



**HAL**  
open science

# Pavages de la droite réelle, du demi-plan hyperbolique et automorphismes du groupe libre

Björn Monson

► **To cite this version:**

Björn Monson. Pavages de la droite réelle, du demi-plan hyperbolique et automorphismes du groupe libre. Mathématiques générales [math.GM]. Université Côte d'Azur, 2017. Français. NNT : 2017AZUR4060 . tel-01622333

**HAL Id: tel-01622333**

**<https://theses.hal.science/tel-01622333>**

Submitted on 24 Oct 2017

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THÈSE DE DOCTORAT

Présentée en vue de l'obtention du grade de

**Docteur en Mathématiques**

d'Université Côte d'Azur

par

**Björn Monson**

---

## PAVAGES DE LA DROITE RÉELLE, DU DEMI-PLAN HYPERBOLIQUE ET AUTOMORPHISMES DU GROUPE LIBRE

---

Dirigée par François Gautero,  
co-encadrée par Thierry Coulbois  
Soutenue le 17 juillet 2017

sur les avis des rapporteurs :

Michael Heusener, Professeur, Université de Clermont-Ferrand et  
Samuel Petite, Maître de Conférence HDR, Université de Picardie

Devant le jury composé de :

Nicolas Bédaride	Maître de Conférence HDR, Université d'Aix-Marseille	<i>Examineur</i>
Indira Chatterji	Professeur, Université de Nice	<i>Examinatrice</i>
Pallavi Dani	Professeur, Louisiana State University	<i>Examinatrice</i>
François Gautero	Professeur, Université de Nice	<i>Directeur</i>
Hervé Oyono-Oyono	Professeur, Université de Metz	<i>Président du jury</i>
Samuel Petite	Maître de Conférence HDR, Université de Picardie	<i>Rapporteur</i>



## Remerciements

Pour moi, neuf années consécutives à l'Université de Nice se terminent par ce manuscrit de thèse. Je souhaiterais dire merci à toutes les personnes extraordinaires que j'ai rencontrées durant cette période très riche de ma vie.

Ma première pensée revient à mon Directeur de thèse, François Gautero, qui m'a fait découvrir les systèmes dynamiques sous l'angle des automorphismes de groupes libres et des espaces de pavages. François a toujours été extrêmement disponible pour moi et m'a laissé la liberté de m'aventurer dans certains chemins mathématiques par moi-même. Il a enfin relu et aidé à la correction de ce manuscrit avec une énergie et une patience incroyable. Pour tout cela, je lui adresse mes plus sincères remerciements.

Je voudrais remercier Nicolas Bédaride, Indira Chatterji, Hervé Oyono-Oyono et Dani Pallavi de me faire l'honneur d'être membre de mon jury en cette période estivale. Je remercie en particulier Michael Heusener et Samuel Petite d'avoir rapporté cette thèse ainsi que les nombreuses remarques et corrections qu'ils y ont apportées. Michael Heusener m'a très gentiment accueilli à Clermont-Ferrand pour que je puisse exposer mes résultats et améliorer ce manuscrit. Samuel Petite m'a réellement aidé dans l'avancement de cette thèse, tout d'abord grâce à ses travaux que j'ai étudiés dès mon stage de Master 2, puis grâce à nos discussions et ses conseils toujours avisés.

De nombreuses personnes ont compté dans ma formation mathématique, je voudrais leur rendre ici un hommage tout particulier. Je souhaiterais remercier en premier lieu Georges Elencwajg le plus pudiquement possible même si cela est un exercice délicat. Georges est un professeur exceptionnel qui fait partie de ceux qui m'ont donné envie de poursuivre en Mathématiques après le Master. C'est une personne qui a su me passionner lors de ses cours d'algèbre, que nous poursuivions longuement en dehors des heures régulières. Il m'a ébloui par sa culture, sa générosité et tout simplement par son humanité.

Je remercie Sorin Dumitrescu, dont la passion et le talent de pédagogue m'ont conduit à aimer la géométrie et vouloir faire ma thèse sur ce thème.

Mes remerciements s'adressent également à Florent Berthelin, qui dirigeait la préparation à l'agrégation lorsque j'ai passé ce concours. Les bons résultats de cette formation sont dûs en grande partie à l'attention qu'il porte à chacun des candidats et à l'ambiance studieuse qu'il y instille.

Une grande partie de ces trois dernières années s'est déroulée pour moi, dans le bureau 801 et en colocation, en compagnie de deux amis à qui je souhaiterais exprimer toute ma gratitude et mes remerciements. Dans un premier temps, je remercie Brice Le Grignou, avec qui j'ai partagé d'excellents moments durant les deux pre-

mières années de ma thèse. Brice est une force tranquille doublée d'une intelligence rare qui est un modèle pour moi. Je voudrais lui dire combien je suis heureux de l'avoir cotoyé. Puis, Olivier Bégassat, a pris le relais de Brice. Je le remercie ici et lui témoigne toute mon amitié. Olivier m'a apporté beaucoup de son soutien durant cette dernière année de thèse, qui est la plus difficile des trois, et je voudrais lui témoigner à quel point il est pour moi un mathématicien brillant et passionné. Je veux remercier également Armand et Jean-Baptiste avec qui j'ai partagé le bureau 801 et des moments très conviviaux.

Je veux remercier ici, tous les autres doctorants et chercheurs que j'ai pu rencontrer durant mes trois années au Laboratoire Dieudonné. J'adresse un merci en particulier à Charles pour ses "soirées chez Charles", Arthur pour nos discussions sur la littérature et le christianisme, Rinel pour m'avoir aidé à organiser le colloque des doctorants, Reine pour sa gentillesse et son énergie inépuisable pour organiser des événements qui font que la vie de doctorant à Nice est si agréable, David L. pour tous ces moments sportifs et intellectuels partagés ensemble, Martin pour sa gentillesse et sa capacité d'être à l'écoute, Laurence pour m'avoir toujours accompagné au GDR ciné, Marcella pour détenir "le câble Mac", Julie pour organiser tant de goûters et le colloque des doctorants, Luis pour sa tequilla, David M. pour son aide en Latex, Giulia et Victor pour avoir organisé le séminaire des doctorants. Je n'oublie pas les anciens, merci à Bastien, Eduard, Julien, Mélisande, Nathalie. Enfin je remercie Loïc et Nicolas pour leur amitié infaillible depuis cette période inoubliable de Castagniers. Je n'oublie pas d'adresser mes remerciements à Dan Rust pour nos échanges mathématiques fructueux et son logiciel Grout qui m'a bien servi.

Je remercie également le personnel administratif que j'ai rencontré durant ma thèse, sans qui le Laboratoire Dieudonné ne pourrait pas fonctionner, qui sont d'une grande gentillesse et d'un grand professionnalisme. Merci à Angélique, Amandine, Jean-Louis, Jean-Marc, Roland, Victoria et Isabelle De Angelis.

Je veux adresser mes remerciements à ma famille sur qui j'ai pu compter toutes ces années et qui m'a permis de m'épanouir et de devenir la personne que je suis aujourd'hui. Je veux signifier à mes grands-parents André et Marie-Rose à quel point ils comptent pour moi et leur adresser le plus grand des mercis. Je ne pourrais jamais leur rendre tout ce qu'ils m'ont donné. À minima, je leur dédie cette thèse.

Pour finir, je voudrais dire merci à Éléonore qui m'a toujours épaulé dans les moments tant joyeux que difficiles.



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>9</b>
1.1	Des automorphismes du groupe libre vers les pavages . . . . .	9
1.2	Principaux résultats obtenus . . . . .	15
<b>2</b>	<b>Outils et objets d'études</b>	<b>18</b>
2.1	Suspensions et limites projectives . . . . .	18
2.1.1	Suspensions . . . . .	18
2.1.2	Limites projectives . . . . .	19
2.2	Espaces de pavages . . . . .	24
2.3	Substitutions . . . . .	28
2.4	Automorphismes de groupe libre et graphes . . . . .	31
2.4.1	Groupes libres et automorphismes externes . . . . .	32
2.4.2	Graphes . . . . .	33
2.4.3	Représentants topologiques et efficaces . . . . .	35
2.4.4	Graphe de Whitehead . . . . .	38
2.5	Transformations de représentants efficaces . . . . .	40
2.5.1	Homotopies de valence 2 . . . . .	40
2.5.2	Plis . . . . .	41
2.5.3	Écrasement de forêts invariantes . . . . .	42
2.5.4	Mouvements élémentaires et connexité sur l'ensemble des re- présentants efficaces . . . . .	42
2.5.5	Deux lemmes techniques . . . . .	43
<b>3</b>	<b>Des substitutions et automorphismes aux pavages de la droite réelle</b>	<b>46</b>
3.1	Des substitutions aux pavages . . . . .	46
3.1.1	Pavages substitutifs . . . . .	46
3.1.2	Complexe de Barge-Diamond . . . . .	48
3.2	Des automorphismes aux substitutions . . . . .	52
3.2.1	Définitions . . . . .	52
3.2.2	Propriétés dynamiques . . . . .	54
3.2.3	Comparaison entre graphes de Whitehead et complexes de Barge-Diamond . . . . .	54
3.3	Des automorphismes IWIP aux pavages apériodiques de la droite réelle	56
3.3.1	Espace de pavages $\Omega_{\mathbb{R}}(f, G)$ et limite projective . . . . .	59
3.3.2	Une conjugaison topologique de $\Omega_{\mathbb{R}}(f, G)$ . . . . .	59
<b>4</b>	<b>Laminations</b>	<b>61</b>
4.1	Laminations pavables et mesures invariantes . . . . .	61
4.2	Laminations algébriques sur $F_{\mathbb{N}}$ . . . . .	64
4.2.1	Bord du groupe libre et mots infinis . . . . .	64
4.2.2	Laminations algébriques et réalisations géodésiques . . . . .	66

4.3	Lamination de Bestvina-Feighn-Handel . . . . .	67
4.3.1	La lamination de Bestvina-Feighn-Handel comme lamination algébrique . . . . .	67
4.3.2	La construction originelle de Bestvina-Feighn-Handel . . . . .	67
4.3.3	Mouvements élémentaires et lamination de Bestvina-Feighn-Handel . . . . .	68
<b>5</b>	<b>Equivalences topologiques entre espaces de pavages induits par un représentant efficace primitif</b> . . . . .	<b>72</b>
5.1	Application induite par un mouvement élémentaire . . . . .	72
5.1.1	Liens entre $X_{\sigma_f}$ et $\Omega_{\mathbb{R}}(f, G)$ . . . . .	72
5.2	Propriétés de l'application induite par un mouvement élémentaire . . . . .	74
5.3	Conclusion . . . . .	76
5.3.1	Le théorème d'équivalence topologique . . . . .	76
5.4	Non trivialité du type topologique des espaces $\Omega_{\mathbb{R}}(f, G)$ . . . . .	78
5.4.1	Différence entre l'équivalence faible et équivalence au sens des espaces de pavages . . . . .	79
5.5	Une application . . . . .	80
<b>6</b>	<b>Automorphismes du groupe libre et pavages du plan hyperbolique</b> . . . . .	<b>82</b>
6.1	Généralités en géométrie hyperbolique . . . . .	82
6.2	Pavage de $\mathbb{H}^2$ et représentant efficace d'un automorphisme IWIP . . . . .	83
6.2.1	Un espace de pavages pour les horizontales de $\mathbb{H}^2$ . . . . .	83
6.2.2	Une famille de pavages de $\mathbb{H}^2$ et l'espace $\Omega_{GA}(f, G)$ . . . . .	84
6.2.3	De l'espace $\Omega_{\mathbb{R}}(f, G)$ à l'espace $\Omega_{GA}(f, G)$ . . . . .	86
6.2.4	Propriétés de l'espace $\Omega_{GA}(f, G)$ . . . . .	88
6.2.5	L'espace $\Omega_{GA}(\phi)$ . . . . .	94
6.3	L'espace de pavages $\Omega_{GA}(f, G)$ est une suspension . . . . .	94
6.4	Espace de pavages $\Omega_{GA}(f, G)$ et limite projective . . . . .	95
6.5	Pavage polygonal induit par un représentant $(f, G)$ . . . . .	96
<b>7</b>	<b>Structures lisses sur <math>\Omega_{\mathbb{R}}(f, G)</math> et <math>\Omega_{GA}(f, G)</math></b> . . . . .	<b>98</b>
7.1	Généralités sur les variétés branchées . . . . .	98
7.1.1	Structure lisse sur un graphe . . . . .	98
7.1.2	Préservation de la structure lisse par une application de graphe . . . . .	99
7.2	Structure lisse sur $\Omega_{\mathbb{R}}(f, G)$ . . . . .	99
7.2.1	Structure lisse du complexe de Barge-Diamond . . . . .	100
7.2.2	Préservation de la structure lisse par l'application induite par une substitution . . . . .	100
7.2.3	Conclusion . . . . .	101
7.3	Structure lisse sur $\Omega_{GA}(f, G)$ . . . . .	101
7.3.1	Surfaces branchées . . . . .	102
7.3.2	Préservation de la structure lisse d'une surface branchée . . . . .	102

7.3.3	Structure lisse préservée sur la suspension du complexe de Barge-Diamond . . . . .	103
7.3.4	Conclusion . . . . .	105
<b>8</b>	<b>Exemples</b>	<b>106</b>
8.1	Un exemple de substitution préservant l'orientation . . . . .	106
8.2	Un exemple de substitution qui ne préserve pas l'orientation . . . . .	110
<b>9</b>	<b>Perspectives</b>	<b>113</b>
9.1	Type topologique et classes de conjugaison des automorphismes IWIP	113
9.2	Oubli de l'orientation . . . . .	113
9.3	Cohomologie de Čech . . . . .	115
	<b>Table des figures</b>	<b>116</b>
	<b>Références</b>	<b>117</b>



# 1 Introduction

L'objet de ce travail de thèse est d'étudier une classe d'automorphismes du groupe libre à l'aide d'outils provenant de la topologie et de la dynamique des pavages.

## 1.1 Des automorphismes du groupe libre vers les pavages

Nous introduisons dans un premier temps la notion de groupe libre qui intervient à plusieurs égards tant en théorie des groupes qu'en géométrie. Les groupes libres forment la classe de groupes de type fini la plus simple en terme de relations entre éléments. En effet, un groupe libre sur un ensemble  $S$ , noté  $F(S)$  (ou  $F_N$  si  $S$  est de cardinal  $N$ ), est caractérisé par la propriété universelle suivante :

Pour tout groupe  $G$  et toute application  $\phi : S \rightarrow G$ , il existe un unique morphisme de groupe de  $F(S)$  dans  $G$  prolongeant l'application  $\phi$ .

À partir de tout groupe  $G$ , nous pouvons générer un autre groupe qui est le groupe de ses automorphismes  $Aut(G)$ . Le groupe  $G$  agit sur lui-même par automorphismes intérieurs :

$$\begin{aligned} G \times G &\rightarrow G \\ (g, h) &\mapsto g.h.g^{-1} \end{aligned}$$

Si  $Inn(G)$  désigne l'ensemble des automorphismes du groupe  $G$  de la forme  $w \mapsto gwg^{-1}$ ,  $Inn(G)$  est un sous-groupe distingué de  $Aut(G)$ . Dans le cas du groupe libre  $F_N$ , le groupe des automorphismes intérieurs  $Inn(F_N)$  est isomorphe au groupe libre lui-même car son centre  $Z(F_N)$  est trivial. Le groupe quotient de  $Aut(G)$  par cette action s'appelle le groupe des *automorphismes extérieurs ou externes* et est noté  $Out(G)$ . Lorsque  $G$  est un groupe symétrique  $S_n$ , c'est un résultat bien connu pour  $n \neq 6$ , que  $Out(S_n) = \{1\}$ . Pour des groupes infinis de type-fini, la structure du groupe des automorphismes externes est bien plus complexe. Ainsi, nous nous intéressons dans cette thèse au groupe  $Out(F_N) = Aut(F_N)/Inn(F_N)$  des automorphismes extérieurs du groupe libre  $F_N$ .

Indépendamment d'une étude purement algébrique des groupes libres, les automorphismes d'un groupe libre ont été étudiés au début du XX<sup>ème</sup> siècle par J. Nielsen en topologie algébrique (voir [Bog08] pour une introduction à la théorie algébrique des groupes libres). La topologie algébrique est la branche des mathématiques qui s'intéresse à attacher à un espace topologique  $X$  des objets algébriques (notamment des groupes) invariants par déformation continue de cet espace. Le premier objet qui a suscité historiquement l'émergence de la topologie algébrique est le *groupe fondamental* d'un espace  $X$  noté  $\pi_1(X)$ . Il s'agit du groupe introduit au début du XX<sup>ème</sup> siècle par Henri Poincaré formé par l'ensemble des lacets de  $X$  originaux d'un point  $v \in X$  quotienté par la relation d'homotopie. Une illustration de la fécondité de ce point de vue, est le fait que toute surface compacte (sans bord)

orientable  $S$  se caractérise complètement, à homéomorphisme près, par son groupe fondamental  $\pi_1(S)$ .

Les groupes libres interviennent en topologie algébrique dans l'étude d'une famille d'espaces appelés surface à bord. Une surface compacte à bord  $S_{g,b}$  de genre  $g$  à  $b$  composantes de bord (voir un exemple à la figure 1) se rétracte par déformation sur un graphe  $\Gamma \subset S_{g,b}$ . Le groupe fondamental  $\pi_1(S_{g,b}) \cong \pi_1(\Gamma)$  est isomorphe à un groupe libre  $F_N$  où  $N = 1 - \chi(\Gamma)$  et  $\chi(\Gamma)$  est la caractéristique d'Euler-Poincaré du graphe  $\Gamma$ . Ainsi, un homéomorphisme  $h : S_{g,b} \rightarrow S_{g,b}$  induit en homotopie un élément  $[h_\star] = [\varphi]$  de  $Out(F_N)$ . On appelle un tel automorphisme du groupe libre un automorphisme *géométrique*. On pourra consulter l'article [BH95] pour avoir un aperçu sur les automorphismes géométriques. Tous les automorphismes du groupe libre  $F_N$  ne sont pas géométriques (voir [Sta82] pour les premiers exemples ) et ils sont même rares en un certain sens (voir à cet effet l'article [Ger83] ). Par exemple, si on se donne  $\varphi = h_\star : F_N \rightarrow F_N$  un automorphisme géométrique, lorsque l'entropie topologique du système dynamique  $(\varphi, F_N)$  est égale à  $\lambda$  alors l'entropie du système dynamique  $(\varphi^{-1}, F_N)$  vaut  $\frac{1}{\lambda}$ . On peut vérifier que l'automorphisme :

$$\begin{aligned} \tau : F_3 &\longrightarrow F_3 \\ a &\longmapsto ab \\ b &\longmapsto ac \\ c &\longmapsto a \end{aligned}$$

ne satisfait pas cette condition et ne peut donc pas être géométrique (voir le dernier chapitre de [Hil07]). Ainsi, l'étude du groupe  $Out(F_N)$  ne se résume pas à celle du groupe des automorphismes du groupe libre géométriques.

Le fait d'étudier l'application induite par l'homéomorphisme  $h : S_{g,b} \rightarrow S_{g,b}$  sur le graphe  $\Gamma \subset S_{g,b}$  peut s'avérer fructueux pour extraire des informations sur l'automorphisme  $h_\star : F_N \rightarrow F_N$ . John Stallings est le premier à avoir introduit les graphes dans l'étude des endomorphismes de groupe. Même lorsque l'automorphisme  $\varphi \in Aut(F_N)$  n'est pas géométrique, il existe toujours un graphe  $\Gamma$  et une équivalence d'homotopie  $f : \Gamma \rightarrow \Gamma$  tels que l'automorphisme  $\varphi$  soit induit en homotopie par  $f$ , c'est-à-dire  $f_\star = \varphi$ . On dit alors que  $f : \Gamma \rightarrow \Gamma$  est un représentant de l'automorphisme  $\varphi$ . Dans l'article [BH92], les auteurs développent un algorithme prenant en entrée le représentant topologique canonique d'un automorphisme de groupe libre  $F_N$  sur le bouquet de cercles  $R_N$  et fournit en sortie un représentant topologique  $f : \Gamma \rightarrow \Gamma$  de l'automorphisme  $\varphi$  qui minimise l'entropie. Les résultats qu'ils obtiennent dans cet article permettent de donner une démonstration synthétique dans l'article [BH95], de la classification du groupe  $MCG(S)$  des classes d'isotopie d'homéomorphisme de la surface  $S$  introduit par William Thurston. On pourra se référer au livre [FLP12] pour tout savoir des travaux de W. Thurston sur le groupe  $MCG(S)$ .

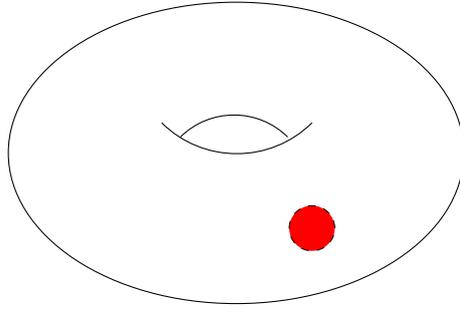


FIGURE 1 – Tore à une composante de bord  $S_{1,1}$

Plus précisément, il existe une équivalence d'homotopie  $f' : \Gamma' \longrightarrow \Gamma'$  d'un graphe et une filtration  $\emptyset = \Gamma_0 \subset \Gamma_1 \subset \dots \subset \Gamma_s = \Gamma'$  telles que pour tout  $i \in \{0, \dots, s-1\}$ , l'équivalence d'homotopie  $f'$  en restriction à l'adhérence de chaque strate  $\Gamma_{i+1} \setminus \Gamma_i$  est soit à croissance exponentielle, soit à croissance polynomiale (voir le chapitre 5 de [BH92]). Un tel représentant est dit *relativement efficace*. Le cas des automorphismes *irréductibles à puissances irréductibles* dit *IWIP* (irreducible with irreducible powers) nous intéresse plus particulièrement. Un automorphisme irréductible à puissances irréductibles (également appelé *fully irreducible* en anglais) est un automorphisme externe  $[\phi] \in \text{Out}(F_N)$  tel qu'il n'existe pas  $k \in \mathbb{N}$  et un sous-facteur libre  $H$  de  $F_N$  tel que  $\phi^k([H]) = [H]$  où  $[H]$  désigne l'ensemble des classes de conjugaison de  $H$ . Ces automorphismes admettent un type de représentant topologique dit *efficace*. Cela signifie que la filtration de graphes est composée d'une unique strate à croissance exponentielle.

A l'aide de cette notion de représentant relativement efficace, M. Bestvina, M. Feigh et M. Handel montrent dans l'article [BFH97] l'alternative de Tits pour le groupe  $\text{Out}(F_N)$  des automorphismes extérieurs du groupe libre  $F_N$  dont nous précisons l'énoncé ci-dessous.

**Théorème** ([BFH97]). *Soit  $H$  un sous-groupe de  $\text{Out}(F_N)$  contenant un automorphisme IWIP  $\varphi$  d'ordre infini. Soit le sous-groupe  $H$  possède un sous-groupe isomorphe au groupe libre  $F_2$ , soit il est virtuellement cyclique.*

Tout comme la topologie algébrique tente de construire des ponts entre espaces topologiques et groupes, il peut être fécond d'attacher à un groupe abstrait un espace géométrique pour en extraire des propriétés intéressantes. Par exemple, en exploitant le fait qu'un groupe  $G$  est libre si et seulement s'il agit librement et sans inversion d'arêtes sur un arbre simplicial  $T$ , nous pouvons en déduire le théorème de Nielsen-Schreier : tout sous-groupe  $\Gamma'$  d'un groupe libre  $\Gamma$  est libre.

Nous adoptons cette optique d'associer un espace géométrique à un objet algébrique, en construisant des *pavages* reliés à des éléments de  $\text{Out}(F_N)$ . Un pavage  $T$  d'un espace métrique  $X$ , où  $X$  désigne  $\mathbb{R}^d$  muni de sa distance euclidienne ou bien

$\mathbb{H}^2$  muni de la distance  $ds^2 = \frac{dx^2+dy^2}{y^2}$ , est la donnée d'un ensemble dénombrable de compacts  $T = (t_i)_{i \in I}$  appelés *tuiles* tel que :

- les tuiles recouvrent l'espace :  $\cup_{i \in I} t_i = X$ .
- deux tuiles distinctes s'intersectent au plus sur leur bord :  $\forall i, j \in I, i \neq j \implies \overset{\circ}{t}_i \cap \overset{\circ}{t}_j = \emptyset$
- chaque tuile est homéomorphe à une boule :  $\forall i \in I, t_i \cong B_X(0, 1)$ .

Donnons nous maintenant un groupe d'isométrie  $\mathbb{G}$  de l'espace  $X$  ayant une structure de groupe topologique pour la topologie de la convergence uniforme sur tout compact et un point  $O$  distingué dans  $X$  appelé *origine*. Il est possible de définir une action du groupe  $\mathbb{G}$  à droite sur l'ensemble des pavages de  $X$  en faisant agir  $\mathbb{G}$  sur les tuiles. Ainsi, soit  $g \in \mathbb{G}$  et  $T$  un pavage de  $X$ , on définit  $T.g$  comme l'ensemble des tuiles  $(g^{-1}(t_i))_{i \in I}$  qui forme encore un pavage de  $X$ . il est intéressant de se pencher sur l'ensemble des pavages  $T.\mathbb{G}$ . Lorsque le stabilisateur de  $T$  pour l'action de  $\mathbb{G}$  est sous-groupe co-compact de  $\mathbb{G}$  on dit que le pavage  $T$  est fortement périodique. Un exemple de pavage fortement périodique de  $\mathbb{R}^2$  pour le groupe des translations est le pavage par des carrés unités qui se recollent côté contre côté à la manière d'un carrelage. L'ensemble  $T.\mathbb{G}$  peut être muni d'une distance notée  $\delta$  dite *distance des pavages*. Deux éléments  $T_1$  et  $T_2$  de l'ensemble  $T.\mathbb{G}$  sont proches pour la distance  $\delta$ , si il existe deux éléments  $g_1, g_2$  dans  $\mathbb{G}$  proches de l'identité font coïncider  $T_1.g_1$  et  $T_2.g_2$  sur un grand ouvert autour de l'origine. Cette distance munit donc  $T.\mathbb{G}$  d'une structure d'espace métrique. Ainsi, dans l'article [Rud89], l'auteur introduit un espace topologique associé à un pavage  $T$  de  $X$  appelé *espace de pavages* noté  $\Omega_{\mathbb{G}}(T)$ . Il s'agit de la complétion métrique pour la distance  $\delta$  de l'espace  $T.\mathbb{G}$  qui est encore un ensemble de pavages de  $X$ . On pourra se référer à l'article [EAR04] pour avoir un aperçu de la richesse de cette notion dans l'étude des pavages. La grande majorité des pavages étudiés par le biais des espaces de pavages aujourd'hui sont apériodiques. Un pavage est *faiblement apériodique* (respectivement *fortement apériodique*) si l'action de  $\mathbb{G}$  sur l'espace  $\Omega_{\mathbb{G}}(T)$  n'admet pas d'orbite compacte (respectivement est libre).

Dans les sections 1 à 4 de cette thèse nous manipulons la classe particulière des pavages dits *substitutifs*, une famille de pavages de  $\mathbb{R}^d$  extrêmement étudiée (voir par exemple le mémoire [GS86] et [Sen95]) car elle offre de nombreux exemples de pavages apériodiques simples à construire. Les pavages apériodiques qui nous intéresseront possèdent des motifs qui se répètent et ne sont laissés stables par aucun élément du groupe de symétries donné. Un exemple très connu est celui du pavage de *Penrose* (voir [Pen80] l'article fondateur). Les espaces de pavages des pavages substitutifs de  $\mathbb{R}^d$  sont bien maîtrisés et l'article [AP98] offre un panorama relativement complet de l'apport de la topologie des espaces de pavages à la compréhension des pavages substitutifs.

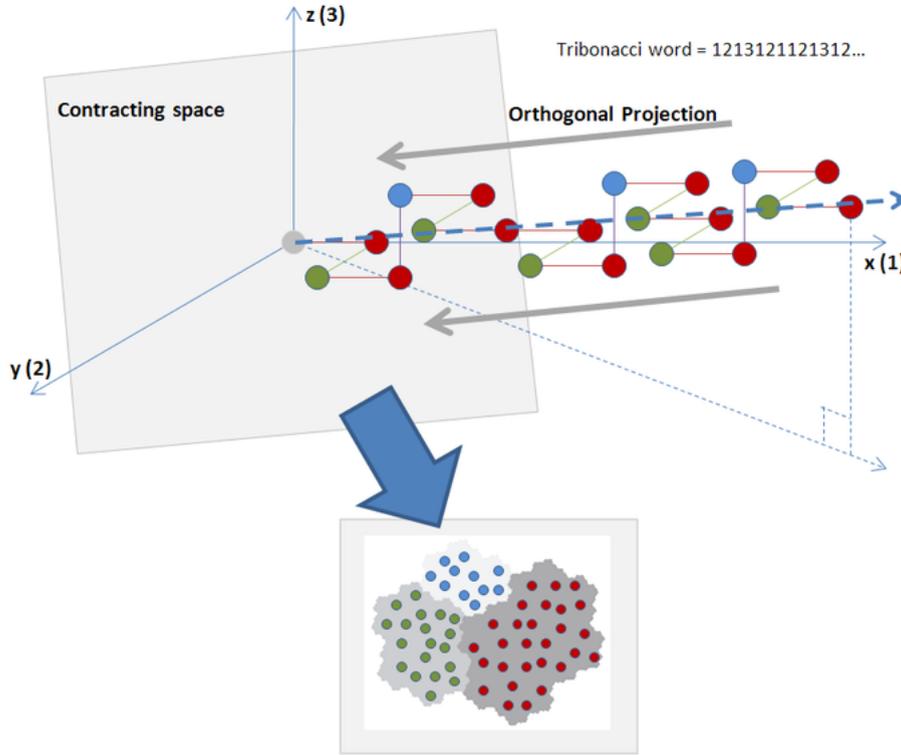


FIGURE 2 – Construction de la fractale de Rauzy  $\mathcal{T}_\tau$

Formellement, un pavage substitutif est la donnée d'un espace  $X$  à paver et d'un ensemble de tuiles ainsi qu'un application appelée *substitution*. Si on se donne un alphabet à  $N$  lettres  $\mathcal{A} = \{a_1, \dots, a_N\}$ ,  $\mathcal{A}^*$  le monoïde libre sur  $\mathcal{A}$  et  $\epsilon$  le mot vide de  $\mathcal{A}^*$ . Une *substitution* est une application  $\sigma : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}^*$  (par propriété universelle la donnée de  $\sigma$  est équivalente à la donnée d'un morphisme sur le monoïde  $\mathcal{A}^*$ ). Comme le monoïde  $\mathcal{A}^*$  s'inclut par propriété universelle dans le groupe libre  $F(\mathcal{A})$ , un problème naturel est de déterminer si le morphisme de monoïde induit par  $\sigma$  s'étend en un automorphisme du groupe libre  $F(\mathcal{A})$ . Afin de visualiser une substitution très classique, donnons-nous l'exemple suivant :

**Exemple 1.1** (Substitution de Fibonacci). Soit  $\mathcal{A} = \{a, b\}$  un alphabet à deux lettres. La substitution de Fibonacci est l'application  $\sigma$  suivant :

$$\begin{aligned} \sigma : \mathcal{A} &\longrightarrow \mathcal{A}^* \\ a &\longmapsto ab \\ b &\longmapsto a \end{aligned}$$

Concernant ce problème nous pouvons citer le mémoire [Ber02], dans lequel Valérie Berthé expose quelques résultats sur ces substitutions dites *inversibles* dont le prolongement est un automorphisme du groupe libre. Dans le cas d'un alphabet à

deux lettres, la propriété d'inversibilité d'une substitution est équivalente à l'existence d'un mot infini  $U \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$  tel que  $\sigma(U)$  soit un mot *sturmien*. Dans ce même opuscle, l'auteure pose la question de savoir si une fractale de Rauzy (voir l'article fondateur [Rau82] pour de plus amples détails et la figure 2 pour un exemple) construite à partir d'une substitution inversible possède des propriétés topologiques particulières.

Suivant cette direction, les auteurs de l'article [ABHS06] construisent dans  $\mathbb{R}^2$  des fractales de Rauzy à partir de représentants efficaces  $f : G \rightarrow G$  d'automorphismes IWIP ayant une matrice d'incidence dont la valeur propre  $\lambda_f$  de *Perron-Frobenius* est un nombre de *Pisot*. Nous rappelons qu'un nombre de *Pisot* est un entier algébrique de module strictement plus grand que 1 dont tous les conjugués sont de module strictement inférieur à 1. Une fractale de Rauzy est composée de plusieurs tuiles à bord fractal dont l'union  $\mathcal{T}_\sigma$  est appelée *tuile centrale*. Cette fractale possède la propriété remarquable de pouvoir paver le plan périodiquement.

En s'intéressant aux propriétés de la tuile *centrale*  $\mathcal{T}_\sigma$ , les auteurs de [ABHS06] montrent le résultat suivant qui répond en partie aux questions soulevées par le mémoire [Ber02] :

**Théorème** ([ABHS06]). *Soit  $[\varphi] \in \text{Out}(F_N)$  un automorphisme extérieur IWIP dont le facteur d'expansion  $\lambda$  est un nombre de Pisot de degré  $d$ . Si l'automorphisme  $\varphi$  satisfait une condition supplémentaire dite de coïncidence forte, alors il existe un espace symbolique  $L_\varphi^+$  muni de son action par le décalage  $S$  est un système dynamique  $(L_\varphi^+, S)$  admettant une représentation géométrique  $(\mathcal{T}_\varphi, \text{Tr})$  où  $\mathcal{T}_\varphi$  est une fractale de Rauzy de  $\mathbb{R}^d$  et  $\text{Tr}$  une translation par morceaux.*

Dans cette thèse, nous explorons ce point de vue à l'aide d'autres pavages. Plus précisément, nous construisons des pavages du plan hyperbolique  $\mathbb{H}^2$  à partir de représentants efficaces irréductibles d'éléments du groupe  $\text{Out}(F_N)$ .

Les pavages du plan hyperbolique apparaissent naturellement dans le cadre des surfaces hyperboliques. En effet, une surface hyperbolique fermée  $S_g$  de genre  $g \geq 2$  admet pour revêtement universel le plan hyperbolique  $\mathbb{H}^2$ . Il existe un sous-groupe discret d'isométries  $\Gamma_g$  de  $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$  tel que  $S_g$  soit homéomorphe au quotient  $\mathbb{H}^2/\Gamma_g$ . Il existe un domaine fondamental  $\mathcal{D}_g$  pour l'action de  $\Gamma_g$  sur  $\mathbb{H}^2$  qui donne lieu à un pavage périodique du plan hyperbolique par des copies de la tuile  $\mathcal{D}_g$ . À l'opposé de l'exemple précédent, nous construisons dans cette thèse des pavages de  $\mathbb{H}^2$  qui sont aperiodiques pour le groupe des transformations affines  $GA$ .

Durant les 10 dernières années, les pavages du plan hyperbolique ont été étudiés de manière soutenue. Nous finissons cet état des lieux en exposant les résultats majeurs dans lesquels nous souhaitons inscrire ce travail de thèse.

En 2005, dans l'article [GS05], Chaim Goodman-Strauss fournit un exemple de jeu de tuiles du plan hyperbolique  $\mathbb{H}^2$  qui ne peut paver cet espace uniquement de manière fortement apériodique. Ce problème est équivalent à la décidabilité du problème du domino (voir [Ber66]) dans  $\mathbb{R}^d$  mais pas dans le plan hyperbolique. Pour approfondir ces questions de décidabilité, nous pourrions consulter l'article [Kar12] ou [Rob78] qui en dépeint un panorama.

Dans l'article [Pet06b], Samuel Petite démontre l'existence de mesures invariantes pour l'action du groupe des isométries affines du plan hyperbolique sur le système dynamique  $(\Omega_{GA}(T), GA)$  en établissant une correspondance entre les mesures  $GA$ -invariantes et les mesures harmoniques sur les  $GA$ -solénoïdes. Dans ce même travail, il construit pour tout entier  $r \geq 1$  un pavage fortement apériodique et répétitif  $T_r$  du plan hyperbolique  $\mathbb{H}^2$  dont l'espace de pavages  $\Omega_{GA}(T_r)$  possède exactement  $r$  mesures de probabilité harmoniques ergodiques.

Conjointement, Samuel Petite et Hervé Oyono-Oyono étudient dans [OOP11] les  $C^*$ -algèbres attachées aux espaces de pavages du plan hyperbolique de type *Penrose* notés  $\Omega_{GA}(\mathcal{P}(w))$  décorés par une suite bi-infinie symbolique  $w = (w_i)_{i \in \mathbb{Z}}$  (voir le chapitre 1 de la thèse [Pet06a] pour plus de détails). L'étude des  $C^*$ -algèbres sur ces espaces leur permet de produire des invariants topologiques et géométriques de ces espaces. Ainsi, une de leur contribution majeure est la construction d'isomorphismes entre la cohomologie de Čech à coefficients dans  $\mathbb{Z}$  (voir le second chapitre de [Bre97]) et d'une certaine algèbre quotient des fonctions continues sur le système dynamique symbolique  $(X_w, S)$  à valeurs dans un certain anneau  $A$ . Ils obtiennent des résultats algébriques de même nature pour la  $K$ -théorie de l'espace  $\Omega_{GA}(\mathcal{P}(w))$ .

Enfin dans [BH13], Nicolas Bédaride et Arnaud Hilion se penchent sur la notion de pavages substitutifs du plan hyperbolique dont aucun exemple n'était connu jusqu'à présent. En dégagant la notion de substitution topologique, les auteurs parviennent à générer un tel pavage. Dans le plan hyperbolique il ne peut pas être construit à la manière des pavages de *Penrose* du plan euclidien comme le montrent les auteurs dans le théorème suivant :

**Théorème** ([BH13]). *Il n'existe pas de pavages substitutifs primitifs du plan hyperbolique  $\mathbb{H}^2$ .*

## 1.2 Principaux résultats obtenus

Dans nos travaux, nous associons une représentation géométrique à des représentants efficaces irréductibles  $(f, G)$  d'automorphismes IWIP  $\varphi$  du groupe libre  $F_N$ , puis nous nous focalisons sur les déformations de ces espaces induites par un changement de représentants de la même classe d'automorphismes  $[\varphi] \in \text{Out}(F_N)$ .

Notre point de départ est l'étude des pavages substitutifs de  $\mathbb{R}$  construits à partir

de la substitution double induite  $\sigma_f$  introduite dans l'article [ABHS06].

Les pavages de  $\mathbb{R}$  construits à l'aide de cette famille de substitutions sont tous apériodiques, il leur est donc attaché un espace de pavages noté  $\Omega_{\mathbb{R}}(f, G)$  non-torique.

Nous débiterons notre travail en exposant à la section 2 les principaux objets mis en jeu dans cette thèse. Une attention toute particulière sera donnée dans la section 4 à la description des laminations attractives d'un représentant efficace  $(f, G)$  d'un automorphisme IWIP de  $F_{\mathbb{N}}$  que l'on note  $L_{\text{BFH}}^2(f)$  ainsi que son espace de réalisations géodésiques  $\mathcal{G}(L_{\text{BFH}}^2(f))$ .

À l'aide d'un théorème de J. Los traitant de la connexité entre les représentants efficaces d'une même classe de conjugaison d'automorphismes IWIP (voir l'article [Los96]), nous démontrons que les espaces de pavages associés à des représentants efficaces irréductibles d'une même classe d'automorphisme externe  $[\varphi]$  sont homéomorphes. Grâce à ce théorème, nous définissons un espace de pavage canoniquement associé à un automorphisme IWIP du groupe libre.

Un des résultats majeurs de l'article [Los96] concerne le problème de conjugaison restreint à la classe des automorphismes IWIP : deux automorphismes IWIP  $\varphi$  et  $\psi$  sont conjugués dans  $\text{Out}(F_{\mathbb{N}})$  si et seulement si, à un homéomorphisme de graphe près, leurs ensembles de représentants efficaces sont égaux.

Ce raisonnement nous permettra d'obtenir de manière synthétique à la section 5 le théorème suivant :

**Théorème.** (5.12)

1. Soit  $(f, G), (f', G')$  deux représentants efficaces primitifs d'un même automorphisme extérieur IWIP. Alors  $\Omega_{\mathbb{R}}(f, G)$  et  $\Omega_{\mathbb{R}}(f', G')$  sont homéomorphes.

*On note  $\Omega_{\mathbb{R}}(\varphi)$  l'espace de pavages, indépendant à homéomorphisme près, attaché à un automorphisme extérieur IWIP  $[\varphi]$ .*

2. Soit  $\varphi$  et  $\psi$  deux automorphismes IWIP de  $F_{\mathbb{N}}$  conjugués dans  $\text{Out}(F_{\mathbb{N}})$ . Les espaces de pavages  $\Omega_{\mathbb{R}}(\varphi)$  et  $\Omega_{\mathbb{R}}(\psi)$  sont homéomorphes.

À l'aide de ce dernier théorème, nous répondons à une question ouverte de l'article [ABHS06] concernant la structure de certains représentants efficaces d'automorphismes externes IWIP.

Dans la suite de notre travail, nous construisons des pavages notés  $\mathcal{P}_{\mathbb{T}}$  du plan hyperbolique  $\mathbb{H}^2$  (voir la définition 6.12) à partir de l'orbite  $\{\mathcal{F}^k(\mathbb{T}) \mid k \in \mathbb{Z}\}$  où  $\mathbb{T}$  est un élément de l'espace  $\Omega_{\mathbb{R}}(f, G)$  et  $\mathcal{F}$  est l'application induite par  $f$  sur l'espace de pavages  $\Omega_{\mathbb{R}}(f, G)$ . Nous appelons  $\Omega_{\text{GA}}(f, G)$  l'union des espace de pavages  $\Omega_{\text{GA}}(\mathcal{P}_{\mathbb{T}})$ . Ces espaces de pavages possèdent la particularité de posséder une structure de suspension reflétant la dynamique de  $f$ . Dans les sections 6 et 7 nous avons dégagé un

ensemble de propriétés sur les pavages de la forme  $\mathcal{P}_T$  que nous formulons comme suit :

**Théorème** (6.21, 6.27, 6.20, 6.30, 6.32, 7.13). *Soit  $(f, G)$  un représentant efficace primitif d'un automorphisme IWIP du groupe libre  $F_N$ . Il existe un espace de pavages du plan hyperbolique noté  $\Omega_{GA}(f, G)$  muni d'une action  $\mathcal{F}$  induite par  $f$  et satisfaisant les propriétés suivantes :*

1. *Il est indépendant du choix du représentant efficace primitif dans la classe d'automorphisme extérieur.*
2. *Il est répétitif pour le groupe des isométries affines  $GA$ .*
3. *Il est minimal pour l'action à droite par le groupe  $GA$  si la substitution induite par  $(f, G)$  est non-orientable, et possède deux composantes minimales si la substitution induite est orientable.*
4. *Il est faiblement apériodique pour l'action du groupe  $GA$ .*
5. *Il est homéomorphe à l'espace  $\frac{\Omega_{\mathbb{R}}(f, G) \times \mathbb{R}_+^*}{(T, \lambda) \sim (\mathcal{F}(T), 1)}$ .*
6. *Il existe une surface branchée  $\mathcal{S}$  et une application  $g : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$  telles que  $g$  préserve la structure lisse de  $\mathcal{S}$  et l'espace de pavages  $\Omega_{GA}(f, G)$  soit homéomorphe à la limite projective  $\varprojlim(\mathcal{S}, g)$*

Une surface branchée est un 2-complexe cellulaire muni d'une structure lisse. Il découle du dernier point du théorème que l'espace  $\Omega_{GA}(f, G)$  est muni d'une structure de limite projective de surfaces branchées similaire aux pavages substitutifs primitifs de  $\mathbb{R}^2$  et ainsi est muni d'une structure lisse. Enfin, grâce au premier point du théorème nous pouvons de manière analogue au cas de la dimension 1 définir un espace de pavages  $\Omega_{GA}(\varphi)$  associé à un automorphisme extérieur IWIP  $[\varphi]$ .

Dans la huitième et dernière section de cette thèse, nous exposons quelques pistes qui pourraient permettre d'apporter un nouvel éclairage concernant les automorphismes du groupe libre à l'aide de la théorie des pavages, comme par exemple le problème de conjugaison (voir [Los96]).

## 2 Outils et objets d'études

Dans cette partie, nous présentons les objets que nous utiliserons tout au long de cette thèse : après deux notions très classiques en mathématiques (les *suspensions* et les *limites inverses*), les *pavages d'une classe d'espaces métriques*  $(X, d)$ , puis les *substitutions*, et enfin les *automorphismes du groupe libre*  $F_{\mathbb{N}}$  que nous représentons par des applications continues de graphes (notamment les *représentants topologiques*). Nous adoptons dans ce mémoire la convention française d'espace topologique compact se trouvant dans [Bou71] : un espace compact est un espace topologique séparé et quasi-compact.

### 2.1 Suspensions et limites projectives

Nous introduisons ici deux objets usités de manière récurrente en dynamique topologique : les espaces suspensions et les limites projectives (aussi parfois appelées limites inverses).

#### 2.1.1 Suspensions

Il s'agit ici de la *suspension* du dynamiqueien et non celle du topologue algébriste. Pour obtenir un panorama sur ce domaine d'étude, nous pourrions nous référer à [Gau06].

**Définition 2.1** (Suspension d'une application). Soit  $f : X \rightarrow X$  une application continue d'un espace topologique  $X$ . La suspension de  $X$  par  $f$  est l'espace  $M_f(X) = \frac{X \times [0, 1]}{(x, 1) \sim (f(x), 0)}$  muni de la topologie quotient. L'application  $\Pi : X \times [0, 1] \rightarrow \frac{X \times [0, 1]}{(x, 1) \sim (f(x), 0)}$  est la projection canonique sur la suspension.

**Remarque 2.2.** La classe  $\Pi(x, t)$  d'un point  $(x, t) \in X \times [0, 1]$  de la suspension  $M_f(X)$  est de trois types :

- si  $t \in ]0, 1[$ ,  $\Pi(x, t) = \{(x, t)\}$
- si  $t = 0$ ,  $\Pi(x, t) = \{(x, 0)\} \cup f^{-1}(\{x\}) \times \{1\}$
- si  $t = 1$ ,  $\Pi(x, t) = \{(f(x), 0)\} \cup f^{-1}(\{f(x)\}) \times \{1\}$

Nous travaillons tout au long de ce texte dans le cas où les suspensions sont définies sur des espaces  $X$  compacts. Dans ce cadre, nous obtenons la proposition suivante :

**Proposition 2.3.** Soit  $X$  un espace compact et  $f : X \rightarrow X$  une application continue et  $M_f(X)$  la suspension de  $f$  (voir la définition 2.1). Alors, la suspension  $M_f(X)$  est un espace compact.

Preuve de la proposition 2.3 : Soit  $z_1 = \Pi(y_1, t_1), z_2 = \Pi(y_2, t_2)$  deux points distincts de l'espace  $M_f(X)$ . Nous distinguons 3 cas :

1. D'après la remarque 2.2, si  $z_1 = \{(y_1, t_1)\}$  et  $z_2 = \{(y_2, t_2)\}$  (d'après la remarque 2.2  $t_1, t_2 \in ]0, 1[$ ) alors le caractère séparé de  $X \times ]0, 1[$  induit qu'il existe deux ouverts disjoints  $U_1, U_2$  inclus dans  $X \times ]0, 1[$  (donc saturés dans la suspension  $M_f(X)$ ) et contenant respectivement  $z_1$  et  $z_2$ .
2. Si  $z_1 = \{(y_1, t_1)\}$  (comme dans le cas précédent) et que  $t_2 \in \{0, 1\}$  alors  $z_2$  est de la forme  $\{(x_2, 0)\} \cup f^{-1}(\{x_2\}) \times \{1\}$ . Soit  $\epsilon > 0$  tel que  $t_1 - \epsilon > 0$  et  $t_1 + \epsilon$ . Alors les ouverts  $U_1 = \Pi(X \times ]t_1 - \epsilon, t_1 + \epsilon[)$  et  $U_2 = \Pi(X \times ([0, t_1 - \epsilon[ \cup ]t_1 + \epsilon, 1])$  sont deux ouverts de  $M_f(X)$  séparant les points  $z_1$  et  $z_2$ .
3. si nous ne sommes pas dans les deux cas précédents, il existe  $x_1, x_2$  deux points distincts dans l'espace  $X$  tels que :

$$z_1 = \Pi(f(x_1), 0) \neq \Pi(f(x_2), 0) = z_2.$$

D'après la remarque 2.2, pour  $i \in \{1, 2\}$ ,  $\Pi(f(x_i), 0) = \{(f(x_i), 0)\} \cup f^{-1}(f(x_i)) \times \{1\}$ . Comme l'espace  $X$  est compact donc séparé, il existe pour chaque  $i \in \{1, 2\}$  un ouvert  $U_i$  de  $X$  contenant le point  $f(x_i)$  et tel que  $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ . La continuité de l'application  $f$  assure que les sous-espaces  $f^{-1}(U_1)$  et  $f^{-1}(U_2)$  sont des ouverts disjoints de  $X$ . Nous pouvons ainsi construire deux ouverts  $V_1$  et  $V_2$  de la suspension  $M_f(X)$  séparant respectivement les points  $z_1$  et  $z_2$  comme suit :

$$\text{pour tout } i \in \{1, 2\} \quad V_i = \Pi(U_i \times [0, \frac{1}{2}[ \cup f^{-1}(U_i) \times ]\frac{1}{2}, 1]).$$

On en déduit que la suspension  $M_f(X)$  est un espace séparé.

L'application l'espace  $X \times [0, 1]$  est compact et la projection canonique  $\Pi : X \times [0, 1] \rightarrow M_f(X)$  est continue. Or une application continue envoie un espace quasi-compact sur un espace quasi-compact. On en déduit que l'espace  $M_f(X)$  est quasi-compact. Ainsi, l'espace  $M_f(X)$  est séparé et quasi-compact, il est donc compact.  $\square$

**Définition 2.4** (Application induite en suspension). Soit  $f : X \rightarrow X$  une application continue et  $\Pi : X \times [0, 1] \rightarrow \frac{X \times [0, 1]}{(x, 1) \sim (f(x), 0)}$  la projection canonique sur la suspension.

On appelle application induite en suspension par  $f$  l'unique application continue  $\tilde{f} : \frac{X \times [0, 1]}{(x, 1) \sim (f(x), 0)} \rightarrow \frac{X \times [0, 1]}{(x, 1) \sim (f(x), 0)}$  satisfaisant pour tout  $(x, t) \in X \times [0, 1]$  :

$$(\tilde{f} \circ \Pi)(x, t) = \Pi((f(x), t))$$

### 2.1.2 Limites projectives

Les *limites projectives* d'espaces apparaissent dans plusieurs branches des mathématiques. Par exemple en théorie des nombres, l'anneau  $\mathbb{Z}_p$  des entiers  $p$ -adiques

se définit à l'aide d'une limite projective (voir le chapitre 2 de [Ser95]). Dans cette thèse, nous nous intéressons plus particulièrement à l'emploi des limites projectives afin d'obtenir une compréhension de la dynamique de l'espace considéré. Cette approche a été introduite par R.F. Williams dans l'article [Wil67]. On pourra obtenir une introduction plus détaillée à propos des limites projectives ou *inverses* en se référant au chapitre 6 de l'ouvrage [Bou70].

Nous utilisons une définition plus forte qu'en général mais qui s'avère suffisante pour étudier les objets de ce travail.

**Définition 2.5** (Limite projective). Soit  $E = (E_i)_{i \in \mathbb{N}}$  une suite d'espaces topologiques compacts,  $\mathcal{F}$  une famille d'applications continues  $f_i^j : E_j \rightarrow E_i$  définies pour tout  $i, j \in \mathbb{N}$  tels que  $i \leq j$  et satisfaisant les conditions suivantes :

- pour tout  $i \in \mathbb{N}$ ,  $f_i^i = \text{Id}_{E_i}$
- pour tout  $i, j, k \in \mathbb{N}$ ,  $i \leq j \leq k$  alors  $f_i^j \circ f_j^k = f_i^k$

On appelle limite projective associée à  $E$  et  $\mathcal{F}$  que l'on note  $\varprojlim E_i$  l'ensemble :  $\{(x_i) \in \prod_{i \in \mathbb{N}} E_i \mid \forall i, j \in \mathbb{N}, i \leq j, x_i = f_i^j(x_j)\}$  muni de la topologie produit.

Dans le chapitre 9 de [Bou71], nous pouvons trouver le théorème suivant qui sera fort utile par la suite :

**Théorème 2.6** ([Bou71]). Soit  $\varprojlim (E_i)$  la limite projective associée à une suite d'espace compacts  $E = (E_i)$  ainsi qu'une famille  $\mathcal{F}$  de fonctions continues. Alors l'espace  $\varprojlim (E_i)$  est compact.

