



**HAL**  
open science

# Utilisation de méta-modèles multi-fidélité pour l'optimisation de la production des réservoirs

Arthur Thenon

► **To cite this version:**

Arthur Thenon. Utilisation de méta-modèles multi-fidélité pour l'optimisation de la production des réservoirs. Sciences de la Terre. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2017. Français. NNT : 2017PA066100 . tel-01622079

**HAL Id: tel-01622079**

**<https://theses.hal.science/tel-01622079v1>**

Submitted on 24 Oct 2017

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE DE DOCTORAT  
DE L'UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE CURIE

Spécialité : Géosciences

École doctorale : Géosciences, Ressources Naturelles et Environnement

réalisée

à l'IFP Energies nouvelles

présentée par

**Arthur THENON**

pour obtenir le grade de :

**DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE CURIE**

---

**Utilisation de méta-modèles multi-fidélité pour  
l'optimisation de la production des réservoirs**

---

Thèse dirigée par **Mickaële Le Ravalec**

Thèse rapportée par :

**Vasily Demyanov**  
**Bertrand Iooss**

Professeur, Heriot-Watt  
Chercheur senior, EDF R&D

Thèse soutenue publiquement le 20 Mars 2017 devant le jury composé de :

**Véronique Gervais**  
**Mickaële Le Ravalec**  
**Pierre Biver**  
**Christian Gorini**  
**Thomas Romary**  
**Vasily Demyanov**  
**Bertrand Iooss**

Ingénieur chercheur, IFPEN  
Directeur de recherche, IFPEN  
Ingénieur, TOTAL  
Professeur, UPMC  
Enseignant chercheur, Mines Paris  
Professeur, Heriot-Watt  
Chercheur senior, EDF R&D

Encadrant  
Directeur de thèse  
Examinateur  
Examinateur  
Examinateur  
Rapporteur  
Rapporteur



---

# Remerciements

Je souhaite avant tout remercier Mickaële Le Ravalec et Véronique Gervais pour m'avoir offert l'opportunité de réaliser cette thèse. Leur encadrement adapté et de très grande qualité ont permis de transformer cette thèse en une formidable expérience, au cours de laquelle j'ai beaucoup appris tout en y prenant un plaisir certain. Je leur suis très reconnaissant pour leur soutien permanent, leur disponibilité ainsi que de l'autonomie dont j'ai pu disposer tout au long de cette thèse.

Je remercie également Bertrand Iooss et Vasily Demyanov d'avoir accepté de rapporter ma thèse, ainsi que Pierre Biver, Thomas Romary et Christian Gorini d'avoir accepté de faire partie de mon jury de thèse en tant qu'examineurs.

Je souhaite ensuite remercier l'ensemble des personnes rencontrées à l'IFPEN, ayant contribué de près ou de loin à cette thèse, et constituant un environnement de travail privilégié. Sans pouvoir citer tout le monde, je remercie l'ensemble du département pour son accueil, notamment Christian et Djaméla pour leur bonne humeur inaltérable, les Sarah et Antoine pour leurs petits coups de main et Dan pour ses discussions non-conventionnelles.

J'ai également une pensée pour tous mes collègues et amis doctorants. Ceux de la première heure, Caroline et Benjamin, les compagnons de route, Nicolas, Omar, Chahir, Bertrand et aussi les derniers venus, Marion, Julie, Estelle, Virginie, Claire, Christopher et Xavier. Je n'ai évidemment pas ici la place de citer tout le monde (mais je paierai un verre à ceux que j'ai oubliés). D'une manière générale, je tiens à remercier (uniquement) ceux qui ont accepté d'aller manger avec moi tous les jours à 11h30.

Je tiens également à remercier mes parents, Anne et Frank, ainsi que mes petites soeurs Ariane, Roxane et Natacha, pour leur soutien et leur humour. Je ne serais assurément pas là sans eux. Je remercie aussi l'ensemble de ma famille avec une mention spéciale pour Philippe qui m'a fait tomber dans les géosciences ! Finalement, je remercie Aurélie qui a su me supporter dans tous les sens du terme et de la plus belle des manières.



---

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Ingénierie de réservoir</b>	<b>9</b>
1.1	Modélisation du réservoir . . . . .	9
1.1.1	Caractérisation et modélisation statique du réservoir . . . . .	9
1.1.2	Simulation des écoulements . . . . .	11
1.2	Calage d'historique . . . . .	13
1.2.1	Principe . . . . .	14
1.2.2	Fonction objectif . . . . .	15
1.2.3	Paramétrisation . . . . .	16
1.3	Réduction des temps de calcul . . . . .	17
1.3.1	La méta-modélisation . . . . .	17
1.3.2	La méta-modélisation multi-fidélité . . . . .	19
1.4	Objectifs et organisation de la thèse . . . . .	19
1.4.1	Objectifs de la thèse . . . . .	20
1.4.2	Organisation du manuscrit . . . . .	20
<b>2</b>	<b>Méthodologies pour la méta-modélisation</b>	<b>23</b>
2.1	Introduction à la planification d'expériences . . . . .	24
2.2	Méta-modélisation dans un cadre simple fidélité . . . . .	26
2.2.1	Echantillonnage par hypercube latin . . . . .	26
2.2.2	Méta-modèle de krigeage . . . . .	28
2.3	Méta-modélisation dans un cadre multi-fidélité . . . . .	31
2.3.1	Echantillonnage par hypercubes latins imbriqués . . . . .	32
2.3.2	Méta-modèle de co-krigeage multi-fidélité . . . . .	33
2.4	Validation du méta-modèle . . . . .	37
2.4.1	Validation via une base de test . . . . .	37
2.4.2	Validation croisée . . . . .	38
<b>3</b>	<b>Méta-modélisation de sorties vectorielles et de la fonction objectif</b>	<b>41</b>
3.1	Propriétés d'intérêt de la simulation d'écoulement . . . . .	41
3.2	Méta-modélisation de sorties vectorielles . . . . .	43
3.2.1	L'analyse en composantes principales (ACP) . . . . .	43
3.2.2	ACP et krigeage . . . . .	44
3.2.3	ACP et co-krigeage multi-fidélité . . . . .	46
3.3	La méta-modélisation de la fonction objectif . . . . .	49
3.3.1	Méta-modélisation directe de la fonction objectif . . . . .	49
3.3.2	Méta-modélisation vectorielle de la fonction objectif - méthode . . . . .	50
3.3.3	Méta-modélisation vectorielle de la fonction objectif - variance et validation croisée . . . . .	51
<b>4</b>	<b>Etude de cas : PUNQ</b>	<b>55</b>
4.1	Description du cas PUNQ multi-fidélité . . . . .	55
4.1.1	PUNQ-S3 : un cas référence . . . . .	55
4.1.2	Construction d'un cas PUNQ multi-fidélité . . . . .	58
4.1.3	Comparaison des modèles PUNQ fin et grossier . . . . .	61

4.1.4	Description de l'étude du cas PUNQ . . . . .	66
4.2	Méta-modélisation de sorties dynamiques . . . . .	69
4.2.1	Application aux propriétés associées au réservoir . . . . .	70
4.2.2	Application aux propriétés aux puits . . . . .	72
4.2.3	Application aux propriétés spatiales . . . . .	76
4.2.4	Discussion . . . . .	80
4.3	Méta-modélisation de la fonction objectif . . . . .	86
4.3.1	Méta-modélisation directe . . . . .	86
4.3.2	Décomposition en sous-ensembles de données . . . . .	88
4.3.3	Modélisation via les sorties dynamiques . . . . .	93
4.3.4	Discussion . . . . .	94
4.4	Application: le calage d'historique . . . . .	97
4.5	Conclusions . . . . .	99
<b>5</b>	<b>Planification séquentielle d'expériences</b>	<b>101</b>
5.1	Introduction . . . . .	102
5.2	Planification séquentielle et krigeage . . . . .	104
5.2.1	Présentation de l'algorithme proposé . . . . .	104
5.2.2	Description de l'algorithme proposé . . . . .	107
5.3	Planification séquentielle et co-krigeage multi-fidélité . . . . .	108
5.3.1	Présentation de l'algorithme proposé . . . . .	108
5.3.2	Description de l'algorithme proposé . . . . .	111
5.4	Extension à des évaluations en parallèle . . . . .	113
5.4.1	Sélection de q points par itération . . . . .	114
5.4.2	Algorithme dans un cadre simple fidélité . . . . .	115
5.4.3	Algorithme dans un cadre multi-fidélité . . . . .	116
<b>6</b>	<b>Etude de cas : BRUGGE</b>	<b>117</b>
6.1	Description du cas BRUGGE multi-fidélité . . . . .	117
6.1.1	Le cas Brugge original . . . . .	117
6.1.2	Construction d'un cas BRUGGE multi-fidélité . . . . .	119
6.1.3	Description de l'étude de cas BRUGGE . . . . .	121
6.1.4	Comparaison des réponses de BRUGGE fin et BRUGGE grossier . . . . .	123
6.2	Planification séquentielle appliquée à la fonction objectif . . . . .	129
6.2.1	Présentation des résultats . . . . .	129
6.2.2	Discussion . . . . .	135
6.3	Application: analyse de sensibilité globale . . . . .	140
6.3.1	Définition des indices de Sobol' . . . . .	140
6.3.2	Résultats de l'analyse de sensibilité sur BRUGGE . . . . .	141
6.4	Conclusions . . . . .	144
	<b>Conclusions et perspectives</b>	<b>145</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>147</b>

---

# Notations

ACP	analyse en composantes principales,
BHP	pression au fond du puits,
CUMO	volume cumulé d'huile produit par le réservoir,
FO	fonction objectif,
GOR	rapport entre les volumes de gaz et d'huile produits au puits,
QOIL	débit d'huile au puits,
QWAT	débit d'eau au puits,
P	carte des pressions au temps final,
PRO-*	puits producteur du cas PUNQ,
SOIL	carte des saturations en huile au temps final,
WCUT	fraction d'eau au puits,
$\mathbf{d}^{obs}$	données de production observées,
$y(\mathbf{x})$	données de production simulées,
$\mathbf{x}$	paramètres incertains appartenant à un sous-ensemble de $\mathbb{R}^d$ ,
$\mathbf{D}$	plan d'expériences de dimensions $n \times d$ ,
$n$	nombre d'observations,
$d$	nombre de paramètres incertains,
V	cellules de Voronoi associées au plan d'expériences $\mathbf{D}$ ,
$Y(\mathbf{x})$	processus Gaussien de moyenne $h(\mathbf{x})$ et de fonction de covariance $K(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ ,
$K(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$	fonction de covariance de $Y(\mathbf{x})$ ,
$R(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$	fonction de corrélation associée à $K(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ ,
$\sigma$	paramètre de variance,
$\boldsymbol{\lambda}$	hyper-paramètres de la fonction de covariance,
$\phi$	base réduite obtenue en appliquant l'ACP sur $y(\mathbf{D})$ ,
$\alpha$	coefficients de la base réduite obtenue en appliquant l'ACP sur $y(\mathbf{D})$ ,
$L$	nombre de termes de la base réduite conservés lors de l'ACP,
$\mathbf{E}$	espérance,
Var	variance,
Cov	covariance,
arg max	argument maximum,
$\hat{y}(\mathbf{x})$	estimateur de $y(\mathbf{x})$ ,
$\bar{y}$	moyenne de $y(\mathbf{x})$ sur $\mathbf{D}$ ,
$\top$	transposée du vecteur ou de la matrice,
$f$	indice ou exposant indiquant l'appartenance au niveau de fidélité fin,
$g$	indice ou exposant indiquant l'appartenance au niveau de fidélité grossier.





---

# CHAPITRE 1

## Ingénierie de réservoir

Dans ce chapitre, nous proposons une introduction générale à l'ingénierie de réservoir afin d'exposer le contexte dans lequel s'inscrit cette thèse. Nous résumons les étapes clés dans la construction de modèles numériques représentatifs d'un réservoir, en nous inspirant de l'ouvrage [Le Ravalec et al., 2014]. L'objectif de la première étape est la conception de modèles à partir desquels il est possible de simuler l'exploitation d'un réservoir. La partie 1.1 en rappelle les points essentiels. Puis vient en partie 1.2 une description du calage d'historique, le processus visant à calibrer les modèles de réservoir pour qu'ils respectent les données de production. La calibration des modèles de réservoir, puis leur utilisation pour l'optimisation de la production, sont des opérations nécessitant de nombreuses simulations. Les simulations d'écoulement étant généralement très coûteuses en temps de calcul (jusqu'à plusieurs heures par simulation), il est nécessaire de réduire les temps de calcul afin de pouvoir optimiser la production tout en respectant les contraintes de temps des études opérationnelles. Nous abordons la réduction des temps de calcul en partie 1.3. Finalement, nous délimitons la problématique de cette thèse et détaillons ses objectifs dans la partie 1.4.

### 1.1 Modélisation du réservoir

La construction d'un modèle numérique représentatif d'un réservoir passe par l'intégration dans ce modèle de toutes les données disponibles sur le réservoir. Ce processus se fait traditionnellement en deux temps : d'abord l'intégration des données constantes dans le temps, les données statiques, puis celle des données variant dans le temps, les données dynamiques. Nous détaillons tout d'abord l'intégration des données statiques. Pour cela, la section 1.1.1 décrit très brièvement les bases de la caractérisation et de la modélisation statique du réservoir. Il s'agit ici de construire un modèle de réservoir à partir des données statiques. La simulation des écoulements au sein du modèle construit fait ensuite l'objet de la section 1.1.2.

#### 1.1.1 Caractérisation et modélisation statique du réservoir

La première étape consiste donc à utiliser les données statiques disponibles pour construire un premier modèle numérique représentatif de notre réservoir. Ces données statiques comprennent la sismique 3D, des diagraphies et des mesures sur carottes qui ont pu être extraites lors de forages. La Figure 1.1 propose des exemples illustrés des différentes données statiques permettant la caractérisation du réservoir. L'interprétation de ces données combinée aux connaissances géologiques du terrain permet la création d'un modèle dit géologique. On parle également de géo-modèle ou modèle statique.

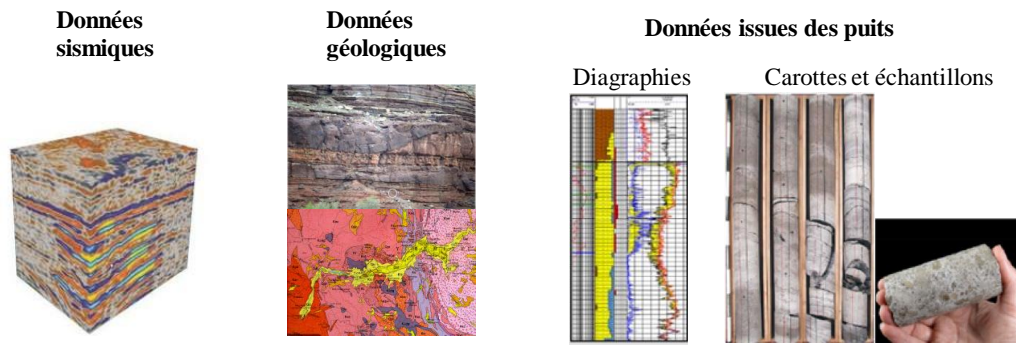


Figure 1.1 : Types de données statiques collectées pour caractériser les propriétés du réservoir. Source: [Le Ravalec et al., 2014], modifiée.

## Données statiques

Les données statiques peuvent être mesurées directement ou indirectement. Elles renseignent des propriétés à des échelles très différentes allant du micromètre à l’hectomètre.

Un premier type de données, dites géologiques, fait référence aux connaissances géologiques préexistantes à l’échelle régionale ou du bassin. Souvent disponibles, ces données contribuent à l’identification des formations rocheuses comprises dans le réservoir étudié. Elles peuvent éventuellement apporter des indications sur la valeur de certaines propriétés pétrophysiques, ou sur la présence d’hétérogénéités ou structures particulières.

Les données sismiques sont des mesures indirectes de la structure du sous-sol. Elles sont obtenues par de la prospection sismique qui consiste à propager des ondes sismiques dans le sous-sol, puis à en enregistrer les échos provenant de la réflexion sur les structures géologiques en profondeur. Le traitement et l’analyse de ces enregistrements permettent la reconstitution d’une image du sous-sol. En particulier, ces données permettent de localiser les différents horizons et failles du réservoir. On peut ainsi en déduire la structure du réservoir.

Les données issues des puits sont les seules mesures directes disponibles pour caractériser le réservoir. Elles fournissent les valeurs de diverses propriétés pétrophysiques comme la porosité, la perméabilité, les saturations, la densité de la roche, la résistivité, *etc.* Les données de puits sont disponibles uniquement à l’emplacement des puits. A l’inverse des données sismiques, elles sont donc peu nombreuses et très localisées. Toutefois, elles ont une très bonne précision/résolution. Elles permettent de caractériser le réservoir pour de toutes petites échelles (de l’ordre du centimètre). Les données statiques aux puits peuvent être obtenues à partir de mesures sur des échantillons de roches extraits lors du forage, à savoir sur les carottes ou les boues de forage. Elles peuvent également provenir de diagraphies, c’est-à-dire obtenues par des outils de mesures parcourant les puits. Elles fournissent les variations de différentes propriétés pétrophysiques le long des puits, et permettent de distinguer les différents faciès, les différentes séquences stratigraphiques, *etc.*

## Construction du modèle géologique

Il est possible de concevoir un modèle géologique représentatif du réservoir et respectant l’ensemble de ces données statiques. La structure du modèle est donnée par l’interprétation des données sismiques calées sur les mesures aux puits. Cette interprétation doit également tenir compte de l’information géologique régionale. La structure du réservoir (différentes couches, failles) est ensuite discrétisée selon un maillage tridimensionnel complexe composé de blocs élémentaires : on parle de grille réservoir. Afin

d'être la plus représentative possible des hétérogénéités observées sur le réservoir réel, cette grille est en général finement maillée. Elle peut ainsi être constituée de millions de blocs.

Pour compléter le modèle géologique, il faut ensuite spécifier les valeurs des propriétés pétrophysiques pour chacun des blocs de la grille. L'analyse des diagraphies et carottes permet de les renseigner aux puits. On peut ensuite se servir de techniques géostatistiques pour attribuer des valeurs de propriétés aux mailles non échantillonnées en s'appuyant sur l'analyse des données. Les méthodes géostatistiques permettent de générer des réalisations de propriétés pétrophysiques qui respectent les données existantes, et qui sont cohérentes entre elles (*e.g.* avec des corrélations entre la porosité et la perméabilité). On obtient alors un modèle géologique possible puisqu'il respecte l'ensemble des données statiques.

### De nombreuses incertitudes

Grâce aux données sismiques, la structure d'un réservoir est relativement bien connue. En revanche, il est en pratique impossible de connaître les propriétés pétrophysiques en chaque point du réservoir ou pour chacune des mailles du modèle. En effet, le nombre de puits est généralement très réduit en raison de leur coût, alors que les réservoirs sont souvent très étendus (de l'ordre du kilomètre). Le nombre de données disponibles est donc très faible en comparaison du grand nombre de paramètres qu'il faut renseigner pour définir le modèle.

De plus, parmi les données disponibles, certaines sont mal réparties dans l'espace. Par exemple, les données de puits sont uniquement disponibles aux emplacements des puits. En conséquence, les réalisations géostatistiques basées sur ces données proposent des représentations qui, tout en restant plausibles, sont entachées d'incertitudes lorsque l'on considère des mailles se situant loin des puits.

Une autre source d'incertitude est liée à l'échelle des différentes mesures. En effet, les données de puits sont généralement mesurées à des échelles bien plus petites que l'échelle des blocs de la grille du modèle. Des mises à l'échelle sont alors indispensables pour calculer des propriétés équivalentes. De telles mises à l'échelle sont cependant difficiles à réaliser car elles dépendent du réservoir et de ses hétérogénéités. De plus, il existe peu de manières de vérifier leur pertinence, surtout lorsque l'on s'éloigne des puits.

Finalement, il existe de nombreuses autres sources d'incertitudes liées aux erreurs et approximations sur la mesure (*e.g.* incertitudes liées aux outils de mesure, à leur calibrage), le traitement des données (*e.g.* ré-échantillonnage des données sismiques), leur interprétation (*e.g.* conversion temps/profondeur) ou tout simplement la discrétisation du maillage [Vincent et al., 1999] [Corre et al., 2000] [Schulze-Riegert and Ghedan, 2007].

En résumé, les données disponibles sont très insuffisantes pour définir entièrement un modèle géologique. En conséquence, il existe une infinité de modèles géologiques pouvant respecter les données statiques. C'est pour cela que de nombreux paramètres du modèle peuvent être considérés comme incertains.

### 1.1.2 Simulation des écoulements

La construction de modèles géologiques permet d'estimer les volumes des ressources en place et donc de donner une première idée de la valeur économique d'un champ. Toutefois, apprécier les volumes en place ne suffit pas, il est fondamental d'en estimer la part techniquement récupérable. Le modèle géologique est donc fourni en entrée à un simulateur d'écoulement pour modéliser les déplacements de fluide au cours du temps. On simule alors la production suivant un schéma de production défini par

l'ingénieur réservoir.

### Modèle géologique et modèle réservoir

Le temps de simulation d'un modèle dépend directement du nombre de mailles actives, c'est-à-dire du nombre de mailles dans lesquelles on simule les écoulements. Les mailles inactives correspondent à des mailles peu ou pas poreuses, elles servent généralement à délimiter les contours du réservoir. La grande finesse de la grille du modèle géologique devient alors un inconvénient majeur pour la simulation d'écoulement. En effet, les simulations pour un modèle comportant des millions de mailles vont impliquer un temps de calcul très important. Typiquement, la durée d'une seule simulation peut s'étendre de quelques heures jusqu'à plusieurs jours. Or, de nombreuses simulations sont généralement nécessaires pour proposer un plan de développement optimisant l'exploitation du champ. Dans de telles conditions, le coût total en temps de calcul devient rapidement prohibitif. C'est pourquoi le modèle géologique n'est généralement pas utilisé directement pour la simulation d'écoulement.

Une pratique courante consiste à construire un modèle plus grossier du réservoir, comportant un nombre réduit de mailles et sur lequel les simulations d'écoulement seront plus rapides. On parle alors de modèle réservoir, modèle dynamique ou encore modèle de simulation. Ce modèle est peuplé en propriétés pétrophysiques à partir du modèle géologique via une étape de mise à l'échelle. Un schéma représentant la mise à l'échelle d'une propriété pétrophysique de la grille d'un modèle fin vers la grille d'un modèle grossier est donné par la Figure 1.2. Le but est d'obtenir pour le modèle réservoir un comportement dynamique aussi proche que possible de celui du modèle géologique.

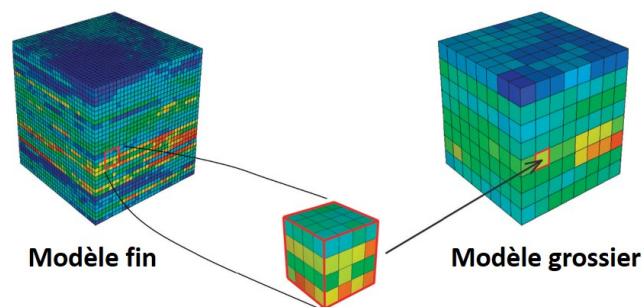


Figure 1.2 : Exemple de mise à l'échelle d'une propriété pétrophysique. A partir des valeurs de la propriété sur le modèle fin, on calcule la valeur équivalente de cette propriété pour le modèle grossier. Source: <http://petrowiki.org/>, modifiée.

Bien que couramment utilisée, la distinction entre modèle géologique et modèle réservoir n'est pas systématiquement nécessaire. Par exemple, si le modèle géologique est de taille raisonnable ou si l'on dispose d'une grande puissance de calcul, il est possible de considérer une unique taille de modèle. On utilise alors le modèle géologique et sa grille fine pour réaliser les simulations d'écoulement.

### Simulation d'écoulement dans le modèle réservoir

Le modèle réservoir est ensuite fourni en entrée d'un simulateur d'écoulement afin de simuler l'évolution de la pression et des saturations dans le réservoir sous l'effet de la production. En plus du modèle réservoir, le simulateur a besoin qu'on lui spécifie les propriétés des fluides ainsi que le schéma de production. Puis, en résolvant la loi de conservation des masses, la loi de Darcy et les équations d'état à chaque pas de temps et pour chaque maille active, le simulateur d'écoulement calcule l'évolution au cours du temps des différentes propriétés des fluides dans tout le réservoir.

La simulation d'écoulement permet notamment de simuler la production aux puits en réponse au schéma de production, c'est-à-dire l'évolution des pressions et débits des différents fluides. La caractérisation et modélisation statique du réservoir, puis la simulation d'écoulement correspondent à la résolution du problème de modélisation direct résumé par la figure 1.3. Ce workflow permet déjà à l'ingénieur réservoir d'évaluer l'impact du schéma de production, de la position des puits, et ainsi de proposer un plan de développement pour les premières phases de l'exploitation du champ.

Cependant, les incertitudes existantes sur le modèle géologique se propagent sur le modèle de réservoir et finalement sur la précision des prédictions. Afin de les réduire, il est nécessaire d'incorporer les nouvelles données qui sont acquises au fur et à mesure de l'exploitation. Ces dernières peuvent être issues du forage de puits additionnels, d'acquisitions sismiques répétées au cours du temps, et surtout de mesures faites aux puits au cours de la production, les données de production. Les données de production sont des fonctions du temps. Il s'agit par exemple des débits de fluide comme le débit d'huile, ou bien de la pression au fond du puits. En pratique, on peut les voir comme des vecteurs dont chaque élément correspond à la valeur de la propriété à un temps donné. On parle ainsi de sorties vectorielles, ou propriétés d'intérêt, que l'on simule avec le simulateur d'écoulement. Une bonne concordance entre les données mesurées et les réponses simulées correspondantes conforte la pertinence des modèles géologique et réservoir. A l'inverse, de fortes différences indiquent une modélisation de mauvaise qualité, il faut alors revoir le modèle.

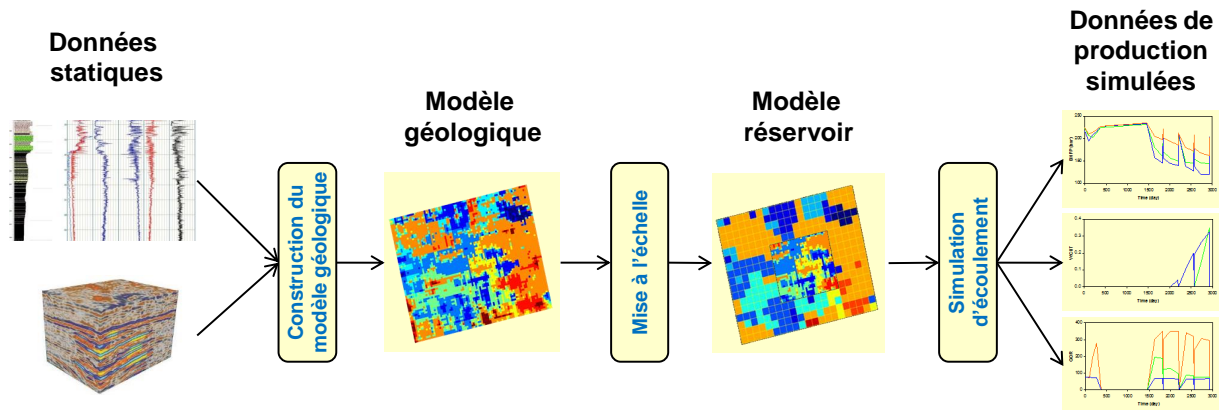


Figure 1.3 : Schéma de la modélisation d'un réservoir. A partir des données statiques, on construit des modèles qui permettent la simulation des données de production lors de l'exploitation du champ.

## 1.2 Calage d'historique

La modélisation directe comprend la phase de construction du modèle géologique, de mise à l'échelle si nécessaire, et de simulation des écoulements. Les données statiques sont intégrées au cours de la construction du modèle géologique. Toutefois, la modélisation directe ne garantit pas le respect des données de production. L'intégration des données dynamiques dans la modélisation correspond à la résolution d'un problème inverse : le calage d'historique. Le processus du calage d'historique est décrit dans la section 1.2.1. La définition de la fonction objectif et le choix de la paramétrisation sont deux étapes clés de ce processus. Elles sont détaillées dans les sections 1.2.2 et 1.2.3, respectivement.

### 1.2.1 Principe

Les données dynamiques correspondent aux réponses dynamiques du réservoir lorsque celui-ci est en exploitation : les données de production ou historique de production. Contrairement à l'intégration des données statiques qui se fait directement lors de la construction des modèles géologiques, l'intégration des données dynamiques ne peut se faire qu'après la mise en place du workflow de simulation direct. Ce processus, appelé calage d'historique, consiste à ajuster différentes caractéristiques des modèles géologique et/ou réservoir jusqu'à ce que ces derniers reproduisent les données de production. Le calage d'historique est donc la résolution d'un problème inverse dans lequel on cherche à déduire une partie des caractéristiques du réservoir à partir des données dynamiques disponibles.

Traditionnellement, le calage d'historique est résolu à travers une approche variationnelle [Jacquard et al., 1965] résumée par le schéma de la Figure 1.4. Les principales étapes sont les suivantes :

1. On identifie des paramètres incertains intervenant dans la définition des modèles réservoir ou géologique. C'est la paramétrisation.
2. Si nécessaire, on fait la mise à l'échelle du modèle géologique, puis on effectue la simulation d'écoulement sur le modèle réservoir.
3. On quantifie l'écart entre les réponses dynamiques simulées et les données mesurées en calculant une fonction objectif.
4. On utilise un algorithme de minimisation pour ajuster les paramètres incertains afin de réduire la fonction objectif.
5. On répète les étapes 2 à 4 jusqu'à ce que le calage obtenu soit satisfaisant.

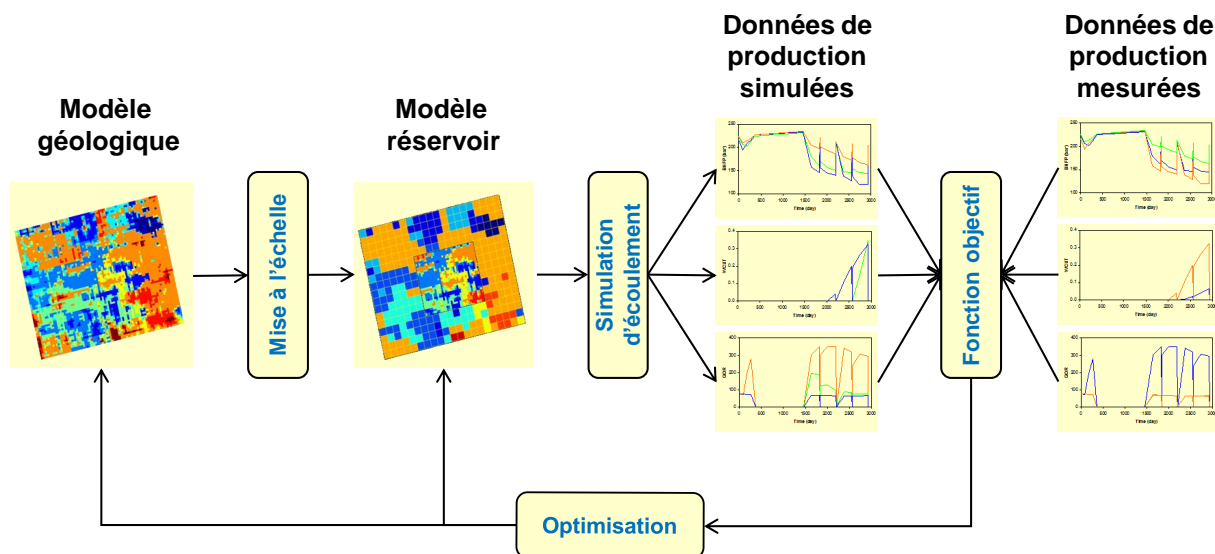


Figure 1.4 : Schéma d'un calage d'historique. Les modèles géologique et/ou réservoir sont modifiés jusqu'à ce que les données de production simulées reproduisent le mieux possible les données de production mesurées.

Un autre type d'approches basées sur des méthodes d'assimilation séquentielle avec notamment le filtre de Kalman d'ensemble (EnKF) [Lorentzen et al., 2003] [Evensen, 2009] a suscité un fort intérêt ces dernières années pour la résolution du calage d'historique. Ces méthodes considèrent un ensemble de réalisations pour le modèle réservoir, ce qui donne une distribution a priori. On résout alors le problème direct pour chaque réalisation jusqu'au temps où on a la première mesure. Tous les paramètres sont alors mis à jour à partir d'un krigeage. Le processus est ensuite répété jusqu'à ce que toutes les données soient assimilées. Cette approche a l'avantage de pouvoir incorporer de nouvelles données en continu et de fournir un ensemble de modèles calés.

De manière générale, le problème du calage d'historique a fait l'objet de nombreuses recherches ces dernières années, notamment pour l'automatiser, traiter un nombre de paramètres incertains toujours plus important et améliorer ses performances. [Oliver and Chen, 2011] passent en revue les dernières méthodes expérimentées pour le calage d'historique au niveau de la paramétrisation, du calcul de la fonction objectif, des algorithmes de calage, et de la quantification des incertitudes. Dans la suite de cette thèse, on se place dans le cadre d'un calage d'historique par méthodes variationnelles suivant le schéma de la Figure 1.4.

### 1.2.2 Fonction objectif

Nous notons  $\mathbf{x}$  un ensemble de paramètres incertains d'un modèle réservoir. On note aussi  $y(\mathbf{x})$  les données de production correspondant à la simulation du réservoir défini par  $\mathbf{x}$ . Les données de production simulées peuvent alors être comparées aux données de production que l'on mesure lors de l'exploitation du réservoir réel, notées  $\mathbf{d}^{obs}$ . Cette comparaison se fait par le calcul d'une fonctionnelle appelée fonction objectif qui quantifie l'écart entre les données de production simulées et mesurées. La fonction objectif, ou  $FO$ , est généralement une différence par moindres carrés pondérés :

$$FO(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}(\mathbf{y}(\mathbf{x}) - \mathbf{d}^{obs})^\top \mathbf{C}_D^{-1}(\mathbf{y}(\mathbf{x}) - \mathbf{d}^{obs}) \quad (1.1)$$

avec  $\mathbf{C}_D$  la matrice de covariance qui quantifie les différentes incertitudes sur les données de production.

En pratique, une matrice diagonale est souvent choisie pour la matrice de covariance  $\mathbf{C}_D$ , on suppose alors que les incertitudes sur les données de production sont indépendantes pour chaque donnée. Dans ce cas, une formulation équivalente souvent considérée pour le calcul de la fonction objectif s'exprime de la manière suivante:

$$FO(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^K \omega_k \sum_{t=1}^T \left( \frac{y_k(\mathbf{x}, t) - d_{kt}^{obs}}{\sigma_{kt}} \right)^2 \quad (1.2)$$

avec  $k$  et  $t$  des indices faisant référence aux différentes sorties (*e.g.* un débit d'huile à un puits donné) et aux différents temps pour lesquels ces sorties sont mesurées. On considère ici  $K$  sorties différentes, toutes mesurées à  $T$  différents temps. Les coefficients  $\omega$  et  $\sigma$  sont des poids. Les premiers sont assignés par sortie afin de rendre la somme de leurs erreurs comparable. En effet, la fonction objectif regroupe souvent des données de production avec des ordres de magnitude très différents, comme des mesures de pression, pouvant s'exprimer en centaines de bar, et des fractions d'eau (*i.e.* le ratio entre le volume d'eau sur le volume total produit) strictement comprises entre 0 et 1. Si aucune pondération n'est mise en place, la fonction objectif ne sera représentative que de la sortie présentant la plus forte magnitude. Finalement,  $\sigma$  désigne des poids pouvant être vus comme l'écart-type des erreurs de mesure sur les données de production.

La fonction objectif est nulle lorsque les données de production simulées sont identiques à celles observées. Le calage d'historique est donc équivalent à un problème de minimisation de la fonction objectif. En se donnant un jeu de valeurs initiales pour les paramètres incertains  $\mathbf{x}$  et en simulant les réponses dynamiques correspondantes, on peut calculer une valeur initiale de fonction objectif. Un algorithme d'optimisation, typiquement un algorithme de descente basé sur le calcul de gradients, peut alors être utilisé pour déterminer les valeurs de paramètres incertains qui permettent de minimiser la fonction objectif. A la fin de ce processus d'optimisation, on trouve généralement un minimum local. On peut alors réitérer ce processus jusqu'à trouver le minimum global. Toutefois ce dernier



est difficile à atteindre car les variations de la fonction objectif sont complexes. En pratique, lorsque la valeur de la fonction objectif est inférieure à un seuil prédéfini, on considère que le modèle est calé et qu'il respecte suffisamment bien les différentes données dynamiques. De nombreux algorithmes d'optimisation peuvent être envisagés pour la minimisation de la fonction objectif. L'algorithme de descente Quasi-Newton est souvent plébiscité pour son efficacité, mais de nombreux autres algorithmes basés sur des méthodes de descente [Makhlouf et al., 1993] [Li et al., 2001], de région de confiance [Subbey et al., 2004] [Christie et al., 2006], ou d'optimisation sans calcul de dérivées [Romero and Carter, 2001] [Schulze-Riegert et al., 2003], ont été appliqués avec succès au calage d'historique. Un point commun à toutes ces méthodes est qu'elles nécessitent un nombre conséquent de simulations d'écoulement.

Il est important de se rappeler que le processus de calage d'historique via la minimisation d'une fonction objectif correspond à la résolution d'un problème mal posé, où le nombre de paramètres du modèle est toujours bien plus important que le nombre de données indépendantes dont on dispose pour les contraindre [Tarantola, 2005]. Cela implique notamment qu'il peut ne pas y avoir de solution exacte ou bien qu'il existe potentiellement une infinité de modèles respectant les données. L'obtention d'un unique modèle réservoir calé n'est donc pas toujours satisfaisante. Il est alors possible d'adopter une approche probabiliste pour résoudre le calage d'historique. Le but d'une telle approche est de déterminer le modèle calé le plus probable et la distribution associée [Oliver et al., 2008] [Feraille and Marrel, 2012].

### 1.2.3 Paramétrisation

Comme évoqué dans la partie 1.1, de nombreux paramètres définissent les modèles du réservoir, mais très peu d'entre eux sont directement contraints par les données statiques. Avant de passer à la phase de calage, l'ingénieur doit donc spécifier quelles sont les propriétés du réservoir qu'il souhaite ajuster, et qui constituent les paramètres incertains du problème. L'idée est de choisir des paramètres influençant le comportement dynamique et dont la valeur est incertaine. Le choix des paramètres incertains, leur nombre et la définition de leur intervalle de variation va dépendre du cas d'étude, mais aussi des méthodes de calage d'historique utilisées.

En pratique, un nombre assez restreint de paramètres est souvent considéré afin de limiter la complexité des études et les temps de calculs associés. L'idée est alors de choisir ou définir des paramètres globaux (*e.g.* le volume poreux, la force de l'aquifère) ou des paramètres représentatifs d'un ensemble de mailles (des *patches* ou des couches sur lesquels on applique des coefficients multiplicateurs de porosité, perméabilité, *etc*) afin d'assurer un impact significatif sur le comportement dynamique du réservoir. Des méthodes d'analyse de sensibilité peuvent être envisagées à cette étape afin de sélectionner les paramètres les plus influents (*i.e.* les paramètres dont la perturbation impacte le plus la réponse d'intérêt) tout en écartant les paramètres ayant une influence négligeable.

Lorsque les paramètres incertains sont définis au niveau du modèle réservoir, on parle de calage d'historique traditionnel. Des choix courants de paramètres portent sur les propriétés d'écoulement identiques pour l'ensemble du réservoir (la densité des fluides, les saturations critiques, *etc*) ou sur des ensembles de mailles (multiplicateur de perméabilité/porosité par couche ou autour des puits, *etc*). Cette paramétrisation, dite de zonation, est très répandue car très simple à mettre en oeuvre.

Une paramétrisation au niveau du modèle géologique peut également être envisagée. On parle alors de calage d'historique avancé. Les paramètres choisis peuvent être ceux utilisés par les méthodes géostatistiques générant les réalisations de propriétés pétrophysiques (porosité, perméabilité, *etc*). Des paramètres tels que la moyenne, la portée, la variance d'une propriété pétrophysique ou les nombres aléatoires utilisés pour initier le processus de génération peuvent aussi être considérés. L'intérêt d'une paramétrisation au niveau du modèle géologique est qu'elle rend possible une modification des modèles

tout en continuant à honorer les données statiques, alors que ce n'est généralement pas le cas lorsque la paramétrisation est définie au niveau du modèle réservoir. Cependant, une paramétrisation du modèle géologique implique aussi une mise à l'échelle systématique afin de calculer le modèle réservoir correspondant au modèle géologique modifié, ce qui ajoute un coût supplémentaire en temps de calcul.

## 1.3 Réduction des temps de calcul

La conception de modèles représentatifs du réservoir passe par l'intégration de toutes les données disponibles. Cela nécessite entre autres le calcul de nombreuses simulations d'écoulement lors du calage d'historique. Les modèles calés servent ensuite de point de départ pour la recherche de plans de développement optimisés, ce qui est également coûteux en temps de simulation. Les temps de calculs associés aux simulations d'écoulement apparaissent donc comme une limitation majeure en ingénierie de réservoir. Une solution consiste à remplacer le simulateur d'écoulement par un méta-modèle (section 1.3.1). Un méta-modèle est une fonction rapide à évaluer qui permet d'approcher une sortie d'intérêt, par exemple une sortie du simulateur d'écoulement. Lorsque la sortie d'intérêt peut être simulée pour différents niveaux de fidélité, il est souvent possible d'accélérer la construction des méta-modèles en considérant la méta-modélisation multi-fidélité comme expliqué dans la section 1.3.2.

### 1.3.1 La méta-modélisation

Dans de nombreux domaines, on observe que les codes de calcul pour la modélisation et la simulation intègrent une physique de plus en plus détaillée. En contrepartie, ces codes impliquent de nombreux paramètres à calibrer et sont de plus en plus gourmands en temps de calcul, ce qui rend leur analyse très complexe. Ce type de problématique peut être traité de manière générale comme un problème de type « boîte noire ». L'idée est que le système n'est vu qu'à travers ses entrées et ses sorties (Figure 1.5). Le passage de l'un à l'autre (via le code de calcul) est alors considéré comme un processus inconnu, la boîte noire.

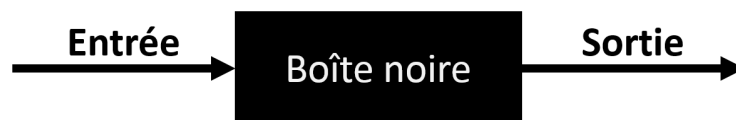


Figure 1.5 : Schéma d'un système « boîte noire ».

Ce type de représentation est souvent adopté pour les codes de calculs complexes, dont les évaluations sont coûteuses en temps de calcul. Appliqué à l'ingénierie de réservoir, l'entrée correspond aux paramètres incertains, la boîte noire fait référence à la simulation d'écoulement et la sortie désigne les réponses en production simulées. De ce point de vue, les problèmes rencontrés en ingénierie de réservoir (analyse de sensibilité, prédiction des données de production, calage d'historique/calibrage du code de calcul, *etc*) sont similaires aux problèmes généralement rencontrés lors de l'analyse de codes de calculs longs à évaluer. Une solution spécifiquement adaptée pour traiter ce type de problématique consiste à construire un méta-modèle.

### Principe

Le principe d'un méta-modèle est de remplacer la boîte noire par une approximation mathématique afin d'approcher une sortie donnée, la réponse d'intérêt [Sacks et al., 1989], [Osio and Amon, 1996],

[Kleijnen and Sargent, 2000], [Fang et al., 2006]. On parle de méta-modèle car il est construit en se basant uniquement sur la relation entre entrées et sorties, et ne cherche pas à modéliser les processus intervenant au sein de la boîte noire. Selon les domaines dans lesquels ils sont utilisés, les méta-modèles sont aussi connus sous le nom de modèles *proxy*, surfaces de réponse, modèles de substitution ou encore émulateurs.

Un méta-modèle est construit à partir d'un nombre limité d'évaluations de la boîte noire. L'ensemble des points considérés en entrée pour la construction du méta-modèle est appelé plan d'expériences. Les valeurs en sortie associées à ce plan d'expériences sont appelées observations. L'intérêt du méta-modèle est de pouvoir prédire à moindre coût la valeur de la sortie d'intérêt pour des valeurs en entrée autres que celles du plan d'expériences. Si ces prédictions sont de bonne qualité, le méta-modèle peut ensuite être utilisé pour remplacer les appels à la boîte noire, et ainsi réaliser à coût réduit différentes études.

Il existe différentes méthodes pour construire un méta-modèle. Parmi les plus courantes, on trouve le krigeage, les polynômes, les splines et les réseaux de neurones. La méta-modélisation est un outil couramment utilisé pour l'analyse de problèmes de type boîte noire. Leur utilisation est très répandue dans de nombreux domaines dès lors que des codes de calcul lourds sont impliqués : météorologie, aéronautique, design de surfaces, ingénierie de réservoir...

### Application à l'ingénierie de réservoir

L'ingénierie de réservoir est un domaine d'application possible de la méta-modélisation. Des méta-modèles peuvent être construits pour se substituer aux simulations d'écoulement coûteuses en temps de calcul. Ils peuvent ensuite être utilisés à différentes étapes du processus de calage, notamment lors de :

- l'analyse de sensibilité portant sur les paramètres incertains du modèle,
- la minimisation de la fonction objectif,
- la mise en place d'approches probabilistes.

Leur utilisation peut également intervenir dans un second temps lors de la planification du développement des champs : placement de nouveaux puits, optimisation du planning de production, *etc.*

La méta-modélisation dans le cadre de telles applications a été largement étudiée dans la littérature. En particulier, différentes méthodes de construction des méta-modèles ont été testées. Des polynômes sont considérés dans [Pan and Horne, 1998], [Peng and Gupta, 2004], des splines dans [Li and Friedmann, 2005], des réseaux de neurones dans [Queipo et al., 2000], [Guyaguler et al., 2000], [Cullick et al., 2006] et du krigeage dans [Pan and Horne, 1998], [Guyaguler et al., 2000], [Badru and Kabir, 2003], [Peng and Gupta, 2004], [Scheidt et al., 2007], [Slotte and Smorgrav, 2008], [Osterloh, 2008], [Feraille and Marrel, 2012], [Becerra et al., 2012], [Feraille, 2013], [Douarche et al., 2014]. Une comparaison de ces différentes méthodes appliquées à l'ingénierie de réservoir est également proposée dans [Yeten et al., 2005] et [Zubarev, 2009].

Parmi les différentes approches existantes, le krigeage présente plusieurs avantages pour l'ingénierie de réservoir. Tout d'abord, c'est un interpolateur. Le méta-modèle est donc exact aux points où la fonction est connue, ce qui est une propriété intéressante car les simulations d'écoulement sont déterministes. De plus, cette technique fournit une expression analytique de l'estimateur, ainsi qu'une expression de l'erreur sur l'estimateur. Ces expressions peuvent s'avérer utiles pour certaines applications importantes en ingénierie de réservoir telles que la propagation des incertitudes [Scheidt, 2006] ou l'analyse de sensibilité [Marrel, 2008]. Un défaut souvent relevé pour le krigeage par rapport aux autres méthodes est le temps nécessaire à la construction du modèle. L'amélioration des méthodes

d'estimation des hyper-paramètres a cependant permis de rendre le krigeage plus compétitif sur ce point [Kennedy and O'Hagan, 2000b] [Santner et al., 2003] [Rasmussen and Williams, 2006].

### 1.3.2 La méta-modélisation multi-fidélité

Dans de nombreux cas, il est facile d'obtenir, en un temps de calcul réduit, des évaluations dégradées d'une sortie d'intérêt. En effet, un code de calcul peut souvent être lancé pour différents niveaux de complexité, produisant ainsi plusieurs niveaux de réponses dont la précision varie. En ingénierie de réservoir, différents niveaux de fidélité peuvent facilement être obtenus en faisant varier la résolution des modèles réservoir, en considérant des simulations d'écoulement à physique dégradée, en dégradant les critères de convergence, *etc.*

Différentes techniques ont été proposées pour la création de méta-modèles à partir d'informations de fidélité variable. Elles sont décrites par [Huang et al., 2006] et [Forrester and Keane, 2009]. Parmi elles, les méta-modèles multi-fidélité basés sur le co-krigeage et proposés par [Kennedy and O'Hagan, 2000a] ont été largement étudiés, notamment dans l'aérospatiale [Forrester et al., 2007], [Kuya et al., 2011], [Han et al., 2012].

Le principe d'un méta-modèle multi-fidélité est le suivant. On suppose d'abord que l'on dispose de plusieurs niveaux de résolution sur lesquels on peut évaluer la réponse d'intérêt. Selon le niveau considéré, ces évaluations sont plus ou moins précises et plus ou moins coûteuses en temps de calcul. A partir d'un ensemble de réponses sur les différents niveaux de fidélité, on construit un méta-modèle multi-fidélité approchant le niveau de fidélité le plus précis. En favorisant les évaluations sur les niveaux grossiers, on peut espérer construire un méta-modèle prédictif plus rapidement que via une méta-modélisation basée uniquement sur le niveau le plus fin. Toutefois, cela suppose que les niveaux grossiers apportent suffisamment d'information sur le comportement dynamique au niveau fin.

Le co-krigeage multi-fidélité est une extension du krigeage. De ce point de vue, il présente les mêmes caractéristiques : interpolateur, expression analytique de l'estimateur, estimation de l'erreur sur l'estimateur. En outre, de nombreux résultats sur le krigeage peuvent être appliqués au co-krigeage multi-fidélité. C'est pour cela que celui-ci est très attractif pour des applications en ingénierie de réservoir. Les récents travaux de thèse de [Le Gratiet, 2013b] ont permis d'améliorer le modèle initialement suggéré par [Kennedy and O'Hagan, 2000a]. Ces améliorations permettent notamment une construction rapide et facile d'un modèle de co-krigeage multi-fidélité, en particulier grâce à l'introduction d'une formulation récursive du modèle et d'une méthode rapide d'estimation des hyper-paramètres.

## 1.4 Objectifs et organisation de la thèse

La méta-modélisation, et notamment le krigeage, apparaît comme un outil d'importance grandissante en ingénierie de réservoir. L'efficacité de la méta-modélisation dépend toutefois de la prédictivité obtenue avec le méta-modèle. En pratique, le nombre d'observations et donc de simulations nécessaires pour assurer une bonne qualité du méta-modèle est encore important. L'utilisation de méta-modèles multi-fidélité peut permettre de réduire ce temps, en réduisant le nombre de simulations sur le niveau le plus fin. Une telle solution semble d'autant plus judicieuse qu'il existe diverses manières d'obtenir des niveaux de fidélité dégradés en ingénierie de réservoir via la mise à l'échelle, la simplification de la modélisation, les approximations dans la simulation, *etc.* L'utilisation de méta-modèles multi-fidélité peut ainsi tirer profit des niveaux de fidélité dégradés disponibles afin d'obtenir plus rapidement un méta-modèle prédictif. Le co-krigeage multi-fidélité a déjà été appliqué avec succès dans [Le Ravalec-dupin, 2012] à la construction de cartes de qualité pour le placement de puits. Les différents niveaux de fidélité y sont obtenus par l'utilisation de grilles de résolutions différentes. Les résultats de ce travail

appelaient à être poursuivis afin de mieux appréhender et pouvoir pleinement exploiter le potentiel de la méta-modélisation multi-fidélité en ingénierie de réservoir.

### 1.4.1 Objectifs de la thèse

Dans cette thèse, nous proposons de tester de manière approfondie l'utilisation du co-krigeage multi-fidélité pour la construction de méta-modèles dédiés à des applications en ingénierie de réservoir, approchant les sorties d'intérêt de la simulation d'écoulement et en particulier la fonction objectif.

Les travaux entrepris au cours de cette thèse s'organisent autour de deux objectifs principaux :

1. Comparer co-krigeage multi-fidélité et krigeage pour la méta-modélisation à partir de plans d'expériences de différentes tailles.
2. Améliorer les performances de la méta-modélisation et exploiter le potentiel d'une approche multi-fidélité grâce à la planification séquentielle d'expériences.

Dans un premier temps, l'objectif est donc de déterminer quel est l'apport du co-krigeage multi-fidélité en termes de gain en temps de calcul par rapport au krigeage. Pour cela, une comparaison entre les deux approches a été réalisée sur le cas d'étude PUNQ. Cette comparaison a permis d'identifier dans quelles conditions l'approche multi-fidélité pouvait s'avérer plus pertinente et quels gains en temps pouvaient être espérés. Pour améliorer les performances de la méta-modélisation de sorties vectorielles, une méthode basée sur une réduction de la dimension via l'analyse en composantes principales a été testée en simple fidélité. Puis, une extension à un cadre multi-fidélité a été proposée. Les résultats obtenus ont aussi conduit à la mise en place d'une méthode adaptée à la méta-modélisation de la fonction objectif. Cette méthode vise à tirer profit de la multi-fidélité, mais permet également d'obtenir de meilleurs résultats en simple fidélité.

Dans un second temps, des méthodes de planification séquentielle d'expériences ont été proposées afin d'accélérer la construction de méta-modèles prédictifs dans des cadres simple et multi-fidélité. Ces méthodes de planification séquentielle d'expériences ont été appliquées à l'approximation de la fonction objectif, principalement sur le cas d'étude BRUGGE. Elles sont également adaptées à la méta-modélisation particulière suggérée pour la fonction objectif.

### 1.4.2 Organisation du manuscrit

#### Chapitre 2 : Méthodologies pour la méta-modélisation

Dans ce chapitre, nous présentons les étapes clés de la méta-modélisation : la planification d'expériences, la construction du méta-modèle et l'estimation de sa qualité en termes de prédictivité. Nous détaillons en particulier les approches de méta-modélisation par krigeage et co-krigeage multi-fidélité, ainsi que les méthodes utilisées pour la définition des plans d'expériences fixes dans les deux cas.

#### Chapitre 3 : Modélisation de sorties vectorielles et de la fonction objectif

Dans ce chapitre, nous proposons de construire des méta-modèles de sorties vectorielles. Pour cela, on considère une méthode permettant de réduire leur dimension : l'analyse en composantes principales. L'utilisation combinée de cette dernière avec le krigeage ou le co-krigeage multi-fidélité permet la construction rapide de méta-modèles pour des sorties vectorielles dans un cadre simple fidélité ou multi-fidélité, respectivement. Ces méthodes peuvent notamment être utilisées pour approcher les

différentes sorties dynamiques incluses dans le calcul de la fonction objectif. De cette manière, on obtient une approche vectorielle pour la méta-modélisation de la fonction objectif dont nous présentons les caractéristiques.

### **Chapitre 4 : Cas d'étude PUNQ**

Dans ce chapitre, nous présentons le cas d'application PUNQ, inspiré du cas de référence PUNQ-S3. Le cas PUNQ multi-fidélité est le support d'une étude approfondie comparant krigeage et co-krigeage multi-fidélité pour la méta-modélisation de différentes sorties : scalaires, temporelles, spatiales, et fonction objectif. Les résultats de ces comparaisons mettent en évidence l'intérêt de la méthode proposée pour la méta-modélisation de la fonction objectif, en particulier dans un cadre multi-fidélité. Un exemple d'application est également proposé par la réalisation d'un calage d'historique sur ce cas.

### **Chapitre 5 : Planification séquentielle d'expériences**

Dans ce chapitre, nous proposons des algorithmes de planification séquentielle d'expériences afin de construire rapidement des méta-modèles prédictifs sur l'ensemble de l'espace des paramètres. Des versions adaptées à un cadre simple et multi-fidélité sont détaillées pas à pas. Les algorithmes proposés sont notamment applicables aux méthodes précédemment introduites pour la méta-modélisation de sorties vectorielles et surtout de la fonction objectif. Des versions adaptées au cas où les simulations peuvent être calculées en parallèle sont également proposées.

### **Chapitre 6 : Cas d'étude BRUGGE**

Dans ce chapitre, nous présentons le cas d'étude BRUGGE, inspiré du cas de référence Brugge, ainsi que la version multi-fidélité mise en place. Ce cas est utilisé ici pour tester les différents algorithmes séquentiels proposés pour la planification d'expériences dans des cadres simple fidélité et multi-fidélité. Un exemple d'application est également proposé par la réalisation d'une analyse de sensibilité sur ce cas. Les résultats obtenus soulignent la pertinence des algorithmes proposés ainsi que l'intérêt de la méta-modélisation multi-fidélité en ingénierie de réservoir.

Les chapitres 3 et 4 ont fait l'objet d'une publication : Thenon, A., Gervais, V., Le Ravalec, M., 2016, Multi-fidelity meta-modeling for reservoir engineering - application to history matching, Computational Geosciences, 20(6), 1231-1250, doi:10.1007/s10596-016-9587-y

Un article basé sur les chapitres 5 et 6 est en cours d'écriture:  
Thenon, A., Gervais, V., Le Ravalec, M., Sequential design strategies for multi-fidelity meta-models in reservoir engineering



---

## CHAPITRE 2

# Méthodologies pour la méta-modélisation

La conception d'un méta-modèle fiable nécessite traditionnellement plusieurs étapes clés. Elles sont résumées par le schéma représenté Figure 2.1. Certaines étapes sont complètement dictées par le cas d'application, notamment la définition des paramètres incertains, le choix de la réponse d'intérêt, la manière de l'évaluer ou encore l'utilisation qui est faite du méta-modèle. A l'inverse, la planification d'expériences, la construction du méta-modèle et sa validation sont des étapes génériques. Différentes méthodologies sont disponibles pour la réalisation de chacune d'entre elles. On se propose dans ce chapitre de décrire les méthodes utilisées pour ces étapes génériques dans le cadre de cette thèse, et en particulier les spécificités liées à la multi-fidélité.

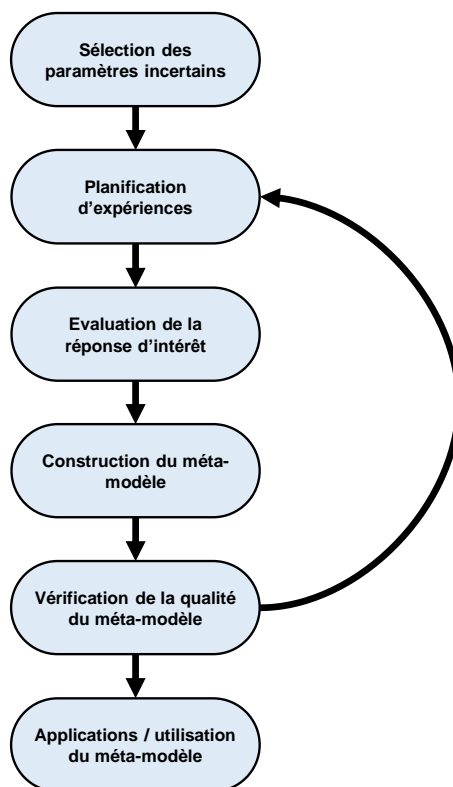


Figure 2.1 : Schéma traditionnel d'un workflow basé sur la méta-modélisation.

Tout d'abord, la planification d'expériences et ses enjeux sont brièvement introduits dans la partie 2.1. Dans un cadre classique de simple fidélité, les méthodes utilisées sont l'échantillonnage par hypercube latin pour la définition du plan d'expériences et le krigeage pour la construction du méta-modèle. Ces méthodes sont détaillées dans la partie 2.2. Celles utilisées dans un cadre multi-fidélité sont ensuite



décrites au sein de la partie 2.3. Il s'agit de l'échantillonnage par hypercubes latins imbriqués et du co-krigeage multi-fidélité. Finalement, l'estimation de la qualité des méta-modèles obtenus fait l'objet de la partie 2.4.

## 2.1 Introduction à la planification d'expériences

La planification d'expériences est un élément incontournable de la méta-modélisation. Elle consiste à choisir des points dans l'espace des paramètres où évaluer la réponse d'intérêt. L'ensemble des points d'expériences sélectionnés forme le plan d'expériences. La réponse d'intérêt est ensuite évaluée (*i.e.* simulée) pour chacun de ces points, formant l'ensemble des observations. Le plan d'expériences et ses observations sont les seules informations nécessaires à la construction d'un méta-modèle. La définition du plan d'expériences a donc un très fort impact sur la qualité du méta-modèle. De très nombreuses méthodes ont été proposées dans la littérature pour définir un plan d'expériences, notamment dans le cadre de la construction d'un méta-modèle. Ces méthodes sont largement détaillées dans les livres de [Koehler and Owen, 1996], [Fang et al., 2006] ou encore [Kleijnen, 2008].

Dans cette thèse, nous nous intéressons à la conception de méta-modèles prédictifs pour l'ensemble de l'espace sur lesquels ils sont définis. Pour cela, on considère des plans d'expériences exploratoires, pour lesquels les points d'expériences sont bien répartis dans l'espace. Certains plans d'expériences exploratoires, parmi les plus classiques, sont présentés ci-dessous. Pour la suite, on note  $d$  la dimension de l'espace des paramètres et  $n$  la taille du plan d'expériences, autrement dit le nombre d'expériences associées à ce plan. L'intervalle de variation des différents paramètres incertains est normalisé entre 0 et 1.

### Plan d'expériences standard

Un premier type de plan d'expériences, dit standard ou tabulé, peut être considéré lorsque l'espace des paramètres est discrétisé de manière régulière. Chaque paramètre peut alors prendre  $k$  valeurs différentes, appelées facteurs. Dans ce cas, le plan d'expériences le plus intuitif est probablement le plan factoriel. Il consiste simplement à considérer un point d'expérience à chaque noeud du découpage ainsi obtenu. Un tel plan remplit relativement bien l'espace si un nombre de facteurs suffisant est considéré, mais peut également conduire à un nombre d'évaluations  $n = k^d$  très important. Lorsque les simulations réalisées pour chacun des points du plan correspondent à des codes de calcul coûteux, le nombre  $n$  ne doit pas être trop important. Il faut donc que le nombre de facteurs reste faible ( $k = 2$  ou  $3$ ).

De nombreux autres plans standards sont décrits dans la littérature, tels ceux introduits par [Box and Behnken, 1960], [Plackett and Burman, 1946] ou encore [Doehlert, 1970]. Une représentation en dimension 3 est donnée en exemple pour certains de ces plans avec la Figure 2.2. Les plans d'expériences standards sont souvent proposés dans les logiciels pour la construction de méta-modèles. En effet, ils ont l'avantage d'être simples à calculer et faciles à appréhender pour l'utilisateur. Toutefois, ils sont peu adaptés à la méta-modélisation car ils n'offrent pas une grande flexibilité dans le choix du nombre d'expériences  $n$ . De plus, comme pour les plans factoriels,  $n$  est généralement important lorsque la dimension  $d$  est élevée.

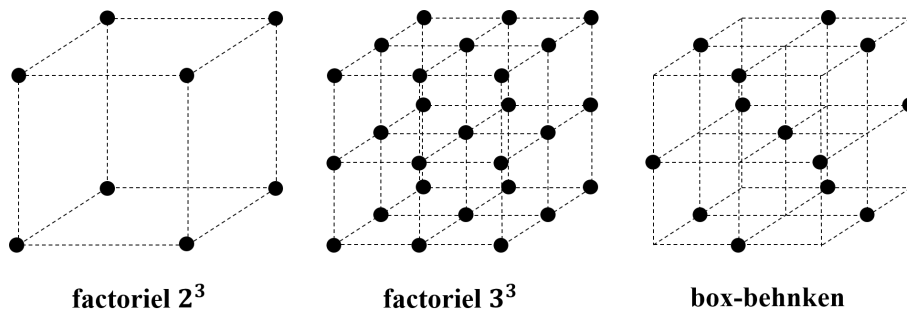


Figure 2.2 : Exemples de plan d'expériences standards représentés en dimension 3. A gauche et au centre, les plans factoriels considèrent un point d'expérience pour chacun des noeuds du découpage de l'espace. A droite, le plan de box-behnken définit des points d'expériences sur une partie des noeuds associés au découpage factoriel avec  $k = 3$ .

### Plan *space-filling*

Considérons maintenant l'espace des paramètres comme continu. Les plans d'expériences *space-filling* désignent des plans d'expériences exploratoires particulièrement adaptés à la méta-modélisation [Pronzato and Müller, 2012]. Ce sont des plans pour lesquels le placement des points d'expériences est optimisé selon un critère géométrique ou statistique. L'optimisation est aussi dépendante du nombre d'expériences  $n$  et de la dimension  $d$  considérés.

Un critère géométrique couramment utilisé consiste à maximiser la distance minimale entre les différents points du plan d'expériences. On parle alors de critère « maximin » [Johnson et al., 1990]. Un autre critère cherche à minimiser la distance maximale entre les points du plan et les points de l'espace. En d'autres termes, quel que soit le point de l'espace considéré, il faut que la distance entre ce point et le point du plan le plus proche soit aussi petite que possible. Il s'agit du critère « minmax » [Johnson et al., 1990]. La Figure 2.3 donne des exemples de plans construits à partir de ces deux critères géométriques. Un inconvénient de ces plans est qu'ils peuvent être coûteux à construire, en particulier en grande dimension.

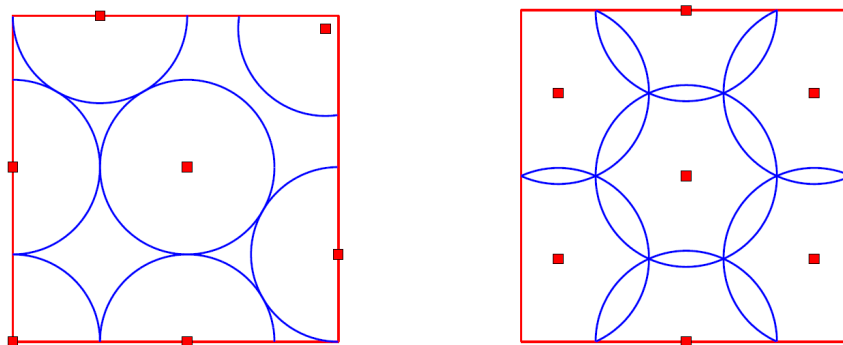


Figure 2.3 : Exemples de plan d'expériences de 7 points en dimension 2 construits selon les critères maximin (gauche) et minmax (droite). Source: [Pronzato and Müller, 2012] d'après <http://www.packomania.com/> et [Johnson et al., 1990].

Les critères statistiques employés sont généralement basés sur la discrédance [Fang, 2000]. Dans ce contexte, la discrédance désigne une mesure de l'écart entre la répartition des points du plan et une répartition uniforme. Elle peut se mesurer en comptant le nombre de points se trouvant à l'intérieur d'un volume défini par des intervalles de l'espace. Ainsi, plus la discrédance est faible, plus le nombre de points dans le volume tend à rester constant, quel que soit l'emplacement du volume dans l'espace.

Des plans d'expériences minimisant la discrédance peuvent être construits grâce à des suites à faible discrédance telles que les suites de [Sobol', 1967] ou [Halton, 1960]. On parle aussi de suites quasi aléatoires. Elles ont pour propriété de minimiser la discrédance lorsqu'elles tendent vers l'infini. Elles permettent ainsi de remplir l'espace de manière très régulière. Une comparaison entre un plan obtenu par tirage aléatoire (*i.e.* un plan non *space-filling*) et un plan obtenu par l'utilisation d'une suite de Sobol' est proposée sur la Figure 2.4. Les suites à faible discrédance sont fréquemment utilisées au sein de méthodes de Monte Carlo pour le calcul numérique d'intégrales.

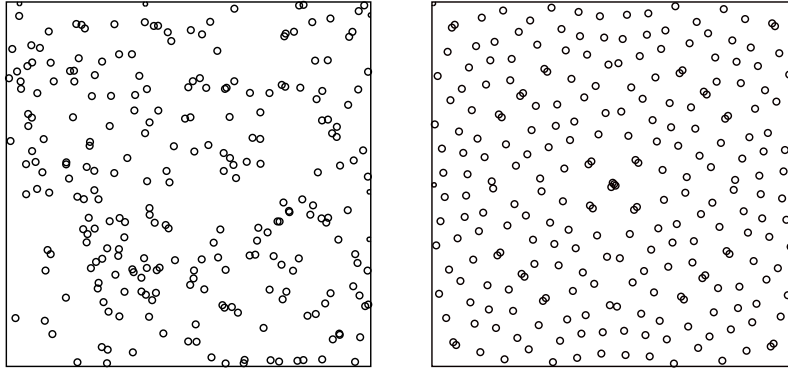


Figure 2.4 : A gauche, un plan d'expériences obtenu par tirage aléatoire. Le plan comporte de nombreux espaces vides et amas de points. A droite, un plan d'expériences issu d'une suite de Sobol'. La répartition des points est très régulière. Source : [https://en.wikipedia.org/wiki/Sobol\\_sequence](https://en.wikipedia.org/wiki/Sobol_sequence), modifiée.

Une autre classe importante de plan d'expériences *space-filling* est obtenue par l'utilisation de l'échantillonnage par hypercube latin [Mckay et al., 1979]. C'est cette dernière méthode que nous utilisons dans cette thèse. Elle est décrite au sein de la section 2.2.1.

Pour plus de détails sur les différents plans d'expériences *space-filling* et leurs propriétés, le lecteur peut se référer à [Pronzato and Müller, 2012].

## 2.2 Méta-modélisation dans un cadre simple fidélité

Cette partie décrit les méthodes considérées dans cette thèse pour construire un méta-modèle dans un cadre simple fidélité. Ce cadre, le plus classique, signifie que la réponse d'intérêt n'est évaluée que sur un unique niveau de précision. Dans ce contexte, nous utilisons pour la planification d'expériences l'échantillonnage par hypercube latin décrit dans la section 2.2.1. Les méta-modèles sont ensuite construits selon la technique du krigeage dont la formulation est décrite dans la section 2.2.2.

### 2.2.1 Echantillonnage par hypercube latin

Les plans d'expériences considérés dans les différentes études réalisées ici sont issus d'un échantillonnage par hypercube latin, ou LHS pour *Latin Hypercube Sampling*. Cette technique, introduite en 1979 par [Mckay et al., 1979], est devenue populaire en ingénierie notamment après son utilisation par [Sacks et al., 1989] pour la planification et l'analyse d'expériences. Elle est l'une des approches les plus populaires pour la construction de plans d'expériences dans un cadre de méta-modélisation.

## Principe

Une grille carrée est un carré latin si et seulement si elle possède un unique échantillon par colonne et par ligne. Un hypercube latin est la généralisation de ce concept à un nombre de dimensions quelconque. On considère que l'intervalle de variation des différents paramètres incertains est normalisé entre 0 et 1. Pour construire un LHS de  $n$  points en dimension  $d$ , chaque dimension est divisée de manière régulière en  $n$  intervalles :  $[0, 1/n]$ ,  $[1/n, 2/n]$ , ...,  $[(n-1)/n, 1]$ . Ces intervalles définissent des strates. Les points du plan d'expériences sont ensuite tirés aléatoirement de manière à ce que chaque strate ne comporte qu'un seul point. Des exemples de LHS en dimension 2 sont donnés sur la Figure 2.5.

