



HAL
open science

Optimisation des couplages magnéto-mécaniques d'extensomètres à corde vibrante pour le suivi du vieillessement de constructions stratégiques

Bingqing Mei

► **To cite this version:**

Bingqing Mei. Optimisation des couplages magnéto-mécaniques d'extensomètres à corde vibrante pour le suivi du vieillissement de constructions stratégiques. Physique [physics]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2016. Français. NNT : 2016PA066218 . tel-01637280

HAL Id: tel-01637280

<https://theses.hal.science/tel-01637280>

Submitted on 17 Nov 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**THÈSE DE DOCTORAT
DE L'UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE CURIE**

École doctorale : Sciences Mécaniques, Acoustique, Électronique et Robotique de Paris

réalisée au

LABORATOIRE DE PHYSIQUE ET D'ÉTUDE DES MATÉRIAUX

par

Bingqing MEI

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE CURIE

Sujet de la thèse :

Optimisation des couplages magnéto-mécaniques d'extensomètres à corde vibrante pour le suivi du vieillissement de constructions stratégiques

Présentée et soutenue publiquement le 30 mai 2016

Devant un jury composé de :

M. Frédéric TAILLADE	EDF, chercheur-expert	Rapporteur
M. Éric VOURCH	ENS Cachan, maître de conférences	Rapporteur
M. Joan BERTRAND	Andra, docteur R&D	Examineur
M. Hamid KOKABI	UPMC, professeur	Examineur
M. Jérôme LUCAS	UPMC, maître de conférences	Co-directeur de thèse
M. Stéphane HOLÉ	UPMC, professeur	Directeur de thèse
M. Norbert CHÉRON	Géo-Instrumentation, directeur technique	Invité

Remerciements

La réalisation de cette thèse constitue une expérience passionnante et marquante. Ce travail n'aurait pu aboutir sans l'aide et le soutien de nombreuses personnes. Je voudrais leur exprimer ici toute ma reconnaissance.

Mes remerciements vont d'abord à Monsieur Stéphane Holé, mon Directeur de thèse, pour m'avoir suivie, encadrée, dirigée tout au long de mon parcours de recherche depuis le stage de Master précurseur du travail de cette thèse jusqu'à la rédaction de ce manuscrit. Sa rigueur scientifique, sa grande disponibilité ainsi que ses judicieux conseils m'ont été très précieux. Ses nombreuses relectures et ses remarques pertinentes m'ont permis de mener à bien ce travail.

Je tiens également à remercier Monsieur Jérôme Lucas, mon Co-directeur de thèse, pour son suivi attentif, son aide constante et ses conseils avisés qui m'ont permis de progresser dans ma recherche. Merci aussi pour ses relectures en profondeur du manuscrit.

D'une façon plus générale, mes remerciements s'adressent à toutes les personnes travaillant au sein du groupe instrumentation du Laboratoire de Physique et d'Étude des Matériaux. Je souhaite remercier Monsieur Ricardo Lobo, Directeur du laboratoire et Monsieur Jaques Lewiner, Président du Fonds ESPCI Georges Charpak. Leur accueil au sein du laboratoire et leur soutien m'ont été d'une grande aide. Je désire de même remercier Messieurs Thierry Ditchi, Yacine Oussar et Emmanuel Géron pour leurs encadrements, leurs conseils et leurs aides tout au long de mes études. Je remercie aussi mes collègues Julien Haffner, Louisa Hamidouche, Nabil Houdali, Zied Lassoued, Cédric Margo, Maria Merlán, Ibrahim Mohsen, Anne Penillard, Basil Salamé et Guillaume Trannoy pour l'ambiance très agréable qu'ils ont su y créer. Un grand merci à Julie Iem pour toute son assistance.

Je tiens à remercier vivement Monsieur Frédéric Taillade, Chercheur-expert chez EDF et Monsieur Éric Vourc'h, Maître de conférences à l'ENS Cachan, d'avoir bien voulu être rapporteur de ma thèse. La version finale de ce mémoire a bénéficié de leur lecture très attentive et de leurs remarques précieuses. Je remercie également Messieurs Joan Bertrand et Hamid Kokabi de me faire l'honneur d'assister à mon jury de thèse.

Ce travail a été supporté par la Société Géo-instrumentation qui m'a attribué un financement pour les trois années de ma thèse. À ce titre, j'exprime ma sincère gratitude à Madame Isabelle Lamarque, Présidente de Géo-instrumentation, et à Monsieur Norbert Chéron, Directeur technique de Géo-instrumentation.

Enfin, un remerciement particulier à mes parents, à mes amies et à mes proches pour toutes leurs attentions, leurs soutiens et leurs encouragements.

Table des matières

Introduction	5
Chapitre I État de l'art	11
I.1 Surveillance de la santé des ouvrages d'art	11
I.2 Histoire des capteurs à corde vibrante	12
I.3 Applications des capteurs à corde vibrante	14
I.3.1 Extensomètre à corde vibrante	14
I.3.2 Capteur de déplacement à corde vibrante	15
I.3.3 Piézomètre à corde vibrante	16
I.3.4 Capteur de température à corde vibrante	17
I.4 Développement des capteurs à corde vibrante	18
I.4.1 Développement de modélisation	19
I.4.2 Développement de dispositif de lecture	19
I.4.3 Développement de mode de fonctionnement	20
Chapitre II Principe de fonctionnement	21
II.1 Fonctionnement en mode amorti	21
II.2 Fonctionnement en mode entretenu	22
II.3 Comparaison des modes de fonctionnement	23
II.3.1 Rapport signal sur bruit	24
II.3.2 Fatigue de la corde	25
II.3.3 Défaillance du capteur	25
II.3.4 Retour d'expérience	26

II.3.5 Conclusion	27
II.4 Électronique de lecture	28
II.4.1 Fonctionnement en mode amorti.....	30
II.4.2 Fonctionnement en mode entretenu forcé.....	32
II.4.3 Fonctionnement en mode auto - entretenu.....	34
II.4.4 Mesure de la résistance des bobines	36
II.4.5 Industrialisation du dispositif de lecture	38
Chapitre III Modélisation physique	39
III.1 Modélisation par schéma-bloc	39
III.2 Excitation de la corde.....	41
III.2.1 Force magnétique d'excitation	42
III.2.1.1 Méthode du tenseur de Maxwell	42
III.2.1.2 Force magnétique sur la corde	43
III.2.2 Relation fondamentale de la dynamique.....	46
III.2.2.1 Modèle simple : extrémités-pivotantes (corde sans raideur).....	46
III.2.2.1.1 Équation du mouvement (modèle simple)	46
III.2.2.1.2 Fréquences de résonance (modèle simple).....	48
III.2.2.1.3 Fonction de Green (modèle simple).....	49
III.2.2.2 Modèle complexe : extrémités-encastées (corde avec raideur)	53
III.2.2.2.1 Équation du mouvement (modèle complexe)	53
III.2.2.2.2 Fréquences de résonance (modèle complexe).....	55
III.2.2.2.3 Fonction de Green (modèle complexe)	65
III.2.2.3 Influence de la raideur de la corde	68
III.2.2.4 Influence de la géométrie de la bobine d'excitation	72
III.2.3 Validation expérimentale du système d'excitation	76

III.2.3.1 Dispositif expérimental	76
III.2.3.2 Influence de l'excitation continue.....	77
III.2.3.3 Influence de l'excitation pulsée	80
III.2.3.4 Comparaison des modes d'excitation	85
III.3 Système de mesure	87
III.3.1 Modélisation du capteur	87
III.3.1.1 Couplages magnéto-mécaniques	87
III.3.1.2 Schémas électriques équivalents	90
III.3.2 Sensibilité du capteur.....	93
III.3.2.1 Étude de champ magnétique résiduel.....	93
III.3.2.2 Étude de force magnétique moyenne	94
III.3.2.3 Étude du couplage entre bobines.....	97
III.3.3 Validation expérimentale du système de mesure.....	99
III.3.3.1 Dispositif expérimental	99
III.3.3.2 Résultats de fréquence de résonance	101
III.3.3.3 Effet de force magnétique moyenne.....	104
III.3.3.4 Effet de couplage entre bobines	109
III.3.3.5 Analyse des résultats expérimentaux	115
Chapitre IV Effet de la foudre	119
IV.1 Phénomène de la foudre	119
IV.2 Type de foudroiement	121
IV.2.1 Foudroiement directs	121
IV.2.2 Foudroiement indirects	122
IV.3 Étude expérimentale de l'effet de la foudre	124
IV.3.1 Dispositif expérimental	124

IV.3.2 Effet de la décharge électrostatique sur un capteur fermé.....	125
IV.3.2.1 Bruit électromagnétique produit par une décharge électrostatique.....	125
IV.3.2.2 Effet de la décharge électrostatique en mode amorti	127
IV.3.2.3 Effet de la décharge électrostatique en mode entretenu.....	129
IV.3.2.4 Modification de la réponse du capteur fermé.....	130
IV.3.3 Effet de la décharge électrostatique sur un capteur ouvert.....	131
Conclusion et perspectives.....	139
Bibliographie.....	143

Introduction

Les ouvrages du génie civil sont invariablement exposés à divers risques externes tels que les rafales, les tremblements de terre ou les vagues qui entraînent des effets dynamiques. Le suivi de l'état d'une structure joue un rôle essentiel pour prolonger la durée de vie de la structure et éviter des défaillances catastrophiques. Une grande variété de capteurs basés sur différentes technologies de détection est actuellement utilisée pour la surveillance de sécurité structurale, par exemple, extensomètres à corde vibrante [1], jauges de contrainte [2], capteurs piézoélectriques [3], transformateurs différentiels variables linéaires (LVDT) [4], capteurs à fibre optique [5], GPS [6], vibromètres laser [7] et interférométrie radar [8]. Les différents capteurs peuvent être installés simultanément sur la structure [9], ce qui permet de mesurer de nombreux paramètres dynamiques tels que la déformation, le déplacement, la pression, la contrainte, la précontrainte, l'inclinaison, la température et l'humidité [10, 11].

La technologie des cordes vibrantes est largement adoptée dans de nombreux capteurs du génie civil. De tels capteurs sont couramment utilisés pour mesurer les déformations locales ou globales des constructions de grande envergure [12], par exemple des centrales nucléaires, des ponts et des barrages hydrauliques. Le principe basé sur la relation entre la tension mécanique d'une corde et sa fréquence de résonance est connu depuis l'antiquité [13]. Par exemple, certains instruments de musique à cordes, tels que la harpe ou la lyre, sont joués en réglant la tension des cordes pour produire les notes désirées. Les capteurs à corde vibrante ont été appliqués au domaine de la surveillance des ouvrages d'art dès les années 1930 en France [14]. Ces capteurs ont donc aujourd'hui plus de 80 ans d'utilisation en situation.

Les capteurs à corde vibrante présentent deux principaux avantages. Premièrement, les capteurs à corde vibrante offrent une bonne précision de mesure (typiquement de l'ordre de $\pm 0.1\%$ [15]) et une grande fiabilité à long terme [16, 17]. Les capteurs de haute qualité sont très stables et peuvent fonctionner pendant des dizaines d'années sans dérive du zéro et sans perte de précision [18, 19]. Deuxièmement, l'acquisition des données issues de capteurs à corde vibrante peut être réalisée à distance. En effet, le signal de sortie du capteur est une fréquence au lieu d'un courant ou d'une tension. Le signal transmis au poste de lecture

correspond à un comptage d'impulsions qui est totalement indépendant de l'amplitude du signal. Ainsi la résistance du câble de transmission a peu d'effet sur la lecture du capteur par rapport aux autres types de capteur [20]. Des câbles de grande longueur, jusqu'à 3 km, peuvent être utilisés sans aucun problème [21].

La constitution typique d'un capteur à corde vibrante est présentée sur la Figure 1. Une corde en acier inoxydable est fermement tendue entre deux ancrages scellés dans la construction à surveiller. Une bobine située à proximité de la corde est utilisée pour exciter la corde en résonance. Pour cela, la bobine d'excitation est alimentée par une tension sinusoïdale ou une tension impulsionnelle. Ainsi la corde est mise en vibration sous l'effet du champ magnétique généré. Lorsque l'excitation magnétique est à la fréquence de résonance de la corde, la corde entre en résonance. Selon le mode de mesure, la bobine d'excitation ou une bobine supplémentaire (bobine de mesure) est utilisée pour détecter la vibration de la corde grâce à l'induction magnétique [22]. Lorsque la construction se déforme au cours du temps, les mouvements relatifs des deux ancrages modifient la tension mécanique de la corde et donc sa fréquence de résonance. En conséquence, une déformation de la construction à surveiller, correspondant à une variation relative de la longueur $\Delta L/L$ de la corde, peut être associée à une variation mesurable de la fréquence de résonance f de la corde par rapport à sa fréquence de résonance d'origine f_0 selon la relation :

$$\frac{\Delta L}{L} = K (f^2 - f_0^2) \quad (1)$$

où K est le coefficient extensométrique du capteur. Celui-ci dépend principalement de la tension mécanique de la corde, de sa longueur, et de sa masse linéique.

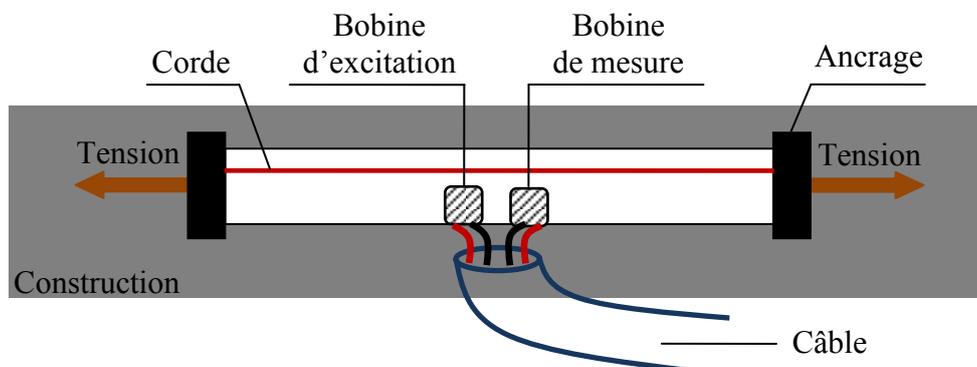


Figure 1 - Capteur à corde vibrante installé dans la construction à surveiller

Les capteurs à corde vibrante sont conçus pour fonctionner dans des environnements sévères [23] où la chaleur, le froid, l'humidité, la poussière et la foudre sont généralement présents. Bien que le principe de fonctionnement du capteur soit simple, il est nécessaire de pouvoir garantir une grande fiabilité sur une longue période [24], notamment lorsque la sécurité des personnes est mise en jeu, ce qui est le cas près d'installations hydrauliques, thermiques ou nucléaires. En outre, le vieillissement des matériaux utilisés, de par les contraintes climatiques et environnementales auxquelles ils sont soumis, risque également de faire varier la fréquence de résonance de la corde et donc de produire de fausses alarmes [25].

Le mode de fonctionnement du capteur est le premier point clé. Les capteurs à corde vibrante peuvent fonctionner selon deux modes. Dans le mode de fonctionnement libre, appelé mode amorti, le fonctionnement du capteur se fait en deux temps. Le premier temps consiste à mettre la corde en vibration et le second temps consiste à mesurer la fréquence et l'amortissement de la vibration de la corde. Ainsi l'excitation et la mesure ne se font pas en même temps. Cela permet d'utiliser une sollicitation impulsionnelle mais une excitation de forte amplitude de la corde est requise. Dans le mode de fonctionnement forcé, appelé mode entretenu, la corde est continuellement maintenue en résonance et la fréquence de résonance est mesurée en même temps que l'excitation. Cela permet de réduire l'amplitude de l'excitation de la corde mais une sollicitation permanente est requise. Ainsi il existe un mode de fonctionnement optimal en terme de rapport signal sur bruit pour une amplitude donnée de vibration de la corde. Ce mode de fonctionnement optimal n'a pas encore été validé scientifiquement ce qui constituera un aboutissement important du travail présenté dans ce mémoire.

L'excitation de la corde est le second point clé. D'une part, l'excitation produit une contrainte électrique qui, en cas d'humidité, de dégradation par rayonnement ou d'injection de charges dans l'isolant du câble, peut excéder le champ de rupture diélectrique. Le claquage résultant peut alors détériorer le capteur. D'autre part, le niveau de l'excitation conditionne l'amplitude du déplacement de la corde. Si la corde se déplace de manière trop importante, elle risque de se déformer au delà de sa limite d'élasticité, ce qui peut engendrer une fatigue rapide de la corde et donc un grand décalage de sa fréquence de résonance indépendamment de la déformation de la construction à surveiller. Il est donc primordial de diminuer autant que possible le niveau de l'excitation de la corde. Cela nécessite un système de mesure de son déplacement plus sensible. De ce fait, l'efficacité d'excitation de la corde est essentielle pour

améliorer les performances du capteur. La position de la bobine d'excitation et le mode de fonctionnement du capteur peuvent affecter l'efficacité d'excitation et sont également étudiés dans ce mémoire. L'objectif est de produire la plus grande force d'excitation avec un minimum de tension d'alimentation appliquée.

La sensibilité du capteur est le troisième point clé. Après ou pendant l'excitation de la corde, la vibration de la corde (grandeur physique à mesurer) est convertie en un signal électrique sur la base des couplages magnéto-mécaniques. À cause de l'influence des paramètres de couplage, la réponse finale du capteur ne dépend pas que de la vibration de la corde. Étant donné que la déformation de la structure à mesurer dépend du carré de la variation de fréquence de résonance de la corde, comme le montre l'équation (1), il est très important de maximiser la sensibilité du capteur aux paramètres dépendants des mouvements de la corde et de minimiser la sensibilité du capteur aux autres paramètres indépendants des mouvements de la corde. Malheureusement, après la conversion mécanique/électrique, le signal de sortie du capteur est inévitablement affecté par certains paramètres indésirables qui dépendent du mode d'excitation. La fréquence détectée est alors légèrement différente de celle de la vibration de la corde. Cet écart de fréquence rend difficile la comparaison entre les mesures obtenues d'un mode et à l'autre. Pour déterminer les paramètres qui causent la différence de fréquence, il faut bien comprendre la chaîne de mesure du capteur et être capable de la modéliser du point de vue électrique.

La protection du capteur contre la foudre est le dernier point clé. Les courants électriques de forte intensité qui circulent dans la terre au moment de l'impact de la foudre peuvent détériorer les organes d'excitation ou de mesure du capteur de manière temporaire ou durable. Cela peut aller de la magnétisation du capteur qui inhibe temporairement son fonctionnement ou modifie sa réponse, jusqu'au claquage électrique qui détruit partie ou tout du capteur. Dans ces conditions, il est important de pouvoir détecter la défaillance des capteurs et éventuellement de pouvoir s'en accommoder.

Le présent mémoire est structuré en quatre chapitres :

Le **Chapitre I** consiste en un état de l'art de la technique des cordes vibrantes utilisée dans le domaine de la sûreté des ouvrages du génie civil. Les connaissances et les applications actuelles sur les capteurs à corde vibrante y sont présentées pour exposer les problématiques de cette recherche.

Le **Chapitre II** décrit en détail le fonctionnement du capteur selon le mode amorti et le mode entretenu. La comparaison des deux modes de fonctionnement permet de déterminer un mode optimal. Pour valider expérimentalement les développements théoriques, ce chapitre traite également de la conception et la réalisation d'un dispositif électronique de lecture. Ce dispositif qui embarque un microcontrôleur permet d'exciter la corde vibrante, de détecter sa fréquence de résonance en mode amorti et en mode entretenu. Il permet en outre de mesurer la résistance électrique de la bobine, ce qui permet de contrôler la température qui est un paramètre d'influence important.

Le **Chapitre III** est consacré à la modélisation des capteurs selon les deux modes de fonctionnement. En ce qui concerne le système d'excitation, les forces mises en jeu pour le démarrage et l'entretien de la résonance de la corde vibrante sont calculées. Plusieurs modes d'excitation sont étudiés dans le but de maximiser l'efficacité d'excitation pour le mode fondamental de résonance. Les meilleurs modes d'excitation sont développés et testés. En ce qui concerne le système de mesure, la modélisation des couplages magnéto-mécaniques est effectuée sous la forme de circuits électriques équivalents. Les paramètres qui provoquent les influences indésirables sur la réponse du capteur sont théoriquement analysés et expérimentalement validés.

Le **Chapitre IV** se focalise sur l'effet de la foudre. Le phénomène de la foudre y est théoriquement présenté et l'effet de la foudre sur la réponse du capteur à corde vibrante y est analysé par simulation expérimentale.

Chapitre I

État de l'art

Dans ce chapitre, l'histoire et plusieurs applications des capteurs à corde vibrante sont brièvement présentées. Puis les recherches récentes qui permettent d'améliorer les performances des capteurs à corde vibrante sont exposées.

I.1 Surveillance de la santé des ouvrages d'art

Les ouvrages d'art sont normalement exposés aux trois types de risques : (1) les risques naturels tels que les tremblements de terre, les mouvements de terrain, les cyclones, les tempêtes et les inondations, (2) les risques humains tels que les accidents industriels, les incidents nucléaires et les malveillances et (3) le vieillissement. Ils nécessitent donc une surveillance étroite pour optimiser leur gestion technique, améliorer leur maintenance et prolonger leur durée de vie. Au cours des dernières décennies, la surveillance de la santé des ouvrages d'art (SHM pour Structural Health Monitoring en anglais) devient un sujet de recherche de plus en plus important [26, 27].

Divers capteurs sont disponibles pour mesurer des modifications à long terme des paramètres qui déterminent l'état d'un ouvrage [28, 29], y compris des paramètres mécaniques (déformation, déplacement, vitesse ...), des paramètres hygrométriques (humidité, pression de fluide, teneur en eau ...) et des paramètres thermiques (température, corrosion, coefficient de dilatation ...). On s'intéresse notamment aux mesures de déformation, de déplacement et de température. Le plus souvent, pour les applications qui nécessitent une sécurité maximale, on multiplie le nombre et le type de capteurs installés dans l'ouvrage à surveiller [30]. Les principaux capteurs utilisés dans le domaine de la surveillance des ouvrages d'art sont :

- les capteurs de déplacement : transformateur différentiel variable linéaire (LVDT), transformateur à courants de Foucault ...
- les capteurs de déformation : extensomètre à corde vibrante, extensomètre à fibre optique, jauge de contrainte à résistance électrique ...
- les capteurs de température : thermocouples, sondes résistives ...

L'utilisation des capteurs à corde vibrante existe depuis longtemps dans le domaine du génie civil. De tels capteurs sont couramment utilisés pour la surveillance des ouvrages d'art dont ceux couvrant de grandes surfaces, par exemple les ponts, les barrages, les centrales nucléaires, les centrales thermiques et les immeubles [31, 32, 33].

I.2 Histoire des capteurs à corde vibrante

Le premier rapport de l'utilisation de capteurs à corde vibrante a été fait par l'ingénieur russe Davidenkoff en 1928 [34]. En 1931, le brevet du capteur à corde vibrante (Figure I.1), appelé aussi témoin sonore, a été déposé par André Coyne en France [35]. Les capteurs à corde vibrante ont été mis en pratique pour la première fois dans le barrage-voûte de la Bromme (1930-1932) construit sur la Truyère, avec 17 capteurs installés [36, 37]. Le premier grand programme de surveillance a été réalisé dans le barrage voûte de Marèges (1932-1935) construit sur la Haute Dordogne, avec 78 capteurs installés dans le corps de la voûte et 40 capteurs installés dans le renforcement des culées [38, 39]. Après les premiers essais réussis, de plus en plus de capteurs à corde vibrante ont été installés dans les barrages hydrauliques en France [40, 41], par exemple le barrage de Saint-Étienne-Cantalès (1940-1945) et le barrage de l'Aigle (1941-1945). Pendant une vingtaine d'années après l'invention de capteurs à corde vibrante, de nombreux essais sont effectués dans divers constructions telles que les ponts, les murs de quai, les conduites forcées en béton précontraint, les grands édifices et les tunnels [42, 43, 44, 45, 46, 47]. Les résultats obtenus ont prouvé la faisabilité, la capacité et l'adaptabilité des capteurs à corde vibrante dans les conditions environnementales particulièrement difficiles du génie civil.

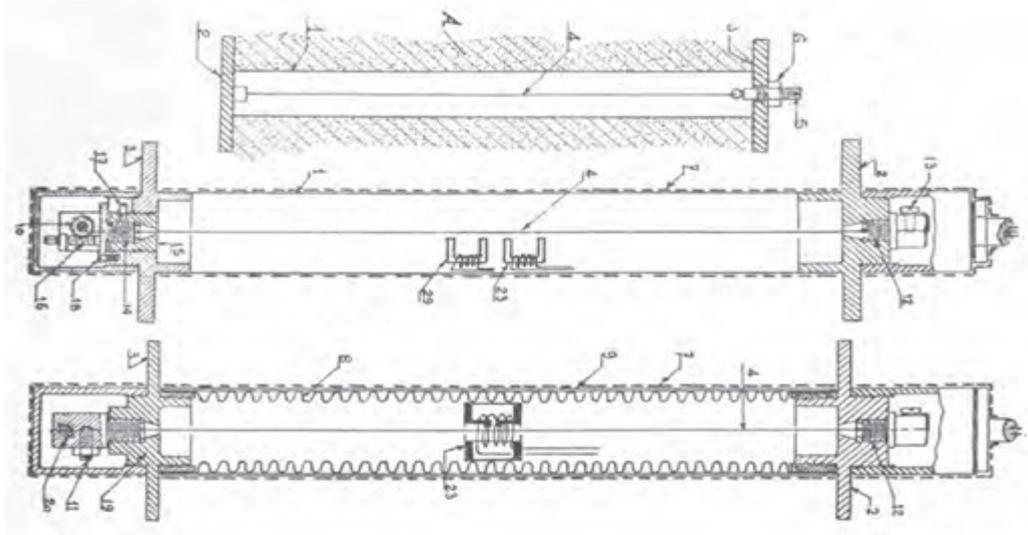


Figure I.1 - Témoin sonore, brevet de André Coyne en 1931

Les capteurs à corde vibrante ont été produits commercialement depuis la fin des années 1930 [48]. La première société Miahak a été fondée en Allemagne en 1936. Par la suite, André Coyne a créé en France en 1947 la société Télémac pour exploiter son brevet du témoin sonore. Après la seconde guerre mondiale, divers instruments à corde vibrante ont été développés par plusieurs fabricants incluant la société Geonor fondée en Norvège en 1958, la société Gage Technique fondée en Angleterre en 1960. Pendant les années 1960-1970, les technologies traditionnelles pour la surveillance des ouvrages d'art, telles que les cellules à contre-pression, les cellules Carlson et les extensomètres à résistance tendue, ont été progressivement remplacées par la technologie des cordes vibrantes en Chine, au Japon, aux États-Unis et en Amérique du Sud. Les sociétés américaines telles que Irad Gage fondée en 1974 et Géokon fondée en 1979 ont apporté d'importantes contributions à la modernisation et l'expansion de la variété des capteurs à corde vibrante. À la fin des années 1970, l'utilisation et la fabrication commerciale des capteurs à corde vibrante se sont généralisés dans le monde entier. Après plusieurs décennies de développement, les capteurs à corde vibrante sont reconnus pour leur fiabilité et leur stabilité à long terme [49, 50, 51].

I.3 Applications des capteurs à corde vibrante

Les capteurs à corde vibrante conviennent à un grand nombre d'applications dans le domaine de la surveillance des ouvrages du génie civil. Les mesures fondamentales effectuées en utilisant les capteurs à corde vibrante peuvent être divisées en quatre groupes [52] :

- Déformation (force, contrainte, couple ...)
- Déplacement
- Pression interstitielle
- Température

I.3.1 Extensomètre à corde vibrante

Les mesures des déformations des ouvrages du génie civil reposent sur l'utilisation d'extensomètre à corde vibrante. Dans un extensomètre à corde vibrante (Figure I.2), la corde vibrante est tendue entre deux ancrages fixés à la structure à surveiller. Lorsque la distance entre ces deux ancrages varie au cours du temps, suite à une déformation de la structure, la tension de la corde change, ce qui entraîne une variation de sa fréquence de résonance.

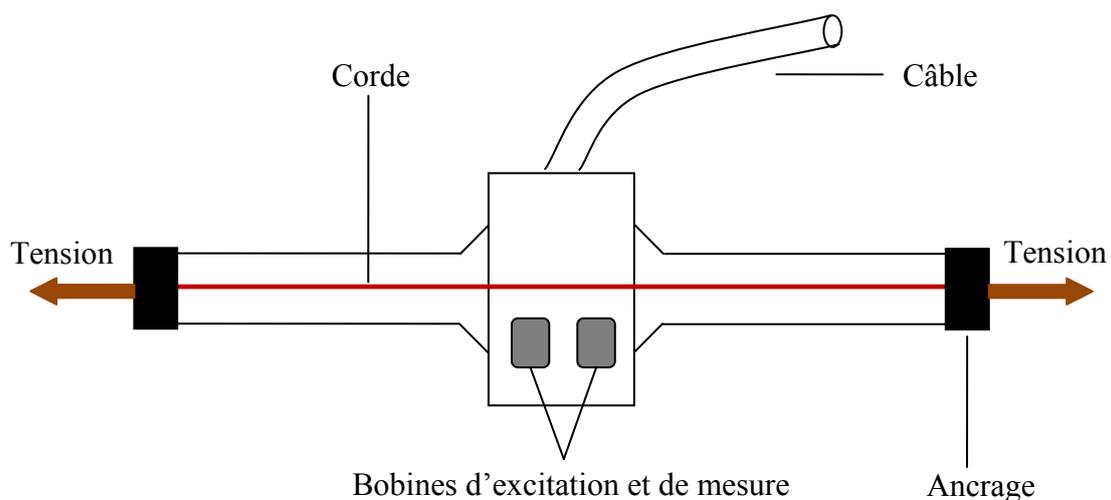


Figure I.2 - Constitution d'un extensomètre à corde vibrante

Il existe deux types d'installations pour les extensomètres à corde vibrante [53], soit enfoui, soit monté en surface. Dans les structures en béton armé ou précontraint, les extensomètres de type enfoui sont installés en soudant ou en ligaturant les deux ancrages dans une cage d'armature, comme le montre la Figure I.3a [54]. Dans les structures en béton non armé, les extensomètres de type monté en surface sont installés avant ou immédiatement après la mise en place du béton, comme le montre la Figure I.3b [55].



Figure I.3 - Extensomètre à corde vibrante (a) enfoui et (b) monté en surface

I.3.2 Capteur de déplacement à corde vibrante

Les capteurs de déplacement à corde vibrante servent à mesurer les mouvements tels que l'ouverture et la fermeture des fissures dans les ouvrages d'art. La Figure I.4 [56] montre un capteur de déplacement monté entre deux ancrages fixés à la structure à surveiller. L'une des extrémités de la corde vibrante est ancrée et l'autre est connectée en série avec un ressort et une tige coulissante. Lorsque la tige sort du corps du capteur suite à des déplacements le long des fissures, le ressort est allongé, ce qui entraîne une augmentation de la tension de la corde et par conséquent une variation mesurable de sa fréquence de résonance. Ce type de capteur est installé en cimentant, boulonnant ou collant les deux ancrages sur des côtés opposés de la fissure (Figure I.5 [57]).

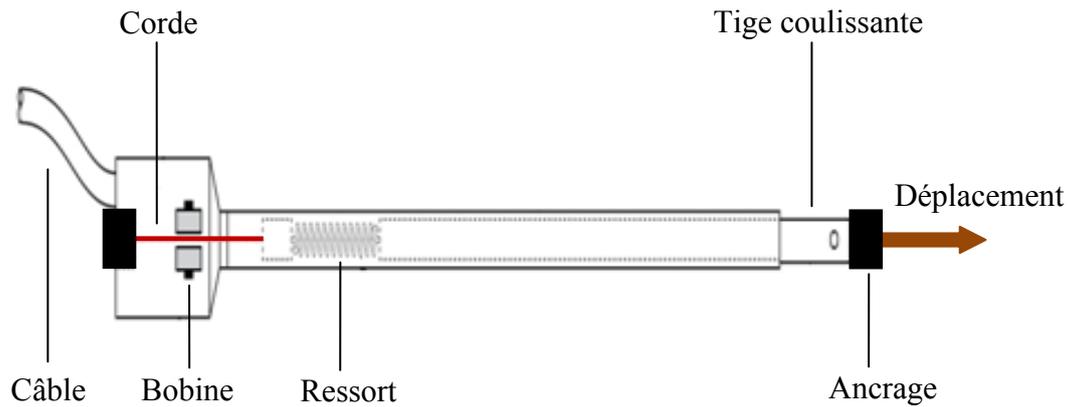


Figure I.4 - Constitution d'un capteur de déplacement à corde vibrante



Figure I.5 - Capteur de déplacement à corde vibrante installé dans la structure à surveiller

I.3.3 Piézomètre à corde vibrante

Les piézomètres à corde vibrante permettent de mesurer les pressions interstitielles dans les sols et les roches. Ce type de capteur est communément utilisé pour la surveillance des ouvrages hydrauliques tels que les barrages, les excavations et les remblais. Dans un piézomètre à corde vibrante (Figure I.6 [58]), l'une des extrémités de la corde est ancrée et l'autre est attachée à un diaphragme en contact avec le fluide environnant. Une variation de pression provoque une déformation du diaphragme, modifiant ainsi la tension de la corde et sa fréquence de résonance. Les piézomètres à corde vibrante sont généralement installés de

manière entièrement cimentée (Figure I.7 [56]). Cette méthode d'installation permet d'installer facilement de nombreux piézomètres pour mesurer les pressions interstitielles dans les sols de différents niveaux.

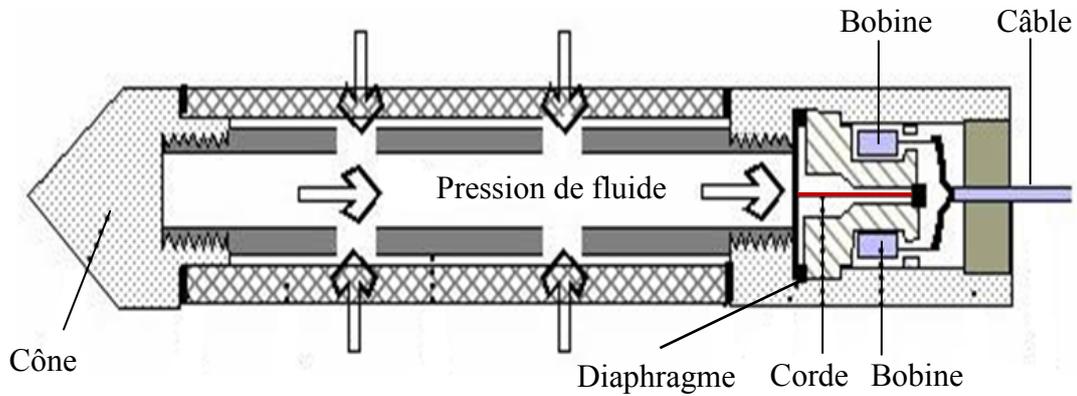


Figure I.6 - Constitution d'un piézomètre à corde vibrante



Figure I.7 - Piézomètre à corde vibrante installé dans la structure à surveiller

I.3.4 Capteur de température à corde vibrante

Les capteurs de température à corde vibrante sont utilisés pour surveiller l'évolution de la température pendant le durcissement du béton et les variations saisonnières de la température dans les ouvrages d'art. Ce type de capteur consiste essentiellement en une corde

vibrante attachée à un corps en acier inoxydable, comme le montre la Figure I.8 [56]. Sous l'effet d'une variation de température, le corps se dilate ou se contracte à un taux différent de celui de la corde vibrante. Cela modifie la tension de la corde et donc sa fréquence de résonance. Ce type de capteur est généralement intégré à l'intérieur des autres types de capteurs à corde vibrante.

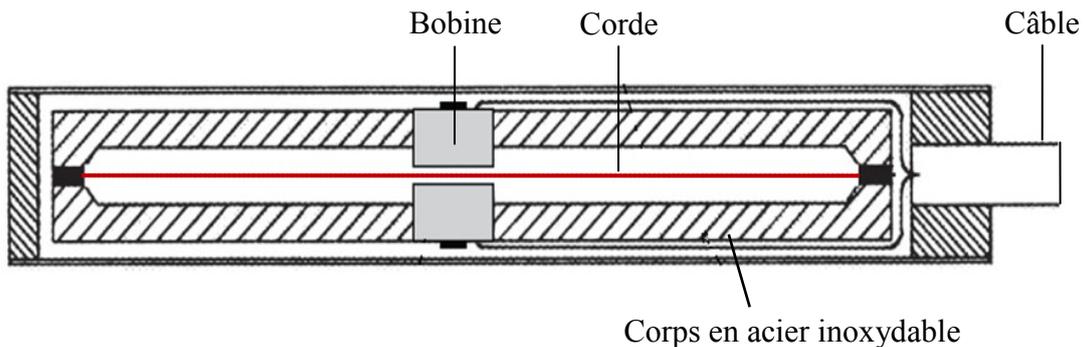


Figure I.8 - Constitution d'un capteur de température à corde vibrante

I.4 Développement des capteurs à corde vibrante

Les ouvrages d'art modernes ont des dimensions de plus en plus importantes, des géométries de plus en plus complexes et des durées de vie de plus en plus longues. Par conséquent, une surveillance dynamique et efficace à long terme est nécessaire. À ce propos, de nombreux efforts ont été entrepris au cours des dernières années pour développer les capteurs à corde vibrante. Les capteurs à corde vibrante traditionnels sont limités à des applications de mesure statiques. D'autres technologies telles que les jauges résistives peuvent permettre des mesures dynamiques mais ont des difficultés à offrir de bonnes performances à long terme [59]. Il est donc d'un grand intérêt d'améliorer les performances des capteurs à corde vibrante pour s'assurer qu'ils fournissent des informations dynamiques, robustes et stables à long terme sur l'état d'un ouvrage du génie civil. Les développements sont effectués selon trois aspects : modélisation, dispositif de lecture et mode de fonctionnement.

I.4.1 Développement de modélisation

La modélisation des capteurs à corde vibrante est un axe important de recherche. Un modèle électromécanique pour les capteurs à corde vibrante équipés d'une seule bobine a été élaboré en 1998 par A. A. H. Pádua [60]. Les circuits équivalents proposés dans cet article permettent d'interpréter le signal de sortie du capteur en fonction de ses paramètres mécaniques. Ensuite Liviu Viman [61, 62] a élaboré en 2010 deux modèles électriques pour les capteurs à corde vibrante équipés de deux bobines. Le premier modèle ne prend pas en compte l'induction mutuelle entre les bobines qui a un impact majeur sur le choix du mode d'excitation. Le deuxième modèle qui prend en compte l'induction mutuelle entre les bobines démontre que le couplage direct entre la bobine d'excitation et la bobine de mesure peut être équivalent à un circuit oscillant et peut modifier la réponse des capteurs.

I.4.2 Développement de dispositif de lecture

L'amélioration de dispositif électronique de lecture est un autre axe de recherche. Balasubramanian [63] a présenté en 1994 un dispositif de lecture pour les capteurs de pression à corde vibrante. À l'aide d'un microprocesseur, la corde est périodiquement excitée par un électroaimant. La fréquence de résonance de la corde est mesurée à partir du signal obtenu par un photocoupleur. Vlad Bande [64] a proposé en 2009 une procédure de mesure entièrement automatique sous plateforme MATLAB qui permet d'acquérir des données en temps réel. En utilisant les signaux d'excitation à différentes fréquences, les parties réelle et imaginaire de l'impédance peuvent être correctement évaluées. La fréquence de résonance de la corde est déduite à partir de l'impédance à l'aide d'un algorithme. En 2012, Andrea Simonetti [65] a proposé une méthode de mesure basée sur la valeur RMS de la réponse harmonique des capteurs à corde vibrante. Cette méthode est particulièrement adaptée pour les réseaux de capteurs sans fil alimentés par récupération d'énergie. Septimiu Pop [66] a conçu en 2013 un dispositif de lecture de haute précision à base de microcontrôleur AVR. Le capteur est excité en utilisant un générateur de balayage et le signal de sortie du capteur est mesuré après avoir traversé un filtre passe-bande et un circuit à seuil. Après une analyse statistique des données acquises, la précision de la mesure peut atteindre 0.05%. Suoying Mao [67] a conçu en 2013 un dispositif de lecture à base de microcontrôleur STM32. Dans ce dispositif, le système

d'excitation consiste à générer un signal PWM de rétroaction pour exciter la corde et le système de mesure consiste à amplifier, filtrer et normaliser le signal de sortie du capteur.

I.4.3 Développement de mode de fonctionnement

Le mode de fonctionnement des capteurs à corde vibrante est le troisième axe de recherche. Pendant ces dernières années, plusieurs recherches ont été consacrées à la comparaison entre le mode amorti et le mode entretenu à partir des essais expérimentaux et du retour d'expérience de clients. La société TELEMAT [68] a fait en 1987 un rapport sur la comparaison des modes de fonctionnement pour les extensomètres à corde vibrante. Dans ce rapport, en comparant les résultats obtenus selon les deux modes en termes de précision et de répétition des mesures, le mode entretenu est préférable au mode amorti. La société NGI [69] a fait aussi en 1987 un rapport sur les performances des capteurs à corde vibrante fonctionnant en mode entretenu. Les avantages du mode entretenu ont été montrés en tenant compte des aspects technologiques associés tels que la précision, la sensibilité à la température, la réponse dynamique, la stabilité et la fiabilité à long terme. En 2012, la société Tractebel Engineering [70] a fait un rapport sur le retour d'expérience des capteurs à corde vibrante. D'après ce rapport, le mode entretenu présente trois avantages principaux. Premièrement, l'excitation d'amplitude faible permet de limiter la fatigue de la corde et donc d'augmenter la durée de vie du capteur. Deuxièmement, l'utilisation de deux bobines permet de recueillir uniquement les couplages magnéto-mécaniques. Troisièmement, la répétabilité des mesures en mode entretenu est meilleure.

Chapitre II

Principe de fonctionnement

Le fonctionnement des capteurs à corde vibrante repose sur l'excitation d'une corde et la mesure de sa fréquence de résonance. Pour mettre la corde en mouvement et effectuer la mesure de son déplacement, le magnétisme est presque toujours utilisé [71] en raison de deux avantages : une bonne immunité aux variations de l'environnement (température, humidité, poussière...) et une action sans contact mécanique direct qui permet de simplifier la réalisation du capteur. Il y a deux modes de fonctionnement couramment utilisés aujourd'hui : (1) mode amorti et (2) mode entretenu [72].

II.1 Fonctionnement en mode amorti

Le mode amorti consiste à imposer un déplacement initial à la corde, puis à mesurer la fréquence de la vibration libre amortie [73]. La procédure de fonctionnement en mode amorti est illustrée sur la Figure II.1. Dans un premier temps une seule impulsion ou une impulsion modulée est appliquée à la bobine d'excitation, créant alors un champ magnétique qui excite la corde pendant une courte période de temps (Figure II.1a). La corde se met à vibrer jusqu'à ce que la vibration soit complètement amortie, au bout de quelques secondes. Le déplacement libre de la corde produit une modulation des champs magnétiques résiduels, par exemple la magnétisation rémanente du noyau de la bobine ou de la corde, au voisinage de la même bobine ou d'une deuxième bobine. L'induction de Faraday provoque l'apparition d'un signal aux bornes de la bobine dont la fréquence et l'évolution temporelle sont à l'image de l'oscillation de la corde (Figure II.1b).

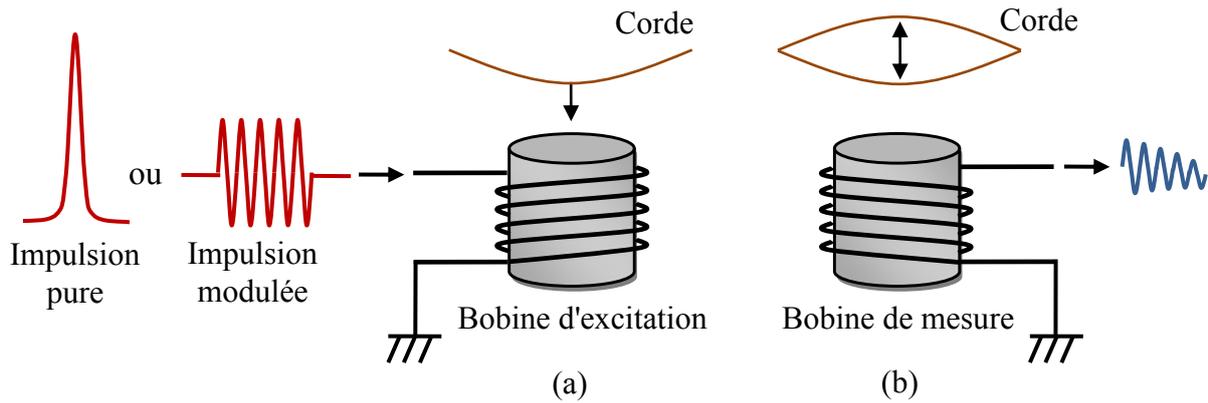


Figure II.1 - Fonctionnement en mode amorti. (a) excitation impulsionnelle et (b) mesure de l'oscillation libre de la corde

II.2 Fonctionnement en mode entretenu

Le mode entretenu consiste à maintenir la corde en résonance, et en même temps à mesurer sa fréquence de résonance. Dans ce cas, il est nécessaire d'utiliser deux bobines, une pour exciter continuellement la corde et l'autre pour détecter simultanément la résonance de la corde. La procédure de fonctionnement en mode entretenu est illustrée sur la Figure II.2. La bobine d'excitation est alimentée par une tension sinusoïdale dont la fréquence est égale à la fréquence de résonance de la corde. Cela génère un champ magnétique variant de façon sinusoïdale qui maintient la corde en résonance. Le couplage magnétique entre la bobine d'excitation et la bobine de mesure est alors modifié par les mouvements de la corde, ce qui produit dans la bobine de mesure un signal dépendant du déplacement de la corde et de sa fréquence de résonance.

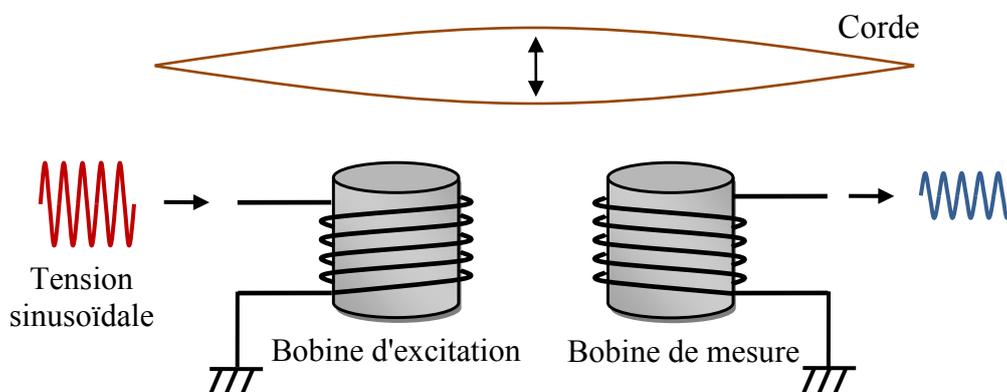


Figure II.2 - Fonctionnement en mode entretenu. L'excitation et la mesure sont simultanées et continues

Les capteurs à corde vibrante peuvent fonctionner en un mode spécial sans excitation externe, appelé mode auto-entretenu. La fréquence d'excitation est automatiquement détectée lorsque le capteur est intégré dans un oscillateur. Ce système auto-oscillant doit inclure un mécanisme d'amplification afin de compenser les pertes. De plus, il doit inclure un mécanisme de filtrage pour régler l'amplitude et la phase des oscillations de la corde. Le circuit permettant d'asservir la fréquence de résonance de la corde est basé sur une boucle : le signal de sortie de la bobine de mesure est injecté dans la bobine d'excitation, après avoir traversé un amplificateur et un filtre, comme le montre la Figure II.3.

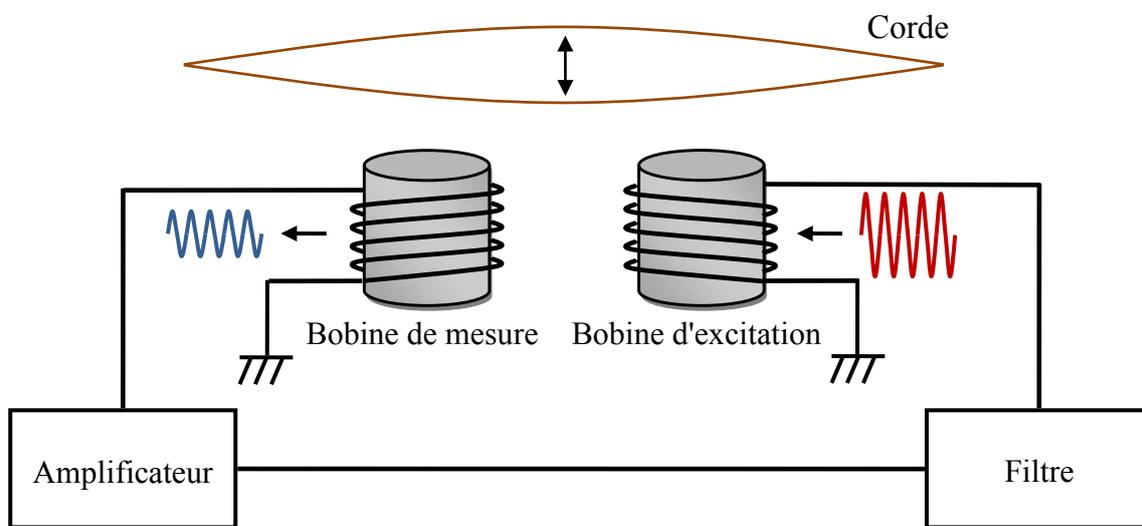


Figure II.3 - Fonctionnement en mode auto-entretenu. L'excitation et la mesure sont bouclées

II.3 Comparaison des modes de fonctionnement

Les capteurs à corde vibrante fonctionnant en mode amorti ont été utilisés depuis les années 1930 [74]. Après des décennies d'utilisation, il a été constaté que le signal de sortie du capteur avait tendance à devenir non reproductible à cause de l'amplitude incontrôlée du déplacement de la corde. Pour limiter l'amplitude du déplacement de la corde afin d'obtenir une mesure reproductible, les capteurs fonctionnant en mode entretenu ont été adoptés depuis les années 1960 [75]. Dans la suite, la comparaison des deux modes est abordée en envisageant les aspects suivants : (1) le rapport signal sur bruit, (2) la fatigue de la corde et (3) la défaillance du capteur.

II.3.1 Rapport signal sur bruit

Le rapport signal sur bruit est un indicateur important de l'efficacité du capteur. Il est conditionné par deux facteurs : l'amplitude de l'excitation qui détermine l'amplitude du signal et la bande passante du système de mesure qui capte plus ou moins de bruit.

En mode amorti, la fréquence de résonance de la corde est inconnue et l'excitation impulsionnelle sollicite donc de nombreuses fréquences pour avoir une chance d'exciter la corde. L'efficacité de l'excitation est donc extrêmement faible ce qui nécessite une grande amplitude (typiquement 90 V pour une impulsion pure ou 5 V pour une impulsion modulée), comme le schématise la Figure II.4a. Pour les mêmes raisons, l'amplificateur de mesure doit avoir une bande passante assez large, et il capte donc beaucoup de bruit. Enfin une seule bobine étant utilisée pour la sollicitation et la mesure, la superposition de l'excitation impulsionnelle avec la réponse libre du mode propre et des modes supérieurs est possible. Il est donc nécessaire de ne prendre en compte le signal qu'après un certain délai. Cela réduit la précision de la mesure en fréquence qui est limitée à environ l'inverse de la durée du signal restant.

En mode entretenu, la corde est excitée à sa fréquence de résonance f_r . Ainsi toute l'énergie de l'excitation est utile, ce qui permet de réduire l'amplitude de l'excitation à son minimum (typiquement 160 mV), comme le schématise la Figure II.4b. La mesure de la fréquence est également en bande étroite ce qui réduit les bruits parasites. Par ailleurs, la durée du signal non limitée dans le temps offre une grande précision de mesure optimale.

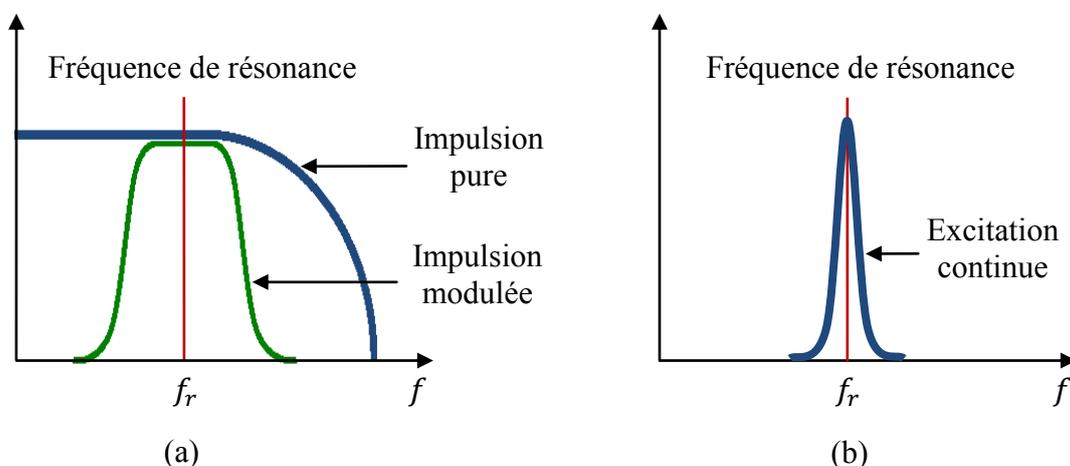


Figure II.4 - Allure du spectre du signal d'excitation en (a) mode amorti et (b) mode entretenu

II.3.2 Fatigue de la corde

Il a été mentionné précédemment que le niveau de l'excitation en mode amorti est 500 fois (impulsion pure de 90 V) ou 30 fois (impulsion modulée de 5 V) plus élevé qu'en mode entretenu (excitation de 160 mV). Étant donné que la corde subit une contrainte magnétique $\mu_0 H^2/2$ proportionnelle au carré de l'excitation (cela est modélisé en détail dans le chapitre suivant), la contrainte magnétique est 250000 ou 900 fois plus grande pendant la phase d'excitation en mode amorti qu'en mode entretenu. Cependant à amplitude de vibration équivalente pendant la phase de mesure, les contraintes mécaniques dans la corde sont similaires. L'efficacité de détection en mode entretenu permet de réduire le niveau de l'excitation à rapport signal sur bruit équivalent et de solliciter nettement moins la corde. Le risque de rupture ou de déformation de la corde est donc plus important en mode amorti. La sollicitation en mode amorti produit aussi plus de risque de claquage électrique qu'en mode entretenu puisque la tension d'alimentation est plus forte. En effet, l'épaisseur de l'isolation des fils des bobines est de l'ordre de 100 μm . Ainsi le champ électrique impulsionnel est suffisamment important pour que des charges se développent à la longue dans l'isolant des fils.

