



Géométrie complexe globale et infinitésimale de l'espace des twisteurs d'une variété hyperkählérienne

Basile Pillet

► To cite this version:

Basile Pillet. Géométrie complexe globale et infinitésimale de l'espace des twisteurs d'une variété hyperkählérienne. Géométrie symplectique [math.SG]. Université de Rennes, 2017. Français. NNT : 2017REN1S021 . tel-01624829

HAL Id: tel-01624829

<https://theses.hal.science/tel-01624829>

Submitted on 26 Oct 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



THÈSE / UNIVERSITÉ DE RENNES 1
sous le sceau de l'Université Bretagne Loire

pour le grade de
DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Mention : Mathématiques et Applications

Ecole doctorale Matisse

présentée par

Basile PILLET

préparée à l'unité de recherche IRMAR – UMR CNRS 6625
Institut de recherche mathématique de Rennes
UFR de mathématiques

Géométrie complexe
globale et infinitésimale
des espaces de twisteurs
de variétés
hyperkähleriennes

Thèse soutenue à Rennes
le 13 juin 2017

devant le jury composé de :

Nicholas BUCHDAHL

Professeur à l'université d'Adelaïde / *rapporteur*

Misha VERBITSKY

Professeur à l'université de Moscou (HSE) / *rapporteur*

Ekatarina AMERIK

Professeur à l'université de Paris-Sud / *examineur*

Guillaume DESCHAMPS

Maître de conférences à l'université de Bretagne Occidentale / *examineur*

Frank LORAY

Professeur à l'université de Rennes 1 / *examineur*

Dimitri MARKOUCHEVITCH

Professeur à l'université de Lille 1 / *examineur*

Christophe MOUROUGANE

Professeur à l'université de Rennes 1 / *directeur de thèse*

Table des matières

Remerciements	4
Introduction	6
1 Préliminaires	13
1.1 Topologie	14
1.1.1 Image inverse (topologique)	14
1.1.2 Image directe	14
1.1.3 Tige	14
1.1.4 Faisceaux constants et localement constants	15
1.2 Géométrie	15
1.2.1 Image inverse géométrique	15
1.2.2 Les fibrés vectoriels	16
1.2.3 Formule de projection et changement de base en cohomologie	17
1.3 Géométrie infinitésimale	18
1.3.1 Connexions sur un fibré vectoriel	18
1.3.2 Théorie des épaissements	20
2 Variété hyperkählérienne et espace des twisteurs	25
2.1 Définition	26
2.2 Structures kählériennes	27
2.3 Structures symplectiques holomorphes	27
2.4 Espace des twisteurs	27
2.4.1 Le fibré tangent horizontal	28
2.4.2 Les droites twistorielles	28
2.4.3 Les droites	28
2.4.4 Déformations et obstructions	28
3 Espace des cycles et famille universelle	30
3.1 Espace des cycles	31
3.1.1 Section normale	31
3.2 Famille universelle et correspondance twistorielle	31
3.2.1 Correspondance twistorielle	31
3.2.2 Notations	32
3.2.3 Structure produit	33
3.2.4 Retour sur les déformations et obstructions	34
3.3 Étude de l'application d'évaluation μ	34
3.3.1 Conséquence fondamentale de la structure produit	35
3.3.2 Intégration des formes relatives le long des droites	35
3.3.3 Le tangent à C	36
3.4 Topologie des fibres de μ	37
3.4.1 Hypothèse de trivialité cohomologique des fibres	37
3.4.2 Corollaire	37

4	Spineurs	38
4.1	Les fibrés V_+ et V_-	39
4.1.1	Quotients de rang 1 de V_+	39
4.2	Interprétation spinorielle	40
4.3	Suite exacte d'Euler	40
4.3.1	Lien avec la différentielle de μ	41
4.3.2	Remarque sur la naturalité	41
4.4	Forme symplectique relative et métrique	42
4.4.1	La forme symplectique relative	42
4.4.2	Quelques notes sur la métrique	42
4.5	Structures quaternioniques et structure réelle sur l'espace des sections	42
4.5.1	Structure quaternionique sur V_+	43
4.5.2	Structure quaternionique sur V_-	43
4.5.3	Vecteurs réels	43
4.5.4	Les vecteurs provenant de M sont réels	44
5	Transport topologique et analytique de faisceaux	45
5.1	Foncteurs de transport	46
5.1.1	Extension des ouverts de M	46
5.1.2	Définitions	48
5.1.3	Isomorphisme $\pi_* \simeq \pi_\diamond$	49
5.1.4	Injection $\pi_\diamond \hookrightarrow \pi_\otimes$	49
5.2	Application à $\mathcal{O}_Z$	50
5.2.1	Le cas de l'image directe $\pi_* \mathcal{O}_Z$	50
5.2.2	Comparaison avec l'espace projectif de dimension 3 :	50
5.2.3	Le cas de $\pi_\otimes \mathcal{O}_Z$	52
5.3	Images directes des faisceaux de p -formes	52
5.3.1	Calcul des $\mathcal{R}^k \nu_* \mu^* \Omega_f^p$:	52
5.3.2	Calcul des $\mathcal{R}^k \nu_* \Omega_\mu^p$:	53
5.3.3	Calcul des $\mathcal{R}^k \pi_\otimes \Omega_Z^p$	53
5.3.4	Bilan	54
6	Équivalence de Buchdahl	56
6.1	Définitions du fibré associé	57
6.2	Le cas du fibré trivial	58
6.2.1	Complexes de De Rham relatifs	58
6.2.2	Image directe par ν du complexe de De Rham μ -relatif	60
6.2.3	Corollaire et application	61
6.3	Le cas d'un fibré L -trivial	61
6.4	Fonctorialité	63
6.4.1	Produit tensoriel	63
6.4.2	Dualité	63
6.4.3	Fonctorialité	64
6.5	Équivalence de catégories	65
6.5.1	Restriction sur la courbure	65
6.5.2	Réciproque	66
6.6	Retour sur la métrique sur l'espace des cycles	67
6.6.1	Calcul à l'aide de d_μ	68
7	Transport de cohomologie	69
7.1	Résolution relative et acyclicité	70
7.1.1	Résolution de Buchdahl	70
7.1.2	Acyclicité des faisceaux sur W	70
7.1.3	Cohomologie sur W	71
7.1.4	Conséquences	72
7.2	Étude des opérateurs différentiels	72
7.2.1	Préliminaire : les dérivées relatives à g et ν sur W	73

7.2.2	Preuve du lemme principal	74
7.2.3	En degré supérieur	76
7.3	Applications	77
7.3.1	Restriction des formes différentielles aux fibres de μ	77
7.3.2	Le cas du fibré trivial	79
7.3.3	Le cas trivial sur les droites	80
7.4	Le cas des fibrés L -négatifs	81
7.4.1	Les cas généraux	82
7.4.2	Les cas critiques	82
7.4.3	Calculs de A	83
7.4.4	Calcul de B	83
7.4.5	Conséquence	83
7.4.6	Application	84
8	Épaississements	85
8.1	Épaississements de W	87
8.2	Preuve de Buchdahl	87
8.2.1	Notations	88
8.2.2	Extension à l'ordre 1 dans le voisinage de l'espace tautologique	89
8.2.3	Fibrés à connexion sur le voisinage à l'ordre 1 de l'espace tautologique	89
8.2.4	Extension D' et extensions des fibrés à l'ordre 2	90
8.3	Extensions de fibrés sur le voisinage d'une droite et dans W	91
8.3.1	Extension triviale	91
8.3.2	Restriction aux voisinage de toutes les droites	92
8.3.3	Bilan	93
8.4	Conclusion et correspondance de Riemann-Hilbert	93
8.4.1	Rétraction sur la variété	93
8.4.2	Trivialité globale des fibrés triviaux à l'ordre 2	94
8.4.3	Bilan	94

Remerciements

Je voudrais tout d'abord remercier sincèrement Nicholas Buchdahl et Misha Verbitsky d'avoir accepté d'être les rapporteurs de ce texte et tout particulièrement d'avoir accepté de le lire en français. Leurs travaux ont été pour moi une immense source d'inspiration. Je remercie Katia Amerik, Dimitri Markouchevitch, Frank Loray et Guillaume Deschamps de me faire l'honneur d'être membre de mon jury et spécialement Frank et Guillaume pour leur soutien. Je suis profondément redevable à Frédéric Campana pour ses travaux (qui ont motivé mon sujet de thèse), ses conseils, ses idées et son enthousiasme.

Christophe a été progressivement pour moi : un professeur, un directeur de thèse, un confident culinaire, un guide touristique, un coach sportif et un ami. Ses contributions à ce manuscrit sont aussi profondes que nombreuses et il a su répondre présent à chaque difficulté même en étant à plus de 10000 km. Il a également joué un rôle plus métaphysique : une allégorie de la bienveillance, de l'honnêteté et de l'humilité ; une sorte de boussole morale qui m'a indiqué le chemin pour de nombreuses années à venir.

Tout au long de ma scolarité (au moins depuis le CE2), j'ai été disciple d'enseignants merveilleux auxquels je dois beaucoup, pas seulement en mathématiques. Parmi eux, mes professeurs de prépas (Odile Joly et Marie-Claude Mondini, Gérard Aufranc et Jean-Pierre Duval) occupent une place particulière. De mes études à l'ENS et à l'université de Rennes, trois images me reviennent à l'instant : le sourire de Michel Pierre, Laurent Moret-Bailly énumérant les propriétés de l'anneau nul et Dominique Cerveau recollant des barres de Toblerone. Le temps de les écrire, elles se noient déjà dans une multitude de souvenirs, je remercie ici tous ces enseignants qui m'ont fait partager leur plaisir de faire des mathématiques.

Au cours de ces années à Rennes, j'ai eu la chance de rencontrer des gens qui sont devenus des camarades et des amis et qui ont modelé celui que je suis aujourd'hui. Il me paraît juste de les dénoncer pour qu'ils assument leur terrible responsabilité : Il convient de placer Arnaud, *le petit père des doctorants* avec la *grande timonière* Ophélie en premier. Blandine pour sa merveilleuse pièce montée ! Richard pour ses bons plans new-yorkais et sa science des subtilités de l'éducation nationale, Hélène et son soutien pédagogique, Tristan pour ses conseils vélo, Jean-Phi pour les parties de perudo, Julie et son Fat-Day, le cactus et son LN, Damien et Charles pour avoir fait durer le plaisir des repas du RU, Adrien et Marine qui m'ont fait partager leur bonheur et converti à leurs passions.

Viennent ensuite les collègues de géométrie. Le bureau des faiseurs de *meme* : Tomthom, Alexandre et Axel (que je remercie aussi pour le Back de réconfort), Vincent, Yvan, Youenn pour leurs bureaux et esprits orientés vers l'IHES, Federico, Christian, Néstor, Cyril, Andrew, Türkü, et tous les autres assidus du séminaire Pampers avec qui, on discute en agitant les bras, que ce soit de mathématiques ou d'autre chose.

Des anciens de l'ENS, je veux remercier Aurélien pour la pureté de sa passion mathématique et Kévin pour sa rigueur psychotique et ses bananes. Sans oublier Arthur, Ludo, Marie, Charlotte, Maxime, Gauthier, Geoffrey et les autres de ma promo. Greg, JJ, Julie, Tristan et Pauline pour les soirées « promo 2011 ».

Un merci particulier est réservé aux habitants du bureau 620/621 qui se sont succédés depuis mon arrivée et qui ont chacun contribué à créer une ambiance studieuse et joyeuse. Dans les anciens : Jerem, Cécile, Tristan et Gabriel pour leurs discussions où l'Absurde touche au Zen : « T'aimerais, toi, être un revêtement universel ? », Gwezenheg qui j'espère, perdra en lisant ces lignes et Mouton dont la qualité de la présence compense la quantité... Mais après 4 années passées dans ce bureau, je suis, à mon tour, devenu le dinosaure, j'ai eu la chance d'accueillir

Andrés, Yulian et mon *petit frère* Jie. Je dois ajouter tous les gens de passage qui ont contribué à l'ambiance. Et tous ceux que j'oublie. . .

Depuis que je fréquente la tour de math, je suis dans un cocon de bienveillance de la part du personnel de la bibliothèque, des collègues chercheurs (spécialement Florian, Bernard, Serge, Fred et Xavier), des collègues enseignants (Delphine, Matthieu, Guy, Goulwen et Ludo) et du personnel administratif et d'entretien. En particulier, je tiens à remercier du fond du cœur Marie-Aude, Jean-Marie et Chantal pour leur aide dans toutes les galères administratives où j'ai réussi à me mettre.

Enfin d'autres Rennais ont rejoint mon groupe d'amis : Thomy et Diane, nos délicieux concurrents *Top chef* et bien sûr Ervan, le grand sage de la culture Geek.

Je tiens à remercier mes parents, pour des raisons évidentes que je n'ai pas la place d'énumérer ici mais aussi, parce que la curiosité est une qualité (ou un vilain défaut) qui s'apprend et qu'ils m'ont apprise. Aussi tautologique que cela paraisse, je ne serais pas là sans eux.

Grimaud, il faudrait que je dise quelque chose à ton sujet ; voilà qui est fait.

Je n'aurais pas pu passer ces années sans mes meilleurs amis. Aujourd'hui ils sont loin (bientôt plus loin encore), vivent leurs vies. Nos relations sont peut-être empoussiérées, mais rien qu'un ti'punch ne saurait nettoyer : Cricri et Paul, Florian et Élodie, je vous remercie.

Coralie, cette thèse ne te doit pas grand chose, mais son auteur te doit tout. Tu m'as supporté et soutenu dans les passages difficiles, tu m'as donné un deuxième souffle, tu m'as évité la fatigue et les crampes. Tu me tenais la main dans la dernière ligne droite.

Tu es présente à chaque page. . .

Introduction

C'est véritablement utile puisque c'est joli.

— *Le petit prince*,
Antoine DE SAINT EXUPÉRY

Géométrie riemannienne et géométrie complexe

Une variété riemannienne est une variété lisse (variété différentielle de classe C^∞) munie d'une *métrique* permettant de mesurer des vecteurs tangents en chaque point. L'étude des variétés riemanniennes gagne un cran en complexité vis-à-vis de l'étude des variétés lisses : dans le cas lisse, les petits voisinages d'un point sont caractérisés par la dimension de la variété tandis que, dans le cas riemannien, ils sont de plus différenciés par la courbure de la métrique en ce point. Les voisinages riemanniens d'un point de la sphère ne ressemblent pas aux voisinages riemanniens d'un point du plan.

Une métrique est dite *Ricci-plate* si la trace de son tenseur de courbure est identiquement nulle. En physique, l'espace-temps est souvent étudié comme une variété (pseudo-)riemannienne de dimension 4. Selon les équations d'Einstein, la matière courbe l'espace-temps et le caractère Ricci-plat correspond à l'absence de masse.

Une autre richesse des variétés riemanniennes provient de propriétés plus globales de la métrique : l'*holonomie* et le *transport parallèle*. Le groupe d'holonomie mesure l'obstruction à ce qu'un tenseur (par exemple un vecteur tangent) s'étende sur toute la variété en un champ préservant la métrique.

Holonomie et courbure sont liées. En effet une variété d'holonomie $SU(n)$, appelée *variété de Calabi-Yau*, a une métrique Ricci-plate. Elle possède de plus une structure complexe parallèle pour cette métrique, c'est donc une variété *kählérienne*.

Restreindre le groupe d'holonomie augmente la structure. Ainsi parmi les variétés riemanniennes, il y a les variétés kählériennes (holonomie $U(n)$), de Calabi-Yau, et enfin les variétés *hyperkähleriennes* d'holonomie $Sp(n) \subseteq SU(2n) \subseteq U(2n)$.

Une variété hyperkählerienne possède une multitude de structures complexes parallèles et donc kählériennes. L'*espace des twisteurs* ou *famille de Calabi* d'une telle variété est une variété complexe qui unifie un pinceau de telles structures complexes.

À chaque point de la variété hyperkählerienne correspond une droite projective complexe appelée *droite twistorielle* dans l'espace des twisteurs. En dimension 4, on a une interprétation physique : cette correspondance associe à un point de l'espace-temps la sphère (droite projective complexe) de tous les rayons lumineux passant par ce point à cet instant.

Résumé et contexte historique

Ce document présente la construction d'objets géométriques sur l'espace des courbes rationnelles de l'espace des twisteurs d'une variété hyperkählerienne. On établira une correspondance entre la géométrie complexe de l'espace des twisteurs et des propriétés différentielles (courbure, opérateurs différentiels, ...) sur cet espace des courbes rationnelles.

La géométrie complexe de l'espace des twisteurs est déjà naturellement liée à la métrique de la variété hyperkählerienne [HKLR87] et une telle correspondance a déjà été obtenue pour les espaces de twisteurs de variétés riemanniennes de dimension 4, en termes d'équations différentielles par Salamon [Sal83] ; en termes de classifications d'épaississements de fibrés par Buchdahl [Buc85] ou d'épaississements de sous-variétés par Eastwood et LeBrun [EL92].

Cette étude a été initiée par un article de Penrose en 1967 [Pen67] comme possible approche de la gravitation quantique. Elle a été généralisée par Ward [War77] en 1977 et Atiyah [AW77]. Atiyah utilise la théorie pour classifier les instantons sur la sphère S^4 ; travail qui culmine avec le théorème d'Atiyah-Hitchin-Singer [AHS78]. Les connexions avec la physique mathématique et la théorie de Yang-Mills font de la théorie des twisteurs un domaine très vaste et bien étudié.

Les variétés hyperkähleriennes et leurs espaces des twisteurs

Les surfaces de Riemann sont des variétés réelles orientées de dimension 2 munies d'une métrique riemannienne. Elles ont naturellement une structure presque-complexe (quart de tour vers la gauche) intégrable, compatible avec la métrique qui en font des courbes kählériennes. En particulier ce sont des variétés symplectiques réelles.

L'analogie complexe des surfaces de Riemann sont les surfaces K3, elles possèdent alors une structure quaternionique compatible qui en font des "courbes" hyperkählériennes. En particulier ce sont des variétés symplectiques holomorphes.

Ainsi les variétés hyperkählériennes dans toute leur généralité sont à l'intersection de la géométrie riemannienne, complexe, symplectique et quaternionique. De plus, les variétés hyperkählériennes compactes ont de nombreuses similitudes avec les surfaces complexes. Par exemple, la forme de Beauville-Bogomolov [Bea83] joue le rôle de la forme d'intersection sur l'espace H^2 . D'autres avatars de cette analogie seront présentés au chapitre 4.

Les intérêts de l'étude des variétés hyperkählériennes sont variés.

- Du point de vue de la géométrie riemannienne, le théorème de Calabi-Yau donne l'existence dans chaque classe de Kähler d'une unique métrique hyperkählérienne (Ricci-plate) sur toute variété symplectique holomorphe compacte. Cependant on ne sait déterminer cette métrique que dans des cas non compacts [Cal79]. La recherche de métriques hyperkählériennes a de nombreux intérêts en physique; en particulier comme elles sont Ricci-plates, ce sont des solutions des équations d'Einstein dans le vide [EH79].
- Du point de vue de la géométrie complexe, elles forment avec les autres variétés de Calabi-Yau et les tores complexes la classe des variétés de canonique trivial. Ces variétés sont ressenties comme le cas critique dans de nombreuses théories (programme du modèle minimal, travaux en direction de la conjecture de Kobayashi sur l'hyperbolicité [Cam92, Ver13], ...).
- Les exemples de variétés hyperkählériennes ont un double intérêt : Certains apparaissent comme espaces de modules de solutions de théories de jauge [Hit87] mais les exemples compacts sont particulièrement rares. Bogomolov a conjecturé qu'en dimension plus grande que 2, de telles variétés n'existaient pas jusqu'à ce que Fujiki (1983) construise le premier exemple comme schéma de Hilbert des paires de points sur une surface K3 [Fuj83]. Beauville (1983) [Bea83] généralise cette construction en ajoutant également une autre classe : les variétés de Kummer généralisées. Enfin O'Grady [O'G99, O'G03] construit deux nouvelles variétés hyperkählériennes sporadiques. Ce sont à ce jour les seules classes connues de variétés symplectique holomorphes compactes à déformation près.
- La dynamique holomorphe sur les variétés hyperkählériennes est également un cas critique, à la fois proche de celle d'une surface K3 ou d'une surface rationnelle [Ogu09] mais possédant également des automorphismes d'entropie topologique positive [AV16].
- De nombreuses autres motivations viennent de la géométrie symplectique, la symétrie miroir [Voi99] et de la géométrie birationnelle [Huy97].

Sur une variété hyperkählérienne (M, g) , on peut se donner un pinceau de structures complexes g -orthogonales et positives, chacune correspondant à un quaternion unitaire pur. L'espace des twisteurs est une variété complexe Z de dimension impaire qui met en famille tout ce pinceau de structures sur M . L'intégrabilité de la structure presque-complexe tautologique sur Z est conséquence de l'intégrabilité de chacune des structures presque-complexes du pinceau et découle du théorème de Newlander-Nirenberg.

Cet espace est diffeomorphe à $M \times \mathbb{S}^2$ mais seule la projection sur $\mathbb{P}^1 \simeq \mathbb{S}^2$ est holomorphe.

L'étude des sections de la fibration $Z \rightarrow \mathbb{P}^1$ (donc de certaines courbe rationnelles de Z) est très riche et centrale dans de nombreux travaux notamment sur l'hyperbolicité [Cam92, Ver13]. L'article de Campana [Cam92] utilise les déformations de droites twistorielles pour obtenir à la limite une courbe entière dans une des variétés kählériennes de la famille de Calabi.

Une première approche pour améliorer ce résultat consiste à expliciter l'intégrabilité de la structure presque-complexe sur l'espace des twisteurs Z au voisinage d'une droite twistorielle. Une méthode itérative [Dem02, 11. Integrability of Almost Complex Structures] aurait dû permettre d'exprimer ces coordonnées à tout ordre. Cependant la courbure de la variété hyperkählérienne fait obstruction à ce que ces coordonnées préservent la fibration twistorielle $Z \rightarrow \mathbb{P}^1$. Ce problème a motivé l'étude de la correspondance courbure-épaississement du chapitre 8.

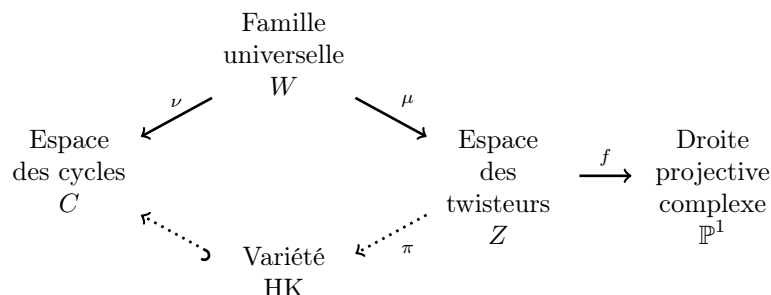
Organisation des chapitres

La première partie introduit des notations et quelques outils de géométrie analytique complexe en suivant principalement [Del70, Buc85, Har97]. La majorité des résultats des deux premières

sections (1.1, 1.2) sont classiques hormis peut-être la proposition 1.2.1 sur la cohomologie de l'image inverse topologique d'un fibré. La troisième section (1.3) énonce des outils plus techniques pour l'étude infinitésimale des variétés complexes : Les fibrés à connexions et la théorie des épaississements de sous-variétés et de fibrés. Ces outils permettront de linéariser l'étude de la structure complexe sur l'espace des twisteurs.

Théorie et spineurs.

Dans le chapitre 2, on rappelle la théorie usuelle des espaces de twisteurs de variétés hyperkähleriennes en suivant principalement [HKLR87]. Puis, le chapitre 3 énumère les propriétés de l'espace tautologique de la correspondance entre l'espace des twisteurs et son espace des 1-cycles



On peut alors remarquer la chose suivante. Quitte à restreindre l'espace des 1-cycles de Z à un ouvert connexe C paramétrant uniquement les droites projectives complexes suffisamment verticales, on a une décomposition de l'espace total W de la famille universelle au dessus de C sous forme de produit de variétés complexes lisses (cf. proposition 3.2.1)

$$W \simeq C \times \mathbb{P}^1. \quad (\star)$$

Proposition A (proposition 3.3.3)

Soit Ω_C le faisceau des 1-formes holomorphes sur C et Ω_μ celui des 1-formes holomorphes relatives sur W à $\mu : W \rightarrow Z$. Et soit $\nu : W \rightarrow C$ la projection.

Si on suppose que C paramètre des sections suffisamment verticales, alors

$$\nu_* \Omega_\mu \simeq \Omega_C.$$

Dans le chapitre 4, on dérive de $(\star)$ une décomposition du fibré tangent et du fibré des 2-formes holomorphes sur l'espace des cycles.

Proposition B (section 4.2)

Il existe deux fibrés vectoriels holomorphes V_+ et V_- sur C de rang respectifs 2 et $2n$ satisfaisant

$$T_C \simeq V_+ \otimes V_-$$

et

$$\Omega_C^2 \simeq \Omega_+^2 \oplus \Omega_-^2$$

où

$$\begin{aligned} \Omega_+^2 &= \mathcal{O}_C (\Lambda^2 V_+ \otimes \odot^2 V_-) \\ \nu_* \Omega_\mu^2 &\simeq \Omega_-^2 = \mathcal{O}_C (\odot^2 V_+ \otimes \Lambda^2 V_-) \end{aligned}$$

et où les symboles $\odot$ et Λ désignent respectivement les puissances symétriques et extérieures d'un fibré.

Ces deux fibrés V_+ et V_- satisfont en fait les propriétés des fibrés spinoriels sur les variétés spin de dimension 4 :

$$T_M \otimes \mathbb{C} \simeq V_+ \otimes V_-$$

C'est une autre incarnation de la philosophie qui veut que les variétés hyperkähleriennes de toute dimension se comportent comme les surfaces kähleriennes (variétés riemanniennes de dimension 4). En dimension 4 les fibrés V_+ et V_- sont interchangeables de dimension 2 ; en conséquence les fibrés $\Lambda^2 V_+$ et $\Lambda^2 V_-$ sont des fibrés en droite. Ici seul $\Lambda^2 V_+$ est un fibré en droite (trivial), mais on peut extraire de la structure hyperkählerienne de M une forme symplectique sur les fibres de $Z \rightarrow \mathbb{P}^1$ qui donne une "trace" $\Lambda^2 V_- \rightarrow \mathbb{C}$ permettant de pousser encore plus loin l'analogie avec le cas classique de dimension 4.

Dès lors plusieurs résultats motivent l'interprétation du diagramme suivant comme un diagramme de "complexification"

$$\begin{array}{ccc}
 z = (m, \zeta) & \longmapsto & ([\pi^{-1}(m)], \zeta) \\
 \\
 \begin{array}{c} \text{Espace des} \\ \text{twisteurs} \\ Z \end{array} & \subset & \begin{array}{c} \text{Espace} \\ \text{tautologique} \\ W \end{array} \\
 \downarrow \pi & \leftrightarrow & \downarrow \nu \\
 \begin{array}{c} \text{Variété} \\ \text{hyperkäh-} \\ \text{lérienne } M \end{array} & \subset & \begin{array}{c} \text{Espace des} \\ \text{cycles} \\ C \end{array} \\
 \\
 m & \longmapsto & [\pi^{-1}(m)]
 \end{array}$$

Les deux fibrations ont pour fibres des droites projectives complexes, mais, alors que l'espace des twisteurs Z n'est pas un produit en tant que variété complexe, l'espace tautologique W l'est. En un sens, les espaces de droites jouent un rôle de complexification de la fibration twistorielle classique.

Cette similitude s'étend sur de nombreux plans, en particulier, le complexe de Dolbeault de Z correspond au complexe de De Rham holomorphe relatif de W sur Z . Ce résultat est similaire aux travaux d'Eastwood, Gindikin et Wong [EGW95, Thm 1.1].

Correspondance de type *Penrose*.

Dans le chapitre 5, on s'intéresse au transport de faisceaux entre l'espace des twisteurs et son espace des cycles via la famille universelle. On développe des outils nécessaires à la transformée de Penrose. On généralise au passage le résultat suivant de Salamon [Sal83, Theorem 9.4] et Hitchin [Hit81] dans le cas hyperkählerien de dimension quelconque.

Proposition C (*section 5.2*)

Soit Z l'espace des twisteurs d'une variété hyperkählerienne M , et $\pi : Z \rightarrow M$ la projection, alors

$$\pi_* \mathcal{O}_Z \simeq \mathbb{C}$$

et pour tout $p > 0$,

$$\pi_* \Omega_Z^p \simeq 0.$$

Ce résultat permet dans le chapitre 6, de construire la correspondance entre fibrés holomorphes sur l'espace des twisteurs Z triviaux en restriction à chaque droite et fibrés à connexions sur C . C'est un des nombreux avatars des correspondances de type *Penrose* [AHS78, AW77, GKG14, Pen76]. Elle est décrite à travers l'équivalence de catégories du théorème

Théorème A (théorème 1)

Il y a une équivalence de catégorie

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fibrés à connexion} \\ \text{sur l'espace des cycles} \\ \text{avec courbure dans } \Omega_+^2 \end{array} \right\} \leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fibrés holomorphes} \\ \text{sur l'espace des twisteurs} \\ \text{trivial sur les droites} \end{array} \right\}$$

qui respecte le produit tensoriel, les sections globales et la dualité.

Dans le cas où la variété de base M est compacte, la structure de produit $(\star)$ (ou plus précisément (3.3.5)) permet de scinder l'étude des fibrés holomorphes sur l'espace des twisteurs en deux aspects :

- Leurs cohomologies globales sur Z .
- Leurs ordres de trivialité sur les droites de l'espace des twisteurs (l'entier k tel que le fibré soit trivial en restriction aux voisinages holomorphes d'ordre k de chaque droite).

Les deux derniers chapitres détaillent chacun des deux points.

Dans le chapitre 7, on exprime la cohomologie de fibrés sur Z triviaux sur les droites en terme des fibrés naturels V_- et V_+ sur C introduits au chapitre 4. On obtient par exemple les résultats suivants.

Théorème B (section 7.3)

On suppose que

- d'une part les fibres de $W \rightarrow Z$ sont contractiles,
- d'autre part l'ouvert C de l'espace des cycles est de Stein,

Alors

1. Soit T_f le fibré vectoriel sur l'espace des twisteurs Z des vecteurs tangents aux fibres de $Z \rightarrow \mathbb{P}^1$,
 - $T_f(-1)$ est trivial en restriction aux droites de Z ,
 - et $H^k(Z, T_f(-1))$ est la cohomologie du complexe différentiel sur C

$$\begin{aligned} \text{Hom}(\Lambda^{k-1}V_-, V_- \otimes \odot^{k-1}V_+) &\xrightarrow{D^0} \text{Hom}(\Lambda^kV_-, V_- \otimes \odot^kV_+) \\ &\xrightarrow{D^1} \text{Hom}(\Lambda^{k+1}V_-, V_- \otimes \odot^{k+1}V_+). \end{aligned}$$

2. Toujours sous les mêmes hypothèses,
 - l'espace $H^k(Z, \mathcal{O}_Z)$ est la cohomologie du complexe différentiel sur C

$$\text{Hom}(\Lambda^{k-1}V_-, \odot^{k-1}V_+) \xrightarrow{D^0} \text{Hom}(\Lambda^kV_-, \odot^kV_+) \xrightarrow{D^1} \text{Hom}(\Lambda^{k+1}V_-, \odot^{k+1}V_+).$$

- On a en particulier une application naturelle

$$H_{dR}^k(C, \mathbb{C}) \rightarrow H^k(Z, \mathcal{O}_Z)$$

qui est bijective pour $k = 0$ et injective pour $k = 1$.

Les hypothèses du théorème B sont satisfaites dans le cas d'une surface K3 munie de sa métrique Ricci-Plate, mais ces résultats étaient déjà connus dans le cas des variétés de dimension 4 anti-autoduales (voir par exemple [EPW81]).

Les différentielles D^i du complexe sur C sont d'origine riemannienne : elles se calculent naturellement par des procédés de symétrisation à partir des connexions sur V_- et V_+ . L'étude de ces opérateurs différentiels est réalisée dans la section 7.2 ; on y généralise un lemme d'Eastwood, Penrose et Wells [EPW81, Lemma 1.2]. Enfin le lien avec la métrique riemannienne de la variété M est établi à la section 6.6.

D'autre part, par un dévissage cohomologique, on obtient (théorème 3) une description de la cohomologie de certains fibrés sur Z constamment négatif en restriction à chaque droite ; par exemple les faisceaux $\mathcal{O}(-p)$.

Enfin dans le chapitre 8, on utilise des outils développés dans la première partie de [Buc85] pour étudier les épaississements de fibrés holomorphes au voisinage des droites de l'espace des

twisteurs. On établit alors le théorème suivant :

Théorème C (*théorème 5*)

L'équivalence de catégories construite en A se restreint en une équivalence de catégories :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fibrés à connexion } \mathbf{plate} \\ \text{sur l'espace des cycles} \end{array} \right\} \leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fibrés holomorphes} \\ \text{sur l'espace des twisteurs} \\ \text{trivial sur les voisinages} \\ \text{à l'ordre 2 des droites} \end{array} \right\}.$$

On démontre plus précisément à travers le théorème 4 une correspondance, pour chaque fibré sur Z trivial en restriction aux droites, entre la courbure de la connexion associée (via l'équivalence du théorème A), et les épaississements du fibré aux voisinages infinitésimaux à l'ordre 2 des droites.

Chapitre 1

Préliminaires

We hold these truths to be self-evident, [...]

— *United States Declaration of Independence*,
Thomas JEFFERSON et al.

Remarque sur les notations

On essayera, dans la mesure du possible, de distinguer les isomorphismes canoniques entre deux objets. On désignera donc par le symbole $\simeq$ (ou parfois $=$) un isomorphisme naturel en opposition avec $\cong$ qui désignera un isomorphisme dépendant d'un choix ; par exemple entre un espace vectoriel de dimension fini et son dual.

1.1 Topologie

Dans tout le document le terme *faisceau* désignera par défaut un *faisceau de groupes abéliens* et très souvent (mais ce sera précisé)

- soit des faisceaux de $\mathcal{O}$ -modules pour un faisceau d'anneaux $\mathcal{O}$ préalablement fixé,
- soit des faisceaux de $\mathbb{C}$ -espaces vectoriels.

Soient X et Y deux espaces topologiques et $f : X \rightarrow Y$ une application continue.

1.1.1 Image inverse (topologique)

Soit $\mathcal{F}$ un faisceau sur Y , alors on définit l'*image inverse topologique* $f^{-1}\mathcal{F}$ de $\mathcal{F}$ par f comme le faisceau associé au préfaisceau $f^\bullet \mathcal{F}$ défini sur l'ouvert $U \subseteq X$ par

$$\Gamma(U, f^\bullet \mathcal{F}) = \lim_{V \supseteq f(U)} \Gamma(V, \mathcal{F})$$

où V parcourt les ouverts de Y .

Le foncteur f^{-1} de la catégorie des faisceaux sur Y dans la catégorie des faisceaux sur X est exact.

1.1.2 Image directe

Si $\mathcal{G}$ est un faisceau sur X , on notera $\mathcal{R}^i f_* \mathcal{G}$ le faisceau sur Y associé au préfaisceau

$$U \mapsto H^i(f^{-1}(U), \mathcal{G}).$$

Dans le cas particulier $i = 0$ on notera simplement $f_* \mathcal{G}$ le faisceau obtenu, et on a pour tout $U \subseteq Y$,

$$\Gamma(U, f_* \mathcal{G}) = \Gamma(f^{-1}(U), \mathcal{G}).$$

L'association $\mathcal{G} \mapsto f_* \mathcal{G}$ est fonctorielle. On notera $f_* \phi : f_* \mathcal{G} \rightarrow f_* \mathcal{H}$ l'image d'un morphisme de faisceaux $\phi : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$. On peut remarquer que cette construction ne fait aucune hypothèse de structure supplémentaire sur ϕ . Dans le cas d'une connexion ou un opérateur différentiel ∇ entre faisceaux de $\mathcal{O}$ -modules, $f_* \nabla$ désignera donc son image directe au sens des faisceaux.

Le foncteur f_* est exact à gauche. À une suite exacte courte $0 \rightarrow \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C} \rightarrow 0$ de faisceaux, on associe la suite exacte longue dérivée

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow f_* \mathcal{A} \rightarrow f_* \mathcal{B} \rightarrow f_* \mathcal{C} \rightarrow \\ \rightarrow \mathcal{R}^1 f_* \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{R}^1 f_* \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{R}^1 f_* \mathcal{C} \rightarrow \\ \dots \\ \rightarrow \mathcal{R}^i f_* \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{R}^i f_* \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{R}^i f_* \mathcal{C} \rightarrow \dots \end{aligned}$$

1.1.3 Tige

Si $x \in X$ et i_x désigne l'injection d'espaces topologiques $\{x\} \hookrightarrow X$, alors on appellera *tige* en x d'un faisceau $\mathcal{G}$ sur X le faisceau

$$\mathcal{G}_x = i_x^{-1} \mathcal{G}$$

On confondra le faisceau $\mathcal{G}_x$ avec l'espace de ses sections globales sur $\{x\}$.

Si X est localement paracompacte sur un voisinage de x , alors

$$\mathcal{G}_x = \lim_{U \ni x} \Gamma(U, \mathcal{G})$$

On utilisera fréquemment la propriété suivante :

Proposition 1.1.1 ([Del70, 2.25 p.19])

Soit Y un espace topologique localement paracompact, $f : X \rightarrow Y$ est propre, et u désigne l'inclusion de $f^{-1}(y)$ dans X , on a l'isomorphisme suivant

$$(\mathcal{R}^i f_* \mathcal{G})_y \simeq H^i(f^{-1}(y), u^{-1} \mathcal{G}) \quad (1.1.1)$$

1.1.4 Faisceaux constants et localement constants

Soit R un anneau, et V un R -module on appelle *faisceau constant de tige V* que l'on note $\underline{V}$, le faisceau associé au préfaisceau

$$U \mapsto V.$$

On a alors la propriété suivante, soit $U \subseteq X$, alors $\Gamma(U, \underline{V})$ est le faisceau des fonctions localement constantes de X dans V . En particulier si U est connexe, $\Gamma(U, \underline{V}) = V$.

Faisceaux localement constants.

Un faisceau sur X est un *faisceau de R -modules localement constant* ou aussi *système local* de R -modules si localement sur X , il est isomorphe à un *faisceau constant* de R -modules de rang fini.

Sur une variété connexe et simplement connexe un faisceau *localement constant* est *constant*. cf Deligne [Del70, I.1]

Exemples :

- Le faisceau $\underline{\mathbb{C}}$ est un *faisceau constant* d'anneaux. C'est un sous-faisceau naturel de tous les bons faisceaux de fonctions sur une "variété", il représente les fonctions localement constantes.
- Si (E, ∇) est un fibré à connexion (cf. plus loin 1.3.1), tel que la courbure de la connexion soit nulle, alors $\ker \nabla$ est un sous-faisceau *localement constant* du faisceau des sections de E . Tous les faisceaux *localement constant* apparaissent de cette manière : C'est l'essence de la correspondance de Riemann-Hilbert (cf plus loin, paragraphe 1.3.1).

1.2 Géométrie

Sur une variété différentielle, analytique réelle, complexe ou algébrique, la géométrie associée est définie par un faisceau d'anneaux appelé *faisceau structurel*. Dans ces quatre cas, il est respectivement

- le faisceau $\mathcal{E}$ des fonctions lisses (infiniment dérivables) à valeurs dans $\mathbb{C}$,
- le faisceau $\mathcal{E}^\omega$ des fonctions analytiques réelles (à valeurs dans $\mathbb{C}$),
- le faisceau $\mathcal{O}$ des fonctions holomorphes,
- le faisceau $\mathcal{o}$ des fonctions rationnelles régulières.

Dans les cas algébriques et complexes, la topologie considérée sera toujours la topologie transcendante sauf mention explicite du contraire. En particulier, elle sera presque toujours séparée, localement paracompacte.