**Proposition 2.7.** Soit  $f : X \rightarrow X$  une application continue surjective d'un espace compact  $X$ .

Soit  $E = (E_i)_{i \in \mathbb{N}}$  une suite d'espaces topologiques et  $\mathcal{F} = \{f_i^j : E_j \rightarrow E_i \mid i, j \in \mathbb{N}, i \leq j\}$  une famille d'applications continues surjectives tels que pour tout  $i \in \mathbb{N}$ ,  $E_i = X$  et  $f_i^{i+1} = f : X \rightarrow X$ . Alors l'application  $f : X \rightarrow X$  s'étend en un homéomorphisme sur  $\varprojlim (E_i)$  que l'on note  $F : \varprojlim (E_i) \rightarrow \varprojlim (E_i)$  :

$$\text{pour tout } x = (x_0, x_1, x_2, \dots) \in \varprojlim (E_i), \quad F(x) = (f(x_0), f(x_1), f(x_2), \dots) \in \varprojlim (E_i).$$

Preuve de la proposition 2.7 :

Montrons dans un premier temps que l'application  $F$  est bien définie. Soit  $x = (x_0, x_1, \dots) \in \varprojlim (E_i)$ . Remarquons que pour tout  $i, j \in \mathbb{N}$  tels que  $i \leq j$ ,  $f_i^j = f^{j-i}$ . Pour tout  $i \in \mathbb{N}$ , posons  $y_i = f(x_i)$  et donc  $F(x) = (y_0, y_1, y_2, \dots)$ . Soit  $i, j \in \mathbb{N}$  tels que  $i \leq j$ , alors :

$$f^{j-i}(y_j) = (f^{j-i} \circ f)(x_j) = (f \circ f^{j-i})(x_j) = (f \circ f_i^j)(x_j).$$

Comme le point  $(x_0, x_1, x_2, \dots)$  est un élément de  $\varprojlim (E_i)$ , on en déduit que l'élément  $f \circ f_i^j(x_j)$  est égal à  $f(x_i)$  qui vaut par définition  $y_i$ . Finalement, nous obtenons que

$F(x) = (f(x_0), f(x_1), f(x_2), \dots)$  est bien un élément de  $\varprojlim (E_i)$ . L'application  $f : X \rightarrow X$  est continue, donc l'application :

$$\begin{aligned} \prod_{i \in \mathbb{N}} X &\longrightarrow \prod_{i \in \mathbb{N}} X \\ (x_i)_{i \in \mathbb{N}} &\longmapsto (f(x_i))_{i \in \mathbb{N}} \end{aligned}$$

est continue. On en déduit par restriction au fermé  $\varprojlim (E_i) \subset \prod_{i \in \mathbb{N}} X$  que l'application  $F$  est continue.

Montrons que l'application  $F$  est injective.

En effet, soit  $x = (x_0, x_1, x_2, \dots), x' = (x'_0, x'_1, x'_2, \dots) \in \varprojlim (E_i)$ . Supposons que  $F(x) = F(x')$ . Comme pour tout  $i \geq 0$ ,  $x_i = f(x_{i+1})$  et  $x'_i = f(x'_{i+1})$ , on en déduit que :

$$F(x) = (f(x_0), x_0, x_1, \dots) = F(x') = (f(x'_0), x'_0, x'_1, \dots)$$

On obtient que  $(x_0, x_1, x_2, \dots)$  et  $(x'_0, x'_1, x'_2, \dots)$  sont égaux et  $F$  est bien injective.

L'hypothèse de surjectivité de  $f$  dans l'énoncé de la proposition permet de montrer que l'application  $F$  est surjective. En effet, soit  $y = (y_0, y_1, y_2, \dots) \in \varprojlim (E_i)$ . Comme  $f : X \rightarrow X$  est surjective par hypothèse, il existe  $x_0 \in X$  tel que  $y_0 = f(x_0)$ . On définit par induction pour tout  $i \in \mathbb{N}$ ,  $x_{i+1} = f(x_i)$ . Ainsi, on obtient un point  $x = (x_0, x_1, x_2, \dots) \in \varprojlim (E_i)$  tel que  $y = F(x)$  et l'application  $F$  est bien surjective.

D'après le théorème de Tychonoff, l'espace  $\prod_{i \in \mathbb{N}} X$  est compact, donc  $\varprojlim (E_i)$  est compact comme fermé d'un espace compact. Ainsi, l'application  $F$  est un homéomorphisme en tant qu'application bijective et continue sur un espace compact.  $\square$

**Proposition 2.8.** *Soit  $f$  une application continue surjective d'un espace topologique  $X$  compact,  $\tilde{f} : M_f(X) \rightarrow M_f(X)$  l'application induite en suspension par  $f$  (voir la définition 2.4). Notons  $\varprojlim X$  (respectivement  $\varprojlim M_f(X)$ ) les limites projectives associées à la suite d'espaces  $(E_i = X)_{i \in \mathbb{N}}$  et la famille d'applications  $(f_i^j = f^{j-i} : X \rightarrow X)$  pour tout  $i, j \in \mathbb{N}$  tels que  $i \leq j$  (respectivement  $(E'_i = M_f(X))_{i \in \mathbb{N}}$  muni de la famille d'applications  $(g_i^j = \tilde{f}^{j-i} : M_f(X) \rightarrow M_f(X))$  pour tout  $i, j \in \mathbb{N}$  tels que  $i \leq j$ ). Notons  $F : \varprojlim X \rightarrow \varprojlim X$  l'application induite par  $f$  sur  $\varprojlim X$  (voir la proposition 2.7). Alors les espaces  $M_F(\varprojlim X)$  et  $\varprojlim M_f(X)$  sont homéomorphes.*

Preuve de la proposition 2.8 :

Notons  $\varprojlim (X \times [0, 1])$  la limite projective associée à la suite d'espaces  $(X \times [0, 1])_{i \in \mathbb{N}}$  ainsi que la famille d'applications  $(\tau_i^j = f^{j-i} \otimes Id_{[0,1]} : X \times [0, 1] \rightarrow X \times [0, 1])$  pour tout  $i, j \in \mathbb{N}$  tels que  $i \leq j$ .

Soit :

$$\begin{aligned} h : \left( \varprojlim X \right) \times [0, 1] &\longrightarrow \varprojlim (X \times [0, 1]) \\ ((x_0, x_1, \dots), t) &\longmapsto ((x_0, t), (x_1, t), \dots) \end{aligned}$$

Cette application  $h$  est clairement un homéomorphisme.

Notons  $\Pi : X \times [0, 1] \rightarrow \frac{X \times [0, 1]}{(x, 1) \sim (f(x), 0)}$  la projection canonique associée à la suspension de  $X$  (voir la définition 2.4) et  $\Pi_1 : (\varprojlim X) \times [0, 1] \rightarrow M_F(\varprojlim X)$  la projection canonique associée à la suspension de  $\varprojlim X$ , ainsi que :

$$\begin{aligned} \Pi_2 : \varprojlim (X \times [0, 1]) &\longrightarrow \varprojlim M_f(X) \\ ((x_i, t))_{i \in \mathbb{N}} &\longmapsto (\Pi(x_i, t))_{i \in \mathbb{N}} \end{aligned}$$

L'application  $\Pi_2$  est bien définie. En effet, soit  $(x, t) = ((x_0, x_1, \dots), t) \in (\varprojlim X) \times [0, 1]$ . Or, soit  $i, j \in \mathbb{N}$  tels que  $i \leq j$ , par le fait que  $x \in \varprojlim X$ , nous obtenons :

$$\Pi(x_i, t) = \Pi(f^{j-i}(x_j), t).$$

Par récurrence, on en déduit que :

$$\Pi(f^{j-i}(x_j), t) = \tilde{f}^{j-i}(\Pi(x_j, t)) = g_i^j(\Pi(x_j, t))$$

ce qui montre que  $\Pi_2(x, t) \in \varprojlim M_f(X)$  et donc que l'application  $\Pi_2$  est bien définie. De plus, cette application est continue car la projection  $\Pi$  est continue.

Soit l'application :

$$\begin{aligned} H : M_F(\varprojlim X) &\longrightarrow \varprojlim M_f(X) \\ \Pi_1(x, t) &\longmapsto \Pi_2(h(x, t)) \end{aligned}$$

Montrons que l'application  $H$  est bien définie. Soit  $(x, t), (x', t')$  deux éléments d'une même classe dans la suspension  $M_F(\varprojlim X)$ . Si  $t \in ]0, 1[$ , d'après la remarque 2.2 on a  $x = x'$  car la classe  $\Pi_1(x, t)$  est réduite à  $\{x, t\}$ . L'application  $F$  étant un homéomorphisme, les autres cas possibles sont  $x' = F(x)$  ou bien  $x' = F^{-1}(x)$  et donc la classe de  $(x, t)$  est soit  $\{(x', 0), (x, 1)\}$  soit  $\{(x, 0), (x', 1)\}$ . Il nous reste donc à vérifier que  $\Pi_2(h(x, 1)) = \Pi_2(h(F(x), 0))$ . Or :

$$h(F(x), 0) = ((f(x_i), 0))_{i \in \mathbb{N}}$$

et

$$h(x, 1) = ((x_i, 1))_{i \in \mathbb{N}}$$

et pour tout  $i \in \mathbb{N}$ ,  $\Pi(f(x_i), 0) = \Pi(x_i, 1)$  donc on a bien

$$\Pi_2(h(x, 1)) = \Pi_2(h(F(x), 0))$$

ce qui prouve que l'application  $H$  est bien définie.

Montrons que  $H$  est injective. Soit  $(x, t) = ((x_i, t))_{i \in \mathbb{N}}$  et  $(x', t') = ((x'_i, t'))_{i \in \mathbb{N}}$  deux éléments de l'ensemble  $\varprojlim X$ .

Supposons que :

$$\begin{aligned}
& H(\Pi_1(x, t)) = H(\Pi_1(x', t')) \\
\iff & \Pi_2(h(x, t)) = \Pi_2(h(x', t')) \\
\iff & (\Pi(x_i, t))_{i \in \mathbb{N}} = (\Pi(x'_i, t'))_{i \in \mathbb{N}}
\end{aligned}$$

D'après la remarque 2.2, trois cas sont à analyser :

1. Si  $t \in ]0, 1[$ , nous en déduisons, par nécessité dû aux cardinaux des ensembles de la forme  $\Pi(a, t)$ , que  $t' = t$ . On obtient aisément que  $x = x'$  et donc :

$$\Pi_1(x, t) = \Pi_1(x', t').$$

2. Si  $t = 1$ , alors on distingue à nouveau deux cas :

- si  $t' = 1$ , alors par l'égalité pour tout  $i \in \mathbb{N}$  des ensembles  $\Pi(x_i, 1)$  et  $\Pi(x'_i, 1)$ , nous obtenons que pour tout  $i \in \mathbb{N}$ ,  $f(x_i) = f(x'_i)$ . Or pour tout  $i \in \mathbb{N}$ ,  $x_i = f(x_i + 1)$ . Nous en déduisons que  $x = x'$  et :

$$\Pi_1(x, 1) = \Pi_1(x', 1).$$

- si  $t' = 0$ , alors d'après l'analyse de cas sur les ensembles de la forme  $\Pi(a, t)$ , on obtient que pour tout  $i \in \mathbb{N}$  :

$$\Pi(x_i, 1) = f^{-1}(f(x_i)) \times \{1\} \cup \{(f(x_i), 0)\} = f^{-1}(\{x'_i\}) \times \{1\} \cup \{(x'_i, 0)\} = \Pi(x'_i, 0).$$

Ainsi, pour tout  $i \in \mathbb{N}$ ,  $x'_i = f(x_i)$  et comme  $F$  est un homéomorphisme sur  $\varprojlim X$  (voir la proposition 2.7). Nous obtenons que  $x' = F(x)$  et donc :

$$\Pi_1(x, 1) = \{(x, 1), (F(x), 0)\} = \{(x', 0), (F^{-1}(x'), 1)\} = \Pi_1(x', 0)$$

3. Si  $t = 0$  alors deux cas possibles se présentent :

- si  $t' = 0$ , alors par l'égalité pour tout  $i \in \mathbb{N}$  des ensembles  $\Pi(x_i, 0)$  et  $\Pi(x'_i, 0)$  nous en déduisons que pour tout  $i \in \mathbb{N}$ ,  $(x_i, 0) = (x'_i, 0)$ , ce qui signifie que  $x = x'$ . Dans ce cas là, on obtient que :

$$\Pi_1(x, 0) = \Pi_1(x', 0).$$

- Si  $t' = 1$ , nous sommes dans le cas symétrique au cas où  $t = 1$  et  $t' = 0$  que nous avons traité plus haut. Nous en déduisons que  $\Pi_1(x, 0) = \Pi_1(x', 1)$ .

Suite à cette analyse de cas, nous pouvons conclure que l'application  $H$  est injective.

L'application  $H$  est surjective car les applications  $\Pi_2$  et  $h$  le sont.

L'application  $H$  est continue car  $\Pi_2$  et  $h$  sont des applications continues et que toute classe  $\Pi_1(x, t)$  s'envoie sur la classe  $\Pi_2(h(x, t))$  (l'application  $H$  est bien définie

donc passe au quotient).

L'espace  $M_F(\varprojlim X)$  est compact comme suspension par une application continue d'un espace compact. Par l'argument précédemment invoqué, l'espace  $M_f(X)$  est compact et  $\tilde{f}$  est continue, donc la limite projective  $\varprojlim M_f(X)$  est un espace compact.

Nous pouvons conclure que l'application  $H$  est un homéomorphisme entre les espaces  $M_F(\varprojlim X)$  et  $\varprojlim M_f(X)$  en tant qu'application bijective continue entre espaces compacts.  $\square$

**Remarque 2.9.** Dans la suite du texte, nous n'utiliserons les limites projective d'une famille d'espaces  $E = (E_i)_{i \in \mathbb{N}}$  et  $F = \{f_i^j = E_j \rightarrow E_i \mid i, j \in \mathbb{N}, i \leq j\}$  uniquement dans le cas où il existe un espace compact  $X$  et une application  $f : X \rightarrow X$  continue surjective telle que pour tout  $i \in \mathbb{N}$ ,  $E_i = X$  et  $f_i^{i+1} = f$ . Nous noterons souvent dans ce cas  $\varprojlim (E_i) = \varprojlim (X, f)$ .

## 2.2 Espaces de pavages

Le concept d'espace de pavages constitue l'objet principal de ce travail de thèse. Pour une introduction complète à cette notion on peut se référer à la thèse [Pet06a].

Dans le cadre de notre travail on s'intéresse uniquement aux cas des espaces métriques homogènes  $(X, d)$  parmi la liste suivante :

- $\mathbb{R}$  muni de sa métrique euclidienne.
- $\mathbb{R}^2$  muni de sa métrique euclidienne.
- le plan hyperbolique  $\mathbb{H}^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) > 0\}$  muni de la métrique  $ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y}$ .

**Définition 2.10.** Un pavage d'un espace métrique  $(X, d)$  (où  $X = \mathbb{R}, \mathbb{R}^2$  ou  $\mathbb{H}^2$ ) est la donnée d'un ensemble dénombrable de tuiles  $T = \{t_i\}_{i \in I}$  qui vérifient les conditions suivantes :

- Pour tout  $(i, j) \in I^2$ , si  $i \neq j$  alors  $t_i \cap t_j = \emptyset$ .
- $T$  est un recouvrement de  $X : X = \bigcup_{i \in I} t_i$ .
- Pour tout  $i \in I$ , la tuile  $t_i$  est homéomorphe à  $B_X(a, 1) = \{x \in X \mid d(a, x) \leq 1\}$  où  $a$  est un point quelconque de  $X$ .

Un patch d'un pavage  $T$  est un sous-ensemble connexe formé par une union finie de tuiles de  $T$ .

**Remarque 2.11.** Dans notre travail, nous considérons des tuiles qui sont des CW-complexes finis dont les 1-cellules sont lisses et les sommets se recollent sur des sommets.

Dans certains cas, il sera utile d'étiqueter les pavés par une couleur ou un marquage. Une tuile  $t_i$  sera alors la donnée d'un sous-espace de  $X$  homéomorphe à une boule de l'espace et d'une couleur  $c$ . Il s'agit d'un procédé classique en théorie des pavages intervenant par exemple dans la formalisation du problème du domino (voir [Ber66]).

Par la suite, nous nous fixons un espace  $X$  et un point particulier  $O$  de  $X$  que l'on appelle l'origine. Si on travaille avec  $\mathbb{R}$  (respectivement  $\mathbb{R}^2$ ) nous choisissons de prendre comme origine  $O = 0$  (respectivement  $O = (0,0)$ ). Nous fixons comme origine  $O$  dans  $\mathbb{H}^2$  le point  $z = i$ .

Chacun de ces espaces métriques supposé homogène admet une action par un sous-groupe d'isométries muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact qui agit à droite par translation sur l'espace de manière simplement transitive.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{G} \times X & \longrightarrow & X \\ (g, x) & \longmapsto & x.g = g^{-1}(x) \end{array}$$

Il s'agit dans notre étude de :

- l'action de  $\mathbb{R}$  sur lui même.
- l'action de  $\mathbb{R}^2$  sur lui même.
- l'action de  $\mathbb{G}\mathbb{A} = \{z \mapsto az + b \mid a > 0 \text{ et } b \in \mathbb{R}\}$  sur le plan hyperbolique  $\mathbb{H}^2$ .

Lorsque l'on se fixe un tel sous-groupe  $\mathbb{G}$  d'isométrie et un ensemble fini de tuiles  $\beta$  dans un espace  $X$ , les pavages dont toutes les tuiles sont des copies d'éléments de  $\beta$  par  $\mathbb{G}$  sont des pavages intéressants car nous pouvons appliquer des outils combinatoires pour les étudier.

**Définition 2.12** ( $\mathbb{G}$ -pavages). *Soit  $T$  un pavage d'un espace métrique  $(X, d)$  (où  $X = \mathbb{R}, \mathbb{R}^2$  ou  $\mathbb{H}^2$ ) et soit  $\mathbb{G}$  un sous-groupe d'isométries de  $(X, d)$  agissant sur  $X$  simplement transitivement.*

1. *Le pavage  $T$  est un  $\mathbb{G}$ -pavage de type fini si pour tout rayon  $R > 0$ , il n'existe qu'un nombre fini de patchs de diamètre inférieur à  $R$  à transformation  $g \in \mathbb{G}$  près.*
2. *Un  $\mathbb{G}$ -pavage  $T$  est répétitif si pour tout  $R > 0$ , il existe un réel  $\rho(R) > 0$  tel que, pour tout patch  $p$  de  $T$  de diamètre  $R$ , toute boule de rayon  $\rho(R)$  dans  $X$  intersecte un patch de la forme  $p.g$  où  $g \in \mathbb{G}$ .*
3. *On note  $\text{Pav}_{\mathbb{G}}(X)$  l'ensemble de tous les pavages d'un espace  $X$  de  $\mathbb{G}$ -type.*

Lorsqu'il existe  $\mathcal{T} = \{t_1, \dots, t_s\}$  un sous-ensemble fini de tuiles du pavage  $T = (t_i)_{i \in I}$  tel que pour tout  $j \in \mathbb{N}$ , il existe  $g_j \in \mathbb{G}$  et  $n_j \in I$  satisfaisant  $t_j = t_{n_j}.g_j$ . On dit alors que  $T$  est de  $\mathbb{G}$ -type  $\mathcal{T}$  et l'ensemble  $\mathcal{T}$  est alors nommé *ensemble des prototuiles* de  $T$ . Dans cette configuration, le pavage  $T$  est de  $\mathbb{G}$ -type fini (ce que L. Sadun nomme "simple tiling" au premier chapitre de [Sad08]) puisque l'on impose que nos

pavages sont formés de tuiles possédant un nombre fini de sommets et se recollant sommet contre sommet.

Du fait de la rigidité de la forme des tuiles de  $\mathbb{R}$  qui sont des intervalles, les pavages de la droite réelle sont caractérisés par cette propriété combinatoire simple que nous utiliserons tout au long de notre travail :

**Proposition 2.13.** *Soit  $\mathcal{T} = \{t_1, \dots, t_s\}$  un ensemble d'intervalles, éventuellement étiquetés. Soit  $T = (t_i)_{i \in I}$  un pavage de la droite réelle de  $\mathbb{R}$ -type fini et dont  $\mathcal{T}$  est l'ensemble des prototuiles (voir définition 2.12). Alors le pavage  $T$  est la donnée unique d'une suite de prototuiles  $(\tau_i)_{i \in \mathbb{Z}} \in \mathcal{T}^{\mathbb{Z}}$  et d'un point base  $b \in \tau_0$  qui coïncide avec  $0$  sur  $\mathbb{R}$ .*

Preuve : Par définition de pavage de  $\mathbb{G}$ -type fini (voir définition 2.12), chaque tuile  $t_i$  est l'image par une translation  $v_i$  d'un élément  $t_{i_j}$  de  $\mathcal{T}$ , c'est à dire  $t_i = t_{i_j} \cdot v_i$ . Il existe  $i_0 \in I$  tel que  $0 \in t_{i_0}$  : cet élément  $i_0$  n'est pas unique dans le cas où l'origine se situe sur le bord de deux tuiles de  $T$  et l'on fait alors le choix arbitraire de prendre  $i_0$  tel que  $0$  soit sur le bord gauche de  $t_{i_0}$ . En notant  $t_{i_0} = [a_{i_0}, b_{i_0}]$  et en reprenant les notations de l'énoncé de la proposition, on note  $b = a_{i_0} - v_0$  qui représente la distance entre l'origine  $0$  et le bord gauche de la tuile qui la contient. Posons  $\tau_0 = t_{i_0}$ . Comme  $\mathbb{R}$  est muni de l'ordre usuel  $\leq$ , on peut ordonner les tuiles du pavage  $T$  par l'ensemble  $\mathbb{Z}$  par récurrence en posant  $\tau_{i+1}$  (respectivement  $\tau_{i-1}$ ) la tuile qui borde à droite (respectivement à gauche) la tuile  $\tau_i$ . De cette manière  $((\tau_i)_{i \in \mathbb{Z}}, b)$  définit bien  $T$ . Montrons qu'elle le réalise de manière unique. Soit  $((\tau_i)_{i \in \mathbb{Z}}, b)$  et  $((\tau'_i)_{i \in \mathbb{Z}}, b')$  deux couples définissant le même pavage  $T$ . Par le choix que l'on a fait de l'indice  $i_0$ , on a  $b = b'$  donc  $\tau'_0 = \tau_0$ . Par récurrence, on obtient que les deux couples sont identiques.  $\square$

L'action du groupe  $\mathbb{G}$  sur les couleurs des tuiles  $t_i$  est triviale donc l'action de  $\mathbb{G}$  sur l'ensemble des tuiles de la forme  $(t, c)$  est uniquement géométrique :

$$\text{pour tout } g \in \mathbb{G}, (t, c).g = (t.g, c)$$

Par conséquent les tuiles  $t_1 = (t, c_1)$  et  $t_2 = (t, c_2)$  sont distinctes lorsque  $c_1$  et  $c_2$  sont différents.

Soit  $T$  un pavage de l'espace  $X$  de  $\mathbb{G}$ -type fini. Pour tout  $g \in \mathbb{G}$ , l'image de  $T$  par l'isométrie  $g^{-1}$  est un pavage de  $\mathbb{G}$ -type fini. On note l'ensemble de ces pavages  $T.\mathbb{G}$ . On obtient naturellement de cette manière une action à droite de  $\mathbb{G}$  sur  $T.\mathbb{G}$  définie par :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{G} \times T.\mathbb{G} & \longrightarrow & T.\mathbb{G} \\ (g, T') & \longmapsto & T'.g \end{array}$$

On peut munir l'ensemble  $T.\mathbb{G}$  d'une topologie métrisable induite par la distance suivante dite *distance des pavages*.

**Définition 2.14** (Distance des pavages). La distance des pavages est l'application  $\delta: T.\mathbb{G} \times T.\mathbb{G} \rightarrow [0, \infty[$  définie de la façon suivante :

Pour deux pavages quelconques  $T_1$  et  $T_2$  de l'orbite  $T.\mathbb{G}$ , on pose

$$A(T_1, T_2) = \{\epsilon \in ]0, \frac{1}{\sqrt{2}}[ \mid \exists g \in B_\epsilon(\text{Id}) \text{ tel que } T_1.g \cap B_{\frac{1}{\epsilon}}(\text{O}) = T_2 \cap B_{\frac{1}{\epsilon}}(\text{O})\}.$$

Alors :

$$\begin{cases} \delta(T_1, T_2) = \inf(A(T_1, T_2)) & \text{si } A(T_1, T_2) \neq \emptyset \\ \delta(T_1, T_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} & \text{sinon} \end{cases}$$

**Définition 2.15** (Espace de pavages). Soit  $T$  un pavage de  $\mathbb{G}$ -type  $\Upsilon$ . L'espace de pavages  $\Omega_{\mathbb{G}}(T)$  est la complétion métrique pour la distance des pavages de l'orbite  $T.\mathbb{G}$ .

On appelle *topologie des pavages* la topologie induite par la distance des pavages  $\delta$  sur un espace de pavages.

**Remarque 2.16.** L'ensemble des pavages appartenant à l'ensemble  $\text{Pav}_{\mathbb{G}}(X)$  (voir définition 2.12) est un ensemble pour laquelle la distance des pavages est bien définie. On a aisément que pour un pavage  $T \in \text{Pav}_{\mathbb{G}}(X)$ ,  $T.\mathbb{G} \subset \text{Pav}_{\mathbb{G}}(X)$  et comme  $\text{Pav}_{\mathbb{G}}(X)$  est fermé, la complétion  $\Omega_{\mathbb{G}}(T) \subset \text{Pav}_{\mathbb{G}}(X)$ .

L'espace de pavages  $\Omega_{\mathbb{G}}(T)$  est naturellement muni d'une action à droite de  $\mathbb{G}$  : on obtient ainsi le système dynamique  $(\Omega_{\mathbb{G}}(T), \mathbb{G})$ . Certaines propriétés dynamiques de l'action du groupe  $\mathbb{G}$  sur  $\Omega_{\mathbb{G}}(T)$  s'interprètent comme des propriétés géométriques du pavage  $T$ . Par exemple nous avons les deux propositions suivantes qui sont classiques en théorie des pavages (voir le deuxième chapitre de [Pet06a] ou [EAR04] pour une présentation de ces résultats) :

**Proposition 2.17** ([Rud89]). Soit  $T$  un  $\mathbb{G}$ -pavage de  $\mathbb{G}$ -type fini. Alors l'espace de pavages  $\Omega_{\mathbb{G}}(T)$  est compact.

C'est également le cas de la répétitivité dont la proposition classique suivante illustre cette correspondance. Rappelons qu'un système dynamique  $(X, \mathbb{G})$  est dit *minimal* si toutes les orbites sont denses sous l'action de  $\mathbb{G}$ .

La proposition suivante découle du théorème principal de [Got44] dû à Gottschalk.

**Proposition 2.18.** Soit  $T$  un  $\mathbb{G}$ -pavage de type fini. Le système  $(\Omega_{\mathbb{G}}(T), \mathbb{G})$  est minimal si et seulement si le pavage  $T$  est répétitif.

On distingue plusieurs types de comportements asymptotiques distincts pour un  $\mathbb{G}$ -pavage  $T$ .

**Définition 2.19.** Soit  $T$  un  $\mathbb{G}$ -pavage de l'espace  $(X, d)$  (où  $X = \mathbb{R}, \mathbb{R}^2$  ou  $\mathbb{H}^2$ ).

Le pavage  $T$  est :

- périodique s'il existe  $g \in \mathbb{G}$  tel que  $T.g = T$ .
- fortement périodique s'il existe un sous-groupe co-compact  $H$  de  $\mathbb{G}$  tel que  $T.H = T$ .
- apériodique lorsque  $T.g \neq T$  pour tout  $g \in \mathbb{G} \setminus \{\text{Id}\}$ .
- faiblement apériodique lorsque l'espace  $\Omega_{\mathbb{G}}(T)$  ne contient pas de  $\mathbb{G}$ -orbite compacte.
- fortement apériodique lorsque l'action de  $\mathbb{G}$  sur tout pavage de  $\Omega_{\mathbb{G}}(T)$  est libre.

**Remarque 2.20.** La notion d'apériodicité définie ci-dessus pour un pavage ne dépend que de l'orbite du pavage considéré alors que les notions de faible apériodicité et forte apériodicité dépendent de l'action du groupe sur chacun des pavages de l'espace  $\Omega_{\mathbb{G}}(T)$ . Il est évident que la forte apériodicité implique les deux autres notions. En général, il n'est pas clair que l'apériodicité simple telle que définie ci-dessus implique la faible apériodicité. C'est néanmoins vrai lorsque  $\mathbb{G} = \mathbb{R}^d$  et nous verrons que c'est aussi vrai pour les espaces de pavages du plan hyperbolique que nous considérons.

## 2.3 Substitutions

Nous définissons dans cette sous-section les pavages définis par substitution (ou pavages substitutifs). Nous pouvons consulter, concernant cette classe de pavages le livre [Que87] ou bien le quatrième chapitre de [EAR04]. Soit  $\mathcal{A} = \{a_1, \dots, a_s\}$ , un ensemble à  $s$  éléments que l'on nomme *alphabet*. On note  $\mathcal{A}^n$  l'ensemble des mots à  $n$  lettres sur l'alphabet  $\mathcal{A}$  : plus formellement, un mot de  $\mathcal{A}^n$  est un élément de  $\mathcal{A} \times \underbrace{\dots}_{n \text{ fois}} \times \mathcal{A}$ . Par convention,  $\mathcal{A}^0 = \{\epsilon\}$  où  $\epsilon$  est le mot vide. On note  $\mathcal{A}^*$  l'ensemble des mots finis sur l'alphabet  $\mathcal{A}$ . L'ensemble  $\mathcal{A}^*$  est un monoïde muni de la loi  $\cdot$  de concaténation des mots définie comme suit :

$$\text{pour tout } u_1 \dots u_k, u_{k+1} \dots u_s \in \mathcal{A}^*, (u_1 \dots u_k).(u_{k+1} \dots u_s) = u_1 \dots u_k u_{k+1} \dots u_s \in \mathcal{A}^*.$$

L'ensemble  $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$  est l'ensemble des mots infinis tandis que  $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$  désigne l'ensemble des mots bi-infinis, munis de leur topologie produit. Soit  $w \in \mathcal{A}^*$  et  $W$  un mot possiblement infini ou bi-infini. On dit que  $w$  est un *sous-mot* de  $W$ , noté  $w \subset W$ , si  $W = \dots w \dots$ . Il est possible d'associer une fonction longueur au monoïde  $\mathcal{A}^*$  que nous définissons comme suit :

**Définition 2.21** (Fonction longueur). Soit  $\mathcal{A} = \{a_1, \dots, a_s\}$  un alphabet à  $k$  éléments et  $\mathcal{A}^* = \cup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{A}^n$  l'ensemble des mots finis sur l'alphabet  $\mathcal{A}$ . Une fonction longueur est un morphisme de monoïde  $|\cdot| : (\mathcal{A}^*, \cdot) \longrightarrow (\mathbb{R}_+, +)$  telle que l'image de toute lettre de  $\mathcal{A}$  soit strictement positive.

**Remarque 2.22.** D'après cette définition de fonction longueur  $|\cdot|$ , on obtient par récurrence que tout mot  $u = u_1 \dots u_n \in \mathcal{A}^n$ , vérifie  $|u| = \sum_{k=0}^n |u_k|$ . Ainsi, une fonction longueur sur l'alphabet  $\mathcal{A} = \{a_1, \dots, a_s\}$  est exactement la donnée des images  $|a_i|$  pour tout  $i \in \{1, \dots, s\}$ .

Une fonction longueur très usitée est la *fonction longueur canonique* sur un alphabet  $\mathcal{A} = \{a_1, \dots, a_s\}$  notée  $|\cdot|_{can}$  et telle que pour tout  $i \in \{1, \dots, s\}$ ,  $|a_i|_{can} = 1$ . Nous utiliserons essentiellement une autre fonction longueur dans la suite de ce mémoire que nous définissons plus loin.

Nous allons maintenant définir une sous-classe de  $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$  particulièrement importante.

**Définition 2.23** (Substitution). Soit  $\mathcal{A} = \{a_1, \dots, a_k\}$  un alphabet.

1. Une substitution désigne une application  $\sigma : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}^*$  tel qu'il existe  $a \in \mathcal{A}$  satisfaisant  $\lim_{n \rightarrow +\infty} |\sigma^n(a)|_{can} = +\infty$ . La substitution  $\sigma$  s'étend en un unique morphisme sur  $\mathcal{A}^*$ , ou en une unique application  $\Sigma$  sur  $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$  ou  $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ , en substituant chaque lettre  $a_i$  d'un mot par  $\sigma(a_i)$  : si  $U = (a_i)_{i \in \mathbb{Z}}$  (respectivement  $W = (a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ ), alors  $\Sigma(U) = (\sigma(a_i))_{i \in \mathbb{Z}} = (a'_i)_{i \in \mathbb{Z}}$  (respectivement  $\Sigma(W) = (\sigma(a_i))_{i \in \mathbb{N}} = (a'_i)_{i \in \mathbb{N}}$ ).
2. Un mot fini  $w \in \mathcal{A}^*$  est admissible pour  $\sigma$  s'il existe  $a \in \mathcal{A} \cup \{\epsilon\}$  et un entier  $j \geq 0$  tel que  $w \subset \sigma^j(a)$ . On note  $\mathcal{L}^n$ , l'ensemble des mots admissibles pour  $\sigma$  de longueur  $n$  et  $\mathcal{L} = \cup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{L}^n$ .
3. Un mot bi-infini  $U \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$  est admissible pour  $\sigma$ , si tout sous-mot fini de  $U$  est admissible pour  $\sigma$ . L'ensemble de tous les mots bi-infinis admissibles pour  $\sigma$  est noté  $X_\sigma$ .
4. la substitution  $\sigma$  est aperiodique si  $X_\sigma$  est infini.

En particulier le mot vide  $\epsilon$  est admissible pour toute substitution.

**Remarque 2.24.** L'application  $\sigma$  sur  $\mathcal{A} = \{a, b\}$  qui vérifie :

$$\sigma(a) = b \text{ et } \sigma(b) = a$$

n'est pas une substitution car pour tout  $j \in \mathbb{N}$ ,  $\sigma^j(a)$  et  $\sigma^j(b)$  sont dans  $\mathcal{L}^1$ .

Nous allons construire une longueur différente de la longueur canonique. Pour cela, on introduit la notion de *matrice d'une substitution*.

**Définition 2.25** (Matrice de substitution). Soit  $\sigma : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}^*$  une substitution sur un alphabet  $\mathcal{A} = \{a_1, \dots, a_k\}$ . La matrice de substitution  $M_\sigma \in \mathcal{M}_k(\mathbb{N})$  associée à  $\sigma$  est la matrice telle que  $(M_\sigma)_{i,j}$  correspond au nombre d'apparition de la lettre  $a_i$  dans le mot  $\sigma(a_j)$ .

Cette notion de matrice de substitution nous est essentielle car elle permet de définir la notion de substitution primitive qui nous intéresse principalement dans notre travail.

**Définition 2.26** (Substitution primitive). Une substitution  $\sigma : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}^*$  est primitive, s'il existe un entier  $p \geq 0$  tel que tous les coefficients de  $M_\sigma^p$  soient strictement positifs. De manière équivalente, il existe un entier  $p \geq 0$  tel que :

$$\forall (a, a') \in \mathcal{A} \times \mathcal{A}, a \subset \sigma^p(a').$$

**Proposition 2.27** ([Que87]). Soit  $\sigma : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}^*$  une substitution primitive. Alors il existe une fonction longueur notée  $|\cdot|_{\text{PF}}$  sur  $\mathcal{A}^*$ , dite fonction longueur de Perron-Frobenius, pour laquelle l'action de  $\sigma$  sur  $\mathcal{A}^*$  est  $\lambda$ -dilatante pour un certain  $\lambda > 1$ , c'est à dire :

$$\text{Pour tout } u \in \mathcal{A}^*, |\sigma(u)|_{\text{PF}} = \lambda |u|_{\text{PF}}.$$

Le théorème suivant est classique :

**Théorème 2.28** (Perron-Frobenius, [Gan86]). Soit  $M$  une matrice à coefficient entiers positifs. Si  $M$  est primitive, c'est à dire admet une puissance dont tous les coefficients sont strictement positifs, alors  $M$  admet une unique valeur propre réelle de plus grand module  $|\lambda| > 1$  d'espace propre associé de dimension 1 dont toutes les composantes sont de même signe.

Preuve de la proposition 2.27 : Soit  $\sigma$  une substitution primitive et  $M_\sigma$  sa matrice associée. Puisque  $\sigma$  est primitive,  $M_\sigma^t$  satisfait toutes les conditions du lemme 2.28.

Celui-ci nous donne donc un réel  $\lambda > 1$  et un vecteur propre  $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_+^*$  avec

$M_\sigma^t v = \lambda v$ . On munit alors le monoïde  $\mathcal{A}^*$  de la fonction longueur  $|\cdot|_{\text{PF}}$  en posant, pour tout  $a_i \in \mathcal{A}$ ,  $|a_i|_{\text{PF}} = v_i$ . Il est immédiat de vérifier que l'action de  $\sigma$  sur  $\mathcal{A}^*$  est  $\lambda$ -dilatante.  $\square$

**Exemple 2.29.** Soit l'alphabet  $\mathcal{A} = \{a, b, c\}$ . Considérons la substitution suivante :

$$\begin{aligned} \sigma : \mathcal{A} &\longrightarrow \mathcal{A}^* \\ a &\longmapsto ab \\ b &\longmapsto acbb \\ c &\longmapsto a \end{aligned}$$

Sa matrice de substitution associée  $M_\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  est primitive.

**Définition 2.30** (Décalage). Soit  $\mathcal{A}$  un alphabet fini muni de la topologie discrète et  $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$  l'ensemble des mots bi-infinis sur  $\mathcal{A}$  muni de la topologie produit. Reprenons les notations de la définition 2.23.

- L'application :

$$\begin{aligned} S: \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} &\longrightarrow \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} \\ (a_i)_{i \in \mathbb{Z}} &\longmapsto (a_{i+1})_{i \in \mathbb{Z}} \end{aligned}$$

est le décalage sur  $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$

- Soit  $U \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ , un mot bi-infini sur  $\mathcal{A}$ . Le système symbolique associé à  $U$  est le système dynamique symbolique complet :

$$\overline{(U, S)} \text{ où } (U, S) = \{S^k(U) \mid k \in \mathbb{Z}\} \subset \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}.$$

- $(X_{\sigma}, S)$  est appelé le sous-shift associé à la substitution  $\sigma$ .

**Définition 2.31** (Mot périodique). Soit  $\sigma : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}^*$  une substitution et  $S : \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} \longrightarrow \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$  le décalage sur  $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$  (voir définition 2.30).

Un élément  $U \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$  est périodique pour  $\sigma$  s'il est un point fixe pour une itérée de  $\sigma$  :

$$\exists p \in \mathbb{N}, \sigma^p(U) = U.$$

Une substitution  $\sigma$  primitive aperiodique admet toujours des mots dans  $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$  qui soient périodiques. Lorsqu'une substitution  $\sigma$  est primitive on peut montrer que le nombre de points périodiques infinis est majoré par  $\#(\mathcal{A})$  et le nombre de points périodiques bi-infinis est majoré par  $\#(\mathcal{A})^2$ .

**Proposition 2.32** ([Que87]). Soit  $\sigma : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}^*$  une substitution primitive et  $U_1, U_2 \in X_{\sigma}$  (voir définition 2.23). Alors :

$$\overline{(U_1, S)} = \overline{(U_2, S)} = X_{\sigma}$$

La proposition 2.32 nous permet d'énoncer la définition suivante alternative de l'ensemble  $X_{\sigma}$  lorsqu'il existe dans l'espace  $X_{\sigma}$  un élément dont l'orbite par le décalage est infini :

**Définition 2.33** (Sous-shift). Soit  $\sigma : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}^*$  une substitution primitive aperiodique. Le sous-shift associé à  $\sigma$  est l'adhérence  $X_{\sigma} = \overline{(U, S)}$ , où  $U \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$  est n'importe quel mot bi-infini admissible de  $\sigma$ .

## 2.4 Automorphismes de groupe libre et graphes

Le livre [Bog08] permet de s'initier à la théorie combinatoire des groupes ainsi qu'au point de vue des représentants topologiques pour étudier les automorphismes du groupe libre. L'utilisation des applications entre graphes pour étudier les automorphismes du groupe libre a été initiée par Stallings dans [Sta83]. Une des avancées remarquables dans cette direction est le théorème 2.53 dû à Bestvina et Handel démontré dans l'article [BH92].

Définissons à présent ces objets.

## 2.4.1 Groupes libres et automorphismes externes

On rappelle (voir le début de la partie 2.3) que, dans le contexte des mots définis sur un alphabet, on désigne par  $\epsilon$  le mot vide.

**Définition 2.34.** Soit  $S = \{x_1, \dots, x_N\}$  un ensemble de cardinal  $N$  et  $S^{-1} = \{x_1^{-1}, \dots, x_N^{-1}\}$ . Le groupe libre de rang  $N$ , noté  $F_N$ , est l'ensemble des mots finis réduits sur l'alphabet  $S \cup S^{-1}$ , c'est à dire des mots finis ne comportant aucun sous mot de la forme  $ss^{-1}$  ou  $s^{-1}s$  avec  $s \in S$  ( $ss^{-1} = s^{-1}s = \epsilon$ ), muni de la loi de groupe concaténation-réduction : pour tout mot  $u, v \in F_N$ ,  $u.v$  est la concaténation des mots  $u$  et  $v$  où toutes les occurrences de la forme  $s.s^{-1}$  et  $s.s^{-1}$  sont retirées. Supprimer ces occurrences est une opération s'appelant réduction du mot  $u.v$ .

**Exemple 2.35.** Soit  $S = \{a, b\}$  et  $F_2 = F(\{a, b\})$ . Donnons deux éléments de  $F_N$ ,  $u = aba^{-1}$  et  $v = ab^{-1}b^2$ . Alors  $u.v = a.b^2$ .

Le groupe libre de rang  $N$  agit par conjugaison sur le groupe des automorphismes de  $F_N$ , noté  $Aut(F_N)$ . Le groupe des automorphismes extérieurs de  $F_N$ , noté  $Out(F_N)$ , est le groupe quotient de  $Aut(F_N)$  par l'action de  $F_N$  par conjugaison.

**Définition 2.36** (Automorphisme réductible). Soit  $[\phi] \in Out(F_N)$  un automorphisme extérieur de  $F_N$ .

1.  $[\phi]$  est réductible s'il existe une décomposition de  $F_N$  en facteurs libres  $F_N = H_1 \star \dots \star H_k \star L$  tel que pour tout  $i \in \{1, \dots, k\}$ , les groupes  $H_i$  soient non-triviaux et  $\phi(H_i)$  est conjugué à  $H_{i+1}$  modulo  $k$ .
2.  $[\phi]$  est irréductible s'il n'est pas réductible.
3.  $[\phi]$  est IWIP si toutes les itérées  $[\phi]^k$  sont irréductibles.

**Remarque 2.37.** Un automorphisme  $\varphi : F_N \longrightarrow F_N$  est dit respectivement réductible, irréductible ou IWIP si sa classe  $[\varphi]$  dans  $Out(F_N)$  est respectivement réductible, irréductible ou IWIP.

**Exemple 2.38.** Deux exemples d'automorphismes de  $F_3 = \langle a, b, c \rangle$  :

1. Un automorphisme réductible :

$$\varphi: \begin{cases} a & \mapsto aba \\ b & \mapsto ba \\ c & \mapsto caba^{-1}b^{-1} \end{cases}$$

En effet,  $\varphi$  laisse stable le sous-groupe  $\langle a, b \rangle$  et ainsi  $F_3$  se décompose sous la forme  $F_3 = H_1 \star L = \langle a, b \rangle \star \langle c \rangle$ .

2. Un IWIP :

$$\varphi: \begin{cases} a & \mapsto ab \\ b & \mapsto acbb \\ c & \mapsto a \end{cases}$$

On peut montrer que le dernier automorphisme est IWIP par le fait qu'il n'y a pas d'éléments de  $S^{-1}$  dans l'image et à l'aide d'un outil développé dans la sous-section suivante (il admet un représentant efficace canonique qui est primitif (voir la définition 2.46))

## 2.4.2 Graphes

Une classe d'objets importante pour l'étude des automorphismes de groupes libres est celle des *graphes*. On peut se référer à [BH92], [Los96] ou [Sta83] pour voir la manière dont les graphes sont utilisés dans l'étude des automorphismes du groupe libre.

**Définition 2.39.** Un graphe  $G$  est un CW-complexe connexe de dimension 1. Les sommets du graphe sont les 0-cellules de  $G$ ; leur ensemble est noté  $V(G)$ . Les arêtes du graphe sont les 1-cellules (fermées) de  $G$ , supposées munies d'une orientation; leur ensemble est noté  $E(G)$  et  $E^{-1}(G) = \{e^{-1}; e \in E(G)\}$  ou  $\bar{E}(G) = \{\bar{e}; e \in E(G)\}$  désignera l'ensemble des arêtes munies des orientations inverses. On note  $o(e)$  (respectivement  $t(e)$ ) le sommet initial (resp. sommet terminal) d'une arête  $e$ , l'arête étant ainsi orientée de son sommet initial vers son sommet terminal. On emploie la notation  $e = [o(e), t(e)]$  pour désigner une arête par ses deux sommets initiaux et terminaux.

**Remarque 2.40.** Avec les notations ci-dessus,  $o(e^{-1}) = o(\bar{e}) = t(e)$  et  $t(e^{-1}) = t(\bar{e}) = o(e)$ .

Donnons-nous un graphe  $G$  fini. Soit  $v$  un sommet de  $G$  et  $N(v)$  un voisinage compact contractile de  $v$  dans  $G$  tel que  $N(v) \cap V(G) = \{v\}$ . Un germe de l'arête  $e$  en  $v$  est la fermeture d'une composante connexe de  $(e \cap N(v)) \setminus \{v\}$ . Nous notons  $St(v) = \{e \in E(G) \cup E^{-1}(G) \mid o(e) = v\}$  l'ensemble des arêtes originaires du sommet  $v$ . Remarquons que l'ensemble  $St(v)$  correspond à l'ensemble des arêtes ayant un germe en  $v$ . Un *tournant* en un sommet  $v$  est une paire non ordonnée d'arêtes dans  $E(G) \cup E^{-1}(G)$  admettant un même sommet  $v$  pour sommet initial. De façon équivalente, c'est un sous-ensemble à deux éléments de  $St(v)$ . Si  $x \in G \setminus V(G)$ , on considère  $G_x$  le graphe obtenu à partir de  $G$  en réalisant la subdivision de l'arête  $e$  contenant  $x$  dans son intérieur en  $e = e_1.e_2$  où  $t(e_1) = o(e_2) = x$ . On définit alors  $St(x) = \{e \in E(G_x) = \{e_1, e_2\} \cup (E(G) \setminus \{e\}) \mid o(e) = x\}$ .

**Définition 2.41.** Soit  $G$  un graphe.

1. Un chemin d'arêtes dans  $G$  est une application continue  $c : [a, b] \rightarrow G$  telle que  $c(a), c(b) \in V(G)$  et qui est localement injective dans le complémentaire des pré-images des sommets. Lorsque  $c$  est localement injective (respectivement injective et d'image  $e$ ), on dit que  $c$  est un chemin d'arêtes réduit (respectivement un chemin d'une arête  $e$  que l'on note  $c_e$ ).
2. Soit  $c_1 : [a_1, b_1] \rightarrow G$ ,  $c_2 : [a_2, b_2] \rightarrow G$  deux chemins d'arêtes dans  $G$ . On dit que  $c_1$  est un sous-chemin de  $c_2$  et on note  $c_1 \subset c_2$  si  $(c_2)|_{[a_1, b_1]} = c_1$ .

3. Un chemin d'arêtes  $c_2$  emprunte ou traverse une arête  $e$  (respectivement un tournant  $\{e_1^{-1}, e_2\}$  en un sommet  $v = o(e_1^{-1}) = o(e_2)$ ) si  $c_e \subset c_2$  (respectivement emprunte exactement  $e_1$  puis  $e_2$  ou bien exactement  $e_2^{-1}$  puis  $e_1^{-1}$ )

Il est possible, si l'on muni les arêtes d'un graphe d'une longueur, de définir une fonction longueur sur les chemins d'arêtes réduits d'un graphe comme suit :

**Définition 2.42** (Longueur des chemins d'arêtes réduits). Soit  $G$  un graphe.

1. Une longueur  $l$  sur les arêtes de  $G$  est une fonction  $l : E(G) \cup E^{-1}(G) \longrightarrow \mathbb{R}_+$  telle que pour tout  $e \in E(G)$ ,  $l(e) = l(e^{-1})$ .
2. Soit  $c$  un chemin réduit dans  $G$  (voir la définition 2.41). La longueur d'un chemin d'arêtes réduit  $c$  est la quantité notée  $l(c)$  définie comme suit :

$$l(c) = \sum_{e \in E(G) \cup E^{-1}(G)} k(e)l(e)$$

où  $k(e) \in \mathbb{N}$  désigne le nombre de fois que le chemin d'arêtes  $c$  traverse l'arête  $e$ .

De manière similaire à la sous-section précédente traitant des substitutions, tout graphe  $G$  est muni d'une fonction longueur canonique notée  $l_{can}$  qui satisfait pour tout  $e \in E(G)$ ,  $l_{can}(e) = 1$ .

On distingue quelques classes particulières de graphes. Un *arbre* est un graphe ne possédant aucun chemin d'arêtes réduit *fermé*, i.e. image d'un cercle par une application continue injective. De façon équivalente, un arbre est un graphe tel que deux sommets quelconques sont connectés par un unique chemin réduit. Une *forêt* est une union d'arbres disjoints. Le *bouquet de  $N$  cercles*, noté  $R_N$ , est le graphe qui a un unique sommet et  $N$  arêtes attachées à ce sommet par leurs deux extrémités (chaque arête fermée est donc une boucle).

Si les graphes sont utilisés dans l'étude des automorphismes (externes) des groupes libres, c'est parce que le groupe fondamental d'un graphe est un groupe libre. Pour identifier ce groupe fondamental au groupe libre, on utilise la notion de *marquage* : un *marquage* de  $G$  est une équivalence d'homotopie  $\rho : R_n \longrightarrow G$ . Il est possible de mesurer la différence entre deux marquages différents par la notion de *différence de marquage*.

**Définition 2.43** (Différence de marquage). Soit  $\rho_1 : R_n \longrightarrow G$  et  $\rho_2 : R_n \longrightarrow H$  deux marquages. La différence de marquage entre  $\rho_1$  et  $\rho_2$  est l'unique équivalence d'homotopie  $\tau : G \longrightarrow H$  qui fait commuter le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} R_n & \xrightarrow{\rho_1} & G \\ \downarrow id & & \downarrow \tau \\ R_n & \xrightarrow{\rho_2} & H \end{array}$$

Ainsi, il existe un lien simple entre le rang  $N$  du groupe fondamental d'un graphe  $G$  pointé en  $v \in V(G)$  et sa structure combinatoire donnée par la relation :

$$N = \text{rang}(\pi_1(G, v)) = 1 - \chi(G) = 1 - \#(V(G)) + \#(E(G))$$

Le nombre  $\chi(G)$  est appelé la caractéristique d'Euler-Poincaré du graphe  $G$ . Notons que la relation combinatoire donnée ci-dessus est indépendante du choix d'un point base  $v \in G$  car nous supposons l'espace  $G$  connexe.

### 2.4.3 Représentants topologiques et efficaces

**Définition 2.44** (Représentant topologique, efficace [BH92],[Los93]). Soit  $[\phi] \in \text{Out}(F_N)$ .

1. Un représentant topologique de  $[\phi]$  est une paire  $(f, G)$  où  $G$  est un graphe et  $f : G \rightarrow G$  est une application continue satisfaisant les propriétés suivantes :
  - pour toute arête  $e \in E(G) \cup E^{-1}(G)$  et tout chemin d'arête réduit  $c_e$ , l'image  $f \circ c_e$  est un chemin d'arêtes réduit (voir définition 2.41) ;
  - $f$  induit sur le groupe fondamental de  $G$  un automorphisme dans la classe  $[\phi]$ .
2. Un représentant efficace est un représentant topologique  $(f, G)$  tel que pour toute arête  $e \in E(G) \cup E^{-1}(G)$ , tout chemin d'arête  $c_e$  et pour tout  $k \in \mathbb{N}$  non nul, l'image  $f^k \circ c$  est un chemin d'arêtes réduit.

Les auteurs dans l'article [BH92] appellent les représentants efficaces *train-track maps* qui est la version la plus utilisée dans la littérature de ce concept. Ce nom sera réservé pour nous à un graphe muni d'une structure lisse que nous étudions à la section 7.

**Remarque 2.45.** Lorsque cela ne sera pas nécessaire, nous n'évoquerons pas explicitement l'automorphisme  $[\varphi] \in \text{Out}(F_N)$  représenté par son représentant topologique  $(f, G)$ . Cela sera le cas lorsque nous souhaiterons étudier exclusivement les propriétés de  $(f, G)$  et pas de l'automorphisme  $[\varphi]$ .

