



HAL
open science

Action de groupe sur un complexe cubique $CAT(0)$ et revêtements ramifiés

Anne Giralt

► **To cite this version:**

Anne Giralt. Action de groupe sur un complexe cubique $CAT(0)$ et revêtements ramifiés. Mathématiques générales [math.GM]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2017. Français. NNT : 2017PA066088 . tel-01646938

HAL Id: tel-01646938

<https://theses.hal.science/tel-01646938>

Submitted on 24 Nov 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Université Pierre et Marie Curie



École doctorale de sciences mathématiques de Paris centre

THÈSE DE DOCTORAT

Discipline : Mathématiques

présentée par

Anne GIRALT

Action de groupe sur un complexe cubique $CAT(0)$ et revêtements ramifiés

dirigée par Nicolas BERGERON et Frédéric HAGLUND

Soutenue le 22 mai 2017 devant le jury composé de :

M. Nicolas BERGERON	Institut de mathématiques de Jussieu-PRG	directeur
M. Pierre-Émanuel CAPRACE	Université catholique de Louvain	rapporteur
M ^{me} Indira CHATTERJI	Université de Nice-Sophia Antipolis	examinatrice
M. Frédéric HAGLUND	Université d'Orsay	directeur
M. Peter HAISSINSKY	Université d'Aix-Marseille	rapporteur
M. Maxime WOLFF	Institut de mathématiques de Jussieu-PRG	examineur

Institut de mathématiques de Jussieu-
Paris Rive gauche. UMR 7586.
Boîte courrier 247
4 place Jussieu
75 252 Paris Cedex 05

Université Pierre et Marie Curie.
École doctorale de sciences
mathématiques de Paris centre.
Boîte courrier 290
4 place Jussieu
75 252 Paris Cedex 05

Remerciements

Je pense avoir appris énormément pendant ces quelques années de thèse. Et parmi toutes ces belles mathématiques, j'ai aussi appris sur la valeur humaine des gens qui me sont proches. Je crois qu'il est impossible de faire une thèse sans être entouré par de nombreuses personnes de grande qualité et je voudrai utiliser ces quelques lignes pour remercier chaleureusement toutes ces personnes.

Je voudrais tout d'abord adresser un grand merci à mes deux directeurs de thèse qui au-delà du travail d'encadrement ont également fait parti des personnes bienveillantes qui ont su m'entourer. Je voudrai remercier Nicolas pour son enthousiasme mathématique pour son soutien et pour son humour (certains pourraient me dire qu'il n'a besoin d'aucune forme d'encouragement). J'ai eu la chance d'assister à beaucoup de ses cours, de ma toute première année universitaire jusqu'à aujourd'hui je suis très reconnaissante pour toutes les mathématiques que j'ai apprises grâce à lui. Je voudrais remercier Frédéric pour sa patience, ses nombreux conseils (qui se sont avérés si précieux une fois suivit), sa grande disponibilité et sa gentillesse. Pendant ce fastidieux projet je n'ai pas eu l'occasion de me sentir vraiment seule et je sais que c'est beaucoup grâce à lui.

Je voudrai remercier Peter Haissinsky et Pierre-Emmanuel Caprace d'avoir accepté de rapporter ma thèse, et d'avoir suivi avec patience les détails, parfois même un peu techniques de ce manuscrit. Je tiens particulièrement à remercier Peter pour ses nombreuses corrections. Je tiens aussi à remercier les membres de mon jury Indira Chatterji pour sa bienveillance et Maxime Wolff que j'ai eu la chance d'avoir comme chargé de td, conseiller, collègue, ami et enfin membre de mon jury. Merci d'avoir été présent pendant toutes ces années.

Je voudrai remercier mes collègues doctorants qui ont pour certains d'entre eux on été bien plus des amis que de simples collègues. Il existe une dynamique très étrange au sein d'un laboratoire qui veut que les doctorants avec lesquels on finit sa thèse ne sont pas du tout ceux avec lesquels on a commencé. Ainsi je voudrai remercier ces personnes dont la présence m'a manqué durant la fin de ma thèse : Karam, Ines, Nicolas, Jean, Christophe,

Thomas, Samuel, Gabriel, Malick, Lie, Jinghzhi, Thibaut, Lucas. Un grand merci aux doctorants que j'ai toujours le plaisir de croiser dans les couloirs Xiaohua, Arthur, Alexander, Adrien, Amiel, Miguel, Ruben, Louis. Je tiens de même à remercier chaleureusement Andrés, Julie, Catherine et Éric avec qui j'ai pris beaucoup de plaisir à organiser le séminaire des thésard. Enfin je remercie Elisha, Gilles, Hélène, Gregory, Anonin et tous Henri-Paul de St-Gervais. Merci à la fondation des treilles pour leur accueil extraordinaire.

Pour tout les mondes imaginaires que j'ai arpenté pendant cette thèse je voudrai remercier mes nombreux mes maîtres du jeu. En particulier je remercie Adrien, Darien et Robin pour leurs talents d'orateurs et pour les formidables campagnes que j'ai vécu ces dernières années. Je voudrais de plus citer dans ces remerciements les joueurs enthousiastes qui ont partagés ces grands moments de narration avec moi : Adrien, Mathieu, Yann, Maxime, Lucile, Myriam, Marc, Amélie. En fait, j'aimerais adresser un remerciement général à toutes les personnes dont j'apprécie énormément la compagnie, les conversations et qui partagent ma passion du jeu : Philippe, Claire, Matthew, Claire, Arthur, Paul, Pauline, Valentin, Clément, Mika, François, Lucie, Thomas, Ana. Merci à Matagot et à toutes les équipes d'animations avec lesquelles j'ai passé des soirées absolument inoubliables : Hicham, Stefan, Amandine, Maxime, Florimont, Jennifer, Vanessa, Aurélien, Lydie, Mathias, Yann, Camille et bien d'autres. Je voudrai citer également Valérie pour sa générosité et pour ces nombreuses discussions que nous avons partagées. Je voudrais remercier Julia, qui à toujours été là pour moi.

Enfin, je consacre ce dernier paragraphe à ma famille, enfin toutes les personnes que je considère comme telles. En commençant par mes si nombreux parents qui m'ont accompagné et ont tous construit une part de la personne que je suis aujourd'hui : Maman, Papa, Marie-Jo, mes merveilleux parrains Jojo et Sieg, Peter et Heather. Je tiens aussi à citer mon oncle, Michel. Je remercie tout particulièrement ma sœur Hélène qui est une de mes meilleures amie, une confidente, et une des rares personne avec qui je peux parler de vraiment n'importe-quoi (et surtout de n'importe-quoi). Enfin, je tiens dédier cette thèse à mon père pour tout ce qu'il a fait pour moi.

Résumé

L'objet de cette thèse est l'étude de revêtements ramifiés $V' \rightarrow V$ de variétés hyperboliques compactes V cubiques, c'est-à-dire dont le groupe fondamental $\pi_1(V)$ opère proprement et cocompactement sur un complexe cubique $\text{CAT}(0)$. Notre première approche consiste à construire un complexe cubique localement $\text{CAT}(0)$ comme revêtement ramifié du complexe obtenu par cubulation de V . La difficulté est alors de vérifier que ce complexe a le même groupe fondamental que V' . On réalise ce programme dans le cas où V' est une « variété de Gromov-Thurston ». Notre seconde approche concerne plus généralement le cas où le lieu de ramification du revêtement $V' \rightarrow V$ est contenu dans une sous-variété convexe de codimension 1. La préimage de cette variété dans V' puis dans le revêtement universel X' de V' fournit un système naturel de « murs ». La difficulté consiste alors à montrer que ces murs séparent linéairement X' afin d'utiliser les théorèmes classiques de cubulation.

Mots-clés

complexes cubiques $\text{CAT}(0)$, revêtements ramifiés, variété de Gromov-Thurston.

Title

Abstract

The goal of this thesis is to study of branched covers $V' \rightarrow V$ of closed hyperbolic manifolds that can be cubulated, i.e. Whose fundamental group $\pi_1(V)$ acts properly and cocompactly on a CAT(0) cube complex. We give sufficient conditions for $\pi_1(V')$ to be cubic as well. We tackle this question in two different ways. In a first approach we build a negatively curved cubical complex as a ramified cover of a cubical complex obtained by cubulating V . Then the main issue is to check that the fundamental group of this complex is isomorphic to the fundamental group of V' . We manage to do so when V' is so called « Gromov-Thurston manifold ». Our second approach deals with the more general case where the branched locus of $V' \rightarrow V$ is contained in a codimension 1 convex submanifold. The preimage of this submanifold on V' and on the universal cover X' of V' provides a natural system of « walls ». Then the main issue is to show that these walls linearly separate X' . This enables us to use classical cubulation theorems.

Keywords

CAT(0) cube complex, ramified covering, Gromov-Thurston manifold.

Table des matières

Introduction	9
1 Cubulation d'espaces à murs	15
1.1 Complexes cubiques et espaces à murs	16
1.1.1 Complexes cubiques	16
1.1.2 Espaces à murs	18
1.1.3 Le complexe cubique dual à un espace à murs	19
1.1.4 Le complexe cubique dual à un espace à murs est CAT(0)	20
1.2 Cubulation de groupes	23
1.2.1 Cocompacité de l'action d'un groupe sur le complexe cubique dual	24
1.2.2 Propreté de l'action	28
2 Revêtements ramifiés	31
2.1 Revêtements ramifiés topologiques	31
2.1.1 Définitions	31
2.1.2 Revêtements ramifiés cycliques	37
2.2 Revêtements ramifiés de variétés hyperboliques	38
2.2.1 Construction de la métrique sur le revêtement ramifié	38
2.2.2 Premières propriétés de l'espace métrique X'	41
3 Cubulation des variétés de Gromov-Thurston	47
3.1 Introduction	47
3.2 Cubulation	50
3.2.1 Some definitions	50
3.2.2 Sageev's construction	50
3.2.3 A square complex in \mathbb{H}^n	51
3.2.4 Cubulation of Γ	52
3.2.5 Hyperplanes in cube complexes	53
3.3 Proof of Theorem 3.1.5	54
3.3.1 Construction	54
3.3.2 Fundamental groups	55

3.3.3	Ramified covering over a locally CAT(0) cube complex is locally CAT(0).	61
3.4	The cyclic ramified covering of a special cube complex is special.	62
3.5	Gromov-Thurston manifolds.	64
4	Cubulation dans le cas où le lieu singulier est contenu dans une sous-variété de codimension 1	67
4.1	Introduction	67
4.2	X' comme arbre d'espaces	73
4.3	Murs de X'	74
4.3.1	Construction de nouveaux murs	74
4.3.2	Propriétés des murs de X'	79
4.4	Cubulation	80
4.4.1	Un critère de séparation de géodésiques par morceaux	80
4.4.2	Séparation linéaire	92
4.4.3	Quasi-convexité des murs de \mathcal{H}'	97
4.4.4	Hsu-Wise	101
5	Exemples et généralisations	103
5.1	Exemples d'applications	103
5.1.1	Variétés arithmétiques de type simple	103
5.1.2	Autres exemples	106
5.2	Généralisations et questions	107
5.2.1	Une conséquence directe de la preuve du théorème 4.1.7	107
5.2.2	Orbi-variétés	108
5.2.3	Discussion autour de généralisation du théorème 4.1.7	110
5.2.4	Quasi-convexité	112
A	Annexe : lemmes techniques	115

Introduction

Une idée fondamentale en théorie géométrique des groupes est de lier des propriétés algébriques de groupes à des propriétés géométriques ou combinatoires d'un espace sur lequel ce groupe opère par isométries *géométriquement*, c'est-à-dire proprement et cocompactement. Un premier exemple de modèle géométrique est fourni par le graphe de Cayley $\text{Cay}(G, S)$ associé à un système fini S de générateurs. Rappelons que l'ensemble des sommets du graphe $\text{Cay}(G, S)$ est précisément l'ensemble G lui-même et que deux sommets sont reliés par une arête si et seulement s'ils diffèrent l'un de l'autre par multiplication à droite d'un élément de S . Muni de la métrique des mots pour laquelle chaque arête est de longueur 1, le graphe $\text{Cay}(G, S)$ est un espace métrique géodésique sur lequel le groupe G opère naturellement à gauche. Le groupe G est dit *hyperbolique* si le graphe $\text{Cay}(G, S)$ est un espace métrique hyperbolique au sens de Gromov. On peut montrer que cela ne dépend pas du choix du système de générateurs S de sorte que « être hyperbolique » est bien une propriété géométrique intrinsèque du groupe. Cette notion, devenue centrale en théorie géométrique des groupes, englobe aussi bien les groupes fondamentaux de variétés compactes à courbure strictement négative que les groupes libres.

Un autre développement majeur de la théorie géométrique des groupes est la théorie de Bass-Serre (70'). D'après celle-ci, un groupe opère sans inversion d'arête et sans point fixe global sur un arbre si et seulement si il est obtenu comme une succession de HNN-extensions et d'amalgames (non triviaux). Dans les années 90, Sageev propose une généralisation de ce résultat dans laquelle les arbres sont remplacés par ce que l'on peut voir comme leurs analogues en dimension supérieure, les *complexes cubiques* $\text{CAT}(0)$. Du côté des groupes la notion de produit amalgamé est naturellement remplacée par la propriété de contenir un sous-groupe « de codimension 1 ». Et Sageev [Sag95] montre qu'un groupe possède un sous-groupe de codimension 1 si et seulement si il opère essentiellement sur un complexe cubique $\text{CAT}(0)$. De manière peut-être encore plus fondamentale, la *démonstration* de ce théorème fournit un procédé qui, partant de la donnée d'un groupe de type fini G et d'un sous-groupe H (ou d'une collection finie de sous-groupes) de codimension 1, permet de construire un complexe cubique $X = X(G, H)$ sur lequel G opère naturellement. Plus tard Sageev [Sag97] donne un critère permettant notamment de montrer que si le groupe G est hyperbolique et H quasi-convexe dans G alors l'action de G sur X est cocompacte. La construction de

Sageev, appelée aussi « cubulation », est reprise et généralisée par Nica [Nic04] et Chatterji-Niblo [CN05] dans le contexte des groupes opérant sur des espaces à murs. Il n'est pas vrai en général que la construction de Sageev donne une action *géométrique* de G sur X , car celle-ci n'a pas de raison d'être propre. On dispose toutefois de critères, dont les énoncés les plus définitifs sont dus à Hruska-Wise [HW14], qui permettent de démontrer que l'action de G sur le complexe cubique associé à une collection « suffisamment » grande de sous-groupes de codimension 1 (ou murs) est propre. On dit d'un groupe opérant géométriquement sur un complexe cubique CAT(0) qu'il est *cubulé* ou *cubique*. En développant la stratégie initiée par Sageev, Wise et ses co-auteurs ont montré que la famille des groupes cubiques est extrêmement riche. Rappelons quelques faits marquants de ces développements dans lesquels cette thèse s'inscrit.

Dans un premier temps, les travaux de Haglund et de Wise ont fait émerger une classe plus restreinte de groupes cubiques : les groupes opérant géométriquement et *spécialement* sur un complexe cubique CAT(0). Cette notion est détaillée dans le chapitre 3, voir la définition 3.4.1. Rappelons juste pour l'instant que dans un cube $[-1, 1]^n$ un hyperplan est le sous-espace de codimension 1 obtenu en fixant une des coordonnées égale à 0. Dans un complexe cubique CAT(0) les hyperplans de cube s'étendent naturellement en des séparateurs du complexe cubique. En particulier, ils ne reviennent pas s'intersecter. Essentiellement, l'action d'un groupe G sur un complexe cubique CAT(0) X est dite *spéciale* si dans le complexe cubique quotient $G \backslash X$ les projetés des hyperplans de X sont plongés. On dira alors que le groupe est *spécial*. Les groupes spéciaux jouissent de nombreuses propriétés : on peut les réaliser comme sous-groupes de groupes de Coxeter à angles droits, ils sont linéaires, ceux d'entre eux qui sont hyperboliques possèdent de nombreux sous-groupes séparables (tous les sous-groupes quasi-convexes), en particulier sont résiduellement finis, ils sont aussi virtuellement large, biordonable... Exhiber une action géométrique spéciale sur un complexe cubique CAT(0) devient dès lors une manière géométrique de vérifier ces propriétés. Dans ce contexte le théorème d'Agol [AGM12] selon lequel *tout groupe hyperbolique cubique est virtuellement spécial, c'est-à-dire possède un sous-groupe d'indice fini spécial*, est une petite révolution. Pour démontrer qu'un groupe hyperbolique est virtuellement, par exemple linéaire, résiduellement fini ou encore biordonnable, il « suffit » de le cubuler !

Un théorème profond de Kahn et Markovic [KM09] implique que les groupes fondamentaux de 3-variétés hyperboliques contiennent beaucoup de sous-groupes de codimension 1. Ainsi, combiné aux techniques de cubulation mentionnées ci-dessus, le théorème d'Agol implique-t-il la célèbre conjecture « virtuellement Haken » pour les 3-variétés hyperboliques (compactes) et permet plus généralement de répondre (par l'affirmative) aux 4 dernières questions restées jusqu'alors en suspend dans la liste de 24 posées par Thurston dans son célèbre article [Thu83].

Les travaux de Kahn et Markovic permettent de construire beaucoup de groupes de surface mais dans les variétés hyperboliques de dimension > 3 on ne sait pas en général

construire des groupes de codimension 1. Une question naturelle se pose, les variétés hyperboliques réelles compactes de dimension > 3 sont-elles cubiques (et donc virtuellement spéciales) ? Pour l'heure la réponse n'est connue que pour certaines variétés arithmétiques dites « de type simple », voir [BHW11]. Plus généralement on peut se demander quelles variétés à courbure strictement négative sont cubiques. Les variétés hyperboliques complexes (ou quaternioniques) ne sont pas cubiques, voir par exemple [DG05]. Qu'en est-il des variétés dont la courbure est proche d'être constante -1 ? Le manque d'exemples rend cette question difficile à attaquer. On dispose toutefois d'une famille naturelle de variétés à courbure strictement négative proches des variétés hyperboliques réelles mais ne portant pas de métrique à courbure constante. Cette famille d'exemples est due à Gromov et Thurston [GT87]. Ces variétés sont des revêtements ramifiés de variétés arithmétiques de type simple. Dans cette thèse on propose deux démonstrations sensiblement différentes du fait que les groupes fondamentaux des variétés de Gromov-Thurston sont cubiques. L'une de ces démonstrations permet en outre de retrouver directement, sans faire appel au théorème d'Agol, que ces groupes sont virtuellement spéciaux, voir chapitre 3. On obtient donc :

Théorème 0.0.1. Les groupes fondamentaux des variétés de Gromov-Thurston sont cubiques et virtuellement spéciaux.

Une variété de Gromov-Thurston \hat{V} est construite comme un revêtement ramifié cyclique d'une variété hyperbolique arithmétique de type simple V . Le lieu singulier est obtenu comme l'intersection de deux sous-variétés V_1 et V_2 de V totalement géodésiques et de codimension 1. La variété V contient beaucoup de sous-variétés totalement géodésiques de codimension 1. Les groupes fondamentaux de ces sous-variétés donnent beaucoup de sous-groupes de codimension 1 dans $\pi_1(V)$. Une collection finie, suffisamment grande, de tels sous-groupes permet de cubuler le groupe fondamental de V dans [BHW11]. Pour démontrer le théorème 0.0.1 on ajoute à cette collection finie les groupes fondamentaux de V_1 et de V_2 . La construction de Sageev donne une bijection naturelle entre les relevés dans \mathbb{H}^n des sous-variétés de V utiliser pour cubuler son groupe fondamental et les hyperplans du complexe cubique dual X . Il correspond en particulier aux sous-variétés V_1 et V_2 deux hyperplans C_1 et C_2 de $C = \pi_1(V) \backslash X$. Notre première démonstration consiste à former un revêtement ramifié cyclique \hat{C} de C au-dessus de $C_1 \cap C_2$ de même degré que \hat{V} . À une subdivision barycentrique cubique près \hat{C} est un complexe cubique. Le reste du travail consiste alors à montrer que \hat{V} et \hat{C} ont le même groupe fondamental, ceci occupe le chapitre 3. La construction du revêtement ramifié \hat{C} du complexe cubique C est suffisamment simple pour garantir que si C est spécial alors \hat{C} l'est aussi. On obtient ainsi directement que $\pi_1(\hat{V})$ est virtuellement spécial.

Une question naturelle ressort de cette démonstration : soit $p : V' \rightarrow V$ un revêtement ramifié entre variétés, si $\pi_1(V)$ est cubique, en est-il de même de $\pi_1(V')$? On aborde cette question dans le cadre plus restreint où V est hyperbolique et le lieu singulier est une

sous-variété totalement géodésique (de codimension 2). On suppose en outre que $\pi_1(V)$ est cubulé par une collection finie de sous-groupes fondamentaux de sous-variétés totalement géodésiques. Considérons alors la famille \mathcal{H} de tous les hyperplans de \mathbb{H}^n qui relèvent ces sous-variétés. Le revêtement universel X' de X est alors naturellement un revêtement ramifié de \mathbb{H}^n que l'on note $f : X' \rightarrow \mathbb{H}^n$. Il est naturel de considérer la famille \mathcal{H}' des composantes connexes des préimages de \mathcal{H} dans X' et leurs stabilisateurs dans $\pi_1(V')$. Par la construction de Sageev il leur correspond un complexe cubique sur lequel le groupe $\pi_1(V')$ opère naturellement. Toutefois, même sous ces conditions relativement fortes, cette action n'est en général pas propre, voir l'exemple 4.1.5. Il faut donc ajouter des murs ou faire une hypothèse supplémentaire. On se propose ici de supposer en plus que le lieu singulier est contenu dans une sous-variété totalement géodésique compacte et de codimension 1. La préimage dans X' de la sous-variété de codimension 1 contenant le lieu singulier permet de construire de nombreux murs dans X' d'un type nouveau. On obtient alors :

Théorème 0.0.2. Soit V une variété hyperbolique réelle et soit $f : V' \rightarrow V$ un revêtement ramifié. On suppose :

1. que le lieu singulier est une sous-variété totalement géodésique (de codimension 2) contenue dans une sous-variété totalement géodésique compacte de codimension 1 dans V , et
2. que le groupe fondamental $\pi_1(V)$ est cubulé par une collection finie de sous-groupes fondamentaux de sous-variétés totalement géodésiques.

Alors, le groupe fondamental $\pi_1(V')$ est cubique.

Expliquons les grandes étapes de la démonstration. Les nouveaux murs de X' que nous considérons sont des sous-espaces connexes des composantes connexes de la préimage dans X' de la sous-variété de codimension 1 contenant le lieu singulier. La construction de Sageev appliquée aux murs, anciens et nouveaux, de X' permet de construire un complexe cubique $\text{CAT}(0)$ sur lequel le groupe fondamental de V' opère isométriquement. Il faut encore montrer que cette action est propre et cocompacte.

On commence par la propreté. On doit pour cela vérifier que les murs séparent linéairement X' . Plus précisément on montre qu'entre chaque paire de points (x, y) de X' il existe une géodésique par morceaux γ dont chaque segment géodésique suffisamment grand a ses extrémités séparées, par un nombre linéaire en la longueur du segment, de murs de X' disjoints du reste de γ . En particulier ces murs séparent x de y . On montre de plus que pour chaque concaténation de 6 segments géodésiques consécutifs dans γ il existe bien un mur de X' qui sépare les extrémités de cette concaténation et qui est disjoint du reste de γ . La construction de cette géodésique par morceaux utilise également l'existence d'une sous-variété de codimension 1 dans V contenant le lieu singulier : les segments géodésiques de γ sont en effet contenus dans la préimage de cette variété dans X' où des géodésiques minimisantes entre deux composantes connexes de cette préimage.

La démonstration de la quasi-convexité des murs suit une démarche similaire. On montre en effet que pour la distance induite sur un mur H' de \mathcal{H}' la famille des murs de X' sépare linéairement toute paire de points de H' . Comme les murs de X' sont uniformément localement finis on en déduira que la distance sur X' entre deux points de H' croît linéairement en fonction de la distance sur H .

Le théorème 0.0.2 n'est certainement pas un énoncé définitif. Dans le chapitre 5 on suggère quelques généralisations possibles. On peut toutefois remarquer que tel quel le théorème 0.0.2 s'applique immédiatement aux variétés de Gromov-Thurston ainsi qu'à des revêtements ramifiés plus généraux de variétés arithmétiques de type simple ou même de variétés non-arithmétiques de Gromov et Piatetski-Shapiro, voir chapitre 5. Les groupes fondamentaux de ces variétés sont donc cubiques virtuellement spéciaux par le théorème d'Agol. On remarque cependant que si on suppose que les murs de \mathbb{H}^n donnent un cubulation spéciale alors un mur de X' n'intersecte aucun de ses translatés par un élément de $\pi_1(V')$. En effet, sinon en projetant ces murs par f on obtiendrait un mur de \mathbb{H}^n qui intersecte un de ses translaté par $\pi_1(V)$. Le reste des conditions pour la spécialité doivent pouvoir aussi se vérifier directement.

Découpage de la thèse

Le chapitre 1 contient essentiellement des rappels. Le but est de mettre en œuvre la construction de Sageev dans un contexte simplifié qui suffit à nos besoins. Cela permet de raccourcir un certain nombre de démonstrations et d'aller directement à l'essentiel. Nous donnons également des critères pour garantir la cocompacité et la propreté de l'action sur le complexe cubique dual.

Dans le chapitre 2 on définit une notion de revêtement ramifié entre variétés topologiques. On établit ensuite quelques résultats basiques relatifs à cette notion. Dans un premier temps on démontre qu'un revêtement ramifié se relève en un revêtement ramifié entre les revêtements universels. On montre ensuite que tout revêtement ramifié d'une variété hyperbolique est naturellement muni d'une métrique CAT(-1).

Le chapitre 3, en anglais, va paraître dans *Groups, Geometry and Dynamics* sous le titre « Cubulation of Gromov-Thurston manifolds ». Il contient notre première démonstration du théorème 0.0.1.

Le chapitre 4 est consacré à la démonstration du théorème 0.0.2. On commence par expliquer pourquoi les préimages des sous-variétés qui cubulent le groupe fondamental de V ne suffisent pas à cubuler le groupe fondamental de V' . On introduit ensuite les nouveaux murs de X' associés à certains morceaux des préimages dans X' de la sous-variété de codimension 1 qui contient le lieu de ramification. On montre alors la séparation linéaire dans X' puis la quasi-convexité des murs de X' .

Le chapitre 5 est consacré à des exemples d'application du théorème 0.0.2, on donne une construction rapide des variétés arithmétiques, puis on fait une liste de quelques pistes

de recherche dans la suite logique du théorème 0.0.2.

Chapitre 1

Cubulation d'espaces à murs

On dit d'un groupe qu'il est *cubique* s'il opère proprement et cocompactement sur un complexe cubique $\text{CAT}(0)$. On appelle *cubulation* l'opération consistant, étant donné un groupe abstrait, à le réaliser comme groupe cubique, c'est-à-dire à exhiber une action propre et cocompacte de ce groupe sur un complexe cubique $\text{CAT}(0)$. Sageev initie l'étude des groupes cubiques dans [Sag95]. Il donne en particulier un critère permettant de cubuler certains groupes hyperboliques. Avec les travaux de Wise et de ses co-auteurs les groupes hyperboliques, ou relativement hyperboliques, cubiques ont pris une place centrale dans la théorie. Le critère de Sageev, crucial dans ces travaux, a été largement généralisé. En ce qui concerne les groupes (relativement) hyperboliques on pourra se reporter à l'article de Hruska et Wise [HW14].

Pour ce qui nous concerne dans ce chapitre, nous considérerons des groupes opérant sur des "espaces à murs" au sens de Haglund et Paulin [HP98]. Le critère de Sageev est étendu à ces groupes par Chatterji-Niblo [CN05] et Nica [Nic04]. Étant donné un espace à murs X , il correspond en effet toujours à X un complexe cubique $\text{CAT}(0)$ "dual". Cette correspondance est en outre suffisamment naturelle pour qu'à tout groupe opérant sur X , il corresponde une action "duale" sur le complexe cubique dual. Et Chatterji-Niblo et Nica donnent un critère sur X et sur l'action du groupe sur celui-ci, pour que l'action duale soit propre et cocompacte.

Dans ce chapitre nous rappelons quelques éléments de cette théorie. Nous commençons par définir les complexes cubiques $\text{CAT}(0)$ et les espaces à murs. Nous démontrons ensuite que le complexe cubique dual à un espace à murs est $\text{CAT}(0)$. Nous donnons enfin deux critères qui garantissent que l'action duale à une action sur un espace à murs soit propre et cocompacte.

1.1 Complexes cubiques et espaces à murs

1.1.1 Complexes cubiques

Définition 1.1.1. Dans un espace métrique X une *géodésique* est un plongement isométrique de \mathbb{R} dans X . Un *segment géodésique* entre deux points a et b de X est une isométrie c définie sur un intervalle $[t, t']$ de \mathbb{R} telle que $c(t) = a$ et $c(t') = b$.

Définition 1.1.2. Un *complexe cubique* X est un complexe cellulaire obtenu comme le quotient d'une union disjointe de cubes euclidiens $\bigsqcup_i Q_i / \sim$, tel que les applications de restriction p_i de l'application projection $p : \bigsqcup_i Q_i / \sim \rightarrow X$ à un cube Q_i vérifient les propriétés suivantes :

1. Pour tout i , $p_i : Q_i \rightarrow X$ est injective,
2. Si $p_i(Q_i) \cap p_j(Q_j) \neq \emptyset$ alors il existe une face C de Q_i , une face D de Q_j et une isométrie $h : D \rightarrow C$ telles que $p_i(x) = p_j(x')$ si et seulement si $x' = h(x)$.

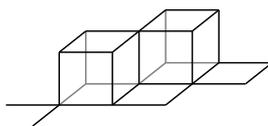


FIGURE 1.1 – Exemple de complexe cubique

Soit X un complexe cubique, chaque cube Q_i possède une métrique euclidienne. Etant donné deux points x et y appartenant à un même cube Q_i on note \overline{xy} le segment géodésique entre ces deux points dans Q_i . On munit X d'une métrique de la façon suivante. Soient $x_1, y_1, \dots, x_n, y_n$ différents points de $\bigsqcup_i Q_i$ tels que x_i et y_i soient dans un même cube Q_i pour $i = 1, \dots, n$ et tels que $p_i(y_i) = p_{i+1}(x_{i+1})$ pour $i = 1, \dots, n - 1$. On appelle ligne brisée l'union disjointe des segments $\overline{x_i y_i}$. La longueur d'une telle ligne brisée est la somme des longueurs des segments $\overline{x_i y_i}$. L'infimum des longueurs de lignes brisées telles que $p_1(x_1) = x$ et $p_n(y_n) = y$ définit une pseudo-distance sur X . Lorsque X est de dimension finie, un théorème de Bridson [BH99, Chapitre I.7] implique que, muni de cette pseudo-distance, l'espace X est en fait un espace métrique géodésique complet.¹

Définition 1.1.3. Soit $X = \bigsqcup_i Q_i / \sim$ un complexe cubique, et s un sommet de X . On appelle link de s dans X le complexe multi-simplicial $\text{link}(s, X)$ défini de la manière suivante. Pour tout sommet s_i d'un cube Q_i tel que $p_i(s_i) = s$ on considère le simplexe S_i défini

¹ Rappelons qu'un espace métrique est dit *géodésique* si toute paire de points de cet espace est reliée par une géodésique.

comme l'enveloppe convexe des milieux des arêtes de Q_i qui contiennent s_i . La relation d'équivalence sur X induit une relation d'équivalence \simeq sur $\bigsqcup S_i$. Le complexe $\text{link}(s, X)$ est le complexe quotient $\bigsqcup S_i / \simeq$.

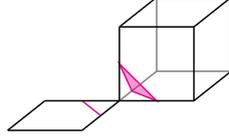


FIGURE 1.2 – Exemple d'un link de sommet

Définition 1.1.4. Soit (X, d) un espace métrique géodésique et soit $T = (a, b, c)$ un triangle géodésique. On appelle triangle de comparaison T_0 un triangle de \mathbb{R}^2 dont les distances entre chaque paire de sommets sont les mêmes que dans T . Un point x de T est déterminé par un segment de T qui le contient, et par ses distances aux extrémités de ce segment. Il existe alors un unique point x_0 de T_0 qui satisfait les mêmes conditions dans T_0 . On dit que X est $CAT(0)$ si pour toute paire x, y de points de T

$$d_X(x, y) \leq d_{\mathbb{R}^2}(x_0, y_0).$$

Un espace métrique X est *localement* $CAT(0)$ si en tout point de X il existe une boule autour de ce point qui est $CAT(0)$.

Dans les complexes cubiques cette propriété géométrique est plus facile à vérifier, en effet Gromov donne un critère pour le vérifier, voir [Gro87] ou [BH99, Theorem 5.20].

Définition 1.1.5. Un complexe simplicial S est dit *de drapeau* si pour tout ensemble de sommets $\{s_1, \dots, s_n\}$ de S deux à deux reliés par une arête dans S il existe un n -simplexe dont les sommets sont exactement s_1, \dots, s_n .

Théorème 1.1.6. (Gromov) Un complexe cubique X de dimension finie muni de la métrique décrite ci-dessus est localement $CAT(0)$ si et seulement si pour chaque sommet s de X , le complexe $\text{link}(s, X)$ est simplicial et de drapeau.

Définition 1.1.7. Un *hyperplan* d'un cube $Q = [-1, 1]^n$ est un sous-cube $[-1, 1]^i \times \{0\} \times [-1, 1]^{n-i-1}$ pour $i = 0, \dots, n-1$. Soit $X = \bigsqcup_i Q_i / \sim$ une complexe cubique. La relation d'équivalence \sim induit une relation d'équivalence sur la réunion disjointe de tous les hyperplans de tous les cubes Q_i . On appelle *complexe des hyperplans* de X le complexe cubique quotient correspondant. On appelle finalement hyperplan du complexe cubique X l'image dans X d'une composante connexe de son complexe des hyperplans.

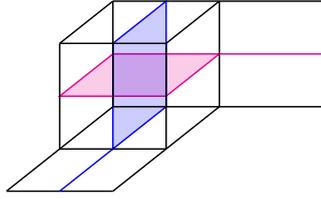


FIGURE 1.3 – Hyperplans dans un complexe cubique

1.1.2 Espaces à murs

Il existe plusieurs définitions différentes d'espaces à murs dans la littérature, la première étant une définition purement ensembliste due à Haglund et Paulin dans [HP98]. C'est cette définition qui est utilisée dans l'article « cubulation of Gromov-Thurston manifolds » dans la partie 4.1. Nous introduisons dans cette partie une définition plus restrictive mais plus géométrique qui s'inscrit dans le contexte que nous allons étudier dans le chapitre 4. Pour une définition plus générale voir [HW14].

Définition 1.1.8. Soit X un espace topologique connexe. Un *mur* M est un sous-espace fermé connexe de X tel que l'espace $X \setminus M$ possède exactement deux composantes connexes.

On appelle *demi-espace ouvert* de M les composantes connexes U° et V° de $X \setminus M$, et on appelle *demi-espace* les espaces $U = U^\circ \cup M$ et $V = V^\circ \cup M$. On remarque que U et V sont fermés et connexes, et que $U = X \setminus V^\circ$ et $V = X \setminus U^\circ$.

Soit X un espace métrique, soit M un mur de X , et soit $\{U, V\}$ la paire de demi-espaces associés à M . On note $A \in \{U, V\} \mapsto \bar{A}$ l'involution qui permute U et V , de sorte que $\bar{U} = V$ et $\bar{V} = U$.

Définition 1.1.9. On appelle *espace à murs* la donnée (X, \mathcal{M}) d'un espace topologique connexe X et d'un ensemble de murs \mathcal{M} localement fini dans X .

On dit qu'un mur M d'un espace X sépare deux points x et y si un des demi-espaces ouverts de M contient x et l'autre demi-espace ouvert contient y . Dans un espace à murs on note $|x, y|$ le nombre de murs qui séparent deux éléments x et y de X . Si X est un espace métrique géodésique cette quantité est finie pour toute paire de points de X .

Exemple 1.1.10. On considère le couple $(\mathbb{H}^n, \mathcal{H})$, avec \mathcal{H} une famille localement finie d'hyperplans de l'espace hyperbolique réel \mathbb{H}^n . C'est un espace à murs au sens de la définition ci-dessus.

Exemple 1.1.11. Soit X un complexe cubique CAT(0) et soit \mathcal{H} l'ensemble des hyperplans de X . Le couple (X, \mathcal{H}) est un espace à murs. En effet, les hyperplans séparent X en deux composantes connexes, voir [Sag95], et l'ensemble des hyperplans d'un complexe cubique est évidemment localement fini.

1.1.3 Le complexe cubique dual à un espace à murs

La construction de Sageev, étendue par Niblo-Chaterji et Nica, évoquée en tête de chapitre permet d'associer à tout espace à murs un complexe cubique CAT(0) que l'on appellera *complexe cubique dual* à l'espace à murs. Cette construction est une étape importante de la cubulation de groupes. En effet, si un groupe opère sur une structure d'espace à murs, il opère naturellement sur le complexe cubique dual. Nous verrons dans la partie 1.2 qu'on peut comprendre des propriétés de l'action d'un groupe G (propreté, cocompacité) sur un complexe cubique dual à partir de propriétés de l'espace à murs et de l'action de G sur l'espace à murs. On se contente ici de rappeler la construction du complexe cubique dual.

Soit (X, \mathcal{M}) un espace à murs. Étant donnés deux murs distincts M et M' dans \mathcal{M} , on dit que deux demi-espaces U de M et U' de M' sont *compatibles* si $U \cap U' \neq \emptyset$. Remarquons que si l'intersection de M et M' est non vide, alors les quatre choix de paires de demi-espaces sont compatibles. Autrement dit, dans une collection de murs qui s'intersectent deux à deux tous les choix de demi-espaces sont compatibles.

Considérons maintenant deux murs disjoints M et M' . Alors il existe une paire de demi-espaces (V, V') , avec V demi-espace de M et V' demi-espace de M' , qui n'est pas compatible. En effet, les sous-espaces M et M' étant disjoints, l'un des demi-espaces U' de M' contient M , et de même l'un des demi-espaces U de M contient M' . Alors le demi-espace V de M est disjoint de M' et appartient donc à U' , il est alors disjoint de V' .

Définition 1.1.12. Soit (X, \mathcal{M}) un espace à murs. On appelle *orientation* d'un mur M le choix d'un des demi-espaces associés à M .

On associe à l'espace à murs (X, \mathcal{M}) un complexe cubique $C(X, \mathcal{M})$, dit *dual*, défini comme suit. Une 0-cellule $s \in C(X, \mathcal{M})^{(0)}$ correspond à un choix d'orientation $s(M)$ pour chaque mur M de \mathcal{M} de sorte que :

1. $\forall M, M' \in \mathcal{M}, s(M) \cap s(M') \neq \emptyset$,
2. pour tout point x de X , il existe un nombre fini de murs M tels que $x \notin s(M)$.

Deux 0-cellules s et $t \in C(X, \mathcal{M})^{(0)}$ sont reliées par une 1-cellule s'il existe un unique mur $M \in \mathcal{M}$ tel que $s(M) = \overline{t(M)}$. On dit alors que cette 1-cellule, ou arête, est *duale* au mur M . On complète finalement le 1-complexe, ou graphe, $C(X, \mathcal{M})^{(1)}$ ainsi construit en un complexe cubique $C(X, \mathcal{M})$ en recollant un cube euclidien à chaque fois qu'on voit le 1-squelette d'un cube.

Même si cette définition est assez abstraite, une partie du complexe cubique est relativement facile à visualiser. Commençons par associer à tout point x de X un cube c_x particulier. D'après la définition d'un espace à murs il existe un nombre fini de murs qui contiennent x ; on les note M_1, \dots, M_k . Pour chaque mur $M \neq M_i$, on note $s(M)$ le demi-espace de M qui contient x . Montrons qu'à tout choix arbitraire $s(M_i)$ d'un demi-espace

de M_i , pour $i = 1, \dots, k$, il correspond un sommet $s \in C(X, \mathcal{M})^{(0)}$. La première condition est satisfaite. En effet, si $M, M' \in \mathcal{M}$, par définition de s , $x \in s(M)$ et $x \in s(M')$, donc $s(M) \cap s(M') \neq \emptyset$. Vérifions la seconde condition. Soit y un point de X . Il existe un nombre fini de murs qui séparent x de y et il existe un nombre fini de murs qui contiennent x ou y . Soit M un mur de \mathcal{M} qui ne contient ni x ni y et qui ne sépare pas x de y , alors x et y sont dans un même demi-espace ouvert de M et donc $y \in s(M)$.

De cette manière on associe au point x un sous-ensemble de 2^k sommets dans $C(X, \mathcal{M})^{(0)}$ en faisant varier le choix des demi-espaces des murs M_1, \dots, M_k .

Définition 1.1.13. On appelle *cube dual à x* le cube c_x dont les sommets sont définis comme ci-dessus.

Exemple 1.1.14. Soit X un complexe cubique $\text{CAT}(0)$, \mathcal{H} sa famille d'hyperplans. Ce sont des murs naturels de X . Le complexe cubique dual $C(X, \mathcal{H})$ est isomorphe au complexe cubique X .

1.1.4 Le complexe cubique dual à un espace à murs est $\text{CAT}(0)$

Proposition 1.1.15. Soit (X, \mathcal{M}) un espace à murs, soit C le complexe cubique dual à (X, \mathcal{M}) , alors C est $\text{CAT}(0)$.

Nous allons déduire cette proposition du critère de Gromov (théorème 1.1.6) et du théorème de Cartan-Hadamard (voir par exemple [BH99, II.4.1]) :

Théorème 1.1.16. Un espace métrique géodésique X est $\text{CAT}(0)$ si et seulement si X est localement $\text{CAT}(0)$ et simplement connexe.

La démonstration de la proposition 1.1.15 est constituée de trois étapes : on montre tout d'abord que C est connexe, puis simplement connexe et enfin localement $\text{CAT}(0)$.

Dans le lemme suivant on considère des chemins combinatoires dans le 1-squelette du complexe cubique. Chaque arête est de longueur 1 et la distance entre deux sommets s et t est la longueur du plus petit chemin sur le 1-squelette entre s et t .

Lemme 1.1.17. Soit (X, \mathcal{M}) un espace à murs et C le complexe cubique dual à (X, \mathcal{M}) . Soit x un point base de X et c_x le cube dual à x dans C . Alors tout sommet de C est à distance finie de c_x .

Démonstration. Soit s un sommet de C , montrons qu'il existe un chemin dans C entre s et c_x . Par définition des sommets de C , il existe un nombre fini de murs $M \in \mathcal{M}$ tels que $x \notin s(M)$. Faisons une récurrence sur le nombre de murs M tels que $x \notin s(M)$. Si pour tout mur $M \in \mathcal{M}$, $x \in s(M)$ alors, par définition de c_x le sommet s est un sommet de c_x .

Montrons que si on note M_1, \dots, M_n les murs de $M \in \mathcal{M}$ tels que $x \notin s(M)$ alors on peut construire un sommet t de C adjacent à s tel qu'il existe exactement $n - 1$ murs M de \mathcal{M} tels que $x \notin t(M)$. On conclura par récurrence qu'il existe un chemin de s à c_x .

Un des demi-espaces de la famille $s(M_1), \dots, s(M_n)$ est minimal pour l'inclusion. Quitte à renuméroter la famille M_1, \dots, M_n supposons que pour $i \neq 1$, $s(M_i) \not\subset s(M_1)$.

On définit le sommet t de la façon suivante,

$$\begin{cases} t(M) = s(M) \text{ si } M \neq M_1, \\ t(M_1) = \overline{s(M_1)}. \end{cases}$$

Montrons que t est un sommet de C .