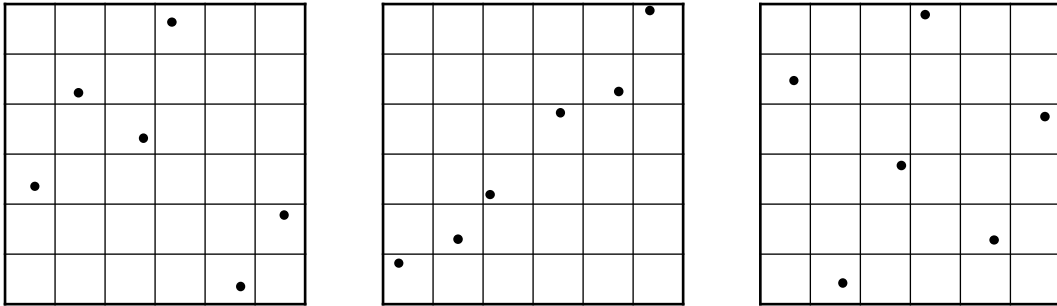


Figure 2.5 : Exemples de LHS à 6 points en dimension 2. Un point d'expérience au sein d'un LHS est tiré aléatoirement de manière à n'apparaître qu'une seule fois par strate (ou ligne/colonne en dimension 2). Un LHS ne remplit pas nécessairement l'espace de manière uniforme.

L'utilisation d'un LHS présente plusieurs avantages pour l'ingénieur. C'est un plan d'expériences pratique car il permet le choix du nombre désiré d'expériences, il est rapide à construire, et il se comporte bien en sous-projection. En particulier, lors d'une projection unidimensionnelle, les points sont bien répartis dans l'espace car par définition, il y a un point par strate. Par ailleurs, la construction du plan garantit aussi que deux points d'expériences ne peuvent pas se superposer lors d'une projection vers des sous-espaces de faibles dimensions. Ces dernières remarques sont importantes car elles signifient que si certains paramètres s'avèrent finalement non influents sur la réponse d'intérêt, alors la projection du LHS dans les dimensions restantes peut constituer un plan d'expériences toujours pertinent pour la construction d'un méta-modèle.

## LHS optimisé

Un LHS ne définit pas en lui-même un plan d'expériences de type *space-filling*. En effet, il existe une infinité de LHS possibles pour  $n$  et  $d$  fixés. Tous ne sont pas de bons plans d'expériences, à l'image de l'exemple central de la Figure 2.5, qui laisse de très larges parties de l'espace inexploitées. Il est cependant possible de construire des LHS optimisés selon l'un des critères géométrique ou statistique présentés dans la partie 2.1. De tels LHS sont alors des plans d'expériences *space-filling* bien adaptés à la méta-modélisation.

Dans nos différentes études, nous utilisons exclusivement des LHS optimisés selon le critère maximin (maximisation de la distance minimale entre les points du plan d'expériences). Un exemple de tel LHS est donné par la Figure 2.6. Le LHS maximin a été introduit par [Morris and Mitchell, 1995] qui montrent la pertinence d'un tel plan d'expériences pour la construction de méta-modèles prédictifs par krigeage.

On remarque que la construction d'un LHS optimisé n'est pas nécessairement coûteuse en temps de calcul. Une méthode rapide pour construire un LHS optimisé consiste à générer un grand nombre de LHS, puis à sélectionner celui qui respecte le mieux le critère choisi. Par la suite, nous utiliserons

la fonction `maximinLHS` du package R `lhs` [Carnell, 2012], et le terme LHS désignera un LHS optimisé selon le critère maximin.

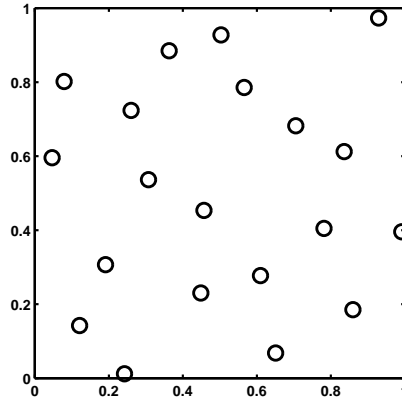


Figure 2.6 : Un LHS de 20 points en dimension 2 optimisé selon le critère maximin.

## 2.2.2 Méta-modèle de krigeage

Nous proposons dans cette section une description du krigeage inspirée notamment par les ouvrages de [Cressie, 1993], [Stein, 1999], [Santner et al., 2003] et [Rasmussen and Williams, 2006]. Le lecteur est invité à s’y référer pour plus de précisions.

### Introduction

Le krigeage est une technique géostatistique qui permet d’interpoler la valeur d’une réponse à une position où elle n’est pas connue, à partir d’observations existantes de cette réponse. La théorie du krigeage a été formalisée par le mathématicien [Matheron, 1963]. Il s’est lui-même inspiré des travaux de [Krige, 1951], un ingénieur minier sud-africain qui a mis au point une méthode empirique d’estimation des teneurs en or.

Le krigeage est par la suite devenu une méthode classique pour la construction de méta-modèles, trouvant ainsi des applications dans de nombreux domaines, notamment les codes de calcul. Il est alors utilisé pour prédire la valeur d’une fonction, dont les évaluations sont coûteuses en temps de calcul, à partir des évaluations existantes de celle-ci. Cette méthode est également connue sous le nom de régression par processus Gaussien.

Soit une fonction  $y(\mathbf{x})$  avec  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$  et  $\mathbf{y}$  un vecteur de  $n$  valeurs observées de  $y(\mathbf{x})$  sur  $\mathbf{D} = \{\mathbf{x}_1; \dots; \mathbf{x}_n\}$ , un plan d’expériences de dimension  $n \times d$ . On suppose alors que  $y(\mathbf{x})$  est la réalisation d’un processus Gaussien  $Y(\mathbf{x})$  de la forme suivante [Cressie, 1993] :

$$Y(\mathbf{x}) = h(\mathbf{x}) + Z(\mathbf{x}) + \epsilon(\mathbf{x}) \quad (2.1)$$

avec  $h(\mathbf{x})$  une fonction qui approche la réponse moyenne de  $Y(\mathbf{x})$ ,  $Z(\mathbf{x})$  un terme représentant l’écart à la réponse moyenne et  $\epsilon(\mathbf{x})$  un terme correspondant au bruit sur la réponse.  $Z(\mathbf{x})$  est modélisé par un processus Gaussien de moyenne nulle et de fonction de covariance  $K(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$  telle que  $K(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \text{Cov}(Z(\mathbf{x}), Z(\mathbf{x}')) = \sigma^2 R(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$  avec  $\sigma^2$  la variance du processus et  $R(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$  sa fonction de corrélation.  $\epsilon(\mathbf{x})$  peut être modélisé par un processus Gaussien de moyenne nulle et indépendant de  $Z(\mathbf{x})$ .

### La fonction de covariance

Afin d'obtenir le meilleur modèle possible, il est nécessaire que le comportement local de la fonction de covariance puisse refléter le comportement local de la réponse que l'on cherche à modéliser. Le choix de la fonction de covariance est ainsi un élément important du krigeage. De nombreuses fonctions de covariance sont proposées dans la littérature. Parmi elles, les plus communément utilisées sont les fonctions de covariance Matérn, Gaussienne, exponentielle ou encore sphérique. Une description de ces différentes fonctions ainsi que de leurs avantages et limites peut être trouvée dans [Chilès and Delfiner, 1999] ou [Rasmussen and Williams, 2006].

Les fonctions de covariance  $K(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$  peuvent souvent être exprimées comme un produit de fonctions de covariance monodimensionnelles  $k_j$ :

$$K(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \sigma^2 \prod_{j=1}^d k_j(x_j, x'_j) \quad (2.2)$$

Dans notre étude, nous avons choisi d'utiliser des fonctions de covariance Matérn [Matérn, 1986]. L'utilisation de ces dernières est notamment recommandée par [Stein, 1999] car elles permettent une grande flexibilité. Plus précisément, nous utilisons Matérn 5/2 qui s'écrit de la manière suivante :

$$k_j(x_j, x'_j) = \left( 1 + \frac{\sqrt{5}|x_j - x'_j|}{\lambda_j} + \frac{5(x_j - x'_j)^2}{3\lambda_j^2} \right) \exp\left(-\frac{\sqrt{5}|x_j - x'_j|}{\lambda_j}\right) \quad (2.3)$$

Les paramètres de la fonction de covariance  $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_d)$  et  $\sigma^2$  sont également appelés hyper-paramètres afin de souligner qu'ils sont les paramètres d'un modèle qui n'est pas paramétrique. Ils doivent donc être estimés.  $\sigma^2$  est un hyper-paramètre associé à la variance, il contrôle l'amplitude de variation du processus Gaussien. Similairement,  $\boldsymbol{\lambda}$  est un vecteur d'hyper-paramètres qui peuvent être vus comme des longueurs de corrélation dans chacune des dimensions de l'espace, c'est-à-dire des distances limites en dessous desquelles les observations sont corrélées.

### Formulation du krigeage

On se place dans les conditions du krigeage simple en supposant que la réponse moyenne est nulle (*i.e.*  $h(\mathbf{x}) = 0$ ) et qu'elle n'est pas bruitée ( $\epsilon(\mathbf{x}) = 0$ ).

Sachant la forme de la fonction de covariance  $K$  et les observations  $\mathbf{y}$ , le processus Gaussien  $Y(\mathbf{x})$ , conditionné aux données  $\mathbf{y}$ , a pour moyenne  $y(\mathbf{x})$  et variance  $s^2(\mathbf{x})$  définies par :

$$y(\mathbf{x}) = \mathbf{r}^\top(\mathbf{x})\mathbf{R}^{-1}\mathbf{y} \quad (2.4)$$

et

$$s^2(\mathbf{x}) = \sigma^2 \left( 1 - \mathbf{r}^\top(\mathbf{x})\mathbf{R}^{-1}\mathbf{r}(\mathbf{x}) \right) \quad (2.5)$$

avec  $R$  la matrice de corrélation de  $\mathbf{D}$  et  $\mathbf{r}(\mathbf{x}) = [R(\mathbf{x}, \mathbf{x}_1), \dots, R(\mathbf{x}, \mathbf{x}_n)]^\top$  le vecteur de corrélation entre  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{D}$ . On remarque que pour pouvoir calculer  $y(\mathbf{x})$  et  $s^2(\mathbf{x})$ , il faut encore estimer les hyper-paramètres de la fonction de covariance  $K$ .

$y(\mathbf{x})$  et  $s^2(\mathbf{x})$  sont communément appelés l'estimateur de krigeage et la variance de krigeage. La

variance de krigeage peut être vue comme l'erreur quadratique moyenne de l'estimateur de krigeage, on la note aussi MSE (*Mean Squared Error*). Cette estimation de l'erreur est valable seulement si la réponse approchée est bien la réalisation d'un processus Gaussien. En pratique, ce n'est jamais le cas pour nos applications. Ainsi, cette dénomination peut être trompeuse car elle ne représente pas l'erreur réelle du modèle. En revanche, elle peut être vue comme une mesure de distance entre le point  $\mathbf{x}$  et les points de  $\mathbf{D}$ . On note également que son expression ne dépend pas des observations  $\mathbf{y}$ .

On se place maintenant dans le cas où la réponse moyenne n'est pas nulle. On cherche à la modéliser par une fonction polynomiale de forme donnée :

$$h(\mathbf{x}) = \mathbf{h}^\top(\mathbf{x})\boldsymbol{\beta} = \sum_{j=1}^k h_j(\mathbf{x})\beta_j \quad (2.6)$$

avec  $\mathbf{h}^\top = (h_1(\cdot), \dots, h_k(\cdot))$  une fonction de régression polynomiale qui doit être définie au préalable et  $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_k)^\top$  les coefficients de régression associés qui doivent être estimés. Dans ce cas, on parle de krigeage universel.

On peut alors montrer que la moyenne de krigeage  $y(\mathbf{x})$  et la variance de krigeage  $s^2(\mathbf{x})$  s'expriment de la manière suivante :

$$y(\mathbf{x}) = \mathbf{h}^\top(\mathbf{x})\boldsymbol{\beta} + \mathbf{r}^\top(\mathbf{x})\mathbf{R}^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{H}\boldsymbol{\beta}) \quad (2.7)$$

et

$$s^2(\mathbf{x}) = \sigma^2 \left( 1 - \mathbf{r}^\top(\mathbf{x})\mathbf{R}^{-1}\mathbf{r}(\mathbf{x}) + Q \right) \quad (2.8)$$

avec  $\mathbf{H}$  la matrice correspondant aux valeurs de  $\mathbf{h}^\top(\mathbf{D})$  et  $Q$  un terme additionnel de variance lié à l'estimation des paramètres de la réponse moyenne. Son expression est obtenue par maximisation de la vraisemblance :  $Q = \left( \mathbf{h}(\mathbf{x}) - \mathbf{H}^\top\mathbf{R}^{-1}\mathbf{r}(\mathbf{x}) \right)^\top \left( \mathbf{H}^\top\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H} \right)^{-1} \left( \mathbf{h}(\mathbf{x}) - \mathbf{H}^\top\mathbf{R}^{-1}\mathbf{r}(\mathbf{x}) \right)$ .

### Estimation des hyper-paramètres

Les hyper-paramètres qui doivent être estimés pour caractériser le méta-modèle sont les longueurs de corrélation  $\boldsymbol{\lambda}$ , la variance  $\sigma^2$  et les coefficients de régression  $\boldsymbol{\beta}$ . Leurs estimateurs, respectivement notés  $\hat{\boldsymbol{\lambda}}$ ,  $\hat{\sigma}^2$  et  $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ , sont généralement calculés par maximisation de la fonction de vraisemblance ou MLE (*Maximum Likelihood Estimate*) [Mardia and Marshall, 1984]. En supposant que  $Y(\mathbf{D})$  suit une loi normale multidimensionnelle, le logarithme de la fonction de vraisemblance  $L$  associée prend l'expression suivante en ignorant les termes constants [Santner et al., 2003] :

$$\log \left( L(\mathbf{y}|\boldsymbol{\beta}, \sigma^2, \boldsymbol{\lambda}) \right) = -\frac{1}{2} \left( n \log \sigma^2 + \log (\det(\mathbf{R})) + \frac{(\mathbf{y} - \mathbf{H}\boldsymbol{\beta})^\top \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{y} - \mathbf{H}\boldsymbol{\beta})}{\sigma^2} \right) \quad (2.9)$$

Si on fixe  $\boldsymbol{\lambda}$ , les estimations de  $\boldsymbol{\beta}$  et  $\sigma^2$  par maximisation de la vraisemblance sont données par :

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = \hat{\boldsymbol{\beta}}(\boldsymbol{\lambda}) = \left( \mathbf{H}^\top\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H} \right)^{-1} \mathbf{H}^\top\mathbf{R}^{-1}\mathbf{y} \quad (2.10)$$

et

$$\hat{\sigma}^2 = \hat{\sigma}^2(\boldsymbol{\lambda}) = \frac{1}{n} \left( \mathbf{y} - \mathbf{H}\hat{\boldsymbol{\beta}} \right)^\top \mathbf{R}^{-1} \left( \mathbf{y} - \mathbf{H}\hat{\boldsymbol{\beta}} \right) \quad (2.11)$$

En remplaçant  $\boldsymbol{\beta}$  et  $\sigma^2$  par leurs estimateurs dans l'équation 2.9, on trouve l'expression suivante

pour le logarithme de la fonction de vraisemblance :

$$\log(L(\boldsymbol{\lambda})) = -\frac{1}{2} \left( n \log \hat{\sigma}^2 + \log(\det(\mathbf{R})) + n \right) \quad (2.12)$$

Cette dernière expression dépend uniquement de  $\boldsymbol{\lambda}$ . L'estimation par maximum de vraisemblance de  $\boldsymbol{\lambda}$  est alors obtenue en minimisant  $n \log \hat{\sigma}^2 + \log(\det(\mathbf{R}))$ .

Par la suite, nous construisons les méta-modèles de krigeage en utilisant le package R **DiceKriging** [Roustant et al., 2012].

## 2.3 Méta-modélisation dans un cadre multi-fidélité

Un cadre multi-fidélité signifie ici que la réponse d'intérêt est disponible à différents niveaux de précision. Ces différents niveaux de réponses peuvent alors être mis à profit lors de la méta-modélisation. Pour cela, le workflow résumant la conception d'un méta-modèle en simple fidélité (Figure 2.1) doit être adapté à la multi-fidélité. Dans un contexte d'une multi-fidélité à deux niveaux, le workflow peut ainsi être résumé par le schéma de la Figure 2.7. En particulier, les méthodes concernant la planification d'expériences ainsi que la construction du méta-modèle doivent être modifiées.

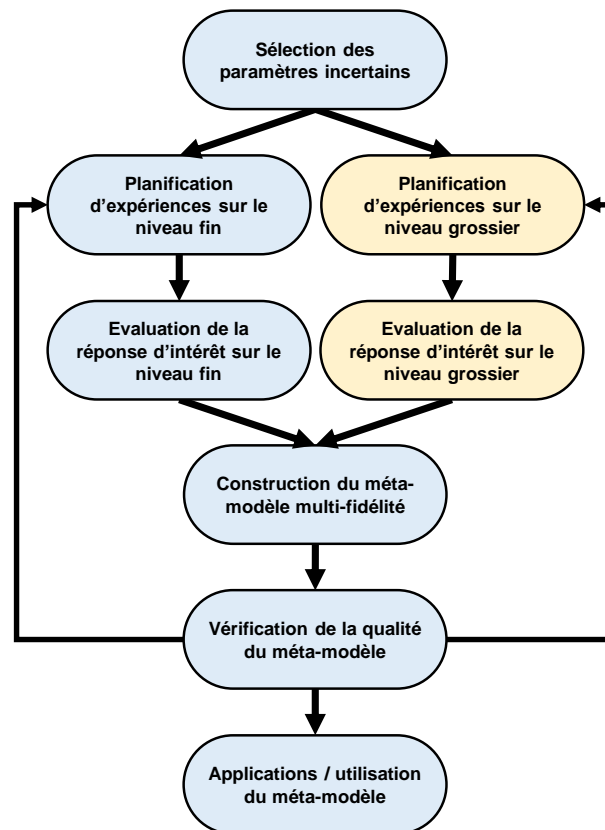


Figure 2.7 : Schéma d'un workflow basé sur la méta-modélisation dans un cadre multi-fidélité à deux niveaux.

La planification d'expériences doit notamment définir le niveau de fidélité sur lequel le point d'expérience doit être évalué. Nous utilisons pour cela l'échantillonnage par hypercubes latins imbriqués, tel que décrit dans la section 2.3.1. Le co-krigeage multi-fidélité est ensuite considéré pour la construc-



tion des méta-modèles (section 2.3.2). Il s'agit d'une extension du formalisme du krigeage permettant d'utiliser les observations obtenues à différents niveaux de résolution.

### 2.3.1 Echantillonnage par hypercubes latins imbriqués

Dans le cadre d'une approche multi-fidélité, la construction du plan d'expériences doit préciser pour chaque point le niveau de fidélité sur lequel la réponse  $y$  est évaluée. Il faut donc définir un plan d'expériences pour chaque niveau de fidélité considéré. On se place dans un cadre de multi-fidélité à deux niveaux, et on note  $\mathbf{D}_f$  le plan d'expériences pour le niveau fin et  $\mathbf{D}_g$  celui pour le niveau grossier. Il est possible d'utiliser des LHS de différentes tailles pour générer  $\mathbf{D}_f$  et  $\mathbf{D}_g$  et ainsi obtenir le plan d'expériences multi-fidélité de la taille souhaitée.

Pour la construction d'un méta-modèle par co-krigeage multi-fidélité, il est nécessaire d'avoir un plan d'expériences imbriqué, c'est-à-dire un plan d'expériences pour lequel les points sur les niveaux les plus fins sont aussi dans les plans d'expériences associés aux niveaux plus grossiers. Pour deux niveaux de fidélité, cela signifie que  $\mathbf{D}_f \subset \mathbf{D}_g$ .

On propose ici d'utiliser des LHS imbriqués selon le processus d'imbrication proposé dans [Le Gratiet and Garnier, 2014]. Ce dernier, illustré par la Figure 2.8, comprend les étapes suivantes :

1. Création d'un LHS pour le niveau fin (LHS fin).
2. Génération d'un ensemble de  $k$  LHS pour le niveau grossier (LHS grossiers).
3. Pour chacun de ces  $k$  LHS grossiers :
  - on cherche le point le plus proche de chaque point du LHS fin,
  - on calcule la distance séparant ces deux points et on somme les distances obtenues pour chaque couple de points afin de définir une mesure associée au LHS grossier.
4. On sélectionne le LHS grossier associé à la plus petite mesure.
5. Dans ce LHS, on remplace les points identifiés par les points du niveau fin correspondant. On obtient alors un LHS grossier modifié qui, avec le LHS fin calculé en 1, forme un couple de LHS imbriqués.

On note qu'une grande valeur de  $k$  permet de sélectionner un LHS grossier pour lequel de plus faibles modifications sont nécessaires. Ce LHS, une fois modifié, sera alors plus proche du LHS optimisé initial, et le LHS imbriqué correspondant sera donc de meilleure qualité. Par la suite, tous les LHS imbriqués utilisés sont construits avec  $k = 1000$ .

On remarque que cette procédure d'imbrication peut être appliquée de manière récursive afin de construire des LHS imbriqués pour un nombre quelconque de niveaux de fidélité. Pour cela, il suffit de l'appliquer en prenant le LHS grossier modifié obtenu lors de l'imbrication précédente comme nouveau LHS « fin ».

Comme les LHS, les LHS imbriqués sont très pratiques d'utilisation. Ils sont rapides à construire et permettent le choix au préalable du nombre de points d'expériences pour chacun des niveaux de fidélité considérés.

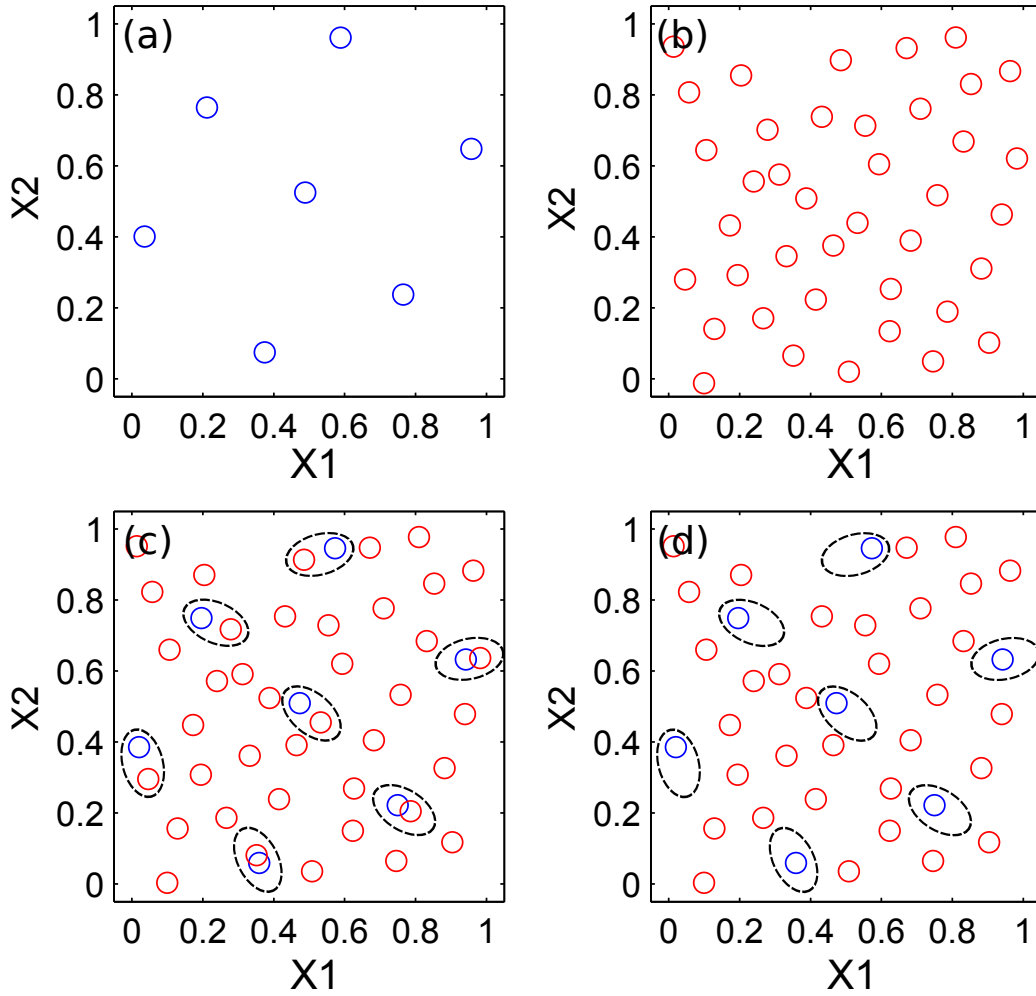


Figure 2.8 : Procédure d'imbrication de LHS pour deux niveaux de fidélité. (a) LHS fin, (b) LHS grossier, (c) on sélectionne les points grossiers les plus proches des points fins, (d) LHS grossier modifié résultant.

### 2.3.2 Méta-modèle de co-krigeage multi-fidélité

En pratique, un code de calcul peut souvent être lancé pour des niveaux de complexité différente. Différents niveaux de fidélité, correspondant à une modélisation plus ou moins fine de la réponse d'intérêt, peuvent ainsi être obtenus. L'idée est alors d'utiliser ces différents niveaux d'information au sein d'un méta-modèle pour approcher la réponse d'intérêt sur le niveau le plus fin, tout en réduisant les temps de calcul. L'approche multi-fidélité vise en effet à remplacer des évaluations sur le niveau de référence qui sont coûteuses en temps de calcul par des évaluations sur des niveaux plus rapides à évaluer. Un tel méta-modèle multi-fidélité peut être construit en adaptant le formalisme du krigeage à des systèmes multi-fidélité : on parle alors de co-krigeage multi-fidélité [Kennedy and O'Hagan, 2000a].

Le modèle auto-régressif proposé par [Kennedy and O'Hagan, 2000a] permet l'intégration d'un nombre quelconque  $s$  de niveaux de fidélité. Par souci de simplicité, nous considérons ici le cas où  $s = 2$ . Nous avons donc deux niveaux de fidélité que nous repérons par les indices  $f$  et  $g$ , pour le niveau fin et le niveau grossier, respectivement. Le niveau fin est le niveau de référence sur lequel on souhaite approcher la fonction d'intérêt : on a donc  $y_f = y$ . Sur le niveau grossier,  $y_g$  correspond à une réponse dégradée de la fonction d'intérêt.

On note  $\mathbf{y}_f = y_f(\mathbf{D}_f)$  un vecteur de  $n_f$  valeurs observées de  $y$  sur le niveau fin aux points  $\mathbf{D}_f =$

$\{\mathbf{x}_1; \dots; \mathbf{x}_{n_f}\}$ , et  $\mathbf{y}_g = y_g(\mathbf{D}_g)$  un vecteur de  $n_g$  valeurs observées sur le niveau grossier aux points  $\mathbf{D}_g = \{\mathbf{x}_1; \dots; \mathbf{x}_{n_g}\}$ . On choisit un plan d'expériences imbriqué, ainsi  $\mathbf{D}_f$  et  $\mathbf{D}_g$  respectent  $\mathbf{D}_f \subset \mathbf{D}_g$  et  $n_g > n_f$ . Il est nécessaire que le plan d'expériences soit imbriqué pour pouvoir construire un méta-modèle de co-krigeage multi-fidélité. Toutefois, lorsque ce n'est pas le cas, il est toujours possible de se ramener à un plan imbriqué en estimant la réponse d'intérêt aux points d'imbrication par krigeage sur le niveau grossier.

Pour la formulation du co-krigeage multi-fidélité, on note  $\mathbf{D}$  l'ensemble des points d'observation de nos réponses pour les deux niveaux et  $\mathbf{y}$  le vecteur rassemblant ces observations :

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \mathbf{D}_g \\ \mathbf{D}_f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{x}_{n_g} \\ \mathbf{x}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{x}_{n_f} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_g(\mathbf{D}_g) \\ y_f(\mathbf{D}_f) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_g(\mathbf{x}_1) \\ \vdots \\ y_g(\mathbf{x}_{n_g}) \\ y_f(\mathbf{x}_1) \\ \vdots \\ y_f(\mathbf{x}_{n_f}) \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

Afin d'utiliser les données issues du niveau grossier, on formule un système qui va permettre d'intégrer la différence entre nos réponses aux niveaux fin et grossier. Plus précisément, on approche la réponse au niveau fin par un processus Gaussien  $Y_f(\cdot)$  défini selon la combinaison linéaire suivante :

$$Y_f(\mathbf{x}) = \rho Y_g(\mathbf{x}) + Y_d(\mathbf{x}) \quad (2.14)$$

où  $\rho$  est un facteur d'échelle et  $Y_d(\cdot)$  un processus Gaussien représentant la différence entre  $\rho Y_g(\cdot)$  et  $Y_f(\cdot)$ .

Ce modèle auto-régressif est en réalité déduit de la propriété de Markov introduite par [Kennedy and O'Hagan, 2000a]:

$$\text{Cov}(Y_f(\mathbf{x}), Y_g(\mathbf{x}') | Y_g(\mathbf{x})) = 0 \quad \forall \mathbf{x} \neq \mathbf{x}' \quad (2.15)$$

Cette relation implique que si  $Y_g(\mathbf{x})$  est connu, alors aucune nouvelle évaluation de  $Y_g(\mathbf{x}')$  en  $\mathbf{x}' \neq \mathbf{x}$  n'apporte d'information complémentaire sur  $Y_f(\mathbf{x})$ .

### Formulation du co-krigeage multi-fidélité

Pour construire un modèle de co-krigeage multi-fidélité approchant  $y$ , la première étape consiste à construire un modèle de krigeage approchant le niveau grossier  $y_g$ . On note la matrice de covariance correspondante  $K_g(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \text{Cov}(Y_g(\mathbf{x}), Y_g(\mathbf{x}')) = \sigma_g^2 R_g(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ .

En reprenant les résultats pour le krigeage universel (Équation 2.7), on peut écrire que :

$$y_g(\mathbf{x}) = \mathbf{h}_g^\top(\mathbf{x})\beta_g + \mathbf{r}_g^\top(\mathbf{x})\mathbf{R}_g^{-1} \left( \mathbf{y}_g - \mathbf{H}_g\beta_g \right) \quad (2.16)$$

avec  $\mathbf{H}_g$  la matrice correspondant aux valeurs de  $h_g^\top(\mathbf{D}_g)$  et  $\mathbf{R}_g$  la matrice de corrélation pour les points de  $\mathbf{D}_g$  selon la fonction  $K_g$ .

On construit ensuite le modèle de krigeage associé au processus Gaussien  $Y_d(\cdot)$ . La matrice de covariance correspondante est notée  $K_d(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \text{Cov}(Y_d(\mathbf{x}), Y_d(\mathbf{x}')) = \sigma_d^2 R_d(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ .

En posant  $\mathbf{d} = \mathbf{y}_f - \rho y_g(\mathbf{D}_f)$ , il vient que la moyenne de ce processus s'écrit :

$$y_d(\mathbf{x}) = \mathbf{h}_d^\top(\mathbf{x})\boldsymbol{\beta}_d + \mathbf{r}_d^\top(\mathbf{x})\mathbf{R}_d^{-1}(\mathbf{d} - \mathbf{H}_d\boldsymbol{\beta}_d) \quad (2.17)$$

avec  $\mathbf{H}_d$  la matrice correspondant aux valeurs de  $h_g^\top(\mathbf{D}_f)$  et  $\mathbf{R}_d$  la matrice de corrélation entre les points de  $\mathbf{D}_f$  selon la fonction  $K_d$ .

Finalement, en utilisant les équations précédentes dans l'équation 2.14, il vient que le processus Gaussien  $Y_f(\mathbf{x})$ , conditionné aux données  $y$ , a pour moyenne

$$y_f(\mathbf{x}) = \mathbf{h}^\top(\mathbf{x})\boldsymbol{\beta} + \mathbf{k}^\top(\mathbf{x})\mathbf{K}^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{H}\boldsymbol{\beta}) \quad (2.18)$$

et pour variance

$$s_f^2(\mathbf{x}) = \rho^2\sigma_g^2 + \sigma_d^2 - \mathbf{k}^\top(\mathbf{x})\mathbf{K}^{-1}\mathbf{k}(\mathbf{x}) \quad (2.19)$$

avec  $\mathbf{h}^\top(\mathbf{x}) = (\rho\mathbf{h}_g^\top(\mathbf{x}), \mathbf{h}_d^\top(\mathbf{x}))$ ,  $\hat{\boldsymbol{\beta}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\beta}_g \\ \boldsymbol{\beta}_d \end{pmatrix}$  et  $\mathbf{G} = \begin{pmatrix} \mathbf{h}_g^\top(\mathbf{D}_g) & \mathbf{0} \\ \rho\mathbf{h}_g^\top(\mathbf{D}_f) & \mathbf{h}_d^\top(\mathbf{D}_f) \end{pmatrix}$ . Le vecteur de covariance entre  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{D}$  s'écrit  $\mathbf{k} = \begin{pmatrix} \rho\sigma_g^2 R_g(\mathbf{D}_g, \mathbf{x}) \\ \rho\sigma_g^2 R_g(\mathbf{D}_f, \mathbf{x}) + \sigma_d^2 R_d(\mathbf{D}_f, \mathbf{x}) \end{pmatrix}$  et  $K$  la matrice de covariance prend l'expression suivante :

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} \sigma_g^2 \mathbf{R}_g & \rho\sigma_g^2 R_g(\mathbf{D}_g, \mathbf{D}_f) \\ \rho\sigma_g^2 R_g(\mathbf{D}_f, \mathbf{D}_g) & \rho^2\sigma_g^2 R_g(\mathbf{D}_f, \mathbf{D}_f) + \sigma_d^2 \mathbf{R}_d \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

### Estimation des hyper-paramètres

Pour compléter l'estimateur de co-krigeage multi-fidélité (Équation 2.18), un ensemble d'hyper-paramètres doit encore être estimé :  $\boldsymbol{\beta}_g$ ,  $\sigma_g^2$ ,  $\boldsymbol{\lambda}_g$ ,  $\boldsymbol{\beta}_d$ ,  $\sigma_d^2$ ,  $\boldsymbol{\lambda}_d$  et  $\rho$ . La condition d'indépendance entre  $Y_g(\cdot)$  et  $Y_d(\cdot)$  permet d'estimer séparément les paramètres relatifs au niveau grossier ( $\boldsymbol{\beta}_g$ ,  $\sigma_g^2$ ,  $\boldsymbol{\lambda}_g$ ) et ceux relatifs au niveau fin ( $\rho, \boldsymbol{\beta}_d$ ,  $\sigma_d^2$ ,  $\boldsymbol{\lambda}_d$ ). Comme suggéré par [Forrester et al., 2007], ces estimations peuvent se faire par maximisation de la fonction de vraisemblance, de façon similaire au krigeage.

En effet, pour  $(\boldsymbol{\beta}_g, \sigma_g^2, \boldsymbol{\lambda}_g)$ , en supposant que  $Y_g(\mathbf{D}_g)$  suit une loi normale multidimensionnelle, le logarithme de la fonction de vraisemblance  $L_g$  associée s'écrit :

$$\log(L_g(\mathbf{y}_g | \boldsymbol{\beta}_g, \sigma_g^2, \boldsymbol{\lambda}_g)) = -\frac{1}{2}(n_g \log \sigma_g^2 + \log(\det(\mathbf{R}_g))) + \frac{(\mathbf{y}_g - \mathbf{H}_g\boldsymbol{\beta}_g)^\top \mathbf{R}_g^{-1}(\mathbf{y}_g - \mathbf{H}_g\boldsymbol{\beta}_g)}{\sigma_g^2} \quad (2.21)$$

En fixant  $\boldsymbol{\lambda}_g$ , les estimations de  $\boldsymbol{\beta}_g$  et  $\sigma_g^2$  par maximisation de la vraisemblance sont données par :

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_g = \hat{\boldsymbol{\beta}}_g(\boldsymbol{\lambda}_g) = (\mathbf{H}_g^\top \mathbf{R}_g^{-1} \mathbf{H}_g)^{-1} \mathbf{H}_g^\top \mathbf{R}_g^{-1} \mathbf{y}_g \quad (2.22)$$

et

$$\hat{\sigma}_g^2 = \hat{\sigma}_g^2(\boldsymbol{\lambda}_g) = \frac{1}{n_g} (\mathbf{y}_g - \mathbf{H}_g \hat{\boldsymbol{\beta}}_g)^\top \mathbf{R}_g^{-1} (\mathbf{y}_g - \mathbf{H}_g \hat{\boldsymbol{\beta}}_g) \quad (2.23)$$

En remplaçant  $\boldsymbol{\beta}_g$  et  $\sigma_g^2$  dans l'Equation 2.21 par leurs estimations respectives (Equations 2.22 et 2.23), on trouve l'expression suivante pour le logarithme de la fonction de vraisemblance :

$$\log \left( L_g(\mathbf{y}_g | \boldsymbol{\lambda}_g) \right) = -\frac{1}{2} \left( n_g \log \hat{\sigma}_g^2 + \log(\det(\mathbf{R}_g)) + n_g \right) \quad (2.24)$$

Cette expression dépend uniquement de  $\boldsymbol{\lambda}_g$ . L'estimation par maximum de vraisemblance de  $\boldsymbol{\lambda}_g$  est finalement obtenue par la minimisation de  $n_g \log \hat{\sigma}_g^2 + \log(\det(\mathbf{R}_g))$ .

De la même manière, on peut estimer les quatre autres paramètres  $(\rho, \boldsymbol{\beta}_d, \sigma_d^2, \boldsymbol{\lambda}_d)$  relatifs au modèle de krigeage appliqué à  $\mathbf{d} = \mathbf{y}_f - \rho y_g(\mathbf{D}_f)$ . Ainsi, en supposant que  $Y_f(\mathbf{D}_f) - \rho Y_g(\mathbf{D}_f)$  suit une loi normale multidimensionnelle, le logarithme de la fonction de vraisemblance  $L_d$  associée s'écrit :

$$\log \left( L_d(\mathbf{d} | \rho, \boldsymbol{\beta}_d, \sigma_d^2, \boldsymbol{\lambda}_d) \right) = -\frac{1}{2} \left( n_f \log \sigma_d^2 + \log(\det(\mathbf{R}_d)) + \frac{(\mathbf{d} - \mathbf{H}_d \boldsymbol{\beta}_d)^\top \mathbf{R}_d^{-1} (\mathbf{d} - \mathbf{H}_d \boldsymbol{\beta}_d)}{\sigma_d^2} \right) \quad (2.25)$$

En fixant  $\boldsymbol{\lambda}_d$ , les estimations de  $\boldsymbol{\beta}_d$  et  $\sigma_d^2$  par maximisation de la vraisemblance sont données par :

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_d = \hat{\boldsymbol{\beta}}_d(\rho, \boldsymbol{\lambda}_d) = \left( \mathbf{H}_d^\top \mathbf{R}_d^{-1} \mathbf{H}_d \right)^{-1} \mathbf{H}_d^\top \mathbf{R}_d^{-1} \mathbf{d} \quad (2.26)$$

et

$$\hat{\sigma}_d^2 = \hat{\sigma}_d^2(\rho, \boldsymbol{\lambda}_d) = \frac{1}{n_f} \left( \mathbf{d} - \mathbf{H}_d \hat{\boldsymbol{\beta}}_d \right)^\top \mathbf{R}_d^{-1} \left( \mathbf{d} - \mathbf{H}_d \hat{\boldsymbol{\beta}}_d \right) \quad (2.27)$$

Puis, en remplaçant  $\boldsymbol{\beta}_d$  et  $\sigma_d^2$  dans l'Equation 2.25 par leurs estimations respectives (Equations 2.26 et 2.27), on trouve l'expression suivante pour le logarithme de la fonction de vraisemblance :

$$\log \left( L_d(\mathbf{d} | \rho, \boldsymbol{\lambda}_d) \right) = -\frac{1}{2} \left( n_f \log \hat{\sigma}_d^2 + \log(\det(\mathbf{R}_d)) + n_f \right) \quad (2.28)$$

Cette expression dépend uniquement de  $\boldsymbol{\lambda}_d$  et  $\rho$ , qu'il est donc possible d'estimer en minimisant  $n_f \log \hat{\sigma}_d^2 + \log(\det(\mathbf{R}_d))$ . Pour davantage de détails sur l'estimation des hyper-paramètres d'un modèle de co-krigeage multi-fidélité par maximisation de la vraisemblance, le lecteur peut se référer à [Forrester et al., 2007].

## Formulation récursive

Nous présentons ici la formulation récursive du modèle de co-krigeage multi-fidélité proposée par [Le Gratiet and Garnier, 2014]. Selon cette formulation, le modèle de co-krigeage multi-fidélité pour le niveau de fidélité  $s$  peut s'exprimer comme la somme d'un modèle de co-krigeage multi-fidélité au niveau  $s-1$ , et d'un modèle de krigeage de l'écart entre les deux niveaux. En outre, elle permet d'obtenir des expressions récursives pour la moyenne et la variance du co-krigeage multi-fidélité (Équations 2.29 et 2.30). Cette fois encore, nous nous concentrons sur le cas  $s = 2$ , où deux niveaux de fidélité sont considérés. On conserve également toutes les notations introduites précédemment.

Reprenant les équations 2.14 et 2.15, [Le Gratiet and Garnier, 2014] ont montré l'équivalence des expressions précédemment introduites (Équations 2.18 et 2.19) pour la moyenne  $y_f(\mathbf{x})$  et la variance  $s_f^2(\mathbf{x})$  du co-krigeage multi-fidélité avec les expressions suivantes :

$$y_f(\mathbf{x}) = \rho y_g(\mathbf{x}) + \mathbf{h}_d^\top(\mathbf{x}) \boldsymbol{\beta}_d + \mathbf{r}_d^\top(\mathbf{x}) \mathbf{R}_d^{-1} (\mathbf{d} - \mathbf{H}_d \boldsymbol{\beta}_d) \quad (2.29)$$

et

$$s_f^2(\mathbf{x}) = \rho^2 s_g^2(\mathbf{x}) + \sigma_d^2 \left(1 - \mathbf{r}_d^T(\mathbf{x}) \mathbf{R}_d^{-1} \mathbf{r}_d(\mathbf{x})\right) \quad (2.30)$$

Ce modèle récursif est toutefois plus général car il laisse la possibilité de renseigner un modèle de régression pour  $\rho$ , similairement à la modélisation proposée pour  $h(\mathbf{x})$  (Equation 2.6). Le lecteur intéressé par cette approche pourra se référer aux travaux de [Le Gratiet and Garnier, 2014]. Une méthode Bayésienne d'estimation des hyper-paramètres associés à ce modèle est ensuite décrite dans [Le Gratiet, 2013a].

Un intérêt majeur de l'approche récursive est qu'elle réduit la complexité numérique du modèle de co-krigeage multi-fidélité au sens où elle réduit la taille des matrices de covariance à inverser. En effet, la récursivité implique que la construction d'un modèle de co-krigeage multi-fidélité pour  $s$  niveaux de fidélité est équivalente, en termes de complexité, à la construction de  $s$  modèles de krigeage successifs. Un autre avantage de la récursivité est que l'on dispose des estimateurs (moyenne et variance) du modèle pour les différents niveaux grossiers.

Par la suite, nous construisons les méta-modèles multi-fidélité en utilisant le modèle de co-krigeage multi-fidélité proposé par [Le Gratiet and Garnier, 2014]. Nous utilisons pour cela le package **R Mu-FiCokriging** [Le Gratiet, 2012] associé. Pour plus de détails sur le co-krigeage multi-fidélité, le lecteur peut se référer à la thèse de [Le Gratiet, 2013b].

## 2.4 Validation du méta-modèle

La vérification de la qualité du méta-modèle est également une étape importante dans une approche basée sur la méta-modélisation. En effet, un méta-modèle est pertinent seulement s'il est de bonne qualité, c'est-à-dire s'il prédit la réponse d'intérêt de manière fiable aux points de l'espace n'ayant pas été évalués. Il pourra alors être utilisé au sein de l'application envisagée. En revanche, si le méta-modèle n'est pas assez prédictif, il faut généralement reprendre son processus de construction en considérant un plan d'expériences de plus grande taille (*cf.* Figures 2.1 et 2.6). Ce dernier peut par exemple être augmenté en suivant une stratégie de planification séquentielle. Ce point fait l'objet du chapitre 5.

La qualité d'un méta-modèle peut être estimée en utilisant l'erreur de prédiction sur une base de test indépendante tel que décrit dans la section 2.4.1. Il est également possible de faire de la validation croisée comme expliqué dans la section 2.4.2.

### 2.4.1 Validation via une base de test

Pour estimer la qualité d'un méta-modèle, on peut évaluer la réponse d'intérêt en un ensemble de points indépendant du plan d'expériences utilisé pour la construction du méta-modèle - la base de test -, et calculer l'erreur de prédiction en ces points. Ces erreurs peuvent ensuite être regroupées dans un unique coefficient, par exemple le coefficient  $Q^2$  défini par :

$$Q^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n_{test}} (y(\mathbf{x}_i) - \hat{y}(\mathbf{x}_i))^2}{\sum_{i=1}^{n_{test}} (y(\mathbf{x}_i) - \bar{y})^2} \quad (2.31)$$

où on a noté  $\mathbf{D}_{test} = \{\mathbf{x}_1; \dots; \mathbf{x}_{n_{test}}\}$  la base de test,  $\hat{y}(\mathbf{x})$  l'estimateur de krigeage ou co-krigeage multi-fidélité de  $y(\mathbf{x})$  (Equations 2.7 ou 2.29), et  $\bar{y}$  la valeur moyenne de  $y(\mathbf{x})$  aux points de la base de test  $\mathbf{D}_{test}$ . Dans ce cas, ce coefficient peut être vu comme l'équivalent du coefficient de détermination classique  $R^2$  appliqué aux résidus de prédiction sur la base de test.

On remarque que, plus un méta-modèle est prédictif, et plus le  $Q^2$  est proche de 1. En pratique, on peut considérer qu'un méta-modèle est raisonnablement prédictif lorsque  $Q^2 > 0,9$ . Le  $Q^2$  peut prendre des valeurs négatives, ce qui est caractéristique d'un mauvais méta-modèle puisque il est moins prédictif qu'une approximation par une constante égale à la réponse moyenne sur la base de test.

Le coefficient  $Q^2$  est pratique car il est rapide à calculer et simple à interpréter. Toutefois, il faut garder en tête que sa valeur peut être fortement influencée par un résidu élevé pour un seul des points de la base de test. Un exemple de cas extrême serait d'obtenir un mauvais  $Q^2$  alors qu'en réalité le méta-modèle est très prédictif pour l'ensemble des points de la base de test sauf un pour lequel il est très mauvais. Des vérifications complémentaires et régulières sont donc nécessaires pour détecter ce genre de cas.

### 2.4.2 Validation croisée

Les méthodes par validation croisée permettent d'estimer la fiabilité d'un méta-modèle en ne considérant que le plan d'expériences initial. On s'intéresse ici à la validation croisée lorsqu'une seule évaluation est mise à part, on parle aussi de LOO-CV (*Leave-One-Out Cross-Validation*). Prenons un plan d'expériences  $\mathbf{D}$  de  $n$  points et notons  $y(\mathbf{x}_1), \dots, y(\mathbf{x}_n)$  les  $n$  évaluations correspondantes de la réponse d'intérêt  $y(\mathbf{x})$ . Le principe de la validation croisée consiste à supposer que l'évaluation  $i$  n'est pas connue et à construire un méta-modèle de  $y$  avec les  $n - 1$  autres évaluations. On note  $\hat{y}_{-i}(\mathbf{x})$  l'estimateur associé à ce méta-modèle.

On peut ensuite calculer l'erreur de validation croisée au point  $\mathbf{x}_i$  par  $y(\mathbf{x}_i) - \hat{y}_{-i}(\mathbf{x}_i)$ . En répétant cette opération pour les  $n$  points du plan d'expériences, on obtient une estimation de la fiabilité de notre méta-modèle. En particulier, ces erreurs peuvent être regroupées comme précédemment dans le calcul du coefficient  $Q^2$  selon :

$$Q_{cv}^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (y(\mathbf{x}_i) - \hat{y}_{-i}(\mathbf{x}_i))^2}{\sum_{i=1}^n (y(\mathbf{x}_i) - \bar{y})^2} \quad (2.32)$$

avec  $\bar{y}$  la valeur moyenne de  $y(\mathbf{x})$  aux points du plan d'expériences  $\mathbf{D}$ .

Le coefficient  $Q_{cv}^2$  s'interprète de la même manière que le  $Q^2$ . Dans la pratique, nous avons observé que le  $Q_{cv}^2$  prend des valeurs légèrement supérieures à celle du  $Q^2$  pour un même plan d'expériences. On peut toutefois considérer le  $Q_{cv}^2$  comme une bonne approximation du  $Q^2$ . De plus, il présente l'avantage de pouvoir être calculé sans base de test supplémentaire, ce qui permet l'économie non négligeable de ces évaluations additionnelles.

La validation croisée nécessite néanmoins le calcul de  $n$  méta-modèles, ce qui peut avoir un coût important en temps de calcul pour un méta-modèle de krigeage. Cependant, différentes méthodes proposées par [Dubrule, 1983] [Rasmussen and Williams, 2006] [Zhang and Wang, 2010] proposent des raccourcis et des approximations afin de calculer rapidement les prédictions (et les variances associées) par validation croisée pour le krigeage. On peut par exemple éviter la ré-estimation de l'ensemble ou d'une partie des hyper-paramètres en supposant qu'une unique observation n'a que peu d'impact sur leur estimation.

La formulation récursive (Équation 2.29) permet d'étendre ces raccourcis au co-krigeage multi-fidélité. Ainsi, [Le Gratiet and Garnier, 2014] proposent une méthode de calcul rapide des prédictions et des variances par validation croisée pour le co-krigeage multi-fidélité. On note que, dans cette méthode, les hyper-paramètres  $\lambda$  ne sont pas ré-estimés. Par ailleurs, la validation croisée pour le co-krigeage multi-fidélité permet l'expression des résultats aux différents niveaux de fidélité. On peut donc

calculer la prédiction et la variance par validation au niveau grossier en considérant que l'observation à  $\mathbf{x}_i \in \mathbf{D}_g$  est inconnue. Pour le calcul de ces résultats au niveau fin, on considère que l'observation à  $\mathbf{x}_i \in \mathbf{D}_f$  est inconnue sur les deux niveaux de fidélité.





---

## CHAPITRE 3

# Méta-modélisation de sorties vectorielles et de la fonction objectif

Les propriétés d'intérêt considérées pour la méta-modélisation sont issues de la simulation d'écoulement. Ce sont donc des fonctions du temps, voire de l'espace, et leurs valeurs simulées peuvent être vues comme des vecteurs dont chaque composante correspond à un temps et/ou une maille donnée. La méta-modélisation de sorties vectorielles est ainsi un enjeu important en ingénierie de réservoir.

Ce chapitre est divisé en trois parties. Tout d'abord, nous résumons l'ensemble des propriétés et sorties d'intérêt de la simulation d'écoulement au sein de la partie 3.1. La méta-modélisation de ces sorties, généralement vectorielles, est un enjeu pour de nombreuses applications. Les méthodes proposées pour la méta-modélisation de sorties vectorielles dans des cadres simple ou multi-fidélité sont ensuite décrites en partie 3.2. Puis en partie 3.3, nous nous intéressons à la méta-modélisation de la fonction objectif quantifiant l'erreur entre données de production et réponses simulées. En particulier, nous proposons de l'approcher en utilisant les estimations des propriétés vectorielles à caler.

### 3.1 Propriétés d'intérêt de la simulation d'écoulement

En ingénierie de réservoir, on s'intéresse à l'évolution dynamique de la pression et des fluides dans le réservoir en réponse à un schéma de production. La grande majorité des sorties issues de la simulation d'écoulement sont donc des propriétés qui dépendent du temps. Ces propriétés sont calculées à chaque pas de temps considéré lors de la simulation d'écoulement. En pratique, on ne conserve leurs réponses qu'à certains temps, et notamment ceux pour lesquels on dispose de mesures de données dynamiques. Parmi les propriétés dynamiques d'intérêt, on peut distinguer les propriétés mesurées aux puits, les propriétés définies au niveau du réservoir, et les propriétés spatio-temporelles.

#### Les propriétés d'intérêt aux puits

Les propriétés d'intérêt aux puits regroupent notamment la pression en fond de puits (*bottomhole pressure*) et une mesure de la production des différents fluides, comme le débit d'huile. Pour l'eau et le gaz, on préfère souvent une expression de leur production sous la forme d'un rapport. Pour l'eau, on utilise la fraction d'eau (*watercut*). C'est une réponse prenant ses valeurs entre 0 et 1, qui désigne la part en eau produite par rapport à la part totale des fluides. Pour le gaz, on utilise fréquemment le ratio gaz/huile (*gaz/oil ratio*), qui désigne un rapport entre les volumes de gaz et d'huile produits en condition de pression et température de surface. Cette réponse permet de prendre en compte le gaz dissous au sein du pétrole brut produit. Selon le cas étudié et les options du simulateur d'écoulement,

de nombreuses autres sorties peuvent être simulées aux puits.

### Les propriétés associées au réservoir

Ces propriétés représentent le comportement dynamique global au niveau du réservoir, et sont obtenues à partir des propriétés dynamiques aux différents puits. Il peut s'agir par exemple de débits ou de volumes cumulés pour un fluide donné, comme le volume cumulé de l'huile produite par le réservoir ou encore le débit total d'eau produite. Ces sorties fournissent des indicateurs globaux pouvant être utilisés dans des calculs économiques visant à estimer la valeur d'un schéma de production ou d'un emplacement pour un puits additionnel. Elles peuvent ainsi être utiles pour le choix d'une stratégie d'exploitation dans le cadre du développement du champ.

### Les propriétés spatiales

Les propriétés spatiales sont définies dans chaque maille du réservoir. Il s'agit principalement de la distribution de la pression et des saturations en huile ou en eau dans le réservoir. La modélisation de ces propriétés est particulièrement intéressante lorsque l'on dispose de données sismiques répétées dans le temps, aussi appelées données de sismique 4D (variations d'impédance acoustique dans le temps par exemple). En effet, ces attributs sismiques peuvent être calculés via un modèle pétro-élastique à partir des cartes de pression et saturation fournies par la simulation d'écoulement. Les attributs sismiques obtenus peuvent ensuite être comparés aux données de sismique 4D au sein d'une fonction objectif adaptée et être pris en compte lors du processus de calage [Roggero et al., 2012].

### La fonction objectif

La fonction objectif n'est pas une propriété de la simulation d'écoulement. C'est cependant une sortie d'intérêt majeure utilisée lors du calage d'historique afin de quantifier l'écart entre les données de production mesurées et celles simulées à l'aide du modèle réservoir. Nous en rappelons ci-dessous la définition introduite dans la section 1.2.2 :

$$FO(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^K \omega_k \sum_{t=1}^{T(k)} \left( \frac{y_k(\mathbf{x}, t) - d_{kt}^{obs}}{\sigma_{kt}} \right)^2 \quad (3.1)$$

On rappelle que les données de production simulées sont notées  $y(\mathbf{x}, t)$  et celles mesurées  $d^{obs}$ . Les indices  $k \in [1, K]$  et  $t \in [1, T(k)]$  font référence aux différentes sorties et aux différents temps pour lesquels ces sorties sont mesurées. Les coefficients  $\omega$  et  $\sigma$  sont des poids définis par l'ingénieur. On note également que les données de production sont des réponses dynamiques. Leur dépendance au temps est indiquée par l'indice  $t$ . Les données de production sont généralement des propriétés aux puits, mais les propriétés associées au réservoir peuvent également être considérées dans le calcul de la fonction objectif.

### Applications

La méta-modélisation de sorties vectorielles rend possible l'analyse de sensibilité simultanément sur les différents éléments du vecteur. Ainsi, dans [Douarce et al., 2014], une analyse de sensibilité réalisée au cours de la récupération de l'huile du réservoir permet de caractériser l'évolution de l'impact des différents surfactants et polymères testés dans le temps. De façon similaire, la méta-modélisation de

propriétés spatiales peut permettre de caractériser l'évolution de l'impact des différents paramètres dans l'espace [Marrel et al., 2015] [Da Veiga and Gervais, 2015]. La méta-modélisation de propriétés au niveau du réservoir est intéressante pour faire des prédictions probabilistes sur la production dans le temps [Feraille and Marrel, 2012]. Nous proposons également dans cette thèse d'utiliser des méta-modèles approchant les sorties de puits afin d'améliorer la modélisation de la fonction objectif, et ainsi accélérer le calage d'historique. Cette dernière approche est décrite en détail dans la partie 3.3.

## 3.2 Méta-modélisation de sorties vectorielles

La méta-modélisation d'une sortie vectorielle peut se faire à travers la construction de modèles de krigeage/co-krigeage multi-fidélité pour chacun des éléments de la sortie vectorielle. Cependant, la grande taille des sorties rend cette approche peu pratique, voire irréaliste pour les sorties spatiales dont la dimension est celle de la grille réservoir (jusqu'à plusieurs millions d'éléments). Une alternative consiste à réduire la dimension des sorties vectorielles afin de pouvoir les approcher avec un nombre limité de méta-modèles. Ceci peut se faire par exemple comme dans [Douarche et al., 2014] en réalisant une analyse en composantes principales (section 3.2.1) [Loeve, 1978], puis en appliquant la méta-modélisation par krigeage dans la base réduite obtenue (section 3.2.2). Cette approche est étendue ici au cadre multi-fidélité (section 3.2.3).

### 3.2.1 L'analyse en composantes principales (ACP)

L'approche consistant à construire un méta-modèle par élément du vecteur est coûteuse en temps de calcul. De plus, elle est peu efficace car elle ignore les corrélations existantes entre les différents éléments de la sortie vectorielle. Une approche plus rapide et efficace passe par la réduction de la dimension de la sortie vectorielle en appliquant par exemple une analyse en composantes principales, notée ACP. Selon le domaine d'application considéré, l'ACP est aussi connue sous le nom de transformation de Karhunen-Loève [Loeve, 1978] ou encore décomposition orthogonale aux valeurs propres.

Considérons que la réponse dynamique que l'on souhaite approcher  $y(\mathbf{x}, t)$  avec  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ ,  $t \in [1, T]$  soit la réalisation d'un processus Gaussien centré  $Y_t(\mathbf{x})$ , tel que  $\mathbf{E}[Y_t] = 0$  pour tout  $t \in [1, T]$ . L'application au cas Gaussien du théorème de Karhunen-Loève [Revuz, 1997],  $Y_t$  admet la décomposition suivante :

$$Y_t(\mathbf{x}) = \sum_{l=1}^{\infty} A_l(\mathbf{x})\phi_l(t) \quad (3.2)$$

avec  $\phi_l$  des fonctions formant une base orthonormale et  $A_l$  des variables Gaussiennes indépendantes définies par  $A_l(\mathbf{x}) = \int_1^T Y_t(\mathbf{x})\phi_l(t)dt$ . L'intérêt d'une telle décomposition est de pouvoir séparer les effets du temps (ou de l'espace) de ceux des paramètres incertains.

Généralement, seuls quelques termes de la base sont suffisants pour fournir une bonne approximation de  $Y_t$ . Une version tronquée à l'ordre  $L$  de l'Equation 3.2 est alors :

$$Y_t(\mathbf{x}) \approx \sum_{l=1}^L A_l(\mathbf{x})\phi_l(t) \quad (3.3)$$

Sous cette forme tronquée, les fonctions orthonormales  $\phi_l$  sont choisies de telle sorte que l'approximation soit aussi bonne que possible au sens des moindres carrés, pour la valeur de  $L$  considérée. Elles

sont définies séquentiellement de manière à ce que les  $i$  premières fonctions fournissent la meilleure approximation possible avec  $i$  termes. Par ailleurs, on peut quantifier la part de la variance du champ reproductible par l'approximation tronquée à l'ordre  $L$ . En général, on choisit  $L$  tel qu'au moins 95% de la variance de la sortie puisse être reproduite par la décomposition.

On remarque qu'il est possible de considérer une décomposition similaire pour une sortie spatiale  $y(\mathbf{x}, u, v, w)$  définie sur un espace  $(u, v, w)$ , comme par exemple une carte de la pression dans le réservoir à un temps donné. Il faut alors remplacer les fonctions orthonormales  $\phi_l(t)$  par  $\phi_l(u, v, w)$  dans les Equations 3.2 et 3.3.

En pratique, il est possible de calculer une version empirique de l'Équation 3.3 à partir d'un échantillon de réponses. On parle alors de transformation de Karhunen-Loève. Les différents termes de la décomposition sont calculés en appliquant une ACP sur l'échantillon de réponses.

### 3.2.2 ACP et krigeage

Nous présentons ici une méthode pour la construction d'un méta-modèle d'une sortie vectorielle reposant sur l'utilisation combinée de l'expression tronquée de la transformation de Karhunen-Loève (Équation 3.3) et du krigeage. Comme illustré par la Figure 3.1, cette méthode consiste à réaliser une décomposition en base réduite de la réponse d'intérêt par ACP, puis à construire des modèles de krigeage approchant les coefficients de projection sur cette base. On obtient ainsi un méta-modèle de la réponse vectorielle avec un nombre réduit de modèles de krigeage. On note qu'une telle approche a déjà été appliquée avec succès dans divers domaines tels que l'automobile [Xiao et al., 2010], l'environnement [Marrel et al., 2015] ou l'ingénierie de réservoir [Douarche et al., 2014].

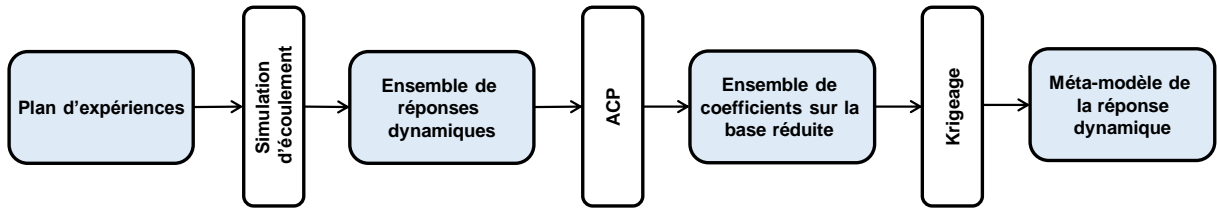


Figure 3.1 : Schéma de la méta-modélisation d'une sortie vectorielle en utilisant une analyse en composantes principales (ACP) dans un cadre simple fidélité.

#### Description de la méthode

On considère que l'on dispose de  $n$  simulations de la réponse dynamique  $y(\mathbf{x}, t)$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$  et  $t \in [1, T]$  sur le plan d'expériences  $\mathbf{D} = \{\mathbf{x}_1; \dots; \mathbf{x}_n\}$ . On note  $y(\mathbf{D}, t)$  cet ensemble de réponses simulées. Suivant l'Équation 3.3, on peut écrire l'approximation suivante de  $y(\mathbf{x}, t)$  pour tout  $\mathbf{x} \in \mathbf{D}$  :

$$y(\mathbf{x}, t) \approx \bar{y}(t) + \sum_{l=1}^L \alpha_l(\mathbf{x}) \phi_l(t) \quad (3.4)$$

avec  $\bar{y}(t)$  la réponse moyenne de  $y(\mathbf{D}, t)$  au temps  $t$ ,  $\phi_l$  des fonctions formant une base orthonormale et  $\alpha_l$  les coefficients de projection dans cette base. Le terme  $\bar{y}(t)$  apparaît dans cette expression car il est nécessaire de centrer  $y(\mathbf{D}, t)$  afin de pouvoir appliquer la décomposition de l'Équation (3.2). Une étape préliminaire consiste donc à centrer l'ensemble des simulations  $y(\mathbf{D}, t)$  par rapport à la réponse moyenne  $\bar{y}$ . On note  $(y(\mathbf{D}, t))_{cent}$  l'ensemble des simulations centrées. La base réduite  $\phi_l$  est calculée en appliquant une décomposition en composantes principales à  $(y(\mathbf{D}, t))_{cent}$ . Les coefficients  $\alpha_l(\mathbf{x})$  sont

ensuite obtenus par projection des simulations centrées  $y(\mathbf{x}, t) - \bar{y}(t)$  pour chaque  $\mathbf{x} \in \mathbf{D}$  sur la base  $\phi_l : \alpha_l(\mathbf{x}) = \sum_{t=1}^T (y(\mathbf{x}, t) - \bar{y}(t)) \phi_l(t)$ .

On remarque que, pour  $l$  donné, on peut associer à chaque point du plan d'expériences  $\mathbf{x} \in \mathbf{D}$  une valeur du coefficient de projection  $\alpha_l(\mathbf{x})$ . On peut alors construire un modèle de krigeage approchant le coefficient  $\alpha_l$  pour chaque  $l \in [1, L]$ . Nous notons  $\hat{\alpha}_l$  les estimateurs de krigeage associés à ces modèles. Un estimateur de  $y(\mathbf{x}, t)$  pour un point quelconque de l'espace des paramètres  $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^d$  est alors donné par :

$$\hat{y}(\mathbf{x}^*, t) = \bar{y}(t) + \sum_{l=1}^L \hat{\alpha}_l(\mathbf{x}^*) \phi_l(t) \quad (3.5)$$

Dans cette thèse, nous utilisons cet estimateur pour la construction d'un méta-modèle de sortie vectorielle dans un contexte de simple fidélité. On note que la méthode reste la même lorsque la sortie d'intérêt est spatiale (voir [Marrel et al., 2015], [Da Veiga and Gervais, 2015]).

En pratique, on observe que peu de termes de la décomposition en composantes principales suffisent à une bonne approximation, même lorsque la taille des sorties vectorielles est importante. On a alors  $L \ll T$ . Cette approche permet ainsi de réduire très fortement le nombre de modèles de krigeage nécessaires à la méta-modélisation d'une sortie vectorielle.

### Algorithme

Nous récapitulons ci-dessous les étapes de l'algorithme de construction d'un méta-modèle d'une sortie vectorielle en utilisant l'analyse en composantes principales (ACP) et le krigeage, dans un contexte simple fidélité.

1. Centrer  $y(\mathbf{D}, t)$  sur  $\bar{\mathbf{y}}$ . On note  $(y(\mathbf{D}, t))_{cent}$  l'ensemble des réponses centrées.
2. Appliquer une ACP à  $(y(\mathbf{D}, t))_{cent}$  pour calculer  $\phi_l$  avec  $l \in [1, L]$ . On ne garde que les  $L$  premiers termes permettant d'expliquer 95% de la variance de  $(y(\mathbf{D}, t))_{cent}$ .
3. Pour  $l = 1, \dots, L$  et  $i = 1, \dots, n$  : calculer  $\alpha_l(\mathbf{x}_i) = \sum_{t=1}^T (y(\mathbf{x}_i, t) - \bar{y}(t)) \phi_l(t)$ .
4. Pour  $l = 1, \dots, L$  : construire un modèle de krigeage  $\hat{\alpha}_l$  de  $\alpha_l$  à partir de  $(\mathbf{x}_i, \alpha_l(\mathbf{x}_i))_{i=1, \dots, n}$ .
5. Construire un méta-modèle de  $y(\mathbf{x}, t)$  en utilisant les estimateurs  $\hat{\alpha}_l$  selon l'Equation 3.5.

### Variance et validation croisée

On peut étendre certains résultats du krigeage à la méthode proposée pour la méta-modélisation de sorties vectorielles. Tout d'abord, on remarque que la construction de modèles de krigeage pour les coefficients  $\alpha_l$  permet d'approcher les variables Gaussiennes  $A_l$  introduites dans l'Equation 3.2. En effet, l'espérance de la variable  $A_l$  est donnée par l'estimateur du méta-modèle de  $\alpha_l$ , et sa variance par la variance de ce méta-modèle, notée  $\hat{s}_l^2$ .

A partir des  $\hat{s}_l^2$ , on peut calculer la variance  $\hat{u}^2$  associée à l'estimateur  $\hat{y}$  de la sortie vectorielle. Les variables Gaussiennes  $A_l$  de l'Equation 3.2 étant indépendantes entre elles, la somme des variances est équivalente à la variance de la somme. Il vient alors :

$$\hat{u}^2(\mathbf{x}^*, t) = \sum_{l=1}^L \hat{s}_l^2(\mathbf{x}^*) \phi_l(t)^2 \quad (3.6)$$

On peut également obtenir une expression de la prédiction  $\hat{y}_{-i}$  et de la variance  $\hat{u}_{-i}^2$  obtenues par validation croisée en ne considérant pas l'observation  $\mathbf{x}_i$  dans le calcul de l'estimateur  $\hat{y}$ . En effet, on peut utiliser les résultats de validation croisée des modèles de krigeage de  $\alpha_l$ , notés  $\hat{\alpha}_{-i,l}$  et  $\hat{s}_{-i,l}^2$ , pour remplacer  $\hat{\alpha}_l$  et  $\hat{s}_l^2$  dans les Equations 3.5 et 3.6, respectivement :

$$\hat{y}_{-i}(\mathbf{x}^*, t) = \bar{y}(t) + \sum_{l=1}^L \hat{\alpha}_{-i,l}(\mathbf{x}^*) \phi_l(t) \quad (3.7)$$

et

$$\hat{u}_{-i}^2(\mathbf{x}^*, t) = \sum_{l=1}^L \hat{s}_{-i,l}^2(\mathbf{x}^*) \phi_l(t)^2 \quad (3.8)$$

### 3.2.3 ACP et co-krigeage multi-fidélité

Pour la méta-modélisation d'une sortie vectorielle dans un contexte multi-fidélité, nous proposons une extension de la méthode décrite ci-dessus. Elle consiste à combiner l'expression tronquée de la transformation de Karhunen-Loève (Equation 3.3) au co-krigeage multi-fidélité. Cette approche est présentée ici pour deux niveaux de fidélité, mais se généralise à un nombre quelconque de niveaux.

Comme dans le cas simple fidélité, on peut réaliser une ACP sur un ensemble de réponses du niveau fin. On obtient alors une base réduite au niveau fin, ainsi que les coefficients de projection associés à cette base. On propose ensuite de projeter les réponses du niveau grossier sur la base réduite issue du niveau fin. On obtient ainsi des coefficients de projection sur les deux niveaux, dont on peut déduire des estimateurs par co-krigeage multi-fidélité. On se ramène ensuite à l'estimateur (Equation 3.5) dans lequel les estimateurs simple fidélité des coefficients de projection sont remplacés par leurs estimateurs multi-fidélité. Cette méthode peut être résumée par la Figure 3.2.

