sqrt{g}. \end{aligned}$$

Le résultat découle ensuite directement de (6.2) et (6.18).  $\square$

En reprenant les notations de [5] ,

$$\delta_g \delta_g h = \nabla^i \nabla^j h_{ij}.$$

$$E^{ij} = R^{ij} - \frac{1}{2} (R(g) - 2\Lambda) g^{ij}.$$

$$\Pi^{ij} = \left( \frac{2}{n-1} \text{tr}_g \pi \pi^{ij} - 2\pi^i_k \pi^{kj} + \frac{1}{2} |\pi|_g^2 g^{ij} - \frac{1}{2(n-1)} (\text{tr}_g \pi)^2 g^{ij} \right) / (\sqrt{g})^2.$$

On peut écrire  $D\Phi$  sous la forme matricielle suivante

$$D\Phi(g, \pi).(h, p) = \begin{bmatrix} \sqrt{g}(\delta_g \delta_g - \Delta_g \text{tr}_g + \Pi - E) & -2K \\ \hat{\pi} \nabla + 2\delta_g \pi & 2\delta_g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h \\ p \end{bmatrix}, \quad (6.20)$$

avec  $\hat{\pi} \nabla h = \hat{\pi}_i^{jkl} \nabla_j h_{kl} = (\pi^{jk} \delta_i^l + \pi^{jl} \delta_i^k - \pi^{kl} \delta_i^j) \nabla_j h_{kl}$ .

Pour montrer la surjectivité de la différentielle de  $\Phi$ , on s'intéresse à l'injectivité de l'opérateur adjoint. Dans la suite,  $\xi = (N, X^i)$  peut être naturellement interprété comme étant le *lapse-shift* associé au feuilletage de l'espace-temps. En intégrant par partie et en ignorant les termes de bord, on obtient (cf. [28] par exemple) l'expression du  $L^2(d\mu(\dot{g}))$ -adjoint formel de  $D\Phi(g, \pi)$  :

$$\int_{\mathcal{M}} \xi D\Phi(g, \pi).(h, p) = \int_{\mathcal{M}} (h, p) \bullet D\Phi(g, \pi)^* \xi. \quad (6.21)$$

En séparant les parties scalaire et vectorielle de  $D\Phi(g, \pi)$ , on obtient le système suivant

$$\int_{\mathcal{M}} N D\Phi_{\mathbf{0}}(g, \pi).(h, p) = \int_{\mathcal{M}} (h, p) \bullet D\Phi_{\mathbf{0}}(g, \pi)^* N \quad (6.22)$$

$$\int_{\mathcal{M}} X^i D\Phi_{\mathbf{i}}(g, \pi).(h, p) = \int_{\mathcal{M}} (h, p) \bullet D\Phi_{\mathbf{i}}(g, \pi)^* X^i \quad (6.23)$$

où  $\bullet$  désigne la contraction tensorielle.

On obtient l'expression de l'opérateur adjoint

**Proposition 18:**

$$\begin{aligned}
 (h, p) \bullet D\Phi_0(g, \pi)^* N &= h_{ij}[\nabla^i \nabla^j N - g^{ij} \Delta_g N - [R^{ij} - \frac{1}{2}(R(g) - 2\Lambda)g^{ij}]N] \sqrt{g} \\
 &\quad + N h_{ij} \left( \frac{2}{n-1} \text{tr}_g \pi \pi^{ij} - 2\pi^i_k \pi^{kj} \right) / \sqrt{g} \\
 &\quad + N h_{ij} \left( \frac{1}{2} |\pi|_g^2 g^{ij} - \frac{1}{2(n-1)} (\text{tr}_g \pi)^2 g^{ij} \right) / \sqrt{g} \\
 &\quad + N p^{ij} \left( \frac{2}{n-1} \text{tr}_g \pi g_{ij} - 2\pi_{ij} \right) / \sqrt{g}. \\
 (h, p) \bullet D\Phi_1(g, \pi)^* X^i &= h_{ij} (X^k \nabla_k \pi^{ij} + \nabla_k X^k \pi^{ij} - 2\nabla_k X^{(i} \pi^{j)k}) - 2p^{ij} \nabla_{(i} X_{j)}.
 \end{aligned}$$

Preuve :

En regroupant les termes avec et sans dérivée covariante dans l'expression de  $D\Phi_0(g, \pi).(h, p)$ ,

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathcal{M}} N D\Phi_0(g, \pi).(h, p) &= \int_{\mathcal{M}} (\nabla^i \nabla^j h_{ij} - g^{ij} \nabla^k \nabla_k h_{ij}) N \sqrt{g} \\
 &\quad - \int_{\mathcal{M}} h_{ij} [R^{ij} - \frac{1}{2}(R(g) - 2\Lambda)g^{ij}] N \sqrt{g} \\
 &\quad + \int_{\mathcal{M}} h_{ij} \left( \frac{2}{n-1} \text{tr}_g \pi \pi^{ij} - 2\pi^i_k \pi^{kj} \right) N / \sqrt{g} \\
 &\quad + \int_{\mathcal{M}} h_{ij} \left( \frac{1}{2} |\pi|_g^2 g^{ij} - \frac{1}{2(n-1)} (\text{tr}_g \pi)^2 g^{ij} \right) N / \sqrt{g} \\
 &\quad - \int_{\mathcal{M}} p^{ij} \left( \frac{2}{n-1} \text{tr}_g \pi g_{ij} - 2\pi_{ij} \right) N / \sqrt{g}.
 \end{aligned}$$

Hormis la première intégrale, cette expression est linéaire en  $(h, p)$  et la contribution à l'expression de l'adjoint est directe. Pour les deux termes de la première intégrale, on intègre par parties en ignorant les termes de bord

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathcal{M}} \nabla^i \nabla^j h_{ij} N \sqrt{g} &= - \int_{\mathcal{M}} \nabla^j h_{ij} \nabla^i N \sqrt{g} \\
 &= \int_{\mathcal{M}} h_{ij} (\nabla^i \nabla^j N \sqrt{g}). \\
 \int_{\mathcal{M}} g^{ij} \nabla^k \nabla_k h_{ij} N d\mu(g) &= - \int_{\mathcal{M}} \nabla_k h_{ij} g^{ij} \nabla^k N \sqrt{g} \\
 &= \int_{\mathcal{M}} h_{ij} (g^{ij} \nabla^k \nabla_k N \sqrt{g}).
 \end{aligned}$$

La somme des différents termes donne le résultat.

Pour  $D\Phi_1(g, \pi).(h, p)$ , on intègre par parties en ignorant les termes de bord

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathcal{M}} X^i D\Phi_1(g, \pi).(h, p) &= \int_{\mathcal{M}} \pi^{jk} (2\nabla_k h_{ij} - \nabla_i h_{jk}) X^i + 2h_{ij} \nabla_k \pi^{jk} X^i + 2g_{ik} \nabla_j p^{jk} X^i \\
 &= \int_{\mathcal{M}} h_{jk} \nabla_i \pi^{jk} X^i + h_{jk} \pi^{jk} \nabla_i X^i - 2h_{ij} \pi^{jk} \nabla_k X^i - 2p^{jk} \nabla_j X_k \\
 &= \int_{\mathcal{M}} h_{ij} (X^k \nabla_k \pi^{jk} + \nabla_k X^k \pi^{ij} - 2\nabla_k X^{(i} \pi^{j)k}) - 2p^{ij} \nabla_{(i} X_{j)}.
 \end{aligned}$$



car par symétrie de  $h, \pi$  et  $p$ ,  $h_{ij}\nabla_k X^i \pi^{jk} = h_{ij}\nabla_k X^{(i} \pi^{j)k}$  et  $p^{jk}\nabla_j X_k = p^{ij}\nabla_{(i} X_{j)}$ .  $\square$

On peut donc écrire  $D\Phi^*$  sous la forme matricielle suivante

$$D\Phi(g, \pi)^* \cdot (N, X) = \begin{bmatrix} \sqrt{g}(\nabla^2 - g\Delta_g + \Pi - E) & \nabla\pi - \hat{\pi}\nabla \\ -2K & -\mathcal{L}_g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N \\ X \end{bmatrix}, \quad (6.24)$$

avec

$$\begin{aligned} (\nabla\pi - \hat{\pi}\nabla)X &= \mathcal{L}_X\pi = \nabla_X\pi^{ij} - \hat{\pi}_l^{kij}\nabla_k X^l. \\ \mathcal{L}_g(X) &= \mathcal{L}_X g = 2\nabla_{(i} X_{j)} = 2S(X). \end{aligned}$$

On note  $D\Phi(g, \pi)_1^* \cdot \xi$  et  $D\Phi(g, \pi)_2^* \cdot \xi$  les deux composantes de  $D\Phi(g, \pi)^*$  dans (6.24).  $L_\delta^2\xi$  (resp.  $W_\delta^{1,2}\overset{\circ}{\nabla}\xi$ ) désigne l'ensemble des termes de la forme  $u\xi$  (resp.  $u\overset{\circ}{\nabla}\xi$ ) tels que  $\|u\|_{2,\delta} \leq C$  (resp.  $\|u\|_{1,2,\delta} \leq C$ ), où  $C$  est une constante dépendant de  $\dot{g}, \delta$  et  $\|(g, \pi)\|_{\mathcal{F}}$ .

$$\begin{aligned} D\Phi(g, \pi)_1^* \cdot \xi &= [\nabla_i \nabla_j N - g_{ij}\Delta_g N + (\Pi_{ij} - E_{ij})N]\sqrt{g} + (\nabla\pi - \hat{\pi}\nabla)X \\ &= D\Phi(g, 0)^*(N, 0) + \Pi_{ij}N\sqrt{g} + (\nabla\pi - \hat{\pi}\nabla)X \end{aligned} \quad (6.25)$$

$$\begin{aligned} (\nabla\pi - \hat{\pi}\nabla)X &= X^k\nabla_k\pi_{ij} - (\pi_i^k\delta_{lj} + \pi_j^k\delta_{li} - \pi_{ij}\delta_l^k)\nabla_k X^l \\ &= X\overset{\circ}{\nabla}\pi + XA\pi - (\pi_i^k\delta_{lj} + \pi_j^k\delta_{li} - \pi_{ij}\delta_l^k)\overset{\circ}{\nabla}_k X^l \\ &= X\overset{\circ}{\nabla}(\pi - \hat{\pi}) + XA(\pi - \hat{\pi}) + XA\hat{\pi} + (\pi - \hat{\pi})\overset{\circ}{\nabla}X \\ &\quad - (\pi_i^k\delta_{lj} + \hat{\pi}_j^k\delta_{li} - \hat{\pi}_{ij}\delta_l^k)\nabla_k X^l \\ &= L_\delta^2 X + W_\delta^{1,2}\overset{\circ}{\nabla}X + (n-1)\tau(2\overset{\circ}{S}(X) - \dot{g}\text{tr}_{\dot{g}}\overset{\circ}{S}(X)). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Pi(g, \pi)N &= L_\delta^2 N + \Pi(\dot{g}, \hat{\pi})N \\ &= L_\delta^2 N + \left(\frac{2}{n-1}\text{tr}_{\dot{g}}\hat{\pi}\hat{\pi}^{ij} - 2\hat{\pi}_k^i\hat{\pi}^{kj} + \frac{1}{2}|\hat{\pi}|_{\dot{g}}^2\dot{g}^{ij} - \frac{1}{2(n-1)}(\text{tr}_{\dot{g}}\hat{\pi})^2\dot{g}^{ij}\right)N/(\sqrt{\dot{g}})^2 \\ &= L_\delta^2 N + -\frac{1}{2}(n-1)(n-4)\tau^2\dot{g}N. \end{aligned}$$

On a par conséquent la condition d'intégrabilité

$$\Pi(g, \pi) + \frac{1}{2}(n-1)(n-4)\tau^2\dot{g} \in L_\delta^2. \quad (6.26)$$

Compte tenu de (6.4) et (6.11),

$$E + (n-1)\dot{g} - \frac{1}{2}n(n-1)\tau^2\dot{g} \in L_\delta^2. \quad (6.27)$$

$$\begin{aligned} D\Phi(g, \pi)_1^* \cdot \xi / \sqrt{g} &= \nabla^2 N - g\Delta_g N + (n-1)\dot{g}N + [\Pi + \frac{1}{2}(n-1)(n-4)\tau^2\dot{g}]N \\ &\quad + (n-1)\tau(2\overset{\circ}{S}(X) - \dot{g}\text{tr}_{\dot{g}}\overset{\circ}{S}(X)) - [E + (n-1)\dot{g} - \frac{1}{2}n(n-1)\tau^2\dot{g}]N \\ &\quad - (n-1)(n-2)\tau^2\dot{g}N + L_\delta^2\xi + W_\delta^{1,2}\overset{\circ}{\nabla}X \\ &= \nabla^2 N - g\Delta_g N + (n-1)gN + (n-1)\tau(2\overset{\circ}{S}(X) - \dot{g}\text{tr}_{\dot{g}}\overset{\circ}{S}(X)) \\ &\quad - (n-1)(n-2)\tau^2\dot{g}N + L_\delta^2\xi + W_\delta^{1,2}\overset{\circ}{\nabla}X. \end{aligned} \quad (6.28)$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} D\Phi(g, \pi)_2^* \cdot \xi &= -2KN - 2S(X) \\ &= -2\overset{\circ}{K}N - 2\overset{\circ}{S}(X) - 2(K - \overset{\circ}{K})N + 2AX \\ &= -2(\overset{\circ}{S}(X) + \tau\dot{g}N) + W_\delta^{1,2}\xi. \end{aligned}$$

D'après l'expression (5.34) de l'opérateur  $T$  et l'expression de  $\mathring{S}$  en fonction de  $D\Phi(g, \pi)_2^* \cdot \xi$ , on obtient

$$D\Phi(g, \pi)_1^* \cdot \xi / \sqrt{g} = T - gtr_g T + (n-1)\tau(2\mathring{S}(X) - \mathring{g}tr_{\mathring{g}}\mathring{S}(X)) - (n-1)(n-2)\tau^2\mathring{g}N + L_\delta^2\xi + W_\delta^{1,2}\mathring{\nabla}X. \quad (6.29)$$

$$D\Phi(g, \pi)_2^* \cdot \xi = -2(\mathring{S}(X) + \tau\mathring{g}N) + W_\delta^{1,2}\xi. \quad (6.30)$$

Il est utile de restructurer  $D\Phi^*$  en l'opérateur  $P^*$  défini par

$$\begin{aligned} P^*(\xi) = P_{(g,\pi)}^*(\xi) &= \left[ \begin{array}{c} g^{1/4} (\nabla^i \nabla_j N - \delta_j^i \Delta_g N + (\Pi_j^i - E_j^i) N) + g^{-1/4} \mathcal{L}_X \pi_j^i \\ -2g^{-1/4} \nabla_l (K_j^i N + S(X)^i_j) \end{array} \right] \\ &= \zeta \circ \left[ \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & \nabla \end{array} \right] \circ D\Phi(g, \pi)^* \xi, \end{aligned} \quad (6.31)$$

où  $g^{1/4} = (\det(g)/\det(\mathring{g}))^{1/4} d\mu(\mathring{g})$  est une densité de poids  $\frac{1}{2}$  et

$$\zeta = \zeta(g) = \left[ \begin{array}{cc} g^{-1/4} g_{jk} & 0 \\ 0 & g^{1/4} g^{ik} \end{array} \right]. \quad (6.32)$$

Finalement, on peut écrire  $P_{(g,\pi)}^*(\xi)$  sous la forme

$$P_{(g,\pi)}^*(\xi) = \left( \begin{array}{c} g^{-1/4} D\Phi(g, \pi)_1^* \cdot \xi \\ g^{1/4} \nabla D\Phi(g, \pi)_2^* \cdot \xi \end{array} \right). \quad (6.33)$$

L'expression (6.31) de  $P^*$  permet d'exprimer le  $L^2(d\mu(\mathring{g}))$ -adjoint de  $P^*$  sous la forme

$$P_{(g,\pi)} = D\Phi(g, \pi) \circ \left[ \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & -\delta_g \end{array} \right] \circ \zeta, \quad (6.34)$$

avec  $\delta_g q = \nabla^l (q_l^{ij})$  de sorte que  $P(f_j^i, q_{li}^j) = D\Phi(f_{ij}, q_l^{ij})$  et ainsi la composition  $PP^*$  est bien définie.

## 6.2 L'opérateur de Killing $\mathring{S}$

Soit  $S$  l'opérateur défini sur les 1-formes par

$$\mathring{S}(Y)_{ij} := \frac{1}{2}(\mathring{\nabla}_i Y_j + \mathring{\nabla}_j Y_i) = \mathring{\nabla}_{(i} Y_{j)}. \quad (6.35)$$

La trace de cet opérateur est

$$\text{tr}_{\mathring{g}} \mathring{S}(Y) = \mathring{g}^{ij} \mathring{S}(Y)_{ij} = \mathring{\nabla}^i Y_i = \text{div} Y. \quad (6.36)$$

Dans les lemmes et propositions suivants,  $\partial\mathcal{M}$  désigne le bord intérieur de  $\mathcal{M}$ .

**Lemme 16:**

Soit  $V$  un champ de vecteur et  $Y$  une 1-forme à support compact sur  $\mathcal{M}$ . On a l'égalité

$$\begin{aligned} & \int_{\mathcal{M}} (\mathring{S}(Y) + \frac{1}{2} \text{tr}_{\mathring{g}}(\mathring{S}(Y))\mathring{g})(Y, V) d\mu(\mathring{g}) \\ &= -\frac{1}{2} \int_{\mathcal{M}} \{ \mathring{\nabla} V(Y, Y) + \frac{1}{2} \text{div} V |Y|_{\mathring{g}}^2 \} d\mu(\mathring{g}) + \frac{1}{2} \int_{\partial\mathcal{M}} \langle Y, V \rangle_{\mathring{g}} \langle Y, \eta \rangle_{\mathring{g}} d\sigma(\mathring{g}) \\ &+ \frac{1}{4} \int_{\partial\mathcal{M}} |Y|_{\mathring{g}}^2 \langle V, \eta \rangle_{\mathring{g}} d\sigma(\mathring{g}), \end{aligned}$$

où  $\eta$  est la normale extérieure à  $\partial\mathcal{M}$ .

Preuve :

$$\mathring{S}(Y)_{ij} Y^i V^j = \frac{1}{2} (\mathring{\nabla}_i Y_j Y^i V^j + \mathring{\nabla}_j Y_i Y^i V^j). \quad (6.37)$$

Intégrons par parties le premier terme du membre de droite

$$\int_{\mathcal{M}} \mathring{\nabla}_i (Y_j Y^i V^j) d\mu(\mathring{g}) = \int_{\mathcal{M}} \mathring{\nabla}_i Y_j Y^i V^j d\mu(\mathring{g}) + \int_{\mathcal{M}} Y_j \mathring{\nabla}_i Y^i V^j d\mu(\mathring{g}) + \int_{\mathcal{M}} Y_j Y^i \mathring{\nabla}_i V^j d\mu(\mathring{g}).$$

Or d'après le théorème de Divergence-Flux,

$$\int_{\mathcal{M}} \mathring{\nabla}_i (Y_j Y^i V^j) d\mu(\mathring{g}) = \int_{\partial\mathcal{M}} \langle Y_j Y^i V^j, \eta_i \rangle_{\mathring{g}} d\sigma(\mathring{g}).$$

On obtient

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{M}} \mathring{\nabla}_i Y_j Y^i V^j d\mu(\mathring{g}) &= \int_{\partial\mathcal{M}} \langle Y_j Y^i V^j, \eta_i \rangle_{\mathring{g}} d\sigma(\mathring{g}) - \int_{\mathcal{M}} Y_j \mathring{\nabla}_i Y^i V^j d\mu(\mathring{g}) \\ &\quad - \int_{\mathcal{M}} Y_j Y^i \mathring{\nabla}_i V^j d\mu(\mathring{g}) \\ &= \int_{\partial\mathcal{M}} \langle Y, V \rangle_{\mathring{g}} \langle Y, \eta \rangle_{\mathring{g}} d\sigma(\mathring{g}) - \int_{\mathcal{M}} \text{tr}_{\mathring{g}}(\mathring{S}(Y)) \langle Y, V \rangle_{\mathring{g}} d\mu(\mathring{g}) \\ &\quad - \int_{\mathcal{M}} \mathring{\nabla} V(Y, Y) d\mu(\mathring{g}). \end{aligned}$$

De la même manière, pour le second terme du membre de droite de (6.37), on obtient

$$\int_{\mathcal{M}} \mathring{\nabla}_j Y_i Y^i V^j d\mu(\mathring{g}) = \frac{1}{2} \int_{\partial\mathcal{M}} |Y|_{\mathring{g}}^2 \langle V, \eta \rangle_{\mathring{g}} d\sigma(\mathring{g}) - \frac{1}{2} \int_{\mathcal{M}} \text{div} V |Y|_{\mathring{g}}^2 d\mu(\mathring{g}). \quad \square$$

**Lemme 17:**

Soient  $u$  une fonction,  $V$  un champ de vecteur et  $Y$  une 1-forme, tous à support compact sur  $\mathcal{M}$ . On a l'égalité

$$\begin{aligned} & \int_{\mathcal{M}} e^{2u} (\mathring{S}(Y) + \frac{1}{2} \text{tr}_{\mathring{g}}(\mathring{S}(Y))\mathring{g})(Y, V) d\mu(\mathring{g}) \\ &= -\frac{1}{2} \int_{\mathcal{M}} e^{2u} \left\{ \mathring{\nabla} V(Y, Y) + \frac{1}{2} \text{div} V |Y|_{\mathring{g}}^2 \right\} d\mu(\mathring{g}) + \frac{1}{2} \int_{\partial\mathcal{M}} e^{2u} \langle Y, V \rangle_{\mathring{g}} \langle Y, \eta \rangle_{\mathring{g}} d\sigma(\mathring{g}) \\ & - \frac{1}{2} \int_{\mathcal{M}} e^{2u} \left\{ 2 \langle du, Y \rangle_{\mathring{g}} \langle Y, V \rangle_{\mathring{g}} + \langle du, V \rangle_{\mathring{g}} |Y|_{\mathring{g}}^2 \right\} d\mu(\mathring{g}) + \frac{1}{4} \int_{\partial\mathcal{M}} e^{2u} |Y|_{\mathring{g}}^2 \langle V, \eta \rangle_{\mathring{g}} d\sigma(\mathring{g}), \end{aligned}$$

où  $\eta$  est la normale extérieure à  $\partial\mathcal{M}$ .

Preuve :

On utilise le lemme 16 avec  $e^u Y$  à la place de  $Y$ ,

$$\begin{aligned} \mathring{S}(e^u Y)_{ij} &= e^u \mathring{S}(Y)_{ij} + \frac{1}{2} e^u (\partial_i u Y_j + \partial_j u Y_i). \\ \text{tr}(\mathring{S}(e^u Y)) &= e^u \text{tr}(\mathring{S}(Y)) + e^u \langle du, Y \rangle_{\mathring{g}}. \quad \square \end{aligned}$$

**Corollaire 3:**

Soit  $(M, \mathring{g})$  une variété AH avec  $\mathring{g} = \rho^{-2} \mathring{h}$  et  $\delta \in \mathbb{R}$ .  $\forall Y \in \mathcal{C}_c^\infty(T^*\mathcal{M})$ ,

$$\begin{aligned} & 2 \int_{\mathcal{M}} \rho^{2\delta} (\mathring{S}(Y) + \frac{1}{2} \text{tr}_{\mathring{g}}(\mathring{S}(Y))\mathring{g})(Y, \frac{d\rho}{\rho}) d\mu(\mathring{g}) \\ &= \int_{\mathcal{M}} \rho^{2\delta} \left\{ \left( \frac{n+1}{2} - \delta + o(1) \right) |Y|_{\mathring{g}}^2 - (2\delta + 1) \left\langle \frac{d\rho}{\rho}, Y \right\rangle_{\mathring{g}}^2 \right\} d\mu(\mathring{g}) \\ & + \frac{1}{2} \int_{\partial\mathcal{M}} \rho^{2\delta} |Y|_{\mathring{g}}^2 \left\langle \frac{d\rho}{\rho}, \eta \right\rangle_{\mathring{g}} d\sigma(\mathring{g}) + \int_{\partial\mathcal{M}} \rho^{2\delta} \left\langle Y, \frac{d\rho}{\rho} \right\rangle_{\mathring{g}} \langle Y, \eta \rangle_{\mathring{g}} d\sigma(\mathring{g}), \quad (6.38) \end{aligned}$$

où  $\eta$  est la normale extérieure à  $\partial\mathcal{M}$ .

Preuve :

On applique le lemme 17 avec

$$\begin{cases} V = d(\rho^{-1}) = -\rho^{-2} d\rho \\ u = (\delta + \frac{1}{2}) \ln \rho \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \mathring{\nabla} V = \mathring{\nabla}^2(\rho^{-1}) = \rho^{-1} |d\rho|_{\mathring{h}}^2 \mathring{g} - \rho^{-2} (\mathring{h}) \nabla^2 \rho \text{ d'après (5.19)} \\ \text{div} V = \mathring{\Delta}(\rho^{-1}) = \rho^{-1} (n |d\rho|_{\mathring{h}}^2 + o(1)) \text{ d'après (5.20)} \end{cases}$$

$$du = (\delta + \frac{1}{2}) \frac{d\rho}{\rho} \quad \text{et} \quad e^{2u} = \rho^{2\delta+1}.$$

La métrique  $\mathring{h}$  étant définie (et par conséquent bornée) sur  $\partial_\infty \mathcal{M}$  et  $\rho$  étant une fonction lisse sur  $\bar{\mathcal{M}}$ , il s'ensuit que  $(\mathring{h}) \nabla^2 \rho$  est une fonction lisse bornée sur  $\bar{\mathcal{M}}$  et on peut écrire  $(\mathring{h}) \nabla^2 \rho = o(\rho^{-1})$  au voisinage de  $\partial_\infty \mathcal{M}$ . Finalement,

$$\begin{cases} \mathring{\nabla} V(Y, Y) = \rho^{-1} (|d\rho|_{\mathring{h}}^2 |Y|_{\mathring{g}}^2 + o(1) |Y|_{\mathring{g}}^2) \\ \text{div} V |Y|_{\mathring{g}}^2 = \rho^{-1} (n |d\rho|_{\mathring{h}}^2 + o(1)) |Y|_{\mathring{g}}^2 \end{cases}$$

On obtient

$$\begin{aligned} & \int_{\mathcal{M}} \rho^{2\delta} (\mathring{S}(Y) + \frac{1}{2} \text{tr}_{\mathring{g}}(\mathring{S}(Y)) \mathring{g})(Y, \frac{d\rho}{\rho}) d\mu(\mathring{g}) \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathcal{M}} \rho^{2\delta} \left\{ \left[ 1 - (\delta + \frac{1}{2}) + \frac{n}{2} \right] |d\rho|_{\mathring{h}}^2 |Y|_{\mathring{g}}^2 - (2\delta + 1) \langle \frac{d\rho}{\rho}, Y \rangle_{\mathring{g}}^2 + o(1) |Y|_{\mathring{g}}^2 \right\} d\mu(\mathring{g}) \\ &+ \frac{1}{4} \int_{\partial\mathcal{M}} \rho^{2\delta} |Y|_{\mathring{g}}^2 \langle \frac{d\rho}{\rho}, \eta \rangle_{\mathring{g}} d\sigma(\mathring{g}) + \frac{1}{2} \int_{\partial\mathcal{M}} \rho^{2\delta} \langle Y, \frac{d\rho}{\rho} \rangle_{\mathring{g}} \langle Y, \eta \rangle_{\mathring{g}} d\sigma(\mathring{g}). \end{aligned}$$

On conclut avec  $|d\rho|_{\mathring{h}}^2 = 1 + o(1)$  sur une variété AH.  $\square$

**Lemme 18:**

Soit  $Y \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathcal{T}^*\mathcal{M})$  et  $u, v \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$  deux fonctions définies sur un voisinage du support de  $Y$ . Alors,

$$\begin{aligned} & -2 \int_{\mathcal{M}} v e^{2u} \mathring{S}(Y)(dv, dv) \langle dv, Y \rangle_{\mathring{g}} d\mu(\mathring{g}) \\ &= \int_{\mathcal{M}} e^{2u} \langle dv, Y \rangle_{\mathring{g}}^2 \left\{ \langle dv, Y \rangle_{\mathring{g}} \left[ |dv|_{\mathring{g}}^2 + v \mathring{\Delta} v + 2v \langle dv, du \rangle_{\mathring{g}} \right] + 2v \mathring{\nabla}^2 v(Y, dv) \right\} d\mu(\mathring{g}) \\ & - \int_{\partial\mathcal{M}} v e^{2u} \langle dv, Y \rangle_{\mathring{g}}^2 \langle dv, \eta \rangle_{\mathring{g}} d\sigma(\mathring{g}), \end{aligned}$$

où  $\eta$  est la normale extérieure à  $\partial\mathcal{M}$ .

Preuve :

On intègre  $\mathring{\nabla}_j \left( v e^{2u} \langle dv, Y \rangle_{\mathring{g}}^2 \mathring{\nabla}^j v \right)$  par parties

$$\begin{aligned} & \int_{\mathcal{M}} \mathring{\nabla}_j \left( v e^{2u} \langle dv, Y \rangle_{\mathring{g}}^2 \mathring{\nabla}^j v \right) d\mu(\mathring{g}) \\ &= \int_{\mathcal{M}} e^{2u} \langle dv, Y \rangle_{\mathring{g}}^2 |dv|_{\mathring{g}}^2 d\mu(\mathring{g}) + \int_{\mathcal{M}} 2v e^{2u} \langle dv, Y \rangle_{\mathring{g}}^2 \langle du, dv \rangle_{\mathring{g}} d\mu(\mathring{g}) \\ &+ \int_{\mathcal{M}} v e^{2u} \langle dv, Y \rangle_{\mathring{g}}^2 \mathring{\Delta} v d\mu(\mathring{g}) + \int_{\mathcal{M}} 2v e^{2u} \langle dv, Y \rangle_{\mathring{g}} \mathring{\nabla}^j v \left[ \mathring{\nabla}_{ij}^2 v Y^i + \mathring{\nabla}^i v \mathring{\nabla}_j Y_i \right] d\mu(\mathring{g}). \end{aligned}$$

Le théorème de Divergence-Flux donne

$$\int_{\mathcal{M}} \mathring{\nabla}_j \left( v e^{2u} \langle dv, Y \rangle_{\mathring{g}}^2 \mathring{\nabla}^j v \right) d\mu(\mathring{g}) = \int_{\partial\mathcal{M}} v e^{2u} \langle dv, Y \rangle_{\mathring{g}}^2 \langle dv, \eta \rangle_{\mathring{g}} d\sigma(\mathring{g}).$$

On obtient

$$\begin{aligned} & -2 \int_{\mathcal{M}} v e^{2u} \langle dv, Y \rangle_{\mathring{g}} \mathring{\nabla} Y(dv, dv) d\mu(\mathring{g}) \\ &= \int_{\mathcal{M}} e^{2u} \langle dv, Y \rangle_{\mathring{g}}^2 \left[ |dv|_{\mathring{g}}^2 + 2v \langle du, dv \rangle_{\mathring{g}} + v \mathring{\Delta} v \right] d\mu(\mathring{g}) \\ &+ \int_{\mathcal{M}} 2v e^{2u} \langle dv, Y \rangle_{\mathring{g}} \mathring{\nabla}^2 v(Y, dv) d\mu(\mathring{g}) - \int_{\partial\mathcal{M}} v e^{2u} \langle dv, Y \rangle_{\mathring{g}}^2 \langle dv, \eta \rangle_{\mathring{g}} d\sigma(\mathring{g}). \end{aligned}$$

On obtient le résultat souhaité compte tenu du fait que  $\mathring{\nabla} Y(dv, dv) = \mathring{S}(Y)(dv, dv)$  par symétrie.  $\square$

**Corollaire 4:**

Soit  $(M, \mathring{g})$  une variété AH avec  $\mathring{g} = \rho^{-2} \mathring{h}$  et  $\delta \in \mathbb{R}$ .  $\forall Y \in \mathcal{C}_c^\infty(T^* \mathcal{M})$ ,

$$\begin{aligned} & 2 \int_{\mathcal{M}} \rho^{2\delta} \mathring{S}(Y) \left( \frac{d\rho}{\rho}, \frac{d\rho}{\rho} \right) \left\langle \frac{d\rho}{\rho}, Y \right\rangle_{\mathring{g}} d\mu(\mathring{g}) \\ &= \int_{\mathcal{M}} \rho^{2\delta} (n-1-2\delta+o(1)) \left\langle \frac{d\rho}{\rho}, Y \right\rangle_{\mathring{g}}^2 d\mu(\mathring{g}) + \int_{\partial\mathcal{M}} \rho^{2\delta} \left\langle \frac{d\rho}{\rho}, Y \right\rangle_{\mathring{g}}^2 \left\langle \frac{d\rho}{\rho}, \eta \right\rangle_{\mathring{g}} d\sigma(\mathring{g}), \end{aligned} \quad (6.39)$$

où  $\eta$  est la normale extérieure à  $\partial\mathcal{M}$ .

Preuve :

On applique le lemme 18 avec

$$\begin{cases} v = \rho^{-1} \\ u = (\delta + 2) \ln \rho \end{cases}, \quad \begin{cases} dv = d(\rho^{-1}) = -\rho^{-1} \frac{d\rho}{\rho} \\ du = (\delta + 2) \frac{d\rho}{\rho} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} e^{2u} = \rho^{2\delta+4} \\ |dv|_{\mathring{g}}^2 = \rho^{-2} |d\rho|_{\mathring{h}}^2 \end{cases}$$

ainsi que

$$\begin{cases} \mathring{\nabla}^2 v = \mathring{\nabla}^2(\rho^{-1}) = \rho^{-1} \left( |d\rho|_{\mathring{h}}^2 \mathring{g} - \rho^{-1} \mathring{\nabla}^2 \rho \right) & \text{d'après (5.19)} \\ \mathring{\Delta} v = \mathring{\Delta}(\rho^{-1}) = \rho^{-1} \left( n |d\rho|_{\mathring{h}}^2 + o(1) \right) & \text{d'après (5.20)} \end{cases}.$$

On obtient

$$\begin{aligned} & 2 \int_{\mathcal{M}} \rho^{2\delta} \mathring{S}(Y) \left( \frac{d\rho}{\rho}, \frac{d\rho}{\rho} \right) \left\langle \frac{d\rho}{\rho}, Y \right\rangle_{\mathring{g}} d\mu(\mathring{g}) \\ &= \int_{\mathcal{M}} \rho^{2\delta} \left\{ n + 3 - 2(\delta + 2) + o(1) \right\} \left\langle \frac{d\rho}{\rho}, Y \right\rangle_{\mathring{g}}^2 |d\rho|_{\mathring{g}}^2 d\mu(\mathring{g}) \\ &+ \int_{\partial\mathcal{M}} \rho^{2\delta} \left\langle \frac{d\rho}{\rho}, Y \right\rangle_{\mathring{g}}^2 \left\langle \frac{d\rho}{\rho}, \eta \right\rangle_{\mathring{g}} d\sigma(\mathring{g}). \end{aligned}$$

On conclut avec  $|d\rho|_{\mathring{h}}^2 = 1 + o(1)$  sur une variété AH.  $\square$

**Lemme 19:**

On suppose ici  $\mathcal{M}$  sans bord intérieur. Pour tout  $\delta > -(n+1)/2$  et  $\delta \neq -(n-1)/2$ , il existe une constante  $c > 0$  dépendant de  $\mathring{g}$  et  $\delta$  telle que

$$\forall Y \in W_{-\delta}^{1,2}(T^* \mathcal{M}), \quad \|Y\|_{1,2,-\delta} \leq c \|\mathring{S}(Y)\|_{2,-\delta}.$$

Preuve :

On s'inspire là encore de la preuve du Théorème 6 mais pour l'opérateur  $\mathring{S}$ . En remplacement du Lemme 1, on utilise le Lemme 2.8 de [15] (pour  $\mathring{g}$  et avec  $N = 0$ ) afin d'obtenir une inégalité de Korn

$$\begin{aligned} \|Y\|_{1,2,-\delta} &\leq c (\|\mathring{S}(Y) - \text{tr}_{\mathring{g}}(S(Y)) \mathring{g}\|_{2,-\delta} + \|Y\|_{2,-\delta}) \\ &\leq c (\|\mathring{S}(Y)\|_{2,-\delta} + \|Y\|_{2,-\delta}), \end{aligned}$$

où  $c$  est une constante positive ne dépendant que de  $\mathring{g}$  et  $\delta$ .

