



**HAL**  
open science

## Contribution aux techniques dites d'ajout de signal pour la Réduction du Facteur de Crête des signaux OFDM.

Mamadou Lamarana Diallo

### ► To cite this version:

Mamadou Lamarana Diallo. Contribution aux techniques dites d'ajout de signal pour la Réduction du Facteur de Crête des signaux OFDM.. Autre. CentraleSupélec, 2016. Français. NNT : 2016CSUP0005 . tel-01647466

**HAL Id: tel-01647466**

**<https://theses.hal.science/tel-01647466>**

Submitted on 24 Nov 2017

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N° d'ordre : 2016-05-TH



CentraleSupélec

ANNÉE 2016



## THÈSE DE DOCTORAT

Domaine : STIC

SPECIALITE : Télécommunications

École doctorale Matisse

présentée par

# Mamadou Lamarana DIALLO

Sujet :

---

**Contribution aux Techniques dites d'Ajout de Signal pour  
la Réduction du Facteur de Crête des signaux OFDM**

---

Soutenue à Rennes le 08 Juin 2016

devant le jury composé de :

<b>Mme. Marie Laure Boucheret</b>	Professeur, INP-ENSEEIH-Toulouse	<b>Présidente du Jury</b>
<b>Mme. Geneviève Baudoin</b>	Professeur, ESIEE, Noisy le Grand	<b>Rapporteur</b>
<b>M. Daniel Roviras</b>	Professeur, CNAM, Paris	<b>Rapporteur</b>
<b>M. Mohamad Mroué</b>	Enseignant-Chercheur, Université Libanaise, Beyrouth	<b>Examineur</b>
<b>M. Faouzi Bader</b>	Enseignant-Chercheur, CentraleSupélec	<b>Encadrant</b>
<b>M. Jacques Palicot</b>	Professeur, CentraleSupélec, Rennes	<b>Dir. de thèse</b>







# Remerciements

Gloire et Louange à Dieu, Seigneur de la Terre et des Cieux. Je prie sur son prophète Bien Aimé Mouhamad, le Sceau des prophètes. Paix et Salut sur Lui, sa famille ainsi que tous les Prophètes.

Les travaux présentés dans ce mémoire sont le résultat de trois années de thèse de doctorat dans les locaux du campus de Rennes de CentraleSupélec au sein de l'équipe SCEE (Signal, Communication et Électronique Embarquée) du laboratoire IETR (Institut d'Électronique et de Télécommunications de Rennes) - UMR CNRS 6164, groupe Automatique et Communications.

Mes remerciements vont en premier à Monsieur Philippe MARTIN, Directeur du campus et à Monsieur Bernard JOUGA, Délégué à la Recherche et aux Relations Industrielles pour m'avoir accueilli au sein de cette école.

Je remercie chaleureusement Monsieur Jacques Palicot, mon Directeur de thèse ainsi que Monsieur Carlos Faouzi Bader mon Encadrant pour m'avoir offert l'opportunité de commencer et de poursuivre ce travail de recherche au sein de l'équipe SCEE. Leur grande disponibilité malgré un emploi de temps chargé, l'excellence de leur encadrement, leurs remarques et critiques toujours pertinentes ont été précieuses pour la réussite de ce travail. Je leur suis gré pour leur collaboration, leurs conseils et leurs soutiens (moral et professionnel) qui m'ont beaucoup appris aussi bien sur le plan personnel que scientifique.

Je remercie les membres du jury qui ont tous accepté de participer à cette soutenance. Je remercie Madame Marie Laure Boucheret, Professeur à l'INP-ENSEEIH-Toulouse pour m'avoir fait l'honneur de présider mon Jury de Thèse. J'adresse également mes remerciements à Madame Geneviève Baudoin, Professeur à l'ESIEE, Noisy le Grand et Monsieur Daniel ROVIRAS, Professeur au CNAM de Paris pour avoir accepté de rapporter sur cette thèse et à Mohamad Mroué, Enseignant-Chercheur à l'université Libanaise de Beyrouth pour avoir accepté d'être examinateur.

J'adresse un grand merci à tous les enseignants-chercheurs de l'équipe pour leur bonne humeur et leur enthousiasme, en particulier Daniel LE GUENNEC (parti à la retraite), Yves Louet, Christophe MOY, Amor NAFKHA, Pascal Cotret, Renaud SEGUIER, Catherine Soladier, Honggang ZHANG. Je remercie également tous le personnel administratif et particulièrement à Karine Bernard et Jeanine Hardy pour leur compréhension et sympathie concernant les différentes démarches administratives que j'ai eu à effectuer aux près d'elles.

Je remercie l'ensemble de l'équipe SCEE ainsi que tous les permanents de Centrale-Supélec, campus de Rennes pour leur accueil sympathique. J'ai passé beaucoup de bons moments parmi eux au cours de ces trois années de thèse. Je remercie particulièrement Vincent Savaux pour les vives discussions que j'ai eu à échanger avec lui durant ces trois

années. Son aide a été d'une telle importance que j'aurais été honoré de l'avoir dans mon jury de thèse. MERCI VINCENT. Je tiens à souligner la compagnie et l'amitié de mes ex-collègues doctorants et postdocs : Babar, Eren, Hanan, Jérôme, Marwa, Oussama, Samba, Sumit, Navik, Vincent Gouldieff, Quentin, Raphael, Xiguang, Mouna, Lara et tous ceux ou celles que j'aurais oubliés.

Je remercie l'ensemble de mes amis et compatriotes sénégalais résidents à Rennes ou dans les autres villes de la France pour leurs soutiens incondtionnels, leurs encouragements et les nombreux conseils. Je remercie en particulier Makha Ndao, El Hadji Mama Guène, Moustapha Diagne, Thierno Barro, Saliou Gaye, Dame Thiam, Oumar Barro, Baba Ndao, Cheikh Mbaye, Palaye, Salimata, Ya Fanta, etc. Mes remerciements vont aussi à l'encontre du Dahira Touba Rennes, en particulier à notre Dieuwrigne Pape Sall, Thierno Diop, Ndiamé Gaye, Ngary Guène, Sérigne Maï, Modou Faye, ... etc. Je remercie également ma sœur Yalla Diop pour le pot qu'elle nous a gratifiée lors de la soutenance.

Je remercie chaleureusement mes amis qui sont restés au Sénégal, leurs soutiens et encouragements m'ont permis de tenir tout au long de ces travaux. Je remercie également tous mes promotionnels de l'UCAD (Université Cheikh Anta Diop de Dakar) à savoir Hady Senghor, Ibra Seye, Ibrahima Badiane, Habib Faye, Nassirou Diallo, Amadou Sagna, Baba Diakhaté, etc.

Un grand merci du fond du cœur à mon épouse Fatoumata Bah, à mon père Boubacar Diallo, à ma mère Maïmouna Diallo et à toute la famille, pour leurs soutiens, leurs patiences, ainsi que leurs compréhensions dans les moments de stress, pour leur amour et pour tout ce qu'ils m'ont apportés.

Je ne puisse clore cette page sans une pensée à mon grand Frère MOUMINI BARRY que j'ai perdu en Septembre 2015. Il m'avais toujours soutenu dans mes études et ça aurait été une fierté de pouvoir enfin lui dire "Grand Frère j'ai Obtenu mon Doctorat". L'Homme propose et Dieu dispose. Je dédie ces Travaux à sa mémoire et prie pour le repos Éternel de son âme, amine. Tu restera à jamais dans ma mémoire.



# Table des matières

Remerciements	1
Table des matières	3
Publications Personnelles	7
Listes des acronymes et abréviation	9
Notations Mathématiques	11
Table des figures	13
Liste des algorithmes	19
Introduction	21
<b>1 Principe de Modulation OFDM, Caractérisation du PAPR d'un signal OFDM et caractérisation des amplificateurs de puissances</b>	<b>27</b>
1.1 Introduction . . . . .	27
1.2 Principe de Modulation OFDM et Caractérisation du PAPR d'un signal OFDM . . . . .	27
1.2.1 Principe de l'OFDM . . . . .	28
1.2.2 Émetteur et Modulateur numérique d'un système OFDM . . . . .	29
1.2.3 Définition et Caractérisation du PAPR d'un signal OFDM . . . . .	31
1.2.3.1 Définition du PAPR . . . . .	31
1.2.3.2 Caractérisation du PAPR d'un signal OFM . . . . .	32
1.3 Principe et Caractérisation de l'Amplificateur de Puissance . . . . .	37
1.3.1 Définition . . . . .	37
1.3.2 Caractérisation de l'amplificateur de puissance : Les conversions AM/AM et AM/PM . . . . .	38
1.3.3 Les paramètres d'intérêt de l'amplificateur de puissance . . . . .	39
1.3.4 Modélisation mathématique des comportements AM/AM et AM/PM des amplificateurs de puissance . . . . .	41
1.3.5 Évaluations des dégradations induites par un amplificateur de puissance . . . . .	42
1.4 Conclusion . . . . .	48
<b>2 État de l'art des techniques de réduction du PAPR</b>	<b>49</b>
2.1 Introduction . . . . .	49
2.2 Notations et définitions générales de la thèse . . . . .	51
2.3 Les techniques de Codage et Les techniques Probabilistes . . . . .	54
2.3.1 Les Techniques de Codages . . . . .	54

2.3.2	Les techniques Probabilistes . . . . .	54
2.4	Les techniques dites d'ajout de signal . . . . .	57
2.4.1	Les techniques dites d'ajout de signal à compatibilité non descendante	60
2.4.1.1	La méthode <i>Tone Injection</i> . . . . .	60
2.4.1.2	Les Techniques de <i>Comanding</i> . . . . .	62
2.4.1.3	Les Techniques de <i>Clipping Inversible</i> . . . . .	63
2.4.2	Les techniques dites d'ajout de signal à compatibilité descendante .	64
2.4.2.1	Techniques à compatibilité descendante avec distorsion . .	65
2.4.2.1.a	La méthode géométrique [60] et celle basée sur le SOCP [7] . . . . .	65
2.4.2.1.b	Les Techniques de <i>Clipping</i> . . . . .	66
2.4.2.2	Techniques à compatibilité descendante sans distorsion . .	69
2.4.2.2.a	Techniques basées sur la TR . . . . .	70
2.4.2.2.b	Techniques basées sur l' ACE . . . . .	75
2.5	Conclusion . . . . .	78
<b>3</b>	<b>Écrêtage Adaptatif</b>	<b>79</b>
3.1	Introduction . . . . .	79
3.2	Motivations et Principe de l'écrêtage adaptatif . . . . .	80
3.2.1	Notations et définitions . . . . .	80
3.2.2	Problématique et Formulation de l'écrêtage adaptatif . . . . .	82
3.3	Principe de l'écrêtage adaptatif ou <i>clipping</i> adaptatif . . . . .	84
3.3.1	Recherche Exhaustive à pas constant : Approche naïve . . . . .	85
3.3.2	Recherche Exhaustive à pas non Constant . . . . .	89
3.3.3	Résolution par approximation de la puissance moyenne $P_{y_n}$ . . . . .	96
3.4	Performances en termes de réduction du PAPR et des dégradations occasionnées . . . . .	101
3.5	Conclusion et Perspectives . . . . .	106
<b>4</b>	<b>Contribution sur le choix des porteuses réservées dans les méthodes TR109</b>	
4.1	Introduction . . . . .	109
4.2	Contribution sur l'influence de la parité des porteuses sur la méthode TR-GP	110
4.2.1	Rappel du principe de La méthode TR-GP . . . . .	110
4.2.2	Influence de la parité des porteuses réservées sur les performances de la méthode TR-GP . . . . .	112
4.2.3	Résultats de simulation sur l'influence de la parité des porteuses réservées sur les performances de la méthode TR-GP . . . . .	119
4.3	La méthode <i>Adaptive Tone Reservation</i> (ATR) . . . . .	126
4.3.1	Principe et formulation du problème . . . . .	126
4.3.2	Résultats de simulation . . . . .	129
4.3.2.1	Comparaison des techniques TR-GP et ATR-GP en termes de réduction du PAPR . . . . .	130
4.3.2.2	Comparaison des techniques TR et ATR sur les performances en BER en présence d'un canal sélectif en fréquence	131
4.4	Conclusion . . . . .	133
<b>5</b>	<b>Améliorations de la méthode <i>Tone Reservation</i></b>	<b>135</b>
5.1	Introduction . . . . .	135
5.2	Notations et définitions . . . . .	136
5.3	Formulation du problème et schéma d'insertion de la méthode <i>Modified Tone Reservation</i> . . . . .	138

5.3.1	Décomposition du symbole OFDM . . . . .	138
5.3.2	Principe et Schéma d'insertion général de la MTR . . . . .	144
5.4	Implémentation de la MTR-GP sans filtrage . . . . .	148
5.4.1	Calcul du signal de correction . . . . .	149
5.4.2	Structure du schéma de filtrage des perturbations générées par le signal de correction du PAPR . . . . .	151
5.5	Implémentation de la MTR-GP avec Filtrage : Compromis BER-PAPR . .	154
5.5.1	Implémentation de la MTR-GP à l'aide d'une FFT : FFT-IFFT- MTR-GP . . . . .	154
5.5.2	Implémentation efficace de la méthode MTR-GP . . . . .	155
5.5.3	Performances en termes de réduction du PAPR et de dégradation du BER . . . . .	156
5.5.3.1	Cas <i>Random Set Optimizer</i> . . . . .	157
5.5.3.1.a	Influence de $\delta$ , de $\rho$ et du nombre d'itérations sur les performances en réduction du PAPR de la méthode 1-MTR-GP . . . . .	158
5.5.3.1.b	Influence de $\delta$ , de $\rho$ et du nombre d'itérations sur les performances en termes de variation de la puissance moyenne . . . . .	160
5.5.3.1.c	Influence de $\delta$ , de $\rho$ et du nombre d'itérations sur les performances en termes de dégradation du BER .	161
5.5.3.1.d	Compromis performances en réduction du PAPR et augmentation de la puissance moyenne . . . . .	163
5.5.3.2	Cas <i>Contiguous Tones-Middle Side</i> . . . . .	165
5.6	Généralisation de la MTR . . . . .	166
5.6.1	Double décomposition du symbole $\mathbf{x}_n$ et principe de la méthode 2-MTR-GP associée . . . . .	166
5.6.2	Construction de la matrice d'insertion pour la méthode 2-MTR-GP	176
5.6.3	Performances en termes de réduction du PAPR et de variation de la puissance moyenne ( $\Delta E$ ) . . . . .	180
5.6.3.1	Performances en réduction du PAPR . . . . .	181
5.6.3.2	Évaluation des variations de la puissance moyenne induites après réduction du PAPR . . . . .	183
5.6.3.3	Compromis PAPR- $\Delta E$ et Complexité numérique . . . . .	186
5.6.4	Généralisation de la méthode MTR par extension de la décomposition du symbole OFDM d'intérêt . . . . .	187
5.6.5	Performances en termes de réduction du PAPR et de variation de la puissance moyenne . . . . .	190
5.6.5.1	Performances en termes de réduction du PAPR . . . . .	190
5.6.5.2	Évaluation de la variation de la puissance moyenne induite après réduction du PAPR . . . . .	193
5.6.5.3	Compromis performances en réduction du PAPR- $\Delta E$ et complexité numérique . . . . .	195
5.7	Conclusion et Perspectives . . . . .	196
<b>Conclusion Générale et Perspectives</b>		<b>199</b>
<b>A Complément sur les techniques de <i>Clipping</i> et les techniques basées sur la TR</b>		<b>205</b>
A.1	Évaluation des performances des techniques de <i>clipping</i> . . . . .	205

A.1.1	Performances en réduction du PAPR des techniques <i>Classical Clipping</i> , <i>Smooth Clipping</i> and <i>Deep Clipping</i> . . . . .	205
A.1.2	Influence des techniques de <i>clipping</i> sur les densités spectrales de puissance des signaux après écrêtage . . . . .	207
A.1.3	Évaluation des performances en termes de distorsion de la constellation (EVM) et de variation de la puissance moyenne $\Delta E$ . . . . .	208
A.1.4	Performances en termes de dégradation du BER . . . . .	209
A.2	Performances en réduction du PAPR de quelques méthodes basées sur la TR	210
A.2.1	Performances en réduction du PAPR des méthodes TR-QCQP et TR-SOCP . . . . .	210
A.3	Influence du choix des porteuses sur les performances de la méthode TR-GP	212
A.3.1	Rappel de l'Algorithme <i>Random Set Optimizer</i> pour la méthode TR-GP . . . . .	212
A.3.2	Quelques résultats de simulation sur l'influence du choix des porteuses sur la méthode TR-GP . . . . .	215
A.3.2.1	Performances en réduction du PAPR . . . . .	215
A.3.2.2	Performances en termes de variation de la puissance moyenne	218
<b>B</b>	<b>Complément sur le chapitre 5</b>	<b>221</b>
B.1	Projection des porteuses réservées de $\mathbf{x}_n$ sur les symboles issus de sa décomposition : Preuve de l'équation (5.25) . . . . .	221
B.2	Caractérisation des perturbations générées par le signal de correction solution de (5.36) . . . . .	223
	<b>Bibliographie</b>	<b>239</b>
	<b>Index</b>	<b>241</b>

# Publications Personnelles

## Conférences Internationales :

1. Mamadou Lamarana Diallo, Jacques Palicot : "Adaptive clipping for a deterministic PAPR", (invited paper) ICTRS, in Proceedings Of Third ICTRS 2014, p. 25-33, Luxembourg
2. Mamadou Lamarana Diallo, Jacques Palicot and Faouzi Bader : "Achieving a Desired Deterministic Upper Bounded PAPR value using a Fast Adaptive Clipping", 11th Advanced International Conference on Telecommunications (AICT 2015), Brussels-Belgium
3. Mamadou Lamarana Diallo, Jacques Palicot and Faouzi Bader : "Carrier parity distribution influence on PAPR mitigation using Tones Reservation method", International Congress on Ultra Modern Telecommunications and Control Systems and Workshops (ICUMT), 2015 7th
4. Marwa Chafii, Mamadou Lamarana Diallo, Jacques Palicot and Faouzi Bader : "Adaptive Tone Reservation for better BER Performance in a Frequency Selective Fading Channel", IEEE 83rd Vehicular Technology Conference : VTC2016-Spring
5. Mamadou Lamarana Diallo, Marwa Chafii, Jacques Palicot and Faouzi Bader : "Modified Tone Reservation for PAPR reduction in OFDM systems", European Signal Processing Conference (EUSIPCO 2016)

## Conférence Nationale

1. Mamadou Lamarana Diallo, Jacques Palicot and Faouzi Bader : "Diminution du facteur de crête d'un signal multiporteuses par décomposition selon deux signaux, symétrique et antisymétrique", GRETSI-2015

## Reuves Internationales

1. Mamadou Lamarana Diallo, Jacques Palicot and Faouzi Bader : "A Step Forward on Adaptive Iterative Clipping Approach for PAPR Reduction in OFDM System," IARIA International Journal on Advances in Telecommunications, 2016.
2. Mamadou Lamarana Diallo, Jacques Palicot and Faouzi Bader : "Combining the GP algorithm and OFDM decomposition for PAPR Reduction" (à soumettre)



## Livrable de projet

1. Livrable technique D 2.1 ” *Energy efficiency power control and Interference Mitigation (first issues)*”. Project ANR ” *Advanced waveforms, MAC Design and Dynamic Ressource Allocation for Device to-Device in 5G Wireless Networks*”, ACCENT 5, code : ANR-14-CE28-0026-01

# Listes des acronymes et abréviation

<b>ACE</b> :	Active Constellation Extension
<b>ACPR</b> :	Adjacent Channel Power Ratio
<b>ADSL</b> :	Asymmetric Digital Subscriber Line
<b>AM/AM</b> :	Amplitude/Amplitude
<b>AM/PM</b> :	Amplitude/Phase
<b>APSK</b> :	Amplitude and Phase-Shift Keying
<b>BF</b> :	Basse Fréquence
<b>CAN</b> :	Convertisseur Analogique Numérique
<b>CCDF</b> :	Complementary Cumulative Distrution Function
<b>CDMA</b> :	Code Division Multiple Access
<b>CNA</b> :	Convertisseur Numérique Analogique
<b>C-SOCP</b> :	Second Order Cone Programming avec Contrainte
<b>DAB</b> :	Digital Audio Broadcasting
<b>DSP</b> :	Densité Spectrale de Puissance
<b>DVB</b> :	Digital Video Broadcasting
<b>DVB-T</b> :	Digital Video Broadcasting - Terrestrial
<b>EVM</b> :	Error Vector Magnitude
<b>FC</b> :	Facteur de Crête
<b>FDM</b> :	Frequency Division Multiplexing
<b>FF</b> :	FeedForward
<b>FFT</b> :	Fast Fourier Transform
<b>FI</b> :	Fréquence Intermédiaire
<b>GP</b> :	Gradient Project
<b>GPS</b> :	Guidage Par Satellite
<b>GSM</b> :	Global System for Mobile Communications
<b>HF</b> :	Haute Fréquence
<b>HPA</b> :	High Power Amplifier
<b>IB</b> :	In-Band
<b>IBO</b> :	Input Back Off
<b>IETR</b> :	Institut d'Electronique et de Télécommunications de Rennes
<b>IFFT</b> :	Inverse Fast Fourier Transform

<b>LTE</b>	: Long Term Evolution
<b>MAQ</b>	: Modulation d'Amplitude en Quadrature
<b>MC-CDMA</b>	: Multi-Carriers Code Division Multiple Access
<b>OBO</b>	: Output Back Off
<b>OFDM</b>	: Orthogonal Frequency Division Multiplexing
<b>OOB</b>	: Out-Off-Band
<b>OP</b>	: Overall Performance
<b>PAE</b>	: Power Added Efficiency
<b>PAPR</b>	: Peak to Average Power Ratio
<b>PTS</b>	: Partial Transmit Sequences
<b>QCQP</b>	: Quadratically Constrained Quadratic Program
<b>QPSK</b>	: Quaternary Phase Shift Keying
<b>RF</b>	: Radio Fréquence
<b>RL</b>	: Radio Logicielle
<b>RM</b>	: Reed-Muller
<b>RP</b>	: Random Phasor
<b>RRC</b>	: Root-Raised Cosine
<b>SCEE</b>	: Signal Communication Électronique Embarquée
<b>SGP</b>	: Smart Gradient-Project
<b>SLM</b>	: Selective Mapping
<b>SNDR</b>	: Signal to Noise-and-Distorsion Ratio
<b>SOCP</b>	: Second Order Cone Programming
<b>SRRC</b>	: Square Root Raised Cosine
<b>SSPA</b>	: Solid State Power Ratio
<b>SWR</b>	: SoftWare Radio
<b>TEB</b>	: Taux d'Erreur Binaire
<b>TI</b>	: Tone Injection
<b>TOP</b>	: Tube à Onde Progressive
<b>TR</b>	: Tone Reservation
<b>TWTA</b>	: Travelling Wave Tube Amplifier
<b>UMTS</b>	: Universal Mobile Telecommunications
<b>WIMAX</b>	: Worldwide Interoperability for Microwave Access
<b>WLAN</b>	: Wireless Local Area Network
<b>ZP</b>	: Zero-Padding

# Notations Mathématiques

$x$ :	Scalaire
$x^*$ :	Conjugué de $x$
$\mathbf{x}$ :	Vecteur dans le domaine temporel
$\mathbf{X}$ :	Vecteur dans le domaine fréquentiel
$\mathbf{x}^T$ :	Transposée du vecteur $\mathbf{x}$
$\mathbf{x}^H$ :	Transposée complexe du vecteur $\mathbf{x}$
$E[\mathbf{x}]$ :	Espérance mathématique du vecteur aléatoire $\mathbf{x}$
FFT $\{\mathbf{x}\}$ :	Transformée de Fourier du vecteur complexe $\mathbf{x}$
PAPR $_x$ :	PAPR du signal continu $x$ (analogique)
PAPR $_{[\mathbf{x}]}$ :	PAPR du signal signal discret $\mathbf{x}$
CCDF $_{[\mathbf{x}]}$ :	CCDF du PAPR du signal discret $\mathbf{x}$
$\otimes$ :	Opérateur produit de convolution circulaire
$ x $ :	Valeur absolue (resp module) du scalaire réel (resp complexe) $x$
$\ \mathbf{x}\ _p$ :	Norme $L_p$ du vecteur $\mathbf{x}$
$\ \mathbf{x}\ _2$ :	Norme euclidienne du vecteur $\mathbf{x}$
$\ \mathbf{x}\ _\infty$ :	Norme infinie du vecteur $\mathbf{x}$



# Table des figures

1.1	Modulateur analogique d'un symbole OFDM . . . . .	28
1.2	Orthogonalité entre les porteuses ou sous porteuses d'un système OFDM . . . . .	29
1.3	Démodulateur analogique d'un système OFDM . . . . .	29
1.4	Modulateur/Démodulateur Numérique d'un système OFDM avec Préfixe Cyclique (CP) . . . . .	31
1.5	Estimé de la CCDF en fonction de $L$ pour $M = 64$ . . . . .	34
1.6	Estimé de la CCDF en fonction de $L$ pour $M = 256$ . . . . .	35
1.7	Estimé de la CCDF en fonction de $L$ pour $M = 1024$ . . . . .	35
1.8	Comparaison des différentes formules théoriques de la CCDF en fonction de $M$ et pour $L = 4$ . . . . .	37
1.9	Allure de la courbe AM/AM d'un amplificateur de puissance . . . . .	38
1.10	Bilan énergétique d'un amplificateur de puissance . . . . .	39
1.11	Les paramètres d'intérêt d'un amplificateur de puissance . . . . .	41
1.12	Effet de l'amplificateur sur le BER pour différentes valeurs de l'IBO. . . . .	44
1.13	Effet de l'amplificateur sur la DSP pour différentes valeurs de l'IBO. . . . .	44
1.14	Distribution du PAPR en fonction du nombre de porteuses. . . . .	45
1.15	Effet de l'amplificateur et du PAPR sur le BER. . . . .	45
1.16	Effet de l'amplificateur et PAPR sur le BER. . . . .	46
2.1	<i>Frame work</i> des techniques de codage pour la réduction du PAPR . . . . .	54
2.2	<i>Frame work</i> de la méthode Selective Mapping . . . . .	55
2.3	<i>Frame work</i> de la méthode Partial transmit Sequences . . . . .	56
2.4	<i>Frame work</i> des techniques dites d'ajout de signal : Cas où les deux étapes sont liées . . . . .	59
2.5	<i>Frame work</i> des techniques dites d'ajout de signal : Cas où les deux étapes sont disjointes . . . . .	59
2.6	Classification des techniques dites d'ajout de signal selon la propriété de compatibilité descendante . . . . .	60
2.7	Émetteur et Récepteur proposé par la méthode <i>Tone Injection</i> . . . . .	61
2.8	Exemple d'élargissement de la constellation 16-QAM . . . . .	61
2.9	Exemple d'élargissement d'un point de la constellation 16-QAM . . . . .	62
2.10	<i>Frame Work</i> de la méthode <i>Clipping</i> inversible . . . . .	63
2.11	Classification des techniques de réduction dites d'ajout de signal selon la propriété de compatibilité descendante et des dégradations du BER . . . . .	65
2.12	<i>Frame Work</i> de la méthode géométrique de réduction du PAPR avec $\Delta f$ la fréquence intermédiaire et $A$ l'amplitude seuil . . . . .	66
2.13	Illustration graphique des courbes des fonctions d'écrêtage utilisées pour les méthodes CC, DC et SC en fonction de l'amplitude du signal d'entrée . . . . .	67
2.14	<i>Frame Work</i> de la méthode <i>Repeated Clipping and Filtering</i> [3]. . . . .	68
2.15	<i>Frame Work</i> de la méthode <i>Adaptive Iterative Clipping Filtering</i> [16] . . . . .	68