Soit y un point de X . Comme s est un sommet de C , alors il existe un nombre fini de demi-espaces $s(M)$ qui ne contiennent pas y . Par définition de t , les sommets s et t ne diffèrent que d'un choix de demi-espace, donc il existe un nombre fini de demi-espaces $t(M)$ qui ne contiennent pas y .

Montrons que pour toute paire de murs M et M' de \mathcal{M} on a $t(M) \cap t(M') \neq \emptyset$. On sait que s est un sommet de C . Pour toute paire de murs M et M' de \mathcal{M} , on a donc $s(M) \cap s(M') \neq \emptyset$. Si M et M' sont différents de M_1 alors $t(M) \cap t(M') \neq \emptyset$.

Soit $M \in \mathcal{M}$, montrons que $t(M) \cap t(M_1) \neq \emptyset$.

Si $M \neq M_i$ alors $x \in s(M)$ par définition de la famille M_1, \dots, M_n . Comme $s(M) = t(M)$ alors $x \in t(M)$. De plus, $x \notin s(M_1)$ donc $x \in \overline{s(M_1)} = t(M_1)$. Finalement $x \in t(M) \cap t(M_1)$.

Supposons que $M = M_i$, avec $i \neq 1$. Le demi-espace $s(M_1)$ est minimal pour l'inclusion dans l'ensemble $s(M_1), \dots, s(M_n)$. En particulier cela implique que $(X \setminus s(M_1)) \cap s(M_i) \neq \emptyset$, pour $i \neq 1$. Comme $(X \setminus s(M_1)) \subset \overline{s(M_1)}$ alors $\overline{s(M_1)} \cap s(M_i) \neq \emptyset$. On obtient bien $t(M_1) \cap t(M_i) \neq \emptyset$.

Finalement, t est bien un sommet de C et les seuls murs de \mathcal{M} tels que $x \notin t(M)$ sont les murs M_2, \dots, M_n . On conclut donc par récurrence que tout sommet de C est à distance finie du cube c_x . \square

La démonstration du lemme 1.1.17 donne une construction explicite d'un chemin entre c_x et n'importe quel point de C , on en déduit le résultat suivant :

Corollaire 1.1.18. Le complexe cubique dual à un espace à murs (X, \mathcal{M}) est connexe.

Lemme 1.1.19. Le complexe cubique C dual à un espace à murs est simplement connexe.

Démonstration. Soit ℓ un lacet combinatoire dans $C^{(1)}$ le 1-squelette de C . Montrons que si ℓ est de longueur non nulle alors il existe un lacet combinatoire ℓ' , homotope à ℓ et de longueur strictement inférieure à celle de ℓ . On pourra en déduire par récurrence que ℓ est homotope à un point.

Par définition, chaque arête de C est naturellement associée à un mur de \mathcal{M} . Remarquons que pour un mur donné, le nombre d'arêtes du lacet ℓ associées à ce mur est pair. En effet, quand on part d'un sommet donné de ℓ , chaque arête traversée change le choix

du demi-espace du mur associé. Pour chaque mur $M \in \mathcal{M}$ le choix de demi-espace doit changer un nombre pair de fois pour revenir au choix de demi-espace du sommet d'origine.

Parmi tous les murs associés à des arêtes de ℓ on choisit un mur M_a de \mathcal{M} associé à deux arêtes de ℓ les plus proches possibles (dans ℓ). On note a_1 et a_2 des arêtes duales à ce mur dans ℓ les plus proches possibles. Si ces arêtes sont consécutives alors $a_1 = a_2$ et ℓ fait un aller-retour sur cette arête. On considère ℓ' le lacet qui traverse exactement les mêmes arêtes que ℓ sauf les arêtes a_1 et a_2 . Par construction les lacets ℓ et ℓ' sont homotopes et ℓ' est de longueur 2 de moins que ℓ .

Soient a_1 et a_2 deux arêtes duales à un même mur M_a . Supposons que la distance entre a_1 et a_2 est minimale pour deux arêtes duales à M_a et que les arêtes a_1 et a_2 ne sont pas consécutives. On montre qu'alors il existe un chemin combinatoire homotope à ℓ , de même longueur que ℓ , tel que la distance minimal entre deux arêtes duales à M_a est strictement inférieure à celle entre a_1 et a_2 .

Par une récurrence, en appliquant plusieurs fois le résultat ci-dessus on pourra homotoper ℓ sur un chemin combinatoire de même longueur tel qu'il existe deux arêtes consécutives duales à un même mur M_a . On peut alors homotoper ce lacet sur un lacet ℓ' de longueur strictement inférieure à ℓ comme précédemment.

Supposons que la distance entre a_1 et a_2 est minimale pour deux arêtes duales à M_a et que a_1 et a_2 ne sont pas consécutives. On considère b la première arête du chemin minimal de ℓ entre a_1 et a_2 . On note U_a et V_a les demi-espaces de M_a et on note U_b et V_b les demi-espaces de M_b . Supposons par exemple que le sommet commun à a_1 et b contienne les demi-espaces U_a et U_b , alors l'autre sommet de a_1 contient V_a et U_b et l'autre sommet de b contient U_a et V_b .

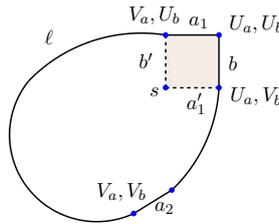


FIGURE 1.4 – Le lacet ℓ

L'arête b est la seule arête entre a_1 et a_2 qui est transverse à M_b . En effet, si il existait une autre arête b_2 duale à M_b la distance entre b et b_2 serait strictement inférieure à la distance entre a_1 et a_2 dans ℓ , or on a supposé que le mur M_a minimise la distance entre deux de ses arêtes duales. On peut en déduire que les sommets de a_2 contiennent V_b . Finalement, l'un contient U_a et V_b et l'autre contient V_a et V_b . Toutes les combinaisons de demi-espaces des murs M_a et M_b sont donc compatibles.

On considère le sommet s tel que $s(M_a)$ soit égal à V_a , $s(M_b)$ soit égal à V_b et, pour

tout $M \neq M_a, M_b$, $s(M)$ soit le demi-espace commun à tous les sommets de a_1 et de b . C'est bien un sommet de C puisque les demi-espaces de s sont deux à deux compatibles.

Le complexe cubique C contient alors un carré Q dont les sommets sont ceux des arêtes a_1 et b et le sommet s . On note a'_1 l'arête de Q duale à M_a différente de a_1 et b' celle duale à M_b différente de b .

On considère le lacet ℓ' qui emprunte les mêmes arêtes que ℓ à part autour de Q , où ℓ emprunte les arêtes a_1 puis b alors que ℓ' emprunte les arêtes b' puis a'_1 . La distance entre a'_1 et a_2 dans ℓ' est donc inférieure de 1 à la distance entre a_1 et a_2 dans ℓ . De plus, ℓ' est bien homotope à ℓ car on peut homotoper sur Q le chemin a_1b sur $b'a'_1$ et ℓ et ℓ' sont de même longueur.

Par une double récurrence on conclut que ℓ est homotope à un point, et donc que C est simplement connexe. \square

Remarque 1.1.20. Des arguments similaires à ceux employés dans la preuve du lemme 1.1.19 montrent que la distance combinatoire sur le 1-squelette entre deux sommets de C est exactement le nombre de murs dont les choix de demi-espaces diffèrent. En effet un chemin entre deux sommets de C qui passe par plusieurs arêtes duales à un même mur peut être homotopé à extrémités fixées sur un chemin plus court. De plus, il faut passer au moins une fois sur une arête duale pour chaque mur de \mathcal{M} dont l'orientation diffère entre deux points pour changer cette orientation.

Lemme 1.1.21. Le complexe cubique C dual à un espace à murs est localement CAT(0).

Démonstration. D'après le théorème 1.1.6 le complexe cubique C est localement CAT(0) si et seulement si le link en chaque sommet de C est simplicial et de drapeau. On fixe un sommet s de C . Chaque sommet de $\text{link}(s, C)$ est en bijection avec une arête de C qui contient s . De même chaque arête de $\text{link}(s, C)$ correspond à un carré de C qui contient s . Un carré de C est associé à deux murs de \mathcal{M} tels que toutes les paires de demi-espaces sont compatibles.

À une collection de sommets s_1, \dots, s_n dans $\text{link}(s, C)$ deux à deux reliés par des arêtes a_{ij} , il correspond dans C une collection de murs tels que toutes les paires de demi-espaces sont compatibles. L'ensemble des combinaisons possibles de demi-espaces pour ces murs décrit un cube de C de dimension n qui contient s et chacun des cubes associées aux arêtes entre s_i et s_j . Ce cube correspond dans $\text{link}(s, C)$ à un simplexe qui a pour 1-squelette l'ensemble des arêtes a_{ij} . \square

1.2 Cubulation de groupes

Dans cette partie nous commençons par montrer la naturalité de la construction du complexe cubique dual à un espace à murs : l'action d'un groupe sur un espace à murs donne lieu à une action naturelle sur le complexe cubique CAT(0) dual. Nous donnons

ensuite des conditions sur l'action sur l'espace à murs pour que l'action sur le complexe cubique dual soit propre et cocompacte.

Définition 1.2.1. Soit (X, \mathcal{M}) un espace à murs, on dit que G opère sur (X, \mathcal{M}) si G opère par homéomorphisme sur X en préservant l'ensemble \mathcal{M} des murs.

L'action de G sur un espace à murs (X, \mathcal{M}) induit naturellement une action sur le complexe dual. En effet, chaque élément g du groupe G envoie les demi-espaces de murs de \mathcal{M} sur des demi-espaces de murs de \mathcal{M} . Ainsi, pour chaque sommet s de C et chaque mur $M \in \mathcal{M}$ on définit $g.s(M) = g.(s(M))$. Les critères de définition des sommets sont immédiatement vérifiés.

1.2.1 Cocompacité de l'action d'un groupe sur le complexe cubique dual

On donne tout d'abord un critère pour que l'action d'un groupe sur un espace à murs induise une action cocompacte sur le complexe cubique dual. La preuve est relativement simple et suffit dans le cadre dans lequel nous travaillons. C'est une adaptation de l'argument utilisé dans [BHW11].

Il existe des énoncés plus généraux pour montrer la cocompacité. Dans [Sag97], Sageev montre que si G est hyperbolique et que les murs sont quasi-convexes alors l'action de G sur le complexe cubique dual est cocompacte. La preuve est détaillée, et généralisée dans [HW14] au cas où G est relativement hyperbolique.

Définition 1.2.2. On dit qu'un groupe G opère isométriquement sur un espace métrique X si $\forall g \in G, \forall x, y \in X, d(x, y) = d(g.x, g.y)$.

Théorème 1.2.3. Soit (X, \mathcal{M}) un espace à murs avec X un espace métrique géodésique et \mathcal{M} une famille localement finie de murs de X . Soit G un groupe hyperbolique opérant proprement sur l'espace à murs (X, \mathcal{M}) . On suppose de plus que G opère isométriquement sur X avec quotient compact. On suppose enfin que les murs de \mathcal{M} sont quasi-convexes (avec des constantes de quasi-convexité uniformes pour tous les murs de \mathcal{M}) et que la distance entre deux points de X est quasi-isométrique au nombre de murs qui séparent ces points. Alors le complexe cubique C dual à (X, \mathcal{M}) est propre et G opère cocompactement sur C .

Définition 1.2.4. Un sous-espace Y de X est dit *quasi-convexe* si le plongement de Y dans X est une quasi-isométrie, Y étant muni de la métrique de longueur induite. (On suppose donc Y connexe par arcs rectifiables.)

Donnons deux lemmes fondamentaux pour la preuve du théorème 1.2.3.

Lemme 1.2.5. Il existe un nombre fini n tel que, pour tout demi-espace U de X , tout point $x \notin U$, et tout segment minimal $[x, q]$ entre x et U , au plus n murs intersectent U et $[x, q]$.

Démonstration. Soit M un mur de \mathcal{M} qui intersecte U et $[x, q]$. Soit $v \in M \cap [x, q]$ et $w \in M \cap U$. On considère alors un triangle géodésique T de sommets v, q, w . Comme G opère proprement par isométrie et cocompactement sur X alors X est espace δ -hyperbolique pour une certaine constante δ (voir [LHG90]).

Comme X est δ -hyperbolique et M quasi-convexe, il existe une constante H telle que tout segment géodésique pour la métrique de longueur dans un mur de \mathcal{M} est dans le H -voisinage du segment géodésique dans X de mêmes extrémités, voir par exemple [LHG90, p.82].

Montrons que $d(q, M) \leq 4\delta + 2H$. Par définition de la constante H , le segment géodésique $[w, v]$, à extrémités dans M , est contenu dans le H -voisinage de M . On obtient alors l'inégalité $d(q, M) \leq d(q, [w, v]) + H$.

Soit z le centre du tripode associé au triangle T , par δ -hyperbolicité de X on sait que $d(z, [w, v]) \leq \delta$, voir [LHG90]. Alors il suffit de majorer $d(z, q)$ pour majorer la distance entre M et q .

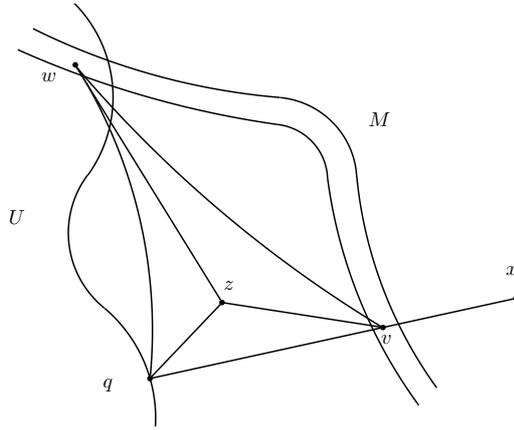


FIGURE 1.5 –

Par δ -hyperbolicité de X on a $d(z, [q, v]) \leq \delta$. Soit y un point de $[q, v]$ à distance inférieure à δ de z . Par inégalité triangulaire on obtient $d(v, z) \leq d(v, y) + \delta$ et $d(z, q) \leq d(y, q) + \delta$. On obtient

$$d(v, z) + d(z, q) \leq d(v, q) + 2\delta.$$

D'un autre côté comme U est quasi-convexe dans X , alors le segment géodésique $[w, q]$ est contenu le H -voisinage de U . Comme $d(z, [w, q]) \leq \delta$ on obtient $d(z, U) \leq \delta + H$.

On remarque que $d(v, q)$ est la distance entre v et U car $v \in [x, q]$. Alors $d(v, q) \leq d(v, z) + d(z, U)$ et on obtient

$$d(v, q) \leq d(v, z) + \delta + H.$$

On déduit des deux paragraphes précédents l'inégalité : $d(v, z) + d(z, q) \leq d(v, z) + \delta +$

$H + 2\delta$, et donc $d(z, q) \leq H + 3\delta$.

Finalement, $d(q, M) \leq d(q, [w, v]) + H \leq d(q, z) + \delta + H \leq 2H + 4\delta$. Par finitude locale uniforme de la famille des murs de X on en déduit qu'il existe un nombre uniformément borné n de murs qui coupent U et $[x, q]$. \square

Lemme 1.2.6. Il existe une constante k telle que pour tout sommet σ de C il existe une boule B de X de rayon k telle que tout demi-espace rencontrant B appartient à σ .

Démonstration. L'action du groupe G est cocompacte sur X , et la famille des murs de \mathcal{M} est localement finie alors il existe une constante uniforme m telle que n'importe quel point de X est contenu dans au plus m murs.

La distance sur X est quasi-isométrique au nombre de murs qui séparent deux points de X . On choisit la constante k telle que pour tout paire de points x, q avec $d(x, q) \geq k$ il existe au moins $4m + 2n + 1$ murs qui séparent x de q , avec n la constante du lemme 1.2.5.

Soit σ un sommet de C . On considère $c_x, x \in X$ un cube dual dans C le plus proche possible de σ pour la distance combinatoire dans $C^{(1)}$. Soit U un demi-espace de σ qui ne contient pas x . On note M le mur de \mathcal{M} associé au demi-espace U . Montrons par l'absurde que $d(x, U) < k$. Plus précisément, soit q un point de U le plus proche possible de x , on montre que si $d(x, U) \geq k$ alors le cube c_q dual à q est plus proche de σ que le cube c_x . Ceci rentre en contradiction avec le choix de c_x le plus proche possible de σ dans $C^{(1)}$.

On suppose par l'absurde que $d(x, q) \geq k$, étudions pour certains types de murs les divergences de choix de demi-espaces entre les sommets de c_x et de c_q .

Si M' est un mur de \mathcal{M} qui ne contient ni x ni q et qui ne sépare pas x de q alors un de ses deux demi-espaces est commun à tous les sommets de c_x et de c_q . En effet, comme M' ne sépare pas x de q les deux points sont dans un même demi-espace U' de M' . Comme de plus M' ne contient ni x ni q alors par définition du cube dual U' est dans tous les sommets de c_x et de c_q . Ces murs ne nous intéressent pas pour savoir lequel des cubes c_x ou c_q est le plus proche de σ .

Parmi les murs qui séparent x de q ceux qui ne contiennent ni x ni q et qui sont disjoints de U nous intéressent particulièrement. Soit M' un mur de \mathcal{M} qui satisfait toutes ces hypothèses. Comme U est disjoint de M' un des demi-espaces U' de M' contient U . En particulier, $q \in U'$. Comme q n'est pas dans M' on en déduit par définition du cube dual que U' appartient à tous les sommets de c_q . Comme M' sépare x de q alors $x \in V' = \overline{U'}$. Comme M' ne contient pas x alors V' appartient à tous les sommets de c_x . Enfin, comme $U \subset U'$ alors U' appartient à σ .

Il existe au plus $2m$ murs qui contiennent x ou q , et il existe au plus n murs de \mathcal{M} qui séparent x de q et qui intersectent U d'après le lemme 1.2.5. Si on note A le nombre de murs qui séparent x de q , on obtient alors qu'il existe au moins $A - 2m - n$ murs de \mathcal{M} qui séparent x de q sans intersecter U et sans contenir ni x ni q .

On a supposé que $d(x, q) \geq k$ ce qui implique que $A \geq 4m + 2n + 1$. Alors $A - 2m - n > \frac{A}{2}$.

On peut alors conclure que parmi les murs dont les choix de demi-espaces diffèrent entre c_x et c_q plus de la moitié ont un demi-espace en commun dans tous les sommets de c_q et dans σ , mais qui n'est dans aucun sommet de c_x . On en déduit que c_q est strictement plus proche de σ que c_x ce qui n'est pas possible. On a montré par l'absurde que $d(x, q) < k$. On a bien que la distance entre x et U est majorée par k , autrement dit U intersecte la boule de centre x et de rayon k . \square

Démonstration du Théorème 1.2.3. Le groupe G opère sur X avec quotient compact. Il existe donc un sous-ensemble compacte P de X tel que pour tout point x de X il existe un élément g de G tels que $g.x \in P$. Soit $N_k(P)$ le k -voisinage de P . On note S l'ensemble des sommets s qui vérifient : pour tout mur M disjoint de $N_k(P)$ le demi-espace $s(M)$ contient $N_k(P)$.

Un sommet de S est entièrement déterminé par le choix des demi-espaces associés aux murs qui intersectent $N_k(P)$. Par locale finitude de la famille \mathcal{M} et par compacité de $N_k(P)$ on en déduit que S est un ensemble fini de sommets de C . Montrons que pour tout sommet σ de C il existe un élément $g \in G$ tel que $g.\sigma \in S$.

Soit σ un sommet de C , d'après le lemme 1.2.6, il existe une boule B de X de rayon k telle que tout demi-espace disjoint de B n'est pas dans σ . Par la définition de P il existe un élément $g \in G$ qui envoie le centre de B dans P , on obtient alors $gB \subset N_k(P)$. Montrons que $g.\sigma \in S$.

Soit U un demi-espace associé à un mur M de \mathcal{M} disjoint de $N_k(P)$. Montrons que $U \notin g.\sigma$. Comme $U \cap N_k(P) = \emptyset$ et $gB \subset N_k(P)$ alors $U \cap gB = \emptyset$. On en déduit que $g^{-1}U \cap B = \emptyset$, et donc que $g^{-1}U \notin \sigma$. Finalement, on obtient que $U \notin g.\sigma$, et donc $g.\sigma \in S$. On a bien montré que l'action de G est cocompacte sur le complexe cubique dual C .

Reste à montrer que C est propre. Le lemme 1.2.5 permet d'obtenir le critère suivant de « compact-Wall » séparation évoqué dans Hruska-Wise ([HW14]) : soit K un compact de X , il existe une constante $f(K)$ telle que pour tout mur M de X tel que $d(K, M) \geq f(K)$ alors il existe un mur M' qui sépare M de K . Ce critère garantit la propriété de C , voir [HW14, Théorème 5.7].

En effet, il existe un nombre fini n_K de murs qui intersectent K . La distance sur X est quasi-isométrique au nombre de murs qui séparent deux points de X . Il existe donc une constante D telle que au moins $n_K + n + 1$ murs séparent deux points de X à distance au moins D (avec n comme dans le lemme 1.2.5). Alors n'importe quel mur M à distance D de K est séparé de K par un mur. Il suffit de considérer $[x, q]$ un segment minimal entre K et M avec x dans K et q dans M . D'après le lemme 1.2.5 au plus n murs intersectent $[x, q]$ et M . Par définition de la constante n_K au plus n_K murs intersectent K . Finalement au moins un mur sépare x de q sans intersecter ni M ni K . Il sépare donc M de K . Le critère est bien vérifié et C est propre. \square

1.2.2 Propreté de l'action

Définition 1.2.7. Soit (X, \mathcal{M}) un espace à murs. On dit que la famille de murs \mathcal{M} est *linéairement séparante* dans X s'il existe deux constantes $\kappa > 0$ et $\ell > 0$ telles que $\forall x, y \in X$, $\ell d(x, y) - \kappa \leq |x, y|$, avec $|x, y|$ le nombre de murs qui séparent x de y . On pourra dire que la famille de murs $\mathcal{M}(\ell, \kappa)$ -sépare linéairement deux points x et y de X si $\ell d(x, y) - \kappa \leq |x, y|$.

Remarque 1.2.8. Si un groupe G opère sur un espace à murs (X, \mathcal{M}) , alors G opère isométriquement sur le 1-squelette du complexe cubique dual à (X, \mathcal{M}) .

Le théorème suivant est l'adaptation d'un théorème de cubulation classique, ici nous suivons une preuve de [HW14] :

Théorème 1.2.9. Soit (X, \mathcal{M}) un espace à murs avec X un espace métrique propre. Soit G un groupe opérant sur (X, \mathcal{M}) de sorte que l'action de G sur X soit propre. On suppose de plus que le complexe cubique C dual à (X, \mathcal{M}) est propre. Si la famille \mathcal{M} sépare linéairement X alors G opère proprement sur le complexe cubique dual à (X, \mathcal{M}) .

Démonstration. Raisonnons par contraposée, montrons que si l'action de G sur C n'est pas propre alors l'action de G sur X n'est pas propre.

Si l'action de G sur C n'est pas propre alors il existe un compact K de C tel que l'ensemble $I = \{g \in G, gK \cap K \neq \emptyset\}$ est infini. Comme K est un compact de C il existe un nombre fini de sommets dans K . Les éléments de I envoient un sommet de K sur un autre sommet de K . Il n'existe qu'un nombre fini de permutations des sommets de K . Il existe alors deux sommets k_1 et k_2 et une infinité d'éléments deux à deux différents $h_1, h_2, h_3 \dots h_i \dots$ de I tels que $h_i k_1 = k_2$. Chaque élément $g_i := h_1^{-1} h_i$ envoie k_1 sur lui-même, et les g_i sont deux à deux différents.

Soit x_0 un point de X . D'après le lemme 1.1.17, le sommet k_1 est à distance finie r du cube c_{x_0} dual à x_0 . Pour tout élément g_i comme décrit ci-dessus on a : $d_C(c_{x_0}, k_1) = d_C(g_i \cdot c_{x_0}, g_i \cdot k_1)$. De plus $d_C(g_i \cdot c_{x_0}, g_i \cdot k_1) = d_C(g_i \cdot c_{x_0}, k_1)$ car les g_i stabilisent k_1 . On obtient alors que $d_C(g_i \cdot c_{x_0}, k_1) = r$. Finalement, on a $d_C(c_{x_0}, g_i \cdot c_{x_0}) \leq d_C(c_{x_0}, k_1) + d_C(k_1, g_i \cdot c_{x_0}) = 2r$.

Par définition de l'action de G sur le complexe cubique dual C on a : $g_i \cdot c_{x_0} = c_{(g_i \cdot x_0)}$. On obtient alors $d_C(c_{x_0}, c_{(g_i \cdot x_0)}) \leq 2r$.

La distance combinatoire sur $C^{(1)}$ entre deux cubes duaux $d_C(c_x, c_y)$ est supérieure ou égale au nombre de murs qui séparent x de y . En effet, si un mur M sépare c_x de c_y et si on suppose qu'un des demi-espaces U de M appartient à tous les sommets de c_x alors V appartient à tous les sommets de c_y . Tout chemin qui relie c_x à c_y passera au moins une fois par une arête duale à chaque mur qui sépare c_x de c_y . On peut donc écrire $|x_0, g_i \cdot x_0| \leq d_C(c_{x_0}, c_{(g_i \cdot x_0)})$.

Comme \mathcal{M} sépare linéairement X , il existe deux constantes κ et ℓ telles que $\ell d(x_0, g_i \cdot x_0) - \kappa \leq |x_0, g_i \cdot x_0|$. On obtient alors que $\ell d(x_0, g_i \cdot x_0) - \kappa \leq 2r$. Ainsi, pour une infinité d'éléments g_i de G la distance entre x_0 et $g_i \cdot x_0$ est majorée, ce qui contredit la propriété de l'action de G sur X . \square

Chapitre 2

Revêtements ramifiés

2.1 Revêtements ramifiés topologiques

2.1.1 Définitions

Définition 2.1.1. Soit (V, L) et (V', L') deux couples de variétés topologiques, avec L et L' deux sous-variétés fermées de codimension 2 dans V et V' (pas connexes en général). Une application continue $p : V' \rightarrow V$, avec $p^{-1}(L) = L'$, ce nous abrègerons par $p : (V', L') \rightarrow (V, L)$, est un *revêtement ramifié* si :

1. La restriction $p|_{V' \setminus L'} : V' \setminus L' \rightarrow V \setminus L$ est un revêtement.
2. La restriction $p|_{L'} : L' \rightarrow L$ est un revêtement.
3. (trivialisation locale) Pour tout point $x \in L$, il existe un voisinage connexe U de x dans V tel que la préimage $p^{-1}(U)$ est une union disjointe $p^{-1}(U) = \sqcup_{j \in J} U'_j$, avec les propriétés suivantes.

Il existe :

- un voisinage B de x dans L (contenu dans U) et un homéomorphisme $\phi : U \rightarrow \mathbb{D} \times B$,
- un homéomorphisme $\phi_j : U'_j \rightarrow \mathbb{D} \times B$ et un entier $k_j \geq 1$ (pour tout $j \in J$), de sorte que $\phi(x) = (0, x)$ pour tout $x \in B$, et de plus le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 U'_j & \xrightarrow{\phi_j} & \mathbb{D} \times B \\
 p \downarrow & & \downarrow \rho_j \times Id \\
 U & \xrightarrow{\phi} & \mathbb{D} \times B
 \end{array}$$

Ici ρ_j désigne l'application $z \mapsto z^{k_j}$ sur le disque euclidien \mathbb{D} .

On dira que L' (ou L) est le *lieu de ramification*.

On appelle *degré* d'un revêtement ramifié p le degré du revêtement $p|_{V' \setminus L'}$. On remarque

que si p est un revêtement ramifié de degré fini k alors l'ordre au voisinage de toute composante connexe du lieu de ramification est inférieur ou égal à k .

On considère aussi une condition de trivialisatation plus forte que celle de la définition ci-dessus :

Trivialisatation globale :

Pour toute composante connexe L_i de L , il existe un voisinage $N(L_i)$ de L_i dans V tel que la préimage $p^{-1}(N(L_i))$ est une union disjointe $\sqcup_{j \in J} N'_j$, avec les propriétés suivantes.

D'abord N'_j contient une composante connexe L'_j de L' telle que $p(L'_j) = L_i$.

Ensuite il existe :

- un homéomorphisme $\phi : N(L_i) \rightarrow \mathbb{D} \times L_i$ (tel que $\phi(x) = (0, x)$ pour tout $x \in L_i$) ;
- un homéomorphisme $\phi_j : N'_j \rightarrow \mathbb{D} \times L'_j$ (tel que $\phi(x') = (0, x')$ pour tout $x' \in L'_j$) et un entier $k_j \geq 1$ (pour tout $j \in J$) ;

tels que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc} N'_j & \xrightarrow{\phi_j} & \mathbb{D} \times L'_j \\ p \downarrow & & \downarrow \rho_j \times p \\ N(L_i) & \xrightarrow{\phi} & \mathbb{D} \times L_i \end{array}$$

Enfin on demande que p induise un homéomorphisme de L'_j sur L_i .

Ici ρ_i désigne la rotation d'ordre k_i du disque euclidien \mathbb{D} .

On appelle *voisinage de ramification* autour de L'_j un tel voisinage N'_j et on appelle *ordre de ramification* au voisinage de L'_j l'entier k_j .

Lemme 2.1.2. Soit $p : (V', L') \rightarrow (V, L)$ un revêtement ramifié. Si chaque composante connexe de L est simplement connexe alors p vérifie la condition de trivialisatation globale.

Lemme 2.1.3. Soit $p : (V', L') \rightarrow (V, L)$ un revêtement ramifié. Soit V'_0 une composante connexe de V' et soit V_0 une composante connexe de V telle que $p(V'_0) \subset V_0$. Soit L'_0 l'intersection de L' avec V'_0 . Soit L_0 l'intersection de V_0 et de L . Alors $p(V'_0) = V_0$ et $p|_{V'_0} : (V'_0, L'_0) \rightarrow (V_0, L_0)$ est un revêtement ramifié.

Démonstration. Montrons d'abord que $p(V'_0)$ est ouvert et fermé dans V . Soit x' un point de V'_0 . Posons $x = p(x')$. Si $x' \in L'$ considérons les ouverts de trivialisatation locale U, U' en x, x' . Alors $p(U') = U$. Donc $p(V'_0)$ est voisinage de x . Si $x' \notin L'$ alors p est homéomorphisme local au voisinage de x' , donc $p(V'_0)$ est voisinage de x également. Ainsi $p(V'_0)$ est ouvert.

Soit x un point de V adhérent à $p(V'_0)$. Si $x \notin L$ notons alors U un ouvert connexe de $V \setminus L$ qui contient x et qui trivialisat le revêtement $p : V' \setminus L' \rightarrow V \setminus L$. Si $x \in L$ soit U un ouvert de trivialisatation de p en x . Soit $y \in U \cap p(V'_0)$, que l'on écrit $y = p(y')$ avec $y' \in V'_0$. La composante connexe de $p^{-1}(U)$ qui contient y' est un ouvert connexe U' tel que $p : U' \rightarrow U$ est surjective. Alors $U' \subset V'_0$ et $p(V'_0)$ contient x . Ainsi $p(V'_0)$ est fermé.

Par connexité $p(V'_0) = V_0$.

Montrons que la restriction de p à V_0 est un revêtement ramifié. Soit $x \in V_0$, soit U un ouvert de trivialisatation. Par définition on a $p^{-1}(U) = \sqcup_{j \in J} U'_j$. Comme V'_0 est une composante connexe de V' alors pour tout j on a $U_j \subset V'_0$ ou $U_j \cap V'_0 = \emptyset$. Alors U est bien un ouvert de trivialisatation pour $p : V'_0 \rightarrow V_0$. □

Corollaire 2.1.4. Soit $p : (V', L') \rightarrow (V, L)$ un revêtement ramifié. Toute composante connexe V_0 de V est l'image d'une composante connexe V'_0 de V' .

Démonstration. Par hypothèse $p : V' \setminus L' \rightarrow V \setminus L$ est surjective. Donc il existe une composante connexe V'_0 de V' telle que $p(V'_0) \cap (V_0 \setminus L) \neq \emptyset$. Par connexité $p(V'_0) \subset V_0$ et on conclut par le lemme 2.1.3. □

Remarque 2.1.5. Un revêtement ramifié $p : (V', L') \rightarrow (V, L)$ est un revêtement si et seulement si la restriction de p à chaque voisinage de ramification induit l'application identité sur le facteur \mathbb{D} , i.e. si chaque ordre de ramification k_i est égal à 1.

Lemme 2.1.6. La composé d'un revêtement ramifié et d'un revêtement est un revêtement ramifié.

Remarque 2.1.7. Soit $p : (V', L') \rightarrow (V, L)$ et $p' : (V'', L'') \rightarrow (V', L')$ deux revêtements ramifiés. Alors l'application $p \circ p' : (V'', L'') \rightarrow (V, L)$ est un revêtement ramifié.

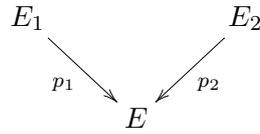
On suppose que $p : (V', L') \rightarrow (V, L)$ est un revêtement ramifié entre variétés connexes. On note $\pi : X \rightarrow V$ le revêtement universel de V et $\pi' : X' \rightarrow V'$ le revêtement universel de V' . On note alors K la préimage de L par π dans X , et K' la préimage de L' par π' dans X' .

Lemme 2.1.8. Il existe un revêtement ramifié $f : (X', K') \rightarrow (X, K)$ qui fait commuter le diagramme ci-dessous.

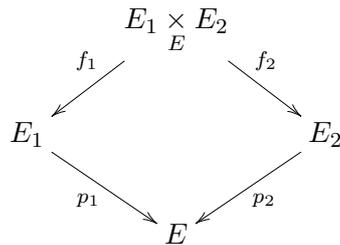
$$\begin{array}{ccc}
 & (X', K') & \\
 \pi' \swarrow & & \searrow f \\
 (V', L') & & (X, K) \\
 p \searrow & & \swarrow \pi \\
 & (V, L) &
 \end{array}$$

Introduisons quelques outils pour montrer ce lemme, en particulier on fait appel à la notion de produit fibré. On rappelle dans un premier temps la construction classique ensembliste :

Définition 2.1.9. Soit $p_1 : E_1 \rightarrow E$ et $p_2 : E_2 \rightarrow E$ deux applications.

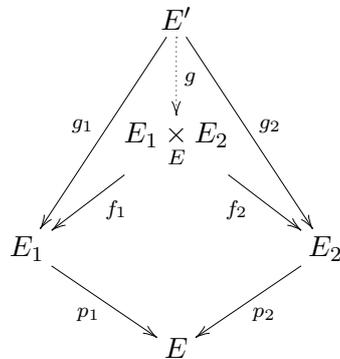


On définit le *produit fibré* de E_1 et de E_2 par $E_1 \times_E E_2 = \{(e_1, e_2) \in E_1 \times E_2 \mid p_1(e_1) = p_2(e_2)\}$. On obtient naturellement le diagramme commutatif suivant,



où f_1 et f_2 sont les projections de $E_1 \times_E E_2$ sur le premier et le deuxième facteur. On note $p_1 \times_E p_2 = p_1 \circ f_1 = p_2 \circ f_2$.

Le produit fibré satisfait la propriété universelle suivante. Soit E' un ensemble, et $g_i : E' \rightarrow E_i$, pour $i = 1, 2$, des applications telles que $p_1 \circ g_1 = p_2 \circ g_2$, alors il existe une unique application $g : E' \rightarrow E_1 \times_E E_2$ telle que $g_i = f_i \circ g$.



Remarque 2.1.10. Si E_1 et E_2 sont des espaces topologiques et que les applications $p_1 : E_1 \rightarrow E$ et $p_2 : E_2 \rightarrow E$ sont continues alors le produit fibré est muni d'une topologie, comme sous-espace du produit d'espace topologique $E_1 \times E_2$. De plus, il n'est pas difficile de vérifier que toutes les applications sont continues et que la propriété universelle est vraie dans le cadre des applications continues.

Soient $p_1 : E_1 \rightarrow E$ et $p_2 : E_2 \rightarrow E$ deux applications. Soit $F \subset E$, on note $F_1 = p_1^{-1}(F)$ et $F_2 = p_2^{-1}(F)$. Les restrictions $p_1|_{F_1}$ et $p_2|_{F_2}$ permettent de construire le produit fibré $F_1 \times_F F_2$.

On observe que $F_1 \times_F F_2 = \{(x_1, x_2) \in F_1 \times F_2 \mid p_{1|F_1}(x_1) = p_{2|F_2}(x_2)\}$ est un sous-espace de $E_1 \times_E E_2 = \{(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2 \mid p_1(x_1) = p_2(x_2)\}$ car $p_{i|F_i}$ est la restriction de p_i à F_i .

Remarque 2.1.11. Les deux espaces $E_1 \times_E E_2 \setminus (F_1 \times_F F_2)$ et $E_1 \setminus_{E \setminus F} F_1 \times E_2 \setminus F_2$ sont égaux, et la restriction $p_1 \times_E p_{2|E_1 \times_E E_2 \setminus (F_1 \times_F F_2)}$ est égale à l'application $p_{1|(E_1 \setminus F_1)} \times_{E \setminus F} p_{2|(E_2 \setminus F_2)}$.

Pour montrer la première égalité on observe que si $(x_1, x_2) \in E_1 \times_E E_2$ et que $x_1 \in F_1$ alors $p_1(x_1) = p_2(x_2) \in F$ et donc $x_2 \in F_2$. De même si $x_2 \in F_2$ alors $x_1 \in F_1$. On en déduit que

$$\begin{aligned} E_1 \times_E E_2 \setminus (F_1 \times_F F_2) &= \{(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2 \mid p_1(x_1) = p_2(x_2)\} \setminus \{(x_1, x_2) \in F_1 \times F_2 \mid \\ &\quad p_1(x_1) = p_2(x_2)\} \\ &= \{(x_1, x_2) \in E_1 \setminus F_1 \times E_2 \setminus F_2 \mid p_1(x_1) = p_2(x_2)\} \\ &= E_1 \setminus_{E \setminus F} F_1 \times E_2 \setminus F_2. \end{aligned}$$

Par construction du produit fibré $p_1 \times p_2$, il existe deux applications f_1 et f_2 qui sont les projections de $E_1 \times_E E_2$ sur E_1 ou E_2 . De même, par construction du produit fibré $p_{1|(E_1 \setminus F_1)} \times_{E \setminus F} p_{2|(E_2 \setminus F_2)}$ il existe deux applications g_1 et g_2 qui sont les projections de $E_1 \setminus_{E \setminus F} F_1 \times E_2 \setminus F_2$ sur $E_1 \setminus F_1$ ou $E_2 \setminus F_2$. Les applications f_i et g_i coïncident sur $E_1 \setminus_{E \setminus F} F_1 \times E_2 \setminus F_2 = E_1 \times_E E_2 \setminus (F_1 \times_F F_2)$. On en déduit que sur $E_1 \times_E E_2 \setminus (F_1 \times_F F_2)$ on a $p_1 \times_E p_2 = p_1 \circ f_1 = p_1 \circ g_1 = p_{1|(E_1 \setminus F_1)} \times_{E \setminus F} p_{2|(E_2 \setminus F_2)}$.

Remarque 2.1.12. Soient $p_1 : E_1 \rightarrow E$, $p_2 : E_2 \rightarrow E$, $q_1 : A_1 \rightarrow A$ et $q_2 : A_2 \rightarrow A$ quatre applications. Le produit fibré et le produit d'application commute, autrement dit les deux applications $(p_1 \times q_1) \times_{E \times A} (p_2 \times q_2)$ et $(p_1 \times_E p_2) \times_A (q_1 \times q_2)$ sont égales, à permutation de composantes près.

Pour construire une application de revêtement ramifié $f : (X', K') \rightarrow (X, K)$ on va considérer le produit fibré entre (V', L') et (X, K) . On va avoir besoin de montrer que le produit fibré respecte la structure de revêtement ramifié. En particulier, étudions le produit fibré de deux revêtements ramifiés du disque.

Lemme 2.1.13. Soient D , D_1 et D_2 trois copies du disque unité \mathbb{D} . Notons $p_1 : D_1 \rightarrow D$ l'application $z \mapsto z^{k_1}$, et $p_2 : D_2 \rightarrow D$ l'application $z \mapsto z^{k_2}$. Alors le produit fibré $D_1 \times_D D_2$ est homéomorphe à la réunion disjointe de $k_1 \wedge k_2$ copies de \mathbb{D} et sur chaque copie la restriction de $p_1 \times_D p_2 : D_1 \times_D D_2 \rightarrow D$ induit la projection quotient

$$\mathbb{D} \rightarrow D, \quad z \mapsto z^k,$$

avec $k = \text{ppcm}(k_1, k_2)$. Enfin, toujours en restriction à chaque composante connexe de $D_1 \times_D D_2$ et pour $i = 1$ ou 2 , l'application $f_i : D_1 \times_D D_2 \rightarrow D_i$ induit un revêtement ramifié équivalent à la projection quotient

$$\mathbb{D} \rightarrow D, z \mapsto z^{n_i},$$

avec $n_i = \frac{\text{ppcm}(k_1, k_2)}{k_i}$.

Démonstration. Notons $d = k_1 \wedge k_2$ le pgcd de k_1 et k_2 . On a alors $k_1 = dn_2$, $k_2 = dn_1$ et $k = dn_1n_2$. Les entiers n_1 et n_2 étant premier entre eux, il existe deux entiers m_1 et m_2 tels que $m_2n_1 + m_1n_2 = 1$. Notons \mathbb{U}_d l'ensemble des racines d -ème de l'unité. L'application

$$\mathbb{U}_d \times \mathbb{D} \rightarrow D_1 \times_D D_2; (\xi, z) \mapsto (\xi^{m_1} z^{n_1}, \xi^{-m_2} z^{n_2})$$

est bijective d'inverse $(u, v) \mapsto (u^{n_2} v^{-n_1}, u^{m_2} v^{m_1})$. Dans ces coordonnées, l'application $p_1 \times p_2$ qui associe à $(u, v) \in D_1 \times_D D_2$ l'élément $u^{k_1} = v^{k_2}$ devient $(\xi, z) \mapsto z^k$. Enfin, pour $i = 1$ ou 2 l'application f_i devient $(\xi, z) \mapsto \xi^{(-1)^{i+1}m_i} z^{n_i}$. \square

Lemme 2.1.14. Soient $p_1 : (V_1, L_1) \rightarrow (V, L)$ et $p_2 : (V_2, L_2) \rightarrow (V, L)$ deux revêtements ramifiés.

$$\begin{array}{ccc} (V_1, L_1) & & (V_2, L_2) \\ & \searrow p_1 & \swarrow p_2 \\ & (V, L) & \end{array}$$

Alors le produit fibré $p_1 \times p_2 : (V_1 \times_V V_2, L_1 \times_L L_2) \rightarrow (V, L)$ ainsi que les applications $f_1 : (V_1 \times_V V_2, L_1 \times_L L_2) \rightarrow (V_1, L_1)$ et $f_2 : (V_1 \times_V V_2, L_1 \times_L L_2) \rightarrow (V_2, L_2)$ sont des revêtements ramifiés. De plus, si on suppose que p_1 est un revêtement alors f_2 est un revêtement.

Démonstration. D'après la remarque 2.1.11, on a $(p_1 \times_V p_2)|_{(V_1 \setminus L_1 \times_{V \setminus L} V_2 \setminus L_2)} = p_1|_{V_1 \setminus L_1} \times_{V \setminus L} p_2|_{V_2 \setminus L_2}$. Par hypothèse les applications p_1 et p_2 sont des revêtements ramifiés, donc $p_1|_{V_1 \setminus L_1}$ et $p_2|_{V_2 \setminus L_2}$ sont des revêtements de $V \setminus L$. On en déduit que $(p_1 \times_V p_2)|_{(V_1 \setminus L_1 \times_{V \setminus L} V_2 \setminus L_2)}$ est un revêtement. Montrons la condition de trivialisations locale.

