



HAL
open science

Synthèse d'observateurs pour les systèmes non linéaires, non uniformément observables

Ali Ltaief

► **To cite this version:**

Ali Ltaief. Synthèse d'observateurs pour les systèmes non linéaires, non uniformément observables. Automatique / Robotique. Normandie Université; Université de Sfax (Tunisie), 2017. Français. NNT : 2017NORMC211 . tel-01638200

HAL Id: tel-01638200

<https://theses.hal.science/tel-01638200>

Submitted on 20 Nov 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Normandie Université

THESE

Pour obtenir le diplôme de doctorat

Spécialité Automatique, signal, productique, robotique

Préparée au sein de l'ENSICAEN et de l'UNICAEN

En partenariat international avec « Université de Sfax » « TUNISIE »

Synthèse d'observateurs pour les systèmes non linéaires non uniformément observables

**Présentée et soutenue par
Ali LTAIEF**

**Thèse soutenue publiquement le (19 Mai 2017)
devant le jury composé de**

Mr. Hassan HAMMOURI	Professeur - Université Claude Barnard Lyon I (UCBL I)	Rapporteur
Mr. Fathi FOURATI	Maître de Conférence, HDR, à l'Institut Préparatoire des Etudes d'Ingénieurs de Sfax (IPEIS)	Rapporteur
Mr. Mondher FARZA	Professeur - Université de Caen Normandie	Directeur de thèse
Mr. Yassine KOUBAA	Professeur – Ecole Nationale d'Ingénieurs de Sfax (ENIS)	Examineur

Thèse dirigée par

Mr. Mondher FARZA

GREYC



Avant-Propos

Les travaux présentés dans cette thèse sont réalisés en cotutelle au sein de Laboratoire des Sciences et Techniques d'Automatique et d'informatique industrielle, Lab-STA de l'Ecole Nationale d'Ingénieurs de Sfax (ENIS), Tunisie et au Groupe de Recherche en Informatique, Image, Automatique et Instrumentation de Caen, GREYC équipe Automatique de l'Université de Caen, France.

Avant la présentation de ces travaux, je tiens à remercier tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à la bonne conduite de ma thèse.

Je tiens à exprimer ma plus sincère reconnaissance à Monsieur Mondher FARZA, Professeur à l'ENSICAEN et à Monsieur Yassine KOUBAA, Professeur à l'ENIS pour la confiance qu'ils m'ont accordée en acceptant de diriger ma thèse. Merci également pour leur disponibilité, leur soutien et tous leurs précieux conseils au cours de la thèse. J'ai particulièrement apprécié vos qualités scientifiques et vos qualités humaines. Votre regard bienveillant ainsi que votre patience m'ont permis de mener à terme cette thèse. Je vous apporte ma plus sincère gratitude.

Je remercie vivement Monsieur Mohammed M'SAAD, Professeur à l'ENSICAEN, pour m'avoir accueilli au sein de Laboratoire GREYC. Je le remercie pour tout ce qu'il m'a appris, pour ses énormes compétences scientifiques, ses qualités humaines. Je le remercie de m'avoir fait l'honneur de participer au jury de soutenance. Je lui en suis reconnaissant.

Je tiens également à adresser mes plus vifs remerciements aux membres du jury pour l'honneur qu'ils m'ont fait d'évaluer ce travail. Je remercie tout particulièrement Messieurs Hassan HAMMOURI et Fathi FOURATI d'avoir rapporté mon mémoire

de thèse, pour le temps consacré à la lecture minutieuse de ce manuscrit de thèse, ainsi que pour leurs remarques encourageantes et constructives qu'ils m'ont données.

Mes remerciements vont également à tous les membres de GREYC de m'avoir accueilli chaleureusement tout au long de ces années de thèse. Je pense en particulier à Messieurs Tarek MAATOUG et Tomas MENARD pour leur aide et leur encouragement et leur gentillesse.

Je n'oublie pas toutes les personnes qui comptent beaucoup pour moi et qui ont contribué à la réussite de cette thèse de doctorat.

Je pense tout d'abord à remercier toute ma chère famille qui a toujours été là pour moi et pour son soutien sans faille tout au long de cette thèse notamment dans les moments les plus difficiles.

Je tiens à remercier spécialement tous mes amis que j'aime. Merci en particulier à mon ami Omar KRAIEM ainsi à Abdejalil KHALLADI qui m'a beaucoup supporté et m'aider. Je les remercie pour leur sincère amitié et confiance.

Un grand merci qui vient du coeur à ma chérie Hana qui m'a beaucoup supporté et encouragé. Merci pour ta précieuse amour.

Je dédie ce travail

À mon père et ma mère, pour leurs encouragements

À ma fiancée, pour son soutien

À mon frère et mes sœurs et leurs maris

À tous ceux que j'aime

À tous ceux qui m'aiment

Liste des publications de Ali LTAIEF

Revue Internationale

1. A. Ltaief, M. Farza, T. Ménard, T. Maatoug, M. M'Saad, Y. Koubaa. High gain observer design for a class of MIMO non observable uncertain systems. *J. Automation & Systems Engineering* 10-1 (2016) : 1-14.

Conférences Internationales

1. T. Ménard, M. Farza, A. Ltaief, I. Bouraoui, M. M'Saad and M. Maatoug. Observer design for a large class of non-uniformly observable MIMO systems with uncertainties. Accepted for presentation at the 20th IFAC World Congress, Toulouse, France, 9-14 July 2017.
2. A. Ltaief, M. Farza, T. Ménard, T. Maatoug, M. M'Saad, Y. Koubaa. High gain observer design for a class of MIMO non uniformly observable uncertain systems. 16th international conference on Sciences and Techniques of Automatic control & computer engineering - STA'2015, pp. 817-821, Monastir, Tunisia, December 21-23, 2015.
3. M. Farza, T. Ménard, A. Ltaief, T. Maatoug, M. M'Saad, Y. Koubaa. Extended high gain observer design for state and parameter estimation. Proceedings of the 4th International Conference on Systems and Control, pp. 345-350, Sousse, Tunisia, April 28-30, 2015.

Publications soumises en cours d'expertise

1. M. Farza, T. Ménard, T. Maatoug, A. Ltaief, I. Bouraoui, M. M'Saad and T. Maatoug. M. M'Saad, Y. Koubaa. Extended High Gain Observer Design for a Class of MIMO Non-Uniformly Observable Systems. Submitted to Automatica after a second revision.
2. A. Ltaief, T. Ménard , M. Farza, M. M'Saad and T. Maatoug. Adaptive observer design for a class of nonlinear systems- Application to speed sensorless induction motor. Submitted to Automatica after a first revision.

Table des matières

Table des matières	10
Notations - Abréviations	13
1 Introduction	15
2 Observateur de type grand gain pour une classe de systèmes MIMO non linéaires non uniformément observables	23
2.1 Formulation du problème	24
2.2 Synthèse de l'observateur	25
2.3 Analyse de convergence	28
2.4 Exemple	32
2.5 Conclusion	33
3 Observateur étendu pour une classe de systèmes MIMO non uniformément observables	35
3.1 Introduction	35
3.2 Formulation du problème	36
3.3 Synthèse de l'observateur	41
3.4 Analyse de Convergence	48
3.5 Exemple	57
3.6 Conclusion	60
4 Synthèse d'un observateur adaptatif pour une classe de systèmes non linéaires	63
4.1 Introduction	63
4.2 Formulation du problème	64

4.3	Changement de coordonnées	68
4.4	Synthèse de l'observateur étendu	71
4.5	Forme adaptative de l'observateur	74
4.6	Exemple	81
4.7	Conclusion	82
5	Conclusions et perspectives	85

Table des figures

2.1	Estimation de x_2 et x_3 et de la sortie mesurée x_1 entachée de bruit de mesure.	33
3.1	Estimation des états z_i , pour $i = 1, 2, 3$	59
3.2	Estimation des états ξ_i , pour $i = 1, 2, 3$	60
3.3	Évolution temporelle des erreurs d'observation	61
4.1	Estimations des états x_1, x_2 et x_3	83
4.2	Estimation des paramètres inconnus ρ_1, ρ_2, ρ_3 et ρ_4	83

Notations - Abréviations

Notations relatives aux ensembles :

- \mathbb{R} : ensemble des nombres réels
- \mathbb{R}^+ : ensemble des nombres réels positifs ou nuls
- \mathbb{R}^n : espace vectoriel de dimension n dans l'ensemble des réels
- $[a, b]$: intervalle fermé de \mathbb{R} d'extrémités a et b
- $]a, b[$: intervalle ouvert de \mathbb{R} d'extrémités a et b
- $\{1, \dots, r\}$: ensemble des r premiers nombres entiers positifs
- $|a|$: valeur absolue du nombre réel a
- $\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt}$: dérivé temporelle de l'état x

Notations relatives aux vecteurs et aux matrices :

- $\mathbb{R}^{n \times m}$: ensemble des matrices, \tilde{A} coefficients réels, de dimensions $n \times m$
- I_n : matrice identité de dimension n
- $0_{n \times m}$: matrice nulle de dimensions $n \times m$
- x^T : transposée du vecteur x
- $\|x\|$: norme euclidienne du vecteur x
- A^T : transposée de la matrice A
- $\|A\|$: norme euclidienne de la matrice A
- $\lambda_m(A)$: plus petite valeur propre de A (A est une matrice symétrique)
- $\lambda_M(A)$: plus grande valeur propre A (A est une matrice symétrique)
- $\underline{\lambda}_m(A, t_0) = \inf_{t \geq t_0} \lambda_m(A(t))$ ($A(t)$ est une matrice symétrique pour tout $t \geq t_0$)
- $\underline{\lambda}_M(A, t_0) = \sup_{t \geq t_0} \lambda_M(A(t))$ ($A(t)$ est une matrice symétrique pour tout $t \geq t_0$)
- $diag(a_1, \dots, a_p)$: matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont égaux \tilde{A} $a_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, p$

Abréviations :

- SNL : Système non linéaire
- MIMO : Multi-entrées, Multi-sorties (Multi Input, Multi Output)
- SISO : Mono-Entrée, Mono-Sortie (Single Input, Single Output)
- LMI : Inégalité Matricielle Linéaire (Linear Matrix Inequality)
- EDO : Équation Différentielle Ordinaire
- SDP : Symétrique Définie Positive
- NUO : Non Uniformément Observable
- UO : Uniformément Observable

Chapitre 1

Introduction

Afin de concevoir des méthodes de commande, de détection et de localisation de défauts, il est essentiel d'avoir des informations pour une bonne maîtrise du procédé (système) à étudier. Les variables directement mesurées ne couvrant généralement pas la totalité des grandeurs susceptibles de décrire le comportement du procédé (les états), nous pouvons alors nous poser la question de la reconstruction de l'information non directement mesurée au moyen de celle disponible : c'est le rôle de l'observateur ou estimateur d'état. Le principe est le suivant : le procédé étant modélisé comme un système dynamique soumis à l'action de grandeurs externes (entrées) faisant varier un ensemble de grandeurs mesurées (sorties), l'observateur consiste en un système dynamique auxiliaire dont les entrées sont les entrées/sorties mesurées du procédé, et les sorties sont supposées donner une estimation de son état interne. Un observateur permet donc d'optimiser le nombre de capteurs dans une application industrielle ; d'où son intérêt économique dans l'industrie. Durant les dernières décennies beaucoup de travaux en automatique ont été menés sur la conception d'observateurs.

La synthèse d'observateurs pour les systèmes linéaires est complètement caractérisée par des conditions nécessaires et suffisantes bien établies. En effet, les premiers travaux sur les observateurs d'état, ont été publiés par Kalman-Bucy (dans un contexte stochastique, (filtre de Kalman)) [[Kalman and Bucy, 1961](#)], puis Luenberger (dans un contexte déterministe) [[Luenberger, 1971](#)]. Ces travaux s'intéressent aux systèmes linéaires invariants dans le temps. Cependant, la plupart des procédés

industriels possèdent des comportements non linéaires, ce qui a incité les chercheurs à développer des observateurs non linéaires. À l'heure actuelle, le problème de la conception d'observateurs pour les systèmes non linéaires MIMO reste ouvert. Différentes approches ont été proposées pour concevoir des observateurs d'état pour différentes classes de systèmes non linéaires (cf. par exemple [Alessandri and Rossi, 2015; Besançon, 1999; Besançon and Hammouri, 1998; Ciccarella et al., 1993; Fliess et al., 2008; Farza et al., 2011; Gauthier and Bornard, 1919; Gauthier et al., 1992; Gauthier and Kupka, 2001; Hammouri et al., 2010; Ménard et al., 2010; Shena and Xia, 2008; Shim et al., 2001]) mais aucune d'entre elles ne fournit une solution générale comme dans le cas des systèmes linéaires invariants dans le temps.

Nous pouvons citer quelques approches parmi les nombreuses existantes. Une première est basée sur le filtre de Kalman, en utilisant directement l'approche développée pour le cas linéaire sur le linéarisé du système le long des trajectoires. Néanmoins, cette approche ne permet pas de garantir la convergence de l'observateur. Une seconde approche repose sur la faisabilité d'inégalités matricielles linéaires et sur des équations de type Lyapunov ou Riccati. Cependant, cette approche ne garantit pas, en général, la faisabilité des inégalités considérées [Rajamani, 1998; Zemouche and Boutayeb, 2013]. Une troisième approche appelée platitude consiste à écrire les états non mesurés en fonction des signaux mesurés, c'est-à-dire l'entrée et la sortie, en utilisant des outils de l'algèbre différentielle [Fliess et al., 2008]. Une quatrième approche utilise le calcul par intervalle [Moisan et al., 2009; Mazenc et al., 2012; Efimov and Raïssi, 2016]. Une approche générale est de chercher des transformations de coordonnées appropriées qui conduisent à une dynamique d'erreur linéaire modulo une injection de sortie permettant ainsi de concevoir un observateur de Luenberger ou de Kalman (cf. par exemple [Boutat et al., 2009; Gauthier and Hammouri, 1992; Guay, 2002; Krener and Isidori, 1983; Krener and Respondek, 1985; Rajamani, 1998; Respondek et al., 2009; Xia and Gao, 1989]).

Une activité de recherche intensive a été consacrée à la classe des systèmes observables pour toute entrée, c'est-à-dire des systèmes uniformément observables (cf. par exemple [Gauthier et al., 1992; Gauthier and Kupka, 2001; Hammouri and Farza, 2003]). Dans [Gauthier et al., 1992], les auteurs ont proposé une forme canonique pour les systèmes mono-sortie affines en la commande. Cette forme canonique est

composée d'une dynamique linéaire fixe et d'une partie non linéaire triangulaire. L'extension de la conception de l'observateur a été réalisée dans [Gauthier and Kupka, 2001] pour traiter le cas non affine en la commande et dans [Hammouri and Farza, 2003]) pour une classe de systèmes MIMO uniformément observables caractérisée par une forme normale où les non linéarités sont également triangulaires. Plusieurs extensions pour la conception d'observateurs ont été proposées pour certaines classes particulières de systèmes MIMO uniformément observables. Les observateurs sous-jacents sont caractérisés par un gain constant qui est souvent issu de la résolution d'une équation algébrique de Lyapunov. Dans le cas de systèmes non uniformément observables, il n'existe pas d'approche systématique pour traiter le problème de la conception d'un observateur, car ces systèmes peuvent admettre des entrées qui les rendent inobservables. Les contributions disponibles sont plutôt des extensions adaptées de la synthèse d'observateurs pour des systèmes uniformément observables, tout en considérant certaines conditions suffisantes sur les entrées du système. Ces conditions permettent aux systèmes d'être suffisamment observables pour effectuer une conception d'observateur appropriée et elles sont généralement appelées conditions d'excitation persistantes, i.e le Grammien d'observabilité du système est une matrice définie positive. Dans [Besançon and Ticlea, 2007], les auteurs ont introduit la notion d'entrée régulière locale et ont donné des conditions suffisantes pour caractériser les systèmes qui peuvent être immergés sous une forme normale de plus grande dimension composée d'une partie affine dépendant de l'entrée et de la sortie et d'une partie non linéaire triangulaire. Un observateur de type grand gain dont le gain est issu de la résolution d'une EDO de Lyapunov a été alors conçu sur la base de la forme normale. La classe des systèmes considérée dans [Besançon and Ticlea, 2007] a été revisitée dans [Dufour et al., 2012] où les auteurs ont introduit la notion d'entrée régulière permettant ainsi d'affaiblir la condition d'excitation persistante et de concevoir un observateur de type grand gain.

Notre première contribution dans cette thèse a consisté en la synthèse d'un observateur pour une classe de systèmes non linéaires non uniformément observables dont la dynamique comprend des incertitudes. Cette classe de systèmes inclut celles considérées dans [Besançon and Ticlea, 2007; Dufour et al., 2012] et a été considérée dans [Hernandez et al., 2017] mais sans incertitudes. Elle est composée d'une

première partie où l'état apparaît de façon affine avec une matrice anti-décalage où les termes non nuls sont des fonctions non linéaires possédant une structure triangulaire par rapport à l'état et d'une seconde partie comprenant des non linéarités triangulaires.

Pour notre deuxième contribution, nous avons considéré une classe de systèmes incertains qui ne sont pas triangulaires au sens classique et qui sont non uniformément observables. Afin de pouvoir construire un observateur, la notion d'indices caractéristiques associés aux variables d'état a été introduite. Ces indices caractéristiques permettent de ré-ordonner les états et donc d'utiliser une approche plus traditionnelle.

Un problème qui se pose régulièrement est que le modèle du procédé comprend des paramètres qui ne sont connus qu'avec une précision relative, voir inconnus. Une solution est donc d'estimer conjointement les variables d'état et les paramètres inconnus. C'est ce que l'on appelle un observateur adaptatif. Les premières contributions datent des années 70 et ont été dédiées aux systèmes linéaires invariants dans le temps (cf. par exemple, [Lüders and Narendra, 1973; Kreisselmeier, 1977]). Le cas des systèmes linéaires variant dans le temps a été ensuite considéré dans un contexte déterministe dans [Wang et al., 2002] ainsi que dans un contexte stochastique dans [Perabò and Zhang, 2009]. Plusieurs approches ont été appliquées pour aborder le problème de la conception d'observateurs adaptatifs pour des systèmes non linéaires [Bastin and Gevers, 1988; Marino and Tomei, 1995; Santosuosso et al., 2001; Cho and Rajamani, 1997; Besançon et al., 2004; Farza et al., 2014; Besançon et al., 2006]. Quoique la plupart des contributions sur la conception d'observateurs adaptatifs considèrent des systèmes avec une paramétrisation linéaire, il existe néanmoins quelques résultats traitant le cas de paramétrisations non linéaires [Tyukin et al., 2013; Farza et al., 2014; Grip et al., 2011; Kojić and Annaswamy, 2002; Loh et al., 1999; Skantze et al., 2000; Yan et al., 2013].

Il existe deux approches qui pourraient être utilisées pour concevoir des observateurs adaptatifs. La première approche, dite adaptative, est la plus utilisée et elle consiste en la synthèse d'un observateur d'état couplé à une loi d'adaptation

appropriée pour les paramètres inconnus. Cela conduit généralement à un observateur adaptatif dont la structure est similaire à celle de l'observateur d'état tout en remplaçant les paramètres inconnus par leurs estimés fournis par une adaptation de paramètres appropriée. Une telle approche permet de profiter des résultats disponibles sur la conception d'observateur d'état, mais elle nécessite une bonne intuition pour élaborer une loi d'adaptation appropriée des paramètres inconnus. La seconde approche, qui sera appelée approche par modèle augmenté, est basée sur la synthèse d'un observateur d'état standard à partir d'un modèle augmenté obtenu en augmentant le modèle du système avec la dynamique de ses paramètres inconnus (c'est-à-dire $\dot{\rho} = 0$). Dans cette approche, on peut exploiter tous les résultats disponibles sur la synthèse d'observateurs pour des classes de systèmes incluant les modèles augmentés.

Dans [Besançon et al., 2006], les auteurs ont prouvé l'équivalence entre deux observateurs adaptatifs qui ont été obtenus respectivement à l'aide des approches adaptative et par système augmenté pour des systèmes affines en l'état où les non linéarités ne dépendent que des entrées et des sorties. Par équivalence, nous entendons les mêmes équations pour les observateurs ainsi que les mêmes hypothèses requises pour la conception des observateurs. L'équivalence entre ces approches a été également établie dans [Bouraoui et al., 2014] pour une classe de systèmes uniformément observables où les non linéarités renferment des paramètres inconnus intervenant avec une paramétrisation linéaire.

Notre dernière contribution présentée dans cette thèse consiste à concevoir un observateur adaptatif pour une classe générale de systèmes non linéaires non uniformément observables et dont la paramétrisation en les paramètres inconnus est mixte c'est-à-dire que ces paramètres qui sont présents avec une paramétrisation linéaire peuvent aussi apparaître dans le modèle de manière non linéaire. Nous montrons de plus que l'approche proposée peut se décliner de façon équivalente suivant l'approche adaptative ou suivant l'approche par système étendu.

Ce mémoire de thèse est composé de cinq chapitres dont l'introduction et la conclusion, et est organisé de la façon suivante :

Dans le deuxième chapitre, un observateur sera proposé pour une classe générale de systèmes non uniformément observables qui possèdent une structure triangulaire classique et des incertitudes dans le modèle dynamique. Les hypothèses nécessaires pour la synthèse d'un observateur seront détaillées, particulièrement concernant l'entrée du système qui devra vérifier une condition d'excitation persistante bien définie. Une approche de type grand gain sera utilisée pour mener à bien cet objectif.

Dans le troisième chapitre, nous proposons une nouvelle approche permettant la synthèse d'un observateur pour une large classe de systèmes MIMO non uniformément observables, dont la structure n'est pas triangulaire au sens classique. Les principales caractéristiques permettant la construction de l'observateur sont l'introduction d'indices caractéristiques et la définition d'une structure triangulaire étendue par rapport à l'état. Le gain de l'observateur proposé sera donné par une EDO et la convergence sera assurée sous une condition d'excitation persistante bien définie. De plus, l'effet des incertitudes dans la dynamique du système sera pris en compte dans l'analyse de convergence et une borne sur l'erreur, en fonction du paramètre de réglage de l'observateur et des incertitudes sera fournie.

Dans le quatrième chapitre, nous étudierons le problème de la conception d'un observateur adaptatif de type grand gain pour une classe de systèmes non uniformément observables avec des paramètres constants inconnus. Les systèmes considérés possèdent une structure triangulaire par rapport aux variables d'état sous-jacentes mais ne sont pas nécessairement linéaires par rapport aux paramètres inconnus. Ces paramètres seront organisés, dans le système original, en fonction de leur indice caractéristique qui seront définis. Avant de concevoir l'observateur, un modèle augmenté sera considéré. Le modèle de conception de l'observateur sera élaboré à partir de la dynamique du système d'état augmentée par la dynamique des paramètres inconnus. Les variables de l'état augmenté seront réordonnées de manière appropriée de telle sorte que le système augmenté résultant possède une structure triangulaire par rapport à son état. Un observateur sera conçu dans les nouvelles coordonnées et réécrit ensuite dans les coordonnées originales, ce qui permet d'estimer conjointement l'état d'origine et les paramètres inconnus. Plus précisément, le gain de l'observateur proposé sera issu de la résolution d'une EDO de Lyapunov et sa convergence

exponentielle sera garantie sous une propriété d'excitation persistante appropriée, qui est une hypothèse classique nécessaire pour la conception d'observateurs d'état de type grand gain. Les équations de l'observateur dans les coordonnées originales sont utilisées pour récupérer une forme adaptative pour l'observateur en mettant l'accent sur sa capacité d'inclure plusieurs observateurs adaptatifs déjà existant. Les principales étapes de la conception de l'observateur et ses principales propriétés sont illustrées en simulation à travers un exemple académique.

Enfin, à la lumière des résultats obtenus, nous terminerons ce mémoire de thèse avec une conclusion générale et nous proposerons quelques perspectives.

Chapitre 2

Observateur de type grand gain pour une classe de systèmes MIMO non linéaires non uniformément observables

Dans ce chapitre, nous allons considérer la synthèse d'un observateur de type grand gain pour une classe de systèmes non linéaires incertains non uniformément observables, incluant celles considérées dans [Besançon and Ticlea, 2007] et [Dufour et al., 2012]. Le gain de l'observateur est issu de la résolution d'une équation différentielle de Lyapunov et la convergence est obtenue sous un ensemble de conditions, en particulier sur les entrées du système. La condition d'excitation persistante sous-jacente est similaire à celle donnée dans [Besançon and Ticlea, 2007] et [Dufour et al., 2012] mais peut être facilement vérifiée en ligne. Il est prouvé qu'en l'absence d'incertitudes, l'erreur d'observation converge exponentiellement vers zéro. Dans le cas où les incertitudes sont bornées, cette erreur peut être rendue aussi petite que désirée en choisissant des valeurs élevées pour le gain de l'observateur.

2.1 Formulation du problème

Considérons la classe de systèmes dynamiques MIMO donnée par la représentation d'état suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = F(u(t), x(t))x(t) + \varphi(u(t), x(t)) + B\varepsilon(t) \\ y(t) = C(u)x(t) \end{cases} \quad (2.1)$$

$$F(u, x) = \begin{pmatrix} 0 & F_1(u, x) & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & F_2(u, x) & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & & \dots & 0 & F_{q-1}(u, x) \\ 0 & \dots & & & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

$$C(u) = \begin{pmatrix} F_0(u) & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

et $B^T = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & I_{n_q} \end{pmatrix}$ (2.2)

où $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^s$ et $y \in \mathbb{R}^p$ sont, respectivement, l'état, l'entrée et la sortie du système avec $x = ((x^{(1)})^T \dots (x^{(q)})^T)^T \in \mathbb{R}^n$ où $x^{(k)} \in \mathbb{R}^{n_k}$ pour $k \in \{1, \dots, q\}$, avec $n_1 = p$ et $\sum_{k=1}^q n_k = n$, $F_0(u)$ est une matrice $n_0 \times n_1$ avec $n_0 = n_1 = p$ et chaque $F_k(u, x)$ est une matrice $n_k \times n_{k+1}$ triangulaire par rapport à x , c.à.d. $F_k(u, x) = F(u, x^{(1)}, \dots, x^{(k)})$ pour $k \in \{1, \dots, q-1\}$, φ est une fonction non linéaire qui possède une structure triangulaire par rapport à x , c'est-à-dire $\varphi(u, x) = ((\varphi^1(u, x^{(1)}))^T (\varphi^2(u, x^{(1)}, x^{(2)}))^T \dots (\varphi^q(u, x))^T)^T$; $\varepsilon : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^{n_q}$ est une fonction inconnue.

Dans le cas où chaque matrice F_k est de rang plein en colonnes, le système (2.1) appartient à la classe de systèmes considérée dans [Hammouri and Farza, 2003] qui caractérise une sous-classe de systèmes qui sont observables pour toute entrée et pour lesquels les auteurs ont proposé un observateur de type grand gain où le gain est déterminé à partir d'une équation algébrique de Lyapunov. On notera que le fait que F_k soit de rang plein en colonnes implique que $n_k \geq n_{k+1}$ pour $k \in \{1, \dots, q-1\}$. Dans [Deza et al., 1993], les auteurs ont considéré une classe de systèmes similaire où les matrices F_k sont réduites à des fonctions réelles positives bornées et ont proposé un observateur de type grand gain avec un gain variant dans le temps issu de la résolution d'une EDO de Riccati. Dans [Besançon and Ticlea, 2007], la classe de

système considérée est de la forme (2.1) mais les fonctions F_k dépendent uniquement des entrées et des sorties. Les auteurs ont donné des conditions suffisantes qui caractérisent la classe des systèmes qui peuvent être immergés sous la forme (2.1). La classe de systèmes considérée dans [Besançon and Ticlea, 2007] a été revisitée dans [Dufour et al., 2012] où les auteurs ont proposé la conception d'un observateur de type grand gain sous une condition d'excitation persistante relativement étendue. La classe des systèmes pouvant se mettre sous la forme (2.1) a été considérée dans [Hernandez et al., 2017], mais dans le cas où il n'y a pas d'incertitudes dans la dynamique.