II.3.3 Défaillance du capteur

Le claquage électrique et la foudre sont les causes principales de défaillance du capteur. Le claquage électrique se produit soit lorsque l'excitation électrique de la corde est trop forte, soit lorsque le capteur est affecté par la foudre. Dans le premier cas, il est possible de diminuer la probabilité de claquage électrique en restreignant le niveau d'excitation. Dans le deuxième cas, l'effet de la foudre est inévitable mais peut être réduit. En cas de défaillance, un capteur équipé d'une seule bobine est totalement perdu. En revanche, un capteur équipé de deux bobines est récupérable si une des deux bobines est restée intacte. Le capteur peut en effet être utilisé en mode amorti avec la bobine restante. La plupart des capteurs fonctionnant en mode amorti sont équipés d'une seule bobine ou éventuellement deux bobines en série, tandis que tous les capteurs fonctionnant en mode entretenu sont indispensablement équipés de deux bobines indépendantes.

Par ailleurs le foudroiement peut engendrer la magnétisation du capteur, ce qui conduit au collage magnétique de la corde sur la bobine ou à la modification de sa fréquence de résonance. Le fonctionnement du capteur est par conséquent modifié, voire empêché, bien que le capteur ne soit pas détérioré. Il est possible de démagnétiser ou de décoller la corde par un cycle d'excitation approprié. Cela reste difficile avec une seule bobine, car l'alimentation de la bobine attire également la corde. Il faut alors faire des cycles de désaimantation. Avec deux bobines, il est peu probable que la corde soit collée sur les deux bobines. L'alimentation de la bobine sur laquelle la corde n'est pas collée, permet de tirer la corde et d'exercer une force de libération sur l'autre bobine sans avoir à faire de cycles de désaimantation. Une magnétisation plus modeste du capteur peut, même si elle ne le détruit pas, modifier sa réponse en mode amorti. Celle-ci dépend en effet des champs magnétiques résiduels lors de la mesure. Elle ne provoque pas en revanche de disfonctionnement du capteur en mode entretenu.

II.3.4 Retour d'expérience

La fiabilité des capteurs à corde vibrante sur le long terme est estimée à partir d'enquêtes auprès des utilisateurs. Le Tableau II.1 montre une synthèse du retour d'expérience d'EDF sur l'auscultation de quelques installations en utilisant les extensomètres à corde vibrante. Il y a trois types de capteurs à corde vibrante utilisés par EDF :

- Extensomètre à simple bobine fonctionnant en mode amorti qui est excité par une seule impulsion de 90 V
- Extensomètre à deux bobines fonctionnant en mode amorti qui est excité par une impulsion modulée de 25 V
- Extensomètre à deux bobines fonctionnant en mode entretenu qui est excité par une tension sinusoïdale de 200 mV

En mode entretenu (excitation permanente de 200 mV), le taux de défaillance global est de 6% selon les tests sur les extensomètres à deux bobines installés dans trois centrales nucléaires : Daya Bay (0% de défaillance sur 20 ans), Tihange (11.7% de défaillance sur 27 ans) et Koeberg (2.3% de défaillance sur 29 ans). En mode amorti (excitation impulsionnelle de 25 V), les tests sur les extensomètres à deux bobines installés dans dix-neuf centrales nucléaires sur 30 ans donnent un taux de défaillance de 19.5%.

impulsionnelle de 90 V), les tests sur les extensomètres à simple bobine installés dans huit centrales sur 25 ans donnent un taux de défaillance de 33%. En conclusion, il est préférable d'utiliser les capteurs à corde vibrante fonctionnant en mode entretenu pour la surveillance à long terme.

Tableau II.1 - Quelques retours d'expérience sur la fiabilité des capteurs à corde vibrante

	Mode entretenu			Mode amorti	
Mode d'excitation	Tension sinusoïdale de 200 mV			Impulsion de 25 V	Impulsion de 90 V
Nombre de bobines	Deux bobines			Deux bobines	Simple bobine
Centrales nucléaires	Daya Bay	Tihange	Koeberg	19 centrales d'EDF en France	8 centrales d'EDF au Royaume-Uni
Durée	20 ans	27 ans	29 ans	30 ans	25 ans
Capteurs installés	90	240	216	3143	non communiqué
Capteurs défaillants	0	28	5	612	non communiqué
Taux de défaillance	0%	11.7%	2.3%	19.5%	33%
	6% (global)				

II.3.5 Conclusion

L'étude précédente montre de nombreux avantages du mode entretenu par rapport au mode amorti :

- (1) L'efficacité d'excitation est meilleure en mode entretenu qu'en mode amorti. En mode amorti, beaucoup de fréquences sont excitées mais une seule fréquence répond. En mode entretenu, toute l'énergie est consacrée à l'excitation du mode de résonance.

- (2) La précision de la mesure est plus haute en mode entretenu qu'en mode amorti. La durée du signal non limitée en mode entretenu permet une mesure précise de la vibration de la corde.
- (3) La fiabilité des capteurs est plus élevée en mode entretenu qu'en mode amorti. Une excitation continue de faible amplitude permet de réduire les risques de claquage électrique du capteur et de rupture de la corde.
- (4) En cas de défaillance d'une bobine, les capteurs à deux bobines en mode entretenu ont plus de chance de fonctionner avec la bobine restante.

II.4 Électronique de lecture

Pour mettre un capteur à corde vibrante en marche et lire le signal de sortie du capteur, il faut concevoir un dispositif électronique de lecture. Le dispositif réalisé permet d'exciter la corde d'un capteur et de mesurer ses mouvements selon les deux modes de fonctionnement décrits précédemment. À cela s'ajoutent d'autres mesures, par exemple la résistance des bobines pour corriger les effets thermiques sur la dérive du zéro et la sensibilité du capteur. Toutes les fonctions peuvent être réalisées sur une carte électronique pilotée par un microcontrôleur. Chaque fonction est sélectionnée par des interrupteurs pilotés. La Figure II.5 montre le schéma électrique global de la carte électronique dont la conception est fondée sur un microcontrôleur de type PIC33. Les interrupteurs I_1 et I_2 servent à sélectionner le type d'excitation, soit une impulsion pure ou une impulsion modulée en mode amorti, soit une tension rectangulaire en mode entretenu, soit aucune excitation en mode auto-entretenu, soit une tension continue pour la mesure de résistance de bobine. Les interrupteurs I_3 , I_4 et I_5 servent à connecter la bobine d'excitation et la bobine de mesure. L'interrupteur I_6 sert à déconnecter l'amplificateur, notamment pendant une excitation impulsionnelle de grande amplitude. L'interrupteur I_7 sert à court-circuiter le filtre à capacité commutée lorsque le signal de sortie du capteur n'a pas besoin d'être filtré.

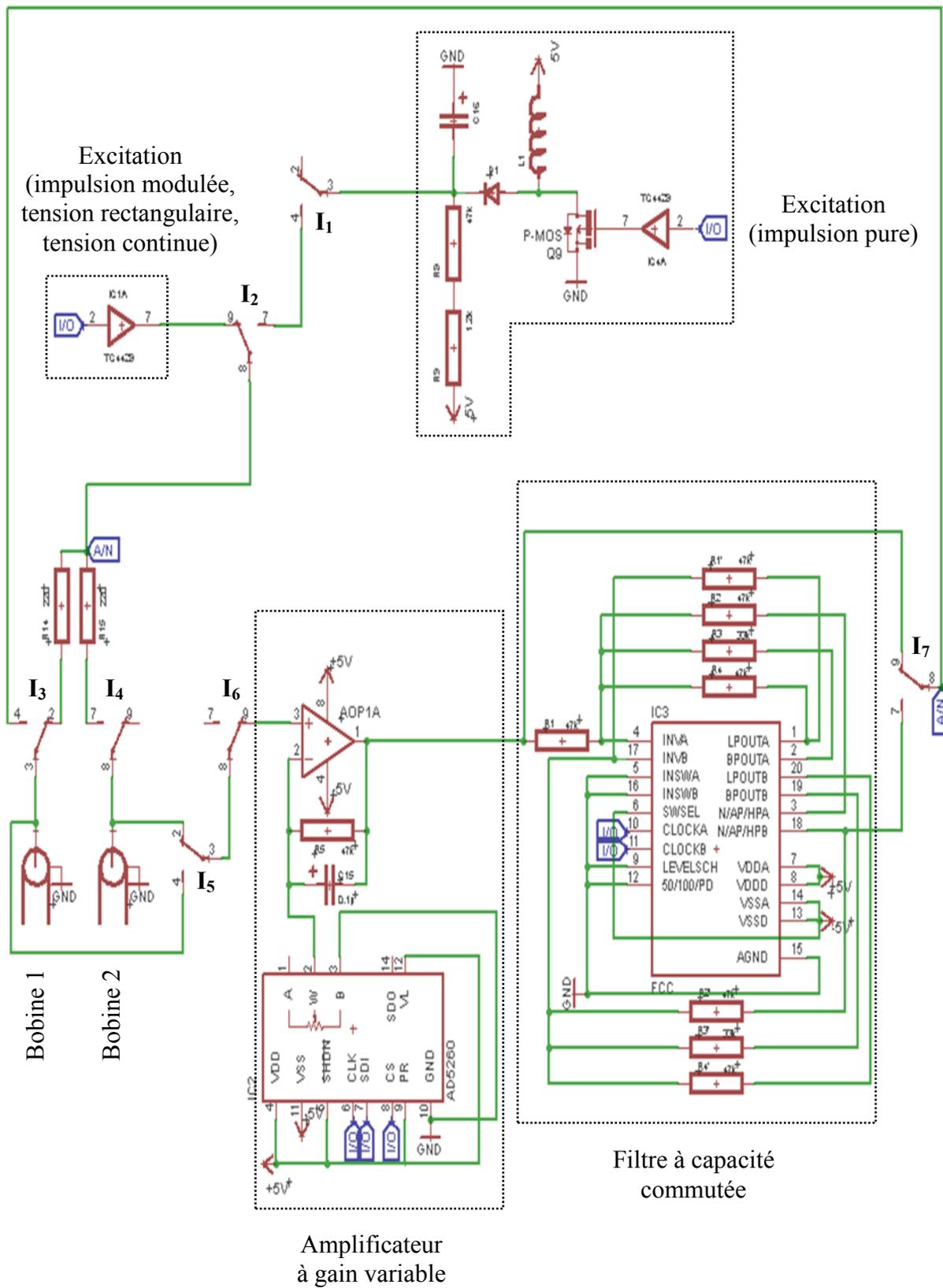


Figure II.5 - Schéma électrique global de la carte de lecture

II.4.1 Fonctionnement en mode amorti

En mode amorti, pour mettre la corde en mouvement, une impulsion pure ou une impulsion modulée est émise par le microcontrôleur (μc) à destination de la bobine. Après la mise en mouvement de la corde, le signal à mesurer est amplifié par un amplificateur à gain variable réalisé avec un potentiomètre numérique, et puis il subit une conversion analogique/numérique (CAN) à l'entrée du microcontrôleur. Un traitement du signal est effectué par le microcontrôleur en vue de déterminer la fréquence de résonance et le temps de décroissance de l'oscillation de la corde. Enfin, les données sont affichées sur un écran. Cette fonctionnalité, illustrée sur la Figure II.6, est réalisée (Figure II.7) comme suit :

- (1) I_2 est positionné sur la gauche (position 9) pour une impulsion modulée d'amplitude inférieure à 5 V.
- (2) I_2 est positionné sur la droite (position 7), le passage de I_1 du haut (position 2) au bas (position 4) générant alors une impulsion pure de grande amplitude. Dans ce cas, I_6 doit être sur la gauche (position 7) pendant l'impulsion puis revenir à la droite (position 9) pour la mesure.
- (3) Une excitation et mesure sur la première bobine nécessite I_3 sur la droite (position 2), I_4 sur la droite (position 9) et puis I_5 sur le bas (position 2).
- (4) Une excitation et mesure sur la seconde bobine nécessite I_3 sur la gauche (position 4), I_4 sur la gauche (position 7) et puis I_5 sur le haut (position 4).

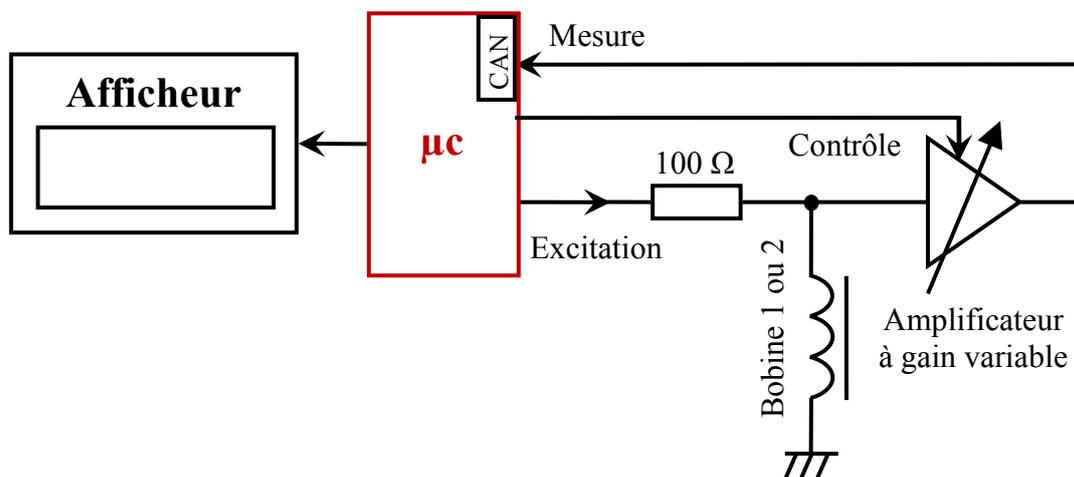


Figure II.6 - Principe d'excitation et de mesure en mode amorti

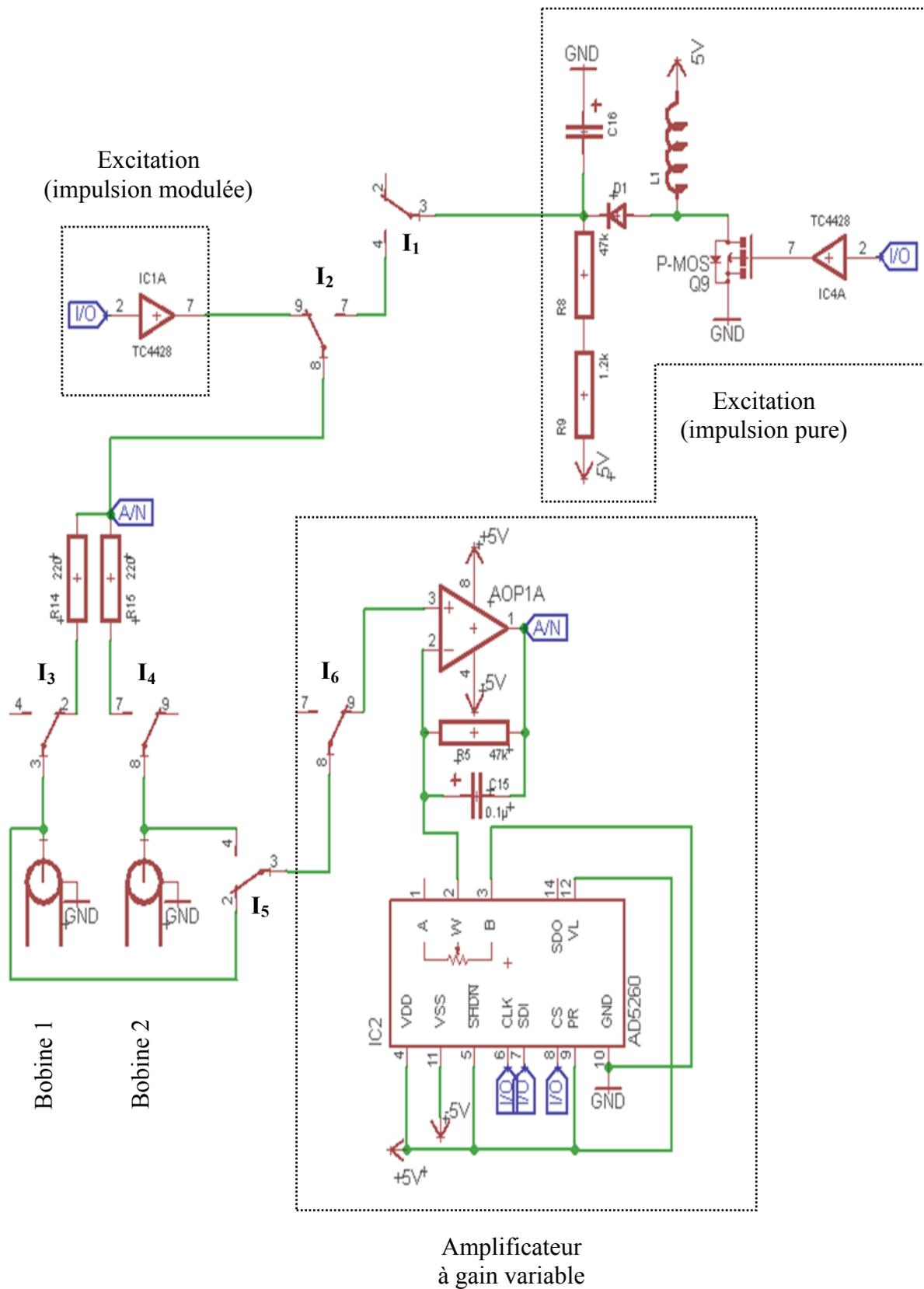


Figure II.7 - Schéma électrique en mode amorti

II.4.2 Fonctionnement en mode entretenu forcé

En mode entretenu forcé, la première étape consiste à déterminer la fréquence de résonance de la corde. Sachant que la fréquence de résonance fondamentale de la corde est autour de 1 kHz, le microcontrôleur (μc) envoie d'abord une tension rectangulaire de fréquence d'environ 1 kHz à la bobine d'excitation pour mettre la corde en mouvement. Ensuite la fréquence du signal d'excitation est ajustée et l'amplitude du signal de sorti du capteur est mesurée après une amplification et une conversion analogique/numérique (CAN). Lorsque l'amplitude du signal de mesure atteint son maximum, la fréquence de résonance de la corde est déterminée et cette fréquence est affichée sur un écran. Cette fonctionnalité, illustrée sur la Figure II.8, est réalisée (Figure II.9) comme suit :

- (1) I_2 est positionné sur la gauche (position 9) pour une tension rectangulaire d'amplitude inférieure à 5 V.
- (2) I_3 est positionné sur la droite (position 2) pour envoyer le signal d'excitation à la première bobine.
- (3) La mesure sur la seconde bobine nécessite I_4 sur la droite (position 9), I_5 sur le haut (position 2) et I_6 sur la droite (position 9).

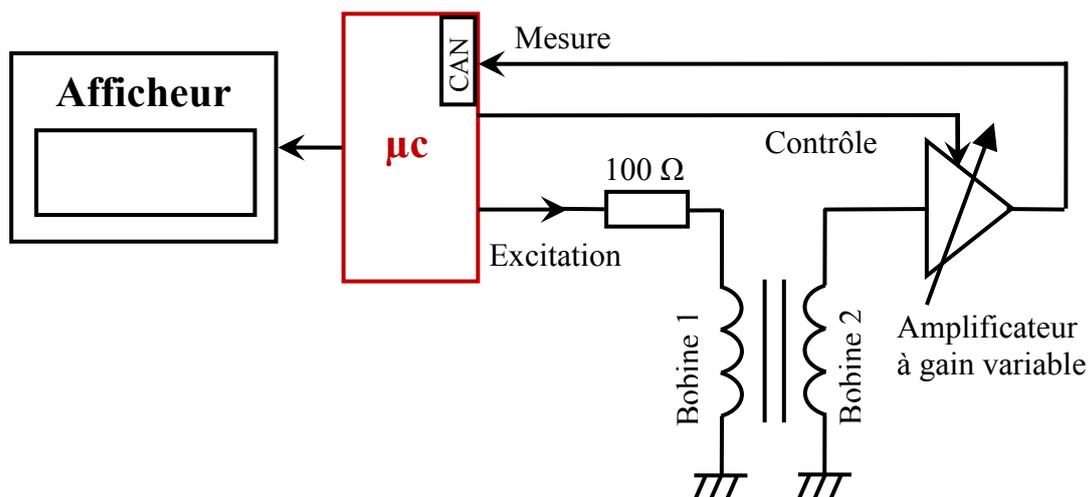


Figure II.8 - Principe d'excitation et de mesure en mode entretenu forcé

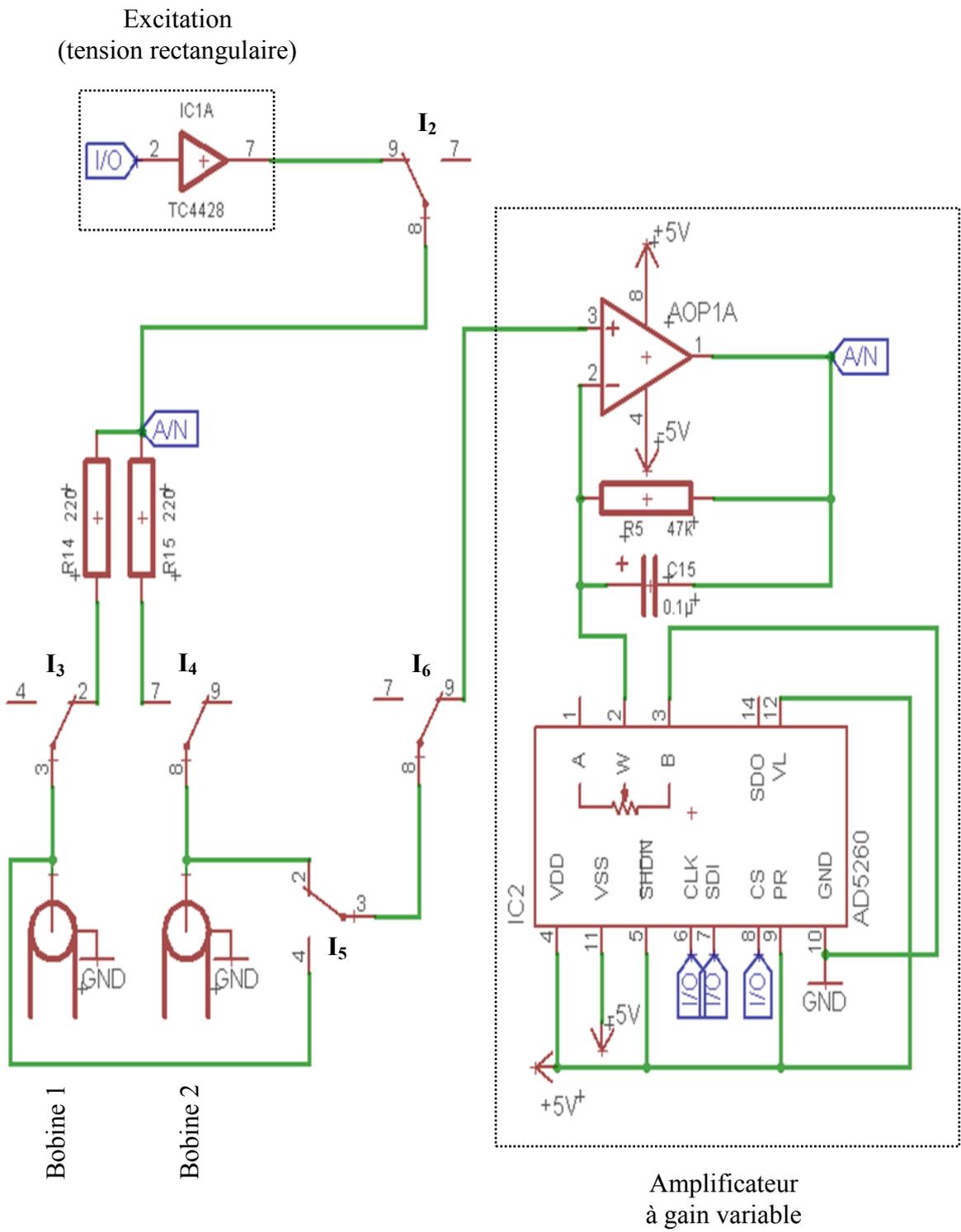


Figure II.9 - Schéma électrique en mode entretenu forcé

II.4.3 Fonctionnement en mode auto - entretenu

En mode auto-entretenu, le microcontrôleur (μc) n'envoie aucun signal d'excitation au capteur car le système bouclé fonctionne de manière auto-excitée. À la mise sous tension, la tension à l'entrée de l'amplificateur ne consiste qu'en un bruit intrinsèque à la bobine de mesure. Ce bruit est amplifié pour les fréquences autour de la fréquence de résonance f_r de la corde. En effet, la résonance du système amplifie intrinsèquement la tension induite aux bornes de la bobine au voisinage de f_r . Comme l'amplificateur présente une contre réaction positive, le signal amplifié retourne à l'entrée et est additionné au bruit intrinsèque ce qui renforce encore les fréquences autour de la fréquence de résonance. Ainsi le signal d'entrée est de nouveau amplifié tout en continuant de favoriser la fréquence de résonance. Un filtre passe-bande se plaçant après l'amplificateur permet de réduire le spectre du signal de sortie pour que le système ne s'accroche pas sur une fréquence de résonance d'ordre supérieur par exemple. Le signal établi est transmis au microcontrôleur sur un port de conversion analogique/numérique (CAN) afin d'afficher finalement la fréquence de résonance. Cette fonctionnalité, illustrée sur la Figure II.10, est réalisée (Figure II.11) en positionnant I_3 sur la gauche (position 2), I_4 sur la droite (position 9), I_5 sur le haut (position 2), I_6 sur la droite (position 9) et I_7 sur le bas (position 9).

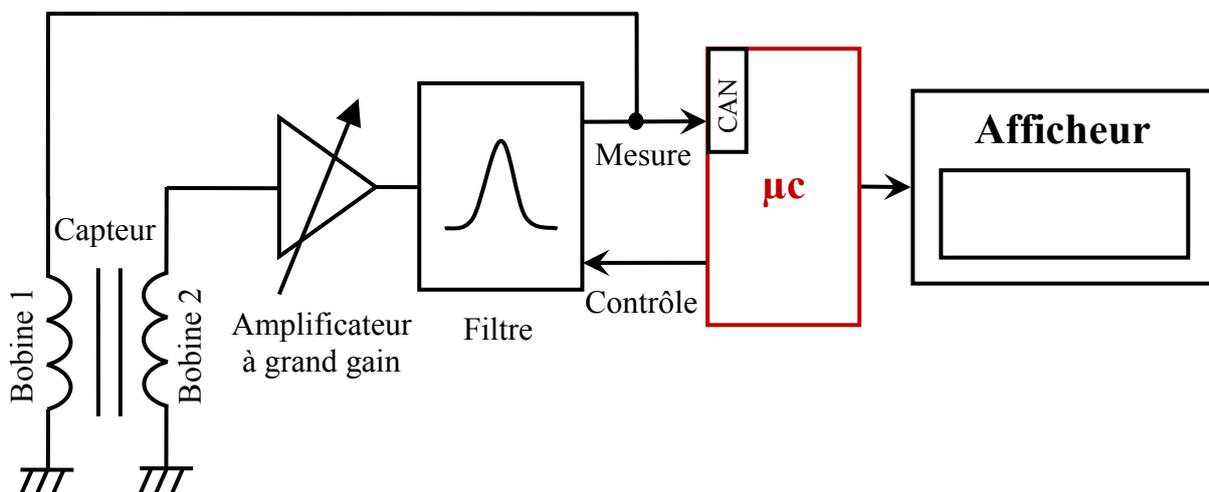


Figure II.10 - Boucle de mesure en mode auto-entretenu

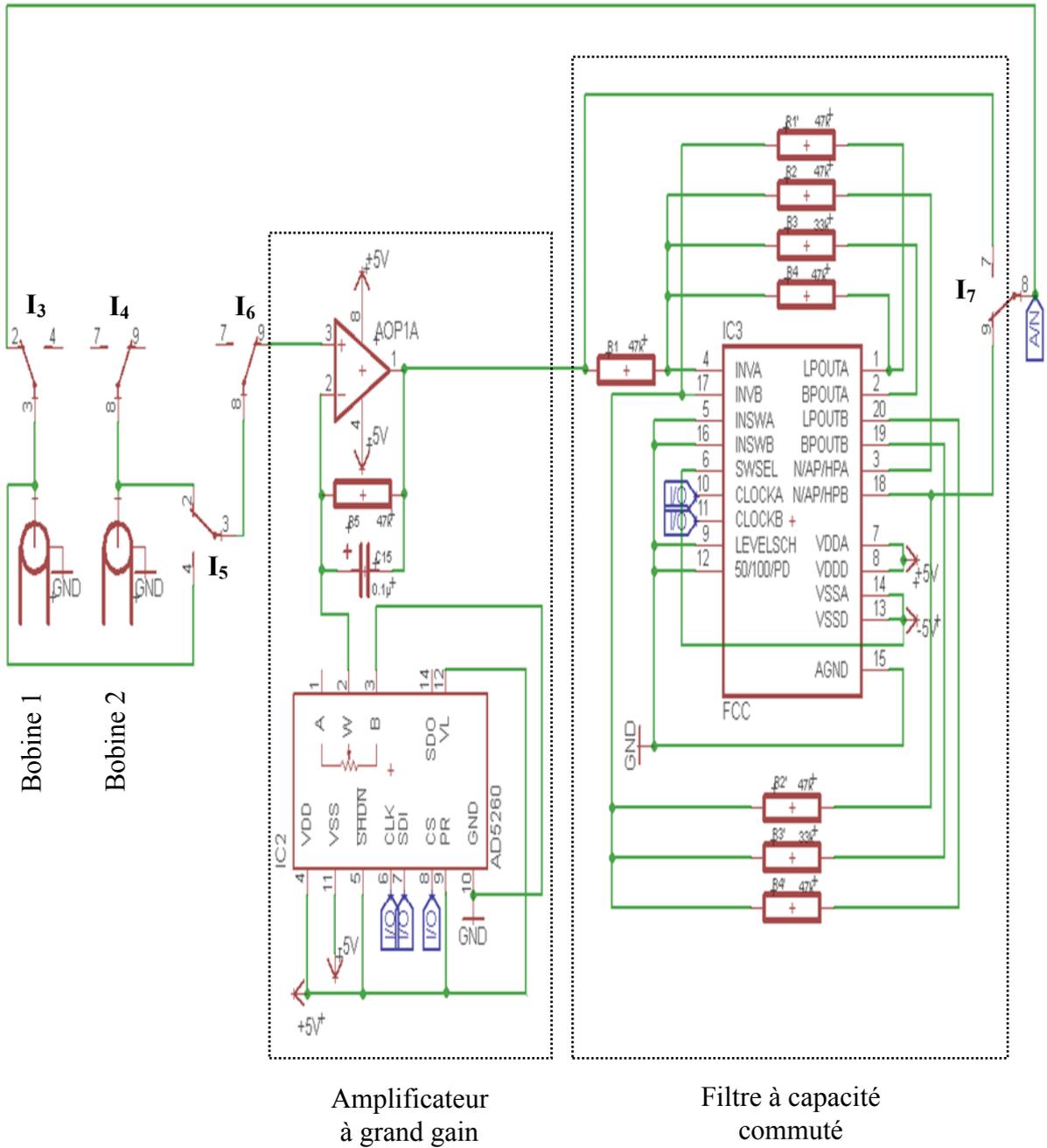


Figure II.11 - Schéma électrique en mode auto-entretenu

II.4.4 Mesure de la résistance des bobines

Il est important de mesurer la résistance des bobines afin de vérifier leur intégrité et de tenir compte de l'influence de la température sur la mesure en fréquence. Comme le montre la Figure II.12, chaque bobine peut être montée en diviseur de tension avec une résistance connue R . Dans ce mode de mesure, le microcontrôleur (μc) délivre une tension continue. En mesurant la tension électrique aux bornes de la bobine et de la résistance R , on peut déterminer la résistance de la bobine et donc corriger l'influence de la température. Cette fonctionnalité est réalisée (Figure II.13) comme suit :

- (1) Une mesure sur la première bobine nécessite I_2 sur la gauche (position 9), I_3 sur la droite (position 2), I_4 sur la droite (position 9), I_5 sur le bas (position 2) et I_6 sur la droite (position 9).
- (2) Une mesure sur la seconde bobine nécessite I_2 sur la gauche (position 9), I_3 sur la gauche (position 4), I_4 sur la gauche (position 7), I_5 sur le haut (position 4) et I_6 sur la droite (position 9).

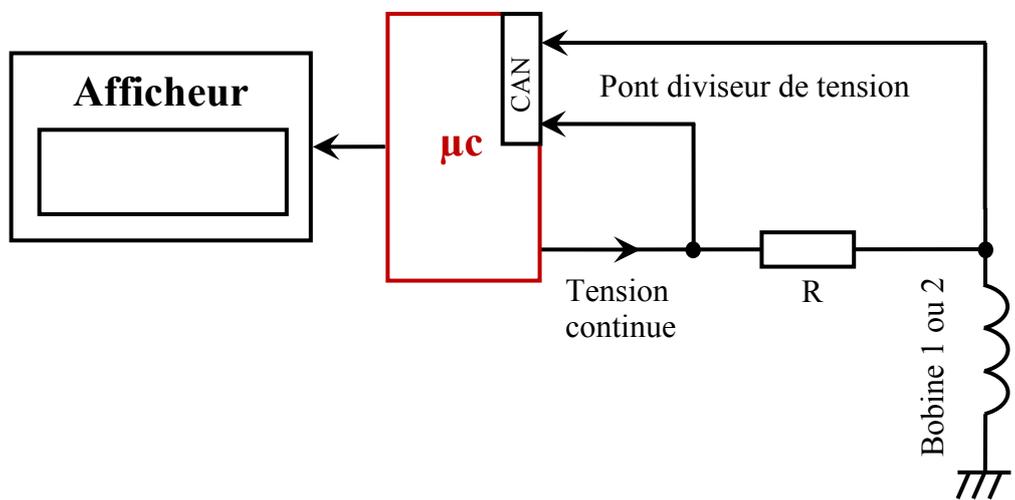


Figure II.12 - Principe de mesure de la résistance des bobines

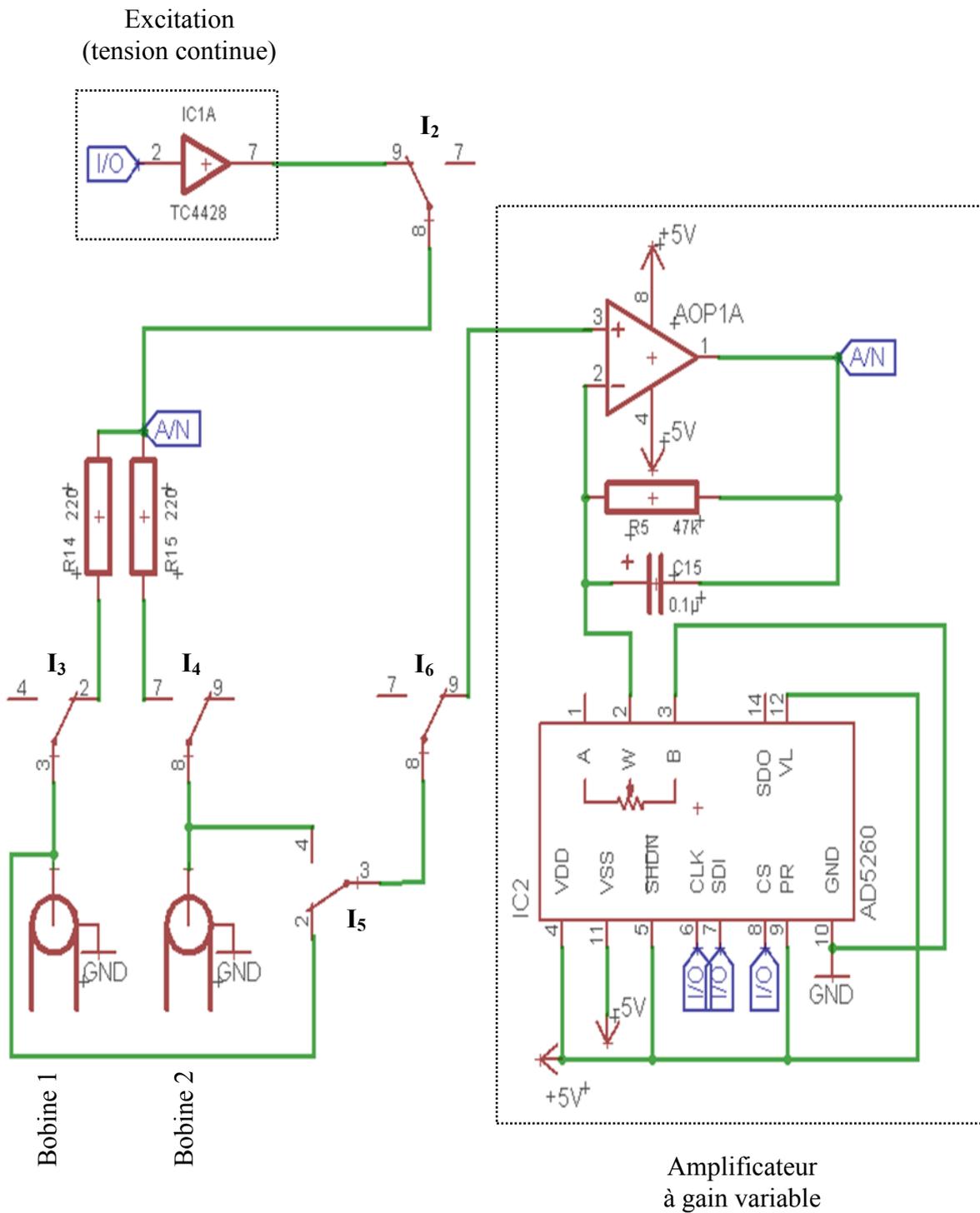


Figure II.13 - Schéma électrique pour mesurer la résistance des bobines

II.4.5 Industrialisation du dispositif de lecture

Après plusieurs essais, le circuit électronique et le programme correspondant ont été fiabilisés. La version industrielle du poste de lecture a été finalisée par la société EXOLIGENT. La Figure II.14 montre le poste de lecture commercialisé par la société Géo-instrumentation. Ce poste de lecture permet de mesurer la fréquence de résonance de tout type de capteur à corde vibrante à deux bobines.



Figure II.14 - Poste de lecture modèle LCCV commercialisé par la société Géo-instrumentation

Chapitre III

Modélisation physique

La modélisation physique consiste à appréhender le comportement dynamique du capteur en tenant compte de la boucle d'action-réaction qui existe entre la corde vibrante, la bobine d'excitation et la bobine de mesure. Comme les systèmes étudiés peuvent coupler la mécanique et le magnétisme, deux modèles magnéto-mécaniques sont construits pour décrire respectivement les fonctionnements du capteur en mode amorti et en mode entretenu. Il s'agit d'exprimer les différents phénomènes physiques à l'aide d'équations aux dérivées partielles et de les lier entre eux à partir de divers choix des variables. On peut alors en déduire la résolution ultime que peut atteindre le capteur selon son mode d'excitation et donc identifier le mode d'excitation optimal. Un autre avantage de cette modélisation est la mise en évidence de l'influence des différents paramètres pour optimiser l'ensemble de la chaîne de mesure.

III.1 Modélisation par schéma-bloc

En mode amorti, la modélisation du capteur est constituée de deux parties essentielles, l'une pour l'excitation de la corde et l'autre pour la mesure de son mouvement. Le circuit d'excitation étant une bobine parcourue par une impulsion, il est naturel de l'assimiler à un électro-aimant qui exerce une force d'attraction instantanée, à l'échelle du capteur et des temps de mesure, sur la corde. Cette force magnétique imposant la condition initiale en déplacement conduit à une oscillation libre amortie de la corde. La relation fondamentale de la dynamique permet de faire le lien entre les forces appliquées et le mouvement de la corde. Après l'impulsion initiale, le champ magnétique résiduel H_0 est modulé par le mouvement de la corde. Les variations de flux magnétique détectées par la même bobine (ou une deuxième bobine) sont amplifiées de manière à restituer un signal électrique mesurable en sortie du capteur. La sensibilité du capteur peut alors être déterminée. Les modélisations physiques

sous forme de schéma-bloc sont illustrées sur la Figure III.1 pour le système d'excitation et sur la Figure III.2 pour le système de mesure.

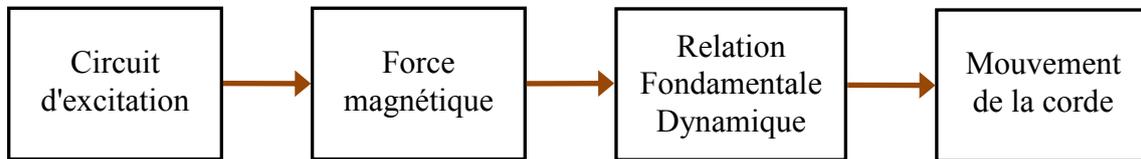


Figure III.1 - Schéma-bloc global modélisant le système d'excitation en mode amorti

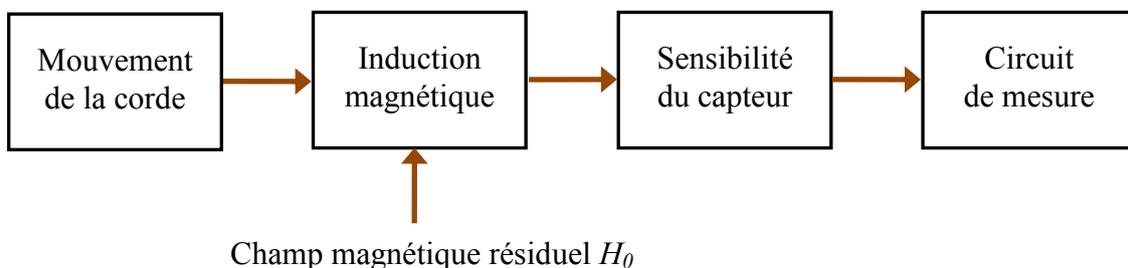


Figure III.2 - Schéma-bloc global modélisant le système de mesure en mode amorti

En mode entretenu, l'excitation et la mesure s'effectuent sur un système bouclé qui se comporte comme un oscillateur auto-entretenu. L'accent est mis sur la modélisation des couplages magnéto-mécaniques entre la bobine d'excitation, la bobine de mesure et la corde vibrante. Le système d'excitation est capable de produire et d'entretenir un signal alternatif, à partir du signal aux bornes de la bobine de mesure. Concernant le système de mesure, deux phénomènes sont à prendre en compte : (1) la modulation d'un champ magnétique résiduel, comme en mode amorti, et (2) le couplage par induction magnétique modélisé par une inductance mutuelle entre les deux bobines. Dans ce dernier cas, l'inductance mutuelle est périodiquement modifiée par le mouvement de la corde dans son champ de sensibilité. Cette modification provoque aussi une variation de la force magnétique par laquelle la corde est périodiquement attirée. Une boucle est finalement réalisée, comme le montre la Figure III.3.

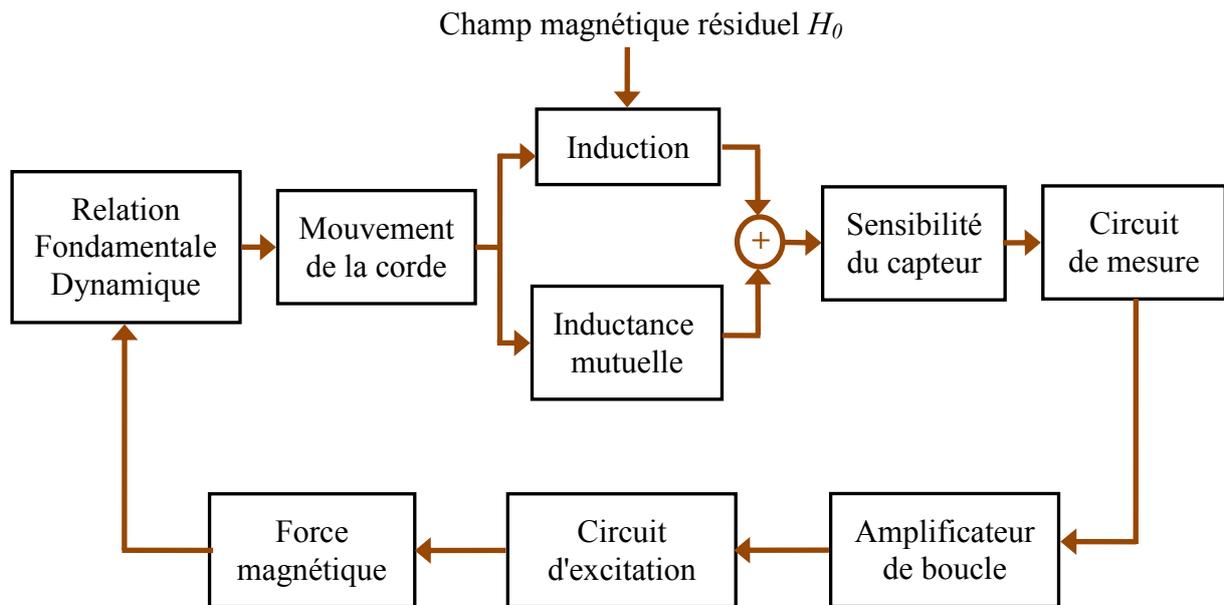


Figure III.3 - Schéma-bloc global modélisant le système d'excitation et le système de mesure en mode entretenu

Les représentations du système global par schéma-bloc permettent de déterminer l'évolution de la réponse du capteur (sortie du système global) en fonction du mouvement de la corde (entrée du système global). Chaque bloc des Figures III.1, III.2 et III.3 correspond à une partie élémentaire du système au sein duquel une expression relie des grandeurs d'entrées (causes) et des grandeurs de sortie (effets) [76]. L'ensemble de ces relations constitue le modèle magnéto-mécanique du capteur. Par la suite, les blocs du système d'excitation et du système de mesure sont analysés en détail afin d'acquérir une bonne connaissance des modèles.

III.2 Excitation de la corde

L'essentiel du problème de l'excitation du capteur est d'étudier la force magnétique d'excitation et de faire le lien entre les forces appliquées et les mouvements de la corde en utilisant la relation fondamentale de la dynamique. La force magnétique qui permet de démarrer les mouvements de la corde est d'abord calculée par la méthode fondée sur le tenseur de Maxwell. La relation fondamentale dynamique est ensuite complétée au moyen des modèles physiques.

III.2.1 Force magnétique d'excitation

III.2.1.1 Méthode du tenseur de Maxwell

La méthode du tenseur de Maxwell constitue un outil simple et efficace pour calculer les forces magnétiques imposées à un objet donné. Cette méthode s'appuie sur le fait que la divergence du tenseur de Maxwell est égal à la densité de force magnétique [77, 78]. Par le théorème de la divergence, la force appliquée à un volume plongé dans un champ magnétique s'obtient simplement à partir des intégrales suivantes [79] :

$$\vec{F}_v = \int_v \frac{\partial \Gamma_{ij}}{\partial x_j} dv = \oint_s \Gamma_{ij} ds_j \quad (\text{III.1})$$

où i et j prennent les valeurs 1, 2, 3 pour indiquer les 3 axes des coordonnées. Par convention, le premier indice i désigne la direction de la force et le second indice j désigne la normale à la surface subissant la force. Le tenseur de Maxwell Γ_{ij} dérivant de la densité d'énergie magnétique se définit sous la forme suivante [80] :

$$\Gamma_{ij} = \mu \left(H_i H_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} |\vec{H}|^2 \right) \text{ avec } \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad (\text{III.2})$$

où H_i et H_j sont les composantes suivant chaque axe du champ magnétique. Ce tenseur permet de procéder au calcul direct des contraintes magnétiques sur une surface arbitrairement choisie. Les termes Γ_{ii} correspondent aux contraintes normales et les autres termes Γ_{ij} ($i \neq j$) correspondent aux contraintes de cisaillement [81]. Comme le montre la Figure III.4, le champ magnétique \vec{H} que subit un élément de surface $d\vec{s} = \vec{n} \cdot ds$ est décomposé en une composante normale sous la forme $H_n = \vec{n} \cdot \vec{H}$ et une composante tangentielle sous la forme $\vec{H}_t = \vec{n} \wedge \vec{H}$. Si l'on fait coïncider la direction de la normale avec l'axe des x_3 , c'est-à-dire en prenant $j = 3$ dans l'équation (III.2), la composante normale Γ_n et la composante tangentielle Γ_t de la contrainte magnétique s'écrivent :

$$\begin{cases} \Gamma_n = \frac{1}{2} \mu H_n^2 \\ \Gamma_t = \mu H_n \vec{H}_t \end{cases} \quad (\text{III.3})$$

En utilisant les équations (III.1) et (III.3), il est possible de calculer, par projection et intégration, les forces magnétiques subies par un objet de forme quelconque placé dans un champ magnétique d'orientation quelconque [82, 83].

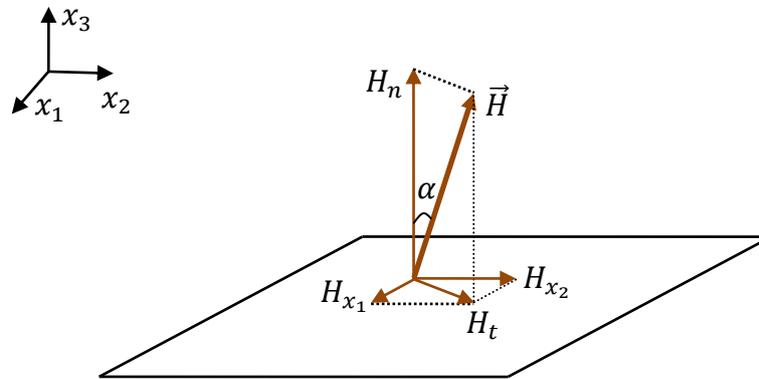


Figure III.4 - Composition du champ magnétique

III.2.1.2 Force magnétique sur la corde

Lorsque la bobine d'excitation est parcourue par un courant, elle génère, à l'instar d'un électro-aimant, un champ magnétique [84]. Comme la corde en acier inoxydable possède une perméabilité magnétique μ grande devant celle du vide ($\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ H/m), le champ magnétique produit par la bobine est alors guidé le long de la corde. En présence de ce champ magnétique, la corde est attirée vers la bobine par des forces magnétiques, comme montré sur la Figure III.5.

