



**HAL**  
open science

# Contribution à la modélisation des systèmes mise à la terre : .en vue de la simulation des réseaux électriques du bâtiment

Zaki Gouichiche

► **To cite this version:**

Zaki Gouichiche. Contribution à la modélisation des systèmes mise à la terre : .en vue de la simulation des réseaux électriques du bâtiment. Energie électrique. Université Grenoble Alpes, 2017. Français. NNT : 2017GREAT005 . tel-01635388

**HAL Id: tel-01635388**

**<https://theses.hal.science/tel-01635388>**

Submitted on 15 Nov 2017

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

## THÈSE

Pour obtenir le grade de

**DOCTEUR DE LA COMMUNAUTE UNIVERSITE  
GRENOBLE ALPES**

Spécialité : **Génie Electrique**

Arrêté ministériel : 7 août 2006

Présentée par

**Zaki GOUICHICHE**

Thèse dirigée par **James ROUDET & Édith CLAVEL**

préparée au sein du **Laboratoire G2ELab**  
dans l'**École Doctorale Électronique, Électrotechnique,  
Automatique & Traitement du Signal**

# **Contribution à la modélisation des systèmes de mise à la terre En vue de la simulation des réseaux électriques du bâtiment**

Thèse soutenue publiquement le **23 janvier 2017**,  
devant le jury composé de :

**M. François BURET**

Professeur à Ecole Centrale de Lyon, Président

**M. Carlos SARTORI**

Professeur à l'Université de Sao Paulo Brésil, Rapporteur

**M. Lionel PICHON**

Directeur de recherche CNRS, Rapporteur

**M. James ROUDET**

Professeur à l'Université de Grenoble Alpes, Directeur de thèse

**Mme. Édith CLAVEL**

Maitre de conférences à l'Université de Grenoble Alpes, Co-directeur de thèse

**M. Patrice JOYEUX**

Ingénieur de recherche à Hager Electro SAS, Examineur

**M. Gérard MEUNIER**

Directeur de recherche CNRS, invité





## Remerciements

Une thèse est un travail long et difficile qui nécessite beaucoup de temps et un moral à toute épreuve. Cette tâche est impossible sans un entourage qui vous aide, vous soutient pour surmonter les obstacles. Je profiterai donc de cet espace pour faire mes remerciements aux personnes qui m'ont apporté leur soutien.

Je tiens sincèrement à remercier :

- Monsieur François BURET, Professeur à l'École centrale de Lyon, d'avoir accepté d'être le président du Jury.
- Monsieur Carlos SARTORI, Professeur à l'Université de Sao Paulo Brésil, d'avoir été intéressé à ces recherches en tant que rapporteur.
- Monsieur Lionel PICHON, Directeur de recherche CNRS, d'avoir participé à l'évaluation de ma thèse en tant que rapporteur.

J'adresse mes plus sincères remerciements à Monsieur James ROUDET, Professeur à l'université de Grenoble, pour avoir accepté de diriger cette thèse. Sa disponibilité, ses conseils avisés et son soutien précieux tout au long de ma thèse ont grandement facilité ma tâche et ont permis d'aboutir à ce rapport final.

Je remercie Édith Clavel, Maître de Conférence - HDR de l'Université Joseph Fourier, pour son aide précieuse à la fois en matière de modélisation et en matière de rédaction d'articles.

Je remercie Monsieur Patrice JOYEUX, docteur-ingénieur à Hager Electro SAS, qui est resté un interlocuteur attentif au cours de ce travail. Qu'il soit assuré ici de ma reconnaissance pour ses précieux conseils, son intérêt permanent, et sa participation au jury.

Je remercie vivement Monsieur, Gérard Meunier Directeur de recherche CNRS, ainsi que l'équipe MAGE pour les échanges fructueux sur l'adaptation de la méthode de modélisation PEEC.

Mes sincères remerciements vont aussi aux chercheurs et aux doctorants du G2ELab pour les instructives discussions que nous avons eues, scientifiques ou non, et pour toute l'aide qu'ils m'ont apportée. Je ne citerai pas leurs noms, car la liste serait trop longue, mais qu'ils trouvent ici ma grande reconnaissance.

L'efficacité au travail étant très étroitement liée à l'équilibre psychique et physiologique, je remercie tous mes amis de Grenoble pour tous les moments de détente partagés ensemble.

Mes derniers remerciements vont à mes parents, ma famille et tous mes amis, merci à eux de m'avoir soutenu, encouragé et su me motiver chaque jour pour mener à bien ces travaux.

---





# Table des matières

## Table des matières

1	Introduction générale.....	8
2	Contexte .....	14
2.1	Présentation de la problématique CEM dans le bâtiment.....	14
2.1.1	Le bâtiment nouvel enjeu ?.....	14
2.1.2	La terre à quoi sert-elle ? .....	15
2.1.3	Conclusion .....	19
2.2	Les modèles électriques existants des composants et des sources de perturbation .....	19
2.2.1	Les sources de perturbation.....	19
2.2.2	Les chemins de propagation.....	23
2.3	La nécessité de modéliser la terre à travers les Schémas de Liaison à la Terre.....	28
2.3.1	Régime de neutre à la terre (TT) .....	28
2.3.2	Régime de neutre TN.....	33
2.3.3	Régime de neutre IT .....	37
2.3.4	Cas d'une structure métallique du bâtiment .....	40
2.3.5	Première synthèse sur les régimes de neutre.....	41
2.4	Etat de l'art des travaux concernant la mise à la terre des installations et la modélisation de la terre <sup>42</sup>	
2.4.1	Les dispositifs de mise à la terre .....	43
2.4.2	Les méthodes de modélisation de la terre.....	43
2.4.3	Synthèse et conclusion.....	47
3	Approche phénoménologique.....	50
3.1	Conduction dans la terre .....	50
3.2	Cas de 2 points d'injection. ....	51
3.2.1	Expression de la tension en un point M .....	51
3.2.2	Notion de résistance propre et mutuelle .....	52
3.3	Mesure de résistivité – méthode de Wenner .....	55
3.3.1	Configuration.....	55
3.3.2	Limite de cette approche .....	56
3.3.3	Application expérimentale .....	56
3.4	Conclusion .....	59
4	De l'approche analytique à la représentation « Circuit » .....	62
4.1	Cas d'un milieu homogène infini.....	62

4.1.1	Résolution de l'équation de Laplace .....	62
4.1.2	Résolution de l'équation de Poisson .....	64
4.1.3	Relation entre résistance et capacité.....	65
4.1.4	En présence de charge et de courant.....	65
4.1.5	Retour sur l'hypothèse quasi-statique .....	66
4.1.6	Modèle électrique équivalent .....	66
4.2	Cas de deux milieux : présence d'une interface.....	66
4.2.1	Expression de la tension .....	66
4.2.2	Schémas électriques équivalents .....	69
4.2.3	Cas particuliers .....	70
4.3	Cas d'une terre non homogène.....	72
4.4	Traduction de l'équation de Poisson sous forme de schéma électrique .....	73
4.4.1	Les courants images .....	73
4.4.2	Cas de n courants .....	76
4.4.3	Obtention des termes des matrices .....	80
4.5	Confrontation des différentes approches et validation .....	80
4.5.1	Cas statique ou à faible fréquence.....	81
4.5.2	Cas dynamique avec courants de déplacement.....	83
4.5.3	Exemple d'une injection de foudre .....	87
4.6	Conclusion .....	88
5	Passage d'une injection ponctuelle à un conducteur réel ou à un système de conducteurs .....	92
5.1	Formulations .....	92
5.1.1	Passage à un élément filiforme .....	92
5.1.2	Deux éléments de conducteurs filiformes .....	95
5.1.3	Passage à des éléments surfaciques .....	104
5.1.4	Passage à des éléments volumiques .....	106
5.1.5	Extension pour lever la limite de validité de l'approche filiforme .....	107
5.2	Méthode numérique .....	109
5.2.1	Retour sur l'hypothèse de courant uniforme.....	109
5.2.2	Principe général.....	109
5.2.3	Présentation pour un conducteur .....	111
5.2.4	Pour deux conducteurs .....	115
5.3	Mise en œuvre sur un système de conducteurs dans la terre.....	118
5.3.1	Implantation informatique des formulations et de la méthode matricielle développée	118

5.3.2	Validation bibliographique des formulations intégrales filiformes dans le cas d'un conducteur .....	118
5.3.3	Modélisation d'un pieu vertical en statique .....	120
5.3.4	Prise en compte de l'effet de la fréquence .....	132
5.3.5	Validation par une modélisation Eléments finis.....	137
5.3.6	Passage à un système de 2 conducteurs .....	139
5.3.7	Conclusion .....	142
5.4	Insertion des caractéristiques électriques du conducteur dans la méthode numérique ...	143
5.4.1	Principe.....	143
5.4.2	Méthodes de résolution .....	146
5.4.3	Validation de l'approche matricielle et conclusion .....	150
5.5	Modélisation complète d'un système de conducteurs dans la terre.....	151
5.5.1	Un conducteur seul .....	151
5.5.2	Grille de fond de fouille .....	156
5.6	Conclusion .....	161
6	Mesures et validations expérimentales .....	164
6.1	Revue des différents principes de mesure utilisés.....	164
6.1.1	Difficulté de validation des modèles développés.....	164
6.1.2	Méthode de Wenner .....	164
6.2	Mise en œuvre de la méthode en 4 points (Wenner) dans la terre.....	165
6.3	Mesures fréquentielles sur Saint Martin d'Hères .....	169
6.3.1	Identificatif de la résistivité locale de la terre et mesures fréquentielles sur des pieux	169
6.3.2	Mesures sur des plaques parallèles enfoncées dans la terre.....	170
6.4	Mesures dans l'eau.....	171
6.4.1	Mesures en statique ou faible fréquence 50 Hz .....	172
6.4.2	Caractérisation en fréquence .....	174
6.5	Conclusion .....	175
7	Mise en œuvre système .....	178
7.1	Système de mise à la terre d'un habitat .....	178
7.2	Qu'est-ce qu'une prise de terre ?.....	179
7.2.1	Mesure d'une prise de terre existante.....	179
7.2.2	Réalisation d'une « bonne prise de terre » .....	181
7.3	Conception d'un réseau de terre/d'une prise de terre .....	182
7.4	Simulation système .....	182

7.4.1	Problématique.....	183
7.4.2	Le choix des modèles.....	184
7.5	Analyse des résultats de simulation.....	187
7.5.1	Impact du modèle du transformateur.....	187
7.5.2	Distribution des tensions induites par la foudre sur la grille de fond de fouille.....	188
7.5.3	Evaluation du courant de mode commun dans l'installation.....	190
7.6	Quelques idées d'amélioration ou étude d'autres configurations.....	190
8	Conclusion.....	198
9	Bibliographie.....	200
10	Annexes.....	205



# Introduction générale



# 1 Introduction générale

*Vers un bâtiment de plus en plus électrique,*

Le bâtiment quel qu'il soit (industrie, tertiaire, domestique), s'électrifie toujours plus pour répondre entre autre au besoin de l'efficacité énergétique. Ainsi de nombreux équipements, en particulier les dispositifs d'électronique de puissance alimentant des actionneurs ou autres dispositifs sont présents et produisent des perturbations électromagnétiques tant conduites que rayonnées. Leur nombre est appelé à augmenter de façon drastique dans les années à venir. Des interactions se manifestent couramment entre ces perturbateurs et des dispositifs de traitement de l'information ou du signal eux aussi de plus en plus nombreux surtout dans les bâtiments dits « intelligents ».

Des problèmes apparaissent déjà de manière récurrente pour les hôpitaux qui mixent allègrement des IRM, des climatiseurs, .... à des dispositifs particulièrement sensibles comme l'électrocardiographes pour le fœtus. Le bon fonctionnement de ces bâtiments sophistiqués a nécessité des interventions coûteuses et complexes a posteriori pour les rendre utilisables. Depuis plus de 20 ans on prône l'intégration des contraintes CEM en cours de conception des projets, mais ici on se heurte en plus à un changement de culture supplémentaire. Même dans les entreprises de hautes technologies, il est difficile d'inculquer la culture de la CEM en plus de la compétence initiale. Il faut bousculer la culture de la basse fréquence pour intégrer les comportements inhérents aux particularités de signaux haute fréquence à savoir, difficulté de garder des liaisons équipotentielles, couplages par diaphonie, impact des éléments parasites des composants (inductances de câblage, capacités de mode commun,...), phénomènes éventuels de perturbations rayonnées,...

*Sources de perturbations,*

Il est crucial de protéger le bâtiment contre la foudre qui est plus qu'un perturbateur puisqu'elle peut détruire les appareils électroniques lorsque les dispositifs de protection traditionnels ne fonctionnent pas bien du fait de câblages inappropriés. Par ailleurs la signature de la foudre reste malgré tout relativement limitée dans les gammes des basses fréquences (3 à 400 kHz). Malgré l'ancienneté de cette problématique et le savoir-faire développé, des installations de parafoudre sont encore sujettes à caution selon certains experts CEM ...

Les convertisseurs statiques s'avèrent être des générateurs de perturbations sans doute moins dangereux mais polluant également en mode commun et différentiel dans des gammes de fréquence qui s'étendent de la fréquence de découpage jusqu'à 500 MHz voir 1GHz (gamme que l'on dénommera plus simplement gamme Radio-Fréquence). Evidemment dans ces hautes fréquences il n'est plus possible de négliger le couplage conduit-rayonné.

Il nous semble qu'au moins pour les bâtiments modernes, le démarrage de moteurs directement sur le réseau est révolu depuis longtemps, seuls peut être les moteurs universels avec la génération d'étincelles au collecteur sont encore cause de perturbations mais leur fonctionnement reste occasionnel (perceuses, moulin-persil,...).

*Chemins de perturbations : les câblages, le transformateur de distribution et la terre*

La décomposition des problèmes de CEM en source-chemin-victime reste d'actualité a minima dans les travaux menés ici. Dans le bâtiment, les câblages encore plus qu'ailleurs vont jouer un rôle prépondérant dans la propagation et l'amplification des perturbations probablement à cause de

phénomènes de résonance que l'on peut rencontrer rapidement à cause des grandes longueurs de câblage. Les dimensions d'un bâtiment le rendent encore plus vulnérable que certains autres systèmes beaucoup plus compacts, aux agressions externes tout en l'exposant aussi aux perturbateurs internes.

Dans le cas du bâtiment, la terre vient jouer un rôle particulier comme conducteur. Celle-ci est indispensable pour créer une référence de potentiel des systèmes stationnaires et sa capacité à évacuer les courants de foudre est cependant la bienvenue. Les caractéristiques de la terre bien que variables et dépendantes de nombreux paramètres pas toujours faciles à connaître sont généralement assez bien pris en compte à la fréquence industrielle ainsi que les schémas de liaison à la terre (SLT) qui assurent la protection des biens et des personnes grâce aux dispositifs de protection dits « différentiels ».

En revanche, le comportement de la terre est beaucoup moins connu dans une approche de type CEM c'est-à-dire dans la bande des radiofréquences. En effet, un conducteur de type fil vert/jaune, s'il est en capacité d'assurer une équipotentielle à 50 Hz pour réaliser la protection des biens et des personnes, est totalement inopérant à des fréquences autres que la fréquence industrielle et ne permettra donc pas d'assurer des équipotentielles entre les divers appareils éloignés. On pourra d'ailleurs se poser des questions et évaluer l'efficacité des solutions actuellement retenues lors de la construction d'un bâtiment grâce aux outils que nous développons ou appelés à être développer. Plus précisément il sera nécessaire de mieux comprendre les compétitions qui peuvent avoir lieu entre le fil vert/jaune et la terre dans le cas d'une génération de bruit en mode commun, dont le filtre de l'équipement ne peut avoir une efficacité totale. Nous sommes persuadés que quelques signaux perturbateurs mal filtrés par les équipements de puissance, même s'ils sont de très faible amplitude peuvent conduire à des perturbations de grande amplitude à cause de résonance toujours possible des lignes.

Ces courants de mode commun sont susceptibles de se reboucler par les transformateurs de distribution qui présentent des capacités importantes vis-à-vis de la terre à cause des surfaces importantes mises en regard entre conducteurs et circuit magnétique. En revanche, comment caractériser les chemins de mode commun avec la terre. Actuellement ce type de caractérisation de matériels électrotechniques à des fréquences très supérieures à sa gamme d'utilisation et en particulier vis-à-vis du mode commun n'est guère pratiquée et pose bon nombre de questions afin d'être sûr des résultats qu'on obtient.

*L'étude système facilitée par la mise en œuvre de modèles électriques dans un simulateur OD.*

L'électricien est à l'aise dans la manipulation des modèles électriques sous formes de schémas électriques qui lui permettent d'insérer de nombreux modèles d'équipements électriques hétérogènes. Dans cette optique, il est naturel de se tourner vers une représentation des phénomènes physiques comme celui qui concerne l'écoulement des courants dans la terre issus d'un pieu de terre par des schémas électriques facilement intégrables dans un simulateur OD aux côtés de dispositifs d'électronique de puissance, actionneurs, etc.

Néanmoins dans le cas de très gros systèmes (grilles de grandes dimensions, plaques métalliques conductrices, ...) on pourra toutefois se contenter de représentations matricielles pouvant donner lieu à des macro-blocs condensés suite à l'application de méthodes de réduction d'ordre et pouvant

être ensuite introduits dans les simulateurs OD.

L'étude grâce à des simulations faites sur simulateurs OD devra :

- faciliter la compréhension des phénomènes,
- nous aider à identifier l'origine des problèmes (outre la présence des perturbateurs sur lesquels une action supplémentaire n'est pas économiquement viable par exemple),
- analyser la sensibilité des paramètres,
- localiser et dimensionner des parades constituées la plupart du temps par des filtres passifs, ou modifier les câblages, les grilles de terre, positionner les parafoudres, les références de masse...

On illustrera enfin les résultats de ce travail concrètement par la simulation d'un réseau test qui constituera une première base de travail pour des travaux ultérieurs. On observera aussi que dans ce domaine, la validation expérimentale est très délicate. Certes des mesures relatives aux caractéristiques de la terre existent en grand nombre mais la plupart du temps à des fins de distribution du courant alternatif ou quelques travaux sur les courants vagabonds mais soit en continu soit à la fréquence industrielle. L'idéal serait bien sûr de pouvoir disposer d'un bâtiment test dont les câblages, etc pourraient être modifiés en fonction des besoins et des démonstrations à faire. Les avionneurs disposent de carlingues tests pour vérifier le comportement des réseaux électriques et de leurs équipements. Il est bien sûr plus difficile de faire varier tous les paramètres y compris dans un bâtiment test.

L'objectif final étant de déboucher sur l'élaboration de règles utilisables simplement pour la conception des réseaux électriques des bâtiments intégrant des charges complexes. Quitte à ce qu'ensuite des analyses numériques plus poussées puissent être effectuées ponctuellement.

#### *Plan du travail présenté ici*

A l'issue de cette introduction très générale, le chapitre 2 s'attarde sur la problématique CEM au sein du bâtiment notre objet d'étude et fait un état de l'art aussi bien du côté des sources de perturbation, des conducteurs électriques qui véhiculent où permettent le couplage de perturbations que des composants électriques reliés au réseau du bâtiment. La terre apparaît assez vite comme un conducteur électrique potentiel qu'il convient de mieux connaître notamment en fréquence. C'est à ce titre que les méthodes de modélisation de son comportement seront examinées et critiquées vis-à-vis de nos objectifs d'analyse et de conception du bâtiment.

Le chapitre 3 a pour vocation de repartir de considérations élémentaires de modélisation de la terre et de faire le lien avec une approche expérimentale largement utilisée pour évaluer sa résistivité, paramètre qui varie beaucoup en fonction de sa nature.

Le chapitre 4, nous permet de revisiter une approche analytique (résolution de l'équation de Poisson) appliquée à la configuration élémentaire d'une source ponctuelle d'injection dans la terre homogène, puis dans une hypothèse plus complexe de prise en compte de l'interface terre-air. En particulier, ce chapitre lève le voile sur le recours à la méthode des images très utilisée en modélisation.

La fin de ce chapitre a pour but de poser les bases de la modélisation de la solution de Poisson grâce à une approche de type « circuit » soit sous forme d'une résolution numérique de lois de Kirchoff soit

encore grâce à une résolution dans un solveur circuit qui permet notamment d'intégrer des composants électriques grâce à leur schéma équivalent.

Le chapitre 5 est subdivisé en plusieurs parties, la première établit le passage analytique de la solution du problème résolu dans le cas d'une source ponctuelle à des conducteurs filiformes dans des agencements élémentaires. Ces formulations analytiques constituent des références pour envisager la résolution de situations plus complexes dans une approche analytico-numérique. La deuxième partie développe la mise en œuvre nécessaire à une résolution de type circuit qu'elle soit faite directement en travaillant sur les matrices et en imposant les courants injectés ou les équipotentielles. Grâce à cette approche des modèles électriques peuvent être intégrés et la modélisation peut être raffinée par exemple en prenant en compte le caractère inductif du conducteur dans la terre. Une passerelle de la matrice d'extraction des éléments électriques vers un logiciel de simulation OD est aussi une solution possible. Cette dernière solution peut poser des problèmes dans le cas de systèmes de très grande taille et il sera alors nécessaire par des techniques appropriées de réduire son ordre avant le passage en simulation temporelle.

Une avancée supplémentaire est faite en s'intéressant au conducteur réel et en résolvant le cas d'un système à deux pieux de terre. Une étude paramétrée est menée pour mieux approcher les ordres de grandeur et cette modélisation va nous permettre de confronter notre modélisation à nos propres expérimentations en statique et sur une large gamme de fréquence.

Le chapitre 6 s'attache à valider expérimentalement les modèles et formulations qui en découlent, en particulier, il permet d'interpréter correctement la méthode de Wenner mais les défis se situent principalement dans la caractérisation en haute fréquence.

Enfin le chapitre 7 illustre l'approche que l'on aura sur un système complet et la conclusion fera l'objet du chapitre 8.



# Chapitre 2 : Contexte

## 2 Contexte

### 2.1 Présentation de la problématique CEM dans le bâtiment

#### 2.1.1 Le bâtiment nouvel enjeu ?

Jusqu'à présent, le bâtiment n'a certainement pas eu la réputation d'être un objet de haute technologie surtout du point de vue des électriciens, mais les consultants experts en CEM, eux, savent qu'il est comme d'autres objets le lieu de perturbations CEM suffisamment graves pour engendrer le dysfonctionnement de certains de ses équipements. Bien sûr toute la « publicité CEM » est plutôt adossée à des objets de haute technologie pour lesquels les risques de pertes humaines ou de pertes de production sont importants. Convaincre un décideur que l'on doit investir dans la CEM d'un lanceur spatial, d'un avion de ligne paraît chose assez aisée quand on a quelques exemples (et encore ?) d'accidents ayant entraîné des pertes humaines et matérielles. D'une manière générale, la CEM dans les transports a été et est prise en permanence au sérieux du fait des conséquences dramatiques possibles. En revanche, le bâtiment n'a pas bénéficié selon nous du même engouement pour investir dans la compréhension des phénomènes pouvant s'y produire. Il faut aussi reconnaître que le bâtiment voit sa technicité augmenter de jour en jour et le nombre d'équipements électriques est en forte croissance et intègre aussi une couche de traitement de l'information plus importante avec des fonctions également de communication : « le bâtiment devient branché ! ».

Comme nous l'avons souligné dans l'introduction, les hôpitaux par exemple mêlent des dispositifs à forts courants de fuite vers la terre, des équipements d'électronique de puissance pour les IRM ou les rayons X, des climatiseurs, ascenseurs, montes charges,... ainsi que des équipements très sensibles comme les équipements d'échographie,...

Plusieurs problèmes délicats ont été identifiés :

- Les dimensions du bâtiment rendent vite la mise en œuvre des systèmes électriques beaucoup plus délicate en particulier on peut assez rapidement se retrouver face à des problèmes de propagation dans les câblages. Ceux-ci sont difficiles à traiter puisque les systèmes de conducteurs électriques présentent des impédances caractéristiques généralement éloignées de  $50 \Omega$ . Sachant par ailleurs que les perturbateurs (convertisseurs d'électronique de puissance) ou les récepteurs peuvent avoir des impédances de sortie ou d'entrée également éloignées de  $50 \Omega$ . Un travail important reste à faire dans ce domaine, il ne pourra malheureusement pas être abordé dans ce travail, mais est en cours dans une autre thèse préparée au Laboratoire.
- Les systèmes de mise à la terre sont bien connus. On note dans la bibliographie certaines difficultés de mise en œuvre pratique dans un bâtiment soit liées au non-respect des schémas de conception soit aussi à une mauvaise appréciation des différentes compétitions que se font les chemins de propagation (intentionnel ou non). En corollaire, il faudra aussi se poser les questions de la circulation des courants générés en haute fréquence pour partie par la foudre mais surtout par l'électronique de puissance. Même en cas de conception selon les règles de l'art, ces systèmes initialement dimensionnés pour la protection des personnes et des biens à 50Hz, restent-ils performants en haute fréquence ?
- Toujours à cause des grandes dimensions, comment assurer l'équipotentialité du réseau de masse notamment à tous les étages d'un bâtiment et bien entendu sur une large gamme de fréquence ? Comme on le verra, il s'agit bien de cette ceinture équipotentielle qui doit

permettre aux différents équipements de fonctionner correctement. Celle-ci doit être également reliée au réseau de terre le plus souvent possible.

- Les installateurs peuvent prendre des libertés vis-à-vis de plan de conception ce qui aboutit à des pertes d'efficacité des câblages. Les industriels acteurs dans les hautes technologies sont déjà confrontés à ces situations, alors on peut imaginer la difficulté de vérifier le bon respect des préconisations de câblage, une fois le béton coulé !
- ...

Trop souvent on dénote des comportements suspects dans le fonctionnement des équipements et il serait certainement profitable de mieux connaître la topologie des câblages dans les bâtiments pour être en mesure d'apporter les correctifs nécessaires.

### 2.1.2 La terre à quoi sert-elle ?

On entend dans le monde des praticiens les vocables, « bonne terre », « terre propre », « terre de mesure », « terre sale »,... et encore bien d'autres dénominations. On nomme  **système de terre** , les conducteurs qui sont enterrés dans le sol et en contact direct avec lui. Ce système est distinct du  **système ou réseau de masse**  dont le rôle est de référencer les appareils qui communiquent entre eux à une même référence.

#### a. Quelles sont les différentes fonctions d'une terre ?

Les premiers rôles joués sont ceux de protection et d'évacuation des courants de foudre, de fuite des câbles et des équipements, d'image d'une antenne fouet et de référence de potentiel d'un système,... Divers rôles que nous avons essayé d'analyser succinctement. La publication [1] d'A.Charoy fait un excellent tour d'horizon, ici nous en exposons les grandes lignes que nous avons complétées :

1°) L'origine des prises de terre dans le passé est d'assurer un aspect fonctionnel par exemple avec le retour des courants par la terre.

Historiquement le télégraphe n'utilisait qu'un seul fil, mais l'inductance de la boucle ainsi constituée avec la terre était telle que le système avait une portée très limitée (Fig. 1). La terre comme conducteur de retour est encore utilisée de façon anecdotique dans le cas du retour de courant pour les câbles sous-marin, toutes les autres applications en téléphonie en France ont arrêté d'utiliser la terre depuis les années 1990 environ.

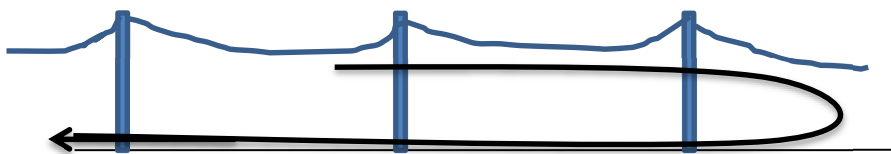


Fig. 1. Ligne de télégraphe utilisant la terre

2°) Actuellement le premier rôle d'une prise de terre est d'assurer la protection des personnes. Ce n'est pas la résistance de terre qui rend une installation sûre mais l'équipotentialité des masses accessibles. En effet on peut avoir une certaine différence de potentiels avec la terre lointaine, ce n'est pas forcément dangereux ou gênant par contre avoir la totalité des masses d'un même système



équipotentielle malgré leur éloignement est fondamental. Une ceinture de masse est donc, sur cette base, préférable à un seul piquet de terre.

3°) Rôle d'évacuation des courants de fuite et de défaut : Ce rôle est important puisqu'il permet l'évacuation des courants de défaut d'une ligne par exemple mise à la terre accidentellement. Le retour se fait par plusieurs chemins, les uns localisés, les autres répartis et mis en concurrence (Fig. 2).

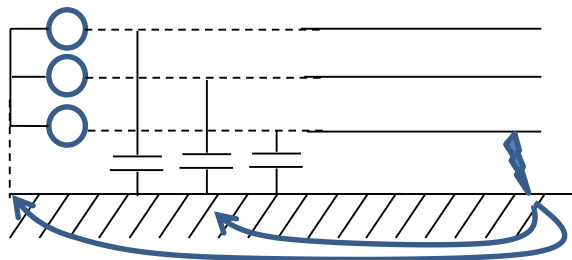


Fig. 2. Evacuation d'un courant de foudre par la terre

4°) La terre comme référentiel statique par exemple ce qui permet à un système chargé électrostatiquement d'écouler ses charges vers la terre. C'est effectivement le rôle du bracelet conducteur relié à la terre que portent les employés qui soudent des composants électroniques à forte impédance d'entrée, ...

5°) La terre, à l'origine des courants de mode commun.

De par sa nature conductrice, la terre va également être responsable de la génération de courants de mode commun en créant des capacités parasites avec les parties sous tension et en fournissant ainsi des chemins de propagation non intentionnels (Fig. 3 gauche).

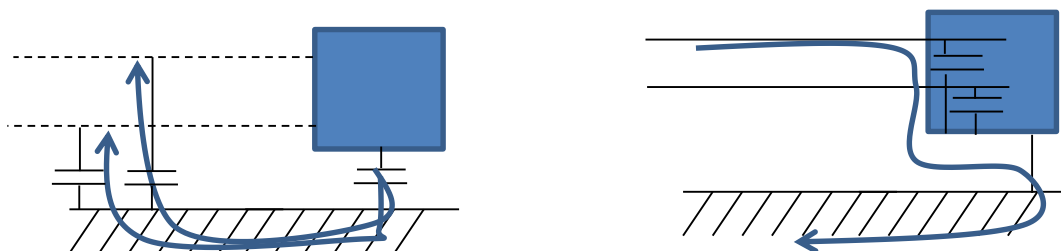


Fig. 3. Evacuation du courant de foudre par la terre

En revanche, Fig. 3 droite met en évidence que des courants perturbateurs en mode commun et externe au système peuvent être mis à la terre grâce à un filtre d'entrée qui les détourne avant que ceux-ci ne puissent circuler à travers les cartes électroniques sensibles du système.

Le dispositif peut être complété de parasurtenseurs au niveau des fils actifs avec la masse de l'équipement.

On notera aussi que la connexion de toute canalisation d'un bâtiment au réseau de masse est une obligation légale. De ce fait il est nécessaire de prendre garde aux courants de foudre, qui, s'ils ne sont pas évacués par la terre, risquent d'utiliser ces canalisations ou des câbles non protégés pour se

reboucler et ainsi provoquer des chutes de tension très conséquentes à cause de l'intensité du courant de foudre.

6°) Effet réducteur d'un blindage obtenu grâce à la terre : La terre permet de relier les extrémités d'un blindage qui protège par exemple un conducteur téléphonique de l'induction créée par un perturbateur. L'effet réducteur est obtenu grâce à la circulation du courant dans le blindage si et seulement si le blindage est relié des 2 côtés à la terre afin que du courant puisse circuler et contrer la tension perturbatrice induite. Pour un effet maximum, il est nécessaire que la résistance du blindage soit la plus faible possible. A cette résistance s'ajoute la différence des 2 résistances d'accès à la terre lointaine Ra et Rb (Fig. 4). Il faudrait que ces résistances soient égales pour disparaître du système d'équations. Dans ce cas la différence d'impédance de terre peut jouer un très grand rôle sur les performances du système de protection.

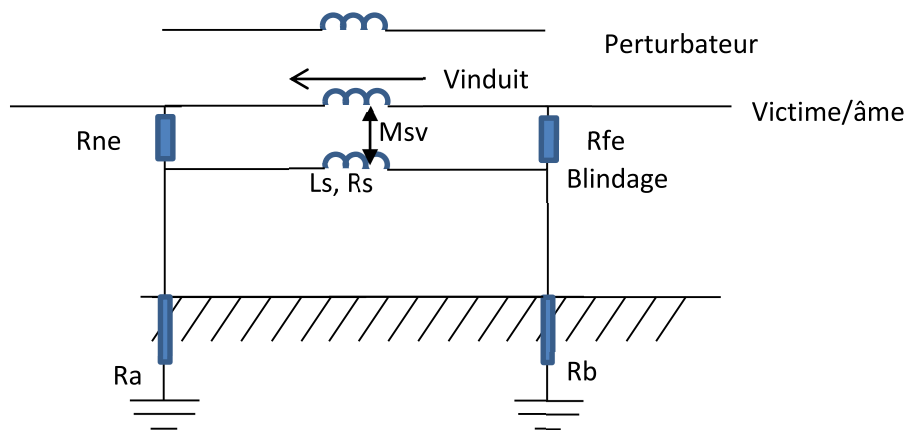


Fig. 4. Effet réducteur d'un blindage grâce à sa connexion à la terre

Le gain défini par  $S = 20 \log \left| \frac{V_{\text{induit avec blindage}}}{V_{\text{induit sans blindage}}} \right|$  permet d'apprécier la performance du blindage.

Dans notre cas  $S = 20 \log \left| \frac{R_s + (L_s - M_{sv})p}{R_s + L_s.p} \right|$  devient  $S = 20 \log \left| \frac{R_s + \left( L_s - M_{sv} + \frac{R_{\text{terre}}}{R_{\text{terre}} + R_{ne} + R_{fe}} \right) p}{R_s + L_s.p} \right|$

$R_{\text{terre}}$  représente la somme des résistances d'accès à la terre  $R_a + R_b$ . On constate bien que  $R_{\text{terre}}$  nulle donne l'expression habituelle et on peut visualiser sur le graphe ci-dessous (Fig. 5) l'impact non négligeable de  $R_{\text{terre}}$  sur les performances du blindage. L'atténuation est très affectée avec une valeur  $R_{\text{terre}}$  modeste de 15  $\Omega$  !

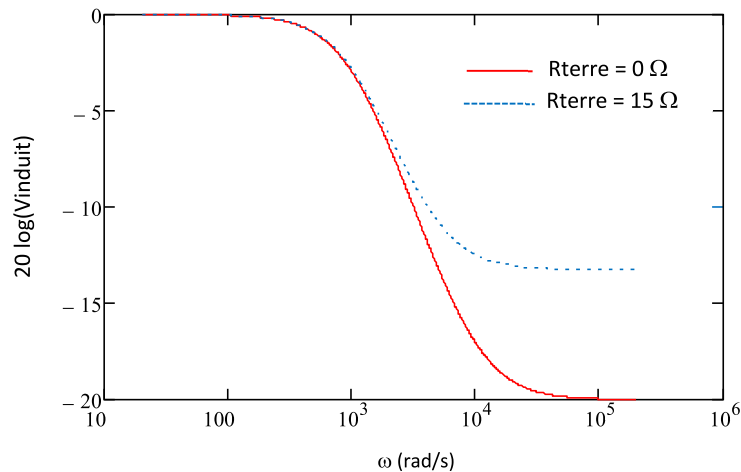


Fig. 5. Impact de la résistance de terre sur l'effet réducteur du blindage.

7°) La terre comme « Contre poids électromagnétique » pour les antennes : En effet, c'est le rôle bien connu d'image que joue la terre sous l'antenne fouet, situation comparable au rôle que joue le toit d'une voiture vis-à-vis de son antenne radio...

En conclusion, la terre bien que de caractéristique très variable ni bon, ni mauvais conducteur joue plusieurs rôles tout à fait fondamentaux comme on vient de le voir. Elle apporte cependant une complexité certaine sur le plan CEM par rapport aux systèmes embarqués comme les avions ou les voitures. Encore que l'âge d'or de la carlingue conductrice commence à être révolue avec les avions en composites.

### b. Le réseau de masse

Aucun système électronique actuel n'utilise la terre de façon fonctionnelle et son fonctionnement va reposer sur l'existence d'un réseau de masse. Le système devra avoir une bonne masse de référence pour tous les circuits internes et externes que l'on considère, c'est à dire une masse la plus équipotentielle possible. On la recommande maillée, continue, dense, ce qui la rend plus efficace pour le bon fonctionnement des électroniques. On peut lire dans [1] que si cette masse existe il n'est pas nécessaire qu'elle soit reliée à la terre et une comparaison est faite en prenant l'exemple d'une cage de Faraday, qui pour bien fonctionner (les équipements qui sont présents à l'intérieur) n'a pas nécessité d'être reliée à la terre, et l'autre donné est celui de l'avion qui n'est pas relié à la terre. Cette assertion nous semble fausse car le problème qui subsiste c'est justement des chemins parasites avec la terre qui vont provoquer des fluctuations de potentiels préjudiciables. Par ailleurs combien de systèmes sont susceptibles dans une cage de Faraday sans en sortir ??? Et justement l'avion est bien un des seuls cas de cage de Faraday (pour l'instant) dans lequel on a tous les systèmes électroniques.

Dans la mesure où les équipements doivent communiquer entre eux, la référence de potentiel doit être unique et commune à tous les systèmes interconnectés. Pour les réseaux Télécom, évidemment ce n'est pas faisable et d'autres méthodes sont mises en œuvre. Par exemple deux cages de Faraday qui protégeraient les équipements respectifs doivent être reliées entre elles par une liaison équipotentielle. Tout conducteur, blindage de câble, chemin de câble, conducteur V/J, armoire électrique, armoire de distribution doivent être reliés à ce réseau de masse.

En principe le neutre est mis à la terre de manière à le maintenir en toute circonstance à une tension faible et les conducteurs de phase à une tension voisine de la tension phase-neutre. On observe que les prises de terre des réseaux BT sont souvent médiocres et parfois bien plus mauvaises que les terres des usagers. La difficulté provient donc du fait que la terre du neutre et la terre des usagers parfois confondue avec la référence de masse des appareils soient très différentes et non équipotentielles.

### 2.1.3 Conclusion

On voit à travers cette analyse que le câblage d'un bâtiment n'est pas forcément si trivial que l'on pourrait imaginer. Cette complexité déjà présente vis-à-vis des usages à 50 Hz et de la gestion des chocs de foudre va s'accroître avec l'introduction de nouveaux usages puisque presque tous les appareils modernes intègrent des convertisseurs d'électronique de puissance. Les variations brutales de tension qu'ils engendrent sollicitent les capacités parasites que l'on va retrouver inmanquablement entre les parties sous tension et la terre. Cette dernière nous oblige à raisonner en mode commun et non plus seulement en mode différentiel.

L'omniprésence de la terre, béton, placoplâtres,... va nécessiter de mieux connaître leur comportement électrique en terme de conduction directe ou d'impact sur les composants situés à proximité via la circulation de courants induits. Généralement les composants électrotechniques ne sont pas caractérisés en mode commun et s'ils le sont, c'est en utilisant un plan conducteur en cuivre comme référence, qu'en est-il lorsque l'équipement est simplement posé sur une dalle en béton nécessairement moins conductrice qu'un plan de cuivre ?

Cette étude va tenter de répondre à quelques-unes des questions posées en alimentant une simulation système grâce à des modèles de type circuit de tous les composants. Bien sûr dans cette démarche, l'impact de la terre ne peut être retranscrit via une modélisation éléments finis qui sera bien trop lourde et compliquée et ne favorisera en aucun cas une intégration zéro D. Il nous faut absolument éviter de mailler la terre si nous voulons avoir quelques chances d'aboutir à une simulation d'un système souvent de grande taille géométrique et comportant de multiples composants hétérogènes.

## 2.2 Les modèles électriques existants des composants et des sources de perturbation

Naturellement un électricien aime se référer à un schéma électrique, celui-ci pouvant intégrer toute sorte de composants hétérogènes. Cette représentation de type circuit électrique, peut ensuite être exploitée soit en temporel soit en fréquentiel selon les besoins.

### 2.2.1 Les sources de perturbation

#### *a. La foudre*

La foudre est un phénomène atmosphérique qu'il est toujours impératif de prendre en considération dans la réalisation de bâtiments surtout en site isolé. On cite bien sûr les victimes (entre 10 et 20 morts chaque année en France et sans doute aussi pas mal de blessés) mais il faut penser aux très nombreux dégâts matériels plus ou moins conséquents.

Le test des équipements électriques au choc indirect de foudre se fait via des circuits électriques représentés ci-dessous qui permettent de restituer globalement une des formes simplifiées qui représente le choc indirect de foudre. Le circuit est représenté Fig. 6. Fermé sur une résistance faible

de l'ordre de  $2 \Omega$  le courant généré respecte à peu près une onde de foudre de type 8/20  $\mu$ s en courant. En revanche sur une charge beaucoup plus importante, le circuit reproduit plutôt un choc de foudre de type 1,2/50  $\mu$ s en tension.

La Fig. 6 illustre ces situations. La capacité de  $11\mu$ F est chargée sous 1000V, mais celle-ci peut être chargée si besoin sous différentes tensions de manière à contrôler l'intensité du courant ou l'amplitude de la tension appliquée.

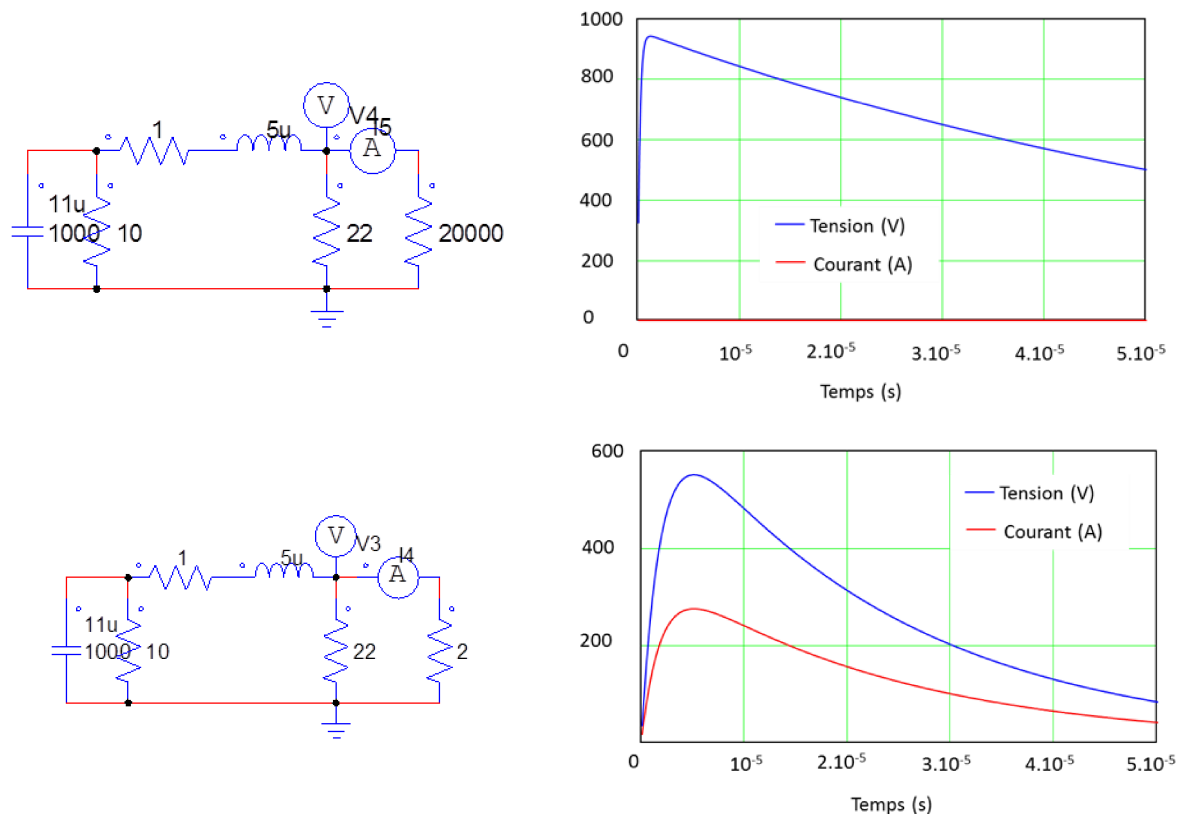


Fig. 6. Injection de foudre : onde 8/20 (bas) ou 1.2/50 (haut)

Une fois cet aspect validé, il est ensuite possible de simuler l'injection d'un choc de foudre direct, au point d'injection.

### b. Les convertisseurs statiques

De plus en plus utilisés y compris en résidentiel, ils apportent le contrôle et la conversion électromécanique de l'énergie électrique. Leur principe repose sur la commutation des semiconducteurs, seule solution pour permettre des rendements exceptionnellement proches de l'unité ce qui leur permet d'être déployés massivement. La contrepartie est la génération de perturbations électromagnétiques qui sont justement engendrées par les phénomènes de commutation.

Le phénomène de commutation est à l'origine de 2 types de perturbation maintenant bien connus par les électroniciens de puissance. Pour illustrer simplement les phénomènes de base, imaginons une simple cellule de commutation de type hacheur (Fig. 7). Nous verrons qu'il est aisé de généraliser cette configuration à un réseau alternatif. Menons tout d'abord le raisonnement (très

basique) suivant mais néanmoins illustratif d'abord en mode différentiel puis en mode commun.

#### ❖ Mode différentiel

Si l'on s'intéresse seulement à l'aspect fonctionnel de la conversion d'énergie, l'approche en mode différentiel peut s'illustrer par la démarche présentée Fig. 7. Il est facile de définir le courant absorbé par le bras de commutation qui module selon une fonction de commutation le courant continu  $i_o$  absorbé par la charge. Le réseau amont ainsi que le filtrage du bras peut ensuite être étudié dans l'espace fréquentiel et ce chemin plus ou moins complexe est excité par la décomposition en série de Fourier  $i_e(f)$  du courant d'entrée du bras  $i_e(t)$ .

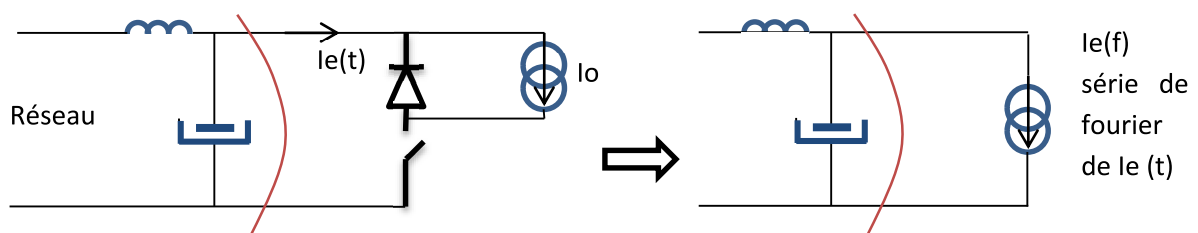


Fig. 7. Principe de modélisation en mode différentiel des convertisseurs

#### ❖ Mode commun

De nombreuses impédances parasites relient les conducteurs et équipements vis-à-vis de la terre ou plus exactement vis-à-vis d'une tôle de référence qui constitue le châssis de l'équipement. Ce châssis est à son tour connecté au conducteur PE pour des raisons de sécurité. On remarquera que si le convertisseur et son réseau amont étaient parfaitement isolés de la terre, il n'y aurait aucune conséquence du découpage qui se produit en mode différentiel, la terre ne serait pas sollicitée.

Malheureusement les fronts de commutation sont de plus en plus raides afin de limiter les pertes par commutation et ce surtout dans une perspective globale de montée en fréquence de découpage. Les impédances vis-à-vis de la terre qui s'apparentent à des capacités parasites dont les valeurs sont assez faibles (typiquement quelques 100 pF, voire moins si l'on se limite à la seule partie routage côté convertisseur) ne sont donc plus négligeables avec des fréquences de l'ordre de  $\frac{0,35}{T_m}$ ,  $T_m$  étant le temps de montée (100 à 200 ns désormais avec les semiconducteurs actuels).

Les méthodes normatives de mesure utilisent un Réseau Stabilisateur d'Impédance de Ligne (RSIL) où les filtres CEM classiquement utilisés mettent en œuvre des capacités  $C_y$  vis-à-vis de la terre qui définissent en dynamique les potentiels vis-à-vis de la référence de potentiel. Dans le cas du RSIL, les capacités  $C_y$  sont de l'ordre de 100 nF et impliquent également une résistance de 50  $\Omega$  pour la mesure des perturbations conduites. Dans le cas d'un filtre CEM, les capacités  $C_y$  sont plutôt de l'ordre de quelques nF, cette valeur étant limitée par les courants dérivés vers la terre à 50 Hz quand on est bien sûr sur un réseau alternatif de manière à ne pas faire déclencher le dispositif différentiel résiduel (DDR). A titre d'exemple Fig. 8, on a colorié en vert les pistes dont le potentiel reste stable vis-à-vis de la terre. La portion orange, quant à elle voit son potentiel fluctuer à la fréquence de découpage principalement du fait de l'ondulation créée par le filtre L,C d'entrée sollicité par un courant en « créneau ». En revanche, la piste rouge voit son potentiel durement sollicité par la commutation. Il convient de bien identifier la capacité  $C_{pm}$  « capacité de point milieu » qui sera donc

soumis à un créneau 0, E.

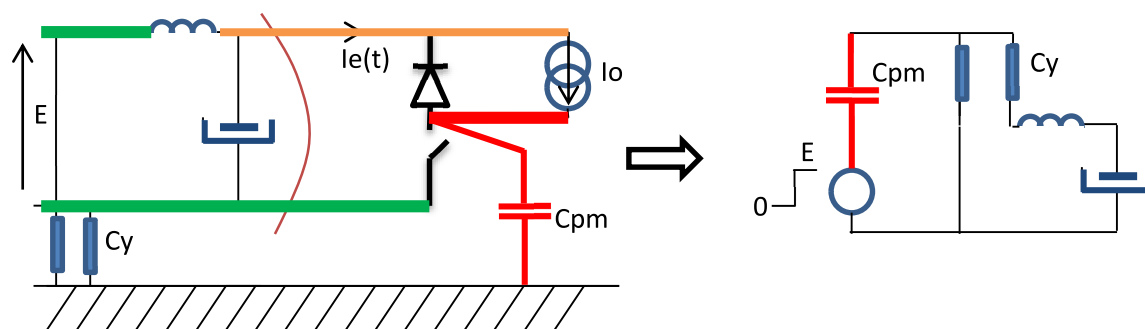


Fig. 8. Principe de modélisation en mode commun des convertisseurs

Cette modélisation ainsi faite reste naturellement très simpliste. Il faudrait alors rajouter tous les éléments parasites des composants actifs et passifs dont les pistes en mode différentiel (entre bornes d'entrée sortie) et en mode commun pour obtenir les phénomènes avec une meilleure exactitude sur une large gamme de fréquence. Néanmoins les paramètres principaux ont été ici décrits et retranscrivent assez bien la situation physique.

On notera cependant que cette brève analyse reste correcte si les capacités  $C_y$  peuvent être considérées comme des courts-circuits comparativement à  $C_{pm}$ . Toujours dans ce cas, c'est globalement  $C_{pm}$  et le  $dV/dt$  durant la commutation qui fixent le niveau de courant de mode commun. Il est clair que dans un cas où le RSIL n'existe pas ou en l'absence très peu probable de filtre, les seules capacités de câblages vis-à-vis de la terre de quelques centaines de pF, donc du même ordre de grandeur que  $C_{pm}$ , conduiraient à des fluctuations par rapport à la terre de la totalité du convertisseur et le niveau de courant de mode commun serait assez mal maîtrisé, mais c'est surtout la non existence de chemins préférentiels ou de canalisation qui serait fortement préjudiciable à la signature CEM du convertisseur.

Comme pour le cas du mode différentiel, l'exploitation peut être faite dans le domaine fréquentiel en analysant les diagrammes de Bode des chemins de perturbation et en utilisant la décomposition spectrale de la source excitatrice ce qui est beaucoup plus parlant que la simulation temporelle surtout en termes de conception.

Pour aller plus avant dans ces travaux tout en conservant cette philosophie propre au G2Elab, il faudra se référer aux nombreuses publications qui ont été faites dans ce domaine [2], [3].

Par ailleurs la difficulté réside dans le confinement des courants de mode commun qui peuvent utiliser des chemins inattendus pour se reboucler et ainsi être à l'origine de rayonnements électromagnétiques importants à cause de la superficie des boucles considérées [4].

L'utilisation de simulateurs OD et l'analyse en fréquence restent les principaux modes d'analyse des perturbations engendrées par les convertisseurs statiques en mode conduit. Ces types de simulation permettent de prendre en compte assez finement des convertisseurs à topologie et mode de commande complexe en intégrant les filtres CEM.

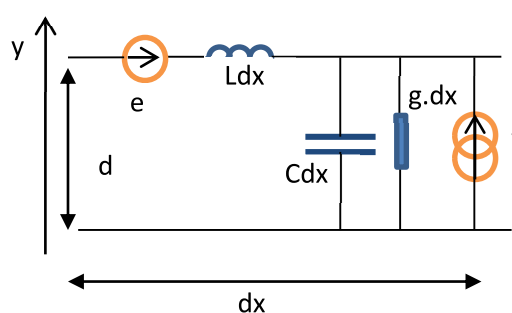
Il faudra alors resituer le convertisseur (et sa charge) dans son environnement en représentant sa connexion au sein du réseau du bâtiment avec l'impact du câblage du PE et les divers chemins

parasites jusqu'au transformateur de distribution.

### c. Des rayonnements électromagnétiques incidents

Les équipements que l'on trouve à l'intérieur des bâtiments sont compacts et n'ont pas de sensibilité accrue vis-à-vis de champs rayonnés incidents. En revanche, les câblages qui ont la particularité de relier des équipements peuvent de ce fait s'étendre sur des distances importantes et sont donc très fortement soumis aux champs incidents.

Quand il s'agit de câblages traditionnels, la théorie des lignes de transmission multiconducteurs développée notamment dans [5] permet de bien traiter l'impact d'un champ incident sur une ligne quelconque en incorporant des sources de perturbation discrètes sur un élément de ligne  $dx$  comme le montre la Fig. 9.  $H$  et  $E$  sont les champs magnétiques et électriques de l'onde électromagnétique incidente, alors que  $Ldx$ ,  $Cdx$ ,  $g.dx$  sont les éléments parasites de la ligne illuminée par l'onde.



Avec

$$e = j \cdot \omega \cdot \mu_0 \cdot d \cdot dx \cdot \int_0^d H_n^i dy$$

et

$$i = -g \cdot \int_0^d E_T^i dy - j \cdot C \cdot \omega \cdot \int_0^d E_T^i dy$$

Fig. 9. Interaction d'un champ incident sur une ligne (de propagation)

Ici encore cette représentation sous forme de schéma électrique est particulièrement commode pour analyser les phénomènes dans un simulateur.

Il ne faut pas oublier non plus, les structures métalliques du bâtiment, les canalisations, les conducteurs de protection, les grilles de terre qui eux aussi sont susceptibles de capter ces champs incidents. Les tensions induites ou courants induits se modélisent sous forme de source comme précédemment bien que les géométries soient bien plus complexes. Nous reviendrons notamment sur cet aspect à travers l'analyse des schémas de liaison à la terre dans le paragraphe suivant.

## 2.2.2 Les chemins de propagation

### a. Câblages

Depuis 1991, G2Elab a choisi la méthode PEEC pour représenter l'impact des câblages au sein des convertisseurs d'électronique de puissance et plus généralement au sein des systèmes électrotechniques. Cette méthode initialement proposée par A.Ruheli en 1972 à IBM et délaissée depuis, moyennant améliorations et adaptations au domaine des fréquences intermédiaires a fait ses preuves pour de nombreuses raisons face aux méthodes numériques classiques et plus particulièrement la méthode des éléments finis fortement pénalisée en cas de présence massive d'air comme c'est le cas pour les câblages.

Citons brièvement ses atouts :

- Affectation d'un poids inductif par portion de conducteur non fermé, identification des



- couplages mutuels entre portions de conducteurs non fermés,
- Représentation sous forme de schémas électriques à constantes localisées intégrable instantanément dans des simulateurs 0D,
- Rapidité de calcul, précision des résultats grâce à des formulations analytico-numériques
- Facilité du processus d'optimisation géométrique pour obtenir des valeurs spécifiques de la matrice inductance d'un système,
- Méthode de modélisation à complexité variable, R-L dépendant de la fréquence, ajout de capacités parasites possibles, prise en compte de la propagation.

Citons ses principales faiblesses :

- difficulté à considérer des milieux ferromagnétiques,
- matrices inductances pleines de taille  $n^2$ ,  $n$  étant le nombre de conducteurs,
- méthode inopérante dans le cas de courants circulant réellement en 3D

Fig. 10 quelques exemples de géométries traitées ci-dessous grâce à la méthode PEEC implantée dans un simulateur InCa3D<sup>®</sup> commercialisé par CEDRAT-ALTAIR.

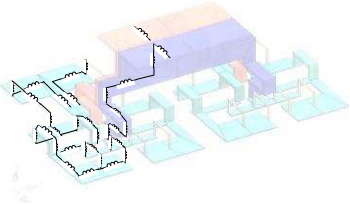
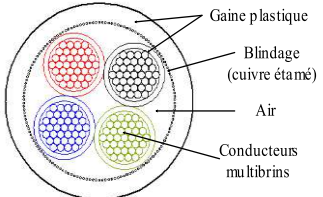
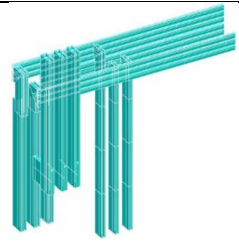
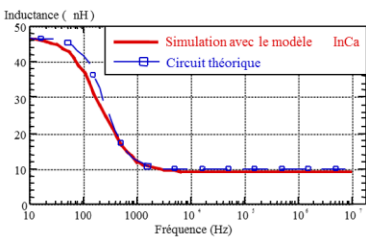
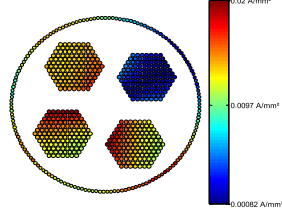
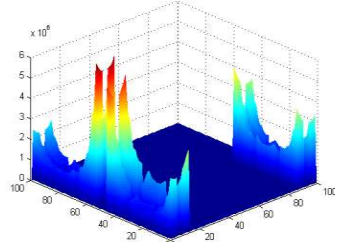
Modélisation d'un module de puissance	Modélisation d'un câble blindé	Modélisation d'un jeu de barre triphasé
		
		
<p>Variation d'inductance de la maille de commutation d'un module d'électronique de puissance</p>	<p>Répartition des courants dans les conducteurs pour différentes fréquences de fonctionnement</p>	<p>Répartition des courants dans les barres/ calcul des pertes supplémentaires (effet de peau et de proximité)</p>

Fig. 10. Quelques exemples de modélisation via PEEC-InCa3D

Balayons brièvement les problèmes encore en suspens concernant la modélisation des câblages en mode différentiel et en mode commun :

- modélisation d'un câble circulant sur un chemin de câble ferromagnétique,
- modélisation d'un conducteur à proximité de la surface de la terre ou disposé sur une cloison placoplatre, béton,... si celles-ci ne peuvent être considérée comme infiniment conductrices.

### b. Transformateur de puissance

Le transformateur de distribution est un organe fondamental puisqu'il permet notamment de modifier le régime de mise à la terre du neutre. Par ailleurs, il occupe un emplacement stratégique

puisque il est à l'interface entre le réseau de distribution et le réseau du bâtiment.

Dans le cas notamment de l'étude de la propagation des coups de foudre ou des chocs de manœuvre, celui-ci a fait l'objet de nombreuses études.

La nouvelle difficulté à laquelle nous nous confrontons aujourd'hui est principalement l'extension de la validité du modèle dans une plus large gamme de fréquence. En effet la foudre s'impose dans la gamme de 3 à 400 kHz, ce qui représente déjà un rapport 8 000 vis à vis de la fréquence industrielle. Pour la CEM des convertisseurs statiques par exemple, les perturbations s'étendent bien au-delà, puisque comme nous l'avons vu précédemment il faut potentiellement monter à 30 MHz voire plus. On peut imaginer les difficultés d'un modèle qui couvre de telles gammes de fréquence. Les transformateurs 50 Hz n'ont pas été conçus vis-à-vis de telles fréquences et les éléments parasites, telles que par exemple les capacités parasites vont voir leur rôle décuplé.

Nous allons ici appliquer une approche d'identification qui conduit à un modèle électrique insérable dans les simulateurs OD. Cette méthode d'identification des caractérisations des composants magnétiques a été développée au G2Elab à partir de 1986 sous l'impulsion de J.P. Kéradec et celle-ci a été largement reprise à l'échelon national et international [6].

La modélisation du transformateur doit être faite en mode différentiel et mode commun à partir de mesures qui s'apparentent à celles que l'on peut faire à fréquence industrielle pour identifier les inductances de fuites, magnétisante, pertes cuivre, pertes fer,... mais ici sur une large gamme de fréquences. L'outil classiquement utilisé est un pont d'impédance qui, en revanche, ne permet pas d'explorer les phénomènes de saturation. Vis-à-vis des perturbations CEM, il n'y a pas trop de risques de se retrouver confronté à cette difficulté. Une autre difficulté provient aussi du fait que le protocole de mesure devient très vite complexe dès que l'on doit identifier un transformateur multi enroulements.

Si l'on prend comme exemple un transformateur 50 Hz à deux enroulements, 3 potentiels indépendants doivent être considérés comme le montre Fig. 11.

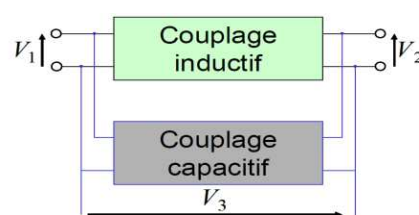


Fig. 11. Modélisation quadripolaire des transformateurs

Tant que l'on n'observe pas de phénomène de propagation à l'intérieur du transformateur, on peut imaginer que cette approche de superposition des modèles magnétiques et électrostatiques reste légitime en ce qui concerne le mode différentiel. Toujours vis-à-vis du mode différentiel, on remarque qu'un transformateur à deux enroulements nécessite la définition de 3 potentiels indépendants soit  $(3*4)/2 = 6$  éléments pour définir la matrice le représentant. Si l'on veut prendre en considération le mode commun, 4 potentiels indépendants sont nécessaires soit cette fois l'identification de  $4*5/2 = 10$  éléments.

L'identification en mode commun doit se faire entre les bornes du composant et la terre. Comment

définir la terre dans ce cas ? A ce stade, nous utilisons un plan de cuivre bien peu représentatif des conditions réelles d'exploitation.

Sur la Fig. 12, R1 et R2 représentent les résistances des bobinages primaire et secondaire, alors que l'impédance Z1 s'attache à représenter l'inductance de fuite ainsi que les pertes dans les bobinages qui sont dues aux courants de Foucault (effet de peau et proximité). Les composants identifiés étant dépendants de la fréquence, ils doivent être représentés par des cellules R-L parallèles, ou des réseaux en échelle. L'impédance Z2, en parallèle sur le modèle permet de représenter les pertes fer et l'inductance magnétisante. Le gain enfin du coupleur parfait permet d'achever la représentation, mais n'est pas forcément pris égal au rapport du nombre de spires.

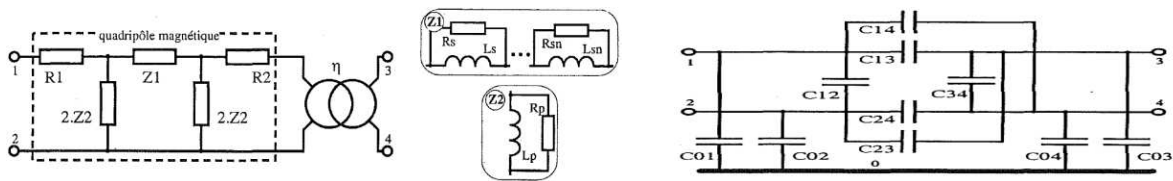


Fig. 12. Modèle magnétique et électrostatique du transformateur à deux enroulements en tenant compte du mode commun

A titre d'exemple, Fig. 13 représente le schéma équivalent du transformateur que nous utiliserons sur le banc expérimental dans le chapitre 7 de validation système.

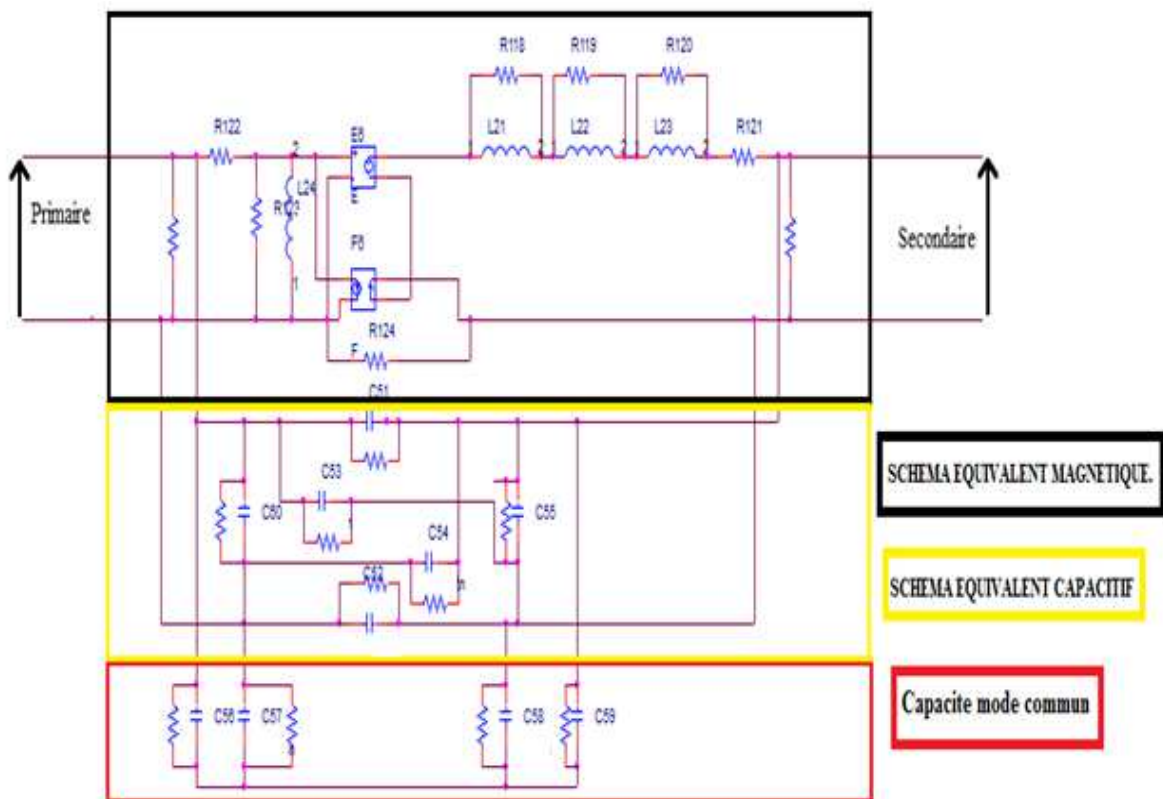


Fig. 13. Modèle électromagnétique du transformateur 2 enroulements incluant la terre (sur plan de cuivre)

On peut vérifier sur les courbes suivantes la bonne concordance du modèle élaboré avec la mesure

de l'impédance d'entrée sur la Fig. 14.

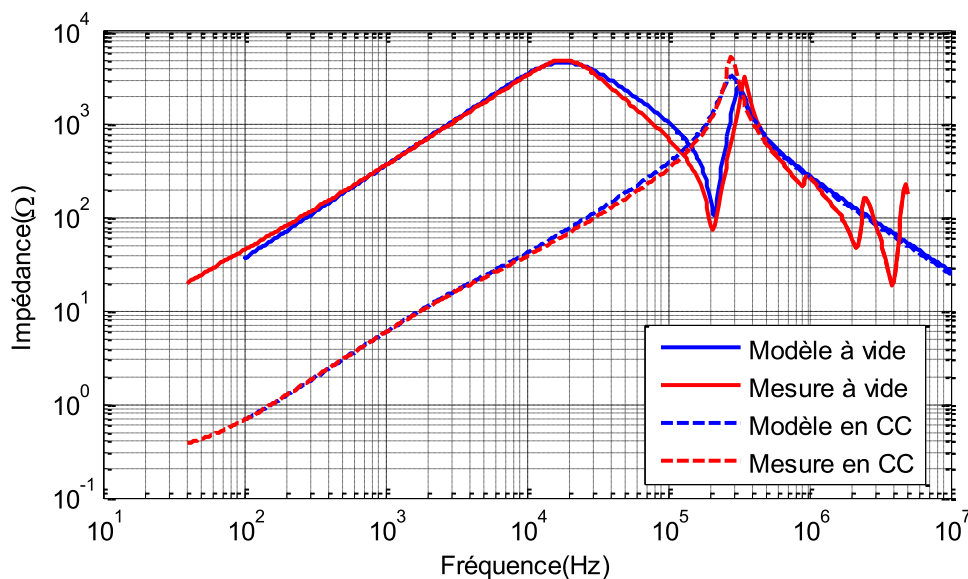


Fig. 14. Comparaison modèle-mesure de l'impédance d'entrée du transformateur

Un des défis importants réside dans la réduction de modèle de ce type de schéma afin d'alléger d'une part les simulations et d'autre part il est fondamental de bien identifier les chemins parasites qui peuvent être empruntés par les courants perturbateurs.

### c. Charges autres que convertisseurs statiques

La modélisation des charges domestiques, autres que les convertisseurs statiques qui ont déjà fait l'objet d'un paragraphe particulier, n'est pas forcément très délicate surtout vis-à-vis de la terre. Ce n'est pas le courant de mode différentiel qui pose problème en règle générale en matière de CEM, mais plutôt les courants de mode commun absorbés parce que ceux-ci utilisent des chemins non intentionnels. Le rebouclage des courants de mode commun issus d'un convertisseur statique via la charge est une situation assez courante, c'est d'ailleurs pour s'en affranchir qu'on utilise d'un point de vue normatif un RSIL y compris en sortie du convertisseur à caractériser.

Donnons ci-dessous un exemple d'identification d'une charge purement passive (Fig. 15). Celle-ci est caractérisée en mode différentielle mais aussi en mode commun vis-à-vis d'un plan de cuivre.

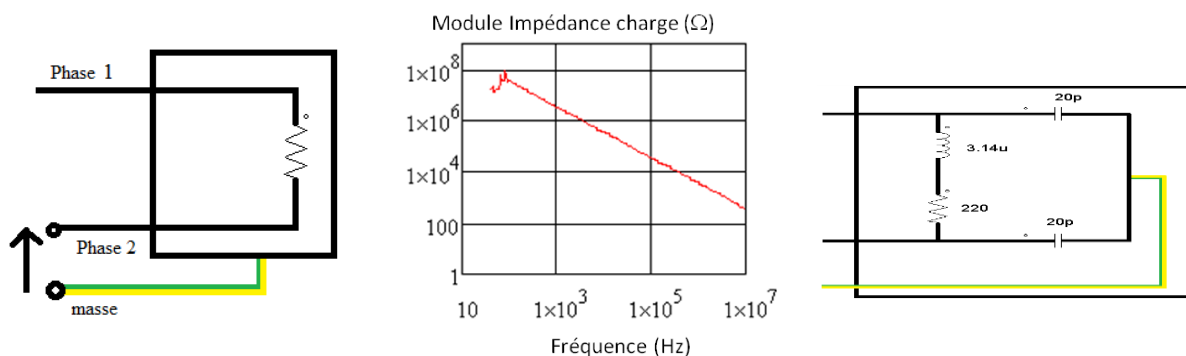


Fig. 15. Impédance de mode commun d'un exemple de charge

#### *d. Modélisation de la terre orientée circuit*

La terre est conductrice de l'électricité. Aux Etats Unis, ou encore pour des liaisons sous-marines, celle-ci est utilisée comme conducteur de retour pour le continu ou la fréquence industrielle. En France, en principe celle-ci n'est plus utilisée car son impédance est généralement peu maîtrisée.

En revanche, quel est son comportement dans le domaine des hautes fréquences dans lequel émettent les convertisseurs statiques (fréquences parfois plus élevées que la foudre) ? Quel est l'impact de la terre sur un câblage ? Est-il nécessaire de prendre en considération les courants induits dans celle-ci ? Comment se rebouclent les courants de mode commun générés par les convertisseurs au niveau du transformateur de distribution ? Est-il possible d'avoir un circuit électrique équivalent de grille de fond de fouille, de pieu de terre, de patte d'oie ... ? Est-il nécessaire de faire la distinction entre les conducteurs ferromagnétiques et les conducteurs amagnétiques en cuivre ?

Par ailleurs, la terre va souvent se trouver en compétition en tant que conducteur avec d'autres câblages qui cheminent à proximité et la répartition du courant dépend de la fréquence. Par ailleurs la simulation d'un bâtiment intégrant des convertisseurs d'électronique de puissance doit se faire dans le domaine temporel car la description des équipements se fait naturellement dans ce domaine. Là encore, il est nécessaire d'avoir des schémas électriques équivalents qui peuvent être insérés dans un simulateur OD. Dans le cas où des optimisations devront être faites, il sera plus facile de piloter ces simulateurs, puis ensuite réagir en conception sur la géométrie des câblages.

### **2.3 La nécessité de modéliser la terre à travers les Schémas de Liaison à la Terre**

Les schémas de liaison à la terre sont presque aussi anciens que la distribution de l'énergie électrique. De 1880 à 1920 la distribution de l'électricité se fait en neutre isolé car les lignes sont nues et en 1923, l'utilisation de dispositifs ayant des carcasses métalliques conduit à ce que les masses métalliques soient mises à la terre pour la protection des personnes. Puis il faut attendre 1962 pour que la NF C15-100 officialise le neutre isolé, le neutre à la terre ainsi que la mise au neutre.

#### **2.3.1 Régime de neutre à la terre (TT)**

La Fig. 16 représente le schéma de liaison à la terre dit TT. Les deux lettres indiquent que le neutre du côté BT du transformateur et que les masses côté récepteur sont directement reliées à la terre. Par ailleurs, la carcasse du transformateur est relié à la terre et celle-ci est soit commune soit séparée avec celle mettant le neutre à la terre côté BT.

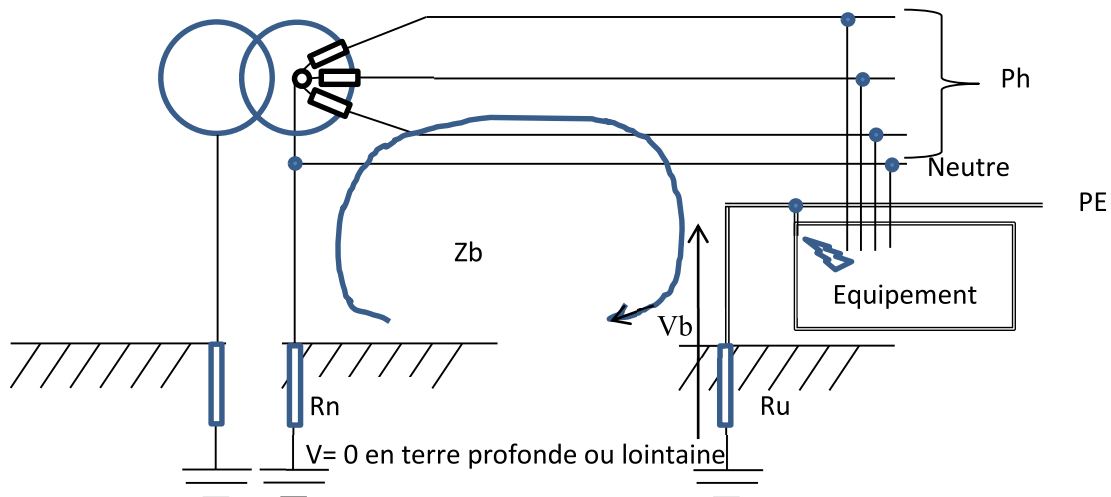


Fig. 16. Schéma de Liaison à la Terre TT

### a. Aspect protection des personnes en cas défaut d'isolement

Le neutre de la source (secondaire du transformateur de distribution ou TGBT) est relié à la terre, alors que les masses des équipements sont généralement reliées à une prise de terre (terre d'utilisation) distincte de celle de la source.

D'un point de vue protection des personnes, si une phase vient à toucher le boîtier métallique de l'équipement, la tension simple s'applique à un circuit composé des résistances de terre  $R_n$  (5  $\Omega$ ) du TGBT et celle d'utilisation  $R_u$  (10  $\Omega$ ) ainsi que de l'impédance de la boucle  $Z_b$  constituée par la localisation des câbles (connaissance nécessaire de la topologie des câblages et de leur environnement pour l'évaluation de  $Z_b$ ). Ces résistances étant de l'ordre de la dizaine d'Ohms, le courant qui circule est de l'ordre d'une dizaine d'ampères qui fait apparaître une tension dangereuse aux bornes du boîtier  $V_b = \frac{R_u}{R_u + R_n + Z_b} \frac{U}{\sqrt{3}}$ . Le courant qui circule n'est pas suffisant pour faire ouvrir le thermique ou l'électromagnétique et de ce fait un dispositif de protection différentiel (DDR) est indispensable pour ouvrir le circuit dans le temps imparti.

Néanmoins, ce schéma est le plus simple à l'étude et à la mise en œuvre. Pour des protections différentielles inférieures à 300 mA, le risque d'incendie est de surcroît maîtrisé. Il peut être nécessaire d'isoler certaines portions de circuit dont les récepteurs seraient à l'origine de courants de fuite trop importants grâce à des transformateurs de séparation.

On remarquera que plus le courant de fuite toléré par le dispositif de coupure est important, meilleure doit être la qualité de la prise de terre. Dans tous les cas le potentiel du boîtier ne doit pas excéder 50 Vac, ce qui conduit par exemple pour un différentiel réglé à 30 mA, à une prise de terre pouvant être de l'ordre de 500  $\Omega$ .

### b. Aspects perturbations CEM

#### ❖ Choc de foudre

En cas de choc de foudre à proximité de l'équipement, l'écoulement du courant de foudre dans la terre provoque des différences de potentiel entre les prises de terre surtout dans le cas où celles-ci



sont éloignées les unes des autres. Entre la prise de terre côté BT du transformateur et celle qui écoule le courant de foudre il apparaît alors une différence de potentiel  $V/foudre$  de « mode commun » comme le montre Fig. 17.

