



**HAL**  
open science

# Expérimentation d'un gravimètre mobile léger et novateur pour la mesure du champ de gravité en fond de mer

Clément Roussel

► **To cite this version:**

Clément Roussel. Expérimentation d'un gravimètre mobile léger et novateur pour la mesure du champ de gravité en fond de mer. Géophysique [physics.geo-ph]. Conservatoire national des arts et métiers - CNAM, 2017. Français. NNT : 2017CNAM1099 . tel-01635884

**HAL Id: tel-01635884**

**<https://theses.hal.science/tel-01635884v1>**

Submitted on 15 Nov 2017

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

École Doctorale Sciences Pour l'Ingénieur, Géosciences, Architecture

Laboratoire Géomatique et Foncier

## THÈSE DE DOCTORAT

*présentée par* : Clément ROUSSEL

*soutenue le* : 19 juin 2017

*pour obtenir le grade de* : Docteur du Conservatoire National des Arts et Métiers

*Discipline* : Structure et évolution de la Terre et des autres planètes /  
*Spécialité* : Géomatique

**Expérimentation d'un gravimètre mobile léger et novateur pour la  
mesure du champ de gravité en fond de mer.**

### THÈSE dirigée par

Mme. MAÏA Marcia  
M. VERDUN Jérôme

*Directrice de recherche, CNRS*  
*Maître de conférences, CNAM*

### RAPPORTEURS

Mme. RENAUDIN Valérie  
M. DIAMENT Michel

*Directrice de recherche, IFSTTAR*  
*Physicien, IPGP*

### EXAMINATEURS

M. MOCQUET Antoine (Président du jury)  
Mme. LALANCETTE Marie-Françoise  
M. BONVALOT Sylvain  
M. MOREL Laurent  
M. CALI José (Membre invité)

*Professeur, LPGN*  
*Directrice technique de la recherche, SHOM*  
*Directeur de recherche, IRD*  
*Maître de conférences, CNAM*  
*Maître de conférences, CNAM*

*"We are here on Earth to help others.  
What the others are here for, I've no idea."  
W. H. Auden*



**Ifremer**

# Remerciements

Mes premiers remerciements s'adressent naturellement à Marcia, Jérôme et José, qui, en tant que membres de l'équipe encadrante de cette thèse, ont su me soutenir et me conseiller pendant ces trois années de travail. Je remercie particulièrement Marcia pour son incroyable expérience professionnelle et pour l'organisation sans faille de la mission d'expérimentation à bord de L'Europe, Jérôme pour son aide précieuse lorsque les difficultés mathématiques sont apparues ainsi que ses conseils pour la rédaction de ce mémoire et José pour son recul et sa vision historique sur le projet ainsi que pour ses remarques toujours constructives.

Je remercie également les membres de mon comité de suivi de thèse dont Marie-Françoise pour sa grande expérience dans le domaine de la gravimétrie marine ainsi qu'Antoine pour ses observations et ses conseils pertinents.

Je remercie la Région des Pays de la Loire et la Direction Générale de l'Armement pour le financement de ce travail de thèse ainsi que le CNES et le GRGS pour le soutien financier des deux mois qui ont précédé ma soutenance.

Je remercie également Jean-François et Fabien, sans qui le prototype instrumental n'aurait pu voir le jour, l'équipe scientifique et technique de l'IFREMER dont Marie-Edith, Patrick et Xavier pour l'aide précieuse qu'ils ont apportée lors de l'intégration et l'expérimentation du prototype, ainsi que l'équipage présent lors de la mission en Mer Méditerranée à bord de L'Europe.

Je tiens également à remercier l'ensemble du corps enseignant et le personnel de l'ESGT pour leur soutien et les nombreux moments passés en leur compagnie : Aïcha, Arnaud, Charles, Christelle, Christophe C, Christophe P, Danielle, Élisabeth B, Élisabeth S, Éric, Frédéric, Ghyslain, Hélène, Jean-Michel, Jérémie, Joëlle, Karine, Laurent M, Laurent P, Marie, Marlène, Mathieu, Michel, Nathalie C, Nathalie T, Nelly, Patricia, Sandra, Stéphane, Sylvie, Thierry, Vincent et Xavier.

Je remercie enfin Adèle, André, Behzad, Boris, Marcell, Paulo et Valentin pour avoir partagé une partie de mon aventure dans le bureau des doctorant.e.s et post-doctorant.e.s du laboratoire.

À toutes ces personnes, merci mille fois.

---

# Résumé

L'un des défis majeurs relevé par la gravimétrie moderne consiste en la détermination de modèles mathématiques et de cartes numériques du champ de gravité de la Terre dont la fiabilité est identique quelle que soit l'échelle spatiale considérée en domaines terrestre, littoral, marin et sous-marin. Aujourd'hui, les harmoniques de haut degré correspondant aux courtes longueurs d'onde du champ de gravité sont encore affectés de grandes incertitudes de par la diversité et les différences de précision et de résolution des techniques gravimétriques permettant de les atteindre. Le principal obstacle à l'amélioration de la résolution et de la précision des modèles vient de ce que les systèmes de gravimétrie et gradiométrie mobiles, seuls instruments qui permettent des acquisitions à précision et à résolution spatiale homogènes, demeurent encore encombrants et gros consommateurs d'énergie, ce qui interdit en particulier leur installation sur des drones terrestres, aériens, navals de surface et sous-marins. L'intérêt de ce type de porteur est de pouvoir opérer des acquisitions très proches des sources ce qui accroît considérablement la restitution des variations locales de la gravité. Le développement d'un nouveau type de capteur gravimétrique à faible encombrement et moindre consommation énergétique apparaît donc indispensable pour répondre à la problématique posée par la mesure des courtes longueurs d'onde du champ de gravité. Dans le cadre de ses activités de recherche en gravimétrie, le Laboratoire de Géomatique et Foncier (Cnam/GeF EA 4630), en collaboration avec le Laboratoire de Recherche en Géodésie (LAREG) de l'Institut National de l'information Géographique et forestière (IGN), le Laboratoire Domaines Océaniques (LDO, UMR CNRS 6538, UBO), l'Institut Français de Recherche pour l'Exploitation de la Mer (IFREMER) et le Service Hydrographique et Océanographique de la Marine (SHOM), développe un instrument novateur qui permet la mesure dynamique du champ de gravité terrestre en fond de mer.

---

Le système baptisé GraviMob (système de Gravimétrie Mobile) ne nécessite pas de plateforme stabilisée et se fixe rigidement dans l’habitacle du véhicule porteur, en l’occurrence, un sous-marin autonome. Le cœur du système est constitué de triades d’accéléromètres, permettant une mesure vectorielle de l’accélération de pesanteur. Un traitement des mesures par filtrage de Kalman, intégrant les données de position et d’orientation du véhicule porteur, réalise la restitution du champ de pesanteur dans un référentiel adapté à son interprétation et son exploitation. Ce prototype instrumental a été expérimenté en Mer Méditerranée au cours de l’année 2016, à l’aplomb de profils gravimétriques de surface acquis antérieurement par le SHOM. La comparaison du signal gravimétrique obtenu en fond de mer avec les données du SHOM indique une répétabilité de la tendance générale du signal gravimétrique à 5 mGal près.

Ce manuscrit aborde successivement, l’établissement de l’équation d’observation du système GraviMob, l’étalonnage et l’orientation des accéléromètres du capteur, la stratégie d’estimation du champ de pesanteur par un filtre de Kalman intégrant un modèle d’évolution des composantes du champ de pesanteur et un modèle d’observation tenant compte du bruit de mesure, le traitement et l’analyse des mesures acquises lors de son expérimentation en Mer Méditerranée, puis la comparaison du signal gravimétrique obtenu avec les données de référence.

**Mots clés :** gravimétrie vectorielle et mobile, accéléromètres électrostatiques, filtrage de Kalman unscented (UKF), véhicule autonome sous-marin (AUV), étalonnage

---

---

# Abstract

One of the major challenges of modern gravimetry consists in determining mathematical models and digital maps of the Earth's gravity field, the reliability of which is identical whatever the spatial scale considered in terrestrial, coastal, marine and submarine domains. Today, the harmonics of high degree corresponding to the short wavelengths of the gravity field are still affected by great uncertainties due to the diversity and the differences in precision and resolution of the gravimetric techniques making it possible to reach them. The main obstacle to improve the resolution and accuracy of models is that gravimetry and gradiometry mobile devices, the only instruments that allow homogeneous precision and spatial resolution acquisitions, are still bulky and energy-intensive, which prohibits their installation on terrestrial, aerial, surface and submarine drones. The interest of this type of carrier is to make acquisitions very close to the sources which considerably increases the restitution of the local variations of the gravity. The development of a new type of gravimetric sensor with small size and lower energy consumption appears therefore essential to answer the problematic posed by the measurement of the short wavelengths of the gravity field.

As part of its research in gravimetry, the Laboratoire Géomatique et Foncier (Cnam/GeF EA 4630), in collaboration with the Laboratory for Research Geodesy (LAREG) of the National Institute for Geographic and Forest Information (IGN), the Oceanic Domains Laboratory (LDO, UMR, CNRS 6538, UBO), the French Research Institute for the Exploitation of the Sea (IFREMER) and the Marine Hydrographic and Oceanographic Service (SHOM), develops an innovative instrument which allows the dynamic measurement of the Earth's gravity field in the subsea domain.

---

The system, called GraviMob (Gravimetry Mobile System), does not require a stabilized platform and is rigidly attached to the carrier vehicle, in this case an Autonomous Underwater Vehicle (AUV). The heart of the system consists of triads of accelerometers, allowing a vector measurement of the gravity. A Kalman filter, integrating the position and orientation data of the carrier vehicle, performs the estimation of the gravity field in a frame adapted to its interpretation. This instrumental prototype has been tested in the Mediterranean Sea during the year 2016. The comparison of the gravimetric signal obtained near the seabed with the surface gravimetric profiles, previously acquired by the SHOM, indicates a repeatability of the general trend of the gravimetric signal to within 5 mGal.

This manuscript deals successively with the establishment of the observation equation of the GraviMob system, the calibration and orientation of the accelerometers, the gravity field estimation strategy by a Kalman filter, integrating an evolution model of the gravity field components and an observation model taking the measurement noise into account, the processing and analysis of the measurements acquired during its experimentation in the Mediterranean Sea, then the comparison of the gravimetric signal obtained with the reference data.

**Keywords :** vector and mobile gravimetry, electrostatic accelerometers, autonomous underwater vehicle (AUV), unscented Kalman filtering (UKF), calibration

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>23</b>
<b>I Enjeux et technologies</b>	<b>25</b>
<b>1 Enjeux et état de l’art</b>	<b>27</b>
1.1 Les enjeux de la gravimétrie en milieu océanique . . . . .	27
1.2 État de l’art . . . . .	31
1.3 La gravimétrie vectorielle . . . . .	40
<b>2 Du LiMo-g au système GraviMob</b>	<b>43</b>
2.1 Expérience acquise du LiMo-g . . . . .	43
2.2 Introduction du système GraviMob . . . . .	49
2.3 Organisation du manuscrit . . . . .	52
<b>II Aspects théorique et instrumental</b>	<b>53</b>
<b>3 Équation de la gravimétrie mobile</b>	<b>55</b>
3.1 Repères, rotations et dérivation matricielle . . . . .	55
3.2 Cas général d’une seule triade accélérométrique . . . . .	64
3.3 Application au cas du système GraviMob . . . . .	68
3.4 Notions de gradiométrie mobile . . . . .	70

<b>4</b>	<b>Description du capteur accélérométrique</b>	<b>73</b>
4.1	Éléments constitutifs du capteur . . . . .	73
4.2	Conséquences du montage retenu . . . . .	77
4.3	Repères associés au capteur . . . . .	81
4.4	Données en sortie du capteur . . . . .	82
<b>5</b>	<b>Description du véhicule porteur</b>	<b>85</b>
5.1	L'AUV <i>Aster</i> <sup>x</sup> de l'IFREMER . . . . .	85
5.2	Stratégie de navigation . . . . .	87
5.3	Intégration du capteur accélérométrique . . . . .	90
5.4	Données en sortie de l'AUV . . . . .	96
<b>6</b>	<b>Étalonnage et orientation des mesures accélérométriques</b>	<b>99</b>
6.1	Principe de l'étalonnage . . . . .	99
6.2	Résolution par transformation de Helmert . . . . .	102
6.3	Méthode des multiplicateurs de Lagrange . . . . .	121
6.4	Stabilité du capteur dans l'AUV . . . . .	137
6.5	Conclusion sur l'étalonnage du capteur . . . . .	140
<b>III</b>	<b>Stratégie d'estimation du champ de pesanteur</b>	<b>143</b>
<b>7</b>	<b>Quantification des performances du système</b>	<b>145</b>
7.1	Modélisation des processus stochastiques . . . . .	146
7.2	Génération des données de référence . . . . .	155
7.3	Évaluation numérique de l'erreur . . . . .	162
<b>8</b>	<b>Filtrage de Kalman</b>	<b>169</b>
8.1	De l'estimateur optimal au filtre de Kalman . . . . .	169

## TABLE DES MATIÈRES

---

8.2	Algorithme du filtre de Kalman <i>unscented</i> . . . . .	174
8.3	Application au système GraviMob . . . . .	176
8.4	Simulations numériques . . . . .	183
<b>IV</b>	<b>Expérimentation du système GraviMob</b>	<b>189</b>
<b>9</b>	<b>Présentation de la campagne de mesures</b>	<b>191</b>
9.1	Déroulement de la mission . . . . .	192
9.2	Zones de levé et profils de référence . . . . .	195
9.3	Résumé des données acquises . . . . .	199
<b>10</b>	<b>Analyse des données</b>	<b>203</b>
10.1	Stabilité en température . . . . .	204
10.2	Comparaison et correction des accélérations spécifiques . . . . .	205
10.3	Estimation du bras de levier . . . . .	210
<b>11</b>	<b>Filtrage des données</b>	<b>215</b>
11.1	Filtrage de Kalman <i>unscented</i> . . . . .	215
11.2	Comparaison avec les données du SHOM . . . . .	224
	<b>Conclusion</b>	<b>231</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>237</b>
	<b>Annexes</b>	<b>247</b>
<b>A</b>	<b>Formulaire</b>	<b>247</b>
<b>B</b>	<b>Validation du filtre de Kalman <i>unscented</i></b>	<b>249</b>

## TABLE DES MATIÈRES

---

<b>C Complete gravity field of ellipsoidal prism</b>	<b>253</b>
<b>D Integration of a strapdown gravimeter in an AUV</b>	<b>271</b>
<b>E Liste des acronymes</b>	<b>281</b>
<b>F Glossaire</b>	<b>283</b>

# Liste des tableaux

3.1	Valeurs du demi-grand axe et de l'excentricité de l'ellipsoïde GRS80. . . . .	59
4.1	Caractéristiques physiques des accéléromètres électrostatiques. . . . .	76
4.2	Formatage du fichier des observations du capteur accélérométrique. . . . .	83
4.3	Valeurs des paramètres de la loi de transformation en température. . . . .	83
5.1	Formatage des données brutes de la centrale inertielle. . . . .	96
5.2	Formatage des données de navigation de l'AUV. . . . .	97
6.1	Expérimentation de la méthode de Helmert à neuf paramètres. . . . .	107
6.2	Résultats de la méthode de Helmert (19 janvier 2016) . . . . .	118
6.3	Résultats de la méthode de Helmert (21 janvier 2016) . . . . .	119
6.4	Expérimentation de la méthode des multiplicateurs de Lagrange. . . . .	126
6.5	Caractéristiques des séries de mesures statiques. . . . .	128
6.6	Méthode des multiplicateurs de Lagrange appliquée à la série n°1. . . . .	132
6.7	Méthode des multiplicateurs de Lagrange appliquée à la série n°2. . . . .	133
6.8	Valeurs des pentes déduites des résidus des séries n°3 et 4 . . . . .	136
6.9	Paramètres angulaires de la matrice $C_{b'}^b$ (19 janvier 2016)) . . . . .	138
6.10	Paramètres angulaires de la matrice $C_{b'}^b$ (21 janvier 2016)) . . . . .	139
7.1	Corrélation des mesures accélérométriques avec la température. . . . .	151

## LISTE DES TABLEAUX

---

7.2	Caractérisation du bruit blanc gaussien. . . . .	153
7.3	Accélérations induites par le mouvement de l'AUV. . . . .	162
7.4	Espérance et écart-type de l'erreur. . . . .	163
8.1	Expérimentation du filtre de Kalman <i>Unscented</i> . . . . .	185
9.1	Historique des opérations menées du 17 au 25 mars 2016. . . . .	192
9.2	Résumé des profils gravimétriques navigués. . . . .	200
10.1	Valeurs moyennes des composantes du terme lié au bras de levier. . . . .	206
10.2	Composantes moyennées des accélérations spécifiques (profil n°8). . . . .	207
10.3	Composantes moyennées des accélérations spécifiques (profil n°9). . . . .	207
10.4	Composantes moyennées des accélérations (profil n°8) après correction. . . . .	208
10.5	Composantes moyennées des accélérations (profil n°9) après correction. . . . .	208
10.6	Valeurs moyennes de l'accélération induite par le mouvement de l'AUV. . . . .	210
10.7	Valeurs moyennes des composantes du bras de levier. . . . .	211

# Table des figures

1.1	Cheminées hydrothermales. . . . .	28
1.2	Les satellites CHAMP, GRACE et GOCE. . . . .	31
1.3	Les satellites Topex/Poséidon, ENVISAT et OSTM/Jason-2. . . . .	32
1.4	Gravimètres absolu et relatif. . . . .	33
1.5	Les sous-marins Cyana et Nautille de l'IFREMER. . . . .	34
1.6	Gravimètres marins de la société <i>Micro-g LaCoste</i> . . . . .	35
1.7	Gradiomètre aéroporté 3D-FTG. . . . .	35
1.8	Ondulation du géoïde déduite du modèle EGM2008. . . . .	36
1.9	Système gravimétrique et gradiométrique japonais. . . . .	38
1.10	Schéma d'un algorithme d'estimation du champ de gravité. . . . .	38
1.11	Principe de la mesure vectorielle du champ. . . . .	42
2.1	Le capteur accélérométrique du LiMo-g. . . . .	44
2.2	Le capteur de position et d'attitude du LiMo-g. . . . .	44
2.3	Le vecteur bras de levier du LiMo-g. . . . .	45
2.4	La calibration du LiMo-g sur un point gravimétrique. . . . .	47
2.5	La mission de Domfront en Champagne. . . . .	47
2.6	Profil gravimétrique de la mission de Domfront. . . . .	47
2.7	Profils gravimétriques de la mission de Sainte-Maxime. . . . .	48
2.8	Le capteur accélérométrique du système GraviMob. . . . .	49

## TABLE DES FIGURES

---

2.9	La sphère étanche du capteur accélérométrique. . . . .	50
2.10	Le véhicule sous-marin autonome <i>Aster<sup>x</sup></i> de l'IFREMER. . . . .	51
3.1	Orientation quelconque de deux repères $a$ et $b$ . . . . .	56
3.2	Construction du repère $b$ depuis le repère $a$ . . . . .	56
3.3	Le repère inertiel et le repère terrestre. . . . .	58
3.4	Coordonnées géographiques sur l'ellipsoïde. . . . .	60
3.5	Le repère terrestre et le repère de navigation. . . . .	61
3.6	Le repère de navigation et le repère du véhicule porteur. . . . .	62
3.7	Modélisation d'une triade accélérométrique. . . . .	64
3.8	Définition du vecteur bras de levier. . . . .	65
3.9	Modélisation du capteur accélérométrique du système GraviMob. . . . .	68
3.10	Modélisation d'un système de gradiométrie mobile. . . . .	71
4.1	Vue d'ensemble du capteur accélérométrique. . . . .	74
4.2	Les accéléromètres électrostatiques du système GraviMob. . . . .	75
4.3	Le support triaxial en aluminium. . . . .	77
4.4	Comparaison des supports des accéléromètres. . . . .	78
4.5	Décalage de la plage dynamique d'un accéléromètre <i>vertical</i> . . . . .	79
4.6	Inclinaison limite des accéléromètres. . . . .	79
4.7	Repères attachés aux triades accélérométriques. . . . .	81
5.1	Les véhicules sous-marins de type ROV et AUV. . . . .	86
5.2	La centrale inertielle de l'AUV. . . . .	91
5.3	Intégration du capteur accélérométrique dans l'AUV. . . . .	91
5.4	Assemblage des différentes parties de l'AUV. . . . .	93
5.5	Orientation générale des repères de travail dans l'AUV. . . . .	94

## TABLE DES FIGURES

---

6.1	L'étalonnage du système GraviMob dans les locaux de l'IFREMER. . . . .	108
6.2	Accélérations spécifiques mesurées par la centrale inertielle de l'AUV. . . . .	110
6.3	Accélérations spécifiques déduites des angles d'attitude de l'AUV. . . . .	111
6.4	Mesures statiques du capteur accélérométrique. . . . .	112
6.5	Évolution de la température dans les locaux de l'IFREMER. . . . .	113
6.6	Protocole d'étalonnage en laboratoire. . . . .	114
6.7	Accélérations spécifiques déduites des mesures tachéométriques. . . . .	115
6.8	Mesures statiques lors des opérations de calibration à l'ESGT. . . . .	115
6.9	Évolution de la température lors des opérations de calibration à l'ESGT. . . . .	116
6.10	Acquisition statique - Série n°1. . . . .	129
6.11	Acquisition statique - Série n°2. . . . .	129
6.12	Acquisition statique - Série n°3. . . . .	130
6.13	Acquisition statique - Série n°4. . . . .	130
6.14	Application des paramètres sur la série n°3. . . . .	135
6.15	Application des paramètres sur la série n°4. . . . .	135
6.16	Assemblage des différentes parties de l'AUV. . . . .	140
7.1	Identification des processus stochastiques par la variance d'Allan. . . . .	148
7.2	Acquisition statique sur une durée de 64 heures. . . . .	149
7.3	Acquisition en régime permanent. . . . .	150
7.4	Accélérations après suppression d'une tendance linéaire. . . . .	152
7.5	Écarts-types d'Allan déduits de l'acquisition statique. . . . .	152
7.6	Modèle bathymétrique. . . . .	155
7.7	Modèle de blocs géologiques. . . . .	156
7.8	Définition du prisme droit. . . . .	157
7.9	Définitions du prisme sphérique et du prisme ellipsoïdal. . . . .	158

TABLE DES FIGURES

---

7.10 Erreurs sur le tenseur du gradient de gravité. . . . .	159
7.11 Composantes du champ de gravité local. . . . .	160
7.12 Évolution de l'écart-type de l'erreur relative au scénario n°2. . . . .	164
7.13 Évolution de l'écart-type de l'erreur relative au scénario n°3. . . . .	164
7.14 Évolution de l'écart-type de l'erreur relative au scénario n°4. . . . .	165
7.15 Évolution de l'écart-type de l'erreur relative au gradient de gravité. . . . .	166
7.16 Évolution de l'écart-type de l'erreur relative au LiMo-g. . . . .	167
8.1 Principe de la transformation <i>unscented</i> . . . . .	173
8.2 Évolution de l'écart-type de l'erreur. . . . .	187
9.1 L'Europe, navire côtier de l'IFREMER. . . . .	191
9.2 Mise à l'eau et récupération de l'AUV avec le système <i>Caliste</i> . . . . .	193
9.3 Système de communication acoustique USBL. . . . .	194
9.4 AUV amarré sur la plage arrière du navire. . . . .	195
9.5 Situation géographique des deux zones de levé. . . . .	196
9.6 Profils gravimétriques de la zone <i>ouest</i> . . . . .	197
9.7 Profils gravimétriques de la zone <i>est</i> . . . . .	197
9.8 Anomalies gravimétriques de la zone <i>ouest</i> . . . . .	198
9.9 Anomalies gravimétriques de la zone <i>est</i> . . . . .	198
9.10 Sauts dans les données de navigation de l'AUV. . . . .	201
10.1 Les profils n°8 (aller) et 9 (retour). . . . .	203
10.2 Stabilité de la température sur les profils n°8 et 9. . . . .	205
10.3 Estimation du bras de levier. . . . .	212
11.1 Convergence de l'erreur formelle. . . . .	218
11.2 Composantes estimées du champ de pesanteur. . . . .	219

## TABLE DES FIGURES

---

11.3 Biais constant dans le repère du véhicule porteur. . . . .	220
11.4 Composantes estimées et corrigées du champ de pesanteur. . . . .	221
11.5 Déviation de la verticale (EGM2008). . . . .	222
11.6 Variations du champ de pesanteur en sortie du filtre de Kalman <i>unscented</i> . . . . .	223
11.7 Variations du champ de pesanteur après filtrage par moyenne glissante. . . . .	223
11.8 Anomalies de gravité du SHOM. . . . .	224
11.9 Anomalies de gravité de surface. . . . .	225
11.10 Tendances des anomalies gravimétriques. . . . .	226
11.11 Résidus après application des fonctions de transfert. . . . .	228
B.1 Trajectoire du mobile estimée par filtrage de Kalman. . . . .	250
B.2 Erreur de la trajectoire filtrée. . . . .	251
B.3 Erreur de la trajectoire lissée. . . . .	251

## TABLE DES FIGURES

---

# Introduction

L'un des défis majeurs relevé par la gravimétrie moderne consiste en la détermination de modèles mathématiques et de cartes numériques du champ de gravité de la Terre dont la fiabilité est identique quelle que soit l'échelle spatiale considérée en domaines terrestre, littoral, marin et sous-marin. Aujourd'hui, les harmoniques de haut degré correspondant aux courtes longueurs d'onde du champ de gravité sont encore affectés de grandes incertitudes de par la diversité et les différences de précision et de résolution des techniques gravimétriques permettant de les atteindre. Le principal obstacle à l'amélioration de la résolution et de la précision des modèles vient de ce que les systèmes de gravimétrie et gradiométrie mobiles, seuls instruments qui permettent des acquisitions à précision et à résolution spatiale homogènes, demeurent encore encombrants et gros consommateurs d'énergie, ce qui interdit en particulier leur installation sur des drones terrestres, aériens, navals de surface et sous-marins. L'intérêt de ce type de porteur est de pouvoir opérer des acquisitions très proches des sources ce qui accroît considérablement la restitution des variations locales de la gravité. Le développement d'un nouveau type de capteur gravimétrique à faible encombrement et moindre consommation énergétique apparaît donc indispensable pour répondre à la problématique posée par la mesure des courtes longueurs d'onde du champ de gravité. Dans le cadre de ses activités de recherche en gravimétrie, le Laboratoire de Géomatique et Foncier (Cnam/GeF EA 4630), en collaboration avec le Laboratoire de Recherche en Géodésie (LAREG) de l'Institut National de l'information Géographique et forestière (IGN), le Laboratoire Domaines Océaniques (LDO, UMR CNRS 6538, UBO), l'Institut Français de Recherche pour l'Exploitation de la Mer (IFREMER) et le Service Hydrographique et Océanographique de la Marine (SHOM), développe un instrument novateur qui permet la mesure dynamique du champ de gravité terrestre en fond de mer.

Cet instrument, baptisé GraviMob (système de Gravimétrie Mobile), s’inspire du système LiMo-g (système de gravimétrie Mobile Léger) dont le développement a été initié en 1999 par Henri Duquenne, ingénieur général des Ponts et Chaussées, puis étudié lors du travail de thèse de Bertrand de Saint-Jean [De Saint-Jean 2008].

Dans ce contexte, ce manuscrit expose dans une **première** partie les enjeux et les techniques de mesures du champ de gravité terrestre ainsi qu’une présentation générale des prototypes instrumentaux que sont les systèmes LiMo-g et GraviMob, dans une **deuxième** partie, les éléments mathématiques nécessaires à l’établissement de l’équation d’observation du système GraviMob, la description du capteur accélérométrique et du véhicule porteur puis l’étalonnage et l’orientation des accéléromètres, dans une **troisième** partie, l’identification des processus stochastiques affectant les observations et leurs impacts sur la restitution du champ de pesanteur et la stratégie d’estimation du champ de pesanteur par un filtre de Kalman intégrant un modèle d’évolution des composantes du champ de pesanteur et un modèle d’observation tenant compte du bruit de mesure, puis dans une **quatrième** et **dernière** partie, le traitement et l’analyse des mesures acquises lors de l’expérimentation du système GraviMob en Mer Méditerranée et la comparaison du signal gravimétrique obtenu avec des données de référence.

Ce travail de thèse a donné lieu à un article de journal paru [Roussel et al. 2015b], un article à paraître [Roussel, Verdun, Cali, Maia, d’Eu, Bouhier, and Jaussaud 2017], un acte de conférence [Roussel et al. 2015a], trois présentations orales lors de congrès français [Roussel et al. 2014b, 2015e, 2016a], trois lors de congrès internationaux [Roussel et al. 2015c,d, 2016b] et un poster dans un congrès international [Roussel et al. 2014a].

Les simulations et les traitements numériques figurant dans ce manuscrit ont été effectués grâce au langage de programmation *Python*. Le travail substantiel de programmation informatique a donné naissance à une bibliothèque de fonctions dédiée au contexte du projet GraviMob.

Première partie

**Enjeux et technologies**



# Chapitre 1

## Enjeux et état de l'art

Ce premier chapitre introductif présente les enjeux de la connaissance du champ de gravité en milieu océanique et dresse un état de l'art des technologies existantes ou actuellement en cours de développement. La dernière section introduit la problématique générale de cette étude, à savoir, la mesure mobile et vectorielle du champ de gravité de la Terre à partir d'un capteur accélérométrique rigidement lié à son véhicule porteur.

### 1.1 Les enjeux de la gravimétrie en milieu océanique

L'un des défis majeurs relevé par la gravimétrie moderne consiste en la détermination de modèles mathématiques et de cartes numériques du champ de gravité de la Terre dont la fiabilité est identique quelle que soit l'échelle spatiale considérée en domaines terrestre, littoral, marin et sous-marin. La fiabilité d'un modèle ou d'une carte du champ de gravité en termes de résolution spatiale et de précision dépend avant tout de la quantité et de la qualité des mesures gravimétriques qui ont servi à leur réalisation. Cette fiabilité repose également sur notre capacité à combiner entre elles des mesures gravimétriques, de précision et de pas d'échantillonnage différents, à partir de techniques de fusion de données hétérogènes.

#### Les enjeux pour la recherche fondamentale

D'un point de vue général, les mesures gravimétriques, combinées aux données issues de la bathymétrie et de la sismique réflexion et réfraction, permettent de contraindre les

## 1.1. LES ENJEUX DE LA GRAVIMÉTRIE EN MILIEU OCÉANIQUE

---

structures en densité dans les problèmes d'inversion rencontrés en géophysique. Les enjeux scientifiques relatifs à la connaissance de la composition et à la dynamique du sous-sol océanique, peuvent se classer en fonction des longueurs d'onde du champ gravitationnel auxquelles la technologie mise en œuvre permet d'accéder [Dubois 1997] :

- l'étude de la structure interne de la croûte, telle que la détermination de la géométrie des failles, de la structure en profondeur de la croûte associée aux cheminées hydrothermales (Fig. 1.1) ou l'estimation des densités des roches au niveau des dorsales, nécessite un accès aux longueurs d'onde comprises entre 1 et 100 km ;

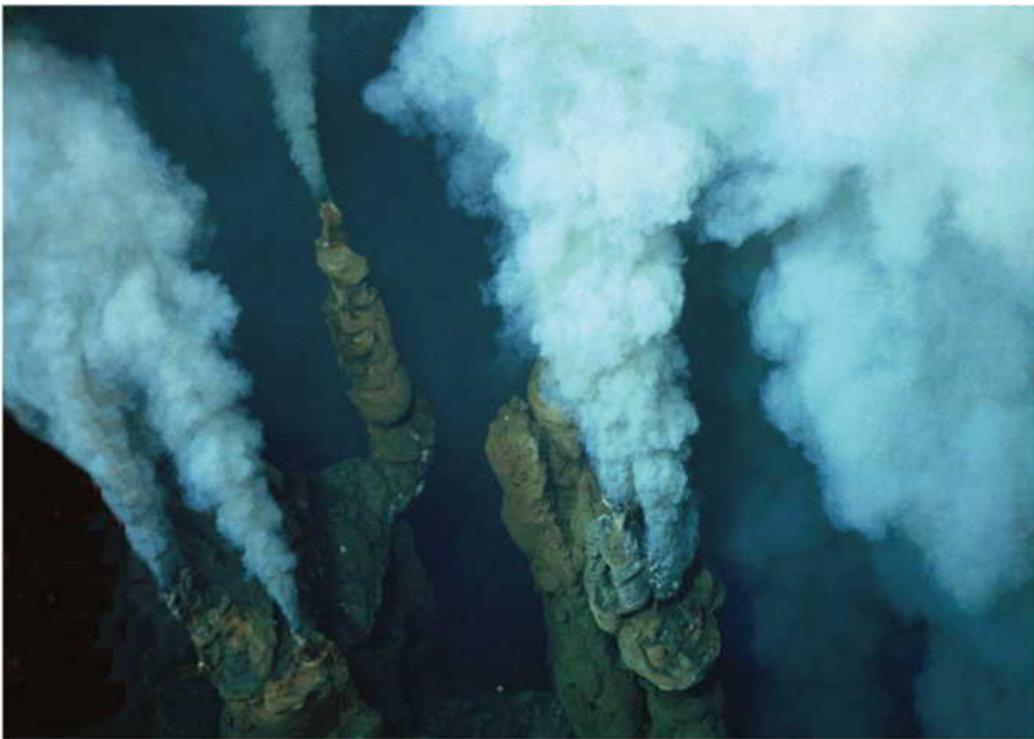


FIGURE 1.1 – Les mesures gravimétriques font partie des informations essentielles pour l'étude structurale des cheminées hydrothermales. ©Ifremer

- l'étude des propriétés mécaniques de la lithosphère, telle que la compensation isostatique, à partir des signatures gravimétriques des rifts, des bombements volcaniques ou des cratons, correspond à l'acquisition de longueurs d'onde comprises entre 20 et 500 km ;
- l'étude de la dynamique du manteau terrestre, comme la convection mantellique, implique, quant à elle, l'accès aux longueurs d'onde comprises entre 200 et 2000 km.

À cela, il est possible d'ajouter l'étude des variations temporelles du champ de gravité en domaine océanique. L'enregistrement continu du signal gravimétrique permettrait, au niveau des dorsales océaniques, de suivre les montées de magma, ou de manière plus générale, d'étudier le comportement rhéologique de la lithosphère et du manteau océaniques.

### **Les enjeux pour la recherche appliquée**

Les modèles géophysiques élaborés à partir des données bathymétriques et magnétiques ont suscité des avancées considérables dans la compréhension de la dynamique des marges continentales, des zones de subduction, des failles majeures océaniques et des dorsales médio-océaniques. Ces dernières sont parsemées de sources hydrothermales actives dont les épanchements contiennent de nombreux métaux stratégiques : les sulfures hydrothermaux sont en effet très riches en cuivre et en zinc, ils contiennent également de l'or et de l'argent ainsi que certains métaux rares, dits *high tech*, tels l'indium, le germanium et le lithium, abondamment utilisés en électronique, par exemple dans les semi-conducteurs, en aéronautique et dans leurs applications à la Défense. De par l'augmentation du coût de ces matières premières en provenance essentiellement de la Chine et de l'Amérique du Sud et du risque de pénurie, l'exploration et l'exploitation de ces ressources minières en milieu sous-marin apparaissent-elles comme un enjeu géopolitique et stratégique majeur pour garantir l'indépendance des pays développés. En outre, l'exploitation de ces ressources minières ne doit pas être menée aux dépens des nombreux écosystèmes marins qui peuplent les sources hydrothermales, ce qui implique de pouvoir différencier les sources actives à préserver de sources inactives potentiellement exploitables. La distinction entre les deux types de sources s'appuie sur la reconnaissance de roches caractéristiques à partir de leurs densités. Cet enjeu environnemental de préservation du milieu naturel dépend donc directement de notre capacité à obtenir des modèles 3D fiables de la distribution de densité des structures situées sous le plancher océanique, à des échelles spatiales de l'ordre du 10<sup>ième</sup> voire du 100<sup>ième</sup> de kilomètre. Dès lors, l'acquisition de mesures du champ de gravité et de ses variations spatiales en fond de mer en complément des mesures magnétiques et bathymétriques devient cruciale pour la fiabilisation de ces modèles de distribution de densité.

En outre, le champ de gravité sous-marin demeure assez mal connu et sa détermination requiert non seulement des mesures en fond de mer, mais aussi à différentes profondeurs de la colonne d'eau. La connaissance de la gravité sous-marine de façon continue jusqu'aux très courtes longueurs d'onde est d'une importance capitale pour la navigation militaire sous-marine, notamment depuis le développement des systèmes de navigation impliquant une corrélation de terrain. C'est le cas de la navigation gravimétrique qui suppose que le véhicule porteur embarque une centrale inertielle, un capteur gravimétrique passif et une carte numérique du champ de gravité sous forme d'une anomalie, prise comme référence. La comparaison de la mesure gravimétrique et de la carte embarquée permet de déterminer la position du véhicule qui peut être combinée à celle obtenue de la centrale inertielle par hybridation, à l'aide d'un filtre de navigation qui tient compte à la fois des modèles d'erreur de la centrale inertielle, de la carte embarquée et du capteur gravimétrique. De nombreuses recherches menées actuellement par des industriels français (*Thalès, SAFRAN Sagem*), se concentrent sur le développement de tels filtres de navigation à partir de filtres de Kalman et de filtres particuliers. Quelle que soit la composition du filtre de navigation, la précision atteinte sur le positionnement dynamique du véhicule dépend très fortement de celles du capteur gravimétrique et de la carte embarquée. De plus, la résolution spatiale de la carte embarquée doit être telle que la plus petite longueur d'onde restituée par la carte soit inférieure à la précision du positionnement recherchée. Le positionnement précis et discret d'un sous-marin par navigation gravimétrique suppose donc l'acquisition préalable d'une carte gravimétrique qui réponde aux spécifications de la navigation en terme de précision, et l'utilisation en opération d'un capteur gravimétrique compatible avec la précision et la résolution de la carte, qui peut être le même dans les deux cas.

## 1.2 État de l'art

Aujourd'hui, les mesures gravimétriques qui servent à l'élaboration des modèles et des cartes du champ de gravité, sont acquises à l'aide de techniques variées qui couvrent quasiment toutes les échelles spatiales.

Tout d'abord, l'essor de la gravimétrie satellitaire, suscité en particulier par les missions CHAMP (2000), GRACE (2002) et GOCE (2009) (Fig. 1.2), a rendu possible la réalisation de modèles globaux de la gravité en harmoniques sphériques, dont la précision atteint  $1 \text{ mGal}^1$  pour une résolution spatiale homogène de 100 km.

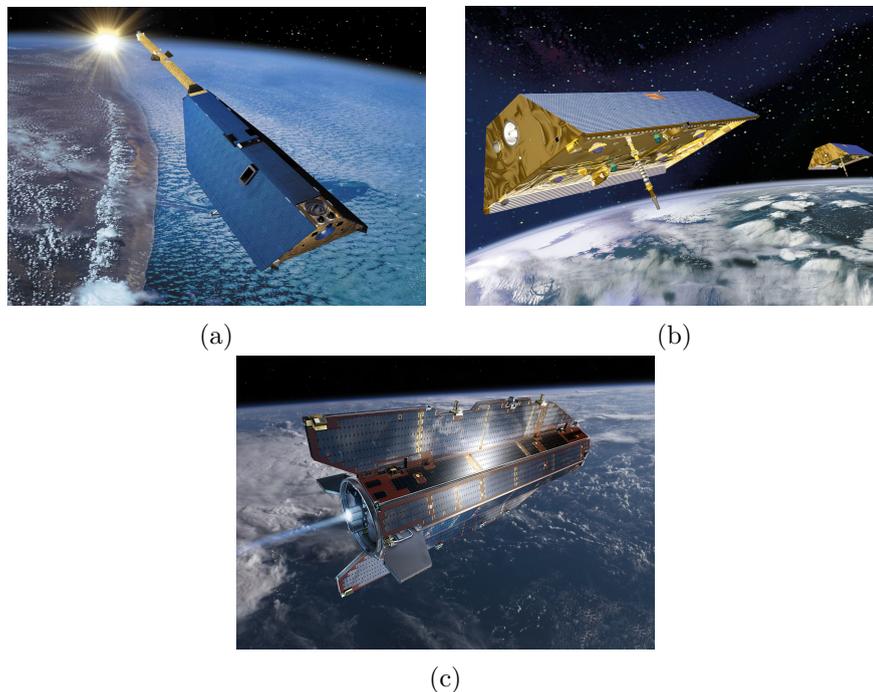


FIGURE 1.2 – Les satellites CHAMP (a), GRACE (b) et GOCE (c).

En domaine marin, le champ de gravité est connu avec une résolution spatiale beaucoup plus fine, environ 10 km, grâce aux nombreuses missions d'altimétrie satellitaire qui se sont succédées depuis les années 70 (GEOS-3 (1975), SEASAT (1978), GEOSAT (1985), ERS-1 (1991), Topex/Poséidon (1992) (Fig. 1.3a), ERS-2 (1995), Jason-1 (2001), ENVISAT (2002) (Fig. 1.3b), OSTM/Jason-2 (2008) (Fig. 1.3c)), excepté à l'approche des zones

1.  $1 \text{ mGal} = 10^{-3} \text{ Gal} = 10^{-5} \text{ m.s}^{-2}$

littorales, en deçà de 50 km, où les mesures d'altimétrie satellitaire sont fortement perturbées par la réflexion des ondes électromagnétiques sur les terres côtières, et où les modèles de circulation océanique utilisés pour la correction des mesures deviennent plus incertains.

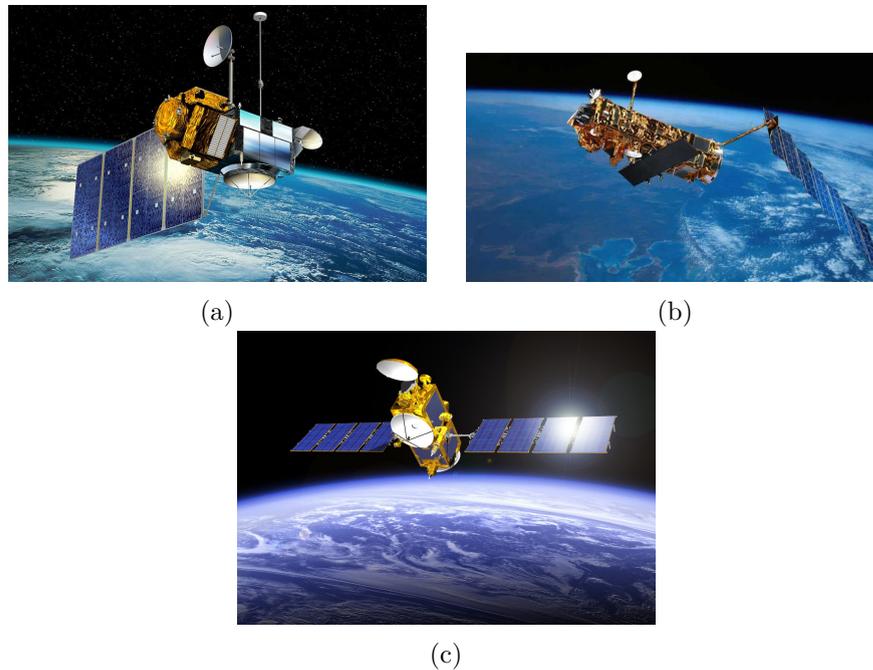


FIGURE 1.3 – Les satellites altimétriques Topex/Poséidon (a), ENVISAT (b) et OSTM/Jason-2 (c).

Aux échelles régionales et locales, la cartographie du champ de gravité terrestre est réalisée par interpolation des mesures gravimétriques acquises au sol à l'aide de gravimètres scalaires relatifs à peson et absolus, tels les instruments fabriqués par la société américaine *Micro-g LaCoste* (Fig. 1.4), uniquement sur les zones accessibles à un opérateur pédestre. Des mesures en puits de forage viennent ponctuellement compléter les mesures de surface. La précision usuelle atteinte pour les levés à terre est de 0.01 mGal à la résolution de 1 km. De plus fines résolutions de l'ordre du 100<sup>ième</sup> de kilomètre sont atteignables par des levés de détail.



FIGURE 1.4 – Les gravimètres absolu F5-X (a) et relatif gPhoneX (b) de la société américaine *Micro-g LaCoste*.

En mer, les mesures de gravimétrie mobile marine sont pratiquées à l'aide de gravimètres terrestres montés sur une plate-forme stabilisée à bord de navires océanographiques. Ces dernières sont complétées par des mesures en fond de mer à l'aide de gravimètres relatifs statiques placés à bord de submersibles, habités et stabilisés au-dessus du point de mesure ou montés sur une plate-forme stabilisée elle-même placée dans une enceinte pressurisée, installée en fond de mer. Les premières campagnes françaises de mesures gravimétriques sur le fond à bord d'un sous-marin ont eu lieu dans les années 1980-1990. Elles exploitaient les sous-marins habités *Cyana* (Fig. 1.5a) et *Nautile* (Fig. 1.5b) de l'Institut Français de Recherche pour l'Exploitation de la Mer (IFREMER) et les gravimètres relatifs de type LaCoste et Romberg, Worden et Scintrex. Cette technique, dédiée à l'étude des courtes longueurs d'onde du champ, permet de garantir une bonne précision des mesures gravimétriques, de l'ordre de 0.1 mGal, mais elle se fait au détriment du nombre de stations observées. Ainsi, les campagnes françaises *Kaïko*, *Hydrosnake*, *Vermanaute*, *Teahicya*, *Gravinaute* et *Naudur* [Dubois 1997] qui se sont étalées entre 1985 et 1993, totalisent un nombre de stations observées égal à 231.

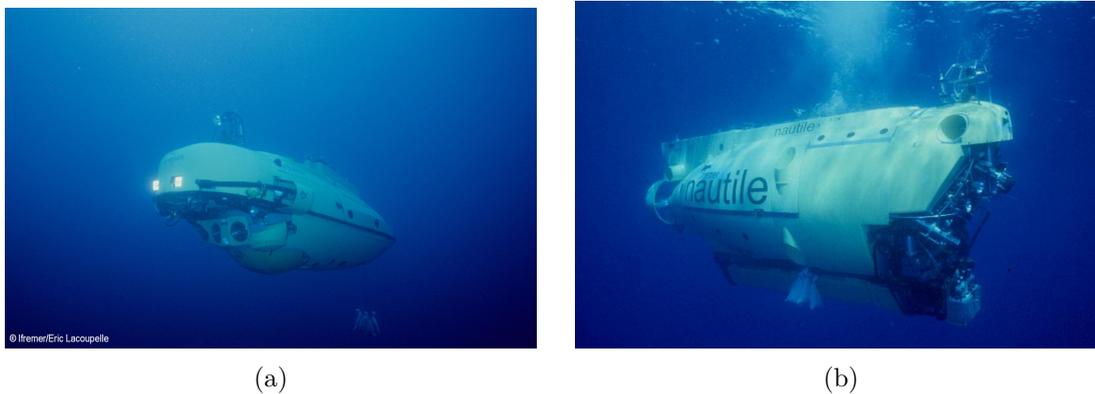


FIGURE 1.5 – Les sous-marins habités Cyana (a) et Nautilus (b) de l'IFREMER, utilisés lors des campagnes de mesures gravimétriques sur le fond. ©Ifremer

En outre, grâce au déploiement des systèmes de radio-positionnement par satellite et les progrès engendrés sur le positionnement vertical, la gravimétrie aéroportée s'est progressivement développée à partir de gravimètres marins adaptés sur des avions, tels les systèmes Air-Sea Gravity System II (Fig. 1.6a) et Tags-6 (Fig. 1.6b) fabriqués par *Micro-g LaCoste*. Cette technique permet de réaliser des mesures de résolutions intermédiaires, entre 10 et 100 km, entre celles obtenues respectivement par les mesures terrestres et les mesures spatiales et des acquisitions sur des régions inaccessibles (chaînes de montagnes, volcans, forêts tropicales, déserts, marges continentales, zones côtières), avec une précision de l'ordre de 2 à 3 mGal.

En complément des mesures de l'intensité de la gravité, les gradiomètres mobiles fournissent des mesures des gradients de la gravité, c'est-à-dire les dérivées spatiales des composantes de l'accélération de la gravité dans 3 directions orthogonales. La connaissance des gradients de la gravité est particulièrement utile pour la restitution des courtes longueurs d'onde du champ de gravité et la détermination de la géométrie des structures géologiques. À titre d'exemple, le système Air-3D FTG (Fig. 1.7), développé par la société américaine *BellGeospace*, est un gradiomètre aéroporté dont la précision atteint  $0.5 \text{ mGal km}^{-1}$  à 200 m de résolution pour un levé à très basse altitude (80 m). En France, l'étude de faisabilité d'un gradiomètre planaire aéroporté a été menée dans le cadre du projet GREMLIT [Douch 2015; Douch et al. 2015] porté par l'Institut de Physique du Globe de Paris

## 1.2. ÉTAT DE L'ART

---

(IPGP) en collaboration avec l'Office National d'Études et de Recherches Aérospatiales (ONERA), le Laboratoire de Recherche en Géodésie (LAREG) de l'Institut National de l'information Géographique et forestière (IGN) et le Service Hydrographique et Océanographique de la Marine (SHOM).

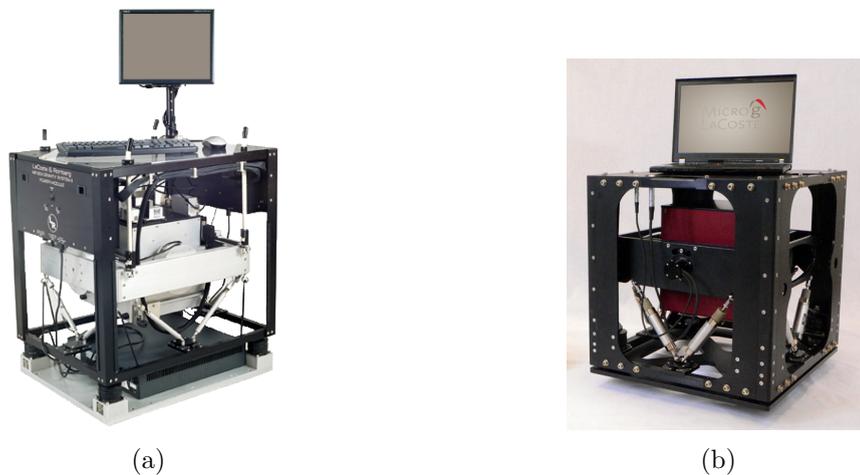


FIGURE 1.6 – Les gravimètres marins Air-Sea Gravity System (a) et Tags-6 (b) de la société *Micro-g LaCoste*.



FIGURE 1.7 – Le gradiomètre aéroporté 3D-FTG de la société américaine *BellGeospace*.

Ce bilan des techniques modernes de mesure de la gravité permet d'espérer la réalisation d'un modèle de champ global à très haute résolution combinant les mesures de gravimétrie spatiale et les mesures au sol. À ce jour, la plus fine résolution, d'environ 10 km, est obtenue par les modèles EGM2008 [Pavlis et al. 2008] (Fig. 1.8), EIGEN-6C4 [Förste

## 1.2. ÉTAT DE L'ART

---

et al. 2014] et GECO [Gilardoni, Reguzzoni, and Sampietro 2016], développés jusqu'au degré harmonique 2160 (EGM2008) et 2190 (EIGEN-6C4 et GECO). Cependant, les harmoniques de haut degré correspondant aux courtes longueurs d'onde du champ de gravité, sont encore affectés de grandes incertitudes de par la diversité et les différences de précision et de résolution des techniques gravimétriques permettant de les atteindre. Le principal obstacle à l'amélioration de la résolution et la précision des modèles vient de ce que les systèmes de gravimétrie et gradiométrie mobiles, seuls instruments qui permettent des acquisitions à précision et à résolution spatiale homogènes, demeurent encore encombrants et gros consommateurs d'énergie, ce qui interdit en particulier leur installation sur des drones terrestres, aériens, marins et sous-marins. L'intérêt de ce type de porteur est de pouvoir opérer des acquisitions très proches des sources ce qui accroît considérablement la restitution des variations locales de la gravité. Le développement d'un nouveau type de capteur gravimétrique à faible encombrement et moindre consommation énergétique apparaît donc indispensable pour répondre à la problématique posée par la mesure des courtes longueurs d'onde du champ de gravité.

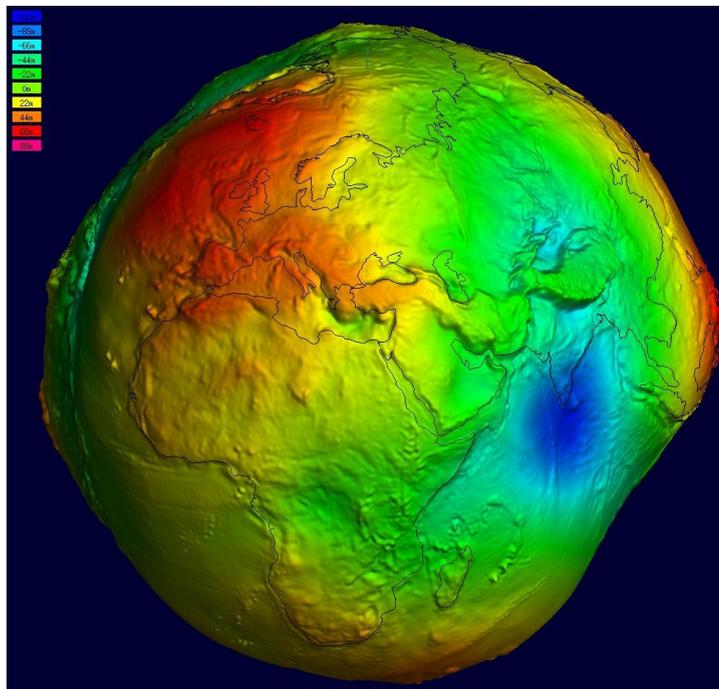


FIGURE 1.8 – Ondulation du géoïde déduite du modèle EGM2008.  
(source : <http://icgem.gfz-potsdam.de/ICGEM/>)

### **La gravimétrie mobile sous-marine**

Contrairement aux domaines de la gravimétrie terrestre, aéroportée ou marine, le développement d'instruments dédiés à la mesure dynamique du champ de gravité à bord d'un véhicule submersible est un domaine dans lequel il n'existe, actuellement, aucune solution commercialisée prête à l'emploi.

Cependant, la recherche scientifique existe et, à ce titre, l'équipe japonaise de l'université de Tokyo apparaît comme très active dans ce domaine de par ses nombreuses publications [Araya et al. 2011; Fujimoto et al. 2011; Araya et al. 2012; Shinohara et al. 2013, 2015; Araya et al. 2015]. Leur système comprend un gravimètre Micro-g LaCoste S-174 (Fig. 1.9a) monté sur un mécanisme à cardan et un gradiomètre (Fig. 1.9b) constitué de deux pendules astatiques et également monté sur une plateforme à cardan. Ce système a été expérimenté à bord du submersible *URASHIMA* (Fig. 1.9c) de la *Japan Agency for Marine-Earth Science and Technology* (JAMSTEC). Les précisions espérées sur ce système sont de l'ordre du dixième de milligal pour la mesure gravimétrique et de l'ordre de l'eötvös pour la mesure gradiométrique.

De son côté, l'équipe américaine du département de géologie et géophysique de l'Institut Océanographique de Woods Hole porte ses efforts sur la modélisation de la navigation des véhicules sous-marins autonomes [Kinsey et al. 2008; Izraelevitz 2011; Kinsey et al. 2013]. À partir de modélisations numériques (Fig. 1.10), l'équipe cherche à réduire, par filtrage et lissage, l'impact des incertitudes affectant la composante altimétrique du véhicule sous-marin sur la restitution du champ de gravité. Ces travaux ne mentionnent pas le développement de nouveaux capteurs, ce qui laisse présager l'adaptation et l'utilisation d'instruments gravimétriques terrestres, tels que les gravimètres relatifs à peson, à bord de véhicules sous-marins autonomes dont la verticalisation serait assurée à l'aide d'une plateforme stabilisée.

## 1.2. ÉTAT DE L'ART

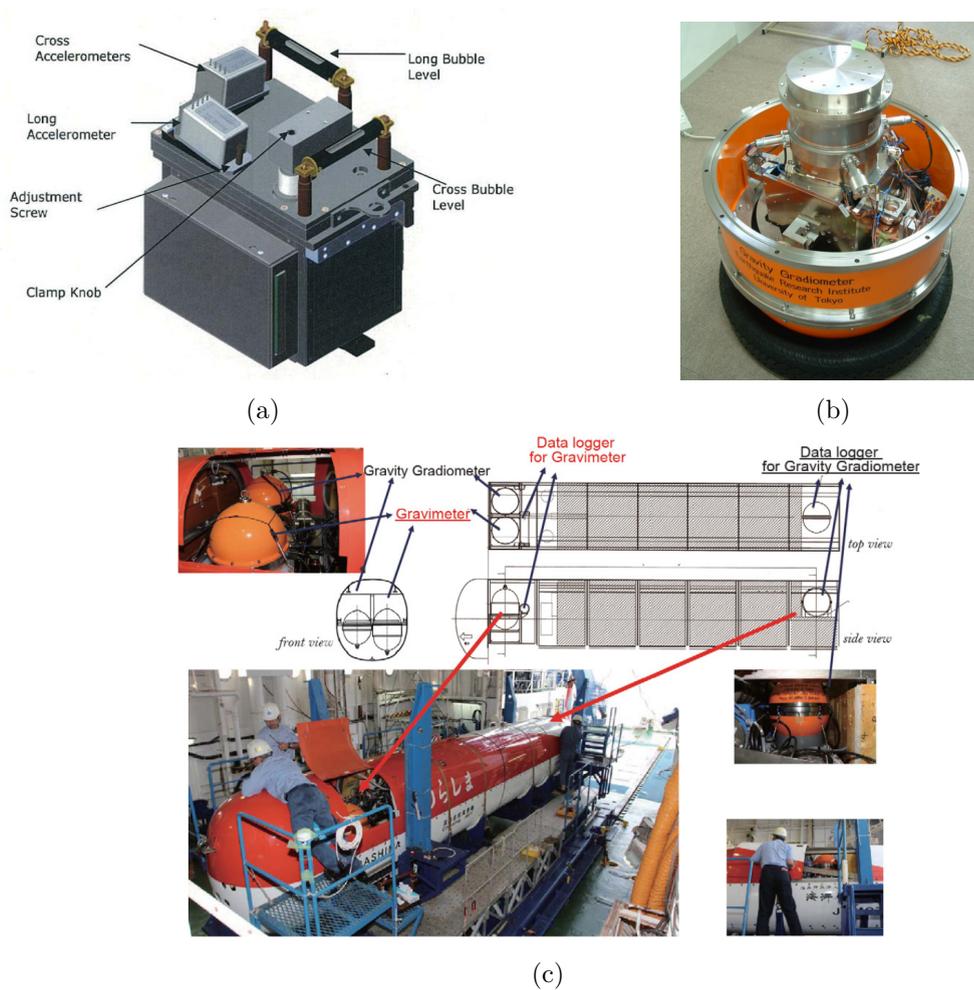


FIGURE 1.9 – Vue d'ensemble du système gravimétrique (a) et gradiométrique (b) japonais et du véhicule sous-marin *URASHIMA* (c).

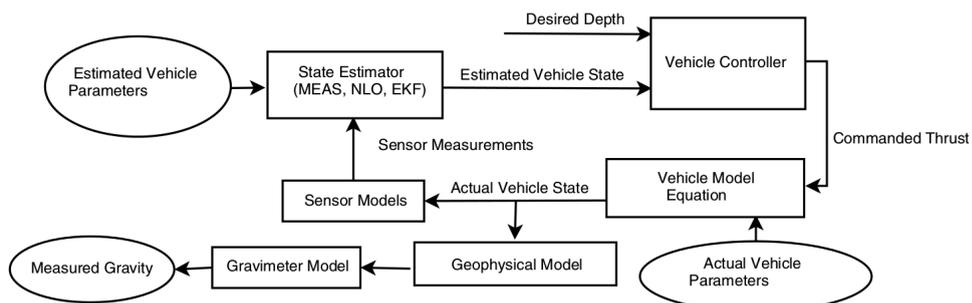


FIGURE 1.10 – Schéma de l'algorithme d'estimation du champ de gravité imaginé dans les simulations numériques menées par l'équipe américaine de Woods Hole.

Ce bref aperçu des travaux menés dans le domaine de la mesure du champ de gravité en milieu sous-marin, montre que la tendance est à l'adaptation des technologies existantes pour le milieu terrestre au contexte du milieu océanique. De manière générale, il s'agit de réduire l'encombrement et la consommation électrique des instruments de mesure et de veiller à assurer leur stabilité verticale durant les phases d'acquisition. Avec ces choix technologiques, le champ de gravité s'obtient en quasi temps réel. En contre partie, le développement instrumental nécessaire à l'émergence de tels systèmes, représente un coût et une énergie de mise en œuvre non négligeables.

Le développement instrumental dont il est question dans cette présente étude, s'appuie sur un concept radicalement différent des actuelles tendances. De par les contraintes imposées par le milieu sous-marin et la miniaturisation des engins submersibles, notre approche privilégie une instrumentation compacte, légère et dépourvue de systèmes de stabilisation énergivores, souvent complexes et onéreux. Cette démarcation implique une instrumentation relativement simple à développer, mais en contrepartie d'un traitement plus complexe des données en sortie du système. Cette approche a vu le jour en France dès 1999, sous l'impulsion de Henri Duquenne, ingénieur général des Ponts et Chaussée. Elle a donné lieu à un premier prototype instrumental, baptisé LiMo-g (Système Léger de Gravimétrie Mobile ou *Light Moving Gravimetry System*) (Fig. 2.1, p. 44), dont le principe<sup>2</sup> de base repose sur la réunion de trois accéléromètres linéaires permettant une mesure vectorielle de l'accélération de pesanteur. De cette première expérience, émerge en 2014, un nouvel instrument, baptisé GraviMob (Système de Gravimétrie Mobile ou *Mobile Gravimetry System*) (Fig. 2.8, p. 49), dédié à la mesure vectorielle et dynamique du champ de gravité en milieu sous-marin. L'étude et l'expérimentation de ce nouveau prototype constitue le sujet de ce manuscrit.

---

2. Ce principe est aussi celui mis en œuvre avec le système SAGS-4 (*Strapdown Airborne Gravimetry System 4*), développé par l'académie Bavaroise des Sciences et des Humanités de Munich.

### 1.3 La gravimétrie vectorielle

Cette dernière section introduit la problématique générale de la mesure vectorielle et dynamique du champ de gravité terrestre à partir d'observations accélérométriques.

Dans le contexte des systèmes LiMo-g et GraviMob, la mesure vectorielle du champ de gravité repose sur la réunion de trois accéléromètres linéaires, en une triade accélérométrique dont les trois axes sensibles, idéalement orthogonaux deux à deux, permettent une décomposition du vecteur qui correspond à l'accélération mesurée, également appelée accélération spécifique ou accélération de rappel. Cette triade accélérométrique est, de plus, rigidement liée au corps du véhicule porteur utilisé pour effectuer le levé gravimétrique dynamique.

Chaque accéléromètre délivre la composante de l'accélération spécifique dans la direction de son axe sensible. L'accélération spécifique correspond à la force de rappel par unité de masse à appliquer à la masse d'épreuve contenue dans l'accéléromètre, afin de maintenir cette dernière dans une position d'équilibre dynamique.

En situation **statique** (Fig. 1.11a) où la triade accélérométrique est immobile dans un repère inertiel, la masse d'épreuve de masse  $m$ , est uniquement soumise aux forces gravitationnelles et de rappel. Par conséquent et conformément au Principe Fondamental de la Dynamique ou Seconde Loi de Newton, le vecteur accélération spécifique, noté  $a$ , est directement proportionnel au vecteur accélération gravitationnelle, noté  $g$  :

$$0 = mg + ma \quad \text{soit} \quad a = -g \quad (m \neq 0)$$

Cette relation reste valable pour une triade accélérométrique immobile à la surface de la Terre à condition d'inclure à  $g$  l'accélération centrifuge due à la rotation terrestre. La triade se comporte, dans ce cas, comme un gravimètre vectoriel qui mesure les composantes du vecteur accélération de la pesanteur.

On notera cependant que l'orientation des axes sensibles de la triade accélérométrique doit être connue si l'on souhaite obtenir les composantes de l'accélération gravitationnelle dans des directions adaptées à son interprétation. Dans tous les cas, l'intensité de l'accé-

### 1.3. LA GRAVIMÉTRIE VECTORIELLE

---

lération de pesanteur reste, quant à elle, directement accessible sans cette connaissance supplémentaire. Dans ce contexte, une triade accélérométrique peut être utilisée comme un gravimètre scalaire, sans les inconvénients relatifs aux opérations de verticalisation.

En situation **dynamique** (Fig. 1.11b), où le véhicule porteur et la triade accélérométrique sont en mouvement, la relation précédente s'écrit :

$$m\ddot{X} = mg + ma \quad \text{soit} \quad g = \ddot{X} - a \quad (m \neq 0),$$

où  $X$  désigne le vecteur position de la masse d'épreuve, considérée comme ponctuelle et  $\ddot{X}$  correspond à l'accélération de la masse d'épreuve dans un référentiel inertiel.

En tenant compte des accélérations induites par le mouvement de la Terre, on obtiendrait une relation similaire à des termes additifs près entre l'accélération de la masse d'épreuve dans un référentiel terrestre et l'accélération de la pesanteur. Dans ce second cas, la seule mesure de l'accélération spécifique,  $a$ , ne permet plus de restituer<sup>3</sup> le vecteur accélération gravitationnelle ou de pesanteur. Il convient, effectivement, de la corriger de l'accélération induite par son mouvement. Il est donc nécessaire de mesurer, en plus, la position du capteur accélérométrique afin d'estimer les termes correctifs d'accélérations, réduits à  $\ddot{X}$  uniquement dans un référentiel inertiel. Ce dernier s'obtenant généralement dans un repère dont les axes diffèrent des axes sensibles de la triade accélérométrique, il est cette fois-ci, crucial d'avoir également accès à la mesure de l'orientation du véhicule porteur.

Par conséquent, la mesure dynamique et vectorielle du champ de pesanteur requiert obligatoirement, en plus de la mesure de l'accélération spécifique, la mesure du mouvement du véhicule porteur, à savoir, sa position et son orientation.

---

3. Il s'agit du principe d'équivalence entre un mouvement accéléré et la présence d'un champ gravitationnel, formulé par Albert Einstein.

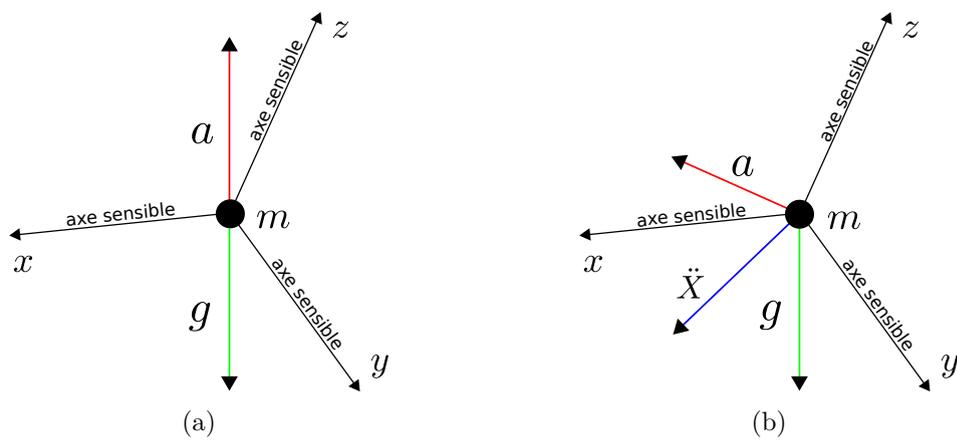


FIGURE 1.11 – Principe de la mesure vectorielle du champ à l'aide d'une triade accélérométrique, dans le cas statique (a) et dans le cas dynamique (b).

## Chapitre 2

# Du LiMo-g au système GraviMob

En France, le développement d'un instrument de gravimétrie vectorielle mobile a été initié en 1999 par Henri Duquenne, ingénieur général des Ponts et Chaussées et chercheur au LAREG de l'IGN de 2003 à 2010. Ce développement a donné lieu à plusieurs travaux de fin d'études d'élèves ingénieurs de l'École Supérieure des Géomètres et Topographes (ESGT) [Vermast 1999; Vlamynck 1999; Viel 2000; Guette 2001; Jacques 2002] et à un diplôme d'études approfondies de l'Observatoire de Paris (OP) [Melachroinos 2004]. La mise en œuvre d'un premier prototype a fait l'objet du travail de thèse, mené entre 2005 et 2008 par Bertrand de Saint-Jean, au sein du LAREG de l'IGN [De Saint-Jean 2008]. Son travail constituant le point de départ majeur de cette nouvelle étape de recherche, les principaux résultats et recommandations sont rappelés dans la première section de ce chapitre. La deuxième section introduit le nouveau prototype instrumental développé au sein du LDO (Laboratoire de Domaines Océaniques) et baptisé GraviMob. La troisième et dernière section introduit quant à elle le contenu et les objectifs des différentes parties de ce manuscrit.

### 2.1 Expérience acquise du LiMo-g

Le système de gravimétrie mobile LiMo-g se compose d'un capteur accélérométrique vectoriel et d'un capteur de position et d'attitude.

Le capteur accélérométrique, visible sur la figure 2.1, est constitué de trois accéléromètres électrostatiques linéaires fixés sur trois faces d'un tétraèdre. Cette configuration est égale-

## 2.1. EXPÉRIENCE ACQUISE DU LIMO-G

---

ment appelée *triade accélérométrique*. Ce capteur permet la mesure vectorielle de l'accélération spécifique.

Le capteur de position et d'attitude, visible sur la figure 2.2, est quant à lui constitué d'un système de quatre antennes réceptrices monofréquences et d'une antenne réceptrice bifréquence, toutes compatibles avec le GPS (Système Global de Positionnement ou *Global Positioning System*). Ses observations permettent de corriger le vecteur des accélérations spécifiques de l'accélération du véhicule porteur et de projeter ce vecteur dans un repère adapté à son interprétation géophysique.

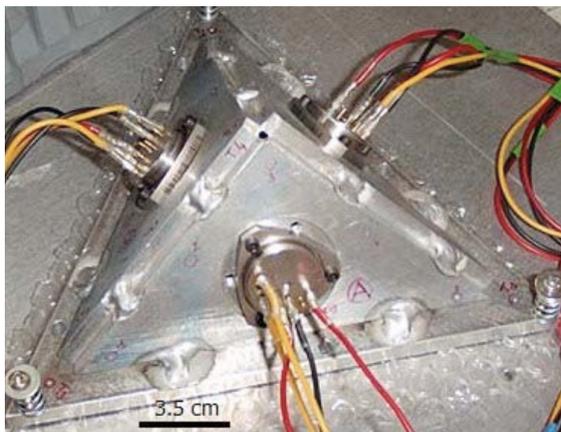


FIGURE 2.1 – Le capteur accélérométrique du LiMo-g rassemble trois accéléromètres linéaires sur trois faces d'un tétraèdre. (source :[De Saint-Jean 2008])

D'un point de vue **théorique**, les outils mathématiques et les différents repères de travail ont été définis afin d'établir l'équation d'observation du système. Parmi les éléments qui composent cette équation, une étude a notamment été menée sur le terme relatif au bras de levier, vecteur séparant le point de mesure en position du point de mesure accélérométrique (Fig. 2.3). L'analyse numérique a montré que, dans le cas où ce vecteur était parfaitement connu, une incertitude supérieure à 0.02 degré sur les angles d'attitude impliquait une erreur supérieure à 1 mGal sur ce terme. La connaissance erronée du vecteur bras de levier associée à la précision du capteur d'attitude, de l'ordre du dixième de degré, a ainsi permis de conclure quant à l'importance du traitement à accorder à ce terme perturbateur.

## 2.1. EXPÉRIENCE ACQUISE DU LIMO-G

---

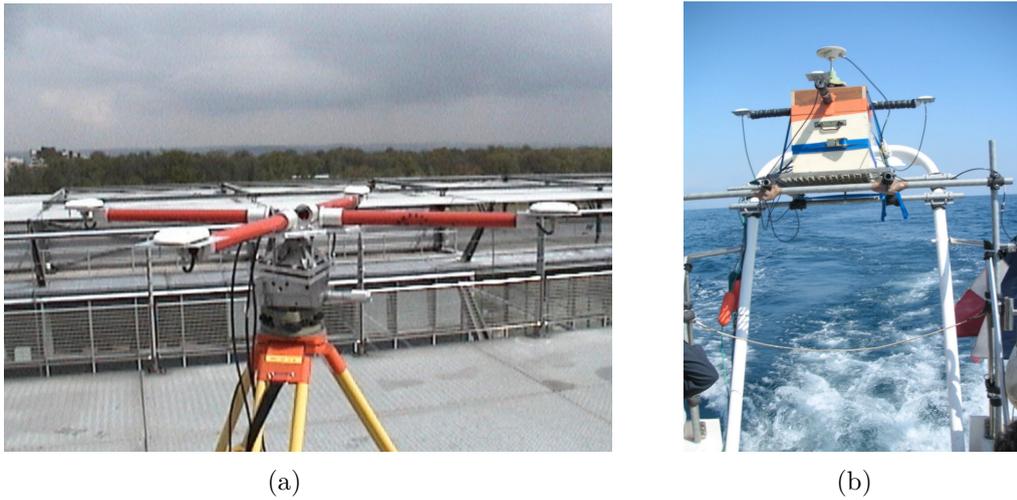


FIGURE 2.2 – Le capteur de position et d’attitude du LiMo-g est constitué d’un système de quatre antennes réceptrices monofréquences (a), surmonté d’une antenne réceptrice bifréquence (b), toutes compatibles avec le GPS. (source :[De Saint-Jean 2008])

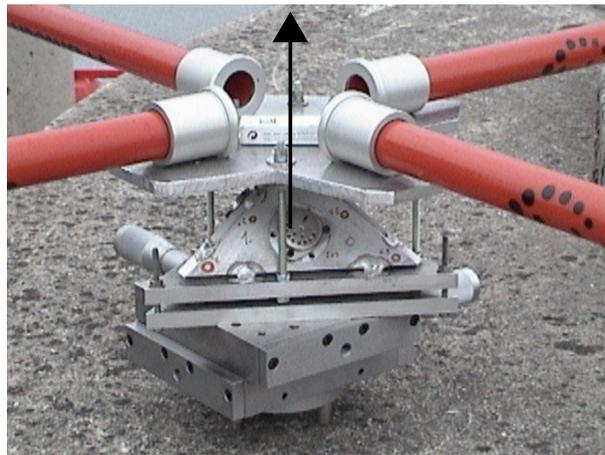


FIGURE 2.3 – Le bras de levier correspond au vecteur séparant le point de la mesure de position par l’antenne réceptrice bifréquence (non visible ici) du point de la mesure accélérométrique. (source :[De Saint-Jean 2008])

Le traitement récursif et probabiliste des observations permettant l'estimation des composantes du vecteur accélération de pesanteur a été conduit grâce à un filtre de Kalman. La non-linéarité de l'équation d'observation a impliqué l'écriture de la forme *étendue* de ce filtre qui utilise, par conséquent, une approximation linéaire de la fonction reliant les paramètres du problème aux observations. Ce filtre a été expérimenté avec des données semi-synthétiques générées grâce aux observations acquises lors d'une mission d'expérimentation menée au large de Sainte-Maxime en Méditerranée. La divergence du filtre a été expliquée en raison des fortes incertitudes affectant les angles d'attitude mesurés par le système quatre antennes réceptrices GPS.

D'un point de vue **instrumental**, le montage électrique retenu pour l'assemblage des accéléromètres induit une plage dynamique de mesure dont la largeur vaut approximativement  $2g$  (avec  $g \approx 9.8 \times 10^5$  mGal), associée à une résolution de numérisation inférieure à 0.2 mGal. En raison de la sensibilité en température des accéléromètres et du numériseur, il a été décidé de thermostatier l'enceinte contenant le capteur grâce à un chauffage permanent assurant le maintien d'une température de travail stabilisée à plus ou moins  $1^\circ\text{C}$ . Concernant l'étalonnage du système, une étude approfondie a été menée sur la détermination des coefficients d'étalonnage [de Saint-Jean et al. 2005] et l'orientation des axes sensibles du capteur accélérométrique (Fig. 2.4). En conclusion des différents protocoles mis en œuvre, il a été recommandé de distinguer la détermination des coefficients d'étalonnage de l'orientation des axes sensibles du capteur accélérométrique et de privilégier les méthodes de calibration gravimétriques aux méthodes géométriques.

D'un point de vue **expérimental**, deux missions ont été menées au cours des trois années de recherche. La mission terrestre de Domfront en Champagne (Fig. 2.5) consistait à expérimenter le LiMo-g sur un profil gravimétrique déterminé préalablement à l'aide d'un gravimètre scalaire relatif (Fig. 2.6). L'analyse des résultats issus de cette mission a mis en avant la nécessité d'améliorer le maintien en température de l'enceinte contenant le capteur accélérométrique d'un facteur 20, soit une stabilité égale à plus ou moins  $0.05^\circ\text{C}$ . Au-delà de cette variation maximale, il est effectivement apparu que la stabilité des coefficients d'étalonnage ne pouvait plus être garantie.

## 2.1. EXPÉRIENCE ACQUISE DU LIMO-G

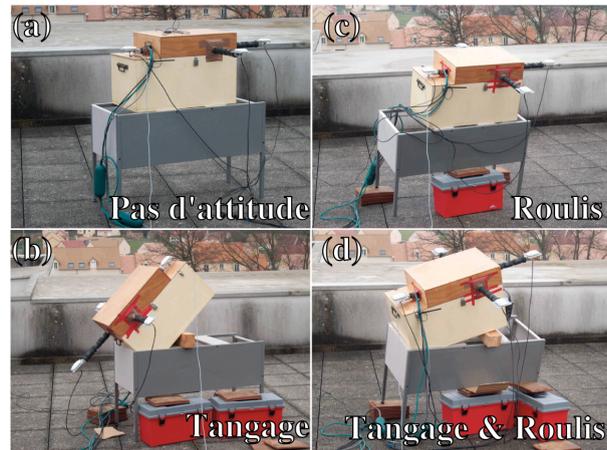


FIGURE 2.4 – Protocole de calibration du LiMo-g sur un point gravimétrique de référence. La triade accélérométrique est enfermée dans son caisson thermostaté. (source :[De Saint-Jean 2008])



FIGURE 2.5 – Installation du LiMo-g sur la camionnette de l'ESGT lors de la mission d'expérimentation de Domfront en février 2006. (source :[De Saint-Jean 2008])

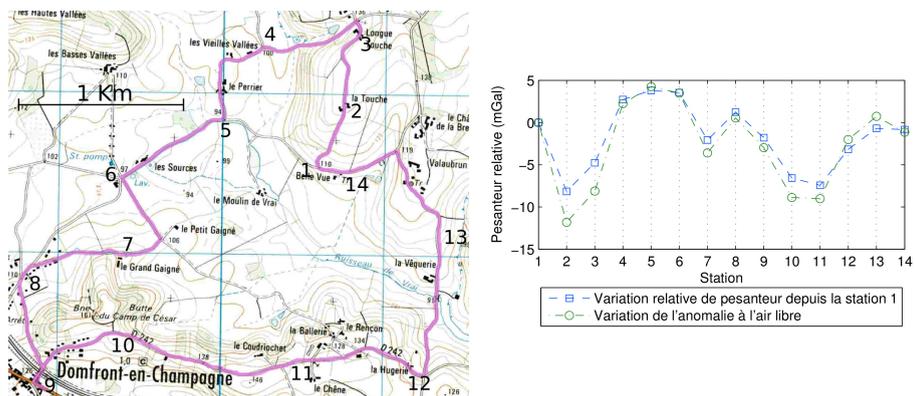


FIGURE 2.6 – Profil gravimétrique de référence utilisé lors de la mission de Domfront. (source :[De Saint-Jean 2008])

## 2.1. EXPÉRIENCE ACQUISE DU LIMO-G

Les données recueillies lors de la mission marine au large de Sainte-Maxime en avril 2006 sur plusieurs profils gravimétriques de référence du SHOM (Fig. 2.7) ont permis de générer des données semi-synthétiques indépendantes des coefficients d'étalonnage et des variations de température. Ces données ont été utilisées afin d'expérimenter le filtre de Kalman *étendu*. La divergence de ce dernier a été expliquée en raison de la trop forte incertitude affectant la mesure des angles d'attitude. Afin de rétablir la convergence du filtre de Kalman, il a été suggéré d'introduire les mesures des dérivées premières de ces angles par l'ajout de gyromètres au sein du LiMo-g. Enfin, une recommandation concernant l'amélioration du modèle d'évolution des composantes du vecteur accélération de pesanteur a été émise afin d'améliorer le filtrage des observations. Elle préconise l'implémentation d'un modèle d'évolution selon un processus de Markov dont la fonction de covariance serait choisie parmi les modèles classiques de covariance du champ réel. Cette amélioration a été étudiée au cours d'un travail de fin d'études réalisé par Nicolas Damenet alors élève ingénieur à l'ESGT [Damenet 2012; Verdun et al. 2013].

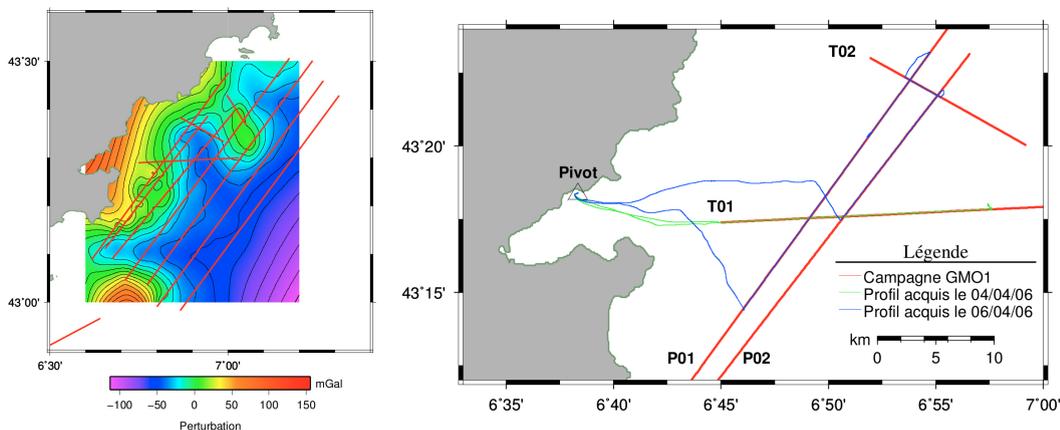


FIGURE 2.7 – Profils gravimétriques de référence du SHOM et profils parcourus lors de la mission de Sainte-Maxime. (source :[De Saint-Jean 2008])

### 2.2 Introduction du système GraviMob

Comme le LiMo-g, le système GraviMob développé par le LDO est un instrument dédié à la mesure dynamique et vectorielle du champ de gravité terrestre. Il se distingue principalement de son homologue par une utilisation en milieu sous-marin. De ce fait, le système GraviMob abandonne logiquement le système d'antennes réceptrices GPS permettant la restitution de la position et de l'attitude du capteur accélérométrique contre un système plus adapté à la navigation et au positionnement en milieu sous-marin.

Le capteur accélérométrique du système GraviMob reprend le même principe de base que le LiMo-g, à savoir la réunion d'accéléromètres linéaires en une triade permettant une mesure vectorielle de l'accélération spécifique. Tandis que le LiMo-g comptait trois accéléromètres, le système GraviMob en compte dorénavant six répartis en deux triades (Fig. 2.8).

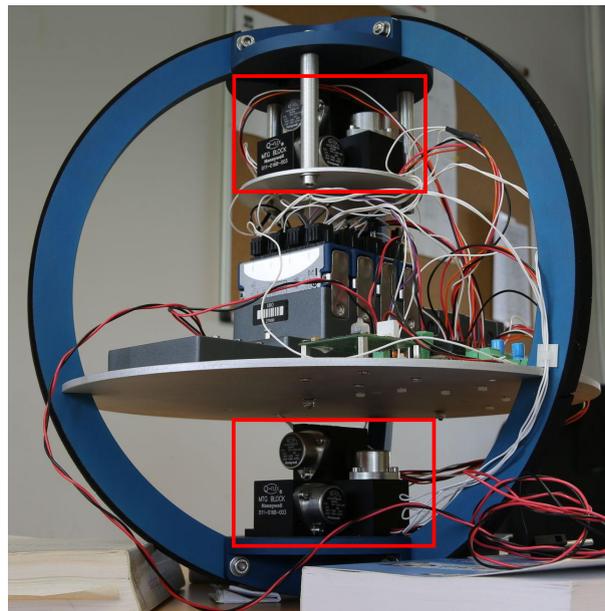


FIGURE 2.8 – Le capteur accélérométrique du système GraviMob compte six accéléromètres répartis en deux triades visibles dans les parties supérieure et inférieure de la figure.

## 2.2. INTRODUCTION DU SYSTÈME GRAVIMOB

---

Le système GraviMob abandonne également l'encombrant système de régulation en température<sup>1</sup> et sa géométrie permet à l'ensemble de ses composants d'être inséré dans une sphère de verre étanche (Fig. 2.9) capable de résister aux fortes pressions rencontrées en fond de mer.

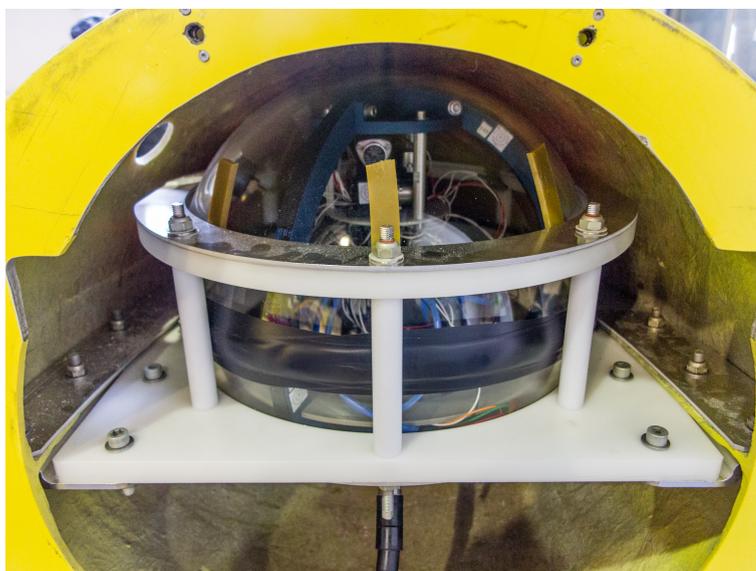


FIGURE 2.9 – Le capteur accélérométrique du système GraviMob est contenu dans une sphère étanche capable de résister à des immersions à plusieurs kilomètres de profondeur.