2.16	<i>Frame Work</i> de la méthode <i>Tone Reservation</i> . . . . .	71
2.17	<i>Frame Work</i> du schéma de filtrage permettant la transformation des techniques de <i>clipping</i> en TR [133, 59, 57, 124] . . . . .	74
2.18	Schéma de principe des techniques transformant le <i>clipping</i> en méthode TR [59] . . . . .	74
2.19	Zones Admissibles pour l'insertion du signal de correction du PAPR dans le cas d'une 4-QAM . . . . .	76
2.20	Zones Admissibles pour l'insertion du signal de correction du PAPR dans le cas d'une 16-QAM . . . . .	76
3.1	Représentation de $\gamma_e$ à l'aide de la CCDF pour un système OFDM comportant $M = 64$ porteuses. . . . .	81
3.2	Représentation de $\gamma_e(\rho)$ à l'aide de la CCDF pour un système OFDM comportant $M = 64$ porteuses. . . . .	81
3.3	Le PAPR a $10^{-4}$ ainsi que les PAPR instantanés de quelques symboles OFDM après écrêtage en fonction de $\rho$ : $M = 64$ et $L = 4$ . . . . .	82
3.4	Le PAPR a $10^{-4}$ et le PAPR instantané de quelques symboles OFDM en fonction de $\rho$ pour $M = 64$ et $L = 4$ . . . . .	83
3.5	CCDF avant et après écrêtage à $\rho = 5$ dB pour un système OFDM à 64 porteuses. . . . .	83
3.6	Détermination graphique de $\rho_{\min}$ à l'aide de la courbe du PAPR à $10^{-4}$ en fonction de $\rho$ : $M = 64$ et $L = 4$ . . . . .	86
3.7	PAPR instantané avant et après écrêtage avec les méthodes CC et AC. . . . .	87
3.8	Nombre d'itérations nécessaires (Recherche de seuil adapté) pour quelques symboles OFDM ( $M = 64, L = 4$ ) pour $\text{PAPR}_0 = 4$ dB en fonction de leur PAPR instantané initial. . . . .	88
3.9	Nombre d'itérations nécessaire (Recherche de seuil adapté) pour quelques symboles OFDM ( $M = 64, L = 4$ ) pour $\text{PAPR}_0 = 5$ dB. . . . .	89
3.10	Organigramme de calcul du seuil adapté pour chaque symbole OFDM à écrêter. . . . .	90
3.11	PAPR instantané avant et après écrêtage avec les méthodes CC et IAC. . . . .	92
3.12	Nombre d'itérations nécessaires (Recherche de seuil adapté) pour quelques symboles OFDM ( $M = 64, L = 4$ ) pour $\text{PAPR}_0 = 4$ dB. . . . .	93
3.13	Nombre d'itérations nécessaires (Recherche de seuil adapté) pour quelques symboles OFDM ( $M = 64, L = 4$ ) pour $\text{PAPR}_0 = 5$ dB. . . . .	93
3.14	Le pas moyen ( $\mathbb{E}[\epsilon_{\mathbf{x}_n}]$ ) en fonction de $\text{PAPR}_0$ : $M = 64$ et $L = 4$ . . . . .	95
3.15	Nombre moyen d'itérations nécessaires (Recherche de seuil adapté) en fonction de $\text{PAPR}_0$ : $M = 64$ et $L = 4$ . . . . .	95
3.16	Organigramme de calcul des $A_{\min}$ et $A_{\max}$ vérifiant l'équation (3.31) . . . . .	97
3.17	PAPR instantané avant et après écrêtage avec les méthodes CC et PAC. . . . .	99
3.18	Nombre d'itérations nécessaires (Recherche de seuil adapté) pour quelques symboles OFDM ( $M = 64, L = 4$ ) pour $\text{PAPR}_0 = 4$ dB. . . . .	100
3.19	Nombre d'itérations nécessaires (Recherche de seuil adapté) pour quelques symboles OFDM ( $M = 64, L = 4$ ) pour $\text{PAPR}_0 = 5$ dB. . . . .	100
3.20	CCDF avant et après écrêtage avec les techniques CC avec $\rho_1 = 3.5$ dB, AC et IAC avec $\text{PAPR}_0 = \gamma_4(\rho_1) - \epsilon$ et PAC avec $\text{PAPR}_0 = \gamma_4(\rho_1)$ . . . . .	101
3.21	CCDF avant et après écrêtage avec les techniques CC avec $\rho_1 = 5$ dB, AC et IAC avec $\text{PAPR}_0 = \gamma_4(\rho_2) - \epsilon$ et PAC avec $\text{PAPR}_0 = \gamma_4(\rho_2)$ . . . . .	101
3.22	Les CCDF en échelle linéaire des Figure (3.20) et Figure (3.21). . . . .	102
3.23	Zoom autour de $\text{CCDF}(\Phi) = 10^{-4}$ de la Figure (3.22). . . . .	102

3.24	BER avant et après écrêtage avec les techniques CC avec $\rho_1 = 3.5\text{dB}$ , les techniques AC et IAC avec $\text{PAPR}_0 = \gamma_4(\rho_1) - \epsilon = 4.62\text{dB}$ et la technique PAC avec $\text{PAPR}_0 = \gamma_4(\rho_1) = 4.72\text{dB}$ . . . . .	103
3.25	BER avant et après écrêtage avec les techniques CC avec $\rho_2 = 5\text{dB}$ , les techniques AC et IAC avec $\text{PAPR}_0 = \gamma_4(\rho_2) - \epsilon = 5.72\text{dB}$ et la technique PAC avec $\text{PAPR}_0 = \gamma_4(\rho_2) = 5.82\text{dB}$ . . . . .	103
3.26	DSP avant et après écrêtage avec les techniques CC avec $\rho_1 = 3.5\text{dB}$ , les techniques AC et IAC avec $\text{PAPR}_0 = \gamma_4(\rho_1) - \epsilon = 4.62\text{dB}$ et la technique PAC avec $\text{PAPR}_0 = \gamma_4(\rho_1) = 4.72\text{dB}$ . . . . .	104
3.27	Zoom sur la Figure 3.26 . . . . .	104
3.28	DSP avant et après écrêtage avec les techniques CC avec $\rho_1 = 5\text{dB}$ , les techniques AC et IAC avec $\text{PAPR}_0 = \gamma_4(\rho_1) - \epsilon = 5.72\text{dB}$ et la technique PAC avec $\text{PAPR}_0 = \gamma_4(\rho_1) = 5.82\text{dB}$ . . . . .	105
3.29	Zoom sur la Figure 3.28 . . . . .	105
3.30	Variations de la Puissance moyenne en fonction du PAPR de sortie. . . . .	106
4.1	Exemple d'un symbole OFDM vérifiant la condition 4.22 ( $M = 64, N_{\mathcal{R}} = 12$ )	117
4.2	Evolution de $\mathbb{E}[J_{\mathbf{x}_n}(\mathbf{c}_n^{(i)})]$ en fonction pour des symboles vérifiant (4.22) . . . . .	120
4.3	Evolution de $\mathbb{E}[J_{\mathbf{x}_n}(\mathbf{c}_n^{(i)})]$ en fonction pour des symboles ne vérifiant pas (4.22) . . . . .	120
4.4	Variation de l'enveloppe complexe avant et après réduction du PAPR : Symbole vérifiant (4.22) et $\mathcal{R}$ ne contient que des porteuses de même parité : $(N_{\mathcal{R}^P}, N_{\mathcal{R}^I}) = (0, 12)$ . . . . .	121
4.5	Variation de l'enveloppe complexe avant et après réduction du PAPR : Symbole vérifiant (4.22) et $\mathcal{R}$ contient autant de porteuses paires que d'impaires : $(N_{\mathcal{R}^P}, N_{\mathcal{R}^I}) = (6, 6)$ . . . . .	121
4.6	Zoom sur la Figure 4.4 . . . . .	122
4.7	Zoom sur la Figure 4.5 . . . . .	122
4.8	Effet de la parité des porteuses réservées sur le CCDF avant est après réduction du PAPR pour $\rho = 6\text{dB}$ , $N_{\max} = 20$ . . . . .	123
4.9	Effet de la parité des porteuses réservées sur le CCDF avant est après réduction du PAPR pour $\rho = 5\text{dB}$ , $N_{\max} = 20$ . . . . .	123
4.10	Effet de la parité des porteuses réservées sur l'évolution du PAPR à $10^{-3}$ en fonction du nombre d'itérations : $\rho = 6\text{dB}$ . . . . .	124
4.11	Effet de la parité des porteuses réservées sur l'évolution du PAPR à $10^{-3}$ en fonction du nombre d'itérations : $\rho = 5\text{dB}$ . . . . .	124
4.12	PAPR à $10^{-3}$ de la CCDF en fonction du nombre de porteuses paires (ou impaires) contenu dans $\mathcal{R}$ : $\rho = 6\text{dB}$ . . . . .	125
4.13	PAPR à $10^{-3}$ de la CCDF en fonction du nombre de porteuses paires (ou impaires) contenu dans $\mathcal{R}$ : $\rho = 5\text{dB}$ . . . . .	125
4.14	Illustration de la profondeur des trous de la réponse fréquentielle du canaux EVA et ETU décrit dans les tableaux 4.2 et 4.3 . . . . .	128
4.15	Performances en réduction du PAPR des techniques TR-GP et ATR-GP après 10 itérations et $\rho = 5\text{dB}$ . . . . .	130
4.16	Performances en réduction du PAPR des techniques TR-GP et ATR-GP après 10 itérations et $\rho = 5\text{dB}$ . . . . .	131
4.17	Performances en réduction dégradation du BER : Canal ETU, $N_{\max} = 10$ et $\rho = 5\text{dB}$ . . . . .	131
4.18	Performances en réduction dégradation du BER : Canal EVA, $N_{\max} = 10$ et $\rho = 5\text{dB}$ . . . . .	132



4.19	Performances en réduction dégradation du BER : Canal EVA, $N_{\max} = 10$ et $\rho = 5\text{dB}$ . . . . .	132
5.1	Modulateur numérique de $\mathbf{x}_n$ classique et celui basé sur la décomposition définie par l'équation (5.20) . . . . .	142
5.2	Illustration de la symétrie et anti-symétrie des composantes $\bar{\mathbf{x}}_n^1 = [\mathbf{x}_{2n}^1; \mathbf{x}_{2n+1}^1]$ et $\bar{\mathbf{x}}_n^2 = [\mathbf{x}_{2n}^2; \mathbf{x}_{2n+1}^2]$ . . . . .	143
5.3	BER des deux signaux générées modulateur OFDM classique et via la décomposition proposé . . . . .	143
5.4	Disposition ou position des supports temporels des symbole $\mathbf{x}_{2n}^1, \mathbf{x}_{2n+1}^1, \mathbf{x}_{2n}^2$ et $\mathbf{x}_{2n+1}^2$ par rapport à $\mathbf{x}_n$ . . . . .	144
5.5	Illustration du bruit de <i>clipping</i> à minimiser dans le cadre de la TR classique	145
5.6	Illustration des bruits de <i>clipping</i> $J_{[\mathbf{x}_{2n}^1+\mathbf{x}_{2n}^2]}(\cdot)$ et $J_{[\mathbf{x}_{2n+1}^1+\mathbf{x}_{2n+1}^2]}(\cdot)$ à minimi- ser dans le cadre de la MTR . . . . .	145
5.7	Structure du schéma de filtrage ou d'atténuation des perturbations générées par la MTR-GP pour un facteur d'atténuation $\delta$ donnée . . . . .	153
5.8	Performances en termes de réduction de PAPR des méthodes FFT-IFFT- MT-GP, MTR-GP et TR-GP avec $\rho = 5\text{dB}$ et après 10 itérations et $\delta = 1$ (Sans Filtrage) . . . . .	157
5.9	Performances en termes de réduction de PAPR des méthodes FFT-IFFT- MT-GP, MTR-GP et TR-GP avec $\rho = 5\text{dB}$ et après 10 itérations et $\delta = 0$ (Avec Filtrage) . . . . .	158
5.10	PAPR à $10^{-4}$ en fonction de $N_{\max}$ des méthodes 1-MTR-GP et TR-GP avec $\rho = 6\text{dB}$ . . . . .	159
5.11	PAPR à $10^{-4}$ de la CCDF en fonction de $\rho$ des méthodes 1-MTR-GP et TR-GP avec $N_{\max} = 20$ . . . . .	159
5.12	Variations de la puissance moyenne $\Delta E$ en fonction de $N_{\max}$ des méthodes 1-MTR-GP et TR-GP avec $\rho = 6\text{dB}$ . . . . .	160
5.13	Variations de la puissance moyenne $\Delta E$ en fonction de $\rho$ des méthodes 1-MTR-GP et TR-GP avec $N_{\max} = 20$ . . . . .	161
5.14	Courbes du BER avant et après réduction du PAPR avec la méthode 1- MTR-GP pour $\delta = 0$ et 1 et la méthode TR-GP avec $\rho = 6\text{dB}$ et après 20 itérations . . . . .	161
5.15	Influence du nombre d'itérations effectué sur les dégradations du BER in- duite par la méthodes 1-MTR-GP avec $\delta = 1 : \rho = 6\text{dB}$ . . . . .	162
5.16	Influence du seuil d'écrêtage utilisé sur les dégradations du BER induite par la méthodes 1-MTR-GP avec $\delta = 1 : N_{\max} = 20$ . . . . .	162
5.17	Influence du facteur d'atténuation $\delta$ sur les dégradations du BER induites par la méthodes 1-MTR-GP avec $\delta = 1 : \rho = 5\text{dB}$ et $N_{\max} = 20$ . . . . .	163
5.18	Performances en réduction du PAPR des méthodes TR-GP et 1-MTR-GP en fonction du nombre d'itérations : Comparaison à seuil optimaux . . . . .	164
5.19	Augmentation de la puissance moyenne induites par les méthodes TR-GP et 1-MTR-GP en fonction du nombre d'itérations : Comparaison à seuil optimaux . . . . .	164
5.20	PAPR à $10^{-4}$ des méthodes 1-MTR-GP et TR-GP en fonction du nombre d'itérations et en fonction du type de <i>mapping</i> avec $\rho = 6\text{dB}$ . . . . .	165
5.21	Variations de la puissance moyenne induites par les méthodes 1-MTR-GP et TR-GP en fonction du nombre d'itérations et en fonction du type de <i>mapping</i> avec $\rho = 6\text{dB}$ . . . . .	166

5.22	Illustration graphique de $\mathbf{x}_n$ en fonction des symboles obtenus après décomposition des symboles $\mathbf{x}_{2n}^1$ , $\mathbf{x}_{2n+1}^1$ , $\mathbf{x}_{2n}^2$ et $\mathbf{x}_{2n+1}^2$ .	172
5.23	Illustration des bruits de <i>clipping</i> à minimiser dans le cadre de la méthode 2-MTR-GP	173
5.24	Performance en termes de réduction de PAPR des méthodes 1-MT-GP, 2-MTR-GP et TR-GP avec $\rho = 7\text{dB}$ et après 10 itérations	181
5.25	Performance en termes de réduction de PAPR des méthodes 1-MT-GP, 2-MTR-GP et TR-GP en fonction du seuil $\rho$ après 10 itérations	182
5.26	Performance en termes de réduction de PAPR des méthodes 1-MT-GP, 2-MTR-GP et TR-GP en fonction du seuil $\rho$ après 20 itérations	182
5.27	Variations de la puissance moyenne induites par les méthode 1-MT-GP, 2-MTR-GP et TR-GP en fonction du seuil $\rho$ après 10 itérations	184
5.28	Variations de la puissance moyenne induites par les méthode 1-MT-GP, 2-MTR-GP et TR-GP en fonction du seuil $\rho$ après 20 itérations	185
5.29	PAPR à $10^{-4}$ des méthodes 1-MT-GP, 2-MTR-GP et TR-GP en fonction du nombre d'itérations	186
5.30	Variations de la puissance moyenne $\Delta E$ des méthodes 1-MT-GP, 2-MTR-GP et TR-GP en fonction du nombre d'itérations	187
5.31	Influence des porteuses réservées sur les performances des méthodes TR-GP, 1-MTR-GP, ... et 5-MTR-GP	191
5.32	Performance en termes de réduction de PAPR des méthodes 1-MT-GP, 2-MTR-GP, ..., 5-MTR-GP et TR-GP en fonction du seuil $\rho$ après 10 itérations	192
5.33	Performance en termes de réduction de PAPR des méthodes 1-MT-GP, 2-MTR-GP, ..., 5-MTR-GP et TR-GP en fonction du seuil $\rho$ après 20 itérations	192
5.34	Variations de la puissances moyenne après réduction du PAPR des méthodes 1-MT-GP, 2-MTR-GP, ..., 5-MTR-GP et TR-GP en fonction du seuil $\rho$ après 10 itérations	193
5.35	Variations de la puissances moyenne après réduction du PAPR des méthodes 1-MT-GP, 2-MTR-GP, ..., 5-MTR-GP et TR-GP en fonction du seuil $\rho$ après 20 itérations	194
5.36	PAPR à $10^{-4}$ des méthodes 1-MT-GP, 2-MTR-GP et TR-GP en fonction du nombre d'itérations	195
5.37	Variations de la puissance moyenne $\Delta E$ des méthodes 1-MT-GP, 2-MTR-GP et TR-GP en fonction du nombre d'itérations	196
A.1	Performances en réduction du PAPR de la méthode <i>Classical Clipping</i> avec ou sans Filtrage des bruits hors bande pour $\rho = 4\text{dB}$	206
A.2	Performances en réduction du PAPR de la méthode <i>Smooth Clipping</i> avec ou sans Filtrage des bruit hors bande pour $\rho = 4\text{dB}$	206
A.3	Performances en réduction du PAPR de la méthode <i>Deep Clipping</i> avec ou sans Filtrage des bruit hors bande pour $\rho = 4\text{dB}$ et $d = 0.5$	207
A.4	Densité spectrale de puissance avant et après réduction du PAPR avec les méthodes CC, SC et DC (pour $d = 0.5$ ) avec ou sans Filtrage des bruits hors bande pour $\rho = 4\text{dB}$	207
A.5	Zoom sur la Figure A.4	208
A.6	Les dégradations de la puissance moyenne du signal induites après réduction du PAPR par les méthodes CC, SC et DC (pour $d = 0.5$ ) pour $\rho = 4\text{dB}$	208
A.7	Les dégradations de la constellation (EVM) induites après réduction du PAPR par les méthodes CC, SC et DC (pour $d = 0.5$ ) pour $\rho = 4\text{dB}$	209

A.8	Performances en dégradation du BER des méthodes <i>Classical Clipping</i> , <i>Smooth Clipping</i> et <i>Deep Clipping</i> pour $\rho = 5\text{dB}$ . . . . .	209
A.9	Performances en dégradation du BER des méthodes <i>Classical Clipping</i> , <i>Smooth Clipping</i> et <i>Deep Clipping</i> pour $\rho = 6.5\text{dB}$ . . . . .	210
A.10	CCDF avant et après réduction du PAPR pour un système OFDM comportant $M = 64$ avec $N_{\mathcal{R}} = 8$ et $L = 4$ : $\Delta E = 1.26\text{dB}$ . . . . .	211
A.11	CCDF avant et après réduction du PAPR pour un système OFDM comportant $M = 64$ avec $N_{\mathcal{R}} = 8$ et $L = 4$ : $\Delta E = 1.26\text{dB}$ . . . . .	211
A.12	Disposition des porteuses réservée . . . . .	214
A.13	Performances de la méthode TR-GP avec les différents types de <i>mapping</i> des porteuses réservées : $\rho = 5\text{dB}$ et $N_{\text{max}} = 10$ (nombre d'itérations effectué) . . . . .	215
A.14	Performances de la méthode TR-GP avec les différents types de <i>mapping</i> des porteuses réservées : $\rho = 5\text{dB}$ et $N_{\text{max}} = 20$ (nombre d'itérations effectué) . . . . .	216
A.15	Performances de la méthode TR-GP avec les différents types de <i>mapping</i> des porteuses réservées en fonction du nombre d'itérations : $\rho = 5\text{dB}$ . . . . .	216
A.16	Performances de la méthode TR-GP en fonction du seuil d'écrêtage avec les différents types de <i>mapping</i> des porteuses réservées : $N_{\text{max}} = 10$ (nombre d'itérations effectué) . . . . .	217
A.17	Performances de la méthode TR-GP en fonction du seuil d'écrêtage avec les différents types de <i>mapping</i> des porteuses réservées : $N_{\text{max}} = 20$ (nombre d'itérations effectué) . . . . .	217
A.18	Variations de la puissance moyenne induites par la méthode TR-GP, en fonction du seuil d'écrêtage, et avec les différents types de <i>mapping</i> des porteuses réservées : $N_{\text{max}} = 20$ (nombre d'itérations effectué) . . . . .	218
A.19	Variations de la puissance moyenne induites par la méthode TR-GP, en fonction du seuil d'écrêtage, et avec les différents types de <i>mapping</i> des porteuses réservées : $N_{\text{max}} = 20$ (nombre d'itérations effectué) . . . . .	219

# List of Algorithms

1	Écrêtage adaptatif : Calcul du seuil et du symbole écrêté. . . . .	87
2	Recherche Exhaustive à pas non constant. . . . .	91
3	PAC : Calcul exact du seuil adapté pour chaque symbole. . . . .	98
4	L’algorithme TR-GP [126] . . . . .	113
5	Sélection des porteuses à utiliser pour la réduction du PAPR en fonction de l’état du canal . . . . .	129
6	L’algorithme ATR-GP . . . . .	130
7	L’algorithme MTR-GP avec Dégradation du BER . . . . .	151
8	L’algorithme FFT-IFFT-MTR-GP avec ou sans (suivant $\delta$ ) dégradation du BER . . . . .	154
9	Calcul de la matrice de la méthode 2-MTR-GP : $(\mathcal{M}_{[2\text{-MTR-GP}]}(K, \mathcal{X}))$ . . .	189
10	Calcul de la matrice de la méthode k-MTR-GP, $k \geq 2$ : $(\mathcal{M}_{[k\text{-MTR-GP}]}(K, \mathcal{X}))$	190
11	L’algorithme <i>Random Set Optimizer</i> . . . . .	213



# Introduction Générale

## Contexte et Problématique

Les systèmes de télécommunications qui jadis ne concernaient qu'une minorité de la population ou les organes administratifs, sont aujourd'hui présents dans nos vies et concernent quasiment toutes les franges de la société. Cette expansion rapide des systèmes de télécommunications ou techniques de communications s'est accompagnée de demandes croissantes en termes de fiabilité ou qualité, de débit de transmission, de mobilité et de souplesse, et cela avec des systèmes de plus en plus miniaturisés qui disposent généralement de faibles ressources énergétiques. L'OFDM pour *Orthogonal Frequency Division Multiplexing* présent dans plusieurs standards de télécommunications est aujourd'hui la technique de modulation permettant de répondre au mieux à ces exigences. En effet, le choix de la modulation est une phase importante dans un système de télécommunication, car ce choix permet entre autre de définir le débit du système, sa robustesse vis à vis des perturbations apportées par le canal de transmission. Les modulations multiporteuses, en particulier l'OFDM sont donc apparues comme une solution évidente permettant d'accroître le débit et d'offrir une meilleure robustesse vis à vis des dégradations que peuvent apporter le canal de transmission, en particulier en milieu urbain (canaux multi-trajets). En outre, les modulateurs et démodulateurs numériques associés à la modulation OFDM ont une complexité numérique acceptable (logarithmique) pour des applications disposant de faibles ressources calculatoires. Cependant l'OFDM, comme toute modulation multiporteuses, a l'inconvénient d'être par principe un signal à enveloppe non constante. Cette caractéristique de l'OFDM pose un problème majeur au niveau des amplificateurs de puissance. Le facteur de crête (en anglais *Crest Factor*) permet de quantifier ou de mesurer cette caractéristique des signaux OFDM. Dans la littérature, cette quantité est plus connue sous le nom de PAPR pour *Peak-to-Average Power Ratio* et mesure le rapport entre la puissance maximale (amplitude maximale) du signal et la puissance moyenne de celui-ci. Ainsi, dans cette thèse le terme PAPR sera utilisé pour parler du facteur de crête.

L'amplificateur de puissance (HPA pour "High Power Amplifier"), comme son nom l'indique permet d'injecter de la puissance sur le signal à transmettre afin de garantir son acheminement jusqu'au récepteur sans qu'il soit trop atténué. Il est donc un élément clé dans une chaîne de communication dans la mesure où il a une influence prépondérante sur le bilan global de la chaîne de transmission en termes de consommation énergétique et en termes de qualité du signal émis (le BER pour *Bit Error Rate* est évalué en fonction du rapport signal à bruit). En effet, concernant la consommation d'énergie, l'amplificateur de puissance représente à lui seul plus de 60% de la consommation énergétique d'une chaîne de transmission côté émetteur. Il est donc, important de faire fonctionner l'amplificateur avec le rendement énergétique le plus grand possible, surtout pour des systèmes disposant de faibles ressources énergétique tels que les terminaux mobiles qui disposent généralement d'une faible autonomie énergétique (batterie, générateur etc...). Cependant, les amplificateurs de puissances présentent de sévères non-linéarités lorsqu'ils fonctionnent au plus

prés de leur zone de saturation, zone dans laquelle le rendement est optimal. Ces non-linéarités entraînent de sévères dégradations sur le signal à la sortie de l'amplificateur. Il s'agit principalement des produits d'intermodulation qui entraînent des interférences non linéaires à l'intérieur et à l'extérieur de la bande. À l'intérieur de la bande, ces interférences entraînent de sévères perturbations du BER du système et à l'extérieur de la bande, ces bruits se traduisent par une remontée des lobes secondaires du signal pouvant ainsi occasionner une pollution des canaux adjacents. Ces effets sont d'autant plus importants lorsque le signal à amplifier présente de fortes variations d'amplitudes, c'est à dire un PAPR élevé. Bien souvent, pour atténuer les distorsions induites par l'amplificateur sur le signal, on fait fonctionner ce dernier avec un recul de puissance important afin d'éviter de saturer le signal. On dit alors que l'amplificateur est surdimensionné. Ce choix entraîne alors une forte baisse du rendement énergétique de l'amplificateur de puissance. Dans le cas de terminaux à faible ressource énergétique cette solution peut s'avérer très handicapante du fait que la source d'énergie qu'utilise l'amplificateur est généralement très limitée (Batterie de portable, Générateur de Courant, etc...).

Plusieurs solutions permettant d'une part d'optimiser le rendement énergétique de l'amplificateur et d'autre part de minimiser les distorsions dues aux non linéarités de celui-ci, ont été proposées dans la littérature. De part les caractéristiques de l'amplificateur de puissance, optimiser le rendement passe nécessairement par un fonctionnement au plus près de sa zone de saturation. Et comme nous l'avons mentionné précédemment, faire fonctionner l'amplificateur de puissance dans cette zone entraîne des distorsions sur le signal et ces distorsions s'accroissent lorsque le signal d'entrée a un PAPR élevé. Réduire les fluctuations de l'enveloppe complexe du signal d'entrée apparaît comme une solution naturelle permettant d'allier rendement énergétique et atténuation des distorsions. Autrement dit la réduction du PAPR du signal d'entrée est une solution permettant d'une part d'améliorer le rendement énergétique de l'amplificateur de puissance et d'autre part de minimiser les distorsions induites par l'amplificateur de puissance.

Depuis l'avènement des modulations multiporteuses et la mise en place des premiers standards les utilisant, la réduction du PAPR est devenue un sujet de recherche populaire. Ainsi, de nos jours il existe une multitude de techniques de réduction du PAPR dans la littérature. De part leur diversité d'approche, il est difficile de mener une étude sur les techniques de réduction de manière globale. Ainsi, dans [66], une classification des techniques de réduction du PAPR a été proposée. Dans cette classification, les techniques de réduction du PAPR ont été regroupées en trois grandes familles que sont :

1. Les techniques de Codage : Elles font partie des premières solutions proposées pour la réduction du PAPR [115, 119, 94]. Les techniques de codage, comme leur nom indique consistent à utiliser un codeur particulier afin d'éviter d'envoyer des signaux à fort PAPR. Elles agissent en général sur le flux binaire avant le module de *mapping*. Ces méthodes exigent généralement un récepteur adapté et donc ne sont pas à compatibilité descendante<sup>1</sup>.
2. Les techniques Probabilistes : Il s'agit principalement des techniques basées sur la méthode SLM pour *Selective Mapping* [6, 13] et la méthode PTS pour *Partial Transmit Sequences* [46, 104]. Ces méthodes sont basées sur des représentations diverses d'un symbole, et donc consistent à choisir la meilleure représentation, i.e celle donnant un PAPR acceptable. Comme pour les techniques de codage, elles nécessitent généralement un récepteur adapté.

---

1. Une technique est dite à compatibilité descendante si une implémentation de cette technique (à l'émetteur) ne nécessite aucun travail supplémentaire en réception.



3. Les techniques dites d'ajout de signal : Comme leur nom l'indique, ces techniques consistent à ajouter un signal additionnel permettant d'atténuer les *peaks* les plus élevés du signal d'intérêt. Ce signal additionnel est généralement obtenu via un problème d'optimisation offrant ainsi à ces techniques de fortes capacités de réduction du PAPR [126]. Les techniques dites d'ajout de signal sont généralement à compatibilité descendante. De ce fait ces techniques sont prisées dans le domaine de la réduction du PAPR.

Le but de la réduction du PAPR étant de réduire les fluctuations des amplitudes du signal autour de la puissance moyenne, il peut en résulter des dégradations sur le signal. Ainsi, mis à part ses performances en réduction du PAPR, une technique de réduction du PAPR est aussi généralement évaluée en fonction des dégradations du BER, et (ou) de la pollution des canaux adjacents (remonté des lobes secondaires), et (ou) de l'augmentation ou diminution de la puissance moyenne qu'elle engendre. Dans le cas des techniques dites d'ajout de signal, toutes ces critères peuvent généralement être évalués indépendamment du canal de transmission alors que dans le cas des techniques probabilistes ou des techniques de codage, certains de ces critères, tel que le BER du système, peuvent dépendre fortement du canal de transmission. En effet, ces techniques nécessitent un travail supplémentaire d'estimation permettant de compenser le procédé de réduction du PAPR fait au niveau de l'émetteur. Ainsi, l'influence qu'auront ces techniques (Probabilistes et Codage) sur le BER dépendra de la qualité de cette estimation et donc du canal de transmission. Notons aussi, que ces travaux supplémentaires en réception entraînent aussi un coût supplémentaire en termes de complexité.

La réduction du PAPR n'est pas la seule solution numérique permettant de concilier rendement énergétique et linéarité. Il existe en effet, une autre solution numérique communément appelée technique de Pré-Distorsion (PD) numérique [54]. L'idée consiste à linéariser les caractéristiques de l'amplificateur de puissance via l'insertion d'une fonction inverse des caractéristiques AM/AM et AM/PM<sup>2</sup> de l'amplificateur de puissance. Le but sera donc d'atténuer les distorsions induites par l'amplificateur lorsqu'il fonctionnera avec un rendement énergétique satisfaisant. Ces techniques, bien que populaires et prometteuses, n'ont pas été abordées durant cette thèse.