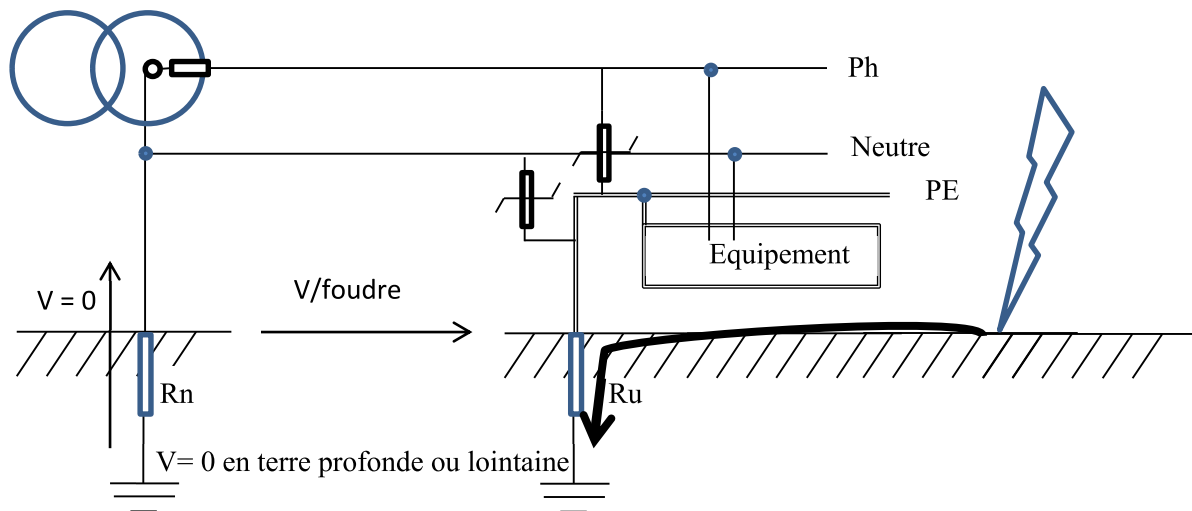


Fig. 17. Schéma de Liaison à la Terre TT, cas de l'agression foudre

Cette tension très intense mais fugitive (onde de type 8/20) est répercutée entre le neutre (qui reste au potentiel de la terre BT du transformateur) et le boîtier de l'équipement. On rappelle que dans ce cas de neutre à la terre du transformateur, celle-ci n'étant parcourue par aucun courant est à la tension de la terre lointaine. La tension Neutre-boîtier peut détruire les capacités  $C_y$  du filtre d'entrée et sans aller jusqu'à la destruction des composants, la brutale fluctuation de la masse de référence de potentiel de l'équipement reste très néfaste en induisant des courants de mode commun qui peuvent traverser les cartes électroniques de l'équipement en causant des dysfonctionnements. Pour protéger l'équipement de la destruction par surtension, il sera nécessaire de mettre en place des parafoudres au plus près de celui-ci.

Sur la Fig. 18, une simulation circuit a été faite afin de visualiser les différents signaux.

On remarquera que dans cette étude on utilise les valeurs des résistances de terre typiques que l'on peut trouver dans les articles relatifs aux schémas de liaison à la terre. Ces valeurs sont valables à la fréquence industrielle seulement, que deviennent ces impédances en fréquence ?

Par ailleurs on constate très facilement que la diminution de la résistance de terre d'utilisation diminue bien sûr le potentiel appliqué aux capacités  $C_y$  et de surcroît le courant les traversant (Fig. 19).

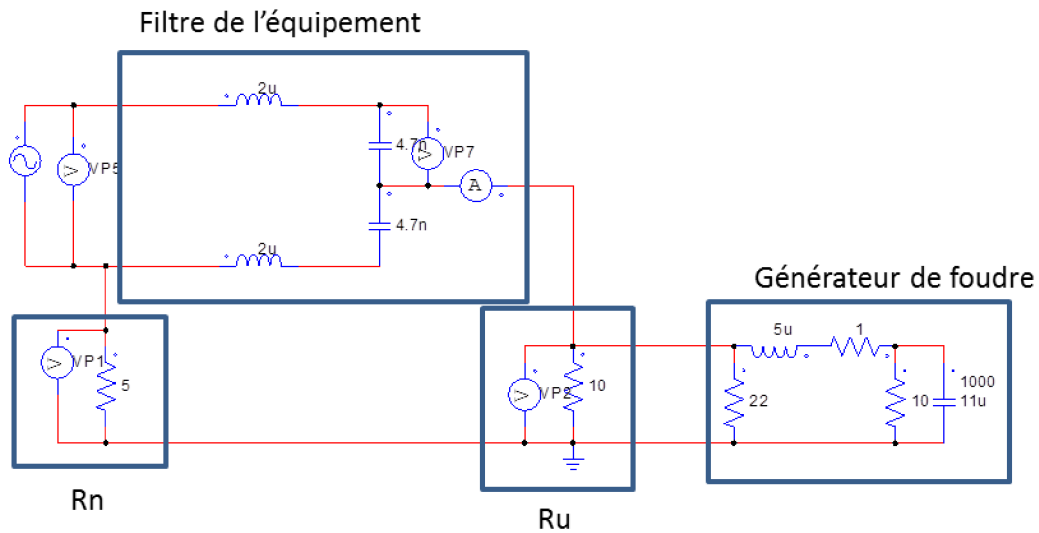


Fig. 18. Report de l'onde de foudre sur le conducteur PE via le filtre de mode commun et une terre d'utilisation de 10  $\Omega$

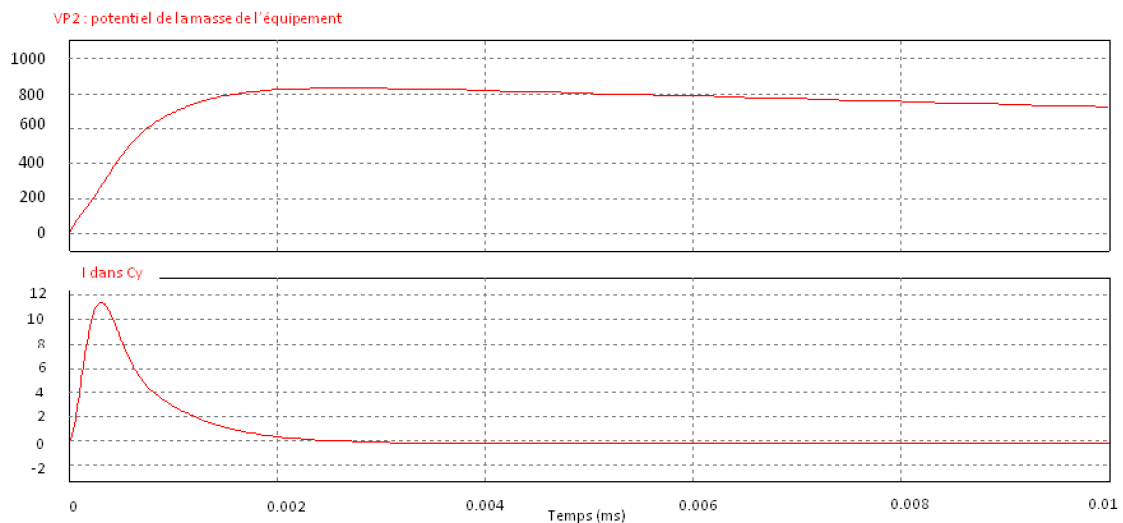


Fig. 19. Elévation transitoire du potentiel de la masse de l'équipement par rapport au neutre ou à la phase, courant dans les capacités Cy

Le tableau suivant permet de récapituler, en fonction du type d'équipement, le courant et la valeur de la capacité Cy.

Classe I : équipement dans un boîtier métallique		Class II : équipement à double isolation
Non portable	<18kg	
3,5 mA		0,75 mA
100 nF		22 nF

❖ Rayonnement électromagnétique incident

Dans ce cas, la boucle A, B, C, D (Fig. 20) est très importante et est susceptible de capter le champ



induit par la foudre ou tout autre rayonnement électromagnétique. Cette perturbation peut ensuite se traduire en tension de mode commun ( $V/foudre$ ), ou injection de courant perturbateur dans les câbles en entraînant le même type de perturbation que celui étudié précédemment.

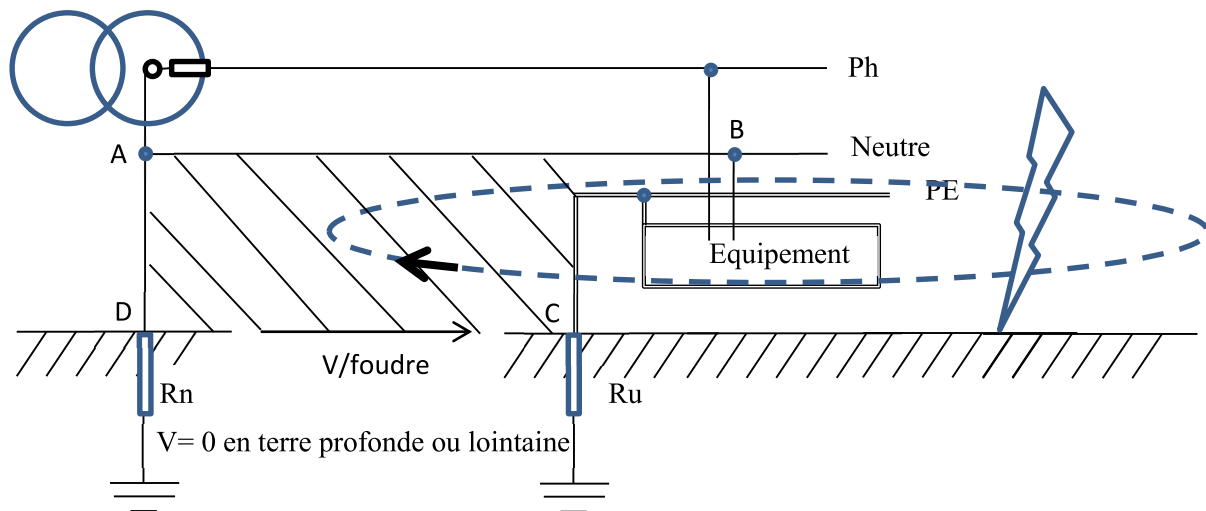


Fig. 20. Rayonnement induit dans la boucle ABCD suite à l'existence du canal de foudre

Dans ce cas il sera nécessaire d'évaluer la tension induite dans la boucle A, B, C, D par la circulation du courant de foudre dans un canal théorique de foudre localisé au point d'impact. Si les dimensions sont importantes il sera nécessaire de prendre en considération les phénomènes de propagation, mais la fréquence équivalente à l'onde de foudre étant de l'ordre de 400 kHz, la longueur d'onde dans l'air est de l'ordre de 750 m ce qui signifie que la longueur AB ne devrait pas dépasser 75 m environ si l'on veut s'affranchir de prendre en compte la propagation dans la modélisation.

❖ Si l'équipement est un convertisseur statique qui perturbe,

Dans le cas d'un filtrage insuffisant, le courant de mode commun, n'est plus confiné à l'intérieur de l'équipement et se reboucle par la terre, en utilisant le conducteur PE ou directement par les capacités parasites offertes par le boîtier en vis-à-vis de la terre. La boucle sollicitée A, B, C, D (Fig. 21) est comme nous l'avons vue très importante et la circulation de courants de mode commun est à l'origine de perturbations rayonnées particulièrement néfastes.

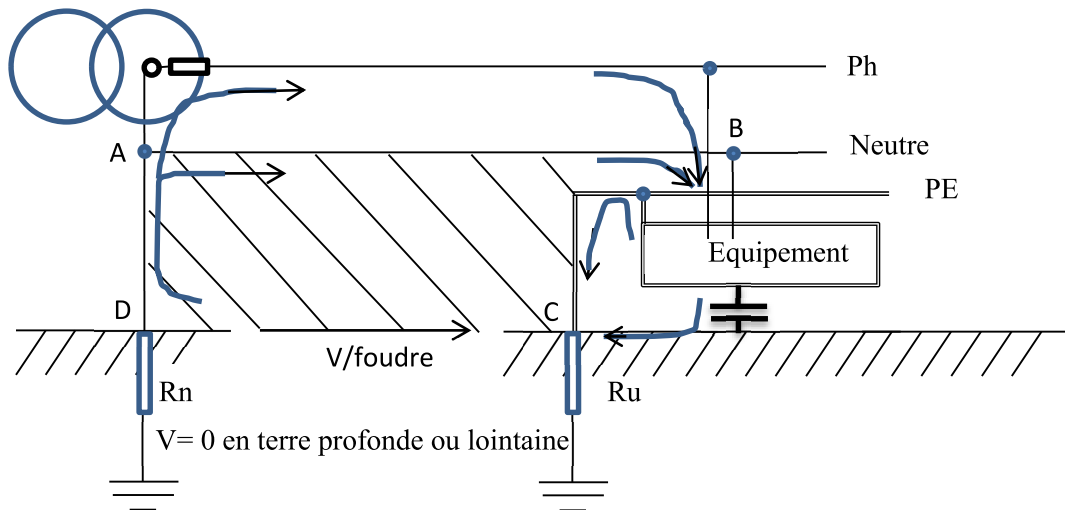


Fig. 21. Circulation des courants de mode commun générés par l'équipement d'électronique de puissance via le PE ou la terre directement

Remarque :

Nous aurons donc une compétition pour la circulation des courants de mode commun entre le conducteur PE et la capacité parasite de l'équipement vis-à-vis de la terre. Il est à noter que le conducteur PE est assez rapidement impédant en haute fréquence, alors que si l'équipement occupe une certaine surface, la capacité parasite avec la terre peut devenir assez vite importante et constituer ainsi un chemin privilégié d'écoulement des courants de mode commun.

- A travers ce nouvel exemple il est important de connaître le comportement de la terre puisqu'elle referme le circuit entre les points C et D.
- Par ailleurs il sera nécessaire de caractériser les capacités parasites de l'équipement avec la terre. Usuellement c'est une mesure qui se fait entre les bornes d'un équipement et un plan de cuivre situé en dessous si l'on souhaite des mesures reproductibles. On voit donc qu'en pratique, nous sommes très éloignés des situations livrées.

### 2.3.2 Régime de neutre TN

Le neutre du transformateur est relié à la terre. Toutes les masses des équipements sont reliées au neutre et donc à la terre via le conducteur de protection PE ou PEN suivant que le neutre et le PE sont distincts ou non. Deux variantes existent, selon que le neutre et le PE sont séparés ou communs. On nomme TN-S lorsqu'ils sont séparés (Fig. 22) et TN-C (Fig. 23) s'ils sont communs (le conducteur est alors appelé PEN) et enfin comble de complexité, TN-C-S lorsque l'on est dans une situation mixte où en aval d'un équipement, le neutre et le PE sont désormais séparés, (TN-C en amont et TN-S en aval).

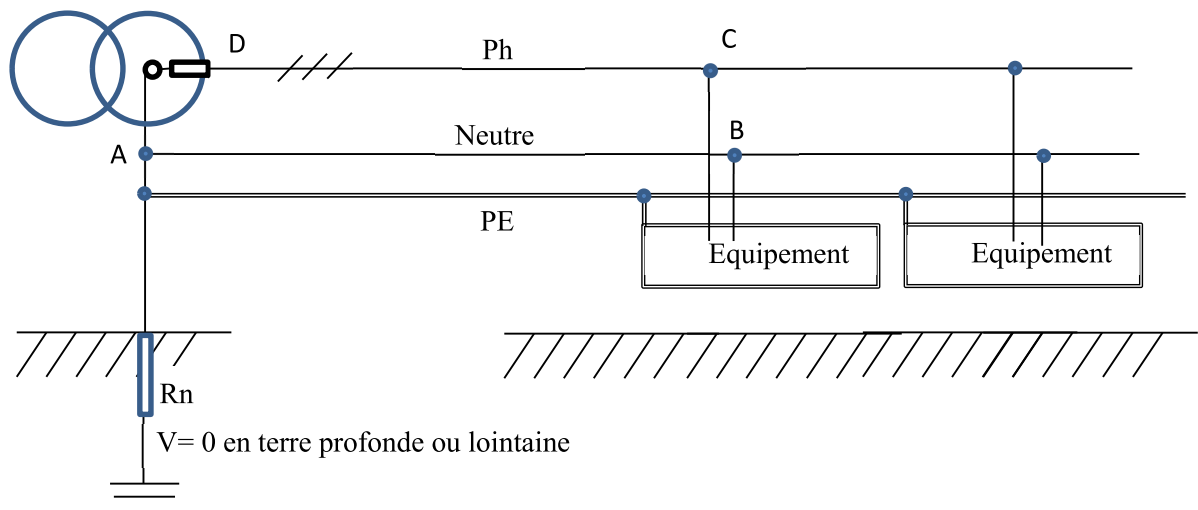


Fig. 22. Schéma de liaison à la terre de type TN-S

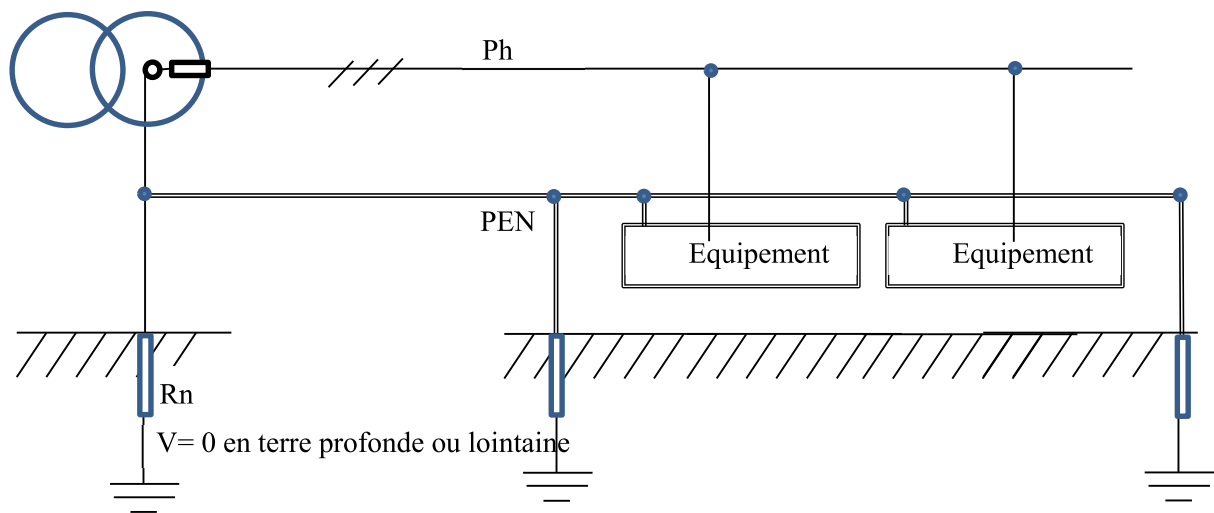


Fig. 23. Schéma de liaison à la terre de type TN-C

#### a. Aspect protection des personnes en cas défaut d'isolement

Le principe de ce schéma est de transformer tout défaut d'isolement en un court-circuit phase neutre qui sollicite les protections en surintensité. En effet en cas de défaut d'isolement, seule l'impédance des câbles phase-PE limite le courant de court-circuit et c'est bien le dispositif de protection contre les courts-circuits qui agit. Par ailleurs dans ce régime on montre facilement que la tension résiduelle (environ demi-tension simple) à laquelle est porté le boîtier reste dangereuse, il faudra donc prévoir une protection de DDR.

Dans ce cas de défaut le conducteur PE est soumis à une tension importante qui va provoquer des dysfonctionnements dans les transmissions de données entre deux équipements. De même le courant de défaut extrêmement intense circulant dans la boucle constituée par la phase et le PE, est susceptible de provoquer un rayonnement électromagnétique émis par la boucle A,B,C,D préjudiciable à l'environnement si le PE n'est pas très proche des conducteurs de phases.

Le TN-C est plus simple et surtout plus économique en terme de câblage que le TN-S, mais lorsque les

conducteurs sont de faible section (inférieure à  $10 \text{ mm}^2$ ) le Neutre et le PE doivent être séparés. Le TN-C permet d'économiser un pôle sur l'appareillage de coupure et d'un conducteur, mais accentue les risques d'incendie du fait des forts courants de défaut. Maintenir l'équipotentialité de la liaison PEN est parfois délicat et nécessite des mises à la terre fréquentes et des calculs d'impédance assez précis.

Lorsqu'on panache TN-C et TN-S, le TN-C doit être impérativement en amont.

### b. Aspects perturbations CEM

- ❖ Circulation de courant harmonique en triphasé dans le neutre

On remarquera que le régime TN-C peut provoquer des dysfonctionnements en triphasé, si des courants harmoniques doivent se reboucler par le Neutre (harmonique 3, notamment engendré par le phénomène de saturation des circuits magnétiques par exemple). En cas de régime TN-C, le PE confondu alors avec le neutre verra son équipotentialité affectée par le passage de ce courant.

- ❖ Choc de foudre

Lorsque la foudre frappe le sol à proximité de la prise de terre et dans le cas du TN-C où toutes les prises de terre du neutre sont interconnectées la montée de potentiel de l'ensemble du réseau de terre par rapport à la terre profonde est préjudiciable au bon fonctionnement des équipements. Généralement une liaison par parafoudre des systèmes entrant dans le bâtiment est impérative.

En TN-C une connexion **fréquente** à la terre du PEN permet de mieux garantir son équipotentialité. C'est ce que montre le schéma suivant (Fig. 24). Il sera également nécessaire de disposer de parafoudre en mode commun sur les équipements sensibles.

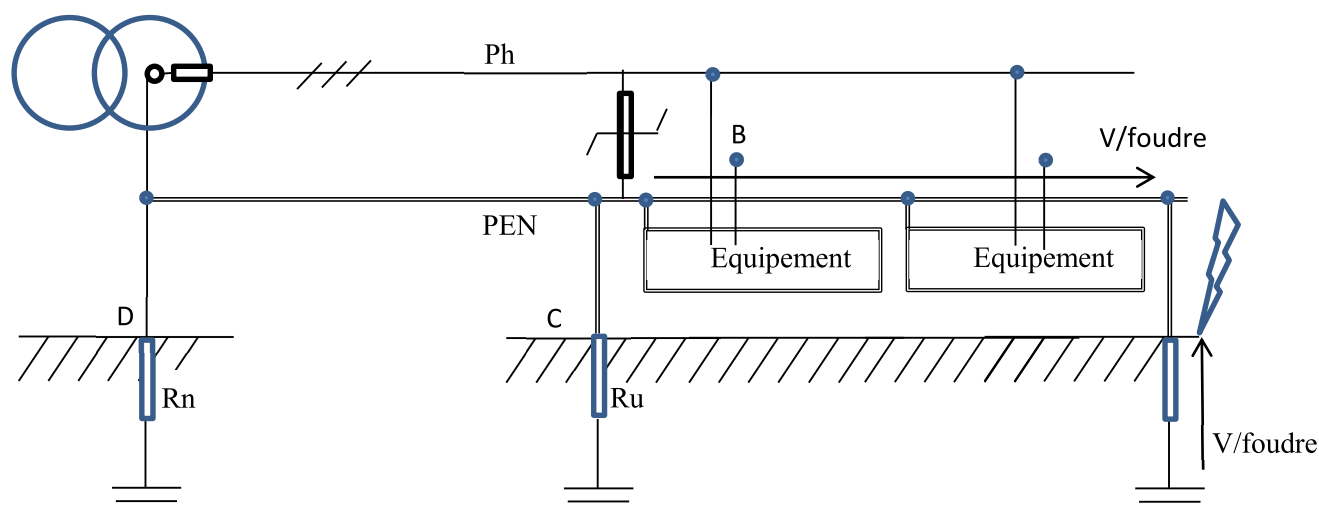


Fig. 24. Schéma de liaison à la terre de type TN-C, cas de l'agression foudre

Dans le cas du régime TN-S (Fig. 25), une agression foudre provoque la montée du potentiel de tout le réseau de masse PE. A priori pas de problème de fonctionnement électrique.

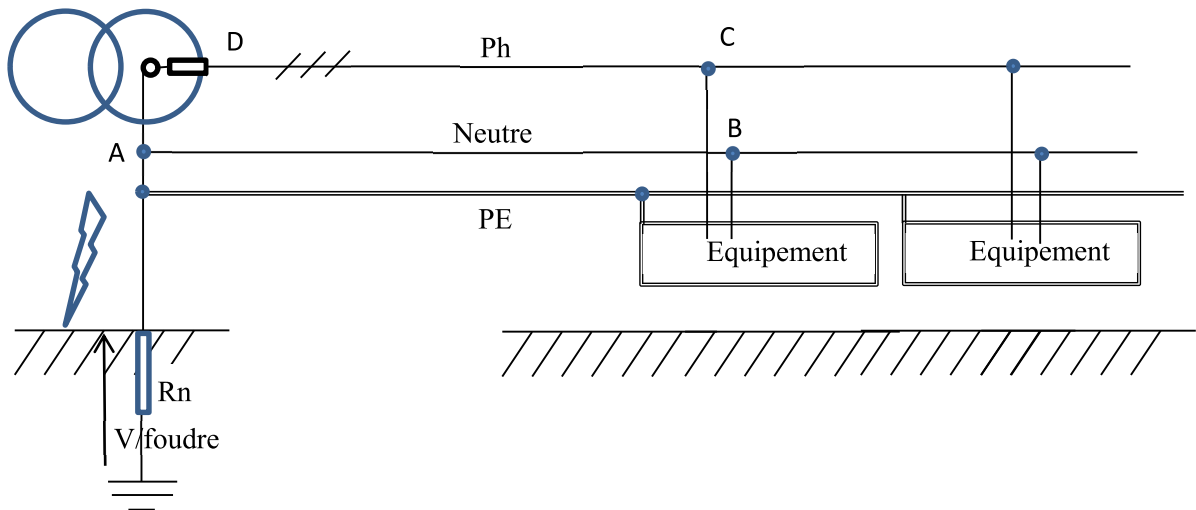


Fig. 25. Schéma de liaison à la terre de type TN-S, cas de l'agression foudre

- ❖ Dans le cas d'un rayonnement électromagnétique incident, dû à la foudre par exemple

Ce type de câblage peut être plus robuste à condition que le PE chemine bien à proximité des conducteurs de phase, rendant la boucle de captation très faible (régime TN sans prises de terre interconnectées-Fig. 25). En revanche l'éloignement de ces conducteurs de la terre est préjudiciable car la boucle A, B, C, D est très importante en entraînant le même type de perturbation que celui subi en régime TT. Enfin il faut impérativement éviter la présence de plusieurs prises de terre ce qui constitue une boucle supplémentaire de captation.

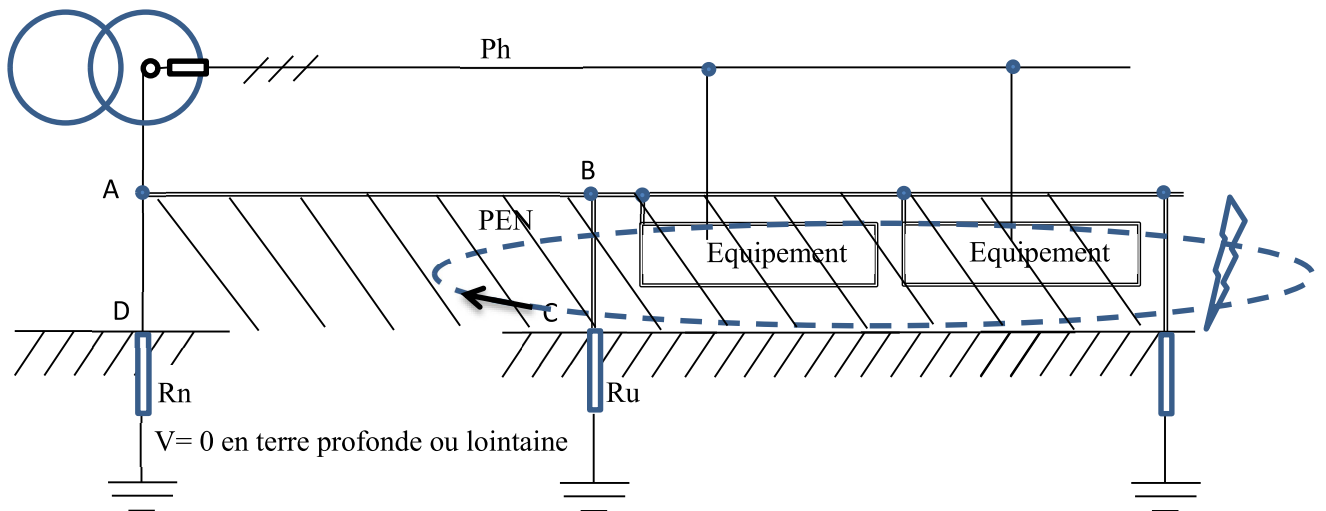


Fig. 26. Schéma de liaison à la terre de type TN-C, rayonnement électromagnétique incident

La présence de prises de terre qui permet de maintenir l'équipotentialité du PEN est un peu contradictoire avec le fait qu'une seule prise de terre évite la création d'une boucle de captation. Pour trancher cette question il sera nécessaire de modéliser et simuler la compétition entre les courants dans le PEN et la terre suite à un choc de foudre.

- ❖ Si l'équipement est un convertisseur statique qui perturbe

En cas de circulation de courants dans le PEN on sera exposé à des risques de rayonnement, c'est

aussi le cas en régime TT. La recommandation est de faire circuler les conducteurs ensemble dans un chemin de câble, celui-ci étant connecté à la terre le plus souvent possible. Typiquement on se trouve dans le cas que certains nomment mode commun filaire par opposition au vrai mode commun (Fig. 27).

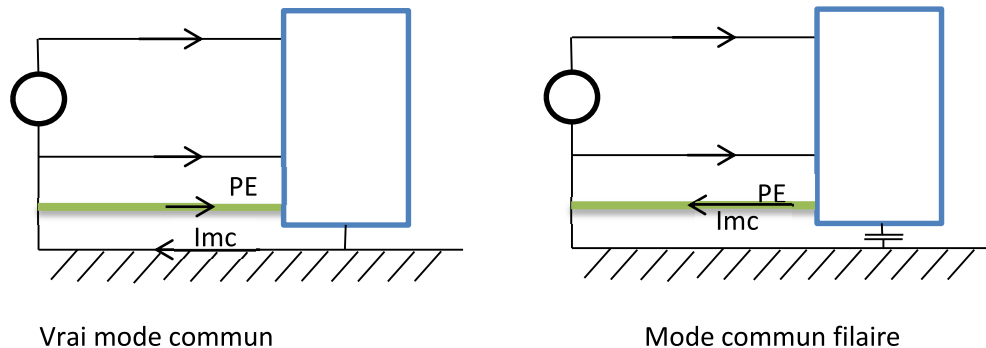


Fig. 27. Les deux modes commun selon certains auteurs

On va rencontrer une vraie compétition entre le conducteur PE de protection et la terre. En haute fréquence le conducteur PE en étant filaire peut présenter une impédance rapidement beaucoup plus grande si ce qui est symbolisé par la terre est par exemple un châssis métallique. Dans ce cas le courant de mode commun aura une propension à circuler à travers ce châssis métallique. Dans le cas où l'équipement a une enveloppe isolante et n'est donc connecté au sol qu'à travers une capacité parasite qui présente en basse fréquence une impédance grande facilitant alors le rebouclage du courant via le PE, il faudra connaître les impédances des conducteurs mais aussi et surtout les couplages entre conducteurs et les châssis et/ou la terre.

### 2.3.3 Régime de neutre IT

Ce régime de terre est particulièrement utilisé pour les installations dont la continuité de service est primordiale. Le neutre côté BT du transformateur est soit complètement isolé de la terre, soit relié à celle-ci via une impédance assez élevée (Neutre impédant :  $Z_N$ ). Par ailleurs toutes les masses de l'installation sont reliées à la terre suivant deux modes développés ci-après. On retrouve ce type d'installations en particulier pour les hôpitaux, les pistes d'aéroport, les mines, les bateaux, les industries où un arrêt est préjudiciable financièrement ou dangereux.

Il faut cependant se rappeler que l'apparente isolation des phases du réseau est toute théorique puisque chacune d'entre elles présente des capacités parasites avec la terre. De ce fait, pour un réseau dont la longueur serait d'un km, il est courant d'adopter une valeur  $Z_N$  de l'ordre de  $3400 \Omega$ .

Des situations différentes ensuite se présentent dans le cas de plusieurs équipements. Le premier cas est celui des masses interconnectées via le conducteur PE (Fig. 28), et le second où les masses ne le sont pas (Fig. 29), et dans ce dernier cas les masses sont directement reliées à la terre via la résistance de terre  $R_a$ ,  $R_b$ ,...

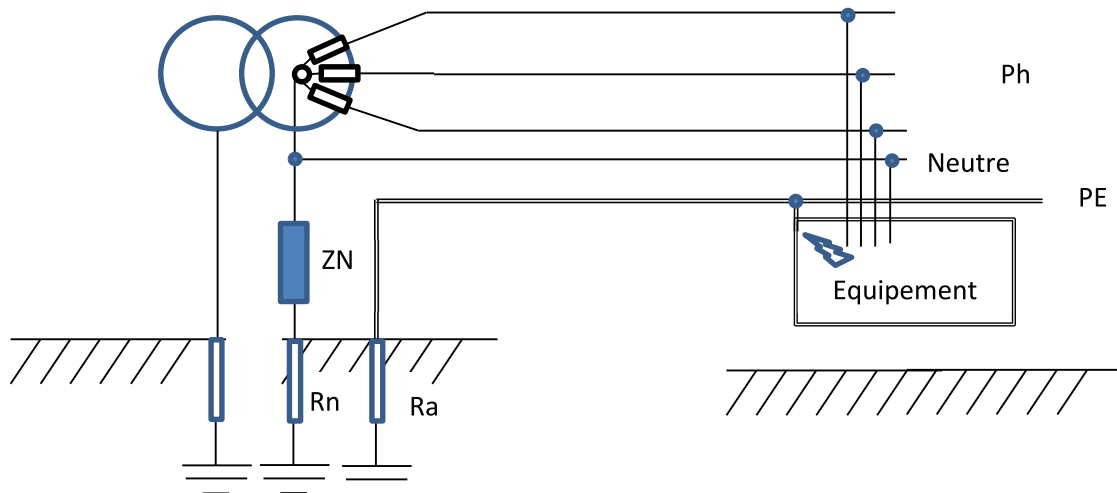


Fig. 28. Régime IT : masses interconnectées

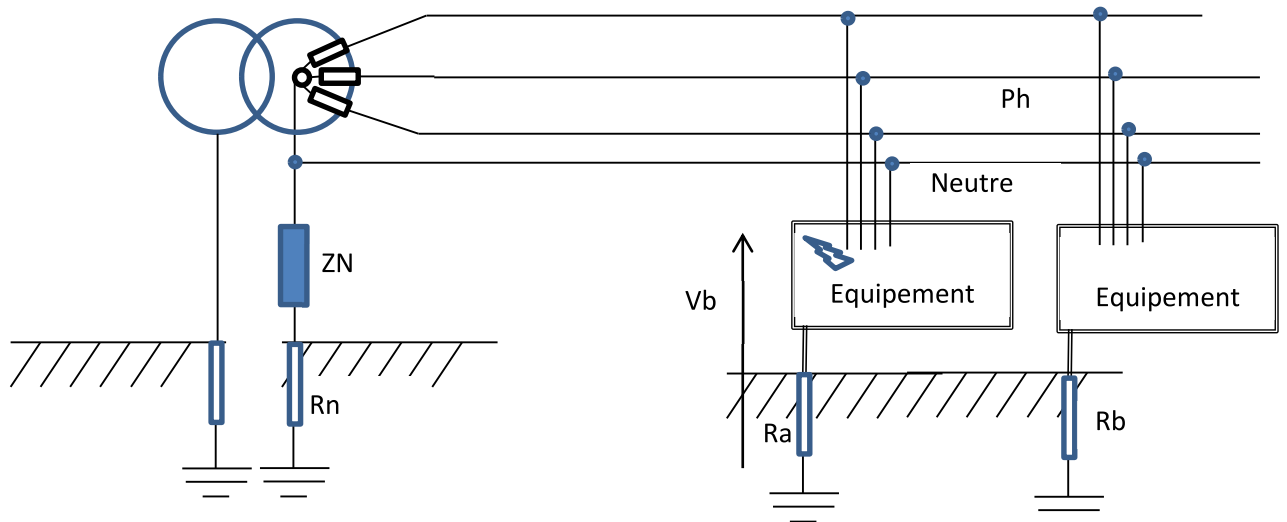


Fig. 29. Régime IT : masses non interconnectées

#### a. Aspect protection des personnes en cas défaut d'isolement

##### ❖ Apparition d'un défaut phase – boîtier

La tension simple se retrouve appliquée sur la somme des impédances  $ZN+Rn+Ra$  ce qui conduit à un courant faible qui ne dépend que des imperfections d'isolement des câbles vis-à-vis de la terre. La tension à laquelle est portée le boîtier s'exprime par  $Vb = V \frac{Ra}{Ra+Rn+ZN}$  et avec les ordres de grandeurs usuels, la tension à laquelle est portée le boîtier n'est pas dangereuse. En revanche, il est nécessaire d'éliminer ce défaut au plus vite sans quoi l'apparition d'un deuxième défaut provoquerait le fonctionnement des protections. Dans le cas de réseau particulièrement étendu (supérieurs à 10 km) ou de récepteurs présentant d'importants courants de fuite il sera nécessaire d'utiliser des transformateurs de séparation.

## b. Aspects perturbations CEM

### ❖ Choc de foudre au sol

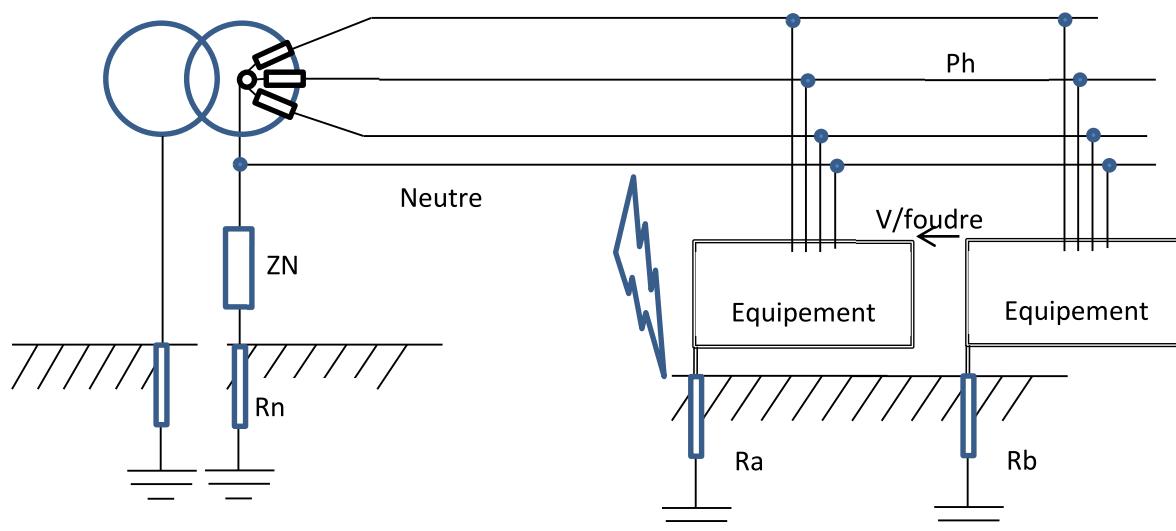


Fig. 30. Régime IT : Choc de foudre – masses non interconnectées

Dans le cas d'un régime IT avec masses non interconnectées (Fig. 30), l'élévation du potentiel de terre sera différente entre les diverses prises de terre et peut amener des claquages phase-masse pour les matériels. Il faudra donc disposer de parafoudres au plus près des équipements.

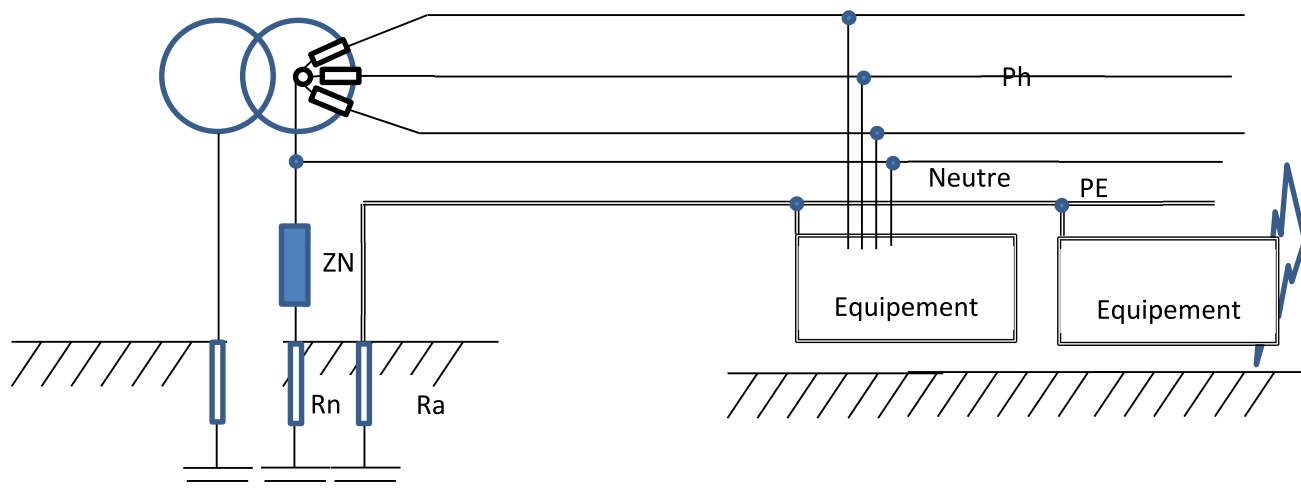


Fig. 31. Régime IT : Choc de foudre – masses interconnectées

Dans le cas d'un régime IT avec des masses interconnectées (Fig. 31), l'ensemble du réseau de masse verra son potentiel s'élever par rapport à la terre profonde, mais les phases et neutre étant isolés, on assistera à une situation de diviseur capacitif et il est néanmoins nécessaire d'utiliser des parafoudres pour les équipements sensibles.

### ❖ Dans le cas d'un rayonnement électromagnétique incident, dû à la foudre par exemple



Dans le cas de masses non interconnectées, on se retrouve dans l'exacte situation du régime TT avec une boucle de captation très conséquente.

Dans le cas de masses interconnectées à une prise de terre, le PE cheminant à proximité des conducteurs actifs, la boucle de captation est assez réduite.

❖ Si l'équipement est un convertisseur statique qui perturbe

Le schéma Fig. 32 représente les deux cas de figure :

- a) masses non interconnectées en trait plein pour le PE
- b) masses interconnectées, en pointillé

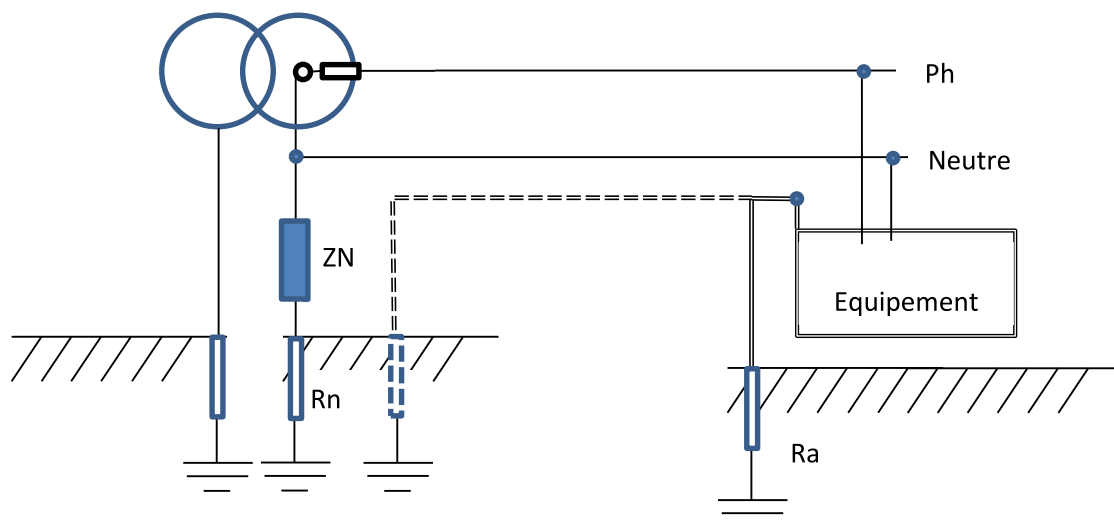


Fig. 32. Régime IT : masses interconnectées en pointillé – masses non interconnectées en trait plein sur le PE

Dans le cas des masses interconnectées, on se retrouve dans le cas du TN avec le mode commun filaire et le vrai mode commun.

En revanche dans le cas des masses non interconnectées, les courants de mode commun se rebouclent vers la source par la terre (boucle émettrice très importante) et par les masses des autres équipements (là aussi boucle très importante).

#### 2.3.4 Cas d'une structure métallique du bâtiment

Dans le cas d'un régime TT, a priori il n'y a pas de modification vis-à-vis des différentes agressions ; seule la valeur de résistance de la mise à la terre peut être différente.

Dans le cas du régime TN (Fig. 33), le courant de défaut peut alors s'écouler soit par le conducteur PE ou PEN mais aussi via les structures métalliques du bâtiment. Ces chemins sont en compétition, mais dans tous les cas ils embrassent une large section. Ici, il n'y pas de différence entre le TN-C et TN-S.

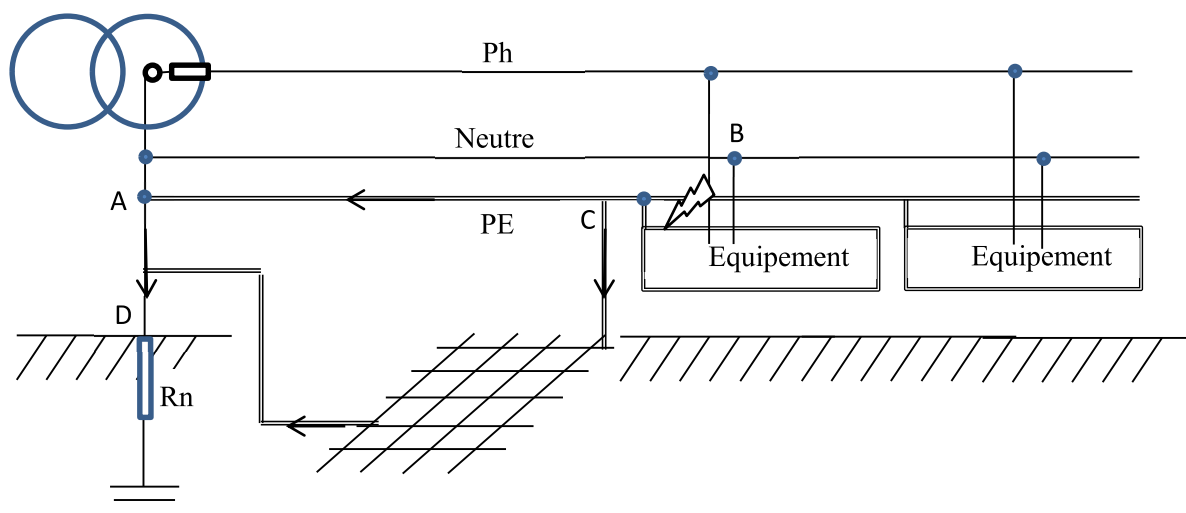


Fig. 33. Bâtiment possédant une masse métallique en régime TN

En régime IT, si les masses sont interconnectées on retrouve la situation du régime TT et dans le cas de masses non interconnectées, on se retrouve dans le cas du TN.

### 2.3.5 Première synthèse sur les régimes de neutre

Le choix du régime de neutre est dicté vis-à-vis de la protection des personnes par les conditions d'exploitation du réseau.

	Régime TT	Régime TN	Régime IT
Protection des personnes	DDR indispensable	Protection sur intensité + DDR	Au souci au premier défaut
Choc de foudre - conduction	Parafoudres indispensables car risque de destruction des capacités $C_y$ des équipements	Pas de problème de fonctionnement des équipements en TN-S Parafoudres indispensables en TN-C	Parafoudres indispensables car risque de destruction des capacités $C_y$ des équipements
Choc de foudre - rayonnement - rayonnement incident	Boucle de rayonnement importante BT- Equipement -Terre	Pas de boucle dans le cas TN à prises de terre non interconnectées	Grande boucle dans le cas de masses non interconnectées boucle très réduite dans le cas des masses interconnectées
Rayonnement convertisseur	Boucle de rayonnement importante BT- Equipement -Terre	Mode commun filaire et vrai mode commun Identification des chemins indispensable	Boucles rayonnantes assez importantes et à identifier dans le cas des masses non interconnectées Mode commun filaire et vrai mode commun masses interconnectées

En conclusion, la bibliographie [7] que nous avons pu faire sur les schémas de liaison à la terre grâce aux documentations techniques issues de consultants ou de praticiens jette les bases de la

connaissance des schémas de liaison à la terre et présente les avantages et inconvénients de chaque schéma vis-à-vis des défauts d'isolement ainsi que des chocs de foudre. On trouve aussi quelques développements sur les aspects CEM, impact d'un rayonnement incident en fonction du SLT concerné. Nous avons tenté de compléter cette approche en respectant cette démarche intéressante par exemple aux perturbations émises par les convertisseurs statiques. Nous avons également intégré dans cet état des lieux la possibilité pour les courants en haute fréquence de circuler par des chemins inattendus et dont la modélisation se complexifie rapidement.

Plusieurs constatations peuvent être faites à l'issue de cette étude.

- Il ne ressort aucune supériorité d'un schéma de liaison à la terre par rapport à un autre si l'on veut satisfaire à tous les items du tableau précédent à la fois,
- Cette étude qui se veut qualitative bute très vite sur des considérations de câblage dont le comportement en haute fréquence par exemple ne peut être abordé par des généralités. On sait dans ce domaine combien les ordres de grandeur sont difficiles à maîtriser d'une part d'un point de vue intuitif. D'autre part, la méconnaissance des approches « Partial Equivalent Electrical Circuit » ne permet justement pas de conclure comme on peut le voir trop souvent. L'affectation de caractéristiques électromagnétiques à une portion de circuit non fermée est indispensable pour permettre des approches de type circuit puissantes. Ces notions ne sont ni connues et encore moins maîtrisées y compris par les consultants.
- Enfin, on constate la multiplicité des cas particuliers de mise à la terre séparés, commune,... Très rapidement on se perd totalement et il est bien sûr indispensable pour conclure de recourir à une modélisation topologique des bâtiments pour prendre en considération les câblages réels dans leur environnement (béton, terre, goulottes métalliques,...) dans l'optique de calculer un schéma électromagnétique précis sur une large gamme de fréquence de surcroît.

Il faut retenir que les phénomènes en jeu ne se satisfont pas d'ordres de grandeurs approximatifs car ils sont difficiles à apprécier quantitativement et nous conduisent à préconiser une modélisation systématique des différentes situations de câblage. Celles-ci pourront ensuite faire l'objet d'optimisation.

#### **2.4 Etat de l'art des travaux concernant la mise à la terre des installations et la modélisation de la terre**

Il est intéressant à ce stade d'avoir une vision globale des problèmes de mise à la terre des installations bien qu'il y ait deux sujets distincts à traiter :

- L'aspect système impliquant une connaissance métier des techniques de mise à la terre et la conception des câblages qui réalisent par exemple les Schémas de Liaison à la Terre (SLT).
- Un deuxième aspect, indépendant du premier, concerne les techniques de modélisations de pieux, piquets, grilles de terre et toute sorte de conducteurs enfouis sous terre. Ainsi que toutes les méthodes de simulation qui ont été développées pour vérifier leur bon comportement en cas de choc de foudre par exemple.

Nous nous proposons de structurer ce chapitre de cette façon.

### 2.4.1 Les dispositifs de mise à la terre

La conception des prises de terre sont relativement empiriques comme le souligne P.G.Laurent [8], dans son excellent article qui fait une revue de l'état de l'art dans ce domaine. Les formules n'étant pas données dans le système MKSA, les coefficients numériques sont parfois inexploitable à moins de redécouvrir l'électromagnétisme en posant  $\epsilon_0 = 1$  ! Cette publication s'appuie sur l'article de Dwight « Calcul des résistances des prises de terre » décembre 1936 paru dans *Electrical Engineering*. L'article de P.G.Laurent est ensuite repris de façon plus concise par la publication H115 d'EDF « Principe de conception et de réalisation des mises à la terre » [9]. Ces deux articles sont très intéressants quoique datant des années 1950 et 1984, ils font un tour d'horizon assez complet sur le domaine des techniques de mise à la terre des installations. Les calculs théoriques ne sont pas conduits et renvoient souvent à une bibliographie de type universitaire explicitant les développements mathématiques. Ce sont surtout des publications à l'attention des ingénieurs qui doivent concevoir la protection des réseaux ou des bâtiments. On trouve beaucoup d'expressions empiriques sur les valeurs des résistances de terre de diverses configurations géométriques comme des plaques, disques circulaires, boucles circulaires, prise de terre à bras rayonnants (patte d'oie pour 2 bras), grille ou treillis métallique afin de favoriser les échanges avec la terre et d'abaisser ainsi la résistance de la prise de terre (Fig. 34).

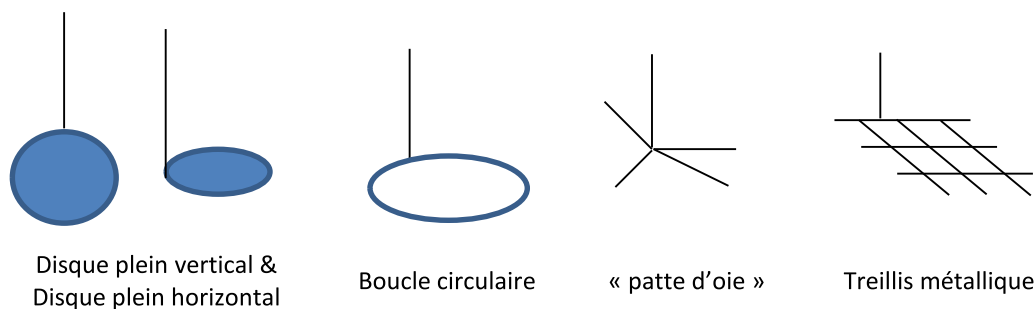


Fig. 34. Différentes géométries de prises de terre

Les expressions mathématiques de ces résistances sont données seulement en basse fréquence.

La méthode numérique que nous souhaitons mettre en place nous permettra de caractériser ces prises de terre cette fois sur une large bande de fréquence et surtout, ce qui est rarement possible simplement avec une vision circuit avec les approches traditionnellement utilisées dans la littérature, évaluer le couplage avec une conduite environnante ou un autre câblage à proximité et de géométrie complexe. C'est d'ailleurs surtout ce genre de situations non prévues qui vont conduire à des problèmes CEM !

### 2.4.2 Les méthodes de modélisation de la terre

#### a. Approche par circuit électrique et formulations analytiques

Le développement de méthodes de modélisation de la terre remonte à plusieurs décennies pour traiter le problème des retours de courant des postes électriques et des lignes aériennes. L'un des tous premiers travaux concernant la modélisation de la terre émane de Sunde entre 1930 et 1949, date de publication de son livre [10]. L'auteur parvient à représenter sous forme de schéma électrique simplifié R//C le comportement d'un pieu dans la terre grâce à des développements théoriques conséquents qui en font le fondateur de ces travaux. Des formules apparaissent pour des conducteurs enterrés dans une terre homogène ainsi que pour la prise en compte de l'interface air-

terre. Néanmoins, cette représentation sous forme de schéma électrique n'est pas utilisable à ce stade pour la simulation d'un système global et encore moins pour sa conception.

Par la suite, ces travaux ont été abondamment déclinés par d'autres auteurs pour aboutir à toutes sortes de géométrie de conducteurs. La modélisation à l'aide de circuits équivalents de géométries variées est poursuivie en introduisant une segmentation de la géométrie pour affiner la représentation physique des phénomènes locaux. En revanche cette approche reste au niveau de l'analyse sans déboucher sur une utilisation numérique des circuits électriques obtenus. Par ailleurs on ne dispose pas de mesure locale qui permette de confirmer la modélisation.

Cette méthode de discrétisation de la géométrie a été introduite par Meliopoulos en 1983 [11] pour une représentation circuit indépendamment de la fréquence qui repose sur la résolution de l'équation de Laplace. Une amélioration a été apportée plus tard dans [12] pour la prise en compte de la fréquence dans les modèles. La capacité et l'inductance sont déterminées à partir de la résistance en utilisant la méthode MTL.

Pour le passage à une grille, une représentation en circuit équivalent après segmentation est faite par Ramamoorthy en 1989 [13]. Dans leur travail, les auteurs ont négligé l'aspect capacitif ainsi que les couplages entre les différents segments.

La prise en compte de l'ionisation pour le cas de la représentation circuit a été introduite par A.Géri [14] et [15] basé sur les travaux de Meliopoulos [11] et [12].

Cette méthode offre beaucoup de flexibilité car elle permet d'accéder aux grandeurs locales (courant et potentiel) en tout point de la géométrie. L'utilisation de circuits électriques ne permet pas de prendre en compte le retard due à la propagation.

### *b. Méthode électromagnétique*

C'est la méthode la plus rigoureuse pour la résolution des équations de Maxwell. En partant des équations de Maxwell sous leur forme différentielle, la résolution du problème sera faite par l'une des deux méthodes : la méthode des moments ou la méthode des éléments finis.

#### ❖ Méthode des moments

C'est une technique de résolution d'équations fonctionnelles, développée par Harrington pour déterminer la distribution de courant sur des antennes. Cette technique permet de résoudre les équations électromagnétiques en les transformant en un système d'équations (système matriciel), en segmentant le problème.

Cette méthode des moments a été initiée par Harrington en 1968 [16] et l'application de cette méthode pour les problèmes de modélisation de la terre a été développée par Grcev et Dawalibi et présentée dans [17][18] [19].

Le principe de cette méthode repose sur la conversion des équations intégrales en un système linéaire d'équations où la résolution est faite par inversions de matrices.

#### ❖ Méthode des éléments finis

Dans leurs travaux, Silva [20] et Sarajčev [21] présentent l'utilisation de la méthode des éléments

finis pour la modélisation de la terre et de l'interface air-terre.

Elle repose bien entendu sur un maillage du dispositif à modéliser et des conditions aux limites aux bornes du domaine ainsi défini dont la définition suppose parfois des hypothèses fortes et peut donc conduire à des problèmes trop gros à résoudre ou des hypothèses trop contraignantes à formuler.

Elle est très rigoureuse mais ne donne accès qu'aux champs simplement. Même s'il est possible ensuite en post traitement de déterminer des courants et des potentiels, l'obtention d'un schéma électrique équivalent complet du dispositif est non immédiate et parfois complexe. Seul l'accès à une impédance globale est disponible et constitue une limitation très difficile voire impossible à dépasser.

De ce fait, elle ne répond pas du tout aux objectifs que nous nous sommes fixés permettant d'accéder à la contribution d'une partie du dispositif de mise à la terre lors d'un défaut par exemple sous forme d'un schéma électrique équivalent.

### *c. Méthode des lignes de transmission*

Cette approche consiste à modéliser un conducteur dans la terre comme une ligne de transmission. Dans leur travail [22], Mukhedkar et Verma ont modélisé un conducteur horizontal en utilisant cette approche. Le conducteur a été segmenté et chaque segment a été modélisé par un schéma équivalent en  $\pi$ . Une fois tous les paramètres RLCG déterminés, la solution des équations de télégraphistes, pour le cas d'une ligne de transmission ouverte, donne l'impédance équivalente du pieu, la tension et le courant en chaque point du conducteur.

Mais cette approche n'est pas bien adaptée pour la modélisation des systèmes de terre car elle ne permet pas de prendre en compte les effets de bord et des géométries complexes réellement 3D dont l'hypothèse TEM n'est plus assurée, comme c'est le cas par exemple pour un pieu vertical.

Dans un autre travail [23], la modélisation du problème a été résolue en considérant une ligne de transmission non uniforme. Cette modification sur le principe de la ligne de transmission permet de prendre en compte la longueur finie des conducteurs et certaines ruptures d'impédance, mais n'est pas suffisamment générale pour les géométries que l'on souhaite traiter.

### *d. Prise en compte de l'interface*

La présence de l'interface air-terre modifie la distribution du champ et à plus longue échéance la prise en compte éventuelle de couches de terre n'ayant pas les mêmes propriétés surtout en terme de résistivité.

La méthode qui naturellement s'applique pour prendre en compte le changement de milieu est la méthode des images [5]. Elle a été utilisée dans plusieurs travaux de modélisation pour une simplification du calcul analytique des paramètres comme dans [24], [25], [26], [27].

Nous en discuterons plus largement lors de son utilisation dans ces travaux.

### *e. Mises en œuvre*

Les trois méthodes précédemment présentées peuvent être combinées pour bénéficier de l'avantage

de chacune d'elles. Plusieurs techniques sont présentées dans la bibliographie, citons-en quelques-unes.

L'utilisation d'une approche circuit, dans le domaine de l'électronique de puissance offre une flexibilité sur l'élaboration d'une modélisation complète d'un réseau incluant des charges. Dans cette optique, il peut s'avérer intéressant d'utiliser les avantages de chacune des méthodes précédemment présentées en les combinant judicieusement.

Tout d'abord, des couplages sont évalués avec précision à partir d'une mise en œuvre des équations électromagnétiques. Pour pouvoir exprimer sous forme de circuits les couplages calculés, l'utilisation de la propriété de conservation des charges est mise en œuvre. Ceci consiste à considérer continue la densité de courant entre les segments adjacents. L'hybridation de la méthode est ainsi faite. Cette approche assure un bon équilibre entre la précision et l'efficacité du code de calcul [28].

Cette méthode apparaît dans [29], et plus tard dans [30] où les auteurs calculent séparément le potentiel vecteur magnétique et le potentiel scalaire.

Une autre méthode de résolution du problème [31] consiste à déterminer la fonction de transfert du système de terre puis à l'implanter dans un logiciel de type circuit afin d'établir la réponse temporelle du dispositif étudiée suite à une agression identifiée. Dans ces travaux, seules les grandeurs globales sont calculées.

Dans un autre type d'approche, un couplage entre les méthodes de type ligne de transmission et méthodes électromagnétiques est fait. Dans [12], l'auteur propose de déterminer les paramètres du conducteur enterré en utilisant la méthode des éléments finis, puis une implantation des grandeurs linéiques dans la ligne de transmission permet de calculer la distribution sur la configuration. L'inconvénient de cette méthode, est qu'elle ne peut pas être appliquée dans n'importe quelle situation car les effets de bord ne sont pas pris en compte. Dans d'autres études, on montre la nécessité de prendre en compte les effets de bord dans [23].

Pour la modélisation d'un conducteur en présence de la terre, Viscaro dans son travail [28] fait le découplage entre l'effet inductif et l'effet de conduction. La fonction de Green avec le retard permet de prendre en compte la propagation.

Avec cette méthode, basée sur l'approche électromagnétique, le système est discrétisé en segments couplés entre eux [30], ainsi la prise en compte de la dépendance fréquentielle est faisable [32].

Outre des travaux présentant les différentes approches et utilisations des méthodes citées précédemment, on pourra noter l'existence de logiciels permettant l'étude des réseaux de terre comme *TRAGSYS* [33] de Grcev ou *MultiField* de Dawalibi qu'on trouve dans la suite *CDEGS* [34]. Ces deux logiciels résolvent les équations du champ déterminé pour un milieu conducteur. Ensuite la résolution sera faite par la méthode moments [35]

On peut citer aussi *TOTBEM* [36] qui permet de faire le calcul de la distribution du potentiel sur le milieu entourant une grille alimentée par un courant, mais ne permet pas d'obtenir un circuit équivalent pour une exploitation du modèle.

Malheureusement dès qu'il s'agit de logiciels commerciaux, il est très difficile de les évaluer à des fins de recherche car impossible de rentrer dans le code.



### 2.4.3 Synthèse et conclusion

La phase bibliographique que nous avons menée lors du démarrage de cette thèse a mis en évidence de nombreux travaux autour de la problématique que nous avons à savoir comprendre la propagation des perturbations engendrées par les convertisseurs d'électronique de puissance raccordés au réseau du bâtiment. L'objectif final étant bien sûr de proposer des parades vis-à-vis de ces perturbations dont l'importance va aller grandissante dans les années à venir avec l'électrification galopante des bâtiments. La protection contre la foudre reste aussi une préoccupation très importante lors de sa conception.

Au début de ce travail nous espérions pouvoir rapidement mettre en œuvre des modèles de « terre » pour traiter rapidement notre sujet qui implique de maîtriser les modèles de beaucoup d'autres composants comme les transformateurs de distribution, les lignes ou câbles, les convertisseurs,... et tout ceci en mode différentiel et mode commun. Nous pensions que tout avait déjà été fait dans ce domaine. Mais rien en fait n'était utilisable dans notre optique. Notre constat a été tel que nous avons dû réorienter rapidement nos travaux de thèse en vue d'acquérir les compétences nécessaires dans le domaine de la modélisation des conducteurs enterrés.

De très nombreuses méthodes sont existantes mais la plupart du temps, les auteurs se sont cantonnés à traiter des cas d'école sur des géométries simplistes, dans des gammes de fréquences réduites et même si parfois des modèles électriques sont proposés, ils ne sont pas intégrables pour la simulation d'un système impliquant de nombreux composants électrotechniques. A ce stade on ne parle même pas de la possibilité de faire de la conception, c'est-à-dire des démarches qui impliquent des processus d'optimisation.

Les publications décrivent les phénomènes de base et leur modélisation grâce chaque fois à une méthode différente, mais quid de leur robustesse dans le traitement de cas très complexes comme ceux que nous avons à traiter. Devant ce constat d'échec il a fallu se résoudre à repartir de la base, grâce à une approche analytique de la résolution de l'équation de Poisson. Notre expérience dans le domaine de la modélisation des phénomènes magnétiques dans les systèmes hétérogènes (composants passifs, convertisseurs d'électronique de puissance, câblages,...) et de géométrie 3D complexes a été un vrai fil conducteur qui nous a permis de proposer une démarche en tout point analogue à la philosophie PEEC dont on connaissait sa robustesse à traiter des problèmes industriels complexes. L'aboutissement à un code commercial InCa3D est une preuve de l'efficacité de cette approche et en terme d'analyse et de conception de système. Quand nous avons observé la similitude des formulations nous savions que nous étions sur la bonne piste et que nous arriverions à une méthode utilisable pour des systèmes qui dépassent largement le cas d'école !

Chemin faisant, nous avons été amenés à développer des formulations analytiques ou analytico-numériques entièrement nouvelles (aucune trace dans l'abondante bibliographie que nous avons parcourue depuis 1930) et d'une grande puissance. C'est cette démarche entièrement novatrice que nous allons développer au cours de ce travail.

Heureusement, nous avons pu vérifier les modèles issus de notre approche avec des références bibliographiques mais dont la plupart ne sont pas corroborés par des mesures. De nombreuses études paramétriques ont été nécessaires pour mieux comprendre les phénomènes auxquels nous avons affaire et des pistes se sont révélées infructueuses mais nous avons cependant voulu en rendre compte ici de manière à les clore définitivement.



Nous avons dû aussi acquérir une compétence expérimentale dans ce domaine nouveau pour nous et d'une certaine difficulté.

# Chapitre 3 : Approche phénoménologique

### 3 Approche phénoménologique

#### 3.1 Conduction dans la terre

La terre est un milieu conducteur, de résistivité équivalente allant de 10  $\Omega\text{m}$  à 1000  $\Omega\text{m}$  voire plus dans des terrains très rocailloux. Cette propriété physique permet d'utiliser ce milieu comme un élément de conduction naturelle de liaison entre plusieurs sources distantes. Malgré sa résistivité qui demeure grande, le volume qui rentre en jeu peut facilement transformer ce conducteur de résistivité médiocre en un « bon » conducteur.

Considérons le cas simple d'une injection ponctuelle de courant continu  $I$  à la surface de la terre représentée Fig. 35.<sup>1</sup>

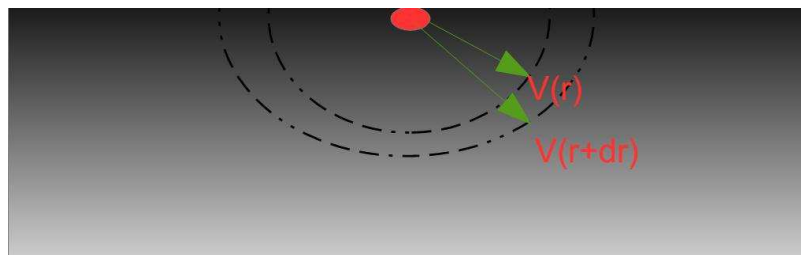


Fig. 35. Evolution du potentiel de terre lié à une injection ponctuelle

Suite à cette injection ponctuelle de courant, il y aura élévation du potentiel dans la terre avec des équipotentielles de forme demi-sphérique. Plus le rayon de la sphère tend vers l'infini, plus la tension, référencée à l'infini, tend vers zéro.

Avec l'hypothèse que le potentiel est nul à l'infini, le courant s'écoule radialement à partir du point d'injection en raison de la symétrie du problème.

On est donc en présence d'un volume parcouru par un courant et soumis à une différence de potentiel. En supposant le matériau de ce volume uniforme et de résistivité  $\rho$ , la résistance est donc définie par :

$$R = \frac{\rho L}{S} \quad (\text{eq. 1})$$

Où  $L$  : est la longueur du conducteur.

$S$  : est la section de passage des courants, normaux à cette surface.

Dans le cas d'une épaisseur  $dr$  d'une couche demi-sphérique de terre de rayon  $r$  (Fig. 35), la résistance est donnée par :

$$L = dr \quad dR(r) = \frac{\rho dr}{2\pi r^2} \quad (\text{eq. 2})$$

$S = 2\pi r^2$  (surface d'une demie sphère)

La tension aux bornes de cette couche est donc déterminée par :

<sup>1</sup> C'est un cas réel rencontré lors d'un choc de foudre, où l'on considère que le courant « remonte » ou « redescend » plus loin sous le nuage réalisant bien ainsi une boucle fermée. Mais il n'est nullement nécessaire de se préoccuper de cet aspect dans la modélisation.

$$dV = \int_r^{r+dr} \frac{I \rho}{2 \pi r^2} dr \quad (\text{eq. 3})$$

$$V(r) - V(r + dr) = I \frac{\rho}{2 \pi} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r + dr} \right) \quad (\text{eq. 4})$$

Cette expression nous permet de déterminer la tension entre deux points de la surface de la terre ou du sous-sol dans l'hypothèse d'un courant radial issu du point d'injection et donc normal aux demi-sphères équipotentielles.

Remarque : Cette formule très simple permet de retrouver facilement la notion de tension de pas liée à la circulation d'un courant de foudre s'évacuant dans la terre. C'est cette tension qui est à l'origine de l'électrocution des bovins dans les prairies en cas d'orage. Plus le sol est résistif plus la tension sera élevée et donc potentiellement dangereuse.

La tension en un point M à la distance r du point d'injection référencée par rapport à l'infini s'exprime donc par la formule suivante :

$$V(r) = \int_r^{\infty} \frac{I \rho}{2 \pi r^2} dr = \frac{I \rho}{2 \pi r} \quad (\text{eq. 5})$$

De cette dernière formule on peut connaître la tension entre un point de la terre et l'infini ainsi que la résistance équivalente entre ce point et l'infini par lequel se referme le courant.

$$R(r) = \frac{\rho}{2 \pi r} \quad (\text{eq. 6})$$

Remarque : cette dernière formulation diverge si l'on veut atteindre le potentiel du point d'injection du courant, c'est une situation singulière que l'on rencontre très classiquement dans ces approches.

### 3.2 Cas de 2 points d'injection.

#### 3.2.1 Expression de la tension en un point M

Prenons à présent le cas d'une injection entre deux points (1&2) et exprimons le potentiel en un point (M) quelconque en supposant ce dernier aligné avec les deux autres (Fig. 36). Le calcul en un point quelconque de l'espace est plus complexe et ne remet pas en cause notre démarche.

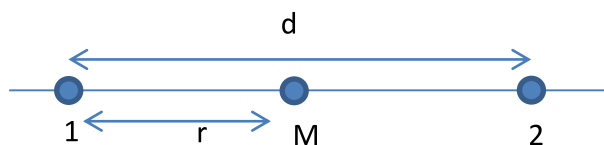


Fig. 36. Courant circulant entre 1 & 2, tension en M

De la même manière que précédemment on calcule séparément les contributions de l'injection de courant I1 en 1 et I2 en 2 sur le point M. Cette physique étant linéaire, il est possible d'utiliser le théorème de superposition.

La tension créée par 1 sur le point M :

$$V_{1M} = \int_r^{\infty} \frac{I1 \rho}{2 \pi r^2} dr = \frac{I1 \rho}{2 \pi r} \quad (\text{eq. 7})$$

La tension créée par 2 sur M :

$$V_{2M} = \int_{d-r}^{\infty} \frac{I_2 \rho}{2 \pi r^2} dr = \frac{I_2 \rho}{2 \pi (d - r)} \quad (\text{eq. 8})$$

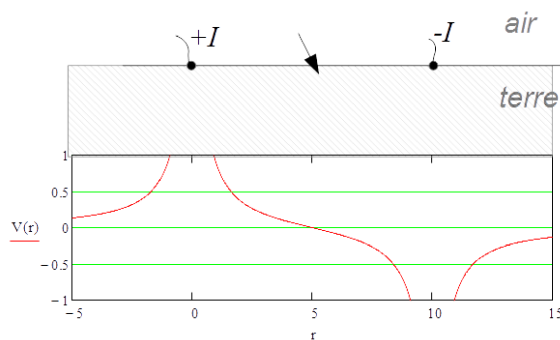
L'élévation de potentiel du point M est la somme des deux contributions :

$$V_M = V_{1M} + V_{2M} = \frac{I_1 \rho}{2 \pi r} + \frac{I_2 \rho}{2 \pi (d - r)} \quad (\text{eq. 9})$$

Dans le cas particulier où  $I_1 = -I_2 = I$  :

$$V_M = \frac{I \rho}{2 \pi} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{d - r} \right) \quad (\text{eq. 10})$$

Fig. 37, l'évolution de cette tension est tracée en fonction de la position du point M se déplaçant sur l'axe formé par les points d'injection. On vérifie que si le point M est équidistant de 1 et 2, la tension est nulle.



$$V(r) = \frac{I \rho}{2 \pi} \left[ \begin{array}{l} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{d - r} \right) \text{ si } 0 < r < d \\ \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r - d} \right) \text{ si } r < 0 \\ \left( \frac{-1}{r} - \frac{1}{d - r} \right) \text{ si } r > d \end{array} \right] \quad (\text{eq. 11})$$

Fig. 37. Distribution de potentiel entre deux points

### 3.2.2 Notion de résistance propre et mutuelle

Considérons une petite sphère de rayon  $r_0$  autour de chacun des points d'injection afin d'évaluer le potentiel à proximité de ceux-ci. On rappelle que l'expression précédente diverge sur le point d'injection, ce qui est lié à l'approche ponctuelle.

Si on exprime par  $V_1$  (resp.  $V_2$ ), l'élévation de potentiel par rapport à l'infini sur la petite sphère  $r_0$  autour du point d'injection 1 (resp. 2) due aux courants  $I_1$  et  $I_2$ , on obtient l'expression suivante :

$$V_1 = \frac{\rho}{2 \pi r_0} I_1 + \frac{\rho}{2 \pi (d - r_0)} I_2$$

$$V_2 = \frac{\rho}{2 \pi (d - r_0)} I_1 + \frac{\rho}{2 \pi r_0} I_2$$

De ces expressions, on peut définir une résistance propre ( $R_p$ ) qui donne l'élévation de potentiel au point d'injection sur lui-même (dans sa proximité immédiate) et une résistance mutuelle ( $R_m$ ) qui

donne l'élévation de potentiel due à l'autre point d'injection (Fig. 38).

On peut écrire le système matriciel suivant :  $\begin{pmatrix} V1 \\ V2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Rp & Rm \\ Rm & Rp \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I1 \\ I2 \end{pmatrix}$

avec  $Rp = \frac{\rho}{2\pi ro}$  et  $Rm = \frac{\rho}{2\pi(d-ro)}$

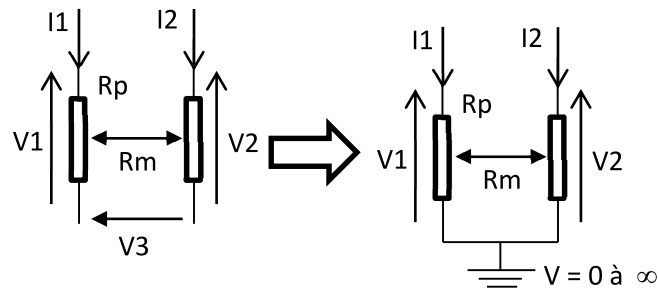


Fig. 38. Couplage entre les points d'injection

On pourrait définir un coupleur qui fonctionne de la même façon que deux inductances couplées, puisque les équations sont les mêmes :

$$\begin{pmatrix} V1 \\ V2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Lp & Lm \\ Lm & Lp \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I1 \\ I2 \end{pmatrix}$$

Malheureusement ce type de coupleur n'existe pas dans des simulateurs de type Spice. Dans ce cas une tension V3 doit être considérée entre les deux branches, car le couplage ne définit que le rapport entre la branche 1 et la branche 2.

Il est donc nécessaire de trouver un autre type de représentation. Plusieurs constats sont nécessaires :

- seule l'impédance vue entre l'extrémité des deux pieux peut être mesurée. Tout modèle électrique qui fournit la même réponse sur une large gamme de fréquence (si on souhaite s'intéresser au comportement en fréquence) est éligible. Il en existe un grand nombre voire une infinité si l'on ne rajoute pas des critères supplémentaires.
- pour résoudre le problème analytiquement, on a considéré la tension de la terre profonde ou lointaine nulle. De ce fait on peut prendre l'hypothèse de  $V3 = 0$ .

Il reste 2 potentiels indépendants soit  $2 \times 3/2$  soit 3 termes indépendants, il faut donc 3 résistances au minimum pour représenter ce comportement.

Plusieurs schémas électriques peuvent être proposés pour représenter cette situation.

L'un proposé par [9] est représenté sur la Fig. 39.

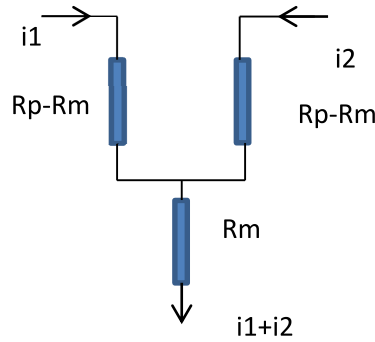


Fig. 39. Schéma à base de résistances

Nous avons préféré proposer un autre schéma qui nous a paru beaucoup plus proche de ceux que l'on peut trouver pour représenter les capacités parasites des lignes multiconducteurs. On retrouve l'analogie avec les définitions des capacités parasites et des coefficients d'influence. Ce choix nous a amenés à la notion de conductance. Avec un schéma en  $\pi$  justifié par la présence de grandeurs propres ( $g_1$  et  $g_2$ ) et d'une grandeur  $g_{12}$  représentant une notion de couplage entre les deux points d'injection, on peut aisément obtenir des équations d'identification suivantes (Fig. 40).