Le véhicule porteur dans lequel a été imaginée l'intégration du capteur accélérométrique est un véhicule sous-marin non habité de type AUV (Véhicule sous-marin autonome ou *Autonomous Underwater Vehicle*). Dans le cadre de cette étude, l'AUV *Aster<sup>x</sup>* (Fig. 2.10) de l'IFREMER a été choisi comme porteur expérimental de référence.

Un tel véhicule est équipé d'un ensemble d'instruments qui permettent d'assurer une navigation sécurisée et un suivi constant du navire accompagnateur en surface. La fusion des observations provenant des différents capteurs permet d'obtenir, entre autres, la position et l'attitude du véhicule sous-marin. Tandis que le LiMo-g (comprenant la triade accélérométrique et le système d'antennes réceptrices GPS) est indépendant du choix du

---

1. Ce choix a été retenu lors de la conception afin de minimiser l'encombrement et la consommation électrique du capteur. À ce stade, on émet l'hypothèse que la stabilité en température sera assurée par le milieu naturel sous-marin.

## 2.2. INTRODUCTION DU SYSTÈME GRAVIMOB

---



FIGURE 2.10 – Le véhicule porteur choisi pour expérimenter le capteur accélérométrique est le véhicule autonome sous-marin (AUV) *Aster<sup>x</sup>* de l'IFREMER.

véhicule porteur terrestre, le système GraviMob est quant à lui complètement dépendant d'un véhicule porteur, pourvu que ce dernier soit capable de fournir sa position et son attitude.

Cette présentation générale permet d'ores et déjà de constater les choix majeurs qui distinguent le LiMo-g du système GraviMob, à savoir :

- l'ajout d'une seconde triade accélérométrique ;
- l'abandon du système de régulation en température ;
- un changement radical, mais logique au vu des contraintes naturelles, du système de positionnement et de restitution d'attitude du capteur accélérométrique.

Les conséquences de ces choix, bénéfiques comme défavorables, sont abordées et mises en avant au travers des différents résultats exposés dans ce mémoire.

### 2.3 Organisation du manuscrit

Afin d'apprécier l'apport des différentes évolutions technologiques apportées par le système GraviMob en comparaison avec le LiMo-g, ce manuscrit adopte le plan suivant :

- La deuxième partie, intitulée **Aspects théorique et instrumental** est divisée en quatre chapitres. Le chapitre 3 expose la nouvelle équation d'observation induite par l'utilisation d'une seconde triade dans le capteur accélérométrique. Le chapitre 4 présente les éléments constitutifs du capteur accélérométrique ainsi que les choix et les conséquences du montage géométrique et électrique retenu. Le chapitre 5 présente le véhicule porteur, ses instruments dédiés à la navigation sous-marine ainsi que l'intégration du capteur accélérométrique en tant que charge scientifique utile. Le chapitre 6 expose en détails les méthodes de détermination des paramètres d'étalonnage et d'orientation du capteur accélérométrique.
- La troisième partie, intitulée **Stratégie d'estimation du champ de pesanteur** se voit découpée en deux chapitres. Le chapitre 7 établit les performances brutes du système GraviMob par propagation des incertitudes affectant les observations au travers de l'équation d'observation. Le chapitre 8 introduit le nouveau filtre de Kalman adopté pour le traitement récursif des observations en vue d'obtenir la meilleure estimation possible des composantes du champ de pesanteur.
- La quatrième et dernière partie de ce manuscrit, intitulée **Expérimentation du système GraviMob** introduit dans le chapitre 9, la mission d'expérimentation menée en Mer Méditerranée sur les profils gravimétriques de référence du SHOM. Elle expose les résultats issus de l'analyse des observations acquises dans le chapitre 10 puis présente, dans le chapitre 11 les résultats issus de l'estimation des composantes du champ de pesanteur par application du filtre de Kalman.

Enfin, la conclusion générale de ce manuscrit dresse le bilan des divers résultats acquis durant ces trois années et propose, en conséquence, les perspectives d'évolution du système.

## Deuxième partie

# Aspects théorique et instrumental



## Chapitre 3

# Équation de la gravimétrie mobile

Ce chapitre a pour objectif l'établissement de l'équation d'observation du système GraviMob. Il introduit, dans une première section, les outils mathématiques et les repères spatiaux utilisés dans le contexte de la gravimétrie mobile. La deuxième section expose l'équation d'observation dans le cas où le système ne possède qu'une seule triade accélérométrique comme dans le cas du LiMo-g. Les deux dernières sections reprennent cette formulation générale et l'appliquent au cas particulier du système GraviMob.

### 3.1 Repères, rotations et dérivation matricielle

**Repère** En considérant le temps comme invariant, on appelle indifféremment référentiel ou repère tout système de coordonnées cartésiennes muni d'une base orthonormée directe de  $\mathbb{R}^3$ .

**Repérage d'un point** Un point  $I$  de l'espace  $\mathbb{R}^3$  est repéré par un vecteur noté  $X_I$ . Étant donné un repère  $a$ , la projection du vecteur  $X_I$  dans ce repère s'écrit  $X_I^a$ . Autrement dit,  $X_I^a$  est la matrice colonne de dimension 3 contenant les coordonnées du vecteur  $X_I$  dans la base orthonormée directe choisie.

**Changement de repère** Soient deux repères  $a$  et  $b$ , de même origine et d'orientation quelconque (Fig. 3.1). Soit  $X_I$  un vecteur quelconque de  $\mathbb{R}^3$ .

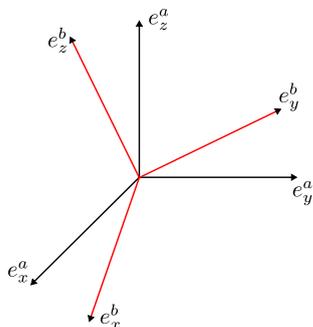


FIGURE 3.1 – La base du repère  $a$  (en noir) est constituée des vecteurs unitaires  $(e_x^a, e_y^a, e_z^a)$ . Celle du repère  $b$  (en rouge) a pour vecteurs unitaires  $(e_x^b, e_y^b, e_z^b)$ .

La matrice de transformation, notée  $C_b^a$ , permettant d'exprimer le vecteur  $X_I^a$  à partir du vecteur  $X_I^b$ , peut s'exprimer comme le produit de trois matrices orthogonales,  $R_x$ ,  $R_y$  et  $R_z$  définies par :

$$R_x(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} R_y(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} R_z(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

où l'angle  $\theta$  est considéré positif dans le sens trigonométrique [Goldstein 1964]. On retiendra la règle suivante pour construire la matrice de transformation  $C_b^a$  (Fig 3.2).

**Convention** Le repère  $b$  s'obtient en appliquant au repère  $a$  :

- une rotation d'angle  $\theta_z$  autour du troisième axe initial ;
- une rotation d'angle  $\theta_y$  autour du deuxième axe intermédiaire ;
- une rotation d'angle  $\theta_x$  autour du premier axe final.

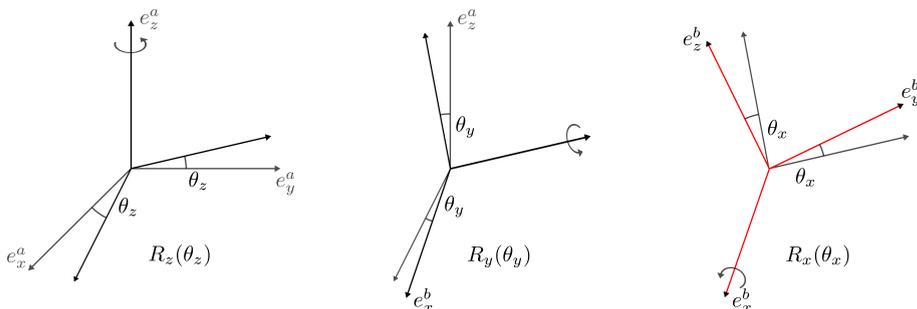


FIGURE 3.2 – Le nouveau repère  $b$  s'obtient après application de trois rotations successives depuis le repère  $a$ .

### 3.1. REPÈRES, ROTATIONS ET DÉRIVATION MATRICIELLE

---

La matrice  $C_b^a$  s'obtient alors par la relation suivante :

$$C_b^a = R_z(\theta_z) \times R_y(\theta_y) \times R_x(\theta_x) \quad ,$$

et le vecteur  $X_I^a$  s'exprime en fonction du vecteur  $X_I^b$  comme suit :

$$X_I^a = C_b^a X_I^b$$

L'inverse de la matrice de transformation  $C_b^a$ , notée  $C_a^b$ , permet de passer du repère  $a$  au repère  $b$ . Puisque la matrice  $C_b^a$  est définie comme le produit de matrices orthogonales, elle est elle-même orthogonale et par conséquent son inverse est égale à sa transposée :

$$C_a^b = C_b^{a^{-1}} = C_b^{a^T}$$

Le vecteur  $X_I^b$  peut donc, à son tour, s'exprimer en fonction de  $X_I^a$  par la relation suivante :

$$X_I^b = C_a^b X_I^a$$

La construction de la matrice de transformation  $C_b^a$  fait ici appel à la méthode dite des cosinus-directeurs. À noter qu'il existe d'autres méthodes permettant d'exprimer cette matrice tel que les angles d'Euler ou les quaternions. La méthode des cosinus-directeurs se prête davantage au cas de la gravimétrie mobile car elle utilise directement les grandeurs angulaires observées.

**Dérivation** Le vecteur  $X_I^b$  est supposé invariant ( $\dot{X}_I^b = 0$ ) et on considère maintenant que l'orientation du repère  $b$  par rapport au repère  $a$  varie dans le temps. On cherche à exprimer la dérivée du vecteur  $X_I^a$  en fonction du vecteur  $X_I^b$ .

On admet le théorème suivant [Titterton and Weston 2004] :

*Soit le vecteur  $X_I$  dont la projection dans un repère  $a$  est reliée à sa projection dans un repère  $b$  par :*

$$X_I^a = C_b^a X_I^b \quad ,$$

*avec la matrice de transformation  $C_b^a$  fonction du temps.*

*La dérivée du vecteur  $X_I^a$ , notée  $\dot{X}_I^a$ , s'exprime en fonction de  $X_I^b$  par la relation suivante :*

$$\dot{X}_I^a = C_b^a \Omega_{ab}^b X_I^b \quad ,$$

avec  $\Omega_{ab}^b$  la matrice antisymétrique associée au vecteur rotation  $\omega_{ab}^b$  du repère  $b$  par rapport au repère  $a$  et projeté dans  $b$ , tous deux définis par :

$$\omega_{ab}^b = \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \Omega_{ab}^b = C_a^b \dot{C}_b^a = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix}$$

#### Repères usuels en gravimétrie mobile

**Le repère inertiel** appelé également *i-frame* (*inertial frame*) ou repère de Copernic est défini par son origine prenant place au centre de masse du Système Solaire et par ses axes orientés vers des étoiles lointaines considérées comme fixes. Il correspond à un référentiel galiléen dans lequel la seconde loi de Newton est applicable. Dans le cadre de cette étude, les courtes durées d'expérimentation permettent de placer l'origine de ce repère proche du centre de gravité de la Terre et par conséquent, de négliger le mouvement de translation elliptique de celle-ci dans sa course autour du Soleil.

**Le repère terrestre** appelé également *e-frame* (*earth-frame*) accompagne la Terre dans son mouvement de rotation sur-elle même. Il est défini par :

- une origine  $O$  proche du centre de gravité de la Terre ;
- un axe  $e_z^e$  proche de l'axe de rotation de la Terre ;
- un axe  $e_x^e$  tel que  $(O, e_x^e, e_z^e)$  définit le plan méridien origine ;
- un axe  $e_y^e$  tel que  $(O, e_x^e, e_y^e)$  est confondu avec le plan de l'équateur.

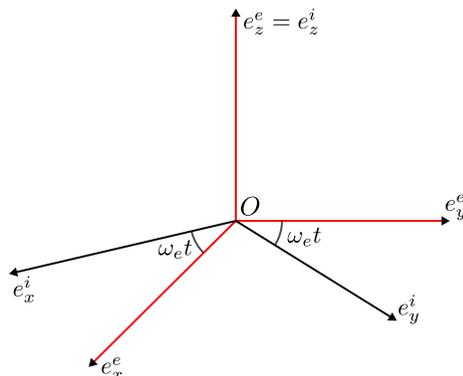


FIGURE 3.3 – Le repère terrestre (en rouge) se distingue du repère inertiel (en noir) par une rotation d'angle  $\omega_e t$  autour de l'axe  $e_z^e = e_z^i$ .

### 3.1. REPÈRES, ROTATIONS ET DÉRIVATION MATRICIELLE

---

Pour former le repère terrestre (Fig. 3.3), on applique au repère inertiel : une rotation d'angle  $\omega_e t$  autour de son troisième axe, où  $\omega_e$  correspond à la vitesse de rotation terrestre ( $\omega_e = 7.292115 \times 10^{-5} \text{ rad s}^{-1}$ ) et  $t$  désigne le temps. La matrice de transformation entre le repère terrestre et le repère inertiel s'obtient alors par :

$$C_e^i = R_z(\omega_e t)$$

Il vient :

$$C_e^i = \begin{pmatrix} \cos(\omega_e t) & -\sin(\omega_e t) & 0 \\ \sin(\omega_e t) & \cos(\omega_e t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

À cette matrice de transformation est associé le vecteur rotation  $\omega_{ie}^e$  et la matrice antisymétrique  $\Omega_{ie}^e$  donnés par :

$$\omega_{ie}^e = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_e \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \Omega_{ie}^e = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_e & 0 \\ \omega_e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

Au repère terrestre est également attaché un ellipsoïde de référence permettant de définir un point  $P$  par ses coordonnées géographiques. Cet ellipsoïde de référence se définit géométriquement par :

- son centre, confondu avec l'origine  $O$  du repère terrestre ;
- son demi-grand axe,  $a$  ;
- son excentricité,  $e$ .

Les valeurs de  $a$  et  $e$  (Tab. 3.1) utilisées dans cette étude reprennent celles entrant dans la définition de l'ellipsoïde de référence GRS80 [Hofmann-Wellenhof and Moritz 2006].

a	e
6378137.0 m	$\sqrt{0.006694380022903}$

TABLE 3.1 – Valeurs du demi-grand axe et de l'excentricité de l'ellipsoïde GRS80.

Les coordonnées géographiques d'un point  $P$  (Fig 3.4) sont définies sur cet ellipsoïde par :

- une longitude,  $\lambda$ , définie comme l'angle entre le plan méridien origine (méridien de Greenwich dans le cas de l'ellipsoïde GRS80) et le plan méridien passant par  $P$  ;
- une latitude,  $\varphi$ , définie comme l'angle entre le plan de l'équateur et la normale à l'ellipsoïde passant par  $P$  ;

- une hauteur ellipsoïdale,  $h$ , comptée le long de la normale à l'ellipsoïde passant par  $P$  à partir de sa surface.

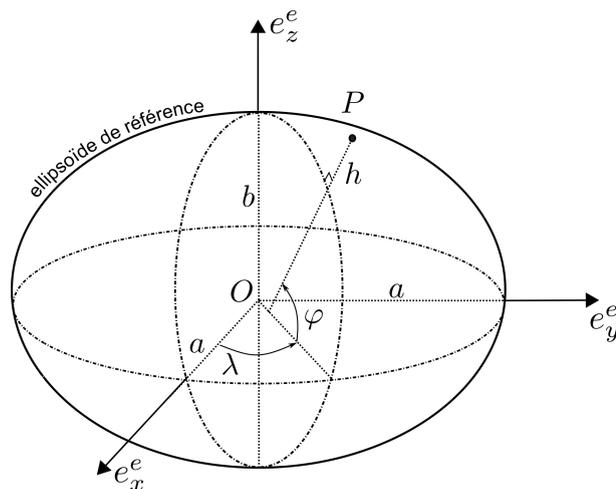


FIGURE 3.4 – Le point  $P$  est repéré par ses coordonnées géographiques ( $\lambda$ ,  $\varphi$  et  $h$ ). Le demi-petit axe de l'ellipsoïde de référence est donné par  $b = a\sqrt{1 - e^2}$ .

Les coordonnées cartésiennes ( $x$ ,  $y$  et  $z$ ) du point  $P$  s'obtiennent à partir des coordonnées géographiques ( $\lambda$ ,  $\varphi$ , et  $h$ ) par les relations suivantes :

$$P \begin{cases} x = (N + h) \cos \varphi \cos \lambda \\ y = (N + h) \cos \varphi \sin \lambda \\ z = (N(1 - e^2) + h) \sin \varphi \end{cases},$$

avec  $N$  la grande normale à l'ellipsoïde définie par :

$$N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}$$

**Le repère de navigation** appelé également *n-frame* (*navigation frame*) est défini en un point  $P$  de coordonnées géographiques ( $\lambda$ ,  $\varphi$  et  $h$ ) par :

- un axe  $e_{east}^n$  pointant vers l'est et tangent au parallèle de latitude  $\varphi$  ;
- un axe  $e_{north}^n$  pointant vers le nord et tangent au méridien de longitude  $\lambda$  ;
- un axe  $e_{up}^n = e_{east}^n \wedge e_{north}^n$  pointant vers les hauteurs ellipsoïdales croissantes.

Pour former le repère de navigation (Fig. 3.5), on applique au repère terrestre :

- une rotation d'angle  $\lambda + \pi/2$  autour de son troisième axe ;
- une rotation d'angle  $\pi/2 - \varphi$  autour du premier axe final.

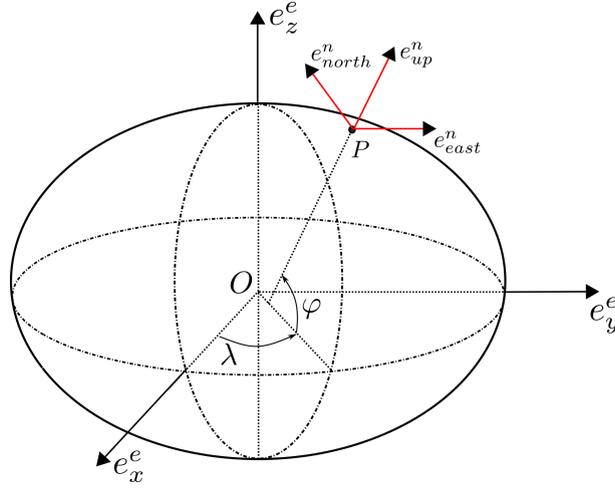


FIGURE 3.5 – Le repère de navigation (en rouge) est défini au point  $P$  de coordonnées géographiques  $\lambda$ ,  $\varphi$  et  $h$ . Ses vecteurs de base sont dirigés respectivement vers l'est, le nord et les hauteurs ellipsoïdales croissantes.

La matrice de transformation entre le repère navigation et le repère terrestre s'obtient alors par :

$$C_n^e = R_z(\lambda + \pi/2)R_x(\pi/2 - \varphi)$$

Il vient :

$$C_n^e = \begin{pmatrix} -\sin \lambda & -\cos \lambda \sin \varphi & \cos \lambda \cos \varphi \\ \cos \lambda & -\sin \lambda \sin \varphi & \sin \lambda \cos \varphi \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

À cette matrice de transformation est associé le vecteur rotation  $\omega_{en}^n$  et la matrice antisymétrique  $\Omega_{en}^n$  donnés par :

$$\omega_{en}^n = \begin{pmatrix} -\dot{\varphi} \\ \dot{\lambda} \cos \varphi \\ \dot{\lambda} \sin \varphi \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \Omega_{en}^n = \begin{pmatrix} 0 & -\dot{\lambda} \sin \varphi & \dot{\lambda} \cos \varphi \\ \dot{\lambda} \sin \varphi & 0 & \dot{\varphi} \\ -\dot{\lambda} \cos \varphi & -\dot{\varphi} & 0 \end{pmatrix}$$

**Le repère du véhicule porteur** appelé également *b-frame* (*body frame*), est défini en un point  $P$  du véhicule par :

- un axe  $e_x^b$  pointant vers la proue du véhicule ;
- un axe  $e_y^b$  pointant vers bâbord ;
- un axe  $e_z^b = e_x^b \wedge e_y^b$ .

### 3.1. REPÈRES, ROTATIONS ET DÉRIVATION MATRICIELLE

---

L'orientation de ce repère se définit à partir du repère de navigation par la donnée des angles d'attitude dont :

- le cap,  $\delta$ , compté positivement dans le sens horaire autour de  $e_z^b$ ;
- le roulis,  $\eta$ , compté positivement dans le sens trigonométrique autour de  $e_x^b$ ;
- le tangage,  $\chi$ , compté positivement dans le sens trigonométrique autour de  $e_y^b$ .

À attitude nulle ( $\delta = 0$ ,  $\eta = 0$  et  $\chi = 0$ ), les axes du repère du véhicule porteur sont donc orientés respectivement vers le nord, l'ouest et les hauteurs croissantes.

Pour former le repère du véhicule porteur (Fig 3.6), on applique au repère de navigation :

- une rotation d'angle  $\pi/2 - \delta$  autour de son troisième axe ;
- une rotation d'angle  $\chi$  autour du deuxième axe intermédiaire ;
- une rotation d'angle  $\eta$  autour du premier axe final.

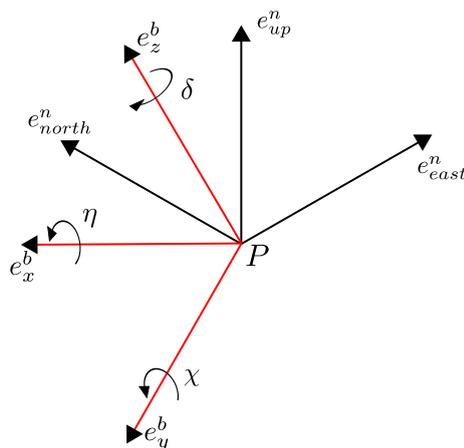


FIGURE 3.6 – Le repère du véhicule porteur se définit à partir du repère de navigation par les angles de cap,  $\delta$ , de roulis,  $\eta$  et de tangage,  $\chi$ .

La matrice de transformation entre le repère du véhicule porteur et le repère de navigation s'obtient alors par :

$$C_b^n = R_z(\pi/2 - \delta)R_y(\chi)R_x(\eta)$$

### 3.1. REPÈRES, ROTATIONS ET DÉRIVATION MATRICIELLE

---

Il vient :

$$C_b^n = \begin{pmatrix} \sin \delta \cos \chi & \sin \delta \sin \chi \sin \eta - \cos \delta \cos \eta & \sin \delta \sin \chi \cos \eta + \cos \delta \sin \eta \\ \cos \delta \cos \chi & \cos \delta \sin \chi \sin \eta + \sin \delta \cos \eta & \cos \delta \sin \chi \cos \eta - \sin \delta \sin \eta \\ -\sin \chi & \cos \chi \sin \eta & \cos \chi \cos \eta \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

À cette matrice de transformation est associé le vecteur rotation  $\omega_{nb}^b$  et la matrice antisymétrique  $\Omega_{nb}^b$  donnés par :

$$\omega_{nb}^b = \begin{pmatrix} \dot{\delta} \sin \chi + \dot{\eta} \\ -\dot{\delta} \cos \chi \sin \eta + \dot{\chi} \cos \eta \\ -\dot{\delta} \cos \chi \cos \eta - \dot{\chi} \sin \eta \end{pmatrix} \quad \text{et}$$

$$\Omega_{nb}^b = \begin{pmatrix} 0 & \dot{\delta} \cos \chi \cos \eta + \dot{\chi} \sin \eta & -\dot{\delta} \cos \chi \sin \eta + \dot{\chi} \cos \eta \\ -\dot{\delta} \cos \chi \cos \eta - \dot{\chi} \sin \eta & 0 & -\dot{\delta} \sin \chi - \dot{\eta} \\ \dot{\delta} \cos \chi \sin \eta - \dot{\chi} \cos \eta & \dot{\delta} \sin \chi + \dot{\eta} & 0 \end{pmatrix}$$

### 3.2 Cas général d'une seule triade accélérométrique

Cette section établit l'équation de la gravimétrie mobile dans le cas général où il n'existe qu'une seule triade accélérométrique, comme dans le cas du LiMo-g.

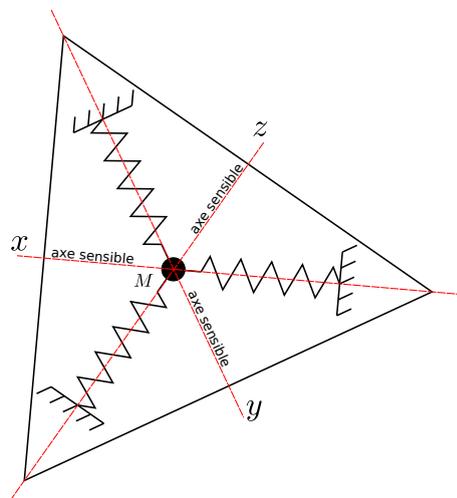


FIGURE 3.7 – Vue schématique en plan d'un accéléromètre vectoriel. Les trois axes sensibles sont dirigés suivant les trois directions de l'espace  $\mathbb{R}^3$ . La masse d'épreuve  $M$  correspond au lieu de la mesure de l'accélération spécifique qui permet son maintien en équilibre.

On modélise un capteur accélérométrique vectoriel par un système constitué d'une masse d'épreuve ponctuelle  $M$  de masse  $m$  maintenue dans une position d'équilibre (Fig. 3.7).

Dans un repère inertiel, les forces appliquées à cette masse d'épreuve se décomposent en :

- une force gravitationnelle égale à  $mG_M$  où  $G_M$  désigne l'accélération gravitationnelle au point  $M$  ;
- une force de rappel qui tend à maintenir la masse d'épreuve dans sa position d'équilibre, égale à  $ma_M$  où  $a_M$  désigne l'accélération spécifique au point  $M$ .

La seconde loi de Newton appliquée à ce système relie la dérivée seconde du vecteur position de la masse d'épreuve, notée  $\ddot{X}_M$ , à  $G_M$  et  $a_M$  par :

$$m\ddot{X}_M^i = mG_M^i + ma_M^i \quad (3.4)$$

L'obtention du vecteur accélération gravitationnelle  $G_M$  dans le repère inertiel a peu d'intérêt. En vue de son interprétation géophysique, il est effectivement d'usage d'exprimer

### 3.2. CAS GÉNÉRAL D'UNE SEULE TRIADE ACCÉLÉROMÉTRIQUE

ce vecteur dans le repère de navigation. De façon similaire, la technique de la gravimétrie mobile imposant au capteur accélérométrique d'être rigidement lié au véhicule porteur, le vecteur accélération spécifique  $a_M$  n'est connu que dans le repère attaché à ce dernier et non dans le repère inertiel. Enfin, la valeur de  $m$  étant non nulle, la relation (3.4) devient :

$$\ddot{X}_M^i = C_e^i C_n^e G_M^n + C_e^i C_n^e C_b^n a_M^b \quad (3.5)$$

De manière générale, la position de la masse d'épreuve  $M$  n'est pas directement accessible. Au mieux, elle est déduite de la position d'un point proche, noté  $P$  (Fig. 3.8), tel que :

$$X_M^i = X_P^i + L^i \quad , \quad (3.6)$$

où  $L$  correspond au vecteur  $\overrightarrow{PM}$ .

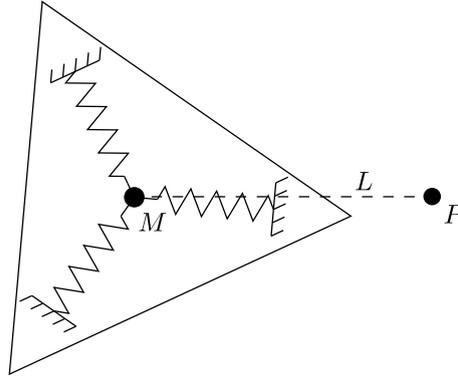


FIGURE 3.8 – La position de la masse d'épreuve  $M$  est déduite de la position d'un point  $P$  et du vecteur bras de levier  $L$ .

Ce vecteur, appelé également bras de levier, est supposé constant dans le repère lié au véhicule porteur ( $\dot{L}^b = 0$ ). De plus, puisque le vecteur position du point  $P$  s'obtient plus facilement dans le repère terrestre que dans le repère inertiel, il convient de transformer la relation (3.6) comme suit :

$$X_M^i = C_e^i X_P^e + C_b^i L^b \quad (3.7)$$

La relation (3.7) et les relations mathématiques de dérivation matricielle établies à la section (3.1) permettent d'établir l'expression de la dérivée première du vecteur  $X_M^i$  :

$$\dot{X}_M^i = C_e^i \Omega_{ie}^e X_P^e + C_e^i \dot{X}_P^e + C_b^i \Omega_{ib}^b L^b \quad , \quad (3.8)$$

### 3.2. CAS GÉNÉRAL D'UNE SEULE TRIADE ACCÉLÉROMÉTRIQUE

---

et par suite l'expression de sa dérivée seconde :

$$\ddot{X}_M^i = C_e^i \left[ \ddot{X}_P^e + 2\Omega_{ie}^e \dot{X}_P^e + \left( \Omega_{ie}^e \Omega_{ie}^e + \dot{\Omega}_{ie}^e \right) X_P^e \right] + C_b^i \left[ \Omega_{ib}^b \Omega_{ib}^b + \dot{\Omega}_{ib}^b \right] L^b \quad (3.9)$$

Les effets gravitationnels dus aux variations de vitesse de rotation du repère terrestre par rapport au repère inertiel sont largement négligeables<sup>1</sup> comparés à la précision recherchée sur la restitution du champ de gravité. Par conséquent, le terme  $\dot{\Omega}_{ie}^e$  est considéré comme nul et la relation (3.9) devient :

$$\ddot{X}_M^i = C_e^i \left[ \ddot{X}_P^e + 2\Omega_{ie}^e \dot{X}_P^e + \Omega_{ie}^e \Omega_{ie}^e X_P^e \right] + C_b^i \left[ \Omega_{ib}^b \Omega_{ib}^b + \dot{\Omega}_{ib}^b \right] L^b \quad (3.10)$$

De plus, les points  $M$  et  $P$  sont considérés comme suffisamment proches l'un de l'autre pour négliger les variations de l'accélération centrifuge due à la rotation de la Terre sur elle-même entre ces deux points<sup>2</sup>. En introduisant le vecteur accélération de pesanteur  $g_M^n$ , cette hypothèse se traduit par :

$$g_M^n = G_M^n - C_e^n \Omega_{ie}^e \Omega_{ie}^e X_M^e \approx G_M^n - C_e^n \Omega_{ie}^e \Omega_{ie}^e X_P^e \quad (3.11)$$

Finalement, les relations (3.11), (3.10) et (3.5) permettent d'établir l'équation générale de la gravimétrie mobile :

$$\boxed{g_M^n = C_e^n \left[ \ddot{X}_P^e + 2\Omega_{ie}^e \dot{X}_P^e \right] + C_b^n \left[ \Omega_{ib}^b \Omega_{ib}^b + \dot{\Omega}_{ib}^b \right] L^b - C_b^n a_M^b} \quad (3.12)$$

Étant donné que la relation (3.12) constitue un point fondamental de cette étude, les grandeurs vectorielles et matricielles qui la composent sont rappelées ci-après :

$g_M^n$  est le vecteur accélération de pesanteur au point  $M$  projeté dans le repère de navigation. Ses composantes sont homogènes à des accélérations.

$C_e^n$  est la matrice de transformation permettant de passer du repère terrestre au repère de navigation. Elle est définie comme la transposée de la matrice  $C_n^e$  (3.2). Ses coefficients dépendent de la longitude et de la latitude géographique du point  $P$ .

$\ddot{X}_P^e$  est le vecteur correspondant à la dérivée seconde du vecteur position du point  $P$ . Ses composantes dépendent des coordonnées géographiques du point  $P$  ainsi que de leurs dérivées premières et secondes.

---

1. En norme, ces effets ne dépassent pas 1 nGal avec  $\dot{\omega}_e = 10^{-18} \text{ rad s}^{-2}$ .

2. Pour une distance de 30 cm entre les points  $M$  et  $P$ , l'erreur engendrée n'exède pas 0.2  $\mu\text{Gal}$ .

### 3.2. CAS GÉNÉRAL D'UNE SEULE TRIADE ACCÉLÉROMÉTRIQUE

---

$\Omega_{ie}^e$  est la matrice antisymétrique associée à la rotation du repère terrestre par rapport au repère inertiel (3.1). Elle dépend uniquement de la vitesse de rotation terrestre.

$\dot{X}_P^e$  est le vecteur correspondant à la dérivée première du vecteur position du point  $P$ . Ses composantes dépendent des coordonnées géographiques du point  $P$  ainsi que de leurs dérivées premières.

$C_b^n$  est la matrice de transformation permettant de passer du repère du véhicule porteur au repère de navigation (3.3). Ses coefficients dépendent des angles d'attitude du véhicule porteur.

$\Omega_{ib}^b$  est la matrice antisymétrique associée à la rotation du repère du véhicule porteur par rapport au repère inertiel. Elle est définie à partir du vecteur rotation  $\omega_{ib}^b$  donné par :

$$\omega_{ib}^b = C_b^n (C_e^n \omega_{ie}^e + \omega_{en}^n) + \omega_{nb}^b \quad (3.13)$$

Ses coefficients dépendent de la longitude et de la latitude du point  $P$  ainsi que de leurs dérivées premières, des angles d'attitude du véhicule porteur ainsi que de leurs dérivées premières et de la vitesse de rotation terrestre.

$\dot{\Omega}_{ib}^b$  correspond à la dérivée première de la matrice antisymétrique associée à la rotation du repère du véhicule porteur par rapport au repère inertiel (3.13). Ses coefficients dépendent de la longitude et de la latitude du point  $P$  ainsi que de leurs dérivées premières et secondes, des angles d'attitude du véhicule porteur ainsi que de leurs dérivées premières et secondes et de la vitesse de rotation terrestre.

$L^b$  est le vecteur bras de levier reliant le point  $P$  au point  $M$  projeté dans le repère du véhicule porteur. Ses composantes sont homogènes à des distances.

$a_M^b$  est le vecteur accélération spécifique projeté dans le repère du véhicule porteur. Il contient les mesures effectuées par le capteur accélérométrique. Ses composantes sont homogènes à des accélérations.

Dans l'équation générale de la gravimétrie mobile (3.12), les composantes du vecteur accélération spécifique  $a_M$  sont supposées connues dans le repère du véhicule porteur et homogènes à des accélérations. En pratique, les axes sensibles du capteur ne sont pas parfaitement confondus avec les axes du repère du véhicule porteur et les valeurs délivrées

sont homogènes à des tensions électriques. La connaissance du vecteur  $a_M^b$  nécessite donc l'étalonnage et l'orientation du capteur accélérométrique au sein du véhicule porteur. Cet aspect sera abordé en détail dans le chapitre 6 de ce manuscrit. Les prochaines sections font quant à elles l'hypothèse de la connaissance idéale du vecteur  $a_M$ .

### 3.3 Application au cas du système GraviMob

Cette section reprend l'équation générale de la gravimétrie mobile établit précédemment (3.12) et l'applique au cas particulier du système GraviMob. Le capteur accélérométrique du système GraviMob est constitué de deux triades accélérométriques, repérées par les lettres grecques  $\alpha$  et  $\beta$  (Fig. 3.9).

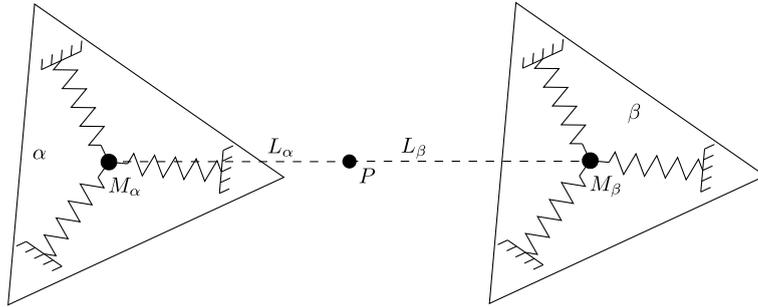


FIGURE 3.9 – Les deux triades accélérométriques du système GraviMob sont identifiées par les lettres  $\alpha$  et  $\beta$ . La position du point  $P$  est supposée observable. Le bras de levier entre  $P$  et  $M_\alpha$  (resp.  $M_\beta$ ) est noté  $L_\alpha$  (resp.  $L_\beta$ ).

Par conséquent, l'équation générale de la gravimétrie mobile (3.12) peut être appliquée :

- au point  $M_\alpha$ , masse d'épreuve de la triade accélérométrique  $\alpha$  ;

$$g_{M_\alpha}^n = C_e^n \left[ \ddot{X}_P^e + 2\Omega_{ie}^e \dot{X}_P^e \right] + C_b^n \left[ \Omega_{ib}^b \Omega_{ib}^b + \dot{\Omega}_{ib}^b \right] L_\alpha^b - C_b^n a_{M_\alpha}^b \quad , \quad (3.14)$$

- au point  $M_\beta$ , masse d'épreuve de la triade accélérométrique  $\beta$  ;

$$g_{M_\beta}^n = C_e^n \left[ \ddot{X}_P^e + 2\Omega_{ie}^e \dot{X}_P^e \right] + C_b^n \left[ \Omega_{ib}^b \Omega_{ib}^b + \dot{\Omega}_{ib}^b \right] L_\beta^b - C_b^n a_{M_\beta}^b \quad , \quad (3.15)$$

avec  $L_\alpha = \overrightarrow{PM_\alpha}$  et  $L_\beta = \overrightarrow{PM_\beta}$ . Les relations (3.14) et (3.15) présentent des termes similaires qu'il est possible d'éliminer par simple combinaison linéaire. En effet, en émettant l'hypothèse que les bras de levier  $L_\alpha$  et  $L_\beta$  sont opposés, c'est-à-dire  $L_\alpha = -L_\beta$ , la somme

### 3.3. APPLICATION AU CAS DU SYSTÈME GRAVIMOB

---

des deux équations (3.14) et (3.15) conduit à :

$$g_{M_\alpha}^n + g_{M_\beta}^n = 2C_e^n \left[ \ddot{X}_P^e + 2\Omega_{ie}^e \dot{X}_P^e \right] - C_b^n \left[ a_{M_\alpha}^b + a_{M_\beta}^b \right] \quad (3.16)$$

La somme  $g_{M_\alpha}^n + g_{M_\beta}^n$  formée dans l'équation (3.16) peut être reliée au champ de pesanteur au point  $P$ . Au premier ordre, le vecteur  $g_P$  s'exprime effectivement en fonction des vecteurs  $g_{M_\alpha}$  et  $g_{M_\beta}$  comme suit :

$$\begin{cases} g_P &= g_{M_\alpha} + \nabla g_P L_\alpha \\ g_P &= g_{M_\beta} + \nabla g_P L_\beta \end{cases}, \quad (3.17)$$

où  $\nabla g_P$  correspond au gradient de pesanteur au point  $P$ . La somme de ces deux relations (3.17) associée à la condition  $L_\alpha = -L_\beta$  supposée précédemment implique alors :

$$g_P = \frac{1}{2} (g_{M_\alpha} + g_{M_\beta}) \quad (3.18)$$

Finalement, les relations (3.18) et (3.16) conduisent à l'équation d'observation relative au système GraviMob :

$$\boxed{g_P^n = C_e^n \left[ \ddot{X}_P^e + 2\Omega_{ie}^e \dot{X}_P^e \right] - \frac{1}{2} C_b^n \left[ a_{M_\alpha}^b + a_{M_\beta}^b \right]} \quad (3.19)$$

L'existence d'une deuxième triade accélérométrique permet ainsi de s'affranchir du terme relatif au bras de levier ( $C_b^n \left[ \Omega_{ib}^b \Omega_{ib}^b + \dot{\Omega}_{ib}^b \right] L^b$ ) présent dans l'équation générale de la gravimétrie mobile (3.12). Ceci reste vrai tant que le point  $P$  introduit précédemment est tel que  $\overrightarrow{PM_\alpha} = L_\alpha = -\overrightarrow{PM_\beta} = -L_\beta$ , c'est-à-dire dans le cas où  $P$  est exactement au milieu du segment  $[M_\alpha M_\beta]$ . Une critique de cette condition géométrique sera faite dans le chapitre 4 de ce manuscrit. Cette condition est cependant supposée vérifiée dans les études numériques des prochains chapitres.

### 3.4 Notions de gradiométrie mobile

Cette dernière section s'intéresse à la mesure du gradient de pesanteur à partir des deux triades accélérométriques du système GraviMob.

Le développement au premier ordre (3.17) qui permet de relier le champ de pesanteur entre le point  $P$  et les points  $M_\alpha$  et  $M_\beta$ , peut également être utilisé pour exprimer le gradient de pesanteur  $\nabla g_P$  en fonction de  $g_{M_\alpha}$  et  $g_{M_\beta}$ . En effet, la différence des deux équations de la relation (3.17) conduit à :

$$g_{M_\beta} - g_{M_\alpha} = \nabla g_P (L_\alpha - L_\beta) \quad (3.20)$$

En remarquant que  $L_\alpha - L_\beta = \overrightarrow{M_\beta M_\alpha}$ , la relation (3.20) devient :

$$\nabla g_P \cdot \overrightarrow{u_{\beta\alpha}} = \frac{1}{\|\overrightarrow{M_\beta M_\alpha}\|} (g_{M_\beta} - g_{M_\alpha}) \quad , \quad (3.21)$$

où  $\overrightarrow{u_{\beta\alpha}}$  est le vecteur unitaire défini par  $\overrightarrow{u_{\beta\alpha}} = \frac{\overrightarrow{M_\beta M_\alpha}}{\|\overrightarrow{M_\beta M_\alpha}\|}$ . L'écriture de la relation (3.21) dans le repère navigation, associée aux relations (3.14) et (3.15), mène à l'équation d'observation du gradient de pesanteur relative au système GraviMob :

$$\boxed{\nabla g_P^n \cdot \overrightarrow{u_{\beta\alpha}}^n = -C_b^n \left[ \Omega_{ib}^b \Omega_{ib}^b + \dot{\Omega}_{ib}^b \right] \cdot \overrightarrow{u_{\beta\alpha}}^n - C_b^n \left[ \frac{a_{M_\beta}^b - a_{M_\alpha}^b}{\|\overrightarrow{M_\beta M_\alpha}\|} \right]} \quad (3.22)$$

Le tenseur du gradient de pesanteur  $\nabla g_P^n$  contient les variations spatiales des composantes du vecteur accélération de pesanteur dans les directions est (*east* ou *e*), nord (*north* ou *n*) et suivant les hauteurs croissantes (*up* ou *u*) :

$$\nabla g_P^n = \begin{pmatrix} T_{ee} & T_{en} & T_{eu} \\ T_{ne} & T_{nn} & T_{nu} \\ T_{ue} & T_{un} & T_{uu} \end{pmatrix} \quad (3.23)$$

Parmi ses neuf composantes<sup>3</sup>, seules six sont indépendantes du fait de la symétrie du tenseur<sup>4</sup>. Cette propriété permet de ré-écrire la relation (3.23) comme suit :

$$\nabla g_P^n = \begin{pmatrix} T_{ee} & T_{en} & T_{eu} \\ T_{en} & T_{nn} & T_{nu} \\ T_{eu} & T_{nu} & T_{uu} \end{pmatrix}$$

3. Celles-ci s'expriment en  $s^{-2}$  ou en Eötvös ( $1 \text{ E} = 10^{-9} \text{ s}^{-2}$ ).

4. Au même titre que le déterminant, la trace est un invariant du tenseur du gradient de pesanteur. Par conséquent, seul cinq composantes sont réellement indépendantes.

### 3.4. NOTIONS DE GRADIOMÉTRIE MOBILE

L'équation (3.22) montre que le tenseur du gradient de pesanteur ne peut être entièrement restitué à partir de deux seules triades accélérométriques. Le vecteur  $\overrightarrow{u_{\beta\alpha}^n}$  variant du fait du mouvement du véhicule porteur, le produit  $\nabla g_P^n \cdot \overrightarrow{u_{\beta\alpha}^n}$  correspond à un vecteur dont les composantes sont des combinaisons linéaires des composantes du tenseur du gradient de pesanteur. Les trois composantes du vecteur donné par le terme de droite de l'équation (3.22),  $-C_b^n [\Omega_{ib}^b \Omega_{ib}^b + \dot{\Omega}_{ib}^b] \cdot \overrightarrow{u_{\beta\alpha}^n} - C_b^n \left[ \frac{a_{M_\beta}^b - a_{M_\alpha}^b}{\|M_\beta M_\alpha\|} \right]$ , ne suffisent donc pas à restituer les six composantes indépendantes du tenseur du gradient de pesanteur. Les trois observations manquantes peuvent s'obtenir par l'ajout d'une nouvelle paire de triades accélérométriques installée dans une direction non parallèle à celle définie par les deux premières triades (Fig. 3.10).

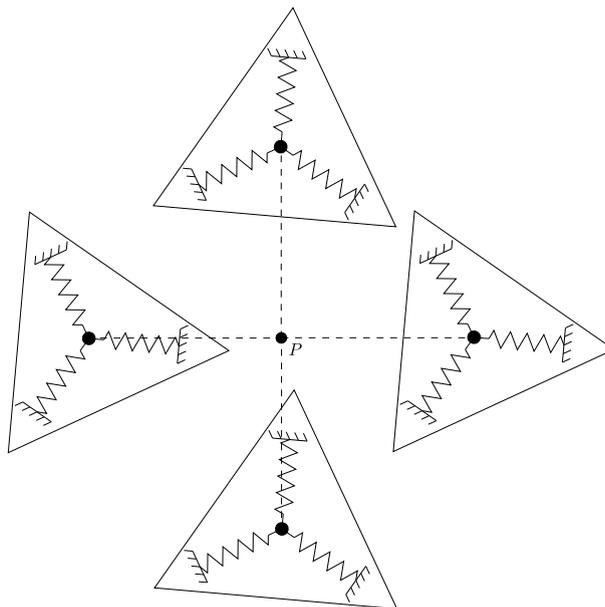


FIGURE 3.10 – La restitution du tenseur du gradient de pesanteur nécessite l'utilisation de deux nouvelles triades accélérométriques placées dans une direction non parallèle à celle définie par la première paire de triades.

Dans une telle configuration, la principale difficulté correspond à la détermination du vecteur  $\overrightarrow{u_{\beta\alpha}^n}$  pour chaque paire de triades accélérométriques. Dans un cas idéal, ces paires sont alignées suivant les axes définissant le repère du véhicule porteur, et seule la norme  $\|\overrightarrow{M_\beta M_\alpha}\|$  doit être déterminée. Dans le cas contraire, il convient de déterminer en plus de cette norme, l'orientation des axes définis par chaque paire de triades accélérométriques

par rapport au repère du véhicule porteur. Ce problème, qui rejoint celui de l'orientation des triades accélérométriques, est cependant plus complexe et ne sera pas abordé dans cette étude.

Ce chapitre a établi l'équation d'observation du système GraviMob. Comparée à l'équation d'observation établie dans le cas du LiMo-g, cette nouvelle équation évolue principalement par le fait que **le terme relatif au bras de levier se voit éliminé grâce à l'ajout d'une seconde triade accélérométrique**. Les chapitres suivants présentent les caractéristiques du capteur accélérométrique et du véhicule porteur du système GraviMob.

## Chapitre 4

# Description du capteur accélérométrique

Ce chapitre décrit les éléments constitutifs du capteur accélérométrique du système GraviMob. Il présente le fonctionnement général et les principales caractéristiques des accéléromètres utilisés, puis analyse les conséquences du montage géométrique et électrique adopté sur la plage dynamique de mesure du capteur. Les deux dernières sections définissent, respectivement, les repères attachés aux deux triades accélérométriques et le formatage du fichier d'observations en sortie du capteur.

### 4.1 Éléments constitutifs du capteur

Le capteur accélérométrique du système GraviMob a été développé au sein du LDO sur les bases du LiMo-g. Il reprend ainsi le principe de la réunion de trois accéléromètres linéaires en une triade qui permet une mesure vectorielle de l'accélération spécifique. Tandis que le LiMo-g ne comptait qu'une seule triade accélérométrique, le capteur accélérométrique du système GraviMob en compte deux, soit six accéléromètres au total. La figure 4.1 présente une vue générale de l'organisation des différents éléments qui composent le capteur accélérométrique :

- les deux triades accélérométriques ( $a$ ) sont placées l'une au-dessus de l'autre de part et d'autre de la structure qui englobe l'ensemble des composants ;

#### 4.1. ÉLÉMENTS CONSTITUTIFS DU CAPTEUR

---

- en sortie de ces accéléromètres et en entrée du numériseur<sup>1</sup> (*b*) se situent les résistances de charge (*c*) permettant la conversion intensité/tension du signal en vue de sa numérisation ;
- en plus de la mesure accélérométrique, le numériseur reçoit en entrée les mesures de température issues de capteurs internes des accéléromètres, les inclinaisons mesurées par l'inclinomètre à deux axes (*d*) ainsi que les tensions aux bornes des résistances de référence (*e*) ;
- une connectique ethernet (*f*) permet de transférer les fichiers contenant les observations brutes ;
- le bloc d'alimentation (*g*) du capteur fonctionne sur une tension de  $\pm 5$  V et une intensité de 0.5 A ;
- les trois arches (*h*) permettent la mise en place d'une sphère en verre assurant l'étanchéité du capteur.

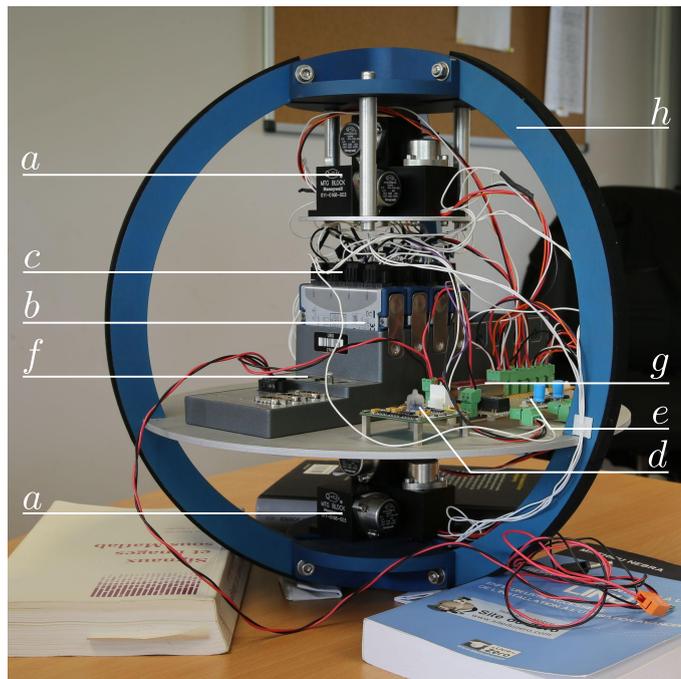


FIGURE 4.1 – Vue d'ensemble du capteur accélérométrique du système GraviMob.

Les six accéléromètres électrostatiques du capteur sont développés par la société américaine

---

1. Les quatre modules d'acquisition du capteur sont développés par la société américaine *National Instruments*.

#### 4.1. ÉLÉMENTS CONSTITUTIFS DU CAPTEUR

---

*Honeywell* sous le nom de Q-Flex<sup>®</sup> QA-3000-020 (Fig. 4.2).



FIGURE 4.2 – Les accéléromètres électrostatiques du capteur accélérométrique correspondent aux modèles Q-Flex<sup>®</sup> QA-3000-020 de la société *Honeywell*.

Leur principe de fonctionnement repose sur le maintien en équilibre d'une masse d'épreuve suspendue à une lame flexible et plongée dans un champ magnétique créé par un électro-aimant. Sous l'effet d'une variation d'accélération, le déplacement relatif de la masse d'épreuve par rapport au corps du capteur est détecté par un système de positionnement capacitif. Ce dernier produit alors le courant électrique d'intensité suffisante pour ramener la masse d'épreuve dans sa position d'équilibre. L'intensité du courant électrique est, ce faisant, proportionnelle à l'accélération spécifique assurant le maintien en équilibre de la masse d'épreuve. La relation mathématique qui relie l'intensité  $I_a$  du courant électrique à l'accélération spécifique est donnée par :

$$I_a = K_a a + b_a \quad ,$$

avec :

$K_a$  le facteur d'échelle exprimé en mA/g ;

$b_a$  le biais en intensité exprimé en mA.

Le tableau 4.1 regroupe quelques données relatives à ces différentes grandeurs physiques. Elles sont issues des informations du constructeur [Honeywell 2006].

La conversion intensité/tension est réalisée en entrée du numériseur<sup>2</sup> grâce aux résistances de charge. La valeur, notée  $R_c$ , de ces résistances est choisie telle que :

$$\Delta U = R_c \Delta I_a = R_c K_a \Delta a \quad , \quad (4.1)$$

---

2. Celui-ci regroupe quatre cartes d'acquisition, produites par la société américaine *National Instruments*.

#### 4.1. ÉLÉMENTS CONSTITUTIFS DU CAPTEUR

---

plage d'entrée	$-60 \text{ g} < a < 60 \text{ g}$
biais	$b_a < 4 \text{ mg (4000 mGal)}$
facteur d'échelle	$1.20 < K_a < 1.46 \text{ mA/g}$
sensibilité en température	$< 15 \mu\text{g}/^\circ\text{C (15 mGal}/^\circ\text{C)}$

TABLE 4.1 – Caractéristiques physiques des accéléromètres Q-Flex<sup>®</sup> QA-3000-020.

où  $\Delta U$  correspond à la plage de tension acceptée en entrée du numériseur et  $\Delta a$  est la plage dynamique souhaitée des accélérations spécifiques, qui se déduit de la relation (4.1) par :

$$\Delta a = \frac{\Delta U}{R_c K_a}$$

Les voies d'entrée du numériseur sur lesquelles arrivent les signaux des accéléromètres, acceptent une plage en tension  $\Delta U = 2 \text{ V}$ . Les résistances de charge ont été choisies telles que  $R_c = 4000 \Omega$ . En adoptant comme facteur d'échelle moyen  $K_a = 1.33 \text{ mA/g}$ , la plage d'accélérations spécifiques observables se déduit comme suit :

$$\Delta a = \frac{2\text{g}}{4 \times 1.33} = \frac{\text{g}}{2.66} \quad ,$$

soit :

$$-\frac{\text{g}}{5.32} < a < \frac{\text{g}}{5.32}$$

Par conséquent, le montage électrique actuel du capteur ne permet d'observer que des accélérations spécifiques inférieures en valeur absolue à  $\frac{\text{g}}{5.32}$ . Au-delà de cette valeur, les accéléromètres entrent en saturation puisque l'image numérique de la tension aux bornes des résistances de charge sera constante et égale à  $\pm 1$ .

En dehors de cette saturation, la conversion analogique/numérique de la tension aux bornes des résistances de charge s'effectue sur une longueur de 24 bits. De cette valeur, il est possible de déduire la résolution de l'image numérique de la mesure accélérométrique. Elle est notée  $\delta_a$  et s'obtient par :

$$\delta_a = \frac{\Delta a}{2^{24}} = \frac{\text{g}}{2.66 \times 2^{24}} \approx \frac{10^6}{2.66 \times 2^{24}} \approx 0.02 \text{ mGal}$$

Le codage de la valeur en tension permet donc de restituer la valeur de l'accélération spécifique observée avec une erreur d'environ 0.02 mGal.

## 4.2. CONSÉQUENCES DU MONTAGE RETENU

---

Enfin, le capteur acquiert les séries de mesures à la fréquence de 2 Hz. Ce choix permet de réduire le niveau de bruit des accéléromètres puisque sur une fenêtre de temps donné, le nombre de mesures important permet d'effectuer une réduction de variance significative. Cela se traduit spatialement par une acquisition au pas de 0.75 m en supposant une vitesse moyenne de navigation sous-marine égale à  $1.5 \text{ m s}^{-1}$ .

### 4.2 Conséquences du montage retenu

Le capteur du système GraviMob diffère du LiMo-g par son assemblage mécanique et électronique. La première distinction concerne le choix du support sur lequel sont réunis les accéléromètres. Ce support triaxial en aluminium est également produit par la société *Honeywell* (Fig. 4.3). De qualité industrielle, il présente comme avantage majeur de rendre les axes sensibles des trois accéléromètres quasiment orthogonaux entre eux.



FIGURE 4.3 – Vue du support triaxial en aluminium produit par la société *Honeywell* [Honeywell 2005].

Cependant, contrairement au support pyramidal utilisé pour le LiMo-g, ce support parallélépipédique ne permet pas de rendre les axes sensibles concourants en un même point (Fig. 4.4). Le lieu de la mesure vectorielle étant difficilement identifiable, une modélisation précise de la distance entre les deux triades accélérométriques et par conséquent du point central<sup>3</sup>, lieu de recherche du champ de pesanteur, s'avère alors complexe.

---

3. Ce point central correspond au point noté par la lettre  $P$  dans l'établissement de l'équation d'obser-

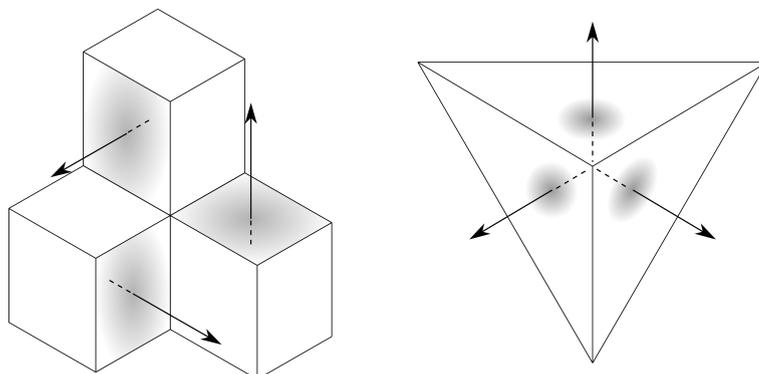


FIGURE 4.4 – Les axes sensibles des accéléromètres ne sont pas concourants dans le cas du système GraviMob (à gauche) tandis qu'ils le sont dans le cas du LiMo-g (à droite).

La seconde conséquence liée au choix d'un tel support, concerne la nécessaire translation de la plage dynamique de mesure d'un des trois accéléromètres. Les calculs précédents ont montré que le montage actuel autorisait la mesure d'accélération spécifiques dans l'intervalle  $[-\frac{g}{5.32}; +\frac{g}{5.32}]$ . Il vient rapidement qu'un accéléromètre dont l'axe sensible serait orienté dans une direction proche de la verticale d'un lieu, entrerait en constante saturation. En effet, étant donné un accéléromètre orienté dans une direction opposée au vecteur accélération de pesanteur (Fig. 4.5a), la valeur de l'accélération spécifique qu'il délivre vaut<sup>4</sup>  $a = -g \notin [-\frac{g}{5.32}; +\frac{g}{5.32}]$ , il y a donc saturation de la mesure. La solution à ce problème consiste à additionner une valeur constante  $+g$  à l'accélération spécifique mesurée (Fig 4.5b). Techniquement cela revient à ajouter une tension constante en entrée du numériseur afin de décaler la plage dynamique de l'accéléromètre vertical de chaque triade du capteur. Dans cette nouvelle configuration, cette dernière correspond dorénavant à l'intervalle  $[-g - \frac{g}{5.32}; -g + \frac{g}{5.32}]$ .

La plage dynamique des accéléromètres  $\Delta a = \pm \frac{g}{5.32}$  se traduit également par l'existence d'un angle d'inclinaison limite, noté  $\theta_l$  à partir duquel il y a saturation du capteur accélérométrique. Afin de déterminer cet angle, on imagine un système constitué de deux accéléromètres dont les axes sensibles sont orientés perpendiculairement et inclinés d'un angle  $\theta$  par rapport à une position initiale droite (Fig. 4.6).

---

vation du système GraviMob (Fig. 3.9, p. 68)

4.  $g$  désigne ici l'intensité de la pesanteur et le signe négatif de l'accélération spécifique est une convention purement arbitraire.

## 4.2. CONSÉQUENCES DU MONTAGE RETENU

---

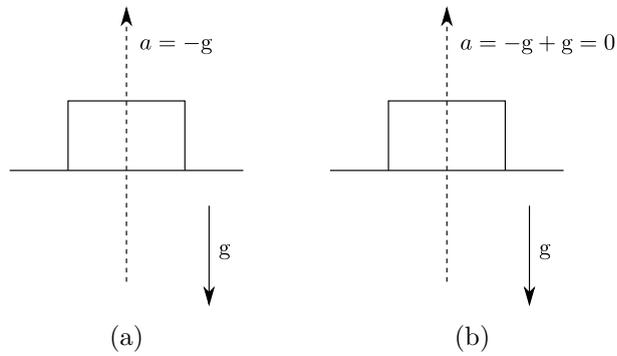


FIGURE 4.5 – Afin d'éviter la constante saturation de l'accéléromètre *vertical* (a), il est nécessaire de translater sa plage dynamique (b).

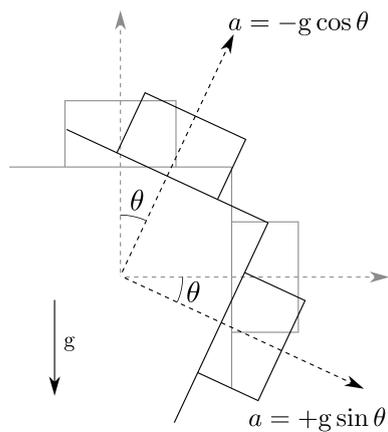


FIGURE 4.6 – Lorsque le capteur subit une inclinaison d'angle  $\theta$ , l'accéléromètre *vertical* mesure le cosinus de l'intensité de la pesanteur tandis qu'un accéléromètre *horizontal* est sensible au sinus de cette dernière.

## 4.2. CONSÉQUENCES DU MONTAGE RETENU

---

En raison de l'inclinaison du système, la valeur mesurée par l'accéléromètre *vertical* vaut  $a = -g \cos \theta$  tandis que celle mesurée par l'accéléromètre *horizontal* vaut  $a = +g \sin \theta$ . Autrement dit, il y a saturation de l'accéléromètre *vertical* lorsque :

$$-g \cos \theta_l = -g + \frac{g}{5.32} \quad ,$$

soit :

$$\theta_l = \arccos \left( 1 - \frac{1}{5.32} \right) \approx 35.7 \text{ deg}$$

La saturation de l'accéléromètre *horizontal* a quant à lui lieu lorsque :

$$+g \sin \theta_l = \frac{g}{5.32} \quad ,$$

c'est-à-dire pour :

$$\theta_l = \arcsin \left( \frac{1}{5.32} \right) \approx 10.8 \text{ deg}$$

Il apparaît ainsi que les accéléromètres *horizontaux* d'une triade sont les premiers à entrer en saturation lorsque le capteur subit une inclinaison supérieure à  $\theta_l \approx 10.8 \text{ deg}$ . Cette troisième conséquence liée au montage mécanique et électrique du capteur, sera reprise dans les simulations du chapitre 6 de ce manuscrit.

### 4.3 Repères associés au capteur

Le vecteur des mesures accélérométriques délivrées par chaque triade du capteur, est exprimé dans un repère qui diffère du repère du véhicule porteur (*b-frame*). Il est en effet complexe, d'un point de vue technique, d'aligner parfaitement les axes des accéléromètres avec les axes du repères du véhicule porteur (*b-frame*). Il convient donc de définir deux nouveaux repères, appelés de manière générale *s-frame* et plus spécifiquement  $s_\alpha$ -*frame* (resp.  $s_\beta$ -*frame*) pour désigner le repère attaché à la triade  $\alpha$  (resp. la triade  $\beta$ ). Contrairement à la définition donnée dans le chapitre 3 (p. 55), ces repères peuvent être considérés comme non orthogonaux en raison de l'existence des défauts d'alignement des axes sensibles des accéléromètres. Ainsi, le repère lié à la triade  $\alpha$  (Fig. 4.7a) est-il défini par :

- son premier axe,  $e_x^{s_\alpha}$ , orienté suivant l'axe sensible de l'accéléromètre n°643 ;
- son deuxième axe,  $e_y^{s_\alpha}$ , orienté suivant l'axe sensible de l'accéléromètre n°645 ;
- son troisième axe,  $e_z^{s_\alpha}$ , orienté suivant l'axe sensible de l'accéléromètre n°644.

De la même manière, le repère lié à la triade  $\beta$  (Fig. 4.7b) est défini par :

- son premier axe,  $e_x^{s_\beta}$ , orienté suivant l'axe sensible de l'accéléromètre n°646 ;
- son deuxième axe,  $e_y^{s_\beta}$ , orienté suivant l'axe sensible de l'accéléromètre n°648 ;
- son troisième axe,  $e_z^{s_\beta}$ , orienté suivant l'axe sensible de l'accéléromètre n°647.

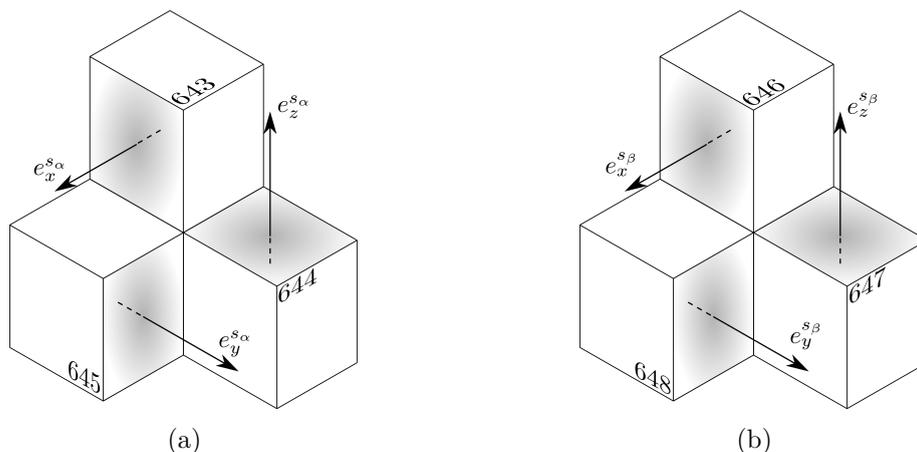


FIGURE 4.7 – Définition des repères attachés aux deux triades accélérométriques du capteur. (a) triade  $\alpha$ . (b) triade  $\beta$ .

La détermination de la matrice de passage entre le repère d'une triade accélérométrique (*s-frame*) et le repère du véhicule porteur (*b-frame*), ainsi que des coefficients d'étalonnage

permettant de rendre les mesures du capteur homogènes à des accélérations, fait l'objet du chapitre 6.

### 4.4 Données en sortie du capteur

Le tableau 4.2 résume le formatage du fichier d'observations généré par le capteur accélérométrique. Ce fichier est initialement au format propriétaire *TDMS* (*Technical Data Management Streaming*), associé au logiciel *LabVIEW* (*Laboratory Virtual Instrument Engineering Workbench*) développé par la société américaine *National Instruments*. Sa conversion au format ASCII (Code américain normalisé pour l'échange d'information ou *American Standard Code for Information Interchange*) peut cependant être effectuée grâce au module *npTDMS* du langage de programmation *Python*.

Enfin, la loi de transformation des observations de température des six accéléromètres permettant de passer des mesures en tension à des mesures en degré Celsius, est celle directement fournie par le constructeur, à savoir :

$$T [^{\circ}C] = \left( \frac{(T [V] \times 10^6) - (a \times R)}{b \times R} \right) + 20 \quad ,$$

où les paramètres  $a$ ,  $b$  et  $R$  sont ceux donnés dans le tableau 4.3.

#### 4.4. DONNÉES EN SORTIE DU CAPTEUR

Nom du fichier		<i>cRIO_Data_aammjj_hhmmss.tdms</i>	
0	Date ( <i>jj/mm/aaaa</i> ) et heure ( <i>hh : mm : ss.sss</i> ) de l'acquisition		
1	<i>Ref<sub>644</sub></i>	[V]	Tension de référence relative à l'accéléromètre vertical n°644
2	<i>Tilt<sub>X</sub></i>	[deg]	Inclinaison du premier axe de l'inclinomètre
3	<i>Tilt<sub>Y</sub></i>	[deg]	Inclinaison du second axe de l'inclinomètre
4	<i>Ref<sub>647</sub></i>	[V]	Tension de référence relative à l'accéléromètre vertical n°647
5	<i>Acc<sub>644</sub></i>	[V]	Accélération spécifique mesurée par l'accéléromètre n°644
6	<i>Acc<sub>647</sub></i>	[V]	Accélération spécifique mesurée par l'accéléromètre n°647
7	<i>T<sub>643</sub></i>	[V]	Température mesurée par l'accéléromètre n°643
8	<i>T<sub>646</sub></i>	[V]	Température mesurée par l'accéléromètre n°646
9	<i>T<sub>644</sub></i>	[V]	Température mesurée par l'accéléromètre n°644
10	<i>T<sub>648</sub></i>	[V]	Température mesurée par l'accéléromètre n°648
11	<i>T<sub>647</sub></i>	[V]	Température mesurée par l'accéléromètre n°647
12	<i>T<sub>645</sub></i>	[V]	Température mesurée par l'accéléromètre n°645
13	<i>Acc<sub>648</sub></i>	[V]	Accélération spécifique mesurée par l'accéléromètre n°648
14	<i>Acc<sub>645</sub></i>	[V]	Accélération spécifique mesurée par l'accéléromètre n°645
15	<i>Acc<sub>643</sub></i>	[V]	Accélération spécifique mesurée par l'accéléromètre n°643
16	<i>Acc<sub>646</sub></i>	[V]	Accélération spécifique mesurée par l'accéléromètre n°646

TABLE 4.2 – Organisation des données dans le fichier généré par le capteur.  
(*a* : année, *m* : mois/minute, *j* : jour, *h* : heure, *s* : seconde)

Accéléromètre n°	<i>a</i> [ $\mu$ A]	<i>b</i> [ $\mu$ A/°C]	<i>R</i> [ $\Omega$ ]
643	290.03	0.9841	2500
645	290.57	0.9874	10000
644	294.50	0.9717	10000
646	292.33	0.9927	2500
648	296.06	0.9997	10000
647	295.09	1.0009	10000

TABLE 4.3 – Valeurs des paramètres de la loi de transformation en température. Les paramètres *a* et *b* sont fournis par le constructeur, tandis les valeurs de *R* correspondent aux résistances de charge placées en entrée du numériseur.

---

## Chapitre 5

# Description du véhicule porteur

Ce chapitre donne une description générale du véhicule porteur utilisé par le système GraviMob, notamment quelques unes de ses caractéristiques techniques, et les moyens mis en œuvre pour assurer sa navigation sous-marine. L'intégration du capteur accélérométrique dans le porteur est également abordée et le problème de la détermination du bras de levier, séparant le point positionné par la centrale inertielle de l'AUV du point où est effectuée la mesure accélérométrique, est posé. Enfin, la dernière section de ce chapitre présente les données brutes et les données de navigation disponibles après le traitement en temps réel ou en temps différé.

### 5.1 L'AUV *Aster*<sup>x</sup> de l'IFREMER

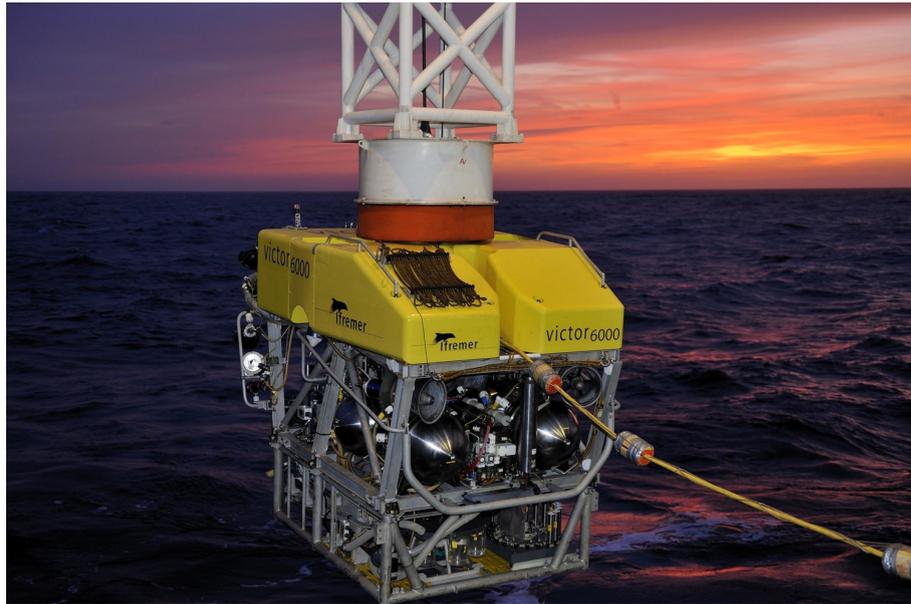
Dans la famille des UUV (Véhicule sous-marin non-habité ou *Unmanned Underwater Vehicle*), il est possible de distinguer les deux types de véhicules suivants :

- les ROV (Véhicule téléguidé ou *Remotely Operated Vehicle*), tel que le *Victor*<sub>6000</sub> de l'IFREMER (Fig. 5.1a) ;
- les AUV (Véhicule sous-marin autonome ou *Autonomous Underwater Vehicle*), tel que le véhicule *Aster*<sup>x</sup> de l'IFREMER (Fig. 5.1b).

Les ROV ont été développés dans les années 80 pour remplacer les systèmes habités apparus dans les années 70. Ces véhicules, télé-opérés depuis le navire grâce à un câble, sont principalement dédiés à des études et des mesures effectuées directement sur le fond marin.

## 5.1. L'AUV *ASTER<sup>x</sup>* DE L'IFREMER

---



(a)



(b)

FIGURE 5.1 – Le ROV *Victor<sub>6000</sub>* (a) est opérationnel depuis 1997. Il peut embarquer jusqu'à 600 kg de charge utile scientifique et plonger jusqu'à 6000 m. L'AUV *Aster<sup>x</sup>* (b) permet quant à lui d'accueillir une charge utile scientifique de 200 kg et de plonger jusqu'à moins de 3000 m pendant 24 h e toute autonomie. ©Ifremer

Les premiers AUV sont quant à eux apparus dans les années 2000 afin d'augmenter l'étendue des zones d'exploration et de diminuer le temps d'action. Enfin, les nouvelles générations de véhicules sous-marin, nommées HROV (Véhicule téléguidé hybride ou *Hybrid Remotely Operated Vehicle*), fusionnent les caractéristiques des ROV et des AUV, permettant ainsi de naviguer de manière autonome tout en gardant une liaison performante avec le navire en surface.

Le véhicule sous-marin *Aster*<sup>x</sup> de l'IFREMER fait donc partie de la classe des AUV. Ces principales caractéristiques techniques sont les suivantes :

- sa profondeur d'immersion maximale est inférieure à 3000 m ;
- sa longueur vaut approximativement 4.5 m ;
- sa masse totale, incluant une charge utile scientifique maximale de 200 kg, est de 800 kg ;
- sa vitesse maximale est d'environ  $2.5 \text{ m s}^{-1}$  ;
- son autonomie correspond à une distance cumulée maximale de 100 km.

Ces caractéristiques font que ce véhicule porteur est le candidat idéal pour effectuer une mesure dynamique du champ de pesanteur. En effet, son autonomie ainsi que sa capacité d'immersion permettent de naviguer sur de longs profils proches des structures géologiques situées dans des zones très accidentées. La prochaine section montrera également que ses instruments de navigation fournissent les données essentielles au problème de la gravimétrie vectorielle mobile, à savoir la position et l'attitude du capteur accélérométrique.

## 5.2 Stratégie de navigation

En raison de l'environnement naturel sous-marin, le système de positionnement et de restitution d'attitude du LiMo-g, basé essentiellement sur des techniques d'observations GPS, a été logiquement abandonné lors du développement du capteur accélérométrique du système GraviMob. L'accès à la position et à l'attitude de ce dernier reste cependant obligatoire en vue de résoudre le problème de la détermination des composantes du champ de pesanteur en situation dynamique.

Le positionnement sous-marin est un domaine scientifique très actif, car les observations de ce milieu ne peuvent être effectuées que si le véhicule porteur navigue en toute sécurité et qu'il est capable de transmettre une position assez précise pour être récupéré en fin de mission. Le géoréférencement de ces observations est également crucial afin de dresser des cartographies suffisamment précises pour être interprétées, voire réutilisées afin d'améliorer davantage la navigation des engins submersibles.

Les méthodes de navigation des sous-marins autonomes peuvent se classer en trois catégories<sup>1</sup> [Leonard et al. 1998] : la navigation à l'estime, la navigation acoustique et la navigation géophysique.

### **La navigation à l'estime**

La navigation à l'estime correspond à l'estimation d'une position par double intégration d'une mesure d'accélération du mobile. Ce mode de navigation a été rendu possible grâce à la miniaturisation des centrales inertielles et à la diminution de leur consommation électrique. Le principal inconvénient avec cette technique réside dans l'augmentation de l'erreur en position avec la distance parcourue. Afin de réduire cette erreur, les mesures de la centrale inertielle sont généralement associées aux observations provenant d'un vélocimètre Doppler qui permet une mesure de la vitesse du véhicule par rapport au sol marin. Il s'avère que cette mesure de vitesse n'est possible que si le véhicule est suffisamment proche de la surface de fond. La fusion de ces différentes observations est réalisée par un filtre de Kalman qui permet d'obtenir une précision de positionnement d'environ 0.1% de la distance parcourue. Des observations GPS complémentaires peuvent ponctuellement améliorer l'estimation de la position. Elles requièrent cependant des opérations chronophages de retour en surface du véhicule, parfois impossibles à réaliser lorsque la surface est recouverte de glace.

### **La navigation acoustique**

La navigation acoustique correspond à l'estimation d'une position par émission et réception de signaux acoustiques entre le véhicule et une ou plusieurs bases de référence.

---

1. Pour plus de détails sur les instruments de navigation et les outils mathématiques développés plus récemment, le lecteur pourra consulter les travaux de [Kinsey et al. 2006].

Lorsque ces dernières sont fixes sur le sol sous-marin, elles forment un réseau au-dessus duquel le véhicule navigue. Étant données les coordonnées de ces bases, le calcul du temps de vol mis par le signal acoustique entre le véhicule et plusieurs de ces bases permet de déterminer par trilatération la position de ce dernier. On parle alors de système LBL (système de positionnement acoustique par longue ligne de base ou *Long BaseLine acoustic positioning system*).

Lorsqu'il n'existe qu'une seule base, située sur le navire en surface et positionnée grâce au système GPS, on parle de système USBL (système de positionnement acoustique par ligne de base ultra courte ou *Ultra Short Base Line acoustic positioning system*). En plus de la distance entre le navire et le sous-marin déduite du temps de vol aller-retour des signaux acoustiques, le système USBL permet de déterminer la direction du vecteur navire/sous-marin. Les coordonnées géodésiques du véhicule sous-marin peuvent se déduire de celles de l'antenne acoustique du navire accompagnateur par positionnement relatif.

Dans les deux cas, la précision du positionnement dépend essentiellement de la qualité du modèle qui décrit le profil de vitesse de propagation du signal acoustique dans la tranche d'eau. D'autres problèmes peuvent survenir avec le système LBL lorsque la topographie sous-marine fait obstacle à la propagation du signal ou génère des multi-trajets qui se traduisent par des biais importants sur la position du véhicule.

Le système USBL est employé préférentiellement au système LBL pour le suivi de navigation des AUV car ces derniers couvrent généralement de longs profils dans des zones dépourvues d'équipements dédiés au système LBL.

### **La navigation géophysique**

La navigation géophysique, appelée également navigation par corrélation de terrain, correspond à l'estimation d'une position par comparaison d'une grandeur géophysique mesurée depuis le véhicule avec une carte embarquée de cette même grandeur. La bathymétrie, le champ magnétique et le champ gravitationnel sont des grandeurs observables potentielles car elles possèdent des variations suffisantes pour rendre les corrélations significatives. Cette technique nécessite cependant une carte *a priori* suffisamment précise de la grandeur géophysique que le véhicule observe. Dans le cas contraire, le véhicule doit

## 5.2. STRATÉGIE DE NAVIGATION

---

cartographier son environnement et se positionner au sein de ce dernier de manière simultanée; on parle alors de technologie SLAM (Localisation et cartographie simultanées ou *Simultaneous Location And Mapping*). Bien que ces techniques ne soient pas encore mises en œuvre dans le domaine sous-marin, elles émergent progressivement dans le domaine terrestre. En ce sens, le développement d'instruments de gravimétrie et de gradiométrie gravimétrique sous-marine légers et économes en énergie se voit davantage justifié.

La navigation de l'AUV *Aster<sup>x</sup>* utilise les techniques de navigation à l'estime et acoustique exposées précédemment. Parmi les instruments de navigation présents à bord, l'AUV possède notamment :

- une centrale inertielle couplée à un vélocimètre Doppler permettant d'estimer une position à chaque instant ;
- un système USBL qui le relie au navire accompagnateur en surface et qui permet de mettre à jour sa position géodésique si celle-ci s'écarte trop de la trajectoire de référence.

La fusion des observations issues de ces systèmes est réalisé par un filtrage de Kalman [Kinsey 2007].

La centrale inertielle de l'AUV *Aster<sup>x</sup>* est visible sur la figure 5.2. Elle est développée par la société française *iXBlue* sous le nom de *PHINS*. Par ses observations accélérométriques et de vitesses angulaires, la centrale *PHINS* définit physiquement le repère attaché au véhicule porteur (*b-frame*). C'est également elle qui fusionne les données provenant du vélocimètre Doppler et de la liaison USBL et qui estime, en temps réel, la position du véhicule. Ce calcul est ensuite affiné en temps différé grâce aux observations de la liaison USBL qui n'ont pas été transmises en temps réel à l'AUV. Le détail des observations disponibles en sortie du système de navigation est exposé dans la section 5.4 de ce chapitre.

## 5.2. STRATÉGIE DE NAVIGATION

---



FIGURE 5.2 – La centrale inertielle de l'AUV est développée par la société française *iXBlue* sous le nom de *PHINS*.

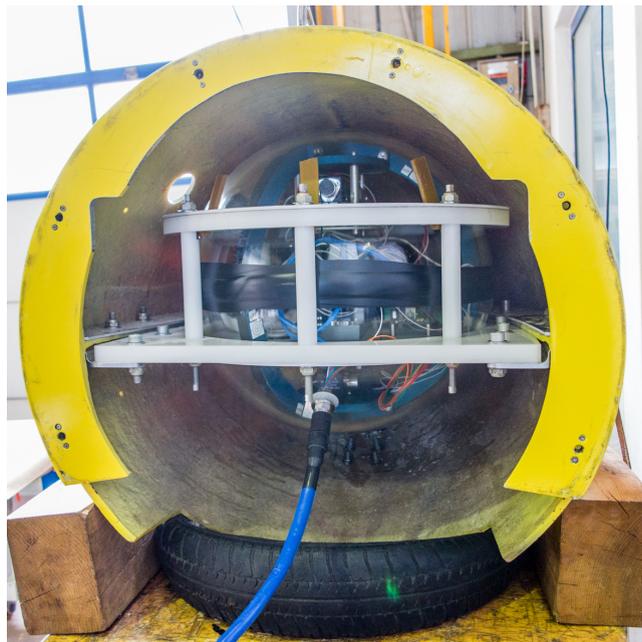


FIGURE 5.3 – Intégration du capteur accélérométrique dans le nez de l'AUV.

### 5.3 Intégration du capteur accélérométrique

De par l'encombrement du capteur accélérométrique, le seul espace capable de l'accueillir se situe dans le nez de l'AUV (Fig. 5.3). Le support permettant son maintien rigide a été imaginé dans le laboratoire des systèmes sous-marins de l'IFREMER. Le défi technique majeur dans la réalisation d'un tel support réside dans le fait que les fortes pressions rencontrées en fond de mer peuvent exercer de fortes contraintes et provoquer par conséquent le déplacement du capteur. Aussi faible soit-il, un tel déplacement du capteur accélérométrique doit être évité sous peine de remettre en question les paramètres angulaires d'alignement des repères des deux triades accélérométriques ( $s_\alpha$ -frame et  $s_\beta$ -frame) par rapport aux axes du repère du véhicule porteur ( $b$ -frame). Outre ce déplacement provoqué par les contraintes liées à l'environnement sous-marin, l'autre source d'erreur relative à l'alignement du capteur accélérométrique avec la centrale inertielle provient du montage des différentes parties de l'AUV (Fig. 5.4) qui s'effectue inévitablement avec une marge d'erreur. Ce faisant, les paramètres d'orientation du capteur dans le véhicule porteur, obtenus lors des opérations d'étalonnage (cf Chap. 6), sont susceptibles de changer entre deux montage de l'AUV. Or, les données accélérométriques du capteur ne peuvent être corrigées de l'accélération du véhicule porteur qu'une fois correctement projetées dans le repère de navigation ( $n$ -frame) grâce aux angles d'attitude fournis par la centrale inertielle de l'AUV. La stabilité du capteur accélérométrique après démontage et remontage des différentes sections de l'AUV, sera abordée dans la dernière section du chapitre 6.

#### Bras de levier du système GraviMob

La figure 5.5 représente schématiquement l'orientation approximative des repères des deux triades accélérométriques ( $s_\alpha$ -frame et  $s_\beta$ -frame) par rapport au repère du véhicule porteur ( $b$ -frame) lorsque les différentes parties de l'AUV sont assemblées.

L'installation du capteur accélérométrique dans le nez de l'AUV implique l'existence du vecteur  $\overrightarrow{OP}$  séparant le point positionné  $O$ , situé au niveau de la centrale inertielle, du point  $P$  où l'on cherche à déterminer les composantes du champ de pesanteur.

### 5.3. INTÉGRATION DU CAPTEUR ACCÉLÉROMÉTRIQUE

---



(a)



(b)

FIGURE 5.4 – (a) Vue des différentes parties qui constituent le véhicule porteur. La centrale inertielle est située dans la dernière section (à droite sur la photographie) (b) Vue de l'avant de l'AUV lorsque tous les éléments ont été réunis.

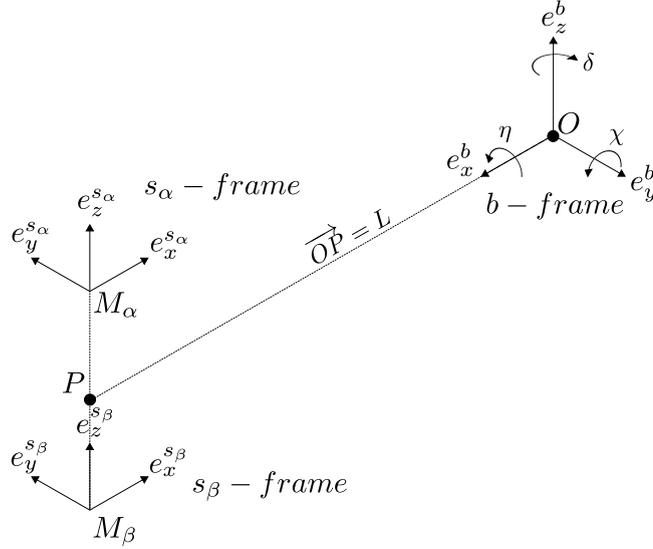


FIGURE 5.5 – Orientation générale des axes des différents repères de travail dans l’AUV.