Dans la suite on notera X, Y deux variétés différentielles ou analytiques réelles ou complexes ou algébriques (toutes les deux), on notera $\mathcal{A}$ leurs faisceaux structurels, et on se donne $f : X \rightarrow Y$ un morphisme. Soient $\mathcal{F}$ un faisceau de $\mathcal{A}_Y$ -modules (sur Y) et $\mathcal{G}$ un faisceau de $\mathcal{A}_X$ -modules sur X .

1.2.1 Image inverse géométrique

On rappelle que le fait que $f : X \rightarrow Y$ soit un morphisme de variétés, munit $\mathcal{A}_X$ d'une structure de $f^{-1} \mathcal{A}_Y$ -modules.

On note $f^* \mathcal{F}$ le faisceau de $\mathcal{A}_X$ -modules sur X défini par

$$f^{-1} \mathcal{F} \otimes_{f^{-1} \mathcal{A}_Y} \mathcal{A}_X.$$

1.2.2 Les fibrés vectoriels

On confondra fibré vectoriel et faisceau localement libre de modules sur le [faisceau structurel](#) $\mathcal{A}$.

À un faisceau [localement libre](#) $\mathcal{F}$ sur X (donc localement isomorphe à $\mathcal{A}^{\oplus d}$), on associe [Har97, 5.18] une fibration $\phi : F \rightarrow X$ d'espaces construits sur $\mathcal{A}$ satisfaisant

- Les sections de ϕ sont les sections du faisceau

$$\{s : X \rightarrow F \mid \phi \circ s = id_X\} \simeq \Gamma(U, \mathcal{F})$$

où s est un morphisme d'espaces construits sur $\mathcal{A}$ (c'est-à-dire lisse si $\mathcal{A} = \mathcal{E}$, analytique réelle si $\mathcal{A} = \mathcal{E}^\omega$, holomorphe si $\mathcal{A} = \mathcal{O}$, algébrique si $\mathcal{A} = o$).

- Les fibres sont munies de structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ de même dimension d appelée *rang* de F .

Dans la suite désignera une fibration $\phi : F \rightarrow X$ en espaces vectoriels dont le faisceau des sections, noté $\mathcal{A}(F)$, sera [localement libre](#). On parlera suivant le contexte de fibré différentiel (ie lisse) ou holomorphe.

On note $F_x := \phi^{-1}(x) \subseteq F$ pour $x \in X$. On a la propriété suivante pour tout $x \in X$

$$F_x \simeq \mathcal{F}_x \otimes_{\mathcal{A}_x} (\mathcal{A}_x / \mathcal{I}_x)$$

où $\mathcal{I}_x$ dénote l'idéal de $\mathcal{A}_x$ des fonctions qui s'annulent en x .

On distinguera soigneusement :

F_x la *fib*re en x ; souvent un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{C}$.

$\mathcal{F}_x$ la *tige* en x , ou aussi *l'ensemble d*'es germes en x ; ressemble plus à un module sur un anneau de séries convergentes.

Propriété des images réciproques :

L'identification entre faisceaux localement libres et fibrés vectoriels respecte l'[image inverse géométrique](#) :

$$\mathcal{A}_X(f^* F) = f^* \mathcal{A}_Y(F)$$

où $f^* F$ est l'espace $X \times_Y F$ au dessus de X . C'est un fibré vectoriel et il satisfait $(f^* F)_x = F_{f(x)}$.

On a également cette propriété due à Buchdahl (cf [Buc83]) sur la cohomologie de l'[image inverse topologique](#) d'un fibré vectoriel, qui sera utilisée par la suite. On peut l'interpréter comme un version globale de (1.1.1).

Proposition 1.2.1

Soient X, Y deux variétés complexes lisses, $f : X \rightarrow Y$ une submersion holomorphe surjective. Soit $N \in \mathbb{N}$ et soit $B \rightarrow Y$ un fibré vectoriel holomorphe.

Si $\forall y \in Y$,

- la fibre $f^{-1}(y)$ est connexe, et
- $\forall q \in \{1, \dots, N\}$, $H^q(f^{-1}(y), \mathbb{C}) = 0$.

Alors le morphisme canonique

$$H^q(Y, \mathcal{O}_Y(B)) \rightarrow H^q(X, f^{-1} \mathcal{O}_Y(B))$$

est un isomorphisme pour $q = 0, 1, \dots, N$ et est une injection pour $q = N + 1$.

La preuve repose sur la résolution de Dolbeault du faisceau $\mathcal{O}_Y(B)$ et de son image inverse par f . La difficulté consiste à montrer que sous l'hypothèse topologique sur les fibres, la seconde résolution est également acyclique. Elles permettent donc de calculer les espaces de cohomologie $H^q(Y, \mathcal{O}_Y(B))$ et $H^q(X, f^{-1} \mathcal{O}_Y(B))$ à partir de leurs sections globales qui sont égales.

Fibrés et faisceaux, notation usuelles.

Soit X une variété complexe, on peut construire :

T_X fibré tangent (objet différentiel)

T_X^* fibré cotangent (objet différentiel)

$\Lambda_X^1 = T_X^* \otimes \mathbb{C}$ fibré cotangent complexifié

$\mathcal{E}_X^1$ faisceau des 1-formes différentielles (complexes), c'est également $\mathcal{E}(\Lambda_X^1)$ le faisceau des sections lisses du fibré cotangent complexifié.

Ω_X^1 faisceau des 1-formes différentielles de régularité holomorphe, c'est également le faisceau $\mathcal{O}(\Lambda_X^1)$ des sections holomorphes du fibré Λ_X^1 .

$\Lambda_X^{1,0}$ fibré cotangent "holomorphe" ¹.

$\mathcal{E}_X^{1,0}$ faisceau des 1-formes différentielles de type $(1,0)$, ce sont les sections lisses de $\Lambda_X^{1,0}$.

$\Omega_X^{1,0}$ faisceau des 1-formes différentielles de régularité holomorphe et de type $(1,0)$, c'est également le faisceau $\mathcal{O}(\Lambda_X^{1,0})$ des sections holomorphes du fibré $\Lambda_X^{1,0}$.

Remarques sur la notation propre à la restriction de fibrés.

Soit $X \subseteq Y$ une sous-variété, on notera i l'inclusion. On désignera par $\mathcal{A}$ les faisceaux structurels. Pour un fibré E sur Y , on notera $E|_X := i^*E$ le fibré sur X induit. Alors son faisceau des sections est donné par

$$\mathcal{A}_X(E|_X) = i^{-1} \mathcal{A}_Y(E) \otimes_{i^{-1} \mathcal{A}_Y} i^{-1} \mathcal{A}_X = i^* \mathcal{A}_Y(E)$$

L'abus $\mathcal{O}(k)$:

Soit V un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ de dimension d . On rappelle que $\mathbb{P}(V)$ est l'ensemble des quotients de rang 1 de V . Cette définition ² diffère de la définition "historique" comme ensemble des droites vectorielles de V , voir par ex. [Laz04].

Dans la suite, $\mathcal{O}(1)$ désignera soit le fibré tautologique sur l'espace projectif $\mathbb{P}$, soit le faisceau de ses sections holomorphes. On fera le même abus pour ses puissances tensorielles $\mathcal{O}(k)$.

Soit $\mathcal{F}$ un faisceau analytique et F un fibré vectoriel holomorphe sur $\mathbb{P}$. On notera alors

- $\mathcal{F}(k)$ pour $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}(k)$ (en tant que faisceau)
- $F(k)$ pour $F \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}(k)$ (en tant que fibré)

On rappelle que pour $d = 2$ (ie $\mathbb{P}(V) \cong \mathbb{P}^1$), la règle de Bott nous donne

$$\begin{aligned} H^0(\mathbb{P}(V), \mathcal{O}(k)) &= \odot^k V & k \geq 0 \\ H^1(\mathbb{P}(V), \mathcal{O}(-k)) &= \det(V^*) \otimes \odot^{k-2} V^* & k \geq 2 \end{aligned}$$

où $\odot$ désigne la puissance symétrique. Tous les autres groupes de cohomologie sont nuls.

1.2.3 Formule de projection et changement de base en cohomologie

On se place dans le cadre holomorphe et on se référera à [Buc85, 1.1 Projection Formula p.437] ou [Mum12, II.5 Cor. 1 et 2.].

Soient X, Y deux variétés analytiques complexes et soit $f : X \rightarrow Y$ une application holomorphe. Soient $\mathcal{G}$ un faisceau cohérent sur X et $\mathcal{F}$ un faisceau localement libre sur Y .

Les $\mathcal{R}^i f_* \mathcal{G}$ héritent naturellement d'une structure de faisceaux de $\mathcal{O}_Y$ -modules. On a cependant des résultats plus forts

1. [Grauert] Si f est **propre**, alors les $\mathcal{R}^i f_* \mathcal{G}$ pour $i \geq 0$ sont cohérents sur Y
2. [Formule de la projection] Toujours sous l'hypothèse f **propre**, on a

$$\mathcal{R}^i f_* (\mathcal{G} \otimes_{\mathcal{O}_X} f^* \mathcal{F}) \simeq (\mathcal{R}^i f_* \mathcal{G}) \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{F} \quad (1.2.1)$$

1. ici le mot holomorphe indique le type, pas la régularité.

2. que l'on peut rapporter à l'école grothendicienne.

3. [Changement de base] enfin si de plus pour $i \geq 0$,

- f est **plate**,
- $\mathcal{G}$ est **localement libre**,
- et la fonction

$$y \mapsto h^i(f^{-1}(y), \mathcal{G} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_{f^{-1}(y)})$$

est constante pour $y \in Y$,

alors $\mathcal{R}^i f_* \mathcal{G}$ est **localement libre**. De plus la fibre en y est l'espace

$$H^i(f^{-1}(y), \mathcal{G} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_{f^{-1}(y)})$$

On peut faire un parallèle entre le point 3 et la proposition 1.1.1 : en effet, sous les hypothèses du point 3, le faisceau $\mathcal{R}^i f_* \mathcal{G}$ est **localement libre** et

- a pour tige en y l'espace $H^i(f^{-1}(y), u^{-1} \mathcal{G})$ par la proposition 1.1.1,
- a pour fibre en y l'espace $H^i(f^{-1}(y), \mathcal{G} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_{f^{-1}(y)})$.

Le lien entre ces deux espaces se comprend à travers la suite exacte

$$0 \rightarrow u^{-1} \mathcal{G} \otimes_{u^{-1} \mathcal{O}_X} u^{-1} \mathcal{I}_{f^{-1}(y)} \rightarrow u^{-1} \mathcal{G} \rightarrow u^{-1} \mathcal{G} \otimes_{u^{-1} \mathcal{O}_X} \mathcal{O}_{f^{-1}(y)} \rightarrow 0$$

où $\mathcal{I}_{f^{-1}(y)}$ désigne l'idéal de $\mathcal{O}_X$ définissant l'inclusion $u : f^{-1}(y) \hookrightarrow X$.

1.3 Géométrie infinitésimale

Les deux sections suivantes introduisent des outils plus sophistiqués pour l'étude de la structure complexe sur Z .

1.3.1 Connexions sur un fibré vectoriel

Différentes notions de connexions

Le terme *connexion* dispose de tout un zoo de définitions. On rappelle ici les différentes connexions *de Koszul* qui peuvent exister sur un fibré. On s'intéressera plus particulièrement au cadre holomorphe pour clarifier l'utilisation subséquente des propriétés de connexions holomorphes.

Soit E un fibré (éventuellement holomorphe, hermitien) sur X (variété éventuellement complexe), $\mathcal{E}$ (resp. $\mathcal{O}$) les faisceaux de fonctions lisses (resp. holomorphes). On définit les objets suivants :

Connexion :

Morphisme de faisceaux de groupes abéliens $D : \mathcal{E}(E) \rightarrow \mathcal{E}^1(E)$ qui satisfait une règle de Leibniz :

$$\forall s \in \Gamma(\mathcal{E}(E)), \forall f \in \Gamma(\mathcal{E}), \quad D(fs) = df \otimes s + fD(s)$$

Connexion de type $(0, 1)$ Sur une variété complexe :

Une connexion de type $(0, 1)$ est un morphisme de faisceaux $D : \mathcal{E}(E) \rightarrow \mathcal{E}^{0,1}(E)$ qui satisfait une règle de Leibniz de type $(0, 1)$, c'est-à-dire

$$\forall s \in \Gamma(\mathcal{E}(E)), \forall f \in \Gamma(\mathcal{E}), \quad D(fs) = \bar{\partial} f \otimes s + fD(s).$$

- On définit de même les connexions de type $(1, 0)$.
- Une connexion D sur E se décompose naturellement en deux connexions $D' = D^{1,0}$ et $D'' = D^{0,1}$ sur E .

Connexion de type $(0, 1)$ canonique :

Sur une variété complexe et pour un fibré holomorphe, on a une connexion de type $(0, 1)$ naturelle définie par le $\bar{\partial}$ des coefficients d'une section dans un repère holomorphe.

Connexion compatible avec la structure holomorphe (parfois dangereusement appelée *connexion holomorphe*) :

Sur une variété complexe et pour un fibré holomorphe, c'est une connexion D dont la partie D'' de type $(0, 1)$ est égale à la connexion canonique de type $(0, 1) : \bar{\partial}$.

Connexion hermitienne :

Sur une variété complexe, et pour un fibré hermitien, c'est une connexion compatible avec la structure hermitienne.

Connexion de Chern :

Sur une variété complexe et pour un fibré holomorphe hermitien, il existe une unique connexion **hermitienne** et **compatible avec la structure holomorphe** ; elle est appelée *connexion de Chern*.

Connexion holomorphe (forte) :

Sur une variété complexe et pour un fibré holomorphe E , c'est un morphisme de faisceaux $\mathcal{O}(E) \rightarrow \Omega^1(E)$ qui satisfait une règle de Leibniz dans la catégorie holomorphe

$$\forall s \in \Gamma(\mathcal{O}(E)), \forall f \in \Gamma(\mathcal{O}), \quad D(fs) = df \otimes s + fD(s).$$

Dans le suite, connexion holomorphe fera toujours référence à une connexion holomorphe forte. On pourra se référer à [Buc85, Part. I] ou [Del70] dans ce cas.

Dans le cas d'un morphisme $f : X \rightarrow Y$, on peut définir les notions de connexion (resp. de type $(0, 1)$, compatible, hermitienne, holomorphe) **relatives** à f en remplaçant les faisceaux de formes par les faisceaux de formes relatives et en remplaçant d par $d_f : \mathcal{O}_X \rightarrow \Omega_X \rightarrow \Omega_f$ dans la règle de Leibniz.

Enfin étant donné un morphisme $f : X \rightarrow Y$ et un fibré à connexion holomorphe (E, ∇) sur X , on peut définir un opérateur différentiel $f_* \nabla$ sur Y comme image directe de ∇ par f (au sens des faisceaux : 1.1.2). Il satisfait par fonctorialité la règle de Leibniz suivante

$$\forall s \in \Gamma(Y, f_* \mathcal{O}_X(E)), \forall \phi \in \Gamma(Y, \mathcal{O}_Y), \quad (f_* \nabla)(\phi s) = f_*(d\phi \otimes (s \circ f)) + \phi(f_* \nabla)(s).$$

Connexion naturelle sur un produit tensoriel

Soient (E, ∇_E) et (F, ∇_F) deux fibrés (holomorphes) à connexion holomorphe sur une variété complexe X .

Alors il existe une connexion naturelle sur le fibré $E \otimes F$.

$$\nabla : \mathcal{O}_X(E \otimes F) \rightarrow \Omega_X(E \otimes F)$$

Elle est donnée pour e et f des sections locales respectives de E et F , par

$$\nabla(e \otimes f) = \nabla_E(e) \otimes f + e \otimes \nabla_F(f)$$

C'est pourquoi on la note $\nabla_E + \nabla_F$ (ou plus rigoureusement $\nabla_E \otimes 1_F + 1_E \otimes \nabla_F$).

Courbure

Une connexion holomorphe ∇ sur un fibré E sur X s'étend de manière unique en une application

$$\nabla^k : \Omega_X^k(E) \rightarrow \Omega_X^{k+1}(E)$$

satisfaisant la règle de Leibniz suivante pour ω une k -forme et e une section locale de E

$$\nabla^k(\omega \otimes e) = d\omega \otimes e + (-1)^k \omega \wedge \nabla e$$

Dès lors on définit la *courbure* de la connexion ∇ comme la composée

$$F(\nabla) := \nabla^1 \circ \nabla : \mathcal{O}(E) \rightarrow \Omega^2(E)$$

C'est un résultat classique que $F(\nabla)$ est en fait $\mathcal{O}_X$ -linéaire, on peut donc la voir comme une 2-forme sur X à valeurs dans $\text{End}(E)$.

On se permettra de noter $F(E)$ pour la courbure de la connexion ∇ sur le fibré E s'il n'y a pas d'ambiguïté sur le choix de la connexion.

Une connexion sera dite *plate* si sa courbure est nulle.

Correspondance de Riemann-Hilbert

Il y a un lien fondamental entre connexions plates et les systèmes locaux qui est donné par la proposition

Proposition 1.3.1 ([Del70, thm 2.17])

Soit X une variété analytique complexe. Les foncteurs suivants :

1. V , **système local** complexe $\mapsto \mathcal{O} \otimes_{\mathbb{C}} V$ muni de sa connexion canonique pour laquelle les sections de V sont parallèles.
2. (E, ∇) , fibré vectoriel holomorphe à connexion plate, $\mapsto V = \ker \nabla$, le sous-faisceau des sections parallèles de $\mathcal{O}(E)$.

sont des équivalences de catégories quasi-inverses l'une dans l'autre entre la catégorie des systèmes locaux complexes sur X et la catégorie des fibrés vectoriels holomorphes à connexion plate sur X (avec pour morphismes les morphismes horizontaux de fibrés)

En particulier le **système local** $\mathbb{C}$ correspond au faisceau $\mathcal{O}$ muni de la dérivée extérieure d .

Une version relative [Del70, thm 2.23] pour $f : X \rightarrow Y$ fait correspondre les systèmes locaux relatifs (localement de la forme $f^{-1} \mathcal{O}_Y(B)$) avec les fibrés à connexion relative plate.

1.3.2 Théorie des épaississements

On énoncera ici les résultats de théorie des épaississement de sous-variétés analytiques qui nous seront utiles par la suite, notamment au chapitre 8. Pour un compte-rendu plus détaillé de la théorie, le lecteur pourra à se référer à [Buc85, EL86, EL92].

Épaississement de sous-variété lisse

Soit $(Y, \mathcal{O}_Y)$ une variété analytique complexe lisse et $(X, \mathcal{O}_X)$ une sous-variété lisse. On notera $\mathcal{I}_X$ le faisceau d'idéaux de $\mathcal{O}_Y$ des fonctions qui s'annulent sur X et $i : X \hookrightarrow Y$ l'injection.

Alors on a, par définition du faisceau des fonctions sur X ,

$$0 \rightarrow i^{-1} \mathcal{I}_X \rightarrow i^{-1} \mathcal{O}_Y \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow 0.$$

On notera $N_{X/Y} := (T_Y|_X)/T_X$ le fibré normal de X dans Y . Comme X est une sous-variété lisse de Y , on a pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\odot^k N_{X/Y}^* \simeq \frac{\mathcal{I}_X^k}{\mathcal{I}_X^{k+1}}.$$

Cela signifie que les formes k -linéaires symétriques sur le fibré normal de X dans Y sont les classes de fonctions qui s'annulent à l'ordre k sur X modulo celles qui s'annulent à un ordre supérieur.

Les épaississements de X sont fait pour disposer de plus de fonctions, notamment des fonctions non-nulles qui s'annulent sur X tout entier. Ces nouvelles fonctions ne voient pas les points de X mais mesurent plutôt les voisinages infinitésimaux de X dans Y (par exemple les directions normales de X dans Y). Ainsi l'épaississement à l'ordre m de X dans Y est défini comme le sous-schéma de Y d'espace sous-jacent X_{top} et de faisceau structure $\mathcal{O}_X^{(m)}$ donné par la suite exacte

$$0 \rightarrow i^{-1} \mathcal{I}_X^{m+1} \rightarrow i^{-1} \mathcal{O}_Y \rightarrow \mathcal{O}_X^{(m)} \rightarrow 0. \quad (1.3.1)$$

Par cette définition, l'épaississement à l'ordre 0 n'est autre que $(X, \mathcal{O}_X)$ et il y a un morphisme naturel entre l'épaississement à l'ordre $m+p$ et l'épaississement à l'ordre m qui s'apparente à une restriction et provient de l'inclusion $\mathcal{I}^{m+p} \subseteq \mathcal{I}^m$.

En particulier on a un analogue de (1.3.1) plus pratique car il fait abstraction de Y et manipule principalement des faisceaux localement libres sur X :

Lemme 1.3.2

Soit X une sous-variété lisse de Y et soit $m \geq 0$, alors on a la suite exacte suivante de faisceaux sur X

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_X(\odot^{m+1} N_{X/Y}^*) \rightarrow \mathcal{O}_X^{(m+1)} \rightarrow \mathcal{O}_X^{(m)} \rightarrow 0 \quad (1.3.2)$$

Intuitivement, les polynômes homogènes de degré $m + 1$ sur le fibré normal de X dans Y donnent des fonctions sur l'épaississement $X^{(m+1)}$ qui s'annulent sur l'épaississement à l'ordre m de X .

Cette propriété est une conséquence du résultat plus général [EL92, Lemma 2].

Épaississement de fibré

Avec les notations du paragraphe précédent, soit $E \rightarrow X$ un fibré vectoriel. On appelle *épaississement de E à l'ordre m sur $X^{(m)}$* un faisceau **localement libre** $\mathcal{F}$ de $\mathcal{O}_X^{(m)}$ -modules tel que

$$\mathcal{O}_X \otimes_{\mathcal{O}_X^{(m)}} \mathcal{F} \simeq \mathcal{O}_X(E)$$

c'est-à-dire il étend le fibré E sur X à $X^{(m)}$.

Soit E un fibré sur X et $E^{(k)}$ des épaississements (compatibles entre eux) de E aux voisinages à l'ordre k de X pour $0 \leq k \leq m$. La suite exacte (1.3.2) devient pour tout k

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_X(E \otimes \odot^{k+1} N_{X/Y}^*) \rightarrow \mathcal{O}_X^{(k+1)}(E^{(k+1)}) \rightarrow \mathcal{O}_X^{(k)}(E^{(k)}) \rightarrow 0 \quad (1.3.3)$$

Épaississement de connexion

Dans les sections qui suivent, on se donne $X' = X^{(n)}$ un épaississement à l'ordre n de X (l'épaississement à l'ordre n de X dans Y). On notera ensuite avec $''$ les épaississements à l'ordre $n + 1$. On notera également $\mathcal{O}'_X$ ou parfois simplement $\mathcal{O}'$ pour $\mathcal{O}_{X'}$ (et de même avec $\mathcal{O}''$).

La donnée d'une connexion holomorphe sur un fibré assure l'existence d'un épaississement du fibré. Ainsi épaissir les fibrés à connexion est un ping-pong entre d'une part l'épaississement de la connexion sur un fibré fixé et d'autre part le choix de l'épaississement du fibré.

Étendre une connexion ∇' sur un fibré E' sur X' à une connexion ∇'' sur un fibré E'' sur X'' se fait en 3 étapes

1. On définit E'' (cf. paragraphe suivant page 21).
2. On étend ∇' en $\tilde{\nabla}' : \mathcal{O}''_X(E'') \rightarrow \Omega_Y^1(E') = \Omega_Y^1 \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}'_X(E')$ qui n'est pas une connexion au sens strict mais satisfait la règle de Leibniz suivante

$$\tilde{\nabla}'(fe) = df \otimes [e]_{E'} + f \left[\tilde{\nabla}'e \right]_{E'}$$

pour e section locale de E'' et $[e]_{E'}$ son image dans E' .

3. On étend $\tilde{\nabla}'$ en une véritable connexion ∇'' sur E''

$$\nabla'' : \mathcal{O}''_X(E'') \rightarrow \Omega_{X''}^1(E'')$$

Épaississement du fibré induit par la connexion Considérons la suite exacte conormale "épaissie" sur X

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_X(\odot^{n+1} N^*) \rightarrow \Omega_Y \otimes \mathcal{O}'_X \rightarrow \Omega_{X'} \rightarrow 0$$

que l'on peut tensoriser par $\mathcal{O}'_X(E')$ et construire le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_X(E \otimes \odot^{n+1} N^*) & \longrightarrow & \Omega_Y \otimes \mathcal{O}'_X(E') & \longrightarrow & \Omega_{X'}(E') \longrightarrow 0 \\ & & & & \nearrow \nabla' & & \\ & & & & \mathcal{O}'_X(E') & & \end{array}$$

On peut également considérer la puissance extérieure k -ième du quotient $\Omega_Y^1 \otimes \mathcal{O}'_X \rightarrow \Omega_{X'}^1 \rightarrow 0$. On notera $R_{X'}^k$, son noyau.

$$0 \rightarrow R_{X'}^k \rightarrow \Omega_Y^k \otimes \mathcal{O}'_X \rightarrow \Omega_{X'}^k \rightarrow 0$$

On peut alors recouvrir X par des ouverts U_i qui trivialisent E' . Sur l'ouvert U_i on peut choisir un repère $e_i = (e_i^\alpha)_\alpha$ de E' . Les matrices de passages $g_{ji} \in \mathcal{G}\ell_r(\mathcal{O}'_X)$ de e_i à e_j sur l'intersection U_{ij} satisfont la relation de cocycle³ :

$$g_{ij}g_{jk}g_{ki} = \text{Id}_r \quad \text{sur } U_{ijk}.$$

Si on considère $\check{g}_{ij}$ les classes des g_{ij} dans $\mathcal{G}\ell_r(\mathcal{O}_X)$ induites par la réduction $\mathcal{O}'_X \rightarrow \mathcal{O}_X$, elles satisfont toujours la relation de cocycle et correspondent aux changements de trivialisations du fibré E . En dérivant la relation de cocycle de g , on trouve la relation de cocycle additive suivante

$$g_{ji}d'g_{ij} + g_{kj}d'g_{jk} + g_{ik}d'g_{ki} = 0 \quad \text{sur } U_{ijk}$$

qui est l'obstruction à l'existence d'une connexion sur E' .

Comme pour $m \in M(I'/I'')$ la relation $(Id + m)^{-1}d_{X''}(Id + m) = d_{X''}m \bmod I''$ montre la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(I'/I'') & \xrightarrow{d''_X} & \mathcal{M}_n(\Omega_Y \otimes \mathcal{O}'_X) & \xrightarrow{\bmod d'I'} & \mathcal{M}_n(\Omega_{X'}) \longrightarrow 0 \\ & & \uparrow \text{id} & & \uparrow \bar{D} & & \uparrow D \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(I'/I'') & \xrightarrow{m \mapsto 1+m} & \mathcal{G}\ell_n(\mathcal{O}''_X) & \xrightarrow{\bmod I'} & \mathcal{G}\ell_n(\mathcal{O}'_X) \longrightarrow 0 \end{array}$$

l'existence d'une connexion holomorphe ∇' sur $E' \rightarrow X'$ assure l'annulation de la classe $DE' := [g_{ji}^{-1}dg_{ji}]$ dans $H^1(X', \Omega_{X'}(\text{End}(E')))$ dont l'image dans $H^2(X', \text{End}(E) \otimes (I'/I''))$ est l'obstruction à l'existence d'un épaississement E'' de E' sur X'' . La donnée d'une connexion holomorphe sur E' assure l'existence d'un épaississement du fibré.

Épaississement de la connexion Comme l'action d'un élément $m = (m_{ji})$ du groupe $H^1(X', \text{End}(E) \otimes (I'/I''))$ sur la classe d'épaississement $E'' = (g''_{ji}) \in H^1(GL(\mathcal{O}_{X''}))$

$$m \cdot E'' = ((Id + m_{ji})g''_{ji})$$

puis sur l'obstruction $\tilde{\omega}(\nabla', E'') \in H^1(X', \text{End}(E) \otimes I'/I'')$ à étendre ∇' en une pseudo-connexion sur E''

$$\tilde{\omega}(\nabla', m \cdot E'') = (m_{ji}) + \tilde{\omega}(\nabla', E'')$$

est affine, il n'existe exactement qu'une seule classe d'isomorphisme d'épaississement $m \cdot E''$ telle que $\tilde{\omega}(\nabla', m \cdot E'') = 0$ et donc sur lequel la connexion ∇' s'étend en une pseudo-connexion $\tilde{\nabla}'$.

Le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & R_{X''}^2(\text{End}(E)) & \longrightarrow & \Omega_Y^2 \otimes \mathcal{O}'_X(\text{End}(E')) & \longrightarrow & \Omega_{X'}^2(\text{End}(E')) \longrightarrow 0 \\ & & \uparrow \text{id} & & \uparrow & & \uparrow \nabla' \\ 0 & \longrightarrow & R_{X''}^2(\text{End}(E)) & \longrightarrow & \Omega_{X''}^1(\text{End}(E'')) & \longrightarrow & \Omega_{X'}^1(\text{End}(E')) \longrightarrow 0 \end{array}$$

montre que l'obstruction $\omega_{n+1}(\tilde{\nabla}') \in H^1(X', R_{X'}^2(\text{End}(E'')))$ à étendre la pseudo-connexion $\tilde{\nabla}'$ en une connexion sur E'' est l'image par le morphisme connectant de l'image par ∇' de la classe $(A_i) \in H^0(\Omega_{X''}^1(\text{End}(E'')))$ potentiel du cobord $D\tilde{\nabla}' = (g''_{ji})^{-1}d_{X'}g''_{ji}$ donc l'image par le morphisme connectant la courbure $F(\nabla') = \nabla'(A_i)$ de ∇' .

Obstructions et classifications d'épaississements de fibrés à connexion

Soit $X \subseteq Y$ une sous-variété lisse. On a la suite exacte "conormale épaissie" de $\mathcal{O}_X^{(n)}$ -modules

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_X(\odot^{n+1}N^*) \rightarrow \Omega_Y^1 \otimes \mathcal{O}_X^{(n)} \rightarrow \Omega_{X^{(n)}}^1 \rightarrow 0.$$

Soit $E^{(n)}$ un fibré sur $X^{(n)}$, et E sa restriction à X . On admettra que

3. on fera attention au caractère non-commutatif

L'espace $H^0(X, \Omega_{X^{(n)}}^2(\mathbf{End}(E^{(n)})))$ contient les courbures de connexions sur $E^{(n)}$, l'obstruction à l'existence d'une connexion sur ce fibré est une classe dans $H^1(X, \Omega_{X^{(n)}}^1(\mathbf{End}(E^{(n)})))$.

L'espace $H^1(X, R_{X^{(n)}}^2(\mathbf{End}(E)))$ contient les obstructions à ce qu'une connexion sur $E^{(n)}$ s'étende en une connexion sur $E^{(n+1)}$ (ce dernier étant déterminé par la connexion cf. paragraphe 1.3.2).

L'espace $H^1(X, \mathbf{End}(E) \otimes \odot^{n+1} N^*)$ agit transitivement sur les classes d'épaississements à l'ordre $n+1$ du fibré $E^{(n)}$.

L'espace $H^2(X, \mathbf{End}(E) \otimes \odot^{n+1} N^*)$ contient les obstructions à ce qu'un fibré $E^{(n)}$ sur $X^{(n)}$ étendant E s'étende en un fibré $E^{(n+1)}$ sur $X^{(n+1)}$.

Considérons les suites exactes

$$0 \rightarrow R_{X^{(n)}}^2(\mathbf{End}(E)) \rightarrow \Omega_Y^2(\mathbf{End}(E^{(n)})) \rightarrow \Omega_{X^{(n)}}^2(\mathbf{End}(E^{(n)})) \rightarrow 0$$

issue de la définition de R_X^k et

$$0 \rightarrow \mathcal{O}(\mathbf{End}(E) \otimes \odot^{n+2} N^*) \rightarrow \Omega_Y^1(\mathbf{End}(E^{(n)}) \otimes \odot^{n+1} N^*) \rightarrow R_{X^{(n)}}^2(\mathbf{End}(E)) \rightarrow 0$$

issue de la suite conormale épaissie. Elles donnent les applications suivantes entre espaces de cohomologie

$$\begin{aligned} \varphi &: H^0(X, \Omega_{X^{(n)}}^2(\mathbf{End}(E^{(n)}))) \rightarrow H^1(X, R_{X^{(n)}}^2(\mathbf{End}(E))), \\ \theta &: H^0(X, R_{X^{(n)}}^2(\mathbf{End}(E))) \rightarrow H^0(X^{(n)}, \Omega_Y^2(\mathbf{End}(E^{(n)}))), \\ \psi &: H^1(X, R_{X^{(n)}}^2(\mathbf{End}(E))) \rightarrow H^2(X, \mathbf{End}(E) \otimes \odot^{n+2} N^*), \\ \gamma &: H^0(X, R_{X^{(n)}}^2(\mathbf{End}(E))) \rightarrow H^1(X, \mathbf{End}(E) \otimes \odot^{n+2} N^*). \end{aligned}$$

On a alors la proposition suivante qui relie précisément les obstructions et classes d'extensions de connexions avec les obstructions et classes d'extension de fibrés.

Proposition 1.3.3 ([Buc85, Prop H])

Soient $X \subseteq Y$ deux variétés lisses, (E, ∇) un fibré à connexion sur X et $(E^{(n)}, \nabla^{(n)})$ une extension de (E, ∇) à $X^{(n)}$. Alors

- (a) Il existe une extension $(E^{(n+1)}, \tilde{\nabla}^{(n)})$ unique à isomorphisme au dessus de $(E^{(n)}, \nabla^{(n)})$ près.
- (b) On a, avec les notations précédentes
 - l'image par φ de la courbure de $\nabla^{(n)}$ est l'obstruction à ce que $\tilde{\nabla}^{(n)}$ s'étende en une connexion sur $E^{(n+1)}$.
 - l'image par ψ de l'obstruction à ce que $\tilde{\nabla}^{(n)}$ s'étende en une connexion sur $E^{(n+1)}$ est l'obstruction à ce que $E^{(n+1)}$ s'étende en un fibré $E^{(n+2)}$.
- (c) Soient $\nabla_1^{(n+1)}$ et $\nabla_2^{(n+1)}$ deux extensions de $\tilde{\nabla}^{(n)}$, qui entraînent par (a) l'existence de deux extensions $E_1^{(n+2)}$ et $E_2^{(n+2)}$ de $E^{(n+1)}$. On notera $\delta = \nabla_1^{(n+1)} - \nabla_2^{(n+1)}$. Alors
 - l'image de la différence δ par θ puis restreinte à $X^{(n)}$ est la différence entre les courbures des deux connexions,
 - l'image de δ par γ est la différence entre les classe d'épaississement des deux fibrés.
- (d) Si la connexion $\nabla^{(n)}$ est plate, il une extension **plate** de $(E^{(n)}, \nabla^{(n)})$ à l'ordre $n+1$ et cette extension est unique à unique isomorphisme au dessus de $(E^{(n)}, \nabla^{(n)})$ près.

Par soucis de clarté, on énonce la version relative qu'on utilisera, avec des notations plus proches de celles du présent manuscrit.

Proposition 1.3.4 (version relative de [Buc85, Prop H])

Soient $X \subseteq Y$ deux variétés lisses sur Z , on notera $p : Y \rightarrow Z$ le morphisme de structure. Soit (E, ∇) un fibré à connexion p -relative et (E', ∇') une extension μ -relative à $X^{(n)}$. Alors

- (a) Il existe une extension $(E'', \tilde{\nabla}')$ unique à isomorphisme au dessus de (E', ∇') près.
- (b) On a, avec les notations précédentes
 - l'image par φ de la courbure de ∇' est l'obstruction à ce que $\tilde{\nabla}'$ s'étende en une connexion sur E'' .
 - l'image par ψ de l'obstruction à ce que $\tilde{\nabla}'$ s'étende en une connexion sur E'' est l'obstruction à ce que E'' s'étende en un fibré E''' .
- (c) Soient ∇_1'' et ∇_2'' deux extensions de $\tilde{\nabla}'$, qui entraînent par (a) l'existence de deux extensions E_1'' et E_2'' de E' . On notera $\delta = \nabla_1'' - \nabla_2''$. Alors
 - l'image de la différence δ par φ puis restreinte à $X^{(n)}$ est la différence entre les courbures des deux connexions,
 - l'image de δ par ψ est la différence entre les classe d'épaississement des deux fibrés.
- (d) Si la connexion ∇' est plate, il une extension **plate** relative de (E', ∇') à l'ordre $n + 1$ et cette extension est unique à unique isomorphisme au dessus de (E', ∇') près.

Chapitre 2

Variété hyperkählérienne et espace des twisteurs

Elle met des noms sur les choses, des étiquettes, comme pour dire "Ces choses font partie de mon système, je les ai comprises." Mais le temps de nommer une chose, elle a déjà changé, et le nom qu'on lui a donné a déjà fini de la définir avec exactitude, et on se retrouve avec en bouche des mots vides. L'Occidental veut résoudre le monde. Faire de l'un avec du multiple. C'est un leurre.

— *Le chat du rabbin,*
Joann SFAR

2.1 Définition

Une variété *hyperkählérienne* $(M, g, (I, J, K))$ est la donnée

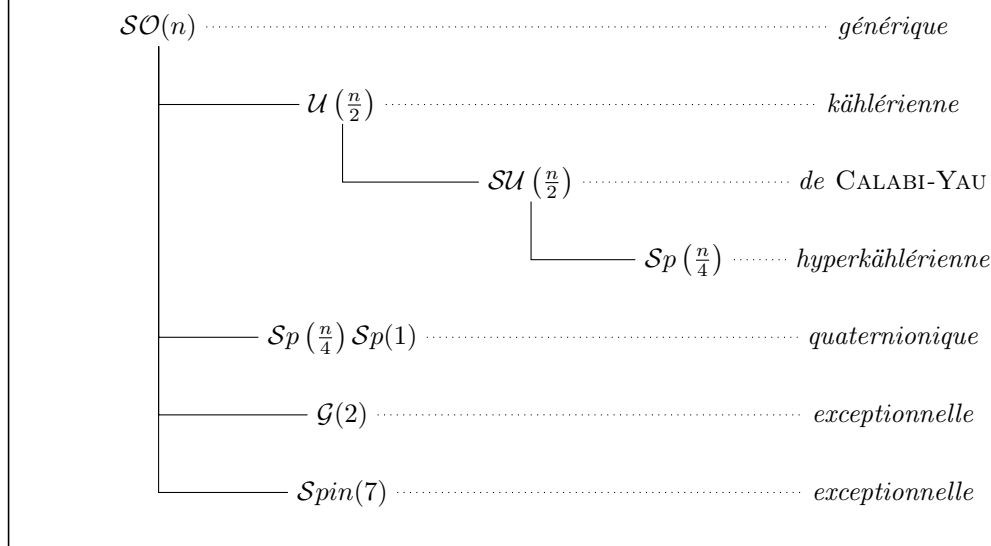
- D'une variété différentielle M de dimension $4n$
- D'une métrique riemannienne g sur M
- De trois structures presque-complexes I, J et K sur M satisfaisant
 - ▶ $IKJ = -1$ (en particulier I, J et K satisfont les relations quaternioniques¹)
 - ▶ I, J et K sont orthogonales pour g
 - ▶ I, J et K sont parallèles pour g donc intégrables et kählériennes.

On fera l'hypothèse que M est connexe et simplement connexe ; ces hypothèses ne sont pas très restrictives, par exemple les variétés hyperkählériennes qui apparaissent dans la décomposition de Bogomolov (cf. [GHJ03]) le sont.

L'existence des trois tenseurs parallèles I, J et K impose des restrictions sur l'holonomie de la métrique et donc sur sa courbure. Ainsi sous ces hypothèses $Hol(g)$ est un sous-groupe du groupe symplectique $Sp(n)$ et en particulier, c'est un sous-groupe de $SU(2n)$ donc g est Ricci-plate, on pourra se reporter à [GHJ03] pour plus de détails. Si de plus M est non-localement symétrique, le groupe d'holonomie est exactement $Sp(n)$. Ceci découle du théorème de classification de Berger (proposition 2.1.1). A priori on ne fera pas cette hypothèse.