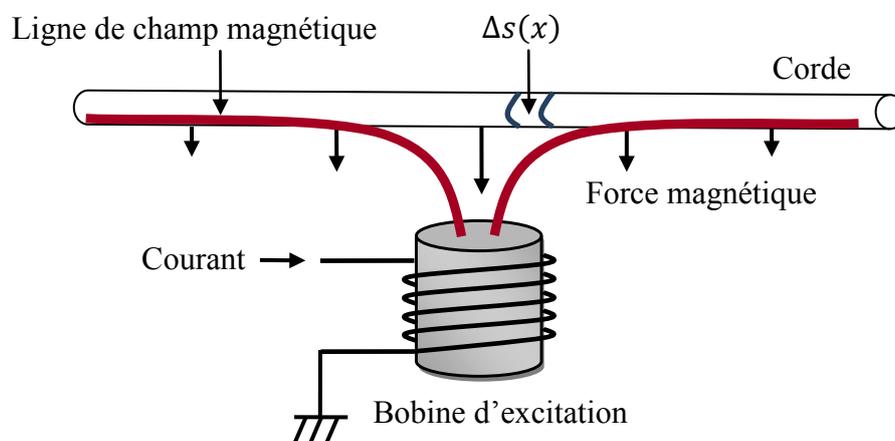


Figure III.5 - Excitation de la corde par guidage du champ magnétique

Afin de déterminer les forces magnétiques appliquées à la corde, il faut assimiler la surface de séparation entre la corde et l'air à un volume d'épaisseur infinitésimale, puis d'effectuer l'intégrale du tenseur de Maxwell sur la surface renfermant ce volume [85]. La Figure III.6 montre la disposition schématique des forces magnétiques appliquées à la surface inférieure de la corde en regard de la bobine (Figure III.6a) et à la surface supérieure de la corde (Figure III.6b). Considérons un élément de volume à cheval sur l'interface de la corde et délimité par la surface fermée s (δs pour chaque face). Le champ magnétique à la surface de séparation s'orientant selon l'axe des x_3 (direction normale), la force magnétique totale \vec{F}_v subie par cet élément de volume s'écrit :

$$\vec{F}_v = \oint_s \frac{1}{2} \mu H^2 d\vec{s} = \begin{cases} \frac{1}{2} (\mu_0 H_{ext}^2 \delta \vec{s}_{ext} + \mu H_{int}^2 \delta \vec{s}_{int}) & \text{en bas de la corde} \\ \frac{1}{2} (\mu H_{int}^2 \delta \vec{s}_{int} + \mu_0 H_{ext}^2 \delta \vec{s}_{ext}) & \text{en haut de la corde} \end{cases} \quad (\text{III.4})$$

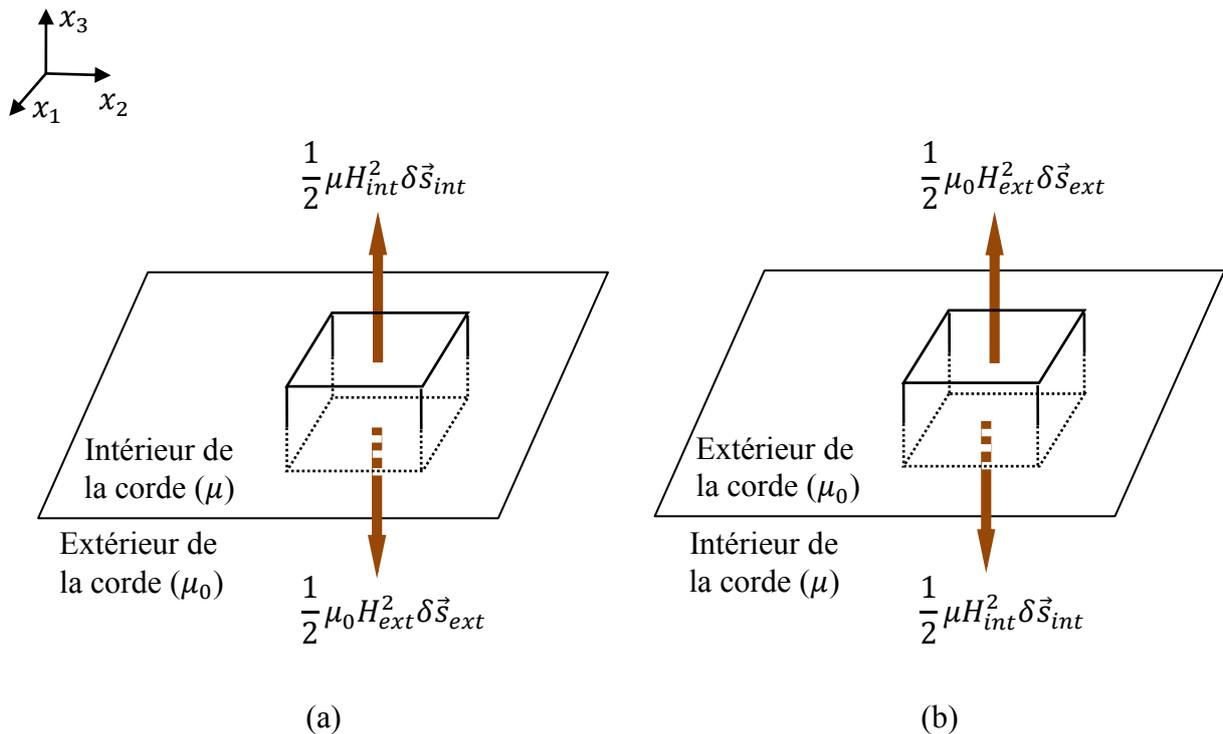


Figure III.6 - Forces magnétiques agissant sur un élément de volume à cheval sur l'interface entre l'air et (a) la surface inférieure de la corde et (b) la surface supérieure de la corde

Les conditions de continuité du champ magnétique imposées par les équations de Maxwell [86] indiquent que la composante normale de l'induction magnétique est continue à la traversée de l'interface entre deux milieux ($\mu H_{int} = \mu_0 H_{ext}$). Comme $\mu \gg \mu_0$, le champ magnétique extérieur de la corde est très supérieur à celui de l'intérieur ($H_{ext} \gg H_{int}$). Par l'équation (III.4), les contraintes magnétiques imposées sur la surface inférieure de la corde et celles imposées sur la surface supérieure de la corde s'expriment sous la même forme $\mu_0 H_{ext}^2/2$, mais dans des directions opposées.

Les contraintes magnétiques du dessous de la corde, se dirigeant vers le bas, attirent la corde proche de la bobine, tandis que les contraintes magnétiques du dessus de la corde, se dirigeant vers le haut, repoussent la corde loin de la bobine. La pression magnétique totale en un point sur la corde peut être calculée approximativement à partir de la soustraction entre les contraintes attractives et répulsives. Comme la répartition du champ magnétique H autour de la corde est telle que H est relativement important juste au dessous de la corde, mais beaucoup plus faible juste au dessus et à l'intérieur de la corde, la pression magnétique P_{mag} poussant la corde vers la bobine est donnée par

$$P_{mag} \approx \frac{1}{2} \mu_0 H^2 \quad (\text{III.5})$$

Comme la force magnétique qui s'exerce sur la corde n'est pas uniformément répartie, elle est représentée par sa valeur moyenne par unité de longueur $\overline{F_{mag}}$ ayant l'expression

$$\overline{F_{mag}} = \int_{\Delta s(x)} \frac{1}{2} \mu_0 H^2 d\vec{s} \quad (\text{III.6})$$

où $\Delta s(x)$ est la surface d'une portion élémentaire dx de la corde à la position x , comme l'indique la Figure III.5. Sachant que le champ magnétique diminue avec la distance à proximité de la source, la contrainte magnétique est inversement proportionnelle au carré de la distance entre la bobine et la corde. De ce fait, la corde doit être proche de la bobine.

III.2.2 Relation fondamentale de la dynamique

Afin de représenter les mouvements d'oscillation d'une corde tendue, deux modèles physiques sont considérés selon que les deux extrémités de la corde sont librement pivotantes ou totalement encastrées. Le premier modèle est étudié en tenant compte d'une corde sans raideur et le second modèle est étudié en tenant compte d'une corde avec raideur. Dans un premier temps, les équations qui régissent les mouvements de la corde sont rappelées. Ensuite les fréquences de résonance sont analytiquement calculées pour le premier modèle et estimées en utilisant une méthode graphique et une méthode analytique pour le deuxième modèle. Suite à l'excitation de la corde, les équations du mouvement doivent être complétées en ajoutant la force magnétique. Les solutions particulières sont déterminées par l'intermédiaire de la fonction de Green, ce qui permet d'estimer le niveau d'excitation pour chaque mode de résonance en fonction de la position d'excitation. L'influence de l'excitation de la corde sur la réponse de la corde est alors prédite par la théorie. Enfin des résultats expérimentaux valident ces développements théoriques.

III.2.2.1 Modèle simple : extrémités-pivotantes (corde sans raideur)

III.2.2.1.1 Équation du mouvement (modèle simple)

Considérons une corde de longueur L , de masse volumique ρ , de section S , fixée à ses deux extrémités et tendue par une tension mécanique \vec{T} . On s'intéresse aux petits déplacements $\vec{u}(x, t)$ d'une portion infinitésimale de corde comprise entre les abscisses x et $x + \delta x$. La tension exercée sur cette portion par son voisinage immédiat est égale en module à T et est dirigée vers l'extérieur [87], faisant un angle $\alpha(x, t)$ avec l'axe des x . Cette situation est schématisée sur la Figure III.7.

Par souci de simplification, quelques hypothèses sont posées pour étudier ce modèle. D'abord, comme les deux extrémités de la corde sont librement pivotantes, la corde n'offre aucune résistance à la courbure. La raideur de la corde étant négligée, les tensions mécaniques sont toujours tangentes à la corde en tout point [88]. Deuxièmement, pour des petits déplacements, l'angle $\alpha(x, t)$ est petit, ainsi $\cos(\alpha) \approx 1$ et $\sin(\alpha) \approx \tan(\alpha) \approx \partial u_y / \partial x$. Troisièmement, le module de la tension mécanique de la corde reste constant durant la

mesure. En négligeant les effets de la pesanteur, la relation fondamentale de la dynamique s'écrit alors au premier ordre selon l'axe des x (horizontal) et selon l'axe des y (vertical) :

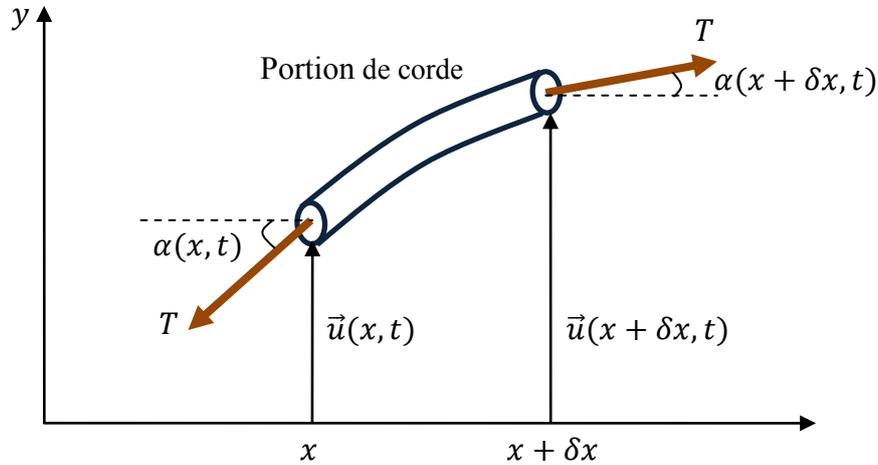


Figure III.7 - Actions sur un petit élément d'une corde supposée sans raideur

$$\begin{cases} \rho S \delta x \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} = T \cos(\alpha(x + \delta x)) - T \cos(\alpha(x)) \approx 0 \\ \rho S \delta x \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} = T [\sin(\alpha(x + \delta x)) - \sin(\alpha(x))] \\ \quad = T \left[\frac{\partial u_y}{\partial x} \Big|_{x+\delta x} - \frac{\partial u_y}{\partial x} \Big|_x \right] = T \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} \delta x \end{cases} \quad (\text{III.7})$$

En divisant les deux membres de l'équation (III.7) par $\rho S \delta x$, on a

$$\frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} \quad (\text{III.8})$$

avec $v = \sqrt{T/\rho S}$ la vitesse de propagation des ondes le long de la corde [89]. C'est l'équation du mouvement d'une corde sans raideur, appelée équation de d'Alembert [90]. Au cours de l'excitation, la corde est soumise à une force magnétique externe. En prenant en compte l'effet d'excitation qui manque dans l'équation (III.8), on a

$$\frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} = \frac{\overline{F_{mag}}}{\rho S} \quad (\text{III.9})$$

où $\overline{F_{mag}}$ est la force magnétique moyenne qui est définie par l'équation (III.6). En supposant que la corde est fixée à ses deux extrémités en $x = -L/2$ et en $x = L/2$, on doit imposer comme conditions aux limites

$$u_y \left(-\frac{L}{2}, t \right) = u_y \left(\frac{L}{2}, t \right) = 0 \quad (\text{III.10})$$

III.2.2.1.2 Fréquences de résonance (modèle simple)

En régime harmonique, l'équation d'onde (III.8) admet une solution générale de la forme $u_y = A_0 e^{i\omega t + kx}$, avec A_0 une constante et k le vecteur d'onde. La substitution de cette solution générale dans l'équation (III.8) aboutit à $v^2 k^2 + \omega^2 = 0$. Il y a donc deux vecteurs possibles pour k : $\pm ik$ avec

$$k = \frac{\omega}{v} = \frac{\omega}{\sqrt{T/\rho S}} \quad (\text{III.11})$$

La solution générale de l'équation (III.8) est donc

$$u_y = A e^{i(\omega t + kx)} + B e^{i(\omega t - kx)} \quad (\text{III.12})$$

La vérification des conditions aux limites (III.10) impose : $kL = n\pi$ où n est un nombre entier positif. En substituant l'expression (III.11) de k , on obtient les fréquences de résonance d'une corde sans raideur :

$$f_n = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{T}{\rho S}} \quad \text{avec } n = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{III.13})$$

Le mode fondamental ($n = 1$) a la fréquence de résonance la plus basse et les modes d'ordre plus élevé ($n > 1$) ont les fréquences de résonance qui sont des multiples entiers de la fréquence de résonance fondamentale.

D'après l'équation (III.13), une variation de tension mécanique ΔT se déduit alors de la fréquence de résonance fondamentale f au moment de la mesure et de la fréquence de résonance fondamentale f_0 au moment de l'installation du capteur :

$$\Delta T = 4L^2 \rho S (f^2 - f_0^2) \quad (\text{III.14})$$

Cette variation de tension mécanique peut être reliée à la variation de longueur de la corde et donc à la variation relative de longueur $\Delta L/L$ de l'extensomètre par le module d'Young E de la corde [91] :

$$\frac{\Delta L}{L} = \frac{\Delta T}{ES} \quad (\text{III.15})$$

La déformation mesurée peut ainsi s'exprimer en fonction de la variation de fréquence de résonance selon la relation :

$$\frac{\Delta L}{L} = K(f^2 - f_0^2) \quad (\text{III.16})$$

avec $K = 4L^2\rho/E$ le coefficient extensométrique du capteur pour un modèle simple à extrémités pivotantes.

III.2.2.1.3 Fonction de Green (modèle simple)

L'équation (III.9) qui décrit la vibration de la corde eu égard à l'effet de la force magnétique est une équation aux dérivées partielles linéaires et non homogènes. La solution de ce type d'équation est la somme de la solution générale de l'équation homogène associée et d'une solution particulière de l'équation non homogène [92]. Afin de trouver précisément la solution particulière, il convient d'utiliser la technique des fonctions de Green qui est un outil mathématique puissant de résolution de certaines équations différentielles, quelle que soit la distribution de sources [93, 94].

Mathématiquement parlant, la fonction de Green associée à un capteur à corde vibrante correspond au déplacement de tous les points x de la corde, lorsque celle-ci est excitée par une source ponctuelle et impulsionnelle ou harmonique localisée au point x_s [95, 96]. En vertu de la linéarité de l'équation aux dérivées partielles décrivant le déplacement d'une corde, la réponse totale de la corde provoquée par une distribution arbitraire de sources se réduit à la superposition des fonctions de Green pour différentes positions x_s de la source [97, 98]. À ce propos, la source d'excitation $\overline{F_{mag}}/\rho S$ dans l'équation (III.9) est remplacée par une fonction de Dirac [99]. Lorsque le problème est résolu dans le domaine harmonique, la fonction de Dirac peut s'écrire $\delta(x - x_s)e^{i\omega t}$ où x_s est la position de la source d'excitation et ω est la pulsation considérée. On appelle désormais $G_\omega(x, x_s, t)$ la fonction de Green de la corde

vibrante. Cette fonction auxiliaire présente l'intérêt de permettre de calculer le déplacement de la corde pour n'importe quel terme d'excitation par un produit de convolution [100] :

$$u_y(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} G_\omega(x, x_s, t) \frac{\overline{F_{mag}}(x_s, \omega)}{\rho S} dx_s d\omega \quad (\text{III.17})$$

Dans le cas du modèle à extrémités pivotantes, à partir de l'équation (III.9), la fonction de Green doit vérifier l'équation

$$\frac{\partial^2 G_\omega(x, x_s, t)}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 G_\omega(x, x_s, t)}{\partial x^2} = \delta(x - x_s) e^{i\omega t} \quad (\text{III.18})$$

et les conditions aux limites

$$G_\omega\left(-\frac{L}{2}, x_s, t\right) = G_\omega\left(\frac{L}{2}, x_s, t\right) = 0 \quad (\text{III.19})$$

De part la définition de la fonction de Green, l'équation (III.18), avec les conditions aux limites (III.19), caractérise le déplacement d'une corde sans raideur par suite d'une excitation ponctuelle et harmonique localisée au point x_s . Lorsque la corde est excitée à la position x_s , les ondes se propagent dans deux directions depuis le point d'excitation. Lorsque ces ondes arrivent aux deux extrémités de la corde, elles se réfléchissent et forment des ondes stationnaires [101]. Ainsi la fonction de Green est composée de trois termes : la solution particulière qui décrit l'onde directe provenant de x_s (onde 1) et la solution générale qui décrit les ondes réfléchies aux deux extrémités (ondes 2 et 3), comme le montre la Figure III.8.

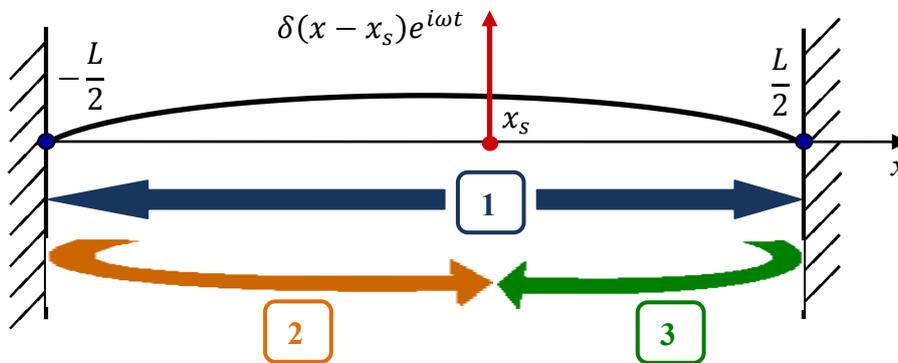


Figure III.8 - Réponse d'une corde sans raideur à une source ponctuelle et harmonique en x_s

La solution de l'équation (III.18) peut alors se mettre sous la forme :

$$G_{\omega}(x, x_s, t) = Ae^{i(\omega t - k|x - x_s|)} + Be^{i(\omega t - kx)} + Ce^{i(\omega t + kx)} \quad (\text{III.20})$$

Les constantes A , B et C dans l'équation (III.20) sont déterminées en satisfaisant les conditions aux limites (III.19). Il s'en suit que

$$\begin{cases} A = \frac{1}{2i\omega v} \\ B = \frac{1}{2i\omega v} e^{-ik\frac{L}{2}} \frac{\sin[k(x_s - \frac{L}{2})]}{\sin(kL)} \\ C = \frac{1}{2i\omega v} e^{-ik\frac{L}{2}} \frac{\sin[k(x_s + \frac{L}{2})]}{\sin(kL)} \end{cases} \quad (\text{III.21})$$

Connaissant la fonction de Green, la réponse de la corde sous l'effet d'une source d'excitation placée à différentes positions peut être déduite. Le mouvement global d'une corde fixée à ses deux extrémités se manifeste comme une combinaison linéaire de tous les modes de résonance disponibles. Lorsque les divers modes de résonance sont simultanément excités, ils évoluent indépendamment les uns des autres [102], ce qui permet d'étudier séparément le niveau d'excitation de chaque mode de résonance pour tout type d'excitation.

À titre d'exemple, considérons une corde en acier inoxydable de longueur $L = 85$ mm et de rayon $r = 115$ μm , soumise à la tension $T = 8.9741$ N. Les propriétés de l'acier inoxydable sont : la masse volumique $\rho = 7800$ kg/m^3 et le module d'Young $E = 210$ GPa. La Figure III.9 montre comment la position d'excitation affecte la vibration résultante pour les cinq premières fréquences de résonance pour le modèle simple dans le cas d'une source d'excitation parfaitement localisée. La position de la source d'excitation est représentée sur l'axe horizontal, et sur l'axe vertical apparaît l'amplitude normalisée des résonances en pourcentage.

Il est à noter que lorsque la source excite la corde en son point médian, la corde présente une réponse significative seulement pour les modes impairs de résonance (1, 3, 5 ...). Au contraire, les modes pairs de résonance (2, 4, 6 ...) sont fortement inhibés. Comme la vibration de la corde est composée en majorité du mode fondamental en un seul fuseau, l'influence de la position d'excitation sur le mode fondamental est mise en relief. L'efficacité d'excitation pour la fréquence de résonance fondamentale demeure à 95% dans l'intervalle de $\pm 10\%$ de la

longueur de la corde et à 99% dans l'intervalle de $\pm 5\%$. Dans ce dernier intervalle, par rapport à l'amplitude de la fréquence fondamentale, les amplitudes de la deuxième à la cinquième fréquences de résonance sont respectivement au plus de 14%, 33%, 13% et 20%. En outre, lorsque la source se déplace d'une petite distance horizontale vers la gauche ou vers la droite à partir de la position centrale, la contribution des modes pairs de résonance par rapport au mode fondamental devient évidente. On s'intéresse au rapport de l'amplitude du mode pair de résonance à celle du fondamental. Cette sensibilité augmente de façon à peu près linéaire au voisinage du point médian de la corde, avec une pente d'environ 2.5. Cela signifie qu'une variation de 1% sur la position d'excitation conduit à une variation de $\pm 2.5\%$ sur la perte d'efficacité si tous les modes étaient excités.

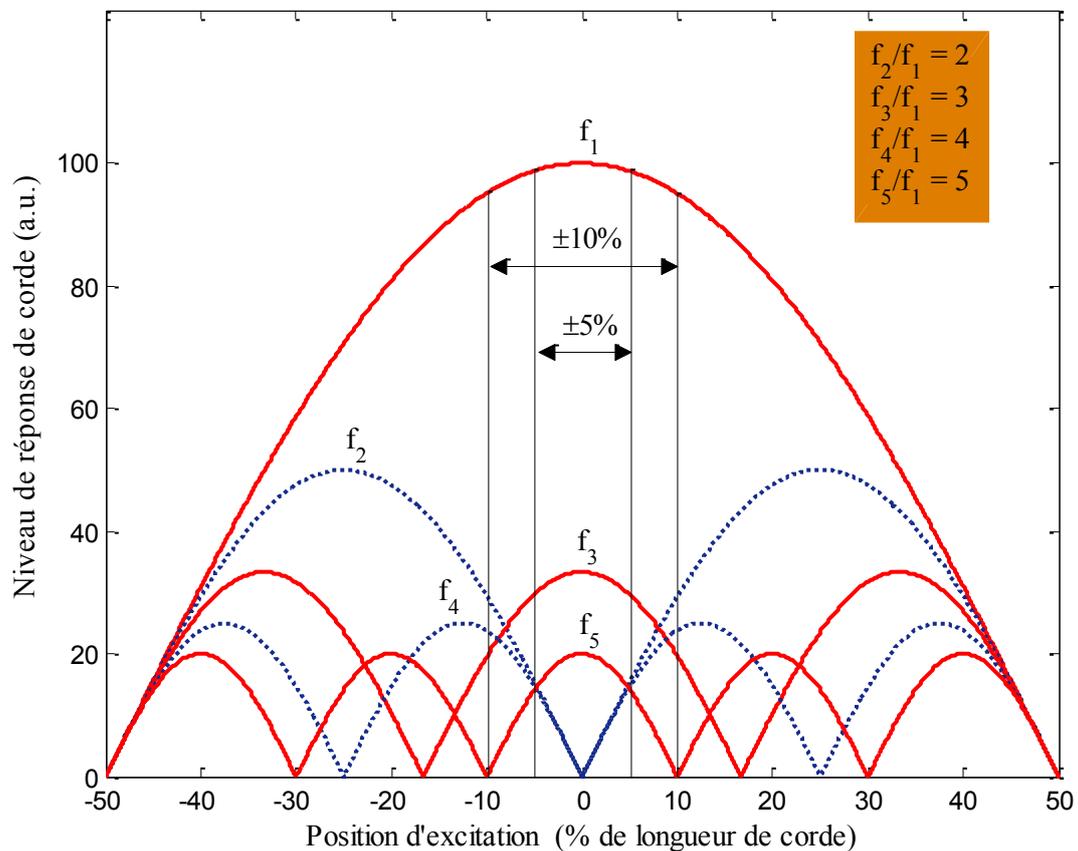


Figure III.9 - Niveau des cinq premiers modes de résonance d'une corde sans raideur

III.2.2.2 Modèle complexe : extrémités-encastées (corde avec raideur)

III.2.2.2.1 Équation du mouvement (modèle complexe)

Dans ce modèle, puisque les deux extrémités de la corde sont totalement encastées, la corde n'est plus parfaitement flexible. En présence de raideur, la courbure de la corde provoque des contraintes de traction et de compression [103]. En se référant à la Figure III.10, lors de la flexion, le tronçon de corde subit un moment fléchissant [104] résultant d'une force \vec{F} perpendiculaire à la tension mécanique. La composante de la force \vec{F} suivant l'axe des y s'exprime [105] :

$$F_y(x) = -EI \frac{\partial^3 u_y}{\partial x^3} \quad (\text{III.22})$$

où E est le module d'Young et I est le module d'inertie dont l'expression pour une section circulaire de rayon r prend la forme $I = \pi r^4/4$ [106]. De ce fait, la force de rappel appliquée sur la corde est due à la tension mécanique et aussi à la raideur de la corde [107].

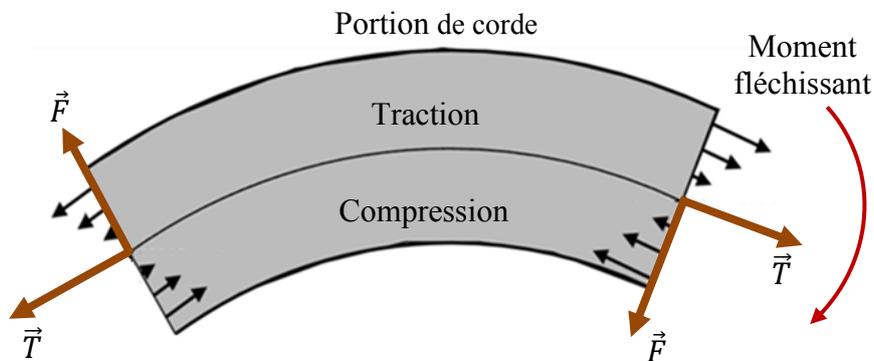


Figure III.10 - Flexion d'une corde avec raideur

En ajoutant la force de flexion, comme le montre la Figure III.11, la relation fondamentale de la dynamique pour les déplacements selon l'axe y devient

$$\rho S \delta x \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} \delta x + F_y(x + \delta x) - F_y(x) = \left(T \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} - EI \frac{\partial^4 u_y}{\partial x^4} \right) \delta x \quad (\text{III.23})$$

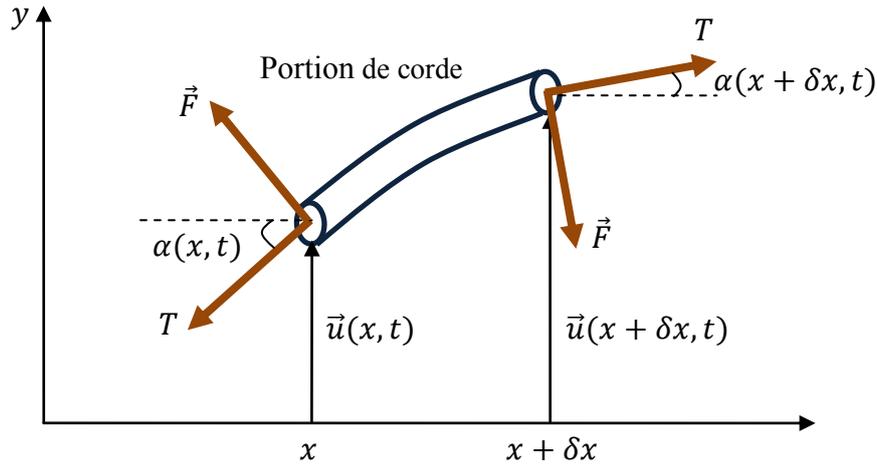


Figure III.11 - Actions sur un petit élément d'une corde en tenant compte de sa raideur

L'équation du mouvement d'une corde avec raideur, appelée équation d'Euler-Bernoulli, s'obtient en divisant les deux membres de l'équation (III.23) par $\rho S \delta x$, ce qui donne :

$$\frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} - \frac{EI}{\rho S} \frac{\partial^4 u_y}{\partial x^4} \quad (\text{III.24})$$

De même, lorsque la corde est excitée, l'équation (III.24) s'écrit à nouveau en ajoutant la force magnétique :

$$\frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{EI}{\rho S} \frac{\partial^4 u_y}{\partial x^4} = \frac{\overline{F_{mag}}}{\rho S} \quad (\text{III.25})$$

La corde étant encastree à ses deux extrémités, les équations (III.24) et (III.25) ont deux types de conditions aux limites : un comme pour une corde sans raideur et l'autre du fait des extrémités encastrees de la corde. On a

$$\begin{cases} u_y\left(-\frac{L}{2}, t\right) = u_y\left(\frac{L}{2}, t\right) = 0 \\ \frac{\partial u_y}{\partial x}\left(-\frac{L}{2}, t\right) = \frac{\partial u_y}{\partial x}\left(\frac{L}{2}, t\right) = 0 \end{cases} \quad (\text{III.26})$$

L'implication de ces nouvelles conditions aux limites est illustrée sur la Figure III.12. En présence de raideur, au voisinage des points d'ancrage la courbure de la corde est modifiée et sa longueur effective semble réduite.

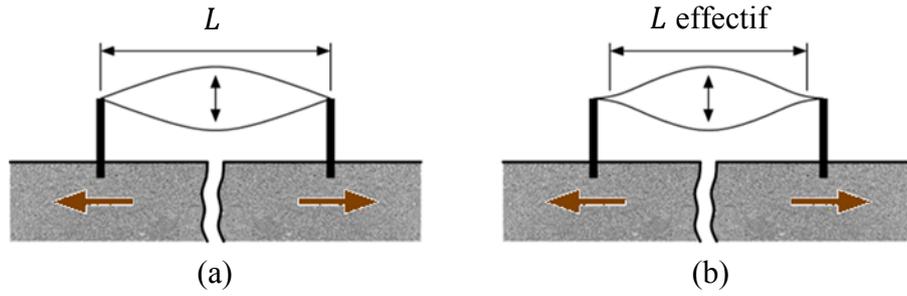


Figure III.12 - Conditions aux limites pour une corde (a) sans raideur et (b) avec raideur

III.2.2.2.2 Fréquences de résonance (modèle complexe)

En mettant la solution générale de l'équation (III.24) sous la forme $u_y = A_0 e^{i\omega t + kx}$, on en déduit une équation pour les valeurs autorisées du vecteur d'onde k :

$$q^2 k^4 - v^2 k^2 - \omega^2 = 0 \quad \text{avec } q = \sqrt{\frac{EI}{\rho S}} \quad (\text{III.27})$$

L'équation (III.27) admet deux racines (une positive et une négative) en k^2 , soit quatre vecteurs d'onde possibles : $\pm k_1$ et $\pm i k_2$ avec

$$\begin{cases} k_1 = \sqrt{\frac{\sqrt{v^4 + 4\omega^2 q^2} + v^2}{2q^2}} \\ k_2 = \sqrt{\frac{\sqrt{v^4 + 4\omega^2 q^2} - v^2}{2q^2}} \end{cases} \quad (\text{III.28})$$

d'où la relation entre k_1 et k_2 :

$$\begin{cases} k_1^2 - k_2^2 = \frac{v^2}{q^2} \\ k_1 k_2 = \frac{\omega}{q} \end{cases} \quad (\text{III.29})$$

La solution générale de l'équation (III.24) est alors de la forme :

$$u_y(x, t) = A e^{i\omega t + k_1 x} + B e^{i\omega t - k_1 x} + C e^{i(\omega t + k_2 x)} + D e^{i(\omega t - k_2 x)} \quad (\text{III.30})$$

Lorsque le point médian de la corde est à l'origine, il est naturel d'envisager séparément [108] les modes impairs de résonance (1, 3, 5 ...) qui sont symétriques par rapport à l'axe des y (voir Figure III.13a) et les modes pairs de résonance (2, 4, 6 ...) qui sont symétriques par rapport à l'origine (voir Figure III.13b). La solution (III.30) peut alors se décomposer en fonctions paires représentant les modes impairs de résonance et fonctions impaires représentant les modes pairs de résonance [109] :

$$u_y(x, t) = \begin{cases} (a \cosh(k_1 x) + c \cos(k_2 x))e^{i\omega t} & \text{modes impairs} \\ (b \sinh(k_1 x) + d \sin(k_2 x))e^{i\omega t} & \text{modes pairs} \end{cases} \quad (\text{III.31})$$

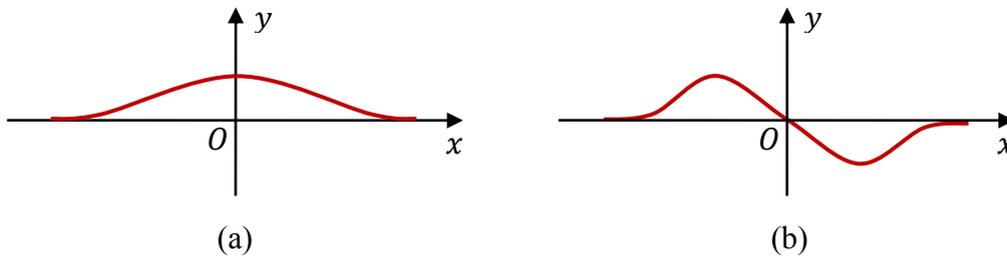


Figure III.13 - Symétrie de la vibration de la corde lorsque le point médian de la corde est à l'origine : (a) modes impairs de résonance symétriques par rapport à l'axe y et (b) modes pairs de résonance symétriques par rapport à l'origine O

La solution générale (III.31) satisfait à l'équation (III.24) pour des fréquences quelconques. Ce sont les conditions aux limites (III.26) qui permettent de distinguer l'ensemble des valeurs autorisées pour les fréquences de résonance [110]. Connaissant l'expression (III.31) de la solution générale et les conditions aux limites (III.26), on en tire un système d'équations pour les modes impairs de résonance :

$$\begin{cases} a \cosh\left(k_1 \frac{L}{2}\right) + c \cos\left(k_2 \frac{L}{2}\right) = 0 \\ ak_1 \sinh\left(k_1 \frac{L}{2}\right) - ck_2 \sin\left(k_2 \frac{L}{2}\right) = 0 \end{cases} \quad (\text{III.32})$$

et un autre système d'équations pour les modes pairs de résonance :

$$\begin{cases} b \sinh\left(k_1 \frac{L}{2}\right) + d \sin\left(k_2 \frac{L}{2}\right) = 0 \\ bk_1 \cosh\left(k_1 \frac{L}{2}\right) + dk_2 \cos\left(k_2 \frac{L}{2}\right) = 0 \end{cases} \quad (\text{III.33})$$

Sachant que le système d'équations admet des solutions non triviales si et seulement si son déterminant est nul, le système (III.32) est vérifié quelles que soient les valeurs attribuées à a et c si

$$\det \begin{bmatrix} \cosh\left(k_1 \frac{L}{2}\right) & \cos\left(k_2 \frac{L}{2}\right) \\ k_1 \sinh\left(k_1 \frac{L}{2}\right) & -k_2 \sin\left(k_2 \frac{L}{2}\right) \end{bmatrix} = 0 \quad (\text{III.34})$$

De même, le système (III.33) est vérifié quelles que soient les valeurs attribuées à b et d si

$$\det \begin{bmatrix} \sinh\left(k_1 \frac{L}{2}\right) & \sin\left(k_2 \frac{L}{2}\right) \\ k_1 \cosh\left(k_1 \frac{L}{2}\right) & k_2 \cos\left(k_2 \frac{L}{2}\right) \end{bmatrix} = 0 \quad (\text{III.35})$$

D'après les conditions (III.34) et (III.35), k_1 et k_2 sont liés comme suit :

$$\begin{cases} k_2 \tan\left(k_2 \frac{L}{2}\right) = -k_1 \tanh\left(k_1 \frac{L}{2}\right) & \text{modes impairs} \\ k_1 \tan\left(k_2 \frac{L}{2}\right) = k_2 \tanh\left(k_1 \frac{L}{2}\right) & \text{modes pairs} \end{cases} \quad (\text{III.36})$$

Par la suite, une méthode graphique et une méthode analytique sont proposées pour déterminer les fréquences de résonance à partir des équations transcendentes (III.36) et des expressions (III.28) de k_1 et k_2 .

A. Méthode graphique

Résoudre les équations (III.36) par une méthode graphique consiste à tracer deux courbes en fonction de la fréquence dans un même repère, une courbe représentative du membre de gauche de l'équation et une autre courbe représentative du membre de droite de l'équation. La résolution revient alors à chercher, s'ils existent, les points d'intersection des deux courbes.

À titre d'exemple, considérons une corde en acier inoxydable de longueur $L = 85$ mm et de rayon $r = 115$ μm , soumis à la tension $T = 8.9741$ N. La masse volumique et le module d'Young de l'acier inoxydable sont respectivement $\rho = 7800$ kg/m^3 et $E = 210$ GPa. La Figure III.14 donne la résolution graphique pour les cinq premiers modes de résonance.

Sur la Figure III.14a, la courbe bleue représente $k_2 \tan(k_2 L/2)$, tandis que la courbe rouge représente $-k_1 \tanh(k_1 L/2)$. L'abscisse de chaque point d'intersection des deux courbes correspond à une solution pour les fréquences de résonance impaires. Étant donné que la fonction $\tan(k_2 L/2)$ est périodique, les deux courbes se croisent en un nombre infini de points, ce qui permet de déterminer toutes les fréquences de résonance impaires. Les fréquences de résonance paires peuvent être obtenues de la même manière, comme montré sur la Figure III.14b. La courbe bleue représente $k_1 \tan(k_2 L/2)$ et la courbe rouge représente $k_2 \tanh(k_1 L/2)$.

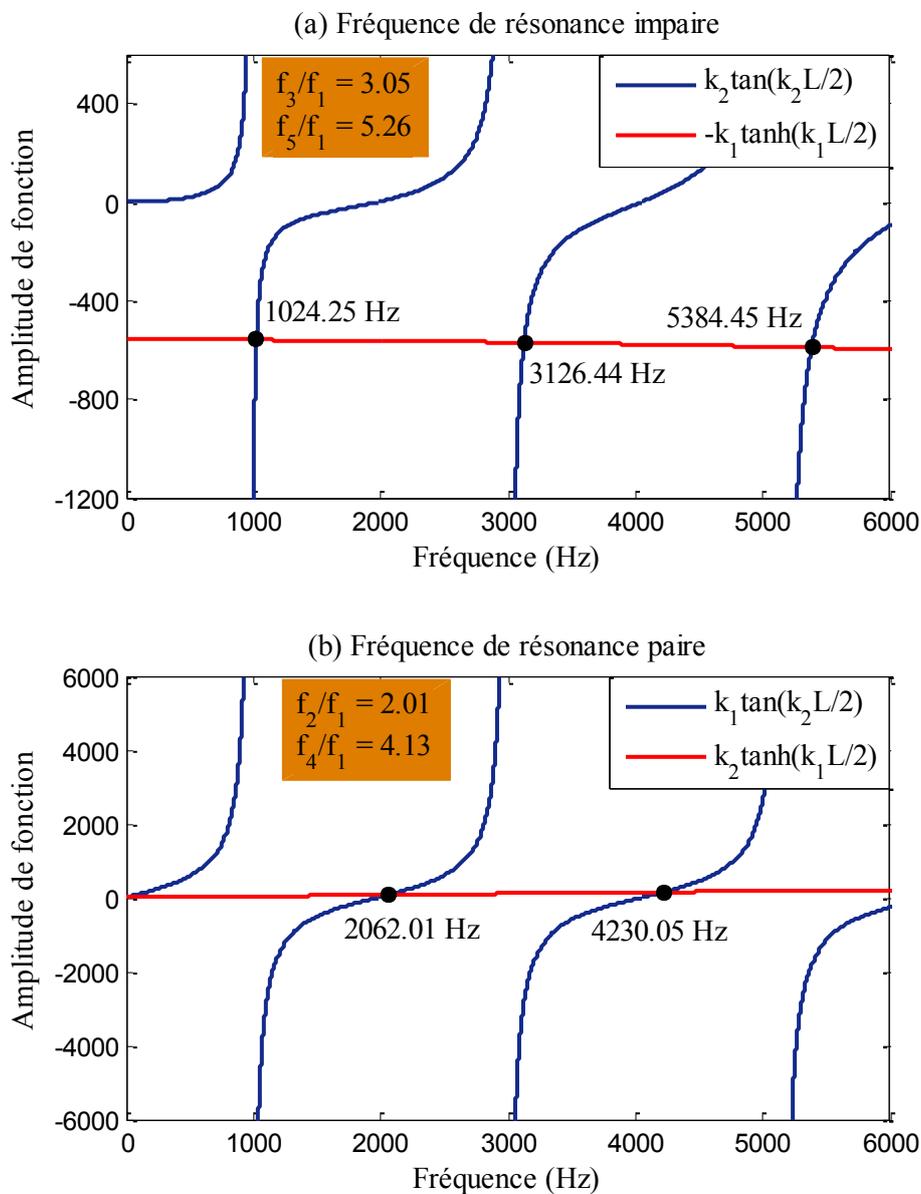


Figure III.14 - Méthode graphique de résolution pour (a) les fréquences de résonance impaires et (b) les fréquences de résonance paires d'une corde avec raideur

En calculant numériquement les fréquences des cinq premiers modes, on trouve que les abscisses des cinq premiers points d'intersection sont : $f_1 = 1024.25$ Hz, $f_2 = 2062.01$ Hz, $f_3 = 3126.44$ Hz, $f_4 = 4230.05$ Hz et $f_5 = 5384.45$ Hz. Visiblement, compte tenu de la raideur de la corde, les fréquences de résonance d'ordre élevé ($n \geq 2$) ne sont pas exactement des multiples entiers successifs de la fréquence de résonance fondamentale.

B. Méthode analytique

Résoudre l'équation (III.36) par une méthode analytique consiste à chercher une formule appropriée aux solutions de ω . À titre de comparaison, les mêmes dimensions et propriétés pour la corde que précédemment sont reprises. Avec un rayon de corde $r = 115$ μm , une masse volumique $\rho = 7800$ kg/m^3 et un module d'Young $E = 210$ GPa, on a $q = \sqrt{EI/\rho S} \approx 0.3$ m^2/s . Avec une fréquence de résonance fondamentale d'environ 1 kHz pour une longueur de corde $L = 85$ mm, on a une vitesse de propagation $v \approx 170$ m/s. Avec le jeu d'équations (III.28), on procède analytiquement à la résolution en considérant les deux cas limites : (1) $v^4 \gg 4\omega^2 q^2$ correspondant à $k_1 \gg k_2$ et (2) $v^4 \ll 4\omega^2 q^2$ correspondant à $k_1 \approx k_2$.

Lorsque $v^4 \gg 4\omega^2 q^2$

Par la substitution des valeurs numériques, ce cas correspond à des pulsations de résonance telles que $\omega \ll v^2/2q \approx 2\pi \times 8000$ rad/s, soit les modes de résonance d'ordre $n \ll 8$. D'après la relation (III.29). Comme $k_1 \gg k_2$, on a

$$\begin{cases} k_1 \approx \frac{v}{q} \\ k_2 \approx \frac{\omega}{v} \end{cases} \quad (\text{III.37})$$

En substituant les valeurs numériques dans les expressions (III.37), on a $k_1 L/2 \approx 24$. Ainsi $\tanh(k_1 L/2) \approx 1$, ce qui permet de simplifier l'équation (III.36) :

$$\begin{cases} \tan\left(k_2 \frac{L}{2} - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{k_2}{k_1} = \frac{\omega q}{v^2} & \text{modes impairs} \\ \tan\left(k_2 \frac{L}{2}\right) = \frac{k_2}{k_1} = \frac{\omega q}{v^2} & \text{modes pairs} \end{cases} \quad (\text{III.38})$$

Étant donné l'hypothèse $v^4 \gg 4\omega^2 q^2$, les arguments des tangentes tendent vers zéro à $n\pi$ près, avec n un entier relatif arbitraire. On trouve alors au premier ordre :

$$\begin{cases} k_2 \frac{L}{2} - (2n + 1) \frac{\pi}{2} \approx \frac{\omega q}{v^2} & \text{modes impairs} \\ k_2 \frac{L}{2} - 2n \frac{\pi}{2} \approx \frac{\omega q}{v^2} & \text{modes pairs} \end{cases} \quad (\text{III.39})$$

On peut remarquer que le jeu d'équation (III.39) peut se résumer à

$$k_2 \frac{L}{2} - n \frac{\pi}{2} \approx \frac{\omega q}{v^2} \quad (\text{III.40})$$

qui englobe tous les modes de résonance d'ordre impair et d'ordre pair. Comme de plus $k_2 \approx \omega/v$, on a finalement

$$k_2 L - n\pi \approx \omega L/v - n\pi \approx \frac{2\omega q}{v^2} \quad (\text{III.41})$$

avec n un entier relatif arbitraire. On en déduit l'expression des pulsations de résonance :

$$\omega \approx \frac{n\pi v}{L} \frac{1}{1 - \frac{2q}{vL}} \quad (\text{III.42})$$

Comme $v^4 \gg 4\omega^2 q^2$, on a $2\omega q/v^2 \ll 1$. Selon l'équation (III.41), on a $\omega L/v - n\pi \ll 1$, c'est-à-dire $\omega L/v \approx n\pi \gg 2\omega q/v^2$ et finalement $2q/vL \ll 1$. L'expression (III.42) est donc équivalente au premier ordre à

$$\omega \approx \frac{n\pi v}{L} \left(1 + \frac{2q}{vL}\right) \approx 2\pi \times \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{T}{\rho S}} \left(1 + \sqrt{\frac{4EI}{TL^2}}\right) \quad (\text{III.43})$$

Lorsque $v^4 \ll 4\omega^2 q^2$

Avec les mêmes valeurs numériques que précédemment, ce cas correspond à des pulsations de résonance telles que $\omega \gg v^2/2q \approx 2\pi \times 8000$ rad/s, soit les modes de résonance d'ordre $n \gg 8$. D'après la relation (III.29), on a

$$k_1 \approx k_2 \approx \sqrt{\frac{\omega}{q}} \quad (\text{III.44})$$

Dans ce cas, on remarque que $k_1 L/2 \gg vL/2\sqrt{2}q \approx 17$. Ainsi $\tanh(k_1 L/2) \approx 1$, ce qui permet encore de réduire l'équation (III.36) à l'équation (III.38). Étant donné que $k_1 \approx k_2$, les tangentes tendent vers 1, ce qui implique que leurs arguments tendent vers $\pi/4$ à $n\pi$ près, avec n un entier arbitraire. On trouve alors au premier ordre :

$$\begin{cases} k_2 \frac{L}{2} - (2n+1) \frac{\pi}{4} = k_2 \frac{L}{2} - \frac{3}{4}\pi - n\pi \approx \frac{\omega q}{v^2} & \text{modes impairs} \\ k_2 \frac{L}{2} - 2n \frac{\pi}{4} = k_2 \frac{L}{2} - \frac{\pi}{4} - n\pi \approx \frac{\omega q}{v^2} & \text{modes pairs} \end{cases} \quad (\text{III.45})$$

On peut remarquer que le jeu d'équations (III.45) peut se résumer à

$$k_2 \frac{L}{2} - \frac{\pi}{4} - n \frac{\pi}{2} \approx \frac{\omega q}{v^2} \quad (\text{III.46})$$

qui englobe tous les modes de résonance d'ordre impair et d'ordre pair. Comme de plus $k_2 \approx \sqrt{\omega/q}$, on a finalement

$$k_2 L - \frac{\pi}{2} - n\pi \approx \sqrt{\frac{\omega}{q}} L - \frac{\pi}{2} - n\pi \approx \frac{2\omega q}{v^2} \quad (\text{III.47})$$

avec n un entier relatif quelconque. On en déduit l'expression des pulsations de résonance :

$$\omega \approx \frac{q}{L^2} \left(\frac{\pi}{2} + n\pi \right)^2 \approx 2\pi \times \frac{\pi n^2}{2L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho S}} \quad (\text{III.48})$$

Expression générale

Les deux tendances (III.43) et (III.48) se raccordent pour

$$2\pi \times \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{T}{\rho S}} \left(1 + \sqrt{\frac{4EI}{TL^2}} \right) = 2\pi \times \frac{\pi n^2}{2L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho S}} \quad (\text{III.49})$$

On en déduit un ordre de coupure n_c tel que

$$n_c = \frac{L}{\pi} \sqrt{\frac{T}{EI}} \left(1 + \sqrt{\frac{4EI}{TL^2}} \right) \approx \frac{L}{\pi} \sqrt{\frac{T}{EI}} \quad (\text{III.50})$$

Deux modèles de variation des pulsations de résonance en fonction de n ont été obtenus. L'un est valable pour $n \gg 8$ et l'autre pour $n \ll 8$. Afin d'obtenir un modèle approché qui présente les comportements asymptotiques des deux modèles précédents avec une transition à l'ordre de coupure n_c , on peut utiliser le terme $\sqrt{1 + n^2/n_c^2} = \sqrt{1 + n^2\pi^2 EI/TL^2}$. Ce terme vaut 1 pour n petit devant n_c et vaut $n/n_c = n\pi\sqrt{EI/T}/L$ pour n grand devant n_c . En négligeant le terme $\sqrt{4EI/TL^2}$, on peut passer de l'équation (III.43) qui varie en fonction de n à l'équation (III.48) qui varie en fonction de n^2 , comme proposé dans le modèle 1. Les modèles 2, 3 et 4 permettent d'effectuer cette transition en favorisant la précision pour n petit (modèle 2) ou en réalisant un compromis (modèles 3 et 4).

$$\left\{ \begin{array}{ll} \omega \approx 2\pi \times \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{T}{\rho S}} \times \sqrt{1 + \frac{n^2\pi^2 EI}{TL^2}} & \text{modèle 1} \\ \omega \approx 2\pi \times \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{T}{\rho S}} \times \left(1 + \sqrt{\frac{4EI}{TL^2}} \right) \times \sqrt{1 + \frac{n^2\pi^2 EI}{TL^2}} & \text{modèle 2} \\ \omega \approx 2\pi \times \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{T}{\rho S}} \times \sqrt{1 + 4 \frac{\sqrt{EI}}{\sqrt{TL^2}} + \frac{n^2\pi^2 EI}{TL^2}} & \text{modèle 3} \\ \omega \approx 2\pi \times \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{T}{\rho S}} \times \sqrt{\left(1 + \sqrt{\frac{4EI}{TL^2}} \right)^2 + \frac{n^2\pi^2 EI}{TL^2}} & \text{modèle 4} \end{array} \right. \quad (\text{III.51})$$

Avec ces quatre modèles, on obtient des solutions approchées des fréquences de résonance qui sont comparées avec les solutions plus précises qui sont précédemment calculées numériquement sur ordinateur. L'erreur relative sur chacun des modèles est résumée sur les 100 premiers modes de résonance sur la Figure III.15. Il est à noter que le modèle 2 présente la plus petite erreur sur les premiers modes de résonance : moins de 0.2% d'erreur sur les modes d'ordre inférieur à 15 et moins de 1.75% d'erreur sur les modes d'ordre inférieur à 37. Lorsque l'ordre du mode de résonance est supérieur à 37, il est préférable d'adopter les modèles 3 ou 4.

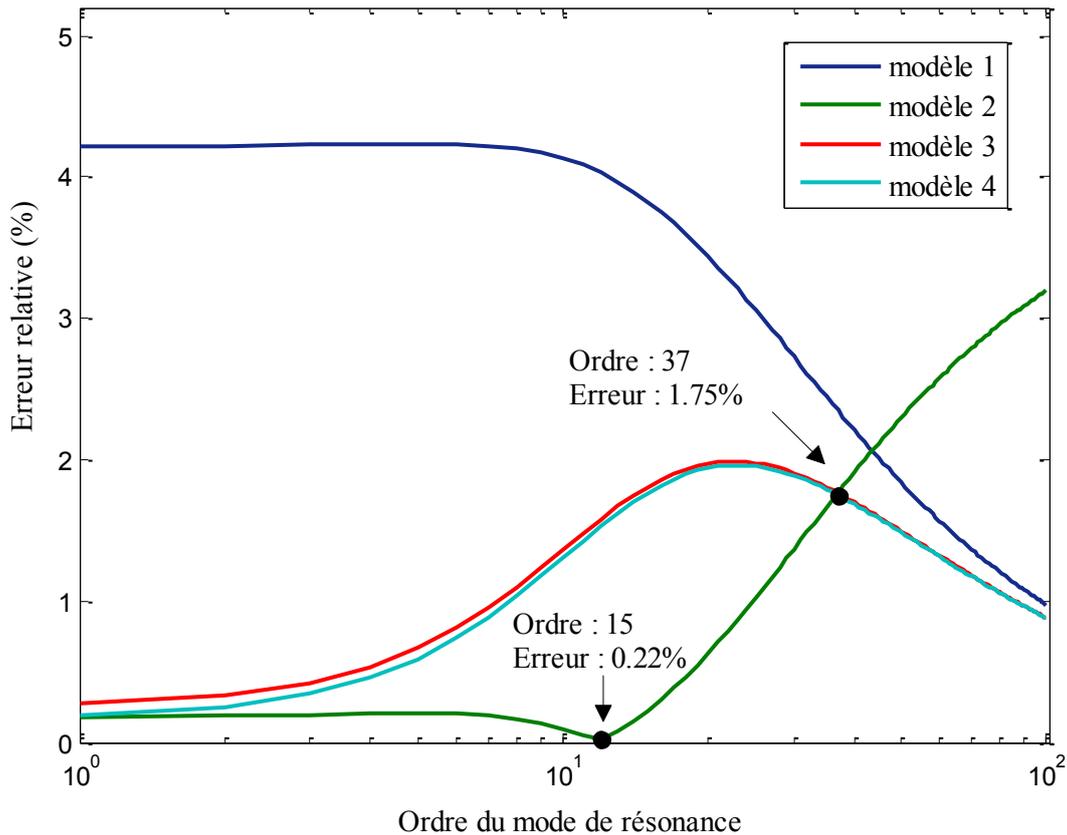


Figure III.15 - Erreur relative sur les 100 premières fréquences de résonance

Dans le cas des capteurs à corde vibrante, seule les premiers modes, notamment le mode fondamental, sont intéressants. Pour déterminer la déformation à partir de la fréquence de résonance fondamentale, l'expression (III.16) n'est plus utilisable car il est nécessaire de tenir compte de la raideur de la corde. La fréquence de résonance fondamentale du modèle 2 s'écrit

$$f = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{T}{\rho S}} \left(1 + \sqrt{\frac{4EI}{TL^2}} \right) \sqrt{1 + \frac{\pi^2 EI}{TL^2}} \quad (\text{III.52})$$

La détermination de T à partir de l'expression (III.52) correspond aux racines d'un polynôme du 4ème degré qui n'admet pas de solution analytique. Pour exprimer T , on fait classiquement l'approximation $\sqrt{1 + \pi^2 EI/TL^2} \approx 1$. Il en résulte que

$$f \approx \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{T}{\rho S}} \left(1 + \sqrt{\frac{4EI}{TL^2}} \right) = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{T}{\rho S}} + \frac{1}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho S}} \quad (\text{III.53})$$

En corrigeant la fréquence de résonance fondamentale de l'expression (III.16) avec les expressions (III.13) et (III.53), on obtient la relation fréquence-déformation classique :

$$\frac{\Delta L}{L} \approx K \left[\left(f - \frac{1}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho S}} \right)^2 - \left(f_0 - \frac{1}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho S}} \right)^2 \right] \quad (\text{III.54})$$

où f_0 est la fréquence de résonance fondamentale au moment de l'installation du capteur et f est la fréquence de résonance fondamentale au moment de la mesure. On peut également améliorer l'estimation (III.54) en mesurant la fréquence de résonance du premier mode f_1 et une autre fréquence de résonance du nième mode f_n . Avec le modèle 2 de l'expression (III.52), on a

$$\begin{cases} f_1 \approx \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{T}{\rho S}} \left(1 + \sqrt{\frac{4EI}{TL^2}} \right) \sqrt{1 + \frac{\pi^2 EI}{TL^2}} \\ f_n \approx \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{T}{\rho S}} \left(1 + \sqrt{\frac{4EI}{TL^2}} \right) \sqrt{1 + \frac{n^2 \pi^2 EI}{TL^2}} \end{cases} \quad (\text{III.55})$$

Ainsi le rapport f_n^2/f_1^2 vaut

$$\frac{f_n^2}{f_1^2} \approx n^2 \frac{1 + \frac{n^2 \pi^2 EI}{TL^2}}{1 + \frac{\pi^2 EI}{TL^2}} \quad (\text{III.56})$$

d'où la tension mécanique :

$$T = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \times \frac{n^4 f_1^2 - f_n^2}{f_n^2 - n^2 f_1^2} \quad (\text{III.57})$$

et avec l'expression (III.15) la relation fréquence-déformation s'écrit :

$$\frac{\Delta L}{L} \approx \left(\frac{\pi r}{2L} \right)^2 \left(\frac{n^4 f_1^2 - f_n^2}{f_n^2 - n^2 f_1^2} - \frac{n^4 f_{10}^2 - f_{n0}^2}{f_{n0}^2 - n^2 f_{10}^2} \right) \quad (\text{III.58})$$

où f_{n0} dénote la fréquence du mode n au moment de l'installation du capteur.