On utilise maintenant la proposition D12 de [15] : soit  $(\mathcal{M}, \mathring{g})$  une variété conformément compacte avec  $\mathring{g} = \rho^{-2}\mathring{h}$ . Pour tout  $\delta \neq -(n+1)/2$  et  $\delta \neq -(n-1)/2$ , il existe deux constantes  $c_\delta > 0$  et  $\rho_{\varepsilon, \delta} > 0$  telles que pour tout champ de vecteurs différentiable à support compact dans  $\{\rho < \rho_{\varepsilon, \delta}\}$ ,

$$\|Y\|_{2, -\delta} \leq c_\delta \|\mathring{S}(Y)\|_{2, -\delta}. \quad (6.40)$$

En définissant  $R$  tel que  $\rho_{\varepsilon, \delta} = e^{-2R}$ , on définit  $\Omega_R$  comme dans la Définition 1 et on a l'inégalité (6.40) sur  $\mathcal{M} \setminus \Omega_R$ , comme dans l'hypothèse du Théorème 6. La suite de la preuve est identique à celle du Théorème 6 et il s'ensuit que l'on peut choisir  $R$  assez grand pour que l'inégalité suivante

$$\|Y\|_{1, 2, -\delta} \leq c \left( \|\mathring{S}(Y)\|_{2, -\delta} + \|Y\|_{2, -\delta; \Omega_R} \right)$$

soit valable pour une constante  $c$ , pour tout  $Y \in \mathcal{C}_c^\infty(T^*\mathcal{M})$ .

Par suite, l'opérateur  $\mathring{S} : W_{-\delta}^{1,2}(T^*\mathcal{M}) \rightarrow L_{-\delta}^2(T^*\mathcal{M})$  a un noyau de dimension finie. Par conséquent  $W_{-\delta}^{1,2}(T^*\mathcal{M})$  peut s'écrire  $W_{-\delta}^{1,2}(T^*\mathcal{M}) = \ker \mathring{S} \oplus (\ker \mathring{S})^\perp$ . Par suite, il existe une constante  $c > 0$  telle que pour tout  $Y \in (\ker \mathring{S})^\perp$ ,

$$\|Y\|_{1, 2, -\delta} \leq c \|\mathring{S}(Y)\|_{2, -\delta}.$$

Il reste à montrer  $\ker \mathring{S} \cap W_{-\delta}^{1,2} = \{0\}$ ,  $\forall \delta > -(n+1)/2$ .

On utilise pour cela le système de coordonnées  $(x^1 = \rho, x^2, \dots, x^n) = (\rho, \theta)$  sur un voisinage du bord  $[0, \varepsilon] \times \partial\mathcal{M}$  que l'on peut trouver dans [15]. La métrique  $\mathring{g}$  s'écrit à l'aide de sa fonction définissante  $\rho$  :

$$\mathring{g} = \rho^{-2}\mathring{h} = \rho^{-2}(d\rho^2 + \hat{g}(\rho)) \quad \text{avec} \quad \hat{g}(\rho)(\partial_\rho, \cdot) = 0.$$

Les mêmes conventions de notations que dans [15] sont utilisées et on désignera par  $\rho$  l'indice relatif à la coordonnée radiale et les indices relatifs aux coordonnées tangentielles seront notés avec les indices latins majuscules, tandis que les indices latins minuscules pourront désigner n'importe quelle composante. Les symboles de Christoffel, dans ce système de coordonnées, sont donnés dans [15], de même que l'équation

$$\mathring{\nabla}_i X_j + \mathring{\nabla}_j X_i = 0 \quad (6.41)$$

qui devient le système suivant :

$$\partial_\rho X_\rho + \rho^{-1} X_\rho = 0 \quad (6.42)$$

$$\partial_\rho X_A + \partial_A X_\rho + 2\rho^{-1} X_A - \hat{g}^{CD}(\rho) \hat{g}'_{DA}(\rho) X_C = 0 \quad (6.43)$$

$$\partial_A X_B + \partial_B X_A - 2\hat{\Gamma}_{AB}^C(\rho) X_C + (\hat{g}'_{AB}(\rho) - 2\rho^{-1} \hat{g}_{AB}(\rho)) X_\rho = 0$$

où  $f' := \partial_\rho f$ .

La résolution de l'équation (6.42) donne

$$X_\rho = \rho^{-1} K(\theta).$$

Comme la métrique  $\hat{g}$  est polyhomogène,  $\hat{g}$  peut s'écrire comme un développement en puissance de  $\rho$  et  $\ln \rho$ , dont les premiers termes ne comportent que des puissances de  $\rho$ . On pose donc

$$\hat{g}^{CD} \hat{g}'_{DA} := T_A^C,$$

où  $T$  est un certain tenseur d'ordre deux dont le développement est le suivant

$$T_A^C(\rho, \theta) = \rho^1 T_A^C(\theta) + o(1).$$

Andersson et Chruściel ont montré dans [3] que la solution  $X$  de  $(\Delta - \text{Ric } \hat{g})X = 0$  est également polyhomogène et s'écrit

$$X_A(\rho, \theta) = \rho^s Z_A(\theta) + o(\rho^s).$$

En remplaçant dans (6.43), on trouve  $s = -2$  et  $X_A = \rho^{-2} Z_A(\theta) + o(\rho^{-2})$ .

On obtient alors la forme de la 1-forme solution de (6.41) sur un voisinage du bord

$$X = \rho^{-1} K(\theta) d\rho + [\rho^{-2} Z_A(\theta) + o(\rho^{-2})] dx^A.$$

De plus,  $X \in W_{-\delta}^{1,2}$ , ce qui entraîne nécessairement que  $Z = 0$ . En effet, supposons que  $Z \neq 0$ . La norme de  $X$  relative à  $\hat{g}$  est

$$|X|_{\hat{g}}^2 \simeq \rho^{-2} |K|_{\hat{g}}^2 + \rho^{-4} |Z|_{\hat{g}}^2,$$

avec  $|K|_{\hat{g}}^2 \simeq |Z|_{\hat{g}}^2 \simeq \rho^2 O(1)$ .

$$|X|_{\hat{g}}^2 \simeq \rho^{-2} O(1).$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} \|X\|_{2,-\delta} < \infty &\Leftrightarrow \int_0^\varepsilon |X|_{\hat{g}}^2 \rho^{-2\delta} \rho^{-n} d\rho < \infty \\ &\Leftrightarrow \int_0^\varepsilon \rho^{-2} \rho^{-2\delta} \rho^{-n} d\rho < \infty \\ &\Leftrightarrow -2\delta - n - 2 > -1 \\ &\Leftrightarrow \delta < -(n+1)/2. \end{aligned}$$

Comme  $\delta > -(n+1)/2$ , il s'ensuit que  $X \notin W_{-\delta}^{1,2}$ .  $Z$  est donc nécessairement nul sur un voisinage du bord. En faisant une analyse sur les coefficients du développement de  $X$ , on se rend compte que le fait que  $Z = 0$  entraîne que  $|X|_{\hat{g}} = O(\rho^\infty)$ . On conclut la preuve du Lemme 19 en utilisant le théorème d'unique continuation de [43].  $\square$

### 6.3 Estimées elliptiques relatives à l'adjoint

Cette section regroupe les différents résultats obtenus concernant l'opérateur adjoint  $D\Phi_{\mathbf{0}}(g)^*$ . On commence par montrer la coercivité de l'adjoint dans la proposition suivante :



**Proposition 19:**

Soit  $\delta \in ]-(n+1)/2, 0]$ , avec  $n = 3$ , et  $\delta \neq -(n-1)/2$ . Il existe une constante  $C > 0$  dépendant de  $\dot{g}, \lambda, \delta$  et  $\|(g, \pi)\|_{\mathcal{F}}$ , telle que l'estimée elliptique suivante est vérifiée :  $\forall \xi \in W_{-\delta}^{2,2}(\mathcal{T})$ ,

$$\|\xi\|_{2,2,-\delta} \leq c \left( \|D\Phi(g, \pi)_1^* \cdot \xi\|_{2,-\delta} + \|D\Phi(g, \pi)_2^* \cdot \xi\|_{1,2,-\delta} \right) + C \|\xi\|_{1,2,-2\delta}, \quad (6.44)$$

Preuve :

Compte tenu de l'expression (6.30) de  $\dot{S}$  en fonction de  $D\Phi(g, \pi)_2^* \cdot \xi$ ,

$$\begin{aligned} T - gtr_g T &= D\Phi(g, \pi)_1^* \cdot \xi / \sqrt{g} + (n-1)\tau \left( D\Phi(g, \pi)_2^* \cdot \xi - \frac{1}{2} \dot{g} tr_{\dot{g}} D\Phi(g, \pi)_2^* \cdot \xi \right) \\ &\quad + L_{\delta}^2 \xi + W_{\delta}^{1,2} \overset{\circ}{\nabla} \xi. \end{aligned} \quad (6.45)$$

En utilisant la Proposition 7 et (4.15),

$$\|N\|_{2,2,-\delta} \leq c \left( \|D\Phi(g, \pi)_1^* \cdot \xi\|_{2,-\delta} + \|D\Phi(g, \pi)_2^* \cdot \xi\|_{2,-\delta} \right) + C \left( \|\xi\|_{\infty,-2\delta} + \|\overset{\circ}{\nabla} \xi\|_{3,-2\delta} \right).$$

En utilisant (4.19), (4.20) et l'inclusion de Sobolev ( $\delta \leq 0$ ), il existe une constante  $C$  dépendant de  $\dot{g}, \lambda, \varepsilon, \delta$  et  $\|(g, \pi)\|_{\mathcal{F}}$  telle que

$$\|N\|_{2,2,-\delta} \leq c \left( \|D\Phi(g, \pi)_1^* \cdot \xi\|_{2,-\delta} + \|D\Phi(g, \pi)_2^* \cdot \xi\|_{2,-\delta} \right) + \varepsilon \|\xi\|_{2,2,-\delta} + C \|\xi\|_{1,2,-2\delta}. \quad (6.46)$$

Par ailleurs, pour toute 1-forme  $X$  suffisamment régulière sur  $\mathcal{M}$ , on a l'identité suivante pour la métrique  $\dot{g}$  (cf équation (29) de [5] par exemple)

$$\overset{\circ}{\nabla}_{kj}^2 X_i := \overset{\circ}{\nabla}_k \overset{\circ}{\nabla}_j X_i = \text{Riem } \dot{g}_{ijkl} X^l + \overset{\circ}{\nabla}_k \overset{\circ}{S}(X)_{ij} + \overset{\circ}{\nabla}_j \overset{\circ}{S}(X)_{ik} - \overset{\circ}{\nabla}_i \overset{\circ}{S}(X)_{jk}, \quad (6.47)$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \|\overset{\circ}{\nabla}^2 X\|_{2,-\delta} &\leq \|\text{Riem } \dot{g} X\|_{2,-\delta} + c \|\overset{\circ}{\nabla} \overset{\circ}{S}(X)\|_{2,-\delta} \\ &\leq \|\text{Riem } \dot{g}\|_{\infty,0} \|X\|_{2,-\delta} + c \|\overset{\circ}{\nabla} \overset{\circ}{S}(X)\|_{2,-\delta} \\ &\leq c \|X\|_{2,-\delta} + c \|\overset{\circ}{\nabla} \overset{\circ}{S}(X)\|_{2,-\delta}. \end{aligned} \quad (6.48)$$

D'autre part, une conséquence du Lemme 19 est

$$\|X\|_{2,-\delta} \leq \|X\|_{1,2,-\delta} \leq c \|\overset{\circ}{S}(X)\|_{2,-\delta}, \quad (6.49)$$

qui, avec (6.48), implique

$$\|\overset{\circ}{\nabla}^2 X\|_{2,-\delta} \leq c \|\overset{\circ}{S}(X)\|_{1,2,-\delta}, \quad (6.50)$$

et compte tenu de (6.49), il vient

$$\|X\|_{2,2,-\delta} \leq c_1 \|\overset{\circ}{S}(X)\|_{1,2,-\delta}.$$

D'après (6.30)

$$\begin{aligned} \|\overset{\circ}{S}(X)\|_{1,2,-\delta} &\leq \frac{1}{4} \|D\Phi(g, \pi)_2^* \cdot \xi\|_{1,2,-\delta} + n\tau \|N\|_{1,2,-\delta} + C \|\xi\|_{\infty,-2\delta} \\ &\leq \frac{1}{4} \|D\Phi(g, \pi)_2^* \cdot \xi\|_{1,2,-\delta} + n\tau \|N\|_{1,2,-\delta} + \varepsilon \|\xi\|_{2,2,-\delta} + C \|\xi\|_{1,2,-2\delta}. \end{aligned} \quad (6.51)$$

Il existe donc une constante  $C$  dépendant de  $\dot{g}, \lambda, \varepsilon, \delta$  et  $\|(g, \pi)\|_{\mathcal{F}}$  telle que

$$\|X\|_{2,2,-\delta} - nc_1 \tau \|N\|_{1,2,-\delta} \leq \frac{c_1}{4} \|D\Phi(g, \pi)_2^* \xi\|_{1,2,-\delta} + \varepsilon \|\xi\|_{2,2,-\delta} + C \|\xi\|_{1,2,-2\delta}. \quad (6.52)$$

On peut choisir  $\varepsilon_0 \ll 1$  de façon à ce que (6.46) +  $\varepsilon_0(6.52)$  se combinent pour donner (6.44).  $\square$

Remarque : il est peut être possible d'étendre ce résultat à  $\delta = -(n-1)/2$  en se servant de l'opérateur  $\dot{U}$  introduit dans la section suivante.

En combinant la Proposition 19 et l'inégalité de Ehrling (4.13), on obtient

**Corollaire 5:**

Soit  $\delta \in ]-(n+1)/2, 0]$ , avec  $n = 3$  et  $\delta \neq -(n-1)/2$ .

Alors on a l'estimée elliptique suivante :  $\forall \xi \in W_{-\delta}^{2,2}(\mathcal{T})$ ,

$$\|\xi\|_{2,2,-\delta} \leq c (\|D\Phi(g, \pi)_1^* \xi\|_{2,-\delta} + \|D\Phi(g, \pi)_2^* \xi\|_{1,2,-\delta}) + C \|\xi\|_{2,-2\delta}, \quad (6.53)$$

où  $C$  dépend de  $\dot{g}, \lambda, \delta$  et  $\|(g, \pi)\|_{\mathcal{F}}$

Notons la dépendance en  $(g, \pi)$  de l'opérateur  $P^*$  contrôlée comme suit :

**Proposition 20:**

Soit  $\delta \leq 0$ , alors en dimension 3, l'opérateur  $P^* : W_{-\delta}^{2,2}(\mathcal{T}) \rightarrow L_{-\delta}^2(\tilde{\mathcal{S}}) \times W_{-\delta}^{1,2}(\mathcal{S})$  est borné et vérifie

$$\|\xi\|_{2,2,-\delta} \leq c \|P^* \xi\|_{2,-\delta} + C \|\xi\|_{1,2,-2\delta}, \quad (6.54)$$

où  $C$  dépend de  $\dot{g}, \delta$  et  $\|(g, \pi)\|_{\mathcal{F}}$ .

De plus,  $P_{(g,\pi)}^*$  dépend de  $(g, \pi) \in \mathcal{F}$  de manière Lipschitzienne,

$$\|(P_{(g,\pi)}^* - P_{(\tilde{g}, \tilde{\pi})}^*) \xi\|_{2,-\delta} \leq C_1 \|(g - \tilde{g}, \pi - \tilde{\pi})\|_{\mathcal{F}} \|\xi\|_{2,2,-\delta}, \quad (6.55)$$

où la constante  $C_1$  dépend de  $\dot{g}, \delta, \|(g, \pi)\|_{\mathcal{F}}$  et  $\|(\tilde{g}, \tilde{\pi})\|_{\mathcal{F}}$ .

Preuve :

Montrons que  $P^*$  est borné, *i.e.*

$$\|P^* \xi\|_{2,-\delta} \leq C \|\xi\|_{2,2,-\delta}. \quad (6.56)$$

On note

$$\begin{cases} P^* = P_{(g,\pi)}^* \\ D\Phi_1^* = D\Phi(g, \pi)_1^* \\ D\Phi_2^* = D\Phi(g, \pi)_2^* \end{cases} .$$

D'après (6.33),

$$\begin{aligned} \|P^* \xi\|_{2,-\delta} &\leq c (\|D\Phi_1^* \xi\|_{2,-\delta} + \|\nabla D\Phi_2^* \xi\|_{2,-\delta}) \\ &\leq c (\|D\Phi_1^* \xi\|_{2,-\delta} + \|\dot{\nabla} D\Phi_2^* \xi\|_{2,-\delta} + \|AD\Phi_2^* \xi\|_{2,-\delta}). \end{aligned} \quad (6.57)$$

D'après (6.29), (4.15), (4.17), l'inégalité de Sobolev et l'inclusion de Sobolev ( $\delta \leq 0$ )

$$\begin{aligned} \|D\Phi_1^* \cdot \xi\|_{2,-\delta} &\leq c (\|T\|_{2,-\delta} + \|\dot{S}(X)\|_{2,-\delta} + \|N\|_{2,-\delta}) + C (\|\xi\|_{\infty,-2\delta} + \|\dot{\nabla} X\|_{1,2,-2\delta}) \\ &\leq c (\|N\|_{2,2,-\delta} + \|X\|_{1,2,-\delta} + \|N\|_{2,-\delta}) + C (\|\xi\|_{2,-\delta} + \|\dot{\nabla} X\|_{1,2,-\delta}) \\ &\leq C \|\xi\|_{2,2,-\delta}. \end{aligned} \quad (6.58)$$

D'après (6.30) et en utilisant (4.15), (4.17), l'inégalité de Sobolev et l'inclusion de Sobolev ( $\delta \leq 0$ )

$$\|D\Phi_2^* \cdot \xi\|_{2,-\delta} \leq c (\|\dot{S}(X)\|_{2,-\delta} + \|N\|_{2,-\delta}) + C \|\xi\|_{1,2,-2\delta}. \quad (6.59)$$

$$\begin{aligned} \|AD\Phi_2^* \cdot \xi\|_{2,-\delta} &\leq c (\|A\dot{S}(X)\|_{2,-\delta} + \|AN\|_{2,-\delta}) + \|\xi\|_{\infty,-2\delta} \\ &\leq C (\|\dot{S}(X)\|_{1,2,-\delta} + \|N\|_{1,2,-\delta}) + \|\xi\|_{2,2,-2\delta} \\ &\leq C \|\xi\|_{2,2,-\delta}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|\dot{\nabla} D\Phi_2^* \cdot \xi\|_{2,-\delta} &\leq c (\|\dot{\nabla} \dot{S}(X)\|_{2,-\delta} + \|\dot{\nabla} N\|_{2,-\delta}) + \|\xi\|_{\infty,-2\delta} \\ &\leq C \|\xi\|_{2,2,-\delta}. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\|D\Phi_2^* \cdot \xi\|_{2,-\delta} \leq \|D\Phi_2^* \cdot \xi\|_{1,2,-\delta} \leq C \|\xi\|_{2,2,-\delta}. \quad (6.60)$$

Tous les termes de (6.57) sont donc contrôlés par  $\|\xi\|_{2,2,-2\delta}$  et on obtient ainsi (6.56). L'estimée (6.54) vérifiée par  $P^*$  découle directement de (6.44). Montrons pour terminer le caractère Lipschitzien de  $P^*$  :

On note

$$\begin{cases} \tilde{P}^* = P^*_{(\tilde{g}, \tilde{\pi})} \\ D\tilde{\Phi}_1^* = D\Phi(\tilde{g}, \tilde{\pi})_1^* \\ D\tilde{\Phi}_2^* = D\Phi(\tilde{g}, \tilde{\pi})_2^* \end{cases} .$$

$$\begin{aligned} (P^* - \tilde{P}^*) \xi &= \begin{pmatrix} g^{-1/4} D\Phi_1^* \cdot \xi - \tilde{g}^{-1/4} D\tilde{\Phi}_1^* \cdot \xi \\ g^{1/4} \nabla D\Phi_2^* \cdot \xi - \tilde{g}^{1/4} \tilde{\nabla} D\tilde{\Phi}_2^* \cdot \xi \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} E \\ F \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\|(P^* - \tilde{P}^*) \xi\|_{2,-\delta} \leq \|E\|_{2,-\delta} + \|F\|_{2,-\delta}. \quad (6.61)$$

$$\begin{aligned} E &= g^{-1/4} D\Phi_1^* \cdot \xi - \tilde{g}^{-1/4} D\tilde{\Phi}_1^* \cdot \xi \\ &= (g^{-1/4} - \tilde{g}^{-1/4}) D\Phi_1^* \cdot \xi + \tilde{g}^{-1/4} (D\Phi_1^* \cdot \xi - D\tilde{\Phi}_1^* \cdot \xi). \end{aligned}$$

En utilisant (4.15), l'inégalité de Sobolev et l'inclusion de Sobolev ( $\delta \leq 0$ )

$$\begin{aligned} \|E\|_{2,-\delta} &\leq \|(g^{-1/4} - \tilde{g}^{-1/4}) D\Phi_1^* \cdot \xi\|_{2,-\delta} + \|\tilde{g}^{-1/4} (D\Phi_1^* \cdot \xi - D\tilde{\Phi}_1^* \cdot \xi)\|_{2,-\delta} \\ &\leq \|g^{-1/4} - \tilde{g}^{-1/4}\|_{\infty,\delta} \|D\Phi_1^* \cdot \xi\|_{2,-2\delta} + \|\tilde{g}^{-1/4}\|_{\infty,0} \|D\Phi_1^* \cdot \xi - D\tilde{\Phi}_1^* \cdot \xi\|_{2,-\delta} \\ &\leq c \|g - \tilde{g}\|_{\mathcal{F}} \|D\Phi_1^* \cdot \xi\|_{2,-\delta} + c \|D\Phi_1^* \cdot \xi - D\tilde{\Phi}_1^* \cdot \xi\|_{2,-\delta}. \end{aligned}$$

En notant  $D\Phi_0(g)^*N := D\Phi(g, 0)^*(N, 0)$  et  $D\Phi_0(\tilde{g})^*N := D\Phi(\tilde{g}, 0)^*(N, 0)$ , il vient d'après (6.25)

$$\begin{aligned} D\Phi_1^*.\xi - D\tilde{\Phi}_1^*.\xi &= [D\Phi_0(g)^* - D\Phi_0(\tilde{g})^*]N + (\Pi\sqrt{g} - \tilde{\Pi}\sqrt{\tilde{g}})N + X\overset{\circ}{\nabla}(\pi - \tilde{\pi}) \\ &\quad + (\pi - \tilde{\pi})\overset{\circ}{\nabla}X + AX(\pi - \tilde{\pi}). \end{aligned}$$

En utilisant (4.15), (4.17), l'inégalité de Sobolev et l'inclusion de Sobolev ( $\delta \leq 0$ )

$$\begin{aligned} \|(\pi - \tilde{\pi})\overset{\circ}{\nabla}X\|_{2,-\delta} + \|X\overset{\circ}{\nabla}(\pi - \tilde{\pi})\|_{2,-\delta} &\leq \|\pi - \tilde{\pi}\|_{1,2,\delta} \|\overset{\circ}{\nabla}X\|_{1,2,-2\delta} \\ &\quad + \|\overset{\circ}{\nabla}(\pi - \tilde{\pi})\|_{2,\delta} \|X\|_{\infty,-2\delta} \\ &\leq c \|\pi - \tilde{\pi}\|_{1,2,\delta} \|X\|_{2,2,-\delta}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|AX(\pi - \tilde{\pi})\|_{2,-\delta} &\leq \|A(\pi - \tilde{\pi})\|_{2,\delta} \|X\|_{\infty,-2\delta} \\ &\leq c \|A\|_{1,2,\delta} \|\pi - \tilde{\pi}\|_{1,2,\delta} \|X\|_{2,2,-\delta} \\ &\leq C \|\pi - \tilde{\pi}\|_{1,2,\delta} \|X\|_{2,2,-\delta}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Pi\sqrt{g} - \tilde{\Pi}\sqrt{\tilde{g}} &\sim \frac{1}{\sqrt{g}}g^{-1}\pi^2 - \frac{1}{\sqrt{\tilde{g}}}\tilde{g}^{-1}\tilde{\pi}^2 \\ &\sim \frac{1}{\sqrt{g}}(g^{-1} - \tilde{g}^{-1})\pi^2 + \frac{1}{\sqrt{g}}\tilde{g}^{-1}(\pi^2 - \tilde{\pi}^2) + \left(\frac{1}{\sqrt{g}} - \frac{1}{\sqrt{\tilde{g}}}\right)\tilde{g}^{-1}\tilde{\pi}^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|(\Pi\sqrt{g} - \tilde{\Pi}\sqrt{\tilde{g}})N\|_{2,-\delta} &\leq c \|g^{-1} - \tilde{g}^{-1}\|_{\infty,\delta} \|(\pi - \tilde{\pi})^2\|_{2,\delta} \|N\|_{\infty,-3\delta} \\ &\quad + c \|g^{-1} - \tilde{g}^{-1}\|_{\infty,\delta} \|\tilde{\pi}^2\|_{\infty,0} \|N\|_{\infty,-2\delta} \\ &\quad + c \|\pi - \tilde{\pi}\|_{1,2,\delta} (\|\pi - \tilde{\pi}\|_{1,2,\delta} + \|\tilde{\pi} - \tilde{\pi}\|_{1,2,\delta}) \|N\|_{\infty,-3\delta} \\ &\quad + c \|\pi - \tilde{\pi}\|_{2,\delta} \|\tilde{\pi}^2\|_{\infty,0} \|N\|_{\infty,-2\delta} \\ &\quad + c \left\| \frac{1}{\sqrt{g}} - \frac{1}{\sqrt{\tilde{g}}} \right\|_{\infty,\delta} \|(\tilde{\pi} - \tilde{\pi})^2\|_{2,\delta} \|N\|_{\infty,-3\delta} \\ &\quad + c \left\| \frac{1}{\sqrt{g}} - \frac{1}{\sqrt{\tilde{g}}} \right\|_{\infty,\delta} \|\tilde{\pi}^2\|_{\infty,0} \|N\|_{\infty,-2\delta} \\ &\leq c \|g - \tilde{g}\|_{2,2,\delta} (\|\pi - \tilde{\pi}\|_{1,2,\delta}^2 + 1) \|N\|_{\infty,-\delta} \\ &\quad + c (\|\pi - \tilde{\pi}\|_{1,2,\delta} + \|\tilde{\pi} - \tilde{\pi}\|_{1,2,\delta} + 1) \|\pi - \tilde{\pi}\|_{1,2,\delta} \|N\|_{\infty,-\delta} \\ &\quad + c \left\| \frac{1}{\sqrt{g}} - \frac{1}{\sqrt{\tilde{g}}} \right\|_{2,2,\delta} (\|\tilde{\pi} - \tilde{\pi}\|_{1,2,\delta}^2 + 1) \|N\|_{\infty,-\delta} \\ &\leq C \|(g - \tilde{g}, \pi - \tilde{\pi})\|_{\mathcal{F}} \|N\|_{2,2,-\delta}. \end{aligned}$$

Au vu de (5.38),

$$\|D\Phi_1^*.\xi - D\tilde{\Phi}_1^*.\xi\|_{2,-\delta} \leq C \|(g - \tilde{g}, \pi - \tilde{\pi})\|_{\mathcal{F}} \|\xi\|_{2,2,-\delta}$$

et compte tenu de (6.58),

$$\|E\|_{2,-\delta} \leq C \|(g - \tilde{g}, \pi - \tilde{\pi})\|_{\mathcal{F}} \|\xi\|_{2,2,-\delta}. \quad (6.62)$$

$$\begin{aligned} F &= g^{1/4} \nabla D\Phi_2^* \xi - \tilde{g}^{1/4} \tilde{\nabla} D\tilde{\Phi}_2^* \xi \\ &= g^{1/4} (\nabla - \tilde{\nabla}) D\Phi_2^* \xi + (g^{1/4} - \tilde{g}^{1/4}) \tilde{\nabla} D\tilde{\Phi}_2^* \xi + g^{1/4} \tilde{\nabla} (D\Phi_2^* \xi - D\tilde{\Phi}_2^* \xi). \end{aligned}$$

En utilisant (5.46), (4.15), (4.17), l'inégalité de Sobolev et l'inclusion de Sobolev ( $\delta \leq 0$ )

$$\begin{aligned} \|F\|_{2,-\delta} &\leq c \|\nabla - \tilde{\nabla}\|_{1,2,\delta} \|D\Phi_2^* \xi\|_{1,2,-2\delta} + \|g^{1/4} - \tilde{g}^{1/4}\|_{\infty,-\delta} \|\tilde{\nabla} D\tilde{\Phi}_2^* \xi\|_{2,-2\delta} \\ &\quad + c \|\mathring{\nabla} (D\Phi_2^* \xi - D\tilde{\Phi}_2^* \xi)\|_{2,-\delta} + c \|A(D\Phi_2^* \xi - D\tilde{\Phi}_2^* \xi)\|_{2,-\delta} \\ &\leq C \|g - \tilde{g}\|_{\mathcal{F}} \|D\Phi_2^* \xi\|_{1,2,-2\delta} + c \|g - \tilde{g}\|_{\mathcal{F}} \|\tilde{\nabla} D\tilde{\Phi}_2^* \xi\|_{2,-2\delta} \\ &\quad + c \|\mathring{\nabla} (D\Phi_2^* \xi - D\tilde{\Phi}_2^* \xi)\|_{2,-\delta} + c \|A(D\Phi_2^* \xi - D\tilde{\Phi}_2^* \xi)\|_{2,-\delta}. \end{aligned}$$

Compte tenu de (6.59) et (6.60),

$$\begin{aligned} \|F\|_{2,-\delta} &\leq C \|g - \tilde{g}\|_{\mathcal{F}} \|\xi\|_{2,2,-\delta} + c \|\mathring{\nabla} (D\Phi_2^* \xi - D\tilde{\Phi}_2^* \xi)\|_{2,-\delta} \\ &\quad + c \|A(D\Phi_2^* \xi - D\tilde{\Phi}_2^* \xi)\|_{2,-\delta}. \end{aligned} \quad (6.63)$$

$$\begin{aligned} D\Phi_2^* \xi - D\tilde{\Phi}_2^* \xi &\sim (K - \tilde{K})N + (A - \tilde{A})X \\ &\sim (\pi - \tilde{\pi})N + (\nabla - \tilde{\nabla})X. \end{aligned}$$

En utilisant (5.46), (4.15), (4.17), l'inégalité de Sobolev et l'inclusion de Sobolev ( $\delta \leq 0$ )

$$\begin{aligned} \|\mathring{\nabla} (D\Phi_2^* \xi - D\tilde{\Phi}_2^* \xi)\|_{2,-\delta} &\leq c \|\mathring{\nabla} (\pi - \tilde{\pi})\|_{2,\delta} \|N\|_{\infty,-2\delta} + c \|\pi - \tilde{\pi}\|_{1,2,\delta} \|\mathring{\nabla} N\|_{1,2,-2\delta} \\ &\quad + \|\mathring{\nabla} (\nabla - \tilde{\nabla})\|_{2,\delta} \|X\|_{\infty,-2\delta} + \|\nabla - \tilde{\nabla}\|_{1,2,\delta} \|\mathring{\nabla} X\|_{1,2,-2\delta} \\ &\leq c \|\pi - \tilde{\pi}\|_{1,2,\delta} \|N\|_{2,2,-\delta} + c \|\nabla - \tilde{\nabla}\|_{1,2,\delta} \|X\|_{2,2,-\delta} \\ &\leq C \|(g - \tilde{g}, \pi - \tilde{\pi})\|_{\mathcal{F}} \|\xi\|_{2,2,-\delta}. \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned} \|A(D\Phi_2^* \xi - D\tilde{\Phi}_2^* \xi)\|_{2,-\delta} &\leq c \|A(\pi - \tilde{\pi})\|_{2,\delta} \|N\|_{\infty,-2\delta} + \|A(\nabla - \tilde{\nabla})\|_{2,\delta} \|X\|_{\infty,-2\delta} \\ &\leq c \|A\|_{1,2,\delta} \|\pi - \tilde{\pi}\|_{1,2,\delta} \|N\|_{2,2,-\delta} \\ &\quad + c \|A\|_{1,2,\delta} \|\nabla - \tilde{\nabla}\|_{1,2,\delta} \|X\|_{2,2,-\delta} \\ &\leq C \|(g - \tilde{g}, \pi - \tilde{\pi})\|_{\mathcal{F}} \|\xi\|_{2,2,-\delta}. \end{aligned}$$

On déduit de (6.63)

$$\|F\|_{2,-\delta} \leq C \|(g - \tilde{g}, \pi - \tilde{\pi})\|_{\mathcal{F}} \|\xi\|_{2,2,-\delta}. \quad (6.64)$$

et le résultat (6.55) découle de (6.61), considérant (6.62) et (6.64).  $\square$

On montre dans la proposition suivante que l'estimée elliptique (5.37) du Corollaire 1 est également vérifiée par des solutions faibles  $\xi$  seulement dans  $L^2_{-\delta}(\mathcal{T})$ . Ce passage de solution faible à solution forte est indispensable pour montrer la trivialité du noyau de l'adjoint. On dit que  $\xi \in \mathcal{L}$  est une solution faible de  $D\Phi(g, \pi)^* \xi = (f_1, f_2)$ , avec  $(f_1, f_2) \in L^2_{-\delta}(\tilde{\mathcal{S}}) \times W^{1,2}_{-\delta}(\mathcal{S})$  lorsque

$$\int_{\mathcal{M}} \langle \xi, D\Phi(g, \pi) \cdot (h, p) \rangle_{\tilde{g}} = \int_{\mathcal{M}} \langle (f_1, f_2), (h, p) \rangle_{\tilde{g}}, \quad \forall (h, p) \in \mathcal{G} \times \mathcal{K}.$$

Il suffit de tester avec  $(h, p) \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathcal{S} \times \tilde{\mathcal{S}})$  puisque cet espace est dense dans  $\mathcal{G} \times \mathcal{K}$ .