Proposition 2.1.1 (*Classification de Berger* [Bea83, GHJ03])

Soit (M, g) une variété riemannienne de dimension n , compacte, connexe, simplement connexe, non-symétrique, sans bord. Alors $Hol(M)$ est l'un des groupes suivants :



Les liens indiquent les inclusions de groupes, et la notation $(\cdot)(n/k)$ signifie implicitement "la dimension n est un multiple de k ".

Exemples compacts

- Une variété (compacte) symplectique holomorphe est dite *irréductible* [GHJ03, 5.10] si elle est simplement-connexe et $h^{2,0} = 1$. Alors pour chaque classe de Kähler, elle admet par théorème de Yau [GHJ03, Sec. 5] un métrique Ricci-plate g qui en fait une variété hyperkählérienne (les structures J et K sont déterminées à partir de la forme symplectique et de la métrique).
- Les surfaces K3 forment un cas particulier du précédent : Ce sont les surfaces complexes irréductibles de fibré canonique trivial.
- Les tores $\mathbb{R}^{4n}/\Lambda$ muni de la métrique quotient donnent des exemples de variétés hyperkählériennes qui ne sont pas simplement connexes.

1. Relations du Brougham bridge $I^2 = J^2 = K^2 = IKJ = -1$

- Étant donné une surface K3, on peut considérer le schéma de Hilbert des n -uplets de points sur cette surface. La variété obtenue est lisse et compacte, irréductible et porte naturellement une forme symplectique holomorphe. C'est donc une variété hyperkählérienne par le théorème de Yau.
- Une construction similaire dans le cas des tores permet de construire les variétés de Kummer généralisées.

Exemples ouverts

- $\mathbb{R}^4 \simeq \mathbb{H}$ (plus généralement un ouvert de $\mathbb{R}^{4n}$) avec la structure plate.
- Variétés de carquois de Nakajima [Sch08, Nak98] qui sont un cas particulier de quotient hyperkählérien [HKLR87].
- Cotangent à $\mathbb{P}^n$ et la métrique d'Eguchi-Hanson [Cal79].
- Voisinage de la section nulle dans le cotangent d'une variété kählérienne compacte [VK99].

2.2 Structures kählériennes

Soit $(M, g, (I, J, K))$ une variété hyperkählérienne. Pour $\zeta \in \mathbb{P}^1$, on note

$$I_\zeta = a_I(\zeta, \bar{\zeta}) I + a_J(\zeta, \bar{\zeta}) J + a_K(\zeta, \bar{\zeta}) K$$

où

$$\begin{aligned} a_I(\zeta, \bar{\zeta}) &= \frac{1 - \zeta \bar{\zeta}}{1 + \zeta \bar{\zeta}} \\ a_J(\zeta, \bar{\zeta}) &= \frac{\zeta + \bar{\zeta}}{1 + \zeta \bar{\zeta}} \\ a_K(\zeta, \bar{\zeta}) &= i \frac{\zeta - \bar{\zeta}}{1 + \zeta \bar{\zeta}}. \end{aligned}$$

Pour chaque ζ c'est une structure presque-complexe intégrable sur M . On lui associe la forme fondamentale $\omega_\zeta = g(I_\zeta _, _)$ qui munit (M, I_ζ) d'une structure kählérienne. On note X_ζ la variété kählérienne $(M, I_\zeta, \omega_\zeta)$ de dimension $2n$. Et X_0 pour (M, I, ω_I) .

2.3 Structures symplectiques holomorphes

La 2-forme

$$\sigma = \sigma_I := \omega_J + i\omega_K \tag{2.3.1}$$

est une forme symplectique holomorphe de type $(2, 0)$ sur X_0 . Et, de même

$$\sigma_\zeta = \sigma + 2\zeta\omega_I - \zeta^2\bar{\sigma} \tag{2.3.2}$$

est une forme symplectique holomorphe de type $(2, 0)$ sur X_ζ [HKLR87, (3.87) p.556].

2.4 Espace des twisteurs

On munit la variété différentielle $Z = M \times \mathbb{S}^2$ d'une structure presque complexe

$$\mathbb{I}_{m, \zeta} = ((I_\zeta)_m, (I_{\mathbb{P}^1})_\zeta) \tag{2.4.1}$$

qui met en famille les structures complexes I_ζ sur M .

On notera f resp. π les projections de Z sur $\mathbb{P}^1$, resp. M .

D'après [HKLR87, 3.(F), p.555], l'espace $(Z, \mathbb{I})$ est une variété complexe de dimension $2n + 1$ et $f : Z \rightarrow \mathbb{P}^1$ est holomorphe. Dans leur preuve, l'intégrabilité de la structure presque-complexe $\mathbb{I}$ découle immédiatement du caractère kählérien des structures complexes, mais c'est en fait un résultat plus général propre aux variétés 3-holomorphes (ou hypercomplexes), voir par exemple [Kal98].

$$\begin{array}{ccc}
Z & \xrightarrow{f} & \mathbb{P}^1 \\
\vdots & & \\
\downarrow \pi & & \\
M & &
\end{array}$$

FIGURE 2.1 – π n'est pas holomorphe.

2.4.1 Le fibré tangent horizontal

Considérons le fibré T_f défini par la suite exacte

$$0 \rightarrow T_f \rightarrow T_Z \xrightarrow{f^*} f^*T_{\mathbb{P}^1} \rightarrow 0 \quad (2.4.2)$$

on peut alternativement le voir comme le sous-fibré réel du fibré tangent à Z , ou par l'identification usuelle comme le sous-fibré complexe du fibré tangent holomorphe $T_Z^{1,0}$. C'est un fibré holomorphe sur Z ; on l'appellera le *tangent horizontal* de Z . D'autre part, comme $Z = M \times \mathbb{S}^2$ du point de vue $\mathcal{C}^\infty$, alors $T_f \simeq \pi^*T_M$ en tant que fibrés vectoriels différentiels.

Considérons la fibre $f^{-1}(\zeta) \subseteq Z$. Alors, par construction $T_f|_{f^{-1}(\zeta)}$ est isomorphe (via π_*) à $T_{X_\zeta} = T_\zeta^{1,0}$ en tant que fibré vectoriel holomorphe.

2.4.2 Les droites twistorielles

Les sous-espaces $L_m = \pi^{-1}(m) = \{m\} \times \mathbb{P}^1$ de Z sont des sous-variétés holomorphes (isomorphes à $\mathbb{P}^1$). On les appelle *droites twistorielles*.

2.4.3 Les droites

Dans la suite, on appellera *droite* toute courbe $L_s \subseteq Z$ image d'une section holomorphe s de f . Les droites twistorielles sont des droites pour lesquelles s est de la forme $\zeta \mapsto (m, \zeta)$ où $m \in M$ est fixé.

Soit $L_s \subseteq Z$ une droite, alors T_f restreint à L_s s'identifie avec le fibré normal de L_s dans Z . Ceci découle du fait que f restreinte à L_s induit un isomorphisme $L_s \simeq \mathbb{P}^1$, dont la différentielle identifie T_{L_s} et $f^*T_{\mathbb{P}^1}$ et donc un scindage de (2.4.2) en restriction à L_s . Ainsi

$$N_{L_s/Z} \cong T_f|_{L_s} \quad (2.4.3)$$

ou dualement

$$N_{L_s/Z}^* \cong T_f^*|_{L_s}. \quad (2.4.4)$$

L'isomorphisme (2.4.3) se construit comme suit : À une classe $[w] \in N_{L_s/Z}$ de vecteurs tangents à Z modulo les vecteurs tangents à L_s , on associe le vecteur

$$v := w - s_*f_*w \in T_Z.$$

On vérifie que

- le vecteur v ne dépend pas du choix du représentant $w \in T_Z$ de $[w]$,
- comme s est une section, $f_*v = f_*w - (f \circ s)_*f_*w = f_*w - f_*w = 0$ et donc $v \in T_f$.

L'isomorphisme réciproque est donné par la composition $T_f|_{L_s} \rightarrow T_Z|_{L_s} \rightarrow N_{L_s/Z}$.

2.4.4 Déformations et obstructions

Enfin Hitchin et al. dans [HKLR87, 3.(F) p.555] démontrent que le fibré normal d'une droite twistorielle est une somme de $\mathcal{O}(1)$. L'argument principal est basé sur la relation algébrique suivante

$$\forall \zeta \in \mathbb{P}^1, \quad (1 + iI_\zeta)(1 + \zeta K)(1 - iI) = 0$$

On rappelle que $\frac{1}{2}(1 - iJ)$ est la projection sur la partie de type $(1, 0)$ pour une structure complexe J . Ainsi la relation ci-dessus peut s'interpréter comme le fait que $(1 + \zeta K)$ envoie les vecteurs de

type $(1, 0)$ pour I sur des vecteurs de type $(1, 0)$ pour I_ζ . Dès lors on peut, à partir de tenseurs I -holomorphes, obtenir des tenseurs I_ζ -holomorphes en multipliant le bon nombre de fois par $(1 + \zeta K)$. Mais sur $\mathbb{P}^1$ tout entier, le tenseur obtenu va se comporter comme une section de $\mathcal{O}(k)$. Par exemple, pour le fibré normal d'une droite twistorielle, il s'identifie sur la tranche $\zeta = 0$ ($I_\zeta = I$) avec le fibré tangent holomorphe à X_0 . Ainsi étant donné un vecteur v de type $(1, 0)$ pour I , la famille des $(1 + \zeta K)v$ est une section holomorphe sur la droite twistorielle de son fibré normal dans Z .

En conséquence, le groupe $H^1(L, N_{L/Z})$ est nul et donc par [Kod62] toute section du fibré normal peut être intégrée en une famille de déformations de L dans Z . Plus précisément la preuve de Kodaira s'adapte (cf [Des05]) pour donner le résultat suivant.

Proposition 2.4.1

Soit L_0 une droite twistorielle, $z_0 \in L_0$ et $\zeta \in \mathbb{P}^1$ tel que $\zeta \neq f(z_0)$. On pose y_0 le point de $L_0 \cap X_\zeta$.

Il existe U voisinage de y_0 dans X_ζ tel que pour tout $y \in U$, il existe une famille $(L_t)_t$ de déformations de L_0 passant par z_0 , paramétrée par Δ telle que $L_{\frac{1}{2}}$ passe par y .

Un résultat similaire (version infinitésimale) est vrai en spécifiant un vecteur horizontal tangent en y_0 à X_ζ au lieu d'un point y . Ces propriétés seront interprétées plus loin 3.2.4.

Chapitre 3

Espace des cycles et famille universelle

Not all those who wander are lost.

— *The Fellowship of the Ring*,
J.R.R. TOLKIEN

Dans ce chapitre, on définit l'ouvert C de l'espace des 1-cycles de Z et on étudie la famille universelle de la correspondance

$$\text{point de } C \quad \longmapsto \quad \text{droite de } Z$$

L'espace total W de cette famille universelle est central dans le reste de ce document. On dégagera ici sa structure de produit (proposition 3.2.1) pour établir un lien (3.3.5) entre la fibration complexe $Z \rightarrow \mathbb{P}^1$ et la géométrie de l'espace des cycles. Ces résultats seront utilisés aux chapitres 4, 6 et 7.

3.1 Espace des cycles

On notera $\text{Cycles}_1(Z)$ l'espace des 1-cycles de Z tel que construit dans [Bar99, Bar75] et $\text{Cycles}_1^\circ(Z)$ la composante irréductible de l'espace des cycles contenant les droites twistorielles. Soit L est un 1-cycle de Z tel que la restriction de f à L induise un isomorphisme $L \rightarrow \mathbb{P}^1$, alors il existe une unique section s de la fibration $Z \rightarrow \mathbb{P}^1$ dont l'image est L . Réciproquement toute section de f donne un élément de $\text{Cycles}_1(Z)$.

On notera $\text{Sec}(f)$ l'espace des sections de f dont les images sont dans $\text{Cycles}_1^\circ(Z)$. C'est un ouvert, il hérite donc d'une structure d'espace analytique génériquement lisse donc réduit. L'espace $\text{Sec}(f)$ et même $\text{Cycles}_1^\circ(Z)$ ne sont pas compacts (dans le cas hyperkählerien) d'après un résultat de Campana [Cam91]. On notera que les **droites twistorielles** sont des sections, de même que toute déformation suffisamment petite d'une droite twistorielle. Par la **remarque précédente sur les déformations de droites twistorielles dans Z** , on en déduit que l'espace $\text{Sec}(f)$ est lisse de dimension complexe $h^0(L, N) = 4n$ au voisinage d'une droite twistorielle.

Dans la suite C désignera un ouvert de $\text{Sec}(f)$ qui paramétrera les sections de f *suffisamment*¹ proches des droites twistorielles (et contenant en particulier toutes les droites twistorielles).

La variété M s'identifie naturellement à un sous-espace fermé de C par l'association $m \mapsto L_m$ qui à un point associe la droite twistorielle au dessus de ce point. Cependant M n'hérite pas d'une structure de sous-variété complexe. On notera i cette inclusion.

$$M \xhookrightarrow{i} C \xrightarrow{\text{ouvert}} \text{Sec}(f) \xrightarrow{\text{ouvert}} \text{Cycles}_1^\circ(Z) \xrightarrow{\text{comp. connexe}} \text{Cycles}_1(Z).$$

La variété M est en fait le lieu fixe d'une structure réelle sur C (involution anti-holomorphe), en particulier c'est une sous-variété totalement réelle. Cette inclusion sera étudiée plus en détail au paragraphe 4.5.

3.1.1 Section normale

On sait d'après 2.4.4 que le fibré normal d'une droite twistorielle $L \subseteq Z$ est une somme de $\mathcal{O}(1)$. Or cette propriété est ouverte dans l'espace des cycles. En effet, le fibré normal d'une droite twistorielle est ample et l'amplitude est une condition ouverte. Si on décompose le fibré sur la droite projective L_s en une somme de $\mathcal{O}(a_i)$, on a donc génériquement : tous les $a_i > 0$. De plus, par platitude, le degré $\sum a_i$ est constant donc nécessairement $a_i = 1$ pour tout i .

On va donc supposer dans la suite, quitte à restreindre C , que pour tout $s \in C$

$$N_{L_s/Z} \cong \mathbb{C}^{2n} \otimes \mathcal{O}(1) \tag{3.1.1}$$

3.2 Famille universelle et correspondance twistorielle

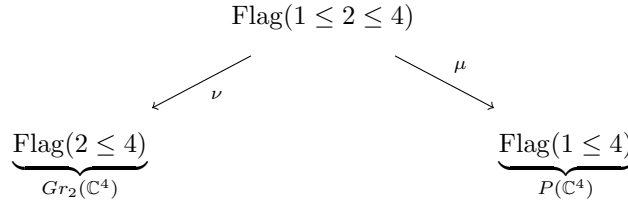
3.2.1 Correspondance twistorielle

Le cas classique

On note $\text{Flag}(a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n)$ la variété des drapeaux de $\mathbb{C}^{a_n}$ qui paramètre les chaînes $V_1 \subseteq V_2 \subseteq \dots \subseteq V_{n-1} \subseteq \mathbb{C}^{a_n}$ de sous-espaces vectoriels tels que pour tout i , $\dim(V_i) = a_i$.

On a une correspondance naturelle entre les variétés de drapeaux de $\mathbb{C}^4$

1. On précisera progressivement dans le document les restrictions imposées sur C : 3.1.1 (non dégénérescence du normal des droites), et les hypothèses 3.4.1 (hypothèse cohomologique sur les fibres de μ), 7.1.2 (caractère Stein), et éventuellement 8.4.1 (rétraction sur M).



où les applications sont données par l'oubli respectif de la droite contenue dans le 2-plan et du 2-plan contenant la droite. Ici l'espace qui joue le rôle de C est la grassmannienne des 2-plans $Gr_2(\mathbb{C}^4)$ qui peut être vu comme une complexification de la sphère $\mathbb{S}^4 \simeq \mathbb{P}_{\mathbb{H}}^1$. De gauche à droite, la correspondance associe à un 2-plan $E \subseteq \mathbb{C}^4$, l'ensemble $\mu(\nu^{-1}(E)) \simeq P(E)$ des droites de E . Mais comme E est de dimension 2, c'est une droite projective complexe dans P^3 . Ainsi on associe à un point de $Gr_2(\mathbb{C}^4)$ une droite dans P^3 .

Ce modèle jouet diffère beaucoup du cas hyperkählerien général (voir la section suivante 3.2.1), notamment sur deux points :

- L'espace qui joue le rôle de l'espace des twisteurs est projectif (P^3) et l'espace qui joue le rôle de C est compact ($Gr_2(\mathbb{C}^4)$).
- La correspondance réciproque est simple : À un point $z \in P^3$ correspond une droite V de $\mathbb{C}^4$. On peut alors considérer l'ensemble des 2-plans de $\mathbb{C}^4$ contenant cette droite. C'est l'ensemble $\nu(\mu^{-1}(z))$ qui s'identifie à l'ensemble des droites de $\mathbb{C}^4/V \cong \mathbb{C}^3$. C'est donc un plan projectif complexe dans $Gr_2(\mathbb{C}^4)$.

Un compte rendu plus complet de cette correspondance twistorielle dans le cas de la grassmannienne des 2-plans de $\mathbb{C}^4$ peut être trouvé dans [WW91].

Le cas des variétés de dimension 4 anti-auto-duales

La construction de l'espace des twisteurs d'une variété riemannienne est possible en toute généralité. C'est toujours une variété différentielle Z munie d'une fibration $Z \rightarrow M$ dont les fibres sont des sphères et possèdent naturellement une structure de droite projective complexe. Cependant la structure presque complexe naturelle sur Z n'est intégrable que si la partie auto-duale du tenseur de Weil de M s'annule. C'est le cas en particulier si la variété est à courbure scalaire nulle [Bes87].

Le cas hyperkählerien

Dans notre cas, à un point s de C correspond (par définition) une courbe complexe L_s (isomorphe à $\mathbb{P}^1$) dans Z et réciproquement à une courbe L dans Z , correspond² un point de C . D'autre part à un point z de Z , on peut associer l'ensemble des droites (sections) passant par z ; on notera $C(z)$ cet ensemble. Son équation dans C est donnée par $(s \circ f)(z) = z$, il est donc de dimension complexe $2n$.

Cette correspondance peut être mise en famille en considérant l'espace universel des couples (section, point de l'image de cette section)

$$W = \{(s, z) \in C \times Z \mid s(f(z)) = z\}$$

Cet espace hérite de deux applications de projections $\nu : W \rightarrow C$ et $\mu : W \rightarrow Z$.

3.2.2 Notations

On résume les notations introduites précédemment dans le diagramme (non-commutatif) ci-dessous

2. Sous l'hypothèse qu'il existe une famille $(L_t)_{0 \leq t < 1}$ de déformations d'une droite twistorielle L_0 dans Z et $\varepsilon < 1$ telle que $L = L_\varepsilon$.

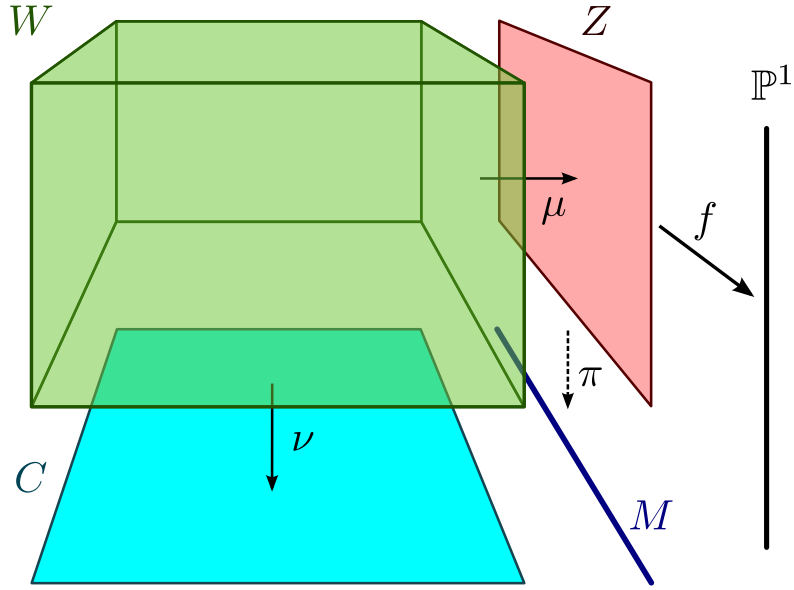
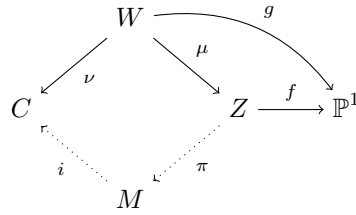


FIGURE 3.1 – Représentation des espaces considérés. On rappelle que si M est de dimension réelle $4n$, alors Z, W et C sont de dimensions complexes respectives $2n + 1$, $4n + 1$ et $4n$.



Les flèches en pointillés sont les applications qui ne sont pas holomorphes.

On notera de manière générale

- ζ un élément de $\mathbb{P}^1$,
- s un élément de C (section de f),
- x une section réelle de f , (élément de $i(M) \subseteq C$),
- m un élément de M vu comme but de $\pi : Z \rightarrow M$,
- z un élément de Z vu comme variété complexe,
- (m, ζ) un élément de Z vu comme le produit $M \times \mathbb{P}^1$,
- (s, z) ou plus simplement (s, ζ) un élément de W (cf. 3.2.3 pour la justification). On notera $\mathcal{O}(k)$ pour les images inverses (géométriques) de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(k)$ sur Z et W , et $B(k)$ pour $B \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}(k)$ en tant que fibré.

3.2.3 Structure produit

Proposition 3.2.1

Les applications holomorphes $\nu : W \rightarrow C$ et $g = f \circ \mu : W \rightarrow \mathbb{P}^1$ identifient l'espace tautologique W à la variété produit $C \times \mathbb{P}^1$.

On considère l'application $\nu \times g : W \rightarrow C \times \mathbb{P}^1$, elle est donnée par $(s, z) \mapsto (s, f(z))$. Sa réciproque est donnée par l'application $\phi : C \times \mathbb{P}^1 \rightarrow C \times Z$ telle que $(s, \zeta) \mapsto (s, s(\zeta))$. Il suffit de vérifier - d'une part que $f(s(\zeta)) = \zeta$, mais c'est exactement dire que s est une section de f ,

- et d'autre part que $s(f(z)) = z$ si $(s, z) \in W$, mais c'est la définition de W .

Ainsi on a bien démontré que W est un produit.

Si l'on fixe $s \in C$, alors $\nu^{-1}(s)$ s'identifie par μ à l'ensemble des $z \in Z$ tels que $s(f(z)) = z$ c'est-à-dire l'image de la section s dans Z . En ce sens, W est un désenchevêtrement des droites dans Z .

3.2.4 Retour sur les déformations et obstuctions

La propriété suivante décrit le tangent à l'espace des cycles :

Proposition 3.2.2

Soit $s \in C$ alors

$$T_{C,s} \simeq H^0(L_s, N_{L_s/Z}) \quad (3.2.1)$$

En effet étant donné une section de $H^0(L_s, N)$ il existe par Kodaira une famille $(L_t)_t$ de déformations de L_s paramétré par un petit disque Δ . Par propriété universelle de l'espace des cycles, cet ensemble de paramètres Δ s'envoie dans C et définit en particulier un vecteur tangent à s dans C .

Dans l'autre sens, un vecteur tangent à C en s est obtenu par un germe $(s_t)_t$ en s . Les sections L_t donnent par passage à la limite quand $t \rightarrow 0$ une section du fibré normal à L_s . Les deux constructions sont réciproques l'une de l'autre.

En fait l'identification (3.2.1) est un résultat plus général : L'espace des cycles est lisse en s sous l'hypothèse $H^1(L_s, N_{L_s}) = 0$, il s'identifie³ donc à l'espace de Douady ($\mathcal{D}$), or (voir par exemple [CP94, Prop 1.7])

$$T_{[Y]}\mathcal{D} \simeq \text{Hom}_{\mathcal{O}_Z}(J_Y/J_Y^2, \mathcal{O}_Z) \simeq H^0(Y, N_{Y/Z})$$

3.3 Étude de l'application d'évaluation μ

L'application μ est définie par $\mu(s, z) = z$, pour $(s, z) \in W$, c'est-à-dire satisfaisant $s(f(z)) = z$. C'est l'évaluation de la section $s \in C$ au point $\zeta \in \mathbb{P}^1$: en notant $(s, \zeta) \in W \simeq C \times \mathbb{P}^1$, l'application μ est donnée par

$$(s, \zeta) \mapsto s(\zeta).$$

À $s \in C$ fixé, on note $P_s = \nu^{-1}(s) \simeq \mathbb{P}^1$ la droite correspondant à s dans W . Alors μ réalise le plongement de la courbe abstraite P_s dans $L_s \subseteq Z$.

On peut étudier le fibré tangent à W . En particulier le vecteur

$$v + Y \in (T_{C \times Z})_{(s,z)} \simeq T_{C,s} \oplus T_{Z,z} \simeq H^0(L_s, N_{L_s/Z}) \oplus T_{Z,z}$$

est tangent à W en (s, z) si

$$v(f(z)) + s_* f_* Y = Y$$

ou encore plus rigoureusement

$$v(f(z)) = [(1 - s_* f_*)Y]_N.$$

Cette égalité a lieu dans $N_{L_s/Z}$ et nous dit simplement que Y est un représentant dans $T_{Z,z}$ de $v(f(z)) \in (N_{L_s/Z})_z$.

Enfin étant donné un tel couple $v + Y$ donnant un vecteur tangent à W , on peut tout simplement écrire la différentielle de μ comme

$$\mu_*(v + Y) = Y.$$

On a ainsi la propriété suivante

Proposition 3.3.1

L'application $\mu : W \rightarrow Z$ est une submersion.

3. via le morphisme de Douady-Barlet analogue analytique du morphisme de Hilbert-Chow

En effet, étant donné $Y \in T_{Z,z}$, on peut écrire $z = (m, \zeta)$ et considérer la droite twistorielle $L = L_m$ passant par z . On notera $x = [L]$ l'élément correspondant dans C . Considérons alors $[Y]$ la classe de Y dans $N_{L/Z}$ au point z . Soit v une section du fibré normal de L passant par $[Y]$ en z . Une telle section existe car $N_{L/Z}$ est une somme de $\mathcal{O}(1)$. Ainsi v nous donne un vecteur de $(T_C)_x$. On a bien $v(\zeta) = [Y] = [(1 - s_* f_*)Y]$ donc $v + Y$ est un vecteur tangent à W en (x, z) ; de plus

$$\mu_*(v + Y) = Y$$

d'où la surjectivité de la différentielle.

Enfin l'application μ n'est pas propre. Cela semble provenir du choix de prendre C comme un ouvert arbitrairement petit de l'espace des cycles, mais en fait, la composante de l'espace des cycles contenant les droites twistorielles n'est jamais compacte. En effet Campana [Cam92] a montré qu'il existe un point z de Z , tel que l'ensemble des droites passant par z (la fibre de μ en z) dégénère en une courbe entière horizontale.

On étudiera la topologie de ces fibres à la section 3.4.

3.3.1 Conséquence fondamentale de la structure produit

La décomposition $W \simeq C \times \mathbb{P}^1$ induit une décomposition des faisceaux de 1-formes.

$$\Omega_W^1 \simeq \nu^* \Omega_C^1 \oplus g^* \Omega_{\mathbb{P}^1}^1 \quad (3.3.1)$$

$$\Omega_g^1 = \Omega_{W/\mathbb{P}^1}^1 \simeq \nu^* \Omega_C^1 \quad (3.3.2)$$

ou encore en terme de fibrés,

$$\Lambda_W \simeq \nu^* \Lambda_C \oplus g^* \Lambda_{\mathbb{P}^1} \quad (3.3.3)$$

$$\Lambda_g = \Lambda_{W/\mathbb{P}^1} \simeq \nu^* \Lambda_C \quad (3.3.4)$$

En conséquence de (3.3.2), on peut exprimer la suite exacte relative (à $\mathbb{P}^1$) qui définit Ω_μ^1 : Cela revient à simplifier

$$0 \rightarrow \mu^* \Omega_Z^1 \xrightarrow{\mu^*} \Omega_W^1 \rightarrow \Omega_\mu^1 \rightarrow 0$$

par $\Omega_{\mathbb{P}^1}$.

Proposition 3.3.2

La suite de faisceaux

$$0 \rightarrow \mu^* \Omega_f^1 \rightarrow \nu^* \Omega_C^1 \rightarrow \Omega_\mu^1 \rightarrow 0 \quad (3.3.5)$$

est exacte sur W .

Cette suite exacte est l'outil central des réflexions qui suivent, elle relie la géométrie holomorphe de C avec

- d'une part, la géométrie relative de $Z/\mathbb{P}^1$ (ie la géométrie hyperkählérienne de M),
- et d'autre part, la géométrie des arrangements des droites dans Z encodée par μ .

L'injectivité à gauche, provient du fait que μ est une submersion (proposition 3.3.1).

3.3.2 Intégration des formes relatives le long des droites

Comme ν est propre à fibres connexes, la [formule de la projection](#) donne

$$\nu_* \nu^* \Omega_C^1 = \Omega_C^1 \otimes \nu_* \nu^* \mathcal{O}_C \simeq \Omega_C^1.$$

Ainsi, la suite (3.3.5) se pousse en avant par ν pour donner

$$0 \rightarrow \nu_* \mu^* \Omega_f^1 \rightarrow \Omega_C^1 \rightarrow \nu_* \Omega_\mu^1 \rightarrow \mathcal{R}^1 \nu_* \mu^* \Omega_f^1 \rightarrow \dots \quad (3.3.6)$$

Soit $s \in C$, on sait que μ réalise un isomorphisme de $\nu^{-1}(s)$ sur L_s . De plus le faisceau $\Omega_f^1 \otimes \mathcal{O}_{L_s}$ sur L_s s'identifie au faisceau conormal de L_s dans Z (2.4.4) et d'après (3.1.1) : $N_{L_s/Z}^* \cong \mathcal{O}(-1) \otimes \mathbb{C}^{2n}$.

Enfin ν est propre et plate et C est réduite donc d'après la [formule de changement de base](#) comme

$$H^k(\nu^{-1}(s), \mu^* \Omega_f^1 \otimes \mathcal{O}_{\nu^{-1}(s)}) \cong H^k(L_s, \Omega_f^1 \otimes \mathcal{O}_{L_s}) \cong H^k(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(-1) \otimes \mathbb{C}^{2n}) = 0$$

est de dimension constante par rapport à s . On en déduit que $\mathcal{R}^k \nu_* \mu^* \Omega_f^1$ est un fibré vectoriel holomorphe sur C et sa fibre en s est

$$H^k(L_s, \Omega_f^1 \otimes \mathcal{O}_{L_s}) = 0$$

et donc finalement

$$\begin{aligned} H^0(\nu^{-1}(s), \mu^* \Omega_f^1 \otimes \mathcal{O}_{\nu^{-1}(s)}) &= 0 \\ H^1(\nu^{-1}(s), \mu^* \Omega_f^1 \otimes \mathcal{O}_{\nu^{-1}(s)}) &= 0 \end{aligned}$$

d'où $\nu_* \mu^* \Omega_f^1 = 0$ et $\mathcal{R}^1 \nu_* \mu^* \Omega_f^1 = 0$.

En regroupant les résultats obtenus dans la suite exacte longue sur C [\(3.3.6\)](#) on obtient

Proposition 3.3.3

$$\nu_* \Omega_\mu^1 \cong \Omega_C^1. \quad (3.3.7)$$

Une relation similaire a été établie par Buchdahl dans [\[Buc85, II. 2.2\]](#), dans le cas des variétés de drapeaux. Elle permettra de construire des objets de géométrie différentielle sur C qui encoderont les arrangements des [droites](#) dans Z .

3.3.3 Le tangent à C

Le dual de [\(3.3.5\)](#) nous donne

$$0 \rightarrow T_\mu \rightarrow \nu^* T_C \xrightarrow{\mu^*} \mu^* T_f \rightarrow 0 \quad (3.3.8)$$

C'est le quotient de la suite exacte qui définit le tangent relatif T_μ sur W

$$0 \rightarrow T_\mu \rightarrow T_W \xrightarrow{\mu^*} \mu^* T_Z \rightarrow 0$$

modulo $g^* T_{\mathbb{P}^1}$. La surjectivité signifie que tout champs de vecteur [horizontal](#) dans Z provient localement d'un champs de vecteur sur C définissant des familles de déformations de droites de Z . Or par la [formule de la projection](#), on a $\nu_* \mathcal{O}_W(\nu^* T_C) \simeq \mathcal{O}_C(T_C)$. De plus le fibré $\mu^* T_f$ vérifie

$$h^0(\nu^{-1}(s), \mathcal{O}_{\nu^{-1}(s)}(\mu^* T_f)) = h^0(\mathbb{P}^1, \mathbb{C}^{2n}(1)) = 4n$$

et donc ne dépend pas de s , ainsi de nouveau par la [formule de changement de base en cohomologie](#), on sait que $\nu_* \mathcal{O}_W(\mu^* T_f)$ est un fibré vectoriel holomorphe sur C que l'on notera $\nu_* \mu^* T_f$. Ainsi la suite [\(3.3.8\)](#) se pousse en avant en

$$0 \rightarrow \nu_* T_\mu \rightarrow T_C \rightarrow \nu_* \mu^* T_f \rightarrow \mathcal{R}^1 \nu_* T_\mu \rightarrow \mathcal{R}^1 \nu_* \nu^* T_C$$

en faisant l'abus de notation où E désigne à la fois le fibré E et le faisceau $\mathcal{O}_W(E)$.

L'application $T_C \rightarrow \nu_* \mu^* T_f$ donne sur les fibres

$$T_{C,s} \rightarrow H^0(\nu^{-1}(s), \mathcal{O}_{\nu^{-1}(s)}(\mu^* T_f)) \simeq H^0(L_s, N_{L_s/Z})$$

qui est l'isomorphisme [\(3.2.1\)](#). Finalement on en déduit

$$T_C \simeq \nu_* \mu^* T_f \quad (3.3.9)$$

$$\nu_* T_\mu = 0 \quad (3.3.10)$$

De plus le terme suivant dans la suite exacte image est $\mathcal{R}^1 \nu_* \nu^* T_C = 0$ donc

$$\mathcal{R}^1 \nu_* T_\mu = 0 \quad (3.3.11)$$

On peut comprendre l'isomorphisme [\(3.3.9\)](#) comme une mise en famille de [\(2.4.3\)](#) pour $s \in C$. Cette interprétation sera utile par la suite (sec. 8).

3.4 Topologie des fibres de μ

Dans cette section, on s'intéresse à la topologie des fibres de μ c'est-à-dire des $\mu^{-1}(z) \simeq C(z) = \{s \in C \mid z \in L_s\}$ pour $z \in Z$. Il s'agit de l'ensemble des droites de Z paramétrées par C passant par un point z . Cet espace est compliqué. Dans le cas où l'on considère toutes les droites de Z paramétrées par $\text{Cycles}_1^\circ(Z)$, il joue un rôle important dans la preuve de non-compacité de Campana [Cam91, Cam92].

La connexité semble le résultat le plus difficile à obtenir. Il nécessite par exemple de prouver un résultat du type "axiome d'Euclide" : *par deux points de Z passe une unique droite*.

Cette propriété que les droites (projectives complexes suffisamment verticales) de Z se comportent comme des droites classiques dans un espace euclidien est utilisée de façon fondamentale par Penrose [Pen76]. Elle permet, dans son cas, d'expliciter le transport parallèle et d'autres données riemanniennes sur C .

3.4.1 Hypothèse de trivialité cohomologique des fibres

Dans la suite on supposera ce résultat plus fort sur la topologie des fibres : pour tout $z \in Z$,

$$H^k(C(z), \mathbb{C}) = \begin{cases} 0 & k > 0 \\ \mathbb{C} & k = 0. \end{cases} \quad (3.4.1)$$

Cette hypothèse n'est pas si forte si on se permet de restreindre C . En effet, on peut facilement restreindre C pour qu'une fibre $C(z)$ s'identifie à un polydisque dans $\mathbb{C}^{2n}$. On conjecture que dans le cas où M est compacte, on peut faire cette restriction simultanément sur tout les points de Z .

3.4.2 Corollaire

La proposition 1.2.1 nous donne alors grâce à l'hypothèse 3.4.1 le résultat suivant.

Proposition 3.4.1

Soit B un fibré vectoriel holomorphe sur Z . Si (Z, C) satisfait la propriété d'Euclide, alors pour tout $k \geq 0$,

$$H^k(Z, B) \simeq H^k(W, \mu^{-1} \mathcal{O}_Z(B))$$

Et de même pour tout ouvert $V \subseteq Z$,

$$H^k(V, B) \simeq H^k(\mu^{-1}V, \mu^{-1} \mathcal{O}_Z(B))$$

Il permettra au chapitre 7 d'interpréter sur W les espaces de cohomologie de fibrés sur Z .

Chapitre 4

Spineurs

*We have a closed circle of consistency here :
the laws of physics produce complex systems,
and these complex systems lead to
consciousness, which then produces
mathematics, which can then encode in a
succinct and inspiring way the very underlying
laws of physics that gave rise to it.*

— *The Road to Reality*,
Sir Roger PENROSE

Dans l'étude des 4-variétés riemanniennes le groupe $SO(4)$ et son revêtement universel $Spin(4)$ jouent un rôle prépondérant. L'isomorphisme exceptionnel¹

$$Spin(4) \cong SU(2) \times SU(2)$$

sous certaines conditions sur M (propriété *spin*) entraîne l'existence de fibrés *spinoriels* ; permettant par exemple d'écrire

$$T_M \otimes \mathbb{C} \simeq V_+ \otimes V_- \quad (4.0.1)$$

ou de décomposer certain fibrés de formes différentielles en somme de représentations irréductibles

$$\Lambda_M^2 \simeq \Lambda_+^2 \oplus \Lambda_-^2 \quad (4.0.2)$$

On pourra se référer à [Sal83, LM16, Bes87].

Sous certains aspects [GHJ03], les variétés hyperkähleriennes (compactes) de toutes dimensions ressemblent beaucoup aux surfaces kähleriennes compactes (donc variétés riemanniennes de dimension 4). Cette analogie a plusieurs avatars (forme de Beauville-Bogomolov, théorème de Torelli, rôle central des surfaces K3 dans l'étude des variétés hyperkähleriennes). Nous allons établir l'existence d'une décomposition (voir plus loin (4.2.1), paragraphe 4.2) généralisant (4.0.1) qui peut être interprétée dans cette philosophie.

4.1 Les fibrés V_+ et V_-

On définit les faisceaux suivants sur C

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_+ &:= \nu_* \mu^* f^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1) \\ &= \nu_* g^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1) \end{aligned} \quad (4.1.1)$$

$$\mathcal{V}_- := \nu_* \mu^* (\mathcal{O}_Z(T_f) \otimes_{\mathcal{O}_Z} f^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)) \quad (4.1.2)$$

$$= \nu_* \mathcal{O}_W(\mu^* T_f(-1)). \quad (4.1.3)$$

Alors d'après la [formule de changement de base](#), $\mathcal{V}_+$ et $\mathcal{V}_-$ sont des $\mathcal{O}_C$ -modules localement libres. Ils sont donc associés à des fibrés vectoriels holomorphes sur C que l'on notera respectivement V_+ et V_- . De plus comme $\mu^* T_f(-1)$ est un fibré trivial sur les fibres de ν (cf. 2.4.3 et 3.1.1), on en déduit que V_- est de rang $2n = \dim(\nu^{-1}(s), \mu^* T_f(-1))$ et que l'on a

$$\nu^* V_- \simeq \mu^* T_f(-1). \quad (4.1.4)$$

Une autre façon de le voir est de remarquer que l'application naturelle d'évaluation (co-unité)

$$\mathcal{O}_W(\nu^* V_-) \simeq \nu^* \nu_* \mu^* \mathcal{O}_Z(T_f(-1)) \rightarrow \mu^* \mathcal{O}_Z(T_f(-1))$$

induit un isomorphisme sur chaque tige. C'est donc un isomorphisme de fibré. On peut le réécrire sous la forme

$$\nu^* V_-(1) \simeq \mu^* T_f. \quad (4.1.5)$$

Dans les notations de [EPW81] on a $V_+ = \mathcal{O}^{A'}$ et $V_- = \mathcal{O}^A$.