III.2.2.2.3 Fonction de Green (modèle complexe)

Dans le cas du modèle à extrémités encastrées, la fonction de Green satisfait à l'équation (III.25) où la source $\overline{F_{mag}}/\rho S$ est remplacée par $\delta(x - x_s)e^{i\omega t}$:

$$\frac{\partial^2 G_\omega(x, x_s, t)}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 G_\omega(x, x_s, t)}{\partial x^2} + \frac{EI}{\rho S} \frac{\partial^4 G_\omega(x, x_s, t)}{\partial x^4} = \delta(x - x_s)e^{i\omega t} \quad (\text{III.59})$$

Par souci de simplification, l'équation (III.59) est résolue par morceaux. Il est supposé que l'ensemble de l'espace est divisé en régions gauche et droite par la source située en x_s . Ainsi la réponse de la corde se traduit par $G_1(x, t)$ dans la région gauche et par $G_2(x, t)$ dans la région droite, comme l'indique la Figure III.16. L'onde $G_1(x, t)$ peut être interprétée comme une onde transversale se propageant sur une corde encadrée à son extrémité gauche et couplée à l'autre, tandis que l'onde $G_2(x, t)$ peut être interprétée comme une onde transversale se propageant sur une corde encadrée à son extrémité droite et couplée à l'autre. Les expressions de ces deux ondes sont alors déterminées en deux étapes : d'abord, la solution générale de l'équation homogène (III.59) est obtenue en ne regardant pas la source ; ensuite, la contribution de la source à la solution est déterminée en imposant les conditions de continuité entre G_1 et G_2 au point de la source x_s .

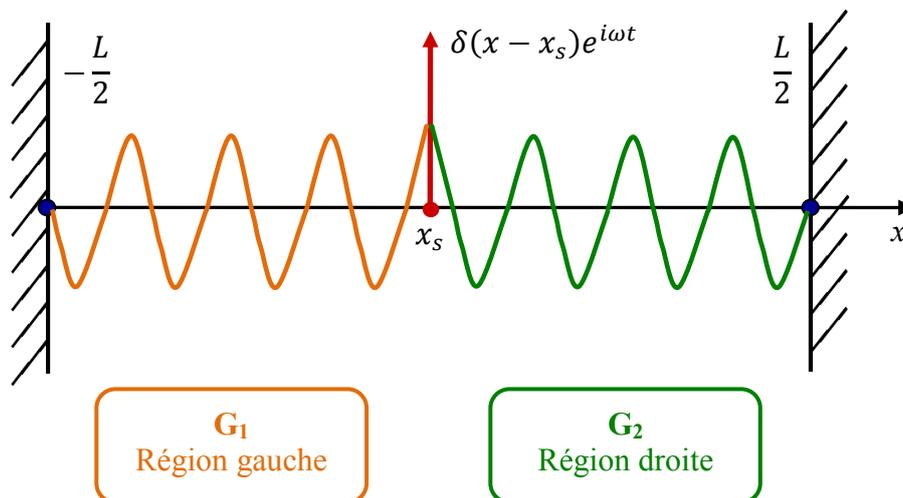


Figure III.16 - Ondes dans les deux régions issues de la source d'excitation à x_s

D'après la solution générale (III.30), les solutions $G_1(x, t)$ et $G_2(x, t)$ prennent les formes

$$\begin{cases} G_1(x, t) = A_1 e^{i\omega t + k_1 x} + B_1 e^{i\omega t - k_1 x} + C_1 e^{i(\omega t + k_2 x)} + D_1 e^{i(\omega t - k_2 x)} & -\frac{L}{2} \leq x \leq x_s \\ G_2(x, t) = A_2 e^{i\omega t + k_1 x} + B_2 e^{i\omega t - k_1 x} + C_2 e^{i(\omega t + k_2 x)} + D_2 e^{i(\omega t - k_2 x)} & x_s \leq x \leq \frac{L}{2} \end{cases} \quad (\text{III.60})$$

L'équation (III.60) doit respecter les conditions aux limites comme suit :

$$\begin{cases} G_1\left(-\frac{L}{2}, t\right) = G_2\left(\frac{L}{2}, t\right) = 0 \\ \frac{\partial G_1\left(-\frac{L}{2}, t\right)}{\partial x} = \frac{\partial G_2\left(\frac{L}{2}, t\right)}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad (\text{III.61})$$

Ces conditions sont analogues aux conditions (III.26) déjà rencontrées. L'équation (III.60) doit également respecter des conditions de continuité. Ces conditions sont issues de l'équation (III.59). La fonction de Dirac est produite par la dérivée d'ordre 4 de G_ω en x_s . Cela implique que la dérivée d'ordre 3 de G_ω présente un saut d'amplitude 1 entre la partie gauche et la partie droite. Les dérivées d'ordre inférieures (ordre 2, 1 et zéro) sont donc continues. Il en résulte les conditions de continuité comme suit :

$$\begin{cases} G_1(x_s, t) = G_2(x_s, t) \\ \frac{\partial G_1(x_s, t)}{\partial x} = \frac{\partial G_2(x_s, t)}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 G_1(x_s, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 G_2(x_s, t)}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^3 G_1(x_s, t)}{\partial x^3} = \frac{\partial^3 G_2(x_s, t)}{\partial x^3} + 1 \end{cases} \quad (\text{III.62})$$

En appliquant les conditions (III.61) et (III.62) à l'équation (III.60), on écrit le système d'équations sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix}
\frac{1}{P_1} & P_1 & \frac{1}{P_2} & P_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{k_1}{P_1} & -k_1 P_1 & \frac{ik_2}{P_2} & -ik_2 P_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & P_1 & \frac{1}{P_1} & P_2 & \frac{1}{P_2} \\
0 & 0 & 0 & 0 & k_1 P_1 & -\frac{k_1}{P_1} & ik_2 P_2 & -\frac{ik_2}{P_2} \\
Q_1 & \frac{1}{Q_1} & Q_2 & \frac{1}{Q_2} & -Q_1 & -\frac{1}{Q_1} & -Q_2 & -\frac{1}{Q_2} \\
k_1 Q_1 & -\frac{k_1}{Q_1} & ik_2 Q_2 & -\frac{ik_2}{Q_2} & -k_1 Q_1 & \frac{k_1}{Q_1} & -ik_2 Q_2 & \frac{ik_2}{Q_2} \\
k_1^2 Q_1 & \frac{k_1^2}{Q_1} & -k_2^2 Q_2 & -\frac{k_2^2}{Q_2} & -k_1^2 Q_1 & -\frac{k_1^2}{Q_1} & k_2^2 Q_2 & \frac{k_2^2}{Q_2} \\
k_1^3 Q_1 & -\frac{k_1^3}{Q_1} & -ik_2^3 Q_2 & \frac{ik_2^3}{Q_2} & -k_1^3 Q_1 & \frac{k_1^3}{Q_1} & ik_2^3 Q_2 & -\frac{ik_2^3}{Q_2}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
A_1 \\
B_1 \\
C_1 \\
D_1 \\
A_2 \\
B_2 \\
C_2 \\
D_2
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
0 \\
0 \\
0 \\
0 \\
0 \\
0 \\
0 \\
1
\end{bmatrix}
\quad (\text{III.63})$$

avec $P_1 = \exp(k_1 L/2)$, $P_2 = \exp(ik_2 L/2)$, $Q_1 = \exp(k_1 x_s)$ et $Q_2 = \exp(ik_2 x_s)$.

Le système (III.63) est vérifié quels que soient les coefficients A_1 , B_1 , C_1 , D_1 , A_2 , B_2 , C_2 et D_2 si le déterminant de la première matrice du côté gauche est nul. En prenant une valeur arbitraire de x_s dans l'intervalle $[-L/2, L/2]$, on peut calculer numériquement les fréquences de résonance pour lesquelles le déterminant s'annule. Au voisinage des fréquences de résonance, les amplitudes de résonance dépendent de la position de source x_s . Pour chaque position x_s et chaque fréquence de résonance, le système (III.63) est numériquement résolu, ce qui permet en fin de compte de déterminer le niveau d'excitation pour chaque mode de résonance en fonction de la position de source.

En reprenant les mêmes dimensions et propriétés pour la corde que précédemment : $L = 85$ mm, $r = 115$ μm , $\rho = 7800$ kg/m^3 et $E = 210$ GPa, l'effet de la position d'excitation sur la réponse d'une corde avec raideur est déterminé pour les cinq premières fréquences de résonance dans le cas d'une source d'excitation parfaitement localisée, comme le montre la Figure III.17. Par comparaison avec la Figure III.9 concernant une corde sans raideur, les courbes pour les cinq premiers modes de résonance sont presque identiques, sauf que les pentes des courbes aux deux extrémités de la corde sont presque égales à zéro du fait de la raideur de la corde. Cela conduit toutefois à des conséquences très importantes puisque la longueur de la corde impliquée dans la vibration est réduite, et cette longueur réduite dépend de l'ordre n de résonance [111]. Plus l'ordre est élevé, plus la longueur effective de la corde

est courte [112]. En conséquence, les fréquences de résonance sont inégalement réparties. On remarque des multiples non entiers entre la fréquence de résonance fondamentale et les fréquences de résonance du deuxième à cinquième ordre tels que $f_2/f_1 = 2.01$, $f_3/f_1 = 3.05$, $f_4/f_1 = 4.13$ et $f_5/f_1 = 5.26$.

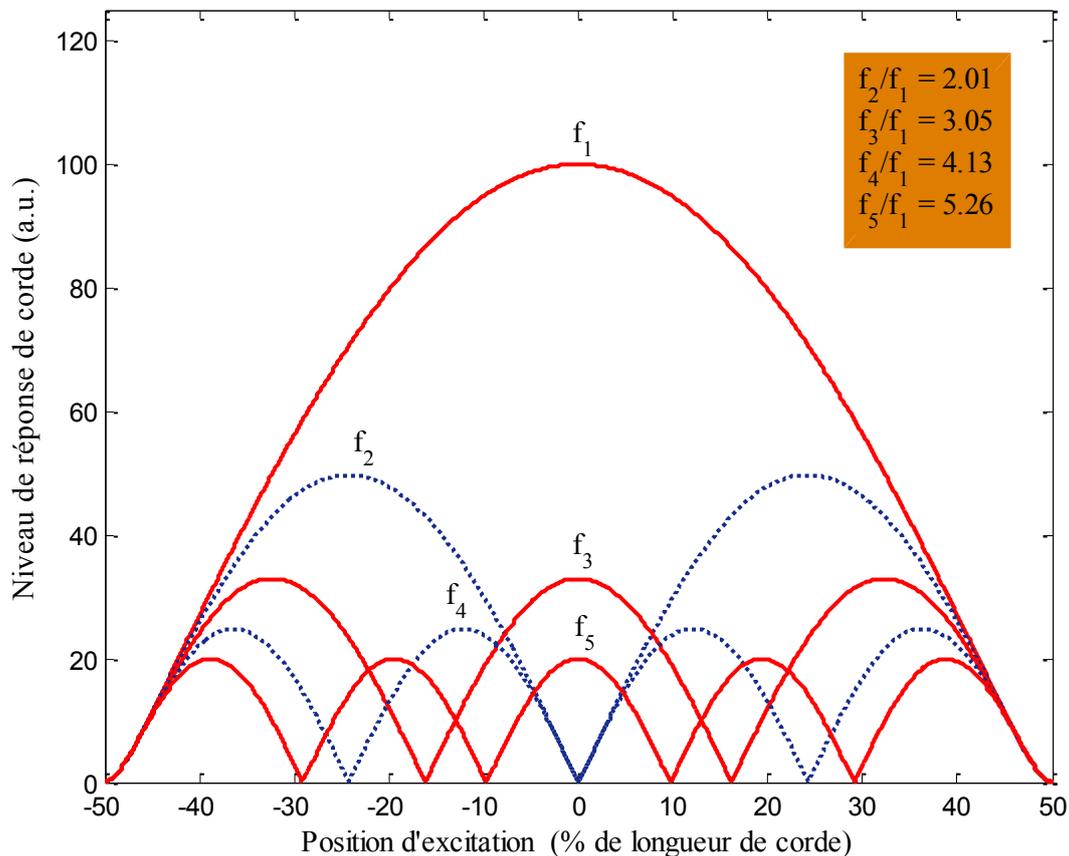


Figure III.17 - Niveau des cinq premiers modes de résonance d'une corde avec raideur

III.2.2.3 Influence de la raideur de la corde

Sans tenir compte de la raideur de la corde, la fréquence de résonance du nième ordre vaut n fois la fréquence de résonance fondamentale. Ainsi la fréquence de résonance fondamentale peut être déduite facilement de la mesure de n'importe quel mode de résonance, ce qui est intéressant pour améliorer la précision. En tenant compte de la raideur de la corde, la fréquence de résonance fondamentale ne peut pas être directement calculée à partir des fréquences de résonance d'ordre plus élevée car les fréquences de résonance ne sont pas

strictement proportionnelles à l'ordre n du mode de résonance. Malheureusement, une corde réelle présente toujours une certaine raideur.

Avec les valeurs numériques de l'exemple précédent, les fréquences de résonance d'une corde sans raideur, comparées avec les fréquences de résonance d'une corde avec raideur, sont rassemblées pour les cinq premiers modes de résonance dans le Tableau III.1. On voit bien que les fréquences de résonance d'une corde avec raideur sont plus hautes que celles d'une corde sans raideur. Vu que l'écart de fréquence entre les deux cordes est trop grand pour être ignoré, le modèle simple n'est presque jamais appliqué dans la pratique, l'erreur faite étant de 45.38 Hz au mode de résonance fondamental.

Tableau III.1 - Fréquences de résonance d'une corde sans et avec raideur

Ordre du mode		1	2	3	4	5
Sans raideur	f_r (Hz)	978.87	1957.74	2936.61	3915.48	4894.35
Avec raideur	f_r (Hz)	1024.25	2062.01	3126.44	4230.05	5384.45
	f_n/f_1		2.01	3.15	4.13	5.26
Différence de fréquence (Hz)		45.38	104.27	189.83	314.57	490.10

En utilisant le modèle 2 de l'expression (III.52) qui s'adapte bien à la réalité pour une corde avec raideur, on déduit la déviation fréquentielle du mode de résonance :

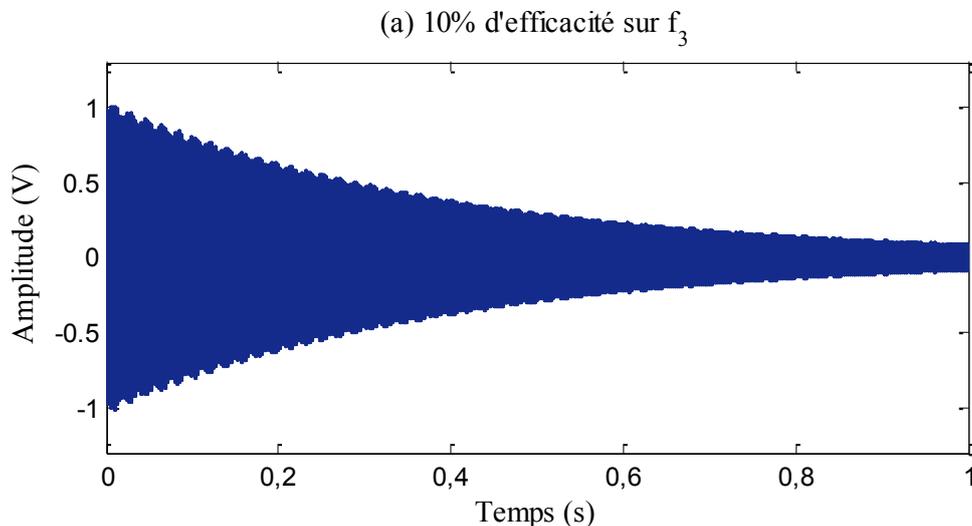
$$\frac{f_n}{f_1} = \frac{\frac{n}{2L} \sqrt{\frac{T}{\rho S}} \times \left(1 + \sqrt{\frac{4EI}{TL^2}}\right) \times \sqrt{1 + \frac{n^2 \pi^2 EI}{TL^2}}}{\frac{1}{2L} \sqrt{\frac{T}{\rho S}} \times \left(1 + \sqrt{\frac{4EI}{TL^2}}\right) \times \sqrt{1 + \frac{\pi^2 EI}{TL^2}}} = n \times \sqrt{\frac{1 + \frac{n^2 \pi^2 EI}{TL^2}}{1 + \frac{\pi^2 EI}{TL^2}}} \quad (\text{III.64})$$

Avec les valeurs numériques de la corde donnée précédemment, on remarque que $n^2 \pi^2 EI / TL^2 \ll 1$ pour $n \ll 15$. Ainsi l'expression (III.64) se réduit à

$$\frac{f_n}{f_1} \approx n \left(1 + \frac{(n^2 - 1)\pi^2 EI}{2TL^2} \right) \approx n \left(1 + \frac{(n^2 - 1)\pi^3 Er^4}{8TL^2} \right) \text{ pour } n \ll \sqrt{\frac{TL^2}{\pi^2 EI}} \quad (\text{III.65})$$

Le rayon de la corde r et sa longueur L ont alors une grande influence sur la déviation de la fréquence de résonance. Une augmentation de 1% du rayon de la corde aboutit à une augmentation de 4% de la déviation de fréquence de résonance, alors qu'une augmentation de 1% de la longueur de la corde aboutit à une réduction de 2% de la déviation de fréquence de résonance.

Comme les fréquences de résonance des modes d'ordre élevé ne sont pas des multiples entiers de la fréquence de résonance fondamentale, des distorsions peuvent apparaître dans le signal. La Figure III.18 donne un exemple typique qui met en évidence des distorsions du signal résultant de la répartition non harmonique des fréquences de résonance d'une corde avec raideur. Les signaux sur la Figure III.18a et la Figure III.18b sont respectivement exprimés par $(\sin(2\pi f_1 t) + 0.1 \sin(2\pi f_3 t))e^{-t/\tau}$ et $(\sin(2\pi f_1 t) + 0.5 \sin(2\pi f_3 t))e^{-t/\tau}$, avec la constante de temps τ égale à 0.4 s. Le premier signal signifie que le troisième mode de résonance est excité avec une efficacité de 10% par rapport à l'excitation simultanée du mode fondamental de résonance. Pour le deuxième signal, l'efficacité d'excitation pour le troisième mode de résonance augmente à 50%. On voit clairement apparaître dans ces figures un battement entre f_1 et f_3 . Ce battement n'apparaissait pas si on avait $f_3 = 3f_1$. Il est à noter que plus l'efficacité d'excitation sur le troisième mode de résonance est grande, plus la distorsion du signal est visible. Il est donc important de limiter autant que possible l'excitation des modes de résonance d'ordre élevé en même temps que le mode fondamental de résonance.



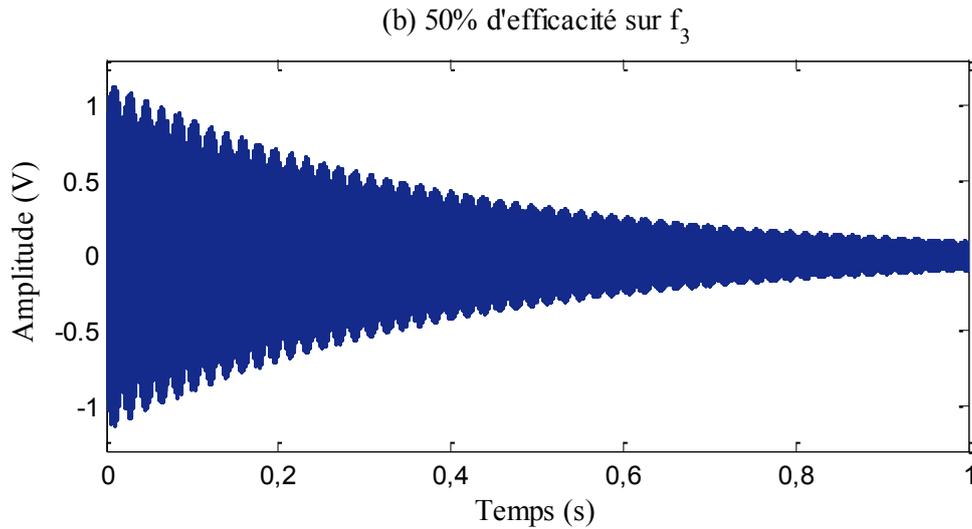


Figure III.18 - Effet du 3ème mode de résonance sur le signal lorsqu'il est excité en même temps que le mode fondamental de résonance avec une efficacité de (a) 10% ou (b) 50%

On peut cependant tirer davantage de la répartition non régulière des fréquences de résonance d'ordre élevé. La déviation fréquentielle (III.65) permet, à partir de deux fréquences de résonance mesurées, de déterminer le terme $EI/TL^2 = E\pi r^4/4TL^2$. La substitution de la valeur de EI/TL^2 dans le modèle 2 de l'expression (III.52) donne une valeur précise de $\sqrt{T/\rho S}/2L = \sqrt{T/\rho\pi r^2}/2L$. On peut alors trouver indépendamment deux paramètres parmi r , L , ρ , T et E en connaissant les autres. Par exemple, connaissant par la mesure deux fréquences de résonance d'ordres différents : $f_1 = 1024.25$ Hz et $f_5 = 5397.03$ Hz, on a

$$\frac{EI}{TL^2} \approx 4.55 \times 10^{-4} \quad \text{et} \quad \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{T}{\rho S}} \approx 980.16 \text{ Hz}$$

Si on connaît par ailleurs : $r = 115 \mu\text{m}$, $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$ et $E = 210 \text{ GPa}$, on obtient

$$\frac{1}{TL^2} \approx 15.76 \text{ 1/Nm}^2 \quad \text{et} \quad \frac{T}{L^2} \approx 1245.36 \text{ N/m}^2$$

En combinant ces deux informations, on obtient finalement : $T = 8.89 \text{ N}$ et $L = 84.49 \text{ mm}$. En pratique, il est très utile d'évaluer les paramètres de cette façon. Le capteur étant sensible, une faible variation de l'un des paramètres peut entraîner une grande modification de la réponse du capteur. Il faut donc constamment contrôler et corriger les variations des paramètres au cours du fonctionnement du capteur.

III.2.2.4 Influence de la géométrie de la bobine d'excitation

En pratique, l'excitation de la corde n'est pas ponctuelle, car elle est faite avec une bobine de dimensions non nulles dans laquelle est inséré un noyau de fer doux. Cette bobine, a un rayon donné R_b et une longueur donnée L_b , et est positionnée à une distance donnée d de la corde (Figure III.19). Le champ magnétique généré par la bobine en un point $P(x_0, y_0, z_0)$ de la corde dépend du courant I circulant dans la bobine, du nombre de spires N de la bobine, de la taille de la bobine et de la position relative entre la bobine et le point P .

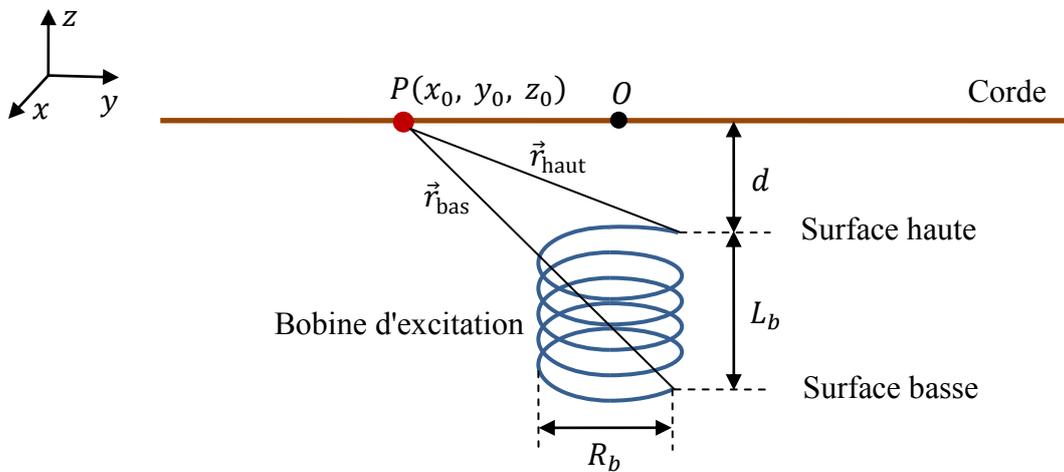


Figure III.19 - Champ magnétique produit par une bobine en un point donné

Le noyau de la bobine étant considéré de perméabilité infinie, on peut écrire que la bobine est équivalente à un aimant dont la densité d'aimantation est NI/L_b , avec N/L_b le nombre de spire par unité de longueur. En utilisant la théorie du potentiel scalaire magnétique [113], on peut calculer le champ magnétique \vec{H} en tout point de l'espace en sommant l'effet des masses magnétiques fictives de part et d'autre du noyau. Le champ magnétique \vec{H}_p au point P s'écrit :

$$\vec{H}_p = \int_{\text{surface haute}} \frac{NI\vec{r}_{\text{haut}} \cdot ds}{4\pi L_b r^3} - \int_{\text{surface basse}} \frac{NI\vec{r}_{\text{bas}} \cdot ds}{4\pi L_b r^3} \quad (\text{III.66})$$

où \vec{r} est le vecteur joignant la source à la position (x_s, y_s, z_s) au point $(0, y, 0)$ sur la corde. Dans le système de coordonnées cartésiennes de la Figure III.19, en supposant l'origine des axes située au centre de la corde, l'amplitude du champ magnétique est donnée par

$$H_p = \frac{NI}{4\pi L_b} \left| \begin{array}{l} \int_{\text{surface haute}} \frac{\begin{pmatrix} -x_s \\ y-y_s \\ d \end{pmatrix} dx_s dy_s}{(x_s^2 + (y-y_s)^2 + d^2)^{3/2}} - \\ \int_{\text{surface basse}} \frac{\begin{pmatrix} -x_s \\ y-y_s \\ d+L_b \end{pmatrix} dx_s dy_s}{(x_s^2 + (y-y_s)^2 + (d+L_b)^2)^{3/2}} \end{array} \right| \quad (\text{III.67})$$

Soit une bobine de rayon $R_b = 4$ mm, de longueur $L_b = 16$ mm. La distribution de la source, ou plutôt, la pression magnétique $\mu_0 H^2/2$ produite par une telle bobine sur la corde est calculée à partir de l'équation (III.67), comme le montre la Figure III.20. Les courbes sont obtenues dans trois cas différents tels que $d = R_b/3$, $d = R_b$ et $d = 3R_b$. Par souci de clarté, les niveaux de la source d'excitation sont multipliés par les coefficients indiqués dans la légende. On constate que plus la distance entre la bobine et la corde est petite, plus la source d'excitation est intense et concentrée. Cependant si la corde est trop proche de la bobine, cette dernière risque d'entraver les mouvements de la corde et donc de nuire à la mesure. Par conséquent, un compromis est nécessaire.

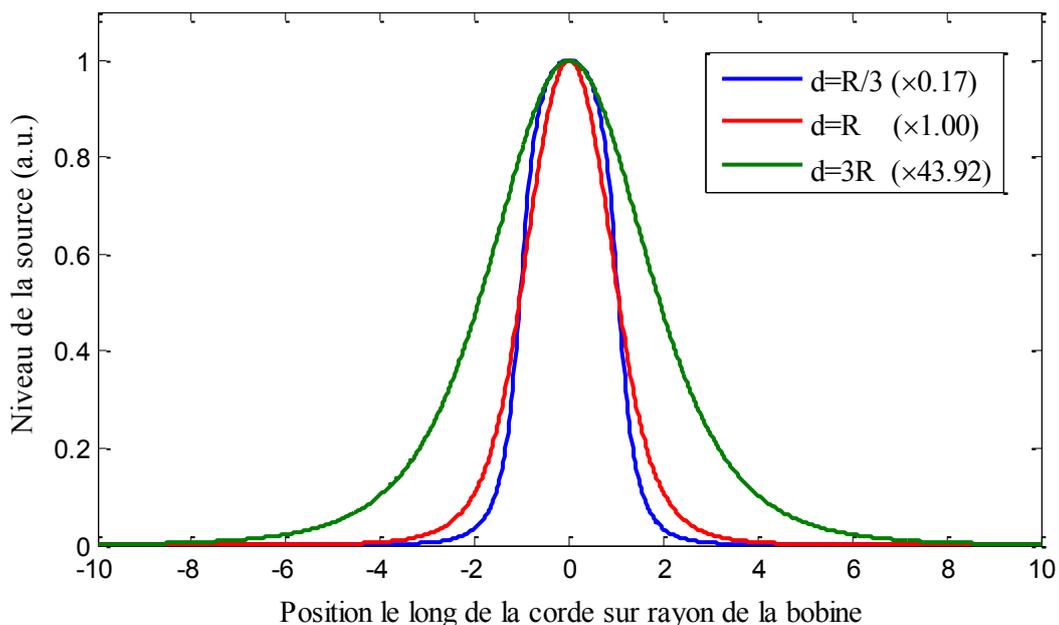


Figure III.20 - La pression magnétique produite par une bobine pour différents ratios entre la distance de la corde à la bobine et le rayon de la bobine

La Figure III.21 montre l'influence de la distance entre la corde et la bobine sur le niveau de la pression magnétique. L'axe horizontal représente le rapport entre la distance d et le rayon de la bobine R_b , et l'axe vertical représente la pression magnétique $\mu_0 H^2/2$ produite par la bobine sur le centre de la corde (pression maximale). Par souci de clarté, les pressions magnétiques sont normalisées en fonction de la pression maximale lorsque $d = R_b$. On note que dans le cas où la bobine est près de la corde ($d/R_b < 0.3$), le niveau de la pression magnétique est presque inchangé car le champ magnétique proche reste constant. Lorsque la bobine s'éloigne de la corde ($0.3 < d/R_b < 1$), le niveau de la pression magnétique diminue vite car la dépendance du champ magnétique à la distance devient ponctuelle, c'est-à-dire de l'ordre de $1/d^2$. Dans le cas où la bobine se situe plus loin de la corde ($d/R_b > 1$), le niveau de la pression magnétique subit une variation plus forte car la dépendance en distance décroît en $1/d^3$ en raison de l'effet du dipôle.

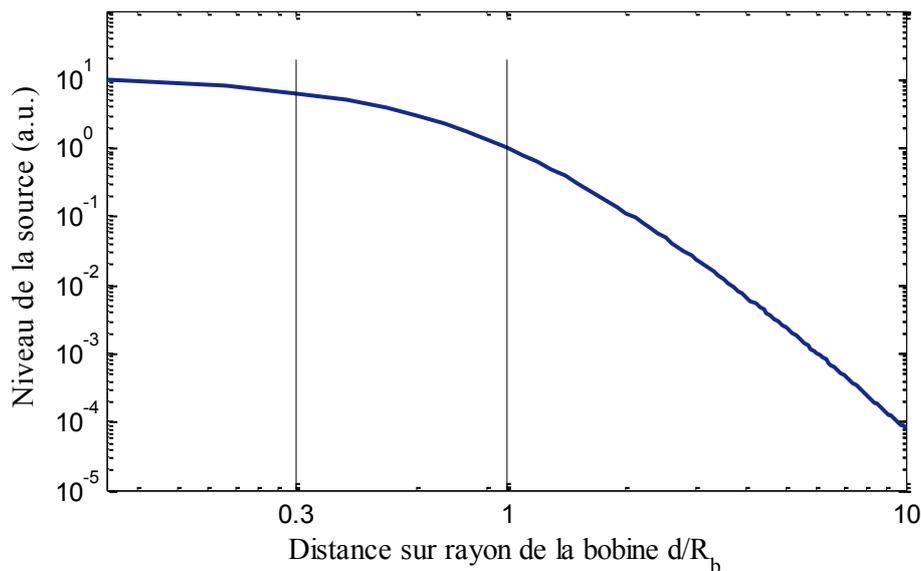


Figure III.21 - Niveau de la pression magnétique produite par une bobine en fonction de la distance entre la bobine et la corde

Étant donné que la distribution de l'intensité de la source d'excitation suivant l'horizontale est au moins aussi large que le rayon de la bobine, la réponse de la corde à une source réelle est légèrement différente de celle calculée avec une source ponctuelle. Selon l'équation (III.17), la réponse de la corde à une excitation engendrée par une bobine s'obtient par la convolution de la pression magnétique (Figure III.20) avec la fonction de Green (Figure III.17). La réponse obtenue est représentée sur la Figure III.22 lorsque la distance entre la

corde et la bobine est $d = R_b/3$, $d = R_b$ et $d = 3R_b$. Par souci de clarté, les amplitudes sont normalisées en fonction de l'amplitude maximale de la fréquence de résonance fondamentale. Le niveau de la réponse de la corde pour chaque situation par rapport à celui obtenu lorsque $d = R_b$ est donné dans la légende. En comparaison avec la réponse de la corde à une source ponctuelle (Figure III.17), l'effet principal est que tous les modes de résonance peuvent être excités quelle que soit la position de la bobine d'excitation. Par exemple, lorsque la bobine d'excitation est située au centre de la corde, l'amplitude de la vibration de la corde pour le second mode de résonance n'est plus nulle. Aussi, lorsque la bobine d'excitation se déplace du centre vers la gauche ou vers la droite d'une distance horizontale de $L/6$, la vibration de la corde pour le troisième mode de résonance n'est pas complètement annulée. Par ailleurs, le niveau de la réponse de la corde pour chaque mode de résonance diminue à mesure que la bobine s'éloigne de la corde.

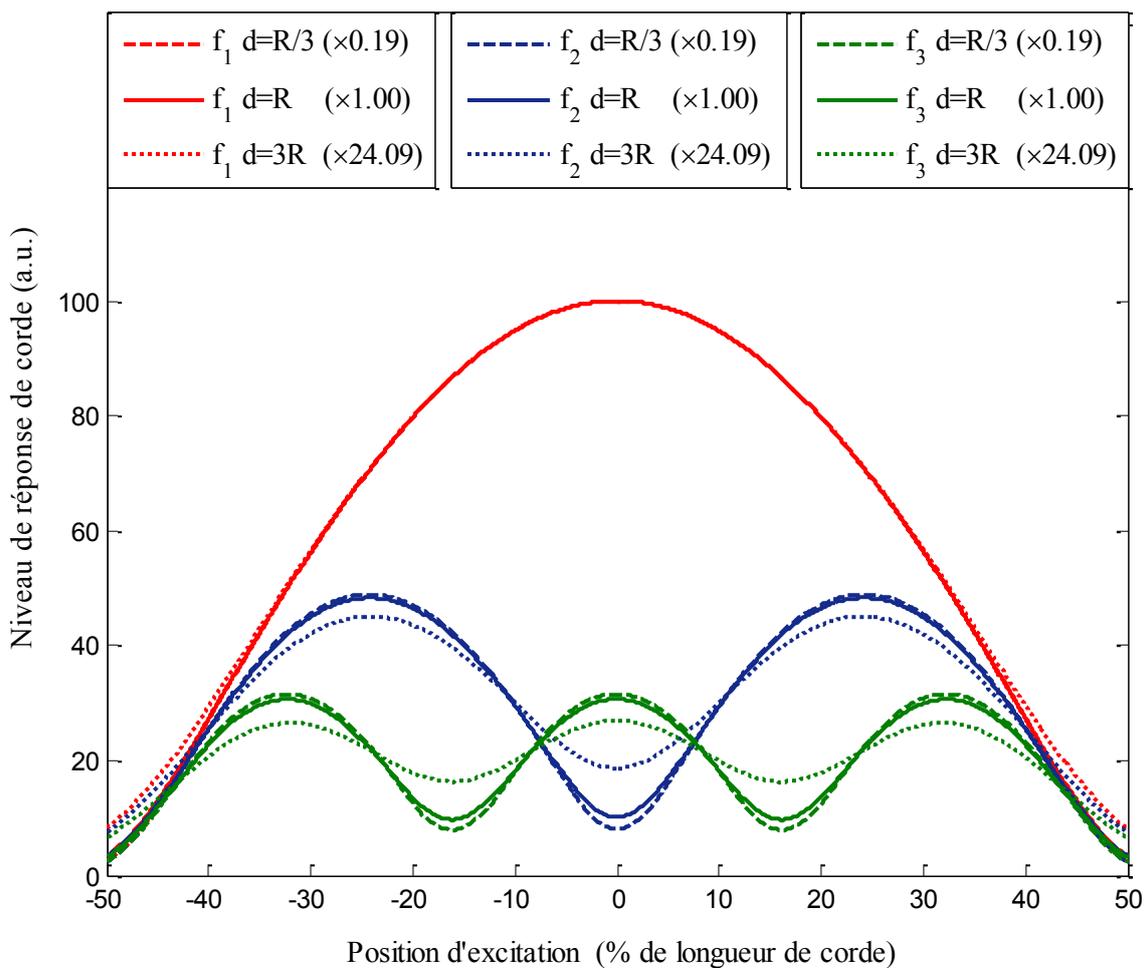


Figure III.22 - Réponse de la corde à une source réelle pour les 3 premiers modes de résonance

III.2.3 Validation expérimentale du système d'excitation

III.2.3.1 Dispositif expérimental

Pour valider les calculs théoriques de l'influence du mode d'excitation, la vibration de la corde est mesurée sous l'effet d'une bobine placée à différentes positions et alimentée par différents signaux d'excitation. Comme le montre la Figure III.23, le dispositif expérimental est composé d'un capteur à corde vibrante dans lequel une fente est utilisée pour qu'un plateau en plastique puisse glisser le long de la corde. La longueur de la corde est de 85 mm et son rayon est de 115 μm . Deux bobines sont fixées sur ce plateau, l'une étant connectée à un générateur de signaux pour se comporter comme le système d'excitation et l'autre étant connectée à un oscilloscope pour se comporter comme le système de mesure. Il est ainsi possible de contrôler avec précision la position, le niveau et la fréquence de l'excitation imposée à la corde. Les expérimentations sont effectuées avec des excitations continues et pulsées.

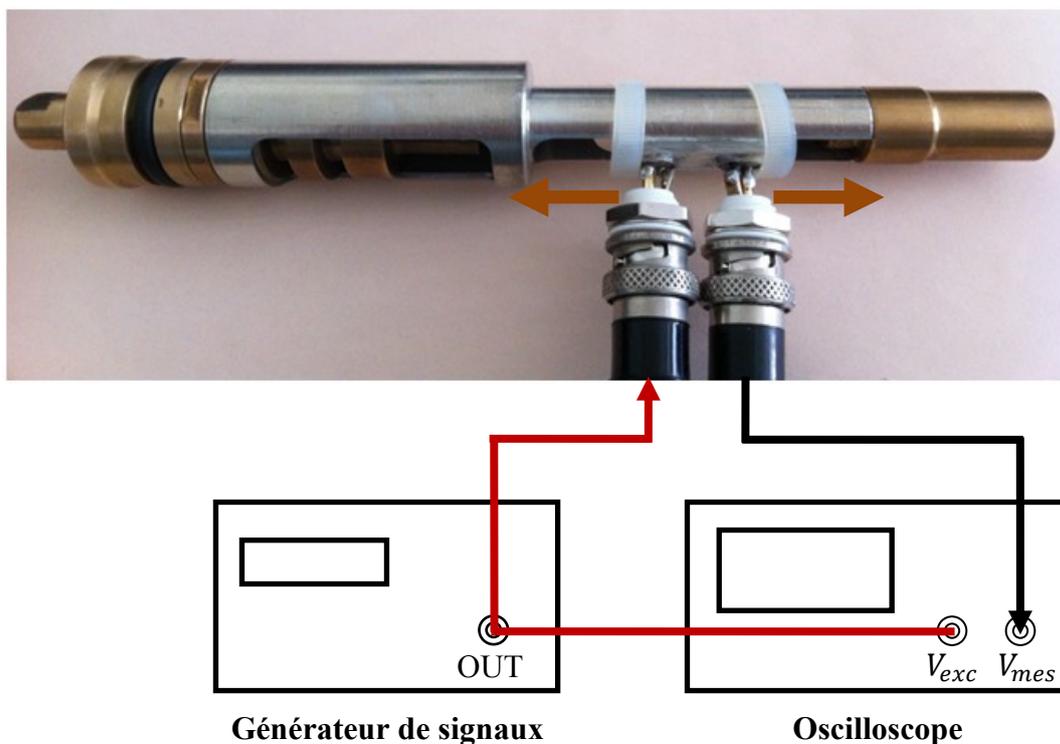


Figure III.23 - Dispositif expérimental comprenant un capteur et deux bobines coulissantes

III.2.3.2 Influence de l'excitation continue

En mode entretenu, le générateur de signaux excite en continu la corde par la première bobine et le déplacement de la corde est mesuré en même temps par la seconde bobine. Comme illustré sur la Figure III.24, la courbe bleue représente le signal d'excitation qui est une tension sinusoïdale d'amplitude 1.5 V, et la courbe rouge représente le signal mesuré qui est amplifié 10 fois par souci de clarté. La réponse de la corde V_{mes} est un signal "incliné" au lieu d'une vibration sinusoïdale pure. L'inclinaison du signal mesuré est attribuée à la non-linéarité du dispositif de mesure. Effectivement, au cours de la vibration de la corde, la distance entre la corde et la bobine de mesure change pendant chaque période de la vibration. En conséquence, le signal induit n'a pas la même amplitude lorsque la corde est à proximité de la bobine ou loin de la bobine. Comme la sensibilité de la bobine est similaire au champ qu'elle produit [114], sachant que ce champ n'est pas linéairement dépendant de la distance (Figure III.21), le signal mesuré correspond à une réponse non linéaire.

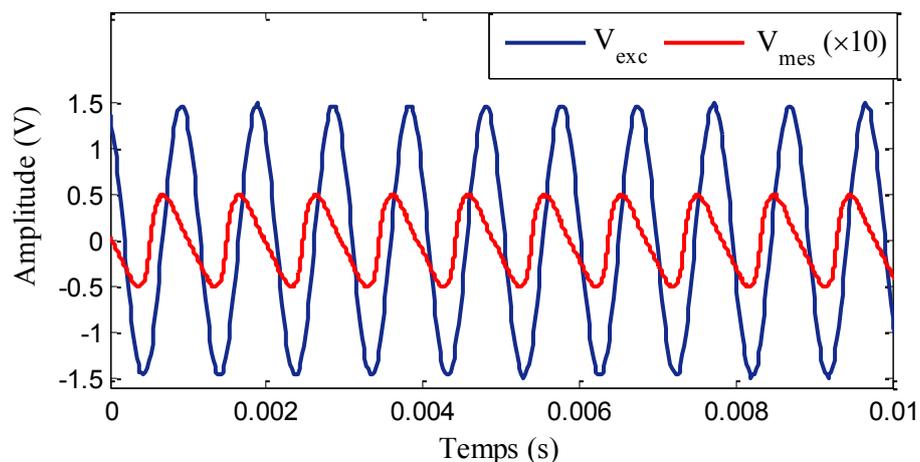


Figure III.24 - Signal d'excitation et signal mesuré en mode entretenu

Afin de trouver les fréquences de résonance, la fréquence du signal de sortie du générateur est réglée à une valeur légèrement inférieure à la fréquence de résonance attendue, soit à 1 kHz pour le premier mode de résonance, 2 kHz pour le second mode de résonance, 3 kHz pour le troisième mode de résonance, et ainsi de suite. Pour chaque mode de résonance, à partir de la valeur initiale, la fréquence du générateur est ensuite lentement augmentée jusqu'à ce que la corde vibre avec une amplitude maximale. Au cours des mesures des fréquences de résonance impaires, la bobine d'excitation est toujours positionnée au centre de la corde et à une certaine distance verticale de celle-ci. Pour trouver les fréquences de

résonance paires, la bobine d'excitation au centre est déplacée d'une distance égale à un dixième de la longueur de la corde afin de faciliter l'excitation de ces modes.

En effectuant une transformée de Fourier rapide (FFT) sur le signal mesuré V_{mes} , on obtient le spectre de fréquence de la réponse de la corde pour les premier (f_1), troisième (f_3) et cinquième (f_5) modes de résonance (voir Figure III.25a) et pour les deuxième (f_2) et quatrième (f_4) modes de résonance (voir Figure III.25b). On remarque que les cinq premiers modes de résonance ont lieu à $f_1 = 1024.25$ Hz, $f_2 = 2066.42$ Hz, $f_3 = 3125.92$ Hz, $f_4 = 4217.21$ Hz et $f_5 = 5397.03$ Hz. Les modes de résonance d'ordre supérieur à 1 ne sont pas des multiples entiers de la fréquence de résonance fondamentale (f_1), comme il a été prévu par l'étude théorique lorsque la raideur de la corde est prise en compte.

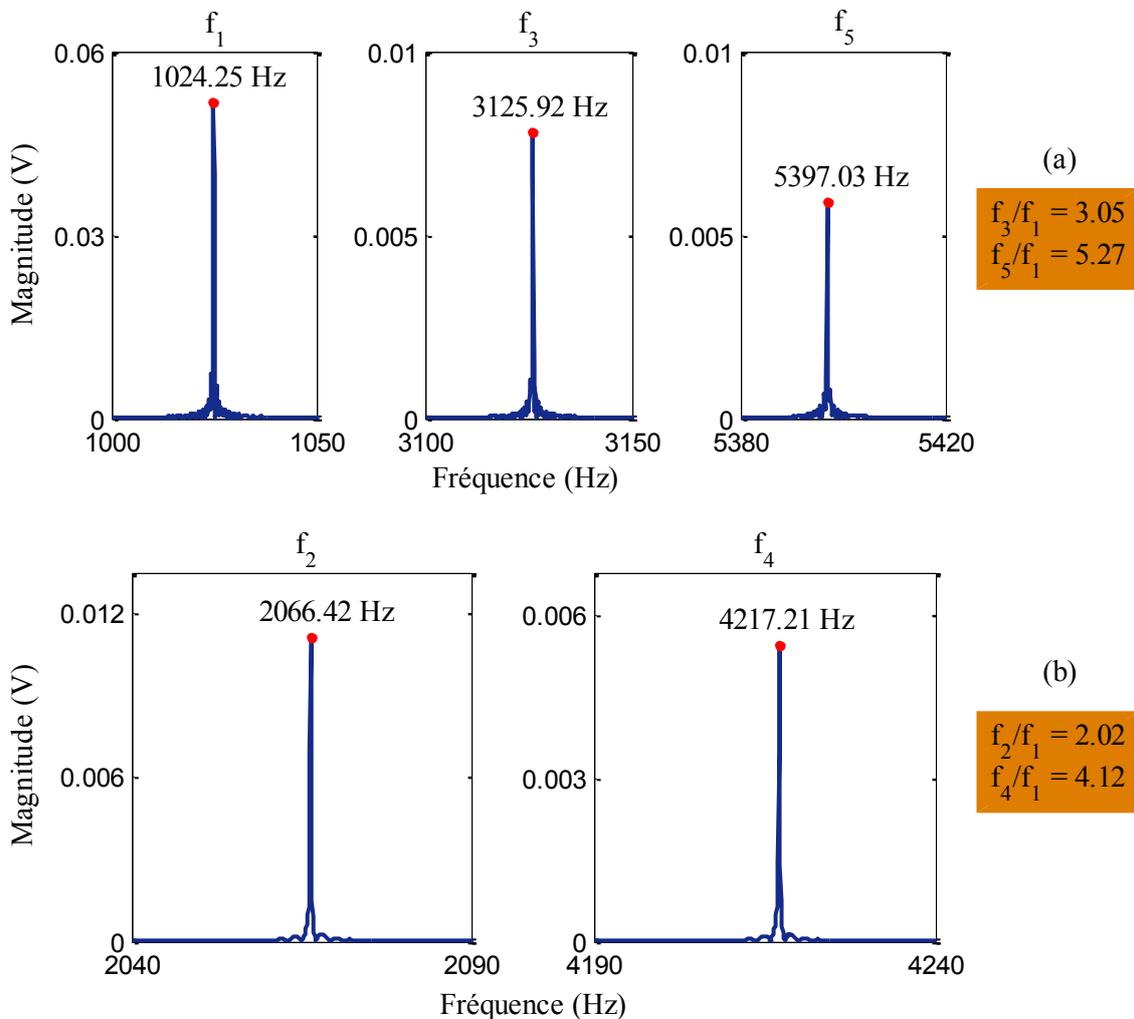


Figure III.25 - Spectre de fréquence pour (a) les modes impairs de résonance et (b) les modes pairs de résonance en mode entretenu

Les résultats théoriques et expérimentaux sont rassemblés dans le Tableau III.2. Avec les dimensions réelles de la corde du dispositif, $L = 85 \text{ mm}$ et $r = 115 \text{ }\mu\text{m}$, ainsi que ses propriétés mécaniques, $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$ et $E = 210 \text{ GPa}$, il faut ajuster la tension mécanique sur la corde à $T = 8.9741 \text{ N}$ afin d'obtenir $f_1 = 1024.25 \text{ Hz}$. D'après les calculs numériques sur ordinateur (Figure III.14), on obtient théoriquement $f_2 = 2062.01 \text{ Hz}$, $f_3 = 3126.44 \text{ Hz}$, $f_4 = 4230.05 \text{ Hz}$ et $f_5 = 5384.45 \text{ Hz}$. Ainsi les résultats expérimentaux sont en accord avec les résultats théoriques, avec des écarts relatifs inférieurs à 0.21% pour le second mode de résonance, à 0.017% pour le troisième mode de résonance, à 0.30% pour le quatrième mode de résonance et à 0.23% pour le cinquième mode de résonance.

Tableau III.2 - Fréquences de résonance d'une corde avec raideur

Ordre du mode		1	2	3	4	5
Théorique	f_r (Hz)	1024.25	2062.01	3126.44	4230.05	5384.45
	f_n/f_1		2.01	3.05	4.13	5.26
Expérimental	f_r (Hz)	1024.25	2066.42	3125.92	4217.21	5397.03
	f_n/f_1		2.02	3.05	4.12	5.27
Écart relatif de fréquence			0.21%	0.017%	0.30%	0.23%

En faisant glisser la bobine d'excitation, on détermine par la mesure l'influence de la position d'excitation sur la réponse de la corde. La Figure III.26 montre l'amplitude de la vibration de la corde en fonction de la position de la bobine d'excitation. Les trois courbes correspondent respectivement aux excitations aux trois premières fréquences de résonance : $f_1 = 1024.25 \text{ Hz}$, $f_2 = 2066.42 \text{ Hz}$ et $f_3 = 3125.92 \text{ Hz}$. Les résultats expérimentaux sont proches de ceux prédits par la théorie (Figure III.22). Lorsque la bobine d'excitation est située au centre de la corde, l'amplitude de vibration de la corde est maximale pour le premier et le troisième mode de résonance, mais minimale pour le second mode de résonance. Le rapport de l'amplitude maximale entre le troisième mode et le premier mode est de 32.8%. Comme la plage de coulissement de la bobine d'excitation est limitée, on ne peut atteindre qu'une plage de $\pm 10\%$ de la longueur de la corde qui correspond à la partie centrale de la Figure III.22.