Autrement dit, la position du point  $P$ , supposée mesurable lors de l’établissement de l’équation d’observation du système GraviMob (3.19, p. 69) dans le chapitre 3 de ce manuscrit, est au mieux déduite de la position du point  $O$  et de la connaissance du bras de levier  $\overrightarrow{OP} = L$ , par :

$$X_P^e = X_O^e + C_b^e L^b \quad (5.1)$$

Ce constat pose immédiatement la question de l’utilité des deux triades installées dans le capteur accélérométrique. Pour rappel, la présence de deux triades accélérométriques placées symétriquement de part à d’autre du point  $P$  permettrait de s’affranchir des termes liées aux bras de levier  $\overrightarrow{PM}_\alpha = L_\alpha$  et  $\overrightarrow{PM}_\beta = L_\beta$ . Ceci reste valable si la position du point  $P$  est effectivement mesurable. Dans le cas du système GraviMob, le point positionné est celui qui constitue l’origine du repère du véhicule ( $b$ -frame), c’est-à-dire le point  $O$ . Cette origine n’étant pas confondue avec le point central  $P$  des deux triades accélérométriques, il est donc nécessaire de connaître le vecteur séparant ces deux points. Pour s’affranchir complètement de ce problème déjà rencontré dans le cadre du LiMo-g, il serait nécessaire de placer les deux triades accélérométriques de part et d’autre de la centrale inertielle afin de confondre les points  $P$  et  $O$ . Cette solution idéale ne peut cependant être mise en œuvre dans le cadre d’un tel travail d’expérimentation dans lequel le développement du capteur accélérométrique se fait indépendamment des instruments de navigation présents dans le

### 5.3. INTÉGRATION DU CAPTEUR ACCÉLÉROMÉTRIQUE

---

véhicule porteur. En revanche, cette solution pourrait être retenue pour le développement d'un futur système intégrant capteurs gravimétriques, accélérométriques, de position et d'orientation en un seul instrument.

La détermination du bras de levier dans le repère du véhicule porteur (*b-frame*), que l'on note  $L^b$ , peut s'effectuer suivant deux approches :

- une approche géométrique dans laquelle le système comprenant la centrale inertielle et le capteur accélérométrique sont modélisés dans un modèle 3D de l'AUV et, dans ce cas, les composantes du vecteur bras de levier sont simplement extraites du plan 3D ;
- une approche dynamique dans laquelle les accélérations spécifiques mesurées par la centrale inertielle sont comparées avec celles observées par le capteur accélérométrique et ce, lorsque le véhicule porteur est en mouvement.

L'approche géométrique apparaît comme la méthode la plus simple à mettre en œuvre étant donné que la maquette numérique de l'AUV existe déjà, et que le point positionné par la centrale inertielle est géométriquement connu. Cependant, le point  $P$ , lieu de détermination du champ de pesanteur et centre géométrique de l'axe séparant les deux triades accélérométriques, n'est pas physiquement identifiable. De plus, seuls la sphère de verre et le support qui la relie au corps de l'AUV, ont été modélisés et insérés au plan 3D de ce dernier. Finalement, le bras de levier extrait du modèle numérique correspond au vecteur séparant le point positionné dans la centrale inertielle du centre de la sphère englobant le capteur accélérométrique. Numériquement, ce vecteur est tel que :

$$L^b = \begin{pmatrix} 2587.9 \\ -4.3 \\ 48.1 \end{pmatrix} \quad [\text{mm}] \quad (5.2)$$

L'estimation de ce vecteur peut être améliorée à condition de modéliser la structure géométrique du capteur, notamment, les supports des deux triades accélérométriques afin de compléter le modèle numérique 3D de l'IFREMER.

L'approche dynamique utilise les résultats de la mécanique du solide qui permettent d'affirmer que l'accélération spécifique, mesurée par la centrale inertielle au point  $O$  et notée  $a_{centrale}^b$ , est liée à l'accélération spécifique, mesurée par le capteur accélérométrique au point  $P$  et notée  $a_{capteur}^b$ , par la relation suivante :

$$a_{centrale}^b = a_{capteur}^b + \left( \Omega_{ib}^b \Omega_{ib}^b + \dot{\Omega}_{ib}^b \right) \times L^b \quad (5.3)$$

La relation (5.3) s'interprète comme une équation d'observation reliant le vecteur des mesures  $\Delta a^b = a_{centrale}^b - a_{capteur}^b$  au vecteur des paramètres contenant les composantes du vecteur bras de levier,  $L^b$ . En supposant connu le terme  $\left( \Omega_{ib}^b \Omega_{ib}^b + \dot{\Omega}_{ib}^b \right)$ , le problème peut être résolu au moyen d'un filtre de Kalman linéaire. Les résultats donnés par cette approche seront exposés dans le chapitre 10 dédié à l'analyse des données acquises durant la mission d'expérimentation en Mer Méditerranée.

## 5.4 Données en sortie de l'AUV

Cette dernière section présente l'organisation des données relatives à la navigation du véhicule porteur. Le tableau 5.1 résume les données brutes fournies par la centrale inertielle de l'AUV, à savoir les vitesses angulaires et les accélérations spécifiques suivant les trois axes du  $b$ -frame.

n° colonne	Nom du fichier : <i>PHINS_POST_jjmmaaaa_hhmmss.popin.txt</i>		
0 → 2	Temps UTC : <i>aaaa/mm/jj hh:mm:ss.sss</i>		
3	$\dot{\eta}$	[deg.h <sup>-1</sup> ]	Vitesse angulaire suivant l'axe $e_x^b$
4	$\dot{\chi}$	[deg.h <sup>-1</sup> ]	Vitesse angulaire suivant l'axe $e_y^b$
5	$\dot{\delta}$	[deg.h <sup>-1</sup> ]	Vitesse angulaire suivant l'axe $e_z^b$
6	$a_x^b$	[m.s <sup>-2</sup> ]	Accélération spécifique suivant l'axe $e_x^b$
7	$a_y^b$	[m.s <sup>-2</sup> ]	Accélération spécifique suivant l'axe $e_y^b$
8	$a_z^b$	[m.s <sup>-2</sup> ]	Accélération spécifique suivant l'axe $e_z^b$

TABLE 5.1 – Organisation des données brutes fournies par la centrale inertielle de l'AUV. ( $a$  : année,  $m$  : mois/minute,  $j$  : jour,  $h$  : heure,  $s$  : seconde)

## 5.4. DONNÉES EN SORTIE DE L'AUV

Le tableau 5.2 résume, quant à lui, les informations de navigation estimées en temps réel ou en temps différé après la fin d'une mission de levé.

n° colonne	Nom du fichier : <i>PHINS_POST_ jjmmaaaa_hhmmss - popout.txt</i>		
0 → 2	informations		
3 → 5	$\lambda_O, \varphi_O$ et $h_O$	[deg], [deg] et [m]	Coordonnées géographiques de la centrale inertielle
6 → 8	$\lambda_P, \varphi_P$ et $h_P$	[deg], [deg] et [m]	Coordonnées géographiques du capteur accélérométrique
9 → 11	$\lambda_O, \varphi_O$ et $h_O$	[deg], [deg] et [m]	Coordonnées géographiques de la centrale inertielle
12 → 14			
15 → 17	Heave, Surge, Sway	[m]	Déplacements vertical et horizontaux
18 → 20			
21 → 23			
24 → 26			
27 → 29	$v_n, v_e$ et $v_u$	[m.s <sup>-1</sup> ]	Vitesses <i>north, east</i> et <i>up</i>
30 → 32	$\sigma_n, \sigma_e$ et $\sigma_u$	[m]	Incertitudes sur la position <i>north, east</i> et <i>up</i>
33	$\sigma_{XY}^2$	[m]	Covariance
34 → 36	$\sigma_{v_n}, \sigma_{v_e}$ et $\sigma_{v_u}$	[m.s <sup>-1</sup> ]	Incertitudes sur les vitesses <i>north, east</i> et <i>up</i>
37 → 39	$\delta, \eta$ et $\chi$	[deg]	Angles de cap, roulis et tangage
40 → 42	$\sigma_\delta, \sigma_\eta$ et $\sigma_\chi$	[deg]	Incertitudes sur les angles de cap, roulis et tangage
43 → 48	Temps UTC : <i>aaaa mm jj hh mm ss.sss</i>		
49 → 51	informations		

TABLE 5.2 – Organisation des données de navigation de l'AUV.  
(*a* : année, *m* : mois/minute, *j* : jour, *h* : heure, *s* : seconde)

**Remarque importante** Pour des raisons techniques, la centrale inertielle est installée de manière *inversée* au sein de l'AUV (Fig. 5.2). Un fichier de configuration permet de rendre les données, présentes dans le fichier de navigation (Tab. 5.2), cohérentes avec le repère du véhicule porteur (*b-frame*). À l'inverse, les observations brutes (Tab. 5.1) ne sont pas corrigées de cette *inversion*. Pour être cohérent avec l'orientation des axes du *b-frame*, les valeurs contenues dans les colonnes n°3, 4, 6 et 7 du fichier des observations brutes (Tab. 5.1) doivent par conséquent être multipliées par  $-1$  avant d'être exploitées dans n'importe quel traitement.

---

## Chapitre 6

# Étalonnage et orientation des mesures accélérométriques

Ce chapitre expose en détail les méthodes et les résultats relatifs à la détermination des coefficients d'étalonnage et d'orientation du capteur accélérométrique du système GraviMob. Il présente le problème général de l'étalonnage accélérométrique avant d'exposer deux méthodes de résolution ainsi que leur validation et leur application sur des données synthétiques et réelles. La dernière section s'intéresse, quant à elle, à la détermination de l'orientation du capteur au sein de l'AUV et l'évaluation de la stabilité de cette orientation.

### 6.1 Principe de l'étalonnage

L'équation générale de la gravimétrie mobile (3.19, p. 69) établie au chapitre 3, supposait que la mesure vectorielle de l'accélération spécifique  $a_M$  était directement obtenue dans le repère du véhicule porteur (*b-frame*) et que ses composantes étaient homogènes à des accélérations. En pratique (cf Chap. 4), le capteur accélérométrique délivre en sortie des tensions électriques et les axes sensibles de ses accéléromètres ne sont pas directement superposables aux axes du repère du véhicule porteur.

## 6.1. PRINCIPE DE L'ÉTALONNAGE

---

Par conséquent, en supposant un comportement linéaire des accéléromètres, le vecteur des mesures en tension, noté  $p_M^s$ , peut être relié au vecteur des accélérations spécifiques  $a_M^b$  par la relation suivante :

$$p_M^s = K C_b^s a_M^b + p_0^s \quad , \quad (6.1)$$

où :

$K$  désigne la matrice des facteurs d'échelle :

$$K = \begin{pmatrix} k_x & 0 & 0 \\ 0 & k_y & 0 \\ 0 & 0 & k_z \end{pmatrix} \quad , \quad (6.2)$$

tel que  $k_x$  (resp.  $k_y$  et  $k_z$ ) correspond au facteur d'échelle (exprimé en volt par milligal) de l'axe sensible  $e_x^s$  (resp.  $e_y^s$  et  $e_z^s$ ) ;

$C_b^s$  désigne la matrice de transformation entre le repère du véhicule porteur et le repère de la triade accélérométrique. Sans autre information sur ses propriétés, cette matrice s'écrit de la façon suivante :

$$C_b^s = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} \quad ;$$

$p_0^s$  désigne le vecteur des biais (exprimés en volt) affectant le vecteur des mesures  $p_M^s$  :

$$p_0^s = \begin{pmatrix} p_{0,x} & p_{0,y} & p_{0,z} \end{pmatrix}^T \quad (6.3)$$

$K$ ,  $C_b^s$  et  $p_0^s$  représentent les paramètres de calibration reliant la mesure vectorielle en tension  $p_M^s$  au vecteur accélération spécifique  $a_M^b$ . L'inversion de la relation (6.1) implique effectivement :

$$a_M^b = C_b^{s^{-1}} K^{-1} (p_M^s - p_0^s) \quad (6.4)$$

D'une manière générale, la détermination des paramètres d'étalonnage passe par l'acquisition de plusieurs observations des vecteurs  $p_M^s$  et  $a_M^b$  en situation statique. En effet, dans une telle configuration, ces vecteurs correspondent à une décomposition particulière du vecteur accélération de la pesanteur  $g_M^n$ . Plus précisément, en un lieu où le vecteur  $g_M^n$  est connu, le vecteur accélération spécifique  $a_M^b$  s'obtient grâce à la matrice de transformation

entre le repère de navigation (*n-frame*) et le repère du véhicule porteur (*b-frame*) tel que :

$$a_M^b = -C_n^b g_M^n \quad (6.5)$$

D'après la relation (6.1), le vecteur  $p_M^s$  mesuré par le capteur accélérométrique apparaît comme translaté du vecteur  $a_M^b$  en raison du biais  $p_0^s$ , et non-colinéaire à  $a_M^b$  en raison des différents facteurs d'échelle ( $k_x \neq k_y \neq k_z$ ).

Il apparaît ainsi qu'en faisant subir  $n$  inclinaisons statiques au capteur accélérométrique, il est possible de comparer les vecteurs en tensions mesurés ( $p_{M,0}^s, \dots, p_{M,n}^s$ ) avec les accélérations spécifiques ( $a_{M,0}^b, \dots, a_{M,n}^b$ ) déduites de la relation (6.5). En ce sens, la détermination des paramètres d'étalonnage fait appel à l'analyse procustéenne<sup>1</sup>. Dans le cas classique où il n'existe qu'un seul facteur d'échelle ( $k_x = k_y = k_z$ ) et où la matrice de transformation  $C_b^s$  est orthogonale, la solution du problème dit de Procuste orthogonal est donnée par [Schönemann 1966], et fait appel à la décomposition en valeurs singulières ou *Singular Value Decomposition* (SVD). Cette technique n'est cependant plus valable dans le cas présent du fait de l'existence de trois facteurs d'échelle différents [Watson 2006]. Il est alors nécessaire de faire appel à des algorithmes basés sur une recherche itérative des paramètres d'étalonnage optimaux.

Les prochaines sections exposent deux algorithmes de recherche itérative des paramètres de calibration :

- le premier, issu de [Späth 2004], suppose l'orthogonalité de la matrice  $C_b^s$  et la connaissance des vecteurs ( $a_{M,0}^b, \dots, a_{M,n}^b$ ). Il correspond à la résolution du problème de Helmert à neuf paramètres ;
- le second, issu de [Yang et al. 2012], tient compte des défauts d'alignement des axes sensibles du capteur et ne suppose que la connaissance de la norme du vecteur de l'accélération de pesanteur. Il fait appel à la méthode des multiplicateurs de Lagrange.

---

1. En statistiques, l'analyse procustéenne est une technique de comparaison des formes. Elle est utilisée pour transformer un objet dans le but de le rendre autant que possible semblable à une référence. Cette transformation ne laisse apparaître que les différences non gommées par les opérations autorisées (rotation, translation et mise à échelle). Cette technique a été nommée ainsi en 1962 par Hurley et Catell en référence à Procuste, bandit issu de la mythologie grecque, qui forçait ses victimes à s'allonger sur un lit et modifiait violemment leur taille pour que celle-ci corresponde à la taille du lit [source : Wikipédia].

## 6.2 Résolution par transformation de Helmert à neuf paramètres

### Modèle fonctionnel

Le modèle fonctionnel choisi dans cette méthode suppose que dans une  $i^{\text{ième}}$  inclinaison de la triade accélérométrique, le vecteur des accélérations spécifiques  $a_{M,i}^b = (a_{x,i} \ a_{y,i} \ a_{z,i})^T$  est relié au vecteur des mesures en tensions  $p_{M,i}^s = (p_{x,i} \ p_{y,i} \ p_{z,i})^T$  par :

$$p_{M,i}^s = K C_b^s a_{M,i}^b + p_0^s \quad , \quad (6.6)$$

avec :

$K$  la matrice des facteurs d'échelle (6.2) ;

$C_b^s$  la matrice de transformation entre le repère du véhicule porteur et le repère de la triade accélérométrique. Elle est supposée orthogonale et s'exprime, de manière générale, par :

$$\begin{aligned} C_b^s &= R_z(\theta_z) \times R_y(\theta_y) \times R_x(\theta_x) \\ &= \begin{pmatrix} \cos \theta_z \cos \theta_y & -\sin \theta_z \cos \theta_x + \cos \theta_z \sin \theta_y \sin \theta_x & \sin \theta_z \sin \theta_x + \cos \theta_z \sin \theta_y \cos \theta_x \\ \sin \theta_z \cos \theta_y & \cos \theta_z \cos \theta_x + \sin \theta_z \sin \theta_y \sin \theta_x & -\cos \theta_z \sin \theta_x + \sin \theta_z \sin \theta_y \cos \theta_x \\ -\sin \theta_y & \cos \theta_y \sin \theta_x & \cos \theta_y \cos \theta_x \end{pmatrix} ; \end{aligned} \quad (6.7)$$

$p_0^s$  le vecteur des biais accélérométriques (6.3).

La résolution du problème d'étalonnage par la méthode de Helmert à neuf paramètres nécessite, en plus de la mesure des vecteurs en tension ( $p_{M,0}^s, \dots, p_{M,n}^s$ ), la connaissance des vecteurs accélérations spécifiques ( $a_{M,0}^b, \dots, a_{M,n}^b$ ). Cet ensemble de vecteurs peut être obtenu :

- directement par un autre capteur accélérométrique déjà étalonné ;
- indirectement par la mesure des angles d'attitude et application de la relation (6.5).

### Résolution du problème

Au sens des moindres carrés, l'estimation des paramètres de calibration se traduit par la minimisation de la fonction coût  $F$  à neuf paramètres définie par :

$$\begin{aligned}
 F(k_x, k_y, k_z, \theta_x, \theta_y, \theta_z, p_{0,x}, p_{0,y}, p_{0,z}) = & \\
 \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (p_{x,i} - k_x(\cos \theta_z \cos \theta_y a_{x,i} - (\sin \theta_z \cos \theta_x - \cos \theta_z \sin \theta_y \sin \theta_x) a_{y,i} & \\
 + (\sin \theta_z \sin \theta_x + \cos \theta_z \sin \theta_y \cos \theta_x) a_{z,i}) - p_{0,x})^2 + (p_{y,i} - k_y(\sin \theta_z \cos \theta_y a_{x,i} & \\
 + (\cos \theta_z \cos \theta_x + \sin \theta_z \sin \theta_y \sin \theta_x) a_{y,i} - (\cos \theta_z \sin \theta_x - \sin \theta_z \sin \theta_y \cos \theta_x) a_{z,i}) & \\
 - p_{0,y})^2 + (p_{z,i} - k_z(-\sin \theta_y a_{x,i} + \cos \theta_y \sin \theta_x a_{y,i} + \cos \theta_y \cos \theta_x a_{z,i}) - p_{0,z})^2 & , \quad (6.8)
 \end{aligned}$$

tel que :

$$\frac{\partial F}{\partial p_{0,x}} = \frac{\partial F}{\partial k_x} = \frac{\partial F}{\partial p_{0,y}} = \frac{\partial F}{\partial k_y} = \frac{\partial F}{\partial p_{0,z}} = \frac{\partial F}{\partial k_z} = \frac{\partial F}{\partial \theta_x} = \frac{\partial F}{\partial \theta_y} = \frac{\partial F}{\partial \theta_z} = 0 \quad (6.9)$$

On montre que le regroupement des dérivées partielles (6.9) relatives aux facteurs d'échelle et aux biais permet de former les trois systèmes linéaires suivants :

$$\frac{\partial F}{\partial p_{0,x}} = \frac{\partial F}{\partial k_x} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} n & \sum_{i=1}^n h_i \\ \sum_{i=1}^n h_i & \sum_{i=1}^n h_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{0,x} \\ k_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n p_{x,i} \\ \sum_{i=1}^n p_{x,i} h_i \end{pmatrix} , \quad (6.10)$$

avec :

$$h_i = \cos \theta_z \cos \theta_y a_{x,i} - (\sin \theta_z \cos \theta_x - \cos \theta_z \sin \theta_y \sin \theta_x) a_{y,i} + (\sin \theta_z \sin \theta_x + \cos \theta_z \sin \theta_y \cos \theta_x) a_{z,i}$$

$$\frac{\partial F}{\partial p_{0,y}} = \frac{\partial F}{\partial k_y} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} n & \sum_{i=1}^n h_i \\ \sum_{i=1}^n h_i & \sum_{i=1}^n h_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{0,y} \\ k_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n p_{y,i} \\ \sum_{i=1}^n p_{y,i} h_i \end{pmatrix} , \quad (6.11)$$

avec :

$$h_i = \sin \theta_z \cos \theta_y a_{x,i} + (\cos \theta_z \cos \theta_x + \sin \theta_z \sin \theta_y \sin \theta_x) a_{y,i} - (\cos \theta_z \sin \theta_x - \sin \theta_z \sin \theta_y \cos \theta_x) a_{z,i}$$

et :

$$\frac{\partial F}{\partial p_{0,z}} = \frac{\partial F}{\partial k_z} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} n & \sum_{i=1}^n h_i \\ \sum_{i=1}^n h_i & \sum_{i=1}^n h_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{0,z} \\ k_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n p_{z,i} \\ \sum_{i=1}^n p_{z,i} h_i \end{pmatrix} , \quad (6.12)$$

avec :

$$h_i = -\sin \theta_y a_{x,i} + \cos \theta_y \sin \theta_x a_{y,i} + \cos \theta_y \cos \theta_x a_{z,i}$$

Par conséquent, étant donnée une orientation  $(\theta_x, \theta_y$  et  $\theta_z)$  *a priori*, les facteurs d'échelle  $(k_x, k_y$  et  $k_z)$  et les biais  $(p_{0,x}, p_{0,y}$  et  $p_{0,z})$  s'obtiennent par résolution des trois systèmes linéaires (6.10, 6.11 et 6.12).

Les dérivées partielles (6.9) relatives aux angles d'orientation conduisent, quant à elles, à des expressions fortement non linéaires. Par conséquent, les trois paramètres angulaires  $(\theta_x, \theta_y$  et  $\theta_z)$  sont estimés par minimisation directe de  $F$  (6.8) grâce à la fonction *fmin*, exploitant l'algorithme du *Downhill simplex method* [Nelder and Mead 1965; Lewis et al. 2000], issue de la librairie scientifique *SciPy* du langage de programmation *Python*.

### Algorithme

En supposant mesurés les vecteurs  $(p_{M,0}^s, \dots, p_{M,n}^s)$  et  $(a_{M,0}^b, \dots, a_{M,n}^b)$ , l'algorithme d'estimation des paramètres d'étalonnage se pose comme suit :

1. Détermination de valeurs initiales pour les paramètres angulaires  $\theta_x, \theta_y$  et  $\theta_z$  ;
2. Calcul des facteurs d'échelle  $(k_x, k_y, k_z)$ , et des biais  $(p_{0,x}, p_{0,y}, p_{0,z})$  par résolution des systèmes linéaires (6.10, 6.11 et 6.12) ;
3. Calcul du paramètre  $\theta_z$  par minimisation de la fonction  $F(\theta_z)$  ;
4. Calcul du paramètre  $\theta_y$  par minimisation de la fonction  $F(\theta_y)$  ;
5. Calcul du paramètre  $\theta_x$  par minimisation de la fonction  $F(\theta_x)$  ;
6. Convergence des paramètres d'étalonnage ?
  - oui : fin de l'algorithme
  - non : retour à l'étape n° 2

### Initialisation de l'algorithme

Les valeurs initiales des paramètres d'orientation  $\theta_x, \theta_y$  et  $\theta_z$  peuvent s'obtenir à partir des coefficients de la matrice  $C_b^s$  (6.7).

En notant  $C_b^s[i, j]$  le coefficient situé à la ligne  $i$  et à la colonne  $j$ , il vient :

$$\begin{aligned}\theta_z &= \arctan\left(\frac{\sin\theta_z \cos\theta_y}{\cos\theta_z \cos\theta_y}\right) = \arctan\left(\frac{C_b^s[2, 1]}{C_b^s[1, 1]}\right) \\ \theta_x &= \arctan\left(\frac{\cos\theta_y \sin\theta_x}{\cos\theta_y \cos\theta_x}\right) = \arctan\left(\frac{C_b^s[3, 2]}{C_b^s[3, 3]}\right) \\ \theta_y &= \arctan\left(-\sin\theta_x \frac{\sin\theta_y}{\cos\theta_y \sin\theta_x}\right) = \arctan\left(-\sin\theta_x \frac{C_b^s[3, 1]}{C_b^s[3, 2]}\right)\end{aligned}$$

En supposant initialement les facteurs d'échelle égaux ( $k_x \approx k_y \approx k_z$ ), la matrice  $C_b^s$  peut être approximée par la solution du problème de Procuste orthogonal qui s'exprime comme :

$$C_b^s = V \times U^T \quad ,$$

où  $U$  et  $V$  sont les matrices issues de la SVD de la matrice  $S$  définie par :

$$S = \begin{pmatrix} a_{M,0}^b & \dots & a_{M,n}^b \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} p_{M,0}^s & \dots & p_{M,n}^s \end{pmatrix}^T$$

### Simulations numériques

Afin de valider l'algorithme de la méthode de Helmert à neuf paramètres, on considère le jeu de paramètres<sup>2</sup> de calibration de référence suivant :

$$k_x = 5.39 \mu\text{V mGal}^{-1} \quad k_y = 5.38 \mu\text{V mGal}^{-1} \quad k_z = 5.42 \mu\text{V mGal}^{-1}$$

$$\theta_x = 0.050 \text{ deg} \quad \theta_y = 0.160 \text{ deg} \quad \theta_z = -177.330 \text{ deg}$$

$$p_{0,x} = 3500 \mu\text{V} \quad p_{0,y} = -2800 \mu\text{V} \quad p_{0,z} = 4300 \mu\text{V}$$

On suppose également que le capteur accélérométrique subit  $n = 30$  inclinaisons différentes et choisies de manière aléatoire dans les intervalles suivants :

- Cas **a** :  $[-180 \text{ deg}; +180 \text{ deg}]$  pour les trois rotations de l'espace ;
- Cas **b** :  $[-180 \text{ deg}; +180 \text{ deg}]$  pour la rotation selon l'axe sensible vertical de la triade accélérométrique et  $[-11.8 \text{ deg}; +11.8 \text{ deg}]$  pour les deux autres rotations.

Le cas **a** traduit le fait que le capteur peut être incliné dans toutes les positions possibles de l'espace, tandis que le cas **b** reprend l'angle limite d'inclinaison  $\theta_l$  (p. 80) déterminé au chapitre 4 caractérisant l'entrée en saturation du capteur accélérométrique du système GraviMob.

---

2. Ces valeurs ont été volontairement choisies pour être proches des valeurs réellement observées.

Afin d'analyser l'impact des incertitudes affectant les données simulées en entrée de l'algorithme, cinq scénarios ont été envisagés :

- le scénario n° 1 n'affecte aucune incertitude sur les observations simulées ;
- le scénario n° 2 affecte uniquement une incertitude  $\sigma_p = 5.5 \mu V$  sur les observations simulées en tension ;
- le scénario n° 3 (resp. n° 4 et n° 5) ajoute, en plus de l'incertitude  $\sigma_p = 5.5 \mu V$  sur les observations simulées en tension, une incertitude  $\sigma_a = 25 \text{ mGal}$  (resp.  $\sigma_a = 40 \text{ mGal}$  et  $\sigma_a = 365 \text{ mGal}$ ) sur les observations simulées en accélération.

L'incertitude sur les observations de tensions provient de l'analyse (p. 153) de la série d'acquisition statique présentée dans le chapitre 7 de ce manuscrit. **Les valeurs des incertitudes sur les accélérations spécifiques seront quant à elles justifiées dans la suite de cette section.**

S'agissant d'une méthode itérative, on décide que l'algorithme a atteint la meilleure estimation des paramètres d'étalonnage lorsque l'évolution de l'écart-type des résidus est inférieure à un critère d'arrêt  $\epsilon$ . Plus précisément, les résidus  $v_i$  sont calculés pour chaque inclinaison comme suit :

$$v_i = \|C_s^b \times K^{-1} \times (p_{i,ref}^s - p_0^s)\| - \|a_{i,ref}^b\| \quad ,$$

où  $p_{i,ref}^s$  et  $a_{i,ref}^b$  correspondent aux observations simulées de référence. En notant  $\sigma_v^N$  l'écart-type des résidus calculé après la  $N^{\text{ième}}$  itération, l'arrêt de l'algorithme de recherche des paramètres est défini lorsque la condition suivante est respectée :

$$|\sigma_v^N - \sigma_v^{N-1}| < \epsilon$$

Dans chaque cas et pour chaque scénario envisagé, le tableau 6.1 indique la valeur de l'espérance des résidus  $\mathbb{E}_v$  puis la borne supérieure atteinte en fin d'algorithme pour l'écart-type des résidus  $\sigma_v$  et l'écart, en valeur absolue, des paramètres comparés à leurs valeurs de référence. Le critère d'arrêt  $\epsilon$ , fixé à  $10^{-16}$ , a été atteint pour un nombre d'itérations ne dépassant pas 1000 dans chaque simulation. Enfin, il est important de noter que ces indicateurs statistiques sont issus de l'analyse d'une centaine de déterminations des paramètres d'étalonnage à partir d'observations simulées indépendantes.

	Scénario n° 1	Scénario n° 2	Scénario n° 3	Scénario n° 4	Scénario n° 5
$\sigma_p$	0	5.5	5.5	5.5	5.5
$\sigma_a$	0	0	25	40	365
$\mathbb{E}_v$	$\approx 0$				
$\sigma_v$	$< 1$	$< 10$	$< 10$	$< 20$	$< 100$
$ \Delta k_x $					
$ \Delta k_y $	$< 10^{-5}$	$< 10^{-5}$	$< 10^{-5}$	$< 10^{-4}$	$< 10^{-3}$
$ \Delta k_z $					
$ \Delta \theta_x $					
$ \Delta \theta_y $	$< 10^{-3}$	$< 10^{-3}$	$< 10^{-3}$	$< 10^{-3}$	$< 10^{-2}$
$ \Delta \theta_z $					
$ \Delta p_{0,x} $					
$ \Delta p_{0,y} $	$< 5$	$< 20$	$< 75$	$< 100$	$< 1000$
$ \Delta p_{0,z} $					
<b>Cas a</b>					
$\mathbb{E}_v$	$\approx 0$				
$\sigma_v$	$< 10$	$< 20$	$< 20$	$< 30$	$< 200$
$ \Delta k_x $	$< 10^{-5}$	$< 10^{-5}$	$< 10^{-4}$	$< 10^{-4}$	$< 10^{-2}$
$ \Delta k_y $					
$ \Delta k_z $	$< 10^{-2}$	$< 10^{-2}$	$< 10^{-2}$	$< 10^{-2}$	$< 10^{-1}$
$ \Delta \theta_x $					
$ \Delta \theta_y $	$< 10^{-2}$	$< 10^{-2}$	$< 10^{-2}$	$< 10^{-2}$	$< 10^{-1}$
$ \Delta \theta_z $					
$ \Delta p_{0,x} $	$< 1000$	$< 1000$	$< 1000$	$< 1000$	$< 5000$
$ \Delta p_{0,y} $					
$ \Delta p_{0,z} $	$< 5000$	$< 5000$	$< 5000$	$< 5000$	$< 100000$
<b>Cas b</b>					

TABLE 6.1 – Expérimentation de la méthode de Helmert à neuf paramètres pour les cinq scénarios sur une centaine de tirages indépendants d’observations

## 6.2. RÉOLUTION PAR TRANSFORMATION DE HELMERT

---

Dans les deux cas, les valeurs tabulées montrent logiquement la dégradation de la qualité de l'estimation lorsque l'écart-type du bruit gaussien sur les accélérations spécifiques augmente. Les résultats des scénarios du cas **b** montrent, quant à eux, la difficulté supplémentaire à obtenir une bonne estimation des paramètres, lorsque les inclinaisons subies par le capteur sont restreintes. Cette limitation affecte notamment le facteur d'échelle et le biais relatifs à l'accéléromètre vertical de la triade.

Finalement, en s'appuyant sur les résultats de la simulation n° 5 du cas **b**, on constate que des écarts importants entre les valeurs des paramètres et leurs valeurs de référence peuvent tout de même mener à un écart-type sur les résidus  $\sigma_v$  relativement faible ( $\sigma_v < 200$  mGal). Ceci tend à prouver la difficulté à séparer clairement l'homothétie spatiale (facteurs d'échelle) de la translation (biais).

### Application sur données réelles

L'algorithme de recherche des paramètres de calibration par la méthode de Helmert à neuf paramètres a été appliqué sur plusieurs jeux d'observations.



FIGURE 6.1 – La calibration du système GraviMob nécessite de placer l'AUV dans plusieurs inclinaisons statiques pendant quelques secondes.

**Le premier protocole** a été mis en œuvre lors des journées consacrées à l'intégration du capteur accélérométrique dans l'AUV du 18 au 22 janvier 2016 dans les locaux de l'IFREMER à la Seyne-sur-Mer. En faisant subir à l'AUV différentes inclinaisons (Fig. 6.1),

il est possible de comparer les mesures des deux triades accélérométriques du capteur avec les mesures de la centrale inertielle. Cette dernière permet en effet d'accéder :

- à des accélérations spécifiques déjà calibrées et exprimées dans le repère du véhicule porteur (*b-frame*) ;
- aux angles d'attitude permettant de passer du repère de navigation (*n-frame*) au repère du véhicule porteur (*b-frame*).

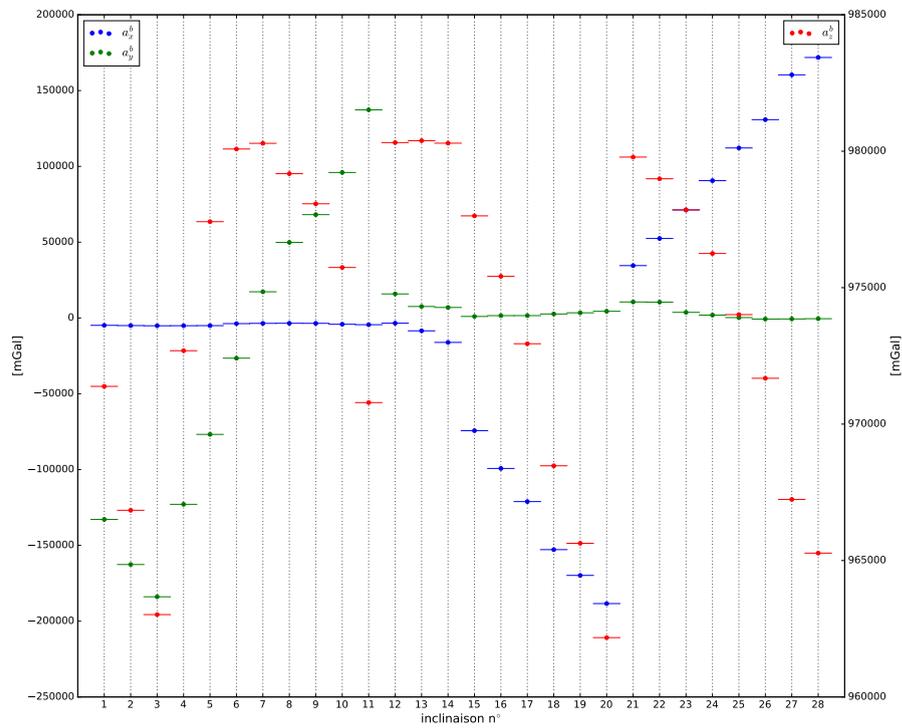
Les accélérations spécifiques issues de la centrale inertielle de l'AUV sont représentées sur la figure 6.2. Le protocole de calibration ayant été effectué une première fois le 19 janvier 2016 et une seconde fois le 21 janvier 2016, les données acquises durant ces deux journées ont été représentées sur cette même figure. La précision de ces mesures accélérométriques a été estimée à 40 mGal en moyennant les écarts-types sur les accélérations mesurées par la centrale inertielle, à chaque inclinaison de l'AUV. La comparaison de ces accélérations spécifiques avec les mesures issues des deux triades accélérométriques correspond donc au scénario n°4 envisagé dans les simulations précédentes.

Par ailleurs, les angles d'attitude mesurés par la centrale inertielle permettent de projeter le vecteur accélération de pesanteur  $g^n \approx \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\|g\| \end{pmatrix}^T$  dans le repère du véhicule porteur (*b-frame*) grâce à la relation 6.5. La norme du vecteur accélération de pesanteur  $\|g\|$ , a été estimée en moyennant les observations issues des accéléromètres de la centrale inertielle, soit  $\|g\| = 980\,448.5$  mGal. Les accélérations spécifiques ainsi déduites, sont représentées sur la figure 6.3. La précision des angles d'attitude a été estimée à 0.002 deg en moyennant les écarts-types angulaires calculés à chaque inclinaison de l'AUV. Cette précision angulaire se traduit par une précision<sup>3</sup> accélérométrique de 25 mGal. La comparaison des accélérations spécifiques déduites des angles d'attitude de la centrale inertielle avec les mesures des deux triades accélérométriques du capteur correspond donc au scénario n°3 envisagé dans les simulations précédentes.

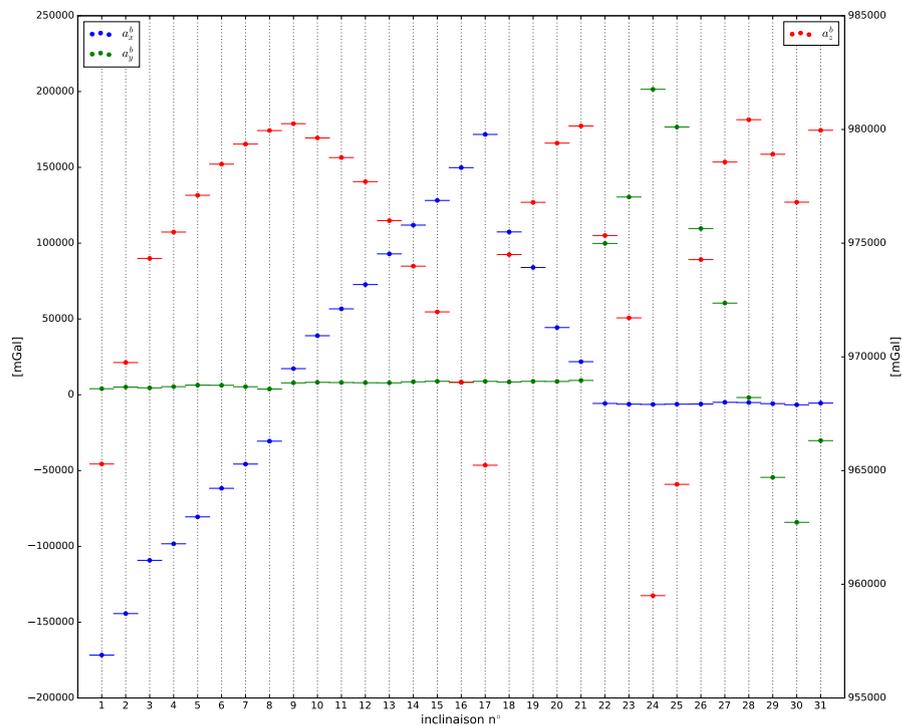
---

3. Cette incertitude a été estimée numériquement par la méthode de Monte-Carlo.

## 6.2. RÉOLUTION PAR TRANSFORMATION DE HELMERT



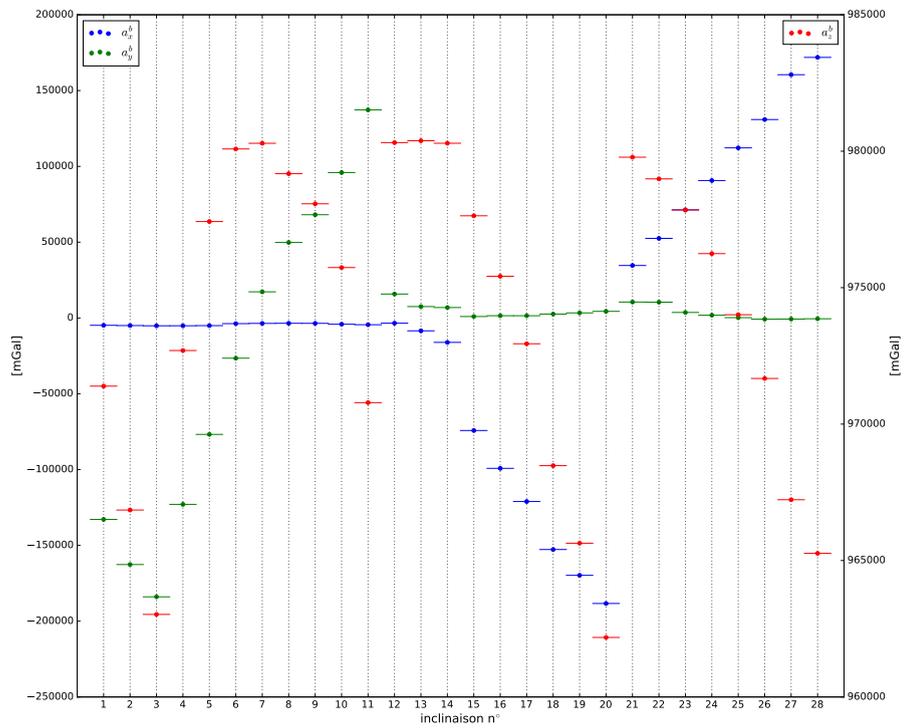
(a)



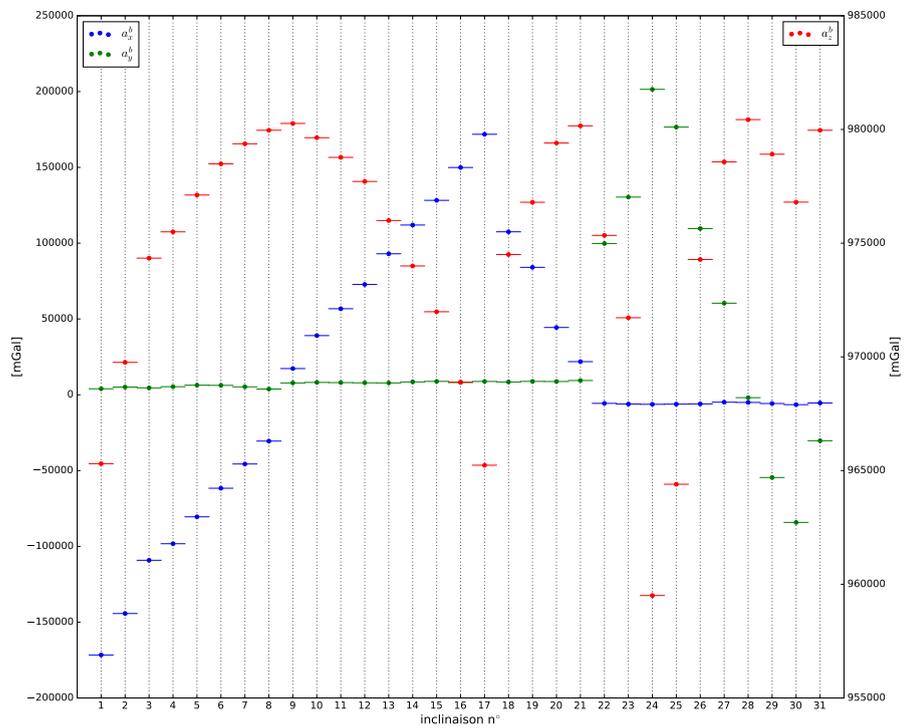
(b)

FIGURE 6.2 – Accélérations spécifiques mesurées par la centrale inertielle de l’AUV lors des opérations d’intégration et de calibration du capteur à l’IFREMER. (a) le 19 janvier 2016, (b) le 21 janvier 2016.

## 6.2. RÉOLUTION PAR TRANSFORMATION DE HELMERT



(a)



(b)

FIGURE 6.3 – Accélérations spécifiques déduites des angles d'attitude mesurés par la centrale inertielle de l'AUV lors des opérations d'intégration et de calibration du capteur à l'IFREMER. (a) le 19 janvier 2016, (b) le 21 janvier 2016.

## 6.2. RÉSOLUTION PAR TRANSFORMATION DE HELMERT

La figure 6.4 présente, quant à elle, les mesures issues des deux triades accélérométriques du capteur aux deux dates de réalisation du protocole de calibration.

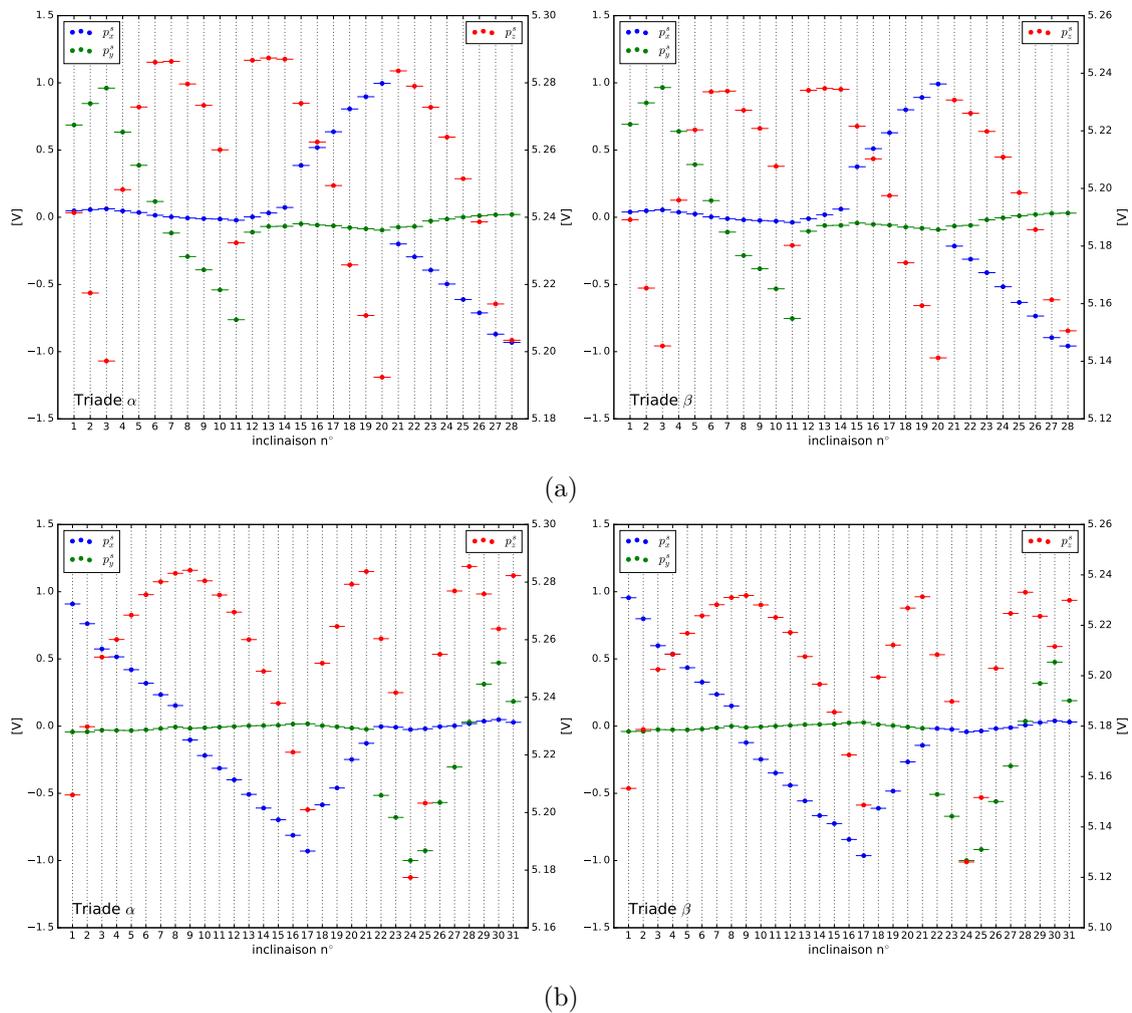


FIGURE 6.4 – Mesures statiques du capteur accélérométrique réalisées lors des opérations d’intégration et de calibration du capteur à l’IFREMER. (a) le 19 janvier 2016, (b) le 21 janvier 2016.

Enfin, la figure 6.5 présente l’évolution de la température enregistrée par les accéléromètres du capteur durant le protocole de calibration. Dans les deux cas, c’est une trentaine d’inclinaisons différentes qui a été réalisée, représentant une durée de manipulation d’environ une heure et demie.

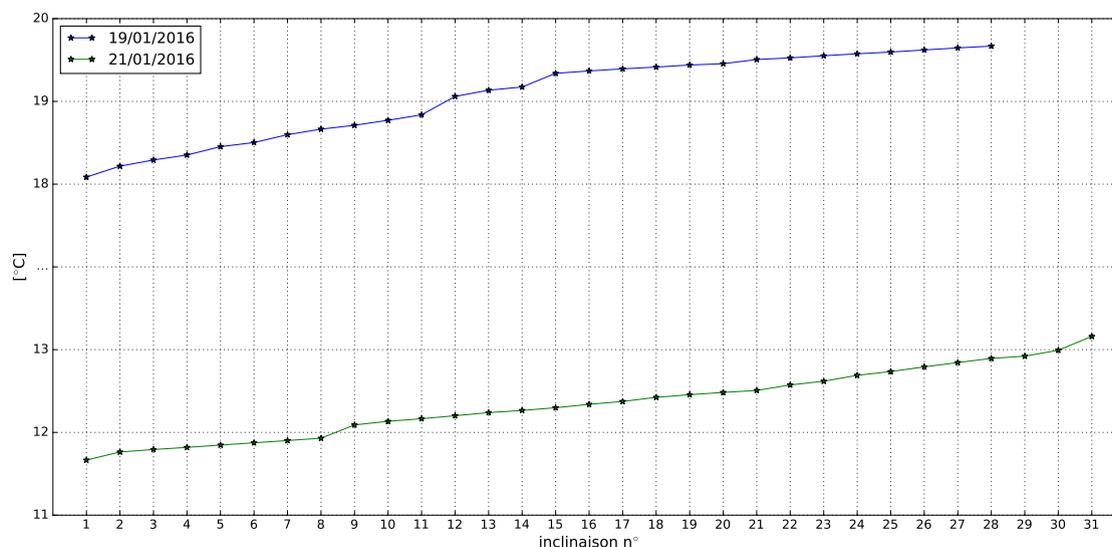


FIGURE 6.5 – Évolution de la température durant les protocoles de calibration à l'IFREMER. Les variations sont inférieures à 2°C dans les deux cas.

Le **second protocole** d'acquisition a été expérimenté dans le laboratoire de métrologie de l'ESGT. Le principe de la manipulation reste identique aux expériences précédentes puisque le capteur accélérométrique subit toujours plusieurs inclinaisons différentes en situation statique. La différence majeure réside dans le fait que l'on ne possède plus de système externe permettant d'accéder à une mesure directe et déjà calibrée de l'accélération spécifique. Cette connaissance se fait donc de manière indirecte par mesure tachéométrique. Le principe de cette mesure consiste à déterminer les coordonnées de plusieurs cibles liées au capteur accélérométrique (Fig. 6.6) dans un repère fixe attaché au laboratoire. À chaque nouvelle inclinaison du capteur, les coordonnées de ces cibles changent et permettent de déterminer par SVD la matrice de rotation entre le repère lié au laboratoire et le repère lié au capteur accélérométrique. La norme du vecteur accélération de la pesanteur étant connue grâce au point absolu du laboratoire, cette matrice permet alors de connaître le vecteur accélération spécifique dans le repère lié au capteur accélérométrique. Les mesures tachéométriques étant entachées d'une certaine erreur, la matrice de rotation déduite des coordonnées des cibles du capteur est elle-même imparfaite. L'incertitude sur les accélérations spécifiques ainsi calculées a été estimée par simulations numériques à environ 365 mGal.

## 6.2. RÉSOLUTION PAR TRANSFORMATION DE HELMERT

---

La comparaison des observations des deux triades accélérométriques avec les accélérations spécifiques déduites des mesures tachéométriques correspond donc au scénario n°5 envisagé dans les simulations précédentes.

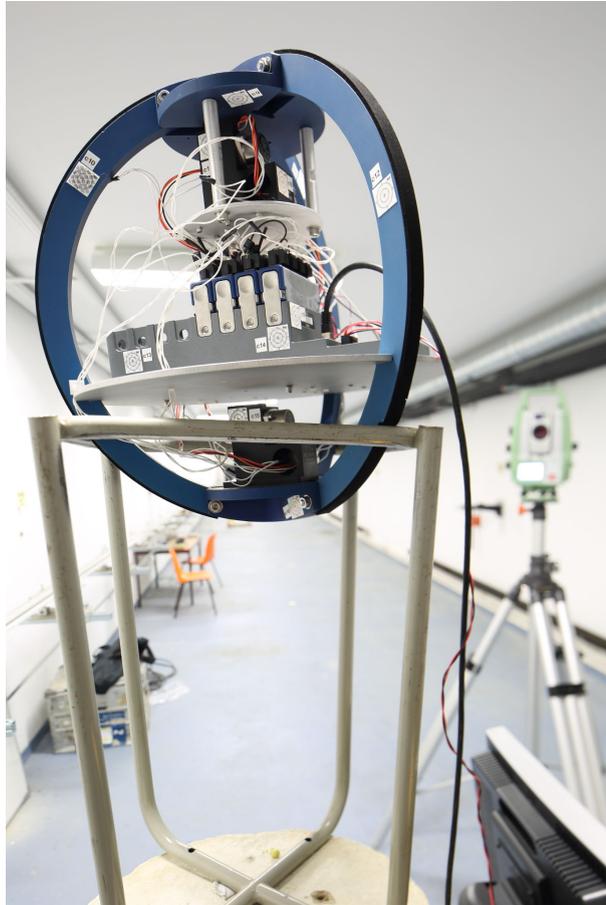


FIGURE 6.6 – La mesure tachéométrique des coordonnées des cibles permet de déterminer pour chaque inclinaison, la matrice de rotation entre le repère du laboratoire et le repère lié au capteur accélérométrique.

Enfin, la figure 6.9 présente l'évolution de la température observée par les six accélérométriques au cours des 13 inclinaisons imposées au capteur. Comparée à la température rencontrée lors de la manipulation dans les ateliers de l'IFREMER, on remarque que le laboratoire de métrologie de l'ESGT permet de maintenir une meilleure stabilité en température. Il faut cependant noter que ce protocole d'acquisition a nécessité un temps de travail d'environ une semaine, représentant un total de 2096 visées tachéométriques.

## 6.2. RÉOLUTION PAR TRANSFORMATION DE HELMERT

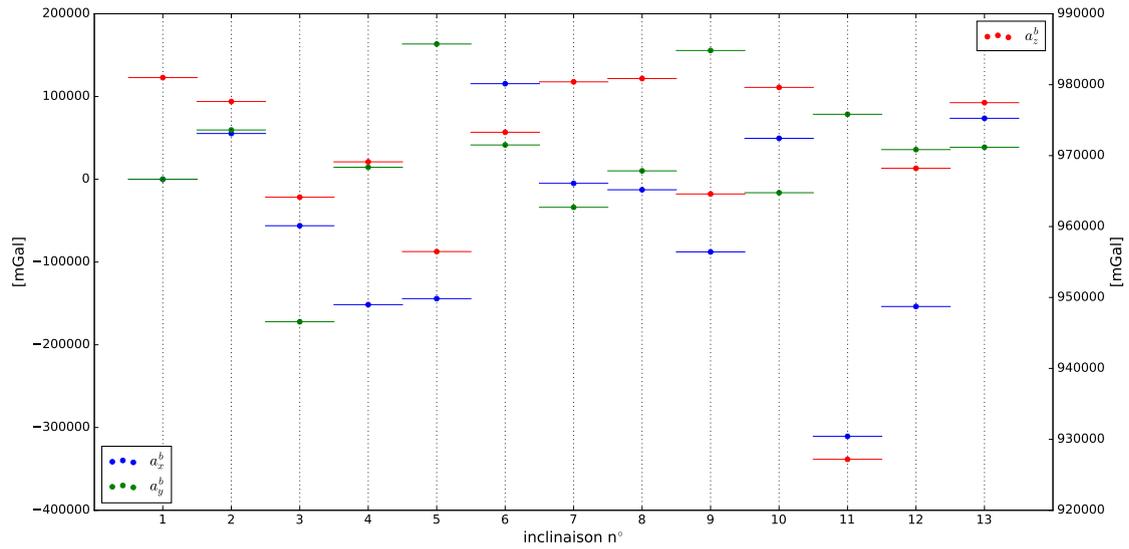


FIGURE 6.7 – Accélérations spécifiques déduites des mesures tachéométriques.

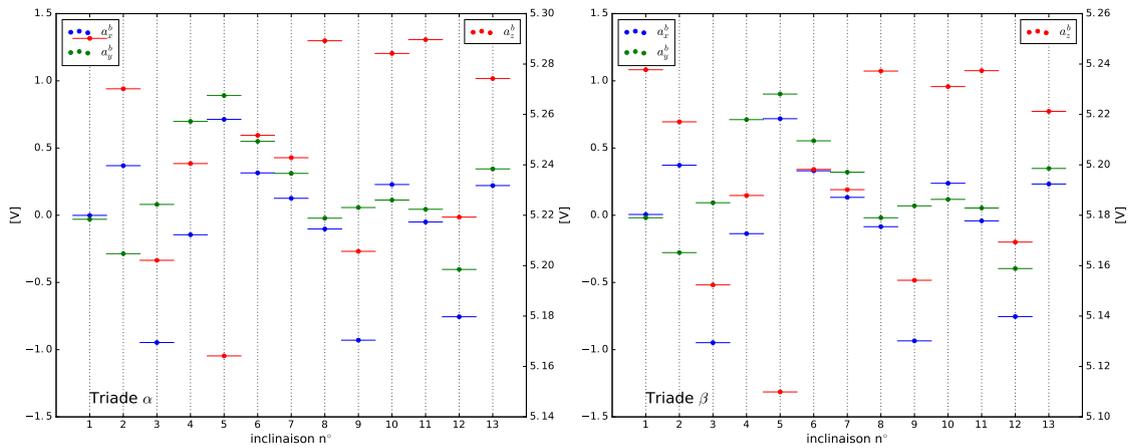


FIGURE 6.8 – Mesures statiques du capteur accélérométrique réalisées dans le laboratoire de métrologie de l'ESGT lors des opérations de calibration.

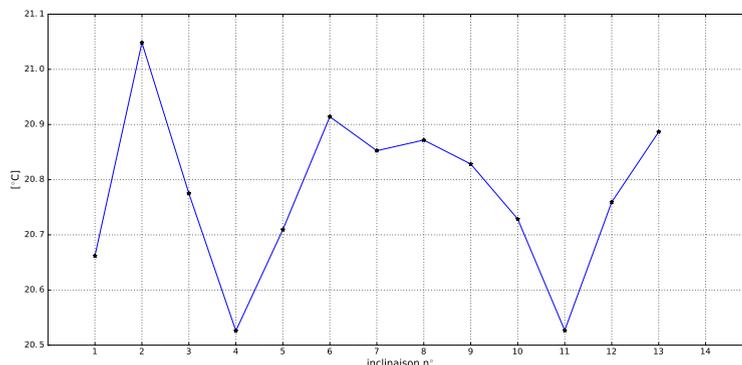


FIGURE 6.9 – Évolution de la température observée par les accéléromètres lors des opérations de calibration dans le laboratoire de métrologie de l'ESGT. La variation est inférieure à  $0.6^{\circ}\text{C}$ .

## Résultats

L'algorithme de recherche des paramètres d'étalonnage converge avec les données acquises dans les ateliers de l'IFREMER. Les résultats relatifs à ces jeux de données sont présentés dans les tableaux 6.2 et 6.3. Comme dans le cas des simulations numériques, l'arrêt de l'algorithme de recherche se base sur l'évolution de l'écart-type des résidus qui se définissent maintenant comme suit :

$$v_i = \|C_s^b \times K^{-1} \times (p_i^s - p_0^s)\| - \|a_i^b\|$$

D'une manière générale, les valeurs obtenues pour une grande majorité des paramètres semblent cohérentes, excepté pour les valeurs des biais en tension. La valeur estimée du paramètre angulaire  $\theta_z \approx 177$  deg est conforme à ce qui a été prédit dans le chapitre 5, à savoir que les axes *horizontaux* des deux triades accélérométriques pointent dans des directions opposées à celles définies par le repère du véhicule porteur (*b-frame*). Pour corriger cela, il est nécessaire d'appliquer une rotation autour de l'axe *vertical* des deux triades dont l'angle vaut quasiment 180 deg.

En comparant les résultats des deux journées, l'estimation obtenue à l'issue de la première journée (19 janvier 2016) apparaît plus satisfaisante comparée à celle obtenue avec les données de la seconde journée (21 janvier 2016). Les résidus de la première journée sont en effet centrés sur zéro et leur écart-type ( $\sigma_v \approx 50$  mGal) est cohérent avec la précision des données accélérométriques de la centrale inertielle. Lors de la seconde journée, l'am-

plitude de ces résidus s'amplifie ( $\sigma_v \approx 350$  mGal) et leur moyenne est légèrement biaisée ( $\mathbb{E}_v \approx 2$  mGal), ce qui paraît surprenant puisque les données en entrée de l'algorithme sont distribuées de façon similaire en nombre et en qualité. Il est notamment difficile de conclure quant à la stabilité des coefficients d'étalonnage avec l'écart de température observé entre les deux journées de travail.

Cependant, en analysant uniquement l'évolution du paramètre d'orientation  $\theta_x$  des deux triades accélérométriques entre les deux journées, on constate que ce paramètre passe d'une valeur  $\theta_x \approx -0.205$  deg (resp.  $\theta_x \approx -0.212$  deg) pour la triade  $\alpha$  (resp.  $\beta$ ) lors de la première journée à une valeur  $\theta_x \approx 0.140$  deg (resp.  $\theta_x \approx 0.190$  deg) pour la triade  $\alpha$  (resp.  $\beta$ ) lors de la seconde journée. La variation de ce paramètre peut s'expliquer par le fait que la partie avant de l'AUV contenant la capteur accélérométrique a été démontée puis remontée entre ces deux journées. La mise en place de cette partie de l'AUV engendre un défaut d'alignement autour de l'axe longitudinal du véhicule qui se répercute directement sur le paramètre angulaire relatif à cet axe, à savoir  $\theta_x$ . Ce point délicat sera abordé dans la dernière section de ce chapitre.

Enfin, en ne considérant que les résultats de la journée du 19 janvier, on constate que les deux jeux d'accélération spécifiques en entrée de l'algorithme produisent des résultats très similaires. Les coefficients obtenus sont effectivement très proches pour les deux estimations relatives à la triade accélérométrique  $\alpha$ . Des écarts apparaissent cependant pour quelques coefficients de la triade  $\beta$ .

## 6.2. RÉOLUTION PAR TRANSFORMATION DE HELMERT

			triade $\alpha$	triade $\beta$
IFREMER - 19 janvier 2016				
Estimation avec les accélérations spécifiques mesurées par la centrale inertielle de l'AUV	nb. itérations		5	3
	$\mathbb{E}_v$	[mGal]	0.01	0.04
	$\sigma_v$		48.13	46.68
	$k_x$	[ $\mu\text{V mGal}^{-1}$ ]	5.357706	5.420448
	$k_y$		5.369783	5.356821
	$k_z$		5.381817	5.346317
	$p_{0,x}$	[ $\mu\text{V}$ ]	4668.99	-4481.53
	$p_{0,y}$		-6963.28	613.42
	$p_{0,z}$		11138.08	-6691.20
	$\theta_x$	[deg]	-0.2052	-0.2135
	$\theta_y$		0.1684	0.2167
	$\theta_z$		177.3258	177.1247
	Estimation avec les accélérations spécifiques déduites des angles d'attitude de la centrale inertielle de l'AUV	nb. itérations		2
$\mathbb{E}_v$		[mGal]	0.01	0.03
$\sigma_v$			50.74	52.18
$k_x$		[ $\mu\text{V mGal}^{-1}$ ]	5.357462	5.420232
$k_y$			5.370524	5.357554
$k_z$			5.381027	5.339653
$p_{0,x}$		[ $\mu\text{V}$ ]	4650.83	-8298.99
$p_{0,y}$			-7549.28	33.44
$p_{0,z}$			11910.07	-203.99
$\theta_x$		[deg]	-0.2013	-0.2110
$\theta_y$			0.1664	0.1733
$\theta_z$			177.3230	177.1219

TABLE 6.2 – Application de la méthode de Helmert à neuf paramètres sur les données acquises dans les ateliers de l'IFREMER le 19 janvier 2016.

6.2. RÉSOLUTION PAR TRANSFORMATION DE HELMERT

			triade $\alpha$	triade $\beta$
IFREMER - 21 janvier 2016				
Estimation avec les accélérations spécifiques mesurées par la centrale inertielle de l'AUV	nb. itérations		84	58
	$\mathbb{E}_v$	[mGal]	1.43	2.29
	$\sigma_v$		374.79	392.64
	$k_x$	[ $\mu\text{V mGal}^{-1}$ ]	5.354162	5.614954
	$k_y$		5.269157	5.271267
	$k_z$		5.240254	5.209583
	$p_{0,x}$	[ $\mu\text{V}$ ]	5522.04	2858.52
	$p_{0,y}$		20126.06	24299.90
	$p_{0,z}$		147286.47	125152.19
	$\theta_x$	[deg]	0.0042	0.0263
	$\theta_y$		0.1568	0.2145
	$\theta_z$		177.2933	177.0461
Estimation avec les accélérations spécifiques déduites des angles d'attitude de la centrale inertielle de l'AUV	nb. itérations		13	4
	$\mathbb{E}_v$	[mGal]	1.43	2.30
	$\sigma_v$		322.15	332.08
	$k_x$	[ $\mu\text{V mGal}^{-1}$ ]	5.353527	5.614264
	$k_y$		5.267989	5.270015
	$k_z$		5.321166	5.305204
	$p_{0,x}$	[ $\mu\text{V}$ ]	5107.99	2222.59
	$p_{0,y}$		7696.56	9396.45
	$p_{0,z}$		68076.17	31554.25
	$\theta_x$	[deg]	0.1399	0.1896
	$\theta_y$		0.1552	0.2130
	$\theta_z$		177.2947	177.0519

TABLE 6.3 – Application de la méthode de Helmert à neuf paramètres sur les données acquises dans les ateliers de l'IFREMER le 21 janvier 2016.

Appliqué aux données acquises dans le laboratoire de métrologie de l'ESGT, l'algorithme de recherche des paramètres diverge. Cette divergence peut s'expliquer par un nombre d'observations insuffisant combiné à une qualité de mesure des accélérations spécifiques en-deça de ce qui a été estimé et considéré dans les simulations numériques. Les observations accélérométriques du capteur peuvent néanmoins être utilisées afin d'expérimenter les coefficients d'étalonnage déterminés précédemment. En considérant les coefficients d'étalonnage estimés le 19 janvier 2016 grâce aux accélérations spécifiques de la centrale inertielle (Tab. 6.2), ces observations se distribuent comme suit :

- pour la triade  $\alpha$  :  $\mathbb{E}_g = 984939.25$  mGal et  $\sigma_g = 221.54$  mGal ;
- pour la triade  $\beta$  :  $\mathbb{E}_g = 978414.13$  mGal et  $\sigma_g = 97.10$  mGal

Les valeurs moyennes de la norme de l'accélération de pesanteur obtenues par les deux triades sont éloignées l'une de l'autre de plusieurs milliers de milligals et leurs écarts-types s'écartent largement de ceux estimés précédemment (Tab. 6.2). Ceci tend à montrer la difficulté à déterminer de manière robuste des coefficients d'étalonnage. Dans le cas de la méthode de Helmert à neuf paramètres, il est possible de remettre en cause :

- le modèle fonctionnel qui ne prend pas en compte les défauts d'alignement des axes sensibles des accéléromètres ;
- la précision insuffisante obtenue sur les accélérations spécifiques ;
- la difficulté technique de placer l'AUV dans différentes inclinaisons statiques et combinant simultanément tangage et roulis.

Dans l'objectif de s'affranchir de ces difficultés, de nombreuses techniques d'étalonnage, basées uniquement sur la connaissance de la norme de l'accélération de pesanteur, ont été développées au cours de ces dernières années [Bekkeng 2009; Won and Golnaraghi 2010; Zhang et al. 2010; Grip and Sabourova 2011]. Cet engouement s'explique par les nombreuses applications faisant appel aux MEMS (Microsystème électromécanique ou *Microelectromechanical systems*). Ces composants ont fait naître le besoin de pouvoir calibrer des systèmes accélérométriques sans l'utilisation de dispositifs additionnels généralement complexes et très onéreux.

Afin d'améliorer l'estimation des coefficients d'étalonnage et d'orientation du capteur accélérométrique du système GraviMob, la section suivante expose et expérimente la méthode présentée dans [Yang et al. 2012].

### 6.3 Méthode des multiplicateurs de Lagrange

#### Modèle fonctionnel

Comme dans le cas de la méthode précédente, le modèle fonctionnel retenu dans les travaux de [Yang et al. 2012] relie le vecteur des mesures en tension  $p_{M,i}^s = (p_{x,i} \ p_{y,i} \ p_{z,i})^T$  au vecteur des accélérations spécifiques  $a_{M,i}^b = (a_{x,i} \ a_{y,i} \ a_{z,i})^T$  par :

$$p_{M,i}^s = K C_{b'}^s a_{M,i}^b + p_0^s \quad , \quad (6.13)$$

avec :

$K$  la matrice des facteurs d'échelle (6.2) ;

$C_{b'}^s$  la matrice de transformation entre un repère orthogonal<sup>4</sup>, noté  $b'$ -frame, et le repère de la triade accélérométrique. Cette matrice tient compte des défauts d'alignement des axes sensibles des accéléromètres. Elle est donc non orthogonale et peut s'écrire comme suit [Panahandeh et al. 2010] :

$$C_{b'}^s = \begin{pmatrix} 1 & \tau_{yz} & \tau_{zy} \\ 0 & \tau_{yy} & \tau_{zx} \\ 0 & 0 & \tau_{zz} \end{pmatrix} \quad ; \quad (6.14)$$

$p_0^b$  le vecteur des biais en tensions (6.3).

Contrairement à la méthode de Helmert à neuf paramètres exposée précédemment, le vecteur des accélérations spécifiques  $a_M^b$  est ici supposé inconnu pour chacune des inclinaisons imposée au capteur. Seule la norme du vecteur accélération de pesanteur, notée  $\|g\|$ , est considérée connue. Par conséquent, au vecteur des paramètres d'étalonnage s'ajoute le vecteur des inclinaisons<sup>5</sup>  $\mathcal{Y} = (c_{x,1} \ c_{y,1} \ c_{z,1} \ \dots \ c_{x,n} \ c_{y,n} \ c_{z,n})$  tel que :

$$\forall i \in [1; n] \quad a_{M,i}^b = \|g\| \begin{pmatrix} c_{x,i} \\ c_{y,i} \\ c_{z,i} \end{pmatrix} \quad (6.15)$$

---

4. Il s'agit d'un repère intermédiaire qui ne coïncide pas directement avec le repère du véhicule porteur ( $b$ -frame). La détermination de la matrice de passage entre ce repère intermédiaire ( $b'$ -frame) et le repère du véhicule porteur ( $b$ -frame) sera abordée dans la dernière section de ce chapitre.

5. Il s'agit de cosinus-directeurs.

Par conséquent, le modèle fonctionnel (6.13) s'écrit sous forme développée comme suit :

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} p_{x,i} \\ p_{y,i} \\ p_{z,i} \end{pmatrix} &= \|g\| \begin{pmatrix} k_x & 0 & 0 \\ 0 & k_y & 0 \\ 0 & 0 & k_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \tau_{yz} & \tau_{zy} \\ 0 & \tau_{yy} & \tau_{zx} \\ 0 & 0 & \tau_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{x,i} \\ c_{y,i} \\ c_{z,i} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_{0,x} \\ p_{0,y} \\ p_{0,z} \end{pmatrix} \\
 &= \|g\| \begin{pmatrix} k_x & k_x \tau_{yz} & k_x \tau_{zy} \\ 0 & k_y \tau_{yy} & k_y \tau_{zx} \\ 0 & 0 & k_z \tau_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{x,i} \\ c_{y,i} \\ c_{z,i} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_{0,x} \\ p_{0,y} \\ p_{0,z} \end{pmatrix} \\
 &= \|g\| \begin{pmatrix} k_{xx} & k_{xy} & k_{xz} \\ 0 & k_{yy} & k_{yz} \\ 0 & 0 & k_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{x,i} \\ c_{y,i} \\ c_{z,i} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_{0,x} \\ p_{0,y} \\ p_{0,z} \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{6.16}$$

Cette dernière écriture permet d'exprimer le vecteur des paramètres d'étalonnage sous la forme suivante :

$$\mathcal{X} = \begin{pmatrix} k_{xx} & k_{xy} & k_{xz} & p_{0,x} & k_{yy} & k_{yz} & p_{0,y} & k_{zz} & p_{0,z} \end{pmatrix}$$

Le vecteur des inconnus du problème correspond donc à la réunion des vecteurs  $\mathcal{X}$  et  $\mathcal{Y}$ .

### Résolution

Étant donné un vecteur des inclinaisons  $\mathcal{Y}$  *a priori*, le vecteur des paramètres  $\mathcal{X}$  est estimé par la méthode des moindres carrés linéaires [Leick et al. 2015] :

$$\mathcal{X} = (A^T A)^{-1} A^T B \quad ,$$

avec :

$A$  la matrice relative au modèle fonctionnel linéaire (6.16) donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix}, \quad A_i = \begin{pmatrix} \|g\|c_{x,i} & \|g\|c_{y,i} & \|g\|c_{z,i} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \|g\|c_{y,i} & \|g\|c_{z,i} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \|g\|c_{z,i} & 1 \end{pmatrix}$$

$B$  le vecteur des observations :

$$B = \begin{pmatrix} p_{x,1} & p_{y,1} & p_{z,1} & \cdots & p_{x,n} & p_{y,n} & p_{z,n} \end{pmatrix}^T$$

Les  $n$  inclinaisons imposées au capteur accélérométrique étant indépendantes les unes des autres, l'estimation du vecteur des inclinaisons  $\mathcal{Y}$  se divise également en  $n$  estimations

indépendantes. D'une manière générale, étant donné le vecteur des paramètres  $\mathcal{X}$ , les inclinaisons  $c_x$ ,  $c_y$  et  $c_z$  sont celles qui minimisent la fonction  $f$  définie par :

$$\begin{aligned} f(c_x, c_y, c_z) = f(c) = & (\|g\|k_{xx}c_x + \|g\|k_{xy}c_y + \|g\|k_{xz}c_z + p_{0,x} - p_x)^2 \\ & + (\|g\|k_{yy}c_y + \|g\|k_{yz}c_z + p_{0,y} - p_y)^2 \\ & + (\|g\|k_{zz}c_z + p_{0,z} - p_z)^2 \quad , \end{aligned}$$

sous la contrainte  $h$  définie par :

$$h(c_x, c_y, c_z) = h(c) = c_x^2 + c_y^2 + c_z^2 - 1 = 0 \quad (6.17)$$

La relation (6.17) traduit le fait que la norme de l'accélération spécifique reste constante au cours des différentes inclinaisons.

La recherche des inclinaisons correspond à un problème d'optimisation sous contrainte non-linéaire. La solution retenue dans [Yang et al. 2012] utilise la condition de Karush-Kuhn-Tucker [Bonnans 2006] qui se formule comme suit :

$$L(c, u) = \nabla f(c) + u \nabla h(c) = 0 \quad , \quad (6.18)$$

où  $L$  est la *fonction Lagrangienne* et  $u$  le *multiplieur de Lagrange* associé à la contrainte  $h$ .

L'équation (6.18) peut se résoudre en utilisant la méthode itérative de Newton :

$$c_{k+1} = c_k + \delta c, \quad u_{k+1} = u_k + \delta u \quad ,$$

où  $\delta c$  et  $\delta u$  sont les solutions du système linéaire suivant :

$$-\begin{pmatrix} \nabla^2 L(c, u) & \nabla h(c) \\ \nabla h(c)^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta c \\ \delta u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla L(c, u) \\ h(c)^T \end{pmatrix} \quad (6.19)$$

Les expressions mathématiques des différentes quantités scalaires, vectorielles et matricielles apparaissant dans la relation (6.19) sont données dans l'annexe A de ce manuscrit.

### Algorithme

En supposant mesuré l'ensemble des vecteurs  $(p_{M,0}^s, \dots, p_{M,n}^s)$  et étant donnée la norme du vecteur accélération de pesanteur  $\|g\|$ , l'algorithme d'estimation des paramètres de calibration se pose comme suit :

1. Détermination d'une estimation initiale du vecteur des inclinaisons  $\mathcal{Y}$  ;
2. Estimation du vecteur des paramètres de calibration  $\mathcal{X}$  par moindres carrés linéaires ;
3. Estimation du vecteur des inclinaisons  $\mathcal{Y}$  par la méthode des multiplicateurs de Lagrange ;
4. Convergence des paramètres de calibration ?
  - oui : fin de l'algorithme
  - non : retour à l'étape n° 2

### Initialisation de l'algorithme

Les valeurs initiales des inclinaisons du vecteur  $\mathcal{Y}$  peuvent être choisies à partir de la normalisation des vecteurs  $p_{M,i}^s$ . Il vient alors :

$$c_{x,i} \approx \frac{p_{x,i}}{\sqrt{p_{x,i}^2 + p_{y,i}^2 + p_{z,i}^2}} \quad c_{y,i} \approx \frac{p_{y,i}}{\sqrt{p_{x,i}^2 + p_{y,i}^2 + p_{z,i}^2}} \quad c_{z,i} \approx \frac{p_{z,i}}{\sqrt{p_{x,i}^2 + p_{y,i}^2 + p_{z,i}^2}}$$

### Simulations numériques

Afin de valider l'algorithme de la méthode des multiplicateurs de Lagrange, on considère le jeu de paramètres<sup>6</sup> de calibration de référence suivant :

$$\begin{aligned} k_x &= 5.39 \mu\text{V mGal}^{-1} & k_y &= 5.38 \mu\text{V mGal}^{-1} & k_z &= 5.42 \mu\text{V mGal}^{-1} \\ \tau_{yz} &= 3.21 \times 10^{-4} & \tau_{zy} &= 3.87 \times 10^{-3} & \tau_{yy} &= 9.99 \times 10^{-1} \\ \tau_{zx} &= -2.57 \times 10^{-3} & \tau_{zz} &= 9.99 \times 10^{-1} \\ p_{0,x} &= 3500 \mu\text{V} & p_{0,y} &= -2800 \mu\text{V} & p_{0,z} &= 4300 \mu\text{V} \end{aligned}$$

---

6. Ces valeurs ont été volontairement choisies pour être proches des valeurs réellement observées.

On suppose à nouveau que le capteur accélérométrique subit  $n = 30$  inclinaisons différentes et choisies de manière aléatoire dans les intervalles suivants :

- Cas **a** :  $[-180 \text{ deg}; +180 \text{ deg}]$  pour les trois rotations de l'espace ;
- Cas **b** :  $[-180 \text{ deg}; +180 \text{ deg}]$  pour la rotation selon l'axe sensible vertical de la triade accélérométrique et  $[-11.8 \text{ deg}; +11.8 \text{ deg}]$  pour les deux autres rotations.

Le cas **a** traduit le fait que le capteur peut être incliné dans toutes les positions possibles de l'espace tandis que le cas **b** reprend l'angle limite d'inclinaison  $\theta_l$  (p. 80) déterminé au chapitre 4 caractérisant l'entrée en saturation du capteur accélérométrique du système GraviMob.

Afin d'analyser l'impact des incertitudes affectant les données en tension en entrée de l'algorithme, deux scénarios ont été envisagés :

- le scénario n° 1 n'affecte aucune incertitude ;
- le scénario n° 2 affecte une incertitude  $\sigma_p = 5.5 \mu\text{V}$  sur les observations simulées en tension.

L'arrêt de l'algorithme de recherche est similaire à celui défini dans la méthode précédente. Pour chaque inclinaison, les résidus  $v_i$  sont calculés comme suit :

$$v_i = \|C_s^b \times K^{-1} \times (p_{i,ref}^{ref} - p_0^s)\| - \|g\|$$

En notant  $\sigma_v^N$  l'écart-type des résidus calculé après la  $N^{ième}$  itération, l'arrêt de l'algorithme est défini lorsque la condition suivante est respectée :

$$|\sigma_v^N - \sigma_v^{N-1}| < \epsilon$$

Dans chaque cas et pour chaque scénario envisagé, le tableau 6.4 indique la valeur du critère d'arrêt  $\epsilon$ , le nombre maximal d'itérations nécessaires afin de respecter ce dernier, l'espérance des résidus  $\mathbb{E}_v$ , la borne supérieure atteinte en fin d'algorithme pour l'écart-type des résidus  $\sigma_v$ , puis les écarts en valeurs absolues des paramètres comparés à leurs valeurs de référence. Ces résultats sont issus de l'analyse d'une centaine de mise en œuvre de l'algorithme à partir d'observations simulées indépendantes.

### 6.3. MÉTHODE DES MULTIPLICATEURS DE LAGRANGE

		Scénario n°1	Scénario n°2	
$\sigma_p$	[ $\mu\text{V}$ ]	0	5.5	
Cas a	$\epsilon$	$10^{-16}$	$10^{-16}$	
	$N$	$< 1000$	$< 1000$	
	$\mathbb{E}_v$	[mGal]	$\approx 0$	$\approx 0$
	$\sigma_v$		$< 10^{-6}$	$< 5$
	$ \Delta k_x $	[ $\mu\text{V mGal}^{-1}$ ]	$< 10^{-6}$	$< 10^{-4}$
	$ \Delta k_y $			
	$ \Delta k_z $			
	$ \Delta \tau_{yz} $		$< 10^{-7}$	$< 10^{-4}$
	$ \Delta \tau_{zy} $			
	$ \Delta \tau_{yy} $			
	$ \Delta \tau_{zx} $			
	$ \Delta \tau_{zz} $			
$ \Delta p_{0,x} $	[ $\mu\text{V}$ ]	$< 10^{-6}$	$< 20$	
$ \Delta p_{0,y} $				
$ \Delta p_{0,z} $				
Cas b	$\epsilon$	$10^{-12}$	$10^{-12}$	
	$N$	$< 5000$	$< 20000$	
	$\mathbb{E}_v$	[mGal]	$\approx 0$	$\approx 0$
	$\sigma_v$		$< 1$	$< 10$
	$ \Delta k_x $	[ $\mu\text{V mGal}^{-1}$ ]	$< 10^{-1}$	$< 10^{-1}$
	$ \Delta k_y $			
	$ \Delta k_z $			
	$ \Delta \tau_{yz} $		$< 10^{-3}$	$< 10^{-2}$
	$ \Delta \tau_{zy} $			
	$ \Delta \tau_{yy} $			
	$ \Delta \tau_{zx} $			
	$ \Delta \tau_{zz} $			
$ \Delta p_{0,x} $	[ $\mu\text{V}$ ]	$< 10^3$	$< 10^4$	
$ \Delta p_{0,y} $				
$ \Delta p_{0,z} $				$< 10^4$

TABLE 6.4 – Expérimentation de la méthode des multiplicateurs de Lagrange.

Les résultats relatifs au scénario n°1 montre clairement l'impact de l'entrée en saturation trop rapide du capteur accélérométrique. En effet, dans le cas **a** où le capteur peut subir n'importe quelle inclinaison, les paramètres d'étalonnage sont parfaitement estimés par l'algorithme (écarts  $< 10^{-6}$ ) tandis que dans le cas **b**, des écarts notables aux valeurs de référence apparaissent et ce, avec une plus forte dégradation pour les coefficients relatifs à l'accéléromètre *vertical* du capteur. Le scénario n°2 ajoute un bruit sur les mesures en tension du capteur. La conséquence de ce bruit est une dégradation de l'ensemble des paramètres. On remarque cependant que, malgré des écarts importants aux valeurs de référence, l'écart-type sur les résidus reste faible ( $\sigma_v < 10$  mGal dans le cas **b** du scénario n°2). On retrouve ici l'un des constats émis avec la méthode de Helmert à neuf paramètres, à savoir la difficulté à séparer distinctement l'homothétie spatiale (facteurs d'échelle) de la translation (biais). Autrement dit, l'inclinaison limite du capteur accélérométrique, caractérisée par l'angle  $\theta_l$ , ne permet pas une estimation **robuste** des paramètres d'étalonnage.

### Application sur données réelles

L'algorithme de recherche des paramètres de calibration par la méthode des multiplicateurs de Lagrange a été appliqué sur quatre séries de mesures (Fig. 6.10, 6.11, 6.12 et 6.13) dont les caractéristiques sont résumées dans le tableau 6.5.

	Série n°1	Série n°2	Série n°3	Série n°4
date	25 novembre 2015			
lieu	Lab. métrologie ESGT		Toit ESGT	Lab. métrologie ESGT
$\ g\ $ [mGal]	980856.2		980852.7	980856.2
nb. observations	61	50	41	68
$T_{moy}$ de travail [°C]	23.23	23.82	17.49	14.05
$T_{max} - T_{min}$ [°C]	0.28	0.22	7.55	5.02

TABLE 6.5 – Caractéristiques des séries de mesures statiques.

Les deux premières séries de mesures ont été acquises à quelques dizaines de minutes d'intervalle dans le laboratoire de métrologie de l'ESGT. Cet intervalle de temps a suffit pour que la température moyenne de travail varie de  $0.6^{\circ}\text{C}$ . La troisième série a été acquise sur le toit de l'ESGT directement après la série n°2. Elle a été réalisée sans attendre la stabilisation en température du capteur ce qui explique la forte variation observée ( $T_{max} - T_{min} = 7.55^{\circ}\text{C}$ ). Enfin, la quatrième série a été acquise dans le laboratoire de métrologie quelques minutes après l'acquisition n°3. De nouveau, elle a été réalisée sans attendre la stabilisation en température du capteur ( $T_{max} - T_{min} = 5.02^{\circ}\text{C}$ ). Les valeurs de la norme  $\|g\|$  sont celles qui ont été déterminées par gravimétrie absolue et relative en avril 1999 [Guette 2001]. Il faut noter que le temps nécessaire pour l'acquisition d'une série comportant une cinquantaine de mesures n'excède pas 15 minutes sachant que chaque inclinaison est observée pendant une dizaine de secondes.