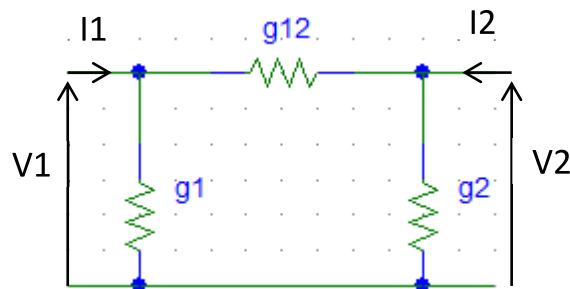


Fig. 40. Schéma à base de conductances

De ce schéma on tire facilement que :

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1 + g_{12} & -g_{12} \\ -g_{12} & g_2 + g_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix}$$

Les éléments « conductance » se définissent comme suit :  $[I] = [R]^{-1} * [V]$

Plus explicitement l'identification dans notre cas particulier conduit aux expressions suivantes :

$$\begin{cases} g_1 = g_2 = \frac{1}{R_p + R_m} \\ g_{12} = \frac{R_m}{R_p^2 - R_m^2} \end{cases}$$

En revanche, pour effectuer une simulation sous un logiciel de type SPICE, il sera alors nécessaire de décrire le même schéma électrique que celui de la Fig. 40 en remplaçant les conductances par des résistances dont la valeur sera l'inverse de chaque conductance (Fig. 41).

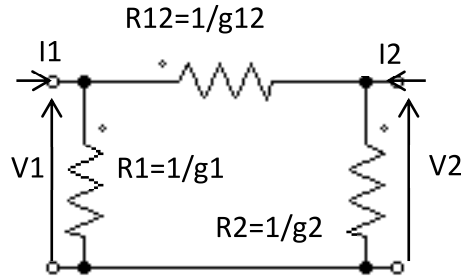


Fig. 41. Schéma à base de conductances – description dans SPICE

D'autres schémas électriques peuvent être proposés, en fait leur nombre est infini surtout si l'on augmente le nombre de composants passifs. Néanmoins celui qu'on présente a l'avantage d'être très facilement généralisable à une multitude de points d'injection, alors que d'autres seraient moins facilement généralisables (au moins visuellement !). De ce fait la notion de résistance propre ou mutuelle reste toute relative. Celle que nous avons adoptée arbitrairement permet facilement d'exprimer l'élévation de potentiel de chaque point par rapport à la « terre lointaine » et d'avoir un couplage avec chaque autre point envisagé.

### 3.3 Mesure de résistivité – méthode de Wenner

#### 3.3.1 Configuration

Considérons une boucle d'injection (1 & 4) et une boucle de mesure (2 & 3) comme sur Fig. 42.

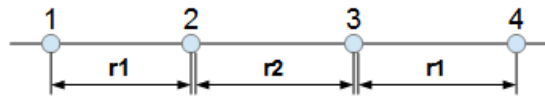


Fig. 42. Injection dans 1 & 4, tension en 2 & 3

De la même manière que précédemment, on applique (eq. 10) pour obtenir la tension entre 2 et 3.

$$V_2 = \frac{I \rho}{2 \pi} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2 + r_1} \right) \quad (\text{eq. 12})$$

$$V_3 = \frac{I \rho}{2 \pi} \left( \frac{1}{r_1 + r_2} - \frac{1}{r_1} \right) \quad (\text{eq. 13})$$

$$V_{23} = V_2 - V_3 = \frac{I \rho}{\pi} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2 + r_1} \right) \quad (\text{eq. 14})$$

La tension  $V_{23}$  est une fraction de la tension qu'on applique sur les points d'injection et fait ici aussi apparaître la notion de couplage entre les deux boucles ainsi formées. Ce couplage apparaît comme un couplage résistif reprenant la notion de résistance mutuelle.

Elle est définie comme le ratio entre la tension créée et le courant injecté.



On peut aussi utiliser la représentation matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} V1 \\ V2 \\ V3 \\ V4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R11 & R12 & R13 & R14 \\ R21 & R22 & R23 & R24 \\ R31 & R32 & R33 & R34 \\ R41 & R42 & R43 & R44 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ 0 \\ 0 \\ -I \end{bmatrix}$$

Et l'on obtient immédiatement  $V2 - V3$  :

$$R_{21} + R_{34} - R_{24} - R_{31} = \frac{\rho}{\pi} \left( \frac{1}{r1} - \frac{1}{r2 + r1} \right)$$

Par ailleurs, faire la mesure en deux points intermédiaires permet de s'affranchir de la divergence du potentiel sur les points d'injection.

On peut noter qu'en pratique la tension sur les points d'injection est celle de la source d'énergie qui fait circuler le courant  $I$ .

La configuration géométrique précédente reposant sur quatre points alignés, deux pour l'injection de courant et deux pour la mesure de tension est traditionnellement utilisée pour accéder à un paramètre représentatif du sol, sa résistivité  $\rho$ .

Dans le cas particulier, où les distances entre les points sont égales, cette procédure de mesure porte le nom de méthode de Wenner.

Dans ce cas, la formule (eq. 14) se simplifie grandement.

$$V_{23} = V_2 - V_3 = \frac{I \rho}{2\pi} \left( \frac{1}{r1} \right) \quad (\text{eq. 15})$$

Par la mesure de  $I$  et  $V_{23}$ , on accède directement à la résistivité moyenne du milieu rencontré  $\rho$ .

### 3.3.2 Limite de cette approche

La méthode Wenner s'appuie sur des expressions issues d'une approche d'injection ponctuelle. En pratique les mesures sont souvent réalisées grâce à des pieux enterrés dans le sol.

On constate que la profondeur des pieux ( $h$ ) n'intervient pas dans cette expression de la tension de mesure. Il est cependant naturel de les enfoncer de la même profondeur. Pour se rapprocher qualitativement de la notion d'injection ponctuelle, il est préférable que la distance  $r$  entre les points de mesure et d'injection soit très grande devant la profondeur  $h$  des pieux.

Grâce à des développements ultérieurs, nous verrons comment prendre en compte une situation réelle naturellement plus complexe et serons en mesure de qualifier les écarts entre la méthode de Wenner et les résultats à la fois de mesure et d'un modèle théorique plus fin. Non pas que la précision obtenue sur la valeur de la résistivité soit insuffisante pour les applications courantes, mais pour prendre en compte les véritables dispositifs de mise à la terre (grilles de terre, plaques uniformes, géométries complexes,...).

### 3.3.3 Application expérimentale

Comme on l'a dit précédemment, expérimentalement il est difficile de réaliser une injection ponctuelle. Classiquement l'injection se fait à l'aide de deux pieux enfoncés de la même profondeur

dans la terre.

Une mesure, avec le protocole de Wenner, a été mise en œuvre dans le cas particulier de quatre pieux enfoncés de 25 cm et distants de  $r = 4m$ .

En reprenant les notations de Fig. 43, les mesures ont donné :

$$V_{23} = 0,73 \text{ V} \quad V_{14} = 99 \text{ V} \quad I_0 = 327 \text{ mA}$$

De ces mesures, on tire la valeur de la résistivité du milieu :

$$\frac{V_{23}}{I} = \frac{\rho}{\pi} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{2r} \right) = \frac{\rho}{2\pi r} \quad \text{d'où} \quad \rho = 56 \Omega \cdot m$$

On applique alors eq. 6, avec les caractéristiques géométriques de la configuration étudiée :

$$\left. \begin{aligned} R_{12} = R_{23} = R_{21} = R_{32} = R_{34} = R_{43} &= \frac{\rho}{2\pi r} = 2,228 \Omega \\ R_{13} = R_{31} = R_{24} = R_{42} &= \frac{\rho}{4\pi r} = 1,114 \Omega \\ R_{14} = R_{41} &= \frac{\rho}{6\pi r} = 0,743 \Omega \end{aligned} \right\}$$

et  $R_{11} = R_{22} = R_{33} = R_{44} = \frac{\rho}{2\pi r_0} = 152,353 \Omega (*)$

(\*) Les termes de la diagonale ne peuvent pas être déterminés puisque l'expression diverge en 0, c'est pourquoi nous avons décidé de prendre la tension au voisinage du point d'injection sur une petite sphère de rayon  $r_0$ . Malheureusement la valeur du rayon réel du pieu conduit à une élévation de potentiel trop importante et montre ainsi la limite d'utilisation du modèle d'injection ponctuelle. En revanche puisque nous connaissons la tension imposée par le générateur de courant continu, nous pouvons nous en servir pour lever la singularité.

En effet :  $V_{14} = (R_{11} + R_{44} - R_{14} - R_{41}) * I$

Connaissant  $V_{14}$ ,  $I$ ,  $R_{14}$  et  $R_{41}$  et puisque  $R_{11} = R_{44}$  (problème symétrique), on obtient la valeur de  $R_{11}$ .

Et il nous faut donner au rayon de la sphère la valeur  $r_0 = 5,85 \text{ cm}$ . Cette valeur reste plausible puisque dans cette expérimentation le pieu est enfoncé sur 25 cm de profondeur.

On remarquera que dans ce cas très simple, on peut tirer immédiatement la valeur de  $V_2 - V_3$  ce qui conduit à  $V_2 - V_3 = (R_{21} - R_{24} - R_{31} + R_{34}) * I$ , expression donnée précédemment.

Il est néanmoins intéressant de poursuivre de la façon suivante pour illustrer un cas plus général et qui permet aussi de représenter le problème sous la forme d'un schéma électrique traduisant tous les couplages.

L'inversion de la matrice  $R$  ainsi définie permet d'obtenir la matrice  $G$  associée au schéma électrique équivalent suivant (Fig. 43):

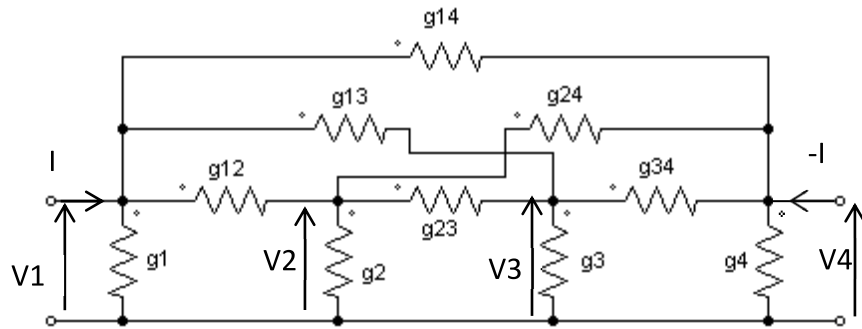


Fig. 43. Injection dans 1 & 4, tension en 2 & 3, schéma à base de conductances

$$[G] = \begin{bmatrix} g1 + g12 + g13 + g14 & -g12 & -g13 & -g14 \\ -g12 & g2 + g12 + g23 + g24 & -g23 & -g24 \\ -g13 & -g23 & g3 + g13 + g23 + g34 & -g34 \\ -g14 & -g24 & -g34 & g4 + g14 + g24 + g34 \end{bmatrix}$$

Le schéma électrique peut être décrit à l'aide d'un simulateur électrique de type SPICE.

g12, g34	g13, g24	g14	g23	g1, g4	g2, g3
9,512.10 <sup>-5</sup> S	4,617.10 <sup>-5</sup> S	3,064.10 <sup>-5</sup> S	9,467.10 <sup>-5</sup> S	6,394.10 <sup>-3</sup> S	6,331.10 <sup>-3</sup> S

Comme nous l'avons mentionné précédemment, dans le logiciel SPICE, il est nécessaire d'utiliser un schéma résistif (Fig. 44) avec les valeurs :

R1=1/g1,	R2=1/g2,	R12 = R34	R13 = R24	R14= 1/g14	R23 = 1/g23
R4 = 1/g4	R3 = 1/g3	= 1/g12	= 1/g13		
156,406 Ω	157,957 Ω	10510 Ω	21660 Ω	32640 Ω	10560 Ω

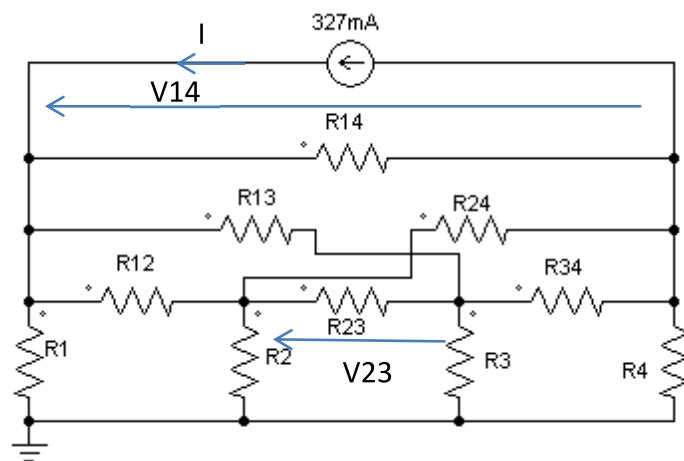


Fig. 44. Schéma SPICE

La simulation de ce circuit fournit comme tension entre les deux pieux de mesure la valeur : V23=0,73V comme ce qui a été mesuré sur le terrain.

Ce schéma électrique équivalent permet donc bien de représenter la configuration de mesure.

### **3.4 Conclusion**

La mise en œuvre d'une approche élémentaire fondée sur l'expression de la résistivité d'un matériau homogène permet de retrouver les expressions plus restrictives utilisées par la méthode de Wenner pour identifier la résistivité d'un sol.

L'inversion de la matrice de potentiels « résistifs » permet de construire un schéma électrique équivalent permettant d'accéder aux notions de conductances propres (conductance des points d'injection avec la terre lointaine) et de conductance mutuelle (couplage entre les points d'injection eux-mêmes).

Malheureusement, la nécessité d'illustrer cette approche sur des conductances et non sur des résistances complique un peu la démarche, mais facilite la visualisation des phénomènes physiques. La possibilité de portage dans un simulateur OD n'est pas déterminante sur un cas très simple comme celui qui nous a servi de référence, mais montre bien l'esprit de la démarche.



# Chapitre 4 : De l'approche analytique à la représentation « Circuit »

## 4 De l'approche analytique à la représentation « Circuit »

### 4.1 Cas d'un milieu homogène infini

Considérons une injection ponctuelle (Fig. 45) dans un milieu infini et homogène caractérisé par sa permittivité  $\varepsilon$  et sa conductivité  $\sigma$ . Les deux équations qui gèrent la distribution de la tension sont : l'équation de Poisson (eq. 16) pour le cas avec distribution de charge, et l'équation de Laplace (eq. 17) dans le cas particulier sans charge.

$$\Delta V = -\frac{Q}{\varepsilon} \quad (\text{eq. 16})$$

$$\Delta V = 0 \quad (\text{eq. 17})$$

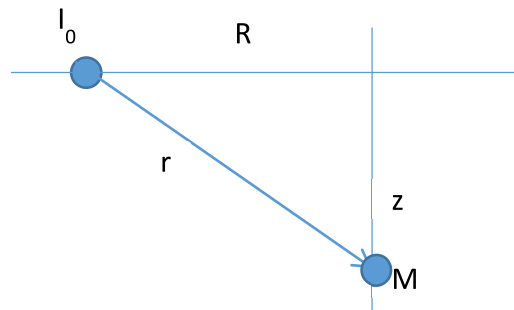


Fig. 45. Injection ponctuelle – définition des notations géométriques

#### 4.1.1 Résolution de l'équation de Laplace

Dans le cas d'un milieu purement conducteur, on ne considère que les propriétés de conduction du milieu, le problème traité sera régi par l'équation de Laplace (eq. 17).

Vu la symétrie de révolution de la géométrie traitée, il convient d'utiliser les coordonnées cylindriques. L'expression du Laplacien est donnée par :

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial V}{\partial R} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

Vu la symétrie du problème, le potentiel  $V$  est invariant selon  $\theta$ .

Pour trouver le potentiel au point  $M(R,z)$ ,  $V(R,z)$ , on utilise la méthode de la séparation des variables. On écrit que  $V(R,z) = u(R)v(z)$ .

$\Delta V$  devient :

$$\Delta V = v(z) \frac{\partial^2 u}{\partial R^2} + \frac{1}{R} v(z) \frac{\partial u}{\partial R} + u(R) \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0$$

On introduit une variable  $\lambda$  telle que :

$$v(z) \left( \frac{\partial^2 u}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial R} \right) + \lambda^2 u(R) v(z) - \lambda^2 u(R) v(z) + u(R) \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0$$

$$v(z) \left( \frac{\partial^2 u}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial R} + \lambda^2 u(R) \right) + u(R) \left( \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \lambda^2 v(z) \right) = 0$$

Comme les deux fonctions sont indépendantes cela donne le système suivant à résoudre :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial R} + \lambda^2 u(R) = 0 & \text{(eq. 18)} \\ \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \lambda^2 v(z) = 0 & \text{(eq. 19)} \end{cases}$$

Les solutions de ces deux équations sont :  $\begin{cases} u(R) = U_1 J_0(\lambda R) + U_2 Y_0(\lambda R) \\ v(z) = V_1 e^{\lambda z} + V_2 e^{-\lambda z} \end{cases}$

Où :  $J_0$  est la fonction de Bessel de première espèce d'ordre 0

et  $Y_0$  est la fonction de Bessel de seconde espèce d'ordre 0.

Remarque : pour la résolution de (eq. 19), selon le signe de  $\lambda^2$ , il y a trois solutions. Mais vu les conditions initiales, on prend  $\lambda^2 > 0$ .

L'expression du potentiel est donc :  $V(R, z) = (U_1 J_0(\lambda R) + U_2 Y_0(\lambda R)) (V_1 e^{\lambda z} + V_2 e^{-\lambda z})$

La prise en compte des conditions aux limites va permettre de déterminer la valeur des coefficients de ces expressions.

- On sait que :  $\lim_{z \rightarrow \infty} V(R, z) = 0$  donc  $V_1 = 0$
- Les fonctions de Bessel de première espèce sont définies en 0 alors que les fonctions de Bessel de seconde espèce  $Y_n$  ne sont pas définies en 0 (mais ont une limite infinie en 0).

Pour éviter cette divergence quand  $r$  tend vers 0, et quelle que soit la valeur de  $z$ , on a donc :  $U_2 = 0$ .

$$\text{Donc : } V(R, z) = U_1 J_0(\lambda R) V_2 e^{-\lambda z}$$

$$\text{Soit : } V(R, z) = V_3 J_0(\lambda R) e^{-\lambda z}$$

Il nous faut maintenant trouver la variable  $\lambda$ .

Pour toute valeur de  $\lambda$ , on obtient une solution particulière de l'équation de départ.

La solution finale est donc la somme de toutes les solutions particulières.

$$\text{Donc } V(R, z) = V_4 \int_0^\infty J_0(\lambda R) e^{-\lambda z} d\lambda$$

Remarque :  $\int_0^\infty J_0(\lambda R) e^{-\lambda |z|} d\lambda = \frac{1}{\sqrt{R^2 + z^2}} = \frac{1}{r}$  où  $\sqrt{R^2 + z^2}$  est la distance entre le point d'injection et le point où on cherche à calculer le potentiel.

❖ Détermination du coefficient  $V_4$  :

La densité de courant sortant de la sphère de rayon  $r$  est :  $j = \frac{I_0}{4\pi r^2}$

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}$$



$$\vec{E} = \rho \vec{j} = -\overrightarrow{\text{grad}}V$$

$$V(R, z) = \int -\frac{\rho I_0}{4\pi r^2} dr = \frac{\rho I_0}{4\pi r}$$

Donc le potentiel créé par  $I_0$  en un point distant  $M(R, z)$  est :

$$V(R, z) = \frac{\rho I_0}{4\pi r} = \frac{\rho I_0}{4\pi} \int_0^\infty J_0(\lambda R) e^{-\lambda |z|} d\lambda = I_0 G_0$$

Où  $G_0$  est la fonction de Green pour un milieu uniforme.

On obtient donc l'expression de la résistance du milieu traversé par le courant :  $\mathcal{R}(r) = \frac{1}{4\pi\sigma r}$  (eq. 20)

Remarque : On retrouve l'expression établie dans l'approche phénoménologique divisée par deux puisqu'ici on est en présence d'un milieu infini et d'une sphère alors que dans §3.1, le milieu est semi infini et nous avons pris une demi-sphère.

#### 4.1.2 Résolution de l'équation de Poisson

La première étape de la résolution de l'équation de Poisson consiste à faire la résolution de l'équation différentielle sans second membre, ce qui revient à résoudre l'équation de Laplace.

On a donc : Donc  $V(R, z) = V_4 \int_0^\infty J_0(\lambda R) e^{-\lambda z} d\lambda$

Pour déterminer la valeur de la constante  $V_4$ , il faut tenir compte du second membre :

$$\Delta \left( V_4 \int_0^\infty J_0(\lambda R) e^{-\lambda z} d\lambda \right) = \Delta \left( V_4 \frac{1}{r} \right) = V_4 \Delta \left( \frac{1}{r} \right) = -\frac{Q}{\varepsilon} \delta$$

Où  $\delta$  vaut 1 à l'endroit de la charge  $Q$  et 0 ailleurs.

On effectue alors l'intégrale sur le volume de la sphère de rayon  $r_0$  centré sur la charge  $Q$ .

$$V_4 \iiint_{V_{r_0}} \Delta \left( \frac{1}{r} \right) dV = -\frac{Q}{\varepsilon} \iiint_{V_{r_0}} \delta dV$$

Il faut écrire l'identité suivante :  $\text{div} \left( \varphi \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \left( \frac{1}{r} \right) \right) = \varphi \Delta \left( \frac{1}{r} \right) + \overrightarrow{\text{grad}} \left( \frac{1}{r} \right) \cdot \overrightarrow{\text{grad}}(\varphi)$ , et en prenant  $\varphi = 1$ , on peut ensuite utiliser le théorème de la divergence (Ostrogradsky), et obtenir :

$$V_4 \iiint_{V_{r_0}} \Delta \left( \frac{1}{r} \right) dV = V_4 \iint_{\text{Surf}} \frac{d}{dn} \left( \frac{1}{r} \right) d\text{Surf} = -\frac{Q}{\varepsilon} \iiint_{V_{r_0}} \delta dV$$

$$\frac{d}{dn} \left( \frac{1}{r} \right) = \frac{d}{dr} \left( \frac{1}{r} \right) = \frac{-1}{r^2}$$

$$V_4 \iint_{\text{Surf}} \frac{1}{r^2} d\text{Surf} = \frac{Q}{\varepsilon} \iiint_{V_{r_0}} \delta dV$$

On intègre donc sur la surface de la sphère de rayon  $r_0$  ( $\text{Surf} = 4\pi r_0^2$ ). Sur cette surface,  $r$  est constant

et vaut  $r_0$ .

$$V_4 \iint_{Surf} \frac{1}{r^2} dSurf = V_4 \frac{1}{r_0^2} \iint_{Surf} dSurf = V_4 \frac{1}{r_0^2} 4\pi r_0^2 = 4\pi V_4 = \frac{Q}{\epsilon}$$

On obtient donc :  $V_4 = \frac{Q}{4\pi\epsilon}$

On obtient donc l'expression du potentiel créé par une charge Q en un point distant de r de cette charge :

$$V(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon r} = \frac{Q}{C}$$

Le ratio entre la tension et la charge permet de définir la capacité C :  $C(r) = 4\pi\epsilon r$  (eq. 21)

Dans de nombreux articles de praticiens traitant de CEM, cette capacité ainsi définie porte le nom de capacité intrinsèque, d'auto-capacité, ...

#### 4.1.3 Relation entre résistance et capacité

A partir des expressions de la résistance et de la capacité établies précédemment, on obtient la relation suivante : [37]

$$C(r)R(r) = \frac{4\pi\epsilon r}{4\pi\sigma r} = \frac{\epsilon}{\sigma} = \rho\epsilon \quad (\text{eq. 22})$$

#### 4.1.4 En présence de charge et de courant

Quand le milieu présente les deux propriétés (une conductivité et une permittivité), on peut alors écrire le courant total comme étant la somme du courant de conduction et du courant de déplacement.

$$\vec{J}_t = \sigma\vec{E} + \epsilon \frac{d\vec{E}}{dt} = (\sigma + j\omega\epsilon)\vec{E}$$

Or au point M(R,z), à la surface d'une sphère de rayon r, la densité de courant sortante s'exprime en coordonnées sphériques avec comme vecteur radial  $\vec{a}_r$ :

$$\vec{J}_t = \frac{I}{4\pi r^2} \vec{a}_r$$

Donc :

$$\vec{E} = \frac{I}{4\pi(\sigma + j\omega\epsilon)r^2} \vec{a}_r$$

Le potentiel est alors :

$$V = - \int_R^\infty \frac{I}{4\pi(\sigma + j\omega\epsilon)r^2} dr = \frac{I}{4\pi(\sigma + j\omega\epsilon)r} = \frac{I}{4\pi\sigma r}$$

On définit ainsi une conductivité complexe du milieu étudié :  $\underline{\sigma} = \sigma + j\omega\epsilon$

Et une impédance :  $Z(R, z) = \frac{1}{4\pi\sigma r}$  (eq. 23).

#### 4.1.5 Retour sur l'hypothèse quasi-statique

L'hypothèse générale de cette méthode considère de négliger l'influence de la variation du champ magnétique sur le champ électrique ( $\frac{dB}{dt} = 0$ ) [38]. Ainsi le champ électrique dérive d'un potentiel, ce qui nous mène à l'équation de Laplace ou Poisson selon la distribution de charges dans le milieu.

Plusieurs travaux dans la littérature proposent de se satisfaire de la solution en quasi-statique.

Dans [39] l'auteur compare les résultats de courant pour le cas de deux conducteurs horizontaux dans la terre, pour le cas de la quasi-statique et sans approximation et montre que cette hypothèse surestime les courants.

Des compléments sur le domaine de validité de cette approximation en fonction de la fréquence et de la longueur d'onde des signaux mises en jeux sont présentés dans [40], [41].

#### 4.1.6 Modèle électrique équivalent

L'expression de l'impédance équivalente précédente montre qu'il est possible de déterminer un schéma électrique équivalent.

En effet :  $\frac{1}{Z(R,z)} = 4\pi\sigma r = 4\pi\sigma r + j\omega 4\pi\epsilon r = \frac{1}{R(r)} + j\omega C(r)$

Ceci correspond à la mise en parallèle de  $R(r)$  avec  $C(r)$  (Fig. 46).

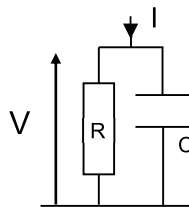


Fig. 46. Schéma électrique équivalent

On note que  $R(r)$  et  $C(r)$  sont des résistances et condensateurs indépendants de la fréquence à ce stade.

## 4.2 Cas de deux milieux : présence d'une interface

### 4.2.1 Expression de la tension

Dans le cas d'un seul milieu, on a pu établir précédemment l'expression du potentiel en un point du milieu M situé à  $(R, z)$  du courant :

$$V = \frac{I}{4\pi\sigma r} = \frac{I}{4\pi\sigma} \int_0^{\infty} J_0(\lambda R) e^{-\lambda z} d\lambda$$

Soient maintenant deux milieux, notés 1 et 2, de caractéristiques physiques différentes.

On suppose la présence d'un courant ou d'une charge dans le milieu 1, positionné au centre du repère, et on souhaite exprimer le potentiel en n'importe quel point  $M(R, z)$  du milieu 1, en présence

d'un milieu 2 (Fig. 47).

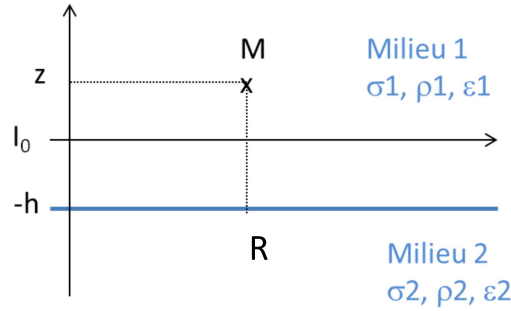


Fig. 47. Injection ponctuelle avec interface – définition des notations géométriques

On écrit le potentiel au point M(R, z) dans le milieu 1 ( $V_1(R, z)$ ) ou dans le milieu 2 ( $V_2(R, z)$ ) à partir des résultats précédents :

$$\begin{cases} V_1(R, z) = \frac{I_0}{\sigma_1 4\pi} \int_0^\infty J_0(\lambda R) e^{-\lambda|z|} d\lambda + \int_0^\infty V_1 J_0(\lambda R) e^{-\lambda z} d\lambda + \int_0^\infty A J_0(\lambda R) e^{\lambda z} d\lambda \\ V_2(R, z) = \int_0^\infty V_2 J_0(\lambda R) e^{\lambda z} d\lambda + \int_0^\infty B J_0(\lambda R) e^{-\lambda z} d\lambda \end{cases}$$

Conditions aux limites :

- $\lim_{z \rightarrow \infty} V_1(R, z) = 0$  donc  $A = 0$
- $\lim_{z \rightarrow -\infty} V_2(R, z) = 0$  donc  $B = 0$
- Continuité du potentiel en  $z = -h$  :

$$\frac{I_0}{\sigma_1 4\pi} e^{-\lambda h} + V_1 e^{\lambda h} = V_2 e^{-\lambda h} \quad (\text{eq. 24})$$

- Continuité de E tangential en  $z = -h$  :

$$E_t = \frac{dV}{dR}$$

Pour dériver par rapport à r l'expression du potentiel, il faut revenir à la définition de  $\int_0^\infty J_0(\lambda R) e^{-\lambda z} d\lambda = \frac{1}{\sqrt{R^2 + z^2}}$ .

Et quand on applique la continuité à l'interface des deux milieux, on retombe sur eq. 24.

- Continuité de J normal en  $z = -h$  : on utilise la notion de conductivité complexe établie précédemment. On peut alors écrire :

$$\text{En présence de charge : } \vec{j} = \underline{\sigma} \vec{E}$$

$$\text{Donc ici cela donne : } \sigma_1 E_{n1} = \sigma_2 E_{n2}$$

$$\text{Or : } E_n = \frac{dV}{dz}$$

$$\text{Remarque : } \left. \frac{d e^{-\lambda|z|}}{dz} \right|_{z=-h} = \left. \frac{d e^{\lambda z}}{dz} \right|_{z=h} = \lambda e^{\lambda z} \Big|_{z=h} = \lambda e^{-\lambda|z|} \Big|_{z=h}$$

Cela donne :

$$\sigma_1 \lambda \left( \frac{I_0}{\sigma_1 4\pi} e^{-\lambda h} - V_1 e^{\lambda h} \right) = \sigma_2 \lambda V_2 e^{-\lambda h} \quad (\text{eq. 25})$$

Détermination des constantes :

eq. 24 dans eq. 25 :  $\underline{\sigma}_1 \left( \frac{I_0}{\underline{\sigma}_1 4\pi} e^{-\lambda h} - V_1 e^{\lambda h} \right) = \underline{\sigma}_2 \left( \frac{I_0}{\underline{\sigma}_1 4\pi} e^{-\lambda h} + V_1 e^{\lambda h} \right)$

Donc : 
$$\begin{cases} V_1 = \frac{\underline{\sigma}_1 - \underline{\sigma}_2}{\underline{\sigma}_1 + \underline{\sigma}_2} \frac{I_0}{\underline{\sigma}_1 4\pi} e^{-2\lambda h} \\ V_2 = \frac{2}{\underline{\sigma}_1 + \underline{\sigma}_2} \frac{I_0}{4\pi} \end{cases}$$

On obtient donc les expressions des potentiels dans les deux milieux :

$$\begin{cases} V_1(R, z) = \frac{I_0}{\underline{\sigma}_1 4\pi} \int_0^\infty J_0(\lambda R) e^{-\lambda|z|} d\lambda + \frac{I_0}{\underline{\sigma}_1 4\pi} \frac{\underline{\sigma}_1 - \underline{\sigma}_2}{\underline{\sigma}_1 + \underline{\sigma}_2} \int_0^\infty J_0(\lambda R) e^{-\lambda(z+2h)} d\lambda \\ V_2(R, z) = \frac{2}{\underline{\sigma}_1 + \underline{\sigma}_2} \frac{I_0}{4\pi} \int_0^\infty J_0(\lambda R) e^{\lambda z} d\lambda \end{cases}$$

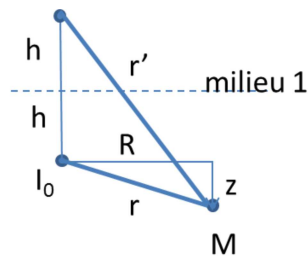
Analyse de l'expression de V1 :

On peut identifier deux termes dans un milieu de conductivité  $\underline{\sigma}_1$ .

Le premier correspond au terme source, alors que le second peut être apparenté à une image du courant source  $I_0$  par rapport à l'interface qui sépare les deux milieux.

$$\int_0^\infty J_0(\lambda R) e^{-\lambda(z+2h)} d\lambda = \frac{1}{\sqrt{R^2 + (z+2h)^2}} = \frac{1}{r'}$$

On peut alors raisonner comme si on était en présence d'un seul milieu, la valeur du courant image  $I_0'$  sera fonction des caractéristiques des deux milieux par l'intermédiaire d'un facteur qui s'apparente à un coefficient de réflexion.



$$V_1(R, z) = \frac{I_0}{\underline{\sigma}_1 4\pi r} + \frac{\underline{\sigma}_1 - \underline{\sigma}_2}{\underline{\sigma}_1 + \underline{\sigma}_2} \frac{I_0}{\underline{\sigma}_1 4\pi r'} = \frac{1}{4\pi \underline{\sigma}_1} \left( \frac{I_0}{r} + \frac{I_0'}{r'} \right) \quad (\text{eq. 26})$$

Avec :  $I_0' = \frac{\underline{\sigma}_1 - \underline{\sigma}_2}{\underline{\sigma}_1 + \underline{\sigma}_2} I_0$  posons pour la suite  $k = \frac{\underline{\sigma}_1 - \underline{\sigma}_2}{\underline{\sigma}_1 + \underline{\sigma}_2}$

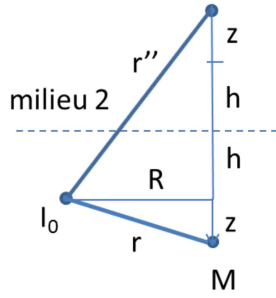
Analyse de l'expression de V2 :

$$V_2(R, z) = \frac{I_0}{4\pi \underline{\sigma}_2} \frac{2\underline{\sigma}_2}{\underline{\sigma}_1 + \underline{\sigma}_2} \int_0^\infty J_0(\lambda R) e^{\lambda z} d\lambda$$

D'après les notations précédentes, dans le cas où le point  $M(R, z)$  est dans le milieu 2, sa position est négative vue l'orientation du repère. Le paramètre  $z$  de l'expression de  $V_2$  représente la distance entre le point d'observation de la tension et le courant, soit la distance  $r''$  sur la figure ci-dessous.

En faisant donc intervenir cette distance, l'intégrale se calcule facilement et on peut écrire eq. 27.

Ainsi, ce potentiel est l'expression du potentiel dans un seul milieu, ici le milieu 2, dû à une source  $I_0'$ . Là encore on voit apparaître une notion d'image.



$$V_2(R, z) = \frac{1}{4\pi\sigma_2} \frac{2\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} \frac{I_0}{r''} = \frac{1}{4\pi\sigma_2} \frac{I''_0}{r''} \quad (\text{eq. 27})$$

$$\text{Avec : } I''_0 = \frac{2\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} I_0$$

**Remarque :** On vient de retrouver les expressions du potentiel d'un point M dans une configuration en présence de deux milieux avec injection ponctuelle de courant dans le milieu 1 établies également par [27].

#### 4.2.2 Schémas électriques équivalents

Nous avons déjà pu montrer qu'il est possible d'établir un schéma électrique équivalent dans le cas d'un seul milieu homogène avec une résistance en parallèle avec une capacité.

A partir de l'expression de la tension (eq. 26), et si on pose  $\underline{\sigma}'_1 = \sigma_1 \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{\sigma_1 - \sigma_2} = \sigma'_1(\omega) + j\omega\varepsilon'_1(\omega)$ , on peut définir deux impédances en série  $Z_1(R, z)$  et  $Z'_1(R, z)$  :

$$V_1(R, z) = \frac{1}{4\pi\sigma_1} \left( \frac{I_0}{r} + \frac{I'_0}{r'} \right) = \frac{1}{4\pi\sigma_1 r} I_0 + \frac{1}{4\pi\sigma'_1 r'} I_0 = Z_1(R, z) I_0 + Z'_1(R, z) I_0$$

On a alors :

$$\frac{1}{Z_1(R, z)} = 4\pi\sigma_1 r = 4\pi\sigma_1 r + j\omega 4\pi\varepsilon_1 r = \frac{1}{\mathcal{R}_1(r)} + j\omega C_1(r)$$

$$\frac{1}{Z'_1(R, z)} = 4\pi\sigma'_1 r' = 4\pi\sigma'_1(\omega) r' + j\omega 4\pi\varepsilon'_1(\omega) r' = \frac{1}{\mathcal{R}'_1(\omega, r')} + j\omega C'_1(\omega, r')$$

Le schéma qui peut être établi est présenté Fig. 48.

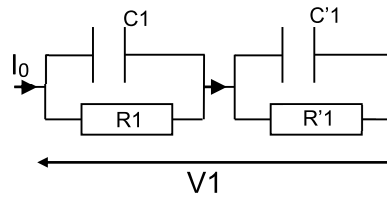


Fig. 48. Injection ponctuelle avec interface – schéma électrique équivalent

**Remarque 1 :** les composants de l'impédance  $Z_1$  ne dépendent pas de la fréquence alors que ceux de  $Z'_1$  sont dépendants de la fréquence.

**Remarque 2 :** Une exploitation de ce schéma équivalent serait vaine dans la mesure où comme vu au paragraphe 3.2.2 il est nécessaire de faire un schéma en  $\pi$  avec des conductances. Ce sera encore plus légitime lorsque nous serons en présence de plusieurs courants « d'injection ».

Il est également possible d'interpréter la tension  $V_2$  dans le milieu 2.

Définissons  $\underline{\sigma}_{12}$  de la manière suivante :  $\underline{\sigma}_{12} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}$  qui est la valeur moyenne des conductivités complexes des 2 milieux.

On notera une propriété intéressante à cette quantité  $\underline{\sigma}_{12}$ . S'exprimant sous la forme d'une somme les parties réelles et imaginaires s'ajoutent et restent chacune d'entre elles indépendantes de la fréquence, ce qui permet d'exploiter au mieux le passage en admittance et de conduire facilement à un schéma équivalent de composants en parallèle. En effet dans ce cas la tension  $V_2(R,z)$  précédemment exprimée devient :

$$V_2(R,z) = \frac{1}{4\pi \underline{\sigma}_1 + \underline{\sigma}_2} \frac{2}{r''} I_0 = \frac{1}{4\pi \underline{\sigma}_2} \frac{I''_0}{r''} = \frac{1}{4\pi \underline{\sigma}_{12}} \frac{I_0}{r''} = Z_{12}(R,z) I_0$$

$$\text{Ainsi } \frac{1}{Z_{12}(R,z)} = 4\pi \underline{\sigma}_{12} r'' = 4\pi \sigma_{12}(\omega) r'' + j\omega 4\pi \varepsilon_{12}(\omega) r'' = \frac{1}{R''_{12}(\omega, r'')} + j\omega C''_{12}(\omega, r'')$$

Cette expression peut se représenter par le schéma électrique constitué d'une résistance ( $R''_{12}$ ) en parallèle avec un condensateur ( $C''_{12}$ ).

#### 4.2.3 Cas particuliers

##### a. Cas d'un milieu homogène $\underline{\sigma}_1 = \underline{\sigma}_2$

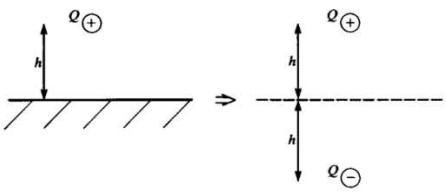
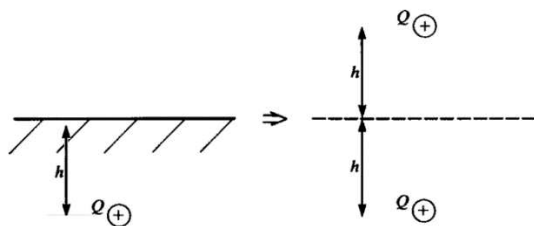
Dans ce cas il est possible de retrouver des résultats physiques connus. La notion de courant image disparaît et on retrouve l'expression du potentiel déjà établie précédemment avec bien sûr,  $V_1 = V_2$ .

##### b. Cas où $\underline{\sigma}_2 = 0$

Le cas où le deuxième milieu est caractérisé par une conductivité complexe nulle est une situation qui se rapproche d'une situation courante d'une interface terre-air. La conductivité réelle dans l'air  $\sigma_2$  est nulle et  $\underline{\sigma}_2$  est purement imaginaire :  $\underline{\sigma}_2 = j \cdot \omega \cdot \varepsilon_2 = j \cdot \omega \cdot \varepsilon_0$ .

Remarque 1 : Si l'on raisonne seulement en statique ce qui revient à négliger la dépendance avec la fréquence alors on peut écrire que le ratio  $\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2}$  devient réel. De plus en présence d'une interface air-terre  $\sigma_2=0$  dans l'air, alors  $\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} = 1$  et  $\underline{\sigma}'_1 = \underline{\sigma}_1 \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{\sigma_1 - \sigma_2} = \underline{\sigma}_1 = \sigma_1$ .

Remarque 2 : Dans le cas où le courant est dans l'air, on doit changer alors la dénomination des milieux,  $\underline{\sigma}_1$  représente l'air avec une partie réelle nulle et  $\underline{\sigma}_2$  la terre, en statique on a  $\underline{\sigma}_1 = 0$  donc  $\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} = -1$ , on retrouve la méthode des images utilisée habituellement avec des conducteurs dans l'air.

Cas du conducteur au-dessus de la terre	Cas du conducteur dans un milieu
$I_0' = I_0 \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} = -I_0$ 	$I_0' = I_0 \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} = I_0$ 

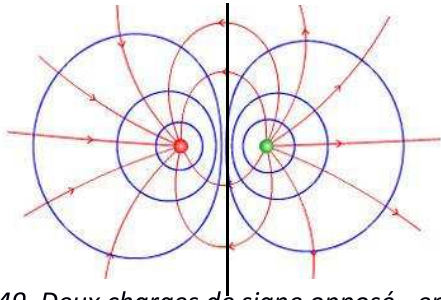


Fig. 49. Deux charges de signe opposé - en bleu les équipotentielle, en rouge les lignes de champ

Dans l'approche usuelle des images, on remplace l'espace conducteur par une charge de signe opposé (Fig. 49).

Dans les deux cas, on obtient les mêmes distributions de potentiels et de lignes de champs :

- La surface de la terre est considérée comme une équipotentielle
- Les lignes de champs sont normales à l'interface

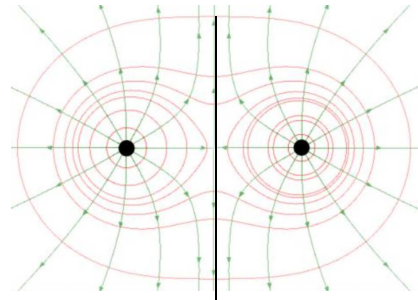


Fig. 50. Deux charges de même signe - en rouge les équipotentielle, en vert les lignes de champ

Dans le cas où la charge est dans le milieu conducteur, ici, la terre, on remplace l'espace par une charge de même signe (Fig. 50).

- les lignes de champs sont parallèles à la surface de la terre (pas de courant traversant l'interface)
- par suite le potentiel n'est plus constant sur la surface de la terre

Extrapolation au cas d'un conducteur filiforme

On traite le cas d'un conducteur en le considérant comme un ensemble de charges. Deux cas de figure peuvent être envisagés :

- le conducteur vertical (perpendiculaire à l'interface) (Fig. 51),
- le conducteur horizontal (parallèle à l'interface) (Fig. 53)

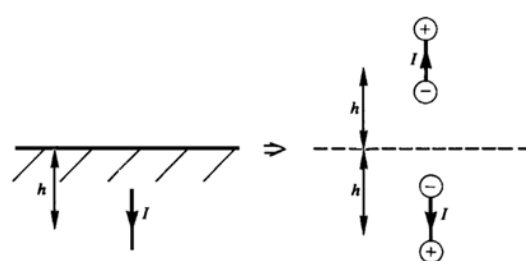
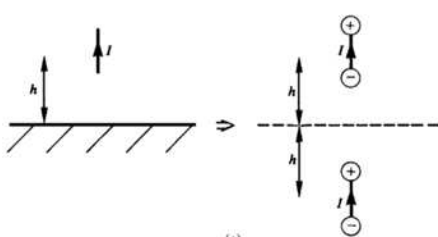


Fig. 51. Conducteur filiforme vertical au-dessus d'une interface : dans l'air à gauche, dans un milieu à droite

On donne Fig. 52 l'exemple de calcul des potentiels pour six charges. Ces charges sont du même signe et nous permettent de déterminer les équipotentielles créées par un conducteur dans la terre.



Dans le plan médian ( $x=0$ ), le cas d'un conducteur enfoui sera le même que celui des trois charges en bleu ( $x>0$ ).

Cela nous permet de passer d'un conducteur dans la terre, à un conducteur du double de longueur dans un milieu uniforme terre.

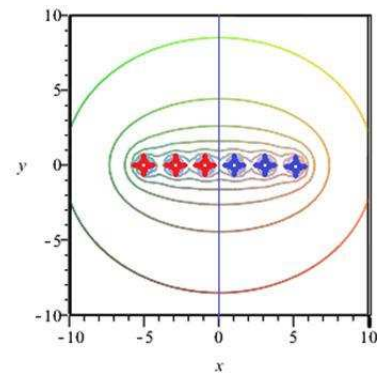
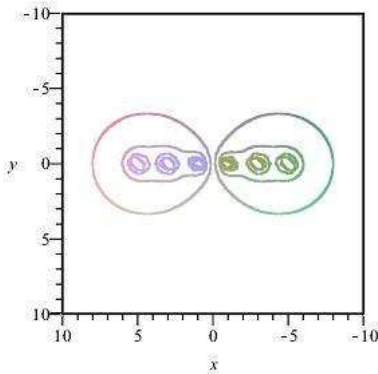


Fig. 52. Equipotielles créées par plusieurs charges constituant un conducteur

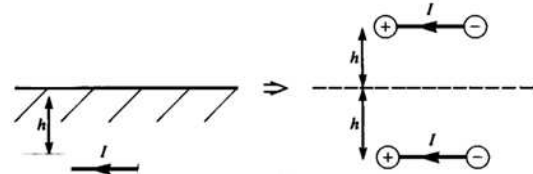
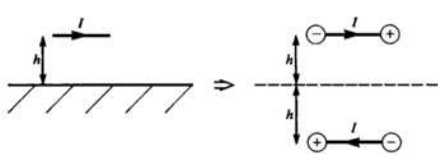


Fig. 53. Conducteur filiforme horizontal au-dessus d'une interface : dans l'air à gauche, dans un milieu à droite

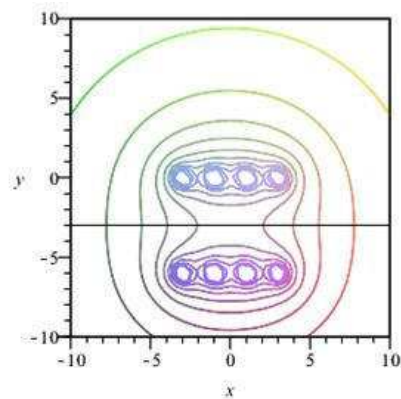
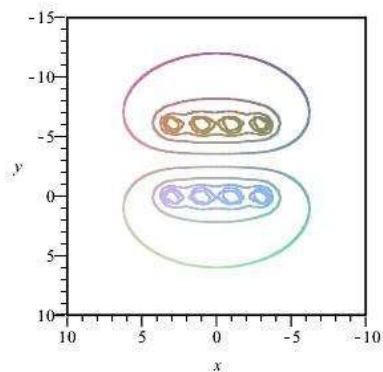


Fig. 54. Equipotielles créées par plusieurs charges constituant deux conducteurs parallèles

### 4.3 Cas d'une terre non homogène

Dans tout ce qui précède nous avons supposé que les caractéristiques de la terre sont constantes. Néanmoins, la disparité des sols (surtout lors de la construction de bâtiments avec tous les gravats accumulés) et la présence de différentes strates dans le sol nous pousse à nous questionner sur l'impact de cette inhomogénéité dans les caractéristiques physiques de ce milieu. Cela a été abordé dans différents travaux comme [42], [43].

Pour prendre en compte ces différentes couches, en utilisant la même approche que précédemment, il est donc nécessaire de définir les différentes images et les coefficients  $k$  associés.

Ainsi l'élévation de potentiel d'un point M dans la terre va être due aux courants source et toutes les images que l'on retrouve liées aux différentes couches et à la présence des interfaces.

Prenons l'exemple de deux couches de terre avec une interface air-terre de la figure ci-contre. Nous sommes donc en présence de deux interfaces. Supposons que le courant source  $I_0$  est dans la couche n°1 (Fig. 55). Nous sommes amenés à définir ainsi deux courants images symétriques de  $I_0$  par rapport à chacune des deux interfaces ( $I'_0$  et  $I''_0$ ). Ces deux courants images ont eux-mêmes des images par rapport à l'autre interface ( $I'_1$  et  $I''_1$ ) et ainsi de suite.

Ceci conduit ainsi à une somme infinie de termes qu'il va être nécessaire de tronquer pour le calcul.

$$V_m = \frac{1}{4\pi\sigma_1} \left( \frac{I_0}{R} + \frac{I'_0}{R'} + \frac{I''_0}{R''} + \dots \right)$$

Avec :  $I'_0 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} I_0$

Les autres courants images ainsi que leurs positions sont donnés à partir de l'identification des équations aux deux interfaces. Le développement pour aboutir à l'expression finale intégrée est présentée en annexe.

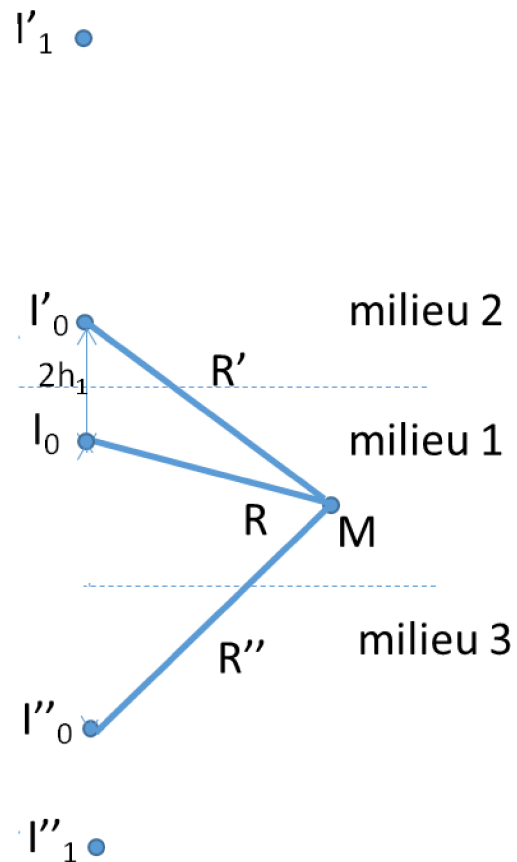


Fig. 55. Plusieurs couches de terre - images successives

Cette technique présentée dans [44] et [45] a été mise en œuvre dans [46] dans lequel nous avons comparé, avec succès, notre approche avec des résultats trouvés dans la bibliographie [47].

Remarque: [48] a proposé une méthode appelée « la méthode des images complexes » afin de réduire le nombre d'images en assurant une bonne précision.

#### 4.4 Traduction de l'équation de Poisson sous forme de schéma électrique

Nous venons de développer la résolution analytique du cas élémentaire d'une injection ponctuelle de courant tout d'abord en milieu homogène puis en prenant en compte l'interface terre-air. Cette résolution issue de plusieurs papiers n'est pas évidente d'un point de vue mathématique.

L'interface terre- air est prise en compte grâce à la méthode des images, et l'intérêt du développement est qu'il relie quantitativement les courants source et image en fonction des caractéristiques des deux milieux. Faire le parallèle avec la méthode des images « magnétiques » couramment utilisée, est riche.

##### 4.4.1 Les courants images

La solution de l'équation de Poisson conduit à une expression reliant le potentiel au courant via l'expression :  $V = \frac{I}{4\pi\sigma_1 r}$  dans un milieu homogène de conductivité complexe  $\underline{\sigma}$ . La prise en compte

de milieux de différentes conductivités se fait grâce à la méthode des images (introduction de courants supplémentaires) (Fig. 56).

Pour un courant injecté  $I_0$ , l'équation de Poisson donnant l'élévation de potentiel  $V(M1)$  (Resp.  $V(M2)$ ) en un point M dans le milieu 1 (milieu du courant injecté) (Resp. milieu 2) en présence d'une interface met en évidence la contribution d'un courant  $I_0'$  (Resp.  $I_0''$ ) qui peuvent être représentées

par : 
$$V(M1) = \frac{1}{4\pi\sigma_1} \left( \frac{I_0}{r} + \frac{I_0'}{r'} \right) \quad \text{et} \quad V(M2) = \frac{1}{4\pi\sigma_2} \frac{I_0''}{r''}$$

Avec : 
$$I_0' = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} I_0 \quad \text{et} \quad I_0'' = \frac{2\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} I_0$$

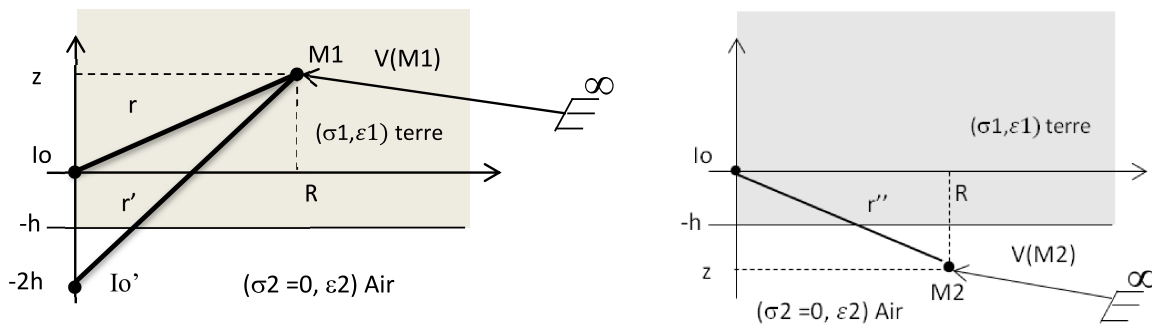


Fig. 56. Détail des notations géométriques

Dans le cas où le courant est dans une terre de caractéristique  $\sigma_1$ , alors que l'air est caractérisé par  $\sigma_2$ . L'air n'étant pas très conducteur en statique, on admet assez couramment que  $\sigma_2 = 0$  alors que la permittivité reste égale à  $\epsilon_2 = \epsilon_0$ . On rappelle que l'expression du potentiel dans la terre s'exprime par la formule suivante :

$$V1(R, z) = \frac{I_0}{\sigma_1 4\pi r} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} \frac{I_0}{\sigma_1 4\pi r'} = \frac{1}{4\pi\sigma_1} \left( \frac{I_0}{r} + k \frac{I_0}{r'} \right) \quad \text{on peut aussi écrire que } I_0' = k I_0$$

Fig. 57 et Fig. 58 représentent l'évolution de  $k = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2}$  en fonction de la fréquence et de la permittivité de la terre  $\epsilon_1$  que l'on peut faire varier de 1 à 200 afin de couvrir la plupart des situations.

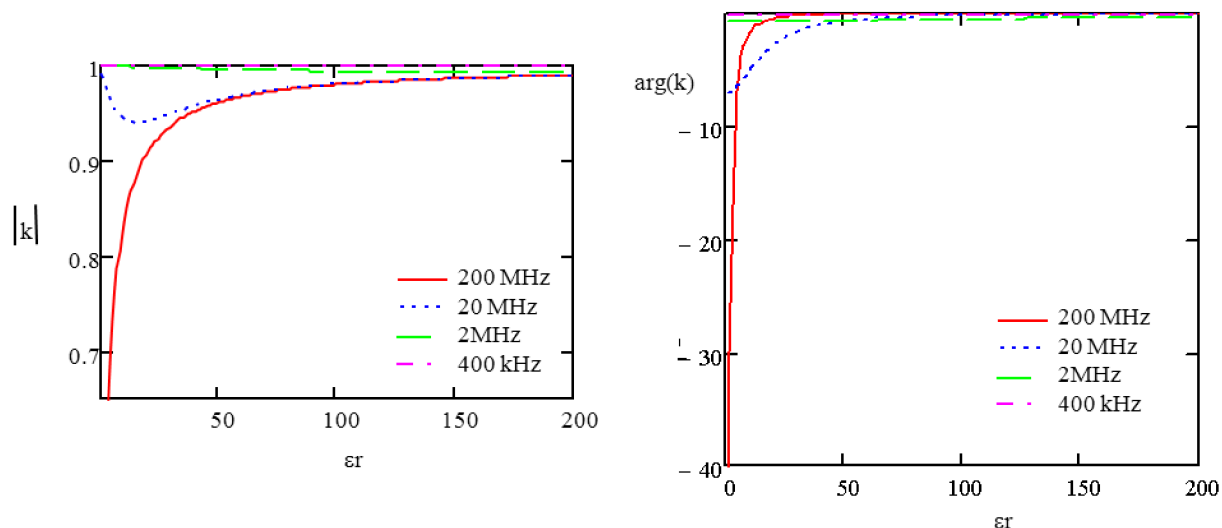


Fig. 57. Module (à gauche) et argument (à droite) du facteur  $k$  en fonction de la permittivité relative du milieu 1 pour plusieurs fréquences

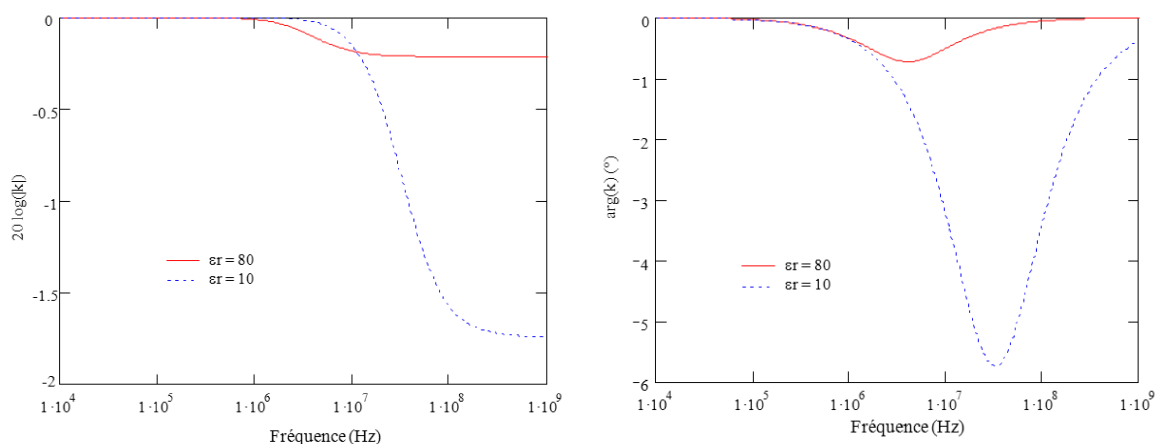


Fig. 58. Module (à gauche) et argument (à droite) du facteur  $k$  en fonction de la fréquence pour plusieurs permittivités du milieu 1

On peut distinguer deux comportements que l'on peut qualifier d'asymptotiques :

- Tant que  $\sigma \gg \omega \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_r$  alors  $k \approx 1$  et  $I'_o \approx I_o$  en module et argument,
- Lorsque au contraire  $\sigma \ll \omega \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_r$  alors  $k \approx \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 1}$  et dans ce cas pour des faibles valeurs de  $\epsilon_r$ ,  $k \rightarrow 0,5$  mais dès que  $\epsilon_r$  prend des valeurs plus importantes alors à nouveau  $k \rightarrow 1$ .

Bien sûr il est prudent de faire les calculs avec les valeurs exactes mais on peut néanmoins garder à l'esprit que compte tenu des différents ordres de grandeur on a :  $I'_o \approx I_o$

Il faut désormais conduire la même analyse pour le courant image  $I''_o$ .

Posons  $I''_o = h \cdot I_o$  avec  $h = \frac{2\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2}$

On peut distinguer deux comportements que l'on peut qualifier d'asymptotiques :

- Tant que  $\sigma \gg \omega \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_r$  alors  $h \approx \frac{2j\omega\epsilon_0}{\sigma}$  et  $I''_o \approx 0$  en module et un argument proche de  $\frac{\pi}{2}$
- Lorsque au contraire  $\sigma \ll \omega \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_r$  alors  $h \approx \frac{2}{\epsilon_r + 1}$  et dans ce cas, h décroît à partir de 1 pour tendre vers 0 pour des valeurs importantes de  $\epsilon_r$ . h est dans ce dernier cas toujours réel.

#### 4.4.2 Cas de n courants

Le milieu de la terre étant considéré linéaire, les effets de ces courants sur les potentiels peuvent être superposés et donc écrits sous forme matricielle dans le cas de n courants injectés dans le même milieu en présence d'une interface. Courants sources et images

La prise en compte de l'interface conduit à définir n courants images permettant de situer tous ces courants dans un milieu homogène unique de caractéristique  $\underline{\sigma 1}$ .

A ces 2.n courants I1 à In et I'1 à I'n il faut aussi rajouter la tension au point d'observation V(M1) et un courant I(M1) même s'il sera pris nul in fine ainsi que son image V'(M1) et I'(M1) dans les mêmes conditions. Dans l'état actuel de la recherche nous nous proposons de le positionner arbitrairement à la fin des vecteurs tension ou courant. Pour la tension V(M1) et son image V'(M1) dans le milieu 1, il faut construire une matrice de dimension 2n+2.

$$\begin{bmatrix} V1 \\ \vdots \\ Vn \\ V'1 \\ \vdots \\ V'n \\ V(M1) \\ V'(M1) \end{bmatrix} = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \underline{\sigma 1}} \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \\ r_{1,1} & \dots & r_{1,2n+2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \\ r_{2n+2,1} & \dots & r_{2n+2,2n+2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I1 \\ \vdots \\ In \\ I'1 \\ \vdots \\ I'n \\ I(M1) \\ I'(M1) \end{bmatrix}$$

Pour la tension V(M2) dans le milieu 2, on positionne arbitrairement V(M2) et I(M2) à la fin des vecteurs tension et courant. Nous aboutissons donc à une matrice de dimension n+1.

$$\begin{bmatrix} V1 \\ \vdots \\ Vn \\ V(M2) \end{bmatrix} = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \underline{\sigma 12}} \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \\ r_{1,1} & \dots & r_{1,n+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \\ r_{n+1,1} & \dots & r_{n+1,n+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I1 \\ \vdots \\ In \\ I(M2) \end{bmatrix}$$

Le terme d'indice ij, est obtenu en calculant la tension Vi, alors que tous les autres courants sont annulés sauf Ij via la relation  $V_i = \frac{I_j}{4 \cdot \pi \cdot \underline{\sigma} \cdot r_{ij}}$ . Notons que le caractère symétrique de la matrice permet de s'affranchir du calcul d'une partie des éléments.

On peut inverser cette relation :

$$\begin{bmatrix} I1 \\ \vdots \\ In \\ I'1 \\ \vdots \\ I'n \\ I(M1) \\ I'(M1) \end{bmatrix} = 4. \pi. \underline{\sigma}1 \begin{bmatrix} \frac{1}{r1,1} & \dots & \frac{1}{r1,2n+2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \\ r2n+2,1 & \dots & r2n+2,2n+2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} V1 \\ \vdots \\ Vn \\ V'1 \\ \vdots \\ V'n \\ V(M1) \\ V'(M1) \end{bmatrix}$$

Puis en remplaçant  $\underline{\sigma}1$  par son expression complexe :

$$\begin{bmatrix} I1 \\ \vdots \\ In \\ I'1 \\ \vdots \\ I'n \\ I(M1) \\ I'(M1) \end{bmatrix} = 4. \pi. (\sigma1 + j\omega\varepsilon1) \begin{bmatrix} \frac{1}{r1,1} & \dots & \frac{1}{r1,2n+2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \\ r2n+2,1 & \dots & r2n+2,2n+2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} V1 \\ \vdots \\ Vn \\ V'1 \\ \vdots \\ V'n \\ V(M1) \\ V'(M1) \end{bmatrix} \quad (\text{eq. 28})$$

Il vient alors la relation suivante :

$$\begin{bmatrix} I1 \\ \vdots \\ In \\ I'1 \\ \vdots \\ I'n \\ I(M1) \\ I'(M1) \end{bmatrix} = 4\pi\sigma1 \begin{bmatrix} \frac{1}{r1,1} & \dots & \frac{1}{r1,2n+2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \\ r2n+2,1 & \dots & r2n+2,2n+2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} V1 \\ \vdots \\ Vn \\ V'1 \\ \vdots \\ V'n \\ V(M1) \\ V'(M1) \end{bmatrix} \\ + j\omega4\pi\varepsilon1 \begin{bmatrix} \frac{1}{r1,1} & \dots & \frac{1}{r1,2n+2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \\ r2n+2,1 & \dots & r2n+2,2n+2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} V1 \\ \vdots \\ Vn \\ V'1 \\ \vdots \\ V'n \\ V(M1) \\ V'(M1) \end{bmatrix}$$

Cette écriture est intéressante puisque qu'elle fait apparaître au niveau du premier terme la matrice des conductances G et le deuxième terme est celui des coefficients d'influence C. Les conductances G nous donnerons accès aux conductances g, qu'il suffira d'inverser pour obtenir le schéma de simulation statique. En revanche les coefficients d'influence nous donnerons accès aux capacités et donc à l'aspect dynamique.

Si l'on revient à l'eq. 28 et que l'on extrait la ligne i des équations matricielles ci-dessus, on peut écrire :

$$I_i = \sum_{j=1}^{2n+2} (4. \pi. \sigma1. a_{ij} + 4. \pi. j\omega\varepsilon1. a_{ij}) V_j = \sum_{j=1}^{2n+2} Y_{ij} . V_j \quad (\text{eq. 29})$$

Le terme  $Y_{ij}$  est une admittance complexe, homogène à une conductance mise en parallèle à un

condensateur comme le montre l'expression suivante :  $Y_{ii} = \frac{1}{R_i} + jC_i\omega = G_i + jC_i\omega$ .

Le système matriciel précédent peut donc être traduit à l'aide du schéma électrique Fig. 59.

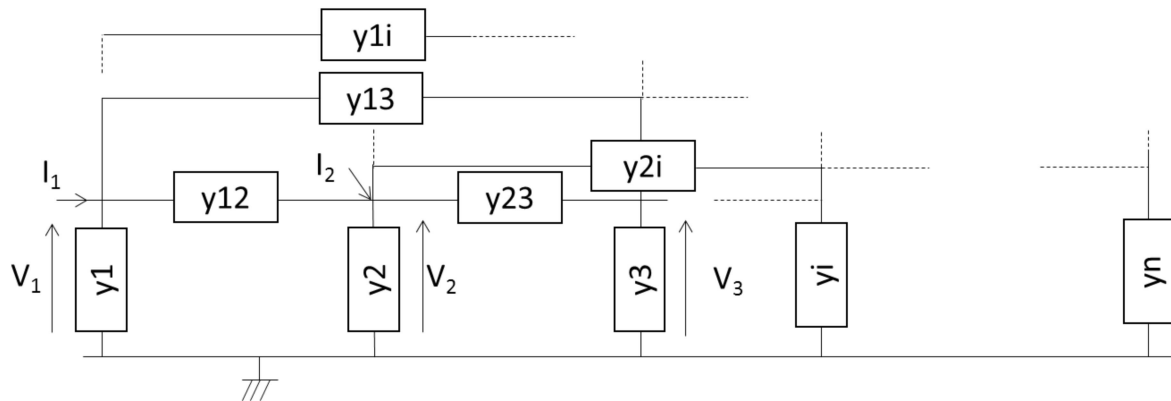


Fig. 59. Schéma électrique équivalent pour n courants

Si l'on généralise, chaque injection de courant présente un réseau R//C le reliant à l'infini et un réseau R//C de couplage avec tous les autres points d'injection du système considéré.

L'objectif est d'extraire la valeur des éléments  $y_{ij}$  de ce schéma.

On peut écrire :  $I_{ii} = y_i \cdot V_i$

$$I_{ij} = y_{ij} \cdot V_{ij} = y_{ij} \cdot (V_i - V_j)$$

$$I_i = \sum_{j=1}^{2n+2} I_{ij} \quad \text{somme algébrique}$$

$$I_i = y_i \cdot V_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{2n+2} y_{ij} \cdot (V_i - V_j)$$

$$I_i = \left( y_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{2n+2} y_{ij} \right) \cdot V_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{2n+2} y_{ij} \cdot V_j \quad (\text{eq. 30})$$

Par identification entre (eq. 29) et (eq. 30), il vient :

$$\begin{cases} Y_{ii} = y_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{2n+2} y_{ij} \\ Y_{ij} = -y_{ij} \end{cases}$$

Soit :

$$\begin{cases} y_i = Y_{ii} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{2n+2} Y_{ij} \\ y_{ij} = -Y_{ij} \end{cases}$$

La partie réelle des  $y_{ij}$  donnera la valeur de la conductance et la partie imaginaire la valeur de la capacité à mettre dans le schéma.

L'avantage de cette approche est que la valeur des éléments du schéma ne varie pas avec la fréquence, en revanche, les courants images ne sont pas réels mais les ordres de grandeur font que les atténuations ou déphasages sont souvent minimales c'est-à-dire  $k \approx 1$ .

Par ailleurs, s'il était nécessaire de prendre en compte le gain  $k$ , pour des signaux non sinusoïdaux, cela rendrait les choses plus difficiles.

A l'instar de la méthode PEEC, on constate que l'on sera amené à manipuler des matrices pleines.

### c. Courants sources seuls

La méthode de résolution précédemment présentée implique la manipulation de matrices carrées de taille  $(2n+2) \times (2n+2)$  car dans cette approche, le choix a été fait de travailler avec des matrices de réels.

La partie complexe introduite par la conductivité complexe se retrouve donc au niveau du vecteur courant qui contient les courants « images ».

On aurait pu raisonner différemment.

En effet, nous connaissons l'expression de ces courants images en fonction du courant d'injection (eq. 26 et eq. 27).

On peut écrire alors le vecteur des tensions des éléments conducteurs ainsi que la tension du point d'observation M en fonction des courants sources seuls :

$$\begin{bmatrix} V1 \\ \vdots \\ Vn \\ VM \end{bmatrix} = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \underline{\sigma 1}} \left( \begin{bmatrix} \frac{1}{r_{1,1}} & \dots & \frac{1}{r_{1,n+1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{r_{n+1,1}} & \dots & \frac{1}{r_{n+1,n+1}} \end{bmatrix} + \frac{\underline{\sigma 1} - \underline{\sigma 2}}{\underline{\sigma 1} + \underline{\sigma 2}} \begin{bmatrix} \frac{1}{r'_{1,1}} & \dots & \frac{1}{r'_{1,n+1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{r'_{n+1,1}} & \dots & \frac{1}{r'_{n+1,n+1}} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} I1 \\ \vdots \\ In \\ IM \end{bmatrix}$$

On définit alors une matrice carrée complexe pleine de dimension  $(n+1) \times (n+1)$ .

$$\begin{bmatrix} V1 \\ \vdots \\ Vn \\ VM \end{bmatrix} = \frac{1}{4\pi\underline{\sigma 1}} [A] \begin{bmatrix} I1 \\ \vdots \\ In \\ IM \end{bmatrix}$$

La suite de la résolution va reprendre les mêmes grandes étapes que précédemment à savoir :

- L'expression des courants en fonction des tensions, ce qui conduit à l'inversion de la matrice complexe :

$$\begin{bmatrix} I1 \\ \vdots \\ In \\ IM \end{bmatrix} = 4\pi\underline{\sigma 1} [A]^{-1} \begin{bmatrix} V1 \\ \vdots \\ Vn \\ VM \end{bmatrix} = 4\pi\underline{\sigma 1} [B] \begin{bmatrix} V1 \\ \vdots \\ Vn \\ VM \end{bmatrix} = [Y] \begin{bmatrix} V1 \\ \vdots \\ Vn \\ VM \end{bmatrix}$$

On obtient ainsi une matrice admittance  $Y$  donnant un schéma électrique équivalent à base de



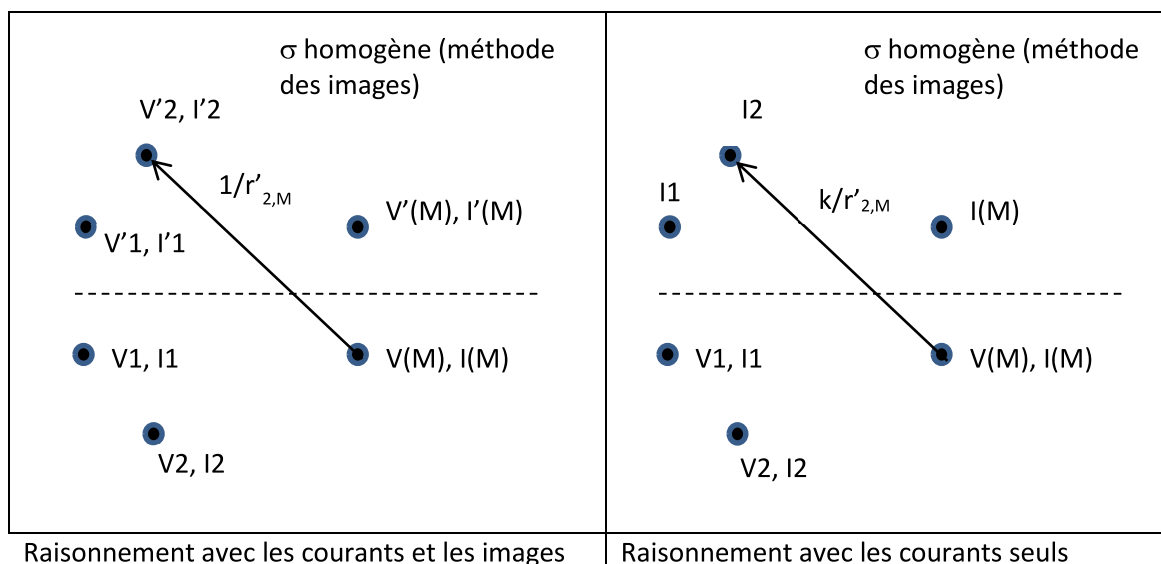
conductances et de capacités dont les valeurs seront calculées de la même manière que précédemment.

- L'expression de la  $i^{\text{ème}}$  ligne de ce système matriciel donne alors les admittances (partie réelle et imaginaire) à mettre dans le schéma électrique équivalent.

Ce schéma électrique comporte bien entendu moins d'éléments que celui qui a été établi précédemment en revanche la valeur des éléments sera dépendante de la fréquence.

#### 4.4.3 Obtention des termes des matrices

Pour chaque potentiel ligne de la matrice,  $V_i$ , on annule successivement les courants pour n'en laisser qu'un seul. Si le courant est  $I_i$  on obtient un terme de la diagonale (soit un terme propre) et si  $i \neq j$  on obtient un terme extra diagonal (soit un terme de couplage). L'élévation de potentiel est donnée par l'équation de Poisson du type  $\frac{1}{4\pi\sigma} \frac{1}{r}$  où  $r$  est la distance entre le point de potentiel  $V_i$  et le courant  $I_j$ .



#### 4.5 Confrontation des différentes approches et validation

Prenons le cas de figure très simple d'une injection ponctuelle de courant  $I_0$  située à l'origine du repère et plaçons la terre à la côte  $-h$ , comme le montre la Fig. 60.

Les données numériques sont celles du paragraphe « Application expérimentale 3.3.3 »

$\rho_1$	$I_0$	R	$r_0$	z	h
56 $\Omega \cdot m$	0,327 A	4 m	0,0585 m	0,5 m	0,05 m

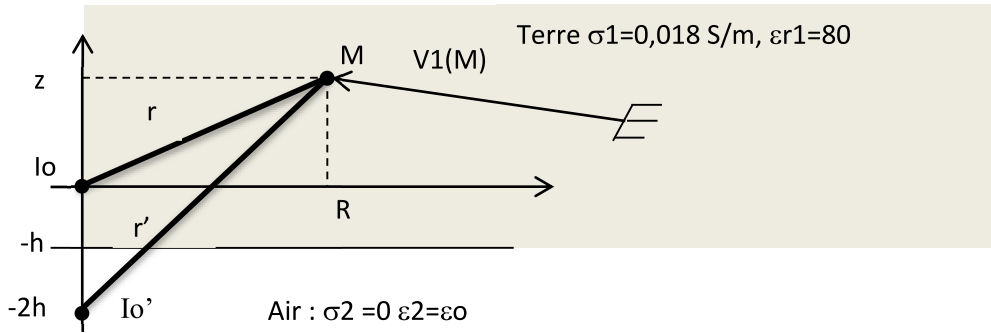


Fig. 60. Injection dans la terre : notations géométriques

Dans cette configuration, la valeur du paramètre  $h$  a été choisie non nulle afin d'appliquer la méthode précédente sous sa forme la plus générale. Dans l'approche phénoménologique de Wenner qui nous sert de fil conducteur, l'injection est supposée ponctuelle à la surface du sol. De ce fait il faudrait prendre  $h = 0$ , ici on a pris  $h = 5\text{cm}$  valeur très faible devant les autres distances.

#### 4.5.1 Cas statique ou à faible fréquence

Nous définirons mieux les limites de l'approche statique ou en basse fréquence lorsque nous aurons mieux évalué l'aspect capacitif que présente le système point d'injection –terre ou encore électrode-terre.

##### a. Approche phénoménologique

Appliquons l'approche phénoménologique du paragraphe 1 pour évaluer la tension dans la terre au point  $M$ . ( $z$  est pris faible pour approcher au mieux l'exemple phénoménologique et  $h$  est pris aussi petit de telle manière que l'image du courant qui se trouve cette fois ci dans l'air ne soit pas confondue avec le courant  $I_0$ ). Cette approche, uniquement utilisée en statique, prend en compte la présence de l'air grâce à l'intégration sur une demi-calotte sphérique dans la terre.

$$V1_{\text{phénoméno}}(M) = \frac{\rho_1 I_0}{2\pi r} = 0,723 V$$

##### b. Approche avec l'équation de Poisson

Appliquons maintenant l'expression de la tension  $V_1$  trouvée en résolvant l'équation de Poisson avec la présence de deux milieux,  $\sigma_1$ , la terre et  $\sigma_2$  l'air et donc pris égal à zéro. Dans le cas statique  $\sigma_2 = 0$  ce qui implique que  $I_0' = I_0$ .

$$V1_{\text{poisson}}(M) = \frac{I_0}{4\pi \sigma_1} \frac{1}{r} + \frac{I_0'}{4\pi \sigma_1} \frac{1}{r'} = 0,722 V$$

Avec  $r = \sqrt{R^2 + z^2}$  et  $r' = \sqrt{R^2 + (z + 2.h)^2}$ .