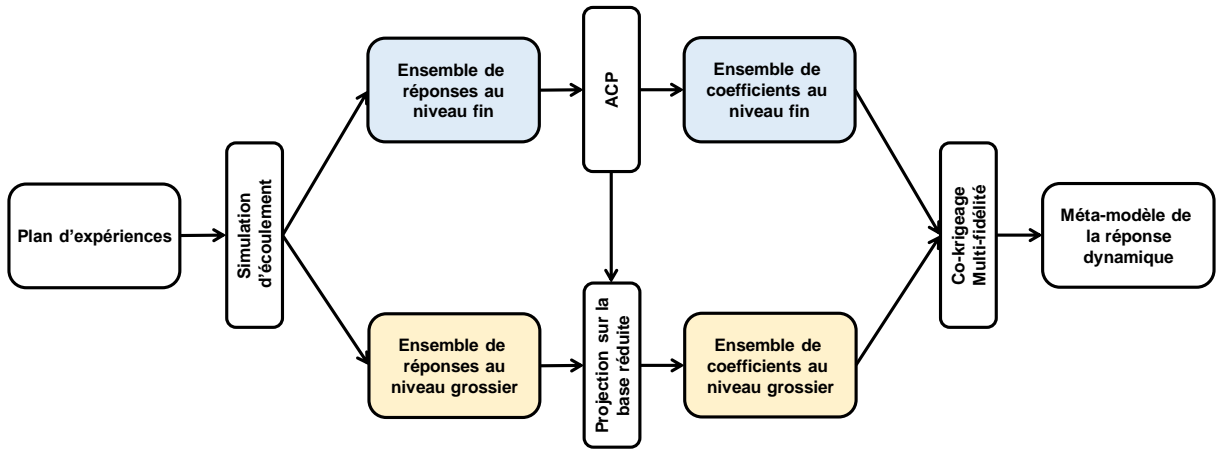


Figure 3.2 : Schéma de la méta-modélisation d'une sortie vectorielle en utilisant une analyse en composantes principales (ACP) dans un cadre multi-fidélité à deux niveaux.

#### Description de la méthode

On note  $\mathbf{D}_f = \{\mathbf{x}_1; \dots; \mathbf{x}_{n_f}\}$  et  $\mathbf{D}_g = \{\mathbf{x}_1; \dots; \mathbf{x}_{n_g}\}$  deux plans d'expériences imbriqués. On note  $y_f(\mathbf{x}, t)$  pour  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$  et  $t \in [1, T]$  la réponse dynamique d'intérêt simulée sur le niveau fin, et  $y_g(\mathbf{x}, t)$  la même propriété simulée sur le niveau grossier. On suppose que l'on connaît l'ensemble des réponses simulées sur les plans d'expériences fin et grossier, que l'on note respectivement  $y_f(\mathbf{D}_f, t)$  et  $y_g(\mathbf{D}_g, t)$ .

On note également  $\bar{y}_f(t)$  la réponse moyenne de  $y_f(\mathbf{D}_f, t)$  au temps  $t$ .

En reprenant l'Équation 3.4, on trouve l'approximation suivante de  $y_f(\mathbf{x}, t)$  pour tout  $\mathbf{x} \in \mathbf{D}_f$ :

$$y_f(\mathbf{x}, t) \approx \bar{y}_f(t) + \sum_{l=1}^L \alpha_l^f(\mathbf{x}) \phi_l^f(t) \quad (3.9)$$

Comme précédemment, la base  $\phi_l^f$  est calculée en appliquant une décomposition en composantes principales sur l'ensemble des réponses simulées sur le niveau fin  $y_f(\mathbf{D}_f, t)$  et centrées sur  $\bar{y}_f$ . Puis, on calcule les coefficients  $\alpha_l^f$  en projetant les simulations centrées du niveau fin  $y_f(\mathbf{x}, t) - \bar{y}_f(t)$  pour chaque  $\mathbf{x} \in \mathbf{D}_f$  sur la base  $\phi_l^f$ :  $\alpha_l^f(\mathbf{x}) = \sum_{t=1}^T [y_f(\mathbf{x}, t) - \bar{y}_f(t)] \phi_l^f(t)$ .

On propose ensuite de calculer les coefficients de projection sur le niveau grossier. Pour cela, on projette l'ensemble des réponses simulées au niveau grossier  $y_g(\mathbf{D}_g, t)$  sur la base  $\phi_l^f$ : pour tout  $\mathbf{x} \in \mathbf{D}_g$ ,  $\alpha_l^g(\mathbf{x}) = \sum_{t=1}^T y_g(\mathbf{x}, t) \phi_l^f(t)$ . Ainsi, pour chacune des valeurs de  $l$ , on dispose de  $\alpha_l^f(\mathbf{D}_f, t)$  et  $\alpha_l^g(\mathbf{D}_g, t)$ . On peut alors construire un méta-modèle approchant  $\alpha_l^f$  par co-krigeage multi-fidélité pour tout  $l \in [1, L]$ . On note  $\hat{\alpha}_l^f$  les estimateurs de co-krigeage multi-fidélité associés à ces modèles. On obtient ainsi un estimateur pour  $y_f(\mathbf{x}, t)$  similaire à celui introduit dans le cas simple fidélité (Équation 3.5), pour  $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^d$ :

$$\hat{y}_f(\mathbf{x}^*, t) = \bar{y}_f(t) + \sum_{l=1}^L \hat{\alpha}_l^f(\mathbf{x}^*) \phi_l^f(t) \quad (3.10)$$

Dans la méthode proposée, les coefficients  $\alpha_l^g$  sont issus d'une projection des réponses du niveau grossier sur la base réduite calculée par l'ACP appliquée aux réponses du niveau fin. Toutefois, ces coefficients ne sont pas adaptés à l'approximation de  $y_g$ , contrairement aux coefficients  $\alpha_l^f$  qui peuvent être utilisés pour approcher  $y_f$  (cf. Équation 3.9). On peut cependant définir  $\tilde{y}_g$  à partir des coefficients  $\alpha_l^g$  comme :

$$\tilde{y}_g(\mathbf{x}^*, t) = \bar{y}_f(t) + \sum_{l=1}^L \hat{\alpha}_l^g(\mathbf{x}^*) \phi_l^f(t) \quad (3.11)$$

avec  $\hat{\alpha}_l^g$  les estimateurs de krigeage approchant  $\alpha_l^g$  pour tout  $l \in [1, L]$ .  $\tilde{y}_g$  peut être vu comme un estimateur de  $y_f$  sur le niveau grossier, mais ce n'est pas un estimateur de  $y_g$ .

### Algorithme

Nous récapitulons ci-dessous les étapes de l'algorithme de construction d'un méta-modèle d'une sortie vectorielle en utilisant l'analyse en composantes principales (ACP) et le co-krigeage, dans un contexte multi-fidélité à deux niveaux.

1. Centrer  $y_f(\mathbf{D}_f, t)$  sur  $\bar{y}_f$ . On note  $(y_f(\mathbf{D}_f, t))_{cent}$  l'ensemble des réponses centrées.
2. Appliquer une ACP à  $(y_f(\mathbf{D}_f, t))_{cent}$  pour calculer  $\phi_l^f$  avec  $l \in [1, L]$ . On ne garde que les  $L$  premiers termes permettant d'expliquer 95% de la variance de  $(y_f(\mathbf{D}_f, t))_{cent}$ .
3. Pour  $l = 1, \dots, L$  et  $i = 1, \dots, n$  : calculer  $\alpha_l^f(\mathbf{x}_i) = \sum_{t=1}^T (y_f(\mathbf{x}_i, t) - \bar{y}_f(t)) \phi_l^f(t)$ .
4. Pour  $l = 1, \dots, L$  et  $i = 1, \dots, n$  : calculer  $\alpha_l^g(\mathbf{x}_i) = \sum_{t=1}^T y_g(\mathbf{x}_i, t) \phi_l^f(t)$ .



5. Pour  $l = 1, \dots, L$  : construire un modèle de co-krigeage multi-fidélité de  $\alpha_l^f$  à partir de  $(\mathbf{x}_i, \alpha_l^f(\mathbf{x}_i))_{\mathbf{x}_i \in \mathbf{D}_f}$  et  $(\mathbf{x}_i, \alpha_l^g(\mathbf{x}_i))_{\mathbf{x}_i \in \mathbf{D}_g}$ .
6. Construire un méta-modèle de  $y_f(\mathbf{x}, t)$  en utilisant les estimateurs  $\hat{\alpha}_l^f$  selon l'Equation 3.10.

### Remarques

Lors du calcul des coefficients  $\alpha_l^g$ , les réponses du niveau grossier n'ont pas besoin d'être préalablement centrées avant leur projection sur la base  $\phi_l^f$ . En effet, soustraire la réponse moyenne du niveau grossier (ou bien celle du niveau fin) à  $y_g(\mathbf{x}, t)$  pour  $\mathbf{x} \in \mathbf{D}_g$  se traduit par l'ajout d'une constante sur les coefficients  $\alpha_l^g$ . Plus précisément, on obtient  $\alpha_l^g(x) + c_l$  pour tout  $\mathbf{x} \in \mathbf{D}_g$  avec  $c_l$  une constante dépendant de  $l$ . Cette constante est donc identique pour un ensemble  $\alpha_l^g(\mathbf{D}_g)$  donné. Cela change alors la réponse moyenne du niveau grossier lors du calcul du modèle de co-krigeage multi-fidélité, mais l'estimateur en résultant n'est pas modifié.

On note également que, pour appliquer la méthode proposée, il est nécessaire que les réponses  $y_f(\mathbf{x}, t)$  et  $y_g(\mathbf{x}, t)$  soient définies pour les mêmes temps ou positions. Prenons l'exemple d'un méta-modèle approchant des cartes de pression et plaçons-nous dans un cadre multi-fidélité défini par un changement de résolution de la grille réservoir. Il est alors nécessaire, pour pouvoir calculer les coefficients  $\alpha_l^g$ , de raffiner les cartes de pression simulées avec le modèle de réservoir grossier afin que leur résolution corresponde à celle des cartes simulées avec le modèle de réservoir fin. On remarque que le raffinement concerne la résolution de la grille, il n'implique pas nécessairement une mise à l'échelle des propriétés (cf. section 4.2.3).

Pour finir, la généralisation de cette approche à un nombre quelconque de niveaux de fidélité est directe. Il suffit de projeter les réponses des différents niveaux grossiers sur la base réduite calculée au niveau fin pour obtenir les coefficients de projection sur les différents niveaux grossiers. Toutefois, les performances et limites de cette méthode pour plus de deux niveaux de fidélité n'ont pas été étudiées au cours de cette thèse.

### Variance et validation croisée

Comme présenté précédemment dans le cadre simple fidélité, on peut étendre certains résultats du co-krigeage multi-fidélité à la méta-modélisation proposée pour les sorties vectorielles.

En notant respectivement  $\hat{s}_{f,l}^2$  et  $\hat{s}_{g,l}^2$  les variances sur les niveaux fin et grossier associées aux modèles de co-krigeage multi-fidélité des coefficients  $\alpha_l^f$ , on a l'expression suivante pour les variances  $\hat{u}_f^2$  et  $\hat{u}_g^2$  associées aux estimateurs  $\hat{y}_f$  et  $\tilde{y}_g$ , respectivement :

$$\hat{u}_f^2(\mathbf{x}^*, t) = \sum_{l=1}^L \hat{s}_{f,l}^2(\mathbf{x}^*) \left[ \phi_l^f(t) \right]^2 \quad (3.12)$$

et

$$\hat{u}_g^2(\mathbf{x}^*, t) = \sum_{l=1}^L \hat{s}_{g,l}^2(\mathbf{x}^*) \left[ \phi_l^f(t) \right]^2 \quad (3.13)$$

On peut également obtenir des expressions des prédictions et variances de validation croisée pour les deux niveaux, à partir des résultats de validation croisée des différents modèles de co-krigeage multi-fidélité approchant  $\alpha_l^f$ . On rappelle que les résultats de validation croisée sur le niveau grossier

s'obtiennent en considérant que l'observation  $\mathbf{x}_i \in \mathbf{D}_g$  est inconnue. Pour le niveau fin, on considère que l'observation  $\mathbf{x}_i \in \mathbf{D}_f$  est inconnue sur les deux niveaux de fidélité.

Sur le niveau fin, la prédiction de  $\hat{y}_f$  par validation croisée, notée  $\hat{y}_{-i}^f$ , s'obtient en remplaçant  $\hat{\alpha}_i^f$  par la prédiction  $\hat{\alpha}_{i,-i}^f$  dans l'Equation 3.10. La variance de validation croisée associée, notée  $\hat{u}_{f,-i}^2$ , s'obtient en remplaçant  $\hat{s}_{f,l}^2$  par  $\hat{s}_{f,l,-i}^2$  dans l'Equation 3.12.

Sur le niveau grossier, la prédiction de  $\tilde{y}_g$  par validation croisée, notée  $\tilde{y}_{g,-i}$ , s'obtient en remplaçant  $\hat{\alpha}_i^g$  par la prédiction  $\hat{\alpha}_{i,-i}^g$  dans l'Equation 3.11. La variance de validation croisée associée, notée  $\tilde{u}_{g,-i}^2$ , s'obtient en remplaçant  $\hat{s}_{g,l}^2$  par  $\hat{s}_{g,l,-i}^2$  dans l'Equation 3.13.

### 3.3 La méta-modélisation de la fonction objectif

Dans cette partie, nous nous intéressons à la méta-modélisation de la fonction objectif. Disposer d'un méta-modèle prédictif de la fonction objectif présente de nombreux avantages pour le calage d'historique. On peut s'en servir pour éliminer les paramètres non-influents en réalisant une analyse de sensibilité, pour adopter une approche probabiliste pour le calage, ou encore pour réduire le nombre de simulations nécessaires à la minimisation de la fonction objectif et ainsi accélérer le calage.

Le plus souvent, la méta-modélisation est directe, c'est-à-dire que le méta-modèle est construit en utilisant un ensemble de valeurs de la fonction objectif calculées à partir de résultats de simulations. Nous suggérons ici d'approcher la fonction objectif à partir des méta-modèles construits pour les sorties dynamiques intervenant dans son calcul. Ainsi, plutôt que de considérer un unique modèle de krigeage/co-krigeage multi-fidélité pour approcher cette fonction complexe, on considère un nombre important de méta-modèles approchant des propriétés moins complexes. On espère ainsi améliorer la méta-modélisation de la fonction objectif et réduire le nombre d'évaluations nécessaire à l'obtention d'un méta-modèle prédictif.

Toutes les sections de cette partie traitent successivement d'une application dans un cadre simple fidélité, puis multi-fidélité. On commence par présenter en section 3.3.1 l'approche classique pour la méta-modélisation de la fonction objectif. Ensuite, en section 3.3.2, nous décrivons en détail l'approche alternative que nous proposons pour la méta-modélisation de la fonction objectif. L'approche proposée admet également une expression de la variance sur l'estimateur de la fonction objectif, ainsi que des prédictions et variances issues de la validation croisée. Ces expressions sont importantes dans le cadre d'une planification séquentielle d'expériences (*cf.* Chapitre 5). Elles sont détaillées dans la section 3.3.3.

#### 3.3.1 Méta-modélisation directe de la fonction objectif

##### Méta-modélisation directe de la fonction objectif en simple fidélité

La fonction objectif est une fonction scalaire dépendant des paramètres incertains  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ . Considérons que l'on dispose de  $n$  simulations d'écoulement du modèle réservoir aux  $n$  points du plan d'expériences  $\mathbf{D}$ . On peut alors calculer les  $n$  valeurs correspondantes  $FO(\mathbf{D})$  à partir de l'ensemble des réponses dynamiques simulées  $y_k(\mathbf{D}, t)$  pour chaque propriété  $k \in [1, K]$ . Il est ensuite possible d'obtenir un méta-modèle de la fonction objectif par krigeage en utilisant  $(\mathbf{x}, FO(\mathbf{x}))_{\mathbf{x} \in \mathbf{D}}$ . On note  $FO^{dir}$  un tel méta-modèle. La notation *dir* indique que le méta-modèle est direct au sens où on le construit directement pour la fonction objectif.

### Méta-modélisation directe de la fonction objectif en multi-fidélité

On se place maintenant dans le cadre multi-fidélité à deux niveaux, et on se donne deux plans d'expériences imbriqués  $\mathbf{D}_f \subset \mathbf{D}_g$  pour lesquels les simulations d'écoulement sont réalisées sur les niveaux fin et grossier, respectivement. Il est alors possible de calculer la valeur de la fonction objectif pour les simulations au niveau fin (notée  $FO^f$ ), la valeur de la fonction objectif pour les simulations au niveau grossier (notée  $FO^g$ ), et d'en déduire un méta-modèle de co-krigeage multi-fidélité  $FO^{dir.f}$  de la fonction objectif au niveau fin. On note que la construction de ce méta-modèle dépend de  $FO^{dir.g}$ , le modèle de krigeage construit à partir des valeurs de  $FO^g$  sur  $\mathbf{D}_g$ . On remarque aussi que la généralisation de cette approche pour un nombre quelconque de niveaux de fidélité est immédiate.

### 3.3.2 Méta-modélisation vectorielle de la fonction objectif - méthode

Nous proposons dans cette section une méthode alternative pour la construction d'un méta-modèle de la fonction objectif. Elle consiste à substituer les données de production simulées  $y_t(\mathbf{x})$  dans l'Équation 3.1 par un méta-modèle les approchant.

#### Description de la méthode dans un cadre simple fidélité

On peut définir pour chaque propriété  $k \in [1, K]$  la fonction objectif  $FO_k$  associée :

$$FO_k(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \sum_{t=1}^{T(k)} \left( \frac{y_k(\mathbf{x}, t) - d_{kt}^{obs}}{\sigma_{kt}} \right)^2 \quad (3.14)$$

Il est alors possible de construire un méta-modèle de  $FO_k$  en remplaçant la propriété simulée  $y_k(\mathbf{x}, t)$  par le méta-modèle simple fidélité (Équation 3.5) combinant ACP et krigeage. L'estimateur  $\widehat{FO}_k^{vec}$  associé s'écrit alors :

$$\widehat{FO}_k^{vec}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \sum_{t=1}^{T(k)} \left( \frac{\bar{y}_k(t) + \sum_{l=1}^{L(k)} \hat{\alpha}_{kl}(\mathbf{x}) \phi_{kl}(t) - d_{kt}^{obs}}{\sigma_{kt}} \right)^2 \quad (3.15)$$

En répétant cette procédure pour l'ensemble des propriétés, on obtient un méta-modèle  $FO^{vec}$  approchant la fonction objectif et ayant pour estimateur :

$$\begin{aligned} \widehat{FO}^{vec}(\mathbf{x}) &= \sum_{k=1}^K \omega_k \widehat{FO}_k^{vec}(\mathbf{x}) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^K \omega_k \sum_{t=1}^{T(k)} \left( \frac{\bar{y}_k(t) + \sum_{l=1}^{L(k)} \hat{\alpha}_{kl}(\mathbf{x}) \phi_{kl}(t) - d_{kt}^{obs}}{\sigma_{kt}} \right)^2 \end{aligned} \quad (3.16)$$

#### Extension au cadre multi-fidélité

De la même manière, il est possible d'estimer les fonctions objectifs  $FO_k$  au niveau fin à partir des méta-modèles multi-fidélité des propriétés correspondantes. On obtient alors les estimateurs suivants :

$$\widehat{FO}_k^{vec,f}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \sum_{t=1}^{T(k)} \left( \frac{\bar{y}_k^f(t) + \sum_{l=1}^{L(k)} \hat{\alpha}_{kl}^f(\mathbf{x}) \phi_{kl}^f(t) - d_{kt}^{obs}}{\sigma_{kt}} \right)^2 \quad (3.17)$$

On en déduit un méta-modèle multi-fidélité  $FO^{vec,f}$  de la fonction objectif au niveau fin dont l'estimateur est donné par :

$$\widehat{FO}^{vec,f}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^K \omega_k \sum_{t=1}^{T(k)} \left( \frac{\bar{y}_k^f(t) + \sum_{l=1}^{L(k)} \hat{\alpha}_{kl}^f(\mathbf{x}) \phi_{kl}^f(t) - d_{kt}^{obs}}{\sigma_{kt}} \right)^2 \quad (3.18)$$

On peut également définir un méta-modèle  $FO^{vec,g}$  de la fonction objectif au niveau grossier en utilisant l'estimateur  $\tilde{y}_g$  (Equation 3.11) pour approcher chaque sortie  $y_k^f$ . L'estimateur associé à ce méta-modèle s'écrit :

$$\widehat{FO}^{vec,g}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^K \omega_k \sum_{t=1}^{T(k)} \left( \frac{\bar{y}_k^f(t) + \sum_{l=1}^{L(k)} \hat{\alpha}_{kl}^g(\mathbf{x}) \phi_{kl}^f(t) - d_{kt}^{obs}}{\sigma_{kt}} \right)^2 \quad (3.19)$$

On remarque que  $\widehat{FO}^{vec,f}$  et  $\widehat{FO}^{dir,f}$  sont tous les deux des estimateurs de  $FO^f$ , la fonction objectif calculée avec les réponses du niveau fin. En revanche, contrairement à  $\widehat{FO}^{dir,g}$ ,  $\widehat{FO}^{vec,g}$  n'est pas un estimateur de  $FO^g$ . C'est un estimateur de  $FO^f$  sur le niveau grossier défini par les coefficients  $\alpha_l^g$ .

### 3.3.3 Méta-modélisation vectorielle de la fonction objectif - variance et validation croisée

Nous présentons dans cette section les expressions de la variance et les résultats de validation croisée pour la méta-modélisation vectorielle de la fonction objectif. Ces différents résultats sont importants dans le cadre d'une utilisation de cette approche au sein des méthodes de planification séquentielle d'expériences que nous proposons plus loin dans le Chapitre 5. Les notations employées sont semblables à celles utilisées en section 3.2.2 pour la version simple fidélité ou en section 3.2.3 pour la version multi-fidélité.

La méta-modélisation proposée pour la fonction objectif en simple fidélité repose sur la construction de modèles de krigeage approchant les coefficients  $\alpha_{kl}$  pour tout  $k \in [1, K]$  et  $l \in [1, L]$  (Équation 3.16). Ces modèles de krigeage donnent l'expression d'un estimateur de krigeage  $\hat{\alpha}_{kl}$  ainsi que de la variance  $\hat{s}_{kl}^2$  associée à cet estimateur. Par ailleurs, on peut également calculer les prédictions issues de la validation croisée lorsque l'observation  $\mathbf{x}_i \in \mathbf{D}$  est supposée inconnue. On note ainsi  $\hat{\alpha}_{kl,-i}$  l'estimateur de validation croisée et  $\hat{s}_{kl,-i}$  la variance associée. A partir de l'ensemble des estimateurs  $\hat{\alpha}_{kl}$ ,  $\hat{s}_{kl}^2$ ,  $\hat{\alpha}_{kl,-i}$  et  $\hat{s}_{kl,-i}$ , on peut exprimer la variance associée à l'estimateur  $\widehat{FO}^{vec}$ , ainsi que des prédictions de la fonction objectif par validation croisée.

Le raisonnement est identique en multi-fidélité. En effet, la méta-modélisation de la fonction objectif repose alors sur la construction de modèles de co-krigeage multi-fidélité approchant les coefficients  $\alpha_{kl}$ . On note  $\hat{\alpha}_{kl}^f$  et  $\hat{\alpha}_{kl}^g$  les estimateurs de ces modèles ainsi que  $\hat{s}_{f,kl}^2$  et  $\hat{s}_{g,kl}^2$  les variances associées pour les niveaux fin et grossier, respectivement. On note également  $\hat{\alpha}_{kl,-i}^f$  et  $\hat{\alpha}_{kl,-i}^g$  les estimateurs de validation croisée, et  $\hat{s}_{f,kl,-i}^2$ ,  $\hat{s}_{g,kl,-i}^2$  les variances associées. Par ailleurs, on rappelle que les résultats de validation croisée sur le niveau grossier s'obtiennent en considérant que l'observation  $\mathbf{x}_i \in \mathbf{D}_g$  est inconnue. Pour le niveau fin, on considère que l'observation  $\mathbf{x}_i \in \mathbf{D}_f$  est inconnue sur les deux niveaux de fidélité.

### Expression de la variance en simple fidélité

Pour pouvoir calculer une expression de la variance associée à l'estimateur  $\widehat{FO}^{vec}$  (Équation 3.16), on fait l'hypothèse que les méta-modèles  $FO_k^{vec}$  de la fonction objectif pour une propriété donnée  $k \in [1, K]$  sont indépendants. On suppose donc que la fonction objectif pour une propriété donnée n'est pas corrélée avec la fonction objectif pour une autre propriété. La variance de la somme est alors la somme des variances et on peut écrire :

$$\text{Var}(FO^{vec}(\mathbf{x})) = \text{Var}\left(\frac{1}{2} \sum_{k=1}^K \omega_k FO_k^{vec}(\mathbf{x})\right) = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^K \omega_k^2 \text{Var}(FO_k^{vec}(\mathbf{x})) \quad (3.20)$$

En pratique, une telle hypothèse est fautive car il est vraisemblable que l'on observe des corrélations entre certaines fonctions  $FO_k$ . Toutefois, ces corrélations sont inconnues, dépendantes du cas d'étude, et souvent négligeables. On peut donc considérer que la somme des variances de  $FO_k^{vec}$  pour toutes les propriétés  $k \in [1, K]$  est une approximation raisonnable de la variance de  $FO^{vec}$ . On obtient finalement :

$$\text{Var}(FO_k^{vec}(\mathbf{x})) = 2 \sum_{i=1}^{T(k)} \sum_{j=1}^{T(k)} \frac{\sum_{l=1}^{L(k)} \phi_{kli} \phi_{klj} \hat{s}_{kl}^2(\mathbf{x})}{\sigma_{ki} \sigma_{kj}} \left( \sum_{l=1}^{L(k)} \phi_{kli} \phi_{klj} \hat{s}_{kl}^2(\mathbf{x}) + 2\mu_{ki} \mu_{kj} \right) \quad (3.21)$$

avec

$$\mu_{ki} = \left( \bar{\mathbf{y}}_{ki} + \sum_{l=1}^{L(k)} \phi_{kli} \hat{\alpha}_{kl} - d_{kt}^{obs} \right) \quad (3.22)$$

### Expression de la variance en multi-fidélité

Comme précédemment, l'expression de la variance de  $FO^{vec,f}$  est prise égale à la somme pondérée des variances de  $FO_k^{vec,f}$  pour toutes les propriétés  $k \in [1, K]$ . On peut alors montrer que :

$$\text{Var}(FO_k^{vec,f}(\mathbf{x})) = 2 \sum_{i=1}^{T(k)} \sum_{j=1}^{T(k)} \frac{\sum_{l=1}^{L(k)} \phi_{kli}^f \phi_{klj}^f \hat{s}_{f,kl}^2(\mathbf{x})}{\sigma_{ki} \sigma_{kj}} \left( \sum_{l=1}^{L(k)} \phi_{kli}^f \phi_{klj}^f \hat{s}_{f,kl}^2(\mathbf{x}) + 2\mu_{ki}^f \mu_{kj}^f \right) \quad (3.23)$$

avec

$$\mu_{ki}^f = \left( \bar{\mathbf{y}}_{ki}^f + \sum_{l=1}^{L(k)} \phi_{kli}^f \hat{\alpha}_{kl}^f - d_{kt}^{obs} \right) \quad (3.24)$$

De façon similaire, la variance de  $FO^{vec,g}$  peut être calculée par sommation des variances de  $FO_k^{vec,g}$  :

$$\text{Var}(FO_k^{vec,g}(\mathbf{x})) = 2 \sum_{i=1}^{T(k)} \sum_{j=1}^{T(k)} \frac{\sum_{l=1}^{L(k)} \phi_{kli}^g \phi_{klj}^g \hat{s}_{g,kl}^2(\mathbf{x})}{\sigma_{ki} \sigma_{kj}} \left( \sum_{l=1}^{L(k)} \phi_{kli}^g \phi_{klj}^g \hat{s}_{g,kl}^2(\mathbf{x}) + 2\mu_{ki}^g \mu_{kj}^g \right) \quad (3.25)$$

avec

$$\mu_{ki}^g = \left( \bar{y}_{ki} + \sum_{l=1}^{L(k)} \phi_{kli}^f \hat{\alpha}_{kl}^g - d_{kt}^{obs} \right) \quad (3.26)$$

### Validation croisée en simple fidélité et multi-fidélité

La prédiction par validation croisée associée à  $FO^{vec}$  est notée  $\widehat{FO}_{-i}^{vec}$ . Son expression est obtenue en remplaçant  $\hat{\alpha}_{kl}$  par  $\hat{\alpha}_{kl,-i}$  dans l'Equation 3.16. La variance correspondant à cette prédiction est notée  $\text{Var}(FO_{-i}^{vec})$ . Elle est obtenue en remplaçant  $\hat{s}_{kl}^2$  par  $\hat{s}_{kl,-i}^2$  et  $\hat{\alpha}_{kl}$  par  $\hat{\alpha}_{kl,-i}$  dans l'Équation 3.21.

En multi-fidélité, la prédiction par validation croisée associée à  $FO^{vec,f}$  est notée  $\widehat{FO}_{-i}^{f,vec}$ . Son expression est obtenue en remplaçant  $\hat{\alpha}_{kl}^f$  par  $\hat{\alpha}_{kl,-i}^f$  dans l'équation 3.18. La variance correspondant à cette prédiction est notée  $\text{Var}(FO_{-i}^{f,vec})$ . Elle est obtenue en remplaçant  $\hat{s}_{f,kl}^2$  par  $\hat{s}_{f,kl,-i}^2$  et  $\hat{\alpha}_{kl}^f$  par  $\hat{\alpha}_{kl,-i}^f$  dans l'Équation 3.23.

Finalement, la prédiction par validation croisée associée à  $FO^{vec,g}$  est notée  $\widehat{FO}_{-i}^{g,vec}$ . Son expression est obtenue en remplaçant  $\hat{\alpha}_{kl}^g$  par  $\hat{\alpha}_{kl,-i}^g$  dans l'équation 3.19. La variance correspondant à cette prédiction est notée  $\text{Var}(FO_{-i}^{g,vec})$ . Elle est obtenue en remplaçant  $\hat{s}_{g,kl}^2$  par  $\hat{s}_{g,kl,-i}^2$  et  $\hat{\alpha}_{kl}^g$  par  $\hat{\alpha}_{kl,-i}^g$  dans l'Équation 3.25.



---

## CHAPITRE 4

# Etude de cas : PUNQ

*Ce chapitre a fait l'objet d'un article publié dans Computational Geosciences [Thenon et al., 2016].*

Afin de tester les méthodologies proposées pour la méta-modélisation dans des cadres simple et multi-fidélité, un cas multi-fidélité à deux niveaux inspiré du « benchmark » PUNQ-S3 [Floris et al., 2001] a été mis en place. Plus précisément, il est constitué de deux modèles réservoir qui diffèrent par la résolution de leur maillage. Le but de l'étude menée sur ce cas est la comparaison des approches simple et multi-fidélité pour la construction de méta-modèles. Les différentes méthodes pour la méta-modélisation (Chapitre 2), notamment pour l'approximation de sorties vectorielles (Chapitre 3), ont été appliquées à différentes sorties.

La partie 4.1 de ce chapitre décrit le cas d'étude, puis la procédure mise en place pour comparer les méta-modèles construits en simple et multi-fidélité. On s'intéresse en particulier à la prédictivité des méta-modèles par rapport au temps de calcul requis pour leur construction. Les résultats pour la méta-modélisation de sorties vectorielles (propriétés du réservoir, aux puits et spatiales) sont regroupés et discutés dans la partie 4.2. Les résultats concernant la méta-modélisation de la fonction objectif sont ensuite présentés et discutés dans la partie 4.3. Une application au calage d'historique est finalement présentée dans la partie 4.4.

### 4.1 Description du cas PUNQ multi-fidélité

Nous appelons PUNQ ou PUNQ multi-fidélité ce cas d'étude. Ce cas s'inspire de PUNQ-S3, un cas référence en ingénierie de réservoir présenté dans la section 4.1.1. Le cas PUNQ est constitué de deux modèles réservoir : PUNQ fin et PUNQ grossier. La construction de ces deux modèles est détaillée dans la section 4.1.2. La section 4.1.3 est ensuite dédiée au contrôle de ce cas d'étude à travers une comparaison des réponses dynamiques de PUNQ fin et grossier. Les différentes expériences menées sur le cas PUNQ sont décrites dans la section 4.1.4, ainsi que les paramètres considérés comme incertains.

#### 4.1.1 PUNQ-S3 : un cas référence

Le cas d'étude PUNQ s'inspire du cas PUNQ-S3, un modèle synthétique construit à partir d'un vrai champ exploité par Elf Aquitaine. Ce cas est souvent utilisé dans la littérature comme cas d'application pour tester des méthodologies pour le calage d'historique. Il a été défini dans le cadre d'un projet européen visant à quantifier les incertitudes sur les prévisions de production [Floris et al., 2001]. L'ensemble des données nécessaires à la construction du cas PUNQ-S3 est disponible à l'adresse suivante: <http://www.imperial.ac.uk/earth-science/research/research-groups/perm/standard-models/>.



## Structure du modèle

Le modèle PUNQ-S3 est défini sur une grille constituée de  $19 \times 28 \times 5$  mailles, dont 1761 sont actives. Ces mailles mesurent 180 mètres selon les axes  $X$  et  $Y$  et sont d'épaisseur variable ( $\sim 5$  mètres). Le champ est délimité à l'est et au sud par une faille imperméable et il est connecté au nord et à l'ouest à un aquifère. La structure de son toit est visible sur la Figure 4.1. Il s'agit d'un dôme dont la partie supérieure est initialement remplie de gaz.

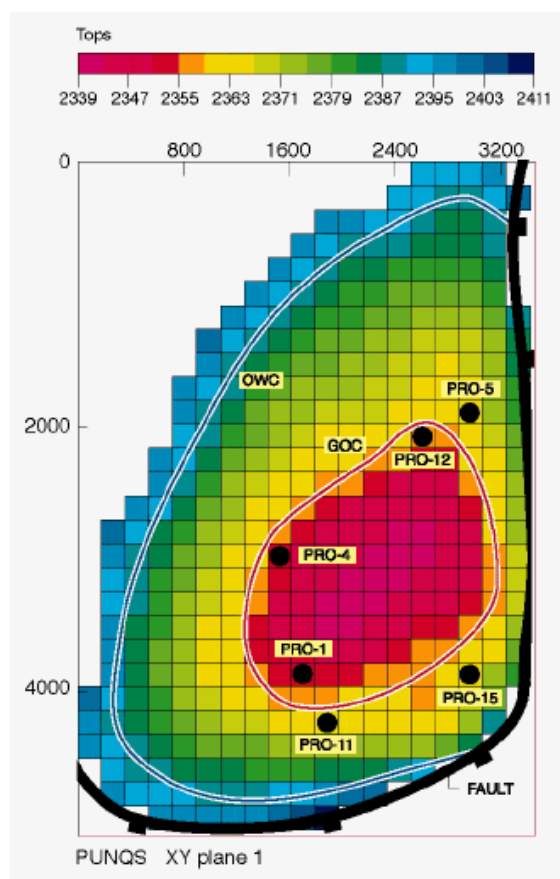


Figure 4.1 : Carte du toit et position des puits (figure adaptée de [Florin et al., 2001]).

## Géologie

Le réservoir est composé de 5 couches correspondant à des sédiments issus d'un environnement de dépôt deltaïque en plaine côtière. Les couches 1, 3 et 5 sont constituées de chenaux fluviaux au milieu de mudstones venant du lit majeur. La couche 2 correspond à de l'argile d'origine marine ou lagunaire contenant quelques dépôts distaux de barres d'embouchure. La couche 4 est faite de sédiments lagunaires du delta ou de barres d'embouchure enrobées d'argile lagunaire.

Les couches 1, 3 et 5 contiennent des bancs de sable très poreux ( $\phi > 20\%$ ), orientés entre  $110^\circ$  et  $170^\circ$  Sud-Est. Ces bancs d'environ 800 mètres de long sont entourés d'une matrice argileuse très peu poreuse ( $\phi < 5\%$ ). Leur longueur et espacement varient selon les couches comme précisé dans le Tableau 4.1.

Dans la couche 2 se trouve de l'argile marine ou lagunaire contenant quelques dépôts de barres d'embouchure distales. Cela se traduit par quelques touches irrégulières de sédiments peu poreux ( $\phi > 5\%$ ) parmi des sédiments argileux très peu poreux ( $\phi < 5\%$ ).

La couche 4 contient des sédiments de barres d'embouchure ou du delta lagunaire dans une matrice d'argile lagunaire. On peut s'attendre à trouver des zones d'écoulement de formes lobées, avec une porosité intermédiaire ( $\phi \sim 15\%$ ) au sein d'une matrice très peu poreuse ( $\phi < 5\%$ ). Ces formes lobées peuvent être modélisées par des ellipses dont l'axe le plus long est perpendiculaire au paléocourant (qui est orienté  $110^\circ$  et  $170^\circ$  Sud-Est).

Couche	$\phi$ moyen (%)	Faciès	Longueur (m)	Espacement (km)
1	14	Chenal fluviatile	800	2-5
2	8	Argile lagunaire	-	-
3	14	Chenal fluviatile	1000	2-5
4	10	Barre d'embouchure	500-5000	10
5	14	Chenal fluviatile	2000	4-10

Tableau 4.1 : La porosité moyenne, le faciès sédimentaire et les estimations de la longueur et de l'espacement des principales zones réservoir par couche de PUNQ-S3.

## Exploitation

Le réservoir est produit par 6 puits producteurs localisés autour du contact gaz-huile : PRO-1, PRO-4, PRO-5, PRO-11, PRO-12 et PRO-15 (*cf.* Figure 4.1). Le modèle ne comporte pas de puits injecteur car l'aquifère qui le borde exerce une forte pression sur le réservoir. Le planning de production original [Floris et al., 2001] s'étend sur 8 années. Il est constitué d'une première année de mise en production, suivie de 3 ans d'arrêt, puis de plusieurs années de production interrompues annuellement pendant 2 semaines pour des tests. Des objectifs de production d'huile communs aux 6 puits sont définis. Ils sont de 100, 200, 100 puis  $50 \text{ m}^3/\text{jour}$  lors de la première année, puis de  $150 \text{ m}^3/\text{jour}$  le reste du temps. Cependant, si la pression au fond du puits atteint la pression limite de 120 bar, l'objectif de production est annulé pour être remplacé par une production à la pression constante de 120 bar.

Nous utilisons par la suite un planning de production similaire étendu à 16,5 années. L'unique différence avec le planning original est que l'objectif de production par puits, en dehors de la phase de test, est ramené à  $100 \text{ m}^3/\text{jour}$ . Ce planning de production est résumé sur la Figure 4.2.

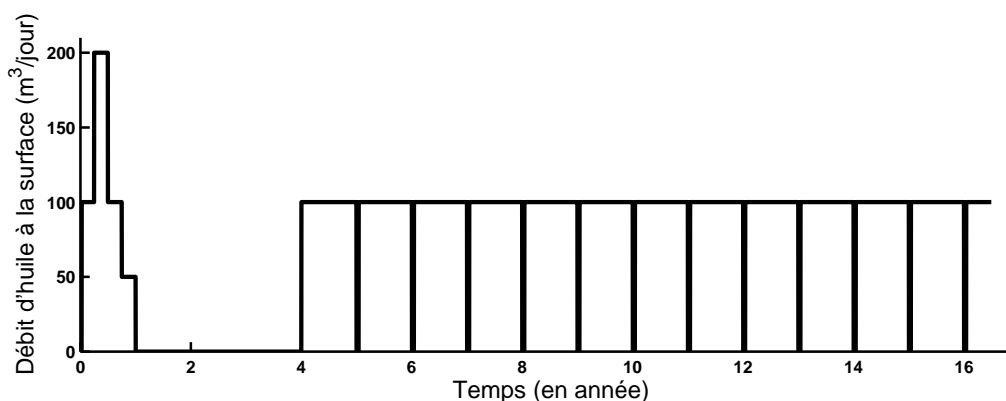


Figure 4.2 : Planning de production par puits utilisé pour le cas d'étude PUNQ.

### 4.1.2 Construction d'un cas PUNQ multi-fidélité

Si le cas PUNQ-S3 est constitué d'un nombre de mailles relativement faible comparé à un cas réel, ce n'est toutefois pas un cas d'étude simple. En effet, c'est un cas triphasique (eau, huile et gaz), défini en 3 dimensions, pour lequel le comportement des réponses dynamiques est relativement complexe à cause des contraintes de production définies aux puits. Néanmoins, il est rapide à simuler grâce à son nombre réduit de mailles. Il est donc pratique pour tester des méthodes de méta-modélisation. Afin de pouvoir étendre les tests à un cadre multi-fidélité, nous avons construit un cas multi-fidélité à partir du cas PUNQ-S3.

#### Définition des niveaux de fidélité

Nous considérons ici deux niveaux de fidélité correspondant à deux niveaux de résolution pour la grille du modèle.

1. Le « modèle grossier » possède une grille identique à celle du cas PUNQ-S3 d'origine. Elle contient  $19 \times 28 \times 5$  mailles dont 1761 sont actives. On note ce modèle PUNQ grossier.
2. Le « modèle fin » possède une grille qui est obtenue via un raffinement par  $3 \times 3$  selon les axes X et Y de la grille de PUNQ grossier. Elle contient donc  $57 \times 84 \times 5$  mailles dont 15849 sont actives. On note ce modèle PUNQ fin.

Une simulation d'écoulement sur le modèle grossier va donner des réponses sur le niveau de fidélité grossier qu'on appellera aussi « réponses grossières ». De même, une simulation d'écoulement lancée sur le modèle fin va donner des réponses sur le niveau de fidélité fin, aussi appelées « réponses fines ». On note qu'une simulation d'écoulement utilisant le planning de production de la Figure 4.2 dure en moyenne 3 minutes pour PUNQ fin et 10 secondes pour PUNQ grossier.

#### Construction de PUNQ fin

Le modèle grossier ne diffère du modèle d'origine PUNQ-S3 que par la distribution des propriétés pétrophysiques (porosité et perméabilité) dans la grille. Le fichier de simulation utilisé pour PUNQ grossier est donc le même que pour PUNQ-S3 (après traduction du simulateur d'écoulement Eclipse [Eclipse, 2016] vers PumaFlow [PumaFlow, 2016], le simulateur d'écoulement développé par IFPEN).

Le modèle PUNQ fin est, quant à lui, construit à partir des fichiers de simulation de PUNQ grossier. Diverses adaptations ont été nécessaires pour obtenir un modèle cohérent:

- Changement du nombre de mailles selon X et Y ( $19 \times 28 \rightarrow 57 \times 84$ ).
- Changement des dimensions des mailles selon X et Y (180 m  $\rightarrow$  60 m).
- Mise à jour des coordonnées des puits.
- Raffinement des mailles inactives (1 maille inactive  $\rightarrow$  9 mailles inactives).
- Raffinement des coefficients définissant les flux des aquifères (le coefficient d'une maille grossière est copié sur les 9 mailles fines associées).
- Raffinement de la profondeur du toit du réservoir (interpolation linéaire).
- Raffinement de l'épaisseur des mailles (interpolation linéaire).

On remarque que les puits dans le modèle PUNQ-S3 sont verticaux et passent par le centre des mailles. Le raffinement considéré pour la grille de PUNQ fin ( $3 \times 3$  selon les axes X et Y) implique que la mise à jour des coordonnées des puits est triviale. En effet, sur la grille fine le puits se positionne sur la maille fine centrale, obtenue suite au raffinement de la maille grossière où se situe ce puits.

### Calcul des propriétés pétrophysiques au niveau fin

Pour obtenir des modèles fin et grossier cohérents, les propriétés pétrophysiques ont d'abord été simulées sur le modèle fin, puis mises à l'échelle sur le modèle grossier. Les propriétés pétrophysiques ont été simulées sur l'échelle fine en s'inspirant du modèle d'origine PUNQ-S3. La porosité a été générée indépendamment pour chacune des couches à l'aide de la méthode FFT-MA (*FFT Moving Average*) introduite par [Le Ravalec et al., 2000]. Les réalisations sont ensuite conditionnées en réalisant un double krigeage suivant la pratique usuelle décrite dans [Chilès and Delfiner, 1999]. Les valeurs utilisées pour le conditionnement aux puits sont données dans le Tableau 4.2.

Couche	PRO-1	PRO-4	PRO-5	PRO-11	PRO-12	PRO-15
1	0,08	0,22	0,23	0,08	0,08	0,28
2	0,06	0,06	0,07	0,09	0,11	0,10
3	0,10	0,11	0,21	0,24	0,10	0,19
4	0,15	0,16	0,15	0,13	0,18	0,20
5	0,24	0,21	0,09	0,15	0,24	0,28

Tableau 4.2 : Valeurs de porosité aux puits.

La distribution pour la perméabilité horizontale suit une loi log-normale. Les réalisations de perméabilité sont générées par cosimulation en considérant la porosité comme donnée secondaire. On utilise pour cela la méthode SGSim (*Sequential Gaussian Simulation*) [Journel and Deutsch, 1998]. Le coefficient de corrélation entre la porosité et le log de la perméabilité horizontale  $K_h$  est de 0,8. La perméabilité verticale  $K_v$  est prise égale à :  $K_v = 0,1K_h$ .

Les valeurs choisies pour les différents paramètres, ainsi que les caractéristiques des variogrammes utilisés durant cette procédure, sont spécifiées par couche dans le Tableau 4.3. Les réalisations en porosité et perméabilité sont finalement tronquées selon les valeurs limites données dans le Tableau 4.4. On remarque que les valeurs des Tableaux 4.2, 4.3 et 4.4 sont toutes semblables ou identiques aux valeurs fournies pour le cas de référence PUNQ-S3.

Couche	1	2	3	4	5
$\phi$ moyen	0,14	0,08	0,14	0,10	0,14
$\phi$ écart-type	0,11	0,04	0,11	0,06	0,11
$\log_{10}(K_h)$ moyen	2	1,4	2	1,6	2
$\log_{10}(K_h)$ écart-type	1	0,6	1	0,8	1
Portée (m)	1000	750	1500	750	1250
Ratio d'anisotropie	3,5	1	4	2	3
Azimut (degrés)	-60	-60	-45	60	-30

Tableau 4.3 : Caractéristiques des propriétés pétrophysiques par couche.

Couche	$\phi$	$K_h$ (mD)	$K_v$ (mD)
1-3-5	0,01 – 0,3	0,1 – 1000	0,01 – 100
2	0,01 – 0,17	0,1 – 200	0,01 – 20
4	0,01 – 0,22	0,1 – 500	0,01 – 50

Tableau 4.4 : Bornes min et max imposées aux propriétés pétrophysiques par couche.

### Mise à l'échelle des propriétés pétrophysiques sur le niveau grossier

A partir des réalisations de perméabilité et porosité générées sur l'échelle fine, nous avons peuplé le modèle grossier. Comme illustré par la Figure 4.3, la mise à l'échelle correspond ici au regroupement de neuf mailles fines au sein d'une même maille grossière.

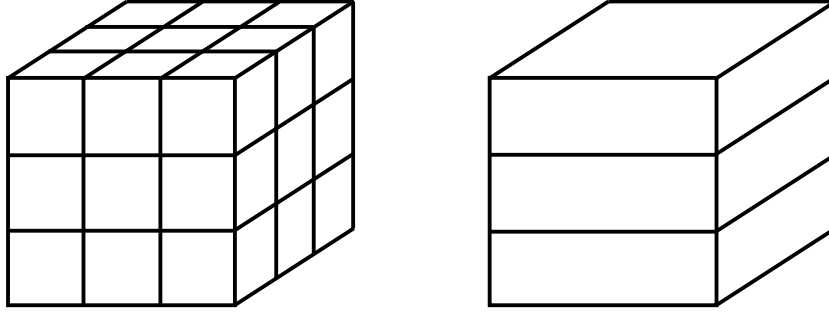


Figure 4.3 : A gauche, un ensemble de mailles du niveau fin. A droite, les mailles équivalentes à ce même ensemble sur le niveau grossier.

Pour la suite, on se place dans une maille grossière qui inclut les mailles fines d'indices  $(i, j, k)$  avec  $i = 1, \dots, N_x$ ,  $j = 1, \dots, N_y$  et  $k = 1, \dots, N_z$ . Dans notre cas,  $N_x = N_y = 3$  et  $N_z = 1$ , comme illustré par la Figure 4.3.

La porosité équivalente  $\phi_{eq}$  sur cette maille est calculée par moyenne arithmétique:

$$\phi_{eq} = \frac{1}{N_x N_y N_z} \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} \sum_{k=1}^{N_z} \phi_{ijk} \quad (4.1)$$

La perméabilité équivalente est calculée par une technique s'inspirant des travaux de Cardwell et Parsons. Ces derniers ont montré dans [Cardwell and Parsons, 1945] que pour un réservoir composé de sable hétérogène, la perméabilité équivalente dans une direction donnée (*e.g.* selon  $x$ ) peut être encadrée de la manière suivante:

$$M_g = \frac{1}{N_y N_z} \sum_{j=1}^{N_y} \sum_{k=1}^{N_z} \frac{N_x}{\sum_{i=1}^{N_x} \frac{1}{K_{xijk}}} \leq K_{x_{eq}} \leq \frac{N_x}{\sum_{i=1}^{N_x} \frac{N_y N_z}{\sum_{j=1}^{N_y} \sum_{k=1}^{N_z} K_{xijk}}} = M_d \quad (4.2)$$

$M_g$  est une moyenne arithmétique de moyennes harmoniques et  $M_d$  une moyenne harmonique de moyennes arithmétiques. En pratique,  $M_g$  et  $M_d$  prennent des valeurs très proches. On peut alors faire l'approximation suivante:

$$K_{x_{eq}} \approx \sqrt{M_g M_d} \quad (4.3)$$

$K_{y_{eq}}$  et  $K_{z_{eq}}$  peuvent être calculées de la même manière. Dans notre cas,  $N_z = 1$  et le calcul de  $K_{z_{eq}}$  revient donc à prendre la moyenne arithmétique. De plus, il faut noter qu'avec cette méthode,  $K_{x_{eq}} \neq K_{y_{eq}}$  au niveau grossier alors que  $K_x = K_y = K_h$  au niveau fin.

Afin de vérifier le bon déroulement de la mise à l'échelle, les cartes de porosité et perméabilité ont été comparées pour chaque couche sur les deux maillages. Des exemples de réalisations mises à l'échelle sont représentés sur la Figure 4.4. Elles correspondent à la couche n°3 du réservoir.

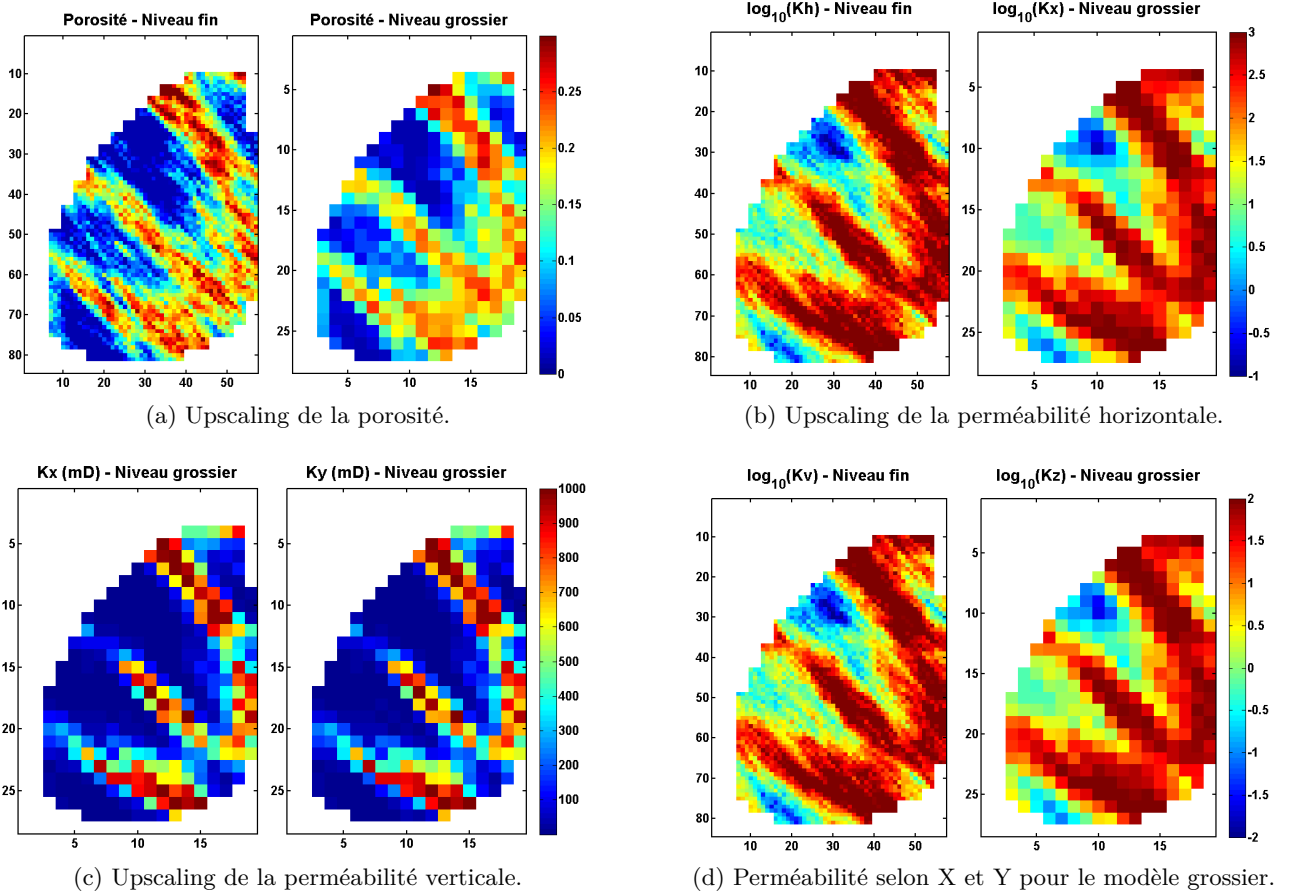


Figure 4.4 : Exemple de mise à l'échelle (*upscaling*) pour la couche n°3.

On observe que la mise à l'échelle des propriétés pétrophysiques pour la couche n°3 donne des réalisations cohérentes entre les niveaux fin et grossier: les principales tendances se retrouvent. Par ailleurs, on remarque que les résultats sont proches entre  $K_x$  et  $K_z$  au niveau grossier (b)-(c). Les différences entre  $K_x$  et  $K_y$  au niveau grossier (d) semblent également très faibles. Elles peuvent néanmoins avoir un impact non négligeable sur les réponses dynamiques.

### 4.1.3 Comparaison des modèles PUNQ fin et grossier

Chaque étape de la construction de notre cas étude a fait l'objet de vérifications, notamment lors de la construction du modèle fin, de la simulation des propriétés pétrophysiques et de leur mise à l'échelle. Ces vérifications, généralement visuelles, permettent de s'assurer du bon déroulement du processus de

construction du cas d'étude. Une fois construit, il est également nécessaire de s'assurer de la bonne cohérence entre les réponses dynamiques simulées sur les niveaux fin et grossier. En effet, l'utilisation de la méta-modélisation multi-fidélité ne peut être intéressante que si la réponse d'intérêt du niveau grossier apporte des informations sur la réponse au niveau fin. Il est donc nécessaire d'observer une certaine corrélation entre les réponses dynamiques du modèle fin et du modèle grossier.

Nous présentons et comparons les réponses dynamiques suivantes : le cumulé d'huile, les débits d'huile, la pression au fond de puits, le rapport des volumes gaz/huile et la fraction d'eau. On remarque que ces réponses sont issues de simulations d'écoulement sur PUNQ fin et grossier en réponse au schéma de production présenté par la Figure 4.2. A ce stade, aucun paramètre incertain n'a été défini sur ces modèles. Les réponses sur PUNQ fin correspondent ainsi à celles du modèle de référence que l'on considère par la suite (*cf.* section 4.1.4). De plus, le cumulé d'huile et les débits d'huile mis à part, ces réponses fines sont les réponses dynamiques de référence considérées plus loin dans le calcul de la fonction objectif (*cf.* partie 4.3).

### Le cumulé d'huile (CUMO)

Le cumulé d'huile ou cumulé de production est le volume total d'huile produit, depuis la mise en production, aux conditions de pression et température standards. Il est représenté sur la Figure 4.5. On observe que les cumulés d'huile sont quasiment identiques pour les deux modèles fin et grossier. C'est un résultat peu surprenant car le même historique de production à débit constant est considéré dans les deux cas. Les faibles différences entre ces deux cumulés peuvent être davantage étudiées en regardant les débits d'huile aux puits sur la Figure 4.6.

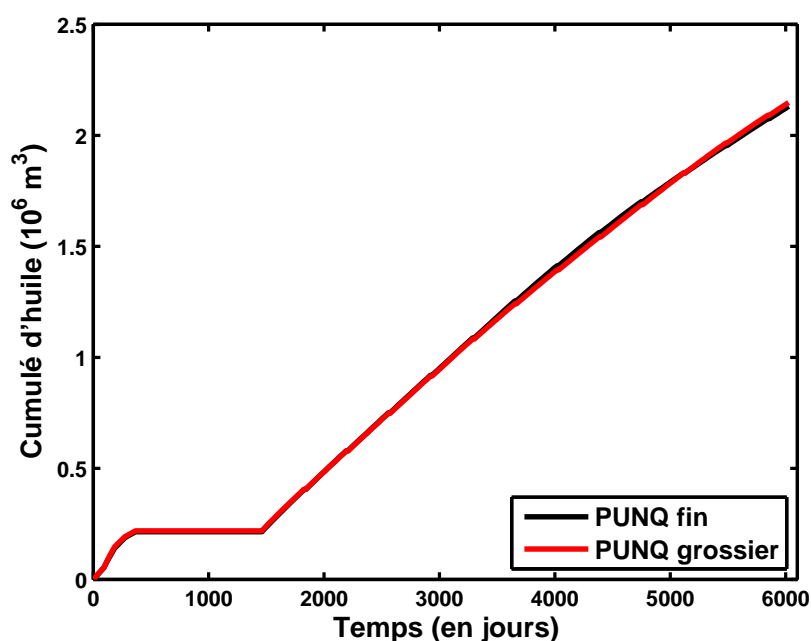


Figure 4.5 : Cumulé d'huile pour le cas de référence et le cas grossier associé.

### Le débit d'huile aux puits (QOIL)

Le débit d'huile est le volume d'huile que l'on récupère à un puits sur une journée aux conditions de pression et température standards. L'historique de production fixe ce débit à 100 m<sup>3</sup>/jour. Cependant, on remarque sur la Figure 4.6 que cet objectif n'est pas toujours respecté. Cela peut se produire lorsque

la pression supportant la production n'est pas assez forte, on doit alors produire à pression constante (PRO-15). Cela peut aussi arriver lorsque la part en eau et en gaz dans la production devient trop importante. Dans ce second cas, l'objectif de production d'huile ne peut plus être atteint sans passer sous la pression limite de 120 bars (PRO-1, PRO-4, PRO-11 et PRO-12).

Globalement, les modèles grossier et fin se comportent de la même manière. On remarque toutefois des décalages dans le temps du changement de mode de production, notamment pour les puits PRO-11 et PRO-12. On observe également un décalage dans le temps de la petite chute de débit pour le puits PRO-15 (vers 5000 jours).

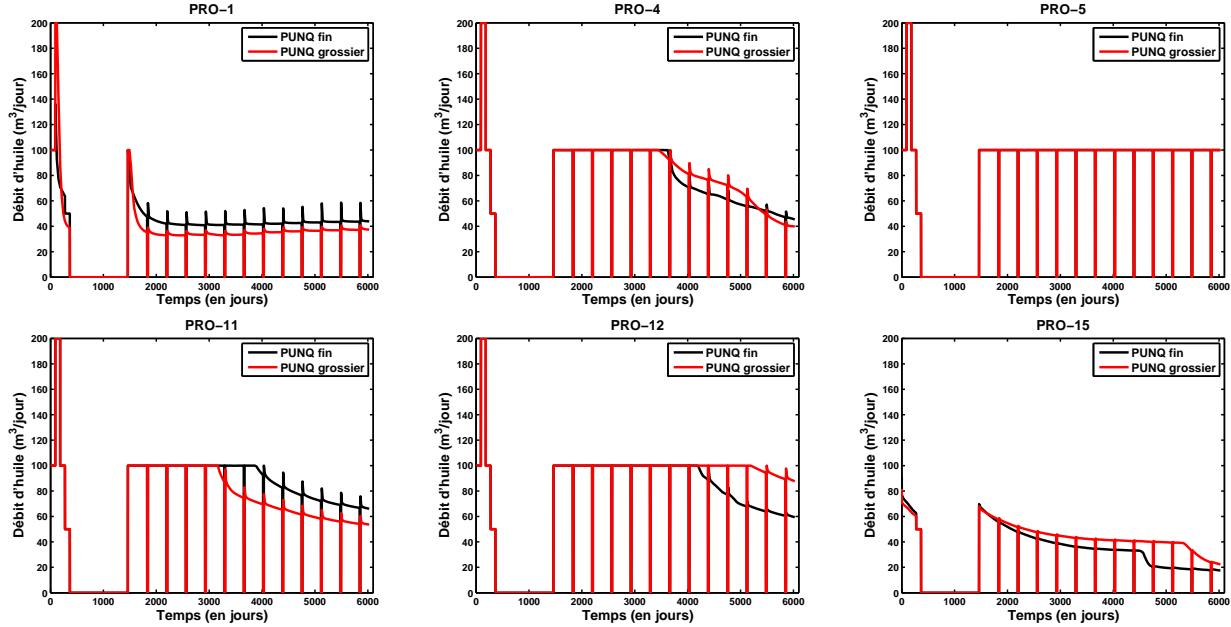


Figure 4.6 : Débit d'huile par puits pour le cas de référence et le cas grossier associé.

### La pression au fond du puits (BHP)

Nous pouvons distinguer deux types de mesures pour la pression au fond du puits.

- La mesure de BHP à puits fermé que l'on appelle ici  $BHP_{res}$ . Ces moments de fermeture sont repérables sur l'historique de production ou sur les mesures du débit d'huile qui sont alors nulles. Lorsque le puits est fermé, la mesure BHP correspond à la pression statique du réservoir (après un petit temps de repos pour que la pression retrouve un état d'équilibre dans le réservoir). On constate d'ailleurs sur la Figure 4.7 que les mesures de  $BHP_{res}$  semblent être les mêmes quel que soit le puits considéré, et varient peu selon le modèle considéré.
- La mesure de BHP à puits ouvert, que l'on appelle ici  $BHP_{dyn}$ , est réalisée quand le puits est en train de produire. On voit que cette dernière varie fortement selon le puits considéré.

En comparant PUNQ fin et grossier sur la Figure 4.7, on constate que les résultats sont identiques pour les puits produisant toujours à pression constante (PRO-1 et PRO-15) ou atteignant toujours l'objectif de production (PRO-5). En revanche, pour les autres puits (PRO-4, PRO-11 et PRO-12), on trouve des comportements semblables, mais souvent décalés dans le temps ou dans les valeurs de pression prises. Ces décalages impactent le moment où la pression limite est atteinte. Ils induisent ainsi des différences dans les dates du changement de mode de production (*i.e.* passage à la production à pression constante) pour ces puits.



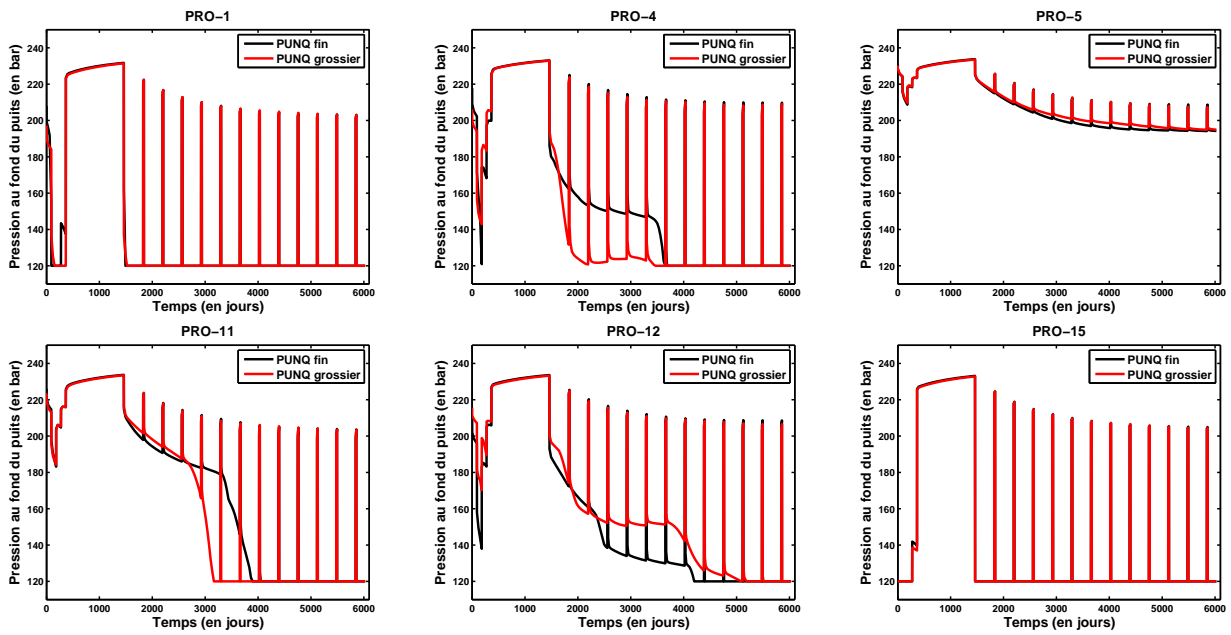


Figure 4.7 : Pression au fond du puits pour le cas de référence et le cas grossier associé.

### Le rapport des volumes gaz/huile (GOR)

Le ratio gaz-huile est le rapport entre le volume de gaz produit et le volume d'huile produit aux conditions de pression et température standards. La comparaison de PUNQ fin et grossier sur la Figure 4.8 montre des résultats identiques au puits PRO-5. Pour les autres puits, on observe entre les niveaux fin et grossier des décalages dans le temps et dans l'amplitude des sorties.

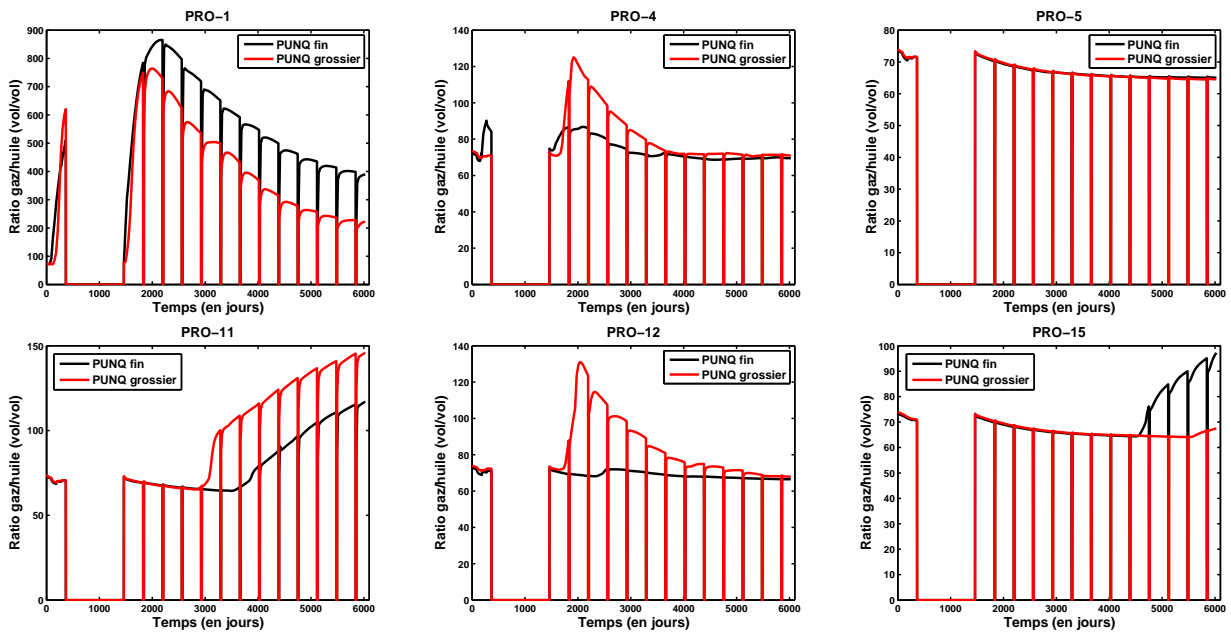


Figure 4.8 : Ratio gaz/huile par puits pour le cas de référence et le cas grossier associé.

## La fraction d'eau (WCUT)

La fraction d'eau est un ratio qui exprime la part d'eau produite par rapport au volume total des liquides produits. On l'exprime comme une valeur adimensionnée comprise entre 0 et 1. On constate sur la Figure 4.9 que les évolutions du WCUT sont très proches pour les deux modèles dans leurs comportements et leurs amplitudes. On remarque néanmoins l'existence de petits décalages dans les temps de percée, de façon marquée pour le puits PRO-11 et plus faible pour PRO-12.

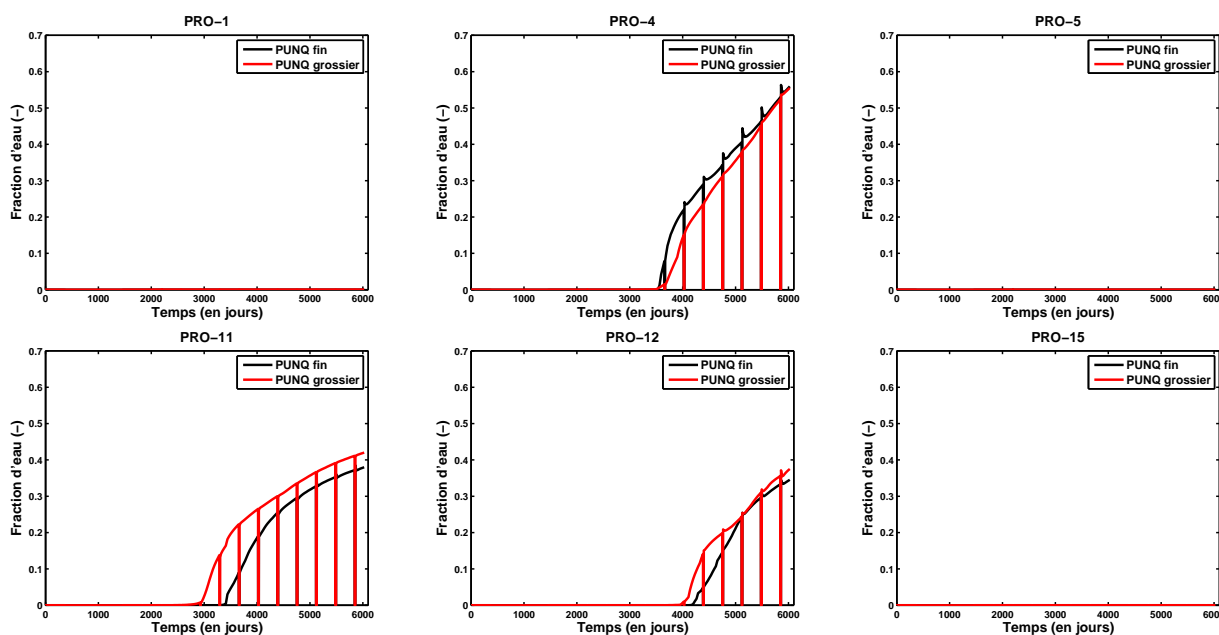


Figure 4.9 : Fraction d'eau par puits pour le cas de référence et le cas grossier associé.

## Résumé des comportements

Nous pouvons résumer le comportement des réponses dynamiques aux 6 puits du cas PUNQ de référence de la manière suivante.

PRO-5 est le seul puits qui respecte l'objectif de production durant la totalité de l'historique. Cette production se fait sans eau (WCUT négligeable) et avec une proportion de gaz normale par rapport aux autres puits. On y observe une faible diminution avec le temps de  $BHP_{dyn}$ .