### 6.3. MÉTHODE DES MULTIPLICATEURS DE LAGRANGE

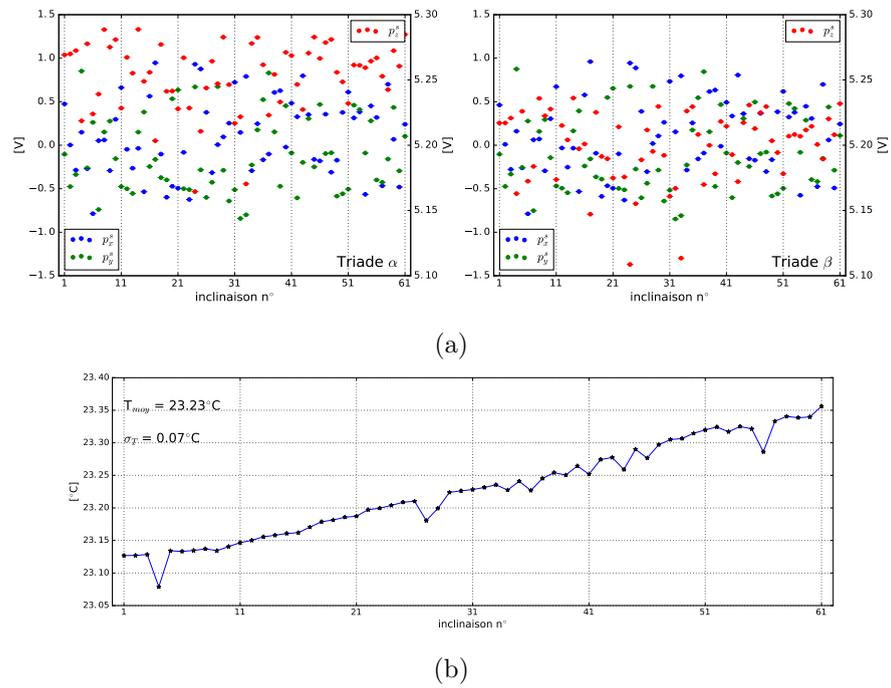


FIGURE 6.10 – Série n°1 réalisée dans le laboratoire de métrologie de l’ESGT. La valeur de  $\sigma_T$  indique la dispersion autour de la température moyenne de travail  $T_{moy}$ . (a) Valeurs en tension mesurées par les deux triades. (b) Température mesurée par les six accéléromètres.

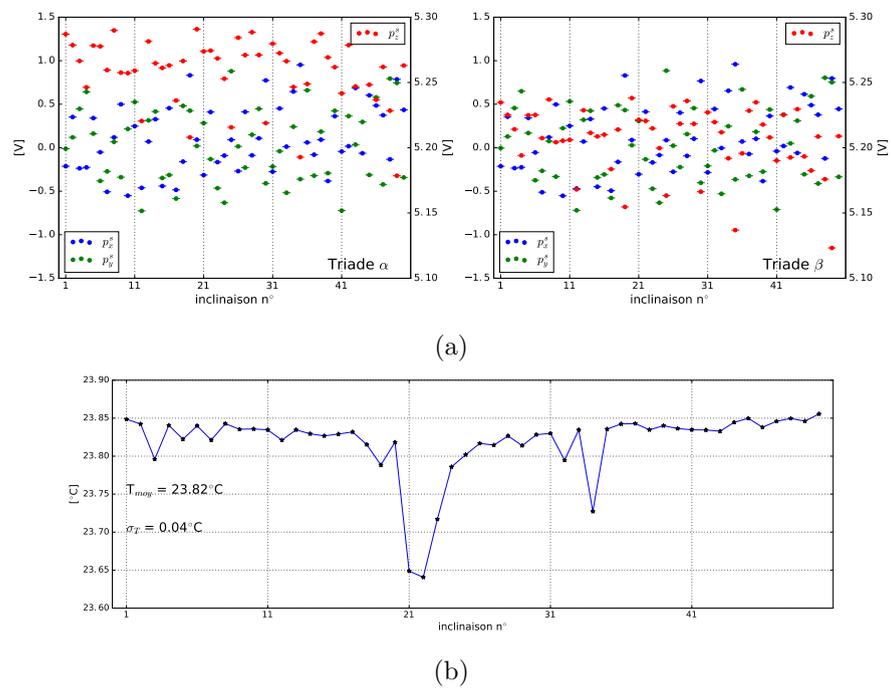


FIGURE 6.11 – Série n°2 réalisée dans le laboratoire de métrologie de l’ESGT. La valeur de  $\sigma_T$  indique la dispersion autour de la température moyenne de travail  $T_{moy}$ . (a) Valeurs en tension mesurées par les deux triades. (b) Température mesurée par les six accéléromètres.

### 6.3. MÉTHODE DES MULTIPLICATEURS DE LAGRANGE

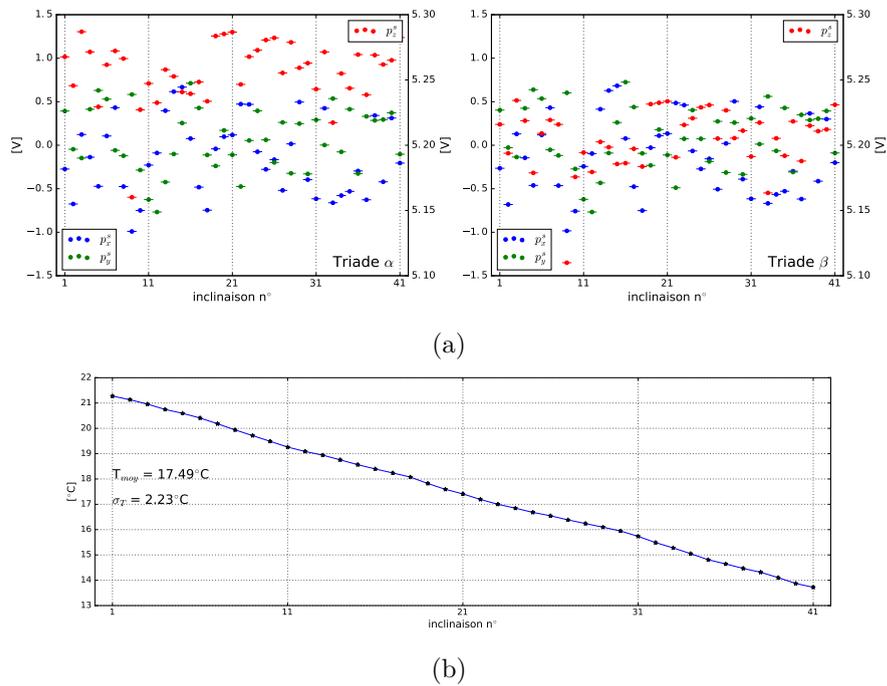


FIGURE 6.12 – Série n°3 réalisée dans le laboratoire de métrologie de l’ESGT. La valeur de  $\sigma_T$  indique la dispersion autour de la température moyenne de travail  $T_{moy}$ . (a) Valeurs en tension mesurées par les deux triades. (b) Température mesurée par les six accéléromètres.

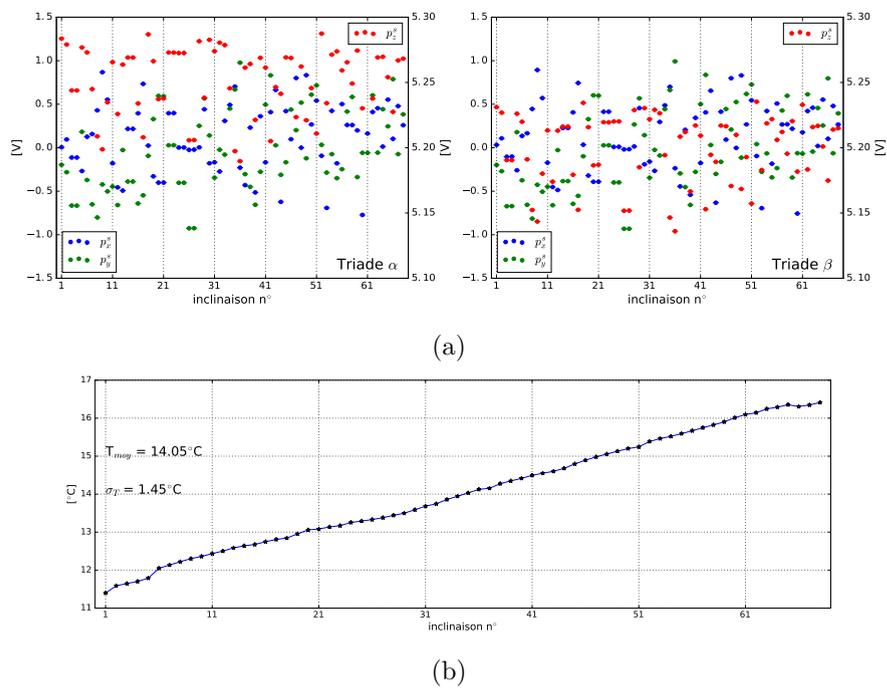


FIGURE 6.13 – Série n°4 réalisée dans le laboratoire de métrologie de l’ESGT. La valeur de  $\sigma_T$  indique la dispersion autour de la température moyenne de travail  $T_{moy}$ . (a) Valeurs en tension mesurées par les deux triades. (b) Température mesurée par les six accéléromètres.

#### Résultats

L'algorithme de recherche des paramètres de calibration par la méthode des multiplicateurs de Lagrange converge lorsqu'il est appliqué sur les deux premières séries de mesures. Dans le cas des séries n°3 et 4, ce dernier diverge. Cette divergence peut s'expliquer par les variations de température subies par le capteur accélérométrique, remettant en question le modèle fonctionnel adopté. Ces deux séries trouveront cependant leur intérêt dans la suite de cette section afin de quantifier l'impact des variations de température sur la norme de l'accélération spécifique mesurée.

Les tableaux 6.6 et 6.7 présentent les résultats relatifs aux deux premières séries de mesures. Le nombre d'itérations nécessaires à la convergence de l'algorithme est d'environ 10 000. Toutefois, afin d'observer la dispersion éventuelle des paramètres autour de leurs valeurs limites, ce nombre a volontairement été fixé à 50 000 et ce, afin d'évaluer la moyenne et l'écart-type sur les paramètres estimés.

### 6.3. MÉTHODE DES MULTIPLICATEURS DE LAGRANGE

---

		Triade $\alpha$		Triade $\beta$	
$\mathbb{E}_v$	[mGal]	0.0		0.0	
$\sigma_v$		2.2		4.6	
		moyenne	écart-type	moyenne	écart-type
$k_x$	[ $\mu\text{V mGal}^{-1}$ ]	5.379717	$1.5 \times 10^{-4}$	5.352213	$1.3 \times 10^{-4}$
$k_y$		5.378344	$1.5 \times 10^{-4}$	5.344714	$1.3 \times 10^{-4}$
$k_z$		5.734192	$6.5 \times 10^{-4}$	6.148558	$6.1 \times 10^{-4}$
$\tau_{yz}$		$4.330247 \times 10^{-4}$	$7.6 \times 10^{-9}$	$1.240602 \times 10^{-3}$	$3.4 \times 10^{-9}$
$\tau_{zy}$		$-3.136326 \times 10^{-3}$	$1.3 \times 10^{-6}$	$-8.984844 \times 10^{-3}$	$9.8 \times 10^{-7}$
$\tau_{yy}$		$9.999999 \times 10^{-1}$	$3.3 \times 10^{-12}$	$9.999992 \times 10^{-1}$	$4.3 \times 10^{-12}$
$\tau_{zx}$		$-6.586763 \times 10^{-5}$	$1.5 \times 10^{-7}$	$3.742591 \times 10^{-3}$	$1.5 \times 10^{-7}$
$\tau_{zz}$		$9.999951 \times 10^{-1}$	$4.0 \times 10^{-9}$	$9.999526 \times 10^{-1}$	$8.6 \times 10^{-9}$
$p_{0,x}$		[mV]	-22.1383	$6.6 \times 10^{-3}$	-44.0104
$p_{0,y}$	4.0599		$8.0 \times 10^{-4}$	17.0120	$1.2 \times 10^{-3}$
$p_{0,z}$	182.5038		$4.7 \times 10^{-1}$	394.6003	$4.3 \times 10^{-1}$

TABLE 6.6 – Estimation des paramètres par la méthode des multiplicateurs de Lagrange appliquée à la série n°1.

### 6.3. MÉTHODE DES MULTIPLICATEURS DE LAGRANGE

		Triade $\alpha$		Triade $\beta$	
$\mathbb{E}_v$	[mGal]	0.0		0.0	
$\sigma_v$		1.4		3.1	
		moyenne	écart-type	moyenne	écart-type
$k_x$	[ $\mu\text{V mGal}^{-1}$ ]	5.390336	$2.4 \times 10^{-4}$	5.348408	$1.4 \times 10^{-4}$
$k_y$		5.389158	$2.4 \times 10^{-4}$	5.342641	$1.4 \times 10^{-4}$
$k_z$		5.488899	$1.0 \times 10^{-3}$	5.279384	$5.4 \times 10^{-4}$
$\tau_{yz}$		$3.216281 \times 10^{-4}$	$1.6 \times 10^{-7}$	$8.730807 \times 10^{-4}$	$1.2 \times 10^{-7}$
$\tau_{zy}$		$3.872793 \times 10^{-3}$	$4.0 \times 10^{-6}$	$-9.030720 \times 10^{-4}$	$2.8 \times 10^{-6}$
$\tau_{yy}$		$9.999999 \times 10^{-1}$	$5.2 \times 10^{-11}$	$9.999996 \times 10^{-1}$	$1.1 \times 10^{-10}$
$\tau_{zx}$		$-2.580346 \times 10^{-3}$	$3.3 \times 10^{-6}$	$-2.332395 \times 10^{-3}$	$2.5 \times 10^{-6}$
$\tau_{zz}$		$9.999892 \times 10^{-1}$	$2.4 \times 10^{-8}$	$9.999969 \times 10^{-1}$	$3.2 \times 10^{-9}$
$p_{0,x}$		[mV]	14.8873	$2.1 \times 10^{-2}$	-1.6247
$p_{0,y}$	-9.1261		$1.7 \times 10^{-5}$	-14.5604	$1.3 \times 10^{-2}$
$p_{0,z}$	73.3038		$7.4 \times 10^{-1}$	-31.3348	$4.0 \times 10^{-1}$

TABLE 6.7 – Estimation des paramètres par la méthode des multiplicateurs de Lagrange appliquée à la série n°2.

Analysés séparément, les résultats des deux séries de mesures donnent des résultats satisfaisants dans le sens où les écarts-types des résidus sont de l'ordre du milligal. Cependant, comparés l'un à l'autre, il est possible de constater des variations sur la valeur des paramètres d'étalonnage. Afin de contrôler la fiabilité de ces derniers, il est possible de les appliquer de manière croisée sur les séries d'observations. Plus précisément, l'application des paramètres issus de la série n°1 (Tab. 6.6) sur les observations de la série n°2 donne :

- pour la triade  $\alpha$  :  $\mathbb{E}_v = 60.50$  mGal et  $\sigma_v = 2.22$  mGal ;
- pour la triade  $\beta$  :  $\mathbb{E}_v = 27.46$  mGal et  $\sigma_v = 4.37$  mGal.

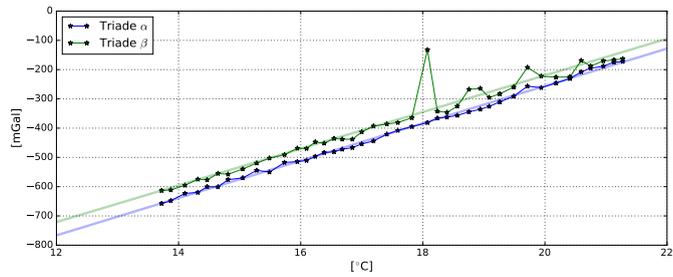
De la même manière, l'application des paramètres issus de la série n° 2 (Tab. 6.7) sur les observations de la série n° 1 donne :

- pour la triade  $\alpha$  :  $\mathbb{E}_v = -60.54$  mGal et  $\sigma_v = 2.85$  mGal ;
- pour la triade  $\beta$  :  $\mathbb{E}_v = -28.18$  mGal et  $\sigma_v = 5.66$  mGal.

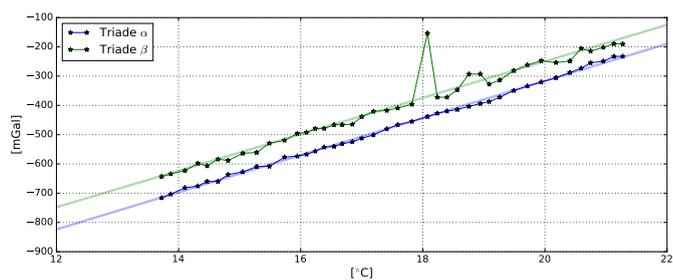
On remarque que les valeurs moyennes des résidus sont non nulles et opposées alors que les écarts-types sont du même ordre que ceux calculés lors de l'estimation des paramètres. On peut conjecturer que l'application de paramètres de calibration estimés à une température  $T_1$  sur une série d'observations acquise à une température  $T_2$  décale uniquement la valeur moyenne de la norme de ces dernières (apparition d'un biais) mais ne les disperse pas.

Une estimation de ce biais accélérométrique par unité de température peut être réalisée à partir des séries n°3 et 4. Ces dernières étant affectées par de fortes variations de température, il est possible de leur appliquer les paramètres d'étalonnage estimés depuis les séries n°1 et 2 et de représenter chaque résidu en norme en fonction de la température qui lui est associée. Les résultats de cet exercice sont présentés sur les figures 6.14 et 6.15, sur lesquelles apparaissent également les tendances déduites par régression linéaire. Les pentes de ces différentes tendances sont résumées dans le tableau 6.8.

### 6.3. MÉTHODE DES MULTIPLICATEURS DE LAGRANGE

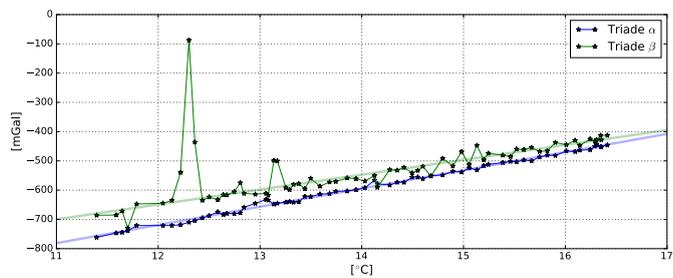


(a)

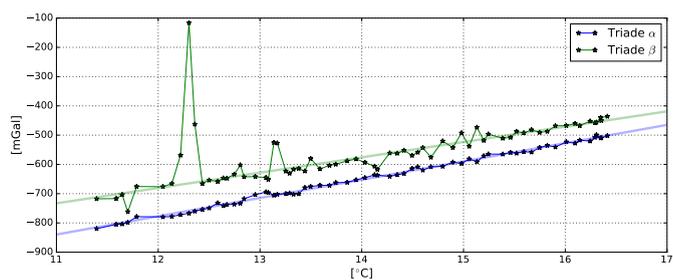


(b)

FIGURE 6.14 – Application des paramètres déduits des séries n°1 (a) et 2 (b) sur les observations de la série n°3.



(a)



(b)

FIGURE 6.15 – Application des paramètres déduits des séries n°1 (a) et 2 (b) sur les observations de la série n°4 .

### 6.3. MÉTHODE DES MULTIPLICATEURS DE LAGRANGE

paramètres déduits de la série n°	appliqués à la série n°	
	3	4
1	$\alpha : 63.84 \text{ mGal}/^\circ\text{C}$	$\alpha : 62.23 \text{ mGal}/^\circ\text{C}$
	$\beta : 62.67 \text{ mGal}/^\circ\text{C}$	$\beta : 50.84 \text{ mGal}/^\circ\text{C}$
2	$\alpha : 63.45 \text{ mGal}/^\circ\text{C}$	$\alpha : 62.47 \text{ mGal}/^\circ\text{C}$
	$\beta : 62.35 \text{ mGal}/^\circ\text{C}$	$\beta : 52.38 \text{ mGal}/^\circ\text{C}$

TABLE 6.8 – Valeurs des pentes déduites de l'évolution des résidus des séries n°3 et 4 en fonction de la température.

Sur les huit coefficients directeurs estimés, six semblent s'accorder sur une valeur moyenne de  $62.84 \text{ mGal}/^\circ\text{C}$ . Les coefficients issus de la série de mesure n°4 et relatifs à la triade  $\beta$  s'écartent sensiblement de cette valeur moyenne.

L'évaluation de ce facteur apparaît comme cruciale dans le sens où la température de travail du capteur accélérométrique en fond de mer est généralement différente de la température à laquelle les paramètres de calibration sont estimés. Bien qu'il se limite à une correction sur la seule norme de l'accélération spécifique, il s'agit d'une première étape vers la correction des données acquises en milieu marin.

La méthode des multiplicateurs de Lagrange apparaît donc comme plus précise comparée à la méthode de Helmert à neuf paramètres. En effet, puisqu'elle ne nécessite que la connaissance de la norme de l'accélération de pesanteur, elle peut être effectuée en laboratoire afin de s'affranchir des variations de température. Cependant, le repère dans lequel elle permet d'exprimer les accélérations spécifiques calibrées ne correspond pas encore au repère du véhicule porteur (*b-frame*). Ceci est dû à la forme de la matrice  $C_b^s$  (6.14) retenue dans le modèle fonctionnel. Par conséquent, les manipulations mettant en œuvre diverses inclinaisons de l'AUV avec le capteur accélérométrique restent indispensables afin de corriger l'orientation de ce dernier. La section suivante aborde ce point et analyse également la stabilité du capteur accélérométrique dans l'AUV.

## 6.4 Stabilité du capteur dans l'AUV

À partir de maintenant et dans toute la suite de ce manuscrit, on considère que les paramètres d'étalonnage du capteur accélérométrique sont ceux figurant dans le tableau 6.7.

Comme indiqué précédemment, ces paramètres transforment une mesure vectorielle en tension en une mesure homogène à une accélération spécifique et exprime ses composantes dans un repère orthogonal intermédiaire qui ne correspond pas directement au repère du véhicule porteur (*b-frame*). Ce repère, noté *abusivement* avec la lettre  $b'$ , se définit au vu des coefficients de la matrice  $C_{b'}^s$  (6.14), tel que :

- son premier axe,  $e_{x'}^{b'}$ , est confondu avec l'axe  $e_x^s$  de la triade ;
- son deuxième axe,  $e_{y'}^{b'}$ , est dans le plan défini par les axes  $e_x^s$  et  $e_y^s$  de la triade ;
- son troisième axe  $e_{z'}^{b'}$  correspond au produit vectoriel  $e_x^{b'} \wedge e_y^{b'}$ .

La matrice de passage  $C_{b'}^b$  correspond donc à la dernière inconnue du problème lorsque la méthode des multiplicateurs de Lagrange est utilisée pour calibrer le capteur accélérométrique. Les deux repères mis en jeu étant orthogonaux, cette matrice s'exprime d'une manière générale comme :

$$C_{b'}^b = \begin{pmatrix} \cos \theta_z \cos \theta_y & -\sin \theta_z \cos \theta_x + \cos \theta_z \sin \theta_y \sin \theta_x & \sin \theta_z \sin \theta_x + \cos \theta_z \sin \theta_y \cos \theta_x \\ \sin \theta_z \cos \theta_y & \cos \theta_z \cos \theta_x + \sin \theta_z \sin \theta_y \sin \theta_x & -\cos \theta_z \sin \theta_x + \sin \theta_z \sin \theta_y \cos \theta_x \\ -\sin \theta_y & \cos \theta_y \sin \theta_x & \cos \theta_y \cos \theta_x \end{pmatrix} ;$$

En utilisant les données acquises dans les ateliers de l'IFREMER (Fig. 6.2, 6.3 et 6.4), cette matrice peut être estimée puisque :

- les accélérations spécifiques  $(a_1^b \dots a_n^b)$  mesurées ou déduites de la centrale inertielle de l'AUV sont exprimées dans le repère du véhicule porteur (*b-frame*) ;
- les accélérations **calibrées**  $(a_1^{b'} \dots a_n^{b'})$  des triades accélérométriques sont exprimées dans le repère intermédiaire (*b'-frame*).

#### 6.4. STABILITÉ DU CAPTEUR DANS L'AUV

La solution est celle du problème de Procuste orthogonal dans lequel on ne recherche, cette fois-ci, que les angles de rotation. Elle s'exprime comme suit :

$$C_{b'}^b = V \times U^T \quad ,$$

où  $U$  et  $V$  sont les matrices issues de la SVD de la matrice  $S$  définie par ;

$$S = \begin{pmatrix} a_1^{b'} & \dots & a_n^{b'} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_1^b & \dots & a_n^b \end{pmatrix}^T$$

Les paramètres angulaires  $\theta_x$ ,  $\theta_y$  et  $\theta_z$  de la matrice  $C_{b'}^b$  pour les deux triades accélérométriques du capteur sont présentés dans la table 6.9 pour la journée du 19 janvier et dans la table 6.10 pour la journée 21 janvier 2016.

Les valeurs obtenues sont cohérentes avec ce qui a été établi dans le chapitre 5, à savoir que les accéléromètres *horizontaux* des deux triades du capteur sont quasiment dans le plan formé par les axes  $e_x^b$  et  $e_y^b$  du repère lié au véhicule porteur ( $\theta_x \approx \theta_y \approx 0$  deg) mais que leurs axes sensibles pointent dans des directions opposées ( $\theta_z \approx 180$  deg).

Les écarts constatés sur les angles suivant les accélérations spécifiques mesurées ou déduites de la centrale inertielle sont dans tous les cas de l'ordre du millième de degré.

accélérations spécifiques de la centrale inertielle	accélérations spécifiques de la triade		$\alpha$	$\beta$
mesurées	$\theta_x$		-0.226	-0.221
	$\theta_y$	[deg]	0.187	0.244
	$\theta_z$		-177.325	-177.131
déduites des angles d'attitude	$\theta_x$		-0.229	-0.224
	$\theta_y$	[deg]	0.185	0.242
	$\theta_z$		-177.327	-177.132

TABLE 6.9 – Paramètres angulaires de la matrice  $C_{b'}^b$  estimée par SVD à partir des mesures statiques acquises le 19 janvier 2016.

#### 6.4. STABILITÉ DU CAPTEUR DANS L'AUV

accélérations spécifiques de la centrale inertielle	accélérations spécifiques de la triade		$\alpha$	$\beta$
	mesurées	$\theta_x$	[deg]	0.310
$\theta_y$		0.153		0.192
$\theta_z$		-177.334		-177.142
déduites des angles d'attitude	$\theta_x$	[deg]	0.307	0.294
	$\theta_y$		0.149	0.189
	$\theta_z$		-177.336	-177.144

TABLE 6.10 – Paramètres angulaires de la matrice  $C_{b'}^b$  estimée par SVD à partir des mesures statiques acquises le 21 janvier 2016.

Enfin, la partie avant de l'AUV comprenant le capteur accélérométrique ayant été démontée puis remontée entre la journée du 19 janvier et celle du 21 janvier 2016, on constate que le capteur ne se retrouve pas exactement dans la même position puisqu'il subit :

- une rotation suivant l'axe  $e_z^{b'}$  ( $|\Delta\theta_z| \approx 0.010$  deg) ;
- une rotation suivant l'axe  $e_y^{b'}$  ( $|\Delta\theta_y| \approx 0.040$  deg) ;
- une rotation suivant l'axe  $e_x^{b'}$  ( $|\Delta\theta_x| \approx 0.500$  deg).

L'erreur de positionnement de la partie avant de l'AUV est donc largement due à un désalignement de ses différentes parties suivant son axe longitudinal (Fig. 6.16). Elle peut se traduire en terme d'écart métrique  $\delta l$  sur la surface extérieure de l'AUV tel que :

$$\delta l = R_{AUV} \times \Delta\theta_x \approx 3 \text{ mm} \quad ,$$

avec  $R_{AUV} \approx 35$  cm, le rayon de l'AUV au niveau de ses jonctions.

Puisque le capteur accélérométrique ne peut être remplacé de manière identique, les opérations de calibration décrites dans la section 6.2 doivent donc être répétées autant de fois que l'AUV est assemblé. Il est clair que ces opérations seraient complexes à réaliser sur le pont d'un navire lors d'une mission en mer, car elles nécessiteraient un maintien statique du véhicule dans diverses inclinaisons.

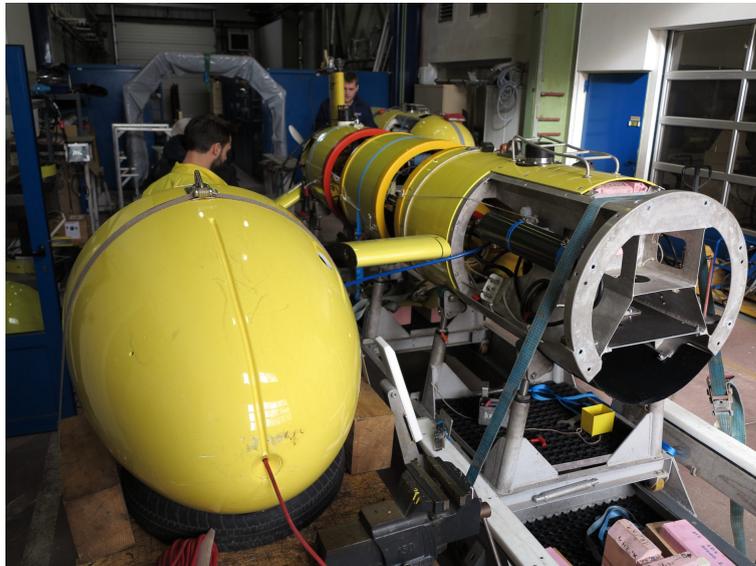


FIGURE 6.16 – L'assemblage des différentes parties de l'AUV engendre une erreur d'alignement du capteur accélémétrique suivant l'axe longitudinal du véhicule.

### 6.5 Conclusion sur l'étalonnage du capteur

L'étalonnage et l'orientation d'une triade accélémétrique en vue d'obtenir une précision de l'ordre du milligal sur ses mesures est un problème délicat dont la complexité avait déjà été mise en avant dans les travaux de Bertrand de Saint-Jean. Les résultats de ce présent chapitre n'ont pas démenti cette complexité dans le cas du système GraviMob.

Les méthodes tachémétriques ne sont définitivement pas adaptées car elles impliquent de lourds travaux topométriques et engendrent de trop fortes imprécisions sur les données en entrée du problème d'étalonnage. L'utilisation de scanners 3D à triangulation, tel que ceux rencontrés dans le milieu de l'industrie de précision, pourraient potentiellement diminuer ces imprécisions mais engendreraient un coût et un temps de traitement non négligeables. Les méthodes d'étalonnage mettant en jeu un autre système déjà étalonné (Sec. 6.2) apparaissent initialement comme les plus adéquates à la résolution du problème d'étalonnage. Cependant, dans le cas du système GraviMob, elles nécessitent également des manipulations complexes tel que le maintien statique de l'AUV dans diverses inclinaisons et sont difficilement réalisables dans des conditions stables de température. Une solution consis-

terait à effectuer ces opérations dans un bassin. Le défi majeur serait alors de maintenir le véhicule porteur immobile mais permettrait une plus large variété d'inclinaisons et ce dans de meilleures conditions de stabilité en température. Cela dit, la qualité des résultats apportés par ces méthodes restera probablement éloignée de la précision attendue car la référence utilisée (la centrale inertielle de l'AUV dans notre cas) est de précision moindre comparée à celle des accéléromètres du capteur du système GraviMob.

Une meilleure référence est celle issue des techniques de gravimétrie absolue et relative. Comme l'a montré la section 6.3, cette unique information est suffisante pour estimer les paramètres d'étalonnage d'une triade accélérométrique. Les opérations techniques mises en œuvre restent simples à réaliser puisque seul le capteur accélérométrique doit être maintenu statique dans diverses inclinaisons. Elles peuvent donc s'effectuer plus facilement dans des environnements stables en température et permettent d'acquérir un nombre conséquent d'observations dans un temps relativement court (15 minutes de manipulation afin d'obtenir une cinquantaine d'observations statiques). La solution apportée par ces méthodes (tel que la méthode des multiplicateurs de Lagrange) est cependant incomplète et nécessite logiquement des opérations mettant en jeu l'AUV et sa centrale inertielle (Sec. 6.4).

En mettant de côté l'objectif de réaliser une mesure vectorielle et dynamique de l'accélération de pesanteur, les résultats de la méthode des multiplicateurs de Lagrange (Sec. 6.3) font entrevoir la possibilité d'utiliser le capteur accélérométrique du système GraviMob comme gravimètre scalaire léger de type *stop and go*<sup>7</sup>. En raffinant la plage dynamique de mesure des accéléromètres ainsi que la stabilité (ou la loi de correction) en température, il serait largement envisageable d'améliorer la qualité des coefficients d'étalonnage, menant ainsi à des résidus en norme inférieurs au milligal. L'application de ces coefficients sur des mesures statiques effectuées en d'autres points permettrait donc une mesure scalaire<sup>8</sup> rapide de l'accélération de pesanteur. Là où les instruments classiques de gravimétrie nécessitent une mise en station (verticalisation) délicate, le capteur accélérométrique s'en affranchit et permet de multiplier facilement les observations statiques sur un même point.

---

7. C'est-à-dire une acquisition continue dans laquelle on traiterai seulement les périodes de mesures statiques.

8. La norme du vecteur ainsi obtenu serait la seule observation interprétable puisque l'orientation du capteur ne serait pas mesurée.

## 6.5. CONCLUSION SUR L'ÉTALONNAGE DU CAPTEUR

---

Il suffirait effectivement de positionner le capteur dans diverses inclinaisons afin de moyenner un nombre important d'observations et de diminuer l'incertitude sur l'accélération de pesanteur recherchée. Ces propos seront repris dans les propositions d'évolution du système dans la conclusion de ce manuscrit.

Troisième partie

**Stratégie d'estimation du champ  
de pesanteur**



## Chapitre 7

# Quantification des performances du système

Ce nouveau chapitre se propose d'étudier l'impact des incertitudes, affectant les données en entrée de l'équation d'observation du système GraviMob, sur la restitution des composantes du vecteur accélération de pesanteur. Étant donnée la non linéarité de l'équation d'observation, un calcul classique par propagation de la variance apparaît comme inapproprié. On lui préfère par conséquent une méthode d'estimation stochastique de type Monte-Carlo.

### Principe du calcul de l'erreur

L'équation d'observation du système GraviMob (3.19, p. 69) peut schématiquement s'écrire sous la forme d'une fonction  $h$  de  $\mathbb{R}^{15}$  dans  $\mathbb{R}^3$  telle que :

$$g_P^n = h(x) \quad , \quad (7.1)$$

avec  $x$  le vecteur de  $\mathbb{R}^{15}$  contenant les grandeurs relatives au mouvement du véhicule porteur, à savoir :

- $\lambda_P, \dot{\lambda}_P$  et  $\ddot{\lambda}_P$  : la longitude, sa dérivée première et seconde ;
- $\varphi_P, \dot{\varphi}_P$  et  $\ddot{\varphi}_P$  : la latitude, sa dérivée première et seconde ;
- $h_P, \dot{h}_P$  et  $\ddot{h}_P$  : la hauteur ellipsoïdale, sa dérivée première et seconde ;
- $\delta$  : le cap ;
- $\chi$  : le tangage ;

—  $\eta$  : le roulis ,

ainsi que les composantes du vecteur accélération spécifique :

$$— a^b = \frac{a_{M\alpha}^b + a_{M\beta}^b}{2} = \begin{pmatrix} a_x & a_y & a_z \end{pmatrix}^T$$

Puisque ce vecteur est entaché d'une erreur  $\epsilon_x$ , il existe par conséquent en sortie de l'équation d'observation une erreur  $\epsilon_g$  affectant le vecteur accélération de pesanteur :

$$\epsilon_g = g_P^n - h(x + \epsilon_x) \tag{7.2}$$

Il apparaît ainsi que les deux premiers moments statistiques de la variable aléatoire  $\epsilon_g$ , à savoir, son espérance  $\mathbb{E}_{\epsilon_g}$  et sa variance  $\sigma_{\epsilon_g}^2$ , peuvent être évalués numériquement à partir d'un modèle du champ de pesanteur, d'une trajectoire et des accélérations spécifiques de référence et de la génération du processus stochastique  $\epsilon_x$  modélisant l'erreur de mesure du système GraviMob.

Les sections suivantes s'intéressent successivement à l'identification et à la modélisation du processus stochastique  $\epsilon_x$ , à la génération du champ de pesanteur, de la trajectoire et des accélérations spécifiques de référence et à l'évaluation de l'espérance et de la variance de l'erreur  $\epsilon_g$ .

## 7.1 Modélisation des processus stochastiques

### Qualité de la navigation sous-marine

La navigation de l'AUV, à savoir la connaissance à chaque époque de la position ( $\lambda_P, \varphi_P$  et  $h_P$ ) et de l'attitude ( $\delta, \chi$  et  $\eta$ ), résulte d'un processus de fusion et de filtrage d'observations issues de divers instruments de mesure (Chap. 5). L'évaluation de la qualité de la navigation sous-marine s'appuie directement sur les résultats issus du traitement effectué par les outils logiciels utilisés au sein de l'IFREMER. Plus précisément, cette analyse s'appuie sur les 26 profils réalisés lors de la campagne d'expérimentation en Mer Méditerranée du 17 au 25 mars 2016 qui représentent une distance totale parcourue d'environ 169 kilomètres.

L'estimation en temps différé de la position et de l'attitude de l'AUV, indique ainsi :

- une précision planimétrique en *est* et en *nord* comprise entre 1 et 2.5 m. Sur la sphère tangente à la zone de navigation, cette précision se traduit angulairement par une incertitude en longitude et en latitude tel que :

$$\sigma_{\lambda_P} = 3.07 \times 10^{-5} \text{ deg}$$

$$\sigma_{\varphi_P} = 2.25 \times 10^{-5} \text{ deg}$$

- une précision altimétrique :

$$\sigma_h = 30 \text{ cm}$$

- une précision sur l'angle de cap :

$$0.02 < \sigma_\delta < 0.05 \text{ deg}$$

- une précision sur les angles de tangage et de roulis :

$$0.002 < \sigma_\chi < 0.005 \text{ deg}$$

$$0.002 < \sigma_\eta < 0.005 \text{ deg}$$

Comparé au LiMo-g, le système de navigation de l'AUV du système GraviMob permet donc une mesure plus précise des angles d'attitude<sup>1</sup> tandis que la mesure en position<sup>2</sup> se voit logiquement dégradée en raison de la contrainte naturelle imposée par le milieu sous-marin.

### Qualité des mesures accélérométriques

Contrairement aux observations de position et d'attitude fournies par le système de navigation du véhicule porteur, la qualité des observations brutes du capteur accélérométrique est plus facilement quantifiable puisque ces dernières sont directement accessibles et ne nécessitent pas de traitement complémentaire. Parmi les différentes techniques d'identification des processus stochastiques tel que le filtrage adaptatif de Kalman, la densité spectrale de puissance ou encore l'approche par corrélation [El-Sheimy et al. 2008], la variance d'Allan apparaît comme l'une des méthodes les plus adaptées au contexte de la navigation inertielle [Woodman 2007]. Notée généralement  $\sigma^2$ , la variance d'Allan d'un

---

1. Dans le cas du LiMo-g, la précision sur les angles d'attitude vaut approximativement 0.5 deg.

2. De même, la précision sur la position correspond à celle fournie par le positionnement relatif GPS, à savoir 2 à 5 cm en planimétrie et 5 à 10 cm en altimétrie.

signal est une fonction d'un temps moyen  $\tau$ . Elle se calcule pour chaque multiple de la période d'échantillonnage  $T_e$  d'une série temporelle discrète  $s$  par la relation suivante [IEEE 2006] :

$$\sigma^2(\tau) = \sigma^2(k \times T_E) = \frac{1}{2(n-1)} \sum_i (\bar{s}_{i+1} - \bar{s}_i)^2 \quad ,$$

où  $\bar{s}_i$  désigne le  $i^{\text{ième}}$  terme de la série temporelle  $\bar{s}$  obtenue après application d'une fenêtre à moyenne glissante de largeur  $\tau = k \times T_e$  sur la série temporelle initiale  $s$  et où  $n$  correspond au nombre de termes de la série temporelle  $\bar{s}$ . La variance d'Allan d'un processus stochastique est liée à la densité spectrale de puissance  $S_\Omega(f)$  de ce même processus par la relation suivante [IEEE 2006] :

$$\sigma^2(\tau) = 4 \int_0^\infty S_\Omega(f) \frac{\sin^4(\pi f \tau)}{(\pi f \tau)^2} df \quad (7.3)$$

La relation (7.3) est primordiale afin de déterminer les caractéristiques des processus stochastiques détectés par la variance d'Allan. À ce titre, c'est généralement la racine carrée de la variance d'Allan qui est représentée en fonction du temps moyen  $\tau$  sur une échelle logarithmique. Les processus stochastiques contenus dans le signal  $s$  s'identifient alors selon les valeurs des pentes que présente la courbe représentative (Fig. 7.1).

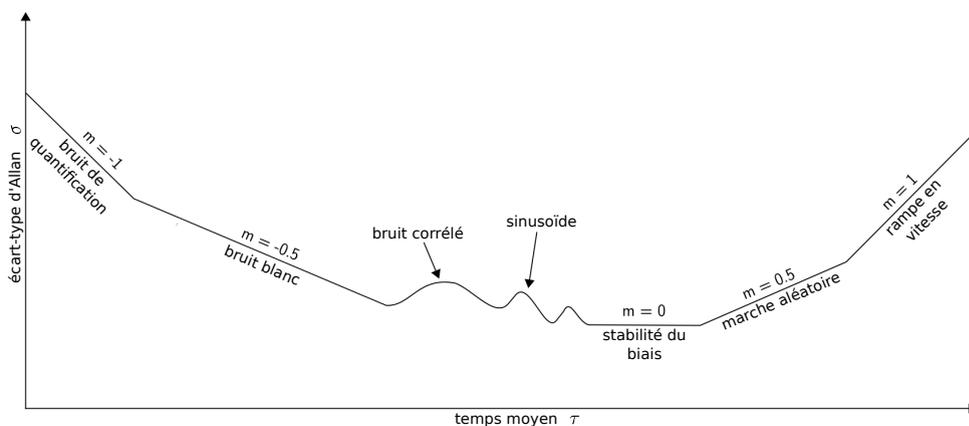


FIGURE 7.1 – Les processus stochastiques s'identifient selon les valeurs des pentes présentes dans la représentation de l'écart-type d'Allan (IEEE 2006).

## 7.1. MODÉLISATION DES PROCESSUS STOCHASTIQUES

Afin d'appliquer le calcul de la variance d'Allan sur les mesures accélérométriques du système GraviMob, une série de mesures représentant environ 64 heures d'observation a été acquise au sein du laboratoire de métrologie de l'ESGT. Afin de limiter les accélérations provoquées par l'activité environnante, le capteur a été placé sur un pilier désolidarisé du bâtiment dans une pièce où la température fluctue lentement<sup>3</sup>. La figure 7.2 montre l'évolution de la température moyenne enregistrée par les six accéléromètres ainsi que les accélérations spécifiques acquises.

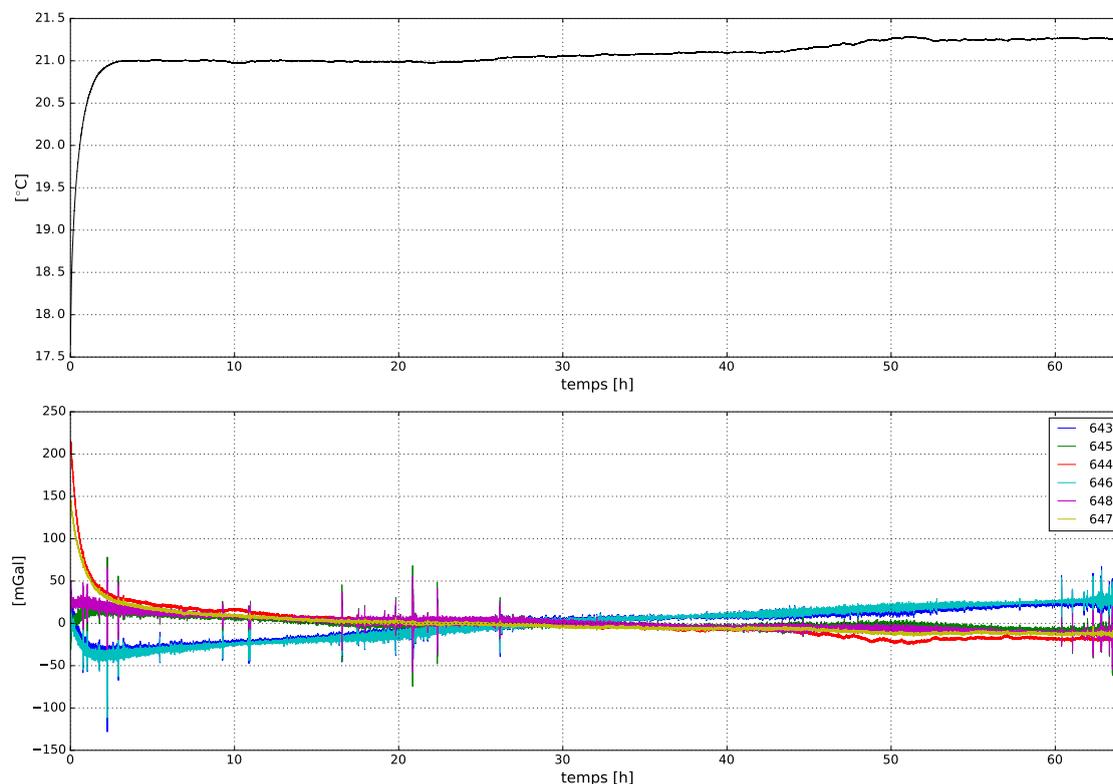


FIGURE 7.2 – Acquisition statique de la température et des accélérations spécifiques sur une durée d'environ 64 heures. Les six accéléromètres sont numérotés de 643 à 648.

Les valeurs délivrées par le capteur accélérométrique s'expriment initialement en volt. Elles doivent donc être converties dans une échelle de température. Les accélérations spécifiques ont quant à elles été converties en adoptant un facteur d'échelle moyen égal à  $5.5 \mu\text{V} \cdot \text{mGal}^{-1}$ .

3. Cette fluctuation est de l'ordre de  $0.01 \text{ }^\circ\text{C/h}$ .

La figure 7.2 met en évidence une période transitoire de mise en température des accéléromètres d'environ 5 heures ainsi qu'une dépendance de la mesure accélérométrique avec les variations de la température moyenne de travail. Afin de vérifier cette dépendance, les coefficients de corrélation des 6 séries temporelles accélérométriques avec la température ont été calculés sur une période d'environ 59 heures, abstraction faite du régime transitoire (Fig. 7.3). Leurs valeurs, résumées dans le tableau 7.1, confirment la forte dépendance de la mesure accélérométrique avec les fluctuations de la température moyenne d'acquisition. Les signes des coefficients de corrélation dépendent de l'orientation des axes sensibles des accéléromètres. Dans cette configuration, les axes sensibles des accéléromètres 645, 644, 648 et 647 pointaient vers le bas tandis que les axes sensibles des accéléromètres 643 et 646 pointaient quant à eux vers le haut.

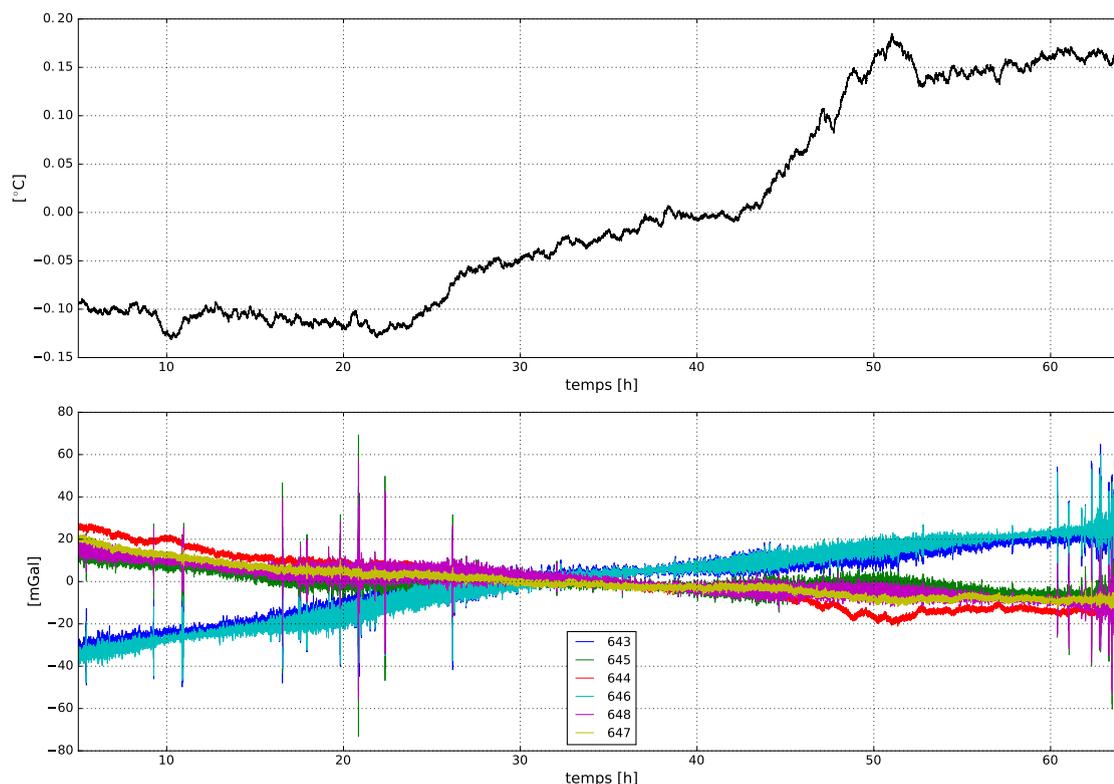


FIGURE 7.3 – Visualisation des enregistrements sans la période transitoire de mise en température des accéléromètres. Une valeur moyenne a été retranchée à la température mesurée.

accéléromètre n°	corrélation
643	88.8 %
645	-75.0 %
644	-92.5 %
646	90.7 %
648	-88.3 %
647	-86.4 %

TABLE 7.1 – Corrélation des mesures accélérométriques avec la température.

Sur la durée totale de l'acquisition (Fig. 7.3), la température moyenne mesurée par les six accéléromètres a ainsi variée de  $0.25^\circ\text{C}$  tandis que les accélérations spécifiques ont variées de 40 à 60 mGal. Une première évaluation de l'impact de la variation en température sur l'accélération spécifique observée donne ainsi :

$$160 \text{ mGal}/^\circ\text{C} < \frac{\Delta a}{\Delta T} < 240 \text{ mGal}/^\circ\text{C} \quad ,$$

soit  $\Delta a = 1 \text{ mGal}$  pour  $\Delta T \approx 0.005^\circ\text{C}$ . Le maintien d'une température de travail stable apparaît donc comme essentiel afin de garantir une précision de l'ordre du milligal sur les accélérations spécifiques.

Afin d'évaluer au mieux la qualité intrinsèque des accéléromètres du système GraviMob, une tendance linéaire, représentant la dérive en température, a été soustraite aux séries temporelles visibles sur la figure 7.3. Les nouvelles séries ainsi obtenues (Fig. 7.4) sont celles qui ont été utilisées pour évaluer l'écart-type d'Allan dont la représentation graphique est donnée à la figure 7.5.

Sur cette figure apparaissent les écarts-types d'Allan des six accéléromètres ainsi que l'écart-type d'Allan d'un processus stochastique généré *a posteriori* à partir des coefficients caractérisant les deux bruits majeurs identifiés dans chacune des six courbes ( $\sigma_{643}$  à  $\sigma_{648}$ ).

Le premier processus identifié apparaît pour les courtes périodes et correspond, au vu de la pente ( $m \approx -1/2$ ), à un bruit blanc gaussien.

## 7.1. MODÉLISATION DES PROCESSUS STOCHASTIQUES

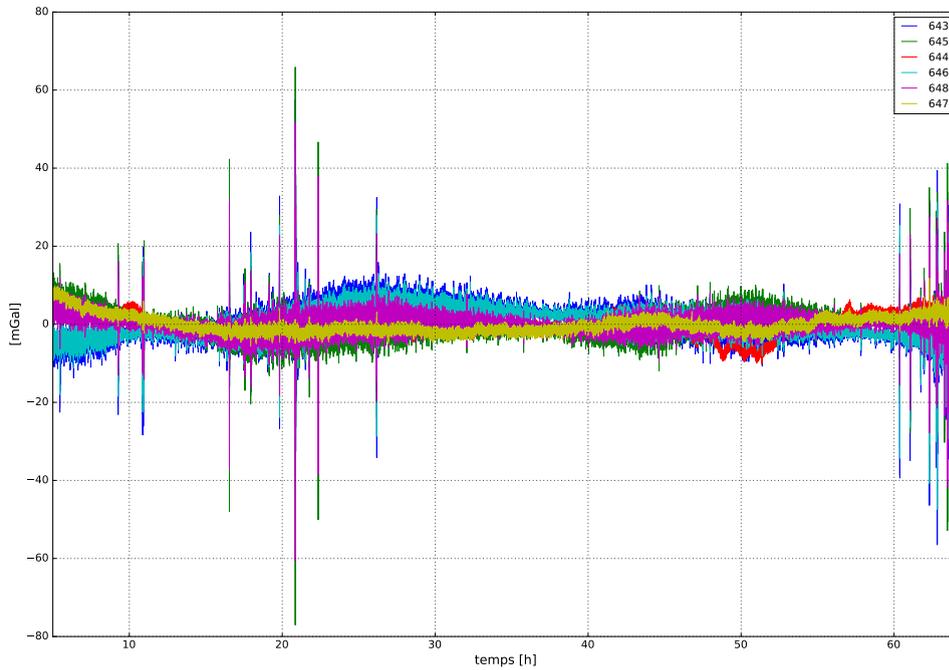


FIGURE 7.4 – Accélérations spécifiques en régime permanent après suppression d'une tendance linéaire représentant la dérive en température.

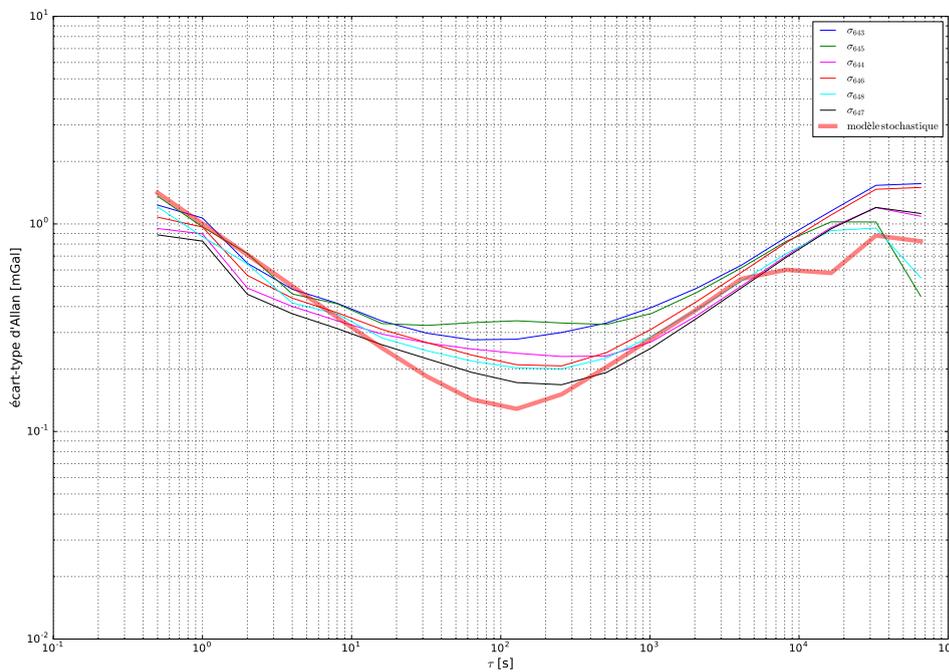


FIGURE 7.5 – Écart-types d'Allan déduits des données statiques mesurées par les six accéléromètres. Sur cette figure, apparaît également l'écart-type d'Allan d'un processus stochastique généré numériquement.

## 7.1. MODÉLISATION DES PROCESSUS STOCHASTIQUES

---

En notant  $S_{\Omega}(f) = N^2$  la densité spectrale de puissance d'un tel processus, la relation (7.3) implique :

$$\sigma^2(\tau) = \frac{N^2}{\tau}$$

La valeur caractérisant le bruit blanc gaussien affectant les mesures accélérométriques peut donc se lire sur le graphique de l'écart-type d'Allan pour  $\tau = 1$  s.

Le tableau 7.2 résume les six valeurs de  $N$  obtenues pour chaque série accélérométrique.

accéléromètre n°	$N$ [ $mGal/\sqrt{Hz}$ ]
643	1.05
645	0.95
644	0.88
646	0.95
648	0.85
647	0.80

TABLE 7.2 – Caractérisation du bruit blanc gaussien.

Les valeurs ainsi obtenues sont cohérentes avec les informations du constructeur qui indiquent également une précision de 1 mGal [Honeywell 2006]. En reprenant le facteur d'échelle moyen adopté précédemment, il est possible d'affirmer que les valeurs en tension mesurées par le capteur sont entachées d'une incertitude proche de  $5.5 \mu V$ .

Le second processus mis en avant dans la représentation de l'écart-type d'Allan (Fig. 7.5), apparaît pour les périodes plus grandes et s'identifie à une marche aléatoire ( $m \approx +\frac{1}{2}$ ). En notant  $S_{\Omega}(f) = \left(\frac{K}{2\pi}\right)^2 \frac{1}{f^2}$ , la densité spectrale d'un tel processus, la relation (7.3) conduit cette fois-ci à :

$$\sigma^2(\tau) = \frac{K^2\tau}{3} \tag{7.4}$$

La valeur caractérisant la marche aléatoire se lit par conséquent pour  $\tau = 3$  s sur le graphique de l'écart-type d'Allan. Le prolongement des courbes apparaissant sur la figure 7.1 permet donc d'estimer la valeur de  $K$  telle que :

$$0.01 \text{ mGal} \cdot \sqrt{\text{Hz}} < K < 0.02 \text{ mGal} \cdot \sqrt{\text{Hz}}$$

## 7.1. MODÉLISATION DES PROCESSUS STOCHASTIQUES

---

Ces dernières valeurs tendent à démontrer la stabilité des accéléromètres sur des grandes périodes d'acquisition et dans un environnement dont la température fluctue peu. Par conséquent, étant donnée la faible amplitude du bruit identifié comme une marche aléatoire sur les accélérations spécifiques, seul le processus de bruit blanc gaussien identifié précédemment sera considéré dans l'évaluation de la variance de l'erreur par la méthode de Monte-Carlo.

## 7.2 Génération des données de référence

La génération des valeurs de référence nécessaires à l'estimation numérique de l'erreur se découpe en trois étapes qui correspondent respectivement à :

- la génération d'un champ gravitationnel de référence ;
- la récupération d'un profil sous-marin navigué par l'AUV ;
- le calcul des accélérations spécifiques de référence.

Le champ de gravité de référence a été construit en additionnant un champ de gravité global, produit par un ellipsoïde de densité constante et un champ de gravité local, produit par un modèle géologique.

Le champ de gravité global correspond à l'effet gravitationnel généré par un ellipsoïde homogène de densité égale à  $5520 \text{ kg m}^{-3}$ . Son calcul est réalisé à partir des formules analytiques issues de [Kellogg 2012].

Le modèle géologique responsable du champ de gravité local se compose, quant à lui :

- d'un modèle bathymétrique (Fig. 7.6) de densité  $\rho_{bathy} = 2700 \text{ kg m}^{-3}$  et étendu sur une épaisseur de 5000 m ;
- d'un modèle de blocs géologiques (Fig. 7.7) de densité  $\rho_{blocs} = 3850 \text{ kg.m}^{-3}$  inséré dans le modèle bathymétrique sur une épaisseur de 200 m.

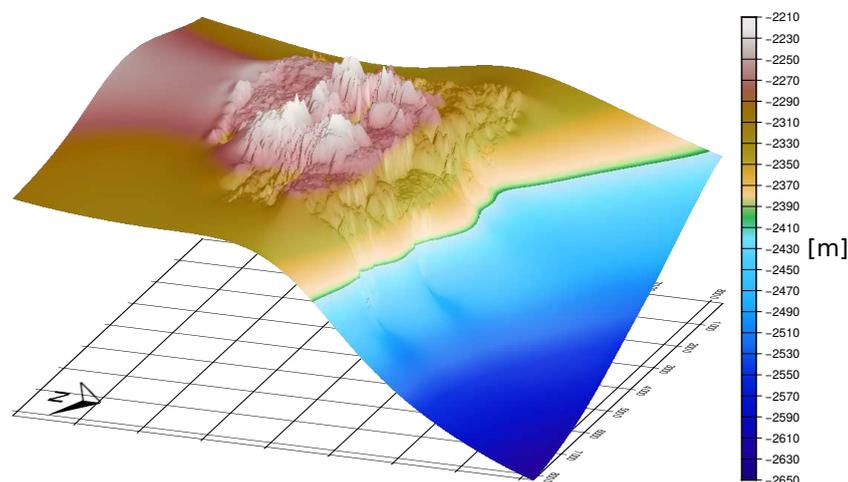


FIGURE 7.6 – Modèle bathymétrique utilisé pour générer le champ de gravité local.

Ce modèle géologique correspond typiquement à l'environnement naturel de prospection

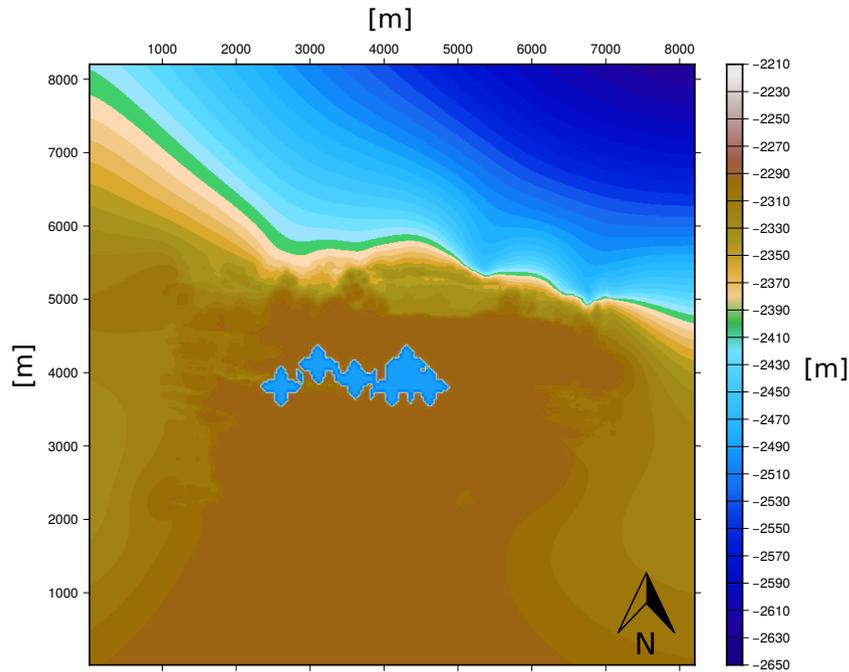


FIGURE 7.7 – Modèle de blocs géologiques utilisé pour générer le champ de gravité local.

d'un AUV car la topographie accidentée empêche toute mesure statique sur le sol sous-marin. Il permet également de rendre compte de l'amplitude des variations attendues sur les composantes du champ de gravité.

### Méthodes de calcul du champ local

Le calcul du champ de gravité produit par une structure géologique de densité constante  $\rho_S$  en un point extérieur  $P$ , passe par la résolution de l'intégrale définie par :

$$g(P) = G\rho_S \int \int \int_{\Omega} \nabla \left( \frac{1}{PS} \right) d\Omega_S \quad , \quad (7.5)$$

avec :

$G$  la constante gravitationnelle ( $G = 6.673 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2} \text{ kg}^{-1}$ );

$\nabla$  l'opérateur différentiel *nabla*;

$PS$  la distance entre le point de calcul  $P$  et le point courant  $S$  du solide considéré;

$d\Omega_S$  l'élément de volume infinitésimal du corps considéré.

La résolution de l'intégrale (7.5) dépend du choix de la géométrie choisie pour modéliser la structure géologique. Lorsque cette dernière est modélisée à l'aide du prisme droit (Fig. 7.8), l'intégrale (7.5) mène à une solution analytique exacte [Nagy et al. 2000]. Cette méthode est généralement adoptée lorsque la distance entre le point de calcul  $P$  et le corps géologique est faible. Cependant, elle ne permet pas de prendre en compte la courbure de la Terre pour des études à des échelles régionales ou globales. Pour des études globales où il n'est plus possible de négliger l'effet de la courbure et de l'aplatissement de la Terre, la modélisation du corps géologique fait appel aux prismes sphériques (Fig. 7.9a) et aux prismes ellipsoïdaux (Fig. 7.9b). Dans les deux cas, l'intégrale (7.5) ne peut plus être résolue de manière exacte. Une intégration numérique, utilisant la quadrature de Gauss-Legendre, est alors mise en œuvre pour évaluer les différentes composantes du champ [Asgharzadeh et al. 2007]. Les prismes sphériques et ellipsoïdaux sont davantage employés pour des calculs globaux. Ils sont généralement mis en œuvre avec des modèles géophysiques de répartition de la densité tels que les modèles PREM (*Preliminary Reference Earth Model*) [Dziewonski and Anderson 1981], LITHO et CRUST [Laske et al. 2013; Pasyanos et al. 2014]. Les modèles numériques de champ de gravité terrestre calculés, à partir de ces éléments de matières, sont à la base des problèmes d'inversion rencontrés en géophysique. À ce titre, le lecteur intéressé trouvera de plus amples informations sur la modélisation numérique du champ de gravité dans [Roussel 2013] et sur le calcul numérique du tenseur du gradient de gravité à l'altitude du satellite GOCE à partir des prismes sphériques et ellipsoïdaux (Fig. 7.9) dans [Roussel et al. 2015b]. Cet article a été inséré dans l'annexe C de ce manuscrit.

## 7.2. GÉNÉRATION DES DONNÉES DE RÉFÉRENCE

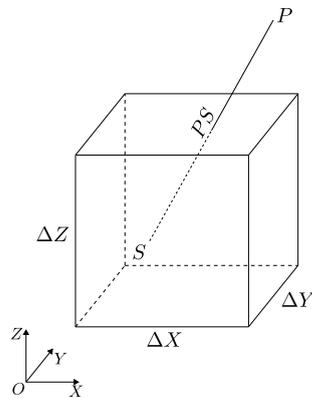


FIGURE 7.8 – Définition du prisme droit pour la modélisation d'un élément de matière.

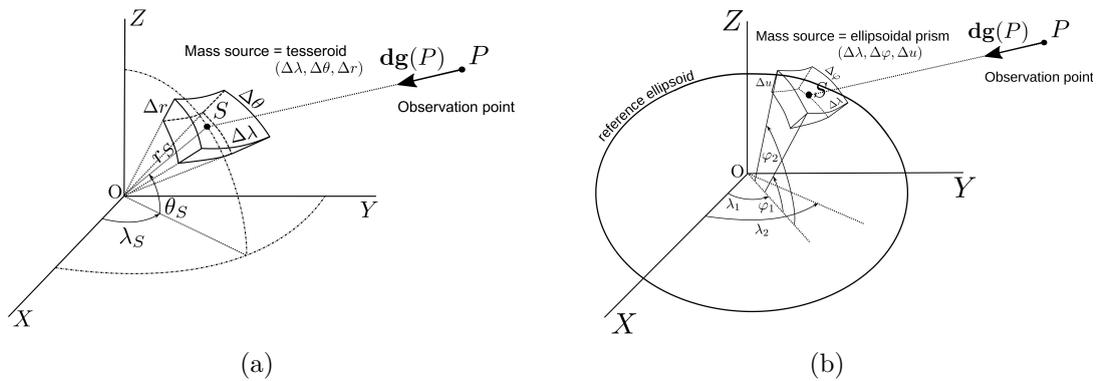


FIGURE 7.9 – Définitions du prisme sphérique (a) et du prisme ellipsoïdal (b) pour la modélisation d'un élément de matière.

## 7.2. GÉNÉRATION DES DONNÉES DE RÉFÉRENCE

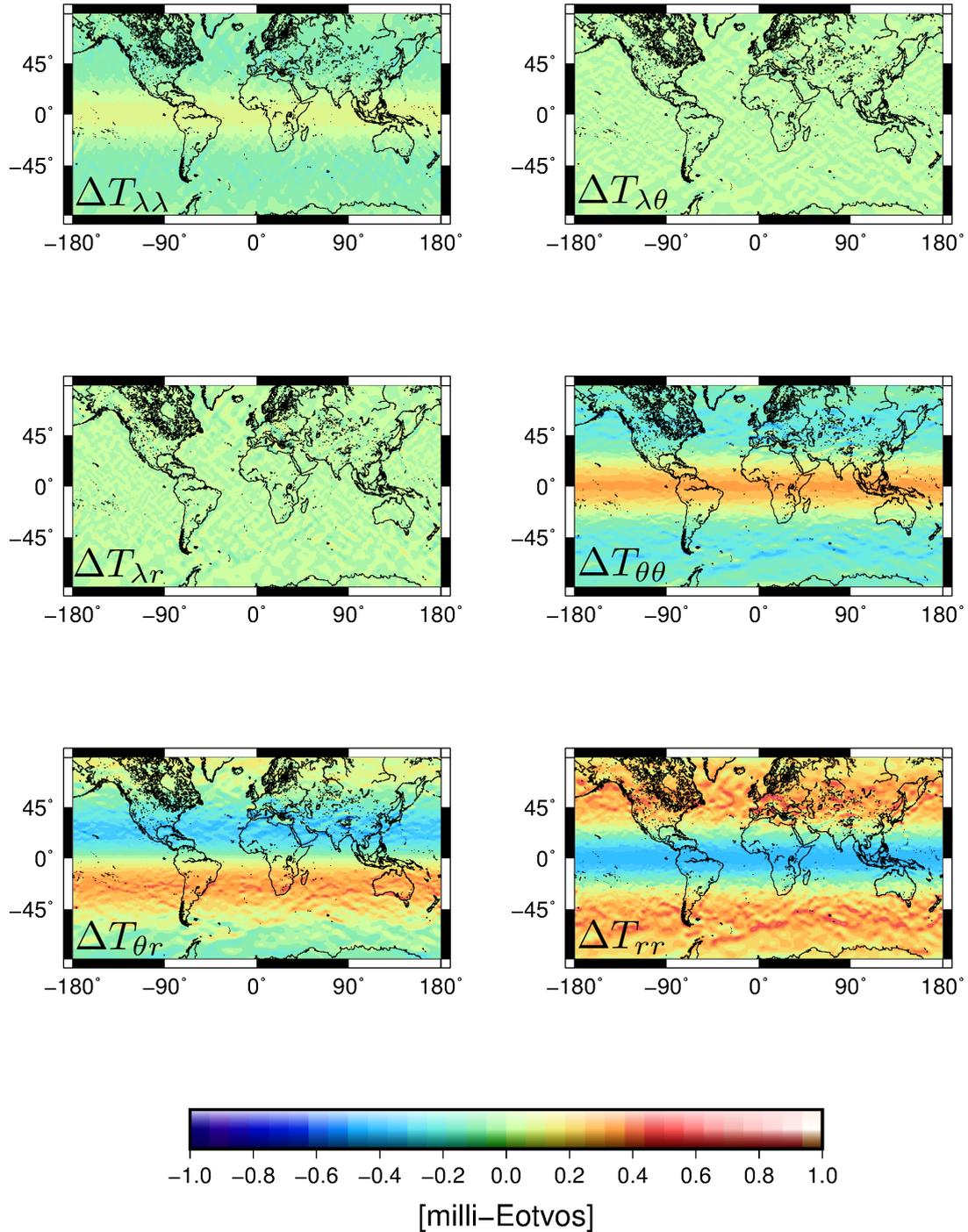


FIGURE 7.10 – Différences numériques de restitution des composantes du tenseur du gradient de gravité à l'altitude du satellite GOCE, à partir d'un modèle géologique de Terre, entre le prisme sphérique et le prisme ellipsoïdal. source : [Roussel et al. 2015b]

## 7.2. GÉNÉRATION DES DONNÉES DE RÉFÉRENCE

La méthode employée pour calculer le champ de gravité local généré par le modèle géologique décrit précédemment, utilise la discrétisation en prismes droits du modèle de densité. Les formules analytiques utilisées sont celles figurant dans [Nagy et al. 2000]. Le calcul a été mené grâce au logiciel libre *Tesseroids* développé par Leonardo Uieda [Uieda et al. 2016]. La figure 7.11 présente les variations des trois composantes de l'anomalie du champ de référence sur une grille centrée au dessus des blocs géologiques et dont la profondeur a été fixée à 2200 mètres. Le trait continu noir apparaissant sur cette figure correspond au profil de navigation de référence. Ce profil est issu d'une mission d'expérimentation de l'AUV *Aster<sup>χ</sup>*, menée en 2012 par l'IFREMER en Mer Méditerranée. Les données de navigation qu'il contient permettent notamment de rendre compte du comportement dynamique du véhicule porteur.

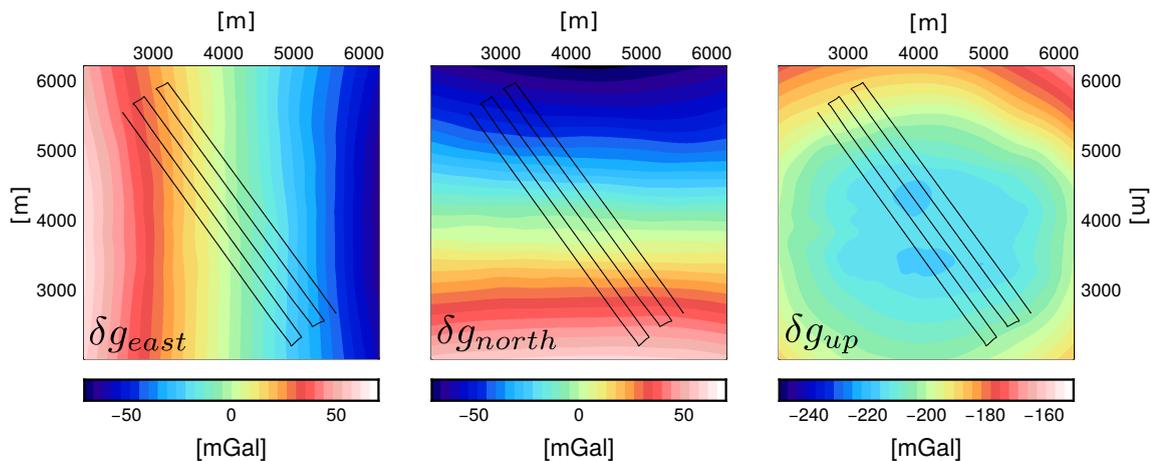


FIGURE 7.11 – Composantes du champ de gravité local généré par le modèle géologique.

Sur un tel profil de navigation, dont la profondeur a été amenée à 2200 m, les composantes du champ de gravité local prennent des valeurs comprises dans les intervalles ci-après :

- $45 \text{ mGal} < \delta g_{east} < 40 \text{ mGal}$
- $65 \text{ mGal} < \delta g_{north} < 55 \text{ mGal}$
- $220 \text{ mGal} < \delta g_{up} < -185 \text{ mGal}$

Ces valeurs correspondent au cas idéal dans lequel l'instrument est amené au plus prêt des sources géologiques. En effet, dans cette simulation, la plus petite distance entre l'ins-

## 7.2. GÉNÉRATION DES DONNÉES DE RÉFÉRENCE

---

trument et le fond sous-marin est d'environ 20 m. À titre d'exemple, les valeurs des composantes du champ de gravité local calculées en surface ( $h = 0$ ) depuis le même modèle géologique évoluent de la manière suivante :

$$\begin{aligned} -23 \text{ mGal} &< \delta g_{east} < 22 \text{ mGal} \\ -30 \text{ mGal} &< \delta g_{north} < 27 \text{ mGal} \\ -118 \text{ mGal} &< \delta g_{up} < -105 \text{ mGal} \end{aligned}$$

Les amplitudes maximales du signal gravimétrique diminuent logiquement avec l'éloignement du capteur par rapport aux sources géologiques et ce, d'un facteur proche de deux. À titre de comparaison, les valeurs des composantes du champ de gravité global, sur le profil de navigation, se répartissent comme suit :

$$\begin{aligned} g_{east} &= 0 \text{ mGal} \\ 1318.77 \text{ mGal} &< g_{north} < 1318.87 \text{ mGal} \\ -983770.79 \text{ mGal} &< g_{up} < -983770.40 \text{ mGal} \end{aligned}$$

Tandis que le champ de gravité local entraîne des variations allant jusqu'à plusieurs dizaines de milligals d'amplitude, les variations sur le profil de navigation dues au champ global restent inférieures à 1 mGal. La composante *est* est nulle du fait de l'homogénéité de l'ellipsoïde de référence et l'orientation des axes du repères de navigation (*n-frame*). Sur l'emprise de la navigation de l'AUV, soit environ 9 km<sup>2</sup> dans cette simulation, les variations du champ global peuvent donc être considérées comme négligeables devant celles du champ induit par les sources géologiques proches.

Finalement, le champ de gravité et la trajectoire de référence étant donnés, le calcul des accélérations spécifiques de référence s'obtient par la relation suivante :

$$a^b = \frac{1}{2} \left( a_{M_\alpha}^b + a_{M_\beta}^b \right) = C_n^b \left( C_e^n \left[ \ddot{X}_P^e + 2\Omega_{ie}^e \dot{X}_P^e + \Omega_{ie}^e \Omega_{ie}^e X_P^e \right] - g_P^n \right) \quad (7.6)$$

La difficulté majeure du calcul des accélérations de référence à partir de la relation (7.6), réside dans le calcul préliminaire des dérivées premières et secondes des données de position ( $\lambda_P$ ,  $\varphi_P$  et  $h_P$ ) qui interviennent dans les termes  $\dot{X}_P^e$  et  $\ddot{X}_P^e$ . L'algorithme retenu pour l'estimation numérique de ces différentes grandeurs utilise l'interpolation par spline cubique explicitée dans [Press 2007].

### 7.3. ÉVALUATION NUMÉRIQUE DE L'ERREUR

---

Le premier résultat intéressant à tirer du calcul des valeurs de référence est l'analyse de l'accélération induite par le mouvement du véhicule porteur. Comme indiqué par l'équation d'observation du système GraviMob (3.19, p 69), cette accélération se compose de l'accélération relative de l'AUV par rapport au repère terrestre,  $\ddot{X}_P^e$ , et de l'accélération de Coriolis égale à  $2\Omega_{ie}^e \dot{X}_P^e$ . Le tableau 7.3 permet d'observer les valeurs maximales, moyennes et les écarts-types de la norme de ces deux vecteurs.

		$\ \ddot{X}_P^e\ $	$\ 2\Omega_{ie}^e \dot{X}_P^e\ $
Max	[mGal]	40000	25
Moyenne		4000	20
Écart-type		3000	1

TABLE 7.3 – Accélérations induites par le mouvement de l'AUV. Les statistiques ont été calculées à partir des 15 000 points que compte le profil de navigation.

On constate alors que l'accélération de Coriolis est quasiment négligeable devant l'accélération relative du véhicule par rapport au repère terrestre qui elle-même reste faible comparée à l'accélération de pesanteur recherchée ( $\|g\| \approx 980000$  mGal). Ceci tend à montrer que la navigation sous-marine permet d'éviter les fortes variations de vitesses comme celles rencontrées en gravimétrie mobile aéroportée ou terrestre. D'un point de vue technique, la mesure dynamique du champ de gravité en milieu sous-marin permet donc d'adopter une plage dynamique de mesure accélérométrique plus faible au profit d'une meilleure résolution de numérisation.

### 7.3 Évaluation numérique de l'erreur

La section précédente a permis d'identifier les caractéristiques du processus aléatoire  $\epsilon_x$  et de générer les données de référence que sont le champ de gravité, la trajectoire du véhicule porteur et les accélérations spécifiques. L'évaluation de l'erreur  $\epsilon_g$  (7.2) peut donc s'effectuer à partir de la génération d'un grand nombre de réalisations du processus stochastique  $\epsilon_x$ . Afin de respecter ce principe de base de la méthode de Monte-Carlo, le nombre de tirages de la variable aléatoire vectorielle  $\epsilon_x$  a été fixé à 100 000.

### 7.3. ÉVALUATION NUMÉRIQUE DE L'ERREUR

Afin de distinguer l'impact des différents postes d'erreur sur la restitution des composantes du champ de gravité, quatre scénarios sont envisagés :

- scénario n°1 : seules les accélérations spécifiques sont bruitées ( $\sigma_a = 1$  mGal) ;
- scénario n°2 : les accélérations spécifiques et les données de position sont bruitées ( $\sigma_{\lambda_P} = 3.07 \times 10^{-5}$  deg,  $\sigma_{\varphi_P} = 2.25 \times 10^{-5}$  deg et  $\sigma_{h_P} = 0.30$  m) ;
- scénario n°3 : les accélérations spécifiques et les données d'attitude sont bruitées ( $\sigma_\delta = 0.05$  deg et  $\sigma_\chi = \sigma_\eta = 0.005$  deg) ;
- scénario n°4 : toutes les observations sont bruitées.

Le tableau 7.4 présente les résultats obtenus pour l'estimation de l'espérance de l'erreur  $\mathbb{E}$  ainsi que son écart-type  $\sigma$  à la période d'échantillonnage initiale  $T_e = 1$  s.

		$\mathbb{E}$	$\sigma$	$\mathbb{E}$	$\sigma$	$\mathbb{E}$	$\sigma$
		$g_{east}$		$g_{north}$		$g_{up}$	
scénario n°1	[mGal]	0	1	0	1	0	1
scénario n°2		0	$1.5 \times 10^6$	0	$1.5 \times 10^6$	0	$2 \times 10^5$
scénario n°3		0	85	0	85	0	1
scénario n°4		0	$1.5 \times 10^6$	0	$1.5 \times 10^6$	0	$2 \times 10^5$

TABLE 7.4 – Espérance et écart-type de l'erreur selon les trois composantes du champ, à la période d'échantillonnage initiale.

En comparant les scénarios n°2 et 3, il apparaît clairement que les incertitudes affectant le positionnement du véhicule porteur ont un impact largement supérieur à celui produit par les incertitudes sur les angles d'attitude. Les composantes planaires ( $g_{east}$  et  $g_{north}$ ) sont également plus affectées comparées à la composante verticale ( $g_{up}$ ) du vecteur accélération de gravité, ce qui peut s'expliquer par une plus faible incertitude sur la hauteur ellipsoïdale  $h_P$  que sur la longitude  $\lambda_P$  et la latitude  $\varphi_P$ .<sup>4</sup>

4. Les incertitudes angulaires en longitude et en latitude se traduisent, à la surface de la Terre, par une incertitude planimétrique de 2.5 m.

### 7.3. ÉVALUATION NUMÉRIQUE DE L'ERREUR

Afin de diminuer l'amplitude de l'erreur, il est possible de filtrer cette dernière par application d'une fenêtre à moyenne glissante dont la largeur équivalente en terme de distance est notée  $L$ . Les figures 7.12, 7.13 et 7.14 montrent alors l'évolution de l'écart-type de l'erreur sur les composantes du champ de gravité en fonction de la largeur de filtrage  $L$  et ce, respectivement par rapport aux scénarios n°2, 3 et 4 envisagés précédemment.

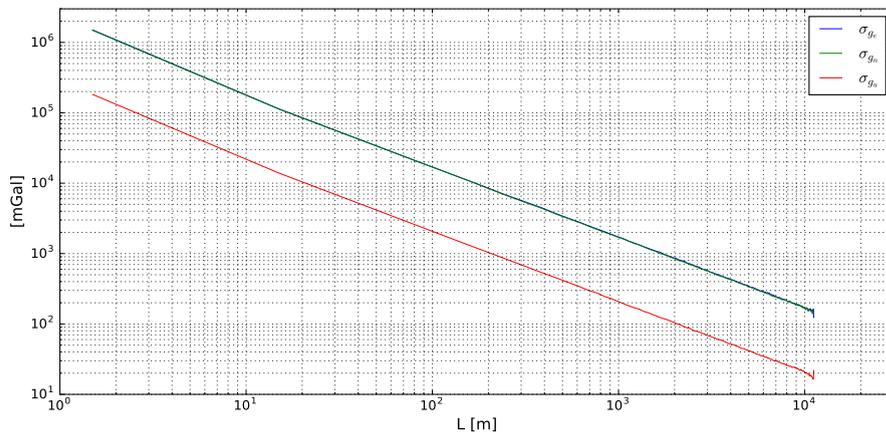


FIGURE 7.12 – Évolution de l'écart-type de l'erreur relative au scénario n°2.

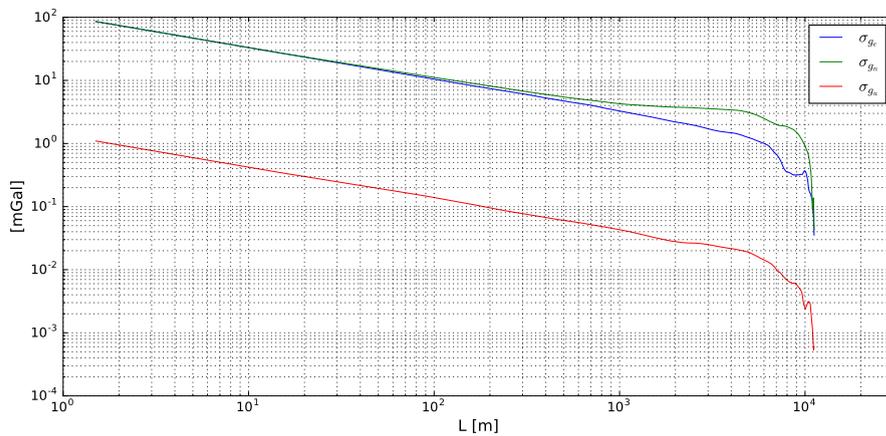


FIGURE 7.13 – Évolution de l'écart-type de l'erreur relative au scénario n°3.

### 7.3. ÉVALUATION NUMÉRIQUE DE L'ERREUR

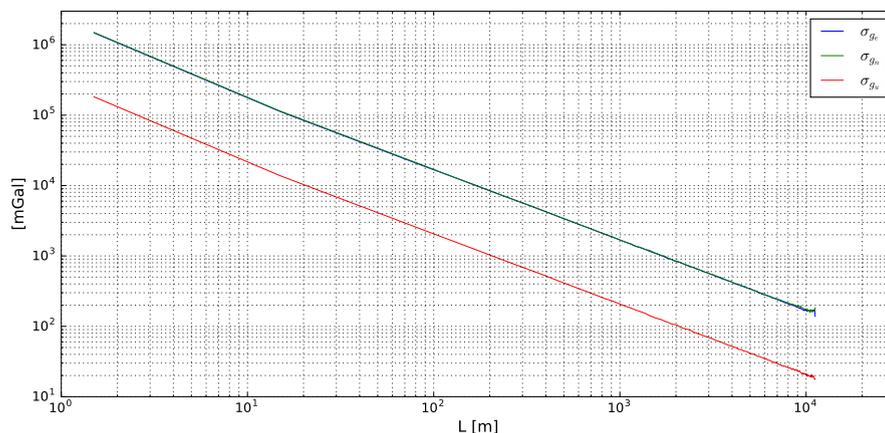


FIGURE 7.14 – Évolution de l'écart-type de l'erreur relative au scénario n°4.