**Proposition 21:**

Soit  $\delta \in ]-(n+1)/2, 0] \setminus \{-(n-1)/2\}$  avec  $n = 3$ ,  $(g, \pi) \in \mathcal{G}^+ \times \mathring{\mathcal{K}}$ ,  
 $(f_1, f_2) \in L^2_{-\delta}(\tilde{\mathcal{S}}) \times W^{1,2}_{-\delta}(\mathcal{S})$ . Soit  $\xi \in \mathcal{L}$  une solution faible de  $D\Phi(g, \pi)^* \xi = (f_1, f_2)$ .  
 Alors  $\xi \in W^{2,2}_{-\delta}(\mathcal{T})$  est une solution forte et satisfait l'estimée elliptique (6.44).

Preuve :

Dans [5], Bartnik montre que  $\xi \in W^{2,2}_{\text{loc}}$ .

On peut trouver une fonction régularisante  $\chi_R$  comme dans la Définition 1 telle que

- $\chi_R \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega_R)$ .
- $\chi_R = 1$  sur  $\Omega_{R/2}$ .

En particulier,  $\chi_R \xi \in W^{2,2}_{-\delta}(\mathcal{T})$  et on peut écrire d'après la Proposition 19 :

$$\begin{aligned} \|\chi_R \xi\|_{2,2,-\delta} &\leq c (\|D\Phi(g, \pi)_1^* (\chi_R \xi)\|_{2,-\delta} + \|D\Phi(g, \pi)_2^* (\chi_R \xi)\|_{1,2,-\delta}) + C \|\chi_R \xi\|_{2,-2\delta} \\ &\leq c (\|D\Phi(g, \pi)_1^* (\chi_R \xi)\|_{2,-\delta} + \|D\Phi(g, \pi)_2^* (\chi_R \xi)\|_{1,2,-\delta}) + C \|\xi\|_{2,-\delta} \end{aligned} \quad (6.65)$$

en utilisant l'inclusion de Sobolev ( $\delta \leq 0$ ) et compte tenu que  $\chi_R \xi$  converge vers  $N$  dans  $L^2_{-\delta}$ . Il nous faut montrer que  $\chi_R \xi$  est uniformément borné dans  $W^{2,2}_{-\delta}$ , c'est à dire contrôlé indépendamment de  $R$ . On utilise là encore la méthode de McCormick [45]. D'après (6.28) et (6.30),

$$\begin{aligned} D\Phi(g, \pi)_1^* (\chi_R \xi) &\simeq \chi_R (D\Phi(g, \pi)_1^* (\xi)) + N \nabla^2 \chi_R + dN \nabla \chi_R + X \nabla \chi_R + \xi W_\delta^{1,2} \nabla \chi_R \\ D\Phi(g, \pi)_2^* (\chi_R \xi) &\simeq \chi_R (D\Phi(g, \pi)_2^* (\xi)) + X \nabla \chi_R \end{aligned}$$

En remarquant que les dérivées de  $\chi_R$  sont à support dans  $A_R := \Omega_R \setminus \Omega_{R/2}$  et en utilisant (4.15), (4.19), (4.20), l'inclusion de Sobolev ( $\delta \leq 0$ ) et l'inégalité de Ehrling,

$$\begin{aligned} \|D\Phi(g, \pi)_1^* (\chi_R \xi)\|_{2,-\delta} &\leq c (\|\chi_R (D\Phi(g, \pi)_1^* (\xi))\|_{2,-\delta} + \|N \nabla^2 \chi_R\|_{2,-\delta} \\ &\quad + \|dN \nabla \chi_R\|_{2,-\delta} + \|X \nabla \chi_R\|_{2,-\delta} + \|\xi W_\delta^{1,2} \nabla \chi_R\|_{2,-\delta}) \\ &\leq c (\|D\Phi(g, \pi)_1^* (\xi)\|_{2,-\delta} + \|N\|_{2,-\delta;A_R} \\ &\quad + \|dN\|_{2,-\delta;A_R} + \|X\|_{2,-\delta;A_R} + \|\xi W_\delta^{1,2}\|_{2,-\delta;A_R}) \\ &\leq c \|D\Phi(g, \pi)_1^* (\xi)\|_{2,-\delta} + C \|\xi\|_{2,-\delta;A_R} + \varepsilon \|\mathring{\nabla}^2 \xi\|_{2,-\delta;A_R} \end{aligned} \quad (6.66)$$

où  $C$  est une constante dépendant de  $\mathring{g}, \lambda, \varepsilon, \delta$  et  $\|(g, \pi)\|_{\mathcal{F}}$ .

De même,

$$\begin{aligned} \|D\Phi(g, \pi)_2^* (\chi_R \xi)\|_{1,2,-\delta} &\leq c (\|\chi_R (D\Phi(g, \pi)_2^* (\xi))\|_{1,2,-\delta} + \|X \nabla \chi_R\|_{1,2,-\delta}) \\ &\leq c (\|D\Phi(g, \pi)_2^* (\xi)\|_{1,2,-\delta} + \|X\|_{1,2,-\delta;A_R}) \\ &\leq c \|D\Phi(g, \pi)_2^* (\xi)\|_{1,2,-\delta} + C \|X\|_{2,-\delta;A_R} + \varepsilon \|\mathring{\nabla}^2 X\|_{2,-\delta;A_R} \end{aligned} \quad (6.67)$$

En insérant (6.66) et (6.67) dans (6.65), on obtient

$$\begin{aligned} \|\chi_R \xi\|_{2,2,-\delta} &\leq c \|D\Phi(g, \pi)_1^* (\xi)\|_{2,-\delta} + \|D\Phi(g, \pi)_2^* (\xi)\|_{1,2,-\delta} + C \|\xi\|_{2,-\delta} \\ &\quad + \varepsilon \|\mathring{\nabla}^2 \xi\|_{2,-\delta;A_R}. \end{aligned} \quad (6.68)$$

En reprenant la définition (5.39) de l'opérateur  $O$ , on a immédiatement le lien avec l'opérateur  $T$  :

$$O = T - g\text{tr}_g T - (n-1)gN$$

et on déduit d'après (6.45)

$$\begin{aligned} O &= D\Phi(g, \pi)_1^* \cdot \xi / \sqrt{g} + (n-1)\tau(D\Phi(g, \pi)_2^* \cdot \xi - \frac{1}{2}\mathring{g}\text{tr}_{\mathring{g}} D\Phi(g, \pi)_2^* \cdot \xi) \\ &\quad + L_\delta^2 \xi + W_\delta^{1,2} \mathring{\nabla} X - (n-1)gN \end{aligned} \quad (6.69)$$

D'après (5.54), (6.69) et en utilisant (4.15), (4.19), (4.20), l'inclusion de Sobolev ( $\delta \leq 0$ ) et l'inégalité de Ehrling, il existe une constante  $C$  dépendant de  $\mathring{g}, \lambda, \varepsilon, \delta$  et  $\|(g, \pi)\|_{\mathcal{F}}$  telle que

$$\begin{aligned} \|\mathring{\nabla}^2 N\|_{2,-\delta} &\leq c (\|D\Phi(g, \pi)_1^* \cdot \xi\|_{2,-\delta} + \|D\Phi(g, \pi)_2^* \cdot \xi\|_{2,-\delta}) \\ &\quad + \varepsilon \|\mathring{\nabla}^2 \xi\|_{2,-\delta} + C \|\xi\|_{2,-\delta}. \end{aligned} \quad (6.70)$$

D'autre part, en combinant (6.50) et (6.51), en utilisant l'inégalité de Ehrling et l'inclusion de Sobolev ( $\delta \leq 0$ ), on obtient

$$\|\mathring{\nabla}^2 X\|_{2,-\delta} \leq c \|D\Phi(g, \pi)_2^* \cdot \xi\|_{1,2,-\delta} + \varepsilon \|\mathring{\nabla}^2 \xi\|_{2,-\delta} + C \|\xi\|_{2,-\delta}. \quad (6.71)$$

La combinaison de (6.70) et (6.71) donne

$$\|\mathring{\nabla}^2 \xi\|_{2,-\delta} \leq c (\|D\Phi(g, \pi)_1^* \cdot \xi\|_{2,-\delta} + \|D\Phi(g, \pi)_2^* \cdot \xi\|_{1,2,-\delta}) + C \|\xi\|_{2,-\delta}. \quad (6.72)$$

Etant donné que  $\xi \in W_{-\delta}^{2,2}(A_R)$  et que toutes les inégalités utilisées pour obtenir (6.72) sont valables en particulier sur tout compact, on a la version locale suivante sur  $A_R$

$$\begin{aligned} \|\mathring{\nabla}^2 \xi\|_{2,-\delta; A_R} &\leq c (\|D\Phi(g, \pi)_1^* \cdot \xi\|_{2,-\delta; A_R} + \|D\Phi(g, \pi)_2^* \cdot \xi\|_{1,2,-\delta; A_R}) + C \|\xi\|_{2,-\delta; A_R} \\ &\leq c (\|D\Phi(g, \pi)_1^* \cdot \xi\|_{2,-\delta} + \|D\Phi(g, \pi)_2^* \cdot \xi\|_{1,2,-\delta}) + C \|\xi\|_{2,-\delta} \end{aligned} \quad (6.73)$$

L'équation (6.68) devient

$$\begin{aligned} \|\chi_{R\xi}\|_{2,2,-\delta} &\leq c (\|D\Phi(g, \pi)_1^* \cdot (\xi)\|_{2,-\delta} + \|D\Phi(g, \pi)_2^* \cdot (\xi)\|_{1,2,-\delta}) + C \|\xi\|_{2,-\delta} \\ &\leq c (\|f_1\|_{2,-\delta} + \|f_2\|_{1,2,-\delta}) + C \|\xi\|_{2,-\delta}. \end{aligned}$$

La suite  $\chi_{R\xi}$  est de Cauchy dans  $W_{-\delta}^{2,2}$ , donc convergente dans  $W_{-\delta}^{2,2}$ . Comme  $\chi_{R\xi}$  converge vers  $\xi$  dans  $L_{-\delta}^2$ , par unicité de la limite,  $\chi_{R\xi}$  converge vers  $\xi$  dans  $W_{-\delta}^{2,2}(\mathcal{T})$ . Donc  $\xi \in W_{-\delta}^{2,2}(\mathcal{T})$  et par suite  $\xi$  vérifie (6.44).  $\square$

## 6.4 L'opérateur $\mathring{U}$

Nous introduisons ici un opérateur  $\mathring{U}$  inspiré de la formule (6.47). Celui-ci va nous permettre de contrôler la norme  $W_\delta^{2,2}$  de  $X$  par les  $L_\delta^2$ -normes de  $\mathring{S}$  et  $\mathring{U}$  et ainsi par la  $W_\delta^{1,2}$ -norme de  $\mathring{S}$ . L'estimation désirée découlera d'une série de lemmes.

Soit  $\mathring{U}$  l'opérateur défini sur les 1-formes par

$$\mathring{U}_{kji}(X) = \mathring{\nabla}_{kj}^2 X_i - \mathring{g}_{jk} X_i + \mathring{g}_{ik} X_j. \quad (6.74)$$

On a ainsi

$$\|\mathring{\nabla}^2 X\|_{2,-\delta} - c \|X\|_{2,-\delta} \leq \|\mathring{U}(X)\|_{2,-\delta}. \quad (6.75)$$

**Lemme 20:**

Soit  $(M, \mathring{g})$  une variété AH avec  $\mathring{g} = \rho^{-2}\mathring{h}$  et  $\delta \in \mathbb{R}$ .  $\forall X \in \mathcal{C}_c^\infty(T^*\mathcal{M})$ ,

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{M}} \mathring{\nabla} X \left( \frac{d\rho}{\rho}, X \right) \rho^{2\delta} d\mu(\mathring{g}) &= \int_{\mathcal{M}} \rho^{2\delta} \left( \frac{n-1}{2} - \delta + o(1) \right) |X|_{\mathring{g}}^2 d\mu(\mathring{g}) \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{\partial\mathcal{M}} |X|_{\mathring{g}}^2 \left\langle \frac{d\rho}{\rho}, \eta \right\rangle_{\mathring{g}} \rho^{2\delta} d\sigma(\mathring{g}) \end{aligned} \quad (6.76)$$

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{M}} \mathring{\nabla} X \left( X, \frac{d\rho}{\rho} \right) \rho^{2\delta} d\mu(\mathring{g}) &= - \int_{\mathcal{M}} \rho^{2\delta} \left( \operatorname{div} X \left\langle X, \frac{d\rho}{\rho} \right\rangle + (2\delta + 1) \left\langle X, \frac{d\rho}{\rho} \right\rangle^2 \right) d\mu(\mathring{g}) \\ &\quad + \int_{\mathcal{M}} \rho^{2\delta} (1 + o(1)) |X|_{\mathring{g}}^2 d\mu(\mathring{g}) \\ &\quad + \int_{\partial\mathcal{M}} \rho^{2\delta} \left\langle X, \frac{d\rho}{\rho} \right\rangle \langle X, \eta \rangle_{\mathring{g}} d\sigma(\mathring{g}), \end{aligned} \quad (6.77)$$

où  $\eta$  est la normale extérieure à  $\partial\mathcal{M}$ .

Preuve :

- Pour (6.76), une intégration par parties donne

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{M}} \mathring{\nabla}_i \left( |X|_{\mathring{g}}^2 \frac{\mathring{\nabla}^i \rho}{\rho} \rho^{2\delta} \right) d\mu(\mathring{g}) &= \int_{\mathcal{M}} \rho^{2\delta} \left( 2 \mathring{\nabla} X \left( \frac{d\rho}{\rho}, X \right) + 2\delta |X|_{\mathring{g}}^2 |d\rho|_{\mathring{h}}^2 \right) d\mu(\mathring{g}) \\ &\quad + \int_{\mathcal{M}} \rho^{2\delta} \left( \frac{\mathring{\Delta} \rho}{\rho} - |d\rho|_{\mathring{h}}^2 \right) |X|_{\mathring{g}}^2 d\mu(\mathring{g}). \end{aligned} \quad (6.78)$$

Or d'après le théorème de Divergence-Flux,

$$\int_{\mathcal{M}} \mathring{\nabla}_i \left( |X|_{\mathring{g}}^2 \frac{\mathring{\nabla}^i \rho}{\rho} \rho^{2\delta} \right) d\mu(\mathring{g}) = \int_{\partial\mathcal{M}} |X|_{\mathring{g}}^2 \left\langle \frac{d\rho}{\rho}, \eta \right\rangle_{\mathring{g}} \rho^{2\delta} d\sigma(\mathring{g}). \quad (6.79)$$

En remplaçant le membre de gauche de (6.78) par son expression (6.79), on obtient (6.76) compte tenu de (A.12).

- Pour (6.77), une intégration par parties donne

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{M}} \mathring{\nabla}_i \left( X^i \left\langle X, \frac{d\rho}{\rho} \right\rangle \rho^{2\delta} \right) d\mu(\mathring{g}) &= \int_{\mathcal{M}} \rho^{2\delta} \left( \mathring{\nabla} X \left( X, \frac{d\rho}{\rho} \right) + \operatorname{div} X \left\langle X, \frac{d\rho}{\rho} \right\rangle \right) d\mu(\mathring{g}) \\ &\quad + \int_{\mathcal{M}} \rho^{2\delta} 2\delta \left\langle X, \frac{d\rho}{\rho} \right\rangle^2 d\mu(\mathring{g}) \\ &\quad + \int_{\mathcal{M}} \rho^{2\delta} \left( \rho^{-1} \mathring{\nabla}^2 \rho(X, X) - \left\langle X, \frac{d\rho}{\rho} \right\rangle^2 \right) d\mu(\mathring{g}). \end{aligned} \quad (6.80)$$

Au vu de (4.2)

$$\rho^{-1} \mathring{\nabla}^2 \rho(X, X) = 2 \left\langle X, \frac{d\rho}{\rho} \right\rangle^2 - (|d\rho|_{\mathring{h}}^2 + o(1)) |X|_{\mathring{g}}^2. \quad (6.81)$$



D'autre part, d'après le théorème de Divergence-Flux,

$$\int_{\mathcal{M}} \mathring{\nabla}_i \left( X^i \left\langle X, \frac{d\rho}{\rho} \right\rangle \rho^{2\delta} \right) d\mu(\mathring{g}) = \int_{\partial\mathcal{M}} \rho^{2\delta} \left\langle X, \frac{d\rho}{\rho} \right\rangle \langle X, \eta \rangle_{\mathring{g}} d\sigma(\mathring{g}). \quad (6.82)$$

En remplaçant le membre de gauche de (6.80) par son expression (6.82), on obtient compte tenu de (6.81)

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{M}} \rho^{2\delta} \mathring{\nabla} X \left( X, \frac{d\rho}{\rho} \right) d\mu(\mathring{g}) &= - \int_{\mathcal{M}} \rho^{2\delta} \left( \operatorname{div} X \left\langle X, \frac{d\rho}{\rho} \right\rangle + (2\delta + 1) \left\langle X, \frac{d\rho}{\rho} \right\rangle^2 \right) d\mu(\mathring{g}) \\ &\quad + \int_{\mathcal{M}} \rho^{2\delta} (|d\rho|_{\mathring{h}}^2 + o(1)) |X|_{\mathring{g}}^2 d\mu(\mathring{g}) \\ &\quad + \int_{\partial\mathcal{M}} \rho^{2\delta} \left\langle X, \frac{d\rho}{\rho} \right\rangle \langle X, \eta \rangle_{\mathring{g}} d\sigma(\mathring{g}). \end{aligned} \quad (6.83)$$

On conclut avec  $|d\rho|_{\mathring{h}}^2 = 1 + o(1)$  au voisinage du bord à l'infini sur une variété AH.  $\square$

**Lemme 21:**

Soit  $(M, \mathring{g})$  une variété AH avec  $\mathring{g} = \rho^{-2} \mathring{h}$  et  $\delta \in \mathbb{R}$ .  $\forall X \in \mathcal{C}_c^\infty(T^*\mathcal{M})$ ,

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{M}} \mathring{U}_{kji}(X) \mathring{g}^{kj} X^i \rho^{2\delta} d\mu(\mathring{g}) &= - \int_{\mathcal{M}} \rho^{2\delta} |\mathring{\nabla} X|_{\mathring{g}}^2 d\mu(\mathring{g}) \\ &\quad + \int_{\mathcal{M}} \rho^{2\delta} [2\delta^2 - \delta(n-1) - (n-1) + o(1)] |X|_{\mathring{g}}^2 d\mu(\mathring{g}) \\ &\quad + \int_{\partial\mathcal{M}} \rho^{2\delta} (\mathring{\nabla} X(\eta, X) - \delta |X|_{\mathring{g}}^2 \left\langle \frac{d\rho}{\rho}, \eta \right\rangle_{\mathring{g}}) d\sigma(\mathring{g}), \end{aligned} \quad (6.84)$$

où  $\eta$  est la normale extérieure à  $\partial\mathcal{M}$ .

Preuve :

D'après (6.74),

$$\mathring{U}_{kji}(X) \mathring{g}^{kj} X^i = \langle X, \mathring{\Delta} X \rangle - (n-1) |X|_{\mathring{g}}^2.$$

Une intégration par parties donne

$$\int_{\mathcal{M}} \mathring{\nabla}_k (\mathring{\nabla}^k X_i X^i \rho^{2\delta}) d\mu(\mathring{g}) = \int_{\mathcal{M}} \rho^{2\delta} [\langle X, \mathring{\Delta} X \rangle + |\mathring{\nabla} X|_{\mathring{g}}^2 + 2\delta \mathring{\nabla} X \left( \frac{d\rho}{\rho}, X \right)] d\mu(\mathring{g}). \quad (6.85)$$

Or d'après le théorème de Divergence-Flux,

$$\int_{\mathcal{M}} \mathring{\nabla}_k (\mathring{\nabla}^k X_i X^i) d\mu(\mathring{g}) = \int_{\partial\mathcal{M}} \mathring{\nabla} X(\eta, X) \rho^{2\delta} d\sigma(\mathring{g}). \quad (6.86)$$

En remplaçant le membre de gauche de (6.85) par son expression (6.86), on obtient (6.84) compte tenu de (6.76).  $\square$

**Lemme 22:**

Soit  $(M, \mathring{g})$  une variété AH avec  $\mathring{g} = \rho^{-2}\mathring{h}$  et  $\delta \in \mathbb{R}$ .  $\forall X \in \mathcal{C}_c^\infty(T^*\mathcal{M})$ ,

$$\begin{aligned}
 & \int_{\mathcal{M}} \rho^{2\delta} \left( \mathring{U}_{kji}(X) \mathring{\nabla}^j X^i \frac{\mathring{\nabla}^k \rho}{\rho} + \operatorname{div} X \left\langle X, \frac{d\rho}{\rho} \right\rangle \right) d\mu(\mathring{g}) \\
 &= \int_{\mathcal{M}} \rho^{2\delta} \left( \frac{n-1}{2} - \delta + o(1) \right) [|\mathring{\nabla} X|_{\mathring{g}}^2 - |X|_{\mathring{g}}^2] d\mu(\mathring{g}) \\
 & \quad - \int_{\mathcal{M}} \rho^{2\delta} \left[ (2\delta + 1) \left\langle X, \frac{d\rho}{\rho} \right\rangle^2 - |X|_{\mathring{g}}^2 \right] d\mu(\mathring{g}) \\
 & \quad + \frac{1}{2} \int_{\partial\mathcal{M}} \rho^{2\delta} \left( |\mathring{\nabla} X|_{\mathring{g}}^2 \left\langle \frac{d\rho}{\rho}, \eta \right\rangle_{\mathring{g}} - |X|_{\mathring{g}}^2 \left\langle \frac{d\rho}{\rho}, \eta \right\rangle_{\mathring{g}} \right) d\sigma(\mathring{g}) \\
 & \quad + \int_{\partial\mathcal{M}} \rho^{2\delta} \left\langle X, \frac{d\rho}{\rho} \right\rangle \langle X, \eta \rangle d\sigma(\mathring{g}),
 \end{aligned} \tag{6.87}$$

où  $\eta$  est la normale extérieure à  $\partial\mathcal{M}$ .

Preuve :

D'après (6.74),

$$\mathring{U}_{kji}(X) \mathring{\nabla}^j X^i \frac{\mathring{\nabla}^k \rho}{\rho} = \mathring{\nabla}_{kj}^2 X_i \mathring{\nabla}^j X^i \frac{\mathring{\nabla}^k \rho}{\rho} - \mathring{\nabla} X \left( \frac{d\rho}{\rho}, X \right) + \mathring{\nabla} X \left( X, \frac{d\rho}{\rho} \right).$$

Une intégration par parties donne

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathcal{M}} \mathring{\nabla}_k (|\mathring{\nabla} X|_{\mathring{g}}^2 \frac{\mathring{\nabla}^k \rho}{\rho} \rho^{2\delta}) d\mu(\mathring{g}) &= \int_{\mathcal{M}} \rho^{2\delta} \left( 2 \mathring{\nabla}_{kj}^2 X_i \mathring{\nabla}^j X^i \frac{\mathring{\nabla}^k \rho}{\rho} + 2\delta |\mathring{\nabla} X|_{\mathring{g}}^2 |d\rho|_{\mathring{h}}^2 \right) d\mu(\mathring{g}) \\
 & \quad + \int_{\mathcal{M}} \rho^{2\delta} \left( \frac{\mathring{\Delta} \rho}{\rho} - |d\rho|_{\mathring{h}}^2 \right) |\mathring{\nabla} X|_{\mathring{g}}^2 d\mu(\mathring{g}).
 \end{aligned} \tag{6.88}$$

Or d'après le théorème de Divergence-Flux,

$$\int_{\mathcal{M}} \mathring{\nabla}_k (|\mathring{\nabla} X|_{\mathring{g}}^2 \frac{\mathring{\nabla}^k \rho}{\rho} \rho^{2\delta}) d\mu(\mathring{g}) = \int_{\partial\mathcal{M}} \rho^{2\delta} |\mathring{\nabla} X|_{\mathring{g}}^2 \left\langle \frac{d\rho}{\rho}, \eta \right\rangle_{\mathring{g}} d\sigma(\mathring{g}). \tag{6.89}$$

En remplaçant le membre de gauche de (6.88) par son expression (6.89), on obtient (6.87) compte tenu de (6.76) et (6.77).  $\square$

**Lemme 23:**

Soit  $(M, \mathring{g})$  une variété AH avec  $\mathring{g} = \rho^{-2} \mathring{h}$  et  $\delta \in \mathbb{R}$ .  $\forall X \in \mathcal{C}_c^\infty(T^*\mathcal{M})$ ,

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathcal{M}} \rho^{2\delta} (\mathring{U}_{kji}(X) \mathring{g}^{ik} X^j + 2 |\mathring{S}(X)|_{\mathring{g}}^2 - 2\delta \operatorname{div} X \langle X, \frac{d\rho}{\rho} \rangle) d\mu(\mathring{g}) \\
&= \int_{\mathcal{M}} \rho^{2\delta} [n-1-2\delta+o(1)] |X|_{\mathring{g}}^2 d\mu(\mathring{g}) + \int_{\mathcal{M}} \rho^{2\delta} |\mathring{\nabla} X|_{\mathring{g}}^2 d\mu(\mathring{g}) \\
&+ \int_{\mathcal{M}} \rho^{2\delta} 2\delta(2\delta+1) \langle X, \frac{d\rho}{\rho} \rangle_{\mathring{g}}^2 d\mu(\mathring{g}) \\
&+ \int_{\partial\mathcal{M}} \rho^{2\delta} (\mathring{\nabla} X(X, \eta) - 2\delta \langle X, \frac{d\rho}{\rho} \rangle_{\mathring{g}} \langle X, \eta \rangle_{\mathring{g}}) d\sigma(\mathring{g}),
\end{aligned} \tag{6.90}$$

où  $\eta$  est la normale extérieure à  $\partial\mathcal{M}$ .

Preuve :

D'après (6.74),

$$\mathring{U}_{kji}(X) \mathring{g}^{ik} X^j = \mathring{\nabla}_{kj}^2 X^k X^j + (n-1) |X|_{\mathring{g}}^2.$$

Une intégration par parties donne

$$\int_{\mathcal{M}} \mathring{\nabla}_k (\mathring{\nabla}_j X^k X^j \rho^{2\delta}) d\mu(\mathring{g}) = \int_{\mathcal{M}} \rho^{2\delta} (\mathring{\nabla}_{kj}^2 X^k X^j + \mathring{\nabla}_j X_k \mathring{\nabla}^k X^j + 2\delta \mathring{\nabla} X(X, \frac{d\rho}{\rho})) d\mu(\mathring{g}). \tag{6.91}$$

Or d'après le théorème de Divergence-Flux,

$$\int_{\mathcal{M}} \mathring{\nabla}_k (\mathring{\nabla}_j X^k X^j \rho^{2\delta}) d\mu(\mathring{g}) = \int_{\partial\mathcal{M}} \mathring{\nabla} X(X, \eta) \rho^{2\delta} d\sigma(\mathring{g}). \tag{6.92}$$

En remplaçant le membre de gauche de (6.91) par son expression (6.92), on obtient

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{M}} \rho^{2\delta} \mathring{\nabla}_{kj}^2 X^k X^j d\mu(\mathring{g}) &= \int_{\partial\mathcal{M}} \mathring{\nabla} X(X, \eta) \rho^{2\delta} d\sigma(\mathring{g}) \\
&- \int_{\mathcal{M}} \rho^{2\delta} (\mathring{\nabla}_j X_k \mathring{\nabla}^k X^j + 2\delta \mathring{\nabla} X(X, \frac{d\rho}{\rho})) d\sigma(\mathring{g}).
\end{aligned} \tag{6.93}$$

L'égalité

$$2 |\mathring{S}(X)|_{\mathring{g}}^2 = |\mathring{\nabla} X|_{\mathring{g}}^2 + \mathring{\nabla}_j X_k \mathring{\nabla}^k X^j$$

nous permet de remplacer le terme  $\mathring{\nabla}_j X_k \mathring{\nabla}^k X^j$  dans (6.93) afin d'obtenir (6.90) compte tenu de (6.77).  $\square$

Les Lemmes 3 et 4 concernant l'opérateur  $\mathring{S}$  ainsi que les Lemmes 21, 22 et 23 concernant l'opérateur  $\mathring{U}$  nous permettent d'établir la proposition suivante, clef dans la démonstration de la trivialité du noyau de l'adjoint.

**Proposition 22:**

Soit  $E_R := \mathcal{M} \setminus \Omega_R$ , pour un ouvert borné  $\Omega_R$  quelconque. Soit  $\delta \in ]-2, -1[$ . Il existe deux constantes positives  $c_\delta$  et  $R_\delta$  tel que pour tout  $R > R_\delta$ ,

$$\forall X \in \mathcal{C}_c^\infty(E_R) \ , \ \|X\|_{1,2,-\delta;E_R} \leq c_\delta (\|\mathring{U}(X)\|_{2,-\delta;E_R} + \|\mathring{S}(X)\|_{2,-\delta;E_R}). \tag{6.94}$$

Preuve :

La combinaison linéaire (6.87)  $- \frac{1}{2}(6.84) + \frac{1}{2}(6.90) + (6.38) - \frac{1}{2}(6.39)$  donne

$$\begin{aligned}
 & \int_{\mathcal{M}} \rho^{2\delta} \mathring{U}_{kji}(X) \left( \mathring{\nabla}^j X^i \frac{\mathring{\nabla}^k \rho}{\rho} - \frac{1}{2} \mathring{g}^{kj} X^i + \frac{1}{2} \mathring{g}^{ik} X^j \right) d\mu(\mathring{g}) \\
 & + \int_{\mathcal{M}} \rho^{2\delta} \left( |\mathring{S}(X)|_{\mathring{g}}^2 - \mathring{S}(X) \left( \frac{d\rho}{\rho}, \frac{d\rho}{\rho} \right) \langle X, \frac{d\rho}{\rho} \rangle_{\mathring{g}} + (2 - \delta) \operatorname{div} X \langle X, \frac{d\rho}{\rho} \rangle \right) d\mu(\mathring{g}) \\
 = & \int_{\mathcal{M}} \left\{ -\delta^2 + \left( \frac{n-3}{2} \right) \delta + n + 1 + o(1) \right\} |X|_{\mathring{g}}^2 \rho^{2\delta} d\mu(\mathring{g}) \\
 & + \int_{\mathcal{M}} \left[ \frac{n+1}{2} - \delta + o(1) \right] |\mathring{\nabla} X|_{\mathring{g}}^2 \rho^{2\delta} d\mu(\mathring{g}) \\
 & + \int_{\mathcal{M}} \rho^{2\delta} \left\{ 2\delta^2 - 2\delta - \left( \frac{n+3}{2} \right) + o(1) \right\} \langle X, \frac{d\rho}{\rho} \rangle_{\mathring{g}}^2 d\mu(\mathring{g}) \\
 & + \int_{\partial\mathcal{M}} \rho^{2\delta} \frac{1}{2} (\delta - 1) |X|_{\mathring{g}}^2 \langle \frac{d\rho}{\rho}, \eta \rangle_{\mathring{g}} d\sigma(\mathring{g}) \\
 & + \int_{\partial\mathcal{M}} \rho^{2\delta} \left( (2 - \delta) \langle X, \frac{d\rho}{\rho} \rangle_{\mathring{g}} \langle X, \eta \rangle_{\mathring{g}} - \frac{1}{2} \langle X, \frac{d\rho}{\rho} \rangle_{\mathring{g}}^2 \langle \frac{d\rho}{\rho}, \eta \rangle_{\mathring{g}} \right) d\sigma(\mathring{g}) \\
 & + \int_{\partial\mathcal{M}} \left( \frac{1}{2} |\mathring{\nabla} X|_{\mathring{g}}^2 \langle \frac{d\rho}{\rho}, \eta \rangle_{\mathring{g}} + \frac{1}{2} |X|_{\mathring{g}}^2 \langle \frac{d\rho}{\rho}, \eta \rangle_{\mathring{g}} + \frac{1}{2} \mathring{\nabla} X(X, \frac{d\rho}{\rho}) - \frac{1}{2} \mathring{\nabla} X \left( \frac{d\rho}{\rho}, X \right) \right) d\sigma(\mathring{g}).
 \end{aligned} \tag{6.95}$$

Application sur  $E_R$  :  $E_R$  possède deux composantes de bord disjointes. Un bord extérieur à l'infini, noté  $\partial E_\infty = \partial_\infty \mathcal{M}$ , et un bord intérieur  $\partial\Omega_R = \{\rho = e^{-2R}\}$ . Comme  $X \in \mathcal{C}_c^\infty(E_R)$ ,  $X$  est nécessairement nul au voisinage de  $\partial E_\infty$  mais pas forcément sur  $\partial\Omega_R$  et c'est la raison pour laquelle les termes de bord présents dans (6.95) ne vont concerner que  $\partial\Omega_R$ . Si l'on note  $\eta_R$  la normale à  $\partial\Omega_R$  extérieure à  $E_R$  et compte tenu du fait que lorsque  $R \rightarrow +\infty$ ,  $\eta_R - \frac{d\rho}{\rho} \rightarrow 0$ , ainsi  $\langle \frac{d\rho}{\rho}, \eta_R \rangle_{\mathring{g}} = |d\rho|_{\mathring{g}}^2 + o(1) = 1 + o(1)$ . En notant  $X_n$  (resp.  $X_T$ ) la composante de  $X$  normale (resp. tangentielle) à  $\partial E_R$ ,

$$X_n := \langle X, \eta \rangle_{\mathring{g}} \quad \text{et} \quad |X|_{\mathring{g}}^2 = X_n^2 + X_T^2.$$

$$\begin{aligned}
 & \int_{E_R} \rho^{2\delta} \mathring{U}_{kji}(X) \left( \mathring{\nabla}^j X^i \frac{\mathring{\nabla}^k \rho}{\rho} - \frac{1}{2} \mathring{g}^{kj} X^i + \frac{1}{2} \mathring{g}^{ik} X^j \right) d\mu(\mathring{g}) \\
 & + \int_{E_R} \rho^{2\delta} \left( |\mathring{S}(X)|_{\mathring{g}}^2 - \mathring{S}(X) (\eta_R, \eta_R) X_n + (2 - \delta) \operatorname{div} X X_n \right) d\mu(\mathring{g}) \\
 = & \int_{E_R} \rho^{2\delta} \left\{ -\delta^2 + \left( \frac{n-3}{2} \right) \delta + n + 1 + o(1) \right\} X_T^2 d\mu(\mathring{g}) \\
 & + \int_{E_R} \rho^{2\delta} \left\{ \left[ \frac{n+1}{2} - \delta + o(1) \right] |\mathring{\nabla} X|_{\mathring{g}}^2 + \left\{ \delta^2 + \left( \frac{n-7}{2} \right) \delta + \frac{n-1}{2} + o(1) \right\} X_n^2 \right\} d\mu(\mathring{g}) \\
 & + \int_{\partial E_R} \rho^{2\delta} \frac{1}{2} (\delta - 1) (X_T^2 + o(1)) d\mu(\mathring{g}) + \int_{\partial E_R} \rho^{2\delta} \frac{1}{2} (2 - \delta) (X_n^2 + o(1)) d\mu(\mathring{g}) \\
 & + \int_{\partial E_R} \left( \frac{1}{2} |\mathring{\nabla} X|_{\mathring{g}}^2 |\eta|_{\mathring{g}}^2 + \frac{1}{2} |X|_{\mathring{g}}^2 + \frac{1}{2} \mathring{\nabla} X(X, \eta) - \frac{1}{2} \mathring{\nabla} X(\eta, X) \right) d\mu(\mathring{g}).
 \end{aligned}$$

En se servant des égalités suivantes

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{1}{4} |\mathring{\nabla}_i X_j \eta^i - X_j|_{\mathring{g}}^2 = \frac{1}{4} |\mathring{\nabla} X|_{\mathring{g}}^2 |\eta|_{\mathring{g}}^2 + \frac{1}{4} |X|_{\mathring{g}}^2 - \frac{1}{2} \mathring{\nabla} X(\eta, X) \\ 0 &\leq \frac{1}{4} |\mathring{\nabla}_i X_j \eta^j + X_i|_{\mathring{g}}^2 = \frac{1}{4} |\mathring{\nabla} X|_{\mathring{g}}^2 |\eta|_{\mathring{g}}^2 + \frac{1}{4} |X|_{\mathring{g}}^2 + \frac{1}{2} \mathring{\nabla} X(X, \eta) \end{aligned}$$

on en déduit,  $\forall \varepsilon > 0, \exists R_\varepsilon > 0$  et  $c_\varepsilon \gg 1$  tel que  $\forall R > R_\varepsilon$ ,

$$\begin{aligned} &c_\varepsilon \int_{E_R} \rho^{2\delta} (|\mathring{U}(X)|_{\mathring{g}}^2 + |\mathring{S}(X)|_{\mathring{g}}^2) d\mu(\mathring{g}) \\ &\geq \int_{E_R} \rho^{2\delta} \left[ \frac{n+1}{2} - \delta - \varepsilon \right] |\mathring{\nabla} X|_{\mathring{g}}^2 d\mu(\mathring{g}) + \int_{E_R} \rho^{2\delta} \{-\delta^2 + (\frac{n-3}{2})\delta + n + 1 - \varepsilon\} X_T^2 d\mu(\mathring{g}) \\ &\quad + \int_{E_R} \rho^{2\delta} \{\delta^2 + (\frac{n-7}{2})\delta + \frac{n-1}{2} - \varepsilon\} X_n^2 d\mu(\mathring{g}) \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{\partial E_R} \rho^{2\delta} \left( (\delta - 1 - \varepsilon) X_T^2 + (2 - \delta - \varepsilon) X_n^2 \right) d\mu(\mathring{g}) \\ &\quad + \frac{1}{4} \int_{\partial E_R} \left( |\mathring{\nabla}_i X_j \eta^i - X_j|_{\mathring{g}}^2 + |\mathring{\nabla}_i X_j \eta^j + X_i|_{\mathring{g}}^2 \right) d\mu(\mathring{g}) \\ &\geq \int_{E_R} \rho^{2\delta} \left[ \frac{n+1}{2} - \delta - \varepsilon \right] |\mathring{\nabla} X|_{\mathring{g}}^2 d\mu(\mathring{g}) + \int_{E_R} \rho^{2\delta} \{-\delta^2 + (\frac{n-3}{2})\delta + n + 1 - \varepsilon\} X_T^2 d\mu(\mathring{g}) \\ &\quad + \int_{E_R} \rho^{2\delta} \{\delta^2 + (\frac{n-7}{2})\delta + \frac{n-1}{2} - \varepsilon\} X_n^2 d\mu(\mathring{g}) \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{\partial E_R} \rho^{2\delta} \left( (\delta - 1 - \varepsilon) X_T^2 + (2 - \delta - \varepsilon) X_n^2 \right) d\mu(\mathring{g}). \end{aligned}$$

- Pour le terme intérieur en  $X_T^2$ , nous avons un trinôme du second degré en  $\delta$  dont le discriminant est

$$\Delta = \left( \frac{n-3}{2} \right)^2 + 4(n+1) = \left( \frac{n+5}{2} \right)^2 > 0$$

et dont les racines sont

$$\delta_{\pm} = \frac{(n-3) \pm (n+5)}{4} = \left\{ -2; \frac{n+1}{2} \right\}.$$

Ce terme est donc positif ou nul si et seulement si  $\delta \in ]-2; \frac{n+1}{2}[$ .