Dans ce cas pour être proche de l'expérimentation, on a effectivement  $r \approx r'$  ce qui conduit à  $V_1(M) = \frac{I_0}{4\pi \cdot \sigma_1} \frac{1}{r} + \frac{I_0'}{4\pi \cdot \sigma_1} \frac{1}{r'} \approx \frac{I_0}{2\pi \cdot \sigma_1} \frac{1}{r}$ .

### c. Approche avec les courants sources et les courants images

Réolvons enfin le problème grâce à une méthode circuit.

Dans cette approche, le milieu est considéré comme homogène de valeur  $\sigma_1$  et la présence de l'air est prise en compte par la méthode des images. On construit la matrice R (§4.4.2) qui permet de relier tous les potentiels en fonction des courants injectés. On obtient :

$$\begin{bmatrix} V_o \\ V_{o'} \\ V(M) \\ V'(M) \end{bmatrix} = \frac{1}{4\pi\sigma_1} \begin{bmatrix} \frac{1}{r_o} & \frac{1}{2h} & \frac{1}{r} & \frac{1}{r'} \\ \frac{1}{2h} & \frac{1}{r_o} & \frac{1}{r'} & \frac{1}{r} \\ \frac{1}{r} & \frac{1}{r'} & \frac{1}{r_o} & \frac{1}{2(h+z)} \\ \frac{1}{r'} & \frac{1}{r} & \frac{1}{2(h+z)} & \frac{1}{r_o} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_o \\ I'_{o'} \\ I(M) \\ I'(M) \end{bmatrix} \quad \text{où } V_o \text{ et } V_{o'} \text{ sont les tensions aux points}$$

d'injection  $I_o$  et  $I'_{o'}$ ,  $V(M)$  est la tension au point M, point d'observation, assez près de la surface de la terre et  $V'(M)$  son image.

On note que l'on peut immédiatement obtenir la tension  $V(M)$  et que l'on retrouve bien l'expression fournie par l'équation de Poisson en annulant  $I(M)$  et  $I'(M)$ .

Cette matrice est inversée pour donner la matrice G suivante :

$$= \begin{bmatrix} g_1 + g_{12} + g_{13} + g_{14} & -g_{12} & -g_{13} & -g_{14} \\ -g_{12} & g_2 + g_{12} + g_{23} + g_{24} & -g_{23} & -g_{24} \\ -g_{13} & -g_{23} & g_3 + g_{13} + g_{23} + g_{24} & -g_{34} \\ -g_{14} & -g_{24} & -g_{34} & g_4 + g_{14} + g_{24} + g_{34} \end{bmatrix} \quad [G]$$

On peut ainsi obtenir les valeurs de  $g_1, g_2, g_3, g_{12}, g_{13}, g_{23}, g_{14}, g_{24}, g_{34}$  dont on prend ensuite l'inverse pour obtenir les résistances qui sont introduites dans le schéma de type SPICE ci-dessous.

Le schéma comprend donc 4 nœuds  $I_o, I'_{o'}, V(M), V'(M)$  qui sont tous couplés les uns aux autres et reliés eux même à la référence de potentiel (Fig. 61).

La résolution donne la valeur  $V_1(M)=0,727$  V, ce qui donne encore une fois le même résultat, validant ainsi la cohérence des différentes approches.

On remarque que si  $h = 0$  pour être au plus près de la méthode Wenner, la résistance  $R_{23}$  est identique à  $R_{13}$  et les deux sources de courant sont les mêmes et confondues à la surface de la terre.

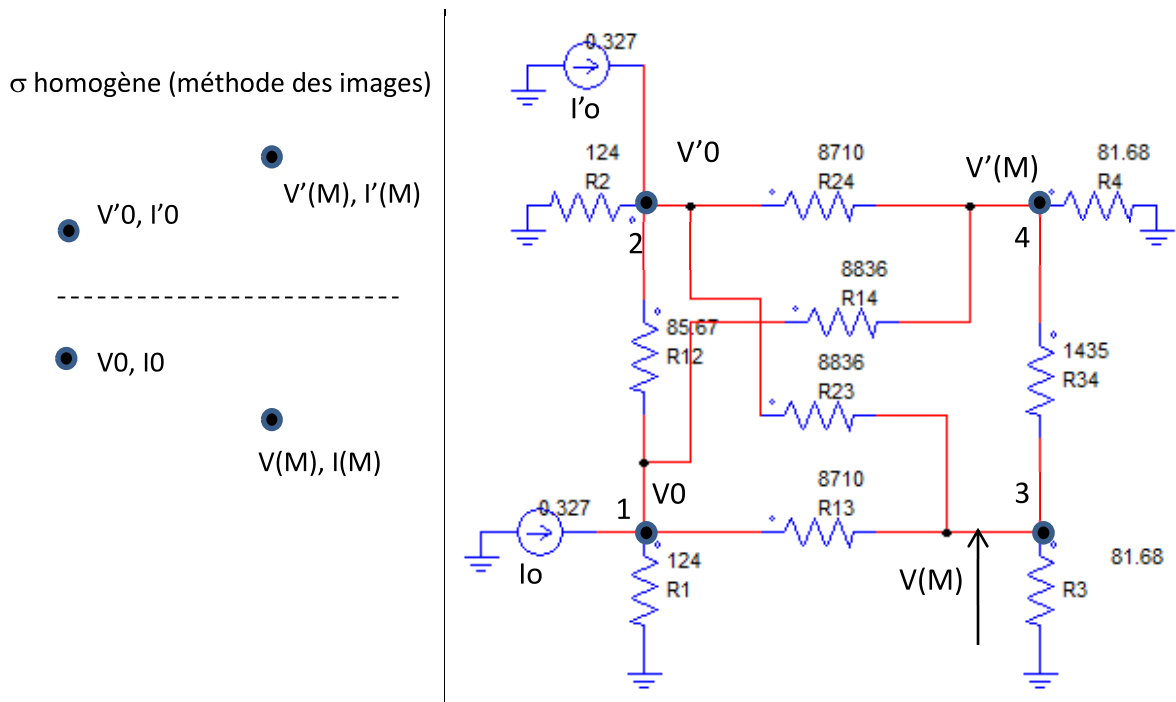


Fig. 61. Circuit représentant le système d'équations avec les courants et leurs images

#### d. Approche avec les courants sources seuls

Dans le cas où on ne prend en compte que les courants sources, le schéma électrique équivalent comporte bien entendu moins de composants (Fig. 62).

La détermination de la tension au point d'observation est immédiate et donne encore une fois le même résultat.

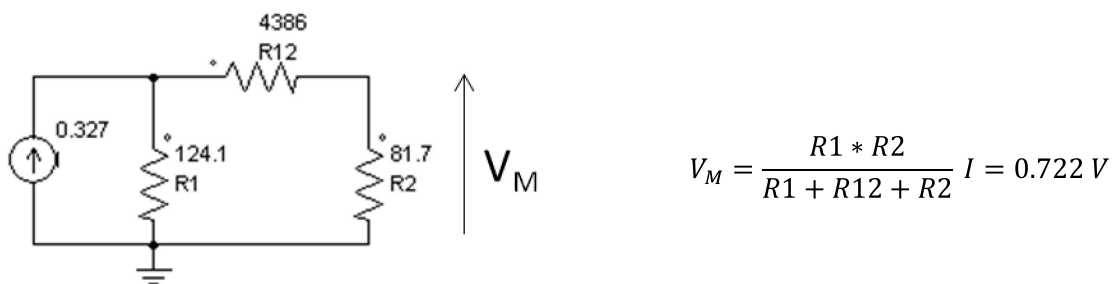


Fig. 62. Circuit représentant le système d'équations avec les courants seuls

#### 4.5.2 Cas dynamique avec courants de déplacement

Dans ce cas, il devient nécessaire de raisonner en prenant en compte une conductivité complexe définie par :  $\underline{\sigma} = \sigma + j\omega\epsilon$ .

Prenons les valeurs numériques suivantes :  $\sigma = \frac{1}{\rho_1} = 0,018 \text{ S/m}$  et  $\epsilon = 80 \epsilon_0$ .

On a vu qu'en présence d'une charge Q, le potentiel V à la distance r s'exprime par  $V(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon r}$ .

Ceci permet définir la valeur de la capacité  $C(r) = 4\pi\epsilon r$ .

### a. Résolution avec les courants sources et les courants images

On remarquera qu'il suffit de substituer à  $1/(4\pi\sigma_1 r)$  le terme  $1/(4\pi\epsilon_1 r)$  pour obtenir la matrice des coefficients de potentiel P suivante :

$$\begin{bmatrix} V_o \\ V_o' \\ V(M) \\ V'(M) \end{bmatrix} = \frac{1}{4\pi \cdot \epsilon_1 \cdot r_o} \begin{bmatrix} \frac{1}{r_o} & \frac{1}{2h} & \frac{1}{r} & \frac{1}{r'} \\ \frac{1}{2h} & \frac{1}{r_o} & \frac{1}{r'} & \frac{1}{r} \\ \frac{1}{r} & \frac{1}{r'} & \frac{1}{r_o} & \frac{1}{2(h+z)} \\ \frac{1}{r'} & \frac{1}{r} & \frac{1}{2(h+z)} & \frac{1}{r_o} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_o/p \\ I'o/p \\ I(M)/p \\ I'(M)/p \end{bmatrix}$$

Celle-ci est ensuite inversée pour obtenir la matrice des coefficients d'influence et enfin les capacités parasites.

On a montré dans le paragraphe précédent que la superposition est légitime. Il est aussi possible d'obtenir immédiatement la matrice complexe en raisonnant avec la conductivité complexe directement. Chaque terme de la matrice inversée fera apparaître une valeur réelle, la conductance et une valeur imaginaire, le coefficient d'influence.

$$\begin{bmatrix} V_o \\ V_o' \\ V(M) \\ V'(M) \end{bmatrix} = \frac{1}{4\pi \cdot (\sigma_1 + j\omega\epsilon_1)} \begin{bmatrix} \frac{1}{r_o} & \frac{1}{2h} & \frac{1}{r} & \frac{1}{r'} \\ \frac{1}{2h} & \frac{1}{r_o} & \frac{1}{r'} & \frac{1}{r} \\ \frac{1}{r} & \frac{1}{r'} & \frac{1}{r_o} & \frac{1}{2(h+z)} \\ \frac{1}{r'} & \frac{1}{r} & \frac{1}{2(h+z)} & \frac{1}{r_o} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_o \\ I'o \\ I(M) \\ I'(M) \end{bmatrix}$$

On obtient le schéma de simulation Fig. 63 avec les sources de courant  $I_o$  et  $I_o'$  qui représentent les courants d'injection.

Contrairement au cas précédent  $I_o' = \frac{\sigma_1 + j\omega\epsilon_1 - j\omega\epsilon_o}{\sigma_1 + j\omega\epsilon_1 + j\omega\epsilon_o} I_o$ . Ceci se traduit par la définition d'une source de courant  $I_o'$  dont l'amplitude et la phase sont différentes de celle de  $I_o$  (référence de phase nulle).

Fréquence	400 kHz	2MHz	200MHz
k avec ( $I_o' = k I_o$ )	$1 \angle -0,14^\circ$	$0,995 \angle -0,57^\circ$	$0,975 \angle -0,03^\circ$
$I_o'$ (A)	$0,327 \angle -0,14^\circ$	$0,325 \angle -0,57^\circ$	$0,319 \angle -0,03^\circ$
V(M) SPICE	718 mV	649 mV	14,26 mV
V(M) Poisson	715 mV	646 mV	14,5 mV

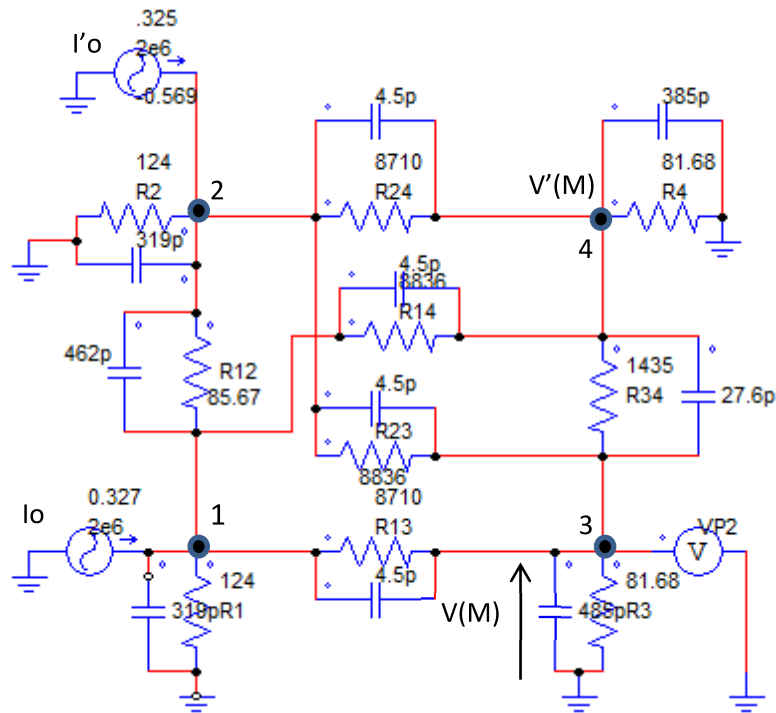


Fig. 63. Circuit représentatif du système (valeur des composants indépendante de la fréquence)

**b. Résolution avec les courants sources seuls**

Dans ce cas la dimension du problème se réduit à 2, le point d'injection et le point d'observation. On notera cependant que la deuxième matrice met en jeu néanmoins les distances entre le point d'injection o et d'observation M avec les images...

$$\begin{bmatrix} V_o \\ V(M) \end{bmatrix} = \frac{1}{4\pi \cdot (\sigma_1 + j\omega\epsilon_1)} \left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{r_o} & \frac{1}{r} \\ \frac{1}{r} & \frac{1}{r_o} \end{bmatrix} + k \begin{bmatrix} \frac{1}{2h} & \frac{1}{r'} \\ \frac{1}{r'} & \frac{1}{2(h+z)} \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} I_o \\ I(M) \end{bmatrix}$$

De la même manière que précédemment, si nous faisons un schéma équivalent avec un seul courant source, la nature même de l'approche conduit à des valeurs des composants variant avec la fréquence.

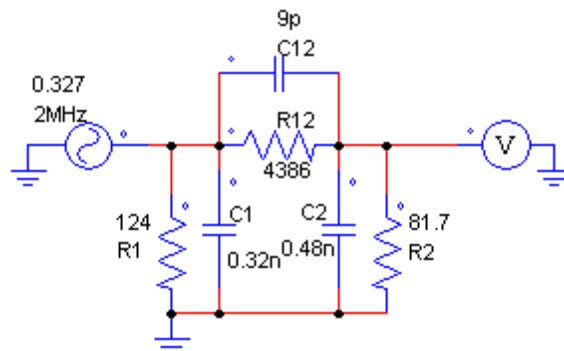


Fig. 64. Circuit équivalent (ici les composants dépendent de la fréquence (2 MHz))

Pour la même fréquence de 2 MHz, le schéma électrique Fig. 64 est simulé.

Il est possible de tracer l'évolution de la valeur des composants de ce schéma avec la fréquence. A titre d'exemple Fig. 65 présente la variation de la conductance R1 et de la capacité C1 du schéma électrique précédent.

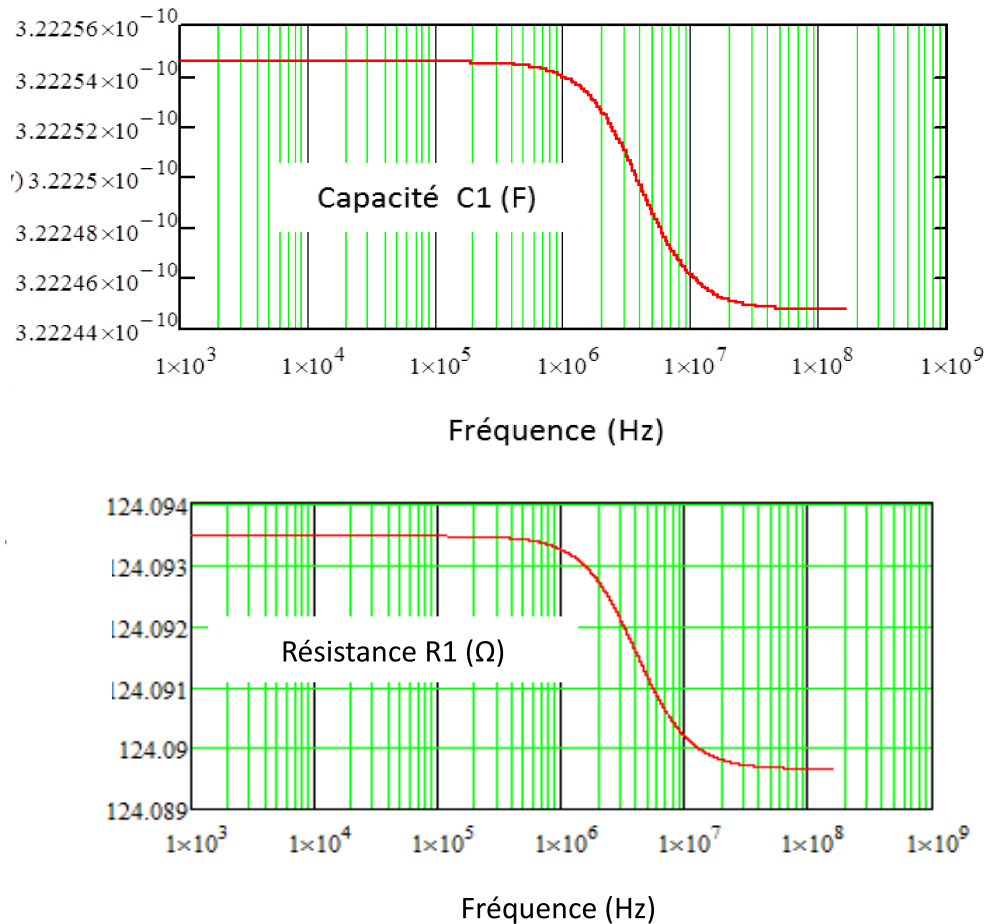


Fig. 65. Evolution des éléments du circuit équivalent avec la fréquence

De ces courbes on observe que :

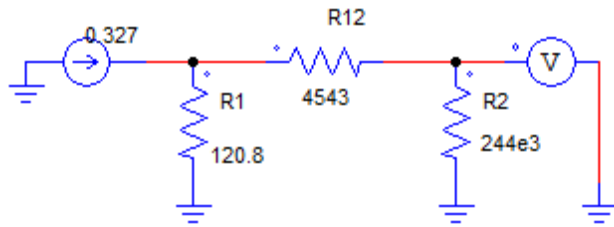
- il faut aller chercher le 4<sup>ème</sup> chiffre après la virgule pour voir une différence.
- Cette variation intervient aux environs du mégahertz dans le cas de figure étudié

On pourra donc considérer que les composants varient vraiment peu avec la fréquence dans le cas d'une injection ponctuelle. Avec des pieux réels, la surface de contact avec la terre sera plus importante et probablement ces considérations préliminaires seront à revoir.

#### Importance du choix du rayon du point d'observation

Nous avons pris arbitrairement le même rayon pour le point d'observation M que pour le point d'injection. Prenons ici une autre valeur robs qui permet de relier la tension V(M) au courant injecté I(M). Les autres distances sont inchangées comme le montre le système matriciel ci-dessous :

$$\begin{bmatrix} V_o \\ V(M) \end{bmatrix} = \frac{1}{4\pi \cdot (\sigma_1 + j\omega\epsilon_1)} \left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{r_o} & \frac{1}{r} \\ \frac{1}{r} & \frac{1}{r_{obs}} \end{bmatrix} + k \begin{bmatrix} \frac{1}{2h} & \frac{1}{r'} \\ \frac{1}{r'} & \frac{1}{2(h+z)} \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} I_o \\ I(M) \end{bmatrix}$$



$$V_M = \frac{R1 * R2}{R1 + R12 + R2} I = 0.722 V$$

On démontre ainsi l'indépendance du potentiel vis-à-vis du rayon Robs du point d'observation. Ce résultat numérique est confirmé par l'étude asymptotique de la relation  $V_M$ . En effet lorsque  $R2$  tend vers l'infini, alors  $V_M \approx R1 * I$

#### Evaluation de la tension grâce à l'équation de Poisson

L'équation de Poisson  $V1_{Poisson}(M) = \frac{I_o}{4\pi\sigma_1} \frac{1}{r} + \frac{I_o'}{4\pi\sigma_1} \frac{1}{r'}$  donne le résultat suivant à la fréquence 2MHz :  $V1_{poisson}(2 \cdot 10^6) = 0.578 - 0.288i$   $|V1_{poisson}(2 \cdot 10^6)| = 0.646 V$

Il est ensuite possible de tracer le diagramme de Bode de la tension  $V1(M)$  (Fig. 66).

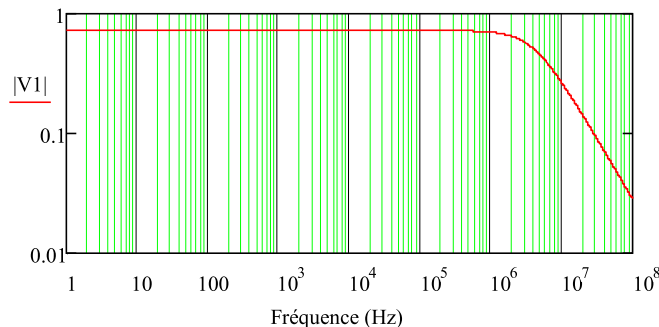


Fig. 66. Diagramme de bode de la tension

La simulation Spice à la fréquence par exemple de 2 MHz donne la même amplitude avec les deux approches de simulation choisies. (0,649 V crête)

#### 4.5.3 Exemple d'une injection de foudre

De la même manière que précédemment, deux solutions s'offrent à nous, utiliser le courant source et image, ou le seul courant source comme le montrent les schémas Fig. 67.

Dans ce cas, l'utilisation du seul courant source est plus intéressant car :

- d'une part le schéma à simuler est plus léger
- et surtout, le facteur  $k$  qui permet de définir le courant image à partir du courant source est défini en fréquentiel. Or il s'agit ici de faire une simulation temporelle avec une agression au contenu spectral large. Dans cet exemple l'excursion réduite de la bande de fréquence sollicitée par la foudre fait que globalement  $k$  est proche de 1, conduisant à dupliquer simplement le générateur de foudre. Dans d'autres cas cela pourrait s'avérer



bien plus complexe.

Par ailleurs, on peut noter que les capacités n'ont aucun impact sur la montée de potentiel au point d'observation, ce qui est cohérent avec les études précédentes. En effet la foudre présente une fréquence équivalente aux alentours de 350-400 kHz, or nous avons vu que la bande passante du modèle (Fig. 66) s'étend jusqu'à 2MHz environ. Il est donc logique de ne trouver aucun impact des capacités parasites dans ce modèle (Fig. 68).

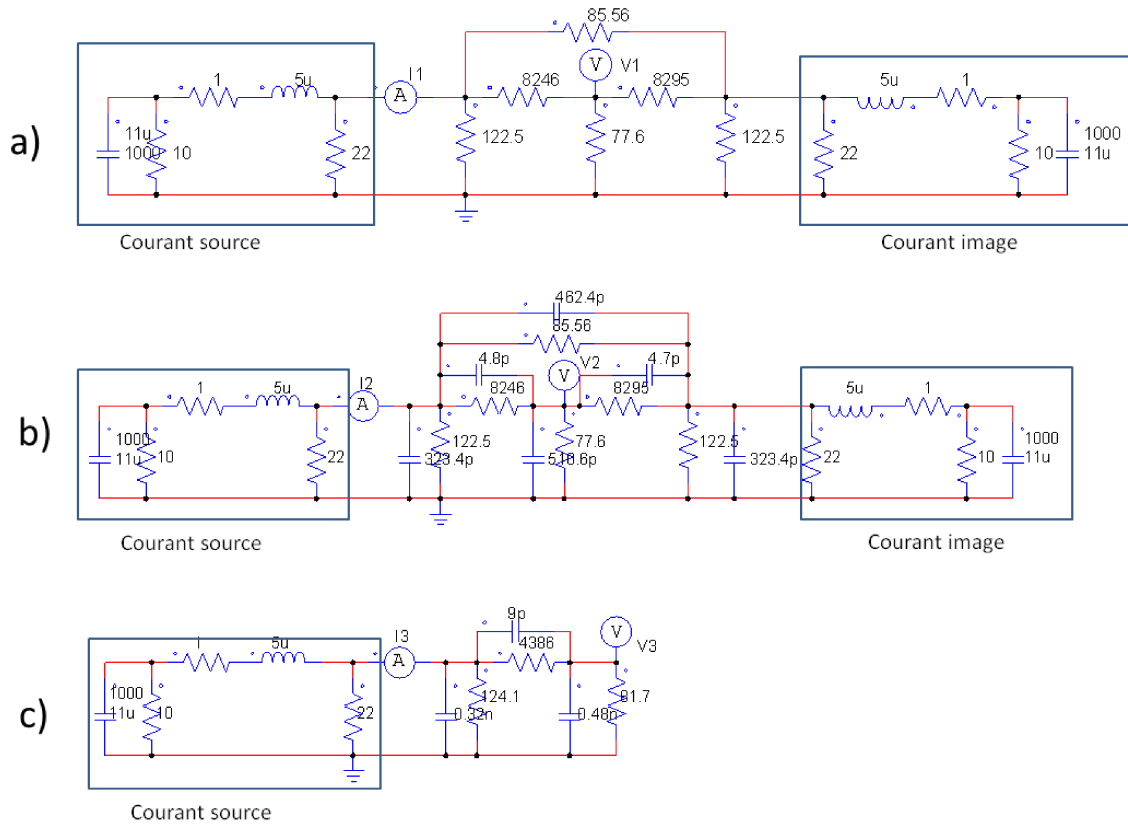


Fig. 67. Injection de type foudre : courants source + image (a sans capa et b avec capa), courant source seul (c)

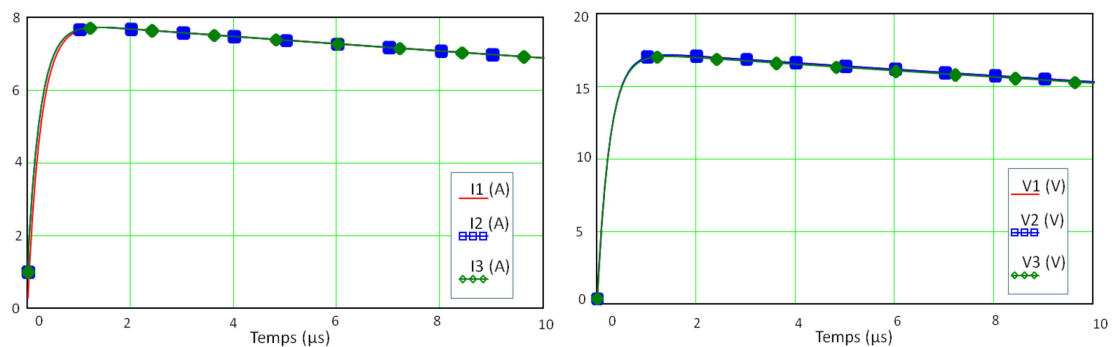


Fig. 68. Injection de type foudre : Courants (à gauche) et tensions (à droite)

#### 4.6 Conclusion

L'hypothèse fondamentale de ce chapitre a été de traiter le cas d'une injection ponctuelle de plusieurs courants et d'étudier les phénomènes d'écoulement de ces courants dans un milieu conducteur caractérisé par une conductivité complexe  $\sigma$ . La simplicité géométrique du problème a

permis de résoudre théoriquement l'équation de Poisson avec ou sans la prise en compte de l'interface terre air ou de façon plus générale la prise en compte de la conduction dans deux milieux. Ceci a conduit à des expressions analytiques qui ont pu être confrontées à la méthode expérimentale de Wenner et validées.

L'originalité est d'avoir cherché et réussi à représenter le phénomène physique par un schéma électrique équivalent qui sera utilisable dans des simulateurs comme nous allons le prouver dans la suite de ce travail.

L'objectif du chapitre suivant sera d'étendre ces formulations à des segments élémentaires qui constituent une étape intermédiaire avant de recourir à une méthode numérique pour résoudre le cas de conducteurs réels de géométrie plus complexe.



# Chapitre 5 : Passage d'une injection ponctuelle à un conducteur réel ou à un système de conducteurs

## 5 Passage d'une injection ponctuelle à un conducteur réel ou à un système de conducteurs

Jusqu'à présent, l'injection de courant était considérée comme ponctuelle mais dans le cas réel d'un système de mise à la terre, les injections se font par des électrodes de type conducteur cylindrique (pieu de terre) voire des grilles de terre (Fig. 69). Dans ce cas, les lignes de champs seront déformées par la présence du conducteur ou de la grille.

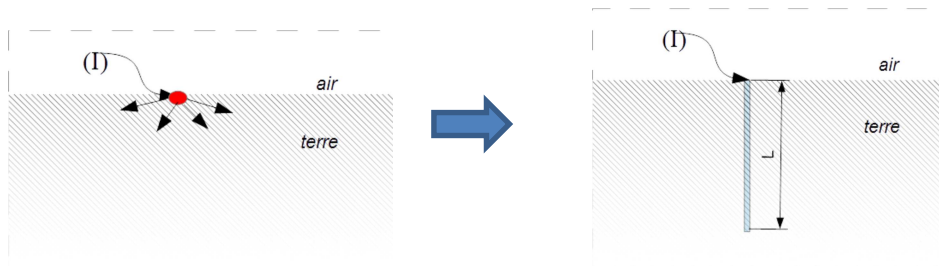


Fig. 69. Injection à la surface air-terre : passage du point à un élément de conducteur

### 5.1 Formulations

#### 5.1.1 Passage à un élément filiforme

Le passage au conducteur filiforme va se faire en le considérant comme un ensemble de points desquels sort un courant, la valeur du courant sortant d'un élément de longueur  $du$  s'exprime par :

$$I_{\text{sortant}} = I_{u+du} - I_u = dI(u)$$

En reprenant le résultat précédent, le potentiel en un point M sera donc dû à la contribution d'un courant source et de son image.

Alors :

$$dV_1 = \frac{1}{\sigma_1 4\pi r} dI(u) + \frac{1}{\sigma'_1 4\pi r'} dI(u) \quad (\text{eq. 31})$$

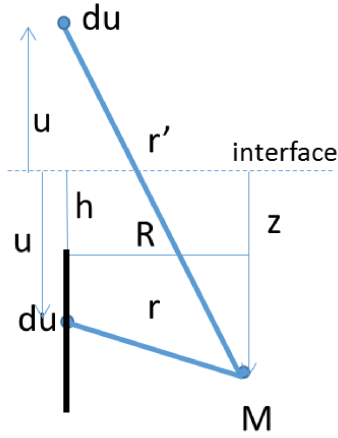
Pour passer de la modélisation d'une injection ponctuelle au cas réel, il faut intégrer sur la longueur  $l$  du conducteur. Mais pour calculer cette intégrale, il faut connaître la répartition du courant sortant dans le milieu  $I(u)$ . Cette répartition de courant n'est pas uniforme du fait de l'équipotentialité du conducteur. On va donc s'intéresser à un tronçon de conducteur de longueur  $l$  suffisamment court afin de supposer la répartition de courant uniforme sur  $l$ . (Fig. 70).



Fig. 70. Répartition uniforme du courant sortant de l'élément de conducteur

### a. Cas d'un élément filiforme perpendiculaire à l'interface situé dans le milieu 1

Ce cas élémentaire va permettre de modéliser le cas d'un pieu de terre par exemple.



On note  $z$  la position du point d'observation de la tension par rapport à l'interface entre les deux milieux et  $u$  la position de l'élément de courant  $du$  par rapport à l'interface.

$$r = \sqrt{(z - u)^2 + R^2} \text{ et } r' = \sqrt{(z + u)^2 + R^2}$$

$$V1(R, z) = \frac{1}{4\pi\sigma_1} \frac{I(0)}{l} \int_h^{l+h} \frac{1}{\sqrt{(z - u)^2 + R^2}} du + \frac{1}{4\pi\sigma'_1} \frac{I(0)}{l} \int_h^{l+h} \frac{1}{\sqrt{(z + u)^2 + R^2}} du$$

Par la suite :  $\int \frac{1}{\sqrt{(z-u)^2 + R^2}} du = -\ln(z - u + \sqrt{(z - u)^2 + R^2})$

Soit :

$$V1(R, z) = \frac{1}{4\pi\sigma_1} \frac{I(0)}{l} \ln\left(\frac{z - h + \sqrt{(z - h)^2 + R^2}}{z - l - h + \sqrt{(z - l - h)^2 + R^2}}\right) + \frac{1}{4\pi\sigma'_1} \frac{I(0)}{l} \ln\left(\frac{z + l + h + \sqrt{(z + l + h)^2 + R^2}}{z + h + \sqrt{(z + h)^2 + R^2}}\right) \quad (\text{eq. 32})$$

$V1(R, z)$  est donc l'élévation de potentiel du point  $M(R, z)$  due à la présence du courant  $I(0)$  dans l'élément de conducteur filiforme à ce stade.

La même démarche est appliquée pour déterminer l'expression de la tension  $V2$ , quand le point d'observation est dans le milieu 2.

$$V2(R, z) = \frac{1}{4\pi(\sigma_1 + \sigma_2)} \frac{2}{l} \frac{I(0)}{l} \ln\left(\frac{z + l + h + \sqrt{(z + l + h)^2 + R^2}}{z + h + \sqrt{(z + h)^2 + R^2}}\right) \quad (\text{eq. 33})$$

Remarque : Notons la ressemblance des formulations avec le calcul du potentiel vecteur magnétique  $\vec{A}$  utilisant la méthode PEEC [49] dont l'expression est la suivante :

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \left\{ \ln \left| z + u + \sqrt{(z + u)^2 + R^2} \right| - \ln \left| z - u + \sqrt{(z - u)^2 + R^2} \right| \right\}$$

et les mutuelles partielles se calculent selon l'expression  $M_{p12} = \frac{1}{l} \int_c \vec{A} \cdot \vec{dl}$

On va ainsi pouvoir bénéficier de l'expérience acquise dans le développement de cette méthode depuis plus d'une vingtaine d'années.

Dans les développements qui vont suivre, nous allons donc calculer les expressions élémentaires d'élévations de potentiel dus aux couplages ou à l'élévation de potentiel au conducteur propre.

**b. Cas d'un élément filiforme parallèle à l'interface, dans le milieu 1**

Ce cas élémentaire va permettre de prendre en compte soit un conducteur parallèle à l'interface dans le sol, soit un conducteur parallèle à l'interface mais dans l'air ou dans le bâtiment comme tout câblage (Fig. 71).

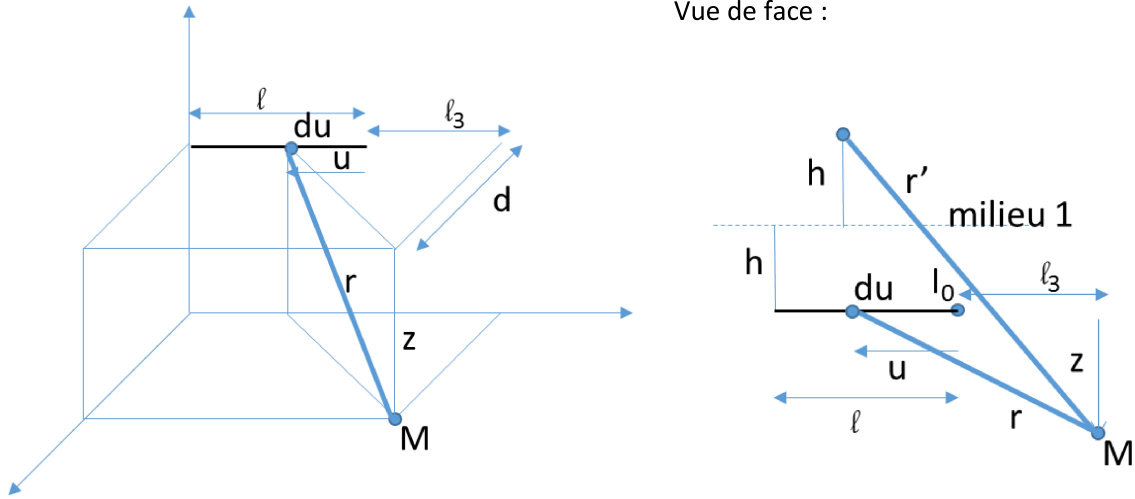


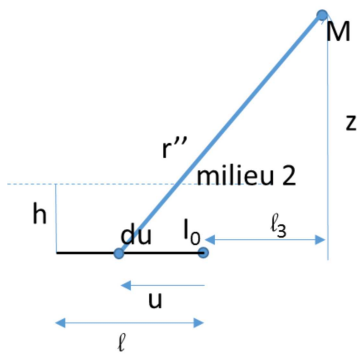
Fig. 71. Configuration d'un élément parallèle à l'interface dans le milieu 1

Toujours avec l'hypothèse de densité de courant uniforme le long de l'élément conducteur, on peut écrire la tension au point M dans le milieu :

$$V1(l3, z, d, h) = \frac{1}{4\pi\sigma_1} \frac{I(0)}{l} \int_0^l \frac{1}{\sqrt{(u+l3)^2 + d^2 + z^2}} du + \frac{1}{4\pi\sigma'_1} \frac{I(0)}{l} \int_0^l \frac{1}{\sqrt{(z+2h)^2 + d^2 + (u+l3)^2}} du.$$

$$V1(l3, z, d, h) = \frac{1}{4\pi\sigma_1} \frac{I(0)}{l} \ln \left( \frac{l+l3 + \sqrt{z^2 + d^2 + (l+l3)^2}}{l3 + \sqrt{z^2 + d^2 + l3^2}} \right) + \frac{1}{4\pi\sigma'_1} \frac{I(0)}{l} \ln \left( \frac{l+l3 + \sqrt{(z+2h)^2 + d^2 + (l+l3)^2}}{l3 + \sqrt{(z+2h)^2 + d^2 + l3^2}} \right)$$

$$V1(l3, z, d, h) = \frac{I(0)}{l} \left( \frac{1}{4\pi\sigma_1} \left[ \ln \left( u + \sqrt{u^2 + d^2 + z^2} \right) \right]_{l3}^{l3+l} \right. \\ \left. + \frac{1}{4\pi\sigma'_1} \left[ \ln \left( u + \sqrt{u^2 + d^2 + (z+2h)^2} \right) \right]_{l3}^{l3+l} \right) \quad (\text{eq. 34})$$



Idem pour la tension V2, quand le point d'observation est dans le milieu 2.

$$V2(l3, z, d) = \frac{1}{4\pi(\sigma_1 + \sigma_2)} \frac{2 I(0)}{l} \ln \left( \frac{l + l3 + \sqrt{z^2 + d^2 + (l + l3)^2}}{l3 + \sqrt{z^2 + d^2 + l3^2}} \right) \quad (\text{eq. 35})$$

Remarque : dans cette expression, z est la distance entre le point d'observation et l'élément de conducteur

### 5.1.2 Deux éléments de conducteurs filiformes

Au niveau du point  $M(R,z)$ , un second élément de conducteur est positionné. On va déterminer ainsi le couplage entre les deux éléments de conducteur.

Toujours avec l'hypothèse d'une densité de courant constante sortant de l'élément 1, on va intégrer l'expression du potentiel  $V_1$  précédemment calculée sur la longueur de l'élément 2, dans plusieurs cas, selon la position géométrique des éléments de conducteur.

L'intégration sera faite pour les cas d'éléments parallèles puis perpendiculaires et pour le cas particulier d'un élément cylindrique de rayon  $a$  permettant de lever l'indétermination du potentiel sur le pieu d'injection.

#### *a. Cas de deux éléments parallèles et filiformes dans le même milieu 1, perpendiculaires à l'interface*

Pour le cas d'une injection entre deux éléments parallèles comme le montre la Fig. 72, on repart de (eq. 32) (§5.1.1a). On continue de supposer que la densité de courant sortant de l'élément est constante.

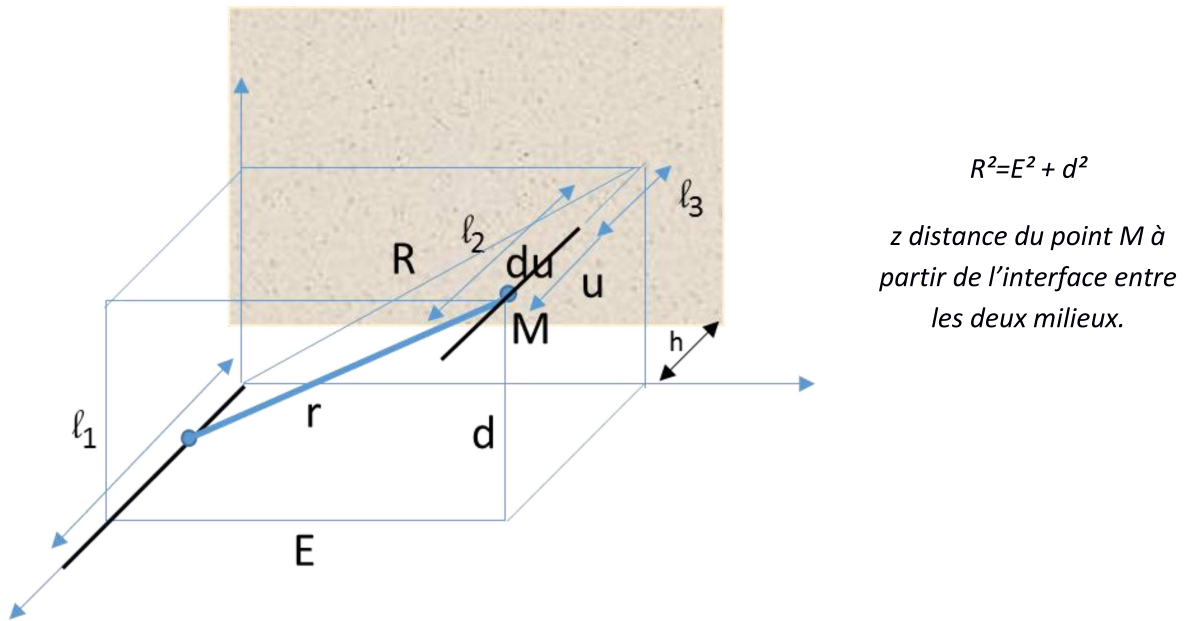


Fig. 72. Configuration de deux éléments parallèles, perpendiculaires à l'interface

L'élévation de potentiel au niveau de l'élément 2 dû à l'élément 1 donne :

$$V_{12}(R, h) = \frac{1}{4\pi\sigma_1} \frac{I(0)}{l_1 l_2} \int_{l_3+h}^{l_3+h+l_2} \ln \left( \frac{z-h + \sqrt{(z-h)^2 + R^2}}{z-l_1-h + \sqrt{(z-l_1-h)^2 + R^2}} \right) dz + \frac{1}{4\pi\sigma'_1} \frac{I(0)}{l_1 l_2} \int_{l_3+h}^{l_3+h+l_2} \ln \left( \frac{z+l_1+h + \sqrt{(z+l_1+h)^2 + R^2}}{z+h + \sqrt{(z+h)^2 + R^2}} \right) dz \quad (\text{eq. 36})$$

Sachant que :  $\int \ln(z + \sqrt{R^2 + z^2}) dz = z \ln(z + \sqrt{R^2 + z^2}) - \sqrt{R^2 + z^2}$



On obtient :

$$V_{12}(R) = \frac{1}{4\pi\sigma_1} \frac{I(0)}{l_1 l_2} \left[ z \ln \left( z + \sqrt{R^2 + z^2} \right) - \sqrt{R^2 + z^2} \right]_{l_2+l_3-l_1, l_3}^{l_3-l_1, l_3+l_2} + \frac{1}{4\pi\sigma'_1} \frac{I(0)}{l_1 l_2} \left[ z \ln \left( z + \sqrt{R^2 + z^2} \right) - \sqrt{R^2 + z^2} \right]_{l_3+2h+l_1, l_3+2h+l_2}^{l_2+l_3+2h+l_1, l_3+2h}$$

Avec :

$$[F(Z)]_{Z_2, Z_4}^{Z_1, Z_3} = F(Z_1) - F(Z_2) + F(Z_3) - F(Z_4)$$

De cette expression on peut définir une impédance mutuelle entre les deux éléments parallèles donnée par la même formule que celle pour le calcul de la mutuelle inductance partielle entre deux conducteurs pour la partie due au milieu 1 et de la même forme pour la partie liée à la présence du second milieu.

$$Z_m(R) = \frac{1}{4\pi\sigma_1} \frac{1}{l_1 l_2} \left[ z \ln \left( z + \sqrt{R^2 + z^2} \right) - \sqrt{R^2 + z^2} \right]_{l_2+l_3-l_1, l_3}^{l_3-l_1, l_3+l_2} + \frac{1}{4\pi\sigma'_1} \frac{1}{l_1 l_2} \left[ z \ln \left( z + \sqrt{R^2 + z^2} \right) - \sqrt{R^2 + z^2} \right]_{l_3+2h+l_1, l_3+2h+l_2}^{l_2+l_3+2h+l_1, l_3+2h} \quad (\text{eq. 37})$$

**Remarque :** Dans le cas particulier de deux éléments conducteurs de même longueur ( $l_1 = l_2 = l$ ) avec  $l_3 = 0$  et  $h = 0$  (à la surface)(Fig. 73), l'expression de  $V_{12}$  se simplifie.

$$V_{12}(R) = \frac{1}{2\pi\sigma_1} \frac{I(0)}{l} \left[ \ln \left( \frac{l}{R} + \sqrt{1 + \left( \frac{l}{R} \right)^2} \right) - \sqrt{1 + \left( \frac{R}{l} \right)^2} + \frac{R}{l} \right] + \frac{1}{4\pi\sigma'_1} \frac{I(0)}{l} \left[ 2 \ln \left( \frac{2l + \sqrt{R^2 + (2l)^2}}{l + \sqrt{R^2 + l^2}} \right) - \sqrt{4 + \left( \frac{R}{l} \right)^2} + 2 \sqrt{1 + \left( \frac{R}{l} \right)^2} - \frac{R}{l} \right]$$

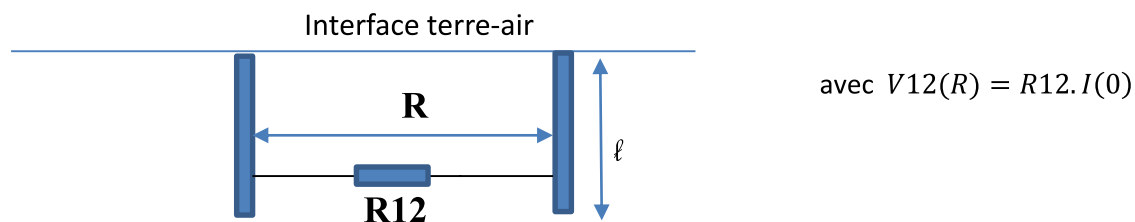


Fig. 73. Configuration de deux éléments parallèles de même longueur, à la surface du sol et perpendiculaires à l'interface

Et si on se trouve dans le même milieu homogène, c'est-à-dire  $\sigma_1 = \sigma_2$ , alors on retrouve l'expression suivante bien connue.

$$V_{12}(R) = \frac{1}{2\pi\sigma_1} \frac{I(0)}{l} \left[ \ln \left( \frac{l}{R} + \sqrt{1 + \left( \frac{l}{R} \right)^2} \right) - \sqrt{1 + \left( \frac{R}{l} \right)^2} + \frac{R}{l} \right]$$

**b. Cas de deux éléments perpendiculaires et filiformes dans le même milieu 1, dans un plan perpendiculaire à l'interface**

Cette configuration se rencontre lorsqu'on souhaite modéliser une grille de terre, perpendiculaire à l'interface (Fig. 74).

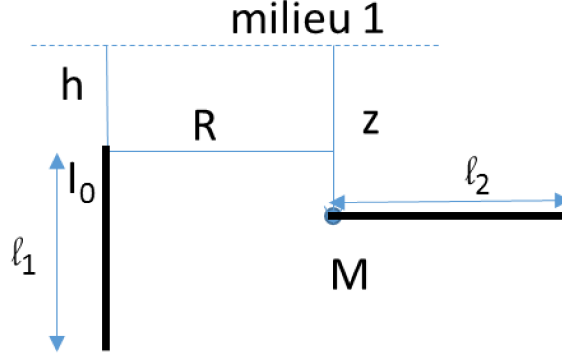


Fig. 74. Configuration de deux conducteurs perpendiculaires

On repart de (eq. 32) (§ 5.1.1a) pour écrire :

$$V_{12}(R, z, h) = \frac{1}{4\pi\sigma_1} \frac{I(0)}{l_1 l_2} \int_0^{l_2} \ln \left( \frac{z - h + \sqrt{(z - h)^2 + (R + u)^2}}{z - l_1 - h + \sqrt{(z - l_1 - h)^2 + (R + u)^2}} \right) du$$

$$+ \frac{1}{4\pi\sigma'_1} \frac{I(0)}{l_1 l_2} \int_0^{l_2} \ln \left( \frac{z + l_1 + h + \sqrt{(z + h + l_1)^2 + (R + u)^2}}{z + h + \sqrt{(z + h)^2 + (R + u)^2}} \right) du$$

Or :  $\int_a^b \ln(z + \sqrt{u^2 + z^2}) du = [u \ln(z + \sqrt{u^2 + z^2}) + z \ln(u + \sqrt{u^2 + z^2}) - u]_a^b$

Donc après simplifications :

$$V_{12}(R, z, h) = \frac{1}{4\pi\sigma_1} \frac{I(0)}{l_1 l_2} \left( [u \ln(z - h + \sqrt{u^2 + (z - h)^2}) + (z - h) \ln(u + \sqrt{u^2 + (z - h)^2})]_R^{R+l_2} \right.$$

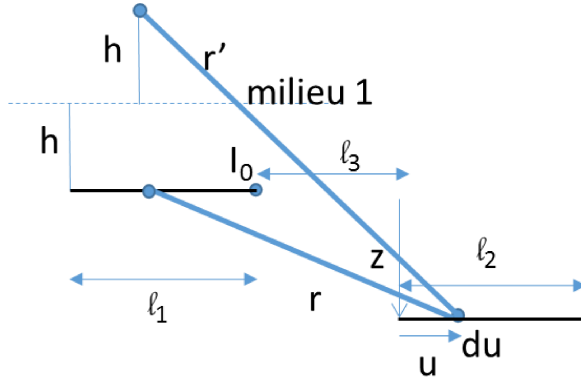
$$- [u \ln(z - l_1 - h + \sqrt{u^2 + (z - l_1 - h)^2}) + (z - l_1 - h) \ln(u + \sqrt{u^2 + (z - l_1 - h)^2})]_R^{R+l_2} \left. \right)$$

$$+ \frac{1}{4\pi\sigma'_1} \frac{I(0)}{l_1 l_2} \left( [u \ln(z + l_1 + h + \sqrt{(z + l_1 + h)^2 + u^2}) + (z + l_1 + h) \ln(u + \sqrt{(z + l_1 + h)^2 + u^2})]_R^{R+l_2} \right.$$

$$- [u \ln(z + h + \sqrt{(z + h)^2 + u^2}) + (z + h) \ln(u + \sqrt{(z + h)^2 + u^2})]_R^{R+l_2} \left. \right)$$

**c. Cas de deux éléments parallèles et filiformes dans le même milieu 1, parallèles à l'interface**

On va dans ce cas intégrer l'expression donnée par (eq. 34) (§ 5.1.1b).



(paramètre  $d$  défini Fig. 71)

$$V_{12}(l_3, z, d, h) = \frac{1}{4\pi\sigma_1} \frac{I(0)}{l_1 l_2} \int_0^{l_2} \ln \left( \frac{l_1 + l_3 + u + \sqrt{z^2 + d^2 + (l_1 + l_3 + u)^2}}{l_3 + u + \sqrt{z^2 + d^2 + (l_3 + u)^2}} \right) du$$

$$+ \frac{1}{4\pi\sigma'_1} \frac{I(0)}{l_1 l_2} \int_0^{l_2} \ln \left( \frac{l_1 + l_3 + u + \sqrt{(z + 2h)^2 + d^2 + (l_1 + l_3 + u)^2}}{l_3 + u + \sqrt{(z + 2h)^2 + d^2 + (l_3 + u)^2}} \right) du$$

Soit :

$$V_{12}(l_3, z, d, h) = \frac{1}{4\pi\sigma_1} \frac{I(0)}{l_1 l_2} \left[ u \ln \left( u + \sqrt{u^2 + d^2 + z^2} \right) - \sqrt{u^2 + d^2 + z^2} \right]_{l_3+l_1, l_3+l_2}^{l_3+l_1+l_2, l_3}$$

$$+ \frac{1}{4\pi\sigma'_1} \frac{I(0)}{l_1 l_2} \left[ u \ln \left( u + \sqrt{u^2 + d^2 + (z + 2h)^2} \right) - \sqrt{u^2 + d^2 + (z + 2h)^2} \right]_{l_3+l_1, l_3+l_2}^{l_3+l_1+l_2, l_3}$$

Remarque : dans le cas d'une grille verticale (perpendiculaire à l'interface)  $d=0$  et dans le cas d'une grille horizontale (parallèle à l'interface)  $z=0$ .

#### *d. Cas de deux éléments perpendiculaires et filiformes dans le même milieu 1, parallèles à l'interface*

Nous supposons que les deux conducteurs sont situés à la distance  $h$  de l'interface dans le milieu 1.

Ce cas a pour vocation de permettre la modélisation d'une grille enterrée, parallèle à la surface. On repart de (eq. 34) (§ 5.1.1b) dans laquelle  $z = 0$ .

Leur disposition est présentée sur la Fig. 75.

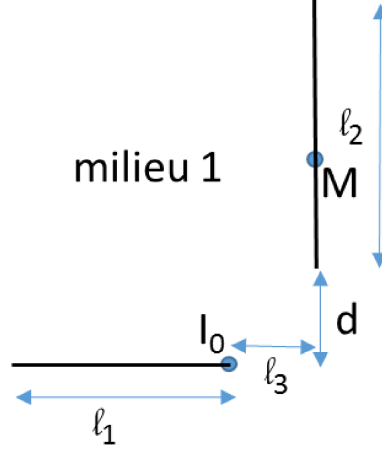


Fig. 75. Cas de deux conducteurs perpendiculaires dans un plan parallèle à l'interface

$$V_{12} = \frac{1}{4\pi\sigma_1} \frac{I(0)}{l_1 l_2} \int_d^{d+l_2} \ln \left( \frac{l_1 + l_3 + \sqrt{u^2 + (l_1 + l_3)^2}}{l_3 + \sqrt{u^2 + l_3^2}} \right) du$$

$$+ \frac{1}{4\pi\sigma'_1} \frac{I(0)}{l_1 l_2} \int_d^{d+l_2} \ln \left( \frac{l_1 + l_3 + \sqrt{(2h)^2 + u^2 + (l_1 + l_3)^2}}{l_3 + \sqrt{(2h)^2 + u^2 + l_3^2}} \right) du$$

Or :

$$\int \ln(l + \sqrt{u^2 + l^2 + z^2}) du = u \ln(l + \sqrt{u^2 + l^2 + z^2}) + l \ln(u + \sqrt{u^2 + l^2 + z^2}) - u + z \operatorname{Arctg} \left( \frac{u}{z} \right) + z \operatorname{Arctg} \left( \frac{u l}{z \sqrt{u^2 + l^2 + z^2}} \right)$$

$$V_{12} = \frac{1}{4\pi\sigma_1} \frac{I(0)}{l_1 l_2} \left[ u \ln(l_1 + l_3 + \sqrt{u^2 + (l_1 + l_3)^2}) + (l_1 + l_3) \ln(u + \sqrt{u^2 + (l_1 + l_3)^2}) - u + \right.$$

$$\left. - u \ln(l_3 + \sqrt{u^2 + l_3^2}) - l_3 \ln(u + \sqrt{u^2 + l_3^2}) + u \right]_{l_4}^{l_4+l_2} + \frac{1}{4\pi\sigma'_1} \frac{I(0)}{l_1 l_2} \left[ u \ln(l_1 + l_3 + \right.$$

$$\left. \sqrt{u^2 + (l_1 + l_3)^2 + (2h)^2}) + (l_1 + l_3) \ln(u + \sqrt{u^2 + (l_1 + l_3)^2 + (2h)^2}) - u + \right.$$

$$\left. 2h \operatorname{Arctg} \left( \frac{u}{2h} \right) + 2h \operatorname{Arctg} \left( \frac{u(l_1+l_3)}{2h\sqrt{u^2+(l_1+l_3)^2+(2h)^2}} \right) - u \ln(l_3 + \sqrt{u^2 + l_3^2 + (2h)^2}) - \right.$$

$$\left. l_3 \ln(u + \sqrt{u^2 + l_3^2 + (2h)^2}) + u - 2h \operatorname{Arctg} \left( \frac{u}{2h} \right) + 2h \operatorname{Arctg} \left( \frac{u l_3}{2h\sqrt{u^2+l_3^2+(2h)^2}} \right) \right]_{l_4}^{l_4+l_2} .$$

Ce qui donne après simplification :

$$V_{12} = \frac{1}{4\pi\sigma_1} \frac{I(0)}{l_1 l_2} \left[ u \ln(l_1 + l_3 + \sqrt{u^2 + (l_1 + l_3)^2}) + (l_1 + l_3) \ln(u + \sqrt{u^2 + (l_1 + l_3)^2}) - \right.$$

$$\left. u \ln(l_3 + \sqrt{u^2 + l_3^2}) - l_3 \ln(u + \sqrt{u^2 + l_3^2}) \right]_{l_4}^{l_4+l_2} + \frac{1}{4\pi\sigma'_1} \frac{I(0)}{l_1 l_2} \left[ u \ln(l_1 + l_3 + \right.$$

$$\left. \sqrt{u^2 + (l_1 + l_3)^2 + (2h)^2}) + (l_1 + l_3) \ln(u + \sqrt{u^2 + (l_1 + l_3)^2 + (2h)^2}) + \right.$$

$$\left. 2h \operatorname{Arctg} \left( \frac{u(l_1+l_3)}{2h\sqrt{u^2+(l_1+l_3)^2+(2h)^2}} \right) - u \ln(l_3 + \sqrt{u^2 + l_3^2 + (2h)^2}) - l_3 \ln(u + \right.$$

$$\left. \sqrt{u^2 + l_3^2 + (2h)^2}) - 2h \operatorname{Arctg} \left( \frac{u l_3}{2h\sqrt{u^2+l_3^2+(2h)^2}} \right) \right]_{l_4}^{l_4+l_2} .$$

#### e. Cas d'un élément conducteur de section non nulle

❖ Evaluons ici l'élévation de potentiel sur la périphérie du conducteur lorsque celui-ci écoule

un courant  $I(0)$  dans la terre

Prenons cette fois un conducteur unique de longueur  $l$  et de rayon  $a$ . En reprenant l'expression de l'élévation de potentiel (eq. 36) (§ 5.1.2a), le calcul d'un conducteur sur lui-même conduit à donner la valeur 0 au paramètre  $R$ , ce qui fait diverger l'expression. En fait, tout comme dans le cas de la méthode PEEC, le calcul se conduit aisément à partir du cas de deux «éléments conducteurs de même longueur en faisant tendre la distance entre eux deux vers le rayon extérieur du premier. C'est alors la tension de l'élément conducteur sur lui-même vis-à-vis de l'infini que l'on obtient :

$$V1(a) = \frac{1}{2\pi\sigma_1} \frac{I(0)}{l} \left[ \ln \left( \frac{l}{a} + \sqrt{1 + \left(\frac{l}{a}\right)^2} \right) - \sqrt{1 + \left(\frac{a}{l}\right)^2} + \frac{a}{l} \right] \\ + \frac{1}{4\pi\sigma'_1} \frac{I(0)}{l} \left[ 2\ln \left( \frac{2l}{a} + \sqrt{1 + \left(\frac{2l}{a}\right)^2} \right) - \sqrt{4 + \left(\frac{a}{l}\right)^2} + 2\sqrt{1 + \left(\frac{a}{l}\right)^2} - \frac{a}{l} \right]$$

Si  $a \ll l$ , dans le cas d'un seul milieu, on obtient :

$$V1(a) = \frac{1}{2\pi\sigma_1} \frac{I(0)}{l} \left[ \ln \left( \frac{2l}{a} \right) - 1 \right]$$

Soit l'impédance propre :

$$Rp = \frac{1}{2\pi\sigma_1 l} \left[ \ln \left( \frac{2l}{a} \right) - 1 \right]$$

Si  $a \ll l$ , dans le cas d'une interface entre deux milieux, on obtient :

$$V1(a) = \frac{1}{2\pi\sigma_1} \frac{I(0)}{l} \left[ \ln \left( \frac{2l}{a} \right) - 1 \right] + \frac{1}{4\pi\sigma'_1} \frac{I(0)}{l} [2\ln(2)]$$

En présence d'une interface air-terre  $\sigma_2 = 0$  et dans l'hypothèse pas très restrictive (cf. §5.1.1) où  $k = 1$  :

$$V1(a) = \frac{1}{2\pi\sigma_1} \frac{I(0)}{l} \left[ \ln \left( \frac{2l}{a} \right) - 1 + \ln(2) \right] = \frac{1}{2\pi\sigma_1} \frac{I(0)}{l} \left[ \ln \left( \frac{4l}{a} \right) - 1 \right]$$

Ci-dessous, nous pouvons calculer les éléments du schéma électrique qui permet de simuler cette élévation de potentiel avec les deux termes de l'impédance partielle propre :

$$Rp = \frac{1}{2\pi\sigma l} \left[ \ln \left( \frac{2l}{a} \right) - 1 + \ln(2) \right] \text{ et } Cp = \frac{2\pi\epsilon l}{\ln \left( \frac{2l}{a} \right) - 1 + \ln(2)}$$

Cette formule permet de calculer l'élévation de potentiel à la périphérie de l'élément conducteur, levant ainsi l'impossibilité de calculer l'élévation du potentiel due à une injection ponctuelle.

Application numérique :

Prenons le cas d'un conducteur de longueur 1m, de diamètre  $2.a = 10$  mm dans une terre de

résistivité de  $56 \Omega\text{m}$  et  $\epsilon r_1=80$  (Fig. 76).

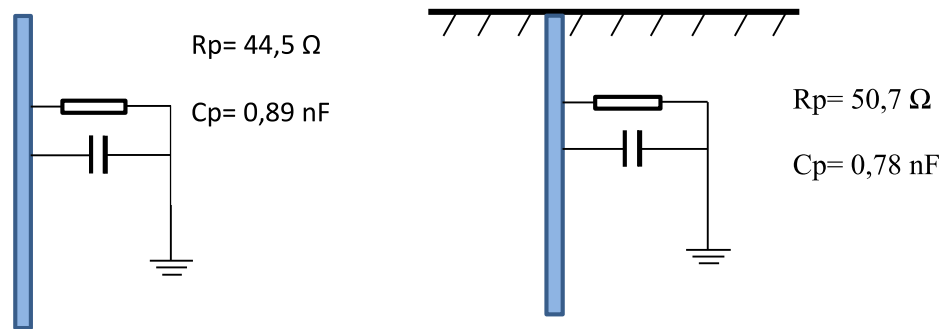


Fig. 76. Schéma équivalent d'un pieu en l'absence et en présence d'air

Sa résistance équivalente dans ce seul et même milieu est :  $R_p = 44,5 \Omega$  et  $C_p = 0,89 \text{ nF}$

Si on est en présence d'une interface air-terre, cette résistance sera augmentée du fait de la contribution de l'image qui vient se mettre en série, et conduira à la diminution de la capacité parallèle :  $R_p = 50,7 \Omega$  et  $C_p = 0,78 \text{ nF}$

Avec la valeur  $\epsilon r = 80$  et  $\rho=56 \Omega\text{.m}$  les valeurs des impédances sont quasiment constantes dans notre gamme de fréquences de référence.

❖ Evaluons ici le couplage entre 2 tronçons successifs du même conducteur vertical

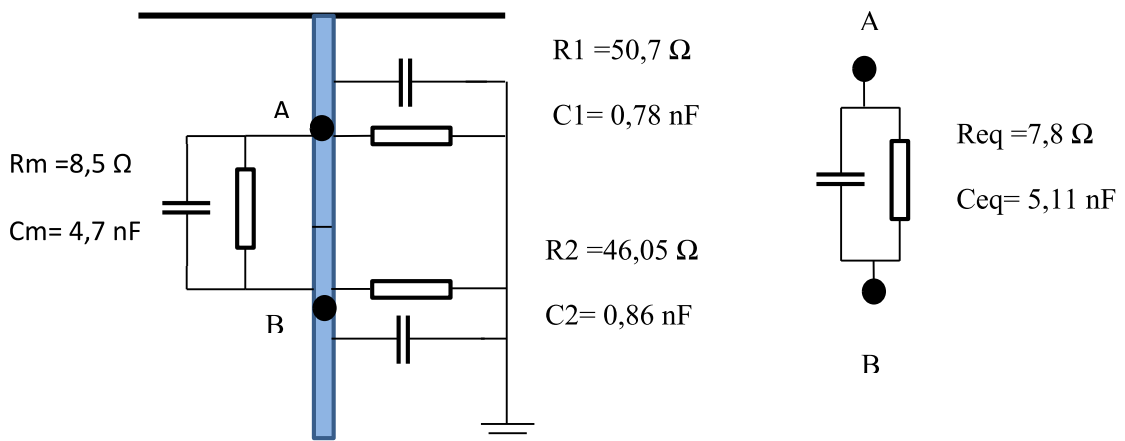


Fig. 77. Schéma équivalent d'un pieu maillé en 2 tronçons

Grâce aux expressions calculées dans les paragraphes précédents, on peut évaluer le couplage entre deux tronçons d'un conducteur. Ce couplage ne se limite pas au couplage mutuel entre les deux tronçons, mais il faut y rajouter les caractéristiques de chacun d'entre eux avec la terre lointaine. Ceci est illustré sur (Fig. 77).

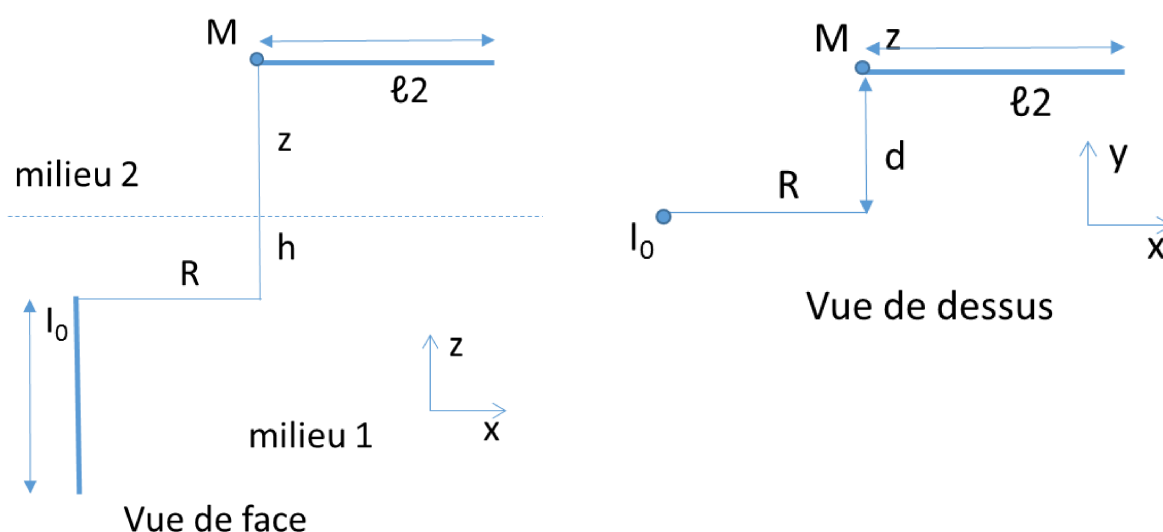
Remarque : Avec la valeur  $\epsilon_r = 80$  et  $\rho=56 \Omega.m$  les valeurs des impédances sont quasiment constantes dans notre gamme de fréquences de référence.

### f. Cas de deux éléments conducteurs, un dans chaque milieu

Cette configuration a pour but de pouvoir modéliser un câble dans le milieu 2 (air) et un pieu vertical ou horizontal dans le milieu 1 (terre).

Reprenons alors les (eq. 33) et (eq. 35) donnant l'expression du potentiel au point M situé dans le milieu 2 quand un élément filiforme est soit vertical, soit horizontal dans le milieu 1, plaçons au point M un conducteur horizontal à l'interface milieu1/milieu2 et intégrons sur la longueur de cet élément.

❖ Cas du pieu vertical : Les données géométriques sont résumées sur la figure ci-après.



A partir de (eq. 33), en faisant varier la position du point M, on écrit :

$$V_2 = \frac{1}{4\pi \underline{\sigma}_1 + \underline{\sigma}_2} \frac{2}{l_1 l_2} \frac{I(0)}{l_1 l_2} \int_R^{R+l_2} \ln \left( \frac{z + l_1 + h + \sqrt{(z + l_1 + h)^2 + d^2 + x^2}}{z + h + \sqrt{(z + h)^2 + d^2 + x^2}} \right) dx$$

$$V_2 = \frac{1}{4\pi \underline{\sigma}_1 + \underline{\sigma}_2} \frac{2}{l_1 l_2} \frac{I(0)}{l_1 l_2} \left[ \int_R^{R+l_2} \ln \left( z + \sqrt{z^2 + d^2 + x^2} \right) dx \right]_{z+h}^{z+l_1+h}$$

Comme vu précédemment :

- $\int \ln(z + \sqrt{x^2 + d^2 + z^2}) dx = x \ln(z + \sqrt{x^2 + d^2 + z^2}) + z \ln(x + \sqrt{x^2 + d^2 + z^2}) - x + d \operatorname{Arctg}\left(\frac{x}{d}\right) + d \operatorname{Arctg}\left(\frac{xz}{d\sqrt{x^2 + d^2 + z^2}}\right)$
- Et notons par ailleurs que les termes indépendants de z dans cette primitive vont s'annuler lorsqu'on appliquera la fonction obtenue avec les bornes de z.

$$V_2 = \frac{1}{4\pi \underline{\sigma}_1 + \underline{\sigma}_2} \frac{2}{l_1 l_2} \frac{I(0)}{l_1 l_2} \left[ \left[ x \ln \left( z + \sqrt{x^2 + d^2 + z^2} \right) + z \ln \left( x + \sqrt{x^2 + d^2 + z^2} \right) + d \operatorname{Arctg}\left(\frac{xz}{d\sqrt{x^2 + d^2 + z^2}}\right) \right]_{z+h}^{z+l_1+h} \right]_R^{R+l_2}$$

Remarque : Si le paramètre géométrique  $d$  est nul, il convient de supprimer le dernier terme dans la fonction primitive (le « arctan »).

Application numérique : Prenons le cas d'un pieu vertical de longueur 1m, affleurant à la surface et d'un câble de longueur 4m, situé à 20cm au-dessus du sol, tous deux de 5 mm de rayon.

On est amené à remplir la matrice suivante où :

- $\text{Req}(a, L_p)$  représente l'impédance du pieu sur lui-même (6.1.2.e),
- $\text{Req}(a, L_c)$  représente l'impédance du pieu sur lui-même (6.1.2.e),
- $R_{\text{mut}}$  représente la mutuelle recherché ici dont la formule est donnée ci-dessus.

$$Z := \begin{pmatrix} \text{Req}(a, L_p) & R_{\text{mut}} \\ R_{\text{mut}} & \text{Req}(a, L_c) \end{pmatrix}$$

Comme nous avons fait au §3.2.2, il suffit alors d'inverser cette matrice pour obtenir les valeurs des éléments du schéma recherché.

$$Z^{-1} = \begin{pmatrix} 0.02 + 4.928 \times 10^{-8} & -2.451 \times 10^{-10} \\ -2.451 \times 10^{-10} & 2.189 \times 10^{-9} \end{pmatrix}$$

On retrouve bien ce qui est attendu, à savoir une capacité entre le câble et la terre et entre le câble et le pieu (Fig. 78).

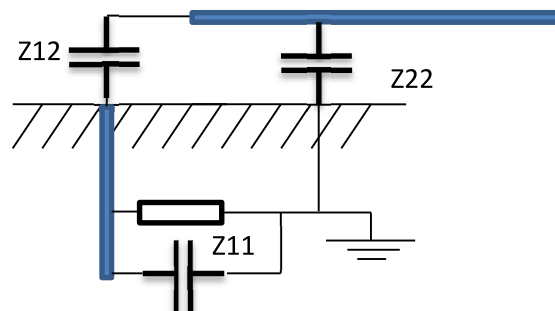
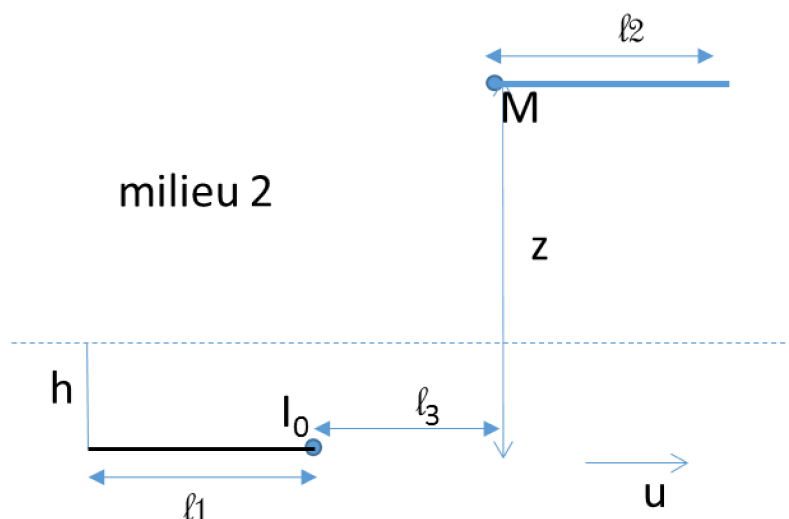


Fig. 78. Schéma équivalent de 2 conducteurs, chacun dans un milieu différent

- ❖ Cas du pieu horizontal : Les données géométriques sont résumées sur la figure ci-après.

Pour ce cas, on reprendra les résultats d'intégrales précédents.





$$V_2 = \frac{1}{4\pi} \frac{2}{\underline{\sigma}_1 + \underline{\sigma}_2} \frac{I(0)}{l_1 l_2} \int_0^{l_2} \ln \left( \frac{l_1 + l_3 + u + \sqrt{z^2 + d^2 + (l_1 + l_3 + u)^2}}{l_3 + u + \sqrt{z^2 + d^2 + (l_3 + u)^2}} \right) du$$

$$V_2 = \frac{1}{4\pi} \frac{2}{\underline{\sigma}_1 + \underline{\sigma}_2} \frac{I(0)}{l_1 l_2} \left[ u \ln \left( u + \sqrt{u^2 + d^2 + z^2} \right) - \sqrt{u^2 + d^2 + z^2} \right]_{l_3+l_1, l_3+l_2}^{l_3+l_1+l_2, l_3}$$

### 5.1.3 Passage à des éléments surfaciques

Le développement précédent est très utile lorsqu'il s'agit de modéliser des pieux de terre et des grilles. Cependant cela ne couvre pas la totalité des configurations que l'on peut rencontrer. Parfois des plaques ou des goulottes sont installées.

Pour cela, nous avons intégré l'expression du potentiel entre deux segments filiformes sur la largeur des segments afin d'obtenir une formulation entre deux rubans ou formulation surfacique.

#### *a. Cas de deux éléments surfaciques, courants parallèles, largeurs parallèles, perpendiculaires à l'interface, dans le même milieu*

La Fig. 79 présente le dispositif géométrique étudié.

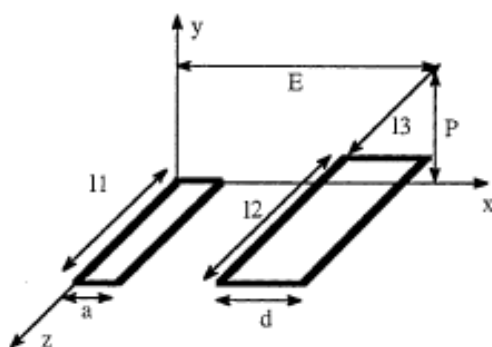


Fig. 79. Cas de deux rubans parallèles perpendiculaires à l'interface

Sans rentrer dans le détail des intégrales, qui sont très semblables à celles développées dans la méthode PEEC [50], qui sont finalement de même nature que précédemment, on obtient

l'expression ci-après.

$$Z_m = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{l_1 l_2} \frac{1}{ad} \left[ \frac{1}{\sigma_1} [f(x, z)]_{l_2+l_3-l_1, l_3}^{l_3-l_1, l_3+l_2} + \frac{1}{\sigma'_1} [f(x, z)]_{l_1+l_3+2h, l_3+l_2+2h}^{l_3+l_2+l_1+2h, l_3+2h} \right]_{E+d-a, E}^{E+d, E-a}$$

$$f(x, z) = \frac{x^2 - P^2}{2} z \ln \left( z + \sqrt{x^2 + P^2 + z^2} \right) + \frac{z^2 - P^2}{2} x \ln \left( x + \sqrt{x^2 + P^2 + z^2} \right) - \frac{1}{6} (x^2 - 2P^2 + z^2) \sqrt{x^2 + P^2 + z^2} - xPz \operatorname{Arctg} \left( \frac{xz}{P\sqrt{x^2 + P^2 + z^2}} \right)$$

**b. Cas de deux éléments surfaciques courants parallèles, largeurs perpendiculaires, perpendiculaires à l'interface, dans le même milieu**

De la même manière que précédemment mais en intégrant sur la troisième direction, il est possible d'établir l'expression de l'impédance mutuelle entre deux rubans perpendiculaires (Fig. 80).

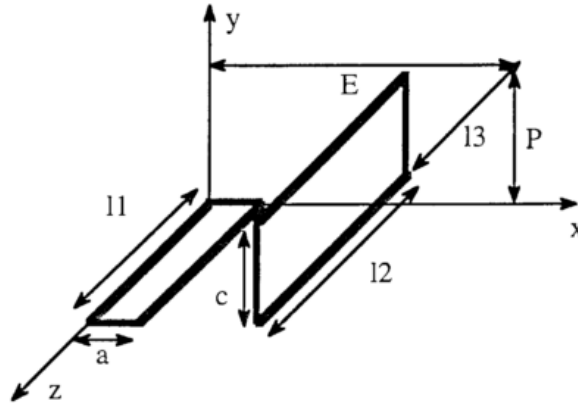


Fig. 80. Cas de deux rubans perpendiculaires et perpendiculaires à l'interface

$$Z_m = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{l_1 l_2} \frac{1}{ac} \left[ \frac{1}{\sigma_1} [f(x, z)]_{l_2+l_3-l_1, l_3}^{l_3-l_1, l_3+l_2} + \frac{1}{\sigma'_1} [f(x, z)]_{l_1+l_3+2h, l_3+l_2+2h}^{l_3+l_2+l_1+2h, l_3+2h} \right]_{E-a}^{E-a} \Big|_P^{P+c}$$

$$f(x, z) = \left( \frac{z^2}{2} - \frac{y^2}{6} \right) y \ln \left( x + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \right) + \left( \frac{z^2}{2} - \frac{x^2}{6} \right) x \ln \left( y + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \right) + xyz \ln \left( z + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \right) - \frac{xy}{3} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - \frac{z^3}{6} \operatorname{Arctg} \left( \frac{xy}{z\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right) - \frac{x^2 z}{2} \operatorname{Arctg} \left( \frac{yz}{x\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right) - \frac{y^2 z}{2} \operatorname{Arctg} \left( \frac{xz}{y\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right)$$

**c. Autres formulations**

Toujours en poursuivant la même logique, il va être possible d'établir l'impédance dans le cas de deux rubans parcourus par des courants perpendiculaires et de largeurs parallèles ou perpendiculaires afin de pouvoir couvrir toutes les configurations géométriques. Ces deux derniers cas n'étaient pas présents dans la philosophie PEEC inductive puisque des courants perpendiculaires conduisent à des mutuelles inductances nulles. Il faut donc repartir de l'expression établie au

§5.1.2.b et intégrer successivement sur les deux largeurs de conducteurs.