Il apparaît ainsi que, malgré un filtrage sur une largeur  $L \approx 10^4$  m, l'écart-type de l'erreur engendrée par les incertitudes de positionnement de l'AUV (Fig. 7.12) atteint seulement quelques centaines de milligals pour les composantes planaires  $g_{east}$  et  $g_{north}$  et quelques dizaines de milligals pour la composante verticale  $g_{up}$ . Elle peine également à atteindre le milligal pour les composantes planaires  $g_{east}$  et  $g_{north}$  affectées par les incertitudes d'attitude de l'AUV (Fig. 7.13). L'erreur induite par l'incertitude de positionnement étant plus importante que celle produite par les incertitudes d'attitude, le graphe de la figure 7.14 relatif au scénario n°4 reprend logiquement la même allure que celui apparaissant sur la figure relative au scénario n°2 (Fig. 7.12).

Ces résultats tendent à montrer que la navigation sous-marine n'est pas encore suffisamment précise pour espérer atteindre, par simple filtrage passif, une incertitude satisfaisante de l'ordre du milligal sur les composantes du champ de pesanteur. Par conséquent, il est nécessaire de mettre en œuvre des techniques d'estimation plus efficaces tenant compte notamment du caractère gaussien des observations, et de l'évolution naturelle des composantes du champ de pesanteur entre deux lieux d'acquisition. Pour rappel, les travaux de Bertrand de Saint-Jean avaient déjà montré les performances du filtre de Kalman dédié au traitement des observations du LiMo-g. Dans l'optique d'améliorer l'estimation des composantes du champ, le chapitre suivant détaille le nouveau filtre de Kalman mis en place pour le traitement des observations du système GraviMob.

### 7.3. ÉVALUATION NUMÉRIQUE DE L'ERREUR

Bien que les deux seules triades accélérométriques du capteur du système GraviMob ne permettent pas de restituer les six composantes indépendantes du tenseur du gradient de gravité dans le repère de navigation (*n-frame*), il est également possible d'observer l'évolution de l'erreur sur les trois composantes observables par le système, dans le repère du véhicule porteur (*b-frame*) [Roussel et al. 2015a] (Annexe D). En supposant que les accéléromètres du capteur ont une précision suffisante pour atteindre une incertitude de l'ordre de l'eötvös<sup>5</sup> sur la formation du gradient d'accélération donné par le terme :

$$\frac{a_{M_\beta}^b - a_{M_\alpha}^b}{\|\vec{M_\beta M_\alpha}\|},$$

la figure 7.15 montre l'évolution de l'écart-type de l'erreur induite par les incertitudes affectant la mesure des angles d'attitude. En effet, au vu de l'équation d'observation (3.22, p. 70), le gradient de gravité dépend essentiellement des angles d'attitude du système.

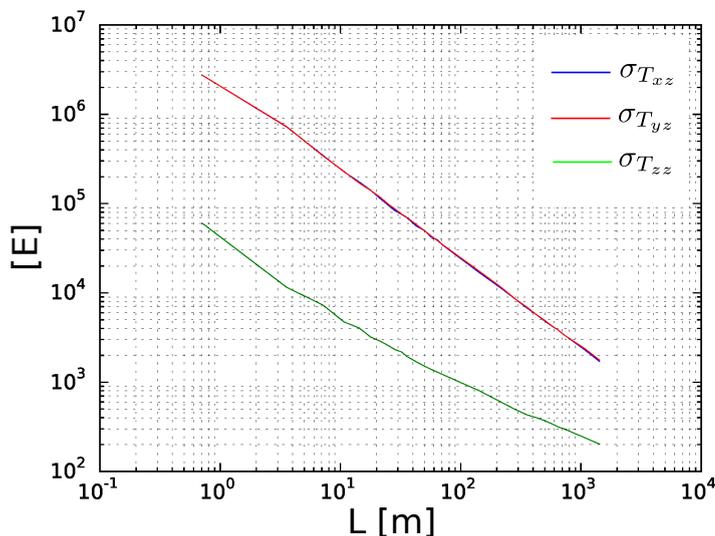


FIGURE 7.15 – Évolution de l'écart-type de l'erreur relative au gradient de gravité. (source : [Roussel et al. 2015a])

Il apparaît que l'incertitude sur les angles d'attitude du système GraviMob ne permet d'atteindre qu'une précision de l'ordre de la centaine d'eötvös sur la composante  $T_{zz}$  du gradient de gravité, et de l'ordre du millier d'eötvös sur les composantes  $T_{xz}$  et  $T_{yz}$ , malgré une longueur d'intégration égale à  $10^3$  m.

5.  $1 \text{ E} = 10^{-9} \text{ s}^{-2} = 10^{-4} \text{ mGal/m}$ .

### 7.3. ÉVALUATION NUMÉRIQUE DE L'ERREUR

---

Dans sa configuration actuelle, l'instrumentation ne permet pas de descendre, en précision, en-dessous des 100 E sur le tenseur par simple filtrage passif, ce qui renforce la nécessité de travailler sur le filtrage optimal.

**Remarque** À titre de comparaison, les simulations précédentes peuvent être également appliquées avec les incertitudes de positionnement et d'attitude rencontrées avec le LiMo-g. Pour rappel, ces incertitudes ont pour valeurs approximatives <sup>6</sup> :

$$\begin{aligned}\sigma_{\lambda_P} &= 6.15 \times 10^{-7} \text{ deg} & \sigma_{\varphi_P} &= 4.50 \times 10^{-7} \text{ deg} & \sigma_h &= 0.10 \text{ m} \\ \sigma_\delta &= \sigma_\chi = \sigma_\eta = 0.5 \text{ deg}\end{aligned}$$

La figure 7.16 montre l'évolution de l'écart-type de l'erreur lorsque toutes les incertitudes sont prises en compte. Comparé avec les résultats relatifs au scénario n°4 envisagé précédemment, l'écart-type de l'erreur est logiquement plus faible en raison des incertitudes plus faibles sur la position mais n'atteint pas, cependant, le milligal après filtrage.

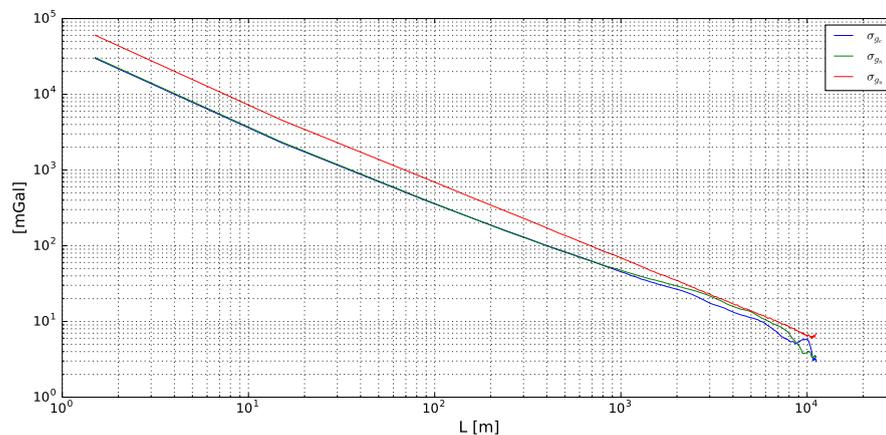


FIGURE 7.16 – Évolution de l'écart-type de l'erreur relative au LiMo-g.

---

6. Les incertitudes angulaires en longitude et en latitude correspondent à une précision planimétrique de 0.05 m.

---

## Chapitre 8

# Filtrage de Kalman

Ce chapitre décrit le filtre de Kalman pour le traitement récursif des observations du système GraviMob. Il reprend logiquement le filtre de Kalman élaboré dans le travail de thèse de Bertrand de Saint-Jean et l'implémente sous une forme adaptée à la forte non linéarité de l'équation d'observation. Ce nouveau filtre est expérimenté en suivant plusieurs scénarios, à partir des données de référence générées dans le chapitre 7.

### 8.1 De l'estimateur optimal au filtre de Kalman

Le chapitre 7 a montré que les grandeurs mises en jeu dans l'équation d'observation du système GraviMob pouvaient être modélisées par des variables aléatoires gaussiennes. En ce sens, l'estimateur qui évaluera au mieux le vecteur des paramètres  $X$ , contenant notamment les composantes du champ de pesanteur, est l'estimateur des Moindres Carrés. En supposant temporairement que l'équation d'observation s'écrit sous la forme linéaire suivante :

$$Y = HX + B \quad ,$$

avec :

$Y$  le vecteur des observations ;

$X$  le vecteur des paramètres à estimer ;

$H$  la matrice du modèle d'observation ;

$B$  le vecteur du bruit de mesure ,

cet estimateur s'écrit comme suit :

$$\hat{X} = \left( H^T R^{-1} H \right)^{-1} H^T R^{-1} Y$$

$$\Sigma_{\hat{X}\hat{X}} = \left( H^T R^{-1} H \right)^{-1}$$

avec :

$R$  la matrice de covariances du bruit de mesure ;

$\hat{X}$  l'estimation du vecteur des paramètres ;

$\Sigma_{\hat{X}\hat{X}}$  la matrice de covariances de l'estimation du vecteur des paramètres.

Dans le cas de la gravimétrie mobile, l'acquisition de nombreuses observations sur un profil de levé impliquerait l'inversion de matrices de plus en plus grandes si cet estimateur était utilisé sous cette forme. Par conséquent, on privilégie sa forme récursive, dont l'écriture est la suivante :

$$K_{k+1} = \Sigma_k h_{k+1}^T \left( R_{k+1} + h_{k+1} \Sigma_k h_{k+1}^T \right)^{-1}$$

$$\Sigma_{k+1} = (I - K_{k+1} h_{k+1}) \Sigma_k \quad ,$$

$$\hat{X}_{k+1} = \hat{X}_k + K_{k+1} \left( y_{k+1} - h_{k+1} \hat{X}_k \right)$$

avec :

$\hat{X}_{k+1}$  l'estimation du vecteur des paramètres à l'instant  $k + 1$  ;

$\Sigma_{k+1}$  la matrice de covariances de l'estimation du vecteur des paramètres à l'instant  $k + 1$  ;

$h_{k+1}$  la matrice du modèle d'observation pour la mesure à l'instant  $k + 1$  ;

$R_{k+1}$  la matrice de covariances du bruit pour la mesure à l'instant  $k + 1$  ;

$I$  la matrice identité ;

$y_{k+1}$  le vecteur des observations à l'instant  $k + 1$  ;

$K_{k+1}$  la matrice du gain de Kalman.

Ces équations permettent d'estimer le vecteur des paramètres  $\hat{X}_{k+1}$  à l'instant  $(k + 1)T_e$  ( $T_e$ , période d'échantillonnage) à partir de celui connu à l'instant  $kT_e$  et noté  $\hat{X}_k$ . Elles ont déjà une structure très proche d'un filtre de Kalman classique. Cependant, elles ne tiennent pas compte du fait que le vecteur des paramètres évolue entre deux instants successifs,

autrement dit, entre deux lieux de mesure. Cette évolution, déterministe ou non, se traduit mathématiquement par une relation liant  $X_{k+1}$  à  $X_k$  qui s'exprime, dans le cas linéaire, à l'aide d'une matrice d'évolution, notée  $A_k$ , associée à une matrice de bruit, notée  $Q_k$ , qui accorde une certaine incertitude à cette évolution. Étant donnée l'estimation du vecteur des paramètres  $\hat{X}_k$  et de sa matrice de covariances  $\Sigma_k$ , l'estimation du vecteur  $\hat{X}_{k+1}$  et de la matrice  $\Sigma_{k+1}$  s'obtiennent alors en deux étapes [Brown and Hwang 1997] :

- une phase de **prédiction** de l'estimation courante  $X_k^+$  à partir de l'estimation précédent  $\hat{X}_k$  :

$$\begin{aligned}\hat{X}_k^+ &= A\hat{X}_k \\ \Sigma_k^+ &= A\Sigma_k A^T + Q_k ;\end{aligned}\tag{8.1}$$

- une phase de **mise à jour** faisant intervenir la dernière mesure acquise :

$$\begin{aligned}K_{k+1} &= \Sigma_k^+ h_{k+1}^T \left( R_{k+1} + h_{k+1} \Sigma_k^+ h_{k+1}^T \right)^{-1} \\ \Sigma_{k+1} &= (I - K_{k+1} h_{k+1}) \Sigma_k^+ \\ \hat{X}_{k+1} &= \hat{X}_k^+ + K_{k+1} \left( y_{k+1} - h_{k+1} \hat{X}_k^+ \right)\end{aligned}\tag{8.2}$$

Les relations (8.1) et (8.2) correspondent aux équations du filtre de Kalman linéaire. Dans le cas du système GraviMob, la non linéarité de l'équation d'observation ne permet pas d'implémenter ces équations sous une telle forme. La solution retenue pour le traitement des données du LiMo-g utilisait la forme *étendue* du filtre de Kalman. Au vu des incertitudes sur les observations, cette version linéarisait localement la fonction d'observation<sup>1</sup> et appliquait les équations du filtre de Kalman classique. L'algorithme du filtre de Kalman *étendu* s'écrivait par conséquent comme suit [Brown and Hwang 1997] :

- **prédiction** :

$$\begin{aligned}\hat{X}_k^+ &= A\hat{X}_k \\ \Sigma_k^+ &= A\Sigma_k A^T + Q_k ;\end{aligned}\tag{8.3}$$

---

1. De manière générale, cette linéarisation s'applique aussi au modèle d'évolution. Cependant, dans le cadre de la gravimétrie mobile, seule l'équation d'observation est non linéaire.

— **mise à jour** :

$$\begin{aligned} K_{k+1} &= \Sigma_k^+ H_{k+1}^T \left( R_{k+1} + H_{k+1} \Sigma_k^+ H_{k+1}^T \right)^{-1} \\ \Sigma_{k+1} &= (I - K_{k+1} H_{k+1}) \Sigma_k^+ \\ \hat{X}_{k+1} &= \hat{X}_k^+ + K_{k+1} \left( y_{k+1} - h(\hat{X}_k^+, k+1) \right) \end{aligned} \quad (8.4)$$

avec :

$h$  la fonction d'observation non linéaire ;

$H_{k+1}$  la matrice Jacobienne<sup>2</sup> relative à la fonction d'observation  $h$ .

L'expérimentation du filtre de Kalman *étendu* sur des données synthétiques, a conduit à la divergence de l'estimation. Cette divergence a été expliquée par la forte incertitude qui entachait la mesure des angles d'attitude par le système quatre antennes GPS du LiMog. Autrement dit, l'hypothèse de linéarité de l'équation d'observation, au premier ordre, émise dans la mise en œuvre du filtre de Kalman *étendu*, peut être logiquement remise en question.

Dans l'objectif de conserver la forme générale des équations des modèles d'évolution et d'observation, déjà établies dans le travail de Bertrand de Saint-Jean, il a été décidé d'étudier une autre version du filtre de Kalman : le filtre de Kalman *unscented*<sup>3</sup> (UKF).

Le développement de cette version du filtre de Kalman s'appuie sur les recherches mathématiques portant sur l'estimation des paramètres statistiques d'une variable aléatoire ayant subi une transformation non linéaire. Dans le contexte du filtre de Kalman, ces travaux ont été initialement menés par [Julier and Uhlmann 1997]. Le point de départ de leur raisonnement est le suivant : étant donnée une variable aléatoire  $x$  d'espérance mathématique  $\bar{x}$  et de variance  $\Sigma_{xx}$ , la méthode d'estimation des deux premiers moments statistiques de la variable aléatoire  $y = h(x)$  est *cohérente* si l'inégalité :

$$\Sigma_{yy} - \mathbb{E} \left[ (y - \bar{y})(y - \bar{y})^T \right] \geq 0$$

est respectée, c'est-à-dire que l'estimation de la covariance de la variable aléatoire  $y$ , notée  $\Sigma_{yy}$  est supérieure à la covariance théorique  $\mathbb{E} \left[ (y - \bar{y})(y - \bar{y})^T \right]$ . Dans le cas contraire,

---

2. Cette matrice contient les dérivées partielles de la fonction  $h$  par rapport aux paramètres à estimer.  
3. Aucun équivalent français convaincant n'a été trouvé pour sa traduction.

la matrice de covariances  $\Sigma_{yy}$  est sous-estimée. Au cours des itérations successives du filtre de Kalman, elle place par conséquent un poids trop important sur le vecteur des paramètres au détriment des observations et peut mener le filtre à diverger.

L'estimation erronée de la matrice de covariances  $\Sigma_{yy}$  survient notamment lorsque l'hypothèse de linéarité de la fonction  $h$  n'est pas respectée. Autrement dit, l'approximation qui consiste à ne retenir que le terme de premier ordre donné par  $\Sigma_{yy} \approx \nabla h \times \Sigma_{xx} \times \nabla h^T$  dans le développement de Taylor de la matrice de covariance  $\Sigma_{yy}$  n'est par conséquent plus adaptée. Afin de prendre en compte les termes d'ordres supérieurs, la solution proposée par [Julier and Uhlmann 1997] consiste à *propager* un ensemble de points, noté  $\mathcal{X}$ , déterministe et centré sur la variable aléatoire  $\bar{x}$ , à travers la fonction non linéaire  $h$ . L'espérance et la matrice de covariances de la variable aléatoire  $y$  sont alors calculées par pondération de la répartition des points de l'ensemble  $\mathcal{Y}$ , image de  $\mathcal{X}$  par la fonction  $h$ . Cette *propagation* porte le nom de transformation *unscented* et constitue le principe de base du filtre de Kalman *unscented* (UKF).

La figure 8.1 résume, de manière schématique, le principe d'estimation du filtre de Kalman *unscented* (Fig. 8.1c) comparé à celui mis en œuvre dans sa version *étendue* (Fig. 8.1b).

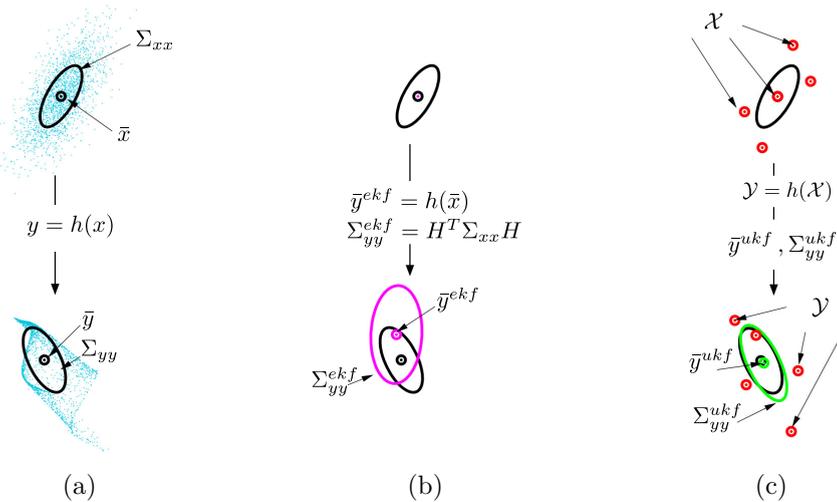


FIGURE 8.1 – (a) Distributions de probabilités *vraies* des variables aléatoires  $x$  et  $y = h(x)$ . (b) Estimation par linéarisation de la fonction  $h$ . L'espérance et la variance de la variable aléatoire  $y$  ne sont pas idéalement estimées du fait de la linéarisation *abusive* de la fonction  $h$ . (c) Estimation utilisant la transformation *unscented*.

## 8.2 Algorithme du filtre de Kalman *unscented*

Soit  $X$  le vecteur des paramètres d'un système quelconque dont l'état à l'époque  $k + 1$  est lié à celui de l'époque  $k$  par le modèle d'évolution suivant :

$$X_{k+1} = g(X_k) + Q_k$$

À chaque époque, on suppose également qu'une mesure  $Z$  est effectuée sur ce système. Cette mesure est reliée au vecteur des paramètres par le modèle d'observation suivant :

$$Z_{k+1} = h(X_{k+1}) + R_k$$

Étant donnée l'estimation du vecteur des paramètres à l'époque  $k$ , notée  $\hat{X}_k$ , ainsi que sa matrice de covariances, notée  $\Sigma_k$ , l'algorithme du filtre de Kalman *unscented* menant à l'estimation de  $\hat{X}_{k+1}$  et  $\Sigma_{k+1}$  se pose comme suit [Haykin 2001] :

— Détermination des pondérations :

$$w_{m,i} = \begin{cases} \lambda/n_l + \lambda & \text{si } i = 0 \\ 1/2(n_l + \lambda) & \text{sinon} \end{cases} \quad w_{c,i} = \begin{cases} \lambda/n_l + \lambda + (1 - \alpha^2 + \beta) & \text{si } i = 0 \\ 1/2(n_l + \lambda) & \text{sinon} \end{cases}$$

où  $n_l$  correspond aux nombres de paramètres à estimer,  $i$  varie entre 0 et  $2 \times n_l$  et  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\lambda$  sont donnés par :

$$\alpha = 0.5 \quad \beta = 2 \quad \lambda = \alpha^2 \times (n_l + \kappa) - n_l$$

avec  $\kappa$ , paramètre d'échelle.

— **Prédiction**

— Détermination de l'ensemble de points  $\mathcal{X}_k$  :

$$\mathcal{X}_k = \left\{ \hat{X}_k \quad \hat{X}_k + \gamma\sqrt{\Sigma_k} \quad \hat{X}_k - \gamma\sqrt{\Sigma_k} \right\}$$

avec :

$$\gamma = \sqrt{\alpha^2 \times (n_l + \kappa)}$$

— Calcul de la prédiction du vecteur d'état et de sa matrice de covariances :

$$X_k^+ = \sum_{i=0}^{2n} w_{m,i} g(\mathcal{X}_{k,i})$$

$$\Sigma_k^+ = \sum_{i=0}^{2n} w_{c,i} \left( g(\mathcal{X}_{k,i}) - X_k^+ \right) \left( g(\mathcal{X}_{k,i}) - X_k^+ \right)^T + Q_k$$

— **Mise à jour**

- Détermination de l'ensemble de points  $\mathcal{X}_k^+$  :

$$\mathcal{X}_k^+ = \left\{ \hat{X}_k^+ \quad \hat{X}_k^+ + \gamma\sqrt{\Sigma_k^+} \quad \hat{X}_k^+ - \gamma\sqrt{\Sigma_k^+} \right\}$$

- Propagation de l'ensemble  $\mathcal{X}_k^+$  à travers la fonction d'observation  $h$  :

$$\mathcal{Z}_k = h(\mathcal{X}_k^+)$$

- Estimation du vecteur des observations prédites  $z_k^+$ , de sa matrice de covariances  $S_k$  et de la matrice de covariances-croisées  $\Sigma_k^{x,z}$  :

$$\begin{aligned} z_k^+ &= \sum_{i=0}^{2n} w_{m,i} \mathcal{Z}_{k,i} \\ S_k &= \sum_{i=0}^{2n} w_{c,i} \left( \mathcal{Z}_{k,i} - z_k^+ \right) \left( \mathcal{Z}_{k,i} - z_k^+ \right)^T + R_k \\ \Sigma_k^{x,z} &= \sum_{i=0}^{2n} w_{c,i} \left( \mathcal{X}_{k,i}^+ - X_k^+ \right) \left( \mathcal{Z}_{k,i} - z_k^+ \right)^T \end{aligned}$$

- Calcul du gain de Kalman :

$$K_{k+1} = \Sigma_k^{x,z} S_k^{-1}$$

- Calcul de la mise à jour du vecteur d'état et de sa matrice de covariance :

$$\boxed{\begin{aligned} \hat{X}_{k+1} &= X_k^+ + K_{k+1}(z_k - z_k^+) \\ \Sigma_{k+1} &= \Sigma_k^+ - K_{k+1} S_k K_{k+1} \end{aligned}} \quad (8.5)$$

On remarquera que la notation  $\sqrt{\Sigma}$  rencontrée dans le calcul des ensembles  $\mathcal{X}$  et  $\mathcal{X}^+$ , correspond à la décomposition de Cholesky de la matrice  $\Sigma$ .

La valeur  $\beta = 2$  est retenue car optimale dans le cas d'une distribution gaussienne [Kandepu et al. 2008]. L'ensemble de points  $\mathcal{X}$  doit être tel que sa moyenne égale  $X$  et sa matrice de covariances corresponde à  $\Sigma$ , ce qui implique nécessairement que  $\alpha = 0.5$ . Par conséquent, le facteur d'échelle  $\kappa$  est le seul paramètre sur lequel il est possible de faire varier la distribution des points de l'ensemble  $\mathcal{X}$ .

L'estimation donnée par la relation (8.5) est également appelée solution *filtrée* dans le sens où le traitement s'effectue suivant les époques croissantes. À l'issue de cette estimation

*filtrée*, il est possible d'effectuer un filtrage *retour*, suivant les époques décroissantes. La nouvelle estimation obtenue est appelée solution *lissée*.

Bien que la forme *unscented* du filtre de Kalman soit plus complexe à implémenter que sa forme *étendue*, cette version présente l'avantage de ne pas nécessiter la détermination et le calcul à chaque itération de la matrice Jacobienne, contenant les dérivées partielles par rapport aux paramètres, des modèles d'évolution et d'observation. La version *unscented* peut donc remplacer tout système initialement basé sur un filtre de Kalman *étendu*. Cette propriété est illustrée dans l'annexe B qui valide l'implémentation de l'algorithme du filtre de Kalman *unscented*, en comparant ses performances à celles du filtre de Kalman *étendu* sur un exemple imaginé par [Hartikainen et al. 2011].

### 8.3 Application au système GraviMob

Le modèle d'observation du système GraviMob est en partie déjà connu puisqu'il correspond, entre autres, à l'équation (7.6, p. 161) qui lie la mesure accélérométrique du capteur aux paramètres de position et d'attitude de l'AUV et aux composantes du champ de pesanteur, soit :

$$\begin{aligned}
 Z_k = h(X_k) \quad \text{tel que} \quad Z_k &= \frac{1}{2} \left( a_{M_\alpha}^b + a_{M_\beta}^b \right)_k \quad \text{et} \\
 h &= h(\lambda, \dot{\lambda}, \ddot{\lambda}, \varphi, \dot{\varphi}, \ddot{\varphi}, h, \dot{h}, \ddot{h}, \delta, \chi, \eta, g_e, g_n, g_u) \\
 &= C_n^b \left( C_e^m \left[ \ddot{X}_P^e + 2\Omega_{ie}^e \dot{X}_P^e \right] - g_P^n \right)
 \end{aligned} \tag{8.6}$$

Ce premier constat permet d'établir une première forme du vecteur des paramètres  $X$ . Au vu des données en entrée du modèle d'observation (8.6), ce dernier s'écrit, à *minima*, comme suit :

$$X_k = \left( \lambda \quad \dot{\lambda} \quad \ddot{\lambda} \quad \varphi \quad \dot{\varphi} \quad \ddot{\varphi} \quad h \quad \dot{h} \quad \ddot{h} \quad \delta \quad \chi \quad \eta \quad g_e \quad g_n \quad g_u \right)_k^T$$

### 8.3. APPLICATION AU SYSTÈME GRAVIMOB

En supposant que l'AUV navigue à vitesse constante, il est possible d'affirmer que les accroissements des variables aléatoires  $\ddot{\lambda}$ ,  $\ddot{\varphi}$  et  $\ddot{h}$  entre deux époques consécutives  $k$  et  $k + 1$ , suivent des lois gaussiennes de moyennes nulles et de variances respectives  $\sigma_{\ddot{\lambda}}^2$ ,  $\sigma_{\ddot{\varphi}}^2$  et  $\sigma_{\ddot{h}}^2$ . Le modèle d'évolution de ces paramètres peut alors s'écrire sous la forme d'un processus de Wiener discret [Bar-Shalom et al. 2001] tel que :

$$\begin{pmatrix} \lambda \\ \dot{\lambda} \\ \ddot{\lambda} \\ \varphi \\ \dot{\varphi} \\ \ddot{\varphi} \\ h \\ \dot{h} \\ \ddot{h} \end{pmatrix}_{k+1} = \begin{pmatrix} 1 & \Delta T & \Delta T^2/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \Delta T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \Delta T & \Delta T^2/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \Delta T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \Delta T & \Delta T^2/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \Delta T \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \dot{\lambda} \\ \ddot{\lambda} \\ \varphi \\ \dot{\varphi} \\ \ddot{\varphi} \\ h \\ \dot{h} \\ \ddot{h} \end{pmatrix}_k \quad (8.7)$$

À ce modèle d'évolution est associée une incertitude qui se traduit par l'existence d'une matrice de covariances  $Q_{pos}$  donnée par [Bar-Shalom et al. 2001] :

$$Q_{pos} = \begin{pmatrix} \sigma_{\ddot{\lambda}}^2 \frac{\Delta T^4}{4} & \sigma_{\ddot{\lambda}}^2 \frac{\Delta T^3}{2} & \sigma_{\ddot{\lambda}}^2 \frac{\Delta T^2}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sigma_{\ddot{\lambda}}^2 \frac{\Delta T^3}{2} & \sigma_{\ddot{\lambda}}^2 \Delta T^2 & \sigma_{\ddot{\lambda}}^2 \Delta T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sigma_{\ddot{\lambda}}^2 \frac{\Delta T^2}{2} & \sigma_{\ddot{\lambda}}^2 \Delta T & \sigma_{\ddot{\lambda}}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_{\ddot{\varphi}}^2 \frac{\Delta T^4}{4} & \sigma_{\ddot{\varphi}}^2 \frac{\Delta T^3}{2} & \sigma_{\ddot{\varphi}}^2 \frac{\Delta T^2}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_{\ddot{\varphi}}^2 \frac{\Delta T^3}{2} & \sigma_{\ddot{\varphi}}^2 \Delta T^2 & \sigma_{\ddot{\varphi}}^2 \Delta T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_{\ddot{\varphi}}^2 \frac{\Delta T^2}{2} & \sigma_{\ddot{\varphi}}^2 \Delta T & \sigma_{\ddot{\varphi}}^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{\ddot{h}}^2 \frac{\Delta T^4}{4} & \sigma_{\ddot{h}}^2 \frac{\Delta T^3}{2} & \sigma_{\ddot{h}}^2 \frac{\Delta T^2}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{\ddot{h}}^2 \frac{\Delta T^3}{2} & \sigma_{\ddot{h}}^2 \Delta T^2 & \sigma_{\ddot{h}}^2 \Delta T \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{\ddot{h}}^2 \frac{\Delta T^2}{2} & \sigma_{\ddot{h}}^2 \Delta T & \sigma_{\ddot{h}}^2 \end{pmatrix} \quad (8.8)$$

Il convient de noter que les grandeurs  $\sigma_{\ddot{\lambda}}$ ,  $\sigma_{\ddot{\varphi}}$  et  $\sigma_{\ddot{h}}$  en facteur des termes de la matrice de covariances (8.8), diffèrent des incertitudes de **mesure** sur la position de l'AUV et notées  $\sigma_{\lambda}$ ,  $\sigma_{\varphi}$  et  $\sigma_h$  dans le chapitre 7. Dans le cas présent, elles correspondent à des incertitudes d'**évolution** entre deux époques. La détermination de leurs valeurs sera détaillée dans la section suivante.

De la même manière, les faibles mouvements d'attitude de l'AUV permettent de supposer que les accroissements des variables aléatoires  $\ddot{\delta}$ ,  $\ddot{\chi}$  et  $\ddot{\eta}$  entre deux époques consécutives  $k$

### 8.3. APPLICATION AU SYSTÈME GRAVIMOB

et  $k + 1$ , suivent des lois gaussiennes de moyennes nulles et de variances respectives  $\sigma_{\delta}^2$ ,  $\sigma_{\dot{\chi}}^2$  et  $\sigma_{\dot{\eta}}^2$ . Le modèle d'évolution relatif à ces paramètres est par conséquent identique à celui adopté pour les paramètres de position de l'AUV (8.7) :

$$\begin{pmatrix} \delta \\ \dot{\delta} \\ \ddot{\delta} \\ \chi \\ \dot{\chi} \\ \ddot{\chi} \\ \eta \\ \dot{\eta} \\ \ddot{\eta} \end{pmatrix}_{k+1} = \begin{pmatrix} 1 & \Delta T & \Delta T^2/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \Delta T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \Delta T & \Delta T^2/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \Delta T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \Delta T & \Delta T^2/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \Delta T \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta \\ \dot{\delta} \\ \ddot{\delta} \\ \chi \\ \dot{\chi} \\ \ddot{\chi} \\ \eta \\ \dot{\eta} \\ \ddot{\eta} \end{pmatrix}_k \quad (8.9)$$

À ce modèle d'évolution est associé une incertitude qui se traduit par l'existence d'une matrice de covariances  $Q_{att}$  donnée par :

$$Q_{att} = \begin{pmatrix} \sigma_{\delta}^2 \frac{\Delta T^4}{4} & \sigma_{\delta}^2 \frac{\Delta T^3}{2} & \sigma_{\delta}^2 \frac{\Delta T^2}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sigma_{\delta}^2 \frac{\Delta T^3}{2} & \sigma_{\delta}^2 \Delta T^2 & \sigma_{\delta}^2 \Delta T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sigma_{\delta}^2 \frac{\Delta T^2}{2} & \sigma_{\delta}^2 \Delta T & \sigma_{\delta}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_{\dot{\chi}}^2 \frac{\Delta T^4}{4} & \sigma_{\dot{\chi}}^2 \frac{\Delta T^3}{2} & \sigma_{\dot{\chi}}^2 \frac{\Delta T^2}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_{\dot{\chi}}^2 \frac{\Delta T^3}{2} & \sigma_{\dot{\chi}}^2 \Delta T^2 & \sigma_{\dot{\chi}}^2 \Delta T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_{\dot{\chi}}^2 \frac{\Delta T^2}{2} & \sigma_{\dot{\chi}}^2 \Delta T & \sigma_{\dot{\chi}}^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{\dot{\eta}}^2 \frac{\Delta T^4}{4} & \sigma_{\dot{\eta}}^2 \frac{\Delta T^3}{2} & \sigma_{\dot{\eta}}^2 \frac{\Delta T^2}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{\dot{\eta}}^2 \frac{\Delta T^3}{2} & \sigma_{\dot{\eta}}^2 \Delta T^2 & \sigma_{\dot{\eta}}^2 \Delta T \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{\dot{\eta}}^2 \frac{\Delta T^2}{2} & \sigma_{\dot{\eta}}^2 \Delta T & \sigma_{\dot{\eta}}^2 \end{pmatrix} \quad (8.10)$$

De nouveau, les incertitudes d'évolution  $\sigma_{\delta}$ ,  $\sigma_{\dot{\chi}}$  et  $\sigma_{\dot{\eta}}$  en facteur des termes de la matrice de covariances (8.10), diffèrent des incertitudes de **mesure** sur les angles d'attitude de l'AUV et notées  $\sigma_{\delta}$ ,  $\sigma_{\chi}$  et  $\sigma_{\eta}$  dans le chapitre 7.

### 8.3. APPLICATION AU SYSTÈME GRAVIMOB

---

Le vecteur des paramètres  $X$  se voit logiquement agrandi du fait que le modèle d'évolution relatif à l'attitude de l'AUV (8.9) fait intervenir les paramètres  $\dot{\delta}$ ,  $\ddot{\delta}$ ,  $\dot{\chi}$ ,  $\ddot{\chi}$ ,  $\dot{\eta}$  et  $\ddot{\eta}$ . Par conséquent, ce vecteur s'écrit dorénavant :

$$X_k = \left( \lambda \quad \dot{\lambda} \quad \ddot{\lambda} \quad \varphi \quad \dot{\varphi} \quad \ddot{\varphi} \quad h \quad \dot{h} \quad \ddot{h} \quad \delta \quad \dot{\delta} \quad \ddot{\delta} \quad \chi \quad \dot{\chi} \quad \ddot{\chi} \quad \eta \quad \dot{\eta} \quad \ddot{\eta} \quad g_e \quad g_n \quad g_u \right)_k^T$$

Concernant le modèle d'évolution des composantes du champ de pesanteur, il est possible d'utiliser le modèle déjà élaboré dans le travail de thèse de Bertrand de Saint-Jean et qui, au même titre que les paramètres de navigation, considère que les accroissements des variables aléatoires  $\ddot{g}_e$ ,  $\ddot{g}_n$  et  $\ddot{g}_u$  entre deux époques consécutives  $k$  et  $k+1$  suivent des lois gaussiennes de moyennes nulles et de variances respectives  $\sigma_{\ddot{g}_e}^2$ ,  $\sigma_{\ddot{g}_n}^2$  et  $\sigma_{\ddot{g}_u}^2$ .

La matrice d'évolution des composantes du champ de pesanteur est par conséquent similaire aux matrices définies précédemment (8.7) et (8.9) :

$$\begin{pmatrix} g_e \\ \dot{g}_e \\ \ddot{g}_e \\ g_n \\ \dot{g}_n \\ \ddot{g}_n \\ g_u \\ \dot{g}_u \\ \ddot{g}_u \end{pmatrix}_{k+1} = \begin{pmatrix} 1 & \Delta T & \Delta T^2/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \Delta T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \Delta T & \Delta T^2/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \Delta T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \Delta T & \Delta T^2/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \Delta T \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_e \\ \dot{g}_e \\ \ddot{g}_e \\ g_n \\ \dot{g}_n \\ \ddot{g}_n \\ g_u \\ \dot{g}_u \\ \ddot{g}_u \end{pmatrix}_k \quad (8.11)$$

### 8.3. APPLICATION AU SYSTÈME GRAVIMOB

De même, la matrice de covariances  $Q_g$  qui lui est associée s'écrit de manière similaire à celles définies précédemment (8.8) et (8.10) :

$$Q_g = \begin{pmatrix} \sigma_{\dot{g}_e}^2 \frac{\Delta T^4}{4} & \sigma_{\ddot{g}_e}^2 \frac{\Delta T^3}{2} & \sigma_{\dot{g}_e}^2 \frac{\Delta T^2}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sigma_{\dot{g}_e}^2 \frac{\Delta T^3}{2} & \sigma_{\ddot{g}_e}^2 \Delta T^2 & \sigma_{\dot{g}_e}^2 \Delta T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sigma_{\dot{g}_e}^2 \frac{\Delta T^2}{2} & \sigma_{\ddot{g}_e}^2 \Delta T & \sigma_{\dot{g}_e}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_{\ddot{g}_n}^2 \frac{\Delta T^4}{4} & \sigma_{\dot{g}_n}^2 \frac{\Delta T^3}{2} & \sigma_{\ddot{g}_n}^2 \frac{\Delta T^2}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_{\dot{g}_n}^2 \frac{\Delta T^3}{2} & \sigma_{\ddot{g}_n}^2 \Delta T^2 & \sigma_{\dot{g}_n}^2 \Delta T & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_{\ddot{g}_n}^2 \frac{\Delta T^2}{2} & \sigma_{\dot{g}_n}^2 \Delta T & \sigma_{\ddot{g}_n}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{\dot{g}_u}^2 \frac{\Delta T^4}{4} & \sigma_{\ddot{g}_u}^2 \frac{\Delta T^3}{2} & \sigma_{\dot{g}_u}^2 \frac{\Delta T^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{\ddot{g}_u}^2 \frac{\Delta T^3}{2} & \sigma_{\dot{g}_u}^2 \Delta T^2 & \sigma_{\ddot{g}_u}^2 \Delta T & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{\dot{g}_u}^2 \frac{\Delta T^2}{2} & \sigma_{\ddot{g}_u}^2 \Delta T & \sigma_{\dot{g}_u}^2 & 0 \end{pmatrix} \quad (8.12)$$

Une version plus raffinée du modèle d'évolution s'obtient à partir d'un modèle de Markov Markov d'ordre  $p$  telle que suggérée dans les travaux de Nicolas Damenet [Damenet 2012]. Si  $L_k = (g_{e,k} \ g_{n,k} \ g_{u,k})^T$  désigne le vecteur accélération gravitationnelle à l'instant  $k$ , le modèle discret de Markov d'ordre  $p$  du vecteur  $L_k$  peut s'écrire :

$$a_0 L_k + a_1 L_{k-1} + \dots + a_p L_{k-p} = w_k \quad ,$$

où les  $a_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, p$  sont des coefficients réels qui définissent le modèle et  $w_k$  un bruit blanc. Sous certaines hypothèses, Nicolas Damenet a montré comment choisir les coefficients  $a_i$  pour que les  $L_k$  obéissent à un modèle de covariance donné. L'ajustement peut alors être réalisé à partir de mesures locales ou régionales du champ de gravité desquelles serait estimé un modèle de covariance empirique.

Puisque le modèle d'évolution retenu (8.11) fait intervenir les variables  $\dot{g}_e$ ,  $\ddot{g}_e$ ,  $\dot{g}_n$ ,  $\ddot{g}_n$ ,  $\dot{g}_u$  et  $\ddot{g}_u$ , le vecteur des paramètres est de nouveau augmenté et s'écrit de manière définitive comme suit :

$$X_k = \begin{pmatrix} \lambda & \dot{\lambda} & \ddot{\lambda} & \varphi & \dot{\varphi} & \ddot{\varphi} & h & \dot{h} & \ddot{h} & \dots \\ \dots & \delta & \dot{\delta} & \ddot{\delta} & \chi & \dot{\chi} & \ddot{\chi} & \eta & \dot{\eta} & \ddot{\eta} & \dots \\ \dots & g_e & \dot{g}_e & \ddot{g}_e & g_n & \dot{g}_n & \ddot{g}_n & g_u & \dot{g}_u & \ddot{g}_u \end{pmatrix}_k^T \quad (8.13)$$



### 8.3. APPLICATION AU SYSTÈME GRAVIMOB

---

En résumé de cette section, le filtre de Kalman *unscented* appliqué au système GraviMob se compose :

- du modèle d'évolution donné par :

$$X_{k+1} = AX_k + Q \quad ,$$

où :

$$A = \begin{pmatrix} A_{pos} & 0 & 0 \\ 0 & A_{att} & 0 \\ 0 & 0 & A_g \end{pmatrix}$$

tel que les matrices  $A_{pos}$ ,  $A_{att}$  et  $A_g$  correspondent aux modèles d'évolution donnés respectivement aux relations (8.7), (8.9) et (8.11) et

$$Q = \begin{pmatrix} Q_{pos} & 0 & 0 \\ 0 & Q_{att} & 0 \\ 0 & 0 & Q_g \end{pmatrix}$$

tel que les matrices  $Q_{pos}$ ,  $Q_{att}$  et  $Q_g$  correspondent aux matrices de covariance données respectivement aux relations (8.8), (8.10) et (8.12).

- du modèle d'observation correspondant à la réunion des relations (8.6) et (8.15). La matrice de covariances relative à ce modèle d'observation s'écrit de la manière suivante :

$$R = \begin{pmatrix} \sigma_a^2 I_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_\lambda^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_\varphi^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_h^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_\delta^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_\chi^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_\eta^2 \end{pmatrix} \quad ,$$

avec :

$$\sigma_a = 1 \text{ mGal}$$

$$\sigma_\lambda = 3.07 \times 10^{-5} \text{ deg} \quad \sigma_\varphi = 2.25 \times 10^{-5} \text{ deg} \quad \sigma_h = 0.3 \text{ m}$$

$$\sigma_\delta = 0.05 \text{ deg} \quad \sigma_\chi = 0.005 \text{ deg} \quad \sigma_\eta = 0.005 \text{ deg}$$

Ces valeurs d'incertitudes sont celles qui ont été exposées dans le chapitre 7 compte tenu des performances nominales du système GraviMob.

## 8.4 Simulations numériques

Le filtre de Kalman *unscented* a été expérimenté à l'aide des données de référence dont la génération a été exposée au chapitre 7.

Les incertitudes d'**évolution** sont les seuls paramètres dont les valeurs n'ont pas encore été fixées. Afin de valider leur choix, le filtre de Kalman *unscented* est mis en œuvre en augmentant, de manière progressive, le contenu du vecteur des paramètres  $X$ . Au total, 11 simulations ont été réalisées afin d'observer le comportement du filtre :

- 1 La simulation n°1 estime uniquement les trois composantes du champ et ne considère que les observations bruitées relatives à l'accélération spécifique. Les autres observations sont introduites avec leurs valeurs de référence. Les valeurs des incertitudes d'**évolution** sont fixées telle que :

$$\sigma_{\ddot{g}_{cast}} = 10^{-3} \text{ mGal s}^{-2} \quad \sigma_{\ddot{g}_{north}} = 10^{-3} \text{ mGal s}^{-2} \quad \sigma_{\ddot{g}_{up}} = 10^{-3} \text{ mGal s}^{-2}$$

- 2 Par rapport à la simulation n°1, la simulation n°2 ajoute l'estimation et l'observation de la longitude. La valeur d'incertitude d'**évolution** relative à ce paramètre est fixée telle que :

$$\sigma_{\dot{\lambda}} = 5 \times 10^{-6} \text{ deg s}^{-2}$$

- 3 Par rapport à la simulation n°1, la simulation n°3 ajoute l'estimation et l'observation de la latitude. La valeur d'incertitude d'**évolution** relative à ce paramètre est fixée telle que :

$$\sigma_{\dot{\varphi}} = 4 \times 10^{-6} \text{ deg s}^{-2}$$

- 4 Par rapport à la simulation n°1, la simulation n°4 ajoute l'estimation et l'observation de la hauteur. La valeur d'incertitude d'**évolution** relative à ce paramètre est fixée telle que :

$$\sigma_{\dot{h}} = 0.1 \text{ m s}^{-2}$$

- 5 La simulation n°5 estime les trois composantes du champ et la position. Seules les observations d'attitude sont introduites avec leurs valeurs de référence.

## 8.4. SIMULATIONS NUMÉRIQUES

---

6 Par rapport à la simulation n°1, la simulation n°6 ajoute l'estimation et l'observation du cap. La valeur d'incertitude d'**évolution** relative à ce paramètre est fixée telle que :

$$\sigma_{\ddot{\delta}} = 0.8 \text{ deg s}^{-2}$$

7 Par rapport à la simulation n°1, la simulation n°7 ajoute l'estimation et l'observation du tangage. La valeur d'incertitude d'**évolution** relative à ce paramètre est fixée telle que :

$$\sigma_{\ddot{\chi}} = 0.5 \text{ deg s}^{-2}$$

8 Par rapport à la simulation n°1, la simulation n°8 ajoute l'estimation et l'observation du roulis. La valeur d'incertitude d'**évolution** relative à ce paramètre est fixée telle que :

$$\sigma_{\ddot{\eta}} = 1.7 \text{ deg s}^{-2}$$

9 La simulation n°9 estime les trois composantes du champ et les trois angles d'attitude. Seules les observations de position sont introduites avec leurs valeurs de référence.

10 La simulation n°10 estime les trois composantes du champ, la position et l'angle de cap. Seules les observations de tangage et roulis sont introduites avec leurs valeurs de référence.

11 La simulation n°11 estime les trois composantes du champ, la position et l'angle de cap. Toutes les observations bruitées sont introduites.

Les valeurs des incertitudes d'**évolution** correspondent aux écarts-types calculés sur les séries temporelles des dérivées secondes des paramètres du champ ( $\ddot{g}_{east}$ ,  $\ddot{g}_{north}$ ,  $\ddot{g}_{up}$ ), de la position ( $\ddot{\lambda}$ ,  $\ddot{\varphi}$ ,  $\ddot{h}$ ) et de l'attitude ( $\ddot{\delta}$ ,  $\ddot{\chi}$  et  $\ddot{\eta}$ ).

Dans chaque cas, l'évaluation de l'erreur sur les trois composantes estimées du champ de pesanteur est rendue possible par la connaissance de leurs valeurs de référence. À ce titre, le tableau 8.1 résume les valeurs de l'espérance et de l'écart-type de l'erreur après filtrage ( $\mathbb{E}_f$  et  $\sigma_f$ ) puis après lissage ( $\mathbb{E}_s$  et  $\sigma_s$ ).

## 8.4. SIMULATIONS NUMÉRIQUES

				[mGal]			
	vecteur des paramètres $X$	observations non bruitées	observations bruitées	$\mathcal{G}_{east}$			
				$\mathbb{E}_f$	$\sigma_f$	$\mathbb{E}_s$	$\sigma_s$
1	$[g_e g_n g_u]$	$[\lambda \varphi h \delta \chi \eta]$	$[a_x a_y a_z]$	0.00	0.24	0.00	0.10
2	$[\lambda g_e g_n g_u]$	$[\varphi h \delta \chi \eta]$	$[\lambda a_x a_y a_z]$	0.26	59.75	0.12	4.54
3	$[\varphi g_e g_n g_u]$	$[\lambda h \delta \chi \eta]$	$[\varphi a_x a_y a_z]$	-0.02	0.48	-0.03	0.18
4	$[h g_e g_n g_u]$	$[\lambda \varphi \delta \chi \eta]$	$[h a_x a_y a_z]$	0.01	0.42	0.01	0.18
5	$[\lambda \varphi h g_e g_n g_u]$	$[\delta \chi \eta]$	$[\lambda \varphi h a_x a_y a_z]$	-1.90	59.75	-0.18	4.55
6	$[\delta g_e g_n g_u]$	$[\lambda \varphi h \chi \eta]$	$[\delta a_x a_y a_z]$	0.01	0.70	0.02	0.27
7	$[\chi g_e g_n g_u]$	$[\lambda \varphi h \delta \eta]$	$[\chi a_x a_y a_z]$	Divergence			
8	$[\eta g_e g_n g_u]$	$[\lambda \varphi h \delta \chi]$	$[\eta a_x a_y a_z]$	Divergence			
9	$[\delta \chi \eta g_e g_n g_u]$	$[\lambda \varphi h]$	$[\delta \chi \eta a_x a_y a_z]$	Divergence			
10	$[\lambda \varphi h \delta g_e g_n g_u]$	$[\chi \eta]$	$[\lambda \varphi h \delta a_x a_y a_z]$	-2.58	62.07	-2.70	4.72
11	$[\lambda \varphi h \delta g_e g_n g_u]$		$[\lambda \varphi h \delta \chi \eta a_x a_y a_z]$	4.41	59.75	5.21	4.55
				$\mathcal{G}_{north}$			
				$\mathbb{E}_f$	$\sigma_f$	$\mathbb{E}_s$	$\sigma_s$
				0.00	0.23	0.00	0.10
				-0.04	0.47	-0.04	0.18
				-1.14	54.83	0.03	4.17
				-0.01	0.41	-0.01	0.18
				-0.34	54.82	-0.10	4.17
				0.05	0.75	-0.01	0.30
				Divergence			
				Divergence			
				Divergence			
				6.14	58.61	6.24	4.46
				-3.60	54.83	-4.03	4.17
				$\mathcal{G}_{up}$			
				$\mathbb{E}_f$	$\sigma_f$	$\mathbb{E}_s$	$\sigma_s$
				0.00	0.21	0.00	0.09
				-0.01	0.45	-0.01	0.17
				0.05	0.38	0.03	0.16
				-0.01	0.38	0.00	0.16
				-0.01	0.32	-0.01	0.10
				-0.01	0.38	-0.01	0.16
				Divergence			
				Divergence			
				Divergence			
				-0.02	0.43	-0.01	0.16
				-0.04	0.45	-0.00	0.17

TABLE 8.1 – Expérimentation du filtre de Kalman *Unscented* sur les données simulées. On remarque les 3 cas de divergence pour lesquels le filtre ne fonctionne pas, dès lors que les angles de tangage et roulis sont insérés dans le vecteur des paramètres.

Mis à part les cas de divergence du filtre, on constate que la solution lissée permet de diminuer l'écart-type de l'erreur d'un facteur proche de 2 et ce, dans tous les cas envisagés. L'espérance de l'erreur reste, quant à elle, proche de 0, ce qui montre que l'estimation n'est pas biaisée. La composante  $g_{up}$  possède une erreur inférieure aux autres composantes, même lorsque l'observation de hauteur,  $h$ , est bruitée.

Les grandeurs statistiques sont celles calculées **sans filtrage passif** sur le signal en sortie du filtre de Kalman. On constate que l'ordre de grandeur de l'écart-type calculé sur l'erreur, diminue de manière significative, comparé à celui constaté, dans le chapitre 7, lors du calcul par filtrage passif avec propagation des erreurs. L'efficacité du filtre de Kalman est ainsi démontrée, plus précisément, celle de son modèle d'évolution qui indique comment les paramètres évoluent d'une époque à une autre, combinée à celle de son modèle d'observation qui tient compte des incertitudes sur les mesures.

Quelle que soient les valeurs des incertitudes d'**évolution**  $\sigma_{\dot{\chi}}$  et  $\sigma_{\dot{\eta}}$ , le filtre diverge lorsque les angles de tangage et de roulis sont insérés dans le vecteur des paramètres. Ce constat rejoint les conclusions déjà évoquées dans le travail de Bertrand de Saint-Jean et tend à montrer que la divergence du filtre de Kalman ne vient pas seulement d'une trop forte incertitude sur les angles d'attitude. En ce sens, la simulation n°11, comparée à la simulation n°10, montre que la non prise en compte de ces angles d'attitude dans le vecteur des paramètres ne change pas l'écart-type de l'erreur sur les composantes du champ. Autrement dit, l'impact de l'incertitude sur les angles de tangage et roulis est masqué par celui de l'incertitude des autres grandeurs mesurées. Afin de vérifier cette hypothèse, la simulation n°11 a été répétée en faisant évoluer l'incertitude sur ces angles, celles sur les autres grandeurs restant inchangées. La figure 8.2 montre l'évolution de l'écart-type de l'erreur en fonction de l'incertitude sur les angles de tangage et roulis. Pour les trois composantes du champ, l'écart-type atteint sa limite pour une valeur d'incertitude  $\sigma_{\chi} = \sigma_{\eta} \approx 0.01$  deg. Ce résultat montre que, dans le cas du positionnement sous-marin, les incertitudes sur le positionnement et sur l'angle de cap, ont un effet dominant sur la qualité de l'estimation des composantes du champ de pesanteur.

## 8.4. SIMULATIONS NUMÉRIQUES

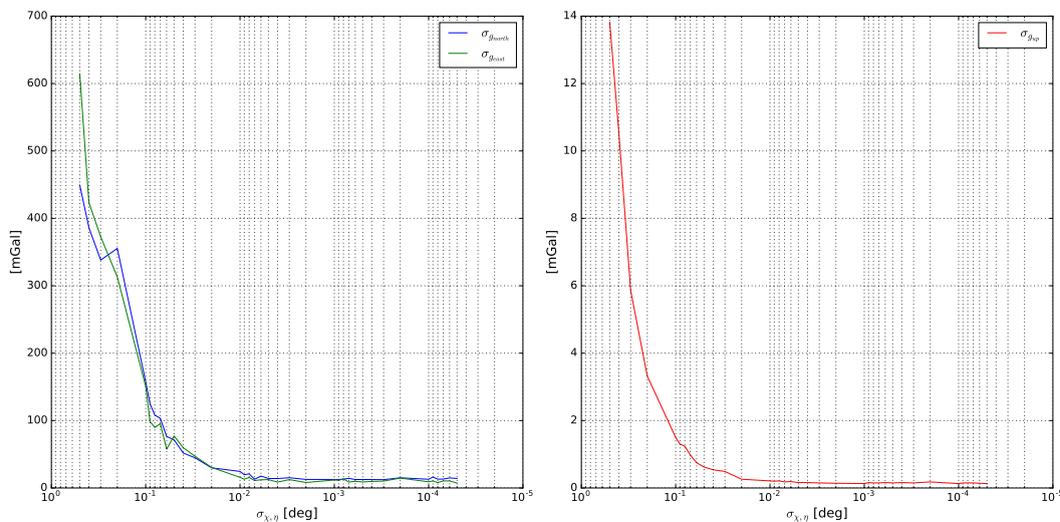


FIGURE 8.2 – Évolution de l'écart-type de l'erreur sur les composantes du champ en fonction de l'incertitude sur les angles de tangage et roulis. À partir de  $10^{-2}$  deg d'incertitude sur l'attitude, l'écart-type de l'erreur sur le champ de diminue plus, ce qui montre que d'autres incertitudes empêchent la diminution de variance.

En conclusion de cette partie, il convient de rappeler que la modélisation du système GraviMob reprend celle déjà employée avec le LiMo-g. Cette modélisation utilise le fait que l'accélération spécifique, mesurée par le capteur accélérométrique, contient le signal induit par le champ de pesanteur et l'accélération relative au mouvement du véhicule porteur. Cependant, sans autre observation sur le système et en vertu du principe d'équivalence, ces deux quantités sont indissociables. La solution consiste donc à observer, en plus, le mouvement du véhicule porteur dont la dérivée seconde par rapport au temps sera retranchée à l'accélération spécifique, et ce afin de déduire l'accélération de pesanteur. L'incertitude affectant la mesure de ce mouvement étant trop élevée pour espérer atteindre une précision de l'ordre du milligal sur l'accélération du véhicule porteur, il est nécessaire de mettre en œuvre un filtrage des observations afin de déterminer la meilleure estimation possible des composantes du champ.

---

Quatrième partie

**Expérimentation du système  
GraviMob**



## Chapitre 9

# Présentation de la campagne de mesures

Ce chapitre expose le déroulement de la mission d'expérimentation en Mer Méditerranée du 17 au 25 mars 2016, à bord du navire L'Europe de IFREMER (Fig. 9.1). Il présente les deux zones de levé ainsi que les données gravimétriques de référence mises à disposition par le SHOM. Il résume enfin, journée par journée, les profils observés en précisant les caractéristiques de navigation de l'AUV.



FIGURE 9.1 – Le catamaran L'Europe est un navire côtier de l'IFREMER dédié à la recherche halieutique et à l'environnement littoral ©Ifremer.

## 9.1 Déroulement de la mission

La semaine dédiée à la mission d'expérimentation du système GraviMob s'est vue partagée en deux phases d'acquisition s'étalant respectivement du 18 au 20 mars et du 22 mars au 24 mars 2016. Ces deux périodes ont été séparées par une journée à quai le 21 mars 2016, afin d'effectuer un changement d'équipage (Tab. 9.1).

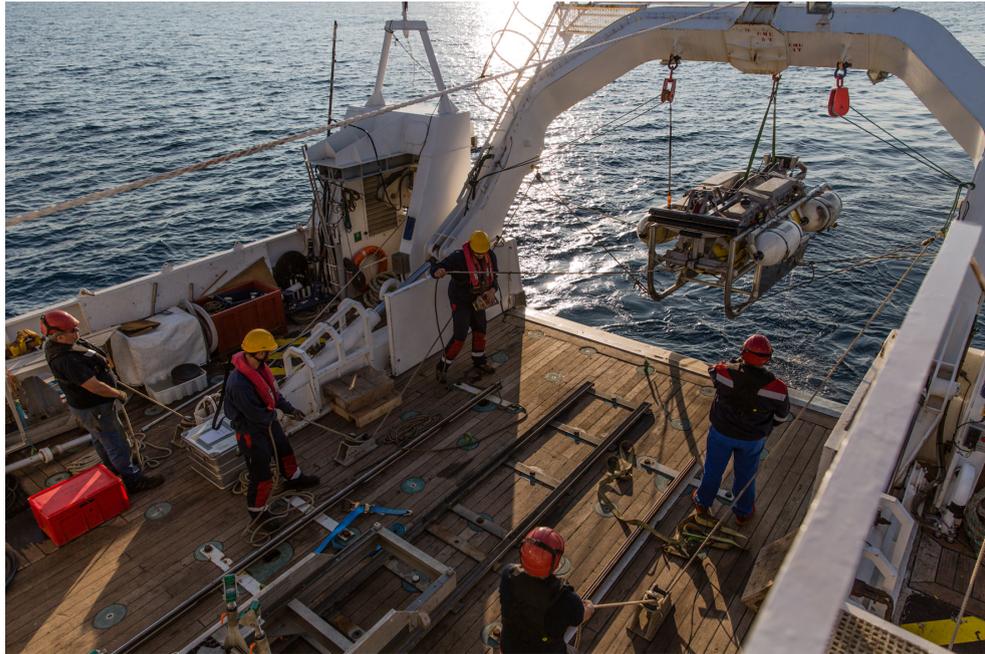
17/03/16	Mobilisation à la Seyne-sur-Mer
18/03/16	Acquisition de données Mouillage aux Sablettes
19/03/16	Acquisition de données Mouillage aux Sablettes
20/03/16	Acquisition de données Retour à quai à la Seyne-sur-Mer
21/03/16	Journée à quai Changement d'équipe
22/03/16	Transit vers Saint-Tropez Acquisition de données Nuit à quai à Saint-Tropez
23/03/16	Acquisition de données Nuit à quai à Saint-Tropez
24/03/16	Acquisition de données Retour à quai à la Seyne-sur-Mer
25/03/16	Démobilisation à la Seyne-sur-Mer

TABLE 9.1 – Historique des opérations effectuées durant la campagne d'expérimentation du 17 au 25 mars 2016 en Mer Méditerranée.

De manière générale, une journée d'acquisition commençait par le transit du navire jusqu'à la zone de levé. Durant cette période, le capteur accélérométrique et les instruments de navigation et de communication de l'AUV étaient activés afin de procéder à une première série de vérifications. Arrivé sur zone, l'AUV était mis à l'eau au moyen du portique *Caliste*, système de mise en œuvre des véhicules sous-marins autonomes conçu par l'IFREMER (Fig. 9.2). L'AUV naviguait en surface jusqu'à son point de plongée et faisait l'objet dans ce même temps, d'une nouvelle série de vérifications depuis le poste de contrôle du navire et ce, grâce à une communication radio. L'AUV débutait alors sa descente en spirale jusqu'à son point de début de profil et entamait la mission qui lui avait été assignée.

## 9.1. DÉROULEMENT DE LA MISSION

---



(a)



(b)

FIGURE 9.2 – Phases de mise à l'eau (a) et de récupération (b) de l'AUV grâce au système *Caliste* conçu par l'IFREMER.

## 9.1. DÉROULEMENT DE LA MISSION

---

Durant la phase d'immersion, seule la communication par liaison acoustique (Fig. 9.3) permettait au navire de surveiller la position de l'AUV, et si besoin, de recalculer ce dernier en cas de trop grande dérive. Les positions intermédiaires de l'AUV acquises par liaison acoustique sont celles qui sont utilisées dans l'estimation en temps différé de la position de l'AUV.



FIGURE 9.3 – Une communication acoustique est utilisée durant la phase d'immersion de l'AUV afin de contrôler sa navigation.

Lorsque la mission de levé s'achevait, l'AUV entamait sa montée en spirale jusqu'à la surface. Sa navigation jusqu'à la poupe du navire était alors assurée depuis le poste de commande à l'aide de la liaison radio. Le système *Caliste* était une nouvelle fois utilisé afin de remonter le sous-marin sur la plage arrière du navire. La récupération des données accélérométriques et de navigation était alors possible lorsque l'AUV était finalement amarré sur son portique (Fig. 9.4).



FIGURE 9.4 – Les données accélérométriques et de navigation de l’AUV sont accessibles lorsque ce dernier était amarré sur la plage arrière du navire.

## 9.2 Zones de levé et profils de référence

Deux zones principales de levé ont été exploitées au cours de cette campagne d’expérimentation. La première d’entre elles, nommée *zone ouest* sur la figure 9.5, est située au large du port de Toulon et contient deux profils gravimétriques. Ces deux profils sont représentés avec la bathymétrie de la zone de travail sur la figure 9.6. La seconde zone de levé, nommée *zone est* sur la figure 9.5, est, quant à elle, située au large du port de Saint-Tropez et contient trois profils gravimétriques, également représentés avec la bathymétrie de la zone de travail sur la figure 9.7.

## 9.2. ZONES DE LEVÉ ET PROFILS DE RÉFÉRENCE

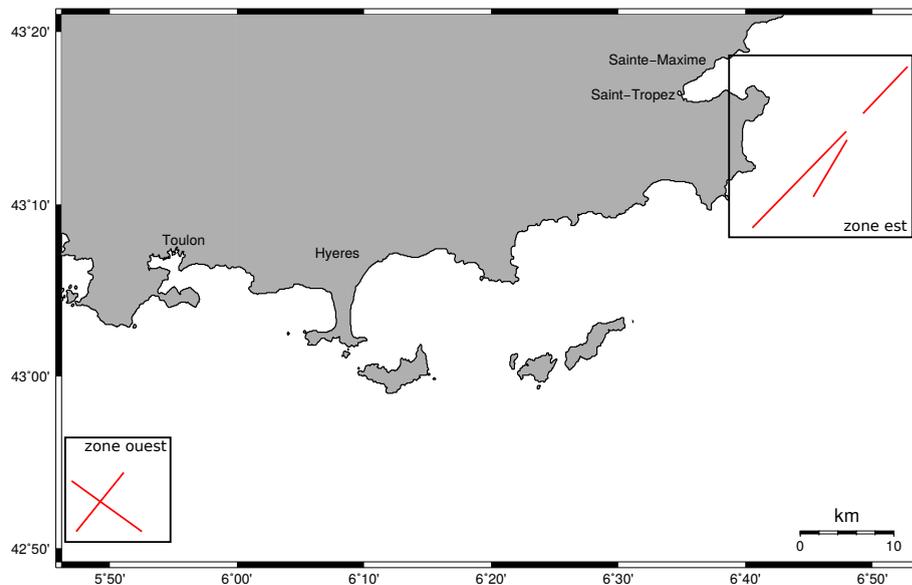


FIGURE 9.5 – Situation géographique des deux zones de levé. Les profils gravimétriques de référence du SHOM apparaissent en rouge sur la figure.

Les anomalies gravimétriques à l'air libre de référence associées aux différents profils de la zone *est* et de la zone *ouest* ont été représentées respectivement sur les figures 9.8 et 9.9. Sur ces figures, l'anomalie gravimétrique de surface du SHOM apparaît en rouge tandis que la topographie du sol marin est représenté en bleu.

Les anomalies de surface de la zone *ouest* (Fig. 9.8) apparaissent fortement lissées comparées à la bathymétrie. La faiblesse du signal gravimétrique en surface de par les fortes profondeurs ( $> 2100$  m) rencontrées dans cette zone, ajoutée aux filtrages passe-bas pratiqués en gravimétrie marine, explique très probablement le lissage excessif des anomalies vers les hautes fréquences. On remarque également que leurs faibles amplitudes n'exèdent pas la dizaine de milligals. Enfin, les traits verticaux de couleur verte marquent le point d'intersection des deux profils de référence de cette zone. Les valeurs de l'anomalie gravimétrique en ce point d'intersection, coïncident à quelques dixièmes de milligal près.

Les anomalies de surface de la zone *est* (Fig. 9.9) suivent quant à elles davantage la topographie sous-marine en raison des faibles profondeurs rencontrées. Leurs amplitudes de variation sont également plus fortes et sont de l'ordre d'une vingtaine de milligals.

## 9.2. ZONES DE LEVÉ ET PROFILS DE RÉFÉRENCE

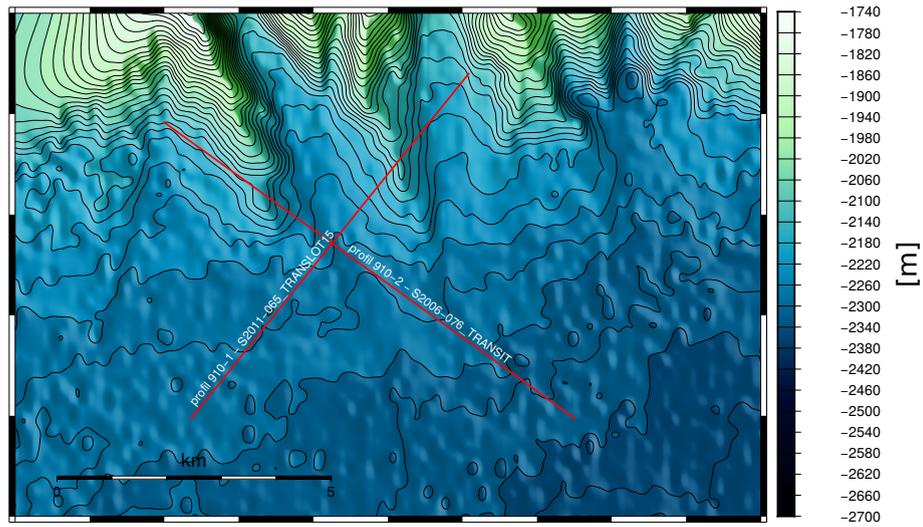


FIGURE 9.6 – Superposition de la bathymétrie et des deux profils gravimétriques de référence de la zone *ouest*.

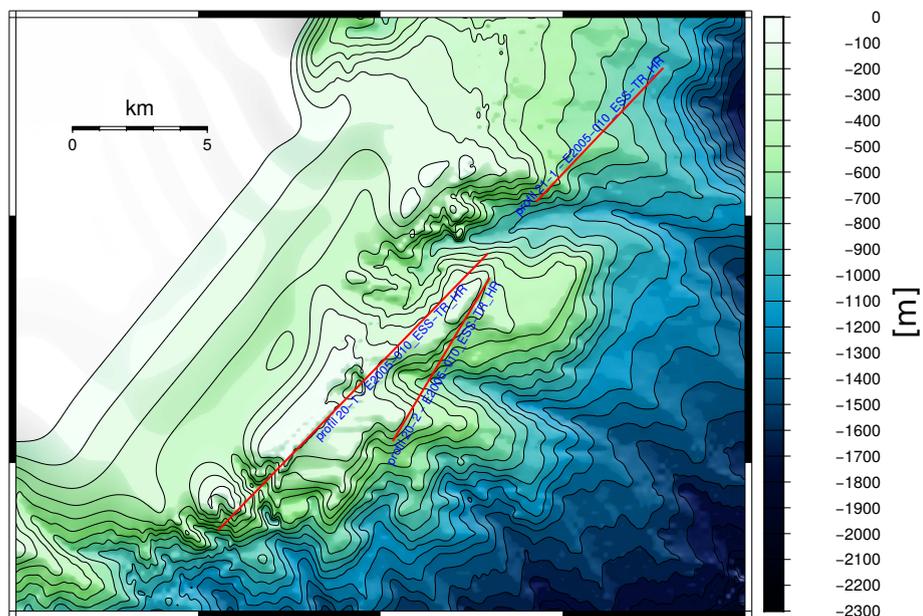


FIGURE 9.7 – Superposition de la bathymétrie et des trois profils gravimétriques de référence de la zone *est*.

## 9.2. ZONES DE LEVÉ ET PROFILS DE RÉFÉRENCE

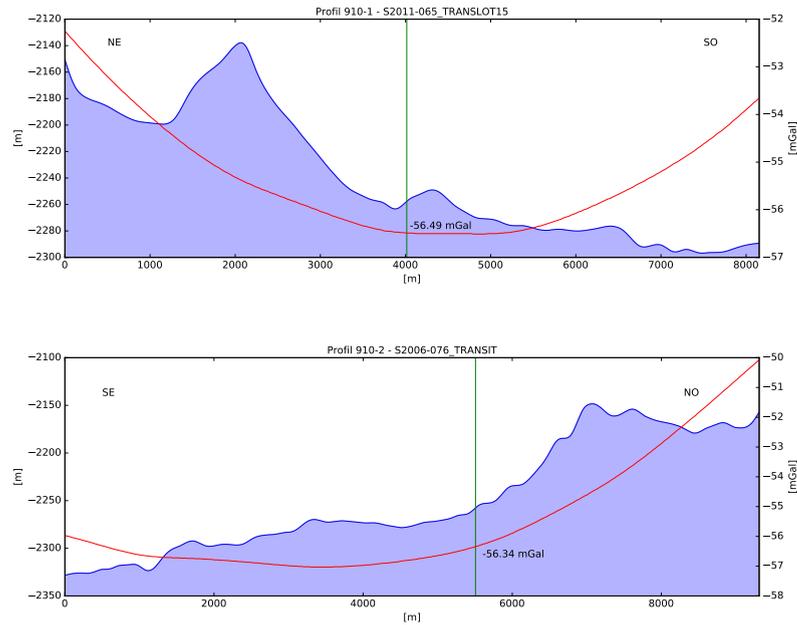


FIGURE 9.8 – Superposition des profils bathymétriques et des anomalies gravimétriques de référence de la zone *ouest*.

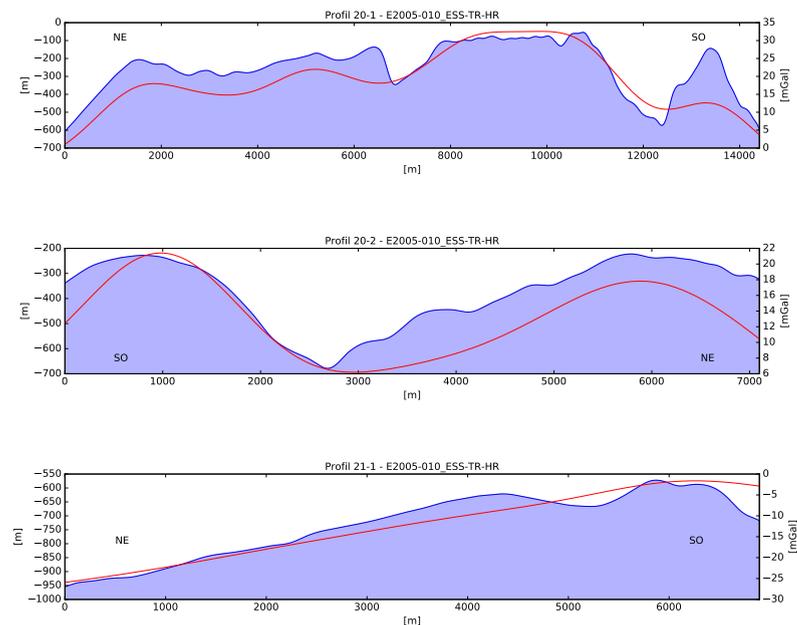


FIGURE 9.9 – Superposition des profils bathymétriques et des anomalies gravimétriques de référence de la zone *est*.

Le choix des zones de levés a été motivé par la disponibilité des données gravimétriques de surface grâce au travail de cartographie du SHOM. Ces dernières sont indispensables à l'analyse des résultats d'estimation du champ de pesanteur par filtrage de Kalman *unscented* des mesures du système GraviMob.

### 9.3 Résumé des données acquises

Le tableau 9.2 résume, journée par journée, les profils levés ainsi que les modes de navigation de l'AUV. De manière générale, les cinq profils ont été levés suivant les deux modes de navigation de l'AUV :

- navigation en immersion constante : l'AUV suit le profil en gardant une profondeur constante par rapport à la surface de la mer ;
- navigation avec suivi de la topographie : l'AUV navigue en restant à une même distance du fond marin.

Le mode de navigation avec suivi de la topographie est le mode de plus couramment adopté avec ce type de véhicule, car il permet une meilleure accroche du vélocimètre Doppler sur la surface du fond marin, garantissant ainsi une meilleure estimation de la position. Dans le cadre d'une mission gravimétrique, ce mode de navigation implique cependant des difficultés quant au traitement et à l'interprétation des résultats. Il est en effet d'usage de mesurer le champ de pesanteur à une altitude fixée, puis de corriger les mesures par prolongement vers le haut ou vers le bas. Ce mode de navigation implique également de plus grandes amplitudes sur les angles d'attitude de l'AUV et peut, par conséquent, provoquer la saturation des accéléromètres du capteur du système GraviMob. Enfin, dans des zones fortement accidentées telles que celles rencontrées dans la zone *est* (Fig. 9.7), une proximité trop grande de l'AUV avec le relief sous-marin peut contraindre ce dernier à remonter brusquement en surface suite à une mise en alerte. Le mode de navigation en immersion constante, bien que moins précis du fait de la moins bonne accroche du vélocimètre Doppler sur le fond, permet de minimiser les amplitudes des angles d'attitude de l'AUV. L'interprétation et le prolongement des données gravimétriques ainsi acquises, sont également plus aisés à effectuer. Il apparaît donc comme le mode de navigation le mieux adapté à la conduite de missions gravimétriques mobiles en milieu sous-marin.

### 9.3. RÉSUMÉ DES DONNÉES ACQUISES

date	n° profil	nom du profil	mode de navigation	distance parcourue [km]		
18 mars 2016	1	profil 910 - S2011-065_TRANSLOT15	immersion constante (1900 m)	7		
	2			8		
	3		suivi de topo (100 m)	8		
4	7.5					
5	7.5					
19 mars 2016	6		profil 910 - S2006-076_TRANSIT	suivi de topo (100 m)	8	
	7	8.5				
	8	9				
20 mars 2016	9	immersion constante (1900 m)		immersion constante (1900 m)	9	
	10				3	
22 mars 2016	11	profil 21-1 - E2005-010_ESS-TR-HR		suivi de topo (100 m)	7	
	12		7			
	13		6			
	23 mars 2016		14	immersion constante (600 m)	3	
			15			7
			16			7.5
23 mars 2016	17	profil 20-2 - E2005-010_ESS-TR-HR	immersion constante (100 m)	8		
	18			8.5		
	19		immersion constante (80 m)	7.5		
	20				8	
24 mars 2016	21	profil 20-1 - E2005-010_ESS-TR-HR	suivi de topo (100 m)	4		
	22			4		
	23			4		
	24 mars 2016		24	immersion constante (100 m)	4	
			25			4
			26			4

TABLE 9.2 – Récapitulatif des profils gravimétriques parcourus avec leurs modes de navigation. Les 26 profils représentent une distance totale d'environ 169 kilomètres.

### 9.3. RÉSUMÉ DES DONNÉES ACQUISES

---

La disponibilité d'un nombre important de profils est cruciale, toutes les données récupérées n'étant pas de même qualité. Le premier facteur limitant correspond à la saturation des accéléromètres qui oblige à découper le profil navigué en portions de profil. La diminution du nombre d'observations qui en découle, limite par conséquent la taille de la fenêtre glissante appliquée lors du filtrage. Le second facteur limitant correspond à l'existence de sauts dans la navigation de l'AUV (Fig. 9.10). Ces derniers sont probablement dus aux recalages de la trajectoire de l'AUV pendant la navigation, qui n'ont pu être lissés en sortie du traitement en temps différé. Ces sauts obligent également à découper un profil en plusieurs portions de longueurs moindres menant également à des limitations en termes de filtrage. Ces difficultés diminuent par conséquent le nombre de profils pleinement exploitables. Un important travail de correction des problèmes mentionnés précédemment, est requis pour augmenter leur nombre. Finalement, ce sont 10 profils (38 %) qui sont pleinement exploitables sans correction préalable, 7 profils (27 %) qui subissent la saturation du capteur accélérométrique, 6 profils (23 %) qui contiennent des sauts dans la navigation de l'AUV, 1 profil (4 %) qui cumule les deux problèmes précédemment mentionnés et 2 profils (8 %) qui sont inexploitables.

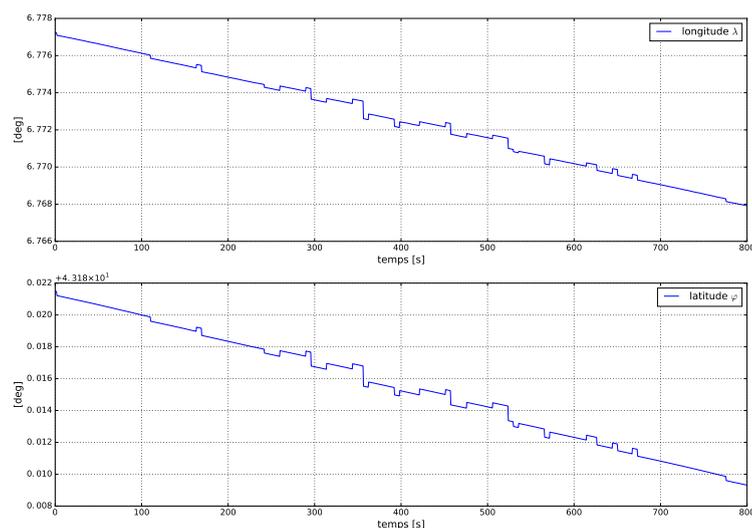


FIGURE 9.10 – Présence de sauts dans les données de navigation de l'AUV (longitude et latitude).

### 9.3. RÉSUMÉ DES DONNÉES ACQUISES

---

Les chapitres suivants analysent et traitent les données acquises sur les profils n°8 et 9. Ces deux profils correspondent, en fait, à un même profil navigué deux fois (un aller et un retour) en mode immersion constante égale à 1900 mètres, sur une distance totale approximative de 9 kilomètres. L'avantage majeur de cette répétition est la possibilité de réaliser un contrôle *interne* du traitement réalisé en comparant les résultats du profil aller avec ceux du profil retour. Le contrôle *externe* utilise, quant à lui, les données indépendantes de surface acquises par le SHOM.

## Chapitre 10

# Analyse des données

Ce chapitre s'intéresse à l'analyse des données acquises lors de la navigation de l'AUV sur les profils n°8 et 9 (Fig. 10.1). Il présente la stabilité en température du capteur durant le levé, compare les accélérations spécifiques de la centrale inertielle de l'AUV avec celles du capteur accélérométrique afin de contrôler le défaut d'orientation de ce dernier. Enfin, il estime, à partir de ces mêmes observations, le bras de levier séparant la centrale inertielle du capteur accélérométrique. Ce pré-traitement permet de rendre compte de la cohérence des observations et le cas échéant, d'appliquer des corrections en amont du traitement par filtrage de Kalman.

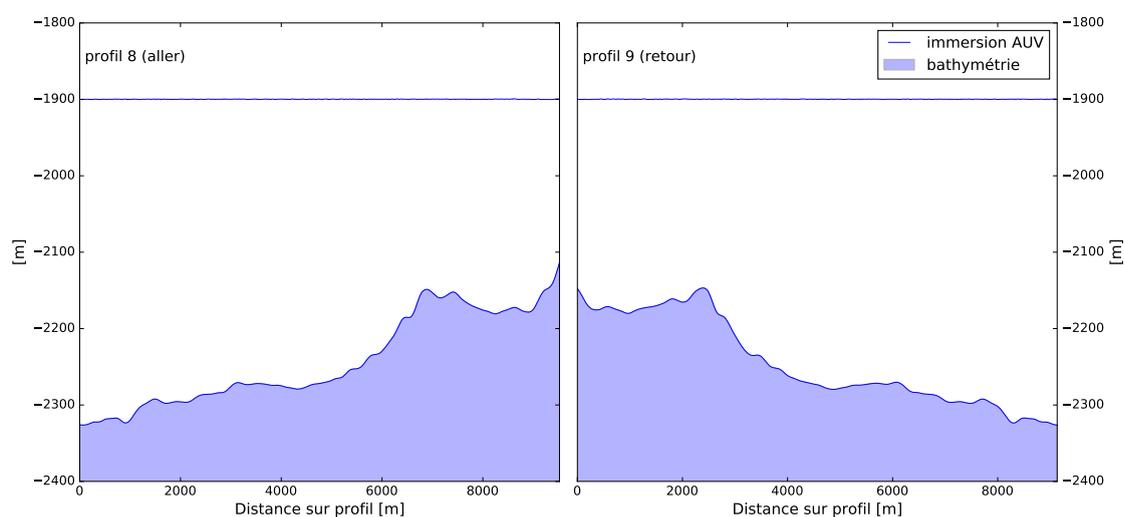


FIGURE 10.1 – Les profils n°8 et 9 correspondent à un même profil navigué dans un aller-retour.

## 10.1 Stabilité en température

La première donnée qu'il est essentiel d'analyser, avant le traitement des données accélérométriques du capteur, correspond à la température enregistrée par les accéléromètres. Pour rappel, la température de travail doit, idéalement, fluctuer le moins possible ( $\sigma_T < 0.05^\circ\text{C}$ ) durant la navigation de l'AUV et être la plus proche possible de la température à laquelle les coefficients d'étalonnage ont été estimés. La figure 10.2 présente la température moyenne enregistrée par les six accéléromètres du capteur, pour la journée du 20 mars 2016. Cette représentation permet de constater la durée de la mise à l'équilibre thermique des accéléromètres en milieu sous-marin. Cette phase est estimée à environ 5 heures. Elle débute à 7 heures, dès la mise en tension du capteur et se stabilise après 12 heures, tandis que l'AUV a déjà entamé le levé du profil n°8. Les températures moyennes enregistrées ont été estimées à  $14.49^\circ\text{C}$  sur le profil n°8 avec un écart-type égal à  $0.04^\circ\text{C}$  et  $14.56^\circ\text{C}$  sur le profil n°9 avec un écart-type égal à  $0.004^\circ\text{C}$ .

L'abandon du système de régulation de température du LiMo-g se voit donc justifié car les fluctuations constatées sont largement inférieures à ce que pouvait permettre un tel système. En effet, le système de régulation du LiMo-g permettait un maintien de la température à plus ou moins  $1^\circ\text{C}$ . Il faut cependant garder à l'esprit que le temps d'attente nécessaire à la stabilisation naturelle de la température du capteur accélérométrique est un facteur limitant à son utilisation. Enfin, cette température de travail, aussi stable soit-elle, diffère de la température de détermination des coefficients d'étalonnage estimée à  $23.8^\circ\text{C}$  (Fig. 6.10 p. 129). Conformément aux résultats établis dans le chapitre 6 (p. 131), l'application de tels coefficients aura pour conséquence un décalage des données accélérométriques qui s'en trouveront biaisées. Cet écart, en norme, sera estimé dans la section suivante.

## 10.2. COMPARAISON ET CORRECTION DES ACCÉLÉRATIONS SPÉCIFIQUES

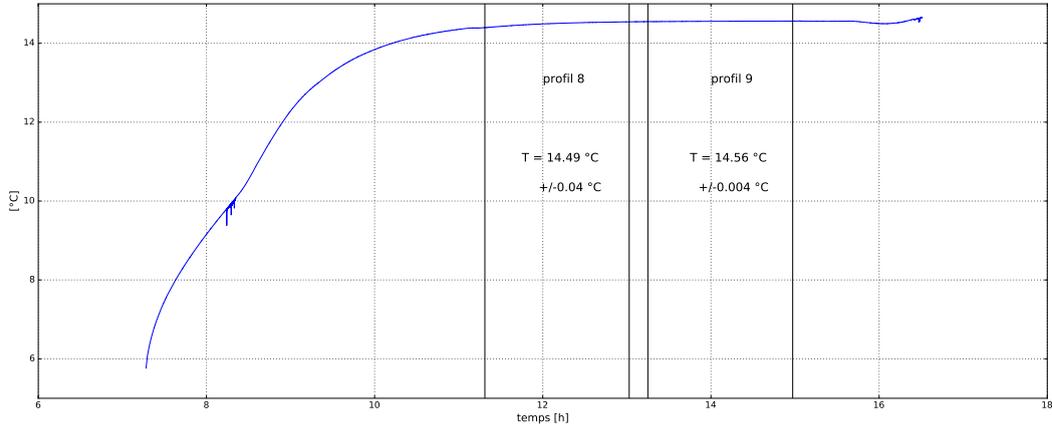


FIGURE 10.2 – Évolution de la température lors de la journée d'acquisition du 20 mars 2016 en Méditerranée. La température a atteint sa valeur d'équilibre à 12h, soit environ 5h après la mise en route du système GraviMob.