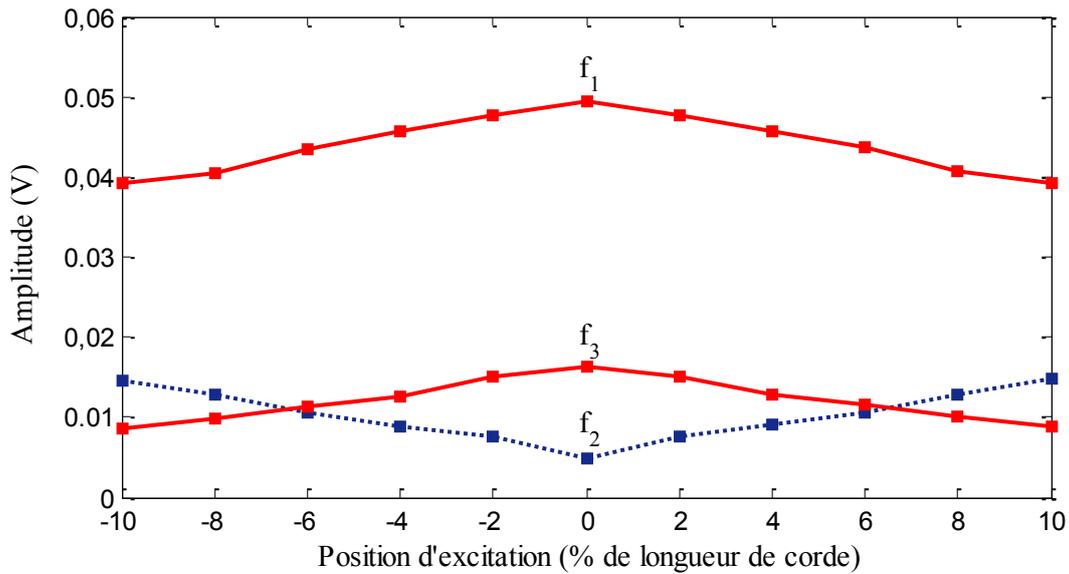


Figure III.26 - Effet de la position d'excitation sur la réponse de la corde en mode entretenu

III.2.3.3 Influence de l'excitation pulsée

En mode amorti, la première bobine est initialement alimentée par une impulsion modulée composée d'un nombre donné de cycles. Chaque cycle correspond à une tension sinusoïdale de fréquence 1 kHz et d'amplitude 1.5 V. Après cette brève excitation, la corde est déplacée de sa position d'équilibre et relâchée. Afin de s'assurer que le signal mesuré correspond vraiment à la réponse libre de la corde, il faut attendre un certain temps, dit temps mort, pour que la vibration libre de la corde ne soit pas mélangée avec un résiduel de l'excitation. Le signal dans la seconde bobine est alors mesuré après la durée de l'excitation pulsée et un temps mort de quelques dizaines de millisecondes (environ 50 ms).

Les Figures III.27, III.28 et III.29 montrent respectivement les réponses de la corde aux excitations pulsées composées de 200, 50 et 10 cycles, lorsque la bobine d'excitation est située au centre de la corde. Dans le cas de l'excitation pulsée de 200 cycles, la réponse de la corde se manifeste comme une oscillation amortie dont l'amplitude décroît exponentiellement avec le temps. Dans le cas de l'excitation pulsée de 50 cycles et de l'excitation pulsée de 10 cycles, les réponses de la corde sont des signaux en dents de scie au lieu des oscillations amorties. Les dentures observées sont dues aux fréquences de résonance d'ordre élevé non multiples entiers de la fréquence de résonance fondamentale, comme il a été prévu par les calculs théoriques (Figure III.18). Plus la durée d'impulsion d'excitation est courte, plus la distorsion de la réponse de la corde est grande.

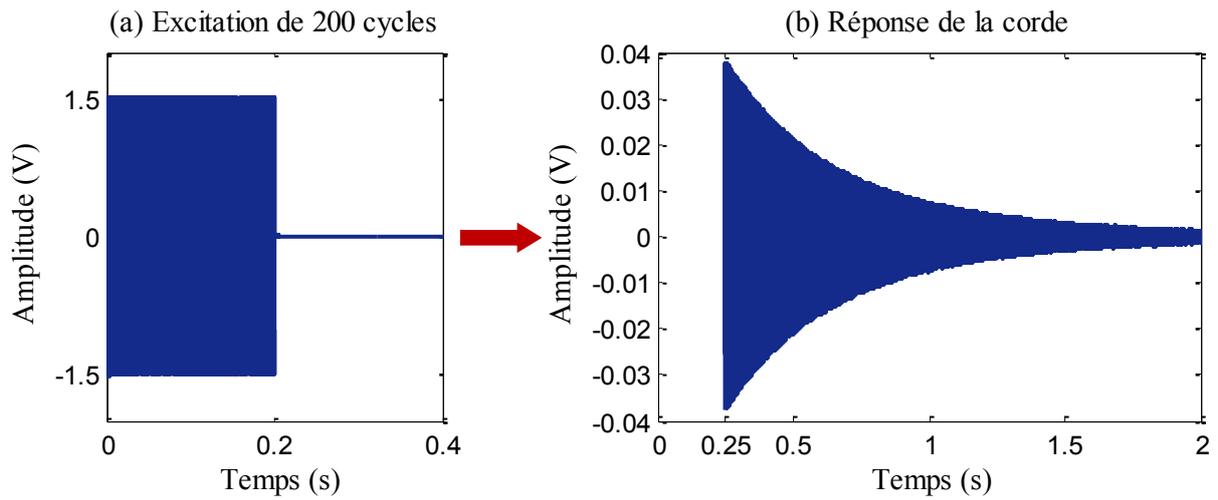


Figure III.27 - Réponse de la corde à une excitation pulsée de 200 cycles

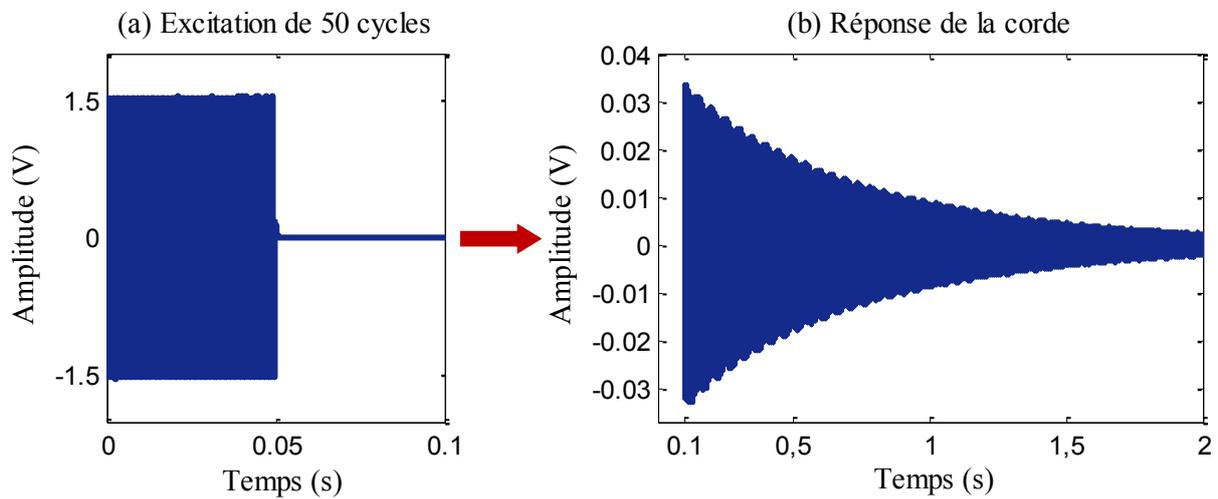


Figure III.28 - Réponse de la corde à une excitation pulsée de 50 cycles

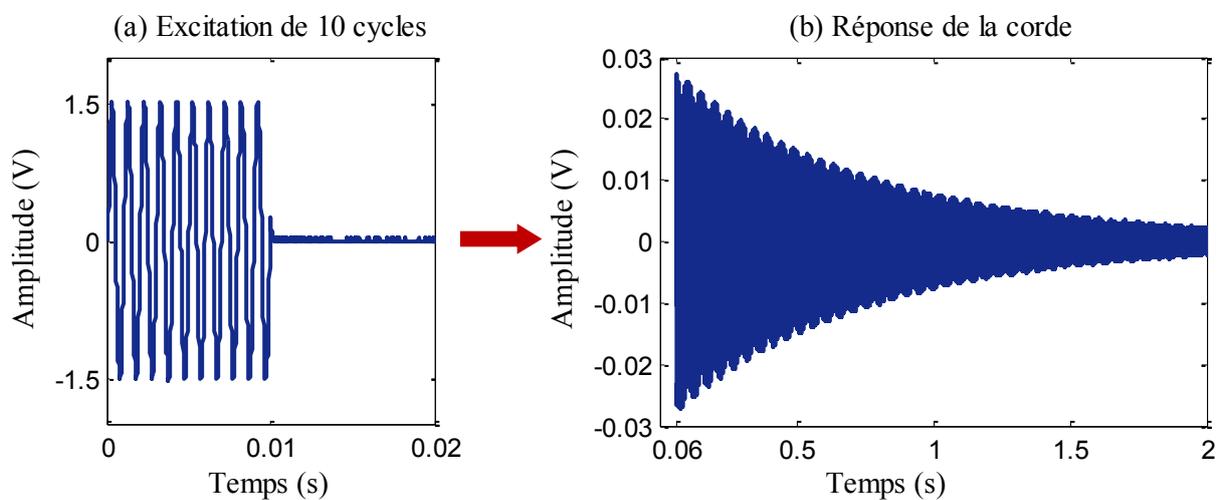


Figure III.29 - Réponse de la corde à une excitation pulsée de 10 cycles

En appliquant sous MATLAB une transformée de Fourier rapide (FFT) au signal mesuré, on obtient les spectres de fréquence des réponses de la corde dans les trois cas des excitations précédentes, comme le montre la Figure III.30. La fenêtre temporelle de FFT est réglée à 4.5 s (seulement 2 s sont montrées sur les Figures III.27b, III.28b et III.29b par souci de clarté) de sorte que la résolution en fréquence est de 0.22 Hz.

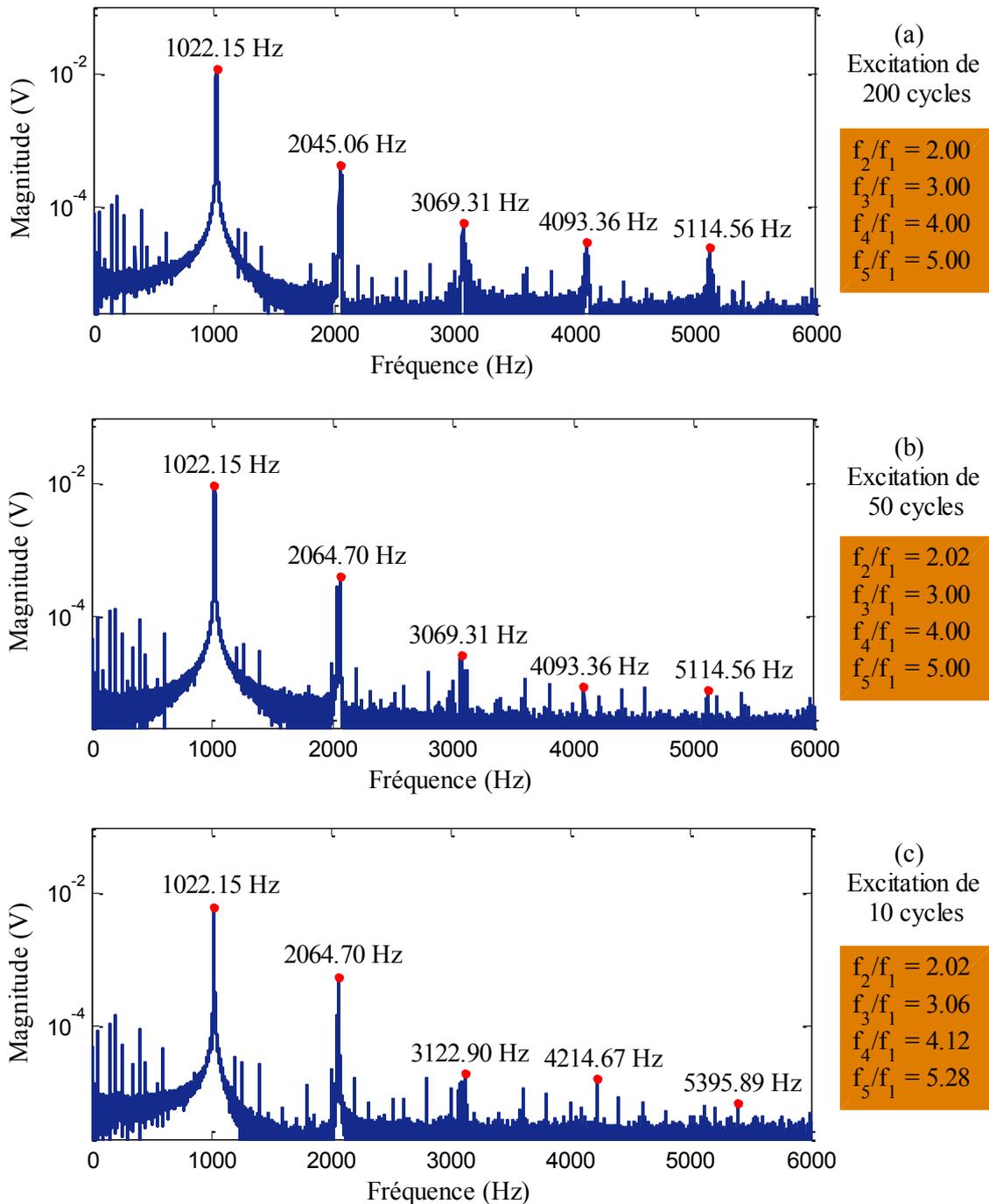


Figure III.30 - Spectre de fréquence de la réponse de la corde à (a) excitation pulsée de 200 cycles, (b) excitation pulsée de 50 cycles et (c) excitation pulsée de 10 cycles

Pour une excitation pulsée de 200 cycles (Figure III.30a), le pic de chaque fréquence de résonance (f_2, f_3, f_4 et f_5) se trouve exactement à un multiple entier de la fréquence de résonance fondamentale. Dans ce cas, les harmoniques d'ordre élevé sont principalement attribuables à la non-linéarité du dispositif de mesure mais pas à des résonances réelles de la corde. Lorsque la non-linéarité du système n'est pas prise en compte, on peut conclure que seul le mode fondamental de résonance est excité. En effet, le grand nombre de cycles concentre l'excitation autour de la fréquence de résonance fondamentale.

Pour une excitation pulsée de 50 cycles (Figure III.30b), le second mode de résonance est excité en raison de la raideur de la corde, tandis que les troisième, quatrième et cinquième harmoniques sont dues à la non-linéarité du dispositif de mesure, comme dans le cas d'une excitation pulsée de 200 cycles.

Pour une excitation pulsée de 10 cycles (Figure III.30c), les cinq premiers modes de résonance sont excités à cause de la raideur de la corde. Comme prévu théoriquement, les rapports entre les fréquences de résonance d'ordre élevé et la première fréquence de résonance ne sont plus entiers. Par conséquent, il est impossible de déduire précisément la fréquence de résonance fondamentale à partir des autres fréquences de résonance. On constate aussi que les pics causés par la non-linéarité du dispositif de mesure se produisent à des multiples entiers de la fréquence de résonance fondamentale. Leurs amplitudes sont cependant plus faibles que celles des pics dues à la raideur de la corde.

En première approximation, la largeur de bande de l'excitation est déterminée par l'inverse de la durée d'impulsion. Par conséquent, plus la durée d'impulsion est courte, plus la bande de fréquences excitées est large, comme illustré sur la Figure III.31. Une excitation plus importante des modes de résonance d'ordre élevé peut être prévue en appliquant des impulsions encore plus courtes, en particulier une impulsion unique, ce qui complique l'analyse du signal pour une mesure précise. En conséquence, une durée d'impulsion plus longue est préférable pour éviter l'effet de la raideur de la corde et donc pour améliorer les performances du capteur en mode amorti. En considérant une impulsion rectangulaire à la fréquence de résonance fondamentale, l'excitation est à peu près divisée par $2\pi m$ à la seconde fréquence de résonance et par $4\pi m$ à la troisième fréquence de résonance, avec m le nombre de cycles de l'impulsion. Ainsi il vaut mieux augmenter le nombre de cycles pour réduire la largeur de bande de l'excitation. Toutefois, un nombre de cycle trop grand risque de réduire de manière trop importante la bande et donc de ne plus exciter la corde, si la fréquence

d'excitation ne correspond pas précisément à la fréquence de résonance de la corde. Un bon compromis est de prendre un nombre de cycles $m \approx f_{01}/\Delta f$ où Δf est la gamme de fréquence du capteur et f_{01} sa fréquence de résonance nominale.

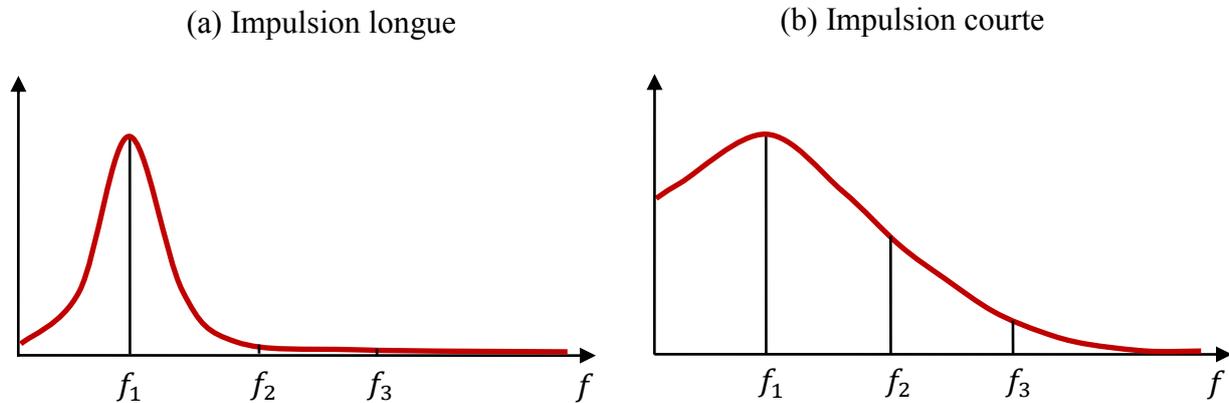


Figure III.31 - Relation inverse entre la durée d'impulsion et la largeur de bande d'excitation

En mode amorti, l'étude de l'influence de la position d'excitation sur la réponse de la corde s'effectue en faisant glisser la bobine d'excitation, comme en mode entretenu. Dans ce cas, la corde est excitée aux différentes positions par des impulsions qui sont respectivement réglées à 1 kHz, 2 kHz et 3 kHz. Pour réduire les résonances d'ordre élevé, le nombre de cycles de l'impulsion est fixé à 200. Comme l'indique la Figure III.32, les trois courbes représentent les amplitudes maximales des vibrations de la corde sous l'effet des excitations à $f_1 = 1$ kHz, $f_2 = 2$ kHz et $f_3 = 3$ kHz. Par rapport à une excitation composée d'un petit nombre de cycles, l'excitation de 200 cycles peut être approximativement considérée comme une excitation continue, car elle dure un temps relativement long. Comme attendu, les résultats obtenus en mode amorti sont similaires aux résultats obtenus en mode entretenu (Figure III.26) et aussi aux résultats prédits théoriquement (Figure III.22). Lorsque la bobine d'excitation est positionnée au centre de la corde, les premier et troisième modes de résonance sont fortement excités, alors que le second mode de résonance est extrêmement inhibé.

On note que le rapport entre l'amplitude maximale de la réponse de la corde à une excitation à 3 kHz et celle à une excitation à 1 kHz est seulement de 7.2% au lieu de 33%. Cette réduction de l'amplitude est imputable à un niveau non équivalent de l'excitation pour les premier et troisième modes de résonance, l'écart entre 1 kHz et la première fréquence de résonance réelle (1022.15 Hz) étant plus petit que celui entre 3 kHz et la troisième fréquence

de résonance réelle (3122.90 Hz). La décroissance de l'excitation étant approximativement inversement proportionnelle à l'écart de fréquence. En normalisant le niveau d'excitation du troisième mode de résonance avec celui du premier mode de résonance, on trouve une efficacité du bon ordre de grandeur : $(3122.90 - 3000)/(1022.15 - 1000) \times 7.2\% \approx 40\%$.

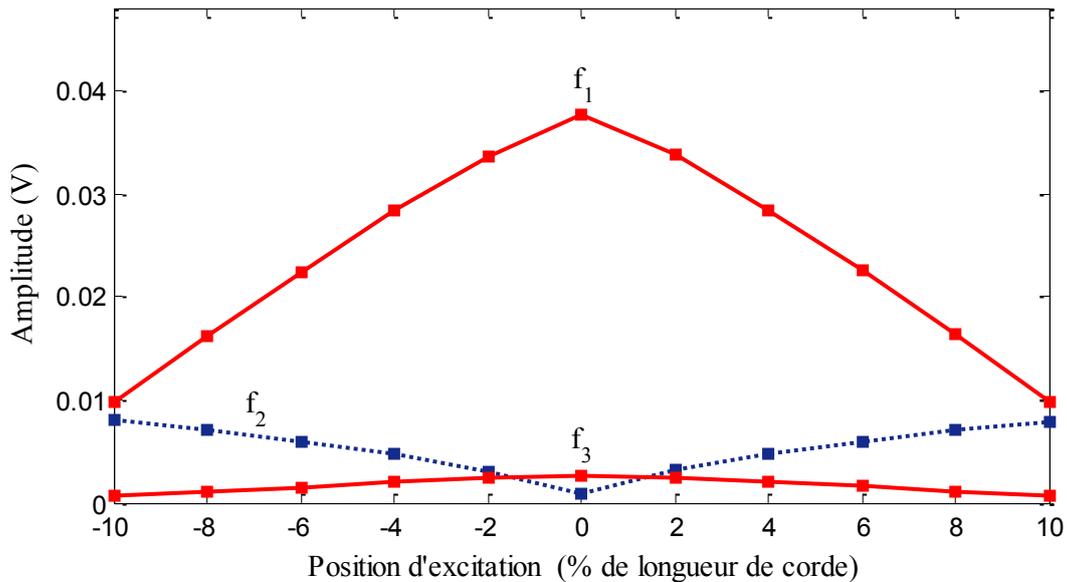


Figure III.32 - Effet de la position d'excitation sur la réponse de la corde en mode amorti

III.2.3.4 Comparaison des modes d'excitation

Les résultats expérimentaux en mode entretenu et en mode amorti sont tous conformes aux analyses théoriques en tenant compte de la raideur de la corde. L'influence du mode d'excitation sur la réponse du capteur peut se résumer comme suit :

- (1) Afin de maximiser l'efficacité d'excitation pour le mode fondamental de résonance, la bobine d'excitation doit être positionnée au centre de la corde.
- (2) Pour une excitation continue ou une excitation pulsée composée d'un grand nombre de cycles, seule le mode de résonance fondamentale est excité. Ainsi l'énergie est pleinement utilisée pour exciter la fréquence utile.

- (3) Pour une excitation pulsée composée d'un petit nombre de cycles, le mode de résonance fondamentale et les modes de résonance d'ordre plus élevé sont simultanément excités. Une partie de l'énergie est perdue dans les modes de résonance d'ordre élevé. Par ailleurs, l'apparition de dentures dans le signal peut conduire à une erreur d'estimation de la fréquence si le traitement du signal ne prend pas en considération l'excitation des modes de résonance d'ordre élevé.
- (4) En considérant une impulsion rectangulaire à la fréquence de résonance fondamentale, l'excitation est à peu près divisée par $2\pi m$ à la seconde fréquence de résonance et par $4\pi m$ à la troisième fréquence de résonance, avec m le nombre de cycles de l'impulsion. Il vaut alors mieux augmenter le nombre de cycles, ce qui toutefois, réduit la largeur de bande de l'excitation. Pour un capteur ayant une fréquence de résonance nominale f_{01} et une gamme de variation Δf , un nombre optimal de cycles est de $f_{01}/\Delta f$. De cette manière, la corde peut être excitée à sa première fréquence de résonance et l'excitation pour la résonance du n ème mode serait divisée par $2\pi n m$.

III.3 Système de mesure

Dans le système de mesure, à l'aide des couplages magnéto-mécaniques, les mouvements de la corde (grandeur physique à mesurer) sont convertis en un signal électrique (mesurande) dont la fréquence constitue la grandeur de sortie. La sortie du capteur ne correspond pas exactement aux mouvements de la corde car le transducteur physique-électrique peut être influencé par d'autres grandeurs physiques que celles à mesurer. Pour obtenir des informations aussi précises que possible sur la déformation de la structure à surveiller, le capteur doit être sensible aux paramètres dépendants des mouvements de la corde mais pas aux paramètres indépendants des mouvements de la corde. Pour étudier en détail les paramètres qui influent le signal en sortie du capteur, la modélisation du capteur par circuit électrique équivalent est effectuée selon le mode amorti et le mode entretenu.

III.3.1 Modélisation du capteur

III.3.1.1 Couplages magnéto-mécaniques

La géométrie complexe des capteurs à corde vibrante rend quasiment impossible l'étude analytique des couplages magnéto-mécaniques. Le fonctionnement du capteur est donc modélisé par un circuit électrique équivalent comme suit : la bobine d'excitation est alimentée par un courant impulsionnel (en mode amorti) ou alternatif sinusoïdal (en mode entretenu). Ceci crée un flux magnétique dont une partie est concentrée dans la corde et dont une autre partie est captée par la bobine de mesure. La vibration de la corde est la conséquence des forces magnétiques d'interaction entre les bobines, la corde et le corps du capteur. Lorsque la corde se déplace, une variation d'aimantation est produite dans l'environnement du capteur, car d'une part la corde peut être aimantée, d'autre part la forte perméabilité de la corde déforme le champ magnétique environnant.

Il est approprié d'assimiler la corde à un ensemble de dipôles magnétiques soit induits, soit permanents, comme illustré sur la Figure III.33. L'aimantation d'une pièce métallique est généralement dans le sens de sa plus grande dimension (donc ici la direction de la corde), alors que l'aimantation induite est dans le sens du champ magnétique. Le déplacement \vec{u} de la corde revient donc à modifier la position des dipôles magnétiques. Un dipôle magnétique,

défini par une boucle de courant de dimension infiniment petite, est caractérisé par son moment magnétique $\vec{m} = i d\vec{s}$, où i est le courant parcourant la boucle et $d\vec{s}$ le vecteur élément de surface orientée en accord avec i [115].

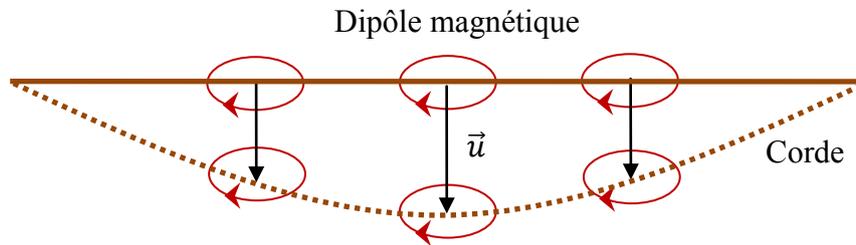


Figure III.33 - Modélisation du déplacement de la corde par l'intermédiaire des dipôles magnétiques

Considérons un dipôle magnétique présent dans l'environnement du capteur. Deux états d'équilibre magnétostatiques indépendants sont illustrés sur la Figure III.34. Prenons pour l'état *A* celui où le dipôle magnétique \vec{m} est à sa position \vec{x} . Prenons pour l'état *B* l'environnement du capteur dans lequel il n'y a pas de source à l'exception du circuit de mesure \mathcal{C}_m parcouru par un courant I_{Bm} de 1 A.

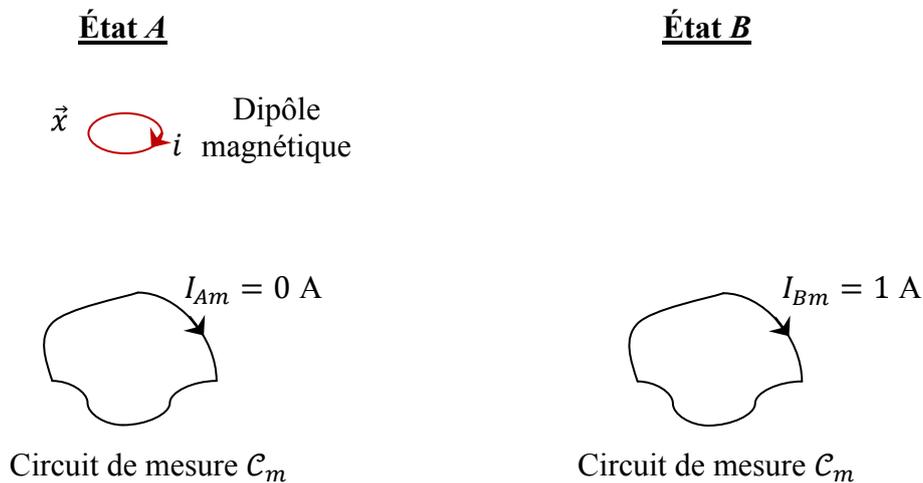


Figure III.34 - Deux états magnétostatiques indépendants

Les deux états peuvent être reliés par l'identité [116] :

$$\int \vec{A}_A \cdot \vec{J}_B dv = \int \vec{A}_B \cdot \vec{J}_A dv \quad (\text{III.68})$$

où \vec{A} est le potentiel vecteur et \vec{j} la densité de courant. En utilisant cette identité avec les états décrits par la Figure III.34, on a

$$1 \text{ A} \times \oint_{\mathcal{S}_m} \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{A}_A) \cdot d\vec{s} = i \times \oint_{\mathcal{S}_d} \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{A}_B) \cdot d\vec{s} \quad (\text{III.69})$$

où \mathcal{S}_m est la surface du circuit de mesure et \mathcal{S}_d la surface du circuit infinitésimal représentant le dipôle magnétique. Sachant que l'induction magnétique dérive du potentiel vecteur : $\vec{B} = \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{A})$, on arrive à

$$\int_{\mathcal{S}_m} \vec{B}_A \cdot d\vec{s} = \int_{\mathcal{S}_d} \vec{\beta}_m \cdot d\vec{s} \quad (\text{III.70})$$

avec $\vec{\beta}_m = \vec{B}_B / I_{Bm}$ qui représente l'induction magnétique générée par le circuit de mesure lorsque celui-ci est parcouru par un courant de 1 A, les autres sources de champ magnétique étant nulles. La surface \mathcal{S}_d du dipôle magnétique étant infinitésimale, $\vec{\beta}_m$ peut être considéré constant sur cette surface. Il vient alors

$$\delta\phi_m = i \overrightarrow{\mathcal{S}_d} \cdot \vec{\beta}_m = \vec{m} \cdot \vec{\beta}_m \quad (\text{III.71})$$

où $\delta\phi_m$ est la quantité de flux d'induction magnétique élémentaire créée par le dipôle \vec{m} . On remarque que si l'aimantation \vec{m} est perpendiculaire au champ $\vec{\beta}_m$, il n'y a pas de création de flux dans la bobine de mesure et donc aucun signal n'est généré. Ainsi la magnétisation de la corde (dans l'axe de la corde) ne produit aucun signal significatif. En revanche, la magnétisation induite par le champ \vec{H} n'est pas perpendiculaire au champ $\vec{\beta}_m$ et donc produit un signal. Le mouvement de la corde modifie l'environnement magnétique du capteur. Cependant, sachant que la perméabilité de la corde est très supérieure à μ_0 , le mouvement de la corde peut être assimilé, s'il est suffisamment petit, à l'apparition d'un dipôle $(\vec{H} \cdot \vec{n}) \vec{u} ds$ à la surface de la corde où \vec{u} est son déplacement au point considéré. Ainsi en reprenant (III.71), on a $\Delta\phi_m$ la variation de flux créée par le mouvement de la corde :

$$\Delta\phi_m = \oint_{\text{corde}} (\vec{H} \cdot \vec{n}) \vec{u} \cdot \vec{\beta}_m ds = \oint_{\text{corde}} (\vec{u} \cdot \vec{\beta}_m) \vec{H} \cdot d\vec{s} \quad (\text{III.72})$$

Le champ magnétique dans l'environnement du capteur est composé d'un champ résiduel \vec{H}_0 et d'un champ créé par le circuit d'excitation \mathcal{C}_e et vaut $\vec{H} = \vec{H}_0 + \vec{\beta}_e I_e / \mu_0$ où $\vec{\beta}_e$ est

l'induction magnétique générée par le circuit d'excitation lorsque celui-ci est parcouru par un courant de 1 A. En ajoutant le flux magnétique généré par le courant I_e dans le circuit d'excitation, le flux total ϕ_m à travers le circuit de mesure se met sous la forme :

$$\Delta\phi_m = L_{me}I_e + \oint_{\text{corde}} (\vec{u} \cdot \vec{\beta}_m) \vec{H} \cdot d\vec{s} \quad (\text{III.73})$$

où L_{me} est l'inductance mutuelle entre le circuit d'excitation et le circuit de mesure. En remplaçant \vec{H} par sa valeur $\vec{H} = \vec{H}_0 + I_e \vec{\beta}_e / \mu_0$, on obtient

$$\begin{aligned} \Delta\phi_m &= L_{me}I_e + I_e \oint_{\text{corde}} (\vec{u} \cdot \vec{\beta}_m) \frac{\vec{\beta}_e}{\mu_0} \cdot d\vec{s} + \oint_{\text{corde}} (\vec{u} \cdot \vec{\beta}_m) \vec{H}_0 \cdot d\vec{s} \\ &= (L_{me} + \delta L_{me})I_e + \oint_{\text{corde}} (\vec{u} \cdot \vec{\beta}_m) \vec{H}_0 \cdot d\vec{s} \end{aligned} \quad (\text{III.74})$$

Le premier terme de l'équation (III.74) correspond aux couplages magnéto-mécaniques entre la corde vibrante, le circuit d'excitation \mathcal{C}_e et le circuit de mesure \mathcal{C}_m . L'inductance mutuelle L_{me} entre les deux circuits et sa variation liées au déplacement de la corde \vec{u} sont données par

$$\begin{cases} L_{me} = \int \frac{1}{\mu_0} \vec{\beta}_m \cdot \vec{\beta}_e dv \\ \delta L_{me} = \oint_{\text{corde}} \frac{1}{\mu_0} (\vec{\beta}_m \cdot \vec{u}) \vec{\beta}_e \cdot d\vec{s} \end{cases} \quad (\text{III.75})$$

Le deuxième terme de l'équation (III.74) correspond à une source de flux ϕ_s causée par le déplacement de la corde \vec{u} dans le champ magnétique résiduel \vec{H}_0 avec

$$\phi_s = \oint_{\text{corde}} (\vec{\beta}_m \cdot \vec{u}) \vec{H}_0 \cdot d\vec{s} \quad (\text{III.76})$$

III.3.1.2 Schémas électriques équivalents

En condition de circuit-ouvert (mesure de flux), le courant I_m est nul dans le circuit de mesure. En revanche en condition de court-circuit (mesure de courant), c'est la variation de flux $\Delta\phi_m$ qui est nulle et on en déduit le courant I_m . En mode amorti, après une excitation pulsée initiale, l'aimantation rémanente de la corde ou du noyau de la bobine, associée au

déplacement de la corde, induit un courant I_m dans la bobine de mesure. Ainsi le circuit électrique équivalent contient une source d'alimentation $\partial\phi_s/\partial t$ et l'inductance propre L_{mm} de la bobine, comme illustré sur la Figure III.35a. La résistance série ajoutée sert à prendre en compte la résistance des fils de la bobine, généralement de l'ordre de $100\ \Omega$. La tension aux bornes de la bobine de mesure est donnée par

$$V_m = \frac{\partial((L_{mm} + \delta L_{mm})I_m)}{\partial t} + \frac{\partial\phi_s}{\partial t} \quad (\text{III.77})$$

Comme la source magnétique ϕ_s est excitée par la résonance de la corde, elle dépend de la fréquence comme un système du second ordre. Cette résonance peut être modélisée autour de la fréquence de résonance de la corde comme un circuit RLC en parallèle excité par une source ϕ_{s0} d'amplitude constante. Le circuit équivalent de la Figure III.35a devient celui de la Figure III.35b.

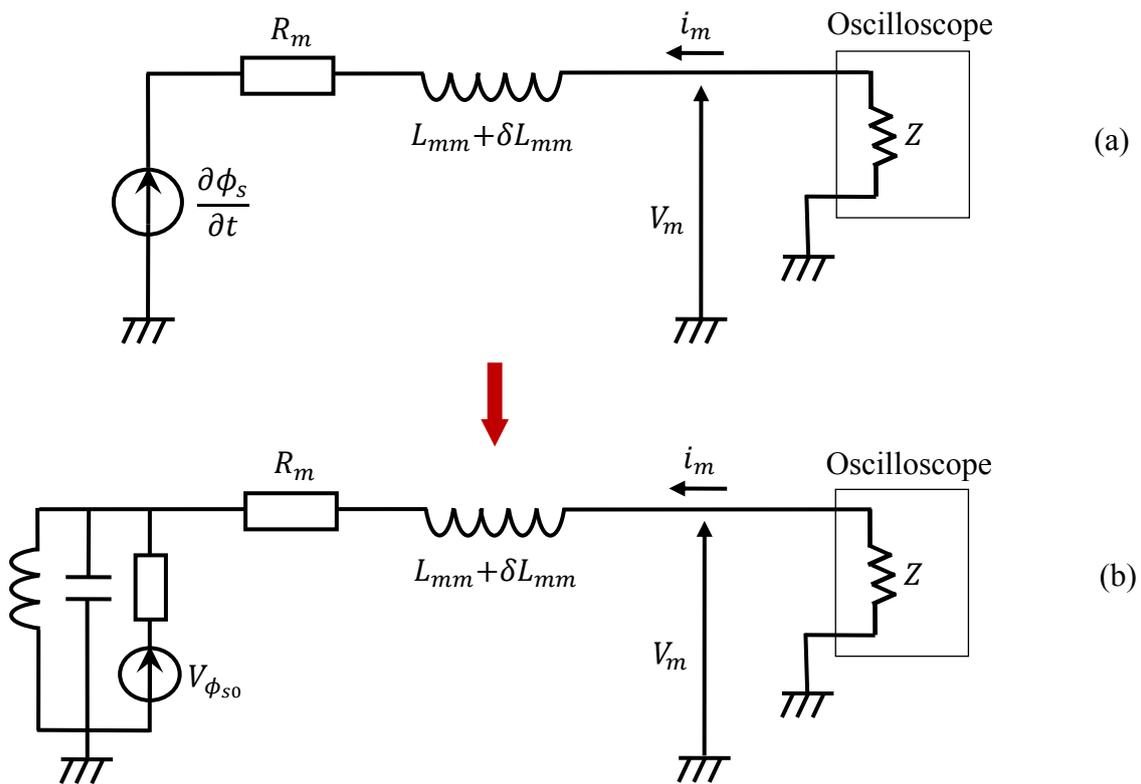


Figure III.35 - Circuit électrique équivalent pour la modélisation en mode amorti

En mode entretenu, le courant I_m et le courant I_e sont tous les deux non nuls. D'une part, l'aimantation rémanente de la corde ou du noyau de la bobine, associée au déplacement de la corde, induit un courant dans la bobine de mesure, comme dans le cas du mode amorti. D'autre part, le courant primaire I_e dans la bobine d'excitation induit un courant secondaire dans la bobine de mesure, due à l'induction mutuelle entre les deux bobines. Le circuit électrique équivalent contient donc une source d'alimentation $\partial\phi_s/\partial t$, l'inductance propre L_{mm} et l'inductance mutuelle L_{me} , comme illustré sur la Figure III.36a. Ici également des résistances sont ajoutées pour tenir compte de la résistance des fils des bobines. La tension aux bornes de la bobine de mesure est donnée par

$$V_m = \frac{\partial((L_{mm} + \delta L_{mm})I_m + (L_{me} + \delta L_{me})I_e)}{\partial t} + \frac{\partial\phi_s}{\partial t} \quad (\text{III.78})$$

Comme dans le cas précédent, la source magnétique ϕ_s qui est excitée par la résonance de la corde dépend de la fréquence comme un système du second ordre. Cette résonance peut être modélisée autour de la fréquence de résonance de la corde comme un circuit RLC en parallèle excité par une source ϕ_{s0} d'amplitude constante. Le circuit équivalent de la Figure III.36a devient celui de la Figure III.36b.

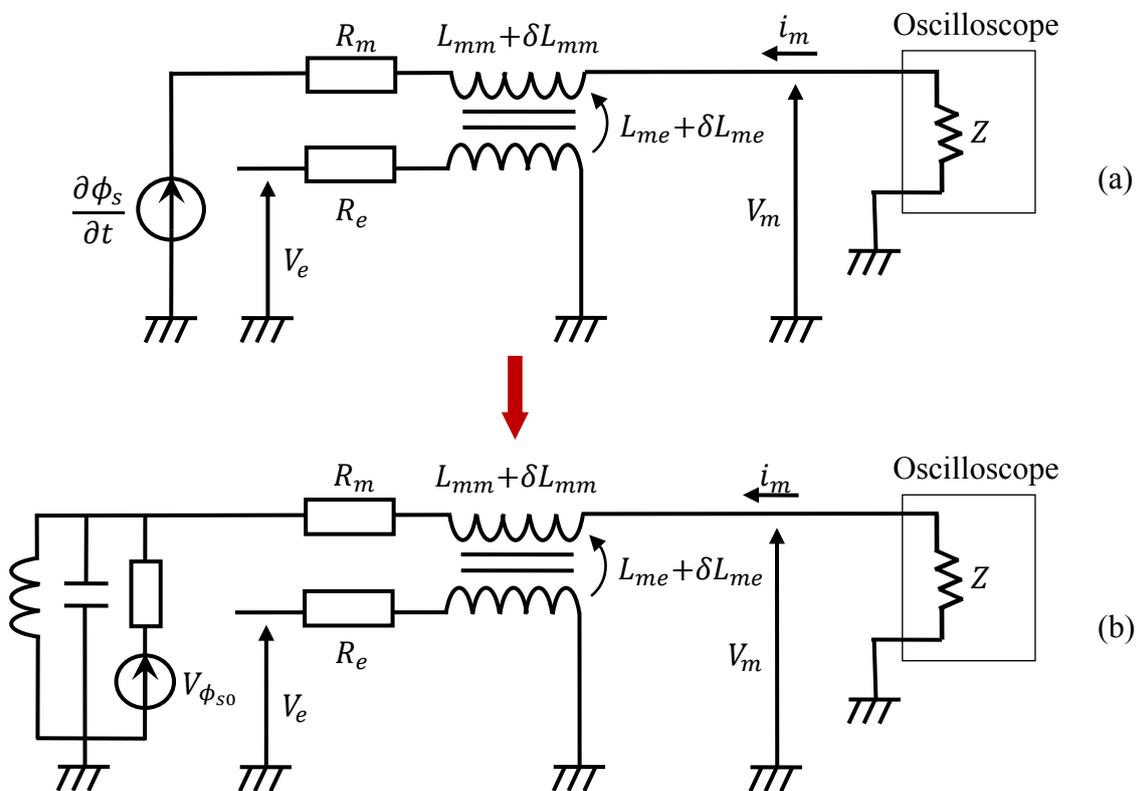


Figure III.36 - Circuit électrique équivalent pour la modélisation en mode entretenu

III.3.2 Sensibilité du capteur

D'après les circuits électriques équivalents, la réponse du capteur dépend non seulement du mouvement de la corde, mais peut aussi dépendre d'autres paramètres indésirables. En mode amorti, le champ magnétique résiduel dans l'environnement du capteur est indispensable pour produire un signal de mesure. Les perturbations de ce dernier peuvent donc conduire à une détérioration de la réponse du capteur. En mode entretenu, le champ magnétique résiduel, le signal dans la bobine d'excitation, ou plutôt la force magnétique moyenne, ainsi que le couplage mutuel entre la bobine d'excitation et la bobine de mesure peuvent être responsable de la différence entre la fréquence de résonance mesurée par le capteur et la fréquence de résonance idéale de la corde.

III.3.2.1 Étude de champ magnétique résiduel

Dans le cas d'un capteur neuf qui n'a pas encore été mis en service, le champ magnétique résiduel dans le capteur est nul parce que les noyaux de bobines et la corde ne sont pas encore magnétisés. Après une longue période d'inutilisation, le champ magnétique résiduel revient aussi à zéro du fait de la désaimantation. Sans champ magnétique résiduel, le signal induit par le déplacement de la corde n'est pas suffisamment grand pour être mesurable. Le noyau des bobines et la corde étant composés de matériaux légèrement ferromagnétiques, ils sont faciles à aimanter sous l'action d'un champ magnétique extérieur suffisamment fort. On peut étudier la magnétisation du noyau de la bobine et la magnétisation de la corde en alimentant simplement la bobine ou en alimentant la corde entourée d'un fil de cuivre pour pourvoir l'aimanter et en traçant les courbes de première aimantation.

Comme le montre la Figure III.37a, une bobine à noyau de fer est soumise à un champ magnétique croissant. Son induction magnétique B augmente rapidement lorsque le champ magnétique H est inférieur à 400 A/m. Lorsque le champ magnétique est au dessus de 400 A/m, l'induction magnétique atteint une valeur maximale 11 mT et demeure presque constante en raison de la saturation magnétique du noyau de la bobine. Si le champ magnétique s'annule, le noyau conserve une légère aimantation rémanente. Pour une corde (Figure III.37b), un champ magnétique au dessus de 30 A/m sature complètement le matériau constitutif de la corde et une aimantation rémanente est alors gardée dans la corde.

La valeur du champ de saturation dépend du matériau utilisé et de son volume. Après une période d'utilisation, le champ magnétique résiduel dans le capteur dû aux aimantations rémanentes de la corde et du noyau de la bobine ne varie en général pas beaucoup. Pourtant dans des cas particuliers, par exemple, le foudroiement, la variation du champ magnétique résiduel peut modifier le signal de sortie du capteur. L'effet de la foudre sur la réponse du capteur sera étudié dans le chapitre suivant.

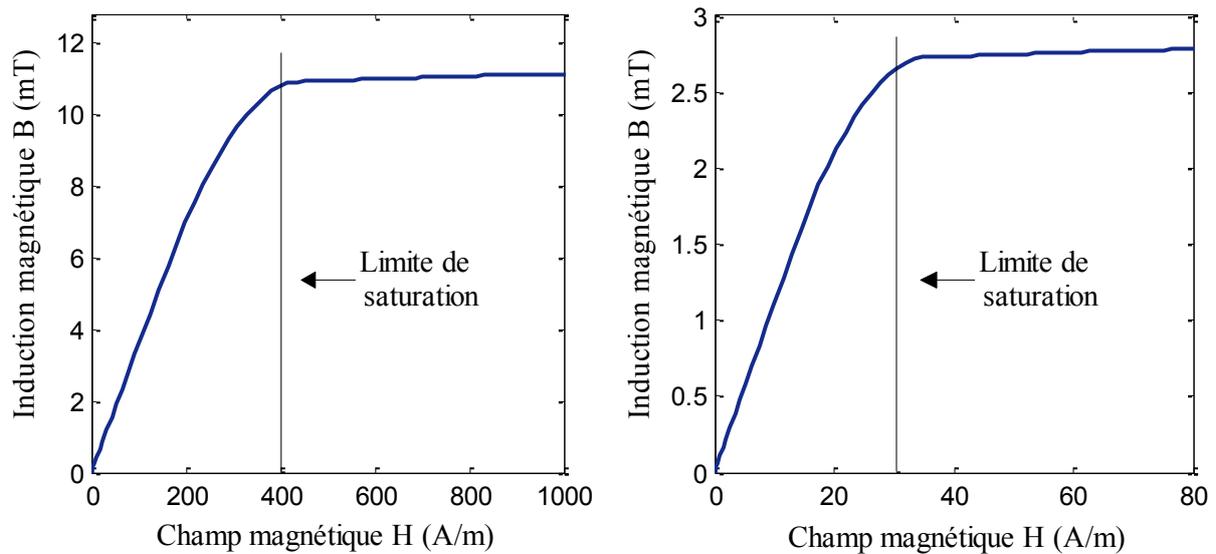


Figure III.37 - Magnétisation (2) du noyau de la bobine et (b) de la corde

III.3.2.2 Étude de force magnétique moyenne

En mode amorti, le rôle de la force magnétique est de déplacer la corde de sa position de repos. Une fois en mouvement, aucune force externe (force magnétique) n'agit sur la corde. Sous l'effet des forces intérieures (tension mécanique et force de flexion due à la raideur), la corde subit une vibration libre. La fréquence de la vibration est définie comme étant sa fréquence propre f_p de la corde. En présence des forces de frottement, l'amplitude de la vibration libre décroît au cours du temps. Dans ce mouvement oscillatoire amorti, la fréquence apparente f_a qui correspond au passage par zéro du signal de mesure est légèrement plus faible que la fréquence propre de la corde :

$$f_a = f_p \sqrt{1 - \zeta^2} \quad (\text{III.79})$$

où ζ est le coefficient d'amortissement. En général, l'amortissement est très faible, souvent inférieur à 10^{-3} , ce qui fait que l'écart de fréquence dû à l'amortissement est négligeable. Cependant cela implique qu'un seul mode de résonance de la corde soit excité. Or, en impulsionnel la largeur de bande peut exciter plusieurs modes ce qui complique l'analyse du signal mesuré.

En mode entretenu, l'excitation est permanente, la force magnétique agit donc continuellement et périodiquement sur la corde. Dans ces conditions, la force magnétique joue deux rôles distincts dans le fonctionnement du capteur : la mise en vibration de la corde, comme le cas du mode amorti, et l'entretien de la vibration pour compenser la perte d'énergie due aux frottements. Sous l'effet combiné de la force externe (force magnétique) et des forces intérieures (tension mécanique et force de flexion due à la raideur), la corde subit une vibration forcée non amortie dont la fréquence est identique à la fréquence d'excitation. À cause de la force magnétique qui est un paramètre supplémentaire, la fréquence de résonance mesurée en mode entretenu peut dévier de la fréquence naturelle de la corde.

Comme le champ magnétique généré par la circulation du courant dans la bobine d'excitation dépend de nombreux facteurs, notamment géométriques, il est difficile à déterminer analytiquement l'influence de la force magnétique sur la fréquence de résonance. Pourtant une augmentation de la fréquence de résonance mesurée en mode entretenu peut être démontrée en montrant que la tension de la corde augmente avec l'ajout de la force magnétique. Par souci de simplification, l'effet de la gravité et l'effet de la raideur de la corde qui sont équivalents en mode amorti et en mode entretenu ne sont pas pris en compte dans la démonstration. Au cours de la vibration libre en mode amorti, il n'y a pas de force magnétique appliquée perpendiculairement à la corde. À l'instant initial, la corde est horizontale et sa fréquence de résonance dépend de la tension mécanique T , comme illustré sur la Figure III.38a. Au cours de la vibration forcée en mode entretenu, la corde est soumise à la tension mécanique T comme en mode amorti et à la force magnétique moyenne $\overline{F_{mag}}$ qui attire perpendiculairement la corde vers la bobine, comme illustré sur la Figure III.38b.

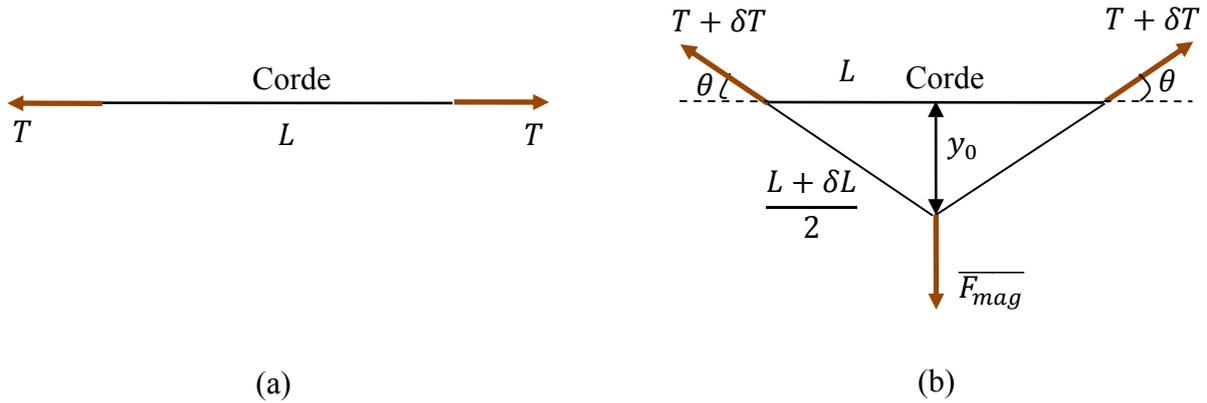


Figure III.38 - Effets des forces impliquées dans la vibration de la corde en (a) mode amorti et (b) mode entretenu

Sous l'effet de la force magnétique moyenne, la corde est initialement déplacée d'une distance y_0 , ce qui aboutit à un allongement de la corde δL et donc une variation de la tension mécanique δT sur la corde. En supposant que la force magnétique moyenne $\overline{F_{mag}}$ agit perpendiculairement au centre la corde, on a

$$\delta L \approx 2 \sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 - y_0^2} - L \approx \frac{2y_0^2}{L} \quad (\text{III.80})$$

La variation de la tension est donnée par la loi de Hooke :

$$\delta T = ES \frac{\delta L}{L} = \frac{2ESy_0^2}{L^2} \quad (\text{III.81})$$

Si on admet que la variation de la tension est très faible par rapport à la tension d'origine, c'est-à-dire $\delta T \ll T$, on peut déduire le déplacement initial y_0 à partir de la force magnétique moyenne $\overline{F_{mag}}$ par

$$y_0 = \frac{\tan(\theta)L}{2} \approx \frac{\overline{F_{mag}}L}{4T} \quad (\text{III.82})$$

En substituant l'expression (III.82) du déplacement initial y_0 dans l'équation (III.81), on obtient l'augmentation de la tension en fonction de la force magnétique moyenne :

$$\delta T = \frac{2ESy_0^2}{L^2} = \frac{ES}{8T^2} \overline{F_{mag}}^2 \quad (\text{III.83})$$

Selon l'expression de la fréquence de résonance du modèle simple ou du modèle complexe dans la section III.2.2, l'augmentation de la tension δT due à la force magnétique mène à une augmentation de la fréquence de résonance de la corde. En mode amorti, une variation de la fréquence de résonance de la corde se produit si le champ résiduel dans lequel elle se trouve change. En mode entretenu, comme la force magnétique est proportionnelle à la puissance de l'excitation, une augmentation de l'amplitude d'excitation (composante AC) provoque une augmentation de la fréquence de résonance. Pour imiter l'effet d'un champ magnétique moyen, on excite la corde par une tension alternative d'amplitude constante superposée à une tension continue variable (composant DC).