#### 5.1.4 Passage à des éléments volumiques

Le travail d'intégration peut être poursuivi afin de prendre en compte la troisième dimension tout comme cela a été fait dans l'approche PEEC.

##### a. Cas de deux éléments volumiques, courants parallèles, perpendiculaires à l'interface, dans le même milieu

Le principe est toujours le même et il est alors possible d'aboutir à l'expression de l'impédance entre deux éléments parallélépipédiques (Fig. 81).

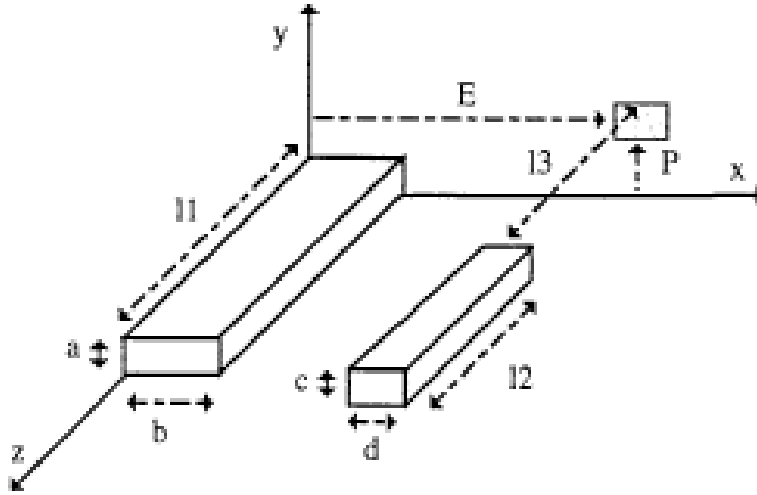


Fig. 81. Cas de deux conducteurs parallélépipédiques courants parallèles et perpendiculaires à l'interface

$$Z_m = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{l_1 l_2} \frac{1}{abcd} \left[ \frac{1}{\sigma_1} [f(x, z)]_{l_2+l_3-l_1, l_3}^{l_3-l_1, l_3+l_2} + \frac{1}{\sigma'_1} [f(x, z)]_{l_1+l_3+2h, l_3+l_2+2h}^{l_3+l_2+l_1+2h, l_3+2h} \right]_{E, E-b+d}^{E-b, E+d} P-a, P+c P, P-a+c$$

$$\begin{aligned} f(x, z) = & \left( \frac{y^2 z^2}{4} - \frac{y^4}{24} - \frac{z^4}{24} \right) x \ln \left( \frac{x + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{\sqrt{y^2 + z^2}} \right) \\ & + \left( \frac{x^2 z^2}{4} - \frac{x^4}{24} - \frac{z^4}{24} \right) y \ln \left( \frac{y + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{\sqrt{x^2 + z^2}} \right) \\ & + \left( \frac{x^2 y^2}{4} - \frac{y^4}{24} - \frac{x^4}{24} \right) z \ln \left( \frac{z + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{\sqrt{y^2 + x^2}} \right) \\ & + \frac{1}{60} (x^4 + y^4 + z^4 - 3x^2 y^2 - 3z^2 y^2 - 3x^2 z^2) \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ & - \frac{xy z^3}{6} \text{Arctg} \left( \frac{xy}{z \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right) - \frac{xy^3 z}{2} \text{Arctg} \left( \frac{xz}{x \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right) \\ & - \frac{x^3 y z}{2} \text{Arctg} \left( \frac{yz}{x \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right) \end{aligned}$$

$$\text{Avec : } \left[ [F(Z)]_{Z_1, Z_3}^{Z_2, Z_4} \right]_{x_2, x_4}^{x_1, x_3} \Big|_{y_2, y_4}^{y_1, y_3} = \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 \sum_{k=1}^4 (-1)^{i+j+k+1} F(Z_i, x_j, y_k)$$

### b. Cas de deux éléments volumiques, courants perpendiculaires, dans le même milieu

Si l'on est en présence de deux conducteurs volumiques dont les courants sont perpendiculaires, on repart alors du cas §5.1.3.c et en suivant le même cheminement, établir l'expression de l'élévation de potentiel entre les deux conducteurs.

### c. Convergence des formulations

Dans ce paragraphe nous allons montrer que la formulation volumique converge bien vers la formulation surfacique quand l'épaisseur du conducteur tend vers 0.

Prenons le cas de deux pieux parallèles, perpendiculaires à l'interface, de 1m de long et distants de 1m et de 5mm de rayon. Et calculons l'impédance entre eux.

Nous constatons bien sur Fig. 82 que plus l'épaisseur est faible, plus la formulation volumique tend vers la formulation surfacique. Cependant on observe également l'apparition d'un problème numérique quand les dimensions deviennent très petites avec la formulation volumique.

Son utilisation devra donc être bien maîtrisée.

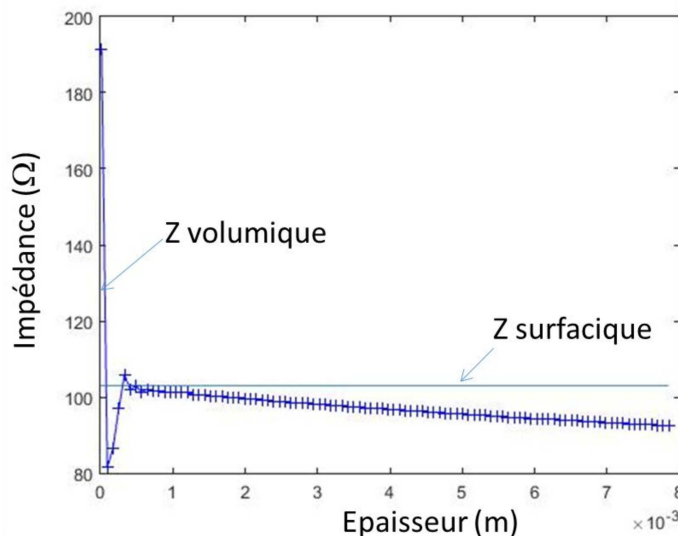


Fig. 82. Impédance en fonction de l'épaisseur du conducteur – comparaison volumique vs surfacique

#### 5.1.5 Extension pour lever la limite de validité de l'approche filiforme

Nous avons pu voir précédemment (§5.1.2.e) que la formulation filiforme diverge quand il s'agit de s'intéresser à l'interaction d'un élément sur lui-même. En dehors de ce cas particulier, elle est rapide et efficace pour déterminer les interactions entre conducteurs (éléments extra diagonaux de la matrice).

Pour lever cette divergence, nous avons convenu de chercher l'interaction entre deux conducteurs très proches (§5.1.2.e) (séparés d'une distance équivalente au rayon comme dans le cas du calcul des

inductances propres). Mais cet artifice de calcul n'est pas satisfaisant d'autant plus que quand on passe au niveau ponctuel, le choix de ce rayon est encore plus arbitraire (§3.3.3).

C'est cette divergence qui nous a amenés à développer les formulations surfacique puis volumique. Mais les différentes expressions qui viennent d'être établies sont d'autant plus compliquées et instables que la géométrie du conducteur est fidèlement représentée.

Le seul intérêt donc de la formulation volumique réside dans le fait qu'elle permet de lever la limite de validité de la formulation filiforme et de calculer de manière sûre l'interaction d'un conducteur sur lui-même.

Connaissant ainsi la valeur de l'impédance recherchée à l'aide de la formulation volumique, il est alors possible de procéder à des investigations avec la formulation filiforme pour savoir quelle distance il faut mettre entre les deux fils pour obtenir le même résultat.

Bien que nous ayons des conducteurs de section majoritairement circulaire, nous avons sciemment choisi de les remplacer par des conducteurs de section carrée en suivant la même approche que pour la méthode PEEC, les différentes intégrations dans un repère cartésien se faisant très bien.

Mais comme il s'agit de s'intéresser aux courants de fuite et non au courant de conduction, nous établirons l'égalité des périmètres et non des sections.

Ainsi un pieu de rayon  $r_0$  pourra être modélisé avec la formulation volumique à l'aide d'un conducteur massif de section carrée dont la valeur ( $a$ ) du côté est déterminée pour obtenir le même périmètre :  $2\pi r_0 = 4a$  soit :  $a = \frac{\pi r_0}{2}$ .

En poussant le raisonnement un peu plus loin, on peut aussi imaginer remplacer le conducteur massif par un ruban de telle sorte à conserver la surface par laquelle sort le courant. Il s'avère alors qu'il faudra lui donner une largeur double.

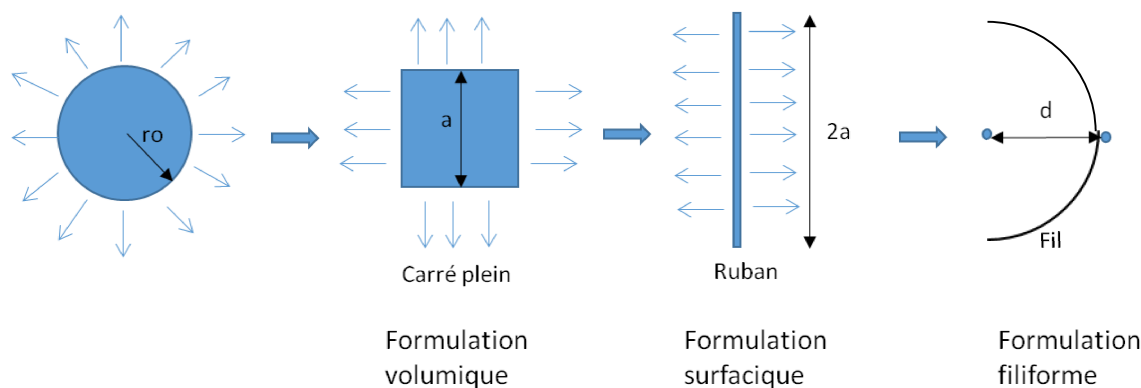


Fig. 83. Description d'un conducteur de section circulaire en fonction de la formulation utilisée

Pour la configuration constituée de deux pieux parallèles, perpendiculaires à l'interface, de 1m de long, de 5mm de rayon et distants de 1m, nous avons résumé, dans le tableau ci-après, l'impédance obtenue avec les trois formulations comme décrit Fig. 83 et en prenant dans le cas de la formulation filiforme  $d = r_0/\sqrt{2}$ .

Fréquence (Hz)	50	$10^5$	$4 \cdot 10^5$	$10^6$	$2 \cdot 10^6$	$10^7$	$5 \cdot 10^7$	$10^8$
----------------	----	--------	----------------	--------	----------------	--------	----------------	--------

Z Volumique ( $\Omega$ )	92.95	92.92	92.49	90.19	83.21	34.65	7.44	3.73
Z Surfactive ( $\Omega$ )	92.99	92.96	92.53	90.23	83.22	34.62	7.43	3.72
Z Filiforme ( $\Omega$ )	92.85	92.82	92.39	90.09	83.09	34.57	7.42	3.72

Remarque : Utiliser systématiquement l'expression entre deux conducteurs massifs va demander plus de temps que la formulation filiforme ou surfactive, la description de la géométrie du dispositif étant plus compliquée.

Aussi nous pouvons préconiser l'utilisation de la formulation volumique quand il s'agit de calculer l'interaction d'un conducteur sur lui-même (pas de problème numérique normalement pour ce calcul) et l'utilisation de la formulation filiforme dans tous les autres cas de figure.

## 5.2 Méthode numérique

### 5.2.1 Retour sur l'hypothèse de courant uniforme

Les expressions établies précédemment ne sont valables qu'en supposant une densité uniforme de courant sortant de l'élément considéré.

Dans le cas où cette hypothèse n'est pas valide, on va avoir recours à une discrétisation du conducteur sur sa longueur en supposant valide cette hypothèse sur chacun des éléments, la densité de courant étant donc uniforme mais différente d'un élément conducteur à l'autre. Ce maillage va ainsi permettre de prendre en compte une répartition non uniforme de la densité de courant sortant du conducteur.

Remarque importante : A nouveau, on peut faire le parallèle avec la méthode PEEC « magnétique » où la densité de courant est d'abord supposée uniforme dans la section du conducteur pour obtenir les formulations des inductances et mutuelles partielles entre deux éléments de section. Puis il est nécessaire de discrétiser la section et de faire la somme des courants d'éléments qui doit être égale au courant injecté alors qu'ici, c'est la longueur du conducteur qui est discrétisée et la somme des tensions qui doit être faite pour obtenir le potentiel au point M.

### 5.2.2 Principe général

Le principe présenté ici consiste à mettre en place les différentes étapes de calcul donnant le courant sortant d'un conducteur ou l'élévation de potentiel d'un point quelconque.

Selon le type de résolution souhaitée, harmonique ou temporelle, les étapes de calcul ne seront pas les mêmes.

En effet, nous avons pu voir au chapitre 4, dans la mise en place de l'approche ponctuelle, avec  $n$  injections de courants, que la matrice reliant les potentiels aux courants sortant du dispositif est dépendante de la fréquence. Ainsi lorsque les signaux en présence, seront sinusoïdaux, une résolution harmonique et entièrement mathématique pourra être conduite. En revanche, si on est en présence d'un signal au contenu harmonique large, comme la foudre, ce seront alors les évolutions temporelles des grandeurs qui seront recherchées. Ceci pourra être effectué à l'aide d'une simulation circuit (OD). Le circuit utilisé pour cette simulation pourra être le circuit complet du système maillé, contenant toutes les admittances ou un circuit équivalent issu d'une réduction d'ordre du précédent pour une fréquence particulière ou encore la fonction de transfert si on

souhaite utiliser un outil de type Simulink.

On retrouve ici la même démarche que dans le cas de la mise en œuvre de la méthode PEEC.

Remarque : Mathématiquement on pourrait faire une décomposition en série de Fourier du signal foudre, faire une résolution fréquentielle pour chaque harmonique et reconstituer le signal temporel par décomposition inverse.

Le circuit équivalent pris en compte pour chaque élément de conducteur est constitué :

- d'une admittance (conductance en statique) vis-à-vis de la terre lointaine prise comme référence de potentiel,
- et d'admittances (conductances en statique) de couplage d'un élément vis-à-vis de tous les autres.

Deux options sont alors possibles :

- la résolution mathématique directe d'une matrice pleine en prenant en considération les conditions aux limites (somme des courants sortants égale au courant entrant, équipotentielle sur la longueur du pieu)
- le portage via une netlist dans un solveur OD du circuit passif. L'ajout d'une source de courant et sa fermeture garantit alors la somme des courants et il faut aussi rajouter les équipotentielles qui traduisent l'uniformité de la tension le long du pieu considéré de conductivité infinie.

Ici afin de pouvoir faire des études paramétriques, on a préféré utiliser la résolution mathématique directe qui permet de déterminer facilement l'influence de certains paramètres comme la discrétisation longitudinale du pieu.

Le recours à des simulateurs OD reste très intéressant dans le cas de simulations de systèmes hétérogènes ou bien dans le cas de transitoire.

Pour évaluer la valeur des éléments du circuit à modéliser, à nouveau, deux possibilités s'offrent à nous :

- L'utilisation des formulations filiformes intégrées développées précédemment pour chaque tronçon de conducteur pour lequel on considérera la densité de courant sortante constante,
- L'approximation « points d'injection ».

Nous avons pu valider les formulations filiformes grâce à des exemples tirés de la bibliographie. Ceux-ci seront présentés ultérieurement. Nous avons ainsi une méthode de référence qui va nous permettre de valider nos résultats que l'on se propose d'obtenir par une méthode plus légère qui mérite bien sûr d'être testée.

L'approximation ponctuelle consiste à remplacer le pieu par une suite de points d'injection dont le nombre peut être plus ou moins important. Il faudra aussi alors se préoccuper de définir leur rayon. On a vu que cet aspect peut être délicat dans l'approche phénoménologique (chapitre 3) où nous avons dû caler la valeur de ce rayon par rapport à la mesure de Wenner.

Malgré, cette critique, il serait dommage de ne pas évaluer cette méthode simplifiée qui s'apparente à la méthode des fils fins [51] qui reste très légère vis-à-vis d'une approche rigoureuse menée dans [52], [50] et utilisant des formulations intégrales complexes.

Dans ce cas également la méthode des points d'injection ponctuels que nous allons développer ci-dessous est d'une simplicité remarquable jusque dans sa transcription algorithmique. Seule l'augmentation de la taille de la matrice avec le nombre de points pourrait devenir inquiétante encore que la résolution de systèmes linéaires de très grande taille soit parfaitement maîtrisée.

### 5.2.3 Présentation pour un conducteur

Tout d'abord, il nous faut préciser que selon les grandeurs observées (courant ou potentiel) et leur localisation (sur le dispositif ou en un point quelconque en dehors du dispositif), les matrices qui seront manipulées ainsi que les étapes de résolution différeront.

En effet, si l'on souhaite évaluer le courant sortant d'un dispositif (pieu ou grille ou autre) ou son potentiel, il n'est alors pas nécessaire de faire apparaître dans le système matriciel à résoudre le point d'observation que nous avons appelé M dans tout ce qui précède.

Si, en revanche, l'objectif est de connaître l'élévation de potentiel en un point quelconque de la terre, il est alors nécessaire de rajouter une ligne et une colonne au système matriciel correspondant au potentiel du point M en fonction de tous les courants sortant du dispositif et au courant au point M que l'on annulera par la suite.

#### a. Principe

La Fig. 84 met en évidence pour un pieu vertical affleurant la surface du sol, la modélisation dans le cas d'une discrétisation en n éléments (seulement 5 éléments représentés sur la figure). On profitera également de cette résolution pour calculer la conductance globale équivalente qui relie le pieu à la terre lointaine.

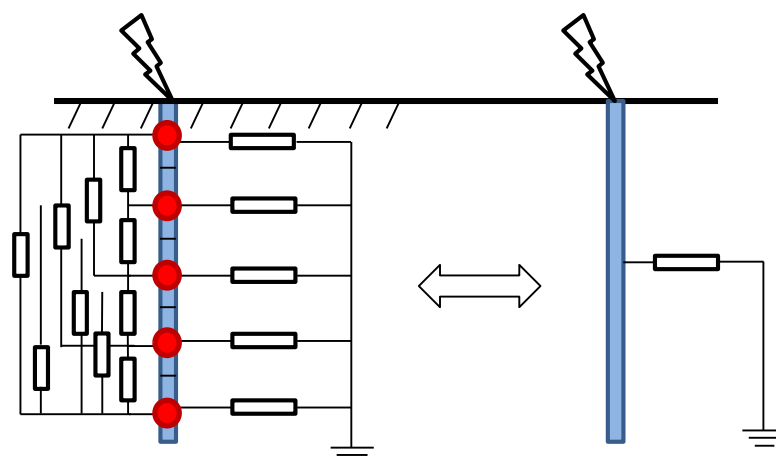


Fig. 84. Schéma éclaté des différentes admittances et admittances mutuelles

La Fig. 84 représente les conductances individuelles de chaque point d'injection avec la terre lointaine et tient bien sûr compte des couplages entre les points d'injection. Il convient de bien comprendre que ces couplages existent et doivent impérativement être pris en compte même si d'un premier coup d'œil, la nature équipotentielle du pieu nous pousserait à les court-circuiter et à



transformer la matrice en une matrice diagonale, bien plus facile à manipuler.

Cette première méthode, très légère à mettre en œuvre, consiste à localiser une source ponctuelle d'injection de courant au milieu de chaque élément de discrétisation. On peut écrire facilement la relation matricielle qui définit le potentiel en chacun des points d'injection (ou segment) lié à la localisation du courant sortant en chacun de ces points.

Pour un conducteur maillé en n éléments, il ressort alors le système matriciel suivant :

$$\begin{bmatrix} V1 \\ \vdots \\ Vn \\ VM \end{bmatrix} = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \sigma_1} \left( \begin{bmatrix} \frac{1}{r_{1,1}} & \dots & \frac{1}{r_{1,n+1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{r_{n+1,1}} & \dots & \frac{1}{r_{n+1,n+1}} \end{bmatrix} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} \begin{bmatrix} \frac{1}{r'_{1,1}} & \dots & \frac{1}{r'_{1,n+1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{r'_{n+1,1}} & \dots & \frac{1}{r'_{n+1,n+1}} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} I1 \\ \vdots \\ In \\ IM \end{bmatrix}$$

On appelle  $V_i$  l'élévation de potentiel de l'élément  $i$ ,  $I_i$  le courant sortant de cet élément,  $M$  le point d'observation.

On définit alors une matrice carrée complexe pleine de dimension  $(n+1) \times (n+1)$ .

$$\begin{bmatrix} V1 \\ \vdots \\ Vn \\ VM \end{bmatrix} = \frac{1}{4\pi\sigma_1} [A] \begin{bmatrix} I1 \\ \vdots \\ In \\ IM \end{bmatrix}$$

Rappelons que le système sera de dimension  $n \times n$  si on ne met pas le point d'observation. Il suffit alors d'enlever la dernière ligne et la dernière colonne à  $[A]$ .

La suite de la résolution va reprendre les mêmes grandes étapes que le cas traité précédemment de  $n$  courants ponctuels différents (§5.1.2) :

L'expression des courants en fonction des tensions conduit à l'inversion de la matrice complexe :

$$\begin{bmatrix} I1 \\ \vdots \\ In \\ IM \end{bmatrix} = 4\pi\sigma_1 [A]^{-1} \begin{bmatrix} V1 \\ \vdots \\ Vn \\ VM \end{bmatrix} = 4\pi\sigma_1 [B] \begin{bmatrix} V1 \\ \vdots \\ Vn \\ VM \end{bmatrix} = [Y] \begin{bmatrix} V1 \\ \vdots \\ Vn \\ VM \end{bmatrix}$$

Ce qui change par rapport au §5.1.2 est que les  $n$  éléments appartiennent au même conducteur. Il est alors possible de faire l'hypothèse d'équipotentialité du conducteur ce qui implique  $V_1 = V_2 = \dots = V_n = V$ . Cette mise en facteur par  $V$  conduit à sommer les  $n$  premiers termes de chaque ligne :

$$\begin{bmatrix} I1 \\ \vdots \\ In \\ IM \end{bmatrix} = 4\pi\sigma_1 [B] \begin{bmatrix} V \\ \vdots \\ V \\ VM \end{bmatrix} = 4\pi\sigma_1 \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^n b_{1,j} & b_{1,n+1} \\ \vdots & \vdots \\ \sum_{j=1}^n b_{n,j} & b_{n,n+1} \\ b_{n+1,1} & b_{n+1,n+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V \\ \vdots \\ V \\ VM \end{bmatrix}$$

A ce stade deux résolutions du problème peuvent être faites selon les conditions expérimentales et qui ne vont pas forcément conduire aux mêmes résultats ni conclusions.

**b. 1<sup>er</sup> cas de figure : la tension du pieu est connue et vaut  $V_0$ .**

Ce cas correspond aux mesures de la résistivité de la terre que l'on effectue avec la méthode de Wenner. Dans ce cas, le potentiel d'un pieu est imposé avec la référence de terre lointaine, ce qui est le cas lorsqu'on impose une tension entre les deux pieux de la méthode de Wenner  $V_1 = V_2 = \dots = V_n = V_0$ . Le courant global est en fait défini par le système résistif entre le pieu et la terre lointaine ou entre les deux pieux d'injection.

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ \vdots \\ I_n \\ I_M \end{bmatrix} = 4\pi\sigma_1 [B] \begin{bmatrix} V \\ \vdots \\ V \\ V_M \end{bmatrix}$$

Dans ce cas,  $V$  étant connu, la résolution des  $n$  premières lignes de ce système donne la répartition du courant sortant du conducteur.

Et connaissant ces différents courants, il est alors possible de connaître le potentiel au point  $M$  en revenant au système matriciel initial et en utilisant la dernière ligne en annulant le courant sortant  $I_M$ .

**c. 2<sup>ème</sup> cas de figure : on injecte un courant et on laisse la possibilité au pieu de voir sa tension évoluer de part l'écoulement du courant.**

Cette dernière configuration est bien sûr plus proche de ce qui se produit lors d'un choc de foudre ; celle-ci s'apparentant d'ailleurs plus à une source de courant. Le courant d'injection est connu alors que la tension  $V_0 = V_1 = V_2 = \dots = V_n$  n'est plus connue et devient une inconnue du système. Dans ce cas, l'écoulement du courant depuis le pieu dans la terre va entraîner l'élévation de potentiel de celui-ci. C'est d'ailleurs une grandeur importante à connaître si l'on veut être certain de la protection qu'apporte son système de mise à la terre.

Dans ce cas, la somme des  $n$  premiers courants du vecteur des courants est égale au courant total injecté  $I_{tot}$ , ce qui conduit à sommer les  $n$  premiers termes de chaque colonne de la matrice précédente :

$$\begin{bmatrix} \sum_{j=1}^n I_j \\ I_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{tot} \\ I_M \end{bmatrix} = 4\pi\sigma_1 \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{i,j} & \sum_{i=1}^n b_{i,n+1} \\ \sum_{i=1}^n b_{n+1,i} & b_{n+1,n+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V \\ V_M \end{bmatrix}$$

On aboutit alors à une matrice de dimension  $2 \times 2$  qui correspond à la matrice admittance reliant les courants aux potentiels. Les parties réelles (resp. imaginaires) des éléments de cette matrice donnent alors la valeur des conductances et capacités du schéma électrique équivalent (Fig. 85) de cette configuration selon les relations ci-après.

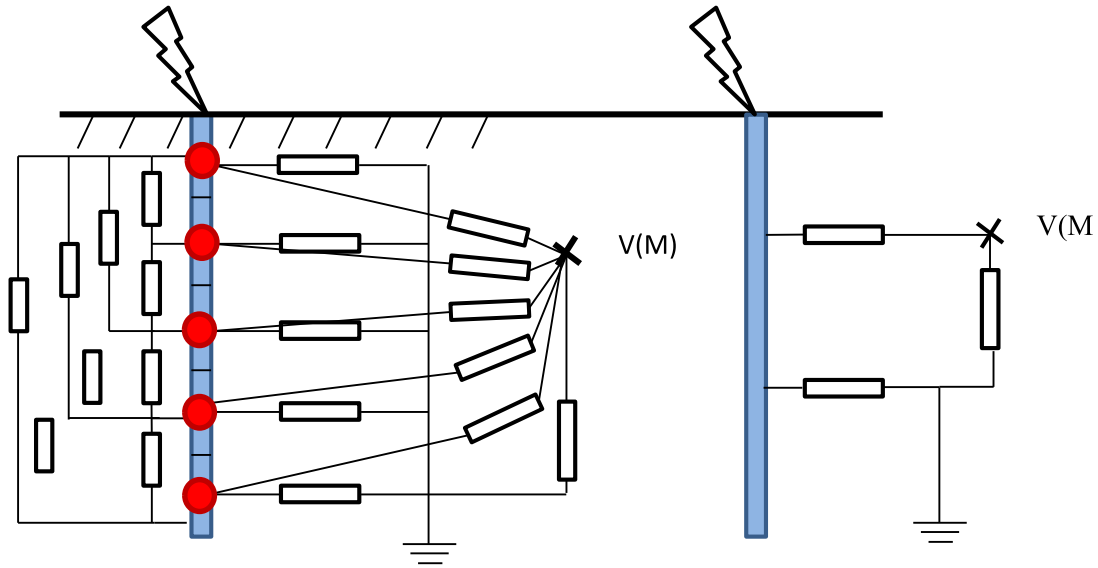
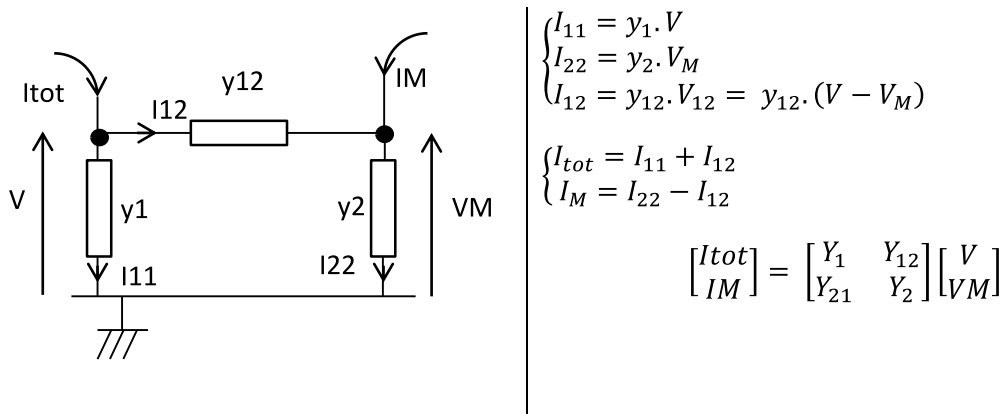


Fig. 85. Schéma de mutuelles résistances avec un point dans la terre



D'où :

$$\begin{cases} I_{tot} = y_1 \cdot V + y_{12} \cdot (V - V_M) = (y_1 + y_{12}) \cdot V - y_{12} \cdot V_M \\ I_M = y_2 \cdot V_M - y_{12} \cdot (V - V_M) = -y_{12} \cdot V + (y_2 + y_{12}) \cdot V_M \end{cases}$$

Par identification on obtient :  $Y_1 = y_1 + y_{12}$  ;  $Y_{12} = Y_{21} = -y_{12}$  ;  $Y_2 = y_2 + y_{12}$

Les éléments du schéma électrique équivalent du système pieu-point d'observation peuvent alors être exprimés :  $y_1 = Y_1 + Y_{12}$ ,  $y_2 = Y_2 + Y_{12}$  et  $y_{12} = -Y_{12}$ , résultat de la réduction d'ordre du système maillé.

L'inversion de ce système donne alors les potentiels en fonction des courants.

$$\begin{bmatrix} V \\ V_M \end{bmatrix} = \frac{1}{4\pi\sigma_1} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{i,j} & \sum_{i=1}^n b_{i,n+1} \\ \sum_{i=1}^n b_{n+1,i} & b_{n+1,n+1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} I_{tot} \\ I_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_1 & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} I_0 \\ I_M \end{bmatrix}$$

En annulant le courant sortant du point d'observation M, on peut alors calculer l'élévation de potentiel du conducteur alimenté par  $I_{tot}$ , à savoir  $V$  ainsi que  $V_M$ .

$$V_M = \frac{-Y_{21}}{Y_2} V \quad \text{ainsi} \quad V = \frac{Y_2}{Y_1 Y_2 - Y_{21} Y_{12}} I_{tot} \quad \text{et} \quad V_M = \frac{-Y_{21}}{Y_1 Y_2 - Y_{21} Y_{12}} I_{tot}$$

La connaissance de ce potentiel va permettre de déterminer la répartition du courant le long du conducteur connaissant le courant injecté  $I_{tot}$ .

$$\begin{bmatrix} I1 \\ \vdots \\ In \\ IM \end{bmatrix} = 4\pi\sigma_1 [B] \begin{bmatrix} V \\ \vdots \\ V \\ VM \end{bmatrix} = 4\pi\sigma_1 \begin{bmatrix} \frac{Y_2}{Y_1 Y_2 - Y_{21} Y_{12}} \sum_{j=1}^n b_{1,j} - \frac{Y_{21}}{Y_1 Y_2 - Y_{21} Y_{12}} b_{1,n+1} \\ \vdots \\ \frac{Y_2}{Y_1 Y_2 - Y_{21} Y_{12}} \sum_{j=1}^n b_{n+1,j} - \frac{Y_{21}}{Y_1 Y_2 - Y_{21} Y_{12}} b_{n+1,n+1} \end{bmatrix} I_{tot}$$

Remarque : Si la donnée importante recherchée est la densité de courant du conducteur, il est possible de ne pas considérer le point d'observation M. On travaille alors avec un système matriciel  $n \times n$ . La présence du point M permet d'évaluer le potentiel en tout point du milieu en faisant varier la position du point d'observation.

Remarque : L'avantage d'un tel modèle est qu'il peut être facilement implanté dans un solveur circuit OD type SPICE sous forme d'un macro composant auquel on peut rajouter tout composant électrique (interrupteurs, ...) pour effectuer une simulation globale.

#### d. Application numérique

Nous avons repris le cas d'un pieu vertical affleurant la surface de la terre. Le tableau suivant récapitule les valeurs des conductances (en statique) obtenues lorsqu'il est maillé en 10 éléments (diagonale de la matrice uniquement).

Conductances	g1	g2	g3	g4	g5	g6	g7	g8	g9	g10
(mS)	1,424	1,426	1,43	1,437	1,447	1,462	1,483	1,515	1,573	1,73

Les conductances se sommant lorsqu'elles sont en parallèle on obtient comme conductance globale du pieu par rapport à l'infini :

$$g_{totale} = 0,015 \text{ S} \quad \text{soit une résistance équivalente de } 67 \Omega.$$

On peut également obtenir la valeur globale de la résistance du pieu en divisant la tension appliquée  $V_0$  par la somme des courants sortants.

Somme des courants sortants :  $I_{total} = 0,149 \text{ A}$ .

Résistance équivalente  $Req = \frac{V_0}{I_{total}} = 67 \Omega$ .

#### 5.2.4 Pour deux conducteurs

La généralisation de cette approche à la présence de plusieurs conducteurs maillés est immédiate. Il suffit d'effectuer les sommes sur les éléments de chaque conducteur.

Comme précisé précédemment, cette méthode peut être menée en ajoutant un point d'observation pour pouvoir évaluer le potentiel en tout point du milieu ou non.

Ainsi si on est en présence de 2 conducteurs maillés chacun en n éléments, le système matriciel de départ sera de dimension (2n)\*(2n) si on ne tient pas compte du point d'observation et se réduira en un système 2\*2 après assemblage.

On a ainsi construit la matrice impédance entre les deux conducteurs.

$$[Z] = \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} & \dots & Z_{1n+1} & \dots & \dots \\ & Z_{22} & & & \dots & \dots \\ & & \dots & & & \dots \\ & & & Z_{nn} & & Z_{n+1\ 2n} \\ & & & & Z_{n+1\ n+1} & \\ & & & & & Z_{n+2\ n+2} \\ & & & & & \dots \\ & & & & & & Z_{2n\ 2n} \end{pmatrix}$$

Avec :  $Z_{ii}$ : L'impédance propre d'un segment avec la terre lointaine.

$Z_{ij}$ : L'impédance mutuelle d'un segment avec un autre segment.

Cette matrice intervient dans la relation bien connue :  $[V] = [Z] [I]$

Où :  $[V]$  : Le vecteur des potentiels des segments du système de mise à la terre

$[Z]$  : La matrice impédance

$[I]$  : Le vecteur des courants sortant des segments

Ecrivons le système d'équations pour le cas des deux conducteurs discrétisés en 4 segments chacun (en l'absence de point d'observation) :

$$\begin{bmatrix} V_{11} \\ V_{22} \\ V_{33} \\ V_{44} \\ V_{55} \\ V_{66} \\ V_{77} \\ V_{88} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} & \dots & Z_{15} & \dots & \dots \\ & \ddots & & & & \\ & & \dots & & & \\ & & & Z_{44} & & \\ & & & & Z_{55} & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \dots \\ & & & & & & Z_{88} \end{pmatrix} * \begin{bmatrix} I_{11} \\ I_{22} \\ I_{33} \\ I_{44} \\ I_{55} \\ I_{66} \\ I_{77} \\ I_{88} \end{bmatrix}$$

Potentiel d'un segment

Courant d'un segment

La valeur des courants est inconnue et les conducteurs sont supposés équipotentiels. On inverse donc le système :  $I = Z^{-1} * V$

$$\begin{bmatrix} I_{11} \\ I_{22} \\ I_{33} \\ I_{44} \\ I_{55} \\ I_{66} \\ I_{77} \\ I_{88} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} & & \dots & Y_{15} \\ & \ddots & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & Y_{44} & \\ & & & & Y_{55} \\ & & & & \ddots \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & Y_{88} \end{pmatrix} * \begin{bmatrix} V_1 \\ V_1 \\ V_1 \\ V_1 \\ V_2 \\ V_2 \\ V_2 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^4 Y_{1i} & \sum_{i=5}^8 Y_{1i} \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \quad (eq. 27)$$

Avec  $V_{11}=V_{22}=V_{33}=V_{44}=V_1$  et  $V_{55}=V_{66}=V_{77}=V_{88}=V_2$ .

Dans le cas où on impose le potentiel,  $V_1$  et  $V_2$  sont connus et la résolution du système précédent donne accès aux courants sortants des conducteurs.

Dans le cas où on impose le courant injecté sur les conducteurs, la somme des courants sortants des segments d'un même conducteur est égale au courant total injecté dans le conducteur.

$$\text{Par application de la loi des nœuds : } \begin{cases} I_1 = I_{11} + I_{22} + I_{33} + I_{44} \\ I_2 = I_{55} + I_{66} + I_{77} + I_{88} \end{cases}$$

Par suite, on peut écrire :

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^4 \sum_{i=1}^4 Y_{ji} & \sum_{j=4}^8 \sum_{i=1}^4 Y_{ji} \\ \sum_{j=1}^4 \sum_{i=4}^8 Y_{ji} & \sum_{j=4}^8 \sum_{i=4}^8 Y_{ji} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

On peut alors inverser cette matrice 2\*2 ainsi obtenue pour déterminer les deux potentiels  $V_1$  et  $V_2$ . Une fois ces potentiels évalués, les courants des deux conducteurs sont déterminées à partir du système eq.27.

$$\begin{bmatrix} Z \text{ propre 1er conducteur} & Z \text{ mut du 1er sur le 2}^{eme} \text{ conducteur} \\ Z \text{ mut du 2}^{eme} \text{ sur le 1er conducteur} & Z \text{ propre 2}^{eme} \text{ conducteur} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_1 & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_2 \end{bmatrix}$$

Remarque : en pratique on alimente entre les deux conducteurs, ce qui conduit à  $I_2 = -I_1$ . Ce courant peut être injecté via une alimentation qui impose en fait la différence de potentiels entre les deux conducteurs.

$$\text{Dans ce cas : } V_1 = (Z_1 - Z_{12}) * I_1$$

$$V_2 = (Z_{21} - Z_2) * I_1$$

$$V_1 - V_2 = (Z_1 + Z_2 - Z_{12} - Z_{21}) * I_1$$

D'où la valeur du courant total injecté par la source d'alimentation :  $I_1 = (V_1 - V_2) / (Z_1 + Z_2 - Z_{12} - Z_{21})$

### 5.3 Mise en œuvre sur un système de conducteurs dans la terre

#### 5.3.1 Implantation informatique des formulations et de la méthode matricielle développée

Afin de pouvoir appliquer tout ce que nous avons développé jusqu'à présent, nous avons réalisé un code sur Matlab permettant ainsi de traiter des géométries plus ou moins complexes.

Ainsi, même si pour l'instant nous n'avons pas développé d'interface, les géométries qu'il sera possible d'étudier sont constituées de :

- Plusieurs conducteurs (pieux ou plaques) dans la terre (horizontaux ou verticaux).
- une grille horizontale.

Bien entendu le maillage des géométries a été automatisé et pour les plaques il sera effectué dans les deux directions.

De ce fait, il va être possible par la suite d'évaluer l'influence de différents paramètres, nombre de mailles mais aussi paramètres géométriques ou physiques, sur les impédances recherchées.

#### 5.3.2 Validation bibliographique des formulations intégrales filiformes dans le cas d'un conducteur

Ce paragraphe a pour objet de valider les expressions déterminées précédemment ainsi que la procédure de calcul grâce à la confrontation avec des références bibliographiques [53], [54].

##### *a. Validation 1 : densité de courant [53]*

L'exemple utilisé est celui d'un conducteur horizontal de grande longueur (45 m) enfoui sous terre et pour lequel les auteurs simulent la densité de courant sortante le long du pieu. La résistivité de la terre est de  $100 \Omega\text{m}$  dans cet exemple. Le rayon de ce conducteur est de 14,02 mm.

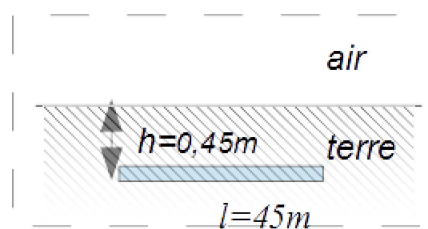


Fig. 86. Cas d'un conducteur horizontal

Il n'est pas possible de représenter une telle situation avec un seul élément de conducteur pour lequel la densité de courant sortante serait constante. Il sera nécessaire de mailler longitudinalement le conducteur en utilisant plusieurs éléments pour lesquels la densité de courant sortante sera différente.

Nous allons mettre en œuvre la procédure de calcul développée dans le paragraphe 5.2.3. La modélisation du problème est faite avec une segmentation du conducteur en 500 segments pour être dans les conditions de la référence bibliographique [53] (Fig. 86).

Nous aurons l'occasion de nous interroger sur l'influence de la discrétisation sur les résultats obtenus ainsi que la sensibilité d'autres paramètres.

Néanmoins nous pouvons ici apprécier la convergence des résultats qui nous permet de valider les expressions analytiques développées dans les paragraphes précédents (Fig. 87).

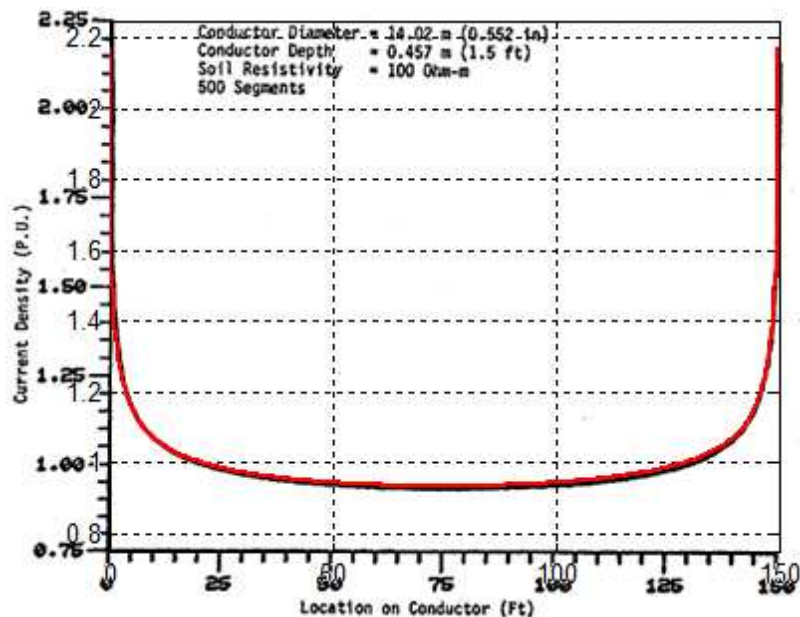


Fig. 87. Comparaison des distributions de courant : notre méthode (rouge) et la référence bibliographique (noir) [53]

On constate une parfaite coïncidence des résultats concernant la distribution de la densité de courant en (p.u.) unité ramenée, ce qui donne de bonnes garanties sur la validité de notre approche.

**b. Validation 2 : résistance équivalente.**

Pour validation de la méthode, un calcul est fait pour la configuration physique présentée ci-dessous (Fig. 88) et dont le tableau ci-après résume les données géométriques. Cet exemple est tiré de la référence [54] et on obtient des résultats vraiment très proches.

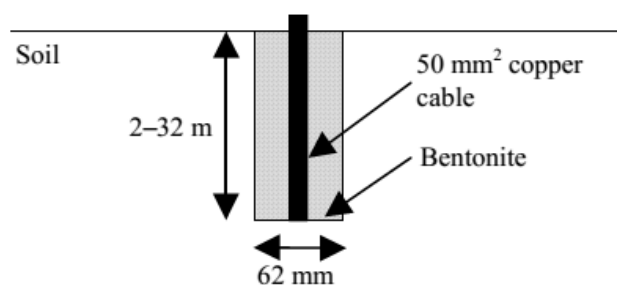


Fig. 88. Configuration de la référence bibliographique [54] pour un pieu vertical

Ro (mm)	Longueur du pieu L(m)	Fréquence (Hz)	$\sigma_1$ (S/m)	Nbre de segments	Profondeur h du conducteur par rapport à surface(m)	$\epsilon$	R réf Biblio ( $\Omega$ )	R( $\Omega$ ) Sans maillage	R( $\Omega$ ) Avec maillage
3,99	4	0	1/450	10	0	10	131	130.66	130.27



### 5.3.3 Modélisation d'un pieu vertical en statique

#### a. Introduction

Données du problème : Dans cette première étude nous avons pris un rayon  $r_0$  et une longueur  $L=1\text{m}$  identique à celui d'un pieu réel que l'on utilisera expérimentalement. Evidemment pour des raisons de commodité, le pieu affleure le sol.

Résolution en tension imposée avec $V_0 = 1\text{ V}$					
$r_0(\text{m})$	Longueur du pieu $L(\text{m})$	Longueur des éléments/distance entre points d'injection (m)	$\sigma_1$ (terre) (S/m)	Nbr de segments	Profondeur $h$ du conducteur par rapport à surface(m)
0,005	1	0,1	0,018	10	0

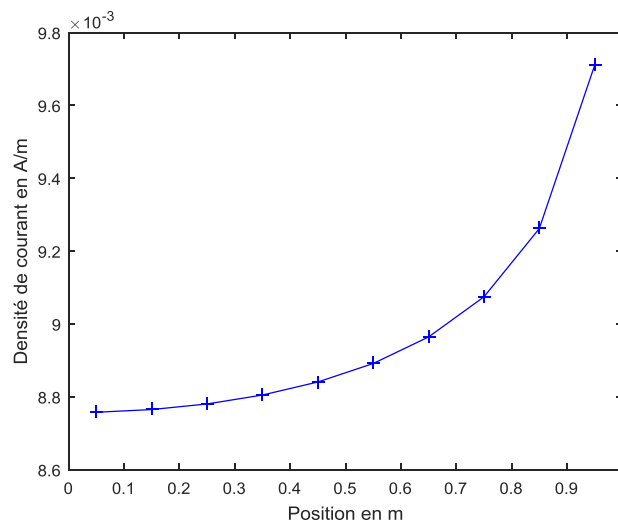


Fig. 89. Densité de courant sortante du pieu dont la tension est imposée

En plus de la distribution du courant sortant du pieu (Fig. 89), la résolution donne accès également à la résistance globale du pieu avec la terre lointaine :

$R_{eq} = 111,29\ \Omega$  et le courant global qui s'écoule est de 9 mA.

On remarquera que la tendance de l'augmentation de la densité de courant en extrémité la plus profonde du pieu est observée. Ce phénomène s'explique par le fait que l'élévation de potentiel créée par chacun des points d'injection doit aussi respecter l'équipotentielle imposée par la présence du pieu.

Qualitativement on peut expliquer que le courant est le plus important quand on va vers l'extrémité profonde car la surface de la calotte hémisphérique de terre est d'autant plus grande que l'on est profond et de ce fait la résistance équivalente plus faible (décroissance en  $1/r$ - voir chapitre 3 sur l'approche phénoménologique).

Effectuons cette fois une résolution en imposant un courant global de  $I_0 = 1\text{ A}$  (Fig. 90).

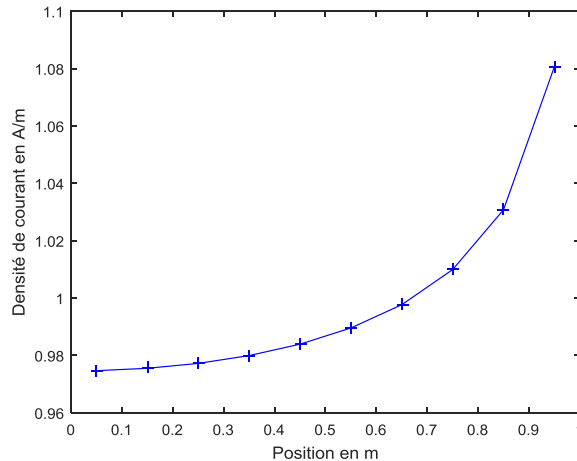


Fig. 90. Densité de courant sortante du pieu dont le courant est imposé

Le calcul fournit aussi la valeur de la tension  $V$  à laquelle est portée le pieu, elle vaut  $V = 111,29 \text{ V}$

Le courant  $I_0$  étant d'1 A, on retrouve la résistance globale du pieu avec la terre lointaine à  $111,29 \Omega$ .

**b. Comparaison de différentes formulations pour la modélisation d'un pieu vertical**

Dans ce paragraphe nous mettons en œuvre les formulations intégrales développées dans le chapitre 6 qui permettent de passer du caractère local au caractère global mais toujours en supposant la densité de courant sortante constante sur la longueur de l'élément. Nous avons vu notamment à travers la référence bibliographique la nécessité de prendre en compte la variation de la densité de courant sortante le long du conducteur.

Le tableau suivant récapitule les valeurs de la résistance équivalente du pieu avec l'approche ponctuelle, l'approche intégrale filiforme maillée et enfin cette dernière sans maillage pour deux rayons  $r_0$  différents.

Attaque en courant $I_0 = 1 \text{ A}$ $\sigma_1 = 0,018 \text{ (S/m)}$			
	Modélisation ponctuelle	Formulation intégrale filiforme	Formulation intégrale filiforme
Nombre de segments/points	10	10	sans maillage
Distance du pieu à la surface $h = 0$			
Rayon $r_0$ (m)	0,0025		
Req ( $\Omega$ )	199,8	56,7	56,4
Rayon $r_0$ (m)	0,01		
Req ( $\Omega$ )	67,0	44,8	44,1

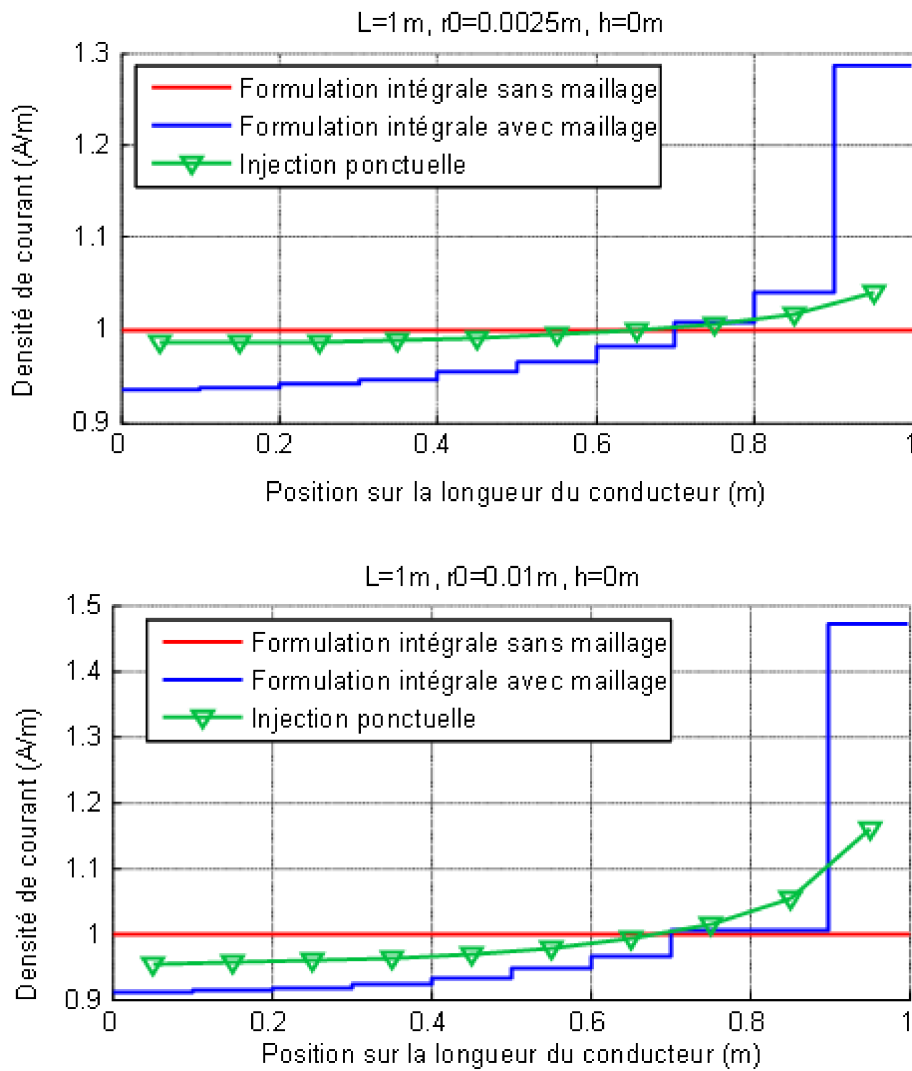


Fig. 91. Comparaison entre une formulation ponctuelle et intégrale filiforme pour deux rayons de point d'injection ou de conducteur différents

Ces courbes (Fig. 91) mettent en évidence la convergence des modèles de discrétisation utilisés. Le nombre de segments de discrétisation est de l'ordre de grandeur de celui adopté dans l'exemple bibliographique (1 segment  $\approx$  0,1 m). Ce qui nous pousse à considérer ce résultat comme tangible et devenir notre référence. Néanmoins il est difficile de se baser sur la seule évaluation de la densité de courant et il est nécessaire aussi de s'intéresser à la valeur de la résistance équivalente qui demeure une grandeur fondamentale lorsqu'on souhaite évaluer la remontée de potentiel lors d'un choc de foudre. A ce titre, on note la très grande différence de valeur entre les deux méthodes.

Naturellement la méthode reposant sur les formulations intégrales filiformes est beaucoup plus satisfaisante, mais nous investiguerons rapidement sur la sensibilité des paramètres utilisés dans la méthode des points d'injection tant celle-ci est légère en terme de mise en œuvre en particulier comment choisir le rayon des points d'injection ou encore le nombre de points d'injection.

Désormais et compte tenu des remarques précédentes, on travaillera toujours à courant imposé,  $I_0 = 1A$  de manière à faciliter les analyses et les comparaisons entre les méthodes.

❖ Impact du nombre de points d'injection en regard du nombre de segments

Attaque en courant $I_0 = 1A$ $r_0 = 0,005 m$ Longueur du pieu $L = 1m$ $\sigma_1$ (terre) = $0,018 S/m$ Pieu vertical affleurant le sol $h = 0 m$					
	Injection ponctuelle			Formulation intégrale filiforme	Formulation intégrale
Nombre de segments/ points	10	20	50	10	sans maillage
Req ( $\Omega$ )	111,3	73,0	54,3	50,7	50,3

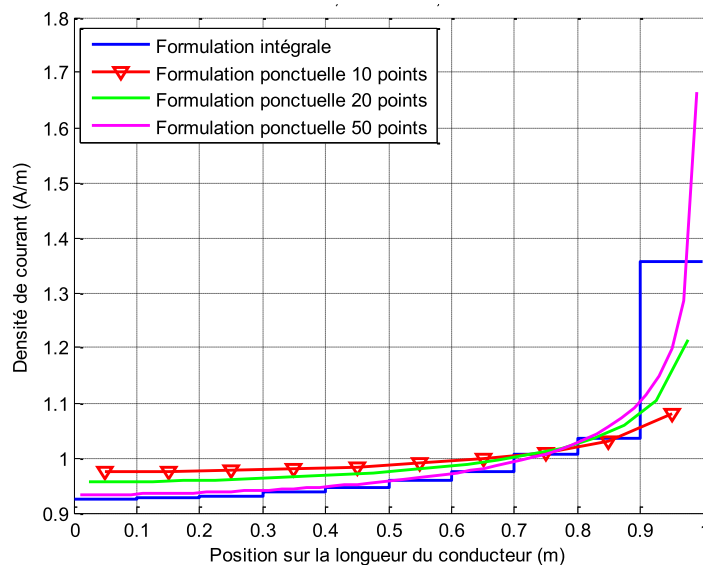


Fig. 92. Densité de courant sortante du pieu en fonction du nombre de points de discrétisation et comparaison à la formulation intégrale filiforme

Une fois encore, la densité de courant sortante est à peu près bien représentée comparativement à l'approche formulation intégrale filiforme à l'exception de la partie la plus profonde du pieu (Fig. 92).

Plus le nombre de points d'injection est élevé, plus la densité de courant se rapproche de celle considérée comme exacte par la formulation intégrale filiforme.

En revanche on observe bien la convergence de la valeur de la résistance équivalente avec l'augmentation du nombre de points d'injection. La convergence de plus en plus lente vers une asymptote montre que l'on se rapproche progressivement vers la valeur que l'on considère comme théoriquement exacte.

Lorsqu'on continue à augmenter le nombre de points d'injection, sur la courbe Fig. 93 (100 points) conduisant à une valeur de la résistance équivalente  $Req = 51,45 \Omega$  au lieu de notre référence à  $50,7 \Omega$ , on constate de surcroît un début d'oscillation vers l'extrémité la plus profonde du pieu. Cela peut constituer aussi un critère d'arrêt sur la discrétisation du pieu en points.

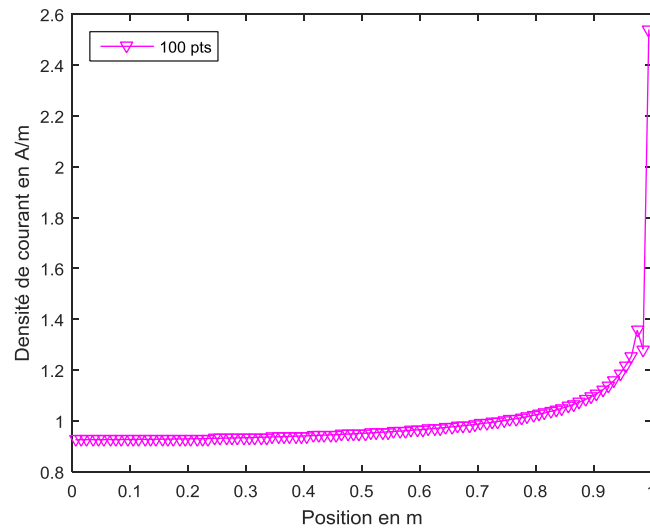


Fig. 93. Début d'instabilité de la méthode des points d'injection

Dans ce cas, on remarquera que 100 points  $\times 2 \times r_0$  (0,005) couvrent exactement la longueur  $L$  (1 m) du pieu, donc il est logique de se rapprocher du résultat fourni par la méthode intégrale filiforme mais aller au-delà en discrétisation ponctuelle conduit à une instabilité du modèle en partie due au fait que les points se chevauchent les uns les autres !

❖ Choix du rayon des points d'injection- limite de validité

Dans cette modélisation simplifiée, nous allons étudier l'influence du rayon des points d'injection, puisque nous avons été confronté à cette question lors de la comparaison entre la méthode de Wenner et l'approche phénoménologique (§ 3.3.3).

Attaque en courant $i_0 = 1A$					
$r_0(m)$	Longueur du pieu $L(m)$	Longueur des éléments/distance entre points d'injection (m)	$\sigma_1$ (terre) (S/m)	Nbr de segments	Profondeur $h$ du conducteur par rapport à surface(m)
Variable	1	0,1	0,018	10	0

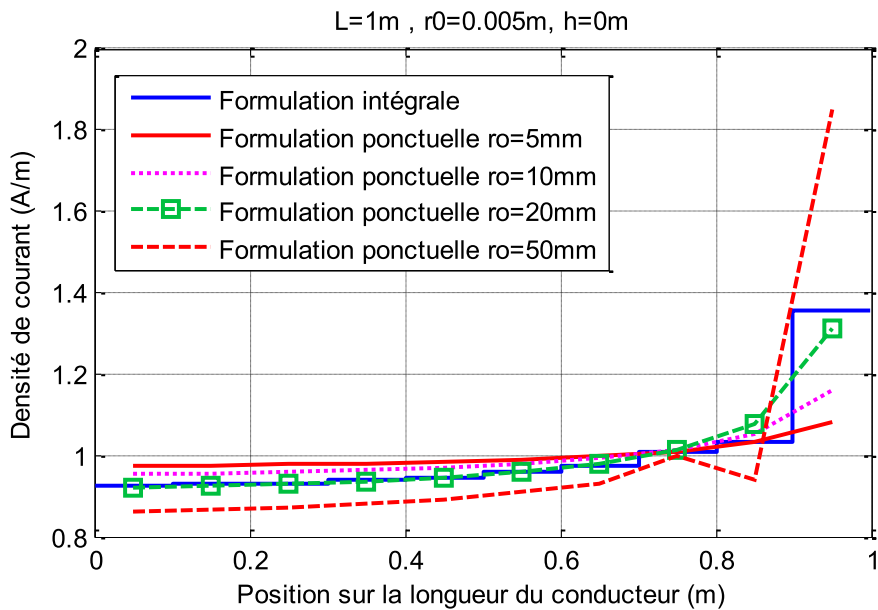


Fig. 94. Limite du modèle avec la variation du rayon des points d'injection

Nous avons vu lors de l'approche phénoménologique la nécessité de corriger le rayon  $r_0$  du point d'injection car le caractère ponctuel ou filiforme conduit toujours à des situations divergentes.

La Fig. 94 appelle les commentaires suivants :

- Il n'est pas évident de définir a priori une correspondance simple pour approcher la valeur théorique en jouant sur le rayon, aucune relation physique explicable nous est apparue satisfaisante jusqu'ici.
- sans que les points se chevauchent on peut dépasser la valeur théorique d'une part et observer aussi l'entrée en oscillation de notre modèle...

Cette figure met aussi en évidence l'absence de stabilité lorsque le rayon du point devient trop important. Cette instabilité est concomitante avec le chevauchement des points d'injection. Ici l'entre point vaut 10 cm, et effectivement on constate que pour des points de rayon 5 cm le modèle commence à devenir instable à l'extrémité la plus profonde du pieu.

Le tableau ci après situe les résultats obtenus par la méthode des points d'injection en comparaison avec la formulation intégrale avec ou sans maillage.

	Méthode des Points d'injection					Formulation intégrale filiforme avec 10 segments	Formulation intégrale filiforme sans maillage
	0,0025	0,005	0,01	0,02	0,05	0,005	0,005
$r_0$ (m)	0,0025	0,005	0,01	0,02	0,05	0,005	0,005
Req ( $\Omega$ )	199,8	111,3	67	44,7	31	50,7	50,3

❖ Conclusion concernant la méthode d'injection ponctuelle

Nous avons espéré en développant cette modélisation par des points d'injection utiliser une méthode simplifiée et de mise en œuvre aisée. Il faut se rendre à l'évidence que le choix du rayon des points d'injection n'est absolument pas satisfaisant et que le nombre de points devient très vite

élevé pour se rapprocher de ce qui nous a servi de référence avec la formulation intégrale filiforme. Il faut presque recouvrir la totalité du pieu avec des points et se faisant la densité de courant devient instable sur la partie la plus profonde du pieu. Nous verrons que ce type d'instabilité est sans doute inhérent à la formulation physique. Nous abandonnons dans la suite du document cette approche au bénéfice des formulations intégrales filiformes maillées sur la longueur du conducteur.

❖ Influence du nombre de segments avec la modélisation intégrale filiforme

On choisit arbitrairement pour mener cette étude un rayon du pieu  $r_0 = 5\text{mm}$  identique à nos pieux expérimentaux.

Les résultats que nous trouvons pour la résistance équivalente sont indiqués ci-dessous :

Attaque en courant $I_0 = 1\text{ A}$ , $r_0 = 0,005\text{ m}$ , $L = 1\text{ m}$ , $h = 0\text{ m}$					
Nombre de segments	5	10	20	50	sans maillage
Req( $\Omega$ )	50,6	50,7	51,0	52,2	50,66

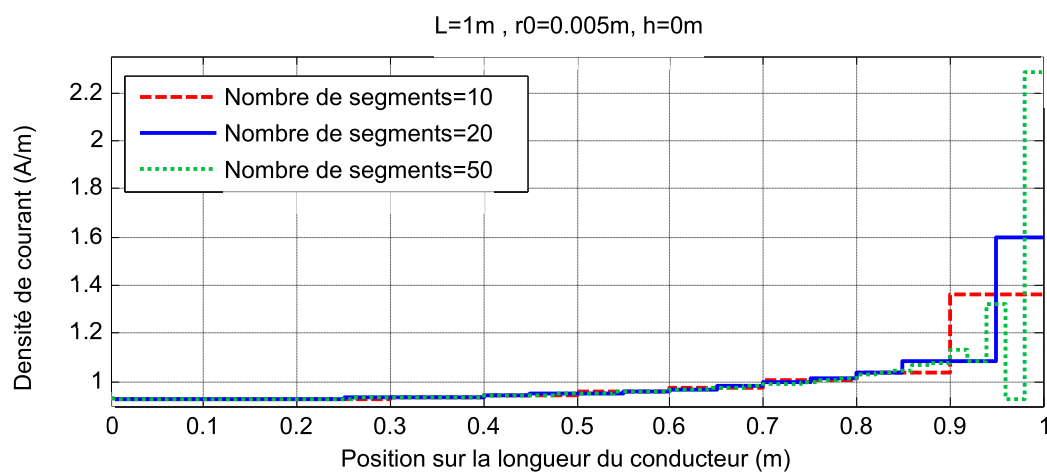


Fig. 95. Variation de la densité de courant avec une formulation intégrale filiforme - Limite du modèle

On remarque Fig. 95 que le nombre de segments de discrétisation a peu d'influence sur la valeur de la résistance globale (variation de l'ordre de 1%). Les résultats ne semblent pas converger vers une valeur asymptotique.

L'application de la formulation filiforme d'un segment sur lui-même nous a conduits à introduire le rayon du pieu  $r_0$  pour éviter la divergence (cf §5.1.2e). Cette façon de procéder est peut être la cause des oscillations. Nous allons par la suite développer d'autres formulations afin de lever ce doute.

Conclusion partielle :

Au vu des résultats précédents sur le peu d'incidence du maillage sur la valeur de la résistance globale du conducteur vis-à-vis de la terre lointaine et compte tenu des imprécisions que l'on aura sur la résistivité de la terre, l'intérêt du maillage n'est pas flagrant et ce d'autant plus qu'à ce stade des connaissances, une instabilité se produit lors d'une discrétisation excessive.

*c. Exploitation du modèle en statique vis-à-vis de ses paramètres physiques*

Ce paragraphe est dédié à l'exploitation du modèle électrique sous différentes formes (Fig. 96), basé

sur le maillage du conducteur et la résolution du circuit électrique obtenu (comme présenté au §5.2.3) :

- Recherche du courant sortant du pieu,
- Recherche de l'impédance équivalente d'un pieu,
- Recherche du potentiel en un point

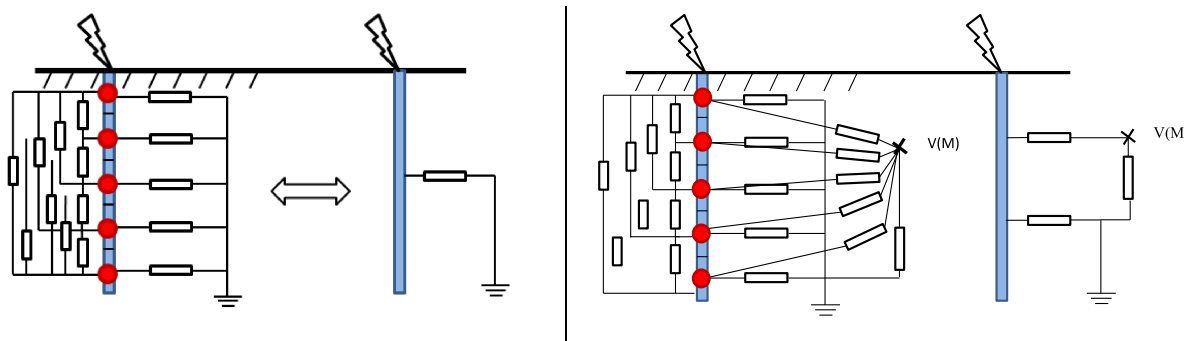


Fig. 96. Représentation de type circuit avec et sans condensation, avec et sans point d'observation

❖ Influence du rayon du conducteur avec la modélisation intégrale filiforme

Il est préférable de représenter les paliers de densité de courant issus de la discrétisation par une courbe continue avec les valeurs au centre du palier pour des raisons de lisibilité. On remarque alors plus facilement que l'on atteint une instabilité lorsque le rayon prend une valeur trop importante vis-à-vis de la longueur du segment de discrétisation. On peut supposer que lever la divergence de la formulation filiforme par l'artifice du rayon  $r_0$  rencontre des limites lorsque le rayon est trop grand (Fig. 97).

En l'occurrence, le rayon  $r_0 = 10$  mm pose des problèmes de stabilité.

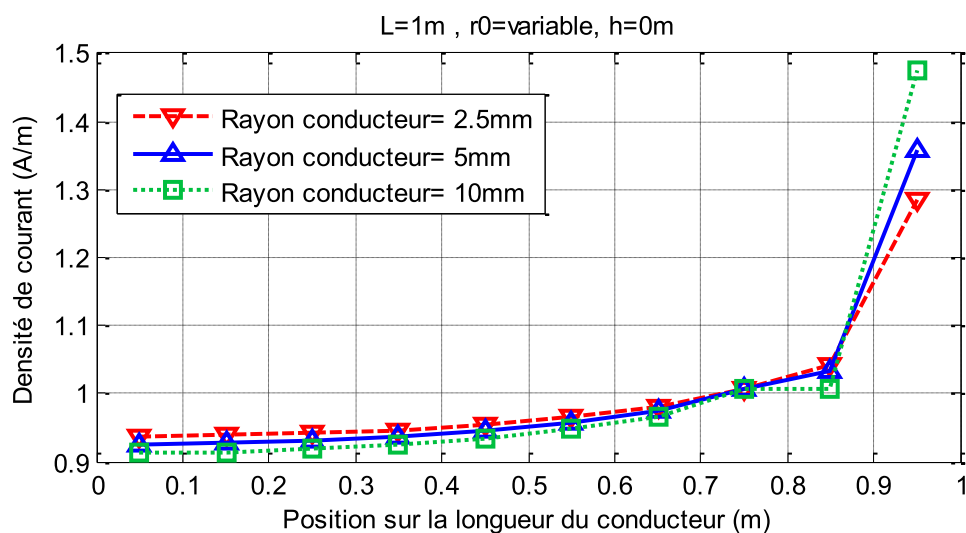


Fig. 97. Variation de la densité de courant avec une formulation intégrale filiforme en fonction du rayon du pieu

Rayon (mm)	2.5	5	10
Req( $\Omega$ )	56,7	50,7	44,8

En revanche, d'un point de vue physique, on constate que plus le rayon est important plus la surface



d'échange avec la terre est importante et donc moins la résistance de terre est élevée. Néanmoins on voit que le diamètre n'a qu'une influence mineure sur la résistance du pieu de terre, il ne sera donc pas nécessaire de sur dimensionner le diamètre des pieux de terre. Le doublement de la section impacte la valeur de la résistance de l'ordre de 10%.

❖ Influence de la longueur du pieu

Traçons cette fois l'impact de la longueur du pieu de terre, celui-ci affleurant toujours le sol.

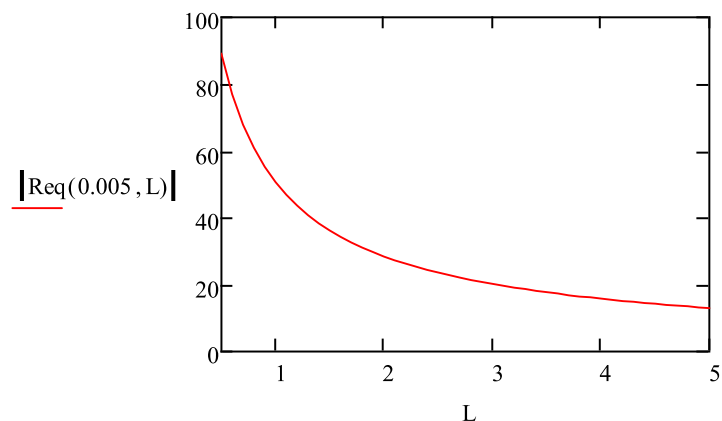


Fig. 98. Résistance équivalente du pieu de rayon 5mm en fonction de sa longueur  $L$

On constate sur la Fig. 98, une grande influence de la longueur enterrée du pieu. Le doublement de la longueur peut conduire jusqu'à 50% de réduction de la valeur de la résistance du pieu. C'est sur ce paramètre qu'il faudra donc jouer en priorité dans la conception d'un système de prise de terre.

❖ Influence de la profondeur du pieu sous la terre

En faisant varier la distance  $h$  par rapport à la surface de la terre (Fig. 99) on tend à vérifier que l'effet de l'interface disparaît pour des profondeurs importantes.

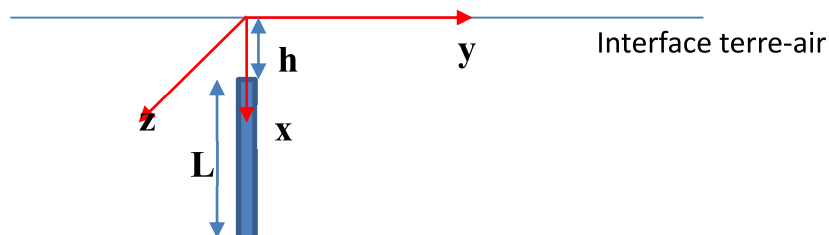


Fig. 99. Pieu vertical localisé à une profondeur  $h$

Ce problème ne se pose pas dans le cas d'un pieu qui doit rester accessible pour la connexion depuis la surface de la terre, en revanche un élément de grille peut se trouver dans une position verticale plus ou moins enfoui et dont l'extrémité la plus proche de la terre est située à une distance  $h$  de la surface.

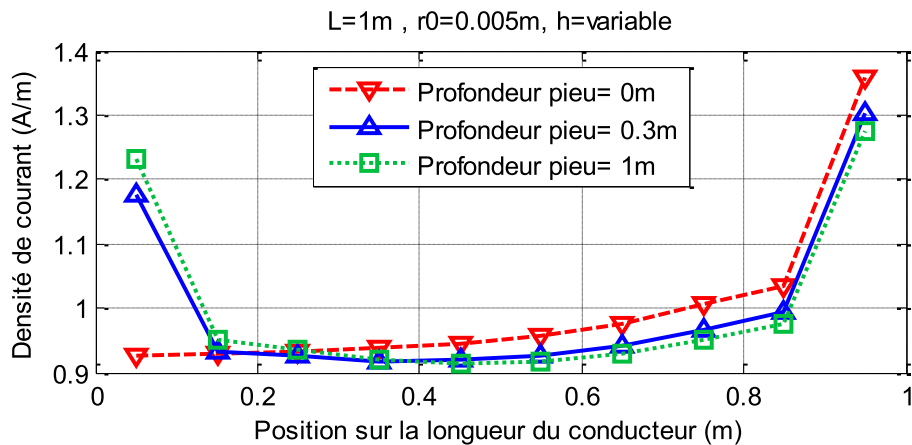


Fig. 100. Variation de la densité de courant avec une formulation intégrale filiforme en fonction de la profondeur du pieu

Profondeur (m)	0	1	2	5	10	50	Milieu homogène	
							avec maillage	sans Maillage
Req( $\Omega$ )	50,7	46,9	46	45,3	45	44,6	44,5	44,1

L'observation que l'on peut faire sur les courbes Fig. 100 est que plus le pieu est enterré plus on se rapproche de la situation d'un pieu en terre profonde, comme si l'interface air/terre n'existait plus et la répartition de la densité de courant tend à se symétriser. D'ailleurs ceci est conforté par une densité de courant ayant la même allure que le pieu soit horizontal [53] ou vertical.

Pour un conducteur éloigné de la surface ici 2 m, la distribution de la densité de courant est identique à celle d'un conducteur dans un milieu infini, qu'il soit vertical ou horizontal, comme le montre la Fig. 101.

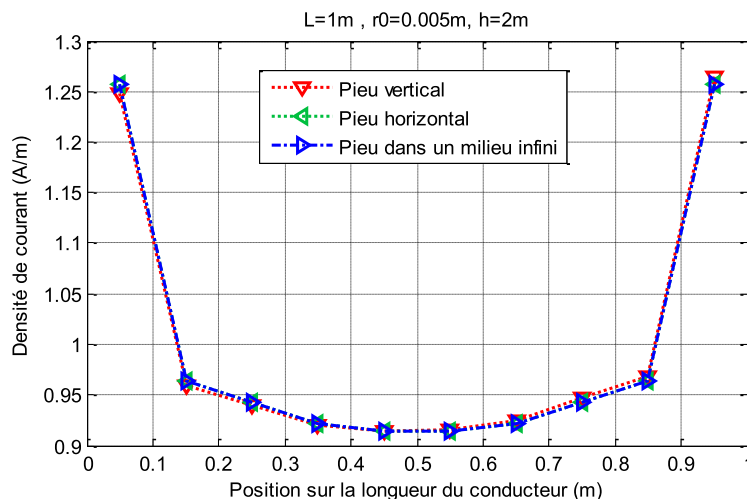


Fig. 101. Densité de courant du pieu dans la terre à 2m de la surface (vertical ou horizontal) et en milieu infini.

Quant à la valeur de la résistance avec la terre lointaine, celles-ci sont quasiment identiques comme le montre le tableau suivant :

Pieu Vertical	Pieu Horizontal	Terre uniforme
44.61 $\Omega$	44.57 $\Omega$	44.52 $\Omega$

On peut en déduire que la position relative du pieu par rapport à l'interface terre-air (horizontale, verticale, quelconque) n'a pas d'influence sur la répartition de la densité de courant sortante dès lors que la profondeur est de d'ordre grandeur de (quelques) longueurs du pieu.

❖ Cas du pieu horizontal

Dans cette dernière étude faite en statique, on compare la résistance d'un pieu de terre en position verticale comparée à différentes positions d'un pieu ou plutôt d'un conducteur horizontal enfoui sous la terre à différentes profondeurs. Cette courte étude a pour intérêt de compléter la connaissance et d'acquérir les ordres de grandeur nécessaires à la conception d'un système de mise à la terre.

Ici on prend comme référence notre pieu vertical déjà bien caractérisé affleurant le sol et un pieu horizontal de même longueur 1 m, de même rayon  $r_0 = 0,005$  m et localisé à 0,01 ; 0,1 ; 0,5 m. On rappelle que ce même pieu enfoui dans une terre uniforme présente une résistance de 44,52  $\Omega$  (Fig. 102).