Soit x un point de V , on considère U^1 et U^2 deux trivialisations pour les revêtements ramifiés p_1 et p_2 . En particulier, il existe deux homéomorphismes $\phi^i : U^i \rightarrow \mathbb{D} \times B_i$. On note U_j^1 un voisinage de trivialisations de V_1 au-dessus de U^1 pour p_1 . On considère le voisinage de $\phi^1(x)$ de la forme $D_r \times B \subset \phi^1(U^1 \cap U^2)$ avec D_r un disque de rayon $0 < r < 1$ et B un sous-espace connexe de B_1 . On note $U = (\phi^1)^{-1}(D_r \times B)$. Chaque espace $\phi^2 \circ (\phi^1)^{-1}(D_r \times \{b\})$ est homéomorphe à un disque, de même sa préimage dans un voisinage U_j^2 est homéomorphe à un disque. L'action de rotation ρ_j décrite sur $B_2 \times U_j$ induit alors une rotation sur ce disque. On décrit alors le produit fibré $p_1 \times_V p_2$ dans $D_r \times B$

et dans sa préimage dans U_j^1 . Par le lemme 2.1.12 $p_1 \times_V p_2$ est le produit entre l'identité sur B et un produit fibré de revêtements ramifiés de disques. D'après le lemme 2.1.13 on obtient bien un revêtement ramifié. Les ordres des applications sont donnés par ce revêtement du disque. Ainsi, si on suppose que p_1 est un revêtement alors l'ordre associé à f_2 sur U_j est $\frac{\text{ppcm}(1, k_2)}{k_2} = 1$. On obtient bien que f_2 est un revêtement si on a supposé que p_1 est un revêtement. \square

Démonstration du lemme 2.1.8. On considère le produit fibré de p et π ,

$$\begin{array}{ccc}
 & (V' \times_V X, L' \times_L K) & \\
 f_1 \swarrow & & \searrow f_2 \\
 (V', L') & & (X, K) \\
 p \searrow & & \swarrow \pi \\
 & (V, L) &
 \end{array}$$

D'après le lemme 2.1.14 le produit fibré $p \times_V \pi : (V' \times_V X, L' \times_L K) \rightarrow (V, L)$ est un revêtement ramifié, et l'application $f_1 : (V' \times_V X, L' \times_L K) \rightarrow (V', L')$ est un revêtement. On choisit une composante connexe Y de $(V' \times_V X, L' \times_L K)$. La restriction de $p \times_V \pi$ à Y est un revêtement ramifié de (V, L) d'après le lemme 2.1.3 et la restriction de f_1 à Y est un revêtement de (V', L') . Par propriété universelle l'application de revêtement universelle $h : X' \rightarrow V'$ se factorise par le revêtement $f_1|_Y$. On note g l'application entre (X', K') et Y telle que $f_1 \circ g = h$. L'application f est alors définie comme la composition d'application $f_2 \circ g$. C'est un revêtement ramifié d'après le lemme 2.1.6.

$$\begin{array}{ccc}
 & (X', K') & \\
 g \downarrow & & \searrow f \\
 & Y & \\
 f_1 \swarrow & & \searrow f_2 \\
 (V', L') & & (X, K) \\
 p \searrow & & \swarrow \pi \\
 & (V, L) &
 \end{array}$$

\square

2.1.2 Revêtements ramifiés cycliques

On construit un exemple simple de revêtement ramifié de variété topologique appelé *revêtement ramifié cyclique* associé à une sous-variété à bord de codimension 1.

Soit V une variété topologique orientée fermée, et soit C une sous-variété topologique compacte orientée à bord de codimension 1 de V . On note L le bord de C et on choisit un entier $k \in \mathbb{N}$. On construit une variété topologique V' , une sous-variété L' de V' et un revêtement ramifié $p : (V', L') \rightarrow (V, L)$ de la façon suivante.

Soit $U = V \setminus C$. Au voisinage d'un point de $C \setminus L$ la variété $V \setminus C$ possède deux côtés. On \bar{U} le recollement de U avec deux copies C^1 et C^2 de C de chaque côté de $C \setminus L$. En particulier les deux composantes connexes C^1 et C^2 ont un bord commun isomorphe à L . On considère $\bar{U}_1, \dots, \bar{U}_k$, k copies de l'espace \bar{U} . On note C_i^1 et C_i^2 , pour $i = 1, \dots, k$ les copies des sous-variétés C^1 et C^2 dans \bar{U}_i . Enfin, on définit V' comme le recollement cyclique de \bar{U}_i avec \bar{U}_{i+1} en identifiant C_i^2 avec C_{i+1}^1 pour $i \in \mathbb{Z}_k$.

Dans l'espace \bar{U} il existe une unique copie de L , alors dans chacune des k copies de \bar{U}_i il existe une copie L_i de L . Cependant ces copies sont à la fois dans C_i^1 et dans C_i^2 . Tous les L_i sont donc identifiés dans V' . On définit alors p comme l'application qui envoie identiquement tout espace \bar{U}_i sur \bar{U} .

L'application $p : V' \setminus L' \rightarrow V \setminus L$ est un revêtement. En effet, pour tout point x de U n'importe quel petit boule ouverte incluse dans U et qui contient x a pour préimage l'union disjointe de k ouvert. Pour $x \in \partial\bar{U} \setminus L$ on choisit une petite boule disjointe de L et qui contient x . Dans \bar{U} cette boule est l'union de demi-boules. La préimage de ces demi-boules dans V' est un union $2k$ demi-boules qui se recollent deux à deux. Enfin, on décrit une trivialisatation globale. On choisit un voisinage tubulaire N de L dans V homéomorphe à $\mathbb{D} \times L$. On considère N' la préimage de N dans V' . Alors N' est homéomorphe à $\mathbb{D} \times L'$ et l'application p qui envoie \bar{U}_i à \bar{U} décrit le quotient par une rotation sur \mathbb{D} .

2.2 Revêtements ramifiés de variétés hyperboliques

Dans cette partie nous allons nous concentrer sur des revêtements ramifiés de degrés finis de variétés hyperboliques. Nous allons expliciter une métrique sur un revêtement ramifié de variété hyperbolique et montrer que la métrique ainsi obtenue possède de bonnes propriétés. En particulier, c'est une métrique géodésique localement $\text{CAT}(-1)$. On définira aussi quelques notions utilisées dans la partie 4.4.

2.2.1 Construction de la métrique sur le revêtement ramifié

Soit V une variété hyperbolique compacte, et soit L une sous-variété de codimension 2 de V telle que chaque composante connexe soit totalement géodésique. Soit $p : (V', L') \rightarrow (V, L)$ un revêtement ramifié topologique fini. On note $\pi : (X, K) \rightarrow (V, L)$ le revêtement universel de (V, L) et $\pi' : (X', K') \rightarrow (V', L')$ le revêtement universel de (V', L') . On a vu dans la section précédente, plus particulièrement dans le lemme 2.1.8, qu'il existe une application de revêtement ramifié $f : (X', K') \rightarrow (X, K)$. On va construire une métrique sur X' à partir de celle de $X = \mathbb{H}^n$: on décrit localement la métrique sur certains sous-

espaces de X' , noté *voisinages fondamentaux*, des petites boules ouvertes loin des lieux singuliers et des *quartiers* de voisinages de ramification.

Soit x un point de $X' \setminus K'$. Par définition du revêtement ramifié topologique la restriction de l'application $f|_{X' \setminus K'}$ est un revêtement. On considère une boule ouverte B de \mathbb{H}^n autour de $f(x)$ telle que la préimage de B dans X' soit une union de boules disjointes. On note B' la composante connexe de $f^{-1}(B)$ qui contient x . L'application $f|_{B'} : B' \rightarrow B$ est un homéomorphisme. On définit alors la distance entre deux points $y, z \in B'$ comme la distance entre $f(y)$ et $f(z)$.

Soit x' un point de K' . On note $x = f(x')$. On considère K_0 et K'_0 les composantes connexes de K et de K' qui contiennent respectivement x et x' . D'après le lemme 2.1.2 il existe deux voisinages de ramification $N(K'_0)$ et $N(K_0)$ qui trivialisent f . On considère $N_\epsilon(K_0)$ un ϵ voisinage de K_0 tel que $N_\epsilon(K_0) \subset N(K_0)$. On note $N_\epsilon(K'_0) = N(K'_0) \cap f^{-1}(N_\epsilon(K_0))$, c'est un voisinage de ramification pour f .

Soit W une sous-variété connexe, de codimension 1 de \mathbb{H}^n et totalement géodésique qui contient K_0 . Alors $N_\epsilon(K_0) \setminus (W \cap N_\epsilon(K_0))$ possède deux composantes connexes. On note Q et R les adhérences de ces composantes connexes dans $N_\epsilon(K_0)$. L'espace $(W \setminus K_0) \cap N_\epsilon(K_0)$ possède deux composantes connexes, on appelle W^+ et W^- les adhérences de ces deux composantes connexes dans $N_\epsilon(K_0)$. L'application f est un revêtement cyclique entre $N_\epsilon(K'_0) \setminus K'_0$ et $N_\epsilon(K_0) \setminus K_0$ et les espaces $Q \setminus K_0$ et $R \setminus K_0$ sont simplement connexes. Si f est d'ordre fini k sur $N(K'_0)$ alors il existe k sous-espaces Q_1^*, \dots, Q_k^* de $N_\epsilon(K'_0)$ identifiés par f à $Q \setminus K_0$ et k sous-espaces R_1^*, \dots, R_k^* de $N_\epsilon(K_0)$ identifiés par f à $R \setminus K_0$.

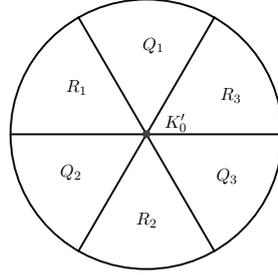
Montrons que l'adhérence de Q_i^* dans X' est l'union $Q_i^* \cup K'_0$. (De même on aura que l'adhérence de R_i^* est l'union $R_i^* \cup K'_0$.) Soit $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de points de Q_i^* qui tends vers un point y de X' . Alors par continuité de f la suite $(f(y_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $f(y)$. En particulier $f(y)$ appartient à K_0 . Par définition de la trivialisatation globale $f : K'_0 \rightarrow K_0$ est un homéomorphisme. Alors $y \in K'_0$.

On note Q_1, \dots, Q_k l'adhérence des espaces Q_1^*, \dots, Q_k^* et R_1, \dots, R_k l'adhérence des espaces R_1^*, \dots, R_k^* . L'application f envoie alors identiquement chaque espace Q_i sur Q et R_i sur R . On appelle *quartiers* de $N_\epsilon(K'_0)$ les sous-espaces Q_i et R_i .

L'intersection entre deux quartiers de $N_\epsilon(K'_0)$ est soit K'_0 soit une copie de W^+ ou de W^- . On note W_1, \dots, W_{2k} ces intersections entre deux Q_i et R_j isomorphes à W^+ ou W^- . On dira que les espaces W_1, \dots, W_{2k} sont *cycliquement ordonnés* si pour tout $i \in \mathbb{Z}_{2k}$ W_i et W_{i+1} appartiennent au bord d'un même quartier de $N_\epsilon(K_0)$. De même on peut renuméroter les quartiers Q_i et R_i de façon à ce que pour tout $i \in \mathbb{Z}_k$ le quartier Q_i partage un sous-espace W_j avec R_i et R_{i+1} .

Chaque quartier Q_i ou R_i est un voisinage fondamental de V' , on définit la métrique sur un quartier S de la façon suivante : la distance entre deux points x et y de S est donnée par la distance entre $f(x)$ et $f(y)$ dans $f(S)$.

On remarque que par définition la métrique définie sur les différents voisinages fonda-

FIGURE 2.1 – Découpage de $N(K'_0)$ en quartiers

mentaux est compatible sur l'intersection de deux de ces voisinages. On peut aussi remarquer que l'image par f d'un voisinage fondamental est convexe, alors la métrique sur les voisinages fondamentaux de X' est géodésique. Enfin, on remarque que par définition la restriction de f à un voisinage fondamental est une isométrie sur son image.

Soient x_1, \dots, x_n des points de X' tels que chaque paire de points x_i, x_{i+1} appartienne à un voisinage fondamental de X' , en particulier il existe un segment géodésique entre x_i et x_{i+1} . On appelle alors ligne brisée entre x_1 et x_n l'union des segments géodésiques entre x_i et x_{i+1} .

Définition 2.2.1. La pseudo-métrique entre deux points x et y de X' est donnée par

$$d(x, y) = \inf\{\text{long}(\gamma), \gamma \text{ ligne brisée de } x \text{ à } y\}.$$

Remarque 2.2.2. Pour toute paire de points x, y de X' on a l'inégalité suivante : $d(f(x), f(y)) \leq d(x, y)$. En effet, l'image par f d'une ligne brisée est une géodésique par morceaux de \mathbb{H}^n de même longueur. Ainsi, l'image d'un segment géodésique entre x et y est un chemin de même longueur entre $f(x)$ et $f(y)$. Donc la longueur entre $f(x)$ et $f(y)$ est inférieure à celle entre x et y .

Lemme 2.2.3. La pseudo-métrique coïncide avec la métrique donnée sur les voisinages fondamentaux. De plus les voisinages fondamentaux décrit comme des relevés de boules sont des boules de X' de même rayon, et les voisinages de type $N_\epsilon(K'_0)$ sont des ϵ -voisinages de K'_0 dans X' .

Démonstration. Soit S un voisinage fondamental de X' et soient x et y deux points de S . Il existe une ligne brisée avec un unique segment dans S entre x et y de longueur $d(f(x), f(y))$. On en déduit que $d(y, x) \leq d(f(x), f(y))$. De plus d'après le remarque 2.2.2 on a $d(f(x), f(y)) \leq d(x, y)$. On en déduit que la distance entre x et y est égale à la distance entre $f(x)$ et $f(y)$ dans \mathbb{H}^n .

Soit S un voisinage fondamental, relevé d'une boule de \mathbb{H}^n de rayon ϵ . On note x le point de S qui s'envoie sur le centre de la boule $f(S)$. Comme l'application f est une isométrie en restriction à S alors tous les points de S sont à distance $\leq \epsilon$ de x . De plus, tout point à l'extérieur de S est à distance au moins ϵ de x . En effet, une ligne brisée entre un point y de $X' \setminus S$ et x s'envoie sur une géodésique par morceaux dont un sous-segment géodésique strict va du bord de la boule $f(S)$ au centre $f(x)$. La longueur de cette ligne brisée est alors strictement supérieure à ϵ .

On pourra faire un raisonnement similaire sur les voisinages fondamentaux de type $N_\epsilon(K'_0)$. \square

Corollaire 2.2.4. L'application $f : X' \setminus K' \rightarrow \mathbb{H}^n \setminus K$ est une isométrie locale.

Lemme 2.2.5. La pseudo-métrique de la définition 2.2.1 est une métrique.

Démonstration. Soient x, y deux points de X' tels que $d(x, y) = 0$. Si $x \notin K'$ alors il existe un voisinage fondamental fermé S disjoint de K' qui contient x . D'après le lemme 2.2.3 S est le ϵ -voisinage d'un point x de X' , alors si x appartient à S alors y appartient à S . Comme la pseudo-distance sur S coïncide avec la distance définie sur S et que $d(x, y) = 0$ alors $x = y$.

Si x appartient à une composante connexe K'_0 de K' . D'après le lemme 2.2.3, un voisinage fondamental $N_\epsilon(K'_0)$ de K'_0 est le ϵ -voisinage de K'_0 dans X' . Alors comme $d(x, y) = 0$ on en déduit que y appartient à $N_\epsilon(K'_0)$. L'espace $N_\epsilon(K'_0)$ est union de différents quartiers, et au moins l'un de ces quartiers contient y . Comme la pseudo-métrique sur X' et la métrique sur $N_\epsilon(K'_0)$ coïncident et que $d(x, y) = 0$ alors $x = y$. \square

Lemme 2.2.6. La définition de la distance d sur X' ne dépend pas du choix des voisinages fondamentaux.

Démonstration. On considère deux familles \mathcal{F}_1 et \mathcal{F}_2 de voisinages fondamentaux tels que chacun recouvre X' . Soient d_1 et d_2 les deux métriques construites à partir des familles \mathcal{F}_1 et \mathcal{F}_2 comme ci-dessus. Montrons que ces deux métriques coïncident.

Soient x et y deux points de X' . Soit $(\gamma_n^1)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de lignes brisées dans des voisinages de \mathcal{F}_1 d'extrémités x et y telle que la suite des longueurs des lignes brisées $(\gamma_n^1)_{n \in \mathbb{N}}$ tende vers $d_1(x, y)$ quand n tend vers l'infini. On peut subdiviser chaque ligne brisée γ_i^1 en une ligne brisée γ_i telle que chaque segment géodésique appartienne à la fois aux voisinages de \mathcal{F}_1 et aux voisinages de \mathcal{F}_2 . La longueur des lignes brisées γ_i est la même que celle des lignes brisées γ_i^1 . On en déduit que $d_2(x, y) \leq d_1(x, y)$. Par un argument symétrique on obtient que $d_1(x, y) = d_2(x, y)$. \square

2.2.2 Premières propriétés de l'espace métrique X' .

Nous nous plaçons dans le cadre de la section précédente et nous montrons que l'espace métrique X' a de bonnes propriétés. Pour rappel $p : (V', L') \rightarrow (V, L)$ un revêtement fini

sur une variété hyperbolique compacte V , $X = \mathbb{H}^n$ est le revêtement universel de V et X' le revêtement universel de V' . On note K et K' les préimages respectives de L et de L' dans X et dans X' . On note $f : (X', K') \rightarrow (X, K)$ une des applications de revêtement ramifié décrite dans le lemme 2.1.8.

Lemme 2.2.7. L'espace métrique (X', d) est un espace de longueur.

Démonstration. On note \bar{d} la métrique de longueur sur (X', d) . Par définition, elle est égale à l'infimum des longueurs des courbes rectifiables sur X' . Dans n'importe quel espace métrique, par définition de \bar{d} , on a l'inégalité $d \leq \bar{d}$. Pour voir que les deux métriques d et \bar{d} sont égales il suffit de montrer l'autre inégalité. On remarque que les lignes brisées de X' sont des courbes rectifiables, alors par définition des distances d et \bar{d} on obtient immédiatement $\bar{d} \leq d$. \square

Lemme 2.2.8. Il existe une constante $\epsilon > 0$ telle que pour toute boule ouverte B de rayon ϵ de X' soit B est incluse dans un voisinage de ramification autour d'une composante connexe de K' union de quartiers fondamentaux soit la restriction de f à B est une isométrie sur son image.

Démonstration. D'après le lemme 2.1.8 l'application f est la composition de deux applications $f_2 \circ g$ avec g l'application de revêtement entre X' et une composante de $V' \times_V X$, et f_2 la projection du produit fibré $V' \times_V X$ sur X .

$$\begin{array}{ccccc}
 & & (X', K') & & \\
 & & \downarrow g & & \\
 & & (V' \times_V X, L' \times_L K) & & \\
 & f_1 \swarrow & & \searrow f_2 & \\
 (V', L') & & & & (X, K) \\
 & \searrow p & & \swarrow \pi & \\
 & & (V, L) & &
 \end{array}$$

L'espace V' est compact comme revêtement ramifié fini de la variété compacte V . L'application $f_1 \circ g$ est un revêtement. Alors, il existe une constante ϵ_1 telle que la préimage de tout boule $B(\epsilon_1)$ de V' , de rayon ϵ_1 , par l'application $f_1 \circ g$ ou par l'application f_1 est une union de boules disjointes de X' ou de $X \times_V V'$ homéomorphes à $B(\epsilon_1)$.

Par compacité de V' , il existe un nombre fini de composantes connexes de L' . On choisit un voisinage de ramification pour chacune de ces composantes connexe de L' . Dans X , il existe un nombre $\pi_1(V)$ -cofinie de composantes connexes de K . On choisit une famille $\pi_1(V)$ -cofinie de voisinages de ramification des composantes connexes de K . Dans la preuve du lemme 2.1.14, pour montrer que le produit fibré de deux revêtements ramifiés est un

revêtement ramifié on construit un voisinage de ramification autour de chaque composante connexe de $L' \times_L K$. Ce voisinage est construit comme un produit fibré de voisinages de ramification d'une composante connexe de L' et d'une composante connexe de K . Il existe alors une constante ϵ_2 telle que tout ϵ_2 -voisinage d'une composante connexe P de $L' \times_L K$ dans $V' \times_V X$ est dans un voisinage de ramification.

Les composantes connexes des préimages par g de ces voisinages de ramification sont des voisinages de ramification de K' dans X' pour f car g est un revêtement.

Finalement, si on choisit $\epsilon = \min\{\epsilon_1, \frac{\epsilon_2}{2}\}$, on obtient que pour toute boule B de rayon ϵ soit la restriction de $f|_B$ est une isométrie soit B est contenu dans un voisinage de K' de type $N_\epsilon(K'_0)$. \square

Lemme 2.2.9. L'espace métrique V' est complet.

Démonstration. D'après le lemme 2.2.8, il existe une constante ϵ telle que toute boule ouverte B de X' , de rayon ϵ , soit est incluse dans un voisinage autour d'une composante connexe de K' , union de quartiers fondamentaux soit la restriction de f à B est une isométrie sur son image.

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans X' . Il existe un $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $d(x_N, x_n) < \frac{\epsilon}{2}$. Alors, pour tout $n \geq N$, x_n est inclus dans la boule fermée $\overline{B}(x_N, \frac{\epsilon}{2})$ de centre x_N et de rayon $\frac{\epsilon}{2}$. Si la restriction de f à $B(x_N, \epsilon)$, la boule de centre x_N et de rayon ϵ est une isométrie alors (x_n) converge car la métrique sur \mathbb{H}^n est complète.

Supposons maintenant que $\overline{B}(x_N, \frac{\epsilon}{2})$ est incluse dans un voisinage fondamental $N_\epsilon(K'_0)$ d'une composante connexe K'_0 de K' . Le voisinage $N(K'_0)$ est l'union de $2k$ espaces Q_i et R_i . Alors il existe une sous-suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que pour tout $n \geq N$, y_n est contenue dans Q_i ou R_i , par exemple Q_i . Comme la métrique d est complète sur chaque voisinage fermé de Q_i , alors $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans $Q_i \cap N_\epsilon(K'_0)$. Finalement, la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans $N_\epsilon(K'_0)$. \square

Lemme 2.2.10. L'espace métrique X' est localement compact.

Démonstration. D'après le lemme 2.2.8, chaque boule B de rayon ϵ soit est isométriquement envoyée sur X par f soit contenue dans un voisinage de ramification union finie de quartiers localement compacts. \square

On utilise alors le théorème suivant dont la preuve est détaillée dans [BH99] pour montrer que (X', d) est géodésique.

Théorème 2.2.11. (Hopf-Rinow) Un espace métrique de longueur complet et localement compact est géodésique.

Pour la suite on note M_{-1}^n l'espace \mathbb{H}^n et M_1^n l'espace S^n .

Définition 2.2.12. Soit (X, d) un espace métrique géodésique, et soit $T = (a, b, c)$ un triangle géodésique. On appelle triangle de comparaison \bar{T} un triangle de M_κ^2 dont les distances entre chaque paire de sommets sont les mêmes que dans T . Chaque point x de T est déterminé par un segment de T qui le contient, et par sa distance aux extrémités de ce segment. Il existe alors un unique point \bar{x} de \bar{T} qui satisfait les mêmes conditions dans \bar{T} . On dit que X est $CAT(\kappa)$ si pour toute paire x, y de points de T

$$d_X(x, y) \leq d_{M_\kappa^2}(\bar{x}, \bar{y}).$$

Proposition 2.2.13. L'espace métrique X' est $CAT(-1)$.

Ici nous allons travailler avec des revêtements ramifiés de complexes polyédraux. De telles constructions ont déjà été utilisés, on peut citer par exemple Brady [Bra99] pour des revêtements ramifiés de complexes cubiques, ou bien Haefliger plus généralement avec l'étude d'orbi-espaces [LHG90].

Définition 2.2.14. Un M_κ -complexe polyédral X , $\kappa = 1, -1$ est un complexe cellulaire décrit comme le quotient d'une union disjointe de polyèdres de M_κ^n : $\bigsqcup_i Q_i / \sim$, telle que les applications de restriction p_i de l'application projection $p : \bigsqcup_i Q_i / \sim \rightarrow X$ à un polyèdre Q_i vérifient les deux propriétés suivantes :

1. Pour tout i , $p_i : \overset{\circ}{Q}_i \rightarrow X$ est injective,
2. Si $p_i(Q_i) \cap p_j(Q_j) \neq \emptyset$ alors il existe une face C de Q_i , une face D de Q_j et une isométrie $h : D \rightarrow C$ telles que $p_i(x) = p_j(x')$ si et seulement si $x' = h(x)$.

Définition 2.2.15. Soit X un M_κ -complexe polyédral, soit s un sommet de X et soit Q un polyèdre de dimension n de M_κ^n . Le *link géométrique* $\text{link}(s, Q)$ de s dans Q est défini comme l'espace des vecteurs unitaires de Q en s . Le link en s dans X est alors défini comme l'union des links sur chaque polyèdre de X qui contient s .

Remarque 2.2.16. Le link géométrique d'un M_κ -complexe polyédral est un M_1 -complexe polyédral.

Définition 2.2.17. On dit qu'une application $f : X \rightarrow Y$ entre deux M_κ -complexes polyédraux est *polyédrale* si elle envoie identiquement chaque polyèdre de X sur un polyèdre de Y .

On utilise le théorème suivant, voir [BH99] :

Théorème 2.2.18. Soit X un M_κ -complexe polyédral, les conditions suivantes sont équivalentes :

1. X est $CAT(\kappa)$.

2. En tout sommet s de X $\text{link}(s, X)$ est $\text{CAT}(1)$ et il n'existe pas de plongement isométrique du cercle, pour $\kappa = -1$, et d'un cercle de longueur $< 2\pi$ pour $\kappa = 1$.
3. X est uniquement géodésique si $\kappa = -1$ et π -uniquement géodésique si $\kappa = 1$.

Lemme 2.2.19. Soit $f : (P', L') \rightarrow (P, L)$ un revêtement ramifié de variétés avec L' et L deux sous-variétés convexes. Supposons de plus que P' et P sont deux M_κ -complexes polyédraux et que f est une application polyédrale. Si P est $\text{CAT}(\kappa)$ alors P' est $\text{CAT}(\kappa)$.

Démonstration. Montrons par récurrence sur la dimension n de P', P que P' est $\text{CAT}(\kappa)$. Plaçons nous tout d'abord dans la situation où P', P sont des M_κ -complexes de dimension 2. L'espace L' est réduit à un point z . En tout point x de $P' \setminus \{z\}$ l'application f est localement une isométrie. Comme P est $\text{CAT}(\kappa)$ alors $\text{link}(x, P) = \text{link}(f(x), P)$ est $\text{CAT}(1)$. En z , $\text{link}(z, P')$ est un cercle de longueur $2\pi k$ avec k le degré de ramification. $\text{link}(z, P')$ est donc $\text{CAT}(1)$.

Un plongement isométrique g d'un cercle c de dans P' , de longueur quelconque si $\kappa = -1$ et de longueur $< 2\pi$ si $\kappa = 1$, est impossible. En effet, supposons qu'un tel plongement existe. Si $g(c)$ contient z on note t_0 le point de c tel que $g(t_0) = z$, sinon on prend t_0 point quelconque de c . On considère t_1 le point de c diamétralement opposé à t_0 . Comme f est une isométrie locale sur $P' \setminus \{z\}$ $f(c)$ décrit deux géodésiques locales de P joignant $f \circ g(t_0)$ et $f \circ g(t_1)$. Dans le cas où $\kappa = 1$ la longueur de ces géodésiques est $< 2\pi$. Comme P est $\text{CAT}(\kappa)$ alors ces deux géodésiques locales sont des géodésiques de P , voir [BH99, p.160]. En particulier, d'après le théorème 2.2.18, on a une contradiction avec l'unicité (la π -unicité pour $\kappa = 1$) des géodésiques de P qui est $\text{CAT}(\kappa)$.

Supposons maintenant que pour tout complexe polyédrale de dimension n le lemme 2.2.19 soit vrai. Soit $f : (P', L') \rightarrow (P, L)$ un revêtement ramifié de dimension $n + 1$ qui satisfait les hypothèses du lemme, montrons qu'alors P' est $\text{CAT}(\kappa)$.

En un point x de P' qui n'appartient pas à L' l'application f est localement une isométrie. Alors $\text{link}(x, P') = \text{link}(f(x), P)$. Comme P est $\text{CAT}(\kappa)$ alors $\text{link}(f(x), P)$ est $\text{CAT}(1)$, et donc $\text{link}(x, P')$ aussi. Soit z un point de L' . Remarquons que $\text{link}(z, L')$ est un sous-complexe convexe de $\text{link}(z, P')$. On peut identifier $\text{link}(z, P')$ au bord d'une petite boule de centre z dans P' . L'application tangente T_f induit alors un revêtement ramifié de $(\text{link}(z, L'), \text{link}(z, P'))$ sur $(\text{link}(f(z), L), \text{link}(f(z), P))$ et un revêtement de M_1 -complexes polyédraux. Par hypothèse P est $\text{CAT}(\kappa)$ donc $\text{link}(f(z), P)$ est $\text{CAT}(1)$. On en déduit par récurrence que $\text{link}(z, P')$ est $\text{CAT}(1)$.

Il reste à montrer qu'il n'existe pas de plongement isométrique du cercle pour $\kappa = -1$, et d'un cercle de longueur $< 2\pi$ pour $\kappa = 1$. Supposons par l'absurde qu'un tel plongement $g : c \rightarrow P'$ existe. Montrons que dans tous les cas il existe au plus un point $z \in g(c)$ tel que $f|_{g(c) \setminus \{z\}}$ est une isométrie locale.

L'application f est une isométrie locale sur $P' \setminus L'$. Ainsi, si $g(c) \cap L'$ possède au plus un point z alors $f|_{g(c) \setminus \{z\}}$ est une isométrie locale. Supposons que $g(c) \cap L'$ est possédée au

moins deux points z_1 et z_2 . Par convexité de L' le segment géodésique entre z_1 et z_2 sur $g(c)$ est inclus dans L' . Soit σ le plus grand sous-espace connexe fermé de $g(c)$ qui contient le segment entre z_1 et z_2 sur $g(c)$. Montrons que $\sigma = g(c)$. En effet, sinon on choisit un point x de $g(c)$ qui n'appartient pas à σ . On note τ le segment géodésique entre x et σ et on considère Q le quartier de P' qui contient x . τ est dans Q par convexité de Q . Autour de $\sigma \cap \tau \cap g(c)$ est alors la concaténation d'un segment dans L' et un segment qui n'intersecte L' qu'en une extrémité. On a bien contradiction car dans Q , L' est une sous-variété convexe. Finalement $g(c) \subset L'$ et f est une isométrie locale sur $g(c)$.

On note t_0 le point de c tel que $g(t_0) = z$ si un tel z existe, sinon on prend t_0 point quelconque de c . On considère t_1 le point de c diamétralement opposé à t_0 . Comme f est une isométrie locale sur $P' \setminus \{z\}$ $f(c)$ décrit deux géodésiques locales joignant $f \circ g(t_0)$ et $f \circ g(t_1)$. Dans le cas où $\kappa = 1$ la longueur de ces géodésiques est $< 2\pi$. Enfin comme P est $\text{CAT}(\kappa)$ alors ces deux géodésiques locales sont des géodésiques de P , voir [BH99, p.160]. En particulier, d'après le théorème 2.2.18, on a une contradiction avec l'unicité (la π -unicité pour $\kappa = 1$) des géodésiques de P qui est $\text{CAT}(\kappa)$. On a bien montré par récurrence que P' est $\text{CAT}(\kappa)$. \square

Démonstration de la proposition 2.2.13. Comme X' est simplement connexe, pour montrer que X' est $\text{CAT}(-1)$ il suffit pour montrer que X' est localement $\text{CAT}(-1)$, voir [BH99]. Sur une boule B' de X' disjointe du lieu singulier donc isométrique à une boule de \mathbb{H}^n il est clair que la métrique est $\text{CAT}(-1)$. Il suffit alors de montrer que la métrique décrite sur X' est $\text{CAT}(-1)$ au voisinage des composantes connexes de K' . On considère un point x' d'une composante connexe K'_0 de K' , et un $N_\epsilon(K'_0)$ de K'_0 union de quartiers Q_i et R_i . On note $x = f(x')$ un point de $K_0 = f(K'_0)$ et on considère un voisinage polyédrale P de $f(N_\epsilon(K'_0))$. Le découpage de $N_\epsilon(K'_0)$ et de $f(N_\epsilon(K'_0))$ donne à P une structure de M_{-1} -complexe polyédrale. De plus cette décomposition polyédrale est telle que le lieu singulier est un sous-complexe polyédrale de P . On note P' la composante connexe de $f^{-1}(P)$ qui contient x' . Le découpage de P donne une structure de M_{-1} -complexe polyédrale avec L' un sous-complexe de P' . Le lemme 2.2.19 permet d'achever la démonstration, on obtient bien que P' est $\text{CAT}(-1)$. \square

Chapitre 3

Cubulation des variétés de Gromov-Thurston

Dans ce chapitre nous avons inclus tel quel l'article Cubulation of Gromov-Thurston Manifolds. Cet article propose une cubulation à la main des groupes fondamentaux de variétés de Gromov-Thurston. En effet, une variété de Gromov-Thurston V' est obtenue comme revêtement ramifié cyclique d'une variété arithmétique de type simple V . Cette dernière a un groupe fondamental cubique, alors on construit un revêtement ramifié d'un complexe cubique de groupe fondamental $\pi_1(V)$ pour obtenir un complexe cubique de groupe fondamental $\pi_1(V')$.

Notez que la notion de mur définie dans la section 3.2 est légèrement différente de celle introduite dans la chapitre 1. Cependant, les murs décrits comme partition d'un espace dans cet article proviennent de sous-variétés de codimension 1 et sont donc en bijection avec des murs au sens de la définition 1.1.8.

Abstract : In this article we prove that the fundamental group of certain manifolds, introduced by Gromov and Thurston [GT87] and obtained by branched cyclic covering over arithmetic manifolds, acts geometrically on a CAT(0) cube complex. We show in particular that these groups are linear over \mathbb{Z} .

3.1 Introduction

The main result of this paper concerns the fundamental group of some negatively curved manifolds, introduced by Gromov and Thurston in [GT87]. Gromov and Thurston constructed infinitely many manifolds which can be equipped with a Riemannian metric with negative sectional curvature less or equal to -1 , arbitrarily close to -1 , but do not admit any Riemannian metric of constant curvature. For the construction, they consider cyclic ramified coverings over a certain hyperbolic manifold V ; an arithmetic hyperbolic

manifold of “simple type.” The branch locus is a totally geodesic submanifold $K \subset V$ of codimension 2, obtained as the transverse intersection of two codimension-1 totally geodesic submanifolds. It is important to consider ramified covering of arbitrary large degrees to make sure that, among those manifolds, infinitely many do not have a constant curvature metric. On the other hand, the more the normal injectivity radius of K in V is large, the more the sectional curvature of the metric will be close to -1 . A manifold \widehat{V} obtained by this construction will be called here a Gromov-Thurston manifold.

Our first result is the following :

Theorem 3.1.1. Let \widehat{V} be a Gromov-Thurston manifold. Then $\pi_1(\widehat{V})$ is cubical.

A group is *cubical* if it acts geometrically on a CAT(0) cube complex (see Definition 3.2.2 below). Now a cubical group is said to be *special* — following Haglund and Wise in [HW08] — if the quotient of the CAT(0) cube complex by the group avoids some global hyperplane pathologies (most importantly hyperplanes have to embed in the quotient), see Section 3.4 for a precise definition. Similarly a cube complex that avoids these pathologies will be said to be *special*. Finally a group is said to be *virtually special* if it contains a finite index special subgroup. Being virtually special has many consequences : virtually special groups inject in $\mathrm{GL}(n, \mathbb{Z})$ for a certain $n \in \mathbb{Z}$, have separable quasi-convex subgroups (see [HW08]), are virtually large (see [HW08]), are virtually bi-ordonnable (see [HW08] and [DT92]), etc. Recently Agol [AGM12] proved that every hyperbolic cubical group is virtually special. Since the fundamental group of a Gromov-Thurston manifold is hyperbolic, using Agol’s Theorem [AGM12], Theorem 3.1.3 below follows from Theorem 3.1.1. Nevertheless, we will prove virtual specialness without using Agol’s Theorem.

To prove Theorem 3.1.1, we will introduce a notion of ramified coverings of cube complexes (see Definition 3.3.1). We shall then prove the following :

Theorem 3.1.2. Cyclic ramified coverings of special cube complexes are special cube complexes.

We shall then deduce our main result from Theorems 3.1.1 and 3.1.2 :

Theorem 3.1.3. Let \widehat{V} be a Gromov-Thurston manifold. Then $\pi_1(\widehat{V})$ is virtually special.

Many examples of compact hyperbolic manifolds with constant curvature equal to -1 have virtually special fundamental groups. For example, hyperbolic surfaces are virtually special. In dimension 3, works of Kahn-Markovic, Wise and Agol imply that fundamental groups of compact hyperbolic 3-manifolds are virtually special [AGM12]. Moreover, in every dimension $n \geq 4$, Bergeron, Haglund and Wise [BHW11] have shown that “simple type” arithmetic hyperbolic manifolds also have a cubical virtually special fundamental group. We will use this to prove Theorem 3.1.1. As a consequence of Theorem 3.1.3 we can deduce the following :

Corollary 3.1.4. Fundamental groups of Gromov-Thurston manifolds are linear (over \mathbb{Z}), contain a finite index bi-ordonnable subgroup, have separable quasi-convex subgroups, are virtually large, etc. . .

We will in fact prove a more general version of Theorem 3.1.1 (Theorem 3.1.5 below). Let $V = \Gamma \backslash \mathbb{H}^n$ be a hyperbolic manifold, with $\Gamma \subset \text{Isom}^+(\mathbb{H}^n)$. Denote by $p : \mathbb{H}^n \rightarrow V$ the covering map. Suppose that there exist two transverse totally geodesic submanifolds V_1 and V_2 of codimension 1 of V , and suppose that both of them separate V . We can construct a cyclic ramified covering in the following way : Each submanifold V_i , $i = 1, 2$, splits V into two disjoint submanifolds V_i^+ and V_i^- of V , with boundary V_i with two different orientations. The intersection $W = V_1^+ \cap V_2$ is a hypersurface of V with boundary. Let \bar{V} be the manifold obtained by cutting V along W . The boundary of \bar{V} is a disjoint union of two copies of W with opposite orientations. For $k \in \mathbb{N}^*$, consider the manifold \hat{V} obtained by cyclically gluing k copies of \bar{V} along the copies of W according to their orientations. Then the natural projection $\hat{V} \rightarrow V$ is a *cyclic ramified covering* of degree k of V above $\partial W = V_1 \cap V_2$.

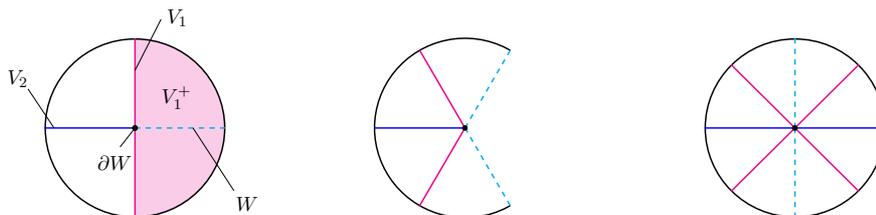


FIGURE 3.1 – A cyclic ramified covering of degree 2 above ∂W .

In Gromov-Thurston’s construction, V is an arithmetic manifold of “simple type”, as well as V_1 and V_2 . By passing to a finite cover, these two submanifolds satisfy the properties described above. Then Gromov and Thurston construct \hat{V} , a cyclic ramified covering of degree k above the intersection of V_1 and V_2 .

An arithmetic manifold of “simple type” contains many immersed compact hypersurfaces. Choose a finite number of them and denote by \mathcal{H} the collection of their preimages in \mathbb{H}^n . A general construction of Sageev associates a CAT(0) cube complex that is “dual” to the Γ -invariant collection of hyperplanes \mathcal{H} in \mathbb{H}^n . The fundamental group $\Gamma = \pi_1(V)$ acts cocompactly on the resulting cube complex. By choosing enough immersed compact hypersurfaces to start with, one can moreover ensure that the action of Γ on the “dual” cube complex is proper. We then say that V is π_1 -cubulated by \mathcal{H} . We provide details for this construction in Section 3.2.

Finally we say that a collection of hyperplanes is *generic* if every pair of intersecting hyperplanes in the collection have transverse intersection and if the intersection between

three different hyperplanes is either empty or of codimension 3.

Theorem 3.1.5. Let V be an oriented hyperbolic compact manifold, and let V_1 and V_2 be two totally geodesic separating submanifolds of V with transverse non-empty intersection. Let $k \geq 1$ be an integer and let \widehat{V} be the cyclic ramified covering of V of degree k above $V_1 \cap V_2$. Assume furthermore that V is π_1 -cubulated by a collection \mathcal{H} of hyperplanes in \mathbb{H}^n , such that the reunion of \mathcal{H} with the set of preimages of V_1 and V_2 under p forms a generic collection of hyperplanes of \mathbb{H}^n . Then the fundamental group $\pi_1(\widehat{V})$ is cubical.

We recall Sageev’s construction — specialized to our context — in the next section. In Section 3.3 we prove Theorem 3.1.5, in Section 3.4 we prove Theorem 3.1.2. Finally, in Section 3.5 we prove Theorems 3.1.1 and 3.1.3 by using Theorems 3.1.5 and 3.1.2.

3.2 Cubulation

3.2.1 Some definitions

Definition 3.2.1. A *cube complex* is a CW -complex, such that each cell is a metric Euclidean cube $[0, 1]^n$, and gluing maps are isometries between subcubes, i.e. cubes obtained by restricting certain coordinates to 0 or 1.

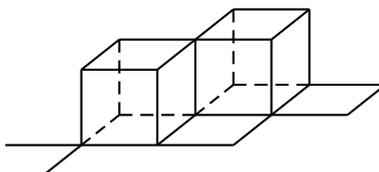


FIGURE 3.2 – A cube complex.

We shall always equip a cube complex with the metric induced by the Euclidean metric on the cubes. As such it makes sense to speak of a $CAT(0)$ cube complex ; we refer to [BH99] for a general study of $CAT(0)$ spaces.

Definition 3.2.2. A group is said to be *cubical* if it acts *geometrically*, i.e. *properly* and *cocompactly*, on a $CAT(0)$ cube complex.

3.2.2 Sageev’s construction

In [HP98] Haglund and Paulin introduce the notion of a wallspace. Generalizing a construction of Sageev [Sag95], Nica [Nic04], Chatterji and Niblo [CN05] have then shown how to associate to any wallspace a “dual” $CAT(0)$ cube complex in such a way that a

group acting on the wallspace (as defined in [HP98]) also acts on the dual CAT(0) cube complex. We now review this construction in the particular case at hand.

Let V be a closed hyperbolic manifold and let W_1, W_2, \dots, W_ℓ be immersed closed codimension-1 totally geodesic submanifolds in V . Assume that these manifolds intersect each other in a generic way. Any lift of W_i to \mathbb{H}^n is a hyperplane of \mathbb{H}^n , splitting \mathbb{H}^n into two connected components. Let \mathcal{H} be the collection of all these hyperplanes and let \mathcal{S} be the set of connected components of the space $\mathbb{H}^n \setminus \bigcup_{H \in \mathcal{H}} H$. Each hyperplane H of \mathcal{H} provides a natural bipartition (a so-called *wall*) of \mathcal{S} . We call each element of this partition a *halfspace* of H .