PRO-1 et PRO-15 sont les deux puits qui n'atteignent jamais l'objectif de production. Leur  $BHP_{dyn}$  est donc à 120 bars durant toute la durée de la production. De plus, ils ne produisent jamais d'eau. La production de gaz est normale, avec peu de variations pour PRO-15. En revanche, celle de PRO-1 explose en début de production, allant jusqu'à 10 fois la valeur normale observée sur les autres puits.

Les puits restants PRO-4, PRO-11 et PRO-12 respectent tous l'objectif de production en début d'historique, puis passent en production à pression constante. Leur changement de mode de production coïncide souvent avec l'apparition d'une proportion d'eau non négligeable, qui augmente ensuite avec le temps. Dans le cas du puits PRO-11, ce changement coïncide aussi avec la production de davantage de gaz, alors que pour PRO-4 et PRO-12, une faible augmentation de la production de gaz intervient plus tôt avant de retourner à un niveau normal.

## Conclusions

Les différences de comportement observées selon les puits peuvent s'expliquer par l'hétérogénéité de la porosité et de la perméabilité dans le réservoir ainsi que par la structure (position des puits, position des perforations, saturations initiales, *etc*).

Concernant les différences de comportement entre PUNQ fin et grossier, on observe que dans l'ensemble, les variations observées sur le cas PUNQ fin se retrouvent sur le cas PUNQ grossier quels que soient la propriété et le puits considérés. Ces différences sont principalement des décalages dans le temps pour le WCUT et le QOIL. Pour le  $BHP_{dyn}$  et le GOR, il y a des décalages dans le temps mais aussi des différences d'intensité parfois importantes.

Il n'est cependant pas surprenant de trouver des différences sur les réponses dynamiques entre les deux modèles : les différentes étapes de la mise à l'échelle impliquent des approximations et simplifications qui se répercutent sur la simulation d'écoulement. On note d'ailleurs que l'impact de la mise à l'échelle n'est pas le même selon la sortie dynamique et le puits considérés.

### 4.1.4 Description de l'étude du cas PUNQ

Nous détaillons dans cette section la procédure de comparaison mise en place pour comparer les approches simple et multi-fidélité pour la méta-modélisation. En simple fidélité, nous utilisons des LHS pour définir le plan d'expériences, puis nous construisons un méta-modèle par krigeage (*cf.* partie 2.2). En multi-fidélité, nous utilisons les LHS imbriqués pour définir le plan d'expériences, puis le co-krigeage multi-fidélité pour construire le méta-modèle (*cf.* partie 2.3). Pour comparer ces deux approches, des séries de plans d'expériences de tailles variables ont été générées. La prédictivité des différents méta-modèles construits est ensuite estimée.

Cette procédure de comparaison consiste donc à répéter le workflow traditionnel (Figure 2.1) pour la méta-modélisation, ainsi que sa version multi-fidélité (Figure 2.6), en faisant varier la taille des plans d'expériences. Afin de se placer dans le cadre d'une étude d'ingénierie de réservoir, et ainsi pouvoir appliquer ces workflows, il faut d'abord sélectionner un ensemble de paramètres incertains pour le cas d'étude.

### Choix des paramètres incertains

On considère initialement 20 paramètres potentiellement incertains, également utilisés dans [Feraille and Marrel, 2012]. Ces paramètres sont listés dans le Tableau 4.5 avec leurs intervalles de variation et valeurs de référence.

Une analyse de sensibilité a ensuite été réalisée à l'aide de CougarFlow [CougarFlow, 2016] afin de réduire le nombre de paramètres incertains en ne conservant que les plus influents. Pour cela, un LHS de 200 points a été généré. Un méta-modèle de la fonction objectif (*cf.* section 4.3.1 pour la définition de la fonction objectif du cas PUNQ) a ensuite été calculé à partir des résultats des simulations sur ce LHS, suivant l'approche directe décrite en section 3.3.1. La qualité de ce méta-modèle a été jugée bonne avec un coefficient  $Q_{cv}^2 = 0,95$ . Il a donc été utilisé pour déterminer les indices de Sobol' [Sobol', 1990] qui caractérisent l'impact des paramètres sur la variance de la fonction objectif (*cf.* Équation 6.3). Les indices de Sobol' de premier ordre et totaux obtenus sont donnés sur la Figure 4.10. Ils nous permettent de réaliser un classement des paramètres selon leur influence sur la variance de la fonction objectif. Plus de détails sur ce type d'analyse de sensibilité et les indices de Sobol' sont donnés plus loin dans le Chapitre 6, section 6.3.1.

Nom	Valeur de réf.	Min.	Max.	Unité	Description
DGAS	0,8266	0,8	0,9	$kg/m^3$	Densité du gaz
DOIL	912	900	950	$kg/m^3$	Densité de l'huile
MPHi*	1	0,8	1,2		Multiplicateur de $K_h$ pour la couche $i$
MPVi*	1	0,8	1,2		Multiplicateur de $K_v$ pour la couche $i$
AQ1K	137,5	100	200	mD	Perméabilité de l'aquifère 1
AQ2K	137,5	100	200	mD	Perméabilité de l'aquifère 2
AQ1P	0,2125	0,2	0,3	%	Porosité de l'aquifère 1
AQ2P	0,2125	0,2	0,3	%	Porosité de l'aquifère 2
SWIR	0,2	0,2	0,3		Saturation irréductible en eau
SORW	0,2	0,15	0,25		Saturation résiduelle en eau
SORG	0,1	0,1	0,2		Saturation résiduelle en huile
SGCR	0	0	0,8		Saturation en gaz critique

Tableau 4.5 : Liste de paramètres incertains pour le cas PUNQ. \*MPHi et MPVi sont définis pour chacune des couches avec  $i \in [1; 5]$ .

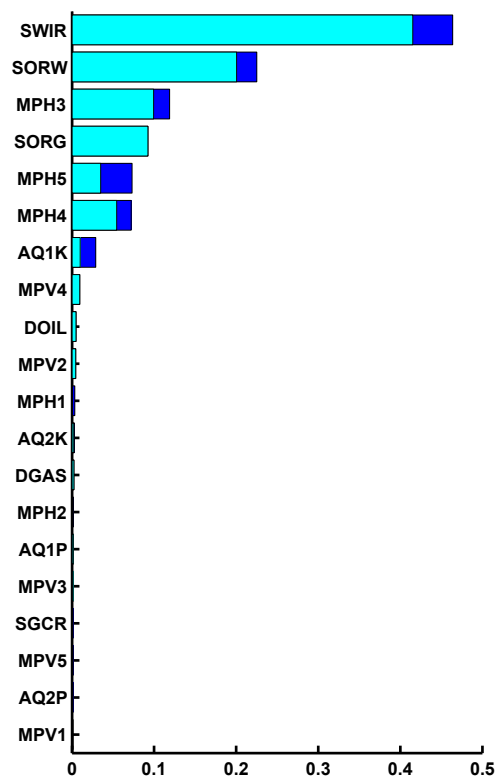


Figure 4.10 : Résultats de l'analyse de sensibilité pour le cas PUNQ. En bleu clair, les indices de Sobol' de premier ordre, et en bleu foncé, les indices totaux.

L'analyse de sensibilité fait clairement apparaître un ensemble de paramètres dont l'influence est négligeable, parmi lesquels: MPH1, AQ2K, DGAS, MPH2, AQ1P, MPV3, SOGR, MPV5, AQ2P et MPV1. Pour la suite, nous avons sélectionné les 7 paramètres présentant la plus forte influence d'après les indices totaux de Sobol'. Ce nombre permet un bon compromis entre la prise en compte des

paramètres les plus influents et la complexité du modèle. Les paramètres non sélectionnés sont fixés à leur valeur de référence.

Les paramètres incertains retenus sont donc les suivants:

- la saturation irréductible en eau (SWIR),
- la saturation résiduelle en huile après balayage à l'eau (SORW),
- le multiplicateur de perméabilité horizontale pour la couche 3 (MPH3),
- la saturation résiduelle en huile après balayage au gaz (SORG),
- le multiplicateur de perméabilité horizontale pour la couche 4 (MPH4),
- le multiplicateur de perméabilité horizontale pour la couche 5 (MPH5),
- la perméabilité de l'aquifère 1 (AQ1K).

On note que cette paramétrisation s'applique directement sur les modèles fin et grossier. Elle ne nécessite pas de générer à nouveau des réalisations de propriétés pétrophysiques.

### Planification d'expériences

Les méthodes de planification d'expériences considérées sur ce cas d'étude sont les LHS en simple fidélité et les LHS imbriqués pour la multi-fidélité. On considère des plans d'expériences de différentes tailles afin d'obtenir une comparaison exhaustive des méthodes testées.

En simple fidélité, nous avons généré des LHS de  $n_f$  points pour les tailles suivantes:  $n_f = 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 17, 19, 20, 22, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55$ . Pour rappel,  $n_f$  est le nombre de points sur le niveau fin.

En multi-fidélité, des LHS de taille  $n_f = 8, 9, 10, 11, 13, 15, 17, 20, 22, 25, 30, 35, 40$  ont été utilisés pour définir des LHS imbriqués en considérant pour le niveau grossier  $n_g = 8, 9, 10, 11, 12, 13, 15, 20, 25, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100$  points (en respectant  $n_g > n_f$ ) et la procédure d'imbrication décrite dans la section 2.3.1. Pour rappel,  $n_g$  est le nombre de points sur le niveau grossier.

On note que pour une série de LHS imbriqués de taille donnée sur le niveau fin, par exemple  $n_f = 9$  et  $n_g = 9, \dots, 100$ , le LHS fin est le même pour toute la série, alors qu'un LHS grossier est généré à nouveau pour chacun des LHS imbriqués de la série. Les LHS grossiers de même taille  $n_g$  associés à des LHS fins de tailles différentes ne sont donc pas les mêmes.

On rappelle que par construction, des LHS de même taille peuvent être très différents, notamment en faible dimension. Afin d'obtenir des résultats représentatifs, 10 LHS et LHS imbriqués sont générés pour chacune des tailles considérées. Ainsi, pour la suite, les résultats seront généralement présentés sous forme de  $Q^2$  moyens (ou médians) sur l'échantillon des 10 LHS de même taille.

Pour pouvoir réaliser des comparaisons en fonction des temps de simulation, un temps de simulation moyen a été estimé pour chacun des niveaux de fidélité sur un même LHS de 50 points. Comme indiqué dans le Tableau 4.6, une simulation sur le maillage fin prend en moyenne 18 fois plus de temps qu'une simulation sur la grille grossière.

Temps de simulation moyen sur le niveau fin	183,6 s
Temps de simulation moyen sur le niveau grossier	10,0 s
Rapport entre les temps de simulation (fin/grossier)	18,3

Tableau 4.6 : Temps de simulation moyen par niveau de fidélité.

Le temps de simulation d'un LHS est par la suite exprimé en nombre équivalent de simulations sur

le niveau fin  $n_{eq}$ . Pour un LHS classique, on a toujours  $n_{eq} = n_f$ , tandis que pour un LHS imbriqué,  $n_{eq} = n_f + 0,054 n_g$ . Par exemple, un LHS imbriqué défini par  $n_f = 8$  et  $n_g = 20$  a un temps de simulation équivalent sur le niveau fin égal à  $n_{eq} = 9,1$ .

### Méta-modélisation des réponses d'intérêt

Les méthodes de méta-modélisation utilisées dépendent de la réponse d'intérêt considérée. Pour la méta-modélisation de sorties dynamiques, nous utilisons les méthodes de méta-modélisation de sorties vectorielles décrites dans la partie 3.3. Les résultats de ces approches sont présentés dans les sections 4.2.1, 4.2.2 et 4.2.3 respectivement pour les sorties réservoir (cumulé d'huile), les sorties aux puits (pression au fond de puits, ratio gaz/huile et fraction d'eau) et les sorties spatiales (cartes de pression et saturation).

Pour la méta-modélisation de la fonction objectif, nous pouvons directement construire les modèles de krigeage et co-krigeage à partir des valeurs de la fonction objectif (section 3.3.1), ou bien utiliser l'approche vectorielle introduite dans les sections 3.3.2 et 3.3.3. Les résultats correspondant à ces différentes approches sont présentés dans la partie 4.3.

### Estimation de la qualité des méta-modèles

La qualité des différents méta-modèles construits est ensuite estimée par le calcul du coefficient  $Q^2$  sur une base de test indépendante (cf. partie 2.4). La base de test est définie sur le niveau fin à partir d'un LHS de 200 points. On note que la base de test considérée pour le calcul du  $Q^2$  est la même quelle que soit la réponse approchée par les méta-modèles. Pour les réponses vectorielles, on peut calculer un  $Q^2$  par temps ou par maille. Afin de résumer les résultats pour ce type de réponses, un  $Q^2$  moyenné sur tous les temps ou toutes les mailles sera parfois proposé.

On remarque que le  $Q^2$  calculé pour tous les éléments du vecteur n'est pas forcément significatif. En effet, si pour un des éléments de la réponse d'intérêt la variance tend vers zéro, alors le coefficient  $Q^2$  a tendance à diverger (cf. définition du  $Q^2$  section 2.4.1). De plus, la prédiction de la réponse d'intérêt en un tel point n'est pas nécessaire puisque les variations de la réponse sont très faibles, souvent négligeables. Pour ces raisons, nous écartons du  $Q^2$  moyenné les valeurs de  $Q^2$  venant de temps (ou mailles de la grille) pour lesquels la variance de la réponse sur la base de tests est inférieure à 5% de la variance moyenne sur l'ensemble des temps (ou mailles).

## 4.2 Méta-modélisation de sorties dynamiques

Nous présentons dans cette partie les résultats obtenus pour la méta-modélisation des réponses dynamiques du cas PUNQ. Ces résultats sont représentés par des figures montrant l'évolution du coefficient  $Q^2$  en fonction du temps requis pour l'évaluation des plans d'expériences. Les méta-modèles approchant ces différentes sorties dynamiques sont construits suivant les approches décrites en section 3.2.2 et 3.3.3. Des ensembles de réponses dynamiques simulées sur PUNQ fin et grossier sont également présentés afin d'analyser les résultats.

Les sorties dynamiques considérées pour la méta-modélisation sont : une sortie réservoir avec le cumulé d'huile (section 4.2.1), des sorties de puits avec la pression en fond de puits, le ratio gaz/huile et la fraction d'eau (section 4.2.2), et des sorties spatiales avec les cartes de pression et saturation en huile au temps final (section 4.2.3). Une discussion sur les performances des méthodes utilisées pour la méta-modélisation de sorties vectorielles est ensuite proposée dans la section 4.2.4.

Les méthodes testées pour la méta-modélisation de sorties vectorielles se basent sur une analyse en composantes principales d'un ensemble de réponses sur le niveau fin. Cette décomposition nécessite le choix d'un nombre  $L$  de composantes pour chacune des sorties considérées. Bien qu'en pratique le nombre  $L$  puisse être choisi en fonction du plan d'expériences considéré, nous fixons ici sa valeur pour chacune des sorties afin de faciliter la comparaison des résultats. Plus précisément, il correspond à une variance expliquée de 99% sur la base de test. Les valeurs correspondantes sont reportées dans le Tableau 4.7.

Sortie	PRO-1	PRO-4	PRO-5	PRO-11	PRO-12	PRO-15
BHP	5	8	2	7	10	3
GOR	6	10	2	5	10	3
WCUT	4	4	2	4	3	6
CUMO				2		
P				2		
SOIL				22		

Tableau 4.7 : Nombre de composantes principales nécessaires pour expliquer 99% de la variance observée sur la base de tests. Il y a une seule valeur pour le cumulé d'huile (CUMO), les cartes de pression (P) et saturation en huile (SOIL) car ces sorties sont définies pour tout le réservoir.

## 4.2.1 Application aux propriétés associées au réservoir

### Le cumulé d'huile (CUMO)

La méta-modélisation des propriétés associées au réservoir se résume ici à celle du cumulé d'huile. En termes de méthode, la méta-modélisation d'une sortie réservoir est identique à celle d'une sortie de puits. Les résultats sur le cumulé d'huile étant globalement simples, on prend cette sortie en exemple pour expliquer en détail comment lire et comprendre les différents résultats présentés par la suite.

Un échantillon de cumulés d'huile simulés avec PUNQ fin (en noir) et PUNQ grossier (en rouge) est représenté sur la Figure 4.11. Le cumulé d'huile de référence correspond au cumulé d'huile présenté précédemment sur la figure 4.5 pour le niveau fin. On observe que le comportement des modèles fin et grossier semble très proche pour cette réponse. On remarque toutefois des différences en zoomant sur les valeurs du cumulé d'huile au temps final. De telles différences, bien qu'apparaissant comme relativement faibles, peuvent être économiquement très importantes. On note que ce comportement très proche s'explique par le fait que les deux modèles réservoir sont soumis aux mêmes objectifs de production pour chacun des puits.

Nous proposons ensuite sur la Figure 4.12 le  $Q^2$  moyenné sur l'ensemble des temps pour le cumulé d'huile. Les lignes rouges de la figure gauche représentent les résultats du co-krigeage multi-fidélité. Chacune d'elles correspond à une série de plans d'expériences avec un nombre fixe de points sur le niveau fin et un nombre croissant de points sur le niveau grossier. Ces courbes sont aussi représentées sur la Figure 4.12 (droite) avec le détail du nombre de points sur le niveau fin auxquelles elles sont associées.

On rappelle que le  $Q^2$  représenté sur la Figure 4.12 est un  $Q^2$  moyenné sur l'ensemble des temps auxquels la réponse est simulée, en excluant toutefois ceux pour lesquels la variance sur la base de test est trop faible (*cf.* section 4.1.4). Les temps exclus pour cette sortie correspondent à ceux se trouvant avant 2000 jours et à ceux où les puits sont fermés. On rappelle également que les résultats

présentés sont des moyennes sur dix  $Q^2$  moyennés, car dix plans d'expériences d'une taille donnée sont considérés pour la méta-modélisation.

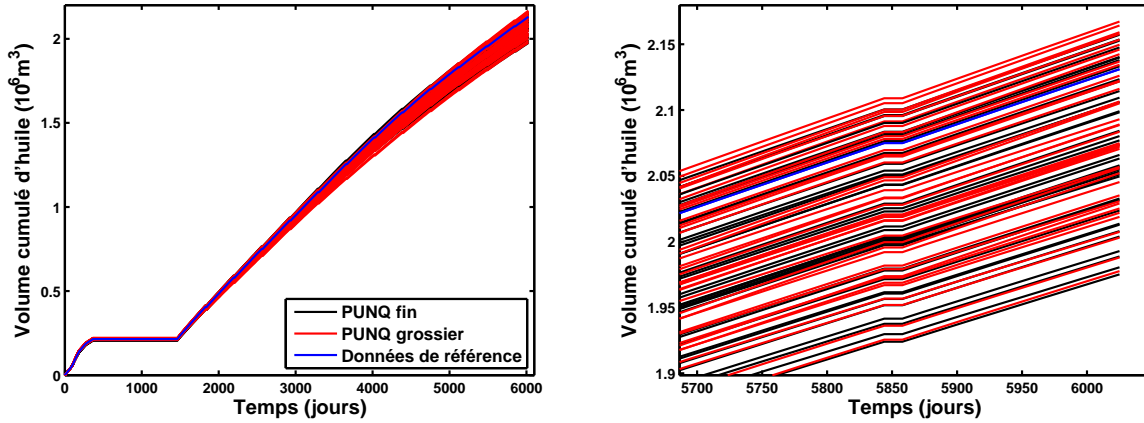


Figure 4.11 : Cumulé d'huile : à gauche, la réponse de référence et les réponses simulées sur les modèles fin et grossier pour un LHS de 40 points ; à droite, un zoom sur les valeurs aux temps finaux.

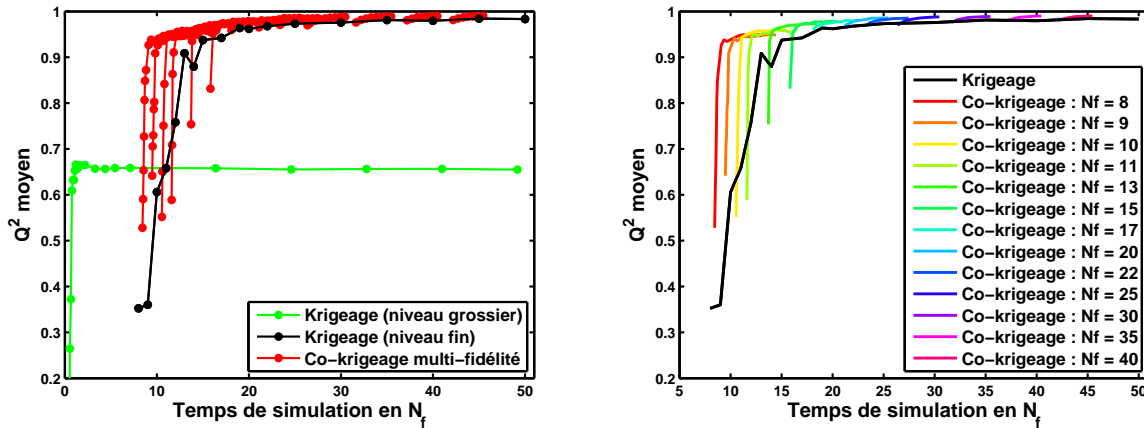


Figure 4.12 : Cumulé d'huile : à gauche,  $Q^2$  moyenné calculé pour des méta-modèles de krigeage utilisant seulement les réponses grossières (vert), les réponses fines (noir) et pour les méta-modèles de co-krigeage multi-fidélité (rouge) ; à droite, détail des résultats du co-krigeage multi-fidélité.

On observe que les méta-modèles calculés en utilisant la multi-fidélité sont en moyenne de meilleure qualité que ceux calculés par une approche simple fidélité. Le gain en prédictivité de la multi-fidélité est important lorsque les temps de simulation considérés sont courts ( $n_{eq} < 20$ ). Par ailleurs, pour chaque courbe multi-fidélité, l'ajout progressif de points sur le niveau grossier permet une amélioration du  $Q^2$ . Ce gain est très fort lorsque  $n_g$  est faible, puis s'estompe brutalement. Pour des temps de simulation importants, les approches simple et multi-fidélité produisent des résultats équivalents. On note que les résultats pour cette sortie sont caractéristiques d'un cas où l'approche multi-fidélité est performante.

Spécifiquement pour cette sortie, nous avons également représenté les résultats correspondant à des méta-modèles de krigeage utilisant uniquement le niveau grossier (en vert sur la Figure 4.12 gauche). On observe que la prédictivité obtenue dans ce cas est limitée ( $Q^2 < 0,7$ ), même lorsqu'un nombre très important de simulations sur le niveau grossier est considéré (jusqu'à 900 ici). Ces derniers résultats illustrent que même lorsque les réponses sur le niveau grossier sont très proches de celles sur le niveau



fin, la prédictivité d'un méta-modèle construit uniquement avec des réponses grossières est fortement limitée.

### 4.2.2 Application aux propriétés aux puits

Nous présentons dans cette section les résultats de la méta-modélisation appliquée à différentes sorties de puits : la pression au fond du puits, le ratio gaz/huile et la fraction d'eau.

#### La pression au fond de puits (BHP)

Un ensemble de réponses pour la pression au fond du puits, simulée sur les modèles réservoir fin et grossier, est représenté sur la Figure 4.13. On observe que la pression limite de 120 bar est presque systématiquement atteinte pour les puits PRO-1 et PRO-15. Pour le puits PRO-5, les réponses ont un comportement très proche pour les deux niveaux de fidélité. Pour les autres puits, on observe des similarités importantes, mais il y a toutefois des différences marquées entre les réponses des niveaux fin et grossier. On remarque que les temps exclus pour le calcul du  $Q^2$  moyenné correspondent à ceux où la pression limite est systématiquement atteinte pour le niveau fin, ou à des temps de fermeture des puits. Pour le puits PRO-15, la pression limite est systématiquement atteinte pour le niveau fin, il n'est donc pas nécessaire de construire un méta-modèle pour cette sortie. De même, l'intérêt des résultats au puits PRO-1 est très limité car la réponse au niveau fin varie très peu et uniquement lors de la phase de test et des premiers jours d'exploitation.

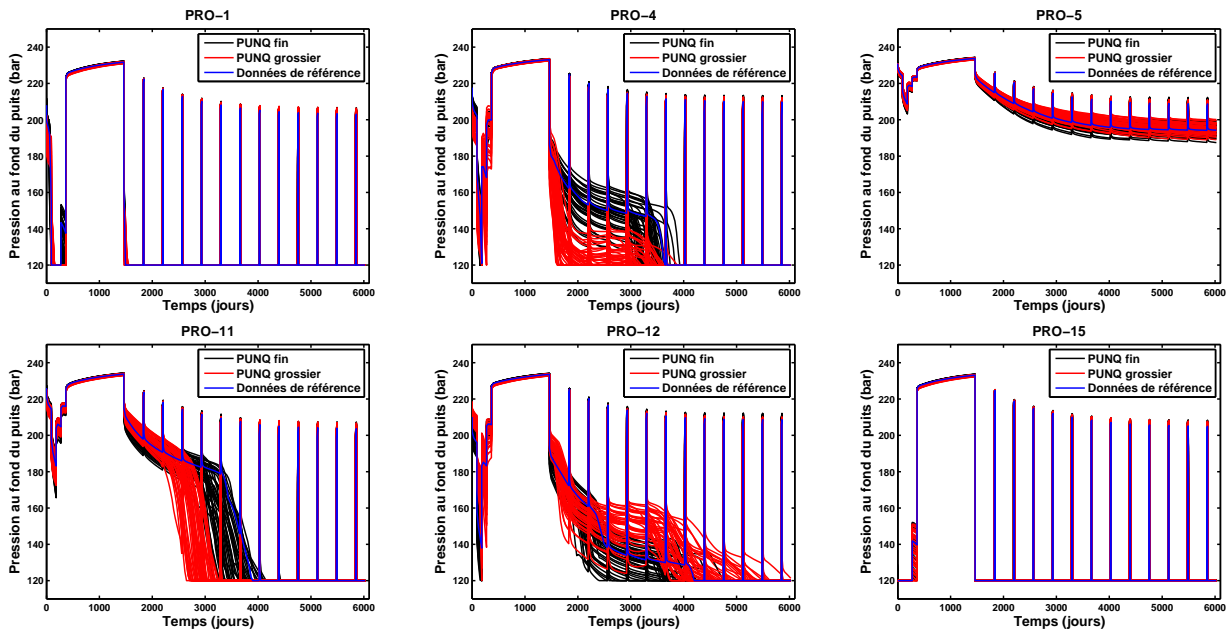


Figure 4.13 : La pression au fond du puits : la réponse de référence et les réponses simulées sur les modèles fin et grossier pour un LHS de 40 points.

Le  $Q^2$  moyenné pour la pression de fond des différents puits (à l'exception de PRO-15) est représenté sur la Figure 4.14. On observe que l'approche multi-fidélité est très efficace pour le puits PRO-5. Les résultats sont semblables, voire meilleurs, que ceux obtenus pour la méta-modélisation du cumulé d'huile. Pour les autres puits, les résultats de la méta-modélisation multi-fidélité sont plus mitigés. La multi-fidélité présente des performances similaires ou inférieures à celles de la simple fidélité. Les décalages en temps et en amplitude entre les réponses fines et grossières (*cf.* Figure 4.13) peuvent

expliquer ces résultats. On note que ces sorties sont globalement difficiles à modéliser car le  $Q^2$  moyenné n'atteint jamais 0,9.

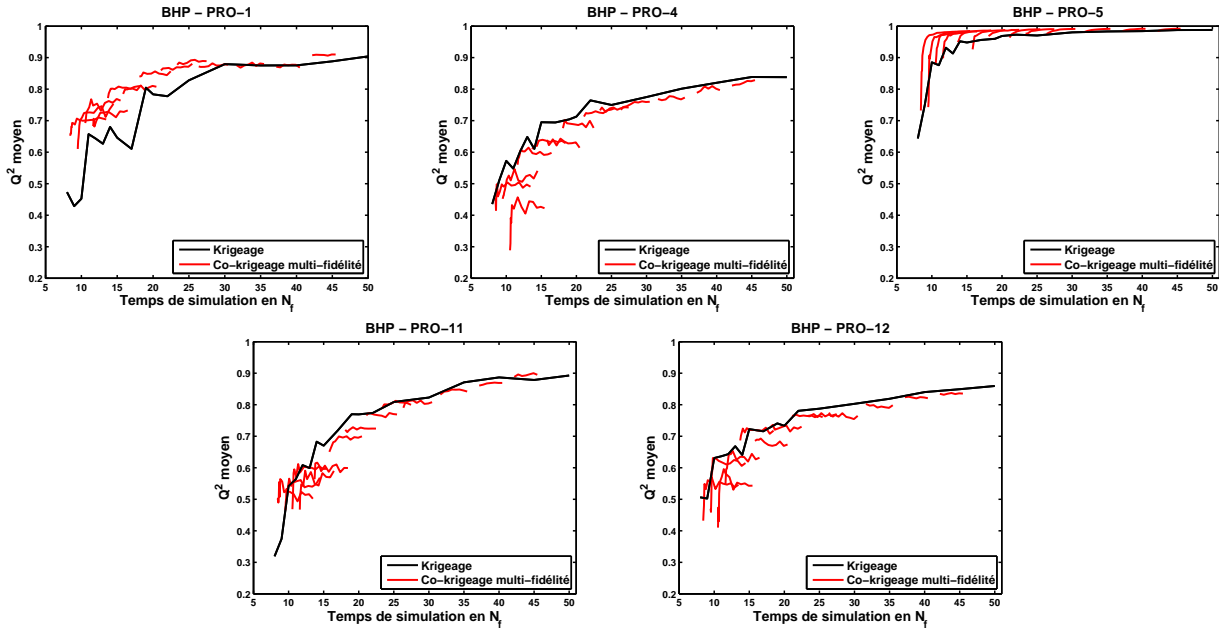


Figure 4.14 : La pression au fond du puits :  $Q^2$  moyenné calculé pour des méta-modèles de krigage (noir) et pour des méta-modèles de co-krigeage multi-fidélité (rouge).

### Le ratio gaz/huile (GOR)

Un ensemble de réponses pour le ratio gaz/huile, simulé sur les modèles réservoir fin et grossier, est représenté sur la Figure 4.15. Bien que présentant des similitudes, on observe globalement d'importantes différences entre les réponses simulées sur le niveau fin et celles simulées sur le niveau grossier. Il y a toutefois une exception avec le puits PRO-5, pour lequel les réponses ont un comportement quasi-identique. Le  $Q^2$  moyenné pour le ratio gaz/huile aux différents puits est représenté sur la Figure 4.16. Les temps exclus pour le calcul du  $Q^2$  moyenné correspondent à l'ensemble des temps de fermeture de puits. Ces temps peuvent aussi correspondre à ceux précédant une arrivée de gaz, par exemple ceux avant 3500 jours pour le puits PRO-15.

Les résultats de l'approche multi-fidélité pour la méta-modélisation de cette sortie sont variables. La multi-fidélité permet de construire plus rapidement des méta-modèles prédictifs pour les puits PRO-1 et PRO-5 lorsque des temps de simulation courts sont considérés. Les performances des deux approches sont similaires aux puits PRO-11, PRO-12 et PRO-15. En revanche, l'approche multi-fidélité apparaît moins performante que la simple fidélité pour le puits PRO-4. Comme pour la pression au fond du puits et le cumulé d'huile, on remarque que les performances des deux approches sont équivalentes lorsque des temps de simulation suffisamment longs sont considérés ( $n_{eq} > 30$ ).

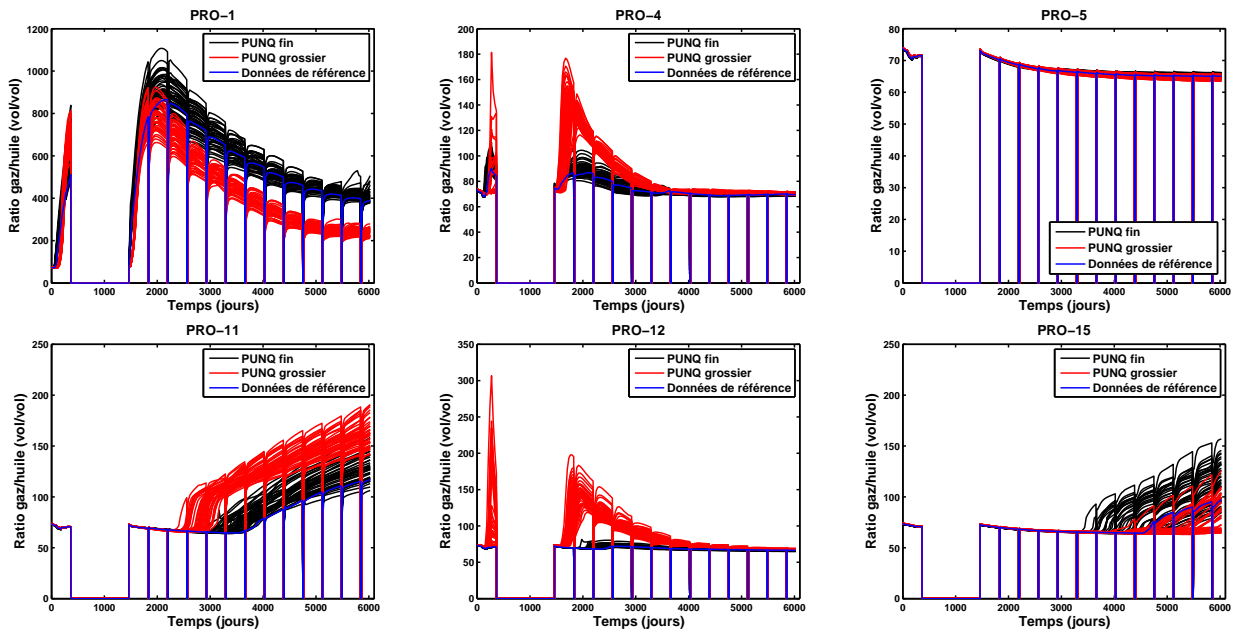


Figure 4.15 : La ratio gaz/huile : la réponse de référence et les réponses simulées sur les modèles fin et grossier pour un LHS de 40 points.

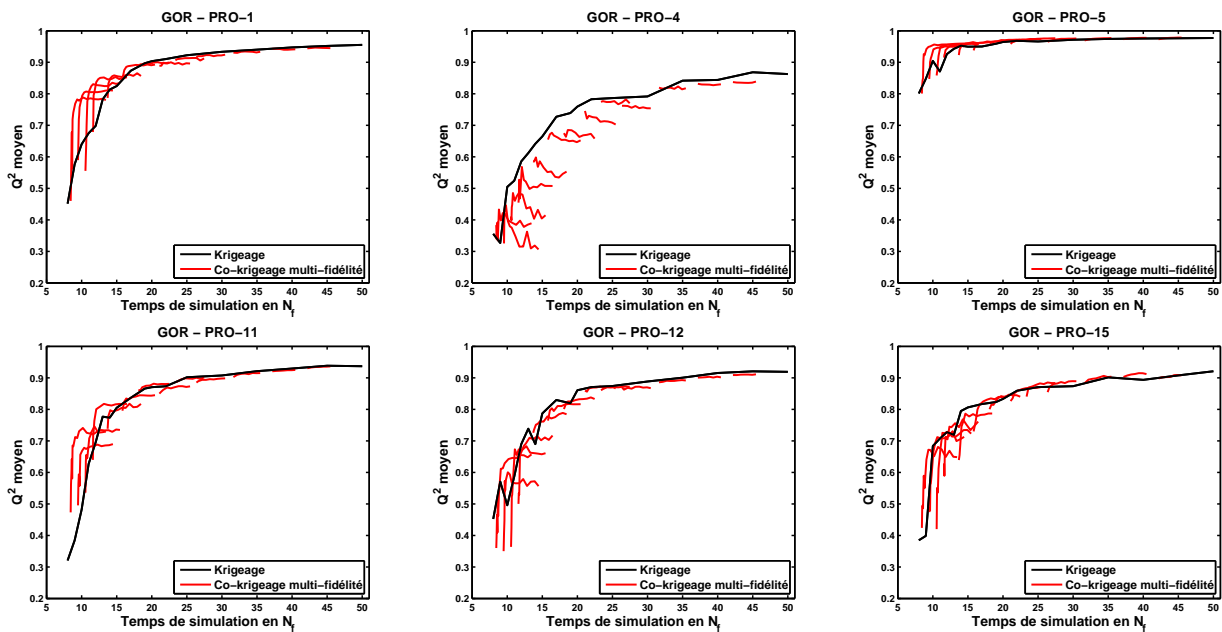


Figure 4.16 : Le ratio gaz/huile :  $Q^2$  moyenné calculé pour des méta-modèles de krigeage (noir) et pour des méta-modèles de co-krigeage multi-fidélité (rouge).

### La fraction d'eau (WCUT)

Un ensemble de réponses pour la fraction d'eau, simulée sur les modèles réservoir fin et grossier, est représenté sur la Figure 4.17. Certains puits n'observent jamais d'arrivée d'eau, c'est le cas des puits PRO-5 et PRO-15. La construction de méta-modèles n'est donc pas nécessaire pour ces puits. Le puits PRO-1 est un cas particulier. Il n'y a généralement pas d'arrivée d'eau sauf quelque fois en fin de simulation. Pour les autres puits, des productions en eau sont systématiquement observées sur les simulations. On remarque que les comportements des réponses simulées sur les niveaux fin et grossier sont globalement très proches. Les temps exclus pour le calcul du  $Q^2$  moyenné correspondent à l'ensemble des temps de fermeture de puits, mais aussi aux temps précédant le temps de percée (*i.e.* le temps à partir duquel on commence à mesurer une production d'eau).

Le  $Q^2$  moyenné pour la fraction d'eau aux différents puits est représenté sur la Figure 4.18. L'approche multi-fidélité permet de construire des méta-modèles plus prédictifs qu'en simple fidélité pour des temps de simulation courts ( $n_{eq} < 30$ ) aux puits PRO-4, PRO-11 et PRO-12. En revanche, les méta-modèles construits pour le puits PRO-1 sont généralement de très mauvaise qualité, avec un  $Q^2$  négatif. Cela s'explique par le fait que l'observation d'une variation pour cette sortie est trop rare pour pouvoir être correctement approchée par la méta-modélisation. La multi-fidélité est généralement plus performante que la simple fidélité pour cette sortie, cependant elle induit également la construction des plus mauvais méta-modèles lorsque des plans d'expériences de petite taille sont considérés.

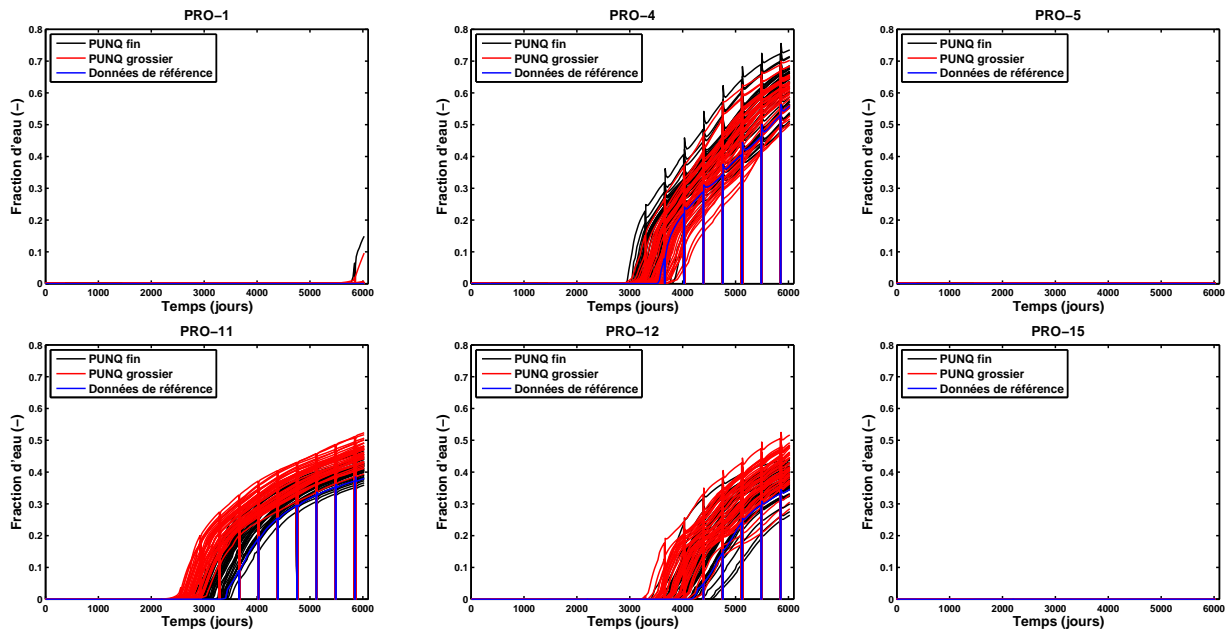


Figure 4.17 : La fraction d'eau : la réponse de référence et les réponses simulées sur les modèles fin et grossier pour un LHS de 40 points.

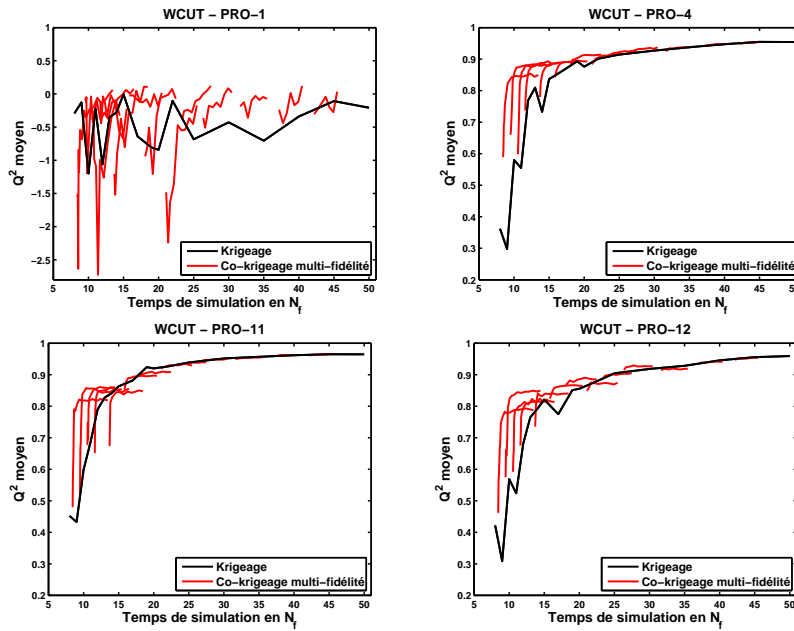


Figure 4.18 : La fraction d'eau :  $Q^2$  moyenné calculé pour des méta-modèles de krigeage (noir) et pour des méta-modèles de co-krigeage multi-fidélité (rouge).

### 4.2.3 Application aux propriétés spatiales

La méta-modélisation de sorties vectorielles, telle que décrite dans les sections 3.2.2 et 3.3.3, peut également être appliquée à l'approximation de sorties spatiales en simple et multi-fidélité. Pour un temps donné, il est possible d'approcher une carte de propriété pour toutes les couches du réservoir en combinant méta-modélisation et analyse en composantes principales. Nous avons appliqué ces méthodes aux cartes de pressions et saturations en huile en fin de simulation à  $t_{final} = t_{241} = 6025$  jours.

Contrairement aux sorties dynamiques temporelles qui peuvent être simulées aux mêmes temps sur les niveaux fin et grossier, le nombre de mailles dépend du niveau considéré. Pour le modèle grossier, on compte 1761 mailles actives, tandis que pour le modèle fin, nous en avons 9 fois plus, soit 15849. L'approche proposée pour la méta-modélisation de sorties vectorielles en multi-fidélité nécessite que les vecteurs de la réponse d'intérêt soient de la même taille pour les deux niveaux de fidélité. Une mise à l'échelle des cartes de propriétés grossières sur le niveau fin a donc été réalisée. Elle consiste à copier la valeur d'une maille grossière sur les 9 mailles fines auxquelles elle correspond sur la grille fine.

#### Modélisation de la carte des pressions à $t_{final}$

Un exemple de carte de pression à  $t_{final}$  est donné sur la Figure 4.19 qui montre la couche n°3 pour le cas de référence. On observe que la pression est plus faible à proximité des puits producteurs. On remarque aussi que l'influence des propriétés pétrophysiques sur le champ de pression est relativement faible. En effet, les variations de la pression sont très régulières dans le réservoir.

L'analyse en composantes principales montre que seulement  $L = 2$  composantes principales sont nécessaires pour expliquer 99% de la variance observée de la pression sur la base de test pour l'ensemble du réservoir (cf. Tableau 4.7). Cette petite valeur de  $L$  s'explique par la relativement faible complexité des variations du champ de pression sur l'ensemble des simulations.

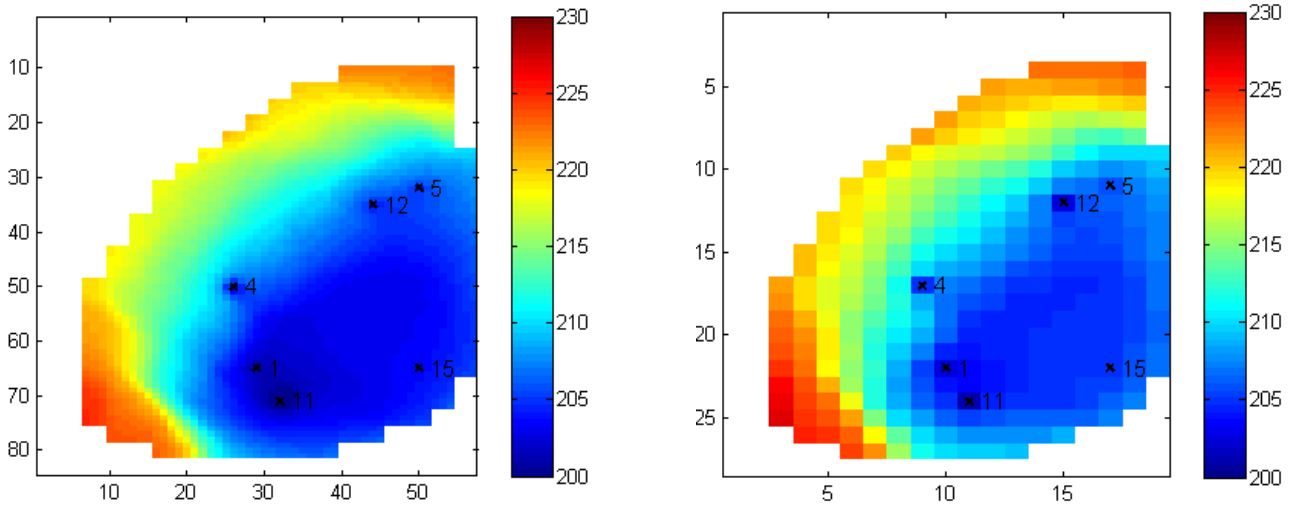


Figure 4.19 : Exemple de carte de pression à  $t_{final}$  : à gauche, la couche n°3 du modèle fin et à droite, celle du modèle grossier.

La méta-modélisation de cartes permet le calcul du coefficient  $Q^2$  pour l'ensemble des mailles. On peut ensuite comparer des cartes de  $Q^2$  construit en simple et multi-fidélité en considérant des plans d'expériences (LHS et LHS imbriqués) de taille équivalente. Une telle comparaison est proposée par la Figure 4.20. On observe sur cet exemple que l'approche multi-fidélité est nettement plus performante: elle fournit de meilleures valeurs de  $Q^2$  quel que soit le point de la carte considéré, et cela en un temps de simulation  $n_{eq}$  inférieur.

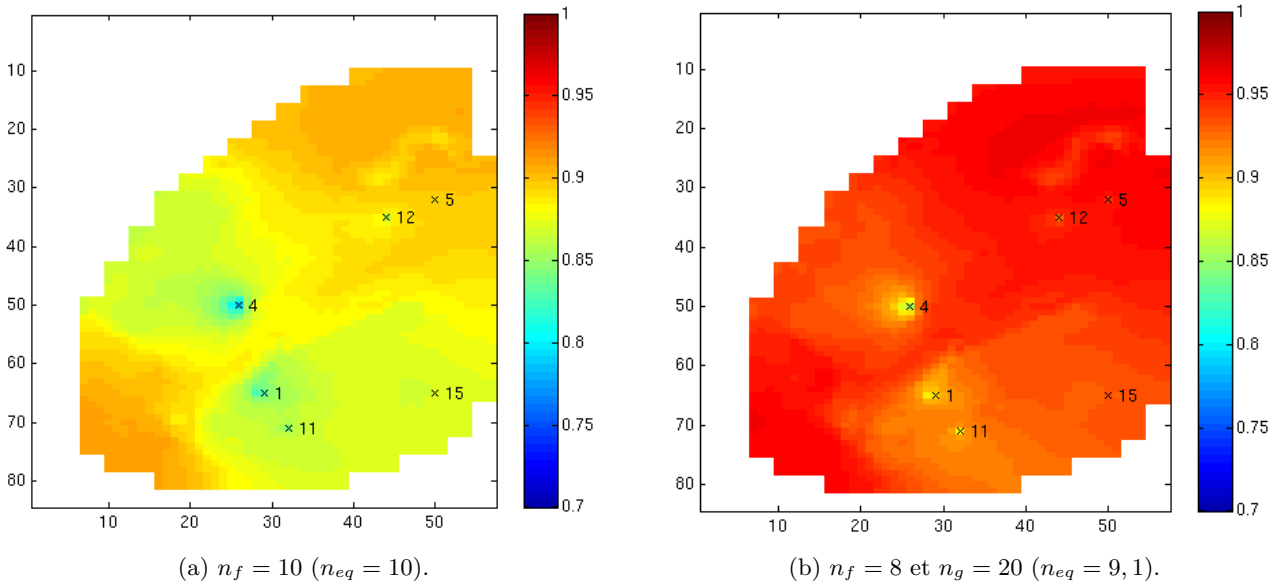


Figure 4.20 : Exemple de carte de  $Q^2$  moyen pour la pression dans la couche n°3 : (a) méta-modélisation simple fidélité, (b) méta-modélisation multi-fidélité.

Une comparaison systématique des approches simple et multi-fidélité via des cartes de  $Q^2$  est fastidieuse. On présente donc sur la Figure 4.21 une comparaison globale à travers le calcul du  $Q^2$  moyenné sur l'ensemble des mailles. On remarque que pour cette sortie, toutes les mailles ont été conservées pour le calcul du  $Q^2$  moyenné.

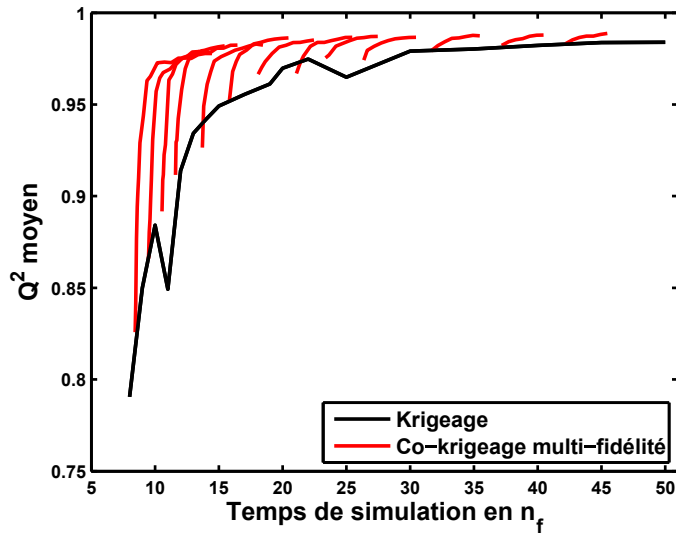


Figure 4.21 : Cartes des pressions au temps final :  $Q^2$  moyenné sur l'ensemble du réservoir, calculé pour des méta-modèles de krigage (noir) et pour des méta-modèles de co-krigeage multi-fidélité (rouge)

La figure 4.21 montre que les pressions sont très bien modélisées pour l'ensemble du réservoir par les deux approches puisque le  $Q^2$  dépasse rapidement 0,9 et même 0,95. On constate aussi que la multi-fidélité permet de meilleures performances que l'approche simple fidélité, notamment lorsque les temps de simulation considérés sont courts ( $n_{eq} < 20$ ).

#### Modélisation de la carte des saturations en huile à $t_{final}$

Les cartes de saturations présentent généralement des variations plus complexes que les cartes de pression. C'est également le cas ici comme illustré par la Figure 4.22 qui représente les saturations finales en eau, huile et gaz pour le cas de référence. On observe que les saturations finales sont fortement influencées par les hétérogénéités des propriétés pétrophysiques. En conséquence, la construction de méta-modèles prédictifs pour les cartes de saturation est plus difficile.

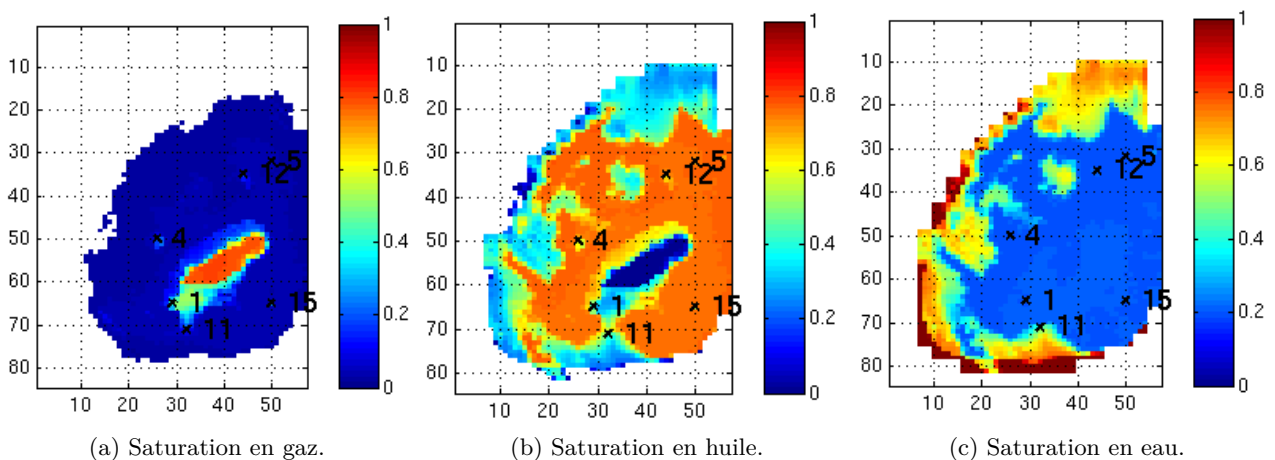


Figure 4.22 : Cartes de saturation en gaz, huile et eau à  $t_{final}$  pour la couche n°3 du modèle de référence.

Pour la carte de saturation en huile, l'analyse en composantes principales indique qu'il faut considérer  $L = 22$  composantes pour expliquer 99% de la variance observée sur la base de tests. Cependant les derniers coefficients de projection de l'ACP peuvent être mal modélisés par krigeage et co-krigeage multi-fidélité, en particulier lorsque des plans d'expériences de petite taille (*i.e.* avec peu de points sur le niveau fin) sont considérés. Cela peut engendrer une forte dégradation de la qualité du méta-modèle final de la saturation, notamment en multi-fidélité.

Seulement  $L = 6$  composantes sont donc considérées afin d'éviter ce problème. Une telle décomposition permet néanmoins d'expliquer plus de 92% de la variance observée sur la base de test.

En procédant de la même manière que pour les cartes de pression, nous proposons sur la Figure 4.23 une comparaison de cartes de  $Q^2$  pour la saturation en huile. Les mailles en noir correspondent à une variance moyenne sur la base de test très faible. Ce sont elles qui, dans la suite (voir Figure 4.24), sont exclues du calcul du  $Q^2$  moyenné car la variance de la réponse en ces mailles est inférieure à 5% de la variance moyenne sur l'ensemble du réservoir.

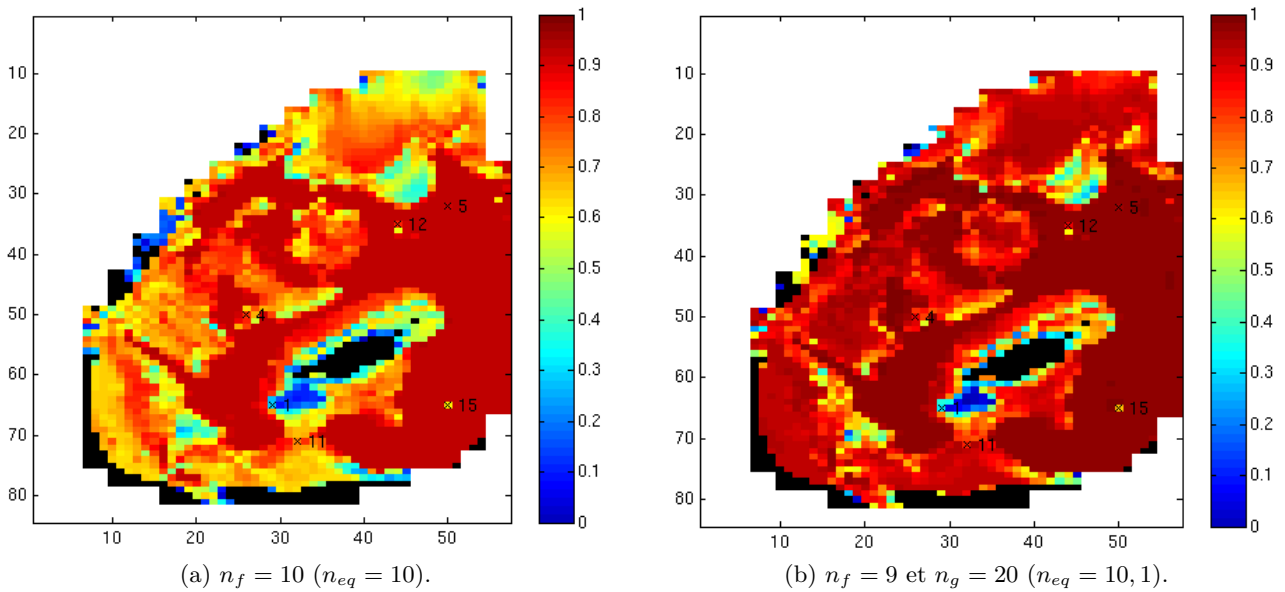


Figure 4.23 : Exemples de carte de  $Q^2$  moyen pour la saturation en huile de la couche n°3 : (a) méta-modélisation simple fidélité, (b) méta-modélisation multi-fidélité.

Sur la Figure 4.23, la zone autour des mailles noires centrales est globalement mal modélisée. Elle correspond à la bulle de gaz. Autour, on observe une zone très bien modélisée où la saturation finale en huile est très forte. La modélisation est ensuite moins bonne au bord du réservoir, où la saturation finale en eau est très forte.

Globalement, on peut dire que l'approche multi-fidélité est à nouveau plus performante que l'approche simple fidélité. Le gain est toutefois moins fort que pour les cartes de pression pour l'exemple considéré ici car les temps de simulation sont légèrement plus grands pour la multi-fidélité et le gain en  $Q^2$  moins élevé. Une comparaison globale en faisant varier la taille des plans d'expériences est proposée par la Figure 4.24 représentant le  $Q^2$  moyenné sur l'ensemble du réservoir.

On observe sur cette figure que la saturation en huile au temps final est globalement moins bien modélisée que la pression au même temps, quelle que soit l'approche considérée. Il faut un temps de simulation plus important pour atteindre un  $Q^2$  de 0,9, et un  $Q^2$  de 0,95 n'est jamais atteint. Néanmoins, l'approche multi-fidélité est cette fois encore plus performante que l'approche simple fidélité sur les temps courts ( $n_{eq} < 20$ ). Sur les temps plus longs, leurs performances sont équivalentes.



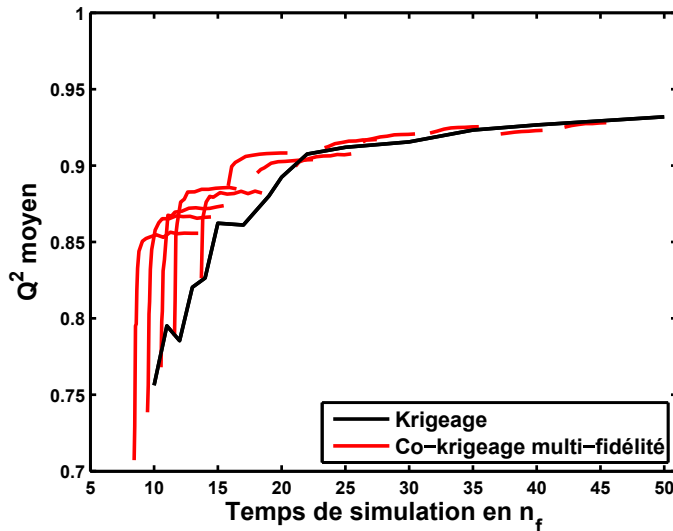


Figure 4.24 : Cartes de saturation en huile au temps final :  $Q^2$  moyenné sur l'ensemble du réservoir, calculé pour des méta-modèles de krigage (noir) et pour des méta-modèles de co-krigeage multi-fidélité (rouge).

#### 4.2.4 Discussion

Les résultats présentés dans cette partie montrent que l'approche combinant une décomposition en composantes principales avec le krigage ou le co-krigeage multi-fidélité permet de construire des méta-modèles prédictifs pour les différentes sorties dynamiques du cas PUNQ, à l'exception de la fraction d'eau au puits PRO-1. La comparaison du  $Q^2$  moyenné entre krigage et co-krigeage multi-fidélité démontre que l'approche multi-fidélité apporte un gain en prédictivité pour de nombreuses sorties, lorsque des temps de simulation courts sont considérés ( $n_{eq} < 25n_f$ ). Ce gain est important pour le cumulé d'huile, la fraction d'eau et les cartes de pression et saturation en huile au temps final. En revanche, il est plus ténu pour le ratio gaz/huile et la pression au fond du puits, voire inexistant selon le puits considéré pour ces propriétés. Pour des temps de simulation plus longs ( $n_{eq} > 30n_f$ ), les performances des approches simple et multi-fidélité sont équivalentes quelle que soit la sortie considérée.

Ces premières observations sont caractéristiques d'une approche multi-fidélité. En effet, elle peut être plus rapide que l'approche simple fidélité sur des temps courts, car elle se sert d'évaluations sur le niveau grossier pour construire rapidement un méta-modèle prédictif. En revanche, le gain en prédictivité obtenu par la méta-modélisation multi-fidélité est limité par la précision du niveau grossier. Au-delà d'un certain nombre de simulations grossières, les évaluations additionnelles sur ce niveau ne permettent plus d'améliorer la prédictivité du méta-modèle car le niveau grossier n'a plus d'information à apporter. Il faut alors évaluer la réponse sur le niveau fin pour améliorer la qualité du méta-modèle. C'est ce qui explique la forme de palier des courbes d'évolution du  $Q^2$  fréquemment obtenue pour la méta-modélisation multi-fidélité (*e.g.* Figure 4.24). Une autre observation générale est que les performances des approches simple et multi-fidélité convergent lorsque des temps de simulations suffisamment importants sont considérés. Cela s'explique par le fait qu'en multi-fidélité, l'ajout de points sur le niveau grossier tend à devenir négligeable en termes de gain de prédictivité et temps de simulation par rapport à l'ajout de points sur le niveau fin.

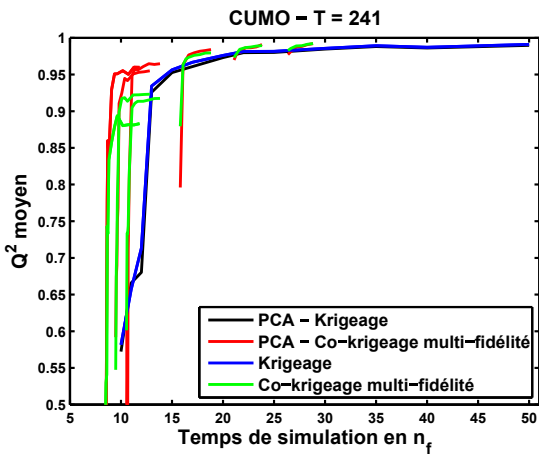
### Comparaison avec la méta-modélisation directe

Pour la méta-modélisation de sorties vectorielles, nous utilisons une méthode de réduction de la dimension (*i.e.* l'analyse en composantes principales) afin de réduire le nombre de modèles de krigeage ou co-krigeage multi-fidélité nécessaires. L'intérêt de cette approche est notamment illustré par la méta-modélisation de propriétés spatiales, telles que les cartes de pression. En effet, des méta-modèles globalement très prédictifs approchant la pression en fin de simulation pour l'ensemble du réservoir (15849 mailles) sont obtenus avec seulement deux modèles de krigeage (ou co-krigeage multi-fidélité). L'alternative classique à cette approche consiste à construire un méta-modèle pour chacun des éléments de la sortie vectorielle que l'on cherche à approcher. Il faudrait alors construire 15849 modèles de krigeage ou co-krigeage multi-fidélité pour obtenir un méta-modèle pour cette sortie, ou bien 241 modèles pour une sortie temporelle du cas PUNQ. On remarque que ces nombres sont susceptibles d'être bien plus élevés sur un cas réel. Bien que le temps de calcul d'un modèle de krigeage soit court (quelques secondes), la construction d'un tel nombre de modèles rend cette approche inadaptée en pratique.

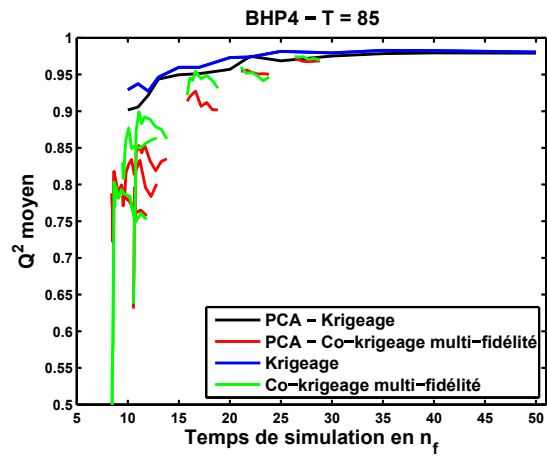
Il est toutefois intéressant de comparer la méta-modélisation de sorties vectorielles via l'analyse en composantes principales avec l'approche classique (un modèle par élément) en termes de prédictivité des méta-modèles. De telles comparaisons ont été réalisées sur différentes sorties temporelles, pour différents temps. La Figure 4.25 donne des exemples de résultats obtenus. On remarque que les résultats de cette figure n'utilisent qu'une partie des tailles de plans d'expériences présentées en section 4.1.4. En effet, la comparaison systématique des deux méthodes est difficile. D'une part, la méta-modélisation directe nécessite la construction d'un nombre important de méta-modèles. D'autre part, les résultats dépendent de la sortie et du temps, ou de la maille, considérés (*e.g.* les cartes de  $Q^2$  sur les Figures 4.20 et 4.23). Les résultats présentés sur la Figure 4.25 sont partiels. Ils indiquent cependant que la prédictivité des méta-modèles obtenus par les deux méthodes sont comparables, voire semblables, en simple fidélité comme en multi-fidélité.

Une comparaison prenant en compte l'ensemble des temps significatifs (*i.e.* temps pour lesquels la variance est supérieure à 5% de la variance moyenne sur la base de test) et des plans d'expériences a été réalisée pour deux sorties : le ratio gaz/huile au puits PRO-1 et la pression au fond du puits PRO-4. Les résultats de cette comparaison sont donnés par la Figure 4.26. Ces observations confirment que l'approche utilisant une réduction de la dimension produit des résultats proches de ceux obtenus lorsque l'on construit un modèle de krigeage ou co-krigeage pour chacun des éléments du vecteur. Les méta-modèles construits via l'ACP sont moins prédictifs pour la pression au fond du puits PRO-4. En revanche, ils sont légèrement meilleurs pour le ratio gaz/huile au puits PRO-1, notamment en multi-fidélité. Ce résultat est remarquable sachant que l'approche ACP ne nécessite que 6 modèles de krigeage/co-krigeage pour cette sortie (*cf.* Tableau 4.7).

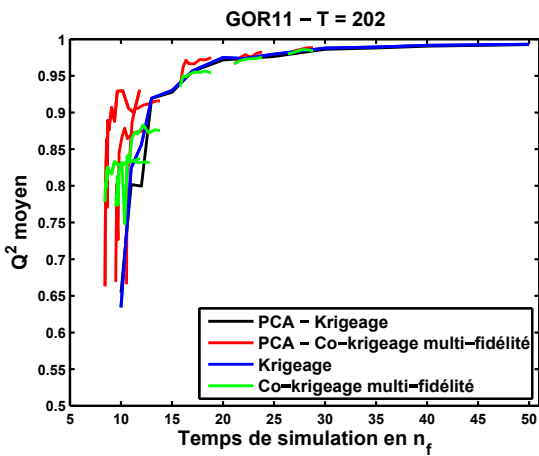
D'une manière générale, les résultats des Figures 4.25 et 4.26 illustrent que les méthodes proposées (utilisant une ACP) pour la méta-modélisation de sorties vectorielles sont efficaces en simple et en multi-fidélité. En effet, elles permettent de construire des méta-modèles aussi prédictifs que ceux obtenus par une approche directe (*i.e.* un modèle par élément du vecteur) pour un moindre nombre de modèles de krigeage/co-krigeage. On observe également que la performance de la méta-modélisation multi-fidélité est la même dans les deux cas: si elle est moins efficace que l'approche simple fidélité avec une méta-modélisation directe, elle l'est aussi avec une méta-modélisation via une ACP (*e.g.* BHP au puits PRO-4), et inversement (*e.g.* GOR au puits PRO-1).



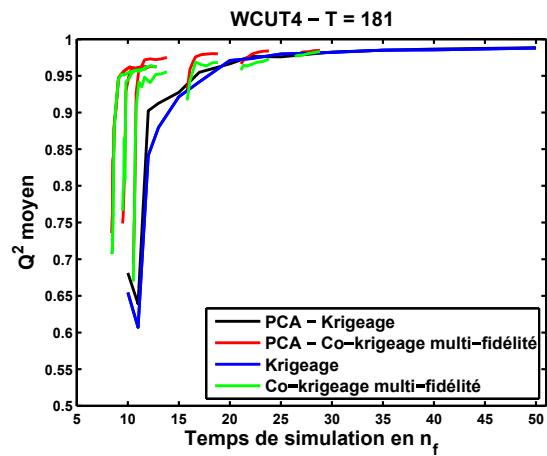
(a) Le cumulé d'huile à 6025 jours.



(b) Le BHP au puits PRO-4 à 2207 jours.



(c) Le GOR au puits PRO-11 à 5114 jours.



(d) Le WCUT au puits PRO-4 à 4564 jours.

Figure 4.25 : Exemples de résultats obtenus pour la qualité des méta-modèles modélisant des sorties dynamiques à un temps donné. La méta-modélisation est directe ou via une analyse en composantes principales (notée PCA) en simple fidélité (Krigeage) et multi-fidélité (Co-krigeage multi-fidélité).