4.1.1 Quotients de rang 1 de V_+

La définition de V_+ (4.1.1) avec la connaissance de la structure produit

$$\nu \times g : W \xrightarrow{\sim} C \times \mathbb{P}^1$$

entraîne immédiatement que le fibré V_+ est trivial sur C de fibre $\mathbb{C}^2 = H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(1))$. On en déduit l'isomorphisme de fibrés en droites projectives sur C

$$\mathbb{P}(V_+) \simeq W. \quad (4.1.6)$$

En tout point s de C , un quotient de rang 1 de $(V_+)_s$ est la donnée d'un point de $\mathbb{P}((V_+)_s)$. Or comme V_+ est trivial tous ces espaces s'identifient au même $\mathbb{P}^1$. Un point de $\mathbb{P}(V_+)$ est donc un couple formé d'une section s et d'un quotient de rang 1 de $(V_+)_s$, c'est donc un élément de $C \times \mathbb{P}^1 \simeq W$. Et on vérifie qu'alors le fibré universel $\mathcal{O}_{\mathbb{P} V_+}(1)$ associé à cet espace projectif sur C n'est autre que $g^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)$. On le notera simplement $\mathcal{O}(1)$. On tirera les conséquences de ce résultat dans le paragraphe Suite exacte d'Euler 4.3.

1. On pourra noter également que $SU(2) \simeq Sp(1)$

4.2 Interprétation spinorielle

On peut réinterpréter l'expression de T_C (3.3.9) en termes des fibrés spinoriels

$$\begin{aligned} T_C &= \nu_* \mu^* T_f \\ &= \nu_* (\mu^* T_f(-1) \otimes \mathcal{O}(1)) \\ &= \nu_* (\nu^* V_- \otimes \mathcal{O}(1)) \end{aligned}$$

et en utilisant la formule de la projection,

$$\begin{aligned} &= V_- \otimes \nu_* \mathcal{O}(1) \\ &= V_- \otimes V_+ \end{aligned}$$

Ainsi on a montré

$$T_C \simeq V_+ \otimes V_- \quad (4.2.1)$$

D'autre part, en notant V^+ et V^- les fibrés duaux respectifs de V_+ et V_- , on a

$$\Lambda_C^{1,0} \simeq V^+ \otimes V^- \quad (4.2.2)$$

et donc en passant à la seconde puissance extérieure, on a une décomposition

$$\Lambda_C^{2,0} \simeq \underbrace{\Lambda^2 V^- \otimes \odot^2 V^+}_{\Lambda_-^2} \oplus \underbrace{\odot^2 V^- \otimes \Lambda^2 V^+}_{\Lambda_+^2}. \quad (4.2.3)$$

Cette équation peut être interprétée comme un analogue de la décomposition (4.0.2) sur les variétés de dimension 4.

4.3 Suite exacte d'Euler

On peut considérer la suite exacte d'Euler associée à l'interprétation de W comme fibré projectif sur C (4.1.6)

$$0 \rightarrow \Lambda_{\mathbb{P}(V_+)/C} \rightarrow \nu^* V_+(-1) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V_+)} \rightarrow 0 \quad (4.3.1)$$

ce qui donne après tensorisation par $\mathcal{O}(1)$ la suite exacte sur W suivante

$$0 \rightarrow \Lambda_{W/C}(1) \rightarrow \nu^* V_+ \rightarrow \mathcal{O}(1) \rightarrow 0.$$

Or $\Lambda_{W/C} = \Lambda_\nu \simeq g^* \Lambda_{\mathbb{P}^1} \simeq \mathcal{O}(-2)$, d'où après simplification, on obtient :

$$0 \rightarrow \mathcal{O}(-1) \rightarrow \nu^* V_+ \rightarrow \mathcal{O}(1) \rightarrow 0. \quad (4.3.2)$$

En tensorisant par $\nu^* V_-$ on trouve grâce à l'expression spinorielle de T_C (4.2.1)

$$0 \rightarrow \nu^* V_-(-1) \rightarrow \nu^* T_C \rightarrow \nu^* V_-(1) \rightarrow 0$$

d'où d'après (4.1.5),

$$0 \rightarrow \mu^* T_f(-2) \rightarrow \nu^* T_C \rightarrow \mu^* T_f \rightarrow 0. \quad (4.3.3)$$

On notera $\hat{P} : \nu^* T_C \rightarrow \mu^* T_f$ cette dernière application. Elle associe à un vecteur v tangent à s dans C , la famille des vecteurs horizontaux $(v_\zeta)_\zeta$ le long de L_s dans Z représentant v vu comme section de $N_{L_s/Z}$. Plus précisément, $\hat{P}$ agit sur les fibres en (s, ζ)

$$\hat{P}_{(s, \zeta)} : H^0(L_s, N_{L_s/Z}) = (T_C)_s = (\nu^* T_C)_{(s, \zeta)} \rightarrow (\mu^* T_f)_{(s, \zeta)} = (T_f)_{s(\zeta)}$$

comme l'application d'évaluation $H^0(L_s, N_{L_s/Z}) \rightarrow (N_{L_s/Z})_{s(\zeta)}$ composée avec l'isomorphisme (2.4.3).

Son interprétation restreinte à M est d'autant plus intuitive : Étant donné un point x de M et un vecteur v tangent à x . On peut canoniquement relever v en une famille de vecteurs horizontaux sur $L_x = \pi^{-1}(x)$

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{f} & \mathbb{P}^1 \\ \downarrow \pi & & \\ M & & \end{array}$$

Chacun de ces vecteurs vit dans un espace tangent à X_ζ et donc peut être projeté sur sa partie de type $(1, 0)$ (dans X_ζ). On se retrouve donc avec une famille de vecteurs de type $(1, 0)_\zeta$ pour chaque ζ . Au vu de la structure complexe de Z c'est un champs de vecteur de type $(1, 0)$ sur Z le long de L . De plus par construction, c'est automatiquement une section du 2.4.1 qui coïncide ici avec le fibré normal à L (cf. 2.4.2)

4.3.1 Lien avec la différentielle de μ

On va établir une expression spinorielle du fibré T_μ des vecteurs tangents aux fibres de μ .

On dispose de deux expressions du fibré ν^*T_C sur W en terme d'extensions :

- (3.3.8) comme extension de T_μ par μ^*T_f
- et (4.3.3) issue de la suite exacte d'Euler.

En réunissant ces deux on trouve le diagramme suivant à lignes exactes

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mu^*T_f(-2) & \longrightarrow & \nu^*T_C & \xrightarrow{\hat{P}} & \mu^*T_f \longrightarrow 0 \\ & & & & \downarrow \text{I} & & \downarrow \text{I} \\ 0 & \longrightarrow & T_\mu & \longrightarrow & \nu^*T_C & \xrightarrow{\mu_*} & \mu^*T_f \longrightarrow 0 \end{array}$$

Pour identifier les noyaux, il suffit de vérifier que le carré de droite commute, mais pour cela il suffit de regarder sur les fibres. Sur la fibre en (s, ζ) , l'application $\hat{P}$ construite précédemment ne fait qu'évaluer un vecteur tangent à C (vu comme vecteur normal à L , cf (3.2.1)) en ζ puis l'identifier à un élément du [fibré tangent horizontal](#) T_f ; d'autre part μ est donnée par l'évaluation de s en ζ donc sa différentielle va évaluer un vecteur tangent en s (pour être précis un vecteur tangent à (s, ζ) relativement à $\mathbb{P}^1$) au point ζ .

On déduit de ce diagramme l'isomorphisme suivant

$$T_\mu \simeq \mu^*T_f(-2) \tag{4.3.4}$$

ou encore

$$T_\mu \simeq \nu^*V_-(-1) \tag{4.3.5}$$

qui précise les calculs d'image directe de T_μ (3.3.10, 3.3.11).

4.3.2 Remarque sur la naturalité

Les constructions (3.3.7) (sur l'image directe de Ω_μ par ν), et les expressions spinorielles (4.2.2 et 4.3.5) sont naturelles (elles ne font pas intervenir de choix de coordonnées sur C, Z ou W , ni de choix de repères sur les fibrés V_-, V_+, T_f etc...)

Le fibré V_+ est trivial, de même que son dual V^+ , mais il n'y a pas d'isomorphisme naturel entre les deux. On a cependant une identification naturelle

$$V^- \otimes V^+ \simeq V^- \otimes V_+. \tag{4.3.6}$$

En effet, on peut cependant déduire de (4.2.2)

$$V^- \otimes V^+ \simeq \Lambda_C$$

or d'après (3.3.7)

$$\begin{aligned} &\simeq \nu_*\Lambda_\mu \\ &\simeq \nu_*T_\mu^* \end{aligned}$$

et d'après (4.3.5)

$$\begin{aligned} &\simeq \nu_*(\nu^*V_-(-1))^* \\ &\simeq \nu_*(\nu^*V^-(1)) \end{aligned}$$

par la formule de la projection

$$\simeq V^- \otimes \nu_* \mathcal{O}(1)$$

et par définition de V_+

$$\simeq V^- \otimes V_+.$$

4.4 Forme symplectique relative et métrique

4.4.1 La forme symplectique relative

Hitchin et al. [HKLR87, (F), (3.87)] montrent que la famille (2.3.2) de formes symplectiques holomorphes σ_ζ pour chacune des structures complexes I_ζ s'interprète comme une section holomorphe du fibré $(\Lambda^2 T_f^*)(2)$. Or d'après (4.1.4), on en déduit que

$$(\Lambda^2 T_f^*)(2) = \Lambda^2(T_f^*(1)) = \Lambda^2(T_f(-1))^* = \Lambda^2(V_-)^*.$$

Ainsi on définit la *forme symplectique fibre à fibre*

$$\hat{\sigma} : \Lambda^2 V_- \rightarrow \mathbb{C}. \quad (4.4.1)$$

On peut remarquer que les propriétés de non-dégénérescence des σ_ζ entraînent la trivialisation

$$\hat{\sigma}^n : \Lambda^{2n} V_- \simeq \mathbb{C}$$

4.4.2 Quelques notes sur la métrique

À partir de l'expression spinorielle du fibré tangent à C (4.2.1), on peut construire la classe conforme de métrique de la façon suivante. Soit $\theta : \Lambda^2 V_+ \simeq \mathbb{C}$ une forme symplectique sur V_+ , alors

$$\begin{aligned} T_C \otimes T_C &= V_+ \otimes V_- \otimes V_+ \otimes V_- \\ &= (V_+ \otimes V_+) \otimes (V_- \otimes V_-) \\ &\rightarrow (\Lambda^2 V_+) \otimes (\Lambda^2 V_-) \end{aligned}$$

on peut lui appliquer $\theta \otimes \hat{\sigma}$

$$\begin{aligned} &\rightarrow \mathbb{C} \otimes \mathbb{C} \\ &\simeq \mathbb{C} \end{aligned}$$

On vérifie facilement que l'application construite est bien symétrique. Hitchin et al. [HKLR87, (F) p.559] prouvent qu'elle est définie positive sur les vecteurs de T_M (vecteurs réels 4.5.3). Le choix de θ est arbitraire et dépend d'un scalaire non-nul; c'est pourquoi on obtient plutôt la classe conforme de la métrique.

Le but de la section suivante est d'expliciter l'inclusion $T_M \subseteq T_C$.

4.5 Structures quaternioniques et structure réelle sur l'espace des sections

On rappelle que la variété $Z = M \times \mathbb{P}^1$ est naturellement munie d'une involution $\tau_Z : Z \rightarrow Z$ donnée par

$$\tau(m, \zeta) = (m, -1/\bar{\zeta}). \quad (4.5.1)$$

Il apparaît que τ_Z est une involution anti-holomorphe pour la structure complexe (2.4.1) sur Z . Comme l'involution antipodale sur $\mathbb{P}^1$ n'a pas de points fixes, le lieu réel de τ_Z dans Z est vide. Cependant il existe des sous-variétés globalement fixées par cette involution, notamment les droites twistorielles verticales. Hitchin et al. [HKLR87, 3.(F) Thm 3.3] démontrent que ce sont les seules droites réelles.

À une section holomorphe s de f on associe la section $\zeta \mapsto \tau_Z(s(\tau_{\mathbb{P}^1}(\zeta)))$. C'est bien une section **holomorphe** de f que l'on notera également $\tau(s)$ ou $\tau_{\text{Sec}}(s)$ s'il y a ambiguïté. Ainsi l'ensemble $\text{Sec}(f)$ est muni d'une involution τ .

Dans la suite on suppposera, quitte à le réduire, que C est stable par cette involution ; et donc $i(M)$ s'identifie au lieu réel de (C, τ) .

Maintenant il est intéressant d'interpréter les directions réelles (au sens de provenant de $T_{i(M)}$) de T_C en tant que *vecteurs réels* pour une structure réelle adéquate sur T_C . La construction de cette structure réelle s'obtient par combinaison de structures quaternioniques sur les fibrés V_+ et V_- via l'expression spinorielle de T_C (4.2.1).

4.5.1 Structure quaternionique sur V_+

Soit $\lambda \in (V_+)_s$, alors $\lambda \in H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(1))$. On définit $j_+ : V_+ \rightarrow V_+$ la structure quaternionique (anti-involution anti- $\mathbb{C}$ -linéaire) sur V_+ par

$$(j_+ \lambda)(\zeta) := -\zeta \tau_{\mathcal{O}(1)}(\lambda(-1/\bar{\zeta})) \quad (4.5.2)$$

où $\tau_{\mathcal{O}(1)}$ est l'unique structure réelle sur l'espace total du fibré $\mathcal{O}(1)$ compatible avec la structure réelle $\zeta \mapsto -1/\bar{\zeta}$ sur $\mathbb{P}^1$.

On vérifie alors

$$\begin{aligned} j_+(j_+ \lambda)(\zeta) &= -\zeta \tau_{\mathcal{O}(1)}((j_+ \lambda)(-1/\bar{\zeta})) \\ &= -\zeta \tau_{\mathcal{O}(1)}(-(-1/\bar{\zeta}) \tau_{\mathcal{O}(1)}(\lambda(\zeta))) \\ &= -\lambda(\zeta) \end{aligned}$$

Si on spécifie une base (x_0, x_∞) de $H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(1))$, on remarque que j_+ transforme $ax_0 + bx_\infty$ en $-\bar{b}x_0 + \bar{a}x_\infty$. De plus, j_+ et $-j_+$ sont les deux seules structures quaternioniques compatibles avec la structure réelle $\zeta \mapsto -1/\bar{\zeta}$ sur $\mathbb{P}^1$.

4.5.2 Structure quaternionique sur V_-

Le fibré V_- ne possède pas de structure quaternionique canonique, cependant sa restriction à M oui !

En effet, soit $\gamma \in (V_-)_m$, alors γ peut être vu comme une section globale de $T_f(-1)$ sur la droite twistorielles verticale L_m . Mais comme ce fibré est trivial sur les droites, une telle section est déterminée par sa valeur en $\zeta = 0$.

Ainsi γ est représenté par un vecteur $\gamma(0)$ dans $T_{(M,I)}^{1,0}$, il ne reste alors plus qu'à poser

$$(j_- \gamma)(0) := \overline{K\gamma(0)} \quad (4.5.3)$$

car $K\gamma(0)$ est dans $T_{(M,I)}^{0,1}$ et donc son conjugué est bien dans $T^{1,0}$ et donc définit bien une unique section $j_- \gamma$. De plus comme K est un tenseur réel sur M , on a immédiatement $j_-^2 = -id$.

4.5.3 Vecteurs réels

On peut mettre en commun les deux structures quaternioniques ainsi construites pour obtenir

$$T_C|_M = V_+|_M \otimes V_-|_M \xrightarrow{j_+ \otimes j_-} T_C|_M$$

qui définit une structure réelle (involution anti- $\mathbb{C}$ -linéaire) sur le fibré tangent à C restreint à M . Il faut remarquer qu'a priori $j_+ \otimes j_-$ est une involution ($\mathbb{R}$ -linéaire) de $V_+ \otimes_{\mathbb{R}} V_-$, cependant il suffit de vérifier qu'elle préserve le sous-espace engendré par les $(i\alpha_+) \otimes \alpha_- - \alpha_+ \otimes (i\alpha_-)$. Elle se factorise donc en une involution ($\mathbb{R}$ -linéaire) de $V_+ \otimes_{\mathbb{C}} V_-$.

Les points fixes de cette involution sont appelés *vecteurs réels*.

4.5.4 Les vecteurs provenant de M sont réels

L'inclusion $T_M \hookrightarrow T_C|_M \simeq (V_+ \otimes V_-)|_M$ est donnée par

$$(m, v) \mapsto (m, x_\infty \otimes v' - x_0 \otimes (j_- v')) \quad (4.5.4)$$

où $v' \in H^0(L_m, T_f(-1))$ est une section d'un fibré trivial et donc entièrement déterminée par

$$v'(0) := (1 - iI)v.$$

Remarque : on peut voir en explicitant la trivialisaton de $T_f(-1)$ que l'on a $v'(\infty) = K(1 - iI)v$.

On vérifie immédiatement que l'image $\tilde{v}$ de v par (4.5.4) satisfait

$$(j_+ \otimes j_-)(\tilde{v}) = \tilde{v}$$

En effet $(j_+ \otimes j_-)(x_\infty \otimes v' - x_0 \otimes (j_- v')) = x_\infty \otimes -j_-(j_- v') - x_0 \otimes (j_- v')$ car j_- joue le rôle de la conjugaison des coefficients a, b de $ax_0 + bx_\infty$.

Chapitre 5

Transport topologique et analytique de faisceaux

1. *Die Welt ist alles, was der Fall ist.*

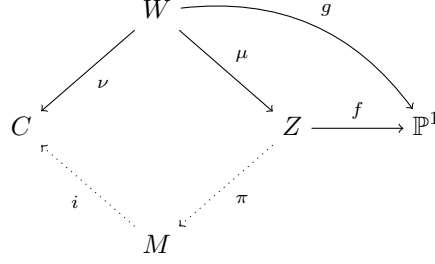
1.1. *Die Welt ist die Gesamtheit der
Tatsachen, nicht der Dinge.*

1. *Le monde est tout ce qui a lieu.*

1.1. *Le monde est la totalité des faits, non
des choses.*

— *Tractatus logico-philosophicus*,
Ludwig WITTGENSTEIN

Le but de cette section est d'étendre la [correspondance twistorielle](#) de la section 3.2 aux ouverts de C et Z puis aux faisceaux et fibrés vectoriels.



Un point s de C correspond à une droite L dans Z , mais un voisinage de ce point s , correspond à un enchevêtrement complexe de droites de Z autour de L . Étudier ces droites dans W permet de simplifier la situation.

Dans l'autre sens à un point z de Z correspond toute la famille des droites de Z passant par z . L'hypothèse 3.4.1 postule de la simplicité de cette famille.

On va utiliser les propriétés algébriques de cette correspondance pour construire divers foncteurs entre la catégorie des faisceaux (analytiques) sur Z et celle des faisceaux sur M . Ces constructions aideront à séparer les propriétés de géométrie complexe de Z qui proviennent de la topologie et celles qui proviennent de la géométrie riemannienne de M .

On établira ensuite un premier résultat (propriété 5.2.1) sur la structure complexe de Z et son lien avec la topologie de la variété M :

Proposition 5.0.1

Soit M une variété hyperkählérienne et $\pi : Z \rightarrow M$ la fibration twistorielle, alors

$$\pi_* \mathcal{O}_Z \simeq \mathbb{C}.$$

Enfin on explicitera quelque transports de fibrés vectoriels de Z vers C à l'aide des fibrés spinoriels introduits au chapitre 4.

5.1 Foncteurs de transport

Dans un premier temps, on décrit l'action des foncteurs $\pi^{-1}, \mu^{-1}, \nu^{-1}, i^{-1}$ sur les catégories des ouverts.

5.1.1 Extension des ouverts de M

Soit $U \subseteq M$ un ouvert. Posons

$$U^C := \nu(\mu^{-1}\pi^{-1}(U)) \tag{5.1.1}$$

C'est le lieu de C qui paramètre les droites qui rencontrent des droites twistorielles de $Z|_U = \pi^{-1}(U)$.

Lemme 5.1.1

Avec les notations ci-dessus, U^C vérifie les propriétés suivantes

- (i) $U^C = \{s \in C \mid L_s \cap \pi^{-1}(U) \neq \emptyset\}$
- (ii) U^C est un ouvert de C stable par la structure réelle τ_C
- (iii) $i(U) \subseteq U^C$ est fermé
- (iv) $i^{-1}(U^C) = U$

D'autre part on peut également considérer l'ouvert de C

$$C|_U = \{s \in C \mid L_s \subseteq \pi^{-1}(U)\}$$

qui est, lui, le lieu de C qui paramètre les droites *incluses* dans $Z|_U$.

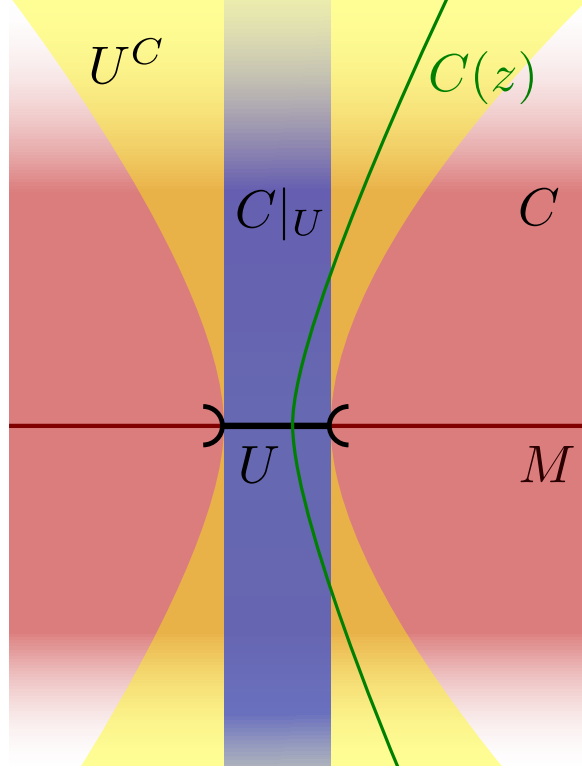


FIGURE 5.1 – Différence entre U^C et $C|_U$. L'ensemble $C(z)$ des droites twistorielles passant par z (cf 3.2.1) peut sortir de $C|_U$.

Lemme 5.1.2

Avec les notations ci-dessus, $C|_U$ vérifie les propriétés suivantes

- (i) $C|_U \subseteq U^C$
- (ii) $C|_U$ est un ouvert de C stable par τ_C
- (iii) $i(U) \subseteq C|_U$ est fermé
- (iv) $i^{-1}(C|_U) = U$
- (v) $\nu^{-1}(C|_U) \subseteq (\pi \circ \mu)^{-1}(U)$

L'interprétation est la suivante, le diagramme

$$C \longleftarrow W \longrightarrow Z$$

associé à une variété hyperkählérienne M , se restreint en

$$C|_U \longleftarrow W|_U \longrightarrow Z|_U$$

qui n'est autre que le diagramme précédent associé à la variété hyperkählérienne U . Plus généralement il est clair que le diagramme de la correspondance twistorielle se restreint à toute sous-variété hyperkählérienne de M (sous-variété kählérienne pour toutes les structures complexes de M).

Pour la question des déformations de droites twistorielles $C|_U$ prend en compte l'obstruction topologique "bête" de devoir rester dans U tandis que U^C considère toutes les déformations.

Il est notable que ce phénomène est bien plus complexe dans $\text{Sec}(f)$ entier : La connaissance de $\text{Sec}(f)|_U$ pour tous les ouverts stricts de M compacte semble insuffisante pour déterminer $\text{Sec}(f)$. Cela semble refléter le fait que les ouverts hyperkählériens sont nombreux alors que les variétés hyperkählériennes compactes sont rares.

5.1.2 Définitions

Soit $\mathcal{F}$ un faisceau (de groupe abéliens) sur Z . Alors, par définition

$$\Gamma(U, \pi_* \mathcal{F}) = \Gamma(\pi^{-1}(U), \mathcal{F})$$

or, par l'adjonction (μ^{-1}, μ_*) , on a une application naturelle (unité) $\eta_{\mathcal{F}} : \mathcal{F} \rightarrow \mu_* \mu^{-1} \mathcal{F}$

$$\begin{aligned} (\pi^{-1}(U), \mathcal{F}) &\rightarrow \Gamma(\pi^{-1}(U), \mu_* \mu^{-1} \mathcal{F}) \\ &= \Gamma(\mu^{-1}(\pi^{-1}(U)), \mu^{-1} \mathcal{F}) \end{aligned}$$

par le point (v) : $\nu^{-1}(C|_U) \subseteq \mu^{-1}(\pi^{-1}(U))$ d'où par restriction

$$\begin{aligned} &\rightarrow \Gamma(\nu^{-1}(C|_U), \mu^{-1} \mathcal{F}) \\ &= \Gamma(C|_U, \nu_* \mu^{-1} \mathcal{F}) \end{aligned}$$

On peut enfin composer par la restriction à $i(U)$ qui est localement fermé dans $C|_U$

$$\rightarrow \Gamma(U, i^{-1} \nu_* \mu^{-1} \mathcal{F})$$

On a ainsi construit une application

$$\Gamma(U, \pi_* \mathcal{F}) \longrightarrow \Gamma(U, i^{-1} \nu_* \mu^{-1} \mathcal{F}).$$

On notera $\pi_{\diamond} \mathcal{F}$ le faisceau $i^{-1} \nu_* \mu^{-1} \mathcal{F}$.

Autrement dit, on a construit un morphisme

$$\pi_* \rightarrow \pi_{\diamond} \tag{5.1.2}$$

Enfin, pour $\mathcal{F}$ un faisceau de $\mathcal{O}_Z$ -modules, on a une autre transformation donnée par $i^{-1} \nu_* \mu^* \mathcal{F}$. Par définition on sait que $\mu^{-1} \mathcal{F} \hookrightarrow \mu^{-1} \mathcal{F} \otimes_{\mu^{-1} \mathcal{O}_Z} \mathcal{O}_W = \mu^* \mathcal{F}$. Finalement, on a pour $\mathcal{F}$ faisceau de $\mathcal{O}_Z$ -modules,

$$\pi_* \mathcal{F} \rightarrow \pi_{\diamond} \mathcal{F} \hookrightarrow i^{-1} \nu_* \mu^* \mathcal{F}$$

On a trois foncteurs des faisceaux de $\mathcal{O}_Z$ -modules sur Z vers les faisceaux sur M qui sont donnés par

$$\pi_* \tag{5.1.3}$$

$$\pi_{\diamond} := i^{-1} \nu_* \mu^{-1} \tag{5.1.4}$$

$$\pi_{\@} := i^{-1} \nu_* \mu^*. \tag{5.1.5}$$

Et qui sont liés par

$$\pi_* \rightarrow \pi_{\diamond} \hookrightarrow \pi_{\@}. \tag{5.1.6}$$

On notera également, pour $\mathcal{F}$ un faisceau de $\mathcal{O}_Z$ -modules sur Z ,

$$\mathcal{R}^k \pi_{\diamond} \mathcal{F} = i^{-1} \mathcal{R}^k \nu_* \mu^{-1} \mathcal{F} \tag{5.1.7}$$

$$\mathcal{R}^k \pi_{\@} \mathcal{F} = i^{-1} \mathcal{R}^k \nu_* \mu^* \mathcal{F}. \tag{5.1.8}$$

Ce sont les foncteurs dérivés respectifs de $\pi_{\diamond}$ et $\pi_{\@}$ car μ^{-1} et i^{-1} sont des foncteurs exacts.

On remarquera qu'en raison de la dimension des fibres de ν (droites),

- les $\mathcal{R}^k \pi_{\@} \mathcal{F}$ sont nuls pour $k > 1$ et $\mathcal{F}$ faisceau cohérent sur Z par le théorème de Grauert 1, [Har97, Cor. 11.2].
- De même, les $\mathcal{R}^k \pi_{\diamond} \mathcal{F}$ sont nuls pour $k > 2$ et pour tout faisceau $\mathcal{F}$ par le théorème d'annulation de Grothendieck dans le cas topologique.

5.1.3 Isomorphisme $\pi_* \simeq \pi_\diamond$

Proposition 5.1.3

Soit $\mathcal{F}$ un faisceau sur Z , alors la transformation naturelle (5.1.2) induit un isomorphisme de faisceaux :

$$\pi_* \mathcal{F} \simeq \pi_\diamond \mathcal{F}.$$

On a déjà construit en (5.1.2) un morphisme global $\pi_* \mathcal{F} \rightarrow \pi_\diamond \mathcal{F}$. Ainsi, pour montrer cette proposition, il suffit de vérifier que c'est un isomorphisme sur les germes. Soit $x \in M$, on désignera par

- $L_x := \pi^{-1}(x) \subseteq Z$
- $P_x := \nu^{-1}(i(x)) = \mu^{-1}(L_x) \subseteq W$
- j_L , (resp. j_P), l'inclusion $L_x \hookrightarrow Z$ (resp. $P_x \hookrightarrow W$) en tant que sous-espaces analytiques.
- μ_x , la restriction de μ en un isomorphisme d'espaces analytiques $P_x \rightarrow L_x$.

Par la propriété 1.1.1, la tige de $\pi_* \mathcal{F}$ en x est donnée par

$$\begin{aligned} (\pi_* \mathcal{F})_x &\simeq H^0(\pi^{-1}(x), j_L^{-1} \mathcal{F}) \\ &= H^0(L_x, j_L^{-1} \mathcal{F}) \end{aligned}$$

or μ_x est un homéomorphisme

$$\begin{aligned} &\simeq H^0((\mu_x)^{-1} L_x, \mu_x^{-1} j_L^{-1} \mathcal{F}) \\ &= H^0(P_x, (j_L \circ \mu_x)^{-1} \mathcal{F}) \end{aligned}$$

or $j_L \circ \mu_x = \mu \circ j_P$

$$\begin{aligned} &= H^0(P_x, (\mu \circ j_P)^{-1} \mathcal{F}) \\ &= H^0(P_x, j_P^{-1} \mu^{-1} \mathcal{F}) \end{aligned}$$

ce qui redonne en appliquant à nouveau la propriété 1.1.1

$$\begin{aligned} &\simeq (\nu_* \mu^{-1} \mathcal{F})_{i(x)} \\ &= (i^{-1} \nu_* \mu^{-1} \mathcal{F})_x \\ &= (\pi_\diamond \mathcal{F})_x. \end{aligned}$$

L'isomorphisme qui vient d'être construit est bien la restriction de (5.1.2) sur les germes en x . D'où le résultat.

Corollaire 5.1.4

Les foncteurs $\mathcal{R}^k \pi_*$ et $\mathcal{R}^k \pi_\diamond$ sont isomorphes pour tout k

En conséquence les suites spectrales de Leray pour π et pour ν sont reliées

$$\begin{aligned} H^p(C, \mathcal{R}^q \nu_* \mathcal{F}) &\Rightarrow H^{p+q}(W, \mathcal{F}) \\ H^p(M, \mathcal{R}^q \pi_* \mathcal{G}) &\simeq H^p(M, i^{-1} \mathcal{R}^q \nu_* \mu^{-1} \mathcal{G}) \Rightarrow H^{p+q}(Z, \mathcal{G}). \end{aligned}$$

5.1.4 Injection $\pi_\diamond \hookrightarrow \pi_\mathbb{Q}$

Le lien entre $\pi_\diamond$ et $\pi_\mathbb{Q}$ est donné par la résolution de De Rham holomorphe relative à μ [EL92, sec. 5 p.137].

Plus précisément pour $E \rightarrow Z$ un fibré vectoriel holomorphe, on a le complexe de De Rham relatif (à μ) sur W

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_W(\mu^* E) \rightarrow \Omega_\mu^1(\mu^* E) \rightarrow \Omega_\mu^2(\mu^* E) \rightarrow \dots$$

qui est une résolution de $\mu^{-1} \mathcal{O}_Z(E)$. Pour plus de détails cf. [Buc85, sec. I.1.2 p.439]. En particulier on a une injection

$$\mu^{-1} \mathcal{O}_Z(E) \hookrightarrow \mathcal{O}_W(\mu^* E).$$

or le foncteur ν_* est exact à gauche d'où

$$\nu_* \mu^{-1} \mathcal{O}_Z(E) \hookrightarrow \nu_* \mu^* \mathcal{O}_Z(E)$$

après restriction à M (toujours une opération exacte à gauche), on trouve donc

Proposition 5.1.5

Soit E un fibré vectoriel holomorphe sur Z , alors

$$\pi_{\diamond} \mathcal{O}_Z(E) \hookrightarrow \pi_{\@} \mathcal{O}_Z(E)$$

Pour un fibré E tel que $\pi_{\@} \mathcal{O}_Z(E) = 0$, on a

$$\pi_* \mathcal{O}_Z(E) = \pi_{\diamond} \mathcal{O}_Z(E) = 0$$

ce qui entraîne en particulier que E n'a pas de sections globales sur Z .

La résolution de De Rham holomorphe relative et ses conséquences cohomologiques seront étudiées en 7.

5.2 Application à $\mathcal{O}_Z$

5.2.1 Le cas de l'image directe $\pi_* \mathcal{O}_Z$

Les seules fonctions sur l'espace des twisteurs d'une variété hyperkählérienne connexe sont les constantes.

Proposition 5.2.1

On a

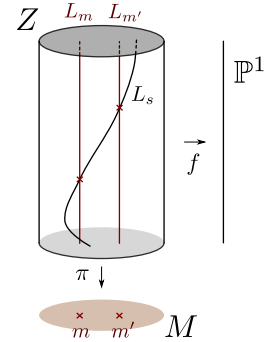
$$\pi_* \mathcal{O}_Z \simeq \underline{\mathbb{C}}.$$

Démonstration

Étant donné un ouvert $U \subseteq M$, $\Gamma(U, \pi_* \mathcal{O}_Z) = \Gamma(\pi^{-1}(U), \mathcal{O}_Z)$. Or $\pi^{-1}(U)$ est couvert par des courbes rationnelles. Donc toute fonction holomorphe sur $\pi^{-1}(U)$ se restreint en une fonction holomorphe sur chacune de ces courbes; donc en une constante sur chaque courbe.

On montre ainsi dans un premier temps qu'une section φ de $\mathcal{O}_Z$ sur $\pi^{-1}(U)$ est constante sur chaque droite twistorielle. Donc ne dépend que du paramètre $m \in U$. De plus si m et m' sont deux points proches dans U , par un résultat de Kodaira-Deschamps (cf. 2.4.4), comme L_m a un fibré normal ample, il existe une déformation de L_m rencontrant $L_{m'}$. Donc φ a la même valeur en m et m' .

Ainsi φ est localement constante. D'où $\pi_* \mathcal{O}_Z = \underline{\mathbb{C}}$.



Remarques

La tige en m de $\pi_* \mathcal{O}_Z$ est donnée par l'espace $H^0(L_m, j_m^{-1} \mathcal{O}_Z)$ d'après 1.1.1. Or le faisceau $j_m^{-1} \mathcal{O}_Z$ contient en lui de nombreuses informations sur les épaissements de L_m . En effet le faisceau des fonctions d'un épaissement à l'ordre k de L_m dans Z est le quotient de $j_m^{-1} \mathcal{O}_Z$ par I_L^{k+1} .

Une autre preuve de ce résultat 5.2.1 sera donnée au paragraphe 6.2.3 et qui fera usage de l'isomorphisme $\pi_* \simeq \pi_{\diamond}$ du paragraphe 5.1.3.

5.2.2 Comparaison avec l'espace projectif de dimension 3 :

Hitchin [Hit81] a montré que les espaces de twisteurs des variétés riemanniennes anti-auto-duales compactes ne sont jamais kählériens (a fortiori jamais projectifs) sauf dans le cas de l'espace des twisteurs de $\mathbb{S}^4$ (qui est $\mathbb{P}^3$) et de l'espace des twisteurs de $\mathbb{P}^2$.

Cependant seul $\mathbb{S}^4$ est une variété spin. Si on retire un point à la sphère $\mathbb{S}^4$ (et donc une droite à son espace des twisteurs $\mathbb{P}^3$) on trouve l'espace des twisteurs de la variété hyperkählérienne

$\mathbb{C}^2 \cong \mathbb{H}$. Il est ainsi intéressant de comparer les résultats obtenus sur les voisinages de droites dans Z avec ceux dans $\mathbb{P}^3$.

Dans le cas d'une droite L de $\mathbb{P}^3$ les seules sections globales de $i_L^{-1} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}$ sont également les constantes :

Proposition 5.2.2

Soit L une droite de $\mathbb{P}^3$, et $i : L \hookrightarrow \mathbb{P}^3$ l'injection alors

$$H^0(L, i^{-1} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}) = \mathbb{C}$$

En ce sens cohomologique, le voisinage infinitésimal d'une droite twistorielle dans Z ressemble à celui d'une droite dans $\mathbb{P}^3$.

Notations

On considérera les coordonnées homogènes $[X_0 : X_1 : X_2 : X_3]$ sur $\mathbb{P}^3$ et on notera les coordonnées

$$(x, y, z) = \left(\frac{X_1}{X_0}, \frac{X_2}{X_0}, \frac{X_3}{X_0} \right)$$

$$(u, v, w) = \left(\frac{X_0}{X_3}, \frac{X_1}{X_3}, \frac{X_2}{X_3} \right)$$

sur les ouverts respectifs $U_0 = \{X_0 \neq 0\}$ et $U_3 = \{X_3 \neq 0\}$.

Soit $L = \{X_1 = X_2 = 0\} \subseteq \mathbb{P}^3$. Droite projective sur laquelle $[X_0 : X_3]$ forment des coordonnées homogènes.

On veut décrire le faisceau $i^{-1} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}$

Sections globales

La suite de restriction

$$H^0(L, i^{-1} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}) \rightarrow \Gamma(L \cap U_0, i^{-1} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}) \oplus \Gamma(L \cap U_3, i^{-1} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}) \rightarrow \Gamma(L \cap U_{03}, i^{-1} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3})$$

est exacte. Où la dernière flèche est une différence. Or

$$\Gamma(L \cap U_0, i^{-1} \mathcal{O}) = \lim_{V \supseteq L \cap U_0} \Gamma(V, \mathcal{O}_V)$$

et $\Gamma(U_0, \mathcal{O}) = \mathcal{O}(\mathbb{C}^3)$

En coordonnées : On a les relations suivantes sur U_{03} :

$$zu = 1$$

$$zv = x$$

$$zw = y$$

Soit $f \in H^0(L, i^{-1} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3})$ alors elle s'écrit sur U_0 et U_3 en respectivement

$$f_0(x, y, z) = \sum_{i,j,k} a_{ijk} x^i y^j z^k \tag{5.2.1}$$

$$f_3(u, v, w) = \sum_{l,i,j} b_{lij} u^l v^i w^j \tag{5.2.2}$$

où les sommes sont de rayons de convergences > 0 et les indices de sommation sont positifs ou nuls.

Ainsi sur U_{03} , on a

$$f_0(x, y, z) = \sum_{i,j,k} a_{ijk} (zv)^i (zw)^j z^k = \sum_{i,j,k} a_{ijk} v^i w^j z^{i+j+k}$$

or la condition de recollement avec f_3 nous donne donc

$$\sum_{i,j,k} a_{ijk} v^i w^j z^{i+j+k} = \sum_{l,i,j} b_{lij} u^l v^i w^j.$$

En identifiant les termes d'ordre (i, j) fixé en les variables v et w , on trouve

$$\sum_k a_{ijk} z^{i+j+k} = \sum_l b_{lij} u^l = \sum_l b_{lij} z^{-l}.$$

Cette égalité n'est possible que si les seuls termes non-nuls sont les a_{000} et b_{000} qui sont alors égaux.

Ainsi f est une constante.