Les représentants introduits ci-dessus peuvent être partiellement décrits par un objet algébrique classique, une matrice :

**Définition 2.46.** La matrice de transition d'un représentant topologique  $(f, G)$  est la matrice  $M_f = (a_{i,j})_{i,j \in \{1, \dots, \text{Card}(E(G))\}}$ , donnée par

$$a_{i,j} = (\text{Card}(\{\text{sous-chemins } c_{e_j} \subset f(c_{e_i})\}) + \text{Card}(\{\text{sous-chemins } c_{\bar{e}_j} \subset f(c_{e_i})\}))$$

Elle est :

1. irréductible si pour tout  $i, j \in \{1, \dots, \text{Card}(E(G))\}$ , il existe un entier  $k \geq 0$  tel que  $(M_f^k)_{i,j} > 0$ .

2. primitive s'il existe un entier  $p \geq 0$  tel que pour tout  $i, j \in \{1, \dots, \text{Card}(E(G))\}$ ,  $(M_f^p)_{i,j} > 0$ .

**Définition 2.47** (Représentant topologique irréductible et primitif). Soit  $(f, G)$  un représentant topologique. On dit qu'il est irréductible (respectivement primitif) si sa matrice de transition est irréductible (respectivement primitive).

**Remarque 2.48.** Soit  $(f, G)$  un représentant irréductible d'un automorphisme IWIP  $[\phi] \in \text{Out}(\mathbb{F}_N)$ . La matrice de transition  $M_f$  du représentant  $(f, G)$  possède un facteur d'expansion  $\lambda > 1$ . En effet,  $\lambda$  est la valeur propre de Perron-Frobenius d'une matrice irréductible donc  $\lambda \geq 1$ , mais si  $\lambda = 1$  alors  $M_f$  est une matrice de permutation qui est donc d'ordre fini. Il existe ainsi un entier  $m \geq 1$  tel que  $M_f^m = \text{Id}$ . Or,  $M_f^m = M_{f^m}$  et  $f^m$  est un représentant irréductible de  $[\phi^m]$  ce qui est contradictoire.

Les deux lemmes ci-dessous sont classiques et bien connus et se trouvent dans le premier chapitre de l'article [BFH97] :

**Lemme 2.49.** Soit  $(f, G)$  un représentant primitif. Alors  $f$  est surjective et admet un point périodique à l'intérieur de toute arête.

Preuve : Par définition il existe, pour tout couple  $(e_i, e_j) \in E(G) \times E(G)$ , un entier  $k \geq 0$  tel que  $f^k(c_{e_i})$  est un chemin d'arêtes qui contient l'arête  $e_j$ . Si  $f$  n'est pas surjective, pour tout  $s \in \{1, \dots, k\}$  le chemin  $f(e_s)$  ne contient pas une arête  $e$ . Alors pour tout  $j \geq 0$ ,  $f^j(c_{e_s})$  ne contient pas non plus l'arête  $e$ , ce qui contredit la primitivité et nous permet de conclure à la surjectivité. Pour toute arête  $e$  il existe  $k \geq 0$  tel que  $f^k(c_e)$  traverse toutes les arêtes du graphe  $G$ . Il existe donc un chemin  $c : I \rightarrow G$  d'image contenue dans l'intérieur de  $e$  tel que  $f^k(c) = c_e$ . Puisque toute application continue surjective d'un intervalle dans lui-même a un point fixe,  $f^k \circ c$  admet un point fixe dans  $I$ .  $\square$

**Lemme 2.50.** Soit  $(f, G)$  un représentant efficace primitif. Alors l'ensemble des chemins réduits dans le graphe  $G$  admet une unique fonction longueur, notée  $l_{\text{PF}}$ , telle que  $\sum_{e \in E(G)} l_{\text{PF}}(e) = \sum_{e \in E^{-1}(G)} l_{\text{PF}}(e) = 1$ , dite longueur de Perron-Frobenius, qui rend  $f$  uniformément  $\lambda$ -dilatante ( $\lambda > 1$ ) en restriction aux chemins d'arêtes réduits  $c$  où  $\text{Im}(c)$  est une arête de  $G$ .

Preuve : C'est une conséquence immédiate du lemme 2.28 appliqué à la transposée de la matrice de transition  $M_f$  de  $(f, G)$ , qui en satisfait toutes les hypothèses

grâce à la dernière assertion du lemme 2.49 : soit  $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_k \end{pmatrix}$  ( $k = \text{Card}(E(G))$ ) le vecteur propre de  $M_f^t$  avec  $v_1 + \dots + v_k = 1$  associé à la valeur propre réelle  $\lambda > 1$  de plus

grand module. En munissant chaque arête  $e_i$  de la longueur  $l_{\text{PF}}(e_i) = l_{\text{PF}}(e_i^{-1}) = v_i$ , on obtient une longueur sur les chemins d'arêtes réduits qui rend  $f$  uniformément  $\lambda$ -dilatante.  $\square$

**Remarque 2.51.** *Notons que les longueurs de Perron-Frobenius et canoniques d'un graphe  $G$  lorsqu'elles sont bien définies sont asymptotiquement équivalentes. Plus précisément, soit  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de chemins d'arêtes réduits dans  $G$ , alors :*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} l_{\text{can}}(c_n) \rightarrow +\infty \iff \lim_{n \rightarrow +\infty} l_{\text{PF}}(c_n) \rightarrow +\infty$$

La proposition suivante est fondamentale pour le reste de notre travail puisqu'elle permet d'établir un pont entre représentants efficace d'un IWIP et des substitutions primitives.

**Proposition 2.52** ([Kap14], Lemme 2.4). *Soit  $(f, G)$  un représentant efficace irréductible d'un automorphisme IWIP  $[\phi] \in \text{Out}(\mathbb{F}_{\mathbb{N}})$ . Alors  $(f, G)$  est un représentant primitif.*

Preuve : L'application  $f : G \rightarrow G$  est un morphisme de graphe donc elle induit une permutation par restriction à l'ensemble des sommets  $V(G)$ . De plus considérons l'application  $Df : E(G) \rightarrow E(G)$  tel que pour tout  $e \in E(G)$ , si  $f(c_e) = c_{e_1} \dots$  alors  $Df(e) = e_1$  si  $e_1 \in E(G)$  et  $Df(e) = e_1^{-1}$  sinon. Soit un entier  $s \geq 1$  tel que tout sommet périodique pour  $f$  soit fixé par  $f^s$ . D'après la remarque 2.48, pour toute arête  $e \in E(G)$  et  $n \in \mathbb{N}$ , la longueur du chemin d'arête  $\lim_{n \rightarrow +\infty} l_{\text{can}}(f^n(c_e)) \rightarrow +\infty$ .

On en déduit qu'il existe  $k \geq 1$  tel que pour tout  $e \in E(G)$ ,  $l_{\text{can}}(f^k(c_e)) \geq 2$ . Notons  $g = f^k$  qui est un représentant efficace irréductible de l'automorphisme  $[\phi^k]$ . Soit  $e_0 \in E(G)$ , périodique pour l'application  $Dg$ , on a  $l_{\text{can}}(g(c_{e_0})) \geq 2$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $g^n(c_{e_0})$  est un sous-chemin propre de  $g^{n+1}(c_{e_0})$ . Posons le graphe  $G_0 = \{e \in E(G) \mid \exists n \in \mathbb{N}, e \text{ est traversée par } g^n(c_{e_0})\}$ . Par construction,  $g(G_0) \subset G_0$  donc par irréductibilité de  $g$ , on obtient que  $G_0 = G$ . Ainsi, il existe un entier  $t \geq 1$  tel que le chemin  $g^t(c_{e_0})$  traverse toutes les arêtes topologiques du graphe  $G$ . L'ensemble  $E(G)$  étant fini, il existe un entier  $b \geq 1$  tel que pour toute arête  $e \in E(G)$ ,  $Dg^b(e)$  soit une arête périodique. On en conclut que pour  $m = b + t$ , la matrice  $M_{g^m} = M_{f^{km}} = M_f^{km}$  a tous ses coefficients strictement positifs, donc  $M_f$  est primitive.  $\square$

La longueur de Perron-Frobenius sur les chemins d'arêtes d'un graphe d'un représentant irréductible est une des première étapes clef de la démonstration du théorème principal du théorème suivant. Tous les automorphismes n'admettent pas de représentant efficace. Le théorème suivant assure l'existence de tels représentants dans la classe des automorphismes irréductibles.

**Théorème 2.53** ([BH92]). *Tout élément irréductible de  $\text{Out}(\mathbb{F}_{\mathbb{N}})$  admet un représentant efficace, et tout IWIP admet un représentant efficace primitif.*

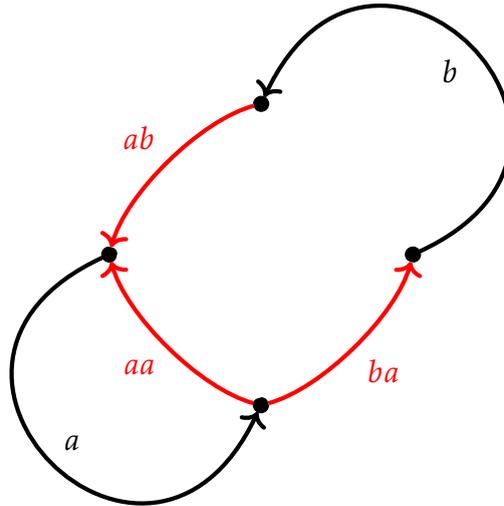


FIGURE 3 – Graphe de Whitehead local  $Wh_{R_2}(\star, f)$  du représentant canonique de Fibonacci

#### 2.4.4 Graphe de Whitehead

Ces objets sont particulièrement utiles lorsque l'on travaille avec des représentants efficaces d'automorphismes et que l'on s'intéresse à récupérer une structure lisse sur les laminations associées à un automorphisme. Ils apparaissent par exemple dans l'article [BH95] afin de construire ce que l'on appelle un *train-track invariant* pour un homéomorphisme de surface, ou encore dans l'article [Kap14] pour fournir un critère algorithmique afin de déterminer si un automorphisme du groupe libre est IWIP ou non.

**Définition 2.54** (Graphe de Whitehead local). *Soit  $(f, G)$  un représentant efficace et soit un sommet  $v \in V(G)$ . Le graphe de Whitehead local de  $f$  au sommet  $v$  est le graphe  $Wh_G(v, f)$  suivant :*

- *Il y a une bijection  $b$  de l'ensemble  $\{e \in E(G) \cup E^{-1}(G); o(e) = v\}$  (l'ensemble des arêtes orientées admettant  $v$  pour origine) vers l'ensemble de ses sommets  $V(Wh_G(v, f))$ .*
- *Il y a une arête  $E$  de  $Wh_G(v, f)$ , et une seule, entre les sommet  $x = b(e)$  et  $x' = b(e')$  si et seulement si le tournant  $\{e, e'^{-1}\}$  ou  $\{e^{-1}, e'\}$  est emprunté (voir définition 2.41)*

par un chemin  $f^k(c_e)$  ( $e \in E(G)$  et  $k \in \mathbb{N}$ ), l'origine de  $E$  étant arbitrairement choisie.

**Exemple 2.55** (Graphe de Whitehead local). Soit  $(f, R_2)$  définie sur le bouquet de deux cercles  $(R_2, \star)$  le représentant canonique de l'automorphisme de Fibonacci de l'exemple 3.20. Alors son graphe de Whitehead local  $Wh_{R_2}(\star, f)$  est donné par la figure 3.

Une propriété topologique des graphes de Whitehead de représentant d'automorphisme permet de donner un critère d'irréductibilité sur les automorphisme.

**Proposition 2.56** ([Kap14], chapitre 4). Soit  $N \geq 2$ ,  $[\phi] \in \text{Out}(F_N)$  et  $(f, G)$  un représentant efficace de  $[\phi]$  dont les arêtes du graphe  $G$  possèdent une longueur rendant  $f$  dilatante. Alors, si il existe un sommet  $v \in V(G)$ , tel que le graphe de Whitehead local  $Wh_G(v, f)$  ne soit pas connexe, l'automorphisme  $[\phi]$  est réductible.

Dans [BH95], les auteurs montrent qu'un graphe de Whitehead local d'un représentant provenant d'un automorphisme géométrique irréductible est connexe. Le graphe de Whitehead local d'un représentant  $(f, G)$  en un de ses sommets est un éclatement local, autour d'un sommet. Le graphe de Whitehead global est le graphe éclaté à partir de  $G$  en tous les sommets au sens suivant :

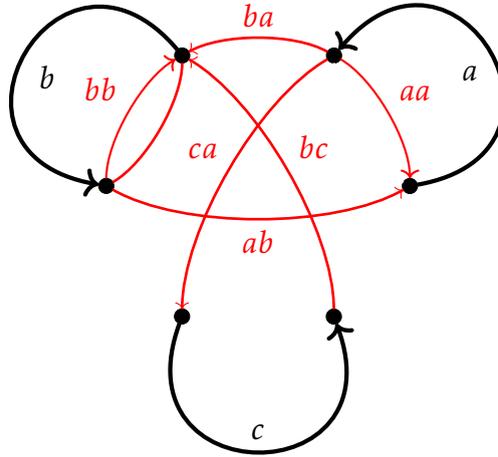
**Définition 2.57** (Graphe de Whitehead global). Soit  $(f, G)$  un représentant efficace. Le graphe de Whitehead global de  $(f, G)$  est le graphe  $Wh_G(f)$  obtenu comme l'union des graphes de Whitehead locaux de  $G$  avec un ensemble d'arêtes  $\mathcal{R}$  défini de la façon suivante :

Soit  $(x, x') \in V(Wh_G(v, f)) \times V(Wh_G(v', f))$ . L'arête  $(x, x')$  appartient à  $\mathcal{R}$  si l'arête  $(v, v')$  appartient à  $E(G)$ .

Les arêtes de  $Wh_G(f)$  contenues dans  $\mathcal{R}$  sont nommées arêtes réelles.

Les arêtes de  $Wh_G(f)$  contenues dans  $\bigcup_{v \in V(G)} E(Wh_G(v, f))$  sont nommées arêtes infinitésimales.

**Exemple 2.58** (Graphe de Whitehead global d'un automorphisme). Soit  $\varphi$  l'automorphisme de  $F_3$  donné dans l'exemple 2.29. Le graphe de Whitehead global associé à son représentant canonique  $(f, R_3)$  qui est efficace et irréductible est la figure suivante.



## 2.5 Transformations de représentants efficaces

Dans l'article [Los96], J.Los établit un critère algorithmique pour déterminer si deux automorphismes IWIP de  $F_{\mathbb{N}}$  sont conjugués dans  $Out(F_{\mathbb{N}})$ , c'est à dire :

Soit  $\alpha, \beta \in Aut(F_{\mathbb{N}})$ . Existe-t-il  $\phi \in Aut(F_{\mathbb{N}})$  tel que  $[\phi^{-1} \circ \alpha \circ \phi] = [\beta]$  dans  $Out(F_{\mathbb{N}})$  ?

L'auteur démontre un résultat de connexité dans l'ensemble des représentants efficaces d'un automorphisme extérieur. Nous décrivons ci-dessous un ensemble d'équivalences d'homotopies de graphe qui préservent la structure de représentant efficace d'un élément  $(f, G)$ . On rappelle qu'un représentant efficace irréductible vient avec sa longueur de Perron-Frobenius (voir lemme 2.50).

### 2.5.1 Homotopies de valence 2

**Définition 2.59** (Homotopie de valence 2). Soit  $(f, G)$  un représentant efficace primitif. Soit  $v$  un sommet de valence 2 avec  $v = t(e_{s-1}) = o(e_s)$ . Soit  $\mathcal{R}$  la relation d'équivalence dans  $G$  telle que pour tout  $x, y \in G$  :

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x \in e_s \text{ et } y \in e_s$$

1. Le graphe obtenu par une homotopie de valence 2 en  $v$  suivant  $e_s$  est le graphe quotient  $G' = G/\mathcal{R}$ .

Notons  $\pi : G \rightarrow G'$  la projection canonique associée à la relation d'équivalence  $\mathcal{R}$ . Soit  $s : G' \rightarrow G$  la section (morphisme) de  $\pi$  vérifiant  $s \circ \pi \circ c_{e_{s-1}}$  traverse exactement le tournant  $\{e_{s-1}, e_s\}$ , et telle que pour tout  $e \in E(G) \setminus \{e_{s-1}, e_s\}$ ,  $s \circ \pi \circ c_e = c_e$ .

2. L'application obtenue par l'homotopie de valence 2 suivant  $e_s$  est l'application  $f' = \pi \circ f \circ s : G' \rightarrow G'$ .

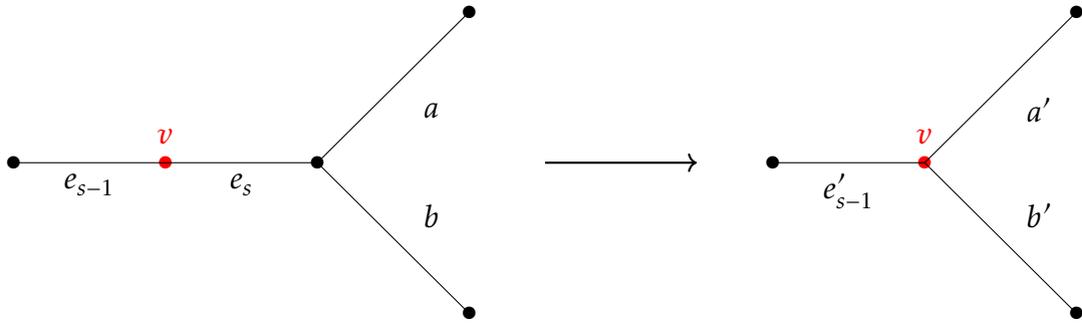


FIGURE 4 – Homotopie de valence 2 de  $G$  suivant une paire d'arêtes  $(e_{s-1}, e_s)$

**Remarque 2.60.** En un sommet  $v$  de valence 2, on a deux homotopies de valence 2 possibles, selon que l'on choisit de l'effectuer suivant  $e_s$  ou  $e_{s-1}$  (voir les notations de la définition 2.59).

### 2.5.2 Plis

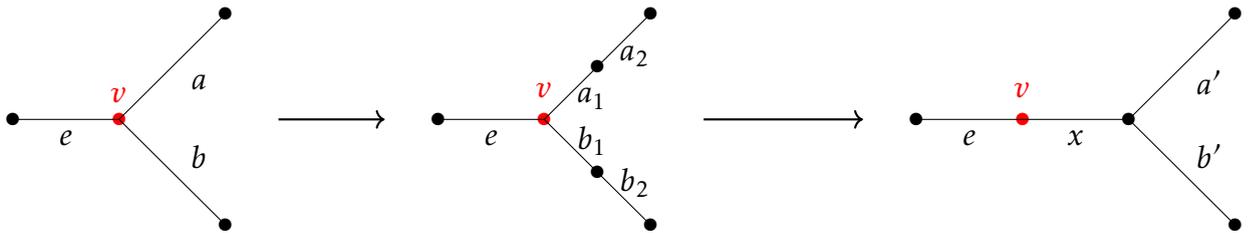


FIGURE 5 – Pli de  $G$  à un tournant

**Définition 2.61** (Graphe plié à un tournant). Soit  $(f, G)$  un représentant efficace primitif et soit  $\{e_1^{-1}, e_2\}$  un tournant de  $G$ . Soit  $c_{e_1}, c_{e_2} : [0, 1] \rightarrow G$  les chemins d'arête paramétrisant respectivement les arêtes  $e_1, e_2$ . Supposons qu'il existe  $t_0 \in ]0, 1]$  tel que pour tout  $t \in [0, t_0]$ ,  $f(c_{e_1}(t)) = f(c_{e_2}(t))$ . Soit  $\mathcal{R}$  la relation d'équivalence sur  $G$  telle que pour tout  $x, y \in G$  :

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \text{Il existe } s \in [0, t_0] \text{ tel que } x = c_{e_1}(s) \text{ et } y = c_{e_2}(s)$$

1. Le graphe obtenu en pliant  $(f, G)$  au tournant  $\{e_1, e_2\}$  est le graphe quotient  $G' = G/\mathcal{R}$ .

Notons  $\pi : G \rightarrow G'$ , la projection canonique pour la relation d'équivalence  $\mathcal{R}$ .

2. On appelle pli de  $f$  au tournant  $\{e_1^{-1}, e_2\}$  l'unique application  $f' : G' \rightarrow G'$  qui vérifie la relation  $f' \circ \pi = \pi \circ f$ .

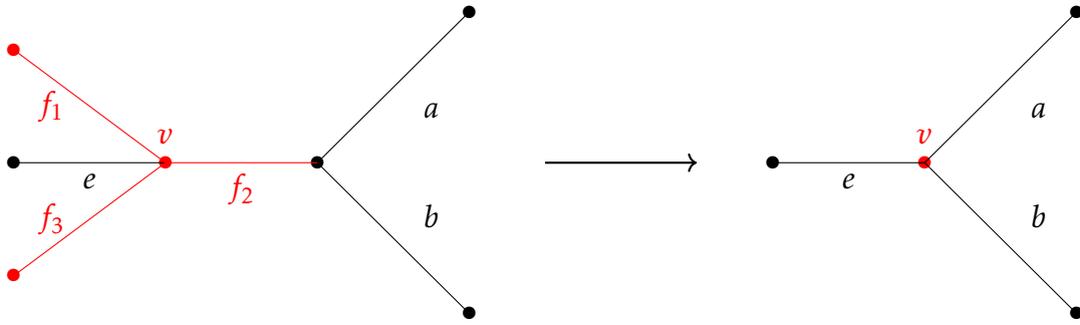


FIGURE 6 – Écrasement d'une forêt invariante  $\mathcal{F} = \{f_1, f_2, f_3\}$  par  $(f, G)$

### 2.5.3 Écrasement de forêts invariantes

**Définition 2.62** (Grappe obtenue par écrasement de forêt invariante). Soit  $(f, G)$  un représentant efficace primitif. Supposons qu'il existe  $\mathcal{F} \subset G$  une forêt invariante par l'application  $f$  (c'est-à-dire  $f(\mathcal{F}) \subset \mathcal{F}$ ). Notons  $T_1, \dots, T_k$  les composantes connexes de  $\mathcal{F}$ . Soit  $\mathcal{R}$  la relation d'équivalence sur  $G$  tel que pour tout  $x, y \in G$  :

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \text{il existe } i \in \{1, \dots, k\} \text{ tel que } x \in T_i \text{ et } y \in T_i$$

1. Le graphe obtenu par l'écrasement de la forêt  $\mathcal{F}$  invariante par  $f$  est le graphe  $G' = G/\mathcal{R}$ .
2. L'application issue de  $f$  par l'écrasement de  $\mathcal{F}$  est l'unique application  $f' : G' \rightarrow G'$  satisfaisant la relation  $f' \circ \pi = \pi \circ f$ .

### 2.5.4 Mouvements élémentaires et connexité sur l'ensemble des représentants efficaces

Nous définissons à présent les *mouvements élémentaires* qui permettent dans l'article [Los96] de rendre connexe l'ensemble des représentants efficaces irréductibles d'un automorphisme du groupe libre IWIP.

**Définition 2.63** (Mouvement élémentaires). On nomme mouvement élémentaire d'un représentant efficace  $(f, G)$  à un représentant efficace  $(f', G')$  les transformations suivantes : pli, pli suivi d'une homotopie de valence 2, pli suivi d'une homotopie de valence 2 puis d'un écrasement de forêt invariante.

**Remarque 2.64.** Il est classique, et facile à prouver, que si  $(f', G')$  est l'image de  $(f, G)$  par un mouvement élémentaire, alors  $(f', G')$  est un représentant de la même classe d'automorphisme externe que  $(f, G)$ . Par ailleurs, si l'on note  $T$  un mouvement élémentaire, par définition il agit sur un couple  $(f, G)$ , et en particulier sur chacun des facteurs de ce couple : sur l'application  $f$  et sur le graphe  $G$ . On ne considèrera parfois que l'action de  $T$  sur l'un ou l'autre de ces facteurs.

Dans [Los96], l'auteur prouve le résultat suivant, que nous utiliserons dans la section 5 :

**Théorème 2.65.** ([Los96]) Soit  $F_N$  le groupe libre de rang  $N$  et  $\text{Out}(F_N)$  le groupe des automorphismes extérieurs de  $F_N$ .

1. Soit  $(f, G)$  et  $(f', G')$  deux représentants efficaces irréductibles d'un même automorphisme extérieur IWIP. Il existe une suite finie  $\tau_1, \dots, \tau_k$  où pour tout  $i \in \{1, \dots, k\}$ ,  $\tau_i$  est soit un mouvement élémentaire soit un inverse homotopique d'un mouvement élémentaire de  $(f, G)$  à  $(f', G')$  :

$$(f, G) = (f_1, G_1) \xrightarrow{\tau_1} \dots \xrightarrow{\tau_k} (f_k, G_k) = (f', G')$$

2. Soit  $\phi$  et  $\psi$  deux automorphismes de  $F_N$  qui sont conjugués dans  $\text{Out}(F_N)$ . Si  $(f, G)$  est un représentant efficace primitif de  $[\phi] \in \text{Out}(F_N)$ , alors il existe une suite finie de mouvements élémentaires et d'inverses homotopiques de mouvements élémentaires de  $(f, G)$  à un représentant efficace primitif  $(f_k, G_k)$  tel que, pour un certain homéomorphisme  $\alpha$  de  $G_k$ ,  $(f_k, \alpha(G_k))$  est un représentant efficace primitif de  $[\psi] \in \text{Out}(F_N)$ .

### 2.5.5 Deux lemmes techniques

Les énoncés ci-dessous seront utilisés dans la section 5.

**Lemme 2.66.** Soit  $(f, G)$  un représentant efficace primitif et  $\tau : (f, G) \longrightarrow (f', G')$  un pli (voir définition 2.61). Alors  $(f', G')$  ne contient pas de forêt invariante.

Preuve : Supposons par l'absurde qu'il existe dans  $G'$  une forêt invariante  $\mathcal{F} = \{E_1, \dots, E_k\}$  par  $f'$ . Notons  $\Pi : G \longrightarrow G'$  le pli où les arêtes  $e_i$  et  $e_j$  de  $G$  sont identifiées en l'arête  $z$  de  $G'$ . Rappelons que dans ce cas :

$$E(G) = \{e_i, e_j\} \cup E \quad E(G') = \{z\} \cup E \quad \Pi|_E = \text{Id} \quad \Pi(e_i) = \Pi(e_j) = z$$

On obtient une description simple de  $\Pi^{-1}(\mathcal{F})$  car d'après la définition 2.62,  $\Pi \circ f = f' \circ \Pi$ . Le fait que  $\Pi$  soit une équivalence d'homotopie cellulaire induit que l'ensemble  $\Pi^{-1}(\mathcal{F})$  est une forêt de  $G$ . De plus,  $\Pi \circ f(\Pi^{-1}(\mathcal{F})) = f' \circ \Pi(\Pi^{-1}(\mathcal{F})) = f'(\mathcal{F}) \subset \mathcal{F}$ . On en déduit ainsi que  $f(\Pi^{-1}(\mathcal{F})) \subset \Pi^{-1}(\mathcal{F})$  ce qui est absurde puisque  $(f, G)$  ne possède pas de forêt invariante.  $\square$

Il est possible en revanche de faire apparaître une forêt invariante dans  $(f', G')$  lorsque que l'on transforme homotopiquement le couple  $(f, G)$  par un pli suivi d'une homotopie de valence 2 en  $(f', G')$  comme dans l'exemple suivant.

**Exemple 2.67.** Considérons un graphe  $G$  possédant un sommet  $v$  de valence 3 tel que  $St(v) = \{t(e_1), o(e_2), o(e_3)\}$ , une arête  $E$  de  $G$  et une application de graphe possédant des chemins d'arêtes empruntés  $M, X$  satisfaisant :

$$\begin{aligned} e_2 &\mapsto ME \\ e_3 &\mapsto MX \\ E &\mapsto e_2 \end{aligned}$$

On réalise ensuite un pli au sommet  $v$  en identifiant les segments d'arêtes s'envoyant sur  $M$ . L'application induite devient :

$$\begin{aligned} e'_2 &\mapsto E \\ e'_3 &\mapsto X \\ E &\mapsto e'_1 \cdot e'_2 \end{aligned}$$

Comme le sommet initial de  $e_2$  est de valence 2, on peut appliquer une homotopie de valence 2 en  $v$  suivant  $e'_1$ . L'application induite par l'homotopie de valence 2 est :

$$\begin{aligned} e'_2 &\mapsto E \\ e'_3 &\mapsto X_3 \\ E &\mapsto e'_2 \end{aligned}$$

Le sous-graphe  $F = \{e'_2, E\}$  est une forêt invariante qu'il est nécessaire d'écraser.

**Proposition 2.68.** Soit  $\pi$  un mouvement élémentaire d'un représentant efficace primitif  $(f, G)$  vers un représentant efficace primitif  $(f', G')$ . Pour tout entier  $k \geq 0$  et  $e \in E(G)$ , il existe un entier  $k' \geq 0$  et  $e' \in E(G')$  tel que  $\pi(f^k(c_e))$  soit un sous-chemin de  $(f')^{k'}(c_{e'})$ .

Preuve de la proposition 2.68 : Avec les notations de l'énoncé, soit le chemin  $C = f^k(c_e)$ . On distingue trois cas selon la nature des mouvements élémentaires :

- Cas 1 : Supposons que  $\pi : G \rightarrow G_1$  soit un pli au tournant  $\{e_a, e_b\}$  (voir définition 2.61). Par définition, on a la relation  $\pi \circ f = f_1 \circ \pi$ . En raisonnant par récurrence, on trouve que pour tout entier  $k \geq 0$ ,  $\pi \circ f^k = (f_1)^k \circ \pi$ . Il vient que le chemin d'arêtes  $\pi(C)$  dans  $G_1$  est un sous-chemin de  $\pi(f^k(c_e)) = (f_1)^k(\pi(c_e))$ . Or  $\pi(e)$  est de la forme  $x.e_a$ ,  $x.e_b$  ou  $e$ . On en déduit qu'il est un chemin emprunté par une itérée de  $f$  et par définition il existe un entier  $k_0 \geq 0$ ,  $e_1 \in E(G_1)$  tels que  $\pi(c_e) \subset f_1^{k_0}(c_{e_1})$ . On en conclut aisément que  $\pi(C) \subset f_1^{k+k_0}(c_{e_1})$  ce que l'on voulait démontrer dans ce cas.
- Cas 2 : Supposons que  $\pi : G \rightarrow G_3$  soit un pli suivi d'une homotopie de valence 2. Notons  $\pi_1 : G \rightarrow G_1$  le pli au tournant  $\{e_a, e_b\}$  dans  $G$  et  $\pi_2 : G_1 \rightarrow G_2$  l'homotopie de valence 2 qui suit. L'application  $\pi$  est donc l'équivalence d'homotopie  $\pi_2 \circ \pi_1$ . Notons également  $(f_1, G_1)$  le représentant obtenu après le pli de  $(f, G)$  et  $(f_2, G_2)$  celui obtenu après l'homotopie de valence 2 appliquée à  $(f_1, G_1)$ . Par définition il existe une section particulière de la projection  $\pi_2$  notée  $s_2 : G_2 \rightarrow G_1$  qui vérifie la relation  $\pi_2 \circ f_1 \circ s_2 = f_2$ . De même, on va se servir de la relation suivante :  $f_1 \circ \pi_1 = \pi_1 \circ f$ .

Ainsi :

$$\pi(C) = (\pi_2 \circ \pi_1)(f^k(c_e)) = (\pi_2 \circ f_1^k \circ \pi_1)(c_e)$$

Or, notant  $e_{s-1}, e_s$  les arêtes comme dans la définition 2.59,  $s_2 \circ \pi_2$  vaut l'identité sur  $E(G_2) \setminus \{e_{s-1}, e_s\}$  et envoie  $e_s$  sur  $t(e_s)$  et  $e_{s-1}$  sur  $e_{s-1}.e_s$ . Donc pour tout chemin  $c$  de  $G_2$ ,  $c \subset (s_2 \circ \pi_2)(c)$ . On obtient :

$$(\pi_2 \circ f_1^k \circ \pi_1)(c_e) \subset (\pi_2 \circ f_1 \circ s_2 \circ \pi_2 \circ f_1^{k-1})(\pi_1(c_e))$$

C'est à dire :

$$(\pi_2 \circ f_1^k \circ \pi_1)(c_e) \subset (f_2 \circ \pi_2 \circ f_1^{k-1})(\pi_1(c_e)).$$

On en déduit par récurrence que pour tout  $e_1 \in E(G_1)$  et entier  $k_1 \geq 0$  :

$$(\pi_2 \circ f_1^{k_1})(c_{e_1}) \subset (f_2^{k_1} \circ \pi_2)(c_{e_1})$$

En appliquant cette remarque dans notre cas on obtient :

$$(\pi_2 \circ f_1^k \circ \pi_1)(c_e) \subset f_2^k((\pi_2 \circ \pi_1)(c_e)).$$

Or  $(\pi_2 \circ \pi_1)(c_e)$  est un chemin emprunté dans le graphe par un itéré de  $f_2$  donc :

$$\text{il existe un entier } k' \geq 0 \text{ et } e_2 \in E(G_2) \text{ tels que } (\pi_2 \circ \pi_1)(c_e) \subset f_2^{k'}(c_{e_2})$$

On en déduit que :

$$\pi(C) \subset f_2^{k+k'}(c_{e_2})$$

- **Cas 3** : Supposons que  $\pi$  soit un pli suivi d'une homotopie de valence 2 puis d'un écrasement de forêt invariante maximale. Soit  $\pi_1 : G \rightarrow G_1$ ,  $\pi_2 : G_1 \rightarrow G_2$  les applications définies dans le cas 2 ci-dessus et  $\pi_3 : G_2 \rightarrow G_3$  l'écrasement d'une forêt maximale  $\mathcal{F} \subset G_2$ . Alors  $\pi = \pi_3 \circ \pi_2 \circ \pi_1$ . D'après les relations obtenues dans le cas 2, il existe un entier  $k_2 \geq 0$  et  $e_2 \in E(G_2)$  tels que :

$$(\pi_3 \circ \pi_2 \circ \pi_1)(f^k(c_e)) \subset (\pi_3 \circ f_2^{k_2})(c_{e_2})$$

Or en notant  $(f_3, G_3)$  l'application induite par l'écrasement de la forêt  $\mathcal{F}$ , on a par définition :

$$\pi_3 \circ f_2^{k_2} = f_3^{k_2} \circ \pi_3$$

car  $\pi_3 \circ f_2 = f_3 \circ \pi_3$ . Or le chemin  $\pi_3(c_{e_2})$  peut-être éventuellement réduit à un sommet ou bien vaut l'identité. On en déduit dans tous les cas qu'il existe  $e_3 \in E(G_3)$  tel que  $\pi_3(c_{e_2}) \subset e_3$ . On en conclut alors que :

$$\pi(C) \subset f_3^{k_2}(c_{e_3}). \quad \square$$

### 3 Des substitutions et automorphismes aux pavages de la droite réelle

#### 3.1 Des substitutions aux pavages

Nous introduisons dans cette sous-section la classe des *pavages substitutifs* (définition 3.2) que nous utiliserons de manière récurrente tout au long de ce travail. Un article fondamental dans l'étude de la topologie des espaces de pavages obtenus par substitution est [AP98].

##### 3.1.1 Pavages substitutifs

La proposition 2.13 permet naturellement de poser la définition suivante :

**Définition 3.1** (Traducteur symbolique). Soit  $\sigma : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}^*$  une substitution sur un alphabet  $\mathcal{A} = \{a_1, \dots, a_s\}$  muni de la fonction longueur  $|\cdot|$ .

Si l'on note  $\mathcal{I}$  l'ensemble des intervalles étiquetés  $I_i = ([0, |a_i|], i)$  pour tout  $i \in \{1, \dots, s\}$ . Alors :

1. on appelle le traducteur symbolique associé à  $(\sigma, |\cdot|)$  à valeurs dans  $T_{can} \subset Pav_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})$  :

$$\begin{aligned} \tau_{|\cdot|} : X_{\sigma} &\longrightarrow T_{can} \\ (a_{i_j})_{j \in \mathbb{Z}} &\longmapsto I_{i_j} \cdot (\text{signe}(j) \times \sum_{k=0}^{j-1} |a_{i_k}|) \end{aligned}$$

2. on définit l'application  $Trad_{\sigma}$  à l'aide de la conjugaison par le traducteur symbolique  $\tau_{|\cdot|}$  :

$$\begin{aligned} Trad_{\sigma} : T_{can} &\longrightarrow T_{can} \\ T &\longmapsto (\tau_{|\cdot|} \circ \sigma \circ \tau_{|\cdot|}^{-1})(T) \end{aligned}$$

**Définition 3.2** (Espace de pavages substitutif). Soit  $\sigma : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}^*$  une substitution sur un alphabet muni d'une fonction longueur  $|\cdot|$  et soit  $\tau_{|\cdot|}$  le traducteur symbolique associé.

L'espace de pavage associé à  $\sigma$  est l'espace

$$\Omega_{\sigma} = \bigcup_{W \in X_{\sigma}} \Omega_{\mathbb{R}}(\tau_{|\cdot|}(W))$$

muni de la topologie des pavages.

**Proposition 3.3** ([AP98], chapitres 2 et 3). Avec les notations de la définition 3.2, la substitution  $\sigma$  induit, par conjugaison par le traducteur symbolique, une application continue surjective sur l'espace de pavages  $\Omega_{\sigma}$ .

Donnons une description de l'application  $\Sigma : \Omega_{\sigma} \rightarrow \Omega_{\sigma}$ .

**Définition 3.4.** Soit une substitution primitive  $\sigma : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}^*$ ,  $W = (a_{i_j})_{j \in \mathbb{Z}}$  un élément de  $X_\sigma$  et  $t \in [0, |a_{i_0}|[$  tels que  $(W, t)$  représentent un élément de  $\Omega_\sigma$  (voir la proposition 2.13). Alors, si  $\lambda$  désigne le facteur d'expansion de la substitution  $\sigma$ ,  $S$  le décalage et  $\sigma(a_{i_0}) = a_{k_1} \dots a_{k_n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  tels que  $\sum_{l=1}^{n-1} |a_{k_l}| \leq \lambda t < \sum_{l=1}^n |a_{k_l}|$ , alors :

$$\Sigma(W, t) = (S^{n-1}(\sigma(a_{i_j})_{j \in \mathbb{Z}}), \lambda t - \sum_{l=1}^{n-1} |a_{k_l}|) \quad (\text{voir la définition 2.23})$$

**Définition 3.5** (Substitution reconnaissable). Soit  $\sigma : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}^*$  une substitution et  $\Omega_\sigma$  son espace de pavage associé. La substitution  $\sigma$  est reconnaissable si son application induite  $\Sigma : \Omega_\sigma \rightarrow \Omega_\sigma$  (voir 3.3) est injective.

**Proposition 3.6.** Soit  $\sigma : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}^*$  une substitution et  $\Omega_\sigma$  son espace de pavage associé. Alors l'application  $\Sigma : \Omega_\sigma \rightarrow \Omega_\sigma$  est un homéomorphisme si et seulement si  $\sigma$  est reconnaissable.

Preuve : Comme l'alphabet  $\mathcal{A}$  est fini, l'espace de pavages  $\Omega_\sigma$  est de  $\mathbb{R}$  type-fini. D'après la proposition 2.17, c'est un espace compact. De plus, l'application  $\Sigma$  est continue, surjective d'après la proposition 3.3. On en déduit que  $\Sigma$  est un homéomorphisme si et seulement si elle est injective, c'est à dire si et seulement si  $\sigma$  est reconnaissable.  $\square$

Il existe un critère topologique permettant de déterminer si l'espace  $X_\sigma$  possède des éléments apériodiques, c'est-à-dire un élément  $U \in X_\sigma$  dont l'orbite par le décalage est infini.

**Proposition 3.7** ([Mos92]). Soit  $\sigma : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}^*$  une substitution primitive. Si son application induite  $\Sigma : \Omega_\sigma \rightarrow \Omega_\sigma$  est reconnaissable, alors l'espace  $\Omega_\sigma$  ne contient aucun pavage périodique pour les translations.

Une substitution primitive n'est pas nécessairement apériodique. Prenons par exemple la substitution :

$$\begin{aligned} \sigma : \{a\} &\longrightarrow \{a\}^* \\ a &\longmapsto a.a \end{aligned}$$

Ainsi, l'espace  $X_\sigma$  est évidemment fini.

**Proposition 3.8.** Avec les notations de la définition 3.1 et de la définition 2.33, le trajecteur symbolique passe au quotient en une application bijective

$$\tilde{\tau}_{|\cdot|} : X_\sigma/S \longrightarrow \Omega_\sigma/\mathbb{R}$$

où  $S$  désigne le décalage.

Preuve : Notons  $p_1 : X_\sigma \rightarrow X_\sigma/S$  et  $p_2 : \Omega_\sigma \rightarrow \Omega_\sigma/\mathbb{R}$  les projections canoniques pour les actions respectives du décalage  $S$  et par translation de  $\mathbb{R}$  sur  $X_\sigma$  et  $\Omega_\sigma$  respectivement. Soit  $T \in \Omega_\sigma$ , il existe  $t \in \mathbb{R}$  tel que l'origine 0 coïncide avec le bord d'une tuile de  $T' = T - t \in \Omega_\sigma$ . On en déduit que  $p_2 \circ \tau_{|\cdot|} : X_\sigma \rightarrow \Omega_\sigma/\mathbb{R}$  est surjective. Soit maintenant  $W = (w_i)_{i \in \mathbb{Z}} \in X_\sigma$ , notons  $v_0 = |w_0|$ , on a  $\tau_{|\cdot|}(S(W)) = \tau_{|\cdot|}(W) + v_0$  donc l'orbite sous l'action du décalage  $S$  s'envoie sur un même point dans  $\Omega_\sigma/\mathbb{R}$  par  $p_1$ . On en conclut qu'il existe une unique application bijective  $\tilde{\tau}_{|\cdot|} : X_\sigma/S \rightarrow \Omega_\sigma/\mathbb{R}$  tel que pour tout  $W \in X_\sigma$ ,  $\tilde{\tau}_{|\cdot|}(p_1(W)) = p_2(\tau_{|\cdot|}(W))$ .  $\square$

**Proposition 3.9** ([Que87]). *Soit  $\sigma : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}^*$  une substitution primitive reconnaissable. Tout pavage  $T \in \Omega_\sigma$  est fortement apériodique pour l'action de  $\mathbb{R}$  (voir définition 2.19) et donc  $\mathbb{R}$ -minimal.*

**Définition 3.10** (substitution apériodique). *Soit  $\sigma : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}^*$  une substitution. La substitution  $\sigma$  est dite apériodique, si tous les éléments de  $\Omega_\sigma$  sont apériodiques pour les translations.*

### 3.1.2 Complexe de Barge-Diamond

Dans l'article [BD08], les auteurs introduisent un graphe, que nous appelons *complexe de Barge-Diamond*, dans le but de calculer simplement la cohomologie d'un espace de pavages associée à une substitution primitive.

**Définition 3.11** (Complexe de Barge-Diamond, [BD08]). *Soit  $\sigma : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}^*$  une substitution primitive sur un alphabet muni d'une fonction longueur de Perron-Frobenius  $|\cdot|$ . On pose  $v_a = |a|$  et on note  $\lambda > 1$  le facteur de dilatation, i.e.  $|\sigma(a)| = \lambda \cdot |a|$  pour  $a \in \mathcal{A}$ . Soit  $\epsilon < \min_{a \in \mathcal{A}} \{\frac{v_a}{2\lambda}\}$ . On définit pour tout  $a \in \mathcal{A}$  :*

$$e_a = [\epsilon, v_a - \epsilon] \times \{a\}$$

et pour tout mot  $ab \in \mathcal{L}^2$  (voir la définition 2.23) :

$$e_{ab} = [-\epsilon, \epsilon] \times \{ab\}$$

Le complexe de Barge-Diamond de la substitution  $\sigma$  est l'espace topologique  $K_\sigma$  défini par :

$$K_\sigma = \left( \bigcup_{a \in \mathcal{A}} e_a \cup \bigcup_{ab \in \mathcal{L}^2} e_{ab} \right) / \sim$$

où  $\sim$  est la relation d'équivalence suivante pour tout  $a, b \in \mathcal{A}$  :

$$(v_a - \epsilon, a) \sim (-\epsilon, ab) \text{ et } (\epsilon, a) \sim (\epsilon, ba).$$

**Exemple 3.12.** *Soit l'automorphisme IWIP suivant :*

$$\begin{aligned}
\tau^{-1} : F_3 &\longrightarrow F_3 \\
a &\longmapsto c \\
b &\longmapsto \bar{c}a \\
c &\longmapsto \bar{c}b
\end{aligned}$$

Reprenons les notations de l'exemple 8.2.

Le complexe de Barge-Diamond associé à la substitution  $\sigma_F$  est donné par la figure 7.

**Proposition 3.13** (Complexe de Barge-Diamond, suite). *Avec les notations de la définition 3.11, le complexe de Barge-Diamond  $K_\sigma$  admet une structure de graphe pour laquelle :*

1. Les arêtes sont de deux types :

(a) les arêtes de sommet :  $E_s(K_\sigma) = (\bigcup_{ab \in \mathcal{L}^2} e_{ab}) / \sim,$

(b) les arêtes de tuile :  $E_t(K_\sigma) = (\bigcup_{a \in \mathcal{A}} e_a) / \sim.$

2. Les sommets sont les points de la forme  $(v_a - \epsilon, a) \sim (-\epsilon, ab)$  et  $(\epsilon, a) \sim (\epsilon, ba)$ .

**Proposition 3.14** (Complexe de Barge-Diamond et pavages). *Avec les notations de la définition 3.11 : il existe une application continue surjective  $p_\sigma : \Omega_\sigma \longrightarrow K_\sigma$  et une unique application  $S_\sigma : K_\sigma \longrightarrow K_\sigma$  satisfaisant  $S_\sigma \circ p_\sigma = p_\sigma \circ \sigma$ .*

Etant donné une substitution primitive  $\sigma$ , examinons la forme des images des arêtes d'arêtes et de tuiles par l'application  $S_\sigma$ . L'application  $S_\sigma$  est construite de manière à dilater exactement les chemins empruntés par la substitution  $\sigma$  du facteur d'expansion  $\lambda$ . Si  $a.b \in \mathcal{L}^2$  et que  $\sigma(a) = \dots c$ ,  $\sigma(b) = d \dots$  alors  $S_\sigma(e_{ab})$  est un sous-chemin de  $e_c.e_{cd}.e_d$ . Soit une arête de tuile  $e_a$  telle que  $\sigma(a) = a_1 \dots a_s$ . L'image  $S_\sigma(e_a)$  est un sous-chemin de  $e_{a_1}.e_{a_1 a_2} \dots e_{a_{s-1} a_s}.e_{a_s}$ .

**Exemple 3.15.** *Considérons le cas de la substitution primitive  $\sigma : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}^*$  cité dans l'introduction en 1.1. Notons  $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  le nombre d'or. Il est aisé de vérifier que le nombre d'or est la valeur propre de Perron-Frobenius de  $\sigma$  et que sa longueur de Perron-Frobenius est donnée par  $v_a = \frac{1}{\phi}$  et  $v_b = \frac{1}{\phi^2}$ . On doit donc choisir un réel  $\epsilon > 0$  tel que  $\epsilon < \min\{\frac{v_a}{2\phi}, \frac{v_b}{2\phi}\} = \min\{\frac{1}{2\phi^2}, \frac{1}{2\phi^3}\} = \frac{1}{2\phi^3} \cong 0,23$ . Choisissons  $\epsilon = \frac{1}{5}$  qui convient. Son complexe de Barge-Diamond est de la forme de la figure 8 Les arêtes du complexes de Barge-Diamond de  $\sigma$  sont isométriques à :*

- $e_a = [\epsilon, v_a - \epsilon] \times \{a\}$
- $e_b = [\epsilon, v_b - \epsilon] \times \{b\}$
- $e_{ab} = [-\epsilon, \epsilon] \times \{ab\}$
- $e_{ba} = [-\epsilon, \epsilon] \times \{ba\}$
- $e_{aa} = [-\epsilon, \epsilon] \times \{aa\}$

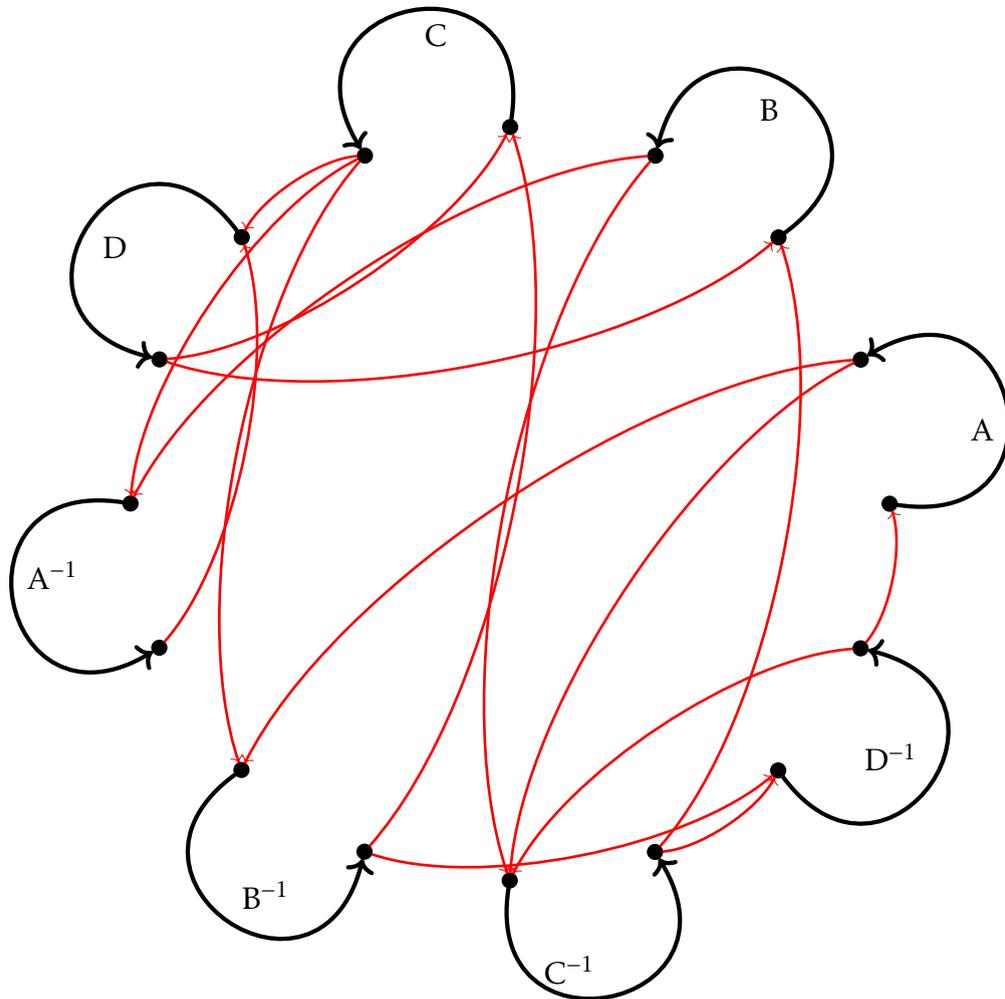


FIGURE 7 – Complexe de Barge-Diamond associé à la substitution  $\sigma_F$  non-orientable

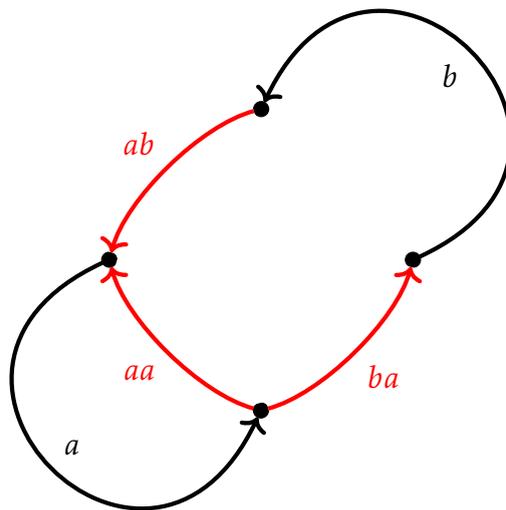


FIGURE 8 – Complexe de Barge-Diamond de la substitution de Fibonacci

Ainsi on peut déterminer les images de l'arête de tuile  $e_a$  et de l'arête de sommet  $e_{ab}$  dans  $K_\sigma$  :

- $S_\sigma(e_{ab})$  est un chemin dans  $K_\sigma$  qui est la concaténation successive de  $[v_b - \phi\epsilon, v_b - \epsilon] \times \{b\}$ ,  $e_{ba}$  et de  $[\epsilon, \phi\epsilon] \times \{a\}$ .
- $S_\sigma(e_a)$  est un chemin dans  $K_\sigma$  qui est la concaténation successive de  $[v_a - \epsilon - \frac{1-(1+\phi)2\epsilon}{2}, v_a - \epsilon] \times \{a\}$ ,  $e_{ab}$  puis  $[\epsilon, \epsilon + \frac{1-(1+\phi)2\epsilon}{2}] \times \{b\}$

On procède de même pour obtenir les images des autres arêtes de  $K_\sigma$  par  $S_\sigma$ .