We now construct a cube complex Y as follows. We first describe its 1-skeleton $Y^{(1)}$:

A vertex σ of Y is a collection of halfspaces of \mathcal{S} such that :

- $\forall H \in \mathcal{H}$, exactly one of the two halfspaces of H belongs to σ .
- $\forall A, B$ two halfspaces, $(A \subset B \text{ and } A \in \sigma) \Rightarrow B \in \sigma$.

Put an edge between two vertices σ and τ if and only if $|\sigma \Delta \tau| = 2$, i.e. if and only if σ and τ share exactly the same halfspace for every hyperplane of \mathcal{H} except for one.

We finally construct Y from $Y^{(1)}$ by adding a n -cube each time one sees the 1-skeleton of a n -cube in $Y^{(1)}$.

The cube complex Y can be complicated. However to each connected component x of \mathcal{S} it corresponds a vertex σ of Y :

$$\sigma = \{A \text{ halfspace} : x \in A\}.$$

It is a simple exercise — that we leave to the reader — to check that σ satisfies the two conditions above. Now two such vertices are adjacent if and only if the associated connected components are separated by a unique hyperplane of \mathcal{H} . This defines a (connected) subgraph \mathcal{G} of $Y^{(1)}$; we denote by X' the square subcomplex of Y obtained from \mathcal{G} by gluing a square each time one sees the 1-skeleton of a square in \mathcal{G} . The resulting square complex X' is (of course) connected. We define X to be the connected component of X' in Y ; it is the cube complex dual to the collection \mathcal{H} of walls of \mathbb{H}^n .¹

3.2.3 A square complex in \mathbb{H}^n

The hyperplanes of \mathcal{H} induce a cellulation of \mathbb{H}^n . And since the collection \mathcal{H} is supposed to be *generic* the 2-skeleton of the dual cellulation is a square complex. We realize it in \mathbb{H}^n as follows :

Definition 3.2.3. Let $P_{\mathbb{H}^n}$ be the square complex dual to the cellulation of \mathbb{H}^n by \mathcal{H} : choose a vertex in each connected component of \mathcal{S} , join every pair of vertices of two adjacent

1. Beware that in general $X^{(1)}$ *strictly* contains $\mathcal{G} = (X')^{(1)}$!

components by a geodesic segment, and for every face K of codimension 2, glue a 2-disc along the four geodesic segments surrounding K .

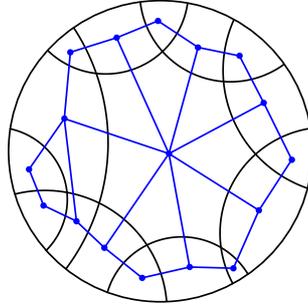


FIGURE 3.3 – A cube complex.

Lemma 3.2.4. The square complexes $P_{\mathbb{H}^n}$ and X' are combinatorially equivalent.

Proof. By construction the 1-skeleton of $P_{\mathbb{H}^n}$ and X' are combinatorially equivalent : both set of vertices identified with the set \mathcal{S} of connected components of $\mathbb{H}^n \setminus \bigcup_{H \in \mathcal{H}} H$ and two vertices are adjacent if and only if they are separated in \mathbb{H}^n by a unique hyperplane of \mathcal{H} . Finally, both X' and $P_{\mathbb{H}^n}$ are obtained from their 1-skeleton by adding a square every time one sees its 1-skeleton, i.e. when there are four connected component $a, b, c, d \in \mathcal{S}$, and two hyperplanes H and H' in \mathcal{H} such that a and b, c and d are separated by H , and b and c, d and a are separated by H' . \square

3.2.4 Cubulation of Γ

The natural action of $\Gamma = \pi_1(V)$ on \mathcal{H} induces an action on X too. Moreover : the collection \mathcal{H} being finite modulo Γ one can prove that Γ acts cocompactly on X ; see [Sag97].² The following lemma gives a criterion on the set of hyperplanes W_1, \dots, W_ℓ to ensure that Γ also acts properly on X (see e.g. [Duf12], Chapter I) :

Lemma 3.2.5. Suppose there exists a number m such that every pair of points x, y of \mathbb{H}^n at distance $d(x, y) \geq m$ is separated by some hyperplane in \mathcal{H} . Then the action of Γ on X is proper.

In our case, one can even prove that this is in fact an equivalence.

Let C be the quotient of X by Γ . The group Γ also acts on $P_{\mathbb{H}^n}$. Let P_V be the quotient of $P_{\mathbb{H}^n}$ by Γ .

². Here we use that \mathbb{H}^n is (Gromov-)hyperbolic and that — being totally geodesic — the hyperplane in \mathcal{H} are quasiconvex.

As $P_{\mathbb{H}^n}$ is the 2-skeleton of the complex dual to the cellulation of \mathbb{H}^n by \mathcal{H} , the complex $P_{\mathbb{H}^n}$ is simply connected. Then :

Lemma 3.2.6. The square complex P_V injects combinatorially into C , and this injection induces an isomorphism of fundamental groups.

Proof. By construction, the combinatorial equivalence $P_{\mathbb{H}^n} \simeq X'$ proved in lemma 3.2.4 is Γ -equivariant. The complex $P_{\mathbb{H}^n}$ identifies Γ -equivariantly with a subcomplex of X . Quotienting by Γ identifies P_V with a subcomplex of C . Since $P_{\mathbb{H}^n}$ is simply connected, the inclusion $P_V \hookrightarrow C$ induces an isomorphism of fundamental groups. \square

3.2.5 Hyperplanes in cube complexes

Definition 3.2.7. A *midcube* of a k -cube $[0, 1]^k$ is a $(k - 1)$ -cube obtained by fixing one of the coordinates at $\frac{1}{2}$. In a CAT(0) cube complex X , a *hyperplane* H is a connected subspace of X such that the intersection of H with every cube of X is either a *midcube* or the empty set. In a non positively curved cube complex C , a *hyperplane* is the projection of a hyperplane of the universal cover of C onto C . It immerses in C .

Let X be a CAT(0) cube complex and $Y \subset X$ a subcomplex. We will abusively call hyperplanes of Y the traces of the hyperplanes of X on Y .

Going back to the situations of the preceding paragraphs, there exists a natural bijection between \mathcal{H} and the set of hyperplanes of the dual CAT(0) cube complex X : A hyperplane in \mathcal{H} can be associated with a hyperplane of the square complex $P_{\mathbb{H}^n}$, and to a hyperplane of X' using the isomorphism between $P_{\mathbb{H}^n}$ and X' . Finally one can extend this hyperplane to a hyperplane of X . This map is well defined and induces a natural bijection between hyperplanes of \mathcal{H} and hyperplanes of X .

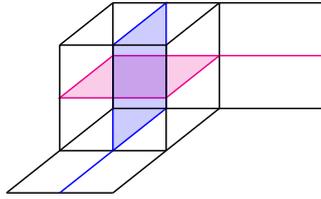


FIGURE 3.4 – Two hyperplanes in a cube complex.

We shall finally need the following :

Definition 3.2.8. Let $C^k = [0, 1]^k$ be a Euclidean cube. The *cubical barycentric subdivision* of C^k is the subdivision of C^k along its hyperplanes. The cube C^k then becomes a cube complex composed of 2^k k -cubes glued together along hyperplanes of C^k . In general, the

cubical barycentric subdivision of a cube complex C is the cube complex described as the union of the *cubical barycentric subdivision* of each of its cubes.

3.3 Proof of Theorem 3.1.5

3.3.1 Construction

To prove Theorem 3.1.5 we shall first construct a ramified covering \widehat{C} of the cube complex C . Next — in Section 3.3.2 — we will prove that the fundamental groups of \widehat{V} and \widehat{C} are isomorphic. And finally we will show — see Lemma 3.3.12 — that \widehat{C} is locally CAT(0).

Definition 3.3.1. Let C be a cube complex and k be an integer. Assume that C contains two separating subspaces C_1 and C_2 , both of them being unions of disjoint hyperplanes of C . Each C_i , for $i = 1, 2$ splits C into two parts : fix a base point x_0 in $C \setminus (C_1 \cup C_2)$, we let C_i^+ (resp C_i^-) be the set of $x \in C$ such that every path from x to x_0 cuts C_i an even (resp. odd) number of times. Let \overline{C} be C cut along $\text{Int}(C_1^+ \cap C_2)$. We define \widehat{C} by cyclically gluing k copies of \overline{C} along copies of $\text{Int}(C_1^+ \cap C_2)$. We call the complex \widehat{C} a *ramified covering* of degree k of C .

A ramified covering as described above is not a cube complex. Nevertheless, passing to the cubical barycentric subdivision of C puts a cube complex structure on the corresponding subdivision of \overline{C} .

Proof of Theorem 3.1.5. The manifold V is π_1 -cubulated by a finite collection of closed immersed codimension-1 submanifolds W_1, W_2, \dots, W_ℓ . Let \mathcal{H}' be the set of all hyperplanes of \mathbb{H}^n lifting the W_i 's. And let \mathcal{H} be the reunion of \mathcal{H}' with the set of hyperplanes of \mathbb{H}^n lifting the connected components of V_1 and V_2 . As each V_i is a closed codimension-1 submanifold of V , it follows that the results of the preceding section apply to \mathcal{H} . Let X be the CAT(0) cube complex dual to \mathcal{H} . The fundamental group Γ of V acts properly³ and cocompactly on X . Denote by C the quotient of X by Γ .

To construct a ramified covering \widehat{C} of C , as in Definition 3.3.1, we first need to define C_1 and C_2 (as unions of hyperplanes of C). The bijection between hyperplanes of \mathcal{H} and hyperplanes of X (see the end of Section 3.2) induces a bijection between hyperplanes of V and hyperplanes of C . We then define C_i ($i = 1, 2$) to be the union of all the hyperplanes of C in bijection with the connected components of V_i . We now show that C_1 and C_2 separate C .

Let $p_c : X \rightarrow C$ is the covering map given by the quotient of X by Γ . The subspace C_1 separates C if and only if $X \setminus p_c^{-1}(C_1)$ has a Γ -invariant bicolouration. Denote by p the

3. Indeed : adding hyperplanes to \mathcal{H}' , can only improve the necessary condition for properness of Lemma 3.2.5.

projection $\mathbb{H}^n \rightarrow V$. As V_1 separates V , then $\mathbb{H}^n \setminus p^{-1}(V_1)$ has a Γ -invariant bicolouration, and so does the complex $P_{\mathbb{H}^n} \setminus (P_{\mathbb{H}^n} \cap p^{-1}(V_1))$. This complex can be seen as a subcomplex of $X \setminus p_c^{-1}(C_1)$. For each point x of $X \setminus p_c^{-1}(C_1)$ consider an element $x_0 \in P_{\mathbb{H}^n}$ and a path xx_0 in X . Choose for x the color of x_0 if the path xx_0 crosses $p^{-1}(C_1)$ an even number of times, and the other color if it crosses $p^{-1}(C_1)$ an odd number of times. This choice is well defined because $p^{-1}(C_1)$ is a union of hyperplanes of X , which separates X . So does $p^{-1}(C_1)$. By the same argument, C_2 separates C . To complete the proof of Theorem 3.1.5, it remains to prove :

1. The groups $\pi_1(\widehat{V})$ and $\pi_1(\widehat{C})$ are isomorphic.
2. The ramified covering \widehat{C} of C is locally CAT(0).

The first statement is proved in Proposition 3.3.2 below and the second statement is proved in Proposition 3.3.12 below. \square

3.3.2 Fundamental groups

The goal of this Section is to prove the following Proposition :

Proposition 3.3.2. The groups $\pi_1(\widehat{V})$ and $\pi_1(\widehat{C})$ are isomorphic.

To compute the fundamental group $\pi_1(\widehat{V})$ (respectively $\pi_1(\widehat{C})$) we will use a different construction of \widehat{V} (respectively \widehat{C}).

Let $N_o(V_1 \cap V_2)$ be an open tubular neighborhood of $V_1 \cap V_2$ in V . Let $V^0 = V \setminus N_o(V_1 \cap V_2)$. V^0 is a submanifold of V with a boundary isomorphic to $(V_1 \cap V_2) \times \mathbb{S}^1$. Consider

$$\theta_V : \pi_1(V^0) \rightarrow \mathbb{Z},$$

such that for any loop l of V^0 , $\theta_V(l)$ is the algebraic intersection number between l and $V_1^+ \cap V_2$, and let π be projection $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ where k is the degree of the ramification \widehat{V} over V . Denote by \widehat{V}^0 the covering of V^0 associated with the group $\text{Ker}(\pi \circ \theta_V)$. In restriction to the boundary $(V_1 \cap V_2) \times \mathbb{S}^1$, this covering is a k -cyclic covering on the first factor and trivial on the second one. Then the manifold \widehat{V} is obtained by gluing a product $(V_1 \cap V_2) \times D$ to \widehat{V}^0 , where D is a disk, along the boundary isomorphic to $(V_1 \cap V_2) \times \mathbb{S}^1$.

We will compute the fundamental group of \widehat{V} using this construction. It will be a quotient of the subgroup $\text{Ker}(\pi \circ \theta_V)$ of $\pi_1(V^0)$. Fix a base point x_0 in V^0 . To any connected component K_i of $V_1 \cap V_2$ we associate a loop γ_i as follows : choose a path p_i from x_0 to a point x_i in the boundary of K_i then choose a loop l_i based in x_i which turns once around K_i . Define γ_i as the concatenation $p_i l_i p_i^{-1}$. Note that $\theta_V(\gamma_i) = \pm 1$. Each γ_i^k represents an element of $\text{Ker}(\pi \circ \theta_V)$ (again abusively denoted γ_i^k). By the Seifert-Van Kampen Theorem recursively applied to the union of \widehat{V}^0 and for each $K_i \times D$ one gets :

$$\pi_1(\widehat{V}) = \text{Ker}(\pi \circ \theta_V) / \langle \langle \gamma_1^k, \dots, \gamma_p^k \rangle \rangle.$$

We can construct \widehat{C} in the same way. In the cube complex C define a *tubular neighborhood* $N_o(C_1 \cap C_2)$ of $C_1 \cap C_2$ as the interior of the union of every cube which has a non trivial intersection with $C_1 \cap C_2$. Remark that it is isomorphic to the product $(C_1 \cap C_2) \times \square$, with \square the interior of a square. Let $C^0 = C \setminus N_o(C_1 \cap C_2)$. The complex $(C_1 \cap C_2) \times \partial\square$ is called the boundary of C^0 . Define $\theta_C : \pi_1(C^0) \rightarrow \mathbb{Z}$ in analogy with θ_V by counting intersections of a loop with $C_1^+ \cap C_2$. Let \widehat{C}^0 be the covering corresponding to the subgroup $\text{Ker}(\pi \circ \theta_C)$. The preimage of the boundary of C^0 under this map is isomorphic to a product $(C_1 \cap C_2) \times C_{4k}$ where C_{4k} is a cyclic graph with $4k$ edges. Call this complex the boundary of \widehat{C}^0 . The complex \widehat{C} is obtained by gluing the product of $(C_1 \cap C_2)$ with a $4k$ -gon to $(C_1 \cap C_2) \times C_{4k}$.

Now we can calculate the fundamental group of \widehat{C} in analogy with the calculation of the fundamental group of \widehat{V} . We simply need to define loops passing once around every connected component of $N_o(C_1 \cap C_2)$.

The link between the two complexes will be the subspace P_V^0 described below. The cellulation of V by the W_i 's and by V_1 and V_2 induces a cellulation of V^0 by restricting the W_i 's, V_1 and V_2 to V^0 and by adding several $n - 2$ cells on the boundary. Then we define P_V^0 as the cube complex dual to this cellulation of V^0 . It can also be described as the complex obtained by removing every square intersecting $V_1 \cap V_2$ from P_V , indeed the 1-skeleton of the two complexes dual to the cellulations of V and V^0 is the same, the only cells of codimension 2 that are in V and not in V^0 are the ones given by $V_1 \cap V_2$. Finally according to Lemma 3.2.6 P_V^0 identifies simultaneously with a subspace of V^0 and of C^0 .

Proof of Proposition 3.3.2. The square complex P_V^0 is a subspace of V^0 and the inclusion induces an isomorphism of fundamental groups by definition. We will prove in Proposition 3.3.3 below that the inclusion of P_V^0 in C^0 induces an isomorphism of fundamental groups. Note that V^0 and C^0 have isomorphic fundamental groups. For every connected component of $V_1 \cap V_2$, choose γ_i included in P_V^0 and denote by θ the restriction of θ_V and θ_C to P_V^0 . Therefore

$$\text{Ker}(\pi \circ \theta_V) = \text{Ker}(\pi \circ \theta) = \text{Ker}(\pi \circ \theta_C),$$

and

$$\pi_1(\widehat{V}) = \text{Ker}(\pi \circ \theta_V) / \langle \langle \gamma_1^k, \dots, \gamma_p^k \rangle \rangle = \text{Ker}(\pi \circ \theta_C) / \langle \langle \gamma_1^k, \dots, \gamma_p^k \rangle \rangle = \pi_1(\widehat{C}).$$

□

Proposition 3.3.3. The inclusion of P_V^0 into C^0 induces an isomorphism of fundamental groups.

Denote by $p_c : X \rightarrow C$ and by X^0 the preimage of C^0 by p_c .

Proof. Let $P_{\mathbb{H}^n}^0$ be the 2-complex dual to the cellulation of $\mathbb{H}^n \setminus p^{-1}(V_1 \cap V_2)$ by hyperplanes of \mathcal{H} . It can be seen as a subcomplex of $P_{\mathbb{H}^n}$. The inclusion of $P_{\mathbb{H}^n}$ in X is Γ -equivariant, and to prove the proposition it suffices to show that the inclusion of $P_{\mathbb{H}^n}^0$ in X^0 is a π_1 -isomorphism.

$$\begin{array}{ccc} P_{\mathbb{H}^n}^0 & \hookrightarrow & X^0 \\ \downarrow \Gamma & & \downarrow \Gamma \\ P_V^0 & \hookrightarrow & C^0 \end{array}$$

□

Proposition 3.3.4. The inclusion of $P_{\mathbb{H}^n}^0$ into X^0 induces an isomorphism of fundamental groups.

Proof. Let $x_0 \in P_{\mathbb{H}^n}^0$. The fundamental group of $\mathbb{H}^n \setminus p^{-1}(V_1 \cap V_2)$ is an infinite free group generated by a loop for every connected component of $p^{-1}(V_1 \cap V_2)$. Consider the following system of generators : one can choose the loops in $P_{\mathbb{H}^n}^0$ because it is the 2-skeleton of the dual cellulation. For every connected component K_i of $p^{-1}(V_1 \cap V_2)$ let l_i be a loop of $P_{\mathbb{H}^n}^0$ described as a boundary of a square of $P_{\mathbb{H}^n} \setminus P_{\mathbb{H}^n}^0$ associated with K_i . For each vertex of l_i there exists a path from x_0 to this vertex which does not cross the same hyperplane of X twice, as described in Lemma 3.3.5, and for one of the four vertices y of l_i the path does not cross either the two hyperplanes of $P_{\mathbb{H}^n}$ which form K_i . Denote by a this path and take $\alpha_i = al_i a^{-1}$ as a generator of $\pi_1(P_{\mathbb{H}^n}^0)$ associated with K_i . We prove in Proposition 3.3.7 that the fundamental group of X^0 is an infinite free group generated by the α_i . Then this inclusion induces a π_1 -isomorphism. □

We will use combinatorial loops on the 1-skeleton of X^0 . The combinatorial loops can be seen as loops of the 1-skeleton of X . If we choose a vertex, this loop is uniquely determined by the sequence of hyperplanes successively dual to the edges of this loop. As X is CAT(0), a path in the 1-skeleton of X is a geodesic in X^1 if and only if the associated sequence of hyperplanes of X does not contain the same hyperplane twice.

Lemma 3.3.5. For each pair of vertices (x, y) of $P_{\mathbb{H}^n}^0$ there exists an edge path from x to y which crosses each hyperplane of $P_{\mathbb{H}^n}$ at most once.

Proof. To a pair (x, y) of vertices of $P_{\mathbb{H}^n}$ we associate the pair of connected components of \mathbb{H}^n separated by hyperplanes of \mathcal{H} which contains respectively x and y . Choose a point for each of these components in \mathbb{H}^n , and consider a geodesic between them. The sequence of hyperplanes of \mathcal{H} crossed by this geodesic gives a path of edges of $P_{\mathbb{H}^n}$ which crosses each hyperplane at most once, i.e. the path is a geodesic of the 1-skeleton of $P_{\mathbb{H}^n}$. □

Lemma 3.3.6. Let γ be a combinatorial path in X^0 with the following sequence of dual hyperplanes of $X : ABH_1 \dots H_n A$ such that $\forall i = 1, 2, \dots, n, H_i \neq A, B$, and A, B are not simultaneously in the preimage of C_1 and C_2 under p_c . Then γ is fixed-end-point homotopic in X^0 to the path associated with the sequence $BAH_1 \dots H_n A$.

Proof. We will show that the first two edges of this path border a square of X^0 . As defined in Section 3.2, a vertex of X is a choice of halfspace for every hyperplane of \mathcal{H} , such that if a halfspace \vec{C} is included in another one \vec{D} and if \vec{C} belongs to a certain vertex then \vec{D} belongs to this vertex too. We will say that \vec{D} and \vec{C} are *compatible* if they can belong to a same vertex of X .

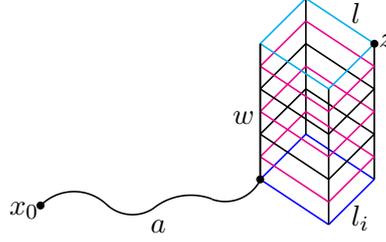
Consider the three first vertices v_1, v_2 and v_3 of the path γ and the two walls $\bar{A} = \{\vec{A}, \overleftarrow{A}\}$ and $\bar{B} = \{\vec{B}, \overleftarrow{B}\}$ associated with the hyperplanes A and B . Suppose that v_1 contains the halfspaces \vec{A} and \vec{B} . As v_1 and v_2 are separated by an edge dual to A , then v_2 contains halfspaces \overleftarrow{A} and \vec{B} . Moreover v_3 contains the halfspaces \overleftarrow{A} and \overleftarrow{B} . Consider the collection s of halfspaces composed with $\vec{A}, \overleftarrow{B}$ and every halfspace which simultaneously belongs to vertices v_1, v_2 and v_3 . To prove that s is a vertex of X we will show that every pair of hyperplanes of s is compatible. The last vertex of γ contains \vec{A} and \overleftarrow{B} because $\forall i = 1, 2, \dots, n, H_i \neq A, B$. The collection of halfspaces associated with v_1, v_2 and v_3 show that halfspaces $\vec{A}, \vec{B}, \overleftarrow{A}$ and \overleftarrow{B} are compatible with all halfspaces shared by v_1, v_2 and v_3 , and that the pairs \vec{A} and $\vec{B}, \overleftarrow{A}$ and $\vec{B}, \overleftarrow{A}$ and \overleftarrow{B} are compatible. Hence s is a vertex of X , and the three first vertices of γ, s , and the edges between them describe the boundary of a square of X . Since A and B are not simultaneously preimages of C_1 or C_2 the square is still in X^0 . \square

Proposition 3.3.7. The fundamental group $\pi_1(X^0)$ of X^0 is an infinite free group generated by $\{\alpha_i\}$.

Lemma 3.3.8. Let K_i be a connected component of a preimage of $C_1 \cap C_2$ in X , let l be an oriented loop obtained as the boundary of a square of X with a non trivial intersection with K_i , and let z be a vertex of l . Then there exists a loop $\alpha'_i = a'la'^{-1}$ homotopic to α_i (or α_i^{-1}), with a' geodesic in the 1-skeleton of X^0 between x_0 and z .

Proof. The intersection between two hyperplanes has a natural cube complex structure. The neighborhood of K_i in X is a product $W \times \square$ with \square a square and W a cube complex isomorphic to K_i . The neighborhood of K_i in X^0 will be $W \times \partial(\square)$. There exists a loop $\alpha_i = a l_i a^{-1}$, one of the generators of $\pi_1(P_{\mathbb{H}^n}^0)$, such that l_i turns around K_i . Then there exists w_1, w_2 in W such that $w_1 \times \partial(\square) = l$ and $w_2 \times \partial(\square) = l_i$. Denote by $w_2 \times \bullet$ the vertex of l_i which is the last vertex of a . Since W is connected, choose a path w' in W from w_1 to w_2 , and consider $w = w' \times \bullet$ a path in X^0 . Denote by c the concatenation of a and w .

We will construct a path c' homotopic to c such that c' is a geodesic in the 1-skeleton of X , i.e. such that c' does not cross the same hyperplane of X twice. The path c does



not cross any hyperplane that is a preimage of C_1 or C_2 . Indeed, by construction, neither does a , nor does w because C_1 and C_2 do not self-intersect (because V_1 and V_2 do not self-intersect). Suppose that c is not geodesic and consider the two nearest edges dual to the same hyperplane H . The subpath of c between these edges is not dual to H and we can apply Lemma 3.3.6 several times, until the two edges are next to each other. Then one can delete the two edges by homotopy. By recurrence on these pairs of hyperplanes, we obtain a path c' from x_0 to l homotopic to c which crosses each hyperplane of X at most once. Then consider a' the path obtained from c' to z by adding one or two edges of l . These additional edges are dual to the preimage of C_1 or C_2 , a' is still geodesic in the 1-skeleton of X , and $a'la'^{-1}$ is homotopic to $al_i a^{-1}$. \square

Proof of Proposition 3.3.7. First we prove that $\pi_1(X^0)$ is generated by $\{\alpha_i\}$. For each combinatorial loop γ , denote by $|\gamma|$ the length of the loop, then consider

$$L : \pi_1(X^0) \rightarrow \mathbb{N}$$

$$L(\gamma) = \min\{|\gamma'|, \gamma \sim \gamma'\}.$$

We will use a recursive argumentation on the length L of homotopy classes of loops. If $L(\gamma) = 0$ then γ is homotopic to x_0 . Suppose that every loop of length strictly less than N is generated by $\{\alpha_i\}$, and let β be a loop of X^0 , such that $L(\beta) = N$. A loop of X^0 can be described as a concatenation of loops of type blb^{-1} , with l the boundary of a square of the neighbourhood of the preimage of a connected component of $C_1 \cap C_2$. If β is not exactly one of these loops then β is a concatenation of at least 2 such loops of length less than N , and by recurrence β is generated by $\{\alpha_i\}$. Suppose now that $\beta = blb^{-1}$. Applying Lemma 3.3.8 to l and z , the last vertex of b , there exists a loop $\alpha'_i = a'la'^{-1}$ homotopic to $\alpha_i^{\pm 1}$ such that a' is minimal between x_0 and z .

$$\beta = blb^{-1} = ba'^{-1}a'la'^{-1}a'b^{-1} = (ba'^{-1})a'la'^{-1}(a'b^{-1}).$$

Fix $j = |b|$, then $N = |\beta| = 2j + 4$. As a' is a geodesic with the same endpoints as b then

$|a'| \leq j$. Finally, $L(ba'^{-1}) \leq |ba'^{-1}| \leq 2j < N$, and by recurrence ba'^{-1} is generated by α_i . Furthermore, as $a'la'^{-1}$ is homotopic to α_i , β is also generated by $\{\alpha_i\}$.

To see that $\pi_1(X^0)$ is a free group, we will construct an injective morphism from $\pi_1(X^0)$ to an infinite free group.

Every hyperplane of C_2 in C is divided into several different hyperplanes in C^0 . Let E be the set of all lifts of these hyperplanes in X^0 . For every $e \in E$, H_e will be the hyperplane of X that contains e ⁴. Consider the infinite free group \mathbb{F}_∞ generated by E .

The elements of E are hyperplanes of X^0 , we choose an orientation of each hyperplane of X which induces an orientation of hyperplanes of E . Consider the map m such that if γ is a combinatorial loop of X^0 then $m(\gamma)$ is the word in E^\pm obtained by juxtaposing hyperplanes of X^0 crossed by γ , to the power of ± 1 depending on the orientation. The map m induces the morphism

$$h : \pi_1(X^0) \rightarrow \mathbb{F}_\infty.$$

Homotopies between combinatorial loops can be described as a succession of elementary homotopies : going on an edge and coming back is homotopic to the identity, and for every square of X^0 an edge of its boundary is homotopic to the path which runs along the three other edges of the boundary. Then m is well defined modulo these elementary homotopies.

The map h is injective. Assume that γ is a combinatorial loop of X^0 such that $h(\gamma) = 1$. Since γ is a loop, every hyperplane of X crosses γ an even number of times. If γ does not intersect any hyperplanes of $\{H_e, e \in E\}$ then the hyperplanes dual to γ are not in $p_c^{-1}(C_2)$ and we use Lemma 3.3.6 to gather and eliminate two by two those hyperplanes dual to γ by elementary homotopies in the following way. Each hyperplane of X^0 dual to γ appears an even number of times in the sequence of hyperplanes dual to γ . Consider two repetitions of the same hyperplane as closed as possible. Then every hyperplane contained between those two repetitions will appear once. If there is not a hyperplane between the two repetitions then γ is homotopic to a loop given by the same sequence minus the two occurrences of this hyperplane. If there are some hyperplanes between the repetitions, we can use Lemma 3.3.6 several times, since no hyperplane of $p_c^{-1}(C_2)$ belongs to the sequence, bringing us back to the previous case. Then the homotopy class of γ is trivial in $\pi_1(X^0)$.

Now suppose that one of the hyperplanes K of X , crossed by γ , is associated with an element of E . Since $h(\gamma) = 1$, the word $m(\gamma)$ contains a subword ee^{-1} with $e \in E$. One can assume that $K = H_e$. Then the enumeration of hyperplanes of X^0 dual to γ contains a sequence e, h_1, \dots, h_n, e , where the h_i 's do not belong to E . Denote by c the subpath of γ associated with this sequence. For every $i \in \{1, \dots, n\}$ denote W_i the hyperplane of X that contains h_i . For every $i \in \{1, \dots, n\}$, as h_i is not in E , then W_i is not contained in $p_c^{-1}(C_2)$. Furthermore if W_i is contained in $p_c^{-1}(C_1)$ then the h_i 's do not intersect e , because e is a connected component of $p_c^{-1}(C_2)$ cut along $p_c^{-1}(C_1)$. Therefore there exists

4. The map $e \mapsto H_e$ is not injective

an even number of h_j 's such that $W_i = W_j$. If such a pair of elements $W_i = W_j \subset p_c^{-1}(C_1)$ exists then by applying Lemma 3.3.6 several times to the sentence H_i, H_{i+1}, \dots, H_j which does not contain hyperplanes dual to $p_c^{-1}(C_2)$ we get $j = i + 1$, and $H_i H_i$ is homotopic to a point. Finally, applying Lemma 3.3.6 several times to the sentence $H_e, H_1, \dots, H_n, H_e$ with $H_i \notin p_c^{-1}(C_1)$, one can reduce the number of ee^{-1} associated with γ .

□

3.3.3 Ramified covering over a locally CAT(0) cube complex is locally CAT(0).

We want to prove that if \widehat{C} is a ramified covering of a locally CAT(0) cube complex C constructed above the intersection of two unions of hyperplanes (see Definition 3.3.1), then \widehat{C} is locally CAT(0). We will prove this with a more general definition of a ramified covering.

Definition 3.3.9. Let C be a cube complex and L be a subcomplex of C . A cube complex \widehat{C} is a *general ramified covering* of C above L if there exists a combinatorial map $f : \widehat{C} \rightarrow C$ and a subcomplex \widehat{L} of \widehat{C} such that :

- $f|_{\widehat{L}} : \widehat{L} \xrightarrow{\cong} L$
- $f|_{(\widehat{C} \setminus \widehat{L})} : (\widehat{C} \setminus \widehat{L}) \rightarrow (C \setminus L)$ is a cover.

Definition 3.3.10. A subcomplex L of a cube complex C is *locally convex* if for every cube Q of C the subcomplex $L \cap Q$ is either a unique face of Q or the whole cube Q .

We will use the following characterization of being locally CAT(0) in a cube complex, see [BH99].

Proposition 3.3.11. A cube complex C is locally CAT(0) if and only if for every $v \in C^0$, $link(v, C)$ is a simplicial flag complex.

Proposition 3.3.12. Let $(\widehat{C}, \widehat{L})$ be a general ramified covering of a cube complex (C, L) , with C locally CAT(0) and L locally convex in C . Then \widehat{C} is locally CAT(0).

Proof. First, we prove that for every vertex v of \widehat{C} , the complex $link(v, \widehat{C})$ is simplicial, and not multi-simplicial, i.e. $link(v, \widehat{C})$ is totally determined by its boundary. Suppose that v is not in \widehat{L} , then a small ball around $f(v)$ is homeomorphic to a small ball around v , so the $link$ is the same. As C is locally CAT(0), then $link(v, \widehat{C})$ is simplicial. Now suppose that v belongs to \widehat{L} . Consider two $(k-1)$ -simplices of $link(v, \widehat{C})$ for $k \geq 2$ sharing the same boundary. Denote by Q_1 and Q_2 the two k -cubes of \widehat{C} associated with these $(k-1)$ -simplices. As the two simplices have the same boundary, then Q_1 and Q_2 are glued along subcubes of codimension 1 containing v . Let f be the projection associated with the ramified covering $\widehat{C} \rightarrow C$. As f is combinatorial then C_1 and C_2 are projected on k -cubes of C . As C is locally CAT(0) then C_1 and C_2 are projected onto the same cube.

The map f induces an isomorphism between \widehat{L} and L , and L is convex in C . Denote by P_i , $i \in \{1, 2, \dots, k-1\}$, codimension 1 subcube of Q . If every P_i belongs to \widehat{L} then $Q \subset L$ and $Q_1 = Q_2$. If there exists $i \in \{1, 2, \dots, k-1\}$ such that P_i does not belong to \widehat{L} , the restriction of f to $(Q_1 \cup Q_2) \setminus \widehat{L}$ is a covering on its image of degree 1, because the preimage of $f(P_i)$ is P_i . Then Q_1 and Q_2 are equal.

It remains to see that for every vertex $v \in \widehat{C}$, the simplicial complex $\text{link}(v, \widehat{C})$ is flag. Let v be a vertex of C and e_1, \dots, e_p be two by two connected vertices of $\text{link}(v, \widehat{C})$. The function f projects two such vertices on two different vertices of $\text{link}(f(v), C)$ because $\text{link}(f(v), C)$ is simplicial and not multi-simplicial. As C is locally CAT(0) $\text{link}(f(v), C)$ is flag and there exists a p -simplex of $\text{link}(f(v), C)$ which has $f([e_i, e_j])$ as 1-skeleton. The $(p+1)$ -cube associated with this p -simplex lifts to a cube with a 0-skeleton of exactly $\{e_1, \dots, e_p\}$. \square

3.4 The cyclic ramified covering of a special cube complex is special.

We will use the following characterization of being special.

Definition 3.4.1. (See [HW08]) A cube complex is *special* if it does not contain pathologies of hyperplanes such as self-intersection (see Figure 3.5), self-osculation (see Figure 3.6) or inter-osculation (see Figure 3.7), and furthermore if its hyperplanes are two-sided i.e. a neighborhood is homeomorphic to the product of the hyperplane with an interval.

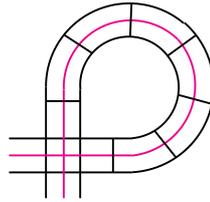


FIGURE 3.5 – A self-intersecting hyperplane.

Proposition 3.4.2. Let C be a special cube complex and let C_1 and C_2 be two separating unions of hyperplanes of C . Then the ramified covering \widehat{C} (in the sense of Definition 3.3.1) of the cubical barycentric subdivision C' of C above $C_1 \cap C_2$ is special.

Lemma 3.4.3. Let C be a cube complex and let C' be the cubical barycentric subdivision of C . If C is special then C' is special.

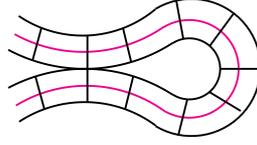


FIGURE 3.6 – A self-osculating hyperplane.

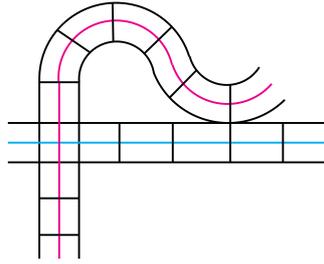


FIGURE 3.7 – Two inter-osculating hyperplanes.

Proof. The neighborhood of a hyperplane of C' is the half neighborhood of a certain hyperplane of C . Then a pathology of a hyperplane of C' would imply a pathology of the associated hyperplanes of C . \square

Proof of the Proposition 3.4.2. We will use the notations from Definition 3.3.1, and denote by f the projection $\widehat{C} \rightarrow C'$. We show that if there is a pathology of hyperplanes as defined in 3.4.1 in \widehat{C} then there is a pathology in C' .

A hyperplane of \widehat{C} is a union of hyperplanes of some \overline{C}^i 's (k copies of the cubical barycentric subdivision of \overline{C} glued together to form \widehat{C}) which coincides on the boundary between \overline{C}^i and \overline{C}^{i+1} for every i . The projection of all different pieces of this hyperplane on C' forms a unique hyperplane of C' . If \widehat{H} is not a two-sided hyperplane of \widehat{C} , then there is a loop in \widehat{H} such that the parallel transport of a vector orthogonal to \widehat{H} along this loop gives a vector of the opposite direction. Then the projection of the loop has the same property, and the projection of the hyperplane to C is not two-sided.

The map f projects a self-intersecting hyperplane of \widehat{C} on a self-intersecting hyperplane of C' . This prevents the first pathology from occurring.

Suppose now that there exists two hyperplanes \widehat{H} and \widehat{K} of \widehat{C} which are inter-osculating. Let \widehat{e}_1 and \widehat{e}_2 be two edges of \widehat{C} respectively transverse to \widehat{H} and \widehat{K} which share a vertex \widehat{v} . Let e_1, e_2, H and K be the images of $\widehat{e}_1, \widehat{e}_2, \widehat{H}$ and \widehat{K} under f . If $e_1 = e_2$, then f projects \widehat{H} and \widehat{K} on a unique self-intersecting hyperplane, contradicting the fact that C' is special. If e_1 and e_2 are two osculating edges of C' , then H and K are two inter-osculating

hyperplanes of C' . The case where e_1 and e_2 form the corner of a square Q remains to be seen (see figure 8). In this case, Q has two different lifts \widehat{Q}_1 and \widehat{Q}_2 which contain respectively \widehat{e}_1 and \widehat{e}_2 . As there is a unique lift of the vertex $v = f(\widehat{v})$ in the union of squares $\widehat{Q}_1 \cup \widehat{Q}_2$, the vertex v belongs to the ramification locus. However, as there are two lifts of e_i in $\widehat{Q}_1 \cup \widehat{Q}_2$, the square Q is not included in K . As the cubical neighborhood of $C_1 \cap C_2$ is isomorphic to the cube complex $C_1 \cap C_2 \times \square$, where \square is a square, and as the square Q of the cubical barycentric subdivision C' of C is not totally included in $C_1 \cap C_2$, the square Q is a quarter of a square of C given by a point times \square in the neighborhood of $C_1 \cap C_2$. We can assume that e_i belongs to C_i . If not, switch the notation of e_1 and e_2 . Consider the path $\widehat{\gamma}$ obtained by the concatenation of a path $\widehat{\gamma}_H$ of \widehat{H} from the center of \widehat{Q}_1 to the intersection of \widehat{H} and \widehat{K} , and a path $\widehat{\gamma}_K$ of \widehat{K} from this intersection to the center of \widehat{Q}_2 . Let γ , γ_H and γ_K be the image of $\widehat{\gamma}$, $\widehat{\gamma}_H$ and $\widehat{\gamma}_K$ under the projection f . The path γ is a loop of C' . Since $\widehat{\gamma}$ itself is not a loop the (algebraic) intersection number of γ with $C_1^+ \cap C_2$ has to be different from zero, otherwise γ would lift to a loop in the ramified cover. We will reach a contradiction by showing that in fact γ has a trivial intersection with $C_1^+ \cap C_2$. Actually, H and K are disjoint from C_2 and C_1 . For example e_1 is an edge of C' , contained in an edge of C dual to the hyperplane C_2 in C . The intersection of every cube D of C with C_2 is obtained by setting one coordinate to $\frac{1}{2}$, and the intersection with H is obtained by setting the same coordinate to $\frac{1}{4}$ or $\frac{3}{4}$, so H is a disjoint copy of C_2 . We can use exactly the same reasoning to prove that K is disjoint from C_1 . Now, there are two possibilities depending on whether K is totally included in C_1^- or in C_1^+ . In the first case, as $\gamma_H \subset H$ which is disjoint from C_2 , and $\gamma_K \subset K \subset C_1^-$, the loop γ never crosses $C_1^+ \cap C_2$. Now, if K is totally included in C_1^+ , as C_2 separates C , the algebraic intersection number of the loop γ with C_2 is zero. Since H is disjoint from C_2 , the path $\gamma_H \subset H$ does not cross C_2 . Then intersections of γ and C_2 are in γ_K and the intersection number of γ_K with C_2 is zero. As γ_K is included in C_1^+ , the intersection number of the loop γ with $C_1^+ \cap C_2$ is zero, and we have a contradiction.

Let \widehat{H} be a self-osculating hyperplane of \widehat{C} . Denote by \widehat{e}_1 and \widehat{e}_2 two distinct edges, transverse to \widehat{H} , sharing a vertex \widehat{v} . Denote by e_1 , e_2 , v and H the image of \widehat{e}_1 , \widehat{e}_2 , \widehat{v} and \widehat{H} under f . If $e_1 \neq e_2$ then H will be a self-osculating or a self-intersecting hyperplane of C' . If $e_1 = e_2$, then v will belong to the ramification locus and $e_1 \subset C_1^+ \cap C_2$. A path γ from the center of \widehat{e}_1 to the center of \widehat{e}_2 is sent onto a loop of C' which crosses $C_1^+ \cap C_2$ non trivially. As H is transverse to e_1 H is a copy of a hyperplane of C_1 , so H is totally included in C_1^+ , and as C_2 separates C' , $f(\gamma)$ has to cross $C_1^+ \cap C_2$ trivially.

□

3.5 Gromov-Thurston manifolds.

The main result relies on the following Theorem of [BHW11].

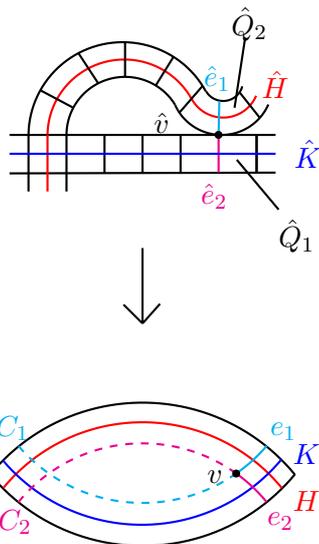


FIGURE 3.8 – When e_1 and e_2 are two adjacent edges of a square.

Theorem 3.5.1. “Simple type” arithmetic manifolds are cubical and virtually special.

Let V be a “Simple type” arithmetic manifold, containing many (immersed) compact totally geodesic codimension 1 submanifolds. The fundamental group of V acts cocompactly on the cube complex associated with a finite number of such submanifolds. To show the last Theorem, Gromov and Thurston chose these submanifolds such that the action of $\pi_1(V)$ on the dual cube complex is proper, using the following criteria : let \mathcal{H} be a collection of lifts of a finite number of hyperplanes W_1, \dots, W_ℓ of V described as above. For every pair of point x, y , denote by $d_{\mathcal{H}}$ the number of elements of \mathcal{H} witch separate x from y . If $d_{\mathcal{H}}$ and the usual distance on \mathbb{H}^n are quasi-isometric then the action of $\pi_1(V)$ on the dual cube complex is proper.