Bilan : On a montré

$$H^0(L, i^{-1} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}) \simeq \mathbb{C}$$

5.2.3 Le cas de $\pi_{\mathbb{Q}} \mathcal{O}_Z$

D'autre part,

$$\begin{aligned} \pi_{\mathbb{Q}} \mathcal{O}_Z &= i^{-1} \nu_* \mu^* \mathcal{O}_Z \\ &= i^{-1} \nu_* \mathcal{O}_W \end{aligned}$$

or ν est à fibres connexes

$$= i^{-1} \mathcal{O}_C.$$

On va démontrer le résultat suivant

$$i^{-1} \mathcal{O}_C \hookrightarrow \mathcal{E}_M^\omega$$

C'est-à-dire que toute fonction holomorphe sur C le long de M possède un représentant analytique réel sur M . En effet on a le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & i^{-1} \mathcal{I}_M & \longrightarrow & i^{-1} \mathcal{E}_C^\omega & \longrightarrow & \mathcal{E}_M^\omega \longrightarrow 0 \\ & & & & \nearrow & & \\ & & & & i^{-1} \mathcal{O}_C & & \end{array}$$

Dès lors l'application $i^{-1} \mathcal{O}_C \rightarrow \mathcal{E}_M^\omega$ a pour noyau $\mathcal{I}_M \cap \mathcal{O}_C$ le long de M . Or M est totalement réelle. Soit donc ϕ une fonction holomorphe locale qui s'annule exactement le long de M . Pour des raisons de dimension comme $T_M \cap J_C T_M = 0$, nécessairement

$$T_M \oplus J_C T_M = T_C$$

De plus, pour tout $X \in T_M$, $\phi_* X = 0$. Soit donc $X \in T_M$ tel que $\phi_* J_C X \neq 0$ (ça existe car $\phi_* \neq 0$). Comme ϕ est holomorphe, $\phi_* J_C X = J_C \phi_* X = 0$ d'où la contradiction.

Ainsi $\mathcal{I}_M \cap \mathcal{O}_C = 0$ et donc l'application $i^{-1} \mathcal{O}_C \rightarrow \mathcal{E}_M^\omega$ est injective.

5.3 Images directes des faisceaux de p -formes

Dans cette section on explicite des calculs d'images sur C de faisceaux de p -formes $(\Omega_Z^p, \Omega_f^p, \Omega_\mu^p)$ à l'aide des faisceaux et des notations introduites au chapitre 4. On a les résultats suivants

5.3.1 Calcul des $\mathcal{R}^k \nu_* \mu^* \Omega_f^p$:

On sait que $\mu^* \Omega_f = \nu^* V^- \otimes \mathcal{O}(-1)$ d'après 4.1.5. Ainsi $\mu^* \Omega_f^p = \nu^* \Lambda^p V^- \otimes \mathcal{O}(-p)$. On peut alors utiliser la [formule de la projection](#) pour ν , pour obtenir

$k = 0$:

Si $p > 0$, on a

$$\nu_* \mu^* \Omega_f^p = 0$$

et pour $p = 0$, on trouve $\mathcal{O}_C$.

$k = 1$:

Si $p > 1$, on a

$$\mathcal{R}^1 \nu_* \mu^* \Omega_f^p = \mathcal{O}_C (\Lambda^p V^- \otimes \det V^+ \otimes \odot^{p-2} V^+)$$

par la règle de Bott (cf 1.2.2).

5.3.2 Calcul des $\mathcal{R}^k \nu_* \Omega_\mu^p$:

On sait que $\Omega_\mu = \mathcal{O}_W(\nu^* V^-) \otimes \mathcal{O}(1)$ d'après (4.3.5). Ainsi

$$\Omega_\mu^p = \mathcal{O}_W(\nu^* \Lambda^p V^-) \otimes \mathcal{O}(p)$$

$k = 0$:

Pour $p \geq 0$, on a

$$\nu_* \Omega_\mu^p = \mathcal{O}_C (\Lambda^p V^- \otimes \odot^p V_+)$$

$k = 1$:

Pour $p \geq 0$, on a

$$\mathcal{R}^1 \nu_* \Omega_\mu^p = 0$$

Applications :

Ces résultats seront généralisés dans la partie 7.

On peut signaler le cas particulier

$$\nu_* \Omega_\mu^2 \simeq \mathcal{O}_C (\Lambda^2 V^- \otimes \odot^2 V_+) \simeq \Omega_-^2 \quad (5.3.1)$$

qui apparaît dans la décomposition

$$\Omega_C^2 \simeq \Omega_+^2 \oplus \Omega_-^2.$$

5.3.3 Calcul des $\mathcal{R}^k \pi_{\mathbb{Q}} \Omega_Z^p$

On peut calculer $\pi_{\mathbb{Q}} \Omega_Z^p$. En fait comme il y a unicité de l'extension sur $\mathbb{P}^1$ de

$$0 \rightarrow \mathcal{O}(-2) \rightarrow \bullet \rightarrow \mathbb{C}^{2n}(-1) \rightarrow 0$$

C'est celle qui définit le conormal de L comme quotient de Ω_Z . On a alors

$$\Omega_Z^1 \otimes \mathcal{O}_L \cong \mathbb{C}^{2n}(-1) \oplus \mathcal{O}(-2)$$

on en déduit que le faisceau $\mu^* \Omega_Z^p$, pour $p > 0$ est strictement négatif sur chaque fibre de ν et donc son image directe est nulle par la [formule de la projection](#).

D'autre part, on peut également déduire de la décomposition ci-dessus que $\mathcal{R}^1 \nu_* \Omega_Z^1$ est de rang 1. En effet pour tout L ,

$$H^1(L, \mathbb{C}^{2n}(-1) \oplus \mathcal{O}(-2)) \simeq H^1(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(-2)) \simeq \mathbb{C}.$$

on sera plus précis au paragraphe suivant.

Pour l'instant, on a montré

Proposition 5.3.1

Soit $p > 0$ alors

- $\pi_{\odot} \Omega_Z^p = 0$
- et $\pi_* \Omega_Z^p = 0$.

En effet on a $\pi_* \Omega_Z^p \simeq \pi_{\odot} \Omega_Z^p \subseteq \pi_{\odot} \Omega_Z^p = 0$.

En particulier, on en déduit pour $p = 2n + 1$ que $\pi_* K_Z = 0$. Par un argument très similaire, on peut montrer, pour tout $m > 0$ que

$$\pi_* K_Z^m = 0$$

et donc que les plurigenres P_m de Z sont tous nuls pour $m > 0$: $P_m = \dim H^0(Z, K_Z^m) = \dim H^0(M, \pi_* K_Z^m) = 0$.

Ces propriétés sur la structure complexe de Z , placent cette variété dans la classe des variétés de dimension de Kodaira $-\infty$. Tout comme les espaces projectifs et autres variétés de Fano. C'est un résultat classique qu'une variété uni-réglée est de dimension de Kodaira $-\infty$. Or Z est recouverte par l'image de $\mu : C \times \mathbb{P}^1 \rightarrow Z$.

Expression des faisceaux de p -formes sur Z comme extension et conséquences sur les images directes supérieures

On montre d'abord le lemme suivant

Lemme 5.3.2

On a la suite exacte suivante sur Z pour $p > 0$

$$0 \rightarrow \Omega_f^{p-1}(-2) \rightarrow \Omega_Z^p \rightarrow \Omega_f^p \rightarrow 0$$

Ce résultat est un analogue de la proposition 7.3.2 du chapitre 7. La preuve est identique. Ce résultat donne sur W

$$0 \rightarrow \mu^* \Omega_f^{p-1}(-2) \rightarrow \mu^* \Omega_Z^p \rightarrow \mu^* \Omega_f^p \rightarrow 0$$

ou encore en terme de fibrés spinoriels

$$0 \rightarrow \nu^* \Lambda^{p-1} V^- \otimes \mathcal{O}(-p-1) \rightarrow \mu^* \Omega_Z^p \rightarrow \nu^* \Lambda^p V^- \otimes \mathcal{O}(-p) \rightarrow 0.$$

On peut remarquer qu'alors (pour $p > 0$) les images directes (en degré 0) par ν de ces faisceaux s'annulent. Ainsi il on obtient la suite exacte courte

$$0 \rightarrow \mathcal{R}^1 \nu_* \mu^* \Omega_f^{p-1}(-2) \rightarrow \mathcal{R}^1 \nu_* \mu^* \Omega_Z^p \rightarrow \mathcal{R}^1 \nu_* \mu^* \Omega_f^p \rightarrow 0$$

que l'on peut exprimer plus simplement

$$0 \rightarrow \Lambda^{p-1} V^- \otimes \mathcal{R}^1 \nu_* \mathcal{O}(-p-1) \rightarrow \mathcal{R}^1 \nu_* \mu^* \Omega_Z^p \rightarrow \Lambda^p V^- \otimes \mathcal{R}^1 \nu_* \mathcal{O}(-p) \rightarrow 0.$$

Ainsi par règle de Bott (cf 1.2.2),

Proposition 5.3.3

On peut exprimer $\mathcal{R}^1 \nu_* \Omega_Z^p$ pour $p > 0$ comme l'extension

$$0 \rightarrow \Lambda^{p-1} V^- \otimes \odot^{p-1} V^+[-1] \rightarrow \mathcal{R}^1 \nu_* \mu^* \Omega_Z^p \rightarrow \Lambda^p V^- \otimes \odot^{p-2} V^+[-1] \rightarrow 0.$$

où $E[-1]$ désigne le fibré $E \otimes \det V^+$.

5.3.4 Bilan

On peut résumer les informations connues sur les images directes des faisceaux Ω_Z^k dans le tableau 5.2.

k	$\pi_* \Omega_Z^k$	$\pi_{\mathbb{Q}} \Omega_Z^k$	$\pi_* \mathcal{O}(k)$	$\pi_{\mathbb{Q}} \mathcal{O}(k)$	$\pi_* \Omega_f^k(k)$	$\pi_{\mathbb{Q}} \Omega_f^k(k)$
0	$\mathbb{C}$	$i^{-1} \mathcal{O}_C$	$\mathbb{C}$	$i^{-1} \mathcal{O}_C$	$\mathbb{C}$	$i^{-1} \mathcal{O}_C$
1	0	0	(b)	$i^{-1} \mathcal{O}_C(V_+)$	(a)	$i^{-1} \mathcal{O}_C(V_-)$
$\vdots$	0	0	(b)	$i^{-1} \mathcal{O}_C(\odot^k V_+)$	(a)	$i^{-1} \mathcal{O}_C(\Lambda^k V_-)$

- (a) Ces faisceaux sont non-nuls **ssi** la connexion ∇_- est plate (cf. section 6.5). Ce sont alors des systèmes locaux de rang $\binom{2n}{k}$.
- (b) Ces faisceaux sont calculables en terme de zéros d'un opérateur différentiel un peu plus général qu'une connexion (cf thm 2).

FIGURE 5.2 – Différentes images directes de faisceaux sur Z
Les fibrés V_+ et V_- sont définis en (4.1.1, 4.1.2).

	p	0	1	2
q	$\frac{\mathcal{R}^1 \nu_* \mu^* \Omega_f^p(q)}{\nu_* \mu^* \Omega_f^p(q)}$	$\frac{\mathcal{R}^1 \nu_* \mathcal{O}(q)}{\nu_* \mathcal{O}(q)}$	$\frac{\mathcal{R}^1 \nu_* \mu^* \Omega_f(q)}{\nu_* \mu^* \Omega_f(q)}$	$\frac{\mathcal{R}^1 \nu_* \mu^* \Omega_f^2(q)}{\nu_* \mu^* \Omega_f^2(q)}$
-2	$\frac{\mathcal{R}^1 \nu_* \mu^* \Omega_f^p(-2)}{\nu_* \mu^* \Omega_f^p(-2)}$	$\frac{\mathbb{C}[-1]}{0}$	$\frac{V^- \otimes V^+[-1]}{0}$	$\frac{\Lambda^2 V^- \otimes \odot^2 V^+[-1]}{0}$
-1	$\frac{\mathcal{R}^1 \nu_* \mu^* \Omega_f^p(-1)}{\nu_* \mu^* \Omega_f^p(-1)}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{V^-[-1]}{0}$	$\frac{\Lambda^2 V^- \otimes V^+[-1]}{1}$
0	$\frac{\mathcal{R}^1 \nu_* \mu^* \Omega_f^p}{\nu_* \mu^* \Omega_f^p}$	$\frac{0}{\mathbb{C}}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{\Lambda^2 V^-[-1]}{0}$
1	$\frac{\mathcal{R}^1 \nu_* \mu^* \Omega_f^p(1)}{\nu_* \mu^* \Omega_f^p(1)}$	$\frac{0}{V_+}$	$\frac{0}{V^-}$	$\frac{0}{0}$
2	$\frac{\mathcal{R}^1 \nu_* \mu^* \Omega_f^p(2)}{\nu_* \mu^* \Omega_f^p(2)}$	$\frac{0}{\odot^2 V_+}$	$\frac{0}{V^- \otimes V_+}$	$\frac{0}{\Lambda^2 V^-}$

FIGURE 5.3 – Expression des images directes des faisceaux $\mu^* \Omega_f^p(q)$

Chapitre 6

Équivalence de Buchdahl

*A process cannot be understood by stopping it.
Understanding must move with the flow of the
process, must join it and flow with it.*

— *Dune*, Frank HERBERT

Dans ce chapitre et les suivants, on développe une correspondance entre fibrés vectoriels holomorphes sur l'espace des twisteurs Z (satisfaisant une certaine condition de trivialité 6.1) et les fibrés à connexion holomorphe sur l'espace des cycles C (satisfaisant une certaine condition de courbure 6.5). Cette construction généralise un résultat de Buchdahl [Buc85] valable pour les espaces de twisteurs de dimension 3.

- Ce chapitre se concentre sur la construction du fibré sur C et de sa connexion. On énonce une caractérisation des fibrés à connexion construit de cette manière.
- Le chapitre 7 utilisera cette construction pour interpréter la cohomologie de certains faisceaux sur Z en termes d'équations différentielles sur C .
- Le chapitre 8 développera la correspondance en interprétant la courbure de la connexion en termes d'épaississements du fibré sur Z .

Dans un premier temps, on construira pour chaque fibré vectoriel holomorphe sur Z , trivial en restriction aux droites, un fibré vectoriel holomorphe sur C (cf 6.1). On lui adjoindra ensuite une connexion naturelle (cf 6.3).

L'étude de cette connexion nécessite quelques résultats techniques faisant le lien avec certaines dérivées extérieures relatives (cf 6.2 et 6.3). Une fois ces résultats démontrés, on pourra montrer la fonctorialité de la construction.

Enfin on remarquera des restrictions automatiques sur la courbure de la connexion construite. Sous ces restrictions, on pourra démontrer l'équivalence de catégories 1.

6.1 Définitions du fibré associé

On appellera *L-trivial* un fibré holomorphe E_Z sur Z dont les restrictions aux images L_s des sections $s \in C$ sont triviales. En particulier, pour tous $s \in C$

$$h^0(L_s, E_Z) = \text{rk } E_Z.$$

De même, on appellera *L-constant* un fibré holomorphe E_Z sur Z tel que

$$C \ni s \mapsto h^0(L_s, E_Z)$$

soit constante.

Ces conditions permettent, grâce à la propriété de changement de base (3 page 18), d'assurer que l'image directe $\nu_* \mu^* \mathcal{O}_Z(E_Z)$ est un faisceau *localement libre* sur C . En effet

$$h^0(\nu^{-1}(s), \mathcal{O}_{\nu^{-1}(s)} \otimes \mu^* \mathcal{O}_Z(E_Z)) \simeq h^0(L_s, \mathcal{O}_{L_s}(E_Z))$$

est constante par rapport à s . On notera E_C le fibré vectoriel holomorphe associé sur C . Il vérifie donc

$$\nu_* \mathcal{O}_W(\mu^* E_Z) \simeq \mathcal{O}_C(E_C).$$

On a donc obtenu la

Proposition 6.1.1

Soit E_Z un fibré *L-trivial*. Il existe un unique fibré vectoriel holomorphe E_C sur C tel que

$$\nu^* E_C \simeq \mu^* E_Z$$

sur W .

Exemples

- $\mathcal{O}_Z$ est trivial donc en particulier *L-trivial*,
- $\mathcal{O}(1)$ ou plus généralement $\mathcal{O}(k)$ est *L-constant*.

Un exemple fondamental est donné par le fibré T_f :

Proposition 6.1.2

- T_f est *L-constant*,
Le fibré associé est T_C (cf. 3.3.9)
- $T_f(-1)$ est *L-trivial*,
Le fibré associé est V_- (cf. 4.1.2)

La preuve résulte des propriétés 2.4.3 et 3.1.1.

6.2 Le cas du fibré trivial

L'opérateur différentiel d_μ que ce soit sur les fonctions de W ou sur les k -formes μ -relatives est un morphisme de faisceaux

$$\Omega_\mu^k \rightarrow \Omega_\mu^{k+1}$$

mais qui **n'est pas** $\mathcal{O}_W$ -linéaire. Il satisfait à la place une règle de Leibniz pour tout ρ et θ sections locales respectives de Ω_μ^r et Ω_μ^{k-r} :

$$d_\mu(\rho\theta) = (d_\mu\rho) \wedge \theta + (-1)^r \rho d_\mu\theta$$

qui résulte du passage au quotient par $\mu^*\Omega_Y^\bullet$ de la règle de Leibniz pour d_W . Cela n'empêche pas de pouvoir le pousser en avant par l'application ν , pour obtenir un opérateur différentiel sur C

$$\nu_* d_\mu : \nu_* \Omega_\mu^k \rightarrow \nu_* \Omega_\mu^{k+1}$$

la fonctorialité lui impose alors de satisfaire la règle de Leibniz suivante

$$(\nu_* d_\mu)(\lambda\theta) = \int_\nu d_\mu(\lambda \circ \nu) \wedge \nu^*\theta + \lambda(\nu_* d_\mu)\theta.$$

Pour $\lambda \in \mathcal{O}_C$, l'intégrale désigne la section sur C obtenue par intégration d'une section de Ω_μ^{k+1} sur les fibres de ν .

Le but de cette section est de relier ce nouvel opérateur différentiel sur C : $\nu_* d_\mu$ avec des opérateurs différentiels issus de la structure différentielle de C . En particulier, on va montrer le résultat 6.2.6 et son corollaire important

Corollaire 6.2.1

On a l'égalité suivante d'opérateurs différentiels sur les fonctions de C

$$\nu_* d_\mu = d_C$$

Remarque : Ce n'est pas vrai sur Ω_C^k pour $k > 0$, simplement car $\nu_* \Omega_\mu^k \neq \Omega_C^k$. Cependant la proposition 6.2.6 permettra tout de même de faire le lien entre les deux.

6.2.1 Complexes de De Rham relatifs

La différentielle relative à $g = f \circ \mu$, notée d_g donne un complexe différentiel sur W

$$\cdots \rightarrow \nu^* \Omega_C^k \xrightarrow{d_g} \nu^* \Omega_C^{k+1} \rightarrow \cdots$$

ici la structure produit de W identifie $\nu^* \Omega_C^k$ au faisceau Ω_g^k . Et de même la différentielle relative à μ , notée d_μ donne donc un complexe différentiel sur W

$$\cdots \rightarrow \Omega_\mu^k \xrightarrow{d_\mu} \Omega_\mu^{k+1} \rightarrow \cdots$$

On rappelle que l'on a la résolution de faisceau $\mu^{-1} \mathcal{O}_Z$ par le complexe de De Rham holomorphe relatif sur W

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_W \rightarrow \Omega_\mu^1 \xrightarrow{d_\mu} \Omega_\mu^2 \rightarrow \cdots$$

Par définition d_μ est la restriction-factorisation de d_W au quotient $\Omega_\mu^\bullet$ de $\Omega_W^\bullet$.

Sur la variété produit W on a $d_W = d_g + d_\nu$. Le lemme suivant montre que la connaissance de d_g suffit à déterminer d_μ .

Lemme 6.2.2

Le diagramme suivant sur W commute

$$\begin{array}{ccc} \nu^* \Omega_C^k & \xrightarrow{d_g} & \nu^* \Omega_C^{k+1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Omega_\mu^k & \xrightarrow{d_\mu} & \Omega_\mu^{k+1} \end{array}$$

Les flèches verticales sont obtenues par puissance extérieure des flèches $\Omega_g \rightarrow \Omega_\mu$ de la proposition 3.3.2.

Preuve

On raisonne par induction pour montrer que toute forme g -relative ω vérifie

$$[d_g \omega]_\mu = d_\mu [\omega]_\mu$$

Pour les fonctions Le diagramme pour $k = 0$ devient

$$\begin{array}{ccc} \nu^* \mathcal{O}_C & \xrightarrow{d_g} & \nu^* \Omega_C^1 \\ \downarrow \wr & & \downarrow \\ \mathcal{O}_W & \xrightarrow{d_\mu} & \Omega_\mu^1 \end{array}$$

Soit donc φ une section locale de $\mathcal{O}_W$ et $X \in T_\mu$ (ie $\mu_* X = 0$). Or comme $g = f \circ \mu$, $g_* X = 0$ ce qui entraîne que

$$\langle d_g \varphi, X \rangle_W = \langle d_\mu \varphi, X \rangle_W$$

mais comme $\mu_* X = 0$ ce scalaire est exactement $\langle d_\mu \varphi, X \rangle_{(\Omega_\mu, T_\mu)}$.

Ainsi on a montré que la projection de $d_g \varphi$ dans Ω_μ (en évaluant contre des vecteurs de T_μ) est égale à $d_\mu \varphi$. D'où le résultat pour les fonctions.

Pour un produit extérieur Soient θ, γ deux sections locales de $\nu^* \Omega_C^\bullet$ de degrés respectifs a et b , alors

$$\begin{aligned} [d_g (\theta \wedge \gamma)]_\mu &= [d_g \theta \wedge \gamma + (-1)^a \theta \wedge d_g \gamma]_\mu \\ &= [d_g \theta \wedge \gamma]_\mu + (-1)^a [\theta \wedge d_g \gamma]_\mu \\ &= [d_g \theta]_\mu \wedge [\gamma]_\mu + (-1)^a [\theta]_\mu \wedge [d_g \gamma]_\mu \end{aligned}$$

par hypothèse d'induction

$$\begin{aligned} &= d_\mu [\theta]_\mu \wedge [\gamma]_\mu + (-1)^a [\theta]_\mu \wedge d_\mu [\gamma]_\mu \\ &= d_\mu ([\theta]_\mu \wedge [\gamma]_\mu) \\ &= d_\mu [\theta \wedge \gamma]_\mu. \end{aligned}$$

On a utilisé à deux reprises le résultat suivant

Lemme 6.2.3

Pour deux formes de $\nu^* \Omega_C^\bullet$

$$[\theta]_\mu \wedge [\gamma]_\mu = [\theta \wedge \gamma]_\mu.$$

Il suffit des les voir comme deux formes sur W et de remarquer que le produit extérieur de formes μ -relatives est défini par passage au quotient du produit extérieur sur W .

Finalement, on a montré que le résultat se ramène par induction aux cas de base. Reste à montrer le résultat pour une forme de degré 1.

Le cas de degré 1 Supposons qu'on ait une section locale de $\nu^*\Omega_C$ alors on peut l'écrire comme une somme de termes de la forme $\varphi d_g \phi$. Mais par la propriété d'induction comme le résultat est vrai pour φ , il ne reste plus qu'à le montrer pour $\omega = d_g \phi$.

On a immédiatement $[d_g \omega]_\mu = [0]_\mu = 0$ et d'autre part,

$$d_\mu[\omega]_\mu = d_\mu[d_g \phi]_\mu$$

par le résultat dans le cas des fonctions

$$\begin{aligned} &= d_\mu d_\mu \phi \\ &= 0 \\ &= [d_g \omega]_\mu. \end{aligned}$$

D'où le résultat.

6.2.2 Image directe par ν du complexe de De Rham μ -relatif

Le résultat suivant énonce le fait très général que la différentiation sur $W \simeq C \times \mathbb{P}^1$ par rapport aux variables de C détermine la différentiation sur C .

Lemme 6.2.4

On a la relation suivante entre opérateurs différentiels sur C

$$\nu_* d_g \simeq d_C$$

Ici $\nu_* d_g$ désigne l'image du morphisme de faisceaux (de $\mathbb{C}$ -modules) $d_g : \mathcal{O}_W \rightarrow \Omega_g$ par le foncteur ν_* . De manière générale $\nu_* \nabla$ est un opérateur différentiel construit par fonctorialité de ν_* qui vérifie des propriétés analogues à $\nu_* d_\mu$ (cf. 6.2).

Preuve

On a besoin du résultat suivant que l'on donne sans démonstration :

Lemme 6.2.5

Soit E_C un fibré holomorphe sur C , $E = \nu^* E_C$ est un fibré sur W trivial sur les fibres. Alors

$$\nu_* \mathcal{O}_W(E) \simeq \mathcal{O}_C(E_C)$$

et l'identification est donnée comme suit :

Soit s une section locale sur U de $\nu_* \mathcal{O}_W(E)$, alors elle correspond à une section $\tilde{s}$ sur $V = \nu^{-1}(U)$ de $\mathcal{O}_W(E)$. D'autre part, on peut construire une section $s \circ \nu$ de $\nu^{-1} \nu_* \mathcal{O}_W(E)$ sur V . On notera $\nu^* s$ son image dans $\nu^* \nu_* \mathcal{O}_W(E)$.

Alors

$$\tilde{s} = [\nu^* s]$$

où $[_]$ dénote la co-unité

$$\nu^* \nu_* \mathcal{O}_W(E) \rightarrow \mathcal{O}_W(E).$$

Dès lors soit θ une section locale de $\Omega_C^k \simeq \nu_* \nu^* \Omega_C^k$, alors par définition

$$\begin{aligned} \widetilde{(\nu_* d_g)} \theta &= d_g \tilde{\theta} \\ &= d_g \nu^* \theta \\ &= [d_W \nu^* \theta]_g \\ &= [\nu^* d_C \theta]_g \end{aligned}$$

Or $\nu^*(d_C \theta) \in \nu^* \Omega_C^k = \Omega_g^k$

$$\begin{aligned} &= \nu^* d_C \theta \\ &= \widetilde{d_C} \theta. \end{aligned}$$

Ses sections locales sur $V = \nu^{-1}U$ étant égales elles définissent donc les mêmes sections de $\nu_*\nu^*\Omega_C^{k+1} \simeq \Omega_C^{k+1}$.

Ainsi

$$(\nu_*d_g)\theta = d_C\theta.$$

Enfin, en poussant en avant par ν le diagramme du lemme 6.2.2 et en utilisant le lemme 6.2.4, on peut en déduire, pour les différentielles en degré supérieur

Proposition 6.2.6

Le diagramme suivant sur C commute

$$\begin{array}{ccc} \Omega_C^k & \xrightarrow{d_C} & \Omega_C^{k+1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \nu_*\Omega_\mu^k & \xrightarrow{\nu_*d_\mu} & \nu_*\Omega_\mu^{k+1} \end{array}$$

On notera D^k (ou D s'il n'y a pas d'ambiguïté) l'opérateur différentiel

$$\nu_*d_\mu : \nu_*\Omega_\mu^k \rightarrow \nu_*\Omega_\mu^{k+1}. \quad (6.2.1)$$

On remarque que $D^0 = d_C$.

La proposition 6.2.6 peut se reformuler comme l'existence d'un morphisme de complexes

$$(\Omega_C^\bullet, d_C) \rightarrow (\nu_*\Omega_\mu^\bullet, D^\bullet). \quad (6.2.2)$$

Une étude plus poussée sera donné dans le chapitre 7.

6.2.3 Corollaire et application

L'égalité $\nu_*d_\mu \simeq d_C$ sur les fonctions permet de donner une nouvelle preuve du résultat 5.2.1 sur l'image directe par π du faisceau structurel $\mathcal{O}_Z$.

En effet d'après la proposition 5.1.3, le faisceau $\pi_*\mathcal{O}_Z$ coïncide avec le faisceau $\pi_\diamond\mathcal{O}_Z$ c'est-à-dire $i^{-1}\nu_*\mu^{-1}\mathcal{O}_Z$.

Considérons donc le faisceau $\mu^{-1}\mathcal{O}_Z$ sur W . On dispose de la suite exacte

$$0 \rightarrow \mu^{-1}\mathcal{O}_Z \rightarrow \mathcal{O}_W \xrightarrow{d_\mu} \Omega_\mu$$

qui est le début de sa résolution de De Rham holomorphe relative. Cela revient à dire que les fonctions sur W qui sont d_μ -exactes sont exactement les fonctions constantes sur les fibres de μ , ie les fonctions provenant de Z . Ainsi par exactitude à gauche du foncteur ν_* , on a

$$\nu_*\mu^{-1}\mathcal{O}_Z = \ker(\nu_*d_\mu : \nu_*\mathcal{O}_W \rightarrow \nu_*\Omega_\mu)$$

mais d'après la proposition 6.2.6 il s'agit du noyau de la connexion d_C en degré 0. Là encore la théorie de De Rham nous dit qu'il s'agit du **faisceau constant** $\underline{\mathbb{C}}$ (les fonction de dérivée extérieure nulle sont localement constantes).

Finalement $\nu_*\mu^{-1}\mathcal{O}_Z \simeq \underline{\mathbb{C}}$, donc en restreignant à $M \hookrightarrow C$ via i , on obtient $\pi_\diamond\mathcal{O}_Z \simeq i^{-1}\underline{\mathbb{C}} \simeq \underline{\mathbb{C}}$. On a bien retrouvé le résultat de 5.1.3.

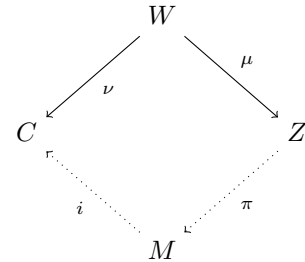


FIGURE 6.1 – Rappel des applications utilisées pour le transport de faisceaux.

6.3 Le cas d'un fibré L -trivial

Comme expliqué dans [Buc85, Part. II], un fibré L -trivial E_Z se voit associer un fibré E_C sur C qui satisfait de plus

$$\nu^*E_C \simeq \mu^*E_Z. \quad (6.3.1)$$

En effet il suffit de vérifier que l'application naturelle

$$\nu^* \mathcal{O}_C(E_C) \simeq \nu^* \nu_* \mathcal{O}_W(\mu^* E_Z) \rightarrow \mathcal{O}_W(\mu^* E_Z)$$

est un isomorphisme sur les fibres. Mais cela découle de la trivialité. On a déjà utilisé un tel raisonnement au paragraphe 4.1.2.

D'autre part le fibré $E = \mu^* E_Z$ sur W est naturellement muni d'une connexion plate, notée d_μ^E ou plus souvent d_μ

$$\mathcal{O}_W(\mu^* E_Z) \rightarrow \Omega_\mu(\mu^* E_Z). \quad (6.3.2)$$

Dans un repère local de E , constitué de sections de $\mu^{-1} \mathcal{O}_Z(E_Z)$ qui proviennent de E_Z , d_μ^E agit comme le d_μ des coefficients. Comme les changements de trivialisation de E sont constants sur les fibres de μ , l'opérateur d_μ^E défini localement comme ci-dessus se recolle. On pourra se référer à [Del70, 2.22, 2.23] pour plus de précisions.

Ainsi en poussant en avant par ν l'application (6.3.2), on trouve

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_C(E_C) &\simeq \nu_* \mathcal{O}_W(\mu^* E_Z) \\ &\xrightarrow{\nu_* d_\mu^E} \nu_* (\Omega_\mu(\mu^* E_Z)) \\ &\simeq \nu_* (\Omega_\mu(\nu^* E_C)) \end{aligned}$$

Par la propriété (3.3.7) et la formule de la projection

$$\simeq \Omega_C(E_C).$$

Cette nouvelle application satisfait de plus une règle de Leibniz

$$(\nu_* d_\mu^E)(fe) = (\nu_* d_\mu^{\mathcal{O}_W})(f)e + f(\nu_* d_\mu^E)(e)$$

pour $f \in \mathcal{O}_C$ et où l'opérateur $\nu_* d_\mu^{\mathcal{O}_W}$ agit sur les fonctions $\mathcal{O}_C \simeq \nu_* \mathcal{O}_W \rightarrow \nu_* \Omega_\mu \simeq \Omega_C$. Or d'après 6.2.1, on sait qu'il coïncide avec d_C . Ainsi $\nu_* d_\mu$ sur E_C satisfait une règle de Leibniz au sens classique

$$(\nu_* d_\mu)(fe) = d_C(f)e + f(\nu_* d_\mu)(e).$$

C'est donc une connexion sur E_C , on la notera ∇_{E_C} ou ∇ s'il n'y a pas d'ambiguïté sur le fibré, ou parfois ∇_E pour la distinguer d'une connexion ∇_F sur un fibré F_C associé à F_Z . Elle s'étend aux $\Omega_C^k(E_C)$ par règle de Leibniz, on la notera alors $\nabla_{E_C}^k$.

On va maintenant établir un analogue de la proposition 6.2.6 pour ∇_{E_C} . En effet on a fait un lien entre $\nu_* d_\mu$ et d_C agissant sur certaines classes de formes différentielles sur C . On démontre le résultat analogue mais cette fois pour des formes différentielles à valeur dans E_C .

On notera D_E^k l'opérateur différentiel

$$(\nu_* \Omega_\mu^k)(E_C) \simeq \nu_* (\Omega_\mu^k(E)) \rightarrow \nu_* (\Omega_\mu^{k+1}(E)) \simeq (\nu_* \Omega_\mu^{k+1})(E_C) \quad (6.3.3)$$

obtenu par image directe du d_μ^k sur le fibré E . Ainsi on a : $D_E^k = \nu_* d_\mu^k$.

Proposition 6.3.1

Avec les notations du paragraphe précédent, le diagramme suivant de faisceaux sur C est commutatif,

$$\begin{array}{ccc} \Omega_C^k(E_C) & \xrightarrow{\nabla_E^k} & \Omega_C^{k+1}(E_C) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (\nu_* \Omega_\mu^k)(E_C) & \xrightarrow{D_E^k} & (\nu_* \Omega_\mu^{k+1})(E_C) \end{array}$$

Dans un premier temps, si on note $P_\mu^k : \Omega_C^k \rightarrow \nu_* \Omega_\mu^k$, alors, par définition de ∇_{E_C} ,

$$\begin{aligned} P_\mu^{k+1} \nabla_{E_C}(\omega \otimes e) &= P_\mu^{k+1} (d_C \omega \otimes e + (-1)^k \omega \wedge \nabla_{E_C} e) \\ &= (P_\mu^{k+1} d_C \omega) \otimes e + (-1)^k (P_\mu^k \omega) \wedge P_\mu^1 \nabla_{E_C} e \end{aligned}$$

on remarque d'après (3.3.7) que P_μ^1 est l'identité et on a d'après la proposition 6.2.6 la relation $P_\mu^{k+1} \circ d_C = (\nu_* d_\mu) \circ P_\mu^k$, ainsi

$$= ((\nu_* d_\mu)(P_\mu^k \omega)) \otimes e + (-1)^k (P_\mu^k \omega) \wedge \nabla_{E_C} e$$

Maintenant si on relève tout ça dans W

$$\begin{aligned} (\nu_* d_\mu)(\widetilde{P_\mu^k \omega \otimes e}) &= d_\mu(\widetilde{P_\mu^k \omega \otimes e}) \\ &= d_\mu \widetilde{P_\mu^k \omega} \otimes \tilde{e} + (-1)^k \widetilde{P_\mu^k \omega} \otimes d_\mu \tilde{e} \\ &= (\nu_* d_\mu)(\widetilde{P_\mu^k \omega}) \otimes \tilde{e} + (-1)^k \widetilde{P_\mu^k \omega} \otimes \widetilde{\nabla_{E_C} e} \end{aligned}$$

par le calcul qui précède

$$= P_\mu^{k+1} \widetilde{\nabla_{E_C}(\omega \otimes e)}$$

On a donc bien montré que le diagramme commute, c'est-à-dire

$$P_\mu^{k+1} \nabla_{E_C} = (\nu_* d_\mu) \circ P_\mu^k$$

6.4 Fonctorialité

6.4.1 Produit tensoriel

Les constructions de E_C et ∇_{E_C} respectent le produit tensoriel au sens suivant

Proposition 6.4.1

Si E_Z et F_Z sont deux fibrés L -triviaux sur Z alors

1. $E_Z \otimes F_Z$ est un fibré L -trivial
2. Le fibré associé sur C est donné par $E_C \otimes F_C$
3. La connexion associée $\nabla : \mathcal{O}_C(E_C \otimes F_C) \rightarrow \Omega_C(E_C \otimes F_C)$ est la connexion $\nabla_{E_C} + \nabla_{F_C}$ (1.3.1).

Le point 2 résulte de la trivialité sur les droites, en effet la fibre en s de $(E \otimes F)_C$ est donnée par

$$H^0(\nu^{-1}(s), \mu^* E_Z \otimes \mu^* F_Z|_{\nu^{-1}(s)}) \simeq H^0(L_s, E_Z \otimes F_Z|_{L_s}) \simeq H^0(L_s, E_Z) \otimes H^0(L_s, F_Z)$$

Pour le point 3, il faut remarquer que sur $\mathcal{O}_W(\mu^*(E_Z \otimes F_Z))$ l'opérateur d_μ naturel coïncide avec $d_\mu^E + d_\mu^F$. Cela revient à dire que μ^{-1} préserve le produit tensoriel

$$\mu^{-1} \mathcal{O}_Z(E_Z \otimes F_Z) \simeq \mu^{-1} \mathcal{O}_Z(E_Z) \otimes_{\mu^{-1} \mathcal{O}_Z} \mu^{-1} \mathcal{O}_Z(F_Z)$$

ce qui est un résultat général.

Cela montre que les d_μ^0 coïncident. En conséquence, $\nabla = \nabla_{E_C} + \nabla_{F_C}$. Ce qui montre la proposition.

6.4.2 Dualité

Lemme 6.4.2

Soit E_Z un fibré L -trivial et E_Z^* son dual. On notera (E_C, ∇) le fibré à connexion sur C associé à E_Z .

Alors

- E_Z^* est L -trivial.
- Le fibré associé à E_Z^* est isomorphe à E_C^* .
- La connexion associée ∇^* est donnée par $\forall e' \in H^0(U, E_C^*), \forall e \in H^0(U, E_C)$,

$$\langle \nabla^* e', e \rangle_{E_C^*, E_C} = d_C \langle e', e \rangle_{E_C^*, E_C} - \langle e', \nabla e \rangle_{E_C^*, E_C}.$$

Le premier point est évident, notons donc F_C le fibré sur C associé à E_Z^* . Alors

$$\begin{aligned}\mathcal{O}_C(E_C^*) &= \mathcal{O}_C(E_C)^* \\ &= (\nu_* \mathcal{O}_W(E))^*\end{aligned}$$

par dualité de Serre en famille, comme $K_\nu \simeq g^* \mathcal{O}(-2)$,

$$\begin{aligned}&= \mathcal{R}^1 \nu_* (\mathcal{O}_W(E)^* \otimes \mathcal{O}(-2)) \\ &= \mathcal{R}^1 \nu_* (\nu^* \mathcal{O}_C(F_C) \otimes \mathcal{O}(-2))\end{aligned}$$

par formule de la projection

$$\begin{aligned}&= \mathcal{O}_C(F_C) \otimes \mathcal{R}^1 \nu_* \mathcal{O}(-2) \\ &= \mathcal{O}_C(F_C \otimes \Lambda^2 V_+) \\ &\cong \mathcal{O}_C(F_C)\end{aligned}$$

ainsi $E_C^* \cong F_C$ d'où le deuxième point.

Enfin l'opérateur d_μ sur E^* est donné par [Del70, 2.7.4], pour toutes sections locales e et e' sur W de $E = \mu^* E_Z$ et E^* respectivement,

$$\langle d_\mu e', e \rangle_{E^*, E} := d_\mu \langle e', e \rangle_{E^*, E} - \langle e', d_\mu e \rangle_{E^*, E}$$

La formule étant en particulier vraie pour les ouverts saturés par ν , on en déduit le troisième point de 6.4.2 en utilisant la propriété de commutation 6.2.6.