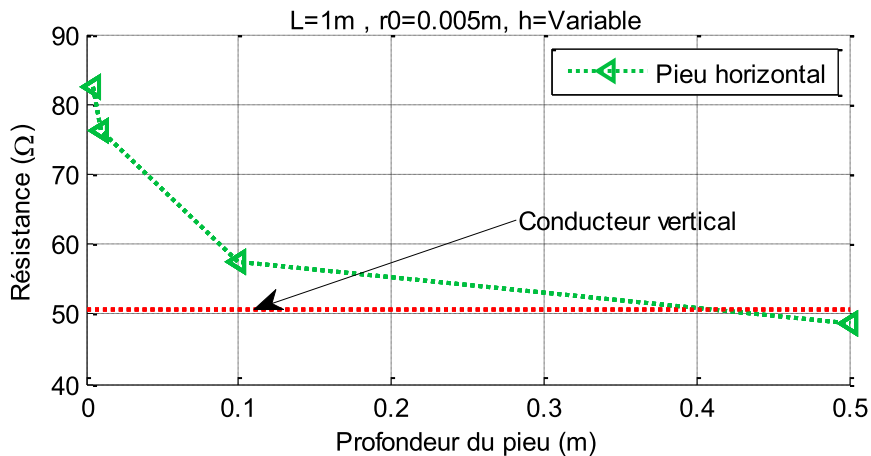


Fig. 102. Comparaison d'un pieu vertical pris comme référence versus un pieu horizontal à différentes profondeurs

❖ Elévation de potentiel dans la terre à proximité d'un pieu vertical affleurant le sol suite à une injection de courant

La méthode de résolution utilisée incluant la présence des éléments de discrétisation du pieu et d'un point M quelconque dans le milieu, permet alors d'évaluer le potentiel dans tout le domaine (Fig. 103). Le courant d'injection est de 1 A pour cet exemple. Toujours en supposant le pieu équipotentiel, la résolution, comme montrée précédemment, permet de trouver d'une part le potentiel du pieu (50.68V) et d'autre part l'élévation de potentiel du point M qui se déplace dans un plan perpendiculaire au pieu et à différentes hauteurs par rapport à l'interface terre-air.

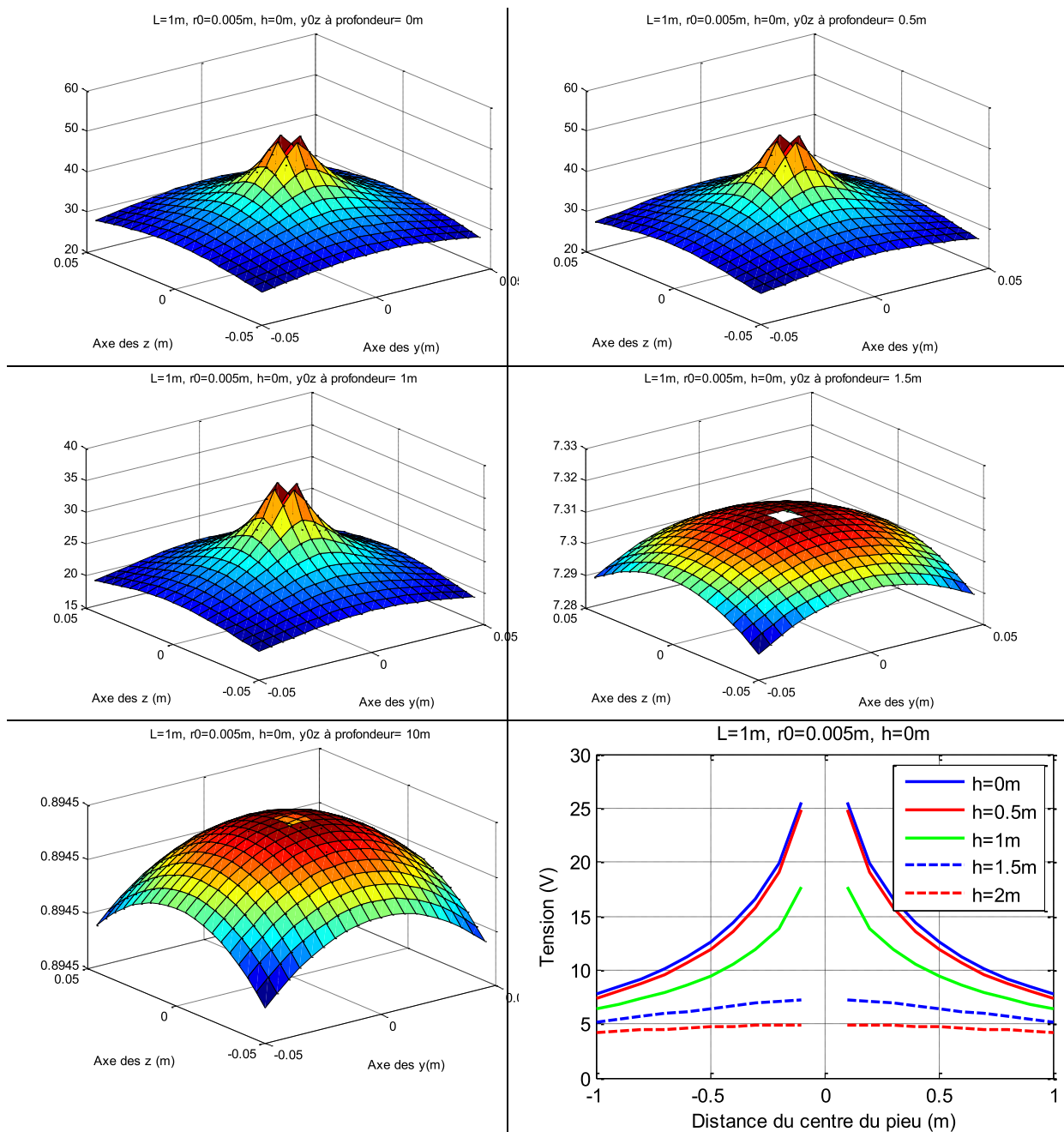


Fig. 103. Distribution du potentiel dans la terre suite à une injection sur une extrémité du pieu, à différentes hauteurs par rapport à l'interface air-terre

La figure précédente représente en 3D l'évolution du potentiel, et la dernière figure montre sur un plan de coupe qui passe par le centre du conducteur cette même évolution du potentiel et permet de suivre l'évolution de la tension induite dans le sol en fonction de la profondeur.

En terme d'application directe de cette étude, si l'on voulait connaître le potentiel auquel serait élevée une conduite métallique située à proximité du lieu d'injection de la foudre par exemple, il faudrait résoudre le problème couplé en prenant en compte dans la modélisation la conduite et le pieu dès le début !

#### ❖ Conclusion partielle

A la vue des résultats présentés dans ce paragraphe, c'est le paramètre longueur du conducteur qui influence le plus la valeur de la résistance équivalente. Il ne sera pas nécessaire de prendre en compte la présence de l'interface air-terre si les conducteurs sont suffisamment enterrés comme dans le cas d'une grille de fond de fouille.

Par ailleurs, nous avons pu montrer que grâce au modèle développé, nous avons accès à la fois à la densité de courant sortant des conducteurs et à l'élévation de potentiel en n'importe quel point du milieu étudié.

#### 5.3.4 Prise en compte de l'effet de la fréquence

Pour les aspects autres que la protection des personnes, notamment la CEM ou la foudre il est important d'analyser le comportement de nos modèles vis-à-vis de la fréquence. On va se limiter à l'étude de 3 fréquences caractéristiques des applications visées.

L'étude faite en continu reste parfaitement valable à 50 Hz ou 60 Hz compte tenu de la valeur des capacités parasites. Cette assertion pourrait être éventuellement remise en cause en cas d'utilisation de plaques conductrices de très grande dimension comme cela semble être le cas dans certaines applications.

En montant en fréquence, la seconde que l'on rencontre est celle équivalente au front de montée du choc de foudre que l'on estimera aux alentours de 400 kHz.

Les fréquences générées par les convertisseurs d'électronique de puissance s'étalent de quelques dizaines de kHz pour les harmoniques alors que celles générées pendant la commutation des semiconducteurs sont de l'ordre du MHz, on prendra ici la valeur arbitraire de 2MHz. Dans l'hypothèse de la montée en puissance des composants grands gaps, il faut s'attendre à voir des fréquences approchant les centaines de MHz. Nous avons retenu arbitrairement 200 MHz dans nos applications numériques.

Il faut en revanche prendre en compte la permittivité relative de la terre. Selon la bibliographie, un éventail de valeurs comprises entre 1, 10 et 80 permet de comprendre la manifestation des principaux phénomènes.

Les configurations à simuler sont résumées dans le tableau ci-dessous :

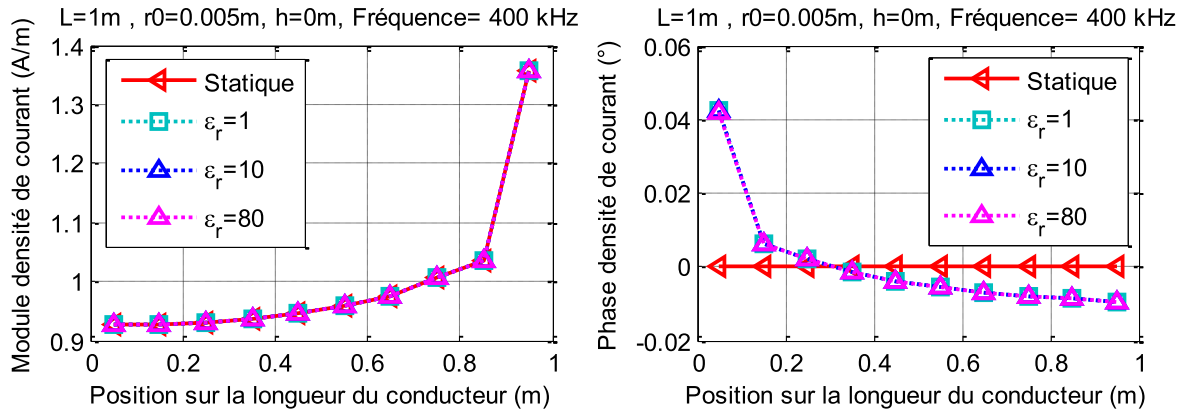
$\epsilon_r$ de la terre	fréquences
1	400kHz
10	2MHz
80	200MHz

Les caractéristiques géométriques du conducteur que l'on étudie restent identiques aux paragraphes précédents et sont rappelées dans le tableau ci-dessous.

r0 (mm)	L (m)	$\sigma_1(\Omega.m)^{-1}$	Nombre de segments	Profondeur du conducteur : h(m)
10	1	1/56	10	0

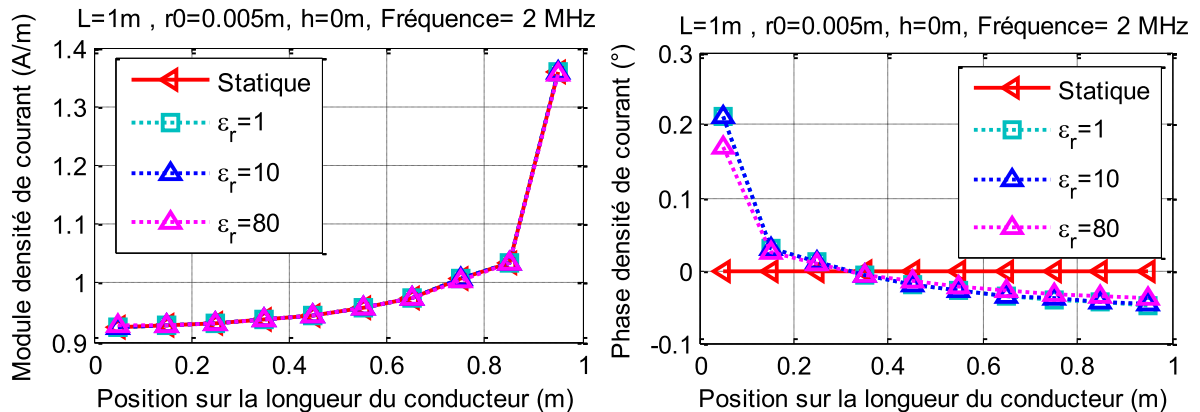
### a. Conducteur vertical

Pour les fréquences de 400 kHz, 2MHz et 200 MHz nous représentons sur Fig. 104, Fig. 105 et Fig. 106 le module et la phase de la densité de courant sortante en fonction de la valeur de la permittivité relative de la terre.



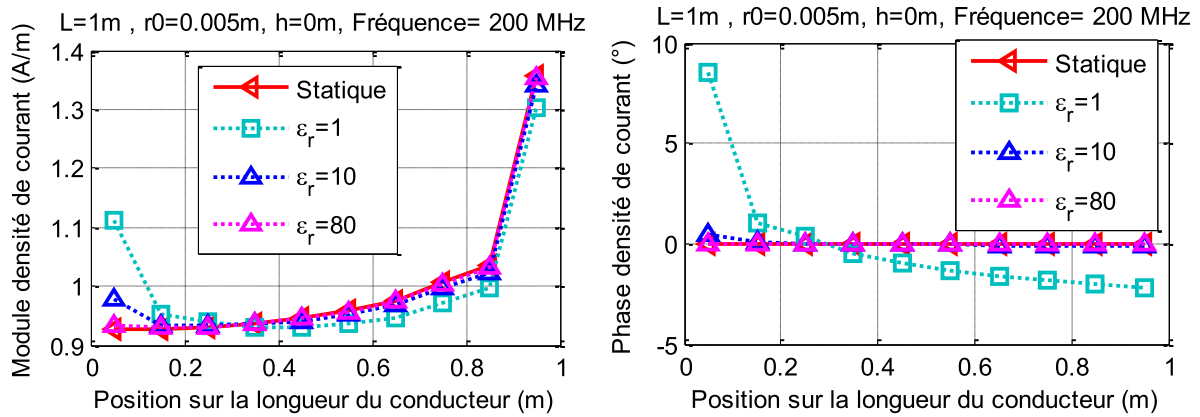
$\epsilon_r$ de la terre	1	10	80
Z	50.6883 - 0.0775i	50.6802 - 0.6451i	50.1881 - 5.0108i
R ( $\Omega$ )	50.6884	50.6884	50.6884
C(nF)	0.0120	0.0999	0.7837
V  (V)	50.6883	50.6843	50.4376
Phase V ( $^\circ$ )	-0.0876	-0.7293	-5.7015

Fig. 104. Distribution de la densité de courant et grandeurs globales à 400 kHz



$\epsilon_r$ de la terre	1	10	80
Z	50.6851 - 0.3876i	50.4836 - 3.2131i	40.5766 -20.2557i
R ( $\Omega$ )	50.6881	50.6881	50.6882
C(nF)	0.0120	0.0999	0.7837
V  (V)	50.6866	50.5858	45.3514
Phase V ( $^\circ$ )	-0.4381	-3.6417	-26.5283

Fig. 105. Distribution de la densité de courant et grandeurs globales à 2MHz



$\epsilon_r$ de la terre	1	10	80
Z	32,6163 – 23,33i	1,22 – 7,78i	0,02 -1,015i
R ( $\Omega$ )	49.31	50.62	50.69
C(nF)	0.0115	0.099	0.7837
V  (V)	40.1026	7.8777	1.0152
Phase V (°)	-35.5783	-81.0474	-88.8524

Fig. 106. Distribution de la densité de courant et grandeurs globales à 200MHz

Le courant injecté étant unitaire, pris comme référence, de ce fait le module et la phase de la tension sont ceux de l'impédance.

La Fig. 107 donne la variation du module et de la phase de l'impédance du pieu en fonction de la fréquence et des différentes valeurs de permittivité retenues.

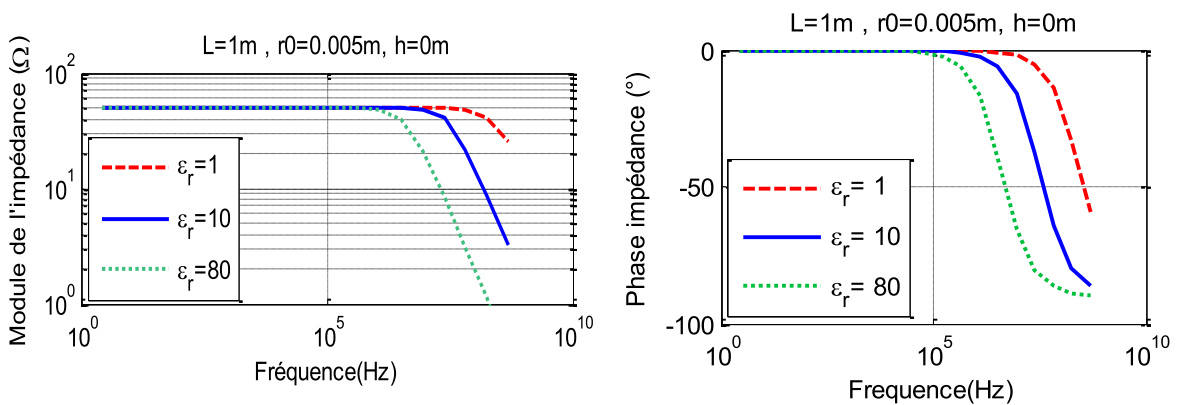


Fig. 107. Variation l'impédance du pieu (module et phase et module en log) en fonction de la fréquence pour différentes valeurs de permittivité

Ces variations d'impédances peuvent être représentées par un circuit équivalent associant une résistance en parallèle avec une capacité. Pour chaque fréquence, on cherche R et C telles que :

$$\begin{cases} |Z| = \frac{R}{\sqrt{1 + (RC\omega)^2}} \\ Arg(Z) = -Arctan(RC\omega) \end{cases}$$

Sur Fig. 108 nous avons superposé le module de l'impédance modélisée avec celle du circuit R//C équivalent calculé selon ce procédé.

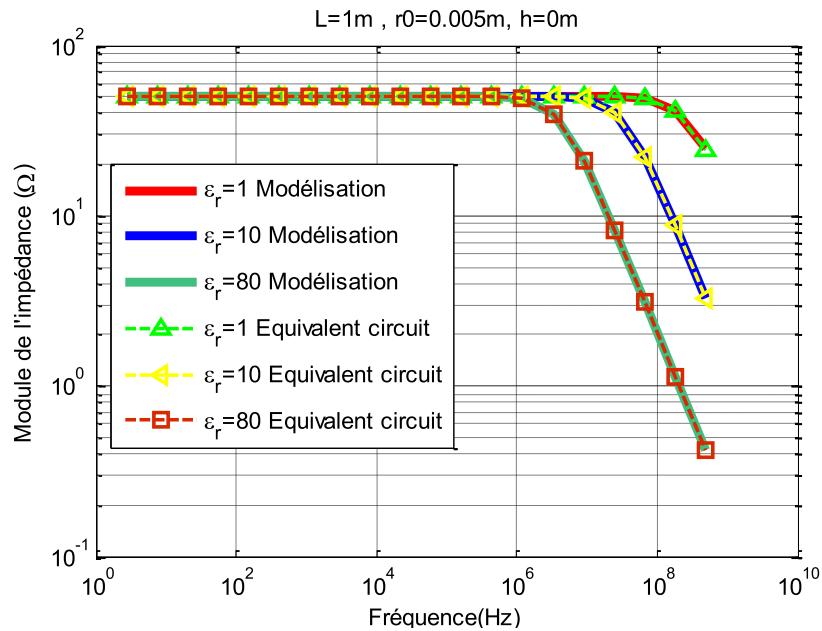


Fig. 108. Variation l'impédance du pieu (module) en fonction de la fréquence pour différentes valeurs de permittivité – modélisation et circuit équivalent

Les courbes ci-après (Fig. 109) présentent l'évolution de la valeur des éléments du circuit équivalent avec la fréquence.

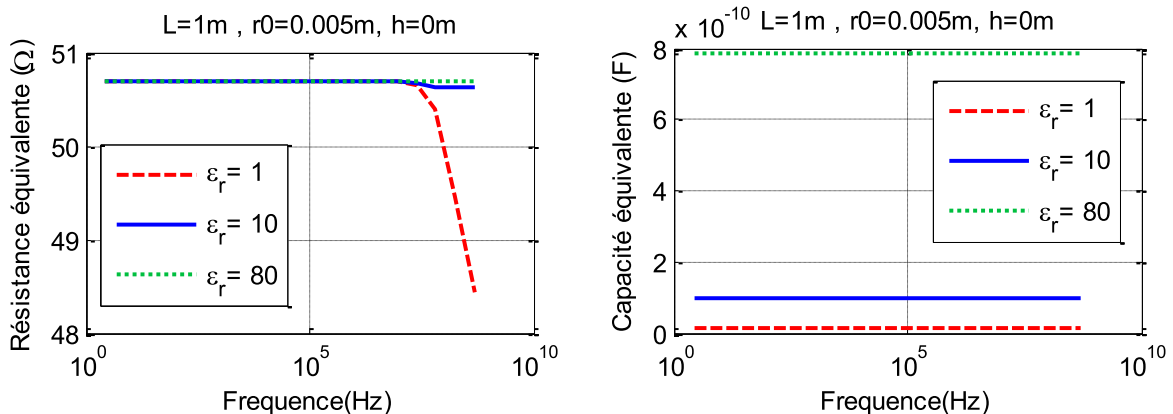


Fig. 109. Variation des paramètres du circuit équivalent du pieu en fonction de la fréquence pour différentes valeurs de permittivité

On remarque que l'on retrouve bien la valeur de la résistance déterminée en continu (de l'ordre de 50.7 $\Omega$ ).

On remarque également que la dépendance des éléments de circuit est très faible vis-à-vis de la fréquence et est beaucoup plus forte avec la permittivité de la terre mais ceci seulement à haute fréquence (qqs MHz) comme le montre la figure précédente.

Si bien que la formule  $R.C = \frac{\epsilon}{\sigma}$  reste valable sur une large gamme de permittivité et de fréquence. Ceci peut permettre un calcul estimatif rapide.



### b. Elévation de potentiel avec la fréquence à proximité du pieu vertical

Comme dans le cas en statique, on reprend, pour les différentes fréquences, la distribution de potentiel au niveau de la surface de la terre. Les données du problème sont les suivantes :

Attaque en courant $I_0 = 1A$						
$r_0(m)$	Longueur du pieu $L(m)$	Longueur des éléments/distance entre points d'injection (m)	$\sigma_1$ (terre) (S/m)	$\epsilon_r$ (terre)	Nbre de segments	Profondeur $h$ du conducteur par rapport à surface (m)
0.005	1	0,1	0,018	10	10	0

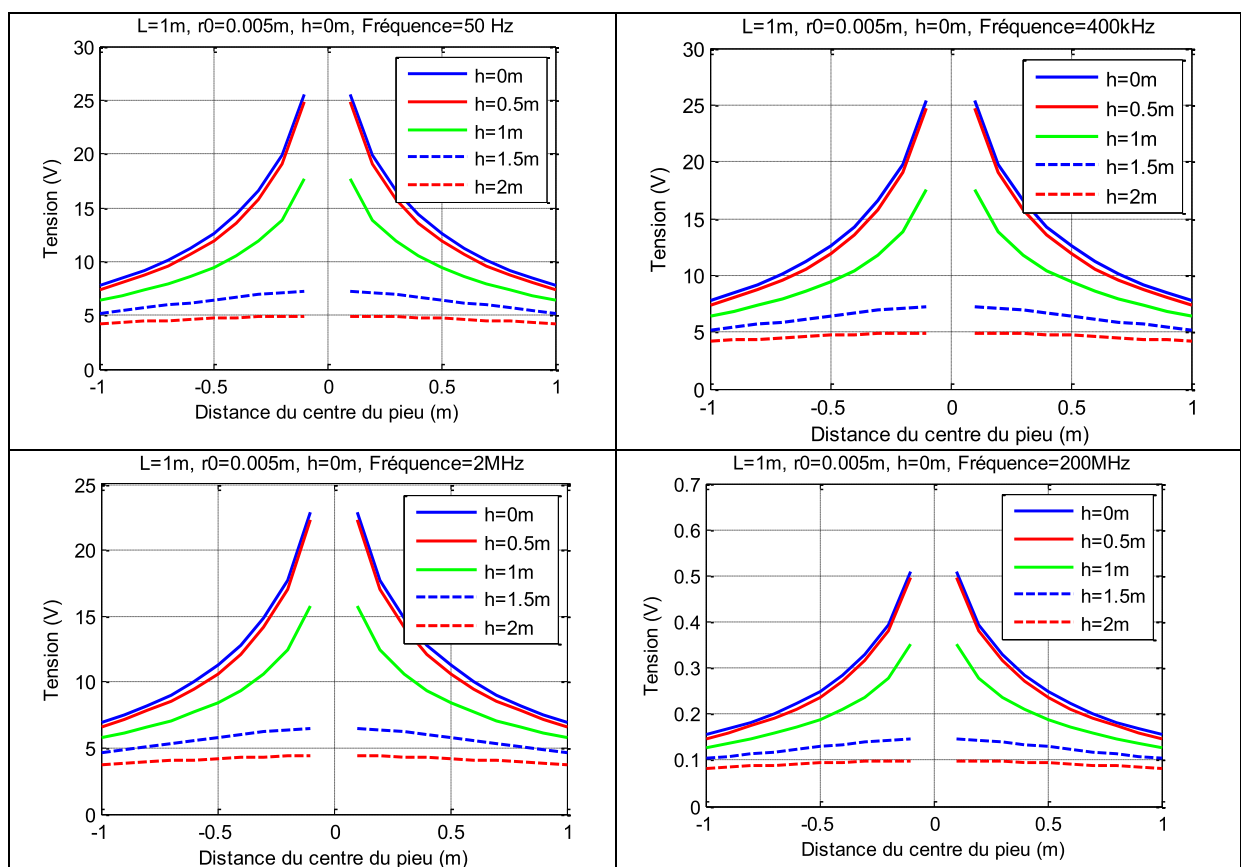


Fig. 110. Distribution du potentiel dans la terre suite à une injection sur une extrémité du pieu, à différentes hauteurs par rapport à l'interface air-terre

Le potentiel décroît au fur et à mesure que l'on s'éloigne du conducteur et du point d'injection (Fig. 110).

### c. Conclusion

Ce paragraphe a permis de caractériser en fréquence un conducteur enfoui dans le sol. Ces investigations sont nécessaires pour mieux comprendre la dépendance des paramètres électriques en fonction d'une part des caractéristiques géométriques mais surtout vis-à-vis de la fréquence et de la permittivité de la terre qui est alors un paramètre nécessaire à connaître.

Cette étude a permis de mieux cerner les domaines où cette dépendance peut devenir importante et compliquée de ce fait la représentation de type circuit des éléments enterrés.

### 5.3.5 Validation par une modélisation Eléments finis

Nous allons dans ce paragraphe utiliser la méthode des éléments finis que l'on cite souvent comme référence en modélisation électromagnétique basse fréquence et comparer les résultats obtenus avec la formulation intégrale filiforme maillée, dans le cas d'un pieu de terre en milieu homogène et dans le cas d'une interface air-terre.

La modélisation est faite en axisymétrique avec des conditions aux limites de  $V=0$  le plus loin possible du conducteur.

#### a. Cas du milieu homogène

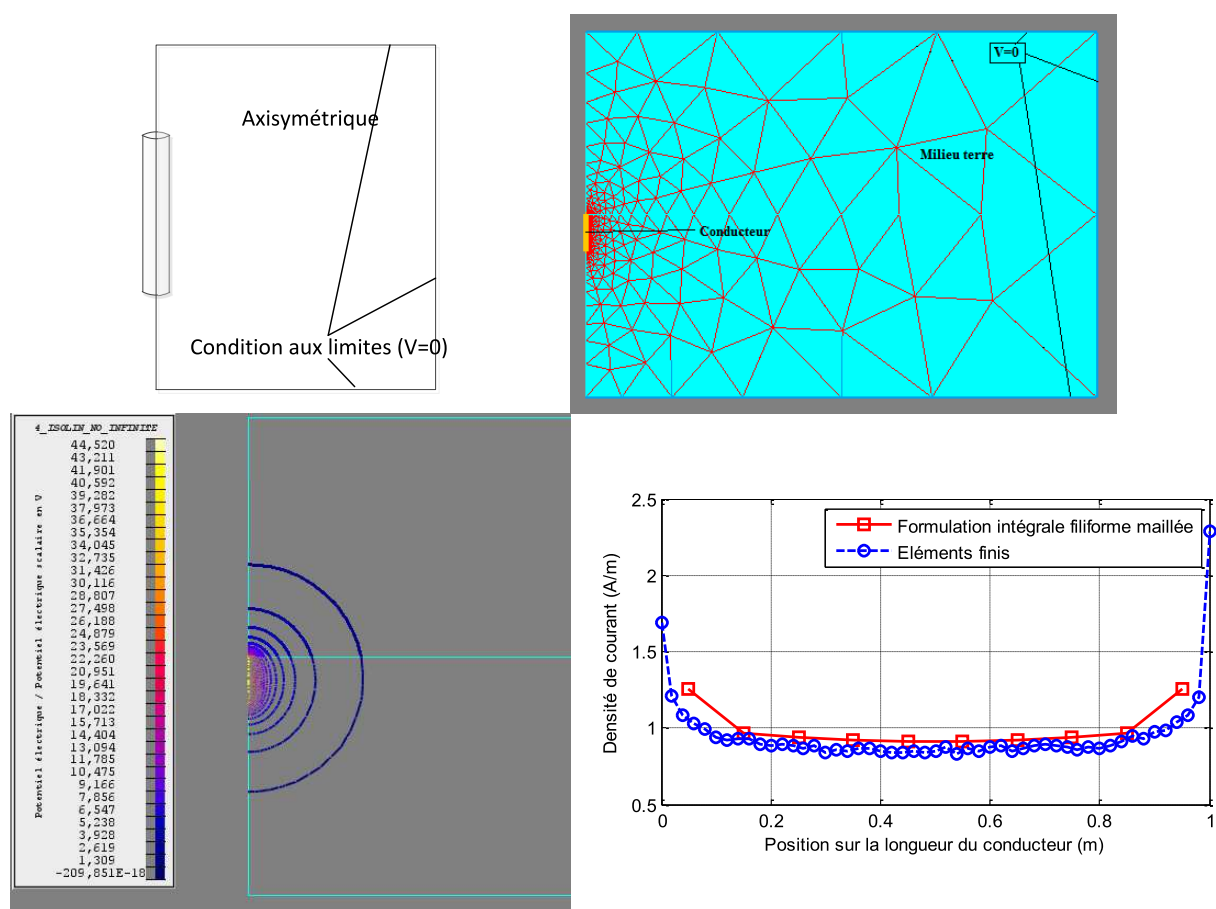


Fig. 111. Modélisation éléments finis d'un pieu vertical dans une terre uniforme-comparaison de la densité de courant entre la méthode des éléments finis et la formulation intégrale filiforme maillée

Pour des questions de simplicité dans Flux, au lieu d'alimenter en courant nous avons soumis le conducteur au potentiel de 44,52 V car c'est justement cette valeur que nous avons obtenu grâce à la mise œuvre de la formulation intégrale filiforme maillée (Fig. 111).

La résolution en conduction seule nous conduit donc aux résultats du tableau suivant :

	Eléments finis	Formulation intégrale filiforme maillée
Courant injecté (A)	0.95	1
Tension imposée (V)	44.52	44.52

Résistance ( $\Omega$ )	46.86	44.52
-------------------------	-------	-------

On constate une assez bonne convergence des résultats globaux ainsi qu'au niveau local avec la représentation de la densité de courant sortante du conducteur (Fig. 111). On peut remarquer la non-symétrie avec les éléments finis pour les points extrêmes du conducteur.

La partie capacitive du modèle est calculée avec Flux grâce une simulation électrostatique et à l'évaluation de l'énergie électrostatique. Les résultats sont comparés dans le tableau suivant, et dénotent également d'une bonne convergence.

	Eléments finis	Formulation intégrale filiforme maillée
Capacité (F)	9.18e-10	8.88e-10

### b. Présence d'une interface air-terre.

Pour traiter le cas d'une interface air-terre, un milieu supplémentaire et des conditions aux limites sont rajoutées au problème Flux précédent (Fig. 112).

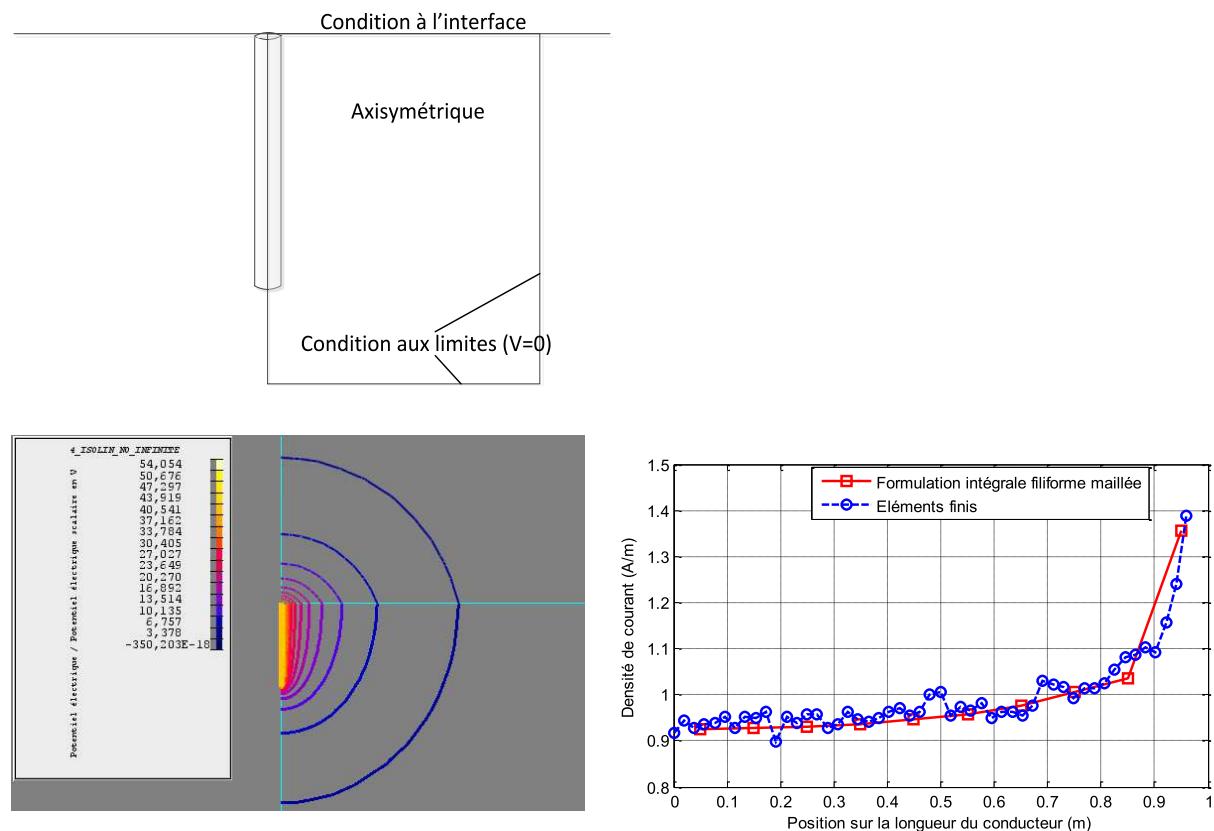


Fig. 112. Modélisation éléments finis d'un pieu vertical en présence d'une interface air-terre - comparaison de la densité de courant entre la méthode des éléments finis et la formulation intégrale filiforme maillée

	Eléments finis	Formulation intégrale filiforme maillée
R ( $\Omega$ )	54.054	50.76
C (F)	8.123e-10	7.83e-10

### c. Performances

Cette comparaison est très importante car elle met bien en évidence la cohérence des résultats à travers deux méthodes de modélisation totalement différentes. On apprécie ici la légèreté et la rapidité de mise en œuvre et d'exploitation de la méthode basée sur nos formulations intégrales filiformes que nous développons.

Si nous regardons d'une manière chiffrée ces performances.

La machine utilisée est dotée d'un processeur Core i5 3.3GHz avec 8Go de mémoire vive. La simulation avec la méthode intégrale filiforme pour un maillage en 10 segments prend un temps de simulation de 4.3ms. Quant à la modélisation éléments finis 2D sous Flux®, pour un maillage correct de la géométrie, une résolution du problème prend environ 2.14 secondes. La taille du problème sous Flux est de 3728 nœuds utilisant une mémoire de 6Mo.

#### 5.3.6 Passage à un système de 2 conducteurs

##### a. Deux conducteurs parallèles

Dans cette partie on travaille avec deux conducteurs de même longueur dans un premier temps puisque c'est une des configurations géométriques qui pourra être validée expérimentalement grâce à l'injection de courants entre ces deux conducteurs. Il faudra développer une méthode numérique plus puissante pour retrouver la méthode expérimentale de Wenner qui repose sur une mesure en 4 points.

Il pourrait paraître inutile de reconduire cette étude, eu égard à la connaissance approfondie que nous avons eue grâce au chapitre précédent, mais ce serait ignorer les phénomènes de couplage mutuel que nous allons pouvoir observer d'ores et déjà entre 2 pieux.

On s'intéresse à la distribution de la densité de courant en fonction des mêmes paramètres que précédemment.

On traite dans un premier temps le cas continu pour le pieu vertical et le pieu horizontal, puis par la suite le cas en fréquence. Le courant est injecté entre les deux conducteurs en boucle, dans ce cas pas de courant de mode commun qui fuit vers la terre lointaine.

##### ❖ Influence de la variation de la distance entre les deux conducteurs en continu

On fixe dans un premier temps la distance entre les deux conducteur à 10cm

r0 (m)	L (m)	$\sigma_1 (\Omega.m)^{-1}$	Nombre de segments	Profondeur du conducteur h(m)	Distance entre deux conducteurs d(m)
0,005	1	1/56	10	0	variable

On trace alors l'évolution de la densité de courant sortante d'un pieu en présence de l'autre pour plusieurs distances les séparant (Fig. 113). La Fig. 114 montre qu'assez rapidement la présence du second pieu n'a pas d'impact sur le premier.

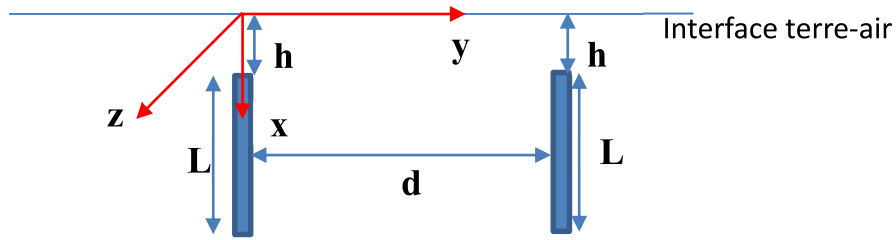


Fig. 113. Description géométrique du dispositif étudié

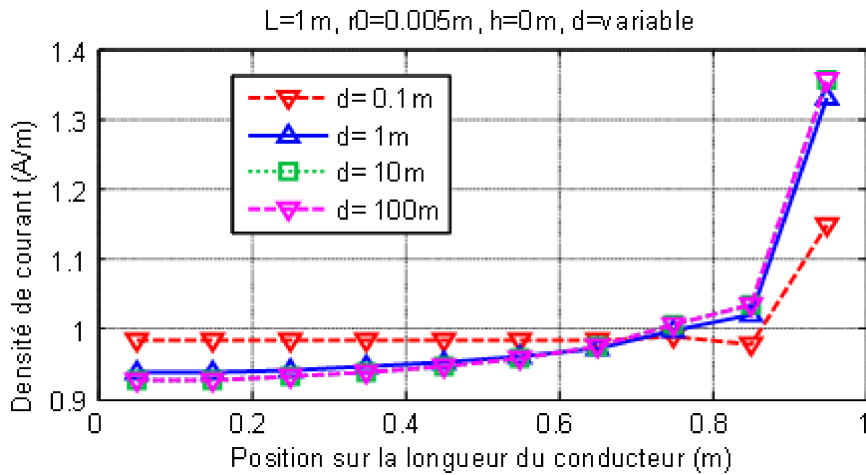


Fig. 114. Densité de courant sortant d'un pieu dans la configuration injection entre deux pieux parallèles verticaux en fonction de la distance entre les deux pieux

On s'intéresse ensuite à l'impédance équivalente entre les deux pieux comme représentée Fig. 115.

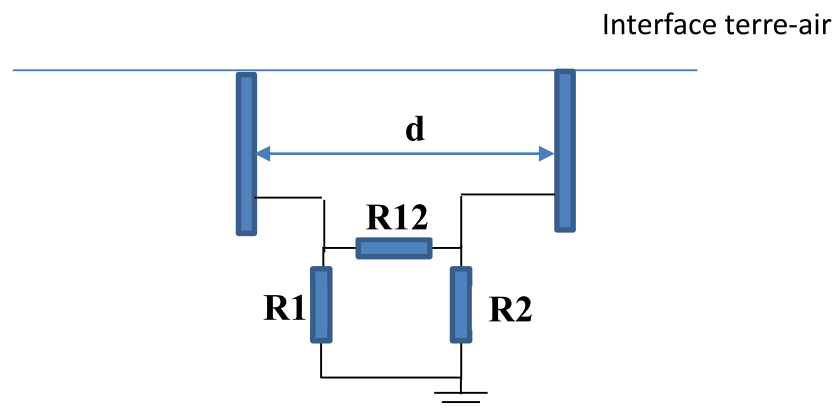


Fig. 115. Schéma électrique équivalent du dispositif deux pieux

La Fig. 116 met en évidence cette variation et à partir cette fois d'une distance assez importante, la résistance équivalente tend vers la somme des résistances des pieux avec la terre lointaine ( $R_{12} \rightarrow \infty$ ).

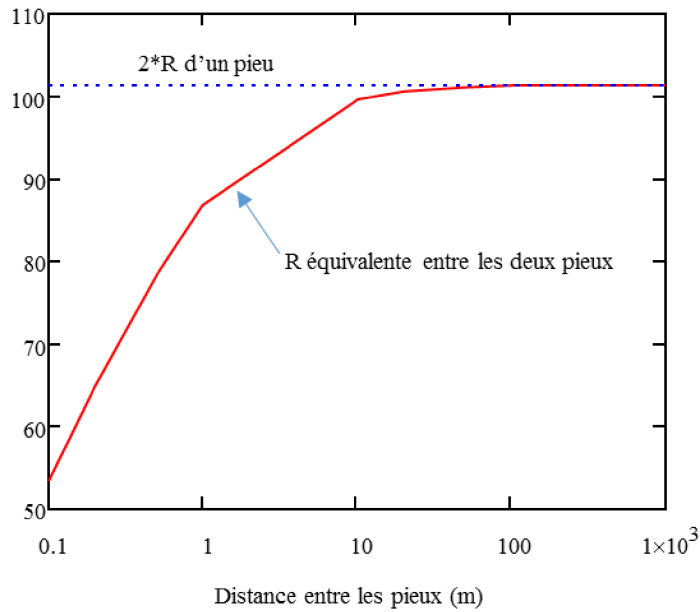


Fig. 116. Résistance équivalente ( $\Omega$ ) entre les deux pieux en fonction de la distance entre les pieux

❖ Equipotentielles en continu

Dans ce paragraphe, nous allons tracer l'évolution du potentiel du point M défini Fig. 117, en fonction de la position du point entre les deux pieux à une hauteur donnée, pour deux types d'injection (injection différentielle ou de courants dans le même sens) (Fig. 118).

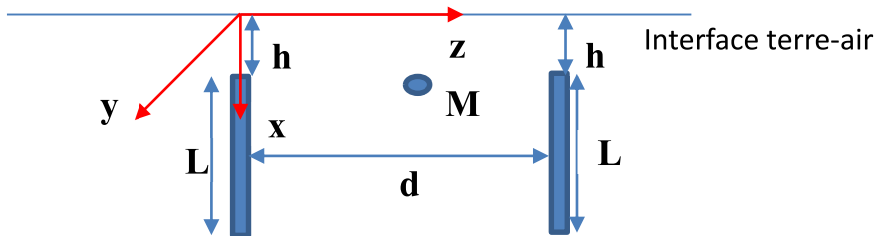


Fig. 117. Schéma du dispositif étudié

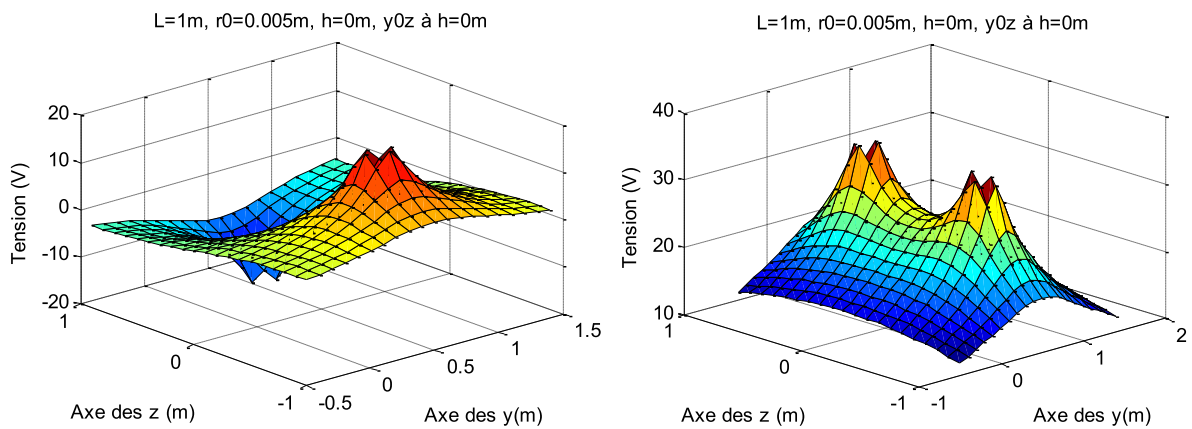


Fig. 118. Distribution du potentiel sur la surface de la terre (injection en différentiel à gauche, deux courants dans le même sens à droite)

### b. Deux conducteurs perpendiculaires

Grâce aux formulations développées précédemment on peut modéliser des conducteurs enterrés qui seraient disposés horizontalement formant un angle droit et reliés l'un à l'autre par une soudure par exemple. On aborde ici les prémices de la modélisation d'une grille de fond de fouille.

La modélisation est faite en discrétisant chacun des conducteurs en 5 segments par élément du conducteur avec un pas de 10 cm, la longueur totale étant identique (1 m). Le nombre total de segments est donc de 10 comme dans les modélisations précédentes (Fig. 119).

Dans la mesure où le pieu est équipotentiel, la localisation de l'injection de courant n'a pas d'importance. On impose seulement dans la résolution la somme des courants sortants égale au courant entrant pris unitaire.

Attaque en courant $i_0 = 1A$					
ro pieux (m)	Longueur totale du pieu L(m)	$\sigma_1$ (terre) (S/m)	$\epsilon_r$ (terre)	Nombre total de segments	Profondeur h du conducteur par rapport à surface(m)
0,005	1	1/56	80	10	1

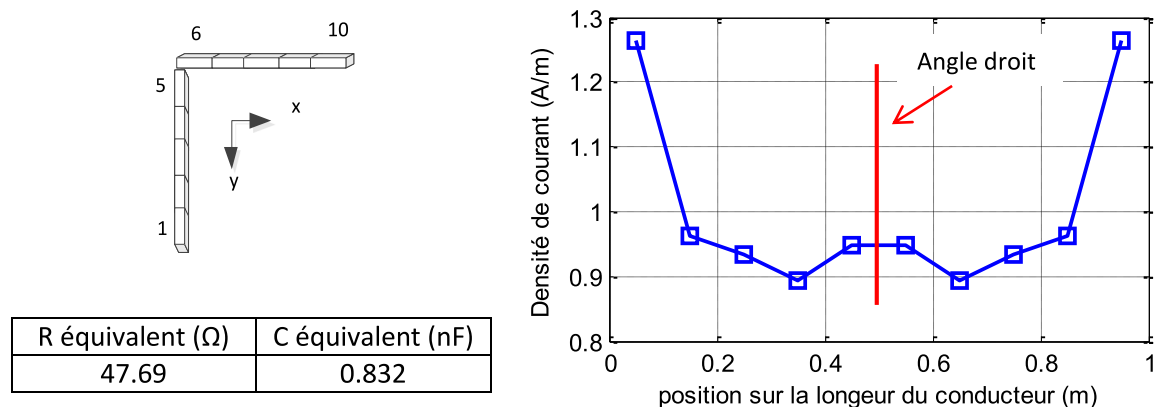


Fig. 119. Distribution de densité de courant en module le long du conducteur

On constate sur la Fig. 119 une allure conforme à celles que nous avons obtenues jusqu'à présent et on note le point « singulier » que représente l'angle droit qui se comporte de façon comparable à une extrémité de conducteur.

De cette modélisation on peut également obtenir si nécessaire les grandeurs globales de résistance et de capacité parasite vis-à-vis de la terre lointaine de nos conducteurs.

#### 5.3.7 Conclusion

Dans cette partie nous avons pu valider notre approche de modélisation grâce à des comparaisons avec des travaux trouvés dans la bibliographie ou en utilisant d'autres méthodes comme les éléments finis.

Cependant des questions subsistent encore.

- ❖ Variation de la résistivité avec la fréquence : Mise à part l'étude de Portela [35], la résistivité

résistivité dans la bibliographie n'a pas de comportement fréquentiel dans la gamme de fréquence d'intérêt. Dans les ouvrages qui traitent le problème pour les antennes on parle d'une variation de la résistivité en fonction de la fréquence, et ceci pour des applications de l'ordre du GHz.

- ❖ Phénomène d'ionisation : La densité de courant autour du conducteur joue un rôle important sur la résistivité. Pour des valeurs importantes il en résulte une baisse de cette résistivité. La valeur de champ suggéré dans[55] est de 300kV/m et celle recommandée par le CIGRE est de 400kV/m [56]

Une densité de courant très importante peut conduire à la vitrification du sol et ainsi à une hausse locale de la résistivité. Cet effet persiste après extinction du choc de foudre par exemple contrairement à l'ionisation classique [35].

- ❖ Prise en compte de la propagation : ce phénomène intervient à haute fréquence et est observé sur les réponses temporelles. Des travaux existent sur ce sujet que nous n'aborderons pas [57], [58], [59].

Néanmoins, quand la fréquence est très élevée, il peut s'avérer nécessaire de prendre en compte l'effet de la propagation

## 5.4 Insertion des caractéristiques électriques du conducteur dans la méthode numérique

### 5.4.1 Principe

Jusqu'alors nous nous sommes intéressés aux courants de fuite, sortants du conducteur en supposant le conducteur équipotentiel. Or le conducteur présente lui aussi des caractéristiques électriques parasites liées au courant de conduction [50].

Par ailleurs, lorsqu'il s'agira de réaliser la modélisation d'un système complet de câblage du bâtiment on sera à la fois en présence d'un système de terre à modéliser avec le schéma précédent et de conducteurs dans l'air et ou dans la terre qu'il conviendra aussi de modéliser à l'aide d'un schéma r,L,M [24].

Ainsi au schéma électrique équivalent (C,G) que nous venons de dresser pour un conducteur maillé, il est donc possible de superposer un schéma électrique PEEC constitué de résistances, d'inductances et de mutuelles inductances (r,L,M) (Fig. 120).

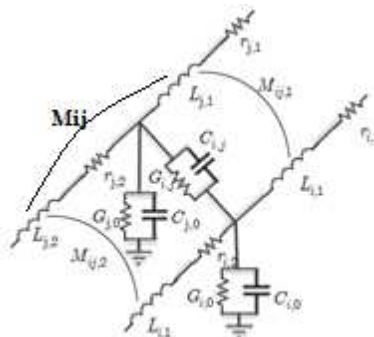


Fig. 120. Schéma électrique complet des pieux dans la terre

Les valeurs des éléments (r,L,M) pourront être obtenues grâce à InCa3D par exemple. Néanmoins, nous rappelons qu'InCa3D repose sur la méthode PEEC dont l'utilisation se limite généralement aux



conducteurs amagnétiques et dans l'air. Son utilisation dans le cas de géométries de conducteurs où l'hypothèse TEM est valide n'est pas forcément intéressante. Dans ce dernier cas, la représentation des conducteurs par un modèle de ligne de transmission est plus judicieuse et l'extraction des paramètres à défaut d'être rapide, peut se faire grâce à une modélisation éléments finis 2D.

Dans le cas de conducteurs cheminant à proximité de la terre, nous avons souhaité évaluer l'importance des courants induits dans la terre.

Pour pouvoir répondre à cette question, nous avons effectué des simulations éléments finis avec Flux2D dans les configurations suivantes :

- un conducteur seul dans l'air,
- un conducteur horizontal à 25 cm de la terre,
- un conducteur horizontal posé sur la surface de la terre.

Dans ce cas, pour avoir accès aux caractéristiques électriques du conducteur, nous devons décrire un aller et retour pour refermer le circuit. La simulation a été effectuée dans un milieu homogène (air) à gauche et en présence de terre à droite.

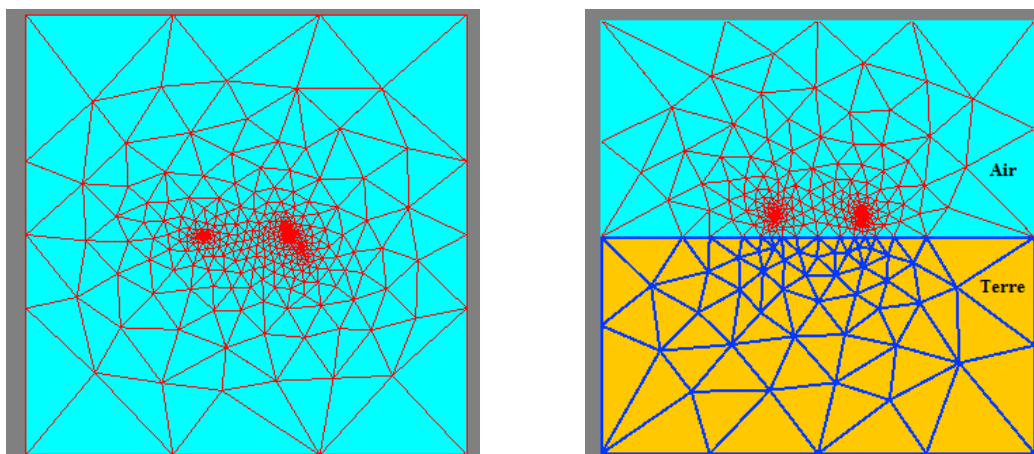


Fig. 121. Modélisation Flux – dans l'air (à gauche), en présence de terre (à droite)

Plusieurs configurations géométriques ont été testées afin d'évacuer une dépendance quelconque. Les cas traités sont résumés dans le tableau ci-après.

Courant imposé : 1A				
	Hauteur (m)	Distance(m)	Dimensions boite(m)	Rayon conducteur (m)
Config câble (10cm)	0.1	4	60	0.001
Config câble seul		4	60	0.001
Config câble (25cm)	0.1	4	60	0.001

Les résultats obtenus, sont présentés Fig. 122 et montre qu'en deça d'une certaine fréquence il n'est pas nécessaire de prendre en compte l'influence de la terre pour modéliser les câbles.

L'influence des paramètres hauteur par rapport à la terre, distance entre les deux conducteurs et taille de la boîte sur ces caractéristiques électriques a été étudiée et on a pu montrer que la conclusion reste inchangée.

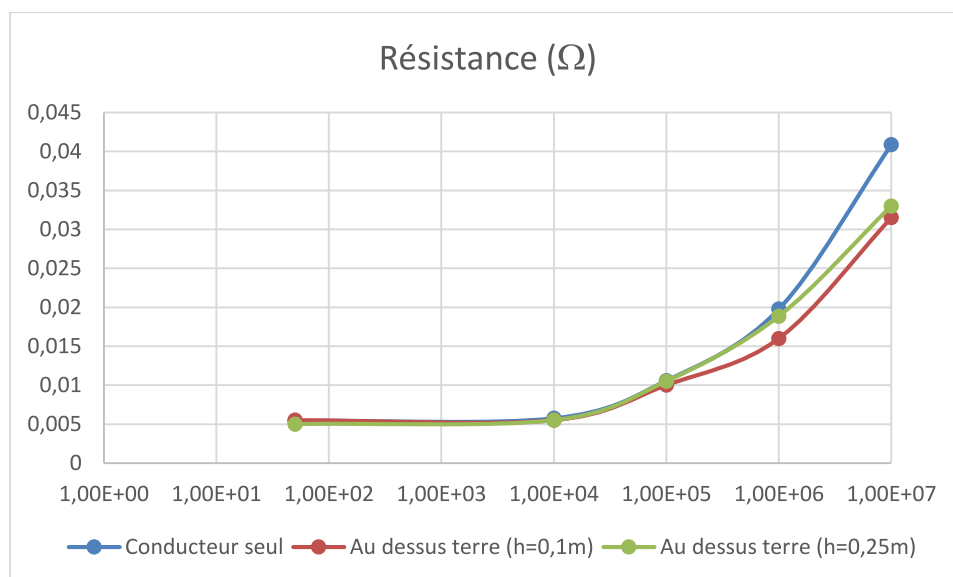
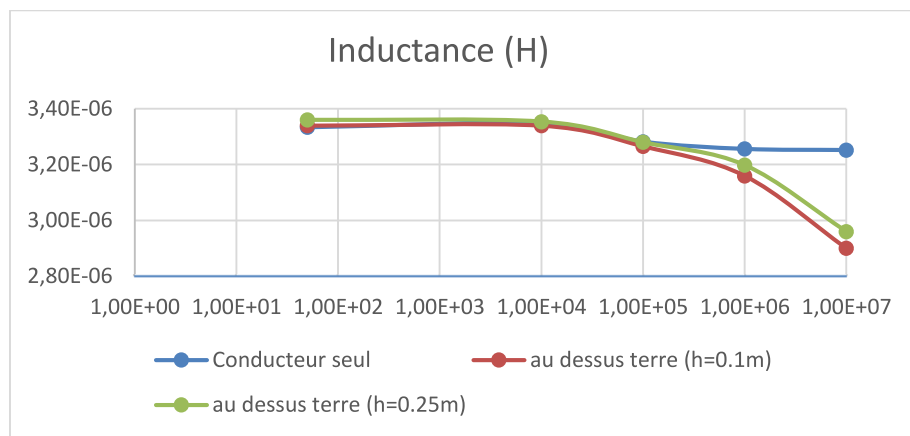


Fig. 122. Caractéristiques d'un câble modélisé avec Flux (en l'absence ou en présence de terre)

Les courants induits dans la terre engendrés par la circulation du courant dans la boucle située au-dessus de la terre sont pratiquement négligeables.

Sur la Fig. 123, nous avons tracé le ratio entre la densité de courant dans la terre et celle dans le conducteur afin d'illustrer cette conclusion.

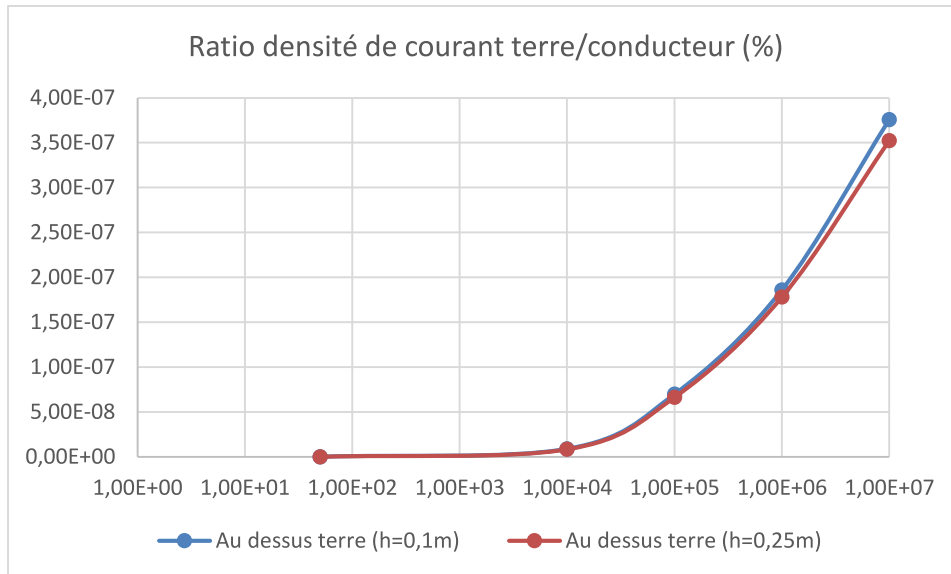


Fig. 123. Densité de courant dans la terre vs dans le conducteur modélisée avec Flux (en l'absence ou en présence de terre)

Conclusion : A ce stade-là, on est capable, pour une configuration donnée contenant des conducteurs dans la terre ou dans l'air, d'évaluer une matrice (r,L,M) d'une part pour tenir compte des courants de conduction et une matrice (C,G) d'autre part permettant de tenir compte des courants de fuite et ce de façon indépendante.

#### 5.4.2 Méthodes de résolution

Deux méthodes peuvent être mises en œuvre :

- Une résolution circuit OD, type SPICE, du modèle complet,
- Une résolution matricielle dans laquelle les deux schémas (r,L,M) et (G,C) sont traités simultanément.

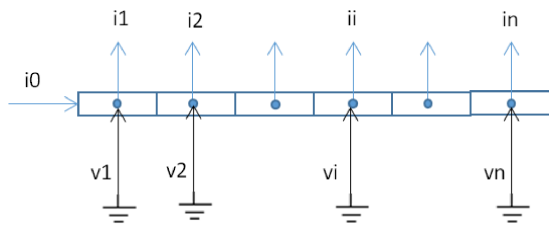
Concernant la première approche, il suffira de générer la netlist du schéma complet. La seule limite résidera dans le nombre de composants que le logiciel acceptera.

Concernant la seconde approche, il s'agit de travailler avec les matrices issues d'une part de la résolution PEEC (InCa3D) et d'autre part de la résolution développée dans ce document.

D'un point de vue matriciel, voici donc ce que nous obtenons dans le cas où on décompose le conducteur en n éléments :

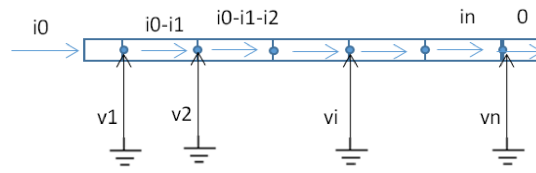
Prise en compte des courants de fuite

Matrice (G,C)



Prise en compte des courants de conduction

Matrice (r,L,M)



Pour faire correspondre les nœuds du maillage défini pour les courants de fuite (à gauche) avec ceux liés aux courants de conduction (à droite), nous sommes amenés à créer un nouveau maillage constitué de (n+1) éléments, du fait du décalage d'une demie-maille. Entre deux nœuds, nous retrouvons un circuit r,L série couplé.

Néanmoins dans le dernier élément, à vide, il ne passe aucun courant tout aura fui arrivé à ce niveau du conducteur.

On est amené aussi à introduire la tension V0 de début de conducteur.

Pour l'instant, le point d'observation n'est pas indispensable à l'écriture de la méthode puisqu'il n'intervient qu'à la fin lors de l'évaluation du potentiel en tout point du milieu si c'est cette grandeur qui est recherchée.

$$\begin{bmatrix} V1 \\ \vdots \\ Vn \end{bmatrix} = [G, C]^{-1} \begin{bmatrix} I1 \\ \vdots \\ In \end{bmatrix}$$

Système de dimension n\*n

$$\begin{bmatrix} V0 - V1 \\ V1 - V2 \\ \vdots \\ V_{n-1} - Vn \end{bmatrix} = [r, L, M] \begin{bmatrix} I0 \\ I0 - I1 \\ \vdots \\ I0 - \sum_{j=1}^{n-1} Ij \end{bmatrix}$$

Système de dimension n\*n

Avec :

$$I0 = \sum_{j=1}^n Ij$$

Dans la matrice [r,L,M], on retrouve sur la diagonale les impédances propres des éléments (R+jωL) et ailleurs les couplages mutuels (jωM).

Notons que :

$$\begin{bmatrix} I0 \\ I0 - I1 \\ \vdots \\ I0 - \sum_{j=1}^{n-1} Ij \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^n Ij \\ \sum_{j=2}^n Ij \\ \vdots \\ \sum_{j=n}^n Ij \end{bmatrix}$$

Partons du système matriciel établi à partir des courants de fuite et introduisons le potentiel V0 pour fabriquer le vecteur des différences de potentiel.

L'expression de V0 peut être extraite de la première ligne du système matriciel des courants de conduction :

$$V0 = V1 + [r + j\omega L_1 \quad j\omega M_{12} \quad \dots \quad j\omega M_{1n}] \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I1 \\ I2 \\ \vdots \\ In \end{bmatrix}$$

$$V0 = V1 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i Z_{1,i} Ii$$

Et l'expression de V1 est donnée par la première ligne du système matriciel des courants de fuite :

$$V1 = \sum_{i=1}^n GC_{1,i} Ii$$

Donc :

$$V0 = \sum_{i=1}^n \left( GC_{1,i} + \sum_{j=1}^i Z_{1,i} \right) Ii$$

Soit le système matriciel suivant :

$$\begin{bmatrix} V0 \\ V1 \\ \vdots \\ Vn \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} GC_{1,i} + \sum_{j=1}^i Z_{1,i} \\ [G, C]^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I1 \\ \vdots \\ In \end{bmatrix}$$

La matrice obtenue est alors rectangulaire de dimension (n+1)\*n.

Déterminons ensuite la matrice de passage entre les potentiels et les différences de potentiels.

$$\begin{bmatrix} V0 - V1 \\ V1 - V2 \\ \vdots \\ V_{n-1} - Vn \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V0 \\ V1 \\ \vdots \\ Vn \end{bmatrix} = [P] \begin{bmatrix} V0 \\ V1 \\ \vdots \\ Vn \end{bmatrix}$$

Cette matrice de passage que nous nommerons [P] est rectangulaire de dimension n\*(n+1).

On conçoit bien donc qu'il est possible d'exprimer le vecteur différence de potentiels en fonction du vecteur des courants de fuite grâce à une matrice (n\*n), notée [ZP], résultat du produit des deux matrices rectangulaires établies précédemment.

$$\begin{bmatrix} V0 - V1 \\ V1 - V2 \\ \vdots \\ V_{n-1} - Vn \end{bmatrix} = [ZP] \begin{bmatrix} I1 \\ I2 \\ \vdots \\ In \end{bmatrix}$$

Par ailleurs, le vecteur des courants de conduction peut s'écrire en fonction du vecteur des courants de fuite et du courant total :

$$\begin{bmatrix} I0 \\ I0 - I1 \\ \vdots \\ I0 - \sum_{j=1}^{n-1} Ij \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I0 \\ I0 \\ \vdots \\ I0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I1 \\ I2 \\ \vdots \\ In \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I0 \\ I0 \\ \vdots \\ I0 \end{bmatrix} - [T] \begin{bmatrix} I1 \\ I2 \\ \vdots \\ In \end{bmatrix}$$

La matrice [T] ainsi établie est de dimension n\*n.

Ainsi le système matriciel issu du schéma avec les courants de conduction s'écrit :

$$\begin{bmatrix} V0 - V1 \\ V1 - V2 \\ \vdots \\ V_{n-1} - Vn \end{bmatrix} = [r, L, M] \begin{bmatrix} I0 \\ I0 - I1 \\ \vdots \\ I0 - \sum_{j=1}^{n-1} Ij \end{bmatrix} \Rightarrow [ZP] \begin{bmatrix} I1 \\ I2 \\ \vdots \\ In \end{bmatrix} = [r, L, M] \begin{bmatrix} I0 \\ I0 \\ \vdots \\ I0 \end{bmatrix} - [r, L, M][T] \begin{bmatrix} I1 \\ I2 \\ \vdots \\ In \end{bmatrix}$$

$$([ZP] + [r, L, M][T]) \begin{bmatrix} I1 \\ I2 \\ \vdots \\ In \end{bmatrix} = [r, L, M] \begin{bmatrix} I0 \\ I0 \\ \vdots \\ I0 \end{bmatrix}$$

On en déduit ainsi la distribution des courants de fuite le long du conducteur.

$$\begin{bmatrix} I1 \\ I2 \\ \vdots \\ In \end{bmatrix} = ([ZP] + [r, L, M][T])^{-1} [r, L, M] \begin{bmatrix} I0 \\ I0 \\ \vdots \\ I0 \end{bmatrix}$$

Une fois obtenus ces courants, il est possible d'évaluer alors le potentiel le long du conducteur lié à la non équipotentialité du fait des éléments parasites du conducteur.

$$\begin{bmatrix} V1 \\ \vdots \\ Vn \end{bmatrix} = [G, C]^{-1} ([ZP] + [r, L, M][T])^{-1} [r, L, M] \begin{bmatrix} I0 \\ I0 \\ \vdots \\ I0 \end{bmatrix}$$

Si on souhaite le potentiel en tout point de l'espace, il faut alors rajouter le potentiel VM et les valeurs des couplages entre les éléments du maillage et le point M dans la matrice [G,C] ainsi que le courant fictif IM dans le raisonnement qui précède.

### 5.4.3 Validation de l'approche matricielle et conclusion

Les courbes suivantes (Fig. 124) montrent la concordance entre la résolution matricielle d'une géométrie de prise de terre et la résolution du même problème grâce à un simulateur circuit OD.

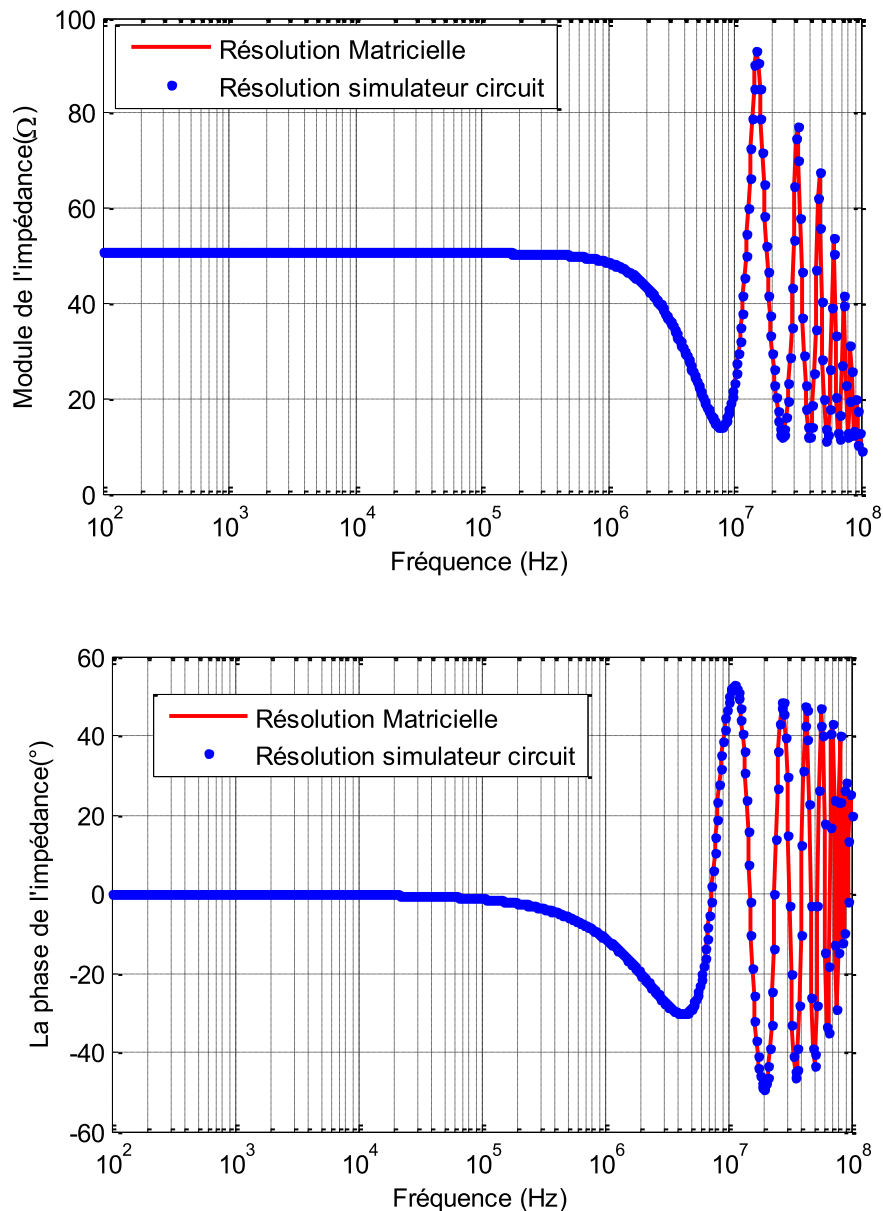


Fig. 124. Impédance équivalente d'un dispositif - Comparaison entre résolution matricielle et résolution circuit

Si on s'intéresse aux performances de ces deux approches numériques, la machine utilisée est dotée d'un processeur Core i5 3.3GHz avec 8Go de mémoire vive. Le nombre de fréquences simulé est le même dans les deux cas (601 points). Le temps de résolution avec l'approche matricielle est de 0.17 s que nous pouvons comparer aux 4 s de temps de résolution du même problème en utilisant SPICE.

Dans le premier cas on manipule des matrices de complexes de dimensions 10\*10 alors que dans le second cas, la netlist comporte 128 composants et 44 couplages.

Remarquons tout de même que l'approche circuit repose sur une résolution temporelle permettant

d'injecter au niveau du circuit n'importe quel type d'onde (sinus, foudre, etc ...) alors que l'approche matricielle proposée repose sur une résolution harmonique. Si l'on souhaite explorer la réponse temporelle du système à tout type d'injection, il faut alors utiliser le formalisme du calcul opérationnel et résoudre à l'aide d'outil tels que Simulink.

Dans les deux cas, nous n'avons pas pris en compte la variation de la valeur des éléments du circuit équivalent avec la fréquence mais cela est possible.

## 5.5 Modélisation complète d'un système de conducteurs dans la terre

A ce stade-là, le schéma électrique équivalent comporte les caractéristiques des conducteurs vis-à-vis de la terre (circuits R//C couplés) et leurs caractéristiques électriques parasites (circuits r-L couplés).

Il est alors intéressant d'évaluer :

- L'impédance vue d'une extrémité d'un conducteur,
- La distribution de densité de courant le long d'un conducteur,
- L'évolution du potentiel le long d'un conducteur

### 5.5.1 Un conducteur seul

Les conditions de simulation sont résumées dans le tableau ci-après et la configuration géométrique est décrite Fig. 125.

Attaque en courant $i_0 = 1A$					
ro pieux (m)	Longueur totale du pieu L(m)	$\sigma_1$ (terre) (S/m)	$\epsilon_r$ (terre)	Nbre total de segments	Profondeur h du conducteur par rapport à surface(m)
0.005	1	1/56	80	10	0



Fig. 125. Modélisation électromagnétique complète du pieu vertical – schéma équivalent à droite

#### a. Impédance du pieu + terre vue du point d'injection

Pour évaluer l'impédance du conducteur vis-à-vis de la terre lointaine, on injecte un courant d'un ampère et on prend la tension  $V$  à l'extrémité de l'élément 1 qui se trouve à la surface du sol. C'est cette tension qui permet d'obtenir l'impédance d'entrée  $Z = V/1 A$ ; le courant est pris comme



référence des phases.

Sur Fig. 126 on trace cette impédance en tenant compte ou non des caractéristiques (r,L,M) du conducteur.

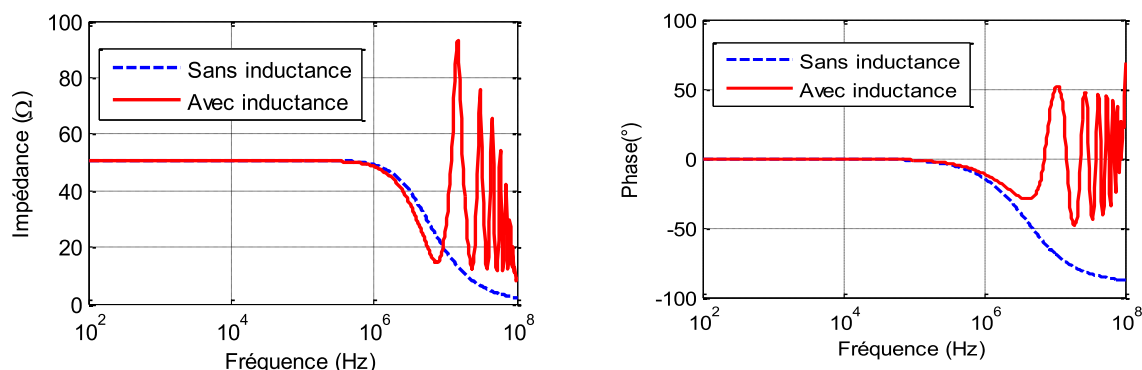


Fig. 126. Impédance du pieu vertical avec et sans contribution inductive du pieu

La manifestation de l'aspect inductif du pieu n'impacte que faiblement la bande passante du système pieu + terre. Néanmoins, dans une optique de caractérisation des perturbations CEM dans le bâtiment, il sera nécessaire de prendre en considération cette contribution. Le maillage réalisé garantit également la validité de ce modèle. Il faudra prendre garde, pour des câblages plus longs, au phénomène de propagation.

La simulation a été faite avec les valeurs de résistance et d'inductance du pieu prises en basse fréquence or nous pouvons voir sur la figure suivante que le pieu de 5mm de diamètre présente une évolution de ces paramètres en fonction de la fréquence (effet de peau). Une simulation sous InCa3D faite sur un seul segment du pieu (segment en rouge de la Fig. 125) montre cette évolution (Fig. 127).

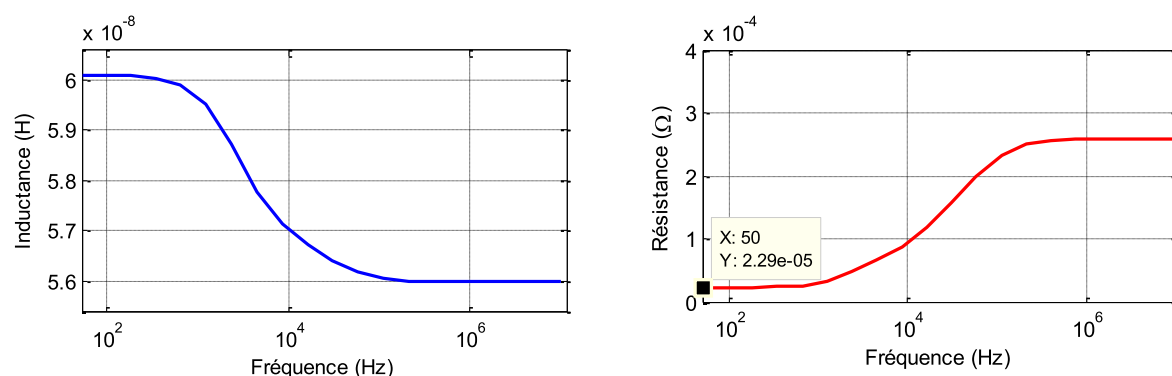


Fig. 127. Evolution de l'inductance et de la résistance série d'une portion de pieu

On obtient le type de variations attendues, diminution de l'inductance partielle et conjointement augmentation de la résistance avec la fréquence. Nous savons que la résistance continue de croître avec la fréquence. Le pallier sur la résistance n'a pas lieu d'être et nous renseigne sur la qualité du maillage qui devient mauvaise lorsqu'il apparaît.

Pour évaluer l'impact de ces variations sur l'impédance d'entrée du conducteur, la simulation suivante compare la réponse du pieu pour les valeurs basse fréquence et haute fréquence de ces paramètres.