To choose such a collection of hyperplanes in [BHW11], the authors use the fact that hyperplanes of \mathbb{H}^n which project to a compact submanifold of V are dense in the set of hyperplanes of \mathbb{H}^n (see p. 6 of [BHW11]). Later, they prove that by passing to a finite cover of V , the quotient of the cube complex obtained using this construction by the group $\pi_1(V)$ is special.

Let V be an arithmetic manifold. By passing to a finite cover, Gromov and Thurston constructed two totally geodesic manifolds, V_1 and V_2 , which separate V , and then consider \hat{V} a ramified covering of V above $V_1 \cap V_2$. Let us prove that \hat{V} is virtually special.

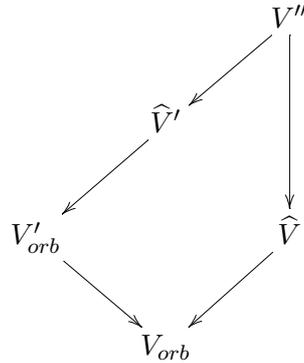
Proof of Theorem 3.1.1. In the proof of Proposition 2.1 in [BHW11], the argument of density for choosing W_1, \dots, W_ℓ allows to suppose furthermore that the intersections between hyperplanes of \mathcal{H} are generic. Then let V' be a finite cover of V such that the quotient of

the cube complex dual to \mathcal{H} by $\pi_1(V')$ is special. Denote by \widehat{V}' the cyclic ramified cover of degree k of V' above the intersection of the preimage of V_1 and V_2 in V' . By Theorem 3.1.5, $\pi_1(\widehat{V}')$ is cubical, and furthermore by Proposition 3.4.2, it is special. We will show that there exists a finite cover of \widehat{V}' and \widehat{V} . Then the fundamental group of \widehat{V} will be virtually special. To see this we will use covering orbifold theory.

Let V_{orb} be an orbifold. Its underlying space is V and its singular locus is $V_1 \cap V_2$. The orbifold structure is given by the following maps : If x belongs to $V \setminus V_1 \cap V_2$, choose a neighborhood sufficiently small which does not intersect the singular locus and take the identity on V . If $x \in V_1 \cap V_2$, a small tubular neighborhood of x is isomorphic to $D^2 \times]-1, 1[^{n-2}$. Then choose the quotient of $D^2 \times]-1, 1[^{n-2}$ by the action of $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ on D^2 .

Let V'_{orb} be an orbifold with V' as the underlying space obtained by pulling back under the covering map $p : V' \rightarrow V$ the orbifold structure of V_{orb} . For every point x of V' , a local map will be the composition of p and of a map of V' at $p(x)$. The projection $V'_{orb} \rightarrow V_{orb}$ is a covering orbifold. Ramified covering \widehat{V} is a covering orbifold of V_{orb} . Indeed, far from the singular locus, the projection $\widehat{V} \rightarrow V$ is the identity, and on a neighborhood of $V_1 \cap V_2$ this projection is a quotient by the cyclic group $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$. By the same reasoning, the manifold \widehat{V}' is a covering orbifold of V' .

Denote by \widetilde{V}_{orb} the universal covering orbifold of V_{orb} . There exists two groups G_1 and G_2 such that $\widehat{V}' = \widetilde{V}_{orb}/G_1$ and $\widehat{V} = \widetilde{V}_{orb}/G_2$. Note that G_1 is special. Consider now $V'' = \widetilde{V}_{orb}/G_1 \cap G_2$. V'' is a manifold and a (classical) cover of \widehat{V} since \widehat{V} is a manifold. Furthermore, as G_1 and G_2 have a finite index in G , the group $G_1 \cap G_2$ has a finite index in G_2 , and $G_1 \cap G_2$ is special as a subgroup of G_1 . Then $\pi_1(\widehat{V}) = G_2$ is virtually special.



□

Chapitre 4

Cubulation dans le cas où le lieu singulier est contenu dans une sous-variété de codimension 1

4.1 Introduction

Dans cette partie on se place dans la situation suivante :

Soient V une variété hyperbolique compacte connexe, L une sous-variété de codimension 2 totalement géodésique dans V et $p : (V', L') \rightarrow (V, L)$ un revêtement ramifié fini.

On suppose qu'il existe une famille \mathcal{H} d'hyperplans de \mathbb{H}^n , $\pi_1(V)$ -cofinie, uniformément localement finie et qui sépare linéairement \mathbb{H}^n . (D'après les théorèmes 1.2.3 et 1.2.9 le groupe fondamental $\pi_1(V)$ est cubique.) On note K la préimage de L dans \mathbb{H}^n et on suppose que l'intersection entre un hyperplan de \mathcal{H} et une composante connexe de K est **transverse**.

On se demande alors à quelles conditions le groupe $\pi_1(V')$ est cubique.

Nous commençons par décrire une première famille \mathcal{H}' de murs du revêtement universel de V' : les composantes connexes des préimages des murs de \mathcal{H} . Nous verrons ensuite que cette famille de murs, quoique très naturelle, n'est pas en général suffisante pour obtenir une cubulation de $\pi_1(V')$.

On note X' le revêtement universel de V' , d'après le lemme 2.1.8 il existe une application de revêtement ramifié $f : (X', K') \rightarrow (\mathbb{H}^n, K)$, et une application de revêtement $\pi' : (X', K') \rightarrow (V', L')$ telles que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc}
 & (X', K') & \\
 \pi' \swarrow & & \searrow f \\
 (V', L') & & (\mathbb{H}^n, K) \\
 p \searrow & & \swarrow \pi \\
 & (V, L) &
 \end{array}$$

D'après la proposition 2.2.13, X' est $\text{CAT}(-1)$ donc $\pi_1(V')$ est hyperbolique. Pour cubuler $\pi_1(V')$ on veut construire des murs dans X' quasi-convexes. On construit une première famille de murs de X' à partir des murs de \mathcal{H} : on note \mathcal{H}' la famille des composantes connexes des préimages d'hyperplans de \mathcal{H} dans X' par l'application f . Par la suite, pour des études locales au voisinage du lieu singulier on fera appel à la notion de *voisinage de ramification* utilisée dans le chapitre 2 pour décrire la métrique locale sur X' . On utilisera aussi la notion de *quartier* introduite dans ce même chapitre.

Lemme 4.1.1. Les éléments de \mathcal{H}' sont des murs de X' .

On utilise le lemme suivant :

Lemme 4.1.2. Soit M une sous-variété fermée et connexe de codimension 1 dans une variété simplement connexe X alors M est un mur au sens de la définition 1.1.8.

Démonstration. On montre dans un premier temps qu'il existe un voisinage O de M qui est séparé par M en au plus deux composantes connexes O_+ et O_- . Puis on construit deux sous-espaces connexes X_+ et X_- de $X \setminus M$ qui contiennent O_+ et O_- et qui recouvrent $X \setminus M$. Enfin, on montre que ces deux espaces sont disjoints.

La sous-variété M est de codimension 1 et n'a pas de bord, alors en tout point x de M il existe un voisinage O_x homéomorphe à une boule de \mathbb{R}^n et tel que via cet homéomorphisme M est l'intersection de cette boule avec un hyperplan. En particulier, $O_x \setminus (M \cap O_x)$ possède deux composantes connexes. On note \mathcal{O} l'ensemble des voisinages O_x comme décrit ci-dessus. On définit l'espace $O = \bigcup_{O_x \in \mathcal{O}} O_x$, et on considère \mathcal{C} l'ensemble des composantes connexes de $O \setminus M$. Soit $\mathcal{P}(\mathcal{C})$ l'ensemble des parties de \mathcal{C} muni de la topologie discrète. On construit alors l'application $h : M \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{C})$ de la façon suivante. Soit x un point de M , et soit O_x un voisinage de x dans \mathcal{O} . On définit $h(x)$ comme le sous-ensemble à un ou deux éléments de \mathcal{C} donné par la ou les composantes connexes de \mathcal{C} qui contiennent les composantes connexes de $O_x \setminus M$.

On montre que l'application h est continue. Soient $x \in M$ et O_x un voisinage de x dans \mathcal{O} . Soit y un point de $M \cap O_x$ et soit O_y un voisinage de y dans \mathcal{O} . Dans la boule B de \mathbb{R}^n associée à O_x on note P l'hyperplan associé à M . On remarque qu'un voisinage quelconque U d'un point de P possède au moins un point de chacune des composantes connexes de $B \setminus P$. Alors chacune des deux composantes connexes de $B \setminus P$ contient au moins une

composante connexe de $U \setminus P$. En appliquant cette remarque à $U = O_x \cap O_y$ dans O_x (respectivement dans O_y) on en déduit que $h(x)$ (respectivement $h(y)$) est l'ensemble des composantes connexes de \mathcal{C} de $O_x \cap O_y \setminus M$. Finalement on obtient $h(x) = h(y)$, donc h est continue. Comme h est une application continue dans un espace discret $\mathcal{P}(\mathcal{C})$ et que M est connexe alors h est constante. En particulier, O est un voisinage de M tel que $O \setminus M$ possède une ou deux composantes connexes.

Soit $x \in M$ et soit O_i un voisinage de x dans O_x . Soient x_+ et x_- deux points de O_i dans des composantes connexes différentes de $O_i \setminus M$. On note O^+ et O^- les composantes connexes de $O \setminus M$ qui contiennent x_+ et x_- . Pour l'instant il n'est pas clair que O^+ ne soit pas égal à O^- . On considère X_+ et X_- les ensembles de points de $X \setminus M$ reliés à x_+ ou x_- par un chemin dans $X \setminus M$. Par définition X_+ et X_- sont connexes.

Montrons que $X \setminus M = X_+ \cup X_-$. Comme X est connexe tout point y de $X \setminus O$ est relié à O par un chemin c . Quitte à prendre un sous-chemin, on peut supposer que l'intérieur de c est disjoint de O . Le chemin c est dans $X \setminus M$. Selon que c soit relié à O^+ ou O^- le point y appartient à X_+ ou à X_- . On en déduit que $X \setminus M = X_+ \cup X_-$.

Montrons par l'absurde que $X_+ \cap X_- = \emptyset$. Supposons qu'il existe un point $y \in X_+ \cap X_-$, construisons un morphisme surjectif de $\pi_1(X, y)$ sur \mathbb{Z}_2 . On considère $[M]$ la classe d'équivalence de la sous-variété M dans le groupe d'homologie de Borel-Moore $\overline{H}_{n-1}(X) = H_{n-1}(\overline{X}, \{*\})$. La dualité de Poincaré nous donne l'isomorphisme $H^1(X, \mathbb{F}_2) \cong \overline{H}_{n-1}(X, \mathbb{F}_2)$, voir [Vas01]. On peut alors définir l'intersection modulo 2 entre la classe d'équivalence d'un lacet de X et $[M]$. Dans $X \setminus M$ on considère deux chemins c_+ et c_- de y à x_+ et de y à x_- . La concaténation de chemins $c_+^{-1}c_-$ est un chemin de x_+ à x_- disjoint de M . On considère un chemin τ de x_- à x_+ dans O_i . Comme M sépare O_i en deux parties disjointes, le nombre d'intersection de τ avec M est impair. On note $i : \pi_1(X, y) \rightarrow \mathbb{Z}_2$ l'application qui à un lacet associe le nombre d'intersection de ce lacet avec M modulo 2. Ce morphisme est surjectif, en effet le lacet $c_+^{-1}c_-\tau$ intersecte M un nombre impaire de fois. On a une contradiction car M est par définition simplement connexe. Finalement, X_+ et X_- sont bien disjoints et M est bien un mur de X . \square

Lemme 4.1.3. Soit H' un élément de \mathcal{H}' alors $H = f(H')$ appartient à \mathcal{H} . De plus la restriction de f à H' est un revêtement ramifié de H .

Démonstration. Par définition H' est une composante connexe de $f^{-1}(H)$ pour un certain hyperplan $H \in \mathcal{H}$. Montrons que la restriction de $f : f^{-1}(H) \rightarrow H$ est un revêtement ramifié. L'application $f : X' \setminus K' \rightarrow \mathbb{H}^n \setminus K$ est un revêtement. Dans n'importe quelle boule qui trivialise ce revêtement la trace de H est une sous-variété de codimension 1. On en déduit immédiatement que $f : f^{-1}(H) \setminus (K' \cap f^{-1}(H)) \rightarrow H \setminus (K \cap H)$ est un revêtement.

Soit x un point de $K \cap H$. Soit K_x la composante connexe de K qui contient x et soit N un ϵ -voisinage de K_x qui est un voisinage de ramification. On choisit une sous-

variété totalement géodésique de codimension 1 de N qui contient K . On obtient alors un découpage de N en deux quartiers à bords convexes. La préimage de N est une union de voisinages de ramification N'_j , eux aussi découpés en quartiers à bords convexes. Il existe un $0 < \epsilon_0 < \epsilon$ tel que le ϵ_0 -voisinage N_H de $K \cap H$ dans H (pour la métrique de longueur induite sur H) soit inclus dans N . On note N'_H la préimage de N_H par f . Alors N_H (resp. toute composante connexe de N'_H) est isomorphe à $(K \cap H) \times \mathbb{D}$. La trace des quartiers de N sur H découpe N_H en deux quartiers. De plus dans la carte $B \times \mathbb{D}$ de N_H ces quartiers découpent $B \times \mathbb{D}$ en deux produits de B avec un demi-disque de \mathbb{D} . La trace des quartiers de N' sur H' découpe chaque composante connexe de N'_H en quartiers. Dans les cartes on obtient bien que f est le produit de l'identité par une rotation. Finalement $f : f^{-1}(H) \rightarrow H$ est un revêtement ramifié.

Par définition H' est une composante connexe de $f^{-1}(H)$, et H est connexe. On conclut en utilisant le lemme 2.1.3. \square

Démonstration du lemme 4.1.1. D'après le lemme 4.1.2 comme X' est simplement connexe, il suffit de montrer qu'un élément H' de \mathcal{H}' est une sous-variété de codimension 1 sans bord dans X' pour montrer que c'est un mur de X' .

On étudie localement H' en deux types de points. Le sous-espace $H' \setminus K'$ est localement la préimage de la sous-variété H par le revêtement $f : X' \setminus K' \rightarrow \mathbb{H}^n \setminus K$. Donc $H' \setminus K'$ est une sous-variété de codimension 1 de $X' \setminus K'$ donc de X' .

Supposons que $x \in H' \cap K'$. Soit K'_x la composante connexe de K' qui contient x et soit N' un voisinage de ramification autour de K'_x . On note $N = f(N')$, $K_x = f(K'_x)$ et $H = f(H')$. On choisit une sous-variété W dans N qui contient K_x alors N est union de deux quartiers Q et R définis comme dans le chapitre 2. De plus N' est homéomorphe à l'union de copies Q_1, \dots, Q_k et R_1, \dots, R_k le long de copies de W , avec k le degré de ramification de $f|_{N'}$. Comme H et K sont transverses, alors $W \cap H$ découpe H dans N en deux quartiers $Q \cap H$ et de $R \cap H$. L'espace H est alors donné par le recollement cyclique de k copies de $Q \cap H$ et de $R \cap H$ le long de copies de $W \cap H$. On en déduit que H' est une sous-variété de codimension 1 dans N' .

D'autre part la sous-variété H' est bien fermée comme composante connexe du fermé $f^{-1}(H)$. \square

On sait maintenant que les éléments de \mathcal{H}' sont des murs de X' , cependant cette famille n'est pas toujours linéairement séparante dans X' . Deux problèmes interviennent. Premièrement, certaines géodésiques de X' peuvent être disjointes de la famille \mathcal{H}' même si \mathcal{H} sépare linéairement \mathbb{H}^n . Deuxièmement, les éléments de \mathcal{H}' ne sont pas convexes en général. Ainsi, même si il existe une constante C telle que tout segment de longueur C voit ses extrémités séparées par un mur de \mathcal{H}' cela ne garantit pas pour autant la séparation linéaire de \mathcal{H}' . En effet, un mur qui coupe un nombre pair de fois un segment de X' ne sépare pas ses extrémités, pourtant il sépare les extrémités de sous-segments qui intersectent une

seule fois ce mur. On illustre ces deux situations par deux exemples, les exemples 4.1.5 et 4.1.6, mais avant on montre le lemme technique suivant.

Lemme 4.1.4. Soit $f : (X', K') \rightarrow (\mathbb{H}^n, K)$ un revêtement ramifié. Soit K'_0 une composante connexe de K' et soit N' un voisinage de ramification de K'_0 . Soient x'_1 et x'_2 deux points distincts dans N' tels que $f(x'_1) = f(x'_2) = x$. On note τ le plus court segment entre x et $K_0 = f(K'_0)$. On note τ'_1, τ'_2 les relevés de τ par f en x'_1 et x'_2 . Alors le segment géodésique entre x'_1 et x'_2 dans N' est la concaténation $\tau'_1 \overline{\tau'_2}$.

Comme d'habitude on note \bar{c} le chemin opposé au chemin c .

Démonstration. On considère p le projeté de x sur K_0 alors τ est le segment géodésique entre x et p . Comme K_0 est simplement connexe et que f est un revêtement en restriction à K'_0 , f envoie identiquement K'_0 sur K_0 . On note alors p' la préimage de p par f dans K'_0 . Remarquons que τ'_1 et τ'_2 ont tous deux pour extrémité p' car K'_0 ne contient qu'une préimage de p . Montrons que la concaténation de τ'_1 et de $\overline{\tau'_2}$ est géodésique. On remarque qu'un segment géodésique entre x'_1 et x'_2 intersecte K'_0 . En effet, sinon l'image du segment géodésique entre x_1 et x_2 est un segment localement géodésique entre x et lui même dans \mathbb{H}^n ce qui n'est pas possible.

Le segment géodésique entre x'_1 et x'_2 passe donc par K'_0 . Un tel segment possède au moins un sous-segment entre x'_1 et K'_0 et un sous-segment entre x'_2 et K'_0 . Par minimalité des segments τ'_1 et τ'_2 on en déduit que le segment minimal entre x'_1 et x'_2 est bien la concaténation de τ'_1 et de τ'_2 . \square

Exemple 4.1.5. On considère le pavage de \mathbb{H}^2 par des pentagones à angles droits. On peut obtenir la surface de genre 2 comme quotient de l'union P de 8 de ces pentagones par certaines identifications de faces, voir [Sco78]. L'angle de chaque cycle de sommet par ces identifications est bien de 2π , alors V est muni d'une métrique hyperbolique. L'image dans V d'une géodésique de \mathbb{H}^2 qui porte un des côtés de P est une courbe fermée simple α_i . On note \mathcal{H} la famille des géodésiques de \mathbb{H}^2 qui portent les bords de P .

La famille \mathcal{H} sépare linéairement \mathbb{H}^2 car P est compact. En effet, si on note D la plus grande distance entre deux points de P alors on a pour toute paire de points x et y de \mathbb{H}^2 l'inégalité $\frac{d(x,y)}{D+1} - 1 \leq |x, y|$ avec $|x, y|$ le nombre de murs entre x et y . Pour voir cela il suffit de considérer le segment géodésique γ entre x et y . Tout sous-segment de γ de longueur au moins $D + 1$ a ses extrémités dans deux polygones différents du pavage de \mathbb{H}^2 par des copies de P . Alors, un tel segment coupe au moins un mur H de la famille \mathcal{H} . Comme H et γ sont convexes alors H intersecte γ au plus une fois, il sépare donc x de y . On en déduit que $\lfloor \frac{d(x,y)}{D+1} \rfloor \leq |x, y|$ et donc $\frac{d(x,y)}{D+1} - 1 \leq |x, y|$.

Soit c un segment géodésique de V disjoint des courbes α_i . On considère V' un revêtement ramifié fini cyclique de degré 2 de V au-dessus de ∂c (pour une construction voir la section 2.1.2).

On note X' le revêtement universel de V' , et f l'application de X' à \mathbb{H}^2 . Montrons qu'une composante connexe γ de la préimage de c dans X' est une géodésique de X' .

La préimage c' de c dans V' est l'union de deux copies c_1 et c_2 de c recollées le long de leurs bords, isomorphes à ∂c . C'est une courbe fermée simple et d'après le lemme 4.1.4 c' est une géodésique locale.

D'après le lemme 2.2.13, l'espace X' est CAT(-1), alors c' se relève dans X' en une géodésique disjointe de \mathcal{H}' .

Même si on suppose que \mathcal{H} sépare toute paire de composantes connexes de K dans \mathbb{H}^n une autre difficulté intervient pour montrer qu'une famille de murs \mathcal{H}' sépare linéairement X' . Les murs de \mathcal{H}' ne sont pas convexes en général, on construit un exemple en dimension 3.

Exemple 4.1.6. Soit $f : (X', K') \rightarrow (\mathbb{H}^3, K)$ un revêtement ramifié de degré 2. Soit K'_0 une composante connexe de K' où f ramifie. On note $K_0 = f(K'_0)$. On considère N' un voisinage de ramification de K'_0 et on note $N = f(N')$. Soit H un hyperplan de \mathbb{H}^3 transverse à K_0 en un point y et tel que $H \not\perp K_0$. Il existe une unique droite d de H orthogonale à K_0 . Soit $x \in H \cap N$ tel que le segment $[y, x]$ n'est pas inclus dans d , de sorte que $\text{long}([x, y]) < d(x, y)$. Soit W le demi-hyperplan de bord K_0 contenant $[y, x]$. On considère H' une composante connexe de la préimage de H par f . La variété W découpe N alors N' est obtenu comme revêtement cyclique de degré 2 au-dessus de K_0 associé à W (voir la section 2.1.2). On considère x'_1 et x'_2 les deux relevés de x à $N' \cap H'$.

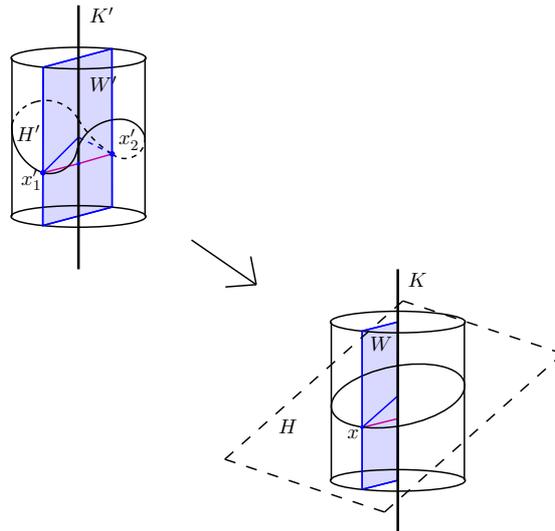


FIGURE 4.1 – Un relevé H' d'un mur H de \mathcal{H} dans un voisinage de ramification

D'après le lemme 4.1.4, la distance $d_{H'}(x'_1, x'_2)$ est donnée par deux fois la distance entre x et K_0 dans H alors que la distance $d(x'_1, x'_2)$ est donnée par deux fois la distance entre x et K_0 . Alors $d(x'_1, x'_2) < d_{H'}(x'_1, x'_2)$, et donc H' n'est pas convexe.

De plus, on peut démontrer que la demi-droite γ qui passe par x et qui est orthogonale à K_0 se relève en une géodésique γ' de X' (quitte à perturber légèrement $x \in H$ pour obtenir $\gamma \cap K = \{x\}$), de sorte que $\gamma \cap H' = \{x'_1, x'_2\}$. Même si le mur H' intersecte γ , deux points de γ au delà de x'_1 d'une part et x'_2 d'autre part ne sont pas séparés par H' .

Dans la suite du chapitre 4 nous allons considérer une sous-variété \overline{W} dans V qui contient le lieu singulier. La sous-variété W' préimage de \overline{W} dans X' permet de construire une famille de murs \mathcal{W}' en plus de la famille \mathcal{H}' . Cette famille \mathcal{W}' séparera les droites du type de celle de l'exemple 4.1.5. En fait on montrera que la famille de murs $\mathcal{H}' \cup \mathcal{W}'$ est suffisamment riche pour obtenir une cubulation de X' .

Théorème 4.1.7. *Soit V une variété hyperbolique compacte. Soit L une sous-variété de codimension 2 dans V , fermée et totalement géodésique. Soit $p : (V', L') \rightarrow (V, L)$ un revêtement ramifié de degré fini.*

On suppose qu'il existe une famille \mathcal{H} d'hyperplans de \mathbb{H}^n , uniformément localement finie, $\pi_1(V)$ -cofinie et linéairement séparante dans \mathbb{H}^n .

On suppose qu'il existe \overline{W} une sous-variété de codimension 1 plongée dans V , fermée et totalement géodésique (pas nécessairement connexe) qui contient L .

Alors le groupe fondamental $\pi_1(V')$ est cubique.

Le reste du chapitre 4 est consacré à la preuve de ce résultat.

Soit $\pi' : X' \rightarrow V'$ le revêtement universel de V' et $\pi : \mathbb{H}^n \rightarrow V$ le revêtement universel de V , et on considère $f : X' \rightarrow \mathbb{H}^n$ comme dans le lemme 2.1.8. On note K la préimage de L dans \mathbb{H}^n , K' la préimage de L dans X' , W la préimage de \overline{W} dans \mathbb{H}^n et W' la préimage de W dans X' . Pour montrer le théorème 4.1.7 on va utiliser les théorèmes de cubulation 1.2.3 et 1.2.9 rappelés dans le chapitre 1. Ainsi il nous faut construire une famille localement finie et $\pi_1(V')$ -cofinie de murs dans X' , quasi-convexes et qui séparent linéairement X' .

4.2 X' comme arbre d'espaces

Définition 4.2.1. On appelle *mur ramifié* de X' une composante connexe de W' . On dit qu'un mur ramifié W'_0 de X' sépare deux points x et y si x et y sont dans deux composantes connexes différentes de $X' \setminus W'_0$.

Remarque 4.2.2. On remarque ici que les murs ramifiés ne sont pas des murs au sens de la définition 1.1.8.

Définition 4.2.3. On appelle *portion ouverte* de \mathbb{H}^n une composante connexe de $\mathbb{H}^n \setminus W$. De même on appelle *portion ouverte* de X' une composante connexe de $X' \setminus W'$. Une *portion* (fermée) est l'adhérence d'une portion ouverte.

Lemme 4.2.4. Soit Π' une portion ouverte ou fermée de X' . Alors $f(\Pi')$ est une portion Π de \mathbb{H}^n de même nature et f induit une isométrie de Π' sur Π . De plus Π' est convexe dans X' .

Définition 4.2.5. On note T' le graphe biparti dont les sommets blancs sont les portions fermées $\Pi'_i \subset X'$ et les sommets noirs sont les murs ramifiés $W'_j \subset X'$, avec une arête entre Π'_i et W'_j lorsque l'intersection $\Pi'_i \cap W'_j$ est non vide.

Proposition 4.2.6. Le graphe T' est un arbre.

Démonstration. On interprète T' comme le nerf d'un recouvrement ouvert \mathcal{O}' de X' . Les ouverts de \mathcal{O}' sont d'une part les portions ouvertes de X' et d'autre part les ϵ -voisinages de murs ramifiés dans X' . On choisit ϵ suffisamment petit pour que deux composantes connexes distinctes de W dans \mathbb{H}^n soient à distance strictement supérieure à ϵ .

L'espace X' étant connexe et simplement connexe, le graphe T' est un arbre. \square

L'espace X' apparait ainsi comme un arbre d'espace. Les espaces aux sommets de T' sont les portions Π'_i et les murs ramifiés W'_j . Les espaces d'arêtes sont les intersections non vides $\Pi'_i \cap W'_j$. Les applications de recollement sont les inclusions canoniques.

Lemme 4.2.7. Soit K_0 une composante connexe de K' et soit Π' une portion de X' qui contient K_0 . Alors l'intersection de Π' avec un voisinage de ramification autour de K_0 est un quartier.

4.3 Murs de X'

4.3.1 Construction de nouveaux murs

Dans l'introduction de ce chapitre nous avons décrit une première famille de mur sur X' : la famille \mathcal{H}' . Construisons une deuxième famille de murs de X' à partir de sous-espaces de W' .

Pendant toute la suite de ce chapitre nous considérerons des voisinages de ramification découpés par la variété W . En particulier, le bord d'un quartier est inclus dans W ou W' .

Sur une composante connexe W_0 de W' on considère deux types de sous-espaces appelés *pièces* :

- Les *pièces de type 1* sont les composantes connexes de $W_0 \setminus K'$.
- Les *pièces de type 2* sont les composantes connexes de K' dans W_0 .

On rappelle que dans un voisinage de ramification $N(K'_0)$ l'ensemble des pièces de type 1 sont ordonnées cycliquement : deux pièces de type 1, W_1 et W_2 , sont *consécutives* autour d'une pièce de type 2 K'_0 si dans n'importe quel voisinage de ramification $N(K'_0)$ découpé par W l'union $W_1 \cup K'_0 \cup W_2$ est le bord d'un quartier de $N(K'_0)$.

Remarque 4.3.1. D'après le lemme 4.1.2 pour construire un mur de X' il suffit de construire une sous-variété fermée M de X' de codimension 1 sans bord dans X' . Or une composante connexe W_0 de W' contient de nombreuses sous-variétés de codimension 1 comme nous le montrons maintenant.

Une pièce W_1 de type 1 est localement une sous-variété de codimension 1 en tout point. En effet, l'application f est une isométrie locale sur un petit voisinage de chaque point de W_1 .

Autour d'une pièce K_0 de type 2 l'union de K_0 et de deux pièces W_1 et W_2 de type 1 de bord K_0 est de codimension 1 dans X' . En effet, dans un voisinage de ramification N de K_0 découpé par la préimage de W , l'union $W_1 \cup K_0 \cup W_2$ est le bord de l'union d'un certain nombre de quartiers.

On construit deux types de nouveaux murs dans X' en étendant des unions de pièces autour de quartiers d'une composante connexe de K' . Pour garantir que ces murs s'étendent sans se recouper on utilise les lemmes suivants :

Lemme 4.3.2. Toute union connexe de pièces de types 1 et 2 de W' est convexe dans X' .

Démonstration. On remarque tout d'abord qu'un sous-espace connexe U de X' localement convexe est convexe puisque X' est $\text{CAT}(-1)$ (voir [LHG90, p.64, proposition 29] et [Pap05, proposition 8.3.3]).

Soit U une union connexe de pièces de W' , montrons que U est localement convexe. Soit x un point de U . Si x appartient à une pièce de type 1 alors il existe une boule B qui contient x dans X' disjointe de K' . La restriction de f à B est une isométrie, et comme W est convexe dans \mathbb{H}^n on en déduit que $U \cap B$ est convexe dans B . En particulier, on vient de montrer que les pièces de type 1 sont convexes dans X' .

On se place maintenant dans la situation où x appartient à une pièce de type 2 notée K'_0 . On considère N' un voisinage de ramification autour de K'_0 . Soient y et z deux points de $U \cap N'$, et soit γ le segment géodésique entre y et z . Montrons que γ est inclus dans $U \cap N'$. Comme N' est convexe d'après le lemme 2.2.3 la géodésique γ est inclus dans N' . Si y et z sont dans une même pièce de type 1 de U alors d'après le paragraphe précédent γ est incluse dans cette pièce de type 1. De même, l'union d'une pièce de type 1 et d'une pièce de type 2 est localement convexe, donc si y et z appartiennent à l'union d'une pièce de type 1 et d'une pièce de type 2 alors γ appartient à cette union aussi.

Reste à traiter le cas où y et z appartiennent à deux pièces de type 1 différentes autour de K_x . On note W_y et W_z les pièces qui contiennent y et z . Montrons par l'absurde que γ intersecte K_x . D'après le corolaire 2.2.4 $f : X' \setminus K' \rightarrow \mathbb{H}^n \setminus K$ est une isométrie locale. Si γ est disjoint de K_x alors $f(\gamma)$ est une géodésique de \mathbb{H}^n . Or $f(y)$ et $f(z)$ sont dans $f(W_0)$. Par locale convexité $f(\gamma)$ est dans $f(W_0)$. De plus $f(\gamma)$ est disjoint de K . Donc $f(\gamma)$ reste dans $f(W_y)$. Pour finir z appartient à W_y , d'où contradiction.

On a montré par l'absurde que γ intersecte K_x . On note a un point de $\gamma \cap K_x$. Maintenant, comme l'union $W_y \cup K_x$ est convexe alors le sous-segment de γ entre y et a est dans $W_y \cup K_x$, de même comme $W_z \cup K_x$ est convexe le sous-segment de γ entre a et z est inclus dans $W_z \cup K_x$. Finalement, le segment géodésique γ est inclus dans U . On en déduit que U est localement convexe, donc convexe d'après le premier paragraphe. \square

Corollaire 4.3.3. Les murs ramifiés de X' sont convexes.

Définition 4.3.4. À chacune des composantes connexes W_0 de W' on peut associer un graphe $\mathcal{G}(W_0)$ construit de la façon suivante. Les sommets sont indexés par les pièces de W_0 , et deux sommets sont reliés par une arête si et seulement si une composante connexe de K' (pièce de type 2) est incluse dans le bord d'une composante connexe de $W_0 \setminus K'$ (pièce de type 1).

Lemme 4.3.5. Le graphe $\mathcal{G}(W_0)$ associé à une composante connexe W_0 de W' est un arbre.

Démonstration. Le graphe $\mathcal{G}(W_0)$ est biparti. De plus $\mathcal{G}(W_0)$ est connexe car W_0 est connexe. Montrons que $\mathcal{G}(W_0)$ n'a pas de cycle, par l'absurde. Si $\mathcal{G}(W_0)$ a un cycle non trivial alors $\mathcal{G}(W_0)$ a un cycle simple c . Soit alors P_c l'union des pièces de W_0 en correspondance avec les sommets de c . Alors P_c est connexe donc convexe dans X' par le lemme 4.3.2. En particulier P_c est contractile. Mais d'autre part comme c est un cycle simple P_c admet des revêtements cycliques non-triviaux, contradiction. \square

Définition 4.3.6. Soit W_0 une composante connexe de W' . Un *séparateur* de X' (contenu dans W_0) est une union S de pièces de W_0 obtenue comme suit.

On considère un sous-arbre \mathcal{S} contenu dans $\mathcal{G}(W_0)$ tel que

- Pour un sommet v de type 1 de \mathcal{S} , tout voisin de v dans $\mathcal{G}(W_0)$ appartient à \mathcal{S} .
- Chaque sommet de type 2 de \mathcal{S} est de degré 2.

Le séparateur S est alors défini comme l'union des pièces de W_0 en correspondance avec un sommet de \mathcal{S} .

Lemme 4.3.7. Un séparateur est un mur de W' .

Démonstration. Supposons le séparateur S associé à un sous-arbre $\mathcal{S} \subset \mathcal{G}(W_0)$. La condition 2 sur \mathcal{S} assure que S est une sous-variété de codimension 1 (voir remarque 4.3.1). La condition 1 sur \mathcal{S} assure que S est une sous-variété fermée. Par le lemme 4.1.2 S est un mur de X' . \square

On va définir deux familles de séparateurs comme murs de X' en plus des murs de \mathcal{H}' .

Définition 4.3.8. On note \mathcal{W}^0 la famille des séparateurs M de X' tels que :

- dans un voisinage de chaque composante connexe de K' dans M , le mur M borde exactement un quartier,

- de plus les intérieurs de tous les quartiers ainsi décrits sont du même côté de $X' \setminus M$.

Lemme 4.3.9. Soit P une pièce de type 1 d'un mur ramifié W_0 . Alors il existe exactement deux portions fermées Π'_1 et Π'_2 contenant P . Les intersections $\Pi'_1 \cap W_0$ et $\Pi'_2 \cap W_0$ sont les deux murs de \mathcal{W}^0 contenant P .

Démonstration. On remarque que $f(W_0)$ est une composante connexe de la sous-variété de codimension 1 W . Soit B une petite boule de \mathbb{H}^n qui intersecte W en $f(P)$. Soit B' l'unique relevé de B qui intersecte P . Alors $B' \setminus P$ définit deux portions ouvertes distinctes dont l'adhérence rencontre P . On note Π'_1 et Π'_2 les adhérences de ces portions ouvertes. On note Π_1 et Π_2 les images de Π'_1 et Π'_2 par f . La portion $\Pi_1 \subset \mathbb{H}^n$ est une sous-variété à bord de dimension n . La composante connexe de $\partial\Pi_1$ qui contient $f(P)$ est une sous-variété totalement géodésique de codimension 1, union de pièces de types 1 ou 2. (Toute pièce de type 2 est contenue dans exactement deux pièces de type 1.) Comme f induit une isométrie de Π'_1 sur Π_1 (voir lemme 4.2.4) on en déduit que la composante connexe de $\partial\Pi'_1$ contenant P est un mur de \mathcal{W}^0 . \square

Corollaire 4.3.10. Les murs de \mathcal{W}^0 sont convexes dans X' . De plus la restriction de f à un tel mur est une isométrie.

Démonstration. D'après le lemme 4.3.9 un mur M de \mathcal{W}^0 est de la forme $M = \Pi' \cap W_0$, avec Π' une portion fermée et W_0 un mur ramifié de X' . D'après le lemme 4.3.2 M est convexe dans X' . Toujours d'après le lemme 4.3.9 la restriction de f à Π' est une isométrie. Comme M est convexe dans X' on en déduit que la restriction de f à M est une isométrie. \square

Définition 4.3.11. On note \mathcal{W}^+ la famille des séparateurs M de X' tels que :

- dans un voisinage de chaque composante connexe de K' dans M , le mur M borde exactement un quartier si l'ordre de ramification est 1 et une union de deux quartiers sinon,
- de plus les intérieurs de tous les quartiers ainsi décrits sont du même côté de $X' \setminus M$.

Lemme 4.3.12. Soit P une pièce de type 1 d'un mur ramifié W_0 . Alors il existe exactement deux murs de \mathcal{W}^+ contenant P . (Ces deux murs sont confondus si tous les ordres de ramification sont 2).

Démonstration. Appelons *géodésique latéralisée de longueur n* de $\mathcal{G}(W_0)$ une suite $(P_0, \Pi_0, K_1, P_1, \Pi_1, \dots, K_n, P_n, \Pi_n)$ où :

1. $(P_0, K_1, P_1, \dots, K_n, P_n)$ est une géodésique de l'arbre $\mathcal{G}(W_0)$ (avec P_i des pièces de type 1 et K_j des pièces de type 2) ;
2. chaque Π_i est une des deux portions telles que $P_i \subset \partial\Pi_i$;
3. pour chaque pièce K_j on a $\Pi_{j-1} = \Pi_j$ si f ne ramifie pas autour de K_j , et $\overline{\Pi_{j-1}} \cap \overline{\Pi_j}$ est une pièce de type 1 différent de P_{j-1} si f ramifie autour de K_j .

Par exemple, si Π est une portion de X' contenant P dans son bord, alors (P, Π) est une géodésique latéralisée.

Notons à présent que pour toute géodésique latéralisée de longueur n $(P_0, \Pi_0, K_1, P_1, \Pi_1, \dots, K_n, P_n)$ et tout prolongement géodésique $(P_0, K_1, P_1, \dots, K_n, P_n, K_{n+1})$ de $(P_0, K_1, P_1, \dots, K_n, P_n)$, il existe une unique pièce de type 1 P_{n+1} et une unique portion Π_{n+1} telle que $(P_0, \Pi_0, K_1, P_1, \Pi_1, \dots, K_n, P_n, \Pi_n, K_{n+1}, P_{n+1}, \Pi_{n+1})$ est une géodésique latéralisée de longueur $n + 1$.

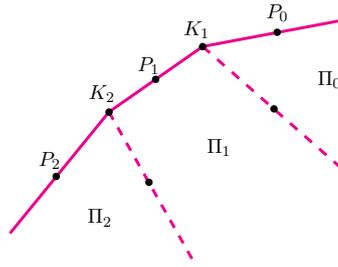


FIGURE 4.2 – La géodésique par morceaux γ

Pour Π une portion de X' dont l'adhérence contient P , soit alors \mathcal{S} le sous-arbre réunion de toutes les géodésiques de l'arbre $\mathcal{G}(W_0)$ de la forme $(P_0, K_1, P_1, \dots, K_n, P_n)$, avec $P_0 = P$, et telles qu'il existe une géodésique latéralisée $(P_0, \Pi_0, K_1, P_1, \Pi_1, \dots, K_n, P_n, \Pi_n)$ avec $\Pi_0 = \Pi$. Compte-tenu de la propriété de prolongement unique des géodésiques latéralisées mentionnée ci-dessus, on constate que \mathcal{S} est un sous-arbre qui vérifie les deux propriétés de la définition 4.3.6. Le séparateur associé est bien un mur de \mathcal{W}^+ contenant P . Si on applique la même construction en partant de la deuxième portion de X' contenant P on obtient un deuxième mur de \mathcal{W}^+ contenant P . Ces deux murs ne sont égaux que si tous les sommets de type 2 de \mathcal{S} sont de degré 2 ou 4 dans $\mathcal{G}(W_0)$ (ce qui correspond à un degré de ramification 1 ou 2). \square

Remarque 4.3.13. Soit M un mur de \mathcal{W}^+ . Alors $f(M)$ est une sous-variété connexe à bord de W . Une composante de bord de $f(M)$ est de la forme $f(K_i)$, où $K_i \subset M$ est une composante de K' , de sorte que pour toute composante $K_j \subset M$ de K' telle que $f(K_j) = f(K_i)$, l'application f a un ordre de ramification strictement supérieur à 1 autour de K_j .

On note \mathcal{W}' l'union des familles $\mathcal{W}^0, \mathcal{W}^+$. On appelle *murs de X'* la réunion des familles \mathcal{W}' et \mathcal{H}' . D'après le lemme 4.3.2 on a :

Lemme 4.3.14. Les murs de \mathcal{W}' sont convexes dans X' .

Dans la partie suivante on montre quelques propriétés simples des murs de X' nécessaires pour utiliser les théorèmes de cubulation du chapitre 1.

4.3.2 Propriétés des murs de X'

Lemme 4.3.15. L'action de $\pi_1(V')$ sur X' préserve chacune des deux familles de murs \mathcal{W}^0 et \mathcal{W}^+ .

Démonstration. Clairement $\pi_1(V')$ envoie portions de X' sur portions de X' . Donc $\pi_1(V')$ préserve \mathcal{W}^0 .

D'autre part $\pi_1(V')$ envoie géodésiques latéralisés sur géodésiques latéralisés (au sens de la preuve du lemme 4.3.12). Donc $\pi_1(V')$ préserve \mathcal{W}^+ . \square

Lemme 4.3.16. Les familles de murs \mathcal{W}^0 et \mathcal{W}^+ sont $\pi_1(V')$ -cofinies.

Démonstration. Un mur de \mathcal{W}^0 ou de \mathcal{W}^+ est entièrement déterminé par le choix d'une composante connexe K_0 de K' et d'un quartier ou d'une union de deux quartiers consécutifs autour de K_0 . Comme le degré de ramification k de f est fini, il existe au plus $2k$ façons de choisir un quartier dans N' et au plus $2k$ façons de choisir deux quartiers consécutifs. Comme il existe un nombre fini de composantes connexes de L' dans V' alors il existe un nombre fini de composantes connexes de K' modulo l'action du groupe $\pi_1(V')$. Finalement, il existe bien un nombre fini de murs de \mathcal{W}^0 et \mathcal{W}^+ modulo l'action de $\pi_1(V')$. \square

Lemme 4.3.17. La famille $\mathcal{H}' \cup \mathcal{W}'$ des murs de X' est uniformément localement finie.

Démonstration. Montrons qu'il existe deux constantes $C, \epsilon > 0$ telles que toute boule de X' de rayon ϵ rencontre au plus C murs de X' . On raisonne sur chacune des familles de murs de X' .