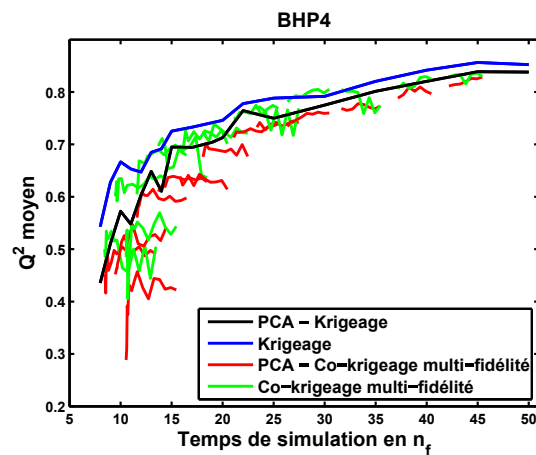
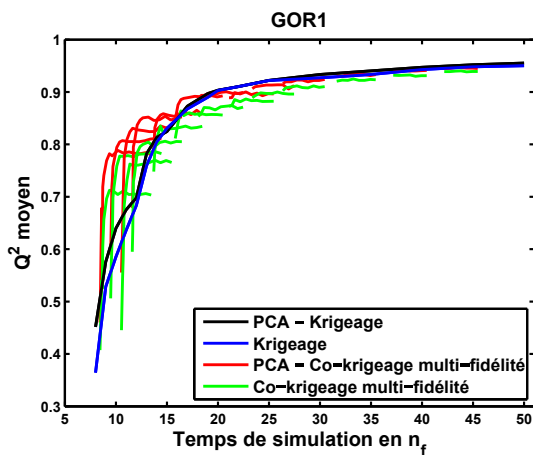


Figure 4.26 : Méta-modélisation du ratio gaz/huile au puits PRO-1 (à gauche) et de la pression au fond du puits PRO-4 (à droite) :  $Q^2$  moyenné sur l'ensemble des temps. La méta-modélisation est directe ou via une analyse en composantes principales (notée PCA) en simple fidélité (Krigeage) et multi-fidélité (Co-krigeage multi-fidélité).

### Explications de la performance de la méta-modélisation multi-fidélité pour les sorties vectorielles

Les résultats de la méta-modélisation des propriétés aux puits montrent que les performances de la méta-modélisation multi-fidélité varient fortement selon la propriété et le puits considérés. Pour certaines sorties, les réponses sur les niveaux fin et grossier sont presque identiques (*e.g.* la BHP ou le GOR au puits PRO-5). Dans de tels cas, il n'est pas surprenant de constater que l'approche multi-fidélité est la plus efficace. Pour les autres sorties, on observe des différences entre les réponses sur le niveau fin et celles sur le niveau grossier. Ces différences sont essentiellement des décalages dans le temps et/ou dans l'amplitude des réponses. La méta-modélisation multi-fidélité de ces sorties produit des résultats plus variables. Pour illustrer ceci, nous considérons le ratio gaz/huile au puits PRO-1 et la pression au fond du puits PRO-4. Dans ces deux cas, les réponses simulées sont différentes aux niveaux fin et grossier (principalement des différences d'amplitudes des réponses). Cependant, l'approche multi-fidélité est performante uniquement pour le GOR. Pour l'autre sortie, elle est systématiquement moins bonne que l'approche simple fidélité.

Pour expliquer la variabilité des résultats de la multi-fidélité entre ces deux sorties, il faut regarder la qualité des modèles de krigeage et co-krigeage approchant les coefficients de projection  $\alpha_l$  relatifs à la décomposition en composantes principales (*cf.* les méthodes décrites en sections 3.2.2 et 3.2.3). Les premiers termes de la décomposition sont ceux qui expliquent la plus grande partie de la variance. En particulier, le premier terme de cette décomposition permet d'expliquer respectivement 83% et 69% de la variance observée sur la base de test pour le GOR au puits PRO-1 et la BHP au puits PRO-4. Les valeurs aux niveaux fin et grossier de ces premiers coefficients et les résultats associés à leur méta-modélisation sont représentés sur les Figures 4.27 et 4.28, respectivement.

On rappelle que les modèles de co-krigeage multi-fidélité sont construits dans cette thèse en prenant  $\rho$  comme une constante (*cf.* Équation 2.14). Cela signifie que l'on considère que les niveaux de réponses fin et grossier sont corrélés linéairement. Pour le GOR au puits PRO-1, on observe en effet une corrélation linéaire pour le premier coefficient de projection (Figure 4.27). Le co-krigeage multi-fidélité est d'ailleurs plus efficace que le krigeage pour approcher ce coefficient. En revanche, pour la BHP au puits PRO-4, la relation n'est pas linéaire. Le co-krigeage multi-fidélité est moins précis que le krigeage pour approcher le coefficient de projection. Lorsque la relation entre la réponse aux niveaux fin et grossier n'est pas linéaire, il faut considérer un nombre important d'évaluations sur le niveau fin afin d'estimer convenablement  $Y_d(\mathbf{x})$  (Équation 2.14), le terme d'écart entre les niveaux. Sur la Figure 4.28 à droite, le terme  $Y_d(\mathbf{x})$  n'est pas bien estimé lorsque  $n_f < 30$  et l'ajout de points sur le niveau grossier n'améliore généralement pas la prédictivité du méta-modèle.

Pour comprendre l'origine de la non-linéarité des coefficients de projection sur les niveaux fin et grossier de la BHP au puits PRO-4, nous délimitons deux zones dans la Figure 4.28 gauche. Dans la zone 1, la relation entre les coefficients de projection des deux niveaux est linéaire. La zone 2 regroupe les coefficients sur le niveau grossier dont la valeur est supérieure à 200. Dans cette zone, les valeurs des coefficients sur le niveau grossier stagnent autour de 250 alors qu'elles continuent d'augmenter sur le niveau fin. Les simulations associées aux coefficients de projection des deux zones sont représentées sur la Figure 4.29. On remarque que les réponses simulées associées aux coefficients de projection se trouvant dans la zone 2 sont presque toujours à la pression limite de 120 bars pour le niveau grossier, alors qu'elles continuent d'évoluer au dessus de cette limite pour le niveau fin. Au contraire, les simulations associées aux points se trouvant dans la zone 1 évoluent toutes au dessus de la pression limite. Ce changement de comportement des réponses sur le niveau grossier explique la non-linéarité que l'on observe au niveau du premier coefficient de projection. Par ailleurs, les simulations grossières de la zone 2 apportent moins d'information sur le niveau fin puisqu'elles tendent à être systématiquement à la pression limite.

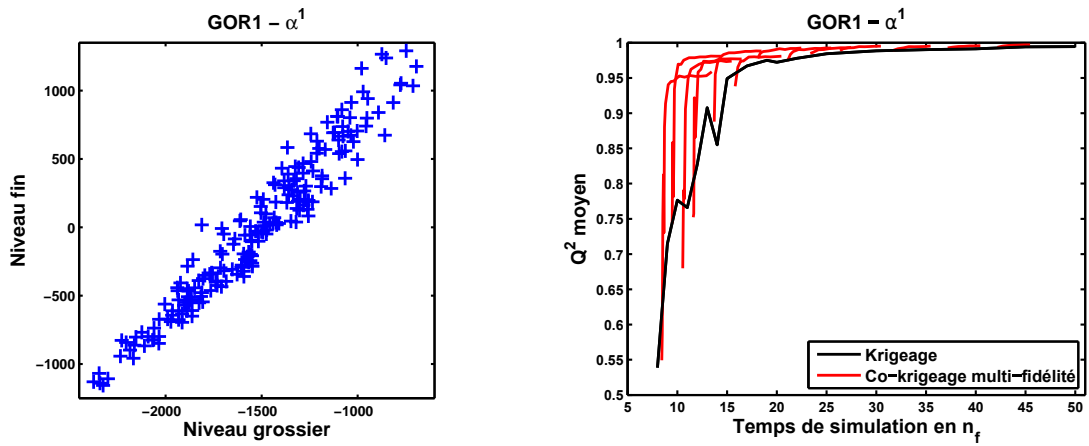


Figure 4.27 : Coefficient de projection du premier terme de l'ACP appliquée au ratio gaz/huile au puits PRO-1 : à gauche, valeurs de ce coefficient sur les niveaux fin et grossier pour la base de test; à droite,  $Q^2$  moyen calculé pour des méta-modèles de krigage (noir) et pour des méta-modèles de co-krigeage multi-fidélité (rouge).

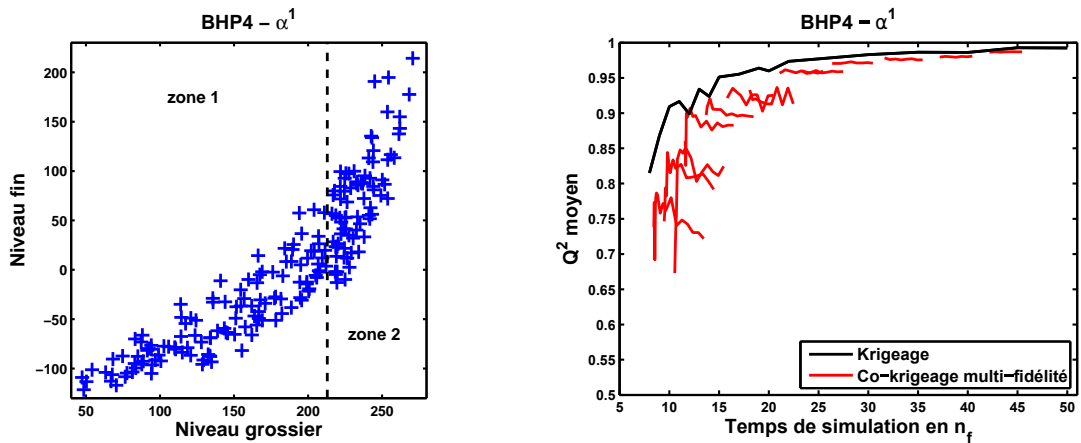


Figure 4.28 : Coefficient de projection du premier terme de l'ACP appliquée à la pression au fond du puits PRO-4: à gauche, valeurs de ce coefficient sur les niveaux fin et grossier pour la base de test; à droite,  $Q^2$  moyen calculé pour des méta-modèles de krigage (noir) et pour des méta-modèles de co-krigeage multi-fidélité (rouge).

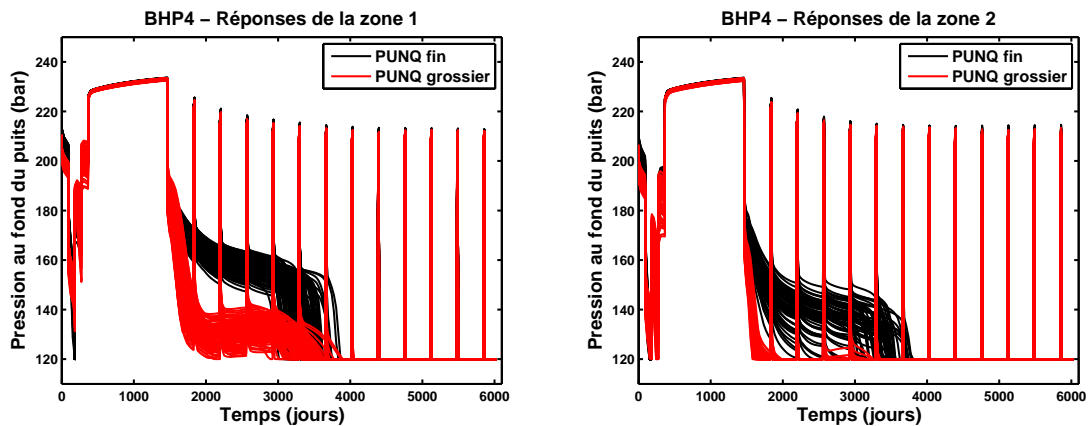


Figure 4.29 : Les simulations de la pression au fond du puits PRO-4 sur la base de test correspondant aux coefficients de projection se trouvant dans la zone 1 (à gauche) et dans la zone 2 (à droite).

La qualité de la méta-modélisation du premier coefficient de projection a donc une influence majeure sur la qualité de la méta-modélisation de l'ensemble de la sortie vectorielle. Toutefois, une mauvaise méta-modélisation des coefficients suivants peut également avoir un impact significatif sur la méta-modélisation de la sortie. On peut prendre pour exemple le GOR au puits PRO-4, une sortie pour laquelle la méta-modélisation ne produit pas de bons résultats en multi-fidélité (*cf.* Figure 4.16). On observe sur la Figure 4.30 que les méta-modèles multi-fidélité du premier coefficient de cette sortie sont souvent meilleurs que ceux obtenus par krigeage, mais que ce n'est pas le cas pour le second coefficient de projection. On note que les deux premiers termes de la décomposition expliquent 88% et 7% de la variance de cette sortie sur la base de test.

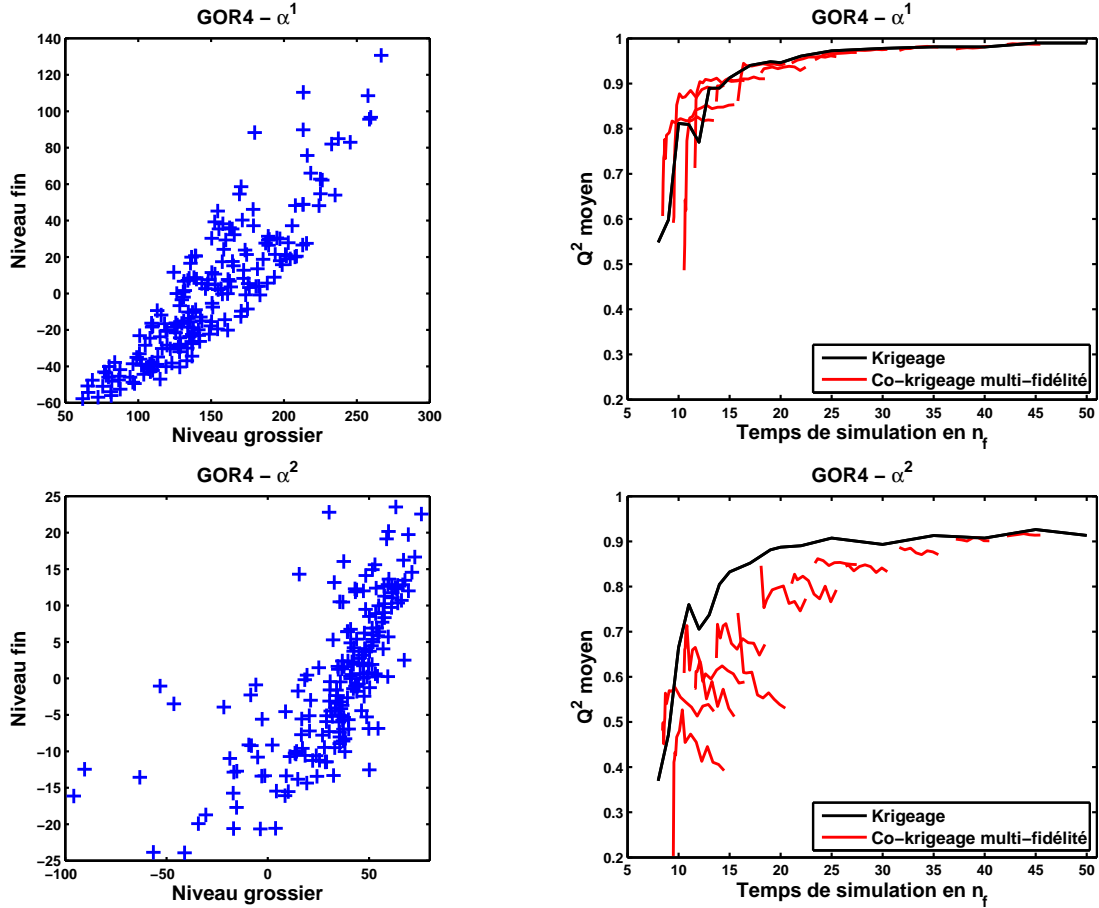


Figure 4.30 : Coefficient de projection des deux premiers termes de l'ACP appliquée au ratio gaz/huile au puits PRO-4: à gauche, valeurs de ces coefficients sur les niveaux fin et grossier pour la base de test; à droite,  $Q^2$  moyen calculé pour des méta-modèles de krigeage (noir) et pour des méta-modèles de co-krigeage multi-fidélité (rouge)

La méta-modélisation multi-fidélité du second coefficient est particulièrement mauvaise lorsque peu de points sur le niveau fin sont considérés. Cela s'explique cette fois encore par la non-linéarité de la relation entre les valeurs de ce second coefficient sur les niveaux fin et grossier. Lorsque peu de points sont sélectionnés, seules des valeurs positives du coefficient de projection sur le niveau grossier sont échantillonnées (*cf.* Figure 4.30 en bas à droite). Le modèle d'écart  $Y_d(\mathbf{x})$  et le coefficient  $\rho$  (Équation 2.14) sont donc construits et estimés uniquement à partir de ces valeurs. Puis, lorsque l'on considère des évaluations supplémentaires sur le niveau grossier, on échantillonne des valeurs du coefficient de projection fortement négatives sur le niveau grossier. Ces nouvelles observations grossières sont très mal corrigées par  $\rho$  et  $Y_d(\mathbf{x})$ , et détériorent la prédictivité du méta-modèle multi-fidélité pour ce coefficient. Finalement, la construction de méta-modèles multi-fidélité très peu prédictifs pour le second coefficient va fortement détériorer la qualité des méta-modèles multi-fidélité pour la sortie.

### 4.3 Méta-modélisation de la fonction objectif

Dans cette partie, nous présentons et expliquons les résultats obtenus lors de la méta-modélisation de la fonction objectif à travers différentes méthodes. Dans un premier temps, la fonction objectif est directement approchée par des méta-modèles de krigeage et co-krigeage multi-fidélité (section 4.3.1). Dans le but d'améliorer la qualité des méta-modèles pour cette sortie, notamment dans un cadre multi-fidélité, d'autres approches ont été mises en place. Nous avons tout d'abord appliqué la méta-modélisation à l'erreur calculée sur des sous-ensembles de données (section 4.3.2), puis nous avons utilisé les méta-modèles des réponses dynamiques pour calculer un estimateur de la fonction objectif (section 4.3.3).

Nous utilisons la définition introduite dans la section 1.2.1 pour calculer la fonction objectif :

$$FO(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^K \sum_{w=1}^W \omega_{kw} \sum_{t=1}^T \left( \frac{y_k(\mathbf{x}, t) - d_{kwt}^{obs}}{\sigma_{kwt}} \right)^2 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^K \sum_{w=1}^W \omega_{kw} FO_{kw}(\mathbf{x}) \quad (4.4)$$

avec  $d^{obs}$  les données de production,  $y(\mathbf{x}, t)$  les réponses en production simulées,  $\sigma$  l'écart-type de l'erreur sur les mesures et  $\omega$  un poids sur les séries de données. Les données de production correspondent ici aux réponses simulées pour le modèle PUNQ fin de référence lorsque les paramètres incertains prennent les valeurs de référence données dans le Tableau 4.5. Elles sont représentées en noir sur les Figures 4.7 à 4.9, et en bleu sur les Figures 4.13, 4.15 et 4.17. Les indices  $k$ ,  $w$  et  $t$  indiquent respectivement les propriétés (BHP, GOR et WCUT), les puits (PR0-1, PRO-4, PRO-5, PRO-11, PRO-12 et PRO-15) et les 241 temps pour lesquels on a des mesures à caler. L'erreur de mesure est supposée ici relative:  $\sigma_{kwt} = 10\% \times d_{kwt}^{obs}$  avec  $\sigma_{kwt} > 0.005$  afin de limiter le poids des données très faibles comme le WCUT. Les poids  $\omega$  sont calculés de manière à équilibrer les contributions des séries de données entre elles. Ils sont ici pris égaux pour tous les puits, pour une même propriété ( $\omega_{kw} = \omega_k$ ), et sont calculés de telle sorte que, sur la base de tests de 200 points, chaque propriété ait une contribution identique en moyenne. On note  $FO_{kw}$  la contribution à la fonction objectif d'une sortie donnée (pour une propriété  $k$  au puits  $w$ ).

#### 4.3.1 Méta-modélisation directe

Tout d'abord, on construit directement des méta-modèles de la fonction objectif, c'est-à-dire sans passer par des fonctions intermédiaires. Cette approche est décrite en détail dans la section 3.3.1. Dans un cadre simple fidélité, elle se résume à construire des méta-modèles par krigeage à partir des valeurs de fonction objectif calculées sur les différents LHS. En multi-fidélité, elle consiste à construire des méta-modèles par co-krigeage multi-fidélité en se servant des valeurs des fonctions objectifs fine et grossière calculées sur les différents LHS imbriqués. Le  $Q^2$  moyen calculé sur la base de tests pour les différentes tailles de LHS considérées est représenté sur la Figure 4.31.

La Figure 4.31 gauche montre que la méta-modélisation multi-fidélité n'est pas plus performante que la méta-modélisation simple fidélité pour la fonction objectif. On observe de l'instabilité dans les résultats du co-krigeage multi-fidélité lorsque des temps de simulation courts sont considérés ( $n_f < 20$ ). Pour des temps plus longs, les performances des deux approches sont similaires. Ce résultat décevant pour la multi-fidélité peut s'expliquer par la relativement mauvaise corrélation entre les valeurs de la fonction objectif calculées sur les niveaux fin et grossier (Figure 4.31 droite).

Pour comprendre l'origine de cette mauvaise corrélation, nous avons décomposé la fonction objectif selon la somme des erreurs relatives à chacune des trois propriétés BHP, GOR et WCUT. Les valeurs de ces contributions pour la base de tests sont données par la Figure 4.32.

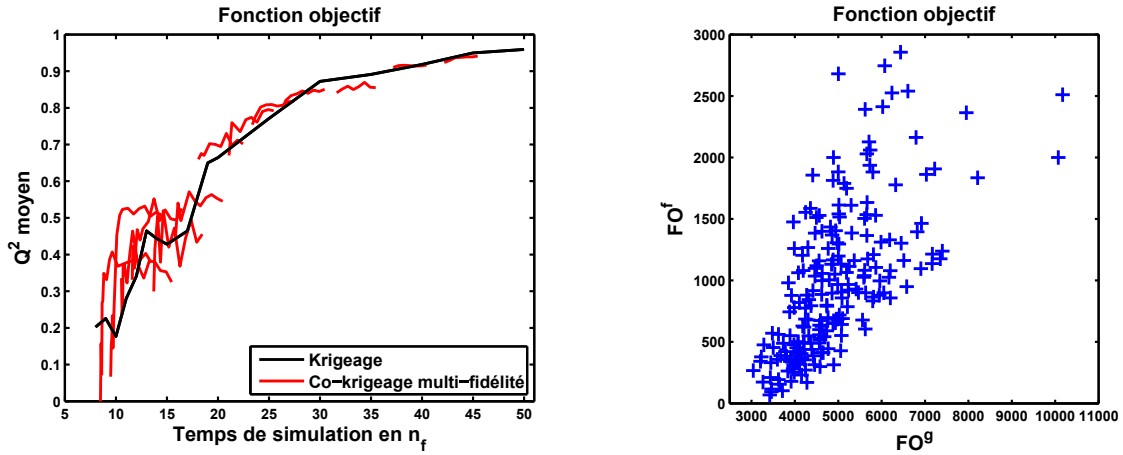


Figure 4.31 : Fonction objectif (approche directe) : à gauche,  $Q^2$  moyen calculé pour des méta-modèles de krigeage (noir) et co-krigeage multi-fidélité (rouge); à droite, valeurs des fonctions objectif fine et grossière sur la base de tests.

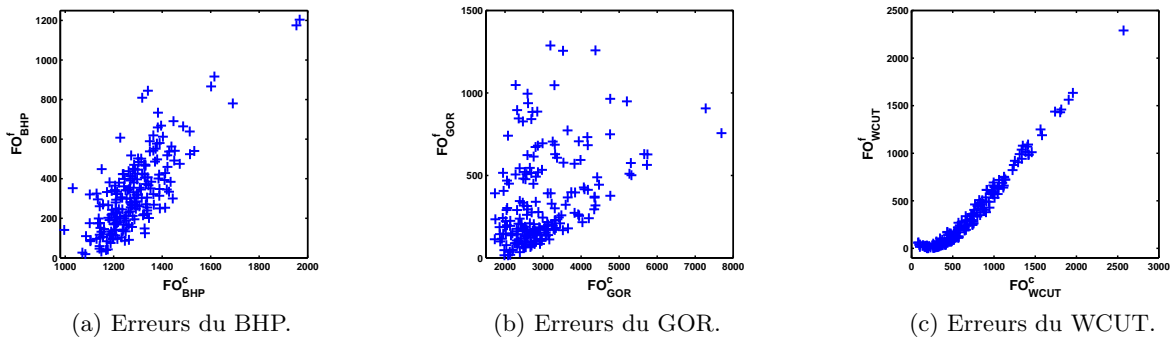


Figure 4.32 : Valeurs sur les niveaux fin et grossier des contributions à la fonction objectif sur la base de test par propriété (BHP, GOR et WCUT).

On observe que la corrélation est très bonne pour la somme des contributions venant de la fraction d'eau (WCUT), relativement bonne pour celles venant de la pression au fond du puits (BHP) et mauvaise pour celles venant du ratio gaz/huile (GOR). On note alors que si on écarte le GOR du calcul de la fonction objectif, on retrouve de très bonnes performances pour l'approche multi-fidélité comme illustré sur la Figure 4.33.

Ces résultats confirment que les performances du co-krigeage multi-fidélité dépendent de la corrélation de la réponse modélisée entre les différents niveaux. Indirectement, la définition de la fonction objectif va donc influencer les performances de la multi-fidélité: selon la valeur des poids ou les séries de données considérées, on va favoriser ou limiter des contributions plus ou moins bien corrélées sur les différents niveaux de fidélité, résultant en une fonction objectif plus ou moins corrélée elle aussi.



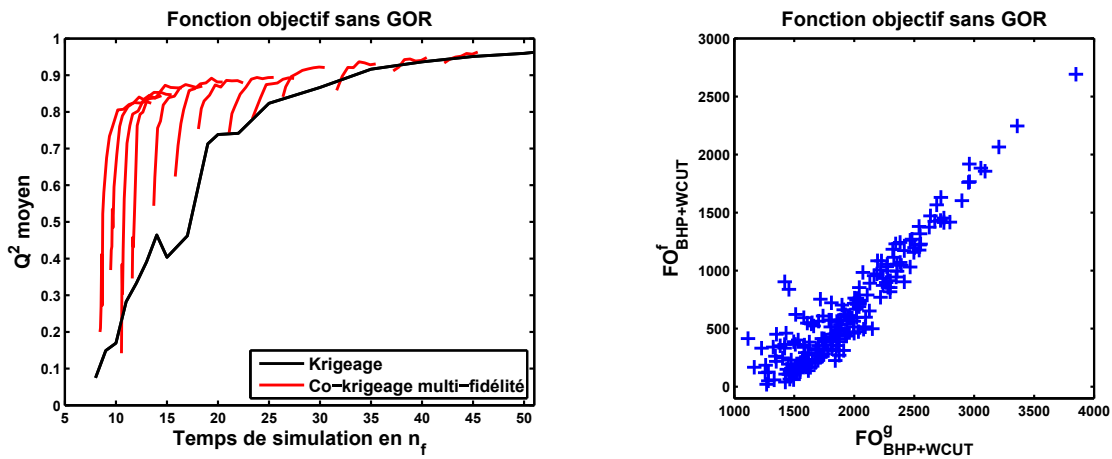


Figure 4.33 : Fonction objectif sans le ratio gaz/huile (approche directe) : à gauche,  $Q^2$  moyen calculé pour des méta-modèles de krigage (noir) et co-krigeage multi-fidélité (rouge); à droite, les valeurs des fonctions objectifs fine et grossière sur la base de tests.

### 4.3.2 Décomposition en sous-ensembles de données

L'exclusion d'un type de sortie de la fonction objectif n'est pas une solution acceptable car cela équivaut à ignorer une partie des données. Nous proposons donc une solution alternative consistant à considérer davantage de modèles de krigage ou co-krigeage multi-fidélité pour estimer la fonction objectif. Le principe est d'utiliser ces modèles pour approcher la fonction objectif sur des sous-ensembles de données. Par sommation des estimateurs de ces différents ensembles, on obtient un méta-modèle de la fonction objectif. Le nombre de méta-modèles construits par cette méthode dépend donc du nombre de groupes (ou contributions) que l'on considère. Plusieurs découpages de la fonction objectif ont été testés. Nous présentons ici les résultats obtenus pour deux d'entre eux:

- un modèle pour les propriétés BHP et WCUT sommées sur tous les puits, et un modèle par puits pour le GOR, soit un total de 7 modèles,
- un modèle par propriété et par puits, soit un total de 18 modèles.

#### Découpage en 7 contributions

Ce premier découpage est proposé pour essayer d'améliorer la corrélation de la fonction objectif : nous groupons les erreurs sur les BHP et WCUT que nous savons bien corrélées (*cf.* Figure 4.33) et nous raffinons le découpage uniquement pour le GOR. Nous considérons ainsi un modèle de krigage ou co-krigeage multi-fidélité pour approcher la contribution du GOR à chaque puits. Les valeurs de ces contributions pour les niveaux fin et grossier sont représentées sur la Figure 4.34. Les résultats de leur méta-modélisation sont donnés par la Figure 4.35.

On observe sur la Figure 4.34 que les erreurs calculées sur le GOR pour les niveaux fin et grossier présentent des corrélations différentes selon le puits considéré. C'est pour cette raison qu'après sommation, la contribution globale du GOR (Figure 4.32) est mal corrélée. La construction d'un méta-modèle par contribution du GOR permet alors d'exploiter le potentiel de la multi-fidélité pour les puits où cette contribution est bien corrélée (*cf.* Figure 4.35): les puits PRO-5, PRO-11 et PRO-12.

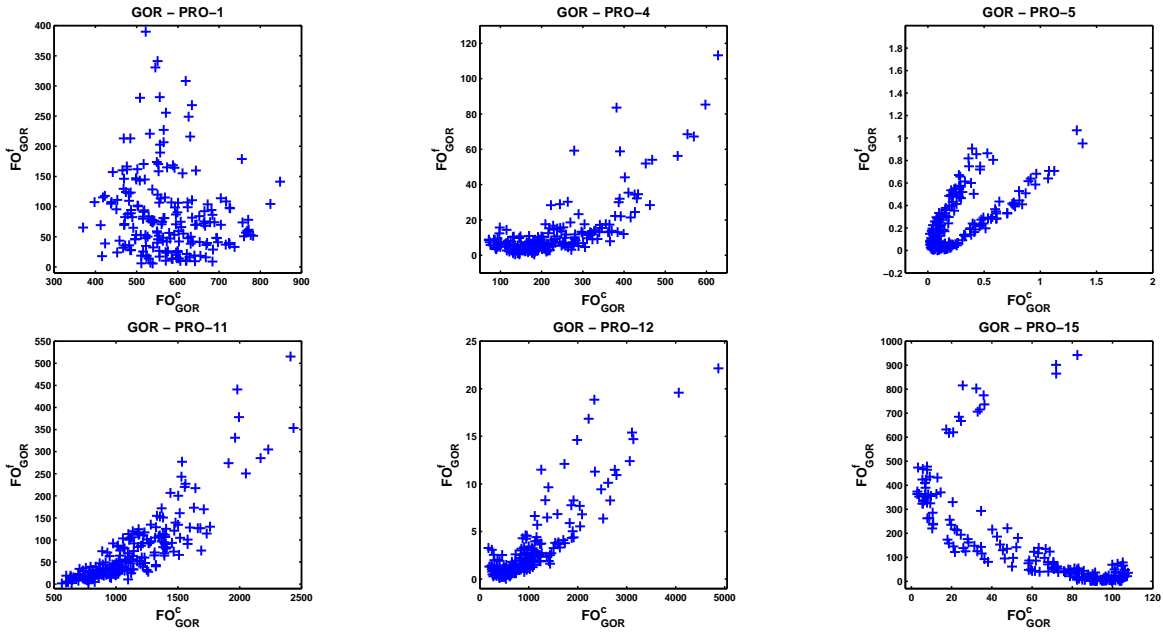


Figure 4.34 : Le ratio gaz/huile : les contributions à la fonction objectif du GOR par puits calculées sur la base de test pour les niveaux fin et grossier.

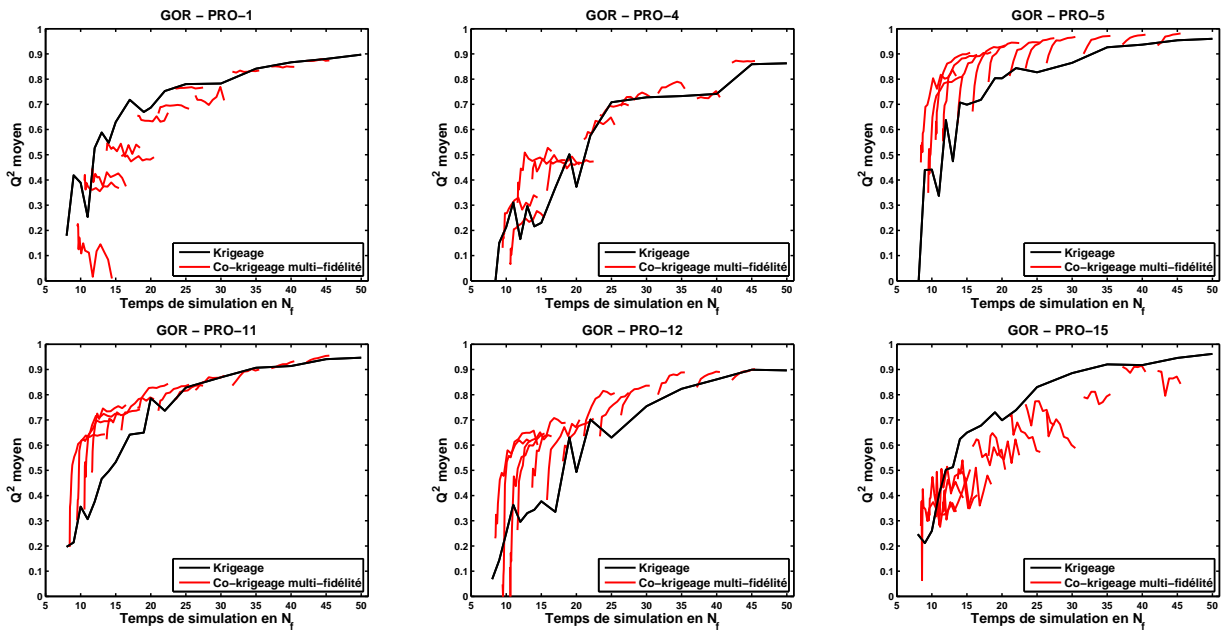


Figure 4.35 : Le ratio gaz/huile : le  $Q^2$  moyen calculé pour des méta-modèles approchant les contributions du GOR à la fonction objectif pour les différents puits en utilisant le krigeage (noir) et le co-krigeage multi-fidélité (rouge).

Nous pouvons finalement construire un méta-modèle de la fonction objectif à partir du méta-modèle de la fonction objectif sans le GOR, et des méta-modèles approchant les différentes contributions du GOR. Le  $Q^2$  moyen calculé pour un tel méta-modèle est donné par la Figure 4.36.

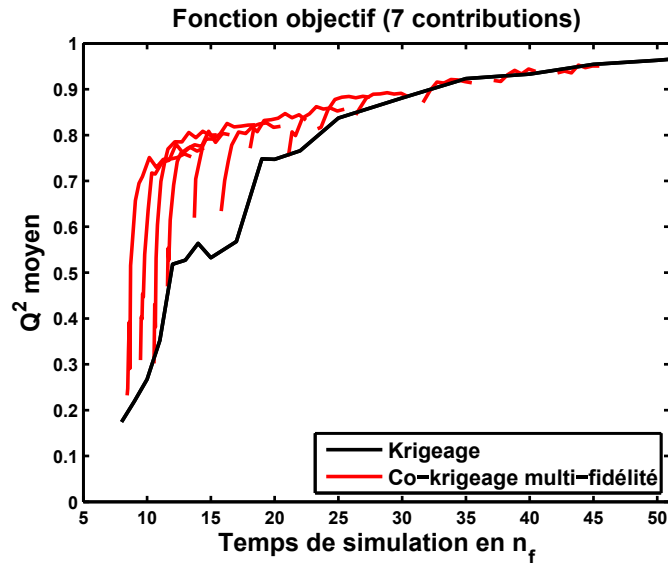


Figure 4.36 : Fonction objectif à partir de 7 contributions (approche directe) :  $Q^2$  moyen calculé pour des méta-modèles de krigage (noir) et co-krigeage multi-fidélité (rouge).

La Figure 4.36 montre que le co-krigeage multi-fidélité permet un gain en prédictivité sur les temps de simulation  $n_f$  courts et reste aussi bon que le krigage sur les temps plus longs. Un tel découpage est donc pertinent pour l'approche multi-fidélité. Cependant, cette approche est difficilement applicable en pratique car les corrélations des contributions entre les différents niveaux de fidélité sont inconnues. Il faut les estimer pour pouvoir classer les différentes contributions et ainsi choisir le meilleur découpage pour la méta-modélisation de la fonction objectif. Une telle analyse nécessite généralement trop de temps de calcul pour être pertinente.

### Découpage en 18 contributions

Pour le second découpage, 18 méta-modèles sont construits afin de modéliser les erreurs pour chaque propriété à chaque puits. Ce découpage est proposé afin d'observer l'impact d'un découpage plus fin sur les autres propriétés. Les valeurs des contributions de la BHP sur les deux niveaux de fidélité et les résultats de leur méta-modélisation sont présentés sur les Figure 4.37 et 4.38, respectivement. Les mêmes résultats sont représentés sur les Figures 4.39 et 4.40 pour le WCUT.

Par sommation des méta-modèles de chacune des contributions des différentes sorties, on obtient un méta-modèle de la fonction objectif. En suivant la procédure habituelle, on peut calculer le  $Q^2$  moyen pour ce méta-modèle à partir des différentes tailles de plans d'expériences considérés. Les résultats d'une telle méta-modélisation de la fonction objectif sont présentés sur la Figure 4.41.

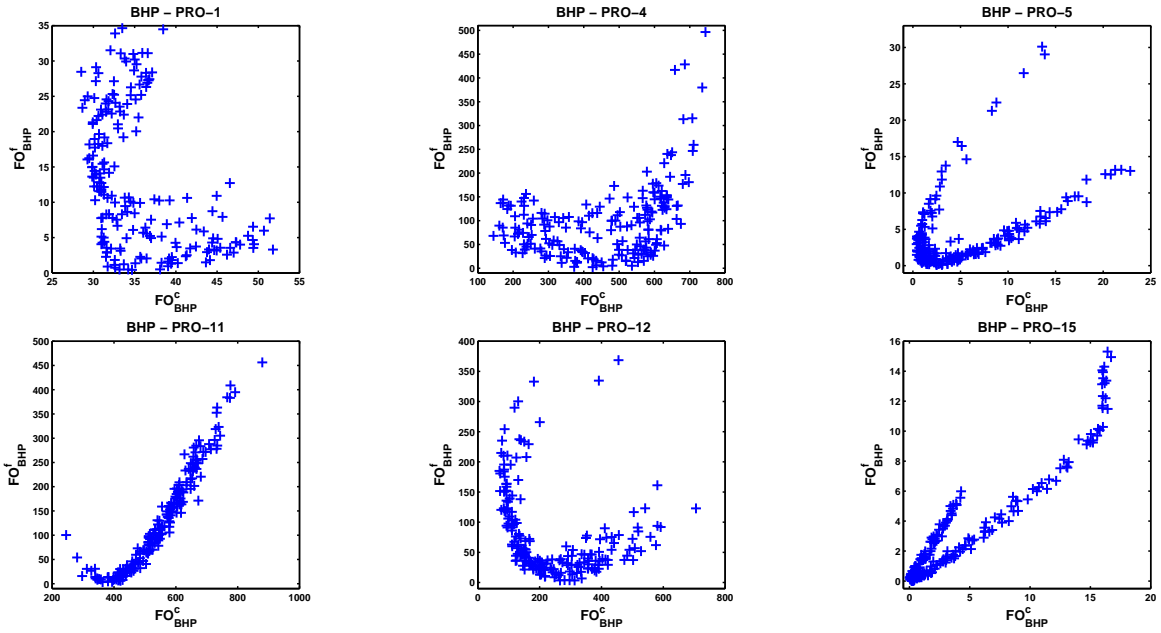


Figure 4.37 : La pression au fond du puits : les contributions à la fonction objectif de la BHP par puits calculées sur la base de test pour les niveaux fin et grossier.

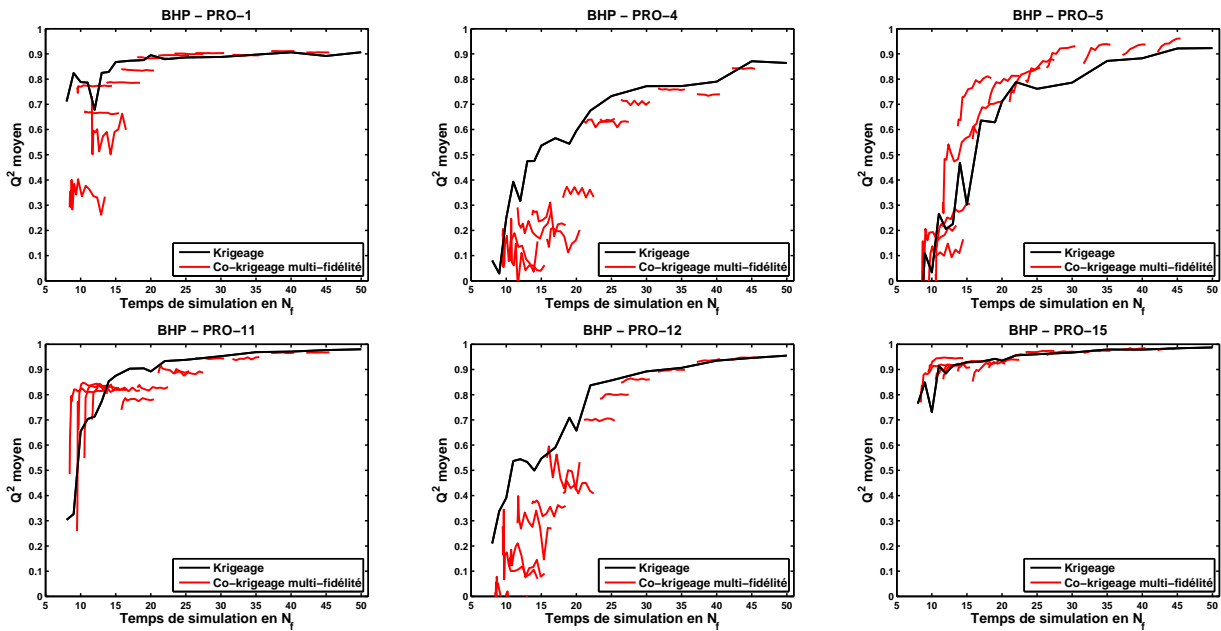


Figure 4.38 : La pression au fond du puits : le  $Q^2$  moyen calculé pour des méta-modèles approchant les contributions de la BHP à la fonction objectif pour les différents puits en utilisant le krigage (noir) et le co-krigeage multi-fidélité (rouge).

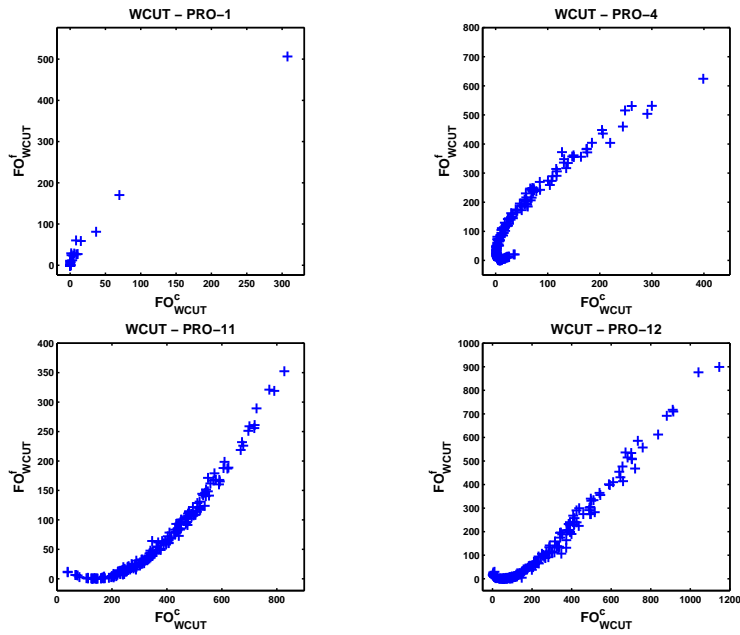


Figure 4.39 : La fraction d'eau : les contributions à la fonction objectif du WCUT par puits calculées sur la base de test pour les niveaux fin et grossier.

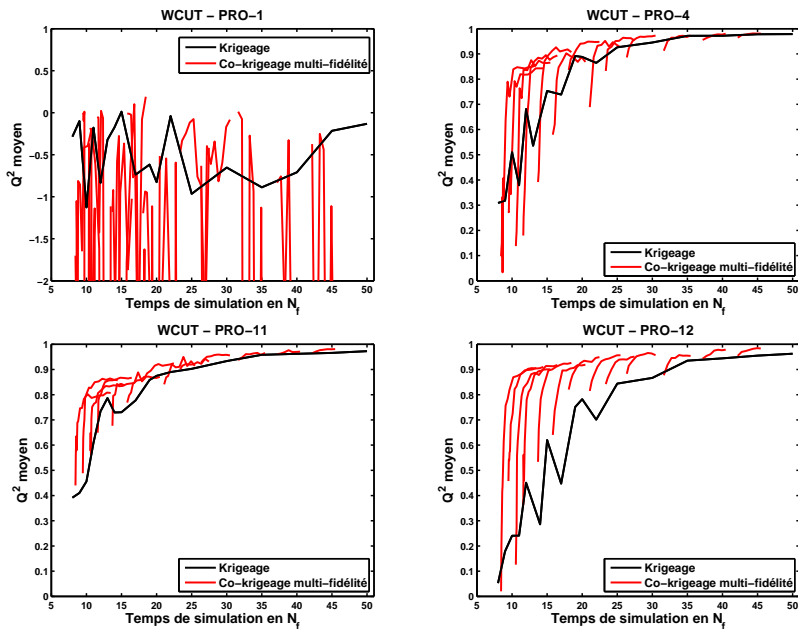


Figure 4.40 : La fraction d'eau : le  $Q^2$  moyen calculé pour des méta-modèles approchant les contributions du WCUT à la fonction objectif pour les différents puits en utilisant le krigeage (noir) et le co-krigeage multi-fidélité (rouge).

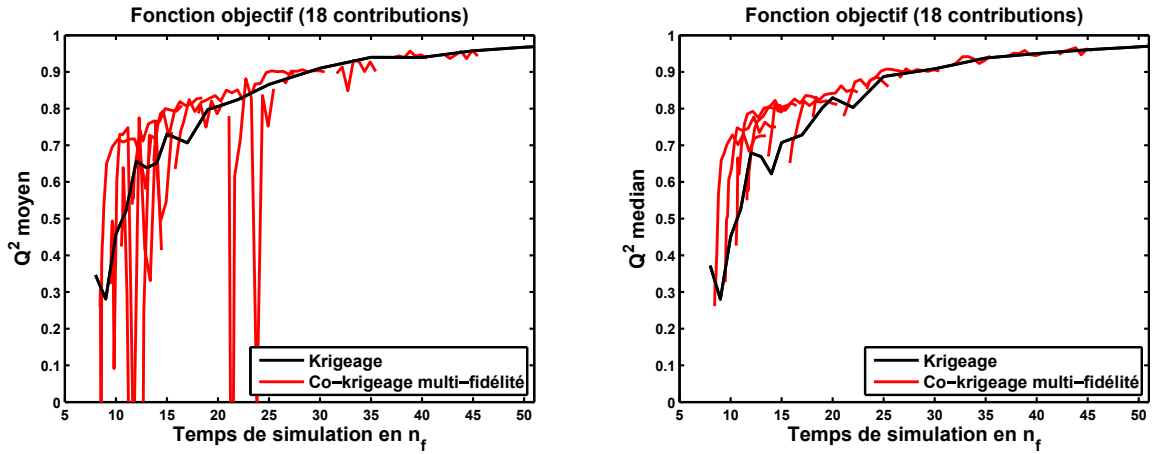


Figure 4.41 : Fonction objectif à partir de 18 contributions (approche directe) :  $Q^2$  moyen (à gauche) et médian (à droite) calculé pour des méta-modèles de krigeage (noir) et co-krigeage multi-fidélité (rouge).

On observe sur la Figure 4.41 gauche que la méta-modélisation multi-fidélité de la fonction objectif présente des résultats instables: pour certains LHS imbriqués, la prédictivité du modèle de la fonction objectif chute subitement. En effet, le méta-modèle approchant l'erreur sur le WCUT au puits PRO-1 peut être très mauvais (*cf.* Figure 4.40), ce qui engendre une mauvaise modélisation de la fonction objectif et un mauvais  $Q^2$  moyen. De tels cas étant peu fréquents, on peut les filtrer en considérant le  $Q^2$  médian (Figure 4.41 droite). La méta-modélisation multi-fidélité n'est toutefois pas plus efficace qu'avec le découpage considéré précédemment (via 7 contributions). En revanche, le krigeage est plus performant avec ce nouveau découpage car les erreurs sont modélisées plus finement.

### 4.3.3 Modélisation via les sorties dynamiques

Nous proposons finalement une méthode alternative pour la méta-modélisation de la fonction objectif, décrite dans la section 3.3.2. L'idée est de mettre à profit les bons résultats obtenus pour la méta-modélisation des sorties vectorielles en utilisant ces méta-modèles pour estimer la fonction objectif.

Le krigeage (ou co-krigeage multi-fidélité) combiné à l'analyse en composantes principales est donc utilisé en amont pour modéliser chacune des réponses dynamiques intervenant dans la définition de la fonction objectif. Si les réponses dynamiques sont bien modélisées, on peut espérer obtenir une bonne estimation de l'erreur sur les données, et donc une bonne estimation de la fonction objectif. Ainsi, avec cette méthodologie, ce sont les réponses dynamiques qui définissent les niveaux fin et grossier, et plus précisément les coefficients de projection correspondant à leur décomposition par ACP. La définition de la multi-fidélité ne se fait donc plus au niveau de la fonction objectif ou de ses contributions.

La modélisation des sorties dynamiques nécessaires à la construction de la fonction objectif nécessite de définir le nombre de composantes principales  $L$  utilisées pour chacune des sorties. Nous continuons à choisir  $L$  tel que la décomposition explique 99% de la variance sur la base de test (*cf.* Tableau 4.7). Au total, 88 composantes sont donc utilisées pour la modélisation des 18 sorties dynamiques. Il faut ainsi 88 méta-modèles pour modéliser la fonction objectif par cette méthode. Les  $Q^2$  moyens et médians obtenus par cette approche sont représentés sur la Figure 4.42.

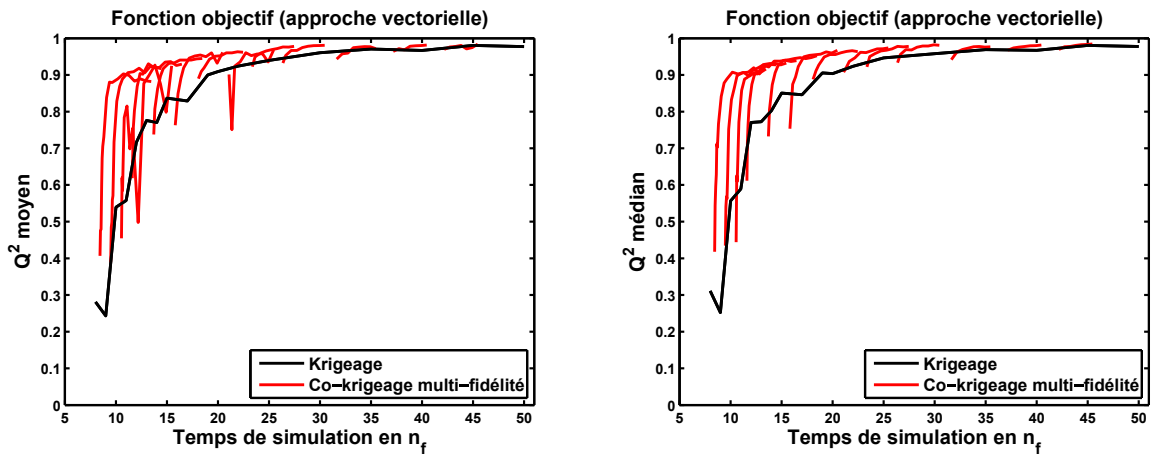


Figure 4.42 : Fonction objectif (approche vectorielle) :  $Q^2$  moyen (à gauche) et médian (à droite) calculé pour des méta-modèles de krigage (noir) et co-krigeage multi-fidélité (rouge).

On constate que cette approche permet d'améliorer la méta-modélisation de la fonction objectif à la fois en simple et en multi-fidélité. L'approche multi-fidélité apporte un gain de performance important par rapport à l'approche simple fidélité sur des temps  $n_f$  courts. Sur les temps plus longs, les deux approches donnent des résultats équivalents. On remarque notamment qu'un méta-modèle multi-fidélité construit à partir d'un LHS imbriqué avec  $n_f = 8$  et  $n_g = 50$  permet d'atteindre un  $Q^2$  moyen  $> 0,9$  pour un temps équivalent à  $n_f = 10,7$ , alors qu'en simple fidélité, il faut au moins  $n_f = 20$  points pour atteindre les mêmes performances.

La méta-modélisation multi-fidélité produit encore des résultats instables pour quelques LHS imbriqués, ce qui est à nouveau lié à une mauvaise prédiction du WCUT au puits PRO-1 pouvant survenir lorsque peu d'évaluations sur le niveau fin sont considérées. De tels cas étant peu fréquents, ils n'apparaissent pas dans les résultats lorsque l'on considère le  $Q^2$  médian (Figure 4.42 droite).

#### 4.3.4 Discussion

##### Méta-modélisation de la fonction objectif et nombre de modèles de krigage

Nous avons testé plusieurs méthodes pour la construction d'un méta-modèle approchant la fonction objectif: l'approche directe (Figure 4.31), via 7 contributions (Figure 4.36), via 18 contributions (4.41) et vectorielle (Figure 4.42). Ces méthodes nécessitent respectivement le calcul de 1, 7, 18 et 88 modèles de krigage en simple fidélité ou de co-krigeage en multi-fidélité. A titre de comparaison, nous avons reporté sur la Figure 4.43 les performances de ces méthodes dans leur version simple fidélité. On constate ainsi l'amélioration de la prédictivité des méta-modèles à temps de simulation  $n_f$  égal lorsqu'on change de méthode et que l'on augmente le nombre de modèles de krigage. La méta-modélisation de la fonction objectif en passant par la modélisation de sous-ensembles d'erreurs, ou par la modélisation des sorties vectorielles, permet de simplifier la complexité des réponses à approcher pour les modèles de krigage. En particulier, l'efficacité de l'approche vectorielle est due au fait que les différentes sorties dynamiques, prises une par une, sont plus faciles à modéliser que la fonction objectif. Cette approche permet ainsi de construire des méta-modèles prédictifs de la fonction objectif à partir d'un nombre réduit d'évaluations.

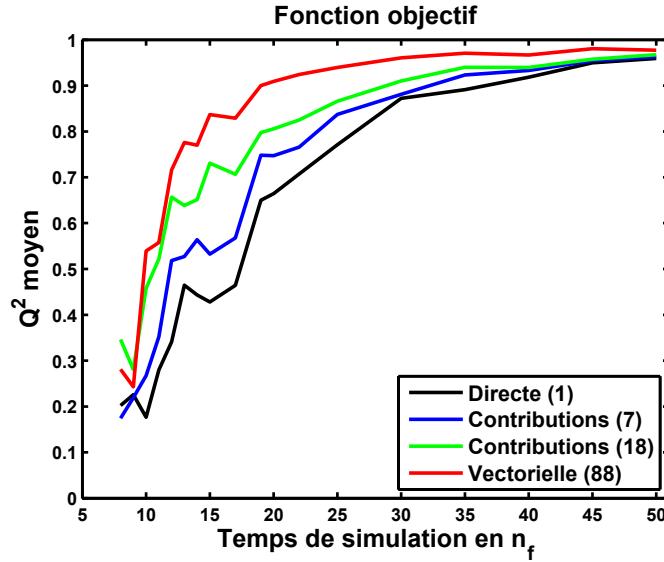


Figure 4.43 : Méta-modélisation de la fonction objectif en simple fidélité (basée sur le krigeage):  $Q^2$  moyen des méta-modèles pour les différentes méthodes testées.

### Une méthode adaptée pour la méta-modélisation de la fonction objectif en multi-fidélité

Pour la multi-fidélité, la relation entre prédictivité des méta-modèles de la fonction objectif et nombre de modèles de co-krigeage multi-fidélité est plus complexe car elle dépend de la corrélation entre les niveaux fin et grossier des réponses approchées. Les résultats des découpages en 7 et 18 contributions montrent qu'un découpage plus fin ne permet pas nécessairement d'améliorer la qualité des méta-modèles de la fonction objectif (*cf.* Figures 4.36 et 4.41). En effet, bien que les réponses des sorties dynamiques sur les niveaux fin et grossier présentent plus souvent de fortes similarités (Figures 4.13, 4.15 et 4.17), leurs contributions à la fonction objectif ne sont pas nécessairement bien corrélées (*cf.* Figures 4.34, 4.37 et 4.39). C'est typiquement le cas du ratio gaz/huile au puits PRO-1 (Figures 4.15 et 4.34).

Pour expliquer cette observation, nous nous plaçons dans un cas idéal où la relation entre les réponses fines et grossières est linéaire. On suppose alors que  $y_k^f(\mathbf{x}, t) = a y_k^g(\mathbf{x}, t)$  pour tous les temps et tous les points d'expérience, avec  $a$  une constante. On peut écrire l'équation paramétrique suivante (en prenant le poids  $\sigma = 1$ ):

$$\begin{cases} FO_k^g(\mathbf{x}) = \sum_t (y_k^g(\mathbf{x}, t) - d_{kt}^{obs})^2 \\ FO_k^f(\mathbf{x}) = \sum_t (y_k^f(\mathbf{x}, t) - d_{kt}^{obs})^2 = \sum_t (a y_k^g(\mathbf{x}, t) - d_{kt}^{obs})^2 \end{cases} \quad (4.5)$$

Après reformulation, on obtient l'expression suivante:

$$FO_k^f(\mathbf{x}) = a FO_k^g(\mathbf{x}) + (a - 1) \sum_t (y_k^g(\mathbf{x}, t) y_k^f(\mathbf{x}, t) - [d_{kt}^{obs}]^2) \quad (4.6)$$

Cette équation signifie que même une relation linéaire entre les réponses fines et grossières n'implique pas que la relation entre leurs contributions respectives à la fonction objectif soit linéaire. Celle-ci n'est linéaire que si le terme additionnel  $(a - 1) \sum_t (y_k^g(\mathbf{x}, t) y_k^f(\mathbf{x}, t) - [d_{kt}^{obs}]^2)$  est nul. Ce terme additionnel permet d'expliquer les formes de type paraboliques que l'on observe régulièrement sur les Figures 4.34, 4.37 et 4.39. En particulier, ce terme peut être toujours positif (ou négatif) pour une valeur de  $a$  donnée. C'est le cas lorsque les réponses fines et grossières sont toujours situées au-dessus (ou au dessous) de la réponse de référence. Dans ce cas, on observe seulement une branche de la parabole.



La relation entre les contributions fines et grossières est alors presque linéaire et les méta-modèles multi-fidélité sont performants. C'est typiquement le cas du WCUT aux puits PRO-11 et PRO-12 (*cf.* Figures 4.39 et 4.40).

Si la méta-modélisation vectorielle permet d'améliorer la qualité des méta-modèles par rapport à la méta-modélisation directe, un atout majeur de cette approche est son efficacité dans un cadre multi-fidélité. En effet, les réponses utilisées pour les modèles de co-krigeage multi-fidélité sont les coefficients de projection issus de l'analyse en composantes principales de chacune des sorties vectorielles. Or, lorsque les réponses simulées avec les modèles de réservoir fin et grossier ont un comportement similaire, on observe en pratique que les coefficients de projection associés à ces réponses sont généralement bien corrélés. Ce n'est pas nécessairement le cas pour les valeurs de la fonction objectif ou ses différentes contributions sur les niveaux fin et grossier. En exploitant les corrélations au niveau des coefficients de projection, l'approche vectorielle se montre ainsi particulièrement adaptée et efficace pour une méta-modélisation de la fonction objectif dans un cadre multi-fidélité.

### Nombre de modèles de krigeage/co-krigeage et choix de $L$

Une différence importante entre l'approche directe et vectorielle est le nombre de modèles de krigeage/co-krigeage qu'il faut construire pour obtenir le méta-modèle final de la fonction objectif. Dans l'approche directe, il n'en faut qu'un. Pour l'approche vectorielle, ce nombre s'élève à  $\sum_{k=1}^K L(k)$ . Pour le cas PUNQ, ce nombre s'élève à 88 pour la méta-modélisation de  $K = 18$  sorties.

Il est toutefois intéressant de se pencher sur l'importance de la contribution de chacun des modèles de krigeage/co-krigeage dans l'estimation de la fonction objectif. En effet, nous avons vu lors de la méta-modélisation des sorties dynamiques (*cf.* section 4.2.4) que les premiers termes de la décomposition par ACP permettent d'expliquer la majeure partie de la variance de ces sorties. Le Tableau 4.8 donne, pour une ACP appliquée sur la base de tests, le détail du pourcentage de la variance observée des différentes sorties pour les deux premiers termes de la décomposition. Il indique notamment que les deux premiers termes permettent en moyenne d'expliquer 95% de la variance. Une méta-modélisation vectorielle de la fonction objectif en considérant  $L = 2$  ou  $L = 3$  pour toutes les sorties dynamiques a donc été testée. Les résultats sont représentés sur la Figure 4.44. On observe ainsi qu'une telle limitation de  $L$  a un impact très faible, voire négligeable, sur la qualité des méta-modèles obtenus en simple et en multi-fidélité par rapport à ceux présentés sur la Figure 4.42.

	PRO-1	PRO-4	PRO-5	PRO-11	PRO-12	PRO-15
BHP	81% – 91%	69% – 89%	91% – 99%	80% – 88%	86% – 92%	87% – 98%
GOR	83% – 91%	88% – 94%	96% – 99%	82% – 98%	79% – 90%	95% – 98%
WCUT	85% – 96%	92% – 96%	98% – 99%	94% – 98%	95% – 99%	91% – 95%
Moyenne	87% – 95%					

Tableau 4.8 : Pourcentage de variance expliquée par le premier et les deux premiers termes de la décomposition par ACP pour les différentes sorties sur la base de test.

La limitation de  $L$  est ainsi une option pouvant être envisagée pour limiter le nombre de modèles de krigeage/co-krigeage lors d'une méta-modélisation vectorielle de la fonction objectif. Par ailleurs, on note que les contributions des sorties dynamiques n'ont pas toutes la même importance dans la fonction objectif. Par exemple, la contribution issue du GOR au puits PRO-1 est significative, alors que celle des erreurs du GOR au puits PRO-5 est négligeable. Il faut aussi préciser que la valeur de ces contributions dépend de la définition de la fonction objectif, et notamment du choix des poids  $\omega$  (*cf.* Équation 4.4).

On pourrait ainsi envisager de limiter la valeur de  $L$  (e.g.  $L = 2$ ) pour les sorties dynamiques dont les contributions à la fonction objectif sont les plus faibles.

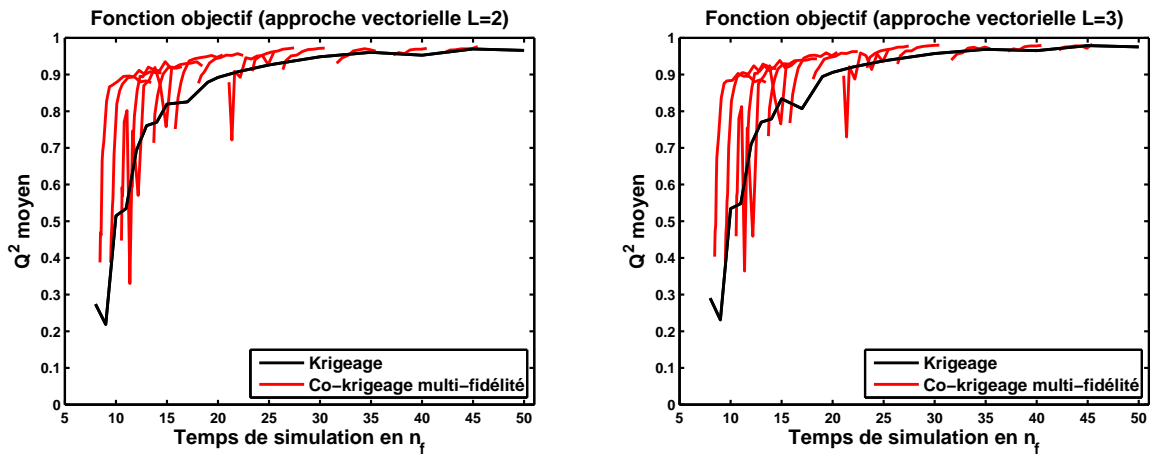


Figure 4.44 : Fonction objectif (approche vectorielle) : résultats obtenus en prenant  $L = 2$  (à gauche) ou  $L = 3$  (à droite) pour la méta-modélisation de toutes les sorties dynamiques.

## 4.4 Application: le calage d'historique

Nous proposons dans cette section d'appliquer la méta-modélisation vectorielle de la fonction objectif (section 3.3.2) au calage d'historique. Le but est de trouver la valeur des paramètres incertains  $\mathbf{x}$  permettant de minimiser la fonction objectif  $FO(\mathbf{x})$ . Trois approches différentes sont considérées pour minimiser  $FO(\mathbf{x})$ , et comparées en termes de temps de calcul et du minimum obtenu pour  $FO(\mathbf{x})$ .

1. **Gauss-Newton** : on utilise l'algorithme d'optimisation Gauss-Newton pour trouver le minimum de la fonction objectif. Chaque évaluation requise par l'algorithme correspond à une simulation d'écoulement sur le modèle réservoir PUNQ fin.
2. **Méta-modélisation simple fidélité** : on réalise les simulations d'écoulement associées à un LHS donné sur PUNQ fin. On calcule  $FO^{vec}(\mathbf{x})$  le méta-modèle de la fonction objectif via les sorties dynamiques. On utilise ensuite l'algorithme BFGS (*Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno* [Fletcher, 1987]) pour trouver le minimum de la fonction objectif en évaluant le méta-modèle. Une fois l'optimisation terminée, on lance une dernière simulation d'écoulement sur PUNQ fin au point optimal sélectionné par l'algorithme afin de calculer la vraie valeur de la fonction objectif en ce point.
3. **Méta-modélisation multi-fidélité** : on réalise les simulations d'écoulement correspondant à un LHS imbriqué sur PUNQ fin et grossier. On calcule  $FO_f^{vec}(\mathbf{x})$  le méta-modèle multi-fidélité de la fonction objectif via les sorties dynamiques. On utilise ensuite l'algorithme BFGS pour trouver le minimum de la fonction objectif en évaluant le méta-modèle. Une fois l'optimisation terminée, on lance une dernière simulation d'écoulement sur PUNQ fin au point optimal sélectionné par l'algorithme afin de calculer la vraie valeur de la fonction objectif en ce point.

L'algorithme Gauss-Newton a été choisi comme méthode de référence pour la comparaison avec les autres approches car c'est un algorithme dédié à la résolution de problèmes de type moindres carrés. Il est typiquement utilisé pour le calage d'historique car il n'a pas besoin de beaucoup d'itérations pour converger.

Les approches basées sur la méta-modélisation sont répétées de nombreuses fois pour tous les plans d'expériences de taille différente tels que définis en section 4.1.4. On note d'ailleurs que les temps de

calcul pour les deux approches basées sur la méta-modélisation sont uniquement déterminés par la taille des plans d'expériences.

Chaque approche est répétée dix fois. Pour Gauss-Newton, on considère dix points de départ différents définis par un LHS de dix points. Pour les autres approches, dix LHS et LHS imbriqués sont générés pour une taille donnée. On considère également dix points de départ différents (définis par des LHS de dix points) lorsqu'on lance l'algorithme BFGS.

Les résultats des différentes approches sont reportés sur la Figure 4.45. Il s'agit de la moyenne (sur les dix tests) de la valeur finale obtenue pour la fonction objectif en fonction du temps de calcul requis par les simulations d'écoulement. Pour Gauss-Newton, la valeur finale correspond à celle obtenue pour le meilleur modèle. Pour les autres approches, la valeur finale de la fonction objectif correspond à celle re-calculée au point optimal après réalisation de la simulation d'écoulement.

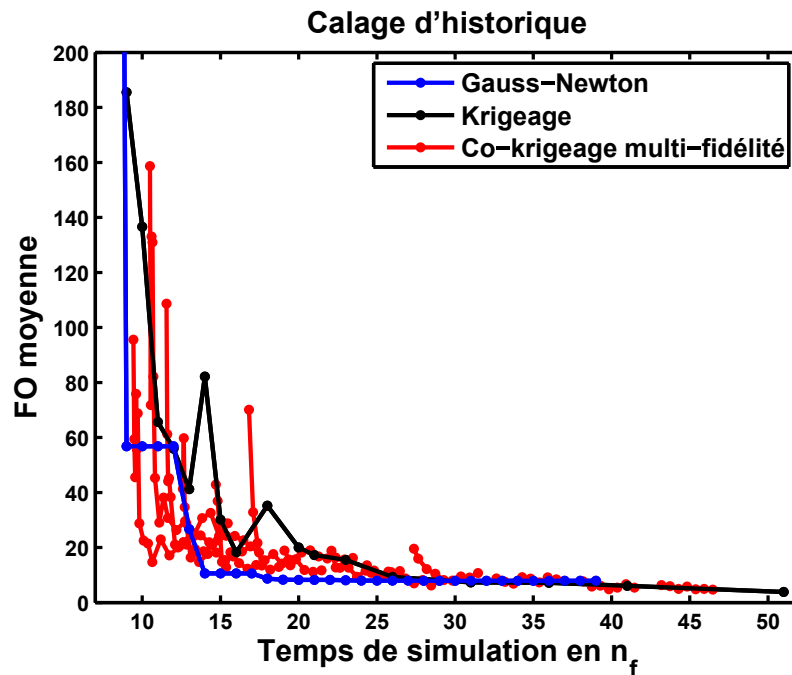


Figure 4.45 : Application au calage d'historique : moyenne du minimum de la fonction objectif pour différentes approches en fonction du temps de simulation.

On observe sur cet exemple que l'approche multi-fidélité fournit la plus petite fonction objectif (et donc le meilleur modèle calibré) lorsque des temps de simulation courts sont considérés. Ensuite, Gauss-Newton devient l'approche la plus efficace. Puis, pour des temps de simulation suffisamment longs ( $n_f > 25$ ), les trois approches produisent des résultats équivalents. Globalement, les trois méthodes permettent une minimisation efficace de la fonction objectif. On note d'ailleurs que la valeur moyenne de la fonction objectif sur la base de test est 1000.