Dans ce qui suit, nous allons considérer le problème de la synthèse d'un observateur de type grand gain pour estimer l'état du système (2.1).

2.2 Synthèse de l'observateur

Nous considérons les hypothèses suivantes que nous adoptons pour la synthèse d'un observateur de type grand gain.

H1 L'état $x(t)$ et l'entrée $u(t)$ sont bornés, c'est-à-dire $x(t) \in X$ et $u(t) \in U$ où $X \subset \mathbb{R}^n$ et $U \subset \mathbb{R}^s$ sont des ensembles compacts.

H2 Les fonctions F_k et φ sont Lipschitziennes par rapport à x uniformément en u où $(u, x) \in U \times X$. Leurs constantes de Lipschitz sont respectivement désignées par L_F et L_φ .

H3 La fonction inconnue ε est essentiellement bornée, c.à.d.

$$\exists \delta_\varepsilon > 0 ; \sup_{t \geq 0} \mathcal{E}ss \|\varepsilon(t)\| \leq \delta_\varepsilon \quad (2.3)$$

Comme les trajectoires du système restent confinés dans un ensemble borné (X), on peut supposer que des prolongements Lipschitziens des non-linéarités, utilisant des fonctions de saturation lisses, ont été effectués et que les fonctions F_k et φ sont issues de ces prolongements. Ceci permet de conclure que, pour toute entrée bornée $u \in U$, les fonctions F_k et φ sont globalement Lipschitziennes par rapport à x et sont bornées pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ (voir [Farza et al., 2009]). Nous noterons, tout au long de ce chapitre, x_M la borne supérieure de x c'est-à-dire :

$$x_M = \sup_{t \geq 0} \|x(t)\| \quad (2.4)$$

Avant de donner les équations de l'observateur candidat, nous allons introduire quelques notations utiles et des définitions liées à la conception d'observateurs de type grand gain.

- Soit Δ_θ la matrice diagonale définie par :

$$\Delta_\theta = \text{diag} [I_{n_1}, 1/\theta I_{n_2}, \dots, 1/\theta^{q-1} I_{n_q}] \quad (2.5)$$

où θ est un scalaire positif. Nous pouvons facilement vérifier les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} \Delta_\theta F(u, x) \Delta_\theta^{-1} &= \theta F(u, x), \\ C(u) \Delta_\theta^{-1} &= C(u) \Delta_\theta = C(u) \end{aligned} \quad (2.6)$$

Nous considérons maintenant le système dynamique suivant :

$$\dot{\hat{x}} = F(u, \hat{x})\hat{x} + \varphi(u, \hat{x}) - \theta \Delta_\theta^{-1} S^{-1}(t) C^T(u) (C(u)\hat{x} - y) \quad (2.7)$$

où $\hat{x} = ((\hat{x}^{(1)})^T \dots (\hat{x}^{(q)})^T)^T \in \mathbb{R}^n$ avec $\hat{x}^{(k)} \in \mathbb{R}^{n_k}$, $k \in \{1, \dots, q\}$, u et y sont respectivement l'entrée et la sortie du système (2.1) et S est une matrice carrée symétrique régie par l'EDO de Lyapunov suivante :

$$\dot{S}(t) = -\theta (S(t) + F^T(u, \hat{x})S(t) + S(t)F(u, \hat{x}) - C^T(u)C(u)) \quad (2.8)$$

avec $S(0) = S^T(0) > 0$ et $\theta > 0$ est un scalaire positif.

Soit le système suivant :

$$\dot{\xi}(t) = F(u(t), \hat{x}(t))\xi(t) \quad (2.9)$$

où l'état $\xi \in \mathbb{R}^n$, u et \hat{x} sont les entrées du système et correspondent respectivement à l'entrée du système (2.1) et à l'état du système dynamique (2.7). La matrice F est définie comme dans (2.2). Rappelons que la matrice $\Phi_{u, \hat{x}}(t, s)$ de transition d'état du système (2.9) est définie comme suit :

$$\begin{cases} d(\Phi_{u, \hat{x}}(t, s)) / dt &= F(u(t), \hat{x}(t))\Phi_{u, \hat{x}}(t, s) \\ \Phi_{u, \hat{x}}(s, s) &= I_n \end{cases} \quad (2.10)$$

Cette matrice de transition permet d'introduire l'hypothèse supplémentaire suivante qui est décisive pour l'analyse de la convergence de l'observateur.

H4 L'entrée u est telle que, pour toute trajectoire \hat{x} du système (2.7) et pour tout $\hat{x}(0) \in X$, la condition d'excitation persistante suivante est satisfaite :

$$\exists \theta^* > 0; \exists \delta_0 > 0; \forall \theta \geq \theta^*; \forall t \geq \frac{1}{\theta}, \text{ on a}$$

$$\int_{t-\frac{1}{\theta}}^t \Phi_{u,\hat{x}}^T(s,t) C^T(u(s)) C(u(s)) \Phi_{u,\hat{x}}(s,t) ds \geq \frac{\delta_0}{\theta \alpha(\theta)} \Delta_\theta^2 \quad (2.11)$$

où $\alpha(\theta)$ est une fonction positive satisfaisant :

$$\forall \theta > 0, \alpha(\theta) \geq 1 \text{ et } \lim_{\theta \rightarrow \infty} \frac{\alpha(\theta)}{\theta^2} = 0. \quad (2.12)$$

Remarque 2.2.1 La condition d'excitation persistante donnée par l'hypothèse **H4** est similaire à celle donnée dans [Besançon, 1999] et [Besançon and Ticlea, 2007] où les auteurs ont introduit la notion d'entrée régulière locale, c'est-à-dire, les entrées pour lesquelles l'inégalité (2.11) est satisfaite avec $\alpha(\theta) \equiv 1$ pour tout θ . Dans [Dufour et al., 2012], les auteurs ont introduit la notion d'entrée régulière et ont montré que la classe des entrées régulières inclut celle des entrées régulières locales. En utilisant les mêmes arguments que dans [Dufour et al., 2012], on peut montrer que la classe d'entrées satisfaisant l'hypothèse **H4** comprend toutes les entrées régulières locales.

Le système dynamique (2.7) est effectivement un observateur d'état pour le système (2.1) comme indiqué par le théorème suivant.

Théorème 2.2.1 *Considérons le système (2.1) soumis aux hypothèses **H1** à **H3**. Pour toute entrée satisfaisant l'hypothèse **H4**, on a alors,*

$\forall \rho > 0; \exists \eta > 0; \forall \theta \geq \max(1, \theta^*); \forall u$ telle que $\|u\|_\infty \leq \rho$; pour tout $\hat{x}(0) \in \mathbb{R}^n$; nous avons

$$\|\hat{x}(t) - x(t)\| \leq \eta \sqrt{\alpha(\theta)} \theta^{q-1} e^{-\frac{\theta \mu(\theta)}{2} t} \|\hat{x}(0) - x(0)\| + \sqrt{\frac{\alpha(\theta)}{\theta^2}} \frac{\eta}{\mu(\theta)} \delta_\varepsilon$$

où x est la trajectoire inconnue du système (2.1) associée à l'entrée u , \hat{x} est une trajectoire quelconque de l'observateur (2.7) associée à (u, y) , θ^* et $\alpha(\theta)$ sont données par l'hypothèse **H4**, δ_ε est la borne supérieure essentielle de $\|\varepsilon(t)\|$ qui est donnée par (2.3), enfin $\mu(\theta)$ est une fonction réelle positive de θ telle que $\lim_{\theta \rightarrow \infty} \mu(\theta) = 1$.

Remarque 2.2.2 Il est important de noter qu'en l'absence d'incertitudes c'est-à-dire $\delta_\varepsilon = 0$, l'erreur d'observation converge exponentiellement vers zéro. Dans le

cas où $\delta_\varepsilon \neq 0$, l'erreur d'observation est bornée et peut être rendue aussi petite que souhaitée puisque $\lim_{\theta \rightarrow \infty} \frac{\alpha(\theta)}{\theta^2} = 0$.

2.3 Analyse de convergence

Nous allons tout d'abord montrer que la matrice S donnée par (2.8) est SDP et nous déduirons une borne inférieure pour sa plus petite valeur propre. En effet, à partir de (2.6), nous pouvons montrer que la matrice de transition, $\tilde{\Phi}_{u,\hat{x}}$, du système suivant :

$$\dot{\xi}(t) = \theta F(u(t), \hat{x}(t))\xi(t) \quad (2.13)$$

peut être exprimée de la manière suivante :

$$\tilde{\Phi}_{u,\hat{x}}(t, s) = \Delta_\theta \Phi_{u,\hat{x}}(t, s) \Delta_\theta^{-1} \quad (2.14)$$

où $\Phi_{u,\hat{x}}$ est définie par (2.10).

Par conséquent, la matrice $S(t)$, solution de l'EDO de Lyapunov (2.8), s'écrit de la façon suivante :

$$\begin{aligned} S(t) &= e^{-\theta t} \tilde{\Phi}_{u,\hat{x}}^T(0, t) S(0) \tilde{\Phi}_{u,\hat{x}}(0, t) + \theta \int_0^t e^{-\theta(t-s)} \tilde{\Phi}_{u,\hat{x}}^T(s, t) C^T(u(s)) C(u(s)) \tilde{\Phi}_{u,\hat{x}}(s, t) ds \\ &= e^{-\theta t} \Delta_\theta^{-1} \Phi_{u,\hat{x}}^T(0, t) \Delta_\theta S(0) \Delta_\theta \Phi_{u,\hat{x}}(0, t) \Delta_\theta^{-1} \\ &\quad + \theta \int_0^t e^{-\theta(t-s)} \Delta_\theta^{-1} \Phi_{u,\hat{x}}^T(s, t) \Delta_\theta C^T(u(s)) C(u(s)) \Delta_\theta \Phi_{u,\hat{x}}(s, t) \Delta_\theta^{-1} ds \end{aligned}$$

Étant donné que $C(u)\Delta_\theta = C(u)$ et $S(0)$ est SDP, nous obtenons pour $t \geq \frac{1}{\theta}$:

$$\begin{aligned} S(t) &\geq \theta \int_0^t e^{-\theta(t-s)} \Delta_\theta^{-1} \Phi_{u,\hat{x}}^T(s, t) C^T(u(s)) C(u(s)) \Phi_{u,\hat{x}}(s, t) \Delta_\theta^{-1} ds \\ &\geq \theta \int_{t-\frac{1}{\theta}}^t e^{-\theta(t-s)} \Delta_\theta^{-1} \Phi_{u,\hat{x}}^T(s, t) C^T(u(s)) C(u(s)) \Phi_{u,\hat{x}}(s, t) \Delta_\theta^{-1} ds \\ &\geq \theta e^{-1} \int_{t-\frac{1}{\theta}}^t \Delta_\theta^{-1} \Phi_{u,\hat{x}}^T(s, t) C^T(u(s)) C(u(s)) \Phi_{u,\hat{x}}(s, t) \Delta_\theta^{-1} ds \\ &\geq \frac{\delta_0 e^{-1}}{\alpha(\theta)} I_n \end{aligned} \quad (2.15)$$

où δ_0 et $\alpha(\theta)$ sont données, respectivement, par (2.11) et (2.12). Selon l'inégalité (2.15), nous avons :

$$\lambda_m(S, t_0) \geq \frac{\delta_0 e^{-1}}{\alpha(\theta)} \quad (2.16)$$

où $t_0 \geq \frac{1}{\theta}$.

Nous allons maintenant montrer que $\bar{\lambda}_M(S, t_0)$ est bornée et que sa borne supérieure est indépendante de θ . Ainsi, nous allons montrer que cette propriété est satisfaite pour chaque élément de la matrice $S(t)$. En effet, notons par $S_{i,j}$ l'élément (bloc) de la matrice S situé à la ligne i et à la colonne j . D'après l'EDO de Lyapunov (2.8), nous avons :

$$\dot{S}_{1,1} = -\theta(S_{1,1} - F_0^T(u)F_0(u)) \quad (2.17)$$

$$\dot{S}_{1,j} = -\theta(S_{1,j} + S_{1,j-1}F_{j-1}(u, \hat{x})) \text{ pour } j \in \{2, \dots, q\} \quad (2.18)$$

$$\begin{aligned} \dot{S}_{i,j} &= -\theta(S_{i,j} + S_{i,j-1}F_{j-1}(u, \hat{x}) + F_{i-1}^T(u, \hat{x})S_{i-1,j}) \\ &\text{pour } i \in \{2, \dots, q\} \text{ et } j \in \{i, \dots, q\} \end{aligned} \quad (2.19)$$

Rappelons que selon les hypothèses **H1** et **H2**, les fonctions F_k pour $k \in \{0, \dots, q-1\}$ sont bornées et notons $F_M = \max\left(\sup_{t \geq 0} \|F_0(u(t))\|, \sup_{t \geq 0} \|F_k(u(t), \hat{x}(t))\|\right)$.

Selon (2.17), nous obtenons :

$$\begin{aligned} \|S_{11}(t)\| &\leq e^{-\theta t} \|S_{11}(0)\| + \theta \int_0^t e^{-\theta(t-s)} \|F_0^T(u(s))F_0(u(s))\| ds \\ &\leq \|S_{11}(0)\| + F_M^2 \theta \int_0^t e^{-\theta(t-s)} ds \\ &= \|S_{11}(0)\| + F_M^2 (1 - e^{-\theta t}) \\ &\leq \|S_{11}(0)\| + F_M^2 \end{aligned}$$

Maintenant, pour $j \geq 2$, nous procédons par récurrence sur j afin de montrer que S_{1j} est bornée et que cette borne est indépendante de θ . En effet, supposons que $S_{1,j-1}$ est bornée et notons $S_M = \sup_{t \geq 0} \|S_{1,j-1}(t)\|$. En utilisant (2.18), nous obtenons pour $j \in \{2, \dots, q\}$:

$$\begin{aligned} \|S_{1j}(t)\| &\leq e^{-\theta t} \|S_{1j}(0)\| + \theta \int_0^t e^{-\theta(t-s)} \|S_{1,j-1}(s)F_{j-1}(u, \hat{x})\| ds \\ &\leq \|S_{1j}(0)\| + F_M S_M \end{aligned} \quad (2.20)$$

À cette étape, nous avons montré que tous les éléments situés à la première ligne (et la première colonne) de la matrice symétrique S sont bornés. Nous procédons par récurrence sur le numéro de ligne i afin de montrer que tous les éléments d'une ligne sont bornés. En effet, supposons que tous les éléments des lignes 1 à $i-1$ sont bornés (cette borne est indépendante de θ) et montrons que tous les éléments de la ligne i sont également bornés. Puisque S est symétrique, tous les éléments $S_{i,j}$ avec $i < j$

sont bornés par l'hypothèse de récurrence. En particulier, nous avons $S_{i-1,i} = S_{i,i-1}^T$ et ces matrices sont bornées par une borne supérieure, notée S_M , indépendante de θ . Maintenant, nous allons montrer que $S_{i,j}$ est borné pour $j \geq i$. Considérons d'abord le cas où $j = i$. En effet, selon (2.19), nous avons :

$$\begin{aligned} \|S_{ii}(t)\| &\leq e^{-\theta t} \|S_{i,i}(0)\| + \theta \int_0^t e^{-\theta(t-s)} \|S_{i,i-1} F_{j-1}(u, \hat{x}) + F_{i-1}^T(u, \hat{x}) S_{i-1,i}\| ds \\ &\leq \|S_{i,i}(0)\| + 2F_M S_M, \quad \text{d'après l'hypothèse de récurrence.} \end{aligned}$$

Supposons que $j > i$ et que $S_{i,j-1}$ soit borné ; montrons que $S_{i,j}$ est également borné. En effet, selon l'hypothèse de récurrence, l'élément $S_{i-1,j}$ situé à la ligne $i - 1$ est borné. Par la suite, à partir de l'équation (2.19), nous obtenons :

$$\begin{aligned} \|S_{i,j}(t)\| &\leq e^{-\theta t} \|S_{i,j}(0)\| + \theta \int_0^t e^{-\theta(t-s)} \|S_{i,j-1} F_{j-1}(u, \hat{x}) + F_{i-1}^T(u, \hat{x}) S_{i-1,j}\| ds \\ &\leq \|S_{i,j}(0)\| + 2F_M S_M, \quad \text{d'après l'hypothèse de récurrence.} \end{aligned}$$

Nous avons montré que tous les éléments de la matrice S sont bornés supérieurement et cette borne supérieure est indépendante de θ . En conséquence, la plus grande valeur propre de S , c.à.d. $\bar{\lambda}_M(S, t_0)$, est également indépendante de θ .

Nous fournissons maintenant une borne supérieure pour l'erreur d'observation. Dans ce but, définissons $\bar{x} = \Delta_\theta \tilde{x}$ où $\tilde{x} = \hat{x} - x$ est l'erreur d'observation. En utilisant les égalités (2.6), nous obtenons :

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= \theta(F(u, \hat{x}) - S^{-1}C^T(u)C(u))\tilde{x} + \Delta_\theta \left(\tilde{F}(u, \hat{x}, x)x + \tilde{\varphi}(u, \hat{x}, x) \right) - \Delta_\theta B\varepsilon(t) \\ &= \theta(F(u, \hat{x}) - S^{-1}C^T(u)C(u))\tilde{x} + \Delta_\theta \left(\tilde{F}(u, \hat{x}, x)x + \tilde{\varphi}(u, \hat{x}, x) \right) - \frac{1}{\theta^{q-1}} B\varepsilon(t) \end{aligned}$$

où $\tilde{F}(u, \hat{x}, x) = F(u, \hat{x}) - F(u, x)$ et $\tilde{\varphi}(u, \hat{x}, x) = \varphi(u, \hat{x}) - \varphi(u, x)$.

Soit $V(t, \bar{x}) = \bar{x}^T S(t) \bar{x}$ la fonction de Lyapunov candidate. En utilisant l'équation (2.8), nous obtenons :

$$\begin{aligned} \dot{V}(t, \bar{x}(t)) &= \bar{x}^T(t) \dot{S}(t) \bar{x}(t) + 2\bar{x}^T(t) S(t) \dot{\tilde{x}}(t) \\ &= -\theta V - \theta \bar{x}^T C^T(u) C(u) \bar{x} + 2\bar{x}^T S \Delta_\theta \left(\tilde{F}(u, \hat{x}, x)x + \tilde{\varphi}(u, \hat{x}, x) \right) \\ &\quad - 2\bar{x}^T S B \frac{\varepsilon}{\theta^{q-1}} \end{aligned} \tag{2.21}$$

En procédant comme dans [Farza et al., 2014; Farza et al., 2009], nous pouvons

montrer que pour $\theta \geq 1$

$$\begin{aligned}
2\bar{x}^T S \Delta_\theta \tilde{F}(u, \hat{x}, x) &\leq 2\sqrt{n} \sqrt{\bar{\lambda}_M(S, t_0)} \sqrt{V(t, \bar{x})} L_F x_M \|\bar{x}\| \\
&\leq 2\sqrt{n} \sigma_S L_F x_M V(t, \bar{x}) \\
2\bar{x}^T S \Delta_\theta \tilde{\varphi}(u, \hat{x}, x) &\leq 2\sqrt{n} \sqrt{\bar{\lambda}_M(S, t_0)} \sqrt{V(t, \bar{x})} L_\varphi \|\bar{x}\| \\
&\leq 2\sqrt{n} \sigma_S L_\varphi V(t, \bar{x}) \\
2\bar{x}^T S \varepsilon(t) &\leq 2\sqrt{\bar{\lambda}_M(S, t_0)} \sqrt{V(t, \bar{x})} \|\varepsilon(t)\|
\end{aligned} \tag{2.22}$$

où $\sigma_S = \sqrt{\bar{\lambda}_M(S, t_0) / \underline{\lambda}_m(S, t_0)}$, L_F et L_φ sont, respectivement, les constantes de Lipschitz de F et φ comme indiqué dans l'hypothèse **H2**; x_M est la borne supérieure de x donnée par (2.4). Selon l'équation (2.16), nous avons :

$$\sigma_S \leq \sqrt{\alpha(\theta)} \sqrt{\frac{\bar{\lambda}_M(S, t_0) e}{\delta_0}} \tag{2.23}$$

En combinant l'équation (2.21) avec (2.22) et (2.23), nous avons :

$$\begin{aligned}
\dot{V} &\leq -\theta V + 2\sqrt{\alpha(\theta)} \sqrt{\frac{n\bar{\lambda}_M(S, t_0) e}{\delta_0}} (L_F x_M + L_\varphi) V + 2\sqrt{\bar{\lambda}_M(S, t_0)} \sqrt{V(t, \bar{x})} \|\varepsilon(t)\| \\
&\leq -\theta \mu(\theta) V + 2\sqrt{\frac{\bar{\lambda}_M(S, t_0)}{\theta^{q-1}}} \sqrt{V(t, \bar{x})} \|\varepsilon(t)\|
\end{aligned} \tag{2.24}$$

où $\mu(\theta) = \left(1 - 2\sqrt{\frac{\alpha(\theta)}{\theta^2}} \sqrt{\frac{n\bar{\lambda}_M(S, t_0) e}{\delta_0}} (L_F x_M + L_\varphi)\right)$. Notons que, selon la propriété de α donnée par l'équation (2.12), on a $\lim_{\theta \rightarrow \infty} \mu(\theta) = 1$ comme indiqué dans le théorème 2.2.1.

L'inégalité (2.24) peut être réécrite comme suit :

$$\frac{d\sqrt{V}}{dt} \leq -\frac{\theta \mu(\theta)}{2} \sqrt{V} + \frac{\sqrt{\bar{\lambda}_M(S, t_0)}}{\theta^{q-1}} \|\varepsilon(t)\| \tag{2.25}$$

L'intégration de l'équation ci-dessus de 0 à $t > 0$ donne :

$$\sqrt{V(t, \bar{x}(t))} \leq e^{-\frac{\theta \mu(\theta)}{2} t} \sqrt{V(0, \bar{x}(0))} + \frac{\sqrt{\bar{\lambda}_M(S, t_0)}}{\theta^q \mu(\theta)} \delta_\varepsilon \tag{2.26}$$

En revenant aux coordonnées originales et en tenant compte de l'inégalité $\|\bar{x}\| \leq \|\tilde{x}\| \leq \theta^{q-1} \|\bar{x}\|$, nous parvenons à :

$$\|\bar{x}(t)\| \leq \sigma_S \theta^{q-1} e^{-\frac{\theta \mu(\theta)}{2} t} \|\bar{x}(t)\| + \frac{\sigma_S}{\theta \mu(\theta)} \delta_\varepsilon \tag{2.27}$$

Enfin, d'après l'équation (2.23), nous avons :

$$\|\bar{x}(t)\| \leq \sqrt{\frac{\bar{\lambda}_M(S, t_0) e \alpha(\theta)}{\delta_0}} \theta^{q-1} e^{-\frac{\theta \mu(\theta)}{2} t} \|\bar{x}(t)\| + \sqrt{\frac{\alpha(\theta)}{\theta^2}} \sqrt{\frac{\bar{\lambda}_M(S, t_0) e}{\delta_0 \mu(\theta)}} \delta_\varepsilon \tag{2.28}$$

la constante η requise par le théorème est $\eta = \sqrt{\frac{\bar{\lambda}_M(S, t_0) e}{\delta_0}}$. Ceci termine la preuve.

2.4 Exemple

Nous considérons le système dynamique suivant :

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 x_1 x_2 + u_2 x_1^2 x_3 + x_1 u_3 \\ x_3 - 10x_2 + u_3 - x_2^3 + \varepsilon_1(t) \\ -x_3 - 2x_1 x_2 - 10u_1 x_2 \end{pmatrix} \\ y(t) = x_1(t) \end{cases} \quad (2.29)$$

où $x_i, u_j \in \mathbb{R}$ pour $i = 1, \dots, 3$ et $j = 1, \dots, 3$. Le système (2.29) est sous la forme (2.1) avec $q = 2$, $x = \left((x^{(1)})^T \quad (x^{(2)})^T \right)^T$, $x^{(1)} = (x_1)$, $x^{(2)} = (x_2 \quad x_3)^T$,

$$\begin{aligned} F_1(u, x^{(1)}) &= \begin{pmatrix} u_1 x_1 & u_2 x_1^2 \end{pmatrix}, \\ \varphi(u, x) &= \begin{pmatrix} x_1 u_3 \\ x_3 - 10x_2 + u_3 - x_2^3 \\ -x_3 - 2x_1 x_2 - 10u_1 x_2 \end{pmatrix}, \\ \varepsilon &= \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

et $\varepsilon_1(t) = 0.1 \sin(0.1\pi t)$.

Par conséquent, on a $\Delta_\theta = \text{diag} \left(I_1 \quad 1/\theta I_2 \right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1/\theta \end{pmatrix}$.

Un observateur de la forme (2.7) a été conçu pour estimer x où les entrées sont données par $u_1(t) = \sin(11\pi t)$, $u_2(t) = \cos(11\pi t)$ et $u_3(t) = 5 \cos(2\pi t)$. Dans le but de se placer dans de conditions proches des conditions réelles, la mesure de x_1 issue du modèle de simulation est corrompue par un bruit Gaussien de moyenne nulle et de variance égale à 0.02. Dans la figure 2.1, nous avons comparé l'évolution de chacune des variables non mesurées x_2 et x_3 ainsi que la sortie entachée de bruit x_1 (issues de la simulation du modèle) avec son estimée fournie par l'observateur. On notera la bonne qualité de l'estimation et ce en dépit de la présence de l'incertitude $\varepsilon_1(t)$ ainsi que celle de bruit de mesure.

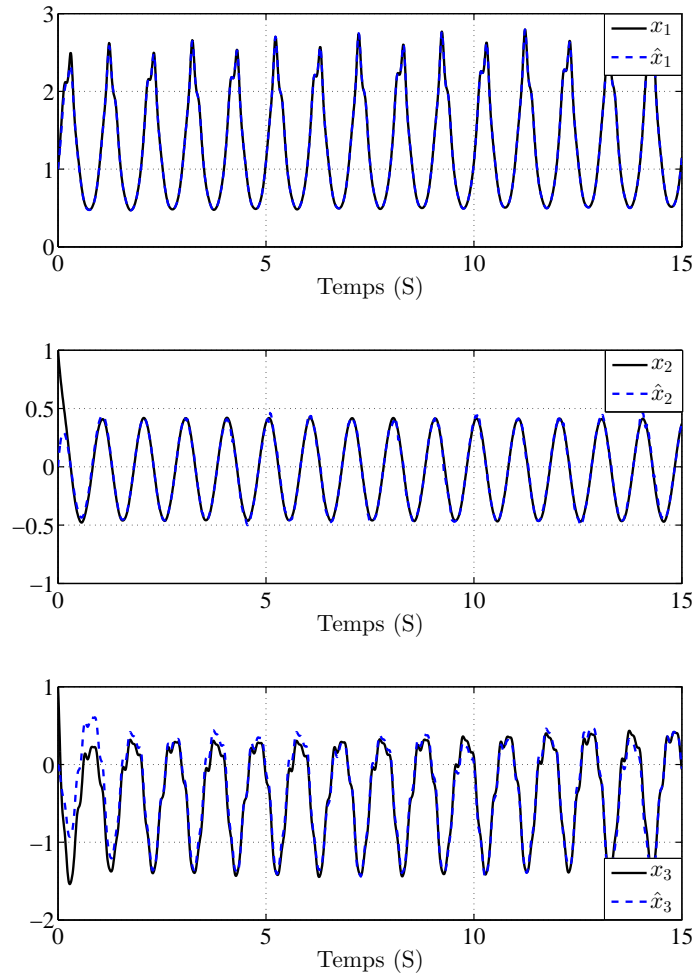


Figure 2.1: Estimation de x_2 et x_3 et de la sortie mesurée x_1 entachée de bruit de mesure.