**Remarque 3.16.** La topologie du complexe de Barge-Diamond est indépendante du choix du réel  $\epsilon > 0$ . Par contre, la nature de l'application induite (voir la proposition-définition 3.14) en dépend fortement comme nous le verrons à la section 7.

Dans [BD08] les auteurs démontrent le théorème qui suit et que nous utiliserons à de multiples reprises :

**Théorème 3.17** (Barge-Diamond, [BD08]). Soit  $\sigma : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}^*$  une substitution primitive et aperiodique. Alors l'espace  $\Omega_\sigma$  (voir définition 3.2) est homéomorphe à la limite projective (voir la définition 2.5)  $\varprojlim (E_i)$  associée à la suite d'ensembles  $E = (E_i)_{i \in \mathbb{N}}$  et la famille d'applications  $\mathcal{F} = \{f_i^j : E_j \rightarrow E_i \mid \forall i, j \in \mathbb{N}, i \leq j\}$ , telles que pour tout  $i, j \in \mathbb{N}$ ,  $E_i = K_\sigma$  et si  $i \leq j$   $f_i^j = S_\sigma^{j-i}$  (où  $K_\sigma$  et  $S_\sigma$  désignent respectivement, le complexe de Barge-Diamond associé à la substitution  $\sigma$  (voir la définition 3.11) et  $S_\sigma$  son application induite (voir la définition 3.14)).

## 3.2 Des automorphismes aux substitutions

Nous reprenons dans les deux prochaines sous-sections, le matériel introduit dans l'article [ABHS06] pour associer une fractale de Rauzy à un représentant topologique d'un automorphisme externe IWIP. Dans notre cas il s'agira de pavages substitutifs de la droite réelle.

### 3.2.1 Définitions

Nous pouvons également nous référer à l'article [Uya14] qui utilise également le formalisme des substitutions pour étudier la dynamique des automorphismes IWIP.

**Définition 3.18** (renversement de l'orientation). Soit  $G$  un graphe ainsi que l'ensemble de ses arêtes orientées  $E(G) \cup E^{-1}(G)$ . On note  $\Theta$  l'application de renversement :

$$\begin{aligned} \Theta : E(G) \cup E^{-1}(G) &\longrightarrow E(G) \cup E^{-1}(G) \\ e &\longmapsto \Theta(e) = e^{-1} \end{aligned}$$

**Définition 3.19** (Substitution induite). Soit  $(f, G)$  un représentant efficace primitif et  $\mathcal{A}_G = \{e_1, \dots, e_s, e_1^{-1}, \dots, e_s^{-1}\} = E(G) \cup E^{-1}(G)$  l'alphabet constitué par les arêtes orientées de  $G$ .

1. Notons  $h$  l'application qui à un chemin d'arêtes réduit  $c$  dans  $G$  associe le mot sur  $\mathcal{A}_G$  qui est la concaténation des arêtes dans son image. La substitution induite par  $f$  est la substitution  $\sigma_f: \mathcal{A}_G \rightarrow \mathcal{A}_G^*$  définie par :

$$\sigma_f(e_i^\epsilon) = h(f(c_{e_i^\epsilon})), (\epsilon = \pm 1).$$

2. La substitution  $\sigma_f: \mathcal{A}_G \rightarrow \mathcal{A}_G^*$  est orientable si :

- ou bien  $\sigma_f$  préserve l'orientation : il existe une partition de  $\mathcal{A}_G$  en deux composantes non-triviales  $\mathcal{A}_1$  et  $\mathcal{A}_2 = \Theta(\mathcal{A}_1)$  telle que  $\sigma_f(\mathcal{A}_1) \subset \mathcal{A}_1^*$  et  $\sigma_f(\mathcal{A}_2) \subset \mathcal{A}_2^*$
- ou bien  $\sigma_f$  renverse l'orientation : il existe une partition de  $\mathcal{A}_G$  en deux composantes non-triviales  $\mathcal{A}_1$  et  $\mathcal{A}_2 = \Theta(\mathcal{A}_1)$  telle que  $\sigma_f(\mathcal{A}_1) \subset \mathcal{A}_2^*$  et  $\sigma_f(\mathcal{A}_2) \subset \mathcal{A}_1^*$ .

Si ce n'est pas le cas,  $\sigma_f$  est non-orientable.

**Exemple 3.20.** Soit  $\varphi \in \text{Aut}(\mathbb{F}_2)$ , l'automorphisme IWIP de Fibonacci  $\mathbb{F}_2 = \langle a, b \rangle$  défini par  $\varphi(a) = ab$  et  $\varphi(b) = a$ . Soit  $f: (\mathbb{R}_2, \star) \rightarrow (\mathbb{R}_2, \star)$  son représentant canonique sur la rose, c'est à dire tel que  $a \mapsto ab$  et  $b \mapsto a$ . Il s'agit d'un représentant efficace. Si on note  $G = \mathbb{R}_2$ , alors la substitution induite par  $f$  sur l'alphabet  $\mathcal{A}_G = \{a, b, \bar{a}, \bar{b}\}$  est :

$$\begin{aligned} \sigma_f: \mathcal{A}_G &\longrightarrow \mathcal{A}_G^* \\ a &\longmapsto ab \\ b &\longmapsto a \\ \bar{a} &\longmapsto \bar{b}\bar{a} \\ \bar{b} &\longmapsto \bar{a} \end{aligned}$$

Cette substitution est orientable et préserve l'orientation.

**Lemme 3.21.** Avec les notations de la définition 3.19, l'inversion sur  $\mathcal{A}_G^*$  définie par

$$\begin{aligned} \Theta: \mathcal{A}_G^* &\longrightarrow \mathcal{A}_G^* \\ w_1 \dots w_j &\longmapsto w_j^{-1} \dots w_1^{-1} \end{aligned}$$

est une bijection sur  $\mathcal{A}_G$  qui commute avec la substitution induite par  $f$ .

Preuve : Pour tout  $W = w_1 \dots w_j$ , on a :

$$\begin{aligned} (\sigma_f \circ \Theta)(W) &= \sigma_f(w_j^{-1} \dots w_2^{-1} w_1^{-1}) = \sigma_f(w_j^{-1}) \dots \sigma_f(w_2^{-1}) \sigma_f(w_1^{-1}) = \\ &= (\sigma_f(w_j))^{-1} \dots (\sigma_f(w_2))^{-1} (\sigma_f(w_1))^{-1} = (\Theta \circ \sigma_f)(w_1 w_2 \dots w_j) \end{aligned}$$

### 3.2.2 Propriétés dynamiques

Nous analysons la dynamique des substitutions induites par un représentant efficace d'un automorphisme IWIP du groupe libre dans la proposition suivante :

**Proposition 3.22** (Primitivité). *Avec les notations de la définition 3.19, la dynamique de  $\sigma_f$  possède trois types de comportements :*

- Si  $\sigma_f$  est non-orientable alors elle est primitive.
- Si  $\sigma_f$  est orientable et qu'elle préserve l'orientation alors elle se décompose en deux substitutions primitives  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  sur les alphabets respectifs  $\mathcal{A}_1$  et  $\mathcal{A}_2$ .
- Si  $\sigma_f$  est orientable et qu'elle renverse l'orientation alors  $\sigma_f^2$  induit deux substitutions primitives  $\sigma_1^2$  et  $\sigma_2^2$  respectivement sur les alphabets respectifs  $\mathcal{A}_1$  et  $\mathcal{A}_2$ .

Preuve : Puisque le représentant  $(f, G)$  est primitif, il existe  $j \geq 0$  tel que, pour toute arête  $e \in E(G)$ , le chemin  $f^j(c_e)$  traverse toutes les arêtes de  $G$ . Si  $\sigma_f$  préserve l'orientation, alors  $f^j(c_e)$  traverse  $e$  avec une unique orientation soit  $e$ , soit  $e^{-1}$ . On peut donc poser  $\mathcal{A}_1$  comme l'ensemble des arêtes orientées apparaissant dans le chemin  $f^j(e)$  et  $\mathcal{A}_2 = \Theta(\mathcal{A}_1)$ . Par primitivité de  $f$  on en déduit que  $\sigma_f$  est primitive sur  $\mathcal{A}_1$ . D'après le lemme 3.21,  $\sigma_f$  commute avec  $\Theta$ , ce qui nous permet de déduire de la même façon la primitivité de  $\sigma_f$  en restriction à  $\mathcal{A}_2$ . On effectue le même raisonnement avec  $\sigma_f^2$  lorsque  $\sigma_f$  renverse l'orientation puisque  $f^2$  est un représentant efficace primitif car le carré d'une matrice primitive est primitive. Supposons maintenant que  $\sigma_f$  soit non-orientable. Il existe un itéré  $f^s(c_e)$  qui traverse à la fois  $e$  et  $e^{-1}$ . On en déduit que  $f^{s+j}(c_e)$  traverse toutes les arêtes de  $G$  avec toutes les orientations possibles, ainsi  $\sigma_f$  est primitive sur  $\mathcal{A}_G$ .  $\square$

Par la suite, lorsque une substitution  $\sigma_f$  induite par un représentant efficace est orientable, on utilise les notations  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  introduites dans la proposition 3.22 pour désigner respectivement les applications  $(\sigma_f)|_{\mathcal{A}_1}$  et  $(\sigma_f)|_{\mathcal{A}_2}$ .

**Proposition 3.23.** *Avec les notations de la définition 3.19 : il existe une fonction longueur sur  $\mathcal{A}_G$  et un réel  $\lambda > 1$  tels que la substitution  $\sigma_f$  soit  $\lambda$ -dilatante (voir proposition 2.27).*

Preuve : Comme  $(f, G)$  est primitif, d'après le lemme 2.50 on peut munir  $G$  de sa longueur de Perron-Frobenius qui rend  $f$  uniformément  $\lambda$ -dilatante sur les arêtes de  $G$  où  $\lambda > 1$ . En munissant l'alphabet  $\mathcal{A}_G = \{e_1, \dots, e_k, e_1^{-1}, \dots, e_k^{-1}\}$  ( $k = \text{Card}(E(G))$ ) de cette longueur, la substitution  $\sigma_f$  vérifie pour tout  $a \in \mathcal{A}_G$ ,  $|\sigma_f(a)| = \lambda|a|$ .  $\square$

### 3.2.3 Comparaison entre graphes de Whitehead et complexes de Barge-Diamond

La proposition suivante fait le lien entre le graphe de Whitehead d'un représentant efficace (voir définition 2.57) et le complexe de Barge-Diamond de la substitution associée (voir définitions 3.11 et 3.19).

**Proposition 3.24.** *Soit  $(f, G)$  un représentant efficace primitif et  $\sigma_f$  sa substitution induite (voir définition 3.19). Alors, le complexe de Barge-Diamond  $K_{\sigma_f}$  (voir définition 3.11) est un revêtement à deux feuillets du graphe de Whitehead  $Wh_G(f)$  (voir définition 2.57).*

Preuve : Supposons que les arêtes infinitésimales de  $Wh_G(f)$  soient isométriques au segment  $[-\epsilon, \epsilon]$  et ses arêtes réelles au segment  $[\epsilon, l_G(e) - \epsilon]$ , où  $l_G(e)$  désigne la longueur de l'arête  $e$  pour  $G$  munie de sa longueur de Perron Frobenius. On définit une projection  $p : K_{\sigma_f} \longrightarrow Wh_G(f)$  sur les arêtes de  $K_{\sigma_f}$  de la façon suivante :

L'image de  $[-\epsilon, \epsilon] \times \{ab\}$  et  $[-\epsilon, \epsilon] \times \{\bar{b}\bar{a}\}$  est l'arête infinitésimale associée au tournant  $\{a, b\}$ .

L'image de  $[\epsilon, l_G(a) - \epsilon] \times \{a\}$  et  $[\epsilon, l_G(a) - \epsilon] \times \{\bar{a}\}$  est l'arête réelle associée à l'arête  $a$  de  $G$ .

Soit  $x \in Wh_G(f)$ . On distingue trois cas :

- Si  $x$  est un sommet du graphe  $Wh_G(f)$  alors il existe  $a, b \in \mathcal{A}_G$  tel que  $p^{-1}(\{x\}) = [-\epsilon] \times \{ab\} \cup \{\epsilon\} \times \{\bar{b}\bar{a}\}$ . Soit  $U_{x,1}$  et  $U_{x,2}$  les deux ouverts disjoints du graphe  $K_{\sigma_f}$  suivants,  $U_{x,1} = ]-\frac{v_a - \epsilon}{2}, v_a - \epsilon] \cup [-\epsilon, \frac{\epsilon}{2}[ \times \{ab\}$  et  $U_{x,2} = ]-\frac{\epsilon}{2}, \epsilon[ \times \{\bar{b}\bar{a}\} \cup [\epsilon, \frac{v_a - \epsilon}{2}[ \times \{\bar{a}\}$ , contenant respectivement  $[-\epsilon] \times \{ab\}$  et  $\{\epsilon\} \times \{\bar{b}\bar{a}\}$ .

Par définition,  $p(U_{x,1}) = p(U_{x,2}) = U_x$  est un ouvert de  $Wh_G(f)$  tel que  $p|_{U_{x,1}}$  et  $p|_{U_{x,2}}$  soient des homéomorphismes.

- Si  $x$  appartient à une arête infinitésimale associée au tournant  $\{a, b\}$ , et  $U_x$  est un petit intervalle ouvert intérieur à cette arête infinitésimale alors

$$p^{-1}(U_x) = ]-\epsilon, \epsilon[ \times \{ab\} \cup ]-\epsilon, \epsilon[ \times \{\bar{b}\bar{a}\}$$

Notons,  $U_{x,1} = ]-\epsilon, \epsilon[ \times \{ab\}$  et  $U_{x,2} = ]-\epsilon, \epsilon[ \times \{\bar{b}\bar{a}\}$ . On a aisément que les restrictions  $p|_{U_{x,1}}$  et  $p|_{U_{x,2}}$  sont des homéomorphismes sur  $U_x$ .

- Si  $x$  appartient à une arête réelle  $a$ , et  $U_x$  est un petit intervalle ouvert intérieur à cette arête alors :

$$p^{-1}(U_x) = ]\epsilon, v_a - \epsilon[ \times \{a\} \cup ]\epsilon, v_a - \epsilon[ \times \{\bar{a}\}$$

Notons,  $U_{x,1} = ]\epsilon, v_a - \epsilon[ \times \{a\}$  et  $U_{x,2} = ]\epsilon, v_a - \epsilon[ \times \{\bar{a}\}$ . On a aisément que  $p|_{U_{x,1}}$  et  $p|_{U_{x,2}}$  sont des homéomorphismes sur  $U_x$ .

On en déduit que  $p : K_{\sigma_f} \longrightarrow Wh_G(f)$  est un revêtement à deux feuillets.  $\square$

**Exemple 3.25.** *Le graphe de la figure 7 est un revêtement à deux feuillets du graphe de la figure 9*

Ce revêtement est l'analogue du revêtement d'orientation pour une variété différentielle. Une excellente référence sur ce sujet est le site web d'Henri Paul de Saint-Gervais [dSG14]. Les graphes de Whitehead locaux apparaissent par exemple dans l'article [Kap14], où l'auteur établit un critère simple sur les graphes de Whitehead locaux d'un représentant efficace d'un automorphisme du groupe libre hyperbolique pour détecter s'il est IWIP ou non.

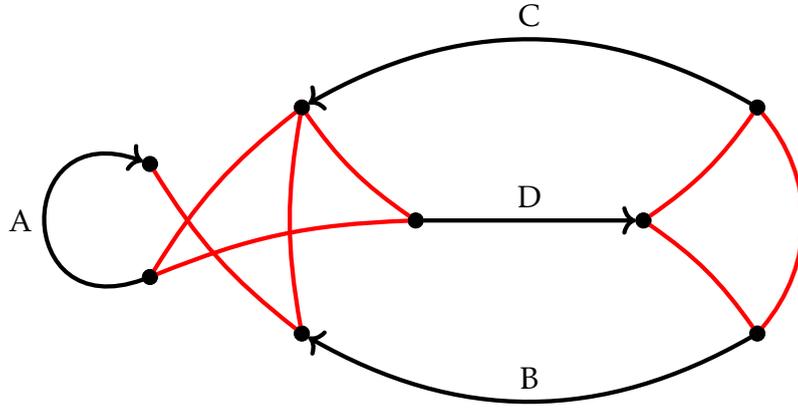


FIGURE 9 – Graphe de Whitehead du représentant efficace  $(F, G)$  associé à l'automorphisme  $\tau^{-1}$  (voir 8.2)

### 3.3 Des automorphismes IWIP aux pavages apériodiques de la droite réelle

Nous reprenons en grande partie, dans cette sous-section, le formalisme de l'article [ABHS06] pour décrire la dynamique d'une substitution à un automorphisme extérieur du groupe libre  $F_{\mathbb{N}}$ . On peut d'après la proposition 3.23 et la remarque 2.24, associer à  $\sigma_f$  un espace de pavages  $\Omega_{\sigma_f}$  non vide et dont tous les éléments sont des pavages apériodiques de la droite réelle.

**Définition 3.26** (Espace de pavage d'un représentant irréductible). *Soit  $(f, G)$  un représentant efficace primitif et soit  $\sigma_f$  sa substitution induite (voir définition 3.19). L'espace de pavage associé à  $(f, G)$ , noté  $\Omega_{\mathbb{R}}(f, G)$ , est l'espace de pavages substitutifs de la droite réelle  $\Omega_{\sigma_f}$  (voir définition 3.2).*

Le fait que  $(f, G)$  soit un représentant efficace d'un automorphisme du groupe libre implique que  $\sigma_f$  induit une application sur  $\Omega_{\mathbb{R}}(f, G)$  définie comme suit.

**Définition 3.27** (Application  $\Sigma_f$ ). *Soit  $(f, G)$  un représentant efficace primitif et soit  $\sigma_f$  sa substitution induite. Notons pour  $i \in I$  un ensemble fini,  $\Omega_{\sigma_i}$  les composantes minimales de l'espace  $\Omega_{\mathbb{R}}(f, G)$  (voir la proposition 3.22).*

*On note  $\Sigma_f : \Omega_{\mathbb{R}}(f, G) \rightarrow \Omega_{\mathbb{R}}(f, G)$ , l'unique application telle que pour tout  $i \in I$ ,  $(\Sigma_f)|_{\Omega_{\sigma_i}} = \Sigma_i$ .*

La proposition suivante est un cas très particulier d'une famille de substitutions étudiées dans l'article [BSTY17] auquel on pourra se référer.

**Proposition 3.28.** *Soit  $(f, G)$  un représentant efficace primitif d'un automorphisme IWIP  $[\phi] \in \text{Out}(F_{\mathbb{N}})$ . Alors l'application  $\Sigma_f$  est un homéomorphisme sur l'espace  $\Omega_{\mathbb{R}}(f, G)$ .*

Preuve de la proposition 3.28 : d'après la proposition 3.6,  $\Sigma_f$  est un homéomorphisme si et seulement si  $\overline{\Sigma_f}$  est injective. Montrons cette propriété pour  $\Sigma_f$  en se restreignant, par la proposition 2.13, aux éléments de la forme  $X_{\sigma_f} \times \{0\}$ . En effet, soit  $P_1 = (U_1, t_1), P_2 = (U_2, t_2) \in \Omega_{\mathbb{R}}(f, G)$  où  $U_1, U_2 \in X_{\sigma_f}$  et  $t_1 \in [0, |(U_1)_0|], t_2 \in [0, |(U_2)_0|]$ . Si  $\Sigma_f(U_1, t_1) = \Sigma_f(U_2, t_2) = (U, t)$ , alors :

$$\Sigma_f(U_1, t_1).t = \Sigma_f(U_2, t_2).t = (U, t).t = (U, 0) = \Sigma_f(U_2, 0) = \Sigma_f(U_1, 0).$$

Soit  $S = \{x_1, \dots, x_N\}$  une base du groupe libre et  $\tau : (R_N, \star) \rightarrow (G, v)$  le marquage lié au représentant topologique  $(f, G)$ . Le fait que  $\phi$  soit un automorphisme induit que  $\phi(S)$  est également une base du groupe libre  $F_N$ . Notons  $\mathcal{W}$  (respectivement  $\mathcal{W}'$ ) l'ensemble des éléments de  $\mathcal{A}_G^{\star}$  correspondant aux images  $\tau(x_i^{\pm 1})$  (respectivement  $\tau(\phi(x_i^{\pm 1}))$ ) pour tout  $i \in \{1, \dots, N\}$ . Il est clair que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} S \cup S^{-1} & \xrightarrow{\tau} & \mathcal{W} \\ \downarrow \phi & & \downarrow \sigma_f \\ \phi(S) \cup \phi(S^{-1}) & \xrightarrow{\tau} & \mathcal{W}' \end{array}$$

et ainsi  $\sigma_f$  est une bijection entre  $\mathcal{W}$  et  $\mathcal{W}'$  puisque  $\phi$  est bijective de  $S \cup S^{-1}$  vers  $\phi(S) \cup \phi(S^{-1})$ .

Un élément de  $X_{\sigma_f}$  est une suite bi-infinie sur l'alphabet  $\mathcal{A}_G$  telle que pour toute sous-suite finie est contenu dans un itéré  $\sigma_f^n(e)$  où  $e \in \mathcal{A}_G$  qui est homotopiquement non-trivial pour  $n$  suffisamment grand. On en déduit qu'un élément de  $X_{\sigma_f}$  se décompose de manière unique en une suite sur l'alphabet  $\mathcal{W}$  (respectivement l'alphabet  $\mathcal{W}'$ ).

Soit  $U = (e_{ij})_{j \in \mathbb{Z}}, V = (e'_{ij})_{j \in \mathbb{Z}} \in X_{\sigma_f}$  telles que  $\Sigma_f(U, 0) = \Sigma_f(V, 0)$ . Alors d'après le paragraphe précédent, il existe une unique décomposition de  $U$  et  $V$  en une suite bi-infinie sur l'alphabet  $\mathcal{W}$  que l'on note respectivement  $U' = (w_{ij})_{j \in \mathbb{Z}}$  et  $V' = (w'_{ij})_{j \in \mathbb{Z}}$  puisque ces suites sont bilatères.

De plus, la première composante de l'élément  $\Sigma_f(U, 0) = \Sigma_f(V, 0)$  de  $X_{\sigma_f} \times \{0\}$  admet une unique décomposition en un mot bi-infini sur l'alphabet  $\mathcal{W}'$ . Comme l'image d'un élément de  $\mathcal{W}$  par  $\sigma_f$  est un élément de  $\mathcal{W}'$ . Il vient que  $(\sigma_f(w_{ij}))_{j \in \mathbb{Z}}$  et  $(\sigma_f(w'_{ij}))_{j \in \mathbb{Z}}$  sont deux mots bi-infinis égaux sur l'alphabet  $\mathcal{W}'$ . On en déduit que :

$$\forall j \in \mathbb{Z}, \sigma_f(w_{ij}) = \sigma_f(w'_{ij})$$

Or, on sait que  $\sigma_f$  est une bijection entre  $\mathcal{W}$  et  $\mathcal{W}'$  donc :

$$\forall j \in \mathbb{Z}, w_{ij} = w'_{ij}$$

ainsi  $U = V$  et donc  $\Sigma_f$  est injective. On en conclut que  $\Sigma_f$  est un homéomorphisme.  $\square$

**Exemple 3.29.** Soit  $\sigma_\tau$  la substitution donné dans l'exemple 8.2. Alors :

$$\dots abacabaabacababacabaabacabac\dots$$

un sous-mot d'un élément de  $X_\tau$ . On décompose ce dernier dans la base de  $\mathbb{F}_3 \{ab, ac, a\}$  de la manière suivante :

$$\dots ab.ac.ab.a.ab.ac.ab.ab.ac.ab.a.ab.ac.ab.ac\dots$$

Ainsi l'image de ce sous-mot par l'inverse de  $\Sigma_\tau$  est :

$$\dots a.b.a.c.a.b.a.a.b.a.c.a.b.a.b\dots$$

**Remarque 3.30.** La reconnaissabilité de la substitution  $\sigma_f$  peut également se voir comme le fait que l'application qui à tout  $(X, Y) \in L_{\text{BFH}}^2(f)$  associe  $(\partial\varphi(X), \partial\varphi(Y))$  agit par homéomorphisme sur la lamination de Bestvina-Feighn-Handel (voir la proposition 4.27).

Nous dégageons donc la définition suivante que nous emploierons tout au long de la section 6.

**Définition 3.31** (Application induite par  $\sigma_f$ ). Soit  $(f, G)$  un représentant efficace primitif. L'application  $\mathcal{F} : \Omega_{\mathbb{R}}(f, G) \rightarrow \Omega_{\mathbb{R}}(f, G)$  est l'homéomorphisme (voir corollaire 3.28) induit par la substitution  $\sigma_f$  sur son espace de pavages.

Grace aux propositions 3.7 et 3.28 nous pouvons affirmer le corollaire suivant :

**Corollaire 3.32.** L'espace  $\Omega_{\mathbb{R}}(f, G)$  ne contient aucun pavage périodique pour les translations.

Décrivons maintenant la topologie de l'espace  $\Omega_{\mathbb{R}}(f, G)$  en fonction de la dynamique de la substitution  $\sigma_f$ .

**Proposition 3.33.** Soit  $(f, G)$  un représentant efficace primitif,  $\sigma_f$  sa substitution induite et  $\Omega_{\mathbb{R}}(f, G)$  l'espace de pavages associé. Alors soit  $\sigma_f$  est non-orientable et  $\Omega_{\mathbb{R}}(f, G)$  est alors l'espace de pavages d'une substitution primitive, soit  $\sigma_f$  est orientable et, si l'on note  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  les substitutions données par la proposition 3.22, on a :

- Si  $\sigma_f$  préserve l'orientation,  $\Omega_{\mathbb{R}}(f, G) = \Omega_{\sigma_1} \cup \Omega_{\sigma_2}$ ,
- Si  $\sigma_f$  renverse l'orientation,  $\Omega_{\mathbb{R}}(f, G) = \Omega_{\sigma_1 \circ \sigma_1} \cup \Omega_{\sigma_2 \circ \sigma_2}$   
où  $\sigma_1, \sigma_2$  dans le premier cas,  $\sigma_1^2, \sigma_2^2$  dans le second cas, sont primitives.

Preuve : Lorsque  $\sigma_f$  est non-orientable ou est orientable et préserve l'orientation cette proposition est une conséquence simple de la proposition 3.22. Si  $\sigma_f$  est orientable et renverse l'orientation alors il est clair d'après la proposition 3.22 que  $\Omega_{\sigma_1 \circ \sigma_1} \cup \Omega_{\sigma_2 \circ \sigma_2} \subset \Omega_{\mathbb{R}}(f, G)$ . Soit  $T \in \Omega_{\mathbb{R}}(f, G)$ , prenons  $c_T$  un patch de  $T$ , supposons qu'il contienne à la fois  $e$  et  $e^{-1}$ , cela signifie qu'il existe  $a \in \mathcal{A}_G$ ,  $j \geq 0$  tel que  $\sigma_f^j(a)$  contienne à la fois  $e$  et  $e^{-1}$  ce qui est absurde puisque par hypothèse  $\sigma_f$  est orientable. On en déduit que les arêtes de  $T$  appartiennent soit à  $\mathcal{A}_1$  soit à  $\Theta(\mathcal{A}_1)$ , où  $\Theta$  est l'inversion introduite dans le lemme 3.21. Par conséquent, tout patch  $c_T$  est contenu soit dans  $\sigma_1^{2j}(a)$  soit dans  $\sigma_2^{2j}(a)$  ce qui nous donne  $T \in \Omega_{\sigma_1 \circ \sigma_1} \cup \Omega_{\sigma_2 \circ \sigma_2}$ .  $\square$

### 3.3.1 Espace de pavages $\Omega_{\mathbb{R}}(f, G)$ et limite projective

Dans l'article [BG03] les auteurs montrent qu'en toute généralité, un espace de pavage est homéomorphe à une limite projective de variétés branchées  $\varprojlim(X_n)$  (voir la section 7 pour une définition de variété branchée en dimension 1 et 2). Dans les cadres des pavages substitutifs, Barge et Diamond ont démontré que pour une substitution primitive aperiodique  $\sigma$  sur une alphabet fini  $\mathcal{A}$ , cette limite projective s'exprime de manière beaucoup plus simple que dans le cas d'un pavage quelconque. Dans notre cadre, l'espace de pavages  $\Omega_{\mathbb{R}}(f, G)$  n'est pas toujours un espace de pavages induit par une substitution primitive. Nous obtenons néanmoins le théorème de structure suivant, conséquence immédiate du théorème 3.17.

**Théorème 3.34.** *Avec les notations de la proposition 3.33 : soit  $S_{\sigma_f}, S_1, S_2$  les applications induites par les substitutions  $\sigma_f, \sigma_1, \sigma_2$  sur les complexes de Barge-Diamond associés  $K_{\sigma_f}, K_{\sigma_1}$  et  $K_{\sigma_2}$  (voir définition 3.11). L'espace de pavage  $\Omega_{\mathbb{R}}(f, G)$  est homéomorphe à :*

- $\varprojlim(K_{\sigma_f}, S_{\sigma_f})$  si  $\sigma_f$  est non-orientable.
- $\varprojlim(K_{\sigma_1}, S_1) \cup \varprojlim(K_{\sigma_2}, S_2)$  si  $\sigma_f$  est orientable et préserve l'orientation.
- $\varprojlim(K_{\sigma_1^2}, S_1^2) \cup \varprojlim(K_{\sigma_2^2}, S_2^2)$  si  $\sigma_f$  est orientable et renverse l'orientation.

### 3.3.2 Une conjugaison topologique de $\Omega_{\mathbb{R}}(f, G)$

Soit un réel  $\lambda > 1$  et  $\sigma$  une substitution primitive aperiodique sur un alphabet fini  $\mathcal{A}$  muni d'une fonction longueur  $|\cdot|$  la rendant  $\lambda$ -dilatante ainsi que  $\Omega_{\sigma}$  son espace de pavages associé (voir définition 3.2). Nous souhaitons fournir une paramétrisation de l'espace  $\Omega_{\sigma}$ . Pour cela, on peut noter que l'action de  $\mathbb{R}$  par translation sur  $\Omega_{\sigma}$  étant libre, les ensembles  $(\Omega_{\sigma}/\mathbb{R}) \times \mathbb{R}$  et  $\Omega_{\sigma}$  sont en bijection. Cette bijection peut s'exprimer au travers d'un choix de représentant noté  $\mathcal{C}_{\sigma}$  dans chacune des classes de  $\Omega_{\sigma}/\mathbb{R}$  :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\sigma} : (\mathcal{C}_{\sigma}) \times \mathbb{R} &\longrightarrow \Omega_{\sigma} \\ (P, x) &\longmapsto P - x \end{aligned}$$

Il est possible de rendre topologique l'ensemble  $(\mathcal{C}_{\sigma}) \times \mathbb{R}$  en le munissant de la topologie finale pour l'application  $\mathcal{H}_{\sigma}$ . Ainsi, l'espace de pavage muni de la topologie des pavages au sens suivant, pour tout  $(P_1, t_1), (P_2, t_2) \in (\mathcal{C}_{\sigma}) \times \mathbb{R}$  :

$$d_{L_{\sigma}}((P_1, t_1), (P_2, t_2)) = \delta(P_1 - t_1, P_2 - t_2).$$

où  $\delta$  désigne la métrique des pavages de  $\mathbb{R}$ . L'action de  $\mathbb{R}$  sur  $L_{\sigma}$  est donnée pour tout  $t \in \mathbb{R}$  et  $(P, x) \in L_{\sigma}$  par  $(P, x).t = (P, x - t)$ .

Par compacité de l'espace  $\Omega_{\mathbb{R}}(f, G)$ , on obtient facilement la proposition suivante :

**Proposition 3.35.** *Soit  $\sigma : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}^*$ , une substitution primitive aperiodique. En reprenant les notations de la sous-section courante, l'application  $\mathcal{H}_\sigma$  est un homéomorphisme.*

Dans le cas d'une substitution  $\sigma_f$  induite par un représentant topologique  $(f, G)$ , il est possible de définir la même paramétrisation de  $\Omega_{\mathbb{R}}(f, G)$  (voir la définition 3.26) par  $\mathcal{C}_{\sigma_f} \times \mathbb{R}$  où  $\mathcal{C}_{\sigma_f}$  désigne un système de représentant arbitraire de l'ensemble  $\Omega_{\mathbb{R}}(f, G)$ . Soit  $\Omega_{\mathbb{R}}(f, G) = \cup_{i \in I} \Omega_{\tau_i}$  l'ensemble des composantes  $\mathbb{R}$ -minimales de l'espace  $\Omega_{\mathbb{R}}$ . Soit  $i \in I$  et  $\mathcal{C}_{\tau_i} \subset \mathcal{C}_{\sigma_f}$  un système de représentant de  $\Omega_{\tau_i}$ . Notons pour tout  $i \in I$ ,  $L_{\tau_i}$  l'espace  $\mathcal{C}_{\tau_i} \times \mathbb{R}$  et  $\mathcal{H}_{\tau_i} : L_{\tau_i} \longrightarrow \Omega_{\tau_i}$  l'application définie au paragraphe précédent pour une substitution primitive donnée.

Soit l'application  $\mathcal{H}_{\sigma_f}$  définie comme suit :

$$\forall P \in \mathcal{C}_{\sigma_f}, x \in \mathbb{R} \quad (\mathcal{H}_{\sigma_f})|_{L_{\tau_i}} = \mathcal{H}_{\tau_i}$$

Il est clair d'après la proposition 3.35 que l'application  $\mathcal{H}_{\sigma_f}$  est un homéomorphisme. Il est naturel de faire agir  $\mathbb{R}$  sur l'espace  $L_{\sigma_f}$ , nous définissons cette action noté  $\cdot$  de la manière suivante :

$$\forall (T, x) \in L_{\sigma_f}, t \in \mathbb{R}, \quad (P, x) \cdot t = (P, x + t)$$

qui munit  $(L_{\sigma_f}, \mathbb{R})$  d'une structure de système dynamique.

De cette manière, l'application  $\mathcal{H}_{\sigma_f}$  vérifie pour tout  $(T, x) \in L_{\sigma_f}, t \in \mathbb{R}$  :

$$\mathcal{H}_{\sigma_f}((P, x) \cdot t) = \mathcal{H}_{\sigma_f}(P, x + t) = P - x - t = (\mathcal{H}_{\sigma_f}(P, x)) \cdot t$$

ce qui se traduit par la proposition suivante :

**Proposition 3.36.** *Soit  $(f, G)$  un représentant efficace primitif d'un automorphisme  $[\varphi] \in \text{Out}(\mathbb{F}_{\mathbb{N}})$ ,  $\sigma_f$  et  $\Omega_{\mathbb{R}}(f, G) = \Omega_{\sigma_f}$  les substitution et espace de pavages associés (voir définitions 3.19 et 3.26). Les systèmes dynamiques  $(\Omega_{\mathbb{R}}(f, G), \mathbb{R})$  et  $(L_{\sigma_f}, \mathbb{R})$  sont topologiquement conjugués par l'homéomorphisme  $\mathcal{H}_{\sigma_f} : L_{\sigma_f} \longrightarrow \Omega_{\mathbb{R}}(f, G)$ .*

## 4 Laminations

### 4.1 Laminations pavables et mesures invariantes

Un espace de pavages possède une structure de lamination, que l'on appelle *lamination pavable*. Cette structure est l'objet principal de l'article [BG03]. Nous définirons une autre version de lamination dans la sous-section dédiée aux automorphismes du groupe libre. On peut se référer à la note [Pet06a] pour obtenir une introduction complète à ce concept.

**Définition 4.1** (Lamination pavable). *Une lamination pavable est un espace topologique compact  $\mathcal{L}$  possédant un recouvrement par des ouverts  $U_i$  appelés boîtes et, attaché à chaque boîte  $U_i$ , un homéomorphisme  $\varphi_i : U_i \rightarrow V_i \times C_i$  où  $V_i$  est un ouvert de  $\mathbb{G}$  et  $C_i$  est un espace métrique compact complètement discontinu satisfaisant la propriété suivante :*

*Pour tout  $i, j \in I$ , il existe un élément  $g_{i,j} \in \mathbb{G}$  et un homéomorphisme de  $C_i \cap C_j$  noté  $\tau_{i,j}$  tel que l'application de transition  $h_{i,j} = h_i \circ h_j^{-1}$  soit de la forme :*

$$\text{pour tout } (x, c) \in h_j^{-1}(U_i \cap U_j), h_{i,j}(x, c) = (g_{i,j} \cdot x, \tau_{i,j}(c))$$

Les laminations pavables possèdent des sous-ensembles particuliers remarquables :

- Les *plaques*, qui sont des ensembles de la forme  $h_i^{-1}(V_i \times \{c\})$  où  $c$  est un élément de  $C_i$ .
- Les *feuilles* sont des sous-ensembles de  $\mathcal{L}$  union de plaques qui s'intersectent. Ce sont des variétés différentiables de la même dimension que  $\mathbb{G}$ .
- Les *germes verticaux* sont des sous-ensembles de  $\mathcal{L}$  de la forme  $h_i^{-1}(\{x\} \times C_i)$  où  $x$  est un élément de  $V_i$ .

**Remarque 4.2.** *On peut noter que tous les objets précédemment énoncés sont conservés par les changements de carte  $h_{i,j}$ . C'est à dire, un changement de carte envoie un germe vertical sur un germe vertical et une feuille sur une feuille.*

La proposition suivante apparaît dans l'article [BG03] en toute généralité. Nous en donnons une version restreinte aux cas de nos pavages.

**Proposition 4.3.** *Soit  $T$  un  $\mathbb{G}$ -pavage de  $X$  où  $\mathbb{G}$  est un groupe d'isométrie agissant simplement transitivement sur l'espace  $X = \mathbb{R}, \mathbb{R}^2$  ou  $\mathbb{H}^2$ . L'espace de pavage  $\Omega_{\mathbb{G}}(T)$  possède une structure de lamination pavable.*

Dans ce cadre, les espaces transverses sont des ouverts de  $\Omega_O(T) = \{T' \in \Omega_{\mathbb{G}}(T) \text{ tel que le barycentre d'une tuile de } T' \text{ coïncide avec l'origine } O \text{ de } X\}$  qui possèdent naturellement une structure d'espace de Cantor et est appelée transversale canonique. Pour plus de détails sur ce point on pourra consulter [Pet06a].

Plus d'informations peuvent être obtenus sur les systèmes dynamiques de la forme  $(\Omega_{\mathbb{G}}(T), \mathbb{G})$  lorsque l'espace  $\Omega_{\mathbb{G}}(T)$  possède une mesure  $\mu$ . En effet, sous certaines hypothèses, un tel système dynamique vérifie les théorèmes de récurrence de Poincaré ou le théorème ergodique. Nous nous focalisons ici sur les résultats obtenus concernant les mesures invariantes par le groupe  $\mathbb{G}$  sur les espaces de pavages.

**Définition 4.4** (Mesure  $\mathbb{G}$ -invariante sur un espace de pavage). *Une mesure  $\mu$  sur un espace de pavage  $(\Omega_{\mathbb{G}}(T), \mathbb{G})$  est  $\mathbb{G}$ -invariante si pour tout ouvert  $U$  de  $\Omega_{\mathbb{G}}(T)$  et  $g \in \mathbb{G}$ ,  $\mu(U.g) = \mu(U)$ .*

Lorsque  $\mathbb{G} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{R}^2$  on a toujours une mesure invariante à gauche ou à droite sur les espaces de pavage ayant une action de  $\mathbb{G}$  car elle est commutative. Par contre ce n'est plus le cas pour l'action de  $GA$  sur  $\mathbb{H}^2$  dont l'action à droite diffère de l'action à gauche.

**Définition 4.5** (Mesure transverse invariante sur un espace de pavage). *Soit  $\Omega_{\mathbb{G}}(T)$  un espace de pavage vu avec sa structure de lamination pavable donc muni d'un atlas  $(U_i, h_i)_{i \in I}$ . Une mesure transverse invariante  $\mu^t$  sur  $\Omega_{\mathbb{G}}(T)$  est une mesure sur  $\Omega_{\mathbb{O}}(T)$  donc par restriction sur chaque  $C_i$ , vérifiant pour tout ouvert  $U_i \subset C_i$  dans le domaine de définition des applications de transition de la lamination  $\tau_{i,j}$ ,  $\mu^t(\tau_{i,j}(U_i)) = \mu^t(U_i)$ .*

**Proposition 4.6.** *Un espace de pavage de la forme  $\Omega_{\mathbb{R}^d}(T)$  possède au moins une mesure transverse invariante  $\mu^t$ .*

Soit  $T$  un pavage apériodique du plan hyperbolique. Samuel Petite a montré dans l'article [Pet06a] que les laminations de la forme  $\Omega_{GA}(T)$  n'admettent pas de mesure transverse invariante  $\mu^t$ . Néanmoins, un tel espace admet toujours au moins une mesure non triviale invariante par le groupe  $GA$ .

Dans toute cette section, nous tirons quelques conséquences simples de la structure de la substitution  $\sigma_f$  afin de décrire les mesures de probabilité ergodique des systèmes de la forme  $(\Omega_{\mathbb{R}}(f, G), \mathbb{R})$  où  $(f, G)$  désigne un représentant efficace primitif d'un automorphisme  $\varphi$  irréductible à puissances irréductibles du groupe libre  $F_{\mathbb{N}}$ . Nous rappelons dans un premier temps un fait connu à propos de la théorie ergodique des pavages substitutifs de  $\mathbb{R}^d$ .

**Définition 4.7** (ergodicité). *Soit  $(\Omega, \mathbb{G})$  un système dynamique où  $\Omega$  est un espace de pavages et  $\mathbb{G}$  est le groupe d'isométrie de  $\mathbb{R}^d$  qui agit à droite sur l'espace  $\Omega$ . Une mesure de probabilité invariante  $\mu : X \rightarrow [0, 1]$  est ergodique si pour tout  $x \in \mathbb{R}^d$  :*

$$\text{si } E \in \mathcal{P}(\Omega) \text{ satisfait } E.x = E \text{ alors } \mu(E) = 0 \text{ ou } \mu(E) = 1$$

Nous notons  $\mathcal{M}_{er}(X)$ , l'ensemble des mesures ergodiques d'un système dynamique  $(X, \mathbb{G})$ . Lorsque ce système dynamique possède une unique mesure ergodique on dit qu'il est uniquement ergodique.

L'espace des mesures ergodiques des systèmes dynamiques associées aux espaces de pavages ont déjà fait l'objet de nombreuses études et on pourra consulter le survol [EAR04] comme introduction à ce sujet ou encore la note [Pet]. Un résultat fondamental obtenu en théorie ergodique des espaces de pavages substitutifs est le suivant dû à B. Solomyak.

**Théorème 4.8** ([Sol07]). *Soit  $\sigma$  une substitution primitive de  $\mathbb{R}^d$ . Le système dynamique  $(\Omega_\sigma, \mathbb{R}^d)$  est uniquement ergodique.*

Nous pouvons maintenant décrire l'ensemble des mesures ergodiques des systèmes de la forme  $(\Omega_{\mathbb{R}}(f, G), \mathbb{R})$ .

**Théorème 4.9.** *L'ensemble des mesures ergodiques  $\mathcal{M}_{er}(\Omega_{\mathbb{R}}(f, G))$  du système dynamique  $(\Omega_{\mathbb{R}}(f, G), \mathbb{R})$  est :*

- réduit à un point  $\{\mu\}$  si la substitution  $\sigma_f$  est non-orientable : il y a unique ergodicité du système ;
- égal au cône  $\{\alpha\mu_1 + \beta\mu_2 \mid \alpha, \beta \geq 0, \alpha + \beta = 1\}$  où  $\mu_1$  (respectivement  $\mu_2$ ) désigne l'unique mesure ergodique du système  $(\Omega_{\sigma_1}, \mathbb{R})$  (respectivement  $(\Omega_{\sigma_2}, \mathbb{R})$ ) si  $\sigma_f$  est orientable et préserve l'orientation ;
- égal au cône  $\{\alpha\mu_1 + \beta\mu_2 \mid \alpha, \beta \geq 0, \alpha + \beta = 1\}$  où  $\mu_1$  (respectivement  $\mu_2$ ) désigne l'unique mesure ergodique du système  $(\Omega_{\sigma_1}, \mathbb{R})$  (respectivement  $(\Omega_{\sigma_2}, \mathbb{R})$ ) si  $\sigma_f$  est orientable et renverse l'orientation.

Preuve du théorème :

- Si la substitution  $\sigma_f$  est non-orientable, d'après la proposition 3.22 nous savons que  $\sigma_f$  est primitive. On en déduit par le théorème 4.8 que l'ensemble  $\Omega_{\sigma_f}$  possède une unique mesure de probabilité ergodique.
- Si  $\sigma_f$  est orientable, alors d'après la proposition 3.22, il existe  $\sigma_a$  et  $\sigma_b$  deux substitutions primitives telles que  $\Omega_{\mathbb{R}}(f, G) = \Omega_{\sigma_a} \cup \Omega_{\sigma_b}$ . D'après le théorème 4.8, les systèmes  $(\Omega_{\sigma_a}, \mathbb{R})$  et  $(\Omega_{\sigma_b}, \mathbb{R})$  sont uniquement ergodiques. Notons  $\mathcal{M}_{er}(\Omega_{\sigma_a}) = \{\mu_a\}$  et  $\mathcal{M}_{er}(\Omega_{\sigma_b}) = \{\mu_b\}$ , les mesures ergodiques de  $\Omega_{\sigma_a} \cup \Omega_{\sigma_b}$  sont de la forme  $\mu_{\alpha, \beta} = \alpha\mu_a + \beta\mu_b$  (voir par exemple l'article [BG03] pour la démonstration de cette propriété sur les mesures). La mesure  $\mu_{\alpha, \beta}$  est une mesure de probabilité si et seulement si  $\alpha + \beta = 1$ ,  $\alpha \geq 0$  et  $\beta \geq 0$  d'où le résultat.

□

Les mesures ergodiques des espaces de pavages sont beaucoup plus simples à étudier lorsque elles proviennent d'un pavage substitutif de  $\mathbb{R}$  que pour ceux provenant d'un pavage du plan hyperbolique  $\mathbb{H}^2$ . Il existe pour les pavages de  $\mathbb{R}^d$  une notion appelée *répétitivité linéaire* qui lorsqu'elle est vérifiée permet de démontrer le théorème 4.8. En revanche cette notion disparaît pour les pavages du plan hyperbolique ainsi que celle de substitution primitive. Il est donc plus ardu de déterminer l'ensemble des mesures de probabilité ergodiques pour un espace de pavage du plan hyperbolique. On peut consulter, à cet effet, dans l'article [Pet06b] le chapitre dédié aux mesures ergodiques écrit par le même auteur et ses collaborateurs dans [JDJ15].

## 4.2 Laminations algébriques sur $F_N$

La notion de lamination algébrique que nous introduisons dans cette section a été défini en toute généralité dans la série d'articles [CHL08a], [CHL08b] et [CHL08c]. Elle est une généralisation de la notion de lamination transverse à un arbre réel provenant de la lamination sur une surface hyperbolique (voir [Hil07] pour une description de cette classe de laminations).

### 4.2.1 Bord du groupe libre et mots infinis

Soit  $\mathcal{B} = \{x_1, \dots, x_N\}$  une base du groupe libre  $F_N = \langle x_1, \dots, x_N \rangle$ . Il existe naturellement une fonction *longueur de mot* sur  $(\mathcal{B} \cup \mathcal{B}^{-1})^*$  : la *longueur de  $u$* , notée  $|u|_{\mathcal{B}}$ , est le nombre de lettres de  $\mathcal{B} \cup \mathcal{B}^{-1}$  composant le mot obtenu après réduction, c'est à dire suppression des occurrences  $ss^{-1}$  et  $s^{-1}s$ . Le groupe libre  $F_N$  (défini comme l'ensemble des mots finis réduits sur cet alphabet) est ainsi muni d'une longueur mais aussi d'une métrique dépendant de la base  $\mathcal{B}$  par  $d_{\mathcal{B}}(u, v) = |u.v^{-1}|_{\mathcal{B}}$ . Pour alléger les notations, lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguïté possible, on omettra l'indication de la base en indice.

On note  $\partial F_N$  l'espace des mots infinis réduits sur  $\mathcal{B}$ , c'est à dire l'ensemble  $\partial F_N = \{X = x_{i_1} \dots x_{i_s} \dots \mid \forall j \geq 0, x_{i_j} \neq x_{i_{j+1}}^{-1}\}$ . Soit  $g$  un élément de  $F_N$  tel que  $|g| = k$ . On définit le cylindre associé à  $g$  comme le sous-ensemble de  $\partial F_N$  suivant :

$$\partial_g F_N = \{Y = y_{i_1} y_{i_2} \dots \in \partial F_N \mid y_{i_1} \dots y_{i_k} = g\}$$

Soit  $Y \in \partial F_N$ , un *préfixe* de  $Y$  est un mot fini  $X$  tel que  $Y$  soit de la forme  $Y = X.Y'$ . On définit maintenant le bord du groupe libre  $F_N$  :

**Définition 4.10** (Bord de  $F_N$ ). *Le bord de  $F_N$  dans la base  $\mathcal{B}$  est l'espace topologique donnée par :*

- l'ensemble  $\partial F_N$
- une topologie dont une base de topologie est formée par les cylindres  $\mathfrak{C} = \{\partial_g F_N \mid \forall g \in F_N \text{ réduit}\}$ .

On peut montrer que cette topologie ne dépend pas de la base de  $F_N$ . Soit  $G$  un graphe métrique marqué par  $\tau : (R_N, \star) \rightarrow (G, v)$  (voir la définition au début de la section 2.4.2),  $\tilde{G}$  le revêtement universel de  $G$  et  $pr : \tilde{G} \rightarrow G$  la projection de revêtement de  $G$ . L'espace  $\tilde{G}$  est un arbre simplicial et on a une action naturelle de  $F_N \cong \pi_1(G, v)$  sur  $\tilde{G}$  par monodromie. Le marquage  $\tau$  induit en homotopie un isomorphisme  $\tau_{\star} : F_N \rightarrow \pi_1(G, v)$ . On se fixe un point base  $O$  dans la fibre  $pr^{-1}(v)$  dans  $\tilde{G}$ . Soit  $g \in F_N$  un élément réduit,  $\tau_{\star}(g)$  se relève dans  $\tilde{G}$  en un unique chemin géodésique  $c_g$  défini sur un intervalle  $[0, b]$  où  $b > 0$  d'origine  $O$ . Soit l'ensemble des chemins d'arêtes réduits :

$$\mathcal{C}_O(\tilde{G}) = \{c : [0, b] \rightarrow \tilde{G} \text{ immersion} \mid c(0) = O\}$$

et

$$\begin{aligned} \theta: \mathbb{F}_N &\longrightarrow \mathcal{C}_O(\tilde{G}) \\ g &\longmapsto \theta(g) = c_g \end{aligned}$$

Il est possible d'étendre l'application  $\theta$  au bord  $\partial\mathbb{F}_N$  en considérant que tout mot  $X \in \partial\mathbb{F}_N$  s'envoie sur l'unique chemin  $C: [0, +\infty[ \rightarrow \tilde{G}$  tel que pour tout préfixe fini  $w$  de  $X$ , il existe  $t_w \geq 0$  satisfaisant  $C([0, t_w]) = \theta(w)$ . On note cette application  $\partial\theta$ . On peut définir ainsi rigoureusement le *bord de  $\tilde{G}$*  comme image du bord  $\partial\mathbb{F}_N$ .

**Définition 4.11.** Soit  $\tau: (\mathbb{R}_N, \star) \rightarrow (G, v)$  un marquage du graphe  $G$  et soit  $O \in \tilde{G}$  un point-base dans  $\tilde{G}$ . Le bord de  $\tilde{G}$  relativement à  $O$ , noté  $\partial\tilde{G}$ , est l'espace  $\partial\theta(\partial\mathbb{F}_N)$  muni de la topologie dont la base est l'image par  $\partial\theta$  de la base de cylindres  $\mathcal{C}$ .

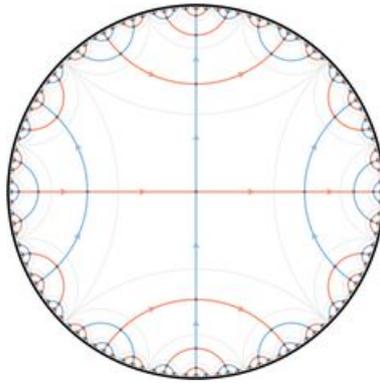


FIGURE 10 – Revêtement universel de  $(\mathbb{R}_2, \star)$

La distance  $d_B$  sur  $\mathbb{F}_N$  induit naturellement une distance sur  $\mathbb{R}_N$  telle que chaque arête soit de longueur 1 et ainsi sur  $\tilde{G}$ . Entre deux sommets  $s_1$  et  $s_2$  de  $\tilde{G}$  il existe une unique *géodésique*  $\gamma: J \rightarrow \tilde{G}$  où  $J = [t_1, t_2]$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $\gamma$  est une application continue localement isométrique satisfaisant  $\gamma(t_1) = s_1$  et  $\gamma(t_2) = s_2$ . Lorsque  $J = [0, \infty[$  et que  $\gamma(0) = O$  on dit que  $\gamma$  est un *rayon géodésique*.