6.4.3 Fonctorialité

L'association $E_Z \mapsto (E_C, \nabla_{E_C})$ construite précédemment est fonctorielle. Pour préciser ce point on va dans un premier temps regarder son action sur les sections globales.

Proposition 6.4.3

Soit E_Z un fibré L -trivial sur Z , alors

$$H^0(Z, E_Z) \simeq H^0(C, E_C)^{\nabla_{E_C}}$$

C'est-à-dire les sections globales de E_Z sur Z correspondent bijectivement aux sections globales de E_C sur C plates pour ∇_{E_C} .

Soit σ une section globale de E_Z sur Z , alors $\sigma \circ \mu$ est une section globale de $\mu^{-1} \mathcal{O}_Z(E_Z)$ sur W . Or on a la suite exacte de faisceaux

$$0 \rightarrow \mu^{-1} \mathcal{O}_Z(E_Z) \rightarrow \mathcal{O}_W(\mu^* E_Z) \xrightarrow{d_\mu} \Omega_\mu^1(\mu^* E_Z).$$

En passant aux sections globales on trouve une suite exacte

$$0 \rightarrow \Gamma(W, \mu^{-1} \mathcal{O}_Z(E_Z)) \rightarrow \Gamma(W, \mathcal{O}_W(\mu^* E_Z)) \rightarrow \Gamma(W, \Omega_\mu^1(\mu^* E_Z))$$

que l'on peut voir comme espaces sur C

$$0 \rightarrow \Gamma(C, \nu_* \mu^{-1} \mathcal{O}_Z(E_Z)) \rightarrow \Gamma(C, \mathcal{O}_C(E_C)) \xrightarrow{\nabla_{E_C}} \Gamma(C, \Omega_C^1(E_C))$$

(en utilisant (3.3.7) et la formule de la projection). Ainsi $\sigma \circ \mu \in \Gamma(C, \nu_* \mu^{-1} \mathcal{O}_Z(E_Z)) = \ker \nabla_{E_C}$

Ce qui démontre la proposition. On peut enfin conclure :

Corollaire 6.4.4

Soit $\phi_Z : E_Z \rightarrow F_Z$ un morphisme de fibrés L -triviaux sur Z , alors il induit un morphisme $\phi_C : E_C \rightarrow F_C$ entre les fibrés associés sur C .

Ce morphisme est de plus compatible avec les connexions ∇_{E_C} sur E_C et ∇_{F_C} sur F_C .

On peut voir ϕ_Z comme une section du fibré $\text{Hom}_Z(E_Z, F_Z) = F_Z \otimes E_Z^*$. D'après la proposition 6.4.1 et le lemme 6.4.2 ce dernier est un fibré L -trivial associé au fibré à connexion $\text{Hom}_C(E_C, F_C)$ muni de sa connexion naturelle.

D'après la proposition 6.4.3, on associe à ϕ_Z une section plate $\phi_C : E_C \rightarrow F_C$. La compatibilité avec les connexions signifie exactement que ϕ_C est une section plate pour la connexion naturelle sur le fibré $\text{Hom}_C(E_C, F_C)$ (cf [Del70, 2.8]).

Ainsi on a montré qu'à un fibré L -trivial E_Z correspond un fibré vectoriel holomorphe E_C sur C (cf 6.1), et une connexion holomorphe ∇_{E_C} sur E_C . Et cette association est fonctorielle au sens où elle fait correspondre les morphismes de fibrés sur Z avec les morphismes plat des fibrés à connexions correspondants. Dans la section suivante, on va préciser des propriétés sur la courbure de la connexion qui donneront une condition nécessaire et suffisante pour qu'un fibré à connexion sur C provienne de Z .

6.5 Équivalence de catégories

Dans cette section on formule la correspondance construite entre fibrés L -triviaux et fibrés à connexion sur C , comme une équivalence de catégorie, en explicitant les restrictions sur la courbure de la connexion associée.

Dans le paragraphe 4.2.3, on avait explicité une décomposition du fibré des 2-formes sur C

$$\Lambda_C^2 \simeq \Lambda_+^2 \oplus \Lambda_-^2$$

où $\Lambda_+^2 \simeq \odot^2 V_- \otimes \Lambda^2 V_+$.

Sur C , un fibré E_C à **connexion holomorphe** ∇ sera dit à *courbure* Λ_+^2 (ou simplement fibré à *connexion* Λ_+^2) si la composée

$$\mathcal{O}_C(E_C) \xrightarrow{\nabla} \Omega_C^1(E_C) \xrightarrow{\nabla} \Omega_C^2(E_C) \rightarrow \Omega_-^2(E_C)$$

est nulle. La courbure $F(\nabla)$ peut alors être vue comme un tenseur à valeurs dans $\Lambda_+^2 \otimes \text{End}(E_C)$.

On parvient à prolonger la **correspondance twistorielle** en une équivalence de catégories. Ce résultat généralise [Buc85, II 2.2].

Théorème 1

Il y a équivalence entre

- La catégorie des fibrés L -triviaux sur Z ,
 - avec les morphismes de fibrés holomorphes ;
- La catégorie des fibrés à connexion holomorphe sur C à courbure Λ_+^2 ,
 - avec les morphismes parallèles de fibrés à connexion holomorphe.

De plus, l'équivalence construite préserve le produit tensoriel, la dualité et les sections globales.

En effet la construction du fibré E_C associé à un fibré L -trivial E_Z est décrite dans 6.1 et la connexion associé dans 6.3.

La conservation du produit tensoriel et par la même la functorialité est décrite dans 6.4.1.

Reste à montrer

- Que le courbure de ∇_{E_C} est de type Λ_+^2
- La construction réciproque : Associer à tout fibré à connexion Λ_+^2 un fibré L -trivial.

6.5.1 Restriction sur la courbure

Le résultat suivant nous donne une restriction sur la courbure d'un fibré à connexion obtenu de cette façon.

Proposition 6.5.1

Soit (E_C, ∇_{E_C}) un fibré à connexion sur C associé à un fibré L -trivial E_Z sur Z , alors la courbure $F(E_C)$ de ∇_{E_C} est une section de $\Lambda_+^2 \otimes \text{End}(E_C)$.

Démonstration

En juxtaposant les deux diagrammes de la proposition 6.3.1 pour $k = 0$ et $k = 1$, on trouve le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{O}_C(E_C) & \xrightarrow{\nabla_{E_C}} & \Omega_C^1(E_C) & \xrightarrow{\nabla_{E_C}} & \Omega_C^2(E_C) \\ \downarrow \wr & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{O}_C(E_C) & \xrightarrow{\nu_* d_\mu} & (\nu_* \Omega_\mu^1)(E_C) & \xrightarrow{\nu_* d_\mu} & (\nu_* \Omega_\mu^2)(E_C) \end{array}$$

Or la composée des deux flèches de la ligne du bas est 0, car $d_\mu^2 = 0$ et la composée des deux flèches du haut est

$$(\nabla_{E_C})^2 : \mathcal{O}_C(E_C) \rightarrow \Omega_C^2(E_C)$$

donc cette application est nulle après projection dans $(\nu_* \Omega_\mu^2)(E_C)$, ce qui signifie qu'elle se factorise par

$$\nu_* R_\mu^2(E_C) = \ker(\Omega_C^2(E_C) \rightarrow (\nu_* \Omega_\mu^2)(E_C))$$

comme de plus elle est $\mathcal{O}_C$ -linéaire, elle donne une section

$$\mathcal{O}_C \rightarrow \nu_* R_\mu^2(\text{End}(E_C))$$

Mais enfin $\nu_* \Omega_\mu^2 = \Omega_-^2$ d'après (5.3.1). Ainsi le noyau $\nu_* R_\mu^2$ de la projection $\Omega_C^2 \rightarrow \nu_* \Omega_\mu^2$ s'identifie à Ω_+^2 d'où le résultat.

6.5.2 Réciproque

Réciproquement, on montre que tout fibré à connexion Λ_+^2 provient de cette façon d'un fibré L -trivial.

Proposition 6.5.2

Soit $(\hat{E}_C, \nabla)$ un fibré à connexion Λ_+^2 sur C , alors il existe E_Z un fibré L -trivial sur Z tel que

$$(\hat{E}_C, \nabla) = (E_C, \nabla_{E_C})$$

Un tel fibré est unique à unique isomorphisme près.

Preuve

Notons $E = \nu^* \hat{E}_C$. On va dans un premier temps vérifier que $\nu^* \nabla : \mathcal{O}_W(E) \rightarrow \Omega_W^1(E)$ induit par passage au quotient $\Omega_W \rightarrow \Omega_\mu$ une connexion μ -relative **plate** sur E . Ensuite on utilisera un résultat de Buchdahl pour construire le fibré E_Z sur Z correspondant.

On note donc ∇_μ la connexion relative $\mathcal{O}_W(E) \rightarrow \Omega_\mu^1(E)$. On veut montrer qu'elle est plate. La courbure de la connexion $\nu^* \nabla$ passe au quotient en la courbure de ∇_μ

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{O}_W(E) & \xrightarrow{\nu^* \nabla} & \Omega_W^1(E) & \xrightarrow{\nu^* \nabla} & \Omega_W^2(E) \\ \downarrow \wr & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{O}_W(E) & \xrightarrow{\nabla_\mu} & \Omega_\mu^1(E) & \xrightarrow{\nabla_\mu} & \Omega_\mu^2(E) \end{array}$$

Or par hypothèse $F(\nabla)$ est une section de $\Omega_C^2(\text{End}(\hat{E}_C))$ dont l'image dans $\Omega_-^2(\text{End}(\hat{E}_C))$ est nulle. De plus l'application

$$\Omega_C^2 \rightarrow \Omega_-^2$$

est l'image directe de $\nu^* \Omega_C^2 \rightarrow \Omega_\mu^2$ par l'application ν .

En regroupant ces arguments, la courbure de ∇_μ définit une section globale sur W de $\Omega_\mu^2(\text{End}(E))$ ie une section globale sur C de $\nu_* \Omega_\mu^2(\text{End}(E)) \simeq \Omega_-^2(\text{End}(\hat{E}_C))$. Cette section est l'image de $F(\nabla)$, elle doit donc être nulle.

On va utiliser le résultat suivant de Buchdahl :

Proposition 6.5.3 ([Buc85, Prop. F] avec $n = m = 0$)

Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme de variétés analytiques, et soit $E \rightarrow X$ un fibré vectoriel holomorphe muni d'une connexion holomorphe f -relative ∇_f .

On suppose

- que les fibres de μ sont connexes et simplement connexes,
- et que la connexion ∇_f est plate

Alors il existe un fibré B sur Y tel que

$$(f^*B, d_f) \simeq (E, \nabla_f)$$

il est de plus, unique à unique isomorphisme près.

L'idée pour construire B consiste à pousser en avant le **système local** des sections plates de E .

D'après ce résultat, comme les fibres de μ sont supposées connexes et simplement connexes (cf **Topologie des fibres de μ**), E est de la forme μ^*E_Z pour un certain fibré E_Z sur Z et $\nu^*\nabla = d_\mu$. Comme E provient d'un fibré sur C , il doit être trivial sur les $P_s = \nu^{-1}(s)$ pour $s \in C$. Mais comme μ réalise un isomorphisme $P_s \rightarrow L_s$, nécessairement E_Z est trivial sur L_s .

Dès lors $E_C \simeq \hat{E}_C$ et la connexion ∇_{E_C} provient du $d_\mu = \nu^*\nabla$.

6.6 Retour sur la métrique sur l'espace des cycles

Petit point notation : Pour des raisons pratiques on notera σ la forme symplectique relative sur Z telle que définie en 4.4.1. C'est une section globale du fibré L -trivial $(\Lambda^2 T_f^*)$ (2) ainsi on désignera par $\hat{\sigma}$ la section globale sur C du fibré $\Lambda^2 V^-$ associée par l'équivalence de catégorie. On a vu au paragraphe 4.4.2 que le choix d'un $\theta \in \Gamma(C, \Lambda^2 V^+)$ définit une *métrique complexe*

$$h = \hat{\sigma} \otimes \theta : T_C \otimes T_C \rightarrow \mathbb{C}$$

c'est-à-dire une forme bilinéaire symétrique non-dégénérée sur le fibré tangent, mais à valeur dans $\mathbb{C}$ (en particulier, elle admet nécessairement des vecteurs isotropes).

On peut (grâce à θ) choisir une base x_0, x_∞ de V_+ dans laquelle

$$\theta(x_0, x_\infty) = 1$$

et qui soit plate pour la connexion ∇_+ . Les vecteurs isotropes de cette métrique sont justement les vecteurs décomposés de $V_+ \otimes V_-$ (par exemple tous les vecteurs de la forme $x_0 \otimes v$). Ces vecteurs sont appelés *null-vecteur* dans la littérature [Pen76].

On cherche à définir la connexion de "Levi-Civita complexe" ∇ qui satisfasse

1. $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$
2. $\nabla h = 0$

Soient X, Y, Z trois sections locales de $T_C \simeq V_- \otimes V_+$. On peut donc écrire X, Y et Z dans $V_- \otimes V_+$ grâce à cette base¹

$$\begin{aligned} X &= X^A x_A \quad (= X^0 x_0 + X^\infty x_\infty) \\ Y &= Y^A x_A \\ Z &= Z^A x_A \end{aligned}$$

les deux équations de la connexion entraînent

$$\langle Z, dh(X, Y) \rangle = h(\nabla_Z X, Y) + h(X, \nabla_Z Y).$$

Mais $h(X, Y) = (\hat{\sigma} \otimes \theta)(X^A Y^B x_A x_B) = \hat{\sigma}(X^0, Y^\infty) + \hat{\sigma}(X^\infty, Y^0)$, ce qui nous donne

$$\langle Z, d\hat{\sigma}(X^0, Y^\infty) \rangle + \langle Z, d\hat{\sigma}(X^\infty, Y^0) \rangle = h(\nabla_Z X, Y) + h(X, \nabla_Z Y).$$

1. En utilisant la notation de sommation d'Einstein (somme sur les indices répétés en exposant et en indice).

6.6.1 Calcul à l'aide de d_μ

Reste à comprendre $d\hat{\sigma}(X^0, Y^\infty)$, mais comme $d = \nu_* d_\mu$ d'après la proposition 6.2.1 on peut le voir sur W comme

$$d_\mu \sigma(X^0, Y^\infty) = (d_\mu \sigma)(X^0, X^\infty) + \sigma(d_\mu X^0, Y^\infty) + \sigma(X^0, d_\mu Y^\infty)$$

où les d_μ sont respectivement les différentielles de De Rham holomorphe relatives suivantes

$$\begin{aligned}\mathcal{O}_W(\nu^* \Lambda^2 V^-) &\rightarrow \Omega_\mu(\nu^* \Lambda^2 V^-) \\ \mathcal{O}_W(\nu^* V_-) &\rightarrow \Omega_\mu(\nu^* V_-)\end{aligned}$$

Or $\sigma = \mu^* \hat{\sigma}$ donc est plate pour d_μ , ainsi en revenant sur C on peut écrire

$$d\hat{\sigma}(X^0, Y^\infty) = \hat{\sigma}(\nabla_- X^0, Y^\infty) + \hat{\sigma}(X^0, \nabla_- Y^\infty)$$

ou plus précisément

$$\langle Z, d\hat{\sigma}(X^0, Y^\infty) \rangle = \hat{\sigma}((\nabla_-)_Z X^0, Y^\infty) + \hat{\sigma}(X^0, (\nabla_-)_Z Y^\infty)$$

En regroupant avec le résultat du paragraphe précédent

$$\begin{aligned}h(\nabla_Z X, Y) + h(X, \nabla_Z Y) &= \hat{\sigma}((\nabla_-)_Z X^0, Y^\infty) + \hat{\sigma}(X^0, (\nabla_-)_Z Y^\infty) \\ &\quad + \hat{\sigma}((\nabla_-)_Z X^\infty, Y^0) + \hat{\sigma}(X^\infty, (\nabla_-)_Z Y^0).\end{aligned}$$

On peut dès lors identifier les termes $\mathcal{C}^\infty$ -linéaires par rapport à Y pour obtenir

$$h(\nabla_Z X, Y) = \hat{\sigma}((\nabla_-)_Z X^0, Y^\infty) + \hat{\sigma}((\nabla_-)_Z X^\infty, Y^0)$$

mais d'autre part

$$h(\nabla_Z X, Y) = (\hat{\sigma} \otimes \theta)(\nabla_Z(X^A x_A), Y^B x_B)$$

En posant $\nabla_Z(X^A x_A) = T^A x_A$ et en identifiant avec l'équation du dessus les parties Y^0 et Y^∞ , on trouve

$$\nabla_Z X = ((\nabla_-)_Z X^A) x_A$$

Bilan : la connexion de Levi-Civita associée à la métrique h correspond à $\nabla_- + \nabla_+$ agissant sur les vecteurs tangents à C vus via l'isomorphisme $T_C \simeq V_- \otimes V_+$.

Chapitre 7

Transport de cohomologie

Aaron : *God, everything is so different in there. You feel how cut off you are, you know ? It's this entirely separate world, and you encompass most of it. And the sound... Isn't the sound different, on the inside ? It's, it's like it's singing. I guess you can't hear it on the outside. I had this dream in there.*

Abe : *About what ?*

Aaron : *I was on, or near, the ocean and, uh, I just kept hearing the surf. It was so uneventful, at night, when the tide kept coming in and out.*

— *Primers* (2004), Shane CARRUTH

Dans ce chapitre, on s'intéresse à la cohomologie des fibrés L -constants sur Z . On interprète ces espaces de cohomologie en terme de solutions d'équations différentielles (ou de cohomologie de complexes différentiels) sur C .

En suivant un raisonnement analogue à celui d'Eastwood et LeBrun dans [EL92] et via la proposition 1.2.1 sur le calcul de la cohomologie sur Z après redressement par μ sur W et l'hypothèse 3.4.1 sur la topologie des fibres de μ , on établira un lien entre $H^k(Z, E_Z)$ et $H^k(\Gamma(C, \nu_* \Omega_\mu^\bullet(E_C)), D_E^\bullet)$.

La cohomologie d'un fibré vectoriel holomorphe E_Z sur une variété complexe Z peut se calculer via la résolution de Dolbeault du faisceau des sections holomorphes de E_Z . Mais la géométrie complexe de l'espace des twisteurs est difficile à appréhender.

L'étude des fibrés holomorphes sur Z est d'ailleurs une démarche de linéarisation pour obtenir des informations sur cette géométrie complexe. Ainsi pour calculer la cohomologie de E_Z on se placera dans W qui joue le rôle de "désenchevêtrement" de Z . L'analogue sur W du complexe de Dolbeault de E_Z est en fait le complexe de De Rham holomorphe μ -relatif sur W associé au fibré $\mu^* E_Z$. L'hypothèse que l'on a faite sur les fibres de μ (3.4.1) est utilisée de façon fondamentale dans cette analogie.

On va alors s'intéresser à la cohomologie des complexes de De Rham holomorphes μ -relatifs sur W . On va donc montrer dans un premier temps qu'ils sont acycliques pour ensuite calculer les complexes des sections globales associés sur C . On fera pour cela l'hypothèse que l'espace C est de Stein.

Enfin on tirera les conséquences de cette correspondance énoncée dans le théorème 2 sur certains fibrés de E_Z , notamment le cas du fibré $\mathcal{O}_Z$.

Un travail analogue pour la correspondance cohomologique a été mené par Green et Griffiths [GGK14, GG13] dans le cas des variétés homogènes.

7.1 Résolution relative et acyclicité

7.1.1 Résolution de Buchdahl

Dans l'article de Buchdahl [Buc85, sec. I.1.2 p.439], le résultat suivant est présenté

Proposition 7.1.1

Soit B un fibré vectoriel holomorphe sur Z , alors le complexe de De Rham holomorphe relatif à μ

$$\mathcal{O}_W(\mu^* B) \xrightarrow{d_\mu} \Omega_\mu(\mu^* B) \xrightarrow{d_\mu} \Omega_\mu^2(\mu^* B) \xrightarrow{d_\mu} \dots$$

est une résolution du faisceau $\mu^{-1} \mathcal{O}_Z(B)$ sur W

C'est un résultat général de géométrie analytique, on pourra également se référer à [Del70, Théorème 2.23.(ii)]. On rappelle que la différentielle $d_\mu = d_\mu^B$ a été décrite en 6.3.

7.1.2 Acyclicité des faisceaux sur W

Dans ce paragraphe, on suppose que C est Stein et on démontre les trois résultats suivant d'acyclicité de faisceaux sur W .

On rappelle qu'un faisceau $\mathcal{F}$ sur une variété W est dit Γ -acyclique si pour tout $k > 0$, $H^k(W, \mathcal{F}) = 0$.

Proposition 7.1.2

1. Sur W , les faisceaux Ω_μ^p sont Γ -acycliques pour tout $p \geq 0$.
2. Soit E_Z un fibré vectoriel L -trivial sur Z . Et soit $E = \mu^* E_Z$. Alors pour tout $p \geq 0$, le faisceau $\Omega_\mu^p(E)$ est Γ -acyclique.
3. Soit E_Z un fibré L -constant sur Z , on suppose de plus que pour tout $s \in C$,

$$\mu^* E_Z|_{\nu^{-1}(s)} \simeq \bigoplus_i \mathcal{O}(a_i) \quad (7.1.1)$$

avec $a_i \geq -1$ ne dépendant pas de s .

Alors pour tout $p \geq 0$, le faisceau $\Omega_\mu^p(\mu^* E_Z)$ est Γ -acyclique.

Il est clair que le point 3 entraîne 2 (cas particulier où tous les a_i sont nuls) qui lui même implique le point 1 (cas particulier $E_Z = \mathcal{O}_Z$).

Caractère Stein de l'espace des cycles

Verbitsky [Ver14] a démontré que l'espace des cycles tout entier de l'espace des twisteurs d'une surface K3 est Stein. Pour cela il montre que la fonction sur C qui donne le volume d'une section est fortement plurisousharmonique.

Ce n'est pas clair où il utilise le caractère K3. En fait une adaptation de [DLDM13, Theorem D] sous l'hypothèse qu'aucun élément de la famille de Calabi ne contient de courbes rationnelles pourrait donner le même résultat dans le cas général. L'idée de l'argument est un tout petit peu plus détaillée en 8.4.1.

Suite spectrale de Leray

La dégénérescence de la suite spectrale de Leray pour ν s'écrit pour un faisceau $\mathcal{F}$ sur W

$$E_2^{p,q} : H^p(C, \mathcal{R}^q \nu_* \mathcal{F}) \Rightarrow H^{p+q}(W, \mathcal{F})$$

Et comme ν est propre, si $\mathcal{F}$ est un faisceau cohérent, alors par [théorème de Grauert](#), les $\mathcal{R}^q \nu_* \mathcal{F}$ sont cohérents.

On peut aussi remarquer que pour un faisceau $\mathcal{F}$ cohérent, les $\mathcal{R}^q \nu_* \mathcal{F}$ s'annulent pour $q > 1$ (cf 5.1.2) car les fibres sont de dimension 1. Ainsi la page E_2 est nulle hors de la bande $0 \leq q \leq 1$.

Enfin, si C est Stein, alors pour tout $\mathcal{G}$ faisceau cohérent sur C , et pour tout $p > 0$ on a $H^p(C, \mathcal{G}) = 0$ d'après le théorème B de Cartan. En conséquence la page E_2 est supportée sur $\{(0, 0), (0, 1)\}$. Donc la suite dégénère en E_2 . Ainsi sous cette hypothèse, pour tout fibré vectoriel holomorphe F sur W , de faisceau des sections $\mathcal{F}$, on a

$$H^q(W, \mathcal{F}) \simeq \begin{cases} 0 & \text{si } q > 1 \\ H^0(C, \mathcal{R}^1 \nu_* \mathcal{F}) & \text{si } q = 1 \\ H^0(C, \nu_* \mathcal{F}) & \text{si } q = 0 \end{cases}$$

En particulier, $\mathcal{F}$ est Γ -acyclique dès lors que $\mathcal{R}^1 \nu_* \mathcal{F} = 0$. On pourra se référer à [Dem02, 13.B].

En conséquence, tout fibré sur W de la forme $\nu^* E_C \otimes \mathcal{O}(r)$ avec $r \geq -1$ est acyclique pour les sections globales sur W .

7.1.3 Cohomologie sur W

En regroupant les résultats des deux paragraphes précédents : Soit E_Z un fibré L -trivial, alors : Le faisceau $\mu^{-1} \mathcal{O}_Z(E_Z)$ sur W a une résolution Γ -acyclique donnée par le complexe de De Rham relatif à μ :

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_W(\mu^* E_Z) \rightarrow \Omega_\mu^1(\mu^* E_Z) \rightarrow \Omega_\mu^2(\mu^* E_Z) \rightarrow \dots$$

ainsi

$$H^k(W, \mu^{-1} \mathcal{O}_Z(E_Z)) \simeq H^k(\Gamma(W, \Omega_\mu^\bullet(E)), d_\mu) \quad (7.1.2)$$

où $E = \mu^* E_Z$.

7.1.4 Conséquences

En regroupant la proposition 3.4.1 qui permet de passer de Z à W et (7.1.2) qui permet de passer de W à C , on en déduit

Théorème 2

On suppose que

- C une variété de Stein (7.1.2)
- Les fibres de μ sont cohomologiquement triviales (3.4.1)

1. Soit E_Z un fibré L -trivial sur Z , E_C le fibré associé alors pour tout k ,

$$H^k(Z, E_Z) \simeq H^k(\Gamma(C, \nu_* \Omega_\mu^\bullet(E_C)), D_E^\bullet)$$

2. Soit E_Z un fibré sur Z , on suppose de plus (7.1.1) ie que pour tout $s \in C$,

$$\mu^* E_Z|_{\nu^{-1}(s)} \simeq \bigoplus_i \mathcal{O}(a_i)$$

avec $a_i \geq -1$ ne dépendant pas de s .

Alors pour tout k ,

$$H^k(Z, E_Z) \simeq H^k(\Gamma(C, \nu_* (\Omega_\mu^\bullet(\mu^* E_Z))), D_E^\bullet)$$

On a exprimé en section 5.3, les faisceaux $\nu_* \Omega_\mu^p$. À l'aide de la formule de la projection, on peut donc écrire pour E_Z fibré L -trivial

$$\nu_* (\Omega_\mu^p(\mu^* E_Z)) \simeq \mathcal{O}_C (\Lambda^p V^- \otimes \odot^p V_+ \otimes E_C).$$

Ainsi le complexe construit dans 2 qui calcule $H^p(Z, E_Z)$ s'écrit à l'aide des fibrés spinoriels

$$\Gamma(\Lambda^{p-1} V^- \otimes \odot^{-1} p V_+ \otimes E_C) \xrightarrow{D_{E_C}^{p-1}} \Gamma(\Lambda^p V^- \otimes \odot^p V_+ \otimes E_C) \xrightarrow{D_{E_C}^p} \Gamma(\Lambda^{p+1} V^- \otimes \odot^{p+1} V_+ \otimes E_C).$$

L'opérateur différentiel $D_E^\bullet = \nu_* d_\mu$ sur C peut être compris à l'aide de 6.3.1. Mais plus précisément, dans la section suivante on montre que les opérateurs D_E^k sont obtenus par règle de Leibniz avec ∇_{E_C} , antisymétrisation par rapport aux composantes de V^- et symétrisation par rapport aux composantes dans V_+ .

7.2 Étude des opérateurs différentiels

On va dans un premier temps expliciter l'opérateur d_μ^1 sur W à l'aide de l'opérateur d_μ en degré 0 sur le fibré $\mu^* \Omega_f(2)$ à travers le lemme 7.2.2. On va ensuite pousser en avant pour décrire l'opérateur D^1 et les opérateurs D_E^1 pour tout fibré L -trivial. Pour le faire de façon rigoureuse, on a besoin du lemme 7.2.1 suivant qui est un résultat classique dérivant de la règle de Bott (1.2.2).

Enfin pour expliciter les opérateurs D_E^k , on va généraliser le lemme 7.2.2 aux différentielles de degré supérieur (cf lemme 7.2.4).

Lemme 7.2.1

Soit V un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ de dimension finie et $\mathbb{P}V$ l'espace projectif (des quotients de rang 1) associé. On note toujours V le fibré trivial sur $\mathbb{P}V$ de fibre V . Alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, le passage aux sections globales du morphisme tautologique

$$V(k) \rightarrow \mathcal{O}(k+1)$$

correspond à l'application produit symétrique

$$\begin{pmatrix} V \otimes \odot^k V & \rightarrow & \odot^{k+1} V \\ a_0 \otimes (a_1 \cdots a_k) & \mapsto & a_0 a_1 \cdots a_k \end{pmatrix}$$

On montre ensuite le lemme central 7.2.2 qui est un analogue du lemme 1.2 de [EPW81].

On rappelle que Si $f : X \rightarrow Y$ est un morphisme et E un fibré sur Y , alors il existe une unique connexion f -relative plate sur $\mathcal{O}_X(f^*E)$ que l'on note d_f^E ou $d_f^\sharp$ s'il n'y a pas d'ambiguïté sur le fibré E .

Lemme 7.2.2

Avec les notations usuelles, le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccccc} \mu^* \Omega_f(2) & \xrightarrow{d_\mu^\sharp} & \Omega_\mu(\mu^* \Omega_f(2)) & \xrightarrow{1 \otimes \Psi} & \Omega_\mu \otimes \Omega_\mu \\ \downarrow \Psi & & & & \downarrow \wedge \\ \Omega_\mu & \xrightarrow{d_\mu^1} & \Omega_\mu^2 & & \end{array}$$

où Ψ désigne l'isomorphisme $\mu^* \Omega_f(2) \simeq \Omega_\mu$ construit en (4.3.4).

Ces deux résultats permettent de déterminer l'image directe D_E de l'opérateur $d_\mu^\sharp : \Omega_\mu(\mu^* E_Z) \rightarrow \Omega_\mu^2(\mu^* E_Z)$ pour n'importe quel fibré L -trivial E_Z .

Corollaire 7.2.3

Soit $E_Z \rightarrow Z$ un fibré L -trivial, alors le diagramme suivant sur W commute

$$\begin{array}{ccccc} \mu^* \Omega_f(E_Z(2)) & \xrightarrow{d_\mu^\sharp} & \Omega_\mu(\mu^* \Omega_f(E_Z(2))) & \xrightarrow{1 \otimes \Psi} & \Omega_\mu \otimes \Omega_\mu(\mu^* E_Z) \\ \downarrow \Psi & & & & \downarrow \wedge \\ \Omega_\mu(\mu^* E_Z) & \xrightarrow{d_\mu^E} & \Omega_\mu^2(\mu^* E_Z) & & \end{array}$$

et son image directe par ν donne le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} \nabla_{V^-} + \nabla_{V^+} + \nabla_E & \xrightarrow{\mathcal{O}(V^- \otimes V^- \otimes V_+ \otimes V_+ \otimes E_C)} & 1 \otimes \odot \otimes 1_E \\ \Omega_C(E_C) & \searrow D_E^1 & \mathcal{O}(V^- \otimes V^- \otimes \odot^2 V_+ \otimes E_C) \\ & \searrow D_E^1 & \wedge \otimes 1 \otimes 1_E \\ & \mathcal{O}(\Lambda^2 V^- \otimes \odot^2 V_+ \otimes E_C) & \end{array}$$

Ce dernier résultat découle immédiatement des deux lemmes précédents. En effet on tensorise le diagramme du lemme 7.2.2 par $\mathcal{O}_W(\mu^* E)$ au dessus de $\mu^{-1} \mathcal{O}_Z$ (ce qui est possible car les opérateurs d_μ sont linéaires par rapport à ce dernier faisceau) puis on prend son image directe par ν . Il suffit de remarquer que $\nu_* \Psi$ donne l'identification $\Omega_C \simeq \mathcal{O}_C(V^- \otimes V_+)$.

7.2.1 Préliminaire : les dérivées relatives à g et ν sur W

On rappelle que $W \simeq C \times \mathbb{P}^1$ avec $\nu : W \rightarrow C$ et $g : W \rightarrow \mathbb{P}^1$. Ainsi

$$\begin{aligned} \Omega_W &\simeq \underbrace{\Omega_\nu}_{g^* \Omega_{\mathbb{P}^1}} \oplus \underbrace{\nu^* \Omega_C}_{\Omega_g} \\ &\simeq g^* \Omega_{\mathbb{P}^1} \oplus \Omega_g \end{aligned}$$

et en particulier pour $f \in \mathcal{O}_W$

$$df = d_\nu f + d_g f.$$

En degré 2,

$$\Omega_W^2 \simeq \Omega_g^2 \oplus \Omega_g \otimes \Omega_\nu$$

et l'application $d^1 : \Omega_W \rightarrow \Omega_W^2$ se décompose donc de la façon suivante sur $\theta = \alpha d_\nu \zeta + \beta \nu^* \theta_C$

$$d\theta = d(\alpha d_\nu \zeta) + d(\beta \nu^* \theta_C) = d\alpha \wedge d_\nu \zeta + d\beta \wedge \nu^* \theta_C + \beta \nu^* d_C \theta_C$$

car $d_\nu \zeta = g^* d_{\mathbb{P}^1} \zeta$ donc $d_g d_\nu \zeta = 0$. Ainsi en utilisant la décomposition $d = d_\nu + d_g$ pour les fonctions, on trouve

$$d\theta = d_g \alpha \wedge d_\nu \zeta + d_\nu \beta \wedge \nu^* \theta_C + d_g \beta \wedge \nu^* \theta_C + \beta \nu^* d_C \theta_C.$$

Autrement dit

$$d^1 \theta = d_g [\theta]_g + d_\nu [\theta]_g + d_g [\theta]_\nu.$$

Soit alors $f \in \mathcal{O}_W$, alors $d^1 df = 0$ ce qui donne

$$0 = d_g [df]_g + d_\nu [df]_g + d_g [df]_\nu = 0 + d_\nu d_g f + d_g d_\nu f$$

donc sur les fonctions

$$d_g d_\nu = -d_\nu d_g.$$

Il convient de remarquer que la restriction à Ω_ν de la différentielle relative $d_g^1 : \Omega_\nu \rightarrow \Omega_g \otimes \Omega_\nu$ coïncide avec $d_g^\sharp : \mathcal{O}(g^* \Omega_{\mathbb{P}^1}) \rightarrow \Omega_g(g^* \Omega_{\mathbb{P}^1})$.

7.2.2 Preuve du lemme principal

On montre le résultat du lemme 7.2.2 par induction finie : d'abord pour les formes exactes puis pour les produits de formes exactes par une fonction et enfin par linéarité pour toute section locale de $\mu^* \Omega_f(2)$.

On se fixe ∂_ζ une base locale de $g^* T_{\mathbb{P}^1} \simeq \mathcal{O}(2)$. Ce choix n'a rien d'arbitraire.

Pour les formes exactes

Soit $\varphi \in \mathcal{O}_Z$, on va démontrer le lemme pour $\theta = d_g(\varphi \circ \mu) \otimes \partial_\zeta = \mu^* d_f \varphi \otimes \partial_\zeta$. On notera $\phi = \varphi \circ \mu$.

D'une part il est clair que $d_\mu^\sharp \theta = \mu^* d_f \varphi \otimes d_\mu^\sharp \partial_\zeta$, car cet opérateur ne dérive pas les sections provenant de μ .

Construction concrète de Ψ Soit $\alpha \otimes v$ dans $\mu^* \Omega_f \otimes \mathcal{O}(2)$, en particulier on voit α comme un élément de Ω_g . Alors la classe dans Ω_μ

$$\left[\langle d_\nu^\sharp \alpha, v \rangle_{\Omega_\nu \otimes \mathcal{O}(2)} \right]_\mu$$

est bien définie. Il s'agit de $\Psi(\alpha \otimes v)$.

Il suffit de montrer que la construction est bien $\mathcal{O}_W$ -bilinéaire. Soient $\lambda, \xi \in \mathcal{O}_W$, on applique la construction précédente à

$$\lambda \alpha \otimes \xi v$$

or $d_\nu^\sharp(\lambda \alpha) = d_\nu \lambda \otimes \alpha + \lambda d_\nu^\sharp \alpha$; d'où le crochet de dualité donne

$$\xi \langle d_\nu \lambda, v \rangle_{\Omega_\nu \otimes \mathcal{O}(2)} \alpha + \lambda \xi \langle d_\nu^\sharp \alpha, v \rangle_{\Omega_\nu \otimes \mathcal{O}(2)}$$

mais comme la classe de α dans Ω_μ est nulle, on trouve donc

$$\lambda \xi \left[\langle d_\nu^\sharp \alpha, v \rangle_{\Omega_\nu \otimes \mathcal{O}(2)} \right]_\mu.$$

Relation avec l'isomorphisme Ψ Pour comprendre la relation entre l'isomorphisme

$$\Omega_\mu \simeq \mu^* \Omega_f(2)$$

issu de la suite d'Euler, construit en (4.3.4) et l'opérateur Ψ construit ci-dessus il est plus intuitif de travailler avec des champs vecteurs.

Soit $u \otimes v \in T_\mu \otimes T_{\mathbb{P}^1} \simeq T_\mu(2)$, en un point $(s, \zeta) \in W$ alors u peut être représenté par un germe de famille de déformations de L_s passant par $z = s(\zeta)$ (on utilise ici le théorème de Kodaira). Soit $(s_t)_{-\varepsilon < t < \varepsilon}$ une telle famille. Alors on peut pour chaque courbe L_{s_t} considérer le vecteur tangent $(s_t)_* v$ et son image V_t dans T_f . Alors la dérivée

$$\frac{\partial V_t}{\partial t} \Big|_{t=0}$$

donne un vecteur de T_f en z qui dépend bilinéairement de u et v . Il est clair que cette construction est le dual de la construction de Ψ du paragraphe précédent.

Dérivation Considérons donc désormais

$$d_\mu \Psi \theta \in \Omega_\mu^2$$

On remarque tout d'abord que $\partial_\zeta \in \mathcal{O}(2) = g^* \mathcal{O}(2) = \mu^* f^* \mathcal{O}(2)$. Donc $d_\mu^\# \partial_\zeta$ existe et est un élément de $\Omega_\mu(2)$ que l'on peut donc localement l'écrire $\gamma \otimes \partial_\zeta$ avec $\gamma \in \Omega_\mu$. Ainsi

$$\begin{aligned} d_\mu \Psi \theta &= d_\mu \left[\langle d_\nu^\# d_g \phi, \partial_\zeta \rangle_{\Omega_\nu \otimes \mathcal{O}(2)} \right]_\mu \\ &= d_\mu \left\langle [d_\nu^\# d_g \phi]_\mu, \partial_\zeta \right\rangle_{\Omega_\nu \otimes \mathcal{O}(2)} \end{aligned}$$

par compatibilité de l'opérateur d_μ avec le produit de dualité $\mathcal{O}(-2) \otimes \mathcal{O}(2) \simeq \mu^* \mathcal{O}(-2) \otimes \mu^* \mathcal{O}(2)$

$$= \left\langle d_\mu^{\mathcal{O}(-2)} [d_\nu^\# d_g \phi]_\mu, \partial_\zeta \right\rangle_{\Omega_\nu \otimes \mathcal{O}(2)} + \left\langle [d_\nu^\# d_g \phi]_\mu, d_\mu^{\mathcal{O}(2)} \partial_\zeta \right\rangle_{\Omega_\nu \otimes \mathcal{O}(2)}$$

où le second crochet antisymétrise par rapport à Ω_μ

$$= \left\langle [d_g^\# d_\nu^\# d_g \phi]_\mu, \partial_\zeta \right\rangle_{\Omega_\nu \otimes \mathcal{O}(2)} + \left\langle [d_\nu^\# d_g \phi]_\mu, \gamma \otimes \partial_\zeta \right\rangle_{\Omega_\nu \otimes \mathcal{O}(2)}$$

or $d_\nu^\# d_g = -d_g^\# d_\nu$ et donc le premier terme s'annule

$$\begin{aligned} &= \left\langle [d_\nu^\# d_g \phi]_\mu, \gamma \otimes \partial_\zeta \right\rangle_{\Omega_\nu \otimes \mathcal{O}(2)} \\ &= -\gamma \wedge \left\langle [d_\nu^\# d_g \phi]_\mu, \partial_\zeta \right\rangle_{\Omega_\nu \otimes \mathcal{O}(2)} \\ &= -\gamma \wedge \left[\langle d_\nu^\# d_g \phi, \partial_\zeta \rangle_{\Omega_\nu \otimes \mathcal{O}(2)} \right]_\mu \\ &= -\gamma \wedge \Psi \theta \end{aligned}$$

Seconde application de Ψ . Appliquons maintenant Ψ ou plutôt $\Psi \wedge 1_{\Omega_\mu}$ à

$$d_\mu^\# \theta = d_g \phi \otimes d_\mu^\# \partial_\zeta = d_g \phi \otimes \gamma \partial_\zeta = (d_g \phi \otimes \partial_\zeta) \otimes \gamma$$

qui est un élément de $(\mu^* \Omega_f(2)) \otimes \Omega_\mu$.