2.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté un observateur de type grand gain pour une classe de systèmes MIMO non uniformément observables renfermant des incertitudes. Le gain de l'observateur est déterminé à partir de la résolution d'une EDO de Lyapunov et il peut être réglé par le choix d'un paramètre scalaire positif. Sous l'hypothèse d'excitation persistante, il est démontré que l'erreur d'observation liée à l'observateur proposé converge exponentiellement vers zéro en l'absence d'incertitudes. En présence d'incertitudes, cette erreur est bornée et peut être rendue aussi petite que désirée par le choix d'une valeur assez élevée pour le paramètre de réglage de l'observateur θ . Cependant, des valeurs très élevées de ce paramètre rendent l'observateur plus sensible au bruit de mesure. Par conséquent, le choix du paramètre

de réglage de l'observateur doit suivre un compromis entre un suivi satisfaisant de la variation de l'état et un bon comportement par rapport au bruit de mesure. Dans le chapitre suivant, nous allons étendre les résultats de synthèse d'observateur pour une classe plus large de systèmes non-linéaires MIMO non uniformément observables.

Chapitre 3

Observateur étendu pour une classe de systèmes MIMO non uniformément observables

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous proposons la synthèse d'un observateur étendu de type grand gain pour une large classe de systèmes non-linéaires MIMO non uniformément observables. La classe considérée ici est une extension de la classe considérée dans le chapitre précédent. En effet, le modèle est composé de la dynamique des variables d'état en cascade avec la dynamique des paramètres inconnus (variables dans le temps). La principale caractéristique de la classe de systèmes considérée réside dans le fait que les non-linéarités sous-jacentes ne sont pas triangulaires au sens classique. En effet, la notion d'indices caractéristiques associés aux composantes de l'état est introduite et elle est utilisée pour définir une structure triangulaire étendue où la triangularité est définie par rapport aux variables d'état réordonnées selon leur indice caractéristique. L'observateur étendu de type grand gain proposé peut donc être utilisé comme un observateur adaptatif permettant l'estimation conjointe de tous les états et des paramètres inconnus du système. Le gain de l'observateur est fourni par une EDO de Lyapunov appropriée. La convergence de l'erreur d'observation est garantie sous une condition d'excitation persistante bien définie et son analyse se

réalise en utilisant une approche constructive de Lyapunov.

3.2 Formulation du problème

Considérons la synthèse d'un observateur pour la classe de systèmes dynamiques décrits par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \dot{\xi} &= F(u, \xi)\xi + \Psi(u, \xi)z + g(u, \xi, z) + \varepsilon_\xi \\ \dot{z} &= \varphi(u, \xi, z) + \varepsilon_z \\ y &= C(u)\xi + \Psi^{(0)}(u)z = F_0(u)\xi^{(1)} + \Psi^{(0)}(u)z \end{cases} \quad (3.1)$$

où $u \in \mathbb{R}^s$ est l'entrée, $y \in \mathbb{R}^p$ est la sortie et l'état du système $x \in \mathbb{R}^n$ est réparti comme suit $x = \begin{pmatrix} \xi \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ avec $\xi \in \mathbb{R}^{n_\xi}$, $z \in \mathbb{R}^{n_z}$ et $n = n_\xi + n_z$.

Les sous-états ξ et z sont partitionnés comme suit :

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi^{(1)} \\ \vdots \\ \xi^{(q)} \end{pmatrix} \quad \text{avec } \xi^{(k)} \in \mathbb{R}^{n_\xi^k}, k \in \{1, \dots, q\}, \text{ et } \sum_{k=1}^q n_\xi^k = n_\xi, \quad (3.2)$$

$$z = \begin{pmatrix} z^{(1)} \\ \vdots \\ z^{(r)} \end{pmatrix} \quad \text{avec } z^{(l)} \in \mathbb{R}^{n_z^l}, l \in \{1, \dots, r\}, \text{ et } \sum_{l=1}^r n_z^l = n_z. \quad (3.3)$$

La matrice F a la structure anti-décalage suivante :

$$F(u, \xi) = \begin{pmatrix} 0 & F_1(u, \xi) & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & F_2(u, \xi) & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & F_{q-1}(u, \xi) \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

où chaque $F_k(u, \xi)$ est une matrice $n_\xi^k \times n_\xi^{k+1}$ non identiquement nulle, triangulaire par rapport à ξ , c'est-à-dire.

$$F_k(u, \xi) = F_k(u, \xi^{(1)}, \dots, \xi^{(k)}), \text{ pour } k \in \{1, \dots, q-1\} \quad (3.5)$$

La matrice $C \in \mathbb{R}^{n_\xi^0 \times n_\xi}$ est définie comme suit :

$$C(u) = \begin{pmatrix} F_0(u) & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

où $F_0(u)$ est une matrice $n_\xi^0 \times n_\xi^1$ non identiquement nulle avec $n_\xi^0 = n_\xi^1 = p$.

La matrice $\Psi(u, \xi) \in \mathbb{R}^{n_\xi \times n_z}$ peut être partitionnée comme suit :

$$\Psi(u, \xi) = \begin{pmatrix} \Psi_1^{(1)}(u, \xi) & \cdots & \Psi_r^{(1)}(u, \xi) \\ \vdots & & \vdots \\ \Psi_1^{(q)}(u, \xi) & \cdots & \Psi_r^{(q)}(u, \xi) \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

où chaque $\Psi_l^{(k)}(u, \xi) \in \mathbb{R}^{n_\xi^k \times n_z^l}$, $k \in \{1, \dots, q\}$, $l \in \{1, \dots, r\}$ et $\Psi^{(0)}(u) \in \mathbb{R}^{n_\xi^0 \times n_z}$ se présente comme suit :

$$\Psi^{(0)}(u) = \begin{pmatrix} \Psi_1^{(0)}(u) & \cdots & \Psi_r^{(0)}(u) \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

avec $\Psi_l^{(0)} \in \mathbb{R}^{n_\xi^0 \times n_z^l}$, $l \in \{1, \dots, r\}$.

Nous supposons que la matrice Ψ a une structure triangulaire par rapport à ξ , c'est-à-dire,

$$\Psi_l^{(k)}(u, \xi) = \Psi_l^{(k)}(u, \xi^{(1)}, \dots, \xi^{(k)}), \quad k \in \{1, \dots, q\}, \quad l \in \{1, \dots, r\} \quad (3.9)$$

et pour chaque $l \in \{1, \dots, r\}$, il existe au moins un $k \in \{0, \dots, q\}$ tel que $\Psi_l^{(k)}$ est une matrice non identiquement nulle.

De même, la fonction non linéaire $g(u, \xi, z) = \begin{pmatrix} g^{(1)}(u, \xi, z) \\ \vdots \\ g^{(q)}(u, \xi, z) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, $g^{(k)}(u, \xi, z) \in$

$\mathbb{R}^{n_\xi^k}$, $k \in \{1, \dots, q\}$, a une structure triangulaire par rapport à ξ , c'est-à-dire,

$$\frac{\partial g^{(k)}}{\partial \xi^{(l)}}(u, \xi, z) = 0 \quad \text{si } k < l \text{ pour } k, l \in \{1, \dots, q\}, \quad (3.10)$$

Les fonctions

$$\begin{aligned} \varepsilon_\xi : \mathbb{R}_+ &\rightarrow \mathbb{R}^{n_\xi} & \varepsilon_z : \mathbb{R}_+ &\rightarrow \mathbb{R}^{n_z} \\ t &\mapsto \varepsilon_\xi(t) & t &\mapsto \varepsilon_z(t) \end{aligned} \quad \text{et} \quad (3.11)$$

sont sous la forme :

$$\varepsilon_\xi = \begin{pmatrix} \varepsilon_\xi^{(1)} \\ \vdots \\ \varepsilon_\xi^{(q)} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \varepsilon_z = \begin{pmatrix} \varepsilon_z^{(1)} \\ \vdots \\ \varepsilon_z^{(r)} \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

où $\varepsilon_\xi^{(k)} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^{n_\xi^k}$, $k \in \{1, \dots, q\}$ et $\varepsilon_z^{(l)} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^{n_z^l}$, $l \in \{1, \dots, r\}$, représentent les incertitudes (inconnues) du système.

Afin de préciser la structure de la fonction g par rapport à z et celle de φ par rapport à ξ et z , nous avons besoin d'introduire la notion d'indices caractéristiques associés aux composantes $z^{(l)}$, $l \in \{1, \dots, r\}$.

Indices caractéristiques

Nous présentons maintenant la définition des indices caractéristiques avant de spécifier la structure des non-linéarités g et φ . En effet, nous associons à chaque sous-état $z^{(j)}$, $j \in \{1, \dots, r\}$, un entier positif, noté par ν_j , dont la définition est donnée ci-dessous.

Définition 3.2.1 *L'indice caractéristique ν_j associé au sous-état $z^{(j)}$, $j \in \{1, \dots, r\}$, est défini comme suit :*

$$\nu_j = \min \left\{ k \in \{0, \dots, q\} \text{ tel que } \Psi_j^{(k)} \neq 0 \right\}$$

Notons que, selon la définition des indices caractéristiques, si $\nu_j \geq 1$ pour certains $j \in \{1, \dots, r\}$, alors :

$$\Psi_j^{(k)} \equiv 0 \quad \text{pour } k \in \{0, \dots, \nu_j - 1\} \quad (3.13)$$

Nous supposons maintenant que les structures des fonctions non linéaires g par rapport à z et φ par rapport à ξ et z satisfont les conditions suivantes :

$$\frac{\partial g^{(k)}}{\partial z^{(l)}}(u, \xi, z) = 0 \quad \text{si } k \leq \nu_l \text{ pour } k \in \{1, \dots, q\} \text{ et } l \in \{1, \dots, r\}, \quad (3.14)$$

et

$$\frac{\partial \varphi^{(k)}}{\partial z^{(l)}}(u, \xi, z) = 0 \quad \text{si } \nu_k < \nu_l \text{ pour } k, l \in \{1, \dots, r\}, \quad (3.15)$$

$$\frac{\partial \varphi^{(k)}}{\partial \xi^{(l)}}(u, \xi, z) = 0 \quad \text{si } \nu_k \leq l \text{ pour } k \in \{1, \dots, r\} \text{ et } l \in \{1, \dots, q\}. \quad (3.16)$$

On a donc d'un côté les conditions (3.5), (3.9) et (3.10) qui expriment respectivement les propriétés triangulaires des matrices F , Ψ et g par rapport à ξ , et d'un autre côté la condition (3.15) qui exprime la structure triangulaire de φ par rapport à z alors que les conditions (3.14) et (3.16) peuvent être interprétées comme une certaine structure de triangularité qui définit l'interconnexion entre les deux sous-ensembles des composantes d'état, à savoir ξ et z .

Remarque 3.2.1 *Il est facile de remarquer que dans le cas où $\nu_j \neq 0$, l'indice caractéristique ν_j associé au sous-état $z^{(j)}$ est égal au rang de la première composante $\xi^{(k)}$ de ξ dont la dynamique dépend (linéairement) de $z^{(j)}$. Si l'expression de la sortie dépend de $z^{(j)}$, nous avons $\nu_j = 0$. De même que pour les sous-états $z^{(l)}$, $l = 1, \dots, r$, un indice caractéristique, μ_k , pourrait être associé à chaque sous-état $\xi^{(k)}$, $k = 1, \dots, q$ et on aurait $\mu_k = k - 1$. Cela est dû d'une part à l'expression de la sortie du système (3.1) qui dépend de $\xi^{(1)}$, alors $\mu_1 = 0$. D'autre part, pour $k \geq 2$ et comme la matrice $F(u, \xi)$ a une structure anti-décalage, la première composante de ξ dont la dynamique dépend (linéairement) de $\xi^{(k)}$ est $\xi^{(k-1)}$, c'est-à-dire $\mu_k = k - 1$. Par conséquent, les conditions (3.5), (3.9) et (3.10) qui expriment respectivement la structure triangulaire de F , Ψ et g par rapport à ξ peuvent être reformulées comme suit :*

$$\frac{\partial F_k(u, \xi)}{\partial \xi^{(l)}} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial (\cdot)^{(k)}}{\partial \xi^{(l)}} = 0 \quad \text{si} \quad \mu_k < \mu_l \quad \text{pour} \quad k, l \in \{1, \dots, q\} \quad (3.17)$$

où (\cdot) signifie $\Psi(u, \xi)$ ou $g(u, \xi, z)$.

De même, les conditions (3.14) et (3.16) qui fixent l'interconnexion entre ξ et z peuvent être reformulées respectivement en utilisant les indices caractéristiques de la manière suivante :

$$\frac{\partial g^{(k)}}{\partial z^{(l)}}(u, \xi, z) = 0 \quad \text{si} \quad \mu_k < \nu_l \quad \text{pour} \quad k \in \{1, \dots, q\} \quad \text{et} \quad l \in \{1, \dots, r\}, \quad (3.18)$$

$$\frac{\partial \varphi^{(k)}}{\partial \xi^{(l)}}(u, \xi, z) = 0 \quad \text{si} \quad \nu_k < \mu_l \quad \text{pour} \quad k \in \{1, \dots, r\} \quad \text{et} \quad l \in \{1, \dots, q\}. \quad (3.19)$$

Notons que la condition (3.15) qui traduit la structure triangulaire de φ par rapport à z a été déjà exprimée à l'aide des indices caractéristiques ν_j associés aux $z^{(j)}$.

En résumé, il s'avère que la structure triangulaire classique des non-linéarités est étendue à une structure triangulaire par rapport aux variables d'état qui sont réorganisées en fonction de leurs indice caractéristique. La structure triangulaire étendue des non-linéarités est décrite par les conditions structurelles (3.15), (3.17), (3.18) et (3.19).

Commentaires sur la classe de systèmes considérée

Dans le cas où il n'y a pas de sous-vecteur z , c'est-à-dire que le vecteur d'état x est restreint à ξ , le système (3.1) coïncide avec une classe de systèmes qui a été consi-

dérée dans de nombreux travaux en vue de la conception d'un observateur d'état. Nous résumons ci-après quelques-unes de ces classes. En effet, lorsque chaque matrice F_k est de rang plein par rapport aux colonnes, le système (3.1) appartient à la classe des systèmes considérée dans [Hammouri and Farza, 2003] qui caractérise une sous-classe de systèmes observables pour toute entrée et pour laquelle les auteurs ont proposé un observateur de type grand gain dont le gain est déterminé à partir d'une équation algébrique de Lyapunov. Notons que la propriété de rang plein de F_k implique que $n_k \geq n_{k+1}$ pour $k = 1, \dots, q - 1$. Dans [Deza et al., 1993], les auteurs ont considéré une classe de systèmes similaire où les matrices F_k sont réduites à des fonctions à valeurs réelles positives bornées. Un observateur de type grand gain avec un gain variant dans le temps issu de la résolution de l'EDO de Riccati a été proposé. Dans [Besançon and Ticlea, 2007], la classe de systèmes considérée est similaire à (3.1) sans le sous vecteur z et les fonctions F_k ne dépendent que des entrées et des sorties. Les auteurs ont donné des conditions suffisantes pour caractériser des systèmes qui peuvent être immergés sous la forme (3.1) et un observateur de type grand gain avec un gain issu d'une EDO de Lyapunov a été également proposé. La classe des systèmes considérée dans [Besançon and Ticlea, 2007] a été revue dans [Dufour et al., 2012] où les auteurs ont proposé la conception d'un observateur de type grand gain sous une condition d'excitation persistante qui relâche celle considérée dans [Besançon and Ticlea, 2007].

La prise en compte du sous-vecteur z , qui intervient sous une forme triangulaire non classique, permet de couvrir une classe de systèmes plus générale que celle envisagée dans les travaux décrits ci-dessus. En outre, une application intéressante peut être envisagée dans le cas où le vecteur z représenterait des paramètres partiellement inconnus qui doivent être estimés conjointement avec les états. Dans ce cas, la fonction g (qui peut être nulle) peut décrire la dynamique connue alors que ε_z désigne la dynamique inconnue des paramètres inconnus variant dans le temps. Par conséquent, l'observateur étendu de type grand gain qui doit être proposé peut être utilisé comme observateur adaptatif pour l'estimation conjointe de l'état et des paramètres inconnus (qui peuvent être variables dans le temps).

Dans la section suivante, nous proposons la synthèse d'un observateur d'état pour le système (3.1) sous certaines hypothèses standard classiquement utilisées dans la conception d'observateurs de type grand gain ainsi qu'une certaine condition d'excitation persistante semblable à celle considérée dans [Besançon and Ticlea, 2007; Dufour et al., 2012].

3.3 Synthèse de l'observateur

La synthèse de l'observateur nécessite l'adoption de certaines hypothèses que nous allons présenter au fur et à mesure de cette synthèse. Tout d'abord, nous considérons les hypothèses suivantes :

H1 L'état $x(t)$ et l'entrée $u(t)$ sont bornés, c'est-à-dire $\xi(t) \in X_\xi$, $z(t) \in X_z$ et $u(t) \in U$ où $X_\xi \subset \mathbb{R}^{n_\xi}$, $X_z \subset \mathbb{R}^{n_z}$ et $U \subset \mathbb{R}^s$ sont des ensembles compacts.

H2 Les fonctions F , Ψ , (respectivement g et φ) sont de classe \mathcal{C}^1 par rapport à ξ (respectivement par rapport à ξ et z), c'est-à-dire que les dérivées partielles par rapport à ξ (respectivement par rapport à ξ et z) sont continues par rapport à toutes les variables. Les fonctions F , Ψ , g , φ , F_0 et $\Psi^{(0)}$ sont continues par morceau par rapport à u . Les fonctions temporelles u , ε_ξ et ε_z sont continues par morceau.

H3 Les fonctions inconnues $\varepsilon_\xi^{(k)}$, $k = 1, \dots, q$ et $\varepsilon_z^{(l)}$, $l = 1, \dots, r$ sont essentiellement bornées, c'est-à-dire, il existe $\delta_\xi^1, \dots, \delta_\xi^q, \delta_z^1, \dots, \delta_z^r > 0$ tels que

$$\sup_{\mathcal{E}ss_{t \geq 0}} \|\varepsilon_\xi^{(k)}(t)\| \leq \delta_\xi^k, \quad \sup_{\mathcal{E}ss_{t \geq 0}} \|\varepsilon_z^{(l)}(t)\| \leq \delta_z^l$$

Remarque 3.3.1 Comme les fonctions F, Ψ, g, φ sont de classe \mathcal{C}^1 par rapport à ξ et z , ces fonctions sont localement Lipschitziennes. De plus, puisque l'état x et l'entrée u sont respectivement limités aux ensembles bornés $X = X_\xi \times X_z$ et U , nous pouvons construire des prolongements Lipschitziens globaux des non linéarités, qui sont globalement bornés, en utilisant des fonctions de saturations lisses. Ceci permet de conclure que, pour toute entrée bornée $u \in U$, toutes les non linéarités sont globalement Lipschitziennes par rapport à x et sont bornées pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ (voir [Farza et al., 2009]). Nous noterons x_M , F_M et Ψ_M , respectivement, les bornes

supérieures de x , F et Ψ , c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} x_M &= \sup_{x \in X} \|x\|, \\ F_M &= \sup_{u \in U, \xi \in X_\xi} (\|F(u, \xi)\|, \|F_0(u)\|), \\ \Psi_M &= \sup_{u \in U, \xi \in X_\xi} (\|\Psi(u, \xi)\|, \|\Psi^{(0)}(u)\|), \end{aligned} \quad (3.20)$$

et par $L_F > 0$, $L_\Psi > 0$, $L_g > 0$ et $L_\varphi > 0$ les bornes supérieures des dérivées partielles, c'est-à-dire, pour tout $u \in U$ et $(\xi, z) \in X_\xi \times X_z$

$$\left\| \frac{\partial F}{\partial \xi}(u, \xi) \right\| \leq L_F; \quad \left\| \frac{\partial \Psi}{\partial \xi}(u, \xi) \right\| \leq L_\Psi; \quad \left\| \frac{\partial g}{\partial x}(u, x) \right\| \leq L_g; \quad \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x}(u, x) \right\| \leq L_\varphi \quad (3.21)$$

Avant de donner les équations de l'observateur, nous introduisons quelques notations qui seront utilisées tout au long de la procédure de synthèse de l'observateur tout en indiquant certaines propriétés utiles pour l'analyse de la convergence.

1) Soient $\Delta_\xi(\theta)$ et $\Delta_z(\theta)$ deux matrices diagonales par blocs définies comme suit :

$$\Delta_\xi(\theta) \triangleq \text{diag} \left(I_{n_\xi^1}, \frac{1}{\theta} I_{n_\xi^2}, \dots, \frac{1}{\theta^{q-1}} I_{n_\xi^q} \right) \in \mathbb{R}^{n_\xi \times n_\xi} \quad (3.22)$$

et

$$\Delta_z(\theta) \triangleq \text{diag} \left(\frac{1}{\theta^{\nu_1}} I_{n_z^1}, \frac{1}{\theta^{\nu_2}} I_{n_z^2}, \dots, \frac{1}{\theta^{\nu_r}} I_{n_z^r} \right) \in \mathbb{R}^{n_z \times n_z} \quad (3.23)$$

où θ est un scalaire positif. Nous pouvons facilement vérifier les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} \Delta_\xi(\theta) F(u, \xi) \Delta_\xi^{-1}(\theta) &= \theta F(u, \xi) \\ C(u) \Delta_\xi^{-1}(\theta) &= C(u) \end{aligned} \quad (3.24)$$

Maintenant, nous scindons la matrice $\Psi(u, \xi) \in \mathbb{R}^{n_\xi \times n_z}$ en deux sous-matrices G et R

$$\Psi(u, \xi) = G(u, \xi) + R(u, \xi) \quad (3.25)$$

où :

- G est une matrice bloc de la même taille que Ψ :

$$G(u, \xi) = \begin{pmatrix} G_1^{(1)}(u, \xi) & \cdots & G_r^{(1)}(u, \xi) \\ \vdots & & \vdots \\ G_1^{(q)}(u, \xi) & \cdots & G_r^{(q)}(u, \xi) \end{pmatrix} \quad (3.26)$$

où chaque entrée $G_j^{(k)} \in \mathbb{R}^{n_\xi^k \times n_z^j}$, $k \in \{1, \dots, q\}$ et $j \in \{1, \dots, r\}$ est définie comme suit :

$$G_j^{(k)}(u, \xi) = \begin{cases} \Psi_j^{(k)}(u, \xi) & \text{si } k = \nu_j \\ 0_{n_\xi^k \times n_z^j} & \text{autrement} \end{cases} \quad (3.27)$$

Notons que $G_j(u, \xi)$ désigne la j -ème colonne (bloc) de $G(u, \xi)$. Une telle colonne est nulle si $\nu_j = 0$, sinon, elle ne contient qu'un seul élément (bloc) non nul situé à la ligne (bloc) numéro ν_j .

• R correspond au reste de la matrice Ψ , c'est-à-dire $R(u, \xi) = \Psi(u, \xi) - G(u, \xi)$. Selon la définition de G , nous avons :

$$R_j^{(k)}(u, \xi) = \begin{cases} 0_{n_\xi^{\nu_j} \times n_z^j} & \text{si } k = \nu_j \\ \Psi_j^{(k)}(u, \xi) & \text{autrement} \end{cases} \quad (3.28)$$

Notons que, selon (3.13), les entrées $R_j^{(k)}(u, \xi)$ avec $k < \nu_k$ sont nulles. Par conséquent, la définition (3.28) peut être réécrite comme suit :

$$R_j^{(k)}(u, \xi) = \begin{cases} 0_{n_\xi^k \times n_z^j} & \text{si } k \leq \nu_j \\ \Psi_j^{(k)}(u, \xi) & \text{autrement} \end{cases} \quad (3.29)$$

Compte tenu de la décomposition (3.25) de la matrice $\Psi(u, \xi)$, le système (3.1) peut être écrit sous la forme condensée suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} &= \mathcal{F}(u, \xi)x + \mathcal{G}(u, x) \\ y &= \mathcal{C}(u)x \end{cases} \quad (3.30)$$

avec

$$\mathcal{F}(u, \xi) = \begin{pmatrix} F(u, \xi) & G(u, \xi) \\ 0_{n_z \times n_\xi} & 0_{n_z \times n_z} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{C}(u) = (C(u) \quad \Psi^{(0)}(u)) \quad (3.31)$$

$$\mathcal{G}(u, x) = \begin{pmatrix} R(u, \xi)z + g(u, x) \\ \varphi(u, x) \end{pmatrix} \quad (3.32)$$

où $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^s$ et $y \in \mathbb{R}^p$ sont respectivement l'état, l'entrée et la sortie du

système.

2) Soient $\Gamma(u, \xi, \theta)$ et $\Lambda(u, \xi, \theta)$ les deux matrices définies par

$$\begin{aligned}\Gamma(u, \xi, \theta) &\triangleq \Delta_\xi(\theta)G(u, \xi)\Delta_z^{-1}(\theta) \\ \Lambda(u, \xi, \theta) &\triangleq \Delta_\xi(\theta)R(u, \xi)\Delta_z^{-1}(\theta)\end{aligned}\quad (3.33)$$

où les matrices G et R sont issues de la décomposition de Ψ sous la forme (3.25). Selon la définition des matrices diagonales (blocs) $\Delta_\xi(\theta)$ et $\Delta_z(\theta)$ respectivement données par (3.22) et (3.23), nous avons :

$$\begin{aligned}\Gamma_j^{(k)}(u, \xi, \theta) &= \theta^{-(k-1)}G_j^{(k)}(u, \xi)\theta^{\nu_j} \\ &= \theta^{\nu_j-(k-1)}G_j^{(k)}(u, \xi) \\ &= \begin{cases} \theta\Psi_j^{(k)}(u, \xi) & \text{si } k = \nu_j \\ 0_{n_\xi^k \times n_z^j} & \text{autrement} \end{cases} \quad \text{selon l'équation (3.26)} \\ &= \theta G_j^{(k)}(u, \xi)\end{aligned}\quad (3.34)$$

et

$$\begin{aligned}\Lambda_j^{(k)}(u, \xi, \theta) &= \theta^{-(k-1)}R_j^{(k)}(u, \xi)\theta^{\nu_j} \\ &= \theta^{\nu_j-(k-1)}R_j^{(k)}(u, \xi) \\ &= \begin{cases} 0_{n_\xi^k \times n_z^j} & \text{si } k \leq \nu_j \\ \theta^{\nu_j-(k-1)}\Psi_j^{(k)}(u, \xi) & \text{autrement} \end{cases} \quad \text{selon l'équation (3.29)}\end{aligned}$$

Notons que tous les termes non nuls de la matrice $R(u, \xi)$ sont multipliés par $\theta^{\nu_j-(k-1)}$ avec $k > \nu_j$. Par conséquent, la puissance de θ dans ce facteur est négative puisque $\nu_j - (k - 1) \leq 0$.