D'après le lemme 2.2.8, il existe une constante ϵ telle que toute boule de rayon ϵ de X' est soit dans un voisinage de ramification d'une composante connexe de K' pour l'application f , soit la restriction de f à cette boule est une isométrie sur son image.

On considère B' une boule de centre x et de rayon ϵ dans X' et $B(\epsilon)$ la boule de centre $f(x)$ et de rayon ϵ dans \mathbb{H}^n . D'après la remarque 2.2.2, l'espace $f(B')$ est inclus dans $B(\epsilon)$.

La famille des murs de \mathcal{H} est uniformément localement finie donc il existe une constante $C_{\mathcal{H}}$ telle que au plus $C_{\mathcal{H}}$ éléments de \mathcal{H} intersectent $B(\epsilon)$. Comme les composantes connexes de W dans \mathbb{H}^n sont uniformément localement finies, il existe une constante C_W telle que au plus C_W composantes connexes de W intersectent $B(\epsilon)$. Si la restriction de f à B' est une isométrie alors il existe au plus $C_{\mathcal{H}} + C_W$ murs de X' qui intersectent B' .

Supposons que B' soit incluse dans un voisinage de ramification N' d'une composante connexe K_0 de K' . Un tel voisinage de ramification est l'union de quartiers isomorphes à des quartiers de $N = f(N')$. Au plus $C_{\mathcal{H}}$ murs de \mathcal{H} rencontrent l'intersection d'une boule de rayon ϵ et un quartier de N . On en déduit que au plus $2kC_{\mathcal{H}}$ murs de \mathcal{H}' intersectent B' (k est le degré de ramification de f).

Supposons que l'ordre de ramification de N' soit k_0 alors au plus $4k_0$ murs de \mathcal{W}' intersectent N' . En effet, un mur de \mathcal{W}^0 est uniquement déterminé par le choix d'un

quartier de N' , il en existe exactement $2k_0$. De même, un mur de \mathcal{W}^+ est déterminé par le choix d'un quartier de N' si $k_0 = 1$ ou par le choix de deux quartiers consécutifs sinon, dans tous les cas il existe au plus k_0 murs de \mathcal{W}^+ qui intersectent N' . Au final, si on note k le degré de ramification de f alors B' intersecte au plus $\max(C_{\mathcal{H}} + C_{\mathcal{W}}, 2kC_{\mathcal{H}} + 4k)$. \square

4.4 Cubulation

Dans cette section, on montre que la famille de murs de X' décrite ci-dessus sépare linéairement X' et que les murs de \mathcal{H}' sont quasi-convexes. Ainsi, on peut utiliser les théorèmes de cubulation 1.2.3 et 1.2.9 pour s'assurer que le groupe fondamental de la variété V' agit proprement et cocompactement sur un complexe cubique CAT(0). Pour obtenir ces deux résultats on utilise la proposition 4.4.5 introduite dans la section 4.4.1, on montre que certaines géodésiques par morceaux voient leurs extrémités séparées par un nombre de murs de X' qui croît linéairement en fonction de la longueur de ces géodésiques par morceaux.

On va utiliser les murs ramifiés définis lors de la définition 4.2.1.

Lemme 4.4.1. Un mur ramifié W'_0 sépare deux points x et y de $X' \setminus W'_0$ si et seulement si il existe un mur M de \mathcal{W}' inclus dans W'_0 qui sépare x de y .

Démonstration. Dans le sens direct, on considère l'ensemble des composantes connexes de $X' \setminus W'_0$ l'une contient x sans contenir y . Le bord de cette composante connexe est un mur de \mathcal{W}^0 qui sépare x de y . Dans l'autre sens, comme x et y sont séparés par un mur M de \mathcal{W}' inclus dans W'_0 , ils sont dans des composantes connexes différentes de $X' \setminus M$. De plus comme $M \subset W'_0$, x et y se trouvent dans deux composantes connexes différentes de $X' \setminus W'_0$. \square

4.4.1 Un critère de séparation de géodésiques par morceaux

Dans cette partie nous allons voir un critère sur certaines géodésiques par morceaux pour garantir qu'il existe un nombre linéairement croissant de murs qui séparent une telle géodésique en fonction de sa longueur. D'autre part nous montrerons que toute paire de points de X' est reliée par une telle géodésique par morceaux. Comme la distance entre deux points est inférieure à la longueur d'une géodésique par morceaux qui les relie on en déduira que les murs de X' séparent linéairement toute paire de points de X' .

Esquissons l'argument de séparation pour une telle géodésique par morceaux γ . Tout d'abord, γ va être l'union de segments géodésiques σ_i , s_i^j et t_i^j qui s'envoient isométriquement sur des segments de \mathbb{H}^n . D'une part si un de ces segments est long, il existera un grand nombre de murs de \mathcal{H}' qui intersecteront ce segment. Pour garantir que les murs de \mathcal{H}' qui séparent les grands morceaux géodésiques n'intersectent pas d'autres morceaux de

γ on utilise des conditions d'angles minorés entre certains murs W_i ou M_i^\pm et certains segments de γ dans X' . D'autre part on va utiliser des murs de \mathcal{W}^+ pour séparer les différents segments. Ces murs sont indispensables par exemple dans le cas où γ est concaténation de nombreux petits segments géodésiques.

Lemme 4.4.2. Soit c une géodésique de X' d'extrémités x, y . Supposons que $f \circ c$ est la géodésique de \mathbb{H}^n entre $f(x)$ et $f(y)$. Soit $\mathcal{H}'(c)$ l'ensemble des murs de \mathcal{H}' qui séparent x de y . Et soit $\mathcal{H}(f(c))$ l'ensemble des murs de \mathcal{H} qui séparent $f(x)$ de $f(y)$. Alors $H' \mapsto f(H')$ réalise une bijection de $\mathcal{H}'(c)$ sur $\mathcal{H}(f(c))$. De plus pour $H' \in \mathcal{H}'(c)$ la géodésique c coupe H' en un point unique.

Démonstration. Pour $H' \in \mathcal{H}'(c)$ posons $H = f(H')$. D'après le lemme 4.1.3 on sait que $H \in \mathcal{H}$. Puisque H' sépare x de y soit p un point de $H' \cap c$. Si $f(c)$ est contenu dans H alors x et y sont dans H' , contradiction. Donc $f(c)$ est une géodésique de \mathbb{H}^n qui rencontre l'hyperplan totalement géodésique H en $f(p)$ et d'extrémités extérieures à H . Donc H sépare $f(x)$ de $f(y)$, et $H \cap f(c) = f(p)$.

Supposons par l'absurde que $H' \cap c$ contient un point $q \neq p$. Alors $f(q) \neq f(p)$ car $f \circ c$ est géodésique. Et donc $H \cap f(c)$ contient le segment non-trivial $[f(p)f(q)]$, contradiction.

Ceci conclut. \square

Définition 4.4.3. Soient p un point de X' , soient τ, τ' deux segments géodésiques non triviaux de X' d'origine p . Notons σ la géodésique de X' joignant les extrémités de τ et τ' . On dit que l'angle entre τ et τ' en p est $\geq \alpha$ si dans le triangle de comparaison $\overline{\tau} \cup \overline{\sigma} \cup \overline{\tau'}$ du plan hyperbolique \mathbb{H}^2 , l'angle en \overline{p} est $\geq \alpha$.

Soit F un convexe de X' non réduit à un point. Soit p un point de F et soit τ une géodésique de X' issue de p . On dit que l'angle entre τ et F (en p) est $\geq \alpha$ si pour tout segment géodésique non-trivial τ' de F issu de p , l'angle entre τ et τ' en p est $\geq \alpha$.

Exemple 4.4.4. Soit F un convexe fermé non trivial d'un espace métrique X , avec X propre et $\text{CAT}(-1)$. Soit $q \in X \setminus F$.

D'abord il existe une unique géodésique τ de longueur minimale entre un point de F et q , notons $p \in F$ l'origine de τ . Alors l'angle entre τ et F en p est $\geq \frac{\pi}{2}$. (Sinon, en utilisant un triangle de comparaison avec un angle en \overline{p} strictement inférieur à $\frac{\pi}{2}$ on pourrait trouver un point de F plus proche de q .)

Réciproquement si $p' \in F$, si τ' désigne la géodésique de p' à q et si l'angle en p' entre τ' et F est $\geq \frac{\pi}{2}$ alors $p' = p$. Sinon le triangle de comparaison $\overline{qp'p}$ aurait deux angles $\geq \frac{\pi}{2}$ à sa base. Ainsi p' est le projeté de q sur F .

On considère la situation suivante.

Soit $\gamma = \sigma_0 s_1^0 t_1^1 \dots t_1^{q_1} s_1^{q_1} \sigma_1 s_2^0 t_2^1 \dots t_2^{q_2} s_2^{q_2} \sigma_2 \dots \sigma_{p-1} s_p^0 t_p^1 \dots t_p^{q_p} s_p^{q_p} \sigma_p$ une concaténation de segments géodésiques σ_i, s_i^j, t_i^j de X' . On suppose de plus :

1. Il existe une famille W_1, \dots, W_p de murs ramifiés de X' , deux à deux disjoints, telle que l'intersection d'un mur ramifié W_i avec γ soit la sous-géodésique par morceaux $s_i^0 t_i^1 s_i^1 \dots t_i^{q_i} s_i^{q_i}$ et telle que W_i sépare les intérieurs de σ_{i-1} de σ_i pour $i = 1, \dots, p$. De plus, pour $0 \leq i \leq p$, σ_i est d'intérieur disjoint de W' , et non-dégénéré pour $i \neq 0, p$.
2. Il existe une famille de murs M_i^j de \mathcal{W}^+ inclus dans W_i , pour $i = 1, \dots, p$ et $j = 1, \dots, q_i$ telle que l'intersection d'un mur M_i^j avec γ soit le sous-segment géodésique t_i^j et telle que M_i^j sépare les intérieurs de s_i^{j-1} et de s_i^j pour $j = 1, \dots, q_i$. De plus, les s_i^j sont non dégénérés (pour $0 < j < q_i$), et chaque t_i^j est contenu dans K' .
3. Les segments géodésiques s_i^j ont une intersection finie avec K' et sont envoyés par f sur des segments géodésiques de \mathbb{H}^n (en conservant la longueur).
4. Dans l'espace CAT(-1) X' , les angles suivants sont minorés par une constante strictement positive θ :
 - L'angle entre σ_i et W_i (respectivement W_{i+1}).
 - L'angle entre s_i^j et M_i^{j+1} pour $j = 0, \dots, q_i - 1$ et l'angle entre s_i^j et M_i^j pour $j = 1, \dots, q_i$.
 - L'angle entre s_i^j et t_i^j (respectivement t_i^{j+1}).

Proposition 4.4.5. *Il existe deux constantes $\ell', \kappa' > 0$ telles que toute géodésique par morceaux γ d'extrémités x et y qui satisfait les conditions ci-dessus vérifie l'inégalité $\text{long}(\gamma) \leq \ell'|x, y| + \kappa'$, avec $|x, y|$ le nombre de murs (non ramifiés) de X' qui séparent x de y et $\text{long}(\gamma)$ la longueur de γ .*

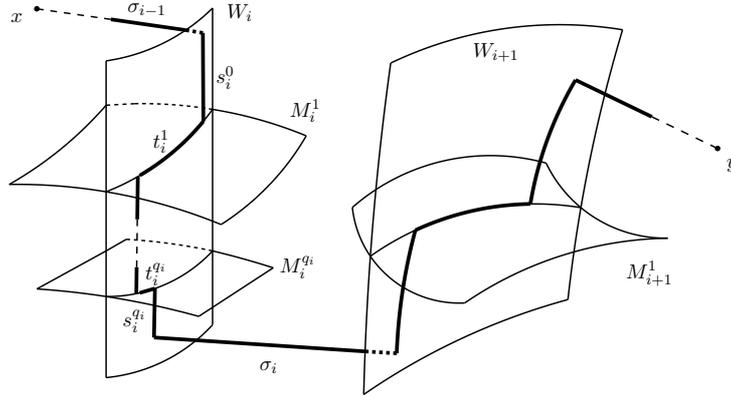
Remarque 4.4.6. 1. Les segments $\sigma_0, \sigma_p, s_i^0$ et $s_i^{q_i}$ peuvent être réduits à un point.
 2. Les segments géodésiques σ_i et t_i^j sont envoyés par f sur des segments géodésiques de \mathbb{H}^n (en conservant la longueur). En effet f est une isométrie locale sur le complémentaire de W' et sur chaque composante de K' .

Lemme 4.4.7. Sous les hypothèses et avec les notations de la proposition 4.4.5 :

1. Le mur ramifié W_i sépare le sous-segment de γ de x à W_i du sous-segment de γ de W_i à y .
2. Le mur M_i^j sépare le sous-segment de γ de x à M_i^j du sous-segment de γ de M_i^j à y .

Démonstration. La géodésique par morceaux γ s'écrit $\gamma = \gamma^- \tau_i \gamma^+$ avec $\tau_i = s_i^0 t_i^0 \dots s_i^{q_i}$. Par hypothèse W_i est disjoint des intérieurs de γ^- et γ^+ , et W_i sépare les intérieurs de σ_{i-1} et de σ_i , ce qui conclut dans le premier cas. Le deuxième cas se traite de la même façon en écrivant $\gamma = \gamma^- t_i^j \gamma^+$. \square

Lemme 4.4.8. Soient x et y deux points de X' et soit γ une géodésique par morceaux de x à y . Supposons qu'il existe deux constantes $\ell_0, \kappa_0 > 0$ telles que :

FIGURE 4.3 – La géodésique par morceaux γ

1. Pour chaque morceau géodésique c de γ , il existe une famille $\mathcal{H}(c)$ de murs de \mathcal{H}' telle que $\text{long}(c) \leq \ell_0(|\mathcal{H}(c)| + \kappa_0)$ (avec $\text{long}(c)$ la longueur du segment c), et telle que chaque mur $H \in \mathcal{H}(c)$ sépare les extrémités de c et est disjoint de $\gamma \setminus c$.
2. Pour chaque sous-chemin δ de γ concaténation de 6 morceaux géodésiques il existe au moins un mur M de \mathcal{W}' qui sépare les extrémités de δ et qui est disjoint de $\gamma \setminus \delta$

Alors $\text{long}(\gamma) \leq 6\ell_0 \max(1, \kappa_0)(|x, y| + 1)$.

Démonstration. On note c_1, \dots, c_r les morceaux géodésiques de γ .

Pour chaque segment c_i , d'après le 1 il existe une famille de murs $\mathcal{H}(c_i)$ de \mathcal{H}' telle que $\text{long}(c_i) \leq \ell_0(|\mathcal{H}(c_i)| + \kappa_0)$. On obtient alors

$$\text{long}(\gamma) = \sum_{i=1}^r \text{long}(c_i) \leq \sum_{i=1}^r \ell_0(|\mathcal{H}(c_i)| + \kappa_0).$$

D'après le 1 un mur de $\mathcal{H}(c_i)$ sépare les extrémités de c_i et tout mur de $\mathcal{H}(c_i)$ est disjoint des autres morceaux c_j de γ , avec $i \neq j$. On en déduit que les murs de $\mathcal{H}(c_i)$ séparent x de y , et que les sous-ensembles $\mathcal{H}(c_i)$ et $\mathcal{H}(c_j)$ sont disjoints pour $i \neq j$. On obtient alors,

$$\text{long}(\gamma) \leq \ell_0 \left(\left| \bigcup_{i=1}^r \mathcal{H}(c_i) \right| + r\kappa_0 \right).$$

On subdivise γ en $m = \lfloor \frac{r}{6} \rfloor + 1$ géodésiques par morceaux $\delta_1, \dots, \delta_m$ telles que les $m-1$ premières soient concaténation de 6 segments c_i . Pour chaque géodésique par morceaux $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{m-1}$, d'après le 3, il existe un mur M_i de \mathcal{W}' qui sépare les extrémités de δ_i et est disjoint de $\gamma \setminus \delta_i$. On en déduit que M_i sépare x de y et que les M_i sont tous différents. On obtient $m-1 = |\{M_1, \dots, M_{m-1}\}|$. De plus, $\frac{r}{6} \leq m$ alors $\frac{r}{6} \leq |\{M_1, \dots, M_{m-1}\}| + 1$

et on obtient $r \leq 6|\{M_1, \dots, M_{m-1}\}| + 6$.

On a alors,

$$\text{long}(\gamma) \leq \ell_0 \left(\left| \bigcup_{i=1}^r \mathcal{H}(c_i) \right| + (6|\{M_1, \dots, M_{m-1}\}| + 6)\kappa_0 \right),$$

et donc

$$\text{long}(\gamma) \leq 6\ell_0 \max(1, \kappa_0) \left(\left| \bigcup_{i=1}^r \mathcal{H}(c_i) \right| + |\{M_1, \dots, M_{m-1}\}| + 1 \right).$$

Comme les murs des $\mathcal{H}(c_i)$ appartiennent à la famille \mathcal{H}' et les M_i appartiennent à \mathcal{W}' ils sont tous différents. On obtient $|\bigcup_{i=1}^r \mathcal{H}(c_i)| + |\{M_1, \dots, M_{m-1}\}| = |\bigcup_{i=1}^r \mathcal{H}(c_i) \cup \{M_1, \dots, M_{m-1}\}|$.

On remarque que le cardinal $|\bigcup_{i=1}^r \mathcal{H}(c_i) \cup \{M_1, \dots, M_{m-1}\}|$ est inférieur au nombre de murs qui séparent x de y . On obtient alors

$$\text{long}(\gamma) \leq 6\ell_0 \max(1, \kappa_0)(|x, y| + 1).$$

□

À partir de maintenant on considère γ une géodésique par morceaux entre deux points x et y de X' qui satisfait les hypothèses de la proposition 4.4.5. Montrons que γ vérifie les hypothèses du lemme 4.4.8.

Lemme 4.4.9. Pour chaque sous-chemin δ de γ concaténation de 6 morceaux géodésiques il existe un mur M de \mathcal{W}' qui sépare les extrémités de δ et qui est disjoint de $\gamma \setminus \delta$.

Démonstration. Soit δ une sous-géodésique par morceaux de γ , concaténation de 6 morceaux successifs c_0, c_1, \dots, c_5 de γ . Supposons dans un premier temps que l'un des quatre segments géodésiques c_1, \dots, c_4 de δ soit un t_i^j . Alors le mur M_i^j sépare les deux segments de δ autour de t_i^j . Comme de plus l'intersection entre M_i^j et γ se fait uniquement en t_i^j , alors M_i^j est un mur de \mathcal{W}^+ qui sépare les extrémités de δ et qui est disjoint de $\gamma \setminus \delta$.

Supposons maintenant qu'aucun des quatre segments c_1, \dots, c_4 n'est du type t_i^j . Cela implique que tout sous-segment géodésique par morceaux $\tau_i = s_i^0 t_i^1 \dots t_i^{q_i} s_i^{q_i}$ de γ contient au plus un segment parmi les segments c_1, c_2, c_3 et c_4 .

Supposons que c_1 est l'un des σ_i alors c_2 est dans τ_{i+1} et comme il ne peut y avoir plus d'un segment parmi c_1, c_2, c_3 et c_4 dans τ_i alors c_3 est σ_{i+1} . Le mur ramifié W_{i+1} sépare c_1 de c_3 et est disjoint de $\gamma \setminus \tau_{i+1}$. D'après le lemme 4.4.1, il existe alors un mur de \mathcal{W}' inclus dans W_{i+1} qui sépare c_1 de c_3 et est disjoint de $\gamma \setminus \tau_{i+1}$.

Si c_1 est dans l'un des τ_i , alors $c_2 = \sigma_i$, c_3 est dans τ_{i+1} et $c_4 = \sigma_{i+1}$. Alors le mur ramifié W_{i+1} sépare c_2 de c_4 et est disjoint de $\gamma \setminus \tau_{i+1}$. D'après le lemme 4.4.1, il existe alors un mur de \mathcal{W}' inclus dans W_{i+1} qui sépare c_2 de c_4 et est disjoint de $\gamma \setminus \tau_{i+1}$. □

Il reste à démontrer que γ vérifie la première hypothèse du lemme 4.4.8. Pour chaque type de segment géodésique σ , s ou t on veut construire une famille de murs qui séparent linéairement ces segments et qui n'intersectent pas γ en dehors de ce sous-segment. On obtiendra un contrôle uniforme sur les constantes de séparation linéaire. On utilise le lemme suivant.

Lemme 4.4.10. Considérons la situation suivante :

1. c est un morceau géodésique de γ ;
2. δ est une sous-géodésique par morceaux non-dégénérée de γ , et δ contient c ;
3. Q_1 et Q_2 sont deux sous-espaces de X' parmi les suivants : les murs ramifiés W_i , les murs M_i^j , éventuellement $Q_1 = \{x\}$ ou $Q_2 = \{y\}$.

On fait les hypothèses suivantes

1. L'intérieur de δ est disjoint de $Q_1 \cup Q_2$
2. L'origine de δ est dans Q_1 et l'extrémité de δ est dans Q_2 .

Soient c_1, \dots, c_r les morceaux géodésiques de γ différents de c et contenus dans δ , de sorte que $\delta = c_1 \cdots c \cdots c_r$.

Notons $\mathcal{H}(c)$ la famille des murs de \mathcal{H}' qui séparent les extrémités de c et tels que H est disjoint de chacun des sous-espaces $Q_1, Q_2, c_1, \dots, c_r$. Alors :

1. $\text{long}(c) \leq \ell(|\mathcal{H}(c)| + D + \kappa)$, avec ℓ et κ les constantes de séparation linéaire de la famille \mathcal{H} dans \mathbb{H}^n .
2. Chaque mur $H \in \mathcal{H}(c)$ est disjoint de $\gamma \setminus c$.

Ici D désigne un majorant du nombre de murs qui coupent à la fois c et l'un des espaces Q_1, Q_2, c_i .

Démonstration. On note x_c et y_c les extrémités de c . Le segment c s'envoie isométriquement sur un segment $f(c)$ de \mathbb{H}^n . La famille \mathcal{H} (ℓ, κ)-sépare linéairement \mathbb{H}^n , alors : $\text{long}(f(c)) \leq \ell(|f(x_c), f(y_c)|_{\mathcal{H}} + \kappa)$. D'après le lemme 4.4.2 on a $|f(x_c), f(y_c)|_{\mathcal{H}} = |x_c, y_c|_{\mathcal{H}'}$. Donc $\text{long}(c) \leq \ell(|x_c, y_c| + \kappa)$.

D'après l'énoncé il existe au plus D murs de \mathcal{H}' qui intersectent c et au moins un des $Q_1, Q_2, c_1, \dots, c_r$. Alors, $|x_c, y_c| \leq |\mathcal{H}(c)| + D$. On obtient $\text{long}(c) \leq \ell(|\mathcal{H}(c)| + D + \kappa)$.

Soit H un mur de $\mathcal{H}(c)$. Vérifions que H est disjoint de $\gamma \setminus c$. On écrit $\gamma = \gamma_1 \delta \gamma_2$. Alors H est disjoint de l'intérieur de γ_i car H coupe δ , est disjoint de Q_i et Q_i sépare δ de $\gamma_i \setminus Q_i$ (voir le lemme 4.4.7). \square

On rappelle que la variété V est compacte, donc il existe une constante $k > 0$ telle que deux composantes connexes de K distinctes dans \mathbb{H}^n sont à distance au moins k . Il existe aussi une constante $w > 0$ telle que deux composantes connexes de W distinctes dans \mathbb{H}^n sont à distance minorée par w . On note $\theta > 0$ la constante qui minore les angles entre σ_i et W_i ou W_{i+1} , entre s_i^j et M_i^j ou $M_i^{(j+1)}$, et entre s_i^j et t_i^j ou t_i^{j+1} .

Lemme 4.4.11. Pour tout segment géodésique c de γ il existe une famille de murs $\mathcal{H}(c)$ de \mathcal{H}' telle que :

1. $\text{long}(c) \leq \ell(|\mathcal{H}(c)| + 4A(\theta) + 2B(w) + 2B(k) + \kappa)$, avec ℓ et κ les constantes de séparation linéaire de la famille \mathcal{H} dans \mathbb{H}^n , et A, B les constantes des lemmes A.0.15 et A.0.16.
2. Chaque mur $H \in \mathcal{H}(c)$ est disjoint de $\gamma \setminus c$.

Démonstration. On va appliquer le lemme 4.4.10. Pour chaque morceau géodésique c de γ , on va considérer une sous-géodésique par morceaux δ de γ qui contient c et qui s'arrête sur des sous-espaces Q_1, Q_2 , lesquels sont des murs ramifiés W_i ou bien des murs de type M_i^j (sauf cas particulier). Cela conclura compte tenu du contrôle des constantes de séparation linéaire. Cependant il faut aussi obtenir la borne uniforme $D \leq 4A(\theta) + 2B(w) + 2B(k)$, avec A et B les constantes des lemmes A.0.15 et A.0.16.

Pour majorer uniformément le nombre de murs qui intersectent certains espaces parmi les sous-espaces $\sigma_i, s_i^j, t_i^j, W_i$ et M_i^j , on va utiliser les majorations suivantes :

1. Il existe au plus $A(\theta)$ murs de \mathcal{H}' qui intersectent σ_i et W_i (resp. W_{i-1}). En particulier, il existe au plus $A(\theta)$ murs de \mathcal{H}' qui intersectent σ_i et des segments de type s_i ou t_i .
2. Il existe au plus $A(\theta)$ murs de \mathcal{H}' qui intersectent s_i^j et M_i^j (resp. $M_i^{(j+1)}$). En particulier, il existe au plus $A(\theta)$ murs de \mathcal{H}' qui intersectent s_i^j et t_i^j .
3. Il existe au plus $B(w)$ murs de \mathcal{H}' qui intersectent W_i et W_{i+1} . En particulier, il existe au plus $B(w)$ murs de \mathcal{H}' qui intersectent W_{i+1} et des segments du type s_i et t_i .
4. Il existe au plus $B(k)$ murs de \mathcal{H}' qui intersectent t_i^j et $M_i^{(j-1)}$ (resp. $M_i^{(j+1)}$).

Justifions ces affirmations. Si à ce stade on avait déjà démontré que les murs de \mathcal{H}' sont quasi-convexes, les majorations seraient classiques dans le cadre $CAT(-1)$. Comme on ne dispose pas encore de cette quasi-convexité l'idée est d'appliquer f , ce qui rend les murs de \mathcal{H}' convexes, et de conclure par l'argument classique, mais cette fois ci dans \mathbb{H}^n .

Tout d'abord, rappelons que d'après l'hypothèse 3 de la proposition 4.4.5 (et la remarque 4.4.6) les images $f(\sigma), f(s)$ et $f(t)$ des segments σ, s et t sont des segments géodésiques de même longueur que les segments σ, s et t .

D'autre part pour tout mur ramifié W_i l'image $f(W_i)$ est une composante de la sous-variété de codimension 1 W . Si Π_i désigne la portion fermée de X' contenant l'intérieur de σ_i alors $f : \Pi_i \rightarrow \mathbb{H}^n$ est un plongement isométrique. Enfin, $f(W_i) = f(M_i)$ où $M_i = \Pi_i \cap W_i$. Donc l'angle dans \mathbb{H}^n entre $f(\sigma_i)$ et $f(W_i)$ est $\geq \theta$.

On aimerait utiliser un argument semblable au précédent pour minorer l'angle entre $f(s_i^j)$ et $f(M_i^j)$ (resp. $f(M_i^{j+1})$). Cependant, dans certains cas où $X' \rightarrow X$ n'est pas galoisien, il se peut que $f(s_i^j) \subset f(M_i^j)$. Pour contourner ce problème on introduit deux nouveaux séparateurs M_i^{j+} et M_i^{j-} contenant K_i^j . Soit P la pièce de type 1 de W_i qui

contient l'intérieur de s_i^j en K_i^j . P est contenue dans le bord de deux portions fermées Π_1 et Π_2 . De plus par hypothèse $s_i^j \not\subset M_i^j$ donc $P \not\subset M_i^j$, de sorte que l'application f ramifie en K_i^j . Soient P_1 et P_2 les pièces de type 1 de Π_1 et Π_2 adjacentes à P le long de K_i^j . On a $P_1 \neq P_2$. Soit M_1 (resp. M_2) la composante de $\partial\Pi_1$ (resp. $\partial\Pi_2$) contenant P_1 (resp. contenant P_2). Notons que M_1 et M_2 sont deux murs de \mathcal{W} . La sous-variété K_i^j découpe M_1 et M_2 en deux composantes connexes : soit M_1^+ (resp. M_2^+) l'adhérence de la composante de $M_1 \setminus K_i^j$ (resp. $M_2 \setminus K_i^j$) qui contient P_1 (resp. P_2). On pose $M_i^{j+} = M_1^+ \cup M_2^+$. On constate que M_i^{j+} est la composante connexe de $\partial(\Pi_1 \cup \Pi_2)$ qui contient K_i^j . En considérant l'union des deux portions qui contiennent s_i^{j-1} on introduit de même M_i^{j-} , la composante de bord contenant K_i^j .

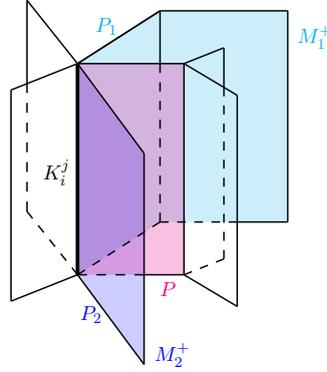


FIGURE 4.4 – Un relevé H' d'un mur H de \mathcal{H} dans un voisinage de ramification

On a $f(M_i^{j+}) = f(M_1^+ \cup M_2^+) = f(M_1^+) \cup f(M_2^+)$. Or $f(M_1^+)$ est la composante W^+ de $f(M_1) \setminus f(P)$ contenant $f(K_i^j)$. De même $f(M_2^+)$ est la composante de $f(M_2) \setminus f(P)$ contenant $f(K_i^j)$. Comme $f(M_1) = f(M_2) = f(W_i)$ on a en fait $f(M_1^+) = f(M_2^+)$ et $f(M_i^{j+}) = W^+$. Si la dimension ambiante est 2 alors l'angle entre $f(s_i^j)$ et W^+ est π . En dimension supérieure l'angle entre $f(s_i^j)$ et W^+ est égal à l'angle entre $f(s_i^j)$ et $f(K_i^j)$. Comme f est une isométrie sur M_1 on en déduit que l'angle entre $f(s_i^j)$ et W^+ est minoré par θ .

L'angle entre $f(\sigma_i)$ et $f(W_i)$ est minoré par θ . Alors, par le lemme A.0.15 il existe au plus $A(\theta)$ murs de \mathcal{H} qui intersectent $f(\sigma_i)$ et $f(W_i)$.

L'angle entre $f(s_i^j)$ et $f(M_i^{j+})$ est minoré par θ . Alors, d'après le lemme A.0.15 il existe au plus $A(\theta)$ murs de \mathcal{H} qui intersectent $f(s_i^j)$ et $f(M_i^{j+})$. De la même façon il existe au plus $A(\theta)$ murs de \mathcal{H} qui intersectent $f(s_i^j)$ et $f(M_i^{(j+1)-})$.

Les composantes connexes de W contenant les extrémités de $f(\sigma_i)$ sont $f(W_i)$ et $f(W_{i+1})$, qui sont disjointes donc à distance $\geq w$. On en déduit, d'après le lemme A.0.16 qu'il existe au plus $B(w)$ murs de \mathcal{H} qui intersectent à la fois $f(W_i)$ et $f(W_{i+1})$.

Par construction $t_i^j \subset K_i^j$ donc $f(t_i^j) \subset f(K_i^j)$ et d'autre part $f(M_i^{j-1+})$ est le demi-espace fermé de $f(W_i)$ délimité par $f(K_i^{j-1})$ ne contenant pas l'intérieur de $f(s_i^{j-1})$. Donc la distance entre $f(K_i^j)$ et $f(M_i^{j-1+})$ est la distance entre $f(K_i^j)$ et $f(K_i^{j-1})$, donc minorée par k . Alors, le lemme A.0.16 implique qu'il existe au plus $B(k)$ murs de \mathcal{H} qui intersectent $f(t_i^j)$ et $f(M_i^{(j-1)+})$.

En utilisant le lemme 4.4.2 on obtient exactement les majorations 1. et 3., et les deux variantes suivantes des majorations 2. et 4. :

- 2'. Il existe au plus $A(\theta)$ murs de \mathcal{H}' qui intersectent s_i^j et M_i^{j+} (resp. $M_i^{(j+1)-}$). En particulier, il existe au plus $A(\theta)$ murs de \mathcal{H}' qui intersectent s_i^j et t_i^j .
- 4'. Il existe au plus $B(k)$ murs de \mathcal{H}' qui intersectent t_i^j et $M_i^{(j-1)+}$ (resp. $M_i^{(j+1)-}$).

Expliquons pourquoi 2'. implique 2..

On utilise les notations employées pour définir $M_i^{j\pm}$. On remarque tout d'abord que $W_i \cap \text{int}(\Pi_m) = \emptyset$, pour $m = 1, 2$, et que $W_i \cap \text{int}(\Pi_1 \cup \Pi_2) = P$. En particulier, $M_i^j \cap \text{int}(\Pi_1 \cup \Pi_2) = \emptyset$. On considère l'espace $U = N_\epsilon(M_i^{j+}) \cap \text{int}(\Pi_1 \cup \Pi_2)$, avec $N_\epsilon(M_i^{j+})$ un ϵ -voisinage de M_i^{j+} . Comme M_i^{j+} est une composante de bord de $\text{int}(\Pi_1 \cup \Pi_2)$ et que M_i^{j+} est un séparateur de X' alors U sépare X' en deux composantes connexes fermés. Comme M_i^j est connexe et disjoint de U alors M_i^j est inclus dans l'une des composantes connexes F de $X' \setminus U$. On note F' l'autre composante connexe de $X' \setminus U$. Soit H' un mur de \mathcal{H}' disjoint de M_i^{j+} , alors H' est inclus dans l'une des deux composantes connexes de $X' \setminus M_i^{j+}$. Si de plus on suppose que H' intersecte $s_i^j \subset P \subset \text{int}(\Pi_1 \cup \Pi_2)$ alors H' est dans la composante connexe $F' \cup U$ de $X' \setminus M_i^{j+}$. En particulier H' est disjoint de F .

Cet argument de séparation (large) de s_i^j et M_i^j par M_i^{j+} montre également que $M_i^{(j-1)+}$ sépare (au sens large) t_i^j de M_i^{j-1} . Donc à nouveau tout mur de \mathcal{H}' qui coupe t_i^j et M_i^{j-1} doit couper $M_i^{(j-1)+}$. On raisonne de même du côté de M_i^{j+1} . Donc 4. est vérifié.

On peut maintenant appliquer le lemme 4.4.10, en distinguant 7 cas (on utilise les notations du lemme).

1^{er} cas : $c = \sigma_i$.

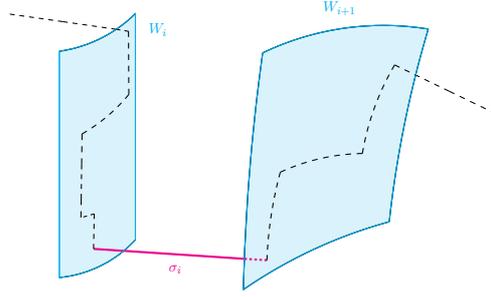
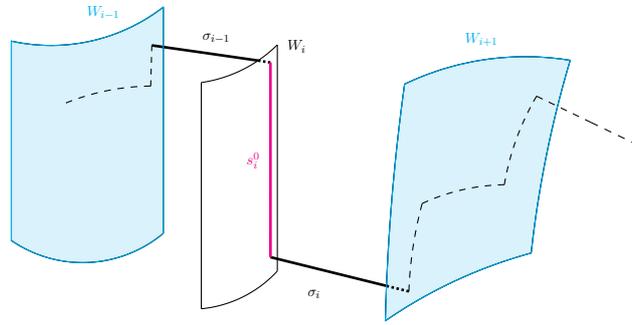
On pose $\delta = c = \sigma_i$, $Q_1 = W_i$ si $i \neq 0$ et $Q_1 = \{x\}$ si $i = 0$, $Q_2 = W_{i+1}$ si $i \neq p$ et $Q_2 = \{y\}$ si $i = p$. D'après le 1. il existe au plus $2A(\theta)$ murs de \mathcal{H}' qui intersectent σ_i et l'un des espaces Q_1 ou Q_2 . Le lemme 4.4.10 s'applique avec $D_1 = 2A(\theta)$.

2^e cas : $c = s_i^j$ avec $q_i = 0$.

On pose $\delta = \sigma_{i-1}s_i^0\sigma_i$, $Q_1 = W_{i-1}$ si $i \neq 1$ et $Q_1 = \{x\}$ si $i = 1$, $Q_2 = W_{i+1}$ si $i \neq p$ et $Q_2 = \{y\}$ si $i = p$. D'après le 1. il existe au plus $2A(\theta)$ murs de \mathcal{H}' qui intersectent s_i^0 et σ_{i-1} ou σ_i . D'après le 3. il existe au plus $2B(w)$ murs de \mathcal{H}' qui intersectent s_i^0 et l'un des espaces Q_1 ou Q_2 . Le lemme 4.4.10 s'applique avec $D_2 = 2A(\theta) + 2B(w)$.

3^e cas : $c = s_i^j$ avec $q_i \geq 1$ et $j = 0$ ou q_i .

Pour $j = q_i$, on pose $\delta = s_i^{q_i}\sigma_i$, $Q_1 = M_i^{q_i}$, $Q_2 = W_{i+1}$ si $i \neq p$ et $Q_2 = \{y\}$ si $i = p$. D'après le 1. il existe au plus $A(\theta)$ murs de \mathcal{H}' qui intersectent $s_i^{q_i}$ et σ_i . D'après le 2. il

FIGURE 4.5 – 1^{er} cas.FIGURE 4.6 – 2^e cas.

existe au plus $A(\theta)$ murs de \mathcal{H}' qui intersectent $s_i^{q_i}$ et $M_i^{q_i}$. Et d'après le 3. il existe au plus $B(w)$ murs qui intersectent $s_i^{q_i}$ et Q_2 . Le lemme 4.4.10 s'applique avec $D_3 = 2A(\theta) + B(w)$.

On peut faire un raisonnement similaire pour le cas $j = 0$.

4^e cas : $c = s_i^j$ avec $q_i \geq 1$ et $j = 1, \dots, q_i - 1$.

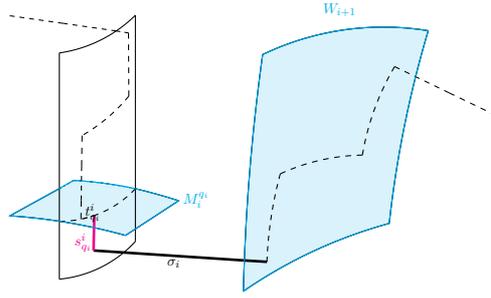
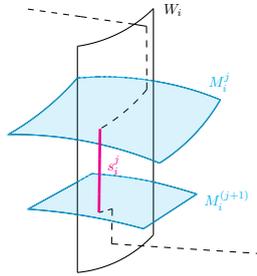
On pose $\delta = c = s_i^j$, $Q_1 = M_i^j$, $Q_2 = M_i^{(j+1)}$. D'après le 2. il existe au plus $2A(\theta)$ murs de \mathcal{H}' qui intersectent s_i^j et l'un des espace M_i^j ou $M_i^{(j+1)}$. Le lemme 4.4.10 s'applique avec $D_4 = 2A(\theta)$.

5^e cas : $c = t_i^j$ avec $q_i = 1$.

On pose $\delta = \sigma_{i-1} s_i^0 t_i^1 s_i^1 \sigma_i$, $Q_1 = W_{i-1}$ si $i \neq 1$ et $Q_1 = \{x\}$ si $i = 1$, $Q_2 = W_{i+1}$ si $i \neq p$ et $Q_2 = \{y\}$ si $i = p$. D'après le 2 il existe au plus $2A(\theta)$ murs de \mathcal{H}' qui intersectent t_i^1 et l'un des s_i^0 ou s_i^1 . D'après le 1. il existe au plus $2A(\theta)$ murs de \mathcal{H}' qui intersectent t_i^1 et l'un des σ_{i-1} ou σ_i . D'après le 3. il existe au plus $2B(w)$ murs de \mathcal{H}' qui intersectent t_i^1 et l'un des Q_1 ou Q_2 . Le lemme 4.4.10 s'applique avec $D_5 = 4A(\theta) + 2B(w)$.

6^e cas : $c = t_i^j$ avec $q_i \geq 2$, et $j = 1$ ou q_i .

Pour $j = q_i$, on pose $\delta = s_i^{q_i-1} t_i^{q_i} s_i^{q_i} \sigma_i$, $Q_1 = M_i^{(q_i-1)}$, $Q_2 = W_{i+1}$ si $i \neq p$ et $Q_2 = \{y\}$ si $i = p$. D'après le 2. il existe au plus $2A(\theta)$ murs de \mathcal{H}' qui intersectent $t_i^{q_i}$ et au moins

FIGURE 4.7 – 3^e cas.FIGURE 4.8 – 4^e cas.

l'un des $s_i^{q_i-1}$ ou $s_i^{q_i}$. D'après 4., il existe au plus $B(k)$ murs de \mathcal{H}' qui intersectent $t_i^{q_i}$ et $M_i^{q_i-1}$. D'après 1. il existe au plus $A(\theta)$ murs de \mathcal{H}' qui intersectent $t_i^{q_i}$ et σ_i . Enfin, d'après 3. il existe au plus $B(w)$ murs de \mathcal{H}' qui intersectent $t_i^{q_i}$ et Q_2 . Le lemme 4.4.10 s'applique avec $D_6 = 3A(\theta) + B(w) + B(k)$.

On peut faire un raisonnement similaire pour le cas $j = 1$.

7^e cas : $c = t_i^j$ avec $q_i \geq 2, j = 2, \dots, q_i - 1$.

On pose $\delta = s_i^{j-1}t_i^j s_i^j$, $Q_1 = M_i^{(j-1)}$, $Q_2 = M_i^{(j+1)}$. D'après 2. il existe au plus $2A(\theta)$ murs de \mathcal{H}' qui intersectent t_i^j et au moins l'un des s_i^{j-1} ou s_i^j . Et, d'après le 4. il existe au plus $2B(k)$ murs de \mathcal{H}' qui intersectent t_i^j et l'un des $M_i^{(j-1)}$ ou $M_i^{(j+1)}$. Le lemme 4.4.10 s'applique avec $D_7 = 2A(\theta) + 2B(k)$.

□

Démonstration de la proposition 4.4.5. On se place dans les hypothèses de la proposition. On va utiliser le lemme 4.4.8 pour obtenir la séparation linéaire de γ .

On a montré la condition de séparation de plusieurs morceaux de suite dans le lemme 4.4.9. Reste à montrer une séparation linéairement croissante des morceaux géodésiques de γ avec des murs disjoints du reste de γ . Le lemme 4.4.11 nous permet d'obtenir des

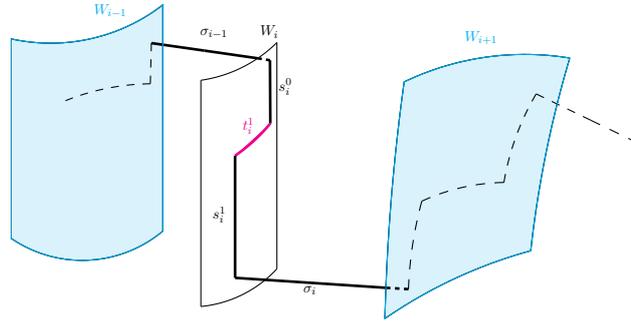


FIGURE 4.9 – 5^e cas.