Ainsi on trouve que

$$(\Psi \wedge 1_{\Omega_\mu})(d_\mu^\# \theta) = -\gamma \wedge \Psi \theta$$

Le cas général

On a montré le résultat dans le cas de $\theta = \mu^* d_f \varphi \otimes \partial_\zeta$, soit maintenant une section locale de $\mu^* \Omega_f(2)$ de la forme $\lambda \theta$, pour $\lambda \in \mathcal{O}_W$.

Alors il est clair par construction que Ψ est $\mathcal{O}_W$ -linéaire et donc $\Psi(\lambda \theta) = \lambda \Psi(\theta)$. Puis sa dérivée donne

$$d_\mu^1(\lambda \Psi \theta) = d_\mu \lambda \wedge \Psi \theta + \lambda d_\mu^1 \Psi \theta$$

or par le lemme dans le cas exact,

$$d_\mu^1 \Psi \theta = (1 \wedge \Psi) d_\mu^\# \theta.$$

Ainsi

$$d_\mu^1(\lambda \Psi \theta) = d_\mu \lambda \wedge \Psi \theta + \lambda (1 \wedge \Psi) d_\mu^\# \theta.$$

De l'autre coté,

$$d_\mu^\#(\lambda \theta) = d_\mu \lambda \otimes \theta + \lambda d_\mu^\# \theta$$

et son image par $1 \wedge \Psi$ est donc

$$d_\mu \lambda \wedge \Psi \theta + \lambda (1 \wedge \Psi) d_\mu^\# \theta$$

d'où le lemme dans le cas $\lambda \theta$. Par linéarité toute section locale de $\mu^* \Omega_f(2)$ peut se ramener à ce cas et donc le lemme est vérifié.

7.2.3 En degré supérieur

Lemme 7.2.4

Avec les notations précédentes, le diagramme suivant commute pour tout $k \geq 0$

$$\begin{array}{ccccc} \mu^* \Omega_f^k(2k) & \xrightarrow{d_\mu^\sharp} & \Omega_\mu(\mu^* \Omega_f^k(2k)) & \xrightarrow{1 \otimes \Psi^k} & \Omega_\mu \otimes \Omega_\mu^k \\ \downarrow \Psi^k & & & & \downarrow \wedge \\ \Omega_\mu^k & \xrightarrow{d_\mu^k} & & & \Omega_\mu^{k+1} \end{array}$$

Démonstration

Il suffit de poursuivre la preuve par induction pour le lemme 7.2.2. Soient $p, q \in \mathbb{N}$ et $k = p + q$. Soit $\theta \in \mu^* \Omega_f^p(2p)$ et $\tau \in \mu^* \Omega^q(2q)$. Supposons le lemme 7.2.4 vérifié pour θ et τ et montrons le pour $\theta \wedge \tau$.

D'une part, $\Psi^k(\theta \wedge \tau) = \Psi^p \theta \wedge \Psi^q \tau$ et on peut calculer sa différentielle k -ième relativement à μ qui donne par règle de Leibniz

$$d_\mu^p \Psi^p \theta \wedge \Psi^q \tau + (-1)^p \Psi^p \theta \wedge d_\mu^q \Psi^q \tau.$$

D'autre part $d_\mu^\sharp(\theta \wedge \tau) = d_\mu^\sharp \theta \wedge \tau + \theta \wedge d_\mu^\sharp \tau$. Et en appliquant $(1 \wedge \Psi^k)$ on trouve

$$(1 \wedge \Psi^p) d_\mu^\sharp \theta \wedge \Psi^q \tau + (-1)^p \Psi^p \theta \wedge (1 \wedge \Psi^q) d_\mu^\sharp \tau$$

ce qui par hypothèse d'induction revient à

$$d_\mu^p \Psi^p \theta \wedge \Psi^q \tau + (-1)^p \Psi^p \theta \wedge d_\mu^q \Psi^q \tau.$$

d'où le résultat.

Conséquence

On a alors un analogue immédiat du corollaire 7.2.3

Corollaire 7.2.5

Soit $E_Z \rightarrow Z$ un fibré L -trivial, alors le diagramme suivant sur W commute

$$\begin{array}{ccccc} \mu^* \Omega_f^k(E_Z(2k)) & \xrightarrow{d_\mu^\sharp} & \Omega_\mu(\mu^* \Omega_f^k(E_Z(2k))) & \xrightarrow{1 \otimes \Psi^k} & \Omega_\mu \otimes \Omega_\mu^k(\mu^* E_Z) \\ \downarrow \Psi^k & & & & \downarrow \wedge \\ \Omega_\mu^k(\mu^* E_Z) & \xrightarrow{d_\mu^k} & & & \Omega_\mu^{k+1}(\mu^* E_Z) \end{array}$$

et son image directe par ν donne le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} \nabla_{\Lambda^k V^-} + \nabla_{\odot^k V_+} + \nabla_E & \xrightarrow{\mathcal{O}_C(V^- \otimes \Lambda^k V^- \otimes V_+ \otimes \odot^k V_+ \otimes E_C)} & \downarrow 1 \otimes \odot \otimes 1_E \\ \mathcal{O}_C(\Lambda^k V^- \otimes \odot^k V_+ \otimes E_C) & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{O}_C(\Lambda^k V^- \otimes V^- \otimes \odot^{k+1} V_+ \otimes E_C) \\ \downarrow \wr & & \downarrow \wedge \otimes 1 \otimes 1_E \\ \nu_* \Omega_\mu^k(E_C) & \xrightarrow{D_E^k} & \mathcal{O}_C(\Lambda^{k+1} V^- \otimes \odot^{k+1} V_+ \otimes E_C) \end{array}$$

où

$$\nabla_{\Lambda^k V^-} : \mathcal{O}(\Lambda^k V^-) \rightarrow \Omega_C(\Lambda^k V^-) \simeq \mathcal{O}(V^- \otimes V_+ \otimes \Lambda^k V^-)$$

et

$$\nabla_{\odot^k V_+} : \mathcal{O}(\odot^k V_+) \rightarrow \Omega_C(\odot^k V_+) \simeq \mathcal{O}(V^- \otimes V_+ \otimes \odot^k V_+)$$

sont naturellement définis par règle de Leibniz à partir de respectivement ∇_{V^-} et ∇_{V_+} .

En conclusion, les opérateurs

$$D_E^k : \mathcal{O}_C (\Lambda^k V^- \otimes \odot^k V_+ \otimes E_C) \rightarrow \mathcal{O}_C (\Lambda^{k+1} V^- \otimes \odot^{k+1} V_+ \otimes E_C)$$

sont obtenus de la façon la plus naturelle possible : par application simultanée de ∇_{V^-} , ∇_{V_+} et ∇_{E_C} puis anti-symétrisation par rapport aux éléments de V^- et symétrisation par rapport aux éléments de V_+ .

Un travail similaire permet de montrer que l'opérateur

$$\mathcal{R}^1 \nu_* d_\mu : \underbrace{\mathcal{R}^1 \nu_* \Omega_\mu^k(-p)}_{\Lambda^k V^- \otimes \odot^{p-2-k} V^+[-1]} \longrightarrow \underbrace{\mathcal{R}^1 \nu_* \Omega_\mu^{k+1}(-p)}_{\Lambda^{k+1} V^- \otimes \odot^{p-3-k} V^+[-1]}$$

pour $k < p-1$ est donné par application de ∇_{V^-} et ∇_{V^+}

$$\mathcal{O}_C (\Lambda^k V^- \otimes \odot^{p-2-k} V^+[-1]) \rightarrow \mathcal{O}_C ((V^- \otimes V_+) \otimes \Lambda^k V^- \otimes \odot^{p-2-k} V^+[-1])$$

puis par anti-symétrisation suivant les composantes de V^- et produit de dualité $V_+ \otimes V^+$ puis symétrisation suivant les composantes restantes de V^+ .

7.3 Applications

7.3.1 Restriction des formes différentielles aux fibres de μ

Avant de pouvoir calculer les espaces de cohomologie de fibrés L -triviaux sur Z on a besoin d'un résultat préliminaire sur formes différentielles sur W , provenant de C , qui s'annulent en restriction aux fibres de μ .

On a la suite exacte (3.3.5) sur W associée à la différentielle de μ relativement à $\mathbb{P}^1$

$$0 \rightarrow \mu^* \Omega_f \rightarrow \Omega_g \rightarrow \Omega_\mu \rightarrow 0.$$

L'application surjective $\Omega_g \rightarrow \Omega_\mu$ donne une application surjective sur les puissances extérieures

$$\Omega_g^k \rightarrow \Omega_\mu^k \rightarrow 0$$

On notera R_μ^k son noyau en suivant la notation de [Buc85]. On a donc la suite exacte

$$0 \rightarrow R_\mu^k \rightarrow \Omega_g^k \rightarrow \Omega_\mu^k \rightarrow 0 \quad (7.3.1)$$

Le faisceau ainsi défini est alors automatiquement **localement libre**, on notera également R_μ^k le fibré vectoriel associé.

L'étude de R_μ^k sera utile dans 8.2.4 pour classifier les épaississements mais aussi dans 7.3.2 pour le calcul de la cohomologie du faisceau $\mathcal{O}_Z$.

Foncteur de Schur

On veut pouvoir exprimer R_μ^k restreint à une fibre $P_s = \nu^{-1}(s)$ comme somme de fibrés en droites $\mathcal{O}(a_i)$. Cela nous permet de déterminer $\nu_* R_\mu^k$ et $\mathcal{R}^1 \nu_* R_\mu^k$

Lemme 7.3.1

Soit $k > 0$, alors

$$\mathcal{R}^1 \nu_* R_\mu^k = 0 \quad (7.3.2)$$

$$\text{rg}(\nu_* R_\mu^k) = \binom{2n}{k} \quad (7.3.3)$$

Preuve On va dans un premier temps montrer le résultat suivant

Lemme 7.3.2

Pour $k \geq 0$, la suite

$$\mu^* \Omega_f \otimes \Omega_g^k \rightarrow \Omega_g^{k+1} \rightarrow \Omega_\mu^{k+1} \rightarrow 0$$

est exacte.

C'est un résultat général qui n'utilise pas la géométrie du problème.

Il est clair que les morphismes du lemme 7.3.2 forment un complexe. Reste à montrer que le noyau de $\Omega_g^{k+1} \rightarrow \Omega_\mu^{k+1}$ est contenu dans l'image de $\mu^* \Omega_f \otimes \Omega_g^k$.

On considère une base locale $e_1, \dots, e_{2n}, e_{2n+1}, \dots, e_{4n}$ de Ω_g telle que

- $e_1, \dots, e_{2n}$ proviennent respectivement de $f_1, \dots, f_{2n}$ une base locale de $\mu^* \Omega_f$
- $e_{2n+1}, \dots, e_{4n}$ soient envoyés respectivement sur $m_1, \dots, m_{2n}$ dans Ω_μ

Soit

$$a = \sum_{|I|=k+1} a_I e_I$$

un élément de Ω_g^{k+1} , avec les notation usuelles :

$$e_I = e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \dots \wedge e_{i_{k+1}}$$

quand $I = \{i_1, \dots, i_{k+1}\}$ avec $i_1 < \dots < i_{k+1}$.

On suppose que l'image de a dans Ω_μ^{k+1} est nulle. Ainsi

$$\sum_{\substack{|I|=k+1 \\ I \subseteq \{2n+1, \dots, 4n\}}} a_I m_I = 0$$

donc comme les m_I forment une base, pour tout

$$I \subseteq \{2n+1, 2n+2, \dots, 4n\} \text{ tel que } |I| = k+1$$

on a $a_I = 0$. Ainsi notons E l'ensemble des $I \subseteq \{1, 2, \dots, 4n\}$ de cardinal $k+1$ tels que $a_I \neq 0$.

On a donc montré que $\forall I \in E, \exists i \in I$ tel que $i < 2n+1$, choisissons $i(I)$ un tel indice pour chaque $I \in E$. On notera $\tilde{I} = I \setminus \{i(I)\}$ et $t(I)$ le rang de cet indice dans I (ainsi $i(I)$ est le $t(I)$ -ième élément de I pour l'ordre usuel). Alors

$$a = \sum_{I \in E} a_I e_I = \sum_{I \in E} a_I (-1)^{t(I)+1} e_{i(I)} \wedge e_{\tilde{I}}$$

c'est donc l'image de

$$\sum_{I \in E} (-1)^{t(I)+1} a_I f_{i(I)} \otimes e_{\tilde{I}} \in \mu^* \Omega_f \otimes \Omega_g^k$$

dans Ω_g^{k+1} ce qui achève la démonstration.

En conséquence du lemme 7.3.2 et de sa définition, R_μ^k s'exprime à la fois comme

- Noyau de la flèche $\Omega_g^k \rightarrow \Omega_\mu^k \rightarrow 0$
- Image de la flèche $\mu^* \Omega_f \otimes \Omega_g^{k-1} \rightarrow \Omega_g^k$.

Ou plus simplement, puisque $\Omega_g = \nu^* \Omega_C$,

$$\begin{aligned} 0 &\rightarrow R_\mu^k \rightarrow \nu^* \Omega_C^k \\ \mu^* \Omega_f \otimes \nu^* \Omega_C^{k-1} &\rightarrow R_\mu^k \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Soit $s \in C$ et P_s la fibre de ν au dessus de s . On décompose le fibré R_μ^k restreint à P_s sous la forme

$$\bigoplus_{1 \leq i \leq r} \mathcal{O}(a_i)$$

en utilisant le théorème de Birkhoff-Grothendieck. Or d'autre part

- $\nu^* \Omega_C^k$ est trivial sur les fibres. Donc pour tout i , $a_i \leq 0$

- $\mu^* \Omega_f \simeq \nu^* V^- \otimes \mathcal{O}(-1)$, donc R_μ^k est le quotient d'un fibré de la forme $\nu^* F(-1)$. Ainsi, $\forall i, a_i \geq -1$
- Enfin la suite exacte (7.3.1) permet de montrer que le rang de R_μ^k est

$$r = \binom{4n}{k} - \binom{2n}{k}$$

et que son degré

$$d = -\binom{4n}{k} + 2\binom{2n}{k}$$

Finalement, en restriction à P_s , R^k est de la forme

$$\mathcal{O}(-1)^{\oplus |d|} \oplus \mathcal{O}^{\oplus r-|d|}$$

Comme cette décomposition ne dépend pas de s , on en déduit que les $H^p(P_s, R_\mu^k)$ sont constants par rapport à s . Et donc que les $\mathcal{R}^p \nu_* R_\mu^k$ sont des fibrés vectoriels. De plus on a le résultat du lemme 7.3.1.

Le cas particulier de l'image directe de R_μ^2 On a la suite exacte (7.3.1) qui définit R_μ^k dans le cas $k = 2$

$$0 \rightarrow R_\mu^2 \rightarrow \Omega_g^2 \rightarrow \Omega_\mu^2 \rightarrow 0$$

que l'on peut pousser en avant par ν . D'après (7.3.2), on trouve la suite exacte courte

$$0 \rightarrow \nu_* R_\mu^2 \rightarrow \nu_* \Omega_g^2 \rightarrow \nu_* \Omega_\mu^2 \rightarrow 0$$

or $\Omega_g = \nu^* \Omega_C$ donc par la formule de la projection, l'image directe de Ω_g^2 n'est autre que Ω_C^2 . D'autre part, on a vu en (5.3.1) que l'image directe de Ω_μ^2 est le faisceau Ω_-^2 . En conclusion, la suite exacte ci-dessus est scindée, et on a un isomorphisme

$$\nu_* R_\mu^2 \simeq \Omega_+^2 \simeq \mathcal{O}_C (\Lambda^2 V_+ \otimes \odot^2 V^-) \quad (7.3.4)$$

7.3.2 Le cas du fibré trivial

Le morphisme (6.2.2) passe à la cohomologie (des sections globales) pour donner un morphisme

$$H^k(\Gamma(C, \Omega_C^\bullet), d_C) \rightarrow H^k(\Gamma(C, \nu_* \Omega_\mu^\bullet), D^\bullet)$$

or le premier espace n'est autre que le $H_{dR}^k(C, \mathbb{C})$ et d'après le théorème 2 le deuxième espace peut s'identifier à $H^k(Z, \mathcal{O}_Z)$. On a donc construit une application

$$H^k(C, \mathbb{C}) \rightarrow H^k(Z, \mathcal{O}_Z)$$

qui relie la topologie de C à la structure holomorphe de Z . Pour étudier ses propriétés, on considère le noyau de l'application $\Omega_g^k \rightarrow \Omega_\mu^k$ (défini dans la section 7.3.1) que l'on note R_μ^k . Comme l'opérateur d_g passe au quotient en l'opérateur d_μ ; R_μ^k est naturellement préservé par d_g

$$d_g(R_\mu^k) \subseteq R_\mu^{k+1} \subseteq \Omega_g^{k+1}$$

On notera d l'opérateur ainsi induit s'il n'y a pas d'ambiguïté.

En résumé, on a une suite exacte de complexes différentiels :

$$0 \rightarrow R_\mu^\bullet \rightarrow \Omega_g^\bullet \rightarrow \Omega_\mu^\bullet \rightarrow 0$$

En particulier, en passant à la cohomologie, on trouve la suite exacte suivante

$$0 \rightarrow \Gamma(R_\mu^k) \rightarrow \Gamma(\Omega_g^k) \rightarrow \Gamma(\Omega_\mu^k) \rightarrow H^1(R_\mu^k).$$

or d'après le paragraphe [Suite spectrale de Leray](#), $H^1(R_\mu^k) \simeq \Gamma(\mathcal{R}^1 \nu_* R_\mu^k)$ car C est de Stein.

Enfin on a vu 7.3.2, que $\mathcal{R}^1 \nu_* R_\mu^k = 0$ et donc $H^1(R_\mu^k) = 0$ et en conclusion, on a la suite exacte

$$0 \rightarrow \Gamma(R_\mu^k) \rightarrow \Gamma(\Omega_g^k) \rightarrow \Gamma(\Omega_\mu^k) \rightarrow 0$$

sur C qui respecte les différentielles. C'est-à-dire, on a la suite exacte de complexes

$$0 \rightarrow \Gamma(R_\mu^\bullet) \rightarrow \Gamma(\Omega_g^\bullet) \rightarrow \Gamma(\Omega_\mu^\bullet) \rightarrow 0. \quad (7.3.5)$$

La suite exacte longue de cohomologie associée à (7.3.5) s'écrit pour tout k

$$H^k(\Gamma(R_\mu^\bullet)) \rightarrow H^k(\Gamma(\Omega_g^\bullet)) \rightarrow H^k(\Gamma(\Omega_\mu^\bullet)) \rightarrow H^{k+1}(\Gamma(R_\mu^\bullet)).$$

De plus (7.3.1) pour $k = 0$ et $k = 1$ donne

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow R_\mu^0 &\rightarrow \mathcal{O}_W \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_W \rightarrow 0 \\ R_\mu^1 &\simeq \mu^* \Omega_f \end{aligned}$$

Donc $R_\mu^0 = 0$ et $\nu_* R_\mu^1 = 0$. En conséquence $H^k(\Gamma(R_\mu^\bullet)) = 0$ pour $k < 2$.

En conclusion,

Proposition 7.3.3

Pour tout k , on a une application naturelle

$$H^k(C, \mathbb{C}) \rightarrow H^k(Z, \mathcal{O}_Z)$$

qui est un isomorphisme pour $k = 0$ et qui est injective pour $k = 1$.

Cette proposition relie la topologie de C à la géométrie complexe de Z .

7.3.3 Le cas trivial sur les droites

Soit E_Z un fibré L -trivial, (E_C, ∇_{E_C}) le fibré à connexion associé sur C .

En tensorisant la suite (7.3.1) par $E = \mu^* E_Z$ on trouve la suite exacte

$$0 \rightarrow R_\mu^k \otimes E \rightarrow \Omega_g^k(E) \rightarrow \Omega_\mu^k(E) \rightarrow 0$$

et en passant aux sections globales comme précédemment, on trouve la suite exacte suivante

$$0 \rightarrow \Gamma(R_\mu^k \otimes E) \rightarrow \Gamma(\Omega_g^k(E)) \rightarrow \Gamma(\Omega_\mu^k(E)) \rightarrow H^1(R_\mu^k \otimes E)$$

or $E = \nu^* E_C$ et donc par la formule de la projection, cette suite exacte s'écrit

$$0 \rightarrow \Gamma(C, \nu_* R_\mu^k \otimes E_C) \rightarrow \Gamma(C, \Omega_C^k(E_C)) \rightarrow \Gamma(C, (\nu_* \Omega_\mu^k)(E_C)) \rightarrow \Gamma(C, \mathcal{R}^1 \nu_* R_\mu^k \otimes E_C)$$

où l'on a utilisé à nouveau la dégénérescence de la suite spectrale de Leray. Ainsi on a la suite exacte courte

$$0 \rightarrow \Gamma(C, \nu_* R_\mu^k \otimes E_C) \rightarrow \Gamma(C, \Omega_C^k(E_C)) \rightarrow \Gamma(C, (\nu_* \Omega_\mu^k)(E_C)) \rightarrow 0.$$

Cependant arrivé à ce point, l'argumentation diffère du paragraphe 7.3.2 : L'espace $\Gamma(C, \Omega_C^k(E_C))$ est naturellement muni d'un opérateur différentiel : ∇_E^k , cependant contrairement au cas $E_Z = \mathcal{O}_Z$, ces espaces pour $k \geq 0$ ne forment pas nécessairement un complexe. En effet la composée

$$\Gamma(C, \mathcal{O}_C(E_C)) \rightarrow \Gamma(C, \Omega_C^1(E_C)) \rightarrow \Gamma(C, \Omega_C^2(E_C))$$

n'est autre que la courbure de la connexion ∇_{E_C} .

On suppose désormais que le fibré E_Z est trivial à l'ordre 2 sur les voisinages de droites de Z , alors d'après le théorème 4, le fibré (E_C, ∇_{E_C}) est plat et donc les espaces $\Gamma(C, \Omega_C^k(E_C))$ muni de ∇_E^k forment un complexe. On a donc comme dans le paragraphe précédent la suite exacte courte de complexes sur C

$$0 \rightarrow \Gamma(C, \nu_* R_\mu^\bullet \otimes E_C) \rightarrow \Gamma(C, \Omega_C^\bullet(E_C)) \rightarrow \Gamma(C, (\nu_* \Omega_\mu^\bullet)(E_C)) \rightarrow 0. \quad (7.3.6)$$

Calculons leurs cohomologies.

- Par la correspondance de Riemann-Hilbert [Del70], notons V_E le système local sur C noyau de la connexion ∇_{E_C} , alors

$$H^k(\Gamma(C, \Omega_C^\bullet(E_C)), \nabla_{E_C}) \simeq H^k(C, V_E)$$

- D'autre part, toujours par le théorème 2,

$$H^k(\Gamma(C, (\nu_* \Omega_\mu^\bullet(E_C))) \simeq H^k(Z, \mathcal{O}_Z(E_Z))$$

Finalement, la suite exacte longue de cohomologie associée à (7.3.6) nous donne une famille d'applications

$$H^k(C, V_E) \rightarrow H^k(Z, E_Z)$$

qui pour les même raisons qu'au paragraphe précédent est bijective pour $k = 0$ et est injective pour $k = 1$.

7.4 Le cas des fibrés L -négatifs

Le théorème 2 permet de calculer les espaces de cohomologie d'un fibré L -constant sur Z satisfaisant l'hypothèse minimale pour l'acyclicité de la résolution relative (7.1.1). Cependant de nombreux fibrés sur Z ne satisfont pas cette hypothèse ; c'est le cas de $\mathcal{O}(-p)$ pour $p > 1$. Dans cette section, on veut calculer l'espace $H^k(Z, \mathcal{O}(-p))$.

Par la théorie usuelle il s'agit de l'espace

$$H^k(W, \mu^{-1} \mathcal{O}(-p)).$$

Considérons la résolution de De Rham holomorphe du faisceau $\mu^{-1} \mathcal{O}(-p)$ que l'on découpe comme suit

$$\underbrace{\mathcal{O}(-p) \rightarrow \Omega_\mu(-p) \rightarrow \Omega_\mu^2(-p) \rightarrow \cdots \rightarrow \Omega_\mu^{p-1}(-p)}_{A^\bullet[1]} \rightarrow \underbrace{\Omega_\mu^p(-p) \rightarrow \cdots}_{B^\bullet}$$

Le complexe A est à support en degré $1, \dots, p$ tandis que le complexe B est à support en degré $p, \dots, 2n$, et il y a un morphisme de complexes

$$A^\bullet \rightarrow B^\bullet$$

qui consiste en l'unique application d_μ en degré p donnée par

$$A^p = \Omega_\mu^{p-1}(-p) \rightarrow \Omega_\mu^p(-p) = B^p$$

On a le triangle exact suivant

$$A \rightarrow B \rightarrow \underbrace{A[1] \oplus B}_C \rightarrow A[1].$$

Le complexe C est alors la résolution de De Rham relative toute entière. L'application $B \rightarrow C$ est simplement l'inclusion du sous-complexe B et de même l'application $C \rightarrow A[1]$ correspond simplement à la troncature en degré 0 à $p - 1$.

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & C^{p-1} & \longrightarrow & C^p & \longrightarrow & C^{p+1} \longrightarrow \cdots \\ & & & & \uparrow & & \uparrow \\ \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & B^p & \longrightarrow & B^{p+1} \longrightarrow \cdots \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \\ \cdots & \longrightarrow & A^{p-1} & \longrightarrow & A^p & \longrightarrow & 0 \longrightarrow \cdots \end{array}$$

Ce qui est important c'est qu'on a une suite exacte longue d(hyper)cohomologie

$$\mathbb{H}^i(A^\bullet) \rightarrow \mathbb{H}^i(B^\bullet) \rightarrow \mathbb{H}^i(C^\bullet) \rightarrow \mathbb{H}^{i+1}(A^\bullet).$$

Or $\mathbb{H}^i(C^\bullet)$ est précisément $H^i(W, \mu^{-1} \mathcal{O}(-p)) = H^i(Z, \mathcal{O}(-p))$. Dès lors il faut remarquer plusieurs choses

- Les B^i sont tous acycliques. En effet $\Omega_\mu \simeq \nu^* V^- \otimes \mathcal{O}(1)$ et donc $\Omega_\mu^i(-p) \simeq \nu^* \Lambda^i V^- \otimes \mathcal{O}(i-p)$ avec $i-p > -1$. Ainsi par la dégénérescence de la suite spectrale de Leray et le caractère Stein de C ,

$$\begin{aligned} H^k(W, B^i) &= H^k(W, \Omega_\mu^i(-p)) \\ &= H^0(C, R^k \nu_* \Omega_\mu^i(-p)) \\ &= 0 \text{ si } k \geq 1 \end{aligned}$$

En conséquence

$$\mathbb{H}^k(W, B^\bullet) = H^k(\Gamma(C, \nu_* B^\bullet))$$

- Les A^i sont tous négatifs en restriction aux fibres de ν . Ainsi

$$\begin{aligned} H^k(W, A^i) &= H^0(C, R^k \nu_* \Omega_\mu^{i-1}(-p)) \\ &= 0 \text{ si } k > 1 \text{ ou } k = 0 \end{aligned}$$

En conséquence

$$\mathbb{H}^k(W, A^\bullet) = H^{k-1}(C, \mathcal{R}^1 \nu_* A^\bullet)$$

7.4.1 Les cas généraux

On a le complexe $\mathcal{R}^1 \nu_* A^\bullet$ sur C

$$0 \rightarrow \mathcal{R}^1 \nu_* \mathcal{O}(-p) \rightarrow \mathcal{R}^1 \nu_* \Omega_\mu(-p) \rightarrow \mathcal{R}^1 \nu_* \Omega_\mu^2(-p) \rightarrow \cdots \rightarrow \mathcal{R}^1 \nu_* \Omega_\mu^{p-1}(-p) \rightarrow 0$$

à support en degré $1, \dots, p$. En particulier ses espaces de cohomologie des sections globales $H^k(\Gamma(\mathcal{R}^1 \nu_* A^\bullet))$ sont nuls pour $k \leq 0$ et pour $k > p$. En conséquence

$$\forall k > p+1, \quad \mathbb{H}^k(W, A^\bullet) = 0$$

On peut également vérifier que

$$\mathbb{H}^1(W, A^\bullet) = H^0(C, \mathcal{R}^1 \nu_* A^\bullet) = 0$$

Pour le complexe $\nu_* B^\bullet$ c'est encore plus simple (pas de décalage)

$$\forall k < p, \quad \mathbb{H}^k(W, B^\bullet) = 0.$$

Dès lors, en insérant ces résultats dans la suite exacte d'hypercohomologie, on a

- Pour $k < p-1$,

$$0 \rightarrow \mathbb{H}^k(C) \rightarrow \mathbb{H}^{k+1}(A) \rightarrow 0$$

- Pour $k > p+1$,

$$0 \rightarrow \mathbb{H}^k(B) \rightarrow \mathbb{H}^k(C) \rightarrow 0$$

7.4.2 Les cas critiques

Restent les cas $k = p-1, p$ et $p+1$ qui vivent dans la suite exacte

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & \mathbb{H}^{p-1}(C) & \rightarrow & \mathbb{H}^p(A) & \rightarrow & \mathbb{H}^p(B) \rightarrow \\ & & \rightarrow \mathbb{H}^p(C) & & \rightarrow \mathbb{H}^{p+1}(A) & \rightarrow & \mathbb{H}^{p+1}(B) \rightarrow \\ & & \rightarrow \mathbb{H}^{p+1}(C) & \rightarrow & 0 & & \end{array}$$

Ce qui se réécrit

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & H^{p-1}(Z, \mathcal{O}(-p)) & \rightarrow & H^{p-1}(\mathcal{R}^1 \nu_* A^\bullet) & \rightarrow & H^p(\nu_* B^\bullet) \rightarrow \\ & & \rightarrow H^p(Z, \mathcal{O}(-p)) & & \rightarrow H^p(\mathcal{R}^1 \nu_* A^\bullet) & \rightarrow & H^{p+1}(\nu_* B^\bullet) \rightarrow \\ & & \rightarrow H^{p+1}(Z, \mathcal{O}(-p)) & \rightarrow & 0 & & \end{array}$$

7.4.3 Calculs de A

On a vu

$$A^i = \Omega_\mu^{i-1}(-p) \simeq \nu^* \Lambda^{i-1} V^- \otimes \mathcal{O}(i-1-p)$$

Ainsi

$$\mathcal{R}^1 \nu_* A^i \simeq \Lambda^{i-1} V^- \otimes \mathcal{R}^1 \nu_* \mathcal{O}(i-1-p)$$

Or par règle de Bott 1.2.2

$$\mathcal{R}^1 \nu_* \mathcal{O}(i-1-p) \simeq \Lambda^2 V_+ \oplus \odot^{p-i-1} V^+$$

que l'on note

$$\odot^{p-i-1} V^+[-1]$$

Le $[-1]$ représente le poid conforme, ie il dépend linéairement du choix de la forme symplectique $\theta : \Lambda^2 V_+ \rightarrow \mathbb{C}$

Finalement

$$\forall i < p, \quad \mathcal{R}^1 \nu_* A^i \simeq \Lambda^{i-1} V^- \otimes \odot^{p-i-1} V^+[-1]$$

et

$$\mathcal{R}^1 \nu_* A^p = 0.$$

7.4.4 Calcul de B

On a

$$B^i = \Omega_\mu^i(-p) \simeq \nu^* \Lambda^i V^- \otimes \mathcal{O}(i-p)$$

d'où

$$\nu_* B^i \simeq \Lambda^i V^- \otimes \nu_* \mathcal{O}(i-p).$$

Ainsi

$$\forall i \geq p, \quad \nu_* B^i \simeq \Lambda^i V^- \otimes \odot^{i-p} V_+.$$

7.4.5 Conséquence

Comme

$$\mathcal{R}^1 \nu_* A^p = 0$$

en particulier $H^p(\Gamma(\mathcal{R}^1 \nu_* A^\bullet)) = 0$ dès lors on a deux suites exactes

$$0 \rightarrow H^{p-1}(Z, \mathcal{O}(-p)) \rightarrow H^{p-1}(\mathcal{R}^1 \nu_* A^\bullet) \rightarrow H^p(\nu_* B^\bullet) \rightarrow H^p(Z, \mathcal{O}(-p)) \rightarrow 0$$

et

$$0 \rightarrow H^{p+1}(\nu_* B^\bullet) \rightarrow H^{p+1}(Z, \mathcal{O}(-p)) \rightarrow 0.$$

On peut énoncer ces résultats sous forme de théorème

Théorème 3

Soit $p > 0$, Alors l'espace $H^k(Z, \mathcal{O}(-p))$

- pour $k < p-1$, est $H^k(\Lambda^{\bullet-1} V^- \otimes \odot^{p-1-\bullet} V^+[-1])$ c'est-à-dire la cohomologie au milieu du complexe

$$\Lambda^{k-2} V^- \otimes \odot^{p-k} V^+[-1] \rightarrow \Lambda^{k-1} V^- \otimes \odot^{p-1-k} V^+[-1] \rightarrow \Lambda^k V^- \otimes \odot^{p-2-k} V^+[-1]$$

- pour $k > p$, est $H^k(\Lambda^\bullet V^- \otimes \odot^{\bullet-p} V_+)$ c'est-à-dire la cohomologie au milieu du complexe

$$\Lambda^{k-1} V^- \otimes \odot^{k-1-p} V_+ \rightarrow \Lambda^k V^- \otimes \odot^{k-p} V_+ \rightarrow \Lambda^{k+1} V^- \otimes \odot^{k+1-p} V_+$$

- Et on a la suite exacte

$$\begin{aligned} 0 &\rightarrow H^{p-1}(Z, \mathcal{O}(-p)) \\ &\rightarrow \text{coker} [\Lambda^{p-3} V^- \otimes V^+[-1] \rightarrow \Lambda^{p-2} V^-[-1]] \\ &\rightarrow \text{ker} [\Lambda^p V^- \rightarrow \Lambda^{p+1} V^- \otimes V_+] \\ &\rightarrow H^p(Z, \mathcal{O}(-p)) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

On a juste remplacé dans les premiers points les calculs de A et B . Pour le troisième point, la suite exacte

$$0 \rightarrow H^{p-1}(Z, \mathcal{O}(-p)) \rightarrow H^{p-1}(\mathcal{R}^1 \nu_* A^\bullet) \rightarrow H^p(\nu_* B^\bullet) \rightarrow H^p(Z, \mathcal{O}(-p)) \rightarrow 0$$

fait intervenir deux espaces.

L'espace $H^{p-1}(\mathcal{R}^1 \nu_* A^\bullet)$ est la cohomologie au milieu du complexe

$$\Lambda^{p-3}V^- \otimes V^+[-1] \rightarrow \Lambda^{p-2}V^-[-1] \rightarrow 0.$$

Et de même l'espace $H^p(\nu_* B^\bullet)$ est la cohomologie au milieu du complexe

$$0 \rightarrow \Lambda^p V^- \rightarrow \Lambda^{p+1} V^- \otimes V_+$$

D'où finalement la suite exacte annoncée.

7.4.6 Application

Dans le cas (très intéressant voir [Pen67] ou [EPW81, sec. 6]) $p = 2$, on trouve par le premier point du théorème 3

$$H^0(Z, \mathcal{O}(-2)) = 0$$

ainsi que, par le troisième point, la suite exacte

$$\begin{aligned} 0 &\rightarrow H^1(Z, \mathcal{O}(-2)) \\ &\rightarrow \Gamma(C, \mathcal{O}[-1]) \\ &\rightarrow \ker [\Lambda^2 V^- \rightarrow \Lambda^3 V^- \otimes V_+] \\ &\rightarrow H^2(Z, \mathcal{O}(-2)) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

car $\text{coker } [0 \rightarrow \Lambda^0 V^-[-1]] = \Gamma(\mathcal{O}[-1])$.

De plus la forme symplectique fibre à fibre $\hat{\sigma}$ définie en (4.4.1) donne une section globale plate du fibré $\Lambda^2 V^-$. En conséquence, d'après 7.2, $D\hat{\sigma} = 0$ et donc elle définit bien un élément de

$$\ker [\Lambda^2 V^- \rightarrow \Lambda^3 V^- \otimes V_+].$$

De même dans le cas $p = 1$, on trouve

$$H^0(Z, \mathcal{O}(-1)) = 0$$

et

$$H^1(Z, \mathcal{O}(-1)) \simeq \ker [V^- \rightarrow \Lambda^2 V^- \otimes V_+]$$

Chapitre 8

Épaississements

Moro : *Les sangliers sont en marche, la forêt dévastée pleure à leur passage mais tu ne peux pas entendre le sanglot des arbres. Moi, je demeure ici à écouter leur lente agonie, ces cris réveillent en moi la blessure de la balle et je rêve du jour où je pourrais enfin broyer de mes crocs la tête de la femme qui me tue.*

Ashitaka : *Moro, cette guerre a trop duré. Pourquoi n'y mets-tu pas un terme ? Vous pourriez vivre en paix avec les humains.*

Moro : *Les humains se rassemblent pour une dernière bataille. Leur feu, bientôt viendra nous brûler.*

Ashitaka : *Mais que va-t-il arriver à San ? Comptes-tu la laisser mourir avec toi ?*

Moro : *Tu es bien un humain, Ashitaka. Égoïste. Tu raisonnes comme un humain. San est ma fille, ma tribu est la sienne. Si la forêt meurt, elle mourra avec elle.*

—Princesse Mononoke,
Hayao Miyazaki

Dans ce chapitre, on améliore l'équivalence de catégories 1 du chapitre 6 : Un fibré à connexion (E_C, ∇_{E_C}) sur C provenant d'un fibré L -trivial E_Z possède une restriction sur la courbure. On va donner une interprétation de cette courbure à l'aide des épaississements du fibré E_Z .

À l'instar de la correspondance cohomologique du chapitre 7, on va établir un lien entre la géométrie complexe de Z et la géométrie différentielle et riemannienne de C . Cependant, au lieu de s'attaquer à des propriétés globales de Z et C (comme les espaces de cohomologie $H^k(Z, E_Z)$), on va s'intéresser à des propriétés locales, voire infinitésimales, sur C (courbure en un point) et à leurs analogues *semi-infinitésimaux* sur Z (voisinages infinitésimaux de droites).

Ce résultat peut-être mis en parallèle avec la correspondance twistorielle dans le cas des variétés riemanniennes anti-auto-duales de dimension 4. Dans ce cas la correspondance associe aux voisinages conformes d'un point dans la variété riemannienne, les voisinages holomorphes d'une droite projective complexe dans l'espace des twisteurs. Cette construction remonte à Penrose [Pen76], on pourra consulter aussi [EL92].