Compte tenu des développements ci-dessus, nous pouvons facilement montrer que les égalités suivantes sont vérifiées :

$$\Delta_\xi(\theta)G(u, \xi)\Delta_z^{-1}(\theta) = \theta G(u, \xi)\quad (3.35)$$

$$\Delta_\xi(\theta)R(u, \xi)\Delta_z^{-1}(\theta) \triangleq W\left(u, \xi, \frac{1}{\theta}\right)\quad (3.36)$$

où $W(u, \xi, \frac{1}{\theta})$ est une matrice dont les éléments sont polynomiaux en $\frac{1}{\theta}$. En utilisant

la décomposition de Ψ sous la forme (3.25), nous obtenons :

$$\begin{aligned}\Delta_\xi(\theta)\Psi(u, \xi)\Delta_z^{-1}(\theta) &= \Delta_\xi(\theta)G(u, \xi)\Delta_z^{-1}(\theta) + \Delta_\xi(\theta)R(u, \xi)\Delta_z^{-1}(\theta) \\ &= \theta G(u, \xi) + W\left(u, \xi, \frac{1}{\theta}\right)\end{aligned}\quad (3.37)$$

De même, en utilisant le fait que la j -ème colonne (bloc) de la matrice $\Psi^{(0)}(u)\Delta_z^{-1}(\theta)$ est égale à $\Psi_j^{(0)}(u)\theta^{\nu_j}$, nous pouvons facilement vérifier que :

$$\Psi^{(0)}(u)\Delta_z^{-1}(\theta) = \Psi^{(0)}(u) \quad (3.38)$$

Cette colonne est égale à zéro si $\Psi_j^{(0)}(u) = 0$. Dans le cas contraire, nous avons $\nu_j = 0$ ($\theta^{\nu_j} = 1$) qui conduit à $\Psi_j^{(0)}(u)\theta^{\nu_j} = \Psi_j^{(0)}(u)$.

Soit $\Delta_x(\theta)$ est la matrice ($n \times n$) diagonale par blocs suivante :

$$\Delta_x(\theta) = \text{diag}(\Delta_\xi(\theta), \Delta_z(\theta)) \quad (3.39)$$

où $\Delta_\xi(\theta)$ et $\Delta_z(\theta)$ sont données, respectivement, par (3.22) et (3.23).

Soit $\mathcal{F}(u, \xi)$ et $\mathcal{C}(u)$ les matrices ($n \times n$) et ($p \times n$) suivantes :

$$\begin{aligned}\mathcal{F} &= \begin{pmatrix} F(u, \xi) & G(u, \xi) \\ 0_{n_z \times n_\xi} & 0_{n_z \times n_z} \end{pmatrix} \\ \mathcal{C}(u) &= \begin{pmatrix} C(u) & \Psi^{(0)}(u) \end{pmatrix}\end{aligned}\quad (3.40)$$

où $F(u, \xi)$, $C(u)$ et $G(u, \xi)$ sont définies, respectivement, par (3.4), (3.6) et (3.26).

Notons que, selon les équations (3.24), (3.35) et (3.38), nous avons :

$$\begin{aligned}\Delta_x(\theta)\mathcal{F}(u, \xi)\Delta_x^{-1}(\theta) &= \theta\mathcal{F}(u, \xi) \\ \mathcal{C}(u)\Delta_x^{-1}(\theta) &= \mathcal{C}(u)\end{aligned}\quad (3.41)$$

L'observateur étendu de type grand gain candidat que nous proposons est donné par le système dynamique suivant :

$$\begin{pmatrix} \dot{\hat{\xi}}(t) \\ \dot{\hat{z}}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F(u, \hat{\xi})\hat{\xi} + \Psi(u, \hat{\xi})\hat{z} + g(u, \hat{\xi}, \hat{z}) \\ \varphi(u, \hat{\xi}, \hat{z}) \\ -\theta\Delta_x^{-1}(\theta)\mathcal{S}^{-1}(t)\mathcal{C}^T(u) \left(C(u)\hat{\xi} + \Psi^{(0)}(u)\hat{z} - y \right) \end{pmatrix} \quad (3.42)$$

où $\hat{\xi} \in \mathbb{R}^{n_\xi}$, $\hat{z} \in \mathbb{R}^{n_z}$, u et y sont respectivement l'entrée et la sortie du système (3.1), F, C, \mathcal{C} et Δ_x , sont respectivement donnés par (3.4), (3.6), (3.31) et (3.39); enfin, $\mathcal{S}(t)$ est une matrice symétrique ($n \times n$), solution de l'EDO de Lyapunov suivante :

$$\dot{\mathcal{S}}(t) = -\theta \left(\mathcal{S}(t) + \mathcal{F}^T(u, \hat{\xi})\mathcal{S}(t) + \mathcal{S}(t)\mathcal{F}(u, \hat{\xi}) - \mathcal{C}^T(u)\mathcal{C}(u) \right) \quad (3.43)$$

avec $\mathcal{S}(0) = \mathcal{S}^T(0) > 0$.

Avant d'énoncer le résultat principal de ce chapitre, nous avons besoin de l'hypothèse additionnelle suivante. En effet, soit le système affine en état suivante :

$$\dot{x}_{u,\hat{\xi}}(t) = \mathcal{F}(u, \hat{\xi})x_{u,\hat{\xi}}(t) \quad (3.44)$$

où $x_{u,\hat{\xi}} \in \mathbb{R}^n$ est l'état de système, u et $\hat{\xi}$ sont les entrées du système qui correspondent respectivement à l'entrée du système (3.1) et au sous état du système dynamique (3.42); la matrice \mathcal{F} est définie comme dans (3.31). Rappelons que la matrice de transition $\Phi_{u,\hat{\xi}}(t, s)$ du système (3.44) est définie comme suit :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\Phi_{u,\hat{\xi}}(t, s) \right) &= \mathcal{F}(u(t), \hat{\xi}(t))\Phi_{u,\hat{\xi}}(t, s) \\ \Phi_{u,\hat{\xi}}(s, s) &= I_n \end{cases} \quad (3.45)$$

Notons que l'existence des solutions des EDO (3.42), (3.43) et (2.9) est garantie, pour tout $t \geq 0$, puisque les différentes fonctions impliquées sont globalement Lipschitziennes par rapport à l'état et continues par morceaux par rapport au temps, selon l'hypothèse **H2**.

Soit l'hypothèse supplémentaire suivante :

H4 $\exists \theta^* > 0$; $\exists \delta_0 > 0$; $\exists T^* > 0$; $\forall \theta \geq \theta^*$; $\forall t \geq \frac{T^*}{\theta}$, on a

$$\int_{t-\frac{T^*}{\theta}}^t \Phi_{u,\hat{\xi}}^T(s, t)\mathcal{C}^T(u(s))\mathcal{C}(u(s))\Phi_{u,\hat{\xi}}(s, t)ds \geq \frac{\delta_0}{\theta\alpha(\theta)}\Delta_x^2(\theta) \quad (3.46)$$

où $\alpha(\theta)$ est une fonction positive satisfaisant

$$\forall \theta > 0, \alpha(\theta) \geq 1 \text{ et } \lim_{\theta \rightarrow \infty} \frac{\alpha(\theta)}{\theta^2} = 0. \quad (3.47)$$

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème suivant :

Théorème 3.3.1 *Supposons que le système (3.1) satisfasse les hypothèses **H1** à **H3**. Alors, pour toute entrée bornée satisfaisant l'hypothèse **H4** et pour tout $\theta > \theta^*$ où θ^* est donné par l'hypothèse **H4**, il existe $t_0 > 0$ tel que pour tout $t \geq t_0$, nous avons :*

$$\begin{aligned} \|\hat{x}(t) - x(t)\| \leq & \theta^\chi \sigma e^{-\frac{\theta\mu(\theta)}{2}(t-t_0)} \|\hat{x}(t_0) - x(t_0)\| \\ & + \beta \sqrt{\frac{\alpha(\theta)}{\theta^2\mu^2(\theta)}} \sqrt{\sum_{k=1}^q \theta^{2(\chi-(k-1))} (\delta_\xi^k)^2 + \sum_{l=1}^r \theta^{2(\chi-\nu_l)} (\delta_z^l)^2} \end{aligned} \quad (3.48)$$

où $x(t)$ est la trajectoire inconnue du système (3.1) associée à l'entrée u , $\hat{x}(t)$ est trajectoire de l'observateur (3.42) partant de $\hat{x}(0)$ associée à (u, y) , δ_ξ^k et δ_z^l sont respectivement les bornes essentielles supérieures de $\|\varepsilon_\xi^k(t)\|$ et $\|\varepsilon_z^l(t)\|$ comme indiqué par l'hypothèse **H3**; $\sigma = \sqrt{\frac{\bar{\lambda}_M(\mathcal{S}, t_0)}{\bar{\lambda}_m(\mathcal{S}, t_0)}}$ est le conditionnement de la matrice \mathcal{S} définie par (3.43); $\beta > 0$ est une constante indépendante de θ . Finalement, $\chi = \max(q-1, \nu_1, \dots, \nu_r)$ et $\mu(\theta)$ est une fonction réelle vérifiant $\lim_{\theta \rightarrow \infty} \mu(\theta) = 1$.

La démonstration du théorème sera détaillée dans la section suivante. Avant de donner cette preuve, les questions résumées dans les remarques suivantes méritent d'être mises en exergue.

Remarque 3.3.2 *L'hypothèse **H4** est similaire à celle donnée dans [Besançon, 1999; Besançon and Ticlea, 2007] où les auteurs ont introduit la notion d'entrée régulière locale. Il s'agit des entrées pour lesquelles l'inégalité (3.46) est satisfaite avec $\alpha(\theta) \equiv 1$ pour tous θ . Dans [Dufour et al., 2012], les auteurs ont introduit la notion d'entrée régulière et ont montré que la classe de ces entrées inclut celle des entrées régulières locales. En utilisant les mêmes arguments que dans [Dufour et al., 2012], nous pouvons montrer que la classe d'entrées satisfaisant l'hypothèse **H4** comprend toutes les entrées régulières locales, mais qu'elle est incluse dans la classe des entrées régulières.*

*L'admissibilité de l'hypothèse **H4** est discutable sur deux plans. D'une part : comment caractériser la classe des entrées du système fournissant l'état d'excitation persistante (3.46) ? D'autre part : comment reformuler la condition d'excitation persistante en utilisant les trajectoires de l'état du système plutôt que les trajectoires de*

l'état d'observateur ? À notre connaissance, il n'existe aucun résultat fondamental permettant de caractériser la classe des entrées vérifiant une condition d'excitation persistante à l'exception des problèmes d'estimation des paramètres impliquant des systèmes linéaires invariants dans le temps. La condition d'excitation persistante est donc une exigence difficile pour la conception d'un observateur. De plus, cette question fondamentale ne sera pas résolue même si la condition d'excitation persistante est reformulée en utilisant les trajectoires d'état du système. Il est intéressant de noter que la condition d'excitation persistante (3.46) pourrait être vérifiée en ligne car elle dépend uniquement des trajectoires de l'observateur et des entrées du système. Ceci ne serait plus vrai si la condition d'excitation persistante dépendait des trajectoires du système puisque celles-ci ne sont pas disponibles.

Remarque 3.3.3 *Selon (3.48), l'erreur d'observation converge exponentiellement vers zéro pour des valeurs suffisamment élevées de θ en l'absence d'incertitudes, c'est-à-dire lorsque $\varepsilon_\xi = 0$ et $\varepsilon_z = 0$ (c'est-à-dire $\delta_\xi^k = 0$ et $\delta_z^\ell = 0$) pour tout $k \in \{1, \dots, q\}$ et $\ell \in \{1, \dots, r\}$.*

De plus, l'erreur d'observation peut être aussi petite que souhaité dans le cas où $\varepsilon_\xi^k = 0$ et $\varepsilon_z^\ell = 0$ pour tout $1 \leq k \leq q$ et $1 \leq \ell \leq r$ tels que $k \leq \chi$ et $\nu_\ell \leq \chi - 1$. En effet, dans ce cas, l'erreur d'observation reste dans une boule centrée à l'origine avec un rayon proportionnel à $\rho(\theta) \triangleq \sqrt{\frac{\alpha(\theta)}{\theta^2 \mu^2(\theta)}}$ et elle peut être rendue arbitrairement petite en choisissant des valeurs de θ suffisamment élevées puisque $\lim_{\theta \rightarrow \infty} \rho(\theta) = 0$.

3.4 Analyse de Convergence

Tout d'abord, nous allons montrer que la matrice $\mathcal{S}(t)$ régie par l'EDO (3.43) est symétrique définie positive et obtenir une borne inférieure pour sa plus petite valeur propre. Ensuite, nous montrerons que $\mathcal{S}(t)$ est bornée et que la borne supérieure de sa plus grande valeur propre est indépendante de θ . Enfin, une fonction de Lyapunov appropriée sera introduite et la convergence de l'erreur d'observation sera détaillée.

Borne inférieure de $\mathcal{S}(t)$

A partir des relations (3.41), nous pouvons montrer que la matrice de transition, $\tilde{\Phi}_{u,\hat{\xi}}$, du système suivant

$$\dot{\tilde{x}}_{u,\hat{\xi}}(t) = \theta \mathcal{F}(u, \hat{\xi}) \tilde{x}_{u,\hat{\xi}}(t) \quad (3.49)$$

où l'état du système $\tilde{x}_{u,\hat{\xi}} \in \mathbb{R}^n$, u et $\hat{\xi}$ sont les entrées du système qui correspondent respectivement à l'entrée du système (3.1) et au sous-état du système dynamique (3.42), peut s'exprimer comme suit :

$$\tilde{\Phi}_{u,\hat{\xi}}(t, s) = \Delta_x(\theta) \Phi_{u,\hat{\xi}}(t, s) \Delta_x^{-1}(\theta) \quad (3.50)$$

où $\Phi_{u,\hat{\xi}}$ est définie par (3.45).

Par conséquent, la matrice \mathcal{S} , solution de l'EDO (3.43), peut être exprimée de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(t) &= e^{-\theta t} \tilde{\Phi}_{u,\hat{\xi}}^T(0, t) \mathcal{S}(0) \tilde{\Phi}_{u,\hat{\xi}}(0, t) + \theta \int_0^t e^{-\theta(t-s)} \tilde{\Phi}_{u,\hat{\xi}}^T(s, t) \mathcal{C}^T(u(s)) \mathcal{C}(u(s)) \tilde{\Phi}_{u,\hat{\xi}}(s, t) ds \\ &= e^{-\theta t} \Delta_x^{-1}(\theta) \Phi_{u,\hat{\xi}}^T(0, t) \Delta_x(\theta) \mathcal{S}(0) \Delta_x(\theta) \Phi_{u,\hat{\xi}}(0, t) \Delta_x^{-1}(\theta) \\ &\quad + \theta \int_0^t e^{-\theta(t-s)} \Delta_x^{-1}(\theta) \Phi_{u,\hat{\xi}}^T(s, t) \Delta_x(\theta) \mathcal{C}^T(u(s)) \mathcal{C}(u(s)) \Delta_x(\theta) \Phi_{u,\hat{\xi}}(s, t) \Delta_x^{-1}(\theta) ds \end{aligned} \quad (3.51)$$

De plus, le terme intégral dans (3.51) est une matrice symétrique définie positive ; il en résulte que $\mathcal{S}(t)$ est une matrice SDP.

En utilisant le fait que $\mathcal{C}(u) \Delta_x(\theta) = \mathcal{C}(u)$, nous avons pour tout $t \geq t_0 = \frac{T^*}{\theta}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(t) &\geq \theta \int_0^t e^{-\theta(t-s)} \Delta_x^{-1}(\theta) \Phi_{u,\hat{\xi}}^T(s, t) \mathcal{C}^T(u(s)) \mathcal{C}(u(s)) \Phi_{u,\hat{\xi}}(s, t) \Delta_x^{-1}(\theta) ds \\ &\geq \theta \int_{t-\frac{T^*}{\theta}}^t e^{-\theta(t-s)} \Delta_x^{-1}(\theta) \Phi_{u,\hat{\xi}}^T(s, t) \mathcal{C}^T(u(s)) \mathcal{C}(u(s)) \Phi_{u,\hat{\xi}}(s, t) \Delta_x^{-1}(\theta) ds \\ &\geq \theta e^{-T^*} \int_{t-\frac{T^*}{\theta}}^t \Delta_x^{-1}(\theta) \Phi_{u,\hat{\xi}}^T(s, t) \mathcal{C}^T(u(s)) \mathcal{C}(u(s)) \Phi_{u,\hat{\xi}}(s, t) \Delta_x^{-1}(\theta) ds \\ &\geq \frac{\delta_0 e^{-T^*}}{\alpha(\theta)} I_n \end{aligned} \quad (3.52)$$

où δ_0 et $\alpha(\theta)$ sont donnés, respectivement, par (3.46) et (3.47). Selon l'inégalité (3.52), nous avons clairement :

$$\underline{\lambda}_m(\mathcal{S}, t_0) \geq \frac{\delta_0 e^{-T^*}}{\alpha(\theta)} \quad (3.53)$$

Nous allons maintenant montrer que $\bar{\lambda}_M(\mathcal{S}, t_0)$ est bornée par une borne supérieure qui est indépendante de θ .

Borne supérieure de $\mathcal{S}(t)$

Considérons la partition suivante de \mathcal{S} : $\mathcal{S}(t) = \begin{pmatrix} S(t) & U(t) \\ U^T(t) & Q(t) \end{pmatrix}$ où S et Q sont des matrices symétriques de dimensions $n_\xi \times n_\xi$ et $n_z \times n_z$, respectivement et U est une matrice rectangulaire $n_\xi \times n_z$. Il suffit de montrer que chacune des matrices S , Q et U sont bornées avec une borne supérieure indépendante de θ afin de prouver que la borne supérieure de la plus grande valeur propre de \mathcal{S} est indépendante de θ .

Selon (3.43), nous avons :

$$\dot{S}(t) = -\theta \left(S(t) + F^T(u, \hat{\xi})S(t) + S(t)F(u, \hat{\xi}) - C^T(u)C(u) \right) \quad (3.54)$$

$$\dot{U}(t) = -\theta \left(U(t) + F^T(u, \hat{\xi})U(t) + S(t)G(u, \hat{\xi}) - C^T(u)\Psi^{(0)}(u) \right) \quad (3.55)$$

$$\dot{Q}(t) = -\theta \left(Q(t) + G^T(u, \hat{\xi})U(t) + U^T(t)G(u, \hat{\xi}) - \Psi^{(0)T}(u)\Psi^{(0)}(u) \right) \quad (3.56)$$

Bornitude de la matrice S . Notons par S_{ij} l'entrée (bloc) de la matrice S située à la ligne i et la colonne j . D'après l'EDO (3.54), nous avons :

$$\dot{S}_{1,1} = -\theta(S_{1,1} - F_0^T(u)F_0(u)) \quad (3.57)$$

$$\dot{S}_{1,j} = -\theta \left(S_{1,j} + S_{1,j-1}F_{j-1}(u, \hat{\xi}) \right), \quad j \in \{2, \dots, q\} \quad (3.58)$$

$$\dot{S}_{i,j} = -\theta \left(S_{i,j} + S_{i,j-1}F_{j-1}(u, \hat{\xi}) + F_{i-1}^T(u, \hat{\xi})S_{i-1,j} \right), \quad (3.59)$$

$$i \in \{2, \dots, q\}, \quad j \in \{i, \dots, q\}$$

Rappelons que, selon la remarque 3.3.1, les matrices F_k , $k = 0, \dots, q-1$ sont bornées avec une borne supérieure F_M définie par (3.20). Selon (3.57), nous avons donc :

$$\begin{aligned} \|S_{1,1}(t)\| &\leq e^{-\theta t} \|S_{1,1}(0)\| + \theta \int_0^t e^{-\theta(t-s)} \|F_0^T(u(s))F_0(u(s))\| ds, \\ &\leq \|S_{1,1}(0)\| + F_M^2 \theta \int_0^t e^{-\theta(t-s)} ds = \|S_{1,1}(0)\| + F_M^2 (1 - e^{-\theta t}), \\ &\leq \|S_{1,1}(0)\| + F_M^2. \end{aligned}$$

Maintenant, pour $j \geq 2$, nous procédons par récurrence sur j afin de montrer que $S_{1,j}$ est bornée avec une borne indépendante de θ . En effet, supposons que $S_{1,j-1}$ est bornée et notons par $S_M = \sup_{t \geq 0} \|S_{1,j-1}(t)\|$. En utilisant (3.58), nous obtenons pour $j \in \{2, \dots, q\}$:

$$\begin{aligned} \|S_{1,j}(t)\| &\leq e^{-\theta t} \|S_{1,j}(0)\| + \theta \int_0^t e^{-\theta(t-s)} \|S_{1,j-1}(s)F_{j-1}(u, \hat{\xi})\| ds \\ &\leq \|S_{1,j}(0)\| + F_M S_M \end{aligned} \quad (3.60)$$

À cette étape, nous avons montré que tous les éléments situés à la première ligne (et la première colonne) de la matrice symétrique S sont bornés. Nous procédons par récurrence sur le numéro de ligne i afin de montrer que tous les éléments d'une ligne sont bornés. En effet, supposons que tous les éléments des lignes 1 à $i - 1$ sont bornés (avec une borne qui ne dépend pas de θ) et montrons que tous les éléments de la ligne i sont également bornés. Puisque S est symétrique, tous les éléments $S_{i,j}$ avec $i < j$ sont bornés par l'hypothèse de récurrence. En particulier, nous avons $S_{i-1,i} = S_{i,i-1}^T$ et ces matrices sont bornées par une borne supérieure, désignée par S_M , indépendante de θ . Maintenant, nous allons montrer que $S_{i,j}$ est borné pour $j \geq i$. Considérons d'abord le cas où $j = i$. En effet, selon (3.59), nous avons :

$$\begin{aligned} \|S_{i,i}(t)\| &\leq e^{-\theta t} \|S_{i,i}(0)\| + \theta \int_0^t e^{-\theta(t-s)} \|S_{i,i-1} F_{i-1}(u, \hat{\xi}) + F_{i-1}^T(u, \hat{\xi}) S_{i-1,i}\| ds \\ &\leq \|S_{i,i}(0)\| + 2F_M S_M, \quad \text{selon l'hypothèse de récurrence.} \end{aligned}$$

Supposons que $j > i$ et que $S_{i,j-1}$ soit bornée ; montrons que $S_{i,j}$ est également borné. En effet, selon l'hypothèse de récurrence, l'élément $S_{i-1,j}$ situé à la ligne $i - 1$ est borné. Par la suite, à partir de l'équation (3.59), nous obtenons :

$$\begin{aligned} \|S_{i,j}(t)\| &\leq e^{-\theta t} \|S_{i,j}(0)\| + \theta \int_0^t e^{-\theta(t-s)} \|S_{i,j-1} F_{j-1}(u, \hat{\xi}) + F_{i-1}^T(u, \hat{\xi}) S_{i-1,j}\| ds \\ &\leq \|S_{i,j}(0)\| + 2F_M S_M, \quad \text{selon l'hypothèse de récurrence.} \end{aligned}$$

Pour résumer, nous avons montré que tous les éléments de la matrice $S(t)$ sont bornés avec une borne supérieure indépendante de θ .

Bornitude des matrices U et Q . Soit $U_{i,j}$ l'élément de U situé à la ligne i et la colonne j . Selon (3.55), nous obtenons pour $j \in \{1, \dots, r\}$:

$$\dot{U}_{1,j} = -\theta \left(U_{1,j} + \sum_{k=1}^q S_{1,k} G_j^{(k)}(u, \hat{\xi}) - F_0^T(u, \hat{\xi}) \Psi_j^{(0)}(u) \right) \quad (3.61)$$

$$\dot{U}_{i,j} = -\theta \left(U_{i,j} + F_{i-1}^T(u, \hat{\xi}) U_{i-1,j} + \sum_{k=1}^q S_{i,k} G_j^{(k)}(u, \hat{\xi}) \right) \text{ pour } i \geq 2 \quad (3.62)$$

Puisque S , G , F_0 et $\Psi^{(0)}$ sont bornées avec des bornes supérieures indépendantes de θ , nous pouvons facilement montrer à partir de l'équation (3.61) que $U_{1,j}$ est borné et que la borne supérieure correspondante est indépendante de θ . De même, à partir de la bornitude de $U_{1,j}$ et F et selon l'équation (3.62), on peut établir la bornitude de $U_{i,j}$, pour $i \geq j$, en utilisant un raisonnement par récurrence similaire à celui

adopté pour prouver la bornitude de $S(t)$. Enfin, la bornitude de la matrice $Q(t)$ par une borne supérieure indépendante de θ peut également être établie à partir de l'EDO (3.56) en tenant compte de la bornitude de G , U et $\Psi^{(0)}$.

Des développements précédents, nous déduisons que $\bar{\lambda}_M(\mathcal{S}, t_0)$ est bornée par une constante indépendante de θ .

Nous présentons maintenant une analyse détaillée de la convergence de l'erreur d'observation.

Convergence de l'observateur

Soit $\tilde{\xi} = \hat{\xi} - \xi$ et $\tilde{z} = \hat{z} - z$. Selon (3.1) et (3.42), nous avons :

$$\begin{pmatrix} \dot{\tilde{\xi}}(t) \\ \dot{\tilde{z}}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F(u, \hat{\xi})\tilde{\xi} + \Psi(u, \hat{\xi})\tilde{z} + \tilde{F}(u, \hat{\xi}, \xi)\xi + \tilde{\Psi}(u, \hat{\xi}, \xi)z + \tilde{g}(u, \hat{x}, x) \\ \tilde{\varphi}(u, \hat{x}, x) \end{pmatrix} - \theta \Delta_x^{-1}(\theta) \mathcal{S}^{-1}(t) \mathcal{C}^T(u) \begin{pmatrix} C(u)\tilde{\xi} + \Psi^{(0)}(u)\tilde{z} \\ \begin{pmatrix} \varepsilon_\xi \\ \varepsilon_z \end{pmatrix} \end{pmatrix} \quad (3.63)$$

où $\tilde{F}(u, \hat{\xi}, \xi) = F(u, \hat{\xi}) - F(u, \xi)$, $\tilde{\Psi}(u, \hat{\xi}, \xi) = \Psi(u, \hat{\xi}) - \Psi(u, \xi)$,
 $\tilde{g}(u, \hat{x}, x) = g(u, \hat{\xi}, \hat{z}) - g(u, \xi, z)$ et $\tilde{\varphi}(u, \hat{x}, x) = \varphi(u, \hat{\xi}, \hat{z}) - \varphi(u, \xi, z)$.