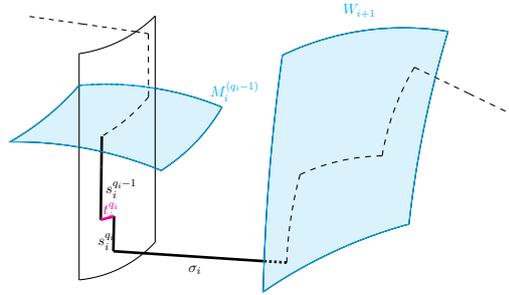


FIGURE 4.10 – 6^e cas.

familles de murs $\mathcal{H}(c)$ fonction des segments c de γ qui vérifient :

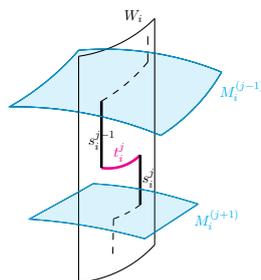
$$\text{long}(c) \leq \ell(|\mathcal{H}(c)| + D + \kappa),$$

avec $D = 4A(\theta) + 2B(w) + 2B(k)$, avec ℓ et κ les constantes de séparation linéaire de la famille \mathcal{H} dans \mathbb{H}^n , et A, B les constantes des lemmes A.0.15 et A.0.16.

On utilise alors le lemme 4.4.8 avec $\ell_0 = \ell$ et $\kappa_0 = D + \kappa$. On en déduit que

$$\text{long}(\gamma) \leq 6\ell \max(1, D + \kappa)(|x, y| + 1).$$

Finalement, on obtient bien $\text{long}(\gamma) \leq \ell'|x, y| + \kappa'$ avec $\ell' = 6\ell \max(1, D + \kappa)$ et $\kappa' = 6\ell \max(1, D + \kappa)$. Les constantes ℓ, κ, k, w ne dépendent que de la disposition des variétés K, W , et des variétés de \mathcal{H} dans \mathbb{H}^n . Les constantes A et B ne dépendent que des constantes k, w, θ et des lemmes A.0.15 et A.0.16. \square

FIGURE 4.11 – 7^e cas.

4.4.2 Séparation linéaire

On consacre cette partie à montrer que la famille de murs de X' sépare linéairement X' , voir proposition 4.4.12. On s'appuie sur la proposition 4.4.5 prouvée dans la section précédente. Pour toute paire de points $x, y \in X'$ on construit explicitement une géodésique par morceaux qui satisfait les hypothèses de cette proposition. Comme la distance entre x et y est inférieure à la longueur de cette géodésique par morceaux on obtient la séparation linéaire des murs de X' .

Proposition 4.4.12. *La famille des murs de X' sépare linéairement X' .*

Soient x et y deux points de X' . On définit une famille ordonnée \mathcal{F} de murs ramifiés "intermédiaires" entre x et y .

Dans le cas particulier où un mur ramifié contient x et y on note ce mur W_1 , et $\mathcal{F} = \{W_1\}$.

On suppose maintenant que x et y ne sont pas contenus dans un même mur ramifié. Soit $\mathcal{F}_0 = (W_i)_{i \in I}$ la famille des murs ramifiés qui séparent x de y . Par locale finitude, cette famille est finie. On peut remarquer que deux murs ramifiés sont soit confondus, soit disjoints. Ainsi, on peut ordonner \mathcal{F}_0 de sorte que le premier mur de \mathcal{F}_0 sépare x du deuxième mur, que le deuxième mur sépare le premier du troisième, et qu'en général le i ème mur sépare le $(i-1)$ ème du $(i+1)$ ème, et enfin le dernier mur sépare l'avant dernier de y . Soit alors \mathcal{F} l'union de \mathcal{F}_0 et de la famille des murs ramifiés qui contiennent l'un des deux points x ou y (mais pas les deux par hypothèse). On étend l'ordre de \mathcal{F}_0 à \mathcal{F} en décrétant (si nécessaire) que le premier mur ramifié est celui qui contient x et le dernier mur ramifié est celui qui contient y . On note alors (W_1, \dots, W_p) la famille ordonnée \mathcal{F} .

Si aucun mur ramifié ne sépare x de y la famille \mathcal{F}_0 est vide. Si de plus aucun mur ramifié n'intersecte $\{x, y\}$ alors la famille \mathcal{F} est vide : c'est le cas $p = 0$. Le cas $p = 1$ correspond aux situations suivantes : ou bien un même mur ramifié contient x et y , ou bien

un mur ramifié sépare x de y (et ni x ni y ne sont dans un mur ramifié), ou bien aucun mur ramifié ne sépare x de y et l'intersection de $\{x, y\}$ avec W' a un élément.

On va maintenant définir une géodésique par morceaux $\gamma = \sigma_0 s_1^0 t_1^1 \dots \sigma_p$ d'extrémités x, y comme dans la proposition 4.4.5.

Si $p = 0$ soit σ_0 la géodésique de X' entre x et y on pose $\gamma = \sigma_0$.

Supposons maintenant $p \geq 1$. On note $\sigma_0 : [a_0, b_0] \rightarrow X'$ le segment le plus court entre x et W_1 et $\sigma_p : [a_p, b_p] \rightarrow X'$ le segment le plus court entre W_p et y . Si $x \in W_1$ alors $a_0 = b_0$ et σ_0 est dégénéré. De même si $y \in W_p$ alors $a_p = b_p$ et σ_p est dégénéré. Si $p > 1$ on définit $\sigma_i : [a_i, b_i] \rightarrow X'$ comme le segment le plus court entre W_i et W_{i+1} (pour $i = 1, \dots, p-1$). Ce segment géodésique est unique car X' est CAT(-1). On remarque immédiatement que W_i sépare σ_{i-1} de σ_i .

Construisons maintenant un segment géodésique par morceaux τ_i dans W_i entre deux points $\sigma_{i-1}(b_{i-1})$ et $\sigma_i(a_i)$.

On rappelle que sur un mur ramifié W_i on a défini deux types de sous-espaces appelés *pièces*. Les pièces de type 1 sont les composantes connexes de $W_i \setminus K'$ et les pièces de type 2 sont les composantes connexes de K' dans W_i . On a aussi défini un graphe naturellement associé aux pièces d'une composante connexe de W' (voir définition 4.3.4). On note P_i^1 et P_i^2 les pièces de W_i qui contiennent les points $\sigma_{i-1}(b_{i-1})$ et $\sigma_i(a_i)$, et on note p_i^1 et p_i^2 les sommets du graphe $\mathcal{G}(W_i)$ en bijection avec P_i^1 et P_i^2 . On considère $w_i^{1,2}$ le segment géodésique dans $\mathcal{G}(W_i)$ entre p_i^1 et p_i^2 . On note $W_i^{1,2}$ l'union des pièces de W_i en bijection avec les sommets de $w_i^{1,2}$.

L'espace $w_i^{1,2}$ est un segment géodésique dans $\mathcal{G}(W_i)$, en particulier chaque sommet de l'intérieur de $w_i^{1,2}$ est adjacent à exactement deux sommets de $w_i^{1,2}$. Pour un sommet p intérieur de $w_i^{1,2}$ en bijection avec une pièce de type 2 on considère p^- et p^+ les sommets de $w_i^{1,2}$ adjacents à ce sommet (on note p^- le sommet le plus proche de p_i^1 et p^+ le plus proche de p_i^2). On note P^- et P^+ les pièces de type 1 de W_i associées à p^- et à p^+ . Si $P^- \cup P^+$ est dans le bord d'une portion on dit que p est *régulier*. Sinon on dit que p est *singulier*. On note $K_i^1, \dots, K_i^{q_i}$ les composantes connexes de K' dans $W_i^{1,2}$ correspondant à un sommet singulier de $w_i^{1,2}$.

On appelle s_i^0 le plus court chemin de X' entre $\sigma_{i-1}(b_{i-1})$ et K_i^1, s_i^j le plus court chemin de X' entre K_i^j et K_i^{j+1} , et $s_i^{q_i}$ le plus court chemin de X' entre $K_i^{q_i}$ et $\sigma_i(a_i)$. Notons que par convexité de W_i l'image de s_i^j est contenue dans W_i . Si jamais il n'y a pas de point singulier dans $w_i^{1,2}$ (soit $q_i = 0$) on note simplement s_i^0 le plus court chemin dans X' entre les points $\sigma_{i-1}(b_{i-1})$ et $\sigma_i(a_i)$.

Lorsque $q_i > 0$, on note t_i^j la géodésique de X' entre l'extrémité de s_i^j et l'origine de s_i^{j+1} pour $j = 0, \dots, q_i - 1$. Chaque segment t_i^j est dans K_i^j car K_i^j est convexe.

On note τ_i le segment géodésique par morceaux $s_i^0 t_i^1 s_i^1 \dots t_i^{q_i} s_i^{q_i}$. Puis on note γ le segment géodésique par morceaux $\sigma_0 \tau_1 \dots \tau_p \sigma_p$ (voir figure 4.3).

Pour chaque pièce K_i^j correspondant à un sommet singulier de $w_i^{1,2}$, construisons un

mur M_i^j de \mathcal{W}^+ . Il existe exactement deux portions Π_1 et Π_2 de X' qui contiennent P^- dans leurs bords. Soit M^1 la pièce de type 1 contenue dans $\partial\Pi_1$ qui contient K_i^j dans son bord différente de P^- . On définit de même la pièce de type 1 M^2 de $\partial\Pi_2$ qui contient K_i^j dans son bord différente de P^- . Comme K_i^j est un sommet singulier de $w_i^{1,2}$ nécessairement les pièces M^1 , M^2 , P^- et P^+ sont deux à deux distinctes. À la paire (M_1, Π_1) est associé un unique mur M_i^j de \mathcal{W}^+ comme dans le lemme 4.3.12. Par construction M_i^j contient M^2 .

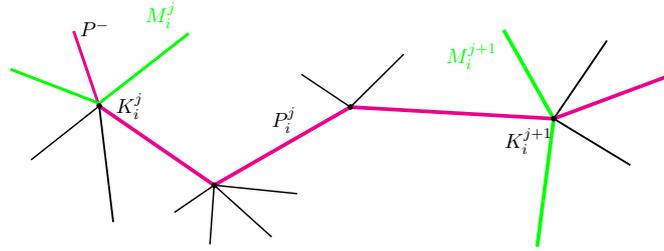


FIGURE 4.12 – Construction du mur M_i^j

Montrons que γ satisfait les hypothèses de la proposition 4.4.5.

Lemme 4.4.13. L'intersection entre W_i et γ est la sous-géodésique par morceaux τ_i .

Démonstration. Par construction $\tau_i \subset W_i$, montrons que W_i est disjoint de $\gamma \setminus \tau_i$. Comme σ_i est le plus court chemin entre W_i et W_{i+1} son intérieur est disjoint de W_i . Les murs ramifiés W_1, \dots, W_p sont deux à deux disjoints. Par définition de l'ordre sur les murs ramifiés W_i la composante connexe de $X' \setminus W_{i+1}$ qui contient y contient aussi W_k pour tout $k > i+1$. On obtient que cette composante connexe de $X' \setminus W_{i+1}$ contient la géodésique par morceaux $\sigma_{i+1}\tau_{i+2} \dots \sigma_p$. Comme l'espace W_i est disjoint de W_{i+1} alors W_i est disjoint de $\sigma_{i+1}\tau_{i+2} \dots \sigma_p$. On obtient que W_i est bien disjoint de $\sigma_i\tau_{i+1}\sigma_{i+1}\tau_{i+2} \dots \sigma_p$.

On peut faire le même raisonnement du côté de W_{i-1} et constater que W_i est disjoint de $\sigma_0\tau_1 \dots \sigma_{i-1}$. Finalement W_i intersecte γ selon τ_i . \square

Lemme 4.4.14. L'intersection entre un mur M_i^j et γ est exactement t_i^j , pour $i = 1, \dots, p$ et $j = 1, \dots, q_i$.

Démonstration. D'après le lemme 4.4.13 l'intersection entre W_i et γ se fait selon τ_i . Les murs M_i^j sont dans W_i , donc l'intersection entre M_i^j et γ est égale à l'intersection entre M_i^j et τ_i . Comme τ_i est inclus dans $W_i^{1,2}$ l'intersection entre M_i^j et τ_i est égale à l'intersection entre $M_i^j \cap W_i^{1,2}$ et τ_i . Montrons que $M_i^j \cap W_i^{1,2} = K_i^j$. Par définition de τ_i on en déduira que l'intersection entre un mur M_i^j et γ est t_i^j .

Localement dans un voisinage de K_i^j , M_i^j et $W_i^{1,2}$ s'intersectent en K_i^j . Les espaces $W_i^{1,2}$ et M_i^j sont tout deux convexes d'après le lemme 4.3.2. Alors on a bien $W_i^{1,2} \cap M_i^j = K_i^j$. \square

Par construction, un mur M_i^j sépare les deux pièces de type 1 de $W_i^{1,2}$ autour de K_i^j . Par définition s_i^{j-1} finit son trajet sur une de ces pièces et s_i^j commence son trajet sur l'autre. Alors M_i^j sépare localement (les intérieurs de) s_i^{j-1} et s_i^j . Comme M_i^j est disjoint de $\tau_i \setminus t_i^j$ et que s_i^{j-1} et s_i^j sont dans $\tau_i \setminus t_i^j$ alors M_i^j sépare s_i^{j-1} de s_i^j .

Lemme 4.4.15. L'image $\sigma_i([a_i, b_i])$ est disjointe de W' .

Démonstration. On raisonne dans le cas où $0 < i < p$, les cas particuliers $i = 0$ et $i = p$ se traitent de façon similaire, y compris quand $p = 0$.

Supposons par l'absurde que $I = \{t \in]a_i, b_i[/ \sigma_i(t) \in W'\} \neq \emptyset$. Posons $t_0 = \inf I$, on a $a_i \leq t_0 < b_i$.

Il existe un $\epsilon_0 > 0$ tel que les ϵ_0 -voisinages de deux murs ramifiés distincts sont disjoints. Puisque σ_i est un plus court chemin entre W_i et W_{i+1} on observe que pour $t \in]a_i, b_i[$ on a $\sigma_i(t) \notin W_i$. Et donc pour tout $t \in]a_i, a_i + \epsilon_0[$ $\sigma_i(t) \notin W'$. Ainsi $t_0 \geq a_i + \epsilon_0$.

Soit W'_0 la composante connexe de W' qui contient $\sigma_i(t_0)$. Nous allons montrer que W'_0 sépare W_i de W_{i+1} . Ceci entrainera que

1. W'_0 sépare x de y ;
2. W'_0 n'appartient pas à $\{W_1, \dots, W_p\}$,

ce qui est absurde.

Comme $\sigma_i([a_i, t_0])$ est disjoint de W' il est contenu dans une unique portion Π . Alors $\sigma_i(t_0)$ est dans $\partial\Pi$, soit M la composante connexe de $\partial\Pi$ contenant $\sigma_i(t_0)$. Montrons que le mur $M \in \mathcal{W}^0$ sépare $\sigma_i(a_i)$ et $\sigma_i(b_i)$. On a $M \subset W'_0$ et W'_0 disjoint de $W_i \cup W_{i+1}$. Donc $\sigma_i(a_i)$ et $\sigma_i(b_i)$ sont dans $X' \setminus M$. D'après le lemme 4.2.4 la portion ouverte Π est convexe. Ceci entraine que le demi-espace ouvert délimité par M et contenant $\sigma_i(a_i)$ est également convexe. Donc si le mur convexe M ne sépare pas les points $\sigma_i(a_i)$ et $\sigma_i(b_i)$, alors la géodésique σ_i est disjointe de M , contradiction.

D'après le lemme 4.4.1 le mur ramifié W'_0 sépare alors $\sigma_i(a_i)$ et $\sigma_i(b_i)$. Donc W'_0 sépare W_i de W_{i+1} . \square

Remarque 4.4.16. Le cas particulier $p = 0$ dans le lemme 4.4.15 signifie que l'intérieur de σ_0 est disjoint de W' - alors qu'on supposait seulement qu'aucun mur ramifié ne sépare x de y . Comme $p = 0$ les extrémités x, y de σ_0 sont elles aussi hors de W' . En particulier γ vérifie les hypothèses de la proposition 4.4.5.

Lemme 4.4.17. Soit c un chemin géodésique du graphe $\mathcal{G}(W_0)$ d'un mur ramifié W_0 . On note P^1, \dots, P^n la liste ordonnée des pièces associées aux sommets parcourus par c . On suppose de plus que pour toute pièce P_i de type 2 de l'intérieur de c l'union $P_{i-1} \cup P_i \cup P_{i+1}$ est dans le bord d'un quartier au voisinage de P_i . Alors la restriction de f à l'union $P^1 \cup \dots \cup P^n$ est une isométrie sur son image.

Démonstration. D'après le lemme 4.3.2, l'union $P = P^1 \cup P^2 \cup \dots \cup P^n$ est convexe dans X' . Donc la métrique de longueur sur P est $\text{CAT}(-1)$. Alors pour montrer que la restriction de f à P est une isométrie il suffit de montrer que la restriction de f à P est une isométrie locale.

Sur chaque pièce de type 1 de P f est une isométrie. D'après l'hypothèse de régularité l'union $P_{i-1} \cup P_i \cup P_{i+1}$, pour chaque pièce de type 2 P_i , est contenue dans un mur M de \mathcal{W}^0 et d'après le corollaire 4.3.10 la restriction de f à M est une isométrie. Finalement f est bien une isométrie locale de P dans \mathbb{H}^n . \square

Lemme 4.4.18. Chaque segment s_i^j et t_i^j s'envoie isométriquement sur un segment de \mathbb{H}^n .

Démonstration. On considère p le sous-segment de $w_i^{1,2}$ entre les sommets k_i^j et k_i^{j+1} (en bijection avec les pièces K_i^j et K_i^{j+1}). Soit P l'union des pièces de W_i qui sont dans p .

D'après le lemme 4.3.2 P est convexe dans l'espace $\text{CAT}(-1)$ X' . D'autre part K_i^j et K_i^{j+1} sont contenus dans P . Donc la géodésique minimisante s_i^j est contenue dans P . Et t_i^j est aussi contenu dans P car $t_i^j \subset K_i^j$.

Soit k_0 un sommet de p en bijection avec une pièce K_0 de type 2, différent de k_i^j et k_i^{j+1} . Soient r_1 et r_2 les deux sommets de p adjacents à k_0 . L'union des pièces associés à r_1 , p et r_2 borde un quartier d'un voisinage de K_0 , car sinon K_0 appartiendrait à $K_i^1, \dots, K_i^{q_i}$.

On note P^1, \dots, P^n les pièces ordonnées associées à p . Alors d'après le lemme 4.4.17, la restriction de f à l'union $P^1 \cup \dots \cup P^n$ est une isométrie sur son image. Les géodésiques s_i^j et t_i^j incluses dans $P = P^1 \cup \dots \cup P^n$ sont envoyés isométriquement par f sur des géodésiques de \mathbb{H}^n . \square

Enfin, il reste à vérifier les conditions d'angles (condition 4.) de la proposition 4.4.5.

Par définition, les segments σ_i sont les plus courts chemins entre W_i si $i \neq 0$ (resp. x si $i = 0$) et W_{i+1} si $i \neq p$ (resp. y si $i = p$). On en déduit quand σ_i est non dégénéré que l'angle entre σ_i et W_i (resp. W_{i+1}) est $\geq \frac{\pi}{2}$. Par définition les segments s_i^j sont les plus courts chemins entre K_i^j (resp. $\sigma_{i-1}(b_i)$ si $j = 0$) et K_i^{j+1} (resp. $\sigma_i(a_i)$ si $i = q_i$). On en déduit quand s_i^j est non dégénéré que l'angle entre s_i^j et K_i^j (resp. K_i^{j+1}) est $\geq \frac{\pi}{2}$. Comme t_i^j est un segment de K_i^j on en déduit que l'angle entre s_i^j et t_i^j (resp. t_i^{j+1}) est $\geq \frac{\pi}{2}$. Il reste alors à montrer le lemme suivant :

Lemme 4.4.19. Les angles entre s_i^j et M_i^j pour $j = 1, \dots, q_i$ et entre s_i^j et M_i^{j+1} pour $j = 0, \dots, q_i - 1$ sont $\geq \frac{\pi}{2}$.

Démonstration. Montrons que l'angle entre s_i^j et M_i^j est $\geq \frac{\pi}{2}$. On note z le point d'origine de s_i^j dans K_i^j . Soit τ un segment géodésique de M_i^j d'origine z . Quitte à prendre un sous-segment de τ on peut supposer l'intérieur de τ inclus dans une pièce de type 1 P_τ de W_i . On note P_i^j la pièce de W_0 autour de K_i^j qui intersecte s_i^j . Alors $P_\tau \cup K_i^j \cup P_i^j$ est une sous-variété totalement géodésique de X' . Et $P_\tau \cup K_i^j$ est une sous-variété à bord

totalemant géodésique K_i^j . Alors l'angle entre τ et s_i^j est minoré par l'angle entre s_i^j et K_i^j . Finalement l'angle entre s_i^j et M_i^j est $\geq \frac{\pi}{2}$.

On peut faire un raisonnement similaire du côté de M_i^{j+1} . \square

Démonstration de la proposition 4.4.12. Soient x et y deux points de X' , la géodésique par morceaux γ satisfait les hypothèses de la proposition 4.4.5. En effet, par la construction de γ et par le lemme 4.4.13 γ satisfait le 1, par le lemme 4.4.14 γ satisfait le 2, par les lemmes 4.4.15 et 4.4.18 γ satisfait 3 et enfin par le lemme 4.4.19 γ satisfait la quatrième condition du lemme 4.4.5.

On obtient alors l'inégalité $\text{long}(\gamma) \leq \ell'|x, y| + \kappa'$, avec ℓ' et κ' les constantes du lemme 4.4.5.

Enfin, comme la distance entre x et y est inférieure à la longueur de la géodésique par morceaux γ on obtient : $d(x, y) \leq \ell'|x, y| + \kappa'$. \square

4.4.3 Quasi-convexité des murs de \mathcal{H}'

Dans cette partie on prouve la quasi-convexité des murs de \mathcal{H}' . Ainsi, comme on a déjà prouvé dans le lemme 4.3.14 que les murs de \mathcal{W}' sont convexes dans X' on saura que les murs de X' sont quasi-convexes.

Théorème 4.4.20. *Les murs de \mathcal{H}' sont quasi-convexes dans X' .*

Remarque 4.4.21. Une géodésique de H' est une géodésique par morceaux de X' avec des morceaux géodésiques d'intérieurs disjoints de K' et des bords dans K' . Les angles entre les hyperplans de \mathcal{H} et le lieu singulier K dans \mathbb{H}^n sont minorés par une constante positive θ . Alors il existe une constante θ' qui minore l'angle entre deux morceaux géodésiques d'une géodésique de H' . Si on suppose les lieux singuliers suffisamment éloignés les uns des autres dans \mathbb{H}^n alors on obtient que les géodésiques de H' sont des quasi-géodésiques de X' .

Dans la suite soit $H' \in \mathcal{H}'$. On doit montrer qu'il existe deux constantes $\ell_{H'}$ et $\kappa_{H'}$ telles que pour toute paire de points $x, y \in H'$:

$$d_{H'}(x, y) \leq \ell_{H'}d(x, y) + \kappa_{H'},$$

avec $d_{H'}$ la distance de longueur induite sur H' . Les arguments utilisés pour montrer ce résultat sont très similaires aux arguments utilisés dans la preuve de la séparation linéaire des murs de X' . En particulier on montre que le nombre de murs de X' qui séparent deux points x et y de H' croît linéairement en fonction de la distance entre x et y sur H' . Comme les murs de X' sont uniformément localement fini alors la distance entre x et y dans \mathbb{H}^n croît linéairement en fonction du nombre de murs qui séparent x et y . Plus précisément, on utilise le lemme suivant :

Lemme 4.4.22. Pour toute paire de points x, y de X' on a l'inégalité $|x, y| \leq \frac{C}{2\epsilon}d(x, y) + C$, avec C, ϵ les constantes du lemme 4.3.17, et avec $|x, y|$ le nombre de murs de X' qui séparent x et y .

Démonstration. Soit σ le segment géodésique de X' entre x et y . On considère une union de $\lfloor \frac{d(x, y)}{2\epsilon} \rfloor + 1$ boules de rayon ϵ de X' dont l'union contient σ .

D'après le lemme 4.3.17 la famille de murs de X' est uniformément localement finie, il existe au plus C murs de X' qui intersectent une boule de rayon ϵ . Il existe donc au plus $C(\lfloor \frac{d(x, y)}{2\epsilon} \rfloor + 1)$ murs de X' qui intersectent l'union des boules qui contiennent σ .

Si un mur M de X' sépare x de y alors il intersecte σ , en particulier il intersecte l'union des boules qui contiennent σ . On obtient donc l'inégalité $|x, y| \leq C(\lfloor \frac{d(x, y)}{2\epsilon} \rfloor + 1)$, et alors on obtient $|x, y| \leq \frac{C}{2\epsilon}d(x, y) + C$ \square

Proposition 4.4.23. Il existe deux constantes $\ell, \kappa > 0$ telles que et toute paire de points x, y de H' $d_{H'}(x, y) \leq \ell|x, y| + \kappa$.

Démonstration du théorème 4.4.20. D'après la proposition 4.4.23 il existe deux constantes $\ell, \kappa > 0$ telles que pour toute paire de points x, y de H' $d_{H'}(x, y) \leq \ell|x, y| + \kappa$. De plus, d'après le lemme 4.4.22, on a l'inégalité $|x, y| \leq \frac{C}{2\epsilon}d(x, y) + C$. On en déduit que pour toute paire de points x, y de X' $d_{H'}(x, y) \leq \ell(\frac{C}{2\epsilon}d(x, y)) + \ell C + \kappa$. \square

Il nous reste à montrer la proposition 4.4.23. Construisons une géodésique par morceaux γ dans H' qui vérifie les propriétés de la proposition 4.4.5 dans X' .

On note $H = f(H')$. D'après le lemme 4.1.3 la restriction de f à H' est un revêtement ramifié au-dessus de $J = K \cap H$. De plus la sous-variété $W \cap H$ de \mathbb{H}^n est une sous-variété de H totalement géodésique qui contient le lieu singulier. On est exactement dans les hypothèses du théorème 4.1.7. **On construit γ dans H' comme dans la partie 4.4.2 mais cette fois on utilise la structure du revêtement ramifié $f|_{H'}$.**

D'après les deux dernières sections on obtient directement une séparation linéaire des murs de H' entre toute paire de points de H' . Cependant ce n'est pas ce qu'on veut ici. Les murs de H' sont des sous-ensembles de la trace de murs de X' . Mais rien ne garantit que le prolongement d'un mur de H' qui sépare x de y dans H' sépare x de y dans X' .

Vérifions que la géodésique par morceaux γ de H' satisfait les hypothèses de la proposition 4.4.5 dans X' . On note $(W_1)^{H'}, \dots, (W_p)^{H'}$ et $(M_i^j)^{H'}$ les différents murs de H' obtenus lors de la construction de γ dans H' . On a besoin des deux lemmes fondamentaux 4.4.24 et 4.4.25 :

Lemme 4.4.24. Un mur ramifié $(W_i)^{H'}$ de H' est la trace d'un mur ramifié W_i de X' sur H' .

Lemme 4.4.25. Un mur $(M_i^j)^{H'}$ est la trace d'un mur de \mathcal{W}^+ sur H' .

Montrons ces deux lemmes :

Sur chacune des pièces d'un mur ramifié de X' l'application f est une isométrie sur son image. L'image d'une pièce est un convexe de \mathbb{H}^n , alors l'intersection avec H est connexe (même convexe en fait). On en déduit que l'intersection d'une pièce d'un mur ramifié de X' est une pièce d'un mur ramifié de H' (de même type).

Soit W_0 un mur ramifié de X' . On note $\mathcal{G}(W_0)$ le graphe associé aux pièces de W_0 . On note $\mathcal{G}(W_0 \cap H')$ le graphe associé aux pièces de $W_0 \cap H'$. Chaque composante connexe de $W_0 \cap H'$ est un mur ramifié de H' , le graphe $\mathcal{G}(W_0 \cap H')$ est alors l'union des graphes de ces composantes connexes. D'après le paragraphe précédent, il existe un plongement naturel des sommets du graphe $\mathcal{G}(W_0 \cap H')$ dans les sommets du graphe $\mathcal{G}(W_0)$. Ce plongement induit un plongement de graphe. Il suffit de voir que si une pièce P_2 de type 2 est dans le bord d'une pièce P_1 de type 1 et qu'elles intersectent toutes les deux H' alors la pièce $P_2 \cap H'$ est dans le bord de la pièce $P_1 \cap H'$.

On montre les lemmes 4.4.24 et 4.4.25 en utilisant le lemme technique suivant.

Lemme 4.4.26. Le graphe $\mathcal{G}(W_0 \cap H')$ est connexe dans $\mathcal{G}(W_0)$.

Démonstration. Soient P et P' deux pièces de W_0 , on note p et p' les sommets de $\mathcal{G}(W_0)$ associés. On suppose que p et p' sont voisins dans $\mathcal{G}(W_0)$. On suppose que P est d'intersection non vide avec H' . Observons dans un premier temps que si P est de type 2 alors H' intersecte P' .

Supposons maintenant que P une pièce de type 1 et que P' est disjoint de H' montrons qu'alors $\mathcal{G}(W_0 \cap H')$ est inclus dans la composante connexe de $\mathcal{G}(W_0) \setminus p'$ qui contient p . Soient Π_1 et Π_2 les deux portions de X' qui contiennent la pièce P . Une composante connexe du bord de $\Pi_1 \cup \Pi_2$ contient la pièce P' , notons la M . On peut vérifier que M est un séparateur au sens de la définition 4.3.6. De plus M est disjoint de H' car l'intersection de H' et d'une portion est convexe. On déduit des deux dernières affirmations que H' est contenu dans la composante connexe de $X' \setminus M$ qui contient P .

On suppose par l'absurde qu'il existe un chemin c géodésique dans $\mathcal{G}(W_0)$ entre deux sommets p_1 et p_2 de $\mathcal{G}(W_0 \cap H')$ qui n'est pas dans totalement inclus dans $\mathcal{G}(W_0 \cap H')$. Quitte à prendre un sommet p_1 plus proche de p_2 on suppose que le voisin p' de p_1 dans c n'est pas dans $\mathcal{G}(W_0 \cap H')$. On en déduit de l'observation précédente que p_1 est de type 1 et p' est de type 2. D'après le dernier paragraphe, $\mathcal{G}(W_0 \cap H')$ est totalement inclus dans la composante connexe de $\mathcal{G}(W_0) \setminus p'$ qui contient p_1 . On obtient une contradiction car $\mathcal{G}(W_0)$ est un arbre et p' est un sommet du chemin géodésique entre p_1 et p_2 . \square

Démonstration du lemme 4.4.24. Les murs ramifiés sont définis comme composantes connexes de W' dans X' et de $W' \cap H'$ dans H' . Il suffit donc de montrer que l'intersection d'un mur ramifié W_0 de X' avec H' est connexe pour conclure. D'après le lemme 4.4.26 le graphe $\mathcal{G}(W_0 \cap H')$ est connexe. L'union de pièces de $W_0 \cap H'$ associée est elle aussi convexe. \square

Démonstration du lemme 4.4.25. On a remarqué que l'intersection de pièces de murs ramifiés de X' avec H' sont des pièces murs ramifiés de H' . On se place au voisinage d'une pièce de type 2 K_i d'un mur ramifié W_0 qui intersecte H' . Les pièces de type 1 de W_0 autour de K_i intersectent toutes H' . De plus si on choisit deux pièces P_1 et P_2 de type 1 de W_0 autour de K_i alors $P_1 \cup K_i \cup P_2$ borde l'union de m portions si et seulement si $(P_1 \cap H') \cup (K_i \cap H') \cup (P_2 \cap H')$ borde l'union de m portions de H' . La description locale des murs de W^+ dans X' et dans H' est donc la même. Il reste à montrer que l'intersection d'un mur M de W^+ avec H' est connexe.

Soit $\mathcal{G}(M)$ le sous-graphe de $\mathcal{G}(W_0)$ associé aux pièces de M . Les pièces de $M \cap H'$ sont données par le graphe $\mathcal{G}(M) \cap \mathcal{G}(W_0 \cap H')$. Dans l'arbre $\mathcal{G}(W_0)$ l'intersection des deux arbres connexes $\mathcal{G}(M)$ et $\mathcal{G}(W_0 \cap H')$ est connexe. L'union de pièces de $\mathcal{G}(M) \cap \mathcal{G}(W_0 \cap H')$ est donc connexe. □

Lemme 4.4.27. La géodésique par morceaux γ vérifie les 3 premières propriétés de la proposition 4.4.5 dans X' .

Démonstration. Montrons ces conditions dans l'ordre :

1. On considère W_1, \dots, W_p les murs ramifiés de X' qui prolongent les $(W_1)^{H'}, \dots, (W_p)^{H'}$. Le lemme 4.4.24 assure qu'ils sont deux à deux disjoints. D'après la partie 4.4.2 on a $\gamma \cap (W_i)^{H'} = \tau_i$. Et d'après le lemme 4.4.24, $W_i \cap H' = (W_i)^{H'}$. Comme γ est dans H' on obtient $\gamma \cap W_i = \tau_i$. Le mur $(W_i)^{H'}$ de H' sépare les intérieurs de σ_{i-1} et de σ_i . Or W_i n'intersecte γ qu'en τ_i alors W_i aussi sépare les intérieurs de σ_{i-1} et de σ_i . Enfin, l'intérieur de σ_i est disjoint de W' d'après la partie 4.4.2.
2. On note M_i^j le mur de W^+ qui prolonge $(M_i^j)^{H'}$. Par construction $(M_i^j)^{H'} \cap \gamma = t_i^j$. D'après le lemme 4.4.24, $M_i^j \cap H' = (M_i^j)^{H'}$. Comme γ est inclus dans H' on obtient $M_i^j \cap \gamma = t_i^j$. Le mur $(M_i^j)^{H'}$ de H' sépare les intérieurs de s_i^{j-1} et de s_i^j . Comme M_i^j n'intersecte γ qu'en t_i^j alors M_i^j aussi sépare les intérieurs de s_i^{j-1} et de s_i^j .
3. D'après la section 4.4.2 l'intersection de s_i^j avec $K' \cap H'$ est un nombre fini de points, alors l'intersection de s_i^j avec K' est un nombre fini de points. De plus f est une isométrie de s_i^j sur son image. □

Il reste à montrer les conditions d'angles.

Définition 4.4.28. Soient H et M deux sous-variétés totalement géodésiques de \mathbb{H}^n qui s'intersectent transversalement. L'angle entre H et M est le minimum des angles entre deux vecteurs $u \in T_z H$ et $v \in T_z M$ pour $z \in H \cap M$ tels que $u, v \perp (T_z H \cap T_z M)$.

On considère $\theta_1 > 0$ l'angle minimum entre une composante connexe de W et un mur H de \mathcal{H} , et $\theta_2 > 0$ l'angle minimal entre une composante connexe de K un mur H de \mathcal{H} .

Lemme 4.4.29. L'angle entre σ_i et W_i (resp. W_{i+1}) est minoré par la constante θ_1 .

Démonstration. D'après le lemme 4.4.27 le segment σ_i est d'intérieur disjoint de W' . En particulier, il est entièrement inclus dans une portion fermée Π . La restriction de l'application f sur Π est une isométrie sur son image. On obtient dans \mathbb{H}^n que $f(\sigma_i)$ est le plus court chemin entre $f(W_{i-1})$ et $f(W_i)$ dans H . Alors l'angle entre $f(\sigma_i)$ et $f(W_{i-1})$ (resp. $f(W_i)$) est minoré par θ_1 et l'angle entre σ_i et W_{i-1} (resp. W_i) aussi. \square

Lemme 4.4.30. L'angle entre s_i^j et t_i^j (resp. t_i^{j+1}) est minoré par la constante θ_2 .

Démonstration. Par construction s_i^j est dans l'union de pièces associées à un segment c de pièces de $\mathcal{G}(W_i \cap H')$. De plus, chaque pièce de type 2 de l'intérieur de c est régulière (les deux pièces de types 1 voisines dans c sont dans le bord d'une portion). Alors c donne un chemin de pièces de W_0 et les pièces de types 2 sont aussi régulières dans ce chemin. On note P_1, \dots, P_m l'ensemble de ces pièces. D'après le lemme 4.4.17, la restriction de f à $P_1 \cup \dots \cup P_m$ est une isométrie sur son image. En particulier, $f(s_i^j)$ est le plus court chemin entre $f(K_i^{j-1})$ et $f(K_i^j)$ dans H . En particulier l'angle entre $f(s_i^j)$ et $f(K_i^{j-1})$ est minoré par θ_2 . Comme $f(t_i^j)$ est un segment de K_i^j alors l'angle entre $f(s_i^j)$ et $f(t_i^{j-1})$ est minoré par θ_2 . Finalement, l'angle entre s_i^j et t_i^j aussi. \square

Lemme 4.4.31. L'angle entre s_i^j et M_i^j (resp. M_i^{j+1}) est minoré par une constante θ_2 .

Démonstration. Montrons que l'angle entre s_i^j et M_i^j est $\geq \theta_2$. On note z le point d'origine de s_i^j dans K_i^j . Soit τ un segment géodésique de M_i^j d'origine z . Quitte à prendre un sous-segment de τ on peut supposer l'intérieur de τ inclus dans une pièce de type 1 P_τ de W_i . On note P_i^j la pièce de W_0 autour de K_i^j qui intersecte s_i^j . Alors $P_\tau \cup K_i^j \cup P_i^j$ est une sous-variété totalement géodésique de X' . Et $P_\tau \cup K_i^j$ est une sous-variété à bord totalement géodésique K_i^j . Alors l'angle entre τ et s_i^j est minoré par l'angle entre s_i^j et K_i^j . Dans la preuve du lemme précédent on a vu que l'angle entre s_i^j et K_i^j est minoré par θ_2 . On conclut que l'angle entre s_i^j et M_i^j est minoré par θ_2 . \square

Démonstration de la proposition 4.4.23. D'après les lemmes 4.4.27, 4.4.29, 4.4.30 et 4.4.31 la géodésique par morceaux γ satisfait les hypothèses de la proposition 4.4.5 avec $\theta = \min\{\theta_1, \theta_2\}$. On en déduit qu'il existe deux constantes $\kappa_{H'}$ et $\ell_{H'}$ telles que $\text{long}(\gamma) \leq \ell_{H'}|x, y| + \kappa_{H'}$. Comme γ est incluse dans H' et d'extrémités x et y on obtient $d_{H'}(x, y) \leq \ell_{H'}|x, y| + \kappa_{H'}$. \square

4.4.4 Hsu-Wise

Le théorème 4.1.7 doit pouvoir être démontré en utilisant un résultat de Hsu et Wise, voir [HW15], sur la cubulation d'amalgames malnormaux ; c'est ce que nous allons voir dans cette partie. On se place dans les hypothèses du théorème 4.1.7, donnons une autre

idée de la preuve que le groupe fondamental de la variété V' est cubique en utilisant le théorème suivant :

Théorème 4.4.32. (Hsu-Wise) Soit $G = A *_C B$ (ou $G = A *_C$) un groupe hyperbolique, supposons que A et B agissent proprement et cocompactement sur un complexe cubique $\text{CAT}(0)$ et que C soit hyperbolique, quasi-convexe et malnormal dans G alors G agit proprement et cocompactement sur un complexe cubique $\text{CAT}(0)$.

On considère $\mathcal{V} = \{V_1, \dots, V_\ell\}$ la famille des composantes connexes de $V \setminus \overline{W}$. On note $\overline{\mathcal{V}}$ les fermetures métriques des éléments de \mathcal{V} dans V . La variété V peut être reconstruite à partir de recollement successifs d'éléments de $\overline{\mathcal{V}}$ le long de certains sous-espaces de \overline{W} . Du côté du groupe fondamental $\pi_1(V)$ cette construction donne une description de $\pi_1(V)$ en produits amalgamés et HNN-extensions des groupes $\pi_1(V_1), \dots, \pi_1(V_\ell)$ au-dessus des groupes fondamentaux de ces sous-espaces de \overline{W} .

Par ailleurs, on note \mathcal{V}' la famille des composantes connexes de $V' \setminus \overline{W}'$, avec \overline{W}' la préimage de \overline{W} dans V' . Comme le lieu de ramification L est contenu dans \overline{W} alors tout élément de \mathcal{V} et de \mathcal{V}' est disjoint de L . En particulier chaque élément de \mathcal{V}' est le revêtement d'un élément de \mathcal{V} . De même si on appelle $\overline{\mathcal{V}'}$ les fermetures métriques des éléments de \mathcal{V}' dans V' alors chaque élément de $\overline{\mathcal{V}'}$ est le revêtement d'un élément de $\overline{\mathcal{V}}$. Comme dans le paragraphe précédent le groupe fondamental $\pi_1(V')$ est obtenu comme une succession de produits amalgamés et de HNN-extensions de groupes isomorphes à un sous-groupe d'indice fini de l'un des $\pi_1(V_i)$ au-dessus de sous-espaces de $\overline{W}' = p^{-1}(\overline{W})$.

On aimerai appliquer le théorème 4.4.32 à chacun de ces recollements pour montrer que le groupe fondamental $\pi_1(V')$ est cubique. La construction d'une métrique à courbure $\text{CAT}(-1)$ sur le revêtement universel X' de V' assure que le groupe $\pi_1(V')$ est hyperbolique. On a supposé $\pi_1(V)$ cubulé par une famille de murs dans \mathbb{H}^n , on en déduit alors que chaque groupe $\pi_1(V_i)$ est cubique. Tous sous-groupe d'indice fini de $\pi_1(V_i)$ est donc cubique. Les sous-espaces de recollement pour construire V' sont des sous-espaces de \overline{W}' et un relevé de ce sous-espace dans X' est une union connexe de pièces d'un mur ramifié. Des arguments similaires au lemme 4.3.2 devraient permettre de montrer que les groupes fondamentaux de ces sous-espaces sont quasi-convexes. Il restera alors à montrer que ces groupes sont malnormaux. Cela devrait découler simplement du fait que la sous-variétés \overline{W} est plongée et donc que ses élévations sont disjointes.

Chapitre 5

Exemples et généralisations

Dans ce chapitre nous décrivons quelques exemples auxquels le théorème 4.1.7 s'applique. Nous commençons par rappeler la construction des variétés arithmétiques “de type simple”. Une variété arithmétique de type simple V possède beaucoup de sous-variétés immergées de codimension 1, compactes et totalement géodésiques. La famille \mathcal{H} des relevés d'un nombre fini de telles sous-variétés forme une famille $\pi_1(V)$ -cofinie d'hyperplans de \mathbb{H}^n . En fait, V possède suffisamment de sous-variétés de codimension 1 totalement géodésiques pour les choisir de telle sorte que la famille \mathcal{H} cubule $\pi_1(V)$, voir [BHW11]. Si on choisit comme lieu de ramification l'intersection de deux telles sous-variétés, alors le lieu de ramification est naturellement inclus dans une sous-variété de codimension 1 totalement géodésique. La variété V satisfait alors les hypothèses du théorème 4.1.7. N'importe quel revêtement fini cyclique au-dessus de V au-dessus de L a un groupe fondamental cubique. En particulier, c'est le cas des variétés de Gromov-Thurston.

Dans la seconde partie de ce chapitre nous mentionnons quelques généralisations et questions qui se posent naturellement suite au théorème 4.1.7.

5.1 Exemples d'applications

5.1.1 Variétés arithmétiques de type simple

Plutôt que de développer la théorie générale, on décrit une famille d'exemples représentatifs.