- Pour le terme intérieur en  $X_n^2$ , nous avons un trinôme du second degré en  $\delta$  dont le discriminant est

$$\Delta = \left( \frac{n-7}{2} \right)^2 - 2(n-1) = \left( \frac{n^2 - 22n + 57}{4} \right).$$

Le discriminant est négatif ou nul  $\forall n \in [3, 19]$  et pour  $n = 3$ , la racine double réelle est 1. Ce terme est donc positif ou nul  $\forall n \in [3, 19], \forall \delta \in \mathbb{R}$ .

$\forall n \geq 20$ , le discriminant est strictement positif et les racines sont

$$\delta_{\pm} = \frac{(7-n) \pm \sqrt{n^2 - 22n + 57}}{4}.$$

La plus grande racine réelle  $\delta_+$  est strictement inférieure à  $\frac{n-1}{2}$  donc finalement ce terme est positif ou nul  $\forall n \geq 3, \forall \delta \in ]\frac{n-1}{2}; \frac{n+1}{2}[$ .

- Le terme intérieur en  $|\mathring{\nabla}X|_{\mathring{g}}^2$  est positif ou nul si et seulement si  $\delta < (n+1)/2$ .
- Le terme de bord est positif ou nul si  $\delta \in ]1, 2[$ .

Par conséquent, pour  $\delta$  appartenant à l'intervalle  $]1, 2[$ , on obtient  $\forall \varepsilon > 0, \exists R_\varepsilon > 0$  et  $c_\varepsilon \gg 1$  tel que  $\forall R > R_\varepsilon$ ,

$$c_\varepsilon \int_{E_R} \rho^{2\delta} (|\mathring{U}(X)|_{\mathring{g}}^2 + |\mathring{S}(X)|_{\mathring{g}}^2) d\mu(\mathring{g}) \geq \int_{E_R} \rho^{2\delta} [\frac{n+1}{2} - \delta - \varepsilon] |\mathring{\nabla}X|_{\mathring{g}}^2 d\mu(\mathring{g}) \\ + \int_{E_R} \rho^{2\delta} \left( \{-\delta^2 + (\frac{n-3}{2})\delta + n + 1 - \varepsilon\} X_T^2 + \{\delta^2 + (\frac{n-7}{2})\delta + \frac{n-1}{2} - \varepsilon\} X_n^2 \right) d\mu(\mathring{g}).$$

C'est à dire

$$\|\mathring{U}(X)\|_{2,-\delta;E_R} + \|\mathring{S}(X)\|_{2,-\delta;E_R} \geq c \|X\|_{1,2,-\delta;E_R}. \quad \square$$

## 6.5 Trivialité du noyau de l'adjoint

On montre maintenant que le noyau de  $D\Phi(g, \pi)^*$  est trivial. Nous aurons besoin des différents lemmes et propositions suivants dans la démonstration du Théorème 13.

### Lemme 24:

Soit  $\delta \in \mathbb{R}$  et  $\xi \in W_{-\delta}^{2,2}(\mathcal{T})$  une solution de l'équation  $D\Phi(g, \pi)^*\xi = 0$ , alors  $\xi = (N, X)$  satisfait un système d'équations de la forme

$$\begin{cases} \mathring{T}(N) = b_0\xi + b_1\mathring{\nabla}\xi \\ \mathring{S}(X) = -\mathring{g}\tau N + b_2\xi \end{cases},$$

avec  $b_0 \in L_\delta^2$  et  $b_1, b_2 \in W_\delta^{1,2}$ .

Preuve :

D'après (6.45) et (6.30),  $D\Phi(g, \pi)^*\xi = 0$  entraîne

$$T - g\text{tr}_g T = L_\delta^2\xi + W_\delta^{1,2}\mathring{\nabla}\xi. \quad (6.96) \\ \mathring{S}(X) = -\mathring{g}\tau N + W_\delta^{1,2}\xi.$$

En prenant la trace de (6.96), il vient

$$\mathring{T}(N) = L_\delta^2\xi + W_\delta^{1,2}\mathring{\nabla}\xi. \quad (6.97) \\ \mathring{S}(X) = -\mathring{g}\tau N + W_\delta^{1,2}\xi. \quad \square$$

### Théorème 13: Trivialité de $\ker D\Phi(g, \pi)^*$

Soit  $\Omega \subset \mathcal{M}$  un ouvert connexe tel que  $E_R \subset \Omega$ . Soit  $(g, \pi) \in \mathcal{F}$  fixé, avec  $\delta \in ]-2, -1[$ ,  $n = 3$ . Supposons que  $\xi \in L_{-\delta}^2(\mathcal{T})$  satisfasse  $D\Phi(g, \pi)^*\xi = 0$  sur  $\Omega$ . Alors  $\xi \equiv 0$  sur  $\Omega$ .

Preuve :

D'après la Proposition 21,  $\xi \in W_{-\delta}^{2,2}(\mathcal{T})$ . D'après le Lemme 24, puisque  $\xi$  est solution de  $D\Phi(g, \pi)^*\xi = 0$ ,  $\xi$  satisfait une équation de la forme

$$\begin{cases} \mathring{T}(N) = b_0\xi + b_1\mathring{\nabla}\xi \\ \mathring{S}(X) = -\mathring{g}\tau N + b_2\xi \end{cases},$$

avec  $b_0 \in L_\delta^2$  et  $b_1, b_2 \in W_\delta^{1,2}$ .

D'après la définition (6.74) de l'opérateur  $\mathring{U}$  et compte tenu de (6.3), il vient

$$\mathring{U}_{kji}(X) = \mathring{\nabla}_{kj}^2 X_i - \text{Riem } \mathring{g}_{ijkl} X^l + L_\delta^2 X. \quad (6.98)$$

D'après (6.47)

$$\begin{aligned} \mathring{U}(X) &= c_1 \mathring{\nabla} \mathring{S}(X) + L_\delta^2 X \\ &= -c_1 \tau \mathring{g} \mathring{\nabla} N + L_\delta^2 \xi + W_\delta^{1,2} \mathring{\nabla} \xi. \end{aligned} \quad (6.99)$$

Il faut montrer qu'une solution  $N$  de (5.61) telle que  $N = o(\rho^\delta)$  (d'après (4.14)) s'annule. Avant de poursuivre la preuve du théorème, rappelons la Proposition 3.9 de [5] :

**Proposition 23:**

En dimension  $n = 3$ , soient  $\delta \leq 0$  et  $(g, \pi) \in \mathcal{F}$ . Soit  $\Omega$  un sous-ensemble connexe de  $\mathcal{M}$ . Soit  $\xi$  satisfaisant  $D\Phi(g, \pi)^*\xi = 0$  sur  $\Omega$ . Si de plus  $\xi \equiv 0$  sur un ouvert  $U \subset \Omega$ , alors  $\xi \equiv 0$  sur  $\Omega$ .

Compte tenu de la proposition précédente, il nous reste à montrer que  $\xi$  s'annule près du bord. De la même manière que pour (6.75),

$$\|\mathring{\nabla}^2 X\|_{2,-\delta;E_R} - c \|X\|_{2,-\delta;E_R} \leq \|\mathring{U}(X)\|_{2,-\delta;E_R}. \quad (6.100)$$

Combinée à (6.94), on obtient compte tenu de (6.99), l'inégalité de Sobolev et (4.15)

$$\begin{aligned} \|X\|_{2,2,-\delta;E_R} &\leq c (\|\mathring{U}(X)\|_{2,-\delta;E_R} + \|\mathring{S}(X)\|_{2,-\delta;E_R}) \\ &\leq c \|N\|_{1,2,-\delta;E_R} + C (\|\xi\|_{\infty,-2\delta;E_R} + \|\mathring{\nabla}\xi\|_{3,-2\delta;E_R}). \end{aligned} \quad (6.101)$$

En se servant de la Proposition 8, il existe  $\varepsilon_0 \ll 1$  tel que (5.31) +  $\varepsilon_0(6.101)$  donne

$$\|\xi\|_{2,2,-\delta;E_R} \leq c \|\mathring{T}\|_{2,-\delta;E_R} + C (\|\xi\|_{\infty,-2\delta;E_R} + \|\mathring{\nabla}\xi\|_{3,-2\delta;E_R}).$$

Au vu du Lemme 24 et en utilisant l'inégalité de Sobolev et (4.21) avec  $\delta \leq 0$ , on a

$$\begin{aligned} \|\xi\|_{2,2,-\delta;E_R} &\leq C \|\xi\|_{2,2,-2\delta;E_R} \\ &\leq C e^{2R\delta} \|\xi\|_{2,2,-\delta;E_R}. \end{aligned}$$

On obtient pour tout  $\delta \in ]-2, -1[$ ,

$$\|\xi\|_{2,2,-\delta;E_R} \leq C e^{2R\delta} \|\xi\|_{2,2,-\delta;E_R}.$$

Pour  $R$  assez grand,  $\|\xi\|_{2,2,-\delta;E_R} = 0$  et par l'inégalité de Sobolev,  $\xi$  s'annule donc sur  $E_R$ , pour  $R \gg 1$ . D'après la Prop.23,  $\xi \equiv 0$  sur  $\Omega$ , car  $\Omega$  est connexe par hypothèse. Ceci conclut la preuve du Théorème 13.  $\square$

Le résultat suivant, comme son homologue dans le cas Time-symmetric le Corollaire 2, ne nous servira pas mais découle de ce qui précède.

**Corollaire 6:**

Soit  $\delta \in ]-(n+1)/2, 0] \setminus \{-(n-1)/2\}$ , avec  $n = 3$ . Il existe une constante  $C > 0$  dépendant de  $\|(g, \pi)\|_{\mathcal{F}}$  telle que pour tout  $\xi \in W_{-\delta}^{2,2}(\mathcal{T})$ ,

$$\|\xi\|_{2,2,-\delta} \leq C \|P^*\xi\|_{2,-\delta}. \quad (6.102)$$

Preuve :

Pour montrer que le noyau de  $P^*$  est de dimension finie, on utilise le théorème de Riesz en montrant que tout ensemble borné de  $\ker P^*$  est  $\|\cdot\|_{2,2,-\delta}$ -compact. Soit  $\{\xi_k\}$  une suite de  $\ker P^*$  telle que  $\|\xi_k\|_{2,2,-\delta} = 1$ . Le théorème de Rellich nous dit que l'on peut extraire de  $\{\xi_k\}$  une sous-suite, notée également  $\{\xi_k\}$ , qui converge dans  $W_{-2\delta}^{1,2}$  vers une limite  $\bar{\xi}$ . La suite  $\{\xi_k\}$  est donc de Cauchy dans  $W_{-2\delta}^{1,2}$ . D'après (6.54), compte tenu du fait que  $\{\xi_k\} \in \ker P^*$ , la suite  $\{\xi_k\}$  est donc de Cauchy dans  $W_{-\delta}^{2,2}$ , donc convergente vers  $\bar{\xi}$  dans  $W_{-\delta}^{2,2}$ , par unicité de la limite, ce qui conclut la preuve de la dimension finie de  $\ker P^*$ .  $\ker P^*$  est donc un sous-espace vectoriel fermé de l'espace de Hilbert  $W_{-\delta}^{2,2}$  en tant que sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace vectoriel normé. Il admet par suite un supplémentaire fermé, noté  $W$ . Par conséquent, on peut écrire

$$W_{-\delta}^{2,2} = \ker P^* \oplus W$$

D'après le même argument que dans la preuve du Lemme 2, il existe une constante  $C > 0$  dépendant de  $\|(g, \pi)\|_{\mathcal{F}}$  telle que pour tout  $\xi \in W$ ,

$$\|\xi\|_{2,2,-\delta} \leq C \|P^*\xi\|_{2,-\delta} \quad (6.103)$$

On conclut grâce à la trivialité de  $\ker P^*$ , d'après le théorème 13.  $\square$

## 6.6 Structure de sous-variété

Nous démontrons dans cette section la structure de variété de  $\mathcal{C}$  en tant que sous-variété lisse de  $\mathcal{F}$ . En fait, toutes les lignes de niveaux de  $\Phi$  sont des sous-variétés lisses de  $\mathcal{F}$ .



**Théorème 14:**

Soit  $\Phi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{L}^*$  l'opérateur de contrainte en dimension  $n = 3$ .

Pour chaque  $(\varepsilon_0, \varepsilon_i) \in \mathcal{L}^*$ , pour tout  $\delta \in ]-2, -1[$ , l'ensemble des solutions des équations de contrainte

$$\mathcal{C}(\varepsilon_0, \varepsilon_i) := \{(g, \pi) \in \mathcal{F} : \Phi(g, \pi) = (\varepsilon_0, \varepsilon_i)\}$$

est une sous-variété de  $\mathcal{F}$ . En particulier, l'espace des solutions des équations de contrainte dans le vide  $\mathcal{C} = \mathcal{C}(0, 0) = \Phi^{-1}(\{0\})$  a une structure de sous-variété de Hilbert.

Pour pouvoir utiliser le théorème des fonctions implicites, il faut montrer :

- $\ker D\Phi(g, \pi)$  possède un supplémentaire fermé.
- $D\Phi(g, \pi)$  est surjective.

Pour montrer que le noyau de  $D\Phi(g, \pi)$  possède un supplémentaire fermé, on montre qu'il est fermé.  $D\Phi(g, \pi)$  étant un opérateur borné, son noyau est fermé par continuité et puisque  $\mathcal{F}$  est un espace Hilbertien,  $\ker D\Phi(g, \pi)$  admet un supplémentaire fermé, que l'on peut prendre ici égal à son orthogonal.

Pour montrer que  $D\Phi(g, \pi)$  est surjective, il suffit de montrer que  $\overline{\text{Im } D\Phi(g, \pi)}$  est fermée. En effet, puisque  $\mathcal{L}^*$  est un espace de Hilbert dont  $\overline{\text{Im } D\Phi(g, \pi)}$  est un sous-espace vectoriel fermé, le théorème du supplémentaire orthogonal d'un fermé dans un espace de Hilbert nous donne la décomposition en somme directe suivante

$$\mathcal{L}^* = \overline{\text{Im } D\Phi(g, \pi)} \oplus \left( \overline{\text{Im } D\Phi(g, \pi)} \right)^\perp.$$

En utilisant la relation suivante, découlant directement de (6.21)

$$\ker D\Phi(g, \pi)^* = \left( \overline{\text{Im } D\Phi(g, \pi)} \right)^\perp,$$

on obtient

$$\mathcal{L}^* = \overline{\text{Im } D\Phi(g, \pi)} \oplus \ker D\Phi(g, \pi)^*$$

On a prouvé la trivialité de  $\ker D\Phi(g, \pi)^*$  dans le Théorème 13, ce qui entraîne

$$\overline{\text{Im } D\Phi(g, \pi)} = \mathcal{L}^*.$$

Pour montrer que  $\text{Im } D\Phi(g, \pi)$  est fermée, on considère des variations particulières  $(h, p)$  de  $(g, \pi)$ , de la forme

$$\begin{cases} h_{ij} = 2y g_{ij} \\ p^{ij} = (2\mathcal{S}(Y)^{ij} - g^{ij} \text{tr}_g \mathcal{S}(Y) - (n-1)(n-2)\tau y g^{ij}) \sqrt{g} \end{cases}, \quad (6.104)$$

déterminées à l'aide des champs  $(y, Y^i)$ . Cela nous conduit à définir l'opérateur  $F$  comme suit

$$F(y, Y^i) = [F_0(y, Y^i), F_i(y, Y^i)] = [D\Phi_0(g, \pi)(h, p), D\Phi_i(g, \pi)(h, p)]. \quad (6.105)$$

D'après (6.15) et (6.16),

$$\begin{cases} F_0(y, Y^i) &= 2(n-1)\sqrt{g}[-\Delta y + ny] + (4-n)\Phi_0(g, \pi)y + 2(n-2)\tau \operatorname{div} Y \sqrt{g} \\ &\quad + L_\delta^2[y + Y] + W_\delta^{1,2} \overset{\circ}{\nabla} Y. \\ F_i(y, Y^i) &= -2\sqrt{g}[-\Delta Y_i + (n-1)Y_i] + 2\Phi_i(g, \pi)y + W_\delta^{1,2} \overset{\circ}{\nabla} y + L_\delta^2[y + Y]. \end{cases}$$

L'intérêt de ces variations particulières est de donner à l'opérateur  $F$  la forme d'un opérateur elliptique car nous avons ensuite des estimées et des propriétés sur ces opérateurs qui pourront nous permettre de conclure en montrant que  $\operatorname{Im} F$  est fermée et  $\operatorname{Coker} F$  est de dimension finie.

De même que l'opérateur  $\mathcal{A}$  agissant sur les fonctions est présent dans l'expression de  $F$  (5.68) dans le cas Time-symmetric, l'opérateur  $\mathcal{B} = -\Delta + n - 1$  agissant sur les champs de vecteurs est également présent dans l'expression de  $F$ , puisque

$$\begin{cases} F_0(y, Y^i) &= 2(n-1)\sqrt{g}\mathcal{A}y + (4-n)\Phi_0(g, \pi)y + 2(n-2)\tau \operatorname{div} Y \sqrt{g} \\ &\quad + L_\delta^2[y + Y] + W_\delta^{1,2} \overset{\circ}{\nabla} Y. \\ F_i(y, Y^i) &= -2\sqrt{g}(\mathcal{B}Y^l)g_{il} + 2\Phi_i(g, \pi)y + W_\delta^{1,2} \overset{\circ}{\nabla} y + L_\delta^2[y + Y]. \end{cases} \quad (6.106)$$

L'estimée (6.107) obtenue au Théorème 15 pour l'opérateur  $\mathcal{B}$  complète l'estimée (5.69) obtenue au Théorème 10 pour l'opérateur  $\mathcal{A}$ , et sera cruciale pour montrer que l'image de  $F$  est fermée au Théorème 11.

**Théorème 15:**

Soient  $\delta \leq 0$  et  $g \in \mathcal{G}^+$ . Soit l'opérateur  $\mathcal{B} = -\Delta + n - 1$  et  $|s| < (n+1)/2$ . Alors  $\mathcal{B} : W_s^{2,2}(T\mathcal{M}) \rightarrow L_s^2(T\mathcal{M})$  est borné. De plus, il vérifie l'estimée elliptique

$$\|Y\|_{2,2,s} \leq C (\|\mathcal{B}Y\|_{2,s} + \|Y\|_{2,s;\Omega_R}). \quad (6.107)$$

En particulier,  $\mathcal{B}$  est un opérateur semi-Fredholm, *i.e.*  $\mathcal{B}$  a un noyau de dimension finie et son image est fermée.

Preuve :

Soit l'opérateur  $\overset{\circ}{\mathcal{B}} = -\overset{\circ}{\Delta} + n - 1$  agissant sur les champs de vecteurs. D'après la Proposition E de [40], le rayon indiciel de  $\overset{\circ}{\mathcal{B}}$  est  $(n+1)/2$  et par le Théorème C de [40],  $\forall |s| < (n+1)/2$ ,  $\overset{\circ}{\mathcal{B}} : W_s^{2,2}(T\mathcal{M}) \rightarrow L_s^2(T\mathcal{M})$  est un opérateur Fredholm. Par le Corollaire 3.13 de [2],  $\overset{\circ}{\mathcal{B}}$  est un isomorphisme pour la même plage de  $s$ . Il existe donc une constante positive  $C = C(n, s)$  telle que

$$\|Y\|_{2,2,s} \leq C \|\overset{\circ}{\mathcal{B}}Y\|_{2,s}. \quad (6.108)$$

La preuve du théorème est la même que celle du Théorème 10 où (6.108) remplace (5.71).  $\square$

Nous aurons besoin du théorème suivant, montrant que l'image de  $F$  est fermée, pour pouvoir appliquer le Lemme 14 à  $F$  plus tard.

**Théorème 16:**

Soit  $\delta \in ] - (n + 1)/2, 0]$  avec  $n = 3$ .

L'opérateur  $F : W_{\delta}^{2,2}(\mathcal{M}) \times W_{\delta}^{2,2}(\mathcal{T}\mathcal{M}) \rightarrow L_{\delta}^2(\mathcal{T}^* \otimes \Lambda^n T^* \mathcal{M}) := \mathcal{L}^*$  est borné.

De plus, il vérifie l'estimée elliptique

$$\|(y, Y)\|_{2,2,\delta} \leq C (\|F(y, Y)\|_{2,\delta} + \|(y, Y)\|_{2,0} + \|(y, Y)\|_{2,\delta;\Omega_R}). \quad (6.109)$$

En particulier,  $F$  est un opérateur semi-Fredholm, *i.e.*  $F$  a un noyau de dimension finie et son image est fermée.

Preuve :

En partant de la définition de  $F$ , l'inégalité triangulaire, (6.12) et l'inclusion de Sobolev ( $\delta \leq 0$ ) donnent directement

$$\|F(y)\|_{2,\delta} \leq C \|y\|_{2,2,\delta},$$

où  $C$  est une constante dépendant de  $\hat{g}$  et  $\|g\|_{\mathcal{F}}$ .

Ainsi  $F$  est un opérateur borné (continu). En se servant de l'expression de  $F_0(y, Y^i)$  dans (5.69) et en utilisant l'inégalité de Hölder (4.15), (4.19), l'inégalité de Ehrling (4.13), l'inclusion de Sobolev avec  $\delta \leq 0$  et  $\Phi_0(g, \pi) \in L_{\delta}^2$ ,

$$\begin{aligned} \|y\|_{2,2,\delta} &\leq C (\|\mathcal{A}y\|_{2,\delta} + \|y\|_{2,\delta;\Omega_R}) \\ &\leq C (\|F_0(y, Y)\|_{2,\delta} + \|\Phi_0(g, \pi)y\|_{2,\delta} + \|(y, Y)\|_{2,0} + \|\operatorname{div} Y\|_{2,\delta} \\ &\quad + \varepsilon \|Y\|_{2,2,0} + \|y\|_{2,\delta;\Omega_R}) \\ &\leq C (\|F_0(y, Y)\|_{2,\delta} + \|(y, Y)\|_{2,0} + \|Y\|_{2,2,\delta} + \|y\|_{2,\delta;\Omega_R}). \end{aligned} \quad (6.110)$$

D'autre part, en se servant de l'expression de  $F_i(y, Y^i)$  dans (6.107) et en utilisant l'inégalité de Hölder (4.15), (4.19), l'inégalité de Ehrling (4.13), l'inclusion de Sobolev avec  $\delta \leq 0$  et  $\Phi_i(g, \pi) \in L_{\delta}^2$ ,

$$\begin{aligned} \|Y\|_{2,2,\delta} &\leq C (\|\mathcal{B}Y\|_{2,\delta} + \|Y\|_{2,\delta;\Omega_R}) \\ &\leq C (\|F_i(y, Y)\|_{2,\delta} + \|\Phi_i(g, \pi)y\|_{2,\delta} + \|(y, Y)\|_{2,0} \\ &\quad + \varepsilon \|Y\|_{2,2,0} + \|Y\|_{2,\delta;\Omega_R}) \\ &\leq C (\|F_i(y, Y)\|_{2,\delta} + \|(y, Y)\|_{2,0} + \varepsilon \|Y\|_{2,2,\delta} + \|Y\|_{2,\delta;\Omega_R}) \\ &\leq C (\|F_i(y, Y)\|_{2,\delta} + \|(y, Y)\|_{2,0} + \|Y\|_{2,\delta;\Omega_R}). \end{aligned} \quad (6.111)$$

Finalement, la combinaison de (6.110) et (6.111) donne (6.109).

Pour tout  $\delta \in ] - (n + 1)/2, 0]$ , l'estimée (6.109) vérifiée par  $F$  est analogue à celle du Théorème 6 et par une démonstration similaire, on montre que  $F$  est semi-Fredholm, *i.e.*  $F$  a un noyau de dimension finie et son image est fermée.  $\square$

Notons que  $F$  et son adjoint  $F^*$  ont la même structure

$$F^* : L_{-\delta}^2(\mathcal{T}) \rightarrow W_{-\delta}^{-2,2}(\mathcal{T}^* \otimes \Lambda^n T^* \mathcal{M}).$$

Soit  $\widetilde{F}^*$  la restriction de  $F^*$  définie comme suit :

$$\widetilde{F}^* : W_{-\delta}^{2,2}(\mathcal{T}) \rightarrow L_{-\delta}^2(\mathcal{T}^* \otimes \Lambda^n T^* \mathcal{M}).$$

On peut appliquer le Théorème 11 à  $\widetilde{F}^*$  pour montrer que  $\ker F^*$  est de dimension finie :

**Théorème 17:**

Soit  $\delta \in ] - (n + 1)/2, 0]$  avec  $n = 3$ . L'opérateur  $\widetilde{F}^* : W_{-\delta}^{2,2}(\mathcal{T}) \rightarrow L_{-\delta}^2(\mathcal{T}^* \otimes \Lambda^n T^* \mathcal{M})$  est borné. De plus, il vérifie l'estimée elliptique

$$\|(y, Y)\|_{2,2,-\delta} \leq C \left( \|\widetilde{F}^*(y, Y)\|_{2,-\delta} + \|(y, Y)\|_{2,-2\delta} + \|(y, Y)\|_{2,-\delta;\Omega_R} \right). \quad (6.112)$$

En particulier,  $\widetilde{F}^*$  est un opérateur semi-Fredholm, *i.e.*  $\widetilde{F}^*$  a un noyau de dimension finie et son image est fermée.

Preuve :

En partant de la définition de  $\widetilde{F}^*$ , l'inégalité triangulaire, (6.12) et l'inclusion de Sobolev ( $\delta \leq 0$ ) donnent directement

$$\|\widetilde{F}^*(y)\|_{2,-\delta} \leq C \|y\|_{2,2,-\delta}$$

En se servant de l'expression de  $\widetilde{F}_0^*(y, Y^i)$  (formellement identique à  $F_0(y, Y^i)$ ) dans (5.69) et en se servant de l'inégalité de Hölder (4.15), (4.19), l'inégalité de Ehrling (4.13), l'inclusion de Sobolev avec  $\delta \leq 0$  et  $\Phi_0(g, \pi) \in L_\delta^2$ ,

$$\begin{aligned} \|(y, Y)\|_{2,2,-\delta} &\leq C (\|\mathcal{A}y\|_{2,-\delta} + \|N\|_{2,-\delta;\Omega_R}) \\ &\leq C (\|\widetilde{F}_0^*(y, Y)\|_{2,-\delta} + \|\Phi_0(g, \pi)y\|_{2,-\delta} + \|(y, Y)\|_{2,-2\delta} + \|\operatorname{div} Y\|_{2,-\delta} \\ &\quad + \varepsilon \|Y\|_{2,2,-2\delta} + \|y\|_{2,\delta;\Omega_R}) \\ &\leq C \left( \|\widetilde{F}_0^*(y, Y)\|_{2,\delta} + \|(y, Y)\|_{2,-2\delta} + \|Y\|_{2,2,-\delta} + \|y\|_{2,-\delta;\Omega_R} \right). \end{aligned} \quad (6.113)$$

D'autre part, en se servant de l'expression de  $\widetilde{F}_i^*(y, Y^i)$  (formellement identique à  $F_i(y, Y^i)$ ) dans (6.107) et en se servant de l'inégalité de Hölder v, (4.19), l'inégalité de Ehrling (4.13), l'inclusion de Sobolev avec  $\delta \leq 0$  et  $\Phi_i(g, \pi) \in L_\delta^2$ ,

$$\begin{aligned} \|Y\|_{2,2,-\delta} &\leq C (\|BY\|_{2,-\delta} + \|Y\|_{2,-\delta;\Omega_R}) \\ &\leq C (\|\widetilde{F}_i^*(y, Y)\|_{2,-\delta} + \|\Phi_i(g, \pi)y\|_{2,-\delta} + \|(y, Y)\|_{2,-2\delta} \\ &\quad + \varepsilon \|Y\|_{2,2,-2\delta} + \|Y\|_{2,-\delta;\Omega_R}) \\ &\leq C \left( \|\widetilde{F}_i^*(y, Y)\|_{2,-\delta} + \|(y, Y)\|_{2,-2\delta} + \varepsilon \|Y\|_{2,2,-\delta} + \|Y\|_{2,-\delta;\Omega_R} \right) \\ &\leq C \left( \|\widetilde{F}_i^*(y, Y)\|_{2,-\delta} + \|(y, Y)\|_{2,-2\delta} + \|Y\|_{2,-\delta;\Omega_R} \right). \end{aligned} \quad (6.114)$$

Finalement, la combinaison de (6.113) et (6.114) donne (6.112).

Pour tout  $\delta \in ] - (n + 1)/2, 0]$ , l'estimée (6.112) vérifiée par  $\widetilde{F}^*$  est analogue à celle du Théorème 6 et par une démonstration similaire, on montre que  $\widetilde{F}^*$  est un opérateur semi-Fredholm, *i.e.*  $\widetilde{F}^*$  a un noyau de dimension finie et son image est fermée.  $\square$

Par régularité elliptique,  $\ker F^* = \ker \widetilde{F}^*$  est aussi de dimension finie.

Nous avons maintenant tous les outils pour démontrer le Théorème 14. Puisque l'image de  $F$  est fermée d'après le Théorème 16, on peut appliquer le Lemme 14 à  $F$ , obtenant ainsi  $(\operatorname{Coker} F)^* \simeq \ker F^*$  et par suite du Théorème 17,  $(\operatorname{Coker} F)^*$  est de dimension

finie. En dimension finie, un espace vectoriel et son espace dual sont isomorphes et  $\text{Coker } F$  est donc de dimension finie. L'opérateur  $F$  satisfait

$$\text{Im } F \subset \text{Im } D\Phi(g, \pi) \subset \mathcal{L}^*.$$

Soit  $\pi$  la projection canonique :

$$\pi : \mathcal{L}^* \rightarrow \text{Coker } F$$

$\pi(\text{Im } D\Phi(g, \pi))$  est fermé comme sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie ( $\text{Coker } F$ ).  $\text{Im } (D\Phi(g, \pi))$  est fermée comme image réciproque d'un fermé par une application continue. Ceci conclut la preuve de la structure de variété de  $\mathcal{C}$  en tant que sous-variété lisse de  $\mathcal{F}$ .  $\square$

## Deuxième partie

# Masse d'une variété faiblement asymptotiquement hyperbolique



# Chapitre 7

## Définition et propriétés de la masse

### 7.1 Estimation d'une formule de trace

L'objet de cette section est l'obtention du Lemme 27, que nous utiliserons pour montrer que la fonctionnelle masse est bien définie. Les deux lemmes suivants seront utiles dans sa preuve.

On considère les couronnes  $A_1 = \{1 < z < 2\} \times S^{n-1}$  et  $A_\lambda = \{\lambda < \rho < 2\lambda\} \times S^{n-1}$  et l'application

$$\begin{aligned}\psi_\lambda : A_1 &\rightarrow A_\lambda \\ (z, \theta) &\mapsto (\lambda z, \theta) = (\rho, \theta)\end{aligned}$$

Sur  $A_\lambda$ , on a la métrique  $b \sim \rho^{-2}(d\rho^2 + d\Omega^2)$  dont la forme volume est  $d\mu_b = \rho^{-n} d\rho d\Omega$ . Sur  $A_1$ , la métrique  $b$  devient la métrique  $b_\lambda \sim z^{-2}(dz^2 + \lambda^{-2}d\Omega^2)$  dont la forme volume est  $d\mu_{b_\lambda} = z^{-n} \lambda^{-(n-1)} dz d\Omega$ . Cependant, pour pouvoir utiliser le théorème de trace sur  $A_1$  on veut une métrique  $e_1$  équivalente à la métrique euclidienne sur  $A_1$  de la forme  $e_1 = dz^2 + d\Omega^2$ . On pose  $u_\lambda = u \circ \psi_\lambda$ .