**Remarque 4.12.** L'espace  $\tilde{G}$  est un arbre simplicial donc son bord  $\partial\tilde{G}$  est un espace de Cantor formé par l'espace des bouts de  $\tilde{G}$ . Pour avoir un aperçu plus étendu sur les bords on pourra se référer à l'article [KB02].

Il est possible de munir l'espace  $\partial\mathbb{F}_N$  d'une structure d'espace métrique comme le montre la proposition suivante :

**Proposition 4.13.** Notons  $X_n$  le préfixe, ou segment initial, de longueur  $n$  d'un élément de  $\partial\mathbb{F}_N$ , l'application

$$\begin{aligned} \delta: \partial\mathbb{F}_N \times \partial\mathbb{F}_N &\rightarrow \mathbb{R} \\ (X, Y) &\longmapsto \exp(-\max\{n \geq 0, X_n = Y_n\}) \end{aligned}$$

est une métrique sur  $\partial\mathbb{F}_N$  qui métrise la topologie engendrée par les cylindres  $\mathcal{C}$  et fait de  $\partial\mathbb{F}_N$  un espace métrique compact.

Preuve de la proposition 4.13 : Il est aisé de vérifier que l'application  $\delta$  est une métrique et même une ultra-métrique sur  $\partial F_N$ . Vérifions maintenant que  $\partial F_N$  est compact. En effet, soit  $(X_n)_{n \geq 0}$  une suite d'éléments de  $\partial F_N$ . Pour tout  $m \in \mathbb{N}$ , il existe un nombre fini de préfixes  $g_m$  de tailles fixés  $|g_m| = m$  donc il existe une infinité de termes de  $X_n$  ayant  $g$  pour préfixe. Par extraction diagonale, il existe une suite de préfixes strictement croissante  $g_1 \subset g_2 \subset \dots \subset g_m \subset \dots$  qui soient des préfixes pour une infinité de termes de la suite  $(X_n)_{n \geq 0}$ . Si  $X = x_{i_1} \dots x_{i_s} \dots \in \partial F_N$  tel que tout préfixe de  $X$  de taille  $m$  soit égal à  $g_m$  alors  $X$  est un point d'accumulation de  $(X_n)_{n \geq 0}$  ce qui prouve que  $\partial F_N$  est compact.

#### 4.2.2 Laminations algébriques et réalisations géodésiques

On va définir la notion de *lamination algébrique* à l'aide de ce formalisme. Considérons l'espace :

$$\partial^2 F_N = \{(X, Y) \in \partial F_N \times \partial F_N \mid X \neq Y\}$$

On le munit de la topologie induite par la topologie produit sur  $\partial F_N \times \partial F_N$  ainsi que d'une action diagonale de  $F_N$  par homéomorphisme défini de la manière suivante : pour tout  $w \in F_N$ ,  $(X, Y) \in \partial^2 F_N$  on a  $w.(X, Y) = (w.X, w.Y) \in \partial^2 F_N$ . Remarquons que l'espace  $\partial^2 F_N$  est un ouvert de  $\partial F_N \times \partial F_N$  car sa diagonale est fermée.

**Définition 4.14** (Lamination Algébrique). *Une lamination algébrique du groupe libre est un sous-espace  $L^2 \subset \partial^2 F_N$  vérifiant les propriétés d'être :*

- *fermé*
- *invariant par l'action diagonale de  $F_n$*
- *invariant par l'échange de facteur  $\varepsilon : \partial^2 F_n \rightarrow \partial^2 F_n$  défini par  $\varepsilon(X, Y) = (Y, X)$ .*

*Un point de cet espace est nommé feuille.*

**Définition 4.15** (Réalisation géodésique). *Soit  $G$  un graphe marqué par  $\tau : (R_N, \star) \rightarrow (G, v)$ ,  $pr : \tilde{G} \rightarrow G$  la projection de revêtement et  $\partial\theta : \partial F_N \rightarrow \partial \tilde{G}$  l'homéomorphisme induit par  $\tau$  entre les bords de  $F_N$  et de  $\tilde{G}$  (voir le paragraphe suivant la définition 4.10). Soit  $(X, Y) \in \partial^2 F_N$  et  $\tilde{\gamma}_{\tilde{G}}(X, Y) : \mathbb{R} \rightarrow \tilde{G}$  l'unique géodésique joignant  $\partial\theta(X)$  à  $\partial\theta(Y)$  dans  $\partial \tilde{G}$ . La réalisation géodésique de  $(X, Y)$  dans  $G$  est le chemin  $\gamma_G(X, Y) = pr(\tilde{\gamma}_{\tilde{G}}(X, Y))$ . On note  $\mathcal{G}(L^2)$  l'ensemble des réalisations géodésiques d'une lamination algébrique  $L^2$ .*

Le groupe libre  $F_N$  est isomorphe à  $\pi_1(G, v)$  donc l'ensemble des chemins  $\tilde{\gamma}_{\tilde{G}}(X, Y)$  s'obtiennent comme les relevés par l'action de monodromie des chemins  $\gamma_G(X, Y)$ . On obtient ainsi une description algébrique des réalisations géodésiques d'une lamination algébrique  $L^2$  comme l'espace quotient  $L^2/F_N$ .

### 4.3 Lamination de Bestvina-Feighn-Handel

Nous décrivons dans cette sous-section la lamination particulière introduite dans l'article [BFH97]. Cette dernière reflète les propriétés dynamiques d'un automorphisme externe et a été utilisée pour montrer l'alternative de Tits pour les groupes  $\text{Out}(\mathbb{F}_N)$ .

#### 4.3.1 La lamination de Bestvina-Feighn-Handel comme lamination algébrique

On emploie ici le formalisme de l'article [KL14]. On pourra se référer à ce dernier article pour obtenir des résultats sur d'autres types de laminations algébriques que celle de Bestvina-Feighn-Handel.

**Définition 4.16** (Lamination engendrée). *Soit  $\mathcal{C}$  un ensemble de chemins d'arêtes réduits dans  $G$ . Une feuille  $(X, Y) \in \partial^2 \mathbb{F}_N$  appartient à la lamination engendrée par  $\mathcal{C}$ , notée  $L^2(\mathcal{C})$ , si sa réalisation géodésique  $\gamma_G(X, Y) : \mathbb{R} \rightarrow G$  (voir la définition 4.15) vérifie :*

*pour tout intervalle  $J \subset \mathbb{R}$ , il existe  $c$  ou  $\bar{c} \in \mathcal{C}$  tel que  $c|_J = \gamma_G(X, Y)|_J$  ou  $\bar{c}|_J = \gamma_G(X, Y)|_J$*

Cette notion de lamination engendrée nous permet de définir la lamination de Bestvina-Feighn-Handel :

**Définition 4.17** (Lamination de Bestvina-Feighn-Handel). *Soit  $(f, G)$  un représentant efficace primitif. La lamination de Bestvina-Feighn-Handel de  $f$ , notée  $L_{\text{BFH}}^2(f)$ , est la lamination engendrée par l'ensemble  $\mathcal{C}_f = \{f^k(e) \mid e \in E(G) \text{ et } k \geq 0\}$ .*

**Proposition 4.18.** *Soit  $(f, G)$  un représentant efficace primitif. L'espace des réalisations géodésiques de la lamination de Bestvina-Feighn-Handel, noté  $\mathcal{G}(L_{\text{BFH}}^2(f))$ , est en bijection  $H$  avec l'espace quotient  $L_{\text{BFH}}^2(f)/\mathbb{F}_N$ .*

*Preuve :* Notons  $\tau : (\mathbb{R}_N, \star) \rightarrow (G, v)$  le marquage de  $G$  avec lequel nous construisons l'espace des réalisations géodésiques  $\mathcal{G}(L_{\text{BFH}}^2(f))$ . L'espace  $\mathcal{G}(L_{\text{BFH}}^2(f))$  est en bijection avec l'espace des chemins dans  $\partial \tilde{G}$  de  $\partial \theta(L_{\text{BFH}}^2(f))$  passant par l'origine. Il s'agit donc du quotient par l'action de monodromie du groupe  $\mathbb{F}_N \cong \Pi_1(G, v)$  sur  $\tilde{G}$  et comme  $\partial \theta$  est un homéomorphisme on en déduit que  $\partial \theta$  réalise une bijection entre  $\mathcal{G}(L_{\text{BFH}}^2(f))$  et  $L_{\text{BFH}}^2(f)/\mathbb{F}_N$ .  $\square$

#### 4.3.2 La construction originelle de Bestvina-Feighn-Handel

Dans l'article [BFH97] les auteurs construisent une lamination identique à celle que nous avons décrite précédemment mais munie d'une topologie différente. Un avantage de cette approche est d'obtenir de façon constructive des feuilles de la lamination  $L_{\text{BFH}}^2(f)$  où  $(f, G)$  est un représentant efficace d'un automorphisme IWIP et également de montrer aisément que certaines feuilles sont périodiques par l'application induite par  $f$  sur  $L_{\text{BFH}}^2(f)$ . Cette lamination se décrit comme suit :

**Définition 4.19** (Equivalence des immersions isométriques sur un intervalle fini). Soit  $G$  un graphe. Deux immersions isométriques sur des segments  $i_1 : [a, b] \rightarrow G$  et  $i_2 : [c, d] \rightarrow G$  sont équivalentes s'il existe une isométrie  $s : [a, b] \rightarrow [c, d]$  telle que  $i_2 \circ s = i_1$ .

**Définition 4.20** (Equivalence de feuille). Nous introduisons une notion d'équivalence sur l'ensemble des immersions isométriques de  $\mathbb{R}$  dans un graphe  $G$ .

1. Un segment de feuille d'une immersion isométrique  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow G$  est la classe d'équivalence, pour la relation définie en 4.19, sur la restriction de  $\gamma$  à un intervalle fini.
2. deux immersions isométriques  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow G$  et  $\gamma' : \mathbb{R} \rightarrow G$  sont faiblement équivalentes si tout segment de feuille de  $\gamma$  est également un segment de feuille de  $\gamma'$ .

Le lemme 2.49, qui nous donne l'existence dans chaque arête de points périodiques, permet de réaliser la construction suivante. Soit  $x_p \in G$  un point périodique avec  $f^p(x_p) = x_p$ . Il existe  $\epsilon > 0$  et un  $\epsilon$ -voisinage de  $x_p$  dans  $G$  noté  $\mathcal{U}$  tel que  $\mathcal{U} \subset f^p(\mathcal{U})$ . Soit une isométrie  $l : ]-\epsilon, \epsilon[ \rightarrow \mathcal{U}$ . On peut étendre  $l$  de manière unique en une immersion isométrique locale  $l : \mathbb{R} \rightarrow G$  telle que pour tout  $k \geq 0$ ,  $t \in ]-\epsilon, \epsilon[$ ,  $l(\lambda^{pk}t) = f^{pk}(l(t))$ , où  $\lambda > 1$  désigne le facteur d'expansion de  $(f, G)$ .

**Définition 4.21** (Feuille). On appelle feuille obtenue par itération d'un voisinage périodique une immersion localement isométrique  $l : \mathbb{R} \rightarrow G$  obtenue comme dans la construction précédente.

Les auteurs dégagent ainsi la notion de lamination stable associée à un représentant efficace primitif d'un automorphisme IWIP.

**Définition 4.22** (Lamination stable). La lamination stable  $\Lambda = \Lambda_f^+(G)$  associée à un représentant efficace primitif  $f : G \rightarrow G$  est la classe d'équivalence (définie en 4.20) des immersions isométriques contenant au moins une feuille obtenue par itération d'un voisinage périodique. Une feuille de  $\Lambda$  est un représentant dans la classe d'équivalence  $\Lambda$  et un segment de feuille de  $\Lambda$  est un segment de feuille de n'importe quelle feuille de  $\Lambda$ .

### 4.3.3 Mouvements élémentaires et lamination de Bestvina-Feighn-Handel

Nous décrivons au travers des propositions de cette sous-section l'effet de la transformation induite par un mouvement élémentaire (voir la définition 2.63) entre deux représentants efficaces irréductible d'une même classe d'automorphisme  $[\varphi] \in \text{Out}(\mathbb{F}_N)$ .

**Proposition 4.23.** Soit  $\pi$  un mouvement élémentaire (voir la définition 2.63) d'un représentant efficace primitif  $(f_1, G_1)$  vers un représentant efficace primitif  $(f_2, G_2)$  d'un même automorphisme IWIP  $[\varphi] \in \text{Out}(\mathbb{F}_N)$ . Soit  $L = \gamma_{G_1}(X, Y) : \mathbb{R} \rightarrow G_1$  une réalisation géodésique d'une feuille de  $L_{\text{BFH}}^2(f_1)$ . Il existe un recouvrement de  $\mathbb{R}$  par des intervalles  $(I_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  maximaux de deux types :

- soit  $I_k$  est de  $\pi$ -type 1 :  $(\pi \circ L)|_{I_k}$  est localement injective.
- soit  $I_k$  est de  $\pi$ -type 2 :  $(\pi \circ L)|_{I_k}$  est constante et d'image un sommet.

Preuve : Si  $\pi : G_1 \rightarrow G_2$  est un pli ou un pli composé avec une homotopie de valence 2 alors pour tout chemin réduit emprunté  $c_1 : [a, b] \rightarrow G_1$ ,  $\pi \circ c_1$  est lui-même un chemin réduit emprunté. Dans ce cas là il n'existe qu'un seul intervalle maximal recouvrant  $\mathbb{R}$  et par définition il est de  $\pi$ -type 1. Supposons que  $\pi$  soit un mouvement élémentaire étant la composée d'un pli, suivi d'une homotopie de valence 2 puis d'un écrasement de forêt maximal. Alors un chemin réduit emprunté  $c_1 : [a, b] \rightarrow G_1$  ne s'envoie pas nécessairement sur un chemin réduit puisque les parties traversant les composantes de la forêt invariante écrasée rendent  $\pi \circ c_1$  non localement injective. Les intervalles  $I_k$  où  $\pi|_{I_k}$  est constante sont alors donnés par les domaines de définition des chemins  $c : I \rightarrow G_1$  paramétrant les composantes connexes de la forêt invariante maximale avant d'être écrasés par le mouvement élémentaire  $\pi$ . Les intervalles  $I_k$  où  $\pi|_{I_k}$  est localement injective sont les fermetures des complémentaires des intervalles où  $\pi|_{I_k}$  est constante sur  $\mathbb{R}$ .  $\square$

**Lemme 4.24.** *Avec les hypothèses et notations de la proposition 4.23 : il n'existe à translation près, qu'un nombre fini d'intervalles de  $\pi$ -type 1 et 2 pour  $L$ .*

Preuve : Par définition de représentant efficace primitif de  $(f_1, G_1)$ , il existe un entier  $k \geq 0$  tel que pour toute arête  $e \in E(G_1)$ , le chemin d'arêtes  $f_1^k(e)$  traverse toutes les arêtes de  $G_1$ . On en déduit que si l'application  $L$  possède des intervalles  $I$  de  $\pi$ -type 2,  $I$  partage une partie d'intérieur non vide avec au moins un chemin de la forme  $f_1^k(e)$ . Il vient que, s'il existe des intervalles de T-type 2, tout intervalle de T-type 1 ne peut excéder dans  $L$  la longueur  $\sup_{e \in E(G_1)} l_{G_1}(f_1^k(e)) \leq \sup_{e \in E(G_1)} \lambda^k l_{G_1}(e) \leq \lambda^k$ .

Or, il n'existe qu'un nombre fini de chemins d'arêtes de longueur inférieure à une borne fixée. On en déduit qu'à translation près, il n'existe qu'un nombre fini d'intervalles de  $\pi$ -type 1 dans  $L$ . De plus, les intervalles de  $\pi$ -types 2 sont les forêts dans  $G_1$  qui s'écrasent dans  $G_2$  par l'application entre graphes induit par le mouvement élémentaire  $\pi$ . Il n'existe donc qu'un nombre fini d'intervalles de  $\pi$ -type 2 à translation près dans  $L$ .  $\square$

Pour le résultat suivant, rappelons que les graphes des représentants efficaces irréductibles sont munis de leur longueur de Perron-Frobenius, voir le lemme 2.50, et que  $l_G(\cdot)$  désigne la longueur d'un chemin dans un graphe  $G$ . Cette fonction longueur induit une longueur, notée de la même façon, sur tout chemin localement injectif dans  $G$ , en particulier sur les réalisations géodésiques de feuilles.

**Proposition 4.25.** *Avec les notations et hypothèses de la proposition 4.23 : il existe un réel  $K \geq 1, \mu \geq 0$  tels que pour tout sous-chemin  $c$  de  $L$  vérifiant  $l_{G_1}(c) \geq \mu$  :*

$$\frac{1}{K} \cdot l_{G_1}(c) \leq l_{G_2}(\pi(c)) \leq K \cdot l_{G_1}(c)$$

Preuve : Distinguons deux cas :

- Cas 1 : Si toutes les réalisations géodésiques de  $L_{\text{BFH}}^2(f_1)$  se décomposent en un unique intervalle  $I$  de  $\pi$ -type 1 alors on peut choisir  $\mu = 0$ . En effet,  $\pi$  est continue donc pour toute arête  $e \in E(G_1)$ ,  $\pi(e)$  est de longueur finie dans  $G'$ . Il existe ainsi une constante  $K \geq 1$  tel que pour tout  $e \in E(G_1)$  l'inégalité  $\frac{1}{K} \leq \pi(e) \leq K$  soit vérifiée. Soit  $c = e_1 \dots e_s$  un chemin d'arêtes réduit dans  $G_1$ . La longueur du chemin  $\pi(c)$  dans le graphe  $G_2$  est donnée par  $l_{G_2}(\pi(c)) = \sum_{i=1}^s l_{G_2}(\pi(e_i))$ . Or pour tout  $i \in \{1, \dots, s\}$ ,  $\frac{1}{K} \cdot l_{G_1}(e_i) \leq l_{G_2}(\pi(e_i)) \leq K \cdot l_{G_1}(e_i)$ . On en déduit que :

$$\frac{1}{K} \cdot l_{G_1}(c) \leq l_{G_2}(\pi(c)) \leq K \cdot l_{G_1}(c)$$

ce qui conclut le cas 1.

- Cas 2 : Supposons que les réalisations géodésiques de  $L_{\text{BFH}}^2(f_1)$  contiennent des intervalles de  $\pi$ -type 2 et de  $\pi$ -type 1. D'après la démonstration du lemme 4.24 on peut choisir  $\mu > 0$  tel que pour tout chemin  $c$  dans  $L$  vérifiant  $l_{G_1}(c) \geq \mu$ ,  $c$  contienne un intervalle de  $\pi$ -type 1. Par finitude à translation près de l'ensemble des intervalles de  $\pi$ -type 1 dans  $L$ , il existe  $K \geq 1$  tel que :

- pour tout chemin  $c_1 \in \mathcal{I}_1$ ,  $\frac{1}{K} \times l_{G_1}(c_1) \leq l_{G_2}(\pi(c_1)) \leq K \times l_{G_1}(c_1)$ .
- pour tout chemin  $c$  dont l'image est exactement la concaténation d'un intervalle  $I_1$  de  $\pi$ -type 1 et d'un intervalle  $I_2$  de type 2, on note l'ensemble de ces chemins  $\mathcal{J}$  et ainsi :

$$\frac{1}{K} \times l_{G_1}(c) \leq l_{G_2}(\pi(c)) \leq K \times l_{G_1}(c)$$

ce qui est possible car il n'existe qu'un nombre fini d'intervalles de  $\pi$ -type 1 et 2 à translation près d'après le lemme 4.24

Soit  $c : [0, 1] \rightarrow G_1$  un chemin dans  $L$  de longueur  $l_{G_1}(c) \geq \mu$ , alors  $c$  peut se décomposer en la concaténation de 3 types de chemin :

- soit  $c$  est de la forme  $c = c_1.C$  où  $c_1 \in \mathcal{I}_1$  et  $C$  est une concaténation de chemins de  $\mathcal{J}$
- soit  $c$  est de la forme  $c = C.c_1$  où  $c_1 \in \mathcal{I}_1$  et  $C$  est une concaténation de chemins de  $\mathcal{J}$
- soit  $c$  est simplement la concaténation de chemins de  $\mathcal{J}$ .

En utilisant le fait que pour chaque chemin  $c$  de  $\mathcal{I}_1$  et de  $\mathcal{J}$  l'inégalité suivante est satisfaite :

$$\frac{1}{K} \times l_{G_1}(c) \leq l_{G_2}(\pi(c)) \leq K \times l_{G_1}(c)$$

on obtient l'inégalité en sommant cette relation pour tout chemin d'arêtes de longueur supérieure à  $\mu$ . Ceci qui prouve le lemme.  $\square$

Démontrons ce lemme dû à l'auteur de [Coo87] :

**Lemme 4.26.** Soit  $\phi : F_N \longrightarrow F_N$  un automorphisme de groupe libre,  $C(\phi) = \max_{x \in S \cup S^{-1}} \{|\phi(x)|_{can}, |\phi^{-1}(x)|_{can}\}$  et  $X = (x_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  une suite bi-infinie d'éléments de  $S \cup S^{-1}$  telle que pour tout  $j \in \mathbb{Z}$ ,  $x_j \neq x_{j+1}^{-1}$ . Alors :

1.  $|\phi(u)| \geq \frac{|u|}{C(\phi)}$
2. si pour tout  $i \in \mathbb{N}$ ,  $X^i$  est une sous-suite finie de  $X$  telle que  $X^i \subset X^{i+1}$ , alors  $\phi(X^i)$  admet un sous-mot propre  $u^i$  qui est également un sous-mot propre de  $\phi(X^{i+1})$ . De plus, si  $\lim_{k \rightarrow +\infty} |X^k| = +\infty$  alors  $\lim_{k \rightarrow +\infty} |u^k| = +\infty$

La seconde assertion de ce lemme peut sembler évidente. Elle ne l'est pas en raison des annulations qui pourraient rendre  $\phi(X^i)$  et  $\phi(X^{i+1})$  très différents.

Preuve du lemme 4.26 :

1. Remarquons que  $C(\phi) = C(\phi^{-1})$  et pour tout mot  $v \in F_N$ ,  $|\phi(v)| \leq C(\phi)|v|$ . On en déduit alors que  $|u| = |\phi^{-1}(\phi(u))| \leq C(\phi^{-1})|\phi(u)| = C(\phi)|\phi(u)|$ . D'où le résultat.
2. On a supposé que  $X^i$  était un sous-mot propre de  $X^{i+1}$ . Il existe donc  $\alpha, \beta$  des mots réduits tels que  $X^{i+1} = \alpha.X^i.\beta$  soit réduit. Notons  $m$  la partie entière de  $\frac{|X^i|}{C(\phi)}$ . Alors en se servant du premier point de ce lemme, le mot  $\phi(X^i.\beta)$  (respectivement  $\phi(\alpha.X^i)$ ) coïncide avec  $X^i$  sur les  $m - C(\phi)$  premières lettres (respectivement  $m - C(\phi)$  dernières lettres). On en déduit que  $X^i$  et  $X^{i+1}$  possèdent un sous-mot propre en commun de longueur minimale  $m - 2C(\phi)$ . La dernière partie de l'énoncé du point 2 découle du fait que l'entier  $m$  est proportionnel à la quantité  $|X^i|$ .

□

On peut démontrer à l'aide du lemme 4.26 que si le morphisme  $\varphi : F_N \longrightarrow F_N$  est un automorphisme IWIP, l'application induite sur son bord  $\partial\varphi : \partial F_N \longrightarrow \partial F_N$  (voir la définition 4.11) est un homéomorphisme. Ce fait a pour conséquence facile la proposition suivante, à laquelle on fera appel dans la section 6 :

**Proposition 4.27.** Soit  $(f, G)$  un représentant efficace primitif de l'automorphisme IWIP externe  $[\varphi] \in \text{Out}(F_N)$ . Soit  $L = pr((X, Y))$  une réalisation géodésique de la feuille  $(X, Y)$  (voir définition 4.15) de la lamination de Bestvina-Feighn-Handel  $L_{\text{BFH}}^2(f)$  (voir définition 4.17). L'application  $f : G \longrightarrow G$  s'étend en un homéomorphisme sur l'ensemble des réalisations géodésiques  $\mathcal{G}(L_{\text{BFH}}^2(f))$  de la manière suivante :

$$f(L) = pr(\partial\varphi(X), \partial\varphi(Y))$$

et dont l'expression de l'inverse  $f^{-1}$  est donnée par :

$$f^{-1}(L) = pr(\partial\varphi^{-1}(X), \partial\varphi^{-1}(Y))$$

Pour plus de détails, on peut se reporter à l'article [KL14]. De cette manière, on peut adjoindre à l'action à droite de  $\mathbb{R}$  par translation sur  $\Omega_{\mathbb{R}}(f, G)$ , une action à droite par homéomorphisme.

## 5 Equivalences topologiques entre espaces de pavages induits par un représentant efficace primitif

L'objet de cette section est de prouver le théorème suivant :

**Théorème.** *Soit  $(f_1, G_1)$  et  $(f_2, G_2)$  deux représentants efficaces primitifs de deux automorphismes externes IWIP dans une même classe de conjugaison dans  $\text{Out}(\mathbb{F}_N)$ . Alors les espaces de pavages  $\Omega_{\mathbb{R}}(f_1, G_1)$  et  $\Omega_{\mathbb{R}}(f_2, G_2)$  sont homéomorphes.*

### 5.1 Application induite par un mouvement élémentaire

#### 5.1.1 Liens entre $X_{\sigma_f}$ et $\Omega_{\mathbb{R}}(f, G)$

Soit  $(f, G)$ , un représentant efficace primitif d'un automorphisme externe IWIP du groupe libre  $\mathbb{F}_N$ , un système de représentants dans l'espace quotient  $\Omega_{\mathbb{R}}(f, G)/\mathbb{R}$  que l'on note  $\mathcal{C}_{\sigma_f}$  (voir sous-section 3.3.2) et  $\pi : (f, G) \longrightarrow (f', G')$  (voir définition 2.63) un mouvement élémentaire. On considère les graphes  $G$  et  $G'$  munis de leur fonction longueur de Perron-Frobenius.

Il est possible d'associer un élément  $P_1$  de  $\Omega_{\mathbb{R}}(f, G)$  à un élément  $P_2$  de  $\Omega_{\mathbb{R}}(f', G')$  suivant le mouvement élémentaire  $\pi$ . Pour ce faire, nous utilisons la proposition 2.13) : un élément  $P_1$  de l'espace  $\Omega_{\mathbb{R}}(f, G)$  est la donnée de la suite des arêtes qu'il emprunte  $(e_{i_j})_{j \in \mathbb{Z}} \in (\mathbb{E}(G) \cup \mathbb{E}^{-1}(G))^{\mathbb{Z}}$  et de la position du point base  $b$  dans la tuile colorée par l'arête  $e_{i_0}$ .

Le mouvement élémentaire  $\pi$  définit un morphisme de graphe car il envoie une arête sur un chemin d'arêtes et une arête sur un sommet (si il apparaît une forêt invariante non-triviale) et il existe au moins une arête  $e \in \mathcal{A}_G$  telle que  $\pi(e)$  soit de longueur strictement positive dans  $G'$ . De plus, d'après la proposition 2.68, tout chemin emprunté par  $f$  dans  $G$  s'envoie par un mouvement élémentaire  $\pi$  sur un chemin emprunté dans  $G'$  par  $f'$ . Ces faits justifient l'introduction de la définition suivante :

**Définition 5.1.** *Soit  $\pi$  un mouvement élémentaire  $\pi : (f, G) \longrightarrow (f', G')$  entre deux représentants efficaces primitifs d'un automorphisme IWIP de  $\mathbb{F}_N$ . Nous définissons :*

1. L'application symbolique induite par  $\pi$  notée  $\sigma_{\pi} : \mathcal{A}_G \longrightarrow \mathcal{A}_{G'}^*$ , est l'application qui à tout  $e \in \mathcal{A}_G$ , associe la concaténation des arêtes de  $\mathcal{A}_{G'}$  traversées dans le chemin  $\pi(c_e)$ .
2. L'application induite par  $\sigma_{\pi}$  sur  $X_{\sigma_f}$  (voir 3.3) notée  $\Sigma_{\pi} : X_{\sigma_f} \longrightarrow X_{\sigma_{f'}}$ .

**Proposition 5.2.** *Soit  $\pi$  un mouvement élémentaire  $\pi : (f, G) \longrightarrow (f', G')$  entre deux représentants efficaces primitifs.*

*Alors  $\Sigma_{\pi} : X_{\sigma_f} \longrightarrow X_{\sigma_{f'}}$ , l'application induite par  $\sigma_{\pi}$  sur  $X_{\sigma_f}$  est bijective.*

Preuve de la proposition 5.2 : On détermine un inverse explicite de  $\Sigma_{\pi}$  qui dépend de la nature du mouvement élémentaire  $\pi$ . On analyse trois cas distincts :

1. Si  $\pi$  est un pli suivant un tournant  $\{a, b\}$  (voir définition 2.61) tel qu'en reprenant les notations de la figure 5,  $\pi(c_a) = c_x.c_{a'}$  et  $\pi(c_b) = c_x.c_{b'}$  où  $x, a', b' \in E(G') \cup E^{-1}(G')$ , alors  $\pi$  envoie un chemin d'arête de longueur donnée sur un chemin de même longueur et plus explicitement  $\pi$  est le morphisme de graphe dont l'application symbolique induite est la suivante :

$$\begin{aligned} \sigma_\pi : \quad \mathcal{A}_G &\longrightarrow \mathcal{A}_{G'}^* \\ a &\longmapsto x.a' \\ b &\longmapsto x.b' \\ e \neq a, b &\longmapsto e \end{aligned}$$

Soit  $\mathcal{M}_{G'}$  l'alphabet  $(\mathcal{A}_{G'} \setminus \{x, a', b', \bar{x}, \bar{a}', \bar{b}'\}) \cup \{x.a', x.b', \bar{b}'.\bar{x}, \bar{a}'.\bar{x}\}$ . Puisque  $St(t(x)) = \{x, \bar{a}', \bar{b}'\}$ , un éléments  $(e'_{i_j})_{j \in \mathbb{Z}} \in X_{\sigma_f}$  est muni d'une décomposition unique de mots  $(m'_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  où pour tout  $j \in \mathbb{Z}$ ,  $m'_j \in \mathcal{M}_{G'}$ . Or l'application  $\sigma_\pi$  induit une bijection entre  $\mathcal{A}_G$  et  $\mathcal{M}_{G'}$  on peut donc considérer  $\tau : \mathcal{M}_{G'} \longrightarrow \mathcal{A}_G$  l'inverse de  $\sigma_\pi$  et qui s'étend clairement en un inverse de  $\Sigma_\pi$ .

2. Si  $\pi$  est un pli noté  $pl$  suivi d'une homotopie de valence 2 noté  $h_2$  à une paire d'arêtes  $\{e_{s-1}, e_s\}$  suivant  $e_s$  (voir définition ). Notons  $\pi = pl \circ h_2$  où  $pl$  désigne le pli et  $h_2$  l'homotopie de valence 2. Ainsi il existe un espace intermédiaire  $X_g \subset \mathcal{A}_{G'}^{\mathbb{Z}}$  telle que  $\Sigma_\pi$  soit la composée des application induites symboliques  $Pl : X_{\sigma_f} \longrightarrow X_g$  puis  $H_2 : X_g \longrightarrow X_{\sigma_f}$ ,

Alors par définition, une homotopie de valence 2 définit un isomorphisme entre le graphe de départ  $G$  et le graphe  $G/\mathcal{R}$  qui identifie deux points se trouvant dans la même arête  $e_s$  grace à une section explicite. Cette section se relève en une bijection  $H_2^{-1} : X_{\sigma_f} \longrightarrow X_g$  et il existe une bijection inverse du pli  $Pl$  d'après le point 1). On en déduit que  $\Sigma_\pi$  est inversible.

3. Si  $T$  est un pli suivi d'une homotopie de valence 2 puis d'un écrasement de forêt invariante. Supposons que l'écrasement de forêt invariante dans la composition de mouvement, s'écrive  $\pi : G_1 \longrightarrow G_1/\mathcal{R} = G'$ . Nous avons traité dans le cas 2) la composition d'un pli suivi d'une homotopie de valence 2). Pour montrer que l'application  $\Sigma_\pi$  est inversible, il suffit donc de montrer que l'on peut définir une bijection entre  $X_{\sigma_f}$  et  $\Pi \circ H_2 \circ Pl(X_{\sigma_f}) \subset \mathcal{A}_{G_1}^{\mathbb{Z}}$  où  $\Pi$  est une application symbolique induite par l'écrasement de la forêt  $\mathcal{F}$ . Or soit  $\mathcal{F} = \{f_1, \dots, f_k\}$  la forêt écrasée par le morphisme  $\pi$ . Soit  $\{e'_1, e'_2\}$  un tournant emprunté par  $f'$  dans  $G'$ . Il existe un unique suite d'arêtes  $f_{i_1}, f_{i_2}, \dots, f_{i_s}$  dans  $\mathcal{F}$  et  $e_1, e_2 \in \mathcal{A}_{G_1} \setminus \mathcal{F}$  telle que :

$$\begin{cases} \pi(e_1) = e'_1 \\ \pi(e_2) = e'_2 \\ \pi(e_1.f_{i_1} \dots f_{i_s}.e_2) = e'_1.e'_2 \end{cases}$$

car sinon  $\mathcal{F}$  ne serait pas une forêt. Il y a donc unique composition comme dans le cas 1) et on peut définir explicitement un inverse de  $\Pi$  et ainsi un inverse de  $\Sigma_\pi$ .

□

**Remarque 5.3.** *Deux des homotopies provenant d'un mouvement élémentaire sont des équivalences bien étudiées en théorie des pavages (voir [SJ15]) en effet :*

- *un pli au tournant  $\{a, b\}$  réalise au niveau des pavages, une subdivision sur les tuiles colorées par  $a$  et  $b$ .*
- *une homotopie de valence 2 consiste au niveau des pavages à fusionner ou oublier le sommet entre, deux tuiles colorées par  $e_{s_1}$  et  $e_s$  puis de redimensionner légèrement l'ensemble des tuiles du pavage.*

D'après la proposition 2.13, un pavage  $T = (t_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  dans  $\Omega_{\mathbb{R}}(f, G)$  est la donnée d'une suite  $U \in X_{\sigma_f}$  et de la position du point base codé par le réel  $b$ . En effet si  $t_0 = ([a_0, b_0], e_{i_0})$  est la tuile de  $T$  contenant l'origine 0, alors  $b$  désigne la distance  $|0 - a_0| = |a_0|$  à laquelle se trouve le point base du bord gauche de  $t_0$ . Il est possible de déplacer continument le point base par un mouvement élémentaire  $\pi$  de manière bijective. En effet, l'application  $\pi \circ c_{e_{i_0}} = c_{e'_0} c_{e'_1} \dots c_{e'_s}$  est un chemin d'arêtes dans le graphe  $G'$  qui admet une certaine longueur non nulle. Il suffit donc d'associer le point  $p_b \in e_{i_0}$ , à distance  $b$  de  $o(e_{i_0})$ , au point  $p_{b'}$  se situant à distance  $b'$  du bord gauche de  $e'_0$  telle que :

$$\frac{b'}{|e'_0|_{\text{PF}}} = \frac{b}{|e_{i_0}|_{\text{PF}}}$$

**Remarque 5.4.** *Cette condition permet de dire que le mouvement élémentaire  $\pi$  déplace continument le point base d'un pavage de  $\Omega_{\mathbb{R}}(f, G)$  vers le point base de l'image en respectant les proportions des longueurs des tuiles  $t_0$  et  $t'_0$ .*

## 5.2 Propriétés de l'application induite par un mouvement élémentaire

Dans la sous-section précédente, à un pavage  $T \in \Omega_{\mathbb{R}}(f, G)$  donné par  $(U, b) \in X_{\sigma_f} \times \mathbb{R}_+$ , on a associé un pavage  $T' \in \Omega_{\mathbb{R}}(f', G')$  où  $T'$  est donné par  $(\Sigma_T(U), b') \in X_{\sigma_{f'}} \times \mathbb{R}_+$ .

**Définition 5.5** (Application  $\Pi^*$ ). *Soit  $\Pi : (f, G) \longrightarrow (f', G')$  un mouvement élémentaire entre deux représentants efficaces primitifs.*

*En reprenant les notations du paragraphe précédent et en utilisant le fait qu'un élément  $P$  de l'espace  $\Omega_{\mathbb{R}}(f, G)$  est la donnée unique d'un couple  $(U, b)$  où  $U \in X_{\sigma_f}$  et  $b \in [0, |U_0|_{\text{PF}}]$  (voir la proposition 2.13), on appelle application induite par le mouvement élémentaire  $\Pi$ , l'application :*

$$\begin{aligned}\Pi^* : \Omega_{\mathbb{R}}(f, G) &\longrightarrow \Omega_{\mathbb{R}}(f', G') \\ (U, b) &\longmapsto (\Sigma_{\pi}(U), b' = \frac{b|e'_0|_{PF}}{|e_{i_0}|_{PF}})\end{aligned}$$

Nous introduisons maintenant la notion d'application locale.

**Définition 5.6** (Application locale). *Soit  $\Omega, \Omega'$  deux espaces de pavages de la droite réelle de  $\mathbb{R}$  type-fini. Une application locale  $F : \Omega \longrightarrow \Omega'$  est une application satisfaisant pour tout  $r > 0$ , il existe  $R > 0$  tel que pour tout  $P, P' \in \Omega$  :*

$$(P \cap B(0, R) = P' \cap B(0, R)) \implies (F(P) \cap B(0, r) = F(P') \cap B(0, r))$$

Lorsque le réel  $R$  construit dans la définition précédente dépend de  $r$  d'une manière régulière on peut montrer qu'une application locale est continue. C'est l'objet de la proposition suivante.

**Proposition 5.7.** *Soit  $\Omega, \Omega'$  deux espaces de pavages de la droite réelle de  $\mathbb{R}$  type-fini et  $F : \Omega \longrightarrow \Omega'$  une application locale. Si pour tout  $r > 0$ , on peut choisir  $R = kr$  où  $k > 1$ , alors  $F$  est une application continue.*

La proposition 5.7 est évidente car elle traduit le fait que  $\delta(F(P), F(P')) \leq \frac{1}{k} \delta(P, P')$  d'où la continuité de  $F$ . Nous allons vérifier que l'application induite par un mouvement élémentaire vérifie de telles hypothèses.

**Proposition 5.8.** *Soit  $\Pi^*$  l'application induite par un mouvement élémentaire  $\Pi$ . Alors l'application  $\Pi^*$  est une application continue locale.*

Preuve de la proposition 5.8 : Soit  $r > 0$  et  $\mu_1 \geq 0$  une constante telle que tout chemin de longueur supérieure à  $\mu_1$  dans une réalisation géodésique de  $L_{BFH}^2(f_1)$  contienne un intervalle de  $\pi$ -type 1. D'autre part, soit la constante  $K_1 \geq 1$  satisfaisant l'inégalité  $\frac{1}{K_1} l_{G_1}(c) \leq l_{G_2}(T(c)) \leq K_1 l_{G_1}(c)$  prouvée dans la proposition 4.25. Soit  $R = \inf\{\frac{r}{K_1}, \frac{1}{\mu_1}, \eta_1\}$ .

$(U, b_1), (W, b_2) \in \Omega_{\mathbb{R}}(f, G)$  tels que :

$$(U, b_1) \cap ] -\frac{K_1}{r}, \frac{K_1}{r} [ = (W, b_2) \cap ] -\frac{K_1}{r}, \frac{K_1}{r} [$$

Le fait que les pavages  $(U, b_1)$  et  $(W, b_2)$  coïncident sur un intervalle centré en 0 suffisamment large (de longueur supérieure à la longueur de tuile au niveau 0) induit que les paramètres  $b_1$  et  $b_2$  sont égaux. Notons  $(\Sigma_{\pi}(U), b')$  et  $(\Sigma_{\pi}(W), b')$  les images respectives de  $(U, b_1)$  et  $(W, b_2)$ . D'après la proposition 4.25, les chemins de longueur  $l \geq \mu$  dans les pavages de  $\Omega_{\mathbb{R}}(f_1, G_1)$  sont contractés d'au plus un facteur  $\frac{1}{K_1}$ , on en déduit l'égalité suivante :

$$(\Sigma_{\pi}(U), b') \cap ] -\frac{1}{r}, \frac{1}{r} [ = (\Sigma_{\pi}(W), b') \cap ] -\frac{1}{r}, \frac{1}{r} [$$

donc

On en conclut que l'application  $\Pi^*$  est locale et satisfait les conditions de la proposition 5.7 pour la constante  $k = K_1$ . On en déduit que l'application  $\Pi^*$  est continue.  $\square$

Nous allons montrer que cette application est en réalité un homéomorphisme et tout d'abord son caractère bijectif.

**Proposition 5.9.** *L'application  $\Pi^*$  est injective.*

Preuve de la proposition 5.9 : Soit  $U, W \in \Sigma_{\sigma_f}$ ,  $b_1 \in [0, |u_0|]$ ,  $b_2 \in [0, |w_0|]$  tels que  $\Pi^*(U_1, b_1) = \Pi^*(U_2, b_2)$ . D'après la proposition 5.2,  $\Sigma_T$  est inversible, donc  $U' = \Sigma_\pi(U) = \Sigma_\pi(W) = W'$  induit que  $U = W$ . Ainsi,  $u_0 = w_0$  donc par définition de la position du point base :

$$\frac{b_2}{|W_0|_{\text{PF}}} = \frac{b'_2}{|W'_0|_{\text{PF}}} = \frac{b'_1}{|U'_0|_{\text{PF}}} = \frac{b}{|U_0|_{\text{PF}}}$$

comme  $|W_0|_{\text{PF}} = |U_0|_{\text{PF}}$  on en déduit que  $b_1 = b_2$  et ainsi  $\Pi^*$  est injective.

$\square$

**Proposition 5.10.** *L'application  $\Pi^*$  est surjective.*

Preuve de la proposition 5.10 : Soit  $P' \in \Omega_{\mathbb{R}}(f', G')$ . D'après la proposition 5.2, l'application  $\Sigma_T : X_{\sigma_f} \rightarrow X_{\sigma_{f'}}$  est bijective. Soit  $S'$  la suite d'arêtes dans  $\mathcal{A}_{G'}$  représentant par la proposition 2.13 le pavage  $P'$ . On en déduit que  $S = \Sigma_T^{-1}(S') \in X_{\sigma_f}$ . Soit  $P$  le pavage dans  $\Omega_{\mathbb{R}}(f, G)$  associé à la suite de symboles  $S$  et au réel  $b = 0$ . Comme l'ensemble  $\mathcal{C}_{\sigma_f}$  est un système de représentants de  $\Omega_{\mathbb{R}}(f, G)/\mathbb{R}$ , il existe  $P_1 \in \mathcal{C}_{\sigma_f}$  et  $x_1 \in \mathbb{R}$  tel que  $P = P_1 \cdot x_1$ . Or  $\Pi^*(P_1, x_1)$  se situe dans la même  $\mathbb{R}$ -orbite que le pavage  $T'$ . On en déduit qu'il existe  $x_2 \in \mathbb{R}$  satisfaisant  $\Pi^*(P_1, x_1 + x_2) = P'$  ce qui assure la surjectivité de l'application  $\Pi^*$ .  $\square$

**Proposition 5.11.** *L'application  $\Pi^*$  est un homéomorphisme.*

Preuve de la proposition 5.11 : Les espaces  $\Omega_{\mathbb{R}}(f, G)$  et  $\Omega_{\mathbb{R}}(f', G')$  sont des espaces compacts. D'après les propositions 5.10, 5.9 et 5.8, l'application  $\Pi^*$  est une application bijective continue entre espaces compacts. C'est donc un homéomorphisme.

$\square$

## 5.3 Conclusion

### 5.3.1 Le théorème d'équivalence topologique

**Théorème 5.12.** *Soit  $(f, G)$ ,  $(f', G')$  deux représentants efficaces primitifs du même automorphisme IWIP externe, ou bien de deux classes d'automorphismes IWIP externes provenant de deux automorphismes conjugués dans  $\text{Out}(F_N)$ . Alors les espaces  $\Omega_{\mathbb{R}}(f, G)$  et  $\Omega_{\mathbb{R}}(f', G')$  sont homéomorphes.*

Preuve : D'après le théorème [Los96] il existe une suite de mouvements élémentaires  $\pi_i$  ou d'inverses homotopiques de mouvements élémentaires  $\pi_i^{-1}$ , et une suite  $(\epsilon_i = \pm 1)_{i \in \{1, \dots, k\}}$  tels que :

$$(f, G) = (f_1, G_1) \xrightarrow{\pi_1^{\epsilon_1}} \dots \xrightarrow{\pi_k^{\epsilon_k}} (f_k, G_k)$$

avec  $(f_k, G_k) = (f', G')$  ou tel qu'il existe un homéomorphisme  $i$  de  $G_k$  satisfaisant  $(f_k, i(G_k)) = (f', G')$ .

Or par définition d'un inverse homotopique, pour chaque couple de représentants efficaces apparaissant dans la suite ci-dessus par  $\pi_s^{-1} : (f_s, G_s) \rightarrow (f_{s+1}, G_{s+1})$  il existe un mouvement élémentaire  $\pi_s : (f_{s+1}, G_{s+1}) \rightarrow (f_s, G_s)$  inverse homotopique de  $\pi_s^{-1}$ . Chacun des ces mouvements élémentaires induit, par la proposition 5.11, un homéomorphisme entre les espaces  $\Omega_{\mathbb{R}}(f_s, G_s)$  et  $\Omega_{\mathbb{R}}(f_{s+1}, G_{s+1})$ . Ainsi on obtient une tour d'homéomorphismes :

$$\Omega_{\mathbb{R}}(f, G) = \Omega_{\mathbb{R}}(f_1, G_1) \xrightarrow{(\Pi_1^*)^{\epsilon_1}} \dots \xrightarrow{(\Pi_k^*)^{\epsilon_k}} \Omega_{\mathbb{R}}(f_k, G_k)$$

Finalement, on obtient que  $\Omega_{\mathbb{R}}(f_k, G_k)$  et  $\Omega_{\mathbb{R}}(f, G)$  sont homéomorphes. Si  $(f_k, G_k) \neq (f', G')$  alors  $(f', G') = (f_k, i(G_k))$  pour un certain homéomorphisme  $i$ . Trialement,  $\Omega_{\mathbb{R}}(f_k, G_k)$  et  $\Omega_{\mathbb{R}}(f_k, i(G_k))$  sont homéomorphes, ce qui conclut la preuve du théorème.  $\square$

Ce résultat donne un sens à la définition suivante :

**Définition 5.13** (Espace de pavages d'un automorphisme). *Soit  $[[\varphi]] \subset \text{Out}(F_{\mathbb{N}})$  une classe de conjugaison dans  $\text{Out}(F_{\mathbb{N}})$  d'un automorphisme IWIP  $\varphi$  de  $F_{\mathbb{N}}$ . L'espace de pavages associé à  $[[\varphi]]$ , noté  $\Omega_{\mathbb{R}}(\varphi)$ , est l'espace de pavages associé à n'importe quel représentant efficace primitif  $(f, G)$  de  $[[\varphi]]$ .*

Nous nous sommes intéressés précédemment au type topologique des espaces de pavages associés à des représentants efficaces d'automorphismes externes IWIP du groupe libre  $F_{\mathbb{N}}$ . Ces espaces sont également munis d'une action de  $\mathbb{R}$  : une question naturelle qui se pose est de savoir si, lorsque  $\Pi$  est un mouvement élémentaire de  $(f_1, G_1)$  à  $(f_2, G_2)$ , l'application  $\Pi^*$  (voir définition 5.5) transporte l'action de  $\mathbb{R}$  de  $\Omega_{\mathbb{R}}(f_1, G_1)$  sur l'action de  $\mathbb{R}$  de  $\Omega_{\mathbb{R}}(f_2, G_2)$ .

Cela dépend en réalité de la nature du mouvement élémentaire  $\pi$  :

**Lemme 5.14.** *Si  $\pi$  est un mouvement élémentaire provenant d'un pli, l'application  $\Omega_{\mathbb{R}}$  réalise une conjugaison entre les systèmes dynamiques  $(\Omega_{\mathbb{R}}(f_1, G_1), \mathbb{R})$  et  $(\Omega_{\mathbb{R}}(f_2, G_2), \mathbb{R})$*

Preuve : Si le mouvement élémentaire  $\pi$  est un pli, alors tout chemin d'arêtes  $c$  de  $G_1$  de longueur  $L \geq 0$  s'envoie par  $\pi$  en un chemin d'arêtes  $\pi \circ c$  de  $G_2$  qui est de longueur  $L$ . Ainsi on peut construire aisément l'isométrie entre les espaces  $\Omega_{\mathbb{R}}(f_1, G_1)$  et  $\Omega_{\mathbb{R}}(f_2, G_2)$  qui réalise la conjugaison.  $\square$

**Remarque 5.15.** *Il paraît difficile de prouver plus que le lemme précédent : si  $\pi$  est un mouvement élémentaire autre qu'un pli, alors une réalisation géodésique  $\gamma_{G_1}(X, Y)$  admet des intervalles de  $\pi$ -type 2. Les intervalles de  $\pi$ -type 2 empêchent toute application  $H$  de conjuguer les systèmes  $(\Omega_{\mathbb{R}}(f_1, G_1), \mathbb{R})$  et  $(\Omega_{\mathbb{R}}(f_2, G_2), \mathbb{R})$  car il n'y a pas de correspondance isométrique entre les chemins empruntés par  $f_1$  et ceux empruntés par  $f_2$ .*

## 5.4 Non trivialité du type topologique des espaces $\Omega_{\mathbb{R}}(f, G)$

Nous avons montré dans la dernière sous-section que le type topologique d'un espace de pavages associé à un représentant efficace primitif était homéomorphe à tout autre espace de pavages associé à un représentant d'un automorphisme conjugué dans  $Out(F_{\mathbb{N}})$  au premier. Il est naturel de se demander ce que classifie la relation d'équivalence "être homéomorphe à" au niveau des automorphismes.

Cette question est délicate. Néanmoins, nous pouvons montrer que cette relation n'identifie pas tous les espaces de pavages dans  $Out(F_{\mathbb{N}})$ .

**Proposition 5.16.** *Soit  $[\phi] \in Out(F_{\mathbb{N}})$  un automorphisme externe IWIP et  $(f, G)$  un représentant efficace primitif de  $[\phi]$  tel que  $\sigma_f$  soit orientable renversant l'orientation (voir la définition 3.19). Alors les espaces  $\Omega_{\mathbb{R}}(\phi)$  et  $\Omega_{\mathbb{R}}(\phi^2)$  sont égaux.*

Preuve de la proposition 5.16 : Par définition, si  $\sigma_f$  est orientable et renverse l'orientation, il existe une partition non triviale de l'alphabet  $\mathcal{A}_G$  en deux sous-alphabets  $\mathcal{A}_1$  et  $\mathcal{A}_2$  telle que pour  $i \in \{1, 2\}$ ,  $\tau_i = \sigma_f^2|_{\mathcal{A}_i} : \mathcal{A}_i \rightarrow \mathcal{A}_i^*$  soient des substitutions primitives et  $\Omega_{\mathbb{R}}(f, G) = \Omega_{\tau_1} \cup \Omega_{\tau_2}$ .

Or, comme  $(f, G)$  est un représentant efficace primitif de  $\phi$ ,  $(f^2, G)$  est un représentant efficace primitif tel que  $\sigma_{f^2} = \sigma_f^2$  soit orientable et préserve l'orientation de  $\phi^2$  qui est lui même IWIP. On en déduit que aisément que  $\Omega_{\mathbb{R}}(f^2, G) = \Omega_{\tau_1} \cup \Omega_{\tau_2}$ . Ainsi les espaces  $\Omega_{\mathbb{R}}(\phi)$  et  $\Omega_{\mathbb{R}}(\phi^2)$  sont égaux.  $\square$

La proposition 5.16 identifie des espaces de pavages associés à des automorphismes IWIP non conjugués dans  $Out(F_{\mathbb{N}})$ . En effet, deux automorphismes IWIP conjugués possèdent le même facteur d'expansion or si  $\lambda$  désigne le facteur d'expansion de  $\phi$  alors  $\lambda^2$  est le facteur d'expansion de  $\phi^2$  ce qui prouve que  $\phi^2$  et  $\phi$  ne sont pas conjugués.

Dans une seconde direction nous pouvons montrer qu'il existe des automorphismes IWIP de  $Out(F_{\mathbb{N}})$  ayant des espaces de pavages distincts. Pour cela nous montrons une proposition qui fait encore appel à la dynamique des substitutions induites par un représentant efficace primitif.