## Objectifs de la Thèse et Méthodologie

Les travaux de recherche présentés dans ce rapport de thèse se focalisent sur la réduction du PAPR avec comme objectif d'apporter une contribution sur les techniques dites d'ajout de signal. Le but est évidemment comme toute technique de réduction du PAPR de faciliter la recherche d'un compromis entre rendement énergétique et linéarité. Notre intérêt pour les techniques de réduction du PAPR dites d'ajout de signal est dicté par le fait qu'elles ont l'avantage d'être à compatibilité descendante, d'être en général sans dégradation du BER, d'offrir un bon compromis entre réduction du PAPR et complexité numérique. L'autre intérêt des techniques dites d'ajout de signal est qu'elles peuvent être vues comme étant constituées de deux étapes que sont :

1. Étape d'insertion : Cette étape définit la manière dont le signal de correction du PAPR va être "inséré". Cette étape permet de statuer sur l'impact qu'aura le signal de correction sur le signal utile en terme de dégradations du BER, d'émissions hors

---

2. Les caractéristiques AM/AM et AM/PM sont les fonctions de transfert de l'amplificateur liant respectivement l'amplitude du signal d'entrée à l'amplitude du signal de sortie et l'amplitude du signal d'entrée à la phase du signal de sortie



bande (remonté des lobes). Cette étape permet aussi de statuer sur la compatibilité descendante ou non de la méthode.

2. Étape de calcul du signal : Cette étape définit la manière dont le signal de correction du PAPR sera calculé. Elle est généralement définie sous forme d'un problème d'optimisation sous la contrainte du schéma d'insertion du signal de correction. Le problème d'optimisation peut être défini via différentes fonctions de coût tels que la norme infinie, le SCR *Signal to Clipping Ratio*, le SDR *Signal to Distorsion Ratio*, etc.

Cette vision des techniques de réduction du PAPR ou cette manière de les voir est tout à fait nouvelle et a été le fil conducteur de cette thèse.

## Organisation de la thèse

Ce rapport de thèse va s'articuler autour de 4 chapitres qui seront complétés par 2 Annexes.

- Dans le chapitre 1 nous allons situer le contexte et le domaine d'application de la thèse. A cet effet, nous allons dans un premier temps rappeler brièvement le principe des modulations OFDM, définir le principe de modulation et démodulation numérique des systèmes OFDM et rappeler quelques avantages connus des systèmes OFDM. Nous allons ensuite passer à la caractérisation théorique et aussi par simulation du PAPR des signaux OFDM. Le but de ce travail est de mettre en évidence la forte dynamique temporelle (PAPR élevé) des signaux OFDM et de définir les conditions permettant d'assurer une bonne approximation du PAPR du signal analogique à partir du signal discret. Après ce travail sur le procédé des modulations OFDM et la caractérisation de leur PAPR, nous allons passer à la caractérisation des amplificateurs de puissance. Pour ce faire, nous allons définir les caractéristiques AM/AM et AM/PM des amplificateurs de puissance. L'objectif de ce travail sera de mettre en évidence la difficulté de la recherche d'un compromis entre rendement énergétique/distorsions (linéarité) mais aussi l'impact du PAPR sur la recherche de ce compromis. Cette analyse graphique des caractéristiques de l'amplificateur sera appuyée par quelques résultats de simulation.
- Le Chapitre 2 de ce rapport de thèse sera consacré à l'état de l'art des techniques de réduction du PAPR.

Cette étude de l'état de l'art s'articulera autour des trois familles de types de méthodes de réduction du PAPR que sont les techniques de codage, les techniques probabilistes et les techniques dites d'ajout de signal. Pour les techniques de codage et les techniques probabilistes nous nous contenterons de présenter brièvement les méthodes phares (les plus connues) de ces familles. Le but est purement instructif. Concernant les techniques dites d'ajout de signal, l'état de l'art sera plus détaillé du fait que cette thèse s'inscrit dans cette thématique. Un intérêt particulier sera accordé aux technique de *clipping* du fait de leur simplicité et aux techniques basées sur la *Tone reservation* car étant des techniques prometteuses.

Ce chapitre sera complété par l'Annexe A. Dans cet annexe, nous allons évaluer les performances de quelques méthodes de *clipping* en termes de réduction du PAPR avant et après filtrage du bruit hors bande généré par ces méthodes, en termes de dégradation du BER, en termes d'émission hors bande via une comparaison des DSP

(Densité Spectrale de Puissance) avant et après réduction du PAPR (sans filtrage) et en termes de variations de la puissance moyenne. Nous étudierons aussi dans cet annexe les performances en termes de réduction du PAPR et d'augmentation de la puissance moyenne de quelques méthodes basées sur la *Tone Reservation*.

- Le chapitre 3 abordera nos contributions [32, 33, 35] sur les techniques de *clipping*. Il sera question d'écèlement adaptatif, d'où le titre du chapitre. Dans ce chapitre, nous allons décrire le principe de l'écèlement adaptatif que nous proposons, et montrerons qu'à la différence de l'écèlement à seuil prédéfini, l'écèlement adaptatif que nous proposons consistera en deux étapes que sont : le calcul du seuil adapté en fonction de la valeur du PAPR de sortie souhaitée pour chaque symbole et l'écèlement de ce symbole à l'aide de ce seuil via la fonction d'écèlement *hard*. Nous décrirons ensuite les différentes méthodes proposées pour calculer le seuil d'écèlement adapté pour chaque symbole en fonction de la valeur du PAPR de sortie souhaité. Nous montrerons ensuite que l'écèlement adaptatif permettra d'améliorer le BER et d'atténuer la pollution des canaux adjacents comparativement à l'écèlement classique (écèlement à seuil prédéfini) [89] et cela pour des performances en réduction du PAPR identiques.
- Le chapitre 4 aborde nos contributions sur le choix du jeu des porteuses réservées dans les techniques basées sur la *Tone Reservation* [36, 17].

La première contribution présentée dans ce chapitre traite de l'influence que peut avoir le jeu de porteuses réservées sur les performances en réduction du PAPR des techniques basées sur la *Tone Reservation*. Plus précisément, on abordera dans ce chapitre, notre contribution sur l'influence de la distribution des porteuses réservées sur les performances des méthodes basées sur la *Tone Reservation* [36]. Pour mener à bout cette étude, nous avons opté pour la méthode TR-GP *Tone Reservation based on the Gradient Project algorithm* [125, 126]. Ainsi, un état de l'art détaillé de cette technique proposée par J. TELLADO y a été mené.

La deuxième contribution présentée dans ce chapitre se positionne sur l'influence du choix des porteuses sur les performances en BER en présence d'un canal sélectif en fréquence. Nous montrerons qu'un choix adaptatif des porteuses en fonction de l'information disponible sur la qualité du canal de transmission peut améliorer considérablement le BER du système en présence d'un canal sélectif en fréquence.

- Le chapitre 5 sera consacré à nos contributions sur la *Tone reservation* [34]. Dans ce chapitre, nous allons d'abord montrer que tout symbole OFDM peut être décomposé comme étant la somme de deux symboles OFDM, l'un étant symétrique et l'autre anti-symétrique et que cette décomposition se fait suivant la parité des porteuses du symbole OFDM. Par la suite, nous montrerons que ce symbole peut alors être vu comme un mélange (concatéation et sommation) de quatre symboles multi-porteuses. De ce constat, nous en déduirons une nouvelle structure d'insertion du signal de correction basé sur l'exploitation des projetés des porteuses réservées sur les quatre symboles multiporteuses issues de la décomposition du symbole OFDM initial. Nous montrerons ensuite, que cette nouvelle structure de la TR que nous appellerons MTR pour *Modified Tone Reservation* nous permettra d'avoir un nouveau degré de liberté qui permettra de générer un signal de correction plus apte à réduire le PAPR. La MTR sera ensuite étendue via une extension de la décomposition du symbole OFDM initial. Nous montrerons l'effectivité de l'efficacité de la MTR via des analyses théoriques et par des résultats de simulation.

L'Annexe B sera un complément du chapitre 5. On y exposera quelques développements mathématiques permettant la compréhension de la MTR.



# Chapitre 1

## Principe de Modulation OFDM, Caractérisation du PAPR d'un signal OFDM et caractérisation des amplificateurs de puissances

### 1.1 Introduction

Ce chapitre est dédié au principe des modulations multiporteuses, en particulier l'OFDM, et à la caractérisation du PAPR des signaux OFDM ainsi que de l'amplificateur de puissance. Le but ici est de poser d'emblée le rapport entre le PAPR et les performances énergétiques de l'amplificateur de puissance.

L'OFDM, pour *Orthogonal Frequency Division Multiplexing* [1, 135, 105] est un procédé de codage de signaux numériques par répartition en fréquences orthogonales sous forme de multiples sous-porteuses. L'objectif étant ainsi de permettre une bonne robustesse vis à vis des canaux multi-trajets avec une utilisation optimale de la bande du fait que les porteuses se recouvrent entre elles sans interférer car étant orthogonales. C'est la technique de modulation multiporteuses la plus populaire et la plus utilisée dans les standards de télécommunications. En guise d'exemple, on peut citer le standard DAB pour *Digital Audio Broadcasting* [2], le standard DVB-T2 (*Digital Video Broadcasting-Terrestrial*) [41, 42], le standard WLAN pour *Wireless Local Area Network* comme le IEEE 802.11a/g plus connu sous l'appellation Wi-Fi ou de HYPERLAN [44]. On retrouve aussi l'OFDM sur le standard WIMAX ou IEEE 802.16 ou dans l'ADSL pour *Asymmetric Digital Subscriber Line* [45]. Dernièrement, l'OFDM a été aussi choisie pour la liaison descendante de la norme LTE pour *Long Term Evolution* [27]. Notons que dans ce standard, la modulation monoporteuse par paquet SC-FDM a été retenue pour la liaison montante, et que l'une des principales causes de ce choix est la consommation d'énergie du fait que ces signaux sont à faible PAPR tout en étant aussi robustes en présence de canaux multi-trajets.

### 1.2 Principe de Modulation OFDM et Caractérisation du PAPR d'un signal OFDM

Dans cette section nous allons d'abord faire un bref rappel du principe de modulation OFDM dans la sous section 1.2.1 avant de faire une caractérisation du PAPR des signaux OFDM dans la sous section 1.2.2.

### 1.2.1 Principe de l'OFDM

La modulation OFDM consiste à transmettre à bas débit plusieurs données modulées par des porteuses orthogonales entre elles. D'un point de vue mathématique, un signal OFDM en bande de base comportant  $M$  porteuses et de durée symbole  $T_u$  s'écrit comme suit :

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=0}^{M-1} X_{m,n} g(t - nT_u) e^{j2\pi m F t} \quad (1.1)$$

avec  $g$  une fonction porte de durée  $T_u$ ,  $F = \frac{1}{T_u}$  représente l'écart entre porteuses,  $mF$  la  $m$ -ième fréquence porteuse et  $X_{m,n}$  le symbole transmis sur la  $m$ -ième porteuse à l'instant  $nT_u$ .

On remarque que le symbole OFDM transmis à l'instant  $nT_u$  est la somme des symboles transmis sur les  $M$  sous porteuses. Ce symbole OFDM s'écrit :

$$x_n(t) = \sum_{m=0}^{M-1} X_{m,n} e^{j2\pi m F t}, nT_u \leq t \leq (n+1)T_u \quad (1.2)$$

Dans la suite de cette thèse,  $x_n(t)$  désignera le symbole OFDM pour  $nT_u \leq t \leq (n+1)T_u$ . Dans les chapitres à venir nous travaillerons plus sur le symbole que sur le signal du fait que la réduction du PAPR se fait symbole par symbole. En plus, puisque la réduction du PAPR se fait aussi en bande base, sauf précision de notre part, nos symboles OFDM seront toujours définis en bande de base.

D'un point de vue analogique, un symbole OFDM peut être généré via le modulateur décrit par la Figure 1.1.

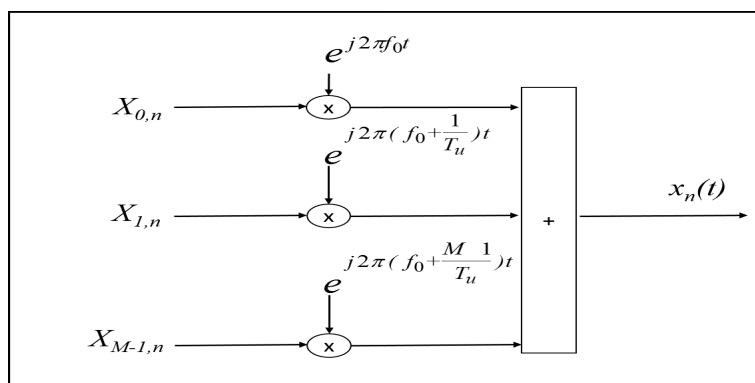


FIGURE 1.1 – Modulateur analogique d'un symbole OFDM

La Figure 1.2 donne les spectres des porteuses d'un symbole OFDM comportant  $M = 4$  porteuses. Notons que l'écart entre les porteuses est  $1/T_u$ , d'où leur orthogonalité. En effet, on voit que le spectre de chacune des porteuses est un sinus cardinal et s'annule sur les fréquences multiples de  $\Delta f = F = 1/T_u$ .

De part l'orthogonalité entre les porteuses, voir Figure 1.2, la démodulation d'un symbole OFDM consiste donc à projeter orthogonalement le symbole reçu sur chacune des  $M$  porteuses que comporte celui-ci. En d'autres termes, pour récupérer l'information émise sur la porteuse  $m_0$  et à l'instant  $n_0$ , il suffit d'appliquer le filtre adapté  $g_{m_0, n_0}(t) = g(t - n_0 T_u) e^{-j2\pi m_0 F t}$  sur le signal reçu  $y(t) = x(t) * h(t) + n_b(t)$  où  $h(t)$  désigne la réponse impulsionnelle du canal de transmission que l'on supposera constant durant toute la durée d'un symbole et  $n_b(t)$  un bruit additif supposé AWGN pour *Additive White Gaussian Noise*. Sous l'hypothèse que la réponse du canal autour de chaque sous porteuse est

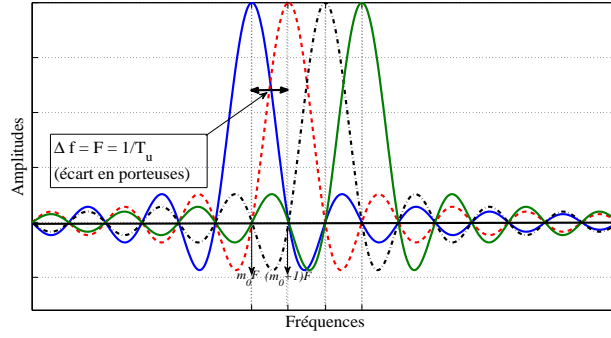


FIGURE 1.2 – Orthogonalité entre les porteuses ou sous porteuses d'un système OFDM

constante, on montre après quelques calculs que :

$$\begin{aligned}
 \hat{X}_{m,n} = \langle y(t), g_{m_0,n_0}(t) \rangle &= \frac{1}{T_u} \int y(t) g(t - n_0 T_u) e^{-j2\pi m_0 F t} dt \\
 &= \int_{n_0 T_u}^{(n_0+1)T_u} \underbrace{(x_n(t) * h(t))}_{y_{n_0}(t)} e^{-j2\pi m_0 F t} dt + n_b[n_0, m_0] \\
 &= \int_{n_0 T_u}^{(n_0+1)T_u} \left( \sum_{k=0}^{M-1} X_{k,n} H_k e^{j2\pi k F t} \right) e^{-j2\pi m_0 F t} dt + n_b[m_0] \\
 &= H_{m_0} X_{m_0,n_0} + n_b[n_0, m_0] \tag{1.3}
 \end{aligned}$$

Avec  $H_{m_0}$  la réponse du canal autour de la porteuse  $m_0 F$  et  $n_b[n_0, m_0]$  le bruit autour de la porteuses  $m_0 F$ . Graphiquement, La Figure 1.3 décrit le démodulateur analogique d'un symbole OFDM.

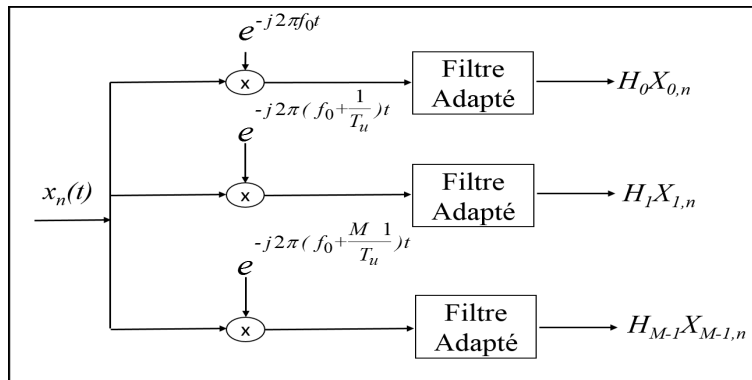


FIGURE 1.3 – Démodulateur analogique d'un système OFDM

## 1.2.2 Émetteur et Modulateur numérique d'un système OFDM

Dans les communications, les débits sont limités par des contraintes physiques : le bruit dû aux imperfections des composants électroniques des systèmes affecte la qualité du signal transmis. La numérisation des données à transmettre peut permettre d'améliorer la qualité de la transmission. Les télécommunications numériques peuvent également permettre l'utilisation des techniques de multiplexage de données très performantes (CDMA pour *Coding Division Multiple Access*) offrant ainsi une utilisation optimale de la bande.

Dans le cas de l'OFDM, notons que la réalisation des modulateurs et démodulateurs analogiques définis par les Figures 1.1 et 1.3 est très complexe et très coûteuse en ressources. D'ailleurs la popularité de l'OFDM a débuté avec l'invention de l'algorithme *Fast Fourier Transform*, qui a permis, comme nous allons le voir dans ce qui suit, une implémentation efficace des modulateurs et démodulateurs numériques des systèmes OFDM [135].

Soit  $T_e = \frac{T_{\text{Niq}}}{L}$  la période de sur-échantillonnage que nous allons utiliser pour sur-échantillonner le signal OFDM  $x(t)$  défini par (1.1), avec  $T_{\text{Niq}} = \frac{T_u}{M}$  et  $L \geq 1$  désignant respectivement la période d'échantillonnage critique et le facteur de sur-échantillonnage. En désignant par  $x_{n,l}$  l'échantillon de  $x(t)$  prélevé à l'instant  $nT_u + lT_e$  on a :

$$\begin{aligned} x_{n,l} &= x(nT_u + lT_e) = x_n(lT_e) \\ &= \sum_{m=0}^{M-1} X_{m,n} e^{i2\pi m \frac{lT_e F}{LM}} \\ &= \sum_{m=0}^{M-1} X_{m,n} e^{i2\pi \frac{ml}{LM}} \end{aligned} \tag{1.4}$$

Dans le cas d'un échantillonnage à la fréquence critique, on remarque que :

$$[x_{n,0}, \dots, x_{n,M-1}] = \text{IDFT}([X_{0,n}, \dots, X_{M-1,n}]) \tag{1.5}$$

avec IDFT signifiant *Inverse Discret Fourier transform*. En d'autres termes, le vecteur OFDM discret  $\mathbf{x}_n = [x_{n,0}, \dots, x_{n,M-1}]$  peut être obtenu via une transformé de Fourier discrète, qui peut être efficacement réalisée par l'algorithme FFT (ou IFFT) pour *Fast Fourier Transform* ou *Inverse Fast Fourier Transform*. Pour plus de détails sur les structures des modulateurs et démodulateurs numériques des systèmes OFDM, ou de manière plus générale des techniques multiporteuses telles que les FBMC, l'OFDM sur-échantillonnée, le lecteur peut consulter les thèses [121, 123, 140].

Dans ce qui suit, nous allons à présent définir le démodulateur numérique d'un système OFDM. Pour ce faire, soit  $\mathbf{y}_n = [y_{n,0}, \dots, y_{n,M-1}]$  le vecteur contenant les échantillons à la sortie de l'échantillonneur du récepteur du  $n$ -ième symbole  $y_n(t)$ . Sous l'hypothèse que la période d'échantillonnage est suffisamment petite, alors l'équation (1.3) peut être approximée comme suit :

$$Y_{m,n} = \sum_{l=0}^{M-1} y_{n,l} e^{-j2\pi \frac{ml}{M}} = \text{DFT}[y_{n,0}, \dots, y_{n,M-1}] \tag{1.6}$$

Avec on le rappelle  $\mathbf{y}_n = \mathbf{x}_n * \mathbf{h}$  et  $\mathbf{h}$  le vecteur contenant les échantillons de la réponse impulsionnelle du canal. Notons que du fait que le canal est multi-trajets, les échos les plus retardés du symbole  $\mathbf{y}_{n-1}$  peuvent interférer sur le symbole  $\mathbf{y}_n$ . Ainsi, en pratique, pour faire face à ce problème d'interférence entre symbole (ISI), un intervalle de garde GI (pour *Guard Interval*) supposé plus long que le trajet le plus retardé est mise au début de chaque transmission afin de contenir les échos des symboles antérieurs. Lorsque le GI est préfixe cyclique (CP), c'est à dire qu'il contient la fin de chaque symbole, alors l'équation (1.6) devient :

$$Y_{m,n} = \sum_{l=0}^{M-1} y_{n,l} e^{-j2\pi \frac{ml}{M}} = H_m X_{m,n} \tag{1.7}$$



En effet, le préfixe cyclique CP transforme la convolution linéaire du canal en convolution circulaire.

La Figure 1.4 donne les modulateurs et démodulateurs numériques d'un système OFDM (comportant  $M$  porteuses).

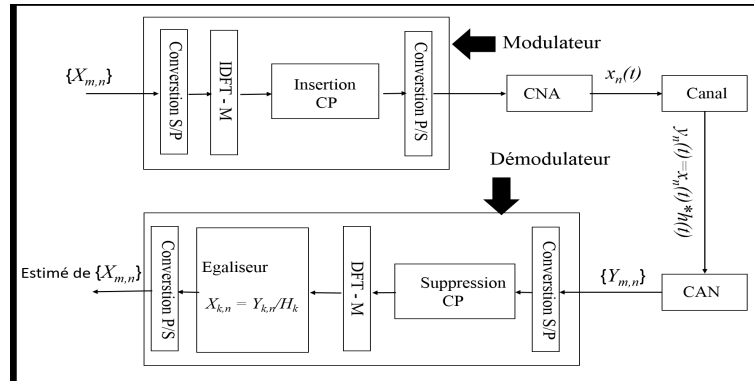


FIGURE 1.4 – Modulateur/Démodulateur Numérique d'un système OFDM avec Préfixe Cyclique (CP)

On remarque que sur la Figure 1.4, qu'au niveau de l'émetteur, le CP est placé juste après le module de la IDFT et consiste à recopier la fin de chaque symbole au début. Au niveau du récepteur, le CP est supprimé avant d'effectuer la DFT. Ainsi, au prix d'une perte du débit utile, le préfixe cyclique (CP) permet :

1. De se prémunir de l'interférence entre symboles OFDM ou entre trames OFDM.
2. D'avoir un égalisateur simple, voir 1.4. Le préfixe cyclique fait que le canal agit sur le signal comme une convolution circulaire, qui en fréquence se traduit par une multiplication point par point.

Pour plus de détails sur la construction du préfixe cyclique, de sa longueur,... etc, voir la thèse [116] traitant de l'estimation de canaux multi-trajets pour les systèmes OFDM.

Dans leur majorité, les techniques de réduction du PAPR par ajout de signal, afin d'atténuer les *peaks*, et donc réduire le PAPR, travaillent à la sortie de la IDFT avant l'insertion du préfixe cyclique car ce dernier n'a pas une influence notable sur le PAPR de celui-ci. Ainsi, dans cette thèse, nous allons travailler avec les symboles OFDM discrets avant insertion du préfixe cyclique.

### 1.2.3 Définition et Caractérisation du PAPR d'un signal OFDM

Dans cette sous section nous allons d'abord effectuer un petit historique de la définition du PAPR. Nous donnerons ensuite la condition nécessaire pour une bonne approximation du PAPR du signal analogique à partir du signal discret.

#### 1.2.3.1 Définition du PAPR

Le PAPR est un paramètre clé dans un système de télécommunication longue distance. En effet, juste après la sortie du convertisseur numérique-analogique, il y a généralement besoin d'amplifier la puissance du signal à transmettre via un amplificateur de puissance. Malheureusement, l'amplificateur de puissance présente des non-linéarités lorsqu'il est excité par une entrée à enveloppe non constante. Le signal de sortie bien qu'étant amplifié, se retrouve très distordu et ces distorsions sont généralement non-linéaires donc difficiles



à enlever au niveau du récepteur. Les signaux OFDM comme toute modulation multipor-teuses présentent de fortes variations d'amplitudes au tour de la puissance moyenne. Le PAPR pour *Peak-To-Average Power Ratio* permet de mesurer la dynamique temporelle du signal. Sa connaissance est essentielle pour caractériser le recul de puissance nécessaire pour faire fonctionner l'amplificateur de puissance sans dégrader le signal. On note ainsi que pour des signaux à fort PAPR, un tel choix entraînerait un sur-dimensionnement de l'amplificateur, d'où l'intérêt de la réduction du PAPR.

Avant de donner la définition mathématique du PAPR, soulignons qu'il y a d'autres outils de mesure de la dynamique temporelle des signaux. Par exemple dans [117] on retrouve l'un des premiers outils de mesure connu sous le nom de *Peak Factor* et défini, pour un symbole OFDM  $x_n(t)$ , par l'équation (1.8)

$$\text{PF}_1 = \frac{\left( \max_{t \in [nT_u, (n+1)T_u]} \{x(t)\} - \min_{t \in [nT_u, (n+1)T_u]} \{x_n(t)\} \right)}{\int_{nT_u}^{(n+1)T_u} |x_n(t)|^2 dt}, \quad (1.8)$$

On remarque ainsi que le *Peak factor* mesure l'écart entre l'amplitude maximale et l'ampli-tude minimale du signal. Cette grandeur a fait son bout de chemin jusqu'à l'introduction par GREENSTEIN et FITZGERALD [55] de ce qu'on appelle aujourd'hui PAPR permettant de caractériser les variations d'amplitude autour de la puissance moyenne du signal. Pour un symbole OFDM  $x_n(t)$  donné, il est défini par l'équation (1.9)

$$\text{PAPR} = \frac{\max_t \{|x_n(t)|^2\}}{\frac{1}{T_u} \int_{nT_u}^{(n+1)T_u} |x_n(t)|^2 dt} \quad (1.9)$$

Un rappel de la chronologie de l'évolution de ces critères de caractérisation et de mesure de la dynamique temporelle des signaux OFDM a bien été résumé dans [123]. La mul-tiplication des critères de caractérisation et de mesure de la dynamique temporelle des signaux OFDM s'est accompagnée avec une prolifération de leur dénomination. Ainsi, dans [96] les auteurs ont proposé une unification de tous ces critères de caractérisation et de mesure. Aujourd'hui, le nom *Peak-to-Average Power Ratio* est globalement utilisé pour caractériser et mesurer la dynamique temporelle des signaux OFDM. Dans la section 1.3, nous verrons toute la pertinence de cette définition car permettant de caractériser le recul de puissance nécessaire pour une amplification sans dégradation du signal.

### 1.2.3.2 Caractérisation du PAPR d'un signal OFM

Généralement, pour des raisons pratiques, la réduction du PAPR se fait avant le mo-dule de conversion Numérique-Analogique, ainsi il est important de définir une approxi-mation du PAPR d'un symbole OFDM à partir de ces échantillons. Pour ce faire, nous allons revenir sur l'équation (1.4) dans un cadre plus général c'est à dire que nous al-lons travailler dans le cas d'un sur-échantillonnage. Ce choix est totalement naturel et intuitif puisque l'objectif étant de donner une approximation du PAPR d'un signal ana-logique via ses échantillons discrets. On peut facilement deviner que plus le facteur de sur-échantillonnage est grand, plus l'approximation est bonne. Cependant, pour des rai-sons de complexité numérique, il est intéressant de voir jusqu'à quelle valeur du facteur de sur-échantillonnage  $L$  on peut affirmer avoir une bonne approximation du PAPR.

Supposons que le symbole  $x_n(t)$  soit sur-échantillonné à la période  $T_e = \frac{T_u}{LM}$ , avec  $L$  le facteur de sur-échantillonnage. On a :

$$x_{n,l} = \sum_{m=0}^{M-1} X_{m,n} e^{j2\pi m \frac{l}{LM}}, \quad \text{avec } l = 0, \dots, LM - 1 \quad (1.10)$$

En communication numérique, un sur-échantillonnage est toujours suivi d'un filtrage passe bande afin de supprimer les répliques du spectre aux fréquences multiples. Dans cette thèse, nous allons adopter le *Zero-Padding* dans le domaine fréquentiel pour supprimer ces répliques. Ainsi, comme dans [126], soit  $\check{\mathbf{X}}_n$  le vecteur de dimension  $ML$  obtenu après l'opération de *Zero-Padding* sur le vecteur  $\mathbf{X}_n$ , c'est à dire :

$$\check{\mathbf{X}}_n = \left[ X_{0,m}, \dots, X_{\frac{M}{2}-1}, 0, \dots, 0, X_{\frac{M}{2}, \dots, X_{M-1,n}} \right]^T \quad (1.11)$$

Alors, le vecteur symbole discret  $\mathbf{x}_n = [x_{n,0}, \dots, x_{n,LM-1}]^T$  de dimension  $ML$  peut toujours être obtenu via une IDFT, mais cette fois de taille  $ML$ . Autrement dit, il peut être généré via le modulateur numérique décrit dans la Figure 1.4 en insérant l'opération de *Zero Padding* avant le module de la IDFT. Nous reviendrons en détail sur l'expression analytique (d'un point de vue matriciel) de  $\mathbf{x}_n$  dans le chapitre 2 car elle permettra de comprendre la modélisation des problèmes d'optimisation qui y seront abordés afin de calculer le signal de correction du PAPR.