**Lemme 25:**

En dimension  $n \geq 3$ , pour toute fonction  $u \in L^q(S_\lambda)$  :

$$\|u\|_{q;S_\lambda} \approx \lambda^{-\frac{n}{q}} \|u_\lambda\|_{q;S_1}$$

Preuve :

Etant donné que  $\rho \sim \lambda$  sur  $S_\lambda$ , il vient

$$\begin{aligned}\|u\|_{q;S_\lambda} &= \left( \int_{S_\lambda} |u|^q \rho^{-n} d\Omega \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\approx \lambda^{-\frac{n}{q}} \left( \int_{S_1} |u_\lambda|^q d\Omega \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \lambda^{-\frac{n}{q}} \|u_\lambda\|_{q;S_1} \quad \square\end{aligned}$$

**Lemme 26:**

En dimension  $n \geq 3$ , pour toute fonction  $u \in W_\delta^{1,p}(A_\lambda)$  :

$$\|u_\lambda\|_{1,p;A_1} \lesssim \lambda^{\frac{n-1}{p}-1-\delta} \|u\|_{1,p,\delta;A_\lambda}.$$



Preuve :

Pour toute fonction  $u \in L^p_\delta(A_\lambda)$ , étant donné que  $\rho \sim \lambda$  sur  $S_\lambda$  et  $z \sim 1$  sur  $S_1$ ,

$$\begin{aligned} \|u\|_{p,\delta;A_\lambda}^p &= \int_{A_\lambda} |u|_b^p \rho^{p\delta} d\mu_b \\ &\approx \int_{A_\lambda} |u|_b^p \rho^{p\delta-n} d\rho d\Omega \\ &\approx \int_{A_1} |u_\lambda|_{e_1}^p \lambda^{p\delta-(n-1)} dz d\Omega \\ &\approx \lambda^{p\delta-(n-1)} \|u_\lambda\|_{p;A_1}^p \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} |du|_b^2 &\sim \rho^2 \left( (\partial_\rho u)^2(\rho, \theta) + \hat{g}^{\theta_i \theta_j} \partial_{\theta_i} u \partial_{\theta_j} u \right) \\ &\sim \lambda^2 z^2 \left( (\partial_\rho u)^2(\lambda z, \theta) + \hat{g}^{\theta_i \theta_j} \partial_{\theta_i} u \partial_{\theta_j} u \right) \end{aligned}$$

Or  $u_\lambda = u \circ \psi_\lambda$ , ce qui entraîne  $\partial_z u_\lambda = \lambda \partial_\rho u$  et

$$\begin{aligned} |du|_b^2 &\sim z^2 \left( (\partial_z u_\lambda)^2(z, \theta) + \lambda^2 \hat{g}^{\theta_i \theta_j} \partial_{\theta_i} u \partial_{\theta_j} u \right) \\ &\sim |du_\lambda|_{b_\lambda}^2 \gtrsim \lambda^2 |du_\lambda|_{e_1}^2. \end{aligned}$$

Plus généralement,  $|du|_b^p \gtrsim \lambda^p |du_\lambda|_{e_1}^p$  et par conséquent

$$\int_{A_\lambda} |du|_b^p \rho^{p\delta} d\mu_b \gtrsim \lambda^{p(1+\delta-\frac{n-1}{p})} \int_{A_1} |du_\lambda|_{e_1}^p dz d\Omega \quad \square$$

**Lemme 27:**

Soit  $\delta_n = \frac{2n-3}{2n-2}$ . Il existe deux constantes  $\lambda_0 \ll 1$  et  $c$  telles que pour tout  $\lambda \leq \lambda_0$ , pour toute fonction  $u$  dans  $W_\delta^{1,2}(E_{\lambda_0})$ , alors  $u \in L^1(S_\lambda)$  et

$$\|u\|_{1;S_\lambda} \leq c \lambda^{-(\delta_n+\delta)} \|u\|_{1,2,\delta;A_\lambda}. \quad (7.1)$$

Par conséquent,  $\|u\|_{1;S_\lambda} = o(\lambda^{-(\delta_n+\delta)})$  lorsque  $\lambda \rightarrow 0$ .

Preuve :

Inclusion de Sobolev en dimension  $n-1 \geq 2$  :

Pour tout  $q \geq 1$ , il existe une constante  $c$  telle que

$$\|u\|_{1;S_\lambda} \leq c \|u\|_{q;S_\lambda}. \quad (7.2)$$

Inégalité de Sobolev en dimension  $n-1 \geq 2$  :

Pour tout  $q$  tel que  $2 \leq q \leq \frac{2(n-1)}{n-2}$ , il existe une constante  $c$  telle que

$$\|u_\lambda\|_{q;S_1} \leq c \|u_\lambda\|_{1/2,2;S_1}. \quad (7.3)$$

Puisque  $u_\lambda \in W^{1,2}(A_1)$ , le théorème de trace implique que  $u_\lambda \in W^{1/2,2}(S_1)$  et

$$\|u_\lambda\|_{1/2,2;S_1} \leq \|u_\lambda\|_{1,2;A_1}. \quad (7.4)$$

Pour obtenir l'inégalité (7.1) la plus fine possible, il convient de prendre  $q = \frac{2(n-1)}{n-2}$ , valeur maximale permise dans (7.2) et (7.3) tout en étant minimale dans le Lemme 25. Il ne reste plus alors qu'à combiner ces différentes inégalités à (7.4) et au Lemme 26, obtenant ainsi

$$\delta_n = \frac{n}{q} + 1 - \frac{n-1}{2} = \frac{2n-3}{2n-2} \quad \square$$

## 7.2 Cadre d'étude

On considère une métrique Riemannienne modèle  $b_k$  de dimension  $n$  sur  $\mathcal{B} := ]0, 2\rho_0] \times N$  de la forme

$$b_k = \rho^{-2} \left( d\rho^2 + \left(1 - \frac{k\rho^2}{4}\right)^2 h \right), \quad k = \{0, \pm 1\} \quad (7.5)$$

où  $(N, h)$  est une variété Riemannienne d'Einstein compacte de dimension  $n-1$  dont la courbure de Ricci est donnée par

$$\text{Ric } h = k(n-2)h, \quad k = \{0, \pm 1\}, \quad n \geq 3. \quad (7.6)$$

Ceci permet de prendre en considération les différentes géométries possibles pour  $N$ . Les équations (7.5) et (7.6) impliquent que  $b_k$  est d'Einstein et en notant respectivement  $\text{Ric } b_k$  et  $R(b_k)$  la courbure de Ricci et la courbure scalaire de  $b_k$ ,

$$\text{Ric } b_k = -(n-1)b_k, \quad R(b_k) = -n(n-1) = 2\Lambda. \quad (7.7)$$

On note  ${}^{(b_k)}\nabla$  la dérivée covariante pour la métrique  $b_k$  et on définit

$$\mathcal{N}_{b_k} := \{V \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{B}) \mid {}^{(b_k)}\nabla V = V(\text{Ric } b_k + nb_k)\}.$$

Lorsque  $h$  est une variété Riemannienne complète de courbure sectionnelle constante, on a le résultat suivant (cf. [17], Annexe B) sur  $\mathcal{N}_{b_k}$  :

- Lorsque  $k = 0, -1 \implies \mathcal{N}_{b_0} = \mathcal{N}_{b_{-1}} = \text{Vect}(V_{(0)})$  avec  $V_{(0)} = \rho^{-1}(1 + \frac{k\rho^2}{4})$ .
- Lorsque  $k = 1, (N, h) = (S^{n-1}, g_{S^{n-1}})$  et  $b_1$  est la métrique hyperbolique.

Si on s'inspire du modèle de la boule de Poincaré (voir par exemple [19], équations (3.3) et (3.4) avec  $\omega = \frac{1}{2}(1 - |x|^2) = \rho(1 + \frac{\rho^2}{2})^{-2}$ ), on a

$$\mathcal{N}_{b_1} = \text{Vect}\{V_{(\mu)}\}_{\mu=0,\dots,n}$$

avec  $V_{(0)} = \rho^{-1}(1 + \frac{\rho^2}{4})$  et  $V_{(i)} = \rho^{-1}(1 + \frac{\rho^2}{2})^2 x^i$ ,  $i = 1, \dots, n$   
où les  $x^i$  sont les coordonnées cartésiennes sur la boule de  $\mathbb{R}^n$ .

Remarque : Pour tout  $k = \{0, \pm 1\}$ ,  $\forall \mu = 0, \dots, n$ , lorsque  $\rho \rightarrow 0$ ,

$$V_{(\mu)} = O(\rho^{-1}) \quad \text{et} \quad |{}^{(b_k)}\nabla V_{(\mu)}|_{b_k} = O(\rho^{-1}).$$

Soit  $\tilde{\Omega}_{\rho_0} := \{x \in \mathcal{M} : \rho(x) > 2\rho_0\}$ . On considère le difféomorphisme  $\phi$  entre  $\mathcal{B} = ]0, 2\rho_0] \times N$  et  $\tilde{E}_{\rho_0} = \{x \in \mathcal{M} : \rho(x) \leq 2\rho_0\} = \mathcal{M} \setminus \tilde{\Omega}_{\rho_0} \subset \mathcal{M}_{\text{ext}}$

$$\phi : \tilde{E}_{\rho_0} \rightarrow ]0, 2\rho_0] \times N.$$

On transporte  $b_k$  par  $\phi$  et on obtient la métrique  $\mathring{g} = \phi^* b_k$  sur  $\tilde{E}_{\rho_0}$ . On prolonge  $\mathring{g}$  de manière  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathcal{M} \setminus \tilde{E}_{\rho_0}$ , ainsi les conditions d'intégrabilité suivantes sur  $\mathcal{M}$  sont satisfaites :

$$\text{Ric } \mathring{g} + (n-1)\mathring{g} \in \mathcal{C}_c^\infty \subset L_\delta^2 \quad (7.8)$$

$$R(\mathring{g}) - 2\Lambda \in \mathcal{C}_c^\infty \subset L_{-1}^1 \quad (7.9)$$

Soit  $V_\infty \in \mathcal{N}_{b_k}$ . On ramène  $V_\infty$  sur  $\tilde{E}_{\rho_0}$  par  $\phi$  et on le prolonge de façon  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\tilde{\Omega}_{\rho_0}$  (à l'intérieur) en une fonction  $\mathring{V}_\infty$ . On obtient ainsi  $\mathring{V}_\infty = \phi^* V_\infty = V_\infty \circ \phi^{-1}$  sur  $\tilde{E}_{\rho_0}$  et en particulier sur  $\tilde{E}_{\rho_0}$  :

$$\mathring{\nabla} \mathring{\nabla} \mathring{V}_\infty = \mathring{V}_\infty (\text{Ric } \mathring{g} + n\mathring{g}) \quad (7.10)$$

$$(R(\mathring{g}) - 2\Lambda) \mathring{V}_\infty = 0 \quad (7.11)$$

Pour  $\rho_1 \ll 1$  tel que  $\rho_1 \leq \rho_0$ , on définit une fonction de troncature  $\chi_{\rho_1}$  sur  $\mathcal{M}$  vérifiant

$$\chi_{\rho_1} = \begin{cases} 1 & \text{sur } \tilde{E}_{\rho_1/2} \\ 0 & \text{sur } \tilde{\Omega}_{\rho_1} \end{cases}$$

On dit que  $\hat{V}_\infty \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$  est un KID au voisinage de l'infini représentant  $V_\infty$  s'il existe  $\rho_1 \ll 1$  tel que  $\rho_1 \leq \rho_0$  pour lequel

$$\hat{V}_\infty = \chi_{\rho_1} \mathring{V}_\infty = \begin{cases} \mathring{V}_\infty & \text{sur } \tilde{E}_{\rho_1/2} \\ 0 & \text{sur } \tilde{\Omega}_{\rho_1} \end{cases} \quad (7.12)$$

Remarque :  $\hat{V}_\infty$  n'est pas uniquement déterminé par sa valeur  $\mathring{V}_\infty$  sur  $\tilde{E}_{\rho_1/2}$  car sa valeur sur la couronne  $A_{\rho_1} := \tilde{\Omega}_{\rho_1/2} \setminus \tilde{\Omega}_{\rho_1} = \{x \in \mathcal{M} : \rho_1 < \rho(x) < 2\rho_1\}$  n'est pas fixée. Cela dit, deux KID  $\hat{V}_1$  et  $\hat{V}_2$  au voisinage de l'infini représentant le même  $V_\infty$  ne diffèrent que sur une couronne au maximum, donc diffèrent d'une fonction lisse à support compact inclus dans une couronne.

Une fonction  $V \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$  est appelée fonction asymptotiquement KID s'il existe  $V_\infty \in \mathcal{N}_b$  dont le KID à l'infini  $\hat{V}_\infty$  est tel que  $V - \hat{V}_\infty \in W_s^{k,2}(\mathcal{M})$ . Si  $V_1$  et  $V_2$  sont deux fonctions asymptotiquement KID représentant  $V_\infty$ , alors  $V_1 - V_2 \in W_s^{k,2}(\mathcal{M})$  et on peut définir la classe des fonctions asymptotiquement KID représentant  $V_\infty$  :

$$V_\infty + W_s^{k,2}(\mathcal{M}) := \{V : V - \hat{V}_\infty \in W_s^{k,2}(\mathcal{M})\}$$

On notera dans cette partie  $\sqrt{g}$  la mesure de volume associée à la métrique  $\mathring{g}$ .

### 7.3 Définition de la fonctionnelle masse

On considère pour toute cette partie sur la masse le cas Time-symmetric dans lequel  $\mathcal{M}$  est une hypersurface de genre espace totalement géodésique de l'espace-temps  $\mathcal{N}$ . On introduit l'opérateur suivant

$$\mathcal{R}_0(g) := \left( \overset{\circ}{\nabla}{}^2{}^{ij} g_{ij} - \overset{\circ}{\Delta} \text{tr}_{\dot{g}} g - \text{Ric } \dot{g} (\dot{g}^{-1} e \dot{g}^{-1}) + \frac{1}{2} (R(\dot{g}) - 2\Lambda) \text{tr}_{\dot{g}} e \right) \sqrt{\dot{g}} \quad (7.13)$$

En notant  $e_{ij} = g_{ij} - \dot{g}_{ij}$ , l'opérateur  $\mathcal{R}_0(g)$  n'est autre que la linéarisée de la courbure scalaire de  $\dot{g}$  dans la direction  $e$ . En effet, dans le cas Time-symmetric, l'opérateur de contrainte sera notre opérateur de densité de charge locale

$$\Phi_0(g) := (R(g) - 2\Lambda) \sqrt{g}.$$

D'après (5.11), l'expression de sa linéarisée en  $\dot{g}$  dans la direction  $e$  est

$$\begin{aligned} D\Phi_0(\dot{g}).e &= \left( \overset{\circ}{\nabla}{}^i \overset{\circ}{\nabla}{}^j e_{ij} - \overset{\circ}{\Delta} \text{tr}_{\dot{g}} e \right) \sqrt{\dot{g}} - \left[ \text{Ric } \dot{g} (\dot{g}^{-1} e \dot{g}^{-1}) - \frac{1}{2} (R(\dot{g}) - 2\Lambda) \text{tr}_{\dot{g}} e \right] \sqrt{\dot{g}} \\ &= \mathcal{R}_0(g), \end{aligned}$$

et son  $L^2(d\mu(\dot{g}))$ -adjoint formel est

$$D\Phi_0(\dot{g})^*.V = \left( \overset{\circ}{\nabla}{}_i \overset{\circ}{\nabla}{}_j V - \dot{g}_{ij} \overset{\circ}{\Delta} V - [\text{Ric } \dot{g} - \frac{1}{2} (R(\dot{g}) - 2\Lambda) \dot{g}_{ij}] V \right) \sqrt{\dot{g}}. \quad (7.14)$$

En reprenant les notations de [46], l'intégrande-charge  $\mathbb{U}(V, e)$  est la 1-forme différentielle apparaissant dans la formule d'intégration par partie

$$\langle V, D\Phi_0(\dot{g}).e \rangle_0 = \text{div}_0 \mathbb{U}(V, e) + \langle D\Phi_0(\dot{g})^*.V, e \rangle_0, \quad (7.15)$$

où  $\langle \cdot, \cdot \rangle_0$  désigne le produit scalaire pour la métrique  $\dot{g}$ .

On définit la fonctionnelle suivante, appelée masse dans la direction  $V_\infty$ , comme suit

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}(V_\infty, \phi, g) &:= \int_{\mathcal{M}} \text{div}_0 \mathbb{U}(\hat{V}_\infty, e) \\ &= \int_{\mathcal{M}} \langle \hat{V}_\infty, D\Phi_0(\dot{g}).e \rangle_0 - \int_{\mathcal{M}} \langle D\Phi_0(\dot{g})^*. \hat{V}_\infty, e \rangle_0 \\ &= \int_{\mathcal{M}} \hat{V}_\infty \mathcal{R}_0(g) - \int_{\mathcal{M}} \langle D\Phi_0(\dot{g})^*. \hat{V}_\infty, e \rangle_0. \end{aligned} \quad (7.16)$$

Par construction de  $\hat{V}_\infty$ ,  $D\Phi_0(\dot{g})^*. \hat{V}_\infty = 0$  sur  $\tilde{\Omega}_{\rho_1}$  et  $D\Phi_0(\dot{g})^*. \hat{V}_\infty = 0$  sur  $\tilde{E}_{\rho_1/2}$ , compte tenu de (7.10) et (7.11), ainsi

$$\mathfrak{M}(V_\infty, \phi, g) = \int_{\tilde{E}_{\rho_1}} \hat{V}_\infty \mathcal{R}_0(g) - \int_{A_{\rho_1}} \langle D\Phi_0(\dot{g})^*. \hat{V}_\infty, e \rangle_0. \quad (7.17)$$

Les parties d'ordre 0 en  $e$  étant les mêmes dans  $\hat{V}_\infty \mathcal{R}_0(g)$  et  $\langle D\Phi_0(\dot{g})^*. \hat{V}_\infty, e \rangle_0$ , elles se simplifient dans l'expression (7.17) de  $\mathfrak{M}$  et on obtient

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}(V_\infty, \phi, g) &= \int_{\tilde{E}_{\rho_1}} \left\{ \hat{V}_\infty (\overset{\circ}{\nabla}{}^2{}^{ij} g_{ij} - \overset{\circ}{\Delta} \text{tr}_{\dot{g}} g) - (\overset{\circ}{\nabla}{}^2{}^{ij} \hat{V}_\infty - \overset{\circ}{\Delta} \hat{V}_\infty \dot{g}^{ij}) e_{ij} \right\} \sqrt{\dot{g}} \\ &= \int_{\tilde{E}_{\rho_1}} \overset{\circ}{\nabla}{}^i \left\{ \hat{V}_\infty (\overset{\circ}{\nabla}{}^j g_{ij} - \overset{\circ}{\nabla}{}_i \text{tr}_{\dot{g}} g) + \overset{\circ}{\nabla}{}_i \hat{V}_\infty \text{tr}_{\dot{g}} e - \overset{\circ}{\nabla}{}^j \hat{V}_\infty e_{ij} \right\} \sqrt{\dot{g}}. \end{aligned} \quad (7.18)$$

Remarque : La définition (7.18) nous permet de dire que la masse dépend de  $V_\infty$  mais est indépendante du choix du KID au voisinage de l'infini représentant  $V_\infty$ . En effet, si l'on choisit deux KIDs  $\hat{V}_1$  et  $\hat{V}_2$  représentant  $V_\infty$ , d'après une remarque précédente, leur différence est une fonction lisse à support compact (inclus dans  $A_{\rho_1}$ ). La différence des deux masses obtenues pour  $\hat{V}_1$  et  $\hat{V}_2$  est alors l'intégrale d'une divergence d'une 1-forme à support compact, donc nulle.

Le lemme suivant donne les conditions d'intégrabilités nécessaires à la validité du processus d'intégration que nous appliquerons sur une suite d'hypersurfaces compactes partant à l'infini ; processus clef dans notre définition de la masse (7.19).

**Lemme 28:** ([5], Lemma 4.3)

Soit  $\mathcal{M} = \bigcup_{k \geq 1} \mathcal{M}_k$  une exhaustion d'une variété  $n$ -dimensionnelle non compacte  $\mathcal{M}$  par des ensembles compacts à bords lisses  $\partial\mathcal{M}_k$ . Supposons que  $\beta \in W_{loc}^{1,2}(\Lambda^{n-1}T^*\mathcal{M})$  satisfasse  $d\beta \in L^1(\Lambda^n T^*\mathcal{M})$ . Alors

1.

$$\oint_{\partial\mathcal{M}_k} \beta \text{ existe pour tout } k \geq 1,$$

2.

$$\oint_{\partial\mathcal{M}_\infty} \beta := \lim_{k \rightarrow +\infty} \oint_{\partial\mathcal{M}_k} \beta \text{ existe.}$$

Preuve :

$\partial\mathcal{M}_k$  étant lisse, le théorème de trace nous dit que

$$\beta \in W^{1/2,2}(\partial\mathcal{M}_k) \subset L^2(\partial\mathcal{M}_k) \subset L^1(\partial\mathcal{M}_k),$$

où les espaces de Sobolev fractionnaires sont définis en utilisant la transformée de Fourier de manière usuelle. Ceci montre que les intégrales de bord loin de l'infini sont bien définies. La définition de la dérivée au sens faible nous permet d'appliquer le théorème de Stokes à  $d\beta$  sur n'importe quelle région compacte. En particulier, pour tout  $1 \leq q \leq p$ ,

$$\oint_{\partial\mathcal{M}_p} \beta - \oint_{\partial\mathcal{M}_q} \beta = \oint_{\mathcal{M}_p \setminus \mathcal{M}_q} d\beta.$$

Puisque  $d\beta \in L^1(\Lambda^n T^*\mathcal{M})$ , le membre de droite de l'équation ci-dessus est un  $o(1)$  lorsque  $q = \min(p, q) \rightarrow +\infty$  et par suite,  $\{\oint_{\partial\mathcal{M}_k} \beta\}_{k=1}^\infty$  est une suite de Cauchy, convergente dans  $\mathbb{R}$  comme annoncé.  $\square$

D'après le Théorème de Divergence-flux,

$$\mathfrak{M}(V_\infty, \phi, g) = \int_{\partial\tilde{E}_{\rho_1}} \left\{ \hat{V}_\infty (\hat{\nabla}^j g_{ij} - \hat{\nabla}_i \text{tr}_{\hat{g}} g) + \hat{\nabla}_i \hat{V}_\infty \text{tr}_{\hat{g}} e - \hat{\nabla}^j \hat{V}_\infty e_{ij} \right\} \eta^i d\sigma$$

où  $\eta$  est la normale extérieure à  $\partial\tilde{E}_{\rho_1}$  dans  $\mathcal{M}$  et  $d\sigma$  est la mesure induite sur  $\partial\tilde{E}_{\rho_1}$ .  $\tilde{E}_{\rho_1}$  possède deux composantes de bord disjointes. Un bord à l'infini noté  $S_\infty$  et un bord intérieur  $\partial\tilde{\Omega}_{\rho_1} = S_{\rho_1}$ . Il se trouve que  $\hat{V}_\infty$  est nul sur  $S_{\rho_1}$  par construction et que pour  $\rho \leq \rho_1^2$ ,  $\hat{V}_\infty = \hat{V}_\infty$ . On utilise donc le Lemme 28 (sous réserve que les conditions

d'intégrabilité soient vérifiées) avec l'exhaustion  $\mathcal{M} = \bigcup_{k \geq 1} S_k$  où  $S_k = \{x \in \mathcal{M} : \rho(x) = 1/k\}$  et finalement la masse prend la forme suivante

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}(V_\infty, \phi, g) &= \int_{S_\infty} \left\{ \mathring{V}_\infty (\mathring{\nabla}^j g_{ij} - \mathring{\nabla}_i \text{tr}_{\mathring{g}} g) + \mathring{\nabla}_i \mathring{V}_\infty \text{tr}_{\mathring{g}} e - \mathring{\nabla}^j \mathring{V}_\infty e_{ij} \right\} \nu^i d\sigma_0 \quad (7.19) \\ &= \int_{S_\infty} \mathbb{U}(V_\infty, e)(\nu) d\sigma_0 \end{aligned}$$

où  $S_\infty = \lim_{k \rightarrow 0^+} S_k$ ,  $\nu$  la normale extérieure à  $S_\infty$  dans  $\mathcal{M}$  et  $d\sigma_0$  la mesure induite sur  $S_\infty$ .

On obtient donc l'expression de l'intégrande intervenant dans la définition de la masse

$$\begin{aligned} \mathbb{U}(V_\infty, e) &= \mathbb{U}(V_\infty, \phi, g) = \hat{V}_\infty (\mathring{\nabla}^j g_{ij} - \mathring{\nabla}_i \text{tr}_{\mathring{g}} g) + \mathring{\nabla}_i \hat{V}_\infty \text{tr}_{\mathring{g}} e - \mathring{\nabla}^j \hat{V}_\infty e_{ij} \\ &= \mathring{g}^{jk} \left( \hat{V}_\infty (\mathring{\nabla}_k g_{ij} - \mathring{\nabla}_i g_{jk}) + \partial_i \hat{V}_\infty (g - \mathring{g})_{jk} - \partial_k \hat{V}_\infty (g - \mathring{g})_{ij} \right). \quad (7.20) \end{aligned}$$

Formellement,

$$\mathfrak{M}(V_\infty, \phi, g) = \int_{S_\infty} \left\{ \hat{V}_\infty (\text{div}_0 e - d \text{tr}_{\mathring{g}} e) + d \hat{V}_\infty (\text{tr}_{\mathring{g}} e) - e(\mathring{\nabla} \hat{V}_\infty, \cdot) \right\} (\nu) d\sigma_0,$$

qui coïncide avec la fonctionnelle définie dans [34] ou [21].

Il reste à vérifier si les conditions d'intégrabilité du Lemme 28 sont satisfaites pour bien avoir l'équivalence des définitions (7.18) et (7.19). Les fonctions  $\hat{V}_\infty \mathring{\nabla} g \nu$  et  $\mathring{\nabla} \hat{V}_\infty (g - \mathring{g}) \nu$  étant dans  $W_{loc}^{1,2}$  car  $g \in \mathcal{G}^+$ , il ne reste qu'à montrer  $\hat{V}_\infty \mathcal{R}_0(g) \in L^1$  pour montrer que les expressions (7.18) et (7.19) sont toutes deux bien définies et donc coïncident. Ceci est fait dans la section suivante.

## 7.4 Régularité

Le Lemme 27 implique le corollaire suivant, qui servira aussi bien à justifier que la masse est bien définie qu'à simplifier la preuve de son invariance géométrique.

### Corollaire 7:

La définition de la fonctionnelle  $\mathfrak{M}$  (7.18) reste valable (et inchangée) si on remplace le KID au voisinage de l'infini représentant  $V_\infty$  par toute fonction asymptotiquement KID  $V \in V_\infty + W_s^{2,2}(\mathcal{M})$ ,  $\forall s \leq -\delta_n - \delta$ .

Preuve :

La différence entre les définitions (7.19) pour  $V$  et  $\hat{V}_\infty$  est l'intégrale

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \int_{S_\lambda} \left\{ (V - \hat{V}_\infty) (\mathring{\nabla}^j g_{ij} - \mathring{\nabla}_i \text{tr}_{\mathring{g}} g) + \mathring{\nabla}_i (V - \hat{V}_\infty) \text{tr}_{\mathring{g}} e - \mathring{\nabla}^j (V - \hat{V}_\infty) e_{ij} \right\} \nu^i d\sigma_0 \quad (7.21)$$

Les fonctions  $(V - \hat{V}_\infty) \mathring{\nabla} (g - \mathring{g}) \nu$  et  $\mathring{\nabla} (V - \hat{V}_\infty) (g - \mathring{g}) \nu$  présentes sous l'intégrale sont dans  $W_{s+\delta}^{1,2}(\mathcal{M})$  et d'après le Lemme 27, l'intégrale (7.21) décroît comme  $o(\lambda^{-(\delta_n + \delta + s)})$  lorsque  $\lambda \rightarrow 0$ . La condition  $s \leq -\delta_n - \delta$  assure que (7.21) tende bien vers 0.  $\square$

Le point d'orgue de cette section est le Théorème 18. Nous aurons besoin du lemme suivant dans la preuve de la Proposition 24, de laquelle découle presque directement le théorème.

**Lemme 29:**

Soit  $\mathcal{M}$  une variété  $n$ -dimensionnelle. Soit  $g$  et  $\mathring{g}$  deux métriques Riemanniennes sur  $\mathcal{M}$ . En notant  $e_{ij} = g_{ij} - \mathring{g}_{ij}$ ,

$$\text{Ric } \mathring{g}_{jk} \left( g^{jk} + (g^{jk} - \mathring{g}^{jk}) \right) = R(\mathring{g}) + \mathcal{O}(e^2),$$

où  $\mathcal{O}(e^2)$  est une somme de termes au minimum quadratiques en  $e$ .

Preuve :

$$g = \mathring{g} + e = \mathring{g} (1 + \mathring{g}^{-1}e)$$

et par conséquent

$$\begin{aligned} g^{-1} &= (1 + \mathring{g}^{-1}e)^{-1} \mathring{g}^{-1} \\ &= (1 - \mathring{g}^{-1}e + \mathcal{O}(e^2)) \mathring{g}^{-1} \\ &= \mathring{g}^{-1} - \mathring{g}^{-1}e \mathring{g}^{-1} + \mathcal{O}(e^2). \end{aligned}$$

Finalement,

$$g^{-1} + \mathring{g}^{-1}e \mathring{g}^{-1} = \mathring{g}^{-1} + \mathcal{O}(e^2). \quad \square$$

**Proposition 24:**

Soit  $g \in \mathcal{G}^+$ . Alors pour tout  $\delta \leq -1/2$ , il existe une constante  $c > 0$  dépendant de  $\mathring{g}$  et  $\delta$  telle que

$$\|\Phi_0(g) - \mathcal{R}_0(g)\|_{1,-1} \leq c(1 + \|g - \mathring{g}\|_{2,2,\delta}^2). \quad (7.22)$$

Preuve :

D'après (5.9), la courbure scalaire de  $g$  peut être exprimée sous la forme

$$R(g) = g^{jk} \text{Ric } \mathring{g}_{jk} + Q(g^{-1} \mathring{\nabla} g) + g^{ik} g^{jl} (\mathring{\nabla}_{ij}^2 g_{kl} - \mathring{\nabla}_{ik}^2 g_{jl}),$$

où  $Q$  est une somme de termes quadratiques en  $g^{-1} \mathring{\nabla} g$ .

$$\begin{aligned} R(g) - 2\Lambda &= g^{jk} \text{Ric } \mathring{g}_{jk} - 2\Lambda + Q(g^{-1}, \mathring{\nabla} g) + \mathring{g}^{ik} \mathring{g}^{jl} (\mathring{\nabla}_{ij}^2 g_{kl} - \mathring{\nabla}_{ik}^2 g_{jl}) \\ &\quad + \left( (g^{ik} - \mathring{g}^{ik}) g^{jl} + \mathring{g}^{ik} (g^{jl} - \mathring{g}^{jl}) \right) (\mathring{\nabla}_{ij}^2 g_{kl} - \mathring{\nabla}_{ik}^2 g_{jl}) \\ &= \text{Ric } \mathring{g}_{jk} \left( g^{jk} + (\mathring{g}^{-1} e \mathring{g}^{-1})^{jk} \right) - 2\Lambda + Q(g^{-1}, \mathring{\nabla} g) + \mathcal{R}_0(g) / \sqrt{\mathring{g}} \\ &\quad + \left( (g^{ik} - \mathring{g}^{ik}) g^{jl} + \mathring{g}^{ik} (g^{jl} - \mathring{g}^{jl}) \right) (\mathring{\nabla}_{ij}^2 g_{kl} - \mathring{\nabla}_{ik}^2 g_{jl}) - \frac{1}{2} (R(\mathring{g}) - 2\Lambda) \text{tr}_{\mathring{g}} e. \end{aligned}$$

On obtient grâce au Lemme 29,

$$\begin{aligned} R(g) - 2\Lambda &= R(\mathring{g}) - 2\Lambda + \mathcal{O}(e^2) + Q(g^{-1}, \mathring{\nabla} g) + \mathcal{R}_0(g) / \sqrt{\mathring{g}} \\ &\quad + \left( (g^{ik} - \mathring{g}^{ik}) g^{jl} + \mathring{g}^{ik} (g^{jl} - \mathring{g}^{jl}) \right) (\mathring{\nabla}_{ij}^2 g_{kl} - \mathring{\nabla}_{ik}^2 g_{jl}) \\ &\quad - \frac{1}{2} (R(\mathring{g}) - 2\Lambda) \mathring{g}^{ij} (g_{ij} - \mathring{g}_{ij}). \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \Phi_0(g) - \mathcal{R}_0(g) &= (R(\dot{g}) - 2\Lambda) \sqrt{g} + \mathcal{O}(e^2) + Q(g^{-1}, \mathring{\nabla}g) + \mathcal{R}_0(g)(\sqrt{g} - \sqrt{\dot{g}})/\sqrt{\dot{g}} \\ &\quad + \left( (g^{ik} - \dot{g}^{ik})g^{jl} + \dot{g}^{ik}(g^{jl} - \dot{g}^{jl}) \right) (\mathring{\nabla}_{ij}^2 g_{kl} - \mathring{\nabla}_{ik}^2 g_{jl}) \sqrt{g} \\ &\quad - \frac{1}{2} (R(\dot{g}) - 2\Lambda) \dot{g}^{ij} (g_{ij} - \dot{g}_{ij}) \sqrt{g}. \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Hölder (4.16) et l'inclusion de Sobolev ( $\delta \leq -1/2$ )

$$\begin{aligned} \|\Phi_0(g) - \mathcal{R}_0(g)\|_{1,-1} &\leq c \left\{ \|R(\dot{g}) - 2\Lambda\|_{1,-1} + \|(g - \dot{g})^2\|_{1,-1} + \|(\mathring{\nabla}g)^2\|_{1,-1} \right. \\ &\quad \left. + \|\mathcal{R}_0(g)(\sqrt{g} - \sqrt{\dot{g}})\|_{1,-1} + \|(g - \dot{g})\mathring{\nabla}^2 g\|_{1,-1} \right. \\ &\quad \left. + \|(R(\dot{g}) - 2\Lambda)(g - \dot{g})\|_{1,-1} \right\} \\ &\leq c \left\{ \|R(\dot{g}) - 2\Lambda\|_{1,-1} + \|g - \dot{g}\|_{2,\delta}^2 + \|\mathring{\nabla}g\|_{2,\delta}^2 \right. \\ &\quad \left. + \|g - \dot{g}\|_{2,\delta} \|\mathcal{R}_0(g)\|_{2,\delta} + \|g - \dot{g}\|_{2,\delta} \|\mathring{\nabla}^2 g\|_{2,\delta} \right. \\ &\quad \left. + \|g - \dot{g}\|_{\infty,0} \|R(\dot{g}) - 2\Lambda\|_{1,-1} \right\} \\ &\leq c \left\{ \|R(\dot{g}) - 2\Lambda\|_{1,-1} + \|g - \dot{g}\|_{2,2,\delta}^2 + \|g - \dot{g}\|_{2,\delta} \|\mathcal{R}_0(g)\|_{2,\delta} \right. \\ &\quad \left. + \|g - \dot{g}\|_{2,\delta} \|R(\dot{g}) - 2\Lambda\|_{1,-1} \right\}. \end{aligned} \tag{7.23}$$

D'après la définition (7.13) de  $\mathcal{R}_0(g)$ , l'inégalité de Hölder (4.16), l'inégalité de Sobolev et l'inclusion de Sobolev ( $\delta \leq 0$ ),

$$\begin{aligned} \|\mathcal{R}_0(g)\|_{2,\delta} &\leq c \left\{ \|\mathring{\nabla}^2(g - \dot{g})\|_{2,\delta} + \|g - \dot{g}\|_{\infty,\delta} \|\text{Ric } \dot{g} + (n-1)\dot{g}\|_{2,0} \right. \\ &\quad \left. + \|g - \dot{g}\|_{2,\delta} + \|R(\dot{g}) - 2\Lambda\|_{2,0} \|g - \dot{g}\|_{\infty,\delta} \right\} \\ &\leq c \|g - \dot{g}\|_{2,2,\delta} \left\{ 1 + \|\text{Ric } \dot{g} + (n-1)\dot{g}\|_{2,\delta} + \|R(\dot{g}) - 2\Lambda\|_{2,\delta} \right\}. \end{aligned}$$

Compte tenu des conditions d'intégrabilité (7.8),

$$\|\mathcal{R}_0(g)\|_{2,\delta} \leq c \|g - \dot{g}\|_{2,2,\delta},$$

et par conséquent  $\mathcal{R}_0(g) \in L_\delta^2$ .