## 10.2 Comparaison et correction des accélérations spécifiques

Le chapitre 6 a mis en lumière le problème de la stabilité de l'orientation du capteur accélérométrique dans la partie avant de l'AUV. Afin de contrôler cette orientation, il est possible de comparer, en moyenne, les accélérations spécifiques issues de la centrale inertielle de l'AUV et celles mesurées par le capteur accélérométrique durant les phases d'acquisition. La centrale inertielle étant éloignée du capteur accélérométrique, la relation qui lie l'accélération spécifique mesurée par l'AUV et celle mesurée par le capteur, s'écrit :

$$a_{centrale}^b = \left( \Omega_{ib}^b \Omega_{ib}^b + \dot{\Omega}_{ib}^b \right) \times L^b + a_{capteur}^b \quad , \quad (10.1)$$

avec :

$a_{centrale}^b$  le vecteur des accélérations spécifiques, mesuré par la centrale inertielle de l'AUV ;

$a_{capteur}^b$  le vecteur des accélérations spécifiques, mesuré par le capteur et supposé calibré et projeté dans le repère du véhicule porteur (*b-frame*) ;

$L^b$  le bras de levier séparant la centrale inertielle du capteur accélérométrique. Ce vecteur est celui déterminé grâce au modèle numérique 3D de l'AUV disponible à

## 10.2. COMPARAISON ET CORRECTION DES ACCÉLÉRATIONS SPÉCIFIQUES

l'IFREMER. Il est considéré égal à :

$$L^b = \begin{pmatrix} 2.5879 \\ -0.0043 \\ 0.0481 \end{pmatrix} \quad [\text{m}] \quad (10.2)$$

Du fait de cet éloignement et du mouvement du véhicule porteur sur le profil de navigation, la comparaison des valeurs moyennes des vecteurs  $a_{centrale}^b$  et  $a_{capteur}^b$  n'a de sens que si le terme central de l'équation (10.1), à savoir  $(\Omega_{ib}^b \Omega_{ib}^b + \dot{\Omega}_{ib}^b) \times L^b$ , est en moyenne proche du vecteur nul. Le tableau 10.1 regroupe à ce titre, les valeurs moyennes des composantes de ce vecteur pour les deux profils.

	composante	unité	profil n°8	profil n°9
$\langle (\Omega_{ib}^b \Omega_{ib}^b + \dot{\Omega}_{ib}^b) \times L^b \rangle$	$x$	[mGal]	-322.7	-354.8
	$y$		-25.0	24.6
	$z$		-19.2	25.1

TABLE 10.1 – Valeurs moyennes des composantes du terme lié au vecteur bras de levier qui sépare la centrale inertielle du capteur accélérométrique.

Il apparaît que les valeurs moyennes des composantes du vecteur  $(\Omega_{ib}^b \Omega_{ib}^b + \dot{\Omega}_{ib}^b) \times L^b$ , suivant les axes  $e_y^b$  et  $e_z^b$  du  $b$ -frame, sont inférieures, en valeur absolue, à 30 mGal et peuvent donc être considérées comme assez faibles pour pouvoir comparer les composantes  $y$  et  $z$  des vecteurs  $a_{centrale}^b$  et  $a_{capteur}^b$ . Les valeurs moyennes plus importantes rencontrées suivant l'axe  $e_x^b$  du  $b$ -frame importent moins, puisque l'on cherche un éventuel défaut d'orientation suivant ce même axe.

La comparaison des composantes des vecteurs  $a_{centrale}^b$  et  $a_{capteur}^b$  moyennées sur les deux profils (Tab. 10.2 et 10.3) montre que la composante  $y$  du vecteur  $\langle a_{capteur}^b \rangle$  s'éloigne fortement de celle du vecteur  $\langle a_{centrale}^b \rangle$ . Ceci tend à montrer que la position du capteur accélérométrique, ou celle de la partie avant de l'AUV, a changé depuis le dernier assemblage du véhicule. La matrice de transformation  $C_{b'}^b$  déterminée au chapitre 6 doit par conséquent être corrigée.

## 10.2. COMPARAISON ET CORRECTION DES ACCÉLÉRATIONS SPÉCIFIQUES

	composante	unité	$\langle a_{centrale}^b \rangle$	$\langle a_{capteur}^b \rangle$	écart
profil n°8	$x$	[mGal]	-3942	-3059	-883
	$y$		20	-14480	<b>14500</b>
	$z$		980185	979508	677
	$\ \cdot\ $		980193	979620	573

TABLE 10.2 – Comparaison des composantes moyennées des accélérations spécifiques mesurées par la centrale inertielle et le capteur accélérométrique sur le profil n°8.

	composante	unité	$\langle a_{centrale}^b \rangle$	$\langle a_{capteur}^b \rangle$	écart
profil n°9	$x$	[mGal]	-3809	-2968	-841
	$y$		-48	-14531	<b>14483</b>
	$z$		980139	979456	683
	$\ \cdot\ $		980146	979568	578

TABLE 10.3 – Comparaison des composantes moyennées des accélérations spécifiques mesurées par la centrale inertielle et le capteur accélérométrique sur le profil n°9.

## 10.2. COMPARAISON ET CORRECTION DES ACCÉLÉRATIONS SPÉCIFIQUES

En faisant l'hypothèse d'un angle  $\theta'_x$  petit, la matrice de rotation à appliquer pour corriger les observations du capteur accélérométrique peut s'écrire de la manière suivante :

$$R_x(\theta'_x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\theta'_x \\ 0 & \theta'_x & 1 \end{pmatrix} \quad \text{tel que} \quad \langle a_{centrale}^b \rangle = R_x(\theta'_x) \langle a_{capteur}^b \rangle \quad (10.3)$$

Les deux jeux de données figurant dans les tableaux 10.2 et 10.3 appliqués à la relation (10.3) mènent par conséquent au système linéaire surdéterminé suivant :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -979508 \\ -14480 \\ -979456 \\ -14531 \end{pmatrix}}_A \times \theta'_x = \underbrace{\begin{pmatrix} 20 + 14480 \\ 980185 - 979508 \\ -48 + 14531 \\ 980139 - 979456 \end{pmatrix}}_B \quad (10.4)$$

La solution de ce système, au sens des moindres carrés, est donnée par :

$$\begin{aligned} \theta'_x &= (A^T \times A)^{-1} \times (A^T \times B) \\ &= -0.8481 \text{ deg} \end{aligned} \quad (10.5)$$

	composante	unité	$\langle a_{centrale}^b \rangle$	$R_x(\theta'_x) \langle a_{capteur}^b \rangle$	résidu
profil n°8	$x$	[mGal]	-3942	-3059	-883
	$y$		20	19	1
	$z$		980185	979722	463
	$\ \cdot\ $		980193	979727	466

TABLE 10.4 – Résidus sur les composantes moyennées des accélérations spécifiques du profil n°8, après application de la matrice  $R_x(\theta'_x)$ .

	composante	unité	$\langle a_{centrale}^b \rangle$	$R_x(\theta'_x) \langle a_{capteur}^b \rangle$	résidu
profil n°9	$x$	[mGal]	-3809	-2968	-841
	$y$		-48	-33	-15
	$z$		980139	979671	468
	$\ \cdot\ $		980146	979676	470

TABLE 10.5 – Résidus sur les composantes moyennées des accélérations spécifiques du profil n°9, après application de la matrice  $R_x(\theta'_x)$ .

## 10.2. COMPARAISON ET CORRECTION DES ACCÉLÉRATIONS SPÉCIFIQUES

L'application de la matrice de transformation  $R_x(\theta'_x)$  permet de diminuer significativement l'écart entre les composantes  $y$  des vecteurs  $\langle a_{centrale}^b \rangle$  et  $\langle a_{capteur}^b \rangle$  (Tab. 10.4 et 10.5). Cependant, la qualité de l'estimation de l'angle  $\theta'_x$  est difficilement quantifiable, ce dernier pouvant potentiellement avoir été sur-estimé. En effet, avant correction, l'écart en norme (Tab. 10.2 et 10.3) égal à 573 mGal (resp. 578 mGal) sur le profil n°8 (resp. n°9) peut s'expliquer par la température de levé en fond de mer. Cette dernière vaut approximativement 14.5°C alors que les coefficients d'étalonnage appliqués aux mesures du capteur accélérométrique ont été déterminés à une température de travail en laboratoire d'environ 23.8°C, soit un écart de température  $\Delta T = 9.3^\circ\text{C}$ . En utilisant la valeur moyenne de 62.84 mGal/°C établie au chapitre 6 (p. 136), il vient :

$$\Delta T \times 62.84 = 9.3 \times 62.84 \approx 584 \text{ mGal}$$

Cette valeur est cohérente avec les écarts constatés sur les valeurs moyennes avant correction (Tab. 10.2 et 10.3). L'application de la matrice  $R_x(\theta'_x)$  implique, quant à elle, une diminution d'environ 100 mGal sur les écarts en norme. Ces derniers ne sont donc plus interprétables avec l'écart de température. L'interprétation de ce résultat demeure complexe. En effet, même s'il existe probablement un défaut d'alignement du capteur accélérométrique, dû aux montages et démontages successifs de l'AUV, qu'il est nécessaire de corriger, l'estimation de ce défaut, c'est-à-dire l'angle  $\theta'_x$ , est peut-être sur-estimée.

Il est enfin possible d'affirmer que les différentes valeurs moyennes en norme présentées dans les tableaux précédents (Tabs. 10.2 à 10.5) correspondent, aux écarts près induits par les défauts d'orientation et de température, à la valeur moyenne du champ de pesanteur sur le profil navigué. En effet, le calcul des valeurs moyennes des composantes de l'accélération de l'AUV, donné par le terme  $C_e^n \left( \ddot{X}_P^e + 2\Omega_{ie}^e \dot{X}_P^e \right)$  de l'équation d'observation du système GraviMob (3.19, p.69), montre que ces dernières sont assez faibles (Tab. 10.6) pour considérer que les accélérations spécifiques moyennées sur la totalité du profil, ne contiennent plus que la part dûe à l'accélération de pesanteur. Il sera donc possible d'utiliser indifféremment les valeurs moyennes  $\| \langle a_{centrale}^b \rangle \|$ ,  $\| \langle a_{capteur}^b \rangle \|$  ou  $\| R_x(\theta'_x) \langle a_{capteur}^b \rangle \|$  pour initialiser le vecteur des paramètres dans le filtrage de Kalman.

	composante	unité	profil n°8	profil n°9
$\langle C_e^n (\ddot{X}_P^e + 2\Omega_{ie}^e \dot{X}_P^e) \rangle$	east	[mGal]	8.9	7.6
	north		12.6	13.3
	up		14.0	13.2

TABLE 10.6 – Valeurs moyennes des composantes de l'accélération induite par le mouvement de l'AUV.

### 10.3 Estimation du bras de levier

Les accélérations spécifiques mesurées par la centrale inertielle de l'AUV et par le capteur accélérométrique permettent également d'estimer le vecteur bras de levier,  $L^b$ , qui les sépare. L'unique estimation de ce dernier est issu d'un modèle numérique 3D de l'AUV avec le capteur accélérométrique (Chap. 5). Il a été estimé tel que :

$$L^b = \begin{pmatrix} 2.5879 \\ -0.0043 \\ 0.0481 \end{pmatrix} \quad [\text{m}]$$

Or, d'après la relation (10.1), la différence des accélérations spécifiques mesurées par la centrale inertielle et le capteur accélérométrique durant la navigation de l'AUV, est liée au vecteur bras de levier  $L^b$  par :

$$\Delta a^b = a_{centrale}^b - a_{capteur}^b = \left( \Omega_{ib}^b \Omega_{ib}^b + \dot{\Omega}_{ib}^b \right) \times L^b$$

En supposant déterminé à chaque époque le terme  $\left( \Omega_{ib}^b \Omega_{ib}^b + \dot{\Omega}_{ib}^b \right)$ , la relation (10.6) s'identifie à un système linéaire de la forme :

$$Z = H \times X \quad , \quad (10.6)$$

où :

$Z = \Delta a^b$  s'identifie à un vecteur de mesures<sup>1</sup> ;

$H = \left( \Omega_{ib}^b \Omega_{ib}^b + \dot{\Omega}_{ib}^b \right)$  s'identifie à un modèle d'observation ;

$X = L^b$  s'identifie à un vecteur de paramètres.

---

1. La matrice de covariances associée à ce vecteur de mesure reprend l'incertitude des mesures accélérométriques de la centrale inertielle. Elle vaut donc  $\sigma_a \times I_3$ , avec  $\sigma_a = 40$  mGal.

### 10.3. ESTIMATION DU BRAS DE LEVIER

---

L'équation (10.6) s'apparente à une équation d'observation qui relie les mesures  $\delta a^b$  au vecteur des paramètres  $L^b$ . Par conséquent, il apparaît que le vecteur bras de levier  $L^b$  peut être estimé par un filtre de Kalman linéaire classique dont le modèle d'évolution est tel que :

$$L_{k+1}^b = L_k^b + Q$$

Ce modèle considère les composantes du vecteur bras de levier comme constantes d'une époque à la suivante, à une incertitude près que l'on fixe à 0.1 mm, soit :

$$Q = \begin{pmatrix} 10^{-8} & 0 & 0 \\ 0 & 10^{-8} & 0 \\ 0 & 0 & 10^{-8} \end{pmatrix}$$

La figure 10.3 montre la convergence rapide des composantes estimées du bras de levier pour les deux profils navigués. Les fluctuations peuvent être légitimement attribuées à l'incertitude des coefficients de la matrice d'observation  $H = (\Omega_{ib}^b \Omega_{ib}^b + \dot{\Omega}_{ib}^b)$  dont le calcul préalable au filtrage fait intervenir les angles d'attitudes imparfaits de l'AUV. La prise en compte de ces incertitudes dans un filtre de Kalman *unscented* a été expérimentée mais conduit, cependant, à la divergence de l'estimation du bras de levier.

Les valeurs moyennes des composantes du bras de levier  $L^b$  ainsi que leurs écarts-types, sont résumés dans le tableau 10.7. Au vu des écarts-types calculés, les résultats obtenus sont cohérents avec les valeurs des composantes extraites du modèle 3D de l'AUV, également présentées dans le tableau 10.7. Les écarts ne sont cependant pas indiqués puisque le point positionné dans la centrale inertielle de l'AUV diffère du lieu de la mesure accélérométrique au sein de cette dernière.

	unité	IFREMER	profil n°8		profil n°9	
		valeur	valeur	écart-type	valeur	écart-type
$L_x$	[mm]	2587.9	2564.8	27.5	2586.2	34.9
$L_y$		-4.3	-51.7	19.2	-58.8	24.1
$L_z$		48.1	-23.3	10.7	-27.9	12.1

TABLE 10.7 – Valeurs moyennes, sur les profils n°8 et 9, des composantes du bras de levier obtenues en sortie du filtre de Kalman linéaire.

### 10.3. ESTIMATION DU BRAS DE LEVIER

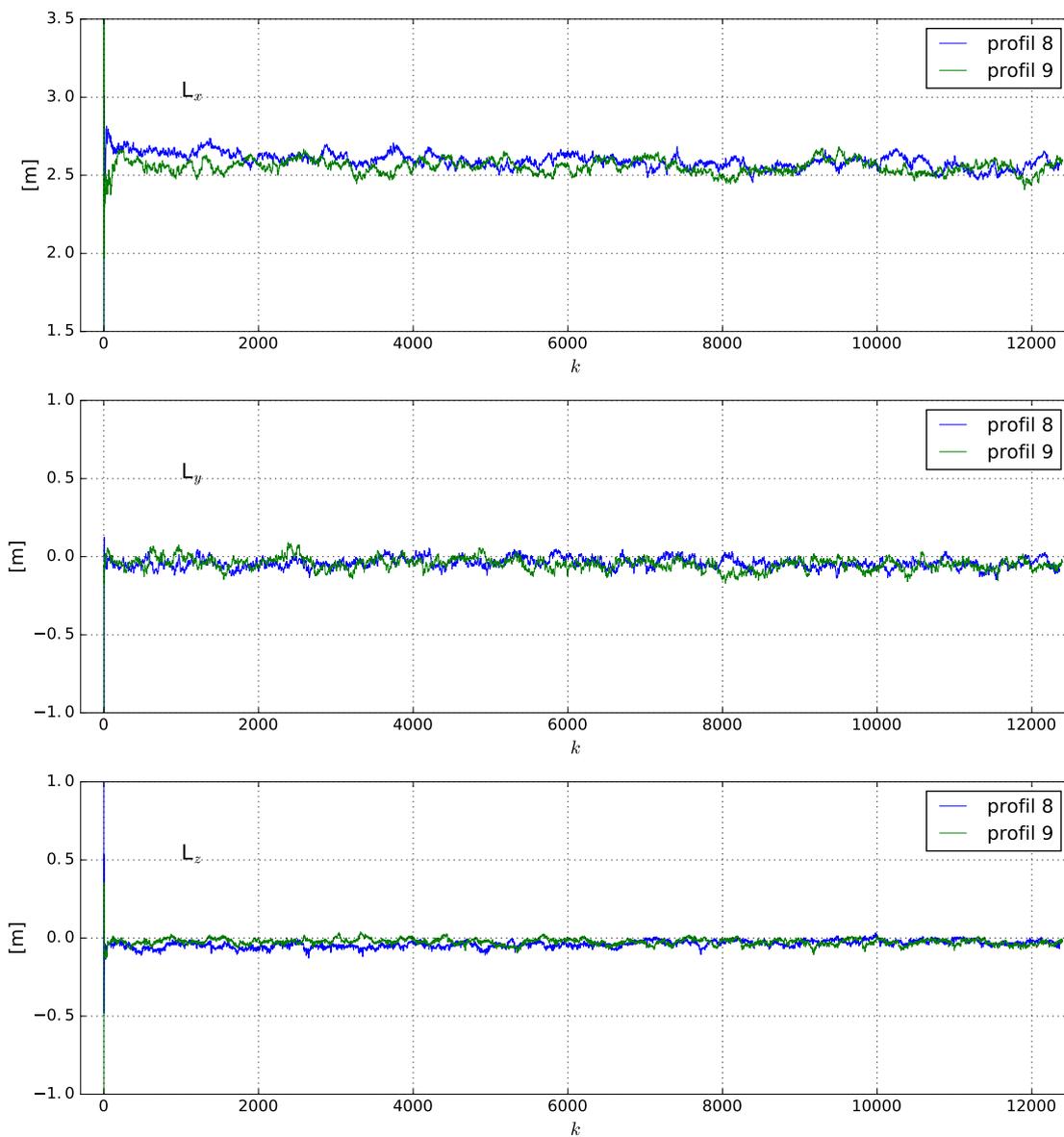


FIGURE 10.3 – Estimation, dans le  $b$ -frame, des composantes du vecteur bras de levier séparant la centrale inertielle et le capteur accélérométrique.

Ces résultats démontrent la cohérence des mesures accélérométriques du capteur par rapport aux mesures de la centrale inertielle de l'AUV. Il conviendrait, cependant, d'analyser plus finement, à partir de données simulées, l'impact des incertitudes affectant le calcul préliminaire de la matrice d'observation  $H = \left( \Omega_{ib}^b \Omega_{ib}^b + \dot{\Omega}_{ib}^b \right)$  sur la précision de l'estimation donnée par le filtre de Kalman linéaire.

Le chapitre suivant applique le filtre de Kalman *unscented* sur les observations des profils n°8 et 9 et compare l'estimation obtenue du champ avec les données de surface du SHOM.

---

# Chapitre 11

## Filtrage des données

### 11.1 Filtrage de Kalman *unscented*

Le filtre de Kalman *unscented* utilisé pour traiter les observations acquises sur les deux profils, n°8 et 9, est déduit de la forme générale décrite dans le chapitre 8 de ce manuscrit (p. 182). Puisque ce chapitre avait montré que l'estimation des angles de tangage et de roulis menait à la divergence du filtre de Kalman, le vecteur des paramètres est, par conséquent, choisi tel que :

$$X_k = \left( \lambda \quad \dot{\lambda} \quad \ddot{\lambda} \quad \varphi \quad \dot{\varphi} \quad \ddot{\varphi} \quad h \quad \dot{h} \quad \ddot{h} \quad \delta \quad \dot{\delta} \quad \ddot{\delta} \quad g_e \quad \dot{g}_e \quad \ddot{g}_e \quad g_n \quad \dot{g}_n \quad \ddot{g}_n \quad g_u \quad \dot{g}_u \quad \ddot{g}_u \right)_k^T,$$

dans lequel tangage et roulis ne figurent plus. Ce vecteur est associé au modèle d'évolution suivant :

$$A = \begin{pmatrix} A_\lambda & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & A_{g_u} \end{pmatrix}, \quad A_i = \begin{pmatrix} 1 & \Delta T & \Delta T^2/2 \\ 0 & 1 & \Delta T \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

où  $\Delta T = 0.5$  s et  $i$  désigne successivement les variables  $\lambda$ ,  $\varphi$ ,  $h$ ,  $\delta$ ,  $g_e$ ,  $g_n$  et  $g_u$ .

L'incertitude accordée à ce modèle d'évolution se traduit par la matrice de covariance  $Q$ , dont la forme générale s'écrit comme suit :

$$Q = \begin{pmatrix} \sigma_\lambda^2 Q_\lambda & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{g_u}^2 Q_{g_u} \end{pmatrix}, \quad Q_i = \begin{pmatrix} \frac{\Delta T^4}{4} & \frac{\Delta T^3}{2} & \frac{\Delta T^2}{2} \\ \frac{\Delta T^3}{2} & \Delta T^2 & \Delta T \\ \frac{\Delta T^2}{2} & \Delta T & 1 \end{pmatrix}$$

Les valeurs des incertitudes  $\sigma_\lambda$ ,  $\sigma_\varphi$ ,  $\sigma_h$ ,  $\sigma_\delta$ ,  $\sigma_{g_e}$ ,  $\sigma_{g_n}$  et  $\sigma_{g_u}$  sont les mêmes que celles utilisées pour l'expérimentation du filtre de Kalman *unscented*. Elles sont calculées à partir

des données simulées dans le chapitre 7, à savoir :

$$\begin{aligned}\sigma_{\dot{\lambda}} &= 5 \times 10^{-6} \text{ deg s}^{-2} & \sigma_{\dot{\varphi}} &= 4 \times 10^{-6} \text{ deg s}^{-2} & \sigma_{\dot{h}} &= 0.1 \text{ m s}^{-2} \\ \sigma_{\ddot{\delta}} &= 0.8 \text{ deg s}^{-2} \\ \sigma_{\ddot{g}_e} &= 10^{-3} \text{ mGal s}^{-2} & \sigma_{\ddot{g}_n} &= 10^{-3} \text{ mGal s}^{-2} & \sigma_{\ddot{g}_{up}} &= 10^{-3} \text{ mGal s}^{-2}\end{aligned}$$

L'initialisation du vecteur des paramètres a été choisie tel que :

$$X_0 = \left( \lambda_0 \quad \dot{\lambda}_0 \quad \ddot{\lambda}_0 \quad \varphi_0 \quad \dot{\varphi}_0 \quad \ddot{\varphi}_0 \quad h_0 \quad \dot{h}_0 \quad \ddot{h}_0 \quad \delta_0 \quad \dot{\delta}_0 \quad \ddot{\delta}_0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad - \langle a_{\text{capteur}} \rangle \quad 0 \quad 0 \right)^T$$

où :

- $\lambda_0$ ,  $\varphi_0$ ,  $h_0$  et  $\delta_0$  sont directement extraits du fichier de la navigation estimée en temps différé de l'AUV et fourni par l'IFREMER ;
- les dérivées premières et secondes des données de position et de cap sont calculées, en amont, par dérivation numérique ;
- $\langle a_{\text{capteur}} \rangle$  désigne la norme des accélérations spécifiques mesurées par le capteur accélérométrique et moyennées sur l'ensemble du profil.

De la même manière, le vecteur des observations se voit réduit à l'écriture suivante :

$$Z_k = \left( Z_a \quad Z_{\text{pos,att}} \right)_k^T,$$

où  $Z_a$  contient les observations accélérométriques du capteur qui sont liées aux composantes du vecteur des paramètres par l'équation d'observation du système GraviMob :

$$Z_a = \frac{1}{2} \left( a_{M_\alpha}^b + a_{M_\beta}^b \right) = C_n^b \left( C_e^m \left[ \ddot{X}_P^e + 2\Omega_{ie}^e \dot{X}_P^e \right] - g_P^n \right)$$

et  $Z_{\text{pos,att}}$  contient les observations de position et de cap de l'AUV. Ce vecteur est linéairement lié au vecteur des paramètres par :

$$Z_{\text{pos,att}} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \varphi \\ h \\ \delta \end{pmatrix}_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} X_k$$

Par ailleurs, les incertitudes des observations sont contenues dans la matrice de covariances  $R$ , telle que :

$$R = \begin{pmatrix} \sigma_a^2 I_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_\lambda^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_\varphi^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_h^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_\delta^2 \end{pmatrix},$$

avec :

$$\sigma_a = 1 \text{ mGal} \quad \sigma_\lambda = 3.07 \times 10^{-5} \text{ deg} \quad \sigma_\varphi = 2.25 \times 10^{-5} \text{ deg} \quad \sigma_h = 0.3 \text{ m} \quad \sigma_\delta = 0.05 \text{ deg}$$

Finalement, l'algorithme du filtre de Kalman *unscented* mis en œuvre pour l'estimation du vecteur des paramètres, correspond exactement à celui qui a été décrit dans la section 8.2 du chapitre 8. Les paramètres d'échelle qui interviennent dans cette estimation ont été fixés aux valeurs suivantes :

$$\alpha = 0.5 \quad \beta = 2 \quad \kappa = 0.6$$

La convergence de l'erreur formelle est atteinte pour  $k > 1000$  ou autrement dit, pour un temps supérieur à 500 secondes ou une distance sur profil d'environ 750 m. Cette convergence est illustrée sur la figure 11.1, qui présente l'évolution de l'erreur formelle, issue de la matrice de covariances estimée en sortie du filtre de Kalman *unscented*, pour les trois composantes du champ de pesanteur. Pour rappel, cette erreur représente le niveau de cohérence des composantes estimées du champ de pesanteur au vu de la modélisation du problème et des incertitudes sur les grandeurs entrant dans le processus d'estimation. Elle ne correspond en rien à l'exactitude des valeurs obtenues sur les composantes du champ de pesanteur. Cependant, l'erreur formelle sur la composante  $g_{up}^n$  est inférieure d'un facteur quatre à celles des deux autres composantes, ce qui signifie que la modélisation du système, comprenant les modèles d'évolution et d'observation ainsi que leurs incertitudes, semble davantage adaptée à cette composante verticale.

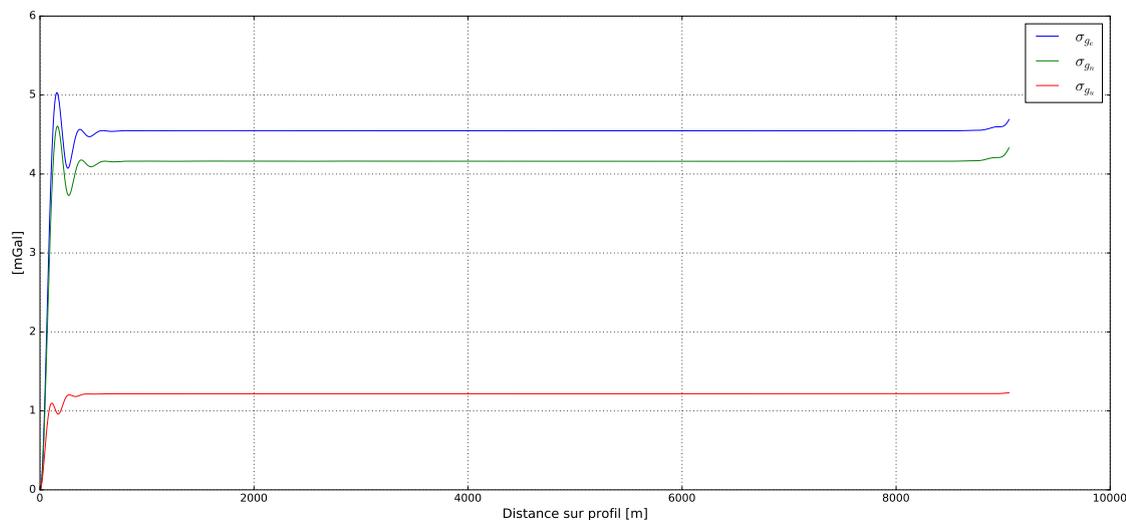


FIGURE 11.1 – Convergence de l’erreur formelle pour les trois composantes du champ de pesanteur. La convergence est identique quel que soit le profil envisagé.

La figure 11.2 présente les variations des trois composantes ( $g_{east}$ ,  $g_{north}$  et  $g_{up}$ ) estimées par le filtre de Kalman *unscented*. Les courbes bleues sont relatives au profil n°8 tandis que les courbes vertes sont relatives au profil n°9. Pour des raisons pratiques, les résultats relatifs au profil n°9 ont été inversés afin d’être superposés aux résultats du profil n°8.

Tandis que les variations de la composante verticale du champ ( $g_{up}$ ) se superposent de manière cohérente, les composantes *est* ( $g_{east}$ ) et *nord* ( $g_{north}$ ) estimées s’opposent d’un profil à l’autre. En effet, les valeurs moyennes de ces deux composantes sur chaque profil indiquent :

$$\text{profil n}^\circ 8 \begin{cases} \bar{g}_{east} & = & 1038.63 \text{ mGal} \\ \bar{g}_{north} & = & -784.80 \text{ mGal} \end{cases} \quad \text{profil n}^\circ 9 \begin{cases} \bar{g}_{east} & = & -941.58 \text{ mGal} \\ \bar{g}_{north} & = & 708.28 \text{ mGal} \end{cases}$$

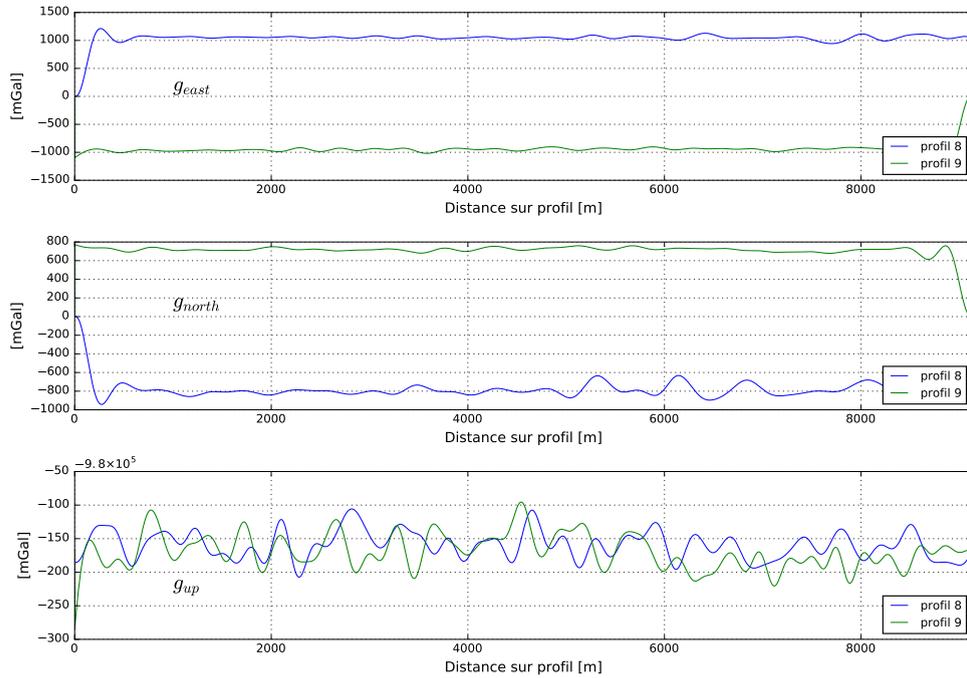


FIGURE 11.2 – Composantes  $g_{east}$ ,  $g_{north}$  et  $g_{up}$  estimées par le filtre de Kalman, sur les profils n°8 et 9. L'opposition des composantes *est* et *nord* peut s'expliquer par l'existence d'un biais accélérométrique constant dans le repère du véhicule porteur (*b-frame*).

Le repère de navigation (*n-frame*) étant invariant du profil n°8 au profil n°9, les valeurs moyennes de ces composantes devraient logiquement être proches l'une de l'autre et de même signe.

Pour expliquer la raison de cette opposition, supposons qu'il existe un biais accélérométrique, constant dans le repère du véhicule porteur (*b-frame*), que l'on note  $T_a$ . Ce biais peut être induit par un défaut d'alignement du capteur accélérométrique par rapport au repère du véhicule porteur, ou par les variations des coefficients d'étalonnage en raison du décalage de la température de travail. Les profils n°8 et 9 étant navigués en sens inverse l'un par rapport à l'autre, le repère du véhicule porteur sur le profil n°8 apparaît comme inversé, comparé à son homologue sur le profil n°9 (Fig. 11.3). Par conséquent, le passage du repère du véhicule porteur (*b-frame*) au repère de navigation (*n-frame*), sur chaque profil, implique nécessairement :

$$T_{a, \text{profil n}^\circ 8}^n = -T_{a, \text{profil n}^\circ 9}^n$$

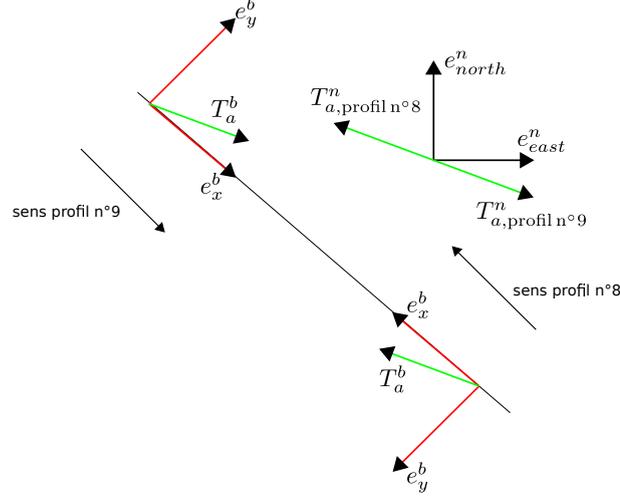


FIGURE 11.3 – Un biais constant dans le repère du véhicule porteur peut expliquer l’opposition des valeurs des composantes *east* et *north* du champ de pesanteur.

Le calcul de ce biais dans le repère de navigation (*n-frame*) s’effectue à partir des valeurs moyennes des composantes *east* et *north* indiquées précédemment :

$$\begin{pmatrix} \bar{g}_{e, \text{profil n}^\circ 8} \\ \bar{g}_{n, \text{profil n}^\circ 8} \end{pmatrix} + T_{a, \text{profil n}^\circ 8}^n = \begin{pmatrix} \bar{g}_{e, \text{profil n}^\circ 9} \\ \bar{g}_{n, \text{profil n}^\circ 9} \end{pmatrix} + T_{a, \text{profil n}^\circ 9}^n = \begin{pmatrix} \bar{g}_{e, \text{profil n}^\circ 9} \\ \bar{g}_{n, \text{profil n}^\circ 9} \end{pmatrix} - T_{a, \text{profil n}^\circ 8}^n$$

Soit :

$$T_{a, \text{profil n}^\circ 8}^n = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \bar{g}_{e, \text{profil n}^\circ 9} - \bar{g}_{e, \text{profil n}^\circ 8} \\ \bar{g}_{n, \text{profil n}^\circ 9} - \bar{g}_{n, \text{profil n}^\circ 8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -990 \\ 747 \end{pmatrix} \quad [\text{mGal}]$$

La figure 11.4 présente, pour chaque profil, les variations des composantes *east* et *north* corrigées de ce biais accélérométrique ainsi que la composante *up* qui elle, reste inchangée.

Un nouveau calcul des valeurs moyennes des composantes du champ donne :

$$\text{profil n}^\circ 8 \begin{cases} \bar{g}_{east} & = & 48.53 \text{ mGal} \\ \bar{g}_{north} & = & -38.26 \text{ mGal} \\ \bar{g}_{up} & = & -980160.31 \text{ mGal} \end{cases} \quad \text{profil n}^\circ 9 \begin{cases} \bar{g}_{east} & = & 48.53 \text{ mGal} \\ \bar{g}_{north} & = & -38.26 \text{ mGal} \\ \bar{g}_{up} & = & -980169.33 \text{ mGal} \end{cases}$$

Les valeurs moyennes de la composante  $g_{up}$ , non affectée par la correction du biais, ne s’éloignent que de 9 mGal. Ce faible écart est un premier signe majeur qui tend à démontrer la fiabilité de l’estimation du champ.

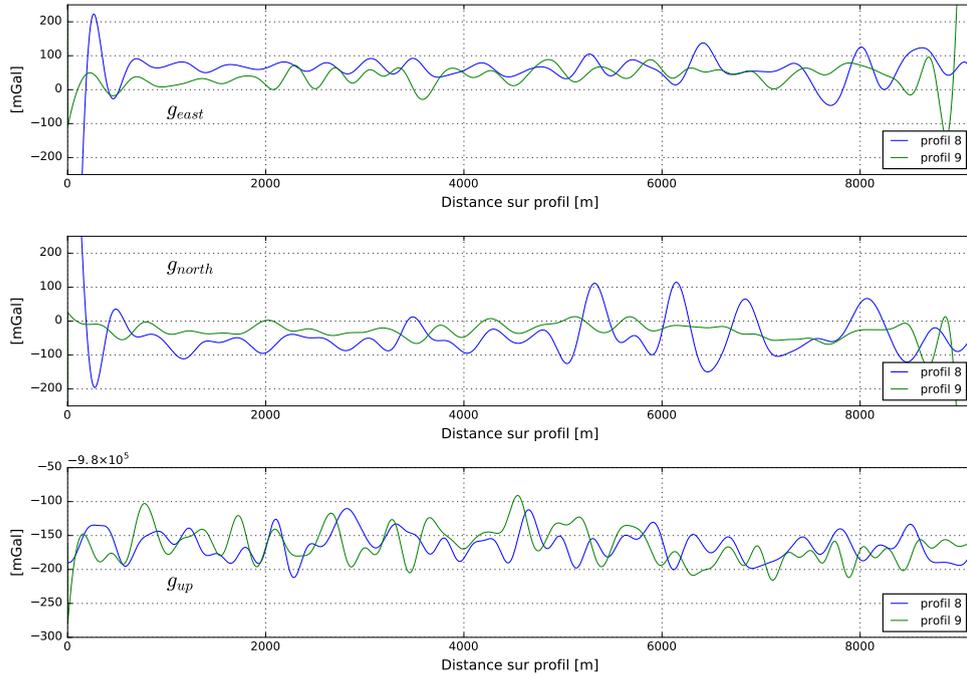


FIGURE 11.4 – Composantes  $g_{east}$ ,  $g_{north}$  et  $g_{up}$  estimées par le filtre de Kalman. Les composantes *east* et *north* sont corrigées d'un biais accélérométrique.

### Comparaison avec EGM2008

En prenant  $\|g\| = 980\,162$  mGal comme norme moyenne de l'accélération de pesanteur sur les deux profils, l'estimation des angles de déviation de la verticale avec les valeurs moyennées des composantes *east* et *north* conduit à :

$$\eta = \frac{\bar{g}_{east}}{\|g\|} \approx 10.2'' \quad \text{et} \quad \xi = \frac{\bar{g}_{north}}{\|g\|} \approx -8.1''$$

Les résultats ainsi obtenus peuvent être comparés avec les valeurs déduites des modèles globaux du champ de gravité, tel que le modèle EGM2008 (*Earth Gravitational Model 2008*) [Pavlis et al. 2012]. (Fig. 11.5). L'extraction des valeurs des angles de déviation de la verticale sur le profil n°8, à partir de ce modèle indique :

$$1.22'' < \eta < 2.15'' \quad \text{et} \quad -9.77'' < \xi < -9.72''$$

## 11.1. FILTRAGE DE KALMAN *UNSCENTED*

Finalement, seule l'estimation de l'angle  $\xi$  semble en accord avec les valeurs extraites du modèle EGM2008. L'estimation de l'angle  $\eta$  n'est cependant pas *aberrante* au vu des valeurs données par le modèle EGM2008. Cette analyse externe montre donc, qu'en moyenne, l'estimation des composantes *east* et *north* par le filtre de Kalman *unscented* reste **cohérente** avec les valeurs attendues sur ces grandeurs géophysiques.

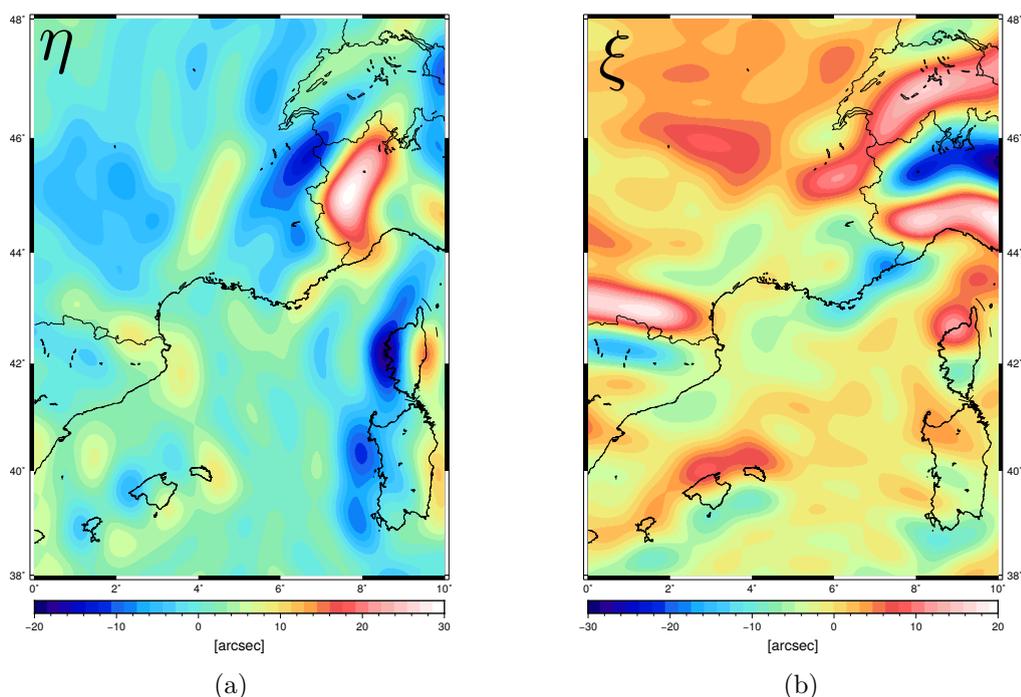


FIGURE 11.5 – Angles de déviation de la verticale issus du modèle EGM2008. (a) déviation *est*  $\eta$ . (b) déviation *nord*  $\xi$ .

Enfin, la figure 11.6 présente, pour chaque profil, les variations de la norme du vecteur accélération de pesanteur, calculée à partir des trois composantes ( $g_{east}$ ,  $g_{north}$  et  $g_{up}$ ) estimées par le filtre de Kalman. Les fortes variations rencontrées sont atténuées à l'aide d'un filtre à moyenne glissante. La largeur de la fenêtre moyennante a été fixée à 3000 mètres et les signaux lissés ont été représentés sur la figure 11.7.

## 11.1. FILTRAGE DE KALMAN *UNSCENTED*

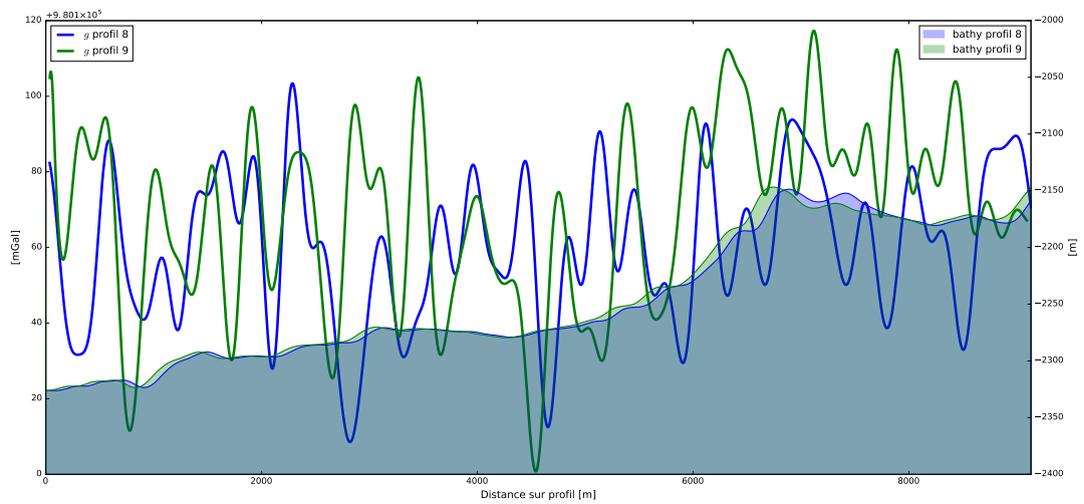


FIGURE 11.6 – Variations de la norme du champ de pesanteur en sortie du filtre de Kalman *unscented*.

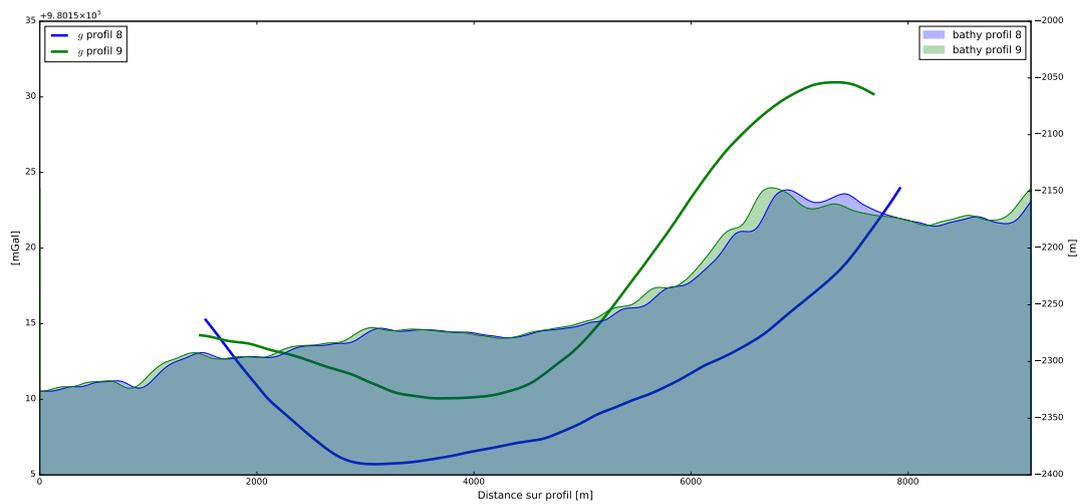


FIGURE 11.7 – Variations de la norme du champ de pesanteur après filtrage par moyenne glissante.

## 11.2 Comparaison avec les données du SHOM

La donnée de référence, mise à disposition par le SHOM, correspond à une anomalie à l'air libre dont les variations ont été représentées avec la bathymétrie du profil sur la figure 11.8. Il s'agit de l'unique information permettant de juger de la qualité des deux signaux filtrés (Fig. 11.7) et issus de mesures acquises à 1900 mètres d'immersion.

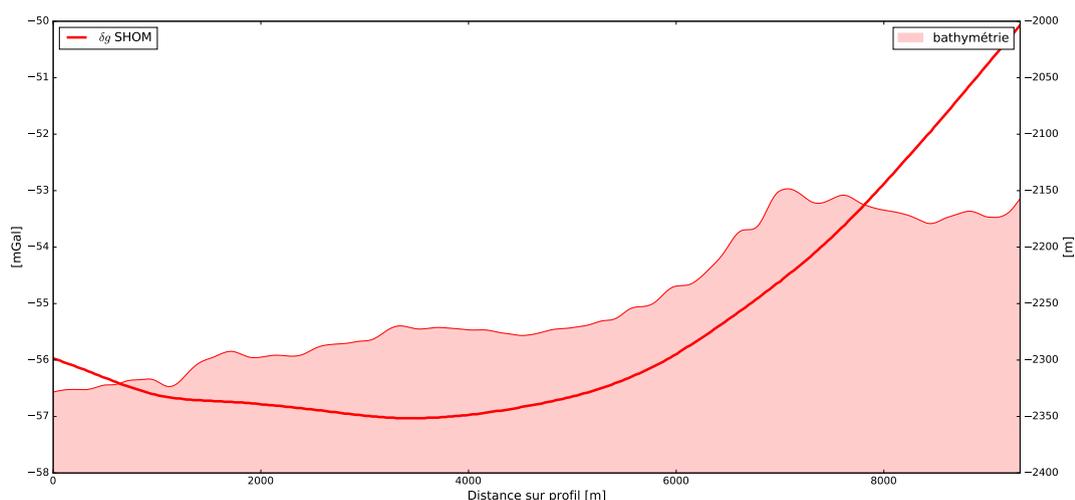


FIGURE 11.8 – Anomalies gravimétriques de référence du SHOM en surface du profil navigué par l'AUV.

Afin de rendre les signaux de fond comparables avec l'anomalie de surface de référence, il a été envisagé de leur soustraire un modèle de champ normal de pesanteur, à altitude nulle, dont l'expression est donnée par ([Hofmann-Wellenhof and Moritz 2006]) :

$$\gamma = \frac{a\gamma_e \cos^2 \varphi + b\gamma_p \sin^2 \varphi}{\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}} ,$$

où :

$a$  et  $b$  correspondent respectivement au demi grand axe et demi petit axe de l'ellipsoïde de référence ;

$\gamma_e = 978040$  mGal correspond à la valeur du champ normal de pesanteur à l'équateur ;

$\gamma_p = 983220$  mGal correspond à la valeur du champ normal de pesanteur aux pôles ;

$\varphi$  est la latitude du point courant.

Le retrait de ce modèle de champ normal de pesanteur est presque équivalent à une translation des signaux filtrés (Fig. 11.9). Les grandeurs ainsi formées peuvent être qualifiées d'anomalies à l'air libre, si l'on considère que le retrait du modèle de champ normal annule la part de l'accélération due à la rotation terrestre.

Cette opération ne suffit cependant pas à rendre superposables les anomalies de fond nouvellement formées et l'anomalie de référence. En moyenne, ces dernières sont encore séparées d'environ 210 mGal. Cet écart peut s'expliquer par l'influence de la couche d'eau au-dessus du véhicule porteur, par le fait que la mesure soit effectuée 1900 mètres plus bas que la mesure de surface, et par les erreurs dues à l'écart de température existant entre la température de travail et la température d'étalonnage du capteur accélérométrique. La correction de l'effet dû à la topographie sous-marine et à la couche d'eau nécessiterait, cependant, un modèle précis<sup>1</sup> du relief sous-marin afin de calculer son effet gravimétrique à l'altitude de l'AUV. Ce prolongement vers le haut des données aurait également pour conséquence inévitable de lisser davantage les variations des anomalies gravimétriques calculées.

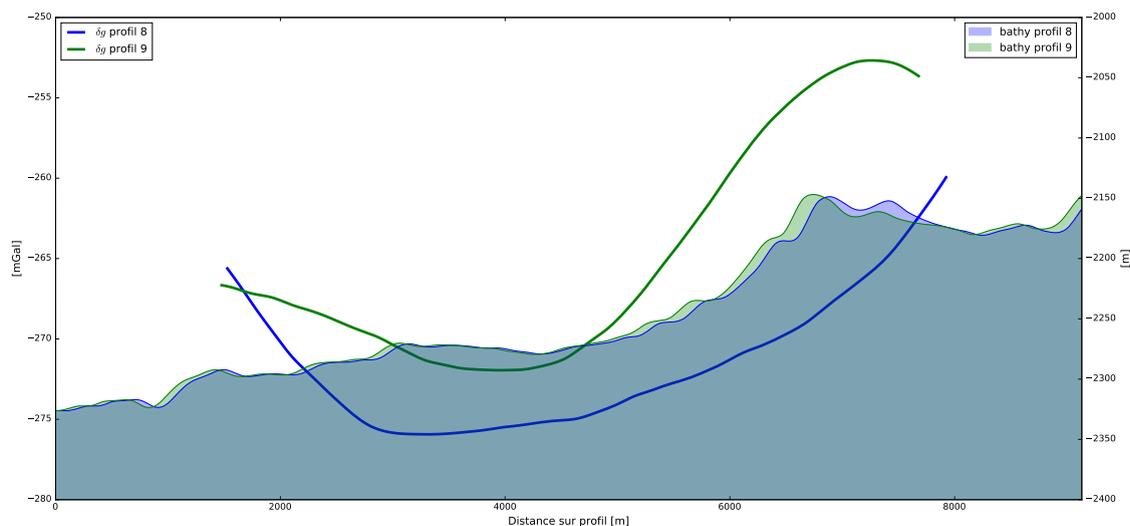


FIGURE 11.9 – Anomalies gravimétriques à l'air libre des deux profils navigués par l'AUV.

1. Afin de calculer un effet gravimétrique suffisamment précis, un modèle bathymétrique de résolution métrique semble suffisant.

## 11.2. COMPARAISON AVEC LES DONNÉES DU SHOM

---

La seconde influence difficilement modélisable, est celle des paramètres appliqués en amont du processus de filtrage, tels que les coefficients d'étalonnage du capteur accélérométrique et son orientation dans le véhicule porteur. Les incertitudes attachées à ces paramètres, notamment au vu de l'écart de température existant entre leur détermination en laboratoire et leur application en fond de mer, influent nécessairement sur le décalage constaté entre les signaux estimés et le signal de référence.

Afin de réaliser une comparaison des données mesurées et de référence, nous avons opté pour l'examen des tendances des signaux. Il a donc été envisagé d'ajuster un modèle polynomial de même degré dans chaque anomalie gravimétrique. Étant donnée l'allure des variations de l'anomalie de référence du SHOM (Fig. 11.8), une limitation au degré deux est apparue suffisante. Les tendances ont été représentées, pour chaque anomalie, sur la figure 11.10.

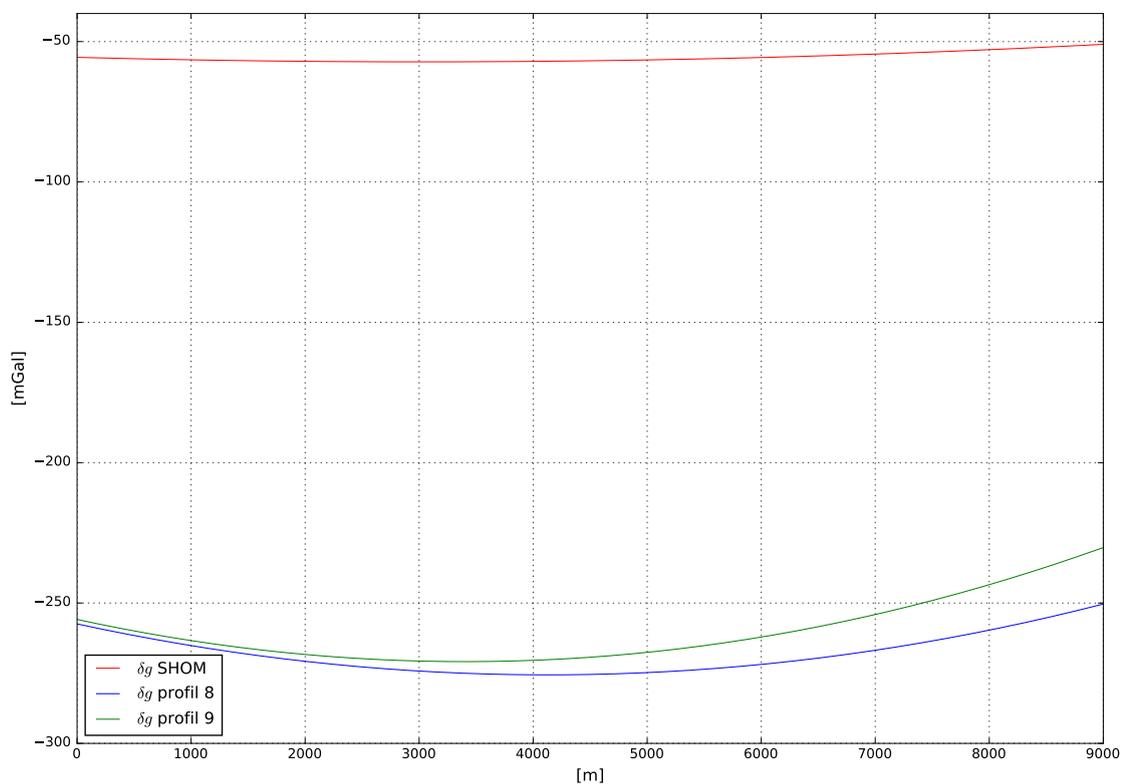


FIGURE 11.10 – Tendances polynomiales de degré 2 extraites des anomalies gravimétriques.

Puisque les effets précédemment mentionnés sont difficilement quantifiables en chaque point du profil levé, il a été proposé d'estimer une fonction de transfert permettant d'amener, au mieux, l'une des deux tendances extraites des anomalies de fond, sur la tendance extraite de l'anomalie de surface du SHOM. La fonction de transfert représente la loi de correction à appliquer à tout autre anomalie mesurée sur le même profil, dans des conditions de navigation similaires. Elle comprend le prolongement vers le haut et compense l'utilisation des paramètres d'étalonnage erronés.

En se limitant au premier degré, la loi de passage entre l'anomalie déduite du profil n°8 et l'anomalie de référence s'écrit :

$$f_8(\delta g) = 0.21 \times \delta g + 0.62$$

L'application de cette fonction sur l'anomalie déduite du profil n°9 permet de calculer les résidus entre l'anomalie *corrigée*, notée  $f_8(\delta g \text{ profil n°9})$ , et l'anomalie de référence. L'histogramme de ces résidus est représenté sur la figure 11.11a. Ces derniers sont compris entre 0.5 et 3.5 mGal.

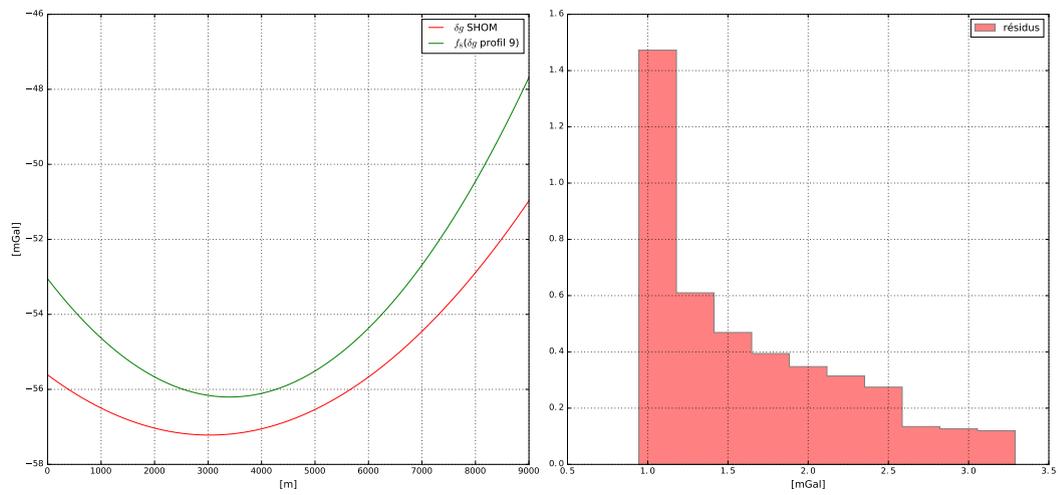
Le même exercice peut être effectué en utilisant, initialement, l'anomalie déduite du profil n°9 pour estimer la loi de correction. Dans ce cas, celle-ci s'exprime par :

$$f_9(\delta g) = 0.16 \times \delta g - 14.8$$

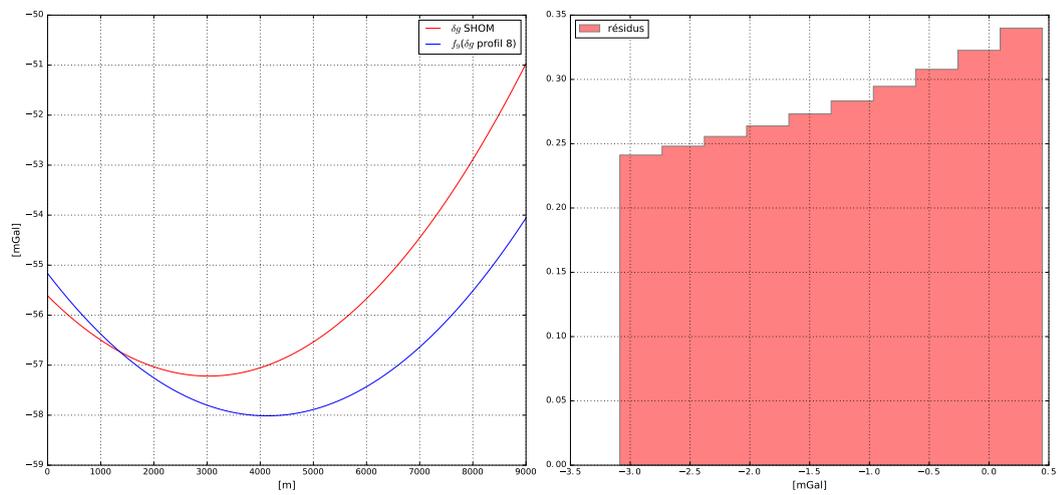
Appliquée à l'anomalie déduite de profil n°8, les résidus entre l'anomalie *corrigée*, notée  $f_9(\delta g \text{ profil n°8})$ , et l'anomalie de référence du SHOM sont représentés sur la figure (Fig. 11.11b) et se répartissent entre 0.5 et  $-3.5$  mGal.

La méthode de comparaison mise en œuvre ici pour quantifier l'exactitude du système GraviMob, apparaît comme la plus rigoureuse compte tenu des données de référence à notre disposition. La référence de surface du SHOM n'est certes pas idéale mais elle constitue la seule donnée de qualité existante pouvant être employée dans ce cas. Un modèle bathymétrique de résolution métrique, non disponible dans cette expérimentation, nécessiterait un travail important de levé mais permettrait cependant de faciliter le prolongement vers le haut des données observées.

## 11.2. COMPARAISON AVEC LES DONNÉES DU SHOM



(a)



(b)

FIGURE 11.11 – Résidus après application des fonctions de transfert.

# Conclusion



## CONCLUSION

---

Voilà presque 20 ans que le projet de développement d'un instrument de gravimétrie mobile a été initié par Henri Duquenne. Encore aujourd'hui, le LiMo-g et le système GraviMob apparaissent comme des instruments novateurs dans le sens où ils font le choix d'abandonner les systèmes de plateformes stabilisées au profit d'une technologie *strapdown*. Là où encombrement et consommation électrique minimaux deviennent des enjeux de plus en plus cruciaux, leurs simplicités matérielles apparaissent comme des arguments de poids vis-à-vis des autres systèmes en cours de développement. Évidemment, cette simplicité se répercute dans la phase de fusion et de traitement des données qui s'avère, logiquement, plus complexe. À ce titre, cette conclusion revient sur chaque aspect abordé dans cette étude et dresse, en conséquence, les perspectives d'amélioration du système GraviMob.

D'un point de vue **théorique**, l'équation d'observation, établie dans le travail de thèse de Bertrand de Saint-Jean, évolue avec l'ajout d'une seconde triade accélérométrique. Nous avons vu que, dans l'hypothèse où la position du point central de l'axe séparant les deux triades est observable, cette évolution permet de s'affranchir du terme relatif au bras de levier dans l'équation d'observation.

L'ajout d'une seconde triade accélérométrique permet également d'accéder à trois des six composantes indépendantes du tenseur du gradient de gravité. Cependant, le repère dans lequel ces composantes sont obtenues, ne permet pas de les interpréter dans un contexte propre à la géophysique. De plus, la précision des accéléromètres utilisés est largement insuffisante pour envisager ce type de mesure. L'un des défis majeurs correspond, par conséquent, à l'amélioration des accéléromètres électrostatiques existants ou à la miniaturisation des nouvelles technologies telles que celles mettant en jeu les atomes froids.

Les simulations numériques ont montré que la qualité du positionnement du véhicule porteur est la principale cause de l'erreur existante sur les composantes du champ de pesanteur en sortie de l'équation d'observation. Afin d'améliorer leurs estimations et étant donné le caractère gaussien des variables observées, le filtre de Kalman, déjà développé dans le travail de Bertrand de Saint-Jean, a été logiquement repris. L'expérimentation de la forme *unscented* de ce filtre, sur des données simulées, montre que la divergence observée dans les travaux de Bertrand de Saint-Jean, ne peut définitivement s'expliquer en raison de

l'incertitude sur la mesures des angles d'attitude du système. En effet, cette divergence du filtre est également observée alors que l'incertitude sur les angles d'attitude (tangage et roulis), diminue en passant de 0.5 degré, dans le cas du LiMo-g, à 0.005 degré dans le cas du système GraviMob. Finalement, les incertitudes de ces variables ne sont pas prises en compte dans l'estimation par filtrage de Kalman. Enfin, l'implémentation d'un modèle d'évolution selon un processus de Markov, tenant compte de l'évolution naturelle des composantes du champ de pesanteur, n'a pas été expérimentée dans cette étude.

D'un point de vue **instrumental**, le système GraviMob abandonne logiquement le système de positionnement et de mesure d'attitude par observations GPS du LiMo-g, en raison de la contrainte naturelle imposée par le milieu sous-marin. Il laisse place au système de navigation du véhicule sous-marin autonome, *Aster<sup>x</sup>* de l'IFREMER, employé en tant que véhicule porteur. Celui-ci se compose d'un ensemble d'instruments dédiés à la navigation sous-marine, dont une centrale inertielle, un vélocimètre Doppler et une liaison USBL.

Le déport du capteur accélérométrique dans la partie avant de l'AUV impose la détermination du vecteur bras de levier entre le point positionné par la centrale inertielle de l'AUV et le lieu de détermination du champ de pesanteur, situé au centre des deux triades accélérométriques. Afin de respecter l'hypothèse émise dans l'établissement de l'équation d'observation, une solution envisageable à l'annulation de ce vecteur, consisterait à fusionner la centrale inertielle de l'AUV avec le capteur accélérométrique. Dans les autres cas, ce vecteur doit être déterminé le plus précisément possible. La modélisation 3D du véhicule porteur avec la centrale inertielle et le capteur accélérométrique est certainement la solution à privilégier et qu'il convient d'améliorer avec un modèle numérique plus précis du capteur accélérométrique dans son intégralité. La seconde solution, qui consiste à comparer les accélérations spécifiques de la centrale inertielle avec les accélérations spécifiques du capteur, mène également à une estimation, par filtrage de Kalman classique, mais dont la qualité reste encore à étudier au travers de simulations numériques.

Le capteur accélérométrique reprend le principe du LiMo-g, à savoir la réunion de trois accéléromètres linéaires en une triade capable d'effectuer une mesure vectorielle de l'accé-

## CONCLUSION

---

lération spécifique. Cependant, au vu des résultats exposés dans ce manuscrit, il convient d'adapter le support des accéléromètres afin d'orienter les trois axes sensibles de manière identique par rapport à la verticale, comme dans le cas du LiMo-g. En effet, cette configuration géométrique permet aux trois accéléromètres d'une triade de *travailler* de manière équitable et évite la translation de la plage dynamique d'un accéléromètre qui serait placé suivant la verticale. À ce titre, la plage dynamique des accéléromètres doit également être revue afin d'éviter la saturation du capteur durant les phases d'étalonnage et d'acquisition en mer. Les résistances de charge doivent être choisies, en fonction de la plage d'entrée en tension du numériseur, tel que la largeur de la plage dynamique des accélérations spécifiques observables soit d'environ de  $2g$ . Ce choix doit être associé à une résolution de numérisation d'environ  $0.2 \text{ mGal}$ , valeur qui apparaît suffisante au vu de la sensibilité des accéléromètres.

Cette configuration électrique, déjà adoptée dans le cas du LiMo-g, permet une plus grande souplesse dans l'inclinaison du capteur et devrait, lors de la phase d'étalonnage en laboratoire, mener à des coefficients d'étalonnage de meilleure qualité. Puisque ces derniers restent dépendant de la température à laquelle ils sont déterminés, il convient de poursuivre les expérimentations mettant en oeuvre la méthode des multiplicateurs de Lagrange et de garder un oeil attentif sur l'évolution de ce type de méthode dans la littérature scientifique. Parmi ces expérimentations, il est possible de citer, la détermination d'une loi d'évolution des paramètres d'étalonnage en fonction de la température ou la mesure de l'intensité de la pesanteur sur un profil terrestre de référence. Ce second cas pourrait valider l'utilisation du capteur accélérométrique seul comme gravimètre scalaire terrestre. Dans ce scénario, la seule contrainte correspond au maintien précis de la température.

L'étalonnage du capteur accélérométrique par rapport à la centrale inertielle de l'AUV représente l'étape la plus critique car l'inclinaison de l'AUV est une opération délicate à mettre en oeuvre après chaque remontage des différentes sections du véhicule. Cette contrainte disparaît dans le cas mentionné précédemment où le capteur accélérométrique et la centrale inertielle sont fusionnés en un seul et unique instrument.

Enfin, l'abandon du système de régulation en température s'est vu justifié lors de l'analyse des données acquises durant la mission d'expérimentation en Mer Méditerranée. En effet,

le milieu naturel permet une stabilisation quasi-idéale de la température de travail et ce, à quelques millièmes de degré près en terme de fluctuations. Cependant, le temps d'attente nécessaire pour établir cette stabilisation apparaît comme un facteur très limitant dans l'utilisation courante d'un tel capteur. Une connaissance préalable de la température à la profondeur de travail, associée à un chauffage temporaire du capteur (durant la phase de descente de l'AUV, par exemple) pourrait, potentiellement, diminuer cette phase de stabilisation.

D'un point de vue **expérimental**, la mission d'acquisition en Mer Méditerranée a montré que les 26 profils acquis ne sont pas intégralement exploitables en raison des sauts dans les données de navigation de l'AUV et de la saturation du capteur accélérométrique. De plus, l'incertitude sur l'alignement de la centrale inertielle de l'AUV avec le capteur logé dans sa partie avant, mène à la correction de l'orientation de ce dernier par comparaison des valeurs moyennes des accélérations spécifiques mesurées par chaque instrument. De même, l'application des coefficients d'étalonnage à une température de travail qui diffère de celle rencontrée durant les manipulations en laboratoire, implique un biais sur les composantes *est* et *nord* estimées par le filtre de Kalman *unscented*.

Cela dit, la comparaison des deux profils obtenus avec les données de référence tend à montrer que le signal mesuré par le système GraviMob *contient* le signal de référence fourni par le SHOM. La difficulté à pouvoir effectuer, de manière rigoureuse, un prolongement vers le haut des anomalies calculées limite, cependant, l'évaluation de la qualité du signal gravimétrique estimé.

Ces remarques mènent à encourager la réalisation de nouvelles campagnes d'expérimentation dans lesquelles on veillera, autant que faire ce peut, à répéter plusieurs longs profils croisés à des immersions constantes. Ceci pour les raisons suivantes :

- la navigation aller-retour permet d'identifier et d'éliminer des erreurs systématiques et d'effectuer des contrôles internes ;
- la réalisation de profils proches et croisés les uns par rapport aux autres, à une même profondeur d'immersion, permet de cartographier les composantes estimées du champ et d'effectuer un prolongement vers le haut du signal.

## CONCLUSION

---

La combinaison des mesures accélérométriques avec des mesures bathymétriques peut également améliorer le traitement et l'analyse des données dans le sens où il est alors possible de calculer numériquement l'anomalie de gravité produite par la topographie sous-marine.

---

# Bibliographie

- A. Araya, T. Kanazawa, M. Shinohara, T. Yamada, H. Fujimoto, K. Iizasa, and T. Ishihara. A gravity gradiometer to search for submarine ore deposits. In *Underwater Technology (UT), 2011 IEEE Symposium on and 2011 Workshop on Scientific Use of Submarine Cables and Related Technologies (SSC)*, pages 1–3, 2011. doi : 10.1109/UT.2011.5774123.
- A. Araya, T. Kanazawa, M. Shinohara, T. Yamada, H. Fujimoto, K. Iizasa, and T. Ishihara. Gravity gradiometer implemented in AUV for detection of seafloor massive sulfides. In *Oceans, 2012*, pages 1–4, 2012. doi : 10.1109/OCEANS.2012.6405114.
- A. Araya, M. Shinohara, T. Kanazawa, H. Fujimoto, T. Yamada, T. Ishihara, K. Iizasa, and S. Tsukioka. Development and demonstration of a gravity gradiometer onboard an autonomous underwater vehicle for detecting massive subseafloor deposits. *Ocean Engineering*, 105 :64–71, 2015. doi : 10.1016/j.oceaneng.2015.06.008.
- M. F. Asgharzadeh, R. R. B. von Frese, H. R. Kim, T. E. Leftwich, and J. W. Kim. Spherical prism gravity effects by Gauss-Legendre quadrature integration. *Geophysical Journal International*, 169 :1–11, 2007. doi : 10.1111/j.1365-246X.2007.03214.x.
- Yaakov Bar-Shalom, X. Li, and Thiagalingam Kirubarajan. *Estimation with Applications to Tracking and Navigation : Theory, Algorithms and Software*. Wiley Interscience, 2001.
- J.K. Bekkeng. Calibration of a Novel MEMS Inertial Reference Unit. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, 58 :1967–1974, 2009. doi : 10.1109/TIM.2008.2006126.
- J. F. Bonnans. *Numerical optimization : theoretical and practical aspects*. Springer, 2006.

## BIBLIOGRAPHIE

---

- Robert Grover Brown and Patrick Y. C. Hwang. *Introduction to random signals and applied Kalman filtering : with MATLAB exercises and solutions*. Wiley, New York, 3rd edition, 1997.
- Nicolas Damenet. Traitement de données en gravimétrie mobile par filtrage de Kalman spatialisé. Mémoire de fin d'études, École Supérieure des Géomètres et Topographes, 2012.
- B. de Saint-Jean, J. Verdun, H. Duquenne, J. P. Barriot, and J. Cali. Calibration of a 3-accelerometer inertial gravimetry system for moving gravimetry. *Newton's bulletin*, pages 4–7, 2005.
- Bertrand De Saint-Jean. Étude et développement d'un système de gravimétrie mobile. Mémoire de thèse, Observatoire de Paris, 2008.
- K. Douch, I. Panet, G. Pajot-Métivier, B. Christophe, B. Foulon, M.-F. Lequentrec-Lalancette, and M. Diament. Error analysis of a new planar electrostatic gravity gradiometer for airborne surveys. *Journal of Geodesy*, 89 :1217–1231, 2015. doi : 10.1007/s00190-015-0847-8.
- Karim Douch. Gradiomètre planaire aéroporté pour l'étude de la gravité en zones littorales. Mémoire de thèse, Université Sorbonne Paris Cité, 2015.
- Jacques Dubois. *La gravimétrie en mer*. Institut océanographique, 1997. ISBN 978-2-903581-17-6.
- A. M. Dziewonski and D. L. Anderson. Preliminary Reference Earth Model (PREM). *Phys. Earth planet. Inter.*, 25 :297–356, 1981.
- N. El-Sheimy, H. Hou, and X. Niu. Analysis and Modeling of Inertial Sensors Using Allan Variance. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, 57 :140–149, 2008. doi : 10.1109/TIM.2007.908635.
- C. Förste, S. Bruinsma, O. Abrikosov, F. Flechtner, J.-C. Marty, J.-M. Lemoine, C. Dahle, H. Neumayer, F. Barthelmes, R. König, and R. Biancale. EIGEN-6C4 The latest combined global gravity field model including GOCE data up to degree and order 2190 of

## BIBLIOGRAPHIE

---

- GFZ Potsdam and GRGS Toulouse. In *EGU General Assembly Conference Abstracts*, volume 16, 2014.
- H. Fujimoto, T. Kanazawa, M. Shinohara, A. Araya, T. Yamada, K. Mochizuki, T. Ishihara, and K. Iizasa. Development of a hybrid gravimeter system onboard an underwater vehicle. In *Underwater Technology (UT), 2011 IEEE Symposium on and 2011 Workshop on Scientific Use of Submarine Cables and Related Technologies (SSC)*, pages 1–3, 2011. doi : 10.1109/UT.2011.5774162.
- Maddalena Gilardoni, Mirko Reguzzoni, and Daniele Sampietro. GECO : a global gravity model by locally combining GOCE data and EGM2008. *Studia Geophysica et Geodae-tica*, 60 :228–247, 2016. doi : 10.1007/s11200-015-1114-4.
- Herbert Goldstein. *Mécanique classique*. Presses Universitaires de France, 1964.
- Niklas Grip and Natalia Sabourova. Simple non-iterative calibration for triaxial accelerometers. *Measurement Science and Technology*, 22 :1–13, 2011. doi : 10.1088/0957-0233/22/12/125103.
- J. Guette. La gravimétrie aéroportée guidée : mission méditerranéenne et étalonnage du système d’acquisition. Mémoire de fin d’études, École Supérieure des Géomètres et Topographes, 2001.
- Jouni Hartikainen, Arno Solin, and Simo Särkkä. Optimal filtering with Kalman filters and smoothers – a Manual for Matlab toolbox EKF/UKF. Manuel d’utilisation, 2011.
- Simon S Haykin. *Kalman filtering and neural networks*. Wiley, New York, 2001. ISBN 978-0-471-46421-1 978-0-471-22154-8.
- Bernhard Hofmann-Wellenhof and Helmut Moritz. *Physical Geodesy*. Springer Vienna, 2006.
- Honeywell. Q-Flex® Accelerometer Mounting Blocks [en ligne]. Technical report, 2005.
- Honeywell. Q-Flex® QA-3000 Accelerometer [en ligne]. Technical report, 2006.

## BIBLIOGRAPHIE

---

- J. Izraelevitz. Optimal trajectory generation for draped AUV gravity surveys. In *OCEANS, 2011 IEEE - Spain*, pages 1–8, 2011. doi : 10.1109/Oceans-Spain.2011.6003386.
- M. Jacques. La gravimétrie aéroportée guidée : automatisation de l'étalonnage et premiers essais sur un véhicule. Mémoire de fin d'études, École Supérieure des Géomètres et Topographes, 2002.
- Simon J. Julier and Jeffrey K. Uhlmann. New extension of the Kalman filter to non-linear systems. In *AeroSense'97*, pages 182–193. International Society for Optics and Photonics, 1997.
- Rambabu Kandepu, Bjarne Foss, and Lars Imsland. Applying the unscented Kalman filter for nonlinear state estimation. *Journal of Process Control*, 18(7-8) :753–768, 2008. doi : 10.1016/j.jprocont.2007.11.004.
- Oliver Dimon Kellogg. *Foundations of Potential Theory*. Springer Science & Business Media, 2012.
- J. Kinsey, M. Tivey, and D. Yoerger. Dynamics and navigation of autonomous underwater vehicles for submarine gravity surveying. *Geophysics*, 78 :G55–G68, 2013. doi : 10.1190/geo2012-0181.1.
- James C. Kinsey. *Advances in precision navigation of oceanographic submersibles*, volume 67. 2007.
- James C. Kinsey, Ryan M. Eustice, and Louis L. Whitcomb. A survey of underwater vehicle navigation : Recent advances and new challenges. In *IFAC Conference of Manoeuvring and Control of Marine Craft*, volume 88, 2006.
- J.C. Kinsey, M.A. Tivey, and D.R. Yoerger. Toward high-spatial resolution gravity surveying of the mid-ocean ridges with autonomous underwater vehicles. In *OCEANS 2008*, pages 1–10, 2008. doi : 10.1109/OCEANS.2008.5152005.
- Gabi Laske, Guy Masters, Zhitu Ma, and Mike Pasyanos. Update on CRUST1.0 - a 1-degree global model of Earth's crust. In *Res. Abstracts, 15, Abstract EGU2013-2658, 2013*, 2013.

## BIBLIOGRAPHIE

---

- Alfred Leick, Lev Rapoport, and Dmitry Tatarnikov. *GPS Satellite Surveying*. John Wiley & Sons, Inc, 2015.
- John J. Leonard, Andrew A. Bennett, Christopher M. Smith, and Hans Jacob S. Feder. Autonomous underwater vehicle navigation. In *IEEE ICRA Workshop on Navigation of Outdoor Autonomous Vehicles, Leuven, Belgium, May, 1998*.
- Robert Michael Lewis, Virginia Torczon, and Michael W. Trosset. Direct search methods : then and now. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 124 :191–207, 2000. doi : 10.1016/S0377-0427(00)00423-4.
- S. Melachroinos. Le développement d’un système de gravimétrie mobile. Mémoire de Diplôme d’études approfondies (DEA), Observatoire de Paris, 2004.
- D. Nagy, G. Papp, and J. Benedek. The gravitational potential and its derivatives for the prism. 74 :552–560, 2000. ISSN 0949-7714, 1432-1394. doi : 10.1007/s001900000116.
- J. A. Nelder and R. Mead. A Simplex Method for Function Minimization. *The Computer Journal*, 7 :308–313, 1965. doi : 10.1093/comjnl/7.4.308.
- G. Panahandeh, I. Skog, and M. Jansson. Calibration of the accelerometer triad of an inertial measurement unit, maximum likelihood estimation and Cramer-Rao bound. In *2010 International Conference on Indoor Positioning and Indoor Navigation (IPIN)*, pages 1–6. IEEE, 2010. doi : 10.1109/IPIN.2010.5646832.
- M. E. Pasyanos, T. G. Masters, G. Laske, and Z. Ma. LITHO1.0 : An updated crust and lithospheric model of the Earth. *J. Geophys. Res. Solid Earth*, 119 :2153–2173, 2014. doi : 10.1002/2013JB010626.
- N. K. Pavlis, S. A. Holmes, S. C. Kenyon, and J. K. Factor. An Earth Gravitational Model to Degree 2160 EGM2008. In *EGU General Assembly Conference Abstracts*, 2008.
- N. K. Pavlis, S. A. Holmes, S. C. Kenyon, and J. K. Factor. The development and evaluation of the Earth Gravitational Model 2008 (EGM2008). *Journal of Geophysical Research (Solid Earth)*, 117 :4406, 2012. doi : 10.1029/2011JB008916.

## BIBLIOGRAPHIE

---

- William H Press. *Numerical recipes the art of scientific computing*. Cambridge University Press, Cambridge, UK ; New York, 2007.
- C. Roussel. Modélisation numérique du champ de gravité produit par une structure géologique arbitraire. Mémoire de fin d'études, École Nationale des Sciences Géographiques, 2013.
- C. Roussel, J. Verdun, J. Cali, and F. Masson. Accurate Numerical Calculation of the Gravitational Field of the Earth from Global Geological Models. Poster, GOCE User Workshop, Paris, novembre 2014a.
- C. Roussel, J. Verdun, J. Cali, M. Maïa, and J.-F d'Eu. A New Onboard System for Measuring Undersea Gravity Field Very Close to Oceanic Structures Through Autonomous Underwater Vehicles. Présentation orale, Colloque du Groupement de recherche "Géodésie et Géophysique" (G2), Strasbourg, novembre 2014b.
- C. Roussel, J. Verdun, J. Cali, M. Maia, and J. F. d'EU. Integration Of a Strapdown Gravimeter System In An Autonomous Underwater Vehicle. *ISPRS - International Archives of the Photogrammetry, Remote Sensing and Spatial Information Sciences*, XL-5/W5 :199–206, 2015a. doi : 10.5194/isprsarchives-XL-5-W5-199-2015.
- C. Roussel, J. Verdun, J. Cali, and F. Masson. Complete gravity field of an ellipsoidal prism by Gauss–Legendre quadrature. *Geophysical Journal International*, 203 :2220–2236, 2015b. doi : 10.1093/gji/ggv438.
- C. Roussel, J. Verdun, J. Cali, M. Maïa, and J.-F d'Eu. Integration of a strapdown gravimeter system in an autonomous underwater vehicle. Présentation orale, ISPRS-CIPA Workshop, Naples, avril 2015c.
- C. Roussel, J. Verdun, J. Cali, M. Maïa, and J.-F d'Eu. Study of the restitution of submarine geological structures thanks to a new underwater moving gravimeter and gradiometer sensor. Présentation orale, 26th IUGG General Assembly, Prague, juillet 2015d.
- C. Roussel, J. Verdun, J. Cali, M. Maïa, and J.-F d'Eu. Problématique du positionnement sous-marin pour la mesure dynamique du champ de pesanteur terrestre. Présentation

## BIBLIOGRAPHIE

---

- orale, Colloque du Groupement de recherche "Géodésie et Géophysique" (G2), Toulouse, novembre 2015e.
- C. Roussel, J. Verdun, J. Cali, M. Maïa, and J.-F d'Eu. La mission d'expérimentation du système de gravimétrie mobile sous-marine gravimob. Présentation orale, Colloque du Groupement de recherche "Géodésie et Géophysique" (G2), Brest, novembre 2016a.
- C. Roussel, J. Verdun, J. Cali, M. Maïa, and J.-F d'Eu. Signal processing and calibration of a mobile underwater gravimetry and gradiometry system named gravimob. Présentation orale, IAG Symposium on Terrestrial Gravimetry "Static and Mobile Measurements", Saint-Pétersbourg, avril 2016b.
- C. Roussel, J. Verdun, J. Cali, M. Maia, J.-F. d'Eu, M.-E Bouhier, and P. Jaussaud. First tangible results of undersea gravity field measure achieved by an innovative light mobile gravimetric system called GraviMob. *Geophysical Journal International*, *in prep.*, 2017.
- Peter H. Schönemann. A generalized solution of the orthogonal procrustes problem. *Psychometrika*, 31 :1–10, 1966. doi : 10.1007/BF02289451.
- M. Shinohara, T. Yamada, T. Kanazawa, K. Uehira, H. Fujimoto, T. Ishihara, A. Araya, K. Iizasa, and S. Tsukioka. Development of an underwater gravimeter and the first observation by using autonomous underwater vehicle. In *Underwater Technology Symposium (UT), 2013 IEEE International*, pages 1–6, 2013. doi : 10.1109/UT.2013.6519864.
- M. Shinohara, T. Yamada, T. Ishihara, A. Araya, T. Kanazawa, H. Fujimoto, K. Uehira, S. Tsukioka, S. Omika, and K. Iizasa. Development of an underwater gravity measurement system using autonomous underwater vehicle for exploration of seafloor deposits. In *OCEANS 2015 - Genova*, pages 1–7, 2015. doi : 10.1109/OCEANS-Genova.2015.7271487.
- Helmuth Späth. A numerical method for determining the spatial HELMERT transformation in the case of different scale factors. *Zeitschrift für Geodäsie, Geoinformation und Landmanagement*, 129 :255–257, 2004.
- David Titterton and John L. Weston. *Strapdown Inertial Navigation Technology*. IET, 2004. ISBN 978-0-86341-358-2.