Pour construire une variété hyperbolique de dimension n il suffit de construire un sous-groupe discret, cocompact et sans torsion dans $\mathrm{SO}(n, 1)$. Soit d un entier sans facteur carré, et soit $q = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 - \sqrt{d}x_{n+1}^2$. On note \bar{q} la forme quadratique $\bar{q} = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 + \sqrt{d}x_{n+1}^2$. Nous allons en fait construire un sous-groupe Γ discret et cocompact dans le produit $\mathrm{SO}(q) \times \mathrm{SO}(\bar{q})$. Comme $\mathrm{SO}(\bar{q})$ est isomorphe au groupe compact $\mathrm{SO}(n+1)$, la projection de Γ sur $\mathrm{SO}(q)$ est un sous-groupe discret et cocompact dans $\mathrm{SO}(q) \cong \mathrm{SO}(n, 1)$.

Construisons donc le groupe Γ . Soit G le groupe algébrique sur $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ défini par

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} A + \sqrt{d}B & 0 \\ 0 & A - \sqrt{d}B \end{pmatrix} : A + \sqrt{d}B \in \mathrm{SO}(q) \text{ et } A - \sqrt{d}B \in \mathrm{SO}(\bar{q}) \right\},$$

et G_0 le groupe algébrique sur \mathbb{Q} défini par

$$G_0 = \left\{ \begin{pmatrix} A & dB \\ B & A \end{pmatrix}, A + \sqrt{d}B \in \mathrm{SO}(q) \text{ et } A - \sqrt{d}B \in \mathrm{SO}(\bar{q}) \right\}.$$

Les groupes G et G_0 sont conjugués dans $\mathrm{GL}_{2n+2}(\mathbb{C})$ par la matrice

$$P = \begin{pmatrix} I_{n+1} & \sqrt{d}I_{n+1} \\ I_{n+1} & -\sqrt{d}I_{n+1} \end{pmatrix}.$$

On pose $\Gamma_0 = G_0 \cap \mathrm{GL}_{2n+2}(\mathbb{Z})$ et on note Γ son conjugué $P^{-1}\Gamma_0P$. C'est un sous-groupe de G et, comme Γ_0 est discret dans G_0 , il est discret dans G . Ici, comme par la suite, on identifie abusivement G_0 au groupe de ses points réels.

Proposition 5.1.1. Le groupe Γ est cocompact dans G .

Démonstration. Il suffit de démontrer que Γ_0 est cocompact dans G_0 . Par définition de Γ_0 le quotient G_0/Γ_0 est inclus dans $\mathrm{GL}_{2n+2}(\mathbb{R})/\mathrm{GL}_{2n+2}(\mathbb{Z})$ que l'on munit de la topologie quotient. L'espace $\mathrm{GL}_{2n+2}(\mathbb{R})/\mathrm{GL}_{2n+2}(\mathbb{Z})$ s'identifie à l'espace des réseaux \mathcal{R} dans \mathbb{R}^{2n+2} . On utilise le critère de Mahler pour montrer que le sous-espace $G_0/\Gamma_0 \cong G_0 \cdot [\mathbb{Z}^{2n+2}] \subset \mathcal{R}$ est compact. \square

Théorème 5.1.2. (Mahler) Un sous-ensemble X de l'espace des réseaux \mathcal{R} est relativement compact si et seulement si le volume de tout réseau de X est borné et si il existe un voisinage U de 0 dans \mathbb{R}^{2n+2} tel que pour tout réseau Λ de X l'intersection entre $U \cap \Lambda$ est réduite à 0.

Lemme 5.1.3. Le quotient G_0/Γ_0 est relativement compact.

Démonstration. On commence par remarquer que tout réseau dans l'orbite $G_0 \cdot [\mathbb{Z}^{2n+2}]$ est de volume 1. Il reste donc à montrer qu'il existe un ouvert U de \mathbb{R}^{2n+2} tel que pour tout élément $g \in G_0$ on ait $g[\mathbb{Z}^{2n+2}] \cap U = \{0\}$. Considérons l'application

$$F : \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}; (a, b) \mapsto q(a + \sqrt{d}b)\bar{q}(a - \sqrt{d}b).$$

C'est une application G_0 invariante : en effet q est G -invariante et P envoie (a, b) sur $(a + \sqrt{d}b, a - \sqrt{d}b)$.

Posons

$$U = \{(a, b), |F(a, b)| < 1\}.$$

L'application F étant G_0 -invariante, l'ouvert $U \subset \mathbb{R}^{2n+2}$ est G_0 -invariant. Il suffit alors de montrer que $U \cap \mathbb{Z}^{2n+2} = \{0\}$ pour montrer que $G_0 \mathbb{Z}^{2n+2} \cap U = \{0\}$.

Soit $(a, b) \in \mathbb{Z}^{n+1} \times \mathbb{Z}^{n+1}$, par définition de la matrice P et des formes quadratiques q et \bar{q} , $F(a, b)$ appartient à $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$. $F(a, b)$ est en outre fixé par l'involution de Galois $\sigma : x + \sqrt{d}y \mapsto x - \sqrt{d}y$ associée à l'extension quadratique $\mathbb{Q}(\sqrt{d})/\mathbb{Q}$. On en déduit que $F(a, b)$ appartient à \mathbb{Z} .

Si on suppose que $(a, b) \in U \cap \mathbb{Z}^{2n+2}$ alors $|F(a, b)| < 1$ et $F(a, b) \in \mathbb{Z}$, et donc $F(a, b) = 0$. Il s'ensuit que

$$\bar{q}(a - \sqrt{d}b) = \sigma(q(a + \sqrt{d}b)) = 0.$$

La forme quadratique \bar{q} étant définie positive on a donc $a - \sqrt{d}b = 0$ et $a = b = 0$. On a donc trouvé un voisinage ouvert U de 0 dans \mathbb{R}^{2n+2} tel que si $(a, b) \in U \cap \mathbb{Z}^{2n+2}$ alors $(a, b) = 0$. \square

Lemme 5.1.4. Le groupe G_0/Γ_0 est fermé dans $\mathrm{GL}_{2n+2}(\mathbb{R})/\mathrm{GL}_{2n+2}(\mathbb{Z})$.

Démonstration. On veut montrer que G_0/Γ_0 est fermé dans \mathcal{R} . Considérons donc une suite $(\Lambda_m)_{m \in \mathbb{N}}$ de réseaux dans l'orbite $G_0 \cdot [\mathbb{Z}^{2n+2}]$ qui converge vers un réseau Λ dans \mathcal{R} . Comme Λ_m tend vers Λ dans \mathcal{R} , il existe des bases $(e_1^m, \dots, e_{2n+2}^m)$ de Λ_m et (e_1, \dots, e_{2n+2}) de Λ telles que chaque e_j^m tendent vers e_j lorsque m tend vers l'infini. Montrons qu'il existe un entier m_0 et un élément $g \in G_0$ tels que $(ge_1^{m_0}, \dots, ge_{2n+2}^{m_0}) = (e_1, \dots, e_{2n+2})$, on en déduira que Λ appartient à l'orbite $G_0 \cdot [\mathbb{Z}^{2n+2}]$.

La fonction F de la démonstration précédente prend des valeurs entières sur l'orbite $G_0 \cdot [\mathbb{Z}^{2n+2}]$. Pour m assez grand on a donc $F(e_i^m) = F(e_i)$. En décomposant chaque vecteur $v \in \mathbb{Z}^{2n+2}$ en $(v_1, v_2) \in \mathbb{Z}^{n+1} \times \mathbb{Z}^{n+1}$, on a alors :

$$q((e_i^m)_1) = q((e_i)_1) \text{ ou bien } q((e_i^m)_1) = \bar{q}((e_i)_2).$$

Comme e_i^m converge vers e_i , on en déduit que, pour m assez grand on a $q((e_i^m)_1) = q((e_i)_1)$ et $\bar{q}((e_i^m)_2) = \bar{q}((e_i)_2)$. De même, on peut vérifier que pour m assez grand on a : $q((e_i^m + e_k^m)_1) = q((e_i + e_k)_1)$ et $\bar{q}((e_i^m + e_k^m)_2) = \bar{q}((e_i + e_k)_2)$. On en déduit qu'il existe un élément $g \in G$ tel que $(ge_1^m, \dots, ge_{2n+2}^m) = (e_1, \dots, e_{2n+2})$ et donc $\Lambda \in G_0 \cdot [\mathbb{Z}^{2n+2}]$. \square

Enfin, on utilise le résultat suivant pour éliminer la torsion de Γ .

Théorème 5.1.5. (Selberg) Tout sous-groupe de type fini d'un groupe linéaire sur un corps de caractéristique nulle possède un sous-groupe d'indice fini sans-torsion.

À partir de maintenant Γ désigne le sous-groupe de $\mathrm{SO}(n, 1)$ isomorphe au groupe Γ obtenu précédemment par projection $G \rightarrow \mathrm{SO}(q) \times \mathrm{SO}(\bar{q})$ sur le premier facteur. On note q la forme quadratique $q = x_1^2 + \dots + x_n^2 - x_{n+1}^2$. On déduit du théorème de Selberg qu'il

existe un sous-groupe d'indice fini $\Gamma' < \Gamma$ sans torsion. On considère alors V la variété hyperbolique obtenue comme quotient de \mathbb{H}^n par Γ' .

Une telle variété possède beaucoup de sous-variétés immergées totalement géodésiques de codimension 1. Par exemple, on considère H l'hyperplan donné par $\{x_1 = 0\}$. Montrons que $\Gamma \cap \text{Stab}_{\text{SO}(n,1)}(H)$ est cocompact dans $\text{Stab}_{\text{SO}(n,1)}(H)$, ainsi le quotient de H par $\Gamma \cap \text{Stab}_{\text{SO}(n,1)}(H)$ sera une variété compacte, qui s'immerge dans V .

Le groupe $\text{Stab}_{\text{SO}(n,1)}(H)$ est le sous-groupe de $\text{SO}(q)$ donné par $\text{SO}(1) \times \text{SO}(q_{\langle e_2, \dots, e_{n+1} \rangle})$. Comme $\Gamma = \text{SO}(q) \cap \text{GL}_{n+1}(\mathbb{Z}[\sqrt{d}])$ alors $\Gamma \cap \text{Stab}_{\text{SO}(n,1)}(H) = \text{SO}(1) \times \text{SO}(q_{\langle e_2, \dots, e_{n+1} \rangle}) \cap \text{GL}_n(\mathbb{Z}[\sqrt{d}])$. On se retrouve alors dans la situation de la preuve que Γ est cocompact dans G , avec $\Gamma_H = \text{SO}(q_{\langle e_2, \dots, e_{n+1} \rangle}) \cap \text{GL}_n(\mathbb{Z}[\sqrt{d}])$ et $G_H = \text{SO}(q_{\langle e_2, \dots, e_{n+1} \rangle})$. Alors $\Gamma \cap \text{Stab}_{\text{SO}(n,1)}(H)$ est bien cocompact dans $\text{Stab}_{\text{SO}(n,1)}(H)$.

En fait, on peut construire beaucoup d'autres hyperplans à stabilisateur cocompact dans $\text{SO}(n, 1)$. La construction ci-dessus fournit un certain nombre d'exemples de variétés arithmétiques de type simple. La construction générale est similaire.

L'intersection de deux tels hyperplans donne un lieu singulier inclus dans un hyperplan. Si on note L l'image de cette intersection dans V alors d'après le théorème 4.1.7 n'importe quel revêtement ramifié fini de V au-dessus de L a un groupe fondamental cubique. En particulier c'est un moyen de redémontrer que les variétés de Gromov-Thurston ont un groupe fondamental cubique.

5.1.2 Autres exemples

Variétés de Gromov-Piatetski-Shapiro

Dans cette partie nous allons voir un autre exemple de classe de variétés sur lesquelles on peut appliquer le théorème 4.1.7, les variétés de Gromov-Piatetski-Shapiro.

Dans les années 90 Gromov et Piatetsky-Shapiro proposent une construction en toute dimension de variétés hyperboliques de groupe fondamental non-arithmétique (voir [GPS87]). Un théorème de Margulis affirme que tout réseaux d'un groupe de Lie simple de rang strictement supérieur à 1 est arithmétique. Après plusieurs exemples de construction de groupes non-arithmétiques dans $\text{SO}(n, 1)$ avec $n \leq 10$, Gromov et Piatetski-Shapiro offrent une construction de réseaux de $\text{SO}(n, 1)$ en toute dimension à partir de variétés arithmétiques.

Esquissons cette construction. Soient V_1 et V_2 deux variétés arithmétiques de type simple et compactes; on peut par exemple prendre deux variétés décrites dans la section 5.1.1. On les choisit de sorte que dans chacune de ces variétés, il existe une sous-variété à bord $V_i^+ \subset V_i$ telles que ∂V_1^+ et ∂V_2^+ soient isométriques et tel que chaque bord ∂V_i^+ se relève dans \mathbb{H}^n en un hyperplan. On peut alors construire une nouvelle variété compacte V en recollant les sous-variétés V_1^+ et V_2^+ le long de leurs bords. Pour un exemple explicite voir [Mar91].

Comme la variété V_1 est arithmétique de type simple, il existe de nombreuses sous-

variétés quotient d'hyperplans de \mathbb{H}^n , immergées dans V_1 , et plongées à revêtement fini près. Si on note $W_0 = \partial V_1^+$ et qu'on considère une sous-variété M plongée de V_1 qui intersecte transversalement W_0 alors l'intersection $L = W_0 \cap M$ est une sous-variété de codimension 2 plongée dans V_1^+ donc plongée dans la variété de Gromov-Piatetski-Shapiro $V = V_1^+ \cup V_2^+$.

On ne peut pas appliquer tel quel les résultats du chapitre 4 car on ne sait pas construire a priori une famille de sous-variété totalement géodésiques dans V mais on doit pouvoir cubuler V avec une famille de murs quasi-convexes. On pourra alors appliquer une des généralisation du théorème 4.1.7 que nous évoquons dans la partie genquasiconv.

5.2 Généralisations et questions

5.2.1 Une conséquence directe de la preuve du théorème 4.1.7

Dans la preuve du théorème 4.1.7 on a considéré un revêtement ramifié $V' \rightarrow V$ avec V une variété hyperbolique compacte. On a alors utilisé l'application $V' \rightarrow V$ pour construire une application de revêtement ramifié finie entre le revêtement universel X' de V' et \mathbb{H}^n , $f : X' \rightarrow \mathbb{H}^n$. Enfin, on a utilisé des préimages ou des morceaux de préimages de murs de \mathbb{H}^n par f pour construire des murs de X' qui cubulent $\pi_1(V')$.

On remarque que dans cette preuve la structure de revêtement ramifié $p : V' \rightarrow V$ permet essentiellement de construire l'application de revêtement f . En fait la démonstration du théorème 4.1.7 s'applique directement à des groupes Γ et Γ' qui opèrent isométriquement, proprement et cocompactement sur des espaces X' et \mathbb{H}^n avec une application de revêtement ramifié finie $f : X' \rightarrow \mathbb{H}^n$.

Théorème 5.2.1. *Soit $f : (X', K') \rightarrow (\mathbb{H}^n, K)$ un revêtement ramifié de degré fini. Soit Γ et Γ' deux groupes de type fini qui agissent par isométries, proprement et cocompactement, respectivement sur \mathbb{H}^n et sur X' . De plus on suppose que pour tout $\gamma' \in \Gamma'$ il existe un élément $\gamma \in \Gamma$ tels que $f \circ \gamma' = \gamma \circ f$.*

Supposons qu'il existe une famille \mathcal{H} d'hyperplans de \mathbb{H}^n Γ -cofinie qui sépare linéairement \mathbb{H}^n , et tel que chaque hyperplan de \mathcal{H} soit transverse à K .

Supposons aussi qu'il existe une sous-variété totalement géodésique W de codimension 1 dans \mathbb{H}^n qui contient K . Enfin, on suppose qu'il existe une constante uniforme qui minore le rayon des voisinages de ramification de f .

Alors le groupe Γ' est cubique.

Il n'est pas difficile de prouver le théorème 5.2.1 en reprenant une à une les étapes de la preuve du théorème 4.1.7.

Dans la suite de ce chapitre nous proposons des pistes de généralisations autour des théorèmes 4.1.7 ou 5.2.1.

5.2.2 Orbi-variétés

Exemple d'application du théorème 5.2.1

La structure d'orbi-variété permet de donner de nombreux exemples d'applications pour le théorème 4.1.7. Soit V une variété hyperbolique compacte, et soit L une sous-variété totalement géodésique de codimension 2. On suppose que V satisfait les hypothèses du théorème 4.1.7. Soit V_{orb} une orbi-variété ayant V comme variété sous-jacente, muni d'une structure de quotient local par des groupes finis sur les composantes connexes de L . Montrons qu'alors le groupe fondamental orbifold de V_{orb} est cubique (voir théorème 5.2.3).

Définition 5.2.2. Soit V une variété hyperbolique, soient L_1, \dots, L_p des sous-variétés fermés disjointes, totalement géodésiques et de codimension 2 de V . Soient n_1, \dots, n_p des entiers. On construit une orbi-variété V_{orb} associée à ces données. On décrit $p+1$ cartes : $U_0 = V \setminus (L_1 \cup \dots \cup L_p)$ et $U_i \simeq \mathbb{Z}_{n_i} \setminus N_\epsilon(L_i)$, avec $N_\epsilon(L_i)$ un ϵ -voisinage de L_i dans V homéomorphe au produit $L_i \times D$ avec D un disque euclidien. Le groupe \mathbb{Z}_{n_i} agit sur ce produit comme l'identité sur le premier facteur et une rotation sur le disque.

Théorème 5.2.3. *Soit V une variété hyperbolique compacte. Soit L une sous-variété de codimension 2 dans V , fermée et totalement géodésique.*

On suppose qu'il existe une famille \mathcal{H} d'hyperplans de \mathbb{H}^n , uniformément localement finie, $\pi_1(V)$ -cofinie et linéairement séparante dans \mathbb{H}^n et transverse à K (préimage de L dans \mathbb{H}^n).

On suppose qu'il existe \overline{W} une sous-variété de codimension 1 de V , fermée et totalement géodésique (pas nécessairement connexe) qui contient L .

Alors n'importe quelle orbifold V_{orb} (comme dans la définition 5.2.2) a un groupe fondamental orbifold cubique.

On justifie brièvement le théorème 5.2.3.

D'après la théorie d'Haefliger tout orbi-espace muni d'une métrique à courbure négative est développable voir par exemple [LHG90]. En particulier on a le théorème suivant.

Théorème 5.2.4. (Haefliger) Soit V_{orb} une orbi-variété comme dans la définition 5.2.2 alors V_{orb} est développable, c'est-à-dire qu'il existe une variété X' et un groupe Γ' tels que V_{orb} soit l'orbifold obtenu comme le quotient de X' par Γ' .

Lemme 5.2.5. Soit V une variété hyperbolique fermée, soit L une sous-variété de codimension 2 dans V , fermée de V .

Soit V_{orb} une orbi-variété donnée par l'action d'un groupe fini agissant cycliquement sur chaque composante connexe de L (voir définition 5.2.2). Soit X' le développement de V_{orb} donné par la théorie d'Haefliger.

Alors il existe une application de revêtement ramifié $f : (X', K') \rightarrow (\mathbb{H}^n, K)$, avec K et K' les préimages respectives de L dans X' et dans \mathbb{H}^n . De plus l'application f est de degré fini et il existe une constante uniforme qui minore le rayon des voisinages de ramification de f .

On utilise la remarque suivante pour montrer le lemme 5.2.5.

Remarque 5.2.6. Soient X et Y deux variétés topologiques. Soit X_{orb} et Y_{orb} deux orbifolds d'espaces sous-jacents X et Y ayant pour lieu singulier une sous-variété de codimension 2. Soit $q : X_{orb} \rightarrow Y_{orb}$ un revêtement orbifold. Alors il existe un revêtement ramifié $\bar{q} : X \rightarrow Y$.

Idées de démonstration du lemme 5.2.5. Construisons une orbi-variété d'espace sous-jacent \mathbb{H}^n qui est un revêtement orbifold de V_{orb} . On note K la préimage de L dans \mathbb{H}^n . On associe à chaque composante connexe K_0 de K le nombre entier n_0 associé à $p(K_0)$. On considère alors X_{orb} l'orbifold où on remplace une carte dans chaque voisinage $N(K_0)$ au-dessus de $N(p(K_0))$ par le quotient de $N(K_0)$ par le groupe \mathbb{Z}_{n_0} . L'application de revêtement universel $\mathbb{H}^n \rightarrow V$ induit un revêtement orbifold entre X_{orb} et V_{orb} . Par propriété universelle il existe alors un revêtement orbifold entre le revêtement universel orbifold X' et X_{orb} . On en déduit, d'après la remarque 5.2.6 qu'il existe bien un revêtement ramifié entre X' et \mathbb{H}^n . Par construction les rayons de voisinages de ramification sont minorés par le plus petit rayon de cartes autour des composantes connexes L_i de L . \square

"Démonstration" du théorème 5.2.3. D'après le lemme 5.2.5 il existe une application de revêtement ramifié entre le revêtement universel X' de V_{orb} et \mathbb{H}^n . Cette application satisfait les hypothèses du théorème 5.2.1. De plus le groupe fondamental orbifold agit proprement et cocompactement sur X' . Il existe une application naturelle $\pi_1(V_{orb}) \rightarrow \pi_1(V)$ qui trivialise les \mathcal{G} -lacets de V_{orb} associés à un \mathbb{Z}_{n_i} . (Voir la construction du groupe fondamental orbifold par exemple [LHG90] p208). On en déduit en appliquant le théorème 5.2.1 que le groupe fondamental orbifold de V_{orb} est cubique. \square

Revêtements ramifiés galoisiens et orbi-variétés

Définition 5.2.7. On dit qu'un revêtement ramifié $p : (V', L') \rightarrow (V, L)$ est galoisien si le revêtement $p : V' \setminus L' \rightarrow V \setminus L$ est un revêtement galoisien.

Remarque 5.2.8. Dans un revêtement galoisien $p : (V', L') \rightarrow (V, L)$ deux composantes connexes L'_1 et L'_2 de L' qui s'envoient sur une même composante de L ont le même ordre de ramification.

Définition 5.2.9. Soit $p : (V', L') \rightarrow (V, L)$ un revêtement ramifié galoisien de degré fini. Pour chaque composante connexes L_i de L on considère n_i l'ordre de ramification de p sur n'importe quelle composante connexe L'_i de L' qui s'envoie sur L . D'après la remarque 5.2.8

ce nombre ne dépend pas du choix de la composante L'_i . On construit alors naturellement une orbi-variété V_{orb} comme dans la définition 5.2.2.

Le lemme suivant découle de la définition de revêtement orbifold.

Lemme 5.2.10. Soit $p : (V', L') \rightarrow (V, L)$ un revêtement ramifié galoisien de degré fini, et soit V_{orb} l'orbi-variété associée à p . Alors il existe une application de revêtement orbifold fini $q : V' \rightarrow V_{orb}$. En particulier le groupe fondamental de V' est un sous-groupe du groupe fondamental orbifold de V_{orb} .

On vient de voir qu'en partant d'un revêtement ramifié galoisien de degré fini $p : V' \rightarrow V$ on construit une orbi-variété V_{orb} qui admet pour espace sous-jacent la variété V (voir la définition 5.2.9). En particulier, il existe un revêtement au sens orbifold entre V' et V_{orb} (voir le lemme 5.2.10). Il est naturel de se demander si à partir d'une structure orbifold V_{orb} sur une variété compacte V il est possible de construire un revêtement ramifié galoisien fini $V' \rightarrow V$. (développement fini de V_{orb} .)

L'espace X' donné par la théorie de Heafliger est un revêtement ramifié de V mais il n'est pas de degré fini. Si on suppose le lieu singulier contenu dans une sous-variété \overline{W} de codimension 1, totalement géodésique, on peut en déduire du théorème 5.2.3 l'existence de ce revêtement ramifié fini $V' \rightarrow V$.

Corollaire 5.2.11. Soit V une variété hyperbolique compacte. Soit L une sous-variété de codimension 2 dans V , fermée et totalement géodésique. Soit $p : (V', L') \rightarrow (V, L)$ un revêtement ramifié de degré fini.

On suppose qu'il existe une famille \mathcal{H} d'hyperplans de \mathbb{H}^n , uniformément localement finie, $\pi_1(V)$ -cofinie et linéairement séparante dans \mathbb{H}^n et transverse à K (préimage de L dans \mathbb{H}^n).

On suppose qu'il existe \overline{W} une sous-variété de codimension 1 plongée dans V , fermée et totalement géodésique (pas nécessairement connexe) qui contient L .

Alors pour n'importe quelle orbifold V_{orb} donné par l'action d'un groupe fini agissant cycliquement sur chaque composante connexe de L il existe une variété V' compacte et une application de revêtement orbifold fini $p : V' \rightarrow V_{orb}$.

Démonstration. D'après le théorème 5.2.3, le groupe fondamental orbifold $\pi_1(V_{orb})$ est cubique. En particulier, comme le revêtement universel orbifold de V_{orb} est hyperbolique alors d'après le théorème d'Agol-Wise $\pi_1(V_{orb})$ est virtuellement spécial. On déduit de [HW08] que $\pi_1(V_{orb})$ est résiduellement fini. On choisit alors un sous-groupe G d'indice fini dans $\pi_1(V_{orb})$ sans torsion. La variété $V' = X'/G$ est alors un revêtement fini de V . \square

5.2.3 Discussion autour de généralisation du théorème 4.1.7

W union de sous-variétés totalement géodésiques

On étudie la généralisation suivante :

Théorème 5.2.12. *Soit V une variété hyperbolique compacte. Soit L une sous-variété de codimension 2 dans V , fermée et totalement géodésique. Soit $p : (V', L') \rightarrow (V, L)$ un revêtement ramifié galoisien de degré fini.*

On suppose qu'il existe une famille \mathcal{H} d'hyperplans de \mathbb{H}^n , uniformément localement finie, $\pi_1(V)$ -cofinie et linéairement séparante dans \mathbb{H}^n et transverse à K (préimage de L dans \mathbb{H}^n).

On suppose qu'il existe $\overline{W}_1, \dots, \overline{W}_p$ une famille de sous-variété de codimension 1 plongée dans V , fermée et totalement géodésique (pas nécessairement connexe) qui contient L .

Alors le groupe fondamental $\pi_1(V')$ est cubique.

Nous allons esquisser une idée de preuve du théorème 5.2.12. Considérons dans un premier temps une variante du théorème 4.1.7 avec V une variété **muni d'une métrique localement CAT(-1)**. En effet, il existe dans des espaces hyperboliques des lemmes similaires aux lemmes A.0.15 et A.0.16.

L'idée de preuve du théorème 5.2.12 en supposant une généralisation de 4.1.7 sur X (à la place de \mathbb{H}^n) muni d'une métrique CAT(-1) est la suivante. On pose $V^0 = V$ et on va construire une suite finie de revêtements ramifiés $V^p \rightarrow V^{p-1} \rightarrow \dots \rightarrow V^0$ telle que chaque revêtement $V^i \rightarrow V^{i-1}$ satisfait les hypothèses du théorème 4.1.7. De plus on montre que les applications naturelles (données par la structure de produit fibré) $V' \times_V V^p \rightarrow V'$ et $V' \times_V V^p \rightarrow V^p$ sont des revêtements. On en déduira que le groupe $\pi_1(V' \times_V V^p)$ est un sous-groupe d'indice fini de $\pi_1(V')$ et de $\pi_1(V_p)$. En utilisant plusieurs fois le théorème 4.1.7 on obtiendra que $\pi_1(V^1)$, puis $\pi_1(V^2)$... puis $\pi_1(V^p)$ sont cubiques. Finalement $\pi_1(V')$ sera aussi cubique.

Reste à expliquer comment construire la suite de revêtements ramifiés $f_i : V^i \rightarrow V^{i-1}$. On note $L_i = L \cap \overline{W}_i$ pour $i = 1, \dots, p$. Ainsi $L = \bigcup_{i=1}^p L_i$. Pour chaque composante connexe ℓ de L on note $n(\ell)$ l'ordre de ramification autour d'une composante connexe de L' qui s'envoie sur ℓ . (Ce nombre ne dépend pas du choix de la composante connexe car f est galoisien.)

On décrit la construction de V^{j+1} par récurrence en supposant les espaces $V^0 \dots V^j$ et les applications $f_1 \dots f_j$ construits. On note L_i^j la préimage de L_i dans V^j par l'application $f_1 \circ \dots \circ f_j$. Soit V_{orb}^j l'orbi-variété d'espace sous-jacent V^j suivante. Autour de chaque composante connexe ℓ_0 de L_{j+1}^j on prend pour carte le quotient d'un voisinage de ℓ_0 dans V^j par le groupe \mathbb{Z}_N avec $N = n(f_1 \circ \dots \circ f_j(\ell_0))$. D'après le lemme 5.2.11 il existe un revêtement orbifold fini $V^{j+1} \rightarrow V_{orb}^j$. Puis d'après le lemme 5.2.6 il existe une application de revêtement ramifié finie $f_j : V^{j+1} \rightarrow V^j$.

Enfin on utilise la description du produit fibré du chapitre 2 pour construire le produit fibré $Y = V^p \times_V V'$. Grâce à une étude locale on peut vérifier que :

Lemme 5.2.13. Les applications $Y \rightarrow V'$ et $Y \rightarrow V^p$ sont des revêtements.

Si on montre la généralisation ci-dessus on obtiendra le corollaire suivant :

Corollaire 5.2.14. *Soit V une variété hyperbolique compacte. Soit L une sous-variété de codimension 2 dans V , fermée et totalement géodésique. Soit $p : (V', L') \rightarrow (V, L)$ un revêtement ramifié de degré fini.*

On suppose qu'il existe une famille \mathcal{H} d'hyperplans de \mathbb{H}^n , uniformément localement finie, $\pi_1(V)$ -cofinie et linéairement séparante dans \mathbb{H}^n et transverse à K (préimage de L dans \mathbb{H}^n).

On suppose qu'il existe une sous-variété \overline{W} de codimension 1 immergée dans V , fermée et totalement géodésique (pas nécessairement connexe) qui contient L .

Alors le groupe fondamental $\pi_1(V')$ est cubique.

En effet, comme $\pi_1(V)$ est cubique et hyperbolique alors il est spécial par le théorème d'Agol-Wise. En particulier, par les travaux de Haglund tous sous groupe quasi-convexe de $\pi_1(V')$ est séparable. Il existe un revêtement galoisien fini \widehat{V} de V dans lequel la préimage \widehat{W} de \overline{W} est une union de sous-variétés plongées de \widehat{V} . On considère \widehat{V}' le produit fibré de $V' \rightarrow V$ et de $\widehat{V} \rightarrow V$. C'est un revêtement ramifié fini galoisien de \widehat{V} . On peut alors utiliser le théorème 5.2.12 sur le revêtement ramifié fini galoisien $\widehat{V}' \rightarrow \widehat{V}$.

5.2.4 Quasi-convexité

On peut se poser la question à quel point les hypothèses du théorème 4.1.7 s'étendent à la quasi-convexité des objets utilisés. Ses applications seraient alors renforcées. Citons par exemple le cas des variétés hyperboliques de dimension 3. Les travaux de Khan et Markovic ([KM09]) montrent qu'il existe de nombreuses surfaces immergées dans n'importe quelle 3 variété hyperbolique fermée. Combiner ces résultats avec ceux de Agol et de Wise permet d'obtenir un grand nombre de surfaces virtuellement plongées dans n'importe quelle 3 variété hyperbolique fermée. On se propose alors les réflexions suivantes.

On pourrait prendre une famille \mathcal{H} de variétés quasi-convexes qui cubule $\pi_1(V)$. Comme nous l'avons déjà remarqué, on peut écrire une version des lemmes de l'annexe avec un segment minimal entre un point et une variété quasi-convexe dans un espace hyperbolique.

On pourrait de plus envisager une version du théorème 4.1.7 où la sous-variété W est quasi-convexe. Pour chaque composantes connexe de W' dans X' on peut construire de la même façon un graphe d'espace. Pour construire les murs de \mathcal{W}' on a utilisé le fait que ces graphes sont des arbres. Et pour montrer que ces graphes sont des arbres on a utilisé la convexité des composantes connexes de W' . Dans ce cas ci, les composantes connexes de W' ne sont pas convexes, cependant une question fondamentale pour cette généralisation

est de savoir si les graphes associés sont tout de même des arbres. Si c'est le cas on doit pouvoir utiliser une preuve similaire à celle de la section 4.1.7. On construit γ de la même façon mais on demande au s_i^j entre K_i^j ($\sigma_i(b_i)$ si $j = 0$) et K_i^{j+1} ($\sigma_{i+1}(a_{i+1})$ si $j = q_i$) soit le segment le **plus court dans** W_i .

Si jamais la version du théorème 4.1.7 avec W' est vrai il est naturel de se demander si on peut obtenir un résultat similaire avec le singulier K quasi-convexe au lieu de convexe. On a utilisé la convexité du lieu singulier pour montrer que la métrique définie au chapitre 2 est CAT(-1). La géométrie du revêtement ramifié paraît plus compliquée à cerner, et il semble plus difficile d'appliquer la preuve précédente.

Annexe A

Annexe : lemmes techniques

Soit \mathcal{H} une famille d'hyperplans uniformément localement finie dans \mathbb{H}^n . Dans cette partie on prouve deux lemmes techniques qui servent dans la démonstration du théorème 4.1.7. Les arguments utilisés dans ces deux lemmes sont vraiment similaires.

Lemme A.0.15. Soient U une sous-variété totalement géodésique de \mathbb{H}^n , p un point de U et $[p, q]$ un segment géodésique de \mathbb{H}^n transverse à U . On note θ l'angle entre U et $[p, q]$. Pour toute constante $\theta_0 \in]0, \pi]$ il existe une constante $A(\theta_0)$ telle que si $\theta \geq \theta_0$ alors au plus $A(\theta_0)$ hyperplans de \mathcal{H} intersectent U et $[p, q]$.

Démonstration. On considère T_0 un triangle de $\mathbb{H}^2 \cup \partial\mathbb{H}^2$ qui possède deux angles idéaux et un angle égale à θ_0 en p_0 . On note ℓ_0 la distance entre p_0 et le côté opposé à p_0 dans T_0 . De même on note T un triangle de $\mathbb{H}^2 \cup \partial\mathbb{H}^2$ qui possède deux angles idéaux et un angle égale à θ en p . On note ℓ la distance entre p et le côté opposé à p dans T . Si $\theta_0 \leq \theta$ alors on a l'inégalité $\ell \leq \ell_0$. N'importe quel triangle T' avec un angle égal à θ en un sommet p' est inclus dans un triangle isométrique à T . La distance entre le sommet p' et le côté opposé est alors inférieure à ℓ donc inférieure à ℓ_0 .

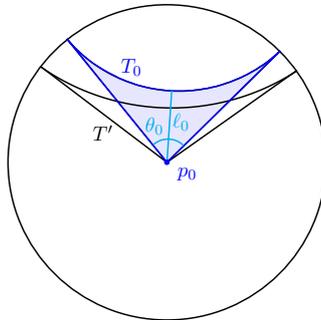


FIGURE A.1 –

Supposons qu'un hyperplan H de \mathcal{H} intersecte U et $[p, q]$. On choisit $x \in U \cap H$ et $y \in [p, q] \cap H$. Comme $[q, y]$ est inclus dans U alors l'angle entre $[q, x]$ et $[q, p]$ est supérieur à l'angle entre U et $[q, p]$. Comme de plus l'angle entre U et $[p, q]$ est minoré par θ_0 alors l'angle entre $[x, q]$ et $[q, p]$ est minoré par θ_0 . D'après le paragraphe précédent la distance entre q et le segment $[x, y]$ est majorée par ℓ_0 . Le segment géodésique $[x, y]$ appartient au sous-espace convexe H , alors la distance entre q et H est majorée par ℓ_0 .

La famille \mathcal{H} est uniformément localement finie. Alors il existe une constante $A(\theta_0)$ telle que au plus $A(\theta_0)$ hyperplans de \mathcal{H} intersectent n'importe quel boule de rayon ℓ_0 . Finalement, il existe au plus $A(\theta_0)$ hyperplans de la famille \mathcal{H} qui intersectent U et $[p, q]$. \square

Lemme A.0.16. Soient U et V deux sous-variétés totalement géodésiques et disjointes dans \mathbb{H}^n . Soit r la distance entre ces deux sous-variétés. Alors pour toute constante $r_0 > 0$ il existe une constante positive $B(r_0)$ telle qu'il existe au plus $B(r_0)$ murs de \mathcal{H} qui intersectent U et V pourvu que $r \geq r_0$.

Démonstration. On considère $Q_0 = \{p_0, q_0, s_0, t_0\}$ un quadrilatère coplanaire de $\mathbb{H}^n \cup \partial\mathbb{H}^n$ avec deux sommets idéaux s_0 et t_0 , deux sommets p_0 et q_0 avec un angle $\frac{\pi}{2}$ et tel que la distance entre p_0 et q_0 soit r_0 . On note ℓ_0 la distance entre p_0 et la géodésique (s_0, t_0) . Soit $Q = \{p, q, s, t\}$ un quadrilatère de $\mathbb{H}^n \cup \partial\mathbb{H}^n$ avec deux sommets idéaux s et t et deux sommets p et q avec des angles $\frac{\pi}{2}$. On note r la distance entre p et q . On note ℓ la distance entre p et le segment géodésique $[s, t]$. Si $r \geq r_0$ alors $\ell \leq \ell_0$. N'importe quel quadrilatère $Q' = \{p', q', s', t'\}$ avec deux angles droits adjacents en des sommets p' et q' et avec la distance entre p' et q' égale à r est inclus dans un quadrilatère isométrique à Q . La distance entre le sommet p' et le côté $[s', t']$ est alors inférieure à ℓ donc inférieure à ℓ_0 .

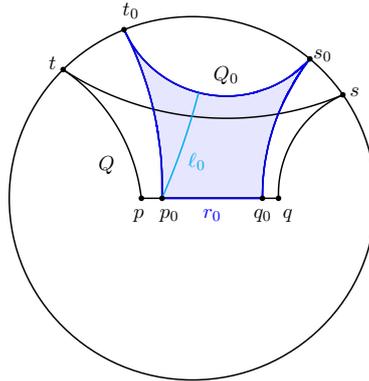


FIGURE A.2 –

Soit H un hyperplan de \mathcal{H} qui intersecte U et V . On choisit deux points $x \in U \cap H$ et $y \in V \cap H$. Soient $[p, q]$ le plus court segment géodésique entre U et V . L'angle entre $[p, q]$ et $[p, x]$ est de $\frac{\pi}{2}$, et de même, l'angle entre $[p, q]$ et $[q, y]$ est de $\frac{\pi}{2}$. Si les segments $[p, q]$,

$[p, x]$ et $[q, y]$ sont coplanaires alors d'après le paragraphe précédent la distance entre p et le segment géodésique $[x, y]$ est majorée par ℓ_0 . Dans le cas non coplanaire cette distance est encore plus petite. On obtient que la distance entre p et H est majorée par ℓ_0 .

Comme la famille \mathcal{H} est uniformément localement finie alors il existe une constante $B(r_0)$ telle que au plus $B(r_0)$ hyperplans de \mathcal{H} intersectent une boule de rayon ℓ_0 . On en déduit qu'il existe au plus $B(r_0)$ murs de \mathcal{H} qui intersectent U et V . \square

Bibliographie

- [A⁺13] Daniel Allcock et al. Completions, branched covers, artin groups, and singularity theory. *Duke Mathematical Journal*, 162(14) :2645–2689, 2013.
- [AGM12] Ian Agol, Daniel Groves, and Jason Manning. The virtual Haken conjecture. *arXiv preprint arXiv :1204.2810*, 2012.
- [BH99] Martin R. Bridson and André Haefliger. *Metric spaces of non-positive curvature*, volume 319 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 1999.
- [BHW11] Nicolas Bergeron, Frédéric Haglund, and Daniel T. Wise. Hyperplane sections in arithmetic hyperbolic manifolds. *J. Lond. Math. Soc. (2)*, 83(2) :431–448, 2011.
- [Bra99] Noel Brady. Branched coverings of cubical complexes and subgroups of hyperbolic groups. *Journal of the London Mathematical Society*, 60(02) :461–480, 1999.
- [CN05] Indira Chatterji and Graham Niblo. From wall spaces to CAT(0) cube complexes. *International Journal of Algebra and Computation*, 15(05n06) :875–885, 2005.
- [DG05] Thomas Delzant and Misha Gromov. Cuts in kähler groups. In *Infinite groups : geometric, combinatorial and dynamical aspects*, pages 31–55. Springer, 2005.
- [DT92] Gérard Duchamp and Jean-Yves Thibon. Simple orderings for free partially commutative groups. *International Journal of Algebra and Computation*, 2(03) :351–355, 1992.
- [Duf12] Guillaume Dufour. *Cubulations de variétés hyperboliques compactes*. PhD thesis, Université Paris Sud-Paris XI, 2012.
- [Gir12] Anne Giralt. *Cubulation des variétés arithmétiques*. Master’s thesis, UPMC, Paris, 2012.
- [GPS87] Michael Gromov and Ilya Piatetski-Shapiro. Non-arithmetic groups in lobahevsky spaces. *Publications Mathématiques de l’IHÉS*, 66 :93–103, 1987.
- [Gro87] Mikhael Gromov. Hyperbolic groups. In *Essays in group theory*, pages 75–263. Springer, 1987.

- [GT87] Mikhail Gromov and William Thurston. Pinching constants for hyperbolic manifolds. *Inventiones Mathematicae*, 89(1) :1–12, 1987.
- [HP98] Frédéric Haglund and Frédéric Paulin. Simplicité de groupes d’automorphismes d’espaces à courbure négative. *Geometry and topology monographs*, 1, 1998.
- [HW08] Frédéric Haglund and Daniel T Wise. Special cube complexes. *Geometric and Functional Analysis*, 17(5) :1551–1620, 2008.
- [HW14] G Christopher Hruska and Daniel T Wise. Finiteness properties of cubulated groups. *Compositio Mathematica*, 150(03) :453–506, 2014.
- [HW15] Tim Hsu and Daniel T Wise. Cubulating malnormal amalgams. *Inventiones mathematicae*, 199(2) :293–331, 2015.
- [KM09] Jeremy Kahn and Vladimir Markovic. Immersing almost geodesic surfaces in a closed hyperbolic three manifold. *arXiv preprint arXiv :0910.5501*, 2009.
- [LHG90] Pierre de La Harpe and Etienne Ghys. *Sur les groupes hyperboliques d’après Mikhael Gromov*. 1990.
- [Mar91] Gregori A Margulis. *Discrete subgroups of semisimple Lie groups*, volume 17. Springer Science & Business Media, 1991.
- [Nic04] Bogdan Nica. Cubulating spaces with walls. *Algebraic & Geometric Topology*, 4 :297–309, 2004.
- [Pan86] Pierre Pansu. Pincement des variétés à courbure négative d’après M. Gromov et W. Thurston. *Séminaire de théorie spectrale et géométrie*, 4 :101–113, 1985–1986.
- [Pap05] Athanase Papadopoulos. *Metric spaces, convexity and non-positive curvature*. European Mathematical Society, 2005.
- [Sag95] Michah Sageev. Ends of group pairs and non-positively curved cube complexes. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 3(3) :585–617, 1995.
- [Sag97] Michah Sageev. Codimension-1 subgroups and splittings of groups. *Journal of Algebra*, 189(2) :377–389, 1997.
- [Sco78] Peter Scott. Subgroups of surface groups are almost geometric. *Journal of the London Mathematical Society*, 2(3) :555–565, 1978.
- [Thu79] William P Thurston. *The geometry and topology of three-manifolds*. Princeton University Princeton, 1979.
- [Thu83] William P Thurston. Three-dimensional manifolds, kleinian groups and hyperbolic geometry. In *Proc. Sympos. Pure Math*, volume 39, pages 87–111, 1983.
- [Vas01] Viktor A Vassilev. *Introduction to topology*. Number 14. American Mathematical Soc., 2001.