**Proposition 5.17.** *Soit  $(f, G)$  (respectivement  $(f', G')$ ) un représentant efficace primitif dont la substitution induite  $\sigma_f$  est orientable (respectivement  $\sigma_{f'}$  est non-orientable). Alors les espaces de pavages  $\Omega_{\mathbb{R}}(f, G)$  et  $\Omega_{\mathbb{R}}(f', G')$  ne sont pas homéomorphes.*

Preuve de la proposition 5.17 : Comme  $\sigma_f$  est orientable, l'espace  $\Omega_{\sigma_f}$  possède deux composantes connexes  $\overline{\Omega_{\sigma_1}}$  et  $\overline{\Omega_{\sigma_2}}$  qui sont connexes en tant qu'espace de pavages d'une substitution primitive aperiodique tandis que  $\Omega_{\mathbb{R}}(f', G') = \Omega_{\sigma_{f'}}$  est connexe en tant qu'espace de pavage d'une substitution primitive aperiodique. On en déduit que ces deux espaces ne sont pas homéomorphes.  $\square$

Il n'est donc pas évident qu'il soit possible de donner une interprétation algébrique du type typologique d'un espace de pavage associé à un automorphisme IWIP.

#### 5.4.1 Différence entre l'équivalence faible et équivalence au sens des espaces de pavages

Dans l'article [BFH97] les auteurs introduisent une notion d'équivalence faible entre des laminations associées à des automorphismes externes IWIP du groupe libre  $F_{\mathbb{N}}$ . Nous explorons dans cette sous-section les liens entre ces laminations et les laminations que nous avons étudiées précédemment. Plus précisément, nous prouvons le résultat suivant :

**Proposition 5.18.** *La relation d'équivalence d'homéomorphisme des espaces de pavages pour les laminations est strictement plus faible que la notion d'équivalence entre laminations de Bestvina-Feighn-Handel de [BFH97] (voir définition 4.19 ci-dessous).*

On rappelle quelques notions introduites dans [BFH97] et nous nous employons les objets déjà introduits dans la sous-section 4.3.2.

**Définition 5.19** (Convergence faible). *On note  $m$  la mesure de Lebesgue et  $\Lambda$  la lamination stable associée à un représentant efficace primitif  $f : G \rightarrow G$  et pour tout  $i \in \mathbb{N}$ ,  $S_i^1$  le cercle muni d'une métrique proportionnelle à sa métrique usuelle.*

*Une suite d'immersions isométriques  $\alpha_i : S_i^1 \rightarrow G$  converge faiblement dans une lamination  $\Lambda$  si pour tout  $L > 0$  :*

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} \frac{m(\{x \in S_i^1 \mid V(x) \text{ voisinage de } x \text{ de longueur } L \text{ tel que } (\alpha_i)|_{V(x)} \text{ soit un segment de feuille de } \Lambda\})}{m(S_i^1)} = 1$$

**Définition 5.20** (Lamination stable en coordonnées H). *Soit  $g : G \rightarrow G$  un représentant efficace primitif,  $\rho_2 : R_n \rightarrow H$  un marquage, et  $\tau : G \rightarrow H$  la différence entre le marquage sur  $G$  venant avec  $g$  et le marquage  $\rho_2$ . Soit une feuille  $L \in L_{\text{BFH}}^2(f)$ . La lamination stable de  $g$  en coordonnées H, notée  $\Lambda_g^+(H)$ , est la classe d'équivalence de  $\tau(L)$  pour la relation d'équivalence donnée dans la définition 4.19.*

**Définition 5.21.** *Soit  $(f_1, G_1)$ ,  $(f_2, G_2)$  deux représentants efficaces des automorphismes respectifs  $\varphi, \psi \in \text{Aut}(F_{\mathbb{N}})$ . On dit que  $(f_1, G_1)$  et  $(f_2, G_2)$  sont égaux au sens de Los s'il existe un homéomorphisme  $\alpha : G_1 \rightarrow G_2$  tel que  $\alpha^{-1} \circ f_2 \circ \alpha = f_1$ .*

Un homéomorphisme  $\alpha : G_1 \rightarrow G_2$  induit en homotopie  $\alpha_\star : F_n \rightarrow F_n$  un automorphisme d'ordre fini sur  $F_n$  ce qui vient du fait qu'un homéomorphisme de graphe est nécessairement une permutation des arêtes.

Dans [BFH97], les auteurs montrent en utilisant une suite convergeant faiblement vers  $\Lambda_g^+(G)$  et  $\Lambda_h^+(H)$  que lorsque l'on prend deux représentants efficaces irréductibles  $g : G \rightarrow G$  et  $h : H \rightarrow H$  d'un même automorphisme extérieur IWIP  $\phi \in \text{Out}(F_n)$  les laminations  $\Lambda_g^+(G)$  et  $\Lambda_h^+(H)$  sont égales.

On se pose naturellement la question suivante :

**Question.** Soit  $(f_1, G_1)$  et  $(f_2, G_2)$  deux représentants efficaces égaux au sens de Los. A-t-on  $\Lambda_{f_1}^+(G_1) = \Lambda_{f_2}^+(G_2)$  ?

On peut trouver un contre-exemple montrant que l'égalité n'a pas lieu en général.

Soit  $\rho : R_2 \rightarrow G$  un marquage du bouquet de deux cercles égal à l'identité. On étiquète les arêtes de  $G$  par  $E(G) = \{a, b\}$  que l'on munit d'une orientation. Donnons-nous deux représentants efficaces irréductibles sur  $G$ ,

$$\begin{aligned} f_1 : G &\rightarrow G \\ a &\mapsto ab \\ b &\mapsto a \end{aligned}$$

Soit  $\alpha : G \rightarrow G$  l'homéomorphisme qui permute les deux arêtes de  $G$ ,  $a$  et  $b$ , on se donne  $f_2 = \alpha^{-1} \circ f_1 \circ \alpha$  un autre représentant efficace qui a pour expression :

$$\begin{aligned} f_2 : G &\rightarrow G \\ a &\mapsto b \\ b &\mapsto ba \end{aligned}$$

Ainsi  $f_1^3(a) = abaab$  et  $f_2(a)^4(a) = babba$ . On en déduit que les chemins  $a.a$  et  $b.b$  sont empruntés dans les feuilles des laminations respectives  $\Lambda_{f_1}^+(G)$  et  $\Lambda_{f_2}^+(G)$ . Or il est possible de montrer, en itérant un nombre fini de fois  $f_1$  sur  $a$ , que les feuilles de  $\Lambda_{f_1}^+(G)$  n'empruntent pas le chemin  $b.b$ . On en conclut  $\Lambda_{f_1}^+(G) \neq \Lambda_{f_2}^+(G)$ . Or les applications  $f_1$  et  $f_2 = \alpha^{-1} \circ f_1 \circ \alpha$  sont des représentants efficaces irréductibles de deux automorphismes IWIP de  $F_N$  conjugués. On en déduit par le théorème 5.12 que les espaces de pavages  $\Omega_{\mathbb{R}}(f_1, G_1)$  et  $\Omega_{\mathbb{R}}(f_2, G_2)$  sont homéomorphes. Ainsi la relation d'équivalence d'homéomorphisme des espaces de pavages construits avec notre méthode est strictement plus faible que la notion d'équivalence entre lamination de Bestvina-Feighn-Handel donnée par la définition 4.19.

## 5.5 Une application

Dans l'article [ABHS06], les auteurs utilisent les représentants efficaces  $(f, G)$  d'automorphismes IWIP du groupe libre dont la substitution induite  $\sigma_f$  est non-

orientable pour réaliser la majeure partie de leurs constructions.

Dans le chapitre 5 de ce même article, ils posent naturellement la question suivante :

**Question** ([ABHS06]). *Est-ce que toute classe d'automorphisme externe IWIP de  $\text{Out}(F_N)$  possède un représentant efficace  $(f, G)$  tel que sa substitution induite  $\sigma_f$  soit non-orientable ?*

Nous répondons par la négative à cette question. Soit  $(f_1, G_1), (f_2, G_2)$  deux représentants efficaces primitifs d'une même classe d'automorphisme IWIP dans  $\text{Out}(F_N)$ . Comme les deux représentants  $(f_1, G_1)$  et  $(f_2, G_2)$  induisent en homotopie la même classe d'automorphisme externe, les espaces  $\Omega_{\mathbb{R}}(f_1, G_1)$  et  $\Omega_{\mathbb{R}}(f_2, G_2)$  sont homéomorphes d'après le théorème 5.12. Or, d'après la proposition 5.17, si  $(f_1, G_1)$  est orientable alors  $(f_2, G_2)$  est également orientable. Ainsi, dès qu'un automorphisme externe IWIP admet un représentant efficace dont la substitution induite est orientable, il ne possède pas de représentant efficace IWIP dont la substitution induite est non-orientable.

**Exemple 5.22.** *L'automorphisme  $\tau$  présenté dans l'exemple 8.2 ne possède pas de représentant efficace dont la substitution induite est non-orientable.*

## 6 Automorphismes du groupe libre et pavages du plan hyperbolique

### 6.1 Généralités en géométrie hyperbolique

Nous nous intéressons dans cette sous-section à présenter quelques généralités concernant un modèle particulier de plan hyperbolique : le demi-plan de Poincaré.

**Définition 6.1** (Modèle du demi-plan de Poincaré). Le demi-plan de Poincaré est l'espace  $\mathbb{H}^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) > 0\}$  muni de la métrique riemannienne  $ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$  où  $dx^2 + dy^2$  désigne la métrique euclidienne sur  $\mathbb{C}$ .

Soit  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{H}^2$  une courbe dans le plan hyperbolique  $\mathbb{H}^2$ . La longueur du chemin  $\gamma$  est donnée par :  $\text{Long}_{\mathbb{H}^2}(\gamma) = \int_a^b \frac{|\gamma'(t)|}{\text{Im}(\gamma(t))} dt$ .

**Proposition 6.2.** Dans le modèle du demi-plan de Poincaré, les courbes géodésiques entre deux points  $z_1, z_2 \in \mathbb{H}^2$  sont de deux sortes :

- soit  $z_1$  et  $z_2$  se situent sur une même droite verticale et dans ce cas la géodésique  $G(z_1, z_2)$  est le segment vertical qui les joint.
- soit  $z_1$  et  $z_2$  ne sont pas sur une même droite verticale et dans ce cas la géodésique  $G(z_1, z_2)$  est l'unique arc de cercle entre  $z_1$  et  $z_2$  dont le centre se situe sur la droite  $\mathbb{H}_\infty^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Re}(z) = 0\}$ .

Le groupe des isométries du plan hyperbolique  $\mathbb{H}^2$  préservant l'orientation, que l'on note  $\text{Isom}^+(\mathbb{H}^2)$ , est isomorphe au groupe  $\text{PSL}(2, \mathbb{R}) = \text{SL}(2, \mathbb{R})/\{\text{Id}, -\text{Id}\}$ . Il s'agit d'un groupe topologique pour la topologie compact-ouverte.

Le morphisme de  $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$  dans  $\text{Isom}^+(\mathbb{H}^2)$  est le suivant :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \left( z \mapsto \frac{az + b}{cz + d} \right)$$

Dans le cadre de notre étude, nous nous intéressons à la sous-classe des isométries affines du groupe  $\text{Isom}^+(\mathbb{H}^2)$ .

**Définition 6.3** (Groupe affine). Le groupe affine hyperbolique, noté GA, est le sous-groupe des isométries du plan hyperbolique  $\mathbb{H}^2$  préservant l'orientation suivant :

$$\text{GA} = \{z \mapsto az + b \mid a > 0 \text{ et } b \in \mathbb{R}\}$$

De manière analogue au cas euclidien, le groupe affine hyperbolique GA possède une structure d'extension de groupe que nous précisons ici.

**Définition 6.4** (Groupe des translations). Le groupe  $\mathcal{N} = \{z \mapsto z - t \mid t \in \mathbb{R}\}$  est le sous-groupe des translations de GA

Le sous-groupe des translations est un sous-groupe normal de GA. En effet, pour toute isométrie affine  $g \in \text{GA}$  de la forme  $g(z) = az + b$  et  $T_x \in \mathcal{N}$  translation par le vecteur  $-x \in \mathbb{R}$ , on a pour tout  $z \in \mathbb{H}^2$  :

$$(g^{-1} \circ T_x \circ g)(z) = g^{-1}(T_x(az + b)) = g^{-1}(az + b - x) = \frac{1}{a}(az + b - x) - \frac{b}{a} = z - \frac{x}{a}$$

De plus, le groupe GA se scinde en la suite exacte suivante :

$$0 \longrightarrow \mathcal{N} \longrightarrow \text{GA} \longrightarrow \mathbb{R}_+^* \longrightarrow 0$$

En d'autres termes, le groupe affine GA est une extension de groupe de  $\mathcal{N}$  par  $\mathbb{R}_+^*$ . Ce groupe possède la particularité de ne pas avoir la même mesure de Haar invariante pour l'action à gauche donnée par  $\mu_g = \frac{dad b}{a^2}$  et la mesure de Haar invariante pour l'action à droite donnée par  $\mu_d = \frac{dad b}{a}$ . On dit que le groupe GA est *non unimodulaire*.

## 6.2 Pavage de $\mathbb{H}^2$ et représentant efficace d'un automorphisme IWIP

A partir d'un élément  $T \in \Omega_{\mathbb{R}}(f, G)$ , on peut construire un pavage  $P_T$  du plan hyperbolique  $\mathbb{H}^2$  ayant de bonnes propriétés par rapport à l'action du groupe affine GA. Nous commençons par plonger un tel élément T dans le plan hyperbolique.

### Notations 6.5.

- $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{H}^2 \mid \text{Im}(z) = 1\}$ .
- $H : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{D}$  est l'inverse de  $\text{Re}|_{\mathcal{D}}$  donnée pour tout  $t \in \mathbb{R}$  par  $H(t) = t + i$ .
- Le réel  $\lambda$  désigne toujours le facteur d'expansion du représentant  $(f, G)$ .
- Pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $\mathcal{D}^k = \{z \in \mathbb{H}^2 \mid \text{Im}(z) = \lambda^k\}$  ( $\mathcal{D}^0 = \mathcal{D}$ ).
- $\mathcal{F} : \Omega_{\mathbb{R}}(f, G) \longrightarrow \Omega_{\mathbb{R}}(f, G)$  désigne l'homéomorphisme induit par la substitution  $\sigma_f$  sur l'espace  $\Omega_{\mathbb{R}}(f, G)$  qui est reconnaissable (voir 3.28).

### 6.2.1 Un espace de pavages pour les horizontales de $\mathbb{H}^2$

**Proposition 6.6.** L'application H (voir notations 6.5) est une isométrie entre  $\mathbb{R}$  et  $\mathcal{D}$ .

Preuve : L'espace  $\mathcal{D}$  introduit en 6.5 muni de la métrique hyperbolique est isométrique à la droite réelle  $\mathbb{R}$  munie de la métrique euclidienne. En effet, soit  $z_1 = i + x_1$ ,  $z_2 = i + x_2$  deux points de  $\mathcal{D}$  tels que  $x_2 > x_1$  et  $\gamma : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{H}^2$  une paramétrisation du segment  $[z_1, z_2]$  dans  $\mathcal{D}$  telle que pour tout  $t \in [0, 1]$ ,  $\gamma(t) = i + x_1 + t(x_2 - x_1)$ . Nous obtenons :

$$d_{\mathbb{H}^2}(z_1, z_2) = \int_0^1 \frac{|\gamma'(t)|}{\text{Im}(\gamma(t))} dt = \int_0^1 \frac{x_2 - x_1}{1} dt = x_2 - x_1 = d_{\mathbb{R}}(\text{Re}(z_1), \text{Re}(z_2))$$

Ainsi l'application H est une isométrie.  $\square$

**Proposition 6.7.** *Soit  $(f, G)$  un représentant efficace primitif. L'application  $H$  s'étend en un plongement de l'espace  $\Omega_{\mathbb{R}}(f, G)$  (voir la définition 3.26) vers un espace de pavages de la droite réelle  $\mathcal{D}$ .*

Preuve : Par définition,  $\Omega_{\mathbb{R}}(f, G)$  est l'espace de pavages d'une substitution  $\sigma_f$  (voir la définition 3.19) qui d'après la proposition 3.22 est soit primitive, soit se décompose en deux sous-substitutions primitives. D'après la définition 3.2, les tuiles sont de la forme  $([a_i, b_i], c_i)$  où  $[a_i, b_i]$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $c_i$  un symbole d'un alphabet (ici  $\mathcal{A}_G$ ). D'après la proposition 6.6, l'application  $H$  est une isométrie entre  $\mathbb{R}$  et  $\mathcal{D}$ . Elle induit une application de  $\Omega_{\mathbb{R}}(f, G)$  vers un ensemble de pavages de  $\mathcal{D}$  de la manière suivante :

$$\text{pour tout } i \in \mathbb{Z}, H([a_i, b_i], c_i) = ([H(a_i), H(b_i)], c_i)$$

On en déduit que l'image de tout pavage  $T \in \Omega_{\mathbb{R}}(f, G)$  est bien définie. Le fait que l'application  $H$  soit bijective et continue (en tant qu'isométrie) induit que  $H$  s'étend en un plongement de  $\Omega_{\mathbb{R}}(f, G)$  sur  $H(\Omega_{\mathbb{R}}(f, G))$  espace de pavages de  $\mathcal{D}$ .  $\square$

Grâce à ce plongement, nous pouvons nous intéresser aux relations qu'il existe entre les droites horizontales  $\mathcal{D}^k$  et l'action de  $GA$  sur le plan hyperbolique  $\mathbb{H}^2$ . C'est l'objet de la proposition suivante.

**Proposition 6.8.** *Soit  $x$  un nombre réel. Il existe une unique isométrie affine  $g_x \in GA$ , telle que  $\mathcal{D}^{-1} = g_x^{-1}(\mathcal{D}) = \mathcal{D}.g_x$  (voir notations 6.5) vérifie :*

- l'image de  $z = x + i$  par  $g_x$  est  $z.g_x = x + \frac{i}{\lambda}$ .
- L'ensemble des parties imaginaires des points de  $\mathcal{D}^1$  est égal à  $\frac{1}{\lambda}$ .
- Pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $\mathcal{D}^{-k} = \mathcal{D}.g_x^k$ .

Preuve : Soit  $g_x(z) = az + b$  où  $a > 0$  et  $b \in \mathbb{R}$ . Les conditions de la proposition appliquées à  $g_x$  sont équivalentes au système d'équations suivant :

$$\begin{cases} a(x + i) + b & = & x \\ \text{Im}(a(x + i) + b) & = & \frac{1}{\lambda} \end{cases}$$

Ce système possède une unique solution  $a = \frac{1}{\lambda}$  et  $b = (1 - \frac{1}{\lambda}).x$  La seconde assertion se déduit par récurrence.  $\square$

### 6.2.2 Une famille de pavages de $\mathbb{H}^2$ et l'espace $\Omega_{GA}(f, G)$

Nous nous attachons maintenant à décrire les tuiles du pavage que nous souhaitons construire dans cette section. Nous utiliserons tout au long de cette dernière la notation  $(P, x) \in \Omega_{\mathbb{R}}(f, G)$  au sens de la section 3.3.2 : on se fixe un système de représentants  $\mathcal{C}_{\sigma_f}$  de  $\Omega_{\mathbb{R}}(f, G)/\mathbb{R}$  et  $(P, x) \in \mathcal{C}_{\sigma_f} \times \mathbb{R}$  muni de la topologie finale pour l'application  $H_{\sigma_f}$ .

**Définition 6.9.** Soit  $z_1, z_2$  deux points du plan hyperbolique  $\mathbb{H}^2$ . Un segment entre les points  $z_1$  et  $z_2$  que l'on note  $(z_1, z_2)$  est le 1-complexe cellulaire paramétré par le chemin  $\gamma(t) = z_1 + t(z_2 - z_1)$  pour  $t \in [0, 1]$  où les sommets de  $(z_1, z_2)$  sont  $z_1$  et  $z_2$ .

**Définition 6.10.** Soit  $(f, G)$  un représentant irréductible efficace et  $T = (P, x)$  un élément de  $\Omega_{\mathbb{R}}(f, G)$ . L'ensemble  $\mathcal{H}_T$  des lignes horizontales associées à  $T$  (respectivement l'ensemble  $\mathcal{V}_T$  des lignes verticales associées à  $T$ ) est l'ensemble suivant :

- Si  $\sigma_f$  non-orientable ou orientable et préserve l'orientation alors  
 $\mathcal{H}_T = \{(H \circ \mathcal{F}^{-k}(T)).g_x^k \mid k \in \mathbb{Z}\}$  (respectivement  $\mathcal{V}_T = \{(p, p.g_x) \mid p \in V(\mathcal{H}_T)\}$ ).
- Si  $\sigma_f$  est orientable et renverse l'orientation alors  
 $\mathcal{H}_T = \{(H \circ \mathcal{F}^{-2k}(T)).g_x^{2k} \mid k \in \mathbb{Z}\}$  (respectivement  $\mathcal{V}_T = \{(p, p.g_x^2) \mid p \in V(\mathcal{H}_T)\}$ ).

Le squelette associé au pavage  $T$  est le 1-complexe cellulaire  $\mathcal{S}_T = \mathcal{H}_T \cup \mathcal{V}_T$  dans le plan hyperbolique  $\mathbb{H}^2$ .

Ces tuiles sont recollées suivant les lois décrites dans la proposition suivante.

**Proposition 6.11.** Soit  $(f, G)$  un représentant efficace primitif et  $T = (P, x)$  un pavage de  $\Omega_{\mathbb{R}}(f, G)$ . Posons  $\mathcal{P}_T = \cup_{(p_0, p_1) \in E(\mathcal{H}_T)} F_{(p_0, p_1)}$  où  $F_{(p_0, p_1)}$  est la 2-cellule dont le bord est donné pour toute arête orientée  $(p_0, p_1) \in E(\mathcal{H}_T)$  par la partie de  $\mathcal{S}_T$  suivante :

1.  $(p_0, p_1).(p_1, p_1.g_x).(\cup_{e \in E([p_1.g_x, p_0.g_x])} e).(p_0.g_x, p_0)$  si  $\sigma_f$  est orientable et préserve l'orientation ou bien si  $\sigma_f$  est non-orientable ;
2.  $(p_0, p_1).(p_1, p_1.g_x^2).(\cup_{e \in E([p_1.g_x^2, p_0.g_x^2])} e).(p_0.g_x^2, p_0)$  si  $\sigma_f$  est orientable et renverse l'orientation.

Alors  $\mathcal{P}_T$  est un pavage du plan hyperbolique  $\mathbb{H}^2$ .

Preuve : Soit  $(p_0, p_1), (p_2, p_3)$  deux arêtes dans l'ensemble des lignes horizontales  $E(\mathcal{H}_T)$  telles que  $(p_0, p_1) \neq (p_2, p_3)$ . Quitte à permuter les indices, on peut supposer que  $Re(p_1) \leq Re(p_2)$ . Déterminons l'ensemble  $Int = F_{(p_0, p_1)} \cap F_{(p_2, p_3)}$ . Nous distinguons trois cas :

1. Supposons que les segments  $(p_0, p_1)$  et  $(p_2, p_3)$  appartiennent à la même ligne horizontale et  $p_1 = p_2$ . Dans ce cas,  $Int = (p_1, p_1.g_x^2) = (p_2, p_2.g_x^2)$  si  $\sigma_f$  est orientable et renverse l'orientation et  $Int = (p_1, p_1.g_x) = (p_2, p_2.g_x)$  sinon.
2. Supposons que les segments  $(p_0, p_1)$  et  $(p_2, p_3)$  sont sur la même ligne horizontale et  $p_1 < p_2$ . La droite géodésique  $V = \{z \in \mathbb{H}^2 \mid Re(z) = \frac{Re(p_1) + Re(p_2)}{2}\}$  sépare  $\mathbb{H}^2$  en deux ouverts disjoints  $U_1$  et  $U_2$  tels que  $F_{(p_0, p_1)} \subset U_1$  et  $F_{(p_2, p_3)} \subset U_2$ . On en déduit que  $Int = \emptyset$ .
3. Supposons que les segments  $(p_0, p_1)$  et  $(p_2, p_3)$  n'appartiennent pas à la même ligne horizontale. Quitte à échanger les indices on peut supposer que  $Im((p_0, p_1)) > Im((p_2, p_3))$ . Dans cette configuration, si  $(p_2, p_3) \cap (p_0.g_x, p_1.g_x) = \emptyset$  alors  $Int = \emptyset$ , sinon  $(p_2, p_3) \in E((p_0.g_x, p_1.g_x))$  ou  $(p_0, p_1) \in V((p_2, p_3))$ .

Il vient que les tuiles  $F_{(p_0,p_1)}$  et  $F_{(p_2,p_3)}$  sont soit d'intersection vide soit s'intersectent sur leur bord.

Montrons maintenant que  $\cup_{e \in E(\mathcal{L}_T)} F_e$  recouvre bien l'espace  $\mathbb{H}^2$ . Soit  $z = x + iy \in \mathbb{H}^2$ . Il existe  $k \in \mathbb{Z}$  tel que  $\lambda^{k+1} > y \geq \lambda^k$ , cela signifie que le point  $z$  se situe entre deux lignes horizontales successives. De manière évidente, il existe une arête  $e = (p, p')$  sur la ligne horizontale  $\mathcal{D}_{k+1} = \{z \in \mathbb{H}^2 \mid \text{Im}(z) = \lambda^{k+1}\}$  telle que  $\text{Re}(p) \leq \text{Re}(z) < \text{Re}(p')$ . On en déduit que  $z \in F_e$  ainsi  $\cup_{e \in E(\mathcal{L}_T)} F_e$  est bien un recouvrement formant un pavage.  $\square$

À ce stade, nous pouvons naturellement associer trois objets à un élément de l'espace  $\Omega_{\mathbb{R}}(f, G)$ .

**Définition 6.12.** Soit  $(f, G)$  un représentant efficace primitif et  $T$  un pavage de  $\Omega_{\mathbb{R}}(f, G)$  (voir la définition 3.26).

- Le pavage  $\mathcal{P}_T$  construit à la proposition 6.11 est le pavage du plan hyperbolique associé à  $T$ .
- L'espace de pavages du plan hyperbolique associé au représentant  $(f, G)$  est l'espace

$$\Omega_{\text{GA}}(f, G) = \bigcup_{T \in \Omega_{\mathbb{R}}(f, G)} \Omega_{\text{GA}}(\mathcal{P}_T)$$

- L'injection canonique  $J : \Omega_{\mathbb{R}}(f, G) \longrightarrow \Omega_{\text{GA}}(f, G)$  est l'application qui à tout  $T \in \Omega_{\mathbb{R}}(f, G)$  associe  $J(T) = \mathcal{P}_T$ .

**Proposition 6.13.** Soit  $(f, G)$  un représentant efficace primitif et  $\{t_1, \dots, t_s, \dots, t_{2s}\}$  l'ensemble des prototyles de l'espace  $\Omega_{\mathbb{R}}(f, G)$ . Notons pour tout  $i \in \{1, \dots, 2s\}$  les arêtes  $p_i = H(t_i)$  où  $H$  est l'application donnée en 6.5. L'ensemble des prototyles de l'espace  $\Omega_{\text{GA}}(f, G)$  est l'ensemble  $\{F_{p_1}, \dots, F_{p_{2s}}\}$ .

Preuve : Soit  $\mathcal{P}$  un pavage de l'espace  $\Omega_{\text{GA}}(f, G)$ . Par le second point de la définition 6.12, il existe  $g \in \text{GA}$ ,  $T = (P, x) \in \Omega_{\mathbb{R}}(f, G)$  tels que  $\mathcal{P} = \mathcal{P}_T.g$ . Considérons maintenant une tuile  $F_{e_0}$  du pavage  $\mathcal{P}$ . Il existe  $e_1 \in E(\mathcal{H}_T)$  telle que  $e_1$  soit incluse dans la droite  $\mathcal{D}^k$  où  $k \in \mathbb{Z}$  et vérifiant  $e_0.g = e_1$ . Par définition de  $\mathcal{L}_T$ ,  $e_1.g_x^{-k}$  est une arête de  $H(T)$ . Or, comme  $H$  est une isométrie entre les pavages de  $\mathbb{R}$  et les pavages de  $\mathcal{D}$ , il existe  $t \in \mathbb{R}$  et  $i \in \{1, \dots, s\}$  tel que  $H^{-1}(e_1.g_x^{-k}) - t = t_i$ . Si on note  $\text{Tr}_t$  la translation  $z \mapsto z - t \in \mathcal{N}$ , on en déduit que  $H^{-1}(e_1.(Tr_t \circ g_x^{-k})) = p_i$  donc  $e_1 = H(t_i).(g_x^k \circ Tr_{-t}) = p_i.(g_x^k \circ Tr_{-t})$ . Finalement, si on pose  $h = g_x^k \circ Tr_{-t} \circ g \in \text{GA}$ , nous obtenons que  $F_{e_0} = F_{p_i}.h$ . Ainsi, l'ensemble  $\{F_{p_1}, \dots, F_{p_{2s}}\}$  est bien l'ensemble des prototyles des pavages de l'espace  $\Omega_{\text{GA}}(f, G)$ .  $\square$

### 6.2.3 De l'espace $\Omega_{\mathbb{R}}(f, G)$ à l'espace $\Omega_{\text{GA}}(f, G)$

**Proposition 6.14.** Soit  $(f, G)$  un représentant efficace primitif. L'injection canonique  $J : \Omega_{\mathbb{R}}(f, G) \longrightarrow \Omega_{\text{GA}}(f, G)$  (voir la définition 6.12) est un plongement de  $\Omega_{\mathbb{R}}(f, G)$  dans  $\Omega_{\text{GA}}(f, G)$

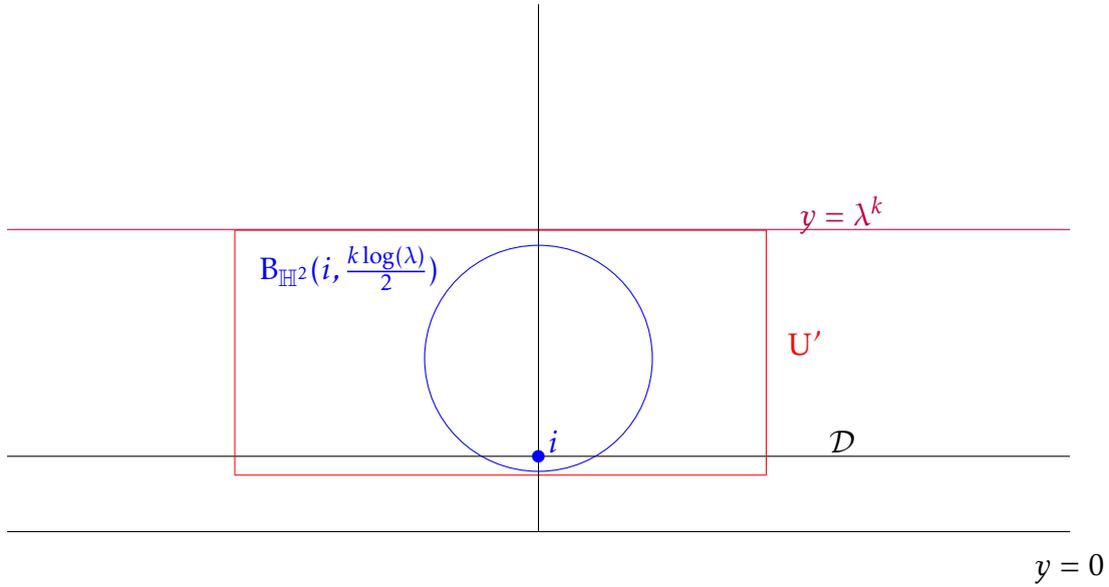


FIGURE 11 – Continuité de  $J$

Preuve : Nous pouvons nous référer tout au long de la démonstration de la continuité de  $J$  à la figure 11 qui illustre les objets introduits à cet effet.

- $J$  est continue : Soit  $h : F_N = \langle x_1, \dots, x_N \rangle \rightarrow \pi_1(G, v)$  un marquage de  $G$ . Nous avons fait le choix de munir les arêtes du graphe  $G$  de sa longueur de volume 1 où  $f$  dilate chaque arête d'un facteur  $\lambda > 1$  (2.50). Pour tout  $i \in \{1, \dots, N\}$ , le chemin  $h(x_i)$  dans  $G$  est de longueur inférieure à 1. De plus, on peut se restreindre d'après la définition 4.17 à considérer la famille de patchs induit par les chemins  $\{h(\varphi^k(x_i)) \mid k \geq 0, i \in \{1, \dots, N\}\}$ . Soit  $\gamma : [1, \lambda] \rightarrow \mathbb{H}^2$  le chemin géodésique entre  $i$  et  $\lambda^k i$  qui a pour  $Longueur_{\mathbb{H}^2}(\gamma) = \int_1^{\lambda^k} \frac{1}{t} dt = k \log(\lambda)$ , ainsi  $d_{\mathbb{H}^2}(\mathcal{D}, \mathcal{D}^{-k}) = k \log(\lambda)$ .

De plus, si deux pavages coïncident sur un intervalle  $]y_0 + i, y_1 + i[$  de  $\mathcal{D}$  ils coïncident également sur l'ouvert  $U = \{z \in \mathbb{H}^2 \mid y_0 < \text{Re}(z) < y_1, \text{Im}(z) < 1\}$ . Ainsi si  $U \cap \mathcal{D} = h(\varphi^k(x_i))$ , il existe  $U' = \{z \in \mathbb{H}^2 \mid y_0 < \text{Re}(z) < y_1, \frac{1}{\lambda^k} < \text{Im}(z) < \lambda^k\}$  unique ouvert tel que pour tout  $T_1, T_2 \in \Omega_{\mathbb{R}}(f, G)$  :

$$\mathcal{S}_{T_1} \cap U' \cap \mathcal{D} = \mathcal{S}_{T_2} \cap U' \cap \mathcal{D} \Rightarrow \mathcal{S}_{T_1} \cap U' = \mathcal{S}_{T_2} \cap U'$$

On en déduit par un calcul de longueur de chemin que s'il existe  $u_k \in \mathbb{R}$  tel que  $|u_k| \leq \frac{1}{k}$  satisfaisant  $(T_k - u_k) \cap ]-k, k[ = (T) \cap ]-k, k[$  alors  $\mathcal{P}_{T_k} \cap B_{\mathbb{H}^2}(i, \frac{k \log(\lambda)}{2}) = \mathcal{P}_{T_k} \cap B_{\mathbb{H}^2}(i, \frac{k \log(\lambda)}{2})$ . On obtient que si  $d_1(T_k, T) \leq \frac{1}{k}$  alors  $d_2(f(T_k), f(T)) \leq \frac{2}{k \log(\lambda)}$  donc la fonction  $J$  est continue.

- $J$  est injective : Soit  $T_1$  et  $T_2$  deux pavages de  $\Omega_{\mathbb{R}}(f, G)$ . Si  $J(T_1) = J(T_2)$ , alors :

$$T_1 = \mathcal{P}_{T_1} \cap \mathcal{D} = \mathcal{P}_{T_2} \cap \mathcal{D} = T_2$$

On en déduit que l'application  $J$  est injective.

D'après les deux points que nous venons de démontrer et le fait que l'espace  $\Omega_{\mathbb{R}}(f, G)$  est compact, on en conclut que l'application  $J$  est un plongement.  $\square$

**Proposition 6.15.** *Soit  $(f, G)$  un représentant efficace primitif. L'injection canonique  $J$  préserve les orbites au sens suivant :*

*Si  $\mathcal{O}$  est une  $\mathbb{R}$ -orbite dans l'espace  $\Omega_{\mathbb{R}}(f, G)$  alors  $J(\mathcal{O})$  est contenue dans une même GA-orbite de  $\Omega_{GA}(f, G)$ .*

Preuve : Soit  $T_1, T_2$  deux pavages de  $\Omega_{\mathbb{R}}(f, G)$  dans la même  $\mathbb{R}$ -orbite  $\mathcal{O}$ , il existe donc une translation de vecteur  $u$  tel que  $T_1 - u = T_2$ . On a donc  $J(T_1) \cdot T_u = J(T_2)$ , ainsi  $J(T_1)$  et  $J(T_2)$  appartiennent à la même GA-orbite.  $\square$

#### 6.2.4 Propriétés de l'espace $\Omega_{GA}(f, G)$

Une des premières propriétés intéressante que l'on peut obtenir de l'application  $J$  est le caractère apériodique des pavages de la forme  $\mathcal{P}_T$ .

**Proposition 6.16.** *Soit  $(f, G)$  un représentant efficace primitif. Il existe, dans chaque composante  $\mathbb{R}$ -minimale de  $\Omega_{\mathbb{R}}(f, G)$ , un pavage  $T$  tel que  $\mathcal{P}_T$  soit un GA-pavage apériodique (voir définition 2.19).*

Preuve : Notons  $\Omega_{\mathbb{R}}(f, G) = \cup_{i \in I} \Omega_i$  où  $\Omega_i$  désigne les composantes  $\mathbb{R}$ -minimales de l'espace  $\Omega_{\mathbb{R}}(f, G)$ . D'après la proposition 3.33, l'ensemble  $I$  est de cardinal au plus 2. Nous savons par la proposition 3.9 que les pavages de  $\Omega_{\mathbb{R}}(f, G)$  sont fortement apériodiques pour l'action par translation de  $\mathbb{R}$ . En utilisant le fait que pour tout vecteur  $u \in \mathbb{R}$  la translation  $T_u(z) = z - u$  sur  $\mathbb{H}^2$  vérifie la relation  $\mathcal{P}_{T \cdot u} = (\mathcal{P}_T) \cdot T_u$  on en déduit que  $\mathcal{P}_T$  n'est stable par aucune translation.

Soit maintenant  $g \in GA$  vérifiant  $\mathcal{P}_T \cdot g = \mathcal{P}_T$  où  $T = (P, x)$  est un pavage de  $\Omega_{\mathbb{R}}(f, G)$ . Cela implique qu'il existe  $T' = (P', x') \in \Omega_{\mathbb{R}}(f, G)$  tel que  $\mathcal{P}_T \cdot g = \mathcal{P}_{T'}$ . Les pavages  $T$  et  $T'$  sont apériodiques pour l'action de  $\mathbb{R}$  d'après la proposition 3.22. On en déduit que l'action de  $\mathbb{R}$  par translation sur l'espace  $\Omega_{\mathbb{R}}(f, G)$  est libre et ainsi  $x' = x$  et  $sgn = sgn'$ . On obtient que  $T' \neq T$  implique qu'il existe  $k \in \mathbb{Z}$  tel que  $g = g_x^k$  et ainsi  $L' = f^{-k}(L)$ . Or chaque composante  $\Omega_i$  de  $\Omega_{\mathbb{R}}(f, G)$  est indénombrable alors que l'ensemble des points périodiques dans  $\mathcal{G}(L_{BFH}^2(f))$  est dénombrable. On en déduit que l'on peut extraire de chaque espace  $\Omega_i$  un élément  $T_i$  tel que pour tout  $g \in GA$ ,  $\mathcal{P}_{T_i} \neq \mathcal{P}_{T_i} \cdot g$ .  $\square$

On va maintenant préciser la nature des pavages de l'espace  $\Omega_{GA}(f, G)$ . On sait qu'il en existe des apériodiques mais on va voir que tous le ne sont pas.

**Définition 6.17.** *Soit  $(f, G)$  un représentant efficace primitif. La projection hyperbolique est l'application :*

$$\begin{aligned} \Pi : \Omega_{\mathbb{R}}(f, G) \times \mathbb{R}_+^* &\longrightarrow \Omega_{GA}(f, G) \\ ((P, x), y) &\longmapsto \mathcal{P}_T \cdot g(y)_x \end{aligned}$$

où  $g(y)_x : a + ib \mapsto \frac{1}{y}(a + ib) + (1 - \frac{1}{y}) \cdot x \in \text{GA}$

On remarque par la proposition 6.8 que l'isométrie  $g(y)_x$  de la définition 6.17 correspond à la transformation  $g_x$  lorsque  $y = \lambda$ .

**Proposition 6.18.** *Soit  $(f, G)$  un représentant efficace primitif. La projection hyperbolique  $\Pi : \Omega_{\mathbb{R}}(f, G) \times \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \Omega_{\text{GA}}(f, G)$  est continue pour  $\Omega_{\mathbb{R}}(f, G) \times \mathbb{R}_+^*$  muni de la topologie produit et  $\Omega_{\text{GA}}(f, G)$  muni de la topologie des pavages.*

Preuve : La projection hyperbolique  $\Pi$  est la composée de  $J$  qui est continue de  $\Omega_{\mathbb{R}}(f, G)$  dans  $\Omega_{\text{GA}}(f, G)$  d'après la proposition 6.14, et de l'isométrie  $\mathcal{P} \mapsto \mathcal{P} \cdot g(y)_x$  qui est continue sur  $\Omega_{\text{GA}}(f, G)$ , dont les paramètres dépendent continument de  $y$  et  $x$ . En en conclut que  $\Pi$  est continue.  $\square$

**Proposition 6.19.** *Soit  $(f, G)$  un représentant efficace primitif. La projection hyperbolique  $\Pi : \Omega_{\mathbb{R}}(f, G) \times \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \Omega_{\text{GA}}(f, G)$  est surjective et non-injective. De plus, l'ensemble des points se trouvant dans la même image par  $\Pi$  sont de la forme :*

$$\Pi^{-1}(\Pi(T, y)) = (\mathcal{F}^k(T), y\lambda^{-k})$$

Preuve : Soit  $\mathcal{P}$  un pavage de  $\Omega_{\text{GA}}(f, G)$ . Montrons qu'il existe  $T \in \Omega_{\mathbb{R}}(f, G)$  et  $g \in \text{GA}$  tel que  $\mathcal{P} \cdot g = \mathcal{P}_T$ . En effet,  $\mathcal{P}$  appartient à une composante minimale de  $\Omega_{\text{GA}}(f, G)$  qui est de la forme  $\Omega_{\text{GA}}(\mathcal{P}_{T_0})$ . D'après la proposition 6.21, le pavage  $\mathcal{P}_{T_0}$  est répétitif donc il existe une ligne horizontale  $\mathcal{H}_1$  qui est le bord supérieur d'un ensemble de tuiles de la forme  $F_{(p_i, p_{i+1})}$ . Il existe alors une isométrie affine  $g \in \text{GA}$  tel que  $\mathcal{H}_1 \cdot g$  soit un 1-complexe cellulaire de  $\mathcal{D}$ . Par répétitivité, on en déduit que  $H^{-1}(\mathcal{D} \cap (\mathcal{P} \cdot g)) \in \Omega_{\mathbb{R}}(f, G)$ . Ainsi, il existe un pavage  $T = (P, x) \in \Omega_{\mathbb{R}}(f, G)$  tel que  $\mathcal{P} \cdot g = \mathcal{P}_T$ . On peut être plus précis sur la nature de  $g$ . Si  $\mathcal{H}_1$  se trouve sur la droite horizontale d'équation  $\text{Im}(z) = y$ , alors il existe une unique transformation  $g = g(y)_x$  tel que  $\mathcal{P} \cdot g = \mathcal{P}_T$  comme corollaire de la proposition 6.8. Ainsi :

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}_T \cdot g^{-1} = \mathcal{P}_T \cdot g\left(\frac{1}{y}\right)_x = \Pi((T, y))$$

ce qui assure la surjectivité de l'application  $\Pi$ .

Soit maintenant deux points  $(T_0, y_0), (T_1, y_1) \in \Omega_{\mathbb{R}}(f, G)$ , tels que  $\Pi((T_0, y_0)) = \Pi((T_1, y_1))$ . Notons  $T_0 = (P_0, x_0)$  et  $T_1 = (P_1, x_1)$ . Cette remarque est équivalente à

$$\mathcal{P}_{T_0} \cdot g(y_0)_{x_0} = \mathcal{P}_{T_1} \cdot g(y_1)_{x_1} \Leftrightarrow \mathcal{P}_{T_0} = \mathcal{P}_{T_1} \cdot g(y_1)_{x_1} (g(y_0)_{x_0})^{-1} \Leftrightarrow \mathcal{P}_{T_0} = \mathcal{P}_{T_1} g(y_1)_{x_1} \cdot g\left(\frac{1}{y_0}\right)_{x_0}.$$

Or d'après la proposition 6.8, la seule possibilité pour que le point  $z = x_1 + iy_1$  s'envoie par  $g\left(\frac{1}{y_0}\right)_{x_0}$  sur  $x_0 + i$  est  $x_0 = x_1$ . Donc  $\mathcal{P}_{T_0} = \mathcal{P}_{T_1} \cdot g\left(\frac{y_1}{y_0}\right)_{x_0}$ . Par définition des pavages de la forme  $\mathcal{P}_T$ , cela signifie qu'il existe  $k \in \mathbb{Z}$  tel que  $T_1 = \mathcal{F}^k(T_0)$  et  $g\left(\frac{y_1}{y_0}\right)_{x_0} = (g_{x_0})^k$ . Ainsi, on a  $y_1 = y_0 \lambda^{-k}$  donc la structure des antécédents d'un point

fixé dans  $\Omega_{GA}(f, G)$  par l'application  $\Pi$  est bien celle que nous voulions démontrer.  $\square$

Les propositions précédentes nous permette d'obtenir le résultat suivant.

**Proposition 6.20.** *Soit  $(f, G)$  un représentant irréductible efficace d'un automorphisme  $[\varphi] \in \text{Out}(\mathbb{F}_N)$ . L'espace  $\Omega_{GA}(f, G)$  est un espace de GA-pavages faiblement apériodiques, non fortement périodiques, pour l'action à droite du groupe GA.*

Preuve de la proposition : Soit  $T$  un pavage de  $\Omega_{\mathbb{R}}(f, G)$ . Montrons que le groupe  $\mathcal{N}$  agit librement sur  $\overline{\mathcal{P}_T \cdot \mathcal{N}}$ . En effet,  $\mathcal{P}_T = \mathcal{J}(T)$  et  $\mathcal{J}$  transporte isométriquement l'action de  $\mathbb{R}$  sur  $\Omega_{\mathbb{R}}(T)$  en l'action de  $\mathcal{N}$  sur  $\mathcal{P}_T \cdot \mathcal{N}$ . Or  $\mathbb{R}$  agit librement sur  $\Omega_{\mathbb{R}}(T)$  on en déduit que  $\mathcal{N}$  agit librement à son tour sur  $\mathcal{P}_T \cdot \mathcal{N}$ . Comme  $\mathcal{N}$  est un sous-groupe normal de GA non-compact on en déduit que  $T$  n'est pas GA-périodique. Déterminons maintenant le groupe  $\text{Stab}_{GA}(\mathcal{P}_T \cdot GA)$ . Supposons qu'il existe un  $m \geq 1$  minimal tel que  $\mathcal{F}^m(T) = T$ , alors l'application  $\Pi : \Omega_{\mathbb{R}}(f, G) \times \mathbb{R}_+^* \rightarrow \Omega_{GA}(f, G)$  décrite dans la définition 6.17 vérifie d'une part  $\Pi((\mathcal{F}^m(T), \lambda^{-m})) = \Pi((T, \lambda^{-m}))$  mais d'autre part  $\Pi((\mathcal{F}^m(T), \lambda^{-m})) = \Pi((T, 1))$  par la proposition 6.19. On en déduit que  $\mathcal{P}_T \cdot g(\lambda)^m = \mathcal{P}_T$  et par récurrence  $\mathbb{Z} \cong G_1 = \{g(\lambda)^k m \mid k \in \mathbb{Z}\}$  est un sous-groupe de  $\text{Stab}_{GA}(\mathcal{P}_T)$ . Un élément  $g$  dans  $\text{Stab}_{GA}(\mathcal{P}_T)$  est une isométrie affine qui envoie les lignes horizontales du niveau  $\mathcal{D}^j$  au niveau  $\mathcal{D}^{j-k}$  et doit préserver le point base ce situant sur la ligne horizontale  $\mathcal{D}$ . D'après la proposition 6.8, il s'agit d'un élément de  $G_1$ . Montrons maintenant qu'il existe des éléments  $T \in \Omega_{\mathbb{R}}(f, G)$  tels qu'il existe  $m \geq 1$  satisfaisant  $\mathcal{F}^m(T) = T$ . Reprenons la construction de la lamination de Bestvina-Feighn-Handel à partir de l'itération d'un voisinage périodique défini en 4.21. Si l'on considère la feuille  $L$  construite à partir du voisinage périodique  $\mathcal{U} \subset f^p(\mathcal{U})$  (voir la définition 4.21), alors l'égalité  $f^p(L) = L$  est vérifiée. On en déduit que  $(P, 0) \in \Omega_{\mathbb{R}}(f, G)$  vérifie  $\mathcal{F}^p(T) = T$ . On en conclut que  $\Omega_{GA}(f, G)$  est faiblement apériodique.  $\square$

L'autre propriété importante sur les pavages est celle de répétitivité (voir la définition 2.12).

**Proposition 6.21.** *Soit  $(f, G)$  un représentant efficace primitif et  $T$  un pavage de  $\Omega_{\mathbb{R}}(f, G)$ . Le pavage  $\mathcal{P}_T$  est GA-répétitif.*

Pour prouver cet énoncé, nous introduisons ci-dessous la notion de *patch rectangulaire* puis nous démontrons deux lemmes techniques : le premier (lemme 6.23) traduit le fait que tout patch est contenu dans un patch rectangulaire ; le deuxième (lemme 6.24) assure que les patchs rectangulaire sont répétitifs.

**Définition 6.22** (Patch rectangulaire). *Soit  $(f, G)$  un représentant efficace primitif. Soit  $T \in \Omega_{\mathbb{R}}(f, G)$ , un chemin d'arêtes  $c = (p_0, p_1) \dots (p_{s-1}, p_s)$  dans une ligne horizontale  $\mathcal{D}^k$  du pavage  $\mathcal{P}_T$  et  $m \geq 0$ . Le patch rectangulaire associé aux tuiles  $c$  à  $m$  niveaux que l'on note  $P_{c,m}$  est le patch de  $\mathcal{P}_T$  suivant :*

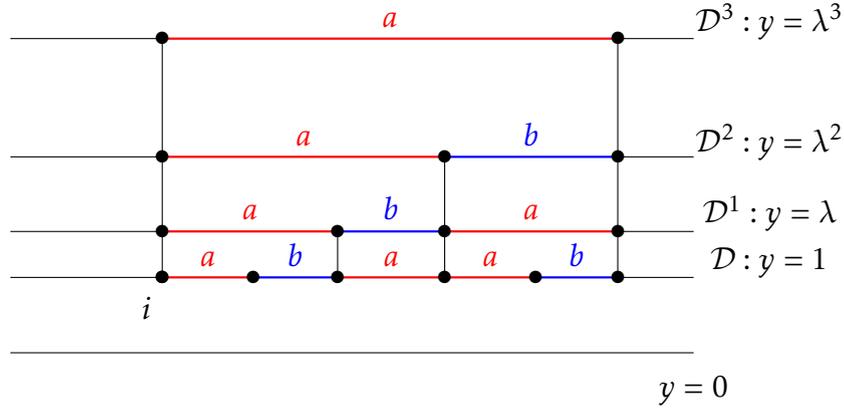


FIGURE 12 – Patch rectangulaire  $P_{(a),3}$  du pavage hyperbolique de Fibonacci

$$P_{c,m} = \{z \in \mathbb{H}^2 \mid \lambda^{k-m} \leq \text{Im}(z) \leq \lambda^k \text{ et } \text{Re}(p_0) \leq \text{Re}(z) \leq \text{Re}(p_s)\}$$

**Lemme 6.23.** Soit  $(f, G)$  un représentant efficace primitif,  $T$  un pavage de  $\Omega_{\mathbb{R}}(f, G)$  et  $B$  un patch de  $\mathcal{P}_T$ . Il existe une concaténation d'arêtes  $c = (p_0, p_1) \dots (p_{s-1}, p_s) \subset \mathcal{D}^k$  (voir notations 6.5) et un entier  $m \geq 0$  tel que  $B \subset P_{c,m}$

Preuve du lemme : Puisque  $B$  est une partie compacte du plan hyperbolique  $\mathbb{H}^2$ , elle admet un diamètre  $\text{Diam} = \sup\{d_{\mathbb{H}^2}(z_1, z_2) \mid z_1, z_2 \in B\}$  qui est fini. On peut montrer par un calcul simple que pour tout  $k, j \in \mathbb{Z}$ ,  $d_{\mathbb{H}^2}(\mathcal{D}^j, \mathcal{D}^k) = |k - j| \log(\lambda)$ . On en déduit alors qu'il existe un chemin  $c$  dans la ligne horizontale  $\mathcal{D}^s$  où  $s = \inf_{j \in \mathbb{Z}} \{j \mid \lambda^j \geq \text{Im}(z), \forall z \in B\}$  et  $\text{Longueur}_{\mathbb{H}^2}(c) \geq \text{Diam}$ . Si  $k$  vérifie  $|k - s| \log(\lambda) \geq \text{Diam}$  alors  $B \subset P_{c,k}$ , ce qui démontre le lemme.  $\square$

**Lemme 6.24.** Soit  $(f, G)$  un représentant efficace primitif et  $T$  un pavage de  $\Omega_{\mathbb{R}}(f, G)$ . Soit  $c$  un sous-chemin de longueur  $L > 0$  d'une ligne horizontale, un entier  $m \geq 0$  et  $P_{c,m}$  le patch rectangulaire associé. Il existe  $R > 0$  tel que pour tout  $z_0 \in \mathbb{H}^2$  il y ait une isométrie affine  $I_{z_0} \in \text{GA}$  satisfaisant  $P_{c,m} \cdot I_{z_0} \subset B_{\mathbb{H}^2}(z_0, R)$ .