À titre d'exemple, considérons une corde sans raideur de longueur $L = 110$ mm et de rayon $r = 115$ μm , tendue sous tension mécanique $T = 15$ N. Les propriétés du matériau de la corde en acier inoxydable sont : la masse volumique $\rho = 7800$ kg/m^3 et le module d'Young $E = 210$ GPa. La bobine d'excitation de rayon $r_b = 1.5$ mm, ayant $N = 200000$ tours par mètre et un noyau de perméabilité élevé de $\mu = 1000\mu_0$, est située à $d = 2$ mm au dessus du centre de la corde. Comme la distance d de la bobine à la corde est très inférieure à la longueur et au diamètre de la bobine, le champ magnétique au niveau de la corde est donnée par [117]

$$H = N \frac{\mu_0 I_{emax} \sin \omega_e t}{2\mu} \frac{r_b^2}{(d^2 + r_b^2)^{3/2}} \quad (\text{III.84})$$

où I_e est le courant d'excitation et ω_e est la pulsation d'excitation. Lorsque un courant sinusoïdal d'amplitude $I_{emax} = 50$ mA passe à travers la bobine, le champ magnétique H est d'environ 5×10^5 A/m. Considérant également une surface sur la corde au sujet de la bobine de $S = 0.5$ mm^2 , on obtient une force magnétique moyenne appliquée au milieu de la corde $\overline{F_{mag}} = S\mu_0 H^2 / 2 = 0.08$ N. Selon l'équation (III.83) et l'expression (III.13) de la fréquence de résonance pour une corde sans raideur, la tension mécanique de la corde est augmentée de 6.5×10^{-3} N et la fréquence de résonance de la corde est donc augmentée d'environ 1 Hz.

III.3.2.3 Étude du couplage entre bobines

Dans le système de mesure à deux bobines, il existe deux types de couplage. D'une part, la vibration de la corde dans le champ magnétique résiduel produit une induction magnétique

dans la bobine d'excitation et la bobine de mesure. Un couplage est alors réalisé entre la corde et les bobines (couplage corde-bobine). D'autre part, l'alimentation en continu dans la bobine d'excitation produit également une induction magnétique directe dans la bobine de mesure du fait de l'inductance mutuelle. Ainsi un couplage a lieu entre les deux bobines (couplage bobine-bobine). Comme indiqué sur la Figure III.39, le couplage corde-bobine existe aussi bien en mode amorti qu'en mode entretenu, alors que le couplage bobine-bobine existe uniquement en mode entretenu.

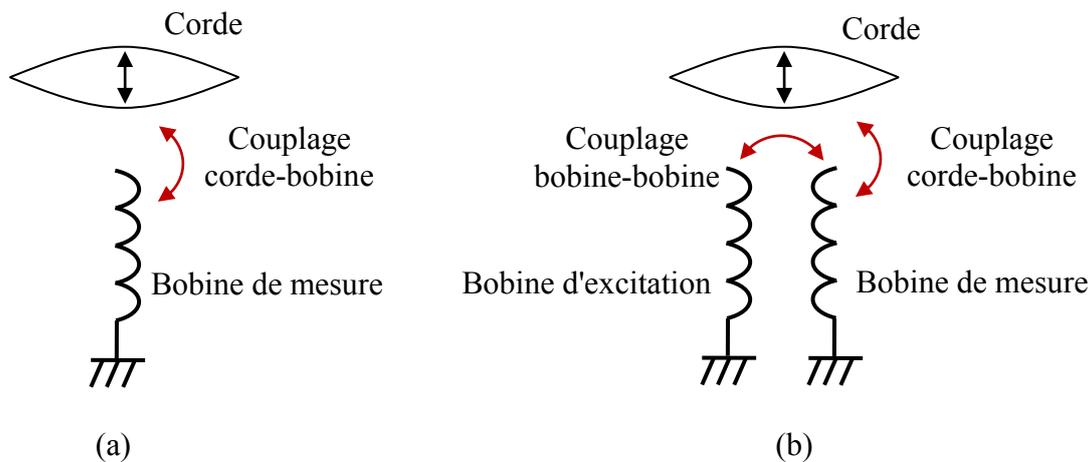


Figure III.39 - Couplages magnéto-mécaniques en (a) mode amorti et (b) mode entretenu

La fréquence réelle de résonance de la corde correspond à la fréquence du signal liée au couplage corde-bobine, c'est-à-dire la fréquence mesurée en mode amorti. L'expression de ce signal est en première approximation de la forme :

$$\frac{2i\zeta\omega\omega_0 V_{\phi_{smax}}}{(\omega_0^2 - \omega^2) + 2i\zeta\omega\omega_0} \quad (\text{III.85})$$

À la résonance, on a $\omega = \omega_0$ et l'amplitude de l'expression (III.85) est $V_{\phi_{smax}}$. En mode entretenu, le signal correspondant à la vibration de la corde est déformé en ajoutant la contribution due au couplage direct entre les deux bobines. Si cette contribution n'était pas dépendante de la fréquence, la résonance aurait lieu à la même fréquence qu'en mode amorti. Cependant, le transformateur formé par les deux bobines n'est pas parfait, et la présence de la résistance $R = R_e = R_m$ des bobines suffit produire une dépendance fréquentielle du

couplage. Si le couplage ne dépend que de l'inductance mutuelle L_{me} entre les deux bobines, alors il peut s'écrire :

$$V_m = \frac{L_{me}i\omega}{R + L_{ee}i\omega} V_e \quad (\text{III.86})$$

Ainsi la variation du couplage mutuel peut décaler la résonance électrique du signal par rapport à la fréquence de vibration de la corde. On a au total dans le circuit de mesure

$$\frac{2i\zeta\omega\omega_0 V_{\phi_{smax}}}{(\omega_0^2 - \omega^2) + 2i\zeta\omega\omega_0} - \frac{L_{me}i\omega}{R + L_{ee}i\omega} V_e \quad (\text{III.87})$$

Comme la résonance de la corde est très marquée, on peut interpoler la fréquence du maximum au premier ordre autour de ω_0 . Dans le cas où $R/L_{ee} \ll \omega_0$, le maximum de l'amplitude du signal se trouve environ à

$$\omega_{max} = \omega_0 \left(1 - \frac{R\zeta}{L_{ee}\omega_0} \times \frac{L_{me}V_e}{L_{ee}V_{\phi_{smax}}} \right) \quad (\text{III.88})$$

Dans le cas où $R/L_{ee} \gg \omega_0$, le maximum de l'amplitude du signal se trouve environ à

$$\omega_{max} = \omega_0 \left(1 + \frac{\zeta L_{ee}\omega_0}{R} \times \frac{L_{me}V_e}{L_{ee}V_{\phi_{smax}}} \right) \quad (\text{III.89})$$

Avec $L_{me}V_e/L_{ee}\phi_{smax} = 0.1$, $R = 100 \Omega$, $L_{ee} = 9 \text{ mH}$, $\zeta = 0.2 \times 10^{-4}$ et $\omega_0 = 2\pi \times 1000 \text{ rad/s}$, par l'équation (III.89), la fréquence de résonance mesurée en mode entreteu est augmentée de 1.2 Hz.

III.3.3 Validation expérimentale du système de mesure

III.3.3.1 Dispositif expérimental

Un capteur ouvert montré sur la Figure III.40 a été réalisé pour créer un environnement de test. Une corde en acier inoxydable de longueur $L = 112 \text{ mm}$, de rayon $r = 115 \mu\text{m}$, de masse volumique $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$ et de module d'Young $E = 210 \text{ GPa}$ est tendue entre deux bras. Deux poids identiques sont respectivement placés sur chaque bras pour donner une

tension mécanique contrôlée à la corde. Les poids étant en laiton de masse $m_p = 695$ g, ils fournissent à la corde une tension mécanique $T \approx 2 \times 695 \text{ g} \times 9.8 \text{ m/s}^2 \approx 13.62 \text{ N}$. Bien que la dimension (longueur, rayon) et les propriétés (masse volumique, module d'Young) de la corde soient constantes, la fréquence de résonance de la corde est facile à changer en faisant varier la masse des poids et donc la tension mécanique sur la corde. Deux bobines sont placées à proximité de la corde. Les deux bobines utilisées possèdent une inductance propre $L_{mm} = L_{ee} \approx 9 \text{ mH}$, une résistance $R \approx 100 \Omega$ et un nombre de spires par unité $N \approx 500000$. La position horizontale des bobines peut être modifiée le long de la corde, et la distance verticale entre les bobines et la corde peut aussi être changée. Comme dans les expérimentations précédentes, une bobine est connectée à un générateur de signaux en vue d'exciter la corde, et l'autre bobine est connectée à un oscilloscope en vue de mesurer la vibration de la corde.

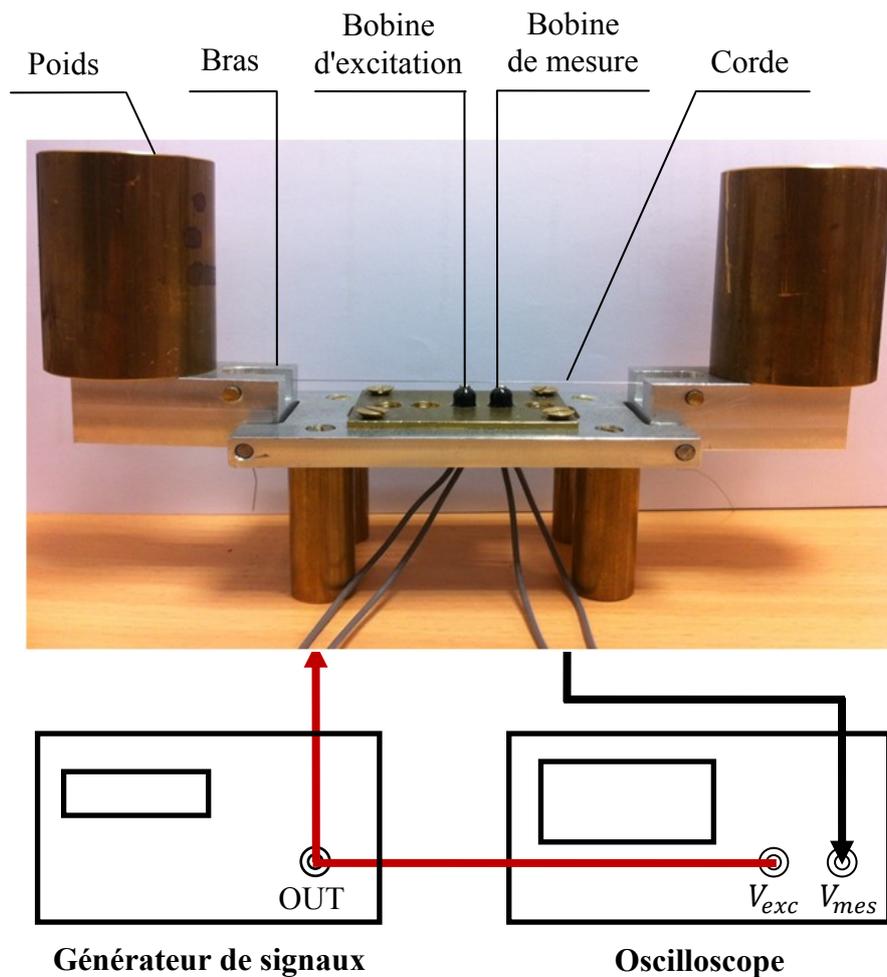


Figure III.40 - Dispositif expérimental pour l'étude des paramètres influant la réponse du capteur en mode amorti et en mode entretenu

Les expérimentations effectuées visent à montrer que la fréquence du signal de sortie du capteur s'écarte de la fréquence de résonance réelle de la corde à cause des deux paramètres : force magnétique moyenne et couplage entre bobines. En changeant un seul paramètre et l'autre restant inchangé, les influences de ces deux paramètres sur la fréquence de résonance mesurée par le capteur sont respectivement analysées en mode amorti et en mode entretenu.

III.3.3.2 Résultats de fréquence de résonance

Comme le capteur exhibe une réponse maximale au premier mode de résonance, on peut se contenter d'étudier la fréquence de résonance fondamentale sans tenir compte des autres fréquences de résonance. Pour empêcher l'excitation des modes de résonance d'ordre élevé, on adopte une excitation continue ou une excitation pulsée composée d'un grand nombre de cycles. En mode amorti, une impulsion modulée de 200 cycles est appliquée à la bobine d'excitation dans un premier temps. Chaque cycle correspond à une tension sinusoïdale de fréquence 1 kHz et d'amplitude 1.5 V, comme le montre la Figure III.41a. Après cette excitation pulsée d'une durée d'environ 0.2 s et un temps mort d'environ 50 ms, le signal de sortie de la bobine de mesure est détecté sur l'oscilloscope, comme représenté sur la Figure III.41b. La réponse libre de la corde se présente comme une oscillation amortie dont l'amplitude décroît de façon exponentielle avec le temps. La vitesse de diminution de l'amplitude est caractérisée par le coefficient d'amortissement ζ qui est égal à 2×10^{-4} .

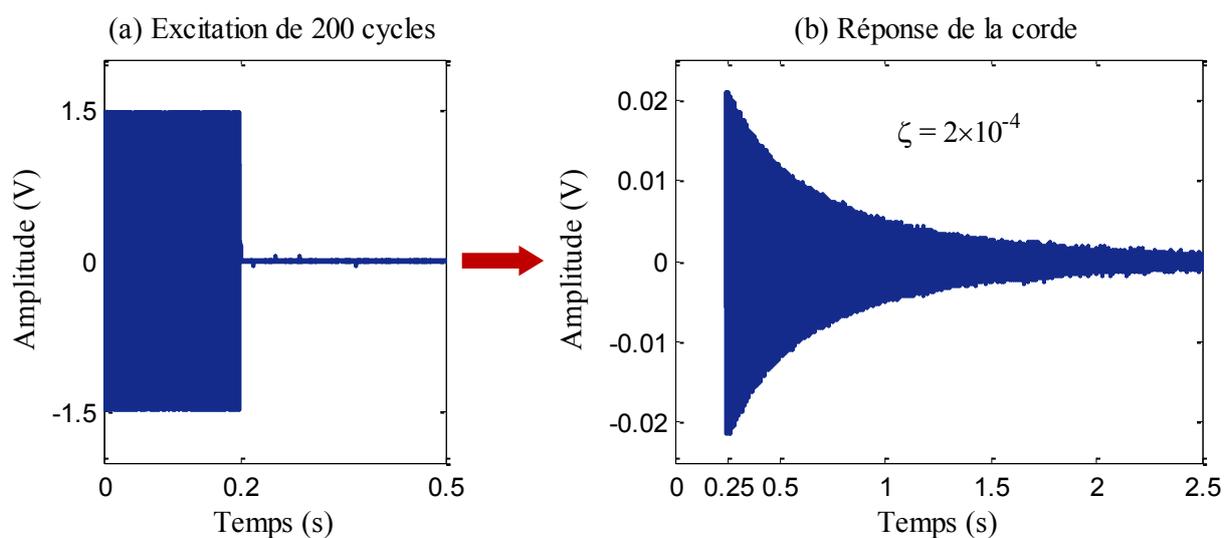


Figure III.41 - (a) Excitation pulsée de 200 cycles et (b) réponse de la corde

En effectuant sous MATLAB une transformée de Fourier rapide (FFT) sur le signal mesuré, on obtient le spectre de fréquence de la réponse libre de la corde, comme montré sur la Figure III.42. La fenêtre temporelle de FFT est réglée à 4.5 s (seulement 2.5 s sont montrées sur la Figure III.41b par souci de clarté) de sorte que la résolution en fréquence est de 0.22 Hz. Le plus haut sommet situé à 999.64 Hz représente la fréquence apparente de la vibration libre amortie de la corde. La non-linéarité du système de mesure ajoute évidemment certaines harmoniques qui sont exactement des multiples entiers de la fréquence de résonance fondamentale, mais elles peuvent être ignorées parce que la majeure partie de l'énergie est distribuée au premier mode de résonance et peu d'énergie est distribuée aux autres modes de résonance. En substituant $f_a = 999.64$ Hz et $\zeta = 2 \times 10^{-4}$ dans l'équation (III.79), on trouve $f_p = 999.64$ Hz. Étant donné que le coefficient d'amortissement est très faible, la fréquence fondamentale de résonance mesurée en mode amorti est presque égale à la fréquence propre de la corde vibrante.

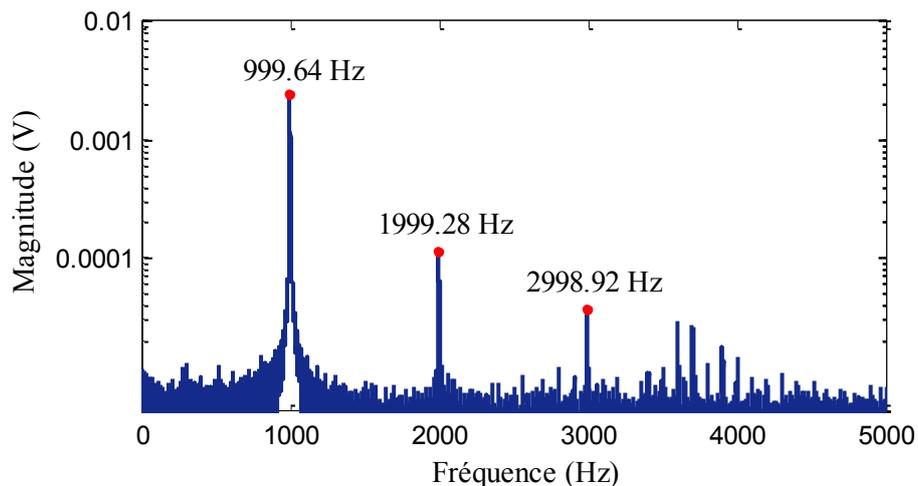


Figure III.42 - Spectre de fréquence de la réponse libre de la corde en mode amorti

En mode entretenu, la bobine d'excitation est continuellement alimentée par le générateur de signaux et le signal dans la bobine de mesure est affiché sur l'oscilloscope. Afin de trouver la fréquence de résonance fondamentale, la fréquence du signal de sortie du générateur est initialement réglée à la fréquence propre de la corde valant 999.64 Hz. La fréquence d'excitation est lentement ajustée par pas de 0.01 Hz jusqu'à ce que le signal détecté aux bornes de la bobine de mesure atteigne son maximum. Ainsi la résolution en fréquence est de 0.01 Hz. L'amplitude maximale du signal mesuré est obtenue lorsque la fréquence d'excitation est égale à 1001.93 Hz.

La Figure III.43 montre les signaux dans les deux bobines lorsque la corde est en résonance. Le signal d'excitation représenté par la courbe bleu est une tension sinusoïdale d'amplitude 1.5 V, et le signal mesuré représenté par la courbe rouge est amplifié 10 fois par souci de clarté. Le spectre de fréquence de la vibration forcée de la corde est obtenu en appliquant une transformée de Fourier rapide (FFT) au signal mesuré pour se mettre dans la même configuration de calcul que le mode amorti. Comme montré sur la Figure III.44, il y a une faible harmonique ayant une fréquence égale à deux fois la fréquence de résonance fondamentale. Elle est due à la non-linéarité du système de mesure. Comparativement à la fréquence propre mesurée en mode amorti (Figure III.42), la fréquence de résonance mesurée en mode entretenu a augmenté de 2.29 Hz.

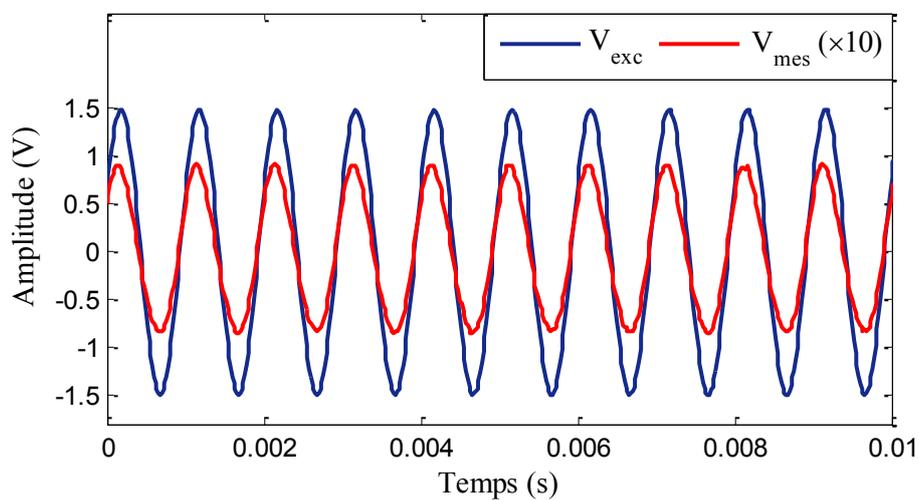


Figure III.43 - Signal d'excitation et signal mesuré en mode entretenu

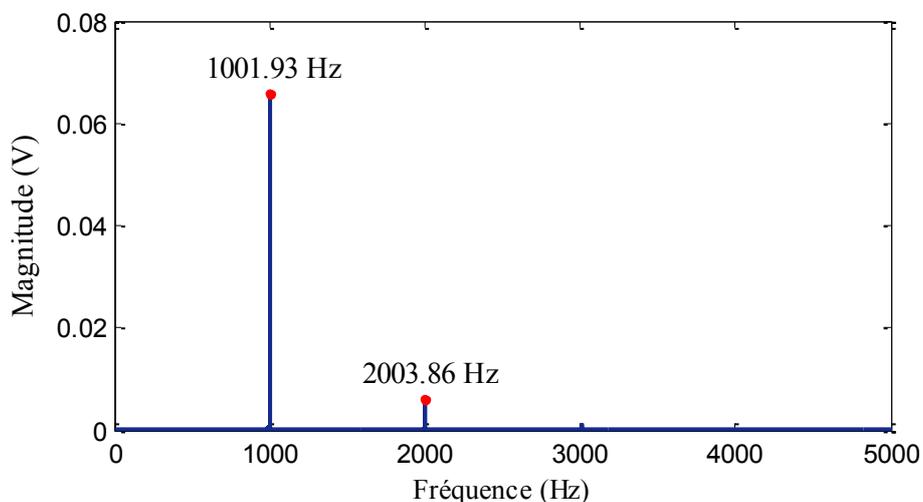


Figure III.44 - Spectre de fréquence de la réponse de la corde en mode entretenu

III.3.3.3 Effet de force magnétique moyenne

L'effet de la force magnétique moyenne est étudié en faisant varier l'amplitude d'excitation. Pour conserver les mêmes conditions initiales du mouvement de la corde, la variation de l'amplitude d'excitation est discontinue. Par exemple, après avoir mesuré la fréquence de résonance sous la première excitation d'amplitude de 0.75 V, le générateur de signaux est éteint de sorte que la corde revienne à sa position de repos. Lorsque la corde est au repos, l'amplitude du signal de sortie du générateur est réglée à 1.5 V et le générateur est ensuite redémarré pour déterminer la fréquence de résonance sous cette deuxième excitation. De plus, pour éviter une vibration non-linéaire de la corde [118], le déplacement transversal de la corde est toujours petit (<0.2 mm) par rapport au diamètre de la corde (≈ 0.2 mm). Au cours de nos mesures, aucune vibration non-linéaire de la corde n'a été observée. Toutes les harmoniques observées sont dues à la non-linéarité du système de mesure

La Figure III.45 présente la fréquence du signal de sortie du capteur en mode amorti en fonction de différentes amplitudes de l'excitation pulsée. Il est à noter que l'amplitude d'excitation n'exerce aucune influence sur la fréquence propre mesurée. La légère variation de la fréquence visible à 6 V est attribuée à un contact mécanique entre la corde et l'une des bobines. La Figure III.46 présente la fréquence du signal de sortie du capteur en mode entretenu en fonction de différentes amplitudes de l'excitation continue. Contrairement aux résultats observés en mode amorti, la fréquence de résonance mesurée en mode entretenu varie avec l'amplitude d'excitation. Lorsque l'amplitude d'excitation est au-dessus de 6 V, la corde touche l'une des bobines, ce qui provoque également une variation de la fréquence comme dans le cas du mode amorti. Les résultats expérimentaux s'accordent bien avec les prédictions théoriques de la section III.3.2.2. Comme prévu, la fréquence de résonance mesurée en mode amorti est indépendante de la force magnétique moyenne, tandis que celle mesurée en mode entretenu devient plus élevée à mesure que la force magnétique moyenne augmente.

Pour estimer la fréquence de résonance mesurée en mode entretenu en l'absence de la force magnétique, un ajustement linéaire des données expérimentales est réalisé par la méthode des moindres carrés, comme indiqué par la courbe rouge sur la Figure III.46. La pente de cette courbe ajustée est de 0.75, ce qui signifie qu'une augmentation de 1 V de l'amplitude d'excitation engendre une augmentation de 0.75 Hz de la fréquence de résonance mesurée en mode entretenu. Lorsque l'amplitude d'excitation diminue de 1.5 V qui correspond

à un niveau d'excitation dans l'expérimentation de la Figure III.43, à 0 V, la réduction de la fréquence de résonance est : $1001.93 - 1000.81 = 1.12$ Hz. L'intervalle de confiance à 95% associé à cette différence estimée est 1.12 ± 0.09 Hz. On note que cette différence de fréquence est plus de 10 fois la précision attendue d'un capteur à corde vibrante (typiquement 0.1 Hz).

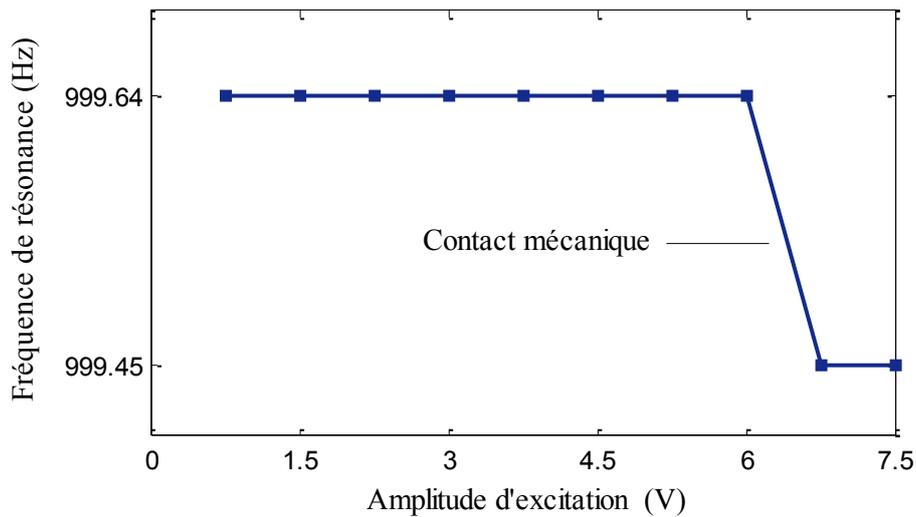


Figure III.45 - Relation entre la fréquence de résonance et l'amplitude d'excitation en mode amorti dans le cas d'une fréquence de résonance de l'ordre de 1 kHz

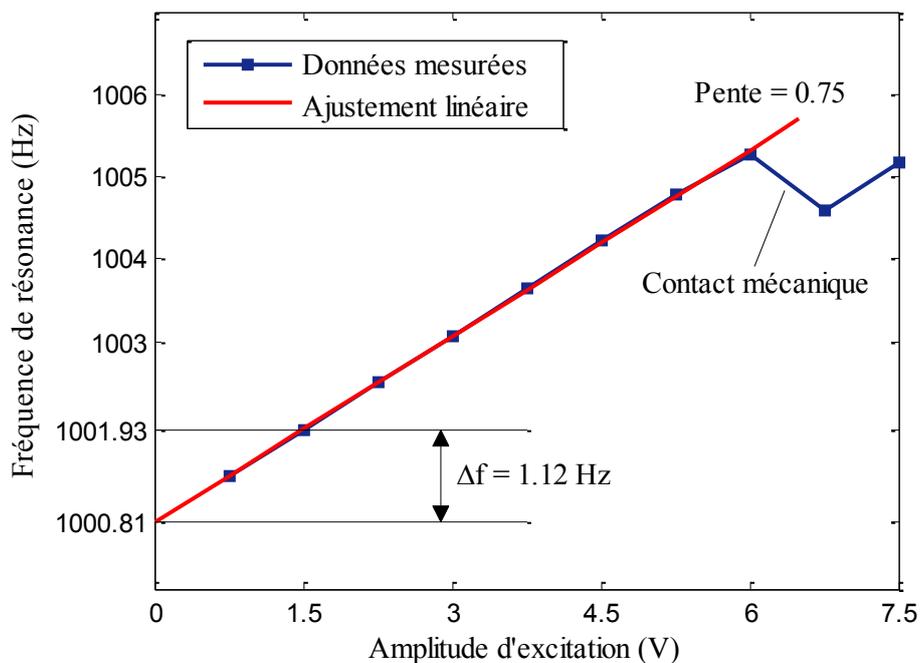


Figure III.46 - Relation entre la fréquence de résonance et l'amplitude d'excitation en mode entretenu dans le cas d'une fréquence de résonance de l'ordre de 1 kHz

En vue de confirmer que les résultats observés ci-dessus sont indépendants d'une fréquence de résonance particulière, les mesures ont été refaites pour une autre fréquence de travail. En changeant la masse des deux poids, la tension sur la corde est modifiée. Sous l'effet d'une tension nouvelle, la fréquence de résonance de la corde mesurée en mode amorti est de 1207.51 Hz lorsque l'amplitude d'excitation est au-dessous de 6 V (Figure III.47), alors que celle mesurée en mode entretenu est de 1209.45 Hz lorsque l'amplitude d'excitation est de 1.5 V (Figure III.48). Comme dans le cas précédent d'une fréquence de résonance de l'ordre de 1 kHz, la force magnétique influence la fréquence de résonance mesurée seulement en mode entretenu, mais pas en mode amorti. Un ajustement linéaire des données expérimentales est réalisé par la méthode des moindres carrés, comme indiqué par la courbe rouge sur la Figure III.48. La pente de cette courbe ajustée est de 0.64, ce qui signifie qu'une augmentation de 1 V de l'amplitude d'excitation engendre une augmentation de 0.64 Hz de la fréquence de résonance mesurée en mode entretenu. Lorsque l'amplitude d'excitation diminue de 1.5 V à 0 V, la réduction de la fréquence de résonance est égale à $1209.45 - 1208.47 = 0.98$ Hz. L'intervalle de confiance à 95% associé à cette différence estimée est 0.98 ± 0.11 Hz. On note que cette différence de fréquence est d'environ 10 fois la précision attendue d'un capteur à corde vibrante.

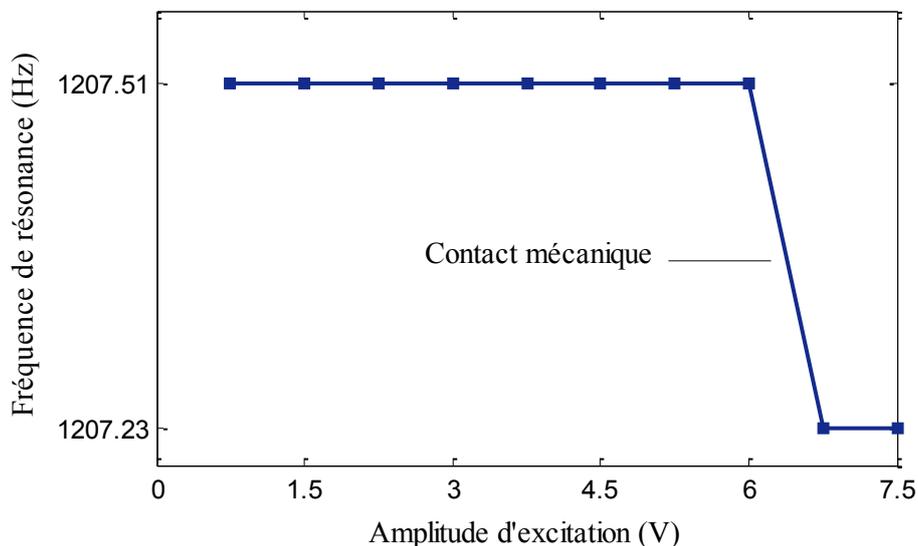


Figure III.47 - Relation entre la fréquence de résonance et l'amplitude d'excitation en mode amorti dans le cas d'une fréquence de résonance de l'ordre de 1.2 kHz

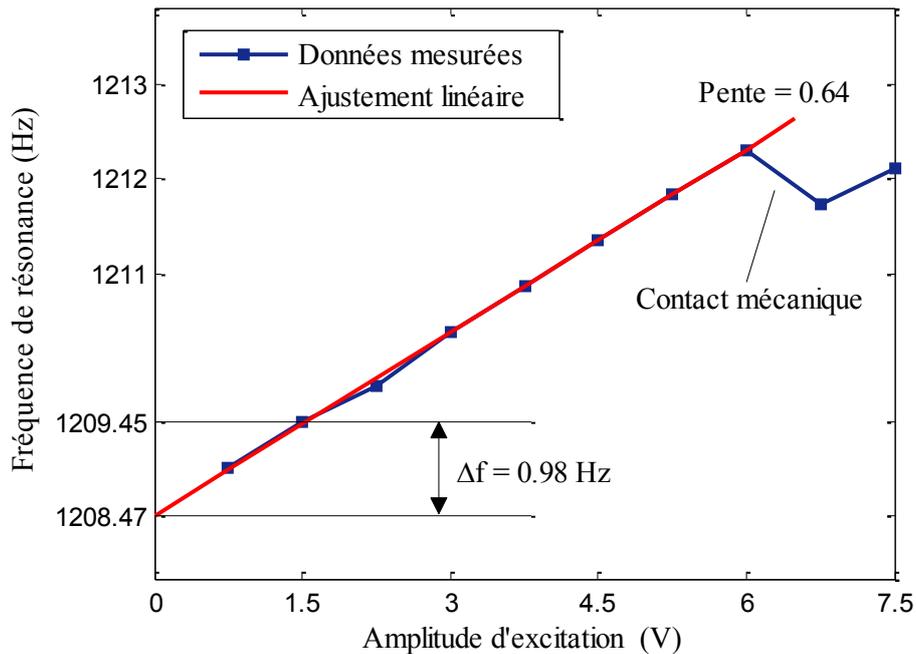


Figure III.48 - Relation entre la fréquence de résonance et l'amplitude d'excitation en mode entretenu dans le cas d'une fréquence de résonance de l'ordre de 1.2 kHz

Afin de s'assurer que le phénomène observé correspond à la force magnétique moyenne, une autre mesure est effectuée dans laquelle le signal d'excitation est une superposition de deux tensions : une tension sinusoïdale avec amplitude constante (composante AC) et une tension de décalage variable (composante DC). Lorsque l'amplitude de la tension sinusoïdale est fixée à 1.5 V, les fréquences de résonance mesurées en mode entretenu sous différentes tensions de décalage varient et un ajustement linéaire des données expérimentales est présenté sur la Figure III.49 pour une fréquence de résonance de l'ordre de 1 kHz et sur la Figure III.50 pour une fréquence de résonance de l'ordre de 1.2 kHz. Pour les deux fréquences de résonance, la pente de la courbe ajustée est de l'ordre de 0.2, ce qui signifie qu'une augmentation de 1 V de la tension de décalage engendre une augmentation de 0.2 Hz de la fréquence de résonance mesurée en mode entretenu. Comme il n'y a pas de couplage direct entre les deux bobines à 0 Hz (DC), les résultats indiquent que les variations de la fréquence de résonance observées sur la Figure III.46 et la Figure III.48 sont seulement attribuables à la force magnétique moyenne due à l'excitation. Comme prévu théoriquement de la section III.3.2.2, en mode entretenu la force magnétique moyenne appliquée à la corde modifie sa tension mécanique et donc sa fréquence de résonance.

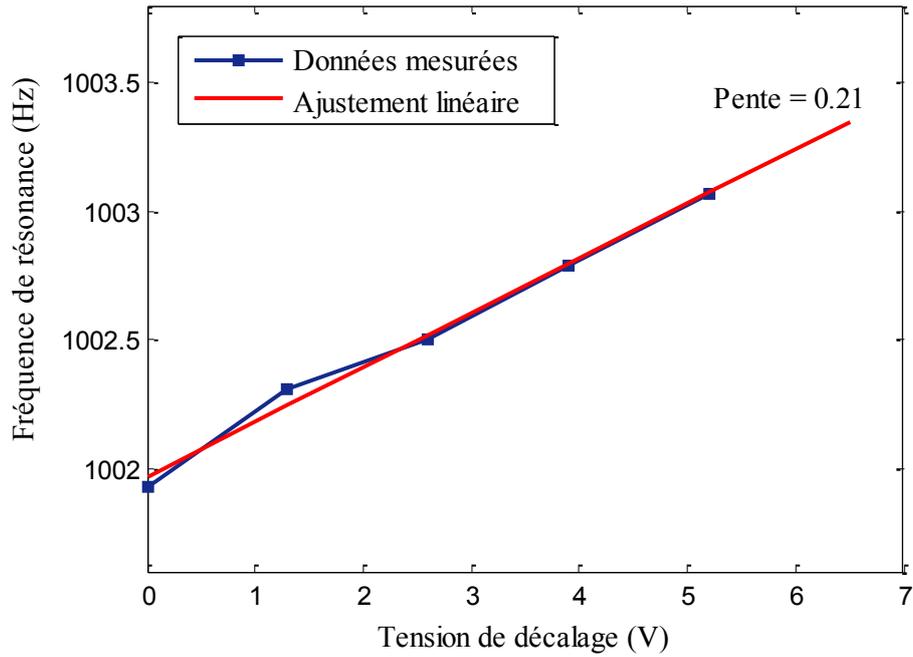


Figure III.49 - Relation entre la fréquence de résonance et la tension de décalage en mode entretenu dans le cas d'une fréquence de résonance de l'ordre de 1 kHz

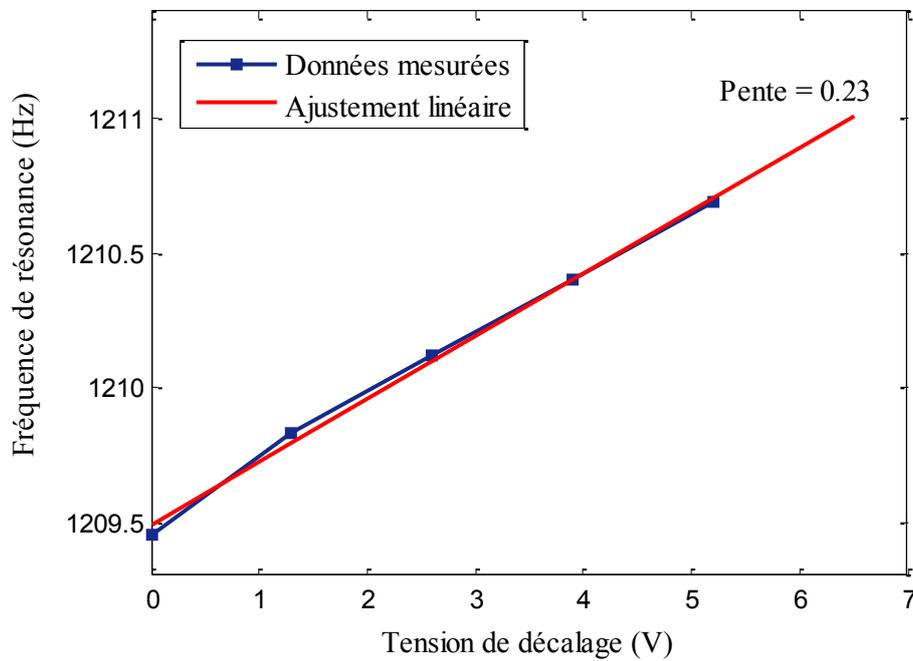


Figure III.50 - Relation entre la fréquence de résonance et la tension de décalage en mode entretenu dans le cas d'une fréquence de résonance de l'ordre de 1.2 kHz

III.3.3.4 Effet de couplage entre bobines

Comme il n'existe pas de couplage direct entre bobines en mode amorti, la mesure concernant ce paramètre est effectuée seulement en mode entretenu. Considérons que la tension alternative $V_{exc}(t)$ appliquée à la bobine d'excitation induit une tension alternative $V_{mes}(t)$ dans la bobine de mesure. Le couplage direct entre les deux bobines est caractérisé par deux coefficients : le rapport d'amplitude α et le décalage du temps τ entre $V_{mes}(t)$ et $V_{exc}(t)$. Le premier coefficient, le rapport d'amplitude α , est exprimé par un nombre fractionnaire compris entre 0 et 1 qui représente le pourcentage du flux magnétique total produit par la bobine d'excitation traversant la bobine de mesure :

$$\alpha = \frac{L_{me}}{\sqrt{L_{mm}L_{ee}}} \quad (\text{III.90})$$

où L_{mm} et L_{ee} sont les inductances propres de chaque bobine, et L_{me} l'inductance mutuelle entre les deux bobines. Les deux bobines sont dites faiblement couplées lorsque $\alpha \leq 0.5$, étroitement couplées lorsque $\alpha > 0.5$ et parfaitement couplées lorsque $\alpha = 1$. En réalité, il y a toujours une certaine perte de flux magnétique, la valeur de α ne peut jamais atteindre 1. Le deuxième coefficient, le décalage de temps τ , correspond au déphasage $\Delta\varphi$ entre les signaux dans les deux bobines, ayant pour expression $\Delta\varphi = 2\pi f\tau$. Pour deux bobines données, le couplage entre bobines peut être modifié de trois manières : (1) en faisant varier la position relative entre les deux bobines, (2) en mettant un noyau de fer doux à l'intérieur d'une des deux bobines et (3) en plaçant une pièce en fer doux autour des deux bobines.

En supposant que le couplage mutuel entre les deux bobines varie lentement avec la fréquence, on peut estimer les deux coefficients α et τ à une fréquence quelconque dans une plage de fréquences $[f_1, f_2]$ autour de la fréquence de résonance au moyen de l'interpolation linéaire suivante :

$$\begin{cases} \alpha = \alpha_1 + (\alpha_2 - \alpha_1) \frac{f - f_1}{f_2 - f_1} \\ \tau = \tau_1 + (\tau_2 - \tau_1) \frac{f - f_1}{f_2 - f_1} \end{cases} \quad (\text{III.91})$$

où α_1 , τ_1 sont mesurés à la fréquence f_1 et α_2 , τ_2 sont mesurés à la fréquence f_2 . Une fois que les deux coefficients α et τ sont déterminés, la tension V_0 induite dans la bobine de mesure sans l'influence de couplage entre les bobines a été calculée comme suit :

$$V_0 = V_{mes}(t - \tau) - \alpha V_{exc}(t) \quad (\text{III.92})$$

L'inductance mutuelle entre les deux bobines est déterminée en mesurant le rapport d'amplitude α et le décalage du temps τ . Lors de la mesure, la corde est excitée par une tension sinusoïdale d'amplitude de 1.5 V, sans tension de décalage. Dans ces conditions, la fréquence de résonance détectée par le capteur est de 1001.93 Hz (Figure III.44). À la fréquence de résonance, l'inductance mutuelle ne peut être déterminée directement, car la tension induite aux bornes de la bobine de mesure est en partie due au couplage direct entre bobines et en partie due à la vibration de la corde. Il faut effectuer des mesures sur une plage de fréquences assez large autour de la fréquence de résonance, de manière à obtenir sur les deux côtés un signal presque sans l'influence de la résonance. Pour cela, la fréquence d'excitation est fixée de 950 à 1050 Hz, par pas de 1 Hz.

À $f_1 = 950$ Hz, la fréquence d'excitation est trop loin de la fréquence de résonance, aucune réponse significative de la corde ne se produit. Puisque la corde est au repos, il existe seulement le couplage mutuel entre bobines. Ainsi le rapport d'amplitude α et le décalage du temps τ sont directement mesurés à partir des signaux dans la bobine d'excitation et la bobine de mesure. On obtient $\alpha_1 = 0.0355$ et $\tau_1 = 8.47 \times 10^{-5}$ s. Une situation similaire ayant lieu à $f_2 = 1050$ Hz, les deux coefficients sont mesurés de la même manière. On obtient $\alpha_2 = 0.0357$ et $\tau_2 = 6.77 \times 10^{-5}$ s. D'après l'équation (III.91), α et τ peuvent être estimés pour toutes les fréquences comprises entre 950 et 1050 Hz, comme montré sur la Figure III.51 et la Figure III.52. À la fréquence de résonance (1001.93 Hz), les valeurs estimées sont $\alpha \approx 0.0356$ et $\tau \approx 7.58 \times 10^{-5}$ s.

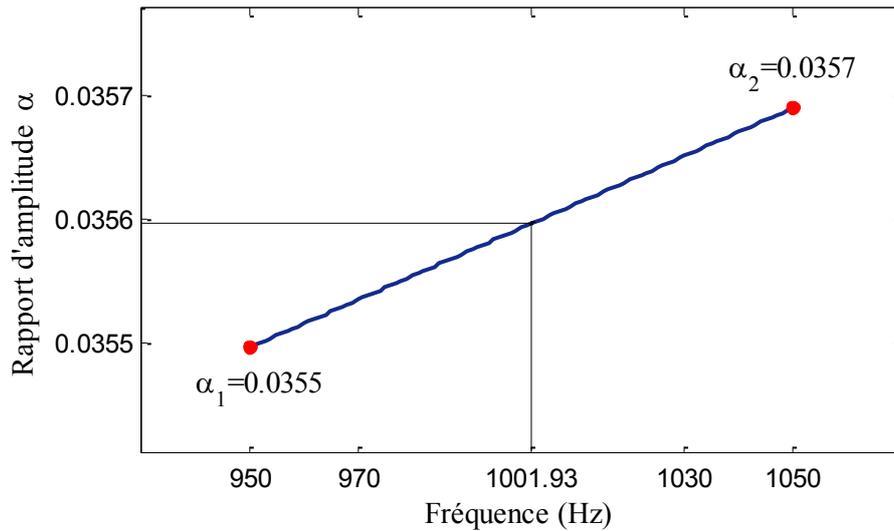


Figure III.51 - Rapport d'amplitude α en fonction de la fréquence

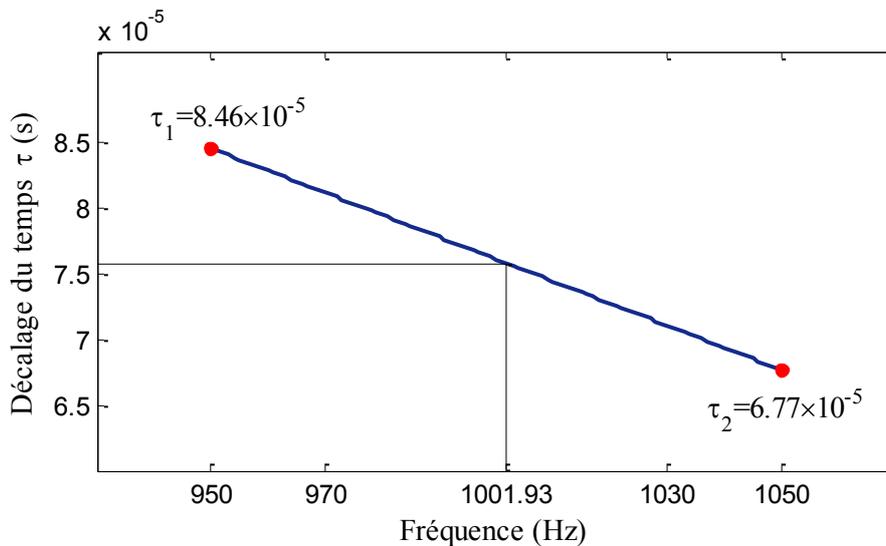


Figure III.52 - Décalage du temps τ en fonction de la fréquence

Selon l'équation (III.92), connaissant $V_{exc} = 1.5 \text{ V}$ et avec les estimations de α et de τ aux différentes fréquences d'excitation, la tension induite V_0 associée au couplage entre la corde et la bobine est calculée en soustrayant la tension induite associée au couplage entre les deux bobines de la tension totale V_{mes} induite aux bornes de la bobine de mesure. Pour une fréquence d'excitation variant de 950 Hz à 1050 Hz, en mesurant chaque fois l'amplitude du signal V_{mes} , la courbe de résonance de la corde vibrante est alors tracée, comme indiqué sur la Figure III.53. Il est à noter que la courbe rouge qui désigne la tension V_{mes} présente un sommet positif correspondant à la résonance (résonance parallèle) et un sommet négatif

correspondant à l'antirésonance (résonance série). L'intervalle de fréquence entre la résonance et l'antirésonance est relié facteur de qualité du dispositif expérimental. La différence entre les deux courbes correspond à l'élimination de la tension induite mutuellement. Il est évident que l'amplitude du signal mesuré en mode entreteu dépend non seulement de la vibration de la corde, mais également du couplage mutuel entre les bobines. Après la soustraction de la partie due au couplage direct entre les bobines, la courbe de résonance (courbe bleue) correspond exactement à la réponse de la corde résonante à des excitations dont on fait varier la fréquence.

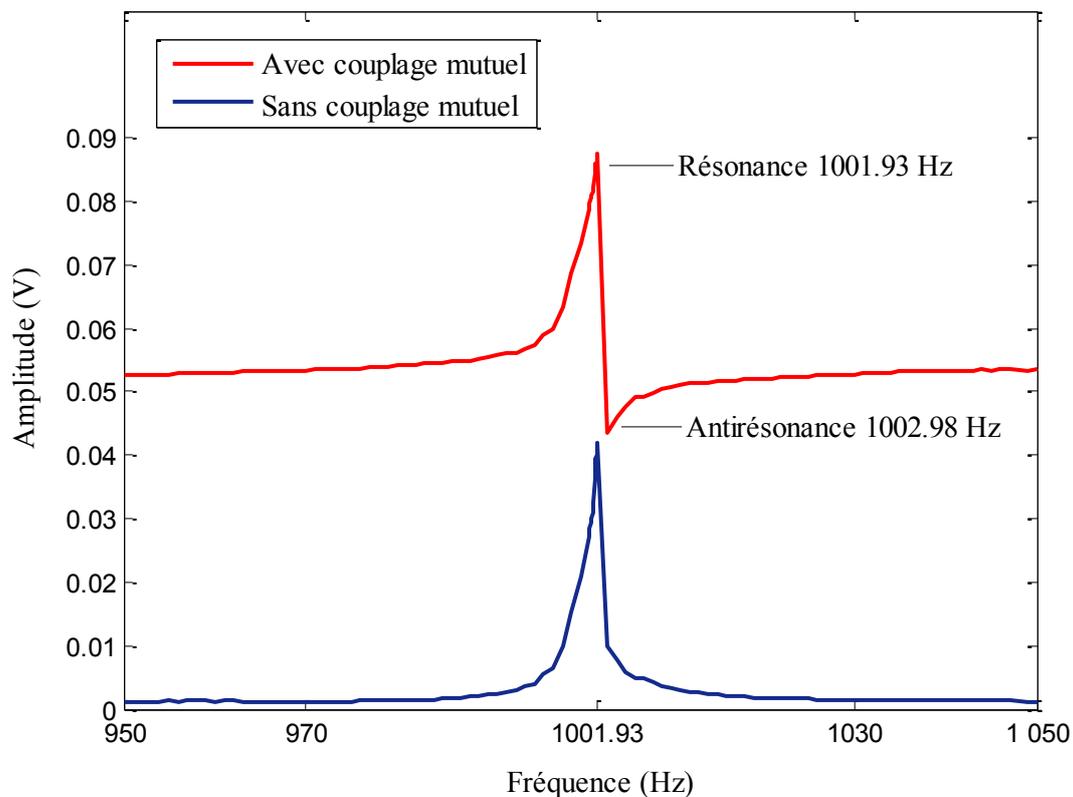


Figure III.53 - Courbe de résonance de la corde vibrante ($V_{exc} = 1.5$ V et $\alpha = 0.0356$ en résonance)

Le couplage mutuel existant entre les deux bobines peut être modifié, de façon simple, en déplaçant une pièce en fer doux placée autour des deux bobines. Pour chaque nouveau couplage mutuel, la détermination des coefficients α et τ est effectuée de nouveau. Les courbes de résonance pour divers couplages mutuels sont montrées sur la Figure III.54. On constate clairement que le sommet de la corde de résonance se déplace vers la droite le long de l'axe des fréquences à mesure que l'induction mutuelle entre les deux bobines augmente.

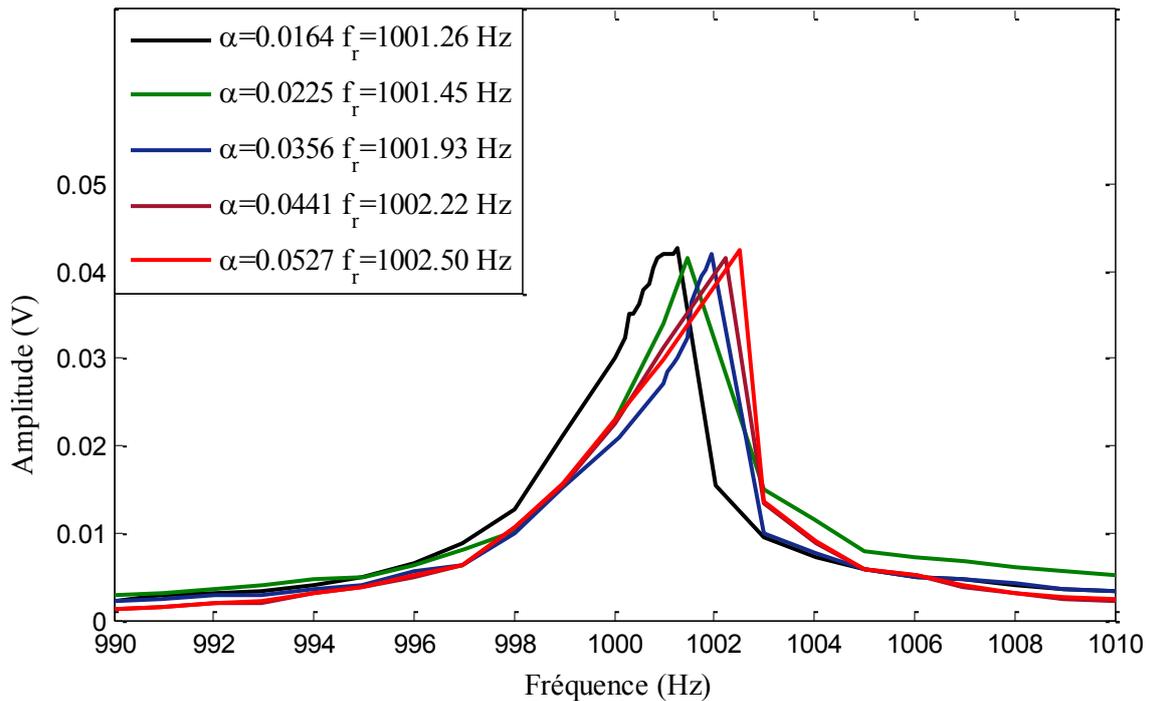


Figure III.54 - Courbe de résonance pour différents couplage mutuel entre bobines

La Figure III.55 indique la relation entre la fréquence de résonance mesurée en mode entretenu et le couplage mutuel entre les deux bobines dans le cas d'une fréquence de résonance de l'ordre de 1 kHz. La fréquence de résonance s'accroît lorsque le coefficient α du couplage mutuel devient plus grand. Comme le montre la courbe rouge, un ajustement linéaire des données expérimentales donne une estimation de la fréquence de résonance mesurée lorsqu'il n'existe aucun couplage direct entre les bobines. La pente de la courbe ajustée vaut 34.08, ainsi une augmentation de 1% du coefficient α entraîne une augmentation de 0.34 Hz de la fréquence de résonance mesurée en mode entretenu. Lorsque la valeur de α passe de 0.0356 à 0, la diminution correspondante de la fréquence de résonance mesurée est égale à $1001.93 - 1000.71 = 1.22$ Hz. L'intervalle de confiance à 95% pour cette différence estimée est 1.22 ± 0.08 Hz. On note, ici encore, que cette différence de fréquence est d'environ 10 fois la précision attendue d'un capteur à corde vibrante.