Pour une étude plus fine de la qualité du calibrage des modèles, nous avons reporté dans le Tableau 4.9 les valeurs des paramètres incertains obtenues à partir des différentes approches lorsque la fonction objectif devient inférieure à 20. Cette valeur cible peut être considérée comme acceptable sachant que la valeur moyenne initiale est 1000.

La méta-modélisation multi-fidélité est la première méthode à atteindre ce seuil. Le Tableau 4.8 montre que les paramètres sont globalement très proches de leurs valeurs de référence pour toutes les méthodes. Cela indique que les modèles sont bien calibrés. En particulier, cet exemple suggère que l'approche proposée pour la méta-modélisation multi-fidélité peut être pertinente pour le calage d'his-

torique. La méta-modélisation multi-fidélité apparaît même plus attractive que l’approche classique car elle permet de fournir un ensemble de modèles calibrés pour un moindre temps de simulation.

Nom	Min.	Max.	Val. Ref.	Gauss-Newton	Krigeage	Co-krigeage multi-fi
SWIR	0.2	0.3	0.2	0.206	0.208	0.211
SORW	0.15	0.25	0.2	0.191	0.183	0.185
SORG	0.1	0.2	0.1	0.104	0.104	0.101
MPH3	0.8	1.2	1	1.01	1.03	1.01
MPH4	0.8	1.2	1	0.99	1.00	1.01
MPH5	0.8	1.2	1	1.00	1.02	1.00
AQ1K	100	200	137.5	149	133	139
Valeur moyenne de la FO				10.6	18.2	14.7
Temps de simulation ( $n_f$ )				14	16	10.6

Tableau 4.9 : Valeurs des paramètres lorsque la fonction objectif devient inférieure à 20 pour la méthode de Gauss-Newton, la méta-modélisation simple fidélité et la méta-modélisation multi-fidélité.

## 4.5 Conclusions

Les résultats des études menées sur le cas PUNQ montrent que les méthodes présentées, combinant le krigeage/co-krigeage multi-fidélité et l’analyse en composantes principales, sont efficaces pour approcher les sorties dynamiques et spatiales de la simulation d’écoulement. Ces méthodes permettent de construire des méta-modèles d’une qualité équivalente à ceux obtenus par méta-modélisation directe (*i.e.* un modèle de krigeage/co-krigeage par temps simulé). Toutefois, l’analyse en composantes principales permet de réduire le nombre de méta-modèles nécessaires à l’approximation de l’ensemble de la sortie vectorielle, ce qui rend ces méthodes plus intéressantes.

Les résultats de la comparaison entre les approches simple et multi-fidélité pour la construction de méta-modèles montrent que la multi-fidélité permet un gain en prédictivité pour certaines propriétés lorsque des temps de simulation courts sont considérés. Globalement, ce gain est limité pour le ratio gaz/huile, mais il est important pour le cumulé d’huile, la fraction d’eau, les cartes de pression et de saturation en huile au temps final. En revanche, pour la pression au fond du puits, la simple fidélité se montre généralement plus performante. Quelle que soit la propriété considérée, les performances des deux approches convergent lorsque des temps de simulation longs sont considérés.

L’efficacité de l’approche multi-fidélité dépend de la similarité du comportement des réponses sur les niveaux fin et grossier. Lorsque les réponses ne sont pas assez ressemblantes, l’intérêt de la multi-fidélité est limité. Cela peut être le cas si les réponses fine et grossière sont fortement décalées dans le temps, ou si une partie des réponses grossières échantillonnées n’apporte pas d’information sur le niveau fin. Les performances obtenues pour la pression au fond du puits peuvent ainsi être expliquées par l’existence de la pression limite.

Pour la méta-modélisation de la fonction objectif, l’utilisation directe du co-krigeage multi-fidélité n’est pas plus performante que celle du krigeage car les valeurs de la fonction objectif calculées sur les niveaux fin et grossier sont faiblement corrélées. Découper la fonction objectif en sous-ensembles d’erreurs que l’on approche avec des modèles de krigeage/co-krigeage multi-fidélité permet d’améliorer les résultats en simple et en multi-fidélité. Cependant, les performances de la multi-fidélité dépendent alors de la corrélation de ces sous-ensembles d’erreurs, qui est a priori inconnue.

L'estimation de la fonction objectif à partir des méta-modèles des sorties dynamiques permet à nouveau une amélioration de la prédictivité pour les approches simple et multi-fidélité. L'approche multi-fidélité se démarque alors par son efficacité: elle permet de faire sensiblement mieux que l'approche simple fidélité sur les temps courts et aussi bien sur des temps plus longs. De tels résultats traduisent également une bonne modélisation par l'approche multi-fidélité des différentes sorties dynamiques.

Les différents tests sur le cas PUNQ ont également mis en évidence l'existence de cas problématiques pour la méta-modélisation directe ou vectorielle dans un cadre multi-fidélité. Ces cas apparaissent lorsque le modèle d'écart  $Y_d(\mathbf{x})$  et/ou le coefficient  $\rho$  sont mal estimés au sein d'un modèle de co-krigeage multi-fidélité. Cela peut se produire pour des plans d'expériences avec un faible nombre de points sur le niveau fin, lorsque la réponse approchée présente un comportement complexe à modéliser (*e.g.* une réponse quasi-constante), ou encore lorsque la relation entre les niveaux fin et grossier est fortement non-linéaire.

Pour ces cas problématiques, le méta-modèle multi-fidélité peut produire des estimations très fausses, voire aberrantes. Ainsi, la mauvaise méta-modélisation de la fraction d'eau au puits PRO-1 peut fortement dégrader l'estimation de la fonction objectif dans une approche vectorielle. De la même manière, la mauvaise méta-modélisation d'un coefficient d'ordre élevé pour la carte de saturation en huile peut fortement impacter le méta-modèle global de cette sortie. Ces cas problématiques indiquent que l'approche multi-fidélité est moins robuste que l'approche simple fidélité pour certaines sorties difficiles à approcher. On note tout de même que l'apparition de cas problématiques pour l'approche multi-fidélité survient lors de la modélisation de quantités souvent négligeables. D'un point de vue pratique, on pourrait assez facilement détecter ces cas et les corriger automatiquement. De plus, il suffit de considérer davantage de simulations sur le niveau fin pour les résorber.

De manière générale, les différents résultats sur le cas PUNQ indiquent que la méta-modélisation par une approche multi-fidélité peut toujours être aussi efficace que l'approche simple fidélité. La performance, et donc l'intérêt, d'une approche multi-fidélité est toutefois conditionnée par le choix du plan d'expériences, et en particulier par le choix du ratio des évaluations entre niveaux fin et grossier. Un nombre d'évaluations trop faible sur le niveau fin, ou bien trop important sur le niveau grossier, peut rendre l'approche multi-fidélité moins intéressante que l'approche simple fidélité.

## CHAPITRE 5

# Planification séquentielle d'expériences

La planification séquentielle d'expériences fait référence à un processus itératif qui consiste à sélectionner, à chaque itération, un point ou un ensemble de points pour compléter le plan d'expériences initial. La Figure 5.1 montre comment elle s'intègre dans un workflow de méta-modélisation dans un contexte simple ou multi-fidélité. En multi-fidélité, la stratégie de planification séquentielle doit également déterminer le niveau de fidélité devant être évalué. Dans cette thèse, nous proposons des méthodes de planification séquentielle d'expériences adaptées à des applications en ingénierie de réservoir, notamment dans un cadre multi-fidélité.

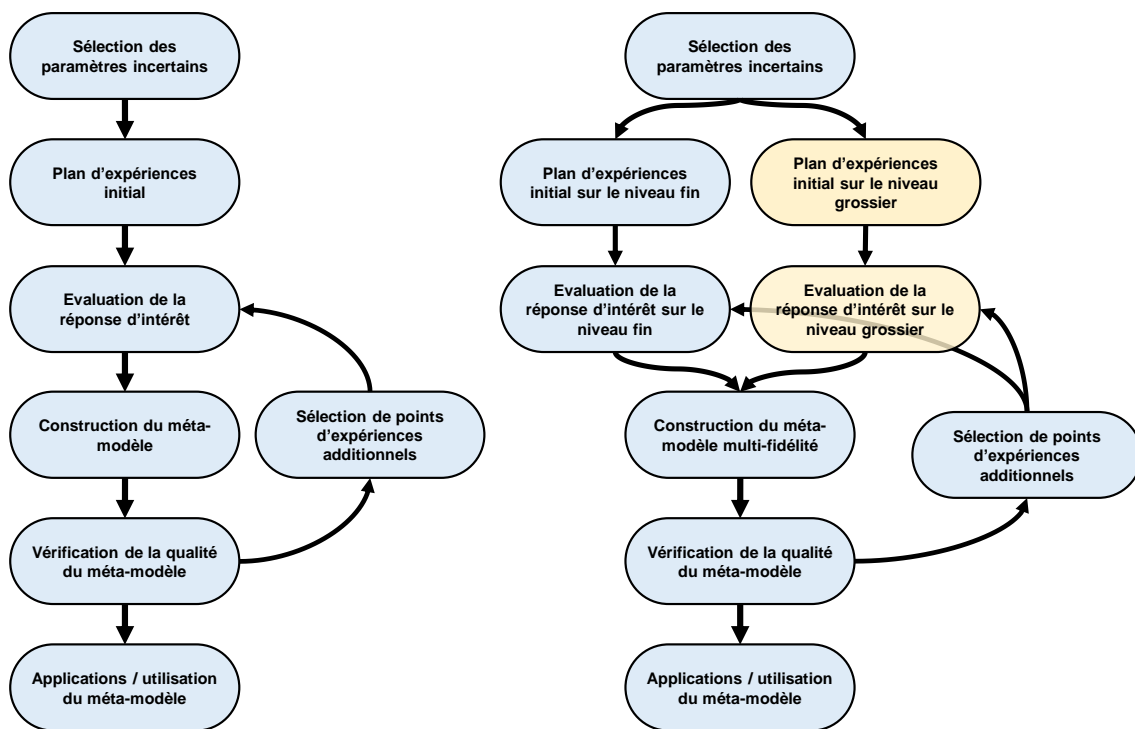


Figure 5.1 : Schéma d'un workflow basé sur la méta-modélisation utilisant une planification séquentielle d'expériences : à gauche dans un cadre simple fidélité, à droite dans un cadre multi-fidélité à deux niveaux.

Ce chapitre est découpé en quatre parties. En partie 5.1, nous introduisons la planification séquentielle d'expériences et ses enjeux. On s'intéresse aux stratégies visant la conception d'un méta-modèle prédictif sur l'ensemble de l'espace des paramètres incertains, en particulier lorsque des modèles de krigage ou co-krigage multi-fidélité sont considérés. Dans les parties 5.2 et 5.3, nous décrivons en détail

les algorithmes de planification séquentielle que nous suggérons pour la conception de méta-modèles prédictifs, en simple et multi-fidélité, respectivement. Ces algorithmes sont notamment adaptés à la méta-modélisation vectorielle de la fonction objectif proposée précédemment (partie 3.3). Les stratégies détaillées permettent de sélectionner itérativement un point d'expérience additionnel. Une extension permettant la sélection d'un ensemble de points à chaque itération est proposée dans la partie 5.4.

## 5.1 Introduction

La planification d'expériences via l'échantillonnage par hypercube latin (LHS), décrite en section 2.2.1, est une méthode simple et efficace pour définir des plans d'expériences qui explorent l'espace des paramètres. Cependant, il n'est pas possible de savoir si la taille du LHS choisi permettra la construction d'un méta-modèle suffisamment prédictif pour l'application désirée. En effet, outre la méthode de planification d'expériences considérée, la prédictivité d'un méta-modèle dépend de la taille  $n$  du plan d'expériences utilisé. Or, la relation entre  $n$  et la prédictivité du méta-modèle est a priori inconnue. Une pratique courante consiste à définir des plans d'expériences de grande taille afin de s'assurer de la bonne prédictivité du méta-modèle. Une telle approche présente toutefois des inconvénients. D'une part, un grand plan d'expériences ne garantit pas que la prédictivité du méta-modèle soit suffisante. Si elle ne l'est pas, il faut revoir le plan d'expériences en considérant des points d'expériences additionnels. D'autre part, cette approche ne permet pas de minimiser  $n$ . Ainsi, on peut considérer des plans d'expériences plus grands que nécessaire, et donc gaspiller le temps de calcul pour les évaluations superflues.

### Principe

La planification séquentielle d'expériences consiste à définir un plan d'expériences initial, puis à le compléter itérativement par un point, ou un ensemble de points, jusqu'à l'épuisement du budget en temps de simulation ou l'obtention d'un méta-modèle de la qualité souhaitée. Ainsi, une planification séquentielle peut permettre la définition d'un plan d'expériences dont la taille  $n$  est déterminée par la prédictivité du méta-modèle.

Les méthodes de planification d'expériences présentées en partie 2.1, comme les LHS, ne sont généralement pas séquentielles. Une exception notable est celle des suites à faible discrédance, pour lesquelles la sélection de points additionnels peut se faire naturellement via le calcul des termes suivants de la suite. Il est ainsi possible d'utiliser un critère géométrique ou statistique pour choisir les points d'expériences qui sont ajoutés au fur et à mesure. Toutefois, un intérêt majeur de la planification séquentielle d'expériences est qu'elle permet de choisir les prochains points d'expériences à partir des informations fournies par le méta-modèle actuel. On parle alors de planification séquentielle adaptative et de plans adaptatifs. Il faut dans ce cas définir une stratégie de sélection des prochains points d'expériences, aussi appelé critère de remplissage. Une stratégie séquentielle judicieusement choisie peut permettre de construire plus efficacement des méta-modèles prédictifs qu'une planification d'expériences non adaptative.

### Planification séquentielle et krigeage

Le choix du critère de remplissage dépend avant tout du but à atteindre. On distingue ainsi les stratégies visant l'optimisation de celles visant l'obtention d'un méta-modèle prédictif sur l'ensemble de l'espace. Dans le cadre d'une optimisation, les points d'expériences peuvent être ajoutés à proximité d'optima ou dans les zones susceptibles d'en contenir, afin de déterminer l'optimum global. Un critère

populaire avec le krigeage est celui de l'amélioration espérée (*Expected Improvement*) [Jones et al., 1998]. Différentes stratégies séquentielles ayant pour but l'optimisation sont décrites et passées en revue dans [Jones, 2001] et [Forrester and Keane, 2009].

Dans cette thèse, on cherche à construire des méta-modèles prédictifs sur l'ensemble de l'espace des paramètres. On s'intéresse donc à des stratégies séquentielles permettant d'améliorer rapidement la prédictivité globale du méta-modèle. L'idée la plus intuitive est de considérer des critères exploratoires afin de sélectionner des points permettant de combler les trous dans le plan d'expériences. Pour un modèle de krigeage, cette idée peut se traduire par la recherche du point qui maximise la variance de krigeage [Sacks et al., 1989]. En effet, la variance de krigeage (Équation 2.5) dépend de la distance du point par rapport aux points du plan d'expériences ainsi que des hyper-paramètres  $\lambda$  représentant les longueurs de corrélation dans les différentes directions. Elle peut ainsi être considérée comme une mesure de la distance entre le point considéré et les points du plan d'expériences. Suivant une idée similaire, un critère plus efficace consiste à intégrer la variance sur l'ensemble de l'espace, où IMSE (*Integrated Mean Square Error*), puis à sélectionner le point maximisant la réduction de l'IMSE [Bates et al., 1996] [Picheny et al., 2010].

Les stratégies basées sur la variance de krigeage sont d'une efficacité limitée lorsque la réponse d'intérêt a un comportement fortement non linéaire, par exemple lorsqu'elle présente de fortes variations de manière localisée dans l'espace. Dans ce cas, il peut être judicieux de densifier le plan d'expériences dans les zones où la réponse d'intérêt présente un comportement plus complexe afin d'améliorer le méta-modèle. Pour cela, on peut placer des points dans les zones de l'espace où l'erreur de prédiction du méta-modèle est la plus forte. Un critère basé sur la variance de krigeage est alors inadapté, car cette dernière ne contient pas d'information sur l'erreur réelle entre la prédiction du méta-modèle et la réponse d'intérêt.

C'est pour cette raison que d'autres stratégies, basées sur une estimation de l'erreur réelle de prédiction, ont été suggérées par [Kleijnen and Van Beers, 2004], [Busby, 2009] ou encore [Le Gratiet and Cannamela, 2015]. Elles utilisent les erreurs de validation croisée, c'est-à-dire les erreurs entre la prédiction par validation croisée et la valeur observée de la réponse d'intérêt, pour déterminer les zones dans lesquelles l'erreur de prédiction du méta-modèle est susceptible d'être importante. Par exemple, dans [Busby, 2009], un maillage adaptatif de l'espace est calculé à chaque itération. Ce maillage définit des cellules dans lesquelles on estime la qualité du méta-modèle à partir des erreurs de validation croisée. On sélectionne ensuite le point d'expérience additionnel en priorité dans la cellule présentant l'erreur de validation croisée la plus forte. La méthode proposée par [Le Gratiet and Cannamela, 2015] consiste à ajuster la variance de krigeage par les erreurs de validation croisée. Nous détaillons par la suite cette approche en section 5.2.1.

### Planification séquentielle et co-krigeage multi-fidélité

Dans un contexte multi-fidélité, la stratégie de planification séquentielle d'expériences doit également déterminer le niveau de fidélité devant être évalué [Huang et al., 2006], [Le Gratiet and Cannamela, 2015]. Ce choix est un enjeu majeur en multi-fidélité car il influence directement la performance du méta-modèle. En effet, l'optimisation de la qualité du méta-modèle passe par la détermination de la meilleure allocation des évaluations par niveau de fidélité. Cela est notamment illustré à travers les résultats obtenus sur le cas PUNQ. Cependant, cette allocation est difficile à déterminer car elle dépend du cas d'étude, et plus précisément de la qualité de la corrélation entre les niveaux grossiers et fin, ainsi que des temps relatifs à l'évaluation de ces niveaux. Dans un contexte d'optimisation, une solution basée sur une version modifiée de l'amélioration espérée (EI), prenant notamment en compte les ratios des temps d'évaluation, est suggérée dans [Huang et al., 2006].

Des plans adaptatifs visant l'obtention d'un méta-modèle prédictif en multi-fidélité ont été proposés



par [Xiong et al., 2013] et [Le Gratiet and Cannamela, 2015]. Dans [Xiong et al., 2013], une approche multi-fidélité à deux niveaux est considérée. Le ratio entre le nombre d'expériences sur les niveaux fin et grossier est choisi au préalable par l'utilisateur. Le plan d'expériences initial est ensuite élargi de manière à obtenir des LHS imbriqués. La méthode proposée par [Le Gratiet and Cannamela, 2015] est généralisable à un nombre quelconque de niveaux de fidélité. Le choix du point d'expérience est déterminé par un critère basé sur la variance de krigeage/co-krigeage et les erreurs de validation croisée. Puis, le choix des niveaux de fidélité évalués se fait selon un arbitrage entre la réduction de l'IMSE et le coût en temps de l'évaluation, pour chacun des niveaux. Un avantage de cette approche est sa robustesse. En effet, elle reste pertinente quelle que soit la qualité de la corrélation entre les différents niveaux de fidélité.

## 5.2 Planification séquentielle et krigeage

Nous présentons dans cette partie l'algorithme que nous avons développé et utilisé au cours de cette thèse pour construire rapidement des méta-modèles globalement prédictifs dans un cadre simple fidélité. Comme expliqué dans la section 5.2.1, cet algorithme reprend en partie les idées du critère introduit dans la thèse de [Le Gratiet, 2013b] pour l'amélioration de la prédictivité d'un modèle de krigeage. Plus précisément, il peut être vu comme une adaptation de l'algorithme de [Le Gratiet, 2013b] au contexte de l'ingénierie de réservoir, et notamment à la modélisation vectorielle de la fonction objectif introduite précédemment (partie 3.3). Il est décrit, étape par étape, dans la section 5.2.2.

### 5.2.1 Présentation de l'algorithme proposé

Les propriétés ou réponses d'intérêt que l'on cherche à approcher en ingénierie de réservoir sont issues de la simulation d'écoulement (*cf.* partie 3.1). En pratique, ces réponses présentent généralement un comportement très complexe, fortement non linéaire. Pour cette raison, il est pertinent de privilégier un algorithme dont le critère de remplissage incorpore une estimation de l'erreur de prédiction réelle, comme ceux proposés par [Busby, 2009] ou [Le Gratiet and Cannamela, 2015]. Cette estimation sur l'erreur du méta-modèle peut être déduite de l'erreur de validation croisée lorsque l'on considère une observation comme inconnue (LOO-CV *Leave-One-Out Cross-Validation*).

#### Erreur de validation croisée normalisée

Nous reprenons ici les notations introduites dans le chapitre 2, notamment lors de la présentation du krigeage en section 2.2.2 et de la validation croisée en section 2.4.2. On note donc  $y$  la réponse d'intérêt que l'on souhaite approcher avec un méta-modèle, et  $\mathbf{D} = \{\mathbf{x}_1; \dots; \mathbf{x}_n\}$  un plan d'expériences sur lequel on connaît les observations de  $y$ . On peut alors construire un modèle de krigeage à partir des observations de  $y$  sur  $\mathbf{D}$  d'estimateur  $\hat{y}$  et de variance  $\hat{s}^2$  (Equations 2.7 et 2.8).

On rappelle aussi que la validation croisée consiste à supposer que l'observation  $i$  n'est pas connue, puis à construire un modèle de krigeage de  $y$  avec les  $n - 1$  autres évaluations. On note  $\hat{y}_{-i}(\mathbf{x})$  et  $\hat{s}_{-i}^2(\mathbf{x})$  l'estimateur de krigeage et la variance associée calculés par validation croisée lorsque l'observation  $i$  n'est pas connue. L'erreur de validation croisée au point  $\mathbf{x}_i$  du plan d'expériences  $\mathbf{D}$  est alors  $y(\mathbf{x}_i) - \hat{y}_{-i}(\mathbf{x}_i)$ . On peut également calculer  $\eta(\mathbf{x}_i)$  l'erreur de validation croisée normalisée par la variance de validation croisée aux points de  $\mathbf{D}$ :

$$\eta(\mathbf{x}_i) = \frac{(y(\mathbf{x}_i) - \hat{y}_{-i}(\mathbf{x}_i))^2}{\hat{s}_{-i}^2(\mathbf{x}_i)} \text{ pour } i = 1, \dots, n. \quad (5.1)$$

L'erreur de validation croisée peut être utilisée au sein d'une stratégie séquentielle afin de caractériser les zones dans lesquelles le modèle de krigeage n'est pas prédictif. En effet, une forte erreur pour un point d'expérience signifie que l'erreur de prédiction du méta-modèle serait forte si l'observation associée était inconnue. On en déduit que les erreurs de prédiction du méta-modèle au voisinage de ce point sont vraisemblablement importantes. On peut ainsi se servir de l'Équation 5.1 comme d'un moyen pour évaluer l'erreur réelle de prédiction du méta-modèle au voisinage des points du plan d'expériences.

On remarque toutefois qu'un plan d'expériences "malchanceux" peut être trompeur, et amener à la construction d'un méta-modèle erroné partout, sauf aux points du plan d'expériences (*cf.* [Jones, 2001]). Ainsi, même si l'erreur de validation croisée est nulle (ou faible), il est toujours possible que l'erreur de prédiction au voisinage de ce point soit importante. Toutefois, un tel cas de figure reste en pratique peu probable.

La normalisation par la variance de l'erreur de validation croisée est importante. Elle permet notamment de faire la distinction entre deux points d'expériences dont l'erreur serait similaire. En effet, une forte variance indique qu'une erreur importante peut être envisagée en ce point par le modèle de krigeage. En revanche, si pour un point on observe une variance très faible et une erreur très forte, le modèle n'est pas une bonne approximation au voisinage de ce point. On remarque d'ailleurs qu'une expression similaire à  $\eta(\mathbf{x})$  (sans l'élevation au carré) est introduite dans [Jones et al., 1998] afin de tester la validité des modèles de krigeage.

### Un critère basé sur une variance ajustée [Le Gratiet, 2013b]

Un critère de remplissage, basé à la fois sur la variance de krigeage et les erreurs de validation croisée normalisées, est suggéré dans [Le Gratiet, 2013b]. Plus précisément, il s'agit de maximiser la variance de krigeage après ajustement par l'erreur de validation croisée  $\eta(\mathbf{x})$ . Cette dernière n'étant connue qu'aux points de  $\mathbf{D}$ , [Le Gratiet, 2013b] introduit les cellules de Voronoi  $(V_i)_{i=1,\dots,n}$  associées au plan d'expériences  $\mathbf{D} = \{\mathbf{x}_1; \dots; \mathbf{x}_n\}$ , définies de la manière suivante pour  $i, j \in [1, n]$  :

$$V_i = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j\|, \forall j \neq i \right\} \quad (5.2)$$

Un exemple de découpage de l'espace par des cellules de Voronoi est présenté sur la Figure 5.2. L'idée est ensuite d'attribuer  $\eta(\mathbf{x}_i)$ , l'erreur de validation croisée associée au point  $\mathbf{x}_i$ , à tous les points se trouvant dans la cellule de Voronoi  $V_i$ . Ainsi, le critère introduit par [Le Gratiet, 2013b] pour la sélection d'un point additionnel  $\mathbf{x}_{new}$  se résume à la résolution du problème suivant :

$$\mathbf{x}_{new} = \arg \max_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d} \left\{ s^2(\mathbf{x}) \left( 1 + \sum_{i=1}^n \eta(\mathbf{x}_i) \mathbf{1}_{\mathbf{x} \in V_i} \right) \right\} \quad (5.3)$$

avec  $\mathbf{1}_{\mathbf{x} \in V_i}$  une fonction indicatrice valant 1 si  $\mathbf{x} \in V_i$  et 0 sinon. Ce critère consiste donc à maximiser la variance de krigeage  $s^2(\mathbf{x})$  qui est élargie au voisinage des points d'expérience présentant une forte erreur de validation croisée. On note que ce critère ne nécessite pas le calcul du diagramme de Voronoi (*cf.* Figure 5.2). Il faut seulement déterminer la cellule de Voronoi dans laquelle on se trouve, ce qui est équivalent à un calcul de distance.

[Le Gratiet, 2013b] suggère de résoudre l'Équation 5.3 par l'utilisation couplée d'un algorithme évolutionnaire (ou un tirage de Monte-Carlo) et d'un algorithme de descente classique. L'idée est qu'en se plaçant dans une cellule de Voronoi donnée, le problème se résume à la recherche du point maximisant la variance, ce qui peut être résolu par une méthode d'optimisation classique (*e.g.* gradients

conjugués, Newton, *etc*). Il suffit de répéter cette opération dans chacune des cellules de Voronoi pour déterminer  $\mathbf{x}_{new}$ . Un tirage aléatoire ou un algorithme évolutionnaire peuvent alors définir des points de départ dans chacune des cellules de Voronoi. On remarque que l'auteur a montré la pertinence du critère associé à l'équation 5.3 à travers des comparaisons avec d'autres critères sur différentes fonctions tests, à savoir la minimisation de l'*IMSE* [Bates et al., 1996] et le critère proposé par [Kleijnen and Van Beers, 2004] basé sur la validation croisée et le jackknife (une autre méthode de ré-échantillonnage). De plus, ce critère a été étendu à une utilisation dans un cadre multi-fidélité dans [Le Gratiet and Cannamela, 2015].

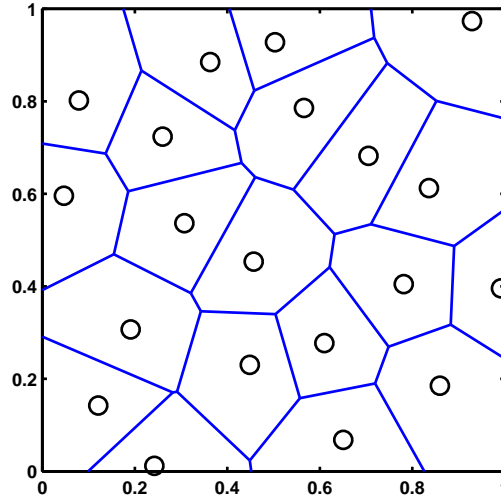


Figure 5.2 : Diagramme de Voronoi associé à un plan d'expériences LHS en dimension 2.

### Principe de l'algorithme proposé

Nous suggérons dans cette thèse un critère semblable à celui proposé par [Le Gratiet, 2013b] (Équation 5.3). La différence principale est que notre critère limite la recherche du nouveau point à la cellule de Voronoi associée à la plus forte erreur de validation croisée normalisée. Dans cette cellule, nous sélectionnons le point maximisant la variance de krigeage. Une seconde différence réside dans la méthode de sélection de ce point. En effet, au lieu d'utiliser une optimisation, nous proposons d'effectuer la sélection du point maximisant la variance via l'échantillonnage d'un grand nombre de points dans la cellule de Voronoi concernée.

Notre approche reprend ainsi les éléments proposés par [Le Gratiet, 2013b] pour définir le critère de remplissage, c'est-à-dire l'utilisation de la variance de krigeage pondérée par les erreurs de validation croisée. Toutefois, notre critère donne priorité à l'information apportée par les erreurs de validation croisée par rapport à celle venant de la variance de krigeage. Ce choix est motivé par la complexité du comportement des réponses que l'on cherche à approcher en ingénierie de réservoir.

D'autre part, notre approche simplifie le problème à résoudre car elle réduit l'espace de recherche du nouveau point à la cellule de Voronoi associée à la plus grande erreur de validation croisée. De plus, l'approche par échantillonnage garantit que le point sélectionné se trouve dans la cellule de Voronoi désignée. Elle est souvent plus rapide qu'une optimisation et ne nécessite pas le calcul des frontières de la cellule de Voronoi. Toutefois, le point sélectionné n'est qu'une approximation du point maximisant la variance.

Une autre caractéristique du critère que nous proposons est qu'il est rapide à calculer. En effet, un

objectif essentiel de notre algorithme est qu'il puisse être applicable avec la modélisation vectorielle de la fonction objectif introduite en partie 3.3. A travers le cas d'étude PUNQ, nous avons montré que cette approche est plus efficace que la méta-modélisation directe, mais qu'elle est également plus complexe vis-à-vis du nombre de modèles de krigeage qu'elle nécessite (*c.f.* section 4.3.4). L'évaluation d'un tel méta-modèle (notamment l'évaluation de sa variance) peut être non négligeable en temps de calcul, et durer jusqu'à quelques secondes. C'est notamment pour cette raison que nous privilégions l'échantillonnage à la réalisation de multiples optimisations. En effet, il est bien plus rapide de faire simultanément un grand nombre d'évaluations via un calcul matriciel, plutôt que de réaliser séquentiellement un moindre nombre d'évaluations du méta-modèle.

### 5.2.2 Description de l'algorithme proposé

---

**Algorithme 1** : Stratégie de planification séquentielle pour améliorer la prédictivité d'un modèle de krigeage - Ajout d'un unique point par itération

---

*On note  $(V_i)_{i=1,\dots,n}$  les cellules de Voronoi associées au plan d'expériences  $\mathbf{D}$ .*

- 1 Définition et évaluation du plan d'expériences initial  $\mathbf{D}$ .
  - 2 Sélection et évaluation d'un point d'expérience additionnel  $\mathbf{x}_{new}$ .
    - (a) Construction du modèle de krigeage à partir des observations de  $(\mathbf{D})$ .
    - (b) Calcul de  $\mathbf{x}_{bad} = \arg \max_{\mathbf{x} \in \mathbf{D}} \{\eta(\mathbf{x})\}$ . Soit  $V_{bad}$  la cellule de Voronoi associée à  $\mathbf{x}_{bad}$ .
    - (c) Échantillonnage de  $N$  points dans  $V_{bad}$ . Soit  $S$  l'ensemble de ces points.
    - (d) Sélection de  $\mathbf{x}_{new} = \arg \max_{\mathbf{x} \in S} \{s^2(\mathbf{x})\}$ .
    - (e) Évaluation du point  $\mathbf{x}_{new}$  et mise à jour du plan d'expériences :  $\mathbf{D} = \mathbf{D} \cup \mathbf{x}_{new}$ .
  - 3 Répétition de l'étape 2 jusqu'à ce que le critère d'arrêt soit atteint.
- 

#### Détail de l'Algorithme 1 étape par étape

Etape 1, on définit un plan d'expériences initial de petite taille en utilisant les LHS (section 2.2.1). La taille du plan d'expériences peut être prise égale à  $d + 1$ , avec  $d$  la dimension de l'espace des paramètres. On réalise des simulations d'écoulement pour chacun des points du plan d'expériences, puis on collecte les observations de la réponse d'intérêt en ces points.

Etape 2, il s'agit du processus de sélection d'un point additionnel pour le plan d'expériences. On répète cette étape jusqu'à ce que le critère d'arrêt soit atteint.

Etape 2a, à partir du plan d'expériences et des observations associées de la réponse d'intérêt, on construit un méta-modèle de la réponse d'intérêt en utilisant le krigeage (section 2.2.2).

Etape 2b, pour chacun des points du plan d'expériences, on calcule l'erreur de validation croisée normalisée  $\eta$  (Équation 5.1). On considère alors la cellule de Voronoi  $V_{bad}$  associée au point présentant la plus forte erreur de validation croisée.

Etape 2c, on échantillonne un nombre important  $N$  de points dans la cellule de Voronoi  $V_{bad}$ . Cet échantillonnage peut être réalisé grâce à une suite à faible discrédance (partie 2.1), comme celle de Sobol' [Sobol', 1967]. En effet, on peut calculer rapidement les termes de cette suite [Antonov and Saleev, 1979] afin de générer des points répartis régulièrement dans l'espace. Ensuite, il suffit de conserver uniquement les points appartenant à la cellule de Voronoi que l'on souhaite échantillonner, ce qui ne nécessite que des calculs de distance. On répète ce processus jusqu'à l'obtention d'un échantillon de points de la taille  $N$  souhaitée. Une grande valeur de  $N$  permettra de fournir une meilleure approximation du point maximisant la variance. On remarque que le temps de calcul associé à un tel

échantillonnage est généralement faible (quelques secondes). Cependant, ce temps est amené à croître avec la taille du plan d'expériences, dans la mesure où la taille des cellules de Voronoi va diminuer. Dans nos études, nous avons souvent considéré  $N = 10000$ .

Etape 2d, on calcule la variance de krigeage pour l'ensemble des points échantillonnés. On sélectionne le point pour lequel la variance est maximale.

Etape 2e, le point sélectionné est ajouté au plan d'expériences. On réalise une simulation d'écoulement et on collecte l'observation de la réponse d'intérêt pour ce nouveau point.

Etape 3, le critère d'arrêt peut être une valeur cible sur la prédictivité du méta-modèle. Celle-ci peut être évaluée par le coefficient  $Q^2$  sur une base de test (si disponible) ou par validation croisée (partie 2.4). Le critère d'arrêt peut également être un budget en temps de calcul, qui en pratique serait défini par un nombre maximal de simulations d'écoulement.

### Application à la fonction objectif

Dans le cadre d'une méta-modélisation directe de la fonction objectif (*cf.* section 3.3.1), l'Algorithme 1 peut être directement utilisé en considérant le modèle de krigeage de la fonction objectif ( $FO^{dir}$ ).

Dans le cadre d'une méta-modélisation vectorielle de la fonction objectif (*cf.* section 3.3.2), l'Algorithme 1 peut aussi être directement utilisé. Il faut alors l'appliquer au méta-modèle de la fonction objectif  $FO^{vec}$ , dont l'estimateur et la variance associés sont donnés par les Équations 3.16 et 3.20, respectivement. On utilise également les estimations par validation croisée de ce méta-modèle, décrites dans la section 3.3.3.

## 5.3 Planification séquentielle et co-krigeage multi-fidélité

La planification séquentielle d'expériences est une approche pratique et efficace pour concevoir des méta-modèles prédictifs en simple fidélité. Dans un cadre multi-fidélité, la stratégie de planification doit sélectionner les points additionnels pour compléter le plan d'expériences, mais aussi choisir les niveaux de fidélité sur lesquels les nouveaux points doivent être évalués. Cette seconde tâche est cruciale car elle conditionne la pertinence d'une approche multi-fidélité pour la méta-modélisation (*cf.* Chapitre 4). Une allocation judicieuse des évaluations sur les différents niveaux de fidélité est indispensable pour que la méta-modélisation multi-fidélité soit plus performante que la méta-modélisation simple fidélité.

Dans cette partie, nous présentons l'algorithme développé et utilisé pour construire le plus rapidement possible des méta-modèles globalement prédictifs dans un cadre multi-fidélité. Cet algorithme est spécifiquement conçu pour une utilisation en ingénierie de réservoir. Le principe de la stratégie séquentielle suggérée, ainsi que les conditions d'application pour des performances optimales, sont décrits dans la section 5.3.1. L'algorithme est ensuite détaillé étape par étape dans la section 5.3.2.

### 5.3.1 Présentation de l'algorithme proposé

L'algorithme que nous proposons peut être vu comme une extension au cadre multi-fidélité de l'Algorithme 1 (section 2.2.2). Il se base sur les prédictions du méta-modèle pour les différents niveaux de fidélité obtenus grâce à la formulation récursive du co-krigeage multi-fidélité (section 2.3.2). Cet algorithme est ici décrit dans le cas de deux niveaux.

### Résultats issus de la formulation récursive du co-krigeage multi-fidélité

Nous reprenons ici les notations introduites dans le chapitre 2, notamment lors de la présentation du co-krigeage multi-fidélité en section 2.3.2 et de la validation croisée en section 2.4.2. On note donc  $y_f$  et  $y_g$  la réponse d'intérêt aux niveaux fin et grossier, respectivement. On considère aussi un plan d'expériences imbriqué  $\mathbf{D}_f \subset \mathbf{D}_g$  et les observations associées  $y_f(\mathbf{D}_f)$  et  $y_g(\mathbf{D}_g)$  pour construire un méta-modèle de  $y_f$  par co-krigeage multi-fidélité. On note  $\hat{y}_f$  et  $\hat{s}_f^2$  l'estimateur du co-krigeage multi-fidélité et la variance associée pour le niveau fin (équations 2.29 et 2.30). Par construction, le calcul de  $\hat{y}_f$  et  $\hat{s}_f^2$  dépend de celui de  $\hat{y}_g$  et  $\hat{s}_g^2$ .

On peut également calculer les erreurs de validation croisée normalisées par les variances de validation croisée pour les niveaux fin et grossier, notées  $\eta_f(\mathbf{x})$  et  $\eta_g(\mathbf{x})$ , respectivement :

$$\begin{aligned} \eta_f(\mathbf{x}_i) &= \frac{(y_f(\mathbf{x}_i) - \hat{y}_{f,-i}(\mathbf{x}_i))^2}{\hat{s}_{f,-i}^2(\mathbf{x}_i)} \text{ pour } i = 1, \dots, n_f \\ \text{et } \eta_g(\mathbf{x}_i) &= \frac{(y_g(\mathbf{x}_i) - \hat{y}_{g,-i}(\mathbf{x}_i))^2}{\hat{s}_{g,-i}^2(\mathbf{x}_i)} \text{ pour } i = 1, \dots, n_g \end{aligned} \quad (5.4)$$

On dispose ainsi de tous les éléments nécessaires pour la résolution du critère de remplissage défini par l'équation 5.3 sur les niveaux fin et grossier. Ainsi, une stratégie basée sur la maximisation d'une variance ajustée par les erreurs de validation croisée peut être appliquée sur le niveau fin pour sélectionner le prochain point. C'est la méthode suggérée dans [Le Gratiet and Cannamela, 2015]. Ces auteurs proposent ensuite de déterminer les niveaux de fidélité devant être évalués. Pour cela, ils comparent la contribution des différents niveaux de fidélité à la valeur de la variance au nouveau point  $\hat{s}_f^2(\mathbf{x}_{new})$  tout en prenant en compte les temps d'évaluation des différents niveaux. Cette approche est judicieuse car l'algorithme adapte la répartition des évaluations sur les niveaux fin et grossier en fonction du niveau de corrélation. Toutefois, pour nos applications, nous pouvons simplifier le choix du niveau de fidélité à évaluer.

### Principe de l'algorithme proposé

Dans un contexte de méta-modélisation en ingénierie de réservoir, il est possible de faire des hypothèses permettant de simplifier le choix du niveau de fidélité devant être évalué. Ainsi, en considérant un modèle réservoir grossier construit à partir d'une mise à l'échelle d'un modèle réservoir fin, on peut émettre les hypothèses suivantes.

1. Une simulation d'écoulement sur le modèle grossier est significativement plus rapide qu'une simulation d'écoulement sur le modèle de réservoir fin.
2. Les réponses dynamiques issues des simulations sur les modèles réservoir fin et grossier sont corrélées.

Sous ces hypothèses, nous proposons une stratégie simple pour déterminer le niveau de fidélité devant être évalué, résumée sur la Figure 5.3. Cette approche comprend deux étapes. Dans un premier temps, on applique l'Algorithme 1 pour améliorer le méta-modèle approchant la réponse au niveau grossier. Les nouveaux points ne sont donc simulés que sur ce niveau. Puis, une fois obtenu un méta-modèle prédictif au niveau grossier, de nouveaux points sont ajoutés selon l'Algorithme 1 pour améliorer le méta-modèle multi-fidélité de la réponse au niveau fin. Les nouveaux points sont alors simulés sur les deux niveaux de résolution. Le principe de cette stratégie est donc de chercher à exploiter au maximum

le niveau grossier en supposant que celui-ci est informatif sur le niveau fin. Les évaluations sur le niveau fin n'interviennent que dans un second temps, l'objectif étant de limiter leur nombre autant que possible. L'un des points clés de l'approche est donc le choix du critère d'arrêt de l'algorithme sur le niveau grossier seul, déclenchant les évaluations au niveau fin.

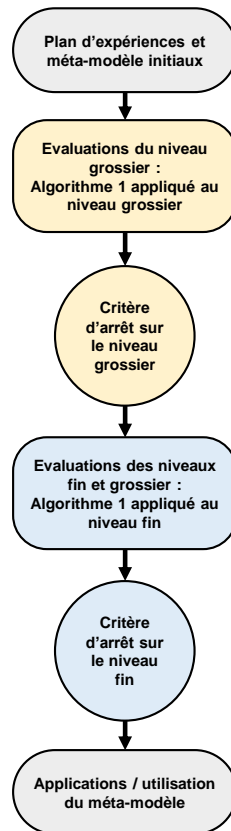


Figure 5.3 : Schéma de la stratégie séquentielle de planification d'expériences dans un cadre multi-fidélité à deux niveaux.

La validité des deux hypothèses est dépendante de la mise à l'échelle et du cas d'étude considéré. Le choix de la mise à l'échelle dépend de l'utilisateur. Cependant, le but d'une mise à l'échelle étant la réduction du temps de simulation, on peut raisonnablement considérer que le rapport des temps d'évaluation pour les deux modèles réservoir soit de l'ordre de la dizaine, voire davantage selon les cas. On peut ainsi s'attendre à ce que la simulation sur le niveau grossier soit dix fois plus rapide que celle sur le niveau fin.

La seconde hypothèse dépend également de la mise à l'échelle. En effet, l'objectif de la mise à l'échelle est de réduire les temps de calcul, tout en respectant autant que possible le comportement dynamique du modèle réservoir initial, *i.e.* le modèle le plus fin. Ainsi, les réponses dynamiques du modèle grossier sont des approximations de celles du modèle fin. D'une manière générale, le comportement d'une réponse dynamique sera souvent similaire sur les deux niveaux. On pourra donc trouver des corrélations à chaque pas de temps pour une réponse dynamique donnée. La qualité de ces corrélations dépend toutefois de la qualité de la mise à l'échelle et du cas d'étude considéré.

### Critère d'arrêt sur le niveau grossier

Le critère d'arrêt sur le niveau grossier est une étape clé de l'algorithme. Il permet de déterminer quand passer de la phase d'évaluation du niveau grossier seul à l'évaluation des deux niveaux fin et

grossier. Ce critère est ici basé sur la prédictivité du méta-modèle simple fidélité sur le niveau grossier, estimée par le calcul du coefficient  $Q_{cv,g}^2$  de validation croisée (cf. section 2.4.2) :

$$Q_{cv,g}^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n_g} (y_g(\mathbf{x}_i) - \hat{y}_{g,-i}(\mathbf{x}_i))^2}{\sum_{i=1}^{n_g} (y_g(\mathbf{x}_i) - \bar{y}_g)^2} \quad (5.5)$$

$\bar{y}_g$  est la réponse moyenne de  $y_g(\mathbf{x})$  sur le plan d'expériences  $\mathbf{D}_g$ .

Un critère d'arrêt possible consiste alors à définir une valeur cible pour le coefficient  $Q_{cv,g}^2$  par exemple  $Q_{cv,g}^2 > 0,95$  ou  $0,99$ . Toutefois, selon la complexité du cas d'étude, un tel critère peut mener à la réalisation d'un très grand nombre d'évaluations sur le niveau grossier. Or, l'information apportée par ce niveau sur la réponse d'intérêt au niveau fin est limitée. Un trop grand nombre d'évaluations sur le niveau grossier peut ainsi être contre-productif.

Une alternative est de considérer un critère hybride combinant une valeur cible sur le  $Q_{cv,g}^2$  et une limite sur l'évolution de ce coefficient au cours des itérations. On propose de calculer cette évolution  $\gamma(k)$  à l'itération  $k$  via l'utilisation de moyennes glissantes :

$$\gamma(k) = \left[ \sum_{i=k-p+1}^k Q_{cv,g}^2(i) - \sum_{i=k-2p+1}^{k-p} Q_{cv,g}^2(i) \right] \quad (5.6)$$

avec  $Q_{cv,g}^2(i)$  le coefficient  $Q_{cv,g}^2$  calculé à l'itération  $i$ . L'indice  $p$  représente la partie entière du rapport entre le temps d'évaluation moyen du niveau fin et le temps d'évaluation moyen du niveau grossier divisé par deux. On note qu'on ne peut pas calculer  $\gamma$  lorsque  $k < 2p$ . Le calcul de  $\gamma$  permet de caractériser l'apport en termes de prédictivité des dernières évaluations sur le niveau grossier. Définir une valeur seuil pour  $\gamma$  est équivalent à définir une limite sous laquelle on considère que l'amélioration de la prédictivité du méta-modèle au niveau grossier (via le  $Q_{cv,g}^2$ ) est négligeable par rapport au nombre d'évaluations sur le niveau grossier qu'elle nécessite. Un critère hybride peut ainsi être défini via l'instauration de valeurs seuils à la fois pour le coefficient  $Q_{cv,g}^2$  et pour son évolution  $\gamma$ .

### 5.3.2 Description de l'algorithme proposé

Les différentes étapes de l'Algorithme 2 sont détaillées ci-dessous.

Etape 1, on définit un plan d'expériences initial de petite taille en utilisant les LHS (section 2.2.1). La taille du plan d'expériences peut être prise égale à  $d + 1$ , avec  $d$  la dimension de l'espace des paramètres. On réalise des simulations d'écoulement pour chacun des points du plan d'expériences, sur les niveaux de fidélité fin et grossier, puis on collecte les observations de la réponse d'intérêt.

Etape 2, il s'agit du processus de sélection d'un point additionnel pour le niveau grossier uniquement. Cette étape peut être vue comme une application de l'Algorithme 1 au niveau grossier. C'est un processus itératif qui est répété jusqu'à ce que le critère d'arrêt sur le niveau grossier soit atteint.

Etape 2a, à partir du plan d'expériences et des observations associées de la réponse d'intérêt sur le niveau grossier, on construit un méta-modèle de la réponse d'intérêt au niveau grossier en utilisant le krigeage (section 2.2.2).

Etape 2b, pour chacun des points du plan d'expériences défini sur le niveau grossier, on calcule l'erreur de validation croisée normalisée au niveau grossier (Equation 5.4). On considère ensuite les cellules de Voronoi associées aux points du plan d'expériences défini sur le niveau grossier, et on sélectionne



---

**Algorithme 2 :** Stratégie de planification séquentielle pour améliorer la prédictivité d'un modèle de co-krigeage multi-fidélité - Ajout d'un unique point par itération

---

On note  $(V_i^f)_{i=1,\dots,n_f}$  et  $(V_i^g)_{i=1,\dots,n_g}$  les cellules de Voronoi associées aux plans d'expériences  $\mathbf{D}_f$  et  $\mathbf{D}_g$ , respectivement.

- 1 Définition et évaluation du plan d'expériences initial constitué de  $\mathbf{D}_f$  et  $\mathbf{D}_g$ .
  - 2 Sélection d'un point d'expérience additionnel  $\mathbf{x}_{new}$  et évaluation de ce point sur le niveau grossier.
    - (a) Construction d'un modèle de krigeage à partir des observations de  $\mathbf{D}_g$ .
    - (b) Calcul de  $\mathbf{x}_{bad} = \arg \max_{\mathbf{x} \in \mathbf{D}_g} \{\eta_g(\mathbf{x})\}$ . Soit  $V_{bad}^g$  la cellule de Voronoi associée à  $\mathbf{x}_{bad}$ .
    - (c) Echantillonnage de  $N$  points dans  $V_{bad}^g$ . Soit  $S$  l'ensemble de ces points.
    - (d) Sélection de  $\mathbf{x}_{new} = \arg \max_{\mathbf{x} \in S} \{s_g^2(\mathbf{x})\}$ .
    - (e) Evaluation sur le niveau grossier du point  $\mathbf{x}_{new}$  et mise à jour du plan d'expériences avec  $\mathbf{D}_g = \mathbf{D}_g \cup \mathbf{x}_{new}$ .
  - 3 Répétition de l'étape 2 jusqu'à ce que le critère d'arrêt sur le niveau grossier soit atteint.
  - 4 Sélection d'un point d'expérience additionnel  $\mathbf{x}_{new}$  et évaluation de ce point sur les deux niveaux de fidélité.
    - (a) Construction d'un modèle de co-krigeage multi-fidélité à partir des observations de  $\mathbf{D}_f$  et  $\mathbf{D}_g$ .
    - (b) Calcul de  $\mathbf{x}_{bad} = \arg \max_{\mathbf{x} \in \mathbf{D}_f} \{\eta_f(\mathbf{x})\}$ . Soit  $V_{bad}^f$  la cellule de Voronoi associée à  $\mathbf{x}_{bad}$ .
    - (c) Echantillonnage de  $N$  points dans  $V_{bad}^f$ . Soit  $S$  l'ensemble de ces points.
    - (d) Sélection de  $\mathbf{x}_{new} = \arg \max_{\mathbf{x} \in S} \{s_f^2(\mathbf{x})\}$ .
    - (e) Evaluation sur les deux niveaux de fidélité du point  $\mathbf{x}_{new}$  et mise à jour du plan d'expériences avec  $\mathbf{D}_f = \mathbf{D}_f \cup \mathbf{x}_{new}$  et  $\mathbf{D}_g = \mathbf{D}_g \cup \mathbf{x}_{new}$ .
  - 5 Répétition de l'étape 4 jusqu'à ce que le critère d'arrêt soit atteint.
- 

tionne la cellule de Voronoi  $V_{bad}^g$  correspondant au point présentant la plus forte erreur de validation croisée sur le niveau grossier.

Etape 2c, on échantillonne un nombre important  $N$  de points dans la cellule de Voronoi  $V_{bad}^g$ . Les méthodes relatives à cette étape sont les mêmes que celles décrites dans le cas simple fidélité (section 5.2.2, étape 2c).

Etape 2d, on calcule la variance de co-krigeage multi-fidélité sur le niveau grossier pour l'ensemble des points échantillonnés. On sélectionne le point pour lequel cette variance est maximale.

Etape 2e, le point sélectionné est ajouté au plan d'expériences défini pour le niveau grossier. On réalise ensuite la simulation d'écoulement au niveau grossier pour ce nouveau point, puis on collecte l'observation de la réponse d'intérêt.

Etape 3, le critère d'arrêt sur le niveau grossier peut être défini par deux conditions (cf. section 5.3.1) : l'une sur la valeur de  $Q_{cv,g}^2$  (Equation 5.5) et l'autre sur la valeur de  $\gamma$  (Equation 5.6). Typiquement, cela peut être  $Q_{cv,g}^2 > 0,9$  qui indique une prédictivité correcte du méta-modèle. On peut ensuite prendre  $\gamma > 0,005$  : l'évolution de  $Q_{cv,g}^2$  doit être supérieure à 0,005 pour un nombre d'évaluations du niveau grossier équivalent en temps de simulation à une évaluation sur le niveau fin. Afin de s'assurer de la fiabilité du critère, on peut attendre que l'une de ces deux conditions soit vérifiée sur un ensemble d'itérations consécutives avant de considérer le critère comme atteint.

Etape 4, il s'agit du processus de sélection d'un point additionnel pour les niveaux fin et grossier. Cette étape peut être vue comme une application de l'Algorithme 1 au niveau fin. C'est un processus itératif qui est répété jusqu'à ce que le critère d'arrêt soit atteint.

Etape 4a, à partir du plan d'expériences et des observations associées de la réponse d'intérêt sur les deux niveaux, on construit un méta-modèle de la réponse d'intérêt en utilisant le co-krigeage multi-fidélité (section 2.3.2).

Etape 4b, pour chacun des points du plan d'expériences défini sur le niveau fin, on calcule l'erreur de validation croisée normalisée au niveau fin. On considère ensuite les cellules de Voronoi associées aux points du plan d'expériences défini sur le niveau fin, puis on sélectionne la cellule de Voronoi  $V_{bad}^f$  correspondant au point présentant la plus forte erreur de validation croisée sur le niveau fin.

Etape 4c, on échantillonne un nombre important  $N$  de points dans la cellule de Voronoi  $V_{bad}^f$ . Les méthodes relatives à cette étape sont les mêmes que celles décrites dans le cas simple fidélité (section 5.2.2, étape 2c).

Etape 4d, on calcule la variance du co-krigeage multi-fidélité sur le niveau fin pour l'ensemble des points échantillonnés. On sélectionne le point pour lequel cette variance est maximale.

Etape 4e, le point sélectionné est ajouté aux plans d'expériences  $\mathbf{D}_f$  et  $\mathbf{D}_g$ . On réalise ensuite la simulation d'écoulement en ce nouveau point sur les deux niveaux de fidélité, puis on collecte les observations associées de la réponse d'intérêt.

Etape 5, le critère d'arrêt peut être une valeur cible sur la prédictivité du méta-modèle. Celle-ci peut être évaluée via le calcul du coefficient  $Q^2$  sur une base de test (si disponible) ou par validation croisée sur le niveau fin. Le critère d'arrêt peut également être un budget en temps de simulation.

On remarque, pour l'étape 2a, qu'au lieu de construire un modèle de krigeage sur le niveau grossier, il est également possible de construire un méta-modèle de co-krigeage multi-fidélité à partir des observations de  $\mathbf{D}_f$  et  $\mathbf{D}_g$ . En effet, le calcul du modèle de co-krigeage multi-fidélité inclut le calcul des estimateurs de krigeage sur le niveau grossier. Cette option allonge les temps de calcul puisqu'elle implique la construction d'un modèle de krigeage supplémentaire. Toutefois, elle présente l'avantage de fournir directement un estimateur sur le niveau fin et permet ainsi de suivre l'évolution de la prédictivité du méta-modèle lorsque l'on ajoute des points sur le niveau grossier. Nous suivrons cette seconde approche lors des tests d'applications sur le cas BRUGGE (*cf.* Chapitre 6).

### Application à la fonction objectif

Dans le cadre d'une méta-modélisation directe de la fonction objectif (*cf.* section 3.3.1), l'Algorithme 2 peut être directement utilisé en considérant le modèle de co-krigeage multi-fidélité de la fonction objectif ( $FO^{dir,f}$ ) et le modèle de krigeage sur le niveau grossier associé ( $FO^{dir,g}$ ).

Dans le cadre d'une méta-modélisation vectorielle de la fonction objectif (*cf.* section 3.3.2), l'Algorithme 2 peut aussi être directement utilisé. Il faut alors l'appliquer au méta-modèle de la fonction objectif  $FO^{vec,f}$ , dont l'estimateur et la variance associés sont respectivement donnés par les Équations 3.18 et 3.23 sur le niveau fin, et par les Équations 3.19 et 3.25 sur le niveau grossier. On utilise également les estimations par validation croisée de ce méta-modèle pour les niveaux fin et grossier, décrites dans la section 3.3.3.

## 5.4 Extension à des évaluations en parallèle

Le temps associé à la construction d'un méta-modèle correspond essentiellement au temps nécessaire aux évaluations des points du plan d'expériences. Ainsi, lorsqu'il est possible de réaliser plusieurs simulations en parallèle (sur un cluster de calcul par exemple), le temps de calcul associé à la construction

d'un méta-modèle prédictif peut être grandement réduit. Afin de profiter d'une telle situation, nous proposons une extension des Algorithmes 1 et 2 permettant la sélection de  $q$  points d'expériences à chaque itération.

Nous décrivons tout d'abord le principe de cette extension dans la section 5.4.1, puis nous la déclinons dans les cadres simple et multi-fidélité dans les sections 5.4.2 et 5.4.3, respectivement.

### 5.4.1 Sélection de $q$ points par itération

Le principe de l'extension que nous proposons consiste à sélectionner  $q$  points dans  $q$  cellules de Voronoi différentes. Plus précisément, on sélectionne les  $q$  cellules de Voronoi associées aux points du plan d'expériences présentant les plus fortes erreurs de validation croisée. Puis, un point est sélectionné séquentiellement dans chacune de ces cellules selon l'Algorithme 1. Le premier point est choisi dans la cellule de Voronoi avec la plus forte erreur, puis le second dans la cellule de Voronoi présentant la deuxième erreur la plus forte, *etc.* Dans ce cas, il est nécessaire de mettre à jour l'estimateur de la variance chaque fois qu'un nouveau point est ajouté afin d'éviter qu'il ne soit sélectionné plusieurs fois au cours d'une même itération. En effet, si deux points doivent être sélectionnés dans deux cellules de Voronoi voisines, il est possible que le point maximisant la variance se trouve sur la frontière commune de ces deux cellules.

L'expression de la variance du krigeage et du co-krigeage multi-fidélité ne dépend pas directement des observations. Par exemple, pour le krigeage, l'expression est la suivante :

$$s^2(\mathbf{x}) = \sigma^2 \left(1 - \mathbf{r}^\top(\mathbf{x})\mathbf{R}^{-1}\mathbf{r}(\mathbf{x})\right) \quad (5.7)$$

avec  $\mathbf{R}$  la matrice de corrélation de  $\mathbf{D}$  et  $\mathbf{r}(\mathbf{x}) = (R(\mathbf{x}, \mathbf{x}_1), \dots, R(\mathbf{x}, \mathbf{x}_n))^\top$  le vecteur de corrélation. Il est donc possible de mettre à jour la prédiction de la variance  $s^2(\mathbf{x})$  en prenant en compte la position du nouveau point  $x_{new}$  sélectionné sans ré-estimer les hyper-paramètres  $\boldsymbol{\lambda}$  (dans la fonction de corrélation  $R$ ) ni  $\sigma^2$ . On la note alors  $\tilde{s}^2(\mathbf{x})$ :

$$\tilde{s}^2(\mathbf{x}) = \sigma^2 \left[ 1 - \begin{pmatrix} R(\mathbf{x}, \mathbf{x}_1) \\ \vdots \\ R(\mathbf{x}, \mathbf{x}_n) \\ R(\mathbf{x}, \mathbf{x}_{new}) \end{pmatrix}^\top \begin{pmatrix} 1 & \cdots & R(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_n) & R(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_{new}) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ R(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_1) & \cdots & 1 & R(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_{new}) \\ R(\mathbf{x}_{new}, \mathbf{x}_1) & \cdots & R(\mathbf{x}_{new}, \mathbf{x}_n) & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} R(\mathbf{x}, \mathbf{x}_1) \\ \vdots \\ R(\mathbf{x}, \mathbf{x}_n) \\ R(\mathbf{x}, \mathbf{x}_{new}) \end{pmatrix} \right] \quad (5.8)$$

Cette stratégie, appelée krigeage séquentiel menteur, est suggérée dans la thèse de [Le Gratiet, 2013b] comme méthode de sélection de  $q$  points pour une stratégie séquentielle basée sur un modèle de krigeage. Elle a été étendue à un cadre d'optimisation dans [Ginsbourger et al., 2010].

On remarque pour finir que la sélection de  $q$  points dans  $q$  cellules de Voronoi différentes est cohérente avec une stratégie d'exploration de l'espace. Toutefois, si la valeur de  $q$  est élevée, il peut être intéressant de choisir plusieurs points au sein de la même cellule de Voronoi. Cela peut se faire avec l'approche proposée ici.

### 5.4.2 Algorithme dans un cadre simple fidélité

---

**Algorithme 3 :** Stratégie de planification séquentielle pour améliorer la prédictivité d'un modèle de krigeage - Ajout de  $q$  points par itération

---

On note  $(V_i)_{i=1,\dots,n}$  les cellules de Voronoi associées au plan d'expériences  $\mathbf{D}$ .

- 1 Définition et évaluation du plan d'expériences initial  $\mathbf{D}$ .
  - 2 Sélection et évaluation de  $q$  points d'expérience additionnels  $\mathbf{x}_{new}^1, \dots, \mathbf{x}_{new}^q$ .
    - (a) Construction du modèle de krigeage à partir des observations  $y(\mathbf{D})$ . Soit  $\mathbf{D}' = \mathbf{D}$ .  
**Pour**  $i = 1, \dots, q$ 
      - (b) Calcul de  $\mathbf{x}_{bad}^i = \arg \max_{\mathbf{x} \in \mathbf{D}'} \{\eta(\mathbf{x})\}$ . Soit  $V_{bad,i}$  la cellule de Voronoi associée à  $\mathbf{x}_{bad}^i$ .
      - (c) Echantillonnage de  $N$  points dans  $V_{bad,i}$ . Soit  $S$  l'ensemble de ces points.
      - (d) Sélection de  $\mathbf{x}_{new}^i = \arg \max_{\mathbf{x} \in S} \{\tilde{s}^2(\mathbf{x})\}$ . Mise à jour de  $\mathbf{D}'$ :  $\mathbf{D}' = \mathbf{D}' - \{\mathbf{x}_{bad}^i\}$ .
      - (e) Mise à jour de  $\tilde{s}^2$  pour prendre en compte  $\mathbf{x}_{new}^1, \dots, \mathbf{x}_{new}^i$ .**FinPour**
    - (f) Evaluation des points  $\mathbf{x}_{new}^1, \dots, \mathbf{x}_{new}^q$  et mise à jour de  $\mathbf{D}$ :  $\mathbf{D} = \mathbf{D} \cup \{\mathbf{x}_{new}^1, \dots, \mathbf{x}_{new}^q\}$ .
  - 3 Répétition de l'étape 2 jusqu'à ce que le critère d'arrêt soit atteint.
- 

On note que dans le cas où  $q = 1$ , cet algorithme est équivalent à l'Algorithme 1.

#### Détail de l'Algorithme 3 étape par étape

Etape 1, on définit un plan d'expériences initial de petite taille en utilisant les LHS (section 2.2.1). La taille du plan d'expériences peut être prise égale à  $d + 1$ , avec  $d$  la dimension de l'espace des paramètres. On réalise des simulations d'écoulement pour chacun des points du plan d'expériences, puis on collecte les observations de la réponse d'intérêt en ces points.

Etape 2, on sélectionne  $q$  points additionnels pour le plan d'expériences. On répète cette étape jusqu'à ce que le critère d'arrêt soit atteint.

Etape 2a, à partir du plan d'expériences et des observations associées de la réponse d'intérêt, on construit un méta-modèle de la réponse d'intérêt en utilisant le krigeage (section 2.2.2). On définit également l'ensemble  $D'$ . Cet ensemble contient initialement l'ensemble des points du plan  $D$ , auquel on enlève par la suite les points correspondant aux cellules de Voronoi qui ont déjà été échantillonnées afin que les nouveaux points ne soient pas sélectionnés dans ces cellules.

Etape 2b, on rentre dans une boucle qui va permettre la sélection séquentielle de  $q$  points d'expériences. On calcule alors une première fois les erreurs de validation croisée normalisées (Equation 5.1). Puis, on sélectionne les  $q$  cellules de Voronoi associées aux points présentant les plus fortes erreurs de validation croisée.

Etape 2c, on échantillonne un nombre important  $N$  de points dans les  $q$  cellules de Voronoi où l'erreur de validation croisée est la plus importante. On remarque que cette étape peut se faire simultanément pour les  $q$  cellules de Voronoi. On peut ainsi économiser du temps de calcul en la réalisant en parallèle.

Etape 2d, on calcule la variance du krigeage pour l'ensemble des points échantillonnés. On sélectionne le point pour lequel la variance est maximale.

Etape 2e, on met à jour l'estimateur de la variance chaque fois qu'un point est sélectionné (cf. Equation 5.8), et on retourne à l'étape 2b jusqu'à ce que  $q$  points aient été sélectionnés.

Étape 2f, on ajoute les nouveaux points au plan d'expériences, on réalise les simulations d'écoulement pour chacun d'entre eux et on collecte leurs observations.

Étape 3, le critère d'arrêt peut être une valeur cible sur la prédictivité du méta-modèle. Celle-ci peut être évaluée via le calcul du coefficient  $Q^2$  sur une base de test (si disponible) ou via une validation croisée (cf. partie 2.4). Le critère d'arrêt peut également être un budget en temps de simulation, qui en pratique serait défini par un nombre maximal de simulations d'écoulement.

### 5.4.3 Algorithme dans un cadre multi-fidélité

Dans le cas multi-fidélité, l'extension de l'Algorithme 2 pour sélectionner  $q$  points par itération se fait de manière identique. Elle consiste à appliquer la procédure de sélection de  $q$  points lorsque l'on évalue uniquement le niveau grossier (étape 2), et à l'appliquer à nouveau lorsque l'on évalue les niveaux fin et grossier (étape 4). Il faut seulement mettre à jour la variance de co-krigeage multi-fidélité aux niveaux fin et grossier, notées respectivement  $\tilde{s}_f^2$  et  $\tilde{s}_g^2$ , chaque fois qu'un point d'expérience supplémentaire est sélectionné. Cette mise à jour se calcule de manière similaire à celle du krigeage (Equation 5.8).

---

**Algorithme 4 :** Stratégie de planification séquentielle pour améliorer la prédictivité d'un modèle de co-krigeage multi-fidélité - Ajout de  $q$  points par itération

---

*On note  $(V_i^f)_{i=1,\dots,n_f}$  et  $(V_i^g)_{i=1,\dots,n_g}$  les cellules de Voronoi associées aux plans d'expériences  $\mathbf{D}_f$  et  $\mathbf{D}_g$ , respectivement.*

- 1 Définition et évaluation du plan d'expériences initial constitué de  $\mathbf{D}_f$  et  $\mathbf{D}_g$ .
  - 2 Sélection de  $q$  points d'expérience additionnels  $\mathbf{x}_{new}^1, \dots, \mathbf{x}_{new}^q$  et évaluation sur le niveau grossier.
    - (a) Construction d'un modèle de krigeage à partir des observations de  $\mathbf{D}_g$ . Soit  $\mathbf{D}'_g = \mathbf{D}_g$ .
    - Pour**  $i = 1, \dots, q$ 
      - (b) Calcul de  $\mathbf{x}_{bad}^i = \arg \max_{\mathbf{x} \in \mathbf{D}'_g} \{\eta_g(\mathbf{x})\}$ . Soit  $V_{bad,i}^g$  la cellule de Voronoi associée à  $\mathbf{x}_{bad}^i$ .
      - (c) Echantillonnage de  $N$  points dans  $V_{bad,i}^g$ . Soit  $S$  l'ensemble de ces points.
      - (d) Sélection de  $\mathbf{x}_{new}^i = \arg \max_{\mathbf{x} \in S} \{\tilde{s}_g^2(\mathbf{x})\}$ . Mise à jour de  $\mathbf{D}'_g$ :  $\mathbf{D}'_g = \mathbf{D}'_g - \{\mathbf{x}_{bad}^i\}$ .
      - (e) Mise à jour de  $\tilde{s}_g^2$  pour prendre en compte  $\mathbf{x}_{new}^1, \dots, \mathbf{x}_{new}^i$ .
    - FinPour**
    - (f) Evaluation des points  $\mathbf{x}_{new}^1, \dots, \mathbf{x}_{new}^q$  et mise à jour de  $\mathbf{D}_g$ :  $\mathbf{D}_g = \mathbf{D}_g \cup \{\mathbf{x}_{new}^1, \dots, \mathbf{x}_{new}^q\}$ .
  - 3 Répétition de l'étape 2 jusqu'à ce que le critère d'arrêt sur le niveau grossier soit atteint.
  - 4 Sélection de  $q$  points d'expérience additionnels  $\mathbf{x}_{new}^1, \dots, \mathbf{x}_{new}^q$  et évaluation de ces points sur les deux niveaux de fidélité.
    - (a) Construction du modèle de co-krigeage multi-fidélité à partir des observations de  $\mathbf{D}_f$  et  $\mathbf{D}_g$ . Soit  $\mathbf{D}'_f = \mathbf{D}_f$ .
    - Pour**  $i = 1, \dots, q$ 
      - (b) Calcul de  $\mathbf{x}_{bad}^i = \arg \max_{\mathbf{x} \in \mathbf{D}'_f} \{\eta_f(\mathbf{x})\}$ . Soit  $V_{bad,i}^f$  la cellule de Voronoi associée à  $\mathbf{x}_{bad}^i$ .
      - (c) Echantillonnage de  $N$  points dans  $V_{bad,i}^f$ . Soit  $S$  l'ensemble de ces points.
      - (d) Sélection de  $\mathbf{x}_{new}^i = \arg \max_{\mathbf{x} \in S} \{\tilde{s}_f^2(\mathbf{x})\}$ . Mise à jour de  $\mathbf{D}'_f$ :  $\mathbf{D}'_f = \mathbf{D}'_f - \{\mathbf{x}_{bad}^i\}$ .
      - (e) Mise à jour de  $\tilde{s}_f^2$  pour prendre en compte  $\mathbf{x}_{new}^1, \dots, \mathbf{x}_{new}^i$ .
    - FinPour**
    - (f) Evaluation des points  $\mathbf{x}_{new}^1, \dots, \mathbf{x}_{new}^q$  et mise à jour de  $\mathbf{D}_g$  et  $\mathbf{D}_f$ :  $\mathbf{D}_g = \mathbf{D}_g \cup \{\mathbf{x}_{new}^1, \dots, \mathbf{x}_{new}^q\}$  et  $\mathbf{D}_f = \mathbf{D}_f \cup \{\mathbf{x}_{new}^1, \dots, \mathbf{x}_{new}^q\}$ .
  - 5 Répétition de l'étape 4 jusqu'à ce que le critère d'arrêt soit atteint.
-

---

## CHAPITRE 6

# Etude de cas : BRUGGE

Le cas d'étude BRUGGE est inspiré du cas de référence Brugge, un autre cas « benchmark » en ingénierie de réservoir [Peters et al., 2010]. Les études que nous avons menées sur ce cas ont pour but de tester les différentes méthodes de planification séquentielle d'expériences introduites dans le Chapitre 5. Ces méthodes sont appliquées pour la création de méta-modèles prédictifs de la fonction objectif, en considérant une approche directe ou vectorielle, dans des cadres simple et multi-fidélité (Chapitres 2 et 3).