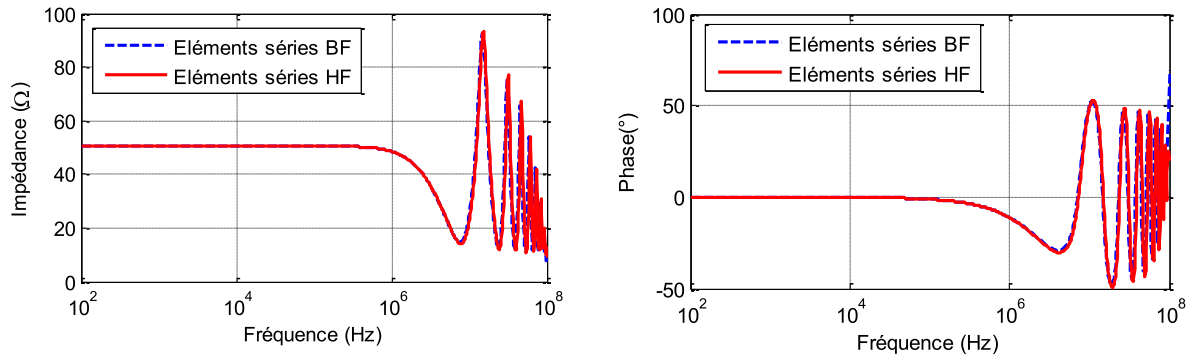


Fig. 128. Impédance du pieu simulée avec les deux jeux de paramètres

On constate grâce à cette superposition des courbes (Fig. 128), que les variations des paramètres séries n'ont pas réellement d'influence sur la bande de fréquences observée.

Eu égard aux ordres de grandeur trouvés ici, un impact de foudre, ne sera pas affecté par l'aspect inductif du pieu ni capacitif du système pieu+terre, surtout en considérant l'onde de foudre en courant  $8/20 \mu\text{s}$ , qui a une fréquence équivalente de l'ordre de 55 kHz.

### b. Distribution de la densité de courant le long d'un conducteur en fonction de la fréquence

Un courant de 1 A a été injecté sur l'extrémité du conducteur située à la surface de la terre. La densité de courant sortant le long du conducteur a ensuite été tracée (Fig. 129).

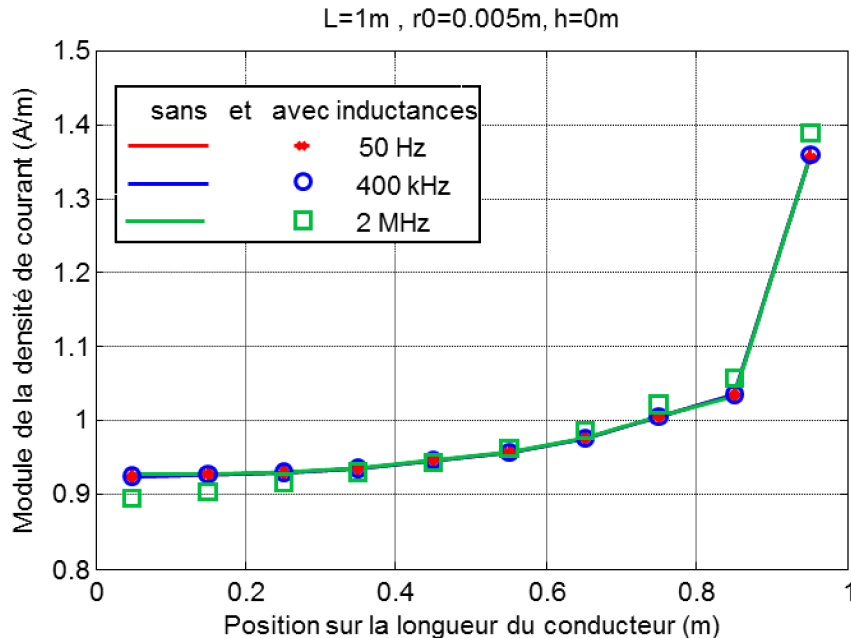


Fig. 129. Densité de courant sortante le long du conducteur (les traits pleins concernent les simulations sans inductance et les symboles avec prise en compte du caractère inductif du conducteur enterré)

Nous pouvons constater le peu d'impact de la prise en compte ou non des caractéristiques  $r, L$  séries du conducteur sur la densité de courant sortant du conducteur au moins jusqu'à la fréquence de

quelques MHz.

Si l'on tente de tracer cette densité de courant pour des fréquences plus élevées on se heurte au problème de la propagation. En effet, la discrétisation qui conduit à représenter le premier segment (0,1 m) par une inductance limite la validité de l'excursion en fréquence à une trentaine de MHz avec ( $\epsilon = 80$ ) si on souhaite que la longueur d'onde soit 10 fois plus grande que la longueur du segment.

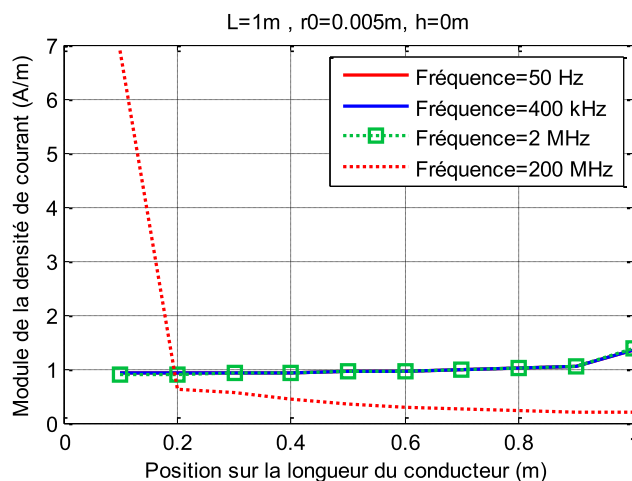
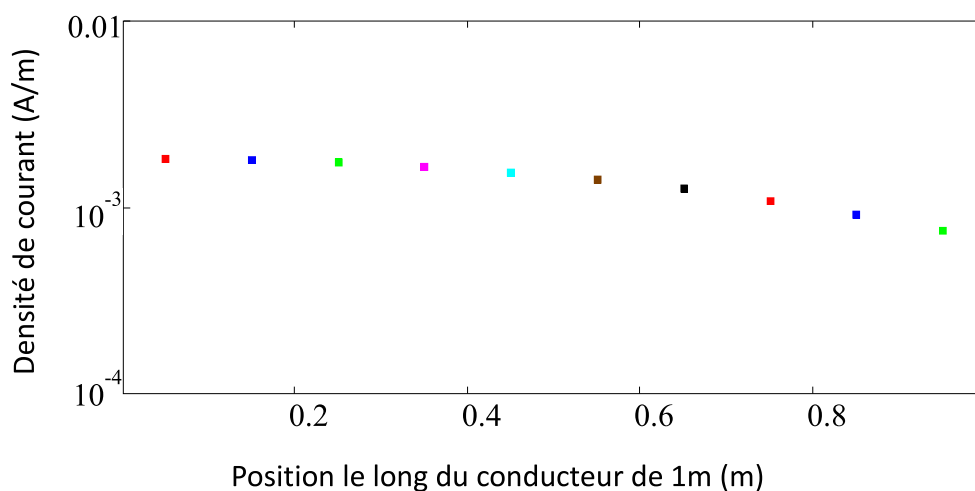


Fig. 130. Densité de courant sortante le long du conducteur faussement évaluée à 200 MHz

La Fig. 131 représente le courant sortant dans la terre d'une ligne de transmission dont les caractéristiques résistives et capacitatives sont constantes pour deux fréquences 10 et 20 MHz. Cela permet de vérifier la manifestation de la propagation le long du pieu.

Les paramètres de la ligne sont les suivants :

$$r := \frac{2.75 \cdot 10^{-4}}{0.1} \quad l := \frac{5.6 \cdot 10^{-8}}{0.1} \quad c := \frac{7.31 \cdot 10^{-11}}{0.1} \quad g := \frac{1}{546 \cdot 0.1}$$



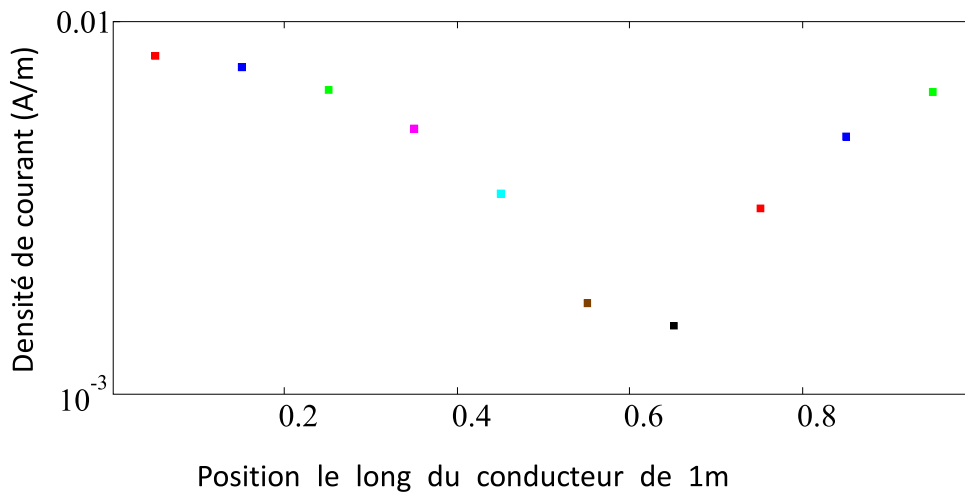


Fig. 131. Densité de courant sortante le long du conducteur modélisé à l'aide d'une ligne de transmission – 10 MHz en haut, 20 MHz en bas

Explorer plus haut en fréquence ces phénomènes peut s'envisager de plusieurs façons :

- La première approche basique consiste à augmenter la discrétisation du pieu, c'est-à-dire segmenter en dessous de 0,1 m. Cette approche permet d'intégrer la variation des paramètres résistifs et capacitifs le long du pieu.
- La deuxième méthode plus élégante serait d'être capable d'intégrer la variation des résistances et des capacités au sein même de la ligne de transmission. Nous n'avons pas eu le temps d'investiguer plus avant dans cette étude.

### c. Evolution du potentiel le long du conducteur en fonction de la fréquence

Dans ce paragraphe, toujours avec une injection de 1A à l'extrémité du conducteur, nous calculons le potentiel le long du conducteur. Cette fois-ci ce dernier n'est plus équipotentiel comme le montre Fig. 132. On observe ainsi l'impact de l'ajout des caractéristiques séries du conducteur. Afin de se focaliser sur les variations visibles de la tension le long du pieu, nous avons délibérément changé la gamme d'observation en fréquence tout en évitant les problèmes de propagation.

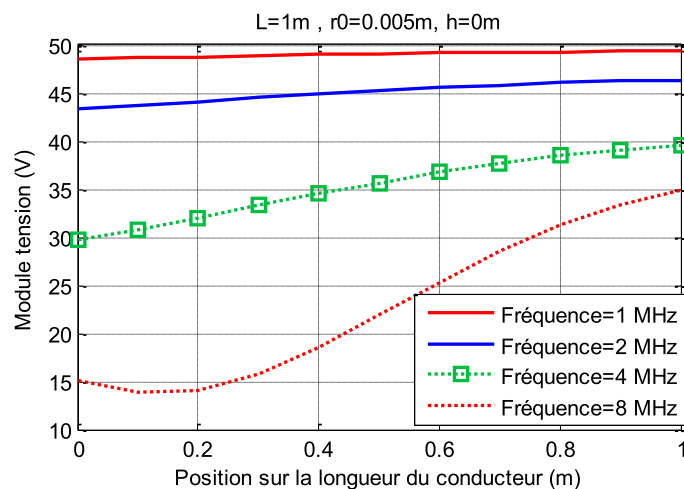


Fig. 132. Potentiel le long du conducteur pour des fréquences autour du MHz

#### d. Réponse en tension du système suite à une onde de foudre 1.2/50

Enfin, la dernière exploitation de ce circuit équivalent que nous avons réalisée concerne l'injection à l'extrémité du conducteur d'un courant de foudre. Cette simulation est construite grâce au circuit électrique qui simule la foudre relié à l'entrée du conducteur. Nous représentons sur Fig. 133 l'élévation de potentiel à l'entrée du conducteur suite à ce choc de foudre direct.

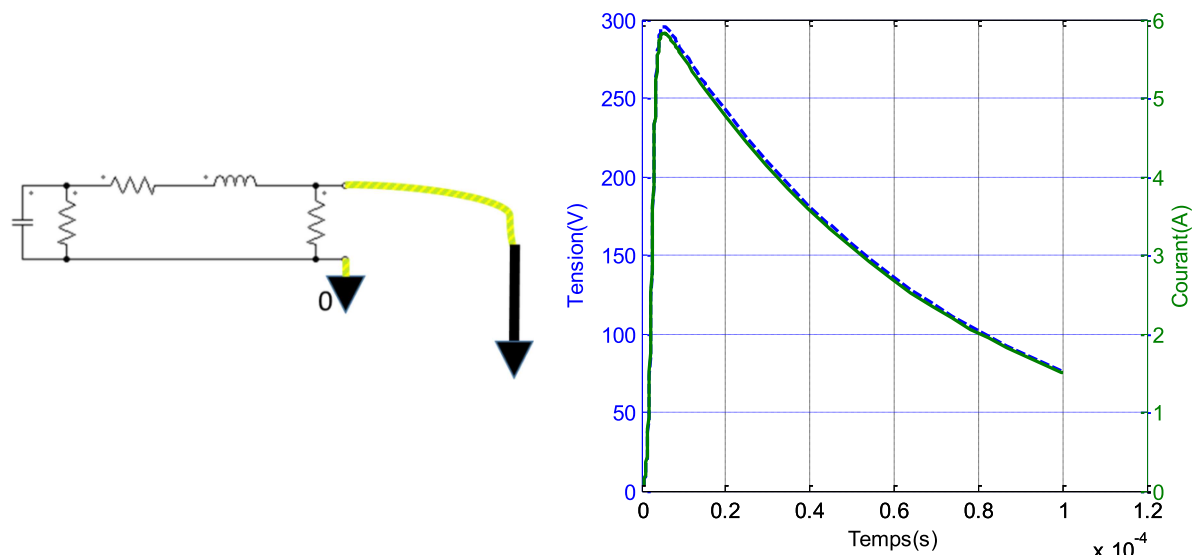


Fig. 133. Evolution du potentiel d'un point d'injection suite à un échelon de courant

Nous avons pu voir que le comportement de ce pieu dans les études antérieures reste principalement résistif jusqu'au MHz (cf Fig. 128) d'où une élévation de potentiel très proche de la forme de courant puisque la foudre reste cantonnée en dessous des 400 kHz.

#### 5.5.2 Grille de fond de fouille

Les grilles de fond de fouille sont utilisées pour constituer un réseau de terre sous l'habitat où seront raccordés les circuits de protection d'une part et d'autre part elles constituent une référence de potentiel qui se veut unique entre les points les plus éloignés de l'habitat. (cf §7.1)

Nous avons trouvé dans la bibliographie quelques exemples dont un corroboré par des mesures ce qui est rare et nous allons ainsi pouvoir vérifier nos codages.

#### a. Validation bibliographique en statique

Le premier exemple ne s'intéresse qu'au calcul de la résistance de la grille par rapport à la terre lointaine. On appelle élément, un conducteur entre deux nœuds physiques de la grille. Dans la modélisation, ces éléments pourront être segmentés ou non. Les données géométriques sont résumées dans le tableau ci-après.

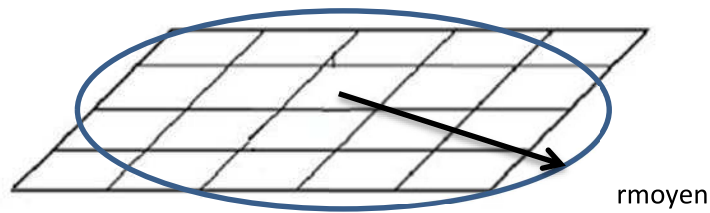


Fig. 134. Configuration d'une grille 4\*5 horizontale par rapport à l'interface air-terre

Rayon des conducteurs de la grille $R_0$ (mm)	Longueur des éléments $L$ (m)	Nombre d'éléments	$\sigma_1$ (S/m)	Nbre de segments par élément	Profondeur $h$ de la grille par rapport à surface(m)	R( $\Omega$ ) Référence Bibliographique	R( $\Omega$ ) Modélisation
5	4	4x5	0,01	2	0.5	2.6	2.57
			0,002			13	12.86

Nous constatons la très bonne cohérence de notre modélisation avec celle fournie par la publication [60].

Par ailleurs, la très ancienne publication [8] donne la formule approchée suivante pour cette résistance :  $R = \rho \cdot \left( \frac{1}{4 \cdot r_{moyen}} + \frac{1}{L} \right)$

Avec  $r_{moyen}$  représentant le « rayon moyen » de la grille et  $L$  la longueur totale de conducteurs enterrés.

L'application numérique donne : 3,3  $\Omega$  et 16,5  $\Omega$  respectivement pour les deux valeurs de résistivité de la terre. On notera que ces valeurs sont relativement proches de celles données à la fois par la publication récente et notre calcul !

Grâce à notre méthode de résolution nous sommes en mesure de tracer les densités de courant sortantes des conducteurs.

La distribution de la densité de courant sur la grille pour une injection d'un courant de 1A et pour une résistivité de la terre de 500  $\Omega\text{m}$  est donnée dans la figure ci-contre :

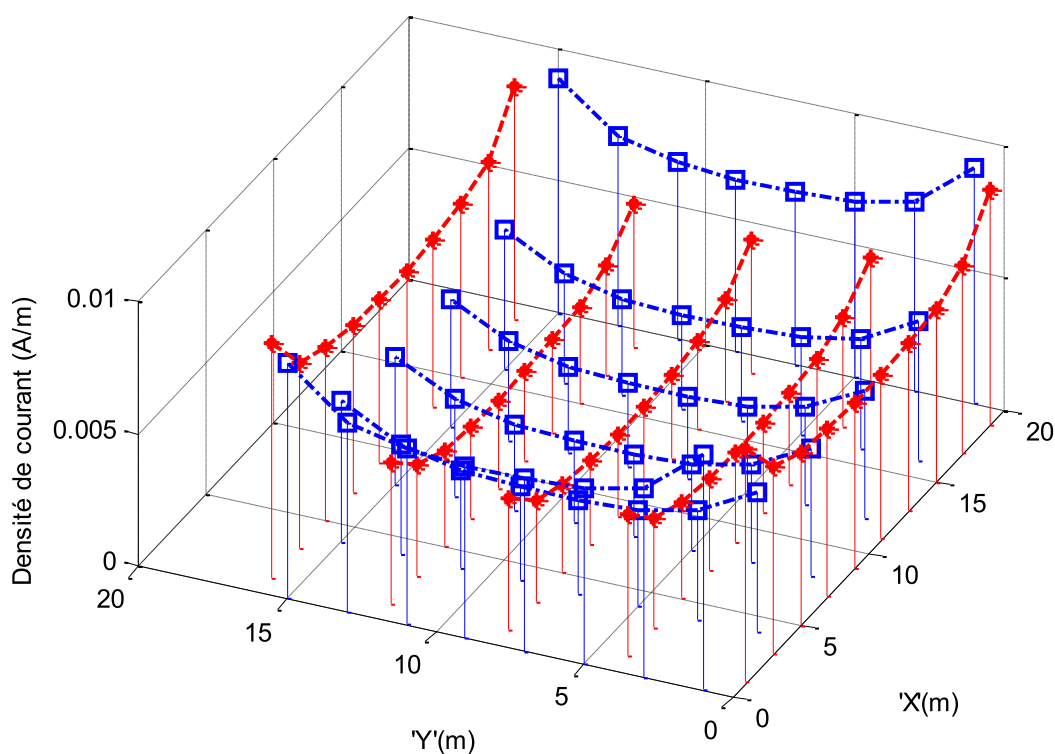


Fig. 135. Densité de courant sortante des différents éléments de la grille

Le deuxième exemple permet, en outre, de se comparer à une mesure, mais la publication [41] ne présente pas de résultat de modélisation.

Ro (mm)	Longueur des éléments L(m)	Nombre d'éléments	$\sigma_1$ (S/m)	Nbre de segments par élément	Profondeur h de la grille par rapport à surface(m)	R( $\Omega$ ) réf Biblio	R( $\Omega$ ) Modélisation
10	10	5x5	1/100	2	0.5	0.523 (mesure)	0.5022

Là encore notre modélisation donne des résultats très proches de la mesure, la publication ne fournissant pas de valeur de modélisation.

### *b. Validation bibliographique du modèle de grille pour le cas de deux couches de terre*

Dans cet exemple [61], l'auteur présente des résultats de mesures pour une grille de 4x4 éléments dans un milieu constitué de deux couches de terres. La grille se situe dans la première couche, entre l'air et la deuxième couche. Cette couche fait 5m de profondeur.

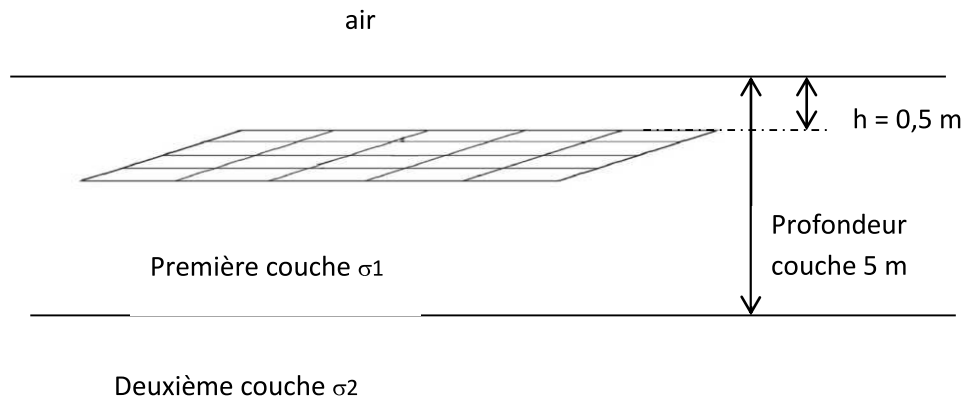


Fig. 136. Validation du modèle de grille en présence de 2 couches de terre différentes

Là encore notre modélisation donne des résultats très proches de la mesure

Ro (mm)	Longueur des éléments L(m)	Nombre d'éléments	$\sigma_1$ (S/m)	$\sigma_2$ (S/m)	Nbre de segments par élément	Profondeur h de la grille par rapport à surface(m)	R( $\Omega$ ) référence Biblio (Mesure)	R( $\Omega$ ) Modélisation pour h=0.25
5	25	4x4	1/25	1/120	2	0.5	0.390	0.411
			1/120	1/25			0.276	0.290

### c. Validations bibliographiques de notre modèle en dynamique

- ❖ La publication [60] présente l'étude de la montée de potentiel suite une injection de foudre d'une grille de 5x4 éléments conduisant à des dimensions 20mx16m enfouie dans la terre à une distance de 0.5m de la surface. Cette dernière a été menée avec deux types de front de montée de courant, l'un de 800ns et l'autre de 4 $\mu$ s. La résistivité de la terre dans ce cas est de 160  $\Omega$ .m.

Dans notre modélisation, nous avons pris en compte les effets capacitifs et résistifs de la grille vis à vis de la terre lointaine ainsi que les aspects résistifs et inductifs des conducteurs constituant la grille. Ces dernières valeurs ont été calculées grâce à InCa3D. Une construction automatique d'une netlist exécutée dans SPICE a permis de comparer l'élévation de potentiel de la grille avec les formes d'onde expérimentales données par la publication. L'onde de courant expérimentale en rouge a été modélisée par une source de courant commandée dans la simulation SPICE. On peut comparer ensuite sur Fig. 137 la bonne concordance entre la mesure en noir et notre simulation en bleu pour les deux dynamiques.



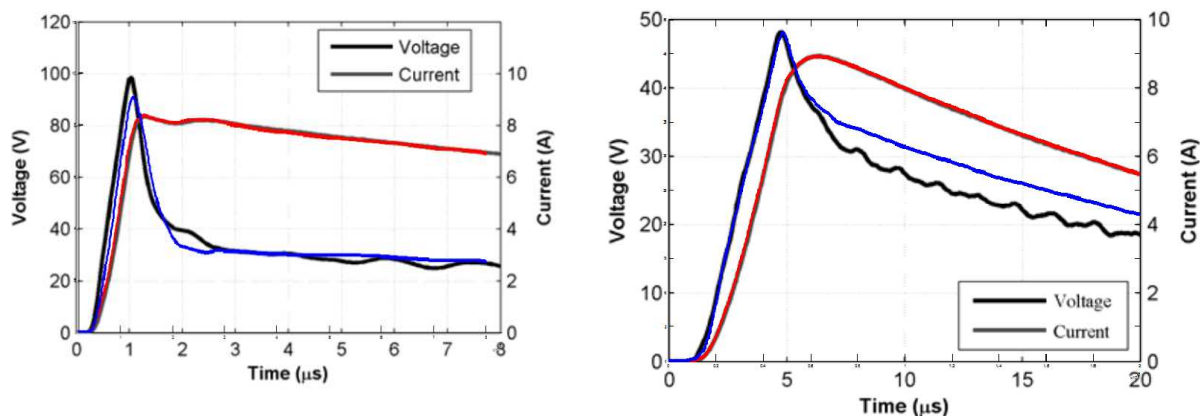


Fig. 137. Elévation de potentiel d'une grille suite à une injection de courant - Courbes simulées en couleur, mesures en noir

Ne connaissant pas exactement les conditions de mesure, il nous est difficile d'investiguer plus avant, pour expliquer certaines divergences que l'on peut observer entre nos modélisations et la mesure sur l'évolution de la tension pour la dynamique de courant la plus lente...

- ❖ Une autre validation bibliographique [62] gagne également à être présentée dans ce paragraphe. Ici, le comportement interne d'une grille est étudié.

Les données du problème sont résumées dans le tableau ci-après :

Ro (mm)	Longueur des éléments L(m)	Nombre d'éléments	$\sigma_1$ (S/m)	$\epsilon_1$ (terre)	Nbre de segments par élément	Profondeur h dela grille par rapport à surface(m)
?	10	6x6	1/1000	9	2	0,5

L'auteur présente les résultats calculés en superposant sa méthode (trait continu) et une autre approche plus rigoureuse, la méthode électromagnétique complète (carré) comme le présente Fig. 138à gauche. Pour cette dernière méthode, les calculs ont été effectués pour quelques valeurs de fréquence.

L'auteur a simulé trois impédances sur ce problème :

- Z11 impédance entre la terre lointaine et le nœud 1,
- Z22 impédance entre la terre lointaine et le nœud 2,
- Z12 impédance de couplage entre le nœud 1 et le nœud 2 (On injecte un courant au niveau du nœud 1 qu'on rapporte à la tension mesurée au nœud 2 pour obtenir l'impédance).

L'auteur n'ayant pas précisé le rayon des conducteurs pris dans sa modélisation, nous avons fait plusieurs simulations avec des rayons différents pour caler notre modélisation en continu comme présentés dans le tableau ci-dessous :

Rayon (mm)	2.5	5	10	15
Résistance( $\Omega$ )	8.23	8.08	7.94	7.85

Nous avons donc adopté un rayon de 5mm qui semble correspondre à peu près.

Sur Fig. 138 à droite, nous avons superposé nos résultats (courbe en pointillé) sur ceux de l'auteur.

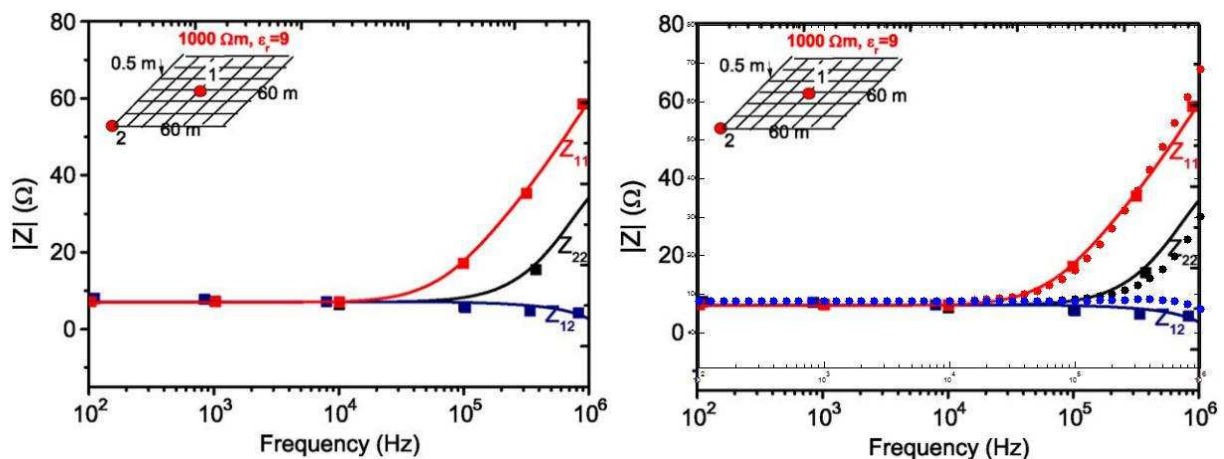


Fig. 138. Comparaison bibliographique - simulation des caractéristiques d'une grille donnée

## 5.6 Conclusion

Le point fort de ce chapitre est d'avoir développé toute une série de formulations entre segments non nécessairement situés tous dans le même milieu (certains sont enterrés, d'autres sont en surface au-dessus de la terre) dont les orientations peuvent être variées. Nous sommes les premiers à montrer la similitude de l'approche avec la méthode PEEC que l'équipe puis le Laboratoire développent depuis plus d'une vingtaine d'années. Cette similitude s'explique par la proximité des équations de Maxwell à résoudre. L'expertise acquise dans les méthodes numériques mises en œuvre pour traiter les systèmes magnétiques avec PEEC sont et seront déclinables pareillement.

Dans ce premier travail, nous nous sommes limités aux formulations basiques, mais tous les outils sont désormais en place pour généraliser l'approche à des configurations complexes.

La possibilité de calculer les couplages entre segments ou avec n'importe quel autre conducteur est une vraie force puisque cela va permettre de modéliser des géométries ouvertes non limitées en complexité alors que les formules proposées dans la littérature s'intéressent au seul dispositif de la prise de terre comme un système fermé. Par ailleurs nous sommes également capables de travailler en fréquence, ce qui est fait au cas par cas dans la littérature.



# Chapitre 6 : Mesures et validations expérimentales

## 6 Mesures et validations expérimentales

### 6.1 Revue des différents principes de mesure utilisés

#### 6.1.1 Difficulté de validation des modèles développés.

L'objet de ce chapitre est de valider les études théoriques conduites jusqu'ici. On fera l'hypothèse d'une terre homogène et pour cela on a expérimenté plusieurs localisations. Il faut aussi un sol assez meuble pour être en mesure de planter les pieux et surtout être capable de les retirer ! Enfin, les appareils de mesure que nous utilisons nécessitent une alimentation électrique, ce qui signifie de transporter un groupe électrogène si l'on veut faire des mesures sur un site isolé. Même si les mesures semblent basiques, elles restent difficiles à mettre en œuvre. Il faut d'abord s'assurer que l'on est bien dans le cas d'une terre qui a toutes les chances d'être homogène (absence de racines, de remblais, proximité trop grands bâtiments, de canalisations,...). Par ailleurs, il faut choisir une terre meuble afin de faciliter l'enfoncement et le retrait des pieux. Les mesures sont faites en enfonçant progressivement ceux-ci dans la terre afin d'éviter de détériorer le contact pieu-terre. Par ailleurs même dans une terre meuble il n'est pas toujours facile d'enfoncer et d'extraire les pieux de la terre.

Dans ce chapitre on va mettre en œuvre plusieurs types de mesure afin de valider l'impédance d'un système de pieux.

- La première campagne de mesure est consacrée à des mesures faites avec une alimentation continue même si ce procédé est moins commun que la mesure en alternatif. En continu, cette mesure présente, l'intérêt d'être très facile à réaliser et il est inutile de se soucier du comportement inductif des fils de connexion, il est facile de faire varier la tension d'alimentation,...
- Par la suite d'autres campagnes de mesures ont été effectuées avec d'autres dispositifs :
  - Générateur de foudre,
  - Mesure d'impédance au pont d'impédances

#### 6.1.2 Méthode de Wenner

On doit cette méthode à Frank Wenner [63], du US Bureau of Standards, [64] dès les années 1915 (Fig. 139).

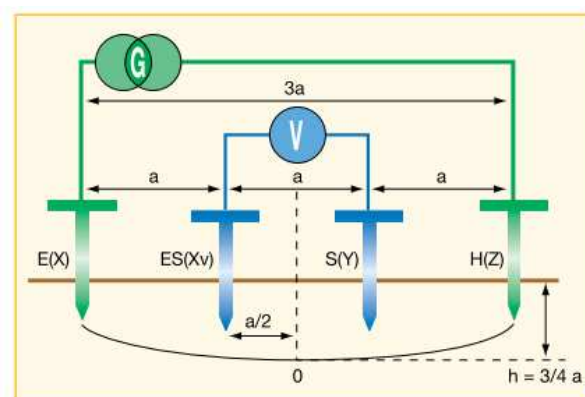


Fig. 139. Méthode de Wenner

On a déjà montré lors du paragraphe 3.3 qu'avec les dimensions soigneusement choisies la résistivité du sol  $\rho$  s'exprime par la formule  $\rho = R \cdot 2 \cdot \pi \cdot a$  où R est la résistance sur l'ohmmètre qui fait automatiquement le ratio entre le courant injecté I et la tension mesurée V.

Nous avons vu à travers nos modélisations les limites de cette méthode qui ont cependant été identifiées par les praticiens et pour lesquelles des préconisations empiriques ont été données.

La méthode de Schlumberger également décrite dans le même guide, repose sur le même principe avec des dimensions caractéristiques différentes. Elle est plus pratique car elle ne nécessite pas que les piquets de mesure soient alignés avec ceux d'injection et permet de dresser une cartographie beaucoup plus rapide des lieux. Elle est néanmoins moins connue que la méthode Wenner et de fait moins utilisée.

Ces méthodes de mesure sont intéressantes lors de la construction d'un nouveau bâtiment, mais il peut être utile aussi de vérifier la qualité d'une prise de terre existante. On verra que le système de mise à la terre peut évoluer dans le temps et se détériorer.

## 6.2 Mise en œuvre de la méthode en 4 points (Wenner) dans la terre

Plusieurs campagnes de mesure ont été faites dans l'optique de mieux estimer la robustesse de notre modèle. Globalement nous avons utilisé la configuration des méthodes de Wenner ou de Schlumberger. Néanmoins nous ne sommes pas tributaires des recommandations et précautions de mise en œuvre puisque nous sommes capables de modéliser n'importe quelle configuration grâce aux formulations intégrales filiformes appliquées sur le rayon externe du conducteur. Au contraire, nous pourrions mieux cerner les limites théoriques d'emploi de la méthode Wenner.

Le rayon des pieux que nous avons utilisés est de 5 mm pour les pieux internes de mesure et 7 mm pour les pieux externes d'injection de courant.

Pour des raisons de facilité, on a commencé nos expérimentations en utilisant la mesure 4 points avec une injection en courant continu entre les pieux extérieurs.

Les spécialistes utilisent un appareil spécifique dénommé tellurohmmètre qui fournit un courant alternatif entre 85 Hz et 135 Hz. L'utilisation d'un courant alternatif permet à la fois d'éviter l'effet de polarisation des électrodes et d'être perturbé par d'éventuels courants vagabonds et telluriques<sup>2</sup> ou encore des courants induits à 50 Hz par d'autres conducteurs dans le voisinage.

Notons également que l'utilisation du continu évite d'être confronté à l'effet de peau dans la terre bien que celui-ci s'étale sur des distances de plusieurs centaines de mètre ( $\delta = \sqrt{\frac{\rho}{\pi \cdot f \cdot \mu_0}} \sim 400 \text{ m à } 50 \text{ Hz}$ ). Ne possédant pas cet appareil utilisé par les praticiens, nous avons utilisé une alimentation de laboratoire qui a donné d'ailleurs d'excellents résultats comme nous pouvons le voir à travers l'exploitation des mesures.

---

<sup>2</sup> Les courants telluriques ont plusieurs origines, on peut citer par exemple les variations du champ magnétique terrestre, phénomènes d'ionisation dans la haute atmosphère dus au rayonnement solaire, déplacement de fluides conducteurs dans le champ magnétique terrestre (magnétohydrodynamique).

On effectue les mesures de tension sur les pieux internes mais on peut aussi vérifier la tension et le courant injecté sur les pieux externes. Naturellement on choisit d'enfoncer les pieux à égale profondeur mais ceci ne constitue par un paramètre défini dans la méthode de Wenner qui rappelons-le se base sur un modèle d'injection ponctuelle dont les sources sont équidistantes les unes des autres. Grâce à cette équidistance des pieux, la mesure de la tension entre les deux pieux internes conduit directement à la résistivité grâce à la formule  $\Delta V = \frac{I \cdot \rho}{2 \cdot \pi \cdot d}$ .

Campus Saint Martin d'Hères, Pelouse située au nord de l'atelier de mécanique 16 Juin 2015 (mesures faites sous le crachin)														
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
N° essai	Configuration	d (m)	H1 (m)	H2 (m)	Courant d'injection mesuré (A)	Tension d'injection (V)	Résistance du système de pieux d'injection (Mesure) ( $\Omega$ )	Résistance du système de pieux Calcul théorique ( $\Omega$ )	Tension Vm mesure (V)	résistivité modèle Wenner ( $\Omega\text{m}$ )	résistivité modèle ( $\Omega\text{m}$ )	tension Vm (calé $\rho$ sur la tension des pieux d'injection) (V)	Ecart tensions pieux de mesure (%)	écart résistivité Wenner-résistivité du modèle (%)
①		4	0,25	0,25	0,327	99	302,7	297,1	0,73	56,11	59,00	0,78	4,93	-4,90
②		4	0,25	0,25	0,672	201	299,1	289	1,51	56,47	57,40	1,58	1,39	-1,61
③		4	0,25	0,5	0,711	201	282,7	273	1,58	55,85	54,20	1,58	-3,67	3,05
④		4	0,5	0,5	1,21	200	165,3	162,3	2,67	55,46	55,20	2,68	-1,46	0,47
⑤		4	0,8	0,5	1,82	200	109,9	108,4	4	55,24	53,80	3,88	-4,25	2,67
⑥		4	0,8	0,8	1,78	200	112,3	110,8	4	56,48	55,00	3,86	-4,98	2,69

Analysons ici l'essai n°1 pour lequel :

- ❖ la tension de l'alimentation est de 99 V (colonne 5), le courant délivré (colonne 4) de 327 mA, ce qui représente une résistance entre pieux de 302,7  $\Omega$  (colonne 6).
- ❖ On vérifie également que la chute de tension dans les fils d'alimentation est complètement négligeable grâce à la faible valeur du courant qui circule ( $\approx 2$  A au maximum). La tension de mesure  $\Delta V = 0,73$  V (colonne 7) permet d'évaluer immédiatement la résistivité de la terre selon la formule de Wenner  $\rho_w = 56,11$   $\Omega\text{m}$  (colonne 8).
- ❖ La colonne 9 utilise la formulation intégrale filiforme du pieu maillé en 10 segments pour extraire la résistivité de la terre grâce aux données au niveau des pieux d'injection (tension et courant). Dans ce cas on obtient comme résistivité  $\rho_M = 59$   $\Omega\text{m}$  à comparer avec celle trouvée grâce à la méthode Wenner  $\rho_w = 56,11$   $\Omega\text{m}$  soit une erreur (colonne 12) de 4,9% en prenant  $\rho_M$  comme valeur de référence.
- ❖ La colonne 10 calcule la tension entre les pieux de mesure à partir de la formulation intégrale filiforme et de la valeur  $\rho_M$  fournie par cette même formulation. On peut ainsi la comparer avec celle fournie par la mesure (0,77 V au lieu de 0,73 V soit une erreur (colonne 10) de 4,93 %.

L'essai n°2 reprend la même démarche que précédemment avec une tension d'injection double 201 V. On constate que le courant est proportionnel, ce qui accredit bien un comportement parfaitement linéaire.

Les essais n°4 et 6 utilisent la même démarche sous une tension de l'ordre de 200 V pour différentes valeurs de pénétration des pieux. Tous les résultats obtenus sont cohérents et fournissent des valeurs avec une marge d'erreur assez faible. On peut en déduire que la valeur de la résistivité de la

terre ce jour-là était de l'ordre de 55  $\Omega\text{m}$ .

On constate en effet la décroissance de la résistance de notre système de pieux lorsque ceux-ci sont de plus en plus enfoncés dans la terre conformément à ce qu'on peut attendre.

On note une très bonne concordance entre l'extraction de rho par la méthode de Wenner et par notre modèle car l'écartement des pieux étant plus grand, on se rapproche du cas d'injection ponctuelle.

Il est donc aisé de déterminer une résistivité moyenne autour de 55  $\Omega\text{m}$ , valeur relativement faible due à la période pluvieuse.

Ce protocole de mesure et d'analyse a été reconduit en faisant varier la distance entre les pieux ainsi que leur profondeur. Les résultats sont résumés dans le tableau ci-dessous.

La tension d'injection est fixée à 200V pour toutes les configurations.

Campus Saint Martin d'Hères, Pelouse située au nord de l'atelier de mécanique 17 Juin 2015 (Temps sec mais terre humide de la veille)										
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
N° essai	d distance entre pieux (m)	H1 (m)	H2 (m)	Courant (A)	Tension mesurée (V)	Résistivité modèle Wenner ( $\Omega\text{.m}$ )	Résistivité déterminée à partir du modèle ( $\Omega\text{.m}$ )	Tension pieux de mesures (rho calée sur la tension des pieux d'injection)	Ecart entre tension pieux de mesure(%)	Ecart résistivité Wenner- résistivité du modèle (%)
01 	0,8	0,25	0,25	0,743	6,8	46,00	52,95	7,38	8,54	-13,12
02 	0,8	0,25	0,5	0,749	6,54	43,89	52,53	6,77	3,44	-16,44
03 	0,8	0,5	0,5	1,35	11,13	41,44	51,25	11,45	2,89	-19,14
04 	0,8	0,5	0,8	1,35	10	37,23	51,25	10,13	1,34	-27,35
05 	0,8	0,8	0,8	2,08	14,39	34,78	49,54	14,43	0,25	-29,80
06 	0,5	0,25	0,25	0,72	10,27	44,81	55,49	11,14	8,48	-19,25
07 	0,5	0,25	0,5	0,73	9,25	39,81	54,74	9,41	1,71	-27,28
08 	0,5	0,5	0,5	1,35	15,22	35,42	52,60	15,86	4,20	-32,66
09 	0,5	0,5	0,8	1,328	12,77	30,21	52,20	12,98	1,64	-42,13
10 	0,5	0,8	0,8	2,04	17,57	27,06	51,40	18,27	3,98	-47,36



	0,2	0,25	0,25	0,8	22	34,56	53,04	21,11	-4,06	-34,85
	0,2	0,25	0,5	0,815	15,88	24,49	52,16	13,99	-11,93	-53,06
	0,2	0,5	0,5	1,485	26,7	22,59	52,43	25,22	-5,56	-56,90
	0,2	0,5	0,8	1,55	20,5	16,62	50,36	17,24	-15,93	-66,99
	0,2	0,8	0,8	2,45	31,2	16,00	48,87	27,10	-13,15	-67,26

Les lignes non colorées du tableau correspondent à des profondeurs non égales pour lesquelles la méthode de Wenner semble moins appropriée.

Pour un écartement des pieux donné, plus ceux-ci sont profonds, plus l'erreur effectuée par la méthode de Wenner est importante, jusqu'à environ 70 %. Dans ce cas la méthode de modélisation doit impérativement être mise en œuvre pour extraire la résistivité et on note des erreurs entre modélisation et mesures inférieures à 20 %. Par ailleurs, pour une profondeur donnée, plus les pieux sont proches, plus l'erreur est importante.

Une dernière validation est intéressante à faire en s'intéressant au potentiel en un point quelconque de la terre comme le montre Fig. 140.

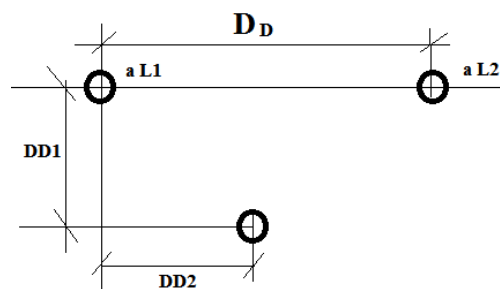


Fig. 140. Mesure du potentiel en un point quelconque suite à une injection entre deux points

Lors de l'alimentation par une tension entre deux points d'injection un potentiel prend naissance dans le volume environnant les deux pieux. La tension en un point quelconque est mesurée à l'aide d'un troisième pieu. Le tableau ci-après montre les relevés de potentiel sur ce troisième pieu suite une injection de foudre. (mesure de la valeur crête de l'onde 1,2/50 injectée).

On remarque une bonne concordance entre les mesures et les calculs issus de la modélisation.

L1 (m)	L2 (m)	D (m)	DD1 (m)	DD2 (m)	Mesure (V)	Modélisation (V)
0,5	0,5	0,15	1	0	345	327
0,5	0,5	0,15	0,1	0	245	248
0,5	0,6	2,2	1	1	315	319
0,5	0,6	2,2	0,13	0	175	193
0,5	0,6	2,2	0	-0,3	225	234

### 6.3 Mesures fréquentielles sur Saint Martin d'Hères

Lors de cette campagne de mesures, nous nous sommes focalisés sur les mesures en fréquentiel. Les données des configurations étudiées sont résumées dans le tableau ci-après :

2 Pieux		2 Plaques		
Profondeur pieux (cm)	Distance entre pieux (m)	Profondeur plaques (cm)	Distance entre plaques (cm)	Largeur plaques (cm)
80	2	11	11.5	16.5

#### 6.3.1 Identificatif de la résistivité locale de la terre et mesures fréquentielles sur des pieux

La résistivité est déterminée à partir de la résistance en basse fréquence suite à une injection d'un signal sinusoïdal via un amplificateur tel que le décrit le processus ci-dessous.

Pour une fréquence de 50Hz, l'injection d'un courant de 222mA donne naissance à une tension de 70V ce qui conduit à une résistance de 317Ω. En appliquant la modélisation intégrale filiforme sur les deux pieux de mesures, on détermine une résistivité du sol de 156,6 Ω.m.

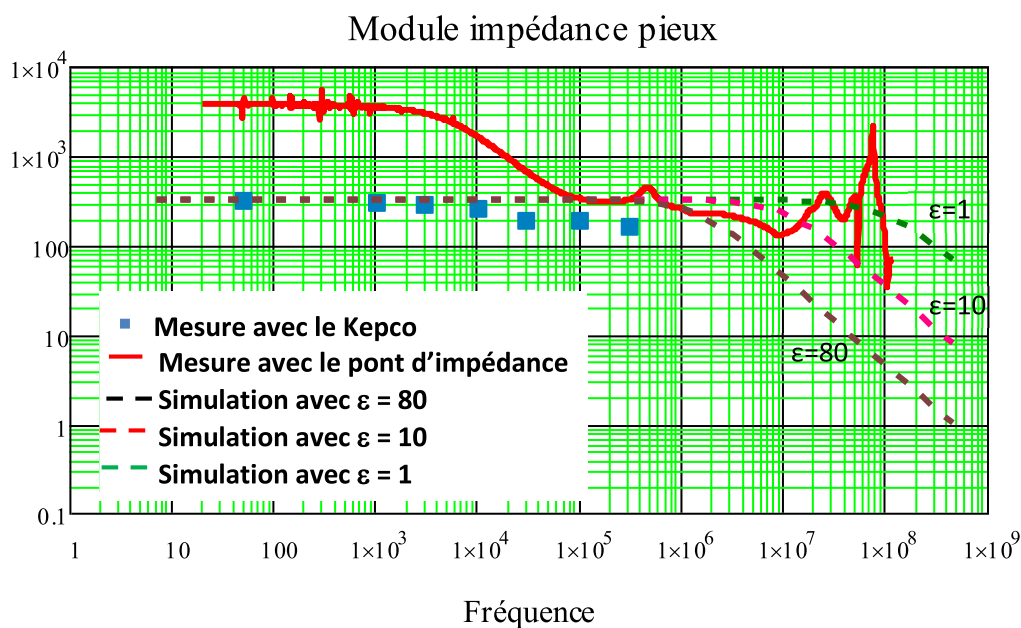


Fig. 141. Impédance entre les deux pieux – Mesures et simulations

Sur Fig. 141, nous avons superposé :

- les mesures réalisées avec le pont d'impédance et celles avec un générateur (Kepco) sur la gamme de fréquence allant du continu à 100 kHz,
- des simulations pour plusieurs valeurs de permittivité du sol afin d'essayer de retrouver le comportement haute fréquence.

A basses fréquences, le pont d'impédance ne permet pas d'obtenir une mesure cohérente avec les autres techniques de mesure (tension élevée et courant significatif) ce que nous n'expliquons toujours pas et que plusieurs publications montrent également sans plus d'explication. Nous avançons cependant l'hypothèse de la prédominance de tensions de contact non négligeables devant le signal d'excitation envoyé par le pont d'impédance. A partir d'une certaine fréquence (qq dizaines de kHz) ce phénomène parasite ne se produirait plus car n'ayant plus la bande passante suffisante, ce qui ferait converger la mesure vers les mesures faites avec le Kepco donc sous des tensions et courants plus importants.

Par ailleurs, avec le Kepco utilisé, il n'est pas possible de monter suffisamment haut en fréquence pour voir apparaître l'impact des capacités.

### 6.3.2 Mesures sur des plaques parallèles enfoncées dans la terre

Nous avons par la suite remplacé les pieux par deux plaques d'aluminium.

L'application d'une tension de 40V conduit à la circulation d'un courant de 96mA à 50 Hz et donne une résistance de 589  $\Omega$ . En appliquant la modélisation intégrale surfacique sur les deux plaques avec la résistivité de 156,6  $\Omega$ .m déterminée auparavant avec les deux pieux on trouve une résistance de 435 $\Omega$ .

Il est clair que l'enfouissement des deux plaques dans le sol n'est pas chose aisée. Ainsi être sûr qu'elles sont parallèles et arriver à les enfoncer de la même profondeur n'est pas possible. Une couche d'air s'intercale plus facilement entre la terre et la plaque. Cette incertitude sur la configuration de la mesure peut expliquer l'écart entre la modélisation et la mesure.

Sur Fig. 142 nous avons superposé les deux mesures effectuées avec le pont d'impédance et le Kepco. Celles-ci ne convergent pas mieux.

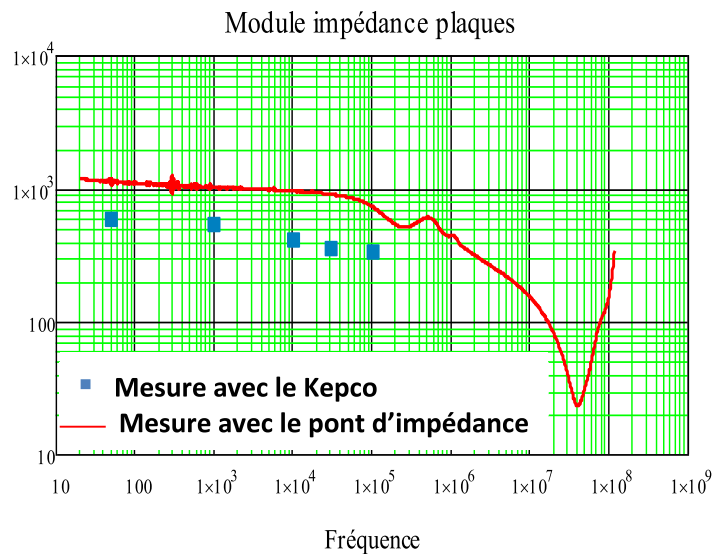


Fig. 142. Impédance entre les deux plaques – Mesures et simulations

Devant la difficulté de conduire des mesures dans la terre pour des raisons techniques nous avons eu l'idée de remplacer la terre par de l'eau.

#### 6.4 Mesures dans l'eau

Afin de mesurer d'autres types de conducteurs enterrés, nous avons remplacé la terre par de l'eau dans une cuve de 300 litres (1m x 1m x 0,3m). On remplit jusqu'à 0,24 m, et on utilise des conducteurs dont la dimension est environ 5 fois plus petite que celle de la cuve. Il faudra néanmoins faire des simulations pour vérifier l'aspect semi-infini du milieu.

Dans ce bac on peut disposer des mini-pieux, des grilles, voire des plaques métalliques.

L'utilisation de l'eau à la place de la terre est intéressante car facile à manipuler (notamment vis à vis de sa masse !), il suffit d'un tuyau et d'une arrivée d'eau, et les conducteurs peuvent facilement être inter-changés et surtout, chose la plus importante garantir le même type de contact entre le conducteur et le milieu, ce qui est pratiquement impossible à faire avec la terre. Quand on déplace les conducteurs on est sûr que le tassement du milieu est homogène et qu'il n'y a pas de « trous d'air » comme ce fut le cas avec les mesures dans un champ habité par les taupes ou les cailloux ! ... Enfin, il n'y a pas de risque de conduite métallique enterrée dont le trajet est inconnu et qui vient modifier le cheminement des courants souterrains.

A noter cependant que la conduction dans l'eau se fait par l'intermédiaire des ions qui se déplacent ce qui ne semble pas être le cas dans la terre, sauf si celle-ci est gorgée d'eau.

En revanche, même avec des matériaux métalliques conducteurs identiques une sorte d'électrolyse a lieu et des bulles sont produites au niveau de ceux-ci. Une oxydation se fait sur un pieu qui a pour conséquence d'augmenter sa résistivité très rapidement en fonction du temps. Il faudrait alors faire une mesure impulsionnelle de courant pour éviter ce phénomène. A noter que l'eau du robinet de Grenoble possède naturellement une résistivité de l'ordre de 25  $\Omega$ .m sans qu'on ait besoin de rajouter du sel par exemple. L'eau finalement ressemble assez à une terre très humide, avec une résistivité de même ordre de grandeur ainsi qu'une permittivité diélectrique de 80 également du

même ordre de grandeur, puisque celle de la terre varie de quelques unités à 80 !

Le dispositif expérimental est représenté sur la Fig. 143.

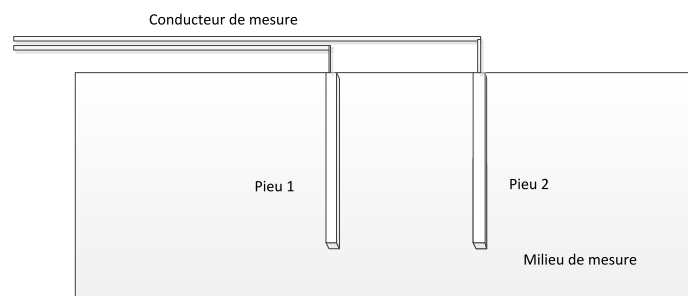


Fig. 143. Cuve en plexiglass accueillant l'eau

#### 6.4.1 Mesures en statique ou faible fréquence 50 Hz

##### a. Deux pieux

Il faut d'abord caractériser le milieu selon la même procédure que pour la terre, pour se faire on mesure en continu la résistance entre les deux piquets distants de 5 cm entre axes. On utilise ensuite, la formulation intégrale filiforme non maillée pour déterminer la résistivité de l'eau.

Dimensions des piquets : 0,06 m de longueur pour un diamètre de 12 mm.

$V_{dc} = 50,1 \text{ V}$  ;  $I_{dc} = 217 \text{ mA}$  d'où  $R_{dc} = 230,9 \Omega$  ce qui conduit à  $\rho \approx 24,2 \Omega.m$ .

On notera qu'il se produit une électrolyse des sels minéraux présents dans l'eau, ce qui a pour conséquence une oxydation très rapide de l'anode qui se recouvre très rapidement d'une couche noirâtre. Cette couche fait chuter très rapidement le courant de l'alimentation, ce qui exprime une augmentation rapide du contact eau –conducteur. Il faudrait en fait faire une mesure impulsionnelle très rapide afin d'éviter le phénomène d'électrolyse et d'oxydation. L'eau présente donc certains avantages, mais le phénomène d'électrolyse est sans commune mesure avec celui qui prend naissance dans la terre. Ce phénomène entache donc la confiance que l'on peut avoir dans les mesures.

On alimente ensuite les pieux par une tension alternative à 50 Hz, les résultats sont les suivants :

$V_{alt} = 50,4 \text{ V}_{eff}$ ,  $I_{alt} = 207 \text{ mA}_{eff}$  soit une résistance de  $243 \Omega$  ce qui conduit avec notre formulation intégrale filiforme à  $\rho \approx 25,5 \Omega.m$

L'alternatif présente quant à lui l'avantage en principe de supprimer le phénomène d'électrolyse. Néanmoins sur le résultat précédent on constate que les résultats sont assez proches l'un de l'autre et justifie l'utilisation du continu ou de l'alternatif comme source d'alimentation.

Une nouvelle mesure est faite à 50 Hz en séparant les pieux de 0,1 m.

Pour une tension de  $50,5 \text{ V}_{eff}$ , le courant est de  $0,17 \text{ A}$  ce qui conduit à une résistance de  $297 \Omega$ .

Notre prédiction, avec  $\rho \approx 25,5 \Omega.m$ , conduit à une résistance de  $296 \Omega$ . La convergence modèle vs mesure est donc excellente.

Le tableau ci-après résume les résultats obtenus.

	Distance(m) entre pieux	Résistance en continu ( $\Omega$ )	Résistance à 50Hz ( $\Omega$ )	$\rho(\Omega.m)$ en continu	$\rho(\Omega.m)$ à 50Hz
Config.1	0.05	230.9	243	24.2	25.5
Config.2	0.1	-	297		25.54

Remarques :

- ❖ Pour vérifier l'aspect semi infini du milieu, nous avons mesuré la tension entre les deux points A et B situés sur les bords de la cuve (Fig. 144). Même si cette valeur est faible (1.9 V), elle n'est pas nulle comme cela aurait dû être le cas dans l'hypothèse infinie.
- ❖ Par ailleurs, une mesure de tension entre un pieu et le point C (sur l'eau distant de 2.5 cm du pieu) donne 10V, ce qui montre bien que la tension décroît.

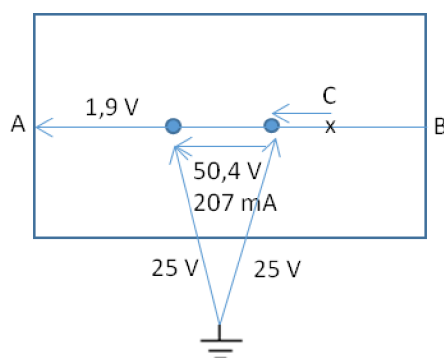


Fig. 144. Mesures sur les bords

- ❖ Notons tout de même, une difficulté de manipulation pour maintenir les pieux verticaux dans l'eau sans rajouter d'entretoise !

### b. Deux plaques

De la même manière que précédemment, le milieu est plus favorable pour fournir une homogénéité pour les mesures entre les plaques.

Nous avons ensuite remplacé les pieux par des plaques de dimensions 20cm\*6cm\*0,5cm, espacées de 4 cm.

En continu :  $V_{dc} = 20,5 \text{ V}$ ,  $I_{dc} = 410 \text{ mA}$  d'où  $R_{dc} = 50 \Omega$  ce qui conduit à  $\rho \approx 24,8 \Omega.m$ , valeur assez proche de celle identifiée par la méthode des pieux.

A 50 Hz :  $V_{alt} = 20,6 \text{ V}_{eff}$ ,  $I_{alt} = 368 \text{ mA}_{eff}$  soit une résistance de  $56 \Omega$  ce qui conduit avec notre formulation intégrale surfacique à  $\rho \approx 27,7 \Omega.m$ .

Nous avons ensuite rapproché les plaques pour ne laisser que 3 mm entre elles.

En continu :  $V_{dc} = 7 \text{ V}$  et  $I_{dc} = 1,07 \text{ A}$ . Mais des bulles apparaissent et la mesure a du mal à se stabiliser. Le courant continue de descendre avec le temps.

A 50 Hz :  $V_{alt} = 10,8 \text{ V}_{eff}$  et  $I_{alt} = 590 \text{ mA}$  ce qui donne une résistance de  $18,3 \Omega$  alors que la

modélisation conduit à  $5.8 \Omega$ . Mais là encore la mesure est instable alors qu'a priori le phénomène d'électrolyse ne se produit pas puisque le courant est alternatif.

#### 6.4.2 Caractérisation en fréquence

Cette caractérisation a été effectuée en utilisant le pont d'impédance HP4194A.

##### a. Configuration 1 avec deux pieux

Tout d'abord, nous avons repris la première configuration avec deux pieux verticaux Fig. 143.

L'impédance mesurée est présentée Fig. 145. Sur cette figure nous avons également superposé l'impédance simulée.

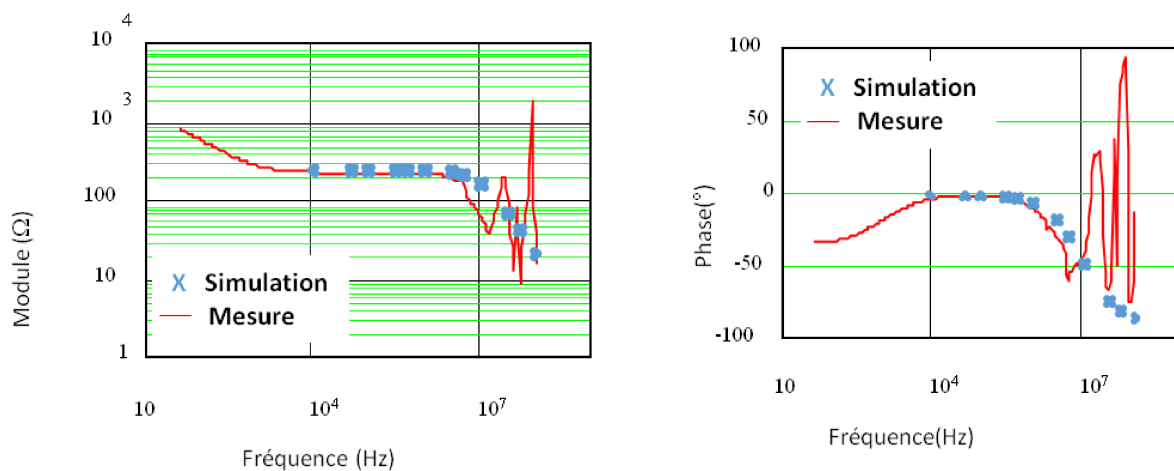
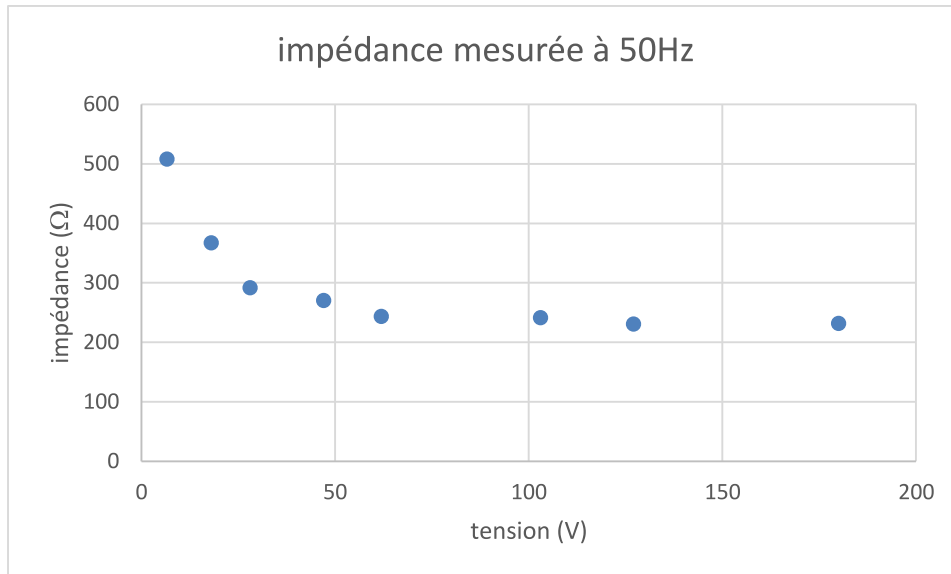


Fig. 145. Impédance entre deux pieux (comparaison entre mesure et simulation)

On trouve à nouveau un problème en basse fréquence de même type que celui présent dans la terre alors qu'ici on ne peut incriminer la présence d'une couche d'air.

##### b. Influence de la tension d'alimentation

Lors de la campagne de mesures, nous avons alimenté le dispositif de deux pieux avec une générateur 50Hz de tension variable. Nous avons fait varier la valeur de la tension d'alimentation et nous avons observé que l'impédance est fonction de la ce paramètre comme le montre Fig. 146. Ceci montre un comportement de l'impédance dépendant de ce paramètre.



*Fig. 146. Variation de l'impédance mesurée en fonction de la tension d'alimentation*

Cette observation mériterait de plus larges investigations notamment dans la terre où la linéarité de la terre n'avait été validée qu'au-delà de 100 V puisque nous cherchions à masquer les tensions de contact.

## 6.5 Conclusion

Nous avons pu montrer dans ce chapitre qu'entreprendre des mesures de validation des modèles développés n'est pas chose aisée.

Des erreurs de jeunesse ont été commises, mais nous ont aussi permis de nous forger une expérience et comme de toute erreur de progresser et d'imaginer pour le futur d'autres types de mesure. Clairement nous ne pouvons nous satisfaire de mesures uniquement issues de la bibliographie dont la description des conditions expérimentales est généralement approximative.

L'homogénéité de la terre est loin d'être acquise et comment garantir des conditions de mesure reproductible en particulier la maîtrise de l'interface conducteur-terre ou encore reproduire un tassement identique de la terre ?

Bien sûr les caractéristiques de la terre varient d'un jour à l'autre (il faut redéterminer les caractéristiques systématiquement avant toute nouvelle campagne de mesure) et il est difficile aussi d'imaginer son homogénéité sur les grandes surfaces que peuvent représenter un bâtiment. Ceci n'est toutefois pas gênant pour l'exploitation de celui-ci. Nous sommes ou serons capables de borner les caractéristiques essentielles tout en cernant mieux la sensibilité de ces caractéristiques au niveau du système de masse et de terre global d'un bâtiment. En revanche pour la validation de nos modèles que nous ne souhaitons pas faire uniquement via des comparaisons numériques, il fallait tenter ces mesures. L'idée de remplacer la terre par de l'eau (rendant les manipulations beaucoup plus pratiques et parfaitement reproductibles) a fonctionné dans certaines circonstances, mais une discussion avec les électrochimistes s'impose rapidement pour mieux comprendre dans quelles conditions les différences de type de conduction se manifestent et peuvent biaiser nos mesures.

Nous restons sur plus d'échecs que de réussites pour partie par manque de temps. Les écarts constatés entre les divers modes de mesure sont encore non expliqués. L'insuffisance de nos



équipements est aussi à signaler notamment dans l'excursion en fréquence qu'on aurait souhaitée pour mettre en évidence l'impact des aspects capacitifs...

# Chapitre 7 : Mise en œuvre système

## 7 Mise en œuvre système

### 7.1 Système de mise à la terre d'un habitat

Le guide de la mesure de terre édité par Chauvin&Arnoux, décrit bien les principes de mise à la terre suivant le bâtiment considéré, maison individuelle ou d'un bâtiment collectif [63].

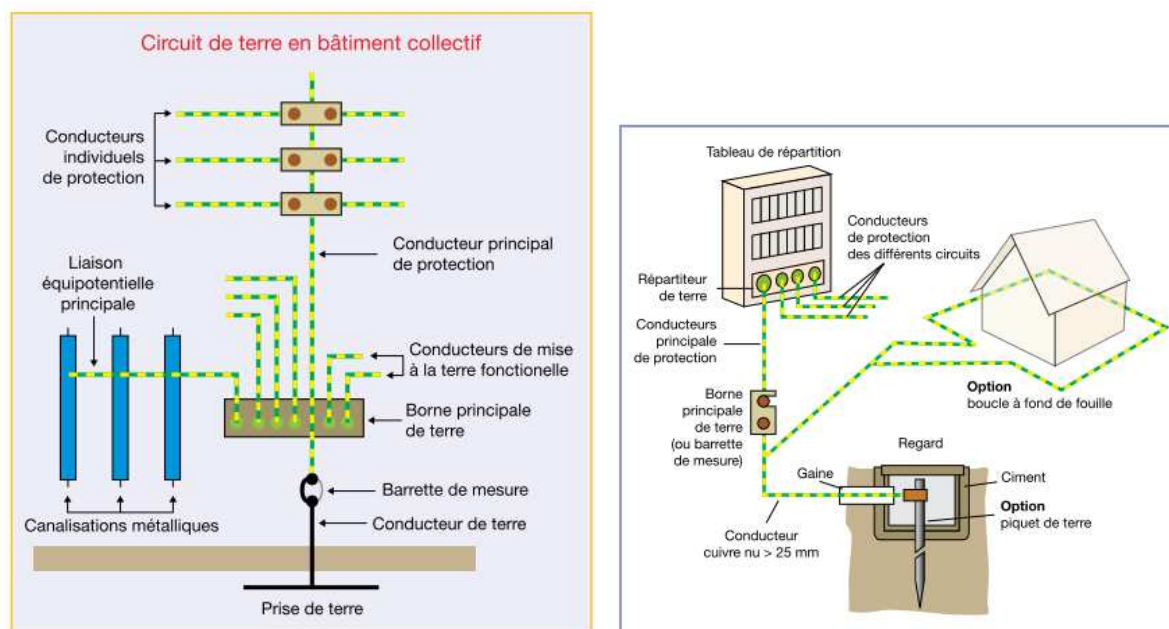


Fig. 147. Système de mise à la terre des habitats

En fonction des pays, du type de construction ou des exigences normatives, il existe différentes méthodes pour réaliser une prise de terre. Généralement, les types de construction utilisés sont les suivants : boucle à fond de fouille, feuillard ou câble noyé dans le béton, plaques métalliques, piquets ou tubes, rubans ou fils, etc...

On peut souvent lire que la résistance de la prise de terre va dépendre des 3 phénomènes suivants :

- La résistance du pieu de terre, piquet, grille,... celle-ci est généralement très faible,
- La résistance de contact entre l'électrode et la terre, qui, en principe, est également faible,
- Enfin la résistance du milieu géologique.

Nous ne pensons pas qu'il soit scientifiquement correct d'exprimer les phénomènes ainsi. Certes tant que la fréquence est suffisamment basse pour que l'effet de peau n'engendre pas une augmentation importante de la résistance du pieu, celle-ci demeure effectivement faible. En revanche, autant la résistivité du milieu géologique ne doit pas dépendre de la méthode de mesure, c'est-à-dire de la géométrie des électrodes, autant il ne nous semble guère judicieux de différencier électrode et milieu. On effectue une mesure de l'ensemble. On est très loin de mesurer la résistance d'un conducteur de cuivre dont la section droite est évidemment équipotentielle.

La résistivité du sol quant à elle, dépend essentiellement du type de sol, de l'humidité et de la température. Le tableau suivant toujours édité par [63] montre bien les caractéristiques résistives suivant la nature des sols rencontrés.

Nature du terrain	Résistivité (en $\Omega.m$ )
Terrains marécageux	De qqes unités à 30
Limon	20 à 100
Humus	10 à 150
Marnes du jurassique	30 à 40
Sable argileux	50 à 500
Sable silicieux	200 à 3000
Sol pierreux nu	1500 à 3000
Sol pierreux recouvert de gazon	300 à 500
Calcaires tendres	100 à 300
Calcaires fissurés	500 à 1000
Micaschistes	800
Granit et grès en altération	1500 à 10000
Granit et grès très altérés	100 à 600

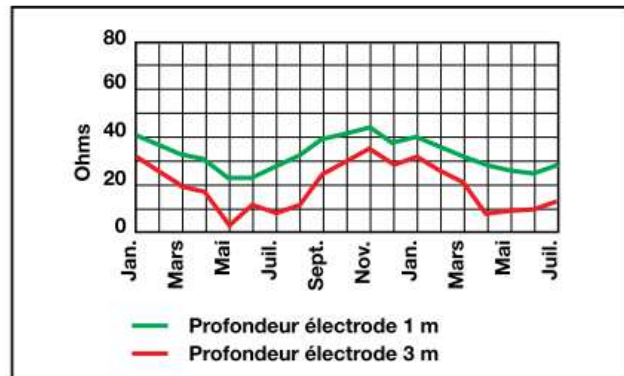


Fig. 148. Evolution de la résistivité du sol en fonction de la nature et de la température

Le béton quant à lui peut présenter une résistivité de l'ordre de 400  $\Omega.m$ .

Il est donc conseillé d'enfoncer les électrodes le plus profondément possible pour atteindre des couches où la présence d'eau rend la terre plus stable notamment en température afin d'éviter d'une part le gel et d'autre part la sécheresse lesquels conduisent naturellement à une augmentation importante de la résistivité. En revanche à taux d'humidité donné, plus la température augmente plus la résistivité décroît car la conduction dans la terre est essentiellement un phénomène électrolytique. D'autres phénomènes assez complexes peuvent intervenir dans le cas d'écoulement de courants de foudre extrêmement importants, la tension provoquée par conduction peut dépasser 200kV/m et provoquer un claquage par exemple dans un milieu argileux !

A noter qu'après un foudroiement la résistance de terre augmente temporairement à cause de l'évaporation de l'eau au voisinage des conducteurs. Si le sol se vitrifie alors cette augmentation de résistance peut devenir permanente et il pourra être nécessaire de détruire le dispositif de mise à la terre pour le reconstruire.

Par ailleurs la présence d'eau et les sels minéraux sont responsables d'une importante corrosion ce qui peut conduire à des variations de 20% de la résistance de terre au cours d'une année et à dégradation au cours du temps des systèmes de mise à la terre. Leur durée de vie est estimée à une vingtaine d'années ! Pour éviter l'oxydation du système de terre, on le porte à un potentiel négatif par rapport à une électrode dont le rôle sera de s'user. Dans le cas de courant alternatif l'usure est plus lente, mais les réseaux de terre peuvent aussi transiter des courants telluriques, ou des courants induits par la proximité de rails d'une ligne à courant continu.

## 7.2 Qu'est-ce qu'une prise de terre ?

Les modélisations faites dans les chapitres précédents vont nous permettre de vérifier certaines assertions de la littérature et d'acquérir des connaissances dans la conception des systèmes de mise à la terre. Deux questions fondamentales peuvent se poser, la mesure d'une prise de terre existante et la conception d'une nouvelle prise de terre.

### 7.2.1 Mesure d'une prise de terre existante

Rappelons qu'ici la problématique consiste à déterminer la qualité d'une prise de terre enterrée que l'on ne connaît pas ou qui a pu se détériorer avec le temps. Plusieurs méthodes sont décrites et

certain auteurs d'ailleurs se contredisent (en particulier la méthode des 3 points) ! En effet la principale difficulté est la présence des couplages entre les diverses électrodes et l'impossibilité de référencer la prise de tension à la terre lointaine.

La mesure de terre qui fait référence et qui doit être préférée aux autres est la méthode dite des 62 % et elle utilise 2 piquets. Cette mesure est référencée dans toutes les normes de contrôle d'une installation électrique et permet de réaliser une mesure précise et sûre de la résistance de terre selon la publication [43]. L'application dépend si l'on est dans le cas d'une maison individuelle (on peut planter des piquets) ou si l'on est en milieu urbain !

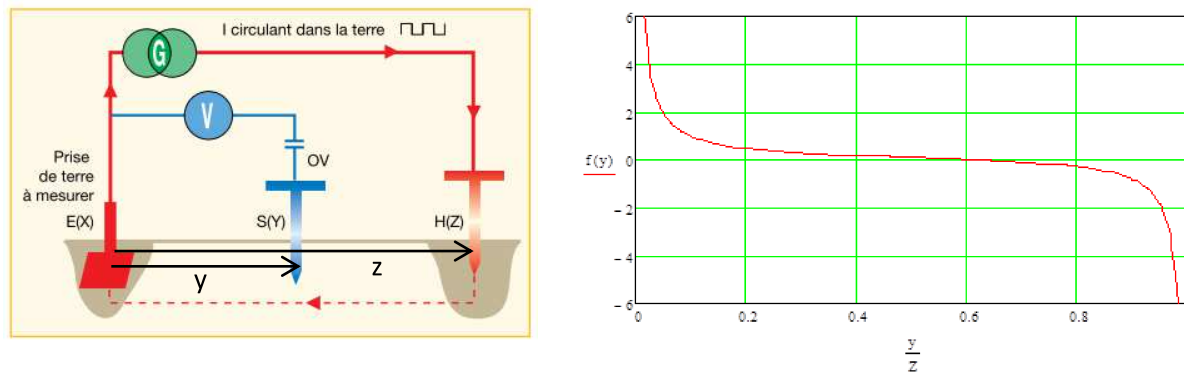


Fig. 149. Mesure d'une prise de terre

L'idée consiste à créer une zone où le potentiel est égal à celui de la terre lointaine par la circulation du courant entre la prise de terre à mesurer E et une électrode auxiliaire H(z). Si les deux prises de terres avaient la même résistance alors la répartition du potentiel serait parfaitement symétrique et le potentiel « 0 » exactement au milieu. Lorsque le couplage est négligeable entre E et H, alors il existe une portion de terre où le potentiel absolu reste nul. Il faut définir cette zone par différentes mesures de V (lorsque V ne varie plus). On assimilera la prise de terre à mesurer à une demi-sphère de rayon X alors que les électrodes de mesure et d'injection sont assimilées à des demi-sphères de rayon ro.

Le potentiel V que l'on va mesurer est :  $V = V_e - V_s$  et la représentation matricielle est la suivante :

$$\frac{\rho}{2 \cdot \pi} \begin{pmatrix} \frac{1}{X} & \frac{1}{y} & \frac{1}{z} \\ \frac{1}{y} & \frac{1}{ro} & \frac{1}{z-y} \\ \frac{1}{z} & \frac{1}{z-y} & \frac{1}{ro} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_e \\ V_s \\ V_H \end{pmatrix}$$

On obtient immédiatement grâce à cette matrice que la tension V s'exprime par :

$$V(y) = \frac{\rho}{2 \cdot \pi \cdot X} \cdot i - \frac{\rho}{2 \cdot \pi} \left( \frac{1}{z} + \frac{1}{y} - \frac{1}{z-y} \right) \text{ avec le terme } \frac{\rho}{2 \cdot \pi \cdot X} \text{ qui représente la grandeur recherchée.}$$

Si l'on dessine l'évolution de  $f(y) = \left( \frac{1}{z} + \frac{1}{y} - \frac{1}{z-y} \right)$  en fonction de y/z, on constate que pour  $y \approx 62\%$  z, ce terme est pratiquement nul et le quotient V/i donne la valeur de la prise de terre inconnue (Fig. 149).