En réajustant la tension sur la corde, la relation entre la fréquence de résonance et le couplage mutuel est réétudiée dans le cas d'une fréquence de résonance de l'ordre de 1.2 kHz. Comme l'indique la Figure III.56, la fréquence de résonance détectée en mode entretenu augmente avec l'élévation du couplage entre les deux bobines. La pente de la courbe ajustée vaut 30.03, ainsi une augmentation de 1% du coefficient α entraîne une augmentation de 0.3 Hz de la fréquence de résonance mesurée en mode entretenu. La différence entre la

fréquence de résonance mesurée lorsque $\alpha = 0.0356$ et celle mesurée lorsque $\alpha = 0$ est égale à $1209.45 - 1208.35 = 1.10$ Hz. L'intervalle de confiance à 95% pour cette différence estimée est 1.10 ± 0.08 Hz. On note encore une fois que cette différence de fréquence est d'environ 10 fois la précision attendue d'un capteur à corde vibrante.

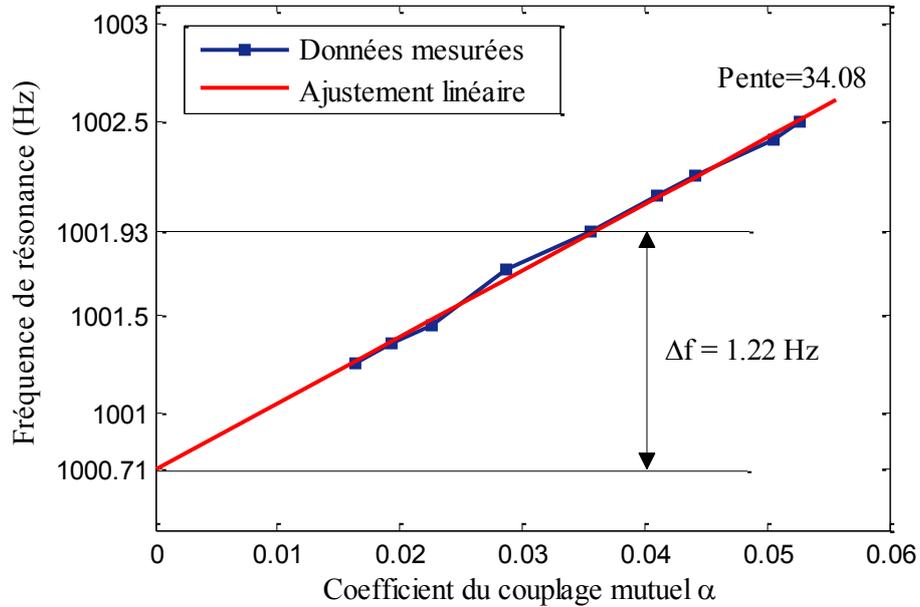


Figure III.55 - Relation entre la fréquence de résonance et le couplage mutuel en mode entretenu dans le cas d'une fréquence de résonance de l'ordre de 1 kHz

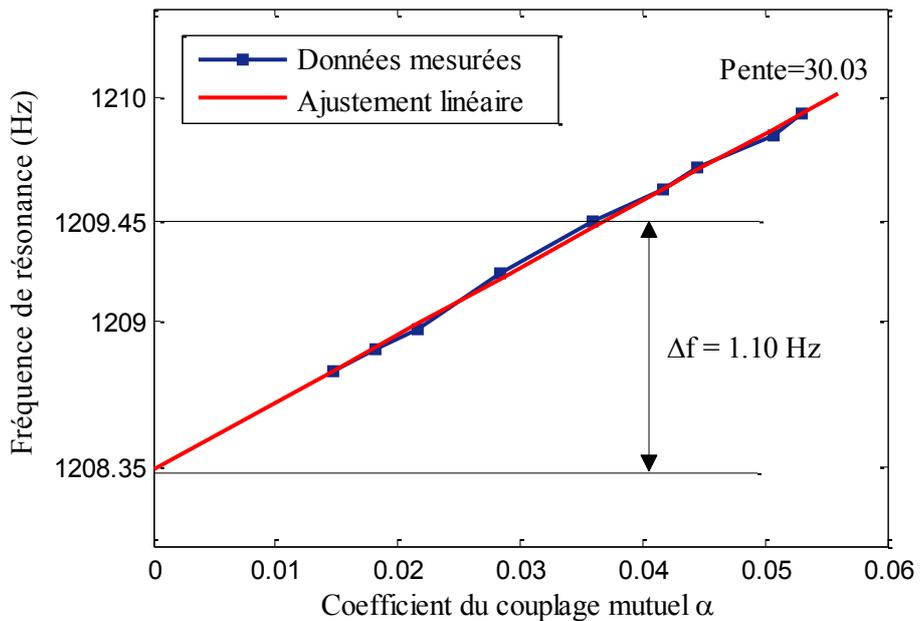


Figure III.56 - Relation entre la fréquence de résonance et le couplage mutuel en mode entretenu dans le cas d'une fréquence de résonance de l'ordre de 1.2 kHz

III.3.3.5 Analyse des résultats expérimentaux

Les résultats expérimentaux vérifient que la fréquence de résonance mesurée en mode amorti peut être admise comme la fréquence propre réelle de la corde vibrante, tandis que la fréquence de résonance mesurée en mode entretenu diffère de la fréquence propre de la corde vibrante sous l'effet de deux paramètres : la force magnétique moyenne qui augmente la tension de la corde et le couplage mutuel entre les bobines qui déforme le signal induit par le mouvement de la corde. En fait, en mode amorti, il n'existe pas de force magnétique, ni de couplage mutuel au cours des mesures. Ces conditions s'assimilent à une excitation continue d'amplitude infinitésimale, soit $V_{exc} \rightarrow 0$, et à un couplage mutuel de niveau infinitésimal entre les bobines, soit $\alpha \rightarrow 0$, en mode entretenu. En pratique, les mesures de fréquence sont impossibles à réaliser dans ces conditions, mais sont faciles à extrapoler à partir des données mesurées dans d'autres conditions.

Dans le cas d'une fréquence de résonance de l'ordre de 1 kHz, les fréquences de résonance sous l'influence de différents paramètres sont rassemblées dans le Tableau III.3. En mode amorti, soit dans des conditions équivalentes à $V_{exc} = 0$ V et $\alpha = 0$ lors des mesures, la fréquence de résonance mesurée est de 999.64 Hz. En mode entretenu, dans des conditions telles que $V_{exc} = 1.5$ V et $\alpha = 0.0356$, la fréquence de résonance mesurée est de 1001.93 Hz. L'écart entre les deux fréquences mesurées selon différents modes de fonctionnement vaut $1001.93 - 999.64 = 2.29$ Hz. Les contributions respectives de la force magnétique moyenne et du couplage direct entre les bobines à cet écart sont estimées à l'aide des extrapolations basées sur la méthode des moindres carrés. Lorsque le couplage mutuel reste inchangé ($\alpha = 0.0356$ à la résonance), une réduction de l'amplitude d'excitation de $V_{exc} = 1.5$ V à $V_{exc} = 0$ V conduit à une réduction de fréquence $\Delta f = 1.12 \pm 0.09$ Hz. Lorsque l'amplitude d'excitation reste inchangée ($V_{exc} = 1.5$ V), une réduction du couplage mutuel de $\alpha = 0.0356$ à $\alpha = 0$ conduit à une réduction de fréquence $\Delta f = 1.22 \pm 0.08$ Hz. Sans influence de la force magnétique et du couplage mutuel, la fréquence de résonance mesurée est réduite au total de 2.34 ± 0.17 Hz. L'écart de fréquence mentionné précédemment de 2.29 Hz se situe bien à l'intérieur de l'intervalle de confiance à 95% de l'estimation.

Tableau III.3 - Fréquences de résonance dans différentes conditions dans le cas d'une fréquence de résonance de l'ordre de 1 kHz

Mode entretenu			Mode amorti
α à la résonance / V_{exc}	$V_{exc} = 1.5 \text{ V}$	Interpolation à $V_{exc} = 0 \text{ V}$	
$\alpha = 0.0356$	1001.93 Hz (mesurée)	$1000.81 \pm 0.09 \text{ Hz}$ (estimée)	999.64 Hz (mesurée)
Interpolation à $\alpha = 0$	$1000.71 \pm 0.08 \text{ Hz}$ (estimée)	$999.57 \pm 0.17 \text{ Hz}$ (estimée)	

Dans le cas d'une fréquence de résonance de l'ordre de 1.2 kHz, les fréquences de résonance sous l'influence de différents paramètres sont rassemblées dans le Tableau III.4. En mode amorti, soit dans des conditions équivalentes à $V_{exc} = 0 \text{ V}$ et $\alpha = 0$ lors des mesures, la fréquence de résonance mesurée est de 1207.51 Hz. En mode entretenu, dans des conditions telles que $V_{exc} = 1.5 \text{ V}$ et $\alpha = 0.0356$, la fréquence de résonance mesurée est de 1209.45 Hz. La différence entre les deux fréquences mesurées selon différents modes de fonctionnement vaut $1209.45 - 1207.51 = 1.94 \text{ Hz}$. Lorsque le couplage mutuel reste inchangé ($\alpha = 0.0356$ en résonance), une réduction de l'amplitude d'excitation de $V_{exc} = 1.5 \text{ V}$ à $V_{exc} = 0 \text{ V}$ conduit à une réduction de fréquence $\Delta f = 0.98 \pm 0.11 \text{ Hz}$. Lorsque l'amplitude d'excitation reste inchangée ($V_{exc} = 1.5 \text{ V}$), une réduction du couplage mutuel de $\alpha = 0.0356$ à $\alpha = 0$ conduit à une réduction de fréquence $\Delta f = 1.10 \pm 0.08 \text{ Hz}$. En l'absence de la force magnétique et du couplage mutuel, la fréquence de résonance mesurée est totalement réduite de $2.08 \pm 0.19 \text{ Hz}$. L'écart de fréquence mentionné précédemment de 1.94 Hz se situe bien à l'intérieur de l'intervalle de confiance à 95% de l'estimation.

Tableau III.4 - Fréquences de résonance dans différentes conditions dans le cas d'une fréquence de résonance de l'ordre de 1.2 kHz

Mode entretenu			Mode amorti
α à la résonance	$V_{exc} = 1.5 \text{ V}$	Interpolation à $V_{exc} = 0 \text{ V}$	
$\alpha = 0.0356$	1209.45 Hz (mesurée)	$1208.47 \pm 0.11 \text{ Hz}$ (estimée)	1207.45 Hz (mesurée)
Interpolation à $\alpha = 0$	$1208.35 \pm 0.08 \text{ Hz}$ (estimée)	$1207.37 \pm 0.19 \text{ Hz}$ (estimée)	

Chapitre IV

Effet de la foudre

L'étude de l'effet de la foudre sur les capteurs à corde vibrante présente un grand intérêt. Il est nécessaire de déterminer et corriger la déviation de la réponse des capteurs sous l'effet de la foudre pour assurer une bonne précision de mesure. Dans ce chapitre, le phénomène de la foudre et les manières dont la foudre influence les capteurs sont décrits. Les conséquences des coups de foudre sur les capteurs sont expérimentalement observées en simulant la foudre avec un simulateur de décharges électrostatiques.

IV.1 Phénomène de la foudre

La foudre est un phénomène naturel de décharge électrostatique disruptive qui est provoquée par la différence de potentiel entre des nuages d'orage ou entre la base d'un tel nuage et le sol [119]. La foudre se manifeste principalement par des effets lumineux (éclairs), par des effets acoustiques (tonnerre) et par d'autres effets du même genre que ceux qu'une surintensité produit (ondes de chocs, rayonnement électromagnétique, claquage électrique, magnétisation de certains matériaux, etc.) [120, 121].

Une forme typique de l'impulsion de foudre est montrée sur la Figure IV.1 [122]. Un coup de foudre est en général constitué de plusieurs décharges séparées de dizaines de millisecondes. La première impulsion atteint 30 kA en quelques microsecondes et décroît à la moitié de sa crête en 50 ms environ. Lorsque la décharge principale est terminée, quelques millisecondes plus tard une ou plusieurs décharges secondaires apparaissent. La répartition des coups de foudre selon l'amplitude maximale des impulsions est présentée dans le Tableau VI.1 [123]. Dans 50% des cas, l'amplitude des impulsions de foudre est supérieure à 30 kA. Ces impulsions de courant transitoire de très forte amplitude peut conduire à des dégâts irréversibles tels que la détérioration des équipements électroniques, le vieillissement

prématuré des composants électroniques, la destruction des circuits imprimés, la dégradation des câbles, la perturbation des systèmes informatiques ... [124].

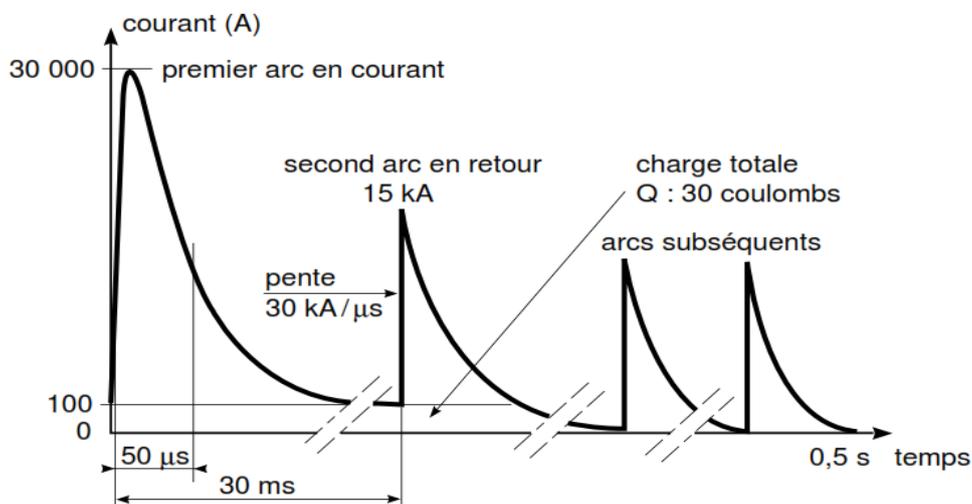


Figure IV.1 - Forme typique de l'impulsion de foudre

Tableau VI.1 - Répartition des coups de foudre selon leur amplitude

Amplitude des impulsions	Répartition
< 30 kA	50%
30 ~ 80 kA	40%
80 ~ 100 kA	5%
100 ~ 200 kA	4%
> 200 kA	1%

Le foudroiement se produit fréquemment partout dans le monde, particulièrement en période de fortes chaleurs. D'après Météorage [125, 126], en France, la foudre frappe entre 1 et 2 millions de fois le sol à raison d'une moyenne de 270 jours par an. Le mois de Juillet est en moyenne le plus foudroyé de l'année et plus de 90% des coups de foudre se concentre entre mai et septembre. Sous l'effet des coups de foudre fréquents, la protection des capteurs à corde vibrante contre la foudre est nécessaire.

IV.2 Type de foudroiement

Les capteurs à corde vibrante installés dans les ouvrages d'art peuvent être affectés par différents types de foudroiement soit direct soit indirect [127, 128]. Dans la suite, les effets de différents types de foudroiement sur les capteurs à corde vibrante sont théoriquement analysés.

IV.2.1 Foudroiement directs

Lorsque la foudre frappe directement un ouvrage d'art, le courant de foudre choisit un chemin de moindre résistance pour atteindre le sol. Comme le montre la Figure IV.2, le courant de foudre s'écoule au sol en passant par le système de protection contre la foudre ou par les éléments conducteurs (antenne, tuyaux métalliques ...) de l'ouvrage d'art. Le passage du courant de foudre dans la résistance de la prise de terre conduit à une hausse de tension du conducteur de protection qui peut atteindre quelques milliers de volts. Par ailleurs le potentiel des câbles d'alimentation reste nul. Dans ce cas, une partie du courant de foudre peut circuler à travers les capteurs reliés à la terre ou entrer directement leurs câbles de transmission [129].

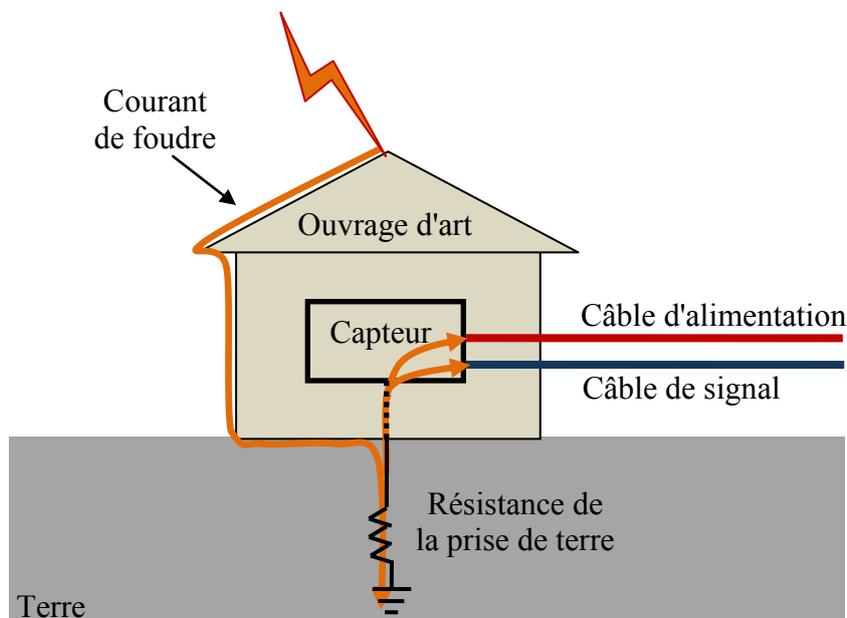


Figure IV.2 - Foudroiement direct

IV.2.2 Foudroiement indirects

Lorsque la foudre ne touche pas directement l'ouvrage d'art, les effets indirects se produisent par conduction, par induction ou par remontée du potentiel de terre [130].

Dans le cas du foudroiement par conduction, la foudre tombe sur des câbles de liaison ou de transmission (lignes aériennes d'alimentation électrique, câbles de télécommunications, coaxial H.F.). Le courant de foudre se propage le long de ces câbles et atteint les capteurs qui y sont raccordés (Figure IV.3). Cet effet est destructeur car la majorité de l'énergie du coup de foudre traverse les capteurs [131].

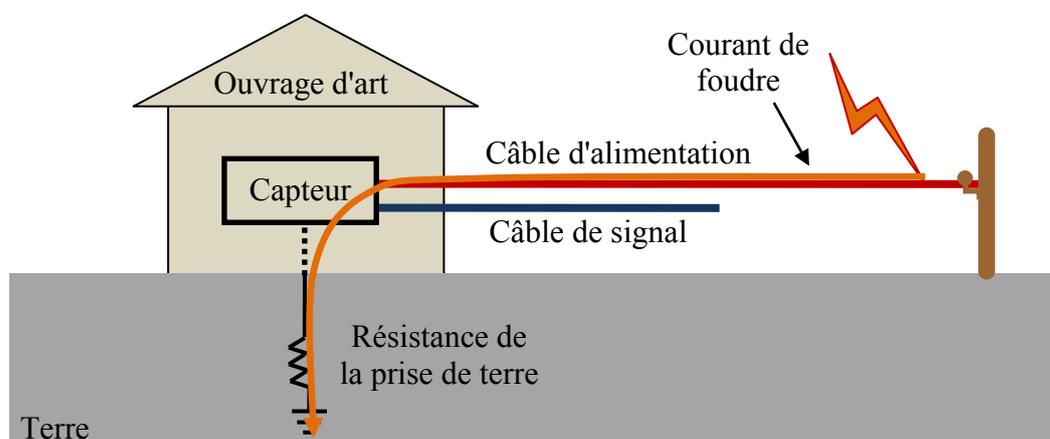


Figure IV.3 - Foudroiement par conduction

Dans le cas du foudroiement par induction, la foudre descend par une structure conductrice telle qu'un arbre autour d'un ouvrage d'art. La décharge de foudre génère un champ électromagnétique dont l'intensité peut atteindre plusieurs milliers de volts par mètre pour le champ électrique et plusieurs dizaines de micro tesla pour le champ magnétique [132]. Les brusques variations du champ électromagnétique rayonné par le coup de foudre sont captées par induction dans les câbles qui se comportent comme des antennes, comme le montre la Figure IV.4. Ainsi des surtensions et des courants transitoires apparaissent sur les capteurs raccordés à ces câbles.

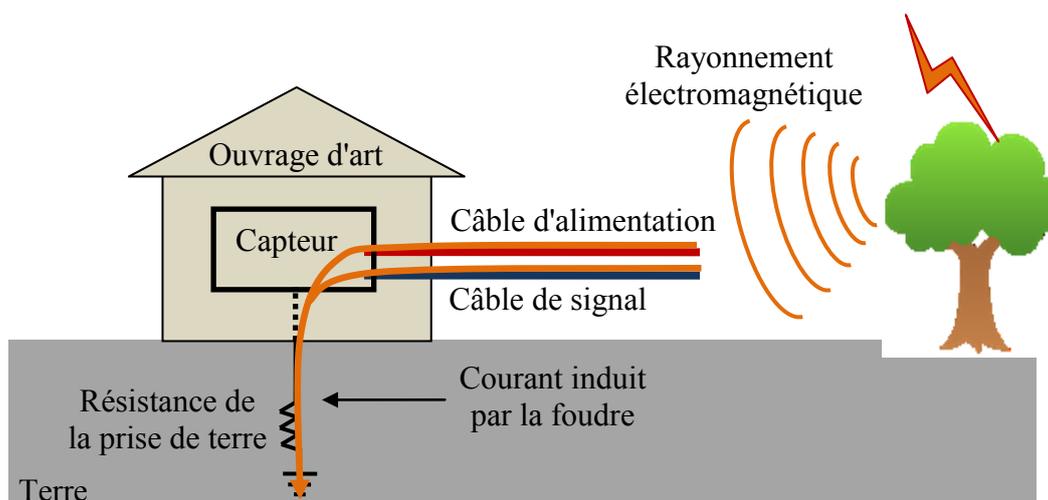


Figure IV.4 - Foudroiement par induction

Dans le cas du foudroiement par remontée du potentiel du sol, la foudre frappe un point du sol à proximité d'un ouvrage d'art. Le courant de foudre se répartit dans le sol en diffusant autour du point d'impact, dans toutes les directions [133]. Du fait de la résistivité électrique du sol, l'écoulement du courant de foudre au sol génère un potentiel qui diminue à la surface avec la distance au point d'impact de la foudre [134], comme le montre la Figure IV.5. Des différences de potentiels apparaissent alors entre les câbles des capteurs et le système de mise à la terre auquel sont reliées toutes les masses des équipements. En conséquence, le potentiel du conducteur de protection peut atteindre plusieurs milliers de volts [135].

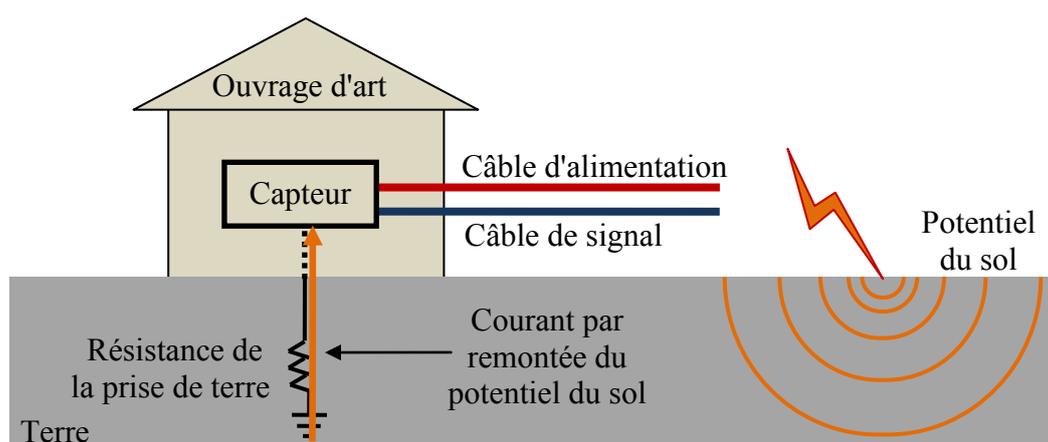


Figure IV.5 - Foudroiement par remontée du potentiel du sol

IV.3 Étude expérimentale de l'effet de la foudre

IV.3.1 Dispositif expérimental

La Figure IV.6 montre le dispositif réalisé au laboratoire pour simuler l'effet de la foudre sur les capteurs à corde vibrante. Un simulateur de décharge électrostatique NSG 431 est utilisé pour créer des décharges semblables à la foudre. Les niveaux des impulsions de décharge électrostatique produites par ce simulateur au contact et dans l'air peuvent atteindre 21 kV. Le câble de masse du simulateur est connecté à une grande plaque métallique sur laquelle un capteur à corde vibrante est placé. Un générateur de signaux est connecté à une bobine pour exciter la corde et un oscilloscope est connecté à l'autre bobine pour mesurer le signal de sortie du capteur. Deux capteurs à corde vibrante sont utilisés dans cette expérimentation : un capteur existant fabriqué par Géo-instrumentation (capteur fermé) et un capteur ouvert.

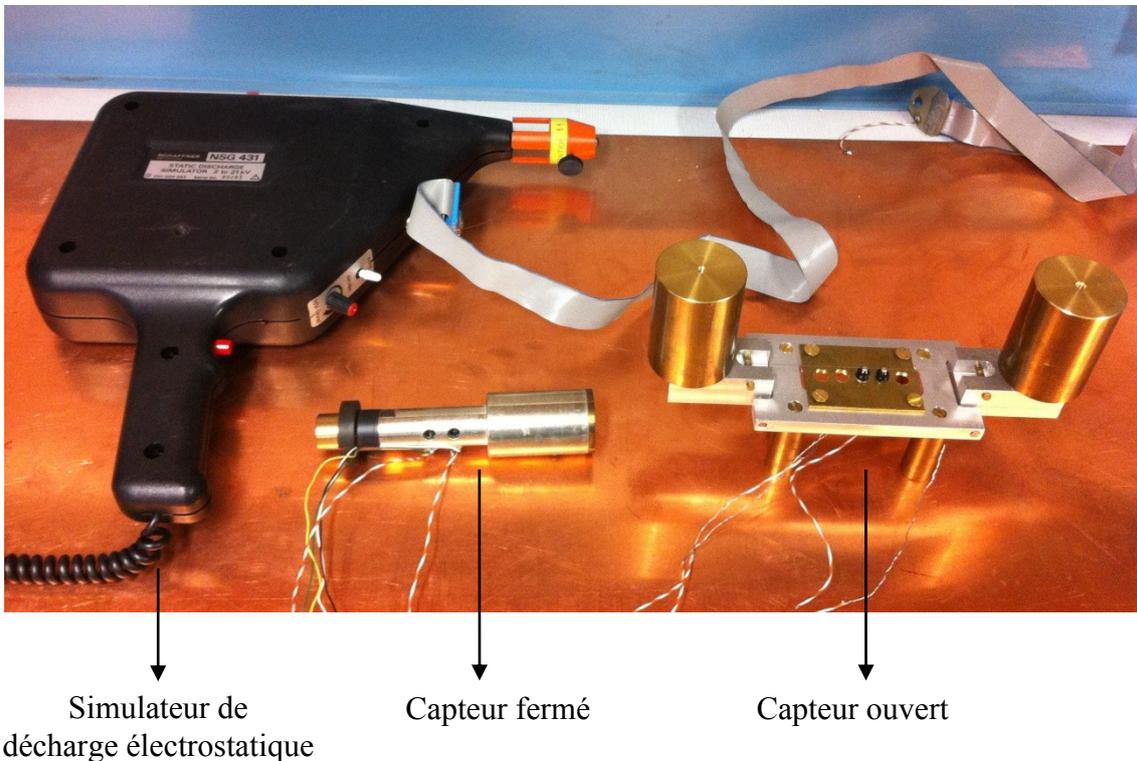


Figure IV.6 - Dispositif expérimental pour les tests de l'effet de la foudre

IV.3.2 Effet de la décharge électrostatique sur un capteur fermé

Dans un premier temps, la perturbation électromagnétique produite par la décharge électrostatique sur le capteur fermé est mesurée lorsque le capteur n'est pas excité par le générateur de signaux. Ensuite, les effets de la décharge électrostatique sur la réponse du capteur sont étudiés lorsque le capteur est mis en marche en mode amorti et en mode entretenu.

IV.3.2.1 Bruit électromagnétique produit par une décharge électrostatique

Lorsqu'une décharge frappe la plaque métallique en un point à proximité du capteur, une brusque variation du champ magnétique se produit et un signal non désiré est alors induit dans la bobine de mesure. La Figure IV.7 montre le bruit induit dans la bobine de mesure par une seule décharge d'une tension de 20 kV. Le point d'impact est situé à 0.1 m de la bobine de mesure. Cette perturbation dure environ 0.2 s et son niveau maximal est d'environ 0.3 V. On note une décroissance approximativement exponentielle à la fin de la perturbation.

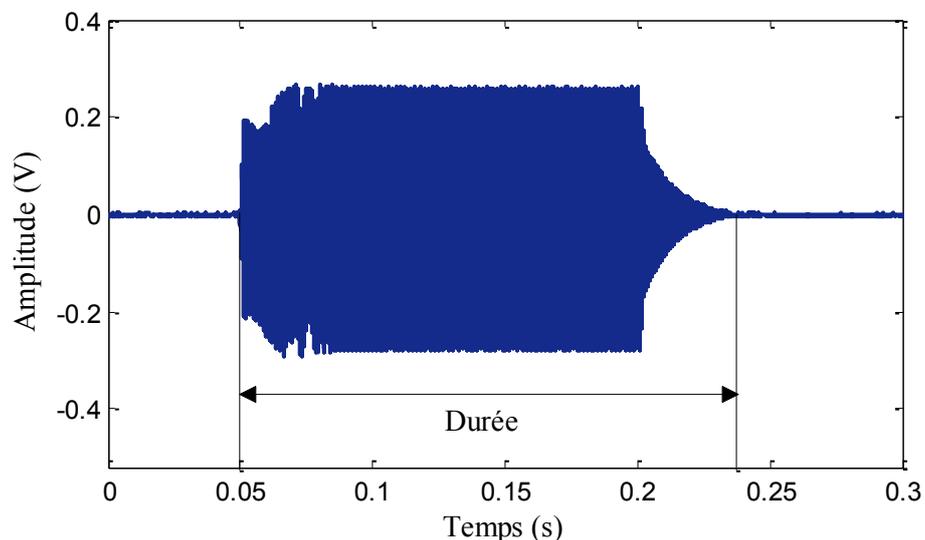


Figure IV.7 - Perturbation produit par une seule décharge électrostatique

Pour étudier l'influence de la position d'impact sur le niveau de la perturbation, le simulateur génère une seule décharge de l'intensité de 20 kV qui frappe la plaque métallique en différents points le long du câble qui transmet le signal de sortie du capteur à

l'oscilloscope. Comme montré sur la Figure IV.8a, le niveau du bruit induit dans la bobine de mesure diminue presque linéairement en fonction de la distance entre le point d'impact et la bobine de mesure.

La Figure IV.8b montre la relation entre le niveau du bruit électromagnétique produit par une seule décharge et l'intensité de la décharge, lorsque le point d'impact est situé à 0.1 m de la bobine de mesure. L'influence de la longueur du câble qui lie le capteur à l'oscilloscope est aussi prise en compte dans cette mesure. Il est à noter que le niveau de la perturbation électromagnétique sur le capteur augmente de façon linéaire avec l'augmentation de l'intensité de la décharge. Par rapport à un court câble de 1 m, un long câble de 5 m permet de réduire le niveau de bruit transmis à l'oscilloscope. En pratique, il est donc préférable d'augmenter la longueur du câble de transmission pour réduire le bruit électromagnétique reçu par le poste de lecture.

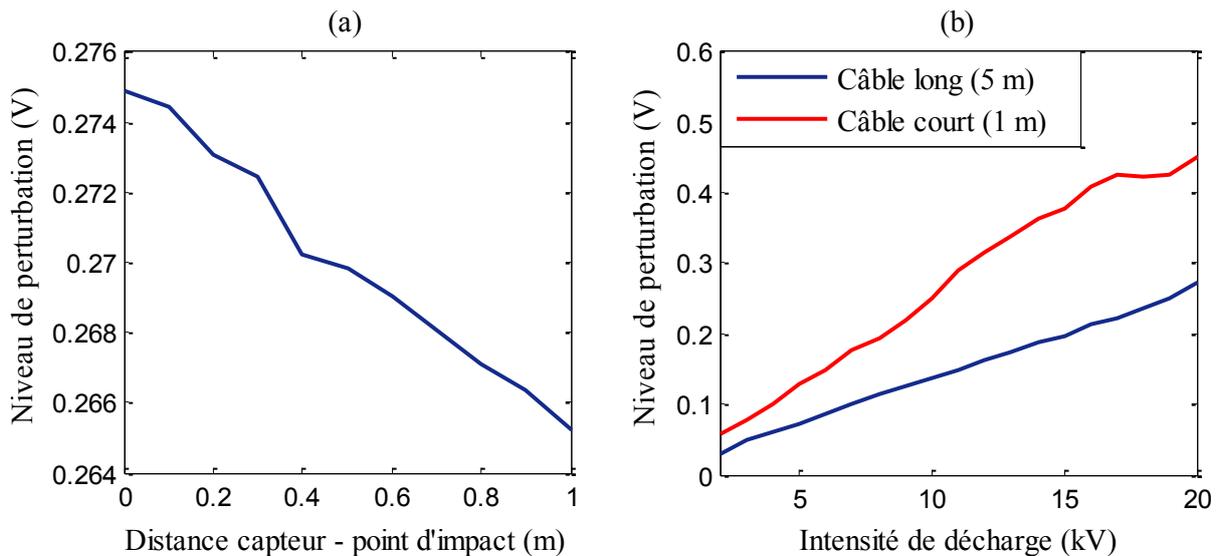


Figure IV.8 - Niveau de perturbation électromagnétique produite par une seule décharge en fonction de (a) la position d'impact et de (b) l'intensité de décharge

La durée du bruit produit par une décharge dépend de la position d'impact et de l'intensité de la décharge. La Figure IV.9a montre la durée du bruit en fonction de l'intensité de la décharge lorsque le point d'impact est situé à 0.1 m de la bobine de mesure. Plus l'intensité de la décharge est forte, plus la durée de la perturbation est longue. La Figure IV.9b montre la durée du bruit en fonction de la distance entre la bobine de mesure et le point

d'impact lorsque l'intensité de la décharge est de 20 kV. Plus le point d'impact est proche du capteur, plus la durée de la perturbation est longue.

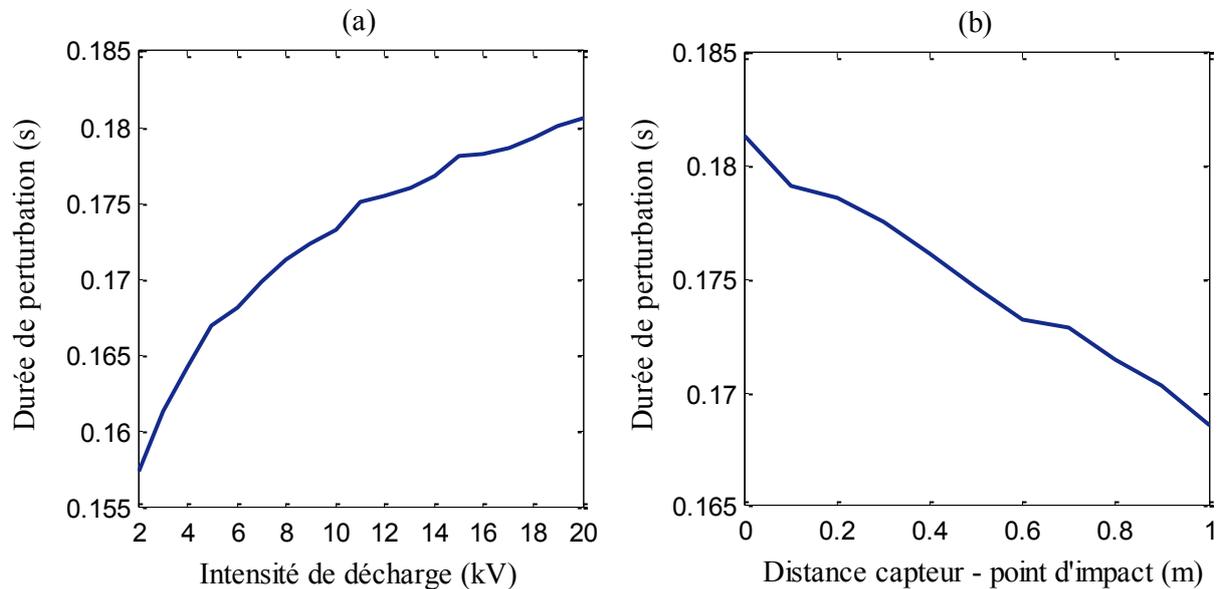


Figure IV.9 - Durée de perturbation électromagnétique produite par une seule décharge en fonction de (a) l'intensité de décharge et de (b) la position d'impact

IV.3.2.2 Effet de la décharge électrostatique en mode amorti

Pour simuler un coup de foudre qui est en réalité constitué de plusieurs décharges de forte intensité (voir Figure IV.1), les tests sont effectués en générant des décharges répétitives de 20 kV par le simulateur. En mode amorti, le générateur de signaux envoie une impulsion modulée d'amplitude 5 V à la bobine d'excitation pour mettre la corde en mouvement. Pour vérifier si la réponse du capteur est modifiée par des décharges répétitives à proximité du capteur, la réponse du capteur est mesurée avant, pendant et après la décharge.

La Figure IV.10 compare les réponses du capteur et ses spectres de fréquence avant, pendant et après la décharge. Pendant la décharge (Figure IV.10b), le signal correspondant à la vibration de la corde est complètement submergé par le bruit. D'après son spectre de fréquence, certains bruits de haute fréquence apparaissent, ce qui rend difficile la mesure correcte de la fréquence de résonance bien qu'elle soit toujours détectable. Après la décharge (Figure IV.10c), le capteur reprend son fonctionnement normal. En comparaison avec la réponse du capteur avant la décharge (Figure IV.10a), la réponse du capteur après la décharge n'est pas modifiée.

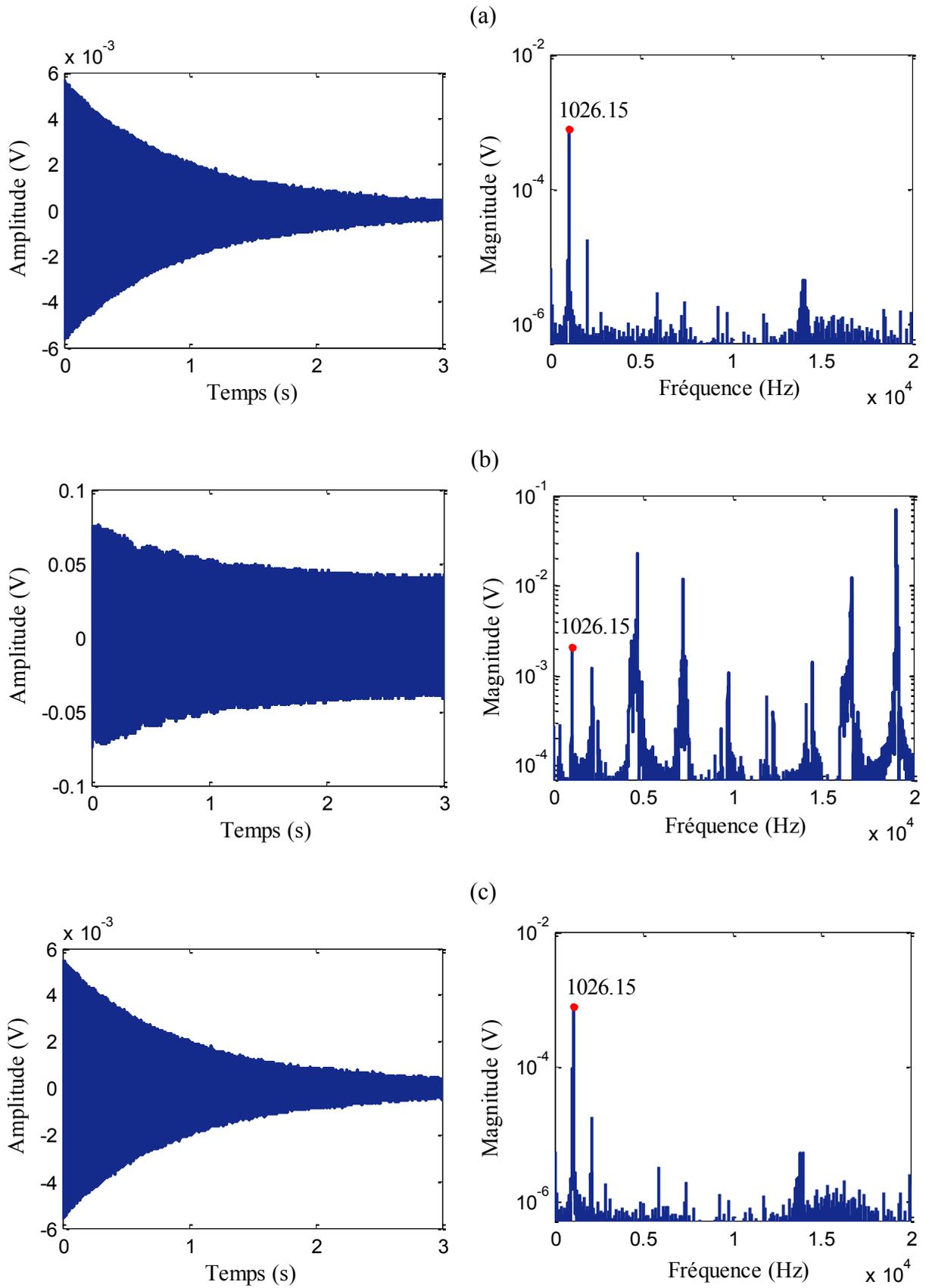


Figure IV.10 - Réponse du capteur et son spectre de fréquence en mode amorti (a) avant la décharge (b) pendant la décharge et (c) après la décharge

IV.3.2.3 Effet de la décharge électrostatique en mode entretenu

En mode entretenu, le générateur de signaux envoie en continu un signal sinusoïdal d'amplitude 1.5 V à la bobine d'excitation pour maintenir la corde en résonance. Ensuite, le simulateur crée des décharges répétitives de 20 kV à proximité du capteur pendant certain temps. La Figure IV.11 montre le signal de sortie du capteur en mode entretenu avant, pendant et après des décharges répétitives qui durent 3 s. Pendant la décharge (Figure IV.12), le signal correspondant à la vibration de la corde est complètement submergé par le bruit électromagnétique. D'après son spectre de fréquence, certains bruits de haute fréquence apparaissent, ce qui rend difficile la mesure correcte de la fréquence de résonance bien qu'elle soit toujours détectable. Après la décharge, le capteur reprend son fonctionnement normal. Les spectres de fréquence des réponses du capteur avant et après la décharge sont montrés sur la Figure IV.13. La fréquence de résonance de la corde reste inchangée.

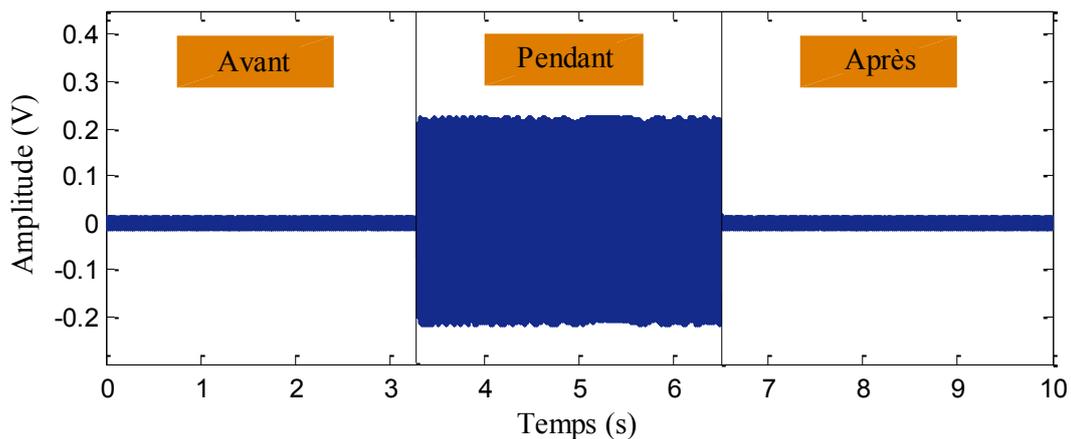


Figure IV.11 - Réponse du capteur en mode entretenu sous l'effet des décharges répétitives

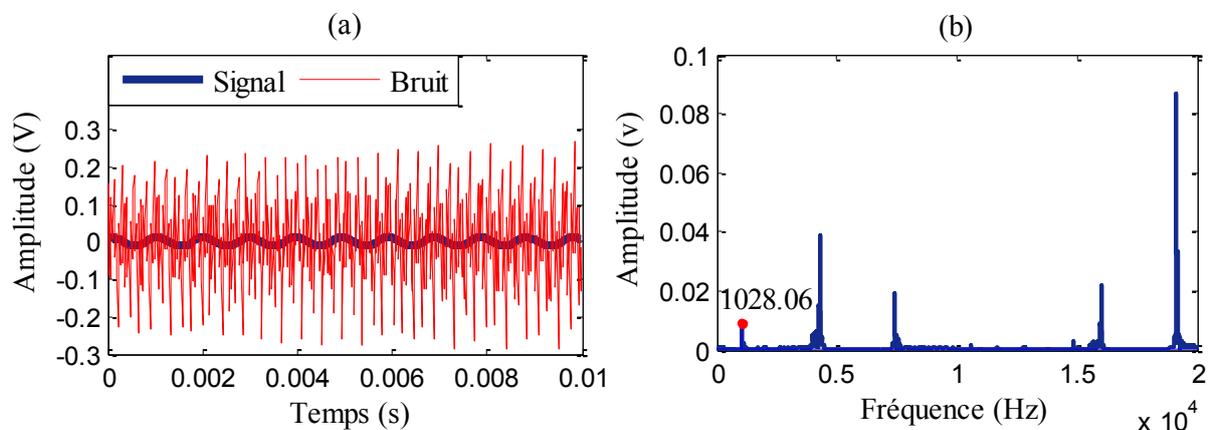


Figure IV.12 - (a) Réponse du capteur et (b) son spectre de fréquence en mode entretenu pendant la décharge

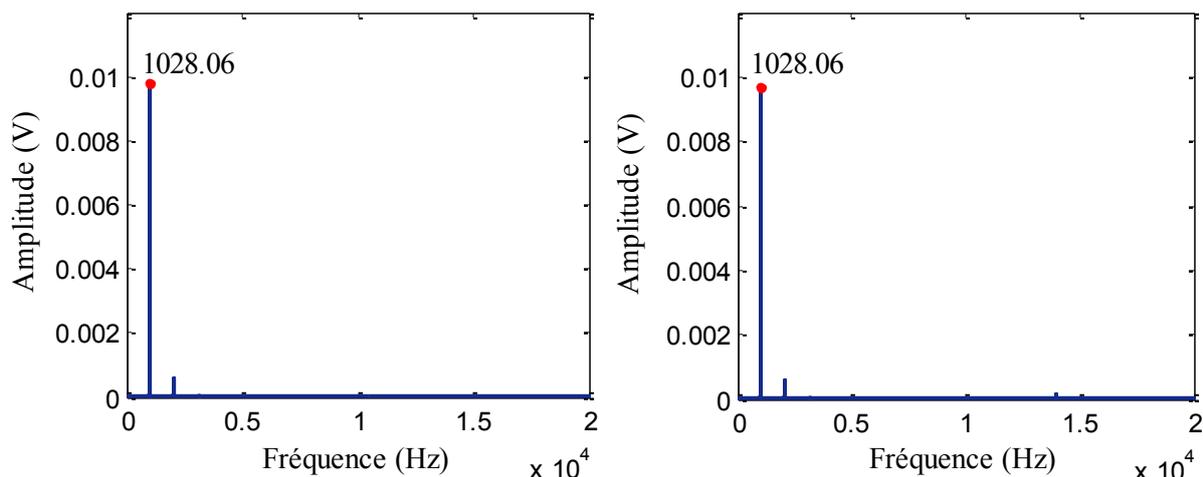


Figure IV.13 - Spectre de fréquence de la réponse du capteur en mode entretenu (a) avant la décharge et (b) après la décharge

IV.3.2.4 Modification de la réponse du capteur fermé

Les tests précédents montrent peu d'influence sur la réponse du capteur sous l'effet des décharges répétitives à proximité. Pour renforcer l'effet de la décharge, la bobine de mesure est directement frappée par des décharges répétitives pendant longtemps (>30 s). Dans ce cas, une modification de la réponse du capteur en mode entretenu est observée. La Figure IV.14 montre la réponse du capteur après des décharges répétitives de 20 kV frappant directement la bobine de mesure durant 60 s. Après la décharge, on remarque une réduction de l'amplitude du signal de sortie du capteur. Quelques dizaines de secondes plus tard (environ 40 s), le capteur reprend son fonctionnement normal. Plusieurs mesures sont effectuées en variant la durée des décharges répétitives. On voit sur la Figure IV.15 que la durée de la modification de la réponse du capteur est proportionnelle à la durée des décharges. Les tests sont ensuite effectués sur un capteur ouvert pour mieux étudier la modification de la réponse du capteur due à la décharge.

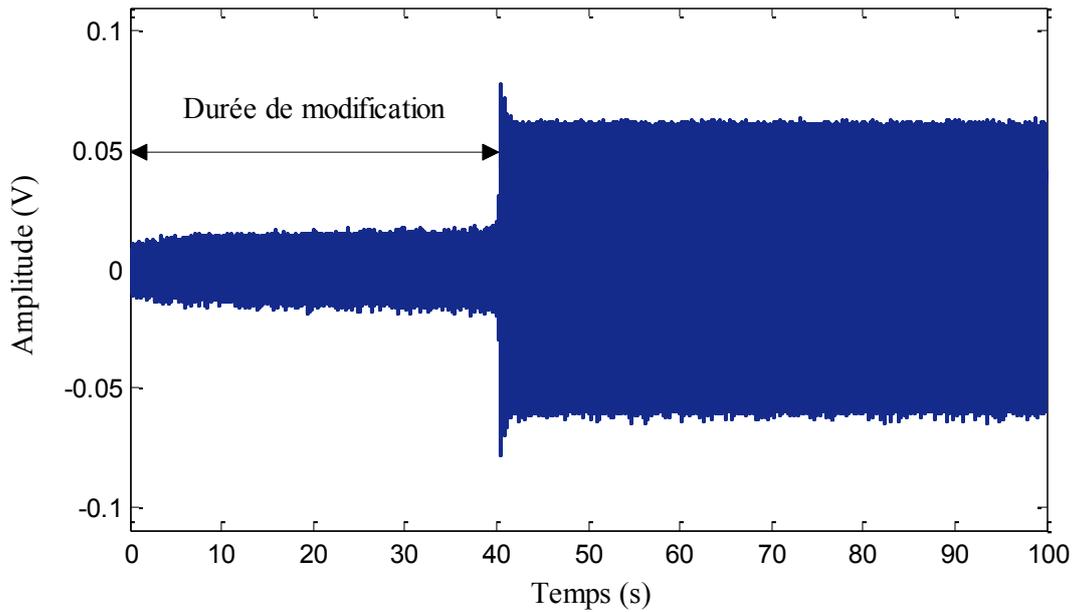


Figure IV.14 - Modification de la réponse du capteur en mode entretenu sous l'effet des décharges répétitives qui frappent directement la bobine de mesure pendant longtemps

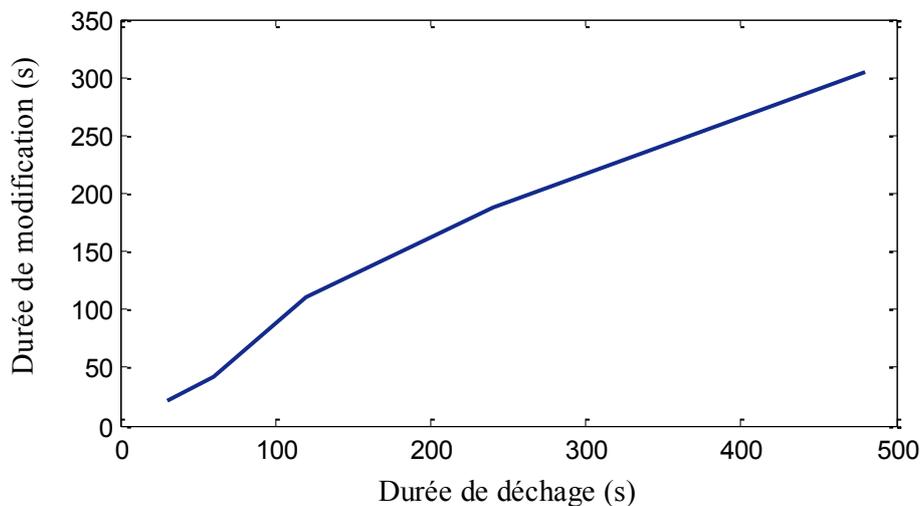


Figure IV.15 - Durée de la modification du capteur en fonction de la durée des décharges

IV.3.3 Effet de la décharge électrostatique sur un capteur ouvert

Le comportement de la corde vibrante avant, pendant et après la décharge peut être observé en utilisant un capteur ouvert et un stroboscope (Figure IV.16). Dans cette procédure, la corde est toujours éclairée par le stroboscope. La fréquence du stroboscope est modifiée

jusqu'à observer le mouvement apparent de la corde. On observe que la vibration de la corde n'est pas modifiée au début de la décharge. Après une dizaine de secondes, la vibration de la corde s'arrête jusqu'à la fin de la décharge. Lorsque la décharge est terminée, la corde reste immobile pendant quelques secondes. Puis elle commence à vibrer de manière faible. L'amplitude de la vibration augmente peu à peu jusqu'à revenir à une amplitude identique à celle de la vibration avant la décharge. Le capteur reprend finalement son fonctionnement normal.