En remplaçant dans (7.23), compte tenu des conditions d'intégrabilité (7.8) et (7.9),

$$\|\Phi_0(g) - \mathcal{R}_0(g)\|_{1,-1} \leq c \left\{ 1 + \|g - \dot{g}\|_{2,2,\delta}^2 + \|g - \dot{g}\|_{2,2,\delta} \right\}.$$

On conclut en utilisant la relation  $2a \leq 1 + a^2$  avec  $a = \|g - \dot{g}\|_{2,2,\delta}$ .  $\square$

**Théorème 18:**

Soit  $\varepsilon \in L_{-1}^1(\Lambda^n T^* \mathcal{M})$ . Lorsque l'on fixe  $\phi$  et  $V_\infty$ , la fonctionnelle  $\mathfrak{M}$  définie par (7.17) est lisse sur la sous-variété de Hilbert  $\mathcal{C}(\varepsilon)$ ,

$$\mathfrak{M} \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{C}(\varepsilon); \mathbb{R}).$$



Preuve :

La fonctionnelle  $\mathfrak{M}$  dépendant linéairement de  $g$ , il nous suffit de montrer que  $\mathfrak{M}$  est bornée sur  $\mathcal{C}(\varepsilon)$  au sens où les intégrales présentes dans (7.17) sont convergentes. La deuxième intégrale étant à support compact, elle est convergente. Comme  $\hat{V}_\infty = \mathcal{O}(\rho^{-1})$ , montrer que la première intégrale est convergente revient à montrer que  $\mathcal{R}_0(g) \in L_{-1}^1$ , ce qui découle de la proposition 24. En effet, puisque  $\varepsilon \in L_{-1}^1(\mathcal{M})$ , on peut conclure la preuve du Théorème 18 par

$$\begin{aligned} \|\mathcal{R}_0(g)\|_{1,-1} &\leq \|\Phi_0(g) - \mathcal{R}_0(g)\|_{1,-1} + \|\Phi_0(g)\|_{1,-1} \\ &\leq c \left\{ 1 + \|g - \dot{g}\|_{2,2,\delta}^2 \right\} + \|\varepsilon\|_{1,-1}. \quad \square \end{aligned}$$

Par conséquent, les expressions (7.18) et (7.19) de la masse sont toutes deux bien définies et coïncident. Dans la section suivante, nous allons nous intéresser au caractère géométrique de la masse et notamment à la dépendance de la masse par rapport au difféomorphisme choisi pour la définir.

## 7.5 Invariance géométrique

**Lemme 30:**

Soient  $k = 0, 1, 2$ ,  $s \in \mathbb{R}$ ,  $g \in \mathcal{G}^+$  avec  $\delta \leq 0$ . On définit les espaces de Sobolev à poids  $W_s^{k,2}(g)$  de manière analogue à  $W_s^{k,2}$ , en remplaçant  $\dot{g}$  par  $g$ . Alors on a

$$W_s^{k,2}(g) = W_s^{k,2}.$$

En d'autres termes, les espaces  $W_s^{k,2}$  sont indépendants de la métrique de  $\mathcal{G}^+$  utilisée pour les définir.

Preuve :

Soit  $\nabla$  la connexion relative à la métrique  $g$ . On rappelle que toute métrique  $g \in \mathcal{G}^+$  est équivalente à  $\dot{g}$  lorsque  $\delta \leq 0$ . Nous noterons respectivement

$$\mathring{W}_{k,s} := W_s^{k,2}(\dot{g}) \quad \text{et} \quad W_{k,s} := W_s^{k,2}(g).$$

Il nous faut montrer que  $\mathring{W}_{k,s} = W_{k,s}$ ,  $\forall k = 0, 1, 2, \forall s \in \mathbb{R}$ . Soit  $g = \dot{g} + \mathring{W}_{k,s}$ ,  $s \in \mathbb{R}$ . Montrons l'inclusion  $\mathring{W}_{k,s} \subset W_{k,s}$  :

Pour  $k = 0$  : Soit le tenseur  $u \in T_r^m(\mathcal{M})$  tel que  $u \in \mathring{W}_{0,s}$ , alors puisque  $g$  et  $\dot{g}$  sont équivalentes, on a immédiatement l'inclusion

$$\mathring{W}_{0,s} \subset W_{0,s}. \quad (7.24)$$

Pour  $k = 1$  : soit  $u \in \mathring{W}_{1,s}$ , alors  $u$  et  $\mathring{\nabla}u$  sont dans  $\mathring{W}_{0,s} \subset W_{0,s}$ .

$$\nabla u \simeq \mathring{\nabla}u \pm Au$$

Puisque  $g \in \mathcal{G}^+$ ,  $A \in \mathring{W}_{1,\delta}$  et par (4.17),  $Au \in \mathring{W}_{0,s+\delta}$ . Compte tenu de l'inclusion de Sobolev ( $\delta \leq 0$ ) et (7.24), on a l'inclusion

$$\mathring{W}_{0,s+\delta} \subset W_{0,s}, \quad (7.25)$$

ce qui entraîne  $Au \in W_{0,s}$  et par suite  $\nabla u \in W_{0,s}$ , ce qui donne bien l'inclusion

$$\mathring{W}_{1,s} \subset W_{1,s}. \quad (7.26)$$

Pour  $k = 2$  : soit  $u \in \mathring{W}_{2,s}$ , alors  $u$  et  $\mathring{\nabla}^2 u \in \mathring{W}_{0,s} \subset W_{0,s}$  et  $\mathring{\nabla} u \in \mathring{W}_{1,s} \subset W_{1,s}$

$$\begin{aligned} \nabla^2 u &\simeq \mathring{\nabla}^2 u \pm \mathring{\nabla}(Au) \pm A\mathring{\nabla}u \pm A^2u \\ &\simeq \mathring{\nabla}^2 u \pm u\mathring{\nabla}A \pm A\mathring{\nabla}u \pm A^2u. \end{aligned}$$

Puisque  $g \in \mathcal{G}^+$ ,  $A \in \mathring{W}_{1,\delta}$  et par (4.17),  $A\mathring{\nabla}u \in \mathring{W}_{0,s+\delta} \subset W_{0,s}$  d'après (7.25). Puisque  $A \in \mathring{W}_{1,\delta}$ ,  $\mathring{\nabla}A \in \mathring{W}_{0,\delta}$  et par (4.17),  $A^2 \in \mathring{W}_{0,2\delta}$ . Par l'inégalité de Sobolev et compte tenu de l'inclusion de Sobolev ( $\delta \leq 0$ ), l'inégalité de Hölder et (7.24), on a les inclusions  $A^2u \in W_{0,s}$  et  $u\mathring{\nabla}A \in W_{0,s}$  et par suite  $\nabla^2 u \in W_{0,s}$ , ce qui donne bien l'inclusion

$$\mathring{W}_{2,s} \subset W_{2,s}. \quad (7.27)$$

Pour montrer l'inclusion inverse  $W_{k,s} \subset \mathring{W}_{k,s}$ , il suffit de remarquer que par (7.27),  $g = \mathring{g} + W_{k,s}$  que l'on peut encore écrire  $\mathring{g} = g + W_{k,s}$ . Nous pouvons alors appliquer le même raisonnement que précédemment en inversant les rôles de  $g$  et  $\mathring{g}$ .  $\square$

Forts de ce résultat, nous pourrions continuer par la suite à utiliser la notation  $W_s^{k,2}$  pour désigner les espaces de Sobolev sans faire référence à la métrique (de  $\mathcal{G}^+$ ) utilisée pour les définir, sans que cela donne lieu à une quelconque ambiguïté.

Afin de montrer l'invariance géométrique de notre définition de masse (7.19), considérons  $\phi$  et  $\psi$  deux difféomorphismes permettant de transporter la métrique  $b$  sur  $\mathcal{M}_{\text{ext}}$

$$\begin{cases} \mathring{g} = \phi^*b \\ \tilde{g} = \psi^*b, \end{cases} \quad (7.28)$$

les deux métriques étant prolongées de façon lisse et arbitraire sur  $\mathcal{M}$ . On procède de même pour  $V_\infty$ .

Compte tenu des résultats de R. Bartnik [5] et de ceux P. Chruściel, M. Herzlich [19] et P. Chruściel, G. Nagy [17] nous proposons l'affirmation suivante :

**Conjecture 1:**

Supposons que  $g \in \mathcal{G}^+ = \mathring{g} + W_\delta^{2,2}$  et  $g \in \tilde{g} + W_\delta^{2,2}(\tilde{g})$ , avec  $\delta \leq -n/2$ ,  $n = 3$ . Alors, à une isométrie près du modèle, il existe un champ de vecteur  $\xi \in W_\delta^{3,2}$  tel que

$$\begin{aligned} \tilde{g}_{ij} &= \mathring{g}_{ij} + (\mathcal{L}_\xi \mathring{g})_{ij} + W_{2\delta}^{2,2}, \\ \tilde{V}_\infty &= \mathring{V}_\infty + \mathring{\nabla}_i \mathring{V}_\infty \xi^i + W_{2\delta+1}^{2,2}. \end{aligned}$$

Une première tentative de preuve consisterait à essayer d'adapter, par une étude fine en faible régularité, la preuve donnée dans [17]. On pourrait prendre des poids  $\delta$  différents dans les espaces de Sobolev relatifs à  $\mathring{g}$  et  $\tilde{g}$ , on obtiendrait alors le résultat pour le poids

le plus grand. Notons qu'une conséquence, prouvée ultérieurement, sera que  $\tilde{g} \in \mathcal{G}^+$  ce qui n'était *a priori* pas le cas.

Le théorème suivant, tributaire de la Conjecture 1, énonce l'invariance géométrique de notre fonctionnelle masse, caractère indispensable pour espérer traduire une certaine réalité physique en accord avec les principes de la relativité générale.

**Théorème 19:**

Soit  $g \in \mathcal{G}^+$ , avec  $\delta \in ]-(n+1)/2, -n/2]$  et  $n = 3$ . Soient  $\phi$  et  $\psi$  deux difféomorphismes comme dans (7.28). Alors

$$\mathfrak{M}(V_\infty, \phi, g) = \mathfrak{M}(V_\infty, \psi, g).$$

Preuve :

La Conjecture 1 nous donne

$$\tilde{V}_\infty = \mathring{V}_\infty + \mathring{\nabla}_i \mathring{V}_\infty \xi^i + W_{2\delta+1}^{2,2},$$

or  $\mathring{\nabla}_i \mathring{V}_\infty \xi^i \in W_{\delta+1}^{3,2}$  puisque  $\xi \in W_\delta^{3,2}$ , ce qui entraîne grâce à l'inclusion de Sobolev ( $\delta \leq 0$ ) que  $\tilde{V}_\infty - \mathring{V}_\infty \in W_{\delta+1}^{2,2}$ . Cela montre que le KID au voisinage de l'infini  $\hat{V}_\infty(\tilde{g})$  représentant  $V_\infty$  et construit avec la métrique  $\tilde{g}$  est tel que

$$\hat{V}_\infty(\tilde{g}) \in V_\infty + W_{\delta+1}^{k,2}(\mathcal{M}).$$

Puisque  $\delta \in ]-(n+1)/2, -n/2]$ , la condition  $\delta+1 \leq -\delta_n - \delta$  est bien satisfaite. On peut donc utiliser le Corollaire 7 et choisir n'importe quel représentant de la classe d'équivalence  $V_\infty + W_{\delta+1}^{k,2}(\mathcal{M})$  pour définir la masse sans en changer la valeur. On peut prendre en particulier  $\hat{V}_\infty$  pour définir à la fois  $\mathbb{U}(V_\infty, \phi, g)$  et  $\mathbb{U}(V_\infty, \psi, g)$ , notés respectivement  $\mathring{\mathbb{U}}$  et  $\tilde{\mathbb{U}}$  afin d'alléger les notations. On notera  $\mathring{\nabla}$  et  $\sqrt{\tilde{g}}$  la connexion et la mesure de volume pour la métrique  $\tilde{g}$ . D'après (7.18), il nous faut donc calculer

$$\beta := \mathring{\nabla} \mathring{\mathbb{U}} \sqrt{\mathring{g}} - \tilde{\nabla} \tilde{\mathbb{U}} \sqrt{\tilde{g}}$$

avant de l'intégrer sur  $\tilde{E}_{\rho_1}$  et montrer que le résultat est nul. Les métriques  $\mathring{g}$  et  $\tilde{g}$  étant équivalentes, d'après (7.20),

$$\begin{aligned} \beta &= \mathring{\nabla}^i \left\{ \mathring{g}^{jk} \left( \hat{V}_\infty (\mathring{\nabla}_k g_{ij} - \mathring{\nabla}_i g_{jk}) + \partial_i \hat{V}_\infty (g - \mathring{g})_{jk} - \partial_k \hat{V}_\infty (g - \mathring{g})_{ij} \right) \right\} \sqrt{\mathring{g}} \\ &\quad - \tilde{\nabla}^i \left\{ \tilde{g}^{jk} \left( \hat{V}_\infty (\tilde{\nabla}_k g_{ij} - \tilde{\nabla}_i g_{jk}) + \partial_i \hat{V}_\infty (g - \tilde{g})_{jk} - \partial_k \hat{V}_\infty (g - \tilde{g})_{ij} \right) \right\} \sqrt{\tilde{g}} \\ &= \mathring{\nabla}^i \left\{ \mathring{g}^{jk} \left( \hat{V}_\infty (\mathring{\nabla}_k g_{ij} - \mathring{\nabla}_i g_{jk}) + \partial_i \hat{V}_\infty (g - \mathring{g})_{jk} - \partial_k \hat{V}_\infty (g - \mathring{g})_{ij} \right) \right\} \sqrt{\mathring{g}} \\ &\quad - \tilde{\nabla}^i \left\{ \tilde{g}^{jk} \left( \hat{V}_\infty (\tilde{\nabla}_k g_{ij} - \tilde{\nabla}_i g_{jk}) + \partial_i \hat{V}_\infty (g - \tilde{g})_{jk} - \partial_k \hat{V}_\infty (g - \tilde{g})_{ij} \right) \right\} \sqrt{\tilde{g}} \\ &= \mathring{\nabla}^i \left\{ \mathring{g}^{jk} \left( \hat{V}_\infty [(\mathring{\nabla}_k - \tilde{\nabla}_k) g_{ij} - (\mathring{\nabla}_i - \tilde{\nabla}_i) g_{jk}] \right) \right\} \sqrt{\mathring{g}} \\ &\quad + \mathring{\nabla}^i \left\{ \mathring{g}^{jk} \left( \partial_i \hat{V}_\infty (\tilde{g} - \mathring{g})_{jk} - \partial_k \hat{V}_\infty (\tilde{g} - \mathring{g})_{ij} \right) \right\} \sqrt{\mathring{g}} \\ &\quad + \mathring{\nabla}^i \left\{ (\tilde{g} - \mathring{g}) \left( \hat{V}_\infty \tilde{\nabla} g + \mathring{\nabla} \hat{V}_\infty (g - \tilde{g}) \right) \right\} \sqrt{\mathring{g}}. \end{aligned}$$

En posant  $\tilde{A}_{ij}^k = \tilde{\Gamma}_{ij}^k - \mathring{\Gamma}_{ij}^k$ , on obtient d'après (5.6) et (5.7),

$$(\mathring{\nabla}_k - \tilde{\nabla}_k)g_{ij} - (\mathring{\nabla}_i - \tilde{\nabla}_i)g_{jk} = \mathring{\nabla}_k \tilde{g}_{ij} - \mathring{\nabla}_i \tilde{g}_{jk}.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \beta &= \mathring{\nabla}^i \left\{ \mathring{g}^{jk} \left( \hat{V}_\infty (\mathring{\nabla}_k \tilde{g}_{ij} - \mathring{\nabla}_i \tilde{g}_{jk}) + \mathring{\nabla}_i \hat{V}_\infty (\tilde{g} - \mathring{g})_{jk} - \mathring{\nabla}_k \hat{V}_\infty (\tilde{g} - \mathring{g})_{ij} \right) \right\} \sqrt{\mathring{g}} \\ &\quad + \mathring{\nabla} \left\{ (\tilde{g} - \mathring{g}) \left( \hat{V}_\infty \tilde{\nabla} g + \mathring{\nabla} \hat{V}_\infty (g - \tilde{g}) \right) \right\} \sqrt{\mathring{g}} \\ &= \mathring{\nabla} \mathbb{U}(\hat{V}_\infty, \phi, \tilde{g}) \sqrt{\mathring{g}} + \mathring{\nabla} \left\{ (\tilde{g} - \mathring{g}) \left( \hat{V}_\infty \tilde{\nabla} g + \mathring{\nabla} \hat{V}_\infty (g - \tilde{g}) \right) \right\} \sqrt{\mathring{g}}. \end{aligned}$$

L'intégration sur  $\tilde{E}_{\rho_1}$  donne d'après (7.19),

$$\begin{aligned} &\mathfrak{M}(V_\infty, \phi, g) - \mathfrak{M}(V_\infty, \psi, g) \\ &= \mathfrak{M}(V_\infty, \phi, \tilde{g}) + \int_{\partial \tilde{E}_{\rho_1}} (\tilde{g} - \mathring{g}) \left( \hat{V}_\infty \tilde{\nabla} g + \mathring{\nabla} \hat{V}_\infty (g - \tilde{g}) \right) \nu d\sigma_0 \\ &= \int_{\tilde{E}_{\rho_1}} \mathring{g}^{jk} \mathring{\nabla}^i \left\{ \hat{V}_\infty (\mathring{\nabla}_k g_{ij} - \mathring{\nabla}_i g_{jk}) + \mathring{\nabla}_i \hat{V}_\infty (g - \mathring{g})_{jk} - \mathring{\nabla}_k \hat{V}_\infty (g - \mathring{g})_{ij} \right\} \sqrt{\mathring{g}} \\ &\quad + \int_{S_\infty} (\tilde{g} - \mathring{g}) \left( \hat{V}_\infty \tilde{\nabla} g + \mathring{\nabla} \hat{V}_\infty (g - \tilde{g}) \right) \nu d\sigma_0. \end{aligned} \tag{7.29}$$

L'expression exacte du deuxième terme du membre de droite importe peu dans la mesure où ce terme ne contribue pas une fois intégré sur la sphère à l'infini, d'après le même argument que celui utilisé dans le Corollaire 7. En effet, puisque  $(\tilde{g} - \mathring{g}) \in W_\delta^{2,2}$  et que  $\hat{V}_\infty = \mathcal{O}(\rho^{-1})$  et  $|\mathring{\nabla} \hat{V}_\infty|_{\mathring{g}} = \mathcal{O}(\rho^{-1})$  lorsque  $\rho \rightarrow 0$ , alors  $(\tilde{g} - \mathring{g}) \hat{V}_\infty \in W_{\delta+1}^{2,2}$  et  $\mathring{\nabla} \hat{V}_\infty (g - \tilde{g}) \in W_{\delta+1}^{2,2}$ . Par conséquent, les fonctions  $(\tilde{g} - \mathring{g}) \hat{V}_\infty \tilde{\nabla} g \nu$  et  $(\tilde{g} - \mathring{g}) \mathring{\nabla} \hat{V}_\infty (g - \tilde{g}) \nu$  sont respectivement dans  $W_{2\delta+1}^{1,2}$  et  $W_{2\delta+1}^{2,2}$ . Puisque  $\delta \in ] - (n+1)/2, -n/2]$ , d'après le Lemme 27, lorsque  $\rho$  tend vers 0, la première intégrale sur  $S_\infty$  est un  $o(\rho^{-\delta n - 1 - 2\delta})$  avec  $-\delta n - 1 - 2\delta > 0$  et la Proposition 1 indique que la deuxième intégrale sur  $S_\infty$  est un  $o(\rho^{-2\delta-1}) = o(\rho^{n-1})$ . Toutes deux ne contribuent donc pas après intégration sur  $S_\infty$ . Ainsi, on obtient

$$\mathfrak{M}(V_\infty, \phi, g) - \mathfrak{M}(V_\infty, \psi, g) = \mathfrak{M}(V_\infty, \phi, \tilde{g}).$$

Montrons maintenant que  $\mathfrak{M}(V_\infty, \phi, \tilde{g})$  est nulle. A ce stade de la démonstration, nous n'avons pas encore utilisé que  $\tilde{g} = \psi^* b$ . On utilise l'expression de  $\tilde{g}$  de la Conjecture 1 :

$$\tilde{g}_{ij} = \mathring{g}_{ij} + \mathring{\nabla}_i \xi_j + \mathring{\nabla}_j \xi_i + W_{ij} \quad \text{avec } W \in W_{2\delta}^{2,2}. \tag{7.30}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{U}(V_\infty, \phi, \tilde{g}) &= \mathring{g}^{jk} \left( \hat{V}_\infty (\mathring{\nabla}_k \tilde{g}_{ij} - \mathring{\nabla}_i \tilde{g}_{jk}) + \mathring{\nabla}_i \hat{V}_\infty (\tilde{g} - \mathring{g})_{jk} - \mathring{\nabla}_k \hat{V}_\infty (\tilde{g} - \mathring{g})_{ij} \right) \\ &= \hat{V}_\infty \mathring{g}^{jk} (\mathring{\nabla}_k \mathring{\nabla}_i \xi_j + \mathring{\nabla}_k \mathring{\nabla}_j \xi_i - \mathring{\nabla}_i \mathring{\nabla}_j \xi_k - \mathring{\nabla}_i \mathring{\nabla}_k \xi_j) \\ &\quad + \mathring{g}^{jk} \left( \mathring{\nabla}_i \hat{V}_\infty (\mathring{\nabla}_j \xi_k + \mathring{\nabla}_k \xi_j) - \mathring{\nabla}_k \hat{V}_\infty (\mathring{\nabla}_i \xi_j + \mathring{\nabla}_j \xi_i) \right) \\ &\quad + \hat{V}_\infty \mathring{\nabla} W + \mathring{\nabla} \hat{V}_\infty W \\ &= 2 \mathring{\nabla}_i \hat{V}_\infty (\mathring{\nabla}_j \xi^j) + \hat{V}_\infty (\mathring{\nabla}_j \mathring{\nabla}_i \xi^j + \mathring{\nabla}_j \mathring{\nabla}^j \xi_i - 2 \mathring{\nabla}_i \mathring{\nabla}_j \xi^j) \\ &\quad - \mathring{\nabla}_j \hat{V}_\infty (\mathring{\nabla}_i \xi^j + \mathring{\nabla}^j \xi_i) + \hat{V}_\infty \mathring{\nabla} W + \mathring{\nabla} \hat{V}_\infty W. \end{aligned}$$

Le terme  $\hat{V}_\infty \overset{\circ}{\nabla} W + \overset{\circ}{\nabla} \hat{V}_\infty W$  est exactement du même type que le terme sous la deuxième intégrale du membre de droite de (7.29) et ne contribue pas une fois intégré sur la sphère à l'infini, on peut donc l'omettre dans le reste du calcul. On utilise l'identité suivante, obtenue en prenant la trace de l'identité de Ricci (2.5)

$$(\text{Ric } \overset{\circ}{g})_{ij} \xi^j = \overset{\circ}{\nabla}_j \overset{\circ}{\nabla}_i \xi^j - \overset{\circ}{\nabla}_i \overset{\circ}{\nabla}_j \xi^j,$$

ce qui entraîne

$$\begin{aligned} \mathbb{U}(V_\infty, \phi, \tilde{g}) &= 2 \overset{\circ}{\nabla}_i \hat{V}_\infty (\overset{\circ}{\nabla}_j \xi^j) - (\overset{\circ}{\nabla}_j \hat{V}_\infty \overset{\circ}{\nabla}_i \xi^j + \hat{V}_\infty \overset{\circ}{\nabla}_j \overset{\circ}{\nabla}_i \xi^j) - \overset{\circ}{\nabla}^j \hat{V}_\infty \overset{\circ}{\nabla}_j \xi_i + \hat{V}_\infty \overset{\circ}{\nabla}_j \overset{\circ}{\nabla}^j \xi_i \\ &\quad + 2 \hat{V}_\infty (\text{Ric } \overset{\circ}{g})_{ij} \xi^j. \end{aligned}$$

Compte tenu des égalités suivantes :

$$\begin{aligned} 2 \overset{\circ}{\nabla}_i \hat{V}_\infty (\overset{\circ}{\nabla}_j \xi^j) &= 2 \overset{\circ}{\nabla}_j (\overset{\circ}{\nabla}_i \hat{V}_\infty \xi^j) - 2 \overset{\circ}{\nabla}_j \overset{\circ}{\nabla}_i \hat{V}_\infty \xi^j \\ -(\overset{\circ}{\nabla}_j \hat{V}_\infty \overset{\circ}{\nabla}_i \xi^j + \hat{V}_\infty \overset{\circ}{\nabla}_j \overset{\circ}{\nabla}_i \xi^j) &= -\overset{\circ}{\nabla}_j (\hat{V}_\infty \overset{\circ}{\nabla}_i \xi^j) \\ -\overset{\circ}{\nabla}^j \hat{V}_\infty \overset{\circ}{\nabla}_j \xi_i &= -\overset{\circ}{\nabla}_j (\overset{\circ}{\nabla}^j \hat{V}_\infty \xi_i) + \overset{\circ}{\Delta} \hat{V}_\infty \xi_i \\ \hat{V}_\infty \overset{\circ}{\nabla}_j \overset{\circ}{\nabla}^j \xi_i &= \overset{\circ}{\nabla}_j (\hat{V}_\infty \overset{\circ}{\nabla}^j \xi_i) - \overset{\circ}{\nabla}_j \hat{V}_\infty \overset{\circ}{\nabla}^j \xi_i \\ &= \overset{\circ}{\nabla}_j (\hat{V}_\infty \overset{\circ}{\nabla}^j \xi_i) - \overset{\circ}{\nabla}_j (\overset{\circ}{\nabla}^j \hat{V}_\infty \xi_i) + \overset{\circ}{\Delta} \hat{V}_\infty \xi_i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{U}(V_\infty, \phi, \tilde{g}) &= 2 \overset{\circ}{\nabla}^j (2 \overset{\circ}{\nabla}_{[i} \hat{V}_\infty \xi_{j]} - \hat{V}_\infty \overset{\circ}{\nabla}_{[i} \xi_{j]}) - 2 \overset{\circ}{\nabla}_j \overset{\circ}{\nabla}_i \hat{V}_\infty \xi^j + 2 \overset{\circ}{\Delta} \hat{V}_\infty \xi_i + 2 \hat{V}_\infty (\text{Ric } \overset{\circ}{g})_{ij} \xi^j \\ &= -2 \overset{\circ}{\nabla}^j (\hat{V}_\infty^3 \overset{\circ}{\nabla}_{[i} \hat{V}_\infty^{-2} \xi_{j]}) - 2 (\overset{\circ}{\nabla}_j \overset{\circ}{\nabla}_i \hat{V}_\infty \xi^j - \overset{\circ}{\Delta} \hat{V}_\infty \xi_i - \hat{V}_\infty (\text{Ric } \overset{\circ}{g})_{ij} \xi^j) \end{aligned}$$

D'après (7.18) et (7.19), et sachant que  $\overset{\circ}{\nabla}_j \overset{\circ}{\nabla}_i \hat{V}_\infty = \overset{\circ}{\nabla}_i \overset{\circ}{\nabla}_j \hat{V}_\infty$ ,

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}(V_\infty, \phi, \tilde{g}) &= -2 \left[ \int_{\tilde{E}_{\rho_1}} \overset{\circ}{\nabla}^i \overset{\circ}{\nabla}^j \left( \hat{V}_\infty^3 \overset{\circ}{\nabla}_{[i} \hat{V}_\infty^{-2} \xi_{j]} \right) \sqrt{\tilde{g}} \right. \\ &\quad \left. + \int_{S_\infty} \left( \overset{\circ}{\nabla}_i \overset{\circ}{\nabla}_j \hat{V}_\infty - \overset{\circ}{g}_{ij} \overset{\circ}{\Delta} \hat{V}_\infty - \hat{V}_\infty (\text{Ric } \overset{\circ}{g})_{ij} \right) \xi^j \nu^i d\sigma_0 \right]. \end{aligned}$$

Or d'après (7.10),  $\overset{\circ}{\nabla}_i \overset{\circ}{\nabla}_j \hat{V}_\infty - \overset{\circ}{g}_{ij} \overset{\circ}{\Delta} \hat{V}_\infty - \hat{V}_\infty (\text{Ric } \overset{\circ}{g})_{ij} = 0$  et la double divergence d'une 2-forme bilinéaire antisymétrique est nulle, concluant la preuve de l'invariance géométrique de la masse.  $\square$

## 7.6 La masse d'une variété faiblement AH

La fonctionnelle masse dans la direction  $V_\infty$ , définie dans la section 7.3 et dont les propriétés sont décrites dans les sections précédant celle-ci, fait intervenir le vecteur  $V_\infty \in \mathcal{N}_{b_k}$ . Nous souhaiterions pouvoir définir un invariant géométrique indépendant de la direction  $V_\infty$ , une notion de masse intrinsèque d'une variété asymptotiquement hyperbolique de métrique  $g$ , et pouvoir relier cette masse intrinsèque à la fonctionnelle masse dans la direction  $V_\infty$ . Il nous faut pour cela nous intéresser de plus près à  $\mathcal{N}_{b_k}$ , en fonction de  $k = -1; 0; 1$ , puisque la structure de  $\mathcal{N}_{b_k}$  en dépend. On s'appuie sur l'article de Chruściel-Herzlich [19].

- Dans le cas  $k = -1$ ,  $\mathcal{N}_{b_{-1}}$  est de dimension 1 et

$$\mathcal{N}_{b_{-1}} = \text{Vect}(V_{(0)}) \text{ avec } V_{(0)} = \rho^{-1}\left(1 + \frac{k\rho^2}{4}\right)$$

Le système de coordonnées de (7.5) étant défini de manière unique, il en est de même pour  $V_{(0)}$  et on peut alors définir la masse

$$m_{AH}(g) := \mathfrak{M}(V_{(0)}, \phi, g). \quad (7.31)$$

On identifie le vecteur  $V_\infty = V_\infty^0 V_{(0)} \in \mathcal{N}_{b_{-1}}$  et sa composante  $V_\infty^0 \in \mathbb{R}$  et on a alors

$$\mathfrak{M}(V_\infty, \phi, g) = V_\infty^0 m_{AH}(g),$$

que l'on notera abusivement

$$\mathfrak{M}(V_\infty, \phi, g) = V_\infty m_{AH}(g).$$

- Dans le cas  $k = 0$ ,  $\mathcal{N}_{b_0}$  est également de dimension 1 et

$$\mathcal{N}_{b_0} = \text{Vect}(V_{(0)}) \text{ avec } V_{(0)} = \rho^{-1}\left(1 + \frac{k\rho^2}{4}\right)$$

Cependant, il y a un degré de liberté dans le choix du système de coordonnées de (7.5), invariant par le changement d'échelle

$$\rho \rightarrow a\rho, \quad h \rightarrow a^{-2}h, \quad a \in \mathbb{R}^*.$$

Pour fixer le système de coordonnées, on impose la condition  $\text{Vol}_h(N) = 1$  et la masse est alors définie par (7.31).

- Dans le cas  $k = 1$ ,  $(N, h) = (S^{n-1}, g_{S^{n-1}})$  et  $b_1$  est la métrique hyperbolique.  $\mathcal{N}_{b_1}$  est alors de dimension  $n + 1$  et pour le modèle de la boule de Poincaré,

$$\mathcal{N}_{b_1} = \text{Vect}\{V_{(\mu)}\}_{\mu=0,\dots,n}$$

avec  $V_{(0)} = \rho^{-1}\left(1 + \frac{\rho^2}{4}\right)$  et  $V_{(i)} = \rho^{-1}\left(1 + \frac{\rho^2}{4}\right)^2 x^i$ ,  $i = 1, \dots, n$  où les  $x^i$  sont les coordonnées cartésiennes sur la boule de  $\mathbb{R}^n$ .

Dans les coordonnées géodésiques autour d'un point de l'espace hyperbolique,  $b_1 = dr^2 + \sinh^2(r) g_{S^{n-1}}$  et la base orthonormale  $\{V_{(\mu)}\}_{\mu=0,\dots,n}$  peut être réécrite  $V'_{(0)} = \cosh(r)$  et  $V'_{(i)} = \sinh(r) n^i$ ,  $i = 1, \dots, n$

où les  $n^i$  sont les restrictions des  $x^i$  à la sphère unité de  $\mathbb{R}^n$  centrée au pôle.

$\mathcal{N}_{b_1}$  peut être muni de la métrique de Minkowski  $\eta$  de signature  $(-, +, \dots, +)$ , issue de l'action de  $O^+(1, n)$ , le groupe d'isométries de la métrique hyperbolique. La base  $\{V'_{(\mu)}\}_{\mu=0,\dots,n}$  est orthonormale pour  $\eta$  et  $V'_{(0)}$  est de genre temps, *i.e.*  $\eta(V'_{(0)}, V'_{(0)}) < 0$ . On définit l'orientation en temps de  $\mathcal{N}_{b_1}$  en utilisant cette base et par définition, on dira d'un vecteur de genre temps  $X^\mu V'_{(\mu)}$  qu'il est dirigé vers le futur (resp. passé) si  $X^0 > 0$  (resp.  $X^0 < 0$ ). Par abus de langage, on parlera alors de vecteur futur ou passé. Définissons le vecteur  $\mathcal{P}(g)$ , appartenant à  $(\mathbb{R}^{1,3}, \eta)$ , comme suit

$$\mathcal{P}_\mu(g) := \mathfrak{M}(V'_{(\mu)}, \phi, g). \quad (7.32)$$

On définit habituellement la masse, pour un vecteur  $\mathcal{P}(g)$  isotrope ou de genre temps, par

$$m_{AH}(g) := \pm \sqrt{|\eta^{\mu\nu} \mathcal{P}_\mu(g) \mathcal{P}_\nu(g)|}. \quad (7.33)$$

Les signes "+" et "-" sont respectivement choisis pour faire coïncider les signes de  $m_{AH}$  et de  $\mathcal{P}_0$ . Cependant, cette quantité reste bien définie pour un vecteur  $\mathcal{P}(g)$  de genre espace, même si dans ce cas  $m_{AH}$  ne s'interprète pas comme une masse. Dans tous les cas, on retrouve l'invariant géométrique

$$m_{AH}^2(g) := |\eta^{\mu\nu} \mathcal{P}_\mu(g) \mathcal{P}_\nu(g)| = \left| \mathcal{P}_0^2(g) - \sum_{i=1}^n \mathcal{P}_i^2(g) \right|. \quad (7.34)$$

Dans [19], il est dit que l'action de  $O^+(n, 1)$  sur  $\mathcal{N}_{b_1}$  permet de voir que les seuls invariants géométriques que l'on peut extraire de la fonctionnelle  $\mathfrak{M}$  sont  $m_{AH}^2$  ainsi que le genre du vecteur  $\mathcal{P}_\mu$  et sa caractéristique futur ou passé lorsque cela a un sens.