### 7.2.2 Réalisation d'une « bonne prise de terre »

Le savoir-faire empirique conduit à prôner que l'électrode enfoncée dans la terre ait au moins une longueur de 2,5 m, et que l'enfoncement en profondeur permet d'aller chercher parfois des couches géologiques de résistivité plus faible car celle-ci peut varier d'une strate à l'autre. Malheureusement le sol est rarement homogène ce qui va rendre souvent la résistance de terre difficilement prédictible. Il est aussi important de se mettre à l'abri du gél qui conduit à une augmentation sensible de la résistance de terre.

Quelques règles simples de conception tirées d'applications numériques du §5.3.3. Par exemple, il n'est pas utile de jouer énormément sur le diamètre du pieu, en effet doubler le diamètre ne fait que diminuer sa résistance de 10 % au maximum et ce gain diminue plus la longueur du pieu est importante.

En revanche doubler la longueur de pénétration dans le sol permet de réduire la résistance d'environ 45 %.

Pour une même longueur de conducteur, il vaut mieux un conducteur vertical qu'un conducteur horizontal faiblement enterré (Fig. 102). De plus, un conducteur vertical se corrode moins qu'un conducteur horizontal.

On peut aussi utiliser plusieurs prises de terre que l'on relie en parallèle. Néanmoins il est important de les éloigner suffisamment pour éviter leur couplage qui réduirait l'efficacité du dispositif comme nous allons le montrer pour 2 piquets seulement.

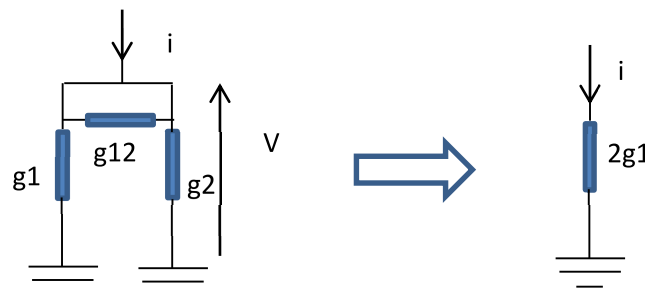


Fig. 150. Mise en parallèle de deux piquets de terre pour abaisser la résistance de mise à la terre

Nous avons vu au paragraphe 3.2.2 que  $g_1 = \frac{1}{R_p + R_m}$  ; l'impédance de l'ensemble s'exprime donc par  $Z : Z = \frac{R_p + R_m}{2}$ . L'expression de cette impédance met clairement en évidence que pour atteindre le minimum d'impédance, les deux piquets de terre doivent être découplés au maximum, c'est-à-dire  $R_m = 0$ .

Pour se rendre compte des ordres de grandeur, on a tracé sur la figure suivante, l'évolution de la résistance mutuelle ( $\Omega$ ) de deux pieux dont la longueur est respectivement 1 m et 3 m alors que  $D(m)$  est la distance les séparant. Ces valeurs sont à comparer avec la résistance équivalente d'un pieu, à savoir :  $R_p(1m) = 50,7 \Omega$  et  $R_p(3m) = 20,2 \Omega$ .

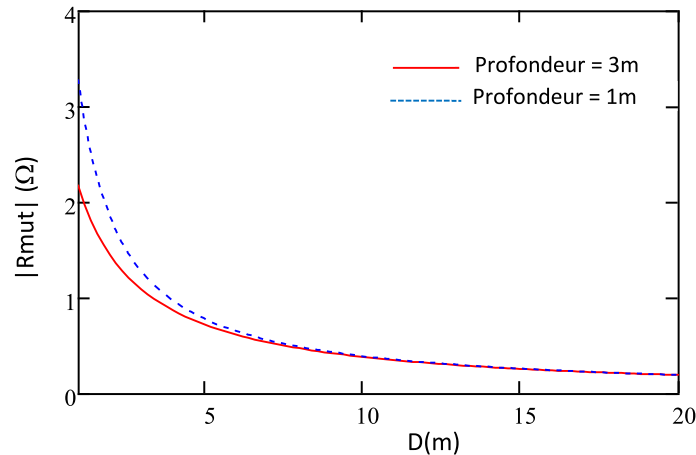


Fig. 151. Evolution de la résistance de couplage avec la distance inter-électrode ( $D$ ) pour deux profondeurs de pieux

### 7.3 Conception d'un réseau de terre/d'une prise de terre

Chercher une terre profonde via un piquet de terre n'implique aucunement d'avoir une bonne équipotentialité d'un site et donc d'avoir un bon réseau de masse.

Néanmoins, un maillage de conducteurs horizontaux est préférable et facilite l'équipotentialité. En général, un enfouissement de 60 cm à 1 m est pratiqué. Il est nécessaire de recouvrir ce maillage avec une terre meuble et non des remblais souvent très résistifs.

On devrait raccorder en de nombreux points le réseau de terre et le réseau de masse grâce aux fers à béton, les armatures de radiers, les structures métalliques, charpentes métalliques, tuyaux, rails, ...

La ceinture de terre doit être électriquement accessible par de nombreuses barrettes de manière à pouvoir relier le réseau de masse à la terre en de nombreux points.

Problème de l'interconnexion de différentes terres d'un site :

Il est interdit (légalement) de relier des masses à des terres séparées, tant les potentiels pourraient être différents. Il est donc préférable de réaliser un seul et unique réseau de terre que d'être obligé de relier 2 terres séparées. C'est le cas que l'on pourrait rencontrer si l'on veut échanger des signaux entre deux bâtiments. Pour l'information, l'utilisation de fibres optiques résout le problème d'équipotentialité.

L'existence de prises de terre séparées peut conduire à la circulation d'un courant par le conducteur sensé les relier entre elles et les maintenir au même potentiel. On est alors en présence d'un couplage par impédance commune.

### 7.4 Simulation système

Dans ce dernier paragraphe nous allons mettre en œuvre au sein d'une même simulation les modèles des différents composants présents dans une installation de distribution d'une maison individuelle type. Supposons cette maison protégée par un paratonnerre qui doit évacuer le courant de foudre grâce à une patte d'oie constituée de 2 grilles. Une grille de fond de fouille est disposée sous la totalité de la maison de manière à raccorder le réseau de masse en plusieurs points de la grille de manière à ce que ce dernier puisse être le plus possible équipotentiel. Généralement on

peut trouver des équipements électroniques à l'intérieur de la maison et ceux-ci sont raccordés au réseau via un filtre de mode commun. Ce filtre est censé diminuer les perturbations générées par l'électronique de puissance. Les capacités de mode commun «  $C_y$  » détournent du courant à 50 Hz qui est susceptible de leurrer le disjoncteur différentiel du tableau de distribution de la maison et d'entraîner son ouverture alors qu'il n'y a pas de défaut sur l'installation. D'autres capacités parasites ( câbles, autres charges présentent sur le réseau).

Dans notre modélisation, on considère ensuite les conducteurs Phase-Neutre qui rejoignent au bout de 200 m, le transformateur de distribution lui-même alimenté via un câble de 3 km à un point de puissance de court-circuit infini.

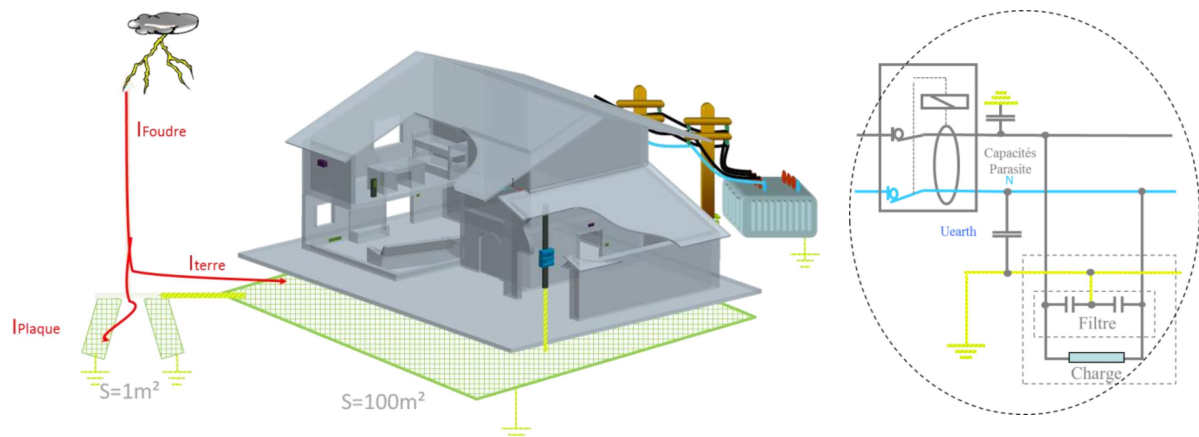


Fig. 152. Configuration à simuler

#### 7.4.1 Problématique

Le paratonnerre est relié à une patte d'oie via un pieu conducteur à même la terre. Cette patte d'oie est censée être l'interface privilégié pour évacuer les courants de foudre directement. Or, le fond de fouille qui est situé en dessous de la maison pour relier le réseau de masse doit être relié à la patte d'oie. Ce fond de fouille, de par ses dimensions, présentera une impédance beaucoup plus faible vis-à-vis de la terre lointaine au courant de foudre. L'écoulement du courant de foudre va provoquer une élévation de potentiel préjudiciable au maintien d'une équipotentielle du réseau de terre puis de masse. La circulation de courants engendrée par cette élévation de potentiel dans le reste du réseau risque de provoquer est de type mode commun et risque donc de provoquer l'ouverture du disjoncteur différentiel alors qu'il n'y a aucun défaut.

Le circuit électrique simulé est celui présenté dans Fig. 153.



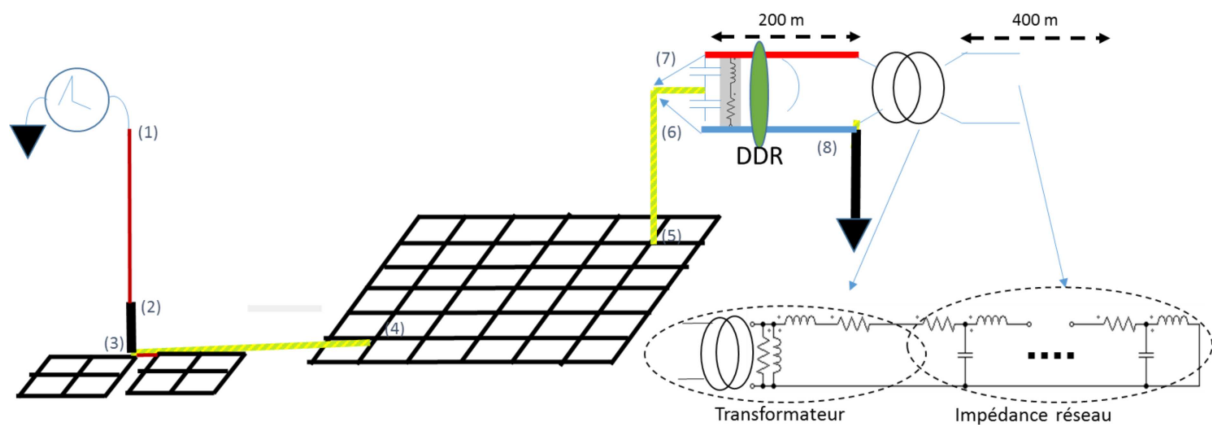


Fig. 153. L'installation complète modélisée

En régime TT, le conducteur PE du tableau de distribution est relié à un point de la grille alors que le neutre est relié à terre au niveau du transformateur de distribution.

#### 7.4.2 Le choix des modèles

##### a. Le générateur de foudre

On utilise le circuit de décharge d'une capacité utilisé jusqu'à présent. Dans le cas le plus sévère le temps de montée le plus bref de l'onde de tension est de  $1,2 \mu\text{s}$ , ce qui conduit à une fréquence équivalente au front de l'ordre de 350 kHz. Dans notre système (simplifié) on aura plusieurs longueurs car nous sommes en présence de plusieurs milieux.

Fréquence équivalente au front	Longueur d'onde dans l'air	Longueur d'onde dans une ligne bifilaire ( $\epsilon_r = 5$ )	Longueur d'onde dans un conducteur enterré dans la terre dans le pire cas ( $\epsilon_r = 80$ ) <sup>3</sup>
350 kHz	$\lambda = 850 \text{ m}$	$\lambda = 380 \text{ m}$	$\lambda = 95 \text{ m}$

Les maillages ou segmentations devront respecter l'ordre de grandeur  $\lambda/10$ .

##### b. Les grilles

La patte d'oie est composée de 2 grilles d'un  $\text{m}^2$ , elles mêmes composées de 2 éléments physiques dans les deux directions.

Quant au fond de fouille, il est composé d'un maillage de 6x6 éléments. En réalité ce treillis soudé est en fer et beaucoup plus dense. Pour des questions de simplicité nous le considérons en cuivre de manière à calculer facilement les inductances parasites avec InCa3D utilisant la méthode PEEC et en négligeant comme nous l'avons montré antérieurement les courants induits dans la terre. De même nous avons pris un nombre réduit d'élément afin d'avoir des simulations très rapides dans cette phase exploratoire.

<sup>3</sup> On simplifie ici l'approche notamment dans le cas où le conducteur est dans la terre, car il faudrait prendre en considération l'influence de la partie réelle de  $\sigma$  et non seulement  $\epsilon_r$ .

Nous avons également décidé de segmenter chaque élément de chaque grille en 2 segments seulement de façon à limiter la taille du système à simuler dans cette première étape.

Pour les grilles en général, on aurait pu négliger les capacités de fuite vers la terre dans la mesure où l'onde de foudre est trop basse en fréquence pour les solliciter. On aura d'ailleurs la confirmation quantitative à travers l'analyse des impédances de ces dispositifs vis-à-vis de la terre plus loin.

#### *c. Le paratonnerre*

On considère que le paratonnerre chemine dans l'air. Sa longueur de 10 m permet de le représenter par une simple impédance série R, L. Par souci de simplicité (et de rapidité) on néglige l'effet de peau dans celui-ci.

#### *d. Le câble reliant les grilles*

Il s'agit d'un câble en cuivre directement enterré à la même profondeur que les grilles et de faible longueur (3m) ce qui permet de s'affranchir d'un modèle propagatif et d'utiliser les modèles mis au point dans la thèse (R, L, C, G).

#### *e. Le câble de protection PE reliant l'équipement à la grille de fond de fouille*

Ce câble est court (1,5 m) ce qui permet de s'affranchir de la propagation et de le modéliser par une simple impédance R, L.

#### *f. Les conducteurs de phase et de neutre en amont et en aval du transformateur*

Les deux conducteurs sont modélisés par des cellules R,L,C (10 en l'occurrence) de manière à prendre en compte l'aspect propagatif puisque les longueurs ne sont pas négligeables devant la longueur d'onde connaissant la valeur de la permittivité du diélectrique entourant les conducteurs.

En amont du transformateur, on considère que les conducteurs sont aériens et donc la permittivité de l'air permet de moins minimiser le nombre de cellule afin de respecter le ratio avec la longueur d'onde dans l'air.

#### *g. Les pieux de terre*

Le pieu de terre reliant le paratonnerre à la patte d'oie, est modélisé conformément aux travaux de thèse (R, L, C, G) et sa modeste longueur permet d'éviter de prendre en considération la propagation. Il en est de même en ce qui concerne le pieu de mise à la terre du neutre côté transformateur de distribution.

#### *h. Le transformateur*

Nous avons adopté deux types de modélisation du transformateur. La première met en œuvre un modèle simple de transformateur (inductance magnétisante et inductance de fuite incluant les pertes calculées sommairement). Dans un second temps nous avons utilisé le travail complet de caractérisation du transformateur (capacités parasites primaire-secondaire, capacités de mode commun, variation des inductances avec la fréquence,...) tel que nous avons pu l'exposer §2.2.2b. On remarquera la nécessité d'une modélisation plus complète puisque les courbes d'impédance à

vide et court-circuit sont fortement chahutées aux alentours de 350 kHz !

### *i. Charge du réseau résidentiel*

La charge du réseau 50 Hz a normalement un impact sur les différentes grandeurs. Dans l'hypothèse peu probable où celle serait très faible et presque totalement résistive, elle pourrait empêcher les perturbations de remonter plus en amont dans le réseau, mais cette situation nous semble sans doute rare voire irréaliste, les charges ayant plutôt la propension à présenter un caractère inductif assez marqué.

### *j. Le réseau*

Enfin, celui-ci est court-circuité en amont de la ligne, puisque considéré comme une source de tension parfaite. Puisque nous nous intéressons au seul régime dynamique (effets de la perturbation de foudre à 350 kHz), la source 50 Hz du réseau peut être court-circuitée.

Tableau récapitulatif des composants et leur modélisation pour la simulation

Constituant	dimensions	Méthode de modélisation/ description
Tous les conducteurs (pieu, grille, ...) présents dans la modélisation sont en cuivre		
Circuit d'injection	-	Circuit de conditionnement 1,2/50 $\mu\text{s} \sim 8/20 \mu\text{s}$
Câble paratonnerre	Longueur = 10m Section= 6mm <sup>2</sup>	résistance et inductance
Pieu vers grilles	Longueur = 0,5m Rayon = 5mm	Pieu vertical dans la terre (rLCG) 5 segments
Patte d'oie	2 grilles de : Dimensions 1m <sup>2</sup> de 2x2 éléments à la profondeur de 0,5m	Grille dans la terre (rLCG) 2 segments par élément
Liaison paratonnerre grille bâtiment	Longueur=3m de 6mm <sup>2</sup> de section à la profondeur de 0,5m	Conducteur horizontal dans la terre (rLCG) 10 segments
Grille bâtiment	Dimension 100m <sup>2</sup> de 6x6 éléments à la profondeur de 0,5m	Grille dans la terre (rLCG) 2 segments par élément
Câble PE	le conducteur fait 1,5m de longueur est 6mm <sup>2</sup> de section	Modélisation R, L
Câble phase-neutre reliant la maison au transformateur d'alimentation	Conducteurs isolés de 200 m au dessus de la terre	Modèle de ligne à constantes réparties en 10 cellules
Câble phase-neutre aérien en amont du transformateur d'alimentation	Conducteurs aériens de 400 m au dessus de la terre	Modèle de ligne à constantes réparties en 10 cellules
Pieu de mise à la terre du neutre au niveau du transformateur	Longueur = 1 m Rayon = 5 mm	Pieu vertical dans la terre (rLCG) 10 segments
Filtre de mode commun	Capacités $C_y$ 2x 10nF	

Caractéristiques du transformateur

Inductances parasites		Capacités parasites		Résistances parasites	
magnétisante		différentiels	C50=0,48nF	Courant de Foucault	R02=4970Ω
De fuite	L21=0,36mH		C53=-0,17nF		
	L22=0,10mH		C54=-0,23nF	Effet de peau	R118=9Ω
	L23=0,51mH		C55=0,90nF		R119=40Ω
			C51=0,23nF		R120=27kΩ
Magnétisante	L20=58mH		C52=0,19nF		
		De mode commun			
			C56=0,37nF		
			C57=0,28nF		
			C58=0,54nF		
			C59=0,25nF		

Caractéristiques de la ligne amont au transformateur

Longueur de ligne amont	400 m	Valeur pour 400 m
Résistance linéique	0,1 Ω/km	0,04Ω
Inductance linéique	1,2H/km	480mH

## 7.5 Analyse des résultats de simulation

Nous nous intéressons à la répercussion du coup de foudre sur l'installation en calculant les grandeurs (courant) et tensions aux points importants identifiés sur Fig. 153 par des numéros. Cette analyse nous permettra aussi dans un second temps de proposer quelques remèdes sommaires pour diminuer les effets du coup de foudre.

### 7.5.1 Impact du modèle du transformateur

Nous avons dans un premier temps simulé les différentes tensions présentes dans le système suite à une agression de foudre pour deux modèles de transformateur.

Fig. 154 Présente les différentes tensions avec le modèle élémentaire du transformateur.

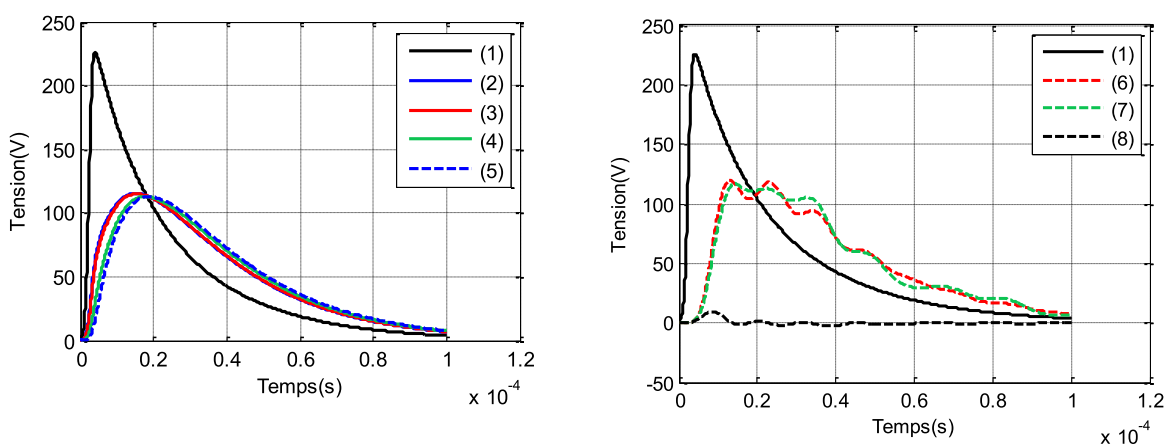


Fig. 154. Elévation de potentiel en différents points de l'habitat ayant gardé comme référence la tension en entrée du paratonnerre (modèle simple de transformateur)

Fig. 155 montrent les mêmes tensions observées mais cette fois ci dans le cas de l'utilisation du

modèle complet du transformateur (incluant tous les éléments parasites). L'impact est visible.

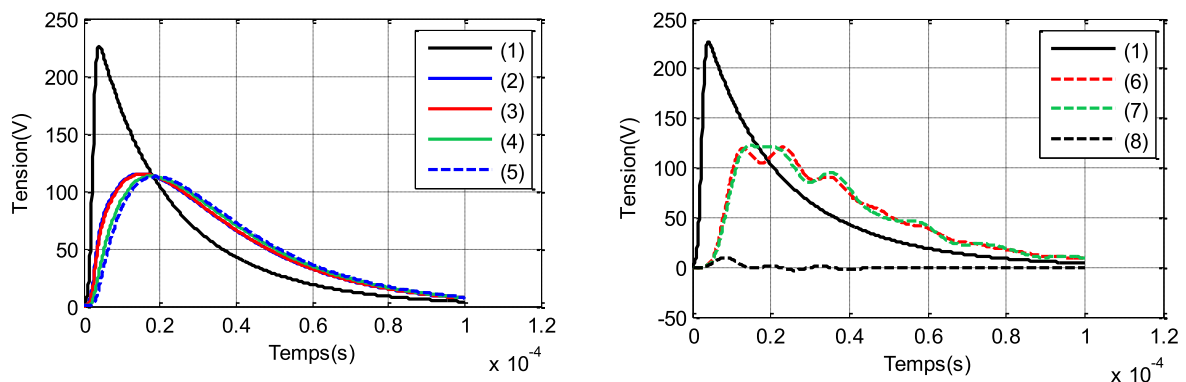


Fig. 155. Elévation de potentiel en différents point de l'habitat ayant gardé comme référence la tension en entrée du paratonnerre (modèle complet de tranformateur)

### 7.5.2 Distribution des tensions induites par la foudre sur la grille de fond de fouille

Dans ce paragraphe on va s'intéresser à l'élévation de potentiel sur la grille dans le domaine temporel, puis dans un second temps on s'intéressera au système des grilles dans le domaine fréquentiel pour mieux illustrer les phénomènes compte tenu du contenu spectral de la foudre.

Fig. 156 permet de repérer, grâce à des numéros, des points de la géométrie auxquels on va tracer la tension.

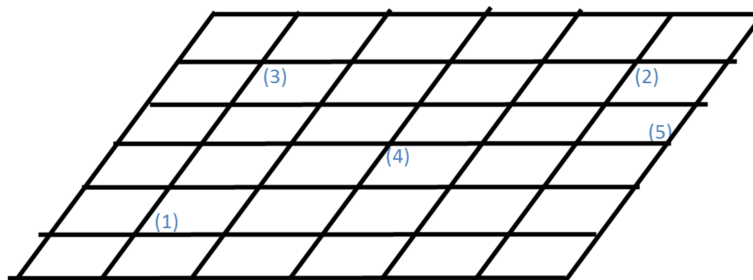


Fig. 156. Repérage des points de simulation du potentiel avec la terre lointaine sur la grille

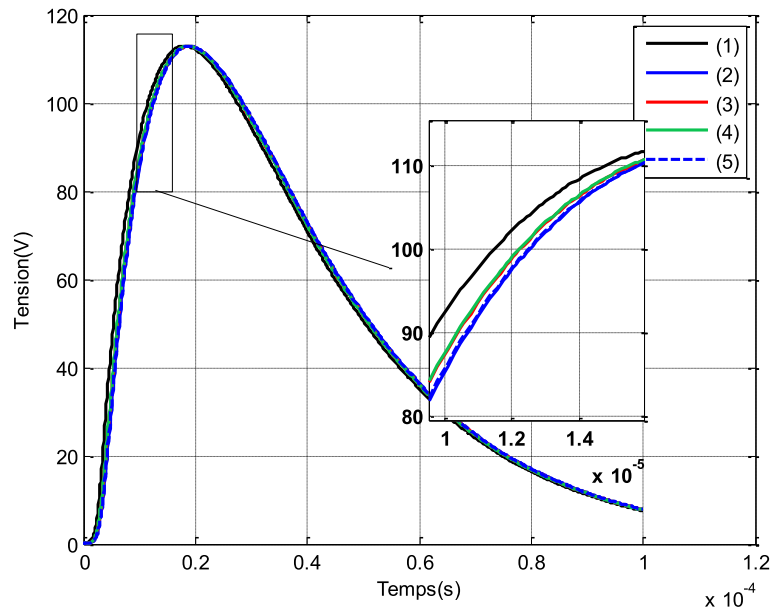


Fig. 157. Répartition de la tension en différents nœuds répartis sur la grille

Cette figure montre bien le caractère légèrement inductif de la grille et fait ressortir le fait que celle-ci reste néanmoins globalement équipotentielle en tout point à un instant  $t$  donné. Le contenu spectral de la foudre est trop bas en fréquence pour solliciter les capacités parasites de la grille vis-à-vis de la terre lointaine.

Par la suite, nous avons analysé la répartition du courant entre différentes grilles grâce à une étude fréquentielle des impédances, notamment en cas de rajout d'une inductance importante liée à une grande longueur de câble reliant entre eux les deux systèmes de grille (Z3) (Fig. 158).

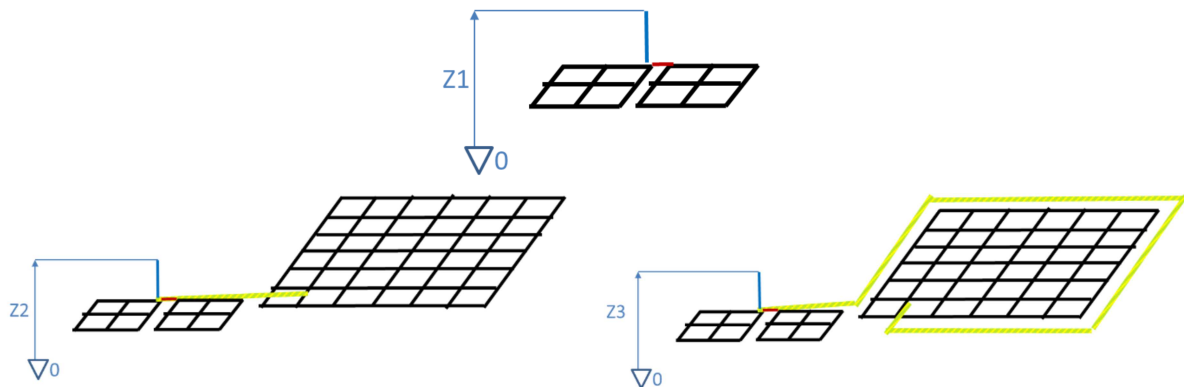


Fig. 158. Compétition entre les grilles - patte d'oie (Z1) et fond de fouille (Z2 et Z3)

La comparaison des trois configurations dans le domaine fréquentiel nous permet d'analyser les différentes situations grâce aux tracés suivants.

On remarquera que la patte d'oie (Z1) est très légèrement capacitive en haute fréquence, mais au-delà de la fréquence équivalente de la foudre.

On prendra garde au fait que le conducteur de liaison lorsqu'il est très grand participe aussi à évacuer du courant vers la terre lointaine, c'est pourquoi en basse fréquence la valeur résistive (Z3)

en basse fréquence est beaucoup plus basse qu'avec la connexion courte (Z2). En revanche en plus haute fréquence, le caractère inductif reprend le dessus par rapport à Z2.

Les ratio d'impédances donnent rapidement une idée de l'efficacité des dispositifs respectifs.

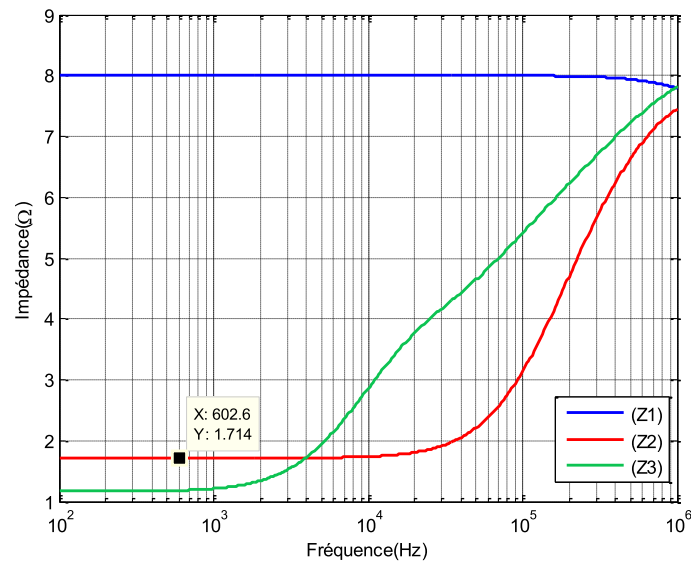


Fig. 159. Compétition des grilles entre elles

### 7.5.3 Evaluation du courant de mode commun dans l'installation

Il est possible de sommer les deux courants dans les fils de phase et neutre pour apprécier le courant de mode commun consécutif à l'onde de foudre.

Fig. 160 montre que dans la configuration étudiée, le DDR déclenche !

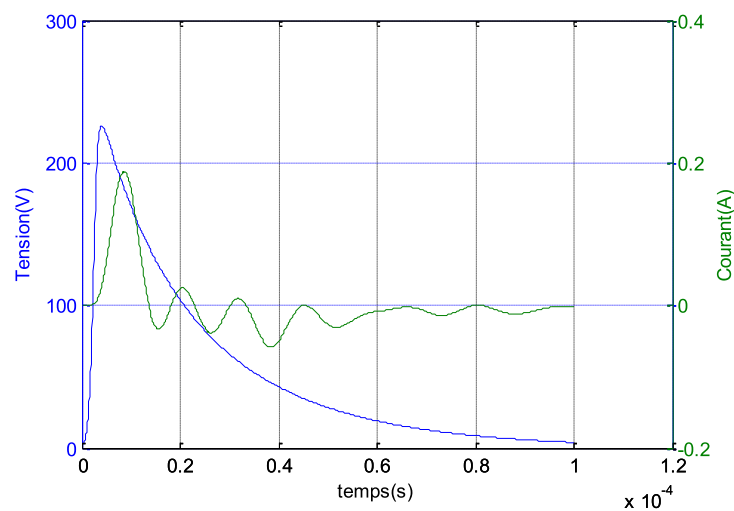
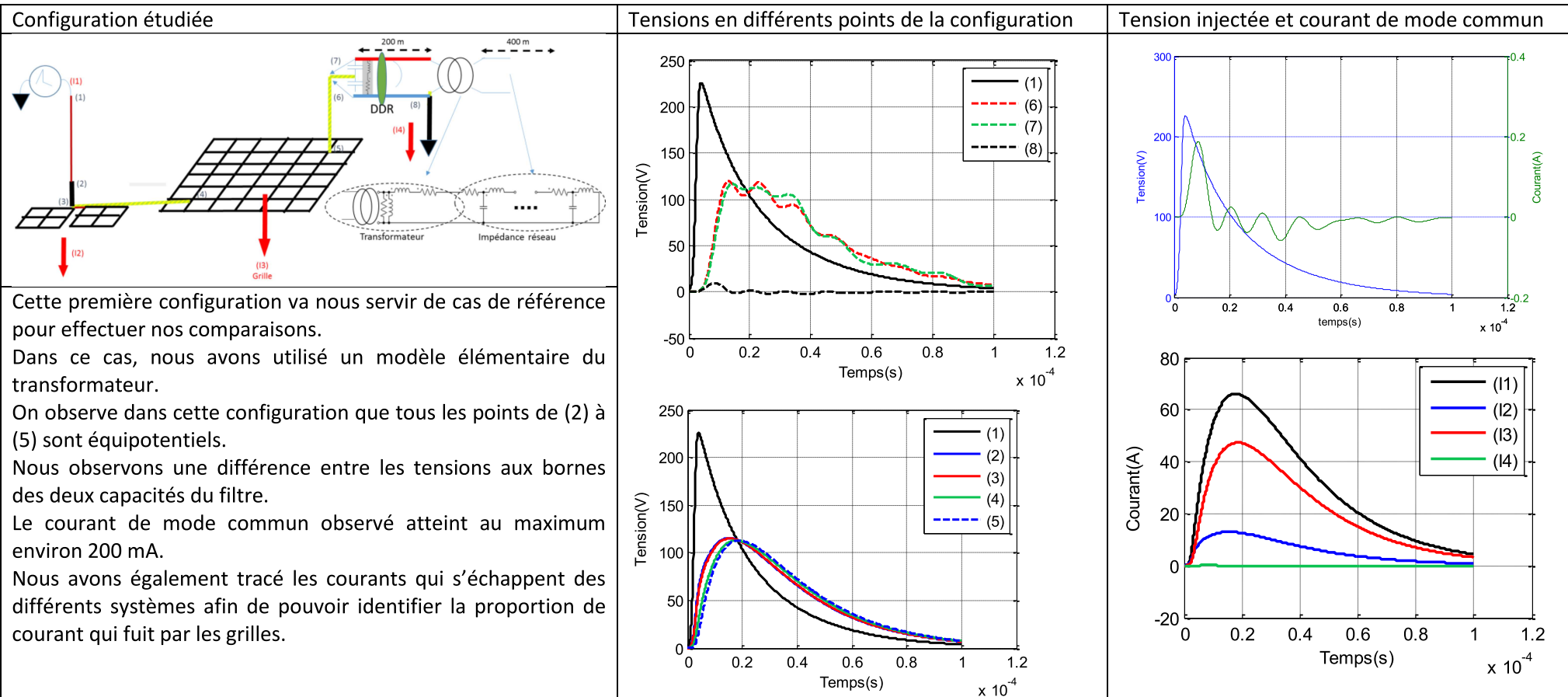


Fig. 160. Courant de mode commun engendré par l'onde de foudre

## 7.6 Quelques idées d'amélioration ou étude d'autres configurations

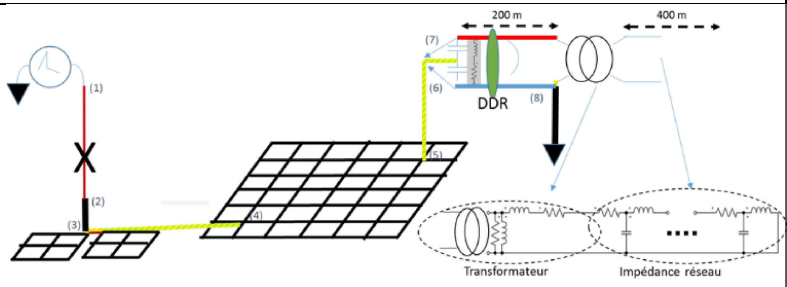
Nous avons rassemblé au sein du tableau suivant les différentes configurations de manière à faciliter la comparaison et l'analyse.



Installation complète avec modèle élémentaire du transformateur

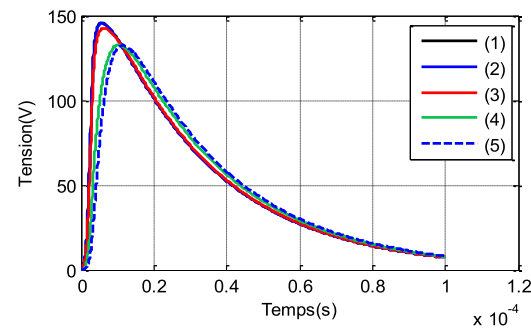
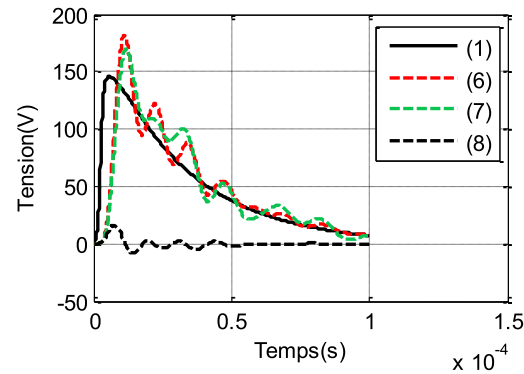


### Configuration étudiée

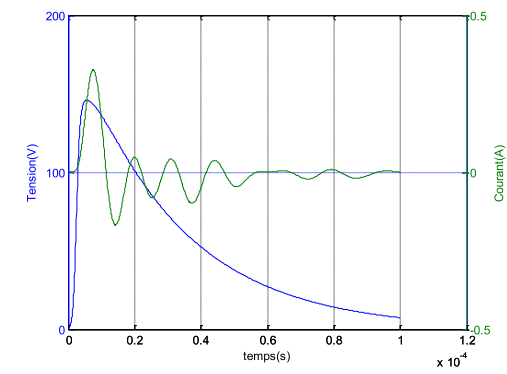


Dans ce cas le paratonnerre a été enlevé pour simuler le cas d'une agression foudre localisée au point (2). La suppression du paratonnerre et la simulation d'un choc de foudre frappant directement la terre n'est peut être pas réaliste, mais nous voulons mettre en lumière l'effet important que représente l'impédance série du paratonnerre dans la réponse du système. La tension résultante sur le pieu de terre conduisant à la patte d'oie, directement au bas du paratonnerre, se rapproche bien sûr de l'onde 1,2/50  $\mu$ s et sera donc assez « agressive » vis-à-vis du reste du système ! On observe ainsi une élévation des tensions aux bornes des capacités du filtre ainsi qu'une augmentation du courant de mode commun.

### Tensions en différents points de la configuration

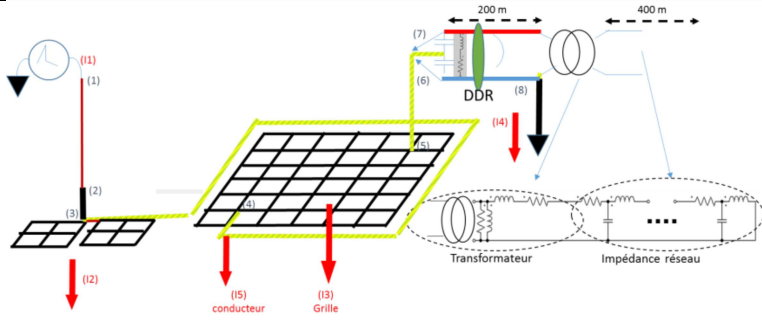


### Tension injectée et courant de mode commun



Paratonnerre enlevé, modèle élémentaire du transformateur

### Configuration étudiée



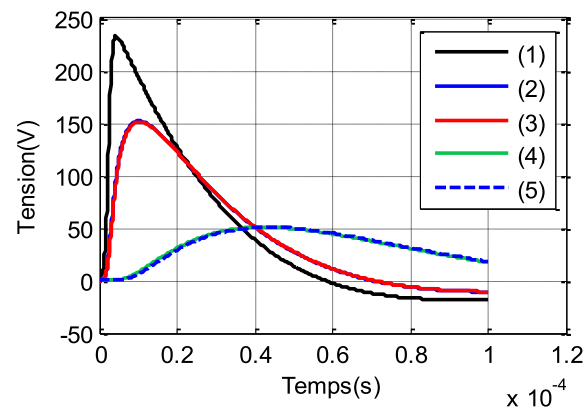
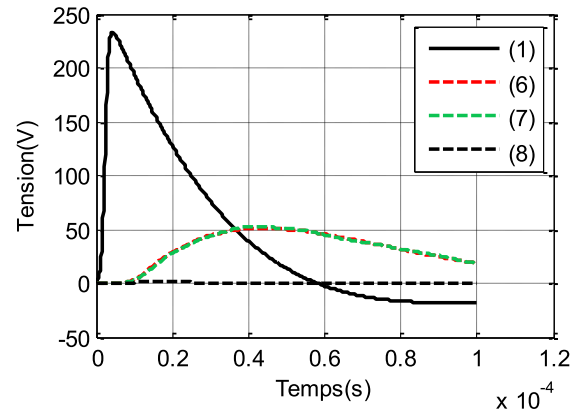
Par rapport au cas de référence, nous avons ajouté un câble long entre les deux systèmes de grilles pour augmenter l'impédance de liaison entre eux. Ce câble non seulement présente une inductance (environ 87  $\mu\text{H}$ ) mais aussi participe à l'évacuation des courants dans la terre.

Dans cette configuration, les tensions observées sont plus élevées au niveau de la patte d'oie qu'au niveau de la grille et des deux capacités du filtre.

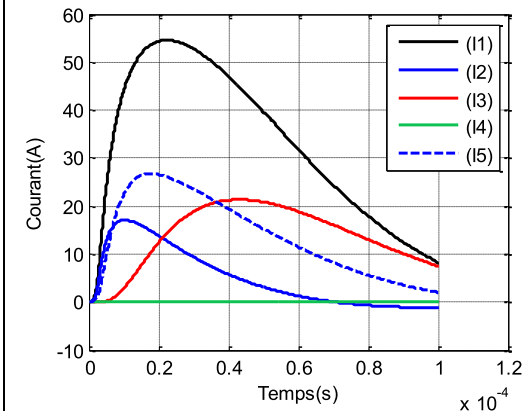
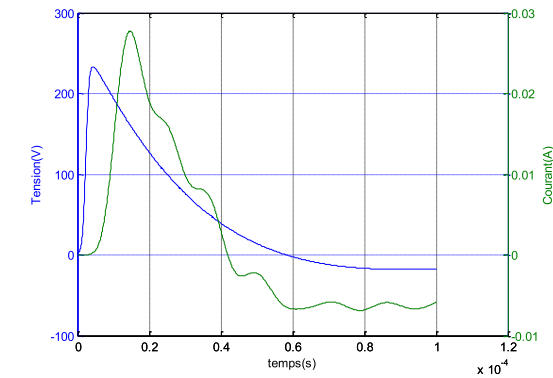
Le courant de mode commun a lui aussi diminué.

En revanche, on assiste à une répartition différente (et plus équilibrée) de la quantité de courant qui fuit par les différents constituants.

### Tensions en différents points de la configuration

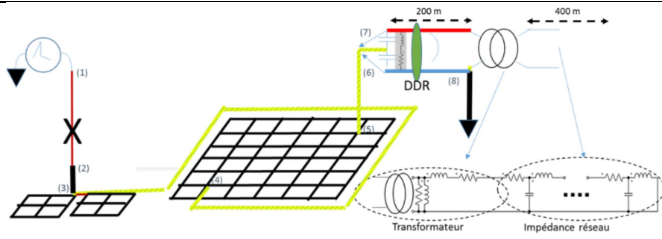


### Tension injectée et courant de mode commun



Installation complète, modèle élémentaire du transformateur et ajout d'un câble de 40 m de long

### Configuration étudiée

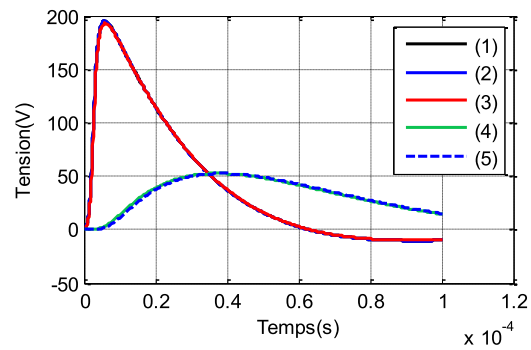
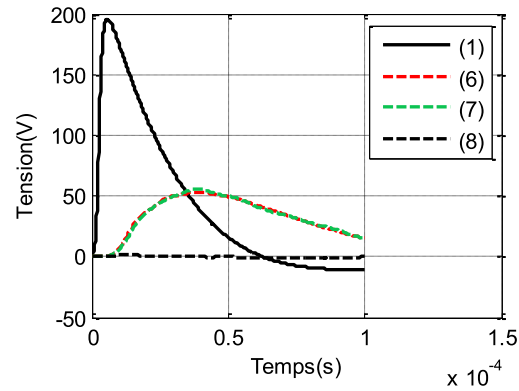


Par rapport à la configuration précédente, la paratonnerre a été enlevé. L'agression arrive directement au niveau de la patte d'oie.

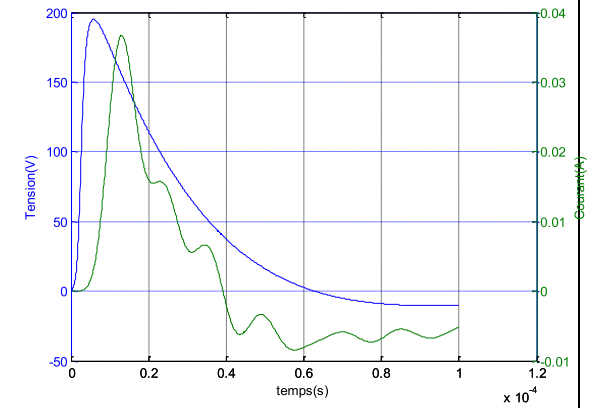
Par rapport à une liaison courte entre les deux circuits, nous observons que l'insertion de ce câble représentant une forte inductance bloque l'agression.

Tout s'évacue par la patte d'oie.

### Tensions en différents points de la configuration

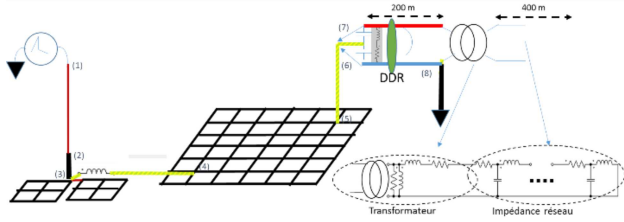


### Tension injectée et courant de mode commun



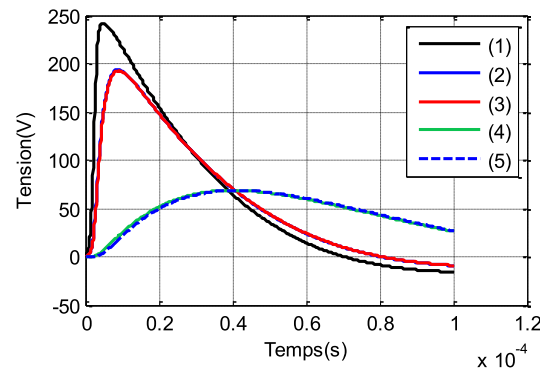
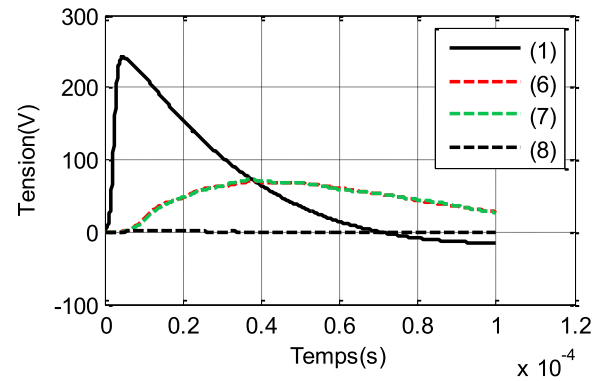
Paratonnerre enlevé, modèle élémentaire du transformateur, ajout d'un câble de 40m de long

### Configuration étudiée

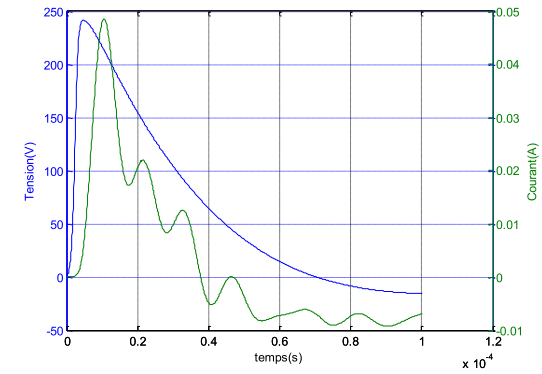


En pratique il est possible de rajouter une inductance pour séparer, dans le domaine des « hautes fréquences », les deux circuits tout en maintenant l'équipotentialité à 50 Hz. Sur le plan de la simulation, cela conduit aux mêmes observations que dans le cas du rajout d'un câble de liaison long entre les deux systèmes de grille. Cette solution est parfois mise en pratique dans des installations sensibles (« bars filter »).

### Tensions en différents points de la configuration

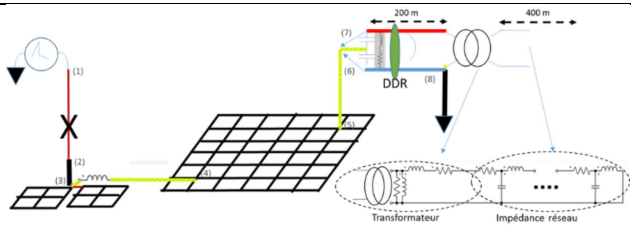


### Tension injectée et courant de mode commun



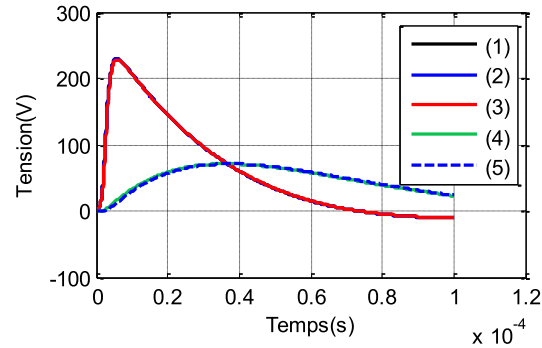
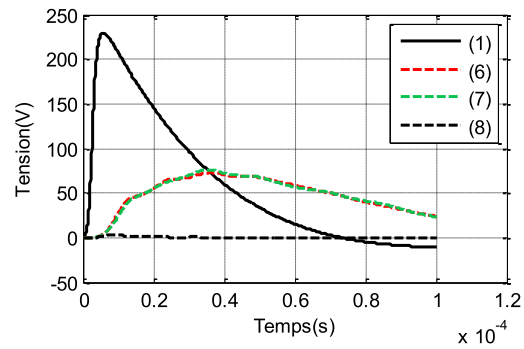
Modèle élémentaire du transformateur, insertion d'une inductance de 100μH entre les deux systèmes de grilles

### Configuration étudiée

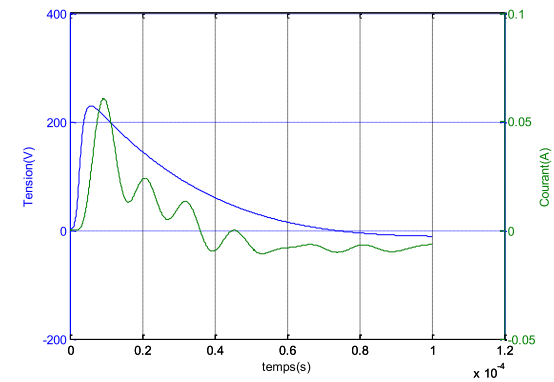


Dans cette configuration, l'agression arrive directement au niveau de la patte d'oie est évacuée par elle, empêchée par l'inductance rajoutée entre les deux systèmes de grilles.

### Tensions en différents points de la configuration



### Tension injectée et courant de mode commun



Paratonnerre enlevé, modèle élémentaire du transformateur, ajout d'une inductance de 100 µH entre les deux systèmes de grilles

# Conclusion

## 8 Conclusion

Le travail présenté dans ce manuscrit constitue, par la capitalisation des modèles de nombreux composants constitutifs du réseau d'un bâtiment (modélisation des convertisseurs d'électronique de puissance encore absente, mais à venir dans la thèse suivante) marque une étape importante. Jusqu'à présent le Laboratoire G2Elab, ne s'était que peu intéressé à la modélisation des conducteurs dans la terre et dans la problématique de la distribution d'énergie dans le bâtiment, cette dernière est devenue totalement incontournable. De nombreux travaux ont été analysés lors de la phase bibliographique, mais aucun d'entre eux n'a fait le lien comme nous avons pu le faire avec la méthode PEEC que le Laboratoire développe depuis plus de 20 ans avec succès pour la modélisation des systèmes hétérogènes englobant beaucoup d'air et rendant de ce fait les éléments finis peu performants. Nombreuses formulations complètement inédites ont été mises au point lors de cette étape et le solveur circuit d'InCa 3D est compatible, a priori, pour accueillir nos modèles de conducteurs enterrés très rapidement et sera bien sûr plus performant que la migration dans un logiciel comme SPICE. Néanmoins cette dernière alternative reste très agréable grâce à sa versatilité et la possibilité d'introduire par exemple un schéma de convertisseur d'électronique de puissance complet aux côtés d'un câblage très complexe de bâtiment.

Ces travaux, en reprenant la base en vue d'une utilisation concrète ont aussi mis en évidence d'une part leur insuffisance et la nécessité de les compléter ou de les envisager sous un autre angle si l'on veut être capable de simuler un bâtiment complet impliquant de multiples équipements d'autre part. Par ailleurs, nous nous sommes aperçus que des grandeurs comme les densités de courant sortantes du conducteurs paraissent mal évaluées dans toutes les publications examinées et nous travaillons aujourd'hui à corriger ce problème qui heureusement n'a pas d'impact sur les valeurs globales de la conductance du conducteur vis-à-vis de la terre lointain.

De nombreuses pistes d'amélioration ou d'investigation ont été mises à jour. L'une d'entre elles explorée actuellement dans la thèse de Tamiris Grossl Bade et qui fait pour l'instant cruellement défaut est une meilleure prise en compte des phénomènes de propagation comme l'exemple traité dans le dernier chapitre le fait ressortir assez fortement. Par ailleurs n'oublions pas que cet exemple n'est pas très exigeant en terme de fréquence car la foudre reste un phénomène basse fréquence comparativement aux perturbations engendrées par les commutations des convertisseurs statiques surtout avec les semiconducteurs modernes (SiC voire GaN en préparation). Dans cet exemple, nous avons résolu le problème correctement mais de manière peu satisfaisante.

Enfin, nous avons également découvert les très grandes difficultés à faire des mesures dans la terre, ce qui explique aussi au passage le peu de validation expérimentale dans les travaux que nous avons lus... Là aussi encore plusieurs aspects à approfondir, mais les mesures que nous avons effectuées ont permis de corroborer globalement nos résultats de modélisation.

Pour conclure, il reste encore énormément de travail (en terme de construction de modèles pour les divers composants impliqués) pour envisager de construire le réseau électrique d'un bâtiment grâce au maquettage virtuel, mais les résultats obtenus lors de nos simulations système sont vraiment très encourageants...

# Bibliographie



## 9 Bibliographie

- [1] C. Alain and S. Daniel, "Rapport les terres roles performances cablages sur les systèmes."
- [2] R. Scheich, "Caractérisation et prédétermination des perturbations électromagnétiques conduites dans les convertisseurs de l'électronique de puissance," Thèse soutenue à l'Univ. Grenoble Alpes 21 octobre 1993.
- [3] B. Revol, "Modélisation et optimisation des performances CEM d'une association variateur de vitesse – machine asynchrone," Thèse soutenue à l'Univ. Grenoble Alpes 21 novembre 2003.
- [4] J. Aimé, "Rayonnement des convertisseurs statiques . Application à la variation de vitesse," Thèse soutenue à l'Univ. Grenoble Alpes 13 mars 2009.
- [5] C. R. Paul, *Analysis of Multiconductor Transmission Lines*. Wiley-IEEE Press, 2007.
- [6] J.-P. Keradec, "Transformateurs HF à n enroulements Identification expérimentale," *Tech. l'Ingénieur*, vol. D3059, no. 0, 2014.
- [7] "Intersections, les schémas de liaison à la terre-synthèse des cahiers techniques n°172, 173 et 177 Schneider Electric."
- [8] P. G. Laurent, "Les Bases Générales de la Technique des Mises à la Terre dans les Installations Electriques." Electricité de France, 1950.
- [9] "H115 : Principes de conception et de réalisation des mises à la terre," *EDF NI 115*, 1984.
- [10] E. D. Sunde, *Earth Conduction Effects in Transmission Systems*. New York, 1949.
- [11] A. P. Meliopoulos and M. G. Moharam, "Transient Analysis of Grounding Systems," *IEEE Trans. Power Appar. Syst.*, vol. PAS-102, no. 2, pp. 389–399, 1983.
- [12] A. d. Papalexopoulos and A. P. S. Meliopoulos, "Frequency Dependent Characteristics of Grounding Systems," *IEEE Transactions on Power Delivery*, no. 4, pp. 1073–1081, 1987.
- [13] M. Ramamoorthy, S. Parameswaran, and D. Mukhedkar, "Transient performance of grounding grids," *IEEE Transactions on Power Delivery*, vol. 4, no. 4, pp. 2053–2059, 1989.
- [14] A. Geri, "Behaviour of grounding systems excited by high impulse currents: the model and its validation," *IEEE Trans. Power Delivery*, vol. 14, no. 3, pp. 1008–1017, 1999.
- [15] O. A. F. J. Cidras, and J. L. del Alamo, "Frequency-Dependent Grounding System Calculation by Means of a Conventional Nodal Analysis Technique," *IEEE Trans. Power Delivery*, vol. 14, no. 3, pp. 873–878, 1999.
- [16] R. F. Harrington, "Matrix Methods for Field Problems," *Proc. IEEE*, vol. 55, no. 2, pp. 136–149, 1967.
- [17] L. Grcev and F. Dawalibi, "An Electromagnetic model for transients in grounding systems," *IEEE Trans. Power Delivery*, vol. 5, no. 4, 1990.
- [18] F. Dawalibi and D. Mukhedkar, "Optimum design of substation grounding in a two layer earth structure part: III Study of grounding grids performance and new electrodes configuration," *Power Appar. Syst. IEEE Trans.*, no. 2, 1975.
- [19] F. P. Dawalibi, J. Ma, and R. D. Southey, "Behavior of grounding systems in multilayer soils: A parametric analysis," *IEEE Trans. Power Deliv.*, vol. 9, no. 1, pp. 334–362, 1994.

- [20] V. C. Silva, L. B. Martinho, J. R. Cardoso, M. Leite, P. Filho, S. Luis, L. Verardi, U. D. S. P. Politécnica, and S. P. Sp, "Efficient Modeling of Thin Wires in a Lossy Medium by Finite Elements Applied to Grounding Systems," vol. 47, no. 5, pp. 966–969, 2011.
- [21] P. Sarajcev and S. Vujevic, "A review of methods for grounding grid analysis," *SoftCOM 2009 - 17th Int. Conf. Software, Telecommun. Comput. Networks*, 2009.
- [22] R. Verma and D. Mukhedkar, "Impulse Impedance of Buried Ground Wire," *IEEE Trans. Power Appar. Syst.*, vol. PAS-99, no. 5, pp. 2003–2007, 1980.
- [23] Y. Liu, N. Theethayi, and R. Thottappillil, "An Engineering Model for Transient Analysis of Grounding System Under Lightning Strikes: Nonuniform Transmission-Line Approach," *IEEE Trans. Power Deliv.*, vol. 20, no. 2, pp. 722–730, Apr. 2005.
- [24] R. Andolfato, B. L. and L. Fellin, "A Wide Frequency Range Computation Code for Overhead and Buried Conductor System." (ICHQP - 1998) .
- [25] L. D. Grcev, "Computer analysis of transient voltages in large grounding systems," *IEEE Trans. Power Deliv.*, vol. 11, no. 2, pp. 815–823, Apr. 1996.
- [26] E. Zdravevski, V. Arnautovski-Toseva, and L. Grcev, "Application of Discrete complex images method in calculation of Sommerfeld integrals," no. September, pp. 2–5, 2015.
- [27] T. Takashima, T. Nakae, and R. Ishibashi, "Calculation of Complex Fields in Conducting Media," *IEEE Trans. Electr. Insul.*, vol. EI-15, no. 1, pp. 1–7, 1980.
- [28] S. Visacro and A. Soares, "HEM: A model for simulation of lightning-related engineering problems," *IEEE Trans. Power Deliv.*, vol. 20, no. 2 I, pp. 1206–1208, 2005.
- [29] F. Dawalibi, "Electromagnetic Fields Generated by Overhead and Buried Short Conductors Part 1 - Single Conductor," *IEEE Trans. Power Deliv.*, vol. 1, no. 4, pp. 105–111, 1986.
- [30] R. Andolfato, L. Bernardi, and L. Fellin, "Aerial and grounding system analysis by the shifting complex images method," *IEEE Trans. Power Deliv.*, vol. 15, no. 3, pp. 1001–1009, 2000.
- [31] M. Heimbach and L. D. Grcev, M. Heimbach, and L. D. Grcev, "Grounding System Analysis in Transients Programs Applying Electromagnetic Field Approach," *IEEE Trans. Power Deliv.*, vol. 12, no. 1, pp. 4–5, 1997.
- [32] S. Visacro and F. H. Silveira, "The Impact of the Frequency Dependence of Soil Parameters on the Lightning Performance of Transmission Lines," *IEEE Trans. Electromagn. Compat.*, vol. 57, no. 3, pp. 434–441, 2015.
- [33] "TRAGSYS : Suite Logicielle." [Online]. Available: <http://www.tragsys.com/>.
- [34] "CDEGS : suite logicielle." [Online]. Available: <http://www.sestech.com/French/Products/SoftPackages/CDEGS.htm>.
- [35] X. LEGRAND, "Modélisation des systèmes de mise à la terre des lignes électriques soumis à des transitoires de foudre," Thèse de l'école centrale de Lyon, Décembre 2007.
- [36] "TOTBem: suite logiciel." [Online]. Available: <http://www.salome-platform.org/>.
- [37] C. R. Paul, *Introduction to Electromagnetic Compatibility Second Edition* .
- [38] R. G. Olsen, "A comparison of exact and quasi-static methods for evaluating grounding systems at high frequencies," *IEEE Trans. Power Deliv.*, vol. 11, no. 2, 1996.

- [39] L. Grcev and S. Grceva, "Comparison between exact and quasi-static methods for HF analysis of horizontal buried wires," *IEEE Trans. Electromagn. Compat.*, vol. 51, no. 4, pp. 1051–1054, 2009.
- [40] T. Steinmetz, S. Kurz, and M. Clemens, "Domains of validity of quasistatic and quasistationary field approximations," *COMPEL Int. J. Comput. Math. Electr. Electron. Eng.*, vol. 30, no. 4, pp. 1237–1247, 2011.
- [41] F. P. Dawalibi, "Modern Computational Methods for the Design and analysis of power system Grounding," *proceedin. POWERCON '98*, pp. 122–126, 1998.
- [42] G. Papaiz-Garbini, L. Pichon, M. Cucchiaro, and N. Haddad, "Calcul des élévations de potentiel de sol en contexte ferroviaire – Applications aux multiconducteurs," *CEM2014, Clermont-Ferrand 2014*.
- [43] V. Arnautovski-Toseva and L. Grcev, "Electromagnetic analysis of horizontal wire in two-layered soil," *J. Comput. Appl. Math.*, vol. 168, no. 1–2, pp. 21–29, Jul. 2004.
- [44] T. Kawase, "Calculation of earth resistance for a deep-driven rod in a multi-layer earth structure," *IEEE Trans. Power Deliv.*, vol. 6, no. 2, pp. 608–614, 1991.
- [45] M. Lefouili, K. Kerroum, and K. El Khamlichi Drissi, "Hybrid approach for modeling transient em fields generated by large earthing systems," *Ann. des Telecommun. Telecommun.*, vol. 64, no. 5–6, pp. 349–357, 2009.
- [46] Z. Gouichiche, J. Roudet, and E. Clavel, "Analysis of Transient Voltage in Buildings Grounding System Using a Modified Image Method," *EUROEM Symp. London*, Jul. 2016.
- [47] V. Arnautovski-Toseva, L. Grcev, and K. El Khamlichi Drissi, "High frequency electromagnetic analysis of horizontal grounding conductor and near-by passive parallel conductor within two-layer soil," *2007 15th Int. Conf. Software, Telecommun. Comput. Networks, SoftCOM 2007*, pp. 111–115, 2007.
- [48] R. W. Hamming, "Numerical Methods for Scientists and Engineers," p. 2nd ed. New York: McGraw-ed. Hill, ed. 1973, p. 620–622.
- [49] F. W. Grover, *Inductance Calculations: Working Formulas and Tabela.*, Dover Edit. New-York, 1962.
- [50] E. Clavel, "Vers un outil de conception de câblage : le logiciel InCa," Thèse de l'Univ. Grenoble Alpes soutenue le 21 Novembre 1996.
- [51] F. Costa, "CEM en électronique de puissance Réduction des perturbations , simulation," *Tech. l'Ingénieur*, vol. 33, no. 0, pp. 0–21, 2013.
- [52] J.L. Schanen, "Intégration de la compatibilité électromagnétique dans la conception de convertisseurs en électronique de puissance," Thèse de L'Univ. Grenoble Alpes soutenue le 20 Janvier 1994.
- [53] D. . Garrett and J. G. Pruitt, "Problems Encountered With the Average Potential Method of Analyzing Substation Grounding Systems," *IEEE Trans. Power Appar. Syst. Vol. PAS-104, No. 12, December 1985*.
- [54] L. Grcev, "High-frequency performance of ground rods in highly resistive soil," in *Proc of GROUND 2000*, 2000, pp. 85–89.
- [55] A. M. Mousa, "Soil ionization gradient associated with discharge of high currents into

- concentrated electrodes," *IEEE Trans. Power Deliv.*, vol. 9, no. 3, pp. 1669–1677, 1994.
- [56] *Guide to Procedures for Estimating the Lightning Performance of Transmission Lines*. October 1991.
- [57] Y. Liu, "Transient Response of Grounding Systems Caused by Lightning: Modelling and Experiments," *Sci. Technol.*, p. 90, 2004.
- [58] Z. Li, Y. Yin, C. Zhang, and L. Zhang, "A Mathematical Model for the Transient Lightning Response from Grounding Systems," *Progress In Electromagnetics Research B*, vol. 57, no. 15, pp. 47–61, 2014.
- [59] D. L. P. Sarajcev, S. Vujevic, "Time-Harmonic current distribution on conductor grid in horizontally stratified multi layer medium," *Progress In Electromagnetics Research B*, vol. 31, no. May, pp. 67–87, 2011.
- [60] M. N. Guimarães, L. Araujo, R. V Castro, L. F. D. Santos, M. H. M. Vale, and S. Visacro, "Impulse Response of Grounding Grids: Experimental versus Simulated Results," *Light. Prot. (ICLP), 2012 Int. Conf. on, Vienna, 2012, pp. 1-4.*, pp. 6–9, 2012.
- [61] M. Jinxi and F. P. Dawalibi, "Influence of inductive coupling between leads on ground impedance measurements using the Fall-of-Potential method," *IEEE Trans. Power Deliv.*, vol. 16, no. 4, pp. 739–743, 2001.
- [62] S. Wang, J. He, B. Zhang, R. Zeng, and S. Member, "Time-Domain Simulation of Small Thin-Wire Structures Above and Buried in Lossy Ground Using Generalized Modified Mesh Current Method," *IEEE Trans. Power Deliv.*, vol. 26, no. 1, pp. 369–377, 2011.
- [63] "Guide de la mesure de la terre, Chauvin&Arnoux, Ed. 4, 2013, [http://www.chauvinarnoux.com/sites/default/files/D00VDU62\\_0.PDF](http://www.chauvinarnoux.com/sites/default/files/D00VDU62_0.PDF)."
- [64] "F. Wenner, « A method of Measuring Earth Resistivity"; Bull, National Bureau of Standards, Bull 12(4) 258, 478-496; 1915/16."

# Annexes

## 10 Annexes

### 10.1 Démonstration pour le cas d'une terre non uniforme à deux couches.

Dans le cas de présence d'une interface, on a démontré l'expression de la tension pour le cas d'une interface entre deux couches. Ceci nous a permis de faire l'application pour le cas d'une interface terre-air, et les expressions obtenus sont nous permette de déduire la tension en n'importe quelle point dans les deux milieux. La figure A1 présente le cas d'une injection ponctuelle dans la première couche de la terre noté par I. Le point d'observation noté M se situe dans la première couche dans le développement fait dans cette partie.

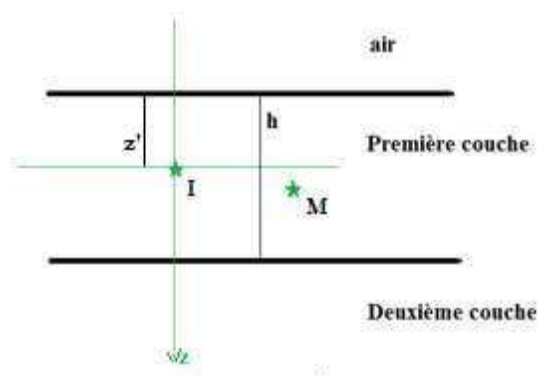


Fig.A1 injection ponctuelle dans un milieu a deux couches

Le potentiel créé par une injection ponctuelle dans un milieu uniforme est donné par (t)

$$V_0 = \frac{I}{4\pi\sigma_1} \int_0^{\infty} e^{-\lambda|z|} J_0(\lambda) \partial\lambda \quad (\text{eq.1})$$

On écrit les potentiels crée par un point j(R,z) dans :

- Un point de l'air en  $V_{10}$
- Un point dans la première couche en  $V_{11}$
- Un point dans la deuxième couche en  $V_{12}$

Les tensions dans les différénetes couches, créés par une injection ponctuelle dans la premiere couche sont données par

$$\begin{cases} V_{10} = I \int_0^{\infty} A_0 e^{-\lambda z} + B_0 e^{\lambda z} J_0(\lambda) \partial\lambda \\ V_{11} = V_0 + I \int_0^{\infty} A_1 e^{-\lambda z} + B_1 e^{\lambda z} J_0(\lambda) \partial\lambda \\ V_{12} = I \int_0^{\infty} A_2 e^{-\lambda z} + B_2 e^{\lambda z} J_0(\lambda) \partial\lambda \end{cases} \quad (\text{eq.2})$$

L'identification des différents coefficients est faite en exploitant les conditions aux limites des trois milieux. L'identification est faite de la même manière que précédemment.

Prenant un repère fixé sur le point d'injection  $l$ , on peut donner les différentes conditions aux limites.

$$\begin{aligned}
 Z \rightarrow -\infty & & V_{10} & \rightarrow 0 \\
 Z \rightarrow -Z' & & V_{10} & = V_{11} \\
 Z \rightarrow -Z' & & \sigma_1 \frac{\partial V_{11}}{\partial Z} & = \sigma_2 \frac{\partial V_{12}}{\partial Z} \\
 Z \rightarrow +\infty & & V_{12} & \rightarrow 0 \\
 Z \rightarrow h - Z' & & V_{11} & = V_{12} \\
 Z \rightarrow h - Z' & & \sigma_1 \frac{\partial V_{11}}{\partial Z} & = \sigma_2 \frac{\partial V_{12}}{\partial Z}
 \end{aligned} \tag{eq.3}$$

L'identification de l'ensemble des équations (eq.2) avec les conditions aux limites (eq.3) permet de déterminer les inconnus. Donnant ceux pour le cas de la première couche.

$$\begin{aligned}
 A_1 &= -\frac{k_{01}}{4\pi\bar{\sigma}_1} e^{-2\lambda Z'} + \frac{k_{12}}{4\pi\bar{\sigma}_1} \frac{-k_{01}e^{-2\lambda h} + e^{-2\lambda(h+Z')}k_{01}^2}{e^{-2\lambda h}k_{12}k_{01} + 1} \\
 B_1 &= \frac{1}{4\pi\bar{\sigma}_1} \frac{e^{-2\lambda(h-Z')}k_{12} - e^{-2\lambda h}k_{12}k_{01}}{e^{-2\lambda h}k_{12}k_{01} + 1}
 \end{aligned} \tag{eq.4}$$

Et par suite la tension dans la première couche est donné par :

$$V(r, r') = \frac{1}{4\pi\bar{\sigma}_1} \int_0^\infty (e^{-\lambda|Z|} - k_{01}e^{-\lambda(2Z'+Z)} + f(\lambda)[k_{01}^2e^{-\lambda(2h+2Z'+Z)} - k_{01}e^{-\lambda(2h+Z)} + e^{-\lambda(2h-2Z'-Z)}] - k_{01}e^{-\lambda(2h-Z)}) J_0(\lambda x) d\lambda \tag{eq.5}$$

Avec

$$f(\lambda) = \frac{k_{12}}{e^{-2\lambda h}k_{12}k_{01} + 1}$$

$$\bar{\sigma}_i = \sigma_i + j\omega\varepsilon_i$$

$$k_{01} = \frac{\bar{\sigma}_0 - \bar{\sigma}_1}{\bar{\sigma}_0 + \bar{\sigma}_1}$$

$$k_{12} = \frac{\bar{\sigma}_1 - \bar{\sigma}_2}{\bar{\sigma}_1 + \bar{\sigma}_2}$$

L'équation de la tension (eq.5) est sous la forme intégrale. Pour pouvoir faire l'exploitation selon le développement fait dans le « chapitre 5 » l'équation doit être écrite sous la forme d'intégrale de distance.

$f(\lambda)$  pourrait être approximé de deux façons

- En utilisant le développement en séries de Taylor, ou
- En utilisant « la méthode des images complexes » [48]

La première méthode nécessite un nombre important d'éléments pour converger vers la solution, tandis que la deuxième, qui repose sur le développement de  $f(\lambda)$  en séries de *Prony* au lieu de séries de Taylor, converge pour un nombre plus faible de valeurs. Le développement à faire est donné dans l'équation (eq.6)

$$f(\lambda) = \sum_i^N \alpha_i e^{\beta_i \lambda} \quad (\text{eq.6})$$

L'identification des paramètres  $\alpha_i$  et  $\beta_i$  se fait en résolvant l'équation (eq.7)

$$\frac{k_{12}}{e^{-2\lambda h} k_{12} k_{01} + 1} = \sum_i^N \alpha_i e^{\beta_i \lambda} \quad (\text{eq.7})$$

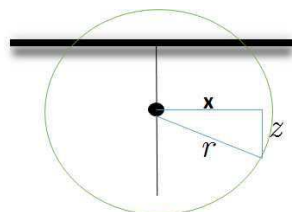
Généralement, en prenant un nombre d'éléments de  $N=2$ , on arrive à converger vers une solution de cette équation. Ceci consiste à fitter les courbes des deux fonctions, de droite et de gauche.

Une fois les paramètres et identifier l'équation (eq.5) s'écrit sous la forme

$$V(r, r') = \frac{1}{4\pi\sigma_1} \int_0^\infty (e^{-\lambda|z|} - k_{01} e^{-\lambda(2Z+Z)} + \sum_i^N \alpha_i e^{\beta_i \lambda} [k_{01}^2 e^{-\lambda(2h+2Z+Z)} - k_{01} e^{-\lambda(2h+Z)} + e^{-\lambda(2h-2Z-Z)} - k_{01} e^{-\lambda(2h-Z)}]) J_0(\lambda x) d\lambda \quad (\text{eq.8})$$

En utilisant la propriété de l'intégration de Lipschitz (eq.9), avec  $x$  et  $z$  comme défini dans la *fig.2*, on pourra écrire la solution finale de la tension.

$$\int_0^\infty e^{-z\lambda} J_0(\lambda x) d\lambda = \frac{1}{\sqrt{(z^2 + x^2)}} \quad (\text{eq.9})$$



*Fig.2: représentation de la décomposition*

Ainsi la tension en tous points du milieu 1 suite à une injection du même milieu est donné par



$$V(r, r') = \frac{1}{4\pi\sigma_1} \left( \frac{1}{R} - k_{01} \frac{1}{R'} + \sum_{i=1}^N \alpha_i \left( \frac{k_{01}^2}{R_1'} - \frac{k_{01}}{R_2'} + \frac{1}{R_3'} - \frac{k_{01}}{R_4'} \right) \right) \quad (\text{eq.10})$$

Avec :

$$\begin{aligned} R_1' &= \sqrt{x^2 + (z + (z_i - z'))^2} & R_2' &= \sqrt{x^2 + (z - (z_i - z'))^2} & z_i &= 2h - \beta_i \\ R_3' &= \sqrt{x^2 + (z + (z_i + z'))^2} & R_4' &= \sqrt{x^2 + (z - (z_i + z'))^2} \end{aligned}$$



## Résumé

Le bâtiment quel qu'il soit (industrie, tertiaire, domestique), s'électrifie toujours plus pour répondre entre autre au besoin de l'efficacité énergétique. Ainsi de nombreux équipements, en particulier d'électronique de puissance ou encore d'actionneurs sont présents et produisent des perturbations électromagnétiques tant conduites que rayonnées véhiculées ou propagées par les câblages électriques et dispositifs de protection, dimensionnés pour 50Hz et non les hautes fréquences. Ceci est à l'origine de la problématique CEM dans le bâtiment.

La méthodologie de modélisation proposée consiste à chercher un schéma équivalent pour chaque constituant ou composant d'une installation. L'accès aux paramètres localisés de chacun est un des points fort de la méthode, tout en permettant l'association avec d'autres composants (couplages). Les modèles ainsi générés sont implantés automatiquement dans un logiciel circuit, en l'occurrence Spice, permettant la résolution et l'association d'autres équipements électriques complexes.

La modélisation des différents composants, principalement le circuit de mise à la terre, permet la simulation et l'analyse de plusieurs configurations qui devraient nous permettre de dicter des règles de conception pour rendre plus robuste le bâtiment moderne fortement électrifié.

**Mots clés: Perturbation Foudre, Réseau électrique Bâtiment, CEM, Terre, Modélisation Numérique**

## Summary

In order to answer the need for energy efficiency, building, whatever it is (industrial, commercial, domestic), still electrifies more and more. Hence many equipment, in particular power electronic or actuators are introduced and produce conducted and radiated electromagnetic disturbances. They propagate via cabling and protection devices which have been sized for 50Hz and not for high frequencies generated by the equipment. This constitutes the EMC problematic for building.

The proposed modeling methodology is to evaluate an electrical equivalent circuit for each installation's component. Access to lumped parameters of each component is one of the highlights of this method, allowing the other components association (couplings). The generated models are implemented in a circuit software such as Spice, enabling the resolution and the association of other electrical components.

The modeling of the components, mainly the grounding circuit, allows the simulation of different configurations. The analysis of several configurations should help the elaboration of design rules to make today buildings more efficient.

**Key words: Lightning, Electrical Network in Building, EMC, Grounding system, Modelling method**