Ce chapitre est divisé en trois parties. Comme pour le cas PUNQ, la construction du cas BRUGGE multi-fidélité est basée sur la création d'une version raffinée du modèle de référence Brugge. Les détails de cette construction, ainsi que la description du cas d'étude BRUGGE, sont réunis au sein de la partie 6.1. Ensuite, dans la partie 6.2, nous présentons et discutons les résultats obtenus sur ce cas. Il s'agit essentiellement de comparaisons sur la prédictivité des méta-modèles en fonction des différentes approches considérées. Une application à l'analyse de sensibilité est finalement proposée dans la partie 6.3.

### 6.1 Description du cas BRUGGE multi-fidélité

Nous appelons BRUGGE ou BRUGGE multi-fidélité ce cas d'étude. Il est inspiré du cas Brugge, un cas benchmark en ingénierie de réservoir introduit dans le cadre d'un workshop (*Applied Technology Workshop*) de la SPE (*the Society of Petroleum Engineers*) qui s'est déroulé à Bruges en juin 2008. Nous décrivons rapidement le cas Brugge initialement proposé dans la section 6.1.1. La construction de notre cas BRUGGE à partir du cas de référence est ensuite détaillée dans la section 6.1.2. Dans la section 6.1.3, nous précisons la paramétrisation ainsi que la définition de la fonction objectif utilisées. Enfin, une comparaison des modèles BRUGGE fin et grossier est proposée en section 6.1.4 via la représentation des réponses dynamiques simulées et de la fonction objectif pour les deux niveaux.

#### 6.1.1 Le cas Brugge original

Le cas Brugge est issu d'un projet mis en place lors du workshop SPE à Bruges en 2008. Il s'agit d'un modèle réservoir pour lequel on dispose d'un ensemble de 104 réalisations de propriétés pétrophysiques formant un ensemble de modèles respectant les données de puits et géologiques. Ce cas de référence a été construit dans le but de comparer des méthodes pour l'optimisation de l'injection d'eau, ainsi que pour le calage d'historique. On dispose de l'historique de production sur 10 ans. L'optimisation de la production se fait sur les 20 années suivantes. Les résultats de cette étude ont été publiés par [Peters et al., 2010]. On trouve également dans cet article une description complète du cas de référence. Des

données supplémentaires ont été fournies par la suite dans [Peters et al., 2013].

Le champ Brugge est un champ pétrolifère synthétique représentant un champ typique de la Mer du Nord. Sa structure prend la forme d'un demi dôme allongé avec la présence d'une faille interne. Elle est visible sur la Figure 6.1. Ses dimensions sont d'environ  $10 \times 3 \text{ km}^2$ . La grille du modèle est composée de 9 couches réparties au sein de 4 formations ou zones de réservoir différentes: Schelde, Maas, Waal et Schie. Chacune des couches est divisée en  $139 \times 48$  mailles dont les dimensions moyennes sont  $65 \times 65 \times 5 \text{ m}^3$ . La grille comprend donc environ 60000 mailles.

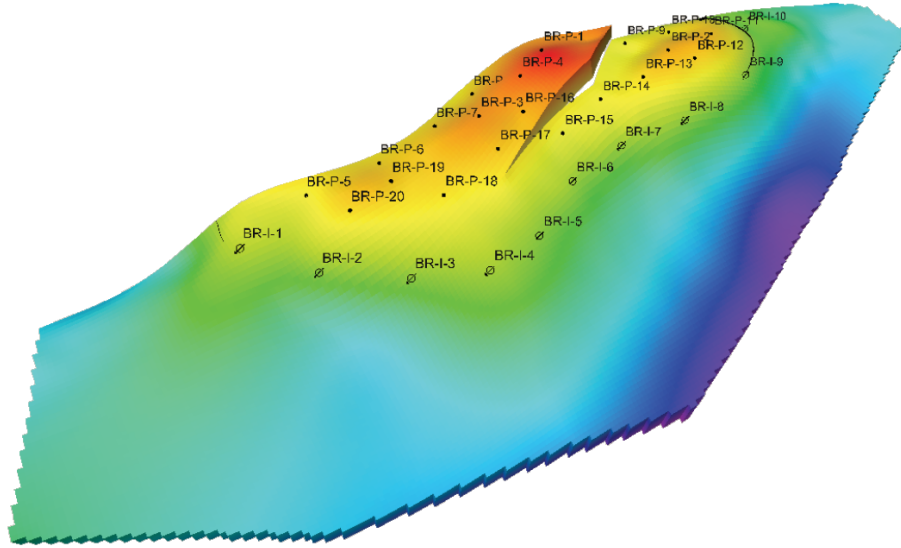


Figure 6.1 : Structure du champ Brugge et position des puits (figure adaptée de [Peters et al., 2010]).

Les caractéristiques principales des différentes formations composant le réservoir Brugge sont données par le Tableau 6.1. Les zones les plus perméables (Waal et Schelde) alternent avec des formations moins perméables (Maas et Schie). Les deux couches supérieures du réservoir correspondent à Schelde, les trois suivantes à Maas, les trois autres à Waal. Schie se résume à la neuvième couche.

Formation	Épaisseur moyenne (m)	Porosité moyenne (%)	Perméabilité moyenne (mD)	Ratio net/brut moyen (%)	Environnement de dépôt
Schelde	10	20,7	1105	60	Fluvial
Maas	20	19,0	90	88	Shoreface inférieur
Waal	26	24,1	814	97	Shoreface supérieur
Schie	5	19,4	36	77	Plateau sableux

Tableau 6.1 : Caractéristiques principales des formations de Brugge et leur environnement de dépôt. Les valeurs de porosité et perméabilité correspondent à celles des sables. La proportion de sable par formation est indiquée par le ratio net/brut.

Brugge est un cas diphasique (eau/huile) car la pression au sein du réservoir est supérieure à la pression du point de bulle pour l'huile. On dénombre 30 puits dont 20 producteurs et 10 injecteurs. Les puits producteurs (notés BR-P-\* sur la Figure 6.1) sont tous situés dans la partie centrale du dôme contenant l'huile, tandis que les injecteurs (notés BR-I-\* sur la Figure 6.1) sont répartis autour du contact eau/huile (en vert clair sur la Figure 6.1). Ce dernier se situe initialement à 1678 m de profondeur.

Le planning de production associé au cas Brugge s'étend sur 10 années. Les puits producteurs ont un objectif de production fixé à 2000 barils par jour ( $318 \text{ m}^3/\text{jour}$ ) et ne doivent pas passer sous la pression limite de 725 psi (50 bar). Les puits producteurs sont successivement mis en production à raison de un par mois. Tous les puits producteurs sont actifs à partir du 20ième mois. Le débit d'injection des puits injecteurs est de 4000 barils par jour ( $636 \text{ m}^3/\text{jour}$ ) et ne doit pas dépasser une pression limite de 2611 psi (180 bar). Ces puits sont également mis en place successivement après les puits producteurs. Tous les puits injecteurs sont donc actifs à partir du 30ième mois.

### 6.1.2 Construction d'un cas BRUGGE multi-fidélité

Le cas Brugge a été choisi afin de tester les algorithmes de planification d'expériences proposés dans le Chapitre 5. C'est un cas d'étude intéressant pour sa complexité, en termes de nombre de puits et de mailles. Le nombre de mailles de Brugge est toujours faible comparé aux nombres considérés pour un cas réel. Toutefois, cela fait de Brugge un cas plus réaliste que le cas PUNQ. De plus, c'est un cas de référence en ingénierie de réservoir qui a fait l'objet de nombreuses publications [Mohamed et al., 2010], [Chen and Oliver, 2010], [Asadollahi et al., 2014], [Foroud et al., 2016], *etc.* Afin de pouvoir l'étudier dans le cadre d'une méta-modélisation multi-fidélité, nous avons construit un cas multi-fidélité à partir des données du cas Brugge. On note que son processus de construction est similaire en de nombreux points à celui mis en place pour obtenir le cas PUNQ à partir du cas de référence PUNQ-S3 (section 4.1.2).

#### Définition des niveaux de fidélité et temps moyens de simulation

Comme pour le cas PUNQ, nous considérons deux niveaux de fidélité correspondant à deux niveaux de résolution pour la grille du modèle.

1. Le « modèle grossier » est défini sur une grille identique à celle du cas Brugge original. Elle contient  $139 \times 48 \times 9$  mailles dont 44550 sont actives. On appelle ce modèle BRUGGE grossier.
2. Le « modèle fin » possède une grille obtenue après un raffinement de la grille de BRUGGE grossier. Chaque maille sur le niveau grossier est divisée par  $2 \times 2 \times 3$  selon les axes X, Y et Z. La grille fine contient donc  $278 \times 96 \times 27$  mailles dont 534600 sont actives. On note ce modèle BRUGGE fin.

Bien que le cas Brugge de référence fournisse les données de production pour 10 ans, nous limitons la simulation aux 8 premières années afin de limiter les temps de calcul. Elle nécessite en moyenne 1 heure pour BRUGGE fin et 3 min pour BRUGGE grossier. Ainsi, la durée d'une simulation sur le niveau fin est équivalente à celle de 20,5 simulations sur le niveau grossier.

On remarque que le temps de simulation de BRUGGE grossier est semblable à celui de PUNQ fin ( $\sim 3$  min) alors que le nombre de mailles actives de BRUGGE grossier est environ 3 fois plus important (44550 au lieu de 15849 mailles). En effet, la période de simulation est deux fois plus courte pour BRUGGE que pour PUNQ et la durée des pas de temps considérés est à peu près équivalente (environ un par mois). De plus, pour des cas équivalents, il est plus rapide de simuler les écoulements en diphasique qu'en triphasique.

#### Calcul des grilles et position des puits

Nous utilisons le logiciel PumaFlow [PumaFlow, 2016] pour réaliser les simulations d'écoulement. BRUGGE grossier ne diffère du modèle d'origine Brugge que par la distribution des propriétés pétrophysiques (porosité, perméabilité et du ratio net/brut). Comme pour PUNQ, le modèle BRUGGE fin



a ensuite été construit à partir des fichiers de simulation de BRUGGE grossier (*cf.* section 4.1.2). Une différence avec PUNQ est que le maillage de BRUGGE n'est pas régulier. La grille de BRUGGE fin a ainsi été calculée par un raffinement de celle de BRUGGE grossier via le logiciel GOCAD [SKUA-GOCAD, 2016], en réalisant une interpolation linéaire du maillage grossier.

Le calcul des coordonnées des puits sur le niveau fin a également été réalisé grâce à GOCAD. Pour cela, la position des différents puits a été ajoutée sur le modèle à partir des logs des puits disponibles. Il suffit ensuite de repérer sur la grille fine les mailles traversées par les puits. Les logs apportent aussi une information sur la complétion des puits, et on peut en déduire les couches auxquelles les puits sont connectés sur les grilles fine et grossière. De manière générale, tous les puits injecteurs injectent dans les différentes formations. La majorité des puits producteurs produit dans les trois formations supérieures (Schelde, Maas et Waal). Toutefois, certains puits (n°5, 10, 14 et 15) ne produisent que dans Schelde et Maas, et le producteur n°9 n'est ouvert que sur Schelde.

### Calcul des propriétés pétrophysiques

Par souci de cohérence entre BRUGGE fin et grossier, nous avons généré les propriétés pétrophysiques (porosité et perméabilité) au niveau de BRUGGE fin, puis calculé ces propriétés sur BRUGGE grossier via une mise à l'échelle. On rappelle que le cas Brugge de référence est fourni avec 104 réalisations de ces propriétés, générées suivant différentes méthodes (modélisation continue, par faciès, objet, *etc.*). Nous avons suivi l'une de ces méthodologies pour générer les propriétés pétrophysiques de BRUGGE fin. On remarque que la méthodologie suivie est similaire à celle utilisée pour générer les propriétés pétrophysiques du cas PUNQ.

La porosité a été générée indépendamment pour chacune des formations à l'aide de la méthode FFT-MA (*FFT Moving Average*) [Le Ravalec et al., 2000]. Les réalisations ont ensuite été conditionnées en réalisant un double krigeage suivant la pratique usuelle décrite dans [Chilès and Delfiner, 1999] pour respecter les données aux puits. On note que les valeurs utilisées pour le conditionnement de la porosité sont déduites des logs fournis avec le cas de référence. Les réalisations de perméabilité ont ensuite été générées par cosimulation en considérant la porosité comme donnée secondaire. On a utilisé pour cela la méthode SGSim (*Sequential Gaussian Simulation*) [Journel and Deutsch, 1998]. Le coefficient de corrélation entre la porosité et le log de la perméabilité horizontale  $K_h$  est de 0,75. La perméabilité verticale  $K_v$  est prise égale à :  $K_v = 0,1K_h$ . Pour finir, le ratio net/brut définissant la proportion de roche réservoir (*i.e.* poreuse) par maille est pris constant par formation. Les valeurs caractéristiques utilisées pour générer ces propriétés pétrophysiques sont spécifiées dans le Tableau 6.2. Elles sont inspirées de [Peters et al., 2010] ainsi que de l'étude de l'une des réalisations du cas Brugge, générée suivant une méthodologie identique.

Formation	Schelde	Maas	Waal	Schie
Couche	1-2	3-5	6-8	9
$\phi$ moyen	0,16	0,15	0,23	0,14
$\phi$ écart-type	0,063	0,032	0,017	0,058
$\log_{10}(K_h)$ moyen	2,46	1,8	2,91	1
$\log_{10}(K_h)$ écart-type	0,788	0,304	0,242	0,562
Ratio net/brut	0,7	0,9	1	0,8

Tableau 6.2 : Caractéristiques des propriétés pétrophysiques par zone du réservoir avec  $\phi$  la porosité et  $K_h$  la perméabilité horizontale.

A partir des réalisations de propriétés pétrophysiques générées sur la grille fine, on calcule les propriétés équivalentes sur la grille grossière. Les méthodes pour la mise à l'échelle (*upscaling*) sont identiques à celles employées pour le cas PUNQ et sont décrites en détail dans la section 4.1.2. La porosité équivalente est calculée par une moyenne arithmétique (Équation 4.1). La perméabilité équivalente est calculée suivant l'encadrement proposé par [Cardwell and Parsons, 1945] (Équations 4.2 et 4.3).

Il est important de souligner que le cas Brugge de référence utilise différentes tables pour définir la pression capillaire et les perméabilités relatives. Ces tables sont définies par type de roche (rock-type), le type étant lui même défini en fonction de la porosité dans la maille. On dénombre ainsi 7 types de roche définis par des intervalles de porosité différents. Ainsi, pour une maille donnée, la valeur de la porosité indique quelles sont les deux tables à utiliser pour calculer les perméabilités relatives et la pression capillaire en fonction de la saturation en eau. On précise aussi que les tables de perméabilité relative sont calculées d'après les relations modifiées de Brooks-Corey. La perméabilité relative de l'eau  $k_{rw}$  et celle de l'huile  $k_{ro}$  sont ainsi données par:

$$\begin{aligned} k_{rw} &= k_{rw,max} \left( \frac{S_w - S_{wc}}{1 - S_{or} - S_{wc}} \right)^{n_w}, \\ k_{ro} &= k_{ro,max} \left( \frac{S_o - S_{or}}{1 - S_{or} - S_{wc}} \right)^{n_o}, \end{aligned} \quad (6.1)$$

avec  $S_w$  la saturation en eau,  $S_{wc}$  la saturation irréductible en eau,  $S_o$  la saturation en huile,  $S_{or}$  la saturation résiduelle en huile,  $n_w$  et  $n_o$  les exposants de Corey pour l'eau et l'huile,  $k_{rw,max}$  et  $k_{ro,max}$  les perméabilités relatives maximales pour l'eau et l'huile.

Les intervalles de porosité permettant de définir les types de roche et les valeurs des variables nécessaires pour le calcul des perméabilités relatives (Équation 6.1) pour chacune des tables sont donnés par le Tableau 6.3. On conserve cette modélisation pour le cas BRUGGE multi-fidélité. Il faut donc attribuer les types de roche pour les mailles de BRUGGE fin et grossier respectivement en fonction des valeurs de porosité des deux modèles.

Intervalle de porosité	Type de roche	$S_{wc}$	$S_{or}$	$k_{rw,max}$	$k_{ro,max}$	$n_w$	$n_o$
$0, 225 < \phi$	1	0,252	0,15	0,6	0,4	3	5
$0, 200 < \phi < 0, 225$	2	0,257	0,15	0,6	0,4	3	5
$0, 175 < \phi < 0, 220$	3	0,266	0,15	0,6	0,4	3	5
$0, 150 < \phi < 0, 175$	4	0,286	0,15	0,6	0,4	3	5
$0, 125 < \phi < 0, 150$	5	0,304	0,15	0,6	0,4	3	5
$0, 075 < \phi < 0, 125$	6	0,516	0,15	0,6	0,4	3	5
$\phi < 0, 075$	7	0,8499	0,15	0,6	0,4	3	5

Tableau 6.3 : Classification par type de roche et valeurs des coefficients pour les modèles de Corey associés.

### 6.1.3 Description de l'étude de cas BRUGGE

Le cas BRUGGE multi-fidélité est considéré ici pour tester les stratégies de planification séquentielle d'expériences introduites précédemment dans le Chapitre 5. Ces algorithmes, visant la construction de méta-modèles prédictifs, sont appliqués à la méta-modélisation de la fonction objectif dans des contextes simple et multi-fidélité. On se place donc à nouveau dans le cadre d'un calage d'historique par méthodes variationnelles (*cf.* Figure 1.4).

### Paramètres incertains

Pour cette étude numérique, nous sélectionnons 19 paramètres que nous considérons comme incertains. Il s'agit de paramètres ayant un fort impact sur les écoulements car ils agissent sur la porosité, la perméabilité, les perméabilités relatives, *etc.* Ils sont généralement considérés comme potentiellement influents lors d'études en ingénierie de réservoir.

Ils sont présentés dans le Tableau 6.4 avec leurs intervalles de variation respectifs. On introduit notamment des paramètres liés à la définition de la pression capillaire (SWI et PCWM) et à la définition de la perméabilité relative (CRO, CRW, KROW, KRWM, SORW et SWI). Ces paramètres sont considérés comme parfaitement connus dans le cas de référence. Cependant, ils sont généralement influents dans le cadre du calage d'historique. Cela s'est d'ailleurs vérifié avec le cas PUNQ (*cf.* Figure 4.10). On note que la modification de chacun de ces paramètres induit un changement des tables de pression capillaire et/ou des tables de perméabilité relative pour tous les types de roche considérés.

Les autres paramètres sont définis pour chacune des formations du réservoir. Il s'agit de multiplicateurs de perméabilité horizontale (MKHi) et verticale (MKVi). On considère finalement la porosité moyenne par formation (PORi) comme incertaine. On remarque que perturber cette dernière engendre généralement des changements dans l'attribution du type de roche, et donc un changement des tables de pression capillaire et perméabilité relative qui sont utilisées pour de nombreuses mailles. Par ailleurs, ce choix de paramètre implique qu'il faut générer à nouveau les réalisations de porosité et perméabilité sur le niveau fin, puis calculer les réalisations équivalentes pour le modèle grossier. Il est également nécessaire d'identifier le type de roche auquel est associée chaque maille à partir de la porosité pour les modèles fin et grossier. Ces opérations additionnelles doivent être réalisées pour chaque ensemble de paramètres incertains avant de pouvoir lancer la simulation d'écoulement sur BRUGGE fin et grossier.

Dans notre étude, le temps de calcul associé à la simulation des réalisations du modèle fin, ainsi qu'à leur mise à l'échelle sur le modèle grossier, est court (quelques minutes). Il est négligé par la suite par souci de simplicité. Le ratio entre une évaluation sur les niveaux fin et grossier est donc toujours de 20,5. Toutefois, on note que dans le cadre d'une application sur un cas réel, ces temps de calcul devraient être comptabilisés afin de déterminer le véritable ratio du coût d'une simulation sur le niveau fin par rapport à celui d'une simulation sur le niveau grossier.

Nom	Min.	Max.	Description
CRO	4,5	5,5	Exposant de Corey pour l'huile ( $n_o$ )
CRW	2,5	3,5	Exposant de Corey pour l'eau ( $n_w$ )
KROW	0,3	0,5	Perméabilité relative maximale pour l'huile ( $k_{ro,max}$ )
KRWM	0,5	0,7	Perméabilité relative maximale pour l'eau ( $k_{rw,max}$ )
SORW	0,1	0,2	Saturation résiduelle en huile ( $S_{or}$ )
SWI	-0,05	+0,05	Incrément sur la saturation irréductible en eau
PCWM	1,6	2	Pression capillaire maximale (en psi)
POR1	0,16	0,18	Porosité moyenne dans Schelde
POR2	0,14	0,16	Porosité moyenne dans Maas
POR3	0,22	0,24	Porosité moyenne dans Waal
POR4	0,13	0,15	Porosité moyenne dans Schie
MKHi	0,8	1,2	Multiplicateur de perméabilité horizontale par zone de réservoir
MKVi	1,5	2	Multiplicateur de perméabilité verticale par zone de réservoir

Tableau 6.4 : Liste des paramètres incertains pour le cas BRUGGE. Les paramètres PORi, MKHi et MKVi sont définis pour  $i \in [1; 4]$  désignant respectivement Schelde, Maas, Waal et Schie.

### Définition de la fonction objectif

Comme dans le cas Brugge de référence, trois propriétés différentes sont simulées : les débits d’huile et d’eau produits par les puits producteurs, et la pression de fond pour tous les puits. Cela représente 70 sorties simulées que l’on note  $y_k(\mathbf{x}, t)$  avec  $k$  l’indice désignant la sortie. Le cas de référence fournit les données de production observées pour ces sorties  $d_{kt}^{obs}$ . On peut ainsi calculer la fonction objectif en reprenant la définition introduite précédemment :

$$FO(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^K \omega_k \sum_{t=1}^T \left( \frac{y_k(\mathbf{x}, t) - d_{kt}^{obs}}{\sigma_{kt}} \right)^2 \quad (6.2)$$

avec  $K = 70$  le nombre de sorties et  $T = 102$  les temps pour lesquels on dispose de mesures à caler. Les poids  $\sigma_{kt}$  représentant l’écart-type des erreurs sur les mesures sont pris tels que  $\sigma_{kt} = 10\% \times d_{kt}^{obs}$ . Les poids sur les sorties  $\omega_k$  sont définis tels que la contribution moyenne à la fonction objectif de la pression au fond d’un puits soit équivalente à la somme des contributions des débits d’huile et d’eau d’un puits producteur. En suivant cette définition, on cherche à attribuer la même importance à une série de mesures de pression à un puits et aux séries de mesures de débits à un puits producteur. En effet, les informations apportées par les débits d’huile et d’eau sont très souvent redondantes. Elles ne diffèrent que lorsque le puits atteint la pression limite, ce qui ne se produit en pratique que pour les puits n°BR-P-9, BR-P-15 et BR-P-15 (*cf.* Figure 6.4). Les poids  $\omega_k$  ont été estimés à partir d’un petit échantillon de réponses sur le niveau fin correspondant à un LHS de 20 points.

On rappelle que la fonction objectif peut être calculée au niveau fin ou grossier selon que l’on utilise les réponses simulées avec BRUGGE fin ou BRUGGE grossier. On la note  $FO^f(\mathbf{x})$  et  $FO^g(\mathbf{x})$ , respectivement.

### 6.1.4 Comparaison des réponses de BRUGGE fin et BRUGGE grossier

#### Comparaison des réponses dynamiques

Nous présentons dans cette section des ensembles de réponses dynamiques simulées avec les modèles BRUGGE fin et BRUGGE grossier afin d’apprécier les différences de comportement des deux modèles. Nous commençons par les débits cumulés d’eau et d’huile pour l’ensemble du réservoir sur la Figure 6.2.

Cette figure montre d’abord que le cas BRUGGE multi-fidélité construit pour cette étude est en accord avec les données de production fournies dans le cas de référence. Une comparaison avec la figure 4 de [Peters et al., 2010] montre que le comportement des réponses de BRUGGE fin et grossier est similaire à celui observé pour les 104 réalisations de l’ensemble de départ du cas Brugge. On remarque également que les variations des réponses sont pour notre cas plus importantes que celles du cas de référence. On note ensuite qu’il y a une bonne cohérence entre les réponses de BRUGGE fin et grossier qui présentent des variations semblables sur l’ensemble considéré.

Nous poursuivons la comparaison entre les réponses de BRUGGE fin et grossier en représentant la pression au fond des puits injecteurs, puis producteurs, et le détail par puits des débits d’eau et d’huile sur les Figures 6.3, 6.4, 6.5 et 6.6, respectivement.

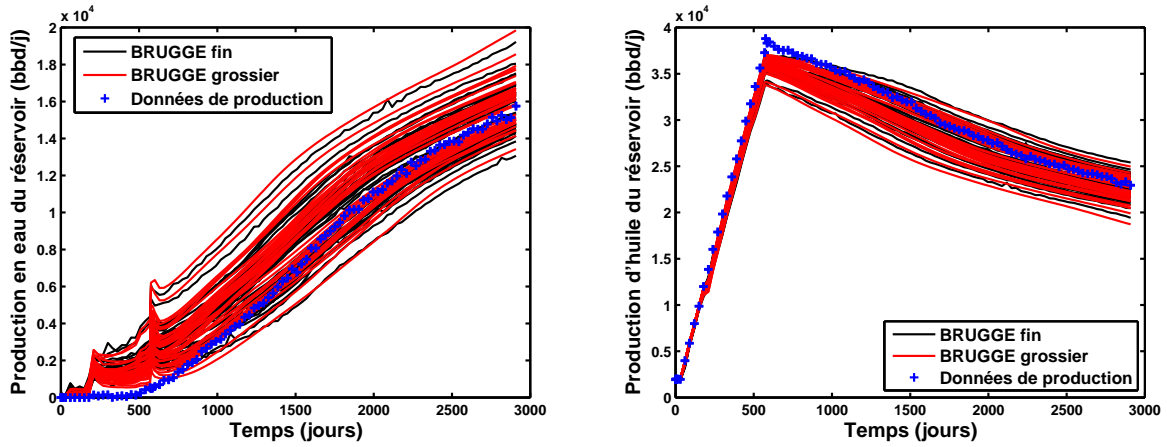


Figure 6.2 : A gauche, débit cumulé d'eau produite pour l'ensemble du réservoir et à droite, débit cumulé d'huile produite pour l'ensemble du réservoir. Chaque figure présente un ensemble de réponses simulées sur un LHS de 40 points pour BRUGGE fin (en noir) et pour BRUGGE grossier (en rouge) et les données de production (en bleu).

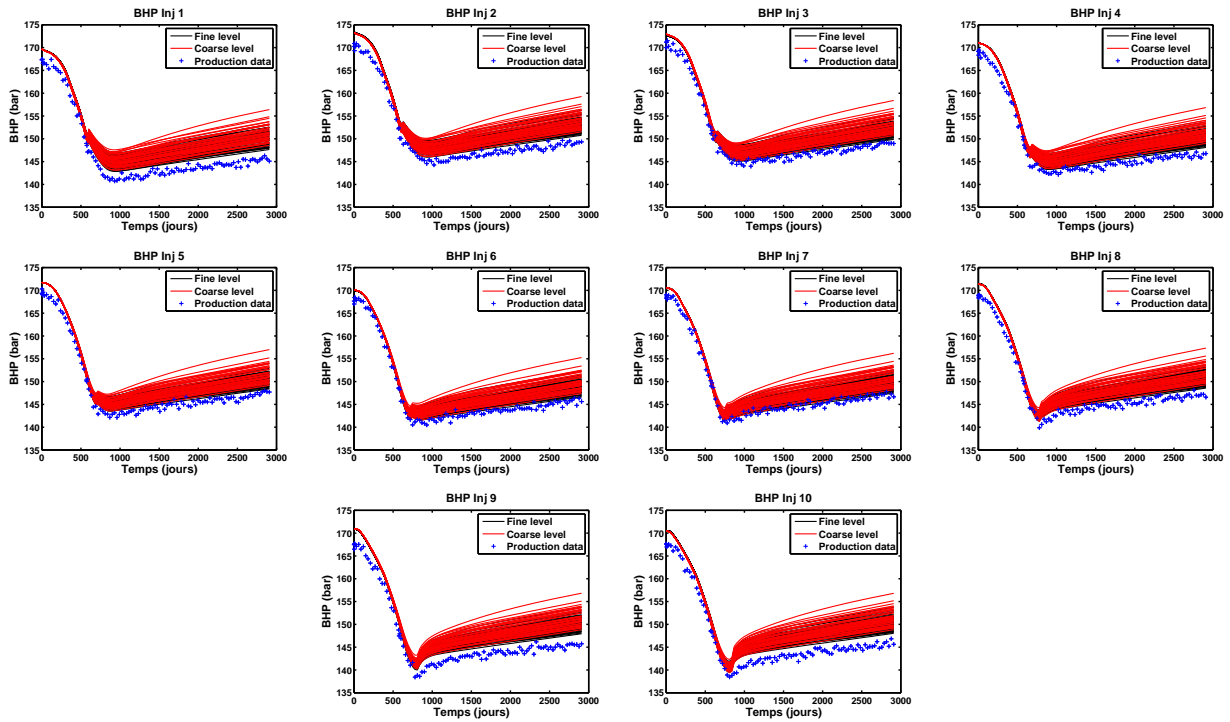


Figure 6.3 : La pression au fond du puits (BHP) pour les injecteurs. Chaque figure présente un ensemble de réponses simulées sur un LHS de 40 points pour BRUGGE fin (en noir) et pour BRUGGE grossier (en rouge) et les données de production (en bleu).

Les simulations de la pression au fond des puits injecteurs (Figure 6.3) sont très proches pour les modèles fin et grossier quel que soit le puits considéré. En zoomant, on peut toutefois observer que les simulations du niveau grossier surestiment légèrement celles du niveau fin.

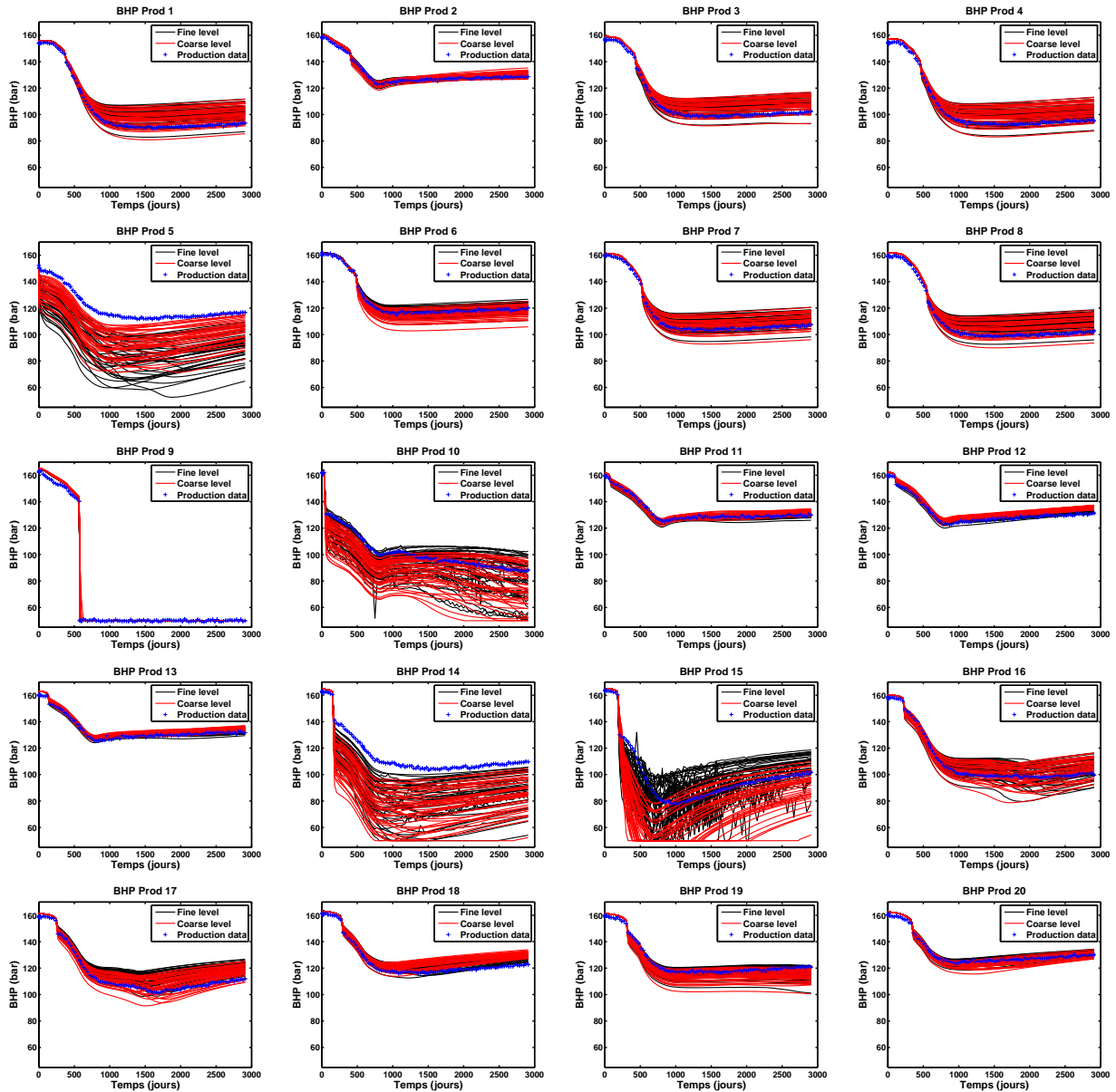


Figure 6.4 : La pression au fond du puits (BHP) pour les producteurs. Chaque figure présente un ensemble de réponses simulées sur un LHS de 40 points pour BRUGGE fin (en noir) et pour BRUGGE grossier (en rouge) et les données de production (en bleu).

On observe davantage de variabilité dans le comportement des simulations de la pression au fond des puits producteurs (Figure 6.4) ainsi que davantage de différences entre BRUGGE fin et grossier pour certains puits (puits n°5, 10, 14, 15, etc). On remarque aussi que la pression limite de 50 bars n'est pratiquement jamais atteinte, sauf pour les puits n°9, 14 et 15.

Globalement, les simulations de la pression au fond des puits du cas BRUGGE construit sont cohérentes avec les données de production issues du cas de référence.

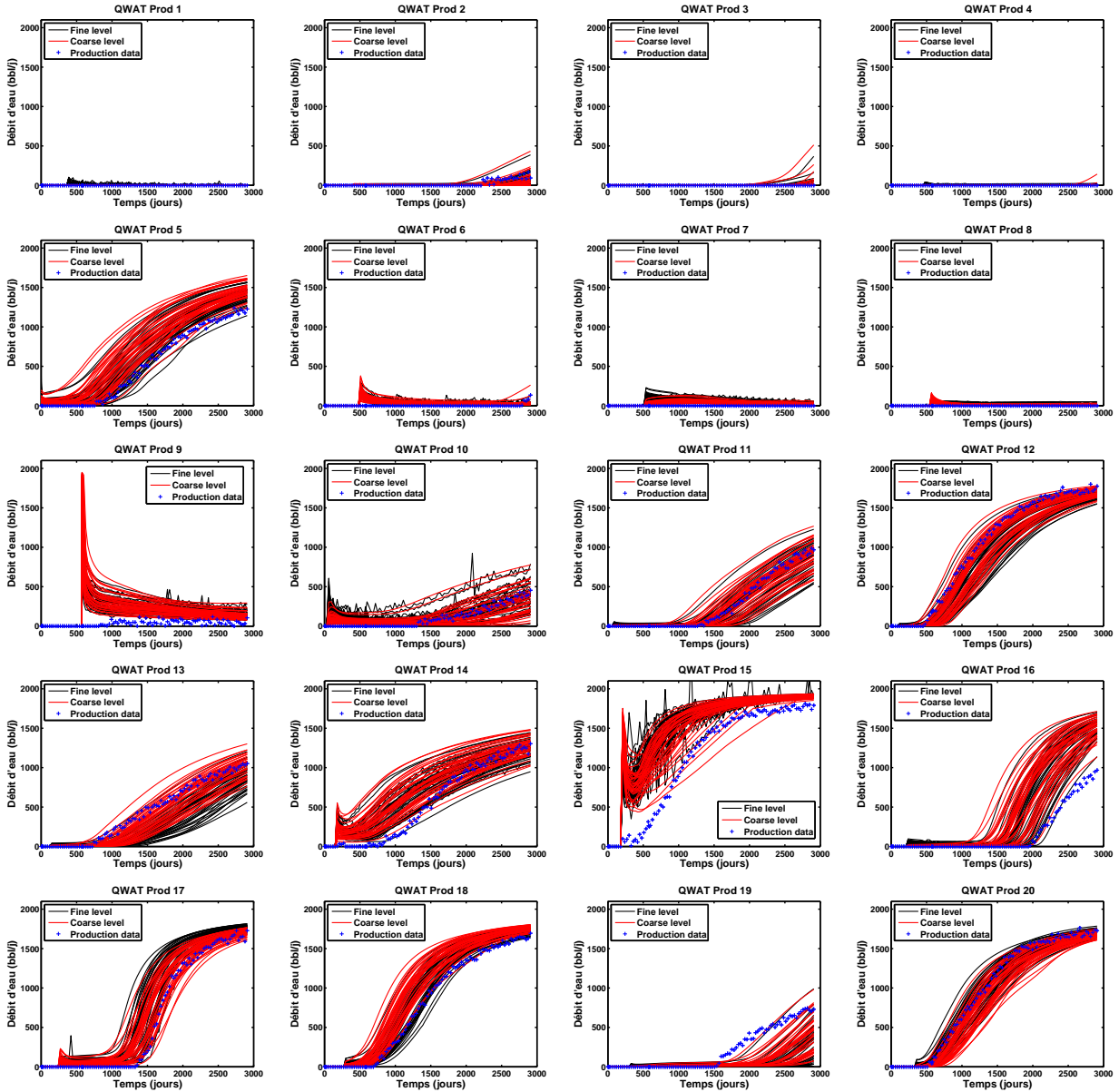


Figure 6.5 : Les débits en eau (QWAT) des puits producteurs. Chaque figure présente un ensemble de réponses simulées sur un LHS de 40 points pour BRUGGE fin (en noir) et pour BRUGGE grossier (en rouge) et les données de production (en bleu).

Les débits d'eau et d'huile des différents puits producteurs sont donnés sur les Figure 6.5 et 6.6. On note que la somme de ces débits est toujours de 2000 barils par jour, mis à part aux puits n°9 et 15 qui produisent parfois à pression constante. C'est pour cette raison que l'on considère que l'information apportée par ces débits est redondante et que l'on divise par deux leur poids dans le calcul de la fonction objectif. Une observation puits par puits montre cette fois encore une grande cohérence entre les simulations de BRUGGE fin et grossier, mais également avec les données de production du cas de référence.

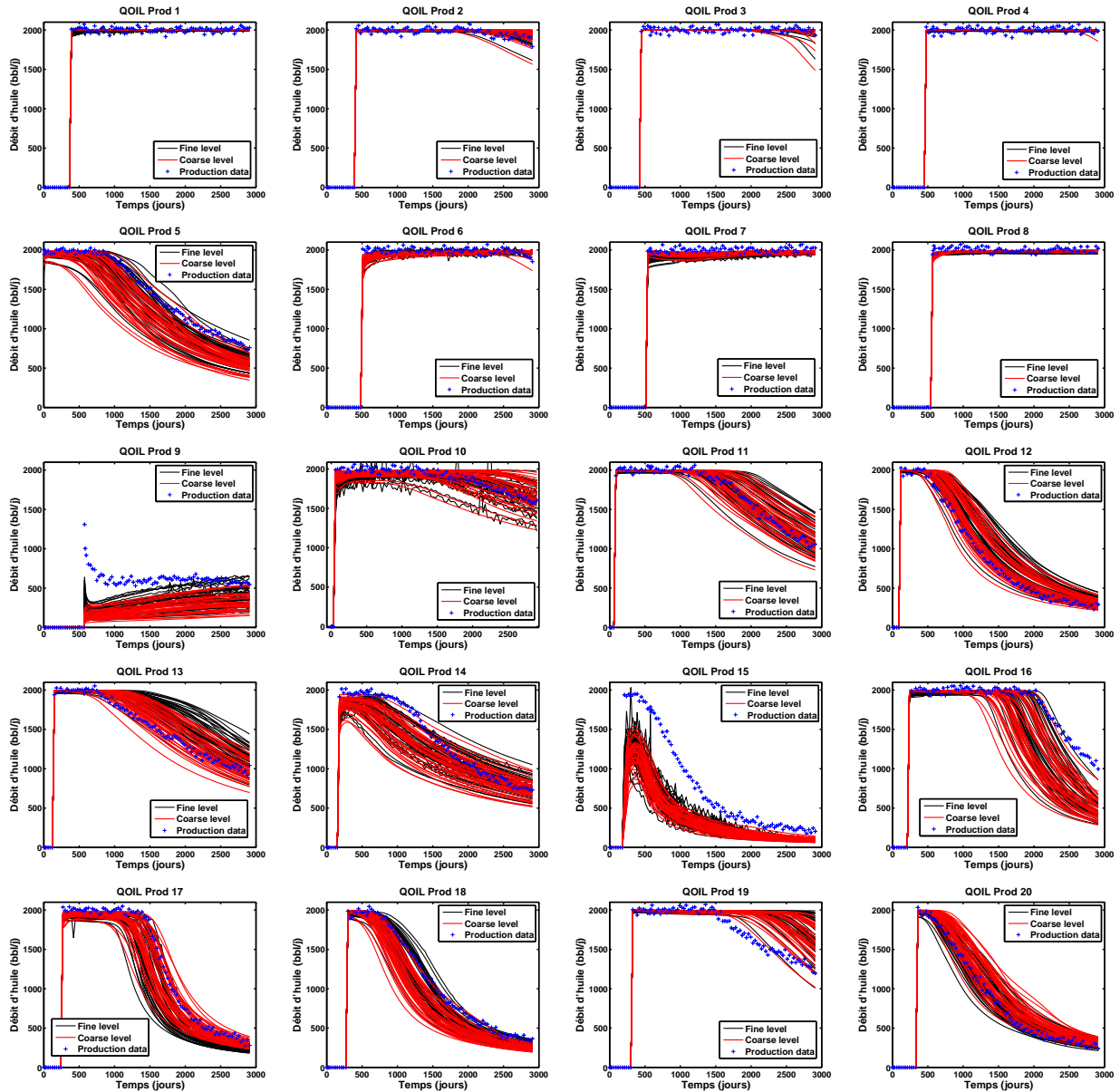


Figure 6.6 : Les débits en huile (QOIL) des puits producteurs. Chaque figure présente un ensemble de réponses simulées sur un LHS de 40 points pour BRUGGE fin (en noir) et pour BRUGGE grossier (en rouge) et les données de production (en bleu).

On note que pour certains puits, il est possible d'observer de fortes oscillations pour les simulations sur BRUGGE fin, notamment pour le puits n°15. Ces oscillations correspondent à des artefacts numériques de calcul. Si l'on souhaite éviter leur apparition, il faut considérer des pas de temps plus réduits (et variables). Cependant, cela engendre une grande variabilité dans les temps de simulation et peut rallonger très significativement les temps de calcul sur ce niveau (plus de 2 heures au lieu de 1 heure en moyenne).



### Comparaison de la fonction objectif

Nous représentons sur la Figure 6.7 les valeurs de la fonction objectif calculées d'après l'équation 6.2 sur les niveaux fin et grossier pour un LHS de 100 points. On note que ce LHS de 100 points correspond à la base de test que nous utiliserons par la suite pour le calcul du coefficient  $Q^2$ .

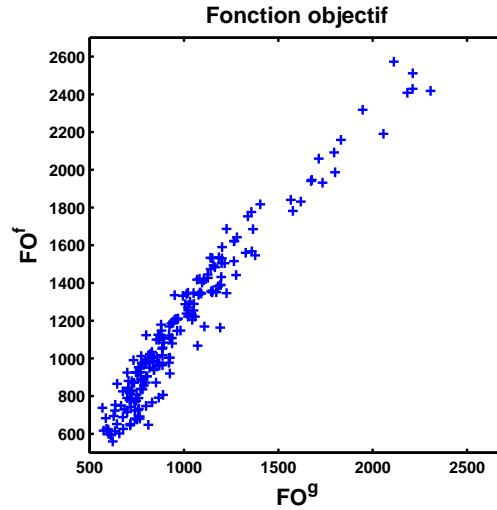


Figure 6.7 : Valeurs des fonctions objectifs fine et grossière sur la base de test (LHS de 100 points).

La Figure 6.7 montre que les valeurs de la fonction objectif calculées avec les simulations sur BRUGGE fin et grossier sont très bien corrélées. Ce résultat est peu surprenant au vu des similarités observées entre les réponses dynamiques sur les deux niveaux de fidélité (Figures 6.3 à 6.6). De plus, on observe souvent que les données de production se trouvent au dessus, ou au dessous, des ensembles de réponses fines et grossières. On se trouve ainsi généralement dans le cas décrit en section 4.3.4 par l'Équation 4.6 qui permet d'obtenir des corrélations presque linéaires pour les contributions des différentes sorties dans la fonction objectif.

Néanmoins, il est important de souligner qu'une utilisation directe de la fonction objectif du niveau grossier pour approcher la fonction objectif au niveau fin constituerait une approximation d'une qualité médiocre. En effet, en utilisant les valeurs grossières de la fonction objectif sur la base de test, on calcule un  $Q^2$  de 0,66.

### Conclusions de la comparaison

On observe une très bonne corrélation pour l'ensemble des réponses dynamiques et la fonction objectif calculées sur BRUGGE fin et BRUGGE grossier. On constate ainsi que, bien que le cas BRUGGE soit plus complexe que le cas PUNQ en termes de nombre de mailles, de nombre de puits, de nombre de sorties considérées dans la fonction objectif et de nombre de paramètres incertains, les comportements des réponses dynamiques des deux niveaux de fidélité sont plus proches et les fonctions objectifs mieux corrélées. Une telle différence peut s'expliquer par le fait que la pression limite n'est pratiquement jamais atteinte pour BRUGGE. On a pu constater sur le cas PUNQ que le changement de mode de production peut être une source importante de décalage entre les réponses des niveaux fin et grossier. D'autre part, ce cas étant diphasique, il n'y a pas de décalage lié à des différences de production pour le gaz. Enfin, l'implémentation de la paramétrisation et les mises à l'échelle permettent d'obtenir un modèle grossier de bonne qualité, reproduisant fidèlement le comportement du modèle fin. En résumé, bien que le cas BRUGGE soit plus réaliste que le cas PUNQ de par ses dimensions, il semble plus favorable à une approche multi-fidélité.

## 6.2 Planification séquentielle appliquée à la fonction objectif

Dans cette partie, nous présentons les résultats des études menées sur le cas BRUGGE. Ils sont issus de l'application des algorithmes de planification séquentielle d'expériences introduits dans le Chapitre 5 pour la méta-modélisation de la fonction objectif.

Nous proposons tout d'abord une comparaison de la qualité des différents méta-modèles de la fonction objectif obtenus dans un cadre simple ou multi-fidélité, en utilisant une méta-modélisation directe ou vectorielle et en ayant recours à une planification d'expériences traditionnelle (LHS) ou séquentielle. L'ensemble de ces résultats est résumé dans la section 6.2.1. La section 6.2.2 est ensuite dédiée à une discussion plus générale sur les résultats obtenus et présente des perspectives pour améliorer les algorithmes proposés.

### 6.2.1 Présentation des résultats

Nous avons construit des méta-modèles approchant la fonction objectif telle que définie par l'Équation 6.2. Pour cela, nous avons appliqué les algorithmes de planification séquentielle d'expériences introduits dans le Chapitre 5 et comparé les résultats obtenus avec une approche simple ou multi-fidélité. Nous avons également réalisé des comparaisons entre une méta-modélisation directe et vectorielle de la fonction objectif, comme décrit dans le Chapitre 3. Pour finir, nous présentons les résultats obtenus pour les algorithmes de planification séquentielle lorsque plusieurs simulations d'écoulement sont réalisées en parallèle.

Comme pour le cas PUNQ, les résultats sont présentés par des figures montrant l'évolution de la prédictivité des méta-modèles en fonction du temps de simulation. La prédictivité des méta-modèles est évaluée à travers le coefficient  $Q^2$  (cf. section 2.4.1) calculé sur une base de test définie par un LHS de 100 points. En abscisse, le temps de simulation est exprimé en nombre de simulations sur le niveau fin  $n_f$ . Il correspond au temps nécessaire à l'évaluation des points du plan d'expériences associé à un méta-modèle. En simple fidélité, le temps de simulation est ainsi équivalent à la taille du plan d'expériences. En multi-fidélité, il est donné par  $n_f + 0,049 n_g$ .

On remarque qu'en pratique, les temps de simulations devraient également inclure les temps associés aux étapes préliminaires de la simulation (e.g. la mise à l'échelle), les temps requis pour la construction du méta-modèle ou encore les temps des calculs liés à la stratégie séquentielle utilisée (e.g. pour l'échantillonnage). On note que ces deux derniers temps dépendent de la méthode de méta-modélisation, de la taille du plan d'expériences et du cadre simple ou multi-fidélité. Ainsi, ils peuvent être négligeables dans certains cas et significatifs dans d'autres. Nous discutons de l'importance de ces temps de calcul additionnels plus loin dans la section 6.2.2. Pour faciliter la présentation et la compréhension des résultats de cette section, nous les négligeons dans un premier temps et ne considérons que les temps de calcul liés à l'évaluation du plan d'expériences (simulations d'écoulement).

### Méta-modélisation de la fonction objectif par des LHS en simple fidélité

Tout d'abord, nous avons construit des méta-modèles par krigeage en considérant des LHS de différentes tailles. Après la simulation des points de chaque LHS, des modèles de krigeage ont été construits afin d'approcher directement la fonction objectif (*cf.* section 3.3.1), puis la prédictivité de ces méta-modèles a été estimée par le coefficient  $Q^2$ . Pour obtenir des résultats plus fiables et s'affranchir de la variabilité rencontrée lorsque des LHS de petite taille sont considérés, les calculs sont répétés pour 5 LHS différents d'une taille donnée. Un  $Q^2$  moyen est alors calculé à partir des valeurs de  $Q^2$  associées aux LHS de même taille. En revanche, pour les LHS de grande taille ( $n_f > 70$ ), les expériences ne sont pas répétées et un unique LHS est considéré. Les résultats sont reportés dans le Tableau 6.5.

Taille du LHS (en $n_f$ )	20	30	40	50	60	70	100	200	300	500
$Q^2$ moyen*	0,38	0,43	0,65	0,60	0,67	0,76	0,81	0,93	0,95	0,97

Tableau 6.5 : Prédictivité des méta-modèles de krigeage pour la fonction objectif construits à partir de LHS de différentes tailles. \* $Q^2$  moyen sur 5 expériences lorsque  $n_f < 100$ .

Ces résultats montrent que, comme attendu, la prédictivité des méta-modèles augmente globalement avec la taille des plans d'expériences considérés. Ces résultats illustrent aussi l'irrégularité de la performance des LHS. Ainsi, nous observons que des méta-modèles construits à partir de LHS de 40 points sont plus prédictifs que ceux construits à partir de LHS de 50 points. On note cependant que les valeurs de  $Q^2$  indiquent que les méta-modèles ne sont pas de très bonne qualité dans les deux cas. On rappelle qu'un méta-modèle est généralement considéré comme prédictif lorsque  $Q^2 > 0,9$ . Les résultats du Tableau 6.5 indiquent qu'en utilisant le krigeage, il faut considérer un LHS d'environ 200 points (*i.e.* 200 simulations d'écoulement) pour obtenir un méta-modèle raisonnablement prédictif.

### Méta-modélisation directe de la fonction objectif et planification séquentielle d'expériences

Nous présentons sur la Figure 6.8 les résultats obtenus dans le cadre d'une méta-modélisation directe de la fonction objectif (*cf.* section 3.3.1). Les algorithmes de planification séquentielle d'expériences introduits dans les parties 5.2 et 5.3 sont appliqués à la méta-modélisation de la fonction objectif en simple et multi-fidélité, en utilisant les Algorithmes 1 et 2 (*cf.* pages 107 et 112), respectivement. On compare ces résultats à ceux obtenus pour des plans d'expériences traditionnels (LHS) de différentes tailles. Il s'agit des résultats obtenus par krigeage présentés dans le Tableau 6.5. Ces résultats sont complétés par ceux du co-krigeage multi-fidélité en utilisant les LHS considérés pour le krigeage sur les niveaux fin et grossier.

On précise que les algorithmes de la planification séquentielle sont appliqués 5 fois en considérant comme plans initiaux les LHS (ou LHS imbriqués) de 20 points introduits dans le Tableau 6.5. Le critère d'arrêt des algorithmes est défini par un budget en temps de calcul équivalent à 50 simulations supplémentaires sur le modèle BRUGGE fin (ou 1025 simulations supplémentaires sur BRUGGE grossier).

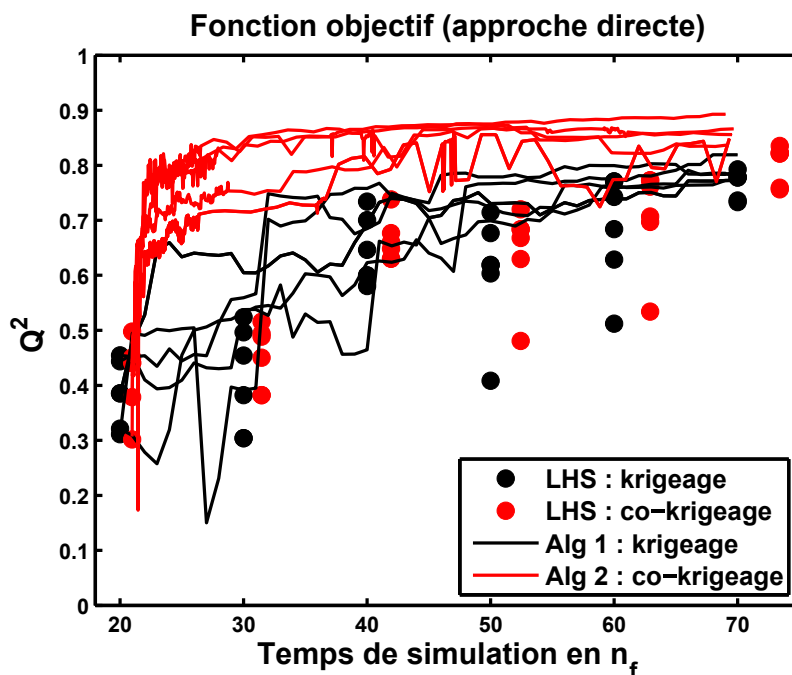


Figure 6.8 : Évolution de la prédictivité des méta-modèles directs de la fonction objectif. Le coefficient  $Q^2$  est calculé pour des méta-modèles de krigeage via des LHS (points noirs) ou via une stratégie séquentielle (lignes noires) et des méta-modèles de co-krigeage multi-fidélité via des LHS imbriqués (points rouges) ou via une stratégie séquentielle (lignes rouges) en fonction du temps de simulation des plans d'expériences.

La Figure 6.8 montre que la stratégie séquentielle proposée pour la construction de méta-modèles multi-fidélité (lignes rouges) est plus performante que les autres méthodes. Les petites oscillations observées au début du processus correspondent à la phase pendant laquelle seul le niveau grossier est évalué. C'est cette première phase qui permet d'améliorer rapidement la prédictivité des méta-modèles multi-fidélité. Dans la seconde phase, pendant laquelle des évaluations supplémentaires sur le niveau fin sont considérées, les performances des deux approches séquentielles tendent à se rapprocher.

On observe également que la stratégie séquentielle proposée pour le krigeage est un peu plus performante que les LHS. On remarque notamment que les méta-modèles produits sont presque toujours meilleurs que les plus mauvais méta-modèles obtenus par LHS. D'une manière générale, on note que les résultats de toutes ces méthodes sont assez variables. Toutefois, cette variabilité est moindre pour la planification séquentielle en multi-fidélité. Elle décroît aussi plus rapidement pour la planification séquentielle en simple fidélité que pour les LHS simples lorsque la taille des plans d'expériences augmente.

### Méta-modélisation vectorielle de la fonction objectif et planification séquentielle d'expériences

Nous présentons ensuite sur la Figure 6.9 les résultats obtenus dans le cadre d'une méta-modélisation vectorielle de la fonction objectif (*cf.* section 3.3.2). Les Algorithmes 1 et 2 (*cf.* pages 107 et 112) de planification séquentielle en simple et multi-fidélité restent applicables pour une telle méta-modélisation de la fonction objectif (*cf.* sections 5.2.2 et 5.3.2). Ils sont mis en place à partir des LHS et LHS imbriqués de 20 points utilisés plus haut pour la méta-modélisation directe. Enfin, des méta-modèles construits par une planification d'expériences traditionnelle sont également considérés à titre de comparaison, en utilisant les mêmes LHS et LHS imbriqués que pour l'approche directe.

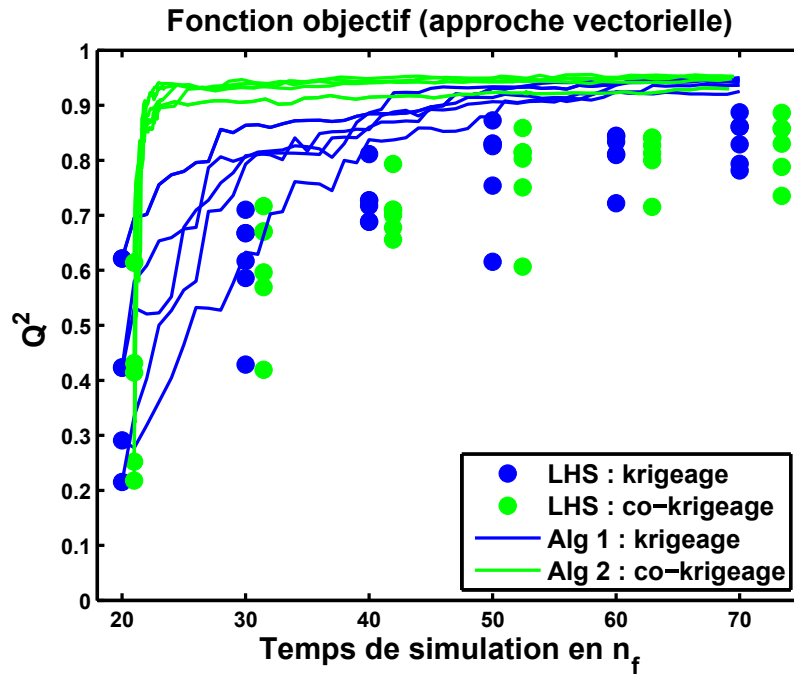


Figure 6.9 : Évolution de la prédictivité des méta-modèles vectoriels de la fonction objectif. Le coefficient  $Q^2$  est calculé pour des méta-modèles de krigeage via des LHS (points bleus) ou via une stratégie séquentielle (lignes bleues) et des méta-modèles de co-krigeage multi-fidélité via des LHS imbriqués (points verts) ou via une stratégie séquentielle (lignes vertes) en fonction du temps de simulation des plans d'expériences.

La Figure 6.9 indique que la méta-modélisation vectorielle de la fonction objectif est plus performante qu'une méta-modélisation directe, quelle que soit la méthode considérée. On remarque que cette approche permet de réduire la variabilité des résultats obtenus avec les méthodes séquentielles.

Comme pour la méta-modélisation directe (Figure 6.8), la planification séquentielle en multi-fidélité est nettement plus performante que les autres approches. Ses performances sont toutefois rejointes par celles de la planification séquentielle en simple fidélité lorsque  $n_f > 60$ . On remarque également que la phase d'ajout de points sur le niveau grossier uniquement est moins longue que dans l'approche directe. En effet, on ajoute en moyenne 65 points sur le niveau grossier avant de passer à l'évaluation du niveau fin, alors que sur la Figure 6.8, 150 évaluations sont réalisées sur le niveau grossier seul.

Finalement, on peut aussi noter le gain important en prédictivité pour les méta-modèles simple fidélité construits via la planification séquentielle par rapport à ceux construits par LHS. Cela confirme la pertinence de l'algorithme proposé, et en particulier la pertinence du critère pour le choix des nouveaux points à évaluer.

### Résumé des résultats pour la méta-modélisation de la fonction objectif

Les résultats des Figures 6.8 et 6.9 sont résumés au sein de la Figure 6.10, qui montre le  $Q^2$  moyen obtenu sur les 5 expériences différentes réalisées pour chacune des méthodes.

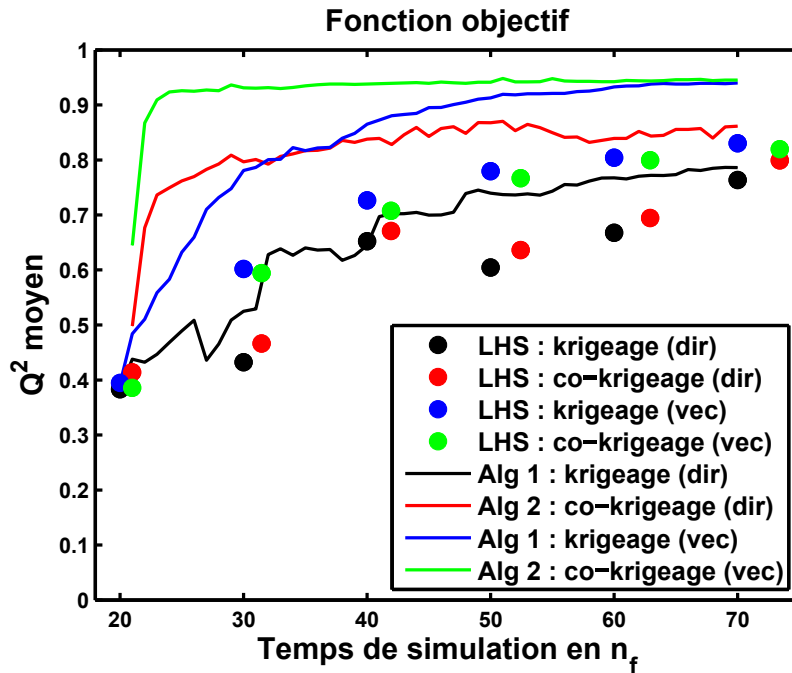


Figure 6.10 : Évolution de la prédictivité des méta-modèles de la fonction objectif pour les différentes méthodes en fonction du temps de simulation des plans d'expériences.

La Figure 6.10 met en évidence que, quelle que soit l'approche considérée (directe/vectorielle en simple/multi-fidélité), les méthodes proposées pour la planification séquentielle d'expériences (lignes) sont plus performantes que l'utilisation des LHS (points). On remarque également que le gain en prédictivité associé à l'utilisation de la planification séquentielle augmente avec la complexité de l'approche considérée. Le gain est en effet très important pour une méta-modélisation vectorielle de la fonction objectif en multi-fidélité alors qu'il est assez faible pour une méta-modélisation directe par krigeage. Néanmoins, même dans ce dernier cas, l'utilisation de la stratégie séquentielle s'avère plus fiable que les LHS.

On rappelle que le Tableau 6.5 indique qu'il faut un LHS d'une centaine de points pour obtenir un méta-modèle de krigeage avec un  $Q^2 > 0,8$ , et environ 200 points pour obtenir un  $Q^2 > 0,9$ . Il est alors remarquable de constater que les stratégies séquentielles proposées permettent d'obtenir un méta-modèle avec un  $Q^2 > 0,8$  pour un temps de simulation équivalent à 30 points sur le niveau fin, via une méta-modélisation directe en multi-fidélité ou via une méta-modélisation vectorielle en simple fidélité. Mieux encore, on est capable de construire des méta-modèles d'une prédictivité équivalente à celle d'un méta-modèle de krigeage issu d'un LHS de 200 points pour un temps inférieur à 25 simulations sur le niveau fin en considérant la méta-modélisation vectorielle de la fonction objectif en multi-fidélité.

### Planification séquentielle avec ajout simultané de 3 points par itération

Nous présentons finalement les résultats obtenus pour la planification séquentielle lorsque l'on peut réaliser plusieurs simulations d'écoulement en parallèle. On teste ainsi les versions modifiées des Algo-

rithmes 1 et 2 (*cf.* pages 107 et 112), c'est-à-dire les Algorithmes 3 et 4 (*cf.* pages 115 et 116), qui sont adaptés aux cadres simple et multi-fidélité, respectivement. On rappelle que ces algorithmes, présentés dans les sections 5.4.2 et 5.4.3, sont également compatibles avec la méta-modélisation vectorielle que nous suggérons dans cette thèse pour approcher la fonction objectif.

La Figure 6.11 représente un exemple de résultats obtenus avec ces algorithmes. Dans cet exemple, nous avons pris  $q = 3$ , ce qui signifie que 3 nouveaux points sont sélectionnés à chaque itération par les algorithmes de planification séquentielle. Ces nouveaux points sont ensuite simulés simultanément pour BRUGGE fin ou grossier.

L'intérêt de la simulation en parallèle est la réduction des temps de calcul. En effet, en considérant  $q = 3$ , on peut simuler un plan d'expériences 3 fois plus rapidement qu'en réalisant les simulations successivement. Toutefois, pour faciliter la comparaison avec les résultats obtenus précédemment (avec  $q = 1$ ), les résultats de l'application avec  $q = 3$  sont présentés sur la Figure 6.11 pour des temps de simulation correspondant à des simulations réalisées successivement. En pratique, les temps de simulation pour les approches permettant la simulation en parallèle devraient être divisés par 3. On note aussi que les points de départ sont les mêmes que ceux considérés dans la Figure 6.10, et que ces résultats correspondent également à un  $Q^2$  moyen sur 5 expériences.

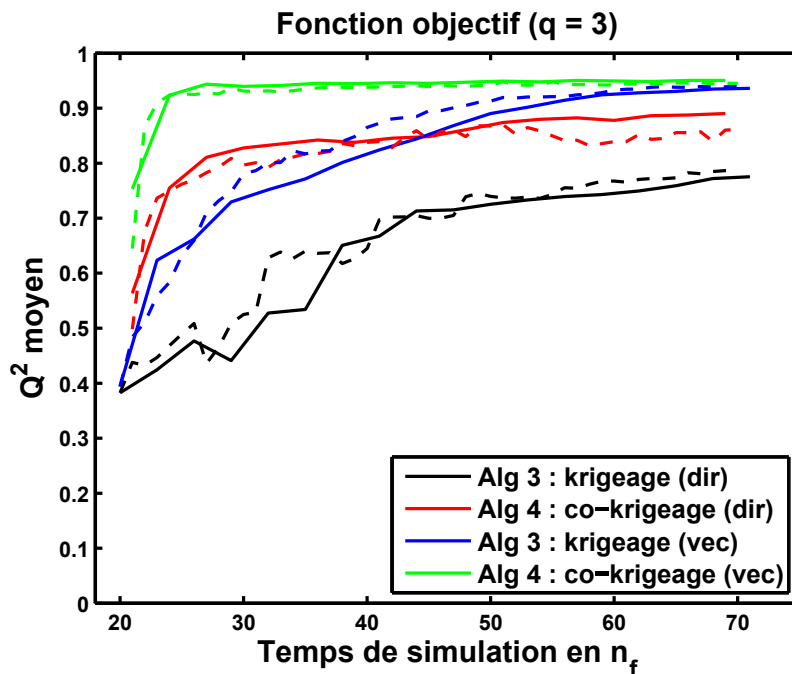


Figure 6.11 : Évolution de la prédictivité des méta-modèles de la fonction objectif pour la planification séquentielle en fonction du temps de simulation des plans d'expériences. Comparaison entre une planification sélectionnant  $q = 3$  points par itération (traits pleins) et une planification sélectionnant  $q = 1$  point par itération (pointillés).

La Figure 6.11 montre que les résultats de la planification séquentielle pour  $q = 3$  sont similaires à ceux obtenus dans leur version régulière avec  $q = 1$  quelle que soit l'approche considérée. Cela montre l'efficacité des Algorithmes 3 et 4 sur ce cas d'étude. En effet, cela signifie que des méta-modèles d'une qualité équivalente peuvent être obtenus pour des temps de simulation divisés par trois. L'utilisation de ces algorithmes peut donc être un moyen de réduire significativement les temps de simulation. Il faut toutefois souligner que le gain en temps n'est généralement pas proportionnel à la valeur de  $q$  considérée. Dans notre exemple, le gain s'en approche car la valeur de  $q$  est faible.

### 6.2.2 Discussion

#### Comparaison avec [Le Gratiet and Cannamela, 2015]

*Nous remercions [Le Gratiet and Cannamela, 2015] de nous avoir fourni les codes des algorithmes utilisés dans cette discussion.*

Les stratégies séquentielles proposées dans cette thèse ont été comparés sur le cas BRUGGE avec celles suggérées par [Le Gratiet and Cannamela, 2015], notées LG&C. Nous nous plaçons dans le cadre d'une méta-modélisation directe de la fonction objectif. Nous rappelons que les résultats de nos approches sont obtenus en appliquant les Algorithmes 1 et 2 avec des méta-modèles de krigeage et co-krigeage multi-fidélité de la fonction objectif, respectivement. Il s'agit de résultats déjà présentés par les Figures 6.8 et 6.10.

En simple fidélité, les résultats de la stratégie de LG&C sont obtenus par la résolution du critère donné par l'Équation 5.3. Le point sélectionné est ainsi celui qui maximise la variance de krigeage, après ajustement par les erreurs de validation croisée. Pour le résoudre, nous lançons une série d'optimisations (BFGS) en considérant un point de départ aléatoirement choisis dans chacune des cellules de Voronoi.

En multi-fidélité, le choix du point à simuler est obtenu en appliquant la stratégie simple fidélité de LG&C au niveau fin. Puis, le choix du niveau de fidélité devant être évalué est déterminé à travers une comparaison de la réduction de l'IMSE pondérée par le coût de l'évaluation entre les différents niveaux de fidélité. On remarque que dans ce contexte, la part de l'IMSE relative à un niveau de fidélité est approchée par la part de la variance ajustée de co-krigeage multi-fidélité, multipliée par les longueurs de corrélations  $\lambda$  de ce niveau. Pour plus de détails, le lecteur peut se référer à [Le Gratiet and Cannamela, 2015].

Les résultats de cette comparaison sont donnés sur la Figure 6.12. On note que la présentation de cette figure est similaire à celle de la Figure 6.10, que les  $Q^2$  sont des moyennes sur 5 expériences et que les LHS initiaux pour les stratégies séquentielles sont les mêmes que ceux considérés précédemment.

Les résultats montrent que, sur ce cas d'application, les algorithmes proposés par LG&C sont moins performants. Ces résultats sont surprenants, en particulier en simple fidélité. En effet, comme évoqué dans la section 5.2.1, l'Algorithme 1 peut être vu comme une adaptation du critère introduit par [Le Gratiet and Cannamela, 2015] au contexte de l'ingénierie de réservoir. Les différences de performances peuvent avoir deux causes. La première est que notre algorithme force l'évaluation dans la cellule de Voronoi présentant la plus forte erreur de validation croisée. On constate que pour LG&C le point évalué se trouve assez souvent dans une autre cellule de Voronoi car on y trouve un point maximisant la variance ajustée par les erreurs de validation croisée. L'autre raison est que les points additionnels sélectionnés à l'issue d'une optimisation sont toujours situés à des sommets ou sur des arêtes de l'hypercube associé au plan d'expériences, alors que cela n'est jamais le cas en procédant par échantillonnage. On peut ainsi supposer que l'approche proposée permet de construire des plan d'expériences remplissant mieux l'espace. On remarque que, suite à cette observation, il pourrait être intéressant de considérer une autre méthode de sélection du point au sein de la cellule de Voronoi associée à la plus forte erreur de validation croisée. Ainsi, parmi les points échantillonnés, on pourrait sélectionner celui maximisant la réduction de l'IMSE [Bates et al., 1996]. On note cependant qu'une telle approche serait plus coûteuse en temps de calcul.