En utilisant la décomposition de Ψ sous la forme (3.25), nous obtenons :

$$\begin{pmatrix} \dot{\tilde{\xi}}(t) \\ \dot{\tilde{z}}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F(u, \hat{\xi})\tilde{\xi} + G(u, \hat{\xi})\tilde{z} + R(u, \hat{\xi})\tilde{z} + \tilde{F}(u, \hat{\xi}, \xi)\xi + \tilde{\Psi}(u, \hat{\xi}, \xi)z + \tilde{g}(u, \hat{x}, x) \\ \tilde{\varphi}(u, \hat{x}, x) \end{pmatrix} - \theta \Delta_x^{-1}(\theta) \mathcal{S}^{-1}(t) \mathcal{C}^T(u) \begin{pmatrix} C(u)\tilde{\xi} + \Psi^{(0)}(u)\tilde{z} \\ \begin{pmatrix} \varepsilon_\xi \\ \varepsilon_z \end{pmatrix} \end{pmatrix} \quad (3.64)$$

où $G(u, \hat{\xi})$ et $R(u, \hat{\xi})$ sont, respectivement, données par (3.26) et (3.29).

Définissons $\tilde{x} = \hat{x} - x = \begin{pmatrix} \tilde{\xi} \\ \tilde{z} \end{pmatrix}$, l'équation d'erreur (3.64) peut être écrite sous une forme étendue de la manière suivante :

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \mathcal{F}(u, \hat{\xi})\tilde{x}(t) + \mathcal{G}(u, \hat{x}, x) - \theta \Delta_x^{-1}(\theta) \mathcal{S}^{-1}(t) \mathcal{C}^T(u) \mathcal{C}(u)\tilde{x}(t) - \varepsilon \quad (3.65)$$

où $\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_\xi \\ \varepsilon_z \end{pmatrix}$, \mathcal{F} et \mathcal{C} sont données par (3.31) et

$$\mathcal{G}(u, \hat{x}, x) = \begin{pmatrix} R(u, \hat{\xi})\tilde{z} + \tilde{F}(u, \hat{\xi}, \xi)\xi + \tilde{\Psi}(u, \hat{\xi}, \xi)z + \tilde{g}(u, \hat{x}, x) \\ \tilde{\varphi}(u, \hat{x}, x) \end{pmatrix} \quad (3.66)$$

Nous introduisons maintenant le changement de variables suivant : $\bar{x} = \begin{pmatrix} \bar{\xi} \\ \bar{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta_\xi(\theta)\tilde{\xi} \\ \Delta_z(\theta)\tilde{z} \end{pmatrix} = \Delta_x(\theta)\tilde{x}$ où Δ_ξ, Δ_z et Δ_x sont, respectivement, donnés par (3.22), (3.23) et (3.39). Selon (3.65) et en utilisant (3.41), nous obtenons :

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}(t) &= \Delta_x(\theta)\mathcal{F}(u, \hat{\xi})\Delta_x^{-1}(\theta)\bar{x}(t) + \Delta_x(\theta)\mathcal{G}(u, \hat{x}, x) - \theta\mathcal{S}^{-1}(t)\mathcal{C}^T(u)\mathcal{C}(u)\Delta_x^{-1}(\theta)\bar{x}(t) - \Delta_x(\theta)\varepsilon \\ &= \theta\mathcal{F}(u, \hat{\xi})\bar{x}(t) + \Delta_x(\theta)\mathcal{G}(u, \hat{x}, x) - \theta\mathcal{S}^{-1}(t)\mathcal{C}^T(u)\mathcal{C}(u)\bar{x}(t) - \Delta_x(\theta)\varepsilon \end{aligned} \quad (3.67)$$

Considérons maintenant la fonction de Lyapunov candidate suivante : $V(\bar{x}, t) = \bar{x}^T\mathcal{S}(t)\bar{x}$. D'après (3.67) et selon (3.43), nous obtenons :

$$\begin{aligned} \dot{V}(\bar{x}, t) &= \bar{x}^T\dot{\mathcal{S}}\bar{x} + 2\bar{x}^T\mathcal{S}\dot{\bar{x}} \\ &= -\theta V(\bar{x}, t) - \theta\bar{x}^T\mathcal{C}^T\mathcal{C}\bar{x} + 2\bar{x}^T\mathcal{S}\Delta_x(\theta)\mathcal{G}(u, \hat{x}, x) - 2\bar{x}^T\mathcal{S}\Delta_x(\theta)\varepsilon \end{aligned} \quad (3.68)$$

Ainsi, nous devons borner le terme

$$\begin{aligned} \Delta_x(\theta)\mathcal{G}(u, \hat{x}, x) &= \begin{pmatrix} \Delta_\xi(\theta)R(u, \hat{\xi})\Delta_z^{-1}(\theta)\bar{z} + \Delta_\xi(\theta)\tilde{F}(u, \hat{\xi}, \xi)\xi \\ \Delta_z(\theta)\tilde{\varphi}(u, \hat{x}, x) \end{pmatrix} \\ &\quad + \begin{pmatrix} \Delta_\xi(\theta)\tilde{\Psi}(u, \hat{\xi}, \xi)z + \Delta_\xi(\theta)\tilde{g}(u, \hat{x}, x) \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

En procédant comme dans [Farza et al., 2014] et en tenant compte de la structure triangulaire (classique) de F et Ψ par rapport à ξ , nous pouvons montrer que pour $\theta \geq 1$:

$$\begin{aligned} \|\Delta_\xi(\theta)\tilde{F}(u, \hat{\xi}, \xi)\xi\| &\leq \sqrt{n}L_{Fx_M}\|\bar{\xi}\| \leq \sqrt{n}L_{Fx_M}\|\bar{x}\| \\ \|\Delta_\xi(\theta)\tilde{\Psi}(u, \hat{\xi}, \xi)z\| &\leq \sqrt{n}L_{\Psi x_M}\|\bar{\xi}\| \leq \sqrt{n}L_{\Psi x_M}\|\bar{x}\| \end{aligned}$$

De même, à partir de (3.36), nous obtenons :

$$\|\Delta_\xi(\theta)R(u, \hat{\xi})\Delta_z^{-1}(\theta)\bar{z}\| = \left\| W\left(u, \hat{\xi}, \frac{1}{\theta}\right)\bar{z} \right\| \leq \sqrt{n}\Psi_M\|\bar{z}\| \leq \sqrt{n}\Psi_M\|\bar{x}\|$$

Nous allons maintenant nous concentrer sur la bornitude des termes $\Delta_\xi(\theta)\tilde{g}(u, \hat{x}, x)$ et $\Delta_z(\theta)\tilde{\varphi}(u, \hat{x}, x)$.

En utilisant le théorème de la valeur moyenne pour les fonctions vectorielles, il existe

$2n_\xi$ réels, $a_1^1, b_1^1, \dots, a_{n_\xi}^1, b_{n_\xi}^1, \dots, a_1^q, b_1^q, \dots, a_{n_\xi}^q, b_{n_\xi}^q$ tels que :

$$\begin{aligned}
 g(u, \hat{\xi}, \hat{z}) - g(u, \xi, z) &= g(u, \hat{\xi}, \hat{z}) - g(u, \xi, \hat{z}) + g(u, \xi, \hat{z}) - g(u, \xi, z) \\
 &= \begin{pmatrix} \nabla_{\hat{\xi}}^T g_1^1(u, a_1^1, \hat{z}) \\ \vdots \\ \nabla_{\hat{\xi}}^T g_{n_\xi}^1(u, a_{n_\xi}^1, \hat{z}) \\ \vdots \\ \nabla_{\hat{\xi}}^T g_1^q(u, a_1^q, \hat{z}) \\ \vdots \\ \nabla_{\hat{\xi}}^T g_{n_\xi}^q(u, a_{n_\xi}^q, \hat{z}) \end{pmatrix} \tilde{\xi} + \begin{pmatrix} \nabla_z^T g_1^1(u, \xi, b_1^1) \\ \vdots \\ \nabla_z^T g_{n_\xi}^1(u, \xi, b_{n_\xi}^1) \\ \vdots \\ \nabla_z^T g_1^q(u, \xi, b_1^q) \\ \vdots \\ \nabla_z^T g_{n_\xi}^q(u, \xi, b_{n_\xi}^q) \end{pmatrix} \tilde{z} \quad (3.69)
 \end{aligned}$$

où $\nabla_{\hat{\xi}}^T g_i^k(\cdot) = \frac{\partial g_i^k}{\partial \hat{\xi}}(\cdot)$ et $\nabla_z^T g_i^k(\cdot) = \frac{\partial g_i^k}{\partial z}(\cdot)$.

Pour la commodité d'écriture, nous introduisons la notation suivante :

$$G^a(u, a, \hat{z}) \triangleq \begin{pmatrix} \nabla_{\hat{\xi}}^T g_1^1(u, a_1^1, \hat{z}) \\ \vdots \\ \nabla_{\hat{\xi}}^T g_{n_\xi}^1(u, a_{n_\xi}^1, \hat{z}) \\ \vdots \\ \nabla_{\hat{\xi}}^T g_1^q(u, a_1^q, \hat{z}) \\ \vdots \\ \nabla_{\hat{\xi}}^T g_{n_\xi}^q(u, a_{n_\xi}^q, \hat{z}) \end{pmatrix}; \quad G^b(u, \xi, b) \triangleq \begin{pmatrix} \nabla_z^T g_1^1(u, \xi, b_1^1) \\ \vdots \\ \nabla_z^T g_{n_\xi}^1(u, \xi, b_{n_\xi}^1) \\ \vdots \\ \nabla_z^T g_1^q(u, \xi, b_1^q) \\ \vdots \\ \nabla_z^T g_{n_\xi}^q(u, \xi, b_{n_\xi}^q) \end{pmatrix}$$

Ainsi, l'équation (3.69) peut être réécrite comme suit :

$$g(u, \hat{\xi}, \hat{z}) - g(u, \xi, z) = G^a(u, a, \hat{z})\tilde{\xi} + G^b(u, \xi, b)\tilde{z} \quad (3.70)$$

et nous obtenons :

$$\Delta_\xi(\theta) \left(g(u, \hat{\xi}, \hat{z}) - g(u, \xi, z) \right) = \Delta_\xi(\theta) G^a(u, a, \hat{z}) \Delta_\xi^{-1}(\theta) \tilde{\xi} + \Delta_\xi(\theta) G^b(u, \xi, b) \Delta_z^{-1}(\theta) \tilde{z}$$

Nous définissons

$$\bar{G}^a(u, a, \hat{z}) = \Delta_\xi(\theta) G^a(u, a, \hat{z}) \Delta_\xi^{-1}(\theta) \text{ et } \bar{G}^b(u, \xi, b) = \Delta_\xi(\theta) G^b(u, \xi, b) \Delta_z^{-1}(\theta)$$

et désignons par $M_{k,l}$ l'élément (bloc) situé à la ligne k et la colonne l pour toute matrice M . Ensuite, nous avons :

$$\bar{G}_{k,l}^a(u, a, \hat{z}) = \theta^{l-k} G_{k,l}^a(u, a, \hat{z}) \text{ et } \bar{G}_{k,l}^b(u, \xi, b) = \theta^{\nu_l - (k-1)} G_{k,l}^b(u, \xi, b)$$

À partir de (3.10) et (3.14), il est facile de remarquer que $\bar{G}_{k,l}^a(u, a, \hat{z}) = 0$ si $l - k > 0$ et que $\bar{G}_{k,l}^b(u, \xi, b) = 0$ si $\nu_l - (k - 1) > 0$. Par conséquent, nous avons pour $\theta \geq 1$:

$$\|\bar{G}_{k,l}^a(u, a, \hat{z})\| \leq \|G_{k,l}^a(u, a, \hat{z})\| \text{ et } \|\bar{G}_{k,l}^b(u, \xi, b)\| \leq \|G_{k,l}^b(u, \xi, b)\|$$

et par conséquent, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\|\Delta_\xi(\theta) \left(g(u, \hat{\xi}, \hat{z}) - g(u, \xi, z) \right)\| &\leq \|\bar{G}^a(u, a, \hat{z})\| \|\bar{\xi}\| + \|\bar{G}^b(u, \xi, b)\| \|\bar{z}\| \\
&\leq \|\bar{G}^a(u, a, \hat{z})\|_F \|\bar{\xi}\| + \|\bar{G}^b(u, \xi, b)\|_F \|\bar{z}\| \\
&\leq \|G^a(u, a, \hat{z})\|_F \|\bar{\xi}\| + \|G^b(u, \xi, b)\|_F \|\bar{z}\| \text{ pour } \theta \geq 1 \\
&\leq \left(\|G^a(u, a, \hat{z})\|_F + \|G^b(u, \xi, b)\|_F \right) \|\bar{x}\| \\
&\leq \left(\left\| \frac{\partial g(u, a, \hat{z})}{\partial x} \right\|_F + \left\| \frac{\partial g(u, \xi, b)}{\partial x} \right\|_F \right) \|\bar{x}\| \\
&\leq \sqrt{n} \left(\left\| \frac{\partial g(u, a, \hat{z})}{\partial x} \right\| + \left\| \frac{\partial g(u, \xi, b)}{\partial x} \right\| \right) \|\bar{x}\| \\
&\leq 2\sqrt{n}L_g \|\bar{x}\|
\end{aligned} \tag{3.71}$$

où $\|(\cdot)\|_F$ désigne la norme de Frobenius de la matrice (\cdot) .

En procédant de façon similaire et en utilisant les conditions structurelles (3.15) et (3.16), nous pouvons montrer que :

$$\|\Delta_z(\theta) \left(\varphi(u, \hat{\xi}, \hat{z}) - \varphi(u, \xi, z) \right)\| \leq 2\sqrt{n}L_\varphi \|\bar{x}\|$$

Les inégalités ci-dessus conduisent, pour $t \geq t_0 = \frac{T^*}{\theta}$, à :

$$\begin{aligned}
2\bar{x}^T \mathcal{S} \Delta_x(\theta) \mathcal{G}(u, \hat{x}, x) &\leq 2\sqrt{\bar{\lambda}_M(\mathcal{S}, t_0)} \sqrt{V(\bar{x})} \sqrt{n} ((L_F + L_\Psi)x_M + 2L_g + \Psi_M + 2L_\varphi) \|\bar{x}\| \\
&\leq 2\sqrt{\frac{\bar{\lambda}_M(\mathcal{S}, t_0)}{\underline{\lambda}_m(\mathcal{S}, t_0)}} \sqrt{n} ((L_F + L_\Psi)x_M + 2L_g + \Psi_M + 2L_\varphi) V(\bar{x}, t)
\end{aligned}$$

En utilisant (3.53), nous obtenons :

$$\begin{aligned}
2\bar{x}^T \mathcal{S} \Delta_x(\theta) \mathcal{G}(u, \hat{x}, x) &\leq 2\sqrt{\alpha(\theta)} \sqrt{\frac{n\bar{\lambda}_M(\mathcal{S}, t_0)e^{T^*}}{\delta_0}} ((L_F + L_\Psi)x_M + 2L_g + \Psi_M + 2L_\varphi) V(\bar{x}, t) \\
&= \eta \sqrt{\alpha(\theta)} V(\bar{x}, t)
\end{aligned} \tag{3.72}$$

où $\eta = 2\sqrt{\frac{n\bar{\lambda}_M(\mathcal{S}, t_0)e^{T^*}}{\delta_0}} ((L_F + L_\Psi)x_M + 2L_g + \Psi_M + 2L_\varphi)$ est indépendante de θ .

Nous allons maintenant chercher une majoration du terme $2\bar{x}^T \mathcal{S} \Delta_x(\theta) \varepsilon$ apparaissant dans le membre de droite de l'équation (3.68). En effet, nous avons :

$$2\bar{x}^T \mathcal{S} \Delta_x(\theta) \varepsilon(t) \leq 2\sqrt{\bar{\lambda}_M(\mathcal{S}, t_0)} \sqrt{V(\bar{x}, t)} \|\Delta_x(\theta) \varepsilon(t)\| \tag{3.73}$$

D'après (3.68), (3.72) et (3.73), nous obtenons :

$$\dot{V}(\bar{x}, t) \leq -\theta\mu(\theta)V(\bar{x}, t) + 2\sqrt{\bar{\lambda}_M(\mathcal{S}, t_0)} \sqrt{V(\bar{x}, t)} \|\Delta_x(\theta) \varepsilon(t)\|$$

ou de manière équivalente

$$\frac{d\sqrt{V(\bar{x}, t)}}{dt} \leq -\frac{\theta\mu(\theta)}{2} \sqrt{V(\bar{x}, t)} + \sqrt{\bar{\lambda}_M(\mathcal{S}, t_0)} \|\Delta_x(\theta) \varepsilon(t)\| \tag{3.74}$$

où $\mu(\theta) = \left(1 - \eta \sqrt{\frac{\alpha(\theta)}{\theta^2}}\right)$. Notons que, selon (3.47), nous avons $\lim_{\theta \rightarrow \infty} \mu(\theta) = 1$.

D'après (3.74) et en utilisant le lemme de comparaison, nous obtenons pour $t \geq t_0 = \frac{T^*}{\theta}$:

$$\begin{aligned} \sqrt{V(\bar{x}(t), t)} &\leq e^{-\frac{\theta\mu(\theta)}{2}(t-t_0)} \sqrt{V(\bar{x}(t_0), t_0)} \\ &+ 2 \frac{\sqrt{\bar{\lambda}_M(\mathcal{S}, t_0)}}{\theta\mu(\theta)} \sqrt{\sum_{k=1}^q \left(\frac{\delta_\xi^k}{\theta^{k-1}}\right)^2 + \sum_{l=1}^r \left(\frac{\delta_z^l}{\theta^{\nu_l}}\right)^2} \end{aligned} \quad (3.75)$$

En revenant à \bar{x} et en utilisant (3.53), nous obtenons :

$$\begin{aligned} \|\bar{x}(t)\| &\leq \sigma e^{-\frac{\theta\mu(\theta)}{2}(t-t_0)} \|\bar{x}(t_0)\| \\ &+ \beta \sqrt{\frac{\alpha(\theta)}{\theta^2\mu^2(\theta)}} \sqrt{\sum_{k=1}^q \left(\frac{\delta_\xi^k}{\theta^{k-1}}\right)^2 + \sum_{l=1}^r \left(\frac{\delta_z^l}{\theta^{\nu_l}}\right)^2} \end{aligned} \quad (3.76)$$

où $\sigma = \sqrt{\frac{\bar{\lambda}_M(\mathcal{S}, t_0)}{\bar{\lambda}_m(\mathcal{S}, t_0)}}$ est le conditionnement de \mathcal{S} et $\beta = 2\sqrt{\frac{\bar{\lambda}_M(\mathcal{S}, t_0)e^{T^*}}{\delta_0}}$. Il est clair que la constante β est indépendante de θ comme indiqué dans le théorème.

Étant donné que $\bar{x} = \Delta_x(\theta)\tilde{x}$ où $\Delta_x(\theta)$ est donné par (3.39), nous avons pour tout $\theta \geq 1$: $\|\bar{x}\| \leq \|\tilde{x}\| \leq \theta^\chi \|\bar{x}\|$ où $\chi = \max(q-1, \nu_1, \dots, \nu_r)$. Revenons aux coordonnées originales \tilde{x} de l'erreur, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \|\tilde{x}(t)\| &\leq \theta^\chi \sigma e^{-\frac{\theta\mu(\theta)}{2}(t-t_0)} \|\tilde{x}(t_0)\| \\ &+ \beta \sqrt{\frac{\alpha(\theta)}{\theta^2\mu^2(\theta)}} \sqrt{\sum_{k=1}^q \theta^{2(\chi-k+1)} (\delta_\xi^k)^2 + \sum_{l=1}^r \theta^{2(\chi-\nu_l)} (\delta_z^l)^2} \\ &= \theta^\chi \sigma e^{-\frac{\theta\mu(\theta)}{2}(t-t_0)} \|\tilde{x}(t_0)\| \\ &+ \beta \sqrt{\frac{\alpha(\theta)}{\theta^2\mu^2(\theta)}} \sqrt{\sum_{k=1}^q \theta^{2(\chi-(k-1))} (\delta_\xi^k)^2 + \sum_{l=1}^r \theta^{2(\chi-\nu_l)} (\delta_z^l)^2} \end{aligned}$$

Ceci termine la démonstration du théorème.

3.5 Exemple

Considérons le système dynamique suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} \dot{\xi}_1 \\ \dot{\xi}_2 \\ \dot{\xi}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \xi_1 \xi_2 + u_2 \xi_1^2 \xi_3 + \xi_1 u_3 z_2 - z_1^2 - u_2 \xi_1 z_3 \\ \xi_3 + u_3 z_2 - \xi_2^3 \\ -\xi_3 + u_3 z_1 \xi_1 \xi_2 - u_1 \xi_2 z_2 z_3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z_1 + \sin^2(\xi_1) \\ -\tanh(z_2) - z_1 + u_1 \xi_1 \xi_2 \\ -z_3 + z_2^2 + \xi_3 \sin(\xi_1) + \varepsilon(t) \end{pmatrix} = \varphi(u, \xi, z) \\ y = \xi_1 + u_0 z_1 \end{array} \right. \quad (3.77)$$

où $\xi_i, z_i, u_0, u_i \in \mathbb{R}$ pour $i = 1, 2, 3$.

L'état peut être partitionné comme suit :

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi^{(1)} \\ \xi^{(2)} \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \xi^{(1)} = \xi_1 \quad \text{et} \quad \xi^{(2)} = \begin{pmatrix} \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix},$$

$$z = \begin{pmatrix} z^{(1)} \\ z^{(2)} \\ z^{(3)} \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad z^{(1)} = z_1, \quad z^{(2)} = z_2 \quad \text{et} \quad z^{(3)} = z_3,$$

ce qui signifie que $q = 2$ et $r = 3$.

Avec cette partition, il est clair que le système (3.77) est sous la forme (3.1) avec

$$F_0 = 1, \quad F_1 = \begin{pmatrix} u_1 \xi_1 & u_2 \xi_1^2 \end{pmatrix},$$

$$\Psi^{(0)}(u) = \begin{pmatrix} \Psi_1^{(0)} & \Psi_2^{(0)} & \Psi_3^{(0)} \end{pmatrix}, \quad \Psi_1^{(0)} = u_0, \quad \Psi_2^{(0)} = 0, \quad \Psi_3^{(0)} = 0,$$

$$\Psi(u, \xi) = \begin{pmatrix} \Psi_1^{(1)} & \Psi_2^{(1)} & \Psi_3^{(1)} \\ \Psi_1^{(2)} & \Psi_2^{(2)} & \Psi_3^{(2)} \end{pmatrix},$$

$$\Psi_1^{(1)} = 0, \quad \Psi_2^{(1)} = u_3 \xi_1, \quad \Psi_3^{(1)} = -u_2 \xi_1,$$

$$\Psi_1^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ u_3 \xi_1 \xi_2 \end{pmatrix}, \quad \Psi_2^{(2)} = \begin{pmatrix} u_3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Psi_3^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$g(u, \xi, z) = \begin{pmatrix} -z_1^2 \\ \xi_3 - \xi_2^3 \\ -\xi_3 - u_1 \xi_2 z_2 z_3 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon_\xi = \begin{pmatrix} \varepsilon_\xi^{(1)} \\ \varepsilon_\xi^{(2)} \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon_z = \begin{pmatrix} \varepsilon_z^{(1)} \\ \varepsilon_z^{(2)} \\ \varepsilon_z^{(3)} \end{pmatrix}, \quad \varepsilon_\xi^{(1)} = \varepsilon_z^{(1)} = \varepsilon_z^{(2)} = 0, \quad \varepsilon_\xi^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon_z^{(3)}(t) = \varepsilon(t)$$

Les indices caractéristiques sont donnés par :

- $\nu_1 = 0$, puisque $\Psi_1^{(0)} \neq 0$,
- $\nu_2 = 1$, puisque $\Psi_2^{(0)} \equiv 0$ et $\Psi_2^{(1)} \neq 0$,
- $\nu_3 = 1$, puisque $\Psi_3^{(0)} \equiv 0$ et $\Psi_3^{(1)} \neq 0$.

Cela mène à :

$$G(u, \xi) = \begin{pmatrix} 0 & u_3 \xi_1 & -u_2 \xi_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

et

$$\Delta_z(\theta) = \text{diag} \left(1, \frac{1}{\theta}, \frac{1}{\theta} \right),$$

$$\Delta_\xi(\theta) = \text{diag} \left(I_1, \frac{1}{\theta} I_2 \right).$$

Nous pouvons remarquer que seule la dynamique de z_3 contient une incertitude, à savoir ε . Cette incertitude a été spécifiée dans la simulation comme suit : $\varepsilon(t) = 0.1 \sin(11\pi t)$.

Il est à noter que le système (3.77) est non uniformément observable. En effet, si toutes les entrées sont égales à zéro, alors le système (3.77) est réduit à :

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{\xi}_1 \\ \dot{\xi}_2 \\ \dot{\xi}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z_1^2 \\ \xi_3 - \xi_2^3 \\ -\xi_3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z_1 + \sin^2(\xi_1) \\ -\tanh(z_2) - z_1 \\ -z_3 + z_2^2 + \xi_3 \sin(\xi_1) + \varepsilon(t) \end{pmatrix} \\ y = \xi_1 \end{cases}$$

Les dynamiques de z_1 et ξ_1 dépendent l'une de l'autre seulement, c'est-à-dire qu'elles ne dépendent pas des autres états. Puisque z_1 est la sortie, le système est donc,

évidemment, non uniformément observable.

Un observateur de la forme (3.42) a été conçu pour estimer ξ et z .

Les simulations du système (3.77) et de l'observateur étendu de type grand gain ont été réalisés en considérant les expressions suivantes pour les entrées :

$$u_0 = \sin(17\pi t), \quad u_1 = \sin(11\pi t), \quad u_2 = \cos(11\pi t), \quad u_3 = \cos(2\pi t). \quad (3.78)$$

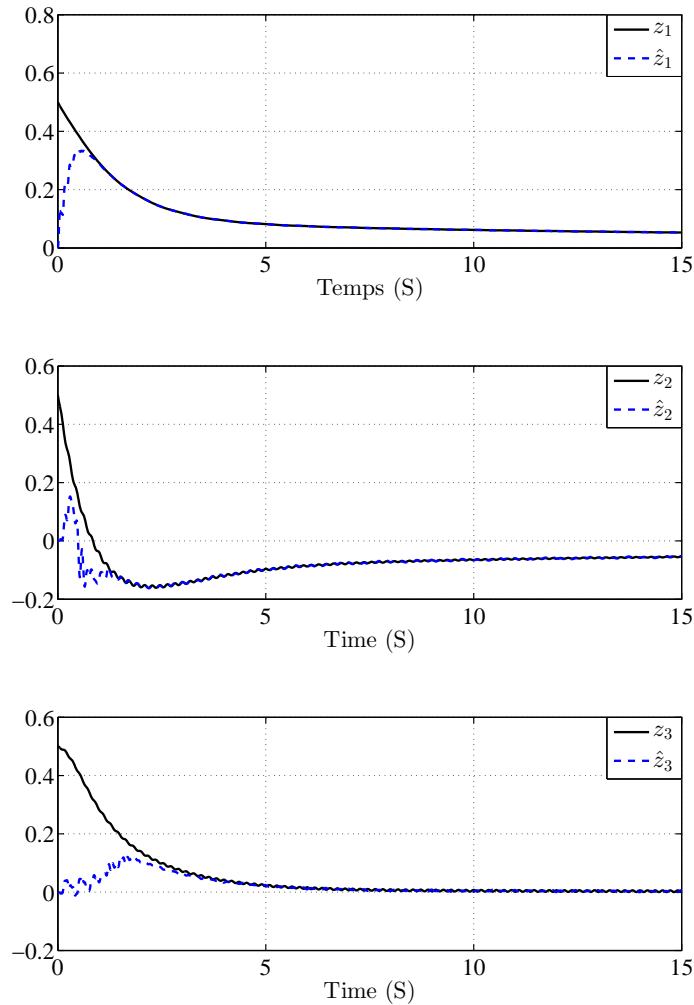


Figure 3.1: Estimation des états z_i , pour $i = 1, 2, 3$

En simulation, les six valeurs initiales de l'état du système ont été réglées à 0.5 tandis que les six valeurs initiales de l'état de l'observateur étendu ont été arbitrairement fixées à zéro. Enfin, la valeur du paramètre de synthèse de l'observateur θ a été fixée à 5. Les estimations des états $\hat{\xi}_i$ et \hat{z}_i sont données sur les figures 3.1 et 3.2 où elles sont comparées avec leurs vraies valeurs issues de la simulation du système.