Partant de ces échantillons discrets du symbole OFDM  $\mathbf{x}_n$ , le PAPR peut alors être estimé comme dans [96] par :

$$\text{PAPR}_{[x_n]} = \frac{\max_{l \in [0, LM-1]} \{|x_{n,l}|^2\}}{\mathbb{E} [\|\mathbf{x}_n\|_2^2]} \quad (1.12)$$

Puisque  $\mathbf{x}_n$  est une variable aléatoire,  $\text{PAPR}_{[x_n]}$  est donc aussi une variable aléatoire. D'où la nécessité d'étudier la loi de distribution du PAPR. La CCDF pour *Cumulative Complementary Distribution Function* est l'outil le plus utilisé dans la littérature pour caractériser le recul nécessaire pouvant permettre une amplification du signal sans distorsion. En effet, comme son nom l'indique, la CCDF permet pour une valeur de puissance  $\Phi$  donnée, de connaître la probabilité qu'un symbole OFDM ait un PAPR plus grand que cette valeur.

$$\text{CCDF}_{[x_n]}(\Phi) = \mathbb{P}[\text{PAPR}_{[x_n]} \geq \Phi] \quad (1.13)$$

De la définition de la CCDF, on peut remarquer que le recul de puissance idéal pour dimensionner l'amplificateur doit être choisi de telle sorte que la CCDF en cette valeur soit égale à zéro. En pratique, on le choisit généralement à  $\text{CCDF}_{[x_n]}(\Phi) = 10^{-4}$ .

Il existe beaucoup de travaux pour le calcul de la formule théorique de la CCDF du PAPR d'un symbole OFDM [105, 127] avec comme objectif d'approcher du mieux que possible la distribution du PAPR du symbole analogique. Dans [127] VAN NEE donne une approximation de la CCDF d'un symbole OFDM échantillonné à la fréquence critique. En effet, d'après l'équation (1.10), on peut remarquer grâce au théorème centrale limite que  $x_{n,l}$  converge vers une gaussienne complexe pour un nombre de sous-porteuses grand. En effet, en prenant séparément les parties réelles et complexes de  $x_{n,l}$  on remarque qu'elles sont la sommation de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de variance unitaire et de moyenne nulle. Ainsi, lorsque  $M$  est suffisamment grand, leur sommation est une gaussienne centrée et réduite. L'autre intérêt de travailler à fréquence critique est qu'on peut se permettre de faire l'hypothèse que les échantillons  $\{x_{n,l}\}_{l=0, \dots, M-1}$  sont décolorés comme dans [127]. Il s'en suit alors que la CCDF peut être approchée comme

suit :

$$\begin{aligned}
\text{CCDF}_{[x_n]}(\Phi) &= \mathbb{P}\text{rob} [\text{PAPR}_{[x_n]} \geq \Phi] \\
&= \mathbb{P}\text{rob} \left[ \frac{\|\mathbf{x}_n\|_\infty^2}{\underbrace{\mathbb{E} [\|\mathbf{x}_n\|_2^2]}_{P_{x_n}}} \geq \Phi \right] \\
&= \mathbb{P}\text{rob} [\|\mathbf{x}_n\|_\infty^2 \geq \Phi P_{x_n}] \\
&= 1 - \prod_{l=0}^{M-1} \left( \mathbb{P}\text{rob} [\|x_{n,l}\| \leq \sqrt{\Phi P_{x_n}}] \right)
\end{aligned} \tag{1.14}$$

Puisque pour tout  $l = 0, \dots, M - 1$ ,  $x_{n,l}$  est une gaussienne complexe, le module ou l'amplitude de  $x_{n,l}$  suit une loi de Rayleigh de densité  $f(r) = \frac{2r}{P_{x_n}} e^{-\frac{r^2}{P_{x_n}}}$ . Il vient alors que la CCDF du signal  $\mathbf{x}_n$  échantillonné à fréquence critique est donnée par :

$$\text{CCDF}_{[x_n]}(\Phi) = 1 - (1 - e^{-\Phi})^M, \text{ Formule de Van Nee} \tag{1.15}$$

L'équation (1.12) étant une approximation du PAPR du signal analogique défini par l'équation (1.9), il est légitime alors de s'interroger sur l'impact du facteur de sur-échantillonnage, sur l'approximation du PAPR de ce signal via ses échantillons. Ainsi, dans [127, 106] les auteurs ont montré que pour avoir une bonne approximation du signal analogique, il faut sur-échantillonner le symbole OFDM à un facteur  $L \geq 4$ .

Les Figures 1.5, 1.6 et 1.7 donnent une illustration de l'impact du facteur de sur-échantillonnage sur l'approximation de la CCDF du PAPR du signal analogique à partir du signal discret. De ces résultats de simulations on peut tirer trois enseignements :

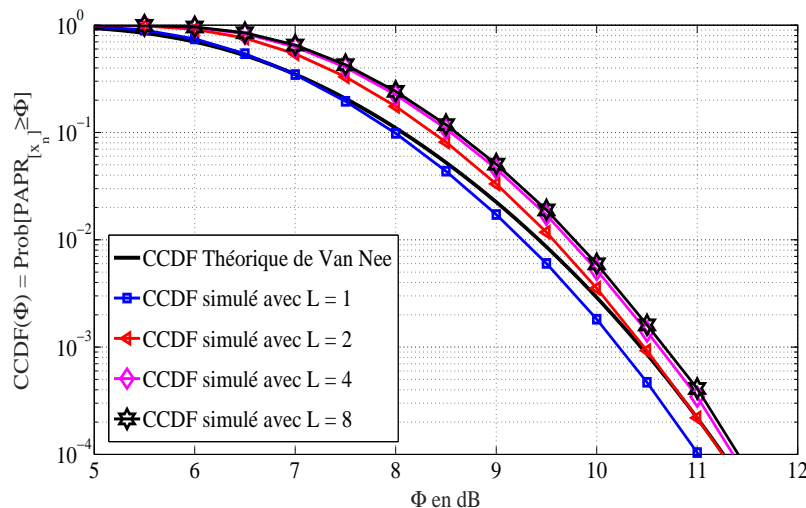
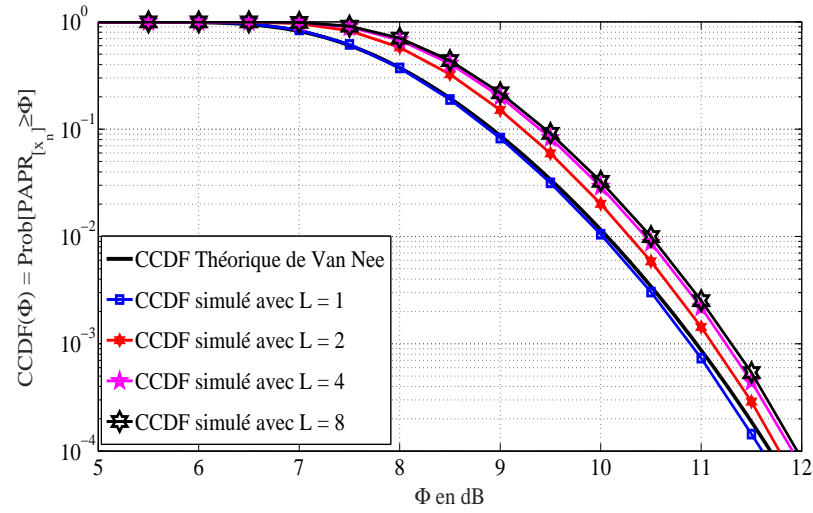
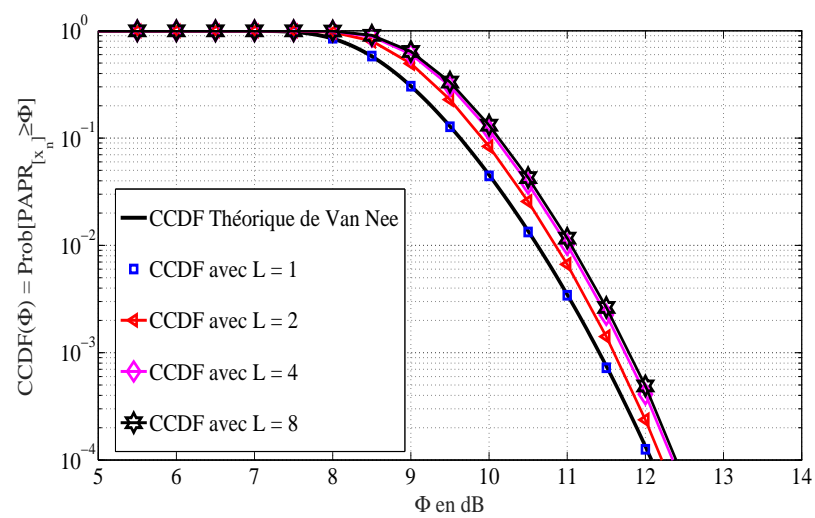


FIGURE 1.5 – Estimé de la CCDF en fonction de  $L$  pour  $M = 64$

- Pour une bonne approximation du PAPR du signal analogique il faut au moins sur-échantillonner le signal d'un facteur  $L = 4$ .

Les résultats de simulation dans les cas ( $M = 64$ ,  $M = 256$  et  $M = 1024$ ) montrent que les CCDF du PAPR sont quasiment identiques à partir de  $L = 4$ .

FIGURE 1.6 – Estimé de la CCDF en fonction de  $L$  pour  $M = 256$ FIGURE 1.7 – Estimé de la CCDF en fonction de  $L$  pour  $M = 1024$

Par conséquent, par définition de la CCDF, on peut en déduire que pour avoir une bonne approximation du PAPR du signal il faut au moins sur-échantillonner le signal d'un facteur 4. Soulignons que ce constat est présent dans la majeure partie des papiers sur la réduction du PAPR.

- La validité de la CCDF théorique proposée par Van Nee, voir (1.15), dépend du nombre de porteuses.

En effet, on remarque que le décalage entre la courbe théorique obtenue sous l'hypothèse que le signal est échantillonné à cadence critique ( $L = 1$ ), et la courbe simulée pour  $L = 1$  diminue lorsque  $M$  augmente. Ce résultat est tout à fait prévisible car la courbe théorique est obtenue via le théorème limite centrale dont l'exactitude théorique est établie lorsque  $M$  est suffisamment grand. Ce qui est parfaitement illustré (confirmation) par les résultats de simulation de la Figure 1.7 où l'on peut constater que la courbe théorique de VAN NEE est identique à la courbe obtenue par simulation pour  $L = 1$ .

- La formule théorique de VAN NEE ne donne pas une bonne approximation de la CCDF du PAPR du signal analogique.

Sur les résultats de simulation des trois figures, on remarque que la courbe de la CCDF théorique est loin des CCDF simulées dès que  $L \geq 2$ .

Suite à cette dernière remarque, d'autres auteurs ont tenté de proposer diverses approximations de la CCDF d'un symbole OFDM suffisamment sur-échantillonné. Ainsi, dans [127, 95], via des études statistiques des variations d'amplitudes d'un signal OFDM, les auteurs ont proposé les formules théoriques suivantes :

$$\text{CCDF}_{[x_n]}(\Phi) = 1 - (1 - e^{-\Phi})^{2.8M}, \text{ Van Nee [127]} \quad (1.16)$$

$$\text{CCDF}_{[x_n]}(\Phi) = 1 - (1 - e^{-\Phi})^{\tau_2 M^\mu}, \text{ Y. Louet [95]} \quad (1.17)$$

Avec  $\tau_2 = \left(\frac{5.12}{\sqrt{e}}\right)^\mu e^{-5704}$  et  $\mu = 1.07$ .

De même dans [106], l'auteur propose une approximation de la CCDF basée sur une approche probabiliste. A la différence des formules ci-dessus, l'approximation proposée dans [106] ne vise qu'à donner une approximation théorique de la borne supérieure de la CCDF. En effet, pour un seuil de référence fixé  $\tilde{\Phi}$ , les auteurs proposent de faire un décompte du nombre de fois où le module du signal en continue coupe ce seuil de référence. Ainsi, il parvient à obtenir une bonne approximation de la borne supérieur de la CCDF en tout point.

$$\text{CCDF}_{[x_n]}(\Phi) = \begin{cases} 1 & \text{Si } \tilde{\Phi} \geq \Phi \\ 1 - \left(1 - \frac{\sqrt{\tilde{\Phi}}e^{-\Phi}}{\sqrt{\tilde{\Phi}}e^{-\tilde{\Phi}}}\right)^{\sqrt{\frac{\pi}{3}}M\sqrt{\tilde{\Phi}}e^{-\tilde{\Phi}}} & \text{Sinon} \end{cases}, \text{ avec } \tilde{\Phi} = \pi \quad (1.18)$$

La Figure 1.8 compare les CCDF théoriques définies par les équations (1.17) et (1.18) avec les CCDF simulées pour différentes valeurs de  $M$  avec  $L = 4$ .

Les résultats de simulation montrent que les formules proposées dans [127] et [95] offrent une meilleure approximation de la CCDF d'un signal OFDM (signal analogique), lorsque  $M$  est suffisamment grand, que celle définie par l'équation 1.18. En effet, on remarque sur la Figure 1.8, que plus  $M$  est grand plus les courbes définies par les équations de (1.17) se superposent avec les courbes obtenues par simulation (avec  $L = 4$ ). On remarque aussi que la formule (1.18) permet d'avoir une bonne estimation de la borne supérieure du PAPR sur n'importe quel point de la CCDF.

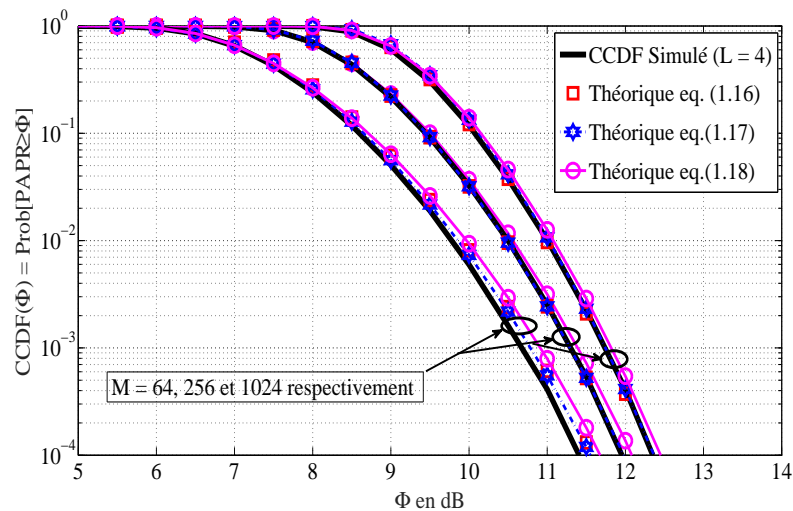


FIGURE 1.8 – Comparaison des différentes formules théoriques de la CCDF en fonction de  $M$  et pour  $L = 4$ .

## 1.3 Principe et Caractérisation de l'Amplificateur de Puissance

Cette section sera consacrée à la caractérisation des paramètres d'intérêt de l'amplificateur de puissance. Nous allons ensuite donner dans cette section quelques résultats de simulation afin d'illustrer l'influence du PAPR sur les performances de l'amplificateur de puissance en termes de dégradations et de rendement énergétique.

### 1.3.1 Définition

Pour une transmission longue distance, les émetteurs ont besoin d'amplificateurs de puissance pour fournir une puissance suffisante au signal à transmettre (signal radio fréquence) afin d'éviter qu'il s'affaiblisse fortement lors de la propagation [62]. Pour injecter au signal cette puissance nécessaire, l'amplificateur de puissance puise de l'énergie dans une source. Ainsi, il est important de déterminer le rendement en énergie de l'amplificateur et de s'interroger aussi sur l'impact du signal à amplifier sur ce rendement d'autant plus que l'amplificateur de puissance est l'élément qui consomme le plus d'énergie parmi tous les éléments de l'émetteur [25].

On peut distinguer en général deux types d'amplificateurs de puissance [73, 26] :

1. L'amplificateur à tubes à ondes progressives (TOP) ou TWTA (*Travelling Wave Tube Amplifier*) utilisé généralement dans les transmissions par satellite.
2. L'amplificateur à semi-conducteur (SSPA pour *Solid State Power Amplifier*) utilisé pour les transmissions radio terrestre comme la téléphonie.

Dans cette section, on ne s'intéresse pas aux solutions qui existent ou qui peuvent exister au niveau de l'amplificateur pour optimiser les performances de l'amplificateur en terme de consommation d'énergie et de distorsions. Dans cette thèse l'amplificateur ne sera qu'un outil qui nous permettra de mettre en évidence l'intérêt de la réduction du PAPR du signal avant amplification.

Dans la sous-section suivante nous allons caractériser les paramètres d'intérêt de l'amplificateur et leur lien avec le PAPR du signal à amplifier.

### 1.3.2 Caractérisation de l'amplificateur de puissance : Les conversions AM/AM et AM/PM

Pour déterminer la relation entre la puissance d'entrée, la puissance utilisée par l'amplificateur et la puissance de sortie du signal nous allons considérer le graphe ci-dessous qui donnent la relation entrée-sortie AM/AM (pour Amplitude/Amplitude) appelées caractéristiques de transfert ou fonction de transfert AM/AM.

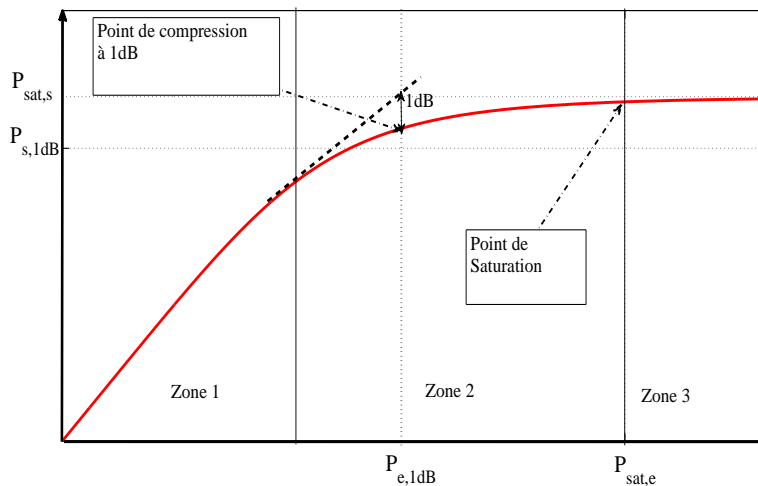


FIGURE 1.9 – Allure de la courbe AM/AM d'un amplificateur de puissance

Suivant l'allure de la fonction de transfert AM/AM on peut identifier trois zones de fonctionnement de l'amplificateur de puissance :

1. Zone 1 ou Zone Linéaire. Dans cette zone, l'amplificateur de puissance a un comportement linéaire car l'amplitude de sortie est proportionnelle à l'amplitude d'entrée, voir la courbe AM/AM de la Figure 1.9. En pratique, le choix de grande valeur de recul de puissance permet de faire fonctionner l'amplificateur dans cette zone, car elle n'engendrera quasiment aucune distorsion sur le signal à la sortie. Nous verrons, dans les sections à venir que fonctionner dans cette zone revient à surdimensionner l'amplificateur de puissance entraînant ainsi un rendement énergétique très faible.
2. Zone 2 ou Zone de Compression. Dans cette zone, la courbe AM/AM n'est plus linéaire. Cette non-linéarité engendrera des distorsions sur le signal de sortie qui seront de plus en plus importantes aux fur et à mesure qu'on s'approche de la Zone 3. Elle est la zone de transition entre la zone linéaire (zone 1) et la zone de saturation (zone 3). Nous verrons dans les sections à venir que ces dégradations peuvent être accentuées lorsque les signaux à amplifier ont un PAPR élevé. Notons aussi, qu'au delà du point de compression à 1dB, l'amplificateur commencera aussi à perdre en rendement énergétique tout en accentuant les dégradations du signal.
3. Zone 3 ou Zone de Saturation. Dans cette zone, la puissance de sortie (courbe AM/AM) ne varie quasiment plus quelque soit la puissance d'entrée. D'où le nom de zone de saturation. Les dégradations sont à leur plus haut niveau dans cette zone.

Dans cette section, nous n'avons pas présenté de courbe traduisant les effets de l'amplificateur de puissance sur la phase du signal de sortie (courbe AM/PM). En effet, cette courbe dépend beaucoup de la conception de l'amplificateur mais aussi, naturellement



des conditions de fonctionnement [25]. Notons que dans les sections à venir nous nous intéresserons plus aux amplificateurs avec sans effet mémoire et on supposera que l'amplificateur n'agit pas sur la phase du signal [10].

### 1.3.3 Les paramètres d'intérêt de l'amplificateur de puissance

Pour amplifier un signal, l'amplificateur puise de l'énergie (courant) sur une source afin de l'injecter sur le signal d'entrée pour augmenter sa puissance, donc naturellement il en résultera une perte d'énergie du fait de l'imperfection de ces composantes. La Figure 1.10 donne un schéma simplifié sur le bilan énergétique d'un amplificateur de puissance. De la

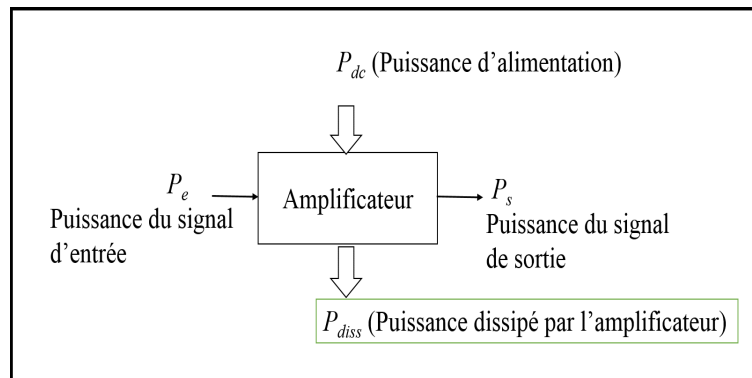


FIGURE 1.10 – Bilan énergétique d'un amplificateur de puissance

Figure 1.10 on peut noter que par principe de la conservation d'énergie en physique on a :

$$P_e + P_{dc} = P_{diss} + P_s \quad (1.19)$$

Plusieurs types de rendement peuvent être utilisés pour quantifier la consommation énergétique "utile" de l'amplificateur, et donc son efficacité énergétique. Les équations suivantes donnent les différentes manières de quantifier l'efficacité énergétique découlant de la Figure 1.10

- Le rendement en puissance : Il est exprimé par le rapport entre la puissance de sortie et la puissance fournie. Ainsi, du fait que la puissance d'entrée est incluse dans la puissance de sortie, ce paramètre ne permet pas de quantifier l'efficacité énergétique de l'amplificateur de puissance, c'est à dire le rapport entre la puissance réellement ajoutée ( $P_s - P_e$ ) et la puissance consommée

$$\eta = \frac{P_s}{P_{dc}} \quad (1.20)$$

- Le rendement en puissance ajoutée : Il est exprimé par le rapport entre la puissance ajoutée et la puissance fournie. Il permet donc de quantifier l'efficacité énergétique de l'amplificateur contrairement au cas précédent.

$$\eta_1 = \frac{P_s - P_e}{P_{dc}} = 1 - \frac{P_{diss}}{P_{dc}} \quad (1.21)$$

Notons,  $\eta \simeq \eta_1$  car  $P_e$  est très petit devant  $P_s$ .

Le bilan énergétique présenté dans la Figure 1.10 ne tient pas compte du point de fonctionnement de l'amplificateur qui peut aussi renseigner sur l'efficacité énergétique de



l'amplificateur. Ce point de fonctionnement est généralement défini à partir du "recul de puissance", un mot qui est souvent apparu dans les sections précédentes lorsque nous parlions d'amplificateur de puissance. Connue sous le nom de *Input Back Off* (IBO) en anglais, il fait partie des paramètres clés d'un amplificateur de puissance. A ce paramètre, nous pouvons ajouter l'*Output Back Off* (OBO) qui désigne la "puissance de recul de sortie" et le rendement énergétique qui sont aussi des paramètres clés de l'amplificateur. L'IBO permet à l'amplificateur de prendre du recul (sa zone de fonctionnement voir Figure 1.9) par rapport au point de compression à 1dB ou bien par rapport à sa puissance de saturation afin de fonctionner dans la zone linéaire. Par conséquent, l'IBO permet aussi de renseigner sur le rendement énergétique de l'amplificateur.

Avec les notations définies sur la Figure 1.9, l'IBO est défini comme étant le rapport entre la puissance de saturation à l'entrée et la puissance d'entrée initiale du signal. Autrement dit, il est exprimé par l'équation suivante :

$$\text{IBO} = \frac{P_{sat,e}}{P_e} \text{ en base linéaire ou } \text{IBO} = P_{sat,e} - P_e \text{ en dB} \quad (1.22)$$

Dans certains cas [18], il (IBO) est défini comme étant le rapport entre la puissance d'entrée ramenée au point de compression à 1dB et la puissance d'entrée du signal.

$$\text{IBO} = \frac{P_{e,1dB}}{P_e} \text{ en base linéaire ou } \text{IBO} = P_{e,1dB} - P_e \text{ en dB} \quad (1.23)$$

L'OBO, est quant à lui défini comme étant le rapport entre la puissance de sortie à la saturation et la puissance de sortie du signal comme l'indique l'équation suivante :

$$\text{IBO} = \frac{P_{sat,s}}{P_s} \text{ en base linéaire ou } \text{IBO} = P_{sat,s} - P_s \text{ en dB} \quad (1.24)$$

De même dans certains cas [18], l'IBO est défini comme étant le rapport entre la puissance de sortie si l'amplificateur avait fonctionné au point de compression à 1dB et la puissance d'entrée du signal si l'amplificateur avait fonctionné au point de fonctionnement défini par la puissance initiale du signal d'entrée.

$$\text{IBO} = \frac{P_{s,1dB}}{P_s} \text{ en base linéaire ou } \text{IBO} = P_{s,1dB} - P_s \text{ en dB} \quad (1.25)$$

A partir de ces équations on remarque que :

- Plus l'IBO est grand, plus l'amplificateur s'approche de sa zone de linéarité, et donc est surdimensionné.
- Plus le PAPR du signal d'entrée est grand, plus l'IBO requis pour faire fonctionner l'amplificateur dans sa zone linéaire est grand.
- L'OBO donne la puissance perdue associée à chaque valeur de l'IBO.

La Figure 1.11 donne la courbe AM/AM ainsi que la courbe (allure) du rendement énergétique de l'amplificateur de puissance.

De la Figure 1.11 on remarque que le sur-dimensionnement de l'amplificateur de puissance entraîne un fonctionnement non efficace en terme de consommation d'énergie de l'amplificateur de puissance. En effet on remarque que plus le recul de puissance (IBO) est grand, plus l'amplificateur fonctionnera dans sa zone linéaire (Zone 1) qui est la zone où le rendement de l'amplificateur est faible. On note aussi que la Zone 2 (en particulier le point de fonctionnement à 1dB) est une zone tampon permettant de faire un compromis entre rendement énergétique et dégradation du signal.

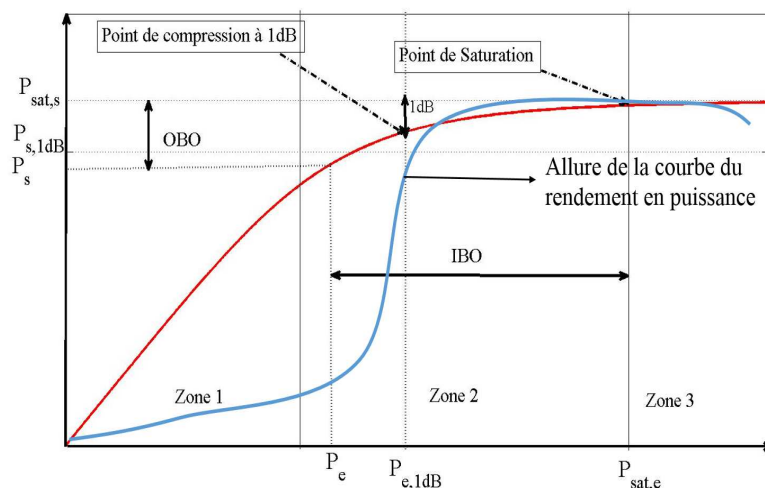


FIGURE 1.11 – Les paramètres d'intérêt d'un amplificateur de puissance

### 1.3.4 Modélisation mathématique des comportements AM/AM et AM/PM des amplificateurs de puissance

Dans cette section, nous allons énumérer quelques exemples de modélisation des relations entrées-sorties d'un amplificateur de puissance. En d'autres termes, nous allons donner quelques modèles mathématiques liant la puissance (ou amplitudes) du signal d'entrée avec celle du signal à la sortie de l'amplificateur ainsi que la phase du signal d'entrée avec celle du signal de sortie. L'objectif de cette étude est de nous permettre dans la suite d'illustrer les effets du PAPR sur la qualité du signal amplifié en termes de dégradations *In-Band* (BER) et de dégradation *Out-Of-Band* (Remonté de lobes secondaires du spectre). Nous n'allons considérer dans cette section que le cas des amplificateurs de puissance sans mémoire bien que cela soit très restrictif, surtout pour des signaux large bande [18, 10, 86]. Sous cette contrainte, nous allons regarder trois cas de modèles mathématiques permettant de modéliser l'amplificateur de puissance.