En multi-fidélité, la stratégie séquentielle de LG&C est également affectée par le choix peu efficace des points devant être évalués. Concernant le choix du niveau de fidélité, on note qu'en moyenne sur les 5 expériences, la première évaluation additionnelle sur le niveau fin a lieu après 130 évaluations du niveau grossier pour notre approche, contre 70 pour l'approche LC&C. A la fin du processus d'ajout



de points lorsque  $n_f = 50$ , un total de 180 évaluations du niveau grossier a été réalisé en moyenne pour notre approche, contre 280 évaluations pour l'approche LG&C.

Les résultats de cette comparaison mettent ainsi en évidence l'importance du choix du point, mais également du ratio du nombre d'évaluations entre les niveaux fin et grossier. Pour le cas BRUGGE, considérer un nombre important d'évaluations sur le niveau grossier lors d'une première phase permet de construire des méta-modèles plus prédictifs qu'avec l'approche simple fidélité.

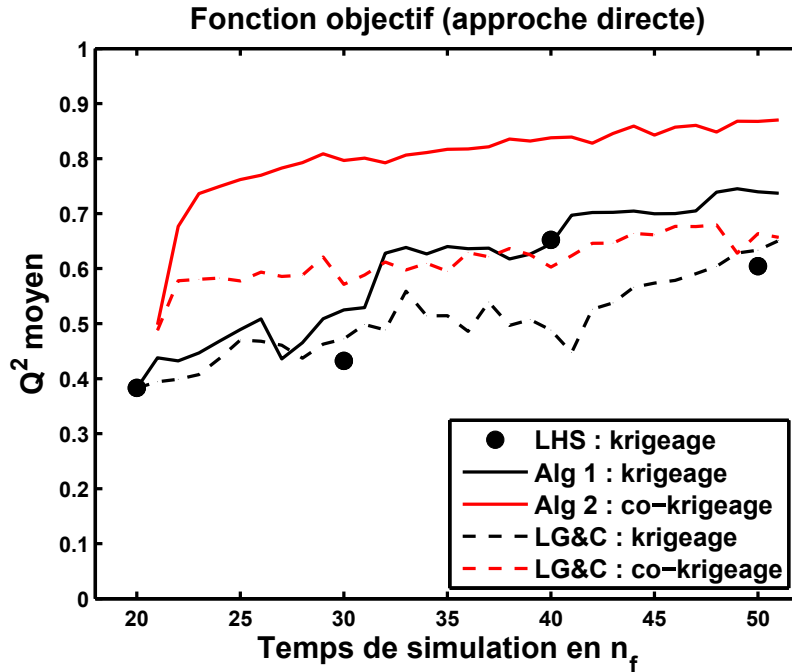


Figure 6.12 : Évolution de la prédictivité des méta-modèles directs de la fonction objectif. Le coefficient  $Q^2$  est calculé pour des méta-modèles de krigeage via des LHS (points noirs), via les stratégies de planification séquentielle décrites par les Algorithmes 1 et 2 (lignes) et via les stratégies de planification séquentielle suggérées par [Le Gratiet and Cannamela, 2015] (pointillés).

### Application au cas PUNQ

Les approches séquentielles proposées dans le Chapitre 5 ont également été testées sur le cas PUNQ. On se place cette fois-ci dans le cadre d'une méta-modélisation vectorielle de la fonction objectif. On rappelle que les résultats sont donnés par la Figure 4.41 (p.93) dans le cas où des LHS et LHS imbriqués sont considérés. Nous reprenons ici ces résultats, et nous les comparons dans la Figure 6.13 avec ceux obtenus en appliquant les Algorithmes 1 et 2 de planification séquentielle.

On note que les résultats représentés sur cette figure sont des  $Q^2$  moyens sur 10 expériences et que les plans d'expériences initiaux pour les stratégies séquentielles correspondent aux LHS et LHS imbriqués de 8 points considérés dans l'étude de ce cas.

Les résultats de cette application montrent que la stratégie de planification séquentielle d'expériences en simple fidélité (Algorithme 1) est toujours plus performante que l'utilisation de LHS pour la construction de méta-modèles prédictifs.

En multi-fidélité, les résultats de l'Algorithme 2 montrent que celui-ci permet d'exploiter pleinement le gain en prédictivité lié à l'approche multi-fidélité. Cet algorithme se montre même plus performant

que les meilleurs résultats obtenus par des LHS imbriqués, sauf pour les temps très courts ( $n_f < 10$ ). En regardant les résultats dans le détail, on voit que la baisse d'efficacité pour les temps très courts s'explique par la réalisation d'un nombre important d'évaluations au niveau grossier, alors que celui-ci n'a plus d'informations à apporter sur le niveau fin. Autrement dit, l'algorithme reste trop longtemps dans la phase d'évaluation du niveau grossier uniquement. Il faudrait ajuster le critère d'arrêt au niveau grossier afin de passer plus rapidement à l'évaluation du niveau fin.

Par ailleurs, on note qu'avec la planification séquentielle, nous n'observons pas les chutes de performance observées pour certaines tailles de LHS imbriqués qui sont liées à l'apparition de cas problématiques en multi-fidélité (WCUT au puits PRO-1).

Globalement, les résultats montrent que les algorithmes proposés sont efficaces sur le cas PUNQ. En effet, les méthodes proposées pour la planification séquentielle permettent un gain en prédictivité (ou en temps de simulation) significatif pour la méta-modélisation dans des cadres simple et multi-fidélité. Cela souligne la pertinence, sur ce cas d'étude, des critères utilisés pour la sélection des points et pour le choix du niveau à évaluer en multi-fidélité.

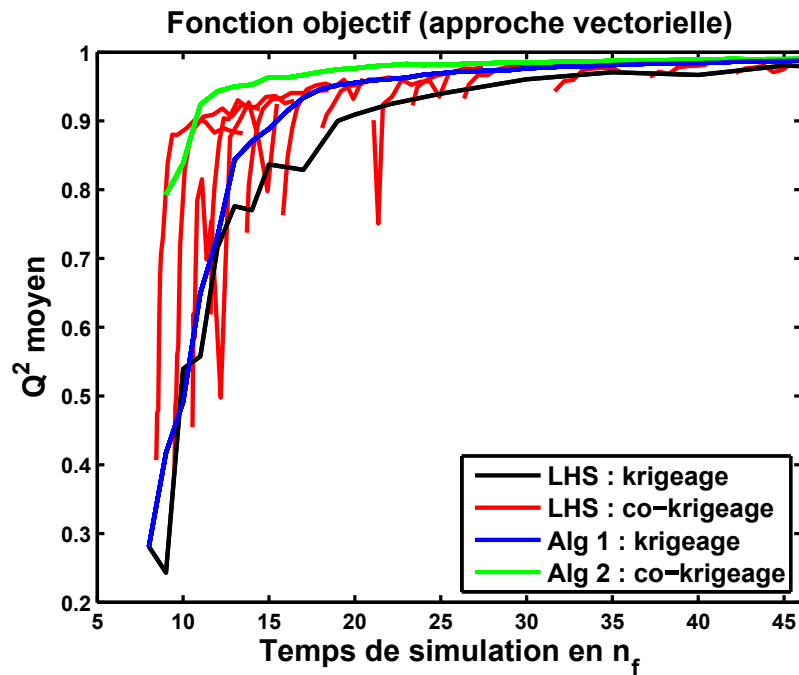


Figure 6.13 : Fonction objectif du cas PUNQ (approche vectorielle) :  $Q^2$  moyen calculé pour des méta-modèles simple fidélité obtenus par LHS (noir) ou par l'Algorithme 1 (bleu), et pour des méta-modèles multi-fidélité obtenus par LHS imbriqués (rouge) ou par l'Algorithme 2 (vert).

### Limites des algorithmes proposés et perspectives d'amélioration

Nous discutons ici des limites des algorithmes proposés. Nous nous intéressons en particulier aux conditions d'application pour une méta-modélisation efficace de la fonction objectif, notamment dans un cadre multi-fidélité.

Un point commun aux versions simple et multi-fidélité des algorithmes et qui peut être problématique est le temps lié à l'échantillonnage. On rappelle que l'échantillonnage désigne l'étape consistant à sélectionner un nombre important de points dans la cellule de Voronoi associée au point du plan d'expériences présentant la plus forte erreur de validation croisée. En pratique, nous observons que

le temps d'échantillonnage est très variable au fur et à mesure des itérations lors d'une planification séquentielle. Il est généralement très court (quelques secondes) mais il peut augmenter significativement en fonction de la taille de la cellule échantillonnée. En effet, celle-ci peut devenir très petite lorsque la taille du plan d'expériences augmente, et surtout lorsque l'erreur de validation croisée continue d'être maximale au même point. Nous avons ainsi observé des temps d'échantillonnage pouvant durer quelques minutes, voire plus d'une heure. Il est alors possible d'imposer une valeur maximale sur ce temps, ce qui implique de tirer un nombre réduit de points dans la cellule de Voronoi.

Concernant la planification séquentielle d'expériences en multi-fidélité, nous suggérons d'évaluer uniquement le niveau grossier dans un premier temps. Une telle approche s'avère efficace lorsque les niveaux fin et grossier sont bien corrélés (*e.g.* BRUGGE). Cependant, dans le cas contraire, cette approche est inadaptée car elle ne permet pas de limiter les évaluations sur le niveau grossier. Plus généralement, une limite de cette approche est la définition du critère d'arrêt d'évaluation du niveau grossier seul. Ce critère est défini au préalable par l'utilisateur, de manière à ce qu'un méta-modèle prédictif du niveau grossier soit obtenu avant de commencer les évaluations sur le niveau fin. Or, l'obtention d'un méta-modèle prédictif sur le niveau grossier n'est utile que si la corrélation entre les niveaux fin et grossier est bonne. Ce critère d'arrêt pourrait donc être amélioré en le rendant dépendant de la qualité de la corrélation entre les deux niveaux.

Par ailleurs, on remarque que si le modèle d'écart  $Y_d(\mathbf{x})$  ou le coefficient  $\rho$  (Équation 2.14) sont mal estimés avec le plan d'expériences initial, il faut attendre l'ajout d'évaluations sur le niveau fin pour améliorer leur estimation. Dans un tel cas, l'approche proposée va produire des méta-modèles non prédictifs jusqu'à ce que le critère d'arrêt sur le niveau grossier soit atteint. On remarque toutefois que cela n'a pas d'impact sur le choix des points évalués sur le niveau grossier et qu'un méta-modèle prédictif pourra rapidement être obtenu lorsque le niveau fin commencera à être évalué.

Les résultats sur BRUGGE et PUNQ montrent que les stratégies proposées pour la planification séquentielle d'expériences sont particulièrement efficaces lorsqu'une méta-modélisation vectorielle de la fonction objectif est considérée. De plus, on a vu dans la section 4.3.4 que cette approche est particulièrement intéressante en multi-fidélité car elle permet de mettre à profit la similarité des réponses dynamiques sur les deux niveaux de fidélité, et ainsi de s'affranchir de la qualité de la corrélation entre fonctions objectifs fine et grossière. L'approche vectorielle permet une modélisation plus fine de la fonction objectif. Cependant, elle nécessite un nombre important de modèles de krigeage/co-krigeage multi-fidélité. Pour le cas PUNQ, ce nombre s'élève à 88 pour la méta-modélisation de  $K = 18$  sorties. Pour le cas BRUGGE, il s'élève à 163 pour la méta-modélisation de  $K = 70$  sorties. On note que pour ce cas, deux termes de la décomposition suffisent à expliquer 99% de la variance sur la base de test pour la grande majorité des sorties.

Il est important de noter que le grand nombre de modèles de krigeage/co-krigeage requis pour la méta-modélisation vectorielle a un impact sur les temps de calcul. Typiquement, la durée de la construction du méta-modèle de la fonction objectif pour le cas BRUGGE est de l'ordre de la minute pour les plans d'expériences initiaux ( $n_f = 20$ ), mais elle s'allonge avec l'augmentation de la taille du plan d'expérience et nécessite de nombreuses minutes lorsque  $n_f = 70$  points. On remarque aussi que dans un cadre multi-fidélité à deux niveaux, il faut doubler ces temps. De plus, une fois le méta-modèle construit, son évaluation peut atteindre quelques secondes, et ainsi engendrer des temps de calcul significatifs selon l'application considérée (*e.g.* une optimisation). C'est pour cette raison que les algorithmes de [Le Gratiet and Cannamela, 2015] ne sont en pratique pas adaptés à la méta-modélisation vectorielle de la fonction objectif. Ainsi, lorsque les Algorithmes 1 et 2 sont utilisés avec cette méta-modélisation vectorielle, ils héritent des défauts de cette approche, et notamment du fait que les temps de calcul liés à la construction du méta-modèle et à son évaluation ne sont pas toujours négligeables. On note par ailleurs que pour un cas réel, le nombre de modèles requis est susceptible d'être encore plus important (de quelques centaines à quelques milliers) en raison du nombre de sorties et de leur complexité, ce qui allongerait davantage ces temps de calcul.

De nombreuses pistes peuvent toutefois être envisagées afin de réduire les temps de calcul de l'approche vectorielle. Tout d'abord, on peut réduire le nombre de modèles de krigeage/co-krigeage en diminuant le nombre de termes  $L$  utilisés dans la décomposition en composantes principales. En effet, nous avons vu dans la section 4.3.4 que conserver seulement  $L = 2$  (ou 3) termes par sortie dynamique n'a que peu d'impact sur la qualité du méta-modèle de la fonction objectif. On peut également limiter les temps de calcul en ne re-calculant qu'une partie des modèles à chaque itération. Par exemple, si une sortie a une contribution négligeable dans la valeur finale de la fonction objectif, on peut se dispenser de construire à nouveau les modèles de krigeage/co-krigeage associés lors de l'ajout d'un nouveau point. Il faut cependant mettre en place une gestion intelligente afin de pouvoir détecter des cas pour lesquels une sortie usuellement négligeable devient significative, par exemple lorsqu'une sortie dynamique ne présentant pas de variations au sein des points du plan d'expériences admet une variation forte lors d'évaluations additionnelles (traduisant une arrivée d'eau ou de gaz par exemple). Une autre option pour diminuer les temps de calcul est de paralléliser les calculs liés à la méta-modélisation. En effet, le méta-modèle final étant issu de la somme de nombreux méta-modèles de sorties vectorielles, les calculs peuvent être menés en parallèle.

### Les temps de calcul réels

Comme évoqué dans les sections 6.1.3 et 6.2.1, les temps de calcul considérés pour la présentation des résultats sur le cas BRUGGE correspondent uniquement aux temps des simulations d'écoulement réalisés sur les points des plans d'expériences. Dans ces conditions, une simulation sur le niveau fin est équivalente en termes de temps de calcul à 20,5 simulations sur le niveau grossier. Il est important de souligner que ce ratio serait différent si l'on considérait les temps de calcul réels, c'est-à-dire en prenant également en compte les temps de calcul associés à la mise à l'échelle des propriétés pétrophysiques, à la construction des méta-modèles et à la stratégie de planification séquentielle.

Pour une méta-modélisation directe de la fonction objectif, ces deux dernières étapes sont toujours rapides. Les résultats obtenus pour la méta-modélisation directe en simple fidélité seraient donc inchangés. En revanche, pour la méta-modélisation directe en multi-fidélité, il faudrait prendre en compte les temps de la mise à l'échelle. Le ratio de temps entre les évaluations sur les niveaux fin et grossier serait alors divisé par deux car la mise à l'échelle dure environ le temps d'une simulation sur le niveau grossier. Le gain de l'approche multi-fidélité par rapport à la simple fidélité pour la méta-modélisation directe est donc dans ce cas moins important que celui suggéré par les Figures 6.8 et 6.10.

Pour la méta-modélisation vectorielle de la fonction objectif, les temps liés à la construction du méta-modèle et à la stratégie de planification séquentielle ne sont plus négligeables. Ils peuvent atteindre la durée d'une simulation sur le niveau fin lorsque le nombre de points des plans d'expériences augmente. Le gain de l'approche vectorielle par rapport à la méta-modélisation directe est donc en réalité moins important que celui suggéré par la Figure 6.10. C'est particulièrement vrai pour l'approche vectorielle en multi-fidélité car ces étapes coûteuses en temps doivent être considérées à chaque évaluation sur le niveau grossier. Le ratio du temps réel entre les évaluations sur les niveaux fin et grossier décline ainsi avec l'augmentation de la taille du plan d'expériences, jusqu'à être divisé par 10 par rapport au ratio considéré lors de la présentation des résultats.

Une représentation des résultats de BRUGGE avec des temps de calcul réels diminuerait le gain de la méta-modélisation multi-fidélité, notamment couplée à l'approche vectorielle, par rapport à la simple fidélité et à la méta-modélisation directe. Toutefois, les résultats présentés dans ce chapitre sont représentatifs des performances de ces différentes approches lorsque les temps des simulations d'écoulement sont supérieurs, voire très supérieurs, aux autres temps, ce qui peut être le cas pour des modèles plus réalistes et plus complexes que ceux de BRUGGE, mais également si l'on réduit les temps de calcul de l'approche vectorielle en suivant les pistes données ci-dessus.

### 6.3 Application: analyse de sensibilité globale

Dans cette partie, nous proposons d'appliquer les différentes méthodes introduites pour la méta-modélisation de la fonction objectif à la réalisation d'une analyse de sensibilité globale (GSA pour *Global Sensitivity Analysis*), basée sur l'analyse de la variance de la réponse du méta-modèle en fonction des variables d'entrée. Plus précisément, nous calculons les indices de Sobol' [Sobol', 1990] à partir de différents méta-modèles de la fonction objectif construits pour le cas BRUGGE.

Nous présentons d'abord l'analyse de sensibilité globale basée sur la décomposition de la variance dans la section 6.3.1. Puis, nous détaillons les résultats de l'analyse de sensibilité sur le cas BRUGGE dans la section 6.3.2.

#### 6.3.1 Définition des indices de Sobol'

Une analyse de sensibilité globale basée sur la décomposition de la variance vise à déterminer l'impact des variables  $x_i$ ,  $i = 1, \dots, d$ , sur la variance de la sortie  $Y(\mathbf{x})$  avec  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d)$ .

Les indices de sensibilité associés à une telle analyse sont appelés indices de Sobol' [Sobol', 1990] et sont calculés de la manière suivante:

$$\begin{aligned} S_i &= \frac{\text{Var}[E(Y|X_i)]}{\text{Var}(Y)} \\ S_{ij} &= \frac{\text{Var}[E(Y|X_i, X_j)]}{\text{Var}(Y)} - S_i - S_j \\ S_{ijk} &= \dots \end{aligned} \tag{6.3}$$

$S_i$  est l'indice de Sobol' de premier ordre (indice primaire). Il mesure la part de la variance de la réponse  $Y$  expliquée par  $X_i$  seul. L'indice de second ordre  $S_{ij}$  est défini pour  $i \neq j$ . Il mesure la part de la variance de la réponse  $Y$  résultant de l'interaction entre  $X_i$  et  $X_j$ . Les indices d'ordres supérieurs sont définis de la même manière.

On remarque que tous les indices de Sobol' sont compris dans l'intervalle  $[0, 1]$ . Plus un paramètre, ou une interaction de paramètres, est influent et plus la valeur de l'indice est proche de 1. Dans le cas où tous les paramètres sont indépendants, la somme des indices de Sobol' est égale à 1.

Afin de mesurer l'influence globale d'un paramètre  $X_i$  et de ses interactions sur la réponse  $Y$ , on calcule l'indice de sensibilité total  $S_{T_i}$  défini par:

$$S_{T_i} = \sum_{k \# i} S_k \tag{6.4}$$

avec  $k \# i$  désignant tous les termes dans lesquels l'indice  $i$  apparaît.

Afin d'économiser du temps de calcul, on limite souvent le calcul de ces indices aux indices primaires et totaux. De nombreuses méthodes sont proposées dans la littérature pour les calculer rapidement (FAST, quasi Monte-Carlo, etc) [Saltelli et al., 2008]. Cependant, quelle que soit la méthode utilisée, leur estimation nécessite toujours des milliers d'évaluations de la sortie  $Y$ . C'est pour cette raison qu'il est courant de considérer la méta-modélisation pour réaliser une telle analyse de sensibilité lorsque l'évaluation de la réponse  $Y$  est coûteuse.

Les analyses de sensibilité ci-dessous ont été réalisées grâce au package R **sensitivity** [Pujol et al., 2015] en utilisant la fonction `soboljansen` qui permet d'estimer les indices de Sobol' suivant les

méthodes de [Jansen, 1999] et [Saltelli et al., 2010]. Pour simplifier les résultats des différentes analyses de sensibilité, nous ne considérons ici que les indices totaux.

### 6.3.2 Résultats de l'analyse de sensibilité sur BRUGGE

Dans cette section, nous présentons les résultats des analyses de sensibilité réalisées à partir de différents méta-modèles construits pour le cas BRUGGE. En particulier, nous avons utilisé des méta-modèles de la fonction objectif issus d'une planification séquentielle en simple et multi-fidélité, en suivant une approche directe ou vectorielle. Des analyses de sensibilité à partir de méta-modèles de krigeage correspondant à différentes tailles de LHS sont également considérées à titre de comparaison. On note que tous les méta-modèles utilisés ici correspondent à des méta-modèles obtenus lors des tests menés sur BRUGGE et présentés dans la section 6.2.1. On rappelle que pour une approche testée, 5 expériences sont considérées. Aussi, les méta-modèles sélectionnés pour l'analyse de sensibilité correspondent à ceux dont la valeur de  $Q^2$  est la plus représentative du  $Q^2$  moyen sur ces 5 expériences.

Une première série d'analyses a été réalisée à partir de méta-modèles de krigeage correspondant à différentes tailles de LHS. Les résultats de ces analyses sont représentés sur les Figures 6.14 et 6.15.

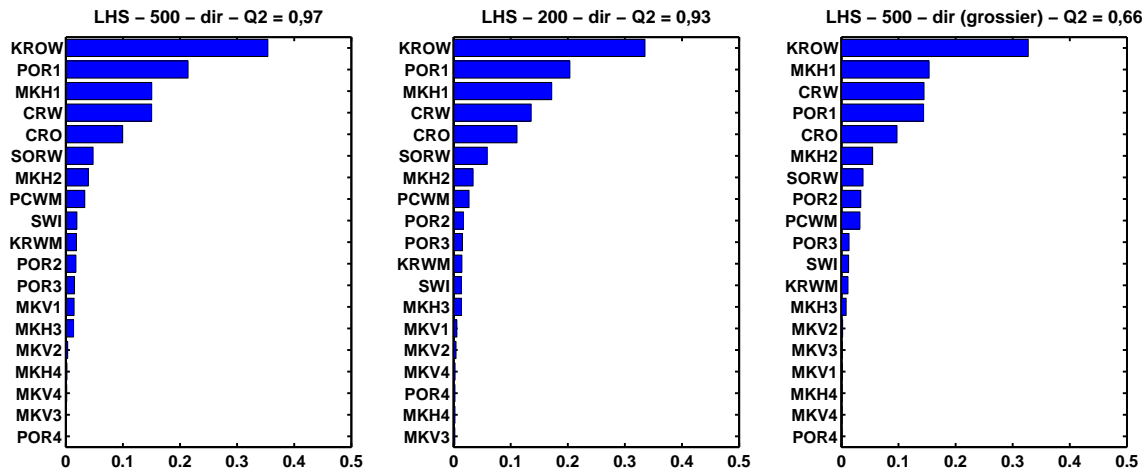


Figure 6.14 : Indices de sensibilité totaux calculés à partir de modèles de krigeage; à gauche, pour un LHS de 500 points, au centre, pour un LHS de 200 points et à droite, pour un LHS de 500 points sur le niveau grossier.

Le méta-modèle de krigeage construit à partir d'un LHS de 500 points est de bonne qualité avec un  $Q^2 = 0,97$  (cf. Tableau 6.5). On considère donc que les résultats obtenus pour ce méta-modèle (Figure 6.14 droite) sont les résultats de référence. Ces résultats indiquent que sur les 19 paramètres, 5 sont complètement négligeables (MKV2, MKH4, MKV4, MKV3 et POR4), 6 sont peu influents (SWI, KRWM, POR2, POR3, MKV1 et MKH3), 3 sont influents (SORW, MKH2 et PCWM) et les 5 derniers sont très influents (KROW, POR1, MKH1, CRW et CRO). On note que cette catégorisation des paramètres est arbitraire car l'interprétation d'une analyse de sensibilité est toujours propre à l'utilisateur et au problème traité.

Des résultats analogues sont obtenus pour un LHS de 200 points (Figure 6.14 centre), ce qui confirme la validité des résultats de référence. On remarque que si l'on mène l'analyse de sensibilité seulement sur le niveau grossier, c'est-à-dire en construisant un méta-modèle de la fonction objectif au niveau grossier, les résultats obtenus sont assez proches (Figure 6.14 droite). On retrouve bien les paramètres influents et très influents. En revanche, on observe de petites erreurs dans l'estimation des paramètres

peu influents. C'est néanmoins remarquable car, bien que la fonction objectif calculée au niveau grossier soit une approximation médiocre de la fonction objectif au niveau fin ( $Q^2 = 0,66$ ), elle est sensible aux mêmes paramètres.

La Figure 6.15 présente les résultats obtenus pour des LHS de plus petite taille ( $n_f = 70$  et  $n_f = 40$ ). Ces résultats montrent qu'un modèle de krigeage de 70 points permet de retrouver les paramètres les plus influents, mais ne permet pas de faire une distinction claire pour les autres paramètres. Les résultats associés au LHS de 40 points ne permettent même pas d'identifier correctement les paramètres les plus influents.

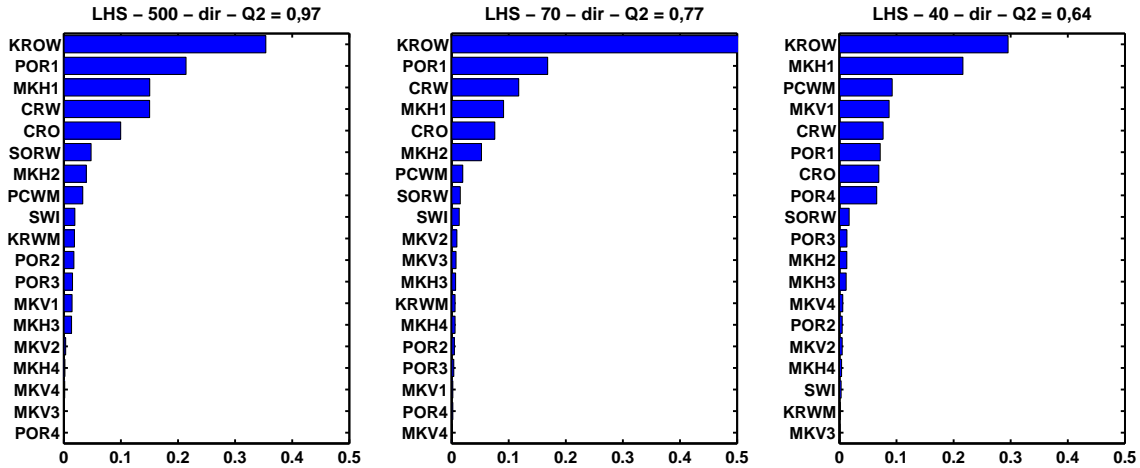


Figure 6.15 : Indices de sensibilité totaux calculés à partir de modèles de krigeage de la fonction objectif; à gauche, modèle de référence, au centre, pour un LHS de 70 points et à droite, pour un LHS de 40 points.

La Figure 6.16 présente les résultats obtenus pour une méta-modélisation directe de la fonction objectif en utilisant les méthodes de planification séquentielle d'expériences suggérées dans cette thèse (Algorithmes 1 et 2). Les résultats en simple fidélité (Figure 6.16 centre) sont similaires à ceux obtenus pour le krigeage sur un LHS de 70 points. On distingue bien les paramètres les plus influents mais on ne retrouve pas les différences de sensibilité des autres paramètres. En revanche, les résultats en multi-fidélité (Figure 6.16 droite) sont plus proches des résultats de référence. On distingue clairement les paramètres influents et très influents et, bien que la sensibilité des autres paramètres soit un peu sous-estimée, on retrouve à peu près les paramètres peu influents.

Finalement, des analyses de sensibilité ont été réalisées à partir d'une méta-modélisation vectorielle de la fonction objectif en suivant une planification séquentielle. Les résultats de ces analyses sont représentés sur la Figure 6.17. Les résultats en simple fidélité (Figure 6.17 centre) correspondent à un plan d'expériences de 70 points, et les résultats en multi-fidélité à un plan d'expériences dont l'évaluation est équivalente en temps à celle de 30 points sur le niveau fin. Dans les deux cas, on observe que, mis à part une légère sous-estimation de CRO, les résultats obtenus sont proches des résultats de référence, voire très proches pour la multi-fidélité.

Les résultats obtenus à travers cette application sont cohérents avec la prédictivité des méta-modèles mesurée par le coefficient  $Q^2$ . En effet, plus des méta-modèles à fort  $Q^2$  sont considérés pour l'analyse de sensibilité et plus celle-ci est fiable (*i.e.* ses résultats sont proches de l'analyse de sensibilité de référence).

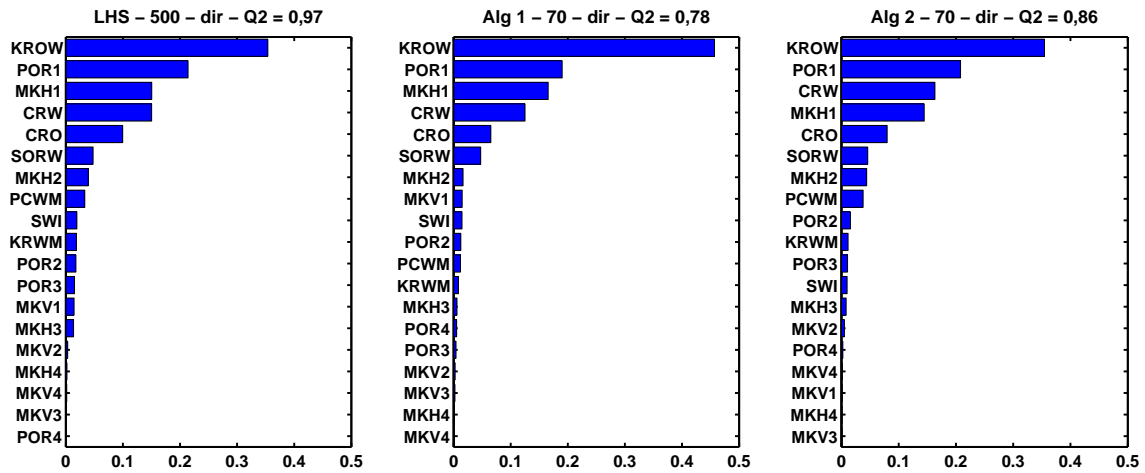


Figure 6.16 : Indices de sensibilité totaux. Méta-modélisation directe de la fonction objectif via une planification séquentielle pour un temps de simulation équivalent à  $n_f = 70$ : au centre, en simple fidélité (Algorithme 1) et à droite, en multi-fidélité pour  $n_f = 59$  et  $n_g = 219$  (Algorithme 2). A gauche, résultats pour le modèle de référence.

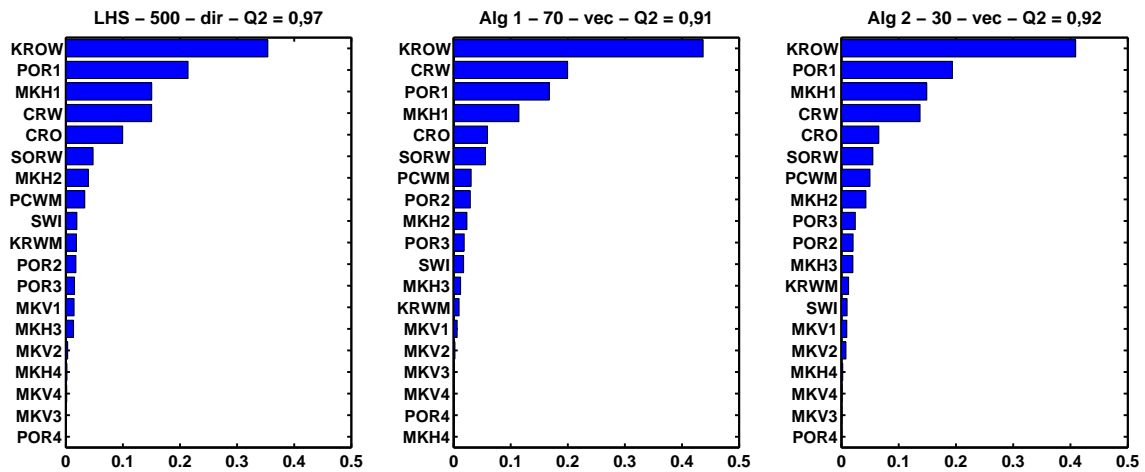


Figure 6.17 : Indices de sensibilité totaux. Méta-modélisation vectorielle de la fonction objectif via une planification séquentielle: au centre, en simple fidélité (Algorithme 1) pour  $n_f = 70$  et à droite, en multi-fidélité pour  $n_f = 26$  et  $n_g = 76$  (Algorithme 2). A gauche, résultats pour le modèle de référence.



## 6.4 Conclusions

Les résultats des études menées sur le cas BRUGGE montrent l'efficacité des méthodes introduites pour la planification séquentielle d'expériences. Ces méthodes se montrent plus performantes qu'une planification d'expériences basée sur l'utilisation de LHS, dans le cadre d'une méta-modélisation directe ou vectorielle de la fonction objectif, en simple comme en multi-fidélité. On constate également que l'approche multi-fidélité est plus performante que la simple fidélité quelle que soit la méthode considérée pour la méta-modélisation de la fonction objectif. Cela s'explique par une bonne corrélation des valeurs de la fonction objectif pour la méta-modélisation directe, et par la forte similarité des réponses sur les niveaux fin et grossier pour la méta-modélisation vectorielle. Une application de ces méthodes au cas PUNQ confirme les résultats sur BRUGGE et montre qu'elles permettent d'exploiter le potentiel d'une approche multi-fidélité.

L'utilisation des stratégies séquentielles permet un gain en temps de simulation, ou en prédictivité, lors de la méta-modélisation de la fonction objectif par rapport aux LHS. L'importance de ce gain dépend de la qualité/complexité de la méta-modélisation. Il est modéré pour la méta-modélisation directe en simple fidélité, important pour la méta-modélisation directe en multi-fidélité ou vectorielle en simple fidélité, et très important pour l'approche vectorielle en multi-fidélité. On rappelle que dans ce dernier cas, des méta-modèles prédictifs sont obtenus pour un nombre d'évaluations équivalent en termes de temps de simulation à  $n_f = 25$  points sur le niveau fin.

L'étude menée sur BRUGGE est plus ambitieuse que celle menée sur PUNQ car le cas est plus complexe en termes de nombre de mailles et de puits, mais surtout en raison du nombre de paramètres incertains considérés (19 pour BRUGGE contre 7 pour PUNQ). Toutefois, bien que plus complexe, le cas BRUGGE est plus favorable à la méta-modélisation multi-fidélité que le cas PUNQ, car BRUGGE grossier constitue une très bonne approximation de BRUGGE fin. Il en résulte que les valeurs de la fonction objectif calculées sur les deux niveaux de fidélité sont très bien corrélées et que la méta-modélisation directe de cette sortie est très performante en multi-fidélité. Une méta-modélisation vectorielle de la fonction objectif n'est donc pas nécessaire sur ce cas pour tirer profit de la multi-fidélité. Cependant, les résultats obtenus illustrent à nouveau l'efficacité remarquable de l'approche vectorielle que l'on soit dans un cadre simple ou multi-fidélité.

L'intérêt de la méta-modélisation multi-fidélité, et de l'approche vectorielle proposée, dépend du gain effectif réalisé en termes de temps de calcul par rapport à une méta-modélisation classique. Pour le mesurer, il faut prendre en compte tous les temps de calcul liés à la simulation sur différents niveaux de fidélité (construction du modèle grossier, paramétrisation nécessitant une mise à l'échelle des propriétés pétrophysiques, simulation d'écoulement, *etc*) ainsi que ceux liés à la méta-modélisation (construction du méta-modèle, évaluation du méta-modèle, sélection de nouveaux points par la stratégie séquentielle, *etc*). Les résultats sur ce cas d'étude suggèrent toutefois que de telles approches pourraient être appliquées avec succès sur des cas réels, à condition que les temps de calculs qu'elles induisent soient relativement faibles par rapport aux temps des simulations d'écoulement.

---

# Conclusions et perspectives

La simulation de l'exploitation d'un champ pétrolifère est essentielle en ingénierie de réservoir pour estimer et optimiser la production d'hydrocarbures. En pratique, de très nombreuses simulations d'écoulement doivent être réalisées pour atteindre ces objectifs. Or, les temps de calculs associés à ces simulations sont souvent incompatibles avec les contraintes opérationnelles. Des stratégies de réduction du temps de calcul sont alors mises en place. On peut par exemple accélérer les simulations d'écoulement en dégradant la précision des modèles réservoirs, en simplifiant la physique dans le simulateur d'écoulement, ou encore remplacer le simulateur d'écoulement par un méta-modèle. La méta-modélisation est souvent considérée pour des applications très gourmandes en temps de calcul car nécessitant de multiples simulations. C'est le cas de l'analyse de sensibilité, la mise en place d'approches probabilistes pour les estimations ou le calage d'historique, ou encore l'optimisation du schéma de développement du champ. Dans cette thèse, nous nous sommes intéressés à la méta-modélisation multi-fidélité. Le principe est de réduire le temps de calcul nécessaire à la conception d'un méta-modèle prédictif en utilisant des simulations d'écoulement classiques et accélérées. La méta-modélisation multi-fidélité a été étudiée à travers l'utilisation du co-krigeage multi-fidélité, une extension de la méta-modélisation par krigeage à un cadre multi-fidélité. Deux cas d'étude, inspirés des cas benchmark PUNQ-S3 et Brugge, ont été considérés afin d'étudier le potentiel du co-krigeage multi-fidélité en ingénierie de réservoir. Ces cas sont définis pour deux niveaux de fidélité correspondant à deux modèles réservoirs qui diffèrent par la résolution de leur maillage.

Tout d'abord, nous avons démontré le potentiel de la méta-modélisation multi-fidélité en l'appliquant à l'approximation des différentes sorties de la simulation d'écoulement: propriétés aux puits, propriétés du réservoir, cartes de propriétés. Les méta-modèles multi-fidélité sont comparés, en termes de prédictivité et de temps de simulation, à ceux obtenus par krigeage. Pour la méta-modélisation des sorties vectorielles en simple fidélité, nous utilisons une approche combinant krigeage et analyse en composantes principales afin de réduire le nombre de modèles de krigeage nécessaires. Nous avons également proposé une extension de cette approche à un cadre multi-fidélité. Les résultats de ces comparaisons sur le cas PUNQ mettent en évidence les gains en temps de calcul que peut offrir la méta-modélisation multi-fidélité pour l'approximation de ces différentes propriétés. On observe que ce gain dépend de la corrélation entre les réponses sur les niveaux fin et grossier. Il est maximal lorsque les réponses sont linéairement corrélées. Pour la méta-modélisation de sorties vectorielles, on observe que la multi-fidélité est efficace lorsque les réponses sur les niveaux fin et grossier présentent des variations similaires, car cela permet d'obtenir une bonne corrélation au niveau des coefficients de projection. En revanche, le co-krigeage multi-fidélité n'est pas plus performant que le krigeage pour approcher la fonction objectif, à cause de la mauvaise corrélation entre les deux niveaux pour cette fonctionnelle. Une approche alternative pour la méta-modélisation de la fonction objectif a donc été introduite. Elle repose sur une estimation de la fonction objectif à partir des méta-modèles approchant les sorties dynamiques. On parle alors de méta-modélisation vectorielle de la fonction objectif. Dans ce cas, l'approche multi-fidélité permet un gain de temps important.

Dans un second temps, nous avons proposé des stratégies de planification séquentielle d'expériences afin d'exploiter le potentiel de la multi-fidélité mis en évidence sur le cas PUNQ. En effet, les résultats du cas PUNQ montrent que la performance d'une méta-modélisation multi-fidélité est très dépendante

---

du ratio entre les nombres d'évaluations sur les niveaux fin et grossier. La planification séquentielle d'expériences doit choisir itérativement des points à évaluer pour compléter le plan d'expériences, mais également le niveau de fidélité à évaluer dans un cadre multi-fidélité. Nous avons donc mis au point des stratégies séquentielles pour définir des plans d'expériences maximisant la prédictivité des méta-modèles dans des cadres simple ou multi-fidélité et permettant l'ajout d'un ou de plusieurs points à chaque itération. Ces algorithmes sont également compatibles avec la méta-modélisation vectorielle suggérée pour la fonction objectif. Les algorithmes proposés sélectionnent les nouveaux points à évaluer, à l'aide de la variance de krigeage ou de co-krigeage multi-fidélité, dans le voisinage des points pour lesquels l'erreur de validation croisée est la plus forte. En multi-fidélité, nous proposons d'évaluer uniquement le niveau grossier dans un premier temps, jusqu'à ce qu'il soit bien modélisé, puis d'évaluer les niveaux fin et grossier dans un second temps. L'application de ces algorithmes sur le cas d'étude BRUGGE montre leur efficacité pour la conception de méta-modèles prédictifs de la fonction objectif, en particulier en multi-fidélité. Leur application au cas PUNQ confirme ces résultats.

## Perspectives

Au cours de cette thèse, nous avons étudié le potentiel de la méta-modélisation multi-fidélité en ingénierie de réservoir, puis proposé des méthodes permettant d'exploiter ce potentiel afin de réduire les temps de calcul nécessaires à l'obtention de méta-modèles prédictifs. Ces méthodes semblent prometteuses sur les cas d'étude considérés ici. Toutefois, de nombreuses pistes restent à explorer pour les améliorer. Il faut notamment réduire les temps de calculs liés à la méta-modélisation vectorielle de la fonction objectif pour que cette approche puisse être efficace sur un cas réel. Cela peut être fait en réduisant le nombre de modèles de krigeage/co-krigeage, en ne ré-estimant pas à nouveau les hyper-paramètres à chaque itération, ou en optimisant le code. Les stratégies de planification séquentielle peuvent également être améliorées au niveau de la sélection du point (*e.g.* considérer le point maximisant la réduction de l'IMSE calculée localement) ou du choix du niveau (*e.g.* rendre le critère d'arrêt d'évaluation sur le niveau grossier dépendant de la qualité de la corrélation entre les niveaux fin et grossier). Il reste également de nombreux points à investiguer pour les versions des algorithmes sélectionnant plusieurs points par itération: choix du nombre de points par cellule de Voronoi, déterminer le nombre optimal de simulations parallèles, *etc.* D'autre part, les méthodes proposées doivent encore être testées sur d'autres cas d'étude plus complexes, ou des cas réels, afin de s'assurer de leur pertinence et robustesse. Il serait également intéressant de considérer un cas multi-fidélité utilisant une autre définition des niveaux de fidélité, par exemple l'utilisation d'un simulateur d'écoulement à physique simplifiée. Par ailleurs, on peut envisager d'autres applications comme l'application des stratégies séquentielles à la méta-modélisation de sorties vectorielles en considérant la variance et les erreurs de validation croisée moyennées sur tout le vecteur.

Les travaux de cette thèse se sont focalisés sur la conception de méta-modèles globalement prédictifs. Une prolongation naturelle de ces travaux est l'optimisation dans un cadre multi-fidélité. En effet, l'optimisation est également un enjeu majeur en ingénierie de réservoir (calage d'historique, maximisation de la production, *etc.*). On peut par exemple se servir des méthodes introduites pour obtenir rapidement un méta-modèle prédictif, notamment de la fonction objectif, puis utiliser ce dernier comme point de départ de l'optimisation. On peut également proposer de nouvelles stratégies séquentielles visant l'optimisation et mettant à profit les méthodes de méta-modélisation proposées.

Pour finir, cette thèse propose des méthodes pour une méta-modélisation efficace et adaptée pour l'ingénierie de réservoir dans un contexte de multi-fidélité à deux niveaux. Il est possible de les généraliser afin de les appliquer à davantage de niveaux, toutefois des tests sont nécessaires pour s'assurer de leur efficacité dans un tel contexte. De manière générale, le nombre optimal de niveaux de fidélité pour la méta-modélisation, et même l'opportunité d'une méta-modélisation multi-fidélité, restent des questions ouvertes et complexes car dépendantes du cas d'application ainsi que du méta-modèle considérés.

# Bibliographie

- [Antonov and Saleev, 1979] Antonov, I. A. and Saleev, V. (1979). An economic method of computing lp  $\tau$ -sequences. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 19(1):252–256.
- [Asadollahi et al., 2014] Asadollahi, M., Nævdal, G., Dadashpour, M., and Kleppe, J. (2014). Production optimization using derivative free methods applied to brugge field case. *Journal of Petroleum Science and Engineering*, 114:22–37.
- [Badru and Kabir, 2003] Badru, O. and Kabir, C. (2003). Well placement optimization in field development. In *SPE-84191-MS*, SPE. Society of Petroleum Engineers.
- [Bates et al., 1996] Bates, R., Buck, R., Riccomagno, E., and Wynn, H. (1996). Experimental design and observation for large systems. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, pages 77–94.
- [Becerra et al., 2012] Becerra, G. G., Modenesi, A., and Lisboa, E. A. (2012). Uncertainty history matching and forecasting, a field case application. In *SPE-153176-MS*, SPE. Society of Petroleum Engineers.
- [Box and Behnken, 1960] Box, G. E. and Behnken, D. W. (1960). Some new three level designs for the study of quantitative variables. *Technometrics*, 2(4):455–475.
- [Busby, 2009] Busby, D. (2009). Hierarchical adaptive experimental design for gaussian process emulators. *Reliability Engineering & System Safety*, 94(7):1183–1193.
- [Cardwell and Parsons, 1945] Cardwell, Jr., W. and Parsons, R. (1945). Average permeabilities of heterogeneous oil sands. *SPE-945034-G*.
- [Carnell, 2012] Carnell, R. (2012). *lhs: Latin Hypercubes Samples*. R package version 0.10.
- [Chen and Oliver, 2010] Chen, Y. and Oliver, D. S. (2010). Ensemble-based closed-loop optimization applied to brugge field. *SPE Reservoir Evaluation & Engineering*, 13(01):56–71.
- [Chilès and Delfiner, 1999] Chilès, J.-P. and Delfiner, P. (1999). *Geostatistics: modeling spatial uncertainty*, volume 497. John Wiley & Sons.
- [Christie et al., 2006] Christie, M., Demyanov, V., and Erbas, D. (2006). Uncertainty quantification for porous media flows. *Journal of Computational Physics*, 217(1):143–158.
- [Corre et al., 2000] Corre, B., Thore, P., de Feraudy, V., and Vincent, G. (2000). Integrated Uncertainty Assessment For Project Evaluation and Risk Analysis. In *SPE-65205-MS*, SPE. Society of Petroleum Engineers.
- [CougarFlow, 2016] CougarFlow (2016). *Uncertainty Management and Assisted History Matching*. BeicipFranlab (groupe IFPEN), Rueil-Malmaison, France. <http://www.beicip.com/openflow-suite>.
- [Cressie, 1993] Cressie, N. (1993). *Statistics for spatial data*. Revised Edition. Wiley, New York.
- [Cullick et al., 2006] Cullick, A. S., Johnson, W. D., and Shi, G. (2006). Improved and More Rapid History Matching With a Nonlinear Proxy and Global Optimization. In *SPE-101933-MS*, SPE. Society of Petroleum Engineers.
- [Da Veiga and Gervais, 2015] Da Veiga, S. and Gervais, V. (2015). Uncertainty analysis and history matching on grid responses from a reduced-basis approach. In *77th EAGE Conference and Exhibition 2015*.

- 
- [Doehlert, 1970] Doehlert, D. H. (1970). Uniform shell designs. *Applied statistics*, pages 231–239.
- [Douarche et al., 2014] Douarche, F., Da Veiga, S., Feraille, M., Enchéry, G., Touzani, S., and Barsalou, R. (2014). Sensitivity analysis and optimization of surfactant-polymer flooding under uncertainties. *Oil & Gas Science and Technology - Revue d'IFP Energies nouvelles*, 69(4):603–617.
- [Dubrule, 1983] Dubrule, O. (1983). Cross validation of kriging in a unique neighborhood. *Journal of the International Association for Mathematical Geology*, 15(6):687–699.
- [Eclipse, 2016] Eclipse (2016). *Flow simulator*. Schlumberger Limited, Willemstad, Pays-Bas. <https://www.software.slb.com/products/eclipse>.
- [Evensen, 2009] Evensen, G. (2009). The ensemble kalman filter for combined state and parameter estimation. *IEEE Control Systems*, 29(3):83–104.
- [Fang et al., 2006] Fang, K.-T., Li, R., and Sudjianto, A. (2006). *Design and modeling for computer experiments*. Chapman and Hall/CRC.
- [Fang, 2000] Fang, W. (2000). The characterization of a measure of information discrepancy. *Information Sciences*, 125(1):207–232.
- [Feraille, 2013] Feraille, M. (2013). An optimization strategy based on the maximization of matching-targets? probability for unevaluated results. *Oil & Gas Science and Technology - Revue d'IFP Energies nouvelles*, 68(3):545–556.
- [Feraille and Marrel, 2012] Feraille, M. and Marrel, A. (2012). Prediction under uncertainty on a mature field. *Oil & Gas Science and Technology - Revue d'IFP Energies nouvelles*, 67(2):193–206.
- [Fletcher, 1987] Fletcher, R. (1987). *Practical Methods of Optimization Second Edition*. John Wiley & Sons.
- [Floris et al., 2001] Floris, F. J. T., Bush, M. D., Cuypers, M., Roggero, F., and Syversveen, A.-R. (2001). Methods for quantifying the uncertainty of production forecasts: a comparative study. *Petroleum Geoscience*, 7(S):S87–S96.
- [Foroud et al., 2016] Foroud, T., Seifi, A., and AminShahidy, B. (2016). An efficient optimization process for hydrocarbon production in presence of geological uncertainty using a clustering method: A case study on brugge field. *Journal of Natural Gas Science and Engineering*, 32:476–490.
- [Forrester and Keane, 2009] Forrester, A. I. and Keane, A. J. (2009). Recent advances in surrogate-based optimization. *Progress in Aerospace Sciences*, 45(1-3):50–79.
- [Forrester et al., 2007] Forrester, A. I., Sóbester, A., and Keane, A. J. (2007). Multi-fidelity optimization via surrogate modelling. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 463(2088):3251–3269.
- [Ginsbourger et al., 2010] Ginsbourger, D., Le Riche, R., and Carraro, L. (2010). Kriging is well-suited to parallelize optimization. In *Computational Intelligence in Expensive Optimization Problems*, pages 131–162. Springer.
- [Guyaguler et al., 2000] Guyaguler, B., Horne, R. N., Rogers, L., and Rosenzweig, J. J. (2000). Optimization of well placement in a gulf of mexico waterflooding project. In *SPE-63221-MS*, SPE. Society of Petroleum Engineers.
- [Halton, 1960] Halton, J. H. (1960). On the efficiency of certain quasi-random sequences of points in evaluating multi-dimensional integrals. *Numerische Mathematik*, 2(1):84–90.
- [Han et al., 2012] Han, Z., Zimmerman, R., and Görtz, S. (2012). Alternative cokriging method for variable-fidelity surrogate modeling. *AIAA Journal*, 50(5):1205–1210.
- [Huang et al., 2006] Huang, D., Allen, T. T., Notz, W. I., and Miller, R. A. (2006). Sequential kriging optimization using multiple-fidelity evaluations. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 32(5):369–382.
- [Jacquard et al., 1965] Jacquard, P. et al. (1965). Permeability distribution from field pressure data. *Society of Petroleum Engineers Journal*, 5(04):281–294.

- 
- [Jansen, 1999] Jansen, M. J. (1999). Analysis of variance designs for model output. *Computer Physics Communications*, 117(1):35–43.
- [Johnson et al., 1990] Johnson, M. E., Moore, L. M., and Ylvisaker, D. (1990). Minimax and maximin distance designs. *Journal of statistical planning and inference*, 26(2):131–148.
- [Jones, 2001] Jones, D. (2001). A Taxonomy of Global Optimization Methods Based on Response Surfaces. *Journal of Global Optimization*, 21(4):345–383.
- [Jones et al., 1998] Jones, D., Schonlau, M., and Welch, W. (1998). Efficient Global Optimization of Expensive Black-Box Functions. *Journal of Global Optimization*, 13(4):455–492.
- [Journel and Deutsch, 1998] Journel, A. G. and Deutsch, C. V. (1998). *GSLIB Geostatistical software library and users guide*. Oxford University Press, New York. Second Edition.
- [Kennedy and O’Hagan, 2000a] Kennedy, M. and O’Hagan, A. (2000a). Predicting the output from a complex computer code when fast approximations are available. *Biometrika*, 87(1):1–13.
- [Kennedy and O’Hagan, 2000b] Kennedy, M. C. and O’Hagan, A. (2000b). Bayesian calibration of computer models. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Statistical Methodology)*, 63(3):425–464.
- [Kleijnen, 2008] Kleijnen, J. P. (2008). *Design and analysis of simulation experiments*, volume 20. Springer.
- [Kleijnen and Sargent, 2000] Kleijnen, J. P. and Sargent, R. G. (2000). A methodology for fitting and validating metamodels in simulation. *European Journal of Operational Research*, 120(1):14–29.
- [Kleijnen and Van Beers, 2004] Kleijnen, J. P. and Van Beers, W. C. (2004). Application-driven sequential designs for simulation experiments: Kriging metamodeling. *Journal of the Operational Research Society*, 55(8):876–883.
- [Koehler and Owen, 1996] Koehler, J. and Owen, A. (1996). Nine computer experiments. *Handbook of statistics*, 13:261–308.
- [Krige, 1951] Krige, D. G. (1951). A statistical approach to some basic mine valuation problems on the Witwatersrand. *Journal of the Chemical, Metallurgical and Mining Society*, 52:119–139.
- [Kuya et al., 2011] Kuya, Y., Takeda, K., Zhang, X., and J. Forrester, A. I. (2011). Multifidelity surrogate modeling of experimental and computational aerodynamic data sets. *AIAA Journal*, 49(2):289–298.
- [Le Gratiet, 2012] Le Gratiet, L. (2012). *MuFiCokriging: Multi-Fidelity Cokriging models*. R package version 1.2.
- [Le Gratiet, 2013a] Le Gratiet, L. (2013a). Bayesian analysis of hierarchical multifidelity codes. *SIAM/ASA Journal on Uncertainty Quantification*, 1(1):244–269.
- [Le Gratiet, 2013b] Le Gratiet, L. (2013b). *Multi-fidelity Gaussian process regression for computer experiments*. PhD dissertation, Université de Paris-Diderot.
- [Le Gratiet and Cannamela, 2015] Le Gratiet, L. and Cannamela, C. (2015). Cokriging-based sequential design strategies using fast cross-validation techniques for multi-fidelity computer codes. *Technometrics*, 57(3):418–427.
- [Le Gratiet and Garnier, 2014] Le Gratiet, L. and Garnier, J. (2014). Recursive co-kriging model for design of computer experiments with multiple levels of fidelity. *International Journal for Uncertainty Quantification*, 4(5).
- [Le Ravalec et al., 2014] Le Ravalec, M., Doligez, B., and Lerat, O. (2014). Integrated reservoir characterization and modeling. *ebook*. <https://doi.org/10.2516/ifpen/2014001>.
- [Le Ravalec et al., 2000] Le Ravalec, M., Noetinger, B., and Hu, L. Y. (2000). The fft moving average (fft-ma) generator: An efficient numerical method for generating and conditioning gaussian simulations. *Mathematical Geology*, 32(6):701–723.
- [Le Ravalec-dupin, 2012] Le Ravalec-dupin, M. (2012). Optimizing Well Placement With Quality Maps Derived From Multi-fidelity Meta-models. In *SPE-154416-MS*, SPE. Society of Petroleum Engineers.

- 
- [Li and Friedmann, 2005] Li, B. and Friedmann, F. (2005). Novel Multiple Resolutions Design of Experiment/Response Surface Methodology for Uncertainty Analysis of Reservoir Simulation Forecasts. In *SPE-92853-MS*, SPE. Society of Petroleum Engineers.
- [Li et al., 2001] Li, R., Reynolds, A., and Oliver, D. (2001). History Matching of Three-Phase Flow Production Data. In *SPE-66351-MS*, SPE. Society of Petroleum Engineers.
- [Loeve, 1978] Loeve, M. (1978). *Probability Theory II*, volume 48. Springer-Verlag.
- [Lorentzen et al., 2003] Lorentzen, R. J., Nævdal, G., and Lage, A. C. (2003). Tuning of parameters in a two-phase flow model using an ensemble kalman filter. *International Journal of Multiphase Flow*, 29(8):1283–1309.
- [Makhlouf et al., 1993] Makhlouf, E. M., Chen, W. H., Wasserman, M. L., and Seinfeld, J. H. (1993). A General History Matching Algorithm for Three-Phase, Three-Dimensional Petroleum Reservoirs. *SPE-20383-PA*.
- [Mardia and Marshall, 1984] Mardia, K. V. and Marshall, R. J. (1984). Maximum likelihood estimation of models for residual covariance in spatial regression. *Biometrika*, 71(1):135–146.
- [Marrel, 2008] Marrel, A. (2008). *Mise en oeuvre et utilisation du métamodèle processus gaussien pour l'analyse de sensibilité de modèles numériques: application à un code de transport hydrogéologique*. PhD dissertation, INSA de Toulouse.
- [Marrel et al., 2015] Marrel, A., Perot, N., and Mottet, C. (2015). Development of a surrogate model and sensitivity analysis for spatio-temporal numerical simulators. *Stochastic Environmental Research and Risk Assessment*, 29(3):959–974.
- [Matheron, 1963] Matheron, G. (1963). Principles of geostatistics. *Economic Geology*, 58(8):1246–1266.
- [Matérn, 1986] Matérn, B. (1986). *Spatial variation*. Springer-Verlag, Berlin,.
- [Mckay et al., 1979] Mckay, M. D., Beckman, R. J., and Conover, W. J. (1979). A comparison of three methods for selecting values of input variables in the analysis of output from a computer code. *Technometrics*, 42(1):55.
- [Mohamed et al., 2010] Mohamed, L., Christie, M. A., Demyanov, V., Robert, E., and Kachuma, D. (2010). Application of Particle Swarms for History Matching in the Brugge Reservoir. In *SPE-135264-MS*, SPE. Society of Petroleum Engineers.
- [Morris and Mitchell, 1995] Morris, M. D. and Mitchell, T. J. (1995). Exploratory designs for computational experiments. *Journal of statistical planning and inference*, 43(3):381–402.
- [Oliver and Chen, 2011] Oliver, D. S. and Chen, Y. (2011). Recent progress on reservoir history matching: a review. *Computational Geosciences*, 15(1):185–221.
- [Oliver et al., 2008] Oliver, D. S., Reynolds, A. C., and Liu, N. (2008). *Inverse theory for petroleum reservoir characterization and history matching*. Cambridge University Press.
- [Osio and Amon, 1996] Osio, I. and Amon, C. (1996). An engineering design methodology with multistage bayesian surrogates and optimal sampling. *Research in Engineering Design*, 8(4):189–206.
- [Osterloh, 2008] Osterloh, W. T. (2008). Use of multiple-response optimization to assist reservoir simulation probabilistic forecasting and history matching. In *SPE-116196-MS*, SPE. Society of Petroleum Engineers.
- [Pan and Horne, 1998] Pan, Y. and Horne, R. N. (1998). Improved methods for multivariate optimization of field development scheduling and well placement design. In *SPE-49055-MS*, SPE. Society of Petroleum Engineers.
- [Peng and Gupta, 2004] Peng, C. Y. and Gupta, R. (2004). Experimental design and analysis methods in multiple deterministic modelling for quantifying hydrocarbon in-place probability distribution curve. In *SPE-87002-MS*, SPE. Society of Petroleum Engineers.
- [Peters et al., 2013] Peters, E., Chen, Y., Leeuwenburgh, O., and Oliver, D. (2013). Extended Brugge benchmark case for history matching and water flooding optimization. *Benchmark problems, datasets and methodologies for the computational geosciences*, 50:16–24.

- 
- [Peters et al., 2010] Peters, L., Arts, R., Brouwer, G., Geel, C., Cullick, S., Lorentzen, R. J., Chen, Y., Dunlop, N., Vossepoel, F. C., Xu, R., Sarma, P., Alhuthali, A. H., and Reynolds, A. (2010). Results of the Brugge Benchmark Study for Flooding Optimization and History Matching. *SPE-119094-PA*.
- [Picheny et al., 2010] Picheny, V., Ginsbourger, D., Roustant, O., Haftka, R. T., and Kim, N.-H. (2010). Adaptive designs of experiments for accurate approximation of a target region. *Journal of Mechanical Design*, 132(7):071,008.
- [Plackett and Burman, 1946] Plackett, R. L. and Burman, J. P. (1946). The design of optimum multifactorial experiments. *Biometrika*, 33(4):305–325.
- [Pronzato and Müller, 2012] Pronzato, L. and Müller, W. G. (2012). Design of computer experiments: space filling and beyond. *Statistics and Computing*, 22(3):681–701.
- [Pujol et al., 2015] Pujol, G., Iooss, B., Janon, A., Veiga, S. D., Fruth, J., Gilquin, L., Guillaume, J., Gratiot, L. L., Lemaitre, P., Ramos, B., and Touati, T. (2015). *Sensitivity: Sensitivity Analysis*. R package version 1.11.
- [PumaFlow, 2016] PumaFlow (2016). *Flow simulator*. BeicipFranlab (groupe IFPEN), Rueil-Malmaison, France. <http://www.beicip.com/openflow-suite>.
- [Queipo et al., 2000] Queipo, N. V., Pintos, S., Rincon, N., Contreras, N., and Colmenares, J. (2000). Surrogate Modeling-Based Optimization for the Integration of Static and Dynamic Data Into a Reservoir Description. In *SPE-63065-MS*, SPE. Society of Petroleum Engineers.
- [Rasmussen and Williams, 2006] Rasmussen, C. E. and Williams, C. (2006). *Gaussian Processes for Machine Learning*. MIT Press, Cambridge.
- [Revuz, 1997] Revuz, D. (1997). *Probabilités*. Hermann.
- [Roggero et al., 2012] Roggero, F., Lerat, O., Ding, D. Y., Berthet, P., Bordenave, C., Lefeuvre, F., and Perfetti, P. (2012). History matching of production and 4d seismic data: application to the girassol field, offshore angola. *Oil & Gas Science and Technology—Revue d’IFP Energies nouvelles*, 67(2):237–262.
- [Romero and Carter, 2001] Romero, C. and Carter, J. (2001). Using genetic algorithms for reservoir characterisation. *Journal of Petroleum Science and engineering*, 31(2):113–123.
- [Roustant et al., 2012] Roustant, O., Ginsbourger, D., and Deville, Y. (2012). DiceKriging, DiceOptim: Two R packages for the analysis of computer experiments by kriging-based metamodeling and optimization. *Journal of Statistical Software*, 51(1):1–55.
- [Sacks et al., 1989] Sacks, J., Welch, W. J., Mitchell, T. J., and Wynn, H. P. (1989). Design and analysis of computer experiments. *Statistical science*, pages 409–423.
- [Saltelli et al., 2010] Saltelli, A., Annoni, P., Azzini, I., Campolongo, F., Ratto, M., and Tarantola, S. (2010). Variance based sensitivity analysis of model output. design and estimator for the total sensitivity index. *Computer Physics Communications*, 181(2):259–270.
- [Saltelli et al., 2008] Saltelli, A., Ratto, M., Andres, T., Campolongo, F., Cariboni, J., Gatelli, D., Saisana, M., and Tarantola, S. (2008). *Global sensitivity analysis: the primer*. John Wiley & Sons.
- [Santner et al., 2003] Santner, T. J., Williams, B. J., and Notz, W. (2003). *The design and analysis of computer experiments*. Springer.
- [Scheidt, 2006] Scheidt, C. (2006). *Analyse statistique d’expériences simulées: Modélisation adaptative de réponses non-régulières par krigeage et plans d’expériences – Application à la quantification des incertitudes en ingénierie des réservoirs pétroliers*. PhD dissertation, Université Louis Pasteur de Strasbourg.
- [Scheidt et al., 2007] Scheidt, C., Zabalza-Mezghani, I., Feraille, M., and Collombier, D. (2007). Toward a reliable quantification of uncertainty on production forecasts: Adaptive experimental designs. *Oil & Gas Science and Technology - Rev. IFP*, 62(2):207–224.
- [Schulze-Riegert and Ghedan, 2007] Schulze-Riegert, R. and Ghedan, S. (2007). Modern techniques for history matching. In *9th International Forum on Reservoir Simulation*, pages 9–13.



- 
- [Schulze-Riegert et al., 2003] Schulze-Riegert, R., Haase, O., and Nekrassov, A. (2003). Combined Global and Local Optimization Techniques Applied to History Matching. In *SPE-79668-MS*, SPE. Society of Petroleum Engineers.
- [SKUA-GOCAD, 2016] SKUA-GOCAD (2016). *Seismic, geological and reservoir modeling software*. Paradigm Holdings Ltd., Gibraltar, Royaume-Uni. <http://www.pdgm.com/products/gocad/>.
- [Slotte and Smorgrav, 2008] Slotte, P. A. and Smorgrav, E. (2008). Response surface methodology approach for history matching and uncertainty assessment of reservoir simulation models. In *SPE-113390*. Society of Petroleum Engineers.
- [Sobol', 1967] Sobol', I. M. (1967). On the distribution of points in a cube and the approximate evaluation of integrals. *Zhurnal Vychislitel'noi Matematiki i Matematicheskoi Fiziki*, 7(4):784–802.
- [Sobol', 1990] Sobol', I. M. (1990). On sensitivity estimation for nonlinear mathematical models. *Matematicheskoe Modelirovanie*, 2(1):112–118.
- [Stein, 1999] Stein, M. L. (1999). *Interpolation of spatial data: some theory for kriging*. Springer Science & Business Media.
- [Subbey et al., 2004] Subbey, S., Christie, M., and Sambridge, M. (2004). Prediction under uncertainty in reservoir modeling. *Journal of Petroleum Science and Engineering*, 44(1):143–153.
- [Tarantola, 2005] Tarantola, A. (2005). *Inverse problem theory and methods for model parameter estimation*. Siam.
- [Thenon et al., 2016] Thenon, A., Gervais, V., and Le Ravalec, M. (2016). Multi-fidelity meta-modeling for reservoir engineering-application to history matching. *Computational Geosciences*, 20(6):1231–1250.
- [Vincent et al., 1999] Vincent, G., Corre, B., and Thore, P. (1999). Managing Structural Uncertainty in a Mature Field for Optimal Well Placement. *SPE-57468-PA*.
- [Xiao et al., 2010] Xiao, M., Breitkopf, P., Coelho, R. F., Knopf-Lenoir, C., Sidorkiewicz, M., and Villon, P. (2010). Model reduction by cpod and kriging. *Structural and multidisciplinary optimization*, 41(4):555–574.
- [Xiong et al., 2013] Xiong, S., Qian, P. Z., and Wu, C. J. (2013). Sequential design and analysis of high-accuracy and low-accuracy computer codes. *Technometrics*, 55(1):37–46.
- [Yeten et al., 2005] Yeten, B., Castellini, A., Guyaguler, B., and Chen, W. (2005). A comparison study on experimental design and response surface methodologies. In *SPE-93347-MS*, SPE. Society of Petroleum Engineers.
- [Zhang and Wang, 2010] Zhang, H. and Wang, Y. (2010). Kriging and cross-validation for massive spatial data. *Environmetrics*, 21(3-4):290–304.
- [Zubarev, 2009] Zubarev, D. I. (2009). Pros and cons of applying proxy-models as a substitute for full reservoir simulations. In *SPE-124815-MS*, SPE. Society of Petroleum Engineers.

## Résumé

Les simulations d'écoulement sur des modèles représentatifs d'un gisement pétrolier sont généralement coûteuses en temps de calcul. Une pratique courante en ingénierie de réservoir consiste à remplacer ces simulations par une approximation mathématique, un méta-modèle. La méta-modélisation peut fortement réduire le nombre de simulations nécessaires à l'analyse de sensibilité, le calibrage du modèle, l'estimation de la production, puis son optimisation.

Cette thèse porte sur l'étude de méta-modèles utilisant des simulations réalisées à différents niveaux de précision, par exemple pour des modèles de réservoir avec des maillages de résolutions différentes. L'objectif est d'accélérer la construction d'un méta-modèle prédictif en combinant des simulations coûteuses avec des simulations rapides mais moins précises. Ces méta-modèles multi-fidélité, basés sur le co-krigeage, sont comparés au krigeage pour l'approximation de sorties de la simulation d'écoulement. Une analyse en composantes principales peut être considérée afin de réduire le nombre de modèles de krigeage pour la méta-modélisation de sorties vectorielles (réponses dynamiques et carte de propriétés). Une extension de cette méthode à un cadre multi-fidélité est proposée. Ces méthodes peuvent aussi être utilisées pour améliorer la méta-modélisation de la fonction objectif, une fonction représentant l'écart entre les données dynamiques et les réponses simulées, que l'on cherche à minimiser afin de calibrer les modèles de réservoir (calage d'historique). Des algorithmes de planification séquentielle d'expériences sont finalement proposés pour accélérer la méta-modélisation et tirer profit d'une approche multi-fidélité. Les différentes méthodes introduites sont testées sur deux cas synthétiques inspirés des benchmarks PUNQ-S3 et Brugge.

**Mots clés :** Krigeage, Co-krigeage multi-fidélité, Planification séquentielle, Calage d'historique, Fonction objectif, Analyse en composantes principales.

## Abstract

Performing flow simulations on numerical models representative of oil deposits is usually a time-consuming task in reservoir engineering. The substitution of a meta-model, a mathematical approximation, for the flow simulator is thus a common practice to reduce the number of calls to the flow simulator. It permits to consider applications such as sensitivity analysis, history-matching, production estimation and optimization.

This thesis is about the study of meta-models able to integrate simulations performed at different levels of accuracy, for instance on reservoir models with various grid resolutions. The goal is to speed-up the building of a predictive meta-model by balancing few expensive but accurate simulations, with numerous cheap but approximated ones. Multi-fidelity meta-models, based on co-kriging, are thus compared to kriging meta-models for approximating different flow simulation outputs. To deal with vectorial outputs without building a meta-model for each component of the vector, the outputs can be split on a reduced basis using principal component analysis. Only a few meta-models are then needed to approximate the main coefficients in the new basis. An extension of this approach to the multi-fidelity context is proposed. In addition, it can provide an efficient meta-modelling of the objective function when used to approximate each production response involved in the objective function definition. The proposed methods are tested on two synthetic cases derived from the PUNQ-S3 and Brugge benchmark cases. Finally, sequential design algorithms are introduced to speed-up the meta-modeling process and exploit the multi-fidelity approach.

**Keywords:** Kriging, Multi-fidelity co-kriging, Sequential design, History matching, Objective function, Principal component analysis.