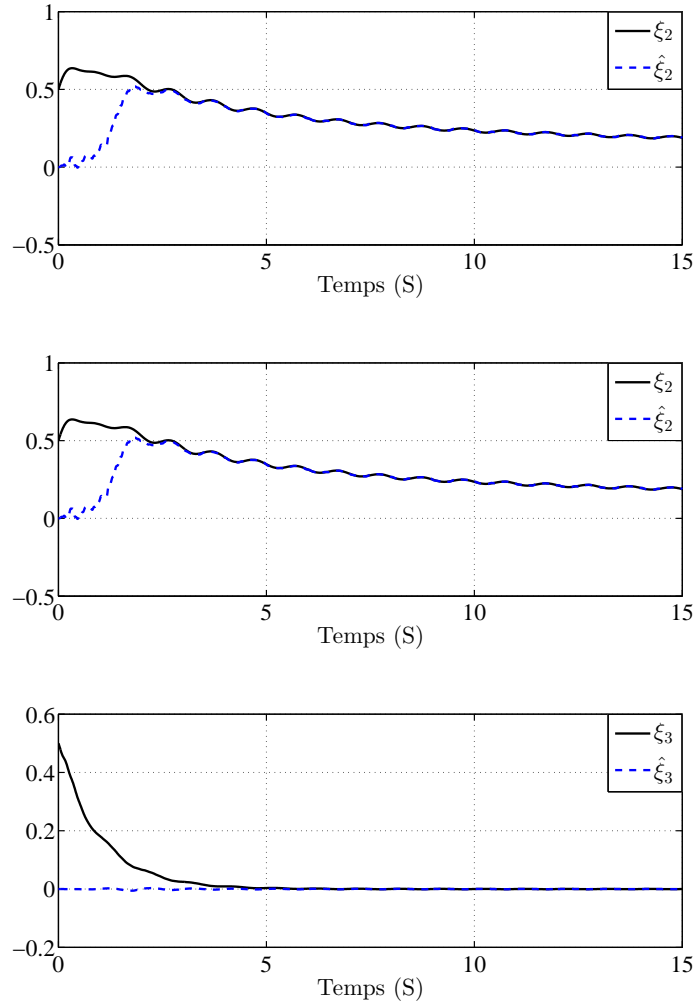


Figure 3.2: Estimation des états ξ_i , pour $i = 1, 2, 3$

Un zoom sur les erreurs d'observation relatives aux six états est présenté sur la figure 3.3. Nous remarquons que certaines de ces erreurs ne convergent pas vers zéro, mais elle se trouvent dans une boule centrée à l'origine avec un rayon relativement petit ce qui confirme les résultats théoriques détaillés dans les sections ci-dessus.

3.6 Conclusion

Un observateur étendu de type grand gain a été proposé pour une classe de systèmes non linéaires où la structure des non-linéarités est non triangulaire au sens habituel. Cette relaxation de modélisation a été réalisée grâce à l'introduction du concept d'indices caractéristiques. Un tel concept a été utilisé de manière appropriée pour

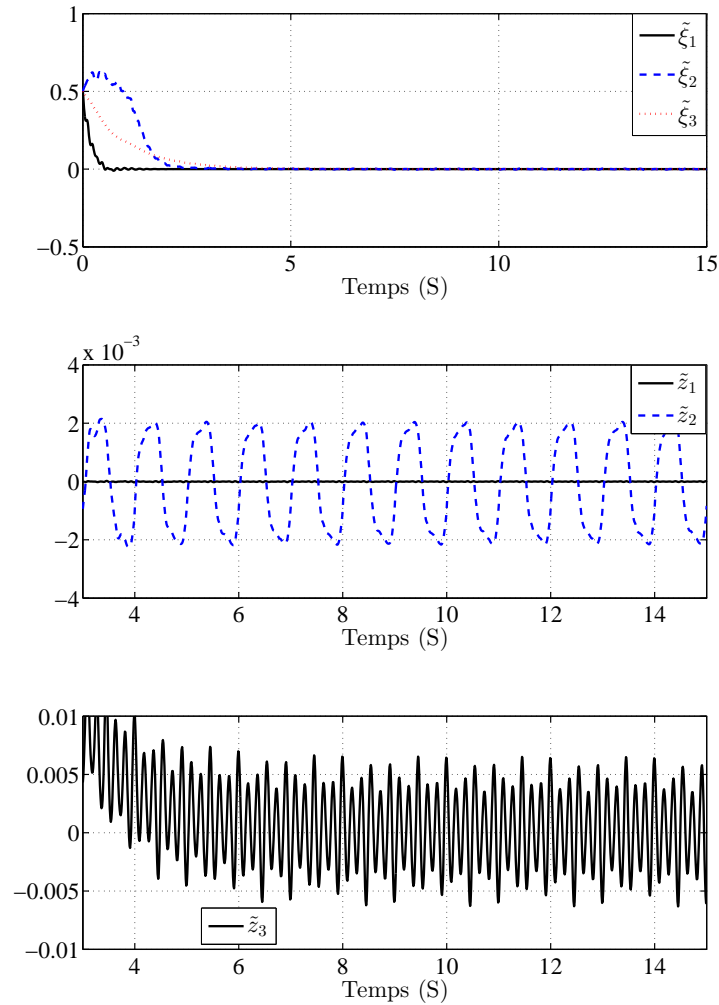


Figure 3.3: Évolution temporelle des erreurs d'observation

étendre la structure triangulaire classique de sorte que la triangularité du système est considérée par rapport aux composantes de l'état réordonnées selon leur indice caractéristique. De plus, la classe des systèmes considérée n'est pas uniformément observable dans le sens où les systèmes concernés peuvent admettre des entrées qui peuvent les rendre inobservables. Pour éviter une telle situation, une condition d'excitation persistante a été considérée permettant ainsi de préserver l'observabilité du système. Un observateur étendu de type grand gain dont le gain est issu de la résolution d'une EDO de Lyapunov appropriée a été conçu et ses équations ont été générés. Les principales propriétés de l'observateur proposé ont été illustrées en simulation à travers un exemple académique.

Chapitre 4

Synthèse d'un observateur adaptatif pour une classe de systèmes non linéaires

4.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous nous focalisons sur le problème de la synthèse d'un observateur adaptatif de type grand gain pour une classe de systèmes non uniformément observables avec des paramètres inconnus constants. Cette classe découle de celle considérée dans le chapitre 2 et suppose une structure triangulaire par rapport aux variables d'état. Cependant les paramètres inconnus n'interviennent pas que de manière linéaire dans la dynamique du système. Des indices caractéristiques seront définis et associés à ces paramètres en vue de générer un modèle augmenté du système. Habituellement l'état augmenté est obtenu en concaténant simplement le vecteur d'état x et le vecteur des paramètres ρ . Il sera obtenu ici en réordonnant les composantes de x et de ρ de telle sorte que le système dynamique étendu possède une structure triangulaire par rapport à l'état augmenté. Le système augmenté ainsi obtenu sera alors considéré en vue de la synthèse d'un observateur. Nous proposons donc, dans un premier temps, un observateur de type grand gain conçu dans les nouvelles coordonnées. Le gain de l'observateur proposé sera issu de la résolution d'une EDO de Lyapunov et sa convergence exponentielle sera garantie sous une propriété d'excitation persistante appropriée. Nous montrerons ensuite que les équations

tions de l'observateur peuvent être manipulées afin de séparer les équations associées à l'estimation de l'état de celles correspondant à l'adaptation des paramètres. Ceci permet de récupérer les équations de l'observateur adaptatif, exprimées dans les coordonnées originales. Les principales étapes de la conception de l'observateur ainsi que ses principales propriétés seront illustrées à travers la simulation d'un exemple académique.

4.2 Formulation du problème

Nous considérons la classe de systèmes dynamiques MIMO dont la représentation d'état est donnée par :

$$\begin{cases} \dot{x} = F(u, x, \rho)x + \Psi(u, x, \rho)\rho + g(u, x, \rho) \\ y = C(u)x + \Psi^{(0)}(u)\rho = F_0(u)x^{(1)} + \Psi^{(0)}(u)\rho \end{cases} \quad (4.1)$$

avec

$$x = \begin{pmatrix} x^{(1)} \\ \vdots \\ x^{(k)} \\ \vdots \\ x^{(q)} \end{pmatrix}, \quad x^{(k)} \in \mathbb{R}^{n_k} \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^q n_k = n, \quad \rho = \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \vdots \\ \rho_j \\ \vdots \\ \rho_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m, \quad \rho_j \in \mathbb{R}. \quad (4.2)$$

La matrice F a la structure anti-décalage suivante :

$$F(u, x, \rho) = \begin{pmatrix} 0 & F_1(u, x, \rho) & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & F_{q-1}(u, x, \rho) \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.3)$$

$$C(u) = \begin{pmatrix} F_0(u) & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Psi(u, x, \rho) = \begin{pmatrix} \Psi^{(1)}(u, x, \rho) \\ \vdots \\ \Psi^{(k)}(u, x, \rho) \\ \vdots \\ \Psi^{(q)}(u, x, \rho) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad g(u, x, \rho) = \begin{pmatrix} g^{(1)}(u, x, \rho) \\ \vdots \\ g^{(k)}(u, x, \rho) \\ \vdots \\ g^{(q)}(u, x, \rho) \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

où $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^s$ et $y \in \mathbb{R}^p$ sont respectivement, l'état, l'entrée et la sortie du système, $\rho \in \mathbb{R}^m$ est un vecteur constant inconnu, $F_0(u)$ est une matrice non nulle de dimension $n_0 \times n_1$ avec $n_0 = n_1 = p$ et pour tout $k \in \{1, \dots, q\}$, $F_k(u, x, \rho)$ est une matrice non nulle de dimension $n_k \times n_{k+1}$, $\Psi^{(0)}$ est une fonction non linéaire dépendant de l'entrée avec $\Psi^{(0)}(u) = \begin{pmatrix} \Psi_1^{(0)}(u) & \dots & \Psi_m^{(0)}(u) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{p \times m}$, g et Ψ sont des fonctions non linéaires dépendant de l'état, des paramètres et de l'entrée avec $g^{(k)}(u, x, \rho) \in \mathbb{R}^{n_k}$ et $\Psi(u, x, \rho) \in \mathbb{R}^{n \times m}$. Chaque ligne de $\Psi^{(k)}(u, x, \rho) \in \mathbb{R}^{n_k \times m}$, $k \in \{1, \dots, q\}$, est constituée de m colonnes $\Psi_j^{(k)}(u, x, \rho) \in \mathbb{R}^{n_k}$, c'est-à-dire $\Psi^{(k)}(u, x, \rho) = \begin{pmatrix} \Psi_1^{(k)}(u) & \dots & \Psi_m^{(k)}(u) \end{pmatrix}$.

Les fonctions $F_k(u, x, \rho)$, $k \in \{1, \dots, q-1\}$, $\Psi^{(k)}(u, x, \rho)$ et $g^{(k)}(u, x, \rho)$ sont supposées posséder des structures triangulaires par rapport à x c'est-à-dire :

$$\begin{cases} F_k(u, x, \rho) &= F_k(u, x^{(1)}, \dots, x^{(k)}, \rho), \quad k \in \{1, \dots, q-1\}, \\ \Psi^{(k)}(u, x, \rho) &= \Psi^{(k)}(u, x^{(1)}, \dots, x^{(k)}, \rho), \quad k \in \{1, \dots, q\}, \\ g^{(k)}(u, x, \rho) &= g^{(k)}(u, x^{(1)}, \dots, x^{(k)}, \rho), \quad k \in \{1, \dots, q\}. \end{cases}$$

En outre, nous supposons que ces non-linéarités sont de classe C^1 par rapport à x et ρ .

Remarque 4.2.1 *Il est important de noter qu'aucune hypothèse n'est faite sur la valeur des dimensions n_k des composantes de l'état. Par exemple, les systèmes avec une dimension arbitraire n où l'état peut être partitionné comme dans (4.2) avec $q = 2$, $n_1 = p$ et $n_2 = n - p$ sont inclus dans (4.1). La structure de ces systèmes est assez générale car la dynamique de la sortie (et aussi de toutes les autres composantes de l'état) peut dépendre de tout l'état. Par conséquent, la structure triangulaire n'est pas aussi restrictive que dans le cas monosortie classique où tous les n_k sont égaux à 1.*

Comme indiqué dans l'introduction, nous traitons tout au long de ce chapitre le cas d'une paramétrisation mixte linéaire/non-linéaire qui sera détaillée juste après la définition des indices caractéristiques qui est donné ci-dessous.

Définition 4.2.1 *L'indice caractéristique ν_{ρ_j} associé au paramètre inconnu ρ_j , $j = 1, \dots, m$ est défini par*

$$\nu_{\rho_j} = \min \{k \in \{0, \dots, q\} \text{ tel que } \Psi_j^{(k)}(u, x, \rho) \neq 0\} \quad (4.5)$$

où, pour $k = 0$, $\Psi_j^{(k)}(u, x, \rho)$ ne dépend que de u .

Soit $1 \leq r \leq m$ le nombre d'indices caractéristiques différents qui sont renommés et ordonnés comme suit :

$$0 \leq \nu_1 < \nu_2 < \dots < \nu_r \leq q, \quad (4.6)$$

et soit

$$I_\nu = \{\nu_1, \dots, \nu_r\} \quad (4.7)$$

l'ensemble de ces indices.

Les éléments du vecteur de paramètres inconnus peuvent être réordonnés, si nécessaire, comme suit :

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho^{(\nu_1)} \\ \vdots \\ \rho^{(\nu_r)} \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

où $\rho^{(\nu_j)} = \begin{pmatrix} \rho_1^{(\nu_j)} \\ \vdots \\ \rho_{m_j}^{(\nu_j)} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m_j}$ avec $\sum_{j=1}^r m_j = m$; $\rho_l^{(\nu_j)} \in \mathbb{R}$, $\nu_{\rho_l^{(\nu_j)}} = \nu_j$ pour $j \in \{1, \dots, r\}$ et $l \in \{1, \dots, m_j\}$.

Afin d'éviter la redondance des variables, nous supposons que le vecteur des paramètres inconnus ρ est déjà réorganisé dans le système (4.1) comme dans (4.8). De plus, afin de rendre compte de la partition de ρ sous la forme (4.8), la matrice Ψ doit être partitionnée sous la forme de $q \times r$ entrées et chaque entrée, notée $\Psi_j^{(k)}$, est la sous-matrice $n_k \times m_j$ située à la k -ème ligne (bloc) et la j -ème colonne (bloc), $k \in \{1, \dots, q\}$ et $j \in \{1, \dots, r\}$. De même, la matrice $\Psi^{(0)}$ est partitionnée sous la forme de r colonnes (bloc) et la colonne (bloc) située à la colonne j est désignée par $\Psi_j^{(0)}$.

Dans le cas d'une paramétrisation linéaire classique aucune non-linéarité ne dépend du vecteur des paramètres inconnus ρ . Afin d'élargir la classe des systèmes non linéaires à paramétrisation linéaire, nous devons définir précisément la dépendance possible des non linéarités par rapport aux paramètres inconnus. Ces dépendances

sont définies par les propriétés structurales suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial F_k}{\partial \rho^{(\nu_j)}}(u, x, \rho) \equiv 0, \quad k \in \{1, \dots, q-1\}, \quad j \in \{1, \dots, r\}, \quad \text{si } k \leq \nu_j, \\ \frac{\partial \Psi^{(k)}}{\partial \rho^{(\nu_j)}}(u, x, \rho) \equiv 0, \quad k \in \{1, \dots, q\}, \quad j \in \{1, \dots, r\}, \quad \text{si } k \leq \nu_j, \\ \frac{\partial g^{(k)}}{\partial \rho^{(\nu_j)}}(u, x, \rho) \equiv 0, \quad k \in \{1, \dots, q\}, \quad j \in \{1, \dots, r\}, \quad \text{si } k \leq \nu_j. \end{array} \right. \quad (4.9)$$

Notons que, d'après la définition des indices caractéristiques, nous avons $\Psi_j^{(k)}(u, x, \rho) \equiv 0$ pour tout $k < \nu_j$. Par conséquent, s'il existe $k_0 > \nu_j$ tel que $\Psi_j^{(k_0)}(u, x, \rho) \neq 0$, il suffit de transférer $\Psi_j^{(k_0)}(u, x, \rho)\rho^j$ à $g_j^{(k_0)}(u, x, \rho)$ (c'est-à-dire en l'ajoutant). Donc, le nouveau $g_j^{(k_0)}(u, x, \rho)$ obtenu satisfait toujours l'équation (4.9) et le nouveau $\Psi_j^{(k_0)}(u, x, \rho)\rho^{(j)}$ obtenu devient nul. Par conséquent, nous supposons dans la suite que :

$$\Psi_j^{(k)}(u, x, \rho) \equiv 0 \text{ si } k \neq \nu_j, \quad k \in \{1, \dots, q\} \quad (4.10)$$

Pour résumer, la dépendance de F_k , $\Psi^{(k)}$ et $g^{(k)}$ par rapport à x et ρ peut être exprimée de la manière suivante, pour $\nu_{j-1} < k \leq \nu_j$ avec $j \geq 2$

$$\left\{ \begin{array}{l} F_k(u, x, \rho) = F_k(u, x^{(1)}, \dots, x^{(k)}, \rho^{(\nu_1)}, \dots, \rho^{(\nu_{j-1})}) \\ \Psi_{(j)}^{(\nu_j)}(u, x, \rho) = \Psi_{(j)}^{(k)}(u, x^{(1)}, \dots, x^{(k)}, \rho^{(\nu_1)}, \dots, \rho^{(\nu_{j-1})}) \text{ et } \Psi_{(j)}^{(k)} = 0 \text{ pour } k \neq \nu_j \\ g^{(k)}(u, x, \rho) = g^{(k)}(u, x^{(1)}, \dots, x^{(k)}, \rho^{(\nu_1)}, \dots, \rho^{(\nu_{j-1})}) \end{array} \right. \quad (4.11)$$

et pour $k \leq \nu_1$, les non-linéarités, F_k , $\Psi^{(k)}$ et $g^{(k)}$ ne dépendent que de u .

Notre objectif consiste à concevoir un observateur adaptatif pour fournir une estimation simultanée de l'état du système et des paramètres inconnus en utilisant une approche par modèle augmenté. Un modèle naturel pour faire face à ce problème de conception est obtenu en concaténant la dynamique des variables d'état du système et des paramètres inconnus conduisant ainsi aux équations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\bar{x}} = \bar{\mathcal{F}}(u, \bar{x})\bar{x} + \bar{\mathcal{G}}(u, \bar{x}) \\ y = \bar{\mathcal{C}}(u)\bar{x} \end{array} \right. \quad (4.12)$$

avec

$$\bar{\mathcal{F}}(u, \bar{x}) = \begin{pmatrix} F(u, x, \rho) & \Psi(u, x, \rho) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{\mathcal{G}}(u, \bar{x}) = \begin{pmatrix} g(u, x, \rho) \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\bar{\mathcal{C}}(u) = \begin{pmatrix} C(u) & \Psi^{(0)}(u) \end{pmatrix}, \quad (4.13)$$

où x est la concaténation des variables d'état du système avec le vecteur des paramètres inconnus, c'est-à-dire $\bar{x} = \begin{pmatrix} x \\ \rho \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+m}$. Il est cependant intéressant de noter que le modèle augmenté (4.12)-(4.13) n'est pas triangulaire par rapport à son état sous-jacent \bar{x} et n'est pas approprié pour la conception d'un observateur de type grand gain. Un effort supplémentaire doit être fait pour obtenir un modèle de conception d'observateur approprié, comme ce sera montré dans la section suivante.

4.3 Changement de coordonnées

Une forme plus adéquate du modèle augmenté (4.12)-(4.13) dans une perspective de conception d'observateur de type grand gain est donnée par le système dynamique suivant :

$$\begin{cases} \dot{z} = \mathcal{F}(u, z)z + \mathcal{G}(u, z) \\ y = \mathcal{C}(u)z = \mathcal{F}_0(u)z^{(1)} \end{cases} \quad (4.14)$$

avec

$$z = \begin{pmatrix} z^{(1)} \\ \vdots \\ z^{(q')} \end{pmatrix}, \quad z^{(k)} \in \mathbb{R}^{n'_k} \text{ et } \sum_{k=1}^{q'} n'_k = n' = n + m, \quad (4.15)$$

$$\mathcal{F}(u, z) = \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{F}_1(u, z) & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \mathcal{F}_{q'-1}(u, z) \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{C}(u) = \begin{pmatrix} \mathcal{F}_0(u) & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.16)$$

$$\mathcal{G}(u, z) = \begin{pmatrix} \mathcal{G}^{(1)}(u, z) \\ \vdots \\ \mathcal{G}^{(k)}(u, z) \\ \vdots \\ \mathcal{G}^{(q')} (u, z) \end{pmatrix}, \quad (4.17)$$

où les composantes de l'état $z^{(k)} \in \mathbb{R}^{n'_k}$ doivent être définies de telle sorte que les non-linéarités $\mathcal{F}(u, z)$ et $\mathcal{G}(u, z)$ soient triangulaires par rapport à z . Dans ce qui suit, ces composantes seront obtenues en réordonnant de manière appropriée l'état augmentée $\bar{x} \in \mathbb{R}^{n'}$.

Le nombre de sous composantes $z^{(k)}$ de l'état, c'est-à-dire q' , ainsi que leurs dimensions respectives, c'est-à-dire n'_k pour $k \in \{1, \dots, q'\}$, seront précisées ultérieurement. En particulier, la valeur de q' dépend de celle de ν_r , en effet $q' = q$ si $\nu_r < q$ et $q' = q + 1$ si $\nu_r = q$. Définissons maintenant les q premières composantes $z^{(k+1)}$ pour $k \in \{0, \dots, q-1\}$.

Si $k \in I_\nu$ où I_ν est défini par (4.7), c'est-à-dire qu'il existe $j \in \{1, \dots, r\}$ tel que $k = \nu_j$, alors

$$\left\{ \begin{array}{l} z^{(k+1)} \triangleq \begin{pmatrix} x^{(k+1)} \\ \rho^{(k)} \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} x^{(k+1)} \\ \rho^{(\nu_j)} \end{pmatrix} \\ \mathcal{F}_k(u, z) \triangleq \begin{pmatrix} F_k(u, x^{(1)}, \dots, x^{(k)}, \rho^{(1)}, \dots, \rho^{(\nu_{j-1})}) & \Psi_{(j)}^{(k)}(u, x^{(1)}, \dots, x^{(k)}, \rho^{(1)}, \dots, \rho^{(\nu_{j-1})}) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \triangleq \begin{pmatrix} F_k(u, x^{(1)}, \dots, x^{(k)}, \rho^{(1)}, \dots, \rho^{(\nu_{j-1})}) & \Psi_{(j)}^{(\nu_j)}(u, x^{(1)}, \dots, x^{(k)}, \rho^{(1)}, \dots, \rho^{(\nu_{j-1})}) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \right) \quad (4.18)$$

sinon

$$\left\{ \begin{array}{l} z^{(k+1)} = x^{(k+1)} \\ \mathcal{F}_k(u, z) = F_k(u, x^{(1)}, \dots, x^{(k)}, \rho^{(1)}, \dots, \rho^{(\nu_{j-1})}) \end{array} \right. \quad (4.19)$$

La composante $z^{(k+1)}$ est égale à $x^{(k+1)}$ si $\Psi_{(j)}^{(k)} \equiv 0$ ou de manière équivalente si $k \notin I_\nu$. Sinon, cette composante est constituée en concaténant $x^{(k+1)}$ et $\rho^{(\nu_j)}$ avec $\nu_j = k$.

Notons que la dépendance de F_k par rapport à x et ρ donnée par (4.18) et (4.19) résulte de la propriété structurelle (4.11). De plus, la structure triangulaire F_k par rapport à z résulte naturellement du fait que F_k ne dépend que de $x^{(1)}, \dots, x^{(k)}, \rho^{(\nu_1)}, \dots, \rho^{(\nu_{j-1})}$, c'est-à-dire de $z^{(1)}, \dots, z^{(k)}$ selon la définition des $z^{(k)}$.

Maintenant, pour $k = 1, \dots, q$, la composante $\mathcal{G}^{(k)}$ de la fonction non linéaire \mathcal{G} est naturellement définie comme suit : si $k - 1 \in I_\nu$, c'est-à-dire $z^{(k)} = \begin{pmatrix} x^{(k)} \\ \rho^{(k-1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^{(k)} \\ \rho^{(\nu_j)} \end{pmatrix}$, avec $\nu_j = k - 1$, alors

$$\mathcal{G}^{(k)}(u, z) = \begin{pmatrix} g^{(k)}(u, x^{(1)}, \dots, x^{(k)}, \rho^{(1)}, \dots, \rho^{(\nu_{j-1})}) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (4.20)$$

sinon, c'est-à-dire si $z^{(k)} = x^{(k)}$,

$$\mathcal{G}^{(k)}(u, z) = g^{(k)}(u, x^{(1)}, \dots, x^{(k)}, \rho^{(1)}, \dots, \rho^{(\nu_{j-1})}). \quad (4.21)$$

La structure triangulaire de \mathcal{G} par rapport à z est donc établie.

Rappelons que la dimension de $z^{(k)}$ est notée n'_k dans l'équation (4.15). Selon la définition de $z^{(k)}$ donné par (4.18) et (4.19), nous avons $n'_k = n_k + m_j$ s'il existe $j \in \{1, \dots, r\}$ tel que $\nu_j = k$, et $n'_k = n_k$ sinon.

À ce stade, nous avons défini les composantes $z^{(k)}$ pour $k = 1, \dots, q$. Ces composantes contiennent toutes les composantes $x^{(k)}$, $k \in \{1, \dots, q\}$ de l'état x , et également toutes les composantes $\rho^{(\nu_j)}$ avec $\nu_j \leq q - 1$. Cependant, s'il existe des paramètres inconnus avec un indice caractéristique égal à q c'est-à-dire $\nu_r = q$, il faut définir une composante supplémentaire $z^{(q+1)}$ avec les variables augmentées associées afin d'incorporer ces paramètres. Afin de compléter la définition des variables étendues, considérons le cas où $\nu_r = q$ et définissons $z^{(q+1)}$, \mathcal{F}_q et $\mathcal{G}^{(q+1)}$.