Les modèles polynomiaux, décrits par l'équation (1.26), sont les plus connus dans la littérature pour modéliser un amplificateur de puissance.

$$y_n(t) = \sum_{k=1}^{N_k} a_k (x_n(t))^k \quad (1.26)$$

avec  $x_n(t)$  le signal à l'entrée de l'amplificateur,  $y_n(t)$  le signal à la sortie de l'amplificateur de puissance et  $\{a_k\}$  des coefficients réels caractérisant l'amplificateur de puissance. Ils sont généralement déterminés via une étude expérimentale. Notons que les modèles polynomiaux sont généralement sans mémoire, et en outre n'entraînent aucune distorsion de la phase. Les modèles polynomiaux bien que répondant parfaitement à nos objectifs de ne regarder que le cas sans mémoire sont très restrictifs [10, 100] pour décrire les caractéristiques de l'amplificateur de puissance pour une application où des signaux complexes sont exploités.

Le modèle de RAPP dont les fonctions de transfert AM/AM et AM/PM sont définies par l'équation (1.27) est souvent utilisé pour modéliser des amplificateurs de type SSPA,

c'est à dire les amplificateurs à semi conducteur [113, 53]

$$\begin{aligned} f_{AM/AM}(r) &= \frac{G_A r}{\left(1 + \left(\frac{r}{V_{sat}}\right)^{2p}\right)^{\frac{1}{2p}}} \\ f_{AM/PM}(r) &= 0 \end{aligned} \tag{1.27}$$

avec  $r$  les amplitudes du signal d'entrée à chaque instant,  $V_{sat}$  la puissance de saturation de l'amplificateur de puissance,  $G_A$  le gain en puissance de l'amplificateur et  $p$  un paramètre permettant de contrôler la transition entre la zone linéaire et la zone de saturation de la caractéristique AM/AM. Le modèle de RAPP comme on peut le voir sur l'équation (1.27) suppose que l'amplificateur n'agit pas sur la phase du signal d'entrée. C'est ce modèle que nous allons utiliser dans la section 1.3.5 pour évaluer les dégradations induites par un amplificateur sur des signaux d'entrée ayant des PAPR différents et avec différentes valeurs de l' IBO. Le but sera de mettre en évidence l'influence du PAPR sur le choix du recul de puissance nécessaire permettant un bon compromis dégradation et efficacité énergétique.

Dans le cas des amplificateurs de type Tubes à Ondes Progressive (TOP) ou TWTA (*Travelling Wave Tube Amplifier*) utilisés généralement dans les transmissions par satellite, le modèle de SALEH est généralement utilisé comme modèle mathématique. Les fonctions de transfert AM/AM et AM/PM sont définies par les équations suivantes :

$$\begin{aligned} f_{AM/AM}(r) &= \frac{\alpha_1 r}{1 + \beta_1 r^2} \\ f_{AM/PM}(r) &= \frac{\alpha_2 r^2}{1 + \beta_2 r^2} \end{aligned} \tag{1.28}$$

Les coefficients  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\beta_1$  et  $\beta_2$  sont obtenus comme dans le cas des modèles polynomiaux via des études expérimentales.

Il existe d'autres types de modèles mathématiques permettant de modéliser les caractéristiques AM/AM et AM/PM des amplificateurs de puissance. On peut citer par exemple le modèle Cubique [37, 38] et aussi le modèle de GHORBANI [51]. Une étude détaillée de ces modèles sur des signaux OFDM, OFDM/QAM ou FBMC et OFDM Sur-échantillonné a été menée dans [123].

Dans la section suivante nous allons présenter quelques résultats de simulation permettant :

- De mettre en évidence le compromis entre dégradations (choix de IBO grand) et efficacité énergétique (choix IBO faible)
- De mettre en évidence l'influence que le PAPR peut avoir sur ce compromis.

### 1.3.5 Évaluations des dégradations induites par un amplificateur de puissance

Dans cette section, nous allons évaluer par simulation sous *Matlab* les dégradations générées par un amplificateur de puissance sur le signal de sortie. Ces dégradations sont principalement le bruit hors bande qui peut polluer les canaux adjacents et le bruit *In band* qui peut entraîner une dégradation de l'information transmise par le signal. Concernant la

pollution des canaux adjacents, l'ACPR (pour *Adjacent Channel Power Ratio*) est l'outil le plus connu dans la littérature permettant sa mesure. Comme son nom l'indique, l'ACPR est défini comme étant le rapport entre la puissance utile du signal et la puissance hors bande, voir équation 1.29. Autrement dit, il mesure (en dB) l'écart entre la puissance du lobe principale (bande utile) et la puissance des lobes secondaires (puissance émise dans les canaux adjacents).

$$ACPR = \frac{\int_{BU} \gamma_X(f) df}{\int_{BA} \gamma_X(f) df} \quad (1.29)$$

avec  $\gamma_X(f)$  la densité spectrale du signal  $x(t)$  à transmettre,  $BU$  et  $BA$  désignant respectivement les bandes utile et adjacente de ce signal. Dans cette thèse, nous nous contenterons seulement d'observer l'existence ou non d'une possible émission hors bande via une comparaison des densités spectrales de puissance avant et après amplification. De même dans le cas d'une réduction du PAPR via une méthode entraînant une pollution des canaux adjacents, l'émission hors bande sera évaluée via cette comparaison.

Pour l'évaluation du bruit d'interférence *In Band*, il existe beaucoup de critères permettant la quantification de leur impact sur la qualité du signal émis. Le BER pour *Bit Error Rate* est l'un des critères de mérite fondamental permettant la quantification de la qualité d'une chaîne de transmission. Dans ce chapitre et dans les chapitres à venir aussi le BER sera évalué sous l'hypothèse que le canal est de type AWGN pour *Additive White Gaussian Noise* puisque il s'agira d'évaluer la qualité du signal émis. L'EVM pour *Error Vector Magnitude* est aussi un critère de mérite permettant de quantifier la qualité du signal émis. Il mesure l'erreur quadratique entre le signal de référence (signal idéal) et le signal émis, voir équation 1.30. Il permet donc de quantifier les dégradations de la constellation d'origine.

$$EVM = \sqrt{\frac{\|\mathbf{x}_n - \mathbf{y}_n\|_2^2}{\|\mathbf{x}_n\|_2^2}} \quad (1.30)$$

Avec  $\mathbf{x}_n$  le signal de référence (signal à l'entrée de l'amplificateur de puissance) et  $\mathbf{y}_n$  le signal émis (signal à la sortie de l'amplificateur de puissance). Il existe d'autres critères permettant la quantification de la qualité du signal à la sortie de l'émetteur. On peut citer par exemple le NPR pour *Noise Power Ratio* qui permet de quantifier la puissance du bruit généré à l'intérieur de la bande à la sortie d'un traitement non-linéaire du signal d'intérêt au niveau de l'émetteur. Pour plus de détails sur les différents critères de mérite permettant l'évaluation de la qualité d'un signal à la sortie d'un émetteur, le lecteur peut se référer aux thèses [138, 56, 123].

Dans ce qui suit, nous allons présenter quelques résultats de simulation sous *Matlab* donnant une évaluation de la qualité du signal transmis (BER) à la sortie de l'amplificateur. Nous allons présenter une comparaison des densités spectrales de puissance des signaux avant et après l'amplificateur de puissance. Le modèle de *Rapp* avec  $p = 2$  et  $IBO = \frac{V_{sat}}{\mathbb{E}[\|\mathbf{x}_n\|_2^2]}$  [136] sera utilisé à cet effet. Nous considérerons un système OFDM comportant  $M = 256$  porteuses et modulant des données issues d'une constellation 16-QAM. Nos signaux seront sur-échantillonnés à un facteur  $L = 4$  afin de garantir une bonne approximation du PAPR du signal analogique.

Les Figures 1.12 et 1.13 donnent respectivement une évaluation des dégradations dues à l'amplificateur sur le BER et la remontée des lobes secondaires (pollution canaux adjacents) pour des valeurs de l'IBO égales à 5dB, 7dB et 10dB.

Les résultats de simulation des Figures 1.12 et 1.13 montrent que l'amplificateur génère des dégradations *In Band* (BER) et hors bande (DSP) lorsque celui-ci fonctionne dans sa zone non linéaire. En effet, on remarque que plus le recul d'entrée est faible, plus les dégradations induites par l'amplificateur sont sévères. Notons aussi que pour une

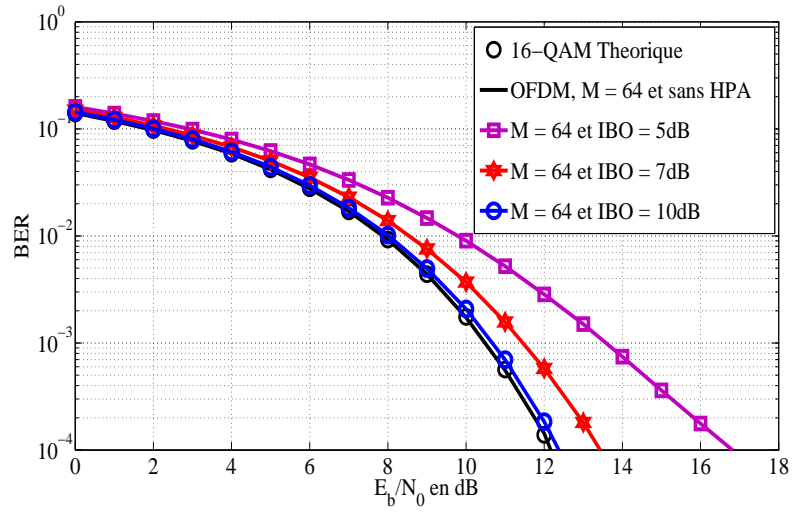


FIGURE 1.12 – Effet de l'amplificateur sur le BER pour différentes valeurs de l'IBO.

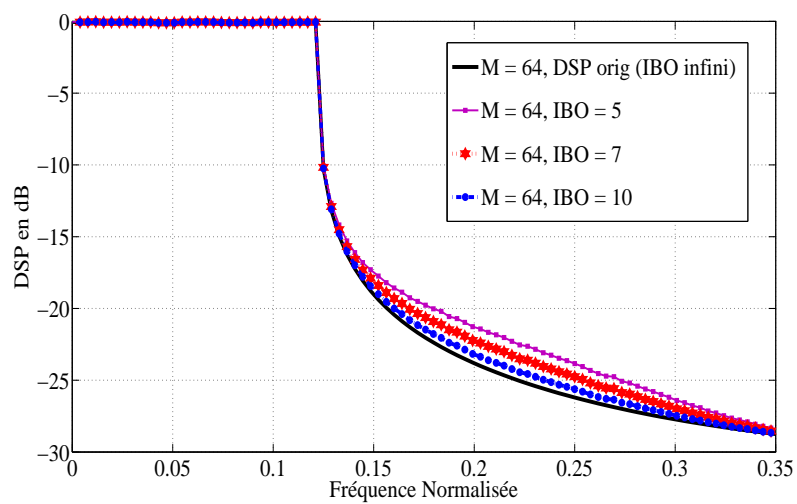


FIGURE 1.13 – Effet de l'amplificateur sur la DSP pour différentes valeurs de l'IBO.

valeur de l'IBO de 10dB le signal à la sortie de l'amplificateur ne subit que de faibles dégradations aussi bien en terme de BER qu'en terme d'émission hors bande (les deux DSP sont quasiment identiques). Cependant, bien que nous l'ayons pas mis en évidence par nos résultats de simulation, il est important de garder à l'esprit que le choix d'une grande valeur de l'IBO signifie que l'amplificateur fonctionnera dans sa zone linéaire et donc le rendement énergétique est trop faible.

Dans ce qui suit, nous allons évaluer l'impact du PAPR sur le choix de l'IBO. Pour ce faire, pour une valeur donnée de l'*Input Back Off* nous allons regarder les dégradations induites par l'amplificateur sur le BER lorsque celui-ci est attaqué par trois signaux comportant chacun  $M = 4$ ,  $M = 8$  et  $M = 256$  et modulant des données issues d'une même constellation (16-QAM). Le but sera ainsi de voir l'impact du PAPR sur le choix du recul de puissance.

Les Figures 1.14 et 1.15 donnent respectivement les CCDF des trois signaux OFDM ( $M = 4$ ,  $M = 8$  et  $M = 64$ ) et les performances en dégradation du BER des signaux après amplification avec la même valeur de l'IBO.

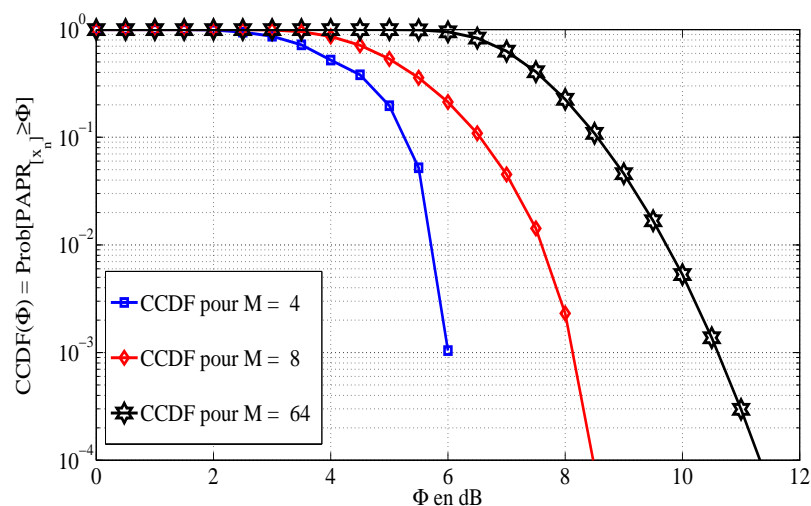


FIGURE 1.14 – Distribution du PAPR en fonction du nombre de porteuses.

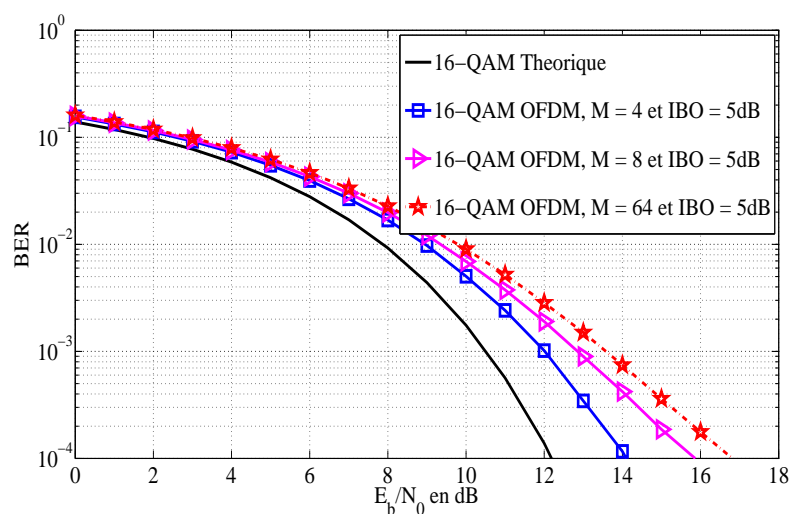


FIGURE 1.15 – Effet de l'amplificateur et du PAPR sur le BER.

Des résultats de simulation des Figures 1.14 et 1.15, on remarque qu'avec le même

point de fonctionnement (même valeur de l'IBO) les dégradations du BER sont plus sévères lorsque le PAPR du signal est plus grand. En effet, on remarque qu'avec un IBO de 5dB, le rapport  $E_b/N_0$  pour un BER à  $10^{-4}$  est d'environ 14dB, 16dB et 17dB pour respectivement  $M = 4$ ,  $M = 8$  et  $M = 64$ . Sur la Figure 1.16 on remarque que les gains en  $E_b/N_0$  pour un BER à  $10^{-4}$  s'accroissent lorsqu'on diminue l'IBO. Ces résultats de simulation montrent tout le bien fondé de la réduction du PAPR des signaux OFDM avant amplification car comme on peut le voir sur la Figures 1.14 ces trois signaux OFDM ne diffèrent que par leur PAPR. En effet leur PAPR à  $10^{-4}$  de la CCDF vaut respectivement 6dB ( $M = 4$ ), 8.25dB ( $M=8$ ) et 11.65dB ( $M=64$ ), voir Figure 1.14.

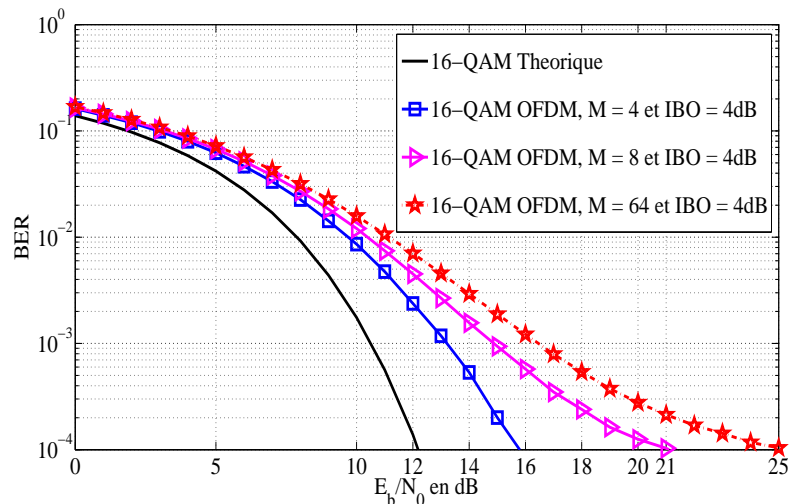


FIGURE 1.16 – Effet de l'amplificateur et PAPR sur le BER.

Comme nous l'avons souligné tout au long de ce chapitre, la problématique de recherche d'un compromis entre non-linéarité et rendement énergétique au niveau de l'amplificateur est due principalement à deux facteurs que sont : Les imperfections des composants électroniques de l'amplificateur de puissance et aux caractéristiques du signal à amplifier. Il en résulte que plusieurs approches peuvent être envisagées pour pallier cette problématique :

1. Utilisation d'amplificateur linéaire avec un bon rendement énergétique :

Traditionnellement, l'amplification d'un signal à enveloppe variable (PAPR élevé) requiert un fonctionnement avec un recul de puissance (IBO) important afin de garantir les performances en linéarité. Malheureusement, un tel choix entraîne de mauvaises performances en rendement énergétique car l'amplificateur de puissance est sur-dimensionné. Pour pallier cette problématique des architectures d'amplificateurs de puissance permettant une meilleure gestion des ressources énergétiques lorsque celui-ci est contraint de fonctionner dans sa zone linéaire existe et font toujours l'objet d'études [102]. La technique de DOHERTY, qui est aujourd'hui présente dans beaucoup d'amplificateurs de puissance [76, 75] des stations de base est l'une des solutions permettant de trouver ce compromis entre linéarité et rendement énergétique. Cette thèse ne s'inscrivant pas dans cette thématique nous n'allons pas nous épancher plus sur cette solution. Notons juste que beaucoup de travaux existent dans ce domaine et tirent leur épingle du jeu de l'avancé dans le domaine de la physique des composants électroniques.

2. Corriger (ou compenser) les non-linéarités de l'amplificateur de puissances au niveau de l'émetteur :



Cette solution va à l'encontre de la solution précédente dans la mesure où elle prône un fonctionnement dans la zone à haut rendement (zone non linéaire) et de compenser les éventuels distorsions qu'engendrera l'amplificateur de puissance en appliquant une fonction de pré-distorsion à l'entrée de l'amplificateur. Sur cette thématique il existe deux principales approches :

(a) Les solutions architecturales :

Comme dans le premier cas, cette approche préconise la mise en place d'architectures permettant d'atténuer les méfaits de la non linéarité des amplificateurs de puissance actuels lorsque ceux ci fonctionnent dans leur zone non linéaire avec un rendement satisfaisant. Il s'agit principalement des architectures basées sur le EER (pour *Enveloppe Elimination and Restoration*), sur le ET (pour *Enveloppe Tracking*), les techniques de *FeedBack* [118, 73] et les techniques *FeedForward* [8]. Pour plus de détails sur ces techniques le lecteur peut se référer à la thèse [54].

(b) Les solutions numériques :

Il s'agit des solutions basées sur les techniques de pré-distorsions numériques en bande de base [85, 68, 99]. L'idée de base de ces techniques consiste à compenser les distorsions dues à la non linéarité de l'amplificateur de puissance par une autre non-linéarité réciproque placée avant l'amplificateur. Autrement dit un élément non linéaire "inverse" (Pré-distordeur) de celui due à l'amplificateur de puissance est placé avant l'amplificateur de puissance, il en résultera dans le cas d'un système de pré-distorsion optimal une fonction de transfert globale (Pré-distordeur+amplificateur de puissance) linéaire. On parle alors de techniques de linéarisation de l'amplificateur de puissance. Tout l'enjeu des techniques de pré-distorsions réside alors dans la recherche de système de pré-distorsion permettant de compenser au mieux que possible les distorsions dues aux non-linéarités de l'amplificateur de puissance.

Notons que de par leur principe, il existe beaucoup de similitudes entre les techniques de pré-distorsion numérique et les techniques de *Comanding* et les techniques de *clipping* inversible.

3. Travailler avec des signaux à enveloppe constante :

Cette solution préconise l'utilisation de techniques de modulation donnant des signaux avec un PAPR nul tel que les signaux MSK (pour *Minimum Shift Keying*) ou avec un faible PAPR tel le SC-FDM (mono-porteuses par paquet) ou les modulations mono-porteuses de manière générale. Dans [56] une étude du PAPR des signaux mono-porteuses pour différents types de filtre de mise en forme et en fonction de la constellation des symboles à transmettre a été menée. Les résultats obtenus montrent que ces signaux sont à PAPR faibles (maximum 8dB). L'inconvénient de cette solution est principalement dû au fait que de tels signaux ne permettent pas de répondre aux besoins de plus en plus croissants en débit des système de télécommunication. Notons aussi que les signaux multi-porteuses ont aussi l'avantage d'offrir une meilleure robustesse vis à vis des canaux multi-trajets et offrent aussi une bonne efficacité spectrale.

4. Réduire le PAPR du signal avant amplification :

Cette solution consiste à réduire la dynamique temporel du signal avant amplification. L'objectif de la réduction du PAPR est de permettre d'avoir un bon compromis entre rendement énergétique (utilisation d'un faible IBO) et linéarité (Dégradation



du BER, émission hors bande). En effet, d'après les résultats de simulation présentés précédemment, on remarque que plus le PAPR est faible, plus il est possible de travailler avec un recul de puissance petit sans engendrer de sévères dégradations du signal (Dégradation du BER et émissions hors bande).

Dans cette thèse nous nous intéresserons à la quatrième solution, c'est à dire la réduction du PAPR. Et comme l'indique le titre de ce manuscrit de thèse, nous allons nous focaliser sur les techniques dites d'ajout de signal. Le chapitre suivant sera consacré à l'état de l'art des techniques de réduction du PAPR.

## 1.4 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons dans un premier temps fait un bref rappel de l'histoire des télécommunications et des modulations multiporteuses en particulier de l'OFDM. Nous avons ensuite mis en évidence la popularité de l'OFDM en citant quelques uns des standards de télécommunication utilisant ce type de modulation. Un rappel du procédé de modulation et de démodulation numérique d'un système OFDM a été fait. Avec ce travail, nous avons défini la notion du PAPR et donné une caractérisation théorique du PAPR d'un signal OFDM. Ces résultats théoriques ont été ensuite validés via des résultats de simulation.

Ce chapitre a aussi permis une caractérisation des amplificateurs de puissance ainsi que l'impact du PAPR du signal à amplifier sur les performances en termes de dégradations du signal après amplification et de rendement énergétique de l'amplificateur. D'une part, nous avons montré dans ce chapitre que plus l'IBO est grand moins le signal est dégradé et qu'en contre partie l'efficacité énergétique de l'amplificateur de puissance devient faible. Ces résultats montrent l'intérêt de faire un compromis entre rendement énergétique et dégradations du signal. D'autre part, nous avons vu que le PAPR peut avoir un rôle déterminant sur ce compromis. En effet, nous avons montré que plus le PAPR est grand, plus il est difficile de concilier efficacité énergétique et dégradation du signal. Cette conclusion justifie l'intérêt de la réduction du PAPR avant amplification.

# Chapitre 2

## État de l'art des techniques de réduction du PAPR

### Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>27</b>
<b>1.2</b>	<b>Principe de Modulation OFDM et Caractérisation du PAPR d'un signal OFDM</b>	<b>27</b>
1.2.1	Principe de l'OFDM	28
1.2.2	Émetteur et Modulateur numérique d'un système OFDM	29
1.2.3	Définition et Caractérisation du PAPR d'un signal OFDM	31
1.2.3.1	Définition du PAPR	31
1.2.3.2	Caractérisation du PAPR d'un signal OFM	32
<b>1.3</b>	<b>Principe et Caractérisation de l'Amplificateur de Puissance</b>	<b>37</b>
1.3.1	Définition	37
1.3.2	Caractérisation de l'amplificateur de puissance : Les conversions AM/AM et AM/PM	38
1.3.3	Les paramètres d'intérêt de l'amplificateur de puissance	39
1.3.4	Modélisation mathématique des comportements AM/AM et AM/PM des amplificateurs de puissance	41
1.3.5	Évaluations des dégradations induites par un amplificateur de puissance	42
<b>1.4</b>	<b>Conclusion</b>	<b>48</b>

---

### 2.1 Introduction

Depuis l'avènement des modulations multiporteuses, le PAPR est devenu un paramètre important dans l'évaluation des performances des systèmes de télécommunications. En effet, les amplificateurs de puissance étant conçus pour fonctionner au plus près de leur zone de saturation afin d'optimiser la consommation d'énergie, l'amplification des signaux à fort PAPR tels que les signaux multiporteuses comme l'OFDM en particulier pose un sérieux problème de compromis entre :

- Puissance du signal à transmettre

- Consommation d'énergie (Rendement d'énergie)
- Distorsions induites par l'amplificateur sur le signal

Pour pallier ce problème, deux solutions peuvent être envisagées avec comme objectif de réduire au maximum les dégradations du signal et la pollution des canaux adjacents du fait de la remontée des lobes secondaires du signal après amplification :

1. Surdimensionner l'amplificateur : Privilégier la non-dégradation et la non-pollution des canaux adjacents au détriment du rendement énergétique de l'amplificateur.

Cette solution revient à travailler loin de la zone des non-linéarités (zone de saturation, voir chapitre 1) de l'amplificateur de puissance en choisissant un recul de puissance (IBO) important. Cependant, avec une telle solution, le rendement énergétique de l'amplificateur est très faible. En outre, plus le PAPR du signal à amplifier est élevé, plus le recul de puissance nécessaire est important et plus le rendement est faible. Cette solution n'est pas adaptée pour les systèmes à faible ressources énergétiques. En guise d'illustration, le choix d'une forme d'onde mono-porteuse pour la liaison montante de la norme LTE est principalement motivé par cela.

2. Réduire le PAPR du signal avant amplification : Recherche du meilleur compromis.

Pour trouver le meilleur compromis entre le rendement énergétique et la dégradation du signal (BER) ainsi que la pollution des canaux voisins, la réduction du PAPR des signaux avant amplification devient primordiale dans le cas des modulations multiporteuses. En effet, la réduction du PAPR a pour but principal de réduire au maximum le recul de puissance nécessaire pour une amplification au plus près de la zone de saturation.

L'objectif de ce chapitre est de faire un état de l'art non exhaustif des techniques de réduction de PAPR en particulier les techniques dites d'ajout de signal. En effet, ces techniques offrent bon nombre d'avantages que nous verrons ultérieurement et ont la particularité d'offrir généralement un bon compromis entre complexité numérique et performances en réduction du PAPR. A cela, il faut ajouter que ces techniques sont généralement à compatibilité descendante, c'est à dire qu'à la réception aucun travail supplémentaire n'est nécessaire pour la récupération du signal.

Tout d'abord notons que l'étude du PAPR et plus précisément l'analyse du PAPR est antérieure à l'expansion fulgurante des modulations multiporteuses ainsi que les débuts de leur utilisation dans les standards des systèmes de télécommunications tels que le DVB-T, l'ADSL ou encore la norme IEEE 802.11a/g. Par exemple, on peut voir que dès les années 1950, SHAPIRO [119], RUDIN [115] et SCHROEDER [117] se sont intéressés à l'étude du PAPR. Cependant, c'est avec le succès des modulations multiporteuses telle que l'OFDM que la réduction du PAPR a vraiment focalisé l'intérêt des chercheurs et des industriels.

De nos jours il existe une multitude de techniques de réduction du PAPR dans la littérature [48]. De part leur diversité d'approche, il est difficile de trouver des critères de comparaison absolus entre les différentes techniques de réduction du PAPR, en dehors bien entendu des performances en termes de réduction du PAPR elle même. En effet, toutes les techniques de réduction du PAPR requièrent généralement des compromis soit en termes de complexité numérique, de dégradations du BER, de pollution des canaux adjacents due à la remontée des lobes secondaires du signal après réduction du PAPR pour certaines techniques ou en termes d'augmentation ou de diminution de la puissance moyenne du signal après réduction du PAPR, ou de débit. Il est de coutume dans le monde

de la recherche de s'accorder sur des critères de comparaison afin de permettre un arbitrage plus ou moins cohérent entre les différentes contributions apportées sur le domaine. Ainsi, à cet effet, les techniques de réduction du PAPR peuvent être réparties globalement en trois grandes familles que sont : les techniques de codages, les techniques probabilistes et les techniques dites d'ajout de signal [66]. Pour chacune de ces techniques, on peut observer des "points faibles" communs qui peuvent servir de critères de comparaison. En guise d'illustration, on peut citer par exemple les techniques de distorsions ou de *clipping* qui font parties de la famille des techniques dites d'ajout de signal [97]. Ces techniques comme toute technique de saturation, entraînent des distorsions *In-Band* (dégradation du BER) et des distorsion hors-*Band* (remontée des lobes secondaires). Nous reviendrons en détail sur ces techniques dans la section 2.4.2.1 de ce chapitre.