Preuve du lemme : Soit  $z_0 \in \mathbb{H}^2$  et  $\mathcal{D}^j$  la droite horizontale telle que  $\lambda^{j-1} < \text{Im}(z_0) \leq \lambda^j$ . Soit  $R = (m+1) \log(\lambda) + L$  et  $P_1 = i\lambda^j + L + \text{Re}(z_0)$ ,  $P_2 = i\lambda^j - L + \text{Re}(z_0)$ ,  $P_3 = i\lambda^{j+m} + L + \text{Re}(z_0)$ ,  $P_4 = i\lambda^{j+m} - L + \text{Re}(z_0)$  les points extrémaux du patch rectangulaire  $P_{c,m}$ . Montrons que pour tout  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $d_{\mathbb{H}^2}(z_0, P_i) \leq R$ , ce qui induit  $P_i \in B_{\mathbb{H}^2}(z_0, R)$ . En effet,  $d(z_0, i\lambda^j + L + \text{Re}(z_0)) \leq d(z_0, i\lambda^j + \text{Re}(z_0)) + d(i\lambda^j + \text{Re}(z_0), i\lambda^j + L + \text{Re}(z_0)) \leq \log(\lambda) + L < R$  donc  $i\lambda^j + L + \text{Re}(z_0) \in B_{\mathbb{H}^2}(z_0, R)$ . Il en est de même pour le point  $i\lambda^j - L + \text{Re}(z_0)$ . Les tuiles se situant dans les patches rectangulaires de la forme  $P_{c,n}$  dépendent uniquement de  $c$ . On en déduit que  $B_{\mathbb{H}^2}(z_0, R) \cap P_{c,m} \cdot g_0 \neq \emptyset$ . Montrons que  $P_{c,m} \cdot g_0 \subset B_{\mathbb{H}^2}(z_0, R)$ . Soit  $\gamma_1 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{H}^2$ , tel que  $\gamma_1(t) = i\lambda^j \times \lambda^{tm} + L + \text{Re}(z_0)$  et  $\gamma_2 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{H}^2$ , tel que  $\gamma_2(t) = i\lambda^j \times \lambda^{tm} - L + \text{Re}(z_0)$ . On a :

$$\text{Long}_{\mathbb{H}^2}(\gamma_1) = \int_0^1 \frac{|\gamma_1'(s)|}{\text{Im}(\gamma_1(s))} ds = \int_0^1 \frac{m \log(\lambda) \lambda^{j+tm}}{\lambda^{j+tm}} ds = \int_0^1 m \log(\lambda) ds = m \log(\lambda).$$

Or  $m \log(\lambda) = \text{Long}_{\mathbb{H}^2}(\gamma_2)$ . Ainsi :

$$\begin{aligned} d(z_0, i\lambda^{j+m} + L) &\leq d(z_0, i\lambda^j + L + \text{Re}(z_0)) + d(i\lambda^j + L + \text{Re}(z_0), i\lambda^{j+m} + L + \text{Re}(z_0)) \\ &\leq \log(\lambda) + L + \text{Long}_{\mathbb{H}^2}(\gamma_1) = \log(\lambda) + L + m \log(\lambda) \\ &\leq L + (m+1) \log(\lambda). \end{aligned}$$

Nous obtenons  $i\lambda^{j+m} + L + \text{Re}(z_0) \in B_{\mathbb{H}^2}(z_0, R)$ . Par symétrie de la boule  $B_{\mathbb{H}^2}(z_0, R)$  par rapport à l'axe  $\{z \in \mathbb{H}^2 \mid \text{Re}(z) = \text{Re}(z_0)\}$ , on en déduit que  $i\lambda^j - L + \text{Re}(z_0)$  et  $i\lambda^{j+m} - L + \text{Re}(z_0)$  appartiennent à  $B_{\mathbb{H}^2}(z_0, R)$ . Comme  $B_{\mathbb{H}^2}(z_0, R)$  est en terme d'ensemble un disque euclidien dans le demi-plan de Poincaré et que les quatre points extrémaux  $i\lambda^j - L + \text{Re}(z_0)$ ,  $i\lambda^{j+m} - L + \text{Re}(z_0)$ ,  $i\lambda^j + L + \text{Re}(z_0)$  et  $i\lambda^{j+m} + L + \text{Re}(z_0)$  sont contenus dans  $B_{\mathbb{H}^2}(z_0, R)$ , par convexité le rectangle dont les points extrémaux sont les quatre points cités est inclus dans  $B_{\mathbb{H}^2}(z_0, R)$ .  $\square$

**Lemme 6.25.** *Soit  $c_0$  un chemin horizontal dans  $\mathcal{D}$  (voir notations 6.5) de longueur  $l > 0$  et  $m \in \mathbb{N}$ . Il existe  $L > 0$  tel que tout patch rectangulaire de la forme  $P_{c_1, m}$  où  $c_1$  est un chemin horizontal de longueur  $L$ , contienne l'image de  $P_{c_0, m}$  par une isométrie affine.*

Preuve du lemme : Soit  $T$  appartenant à l'espace  $\Omega_{\mathbb{R}}(f, G)$ . Par répétitivité des pavages d'une composante minimale de  $\Omega_{\mathbb{R}}(f, G)$ , dans le patch  $C_0 = H^{-1}(c_0)$  de  $T$  il existe une longueur  $L > 0$  tel que tout patch de  $T$  de longueur  $L$  contient une copie par translation de  $C_0$ . Si  $c_1$  est sur la ligne horizontale  $\mathcal{D}^k$  alors  $c_1 \cdot g_{\lambda}(0)^{-k}$  est un sous-chemin de longueur  $L > 0$  de  $\mathcal{D}$ . On en déduit qu'il existe  $u \in \mathbb{R}$  tel que  $c_0 \cdot T_u \subset c_1 \cdot g_{\lambda}(0)^{-k}$ . Les isométries affines transportent des segments horizontaux et verticaux sur respectivement des segments horizontaux et verticaux donc  $P_{c_0, m} \cdot T_u \subset P_{c_1, m} \cdot g_{\lambda}(0)^{-k}$ . Finalement, en posant  $g = g_{\lambda}(0)^{-k} \cdot T_{-u}$  nous obtenons  $P_{c_0, m} \subset P_{c_1, m} \cdot g$  ce qui prouve le lemme.  $\square$

Preuve de la proposition 6.21 : Soit  $\mathcal{P} \in \Omega_{\text{GA}}(f, G)$ . Par la définition 6.12, il existe  $T \in \Omega_{\mathbb{R}}(f, G)$  tel que  $\mathcal{P} \in \Omega_{\text{GA}}(\mathcal{P}_T)$ . On peut donc se restreindre à montrer que les pavages de la forme  $\mathcal{P}_T$  sont répétitifs. Considérons maintenant  $B$  un patch de  $\mathcal{P}_T$ . D'après le lemme 6.25, il existe  $m \geq 0$  et un chemin  $c = (p_0, p_1) \dots (p_{s-1}, p_s) \in \mathcal{D}^k$  tel que  $B \subset P_{c, m}$ . On en déduit que  $c \cdot g_x^{-k} \subset \mathcal{D}$ . Par répétitivité des pavages de  $\Omega_{\mathbb{R}}(f, G)$ , il existe  $r \geq 0$  tel que tout intervalle de la forme  $]t - r, t + r[$  contienne une copie par translation du patch  $H^{-1}(c \cdot g_x^{-k})$ .

Supposons que  $c$  soit de longueur  $l$ . D'après le lemme 6.25, il existe  $L > 0$  et  $M \geq 0$  tel que toute copie par une isométrie affine de  $P_{c_1, M}$  contient un patch rectangulaire de la forme  $P_{c_0, m}$  où  $c_0$  est un chemin horizontale de longueur  $l' > 2r$ . Par notre premier point, il existe une isométrie affine  $g$  telle que  $P_{c, m} \cdot g \subset P_{c_0, m}$ .

Nous savons d'après le lemme 6.24 que pour les longueurs  $L > 0$  et  $M \geq 0$  fixées, il existe  $R > 0$  tel que toute boule  $B_{\mathbb{H}^2}(z, R)$  contienne un patch rectangulaire de la forme  $P_{C, M}$  où  $C$  est un chemin horizontale de longueur  $L$ . On en déduit qu'il contient une copie par une isométrie affine du patch rectangulaire  $P_{c, m}$  et donc de  $B$ . De cette manière, le pavage est bien GA-répétitif.

Par la proposition 6.5, l'application  $H$  est une isométrie. On en déduit qu'en fixant le rayon  $R = (m + 1)\log(\lambda) + r$ , nous obtenons que pour tout  $z_0 \in \mathbb{H}^2$ , il existe  $g \in GA$  tel  $B(z_0, R)$  contienne une copie  $c.g$  sur  $\mathcal{D}^j$  la ligne horizontale la plus proche du point  $z_0 \in \mathbb{H}^2$ .  $\square$

**Remarque 6.26.** *Il est possible, comme cela est fait dans l'article [Pet06a], de rendre fortement apériodiques et répétitifs les pavages de l'ensemble  $\Omega_{GA}(f, G)$  en colorant les arêtes verticales à l'aide d'une suite  $(w_i)_{i \in \mathbb{Z}}$  apériodique et minimale pour le shift. Nous pourrions nous demander alors comment exprimer simplement cet espace de pavages coloré en fonction de  $\Omega_{GA}(f, G)$  et de la suite  $(w_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ .*

L'existence de pavages apériodiques de la forme  $\mathcal{P}_T$  implique que l'action du groupe affine  $GA$  sur l'espace de pavages  $\Omega_{GA}(f, G)$  ne peut pas être co-compact. Par ailleurs, la propriété de répétitivité est liée à celle de minimalité d'après la proposition 2.18. Une question naturelle est donc de déterminer si l'action de  $GA$  sur  $\Omega_{GA}(f, G)$  est minimale (elle l'est évidemment sur l'orbite d'un pavage, d'après la proposition 2.18).

**Proposition 6.27.** *Soit  $(f, G)$  un représentant efficace primitif. L'espace  $\Omega_{GA}(f, G)$  possède autant de composantes minimales pour l'action de  $GA$  que l'espace  $\Omega_{\mathbb{R}}(f, G)$  pour l'action de  $\mathbb{R}$  : si la substitution  $\sigma_f$  associée à  $(f, G)$  (voir la définition 3.19) est non-orientable l'espace  $\Omega_{GA}(f, G)$  est minimal, sinon il possède deux composantes minimales.*

Preuve :

1. Si  $\sigma_f$  est non-orientable alors d'après la proposition 3.33, l'espace  $\Omega_{\mathbb{R}}(f, G)$  est minimal. Montrons que pour tout pavage  $T_1, T_2 \in \Omega_{\mathbb{R}}(f, G)$ , les espaces  $\Omega_{GA}(\mathcal{P}_{T_1})$  et  $\Omega_{GA}(\mathcal{P}_{T_2})$  sont égaux. En effet, par minimalité de  $\Omega_{\mathbb{R}}(f, G)$ , il existe une suite de vecteurs  $(u_n)_{n \geq 0}$  tel que  $\lim_{n \rightarrow \infty} T_1 \cdot u_n = T_2$  et ainsi  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{P}_{T_1} \cdot T_{u_n} = \mathcal{P}_{T_2}$ . Cela signifie que  $\mathcal{P}_{T_2} \in \Omega_{GA}(\mathcal{P}_{T_1})$  et donc  $\Omega_{GA}(\mathcal{P}_{T_2}) \subset \Omega_{GA}(\mathcal{P}_{T_1})$ . Par minimalité de l'action de  $\mathbb{R}$  sur l'espace  $\Omega_{\mathbb{R}}(f, G)$ , il est possible de permuter  $T_1$  et  $T_2$  dans le raisonnement précédent, on en déduit que l'inclusion inverse est également vérifiée. Ainsi nous obtenons l'égalité  $\Omega_{GA}(\mathcal{P}_{T_2}) = \Omega_{GA}(\mathcal{P}_{T_1})$ . Montrons maintenant l'assertion principale. D'après le point que l'on vient de démontrer, pour tout  $T_0 \in \Omega_{\mathbb{R}}(f, G)$ ,  $\cup_{T \in \Omega_{\mathbb{R}}(f, G)} \Omega_{GA}(\mathcal{P}_T) = \Omega_{GA}(\mathcal{P}_{T_0})$ . En particulier, d'après la proposition 6.16 on peut choisir  $T_0$  apériodique et grâce à la proposition 6.21, le pavage  $T$  est  $GA$ -répétitif. On en conclut que  $\Omega_{GA}(\mathcal{P}_{T_0})$  est minimal.
2. Si  $\sigma_f$  est orientable, alors nous savons d'après la proposition 3.33, que l'espace  $\Omega_{\mathbb{R}}(f, G)$  possède deux composantes  $\mathbb{R}$ -minimales  $\Omega_{\mathbb{R}}(f, G) = \Omega_1 \cup \Omega_2$ . Appliquons le même raisonnement que dans le cas où  $\sigma_f$  est non-orientable à  $\sigma_f^2$  sur respectivement  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ . Ainsi, il existe  $T_1 \in \Omega_1$ ,  $T_2 \in \Omega_2$  tels que  $\Omega_{GA}(f, G) = \Omega_{GA}(\mathcal{P}_{T_1}) \cup \Omega_{GA}(\mathcal{P}_{T_2})$  où  $\mathcal{P}_{T_1}$  et  $\mathcal{P}_{T_2}$  sont répétitifs. Ceci conclut la démonstration de ce cas.

On en conclut que l'espace  $\Omega_{GA}(f, G)$  possède au plus deux composantes minimales.  $\square$

### 6.2.5 L'espace $\Omega_{GA}(\phi)$

De façon similaire à ce qui se passe pour les espaces  $\Omega_{\mathbb{R}}(f, G)$ , nous avons le résultat suivant :

**Théorème 6.28.** *Soit  $(f, G)$  et  $(f', G')$  les représentants efficaces irréductibles de deux automorphismes externes dans la même classe de conjugaison dans  $\text{Out}(F_N)$ . Alors les espaces  $\Omega_{GA}(f, G)$  et  $\Omega_{GA}(f', G')$  sont homéomorphes.*

Preuve du théorème 6.28 : Soit  $J$  (respectivement  $J'$ ) l'injection canonique de  $\Omega_{\mathbb{R}}(f, G)$  (respectivement  $\Omega_{\mathbb{R}}(f', G')$ ) dans  $\Omega_{GA}(f, G)$  (respectivement  $\Omega_{GA}(f', G')$ ) défini à la proposition 6.12. Par le théorème 5.12, il existe un homéomorphisme noté  $h$  entre les espaces  $\Omega_{\mathbb{R}}(f, G)$  et  $\Omega_{\mathbb{R}}(f', G')$ . Soit l'application  $J$  définie sur  $J(\Omega_{\mathbb{R}}(f, G)) \subset \Omega_{GA}(f, G)$  et à valeurs dans  $\Omega_{GA}(f', G')$  telle que pour tout pavage  $\mathcal{P}_T = J(T) \in \Omega_{GA}(f, G)$ ,  $J(\mathcal{P}_T) = \mathcal{P}'_{H(T)}$ . D'après le théorème 11, l'application  $J$  est continue. L'action de  $GA$  est minimale sur les orbites des pavages apériodiques de la forme  $\mathcal{P}_T$  dans chaque composante minimale de  $\Omega_{GA}(f, G)$  d'après la proposition 6.27. Nous pouvons donc étendre l'application  $J$  en un homéomorphisme entre les espaces  $\Omega_{GA}(f, G) = \cup_{T \in \Omega_{\mathbb{R}}(f, G)} \Omega_{GA}(\mathcal{P}_T)$  et  $\Omega_{GA}(f', G') = \cup_{T \in \Omega_{\mathbb{R}}(f, G)} \Omega_{GA}(\mathcal{P}_T)$ .  $\square$

Comme dans le cas des pavages de la droite réelle, ce théorème nous permet d'introduire la définition suivante :

**Définition 6.29.** *Soit  $[[\phi]] \subset \text{Out}(F_N)$  une classe de conjugaison dans  $\text{Out}(F_N)$ . L'espace de pavages du plan hyperbolique associé à  $[[\phi]]$ , noté  $\Omega_{GA}(\phi)$ , est l'espace de pavages  $\Omega_{GA}(f, G)$  introduit à la définition 6.12, associé à un quelconque représentant efficace primitif  $(f, G)$  de  $[\phi]$ .*

## 6.3 L'espace de pavages $\Omega_{GA}(f, G)$ est une suspension

Nous affinons dans cette sous-section la structure d'espace de pavages du plan hyperboliques construit dans la sous-section précédente. Dans les deux propositions suivantes, on s'intéresse à la suspension des espaces de pavages de la forme  $\Omega_{\mathbb{R}}(f, G)$  relativement à l'application  $\mathcal{F}$  définie au corollaire 3.31.

**Proposition 6.30.** *Soit  $(f, G)$  un représentant efficace primitif. L'espace  $\Omega_{GA}(f, G)$  est homéomorphe à  $\frac{\Omega_{\mathbb{R}}(f, G) \times \mathbb{R}_+^*}{(T, \lambda) \sim (\mathcal{F}(T), 1)}$*

Preuve : D'après la proposition 6.19, l'application hyperbolique  $\Pi : \Omega_{\mathbb{R}}(f, G) \times \mathbb{R}_+^* \rightarrow \Omega_{GA}(f, G)$  est continue et surjective.

De plus la relation d'équivalence  $(\mathcal{F}(T), 1) \sim (T, \lambda)$  identifie exactement les points antécédents par  $\Pi$  d'un même point dans  $\Omega_{GA}(f, G)$ . On en déduit que l'application quotient  $\bar{\Pi} : \frac{\Omega_{\mathbb{R}}(f, G) \times \mathbb{R}_+^*}{(T, \lambda) \sim (\mathcal{F}(T), 1)} \rightarrow \Omega_{GA}(f, G)$  est continue pour la topologie quotient et

qu'elle élimine le défaut d'injectivité de  $\Pi$  donc elle est bijective. Comme l'espace  $\Omega_{\text{GA}}(f, G)$  est compact,  $\bar{\Pi}$  réalise donc un homéomorphisme entre  $\frac{\Omega_{\mathbb{R}}(f, G) \times \mathbb{R}_+^*}{(T, \lambda) \sim (\mathcal{F}(T), 1)}$  et  $\Omega_{\text{GA}}(f, G)$  ce qui prouve la proposition.  $\square$

**Proposition 6.31.** *Soit  $(f, G)$  un représentant efficace primitif. L'espace  $\Omega_{\text{GA}}(f, G)$  est homéomorphe à la suspension  $M_{\mathcal{F}}(\Omega_{\mathbb{R}}(f, G))$  (voir la définition 2.1).*

Preuve : Considérons l'application :

$$\beta: \begin{array}{ccc} \Omega_{\mathbb{R}}(f, G) \times \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \Omega_{\mathbb{R}}(f, G) \times \mathbb{R} \\ (T, \lambda) & \longmapsto & (T, \log_{\lambda}(y)) \end{array}$$

Il s'agit d'un homéomorphisme pour la topologie produit. Les points  $(\mathcal{F}(T), 1)$  et  $(T, \lambda)$  étant identifiés dans  $\frac{\Omega_{\mathbb{R}}(f, G) \times \mathbb{R}_+^*}{(T, \lambda) \sim (\mathcal{F}(T), 1)}$  alors  $\beta((\mathcal{F}(T), 1)) = (\mathcal{F}(T), 0)$  et  $\beta((T, \lambda)) = (T, \log_{\lambda}(\lambda)) = (T, 1)$  sont également identifiés dans  $\frac{\Omega_{\mathbb{R}}(f, G) \times [0, 1]}{(\mathcal{F}(T), 0) \sim (T, 1)}$ . On en déduit que  $\bar{\beta}: \frac{\Omega_{\mathbb{R}}(f, G) \times [0, 1]}{(\mathcal{F}(T), 0) \sim (T, 1)} \longrightarrow \frac{\Omega_{\mathbb{R}}(f, G) \times \mathbb{R}_+^*}{(T, \lambda) \sim (\mathcal{F}(T), 1)}$  est un homéomorphisme et on obtient le résultat de la proposition grâce au corollaire 6.30.  $\square$

Cet homéomorphisme nous permet d'établir une équivalence topologique à l'aide de l'expression de l'espace  $\Omega_{\mathbb{R}}(f, G)$  en tant que limite inverse.

## 6.4 Espace de pavages $\Omega_{\text{GA}}(f, G)$ et limite projective

**Proposition 6.32.** *Soit  $(f, G)$  un représentant efficace primitif. Soit  $\sigma_f$  la substitution induite par  $(f, G)$  et  $(K_{\sigma_f}, S_f)$  son complexe de Barge-Diamond associé (voir définition 3.11). En reprenant les notations de la proposition 3.22, on obtient les homéomorphismes suivants :*

- si  $\sigma_f$  est non-orientable alors  $\Omega_{\text{GA}}(f, G) \cong \varprojlim (M_{S_f}(K_{\sigma_f}), \tilde{S}_f)$ .
- si  $\sigma_f$  est orientable, préserve l'orientation et  $\Omega_{\mathbb{R}}(f, G) \cong \Omega_{\sigma_1} \cup \Omega_{\sigma_2}$  alors :

$$\Omega_{\text{GA}}(f, G) \cong \varprojlim (M_{S_1}(K_{\sigma_1}), \tilde{S}_1) \cup \varprojlim (M_{S_2}(K_{\sigma_2}), \tilde{S}_2)$$

- si  $\sigma_f$  est orientable, renverse l'orientation et  $\Omega_{\mathbb{R}}(f, G) \cong \Omega_{\sigma_1^2} \cup \Omega_{\sigma_2^2}$  alors :

$$\Omega_{\text{GA}}(f, G) \cong \varprojlim (M_{S_1^2}(K_{\sigma_1^2}), \tilde{S}_1^2) \cup \varprojlim (M_{S_2^2}(K_{\sigma_2^2}), \tilde{S}_2^2)$$

Preuve de la proposition 6.32 : D'après la proposition 3.22, chaque composante minimale de  $\Omega_{\mathbb{R}}(f, G)$  est de la forme  $\Omega_{\sigma}$  où  $\sigma$  est une substitution primitive apériodique sur un alphabet fini. L'espace  $\Omega_{\sigma}$  est ainsi homéomorphe à une limite projective d'espaces  $\varprojlim (X, S)$ . D'après le lemme 2.7, l'application  $S$  induit un homéomorphisme sur l'espace  $\varprojlim (X, S)$  et  $M_{\tilde{S}}(\Omega_{\sigma}) \cong \varprojlim (M_{\tilde{S}}(X), \tilde{S})$ . Il en découle le résultat du

théorème en appliquant le lemme 2.7 à chaque composante minimale de  $\Omega_{\mathbb{R}}(f, G)$ .  $\square$

La proposition 6.32 montre que même si les pavages de l'espace  $\Omega_{GA}(f, G)$  sont faiblement apériodiques (ce qui induit que cet espace n'est pas un GA-solénoïde), l'espace  $\Omega_{GA}(f, G)$  est homéomorphe à une limite projective simple. De plus cette limite projective  $\varprojlim (E_i, f_i)$  est similaire à celle d'un espace de pavage construit à partir d'une substitution primitive (voir par exemple le théorème 3.17 qui illustre cette situation) puisque pour tout  $i \geq 0$ , les espaces  $E_i$  et les applications  $f_i$  sont les mêmes. Cependant, dans l'article [BH13], N. Bédaride et A. Hilion montrent qu'il n'existe pas de pavages du plan hyperbolique  $\mathbb{H}^2$  obtenu à partir d'une substitution primitive.

## 6.5 Pavage polygonal induit par un représentant $(f, G)$

Les pavages étudiés dans la section précédente sont construits à partir d'un nombre fini de prototyles  $\mathfrak{P} = \{t_1, \dots, t_s\}$  où pour tout  $i \in \{1, \dots, s\}$ , la tuile  $t_i$  est un rectangle euclidien. Soit  $t \in \mathfrak{P}$ , et  $P_1, \dots, P_k$  les sommets de la tuile  $t$  indexés par un ordre cyclique. Considérons  $t'$  la 2-cellule dans  $\mathbb{H}^2$  dont les sommets sont  $P_1, \dots, P_k$  mais dont les 1-cellules sont géodésiques. Appellons  $\mathfrak{P}' = \{t'_1, \dots, t'_s\}$  l'ensemble de ces tuiles et notons  $\mathcal{D} : \mathfrak{P} \rightarrow \mathfrak{P}'$ , l'application qui à tout  $t \in \mathfrak{P}$  associe la tuile  $t'$ .

**Proposition 6.33.** *Soit  $(f, G)$  un représentant efficace primitif.*

*La déformation  $\mathcal{D} : \mathfrak{P} \rightarrow \mathfrak{P}'$  induit un homéomorphisme entre l'espace  $\Omega_{GA}(f, G)$  et un espace de pavages  $\Omega$  dont tous les pavages sont construits sur l'ensemble des prototyles  $\mathfrak{P}'$ .*

Preuve de la proposition 6.33 : si  $P = (t_i)_{i \in I} \in \Omega_{GA}(f, G)$  où pour tout  $i \in I$ ,  $t_i$  désigne une tuile de  $\mathfrak{P}$  alors il existe un élément  $g_i \in GA$  et une prototyle  $t_{j_i} \in \mathfrak{P}$  tels que  $t_i = t_{j_i} \cdot g_i$

Considérons  $F$  une application définie sur  $\Omega_{GA}(f, G)$  et à valeurs dans l'ensemble  $\text{Pav}(\mathbb{H}^2)$  des pavages du plan hyperbolique telle que :

$$F(P) = (t'_i)_{i \in I} \text{ où pour tout } i \in I, t'_i = \mathcal{D}(t_{j_i}) \cdot g_i$$

Il est clair que l'application  $F$  est bien définie. L'application  $F$  est injective car  $P$  et  $F(P)$  sont entièrement déterminés par les sommets de leur tuiles. On en déduit que si  $F(P_1) = F(P_2)$  alors les sommets des tuiles de  $P_1$  et  $P_2$  sont identiques ce qui induit par construction des tuiles des éléments de  $\Omega_{GA}(f, G)$  (voir la proposition 6.11) que les pavages  $P_1$  et  $P_2$  sont égaux. L'application  $F$  est également continue : si deux pavages  $P_1, P_2$  coïncident sur un patch  $p$  autour de l'origine  $O = i$ , alors  $F(P_1)$  et  $F(P_2)$  coïncident sur le patch  $F(p)$  qui contient  $O$  si  $p$  possède un diamètre suffisamment large. Notons  $\Omega$  l'image de  $\Omega_{GA}(f, G)$  par l'application  $F$ . Alors comme  $\Omega_{GA}(f, G)$  est compact, et  $F$  continue et bijective sur son image, on en déduit que c'est un homéomorphisme que les espaces  $\Omega_{GA}(f, G)$  et  $\Omega$  sont homéomorphes.  $\square$ .

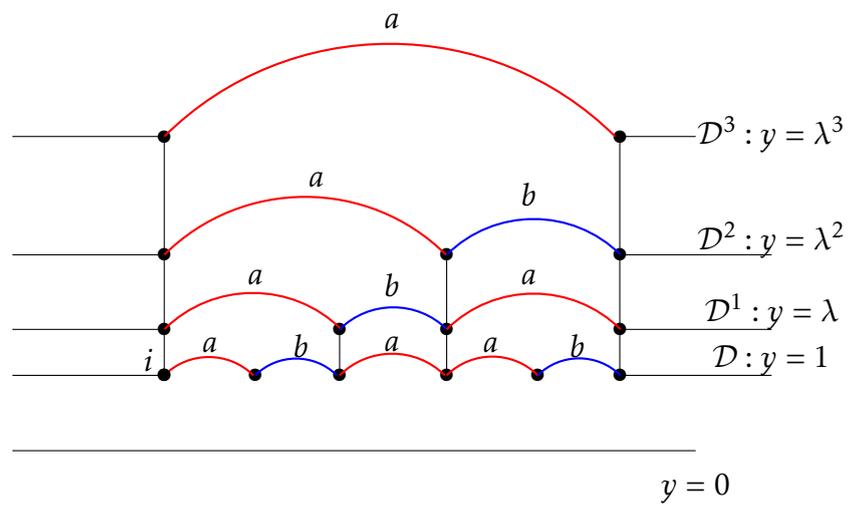


FIGURE 13 – Image pour le pavage de Fibonacci du patch rectangulaire  $P_{(a),3}$  par l'application  $\mathcal{D}$

## 7 Structures lisses sur $\Omega_{\mathbb{R}}(f, G)$ et $\Omega_{GA}(f, G)$

Dans les chapitres précédents, nous avons étudié la topologie et la dynamique des espaces  $\Omega_{\mathbb{R}}(f, G)$  et  $\Omega_{GA}(f, G)$  pour les actions respectives de  $\mathbb{R}$  et GA définies en 3.26 et 6.12. Nous nous focalisons dans cette section à munir d'une structure lisse les espaces de pavages  $\Omega_{\mathbb{R}}(f, G)$  et  $\Omega_{GA}(f, G)$ . Dans un premier temps, nous présentons quelques éléments généraux sur les variétés branchées.

### 7.1 Généralités sur les variétés branchées

Les variétés branchées sont des espaces généralisant la notion de variété qui ont été introduits en dimension un par R.F. Williams afin d'étudier les points non-errants de la dynamique d'un difféomorphisme  $h : M \rightarrow M$  d'une variété différentielle  $M$  (cf [Wil67]). En effet, l'auteur montre que lorsque l'espace  $\Omega(f)$  des points non-errants du difféomorphisme  $f$  possède un sous-ensemble  $\Omega_0$  ayant structure hyperbolique attractive dont l'espace instable  $E^u$  est de dimension un, il existe une variété branchée de dimension un  $K$ , une application préservant la structure branchée  $g : K \rightarrow K$  telle que :

$$\Omega_0 = \varprojlim(K, g)$$

Ces espaces apparaissent également dans le cadre des espaces de pavages puisque l'action de  $\mathbb{G}$  sur ce que l'on appelle un  $\mathbb{G}$ -solénoïde est topologiquement conjugué pour l'action du groupe d'isométrie  $\mathbb{G}$  à une limite projective de variétés branchées. On pourra se référer à l'article [BG03] pour avoir une vision complète de ce sujet. Pour connaître en toute généralité les variétés branchées, on pourra se référer à l'article [Wil74] de R.F. Williams où l'auteur introduit les variétés branchées en dimension quelconque.

#### 7.1.1 Structure lisse sur un graphe

**Définition 7.1.** *Un graphe  $G$  est muni d'une structure lisse s'il admet en tout point  $x$  un espace tangent  $T_x G$  de dimension 1 qui varie continûment en fonction de  $x$ . Un réseau ferroviaire est un graphe  $G$  muni d'une structure lisse.*

Soit  $x$  un point d'un graphe  $G$ . Lorsque  $G$  est muni d'une structure lisse, il existe localement deux côtés dits *gauche* et *droite* de  $x$ . En effet, l'espace tangent  $T_x G$ , de dimension 1, est isomorphe à  $\mathbb{R}$ . Il y a donc deux directions en  $x$  associées aux réels négatifs et positifs, que nous noterons  $\mathcal{H}^-$  et  $\mathcal{H}^+$ . L'ensemble  $St(x)$  des arêtes originaires en  $x$  se subdivise ainsi en une partition  $St(x) = St_G(x) \cup St_D(x)$  où :

$$\begin{aligned} St_G(x) &= \{e \in St(x) \mid \text{pour tout } \mathcal{G} \text{ germe de } e \text{ en } v, \mathcal{G} \subset \mathcal{H}^-\} \\ St_D(x) &= \{e \in St(x) \mid \text{pour tout } \mathcal{G} \text{ germe de } e \text{ en } v, \mathcal{G} \subset \mathcal{H}^+\} \end{aligned}$$

Soit  $St(v) = \{e_{i_1}, \dots, e_{i_s}\}$  et  $\gamma_1, \dots, \gamma_s : [0, 1] \rightarrow G$  des difféomorphismes de classe  $\mathcal{C}^1$  paramétrant respectivement les arêtes  $e_{i_1}, \dots, e_{i_s}$ .

Si pour tout  $i \in \{1, \dots, s\}$ ,  $\lim_{t \rightarrow 1} \gamma_i(t) = v$  alors il existe un vecteur  $u \in \mathbb{R}^2$ , une déformation locale isométrique  $h_v$  d'un voisinage de  $v$  dans  $G$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^2$  telle que pour tout  $i \in \{1, \dots, s\}$ ,  $\lim_{t \rightarrow 1} \gamma_i'(t) = u$ . De cette manière, nous pouvons déformer continuellement le graphe  $G$  en un graphe homéomorphe  $G'$  admettant une unique tangente  $T_x G$  en chaque point  $x$  de  $G$ .

### 7.1.2 Préservation de la structure lisse par une application de graphe

**Définition 7.2.** Soit  $G$  un réseau ferroviaire et  $f : G \rightarrow G$  une application continue. On dit que l'application  $f$  préserve la structure lisse de  $G$  si, pour tout  $x \in G$ ,  $f$  envoie de façon bijective l'ensemble à deux éléments  $\{St_G(x), St_D(x)\}$  sur l'ensemble à deux éléments  $\{St_G(f(x)), St_D(f(x))\}$ .

Etant donné une application  $f : G \rightarrow G$  continue, il n'existe pas nécessairement une structure lisse sur  $G$  telle que  $f$  préserve cette structure comme le montre le contre-exemple suivant.

Soit  $G$  un graphe et  $v \in V(G)$  un sommet trivalent, c'est à dire tel que  $St(v)$  possède 3 éléments  $St(v) = \{e_1, e_2, e_3\}$ . Supposons que tous les tournants  $\{e_1, e_2\}$ ,  $\{e_1, e_3\}$ ,  $\{e_2, e_3\}$  soient empruntés par  $f$ . Nous ne pouvons alors pas munir  $G$  d'une structure lisse permettant à  $f$  de préserver la structure lisse de  $G$ . Supposons par l'absurde que cela soit le cas. L'ensemble  $St_G(v)$  ou  $St_D(v)$  est égal à l'ensemble à deux éléments  $\{e_{i_1}, e_{i_2}\}$ . Le fait que tous les tournants soient empruntés induit qu'il existe un point  $x$  intérieur à une arête tel que l'ensemble  $\{St_G(x), St_D(x)\}$  s'envoie sur  $\{e_{i_1}, e_{i_2}\}$ , ce qui est impossible si  $f$  préserve la structure lisse.

## 7.2 Structure lisse sur $\Omega_{\mathbb{R}}(f, G)$

Nous montrons dans cette sous-section que le complexe de Barge-Diamond associé à une substitution primitive (voir la définition 3.11) possède une structure lisse. De plus, son application associée  $S_\sigma : K_\sigma \rightarrow K_\sigma$  (se référer à la définition 3.11) préserve cette structure lisse. On en déduit que la limite projective  $\varprojlim (K_\sigma, S_\sigma)$  est elle-même munie d'une structure lisse décrite comme par R.F. Williams dans l'article [Wil67] comme suit. Chaque graphe  $K_\sigma$  admet un fibré tangent  $T(K_\sigma)$  et  $S_\sigma$  est différentiable sur  $K_\sigma$  de différentielle  $DS_\sigma : T(K_\sigma) \rightarrow T(K_\sigma)$ . Le fibré tangent de  $\varprojlim (K_\sigma, S)$  est ainsi isomorphe à la limite projective  $\varprojlim (T(K_\sigma), DS_\sigma)$ . Cette proposition va permettre de munir l'espace de pavages  $\Omega_{\mathbb{R}}(f, G)$  d'une structure lisse. Il existe, pour le complexe de Barge-Diamond d'une substitution primitive, une structure lisse naturelle en raison des arêtes émanant de chaque sommet qui sont soit de sommet, soit d'arête. Reprenant les notations de la définition 7.3, pour munir le complexe  $K_\sigma$  d'une structure lisse il suffit d'après la caractérisation 7.1.1 en chaque point  $p \in K_\sigma$ , de définir un côté gauche et un côté droit au point  $p$ .

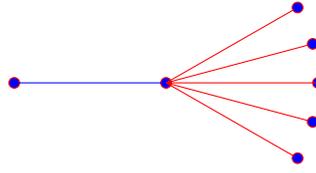


FIGURE 14 – Côtés  $St_G(v)$  en bleu et  $St_D(v)$  en rouge



FIGURE 15 – Côtés gauches et droit lorsque  $x$  intérieur à une arête

### 7.2.1 Structure lisse du complexe de Barge-Diamond

**Définition 7.3** (Structure lisse canonique). Soit  $\sigma$  une substitution primitive et  $K_\sigma$  son complexe de Barge-Diamond associé (voir la définition 3.11). La structure lisse canonique sur  $K_\sigma$  est la structure lisse telle que, pour tout  $x \in K_\sigma$  :

- si  $x$  est intérieur à une arête alors les cotés gauche et droit sont ceux de  $x$  dans l'intervalle qui tient lieu de voisinage.
- si  $x$  est un sommet, alors  $St_G(x)$  est l'ensemble formé de l'unique arête de tuile ayant pour sommet  $v$  et  $St_D(x)$  est l'ensemble des arêtes de sommet ayant pour sommet  $x$ .

**Remarque 7.4.** La figure 15 illustre les côtés gauche et droit dans le cas où  $x$  est intérieur à une arête tandis que la figure 14 représente les côtés gauche et droit dans le cas où  $x$  est un sommet.

### 7.2.2 Préservation de la structure lisse par l'application induite par une substitution

Le complexe de Barge-Diamond  $K_\sigma$  étant muni de sa structure lisse canonique, on cherche à déterminer si l'application  $S_\sigma : K_\sigma \rightarrow K_\sigma$  décrite dans la définition 3.11 préserve cette structure et ainsi obtenir  $\Omega_\sigma$  comme une limite projective de variétés branchées.

**Proposition 7.5.** Soit  $\sigma$  une substitution primitive et soit  $K_\sigma$  son complexe de Barge-Diamond associé (voir 3.11) muni de la structure lisse canonique définie en 7.3. Alors l'application  $S_\sigma : K_\sigma \rightarrow K_\sigma$  induite par  $\sigma$  (voir définition 3.11) est une application préservant la structure lisse.

Supposons que le complexe  $K_\sigma$  soit muni de sa structure lisse canonique comme décrite dans la définition 7.3. Nous rappelons deux faits à propos de l'application  $S$  que l'on peut retrouver dans l'article [BD08].

**Lemme 7.6.** [BD08] Avec les notations de la proposition 7.5 :

- Si  $\sigma(a.b)$  est de la forme  $\dots c.d \dots$  alors  $S_\sigma(e_{ab})$  est un sous-chemin de  $e_c.e_{cd}.e_d$ .

- Soit une arête de tuile  $e_a$  telle que  $\sigma(a) = a_1 \dots a_s$ . L'image  $S_\sigma(e_a)$  est un sous-chemin de  $e_{a_1} \cdot e_{a_1 a_2} \dots e_{a_{s-1} a_s} \cdot e_{a_s}$ .

Passons à la démonstration de la proposition 7.5.

Preuve : Soit  $x \in K_\sigma$ . Nous distinguons trois cas :

- Si l'image  $S_\sigma(x)$  est intérieure à une arête, alors il existe un voisinage de  $S_\sigma(x)$  identique à la figure 15 donc  $f$  envoie naturellement de manière bijective  $\{St_G(x), St_D(x)\}$  sur  $\{St_G(S_\sigma(x)), St_D(S_\sigma(x))\}$ .
- Si  $x$  est intérieur à une arête et  $S_\sigma(x) = v$  est un sommet de  $K_\sigma$ , alors d'après la remarque 7.4 et le point (1) du lemme 7.6, les tournants empruntés sont de la forme  $\{e_a, e_{ab}\}$  donc  $\{St_G(x), St_D(x)\}$  s'envoie bijectivement sur  $\{St_G(S_\sigma(x)), St_D(S_\sigma(x))\}$ .
- Si  $x$  et  $S_\sigma(x)$  sont des sommets du complexe  $K_\sigma$ , alors  $St_G(x) = \{e_a\}$ ,  $St_D(x) = \{e_{ab_1}, \dots, e_{ab_j}\}$  et  $St_G(S_\sigma(x)) = \{e_{a_k}\}$ ,  $St_D(S_\sigma(x)) = \{e_{a_k b} \mid a_k b \in \mathcal{L}^2\}$ . D'après la remarque 7.4 et le point (2) du lemme 7.6,  $\{St_G(x), St_D(x)\}$  s'envoie bijectivement sur  $\{St_G(S_\sigma(x)), St_D(S_\sigma(x))\}$ .  $\square$

### 7.2.3 Conclusion

Nous pouvons maintenant prouver le résultat suivant :

**Proposition 7.7.** *Soit  $(f, G)$  un représentant efficace primitif. L'espace  $\Omega_{\mathbb{R}}(f, G)$  possède une structure lisse préservée par les actions de  $\mathbb{R}$  et  $f$ .*

Preuve : D'après la proposition 3.22, la substitution  $\sigma_f$  induite par  $(f, G)$  est soit non-orientable et dans ce cas elle est primitive et apériodique, soit  $\sigma_f$  est orientable et elle induit sur une partition de l'alphabet  $\mathcal{A}$  où elle est définie, deux substitutions  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  qui sont primitives et apériodiques. D'après la proposition 7.5, si  $\sigma_f$  est non orientable alors  $S_{\sigma_f} : K_{\sigma_f} \rightarrow K_{\sigma_f}$  est lisse. Sinon,  $S_1 : K_{\sigma_1} \rightarrow K_{\sigma_1}$  et  $S_2 : K_{\sigma_2} \rightarrow K_{\sigma_2}$  sont lisses. Nous pouvons en déduire par le théorème 3.34 que l'espace  $\Omega_{\mathbb{R}}(f, G)$  possède une structure lisse en tant qu'espace homéomorphe à une limite projective de réseaux ferroviaires connectés par des applications lisses.  $\square$

Cette structure n'est pas en soit une nouveauté, en effet un espace de pavages de la droite réelle apériodiques pour l'action de  $\mathbb{R}$  peut s'obtenir comme une limite projective de variétés branchées  $\varprojlim (X_i, f_i)$ . La structure lisse des ces limites inverses a toujours été étudiée dans les cas où les volumes des graphes  $X_i$  tendent vers l'infini.

### 7.3 Structure lisse sur $\Omega_{GA}(f, G)$

La notion de variété branchée existe en dimension 2 mais elle est plus compliquée à définir que dans le cas de la dimension 1 car en un point de branchement il n'y a pas nécessairement de côté gauche et droit.

### 7.3.1 Surfaces branchées

Nous reprenons ici le formalisme des surfaces branchées de l'article [Wil74] même si nous ne l'utiliserons pas dans toute sa généralité. Par exemple, l'auteur permet que dans sa définition de variété branchée la possibilité d'avoir une infinité de points de branchement ce qui ne sera jamais notre cas. On pourra également se référer à l'article [LR13] pour comprendre les liens entre laminations de codimension 0 et limites inverses en toute généralité.

**Définition 7.8** ([Wil74], chapitre 1), Surface branchée). *Une surface branchée est un espace métrique compact  $\mathcal{S}$  muni :*

- d'une famille finie de fermés  $\{U_j \mid j \in J\}$  de  $\mathcal{S}$  dits modèles locaux.
- pour tout  $j \in J$ , d'une famille finie de fermés  $(D_{i,j})_{i \in I_j}$  de  $U_j$ .
- pour tout  $j \in J$ , d'une application de classe  $\mathcal{C}^1$ ,  $\pi_j : U_j \longrightarrow \mathbb{D}_j^2$  où  $\mathbb{D}_j^2$  désigne un disque fermé dans  $\mathbb{R}^2$ .

De plus, ces objets doivent vérifier les conditions suivantes :

1. pour tout  $j \in J$ ,  $\cup_{i \in I_j} D_{i,j} = U_j$  et  $\cup_{j \in J} U_j = \mathcal{S}$ .
2. pour tout  $j \in J$  et  $i \in I_j$ , la restriction de  $\pi_j$  au sous-espace  $D_{i,j}$  est un homéomorphisme sur son image relativement au bord de  $\mathbb{D}_j^2$ .
3. il existe un cocycle de difféomorphismes de classe  $\mathcal{C}^1$   $\{\alpha_{j,k}\}$  tels que  $\pi_j = \alpha_{j,k} \circ \pi_k$  lorsque il y a compatibilité. L'application  $\alpha_{j,k}$  est définie sur  $\pi_k(U_j \cap U_k)$

Lorsque un ensemble  $\mathcal{S}$  vérifie tous ces axiomes on dit qu'il est muni d'une structure lisse.

**Exemple 7.9.** *Le recollement de deux tores tangents le long d'une courbe lisse est une surface branchée.*

En pratique, les surfaces branchées auxquelles nous nous intéressons sont des CW-complexes finis de dimension 2, obtenus par des recollements de 2-cellules.

### 7.3.2 Préservation de la structure lisse d'une surface branchée

Les applications différentiables entre surfaces branchées se définissent de la manière suivante.

**Définition 7.10** ([Wil74], chapitre 1) Application différentiable entre surfaces branchées). *Reprenons les notations de la définition 7.8. Soit  $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$  deux surfaces branchées. L'application  $F : \mathcal{S}_1 \longrightarrow \mathcal{S}_2$  est lisse si elle satisfait les conditions suivantes :*

1. pour tout  $j, l \in J$  et  $i \in I_j$ , l'application

$$F_{l,i}^j : \pi_j(D_{i,j}) \xrightarrow{((\pi_j)|_{D_{i,j}})^{-1}} D_{i,j} \xrightarrow{F|_{(D_{i,j} \cap F^{-1}(U_l))}} U_l \xrightarrow{\pi_l} \mathbb{R}^2$$

*est de classe  $\mathcal{C}^1$  dans l'ouvert de  $\mathbb{R}^2$  sur lequel elle est définie.*

2. pour tout  $x \in \mathcal{S}_1$ , si  $y = \pi_j(x)$  le germe de  $F_{l,i}^j$  en  $y$  est indépendant de  $j \in J$ .

**Exemple 7.11.** Une application de classe  $C^1$  sur une surface compacte est un exemple très simple d'application lisse sur une surface compacte. Il existe, bien entendu, des exemples plus complexes comme nous allons le voir dans la suite de cette section.

À partir de cette définition nous pouvons montrer facilement le lemme suivant :

**Lemme 7.12.** Une application entre surfaces branchées  $F : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S}$  qui envoie tout petit voisinage lisse d'un point  $x \in \mathcal{S}$  dans un voisinage lisse de  $F(x)$  préserve la structure lisse de la surface branchée.

### 7.3.3 Structure lisse préservée sur la suspension du complexe de Barge-Diamond

**Proposition 7.13.** Soit  $\sigma$  une substitution primitive,  $K_\sigma$  le complexe de Barge-Diamond associé et  $S_\sigma$  l'application induite par  $\sigma$  sur  $K_\sigma$  (voir définition 3.11). On suppose  $K_\sigma$  muni de sa structure lisse canonique (voir définition 7.3). L'espace suspension  $M_S(K_\sigma)$  est muni d'une structure lisse canonique et l'application induite sur la suspension par l'application  $S_\sigma$  (voir définition 2.4) préserve cette structure lisse.

Nous démontrons dans un premier temps un lemme assurant le fait que le complexe de Barge-Diamond associé à une substitution primitive peut-être choisi (ce complexe dépend du choix de la longueur des arêtes qui est paramétrée par une quantité  $\epsilon$ ) de manière à avoir une suspension ayant des modèles locaux simples.

**Lemme 7.14.** Avec les notations de la définition 3.11, si  $\sigma$  est une substitution primitive on peut choisir  $\epsilon > 0$  dans la définition 3.11 tel que l'application  $S_\sigma : K_\sigma \longrightarrow K_\sigma$  induite par  $\sigma$  sur le complexe de Barge-Diamond  $K_\sigma$  associé satisfasse la propriété suivante :

Pour tout sommet  $v \in V(K_\sigma)$ ,  $S_\sigma(v)$  est dans l'intérieur d'une arête.

Preuve du lemme 7.14 : Les sommets du complexe de Barge-Diamond  $K_\sigma$  sont de la forme  $(v_a - \epsilon, a) \sim (-\epsilon, ab)$  et  $(\epsilon, a) \sim (\epsilon, ba)$ . De plus, l'application  $S$  est l'unique application  $S_\sigma : K_\sigma \longrightarrow K_\sigma$  satisfaisant  $S_\sigma \circ p_\sigma = p_\sigma \circ \Sigma$  où l'application  $\Sigma : \Omega_\sigma \longrightarrow \Omega_\sigma$  est induite par la substitution  $\sigma$  sur l'espace de pavage substitutif  $\Omega_\sigma$ . En sachant que l'application  $\Sigma$  dilate les longueurs d'un facteur  $\lambda > 1$  dans l'espace de pavages, il suffit de choisir  $\epsilon$  dans la définition de 3.11 tel que pour tout  $a \in \mathcal{A}$  (l'alphabet de la substitution),  $\lambda\epsilon \notin \mathbb{Z}(v_a - \epsilon)$  et  $\lambda\epsilon \notin \mathbb{Z}\epsilon$ . Un tel réel  $\epsilon$  existe : il suffit en effet de le choisir dans l'ensemble  $\mathcal{E} = ]0, \min_{a \in \mathcal{A}} \{ \frac{v_a}{2\lambda} \} / ( \{ \frac{kv_a}{k+\lambda} \mid a \in \mathcal{A}, k \in \mathbb{Z} \} )$  qui est non vide.  $\square$

À l'aide du lemme précédent, nous pouvons démontrer la proposition 7.13.

Preuve de la proposition 7.13 : Supposons que la substitution  $\sigma$  satisfasse les conditions du lemme 7.14. Les voisinages locaux sont de la forme donnée dans la figure 16. On a 4 modèles locaux dépendant de la nature de  $x$  et  $S_\sigma^{-1}(x)$  selon que  $x$  soit un sommet ou qu'il soit intérieur à une arête. Soit  $x$  un point de  $M_{S_\sigma}(K_\sigma)$  et  $\mathcal{U}(x)$  un petit voisinage de  $x$ . On distingue deux cas :

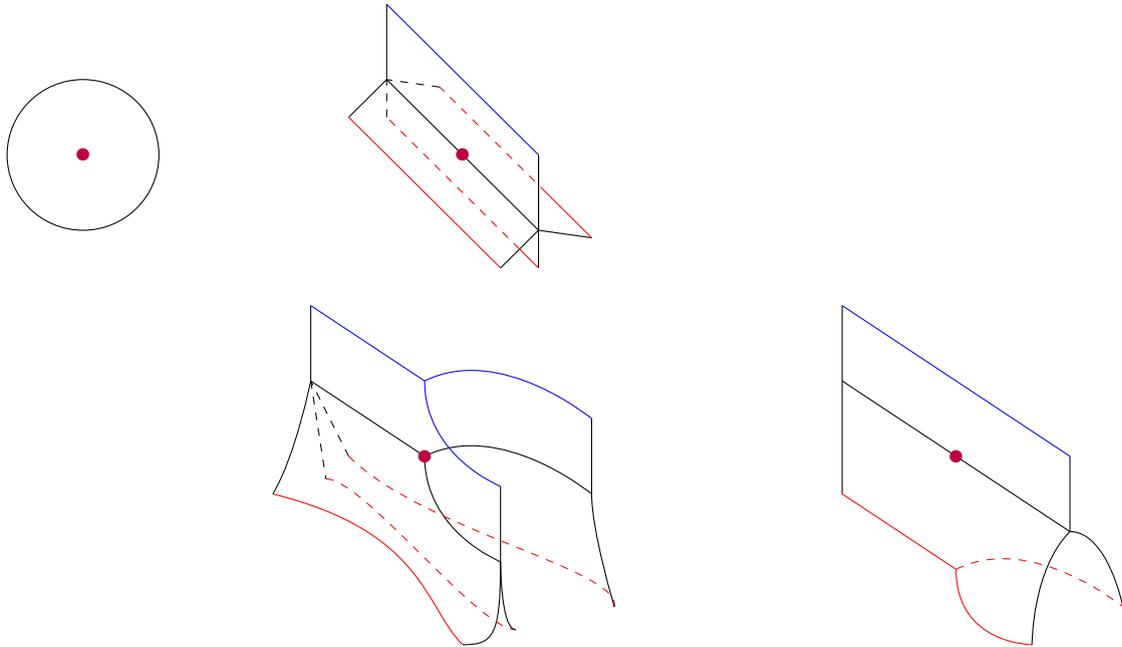


FIGURE 16 – Modèles locaux de  $M_S(K_\sigma)$

- Si le voisinage  $\mathcal{U}(x)$  de la suspension est homéomorphe à un disque  $\mathbb{D}^2$  alors sa structure lisse est évidente.
- Si le voisinage  $\mathcal{U}(x)$  n'est pas homéomorphe à un disque  $\mathbb{D}^2$  alors il est homéomorphe à un des 3 autres modèles locaux de la figure 16. Ces espaces possèdent deux côtés. On peut choisir le côté gauche comme étant l'ensemble des rectangles ayant une arête rouge et le côté droit l'ensemble des rectangles ayant une arête bleue.