La composante $z^{(q')} \triangleq z^{(q+1)}$ et la non-linéarité $\mathcal{G}^{(q')} \triangleq \mathcal{G}^{(q+1)}$ sont naturellement définies comme suit :

$$z^{(q+1)} = \rho^{(\nu_r)} \text{ et } \mathcal{G}^{(q+1)} = 0 \quad (4.22)$$

Il reste à définir $\mathcal{F}_{q'-1}(u, x, \rho) \triangleq \mathcal{F}_q(u, x, \rho)$ et de présenter sa structure triangulaire par rapport à z . En effet, si $q - 1 = \nu_{r-1}$ c'est-à-dire $z^{(q)} = \begin{pmatrix} x^{(q)} \\ \rho^{(q-1)} \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} x^{(\nu_r)} \\ \rho^{(\nu_{r-1})} \end{pmatrix}$, alors

$$\mathcal{F}_q(u, z) = \begin{pmatrix} \Psi_{(r)}^{(q)}(u, x, \rho) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Psi_{(r)}^{(\nu_r)}(u, x^{(1)}, \dots, x^{(q)}, \rho^{(1)}, \dots, \rho^{(\nu_{r-1})}) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.23)$$

sinon, si $z^{(q)} = x^{(q)}$ nous avons

$$\mathcal{F}_q(u, z) = \Psi_r^{(\nu_r)}(u, x^{(1)}, \dots, x^{(q)}, \rho^{(1)}, \dots, \rho^{(\nu_{r-1})}) \quad (4.24)$$

De plus, la dépendance de $\Psi_r^{(\nu_r)}$ par rapport à x et ρ donnée par (4.23) et (4.24) résulte de la propriété structurelle (4.11), ce qui permet de conclure sur la structure triangulaire \mathcal{F}_q par rapport à z .

4.4 Synthèse de l'observateur étendu

Dans cette section, nous nous concentrons sur la classe de systèmes décrits par les équations (4.14)-(4.17) en vue de la synthèse d'un observateur. La seule propriété structurelle supposée tout au long de la synthèse de l'observateur est que les non-linéarités $\mathcal{F}_k(u, z)$ et $\mathcal{G}^{(k)}(u, z)$ sont triangulaires par rapport à z , sans tenir compte du fait que certains états sont des paramètres inconnus. Autrement dit, aucune hypothèse à l'exception de la forme triangulaire par rapport à l'état est effectuée sur la structure des non-linéarités $\mathcal{F}_k(u, z)$ et $\mathcal{G}^{(k)}(u, z)$.

Il convient de signaler que le système (4.14)-(4.16)-(4.17) a été considéré dans de nombreuses contributions portant sur la synthèse d'observateur d'état. En effet, dans le cas de systèmes mono sortie, affine en la commande, et lorsque tous les \mathcal{F}_k sont identiquement égaux à 1, le système (4.14)-(4.16)-(4.17) coïncide avec la forme canonique qui caractérise la classe des systèmes uniformément observables et de nombreux observateurs issus de différentes approches ont été conçus (voir par exemple [Gauthier et al., 1992; Ciccarella et al., 1993; Boizot et al., 2010; Zemouche and Boutayeb, 2013; Alessandri and Rossi, 2015; Astolfi and Marconi, 2015]). Dans

[Deza et al., 1993], les auteurs ont considéré une classe de systèmes similaire où les matrices \mathcal{F}_k sont réduites à des fonctions à valeurs réelles positives bornées et ont proposé un observateur de type grand gain avec un gain variant dans le temps issu de la résolution d'une EDO de Riccati. Pour les systèmes multi-sorties, et dans le cas où chaque matrice \mathcal{F}_k est de rang plein par rapport aux colonnes, le système (4.14)-(4.16)-(4.17) appartient à la classe de systèmes considérée dans [Hammouri and Farza, 2003] qui caractérise une sous-classe de systèmes uniformément observables pour lesquels les auteurs ont proposé un observateur de type grand gain dont le gain est issu d'une équation algébrique de Lyapunov. Notons que le fait que les \mathcal{F}_k soient de rang plein implique que $n'_k \geq n'_{k+1}$ pour $k \in \{0, \dots, q' - 1\}$. Dans [Besançon and Ticlea, 2007], une classe de systèmes similaires à la forme (4.14)-(4.16)-(4.17) a été considérée, mais les fonctions \mathcal{F}_k ne dépendent que des entrées et des sorties. Les auteurs ont donné des conditions suffisantes pour caractériser la classe des systèmes qui peuvent être immergés sous la forme considérée et un observateur de type grand gain dont le gain provient d'une EDO de Lyapunov a été construit. La classe de systèmes considérée dans [Besançon and Ticlea, 2007] a été revisitée dans [Dufour et al., 2012] où les auteurs ont proposé un observateur de type grand gain sous une condition d'excitation persistante relâchée.

Dans la suite, nous visons à concevoir un observateur de type grand gain pour le système (4.14)-(4.16)-(4.17) sans supposer aucune condition de rang sur les matrices \mathcal{F}_k . Des hypothèses appropriées sont considérées et, en particulier, l'accent est mis sur la condition d'excitation persistante vérifiée par l'entrée qui est de première importance pour garantir la convergence. En effet, nous supposons ce qui suit :

- H1** L'état $z(t)$ et l'entrée $u(t)$ du système (4.14)-(4.16)-(4.17) sont bornées, c'est-à-dire $z(t) \in X$ et $u(t) \in U$ où $X \subset \mathbb{R}^{n'}$ et $U \subset \mathbb{R}^s$ sont des ensembles compacts.
- H2** Les fonctions \mathcal{F} et \mathcal{G} sont Lipschitziennes par rapport à z uniformément par rapport à u où $(u, z) \in U \times X$. Les constantes de Lipschitz correspondantes seront notées, respectivement, $L_{\mathcal{F}}$ et $L_{\mathcal{G}}$, c'est-à-dire $\forall u \in U ; \forall z, \bar{z} \in X$; nous avons :

$$\|\mathcal{F}(u, z) - \mathcal{F}(u, \bar{z})\| \leq L_{\mathcal{F}}\|z - \bar{z}\| \text{ et } \|\mathcal{G}(u, z) - \mathcal{G}(u, \bar{z})\| \leq L_{\mathcal{G}}\|z - \bar{z}\| \quad (4.25)$$

Étant donné que l'état est confiné à l'ensemble borné X , nous supposons que des prolongements Lipschitziens des non-linéarités, ont été effectués et que les fonctions

\mathcal{F}_k et \mathcal{G} sont fournies à partir de ces prolongements. Ceci permet de supposer que, pour toute entrée bornée $u \in U$, les fonctions \mathcal{F}_k et \mathcal{G} sont globalement Lipschitziennes par rapport à z et sont bornées pour tout $z \in \mathbb{R}^{n'}$ (voir [Farza et al., 2009]). Nous désignons par z_M la borne supérieure de z , c'est-à-dire

$$z_M = \sup_{z \in X} \|z\| \quad (4.26)$$

Le système dynamique suivant est un observateur candidat approprié pour le système (4.14).

$$\dot{\hat{z}} = \mathcal{F}(u, \hat{z})\hat{z} + \varphi(u, \hat{z}) - \theta \Lambda_\theta^{-1} \mathcal{S}^{-1}(t) \mathcal{C}^T(u) (\mathcal{C}(u)\hat{z} - y) \quad (4.27)$$

où

$$\Lambda_\theta = \text{diag} \left(I_{n'_1} \quad \frac{1}{\theta} I_{n'_2} \quad \cdots \quad \frac{1}{\theta^{q'-1}} I_{n'_q} \right) \quad (4.28)$$

$$\dot{\mathcal{S}}(t) = -\theta (\mathcal{S}(t) + \mathcal{F}^T(u, \hat{z})\mathcal{S}(t) + \mathcal{S}(t)\mathcal{F}(u, \hat{z}) - \mathcal{C}^T(u)\mathcal{C}(u)) \text{ avec } \mathcal{S}(0) = \mathcal{S}^T(0) > 0 \quad (4.29)$$

où \hat{z} , u et y désignent respectivement l'estimation de l'état, l'entrée et la sortie du système (4.14)-(4.17) et $\theta > 0$ est un paramètre scalaire de conception. L'estimation de l'état est donnée par :

$$\hat{z} = \begin{pmatrix} \hat{z}^{(1)} \\ \vdots \\ \hat{z}^{(q')} \end{pmatrix} \text{ avec } \hat{z}^{(k)} \in \mathbb{R}^{n'_k} \text{ et } \sum_{k=1}^{q'} n'_k = n' = n + m \quad (4.30)$$

Une hypothèse supplémentaire qui est d'une importance primordiale est requise pour prouver la convergence de l'observateur. Elle caractérise les entrées qui permettent au système d'être suffisamment observable. Pour formuler cette hypothèse, nous allons d'abord introduire la matrice de transition d'état $\Phi_{u, \hat{z}}(t, s)$, soit système affine en l'état suivant :

$$\dot{\xi} = \mathcal{F}(u, \hat{z})\xi \quad (4.31)$$

où $\xi \in \mathbb{R}^{n'}$, et u et \hat{z} sont respectivement l'entrée du système (4.14)-(4.16)-(4.17) et l'état du système dynamique (4.27) ; la matrice \mathcal{F} est définie comme dans (4.16).

Rappelons que la matrice de transition $\Phi_{u,\hat{z}}(t, s)$ du système (4.31) est définie comme suit :

$$\begin{cases} d(\Phi_{u,\hat{z}}(t, s)) / dt &= F(u(t), \hat{z}(t))\Phi_{u,\hat{z}}(t, s) \\ \Phi_{u,\hat{z}}(s, s) &= I_n \end{cases} \quad (4.32)$$

Nous supposons maintenant que la condition supplémentaire suivante est vraie :

H3 l'entrée u est telle que, pour toute trajectoire \hat{z} du système (4.27) partant de $\hat{z}(0) \in X$, la condition d'excitation persistante suivante est satisfaite :

$$\begin{aligned} \exists T > 0 ; \exists \delta_0 > 0 ; \exists \theta^* > 0 ; \forall \theta \geq \theta^* ; \forall t \geq \frac{T}{\theta}, \text{ on a} \\ \int_{t-\frac{T}{\theta}}^t \Phi_{u,\hat{z}}^T(s, t) C^T(u(s)) C(u(s)) \Phi_{u,\hat{z}}(s, t) ds \geq \frac{\delta_0}{\theta \alpha(\theta)} \Lambda_\theta^2 \end{aligned} \quad (4.33)$$

où $\alpha(\theta)$ est une fonction positive satisfaisant

$$\forall \theta > 0, \alpha(\theta) \geq 1 \text{ et } \lim_{\theta \rightarrow \infty} \frac{\alpha(\theta)}{\theta^2} = 0 \quad (4.34)$$

Sous les hypothèses **H1** à **H2** et pour toute entrée bornée satisfaisant l'hypothèse **H3**, le système dynamique (4.27) est un observateur d'état pour le système (4.14)-(4.16)-(4.17) comme ça a été démontré dans le chapitre 2.

Notons que chaque composante de l'état augmenté $z^{(k)}$ est composée de certaines composantes de l'état originale x et du vecteur des paramètres inconnus ρ . Par conséquent, dans l'observateur (4.27), les EDO décrivant la dynamique des estimations de l'état original et des paramètres inconnus sont dispersées. Nous allons séparer les équations décrivant la dynamique des estimations de l'état initial de celles associées à l'estimation des paramètres inconnus. Cette séparation peut être réalisée en récupérant les estimations de l'état augmenté \bar{x} (donné par (4.12)), à partir des composantes de l'état z . Le système ainsi obtenu correspondra à la forme adaptative de l'observateur. Ce problème sera examiné dans la section suivante.

4.5 Forme adaptative de l'observateur

Avant d'obtenir la forme adaptative pour l'observateur, nous allons décrire les équations de l'observateur adaptatif (4.27)-(4.30) dans les coordonnées originales, où la

dynamique des variables d'état et des paramètres inconnus est naturellement décrite par le système augmenté (4.12)-(4.13). Deux caractéristiques méritent d'être mentionnées pour atteindre cette finalité. Tout d'abord, le système (4.12) avec l'état \bar{x} est équivalent au système (4.14) avec l'état z les deux décrivent le comportement dynamique des variables d'état et des paramètres inconnus. Ensuite, l'observateur (4.27) est une copie du système (4.14) avec un terme correctif qui est égal à $\theta \Lambda_\theta^{-1} \mathcal{S}^{-1} \mathcal{C}^T(u)(\mathcal{C}(u)\hat{z} - y)$. Puisque le système (4.14) a déjà été écrit en utilisant les coordonnées \bar{x} , c'est-à-dire correspondant au système (4.12), les équations de l'observateur (4.27) peuvent être exprimées dans les coordonnées \bar{x} , à condition que le terme correctif soit exprimé dans ces coordonnées.

D'après la définition de $\mathcal{F}(u, \hat{z})$ et $\bar{\mathcal{F}}(u, \bar{x})$, il est clair que la matrice $\bar{\mathcal{F}}$ peut être obtenue en effectuant des permutations de lignes et colonnes sur la matrice \mathcal{F} . De même, la matrice $\bar{\mathcal{C}}(u)$ peut être obtenus en effectuant les mêmes permutations des colonnes de $\mathcal{C}(u)$. Soit $\bar{\mathcal{S}}$ la matrice obtenue en considérant les mêmes permutations de lignes et de colonnes effectuées sur $\mathcal{F}(u, \hat{z})$ pour obtenir $\bar{\mathcal{F}}(u, \bar{x})$. La matrice $\bar{\mathcal{S}}$ est solution de l'EDO suivante :

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\mathcal{S}}}(t) &= -\theta (\bar{\mathcal{S}}(t) + \bar{\mathcal{F}}^T(u, \hat{z})\bar{\mathcal{S}}(t) + \bar{\mathcal{S}}(t)\bar{\mathcal{F}}(u, \hat{z}) - \bar{\mathcal{C}}^T(u)\bar{\mathcal{C}}(u)), & (4.35) \\ &\text{avec } \bar{\mathcal{S}}(0) = \bar{\mathcal{S}}^T(0) > 0. \end{aligned}$$

Il est clair que l'état augmenté \bar{x} peut être obtenu en effectuant des permutations de lignes sur z . Soit $\bar{\Lambda}_\theta$ la matrice résultant de la réalisation des permutations des mêmes lignes sur Λ_θ . Selon l'expression de Λ_θ donnée par (4.28), pour $k \in \{0, \dots, q' - 1\}$, la puissance de θ dans le $(k + 1)$ -ème élément (bloc) de la matrice diagonale Λ_θ est égal à k . D'après l'équation de l'observateur (4.27), cet élément intervient dans la dynamique de $\hat{z}^{(k+1)}$ qui contient une partie de l'état original x et des paramètres inconnus ρ , c'est-à-dire $x^{(k+1)}$ et $\rho^{(\nu_j)}$ avec $\nu_j = k$ (voir (4.18)). Par conséquent, lorsque le vecteur augmenté z est transformé en \bar{x} , la matrice Λ_θ est transformée en $\bar{\Lambda}_\theta$ et prend la forme suivante :

$$\bar{\Lambda}_\theta = \text{diag} \left(I_{n_1}, \frac{1}{\theta} I_{n_2}, \dots, \frac{1}{\theta^{q-1}} I_{n_q}, \frac{1}{\theta^{\nu_1}} I_{m_1}, \dots, \frac{1}{\theta^{\nu_r}} I_{m_r} \right) \quad (4.36)$$

Maintenant, l'observateur (4.27) peut être écrit dans les coordonnées \bar{x} comme suit :

$$\dot{\hat{x}} = \bar{\mathcal{F}}(u, \hat{x})\hat{\xi}(t) + \bar{\mathcal{G}}(u, \hat{x}) - \theta\bar{\Lambda}_\theta^{-1}\bar{\mathcal{S}}^{-1}(t)\bar{\mathcal{C}}^T(u) (\bar{\mathcal{C}}(u)\hat{x} - y) \quad (4.37)$$

où $\hat{x} = \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{\rho} \end{pmatrix}$, $\bar{\mathcal{F}}(u, \hat{x})$, $\bar{\mathcal{G}}(u, \hat{x})$ et $\bar{\mathcal{C}}(u)$ sont donnés par (4.13), $\bar{\Lambda}_\theta$ est donné par (4.36) et $\bar{\mathcal{S}}$ est une matrice SDP régie par l'EDO (4.35).

Maintenant, en remplaçant \hat{x} , $\mathcal{F}(u, \hat{x})$, $\mathcal{G}(u, \hat{x})$ et $\bar{\mathcal{C}}(u)$ par leurs expressions respectives données par (4.13), nous obtenons :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{\hat{x}} \\ \dot{\hat{\rho}} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} F(u, \hat{x}, \hat{\rho}) & \Psi(u, \hat{x}, \hat{\rho}) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{\rho} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g(u, \hat{x}, \hat{\rho}) \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\quad - \theta\bar{\Lambda}_\theta^{-1}\bar{\mathcal{S}}^{-1}(t)\bar{\mathcal{C}}^T \left(C(u)\hat{x} - \Psi^{(0)}(u)\hat{\rho} - y \right) \end{aligned} \quad (4.38)$$

La structure simple de l'observateur (4.38) doit être soulignée. Cet observateur est constitué de deux parties : la première est une copie du modèle (4.12) tandis que la seconde partie est un terme correctif impliquant un gain qui provient de la résolution de l'EDO (4.35). De plus, il apparaît clairement que l'observateur (4.38) est un observateur adaptatif fournissant une estimation conjointe de l'état x et du vecteur de paramètres inconnus ρ .

Nous allons montrer que l'observateur (4.38) peut être écrit sous une forme adaptative incluant les observateurs adaptatifs proposés dans [Zhang, 2002; Besançon et al., 2006; Zhang and Besançon, 2008; Farza et al., 2014] pour les classes de systèmes pouvant se mettre sous la forme (4.1). À cette fin, considérons la matrice SDP $\bar{\mathcal{S}}$ gouvernée par (4.35) et partitionnée comme

$$\bar{\mathcal{S}}(t) = \begin{pmatrix} S_1(t) & S_2(t) \\ S_2^T(t) & S_3(t) \end{pmatrix} \quad (4.39)$$

où S_1 et S_2 sont des matrices symétriques de dimensions $n \times n$ et $m \times m$, respectivement, et S_3 est une matrice rectangulaire de dimension $n \times m$. Dans la suite, pour la commodité d'écriture et tant qu'il n'y a pas d'ambiguïté, nous allons omettre la variable t des matrices variables dans le temps.

Puisque la matrice $\bar{\mathcal{S}}$ est SDP, alors S_1 et S_3 le sont aussi. Soit

$$X = S_3 - S_2^T S_1^{-1} S_2 \quad (4.40)$$

le complément de Schur de S_1 dans $\bar{\mathcal{S}}$ et considérons la décomposition suivante de $\bar{\mathcal{S}}$:

$$\bar{\mathcal{S}} = \begin{pmatrix} S_1 & S_2 \\ S_2^T & S_3 \end{pmatrix} \quad (4.41)$$

$$= \begin{pmatrix} I_n & S_1^{-1} S_2 \\ 0 & I_m \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & S_3 - S_2^T S_1^{-1} S_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & S_1^{-1} S_2 \\ 0 & I_m \end{pmatrix} \quad (4.42)$$

$$\triangleq \begin{pmatrix} I_n & -\Upsilon \\ 0 & I_m \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & X \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & -\Upsilon \\ 0 & I_m \end{pmatrix} \quad (4.43)$$

où

$$\Upsilon \triangleq -S_1^{-1} S_2 \quad (4.44)$$

Puisque $\bar{\mathcal{S}}$ est SDP, il en est de même pour S_1 et son complément de Schur X dans $\bar{\mathcal{S}}$. A partir de l'équation (4.43), nous pouvons facilement calculer l'inverse de $\bar{\mathcal{S}}$ qui peut être exprimée comme suit :

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{S}}^{-1} &= \begin{pmatrix} I_n & -\Upsilon \\ 0 & I_m \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & X \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} I_n & -\Upsilon \\ 0 & I_m \end{pmatrix}^{-T} \\ &= \begin{pmatrix} I_n & \Upsilon \\ 0 & I_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_1^{-1} & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ \Upsilon^T & I_m \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} S_1^{-1} + \Upsilon P \Upsilon^T & \Upsilon P \\ P \Upsilon^T & P \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.45)$$

où

$$P \triangleq X^{-1} \quad (4.46)$$

Le terme correctif dans l'observateur adaptatif (4.38) sera exprimé à l'aide de la matrice $\bar{\mathcal{S}}$. Dans la forme adaptative qui sera donnée plus tard, le terme de correction doit être exprimé à l'aide des matrices S_1 , Υ et P données, respectivement, par (4.39), (4.44) et (4.46). À cette fin, nous devons exprimer les EDO régissant ces matrices. Elles sont fournies par le lemme suivant

Lemme 4.5.1 Soient S_1 , Υ et P les matrices données, respectivement, par (4.39), (4.44) et (4.46). Alors, nous avons :

$$\begin{cases} \dot{S}_1 &= -\theta (S_1 + F^T(u, \hat{x}, \hat{\rho})S_1 + S_1F(u, \hat{x}, \hat{\rho}) - C^T(u)C(u)) \\ \dot{\Upsilon} &= \theta ((F(u, \hat{x}, \hat{\rho}) - S_1^{-1}C^T(u)C(u)) \Upsilon + \Psi(u, \hat{x}, \hat{\rho}) - S_1^{-1}C^T(u)\Psi^{(0)}(u)) \\ \dot{P} &= \theta (P - PM^T M P) \\ M &= C(u)\Upsilon + \Psi^{(0)}(u) \end{cases} \quad (4.47)$$

où $F(u, \hat{x}, \hat{\rho})$ et $C(u)$ sont données par (4.3) et $\Psi^{(0)}$ est donnée par (4.1).

Preuve (du Lemme 4.5.1) Commençons par décrire les EDO vérifiées par S_1 , S_2 et S_3 . En effet, à partir de (4.35), nous obtenons :

$$\dot{S}_1 = -\theta (S_1 + F^T S_1 + S_1 F - C^T C) \quad (4.48)$$

$$\dot{S}_2 = -\theta (S_2 + F^T S_2 + S_1 \Psi - C^T \Psi^{(0)}) \quad (4.49)$$

$$\dot{S}_3 = -\theta (S_3 + \Psi^T S_2 + S_2^T \Psi - \Psi^{(0)T} \Psi^{(0)}) \quad (4.50)$$

Déduisons maintenant l'EDO qui régit Υ . A partir de (4.44), nous obtenons :

$$\dot{\Upsilon} = -\frac{d}{dt} (S_1^{-1}) S_2 - S_1^{-1} \dot{S}_2 \quad (4.51)$$

Selon l'équation (4.48), on obtient :

$$\frac{d}{dt} (S_1^{-1}) = -S_1^{-1} \dot{S}_1 S_1^{-1} = \theta (S_1^{-1} + S_1^{-1} F^T + F S_1^{-1} - S_1^{-1} C^T C S_1^{-1}) \quad (4.52)$$

En utilisant les équations (4.52) et (4.49), l'équation (4.51) devient :

$$\begin{aligned} \dot{\Upsilon} &= -\theta (S_1^{-1} + S_1^{-1} F^T + F S_1^{-1} - S_1^{-1} C^T C S_1^{-1}) S_2 \\ &\quad + \theta S_1^{-1} (S_2 + F^T S_2 + S_1 \Psi - C^T \Psi^{(0)}) \\ &= -\theta (F S_1^{-1} - S_1^{-1} C^T C S_1^{-1}) S_2 + \theta S_1^{-1} (S_1 \Psi - C^T \Psi^{(0)}) \\ &= -\theta (F - S_1^{-1} C^T C) (S_1^{-1} S_2) + \theta (\Psi - S_1^{-1} C^T \Psi^{(0)}) \\ &= \theta ((F - S_1^{-1} C^T C) \Upsilon + \Psi - S_1^{-1} C^T \Psi^{(0)}) \end{aligned} \quad (4.53)$$

Donnons maintenant la première dérivée de P . En effet, à partir de (4.46), nous obtenons :

$$\dot{P} = -P \dot{X} P. \quad (4.54)$$

Et, à partir de l'équation (4.40), nous avons :

$$\dot{X} = \dot{S}_3 - \dot{S}_2^T S_1^{-1} S_2 - S_2^T \left(\frac{d}{dt} (S_1^{-1}) \right) S_2 - S_2^T S_1^{-1} \dot{S}_2. \quad (4.55)$$

De même, à partir de l'équation (4.52), nous obtenons :

$$\begin{aligned} S_2^T \left(\frac{d}{dt} (S_1^{-1}) \right) S_2 &= \theta (S_2^T S_1^{-1} S_2 + S_2^T S_1^{-1} F^T S_2 + S_2^T F S_1^{-1} S_2 \\ &\quad - S_2^T S_1^{-1} C^T C S_1^{-1} S_2). \end{aligned} \quad (4.56)$$

Maintenant, à partir de l'équation (4.49), nous obtenons :

$$S_2^T S_1^{-1} \dot{S}_2 = -\theta \left(S_2^T S_1^{-1} S_2 + S_2^T S_1^{-1} F^T S_2 + S_2^T \Psi - S_2^T S_1^{-1} C^T \Psi^{(0)} \right), \quad (4.57)$$

et

$$\dot{S}_2^T S_1^{-1} S_2 = -\theta (S_2^T S_1^{-1} S_2 + S_2^T F S_1^{-1} S_2 + \Psi^T S_2 - \Psi^{0T} C S_1^{-1} S_2). \quad (4.58)$$

En combinant (4.55), (4.52), (4.56), (4.57) et (4.58), nous obtenons :

$$\begin{aligned} \dot{X} &= \dot{S}_3 + \theta \left(S_2^T S_1^{-1} S_2 + S_2^T S_1^{-1} C^T C S_1^{-1} S_2 - S_2^T S_1^{-1} C^T \Psi^{(0)} - \Psi^{0T} C S_1^{-1} S_2 \right. \\ &\quad \left. + S_2^T \Psi + \Psi^T S_2 \right). \end{aligned} \quad (4.59)$$

En remplaçant \dot{S}_3 , dans (4.59), par son expression donnée par (4.50), nous obtenons :

$$\begin{aligned} \dot{X} &= -\theta \left(S_3 - S_2^T S_1^{-1} S_2 - S_2^T S_1^{-1} C^T C S_1^{-1} S_2 + S_2^T S_1^{-1} C^T \Psi^{(0)} + \Psi^{0T} C S_1^{-1} S_2 - \Psi^{0T} \Psi^0 \right) \\ &= -\theta \left(X - S_2^T S_1^{-1} C^T C S_1^{-1} S_2 + S_2^T S_1^{-1} C^T \Psi^{(0)} + \Psi^{0T} C S_1^{-1} S_2 - \Psi^{0T} \Psi^0 \right) \\ &= -\theta \left(X - (C S_1^{-1} S_2 - \Psi^{(0)})^T (C S_1^{-1} S_2 - \Psi^{(0)}) \right) \\ &= -\theta \left(X - (C \Upsilon + \Psi^{(0)})^T (C \Upsilon + \Psi^{(0)}) \right) \end{aligned} \quad (4.60)$$

Enfin, d'après l'équation (4.54), l'EDO régissant P peut s'écrire comme suit :

$$\dot{P} = \theta \left(P - P (C \Upsilon + \Psi^{(0)})^T (C \Upsilon + \Psi^{(0)}) P \right) \quad (4.61)$$

Ceci termine la démonstration du lemme 4.5.1.