On identifie le vecteur  $V_\infty = \bar{V}_\infty^\mu V'_{(\mu)} \in (\mathcal{N}_{b_1}, \eta)$  et ses composantes qui forment le vecteur  $\bar{V}_\infty \in (\mathbb{R}^{1,3}, \eta)$  et on a alors

$$\mathfrak{M}(V_\infty, \phi, g) = \eta(\bar{V}_\infty, \mathcal{P}(g)),$$

que l'on notera abusivement

$$\mathfrak{M}(V_\infty, \phi, g) = \eta(V_\infty, \mathcal{P}(g)).$$

En asymptotiquement hyperbolique, la définition de masse fait appel à l'espace vectoriel  $\mathcal{N}_{b_k}$ , dont la dimension dépend de la valeur de  $k$ . La masse est donc un scalaire (vecteur de dimension 1) dans les cas  $k = 0$  ou  $k = -1$  et un vecteur de dimension  $n + 1$  dans le cas où  $k = 1$ . L'énergie totale, donnée dans le cas général par la masse et l'impulsion  $p_i$ , sera un vecteur de dimension encore plus grande. Il faudra rajouter un analogue asymptotiquement hyperbolique de l'impulsion (cf. eq (67) de [5]), qui fait intervenir le moment conjugué  $\pi$  à travers la partie vectorielle de l'opérateur de contrainte  $\Phi_{\mathbf{i}}(g, \pi)$ . Par manque de temps, nous n'avons pu traiter que le cas Time-symmetric, mais la question du cas général est une suite logique de ce travail de thèse.

# Chapitre 8

## Hamiltonien et points critiques de la masse

### 8.1 Hamiltonien

Soit  $(\mathcal{N}, \gamma)$  une variété Lorentzienne de dimension  $n+1$  et soit  $\mathcal{M}$  une hypersurface de genre espace totalement géodésique de  $\mathcal{N}$ . On considère sur  $\mathcal{M}$  une métrique  $\hat{g}$  vérifiant les conditions d'intégrabilité (7.8) et (7.9). Dans le cas Time-symmetric, l'Hamiltonien (3.32) prend la forme

$$\mathcal{H}(g; v) := - \int_{\mathcal{M}} v \Phi_{\mathbf{0}}(g). \quad (8.1)$$

**Théorème 20:**

Soit  $g \in \mathcal{G}^+$ , avec  $\delta \in ] - (n+1)/2, -n/2 ]$ .

L'Hamiltonien  $\mathcal{H}$  avec  $v \in \mathcal{L}^* := L^2_{-\delta}(\mathcal{T})$  définit une application lisse entre variétés de Hilbert,

$$\mathcal{H} : \mathcal{F} \times \mathcal{L}^* \rightarrow \mathbb{R}.$$

De plus, si  $v \in W^{2,2}_{-\delta}(\mathcal{T})$ , alors  $\forall h \in T_g \mathcal{F}$ ,

$$D_g \mathcal{H}(g; v).h = - \int_{\mathcal{M}} h D \Phi_{\mathbf{0}}(g)^* . v \quad (8.2)$$

Preuve :

La fonctionnelle  $\mathcal{H}$  est bornée par l'inégalité de Hölder et la Proposition 3,

$$\|v \Phi_{\mathbf{0}}(g)\|_{1,0} \leq \|v\|_{2,-\delta} \|\Phi_{\mathbf{0}}(g)\|_{2,\delta}.$$

$\mathcal{H}$  étant linéaire en  $v$ , elle est donc lisse par rapport à  $v$  et le fait que l'application  $g \mapsto \Phi_{\mathbf{0}}(g)$  soit lisse d'après la Proposition 4 implique que  $\mathcal{H}$  est également lisse par rapport à  $g$ . Pour montrer (8.2), considérons les deux applications linéaires continues suivantes, définies sur  $T_g \mathcal{F} = W^{2,2}_{\delta}(S)$ ,

$$\begin{aligned} f : T_g \mathcal{F} &\rightarrow \mathbb{R} \\ h &\mapsto \int_{\mathcal{M}} v D \Phi_{\mathbf{0}}(g).h \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f^* : T_g \mathcal{F} &\rightarrow \mathbb{R} \\ h &\mapsto \int_{\mathcal{M}} h D \Phi_{\mathbf{0}}(g)^* . v \end{aligned}$$

Au vu de la définition (8.1) de  $\mathcal{H}$ ,  $D_g \mathcal{H}(g; v).h = f(h)$  et il nous faut donc montrer que  $f = f^*$  sur  $T_g \mathcal{F}$ . C'est clairement le cas sur  $\mathcal{C}_c^\infty$ , l'espace des fonctions (ou tenseurs)



lisses à support compact. En effet, lors de l'intégration par parties,  $f$  et  $f^*$  ne diffèrent que d'un terme de bord (voir équation (8.9)) qui est nul sur  $\mathcal{C}_c^\infty$ . Pour tout  $h \in T_g\mathcal{F}$ , pour tout  $h_\varepsilon \in \mathcal{C}_c^\infty(S)$ ,  $(f - f^*)(h) = (f - f^*)(h - h_\varepsilon)$ .

L'espace  $\mathcal{C}_c^\infty$  étant dense dans  $W_\delta^{2,2}$ , on peut choisir  $h_\varepsilon \in \mathcal{C}_c^\infty$  tel que  $\|h - h_\varepsilon\|_{2,2,\delta} \leq \varepsilon$  et

$$|(f - f^*)(h)|_{\mathbb{R}} \leq |f - f^*|_{op} \|h - h_\varepsilon\|_{2,2,\delta} \leq c \|h - h_\varepsilon\|_{2,2,\delta} \leq \varepsilon. \quad \square$$

Une équation de la forme (8.2) est nécessaire pour que l'Hamiltonien génère les bonnes équations du mouvement. Le comportement asymptotique de  $v$  est essentielle à la fois pour pouvoir définir  $\mathcal{H}$ , compte tenu du comportement de  $\Phi_0(g)$  pour  $g \in \mathcal{G}^+$ , et pour s'assurer de l'absence du terme de bord dans (8.2). Rappelons que dans le cas Time-symmetric,  $\mathcal{G}^+ = \mathcal{F}$  est notre espace de phase. On voudrait pouvoir choisir une fonction  $v$  asymptotique à un KID au voisinage de l'infini et conserver une équation du type de 8.2. Il nous faut pour cela faire une modification dans la définition de l'Hamiltonien.

Le principe est d'ajouter à l'Hamiltonien (ou au Lagrangien d'Einstein-Hilbert) une divergence, ce qui ne modifiera en rien les équations du mouvement (obtenue par variation à support compact) mais aura un impact sur le domaine de définition de l'Hamiltonien et des équations du mouvement qui en découlent. Pour l'instant, les fonctions  $v$  autorisées dans la définition de l'Hamiltonien n'ont pas forcément la bonne asymptotique (comportement à l'infini) et nous souhaiterions étendre la définition de l'Hamiltonien à toutes les fonctions  $V$  asymptotiques à  $V_\infty$ . Il faut donc que la divergence que l'on ajoute annule tous les termes dominants de la contribution du KID à l'infini  $V_\infty$ .

En comparant (7.15) et (8.9), on se rend compte que la masse  $\mathfrak{M}$  définie par (7.16) et pouvant se mettre sous la forme d'une divergence (7.18) semble être le candidat idéal pour modifier notre Hamiltonien de manière adéquate. Cela donne lieu à une nouvelle fonctionnelle  $\mathcal{H}_{AH}$  définie pour tout  $V \in V_\infty + \mathcal{L}^*$  par

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{AH}(g; V) &:= \mathfrak{M}(V_\infty, \phi, g) - \int_{\mathcal{M}} V \Phi_0(g) \\ &= \int_{\tilde{E}_{\rho_1}} \hat{V}_\infty \mathcal{R}_0(g) - \int_{A_{\rho_1}} (D\Phi_0(\dot{g})^* \cdot \hat{V}_\infty)_{ij} e^{ij} - \int_{\mathcal{M}} V \Phi_0(g) \end{aligned} \quad (8.3)$$

où l'on s'est servi de l'expression (7.17) de  $\mathfrak{M}$ , bien définie car  $\dot{g}$  vérifie (7.8) et (7.9).

L'expression (8.3) est bien définie sur  $\mathcal{C}$  où  $\Phi_0(g) = 0$ , se réduisant alors à  $\mathfrak{M}$ .  $\mathcal{H}_{AH}$  est également bien définie sur  $\Phi_0^{-1}(L_{-1}^1(\mathcal{T}^* \otimes \Lambda^n T^* \mathcal{M}))$  car alors  $\mathfrak{M}$  est toujours bien définie d'après les Théorèmes 18 et 19 et  $V \Phi_0(g) \in L^1$ . Cependant, plus généralement pour  $g \in \mathcal{F}$ , les deux termes de (8.3) ne sont pas bien définis individuellement et la définition (8.3) n'est donc toujours pas valable sur  $\mathcal{F}$ , comme nous le souhaiterions.

Pour résoudre ce petit problème, il nous suffit d'intercaler  $\hat{V}_\infty \Phi_0(g)$  dans l'expression de  $\mathcal{H}_{AH}$ , donnant lieu à la définition d'une fonctionnelle  $\mathcal{H}_{reg}$  appelée Hamiltonien régularisé et dont l'expression est donnée, pour tout couple  $(g, V) \in \mathcal{F} \times (V_\infty + \mathcal{L}^*)$ , par

$$\mathcal{H}_{reg}(g; V) := \mathfrak{M}(V_\infty, \phi, g) - \int_{\mathcal{M}} \hat{V}_\infty \Phi_0(g) + \int_{\mathcal{M}} (\hat{V}_\infty - V) \Phi_0(g) \quad (8.4)$$

$$\begin{aligned} &= \int_{\mathcal{M}} (\hat{V}_\infty - V) \Phi_0(g) + \int_{\tilde{E}_{\rho_1}} \hat{V}_\infty (\mathcal{R}_0(g) - \Phi_0(g)) \\ &\quad - \int_{A_{\rho_1}} (D\Phi_0(\dot{g})^* \cdot \hat{V}_\infty)_{ij} e^{ij}. \end{aligned} \quad (8.5)$$

**Théorème 21:**

Soit  $g \in \mathcal{G}^+$ , avec  $\delta \in ] - (n+1)/2, -n/2]$ . L'Hamiltonien  $\mathcal{H}_{reg}$  est une application bornée sur  $\mathcal{F} \times (V_\infty + \mathcal{L}^*)$  et lisse par rapport à la structure de Hilbert sur cette variété,

$$\mathcal{H}_{reg} : \mathcal{F} \times (V_\infty + \mathcal{L}^*) \rightarrow \mathbb{R}.$$

De plus, si  $V \in V_\infty + W_{-\delta}^{2,2}(\mathcal{T})$ , alors  $\forall h \in T_g \mathcal{F}$ ,

$$D_g \mathcal{H}_{reg}(g; V).h = - \int_{\mathcal{M}} h D\Phi_0(g)^* . V. \quad (8.6)$$

Preuve :

Pour montrer que  $\mathcal{H}_{reg}$  est lisse, il suffit de montrer que l'expression (8.5) de  $\mathcal{H}_{reg}$  est bornée sur  $\mathcal{F} \times (V_\infty + \mathcal{L}^*)$ . Pour la première intégrale, puisque  $V - \hat{V}_\infty \in \mathcal{L}^*$ , en utilisant l'inégalité de Hölder et la Proposition 3 ,

$$\|(\hat{V}_\infty - V) \Phi_0(g)\|_{1,0} \leq \| \hat{V}_\infty - V \|_{2,-\delta} \| \Phi_0(g) \|_{2,\delta}$$

La deuxième intégrale est bornée grâce à la Proposition 24 et la troisième est bornée, étant à support compact. Pour montrer (8.6), on considère séparément les dérivées variationnelles des différents termes de (8.4) :

$$D_g \mathcal{H}_{reg}(g; V).h = \int_{\mathcal{M}} (\hat{V}_\infty - V) D\Phi_0(g).h + D_g \mathfrak{M}(V_\infty, \phi, g).h - \int_{\mathcal{M}} \hat{V}_\infty D\Phi_0(g).h \quad (8.7)$$

Le premier terme n'est autre que  $D_g \mathcal{H}(g; V - \hat{V}_\infty).h$  et puisque  $V - V_\infty \in W_{-\delta}^{2,2}(\mathcal{T})$ , le Théorème 20 permet d'écrire

$$\int_{\mathcal{M}} (\hat{V}_\infty - V) D\Phi_0(g).h = \int_{\mathcal{M}} h D\Phi_0(g)^* . (\hat{V}_\infty - V). \quad (8.8)$$

L'intégration par parties, permettant de passer de la linéarisée (5.11) de  $\Phi_0(g)$  à l'adjoint, est donnée par

$$\int_{\mathcal{M}} \hat{V}_\infty D\Phi_0(g).h = \int_{\mathcal{M}} h D\Phi_0(g)^* . \hat{V}_\infty + \int_{\mathcal{M}} \nabla^i B_i \sqrt{g}, \quad (8.9)$$

où

$$B_i := \hat{V}_\infty (\nabla^j h_{ij} - \nabla_i \text{tr}_g h) + \text{tr}_g h \nabla_i \hat{V}_\infty - h_{ij} \nabla^j \hat{V}_\infty.$$

est le terme de bord, volontairement ignoré pour obtenir l'expression (5.13) de l'adjoint formel de  $\Phi_0(g)$ . Enfin,

$$\begin{aligned} D_g \mathfrak{M}(V_\infty, \phi, g).h &= \int_{\mathcal{M}} \hat{\nabla}^i \left( \hat{V}_\infty (\hat{\nabla}^j h_{ij} - \hat{\nabla}_i \text{tr}_g h) + \text{tr}_g h \hat{\nabla}_i \hat{V}_\infty - h_{ij} \hat{\nabla}^j \hat{V}_\infty \right) \sqrt{\hat{g}} \\ &=: \int_{\mathcal{M}} \hat{\nabla}^i \hat{B}_i \sqrt{\hat{g}}. \end{aligned} \quad (8.10)$$

L'équation (8.7) devient

$$\begin{aligned} D_g \mathcal{H}_{reg}(g; V) \cdot h &= \int_{\mathcal{M}} h D\Phi_0(g)^* \cdot (\hat{V}_\infty - V) - \int_{\mathcal{M}} h D\Phi_0(g)^* \cdot \hat{V}_\infty \\ &\quad + \int_{\tilde{E}_{\rho_1}} \left( \mathring{\nabla}^i \mathring{B}_i \sqrt{\mathring{g}} - \nabla^i B_i \sqrt{g} \right) \\ &= - \int_{\mathcal{M}} h D\Phi_0(g)^* \cdot V + \int_{\tilde{E}_{\rho_1}} \left( \mathring{\nabla}^i \mathring{B}_i \sqrt{\mathring{g}} - \nabla^i B_i \sqrt{g} \right). \end{aligned}$$

Pour conclure la preuve du théorème, il nous reste à montrer que

$$T := \mathring{\nabla}^i \mathring{B}_i \sqrt{\mathring{g}} - \nabla^i B_i \sqrt{g}$$

ne contribue pas lors du processus d'intégration. En utilisant l'équivalence des métriques  $g$  et  $\mathring{g}$ ,

$$\begin{aligned} T &= \mathring{\nabla}^i \left( \hat{V}_\infty (\mathring{\nabla}^j h_{ij} - \mathring{\nabla}_i \text{tr}_{\mathring{g}} h) + \text{tr}_{\mathring{g}} h \mathring{\nabla}_i \hat{V}_\infty - h_{ij} \mathring{\nabla}^j \hat{V}_\infty \right) \sqrt{\mathring{g}} \\ &\quad - \mathring{\nabla}^i \left( \hat{V}_\infty (\nabla^j h_{ij} - \nabla_i \text{tr}_g h) + \text{tr}_g h \nabla_i \hat{V}_\infty - h_{ij} \nabla^j \hat{V}_\infty \right) \sqrt{\mathring{g}}. \end{aligned}$$

On constate que les termes dominants des deux divergences s'annulent exactement et il ne reste finalement que les termes d'ordre inférieur

$$T = \mathring{\nabla}^i \left( \hat{V}_\infty (1 + (g - \mathring{g})) (Ah + h \mathring{\nabla} g) + \hat{V}_\infty (g - \mathring{g}) \mathring{\nabla} h + (g - \mathring{g}) h \mathring{\nabla} \hat{V}_\infty \right) \sqrt{\mathring{g}}.$$

Le théorème de Divergence-Flux donne

$$\int_{\tilde{E}_{\rho_1}} T = \int_{S_\infty} \left( \hat{V}_\infty (1 + (g - \mathring{g})) (Ah + h \mathring{\nabla} g) + \hat{V}_\infty (g - \mathring{g}) \mathring{\nabla} h + (g - \mathring{g}) h \mathring{\nabla} \hat{V}_\infty \right) \nu^i d\sigma_0$$

Les fonctions  $\hat{V}_\infty Ah \nu$ ,  $\hat{V}_\infty h \mathring{\nabla} g \nu$ ,  $\hat{V}_\infty (g - \mathring{g}) \mathring{\nabla} h \nu$  et  $(g - \mathring{g}) h \mathring{\nabla} \hat{V}_\infty \nu$  (et *a fortiori* celles multipliées par  $g - \mathring{g}$ ) appartenant à  $W_{2\delta+1}^{1,2}$ , le Lemme 27 nous dit que

$$\|T\|_{1,0} = o(\rho^{-\delta_n - 1 - 2\delta})$$

qui est un  $o(1)$  lorsque  $\lambda \rightarrow 0$  car  $-\delta_n - 1 - 2\delta > 0$ .  $\square$

## 8.2 Points critiques de la masse

Le théorème suivant (Théorème 6.3, [5]) est utile dans la preuve du Théorème 23. On rappelle ici sa preuve par souci de complétude.

### Théorème 22:

Soit  $K : B_1 \rightarrow B_2$  une application de classe  $\mathcal{C}^1$  entre variétés de Banach telle que  $DK(u) : B_1 \rightarrow B_2$  est surjective, possède un noyau fermé et un supplémentaire fermé, pour tout  $u \in K^{-1}(\{0\})$ . Soit  $f : B_1 \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction  $\mathcal{C}^1$ .

Alors pour tout  $u \in K^{-1}(\{0\})$  fixé, les assertions suivantes sont équivalentes :

- (1)  $\forall v \in \ker DK(u), Df(u)v = 0$
- (2) Il existe  $\lambda \in B_2^*$  tel que pour tout  $v \in B_1$ ,  $Df(u) \cdot v = \langle \lambda, DK(u)v \rangle$ , où  $\langle, \rangle$  désigne le crochet de dualité.
- (3) En définissant  $F : B_1 \times B_2^* \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $F(u, \lambda) = f(u) - \langle \lambda, K(u) \rangle$ , Il existe  $\lambda \in B_2^*$  tel que  $DF(u, \lambda)(v, \mu) = 0$ , pour tout  $v \in B_1, \mu \in B_2^*$ .

Remarques : le (1) revient à dire que  $u$  est un point critique de  $f$  sur  $K^{-1}(\{0\})$ . Les hypothèses sur  $DK$  assurent à  $K^{-1}(\{0\})$  une structure de sous-variété de Banach de  $B_1$ , en utilisant le théorème des fonctions implicites et par suite,  $T_u K^{-1}(\{0\}) = \ker DK(u)$ . Ici,  $\lambda$  est le multiplicateur de Lagrange en dimension infinie.

Preuve du théorème :

(2)  $\Rightarrow$  (1) : d'après (2), Il existe  $\lambda \in B_2^*$  tel que pour tout  $v \in B_1$ ,  $Df(u).v = \langle \lambda, DK(u)v \rangle$ . En particulier  $\forall v \in \ker DK(u)$ ,  $DK(u)v = 0$ , ce qui donne directement  $Df(u)v = 0$ .

(2)  $\Leftrightarrow$  (3) :  $DF(u, \lambda)(v, \mu) = Df(u)v - \langle \lambda, DK(u)v \rangle - \langle \mu, K(u) \rangle$ . Par hypothèse,  $u \in K^{-1}(\{0\})$ , ce qui donne  $DF(u, \lambda)(v, \mu) = Df(u)v - \langle \lambda, DK(u)v \rangle$ ,  $\forall v \in B_1, \mu \in B_2^*$ . L'équivalence des deux assertions est maintenant évidente.

L'implication (1)  $\Rightarrow$  (2) est un peu plus compliquée. Soit  $u$  est un point critique de  $f$  sur  $K^{-1}(\{0\})$ . On a donc les inclusions

$$\ker DK(u) \subset \ker Df(u) \subset B_1.$$

Par hypothèse,  $\ker DK(u)$  est fermé et possède un supplémentaire fermé. Puisque  $f \in \mathcal{C}^1(B_1)$ ,  $Df(u)$  est une forme linéaire continue sur  $B_1$  donc son noyau est un hyperplan de  $B_1$  (fermé) dont le supplémentaire est une droite (fermé).  $\ker DK(u)$  et  $\ker Df(u)$  sont par conséquent deux espaces de Banach et par suite, il existe une projection bornée

$$\pi : B_1 / \ker DK(u) \rightarrow B_1 / \ker Df(u).$$

Puisque  $Df(u) \in B_1^*$ , on a l'homomorphisme injectif suivant

$$j_1 : B_1 / \ker Df(u) \rightarrow \mathbb{R}.$$

D'autre part, l'application  $DK(u)$  étant surjective et admettant un supplémentaire fermé, on peut la décomposer comme suit

$$DK(u) = j_2 \circ \pi_2,$$

où  $\pi_2$  est la projection

$$\pi_2 : B_1 \rightarrow B_1 / \ker DK(u)$$

et  $j_2$  est l'isomorphisme

$$j_2 : B_1 / \ker DK(u) \rightarrow B_2.$$

En effet,  $j_2$  est surjective comme conséquence de la surjectivité de  $DK(u)$  et  $j_2$  est injective par construction car la projection trivialisait le noyau.

Soit  $\lambda := j_1 \circ \pi \circ j_2^{-1} : B_2 \rightarrow \mathbb{R}$ .  $\lambda$  est une application linéaire bornée, *i.e.*  $\lambda \in B_2^*$  et  $\langle \lambda, DK(u)v \rangle := \lambda \circ DK(u) = j_1 \circ \pi \circ j_2^{-1} \circ DK(u) = j_1 \circ \pi \circ \pi_2 = Df(u)$ .  $\square$

## Métrique statique et vecteurs de Killing

Dans le cas Time-symmetric, une métrique Riemannienne  $g$  est dite statique lorsque  $\ker D\Phi_0(g)^* \neq \{0\}$ . C'est à dire s'il existe une fonction  $f$  non triviale telle que

$$D\Phi_0(g)^* f = 0.$$

C'est le cas des métriques modèles hyperbolique, euclidienne ou sphérique; cas relativement exceptionnel puisque de manière générale pour une métrique quelconque,  $\ker D\Phi_0(g)^*$  est trivial. L'origine de la terminologie "statique" vient du fait que pour un telle  $f$ , la métrique Lorentzienne  $\gamma$  définie sur le développement  $\mathbb{R} \times (\mathcal{M} \setminus \{f = 0\})$  par

$$\gamma(t, x) = -f^2(x)dt^2 + g(x)$$

est une solution statique des équations d'Einstein  $Ric \gamma = c\gamma$ .

Un KID  $\xi$  de  $(g, \pi) \in \mathcal{F}$  est tel que  $\xi \in W_{loc}^{2,2}(\mathcal{T})$  vérifie  $D\Phi(g, \pi)^* \cdot \xi = 0$ . La terminologie est due à Vincent Moncrief qui montre dans [47], dans le cas asymptotiquement plat, une conséquence importante de l'écriture (3.33) qui est qu'un champ de vecteurs  $\xi$  satisfait l'équation

$$D\Phi(g, \pi)^* \cdot \xi = 0$$

si et seulement s'il est la restriction sur  $\mathcal{M}$  d'un vecteur de Killing de l'espace-temps  $\mathcal{N}$  solution des équations d'Einstein du vide et généré par l'évolution des données initiales. Notons qu'en 2005, au moment de la publication de l'article de Bartnik [5], cette terminologie était alors dépendante du fait que des solutions de si faible régularité puissent être solutions des équations d'Einstein, via les théorèmes d'existence et d'unicité obtenus jusqu'alors pour des régularités supérieures. Depuis, la conjecture de courbure  $L^2$  bornée a été montrée et toutes les hypothèses sont donc bien vérifiées.

Le théorème suivant établit l'équivalence entre les points critiques de la fonctionnelle masse et les KID.

**Théorème 23:**

Soit  $g \in \mathcal{F}$  tel que  $\Phi_0(g) = \varepsilon \in L_{-1}^1(\Lambda^n T^* \mathcal{M})$ .  
 Pour tout  $k \in \{-1; 0; 1\}$  et  $V_\infty \in \mathcal{N}_{b_k}$ , on considère la fonctionnelle masse  $\mathfrak{M}(V_\infty, \phi, g)$ .  
 Alors, les deux assertions suivantes sont équivalentes :

- (a)  $D_g \mathfrak{M}(V_\infty, \phi, g) \cdot h = 0, \forall h \in T_g \mathcal{C}(\varepsilon)$ .
- (b)  $\exists V \in V_\infty + W_{-\delta}^{2,2}(\mathcal{T})$  tel que  $D\Phi_0(g)^* \cdot V = 0$ .

Preuve :

La preuve ne dépend pas de la valeur de  $k$ . Soit  $g \in \mathcal{F}$  tel que  $\Phi_0(g) = \varepsilon \in L_{-1}^1(\mathcal{T}^* \otimes \Lambda^n)$ . D'après une remarque précédente, les définitions  $\mathcal{H}_{reg}$  et  $\mathcal{H}_{AH}$  coïncident et d'après (8.3), pour tout  $g \in \mathcal{C}(\varepsilon)$ ,

$$\mathcal{H}_{reg}(g; V) := \mathfrak{M}(V_\infty, \phi, g) - \int_{\mathcal{M}} V \varepsilon$$

Par conséquent,

$$D_g \mathcal{H}_{reg}(g; V) \cdot h = D_g \mathfrak{M}(V_\infty, \phi, g) \cdot h, \quad \forall h \in T_g \mathcal{C}(\varepsilon). \quad (8.11)$$

(b)  $\Rightarrow$  (a) : d'après (b) et le Théorème 21,

$$D_g \mathcal{H}_{reg}(g; V) \cdot h = 0, \forall h \in T_g \mathcal{C}(\varepsilon).$$

(a) est alors une conséquence directe de (8.11).

(a)  $\Rightarrow$  (b) : on choisit n'importe quel  $\tilde{V} \in V_\infty + W_{-\delta}^{2,2}(\mathcal{T})$  et on considère la fonctionnelle

$$\tilde{H}(g') := \mathcal{H}_{reg}(g'; \tilde{V}), \quad \forall g' \in \mathcal{F}.$$

D'après (a) et (8.11),  $g \in \mathcal{F}$  est un point critique pour  $\mathfrak{M}(V_\infty, \phi, \cdot)$  et  $\tilde{H}$  sur  $\mathcal{C}(\varepsilon)$ , c'est à dire

$$D_g \tilde{H}(g).h = 0, \quad \forall h \in T_g \mathcal{C}(\varepsilon),$$

ce qui est précisément l'assertion (1) du Théorème 22, que l'on applique avec

$$K = \Phi_0 - \varepsilon, \quad f = \tilde{H}, \quad B_1 = \mathcal{F}, \quad B_2 = \mathcal{L}^*.$$

Le Théorème 22 nous donne l'existence de  $\lambda \in \mathcal{L}^*$  tel que

$$D_g \tilde{H}(g).h = \int_{\mathcal{M}} \lambda D\Phi_0(g).h, \quad \forall h \in T_g \mathcal{F}. \quad (8.12)$$

Rappelons que d'après (8.7), valable pour tout  $V \in V_\infty + \mathcal{L}^*$  et  $g \in \mathcal{F}$ ,

$$D_g \mathcal{H}_{reg}(g; V).h := D_g \mathfrak{M}(V_\infty, \phi, g).h - \int_{\mathcal{M}} \hat{V}_\infty D\Phi_0(g).h + \int_{\mathcal{M}} (\hat{V}_\infty - V) D\Phi_0(g).$$

Remarque : cette équation est valable en particulier pour  $\tilde{V} \in V_\infty + W_{-\delta}^{2,2}(\mathcal{T})$ .

On pose  $V := \tilde{V} + \lambda \in V_\infty + \mathcal{L}^*$  et on obtient

$$\begin{aligned} D_g \mathcal{H}_{reg}(g; V).h = D_g \mathcal{H}_{reg}(g; \tilde{V} + \lambda).h &:= D_g \mathfrak{M}(V_\infty, \phi, g).h - \int_{\mathcal{M}} \hat{V}_\infty D\Phi_0(g).h \\ &\quad + \int_{\mathcal{M}} (\hat{V}_\infty - (\tilde{V} + \lambda)) D\Phi_0(g) \\ &= D_g \mathcal{H}_{reg}(g; \tilde{V}).h - \int_{\mathcal{M}} \lambda D\Phi_0(g).h. \end{aligned}$$

Compte tenu de (8.12),  $D_g \mathcal{H}_{reg}(g; V).h = 0$ ,  $\forall h \in T_g \mathcal{F}$ . D'après le Théorème 21,  $V \in V_\infty + \mathcal{L}^*$  est une solution faible de l'équation  $D\Phi_0(g)^*.V = 0$ . La Proposition 21 montre que  $V \in V_\infty + W_{-\delta}^{2,2}(\mathcal{T})$  est une solution forte et par conséquent un KID.  $\square$

Le corollaire suivant fait, quant à lui, le lien entre les points critiques de la masse et les métriques statiques :

**Corollaire 8:**

Soit  $g \in \mathcal{F}$  tel que  $\Phi_0(g) = \varepsilon \in L_{-1}^1(\Lambda^n T^* \mathcal{M})$ .

Pour le cas  $k = 1$ , on considère  $\mathcal{P}_\mu = \mathcal{P}_\mu(g)$  un vecteur non isotrope et on définit la fonctionnelle masse dans la direction  $V_\infty$  par  $\mathfrak{M}(V_\infty, \phi, g) = \eta(V_\infty, \mathcal{P}(g))$ .

Pour les cas  $k = 0; -1$ , on demande  $\mathcal{P}_0(g) \neq 0$  et on définit la fonctionnelle masse dans la direction  $V_\infty$  par  $\mathfrak{M}(V_\infty, \phi, g) = V_\infty \mathcal{P}_0(g)$ .

Alors les deux assertions suivantes sont équivalentes :

- (i)  $D_g m_{AH}(g).h = 0, \forall h \in T_g \mathcal{C}(\varepsilon)$ .
- (ii)  $g$  est une métrique statique, autrement dit admet un KID  $V \in V_\infty + W_{-\delta}^{2,2}(\mathcal{T})$  tel que  $V_\infty^\mu$  est proportionnel à  $\mathcal{P}^\mu = \eta^{\mu\nu} \mathcal{P}_\nu(g)$ .

Preuve :

Pour  $k = 1$  : par hypothèse,  $\mathcal{P}(g)$  est un vecteur non isotrope, c'est à dire

$$\eta^{\alpha\beta} \mathcal{P}_\alpha(g) \mathcal{P}_\beta(g) \neq 0 \quad (8.13)$$

D'après l'expression (7.33) de  $m_{AH}$ , on a

$$m_{AH}(g) = \pm \sqrt{|\eta^{\mu\nu} \mathcal{P}_\mu(g) \mathcal{P}_\nu(g)|} \neq 0. \quad (8.14)$$

On peut normaliser  $V_\infty$  de façon à ce qu'il soit unitaire en posant

$$V_\infty^\alpha = \frac{1}{m_{AH}(g)} \eta^{\alpha\beta} \mathcal{P}_\beta(g). \quad (8.15)$$

Vérification :  $\eta_{\alpha\beta} V_\infty^\alpha V_\infty^\beta = \frac{1}{m_{AH}^2(g)} \eta^{\alpha\beta} \mathcal{P}_\alpha(g) \mathcal{P}_\beta(g) = \pm 1$ .

En définissant  $\mathfrak{M}(V_\infty, \phi, g) = \eta(V_\infty, \mathcal{P}(g))$ , on a d'après (8.14) et (8.15)

$$\begin{aligned} D_g m_{AH}(g).h &= \pm \frac{\eta^{\alpha\beta} \mathcal{P}_\beta(g) D\mathcal{P}_\alpha(g).h}{m_{AH}(g)} = \pm V_\infty^\alpha D\mathcal{P}_\alpha(g).h \\ &= \pm D_g \mathfrak{M}(V_\infty, \phi, g).h. \end{aligned}$$

Ainsi, quel que soit le genre de  $\mathcal{P}(g)$ , les points critiques de  $\mathfrak{M}$  et  $m_{AH}$  sont les mêmes sur  $\mathcal{C}(\varepsilon)$ .

(i)  $\Rightarrow$  (ii) : soit  $g$  un point critique de  $m_{AH}$  sur  $\mathcal{C}(\varepsilon)$ . D'après ce qui précède,  $g$  est également un point critique de  $\mathfrak{M}(V_\infty, \phi, \cdot)$ . D'après le Théorème 23,  $g$  admet un KID  $V \in V_\infty + W_{-\delta}^{2,2}(\mathcal{T})$  avec  $V_\infty^\mu$  proportionnel à  $\mathcal{P}^\mu$  d'après (8.15).

(ii)  $\Rightarrow$  (i) : réciproquement, soit  $g$  admettant un KID  $V \in V_\infty + W_{-\delta}^{2,2}(\mathcal{T})$  avec  $V_\infty^\mu$  proportionnel à  $\mathcal{P}^\mu$ . Pour tout  $g' \in \mathcal{C}(\varepsilon)$ , on définit la fonctionnelle

$$\mathfrak{M}(V_\infty, \phi, g') = \eta(V_\infty, \mathcal{P}(g')).$$

D'après le Théorème 23,  $D_g \mathfrak{M}(V_\infty, \phi, g).h = 0$  sur  $\mathcal{C}(\varepsilon)$  et puisque par construction  $D_g \mathfrak{M}(V_\infty, \phi, g).h = D_g m_{AH}(g).h$ , finalement  $D_g m_{AH}(g).h = 0$  sur  $\mathcal{C}(\varepsilon)$ .