## 2.2 Notations et définitions générales de la thèse

Dans cette section nous allons fixer les principales définitions et notations qui seront utilisées tout au long de ce document. Puisque il est question de réduction de PAPR qui se fait généralement en bande de base, soulignons d'emblée que sauf précision de notre part tous nos signaux seront définis en bande base.

### Notations Générales

Dans cette thèse les échantillons dans le domaine temporel seront notés en *minuscule et italique* et les échantillons dans le domaine fréquentiel seront notés en *majuscules et italiques*. Les vecteurs contenant des échantillons temporels seront notés en *minuscule gras* et les vecteurs contenant des échantillons fréquentiels seront notés en *majuscule et gras*.

Les matrices seront notées en *majuscule ajourée* ou *blackboard* en anglais (ex.  $\mathbb{X}$ ,  $\mathbb{A}$ , etc ....).

Les ensembles ou sous ensembles seront notés en *Majuscule gras et italique* (ex.  $\mathcal{X}$ ,  $\mathcal{I}$ ,  $\mathcal{R}$  etc). Le nombre d'éléments (cardinal) de ces ensembles sera désigné par  $N_{\mathcal{X}}$ ,  $N_{\mathcal{I}}$ , etc. Cette convention de notation sera valable pour toutes les matrices et ensembles que nous définirons dans ce document. Dans certains cas, nous serons amenés à mettre des *indices* ou des *exposants* pour notifier une particularité de tels matrices ou ensembles.

Ainsi dans cette thèse, la notation  $\mathbb{X}_{I,J}$  désignera une matrice de dimension  $(I, J)$ . Si  $\mathcal{X}$  est un sous ensemble d'index (ou de numéro) inclus dans  $[0, \dots, J - 1]$  avec  $N_{\mathcal{X}}$  le cardinal de l'ensemble  $\mathcal{X}$ , alors  $\mathbb{X}_{I,N_{\mathcal{X}}}^{\mathcal{X}}$  désignera la sous matrice de  $\mathbb{X}_{I,J}$  ne contenant que ces colonnes indexées dans  $\mathcal{X}$ . Elle sera donc de dimension  $(I, N_{\mathcal{X}})$ . La compréhension de cette convention de notation sera d'une grande utilité dans le chapitre 5.

La  $p$ -ème ligne (respect. colonne) de la matrice  $\mathbb{X}$  sera noté par  $\mathbf{X}_p^{\text{Lig}}$  (respect.  $\mathbf{X}_p^{\text{Col}}$ ). En appliquant cette convention de notation à la matrice  $\mathbb{X}_{I,J}$  alors la  $p$ -ème ligne (respect. colonne) sera  $\mathbb{X}_{I,J,p}^{\text{Lig}}$  (respect.  $\mathbb{X}_{I,J,p}^{\text{Col}}$ ). De même pour la matrice  $\mathbb{X}_{I,N_{\mathcal{X}}}^{\mathcal{X}}$  où la  $p$ -ème ligne (respect. colonne) sera  $\mathbb{X}_{I,N_{\mathcal{X}},p}^{\mathcal{X},\text{Lig}}$  (respect.  $\mathbb{X}_{I,N_{\mathcal{X}},p}^{\mathcal{X},\text{Col}}$ ). Pour des raisons de simplicité, pour une matrice de taille  $(I, I)$  (matrice carré), elle sera désignée par  $\mathbb{X}_I$ . Avec ces conventions de notations nous allons dans ce qui suit définir d'abord les matrices que nous utiliserons dans le cadre de l'état de l'art des techniques basées sur la *Tone Reservation*. Mais avant rappelons juste quelques notations déjà adoptées dans le chapitre précédent et qui seront aussi reconduites dans ce chapitre et les chapitres à venir.

Comme dans le chapitre 1,  $x_n(t)$  désignera le symbole OFDM émis à l'instant  $nT_u$ , i.e  $nT_u \leq t < (n + 1)T_u$  et comportant  $M$  porteuses.

Après échantillonnage,  $\mathbf{x}_n = [x_{n,0}, \dots, x_{n,ML-1}]$  désignera le vecteur symbole contenant

les échantillons de  $x_n(t)$ . De même les notations  $T_{\text{Nyq}}$  et  $T_e$  désigneront respectivement les périodes d'échantillonnage Nyquist et sur-Nyquist avec  $T_e = \frac{T_{\text{Nyq}}}{L}$  et  $L \geq 1$  désignant le facteur de sur-échantillonnage. La notation  $x_{n,l}$  désigne l'échantillon de  $x(t)$  à l'instant  $nT_u + lT_e$  ou l'échantillon de  $x_n(t)$  à l'instant  $lT_e$  avec  $T_e$  la cadence d'échantillonnage.

Les signaux  $c(t)$  et  $c_n(t)$  désigneront respectivement les signaux de correction du PAPR de  $x(t)$  et  $x_n(t)$  dans le cas des techniques dites d'ajout de signal. En discret, ils seront respectivement désignés par  $\mathbf{c}$  et de  $\mathbf{c}_n$ .

La notation  $\mathbf{y}_n$  désignera le symbole  $\mathbf{x}_n$  après réduction de PAPR i.e  $\mathbf{y}_n = \mathbf{x}_n + \mathbf{c}_n$ . Dans le cas d'une technique itérative, nous adopterons plutôt les notations  $\mathbf{x}_n^{(k)}$  et  $\mathbf{c}_n^{(k)}$  pour désigner respectivement le signal après réduction à la  $k$ -ième étape et le signal de correction du PAPR associé à cet étape. Autrement dit, on aura  $\mathbf{x}_n^{(k)} = \mathbf{x}_n^{(k-1)} + \mathbf{c}_n^{(k)}$ .

## Notations pour les chapitres 2 et 4

Dans le chapitre 1, nous avons vu que le vecteur  $\mathbf{x}_n = [x_{n,0}, \dots, x_{n,ML-1}]$  peut être obtenu via une IDFT de taille  $ML$  appliquée sur le vecteur  $\check{\mathbf{X}}_n$  [126]. Ainsi d'un point de vue matricielle on a :

$$\mathbf{x}_n = \mathbb{F}_{ML} \check{\mathbf{X}}_n \quad (2.1)$$

Avec  $\mathbb{F}_{ML}$  la matrice de la **Transformée de Fourier Inverse** de dimension  $(LM, LM)$ , définie par l'équation (2.2). Notons qu'il est de coutume d'utiliser la notation  $\mathcal{F}^{-1}$  pour désigner une opération de transformée de Fourier inverse. Cependant dans cette thèse, puisque cette opération est formulée sous forme d'un produit matriciel, nous avons donc décidé d'utiliser la convention de notation des matrices définie précédemment pour définir la matrice de la **Transformée de Fourier Inverse**.

$$\mathbb{F}_{ML} = \sqrt{\frac{1}{M}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & e^{j2\pi 1 \cdot \frac{1}{LM}} & e^{j2\pi 1 \cdot \frac{2}{LM}} & \dots & e^{j2\pi 1 \cdot \frac{LM-1}{LM}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & e^{j2\pi k \cdot \frac{1}{LM}} & e^{j2\pi k \cdot \frac{2}{LM}} & \dots & e^{j2\pi k \cdot \frac{LM-1}{LM}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & e^{j2\pi(LM-1) \cdot \frac{1}{LM}} & e^{j2\pi(LM-1) \cdot \frac{2}{LM}} & \dots & e^{j2\pi(LM-1) \cdot \frac{LM-1}{LM}} \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

Rappelons que le vecteur  $\check{\mathbf{X}}_n$  est défini comme suit :

$$\check{\mathbf{X}}_n = \left[ X_{0,n}, \dots, X_{\frac{M}{2}-1,n}, \underbrace{0, \dots, 0}_{M(L-1) \text{ zéros}}, X_{\frac{M}{2},n}, \dots, X_{M-1,n} \right]^T \quad (2.3)$$

La méthode *Tone Reservation* consiste à réserver des porteuses pour porter le signal de correction du PAPR comme nous allons le voir dans ce chapitre et dans les chapitres 5 et 4. Ainsi, les notations et définitions à venir seront utiles pour sa compréhension.

Tout d'abord notons que de l'équation (2.3), on peut remarquer que les  $M(L-1)$  composantes du milieu du vecteur  $\check{\mathbf{X}}_n$  sont nulles. Donc les  $M(L-1)$  colonnes du milieu de la matrice  $\mathbb{F}_{ML}$  n'interviennent pas dans le produit  $\mathbb{F}_{ML} \check{\mathbf{X}}_n$  de l'équation (2.1). Ces  $M(L-1)$  colonnes sont dues à l'opération de zéro *padding* et sont généralement désignées par porteuses "Fantômes" [138] ou porteuses Hors Bandes. Quant aux  $M/2$  premières et

dernières colonnes de la matrice  $\mathbb{F}_{ML}$ , elles sont désignées par porteuses *In Band*. Notons par  $\mathcal{I}_{IB}$  et  $\mathcal{I}_{OOB}$  les ensembles permettant d'indexer respectivement les porteuses *In Band* et les porteuses Hors bande. Ils sont définis par :

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_{IB} &= \left[ 0, 1, \dots, \frac{M}{2} - 1, LM - \frac{M}{2}, LM - \frac{M}{2} + 1, \dots, LM - 1 \right] \\ \mathcal{I}_{OOB} &= \left[ \frac{M}{2}, \frac{M}{2} + 1, \dots, LM - \frac{M}{2} - 1 \right]\end{aligned}\tag{2.4}$$

Puisque les  $M(L - 1)$  colonnes du milieu de la matrice  $\mathbb{F}_{ML}$  n'interviennent pas dans le produit  $\mathbb{F}_{ML}\check{\mathbf{X}}_n$ . Il vient alors que l'équation (2.1) peut être réécrite en ignorant les porteuses Fantômes (Colonnes de la matrice  $\mathbb{F}_{ML}$  indexées dans  $\mathcal{I}_{OOB}$ ). Autrement dit on a :

$$\mathbf{x}_n = \mathbb{F}_{ML,M}^{\mathcal{I}_{IB}} \mathbf{X}_n\tag{2.5}$$

avec  $\mathbb{F}_{ML,M}^{\mathcal{I}_{IB}}$  la matrice de dimension  $(ML, M)$  définie comme suit :

$$\mathbb{F}_{ML,M}^{\mathcal{I}_{IB}} = \sqrt{\frac{1}{M}} \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 & & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \dots & e^{j\pi 2 \frac{\frac{M}{2}-1}{LM}} & & e^{j\pi 2 \frac{LM-\frac{M}{2}}{LM}} & \dots & e^{j\pi 2 \frac{LM-1}{LM}} \\ \vdots & \dots & \vdots & & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & \dots & e^{j\pi 2m \frac{\frac{M}{2}-1}{LM}} & & e^{j\pi 2m \frac{LM-\frac{M}{2}}{LM}} & \dots & e^{j\pi 2m \frac{LM-1}{LM}} \\ \vdots & \dots & \vdots & & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & \dots & e^{j\pi 2(LM-1) \frac{\frac{M}{2}-1}{LM}} & & e^{j\pi 2(LM-1) \frac{LM-\frac{M}{2}}{LM}} & \dots & e^{j\pi 2(LM-1) \frac{LM-1}{LM}} \end{bmatrix}\tag{2.6}$$

On constate que la matrice  $\mathbb{F}_{ML,M}^{\mathcal{I}_{IB}}$  est la sous matrice de  $\mathbb{F}_{ML}$  ne contenant seulement que ses  $\frac{M}{2}$  premières et dernières colonnes, autrement dit elle ne contient que les colonnes de  $\mathbb{F}_{ML}$  qui sont indexées dans l'ensemble  $\mathcal{I}_{IB}$ . On remarque que cette notation est en accord avec les conventions de notation précédemment annoncées.

Cette matrice va nous servir à définir une matrice qui sera beaucoup utilisée dans les techniques *Tone Reservation* que nous verrons dans ce chapitre et dans les chapitres 4 et 5. Comme nous l'avons mentionné précédemment, la TR consiste à réserver des porteuses qui seront dédiées exclusivement à la réduction du PAPR. Ainsi dans tout ce document  $\mathcal{R} = [m_1, \dots, m_{N_R}] \subset [0, 1, \dots, M - 1]$  désignera le jeu de porteuses réservées sur le symbole  $\mathbf{x}_n$  pour la réduction du PAPR.

La matrice  $\mathbb{F}_{ML,N_R}^{\mathcal{R}}$  désignera la sous matrice de  $\mathbb{F}_{ML,M}^{\mathcal{I}_{IB}}$  ne contenant que ces colonnes indexées dans  $\mathcal{R}$ . Nous désigneront par " Matrice TR" cette matrice et elle sera utilisée pour la reformulation des techniques basées sur la *Tone Reservation* dans le chapitre de l'état de l'art (chapitre 2) et aussi dans les chapitres 4 et 5.

Dans le chapitre 5 et aussi dans la section 4.2 du chapitre 4, nous parlerons de la parité des porteuses réservées. Cette parité s'identifiera par les indices (ou numéros de ces porteuses) avec la convention que l'indexation commence à partir de zéro (0). Autrement dit, la porteuse  $m \in [0, 1, \dots, M - 1]$  est paire si  $m$  l'est et impaire si  $m$  est impaire.

Ainsi, dans ce document  $\mathcal{R}^P$  et  $\mathcal{R}^I$  sont respectivement les sous ensemble de  $\mathcal{R}$  ne contenant que les porteuses paires et les porteuses impaires.

## 2.3 Les techniques de Codage et Les techniques Probabilistes

Dans cette section nous allons effectuer un bref état de l'art de quelques techniques de codages et probabilistes.

### 2.3.1 Les Techniques de Codages

Les techniques de codage font parties des premières solutions proposées pour la réduction du PAPR. Déjà avant même qu'apparaissent les premiers standards de télécommunications utilisant les modulations multiporteuses, RUDIN dans [115] et SHAPIRO dans [119] s'étaient focalisés sur la réduction du PAPR par codage en trouvant des séquences adaptées. Les techniques de codage, comme leur nom indique consistent à utiliser un codeur particulier afin d'éviter d'envoyer des signaux à fort PAPR. Elles agissent en général sur le flux binaire avant le module de *mapping*. Graphiquement, la Figure 2.1 définit le *frame work* des techniques de codage.

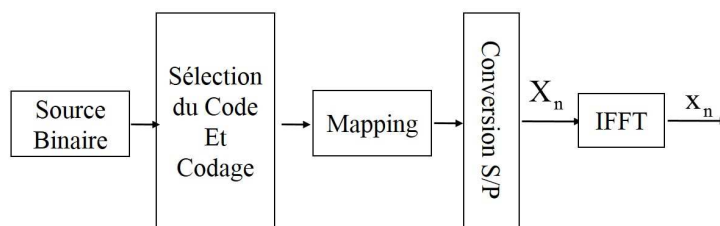


FIGURE 2.1 – *Frame work* des techniques de codage pour la réduction du PAPR

Intuitivement, l'idée des techniques de codage est de ne transmettre que des symboles à faible PAPR en utilisant un codeur qui à chaque symbole de l'alphabet associe un symbole à faible PAPR. Pour un système OFDM donné (nombre de porteuses et constellation des symboles à transmettre), le nombre de symboles à fort PAPR étant généralement très grand, les techniques de codages entraînent donc nécessairement de la redondance. Cela va entraîner une perte du débit utile. A cela, il faut ajouter que la complexité numérique en émission pour trouver le bon symbole à envoyer et en réception pour décoder et éventuellement corriger l'information utile entraîne une complexité supplémentaire pour le système.

Notons qu'en fonction du type de codeur utilisé, le lecteur peut avoir plus d'information sur ces techniques en se référant aux articles [128] (utilisation de code en blocs) et [29, 30] codes de Reed Muller (RM). La thèse de YVES LOUET [94] constitue aussi une bonne référence dans le sujet ainsi que le rapport d'étude réalisé par l'équipe SCEE [66].

### 2.3.2 Les techniques Probabilistes

Il s'agit principalement des techniques basées sur la méthode PTS (*Partial Transmit Sequences*) [46, 104], des méthodes basées sur l'approche SLM (*Selective Mapping*) [6, 13] ou encore la méthode *Random Phasor* [101]. Ces méthodes sont basées sur des représentations diverses d'un symbole, et donc consistent à choisir la meilleure représentation,



i.e celle donnant le PAPR le plus faible. Ces techniques nécessitent généralement la transmission d'une information supplémentaire (*Side Information*) ou un travail supplémentaire pour permettre au récepteur de récupérer l'information utile. Elles sont donc, comme les méthodes de codage à compatibilité non descendante.

La méthode SLM agit sur les symboles à la sortie du *mapping* en les multipliant par  $S$  vecteurs différents de même taille que le symbole choisi de telle sorte que l'un des symboles obtenus après la multiplication par ses  $S$  vecteurs donne un symbole à faible PAPR après IFFT. Graphiquement, en désignant par  $\mathbf{V}^{(s)} = [V_0^{(s)}, \dots, V_{M-1}^{(s)}]$  avec  $s = 1, \dots, S$ , les vecteurs contenant les coefficients de pondération, la Figure 2.2 donne une description du principe de base de la méthode SLM.

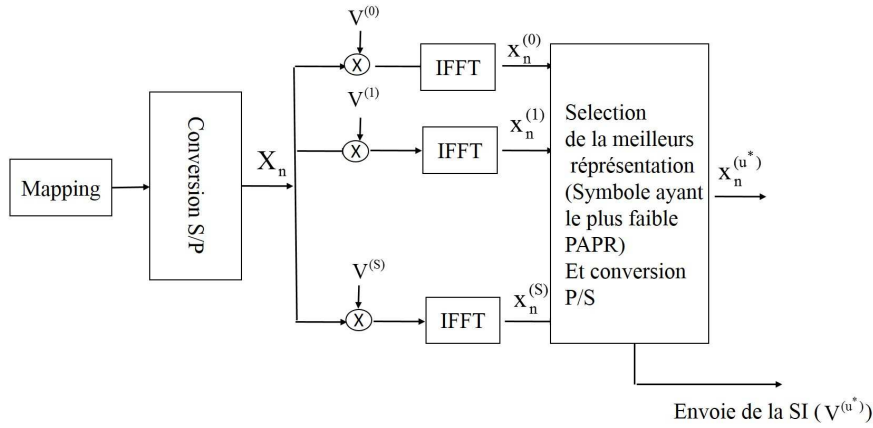


FIGURE 2.2 – *Frame work* de la méthode Selective Mapping

Pour chaque  $s = 1, \dots, S$  les composantes du vecteur  $\mathbf{V}^s = \{V_k^{(s)}\}$   $k = 0, \dots, M - 1$  sont définies comme suit :

$$V_k^{(s)} = e^{j\phi_k^{(s)}} \text{ avec } \phi_k^{(s)} \in [0, 2\pi[ \quad (2.7)$$

D'après la Figure 2.2, la méthode SLM consistera en 2 étapes :

1. Calcul des  $S$  symboles OFDM possibles définis pour  $s = 1, \dots, S$  comme suit :

$$\mathbf{x}_{n,l}^{(s)} = \sum_{m=0}^{M-1} (X_{m,n} * V_m^{(s)}) e^{j2\pi \frac{lm}{M}}, \text{ pour } l = 0, \dots, M - 1 \quad (2.8)$$

2. Choisir le symbole ayant le plus petit PAPR  $\mathbf{x}_n^{(u^*)}$  et le transmettre avec le vecteur  $\mathbf{V}^{(u^*)}$  (SI) pour le décodage en réception.

$$u^* = \underset{u}{\operatorname{argmin}} \underbrace{\frac{\|\mathbf{x}_n^{(u)}\|_\infty^2}{P_{\mathbf{x}_n^{(u)}}}}_{\text{PAPR du symbole } \mathbf{x}_n^{(u)}} \quad (2.9)$$

Les performances en réduction du PAPR de cette méthode dépend fortement de la statistique des  $\mathbf{V}^{(s)}$  ainsi que de la taille  $S$  de la famille. Plus  $S$  est grand, plus il est probable de trouver un représentant avec un PAPR faible et plus la méthode est complexe [6]. En effet, la complexité numérique de cette méthode en dehors de l'évaluation du PAPR de chaque symbole est  $\mathcal{O}(SM \log(ML))$ . Ainsi dans [110, 131] les auteurs



ont proposé des méthodes permettant de réduire considérablement la complexité de la méthode SLM. Pour ce faire, dans [110], l'auteur a proposé la méthode DSLM pour *Dynamic Selective Mapping* pour réduire la complexité numérique de la méthode SLM en proposant d'utiliser des buffers afin de réduire le nombre de représentations possibles de chaque symbole OFDM. Dans [131] l'auteur exploite les propriétés de la matrice IFFT pour réduire considérablement la complexité de la méthode SLM qui est due principalement aux bancs de IFFT nécessaires pour calculer toutes les différentes représentations du symbole OFDM. Ainsi, il montre que les  $S$  IFFT effectuées dans [6], voir Figure 2.2 peuvent être ramener à 2 IFFT et avec quasiment les mêmes performances en réduction du PAPR. Néanmoins la méthode SLM présente deux inconvénients majeurs. Le premier est lié à la perte du débit due au fait que pour chaque symbole on doit envoyer une *Side Information* SI pour le décodage en réception. Le deuxième est lié au fait que la qualité de la transmission du SI impactera fortement le BER du symbole. Pour pallier ce problème de débit, des techniques *Blind* basées sur le SLM ont été proposées dans [13, 22, 23]. Dans [13] l'auteur propose d'envoyer simultanément le symbole OFDM  $\mathbf{x}_n^{(u^*)}$  ainsi que l'information nécessaire pour le décodage de ce symbole  $\mathbf{V}^{(u^*)}$  en utilisant un codeur. Cette méthode permet ainsi, de gagner en débit par rapport à la méthode SLM initiale [6]. Cependant, elle reste toujours très sensible au canal de transmission. Dans [22, 23] les auteurs proposent d'utiliser les porteuses pilotes réservées pour l'identification du canal de transmission pour transmettre les  $\mathbf{V}^{(u^*)}$ . Malgré tous ces défis que posent les techniques basées sur la SLM, il est important de souligner que du fait de leur bonnes performances en termes de réduction du PAPR, la méthode SLM continue toujours à attirer l'attention de la communauté.

Les techniques basées sur l'approche PTS [46, 104] sont similaires à celles basées sur les méthodes SLM dans le sens où elles consistent elles aussi à regarder différentes représentations d'un symbole OFDM et d'en choisir la représentation ayant le PAPR le plus bas. Ces méthodes, comme pour les méthodes SLM, nécessitent elles aussi l'envoi d'une SI pour le décodage en réception. Graphiquement, le principe des méthodes PTS peut être illustré par la Figure 2.3

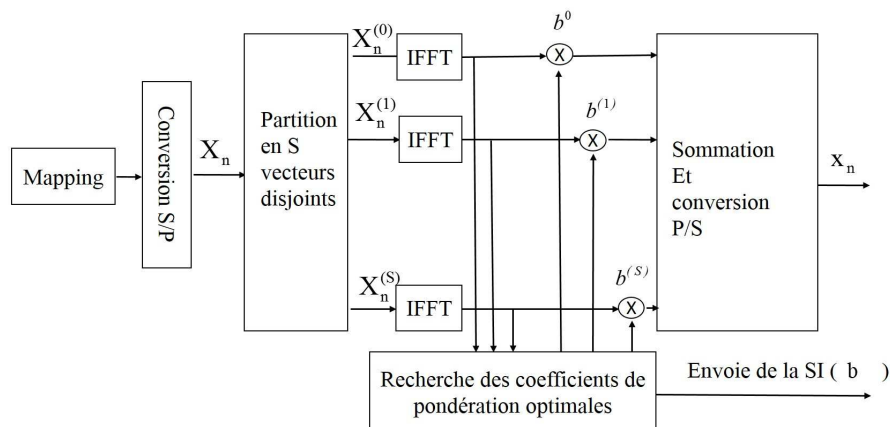


FIGURE 2.3 – *Frame work* de la méthode Partial transmit Sequences

La méthode PTS se confronte à deux défis majeurs que sont la réduction de la complexité numérique et le besoin de rendre la méthode "aveugle" ou "semi-aveugle" c'est à dire de ne pas avoir besoin d'envoyer une information supplémentaire au récepteur pour les besoins du décodage de l'information utile. En effet, on remarque sur la Figure 2.3 que la méthode PTS nécessite au moins  $S$  IFFT si l'on néglige l'opération de pondération ainsi que le coût du calcul des coefficients de pondération. En outre il est

nécessaire de connaître les coefficients de pondération utilisés par l'émetteur pour avoir une représentation du symbole OFDM avec un PAPR acceptable afin de récupérer le symbole initial. Notons que le module de recherche des coefficients de pondération optimaux décrit dans le Figure 2.3 est identique à celui de la méthode SLM, voir équation (2.9). Il consiste à choisir parmi plusieurs  $\mathbf{b}$  possibles celui qui donne le bon PAPR. On remarque ainsi, que plus le nombre de blocs (les partitions du vecteur  $\mathbf{X}_n$ ) est important plus la recherche exhaustive des coefficients de pondération adéquats est coûteuse.

Pour répondre à ces deux défis majeurs de la méthode PTS, beaucoup de travaux ont été proposés dans la littérature. Ainsi dans [91, 71, 70, 24] les auteurs ont obtenu des gains importants en termes complexité numérique. Ces gains en complexité sont généralement obtenus grâce à une amélioration du processus de recherche des coefficients de pondération [71] ou en réduisant le coût de calcul des  $S$  composantes du signal OFDM obtenues après partition de  $\mathbf{X}_n$  [91]. En effet, dans [71], en lieu et place d'une recherche exhaustive des coefficients de pondération proposée dans [46], l'auteur propose l'utilisation de techniques d'optimisation non linéaires en reformulant le problème comme un recuit simulé (*Simulated annealing*). Dans [91], l'auteur propose d'exploiter les propriétés de la matrice IFFT afin de réduire le coût du calcul des  $S$  composantes du symbole OFDM obtenu après partition de  $\mathbf{X}_n$  comme avec la méthode SLM [131].

Comme pour la méthode SLM, ils existent aussi des techniques PTS aveugles dans la mesure où aucune information supplémentaire n'est transmise à l'émetteur pour le décodage du symbole d'intérêt [120, 28, 24]. Ces méthodes exploitent les porteuses pilotes et le fait que le canal agit sur le symbole via une convolution circulaire pour estimer les coefficients de pondération utilisés à l'émission pour la réduction du PAPR. Ainsi, ces méthodes exigent des travaux supplémentaires en réception donc elles ne sont pas à compatibilité descendante.

## 2.4 Les techniques dites d'ajout de signal

Les techniques dites "d'ajout de signal" comme leur nom indique consistent à ajouter un signal additionnel  $\mathbf{c}_n$  au signal d'intérêt  $\mathbf{x}_n$  pour réduire son PAPR. Ces techniques jouissent d'une grande popularité dans la littérature à cause d'une part de leur simplicité d'implémentation dans des systèmes à faibles ressources calculatoires et d'autre part du fait que ces techniques sont généralement à compatibilité descendante. A titre d'illustration, la méthode TR-GP (pour Gradient Project) [125] a été suggérée pour la réduction du PAPR dans la norme DVB-T2 qui dispose pour la première fois des porteuses dédiées à cet effet. Cette méthode est de nos jours, la méthode qui offre le meilleur compromis entre performances en réduction du PAPR, complexité numérique et dégradation du signal (augmentation de la puissance moyenne) parmi les méthodes dites d'ajout de signal. Nous reviendrons plus en détail sur cette approche dans la sous section 2.4.2.2. Notons aussi que les techniques dites d'ajout de signal ont aussi l'avantage de permettre de faire une évaluation à *a priori* de l'impact du signal de correction sur la qualité du signal utile (Dégradations du BER engendrées, émissions hors bandes occasionnées, variations de la puissance moyenne, etc...) ce qui est fondamental dans les systèmes de télécommunications. Par exemple la *Tone Reservation* [126] est une technique de réduction de PAPR dites d'ajout de signal sans distorsion du BER et sans émission hors bandes. Les techniques de *clipping* tel que [89, 77] sont aussi des techniques dites ajout de signal [61] avec distorsions (dégradations du BER et pollution des canaux adjacents). Cependant, pour un seuil de *clipping* donné il est possible d'évaluer les dégradations qui peuvent en résulter indépendamment du canal de transmission. Par contre pour les techniques de codages [128, 108] ou les techniques probabilistes tel que les techniques PTS (pour *Partials*

*Transmit Sequences*) [20] ou les approches SLM (pour *Selective Mapping*) [13], dans leur majorité, les dégradations du BER dépendent de la qualité de réception de l'information supplémentaire envoyée afin de décoder le signal d'intérêt, i.e le signal avant réduction du PAPR. Cet avantage des techniques dites d'ajout de signal est due au fait que ces techniques dans leur méthodologie de réduction du PAPR peuvent être décomposées en deux étapes (ou phase) :

1. Étape d'insertion : Cette étape définit la manière dont le signal de correction du PAPR va être "inséré". Elle peut se faire dans le domaine fréquentiel comme dans le cadre de la méthode *Tone Reservation* ou *Tone Injection* [126, 87], au niveau de la constellation comme avec la méthode ACE [72] ou dans l'espace (en transposant le signal de correction du PAPR sur une porteuse disjointe à celle du signal utile afin de pouvoir mettre un filtrage passe bande à la sortie de l'amplificateur de puissance pour supprimer le signal de correction) [60]. Cette étape permet de statuer sur l'impact qu'aura le signal de correction du PAPR sur le signal utile en terme de dégradation du BER et d'émission hors bande (remontée des lobes secondaires).
2. Étape de calcul du signal : Cette étape définit la manière dont le signal de correction du PAPR sera calculé. Elle est généralement définie sous forme d'un problème d'optimisation sous la contrainte du schéma d'insertion du signal de correction. Le problème d'optimisation peut être défini via différentes fonctions de coût tels que la norme infinie, le SCR *Signal to Clipping Ratio*, le SDR *Signal to Distorsion Ratio*, etc.