Avant d'exprimer le terme correctif en utilisant S_1 , Υ et P , nous pouvons remarquer que la matrice diagonale $\bar{\Lambda}_\theta$ donnée par (4.36) peut s'exprimer de la manière suivante :

$$\bar{\Lambda}_\theta = \text{diag}(\Delta_\theta, \Omega_\theta)$$

où Δ_θ et Ω_θ sont des matrices diagonales $n \times n$ et $m \times m$ données par :

$$\begin{cases} \Delta_\theta = \text{diag} \left(I_{n_1}, \frac{1}{\theta} I_{n_2}, \dots, \frac{1}{\theta^{q-1}} I_{n_q} \right) \\ \Omega_\theta = \text{diag} \left(\frac{1}{\theta^{\nu_1}} I_{m_1}, \dots, \frac{1}{\theta^{\nu_r}} I_{m_r} \right) \end{cases} \quad (4.62)$$

Maintenant, à partir de (4.45) et (4.62), nous obtenons :

$$\begin{aligned} -\theta \bar{\Lambda}_\theta^{-1} \bar{\mathcal{S}} \bar{\mathcal{C}}^T(u) &= -\theta \begin{pmatrix} \Delta_\theta^{-1} & 0 \\ 0 & \Omega_\theta^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_1^{-1} + \Upsilon P \Upsilon^T & \Upsilon P \\ P \Upsilon^T & P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C^T(u) \\ \Psi^{oT}(u) \end{pmatrix} \\ &= -\theta \begin{pmatrix} \Delta_\theta^{-1} & 0 \\ 0 & \Omega_\theta^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_1^{-1} C^T(u) + \Upsilon P (C(u) \Upsilon + \Psi^{(0)}(u))^T \\ P (C(u) \Upsilon + \Psi^{(0)}(u))^T \end{pmatrix} \\ &= -\theta \begin{pmatrix} \Delta_\theta^{-1} (S_1^{-1} C^T(u) + \Upsilon P M^T) \\ \Omega_\theta^{-1} P M^T \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.63)$$

La substitution de $\theta \bar{\Lambda}_\theta^{-1} \bar{\mathcal{S}}^{-1} \bar{\mathcal{C}}^T(u)$ par son expression (4.63) dans les équations de l'observateur adaptatif (4.38) permet de déduire la forme adaptative suivante de l'observateur :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = F(u, \hat{x}, \hat{\rho}) \hat{x} + g(u, \hat{x}, \hat{\rho}) + \Psi(u, \hat{x}, \hat{\rho}) \hat{\rho} - \theta \Delta_\theta^{-1} (S_1^{-1} C^T(u) + \Upsilon P M^T) (\hat{y} - y) \\ \dot{\hat{\rho}} = -\theta \Omega_\theta^{-1} P M^T (\hat{y} - y) \\ \hat{y} = C(u) \hat{x} + \Psi^{(0)}(u) \hat{\rho} \end{cases} \quad (4.64)$$

où S_1 , Υ , P et M sont donnés par (4.47).

Comme indiqué précédemment, l'observateur (4.47)-(4.62)-(4.64) comprend les observateurs adaptatifs proposés dans [Zhang, 2002; Besançon et al., 2006; Zhang and Besançon, 2008; Farza et al., 2014] qui ont été proposés pour des classes de systèmes incluses dans celle considérée dans ce chapitre, c'est-à-dire les systèmes pouvant se mettre sous la forme (4.1).

4.6 Exemple

Considérons le système dynamique suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 x_1 x_2 + u_2 x_1^2 x_3 + x_1 u_3 \rho_2 - \rho_1 \sin^3(x_1) \\ x_3 - u_4 \sin(\rho_1 x_2) \rho_3 + u_5 \cos(\rho_2 x_3) \rho_4 - \rho_1^2 \rho_2 x_1 - x_2^3 \\ -\rho_1 x_3 - \rho_2 x_1 x_2 \end{pmatrix} \\ y = x_1 + u_0 \rho_1 \end{array} \right. \quad (4.65)$$

où x_i $i = 1, \dots, 3$ sont les variables d'état, ρ_j , $j = 1, \dots, 4$ sont des paramètres constants inconnus et u_l , $l = 1, \dots, 5$ sont les entrées du système. L'objectif est de concevoir un observateur pour l'estimation en ligne des variables d'état et des paramètres inconnus à partir de la sortie disponible y . Cela peut être réalisé en utilisant l'observateur proposé dans ce chapitre. En effet, le système (4.65) est sous forme (4.1) avec

$$x = \begin{pmatrix} x^{(1)} \\ x^{(2)} \end{pmatrix}; \quad x^{(1)} = x_1; \quad x^{(2)} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; \quad \rho = \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \rho_3 \\ \rho_4 \end{pmatrix};$$

et

$$F_0(u) = 1 \quad F_1(u, x^{(1)}) = \begin{pmatrix} u_1 x_1 & u_2 x_1^2 \end{pmatrix} \quad \Psi^{(0)}(u) = \begin{pmatrix} u_0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Notons que, dans cet exemple, nous avons $n_1 = 1 < n_2 = 2$.

Déterminons maintenant les indices caractéristiques des paramètres inconnus. D'après (4.65), nous avons $\nu_{\rho_1} = 0$, $\nu_{\rho_2} = 1$ et $\nu_{\rho_3} = \nu_{\rho_4} = 2$ et la matrice Ψ est décrite comme suit :

$$\Psi(u, x, \rho) = \begin{pmatrix} 0 & x_1 u_3 & \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \\ 0 & 0 & \begin{pmatrix} -u_4 \sin(\rho_1 x_2) & u_5 \cos(\rho_2 x_3) \end{pmatrix} \\ 0 & 0 & \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Un observateur de la forme (4.47)-(4.62)-(4.64) a été conçu pour estimer les variables d'état x ainsi que les paramètres ρ en utilisant les expressions suivantes pour les entrées :

$$\begin{aligned} u_0(t) &= \cos(17\pi t), & u_1(t) &= \sin(17\pi t), & u_2(t) &= \cos(11\pi t), \\ u_3(t) &= \sin(11\pi t), & u_4(t) &= \cos(2\pi t), & u_5(t) &= \sin(2\pi t), \end{aligned}$$

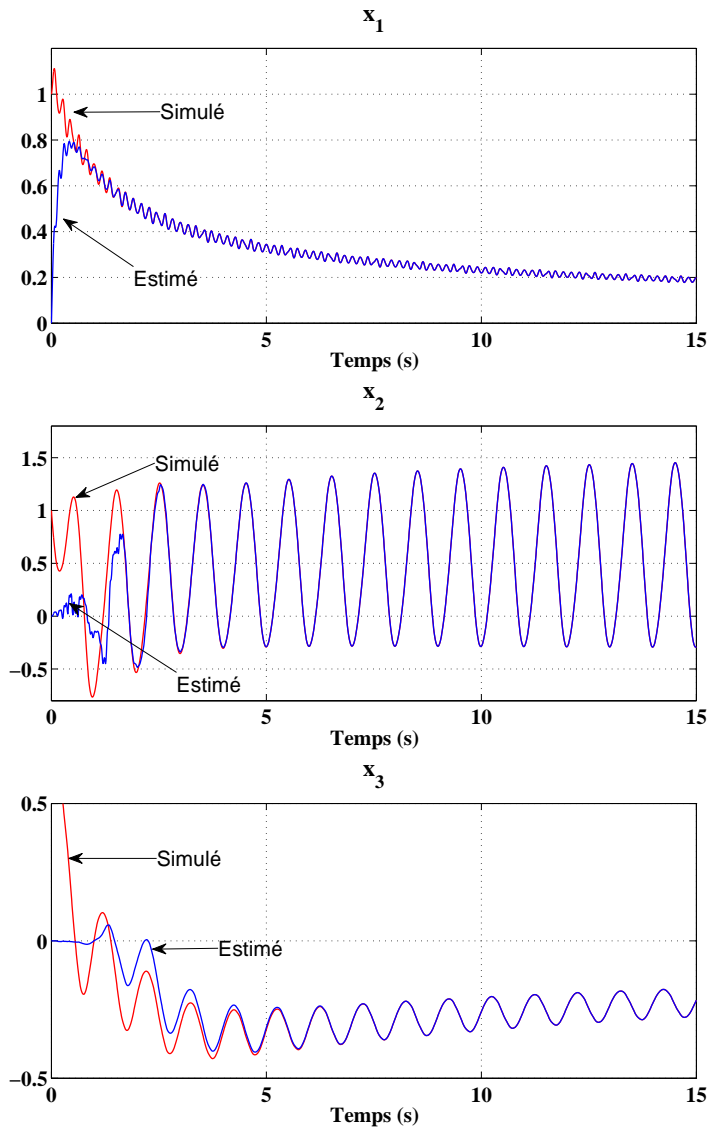
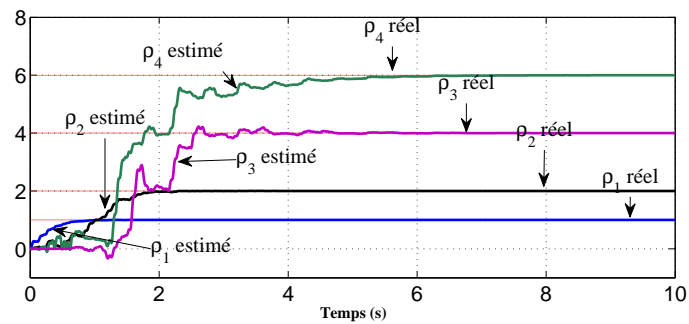
Notons que les matrices Δ_θ et Ω_θ définies par (4.62) sont données par :

$$\Delta_\theta = \text{diag} \left(1, \frac{1}{\theta} I_2 \right), \quad \Omega_\theta = \text{diag} \left(1, \frac{1}{\theta}, \frac{1}{\theta^2} I_2 \right)$$

La simulation du système (4.65) et de l'observateur adaptatif associé a été effectuée en mettant à 1 toutes les valeurs initiales des états du système et à zéro toutes les estimations initiales de l'état et des paramètres inconnus. Les valeurs réelles des quatre paramètres inconnus ρ_1, ρ_2, ρ_3 et ρ_4 sont, respectivement 1, 2, 4, et 6. Enfin, la valeur du paramètre de conception de l'observateur θ a été fixée à 5. La figure 4.1 montre les estimations des états \hat{x}_1, \hat{x}_2 et \hat{x}_3 ainsi que leurs évolutions temporelles issues de la simulation du système. Les estimations des quatre paramètres inconnus fournies par l'observateur sont données sur la figure 4.2. Les estimations précises fournies par l'observateur des états du système ainsi que des paramètres inconnus confirment les résultats théoriques détaillés dans ce chapitre ci-dessus.

4.7 Conclusion

La motivation de ce chapitre était double. Premièrement, nous avons abordé le problème de la synthèse d'un observateur adaptatif de type grand gain pour des systèmes triangulaires NUO impliquant des paramètres inconnus en utilisant une approche par modèle augmenté. Un observateur adaptatif a été proposé et sa convergence est garantie sous une condition d'excitation persistante appropriée aux exigences habituelles de la conception d'observateurs de type grand gain. La principale caractéristique de conception consiste à réordonner correctement les variables d'état d'origine et les paramètres inconnus en tenant compte de la structure triangulaire requise pour la conception d'un observateur de type grand gain. Une telle caractéristique de conception a permis de relâcher la structure de paramétrisation grâce aux indices caractéristiques des paramètres permettant ainsi aux paramètres inconnus d'apparaître dans les non-linéarités du système. Deuxièmement, nous avons montré que les équations de l'observateur proposé pouvaient être réécrites sous une forme adaptative qui inclut de nombreux observateurs déjà proposés pour des systèmes compris dans la classe de systèmes NUO considérée.

Figure 4.1: Estimations des états x_1 , x_2 et x_3 Figure 4.2: Estimation des paramètres inconnus ρ_1 , ρ_2 , ρ_3 et ρ_4

Des résultats de simulation ont été donnés pour mettre en évidence les performances de l'observateur proposé tout en mettant l'accent sur les principales étapes de la conception.

Chapitre 5

Conclusions et perspectives

Ce travail de thèse a porté sur la synthèse d'observateurs pour certaines classes de systèmes MIMO non linéaires non uniformément observables.

Dans un premier temps, nous avons proposé un observateur de type grand gain pour une large classe de systèmes MIMO non uniformément observables, qui peuvent contenir des incertitudes. Le gain de l'observateur est issu de la résolution d'une EDO de Lyapunov et peut être réglé par le choix d'un seul paramètre scalaire de conception. Sous une hypothèse d'excitation persistante bien définie, nous avons montré qu'en l'absence d'incertitude, l'erreur d'observation liée à l'observateur proposé converge exponentiellement vers zéro. En présence d'incertitudes, cette erreur est bornée et la borne ultime sous-jacente peut être rendue aussi petite que désirée en prenant une valeur suffisamment élevée pour le paramètre de synthèse de l'observateur. Cependant, des valeurs très élevées pour ce paramètre rendent l'observateur plus sensible aux bruits de mesures. En conséquence le choix du paramètre de conception de l'observateur doit suivre un compromis entre un suivi satisfaisant des variations de l'état et un bon comportement par rapport aux bruits de mesures.

Dans un deuxième temps, nous nous sommes intéressés à la synthèse d'un observateur étendu de type grand gain pour une classe de systèmes non linéaires dont la structure des non-linéarités n'est pas triangulaire au sens habituel. Cette relaxation de modélisation a été réalisée grâce à l'introduction du concept d'indices caractéristiques. Un tel concept a été utilisé de manière appropriée pour étendre la structure

triangulaire à une structure plus large où la triangularité du système est considérée par rapport aux variables d'état réordonnées selon leur indice caractéristique. De plus, la classe des systèmes considérée est non uniformément observable au sens où les systèmes impliqués peuvent admettre des entrées qui les rendent inobservables. Une telle question a été contournée en considérant une classe adéquate d'entrées au moyen d'une condition d'excitation persistante bien définie, préservant ainsi l'observabilité du système. Un observateur étendu de type grand gain impliquant la résolution d'une EDO de Lyapunov approprié a été conçu. L'observateur étendu de type grand gain proposé peut être utilisé comme un observateur adaptatif permettant l'estimation conjointe de tous les états ainsi que des paramètres inconnus du système. Les principales propriétés de l'observateur proposé ont été illustrées en simulation sur un exemple académique. Aussi, un accent particulier a été mis sur la procédure de conception de l'observateur.

Finalement, nous avons abordé le problème de la conception d'un observateur adaptatif de type grand gain pour des systèmes triangulaires non uniformément observables impliquant des paramètres inconnus supposés constants. Dans le cadre d'une approche par modèle augmenté, en concaténant simplement le vecteur d'état x et le vecteur des paramètres ρ , un observateur étendu de type grand gain, déjà proposé, peut être utilisé sous une hypothèse d'excitation persistante requise pour sa convergence, afin d'estimer simultanément l'état et les paramètres inconnus du système. La principale caractéristique de cette conception consiste à réordonner correctement les variables d'état d'origine et les paramètres inconnus en tenant compte de la structure triangulaire requise pour la conception d'un observateur de type grand gain. Une telle caractéristique de conception a permis de relâcher la structure de paramétrisation grâce aux indices caractéristiques des paramètres, permettant ainsi aux paramètres inconnus d'apparaître dans les non-linéarités du système. Nous avons également montré que les équations de l'observateur proposé peuvent être réécrites sous une forme adaptative permettant ainsi de retrouver de nombreux observateurs adaptatifs déjà proposés pour des systèmes inclus dans la classe de systèmes NUO considérée. Des résultats de simulation ont été donnés pour mettre en évidence les performances de l'observateur proposé tout en mettant en exergue

les principales étapes de la conception.

Plusieurs perspectives sont envisageables puisque de nombreuses pistes restent encore à explorer ou à améliorer. Une validation expérimentale des observateurs proposés à travers l'estimation conjointe des variables d'états et de certains paramètres inconnus peut être envisagée pour un système en temps réel (par exemple : machine asynchrone, machine synchrone, etc.). Une difficulté essentielle dans la validation expérimentale consiste à générer des entrées permettant de satisfaire la condition d'excitation persistante. Comme autre perspective, nous pouvons envisager la détection et l'isolation de défauts de systèmes MIMO non linéaires, qui sera réalisée grâce à la génération de résidus obtenue en utilisant un banc d'observateurs.

Bibliographie

- Alessandri, A. and Rossi, A. (2015). Increasing-gain observers for nonlinear systems : Stability and design. *Automatica*, 57 :180–188.
- Astolfi, D. and Marconi, L. (2015). A high-gain nonlinear observer with limited gain power. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 60 :3059–3064.
- Bastin, G. and Gevers, M. (1988). Stable adaptive observers for nonlinear time-varying systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 33 :650–658.
- Besançon, G. (1999). Further results on high gain observers for nonlinear systems. In *Proc. 38th IEEE Conference on Decision and Control*, Phoenix, Arizona.
- Besançon, G. and Hammouri, H. (1998). On observer design for interconnected systems. *J. Math. Syst. Estim. Control*, 8 :1–25.
- Besançon, G., Morales, J. D. L., and Huerta-Guevara, O. (2006). On adaptive observers for state affine systems. *International Journal of Control*, 79 :581–591.
- Besançon, G. and Ticlea, A. (2007). An immersion-based observer design for rank-observable nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 52 :83–88.
- Besançon, G., Zhang, Q., and Hammouri, H. (2004). High-gain observer based state and parameter estimation in nonlinear systems. In *IFAC Symposium on Nonlinear Control Systems (NOLCOS)*, Stuttgart, Germany.
- Boizot, N., Busvelle, E., and Gauthier, J. (2010). An adaptive high-gain observer for nonlinear systems. *Automatica*, 46 :1483–1488.
- Bouraoui, I., Farza, M., Ménard, T., Abdennour, R. B., and M’Saad, M. (2014). On adaptive observers design for a class of uniformly observable systems. In *Proc. of the 15th IEEE Int. conf. on Sc. and Techniques of Automatic control & computer engineering (STA’14)*, Hammamet, Tunisia.

- Boutat, D., Bengali, A., Hammouri, H., and Busawon, K. (2009). New algorithm for observer error linearization with a diffeomorphism on the outputs. *Automatica*, 45 :2187–2193.
- Cho, Y. M. and Rajamani, R. (1997). A systematic approach to adaptive observer synthesis for nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 42 :534–537.
- Ciccarella, G., Mora, M. D., and Germani, A. (1993). A Luenberger-like observer for nonlinear systems. *Syst. Control Lett.*, 47 :537–556.
- Deza, F., Bossanne, D., Busvelle, E., Gauthier, J., and Rakotopora, D. (1993). Exponential observers for nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 38 :482–484.
- Dufour, P., Flila, S., and Hammouri, H. (2012). Observer design for MIMO non-uniformly observable systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 57 :511–516.
- Efimov, D. and Raïssi, T. (2016). Design of interval observers for uncertain dynamical systems. *Automation and Remote Control*, 77(2) :191–225.
- Farza, M., Bouraoui, I., Ménard, T., Abdennour, R. B., and M'Saad, M. (2014). Adaptive observers for a class of uniformly observable systems with nonlinear parametrization and sampled outputs. *Automatica*, 50 :2951–2960.
- Farza, M., M'Saad, M., Maatoug, T., and Kamoun, M. (2009). Adaptive observers for nonlinearly parameterized class of nonlinear systems. *Automatica*, 45 :2292–2299.
- Farza, M., M'Saad, M., Triki, M., and Maatoug, T. (2011). High gain observer for a class of non-triangular systems. *Systems & Control Letters*, 60(1) :27–35.
- Fliess, M., Join, C., and Sira-Ramirez, H. (2008). Nonlinear estimation is easy. *Int. J. Model. Ident. Control*, 4 :12–27.
- Gauthier, J. and Bornard, G. (1979). Observability for any $u(t)$ of a class of nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1981 :922–926.
- Gauthier, J. and Hammouri, H. (1992). Global time-varying linearization up to output injection. *SIAM J. Control Optim.*, 30 :1295–1310.

- Gauthier, J., Hammouri, H., and Othman, S. (1992). A simple observer for nonlinear systems - application to bioreactors. *IEEE Trans. Auto. Control*, AC-37 :875–880.
- Gauthier, J. and Kupka, I. (2001). *Deterministic Observation Theory and Applications*. Cambridge University Press.
- Grip, H., Saberi, A., and Johansen, T. (2011). Estimation of states and parameters for linear systems with nonlinearly parameterized perturbations. *Systems & Control Letters*, 60 :771–777.
- Guay, M. (2002). Observer linearization by output-dependent time-scale transformations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 47 :1730–1735.
- Hammouri, H., Bornard, G., and Busawon, K. (2010). High gain observer for structured multi-output nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 55 :987–992.
- Hammouri, H. and Farza, M. (2003). Nonlinear observers for locally uniformly observable systems. *ESAIM : COCV*, 9 :353–370.
- Hernandez, O., Farza, M., Ménard, T., Targui, B., Msaad, M., and Astorga-Zaragoza, C. (2017). A cascade observer for a class of mimo non uniformly observable systems with delayed sampled outputs. *Systems and Control Letters*.
- Kalman, R. and Bucy, R. (1961). New results in linear filtering and prediction theory. *Journal of basic engineering*, 83(3) :95–108.
- Kojić, A. and Annaswamy, A. M. (2002). Adaptive control of nonlinearly parameterized systems with a triangular structure. *Automatica*, 38 :115–123.
- Kreisselmeier, G. (1977). Adaptive observers with exponential rate of convergence. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 22(1) :2–8.
- Krener, A. and Isidori, A. (1983). Linearization by output injection and nonlinear observers. *Systems & Control Letters*, 3 :47–52.
- Krener, A. and Respondek, W. (1985). Nonlinear observer with linearizable error dynamics. *SIAM J. Control Optim.*, 23 :197–216.
- Loh, A. P., Annaswamy, A. M., and Skantze, F. P. (1999). Adaptation in the presence of a general nonlinear parameterization : an error model approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 9 :1634–1652.

- Lüders, G. and Narendra, K. (1973). An adaptive observer and identifier for a linear system. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 18 :496–499.
- Luenberger, D. (1971). An introduction to observers. *IEEE Transactions on automatic control*, 16(6) :596–602.
- Marino, R. and Tomei, P. (1995). *Nonlinear control design : Geometric, adaptive and robust*. Prentice-Hall, Dordrecht.
- Mazenc, F., Niculescu, S., and Bernard, O. (2012). Exponentially stable interval observers for linear systems with delay. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 50(1) :286–305.
- Ménard, T., Moulay, E., and Perruquetti, W. (2010). A global finite-time observers for nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 55 :1500–1506.
- Moisan, M., Bernard, O., and Gouzé, J. (2009). Near optimal interval observers bundle for uncertain bioreactors. *Automatica*, 45(1) :291–295.
- Perabò, S. and Zhang, Q. (2009). Adaptive observers for linear stochastic time-variant systems with disturbances. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 23(6) :547 – 566.
- Rajamani, R. (1998). Observers for Lipschitz nonlinear systems. *IEEE Transactionson on Automatic Control*, 43 :397–401.
- Respondek, W., Pogromsky, A., and Nijmeijer, H. (2009). Time scaling for observer design with linearization error dynamics. *Automatica*, 45 :2187–2193.
- Santosuosso, G., Marino, R., and Tomei, P. (2001). Adaptive observers for nonlinear systems with bounded disturbances. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 46 :967–972.
- Shena, Y. and Xia, X. (2008). Semi-global finite-time observers for nonlinear systems. *Automatica*, 44 :3152–3156.
- Shim, H., Son, Y. I., and Seo, J. H. (2001). Semi-global observer for multi-output nonlinear systems. *Systems and Control Letters*, 42 :233–244.
- Skantze, F. P., Kojić, A., Loh, A. P., and Annaswamy, A. M. (2000). Adaptive estimation of discrete-time systems with nonlinear parameterization. *Automatica*, 36 :1879–1887.

- Tyukin, I., Steur, E., Nijmeijer, H., and van Leeuwen, C. (2013). Adaptive observers and parameter estimation for a class of systems nonlinear in the parameters. *Automatica*, 49 :2409–2423.
- Wang, X., Zhong, G.-Q., Tang, K.-S., Man, K., and Liu, Z.-F. (2002). Adaptive observers for MIMO linear time-varying systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 47 :525–529.
- Xia, X. and Gao, W. (1989). Nonlinear observer design by observer error linearization. *SIAM J. Control Optim.*, 27 :199–216.
- Yan, X.-G., Spurgeon, S., and Edwards, C. (2013). State and parameter estimation for nonlinear delay systems using sliding mode techniques. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 58 :1023–1029.
- Zemouche, A. and Boutayeb, M. (2013). On LMI conditions to design observers for Lipschitz nonlinear systems. *Automatica*, 64 :54–62.
- Zhang, Q. (2002). Adaptive observers for mimo linear time-varying systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 47 :525–529.
- Zhang, Q. and Besançon, G. (2008). An adaptive observer for sensor fault estimation in a class of uniformly observable non-linear systems. *Int. J. Modelling Identification and Control*, 4 :37–43.

Résumé

Les résultats présentés dans cette thèse s'articulent autour de la synthèse d'observateurs de type grand gain pour des classes de systèmes non linéaires multi-entrées, multi-sorties non uniformément observables. Dans un premier temps, la classe de systèmes considérés est telle que la dynamique des variables d'état est décrite par la somme de deux termes. Le premier correspond à une partie affine en l'état décrite par le produit d'une matrice, dont les entrées (fonctions non linéaires de l'état) ont une structure triangulaire, par le vecteur d'état. Le deuxième terme est composé par les non linéarités du système qui ont aussi une structure triangulaire. Le gain de l'observateur proposé est issu de la résolution d'une équation différentielle ordinaire de type Lyapunov. La convergence exponentielle de l'erreur d'observation sous-jacente est établie sous une certaine condition d'excitation persistante dépendant de l'entrée du système et de l'état de l'observateur. Dans un deuxième temps, la synthèse de cet observateur est étendue à une classe plus large de systèmes non linéaires où des états peuvent intervenir de manière non triangulaire. La notion d'indices caractéristiques associés à ces états est alors introduite et elle a permis de définir une structure triangulaire étendue pour laquelle la synthèse de l'observateur a aussi été effectuée. Enfin, il a été établi que les observateurs proposés peuvent être utilisés comme observateurs adaptatifs pour l'estimation simultanée de l'état et de certains paramètres et une forme adaptative de ces observateurs a été générée. Les performances des différents observateurs proposés ont été illustrées à travers plusieurs exemples en simulation tout au long de la thèse.

Mots-Clés: Systèmes non linéaires, Système non uniformément observables, Observateurs à grand gain, Indices caractéristiques, Excitation persistante, Observateurs adaptatifs.

Abstract

The results given in this thesis deal with the design of high gain observers for some classes on Multi Input Multi Output non uniformly observable nonlinear systems. In a first step, the class of considered systems is such that the dynamics of the state variables is the sum of two terms. The first term is affine in the state and is composed by the product of a matrix, whose entries are nonlinear functions of the state with a triangular structure, by the state vector. The second term describes the system nonlinearities which also assume a triangular structure. The gain of the proposed observer is issued from the resolution of a Lyapunov ordinary differential equation. The exponential convergence of the underlying observation error is established under a persistent excitation condition involving the system inputs and the state of the observer. In a second step, the observer design has been extended to a larger class of nonlinear systems where some state variables may intervene in a non triangular way. The notion of the characteristic indices associated to these state variables is then introduced and it allowed to define an extended triangular structure for which a high gain observer has been designed. Finally, it has been established that the proposed observers can be used as adaptive ones to jointly estimate the system state together with some unknown parameters and an adaptive form of these observers has been derived. The performance and main properties of the proposed observers have been illustrated in simulation by considering many examples throughout this thesis.

Keywords: Nonlinear systems, Non uniformly observable systems, High gain observers, Characteristic indices, Persistent excitation, Adaptive observers.