Pour  $k = -1; 0$  : d'après (7.31),  $m_{AH}(g) = \mathcal{P}_0(g)$ . On pose

$$V_\infty = \frac{1}{m_{AH}(g)} \mathcal{P}_0(g) = 1,$$

c'est à dire  $V_\infty$  est proportionnel à  $\mathcal{P}_0(g)$ . En définissant  $\mathfrak{M}(V_\infty, \phi, g) = V_\infty m_{AH}(g)$ , on a directement  $D_g \mathfrak{M}(V_\infty, \phi, g).h = D_g m_{AH}(g).h$ . Le reste de la preuve utilise les mêmes arguments que dans le cas  $k = 1$ .  $\square$

# Annexe A

## Inégalités de Poincaré

Cette section est consacrée à diverses inégalités de type Poincaré pour de futures références. Elles ne sont pas utilisées dans cette thèse.

**Proposition 25:** Inégalité de Poincaré à poids

Pour tout  $\delta < (n-1)/2$ , il existe une constante  $c$  dépendant de  $\mathring{g}$  et  $\delta$  telle que pour tout  $u \in W_\delta^{2,2}(\mathcal{M})$ ,

$$\|u\|_{2,\delta} \leq c \|\mathring{\nabla}u\|_{2,\delta} \leq c \|\mathring{\nabla}^2u\|_{2,\delta}.$$

Pour tout  $\delta \neq (n-1)/2$ , il existe une constante  $c$  dépendant de  $\mathring{g}$  et  $\delta$  telle que pour tout  $Y \in W_\delta^{1,2}(T^*\mathcal{M})$ ,

$$\|Y\|_{2,\delta} \leq c \|\mathring{\nabla}Y\|_{2,\delta}.$$

Preuve :

On s'inspire de la preuve du Théorème 6 pour l'opérateur  $\mathring{\nabla}$  (non elliptique au sens de notre définition mais parfois dénommé elliptique surdéterminé (symbole injectif)). En remplacement du Lemme 1, on a par définition des normes des espaces de Sobolev à poids,

$$\|u\|_{1,2,\delta} = \|\mathring{\nabla}u\|_{2,\delta} + \|u\|_{2,\delta}.$$

Chruściel et Delay ont montré dans [15] le résultat suivant pour une variété conformément compacte : soit  $(\mathcal{M}, \mathring{g})$  une variété conformément compacte avec  $\mathring{g} = \rho^{-2}\mathring{h}$ . Pour tout  $\varepsilon > 0$  et  $\delta \in \mathbb{R}$ , il existe  $\tilde{\rho}_{\varepsilon,\delta} > 0$  tel que pour tout tenseur différentiable  $u$  à support compact dans  $\{0 < \rho < \tilde{\rho}_{\varepsilon,\delta}\}$ ,

$$\int_{\mathcal{M}} \rho^{2\delta} |\rho^{-2}\mathring{\nabla}(\rho u)|_{\mathring{g}}^2 d\mu(\mathring{g}) \geq [(\delta - \frac{n+3}{2})^2 - \varepsilon] \int_{\mathcal{M}} \rho^{2\delta-2} |u|_{\mathring{g}}^2 |d\rho|_{\mathring{h}}^2 d\mu(\mathring{g}).$$

En opérant le changement de variable  $v = \rho u$ , on obtient

$$\int_{\mathcal{M}} \rho^{2\delta} |\mathring{\nabla}v|_{\mathring{g}}^2 d\mu(\mathring{g}) \geq [(\delta - \frac{n-1}{2})^2 - \varepsilon] \int_{\mathcal{M}} \rho^{2\delta} |v|_{\mathring{g}}^2 |d\rho|_{\mathring{h}}^2 d\mu(\mathring{g}).$$

Pour une variété asymptotiquement hyperbolique,  $|d\rho|_{\mathring{h}} = 1$ , sur  $\partial\mathcal{M}$ . Il existe donc  $\rho_{\varepsilon,\delta} > 0$  tel que pour tout  $u$  à support compact dans  $\{0 < \rho < \rho_{\varepsilon,\delta}\}$ ,

$$\int_{\mathcal{M}} \rho^{2\delta} |\mathring{\nabla}v|_{\mathring{g}}^2 d\mu(\mathring{g}) \geq [(\delta - \frac{n-1}{2})^2 - \varepsilon] \int_{\mathcal{M}} \rho^{2\delta} |v|_{\mathring{g}}^2 d\mu(\mathring{g}).$$

C'est à dire  $\forall \delta \neq (n-1)/2, \exists c > 0$  telle que  $\|\mathring{\nabla}v\|_{2,\delta} \geq c \|v\|_{2,\delta}$ .

Remarque : en définissant  $R$  tel que  $\rho_{\varepsilon,\delta} = e^{-2R}$ , on définit  $\Omega_R$  comme dans la Définition 1 et on a l'inégalité de Poincaré sur  $\{0 \leq \rho \leq e^{-2R}\} = \mathcal{M} \setminus \Omega_R$ , comme dans l'hypothèse



du Théorème 6. La suite de la preuve est identique à celle du théorème et il s'ensuit que l'on peut choisir  $R$  assez grand pour que l'inégalité suivante

$$\|v\|_{1,2,\delta} \leq c \left( \|\mathring{\nabla}v\|_{2,\delta} + \|v\|_{2,\delta;\Omega_R} \right)$$

soit valable pour une constante  $c$ , pour tout  $v \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathcal{M})$ .

On montre alors que  $\mathring{\nabla} : W_\delta^{1,2}(\mathcal{M}) \rightarrow L_\delta^2(\mathcal{M})$  a un noyau de dimension finie. Par conséquent  $W_\delta^{1,2}(\mathcal{M})$  peut s'écrire  $W_\delta^{1,2} = \ker \mathring{\nabla} \oplus (\ker \mathring{\nabla})^\perp$ . Par suite, il existe une constante  $c > 0$  telle que pour tout  $v \in (\ker \mathring{\nabla})^\perp$ ,

$$\|v\|_{1,2,\delta} \leq c \|\mathring{\nabla}v\|_{2,\delta}.$$

En particulier, cela donne l'inégalité de Poincaré

$$\|v\|_{2,\delta} \leq c \|\mathring{\nabla}v\|_{2,\delta}. \quad (\text{A.1})$$

Il reste à montrer  $\ker \mathring{\nabla} = \{0\}$ , ce qui est le cas car les fonctions constantes ne sont pas dans  $W_\delta^{1,2}$  lorsque  $\delta < (n-1)/2$ . Montrons maintenant que l'opérateur  $\mathring{\nabla}$  n'a jamais de noyau non trivial sur les 1-formes. Soit  $X$  une 1-forme définie sur un voisinage du bord de  $\mathcal{M}$  telle que  $X \in \ker \mathring{\nabla}$ . On a donc  $\forall i, j$

$$\mathring{\nabla}_i X_j = 0.$$

Il s'ensuit que  $\mathring{\nabla}_i X_j + \mathring{\nabla}_j X_i = 0$ , ce qui entraîne  $\mathring{\Delta}X = -\text{Ric } \mathring{g} X$ .

Finalement,  $\mathring{\nabla}X = 0$  entraîne que  $\text{Ric } \mathring{g} X = 0$  et donc  $X = 0$  partout où  $\text{Ric } \mathring{g}$  n'est pas dégénéré, en particulier près du bord. On conclut par le théorème d'unique continuation de [43] et  $X = 0$  partout. On obtient donc  $\forall v \in W_\delta^{2,2}(\mathcal{M}), \forall \delta \neq (n-1)/2$ ,

$$\|\mathring{\nabla}v\|_{2,\delta} \leq c \|\mathring{\nabla}^2 v\|_{2,\delta}. \quad \square \quad (\text{A.2})$$

**Corollaire 9:** Conséquences de l'inégalité de Poincaré

Pour tout  $\delta < (n-1)/2$ , il existe une constante  $c$  dépendant de  $\mathring{g}$  et  $\delta$  telle que

$$\forall u \in W_\delta^{1,2}(\mathcal{M}), \quad \|u\|_{1,2,\delta} \leq c \|\mathring{\nabla}u\|_{2,\delta}.$$

$$\forall u \in W_\delta^{2,2}(\mathcal{M}), \quad \|u\|_{2,2,\delta} \leq c \|\mathring{\nabla}^2 u\|_{2,\delta}.$$

Pour tout  $\delta \neq (n-1)/2$ , il existe une constante  $c$  dépendant de  $\mathring{g}$  et  $\delta$  telle que

$$\forall Y \in W_\delta^{1,2}(T^*\mathcal{M}), \quad \|Y\|_{1,2,\delta} \leq c \|\mathring{\nabla}Y\|_{2,\delta}.$$

Les deux lemmes suivants qui sont respectivement les versions avec bord du Lemme C.1 et de la Proposition C.2 de [15]. Ce sont des inégalités générales sur  $(\mathcal{M}, \mathring{g})$ , une variété Riemannienne  $n$ -dimensionnelle à bord.

**Lemme 31:**

Soit  $u$  un tenseur à support compact sur  $\mathcal{M}$  et  $w \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$  une fonction définie sur un voisinage du support de  $u$ . Alors,

$$\int_{\mathcal{M}} |\mathring{\nabla} u|_{\mathring{g}}^2 d\mu(\mathring{g}) \geq \int_{\mathcal{M}} (\mathring{\Delta} w - |dw|_{\mathring{g}}^2) |u|_{\mathring{g}}^2 d\mu(\mathring{g}) - \int_{\partial\mathcal{M}} |u|_{\mathring{g}}^2 \langle dw, \eta \rangle_{\mathring{g}} d\mu(\mathring{g}), \quad (\text{A.3})$$

où  $\eta$  est la normale extérieure à  $\partial\mathcal{M}$ .

Preuve :

$$\int_{\mathcal{M}} (|\mathring{\nabla} u|_{\mathring{g}}^2 + |dw|_{\mathring{g}}^2 |u|_{\mathring{g}}^2 + 2u \mathring{\nabla}_i u \mathring{\nabla}^i w) d\mu(\mathring{g}) = \int_{\mathcal{M}} |\mathring{\nabla} u + u dw|_{\mathring{g}}^2 d\mu(\mathring{g}) \geq 0. \quad (\text{A.4})$$

Une intégration par parties donne

$$\int_{\mathcal{M}} \mathring{\nabla}_i (|u|_{\mathring{g}}^2 \mathring{\nabla}^i w) d\mu(\mathring{g}) = \int_{\mathcal{M}} |u|_{\mathring{g}}^2 \mathring{\Delta} w d\mu(\mathring{g}) + \int_{\mathcal{M}} 2u \mathring{\nabla}_i u \mathring{\nabla}^i w d\mu(\mathring{g}). \quad (\text{A.5})$$

Or d'après le théorème de Divergence-Flux,

$$\int_{\mathcal{M}} \mathring{\nabla}_i (|u|_{\mathring{g}}^2 \mathring{\nabla}^i w) d\mu(\mathring{g}) = \int_{\partial\mathcal{M}} \langle |u|_{\mathring{g}}^2 dw, \eta \rangle_{\mathring{g}} d\mu(\mathring{g}) = \int_{\partial\mathcal{M}} |u|_{\mathring{g}}^2 \langle dw, \eta \rangle_{\mathring{g}} d\mu(\mathring{g}). \quad (\text{A.6})$$

En remplaçant le membre de gauche de (A.5) par son expression (A.6), on obtient

$$\int_{\mathcal{M}} 2u \mathring{\nabla}_i u \mathring{\nabla}^i w d\mu(\mathring{g}) = \int_{\partial\mathcal{M}} |u|_{\mathring{g}}^2 \langle dw, \eta \rangle_{\mathring{g}} d\mu(\mathring{g}) - \int_{\mathcal{M}} |u|_{\mathring{g}}^2 \mathring{\Delta} w d\mu(\mathring{g}). \quad (\text{A.7})$$

On obtient le résultat souhaité en remplaçant le membre de gauche de (A.7) dans (A.4).  $\square$

**Lemme 32:**

Soit  $u$  un tenseur à support compact sur  $\mathcal{M}$  et  $v, w \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$  deux fonctions définies sur un voisinage du support de  $u$ . Alors,

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{M}} e^{2v} |\mathring{\nabla} u|_{\mathring{g}}^2 d\mu(\mathring{g}) &\geq \int_{\mathcal{M}} e^{2v} [\mathring{\Delta} v + \mathring{\Delta} w + |dv|_{\mathring{g}}^2 - |dw|_{\mathring{g}}^2] |u|_{\mathring{g}}^2 d\mu(\mathring{g}) \\ &\quad - \int_{\partial\mathcal{M}} e^{2v} [\langle dv, \eta \rangle_{\mathring{g}} + \langle dw, \eta \rangle_{\mathring{g}}] |u|_{\mathring{g}}^2 d\mu(\mathring{g}), \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

où  $\eta$  est la normale extérieure à  $\partial\mathcal{M}$ .

Preuve :

On utilise le lemme 31 avec  $\tilde{u} := e^v u$  à la place de  $u$ ,

$$\int_{\mathcal{M}} |\mathring{\nabla} \tilde{u}|_{\mathring{g}}^2 d\mu(\mathring{g}) \geq \int_{\mathcal{M}} e^{2v} (\mathring{\Delta} w - |dw|_{\mathring{g}}^2) |u|_{\mathring{g}}^2 d\mu(\mathring{g}) - \int_{\partial\mathcal{M}} e^{2v} |u|_{\mathring{g}}^2 \langle dw, \eta \rangle_{\mathring{g}} d\mu(\mathring{g}). \quad (\text{A.9})$$

$$\begin{aligned} \mathring{\nabla} \tilde{u} &= e^v \mathring{\nabla} u + e^v u \mathring{\nabla} v. \\ |\mathring{\nabla} \tilde{u}|_{\mathring{g}}^2 &\leq e^{2v} [|\mathring{\nabla} u|_{\mathring{g}}^2 + |dv|_{\mathring{g}}^2 |u|_{\mathring{g}}^2 + 2u \mathring{\nabla}_i u \mathring{\nabla}^i v]. \end{aligned}$$

(A.9) devient

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{M}} e^{2v} [|\mathring{\nabla}u|_{\mathring{g}}^2 + |dv|_{\mathring{g}}^2 |u|_{\mathring{g}}^2 + 2u \mathring{\nabla}_i u \mathring{\nabla}^i v] d\mu(\mathring{g}) &\geq \int_{\mathcal{M}} e^{2v} (\mathring{\Delta}w - |dw|_{\mathring{g}}^2) |u|_{\mathring{g}}^2 d\mu(\mathring{g}) \\ &- \int_{\partial\mathcal{M}} e^{2v} |u|_{\mathring{g}}^2 \langle dw, \eta \rangle_{\mathring{g}} d\mu(\mathring{g}). \end{aligned}$$

Une intégration par parties et le théorème Divergence-Flux donnent

$$\int_{\mathcal{M}} e^{2v} 2u \mathring{\nabla}_i u \mathring{\nabla}^i v d\mu(\mathring{g}) = \int_{\partial\mathcal{M}} e^{2v} |u|_{\mathring{g}}^2 \langle dv, \eta \rangle_{\mathring{g}} d\mu(\mathring{g}) - \int_{\mathcal{M}} e^{2v} |u|_{\mathring{g}}^2 [\mathring{\Delta}v + 2|dv|_{\mathring{g}}^2] d\mu(\mathring{g}).$$

On obtient le résultat souhaité en remplaçant le membre de gauche dans l'équation précédente.  $\square$

**Proposition 26:** Inégalité de Poincaré à l'infini

$\forall \varepsilon > 0, \exists R_\varepsilon > 0$  tel que  $\forall R > R_\varepsilon, \forall u \in \mathcal{C}_c^\infty(E_R), \forall \delta \in \mathbb{R}$ ,

$$\|\mathring{\nabla}u\|_{2,\delta;E_R}^2 \geq \left\{ \left[ \delta - \frac{n-1}{2} \right]^2 - \varepsilon \right\} \|u\|_{2,\delta;E_R}^2 - \left\{ \left[ \delta - \frac{n-1}{2} \right] - \varepsilon \right\} \int_{\partial\Omega_R} \rho^{2\delta} |u|_{\mathring{g}}^2 d\mu(\mathring{g}). \quad (\text{A.10})$$

Preuve :

On utilise le lemme 32 sur  $E_R$  dans le cadre de notre métrique AH  $\mathring{g} = \rho^{-2}\mathring{h}$ .

On prend  $v = \delta \ln \rho$  et  $w = \frac{1-n}{2} \ln \rho$ . Par conséquent,

$$\begin{cases} dv = \delta \frac{d\rho}{\rho} \\ dw = \frac{1-n}{2} \frac{d\rho}{\rho} \end{cases}, \quad \begin{cases} |dv|_{\mathring{g}}^2 = \delta^2 \frac{|d\rho|_{\mathring{g}}^2}{\rho^2} \\ |dw|_{\mathring{g}}^2 = \frac{(1-n)^2}{4} \frac{|d\rho|_{\mathring{g}}^2}{\rho^2} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \mathring{\Delta}v = \delta \left[ \frac{\mathring{\Delta}\rho}{\rho} - \frac{|d\rho|_{\mathring{g}}^2}{\rho^2} \right] \\ \mathring{\Delta}w = \frac{1-n}{2} \left[ \frac{\mathring{\Delta}\rho}{\rho} - \frac{|d\rho|_{\mathring{g}}^2}{\rho^2} \right] \end{cases}.$$

En remplaçant dans (A.8), on obtient

$$\begin{aligned} \int_{E_R} |\mathring{\nabla}u|_{\mathring{g}}^2 \rho^{2\delta} d\mu(\mathring{g}) &\geq \int_{E_R} \rho^{2\delta} |u|_{\mathring{g}}^2 \left\{ \left( \delta + \frac{1-n}{2} \right) \frac{\mathring{\Delta}\rho}{\rho} + \left[ \delta^2 - \delta - \frac{1-n}{2} - \frac{(1-n)^2}{4} \right] \frac{|d\rho|_{\mathring{g}}^2}{\rho^2} \right\} d\mu(\mathring{g}) \\ &- \int_{\partial E_R} \rho^{2\delta} |u|_{\mathring{g}}^2 \left[ \delta - \frac{n-1}{2} \right] \langle \frac{d\rho}{\rho}, \eta \rangle_{\mathring{g}} d\mu(\mathring{g}). \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

D'après (4.3)

$$\frac{\mathring{\Delta}\rho}{\rho} = -(n-2)|d\rho|_{\mathring{h}}^2 + \rho \Delta_{\mathring{h}} \rho.$$

$E_R$  est fermé et la métrique  $\mathring{h}$  est définie sur  $\bar{\mathcal{M}}$  (et donc  $\partial E_R$ ). La fonction  $\rho$  étant lisse sur  $\bar{\mathcal{M}}$ ,  $\Delta_{\mathring{h}} \rho$  est une fonction lisse bornée sur  $E_R$ . Par suite,  $\Delta_{\mathring{h}} \rho = \mathcal{O}(1) = o(\rho^{-1})$  au voisinage de  $\partial_\infty \mathcal{M}$ . On obtient

$$\frac{\mathring{\Delta}\rho}{\rho} = -(n-2)|d\rho|_{\mathring{h}}^2 + o(1). \quad (\text{A.12})$$

En remplaçant dans (A.11),

$$\begin{aligned} & \int_{E_R} |\mathring{\nabla} u|_{\dot{g}}^2 \rho^{2\delta} d\mu(\dot{g}) \\ & \geq \int_{E_R} \rho^{2\delta} |u|_{\dot{g}}^2 \left\{ \delta^2 - \delta - \frac{1-n}{2} - \frac{(1-n)^2}{4} - (n-2)\left(\delta + \frac{1-n}{2}\right) + o(1) \right\} \frac{|d\rho|_{\dot{g}}^2}{\rho^2} d\mu(\dot{g}) \\ & \quad - \int_{\partial E_R} \rho^{2\delta} |u|_{\dot{g}}^2 \left[ \delta - \frac{n-1}{2} \right] \langle \frac{d\rho}{\rho}, \eta \rangle_{\dot{g}} d\mu(\dot{g}). \end{aligned}$$

Un rapide calcul donne

$$\delta^2 - \delta - \frac{1-n}{2} - \frac{(1-n)^2}{4} - (n-2)\left(\delta + \frac{1-n}{2}\right) = \left[ \delta - \frac{n-1}{2} \right]^2.$$

$E_R$  possède deux composantes de bord disjointes. Un bord extérieur à l'infini  $\partial_\infty \mathcal{M}$  et un bord intérieur  $\partial\Omega_R = \{\rho = e^{-2R}\}$ . Comme  $u \in \mathcal{C}_c^\infty(E_R)$ ,  $u$  est nécessairement nul au voisinage de  $\partial_\infty \mathcal{M}$  mais pas forcément sur  $\partial\Omega_R$  et c'est la raison pour laquelle les termes de bord présents dans (6.39) ne vont concerner que  $\partial\Omega_R$ . Si l'on note  $\eta_R$  la normale à  $\partial\Omega_R$  extérieure à  $E_R$ , il vient

$$\begin{aligned} \int_{E_R} |\mathring{\nabla} u|_{\dot{g}}^2 \rho^{2\delta} d\mu(\dot{g}) & \geq \int_{E_R} \rho^{2\delta} |u|_{\dot{g}}^2 \left\{ \left[ \delta - \frac{n-1}{2} \right]^2 + o(1) \right\} \frac{|d\rho|_{\dot{g}}^2}{\rho^2} d\mu(\dot{g}) \\ & \quad - \left[ \delta - \frac{n-1}{2} \right] \int_{\partial\Omega_R} \rho^{2\delta} |u|_{\dot{g}}^2 \langle \frac{d\rho}{\rho}, \eta_R \rangle_{\dot{g}} d\mu(\dot{g}). \end{aligned}$$

Lorsque  $R \rightarrow +\infty$ ,  $\eta_R - \frac{d\rho}{\rho} \rightarrow 0$ , ainsi  $\langle \frac{d\rho}{\rho}, \eta_R \rangle_{\dot{g}} = \frac{|d\rho|_{\dot{g}}^2}{\rho^2} + o(1) = 1 + o(1)$ .  
 $\forall \varepsilon > 0, \exists R_\varepsilon > 0$  tel que  $\forall R > R_\varepsilon$ ,

$$\begin{aligned} \int_{E_R} |\mathring{\nabla} u|_{\dot{g}}^2 \rho^{2\delta} d\mu(\dot{g}) & \geq \left\{ \left[ \delta - \frac{n-1}{2} \right]^2 - \varepsilon \right\} \int_{E_R} \rho^{2\delta} |u|_{\dot{g}}^2 d\mu(\dot{g}) \\ & \quad - \left\{ \left[ \delta - \frac{n-1}{2} \right] - \varepsilon \right\} \int_{\partial\Omega_R} \rho^{2\delta} |u|_{\dot{g}}^2 d\mu(\dot{g}). \end{aligned}$$

En particulier, pour tout  $\delta < \frac{n-1}{2}$ ,

$$\int_{E_R} |\mathring{\nabla} u|_{\dot{g}}^2 \rho^{2\delta} d\mu(\dot{g}) \geq \left\{ \left[ \delta - \frac{n-1}{2} \right]^2 - \varepsilon \right\} \int_{E_R} |u|_{\dot{g}}^2 \rho^{2\delta} d\mu(\dot{g}). \quad \square$$



# Bibliographie

- [1] L. Andersson. Momenta and reduction in general relativity. *Journ. Geom. Phys.*, 4 :289–314, 1987.
- [2] L. Andersson. Elliptic systems on manifolds with asymptotically negative curvature. *Indiana University Mathematics Journal*, 42(4) :1359–1387, 1993.
- [3] L. Andersson and P. Chrusciel. Solutions of the constraint equations in general relativity satisfying "hyperboloidal boundary conditions". *Dissertationes Mathematicae*, 355 :1–100, 1996.
- [4] Arnowitt, Deser, and Misner. The dynamics of general relativity. In L.Witten, editor, *Gravitation : an introduction to current research*, chapter 7, pages 227–265. Wiley, N.Y, 1962.
- [5] R. Bartnik. Phase space for the Einstein equations. *Comm. Anal. Geom*, 13(5) :845–885, 2005.
- [6] R. Bartnik and J. Isenberg. The constraint equations. In P. T. Chruściel and H. Friedrich, editors, *The Einstein equations and the large scale behavior of gravitational fields*, pages 1–38. Birkäuser, Basel, 2004. arXiv :gr-qc/0405092v1.
- [7] O. Biquart, editor. *AdS/CFT correspondance : Einstein metrics and their conformal boundaries*, volume 8. IRMA Lectures in Mathematics and Theoretical Physics, European Mathematical Society (EMS), Zurich, 2005, Papers from the 73rd Meeting of Theoretical Physicists and Mathematicians held in Strasbourg, September 11-13, 2003. MR2160864 (2006b :53001).
- [8] M. P. D. Carmo. *Riemannian Geometry*. Birkhäuser, Basel, 2nd edition, 1991.
- [9] Y. Choquet-Bruhat. Einstein constraints on compact n-dimensional manifolds. *Classical and Quantum Gravity*, 21(3) :S127–S151, 2004. A spacetime safari : essays in honour of Vincent Moncrief.
- [10] Y. Choquet-Bruhat. *General Relativity and the Einstein Equations*. Oxford Mathematical Monographs. Oxford University Press, 2009.
- [11] Y. Choquet-Bruhat and R. Geroch. Global aspects of the Cauchy problem in general relativity. *Comm. Math. Phys.*, 14(4) :329–335, 1969.
- [12] Y. Choquet-Bruhat, J. Isenberg, and J. James W. York. Einstein constraints on asymptotically Euclidean manifolds. *Phys. Rev.D*, 61(8) :1–20, 2000.
- [13] Y. Choquet-Bruhat, J. Isenberg, and D. Pollack. The Einstein-scalar field constraints on asymptotically Euclidean manifolds. *Chin. Ann. Math. Ser. B*, 27(1) :31–52, 2006.
- [14] Y. Choquet-Bruhat, J. Isenberg, and D. Pollack. The constraint equations for the Einstein-scalar field system on compact manifolds. *Classical and Quantum Gravity*, 24(4) :809–828, 2007.
- [15] P. Chrusciel and E. Delay. On mapping properties of the general relativistic constraints operator in weighted functions space, with applications. *arXiv :gr-qc/0301073*, 2004.

- 
- [16] P. Chrusciel and E. Delay. Exotic hyperbolic gluings. *J. Diff. Geom.*, [hal-01233383], to appear.
- [17] P. Chrusciel and G. Nagy. The mass of spacelike hypersurfaces in asymptotically anti-de Sitter space-times. *Adv. Theor. Math. Phys.*, 5 :697–754, 2002. gr-qc/0110014.
- [18] P. T. Chrusciel and E. Delay. Manifold structures for the sets of solutions of the general relativistic constraint equations. *Journal of Geometry and Physics*, 51(4) :442–472, 2003.
- [19] P. T. Chrusciel and M. Herzlich. The mass of asymptotically hyperbolic Riemannian manifold. *Pac. J. Math.*, 212 :231–264, 2003.
- [20] J. Corvino and R. Schoen. On the asymptotics for the vacuum Einstein constraint equations. *J. Diff. Geom.*, 73(2) :185–217, 2006.
- [21] M. Dahl, R. Gicquaud, and A. Sakovich. Asymptotically hyperbolic manifolds with small mass. *Comm. Math. Phys.*, 325(2) :757–801, 2014.
- [22] G. Darboux. *Les équations de la gravitation einsteinienne*. Gauthier-Villars, 1927.
- [23] E. Delay and J. Fougeirol. Hilbert manifold structure for asymptotically hyperbolic relativistic initial data. *arXiv :1607.05616v2*, 2015. arXiv :1607.05616v2.
- [24] C. Dewitt-Morette, M. Dillard-Bleick, and Y. Choquet-Bruhat. *Analysis, Manifolds and Physics*. North-Holland, 1978.
- [25] Éricourgouillon. *3 + 1 Formalism in General Relativity : Bases of Numerical Relativity*, volume 846 of *Lecture Notes in Physics*. Springer, 2012.
- [26] C. Fefferman and C. Graham. Conformal invariants. *Elie Cartan et les mathématiques d’aujourd’hui (Lyon 1984)*, Numéro Hors série :95–116, Astérisque 1985. MR837196 (87g :53060).
- [27] A. E. Fischer and J. E. Marsden. Linearization stability of the Einstein equations. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 79(5) :997–1003, 1973.
- [28] A. E. Fischer and J. E. Marsden. Topics in the dynamics general relativity. *Italian physical society*, pages 322–395, 1979.
- [29] A. E. Fischer, J. E. Marsden, and V. Moncrief. The structure of the space of solutions of Einstein’s equations I : One Killing field. *Ann. Inst. H. Poincaré*, 23 :147–194, 1980.
- [30] Y. Fourès-Bruhat. Théorème d’existence pour certains systèmes d’équations aux dérivées partielles non- linéaires. *Acta Math.*, 88 :141–225, 1952.
- [31] S. Gallot, D. Hulin, and J. Lafontaine. *Riemannian Geometry*. Springer, 3rd edition, 2004.
- [32] R. Gicquaud and T. C. Nguyen. Solutions to the Einstein-scalar field constraint equations with a small TT-tensor. *arXiv :1502.05164v1*, 2015.
- [33] D. Gilbarg and N. S. Trudinger. *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*. Springer, reprint of the 1998 Edition edition, 2001.
- [34] M. Herzlich. Mass formulae for asymptotically hyperbolic metrics, in The AdS/CFT correspondence (Einstein metrics and conformal geometry). *IRMA Lect. in Math. Theor. Physics.*, 8 :103–121, 2005. Eur. Math. Soc. , Zurich.

- [35] E. Hille and R. Phillips. Functional analysis and semi-groups. *Colloquim Series, Am. Math. Soc*, volume 31, 1957.
- [36] E. Humbert and M. Vaugon. *La relativité générale expliquée aux mathématiciens*. Ellipse, 2014.
- [37] J. Isenberg. Constant mean curvature solutions of the Einstein constraint equations on closed manifolds. *Classical and Quantum Gravity*, 12(9) :2249–2274, 1995.
- [38] S. Klainerman, I. Rodnianski, and J. Szeftel. Overview of the proof of the bounded  $L^2$  Curvature Conjecture. *arXiv :1204.1772v2*, 2013.
- [39] S. Klainerman, I. Rodnianski, and J. Szeftel. The Bounded  $L^2$  Curvature Conjecture. *Invent. Math*, 202(1) :91–216, 2015.
- [40] J. M. Lee. Fredholm operators and Einstein metrics on conformally compact manifolds. *Mem. Amer. Math. Soc*, 183(864), July 2006.
- [41] A. Lichnérowicz. *Sur certains problèmes globaux relatifs au système d'équations d'Einstein*. Hermann, Paris, 1939.
- [42] J. Maldacena. The large N limit of superconformal field theories and supergravity. *Adv. Theor. Math. Phys*, 2(2) :231–252, 1998.
- [43] R. Mazzeo. Unique continuation at infinity and embedded eigenvalues for asymptotic hyperbolic manifolds. *American Journal of Mathematics*, 113 :25–45, 1991.
- [44] S. McCormick. The phase space for the Einstein-Yang-Mills equations and the first law of black hole thermodynamics. *Adv. Theor. Math. Phys*, 18(4) :799–825, 2014.
- [45] S. McCormick. The Hilbert manifold of asymptotically flat metric extensions. *arXiv :1512.02331v1*, 2015.
- [46] B. Michel. Geometric invariance of mass-like asymptotic invariants. *arXiv :1012.3775v2*, 2010.
- [47] V. Moncrief. Spacetime symmetries and linearization stability of the Einstein's equations I. *J. Math. Phys.*, 16(3) :493–498, March 1975.
- [48] J. H. Rai and R. Saraykar. Hilbert manifold structure of the set of solutions of constraint equations for coupled Einstein and scalar fields. *arXiv :1605.08858v1*, 2016.
- [49] R. M. Wald. *General Relativity*. The University of Chicago Press, 1984.
- [50] X. Wang. The mass of asymptotically hyperbolic manifolds. *J. Diff. Geom*, 57 :273–299, 2001.



# Structure de variété de Hilbert et masse sur l'ensemble des données initiales relativistes faiblement asymptotiquement hyperboliques

**Résumé :** La relativité générale est une théorie physique de la gravitation élaborée il y a un siècle, dans laquelle l'univers est modélisé par une variété Lorentzienne  $(\mathcal{N}, \gamma)$  de dimension 4 appelée espace-temps et vérifiant les équations d'Einstein. Lorsque l'on sépare la dimension temporelle des trois dimensions spatiales, les équations de contrainte découlent naturellement de la décomposition 3 + 1 des équations d'Einstein. Elles constituent une condition nécessaire et suffisante pour pouvoir considérer l'espace-temps  $\mathcal{N}$  comme l'évolution temporelle d'une hypersurface Riemannienne  $(\mathcal{M}, g)$  plongée dans  $\mathcal{N}$  avec une seconde forme fondamentale  $K$ . Le triplet  $(\mathcal{M}, g, K)$  constitue alors une donnée initiale solution des équations de contrainte dont on note  $\mathcal{C}$  l'ensemble. Dans cette thèse, nous utilisons la méthode de Robert Bartnik pour établir la structure de sous-variété de Hilbert de  $\mathcal{C}$  pour des données initiales faiblement asymptotiquement hyperboliques, dont la régularité peut être reliée à la conjecture de courbure  $L^2$  bornée. Les difficultés inhérentes au cas faiblement AH ont nécessité l'introduction de deux opérateurs différentiels d'ordre deux et l'obtention d'estimées de type Poincaré et Korn pour ces opérateurs. Une fois la structure de Hilbert obtenue, nous définissons une fonctionnelle masse lisse sur la sous-variété  $\mathcal{C}$  et compatible avec nos conditions de faible régularité. L'invariance géométrique de la masse est étudiée et montrée, modulo une conjecture en faible régularité relative au changement de cartes au voisinage de l'infini. Enfin, nous faisons le lien entre les points critiques de la masse et les métriques statiques.

**Mots clés :** structure de variété de Hilbert, équations de contrainte, relativité générale, système d'EDP elliptique non-linéaire, variété faiblement asymptotiquement hyperbolique.

---

## Hilbert manifold structure and mass on the set of weakly asymptotically hyperbolic relativistic initial data

**Abstract :** General relativity is a gravitational theory born a century ago, in which the universe is a 4-dimensional Lorentzian manifold  $(\mathcal{N}, \gamma)$  called spacetime and satisfying Einstein's field equations. When we separate the time dimension from the three spatial ones, constraint equations naturally follow on from the 3 + 1 decomposition of Einstein's equations. Constraint equations constitute a necessary condition, as well as sufficient, to consider the spacetime  $\mathcal{N}$  as the time evolution of a Riemannian hypersurface  $(\mathcal{M}, g)$  embeded into  $\mathcal{N}$  with the second fundamental form  $K$ .  $(\mathcal{M}, g, K)$  is then an element of  $\mathcal{C}$ , the set of initial data solutions to the constraint equations. In this work, we use Robert Bartnik's method to provide a Hilbert submanifold structure on  $\mathcal{C}$  for weakly asymptotically hyperbolic initial data, whose regularity can be related to the bounded  $L^2$  curvature conjecture. Difficulties arising from the weakly AH case led us to introduce two second order differential operators and we obtain Poincaré and Korn-type estimates for them. Once the Hilbert structure is properly described, we define a mass functional smooth on the submanifold  $\mathcal{C}$  and compatible with our weak regularity assumptions. The geometrical invariance of the mass is studied and proven, only up to a weak regularity conjecture about coordinate changes near infinity. Finally, we make a correspondance between critical points of the mass and static metrics.

**Key words :** Hilbert manifold structure, constraint equations, general relativity, non-linear elliptic PDE system, weakly asymptotically hyperbolic manifold.