- L. Uieda, V. Barbosa, and C. Braitenberg. Tesseroids : Forward-modeling gravitational fields in spherical coordinates. *Geophysics*, pages F41–F48, 2016. ISSN 0016-8033. doi : 10.1190/geo2015-0204.1.
- J. Verdun, J. Cali, and N. Damenet. Moving-base vector gravimetry data processing based on optimal, physically sensible time evolution gravity models. In *Proceedings of International Symposium, Terrestrial Gravimetry : Static and Mobile Measurements, Elektropribor, IAG, TG-SMM*, pages 41–47, Saint-Petersburg, 2013.
- J. Vermast. La gravimétrie aéroportée guidée : intégration du GPS. Mémoire de fin d'études, École Supérieure des Géomètres et Topographes, 1999.
- N. Viel. La gravimétrie aéroportée guidée : mise en œuvre de la chaîne d'acquisition. Mémoire de fin d'études, École Supérieure des Géomètres et Topographes, 2000.
- E. Vlamynck. La gravimétrie aéroportée guidée : intégration des accéléromètres. Mémoire de fin d'études, École Supérieure des Géomètres et Topographes, 1999.
- G. A. Watson. Computing Helmert transformations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 197 :387–394, 2006. doi : 10.1016/j.cam.2005.06.047.
- S.-H.P. Won and F. Golnaraghi. A Triaxial Accelerometer Calibration Method Using a Mathematical Model. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, 59 : 2144–2153, 2010. doi : 10.1109/TIM.2009.2031849.
- Oliver J. Woodman. An introduction to inertial navigation. Technical Report UCAM-CL-TR-696, University of Cambridge, Computer Laboratory, 2007.
- Jie Yang, Wenqi Wu, Yuanxin Wu, and Junxiang Lian. Improved Iterative Calibration for Triaxial Accelerometers Based on the Optimal Observation. *Sensors*, 12 :8157–8175, 2012. doi : 10.3390/s120608157.
- Hongliang Zhang, Yuanxin Wu, Wenqi Wu, Meiping Wu, and Xiaoping Hu. Improved multi-position calibration for inertial measurement units. *Measurement Science and Technology*, 21 :015107, 2010. doi : 10.1088/0957-0233/21/1/015107.

# Annexes



## Annexe A

# Formulaire

En posant :

$$\mu = \begin{pmatrix} \mu_x \\ \mu_y \\ \mu_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \|g\|k_{xx}c_x + \|g\|k_{xy}c_y + \|g\|k_{xz}c_z + p_{0,x} \\ \|g\|k_{yy}c_y + \|g\|k_{yz}c_z + p_{0,y} \\ \|g\|k_{zz}c_z + p_{0,z} \end{pmatrix} ,$$

les différents éléments de l'équation (6.19) s'expriment comme suit :

$$\begin{aligned} h(c) &= c_x^2 + c_y^2 + c_z^2 - 1 \quad ; \\ \nabla h(c) &= 2 \begin{pmatrix} c_x & c_y & c_z \end{pmatrix}^T \quad ; \\ \nabla L(c, u) &= \begin{pmatrix} \partial L / \partial c_x \\ \partial L / \partial c_y \\ \partial L / \partial c_z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2\|g\|k_{xx}(\mu_x - p_x) + 2uc_x \\ 2\|g\|k_{xy}(\mu_x - p_x) + 2\|g\|k_{yy}(\mu_y - p_y) + 2uc_y \\ 2\|g\|k_{xz}(\mu_x - p_x) + 2\|g\|k_{yz}(\mu_y - p_y) + 2\|g\|k_{zz}(\mu_z - p_z) + 2uc_z \end{pmatrix} \quad ; \\ \nabla^2 L(c, u) &= \begin{pmatrix} l_{xx} & l_{xy} & l_{xz} \\ l_{yx} & l_{yy} & l_{yz} \\ l_{zx} & l_{zy} & l_{zz} \end{pmatrix} \quad , \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned} l_{xx} &= \frac{\partial^2 L}{\partial c_x^2} = 2\|g\|^2 k_{xx}^2 + 2u \\ l_{xy} &= \frac{\partial}{\partial c_y} \frac{\partial L}{\partial c_x} = 2\|g\|^2 k_{xx} k_{xy} \\ l_{xz} &= \frac{\partial}{\partial c_z} \frac{\partial L}{\partial c_x} = 2\|g\|^2 k_{xx} k_{xz} \\ l_{yx} &= \frac{\partial}{\partial c_x} \frac{\partial L}{\partial c_y} = 2\|g\|^2 k_{xy} k_{xx} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 l_{yy} &= \frac{\partial^2 L}{\partial c_y^2} = 2\|g\|^2 k_{xy}^2 + 2\|g\|^2 k_{yy}^2 + 2u \\
 l_{yz} &= \frac{\partial}{\partial c_z} \frac{\partial L}{\partial c_y} = 2\|g\|^2 k_{xy} k_{xz} + 2\|g\|^2 k_{yy} k_{yz} \\
 l_{zx} &= \frac{\partial}{\partial c_x} \frac{\partial L}{\partial c_z} = 2\|g\|^2 k_{xz} k_{xx} \\
 l_{zy} &= \frac{\partial}{\partial c_y} \frac{\partial L}{\partial c_z} = 2\|g\|^2 k_{xz} k_{xy} + 2\|g\|^2 k_{yz} k_{yy} \\
 l_{zz} &= \frac{\partial^2 L}{\partial c_z^2} = 2\|g\|^2 k_{xy}^2 + 2\|g\|^2 k_{yz}^2 + 2\|g\|^2 k_{zz}^2 + 2u
 \end{aligned}$$

## Annexe B

# Validation du filtre de Kalman *unscented*

On considère un mobile se déplaçant dans un espace plan  $(O, x, y)$  dont la position est observée depuis deux capteurs angulaires fixes. Ces capteurs mesurent le gisement (ou azimuth) correspondant à l'angle que fait la direction du Nord ( $Oy$ ) avec la droite (capteur-mobile). L'intervalle de temps entre deux observations vaut  $\Delta t$ .

On souhaite estimer à chaque instant  $k$ , la position et la vitesse du mobile. Le vecteur des paramètres s'écrit par conséquent :

$$X_k = (x_k \quad y_k \quad \dot{x}_k \quad \dot{y}_k)^T$$

On suppose que l'accélération du mobile est nulle à un bruit blanc près. Le modèle d'évolution reliant l'état  $k + 1$  à l'état  $k$  s'écrit donc comme suit :

$$X_{k+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \Delta t & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \Delta t \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \\ \dot{x}_k \\ \dot{y}_k \end{pmatrix} + Q_k \quad ,$$

avec  $Q_k$  la matrice de bruit du modèle d'évolution qui est donnée par [Bar-Shalom et al. 2001] :

$$Q_k = \begin{pmatrix} \frac{\Delta t^3}{3} & 0 & \frac{\Delta t^2}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\Delta t^3}{3} & 0 & \frac{\Delta t^2}{2} \\ \frac{\Delta t^2}{2} & 0 & \Delta t & 0 \\ 0 & \frac{\Delta t^2}{2} & 0 & \Delta t \end{pmatrix} q \quad ,$$

où  $q$  correspond à la densité spectrale de puissance du bruit blanc, fixée à  $q = 0.1$  dans cet exemple.

Le modèle d'observation relie quant à lui, à l'époque  $k$ , les deux mesures angulaires des capteurs aux composantes du vecteur des paramètres :

$$\theta_k^i = \arctan\left(\frac{y_k - s_y^i}{x_k - s_x^i}\right) + r \quad , \quad (\text{B.1})$$

où  $(s_x^i, s_y^i)$  désigne la position du  $i^{\text{ème}}$  capteur et  $r \sim \mathcal{N}(0, 0.05^2)$  correspond au bruit de la mesure angulaire.

La comparaison des filtres de Kalman *étendu* et *unscented* s'effectue à partir des mêmes données simulées.

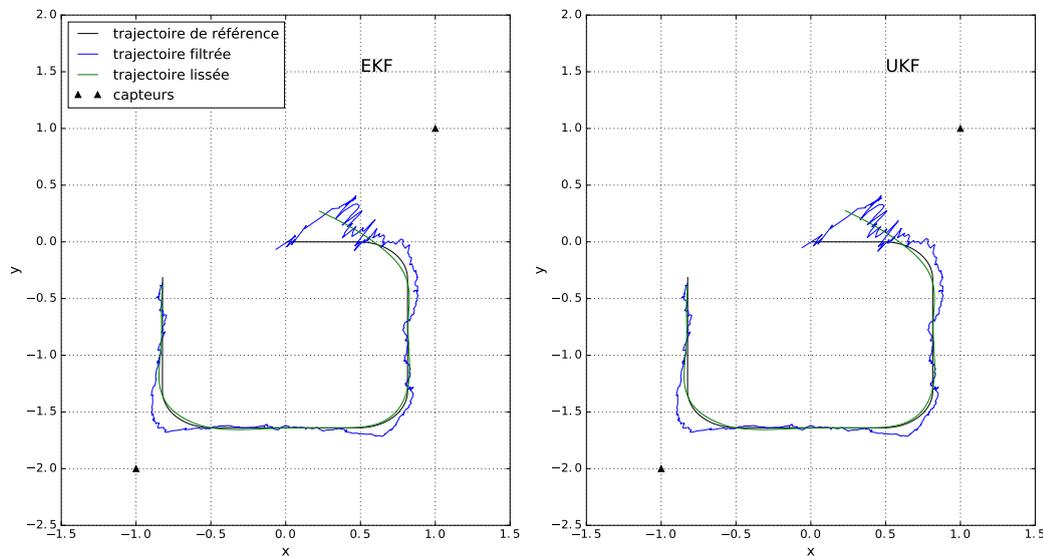


FIGURE B.1 – Trajectoires de référence (en noir) et trajectoires filtrées (en bleu) et lissées (en vert) en sortie des filtres de Kalman *étendu* et *unscented*.

La figure B.1 représente pour chaque stratégie de filtrage, la trajectoire de référence, filtrée et lissée du mobile. L'écart entre la position filtrée (resp. lissée) et la trajectoire de référence apparaît quant à elle sur la figure B.2 (resp. B.3).

On constate que sur cet exemple, les deux versions du filtre de Kalman mènent à des résultats quasiment identiques. L'implémentation de l'algorithme du filtre de Kalman *unscented* est par conséquent validée par rapport à ce que fournit l'algorithme du filtre de Kalman *étendu*.

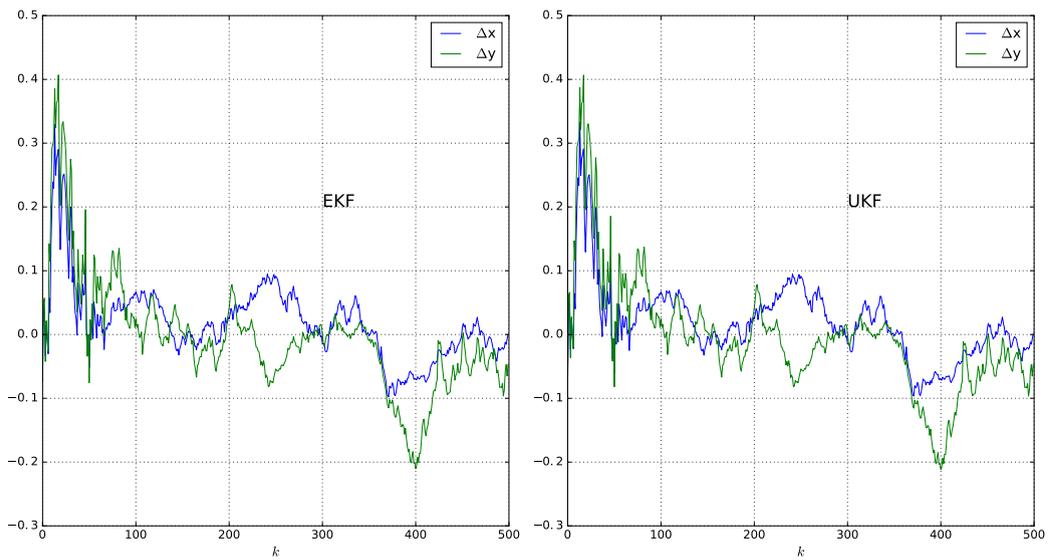


FIGURE B.2 – Écarts entre la trajectoire de référence et la trajectoire filtrée en sortie des filtres de Kalman *étendu* et *unscented*.

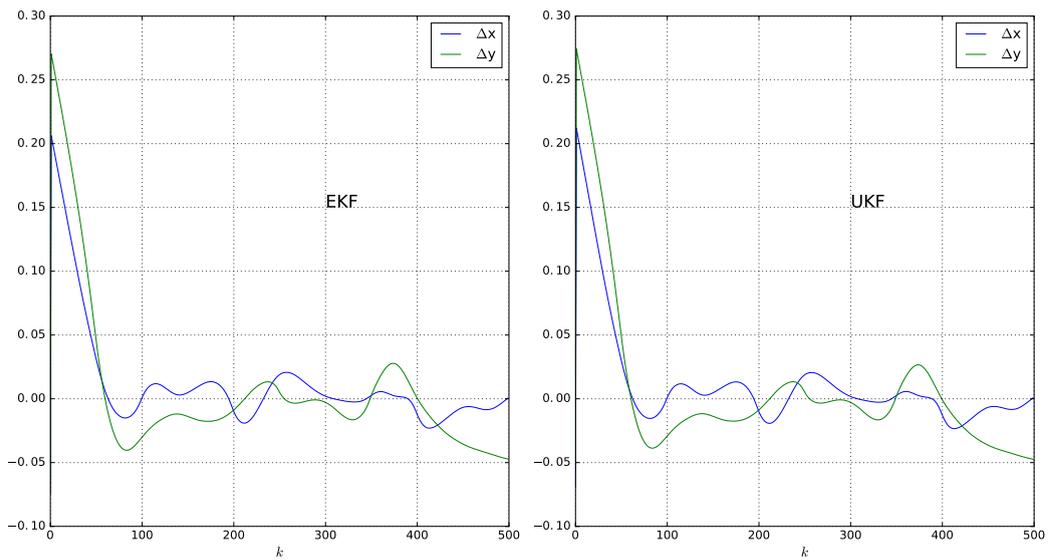


FIGURE B.3 – Écarts entre la trajectoire de référence et la trajectoire lissées en sortie des filtres de Kalman *étendu* et *unscented*.

---

## Annexe C

# Complete gravity field of ellipsoidal prism

# Complete gravity field of an ellipsoidal prism by Gauss–Legendre quadrature

C. Roussel,<sup>1</sup> J. Verdun,<sup>1</sup> J. Cali<sup>1</sup> and F. Masson<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Laboratoire Cnam-GeF/GRGS (EA 4630) École Supérieure des Géomètres et Topographes (Cnam/ESGT) 1 boulevard Pythagore, 7200, Le Mans, France.  
E-mail: [jerome.verdun@cnam.fr](mailto:jerome.verdun@cnam.fr)

<sup>2</sup>IPGS/EOST, Université de Strasbourg/CNRS, Bâtiment Descartes 5, rue René Descartes, 67084, Strasbourg cedex, France

Accepted 2015 October 7. Received 2015 October 6; in original form 2015 February 20

## SUMMARY

The increasing availability of geophysical models of the Earth's lithosphere and mantle has generated renewed interest in computation of theoretical gravity effects at global and regional scales. At the same time, the increasing availability of gravity gradient anomalies derived from satellite measurements, such as those provided by GOCE satellite, requires mathematical methods that directly model the gravity gradient anomalies in the same reference frame as GOCE gravity gradients. Our main purpose is to interpret these anomalies in terms of source and density distribution. Numerical integration methods for calculating gravity gradient values are generally based on a mass discretization obtained by decomposing the Earth's layers into a finite number of elementary solid bodies. In order to take into account the curvature of the Earth, spherical prisms or 'tesseroids' have been established unequivocally as accurate computation tools for determining the gravitational effects of large-scale structures. The question which then arises from, is whether gravity calculation methods using spherical prisms remain valid when factoring in the ellipticity of the Earth. In the paper, we outline a comprehensive method to numerically compute the complete gravity field with the help of the Gauss–Legendre quadrature involving ellipsoidal shaped prisms. The assessment of this new method is conducted by comparison between the gravity gradient values of simple sources obtained by means of numerical and analytical calculations, respectively. A comparison of the gravity gradients obtained from PREM and LITHO1.0 models using spherical- and ellipsoidal-prism-based methods is also presented. Numerical results indicate that the error on gravity gradients, caused by the use of the spherical prism instead of its ellipsoidal counterpart to describe an ellipsoidally shaped Earth, is useful for a joint analysis with those deduced from GOCE satellite measurements. Provided that a suitable scaling of prism densities has been performed, the spherical approximation error at GOCE height hardly reaches 1 mE for the entire Earth's lithosphere. The error attains 6 mE at a peak for a complete modeling of the Earth, from the crust down to the internal core.

**Key words:** Numerical approximations and analysis; Satellite geodesy; Gravity anomalies and Earth structure; Geopotential theory.

## 1 INTRODUCTION

The current increasing availability of satellite-measured gravity data covering the whole Earth combined with increasingly reliable geophysical models of the Earth's lithosphere and mantle has generated renewed interest in the computation of theoretical gravity effects at global and regional scales from geological models (Arabelos & Tsoulis 2013). The latest gravity satellite mission GOCE has provided data of unprecedented resolution and accuracy at global and regional scales (Yi & Rummel 2013) through the use of a

satellite orbiting at low altitude—260 km, mean altitude in the nominal phase—and equipped with an ultra-sensitive gradiometer for directly measuring the gravity gradients (Rummel *et al.* 2011). Gravity models based solely on satellite data (satellite-only gravity models) provided by GOCE—also combined with other gravity satellites such as GRACE and LAGEOS—are commonly expressed in terms of Stokes' coefficients as a spherical harmonics expansion up to degree and order 280, for example, the TIM R5 gravity model (Brockmann *et al.* 2014), or even degree and order 300, for example, the DIR R5, which methodology is described in Bruinsma

*et al.* (2013). The theoretical spatial resolution of such gravity models is of 70 km (half-wavelength), which is suitable for regional geophysical studies. For more local scales, the spherical harmonics expansions can be significantly extended to higher degrees by including the terrestrial gravity data measured over the Earth's continents and the surface gravity data provided by satellite altimetry. For instance, the maximum spherical harmonic degree attained in the EGM2008 gravity model (Pavlis *et al.* 2008) and the recently presented EIGEN-6C4 gravity model (Förste *et al.* 2014) is of 2190, which corresponds to a theoretical spatial resolution of 9 km.

Moreover, significant improvements in knowledge of the lithosphere have been obtained, particularly through seismology advances. In parallel, accurate global digital elevation models, which include notably satellite-measured land topography and ocean bathymetry deduced from satellite altimetry and depth soundings (Smith & Sandwell 1997), have become available, thus giving a fairly accurate image of the Earth's land surface and sea bottom. Seismological and elevation models combined with other geological and geophysical models, giving for instance sediment thickness or the depth of Mohorovičić's discontinuity (Moho), represent geolocated data for areas ranging in size from a few degrees to global coverage of the entire planet. Hence, such a crustal model as CRUST1.0 (Mooney 1998; Laske *et al.* 2013), based on ETOPO1 global relief model (Amante & Eakins 2009), provides the density distribution inside the crust divided into eight separate layers—ice, water, soft, middle and hard sediment, upper, middle and lower crust—from the Earth surface down to the Moho and the density value just beneath the Moho on a  $1^\circ \times 1^\circ$  grid. Quite recently, a new model at  $1^\circ$  resolution named LITHO1.0 (Pasyanos *et al.* 2014) has been developed that offers an extension of crust models down to the asthenosphere by including the lithospheric mantle (lid). The use of CRUST1.0 as an initial model of the Earth's crust in the inversion allows it to be consistent with LITHO1.0. The availability at a time of lithospheric models and the gravity gradients provided by the GOCE satellite at whatever area around the Earth, offers us the unique opportunity to determine regional gravity gradient anomalies for lithospheric interpretation (Bouman *et al.* 2015), and for mapping the density distribution beyond the lithosphere up to the Earth's mantle (Panet *et al.* 2014).

Interpreting gravity gradient anomalies derived from GOCE satellite measurements in terms of source and density distribution requires mathematical methods that directly model the gravity gradients (consisting of the nine second-order derivatives of the gravity potential, also known as Marussi's tensor) due to large scale, arbitrarily shaped sources of variable density. The gravity gradients previously mentioned are actually gravitational gradients, since gravity gradients also include the rotation of the mass source. The Earth's rotation is well known and not considered if we assume that the gravitational gradients produced by the mass source can be interpreted as the differences between the measured gravity gradients and those deduced from an Earth model, also known as gravity gradient anomalies. From this point forward, we will only use the term gravity gradients.

For the purpose of comparison, the gravity gradients obtained by numerical computation have to be expressed in the same local north-oriented frame—denoted by LNOF (Bouman *et al.* 2013)—as those currently available for geophysical applications, derived from GOCE data by scientists specialized in space gravimetry (Gruber *et al.* 2014). The starting point of every numerical method for calculating gravity gradients, relies upon the gravity potential since gravity gradients can be calculated from the gravity potential by applying linear operators. The density distribution, given for instance

by geological models of the Earth, is only available in discrete form, for example, consisting of a regular grid of evenly spaced, geolocated points. Thus, the numerical computation of the gravity potential requires a mass discretization obtained by decomposing the Earth's layers into a finite number of elementary solid bodies. As matters stand, the need to employ spherical prisms or 'tesseroids' to accurately compute the gravity effects of large-scale structures, for which the Earth's curvature must be considered, has been established unequivocally (Heck & Seitz 2007; Wild-Pfeiffer 2008), especially as the computation can be carried out in acceptable computation time (Grombein *et al.* 2013). Furthermore, the algorithms currently used in many programs of geophysical forward modeling are still based on a flat Earth approximation. Such an approximation has proven to be inadequate for computing gravity gradients of Earth's sources comparable to GOCE gravity gradients expressed in the LNOF (Bouman *et al.* 2013). An additional processing is then required to transform the gravity gradients initially computed in the flat model reference frame to the LNOF. It is likely to be more advantageous to directly calculate the gravity gradients in the LNOF.

Numerous approaches have been adopted to numerically evaluate gravity field constituents for a tesseroid volume depending on the requirements of the specific applications in the fields of geophysics as well as in physical geodesy. Because there is no analytical formula giving the gravity effects of a tesseroid, calculations have to be conducted by means of approximate methods of integral calculus. In their innovative attempt to model the gravity effects of the spherical Earth, Ku (1977) and von Frese *et al.* (1981a) derived a least-squares-based method to determine the distribution of point sources equivalent to the anomalous solid body generating the same gravity anomaly as the one observed. In such a method, the disturbing point sources within the anomalous body and their masses can be estimated according to a Gauss–Legendre quadrature (GLQ) decomposition of the integral involved in the expression giving the anomalous body gravity field. The resulting equivalent point sources can then be used to directly calculate the gravity effects of arbitrary mass distributions (von Frese *et al.* 1981b). More recently, GLQ has been used to numerically estimate the potential of a tesseroid and its first and second derivatives (Asgharzadeh *et al.* 2007; Wild-Pfeiffer 2008). Software such as Tesseroids (Uieda *et al.* 2011; Uieda 2013) is a sequel to these two papers, thus allowing the complete gravity field of an arbitrary mass distribution defined in spherical coordinates to be calculated.

Other approaches have also been discussed involving alternative mathematical methods for modeling the spherical prism (Johnson & Litehiser 1972; Cochran & Talwani 1978; Smith *et al.* 2001). For instance, Petrović (1996) and Tsoulis (2012) derived analytical expressions of the gravitational potential and its first and second derivatives for polyhedral bodies using line integrals. Alternatively, some algorithms developed in Tsoulis *et al.* (2009) can directly provide the finite set of Stokes' coefficients involved in the spherical harmonics expansion of the gravity potential of an arbitrarily shaped polyhedral body. The transformation of the gravity anomalies produced by rectangular prisms has been explored by some authors (Talwani & Ewing 1960; Nagy 1966; Paul 1974; Plouff 1976; Ku 1977; Nagy *et al.* 2000), especially with the help of exact analytical formulae for calculating gravity effects of the rectangular prism. The flat top of rectangular prisms can be replaced by a smooth surface to advantageously accommodate more complex mass sources (Tsoulis *et al.* 2003). Some other approaches rely upon a Taylor series expansion of the gravity potential integral kernel in the spirit of MacMillan (1930), who was the first to

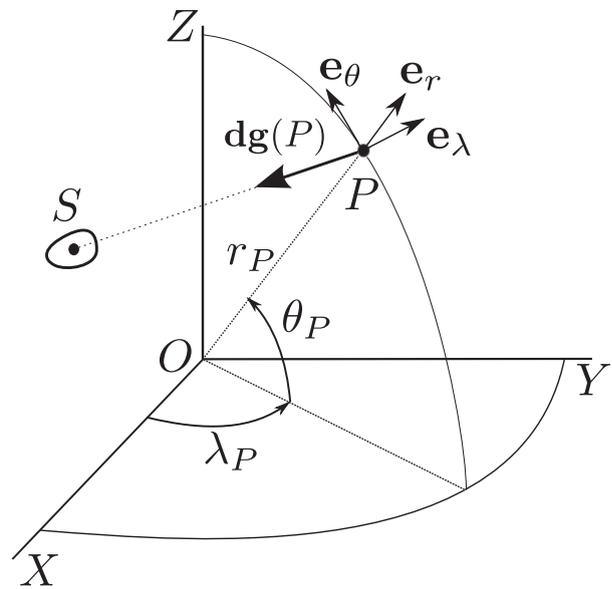
develop the theory for the gravity potential of a rectangular prism. Heck & Seitz (2007) utilized a third-order Taylor expansion to evaluate the tesseroïd gravity potential and its first radial derivative, which is the radial component of the gravity vector. Wild-Pfeiffer (2008) extended the method to all the second derivatives of the tesseroïd gravity potential, thus providing the complete gravity field of a tesseroïd (gravity vector and Marussi's tensor) and, recently, Grombein *et al.* (2013) have proposed optimal formulae that differ from the previous in that Cartesian integral kernels are involved instead of spherical ones and that also apply to the Poles, which permit the computation time to be significantly decreased. Finally the semi-analytical method proposed by Heck & Seitz (2007) consists in analytically solving the one-dimensional integral involved in the gravity potential, which depends on the radial distance and numerically evaluating the remaining two-dimensional integral by means of a quadrature.

The question which then arises is whether gravity calculation methods using spherical prisms remain valid for calculating the gravity effects produced by larger structures than those encountered in the topography or the crust and for which the ellipticity of the Earth must be taken into account. Whether such an approximative calculation method is effective cannot be settled in isolation; it makes more sense to ask whether the accuracy of calculated gravity values is adequate for some stated purposes involving newly acquired gravity data. As an illustration, the accuracy of the gravity gradients provided by the GOCE satellite mission within spectral ranges suitable for geological applications is expected to be  $10^{-12} \text{ s}^{-2}$  (Visser 2011; Bouman & Fuchs 2012), that is 1 mE ('E' denotes Eötvös unit;  $1 \text{ E} = 10^{-9} \text{ s}^{-2}$ ;  $1 \text{ mE} = 10^{-3} \text{ E}$ ). With a view of gravity forward modeling, a suitable gravity gradient calculation method must ensure that the modeling error is always less than the measurement error. Aware that the uncertainty still present in the Earth's geophysical models must be reduced further in order to be used with GOCE data, we still contend that the development of a reliable gravity gradient calculation method is a necessary first step. Thus, in order to be used with GOCE gravity gradients, the method should achieve at least an accuracy of a tenth or indeed a hundredth of millieötvös.

The paper is organized as follows: in Section 2, we review the definitions of fundamental physical quantities related to the gravity field. Section 3 is devoted to validating the numerical integration method from the comparison between the gravity field values of simple sources obtained by means of numerical and analytical calculations, respectively. The necessary mathematical background for understanding GLQ is recalled at this point. Section 4 outlines comparisons between the gravity gradient anomalies of an ellipsoidally shaped Earth, by means of spherical prism and ellipsoidal prism decompositions, respectively. The comparison is conducted in two cases, the first involving the density distribution given by the Preliminary Reference Earth Model (PREM; Dziewonski & Anderson 1981), the second using a combined density distribution derived from those given by LITHO1.0 and PREM.

## 2 THEORY

In this section, we provide notations and review the necessary mathematical background related to the gravity field. Only equations are written out, numerical tests for assessing our method will be presented in Section 3. The reasoning and mathematical approach adopted here are deliberately close to the ones of Asgharzadeh *et al.* (2007) for the purpose of comparison.



**Figure 1.** Gravity field of a mass source and spherical coordinate definition. The acceleration vector  $\mathbf{dg}(P)$  at the point  $P$  results from the gravitational attraction exerted by the mass source located at the point  $S$ . The frame  $(OXYZ)$  defines an Earth-fixed, Earth-centred, Cartesian reference frame. The observation point is positioned in the spherical coordinates  $(\lambda_P, \theta_P, r_P)$  consisting of the longitude  $\lambda_P$ , the spherical latitude  $\theta_P$  and the geocentric radius  $r_P$ . The set of vectors  $(\mathbf{e}_\lambda, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_r)$  is the local spherical basis at point  $P$ .

### 2.1 Gravity effects for a point mass

The gravitational potential  $dV(P)$  produced by a point pole ( $S$ ) of mass  $dm_S$  (in kg) located at the source point  $S$ , at the observation point  $P$  (Fig. 1) is given by :

$$dV(P) = G \frac{dm_S}{PS}, \quad (1)$$

where  $G$  is the gravitational constant ( $6.67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$ ) and  $PS$  is the distance (in m) between the source point  $S$  and the observation point  $P$ . The gravitational acceleration vector  $\mathbf{dg}(P)$  (in  $\text{m s}^{-2} = 10^5 \text{ mGal}$ ) is obtained by calculating the space gradient vector of the scalar potential with respect to the point  $P$ :

$$\mathbf{dg}(P) = \nabla(dV(P)) = \nabla \left( G \frac{dm_S}{PS} \right). \quad (2)$$

In the remainder of the paper, only gravitational effects contributing to the Earth's gravity field will be accounted for and thus vector  $\mathbf{dg}(P)$  will be regarded as an infinitesimal element of the Earth's gravity vector. Finally, the gravity gradient tensor, also referred to as Marussi's tensor (in  $\text{s}^{-2} = 10^9 \text{ E}$ ), is obtained by calculating the tensor of space gradients of the gravity vector:

$$dT(P) = \nabla(\mathbf{dg}(P)) = \nabla(\nabla(V(P))) = \nabla \left( \nabla \left( G \frac{dm_S}{PS} \right) \right). \quad (3)$$

### 2.2 Gravity effects for an extended mass distribution

Let  $\rho_S$  be the constant density of the mass source of volume  $d\Omega_S$ ,  $\rho_S = dm_S/d\Omega_S$  (in  $\text{kg m}^{-3}$ ), then the point mass gravity effects given by eqs (1), (2) and (3), respectively become:

$$dV(P) = G \frac{\rho_S d\Omega_S}{PS}, \quad (4)$$

$$d\mathbf{g}(P) = \nabla \left( G \frac{\rho_S d\Omega_S}{PS} \right) = G \nabla \left( \frac{1}{PS} \right) \rho_S d\Omega_S, \quad (5)$$

$$dT(P) = \nabla \left( \nabla \left( G \frac{\rho_S d\Omega_S}{PS} \right) \right) = G \nabla \left( \nabla \left( \frac{1}{PS} \right) \right) \rho_S d\Omega_S. \quad (6)$$

Hence, the gravity effects of an extended mass body may be expressed by integrating the gravity effects of the mass elements that fill up the volume  $\Omega$  of the body, thus giving:

$$V(P) = G \rho_S \int \int \int_{\Omega} \frac{d\Omega_S}{PS}, \quad (7)$$

$$\mathbf{g}(P) = G \rho_S \int \int \int_{\Omega} \nabla \left( \frac{1}{PS} \right) d\Omega_S, \quad (8)$$

$$\mathbf{T}(P) = G \rho_S \int \int \int_{\Omega} \nabla \left( \nabla \left( \frac{1}{PS} \right) \right) d\Omega_S. \quad (9)$$

The integrals in eqs (7)–(9) can be calculated once a first space coordinate system is chosen to locate the observation point  $P$  and a second to locate and describe the points  $S$  of the mass body (S). On the one hand, when both are located by their Cartesian coordinates  $(X, Y, Z)$ , the mass bodies can be decomposed into rectangular prisms (right rectangular parallelepipeds) and integrals (7)–(9) can be expressed analytically, thus giving rigorous and consistent analytical forms describing the different gravity-related quantities (Nagy *et al.* 2000; Plouff 1976). On the other hand, when both are located by their spherical coordinates  $(\lambda, \theta, r)$  (Figs 1 and 2), the mass bodies can be modeled by tesseroids (spherical prisms) and integrals (7), (8) and (9) cannot be solved analytically. The GLQ is then needed to obtain approximates of the different gravity-related quantities (Asgharzadeh *et al.* 2007). Due to the flattening of the

Earth at the Poles, an approximation error occurs when one uses the spherical prism for describing large-scale geological structures within an ellipsoidal Earth. This will be investigated in Section 4. At this point, the mass element likely to be most suitable for decomposing ellipsoidal mass bodies is the ellipsoidal prism described subsequently.

### 2.3 Gravity effects for the ellipsoidal prism

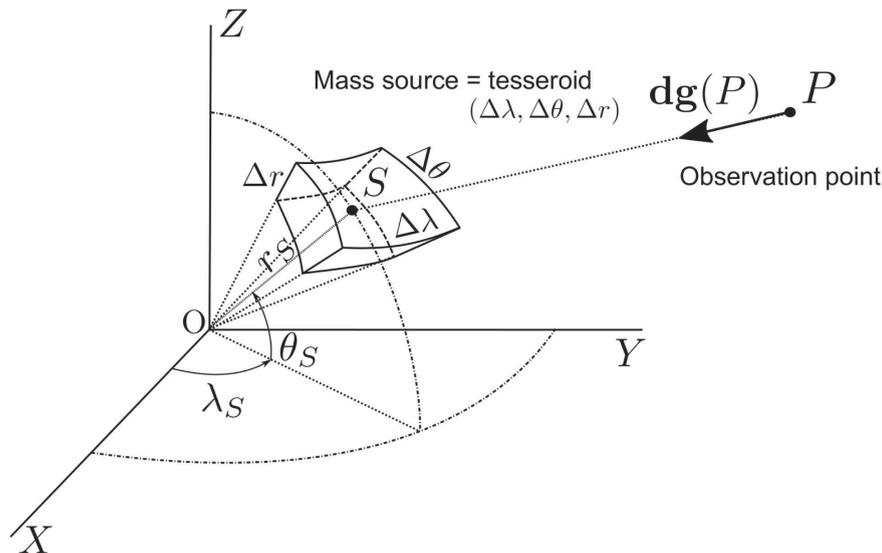
#### 2.3.1 Ellipsoidal coordinates

A reference ellipsoid of revolution about polar axis is commonly used to depict the Earth's shape as flattened at the Poles (oblate spheroid, see Fig. 3). Such an ellipsoid has two axes of equal length and a third shorter one. Its geometric properties are completely determined by its semi-major axis  $a$  (in m) and its eccentricity  $e$ . Let  $O$  be the centre of the ellipsoid and  $(OX), (OY), (OZ)$  the three axes of an orthogonal, right-handed Cartesian reference frame such that  $(OZ)$  coincides with the symmetry axis (polar axis) of the ellipsoid. In this case, the Cartesian coordinates  $(X_S, Y_S, Z_S)$  of any point  $S$  belonging to the ellipsoid denoted by  $\epsilon_{a,e}$  satisfy the following equation:

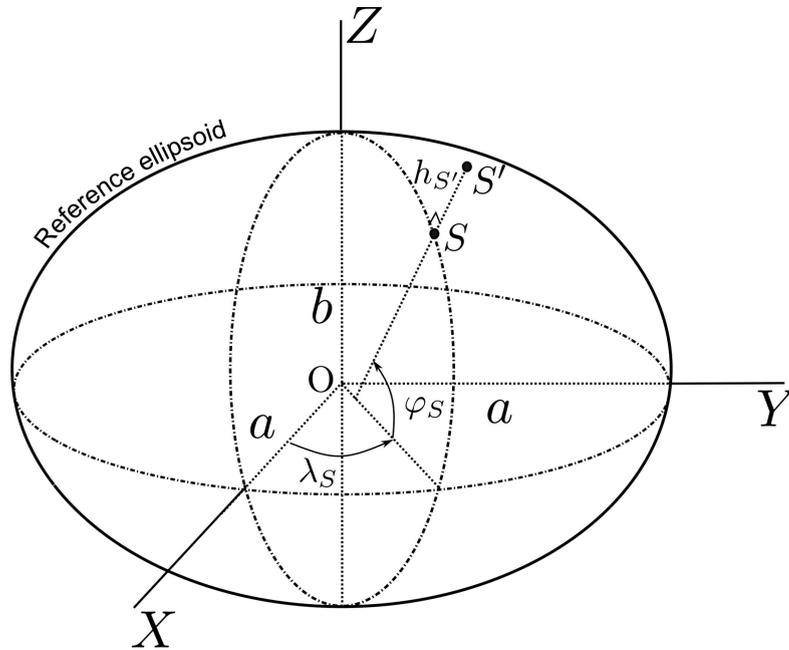
$$\frac{X_S^2 + Y_S^2}{a^2} + \frac{Z_S^2}{b^2} = 1, \quad (10)$$

where  $b = a\sqrt{1 - e^2}$  is the semi-minor axis of the ellipsoid.

Let  $\lambda_S$  be the longitude of the point  $S$ , that is, the angle between the meridian plane of Greenwich and the meridian plane that passes through that point and  $\varphi_S$  the latitude of the point  $S$ , that is, the angle between the equatorial plane and the normal to the ellipsoid that passes through that point. In terms of geodetic latitude  $\varphi_S$  and



**Figure 2.** Tesseroid definition. When the points  $S$  of the Earth's body are located in the spherical coordinates  $(\lambda_S, \theta_S, r_S)$ , the mass element can be modeled by a spherical prism or 'tesseroid'. If the dimensions of the tesseroid are, respectively,  $\Delta\lambda$  for the longitude,  $\Delta\theta$  for the spherical latitude and  $\Delta r$  for the geocentric radius, then the tesseroid at point  $S$  corresponds to the mass element between the two meridians of respective longitudes  $\lambda_S - \Delta\lambda/2$  and  $\lambda_S + \Delta\lambda/2$ , the two conical surfaces leant on the parallels of respective latitudes  $\theta_S - \Delta\theta/2$  and  $\theta_S + \Delta\theta/2$  and the two geocentric spheres of respective radii  $r_S - \Delta r/2$  and  $r_S + \Delta r/2$ .



**Figure 3.** Reference ellipsoid and geodetic coordinates definitions. The reference ellipsoid of revolution about the polar axis ( $OZ$ ) is completely defined once given its semi-major axis  $a$  and its eccentricity  $e$ , from which the semi-minor axis  $b$  can be calculated. Any point  $S$  belonging to the reference ellipsoid can be positioned in the geodetic coordinates  $(\lambda_S, \varphi_S)$ . Any point  $S'$ , which does not belong to the ellipsoid surface, can still be located by using the algebraic distance  $h_{S'}$  measured between  $S'$  and  $S$  along the normal passing through  $S$ . The three numbers  $(\lambda_S, \varphi_S, h_{S'})$  thereby corresponds to the geodetic coordinates of point  $S'$ .

longitude  $\lambda_S$ , the Cartesian coordinates of point  $S$  may be expressed as:

$$\begin{cases} X_S = N_S(\varphi_S) \cos \varphi_S \cos \lambda_S \\ Y_S = N_S(\varphi_S) \cos \varphi_S \sin \lambda_S \\ Z_S = N_S(\varphi_S) (1 - e^2) \sin \varphi_S \end{cases} \quad (11)$$

where  $N_S(\varphi_S)$  is the radius of curvature of the prime vertical at latitude  $\varphi_S$  given by:

$$N_S(\varphi_S) = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi_S}} \quad (12)$$

Any point  $S'$  that does not belong to the ellipsoid surface can still be located given its ellipsoidal height  $h_{S'}$  (Fig. 3). The ellipsoidal height is the algebraic distance measured between  $S'$  and  $S$  along the normal that passes through  $S$ . The ellipsoidal height  $h_{S'}$  of point  $S'$  can be either positive or negative depending on whether  $S'$  is located above or beneath the ellipsoid. Consequently, any point located on the ellipsoid surface has an ellipsoidal height equal to zero ( $h = 0$ ). Finally, the Cartesian coordinates  $(X_{S'}, Y_{S'}, Z_{S'})$  of the point  $S'$  are given by:

$$\begin{cases} X_{S'} = (N_S + h_{S'}) \cos \varphi_S \cos \lambda_S \\ Y_{S'} = (N_S + h_{S'}) \cos \varphi_S \sin \lambda_S \\ Z_{S'} = (N_S(1 - e^2) + h_{S'}) \sin \varphi_S \end{cases} \quad (13)$$

The geodetic coordinates consisting of geodetic longitude and latitude completed by ellipsoidal height are commonly used to locate points with respect to a reference ellipsoid  $\epsilon_{a,e}$ . However, solving volume integrals such as those involved in gravity field calculations can actually be more conveniently achieved using another system of coordinates named ellipsoidal coordinates. Considering this coordinate system, the latitude and longitude of point  $S'$  previously

mentioned remain the same as those of its geodetic coordinates. A new coordinate denoted by  $u_{S'}$  replaces the ellipsoidal height  $h_{S'}$ , which may be expressed as a function of the Cartesian coordinates of  $S'$  as:

$$u_{S'} = \sqrt{\frac{X_{S'}^2 + Y_{S'}^2}{a^2} + \frac{Z_{S'}^2}{b^2}} \quad (14)$$

Rewriting eq. (14) after having divided each of its members by  $u_{S'} \neq 0$  leads to:

$$\sqrt{\frac{X_{S'}^2 + Y_{S'}^2}{(u_{S'}a)^2} + \frac{Z_{S'}^2}{(u_{S'}b)^2}} = 1. \quad (15)$$

This can be interpreted by the fact that the point  $S'$  belongs to the ellipsoid  $\epsilon_{a',e'}$  the semi-major and semi-minor axes of which are, respectively, given by  $a' = u_{S'}a$  and  $b' = u_{S'}b$ . Such an ellipsoid as  $\epsilon_{a',e'}$  and the reference ellipsoid  $\epsilon_{a,e}$  are simply homothetic with a scaling factor equal to  $u_{S'}$ . In other words, the third coordinate  $u_{S'}$  in the ellipsoidal coordinates  $(\lambda_S, \varphi_S, u_{S'})$  of the point  $S'$  corresponds to the scaling factor needed to transform the reference ellipsoid into a concentric ellipsoid passing through the point  $S'$ . Since  $e'^2 = \frac{a'^2 - b'^2}{a'^2} = \frac{u_{S'}^2(a^2 - b^2)}{u_{S'}^2 a^2} = e^2$ , we have  $e' = e$ . The eccentricity of the ellipsoid  $\epsilon_{a',e'}$  therefore remains the same as that of the reference ellipsoid. Any point  $S$  on the reference ellipsoid satisfies  $u_S = 1$ . The coordinate  $u_{S'}$  of a point  $S'$ , which does not belong to the reference ellipsoid surface, can be either greater or lower than 1 depending on whether the homothetic ellipsoid passing through  $S'$  is located inside or outside the reference ellipsoid. In the ellipsoidal coordinate system, the functions relating the ellipsoidal coordinates

$(\lambda, \varphi, u)$  of any point  $M$  to its Cartesian coordinates  $(X, Y, Z)$  are the following:

$$\begin{cases} X = uN(\varphi) \cos \varphi \cos \lambda \\ Y = uN(\varphi) \cos \varphi \sin \lambda \\ Z = uN(\varphi)(1 - e^2) \sin \varphi \end{cases}, \tag{16}$$

where  $N(\varphi) = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}$ .

These relationships can be considered as a parametric representation of the ellipsoid passing through the point  $M$ , of same centre as the reference ellipsoid  $\epsilon_{a,e}$  and deduced from it by a scaling factor equal to  $u$ . The use of ellipsoidal coordinates has proven to be much more convenient than geodetic coordinates for mathematically decomposing the volume of an ellipsoid. From a practical point of view, the calculation of the ellipsoidal coordinates  $(\lambda, \varphi, u)$  of a point from its geodetic coordinates  $(\lambda, \varphi, h)$  is crucial because the latter are those usually given in the Earth's geophysical models. This can be readily carried out by transforming geodetic coordinates  $(\lambda, \varphi, h)$  in Cartesian coordinates  $(X, Y, Z)$  through eqs (13), and by calculating the scale factor  $u$  by means of eq. (14).

### 2.3.2 The ellipsoidal prism

An ellipsoidal prism can be easily defined in the ellipsoidal coordinates. Indeed, given:

- (i) two meridians of longitudes  $\lambda_1$  and  $\lambda_2$  respectively,
- (ii) two parallels of geodetic latitudes  $\varphi_1$  and  $\varphi_2$  respectively,
- (iii) two homothetic ellipsoids with the scaling factors  $u_1$  and  $u_2$  respectively,
- (iv) a constant density  $\rho_S$ ,

we obtain a unique ellipsoidal prism that can be viewed as the elementary solid body bounded by six surfaces (Fig. 4): the two

meridian planes of respective longitudes  $\lambda_1$  and  $\lambda_2$  ( $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$ ), the two conical surfaces formed by the lines that pass through point  $O$  and each point of the parallel circles of geodetic latitudes  $\varphi_1$  and  $\varphi_2$  ( $\varphi_1 < \varphi < \varphi_2$ ) respectively, and the surfaces of two geocentric and homothetic ellipsoids of respective scaling factors  $u_1$  and  $u_2$  ( $u_1 < u < u_2$ ). The prism volume can be infinitesimal if the differences  $\lambda_2 - \lambda_1$ ,  $\varphi_2 - \varphi_1$  and  $u_2 - u_1$  either are or are assumed to be infinitesimal themselves. In the context of gravity effect calculations, such bodies can be considered as ellipsoidal mass elements of constant density  $\rho_S$  and volume  $d\Omega_S$ . We shall now express the differential volume in the ellipsoidal coordinates, that is the volume  $d\Omega_S$  of an infinitesimal ellipsoidal prism centred at the point  $S(\lambda, \varphi, u)$ . This volume is mathematically given by Kellogg (1954):

$$d\Omega = |\det \mathbf{J}| d\lambda d\varphi du, \tag{17}$$

where  $\mathbf{J}$  is the Jacobian matrix of the parametric representation (16).

We have then to determine the Jacobian matrix given by:

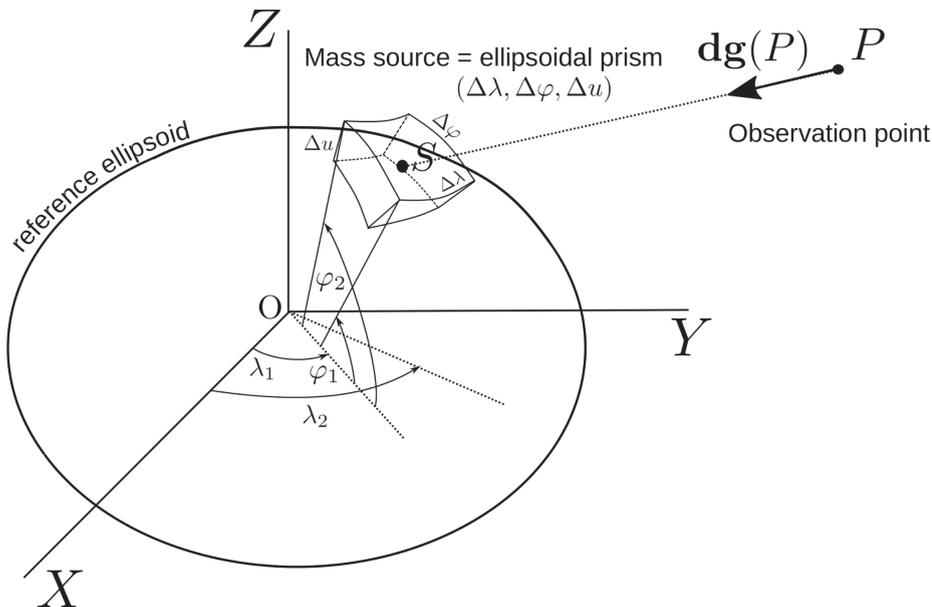
$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \partial_\lambda X & \partial_\varphi X & \partial_u X \\ \partial_\lambda Y & \partial_\varphi Y & \partial_u Y \\ \partial_\lambda Z & \partial_\varphi Z & \partial_u Z \end{bmatrix}, \tag{18}$$

where  $\partial_\alpha \dots, \alpha = \lambda, \varphi, u$  denotes the partial derivation with respect to  $\alpha$ .

After having performed all the calculations, we obtain:

$$d\Omega_S = \frac{a^3 \cos \varphi (1 - e^2) u^2}{[1 - e^2 \sin^2 \varphi]^{\frac{3}{2}}} d\lambda d\varphi du. \tag{19}$$

If we integrate this expression over the reference ellipsoid  $\epsilon_{a,e}$  for which the ellipsoidal coordinates  $\lambda, \varphi$  and  $u$  lie, respectively, within



**Figure 4.** Ellipsoidal prism definition. The mass element bounded by the two meridian planes of longitudes  $\lambda_1$  and  $\lambda_2$ , respectively, the two conical surfaces formed by the lines passing through point  $O$  and each point of the parallel circles of geodetic latitudes  $\varphi_1$  and  $\varphi_2$ , respectively, and the surfaces of the two concentric and homothetic ellipsoids of scale factors  $u_1$  and  $u_2$ , respectively, corresponds to an elementary ellipsoidal prism. The scale factors  $u_1$  and  $u_2$  are particularly derived from the two heights  $h_1$  and  $h_2$  commonly used in the Earth geophysical models to define the vertical boundaries of the mass elements.

$[0, 2\pi]$ ,  $[-\pi/2, \pi/2]$  and  $[0, 1]$ , then we can calculate its volume by:

$$\Omega_{\epsilon_{a,e}} = \int_{\lambda=0}^{\lambda=2\pi} \int_{\varphi=-\frac{\pi}{2}}^{\varphi=\frac{\pi}{2}} \int_{u=0}^{u=1} \frac{a^3(1-e^2)\cos\varphi u^2}{(1-e^2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}} d\lambda d\varphi du$$

$$\Omega_{\epsilon_{a,e}} = a^3(1-e^2) [\lambda]_0^{2\pi} \left[ \frac{u^3}{3} \right]_0^1 \left[ \frac{\sin\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}} \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$\Omega_{\epsilon_{a,e}} = \frac{4\pi}{3} a^3 \sqrt{1-e^2} = \frac{4\pi}{3} a^2 b. \tag{20}$$

Eq. (20) corresponds to the well-known formula giving the volume of an oblate spheroid the distinct axis lengths of which are, respectively,  $a$  and  $b$ .

### 2.3.3 Formulae for the ellipsoidal prism

To solve the integrals (7), (8) and (9), we still have to determine the expression of the distance  $PS$ . Since the mass  $S$  is now an ellipsoidal prism, the distance  $PS$  must be regarded as the distance between the observation point  $P$  and any point  $S$  located inside the ellipsoidal prism.

In order to obtain gravity field components in the local spherical basis, the observation point  $P$  is defined through its spherical coordinates  $(\lambda_p, \theta_p, r_p)$ , where  $\lambda_p$  is the longitude measured in the equatorial plane between the Greenwich meridian and the meridian plane passing through  $P$ ,  $\theta_p$  is the spherical latitude measured in the meridian plane between the equatorial plane and the radius vector  $\mathbf{r}_p$  from the Earth centre  $O$  to  $P$  and  $r_p$  is the magnitude of the radius vector  $\mathbf{r}_p$  (Fig. 1). Let  $(\lambda_s, \varphi_s, u_s)$  be the ellipsoidal coordinates of the running point  $S$  inside the ellipsoid. We can then express the distance  $PS$  as:

$$PS = \sqrt{\Delta X_{PS}^2 + \Delta Y_{PS}^2 + \Delta Z_{PS}^2}, \tag{21}$$

where:

$$\begin{aligned} \Delta X_{PS} &= X_P - X_S \\ \Delta Y_{PS} &= Y_P - Y_S \\ \Delta Z_{PS} &= Z_P - Z_S \end{aligned} \tag{22}$$

$$S \begin{cases} X_S = u_S N_S \cos \varphi_S \cos \lambda_S \\ Y_S = u_S N_S \cos \varphi_S \sin \lambda_S \\ Z_S = u_S N_S (1 - e^2) \sin \varphi_S \end{cases} \tag{23}$$

using  $N_S(\varphi_S) = \frac{a}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi_S}}$ , and,

$$P \begin{cases} X_P = r_p \cos \theta_p \cos \lambda_p \\ Y_P = r_p \cos \theta_p \sin \lambda_p \\ Z_P = r_p \sin \theta_p \end{cases} \tag{24}$$

By substituting the above details into eq. (7), we obtain an integral form of the gravity potential produced by the ellipsoidal prism expressed as:

$$\begin{aligned} V(P) &= G \rho_S \iiint_{\Omega} \frac{d\Omega_S}{PS} \\ &= G \rho_S \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{u_1}^{u_2} \frac{N_S^3 \cos \varphi_S (1 - e^2) u_S^2}{\sqrt{\Delta X_{PS}^2 + \Delta Y_{PS}^2 + \Delta Z_{PS}^2}} d\lambda_S d\varphi_S du_S. \end{aligned} \tag{25}$$

At this point, the derivation of the gravity vector components and gravity gradient tensor elements could have been performed in the local ellipsoidal basis at point  $P$ . As previously mentioned, since we are interested of having the gravity vector and the gravity gradient tensor expressed in the local spherical basis, the gradient operator  $\nabla$  has to be expressed in the spherical coordinates. This operator has three components measured in the local spherical basis  $(\mathbf{e}_\lambda, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_r)$  consisting of three unitary, two-by-two orthogonal vectors, each having its origin at point  $P$ . Let  $(g_\lambda, g_\theta, g_r)$  be the components of the gravity vector given by eq. (8) in the local spherical basis, that is:

$$\mathbf{g}(P) = g_\lambda \mathbf{e}_\lambda + g_\theta \mathbf{e}_\theta + g_r \mathbf{e}_r; \tag{26}$$

then we have:

$$g_\lambda(P) = G \rho_S \iiint_{\Omega} \frac{1}{r_p \cos \theta_p} \frac{\partial}{\partial \lambda_p} \left( \frac{1}{PS} \right) d\Omega_S, \tag{27}$$

$$g_\theta(P) = G \rho_S \iiint_{\Omega} \frac{1}{r_p} \frac{\partial}{\partial \theta_p} \left( \frac{1}{PS} \right) d\Omega_S, \tag{28}$$

$$g_r(P) = G \rho_S \iiint_{\Omega} \frac{\partial}{\partial r_p} \left( \frac{1}{PS} \right) d\Omega_S. \tag{29}$$

Similarly, by substituting the above-mentioned details, we obtain integral forms of the gravity vector components:

$$g_\lambda(P) = G \rho_S \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{u_1}^{u_2} \frac{X_P Y_S - Y_P X_S}{r_p \cos \theta_p P S^3} d\Omega_S, \tag{30}$$

$$\begin{aligned} g_\theta(P) &= G \rho_S \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{u_1}^{u_2} \\ &\times \frac{Z_P (\cos \lambda_P \Delta X_{PS} + \sin \lambda_P \Delta Y_{PS}) - r_p \cos \theta_P \Delta Z_{PS}}{r_p P S^3} d\Omega_S, \end{aligned} \tag{31}$$

$$\begin{aligned} g_r(P) &= -G \rho_S \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{u_1}^{u_2} \\ &\times \frac{X_P \Delta X_{PS} + Y_P \Delta Y_{PS} + Z_P \Delta Z_{PS}}{r_p P S^3} d\Omega_S, \end{aligned} \tag{32}$$

where  $d\Omega_S = N_S^3 \cos \varphi_S (1 - e^2) u^2 d\lambda d\varphi du$ .

Finally, the elementary gravity gradient tensor  $dT$  defined by eq. (3) may be expressed in the local spherical basis as the elements of a  $3 \times 3$  square matrix as follows:

$$dT = \begin{bmatrix} dT_{\lambda\lambda} & dT_{\lambda\theta} & dT_{\lambda r} \\ dT_{\theta\lambda} & dT_{\theta\theta} & dT_{\theta r} \\ dT_{r\lambda} & dT_{r\theta} & dT_{rr} \end{bmatrix}. \tag{33}$$

By incorporating the previous details into the gravity gradient components, we obtain the expressions given in Table 1 and the related partial derivatives given in Table 2. The complete gravity gradient tensor  $T$  results from the integration of the elements of  $dT$  over the source volume. Each of its elements may be expressed as:

$$T_{vw} = \iiint_{\Omega} dT_{vw} = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{u_1}^{u_2} dT_{vw} \tag{34}$$

where  $v, w = r, \theta$  or  $\lambda$ .

**Table 1.** Gravity gradient tensor elements.

Element	Expression
$dT_{\lambda\lambda}$	$\frac{1}{r_p \cos \theta_p} \frac{\partial(\text{dg}_\lambda)}{\partial \lambda_p} + \frac{1}{r_p} \text{dg}_r - \frac{\sin \theta_p}{r_p \cos \theta_p} \text{dg}_\theta$
$dT_{\lambda\theta}$	$\frac{1}{r_p} \frac{\partial(\text{dg}_\lambda)}{\partial \theta_p}$
$dT_{\lambda r}$	$\frac{\partial(\text{dg}_r)}{\partial r_p}$
$dT_{\theta\lambda}$	$\frac{1}{r_p \cos \theta_p} \frac{\partial(\text{dg}_\theta)}{\partial \lambda_p} + \frac{\sin \theta_p}{r_p \cos \theta_p} \text{dg}_\lambda$
$dT_{\theta\theta}$	$\frac{1}{r_p} \frac{\partial(\text{dg}_\theta)}{\partial \theta_p} + \frac{1}{r_p} \text{dg}_r$
$dT_{\theta r}$	$\frac{\partial(\text{dg}_r)}{\partial r_p}$
$dT_{r\lambda}$	$\frac{1}{r_p \cos \theta_p} \frac{\partial(\text{dg}_r)}{\partial \lambda_p} - \frac{1}{r_p} \text{dg}_\lambda$
$dT_{r\theta}$	$\frac{1}{r_p} \frac{\partial(\text{dg}_r)}{\partial \theta_p} - \frac{1}{r_p} \text{dg}_\theta$
$dT_{rr}$	$\frac{\partial(\text{dg}_r)}{\partial r_p}$

Note. The nine elements of the gradient gravity tensor expressed in the local spherical basis, tabulated as functions of the gravity vector components.

Finally, it should be noted that the local spherical basis defined in this manuscript (Fig. 1) and the LNOF mentioned in the introduction are different. The transformation between these two frames simply involves a matrix such as:

$$Q = R_3(90^\circ) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (35)$$

If  $T$  is the gravity gradient tensor expressed in the local spherical basis and  $T^{\text{LNOF}}$  is the gravity gradient tensor expressed in the LNOF, then:

$$T^{\text{LNOF}} = Q T Q^T. \quad (36)$$

**Table 2.** Partial derivatives of gravity vector components.

Element	Expression
$\frac{\partial(\text{dg}_\lambda)}{\partial \lambda_p}$	$G\rho_S \left[ \frac{3(Y_p X_S - X_p Y_S)^2}{r_p \cos \theta_p P S^5} + \frac{X_p \Delta X_{PS} + Y_p \Delta Y_{PS} - r_p^2 \cos^2 \theta_p}{r_p \cos \theta_p P S^5} \right] d\Omega_S$
$\frac{\partial(\text{dg}_\lambda)}{\partial \theta_p}$	$G\rho_S \left[ \frac{Z_p (\cos \lambda_p \Delta Y_{PS} - \sin \lambda_p \Delta X_{PS}) + \sin \theta_p (X_p Y_S - Y_p X_S)}{r_p \cos \theta_p P S^5} + \dots \right. \\ \left. \dots \frac{3(X_p Y_S - Y_p X_S)(Z_p (\cos \lambda_p \Delta X_{PS} + \sin \lambda_p \Delta Y_{PS}) - r_p \cos \theta_p \Delta Z_{PS})}{r_p \cos \theta_p P S^5} \right] d\Omega_S$
$\frac{\partial(\text{dg}_\lambda)}{\partial r_p}$	$G\rho_S \left[ \frac{3(Y_p X_S - X_p Y_S)(X_p \Delta X_{PS} + Y_p \Delta Y_{PS} + Z_p \Delta Z_{PS})}{r_p^2 \cos \theta_p P S^5} \right] d\Omega_S$
$\frac{\partial(\text{dg}_\theta)}{\partial \lambda_p}$	$G\rho_S \left[ \frac{3(X_p Y_S - Y_p X_S)(Z_p (\cos \lambda_p \Delta X_{PS} + \sin \lambda_p \Delta Y_{PS}) - r_p \cos \theta_p \Delta Z_{PS})}{r_p \cos \theta_p P S^5} + \dots \right. \\ \left. \dots \frac{Z_p (\cos \lambda_p \Delta Y_{PS} - \sin \lambda_p \Delta X_{PS})}{r_p P S^5} \right] d\Omega_S$
$\frac{\partial(\text{dg}_\theta)}{\partial \theta_p}$	$G\rho_S \left[ \frac{3(Z_p (\cos \lambda_p \Delta X_{PS} + \sin \lambda_p \Delta Y_{PS}) - r_p \cos \theta_p \Delta Z_{PS})^2}{r_p P S^5} + \frac{X_p \Delta X_{PS} + Y_p \Delta Y_{PS} + Z_p \Delta Z_{PS} - r_p^2}{r_p P S^5} \right] d\Omega_S$
$\frac{\partial(\text{dg}_\theta)}{\partial r_p}$	$G\rho_S \left[ \frac{3(r_p \cos \theta_p \Delta Z_{PS} - Z_p (\sin \lambda_p \Delta Y_{PS} + \cos \lambda_p \Delta X_{PS}))(X_p \Delta X_{PS} + Y_p \Delta Y_{PS} + Z_p \Delta Z_{PS})}{r_p^2 P S^5} \right] d\Omega_S$
$\frac{\partial(\text{dg}_r)}{\partial \lambda_p}$	$G\rho_S \left[ \frac{3(Y_p X_S - X_p Y_S)(X_p \Delta X_{PS} + Y_p \Delta Y_{PS} + Z_p \Delta Z_{PS})}{r_p P S^5} - \frac{Y_p X_S - X_p Y_S}{r_p P S^5} \right] d\Omega_S$
$\frac{\partial(\text{dg}_r)}{\partial \theta_p}$	$G\rho_S \left[ \frac{(r_p \cos \theta_p \Delta Z_{PS} - Z_p (\cos \lambda_p \Delta X_{PS} + \sin \lambda_p \Delta Y_{PS}))(3(X_p \Delta X_{PS} + Y_p \Delta Y_{PS} + Z_p \Delta Z_{PS}) - P S^2)}{r_p P S^5} \right] d\Omega_S$
$\frac{\partial(\text{dg}_r)}{\partial r_p}$	$G\rho_S \left[ \frac{3(X_p \Delta X_{PS} + Y_p \Delta Y_{PS} + Z_p \Delta Z_{PS})^2}{r_p^2 P S^5} - \frac{1}{P S^3} \right] d\Omega_S$

Note. Partial derivatives of the three elementary gravity vector components involved in the expressions of gravity gradient tensor elements (Table 1), expressed in the local spherical basis.

### 3 ASSESSMENT OF THE NUMERICAL INTEGRATION METHOD

#### 3.1 The Gauss–Legendre quadrature

Integrating eqs (7)–(9) analytically is quite complicated. Instead we evaluate them using the GLQ. Specifically, these integrals can be expressed as the generalized triple integral:

$$\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{u_1}^{u_2} f(\lambda_p, \theta_p, r_p, \lambda_S, \varphi_S, u_S) du_S d\varphi_S d\lambda_S, \quad (37)$$

which can be numerically evaluated by means of the following quadrature formula:

$$\frac{(\lambda_2 - \lambda_1)(\varphi_2 - \varphi_1)(u_2 - u_1)}{8} \sum_{i=1}^{n_\lambda} \sum_{j=1}^{n_\varphi} \sum_{k=1}^{n_u} \times \omega_i \omega_j \omega_k f(\lambda_p, \theta_p, r_p, \lambda_{S_i}, \varphi_{S_j}, u_{S_k}), \quad (38)$$

where the function  $f$  is calculated at  $n_\lambda \times n_\varphi \times n_u$  optimal points, also called nodes, and each corresponding value is weighted by the product of three Gauss–Legendre coefficients (or weights)  $\omega_i$ ,  $\omega_j$  and  $\omega_k$ . Prior to the calculation of the quadrature formula (38), the ellipsoidal coordinates  $(\lambda_{S_i}, \varphi_{S_j}, u_{S_k})$  of the nodes and the corresponding weights have to be determined. The determination method is easily outlined by considering one single coordinate,  $\lambda_{S_i}$  for instance. This coordinate is simply related to the  $i$ th root  $\hat{\lambda}_{S_i}$  of the  $n_\lambda$ th order polynomial  $P_{n_\lambda}$  from the set of orthogonal Legendre polynomials defined over the range  $[-1, +1]$ , by Asgharzadeh *et al.* (2007):

$$\lambda_{S_i} = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} + \hat{\lambda}_{S_i} \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{2}, \quad (39)$$

where  $\hat{\lambda}_{S_i}$  lies within  $[-1, +1]$ .

The weight  $\omega_i$  affected to the coordinate  $\lambda_{S_i}$  is then given by:

$$\omega_i = \frac{2}{n_\lambda P_{n_\lambda-1}(\hat{\lambda}_{S_i}) P'_{n_\lambda}(\hat{\lambda}_{S_i})}, \quad (40)$$

where  $P_{n_\lambda-1}$  is the  $(n_\lambda - 1)$ th-order Legendre polynomials and  $P'_{n_\lambda}$  the first derivative of  $P_{n_\lambda}$ .

The remaining coordinates and weights can be calculated similarly by means of the same method, thus giving:

$$\varphi_{S_j} = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} + \hat{\varphi}_{S_j} \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}, \quad P_{n_\varphi}(\hat{\varphi}_{S_j}) = 0,$$

$$\omega_j = \frac{2}{n_\varphi P_{n_\varphi-1}(\hat{\varphi}_{S_j}) P'_{n_\varphi}(\hat{\varphi}_{S_j})}; \quad (41)$$

$$u_{S_k} = \frac{u_1 + u_2}{2} + \hat{u}_{S_k} \frac{u_2 - u_1}{2}, \quad P_{n_u}(\hat{u}_{S_k}) = 0$$

$$\omega_k = \frac{2}{n_u P_{n_u-1}(\hat{u}_{S_k}) P'_{n_u}(\hat{u}_{S_k})}. \quad (42)$$

The quadrature formula in eq. (38) shows that the complete gravity field of the ellipsoidal prism in eqs (7)–(9) can actually be computed by summing at each observation point the effects of  $n_\lambda \times n_\varphi \times n_u$  equivalent point poles (see Section 2), each located within the prism at the source point given in the ellipsoidal coordinates by  $(\lambda_{S_j}, \varphi_{S_j}, u_{S_j})$ , the gravity effect of which is weighted by the relevant Gauss–Legendre coefficients related to the  $(\lambda_S, \varphi_S, u_S)$  limits of the prism. The only issue remaining in applying eq. (38) is the selection of the number of nodes for the efficient computation of accurate gravity field values. A large number of nodes ensures a very accurate quadrature solution, but implies a longer computational time. The number of nodes will depend on the desired accuracy, the size of the ellipsoidal prism, the distance between the observation point and the prism and the gravity field constituent—gravitational potential, components of the gravity field vector, components of the gravity gradient tensor—to be computed. Concerning the calculation time, since our method only differs from that using spherical prisms (Asgharzadeh *et al.* 2007) by slightly more complex integrands, we do not observe really significant calculation time difference.

### 3.2 Validation of the Gauss–Legendre quadrature

To test whether the GLQ computation with ellipsoidal prisms gives reasonable estimates of the gravity gradients, we carried out numerical gravity gradient calculation for an ellipsoidal shell of constant density. In this particular case, true analytical formulae exist in the Cartesian coordinates (Kellogg 1954), thus allowing the gravity vector components and the Marussi's tensor elements specifically at any point in a local Cartesian basis to be calculated. Once expressed in the local spherical basis, these quantities are directly comparable to those provided by the GLQ and their differences measure the approximation error. Put more precisely, we considered the ellipsoidal shell located between two homothetical ellipsoids  $\epsilon_{u=1}$  and  $\epsilon_{u \approx 1.00157}$ , respectively, which is equivalent in terms of ellipsoidal height to an elevation of 10 km above the Equator and an elevation of about 9.966 km above the North and South Poles. The value of the density was deliberately set to  $10\,000 \text{ kgm}^{-3}$ . The choice of an outer shell and a high density value was made in order to obtain an upper limit of the error. The ellipsoidal layer was decomposed into a set of ellipsoidal prisms defined by:

- (i)  $u_{S_1} = 1$  and  $u_{S_2} \approx 1.00157$ .
- (ii)  $\Delta\lambda_S = \Delta\varphi_S = 1^\circ$ .

Overall, the ellipsoidal shell was divided into  $360 \times 180 = 64\,800$  ellipsoidal prisms. Finally, the gravity field has been computed ev-

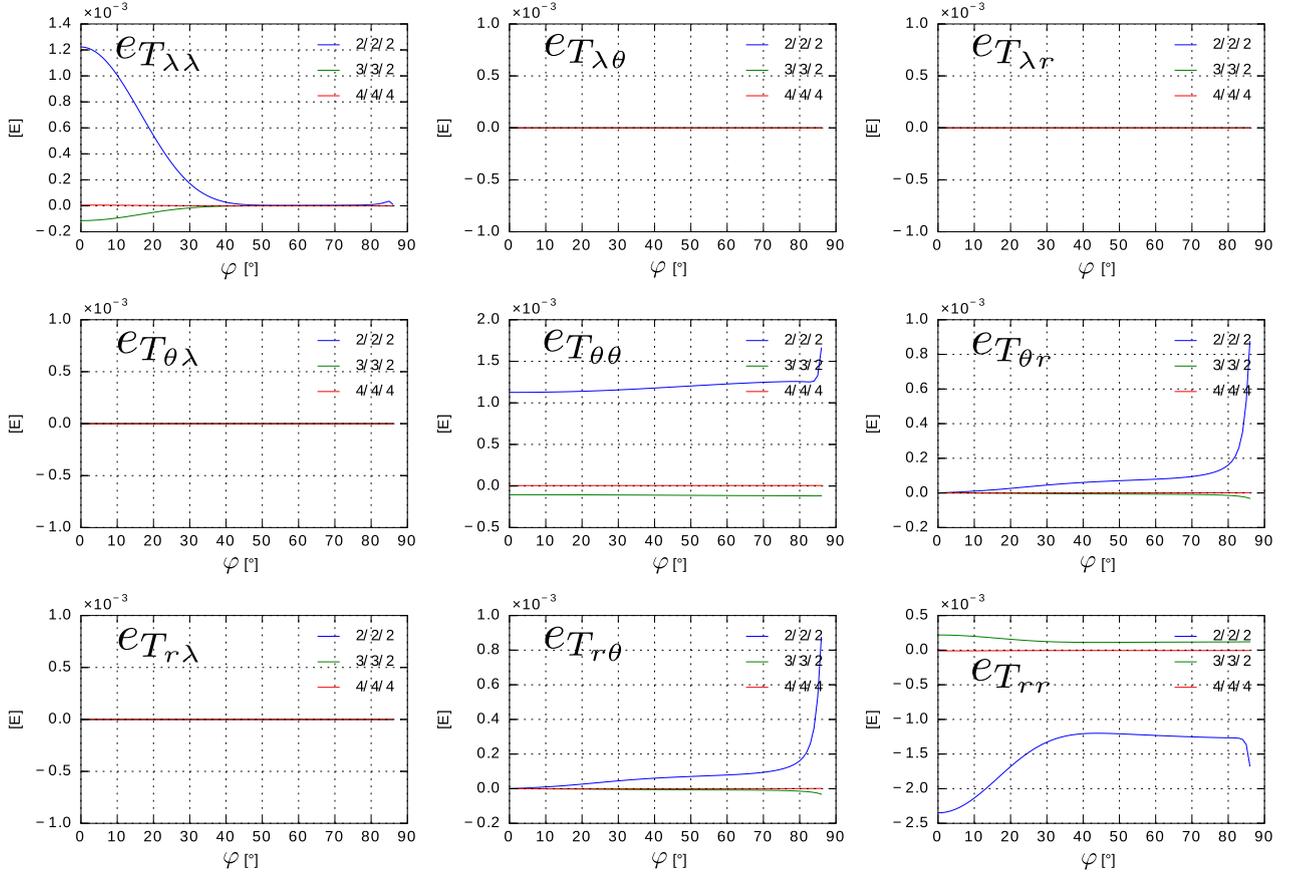
ery  $1^\circ$  latitude above the meridian of  $0^\circ$  longitude from the Equator to the North Pole ( $0^\circ \leq \varphi < 90^\circ$ ) at an ellipsoidal height of 260 km. The GLQ was computed using orders equal to  $3/3/2$ , that is, order 3 for longitudes and latitudes and order 2 for the scaling factor  $u_S$ . Computing the gravity effect of a unique prism thereby required summing of  $3 \times 3 \times 2 = 18$  effects of equivalent point poles located within it. For the purpose of comparison, calculations involving  $2/2/2$  and  $4/4/4$  orders were also performed. The graphs in Fig. 5 show the numerical error  $e_{T_{uv}}$  on the nine elements  $T_{uv}$ ,  $u, v = \lambda, \theta, r$  of the gravity gradient tensor as a function of the latitude. The numerical error  $e_{T_{uv}}$  corresponds to the difference between the values of  $T_{uv}$  provided, respectively, by GLQ and by means of analytical formulae. Notably, even though the gravity gradient tensor is symmetric ( $T_{uv} = T_{vu}$  for  $u \neq v$ ), the errors on both elements have been systematically calculated given that their expressions are actually different (*cf.* Tables 1 and 2).

As is made clear in Fig. 5, the errors that occur when using GLQ in the computation of gravity effects are in the order of tenth of millieötvös for orders  $3/3/2$  and higher, which complies with the desired accuracy—better than 1 mE. Such orders  $3/3/2$  have been chosen so as to ensure an adequate accuracy with a reasonable computation time. If appropriate, these orders must be changed depending on the location of observation points and the size of the prisms. Because of its revolution symmetry, the ellipsoidal layer produces gravity effects such as  $T_{\lambda\theta} = T_{\theta\lambda} = T_{\lambda r} = T_{r\lambda} = 0$ , which can have been estimated by GLQ at the same accuracy level. For a given set of orders, the accuracy of the GLQ can be significantly improved by using lower size prism. Take, as an example, the orders  $3/3/2$  with half-size prisms ( $\Delta\lambda_S = \Delta\varphi_S = 0.5^\circ$ ). As shown in Fig. 6, the error affecting the element  $T_{rr}$  regardless of the latitude is markedly lower than that obtained with  $1^\circ \times 1^\circ$  prisms using orders  $4/4/4$ . These results indicates that, for given gravity sources, the gravity gradients at less than 1 mE uncertainty can be numerically computed at GOCE altitude using GLQ, provided that the number of nodes per prism or the prism size have been suitably chosen.

## 4 GEOPHYSICAL APPLICATION

We are interested in the computation of the gravity gradient anomalies from available geophysical models of the Earth's interior. The basic idea is that after calculating the gravity gradients at GOCE altitude we shall be able to compare the gravity anomaly values predicted by the geophysical models to those derived from GOCE measurements anywhere over the Earth's surface. If we were ever to refine the Earth's geophysical models at a global or local scale by means of GOCE data, we would first have to perform joint inversions involving both seismic and satellite gravity data in order to estimate the unknown densities inside the Earth. For this task, our calculation method for determining gravity gradients from Earth models actually solves the forward problem of density estimation under the assumption of an ellipsoidal Earth. Our aim is therefore to demonstrate the efficiency of the method for calculating the gravity gradient anomalies from any Earth model of ellipsoidal shape.

Geological models usually consist of physical properties of the Earth registered in elementary contiguous cells located on a regular geographical grid, where each node is defined by its geodetic coordinates. As shown in Fig. 7, it is then possible to construct



**Figure 5.** Approximation error on the gravity gradient tensor elements produced by a constant density ellipsoidal shell calculated by means of the GLQ. The error, which corresponds to the difference between the values provided, respectively, by the GLQ and analytical formulae, has been plotted for all elements of the gravity gradient tensor as a function of the latitude and for three sets of GLQ orders (2/2/2, 3/3/2, 4/4/4). The use of orders 3/3/2 in the GLQ allows the error to be maintained under one-tenth of millieötvös regardless of the latitude. Even less error can be achieved by means of orders 4/4/4 but requires a longer computation time.

the corresponding ellipsoidal and spherical prisms. Let us consider a unique cell of a geological grid model, which provides us with the location  $(\lambda, \varphi, h)$ , the size  $(\Delta\lambda, \Delta\varphi, \Delta h)$  and the density  $\rho$  of an elementary solid body. First, we can easily express the Cartesian coordinates  $(X_S, Y_S, Z_S)$  of its top centre ( $S$ ):

$$\begin{cases} X_S = (N + h) \cos \varphi \cos \lambda \\ Y_S = (N + h) \cos \varphi \sin \lambda \\ Z_S = (N(1 - e^2) + h) \sin \varphi \end{cases} \quad (43)$$

and the Cartesian coordinates  $(X'_S, Y'_S, Z'_S)$  of its bottom centre ( $S'$ ):

$$\begin{cases} X_{S'} = (N + (h + \Delta h)) \cos \varphi \cos \lambda \\ Y_{S'} = (N + (h + \Delta h)) \cos \varphi \sin \lambda \\ Z_{S'} = (N(1 - e^2) + (h + \Delta h)) \sin \varphi \end{cases} \quad (44)$$

As a reminder (see Section 2), the ellipsoidal prism is defined by two meridians of longitudes  $\lambda_1$  and  $\lambda_2$ , respectively, two parallels of geodetic latitudes  $\varphi_1$  and  $\varphi_2$ , respectively, and two homothetic

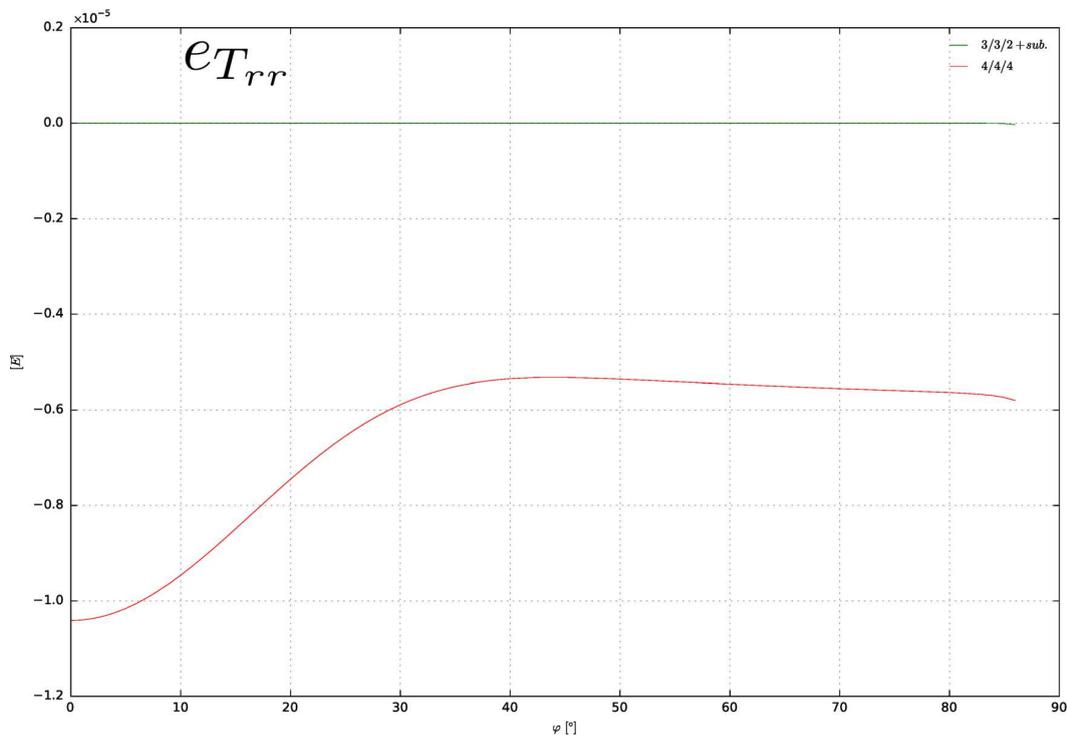
ellipsoids with the scaling factors  $u_1$  and  $u_2$ , respectively, given by:

$$\begin{cases} \lambda_1 = \lambda - \frac{\Delta\lambda}{2} & \lambda_2 = \lambda + \frac{\Delta\lambda}{2} \\ \varphi_1 = \varphi - \frac{\Delta\varphi}{2} & \varphi_2 = \varphi + \frac{\Delta\varphi}{2} \\ u_1 = \sqrt{\frac{X_S^2 + Y_S^2}{a^2} + \frac{Z_S^2}{b^2}} & u_2 = \sqrt{\frac{X_{S'}^2 + Y_{S'}^2}{a^2} + \frac{Z_{S'}^2}{b^2}} \end{cases} \quad (45)$$

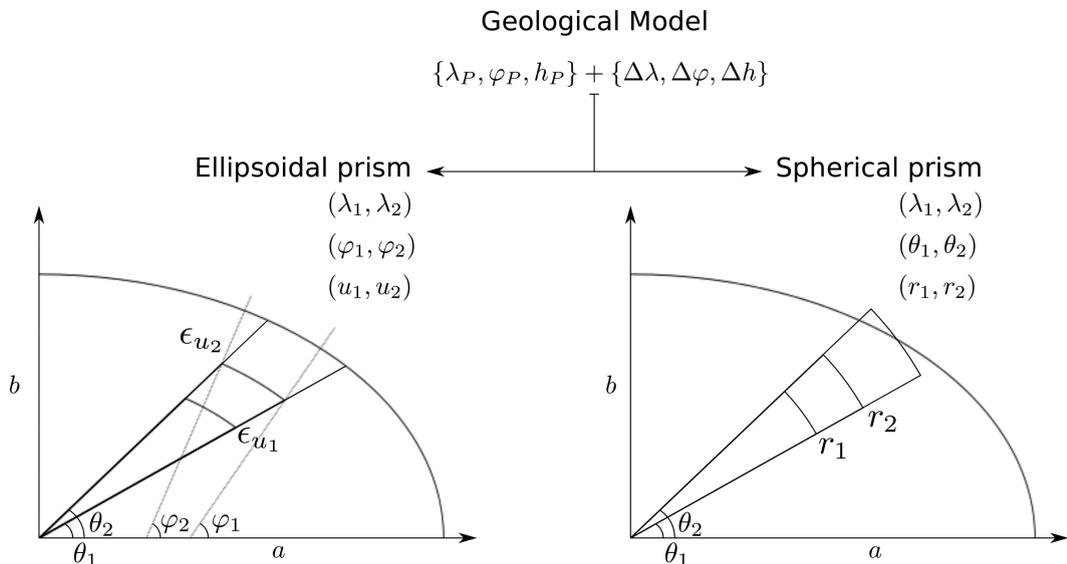
Its spherical counterpart is defined by two meridians of longitudes  $\lambda_1$  and  $\lambda_2$ , respectively, two parallels of geocentric latitudes  $\theta_1$  and  $\theta_2$ , respectively and two concentric spheres of radii  $r_1$  and  $r_2$ , respectively, given by:

$$\begin{cases} \lambda_1 = \lambda - \frac{\Delta\lambda}{2} & \lambda_2 = \lambda + \frac{\Delta\lambda}{2} \\ \theta_1 = \arctan((1 - e^2) \times \tan(\varphi - \frac{\Delta\varphi}{2})) & \theta_2 = \arctan((1 - e^2) \tan(\varphi + \frac{\Delta\varphi}{2})) \\ r_1 = \sqrt{X_S^2 + Y_S^2 + Z_S^2} & r_2 = \sqrt{X_{S'}^2 + Y_{S'}^2 + Z_{S'}^2} \end{cases} \quad (46)$$

Note that, as their spherical counterparts, ellipsoidal prisms of same geodetic latitudes boundaries,  $\varphi_1$  and  $\varphi_2$ , are all included between the two geocentric latitudes  $\theta_1$  and  $\theta_2$  (Fig. 7). This property results from the conservation of the eccentricity value  $e$  that has been demonstrated in Section 2. Once having solved the problem of numerically computing the gravity effects of an ellipsoidal prism, the next task is to compare the numerical values of gravity provided



**Figure 6.** The graph shows the error that occurs on  $T_{rr}$  gravity tensor element with the orders 3/3/2 (green solid line) after dividing twofold the size of the ellipsoidal prism ( $\Delta\lambda = \Delta\varphi = 0.5^\circ$ ). The error is now negligible when compared to that obtained for  $1^\circ$  size prisms and the orders 4/4/4 (red solid line). The result suggests that a better accuracy in the GLQ computation can be achieved by a simple change of prism size.



**Figure 7.** Geometrical construction of ellipsoidal and spherical prisms from geological model information. Geographical information contained in geological grid model is used to define the geometric location and boundaries of the ellipsoidal and spherical prisms.

by GLQ using spherical and ellipsoidal prisms for the discretization of an ellipsoidal shaped Earth.