Notons que cette vision des technique de réduction du PAPR par ajout de signal est totalement formelle. Ainsi, pour certaines techniques, ces deux étapes sont strictement liées dans la mesure où l'étape de calcul du signal de correction est directement lié à l'étape d'insertion de celui-ci. Dans ce genre de situation, l'étape d'insertion est généralement définie de manière explicite comme une contrainte du problème d'optimisation permettant le calcul du signal de correction du PAPR. C'est le cas de la méthode *Tone Injection* [126], de certaines techniques basées sur la TR comme dans [139, 78, 125], etc. Formellement, en notant par  $\text{Coût}(\mathbf{x}, \mathbf{c}_n)$  une fonction de coût permettant de trouver le signal  $\mathbf{c}_n$  afin de réduire le PAPR de  $\mathbf{x}_n$ , les techniques de réduction du PAPR citées si dessus peuvent être formulées comme suit :

$$\begin{aligned} & \min_{\mathbf{c}_n} \text{Coût}(\mathbf{x}, \mathbf{c}_n) \\ & \text{Sous la Contrainte } \mathbf{c}_n = \mathcal{I}_{\text{Contrainte}}(\mathbf{x}_n) \end{aligned} \quad (2.10)$$

avec  $\mathcal{I}_{\text{Contrainte}}(\mathbf{x}_n)$  désignant l'étape d'insertion exprimée sous forme d'une contrainte du problème d'optimisation du calcul du signal de correction du PAPR. Pour fixer les idées, notons que dans le cas de la méthode dans [125] par exemple, on a  $\text{Coût}(\mathbf{x}, \mathbf{c}_n) = \|\mathbf{x}_n + \mathbf{c}_n\|_\infty^2$  et la contrainte  $\mathbf{c}_n = \mathcal{I}_{\text{Contrainte}}(\mathbf{x}_n)$  signifie que les vecteurs fréquentiels  $\mathbf{X}_n$  et  $\mathbf{C}_n$  sont disjoints, i.e  $X_{m,n}C_{m,n} = 0$  quel que soit  $m = 0, \dots, M - 1$ . Graphiquement, le schéma de principe de ces techniques (les deux étapes sont liées) peuvent être illustrées par la Figure 2.4.

Pour certaines méthodes par contre, le schéma d'insertion (ou étape d'insertion) et l'étape de calcul sont totalement distinctes et indépendantes. Il s'agit par exemple de la méthode géométrique où le signal est d'abord calculé et ensuite transposé en fréquence intermédiaire [60], des techniques [133, 59, 57] où le signal de correction est calculé via un écrêtage (étape de calcul) et ensuite filtré (étape d'insertion), des techniques basées sur l'ACE où le signal de correction du PAPR est calculé aussi via une fonction d'écrêtage et ensuite filtré pour respecter les conditions d'insertion sur la constellation du signal

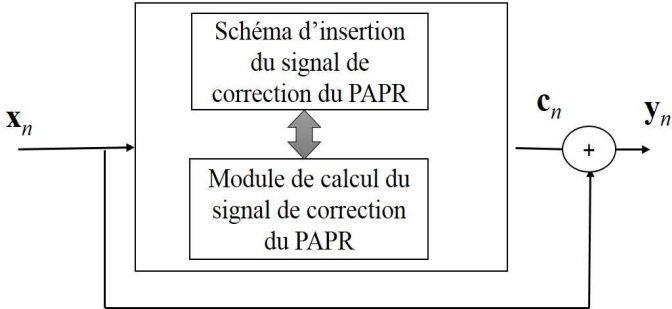


FIGURE 2.4 – *Frame* work des techniques dites d'ajout de signal : Cas où les deux étapes sont liées

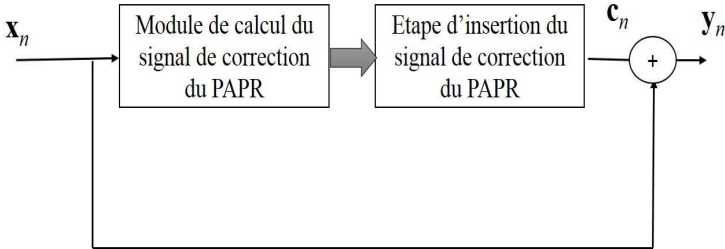


FIGURE 2.5 – *Frame* work des techniques dites d'ajout de signal : Cas où les deux étapes sont disjointes

d'intérêt. La Figure 2.5 décrit le schéma de principe des techniques dites d'ajout de signal lorsque les deux étapes sont disjointes

Cette vision des techniques de réduction du PAPR ou cette manière de les voir est tout à fait nouvelle et a été le fil conducteur de cette thèse. Elle a été à l'origine de la contribution que nous avons apportée sur la TR, voir le chapitre 5. Dans les sous sections à venir, nous allons faire un état de l'art des techniques dites d'ajout de signal. Ainsi, pour chacune des méthodes que nous aborderons dans ces sous sections nous préciserons si la techniques est dans le cas où les étapes d'insertion sont liées ou sont disjointes.

Les techniques dites d'ajout de signal sont dans leur majorité à compatibilité descendantes. Autrement dit, une implémentation de ces techniques sur un émetteur d'un système de transmission n'entraîne aucun travail supplémentaire sur le récepteur associé pour récupérer le signal d'intérêt. Partant de ce critère, on peut donc distinguer deux grandes familles de techniques dites d'ajout de signal : Il s'agit des techniques à compatibilité descendante et les techniques à compatibilité non descendante. Le schéma de la Figure 2.6 donne une illustration graphique de la classification des techniques de réduction du PAPR par ajout de signal selon la propriété de compatibilité descendante.

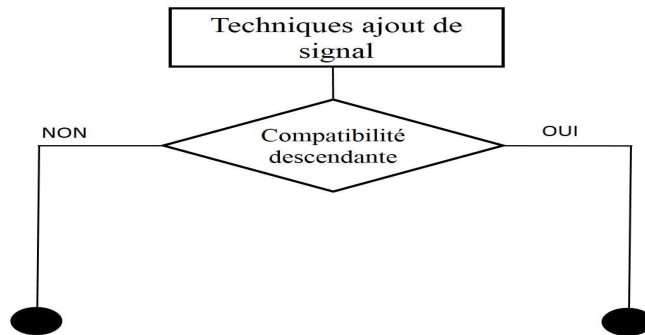


FIGURE 2.6 – Classification des techniques dites d'ajout de signal selon la propriété de compatibilité descendante

## 2.4.1 Les techniques dites d'ajout de signal à compatibilité non descendante

Il s'agit principalement des techniques basées sur une modification de la constellation tel que la Tones Injection (TI) [126], des techniques de *Companiding* [134, 114, 65], et des techniques de *Clipping* Inversible [112, 111] qui furent largement abordées et traitées par S. RAGUSA durant sa thèse de doctorat préparée au sein de l'équipe SCEE de Centrale-Supélec.

### 2.4.1.1 La méthode *Tone Injection*

La méthode TI pour *Tone Injection* est une méthode de réduction du PAPR ajout de signal proposée par *J. Tellado* afin de donner une alternative à la méthode TR en terme de perte de débit net. Cette méthode propose d'insérer le signal de correction du PAPR sur chaque porteuse de manière réversible en réception afin de réduire le PAPR du signal. Ainsi, contrairement à la méthode ACE, la méthode TI n'est pas à compatibilité descendante car elle nécessite un travail supplémentaire en réception afin de séparer le signal utile du signal de réduction du PAPR, voir Figure 2.7. Cependant, contrairement aux méthodes SLM et PTS, voir section 2.3.2, la TI ne nécessite pas la transmission

d'une SI car la constante  $D$  permettant l'opération de séparation (opération modulo) est supposée connue du récepteur et donc elle n'entraîne aucune perte du débit net du système.

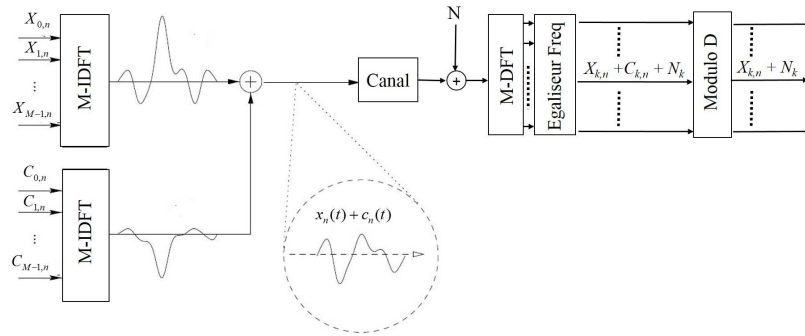


FIGURE 2.7 – Émetteur et Récepteur proposé par la méthode *Tone Injection*

Le principe de réduction du PAPR (calcul du signal de correction) est similaire aux méthodes PTS ou SLM dans la mesure où il consiste à trouver une meilleure représentation du signal en termes de PAPR. Cependant dans cette approche la recherche de cette meilleure représentation joue sur la constellation comme la méthode ACE. En effet, l'idée de base de la TI repose sur une représentation multiple et réversible (en réception) de la constellation, comme l'illustre la Figure 2.8 où sont représentées différentes duplicatas de la constellation 16-QAM susceptibles d'être utilisées pour représenter les différentes versions possibles du vecteur d'information  $\mathbf{X}_n$ .

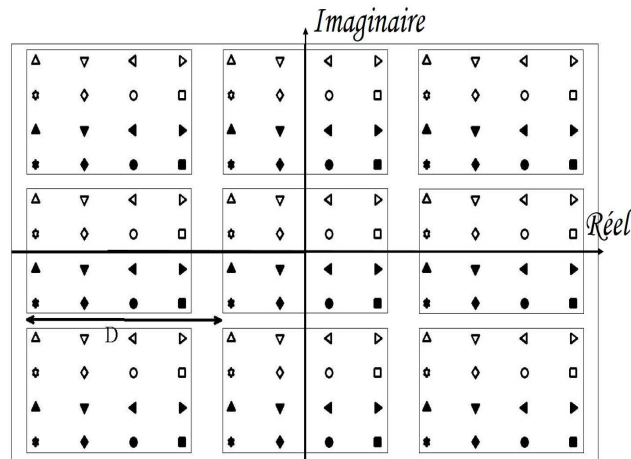


FIGURE 2.8 – Exemple d'élargissement de la constellation 16-QAM

Comme on le voit sur la Figure 2.8, chaque point de la constellation d'origine (celle du centre de la Figure) admet plusieurs représentations possibles. L'ajout du signal  $\{C_{m,n}\}$  sur les données utiles  $\{X_{m,n}\}$  est équivalent à les translater sur leur autres représentations possibles de manière à ce que ce nouveau représentant du vecteur  $\mathbf{x}_n$  soit à faible PAPR. Typiquement, pour chaque point  $X_{m,n}$  de la constellation d'origine (cas 16-QAM), on dispose de 8 représentants possibles définis comme suit en fonction de  $X_{m,n}$ , du couple d'entier  $(p_m, q_m)$  et de la constante  $D$  :

$$X_{m,n} + C_{m,n} = X_{m,n} + p_m D + j q_m D \quad (2.11)$$





fonction de compression aura pour but de réduire le PAPR du signal. Ces techniques ne vérifient donc pas la propriété de compatibilité descendante. Les premiers travaux sur ces techniques furent menés dans [134]. L'auteur s'est inspiré des techniques de compression-décompression des signaux de la parole et des travaux sur les techniques d'extraction du bruit introduit dans la bande par le *clipping* [74]. Les méthodes de *companding* jouent soit sur la puissance moyenne en l'augmentant par ajout de signal sur les *peak* faibles du signal soit comme dans le cas du *clipping*, elles atténuent les *peak* les plus élevés du signal. Ainsi, en fonction de choix du couple fonction de compression-fonction de décompression, les méthodes *companding* sont généralement confrontées à un compromis entre performances en réduction du PAPR et dégradation du BER [114, 65].

### 2.4.1.3 Les Techniques de *Clipping Inversible*

Le *Clipping Inversible* (ou *Invertible Clipping*) a été proposé par S.RAGUSA durant sa thèse de doctorat préparée en collaboration entre l'équipe SCEE et France Télécoms. Ses travaux avaient fait l'objet d'un brevet [40]. Le *Clipping* inversible consiste à appliquer en émission une non-linéarité sur le signal afin de masquer la non-linéarité de l'amplificateur de puissance, permettant ainsi d'amplifier le signal de manière efficace en terme de consommation d'énergie. La non-linéarité appliquée en émission étant inversible, sa fonction inverse sera appliquée en réception afin de se prémunir des dégradations induites sur le signal lors de l'émission. Graphiquement, la Figure 2.10 donne les positionnements des fonctions  $f$  (fonction permettant de masquer les non-linéarités de l'amplificateur) et  $f^{-1}$  (fonction inverse de  $f$ ) sur la chaîne de transmission.

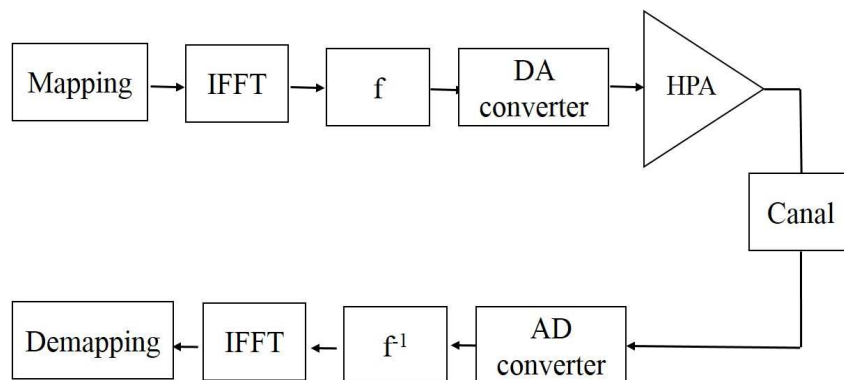


FIGURE 2.10 – *Frame Work* de la méthode *Clipping* inversible

Du fait de la non linéarité de la fonction  $f$ , le signal en sortie souffrira du problème de la remontée des lobes secondaires, d'où la nécessité de filtrer ce signal en émission pour se conformer aux contraintes spectrales définissant les normes du standard en question. Il vient alors que le *clipping* inversible peut être décomposé en trois étapes :

1. La fonction de masquage des non-linéarités de l'amplificateur  $f$  :

Cette fonction permet d'effectuer un écrêtage *soft* sur le signal, en d'autres termes elle sature le signal émis à un certain niveau. Cette fonction devant être inversible, elle doit donc être continue et croissante sur l'intervalle de temps considéré. Les fonctions polynomiales peuvent être de bonnes candidates pour construire la fonction  $f$  [112].



2. Filtrage du bruit hors bande occasionné par la remontée des lobes secondaires du signal :

Du fait de la non-linéarité de  $f$ , l'écrêtage réalisé en émission va générer des produits d'intermodulation occasionnant ainsi des perturbations à l'intérieur de la bande ainsi que la remontée des lobes secondaires. Si le bruit *In Band* peut être traité du fait de l'application de la fonction inverse en réception, la remontée des lobes secondaires pose quant à elle un sérieux problème qu'il faudra solutionner avant émission pour ne pas polluer les canaux adjacents. D'où la seconde étape qui consistera à appliquer un filtrage pour se conformer aux contraintes spectrales exigées. Notons que la majorité des standards imposent des masques d'émission, donc nécessitent un filtrage et donc cette étape ne constitue pas un surplus en termes de complexité numérique.

3. La fonction d'inversion  $f^{-1}$  :

La fonction de *clipping*  $f$  étant inversible d'inverse  $f^{-1}$ , le *clipping* inversible part de l'hypothèse que cette fonction est connue du récepteur, et par conséquent le signal utile peut être séparé des perturbations occasionnées en émission par l'application de la fonction  $f$ .

## 2.4.2 Les techniques dites d'ajout de signal à compatibilité descendante

Il s'agit entre autres des techniques de *clipping* [89, 77], des techniques basées sur l'ACE (pour *Active Constellation Selected*) [72], des techniques basées sur la TR comme dans [126, 78, 139], des techniques transformant les techniques de *clipping* en TR [133, 59, 57] etc. Notons que concernant les techniques basées sur la TR, la compatibilité descendante n'est valable que si les porteuses réservées sont figées et connues d'avance par le récepteur comme dans le cas de la norme DVB-T2. Dans certains standards, tel que le WiFi, ou la norme LTE, ils existent des porteuses laissées libres (mises à zéro). Ces porteuses peuvent donc être utilisées pour les techniques basées sur la TR à condition de respecter le masque d'émission puisque la mise à zéro de ces porteuses est motivée par le phénomène d'émission hors bande dont souffre les signaux OFDM. Dans ce cas de figure aussi, ces techniques satisfont la propriété de compatibilité descendante.

Dans cette thèse on s'intéressera plus aux techniques dites d'ajout de signal à compatibilité descendante car ce critère est important dans le cadre de notre thèse. Ainsi, dans cette section dédiée à leur état de l'art, nous accorderons un intérêt majeur à certaines d'entre elles telles que les techniques de *clipping* et les techniques basées sur la *Tone Reservation*.

Les techniques dites d'ajouts de signal à compatibilité descendante peuvent être regroupées en deux grandes familles à savoir celles avec dégradations du signal (dégradation du BER et émission hors bande) et celles sans dégradations du signal.

La Figure 2.11 complète la Figure 2.6 en ajoutant le critère de dégradation du BER.

Dans la section 2.4.1, nous n'avons pas parlé du critère de dégradation du BER pour approfondir le schéma de classification des techniques dites d'ajout de signal à compatibilité non descendante car ces techniques suppose l'existence d'un procédé au niveau du récepteur, permettant la suppression ou la compensation du bruit *In-band* généré par la méthode de réduction du PAPR appliquée à l'émission. Ainsi, il est incohérent de quantifier les dégradations induites par la méthode de réduction du PAPR sur le signal à l'émission.

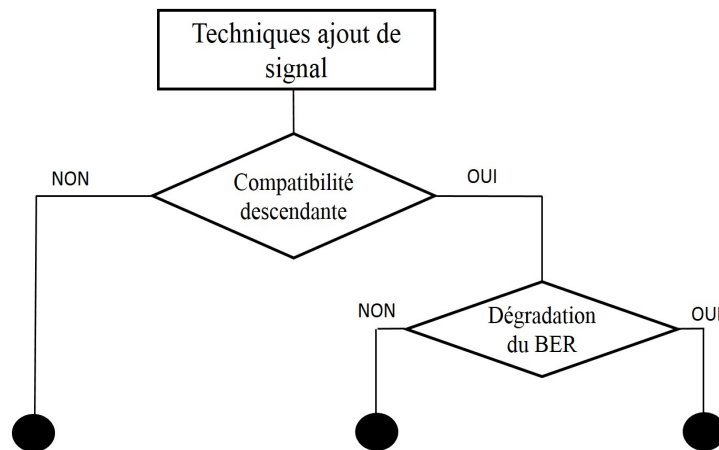


FIGURE 2.11 – Classification des techniques de réduction dites d'ajout de signal selon la propriété de compatibilité descendante et des dégradations du BER

#### 2.4.2.1 Techniques à compatibilité descendante avec distorsion

Il s'agit principalement des techniques de *clipping* [89, 90, 77, 9, 58]. Il est important de signaler que ces techniques ne sont pas formulées explicitement comme un problème de réduction du PAPR par ajout de signal comme dans [126, 72]. Cependant à l'aide du théorème de décomposition de *Bussgang* [15], on peut aisément montrer que ces méthodes peuvent être vues comme des techniques dites d'ajout de signal, voir [56]. En effet, il suffit juste de remarquer que ses méthodes consistent à agir de manière non-linéaire sur le signal temporel pour réduire le PAPR. Notons qu'il existe d'autres techniques de réduction du PAPR par ajout de signal et avec distorsions explicitement formulées comme telle [7, 60]. Dans la sous section 2.4.2.1.a à venir, nous allons aborder ces deux méthodes avant de parler des techniques de *clipping* dans la sous section 2.4.2.1.b.

##### 2.4.2.1.a La méthode géométrique [60] et celle basée sur le SOCP [7]

Dans [60] l'auteur propose une approche géométrique qui consiste à trouver le signal de correction du PAPR via une minimisation de l'enveloppe complexe du signal dont on veut réduire le PAPR. Le signal de correction du PAPR obtenu est alors transposé sur une porteuse disjointe de celui du signal d'intérêt de tel sorte qu'on puisse séparer ces deux signaux (signal d'intérêt et signal de réduction du PAPR) à l'aide d'un filtre passe bande analogique placé après l'amplificateur de puissance, voir Figure 2.12.

Sur la Figure 2.12, on remarque que les étapes de calcul du signal de correction et d'insertion de celui-ci sont bien distinctes et indépendantes. En effet, l'étape de calcul consiste à trouver le signal  $\mathbf{c}_n$  qui permettra d'atténuer toutes les amplitudes du signal d'intérêt qui dépasse le seuil  $A$  alors que l'étape d'insertion consiste à transposer le  $\mathbf{c}_n$  sur une porteuses disjointes de celle du signal d'intérêt.

Soulignons que malgré l'originalité de l'idée de base de la méthode géométrique, les résultats de simulation en termes de performances en réduction du PAPR n'ont pas été très intéressants. En effet, les résultats de simulation montrent que plus  $\Delta f$  est grand, moins les performances en réduction du PAPR sont bonnes. D'ailleurs, on peut voir dans [56] que pour  $\Delta f$  grand, le signal de correction du PAPR a tendance à augmenter le PAPR du signal au lieu de le réduire. Les meilleurs résultats sont obtenus pour  $\Delta f$  petit et dans ce cas la réalisation du filtre analogique correspondant sera de plus en plus délicat. Pour

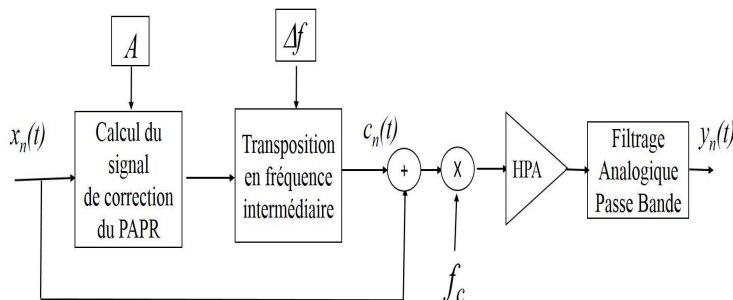


FIGURE 2.12 – *Frame Work* de la méthode géométrique de réduction du PAPR avec  $\Delta f$  la fréquence intermédiaire et  $A$  l'amplitude seuil

$\Delta f = 0$ , cette méthode est identique au *clipping* classique.

Dans [7] l'auteur propose de formuler le calcul du signal de correction comme un problème d'optimisation de type SOCP (*Second Order Cone Programming*) dans lequel la fonction de coût est l'EVM (*Error Vector Magnitud*) avec une contrainte sur le PAPR. Cette approche donne de très bonnes performances en réduction du PAPR mais dégrade considérablement le BER. En outre cette méthode requière une grande capacité calculatoire.

Comme nous allons le voir dans la sous section à venir, les techniques de *clipping*, contrairement aux techniques que nous venons d'aborder dans cette section, ont l'avantage d'être simple à réaliser, d'être à faible complexité numérique et offre de bonnes performances en réduction du PAPR. De ce fait les techniques de *clipping* nous ont particulièrement intéressées durant nos travaux de recherche, par conséquent, la section 2.4.2.1.b qui est consacrée à leur état de l'art sera beaucoup plus fournie et offrira un état de l'art détaillé des techniques de *clipping*.

#### 2.4.2.1.b Les Techniques de *Clipping*

Les techniques de *clipping* consistent pour un seuil prédéfini à écrêter toutes les amplitudes du signal qui dépassent le seuil sans changer la phase de l'échantillon. Ainsi d'un point de vue mathématique le *clipping* consiste à agir de manière non-linéaire sur le signal. Il en résulte que le *clipping* comme toute technique de saturation, entraînera des distorsions sur le signal. Il existe dans la littérature plusieurs méthodes de *clipping* parmi lesquelles on peut citer le *clipping* classique (CC) [89] qu'on peut considérer comme étant la première méthode à avoir été proposée, le *Deep Clipping* [77] qui a été proposé afin d'améliorer les performances du *clipping* classique après filtrage du bruit de *clipping* hors bande. On peut aussi citer la méthode *Smooth Clipping* [9] qui comme son nom l'indique propose un écrêtage moins rude par rapport aux fonctions d'écrêtage utilisées dans [89, 77]. Sur la Figure 2.13, nous donnons une illustration graphique des fonctions d'écrêtage utilisées pour les méthodes de *clipping* citées ci-dessus.

D'un point de vue mathématique, les fonctions d'écrêtage illustrées dans la Figure 2.13

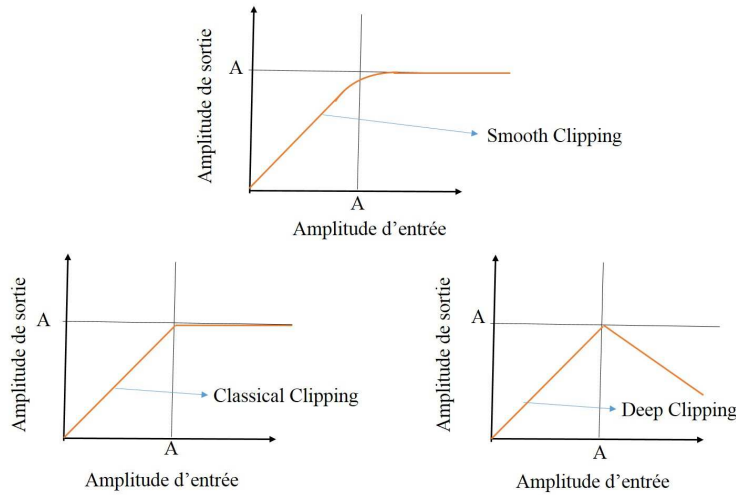


FIGURE 2.13 – Illustration graphique des courbes des fonctions d'écrêtage utilisées pour les méthodes CC, DC et SC en fonction de l'amplitude du signal d'entrée

sont définies comme suit :

$$\begin{aligned}
 f(r, A) &= \begin{cases} r & \text{Si } |r| \leq A \\ Ae^{j \arg(r)} & \text{Si } |r| > A \end{cases} && \text{Classical Clipping (CC)[89]} \\
 f(r, A) &= \begin{cases} r & \text{Si } |r| \leq A \\ (A - d(|r| - A))e^{j \arg(r)} & \text{Si } A < |r| \leq \frac{1+d}{d}A \\ 0 & \text{Si } |r| > \frac{d+1}{d}A \end{cases} && \text{Deep Clipping (CC)[77]} \\
 f(r, A) &= \begin{cases} |r| - \frac{1}{b}|r|^3 & \text{Si } |r| \leq \frac{3}{2}A \\ A & \text{Si } |r| \geq \frac{3}{2}A \end{cases} && \text{Smooth Clipping (CC)[9]}
 \end{aligned} \tag{2.13}$$

Avec  $d$  le *clipping depth factor* et  $b = \frac{27}{4}A^3$ . Notons que la technique *Smooth Clipping* comme on peut le voir sur la Figure 2.13 permet d'atténuer la transition entre la zone d'écrêtage (ensemble des échantillons de module supérieur au seuil  $A$ ) et la zone sans écrêtage (ensemble des échantillons de module inférieur au seuil  $A$ ), voir (2.13). La méthode *Deep Clipping* quant à elle a été proposée pour réduire le phénomène du *peak regrowth*, i.e atténuation des *peak* du signal de correction du PAPR après filtrage [77].

Les techniques de *clipping* étant des techniques de saturation, elles engendrent des distorsions sur le signal après réduction du PAPR (signal après écrêtage). Il s'agit principalement de la :

- remontée des lobes secondaires due aux produits d'intermodulation : émission hors bande et pollution des canaux adjacents.
- Dégradation du BER due à des interférences *In Band* non linéaires, donc très difficile d'envisager de les enlever en réception.
- Dégradation de la puissance moyenne du signal du fait de l'atténuation des *peaks* par écrêtage.