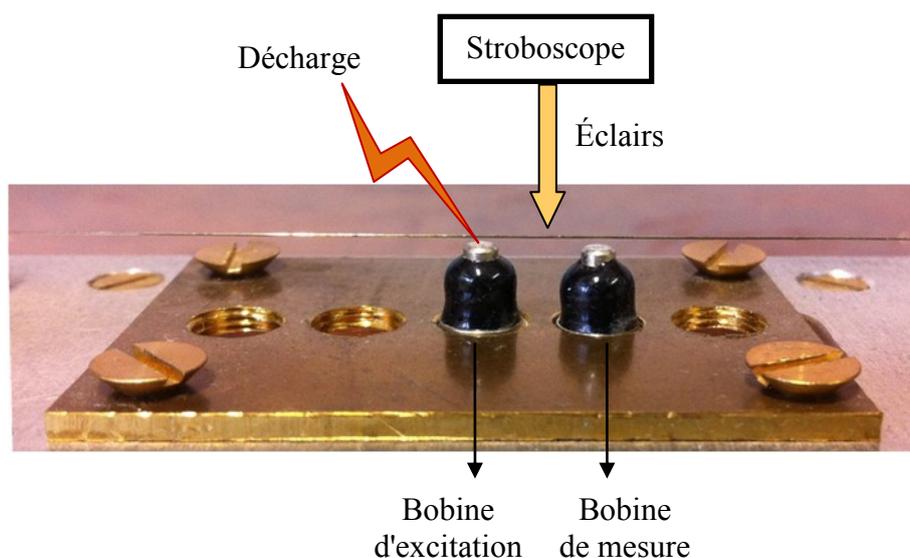


Figure IV.16 - Observation du mouvement de la corde sous l'effet de la décharge en utilisant un capteur ouvert et un stroboscope

La modification de la réponse du capteur observée précédemment peut être attribuée à une modification du champ magnétique résiduel H_0 dans le capteur causée par la décharge. La variation du champ résiduel dans le capteur sous l'effet de la décharge est mesurée en utilisant un gaussmètre dont la sonde est placée juste au-dessus de la bobine de mesure. Dans cette mesure, le générateur de signaux n'envoie aucun signal à la bobine d'excitation, et le simulateur génère des décharges répétitives de 20 kV qui frappent directement la bobine de mesure pendant 60 s. Comme le montre la Figure IV.17, la moyenne de l'intensité du champ magnétique résiduel mesuré à l'aide d'un gaussmètre MG-10D au-dessus de la corde est de 16.5644 mT avant la décharge. Lorsque la décharge est terminée, l'intensité du champ magnétique résiduel devient plus petite qu'avant. En quelques secondes (environ 8 s) après la fin de la décharge, le champ magnétique ne change pas beaucoup, son intensité étant de

15.1012 mT en moyenne. Puis le champ magnétique résiduel augmente jusqu'à atteindre 16.5451 mT qui est presque identique à celui mesuré avant la décharge.

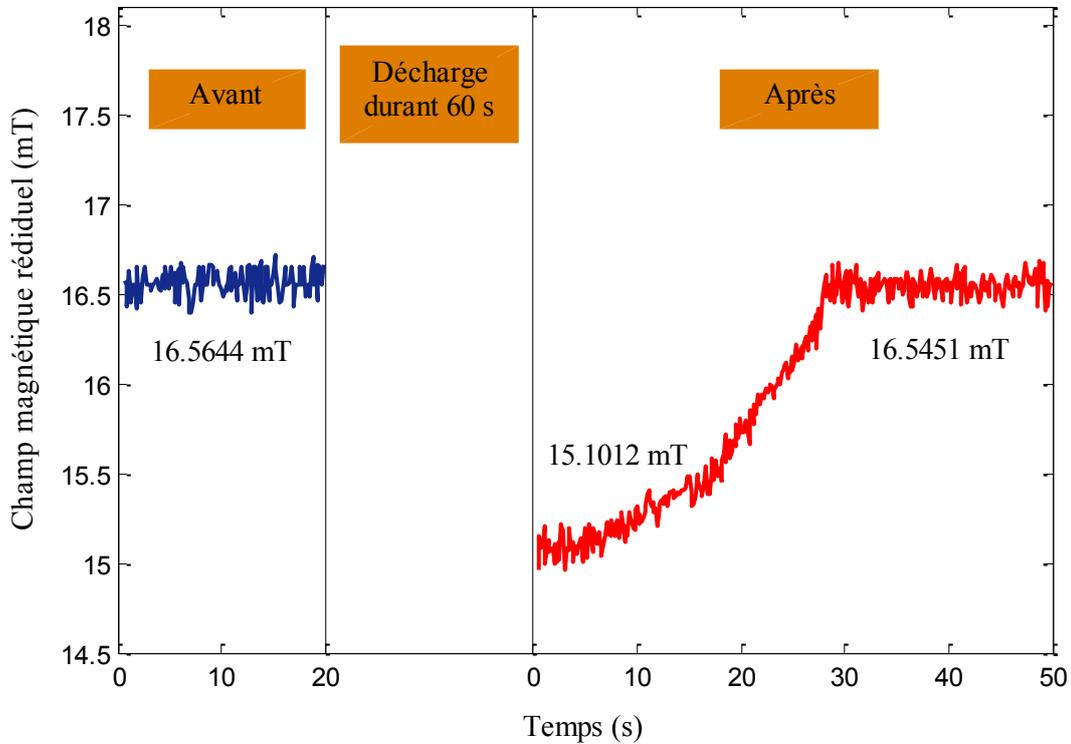


Figure IV.17 - Champ magnétique résiduel avant et après des décharges répétitives de 20 kV qui frappent directement la bobine de mesure pendant 60 s

Après avoir déterminé la variation du champ magnétique résiduel, le capteur est excité par le générateur de signaux pour mesurer sa réponse sous l'effet des décharges. Afin de s'assurer que le capteur subit la même variation du champ résiduel que celle montrée sur la Figure IV.17, il faut appliquer les mêmes décharges que précédemment. La Figure IV.18 et la Figure IV.19 montrent respectivement la réponse du capteur à une excitation continue d'amplitude 1.5 V avant et après la décharge. Avant la décharge, l'amplitude de la réponse du capteur est d'environ 0.09721 V et la fréquence de résonance de la corde est de 1001.93 Hz. Après la décharge, on observe une réponse anormale dont l'amplitude est réduite à 0.03817 V durant environ 28 s. Cette durée est presque égale à la durée de la variation du champ résiduel (Figure IV.17). L'amplitude de la réponse du capteur revient finalement à 0.09732 V qui est presque identique à celle mesurée avant la décharge. La modification de l'amplitude de la réponse du capteur est $0.09732 - 0.03817 = 0.05915$ V, soit environ 40%.

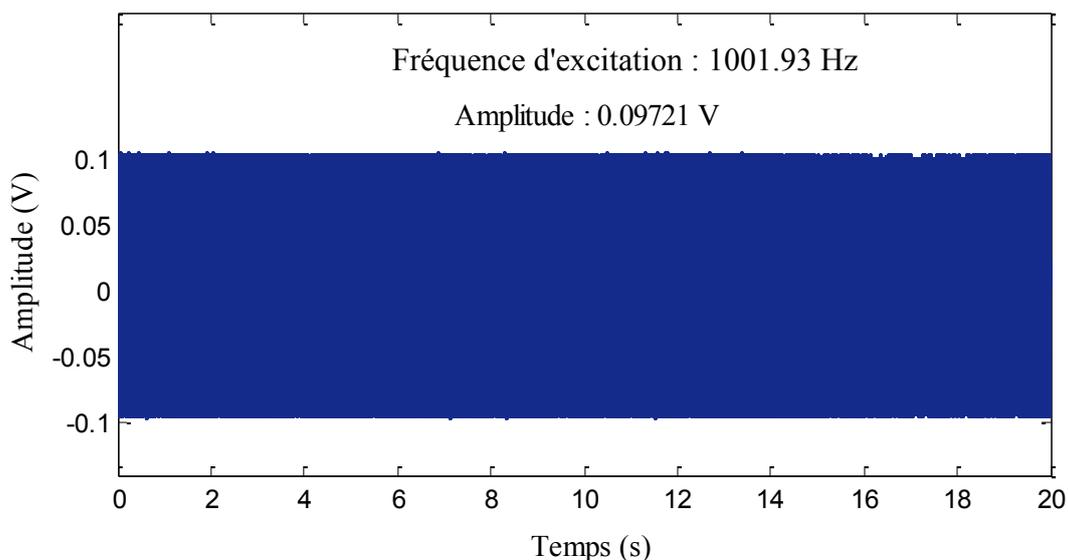


Figure IV.18 - Réponse de la corde en mode entretenu avant la décharge

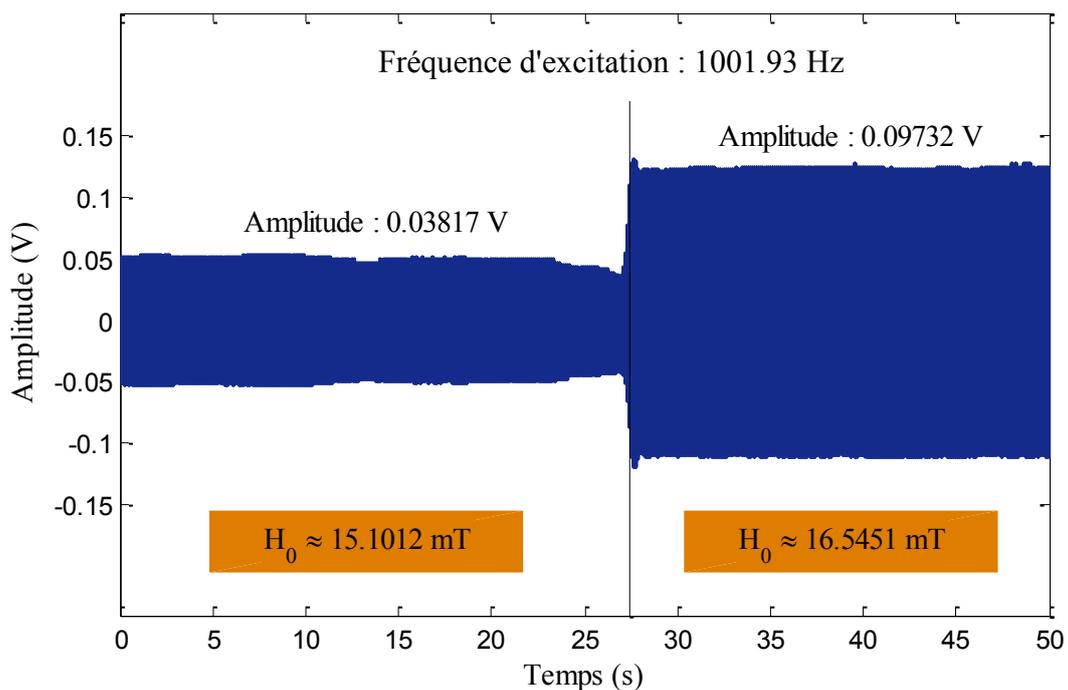


Figure IV.19 - Réponse de la corde en mode entretenu après la décharge en ne variant pas la fréquence d'excitation. Dans cette mesure, des décharges répétitives de 20 kV frappent directement la bobine de mesure pendant 60 s

La réduction de l'amplitude de la réponse du capteur après la décharge peut être attribuée à une déviation de la fréquence de résonance. En effet, la variation du champ résiduel peut conduire à une modification de la fréquence de résonance de la corde. Sur la

Figure IV.19, entre 0 et 28 secondes, la fréquence de résonance de la corde n'est pas égale à 1001.93 Hz et l'excitation continue à 1001.93 Hz ne permet donc pas de mettre la corde correctement en résonance. Quelques dizaines de secondes plus tard (environ 28 s), comme le champ résiduel retrouve son niveau d'origine, la fréquence de résonance revient à sa valeur normale de 1001.93 Hz. La résonance de la corde est donc à nouveau correctement excitée par le générateur. Pour vérifier expérimentalement cette hypothèse, la réponse du capteur, après l'application des mêmes décharges que précédemment, est mesurée de nouveaux en variant la fréquence d'excitation après la décharge.

Comme le montre la Figure IV.20, lorsque la décharge est terminée, la fréquence du générateur est réglée à partir de 1001.93 Hz jusqu'à obtenir l'amplitude maximale du signal de sortie du capteur (partie 0-5 s). L'amplitude maximale du signal mesuré est obtenue lorsque la fréquence d'excitation est égale à 1001.36 Hz. La corde est mise en résonance sous cette nouvelle excitation à 1001.36 Hz (partie 5-27 s). Après 27 s, l'amplitude du signal subit une petite réduction égale à $0.09752 - 0.09221 = 0.00531$ V, soit environ 5%.

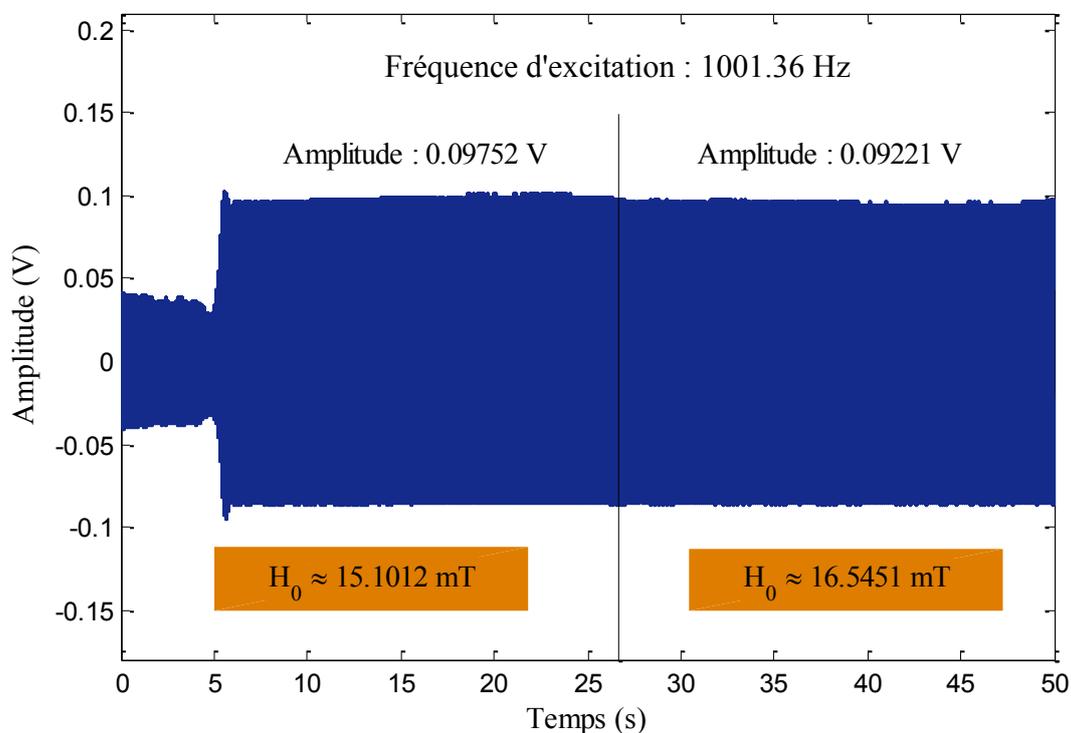


Figure IV.20 - Réponse de la corde en mode entretenu après la décharge en variant la fréquence d'excitation. Dans cette mesure, des décharges répétitives de 20 kV frappent directement la bobine de mesure pendant 60 s

Afin de vérifier que la dérivation de la fréquence de résonance et la modification de la réponse du capteur sont certainement due à la variation du champ résiduel, la courbe de résonance est tracée dans deux conditions : $H_0 \approx 15.1012$ mT et $H_0 \approx 16.5451$ mT. De telles conditions sont créées en plaçant des aimants permanents sur le capteur et en mesurant le champ magnétique résiduel par un gaussmètre dont la sonde est située juste au dessus de la bobine de mesure. Après avoir réalisé l'environnement de test, la réponse du capteur à une excitation continue d'amplitude 1.5 V est mesurée pour une fréquence d'excitation variant de 950 Hz à 1050 Hz.

D'après la courbe de résonance indiquée sur la Figure IV.21, sous le champ résiduel $H_0 \approx 15.1012$ mT, la fréquence de résonance de la corde est de 1001.36 Hz. Lorsque la fréquence d'excitation varie de 1001.36 Hz à 1001.93 Hz, l'amplitude de la réponse du capteur subit une petite réduction $0.09619 - 0.04254 = 0.05365$ V. Cette réduction d'amplitude correspond bien à la modification de la réponse du capteur sur la Figure IV.19.

D'après la courbe de résonance indiquée sur la Figure IV.22, sous le champ résiduel $H_0 \approx 16.5451$ mT, la fréquence de résonance de la corde est de 1001.93 Hz. Lorsque la fréquence d'excitation varie de 1001.93 Hz à 1001.36 Hz, l'amplitude de la réponse du capteur subit une petite réduction $0.09763 - 0.09145 = 0.00618$ V. Cette réduction d'amplitude correspond bien à la modification de la réponse du capteur sur la Figure IV.20.

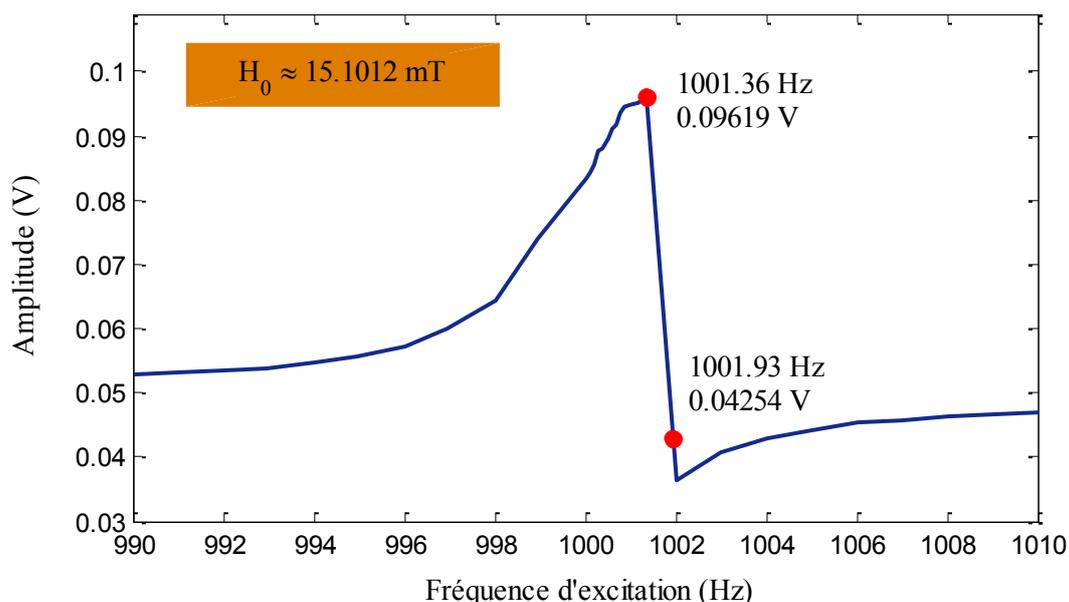


Figure IV.21 - Courbe de résonance de la corde vibrante lorsque $H_0 \approx 15.1012$ mT

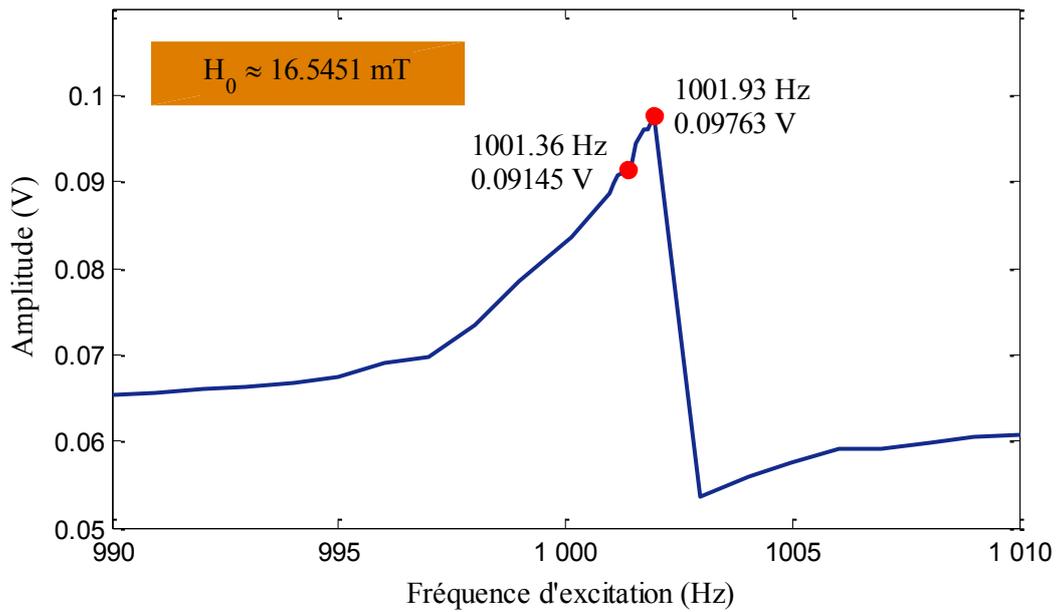


Figure IV.22 - Courbe de résonance de la corde vibrante lorsque $H_0 \approx 16.5451$ mT

Il peut noter que l'influence du champ magnétique résiduel est la même pour le mode amorti. La mesure de son effet est cependant plus simple en mode entretenu car le signal est continu pendant la décharge. À noter également que la durée de la magnétisation reste relativement courte avec le dispositif employé. Il convient cependant de prendre en compte l'intensité de la décharge due à la foudre réelle, ce qui permet d'envisager une pérennité beaucoup plus importante de la variation du champ magnétique résiduel dans le temps.

Conclusion et perspectives

Dans ce travail, les deux modes de fonctionnement des extensomètres à corde vibrante ont premièrement été étudiés. Le mode amorti consiste à exciter la corde par un signal pulsé de forte amplitude (typiquement 90 V pour une seule impulsion et 5 V pour une impulsion modulée) et à mesurer après l'excitation la fréquence et l'évolution temporelle de la vibration de la corde. Le mode entretenu consiste à exciter continuellement la corde par un signal sinusoïdal de faible amplitude (typiquement 200 mV) et à mesurer simultanément la fréquence de la vibration de la corde. Plusieurs avantages du mode entretenu par rapport au mode amorti ont été montrés. D'une part, le mode entretenu permet un niveau d'excitation de la corde bien inférieur au mode amorti. Cela permet de maximiser le rapport signal sur bruit, de réduire les contraintes magnétiques et de diminuer la probabilité de claquage électrique. D'autre part, en cas de défaillance d'une bobine, le capteur en mode amorti est perdu alors que le capteur en mode entretenu n'est pas perdu puisqu'il peut être converti en capteur en mode amorti avec la bobine restante. Le retour d'expérience des utilisateurs a également démontré que les capteurs fonctionnant en mode entretenu sont préférables à ceux fonctionnant en mode amorti pour une surveillance des ouvrages d'art sur de longues durées.

Un dispositif électronique à base de microcontrôleur a été conçu pour mettre en service les capteurs à corde vibrante selon les deux modes de fonctionnement. Ce dispositif permet aussi de mesurer la résistance des bobines pour compenser les dérives thermiques. Toutes les fonctions ont été réalisées sur une carte électrique qui est principalement composée d'un microcontrôleur PIC33, d'un amplificateur à gain variable, d'un filtre à capacité commutée et d'un écran. Avec les interrupteurs commandés, les différents circuits d'excitation et de mesure peuvent être sélectionnés.

Le comportement des cordes vibrantes a ensuite été étudié en établissant deux modèles physiques selon que la raideur de la corde était prise en compte ou non. Pour les deux modèles, les équations du mouvement ont été mises en forme et les fréquences de résonance de la corde ont été déterminées. Pour une corde sans raideur, toutes les fréquences de résonance d'ordre supérieur à 1 sont des multiples entiers de la fréquence fondamentale. Pour une corde avec raideur, les fréquences de résonance d'ordre élevé ne sont pas exactement des

multiples entiers de la fréquence fondamentale. Cette répartition inégale des fréquences de résonance conduit à des distorsions du signal de sortie du capteur. Elles peuvent cependant servir à suivre les propriétés mécaniques de la corde au cours du temps.

Lors de l'excitation, la contrainte magnétique $\mu_0 H^2/2$ agissant sur la corde a été décrite à l'aide de la méthode du tenseur de Maxwell. En calculant la fonction de Green, l'influence de la position d'excitation sur la réponse de la corde a été déterminée. Alors que les calculs des modes propres consistent à mettre en forme des informations connues, le calcul de la fonction de Green a permis de mettre en évidence les divers modes de résonance générés. Le cas d'une source ponctuelle d'excitation et le cas d'une bobine réelle d'excitation ont été pris en compte.

La position d'excitation et le mode d'excitation ont été expérimentalement analysés. Un bon accord entre les résultats expérimentaux et les analyses théoriques a été observé. La réponse de la corde est sensible à la position de l'excitation. Pour obtenir la meilleure efficacité d'excitation pour le mode de résonance fondamentale et limiter autant que possible les perturbations provoquées par les modes de résonance d'ordre pair, la bobine d'excitation doit être située au centre de la corde. Une excitation continue et une excitation pulsée composée d'un grand nombre de cycles permettent de réduire la perte de l'énergie dans les modes de résonance d'ordre élevé et des distorsions du signal dues à la raideur de la corde. Par conséquent, en termes de précision et de fiabilité du capteur, ces deux modes d'excitation sont préférables à une excitation pulsée composée d'un petit nombre de cycles.

Les circuits équivalents des capteurs à corde vibrante qui permettent d'étudier les paramètres d'influence de la réponse du capteur ont également été déterminés. La fréquence de résonance mesurée en mode entretenu diffère de celle mesurée en mode amorti à cause de deux paramètres : la force magnétique moyenne et le couplage mutuel entre les bobines. Les contributions de ces deux paramètres à la déviation de fréquence ont été théoriquement et expérimentalement analysées. Une différence de fréquence d'environ 2 Hz entre la fréquence mesurée en mode entretenu et celle mesurée en mode amorti a été observée. En supprimant les contributions des deux paramètres à l'augmentation de la fréquence de résonance en mode entretenu, la fréquence en mode amorti a été retrouvée avec précision. Cela permet d'utiliser l'un des deux modes en confiance et de passer du mode entretenu au mode amorti en cas de défaillance d'une bobine.

L'effet de la foudre sur la réponse du capteur à corde vibrante a finalement été étudié en soumettant un capteur à des décharges répétitives générées par un simulateur de décharges électrostatiques. Des décharges de forte intensité et de longue durée conduisent à une variation du champ magnétique résiduel dans l'environnement du capteur, modifiant ainsi la réponse du capteur. La fréquence de résonance mesurée pendant la décharge diffère de celle mesurée dans des conditions normales.

Il serait avantageux pour la suite de ce travail d'utiliser les postes de lecture réalisés et les extensomètres améliorés dans des environnements réels pour quantifier la précision de mesure, caractériser leur immunité aux perturbations et enfin estimer leur durée de vie.

Bibliographie

- [1] H. M. Lee, J. M. Kim, K. Sho, and H. S. Park, “A wireless vibrating wire sensor node for continuous structural health monitoring,” *Smart Mater. Struct.*, vol. 19, no. 5, pp. 055004, 2010.
- [2] H. Choi, S. Choi, and H. Cha, “Structural health monitoring system based on strain gauge enabled wireless sensor nodes,” in *5th International Conference on Networked Sensing Systems*, pp. 211–214, 2008.
- [3] S. Yan, J. Wu, W. Sun, H. Ma, and H. Yan, “Development and Application of Structural Health Monitoring System Based on Piezoelectric Sensors,” *International Journal of Distributed Sensor Networks*, vol. 2013, pp. e270927, Nov. 2013.
- [4] D. Feng, M. Q. Feng, E. Ozer, and Y. Fukuda, “A Vision-Based Sensor for Noncontact Structural Displacement Measurement,” *Sensors*, vol. 15, no. 7, pp. 16557–16575, 2015.
- [5] J. M. Lopez-Higuera, L. Rodriguez Cobo and A. Quintela Incera, “Fiber Optic Sensors in Structural Health Monitoring,” *Journal of Lightwave Technology*, vol. 29, no. 4, pp. 587–608, 2011.
- [6] C. J. Brown, R. Karuna, V. Ashkenazi, G. W. Roberts, and R. A. Evans, “Monitoring of structures using the Global Positioning System,” *Proceedings of the Institution of Civil Engineers. Structures and buildings*, vol. 134, no. 1, pp. 97–105, 1999.
- [7] H. H. Nassif, M. Gindy, and J. Davis, “Comparison of laser Doppler vibrometer with contact sensors for monitoring bridge deflection and vibration,” *NDT&E International*, vol. 38, no. 3, pp. 213–218, 2005.
- [8] C. Gentile and G. Bernardini, “An interferometric radar for non-contact measurement of deflections on civil engineering structures: laboratory and full-scale tests,” *Structure and Infrastructure Engineering*, vol. 6, no. 5, pp. 521–534, Oct. 2010.
- [9] X. Zhu and H. Hao, “Development of an integrated structural health monitoring system for bridge structures in operational conditions,” *Front. Struct. Civ. Eng.*, vol. 6, no. 3, pp. 321–333, Jul. 2012.
- [10] M. Kutz, *Handbook of measurement in science and engineering*, vol. 1. John Wiley & Sons, 2015.
- [11] B. Erol, “Evaluation of High-Precision Sensors in Structural Monitoring,” *Sensors (Basel)*, vol. 10, no. 12, pp. 10803–10827, Dec. 2010.

- [12] N. C. Yoder and D. E. Adams, “3 - Commonly used sensors for civil infrastructures and their associated algorithms,” in *Sensor Technologies for Civil Infrastructures*, vol. 55, M. L. Wang and J. P. Lynch, Eds. Woodhead Publishing, pp. 57–85, 2014.
- [13] R. Beals and P. C. Greiner, “Strings, waves, drums: spectra and inverse problems,” *Analysis and Applications*, vol. 07, no. 02, pp. 131–183, Apr. 2009.
- [14] B. Sellers, “The measurement of stress in concrete,” in *Field Measurements in Geomechanics: Proceedings of the 6th International Symposium, Oslo, Norway, 23-26 September 2003*, F. Myrvoll, Ed. Taylor & Francis, pp. 643–656, 2003.
- [15] D. M. Stefanescu, *Handbook of Force Transducers: Principles and Components*. Springer Science & Business Media, 2011.
- [16] J. B. McRae, T. Simmonds, “Long-term stability of vibrating wire instruments: One manufacturer's perspective,” in *Proceedings of the 3rd International Symposium on Field Measurements in Geomechanics*, vol.1 :283–293, Sep. 1991.
- [17] C. Larive, M. Joly, J. P. Dubois, and P. Choquet, “Theoretical and experimental validation of the vibrating wire principle, Application to a low stiffness strainmeter for embedment in concrete,” in *Proceedings of the 4th International Symposium on Field Measurements in Geomechanics*, pp. 341–348, Apr. 1995.
- [18] W. T. Buchanan, J. R. Wolosick, T. Simmonds, and R. K. Morrison, “Monitoring of surchargeinduced settlement at the MARTA Chamblee station,” *Transportation Research Record*, no. 1277, 1990.
- [19] S. Petroff, M. Halling, P. Barr, S. Cornelsen, and D. Madsen, “Structural monitoring with a dynamic vibrating wire analyzer,” in *Safety, Reliability, Risk and Life-Cycle Performance of Structures and Infrastructures*, G. Deodatis, B. R. Ellingwood, and D. M. Frangopol, Eds. CRC Press, pp. 2413–2420, 2014.
- [20] G. N. Durham and W. A. Marr, *Field Instrumentation for Soil and Rock*. ASTM International, 1999.
- [21] J. A. R. Ortigao and A. Sayao, *Handbook of Slope Stabilisation*. Springer Science & Business Media, 2013.
- [22] A. L. Window, *Strain Gauge Technology*. Springer Netherlands, 1992.
- [23] P. Sreeshylam, K. Ravisankar, S. Parivallal, K. Kesavan, and S. Sridhar, “Condition monitoring of pre-stressed concrete structures using vibrating wire sensors,” *International Journal of COMADEM*, vol. 11, no. 3, pp. 46, 2008.
- [24] F. Yu and N. Gupta, “An efficient model for improving performance of vibrating-wire instruments,” *Measurement*, vol. 37, no. 3, pp. 278–283, avril 2005.
- [25] J. L. Bordes and P. J. Debreuille, “Some facts about long term reliability of vibrating wire instruments,” *Transportation Research Record*, no. 1004, pp. 20–27, 1985.

-
- [26] A. C. Tan, M. Kaphle, and D. Thambiratnam, "Structural health monitoring of bridges using acoustic emission technology," in *8th International Conference on Reliability, Maintainability and Safety*, pp. 839–843, 2009.
- [27] G. W. Housner, L. Bergman, T. K. Caughey, A. G. Chassiakos, R. O. Claus, S. F. Masri, R. E. Skelton, T. T. Soong, B. F. Spencer, and J. T. Yao, "Structural control: past, present, and future," *Journal of engineering mechanics*, vol. 123, no. 9, pp. 897–971, 1997.
- [28] Z. Wu and H. Su, "Dam health diagnosis and evaluation," *Smart materials and structures*, vol. 14, no. 3, pp. S130, 2005.
- [29] J. Jia, X. Zhang, L. Cai, S. Zhang, Y. Tu, and S. T. Tu, "Sensors for high-temperature displacement, deformation, and strain measurement: A review," in *Structural Health Monitoring and Integrity Management*, K. Ding, S. Yuan, and Z. Wu, Eds. CRC Press, pp. 25–32, 2015.
- [30] V. Lanticq, "Mesure répartie de température et de déformations par diffusion Brillouin: de la fibre optique au capteur pour le génie civil," phdthesis, Télécom ParisTech, 2009.
- [31] A. Courtois and J. M. Henault, "La surveillance en exploitation des enceintes de confinement et des aéroréfrigérants à tirage naturel du parc nucléaire d'EDF," *Revue Générale Nucléaire*, no. 2, pp. 49–59, 2011.
- [32] D. M. Frangopol, A. Strauss, and S. Kim, "Bridge reliability assessment based on monitoring," *Journal of Bridge Engineering*, vol. 13, no. 3, pp. 258–270, 2008.
- [33] J. P. Fabre, "L'auscultation des grands barrages EDF/ Monitoring of EDF large dams," *Annales du Bâtiment et des Travaux Publics*, vol. 66, no. 1–3, pp. 166–170, Mar. 2014.
- [34] R. Bud and D. J. Warner, *Instruments of Science: An Historical Encyclopedia*. Taylor & Francis, 1998.
- [35] A. Coyne, Procédé et dispositifs pour la mesure des déformations des solides et notamment des déformations internes du béton, Brevet français 721.629, 1932.
- [36] J. Dumas, "Les installations hydro-électriques de la Truyère," *Le Génie civil*, 52^e année, Tome CI, no. 12, pp. 269–277, 1932.
- [37] J. L. Bordes, "Barrages et essais en vraie grandeur: auscultation et surveillance," *Documents pour l'histoire des techniques. Nouvelle série*, no. 20, pp. 97–106, Dec. 2011.
- [38] A. Coyne and A. Bidault des Chaumes, "Le barrage et la centrale électrique de Marèges sur la Dordogne," *Le Génie civil*, 52^e année, Tome CVII, no. 17, pp. 385–394, 1935.

- [39] A. Coyne, "The construction of large modern water dams. abridged report. joint meeting with british section, societ  des ingenieurs civils de france and with the institution of structural engineers. 11 february 1937," *Journal of the Institution of Civil Engineers*, vol. 5, no. 5, pp. 401–404, Mar. 1937.
- [40] A. Coyne, "Arch Dams: Their Philosophy," *Journal of the Power Division*, vol. 82, no. 2, pp. 1–17, Apr. 1956.
- [41] J. L. Bordes and J. P. Herriou, "Entre excellence technique et recherche de marchés : Coyne et Bellier, 1947-2009," *Entreprises et histoire*, vol. n  71, no. 2, pp. 62–82, Oct. 2013.
- [42] A. Coyne, "Quelques résultats d'auscultation sonore sur les ouvrages en béton, béton armé ou métal," *Annales de l'institut du bâtiment et des travaux publics, Juillet-Août*, pp. 33–56, 1938.
- [43] F. M. Lea, W. Glanville, H. Harding, and others, "The unwinn memorial lecture 1954. Experimental science and civil engineering research," in *Proceedings ICE*, vol. 4, pp. 244–265, 1955.
- [44] F. Tattersall, T. R. M. Wakeling, and W. H. Ward, "Investigations into the design of pressure tunnels in London Clay," in *Proceedings ICE*, vol. 4, pp. 400–455, 1955.
- [45] I. K. Lee, "The Application of the Vibrating Wire Measuring Principle to the Measurement of Earth Pressure," *Australian Journal of Applied Science*, vol. 11, pp. 65, 1960.
- [46] W. H. Ward and J. E. Cheney, "Oscillator measuring equipment for vibrating-wire gauges," *Journal of Scientific Instruments*, vol. 37, no. 3, pp. 88, 1960.
- [47] F. P. Potocki, "Vibrating-wire strain gauge for long-term internal measurements in concrete," *The Engineer*, vol. 206, no. 5369, pp. 964–967, 1958.
- [48] Task Committee on Instrumentation and Monitoring Dam Performance, *Guidelines for Instrumentation and Measurements for Monitoring Dam Performance*. ASCE Publications, 2000.
- [49] L. W. Turnbridge and K. Oien, "The advantages of vibrating wire instruments in geomechanics," in *Proceedings of the 2nd International Symposium on Field Measurement in Geomechanics*, vol. 1, pp. 3-16, Apr. 1987.
- [50] R. S. Jerrett, "The Acoustic Strain Gauge," *J. Sci. Instrum.*, vol. 22, no. 2, pp. 29, 1945.
- [51] P. J. Zarriello, "Accuracy, Precision, and Stability of a Vibrating-Wire Transducer Measurement System to Measure Hydraulic Head," *Ground Water Monitoring & Remediation*, vol. 15, no. 2, pp. 157–168, May 1995.
- [52] P. Choquet, "Reliability, long-term stability and gage performance of vibrating wire sensors with reference to case histories," in *Proceedings of the fifth international symposium field measurements in geomechanics*, pp. 49–54, 1999.

-
- [53] B. Benmokrane, M. Chekired, and H. Xu, "Monitoring behavior of grouted anchors using vibrating-wire gauges," *Journal of geotechnical engineering*, vol. 121, no. 6, pp. 466–475, 1995.
- [54] <http://www.itmsol.fr/pages/jauge+de+contrainte+montee+sur+une+surface+en+beton>
- [55] <http://docplayer.fr/8124631-Description-des-essais-et-instrumentation.html>
- [56] J. Anthony, T. Simmonds, "Long term monitoring using vibrating wire sensors," in *Proceedings of 2015 Annual Kansas City Specialty Seminar Instrumentation Techniques for Risk Mitigation*, Jan. 2015.
- [57] <http://www.landsolution.com.au/item/southpoint-tunnel-monitoring/>
- [58] <http://www.iitbhu.ac.in/faculty/min/rajesh-rai/NMEICT-Slope/lecture/c9/l13.html>
- [59] S. Cornelsen, L. Jacobsen, *Instrumentation for Making High-Precision Dynamic Vibrating-Wire Measurements Using Standard Single-Coil Gages*. Campbell Scientific white paper.
- [60] A. A. H. Pádua, J. M. N. A. Fareleira, J. C. G. Calado, and W. A. Wakeham, "Electromechanical model for vibrating-wire instruments," *Review of Scientific Instruments*, vol. 69, no. 6, pp. 2392–2399, Jun. 1998.
- [61] L. Viman and S. Lungu, "Electrical model for two coils vibrating wire transducers without mutual couplings," in *Proceedings of the 16th International Symposium for Design and Technology in Electronic Packaging (SIITME)*, pp. 157–160, 2010.
- [62] L. Viman and S. Lungu, "Electrical coupled model for two coils vibrating wire transducer," in *Proceedings of the 33rd International Spring Seminar on Electronics Technology (ISSE)*, pp. 421–426, 2010.
- [63] K. Balasubramanian, K. Guven, and Z. G. Altun, "Microprocessor based new technique for measuring pneumatic pressure using optocoupler controlled vibrating wire transducer," in *Proceedings of Instrumentation and Measurement Technology Conference*, pp. 464–467, 1994.
- [64] V. Bande, S. Pop, L. Viman, and D. Pitica, "Behavioral model and a MatLAB simulation interface of vibrating wire transducers," in *Proceedings of the 32nd International Spring Seminar on Electronics Technology (ISSE)*, pp. 1–6, 2009.
- [65] A. Simonetti, "A measurement technique for the vibrating wire sensors," in *Proceedings NORCHIP*, pp. 1–6, 2012.
- [66] S. Pop, I. Ciascai, V. Bande, and D. Pitica, "High accuracy method for measurement of vibrating wire transducer," in *Proceedings of the 36th International Spring Seminar on Electronics Technology (ISSE)*, pp. 361–364, 2013.

- [67] S. Y. Mao, J. H. Zhao, and F. F. Zhou, "Improvement and Design of Single Coil Vibrating-Wire Sensor Signal Acquisition System Based on STM32," *Applied Mechanics and Materials*, vol. 511–512, pp. 764–769, Feb. 2014.
- [68] P. Briole, *Etude théorique des appareils à corde vibrante : cas de l'extensomètre c110, comparaison des fonctionnements en amorti et en entretenu*, rapport technique de TELEMAT, 1987.
- [69] G. Sørum, and T. Dyken, *Vibrating-wire reinforcement strain gauges for performance monitoring of large concrete structures*, rapport technique de NGI, 1987.
- [70] N. Rosin-Corre, C. Noret, J. L. Bordes, *L'auscultation par capteurs à corde vibrante, 80 ans de retour d'expérience*, in *Proceedings colloque CFBR*, 2012.
- [71] F. Bourquin and M. Joly, "A magnet-based vibrating wire sensor: design and simulation," *Smart Mater. Struct.*, vol. 14, no. 1, pp. 247, Feb. 2005.
- [72] J. Dunnicliff, *Geotechnical Instrumentation for Monitoring Field Performance*, New Ed. John Wiley & Sons, 1994.
- [73] W. Boyes, *Instrumentation Reference Book*. Butterworth-Heinemann, 2009.
- [74] N. Davidenkoff, "The Vibrating-Wire Method of Measuring Deformation," in *Proceedings ASTM*, vol. 34, pp. 847–860, 1934.
- [75] E. DiBiagio, "A case study of vibrating-wire sensors that have vibrated continuously for 27 years," in *Proceedings of the 6th International Symposium on Field Measurements in Geomechanics*, pp. 445–458, 2003.
- [76] P. Fichou, "La modélisation multiphysique," *Technologie*, no. 184, pp. 36–48, Mar. 2013.
- [77] Y. M. Du, P. C. Xia, and L. Y. Xiao, "Calculating magnetic force of permanent magnet using Maxwell stress method," *IEEE Transactions on Applied Superconductivity*, vol. 10, no. 1, pp. 1392–1394, Mar. 2000.
- [78] J. R. Melcher, *Continuum Electromechanics*. MIT Press, 1981.
- [79] M. Jufer, *Electromécanique*. PPUR presses polytechniques, 1995.
- [80] A. Pramanik, *Electro-Magnetism: Theory and Applications*. PHI Learning Pvt. Ltd., 2004.
- [81] J. Coirier and C. Nadot-Martin, *Mécanique des milieux continus - 4e édition: Cours et exercices corrigés*. Dunod, 2013.
- [82] C. J. Carpenter, "Surface-integral methods of calculating forces on magnetized iron parts," *Proceedings of the IEE - Part C: Monographs*, vol. 107, no. 11, pp. 19–28, Mar. 1960.

-
- [83] A. N. Wignall, A. J. Gilbert, and S. J. Yang, "Calculation of forces on magnetised ferrous cores using the Maxwell stress method," *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 24, no. 1, pp. 459–462, 1988.
- [84] L. B. Lugansky, "Optimal coils for producing uniform magnetic fields," *Journal of Physics E Scientific Instruments*, vol. 20, pp. 277–285, 1987.
- [85] O. Barre, "Contribution à l'étude des formulations de calcul de la force magnétique en magnétostatique, approche numérique et validation expérimentale," phdthesis, Université des Sciences et Technologie de Lille - Lille I, 2003.
- [86] L. D. Landau, J. S. Bell, M. J. Kearsley, L. P. Pitaevskii, E. M. Lifshitz, and J. B. Sykes, *Electrodynamics of Continuous Media*. Elsevier, 1984.
- [87] H. Sazdjian, *Ondes: cordes vibrantes et ondes sonores*. Orsay, France: Paris Onze édition, Université de Paris-Sud, 1999.
- [88] H. Jean-Claude and M. Venturi, *Ondes PC-PC*/ MP-MP*/ PSI-PSI*/ PT-PT*- 2e année*. Paris: NATHAN SCOLAIRE, 2009.
- [89] R. A. Sack, "Transverse oscillations in travelling strings," *British Journal of Applied Physics*, vol. 5, no. 6, pp. 224–226, Jun. 1954.
- [90] C. Truesdell, "The first differential equations of motion: John Bernoulli's and d'Alembert's treatments of the hanging cord (1742–1743)," in *The Rational Mechanics of Flexible or Elastic Bodies 1638–1788*, pp. 179–192, Springer, 1960.
- [91] G. Asch, *Les capteurs en instrumentation industrielle, 6^{ème} édition*. Dunod, 2010.
- [92] M. L. Abell and J. P. Braselton, *Introductory Differential Equations: with Boundary Value Problems*. Elsevier, 2014.
- [93] D. Zill and W. Wright, *Differential Equations with Boundary-Value Problems*. Cengage Learning, 2012.
- [94] G. Barton, *Elements of Green's Functions and Propagation: Potentials, Diffusion, and Waves*. Clarendon Press, 1989.
- [95] R. C. Whitten and P. T. McCormick, "Elementary introduction to the Green's function," *American Journal of Physics*, vol. 43, no. 6, pp. 541–543, Jun. 1975.
- [96] B. K. Datta, "Response of a vibrating string in a stochastic force field by green's function approach," *Proceedings of the Indian National Science Academy: Physical sciences*, vol. 61, pp. 249–252, 1995.
- [97] C. Chung and I. Kao, "Green's function and forced vibration response of damped axially moving wire," *Journal of Vibration and Control*, vol. 18, no. 12, pp. 1798–1808, 2011.

- [98] A. Angel, M. Magro, and P. Pujol, *Physique et outils mathématiques méthodes et exemples: méthodes et exemples*. EDP Sciences, 2012.
- [99] I. Stakgold and M. J. Holst, *Green's Functions and Boundary Value Problems*. John Wiley & Sons, 2011.
- [100] D. G. Duffy, *Green's Functions with Applications*. CRC Press, 2001.
- [101] T. Rossing, *The Science of String Instruments*. Springer Science & Business Media, 2010.
- [102] C. Truesdell, "The influence of elasticity on analysis: the classic heritage," *Bulletin of the American Mathematical Society*, vol. 9, no. 3, pp. 293–310, 1983.
- [103] L. D. Landau, L. P. Pitaevskii, A. M. Kosevich, and E. M. Lifshitz, *Theory of Elasticity*. Elsevier, 2012.
- [104] R. Plunkett, "Static Bending Stresses in Catenaries and Drill Strings," *J. Eng. Ind.*, vol. 89, no. 1, pp. 31–36, 1967.
- [105] P. M. Morse, *Vibration and Sound*. American Institute of Physics for the Acoustical Society of America, 1995.
- [106] J. P. D. Hartog, *Strength of Materials*. Courier Corporation, 2012.
- [107] T. Rossing and N. H. Fletcher, *Principles of Vibration and Sound*. Springer Science & Business Media, 2013.
- [108] H. Fletcher, "Normal Vibration Frequencies of a Stiff Piano String," *Acoustical Society of America Journal*, vol. 36, pp. 203, 1964.
- [109] J. Raud, "Théorie des cordes vibrantes : Établissement de formules relatives aux cordes encastées, Application a l'étude expérimentale de la relaxation des armatures de précontrainte," *Bulletin de la Direction des études et recherches. Série A, Nucléaire, hydraulique, thermique*, no. 2, pp. 89–126, 1967.
- [110] P. M. Morse and K. U. Ingard, *Theoretical Acoustics*. Princeton University Press, 1968.
- [111] R. M. French, *Engineering the Guitar: Theory and Practice*. Springer Science & Business Media, 2008.
- [112] G. Loy, *Musimathics: The Mathematical Foundations of Music*. MIT Press, 2011.
- [113] É. Durand, *Magnétostatique*. Masson et Cie, 1968.
- [114] D. I. Hoult and R. E. Richards, "The signal-to-noise ratio of the nuclear magnetic resonance experiment," *Journal of Magnetic Resonance (1969)*, vol. 24, no. 1, pp. 71–85, 1976.
- [115] O. Picon and P. Poulichet, *Aide-mémoire d'électromagnétisme*. Dunod, 2010.

-
- [116] S. Holé, *Modélisation des Capteurs : du monde physique au schéma électrique équivalent*. Cours de master, Université Pierre et Marie Curie, 2010.
- [117] S. Tumanski, *Handbook of Magnetic Measurements*. CRC Press, 2011.
- [118] G. Griffiths and W. Schiesser, “Linear and nonlinear waves,” *Scholarpedia*, vol. 4, no. 7, p. 4308, 2009.
- [119] P. Dunand, *Protection des installations électriques contre la foudre*. Dunod, 2003.
- [120] E. L. Hill, “Electromagnetic radiation from lightning strokes,” *Journal of the Franklin Institute*, vol. 263, no. 2, pp. 107–119, Feb. 1957.
- [121] V. A. Rakov and M. A. Uman, *Lightning: Physics and Effects*. Cambridge University Press, 2003.
- [122] D. Benyoucef, “Techniques de la Haute Tension Cours 4eme année Ingénieur & 1ere année Master,” 2013.
- [123] La protection du matériel électrique et électronique contre les effets indirects de la foudre. Guide technique parafoudre hager.
- [124] T. Gallauziaux and D. Fedullo, *Électricité: réaliser son installation par soi-même*. Editions Eyrolles, 2014.
- [125] C. Gary, *LA Foudre. Histoire des connaissances, nature du phénomène, risques et mesures de protection, 2ème édition*, 2e éd. Dunod, 1999.
- [126] “Un mois de juillet très foudroyé / Actualités / Météorage - prévention du risque foudre.” [Online]. Available: <http://www.meteorage.fr/actualites/un-mois-de-juillet-tres-foudroye>.
- [127] P. B. Fontanarosa, “Electrical shock and lightning strike,” *Annals of emergency medicine*, vol. 22, no. 2, pp. 378–387, 1993.
- [128] G. S. Punekar and C. Kandasamy, “Indirect effects of lightning discharges,” *Serbian Journal of Electrical Engineering*, vol. 8, no. 3, pp. 245–262, 2011.
- [129] E. Rupke, “Lightning direct effects handbook,” *Lightning Technologies Inc. Report No. AGATE-WP3*, pp. 1–031027, 2002.
- [130] “Protection contre la foudre dans les installations BT.” [Online]. Available: <http://sitelec.org/cours/abati/foudre/foudre.htm>.
- [131] C. A. Nucci, F. Rachidi, M. V. Ianoz, and C. Mazzetti, “Lightning-induced voltages on overhead lines,” *Electromagnetic Compatibility, IEEE Transactions on*, vol. 35, no. 1, pp. 75–86, 1993.

- [132] M. K. Nigam and V. Koshta, "The disturbances in the power system due to environmental conditions," *Recent Research in Science and Technology*, vol. 6, no. 1, 2014.
- [133] J. Laguerre, J. Conil, H. Favarel, A. Brouchet, J. Grolleau, M. Costagliola, and J. Chavoïn, "Effets de la foudre sur l'organisme humain, illustrés par des cas cliniques," *Brûlures*, vol. 1, 2000.
- [134] C. Sein, "Le foudroiement: étude lésionnelle comparée entre l'homme et l'animal," Thèse d'exercice, École nationale vétérinaire, Toulouse, France, 2012.
- [135] D. Haluza, "Lightning, ground potential rise, and electrical damage; protecting wayside equipment on the MTA Long Island Rail Road," in *Proceedings ASME/IEEE Joint*, pp. 111–135, 1996.