L'application  $\tilde{S}_\sigma$  induite par  $S_\sigma$  sur la suspension  $M_{S_\sigma}(K_\sigma)$  (voir la définition 2.4) préserve la structure lisse car elle préserve les niveaux et envoie le réseau ferroviaire plongé dans chaque niveau de  $M_{S_\sigma}(K_\sigma)$  sur un réseau ferroviaire, ce qui permet de conclure par le lemme 7.12.  $\square$

Nous pouvons maintenant grâce au lemme précédent démontrer la proposition 7.13.

**Proposition 7.15.** *Soit  $(f, G)$  un représentant efficace primitif. L'espace  $\Omega_{GA}(f, G)$  est homéomorphe à une limite projective  $\varprojlim (X_i, S_i)$  où pour tout  $i \geq 0$ ,  $X_i = X$  est une surface branchée et l'application  $S_i = S$  en préserve la structure lisse.*

Preuve : D'après la proposition 6.32, nous distinguons trois cas :

- Lorsque  $\sigma_f$  est non-orientable, par la proposition 3.22, la substitution  $\sigma_f$  est primitive. On en déduit que la structure lisse canonique de  $K_{\sigma_f}$  (voir la définition 7.3) est, à l'aide de la proposition 7.5, préservée par l'application  $S_{\sigma_f}$ .

Ainsi, la proposition 7.13 assure que la suspension  $M_{S_{\sigma_f}}(K_{\sigma_f})$  possède une structure lisse canonique et que l'application induite en suspension  $\tilde{S}_{\sigma_f} : M_{S_{\sigma_f}}(K_{\sigma_f}) \longrightarrow M_{S_{\sigma_f}}(K_{\sigma_f})$  préserve cette structure lisse. On en conclut que l'espace  $\varprojlim(M_{S_{\sigma_f}}(K_{\sigma_f}), \tilde{S}_{\sigma_f})$  possède une structure lisse.

- D'après la proposition 3.22, les substitutions  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  sont primitives. On en déduit, en reprenant les mêmes arguments du cas où  $\sigma_f$  est non-orientable, que les espaces  $\varprojlim(M_{S_1}(K_{\sigma_1}), \tilde{S}_1)$  et  $\varprojlim(M_{S_2}(K_{\sigma_2}), \tilde{S}_2)$  sont des limites projectives de surfaces branchées connectées par des applications préservant leur structure lisse. Ainsi,  $\Omega_{GA}(f, G)$  possède une structure lisse.
- Dans ce cas,  $\Omega_{GA}(f, G)$  est homéomorphe à  $\varprojlim(M_{\tilde{S}_1^2}(K_{\sigma_2^2}), \tilde{S}_1^2) \cup \varprojlim(M_{\tilde{S}_2^2}(K_{\sigma_2^2}), \tilde{S}_2^2)$ . D'après la proposition 3.22  $\sigma_1^2$  et  $\sigma_2^2$  sont primitives. En reprenant les mêmes arguments que dans le cas où  $\sigma_f$  est non-orientable, les espaces  $\varprojlim(M_{S_1^2}(K_{\sigma_1^2}), \tilde{S}_1^2)$  et  $\varprojlim(M_{S_2^2}(K_{\sigma_2^2}), \tilde{S}_2^2)$  sont des limites projectives de surfaces branchées connectées par des applications préservant leur structure lisse. Ainsi l'espace  $\Omega_{GA}(f, G)$  possède une structure lisse.  $\square$

#### 7.3.4 Conclusion

De la proposition 7.13, on obtient immédiatement :

**Corollaire 7.16.** *Les espaces de pavages  $\Omega_{GA}(f, G)$  sont munis d'une structure lisse préservée par l'action de  $GA$  et de  $f$ .*

## 8 Exemples

### 8.1 Un exemple de substitution préservant l'orientation

Soit l'alphabet  $\mathcal{A} = \{a, b, c\}$ , considérons la substitution suivante définie dans l'exemple 2.29 :

$$\begin{aligned} \sigma : \mathcal{A} &\longrightarrow \mathcal{A}^* \\ a &\longmapsto ab \\ b &\longmapsto acbb \\ c &\longmapsto a \end{aligned}$$

La matrice de substitution associée à  $\sigma$ ,  $M_\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  est primitive, on en déduit

que la substitution  $\sigma$  est ainsi primitive. Sa valeur propre de Perron-Frobenius est la racine de plus grand module du polynôme  $X^3 - 4X^2 + 4X - 1$  qui est  $\lambda \cong 2,77$ . La longueur des tuiles  $t_a, t_b, t_c, t_{\bar{a}}, t_{\bar{b}}, t_{\bar{c}}$  munissant le graphe  $G$  d'un volume égal à 1 est donnée par :

$$l_a = l_{\bar{a}} \cong 0,08$$

$$l_b = l_{\bar{b}} \cong 0,14$$

$$l_c = l_{\bar{c}} \cong 0,28$$

C'est une substitution provenant de l'automorphisme externe  $[\varphi]$  du groupe libre  $F_3 = \langle a, b, c \rangle$  qui a pour inverse l'automorphisme :

$$\begin{aligned} \varphi^{-1} : F_3 &\longrightarrow F_3 \\ a &\longmapsto c \\ b &\longmapsto c^{-1}a \\ c &\longmapsto c^{-1}ba^{-1}ca^{-1}c \end{aligned}$$

L'automorphisme  $\varphi$  est positif et IWIP, donc le représentant canonique  $(f, R_3)$  est un représentant efficace primitif de  $\varphi$ . Soit l'alphabet  $\mathcal{A}_G = \{a, b, c, \bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\}$ . La substitution induite  $\sigma_f : \mathcal{A}_G \longrightarrow \mathcal{A}_G^*$  par  $(f, R_3)$  (voir 3.19) est orientable et préserve l'orientation. Ainsi, l'alphabet  $\mathcal{A}_G = \{a, b, c, \bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\}$  se décompose en une partition de deux sous-alphabets  $\mathcal{A}_G = \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$  où  $\mathcal{A}_1 = \{a, b, c\}$  et  $\mathcal{A}_2 = \{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\}$ . D'après la proposition 3.22, la substitution  $\sigma_f$  induit sur  $\mathcal{A}_1$  (respectivement  $\mathcal{A}_2$ ), une substitution primitive  $\sigma_1$  (respectivement  $\sigma_2$ ) :

$$\begin{aligned} \sigma_1 : \mathcal{A}_1 &\longrightarrow \mathcal{A}_1 \\ a &\longmapsto ab \\ b &\longmapsto acbb \\ c &\longmapsto a \end{aligned}$$

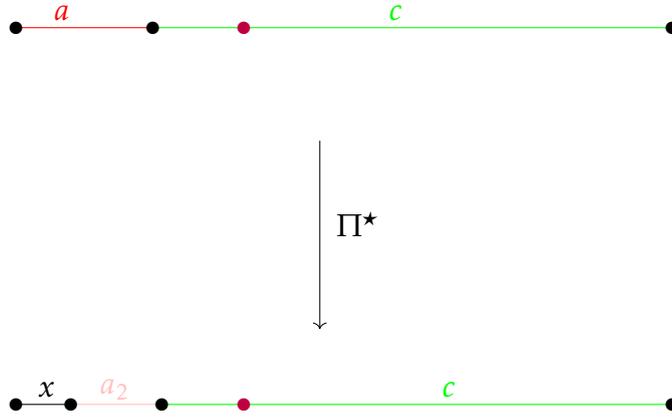


FIGURE 17 – Image d’un patch de  $\Omega_{\mathbb{R}}(f_1, R_3)$  par l’application  $\Pi^*$

$$\begin{aligned} \sigma_2 : \mathcal{A}_2 &\longrightarrow \mathcal{A}_2 \\ \bar{a} &\longmapsto \bar{b}\bar{a} \\ \bar{b} &\longmapsto \bar{b}\bar{b}\bar{c}\bar{a} \\ \bar{c} &\longmapsto \bar{a} \end{aligned}$$

Dans le cas présent, le complexe que l’on note  $K_{\sigma_f}$  (voir la figure 18) est une union disjointe de deux complexes de Barge-Diamond des deux substitution primitives  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  décrites dans la proposition 3.22.

Soit  $(f_1, R_3)$  le représentant canonique de l’automorphisme  $\varphi$ . Ce représentant est efficace et irréductible. De plus, l’image de chacune des arêtes  $a, b, c$  commencent par le chemin  $a$ . On peut donc par définition d’un pli (voir la définition 2.61) appliquer un pli de  $f_1$  en  $a$  et  $b$  de la manière suivante. On subdivise les arêtes  $a$  et  $b$  en  $a = a_1.a_2$  et  $b = b_1.b_2$  de manière à ce que  $f_1(a_1) = a_1.a_2$  et  $f_1(b_1) = a_1.a_2$ . On peut donc identifier  $a_1$  et  $b_1$  et on obtient ainsi un graphe  $G_2$  une nouvelle application pliée suivant la paire  $(a_1, b_1)$  que l’on note  $f_2$  :

$$\begin{aligned} f_2 : G_2 &\longrightarrow G_2 \\ x &\longmapsto xa_2 \\ a_2 &\longmapsto xb_2 \\ b_2 &\longmapsto a_2cx b_2 x b_2 \\ c &\longmapsto xa_2 \end{aligned}$$

Notons  $\pi : R_3 \longrightarrow G_2$  le pli de  $f_1$  suivant la paire d’arêtes  $(a_1, b_1)$  et décrivons l’effet de l’application  $\Omega_{\mathbb{R}}$  induit par le mouvement élémentaire T sur un patch du pavage pavage de  $\Omega_{\mathbb{R}}(f_1, R_3)$ . Sur la figure 17, on peut voir l’image de  $\Omega_{\mathbb{R}}$  sur une copie du chemin  $f_1^2(c)$  dans un pavage de  $\Omega_{\sigma_1} \subset \Omega_{\mathbb{R}}(f_1, R_3)$  où le point violet correspond au point base de chacun des pavages.

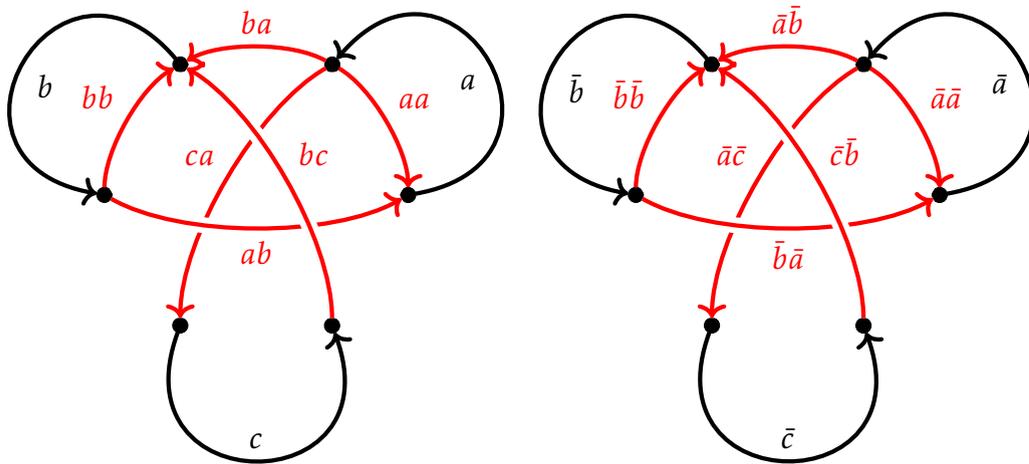


FIGURE 18 –  $K_{\sigma_f} = K_{\sigma_1} \cup K_{\sigma_2}$

En reprenant le travail que nous avons effectué au chapitre 6, nous pouvons construire à partir de des éléments de  $\Omega_{\mathbb{R}}(f_1, R_3)$  des pavages faiblement apériodiques du plan hyperbolique. Nous donnons ici un patch d'un élément appartenant à la composante minimale de l'espace  $\Omega_{GA}(f_1, R_3)$  homéomorphe, d'après la proposition 6.31, à la suspension  $M_{S_1}(\varprojlim(M_{S_1}(K_{\sigma_1})))$ .

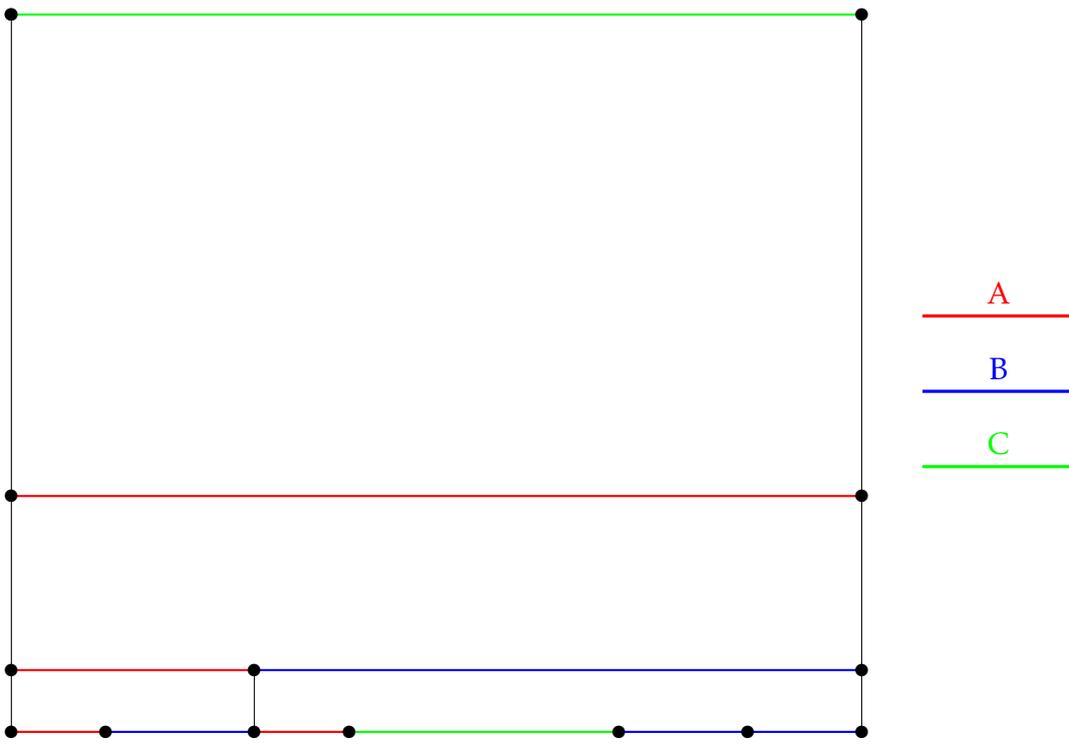


FIGURE 19 – Patches rectangulaires de  $\Omega_{GA}(f)$  de la forme  $P_{(C),3}$

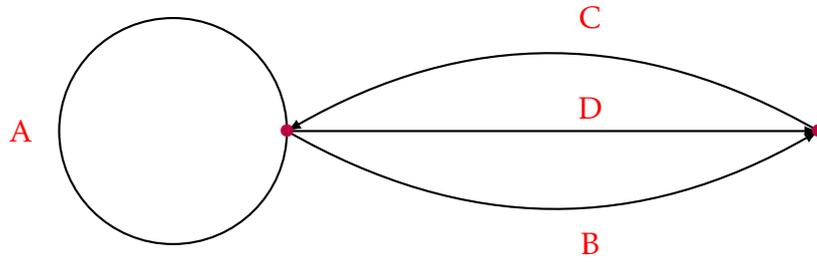


FIGURE 20 – Graphe G du représentant efficace F de  $\tau^{-1}$

## 8.2 Un exemple de substitution qui ne préserve pas l'orientation

Soit  $\tau : F_3 = \langle a, b, c \rangle \rightarrow F_3$  l'automorphisme dit de Tribonacci suivant :

$$\begin{aligned} \tau : F_3 &\longrightarrow F_3 \\ a &\mapsto ab \\ b &\mapsto ac \\ c &\mapsto a \end{aligned}$$

Cet automorphisme est irréductible à puissance irréductible et admet l'inverse suivant :

$$\begin{aligned} \tau^{-1} : F_3 &\longrightarrow F_3 \\ a &\mapsto c \\ b &\mapsto \bar{c}a \\ c &\mapsto \bar{c}b \end{aligned}$$

Le représentant canonique  $(f, R_3)$  de l'automorphisme  $\tau^{-1}$  n'est pas efficace. En effet,  $(\tau^{-1})^3(a) = \bar{b}c.\bar{c}a$ . Soit G le graphe donné dans la figure 20. L'application  $(F, G)$  suivante est un représentant efficace de l'automorphisme  $\tau^{-1}$  :

$$\begin{aligned} F : G &\longrightarrow G \\ A &\mapsto DC \\ B &\mapsto \bar{D}A \\ C &\mapsto B \\ D &\mapsto \bar{C} \end{aligned}$$

La matrice de transition du représentant  $(F, G)$  est  $M_F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

Le polynôme caractéristique de la matrice  $M_F$  est  $X^4 - 2X - 1$ . Ainsi, un calcul montre que la valeur propre de Perron – Frobenius de la matrice  $M_F$  est  $\lambda \cong 1,39$ .

Soit l'alphabet  $\mathcal{A}_G = \{A, B, C, D, \bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D}, \}$  et  $\sigma_F$  la substitution induite par  $(f, G)$  :

$$\begin{aligned}
\sigma_F : \mathcal{A}_G &\longrightarrow \mathcal{A}_G \\
A &\longmapsto DC \\
B &\longmapsto \bar{D}A \\
C &\longmapsto B \\
D &\longmapsto \bar{C} \\
\bar{A} &\longmapsto \bar{C}\bar{D} \\
\bar{B} &\longmapsto \bar{A}D \\
\bar{C} &\longmapsto \bar{B} \\
\bar{D} &\longmapsto C
\end{aligned}$$

La substitution  $\sigma_F$  est non-orientable, ainsi un pavage dans l'espace  $\Omega_{\mathbb{R}}(F, G)$  est construit à partir de toutes les prototuites  $t_A, t_B, t_C, t_D, t_{\bar{A}}, t_{\bar{B}}, t_{\bar{C}}, t_{\bar{D}}$  qui ont pour longueur :

$$l_A = l_{\bar{A}} \cong 0,485$$

$$l_B = l_{\bar{B}} \cong 0,5$$

$$l_C = l_{\bar{C}} \cong 0,37$$

$$l_D = l_{\bar{D}} \cong 0,3$$

La figure 21 représente un patch rectangulaire des pavages du plan hyperbolique associé au représentant  $(F, G)$ .

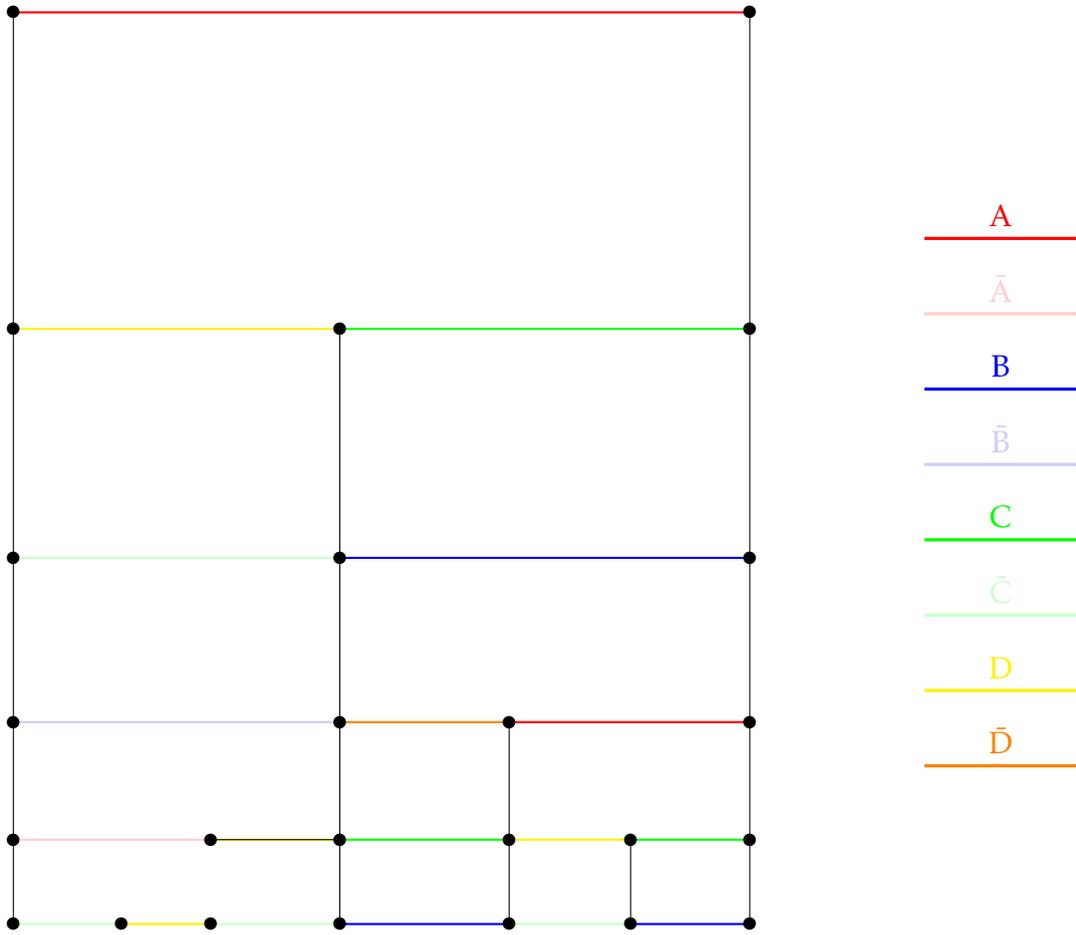


FIGURE 21 – Patch rectangulaire  $P_{(A),5}$  d'un pavage de  $\Omega_{GA}(F, G)$

## 9 Perspectives

### 9.1 Type topologique et classes de conjugaison des automorphismes IWIP

Dans la section 5 de cette thèse, nous obtenons au théorème 5.12 un invariant topologique représentant une classe de conjugaison d'automorphismes IWIP du groupe libre  $F_N$ . Il se pose alors naturellement la question de sa réciproque :

**Question.** *Soit  $(f_1, G_1)$ ,  $(f_2, G_2)$  deux représentants efficaces primitifs. Existe-t-il une condition nécessaire et suffisante sur les objets  $(f_1, G_1)$  et  $(f_2, G_2)$  pour qu'ils vérifient  $\Omega_{\mathbb{R}}(f_1, G_1) \cong \Omega_{\mathbb{R}}(f_2, G_2)$  ?*

Soit  $\varphi$  et  $\psi$  deux automorphismes IWIP du groupe libre  $F_N$ . Si  $\varphi$  et  $\psi$  sont conjugués dans  $Aut(F_N)$ , alors leurs espaces de pavages induits (voir la définition 3.26) respectifs  $\Omega_{\mathbb{R}}(\varphi)$  et  $\Omega_{\mathbb{R}}(\psi)$  sont homéomorphes. La condition d'être conjugué dans  $Out(F_N)$  n'est pas nécessaire pour que les espaces de pavages de la forme  $\Omega_{\mathbb{R}}(f, G)$  soient homéomorphes comme nous l'avons montré dans la proposition 5.16. Une conjecture raisonnable est que les espaces de pavages de la forme  $\Omega_{\mathbb{R}}(f, G)$  sont homéomorphes si  $(f, G)$  est un représentant efficace primitif de la puissance d'un même automorphisme IWIP de  $Out(F_N)$ .

Nous pourrions utiliser le théorème suivant dû à M.Barge et D.Swanson qui permet de classifier complètement le type topologique d'un espace substitutif (primitif) de la droite réelle :

**Théorème** ([BS07]). *Deux espaces de pavages de la droite réelle  $\Omega_{\sigma}$  et  $\Omega_{\theta}$  provenant de substitutions primitives  $\sigma$  et  $\theta$  sont homéomorphes si et seulement s'il existe des entiers  $n$  et  $m \geq 0$  tels que les systèmes dynamiques  $(\Sigma^m, \Omega_{\sigma})$  et  $(\Theta^n, \Omega_{\theta})$  soient topologiquement conjugués, où les applications  $\Sigma : \Omega_{\sigma} \rightarrow \Omega_{\sigma}$  et  $\Theta : \Omega_{\theta} \rightarrow \Omega_{\theta}$  désignent les applications induites par les substitutions  $\sigma$  et  $\theta$  sur leur espace de pavages respectif.*

### 9.2 Oubli de l'orientation

Dans la section 2, nous avons construit des pavages substitutifs de  $\mathbb{R}$  dont l'ensemble des prototiles  $\mathfrak{B}$  sont étiquetées par les arêtes orientées du graphe  $G$  d'un représentant efficace primitif  $(f, G)$  d'un automorphisme IWIP du groupe libre  $F_N$ .

Reprenons les notations de la sous-section 3.2.1. Oublier l'orientation des arêtes dans l'espace  $\Omega_{\mathbb{R}}(f, G)$  revient donc à identifier les éléments  $a$  et  $\bar{a} = \Theta(a)$ . Ce qui signifie que l'on s'intéresse à l'espace de pavages quotient  $\Omega_{\mathbb{R}}(f, G)/\Theta$ . De manière plus explicite, étant donnée la substitution induite  $\sigma_f$  définie sur l'alphabet  $\mathcal{A}_G = \{a_1, \dots, a_s, \bar{a}_1, \dots, \bar{a}_s\}$  par le représentant  $(f, G)$ . Nous définissons la substitution  $\tau_f$  sur l'alphabet  $\mathcal{A} = \{a_1, \dots, a_s\}$  comme suit. Pour tout  $a_i \in \mathcal{A}$ , nous définissons  $\tau_f(a_i)$

comme le mot  $\sigma_f(a_i)$  où nous remplaçons les occurrences des éléments  $b$  de l'ensemble  $\{\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_s\}$  par  $\Theta(b)$ .

Par exemple la substitution  $\sigma_f$  induite par le représentant  $(f, G)$  sur l'alphabet  $\mathcal{A}_G = \{A, B, C, D, \bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D}, \}$ , donnée par :

$$\begin{aligned} \sigma_F : \mathcal{A}_G &\longrightarrow \mathcal{A}_G \\ A &\longmapsto DC \\ B &\longmapsto \bar{D}A \\ C &\longmapsto B \\ D &\longmapsto \bar{C} \\ \bar{A} &\longmapsto \bar{C}\bar{D} \\ \bar{B} &\longmapsto \bar{A}D \\ \bar{C} &\longmapsto \bar{B} \\ \bar{D} &\longmapsto C \end{aligned}$$

Soit l'alphabet  $\mathcal{A} = \{A, B, C, D\}$ . La substitution d'oubli d'orientation de  $\sigma_F$  est donnée par :

$$\begin{aligned} \sigma_F : \mathcal{A} &\longrightarrow \mathcal{A} \\ A &\longmapsto DC \\ B &\longmapsto DA \\ C &\longmapsto B \\ D &\longmapsto C \end{aligned}$$

Cette substitution est clairement primitive, par primitivité de la substitution  $\sigma_F$ . De plus, elle possède la même matrice de transition que le représentant  $(f, G)$  donc sa valeur propre de Perron-Frobenius est la même que celle de la substitution  $\sigma_F$ . Ce raisonnement s'applique également pour la longueur des tuiles.

Une question que nous nous posons est de comparer la topologie et la dynamique des espaces de pavages de la forme  $\Omega_{\mathbb{R}}(f, G)$  et  $\Omega_{\mathbb{R}}(f, G)/\Theta$ .

Nous émettons la conjecture suivante, reliant les graphes de *Whitehead* d'un représentant efficace primitif  $(f, G)$  d'un automorphisme IWIP du groupe libre, à l'espace de pavage  $\Omega_{\tau_f}$  :

**Conjecture 9.1.** *Soit  $(f, G)$  un représentant efficace primitif de l'automorphisme IWIP externe  $[\varphi]$ . Alors il existe une application  $\tilde{f} : Wh_G(f) \longrightarrow Wh_G(f)$  telle que :*

- *l'espace  $\Omega_{\mathbb{R}}(f, G)$  est un revêtement à deux feuilletés de l'espace  $\Omega_{\mathbb{R}}(f, G)/\Theta$ .*
- *L'espace  $\Omega_{\mathbb{R}}(f, G)/\Theta$  est homéomorphe à la limite projective  $\varprojlim (Wh_G(f), \tilde{f})$ .*

Nous pourrions nous référer à la thèse de Dan Rust [Rus16] où les espaces de pavages quotients provenant d'une substitution sont étudiés.

### 9.3 Cohomologie de Čech

Nous nous intéressons dans cette sous-section à un invariant topologique bien étudié en théorie des pavages : la cohomologie de Čech des espaces de pavages substitutifs.

Nous pouvons, à l'aide de la cohomologie de ces espaces, calculer la cohomologie des espaces de pavages de la forme  $\Omega_{\mathbb{R}}(f, G)$ . D'après la proposition 3.33, il existe un nombre fini de substitution primitives  $\sigma_i$  pour  $i \in I$  telles que l'espace  $\Omega_{\mathbb{R}}(f, G)$  soit égal à  $\cup_{i \in I} \Omega_{\sigma_i}$ . Nous en déduisons que les groupes de cohomologie de Čech de  $\Omega_{\mathbb{R}}(f, G)$  sont égaux à  $\check{H}^k(\Omega_{\mathbb{R}}(f, G)) = \oplus_{i \in I} \check{H}^k(\Omega_{\sigma_i})$ . Or, l'espace de pavages  $\Omega_{\mathbb{R}}(f, G)$  étant une lamination de dimension 1, nous en déduisons que pour tout  $k \geq 2$ , les groupes de cohomologie sont triviaux. De plus pour tout  $i \in I$ , les espaces  $\Omega_{\sigma_i}$  sont connexes donc  $\check{H}^0(\Omega_{\mathbb{R}}(f, G)) \cong \mathbb{Z}^I$ . Le seul groupe pour lequel il y a une difficulté dans le calcul est donc  $\check{H}^1(\Omega_{\mathbb{R}}(f, G))$ .

C'est dans cet optique qu'ont été introduits dans l'article [BD08] les complexes de Barge-Diamond d'une substitution primitive. Nous décrivons brièvement comment calculer le premier groupe de cohomologie d'un espace de pavages de la droite réelle provenant d'une substitution primitive.

Soit  $\sigma : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  une substitution primitive,  $K_{\sigma}$  son complexe de Barge-Diamond et  $S_{\sigma} : K_{\sigma} \rightarrow K_{\sigma}$  l'application induite par la substitution  $\sigma$  sur le complexe  $K_{\sigma}$  définis respectivement dans la définition 3.11 et la proposition 3.14.

Par le théorème 3.17 qui assure que  $\Omega_{\sigma} \cong \varprojlim (K_{\sigma}, S)$ , nous obtenons :

$$\check{H}^1(\Omega_{\sigma}) \cong \varinjlim (\check{H}^1(K_{\sigma}), S^{\star})$$

Il est bien connu, par exemple, que pour la substitution primitive de Fibonacci notée  $\sigma$  de la droite réelle,

$$\check{H}^0(\Omega_{\sigma}) = \mathbb{Z}$$

$$\check{H}^1(\Omega_{\sigma}) = \mathbb{Z}^2$$

Il serait utile de comprendre en quoi la cohomologie de Čech permet de donner des informations sur les classes de conjugaisons d'automorphismes IWIP car ils sont simples à calculer.

## Table des figures

1	Tore à une composante de bord $S_{1,1}$ . . . . .	11
2	Construction de la fractale de Rauzy $\mathcal{T}_\tau$ (d'après Wikimedia Commons, licence CC-BY-SA) . . . . .	13
3	Graphe de Whitehead local $Wh_{R_2}(\star, f)$ du représentant canonique de Fibonacci, (image réalisée à l'aide du logiciel <i>Grout</i> de Dan Rust) . . . . .	38
4	Homotopie de valence 2 de $G$ suivant une paire d'arêtes $(e_{s-1}, e_s)$ . . . . .	41
5	Pli de $G$ à un tournant . . . . .	41
6	Écrasement d'une forêt invariante $\mathcal{F} = \{f_1, f_2, f_3\}$ par $(f, G)$ . . . . .	42
7	Complexe de Barge-Diamond associé à la substitution $\sigma_F$ non-orientable, (image réalisée à l'aide du logiciel <i>Grout</i> de Dan Rust) . . . . .	50
8	Complexe de Barge-Diamond de la substitution de Fibonacci . . . . .	51
9	Graphe de Whitehead du représentant efficace $(F, G)$ associé à l'automorphisme $\tau^{-1}$ (voir 8.2) . . . . .	56
10	Revêtement universel de $(R_2, \star)$ (d'après Wikimedia Commons, licence CC-BY-SA) . . . . .	65
11	Continuité de $J$ . . . . .	87
12	Patch rectangulaire $P_{(a),3}$ du pavage hyperbolique de Fibonacci . . . . .	91
13	Image pour le pavage de Fibonacci du patch rectangulaire $P_{(a),3}$ par l'application $\mathcal{D}$ . . . . .	97
14	Côtés $St_G(v)$ en bleu et $St_D(v)$ en rouge . . . . .	100
15	Côtés gauches et droit lorsque $x$ intérieur à une arête . . . . .	100
16	Modèles locaux de $M_S(K_\sigma)$ . . . . .	104
17	Image d'un patch de $\Omega_{\mathbb{R}}(f_1, R_3)$ par l'application $\Pi^\star$ . . . . .	107
18	$K_{\sigma_f} = K_{\sigma_1} \cup K_{\sigma_2}$ (image réalisée à l'aide du logiciel <i>Grout</i> de Dan Rust) . . . . .	108
19	Patchs rectangulaires de $\Omega_{GA}(f)$ de la forme $P_{(C),3}$ . . . . .	109
20	Graphe $G$ du représentant efficace $F$ de $\tau^{-1}$ . . . . .	110
21	Patch rectangulaire $P_{(A),5}$ d'un pavage de $\Omega_{GA}(F, G)$ . . . . .	112

## Références

- [ABHS06] Pierre Arnoux, Valérie Berthé, Arnaud Hilion, and Anne Siegel. Fractal representation of the attractive lamination of an automorphism of the free group. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 56(7) :2161–2212, 2006. Numération, pavages, substitutions.
- [AP98] Jared E. Anderson and Ian F. Putnam. Topological invariants for substitution tilings and their associated  $C^*$ -algebras. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 18(3) :509–537, 1998.
- [APP16] José Aliste-Prieto and Samuel Petite. On the simplicity of homeomorphism groups of a tilable lamination. *Monatsh. Math.*, 181(2) :285–300, 2016.
- [Bar16] Marcy Barge. Geometrical and spectral properties of Pisot substitutions. *Topology Appl.*, 205 :28–46, 2016.
- [BBG06] Jean Bellissard, Riccardo Benedetti, and Jean-Marc Gambaudo. Spaces of tilings, finite telescopic approximations and gap-labeling. *Comm. Math. Phys.*, 261(1) :1–41, 2006.
- [BJS16] Valérie Berthé, Jérémie Bourdon, Timo Jolivet, and Anne Siegel. A combinatorial approach to products of Pisot substitutions. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 36(6) :1757–1794, 2016.
- [BD08] Marcy Barge and Beverly Diamond. Cohomology in one-dimensional substitution tiling spaces. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 136(6) :2183–2191, 2008.
- [Ber66] Robert Berger. The undecidability of the domino problem. *American Mathematical Society*, 1966.
- [Ber02] V Berthé. Free group automorphisms and tilings. In *Proceedings of the International EWM Workshop on Groups and Graphs*, pages 9–14, 2002.
- [BFH97] M. Bestvina, M. Feighn, and M. Handel. Laminations, trees, and irreducible automorphisms of free groups. *Geom. Funct. Anal.*, 7(2) :215–244, 1997.
- [BG03] Riccardo Benedetti and Jean-Marc Gambaudo. On the dynamics of  $\mathbb{G}$ -solenoids. Applications to Delone sets. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 23(3) :673–691, 2003.
- [BG14] Marcy Barge and Jean-Marc Gambaudo. Geometric realization for substitution tilings. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 34(2) :457–482, 2014.
- [BH92] Mladen Bestvina and Michael Handel. Train tracks and automorphisms of free groups. *Ann. of Math. (2)*, 135(1) :1–51, 1992.
- [BH95] M. Bestvina and M. Handel. Train-tracks for surface homeomorphisms. *Topology*, 34(1) :109–140, 1995.

- [BH13] Nicolas Bédaride and Arnaud Hilion. Geometric realizations of two-dimensional substitutive tilings. *Q. J. Math.*, 64(4) :955–979, 2013.
- [BHL15] Nicolas Bedaride, Arnaud Hilion, and Martin Lustig. Invariant measures for train track towers. working paper or preprint, October 2015.
- [BJS14] Valérie Berthé, Timo Jolivet, and Anne Siegel. Connectedness of fractals associated with Arnoux-Rauzy substitutions. *RAIRO Theor. Inform. Appl.*, 48(3) :249–266, 2014.
- [Bog08] Oleg Bogopolski. *Introduction to group theory*. EMS Textbooks in Mathematics. European Mathematical Society (EMS), Zürich, 2008. Translated, revised and expanded from the 2002 Russian original.
- [Bou70] N Bourbaki. *Éléments de mathématique : Théorie des ensembles*. Masson diffusion C.C.L.S., [1977], 1970.
- [Bou71] N. Bourbaki. *Éléments de mathématique. Topologie générale. Chapitres 1 à 4*. Hermann, Paris, 1971.
- [Bre97] Glen E. Bredon. *Sheaf theory*. Springer-Verlag, second edition edition, 1997.
- [BS07] Marcy Barge and Richard Swanson. Rigidity in one-dimensional tiling spaces. *Topology Appl.*, 154(17) :3095–3099, 2007.
- [BSTY17] V. Berthé, W. Steiner, J. Thuswaldner, and R. Yassawi. Recognizability for sequences of morphisms. <https://arxiv.org/abs/1705.00167>, 2017.
- [CGG14] Jean-René Chazottes, Jean-Marc Gambaudo, and François Gautero. Tilings of the plane and Thurston semi-norm. *Geom. Dedicata*, 173 :129–142, 2014.
- [CGST02] Ethan M. Coven, William Geller, Sylvia Silberger, and William Thurston. The symbolic dynamics of tiling the integers. *Israel J. Math.*, 130 :21–27, 2002.
- [CH08] Brian F. Martensen Charles Holton. Embedding tiling spaces in surfaces. *Fundamenta Mathematicae*, 201 :99–113, (2008).
- [CH12] Thierry Coulbois and Arnaud Hilion. Botany of irreducible automorphisms of free groups. *Pacific J. Math.*, 256(2) :291–307, 2012.
- [CHL08a] Thierry Coulbois, Arnaud Hilion, and Martin Lustig.  $\mathbb{R}$ -trees and laminations for free groups. I. Algebraic laminations. *J. Lond. Math. Soc. (2)*, 78(3) :723–736, 2008.
- [CHL08b] Thierry Coulbois, Arnaud Hilion, and Martin Lustig.  $\mathbb{R}$ -trees and laminations for free groups. II. The dual lamination of an  $\mathbb{R}$ -tree. *J. Lond. Math. Soc. (2)*, 78(3) :737–754, 2008.
- [CHL08c] Thierry Coulbois, Arnaud Hilion, and Martin Lustig.  $\mathbb{R}$ -trees and laminations for free groups. III. Currents and dual  $\mathbb{R}$ -tree metrics. *J. Lond. Math. Soc. (2)*, 78(3) :755–766, 2008.

- [Coo87] Daryl Cooper. Automorphisms of free groups have finitely generated fixed point sets. *Journal of Algebra*, 111 :453–456, 1987.
- [DKL15] Spencer Dowdall, Ilya Kapovich, and Christopher J. Leininger. Dynamics on free-by-cyclic groups. *Geom. Topol.*, 19(5) :2801–2899, 2015.
- [dSG14] Henri Paul de Saint-Gervais. Analysis situs. <http://analysis-situs.math.cnrs.fr/Orientation-et-classe-fondamentale.html>, 2014.
- [EAR04] Jr. E. Arthur Robinson. Symbolic dynamics and tilings of  $r^d$ . *Proc. Sympos. Appl. Math.*, 2004.
- [FLP12] Albert Fathi, François Laudenbach, and Valentin Poénaru. *Thurston’s work on surfaces*, volume 48 of *Mathematical Notes*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2012. Translated from the 1979 French original by Djun M. Kim and Dan Margalit.
- [Gan86] Felix R. Gantmacher. *Matrizentheorie*. Springer-Verlag, Berlin, 1986. With an appendix by V. B. Lidskij, With a preface by D. P. Želobenko, Translated from the second Russian edition by Helmut Boseck, Dietmar Soyka and Klaus Stengert.
- [Gau03] François Gautero. Hyperbolicity of mapping-torus groups and spaces. *Enseign. Math. (2)*, 49(3-4) :263–305, 2003.
- [Gau06] F Gautero. Quatre problèmes géométriques, dynamiques ou algébriques autour de la suspension. *Habilitation à diriger des recherches*, 2006.
- [Gau07] François Gautero. Combinatorial mapping-torus, branched surfaces and free group automorphisms. *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5)*, 6(3) :405–440, 2007.
- [Ger83] S. M. Gersten. Geometric automorphisms of a free group of rank at least three are rare. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 89(1) :27–31, 1983.
- [GH09] François Gautero and Michael Heusener. Cohomological characterization of relative hyperbolicity and combination theorem. *Publ. Mat.*, 53(2) :489–514, 2009.
- [Ghy99] Etienne Ghys. Laminations par surfaces de riemann. *Dynamique et géométrie complexes (Lyon, 1997)*, 1999.
- [GL98] François Gautero and Jérôme Los. Combinatorial suspension for disc homeomorphisms. *J. Knot Theory Ramifications*, 7(6) :747–795, 1998.
- [GM06] Jean-Marc Gambaudo and Marco Martens. Algebraic topology for minimal Cantor sets. *Ann. Henri Poincaré*, 7(3) :423–446, 2006.
- [Got44] H. Gottschalk, W. Orbit-closure decompositions and almost periodic properties. *Bull., Amer., Soc.*, 50 :915–919, 1944.
- [GS86] Branko Grünbaum and G C Shephard. *Tilings and Patterns*. W. H. Freeman & Co., New York, NY, USA, 1986.

- [GS01] Chaim Goodman-Strauss. Compass and straightedge in the Poincaré disk. *Amer. Math. Monthly*, 108(1) :38–49, 2001.
- [GS05] Chaim Goodman-Strauss. A strongly aperiodic set of tiles in the hyperbolic plane. *Invent. Math.*, 159(1) :119–132, 2005.
- [GS10] C. Goodman-Strauss. A hierarchical strongly aperiodic set of tiles in the hyperbolic plane. *Theoret. Comput. Sci.*, 411(7-9) :1085–1093, 2010.
- [Hil07] Arnaud Hilion. Lamination duale à un arbre réel. In *Actes de Séminaire de Théorie Spectrale et Géométrie. Vol. 24. Année 2005–2006*, volume 24 of *Sémin. Théor. Spectr. Géom.*, pages 9–21. Univ. Grenoble I, Saint-Martin-d’Hères, 2007.
- [JDJ15] Kellendonk J., Lenz D., and Savinien J. *Mathematics of Aperiodic Order*, volume Progress in Mathematics, (309). Birkhauser, 2015.
- [Kap14] Ilya Kapovich. Algorithmic detectability of iwip automorphisms. *Bull. Lond. Math. Soc.*, 46(2) :279–290, 2014.
- [Kar07] Jarkko Kari. Tilings of the plane. *Arkhimedes*, pages 19–24, 2007.
- [Kar12] Jarkko Kari. Tiling problem and undecidability in cellular automata. In *Computational complexity. Vols. 1–6*, pages 3198–3211. Springer, New York, 2012.
- [KB02] Ilya Kapovich and Nadia Benakli. Boundaries of hyperbolic groups. *Combinatorial and geometric group theory*, 2002.
- [KL14] Ilya Kapovich and Martin Lustig. Invariant laminations for irreducible automorphisms of free groups. *Q. J. Math.*, 65(4) :1241–1275, 2014.
- [LL03] Gilbert Levitt and Martin Lustig. Irreducible automorphisms of  $F_n$  have north-south dynamics on compactified outer space. *J. Inst. Math. Jussieu*, 2(1) :59–72, 2003.
- [Los93] Jérôme E. Los. Pseudo-Anosov maps and invariant train tracks in the disc : a finite algorithm. *Proc. London Math. Soc. (3)*, 66(2) :400–430, 1993.
- [Los96] Jérôme E. Los. On the conjugacy problem for automorphisms of free groups. *Topology*, 35(3) :779–808, 1996. With an addendum by the author.
- [LR13] Álvaro Lozano Rojo. Codimension zero laminations are inverse limits. *Topology Appl.*, 160(2) :341–349, 2013.
- [LU17] Martin Lustig and Caglar Uyanik. Perron-Frobenius theory and frequency convergence for reducible substitutions. *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 37(1) :355–385, 2017.
- [Lus07] Martin Lustig. Conjugacy and centralizers for iwip automorphisms of free groups. In *Geometric group theory*, Trends Math., pages 197–224. Birkhäuser, Basel, 2007.

- [Mar08] Maurice Margenstern. The domino problem of the hyperbolic plane is undecidable. *Theoret. Comput. Sci.*, 407(1-3) :29–84, 2008.
- [Mos88] Lee Mosher. Tiling the projective foliation space of a punctured surface. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 306(1) :1–70, 1988.
- [Mos92] B. Mossé. Puissances de mots et reconnaissabilité des points fixes de substitutions. *Theoret. Comput. Sci.*, 99, 1992.
- [OOP11] Hervé Oyono-Oyono and Samuel Petite.  $C^*$ -algebras of Penrose hyperbolic tilings. *J. Geom. Phys.*, 61(2) :400–424, 2011.
- [Pen80] R. Penrose. Pentaplexity : a class of nonperiodic tilings of the plane. *Math. Intelligencer*, 2(1) :32–37, 1979/80.
- [Pet] Samuel Petite. A dynamical approach of delone sets and tilings. <http://www.lamfa.u-picardie.fr/petite/LectureSalta.pdf>. lecture notes.
- [Pet06a] S Petite. *Pavages du demi-plan hyperbolique et laminations*. PhD thesis, Université de Bourgogne, 2006.
- [Pet06b] Samuel Petite. On invariant measures of finite affine type tilings. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 26(4) :1159–1176, 2006.
- [Pfa15a] Catherine Pfaff. Ideal Whitehead graphs in  $Out(F_r)$ . I. Some unachieved graphs. *New York J. Math.*, 21 :417–463, 2015.
- [Pfa15b] Catherine Pfaff. Ideal Whitehead graphs in  $Out(F_r)$  II : the complete graph in each rank. *J. Homotopy Relat. Struct.*, 10(2) :275–301, 2015.
- [Pfa16] Catherine Pfaff. Ideal Whitehead graphs in  $Out(F_r)$  III : Achieved graphs in rank 3. *J. Topol. Anal.*, 8(2) :207–242, 2016.
- [PH92] R. C. Penner and J. L. Harer. *Combinatorics of train tracks*, volume 125 of *Annals of Mathematics Studies*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1992.
- [Pri07] Natalie Priebe, Frank. A primer on substitution tilings of the euclidean plane. <https://arxiv.org/abs/0705.1142>, 2007.
- [Que87] Martine Queffélec. *Substitution dynamical systems, Spectral analysis*, volume 1294. Lecture Notes in Mathematics, Springer, 1987.
- [Rad94] Charles Radin. The pinwheel tilings of the plane. *Ann. of Math. (2)*, 139(3) :661–702, 1994.
- [Rau82] G. Rauzy. Nombres algébriques et substitutions. *Bull. Soc. Math. France*, 110(2) :147–178, 1982.
- [Rob78] R. Robinson. Undecidable tiling problems in the hyperbolic plane. *Inventiones Mathematicae*, 1978.
- [Rud88] Daniel J. Rudolph. Rectangular tilings of  $r^n$  and free  $r^n$ -actions. *Lecture Notes in Mathematics*, 1342, 1988.

- [Rud89] Daniel J. Rudolph. Markov tilings of  $r^n$  and representations of  $r^n$  actions. *Measure and measurable dynamics (Rochester, NY, 1987)*, 1989.
- [Rus16] D. Rust. *Cohomology of Tiling Spaces : Beyond Primitive Substitutions*. PhD thesis, University of Leicester, 2016.
- [RW76] Clark Robinson and Robert Williams. Classification of expanding attractors : an example. *Topology*, 15(4) :321–323, 1976.
- [Sad08] Lorenzo Sadun. *Topology of tiling spaces*, volume 46 of *University Lecture Series*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2008.
- [Sen95] Marjorie Senechal. *Quasicrystals and geometry*. Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
- [Ser95] Jean-Pierre Serre. *Cours d'arithmétique*. PUF, 1995.
- [SJ15] Lorenzo Sadun and Antoine Julien. Tiling deformations, cohomology, and orbit equivalence of tiling spaces. <https://arxiv.org/abs/1506.02694v2>, 2015.
- [Sol97] Boris Solomyak. Non-periodicity implies unique composition for self-similar translationally-finite tilings, 1997.
- [Sol07] Boris Solomyak. eigenfunctions for substitution tiling systems, 2007.
- [Spa95] Edwin H. Spanier. *Algebraic topology*. Springer-Verlag, New York, 1995. Corrected reprint of the 1966 original.
- [Sta82] John R. Stallings. Topologically unrealizable automorphisms of free groups. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 84(1) :21–24, 1982.
- [Sta83] John R. Stallings. Topology of finite graphs. *Invent. Math.*, 71(3) :551–565, 1983.
- [Uya14] Caglar Uyanik. Dynamics of hyperbolic iwips. *Conform. Geom. Dyn.*, 18 :192–216, 2014.
- [Wil67] R. F. Williams. One-dimensional non-wandering sets. *Topology*, 6 :473–487, 1967.
- [Wil74] Robert F. Williams. Expanding attractors. *Publications Mathématiques de l'IHES*, pages 169–203, 1974.

## **Pavages de la droite réelle, du demi-plan hyperbolique et automorphismes du groupe libre**

**Résumé :** Dans cette thèse, nous construisons des pavages de la droite réelle et du demi-plan hyperbolique à l'aide de représentants efficaces d'automorphismes IWIP de groupe libre de type fini. Dans un premier temps, nous utilisons la substitution définie par P. Arnoux, V. Berthé, A. Siegel, A. Hilion associée à un représentant efficace d'un automorphisme IWIP pour générer des espaces de pavages substitutifs aperiodiques de la droite réelle. En utilisant un théorème de connexité des représentants efficaces d'automorphismes IWIP dû à J. Los, nous montrons que le type topologique de ces espaces de pavages est indépendant du choix du représentant. Nous associons ainsi à homéomorphisme près un espace de pavages de la droite réelle à une classe d'automorphisme externe IWIP, puis à une classe de conjugaison d'un élément IWIP dans le groupe des automorphismes extérieurs. D'autre part, nous construisons à partir des éléments de l'espace de pavages de la droite réelle précédemment construit, des pavages faiblement aperiodiques pour le groupe des transformations affines du demi-plan hyperbolique. Nous étudions les propriétés topologiques et dynamiques de ces espaces de pavages du plan hyperbolique. Enfin, dans une dernière partie, nous montrons que ces derniers espaces de pavages peuvent être munis d'une structure lisse en se servant de leur structure de limite projective.

**Mots-clés :** systèmes dynamiques, pavages, automorphismes du groupe libre

## **Tilings of the real line, hyperbolic plane and free group automorphisms**

**Abstract :** In this thesis, we construct tilings of the real line and the hyperbolic half-plane using train-track maps of IWIP free group automorphisms. On the one hand, we use a substitution defined by P. Arnoux, V. Berthé, A. Siegel, A. Hilion coming from a train-track map of an IWIP free group automorphism to generate substitutive aperiodic tilings of the real line. We show, thanks to a theorem of J. Los about connectivity of train-track representatives of an IWIP automorphism, that the topological type of those tiling spaces is the same up to a choice of train-track representative. Thus we associate, up to an homeomorphism, a tiling space of the real line to a class of an IWIP outer automorphism of  $F_n$ , then we extend this result to a conjugacy class of an IWIP element in  $\text{Out}(F_n)$ . On the other hand, we construct from elements of tiling spaces of the real line previously defined, a set of weakly aperiodic for the affine group tilings of the hyperbolic half-plane. We study topological et dynamical properties of the tiling space generated by those hyperbolic tilings. Finally, in the last section we endow tiling spaces previously constructed with a smooth structure thanks to their inverse limit structure.

**keywords :** dynamical systems, tilings, free group automorphisms.