En s'inspirant fortement du travail de Buchdahl [Buc85], on montre que la courbure de la connexion peut être interprétée comme une obstruction à la trivialité du fibré E_Z sur les voisinages des droites à l'ordre 2. Plus précisément, la courbure $F(\nabla_{E_C})$ en un point $s \in C$ de la connexion ∇_{E_C} sur E_C vit dans l'espace

$$\text{End}(E_C) \otimes (\Lambda_+^2)_s$$

or cet espace s'identifie à l'espace de cohomologie

$$H^1\left(L_s, \text{End}(E_Z) \otimes \odot^2 N_{L_s/Z}^*\right)$$

qui lui classe les extensions du fibré E_Z sur L_s'' le voisinage à l'ordre 2 de L_s dans Z . Modulo cet isomorphisme naturel, la classe de $F(\nabla)_s$ correspond à la différence entre les différents épaississements naturels de $E_Z|_{L_s}$ aux voisinages à l'ordre 2 de L_s .

On démontre le résultat suivant :

Théorème 4 (version infinitésimale)

Soit E_Z un fibré L -trivial sur Z . Soit (E_C, ∇_{E_C}) le fibré à connexion holomorphe sur C associé et $F(E_C) \in \Gamma(C, \Omega_+^2(\text{End}(E)))$ sa courbure.

Alors pour tout $s \in C$,

- Le fibré $E_Z|_{L_s}$ admet un épaississement au voisinage à l'ordre 1 de L_s ; il est unique à unique isomorphisme près.
- Les classes d'épaississements de E_Z au voisinage d'ordre 2 de L_s forme un espace homogène sous l'action de $H^1(L_s, \text{End}(E_Z) \otimes \odot^2 N_{L_s/Z}^*)$. Il y a deux épaississements naturels de $E_Z|_{L_s}$:
 - Celui obtenu par épaississement trivial,
 - Celui obtenu par restriction de E_Z .

La différence de deux donne une classe notée δ''

- La courbure de la connexion ∇_{E_C} en s est un élément de $\text{End}(E_C)_s \otimes (\Lambda_+^2)_s$
- Il y a un isomorphisme

$$H^1(L_s, \text{End}(E_Z) \otimes \odot^2 N_{L_s/Z}^*) \simeq \text{End}(E_C)_s \otimes (\Lambda_+^2)_s \quad (8.0.1)$$

et associe à δ'' , la courbure de la connexion au point s .

La morale de ce résultat est la suivante : la courbure du fibré à connexion associé correspond à un défaut de trivialité du fibré L -trivial.

Pour démontrer ce résultat, il est important de pouvoir travailler d'une part avec tout le tenseur de courbure sur C (et pas seulement en un point) et d'autre part, tous les épaississements de E_Z au voisinage des différentes droites. C'est pourquoi on va non plus considérer les épaississements d'une droite de Z fixée, mais plutôt ceux de W dans $C \times Z$. On pourra alors établir 8.2.1. Enfin les propriétés de la projection $W \rightarrow C$ issues de la structure produit de W permettront de conclure.

8.1 Épaississements de W

On a par définition $W \subseteq C \times Z$ qui est le graphe de la correspondance twistorielle. Dans ce paragraphe, on se propose d'étudier les propriétés de W en tant que sous-variété complexe de $C \times Z$, en particulier son fibré normal et ses épaississements au sens de [EL92].

On a la suite exacte suivante de fibrés vectoriels sur W qui définit le fibré normal à W dans $C \times Z$,

$$0 \rightarrow \nu^*T_C \oplus g^*T_{\mathbb{P}^1} \rightarrow \nu^*T_C \oplus \mu^*T_Z \rightarrow N_W \rightarrow 0 \quad (8.1.1)$$

où N_W est le fibré normal de l'inclusion $W \subseteq C \times Z$. En effet par définition $T_{C \times Z}|_W \simeq \nu^*T_C \oplus \mu^*T_Z$ et d'autre part, par structure produit de W (prop. 3.2.1), $T_W \simeq \nu^*T_C \oplus g^*T_{\mathbb{P}^1}$. L'inclusion est donnée au point (s, z) de $C \times Z$ par $(v, h) \mapsto (v, s_*h)$ pour v tangent à C au point s et h tangent à $\mathbb{P}^1$ au point $s(f(z))$.

D'autre part la suite exacte relative à f sur Z (2.4.2) se tire en arrière sur W pour donner

$$0 \rightarrow \mu^*T_f \rightarrow \mu^*T_Z \rightarrow g^*T_{\mathbb{P}^1} \rightarrow 0$$

En combinant ces deux on a un morphisme de fibrés sur W

$$\mu^*T_f \hookrightarrow \mu^*T_Z \hookrightarrow T_{C \times Z}|_W \twoheadrightarrow N_W$$

On peut remarquer que sur la fibre au point $(s, \zeta) \in C \times \mathbb{P}^1 \simeq W$, un vecteur v de $(T_f)_{s(\zeta)}$ est envoyé sur le couple $(0, v)$ dans $T_{C \times Z}$; son image dans N_W n'est nulle que si $(0, v) \in T_W$, c'est-à-dire que v dans T_f est la valeur en ζ de 0 vu comme section de T_f sur L_s . Donc l'application est injective. Pour des raisons de dimension c'est un isomorphisme.

En résumé

Proposition 8.1.1

On a alors l'isomorphisme suivant de fibrés vectoriels sur W

$$N_W \simeq \mu^*T_f \quad (8.1.2)$$

Il met en famille (2.4.3) pour $s \in C$.

Il est donné comme suit : Soit $(s, z) \in W$, en particulier, il existe $\zeta = f(z) \in \mathbb{P}^1$ tel que $s(\zeta) = z$. Soit u un vecteur normal à W en (s, z) . On peut relever u en $v + w \in \nu^*T_C \oplus \mu^*T_Z$. La condition $s(\zeta) = z$ impose alors après différentiation : $s_*f_*\mu_*w = \mu_*w$ donc $\mu_*w \in T_{L_s, z}$. Or le relèvement de u en $v + w$ se fait modulo un vecteur tangent à W , en particulier un tel vecteur à un composante sur $T_{\mathbb{P}^1, z}$. Ainsi quitte à choisir le bon relevé, on peut supposer $\mu_*w = 0$.

D'autre part, comme v provient de $T_{C, s}$, μ_*v est un vecteur normal à L_s en z . On peut alors conclure par (2.4.3).

8.2 Preuve de Buchdahl

On va montrer dans un premier temps la version "globale" du théorème 4. Un fibré L -trivial E_Z se tire en arrière en un fibré $E = \mu^*E_Z$ sur W trivial sur les fibres de ν . La propriété suivante relie les extensions de E aux épaississements de W dans $C \times Z$ et la courbure de ∇_{E_C} .

Proposition 8.2.1 (version globale)

Soit E_Z un fibré L -trivial sur Z . Soit (E_C, ∇_{E_C}) le fibré à connexion holomorphe sur C associé et $F(E_C) \in \Gamma(C, \Omega_+^2(\text{End}(E_C)))$ sa courbure.

Alors

- Le fibré μ^*E_Z admet un épaississement au voisinage à l'ordre 1 de W ; il est unique à unique isomorphisme près.
 - Les classes d'épaississements de μ^*E_Z au voisinage d'ordre 2 de W forme un espace homogène sous l'action de $H^1(W, \text{End}(E_Z) \otimes \odot^2 N_W^*)$. Il y a deux épaississements naturels de μ^*E_Z :
 - Celui obtenu par épaississement trivial,
 - Celui obtenu par restriction de μ^*E_Z .
- La différence de deux donne une classe notée δ_E''
- Il y a un isomorphisme

$$H^1(W, \text{End}(E_Z) \otimes \odot^2 N_{W/C \times Z}^*) \simeq \Gamma(C, \text{End}(E_C) \otimes \Lambda_+^2) \quad (8.2.1)$$

qui associe à δ_E'' , la courbure de la connexion.

Le reste de cette section est consacré à la preuve de la proposition 8.2.1. On introduit d'abord quelques notations, puis on étudie les extensions du fibré $E = \mu^*E_Z$ au voisinage de W à l'ordre 1. Une fois l'unicité d'une telle extension établie, on regarde les connexions sur ce fibré épaissi. Comme expliqué au paragraphe 1.3.2, chaque connexion génère un épaississement du fibré ; or on dispose de deux connexions épaissies sur le fibré épaissi : l'une provenant de C (épaississement de ∇), l'autre provenant de la L -trivialité (épaississement de d_μ). Elles coïncident à l'ordre 0, mais à l'ordre 1 fournissent deux épaississements à l'ordre 2 de E .

L'outil principal de cette démonstration est la proposition 1.3.4.

Une fois le résultat établi, à la section 8.3, on démontrera qu'il entraîne le théorème 4.

8.2.1 Notations

Pour des raisons pratiques, on introduit quelques notations

$$C \xleftarrow[\nu]{} W \xrightarrow[\mu]{} Z$$

- L'inclusion $\nu \times \mu : W \hookrightarrow C \times Z$ sera notée i .
- L'idéal de $\mathcal{O}_{C \times Z}$ correspondant à i sera noté K .
- Les projections de $C \times Z$ sur C et Z seront respectivement notées q et p .

On a $p \circ i = \mu$ et $q \circ i = \nu$.

- Enfin on notera N le fibré normal de W dans $C \times Z$. On a alors $\mathcal{O}_W(N^*) = K/K^2|_W$.

Soit E_Z un fibré L -trivial sur Z , on notera

- $E_W = \mu^*E_Z$ le fibré associé sur W ,
- E_C le fibré sur C tel que $\nu^*E_C = E_W$,
il vient avec une connexion ∇ telle que $\nabla = \nu_* d_\mu$.
- $E = p^*E_Z$ le fibré associé sur $C \times Z$. On a alors $E_W = i^*E$, on fera souvent l'abus d'oublier le i et on notera E également pour le fibré sur W .

On notera $\mathcal{O}$ le faisceau structurel de $C \times Z$, $\mathcal{O}_W$ celui de W et $\mathcal{O}_W^{(k)} = i^{-1} \mathcal{O}/K^{k+1}$ celui de $W^{(k)} \subseteq C \times Z$.

Pour les épaississements à l'ordre $k = 0, 1, 2$ ou 3 (on n'ira pas plus loin), on notera avec k "primes". Par exemple E'' est le fibré $E^{(2)}$ sur $W^{(2)}$ (ie W''). On a par exemple la suite exacte suivante (cf (1.3.3))

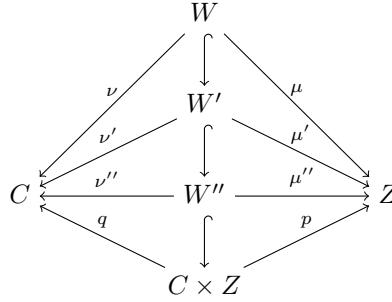
$$0 \rightarrow \mathcal{O}_W(E \otimes \odot^{k+1} N^*) \rightarrow \mathcal{O}_W^{(k+1)}(E^{(k+1)}) \rightarrow \mathcal{O}_W^{(k)}(E^{(k)}) \rightarrow 0$$

qui pour $k = 1$ donne

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_W(E \otimes \odot^2 N^*) \rightarrow \mathcal{O}_W''(E'') \rightarrow \mathcal{O}_W'(E') \rightarrow 0.$$

On notera également $\mu', \mu'', \mu^{(k)}, \nu', \nu'', \nu^{(k)}$ les morphismes de W' (resp. $W'', W^{(k)}$) vers Z et C induits par restriction de p et q .

En résumé



8.2.2 Extension à l'ordre 1 dans le voisinage de l'espace tautologique

Soit E_Z un fibré L -trivial et $E = \mu^* E_Z$ sur W .

Considérons une extension E'_φ de E sur W . Elle donne d'après (1.3.3) une suite exacte

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_W(E \otimes N^*) \rightarrow \mathcal{O}'_W(E'_\varphi) \rightarrow \mathcal{O}_W(E) \rightarrow 0 \quad (8.2.2)$$

or les extensions de $\mathcal{O}_W(E)$ par $\mathcal{O}_W(E \otimes N^*)$ sont classifiées à isomorphisme près par $H^1(W, \text{End}(E) \otimes N^*)$ sous réserve que la classe d'obstruction à l'extension de E dans $H^2(W, \text{End}(E) \otimes N^*)$ s'annule (voir par exemple [Buc85, I.5]). Or d'après (8.1.1)

$$N^* \simeq \mu^* T_f^* \simeq \nu^* V^-(-1)$$

ainsi pour F L -trivial,

$$\mathcal{R}^k \nu_* \mathcal{O}_W(\nu^* F_C \otimes N^*) \simeq \mathcal{O}_C(F_C \otimes V^-) \otimes \mathcal{R}^k \nu_* \mathcal{O}(-1)$$

est nul pour tout k .

Ainsi en appliquant la remarque précédente à $F = \text{End}(E)$ (qui est toujours L -trivial), on en déduit

$$H^2(W, \text{End}(E) \otimes N^*) = 0$$

$$H^1(W, \text{End}(E) \otimes N^*) = 0$$

Donc l'extension de (8.2.2) existe, est unique (et scindée). On la notera E' .

Dès lors les deux fibrés $(\mu')^* E_Z$ et $(\nu')^* E_C$ satisfont tous deux cette propriété d'étendre E , ils sont donc isomorphes (et cet isomorphisme est unique).

8.2.3 Fibrés à connexion sur le voisinage à l'ordre 1 de l'espace tautologique

Dans toute la suite de la démonstration, on entendra par *connexion*, véritablement *connexion μ -relative*.

On a l'isomorphisme de fibrés à connexions

$$(\mu^* E_Z, d_\mu) \simeq (\nu^* E_C, \nu^* \nabla)$$

On notera (E, D) ce fibré. D'après la proposition 1.3.4 (a), D détermine une unique extension $(E', \tilde{D})$ de (E, D) . Or $(\mu')^* E_Z$ et $(\nu')^* E_C$ sont aussi des extensions de E . Par unicité d'une telle extension E' de E (cf, paragraphe précédent) on a un isomorphisme sur W'

$$\left((\mu')^* E_Z, \tilde{d}_\mu \right) \simeq \left((\nu')^* E_C, \widetilde{\nu^* \nabla} \right) =: (E', \tilde{D})$$

On note donc $(E', \tilde{D})$ ce fibré épaissi muni de sa pseudo-connexion où

$$\tilde{D} : \mathcal{O}'(E') \rightarrow \Omega_{C \times Z} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}(E)$$

8.2.4 Extension D' et extensions des fibrés à l'ordre 2

Maintenant comme $(\nu')^*\nabla$ et d'_μ sont deux connexions qui relèvent la pseudo connexion $\tilde{D}$ à E' , elles déterminent, par la proposition 1.3.4, deux extensions E''_ν et E''_μ de E' .

Extensions de fibrés à l'ordre 2

Concentrons-nous sur E''_μ (le cas de E''_ν est identique).

Le fibré à pseudo-connexion $((\mu'')^*E_Z, \tilde{d}_\mu)$ étend $((\mu')^*E_Z, d'_\mu) = (E', d'_\mu)$ mais c'est également le cas de $(E''_\mu, \tilde{d}_\mu)$ donc par unicité dans la proposition 1.3.4 (a), on a un unique isomorphisme de fibrés $E''_\mu \simeq (\mu'')^*E_Z$. De même $E''_\nu \simeq (\nu'')^*E_C$.

On a donc montré que les fibrés induits par chaque connexion épaissie sont en fait les épaisissements provenant de E_C sur C et E_Z sur Z .

Différence de connexions

On a les deux connexions sur E' qui étendent $\tilde{D}$

$$(\nu')^*\nabla, d'_\mu : \mathcal{O}'_W(E') \longrightarrow \Omega^1_{W'}(E').$$

De plus la différence $\delta' = (\nu')^*\nabla - d'_\mu$ est une application $\mathcal{O}'_W$ linéaire.

La proposition 1.3.4 (c) pour $n = 0$ nous dit que $\delta' \in H^0(W, R^2_\mu(\text{End}(E)))$ et que ses images...

- ... dans $H^0(W, \Omega^2_p(\text{End}(E)))$ issue de la suite exacte

$$0 \rightarrow R^2_\mu \rightarrow \Omega^2_p \otimes \mathcal{O}_W \rightarrow \Omega^2_\mu \rightarrow 0$$

est

$$(F((\nu')^*\nabla) - F(d'_\mu))|_{W^{(0)}} = F((\nu')^*\nabla)|_{W^{(0)}} = \nu^*F(\nabla)$$

en effet $d'_\mu \circ d'_\mu = 0$ donc $F(d'_\mu) = 0$

- ... dans $H^1(W, \text{End}(E) \otimes \odot^2 N^*)$ issue de la suite exacte

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_W(\odot^2 N^*) \rightarrow \Omega^1_p(N^*) \rightarrow R^2_\mu \rightarrow 0$$

est

$$\delta''_E = [E''_\mu] - [E''_\nu]$$

Isomorphismes entre les espaces classifiant Enfin on peut étudier plus en avant les trois espaces :

- $H^0(R^2_\mu(\text{End}(E))) \ni \delta'$,
- $H^0(W, \Omega^2_p(\text{End}(E))) \ni \nu^*F(\delta_\nabla)$,
- $H^1(W, \text{End}(E) \otimes \odot^2 N^*) \ni \delta''_E$.

Dans un premier temps, l'étude de R^2_μ (cf. (7.3.4)) a montré que $\nu_* R^2_\mu \simeq \Omega^2_+$. Ainsi

$$H^0(W, R^2_\mu(\text{End}(E))) \simeq H^0(C, \Omega^2_+(\text{End}(E_C))).$$

Mais d'autre part, il s'identifie à l'espace $H^0(W, \Omega^2_p(\text{End}(E))) = H^0(C, \nu_* \Omega^2_p \otimes \text{End}(E_C))$ car $\nu_* \Omega^2_p = q_* \Omega^2_p = \Omega^2_+$.

Enfin le fibré $\text{End}(E) \otimes \odot^2 N^*$ sur W peut s'écrire $\nu^* \text{End}(E_C) \otimes \odot^2 \mu^*(T_f^*(-1))$ ou encore

$$\nu^*(\text{End}(E_C) \otimes \odot^2 V^-) \otimes \mathcal{O}(-2)$$

mais par la dégénérescence de la suites spectrale de Leray pour ν (cf [Suite spectrale de Leray](#) du paragraphe 7.1.2) : le H^1 que l'on veut calculer n'est autre que

$$H^0(C, \mathcal{R}^1 \nu_* [\nu^*(\text{End}(E_C) \otimes \odot^2 V^-) \otimes \mathcal{O}(-2)])$$

et par formule de la projection (cf. 2 page 17) et la règle de Bott (cf 1.2.2), c'est l'espace des sections globales de

$$\text{End}(E_C) \otimes \odot^2 V^- \otimes \Lambda^2 V_+ \simeq \Lambda^2_+ \otimes \text{End}(E_C)$$

Enfin il reste à vérifier que les applications construites $\delta' \mapsto F(\delta_\nabla)$ et $\delta' \mapsto \delta''_E$ réalisent bien des isomorphismes ; pour des raisons de dimension, on se contentera de vérifier l'injectivité. Mais la première est injective, par exactitude à gauche du foncteur sections globales. La seconde a pour noyau

$$H^0(W, \Omega_{C \times Z}^1(\text{End}(E') \otimes \odot^2 N^*))$$

Mais le fibré $\mu^* \Omega_Z \otimes \odot^2 N^*$ est négatif en restriction à une fibre de ν (les autres sont triviaux) donc son image directe par ν est nulle. D'où l'injectivité.

Bilan On résume les notations introduites précédemment dans le diagramme ci-dessous

$$\begin{array}{ccc}
 & H^0(R_\mu^2(\text{End}(E))) & \\
 \swarrow \wr & \delta' & \searrow \wr \\
 F(\delta_\nabla) & & \delta''_E \\
 \swarrow & & \searrow \\
 H^0(\Omega_p^2(\text{End}(E))) & \cdots & H^1(\text{End}(E) \otimes \odot^2 N^*)
 \end{array}$$

Donc on peut voir cette correspondance comme associant à la différence δ''_E des deux épaississements, la courbure de la connexion ∇ . Ce qui démontre la proposition 8.2.1.

8.3 Extensions de fibrés sur le voisinage d'une droite et dans W

Le but de ce paragraphe est de déduire le théorème 4 de la proposition 8.2.1. Il faut pour cela considérer pour $s \in C$ la courbure $F(\nabla)$ au point s d'une part, et restreindre à L_s la classe δ''_E d'autre part.

On va donc devoir établir un lien entre la restriction à une droite L de cette classe et les épaississements à l'ordre 2 de E_Z à L'' .

On a les résultats suivants :

- La restriction de E_Z à L'' correspond à la restriction de E à $P'' \subseteq W''$ et donc à $(\mu'')^* E_Z$ (cf. 8.3.2)
- L'extension triviale de $E_Z|L$ à L'' correspond à l'extension triviale de E_W dans W'' et donc à la restriction de $q^* E_C$ à $P'' \subseteq W''$ c'est-à-dire $(\nu'')^* E_C$. (cf. 8.3.1)

8.3.1 Extension triviale

Théorie

L'extension triviale $E^{(k+1)}$ d'un fibré $E^{(k)}$ sur $X^{(k)}$ est l'unique fibré sur $X^{(k+1)}$ tel que la suite exacte

$$0 \rightarrow \odot^{k+1} N^* \rightarrow E^{(k+1)} \rightarrow E^{(k)} \rightarrow 0$$

de faisceaux de $\mathcal{O}^{(k+1)}$ -modules soit scindée.

En particulier, la flèche $E^{(k)} \rightarrow E^{(k+1)}$ étend de façon naturelle toute section locale à l'ordre k de E en une section locale à l'ordre $k+1$.

Pratique

En posant $r = \text{Id} \times f : C \times Z \rightarrow C \times \mathbb{P}^1 = W$, on a la relation de commutation suivante

$$q = \nu \circ r.$$

Le fait que q se factorise par ν entraîne en particulier que tous les $\nu^{(k)}$ se factorisent par ν . Donc moralement il ne devrait pas y avoir d'information supplémentaire apportés par les épaissements. Autrement dit, en restreignant la relation précédente à $W^{(k)} \rightarrow W \rightarrow C$, on trouve

$$\nu^{(k)} = \nu \circ r^{(k)}.$$

Comment on construit l'extension de section à tout ordre

On a le morphisme $r^{(k)}$ que l'on notera toujours r par abus

$$r : W^{(k)} \rightarrow W$$

qui est un homeomorphisme. Et de plus en tant que morphisme de variétés analytiques, elle induit un morphisme d'anneaux

$$r^\flat : \mathcal{O}_W \simeq r^{-1} \mathcal{O}_W \longrightarrow \mathcal{O}_W^{(k)}.$$

On suppose que $E_W^{(k)} = r^* E_W$. Ainsi

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_W(E_W) &\simeq r^{-1} \mathcal{O}_W(E_W) \\ &\simeq r^{-1} \mathcal{O}_W(E_W) \otimes_{r^{-1} \mathcal{O}_W} r^{-1} \mathcal{O}_W \\ &\xrightarrow{1 \otimes r^\flat} r^{-1} \mathcal{O}_W(E_W) \otimes_{r^{-1} \mathcal{O}_W} \mathcal{O}_W^{(k)} \\ &\simeq r^* \mathcal{O}_W(E_W) \\ &\simeq \mathcal{O}_W^{(k)}(r^* E_W) \\ &\simeq \mathcal{O}_W^{(k)}(E_W^{(k)}) \end{aligned}$$

De plus l'image réciproque de l'idéal $K/K^{(k+1)}$ de $\mathcal{O}_W^{(k)}$ par $r^\flat$ est l'idéal nul, donc en $r^\flat$ est bien une section du quotient $\mathcal{O}_W^{(k)} \rightarrow \mathcal{O}_W$ et donc la flèche construite ci-dessus est bien une section du quotient $\mathcal{O}_W^{(k)}(E_W^{(k)}) \rightarrow \mathcal{O}_W(E_W)$. C'est une façon canonique d'étendre les section locales de E_W à l'ordre k et donc une trivialisation de l'épaississement.

On a montré qu'un fibré E_W sur W admet un épaississement trivial à tout ordre, qui est donnée par $r^* E_W$. Mais de plus la relation de commutation entre ν et r entraîne

$$\left(\nu^{(k)}\right)^* E_C = r^* \nu^* E_C$$

on a donc le lemme suivant

Lemme 8.3.1

Pour tout $E_C \rightarrow C$,

$$\left(\nu^{(k)}\right)^* E_C$$

est l'extension triviale de $\nu^* E_C$ à $W^{(k)}$.

8.3.2 Restriction aux voisinage de toutes les droites

On note $P = W \cap p^{-1}L = W \cap q^{-1}(x)$ et i, j les inclusions respectives $P \subseteq C \times Z$ et $L \subseteq Z$. On a le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} P^{(k)} & \xrightarrow{i} & C \times Z \\ \downarrow \mu & & \downarrow p \\ L^{(k)} & \xrightarrow{j} & Z \end{array}$$

Alors

$$\begin{aligned}
\mathcal{O}_P^{(k)}(p^*E_Z) &= \mathcal{O}_P^{(k)} \otimes_{\mathcal{O}_P} p^* \mathcal{O}_Z(E_Z) \\
&= i^* p^* \mathcal{O}_Z(E_Z) \\
&= \mu^* j^* \mathcal{O}_Z(E_Z) \\
&= \mu^* \mathcal{O}_L^{(k)}(E_Z)
\end{aligned}$$

Donc p^*E_Z restreint à $W^{(k)}$ se restreint à chaque préimage d'une droite L de Z en $\mu^* \mathcal{O}_L^{(k)}(E_Z)$.

8.3.3 Bilan

On sait que la classe δ_E représente la différence $[E''_\nu] - [E''_\mu]$. Or

$$\begin{aligned}
E''_\nu &= (\nu'')^* E_C \\
&= \text{extension triviale de } E_W \text{ à } W'' \\
E''_\mu &= (\mu'')^* E_Z
\end{aligned}$$

qui vérifie

$$\mathcal{O}_P''(E''_\mu) = (\mu'')^* \mathcal{O}_L''(E_Z)$$

Finalement la classe δ_E représente en restriction à P la différence

$$[(\mu'')^* \mathcal{O}_L''(E_Z)] - [(\nu'')^* E_C]$$

c'est-à-dire la différence entre l'épaississement trivial de $E_Z|_L$ à L'' et la restriction de E_Z à L'' .

8.4 Conclusion et correspondance de Riemann-Hilbert

On a un corollaire immédiat du théorème 4 dans le cas des connexions plates :

Théorème 5

L'équivalence de catégories construite en 1 se restreint en une équivalence de catégorie entre

- *La catégorie des fibrés L -triviaux à l'ordre 2 sur Z ,*
 - ▶ *avec les morphismes de fibrés holomorphes ;*
- *La catégorie des fibrés à connexion holomorphe **plate** sur C ,*
 - ▶ *avec les morphismes parallèles de fibrés à connexion holomorphe.*

Cette dernière catégorie peut s'étudier à travers la correspondance de Riemann-Hilbert 1.3.1 : Elle s'identifie à la catégorie des systèmes locaux sur C .

8.4.1 Rétraction sur la variété

Une hypothèse supplémentaire peut être faite : On va supposer que M est un rétracte par déformation de C .

En effet on a déjà une injection $M \hookrightarrow C$, reste à voir que l'on peut *redresser* continûment toute droite de Z en une droite twistorielle.

On peut pour cela se baser sur l'article [DLDM13]. En effet il existe une application volume $\text{Vol} : C \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par

$$\text{Vol}(s) = \int_{L_s} \omega_Z = \int_{\mathbb{P}^1} s^* \omega_Z.$$

Le caractère non-kählérien de Z entraîne que la forme fondamentale ω_Z n'est pas fermée et donc l'application volume n'est pas constante sur C . En fait ses points critiques coïncident avec les droites twistorielles et elle est de plus continue et pluri-sous-harmonique¹ sur C (voir [DLDM13, Theorem D]).

1. on peut remarquer que ce raisonnement donne des arguments en faveur d'une autre hypothèse que l'on a faite : le caractère Stein de C (7.1.2).

Soit $\omega_C = i\partial\bar{\partial}\text{Vol}$ qui définit une métrique kählérienne sur C . Il y a donc une direction canonique de déformation de L_s (pour $s \notin M$) dans $UT_s(C, \omega_C)$ qui maximise la différentielle de $\text{Vol}(s)$. On fait donc l'hypothèse que ce champs de directions s'intègre pour donner un chemin de s à un point de $i(M)$, encore une fois quitte à restreindre C .

On en déduit que C est connexe et simplement connexe dès lors que M l'est. C'est ce qu'on va supposer.

8.4.2 Trivialité globale des fibrés triviaux à l'ordre 2

Soit E_Z un fibré $L^{(2)}$ -trivial sur Z et (E_C, ∇) le fibré associé par la correspondance. Alors par le théorème 5, ∇ est plate. Soit donc E_C° le [système local](#) associé

$$0 \rightarrow E_C^\circ \rightarrow \mathcal{O}_C(E_C) \xrightarrow{\nabla} \Omega_C(E_C).$$

Ainsi, sous l'hypothèse précédente C est connexe et simplement connexe et par correspondance de Riemann-Hilbert, le [système local](#) E_C° est globalement un [faisceau constant](#). Il est donc isomorphe à $\underline{\mathbb{C}}^r$ avec r le rang de E_C (et donc aussi de E_Z).

Mais d'autre part, $\mathcal{O}_Z^{\oplus r}$ est un fibré L -trivial, et il est clairement associé au fibré $\mathcal{O}_C(\mathbb{C}^r)$ munit de la connexion d_C sur chaque composante. Ce fibré est plat et le [système local](#) associé est évidemment $\underline{\mathbb{C}}^r$.

En remontant les équivalences de catégories : E_C° et $\underline{\mathbb{C}}^r$ sont isomorphes en tant que système locaux, donc par correspondance de Riemann-Hilbert, ils induisent des fibrés à connexion isomorphes : (E_C, ∇) et $(\mathcal{O}_C(\mathbb{C}^r), d_C)$. Enfin par correspondance de Buchdahl (théorème 1), les fibrés L -triviaux correspondants sur Z sont isomorphes. C'est-à-dire

$$\mathcal{O}_Z(E_C) \simeq \mathcal{O}_Z^{\oplus r}$$

Ainsi les fibrés $L^{(2)}$ -triviaux sont globalement triviaux sur Z .

8.4.3 Bilan

En conclusion, l'information holomorphe d'un fibré L -trivial sur Z est contenue dans la résolution de De Rham relative

$$0 \rightarrow \mu^{-1} \mathcal{O}_Z(E_Z) \rightarrow \mathcal{O}_W(E) \rightarrow \Omega_\mu^1(E) \rightarrow \Omega_\mu^2(E) \rightarrow \dots$$

qui est découpée en 2 données complémentaires en arrivant sur C :

- La [courbure](#) de $E_C \rightarrow \Omega_C^1(E_C) \rightarrow \Omega_+^2(E_C)$ qui reflète le degré de trivialité de ce fibré aux voisinages d'une droite.
- La [cohomologie](#) du complexe de sections globales de $(\nu_* \Omega_\mu^\bullet(E_C), D_E^\bullet)$ qui reflètent la cohomologie du faisceau $\mathcal{O}_Z(E_Z)$.

Bibliographie

- [AHS78] M. F. Atiyah, N. J. Hitchin, and I. M. Singer, *Self-duality in four-dimensional riemannian geometry*, Proceedings of the Royal Society of London A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences **362** (1978), no. 1711, 425–461.
- [AV16] Ekaterina Amerik and Misha Verbitsky, *Construction of automorphisms of hyperkähler manifolds*, arXiv :1604.03079 [math] (2016), arXiv : 1604.03079.
- [AW77] M. F. Atiyah and R. S. Ward, *Instantons and algebraic geometry*, Communications in Mathematical Physics **55** (1977), 117–124.
- [Bar75] Daniel Barlet, *Espace analytique réduit des cycles analytiques complexes compacts d'un espace analytique complexe de dimension finie*, Fonctions de plusieurs variables complexes, II (Sém. François Norguet, 1974–1975), Springer, Berlin, 1975, pp. 1–158. Lecture Notes in Math., Vol. 482. MR 0399503 (53 #3347)
- [Bar99] ———, *How to use the cycle space in complex geometry*, Several complex variables (Berkeley, CA, 1995–1996), Math. Sci. Res. Inst. Publ., vol. 37, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1999, pp. 25–42. MR 1748599 (2001b :32020)
- [Bea83] Arnaud Beauville, *Variétés Kähleriennes dont la première classe de Chern est nulle*, J. Differential Geom. **18** (1983), no. 4, 755–782 (1984). MR 730926
- [Bes87] Arthur L. Besse, *Einstein manifolds*, Springer, 1987.
- [Buc83] N. Buchdahl, *On the relative de Rham sequence*, Proc. Amer. Math. Soc. **87** (1983), no. 2, 363–366. MR 681850 (85f :58003)
- [Buc85] N. P. Buchdahl, *Analysis on analytic spaces and non-self-dual Yang-Mills fields*, Trans. Amer. Math. Soc. **288** (1985), no. 2, 431–469. MR 776387 (86k :32030)
- [Cal79] E. Calabi, *Métriques kählériennes et fibrés holomorphes*, Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure **12** (1979), no. 2, 269–294 (fre).
- [Cam91] F. Campana, *On twistor spaces of the class c*, J. Differential Geom. **33** (1991), no. 2, 541–549. MR 1094468
- [Cam92] ———, *An application of twistor theory to the non-hyperbolicity of certain compact symplectic kähler manifolds.*, Journal für die reine und angewandte Mathematik **425** (1992), 1–8.
- [CP94] F. Campana and Th. Peternell, *Cycle spaces*, Several complex variables, VII, Encyclopaedia Math. Sci., vol. 74, Springer, Berlin, 1994, pp. 319–349. MR 1326625
- [Del70] Pierre Deligne, *Équations différentielles à points singuliers réguliers*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 163, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1970. MR 0417174
- [Dem02] Jean-Pierre Demailly, *Complex analytic and differential geometry*, 2002.
- [Des05] Guillaume Deschamps, *Espaces twistoriels et structures complexes exotiques*, Ph.D. thesis, 2005.
- [DLDM13] Guillaume Deschamps, Noël Le Du, and Christophe Mourougane, *Hessian of the natural hermitian form on twistor spaces*, Oct 2013.
- [EGW95] Michael G. Eastwood, Simon G. Gindikin, and Hon-Wai Wong, *Holomorphic realization of $\bar{\partial}$ -cohomology and constructions of representations*, J. Geom. Phys. **17** (1995), no. 3, 231–244. MR 1358737
- [EH79] Tohru Eguchi and Andrew J Hanson, *Self-dual solutions to euclidean gravity*, Annals of Physics **120** (1979), no. 1, 82–106.

- [EL86] Michael Eastwood and Claude LeBrun, *Thickening and supersymmetric extensions of complex manifolds*, Amer. J. Math. **108** (1986), no. 5, 1177–1192. MR 859775
- [EL92] ———, *Fattening complex manifolds : curvature and Kodaira-Spencer maps*, J. Geom. Phys. **8** (1992), no. 1-4, 123–146. MR 1165875 (93d :32048)
- [EPW81] Michael G. Eastwood, Roger Penrose, and R. O. Wells, Jr., *Cohomology and massless fields*, Comm. Math. Phys. **78** (1980/81), no. 3, 305–351. MR 603497
- [Fuj83] Akira Fujiki, *On primitively symplectic compact Kähler V-manifolds of dimension four*, Classification of algebraic and analytic manifolds (Katata, 1982), Progr. Math., vol. 39, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1983, pp. 71–250. MR 728609
- [GG13] Mark Green and Phillip Griffiths, *Correspondence and cycle spaces : a result comparing their cohomologies*, A celebration of algebraic geometry, Clay Math. Proc., vol. 18, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2013, pp. 329–360. MR 3114947
- [GGK14] Mark Green, Phillip Griffiths, and Matt Kerr, *Special values of automorphic cohomology classes (memoirs of the american mathematical society)*, American Mathematical Society, 2014.
- [GHJ03] M. Gross, D. Huybrechts, and D. Joyce, *Calabi-yau manifolds and related geometries : Lectures at a summer school in nordfjordeid, norway, june, 2001*, Universitext (1979), Springer Berlin Heidelberg, 2003.
- [Har97] Robin Hartshorne, *Algebraic Geometry (Graduate Texts in Mathematics)*, Springer, April 1997.
- [Hit81] N. J. Hitchin, *Kählerian twistor spaces*, Proc. London Math. Soc. (3) **43** (1981), no. 1, 133–150. MR 623721
- [Hit87] ———, *The self-duality equations on a riemann surface*, Proceedings of the London Mathematical Society **s3-55** (1987), no. 1, 59–126.
- [HKLR87] N. J. Hitchin, A. Karlhede, U. Lindström, and M. Roček, *Hyperkahler metrics and supersymmetry*, Comm. Math. Phys. **108** (1987), no. 4, 535–589. MR 877637 (88g :53048)
- [Huy97] Daniel Huybrechts, *Birational symplectic manifolds and their deformations*, J. Differential Geom. **45** (1997), no. 3, 488–513.
- [Kal98] D. Kaledin, *Integrability of the twistor space for a hypercomplex manifold*, Selecta Math. (N.S.) **4** (1998), no. 2, 271–278. MR 1669960
- [Kod62] K. Kodaira, *A theorem of completeness of characteristic systems for analytic families of compact submanifolds of complex manifolds*, Ann. of Math. (2) **75** (1962), 146–162. MR 0133841
- [Laz04] R.K. Lazarsfeld, *Positivity in algebraic geometry 2*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete : a series of modern surveys in mathematics. Folge 3, Springer Berlin Heidelberg, 2004.
- [LM16] H.B. Lawson and M.L. Michelsohn, *Spin geometry (pms-38)*, Princeton Mathematical Series, Princeton University Press, 2016.
- [Mum12] David Mumford, *Abelian varieties (tata institute of fundamental research)*, Amer Mathematical Society, 2012.
- [Nak98] Hiraku Nakajima, *Quiver varieties and kac-moody algebras*, Duke Mathematical Journal **91** (1998), no. 3, 515–560.
- [O’G99] Kieran G. O’Grady, *Desingularized moduli spaces of sheaves on a K 3*, ResearchGate **1999** (1999), no. 512, 49–117.
- [O’G03] Kieran O’Grady, *A new six-dimensional irreducible symplectic variety*, Journal of Algebraic Geometry **12** (2003), no. 3, 435–505.
- [Ogu09] Keiji Oguiso, *A remark on dynamical degrees of automorphisms of hyperkähler manifolds*, manuscripta mathematica **130** (2009), no. 1, 101–111.
- [Pen67] R. Penrose, *Twistor Algebra*, Journal of Mathematical Physics **8** (1967), no. 2, 345–366.

- [Pen76] Roger Penrose, *Nonlinear gravitons and curved twistor theory*, General Relativity and Gravitation **7** (1976), no. 1, 31–52, The riddle of gravitation—on the occasion of the 60th birthday of Peter G. Bergmann (Proc. Conf., Syracuse Univ., Syracuse, N. Y., 1975). MR 0439004
- [Sal83] Simon Salamon, *Topics in four-dimensional Riemannian geometry*, Geometry seminar “Luigi Bianchi” (Pisa, 1982), Lecture Notes in Math., vol. 1022, Springer, Berlin, 1983, pp. 33–124. MR 728393 (85i :53002)
- [Sch08] Olivier Schiffmann, *Variétés carquois de nakajima*, Astérisque **317** (2008), no. 976, 295–344.
- [Ver13] Misha Verbitsky, *Mapping class group and a global Torelli theorem for hyperkähler manifolds*, Duke Math. J. **162** (2013), no. 15, 2929–2986, Appendix A by Eyal Markman. MR 3161308
- [Ver14] ———, *Rational curves and special metrics on twistor spaces*, Geom. Topol. **18** (2014), no. 2, 897–909. MR 3190604
- [VK99] M. Verbitsky and D. Kaledin, *Hyperkahler manifolds*, International Press mathematical physics series, International Press, 1999.
- [Voi99] C. Voisin, *Mirror symmetry*, Panoramas et synthèses, American Mathematical Society, 1999.
- [War77] R. S. Ward, *On self-dual gauge fields*, Physics Letters A **61** (1977), 81–82.
- [WW91] R.S. Ward and R.O. Wells, *Twistor geometry and field theory*, Cambridge Monographs on Mathematical Physics, Cambridge University Press, 1991.