**4.1 Effect of an improper mass estimation**

According to Fig. 7, the ellipsoidal and spherical prisms are not perfectly stackable. Consequently, they do not represent the same

volume and by extension the same mass since they have the same density  $\rho$ . To assess the impact of equating ellipsoidal and spherical prisms on gravity gradient calculation, it is helpful to estimate the gravity gradient variation induced by a given variation of the gravity source mass. As typical of this variation, we shall consider the magnitude of the gravity gradient along the radial direction  $dT_{rr}$  produced at the point  $P$  by the mass element  $d\Omega_S$  located at the

point  $S$ . According to Tables 1 and 2, the magnitude  $dT_{rr}$  of the elementary tensor  $d\mathbf{T}$  is given by:

$$dT_{rr} = G\rho_S \frac{\partial^2}{\partial r_P^2} \left( \frac{1}{PS} \right) d\Omega_S. \quad (47)$$

Given the fact that the product  $\rho_S d\Omega_S$  correspond to the elementary mass of the source placed at  $S$ , the variation of the radial gradient magnitude per unit of mass  $\tau_{rr}$  due to the mass source at  $S$  may simply be expressed as:

$$\tau_{rr} = \frac{dT_{rr}}{\rho_S d\Omega_S} = G \frac{\partial^2}{\partial r_P^2} \left( \frac{1}{PS} \right). \quad (48)$$

This quantity depends only on the relative position of the observation point  $P$  with respect to the source point  $S$ , and the question then arises, how does it vary when the point  $S$  skims within the Earth's interior. A reasonable estimate of  $\tau_{rr}$  for the Earth at GOCE altitude can be obtained by calculating its mean value over the entire volume of a sphere  $\Sigma_T$  centred at the point  $O$  and of radius  $\bar{R}$ . This yields to:

$$\langle \tau_{rr} \rangle = \iiint_{\Sigma_T} G \frac{\partial^2}{\partial r_P^2} \left( \frac{1}{PS} \right) d\Omega_S, \quad (49)$$

which can be transformed by inverting the triple integration and the double differentiation which operate on independent variables, thus giving:

$$\langle \tau_{rr} \rangle = G \frac{\partial^2}{\partial r_P^2} \iiint_{\Sigma_T} \left( \frac{1}{PS} \right) d\Omega_S = G \frac{\partial^2}{\partial r_P^2} \left\langle \frac{1}{PS} \right\rangle. \quad (50)$$

For a point  $P$  located outside the sphere  $\Sigma_T$ , the mean value of the reciprocal distance  $\frac{1}{PS}$  is simply equal to  $\frac{1}{r_P}$ . After having performed the double differentiation with respect to  $r_P$ , we obtain finally:

$$\langle \tau_{rr} \rangle = \frac{2G}{r_P^3}. \quad (51)$$

Let us consider the satellite GOCE orbiting at  $h_{\text{GOCE}} = 260$  km height above the mean sphere of radius  $\bar{R} = 6371$  km such as  $r_P = h_{\text{GOCE}} + \bar{R}$ . This leads to an estimate of the radial gravity gradient variation per unit mass  $\langle \tau_{rr} \rangle$  at  $4.57 \cdot 10^{-31} \text{ s}^{-2} \text{ kg}^{-1}$  or  $4.57 \cdot 10^{-19} \text{ mE kg}^{-1}$ . More precisely, if the error affecting the volume of the mass element will cause an error of 1 kg on the mass, then the resulting error on the radial gravity gradient is at  $4.57 \cdot 10^{-19} \text{ mE}$ . As a result, this error reaches 1 mE as the error affecting the mass of source is greater than  $2.19 \cdot 10^{18} \text{ kg}$ .

Now considering the whole Earth's shape as ellipsoidal, the use of the spherical prism as mass element in the numerical calculation of volume integrals such as (7)–(9) gives rise to an error on the resulting effect, which unavoidably increases when the volume of material involved increases. The cumulative error, which affects numerical evaluation of the Earth's mass, can be rigorously calculated using PREM (Dziewonski & Anderson 1981) as follows: the exact value of mass of each Earth's layers defined to be of constant density by PREM, is obtained by summing the mass of each ellipsoidal prism. This value can also be calculated by summing the mass of each corresponding spherical prism. By cumulating the differences between the mass values, cumulative error on mass estimation can be obtained as a function of the layer depth from the Earth's surface. The cumulative error on mass layer estimation has then been transformed into cumulative error on radial gravity gradient  $T_{rr}$  multiplying it by the value of  $\langle \tau_{rr} \rangle$  previously determined.

The cumulative error has been plotted as a function of depth in the graphs shown in Fig. 8 (graph a). As is made clear by the graph,

the error, which affects the numerical calculation of radial gravity gradient, attains 1 mE at 230 km depth and reaches 20 mE when considering the entire radial mass distribution. This confirms that the improper mass estimation, induced by the approximation of the ellipsoidal prism by its spherical counterpart, has a significant effect on the gravity gradient values.

Fortunately, the improper estimation of mass can be easily corrected by scaling the density of each spherical prism. In this case, the scaling factor is simply obtained by calculating the ratio between the volume of the considered ellipsoidal prism and the corresponding spherical prism:

$$\frac{\Omega_{\text{ellip}}}{\Omega_{\text{sph}}} \quad (52)$$

using

$$\Omega_{\text{ellip}} = a^3 (1 - e^2) [\lambda]_{\lambda_1}^{\lambda_2} \left[ \frac{u^3}{3} \right]_{u_1}^{u_2} \left[ \frac{\sin \varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}} \right]_{\varphi_1}^{\varphi_2} \quad (53)$$

and

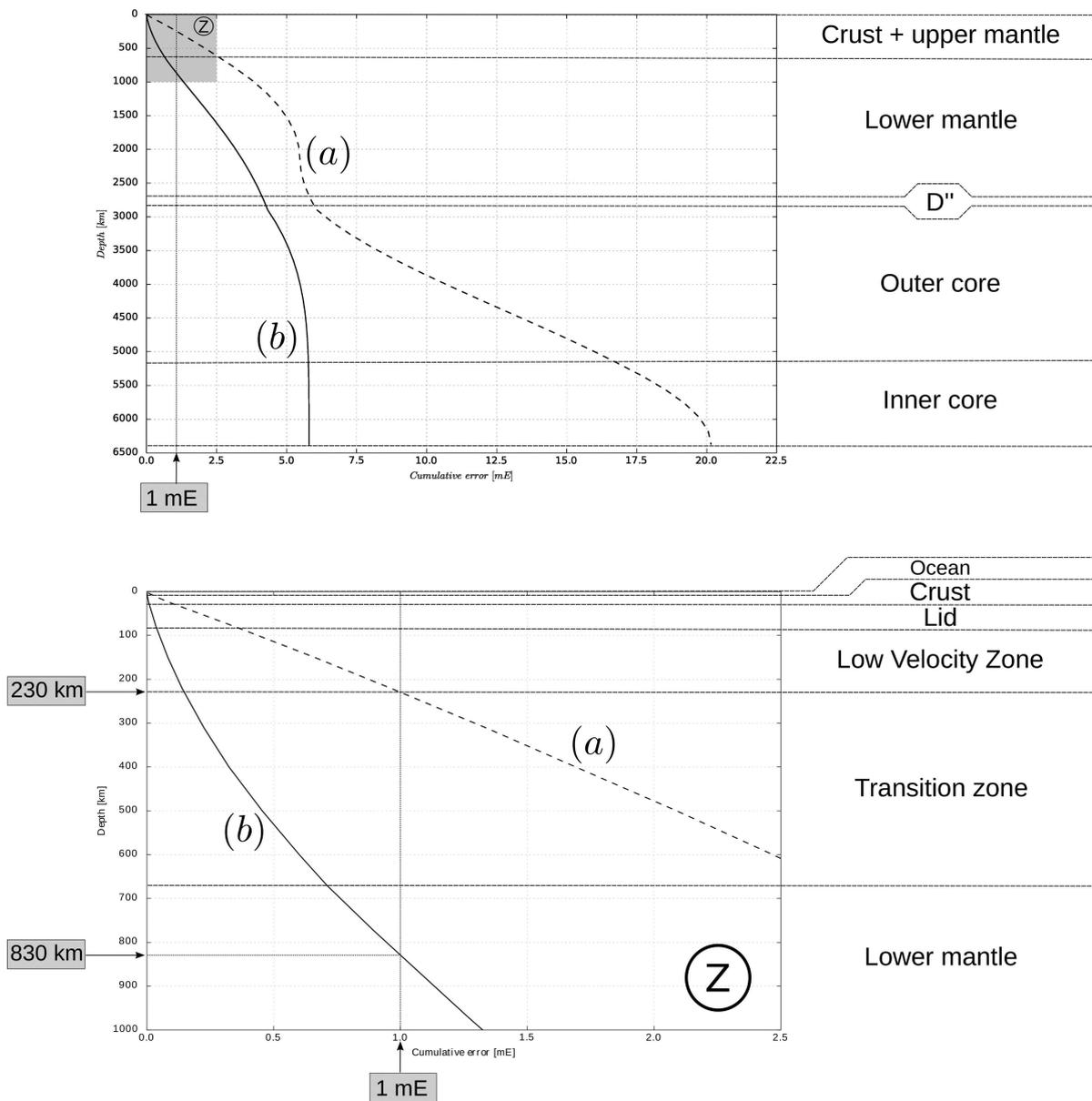
$$\Omega_{\text{sph}} = [\lambda]_{\lambda_1}^{\lambda_2} \left[ \frac{r^3}{3} \right]_{r_1}^{r_2} [\sin \theta]_{\theta_1}^{\theta_2}. \quad (54)$$

By doing so, we do not change the geometrical boundaries given by the geological model. However, there is still an error due to the fact that the Legendre's nodes used in the GLQ involving spherical prisms are slightly different from those involving ellipsoidal prisms. To quantify this remaining error, the previous experiment has been modified as follows: we applied the density scaling correction to eliminate the mass error and we directly calculated the  $T_{rr}$  component, by mean of GLQ, for each layer of PREM at a single point defined by ( $\lambda = 0^\circ, \theta = 50^\circ$  and  $r = 6637655.2$  m, mean radius of GOCE grids). The graph plotted in Fig. 8 (graph b) shows the cumulative difference between the two magnitude values of  $T_{rr}$  gravity gradient, provided, respectively, by the spherical- and ellipsoidal-prism-based methods as a function of depth. This graph shows that the improper location of Legendre's nodes has a smaller effect than the improper mass estimation effect previously established. The error only reaches 1 mE at 830 km depth and 6 mE at the Earth's centre, which suggests that the spherical prism correctly approximates its ellipsoidal counterpart for global lithospheric studies, provided that the scaling of prism densities has been performed. The stabilization of the cumulative error observed for the great depths, is naturally due to the increasing distance between the calculation point and the mass sources coupling with the decrease of the masses involved, thus causing an attenuation of their gravitational effects.

Because of the axial symmetry of the geological model adopted in this experiment, the numerical errors might have offset each other. In order to raise this uncertainty, we experimented on the previous numerical test with a geological model including lateral density changes.

#### 4.2 Effect of lateral density changes

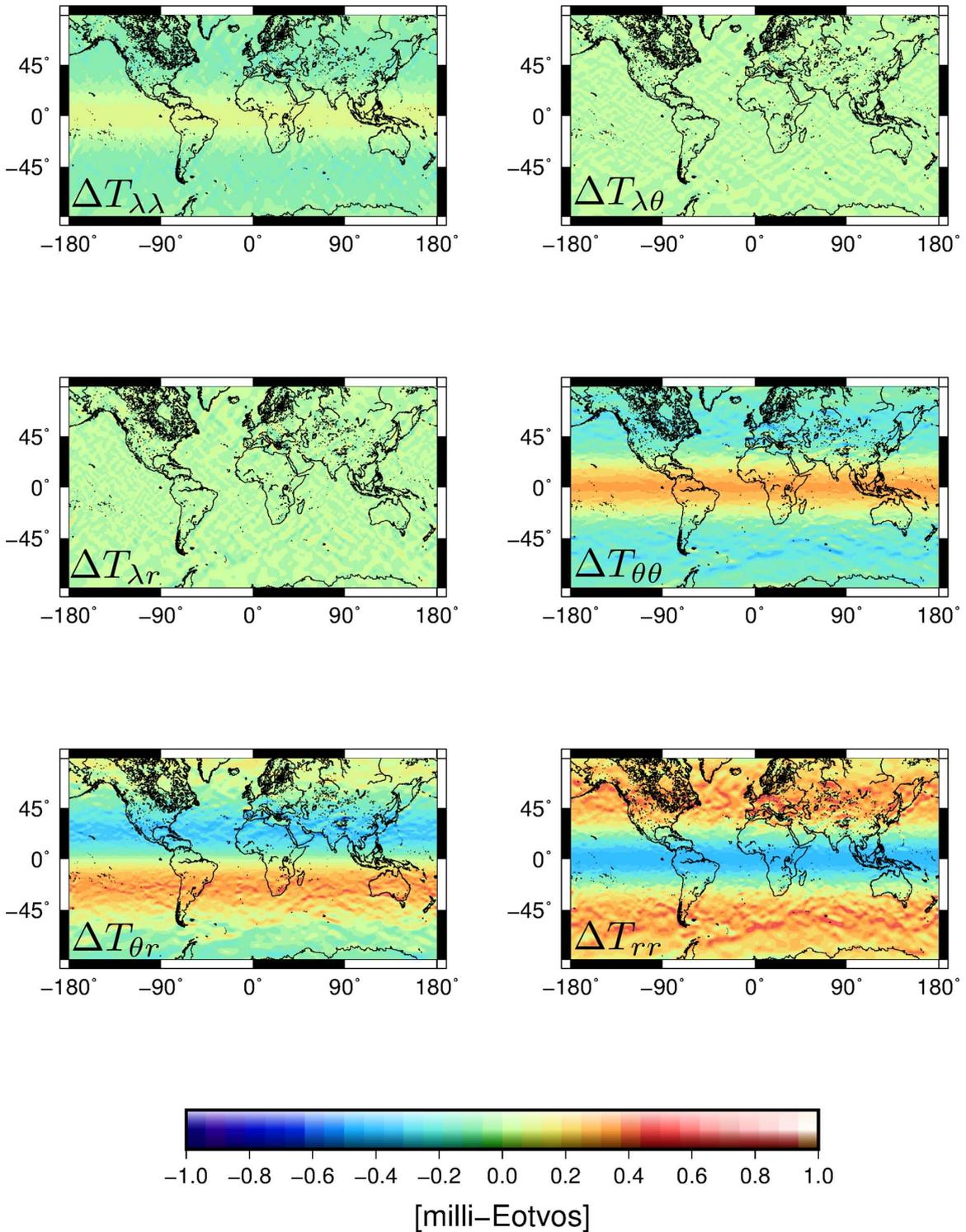
In this case, we consider the model of the Earth's interior consisting of the combination of LITHO1.0 model (Pasyanos *et al.* 2014) and PREM model (Dziewonski & Anderson 1981). The former extends from the Earth's surface including topography, ice and water, down to the lithosphere–asthenosphere boundary. It provides, among other physical parameters, the rock densities along column materials of various thicknesses the horizontal size of which is  $1^\circ$  by  $1^\circ$ . The



**Figure 8.** (a) Cumulative error on the magnitude of the gravity gradient along the radial direction  $T_{rr}$  at GOCE altitude for Earth's layers of increasing depths. The density distribution as well as the limits of Earth's layers have been provided by PREM. The error results from a misestimation of the volume of each ellipsoidal shape layers when computed from spherical mass elements. Variations of the radial gravity gradient induced by these volume differences have been calculated using the mean value  $\langle \tau_{rr} \rangle$  of the radial gravity gradient variation per unit mass at  $4.57 \times 10^{-19} \text{ mE kg}^{-1}$  determined in the paper. (b) Direct estimation of the error made on the  $T_{rr}$  component when equating the mass of each ellipsoidal and spherical prism by means of a density scaling.

latter entirely described the density distribution as concentric, axially symmetric layers of constant density from the Earth's surface down to the internal core. The densities provided by PREM have been utilized for completing the density distribution given by LITHO1.0 for the remaining part of the Earth's interior, thus giving what we shall henceforth call the combined model. At this point, we can define the gravity anomaly with respect to PREM at GOCE altitude as consisting, for each gravity gradient, of the difference between the gravity gradient values computed from the combined model and that computed at the same points from PREM. The grav-

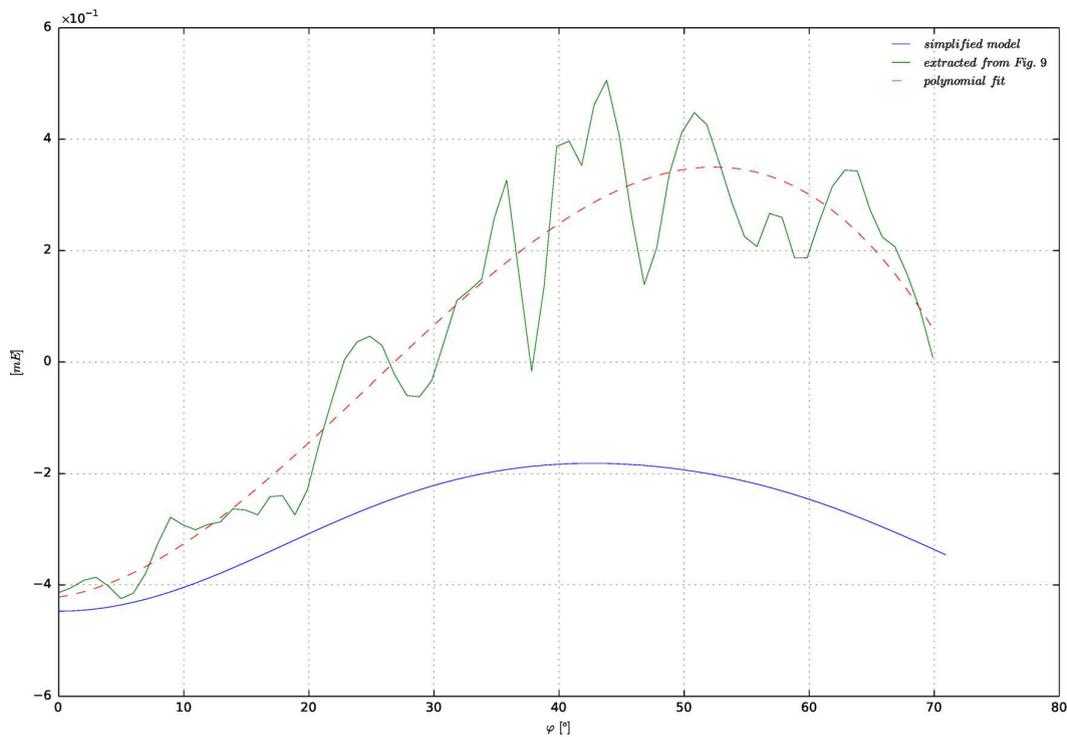
ity gradients from the sole PREM model can be readily computed by means of the close analytical formulae giving the gravity gradients of an ellipsoid of constant density. To put it more precisely, the gravity effect of PREM can be obtained by adding the respective contributions of concentric and homothetic ellipsoids of constant densities which, once combined, result in the same density distribution as that given by PREM layers. Moreover, the numerical integration by means of GLQ is needed when lateral density variations are present, that is, wherever LITHO1.0 model applies. Since the density distribution given by the combined model beyond 400 km



**Figure 9.** Differences between the gravity gradient anomalies produced by the combined model and computed by the two methods (the GLQ using spherical and ellipsoidal prisms).

depth is identical to that of PREM, there is no gravity anomaly with respect to PREM due to the layers located at more than 400 km depth. The gravity gradient anomalies with respect to PREM can therefore be calculated by means of GLQ considering only the first

400 km of the combined model. In that case, the gravity effect to be calculated is that of an ellipsoidal layer of constant thickness with lateral density variations related to the density contrast between LITHO1.0 and PREM distributions.



**Figure 10.** The combination of GLQ residual errors relative to the ellipsoidal and spherical prisms (blue plain curve) partly explains the north–south pattern observed on Fig. 9 (green plain and red dashed curves).

Having defined the Earth’s model and assuming a perfectly circular orbit of the GOCE satellite, the computation of the resulting gravity gradient anomaly for each gravity gradient over the whole Earth’s surface can be carried out by means of GLQ. For the purpose of comparison, these calculations were conducted twice, once using our own method based on ellipsoidal Earth’s mass elements, another by means of Tesseroids software (Uieda 2013, op. cit.) based on spherical Earth’s mass elements. As in our the previous experiment, the mass of each individual spherical prism has been corrected by scaling the density value. The maps of the differences drawn up for six of the nine Marussi’s tensor elements on a  $1^\circ \times 1^\circ$  grid, are shown in Fig. 9. Clearly, the magnitude of the approximation error is lesser than 1 mE, which is consistent with results obtained in the previous experiment (Fig. 8, graph b). This finding indicates that lateral density variations do not significantly influence the approximation error. The north–south variations in the differences visible on the maps, particularly for  $T_{\lambda\lambda}$ ,  $T_{\theta\theta}$ ,  $T_{\theta r}$  and  $T_{rr}$ , are likely due to the combination of GLQ residual errors. Indeed, the GLQ residual error for the ellipsoidal prism depends on the adopted quadrature order and varies according to the latitude of the calculation point (Fig. 5). Since similar variations also appear when dealing with the spherical prism, their linear combination may induce patterns such as those illustrated on Fig. 9. This is exemplified by the graph in Fig. 10. The green plain curve corresponds to a north–south profile of the  $T_{rr}$  approximation error that appears in Fig. 9, measured along the meridian of  $0^\circ$  longitude. The error fluctuates along the meridian from the equator to the pole. The overall trend, derived from a polynomial fit (red dashed curve in Fig. 10), shows a peak-to-peak variation of about 0.8 mE from the equator to the poles. To test whether such trend might be attributed to the GLQ, we carried out an experiment consisting in comparing the sole GLQ errors, respectively, from an ellipsoidal and a spherical-prism-based

method. Let  $\epsilon_{\text{ellip}}$  be the GLQ error relative to the ellipsoidal prism. This error has already been determined in Section 3 by using an ellipsoidal shell of constant density whose true gravity effect can be analytically performed (Fig. 5). In the same way, let  $\epsilon_{\text{sph}}$  be the GLQ error relative to spherical prism. This error can be determined by calculating the effect of a spherical shell of constant density. In this particular case, true analytical formulae exist and are directly comparable to those provided by the GLQ. The blue plain curve in Fig. 10 corresponds to the difference between these two residual numerical errors:  $\epsilon_{\text{ellip}} - \epsilon_{\text{sph}}$ . Even if its magnitude does not fit with the red dashed curve (approximation error observed in Fig. 5), it shows the same overall trend, which tends to confirm that the north–south patterns are due to the combination of GLQ residual errors.

## 5 CONCLUSIONS AND OUTLOOK

In this paper, we have been interested in the mathematical formulation of a computational method for calculating by GLQ integration the complete gravity field (gravity potential and vector components and gravity gradients) produced by the Earth’s material given a density distribution model. While current integration methods assume a decomposition of the Earth’s body into spherical mass elements, our own is essentially based on ellipsoidal mass elements, thus giving an exact decomposition of an ellipsoidally shaped Earth. Because the Marussi’s tensor calculated from our method is deliberately expressed in a local spherical basis, the resulting gravity gradients are easily comparable to those measured by GOCE. We have demonstrated by means of simulation using synthetic gravity sources that the error induced by the numerical integration involved in our method is negligible regarding GOCE measurement accuracy

(1 mE). The use of spherical prisms as the mass element for decomposing an ellipsoidal shaped Earth leads to errors on gravity gradient estimates that accumulate when the maximum depth of the Earth's materials involved in the calculation increases. The level reached by the resulting error (<1 mE), such as shown with the combined model involving PREM and LITHO1.0, has proved that the use of the tesseroïd is largely suitable for a joint analysis with GOCE data from lithospheric scale, provided that a scaling of prism densities is performed. Alongside a direct comparison between the gravity gradients measured by GOCE and those computed from geophysical Earth's models for the purpose of validation, our method allows us to refine the density distribution models derived solely from terrestrial geophysical methods, by adding satellite gravity data. Indeed, the same mathematical formulation can be used in the inverse problem consisting of determining the Earth's density distribution from gravity measurements, among others. Owing to the fact that ellipsoidal mass elements are intrinsically involved in the calculation of integrals, the method is particularly well suited to ellipsoidal shaped Earth's models.

## ACKNOWLEDGEMENTS

We cordially thank Dimitris Tsoulis, Bert Vermeersen (Editor) and an anonymous reviewer for their comments and suggestions, which significantly contributed to improving the quality of this paper. Fig. 9 was drafted using GMT software (Wessel & Smith 1991). The research was supported by a DGA-MRIS and Pays de la Loire region scholarship. We are also indebted to the French Research Group in Space Geodesy (GRGS) and the CNES (French Space Agency) for its financial support.

## REFERENCES

- Amante, C. & Eakins, B.W., 2009. ETOPO1 1 arc-minute global relief model: procedures, data sources and analysis, Tech. Rep., NOAA Technical Memorandum NESDIS NGDC-24, 19 pp.
- Arabelos, D. & Tsoulis, D., 2013. The exploitation of state of the art digital terrain databases and combined or satellite-only earth gravity models for the estimation of the crust-mantle interface over oceanic regions, *Geophys. J. Int.*, **193**(3), 1343–1352.
- Asgharzadeh, M.F., von Frese, R.R.B., Kim, H.R., Leftwich, T.E. & Kim, J.W., 2007. Spherical prism gravity effects by Gauss-Legendre quadrature integration, *Geophys. J. Int.*, **169**, 1–11.
- Bouman, J. & Fuchs, M.J., 2012. GOCE gravity gradients versus global gravity field models, *Geophys. J. Int.*, **189**, 846–850.
- Bouman, J., Ebbing, J. & Fuchs, M., 2013. Reference frame transformation of satellite gravity gradients and topographic mass reduction, *J. geophys. Res.*, **118**, 759–774.
- Bouman, J. *et al.*, 2015. GOCE gravity gradient data for lithospheric modeling, *Int. J. Appl. Earth Obs. Geoinformation*, **35A**, 16–30.
- Brockmann, J.M., Zehentner, N., Höck, E., Pail, R., Loth, I., Mayer-Gürr, T. & Schuh, W.-D., 2014. EGM\_TIM\_RL05: an independent geoid with centimeter accuracy purely based on the GOCE mission, *Geophys. Res. Lett.*, **41**(22), 8089–8099.
- Bruinsma, S.L., Förste, C., Abrikosov, O., Marty, J.C., Rio, M.-H., Mulet, S. & Bonvalot, S., 2013. The new ESA satellite-only gravity field model via the direct approach, *Geophys. Res. Lett.*, **40**, 3607–3612.
- Cochran, J.R. & Talwani, M., 1978. Gravity anomaly, regional elevation and the deep structure of the North Atlantic, *J. geophys. Res.*, **83**, 4907–4924.
- Dziewonski, A.M. & Anderson, D.L., 1981. Preliminary reference earth model (PREM), *Phys. Earth planet. Inter.*, **25**, 297–356.
- Förste, C. *et al.*, 2014. EIGEN-6C4 the latest combined global gravity field model including GOCE data up to degree and order 2190 of GFZ Potsdam and GRGS Toulouse, in *5th GOCE User Workshop, Paris*, 25–28 November.
- Grombein, T., Seitz, K. & Heck, B., 2013. Optimized formulas for the gravitational field of a tesseroïd, *J. Geod.*, **87**(7), 645–660.
- Gruber, T., Rummel, R., Abrikosov, O. & van Hees, R., 2014. *GOCE Level 2 Product Data Handbook (GO-MA-HPF-GS-0110)*, 5th edn, The European GOCE Gravity Consortium (EGG-C).
- Heck, B. & Seitz, K., 2007. A comparison of the tesseroïd, prism and point-mass approaches for mass reductions in gravity field modelling, *J. Geod.*, **81**, 121–136.
- Johnson, L.R. & Litehiser, J.J., 1972. A method for computing the gravitational attraction of three-dimensional bodies in a spherical or ellipsoidal Earth, *J. geophys. Res.*, **83**, 6999–7009.
- Kellogg, O.D., 1954. *Foundations of Potential Theory*, Dover Publications, New York, USA.
- Ku, C.C., 1977. A direct computation of gravity and magnetic anomalies caused by 2- and 3-dimensional bodies of arbitrary shape and arbitrary magnetic polarization by equivalent point method and a simplified cubic spline, *Geophysics*, **42**, 610–622.
- Laske, G., Masters, G., Ma, Z. & Pasyanos, M., 2013. Update on CRUST1.0 - a 1-degree global model of Earth's crust, in *Research Abstracts*, **15**, Abstract EGU2013-2658, 2013.
- MacMillian, W.D., 1930. *Theoretical Mechanics, Vol 2: The Theory of the Potential*, Dover Publications, New York, USA.
- Mooney, W.D., 1998. CRUST 5.1: a global crustal model at  $5^\circ \times 5^\circ$ , *J. geophys. Res.*, **103**, 727–747.
- Nagy, D., 1966. The gravitational attraction of a right rectangular prism, *Geophysics*, **31**, 362–371.
- Nagy, D., Papp, G. & Benedek, J., 2000. The gravitational potential and its derivatives for the prism, *J. Geod.*, **74**, 552–560.
- Panet, I., Pajot-Métivier, G., Greff-Lefftz, M., Métivier, L., Diament, M. & Mandea, M., 2014. Mapping the mass distribution of earth's mantle using satellite-derived gravity gradients, *Nature geosci.*, doi:10.1038/ngeo2063.
- Pasyanos, M.E., Masters, T.G., Laske, G. & Ma, Z., 2014. LITHO1.0: an updated crust and lithospheric model of the Earth, *J. geophys. Res. Solid Earth*, **119**, 2153–2173.
- Paul, M.K., 1974. The gravitational effect of a homogeneous polyhedron for three-dimensional interpretation, *Pure appl. Geophys.*, **112**, 553–561.
- Pavlis, N.K., Holmes, S.A., Kenyon, S.C. & Factor, J.K., 2008. An earth gravitational model to degree 2160: Egm2008, in *Presented at the 2008 General Assembly of the European Geosciences Union, Vienna, Austria, April 13–18*.
- Petrović, S., 1996. Determination of the potential of homogeneous polyhedral bodies using line integrals, *J. Geod.*, **71**, 44–52.
- Plouff, D., 1976. Gravity and magnetic fields of polygonal prisms and application to magnetic terrain corrections, *Geophysics*, **41**, 727–741.
- Rummel, R., Yi, W. & Stummer, C., 2011. GOCE gravitational gradiometry, *J. Geod.*, **85**(11), 777–790.
- Smith, D.A., Robertson, D.S. & Milbert, D.G., 2001. Gravitational attraction of local masses in spherical coordinates, *J. Geod.*, **74**, 783–795.
- Smith, W.H.F. & Sandwell, D.T., 1997. Global seafloor topography from satellite altimetry and ship depth soundings, *Science*, **277**, 1957–1962.
- Talwani, M. & Ewing, M., 1960. Rapid computation of gravitational attraction of three-dimensional bodies of arbitrary shape, *Geophysics*, **25**, 203–225.
- Tsoulis, D., 2012. Analytical computation of the full gravity tensor of a homogeneous arbitrarily shaped polyhedral source using line integrals, *Geophysics*, **77**(2), F1–F11.
- Tsoulis, D., Wziontek, H. & Petrović, S., 2003. A bilinear approximation of the surface relief in terrain correction computations, *J. Geod.*, **77**, 338–344.
- Tsoulis, D., Jamet, O., Verdun, J. & Gonindard, N., 2009. Recursive algorithms for the computation of the potential harmonic coefficients of a constant density polyhedron, *J. Geod.*, **83**(10), 925–942.
- Uieda, L., 2013. Tesseroïds: forward modeling of gravitational fields in spherical coordinates, *Figshare*.

- Uieda, L., Bomfim, E.P., Braitenberg, C. & Molina, E., 2011. Optimal forward calculation method of the Marussi tensor due to a geologic structure at GOCE height, in *Proceedings of the 4th International GOCE User Workshop*. Munich, Germany.
- Visser, P.N.M.A., 2011. A glimpse at the GOCE satellite gravity gradient observations, *Adv. Space Res.*, **47**, 393–401.
- von Frese, R.R.B., Hinze, W.J., Braile, L. & Luca, A.J., 1981a. Spherical-earth gravity and magnetic anomaly modeling by Gauss-Legendre quadrature integration, *J. Geophys.*, **49**, 234–242.
- von Frese, R.R.B., Hinze, W.J. & Braile, L.W., 1981b. Spherical-Earth gravity and magnetic anomaly analysis by equivalent source inversion, *Earth Planet. Sci. Lett.*, **53**, 69–83.
- Wessel, P. & Smith, W.H.F., 1991. Free software helps map and display data, *EOS, Trans. Am. geophys. Un.*, **72**, 445–446.
- Wild-Pfeiffer, F., 2008. A comparison of different mass elements for use in gravity gradiometry, *J. Geod.*, **82**(10), 637–653.
- Yi, W. & Rummel, R., 2013. A comparison of GOCE gravitational models with EGM2008, *J. Geodyn.*, **73**, 14–22.

## Annexe D

# Integration of a strapdown gravimeter in an AUV

# INTEGRATION OF A STRAPDOWN GRAVIMETER SYSTEM IN AN AUTONOMOUS UNDERWATER VEHICLE

C. Roussel<sup>a</sup>, J. Verdun<sup>a</sup>, J. Cali<sup>a</sup>, M. Maia<sup>b</sup>, J.F. d'EU<sup>b</sup>

<sup>a</sup> Geodesy and Geomatics Laboratory (L2G)

<sup>b</sup> Oceanic Domains Laboratory (LDO)

## Commission V

**KEY WORDS:** Autonomous Underwater Vehicle, moving vectorial gravimetry and gradiometry, electrostatic accelerometer, Unscented Kalman filtering

## ABSTRACT:

We present a new mobile instrument for measuring dynamically the gravity vector and its gradients in underwater environment, named GRAVIMOB. Our instrument is a strapdown sensor, consisted of electrostatic accelerometers installed in a waterproof sphere. It is designed to be embedded in an Autonomous Underwater Vehicle (AUV). Since the positioning of an AUV is approximate in underwater environment, the key issue raised here is to estimate the uncertainty in the gravity field resulting from the use of such position data. This paper focuses on the assessment of the system performances. The latter have been studied by simulation with reference data calculated from actual submarine geological structures, on which different noise models have been added. Results show that spatial evolutions of the gravity field and statistical properties of stochastic processes affecting the measurements have to be considered carefully in order to minimize the error. The Unscented Kalman Filter (UKF) has been favored to the Extended Kalman Filter (EKF) by its ease of implementation and its better robustness to non-linearities.

## 1. INTRODUCTION

One of the major challenges of modern gravimetry consists in determining Earth's gravity field models covering the whole of wavelength range with the same reliability at local, regional and global spatial scales. Since the Earth's surface is covered by more than 70% by the oceans, gravity field measurement techniques must be adapted to the marine and submarine areas. Among these techniques, satellite altimetry enables to reach long wavelengths ( $\geq 100$  km) and covers almost the entire surface of the oceans, but becomes inoperative at the land-sea interface where local effects such as ocean tides have a high amplitude. Airborne gravimetry, using airplanes or helicopters, or surface gravimetry using ships, permit the recovery of intermediate wavelengths ( $\geq 10$  km) but requires the use of stabilized platforms because of the large velocity and attitude variations encountered with such carriers. Static measurements on the sea or ocean floor can be carried out very close to the geological structures, thus allowing short wavelengths ( $\leq 1$  km) to be covered. However, they require the use of submersibles which must land on the bottom and remain stationary during the measuring time. Moreover, they cannot access to hilly zones and are very time-consuming.

A more recent technique able to measure the undersea gravity field consists in the integration of a measuring instrument in a Autonomous Underwater Vehicle (AUV). The main advantage of a mobile gravimetric measurement system operating in underwater environment is that the measure of the gravity field can be conducted very close to the geological sources along profiles of different depths where permanent instrumentation is not feasible due to the high seismic activity and volcanism such as encountered in subduction zones and oceanic ridges. Recovering the gravity field at different depths is very useful for interpreting gravity variations to infer the location and the shape of gravity sources. Consequently, many applications are possible in geodesy as well as in geophysics. Indeed, some marine geophysicists argue that the hydrothermal sources located in oceanic ridges should hold considerable mineral resources. Several studies have already been

carried out on the subject as in (Araya et al., 2011, Yan et al., 2012, Liu et al., 2010, Yao and Xiaorong, 2012). These studies focus on the vertical component of the gravity field and therefore require the use of stabilized platforms. But at a time when reduced size and limited available power of the submersibles become weighty arguments, this technique need to be rethought to make it compatible with current constraints.

We present here a new mobile instrument for measuring dynamically the gravity vector and its gradients in underwater environment, named GRAVIMOB. Our research relies on the experience gained in the field of land mobile gravimetry with the mobile gravimetry system LiMo-g (Light Moving gravimetry system) initiated by the Geodesy and Geomatics Laboratory (L2G) of the National Conservatory of Arts and Crafts (CNAM) and the Geodesy Laboratory (LAREG) of the French Geographic and Forest Institute (IGN) and studied during the doctoral thesis of Bertrand de Saint-Jean (2008). Our instrument is a strapdown sensor, composed of six electrostatic accelerometers divided into two triads, both installed in a waterproof sphere. It allows the three components of the gravity vector to be measured and does not require the use of a stabilized platform.

Obviously, the measurements performed with such an instrument only make sense if the movement of the AUV, its position and attitude, is known at all times. One of the main difficulties encountered in underwater environment is that the positioning of the carrier is approximate. The position, velocity, acceleration and attitude, essential parameters for the restitution of the submarine gravity field from accelerometer measurements, are obtained by combining data from different sensors – inertial navigation system and Doppler log – with a target position. This position is deduced from that of the accompanying ship, obtained by GNSS and transmitted to the submarine via acoustic signal. The key issue raised here is to estimate the uncertainty in the gravity field resulting from the use of such position data.

This paper focuses on the assessment of the system performances.

Such performances have been evaluated thanks to numerical simulations with synthetic data calculated from actual submarine geological structures and actual AUV trajectories, obtained by addition of different noises to reference data.

The paper is organized as follows: part two describes the instrument and the carrier in which it will be installed. Part three introduces the mathematical equations related to our instrument. Based on these equations, the four and the five parts expose the principle of the numerical simulation used for assessing the performances of our system. Reference data and noise models are also detailed. The results of various simulations will be given in part five. Part six introduces and justifies the choice of the Unscented Kalman Filter (UKF) as the processing method. Conclusions and perspectives will be exhibited in part seven.

## 2. DESIGN

### 2.1 Sensors

Our instrumentation consists of six electrostatic accelerometers Q-FLEX QA-3000-020 developed by the Honeywell - AlliedSignal company (Figure 1). These six accelerometers are divided into two triads, named  $\alpha$  and  $\beta$ , both installed in a waterproof glass sphere. Each triad allows the measurement of the three components of the specific force related to the points  $M_\alpha$  and  $M_\beta$ , both geometrically defined as being the respective intersection point of the three sensitive axes of each triad. Note here that the frames defined by each triad are supposed orthogonal and coincide with the frame of the carrier, called  $b$ -frame (Figure 2).



Figure 1: View of the Q-FLEX QA-3000-020 electrostatic accelerometer (source: asc-sensors.de)

Technically, the operation of these sensors consists on keeping the equilibrium of a test mass mounted on a flexible blade made of quartz and maintained horizontal through the restoring force induced by the magnetic field generated by an electromagnet. The balance is controlled by a capacitive position sensor detecting any change of blade position. Under the effect of an acceleration, the latter is disturbed as the proof mass moves with a delay with respect to the housing of the sensor, due to its inertia and the bending of the blade. The capacitive position sensor detects the deviation between the proof mass and the frame and provides the electromagnet with the current necessary to bring back the flexible blade to its equilibrium position. The force necessary for this compensation corresponds to the acceleration component undergone in the sensitive direction of the accelerometer.

### 2.2 Carrier

GRAVIMOB is intended to be embedded in an Autonomous Underwater Vehicle (AUV) of the French Research Institute for Exploitation of the Sea (IFREMER), named AsterX (Figure 3). This AUV is able to dive down to 3,000 meter depth and travel up to 100 km. Its total mass is 800 kg and the maximum weight of the scientific payload is 200 kg.

To ensure an autonomous navigation, this AUV is equipped with an Inertial Navigation System (INS) coupled to a Doppler Veloc-

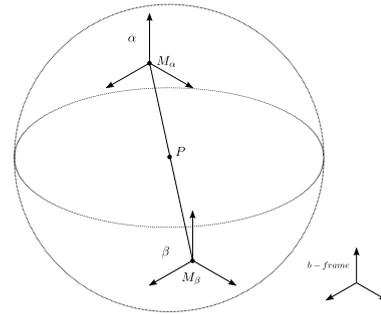


Figure 2: Position of the two triads ( $\alpha$  and  $\beta$ ). The point  $P$  on this figure belongs to  $(M_\alpha M_\beta)$  and corresponds to the vehicle reference point. The sphere diameter is about 40 cm.

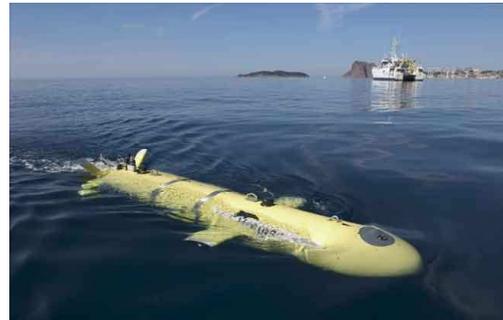


Figure 3: The Autonomous Underwater Vehicle AsterX of the French Research Institute for Exploitation of the Sea (IFREMER). (source: <http://flotte.ifremer.fr>)

ity Log (DVL). A surface ship, geolocated using Global Navigation Satellite System (GNSS), monitors the submersible thanks to an Ultra Short Base Line (USBL) acoustic positioning system.

## 3. EQUATION OF MOVING-BASE GRAVIMETRY

### 3.1 Application of Newton's Second Law

Let us consider one 3D accelerometer labelled by  $\alpha$ . Let  $X_\alpha^i$  be the position vector of the proof mass inside the accelerometer triad expressed in the inertial frame abbreviated  $i$ -frame. The proof mass is located at the point  $M_\alpha$  where acceleration measurement is performed. According to Newton's Second Law applied to the proof mass, the second-order time derivative  $\ddot{X}_\alpha^i$  of  $X_\alpha^i$  may be expressed as

$$\ddot{X}_\alpha^i = g_\alpha^i + a_\alpha^i \quad (1)$$

where  $g_\alpha^i$  is the gravitational acceleration and  $a_\alpha^i$  is the restoring force per unit of mass, that is the specific force exerted on the proof mass inside the sensor, both projected onto  $i$ -frame axes. The position of the point  $M_\alpha$  is not directly accessible. Only the point  $P$ , previously defined (Figure 2), is assumed to be known. The position vector  $X_\alpha^i$  can therefore be written as:

$$X_\alpha^i = C_e^i X_P^e + C_b^i L_\alpha^b \quad (2)$$

where  $L_\alpha^b = PM_\alpha^b$  is the level arm between the point  $P$  located at the vehicle reference point and the measuring point  $M_\alpha$  of the 3D accelerometer  $\alpha$ ,  $C_e^i$  is the rotation matrix between the earth frame, abbreviated  $e$ -frame and the  $i$ -frame and  $C_b^i$  is the rotation matrix between the  $b$ -frame and the  $i$ -frame. It must be emphasized that the restoring force maintains the proof mass fixed with

respect to the case of the sensor which is itself fixed with respect to the  $b$ -frame. As a consequence, the components of the one column matrix  $L_\alpha^b$  are constant independent of time.  $C_e^i$  depends only on the speed of rotation of the Earth,  $\omega_e$ .  $C_b^i$  may be decomposed as the product of the matrix  $C_b^n$ , the matrix  $C_n^e$  and the matrix  $C_e^i$ :

$$C_b^i = C_e^i C_n^e C_b^n \quad (3)$$

where  $C_n^e$  is the rotation matrix between the navigation frame, abbreviated  $n$ -frame and the  $e$ -frame depending only on the geographical coordinates of the point  $P$  (longitude  $\lambda_P$ , and latitude  $\varphi_P$ ).  $C_b^n$  is the rotation matrix between the  $b$ -frame and the  $n$ -frame depending only on the attitude of the carrier (heading,  $\delta$ , pitch,  $\chi$  and roll,  $\eta$ ).

The second-order time derivative of equation (2), combined with equation (1) leads to the basic equation of moving-base gravimetry:

$$g_\alpha^n = C_e^n \left[ \ddot{X}_P^e + 2\Omega_{ie}^e \dot{X}_P^e + (\Omega_{ie}^e \Omega_{ie}^e + \dot{\Omega}_{ie}^e) X_P^e \right] + C_b^n (\Omega_{ib}^b \Omega_{ib}^b + \dot{\Omega}_{ib}^b) L_\alpha^b - C_b^n a_\alpha^b \quad (4)$$

where  $\Omega_{ib}^b$  (resp.  $\Omega_{ie}^e$ ) is the skew symmetric matrix associated with the rotation of the  $b$ -frame (resp.  $e$ -frame) with respect to the  $i$ -frame and  $\dot{\Omega}_{ib}^b$  (resp.  $\dot{\Omega}_{ie}^e$ ) its first-order time derivative, both expressed in the  $b$ -frame (resp.  $e$ -frame).

### 3.2 Simplifying assumptions

In the context of this article, we will ignore the influence of the rotation of the Earth with respect to the inertial frame. In other words, we consider that the inertial and the earth frames are the same. Therefore, the indice  $i$  is replaced by the indice  $e$  and equation  $\Omega_{ie}^e = \dot{\Omega}_{ie}^e = 0$  holds. Equation (4) then becomes:

$$g_\alpha^n = C_e^n \ddot{X}_P^e + C_b^n (\Omega_{eb}^b \Omega_{eb}^b + \dot{\Omega}_{eb}^b) L_\alpha^b - C_b^n a_\alpha^b \quad (5)$$

Equation (5) can also be written at the point  $M_\beta$  of the 3D accelerometer  $\beta$  where acceleration measurement is also performed, thus giving:

$$g_\beta^n = C_e^n \ddot{X}_P^e + C_b^n (\Omega_{eb}^b \Omega_{eb}^b + \dot{\Omega}_{eb}^b) L_\beta^b - C_b^n a_\beta^b \quad (6)$$

Equations (5) and (6) show similarities. The acceleration term relating to the point  $P$ , and the factor multiplying the lever arms  $L_\alpha^b$  and  $L_\beta^b$  are the same in both cases. By linear combination of these two equations and under certain assumptions, it is possible to remove them.

### 3.3 Linear combinations

Gravity at  $M_\alpha$  and  $M_\beta$ , can be related to the gravity at point  $P$ . Indeed, a first order approximation gives:

$$\begin{cases} g_\alpha^n = g_P^n + \nabla g_P^n L_\alpha^n \\ g_\beta^n = g_P^n + \nabla g_P^n L_\beta^n \end{cases}, \quad (7)$$

where  $\nabla g_P^n$  is the gravity gradient tensor at point  $P$  expressed in the  $n$ -frame and corresponding there to the  $3 \times 3$  matrix:

$$\Delta g_P^n = \begin{bmatrix} \partial_E g^E & \partial_N g^E & \partial_U g^E \\ \partial_E g^N & \partial_N g^N & \partial_U g^N \\ \partial_E g^U & \partial_N g^U & \partial_U g^U \end{bmatrix} \quad (8)$$

where  $g^E$ ,  $g^N$  and  $g^U$  are the 3 components of the gravity vector  $g_P$  when expressed in the  $n$ -frame and by denoting  $x_E$ ,  $x_N$ ,  $x_U$

the 3 coordinates of the point  $P$  in the  $n$ -frame, we have:

$$\partial_i g^j = \frac{\partial g^j}{\partial x_i} \quad (9)$$

for  $i, j = E, N, U$ .

Under the assumption that  $L_\alpha = -L_\beta$  or in other words, that point  $P$  is the midpoint of the segment  $[M_\alpha M_\beta]$ , the sum of the previous two equations (7) leads to:

$$\frac{g_\alpha^n + g_\beta^n}{2} = g_P^n \quad (10)$$

By substituting  $g_\alpha^n$  and  $g_\beta^n$  using the expressions established in (5) and (6), we finally obtain:

$$g_P^n = C_e^n \ddot{X}_P^e - C_b^n \left( \frac{a_\alpha^b + a_\beta^b}{2} \right) \quad (11)$$

The same reasoning can be emitted by performing the difference of the equations listed in (7), we can then deduce:

$$\nabla g_P^n u_{\beta\alpha}^n = \frac{g_\alpha^n - g_\beta^n}{\|M_\beta M_\alpha\|} \quad (12)$$

and, according to (5) and (6):

$$\nabla g_P^n u_{\beta\alpha}^n = \frac{\left( C_b^n (\Omega_{eb}^b \Omega_{eb}^b + \dot{\Omega}_{eb}^b) M_\beta M_\alpha^b - C_b^n (a_\alpha^b - a_\beta^b) \right)}{\|M_\beta M_\alpha\|} \quad (13)$$

where  $M_\beta M_\alpha$  is the vector connecting the points  $M_\beta$  et  $M_\alpha$ ,  $\|M_\beta M_\alpha\|$  its norm and  $u_{\beta\alpha}$  is unit vector defined as:

$$u_{\beta\alpha} = \frac{M_\beta M_\alpha}{\|M_\beta M_\alpha\|} \quad (14)$$

$\nabla g_P^n u_{\beta\alpha}^n$  can be viewed as the 3-component gravity gradient vector in the direction defined by the vector  $u_{\beta\alpha}$ .

## 4. NUMERICAL SIMULATION

### 4.1 Principle and purpose

In a simplified manner, equations (11) and (13) may be writing as follows:

$$f : \begin{pmatrix} \lambda_P, \varphi_P, h_P \\ \delta, \chi, \eta \\ a_\alpha, a_\beta \end{pmatrix} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} g_P \\ \nabla g_P u_{\beta\alpha} \end{array} \right\}, \quad (15)$$

where  $f$  is a multivariate function mapping  $\mathbb{R}^{12}$  into  $\mathbb{R}^6$ , which relates the geodetic coordinates of the point  $P$  (longitude  $\lambda_P$ , latitude  $\varphi_P$ , ellipsoidal height  $h_P$ ), the attitude angles (heading  $\delta$ , pitch  $\chi$ , roll  $\eta$ ) and the  $2 \times 3 = 6$  components of acceleration  $a_\alpha$  and  $a_\beta$  to the 3 components of the gravity vector  $g_P$  and the 3 gravity gradients in the direction of vector  $u_{\beta\alpha}$ . Since the input data (position, attitude and restoring accelerations) are subject to uncertainties, bias, drift and other faults, we attempt here to determine the uncertainty affecting the output data, namely the gravity vector  $g_P$  and the gravity gradient vector  $\nabla g_P u_{\beta\alpha}$ . As the function  $f$  is highly non-linear, we opted for an assessment of the uncertainty of the output error by means of Monte Carlo statistical method. For this task, let us consider arbitrary noise models representing faults on the different inputs given by equation (15). For the  $i$ -th simulation, the new input variables can be

written as:

$$\begin{aligned}\tilde{\lambda}_{P,i} &= \lambda_P + \epsilon_{\lambda,i} \\ \tilde{\varphi}_{P,i} &= \varphi_P + \epsilon_{\varphi,i} \\ \tilde{h}_{P,i} &= h_P + \epsilon_{h,i} \\ \tilde{\delta}_i &= \delta + \epsilon_{\delta,i} \\ \tilde{\chi}_i &= \chi + \epsilon_{\chi,i} \\ \tilde{\eta}_i &= \eta + \epsilon_{\eta,i} \\ \tilde{a}_{\alpha,i} &= a_\alpha + \epsilon_{a_\alpha,i} \\ \tilde{a}_{\beta,i} &= a_\beta + \epsilon_{a_\beta,i}\end{aligned}\quad (16)$$

where  $\epsilon_{\theta,i}$  with  $\theta = \lambda, \varphi, h, \delta, \chi, \eta, a_\alpha, a_\beta$  are additive noise terms. The propagation of these noisy measurement variables through the observation function  $f$  and the knowledge of a reference gravity field allow the estimation of the induced errors  $\epsilon_{g,i}$  and  $\epsilon_{ggt,i}$  affecting the gravity vector and the gravity gradient tensor respectively given by:

$$\begin{aligned}\epsilon_{g,i} &= g_P - \tilde{g}_{P,i} \\ \epsilon_{ggt,i} &= \nabla g_P \cdot u_{\beta\alpha} - \nabla \tilde{g}_{P,i} \cdot u_{\beta\alpha}\end{aligned}\quad (17)$$

By repeating this process, say  $N$  times, the estimation of the error expectancy and its variance can be carried out, by means of the following formulas:

$$E[\epsilon_g] = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \epsilon_{g,i} \quad (18)$$

$$VAR[\epsilon_g] = E[(\epsilon_g - E[\epsilon_g])^2] \quad (19)$$

$$E[\epsilon_{ggt}] = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \epsilon_{ggt,i} \quad (20)$$

$$VAR[\epsilon_{ggt}] = E[(\epsilon_{ggt} - E[\epsilon_{ggt}])^2] \quad (21)$$

Depending on the characteristics of the selected noise models to represent the faults of the measurement system, the magnitude of the gravity field error can then be greater than the expected accuracy. In order to reduce the level of the noise affecting the gravity, a first simple solution consists in averaging the output signal on a sliding window of width  $L$ , which is equivalent to performing low-pass filtering. The evolution of the variance of the error according to the window size  $L$  is then used to characterize the accuracy of the instrument in terms of spatial resolution.

## 4.2 Generation of reference data

To achieve the previously described numerical simulation, it is still necessary to generate reference data consisting of the gravity field related quantities ( $g_{P,\alpha,\beta}^n$  and  $\nabla g_{P,\alpha,\beta}^n$ ), submersible trajectories ( $\lambda_P$ ,  $\varphi_P$  and  $h_P$ ), attitude angles ( $\delta$ ,  $\chi$  and  $\eta$ ) and measured accelerations ( $a_\alpha^b$  and  $a_\beta^b$ ).

The reference gravity field derives from a geological model of oceanic crust. The latter combines a bathymetric survey (Figure 4) and an assumed distribution of mineral blocks. Bathymetry is extended to 5000 m depth and the average density of the undersea terrain assumed to be equal to  $2.70 \text{ g.cm}^{-3}$ . The mineral blocks are added to the bathymetric model by introducing local higher densities equal to  $3.85 \text{ g.cm}^{-3}$ . The thickness of the blocks is set at 200 m from the block top surface represented on Figure 5. At this local gravity field is added a global field generated from an ellipsoidal Earth model whose density is set at  $5.52 \text{ g.cm}^{-3}$ . This ensure that the resulting synthetic gravity field has realistic values and variations.

The reference trajectory of the AUV is generated by analyzing actual navigation data which derive from the test mission carried out by the IFREMER off the Mediterranean coasts in the south

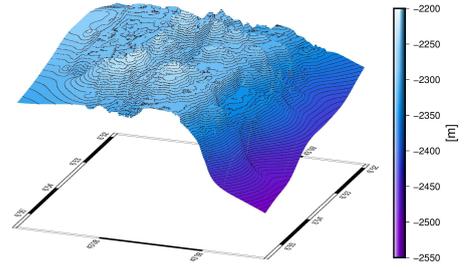


Figure 4: Perspective view of the bathymetric surface. Width and length of the area are worth about 6 km.

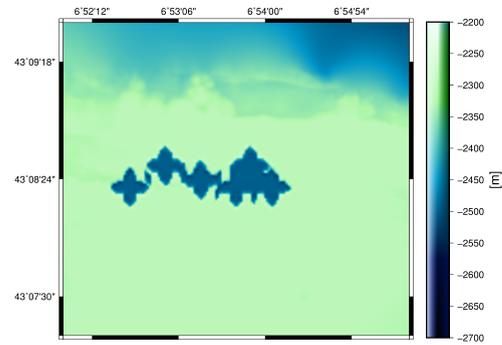


Figure 5: View of mineralogic block top surface.

of France in 2012. The analysis of these navigation data permits navigation deterministic models to be determined. These models consist of polynomial functions for representing the submersible movement variations at large spatial scales and periodic functions for modeling the variations at smaller spatial scales. Finally, 12 orthogonal profiles were generated. Each profile is of 3600 m long. At an average navigation speed of  $4.3 \text{ km.h}^{-1}$ , the time travel needed to cover the whole profile is of 3000 s. Note that only the height,  $h_P$ , is set at  $-2200 \text{ m}$  in all cases. Figures 6 and 7 superimposed the gravity field variations on the 12 profiles on the considered area.

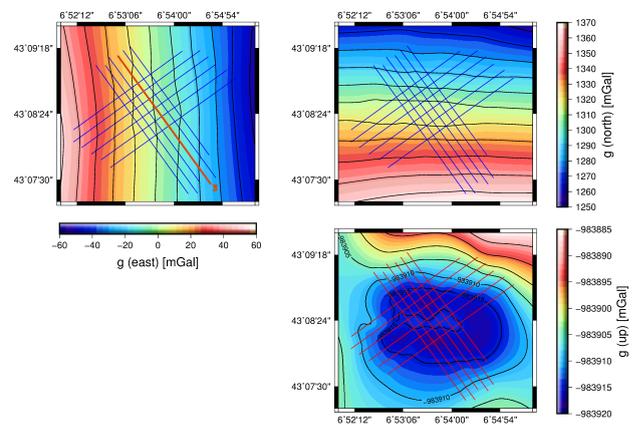


Figure 6: Superposition of 12 profiles with variations of gravity field vector components. Results of Part 5. and 6. will be relative to the profile number 3, which has been highlighted on the first map.

Finally, accelerations  $a_\alpha^b$  and  $a_\beta^b$  are deduced from the equations of moving-base gravimetry introduced in part 3. Indeed, specific forces in the  $b$ -frame can be derived from equations (5) and (6),

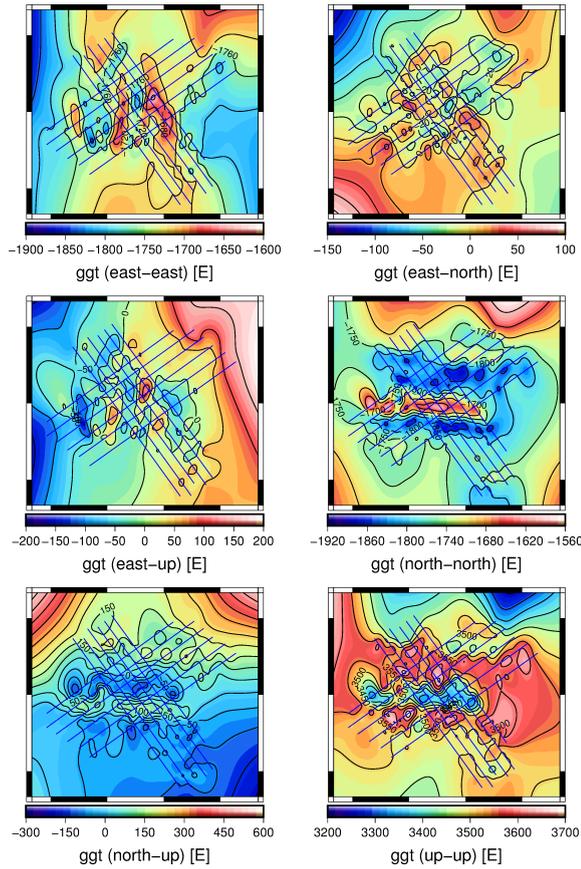


Figure 7: Superposition of 12 profiles with variations of gravity gradient tensor components.

thus giving:

$$a_{\alpha}^b = C_e^b \ddot{X}_P^e + C_b^n (\Omega_{eb}^b \Omega_{eb}^b + \dot{\Omega}_{eb}^b) L_{\alpha}^b - C_n^b g_{\alpha}^n \quad (22)$$

and

$$a_{\beta}^b = C_e^b \ddot{X}_P^e + C_b^n (\Omega_{eb}^b \Omega_{eb}^b + \dot{\Omega}_{eb}^b) L_{\beta}^b - C_n^b g_{\beta}^n \quad (23)$$

Equations (22) and (23) relate the specific forces in the  $b$ -frame to reference navigation data and gravity data.

### 4.3 Noise models

As discussed in part 1., the navigation of the Autonomous Underwater Vehicle is achieved through the combination of measures obtained from an Inertial Navigation System, a Doppler Velocity Log and an Ultra Short Base Line acoustic positioning system. The filtering applied to these different observations delivers only the final position and attitude of the carrier and their respective uncertainties. In other words, we have no access to the underlying process leading to the calculation of these quantities. Concerning the positioning of the carrier (longitude  $\lambda_P$  and latitude  $\varphi_P$ ), the manufacturer indicates an uncertainty equal to 0.1% of the travelled distance. In our case, this represents an uncertainty of about 36 meters at the end of each profile. One possible modelisation of the underlying stochastic process to this position fault can be performed by double integration of a Gaussian noise process. Indeed, in a first approximation, the position delivered can be seen as the result of the double integration of noisy accelerations measured by the inertial unit installed in the INS. The elevation data (or depth  $h_P$ ), will be considered later as being assigned of an uncertainty equal to a few tens of centimeters.

Regarding the attitude angles, the manufacturer indicates an uncertainty about 0.02 deg secant latitude for the heading angle,  $\delta$ , and uncertainties about 0.01 deg secant latitude for the pitch,  $\chi$ , and roll,  $\eta$ , angles. Thus, the errors associated with the depth and attitude data are modeled in a first approximation as a Gaussian noise.

On the other hand, faults affecting accelerometers which constitute GRAVIMOB need to be analyzed more carefully. Indeed, in addition to uncertainty assigned to the values they deliver, the sensors are subject to a bias and a scale factor. Although the calibration step aims to set the values of these parameters, they still tend to vary over long time scales. Among the analyzing tools for the study of stochastic process affecting signals, the Allan Deviation is notable for its ease of implementation and its interpretation. Its theory, calculation algorithm and connection with the Power Spectral Density were established in (IEEE Standard Specification Format Guide and Test Procedure for Single-Axis Interferometric Fiber Optic Gyros, 1998). We show the results of the calculation of the Allan Deviation applied to the QFLEX-QA-3000-020 accelerometers (Figure 8). The calculation is performed with three series of static observations of about 8-hour duration at a sampling frequency of 31.25 Hz. According to the properties of Allan Deviation, it is possible to identify three stochastic processes affecting the accelerometer measurements. The first identified process corresponds to a White Noise (WN)

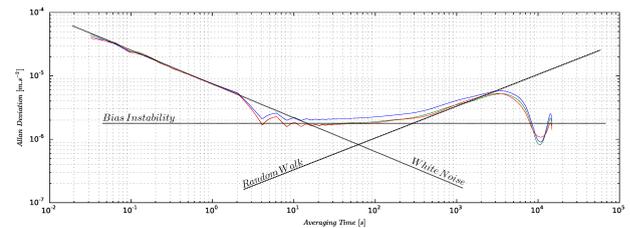


Figure 8: Allan Deviation of three QFLEX-QA-3000-020 accelerometers constituting GRAVIMOB. The figure shows clearly the presence of three distinct stochastic processes: white noise, random walk and bias instability.

on the measured accelerations. It is characterized by a slope of  $-\frac{1}{2}$  on the Allan Deviation graph. Its standard deviation equal to  $7.10^{-6} \text{ m.s}^{-1} = 7.10^{-1} \text{ mGal}$  can be read for an averaging time of 1 second on the graph and confirms the manufacturer value. The second process is characterized by a slope equal to  $+\frac{1}{2}$  and corresponds to a Random Walk (RW) on the observations. These first two stochastic processes can be easily reproduced numerically from the values given on the graphs of the Allan Deviation. The last process, which is characterized by a zero slope, corresponds to a Bias Instability. Unlike other processes, it is not easy to imitate numerically.

## 5. RESULTS

This section summarizes the results of three numerical tests using reference data and noise models that have been introduced previously (Table 1). For each simulation, 1000 random samples were generated to estimate the standard deviation of the error on the components of the gravity field ( $\sqrt{\text{VAR}[e_g]}$  and  $\sqrt{\text{VAR}[e_{ggt}]}$ ). Figures 9, 10 and 11 show the evolution of their maximum value on the profile number 3 (Figure 6) as a function of the width  $L$  of the window used in the basic filtering process discussed in part 4.

	Test 1	Test 2	Test 3
Position			
$\epsilon_\lambda$	IRW		
$\epsilon_\varphi$	IRW		
$\epsilon_h$	WN		
Attitude			
$\epsilon_\delta$		WN	
$\epsilon_\chi$		WN	
$\epsilon_\eta$		WN	
Accelerations			
$\epsilon_{a_\alpha}$			WN + RW
$\epsilon_{a_\beta}$			WN + RW

Table 1: Noise models associated to the numerical simulations. IRW stands for Integrated Random Walk, RW for Random Walk and WN for White Noise.

### 5.1 Test 1

The first simulation aims to study the effect of the AUV positioning uncertainty. As previously mentioned, one possible modelisation of the underlying stochastic process affecting the position ( $\epsilon_{\lambda_P}$  and  $\epsilon_{\varphi_P}$ ) can be performed by double integration of a White Noise process, or simple Integration of a Random Walk process, abbreviated IRW. The elevation error ( $\epsilon_{h_P}$ ) is modeled as a simple White Noise, abbreviated WN.

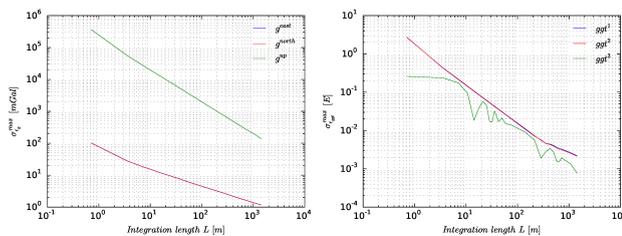


Figure 9: Effect of the AUV positioning uncertainty. At 1 km resolution, the uncertainty affecting  $g^U$  is 2 order of magnitude greater than  $g^E$  and  $g^N$ . Components of the gravity gradient tensor are not affected by the AUV positioning uncertainty.

The uncertainties affecting the gravity vector components decrease appreciably when the integration length increases. The graph related to  $g^E$  and  $g^N$  indicates that the uncertainties affecting these components fall down to 1 mGal at 1 km resolution. However, the uncertainty affecting  $g^U$  is 2 order of magnitude greater at the same resolution. It is consistent with the fact that the uncertainty affecting the coordinate  $h_P$  is more likely to perturb the restitution of the vertical component  $g^U$ . The components of the gravity gradient tensor present low uncertainties. This is consistent with equation (13) in which the positioning term does not appear.

### 5.2 Test 2

This simulation focuses on the effect of the uncertainty of the attitude angles ( $\epsilon_\delta$ ,  $\epsilon_\chi$  and  $\epsilon_\eta$ ). These faults are modeled using a simple White Noise process, WN.

In this case, we still observe the decrease of the uncertainties when the integration length increases. Unlike the previous test, the uncertainty affecting the component  $g^U$  falls down to 1 mGal at only 15 m resolution and uncertainties affecting  $g^E$  and  $g^N$  are 2 order of magnitude greater at the same resolution. Despite an integration over a length of 1 km, uncertainties affecting the components of the gravity gradient tensor range from 100 E and 1000 E.

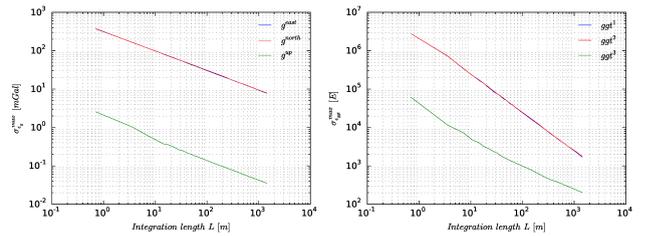


Figure 10: Effect of the AUV attitude uncertainty. Vertical component  $g^U$  is less affected than horizontal components  $g^E$  and  $g^N$ . Despite the low-pass filtering, uncertainties affecting the components of the gravity gradient tensor are still high when compared to the gravity effect of geological sources.

### 5.3 Test 3

Here we look at the impact of faults affecting accelerometers ( $\epsilon_{a_\alpha}$  and  $\epsilon_{a_\beta}$ ). Allan Deviation led to the identification of different stochastic processes: White Noise, Random Walk and Bias Instability. Because Bias Instability is not easy to imitate numerically, only White Noise, WN and Random Walk, RW processes have been considered in this test.

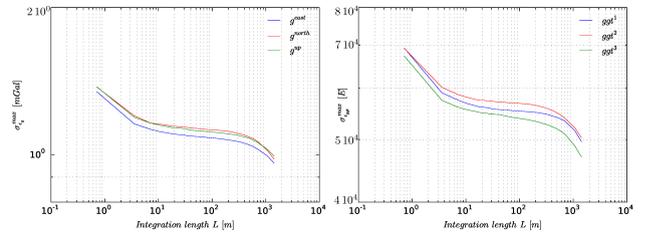


Figure 11: Effect of the accelerometer measurements uncertainty. The low-pass filtering has no effect on the noise reducing because of the non-stationary nature of the first order random walk process involved in the noise model.

Noises on acceleration measurements have a small impact on the gravity vector components. Indeed, the uncertainty is about 1 mGal without applying the low-pass filter. On the contrary, uncertainties on the gravity gradient tensor components are about 60000 E which prevents a proper restitution of the latter. Note that the low-pass filtering here does not reduce noise as in the two previous cases. This can be explained by the non-stationary nature of the first order random walk process introduced into the noise model, which cannot be accounted for by non-predictive filtering procedure.

## 6. KALMAN FILTERING

To improve the estimation, our filtering method must take into account the statistical features of the parameters and noise affecting the observations. The best estimator for this kind of problem is the Kalman Filter (KF). Unfortunately, its original form can not be applied here because of the nonlinearity of the observation equation that links accelerometer measurements to the components of the gravity field. Its extension, the Extended Kalman Filter (EKF) has already been implemented for the data processing of the LiMo-g system (Saint-Jean, 2008). The method allowed the gravity to be estimated from LiMo-g measurements along profiles at a rate equal to the measurement sampling rate. Tests of the method on semi-synthetic data have proved to be conclusive only in short term, that is for short length profiles. Indeed, uncertainty on gravity estimates significantly increases after only

a few stages of calculation, indicating that the Extended Kalman Filter used is likely to be unstable in the long term. One possible way to cope with the problem would be to modify the time evolution model within the Kalman Filter so as to allow for the spatial variability of Earth's gravity field deduced from geostatistics. Theoretically speaking, Markov's autoregressive moving average models can be used for this task (Verdun et al., 2013).

Another complementary solution to the latter is the implementation of the Unscented form of the Kalman Filter (UKF) which was introduced in (Julier and Uhlmann, 1997). The main difference between the EKF and the UKF stems from the manner in which the state probability distribution is propagated through the nonlinear system. In the EKF, the latter is propagated analytically through a first-order linearization while, the UKF uses a minimal set of chosen sample points (called sigma points) which are propagated through the true nonlinear system. It can be shown that the a posteriori mean and covariance are captured accurately to second order. On the other hand, the EKF only achieves first-order accuracy. Moreover, the UKF algorithm does not require the determination, implementation and calculation of Jacobian matrix and its complexity is the same order as that of the EKF.

The UKF algorithm is described herein. We use the same notation as in (Haykin, 2001). Let us consider the following discrete-time nonlinear dynamical system:

$$\begin{cases} x_{k+1} = F(x_k, u_k, v_k) \\ y_k = H(x_k, n_k) \end{cases}, \quad (24)$$

where  $x_k$  is the state of the system, in our case the related gravity field quantities that is gravity vector components and gravity gradients,  $u_k$  is a known input,  $y_k$  is the observed measures of the state, accelerations in our case,  $v_k$  is the process noise and  $n_k$  is the observation noise.

Like its Extended form, the UKF starts with an initialization phase:

$$\begin{aligned} \hat{x}_0 &= \mathbb{E}[x_0] \\ P_0 &= \mathbb{E}[(x_0 - \hat{x}_0)(x_0 - \hat{x}_0)^T] \end{aligned} \quad (25)$$

The state vector is then augmented with the process and observation noises:

$$\hat{x}_0^a = \mathbb{E}[x_0^a] = [x_0^T \quad 0 \quad 0]^T$$

$$P_0^a = \mathbb{E}[(x_0^a - \hat{x}_0^a)(x_0^a - \hat{x}_0^a)^T] = \begin{bmatrix} P_0 & 0 & 0 \\ 0 & R^v & 0 \\ 0 & 0 & R^n \end{bmatrix} \quad (26)$$

where  $x^a = [x^T \quad v^T \quad n^T]^T$ ,  $R^v$  is the process-noise covariance and  $R^n$  is the measurement-noise covariance. Let  $N$  be the length of the augmented state vector  $\hat{x}_k^a$ . Then, for  $k \geq 1$ ,  $2N+1$  sigma-points are calculated according to the following deterministic sampling:

$$\begin{aligned} \chi_{0,k-1}^a &= \hat{x}_{k-1}^a, \\ \chi_{i,k-1}^a &= \hat{x}_{k-1}^a + \left( \sqrt{(N+\lambda)P_{k-1}^a} \right)_i, \quad i = 1, \dots, N \\ \chi_{i,k-1}^a &= \hat{x}_{k-1}^a - \left( \sqrt{(N+\lambda)P_{k-1}^a} \right)_{i-N}, \quad i = N+1, \dots, 2N \end{aligned} \quad (27)$$

where  $\lambda$  is a scaling parameter. They can be written as:

$$\chi_{k-1}^a = [ \hat{x}_{k-1}^a \quad \hat{x}_{k-1}^a + \gamma \sqrt{P_{k-1}^a} \quad \hat{x}_{k-1}^a - \gamma \sqrt{P_{k-1}^a} ] \quad (28)$$

where  $\gamma = \sqrt{N+\lambda}$ . A more general writing leads to:

$$\chi^a = [ (\chi^x)^T \quad (\chi^v)^T \quad (\chi^n)^T ]^T \quad (29)$$

These sigma-points are propagated through the nonlinear state function ( $F$ ):

$$\chi_{i,k|k-1}^x = F(\chi_{i,k-1}^x, u_{k-1}, \chi_{i,k-1}^v), \quad i = 0, \dots, 2N \quad (30)$$

A Priori estimate and covariance of the state can then be performed as follows:

$$\hat{x}_k^- = \sum_{i=0}^{2N} W_i^m \chi_{i,k|k-1}^x \quad (31)$$

$$P_k^- = \sum_{i=0}^{2N} W_i^c (\chi_{i,k|k-1}^x - \hat{x}_k^-)(\chi_{i,k|k-1}^x - \hat{x}_k^-)^T \quad (32)$$

where  $W_i^c$  and  $W_i^m$  are weights associated to the sigma-points given by:

$$\begin{aligned} W_0^m &= \frac{\lambda}{N+\lambda} \\ W_0^c &= \frac{\lambda}{N+\lambda} + 1 + \alpha^2 + \beta \\ W_i^m &= W_i^c = \frac{1}{2(N+\lambda)}, \quad i = 1, \dots, 2N \end{aligned} \quad (33)$$

where the constant  $\alpha$  controls the spread of the sigma-points and  $\beta$  is used to incorporate prior knowledge of the state vector probability distribution. For a Gaussian distribution,  $\beta = 2$  is optimal.

A Priori estimation and covariance of the observation are also performed as follows:

$$\hat{y}_k^- = \sum_{i=0}^{2N} W_i^m \Upsilon_{i,k|k-1} \quad (34)$$

$$P_{y_k y_k} = \sum_{i=0}^{2N} W_i^c (\Upsilon_{i,k|k-1} - \hat{y}_k^-)(\Upsilon_{i,k|k-1} - \hat{y}_k^-)^T \quad (35)$$

where  $\Upsilon_{i,k|k-1}$  are given by:

$$\Upsilon_{i,k|k-1} = H(\chi_{i,k|k-1}^x, \chi_{i,k-1}^n), \quad i = 0, \dots, 2N \quad (36)$$

Finally, the Kalman gain matrix is given by:

$$K_k = P_{x_k y_k} P_{y_k y_k}^{-1} \quad (37)$$

where the cross-correlation matrix  $P_{x_k y_k}$  is given by:

$$P_{x_k y_k} = \sum_{i=0}^{2N} W_i^c (\chi_{i,k|k-1}^x - \hat{x}_k^-)(\Upsilon_{i,k|k-1} - \hat{y}_k^-)^T \quad (38)$$

A Posterior estimate and covariance of the state vector are given by:

$$\hat{x}_k = \hat{x}_k^- + K_k(y_k - \hat{y}_k^-) \quad (39)$$

and

$$P_k = P_k^- - K_k P_{y_k y_k} K_k^T \quad (40)$$

We propose here a simple implementation of the Unscented Kalman Filter based on the same synthetic data described in part 4. In this example, only accelerometer observations are assigned a Gaussian noise whose variance is equal to 1 mGal and we seek to restore only the three components of the gravity field vector  $g_P^n$ . The discrete-time system can be written as:

$$\begin{cases} g_{P,k+1}^n &= g_{P,k}^n + v_k \\ C_b^n (C_e^b \ddot{X}_P^e - a_{P,k}^b) &= g_{P,k}^n + n_k \end{cases} \quad (41)$$

where  $a_{P,k}^b = \frac{a_{\alpha,k}^b + a_{\beta,k}^b}{2}$ . For  $k = 0$ , the augmented state vector

and its covariance matrix are given by:

$$\hat{x}_0^a = [ g_{P,0}^n \quad \mathbb{E}[v_0] \quad \mathbb{E}[n_0] ]^T \quad (42)$$

$$P_0^a = \begin{bmatrix} P_0 & 0 & 0 \\ 0 & R^v & 0 \\ 0 & 0 & R^n \end{bmatrix} \quad (43)$$

where  $P_0 = \sigma_P^2 I_3$  with  $\sigma_P = 0.01$  mGal,  $R^v = \sigma_v^2 I_3$  with  $\sigma_v = 0.1$  mGal and  $R^n = \sigma_n^2 I_3$  with  $\sigma_n = \frac{1}{\sqrt{2}}$  mGal.

Figure 12 shows for each component of the gravity field vector, the superposition of the estimate and the reference, the noise level added to the acceleration  $a_P^b = \frac{a_{\alpha,k}^b + a_{\beta,k}^b}{2}$  and the noise level on the estimated component which is basically the difference between the true and the estimate value. As previously mentioned, noise level on  $a_P^b$  is  $\sigma_n = \frac{1}{\sqrt{2}}$  mGal. The noise level obtained on the gravity field is only about 0.15 mGal which represents a noise level reduction of about 4.5 and demonstrates the efficiency of the basic filter implemented.

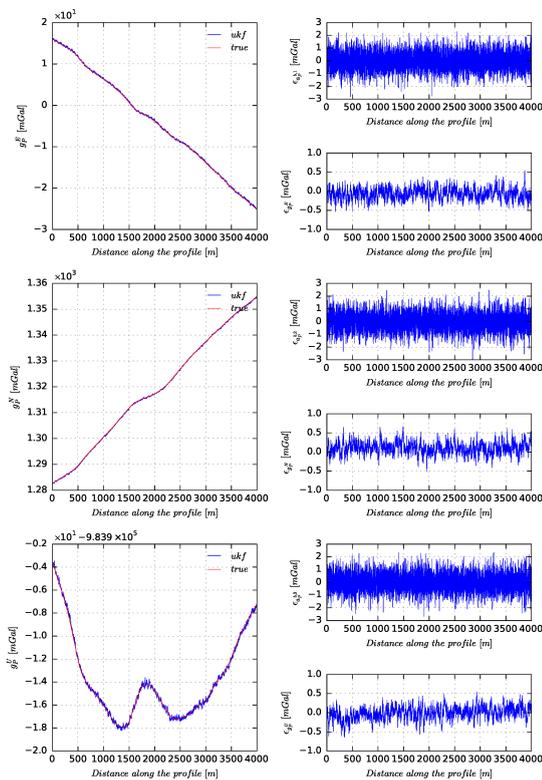


Figure 12: On a simple example, the Unscented Kalman Filter induces a sensible noise level reduction of about 4.5 on the three components of the gravity vector.

## 7. CONCLUSIONS

We have developed an instrument for measuring the gravity field components in underwater environment. Based on synthetic data, we studied their restitution by introducing different noise processes. The results show that the recovery of the vertical gravity vector component with an accuracy suitable to geological sources detection is feasible by improving the positioning of the AUV. The recovery of gravity vector horizontal components and the gravity gradients requires very good estimates of carrier attitude angles, and thus high grade attitude and heading reference sys-

tems are needed. It must be emphasized that whatever the performances of positioning and attitude determination systems, the uncertainty affecting the gravity related quantities depends directly on the accelerometer sensibility. Given one type of accelerometers, the unique way to reduce uncertainties on gravity estimates relies upon the use of predictive filtering methods able to account for non-stationary noise such as random walk which affects this kind of sensor. In this work, an Unscented Kalman Filter has been implemented in a simple case. The continuation of this work will be the inclusion of all stochastic processes affecting the measures and the covariance of the gravity field components. These new refinements will make possible even more accurate undersea gravity measurements.

## ACKNOWLEDGEMENTS

The authors are indebted to the French Ministry of Defence and the Pays de la Loire Region for their support of this work.

## REFERENCES

- Araya, A., Kanazawa, T., Shinohara, M., Yamada, T., Fujimoto, H., Iizasa, K. and Ishihara, T., 2011. A gravity gradiometer to search for submarine ore deposits. In: Underwater Technology (UT), 2011 IEEE Symposium on and 2011 Workshop on Scientific Use of Submarine Cables and Related Technologies (SSC), Tokyo, Japan, pp. 1–3.
- Haykin, S. S., 2001. Kalman filtering and neural networks. Adaptive and learning systems for signal processing, communications, and control, Wiley, New York.
- IEEE Standard Specification Format Guide and Test Procedure for Single-Axis Interferometric Fiber Optic Gyros, 1998. IEEE Std 952-1997.
- Julier, S. J. and Uhlmann, J. K., 1997. New extension of the Kalman filter to nonlinear systems. In: Signal Processing, Sensor Fusion, and Target Recognition VI, Vol. 3068, Ivan Kadar, Orlando, Florida, USA, pp. 182–193.
- Liu, F., Qian, D., Zhang, Y. and Li, Y., 2010. A computer simulation of the influence of GGI and inertial sensors on gravity gradient aided navigation. In: 2010 3rd International Symposium on Systems and Control in Aeronautics and Astronautics (ISSCAA), Harbin, China, pp. 793–797.
- Saint-Jean, B. D., 2008. Étude et développement d'un système de gravimétrie mobile. PhD thesis, Observatoire de Paris.
- Verdun, J., Damenet, N. and Cali, J., 2013. Moving-base vector gravimetry data processing based on optimal, physically sensible evolution models. In: Proceedings of International Symposium, Terrestrial Gravimetry : Static and Mobile Measurements, Electropribor International Association of Geodesy, TG-SMM 2013, St Petersburg, Russia, pp. 41–47.
- Yan, Z., Yang, F., Ma, J. and Tian, J., 2012. Underwater Obstacle Detection Based on the Change of Gravity Gradient. In: 2012 2nd International Conference on Remote Sensing, Environment and Transportation Engineering (RSETE), Jiangsu, China, pp. 1–5.
- Yao, Z. and Xiaorong, S., 2012. Densification algorithm research on gravity gradiometer reference map generation. In: 2012 International Conference on System Science and Engineering (IC-SSE), Coventry, United Kingdom, pp. 315–320.

Revised March 2015

---

## Annexe E

# Liste des acronymes

**ASCII** Code américain normalisé pour l'échange d'information ou *American Standard Code for Information Interchange*.

**AUV** Véhicule sous-marin autonome ou *Autonomous Underwater Vehicle*.

**EGM2008** *Earth Gravitational Model 2008*.

**ESGT** École Supérieure des Géomètres et Topographes.

**GPS** Système Global de Positionnement ou *Global Positioning System*.

**GraviMob** Système de Gravimétrie Mobile ou *Mobile Gravimetry System*.

**GRS80** Système de Référence Géodésique 1980 ou *Geodetic Reference System 1980*.

**HROV** Véhicule téléguidé hybride ou *Hybrid Remotely Operated Vehicle*.

**IFREMER** Institut Français de Recherche pour l'Exploitation de la Mer.

**IGN** Institut National de l'information Géographique et forestière.

**IPGP** Institut de Physique du Globe de Paris.

**LAREG** Laboratoire de Recherche en Géodésie.

**LBL** système de positionnement acoustique par longue ligne de base ou *Long BaseLine acoustic positioning system*.

**LDO** Laboratoire de Domaines Océaniques.

**LiMo-g** Système Léger de Gravimétrie Mobile ou *Light Moving Gravimetry System*.

**MEMS** Microsystème électromécanique ou *Microelectromechanical systems*.

**ONERA** Office National d'Études et de Recherches Aérospatiales.

**OP** Observatoire de Paris.

**ROV** Véhicule téléguidé ou *Remotely Operated Vehicle*.

**SHOM** Service Hydrographique et Océanographique de la Marine.

**SLAM** Localisation et cartographie simultanées ou *Simultaneous Location And Mapping*.

**SVD** Décomposition en Valeurs Singulières ou *Singular Value Decomposition*.

**USBL** système de positionnement acoustique par ligne de base ultra courte ou *Ultra Short Base Line acoustic positioning system*.

**UUV** Véhicule sous-marin non-habité ou *Unmanned Underwater Vehicle*.

## Annexe F

# Glossaire

***b-frame*** le *b-frame* (ou *body-frame*) désigne le repère attaché au véhicule porteur.

***e-frame*** le *e-frame* (ou *earth-frame*) désigne le repère accompagnant la Terre dans son mouvement de rotation sur elle-même.

***i-frame*** le *i-frame* (ou *inertial-frame*) désigne le repère accompagnant la Terre dans son mouvement de translation elliptique autour du Soleil.

***n-frame*** le *n-frame* (ou *navigation-frame*) désigne le repère géographique local.

***s<sub>α</sub>-frame*** le *s<sub>α</sub>-frame* (resp. *s<sub>β</sub>-frame*) (ou *system-frame*) est le repère attaché à la triade accélérométrique  $\alpha$  (resp.  $\beta$ ).







Clément ROUSSEL

**Expérimentation d'un gravimètre mobile  
léger et novateur pour la mesure du  
champ de gravité en fond de mer.**

Ifremer

**Résumé :**

Dans le cadre de ses activités de recherche en gravimétrie, le Laboratoire de Géomatique et Foncier, en collaboration avec le Laboratoire de Recherche en Géodésie de l'Institut National de l'information Géographique et forestière, le Laboratoire Domaines Océaniques, l'Institut Français de Recherche pour l'Exploitation de la Mer et le Service Hydrographique et Océanographique de la Marine, développe un instrument novateur qui permet la mesure dynamique du champ de gravité terrestre en fond de mer. Le système baptisé GraviMob, ne nécessite pas de plateforme stabilisée et se fixe rigidement dans l'habitacle du véhicule porteur. Le cœur du système est constitué de triades d'accéléromètres, permettant une mesure vectorielle de l'accélération de pesanteur. Un traitement des mesures par filtrage de Kalman, intégrant les données de position et d'orientation du véhicule porteur, réalise la restitution du champ de pesanteur dans un référentiel adapté à son interprétation et son exploitation.

**Mots clés :**

gravimétrie vectorielle et mobile, accéléromètres électrostatiques, filtrage de Kalman unscented (UKF), véhicule autonome sous-marin (AUV), étalonnage

**Abstract :**

As part of its research in gravimetry, the Laboratoire Géomatique et Foncier, in collaboration with the Laboratory for Research Geodesy of the National Institute for Geographic and Forest Information, the Oceanic Domains Laboratory, the French Research Institute for the Exploitation of the Sea and the Marine Hydrographic and Oceanographic Service, develops an innovative instrument which allows the dynamic measurement of the Earth's gravity field in the subsea domain. The system, called GraviMob, does not require a stabilized platform and is rigidly attached to the carrier vehicle, in this case an Autonomous Underwater Vehicle. The heart of the system consists of triads of accelerometers, allowing a vector measurement of the gravity. A Kalman filter, integrating the position and orientation data of the carrier vehicle, performs the estimation of the gravity field in a frame adapted to its interpretation.

**Keywords :**

vector and mobile gravimetry, electrostatic accelerometers, autonomous underwater vehicle (AUV), unscented Kalman filtering (UKF), calibration