Concernant la pollution des canaux adjacents du fait de la remontée des lobes secondaires, L. J. CIMINI avait proposé dans [89] d'effectuer un filtrage hors bande sur le

signal à la sortie du *clipping* afin de supprimer le bruit hors bande, et donc d'empêcher la pollution des canaux adjacents. Cette suppression du bruit hors bande par filtrage va entraîner une dégradation du PAPR du signal du fait du *peak regrowth phenomena*, ainsi dans [77], le *Deep Clipping* a été proposé pour atténuer ce phénomène. Les résultats de simulation présentés par l'auteur montrent qu'on peut gagner environ 1dB de gain en réduction du PAPR comparé à la méthode CC. Néanmoins, la différence entre le PAPR du signal après écrêtage et celui après écrêtage suivi d'un filtrage reste importante. Comme solution à ce problème, on peut envisager un processus itératif de *Clipping and Filtering*. Cette méthode est connue sous le nom de *Repeated Clipping Filtering* [3]. La Figure 2.14 décrit le *frame work* de cette méthode.

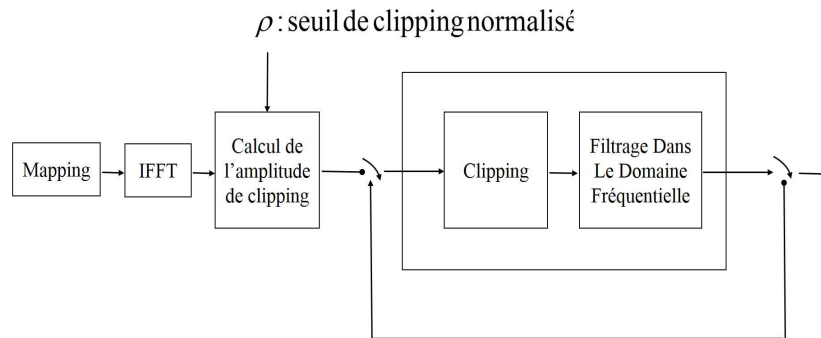


FIGURE 2.14 – *Frame Work* de la méthode *Repeated Clipping and Filtering* [3]

Les résultats de simulation présentés dans [3] montrent que le *Repeated Clipping* ne permet pas de converger rapidement. Pour pallier ce problème, i.e accélérer la convergence vers le PAPR avant filtrage, dans [16], l'auteur propose la méthode AICAF (pour *Adaptive Iterative Clipping Filtering*). Cette méthode permet une convergence plus rapide. Graphiquement, cette méthode est décrite par la Figure 2.15 et consiste à adapter le seuil d'écrêtage à chaque itération. Les résultats de simulation présentés par l'auteur confirment bien que cette méthode permet une convergence plus rapide, cependant elle entraîne de très sévères dégradations du BER.

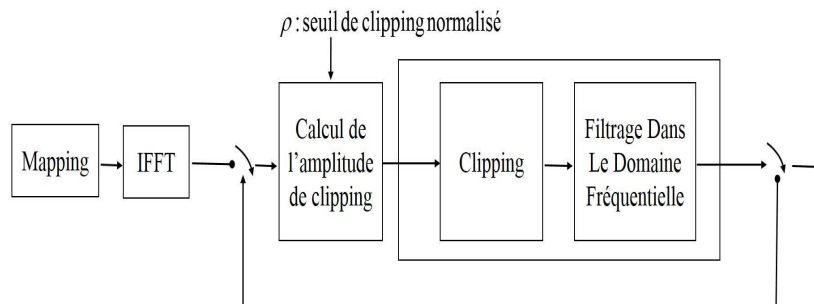


FIGURE 2.15 – *Frame Work* de la méthode *Adaptive Iterative Clipping Filtering* [16]

Les méthodes itératives de *Clipping and Filtering* proposées dans [3, 16] entraînent de sévères dégradations du BER dès que le nombre d'itérations est plus grand que 1 devenant ainsi inutiles en pratique. Dans l'Annexe A, nous avons présenté des résultats de simulation sur les performances des différentes techniques de *clipping* précédemment abordées. Pour ce faire, nous avons évalué dans cette annexe, les performances en réduction du PAPR

avant et après filtrage du bruit hors bande ainsi que les dégradations *In-Band* (BER et EVM) engendrées par ces méthodes sur le signal. Dans le cas sans filtrage, nous avons aussi regardé l'impact de ces méthodes sur la densité spectrale de puissance des signaux après écrêtage. Le but sera ainsi d'évaluer les performances en termes d'émission hors bande.

Durant cette thèse nous avons apporté une contribution sur le *clipping*. Le chapitre 3 est dédié à cette méthode. L'idée de base de cette méthode est de trouver le meilleur compromis entre BER et performances en réduction du PAPR. En effet, nous avons montré que la méthode proposée offre de meilleures performances en terme de dégradations du BER que la méthode CC et cela pour les mêmes performances en termes de réduction du PAPR.

Ils existent d'autres travaux proposant des solutions pour atténuer les perturbations *In Band* générées par les méthodes de *clipping*, en particulier pour la méthode CC [74, 107, 19, 31]. Ces méthodes proposent des solutions en réception en exploitant le fait que ces perturbations ont une structure particulière permettant ainsi de mettre en œuvre des algorithmes qui permettent de soustraire les bruits induits par l'écrêtage en émission. Dans ce cas de figure, le *clipping* perd son caractère de méthode à compatibilité descendante, en outre le BER du signal après restauration bien que meilleur que celui du *clipping* sans restauration reste largement moins bon que celui sans *clipping*. En outre, ces méthodes de soustraction du bruit généré dans la bande dépendent fortement de la qualité d'estimation du canal de transmission.

Du fait de leur simplicité de réalisation ainsi que de leur complexité numérique relativement faible, les méthodes de *clipping* ont beaucoup intéressé les chercheurs, ainsi ils existent des techniques basées sur le *clipping* qui n'entraînent aucune dégradation du BER et aucune émission hors bande. Il s'agit principalement des méthodes transformant le *clipping* en méthode TR [133, 59, 57] ou des méthodes partant du signal de *clipping* pour construire le signal de correction sous la contrainte TR ou ACE [103, 78, 72]. Ces méthodes étant sans dégradation du BER, nous les aborderons dans la section 2.4.2.2.

#### 2.4.2.2 Techniques à compatibilité descendante sans distorsion

Cette section sera dédiée à l'état de l'art des techniques de réduction du PAPR dites d'ajout de signal à compatibilité descendante et sans distorsion. Dans cette catégorie de techniques de réduction du PAPR, on distingue principalement deux grandes familles en partant du schéma d'insertion utilisé. Il s'agit :

1. Des techniques basées sur la *Tone Reservation* (TR) [126, 125]

La *Tone Reservation* comme son nom l'indique consiste à réserver des porteuses pour porter le signal de correction du PAPR. Notons que la TR n'est pas la seule méthode à avoir fait cette suggestion. En effet dans [87] l'auteur suggèrent comme pour la TR de réserver des porteuses dédiées à la réduction du PAPR. Ces porteuses furent dénommées par PRSC pour *Peak Reduction Sub Carriers*. Cependant cette méthode n'est pas très populaire dans la littérature bien que similaire à la TR d'un point de vue schéma d'insertion. Le succès de la TR vient surtout du fait que le problème de calcul du signal de correction du PAPR a été formulé comme un problème d'optimisation convexe attirant ainsi l'intérêt du fait des nombreux résultats mathématiques permettant de résoudre de tels problèmes. Dans cette thèse nous avons accordé un intérêt majeur à la TR. Cependant contrairement aux nombreuses méthodes qui ont connu le jour depuis la création de la TR, nous nous sommes focalisés sur le schéma d'insertion de la TR lui même afin d'apporter une contribution au lieu de nous intéresser à la manière de calculer le signal de correction comme c'est le cas sur



les méthodes basées sur la TR [125, 139, 78, 133, 81, 11]. Ces travaux sur le schéma d'insertion de la TR ont abouti à une contribution majeure que nous aborderons dans le chapitre 5.

La sous section 2.4.2.2.a sera consacrée à un état de l'art approfondi sur les techniques basées sur la TR.

2. Des techniques basées sur l'*Active Constellation Extension* (ACE) [72] : Insertion dans l'espace  $\mathcal{I}/\mathcal{Q}$  ou sur la constellation.

Les techniques basées sur l'*Active Constellation Extension* proposent quant à elles d'insérer le signal de correction sur la constellation, autrement dit dans l'espace complexe  $\mathcal{I}/\mathcal{Q}$ . Cette insertion se fait sous la contrainte de ne pas modifier la robustesse de la constellation en présence d'un bruit additif. En d'autres termes, le signal additionnel pour la réduction du PAPR doit passer inaperçu au niveau du récepteur lors du dé-*mapping*. Ces techniques sont donc à compatibilité descendante. Elle n'entraînent aucune perte de débit net contrairement aux techniques basées sur la TR. Les inconvénients majeurs que posent ces techniques sont d'une part la forte augmentation de la puissance du signal après ajout du signal de correction du PAPR et d'autre part la difficulté de formuler ces problèmes comme des problèmes d'optimisation classiques du fait de la difficulté de spécifier la contrainte d'insertion de manière explicite. Ainsi, les solutions proposées avec ces techniques sont des solutions sous optimales généralement basées sur le gradient projeté ou l'algorithme *Projection Onto Convex Set*.

La sous section 2.4.2.2.b sera dédiée à l'état de l'art des techniques basées sur l'ACE.

#### 2.4.2.2.a Techniques basées sur la TR

La TR est la technique de réduction de PAPR la plus populaire dans la littérature. Cette technique part d'un schéma d'insertion qui consiste à réserver des porteuses afin de porter le signal de correction du PAPR. Ce signal est ensuite calculé à l'aide d'outils d'optimisation convexe tel que le gradient projeté [64], le SOCP pour *Second Order Cone programming* ou le QCQP pour *Quadratic Constrained Quadratic Program* [12, 93]. Pour plus de détails sur ces techniques d'optimisation convexe, le lecteur peut se référer à la thèse [138] dans laquelle un chapitre y est consacré.

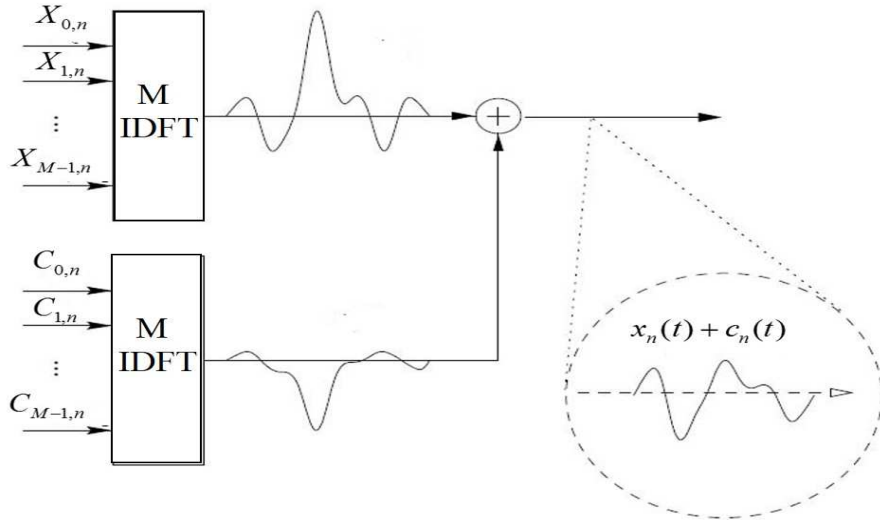
La TR a été proposée pour la première fois par *J. Tellado* dans sa thèse de doctorat [126]. Graphiquement, la Figure 2.16 décrit le principe de base de la TR.

En notant par  $\mathcal{R} \subset [0, 1, \dots, M - 1]$  l'ensemble des porteuses (indices) réservées pour porter le signal de correction du PAPR, alors par principe de la TR, les vecteurs fréquentiels  $\mathbf{X}_n$  du signal d'intérêt et  $\mathbf{C}_n$  du signal de correction du PAPR satisfont la contrainte (2.14), que nous appellerons tout au long de ce document Contrainte TR.

$$X_{m,n} + C_{m,n} = \begin{cases} X_{m,n} & \text{Si } m \notin \mathcal{R} \\ C_{m,n} & \text{Si } m \in \mathcal{R} \end{cases} \quad (2.14)$$

D'un point de vue mathématique, la TR peut être formulée comme suit, voir Figure 2.16 :

$$\mathbf{c}_n^{\text{opt}} = \begin{cases} \min_{\mathbf{c}_n} \left( \frac{\|\mathbf{x}_n + \mathbf{c}_n\|_{\infty}^2}{\mathbb{E}[\|\mathbf{x}_n + \mathbf{c}_n\|_2^2]} \right) \\ C_{m,n} + X_{m,n} = \begin{cases} X_{m,n} & \text{Si } m \notin \mathcal{R} \\ C_{m,n} & \text{Si } m \in \mathcal{R} \end{cases} \end{cases} \quad (2.15)$$

FIGURE 2.16 – *Frame Work* de la méthode *Tone Reservation*

avec on le rappelle  $\mathcal{R}$  l'ensemble des porteuses réservées de cardinal  $N_{\mathcal{R}}$  pour porter le signal de correction. Comme nous l'avons souligné au début de la section 2.4, voir équation (2.10), on remarque bien que l'étape de calcul du signal de correction et celle de l'insertion qui est formulée sous forme d'une contrainte sont liées.

Notons que dans le cas d'une modulation OFDM, l'orthogonalité entre porteuses fait de la TR une technique sans distorsion (BER) et aussi sans émission hors bande puisque les porteuses réservées ont un spectre incluse dans la bande allouée pour la transmission du signal  $x(t)$ . Dans le cas des modulations multiporteuses sans orthogonalité tel que les FBMC ou OFDM/OQAM (orthogonalité dans l'espaces des réels) [79, 122, 39] la notion de *Tone Reservation* telle que définie dans [126] nécessite des ajustements. Par exemple, via une légère modification, la TR peut permettre de réduire le PAPR tout en étant sans dégradation du BER et sans émission hors bande comme dans le cas de l'OFDM/OQAM [14, 84]. En effet, dans [14] l'auteur propose de modéliser la TR en tenant compte du bloc de filtrage des systèmes FBMC, d'où le nom de DTR pour *Dispersive Tone Reservation*. Les performances en réduction du PAPR obtenues sont meilleures que dans le cas où la TR est appliquée à la sortie du module IFFT seulement. Cette transversalité de la TR, fait d'elle une technique très prometteuse pour faire face à la problématique de la réduction des systèmes multiporteuses.

Supposons maintenant que  $x(t)$  est un signal OFDM comportant  $M$  porteuses dont  $N_{\mathcal{R}}$  sont réservées pour porter le signal de correction du PAPR. En notant par  $\mathcal{R} = [m_0, \dots, m_{N_{\mathcal{R}}-1}]$  l'ensemble des indices des porteuses réservées, alors le problème d'optimisation défini par l'équation (2.15) devient :

$$\mathbf{C}_n^{\text{opt}} = \min_{\mathbf{C}_n} \left( \frac{\|\mathbf{x}_n + \mathbb{F}_{ML, N_{\mathcal{R}}}^{\mathcal{R}} \mathbf{C}_n\|_{\infty}^2}{\mathbb{E} [\|\mathbf{x}_n + \mathbb{F}_{ML, N_{\mathcal{R}}}^{\mathcal{R}} \mathbf{C}_n\|_2^2]} \right) \quad (2.16)$$

avec  $L$  le facteur de sur-échantillonnage supposé  $L \geq 4$  afin d'avoir une bonne approximation du PAPR du signal analogique,  $\mathbf{C}_n^{\text{opt}}$  un vecteur fréquentiel de dimension  $N_{\mathcal{R}}$  ( $\mathbf{C}_n^{\text{opt}}$  est restreint aux porteuses réservées) et  $\mathbb{F}_{ML, N_{\mathcal{R}}}^{\mathcal{R}}$  la sous-matrice de la matrice normalisée de Fourier  $\mathbb{F}_{ML}$  de taille  $(LM, LM)$  ne contenant que les colonnes  $\in \mathcal{R}$ . Pour plus de détail sur la construction des matrices  $\mathbb{F}_{ML}$  et  $\mathbb{F}_{ML, N_{\mathcal{R}}}^{\mathcal{R}}$  le lecteur peut se référer à la thèse de J. Tellado [126] ou la section 2.2. Rappelons juste que la matrice  $\mathbb{F}_{ML, N_{\mathcal{R}}}^{\mathcal{R}}$  est de dimension  $(LM, N_{\mathcal{R}})$  et permet de générer  $\mathbf{c}_n$  (signal de correction du PAPR) à partir du vecteur  $\mathbf{C}_n$  (vecteur contenant les données fréquentielles à mettre sur les porteuses réservées pour



trouver le bon  $\mathbf{c}_n$ ).

Pour simplifier ce problème d'optimisation, J. TELLADO a fait l'hypothèse que la puissance moyenne du signal après réduction du PAPR varie faiblement. Cette hypothèse bien que pas très rigoureuse n'a pas empêché à la TR d'avoir des performances satisfaisantes en termes de réduction de PAPR, pour s'en convaincre le lecteur peut se référer à la section 5.6.3 du chapitre 5 où une preuve a été donnée via l'équation (5.108). Dans sa thèse de doctorat J. TELLADO a montré que le problème défini par l'équation (2.16) peut être modélisé comme un problème d'optimisation quadratique à contraintes quadratiques (QCQP) [12, 93]. En effet, sous l'hypothèse que  $\mathbb{E}[\|\mathbf{x}_n + \mathbf{c}_n\|_2^2]$  est constante ou varie très faiblement, le problème d'optimisation 2.16 peut être formulé comme suit :

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{C}_n} \quad & t \\ \text{Sous la Contrainte :} \quad & \|\mathbf{x}_n + \mathbb{F}_{ML, N_{\mathcal{R}}}^{\mathcal{R}} \mathbf{C}_n\|_{\infty}^2 \leq t \end{aligned} \tag{2.17}$$

En posant  $\mathbf{F}_{ML, N_{\mathcal{R}}, p}^{\mathcal{R}, \text{Lig}}$  la  $p$ -ième ligne de  $\mathbb{F}_{ML, N_{\mathcal{R}}}^{\mathcal{R}}$ , il vient alors que les contraintes du problème d'optimisation (2.17) peuvent être définies séparément comme suit :

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{C}_n} \quad & t \\ \text{Sous la Contrainte :} \quad & |x_{n,0} + \mathbf{F}_{ML, N_{\mathcal{R}}, 0}^{\mathcal{R}, \text{Lig}} \mathbf{C}_n|_2^2 \leq t \\ & |x_{n,1} + \mathbf{F}_{ML, N_{\mathcal{R}}, 1}^{\mathcal{R}, \text{Lig}} \mathbf{C}_n|_2^2 \leq t \\ & \vdots \\ & |x_{n, LM-1} + \mathbf{F}_{ML, N_{\mathcal{R}}, LM-1}^{\mathcal{R}, \text{Lig}} \mathbf{C}_n|_2^2 \leq t \end{aligned} \tag{2.18}$$

On reconnaît ainsi un problème d'optimisation quadratique à contraintes quadratiques (QCQP), d'où le nom de TR-QCQP.

La méthode TR-QCQP bien que très performante en terme de réduction de PAPR [126], a l'inconvénient d'être à complexité numérique quadratique. En effet la complexité numérique de la TR-QCQP est de l'ordre de  $\mathcal{O}((M)^2 L N_{\mathcal{R}})$  ce qui est quasiment inutilisable dans des systèmes avec des ressources limitées et à temps réel [126]. En outre la TR-QCQP entraîne une forte augmentation de la puissance moyenne ( $\Delta E$ ), voir la section A.2 de l'Annexe A. Cette forte augmentation de la puissance moyenne peut impacter le point de fonctionnement de l'amplificateur et donc son rendement énergétique ou ses performances en termes de remontée de lobes secondaires ou de dégradation du BER.

Pour pallier ce problème de complexité numérique l'auteur a proposé une solution sous optimale basée sur le gradient projeté. Le gradient projeté est un algorithme à direction de descente dans lequel celle-ci est constante et est égale à l'opposé du gradient de la fonction de coût [64]. C'est un algorithme itératif et procède donc par amélioration successif de la solution du problème. L'idée de base de cette méthode consiste à utiliser le gradient projeté pour maximiser le SCR (pour *Signal to Clipping Ratio* ou *Signal to Clipping noise power Ratio*) et de ce fait réduire le PAPR du signal. Cette méthode sera appelée la méthode TR-GP dans la suite de ce rapport. Du fait de sa faible complexité numérique (linéaire), de ses bonnes performances en réduction du PAPR et de variation de la puissance moyenne, la méthode TR-GP est de nos jours la méthode par ajout de signal la plus prometteuse. Elle est même suggérée dans la norme DVB-T2 comme solution pour le calcul du signal de correction à mettre sur les porteuses réservées par le standard à cet effet. Nous reviendrons en détail sur cette méthode dans la sous section 4.2.1 du chapitre 4 car elle y est utilisé pour les besoins de notre contribution sur l'influence de la parité des porteuses réservées.

Depuis sa création en 1999, la TR a beaucoup intéressé la communauté. Ainsi, il existe une multitude de méthodes basées sur le principe de la TR avec différents objectifs. Tout d'abord notons que concernant la forte augmentation de la puissance moyenne, la solution la plus notable est la méthode TR-SOCP (c'est à dire la méthode TR utilisant l'algorithme SOCP pour le calcul du signal). Différentes manières d'utilisation du SOCP pour le calcul du signal de correction du PAPR sous la contrainte TR ont été proposées dans [139, 98]. L'idée de base de la TR-SOCP est d'inclure la variation de la puissance moyenne comme contrainte dans le problème d'optimisation (2.18). Ainsi, contrairement à la méthode TR-QCQP avec laquelle la puissance moyenne après ajout du signal de correction du PAPR ( $\mathbb{E}[\|\mathbf{x}_n + \mathbf{c}_n\|_2^2]$ ) est supposée constante ou varie faiblement, la TR-SOCP traite cette quantité comme une contrainte. Pour ce faire dans [98] les auteurs proposent de reformuler le problème (2.16) comme suit :

$$\begin{aligned}
& \min_{\mathbf{C}_n} && t \\
\text{Sous contrainte :} & && |x_{n,0} + \mathbf{F}_{ML,N_{\mathcal{R}},0}^{\mathcal{R},\text{Lig}} \mathbf{C}_n|_2^2 \leq t \\
& && |x_{n,1} + \mathbf{F}_{ML,N_{\mathcal{R}},1}^{\mathcal{R},\text{Lig}} \mathbf{C}_n|_2^2 \leq t \\
& && \vdots \\
& && |x_{n,LM-1} + \mathbf{F}_{ML,N_{\mathcal{R}},LM-1}^{\mathcal{R},\text{Lig}} \mathbf{C}_n|_2^2 \leq t \\
& && \|\mathbf{x}_n + \mathbb{F}_{ML,N_{\mathcal{R}}}^{\mathcal{R}} \mathbf{C}_n\|_2^2 \leq \gamma \sqrt{\|\mathbf{x}_n\|_2^2}
\end{aligned} \tag{2.19}$$

On remarque ainsi, à la différence du problème d'optimisation (2.18), que le problème d'optimisation (2.19) contient une nouvelle contrainte qui permet de contrôler via le paramètre  $\gamma$  l'augmentation de la puissance moyenne après réduction du PAPR. Les résultats de simulation présentés dans l'Annexe A confirment que la méthode TR-SOCP permet un compromis entre performances en réduction du PAPR et augmentation de la puissance moyenne.

En termes de complexité numérique, la méthode TR-SOCP a elle aussi une complexité quadratique comme la méthode TR-QCQP. Ainsi, ces deux méthodes bien que performantes en terme de réduction du PAPR ne sont pas utilisables en pratique surtout dans des systèmes à faible ressource calculatoire. Sur cette problématique, beaucoup de travaux proposant des techniques basées sur la TR avec une faible complexité numérique existent dans la littérature [125, 81, 137, 50, 59, 78, 103]. Nous ne reviendrons pas en détail sur toutes ces techniques. Cependant notons qu'il existe beaucoup de similarités entre ces techniques.

En effet, de part leur manière de construire le signal de correction du PAPR, on peut distinguer deux familles :

1. Les techniques exploitant la simplicité du *clipping* et ses bonnes aptitudes à réduire les *peaks* élevés pour construire une solution sous optimale du problème d'optimisation (2.15).
2. Les techniques proposant des fonctions de coût alternatives permettant l'utilisation d'algorithmes simples tel que le gradient projeté pour construire le signal de correction du PAPR.

Concernant les techniques utilisant le *clipping*, elles sont basées sur le schéma de filtrage défini sur la Figure 2.17 [133, 59, 57, 124].

L'idée générale de ces techniques consiste à transformer les techniques de *clipping* en techniques TR. Pour ce faire, dans un premier temps, elles utilisent le *clipping* pour trouver le signal de correction du PAPR idéal et ensuite, elles utilisent la Figure 2.17

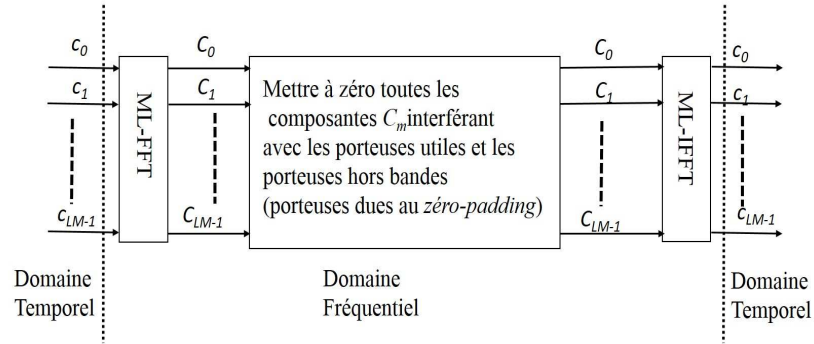


FIGURE 2.17 – *Frame Work* du schéma de filtrage permettant la transformation des techniques de *clipping* en TR [133, 59, 57, 124]

pour forcer le signal de correction du PAPR obtenu grâce au *clipping* à satisfaire la contrainte TR (Non dégradation du BER et non émission hors bande). Pour donner une vision d'ensemble sur ces techniques transformant les techniques de *clipping* en techniques TR afin de gagner en complexité par rapport aux techniques TR-QCQP et TR-SOCP, nous allons regarder de plus près la méthode [59], que nous appellerons TR-*Clipping* dans la suite de ce document. Cette méthode a été proposée par *D. Guel* durant sa thèse de doctorat effectuée dans l'équipe. La méthode TR-*Clipping* [59] est une technique de réduction du PAPR par ajout de signal sans dégradation du BER et à compatibilité descendante. Cette technique propose d'exploiter la simplicité (en terme de complexité numérique) de la technique de *clipping* pour construire le signal de correction du PAPR sous la contrainte TR, voir Figure 2.18.

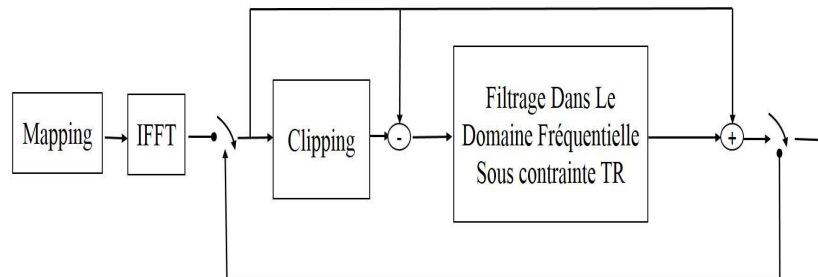


FIGURE 2.18 – Schéma de principe des techniques transformant le *clipping* en méthode TR [59]

Partant des Figure 2.17 et 2.18, on remarque que la méthode TR-*Clipping* propose une approche itérative consistant à écrêter le signal, extraire le signal de *clipping* (différence entre le signal d'entrée et le signal à la sortie de l'écrêtage) puis le filtrer avant de l'ajouter comme signal de correction du PAPR. La complexité numérique de cette méthode est de  $\mathcal{O}(N_{iter}ML\log(ML))$ .

De la Figure 2.18, on remarque que pour les méthodes basées sur ce schéma de filtrage, l'étape d'insertion et l'étape de calcul du signal ne sont pas liées. En effet, grâce au *clipping* le signal de correction du PAPR (étape de calcul) est calculé et ensuite filtré pour satisfaire la contrainte d'insertion (étape d'insertion). Notons qu'il est possible de réduire la complexité de cette méthode. En effet, d'après le schéma de filtrage défini dans la Figure 2.17, le calcul du signal de correction à la sortie du filtrage peut être posé comme

un problème minimisation de type LMS (pour *Least Minimum Square*) comme suit :

$$\min_{\tilde{\mathbf{C}}_n} \left\| \mathbb{F}_{ML, N_{\mathcal{R}}}^{\mathcal{R}} \tilde{\mathbf{C}}_n - \mathbf{c}_n \right\|_2^2 \quad (2.20)$$

avec  $\mathbf{c}_n$  le signal de *clipping* défini comme étant la différence entre le signal après écrêtage et avant écrêtage. Il vient alors que la solution de (2.20), dans le domaine fréquentiel, est donnée comme suit :

$$\tilde{\mathbf{C}}_n = ((\mathbb{F}_{ML, N_{\mathcal{R}}}^{\mathcal{R}})^H \mathbb{F}_{ML, N_{\mathcal{R}}}^{\mathcal{R}})^{-1} (\mathbb{F}_{ML, N_{\mathcal{R}}}^{\mathcal{R}})^H \mathbf{c}_n \quad (2.21)$$

Dans le domaine temporel, c'est à dire en multipliant les deux membres par  $\mathbb{F}_{ML, N_{\mathcal{R}}}^{\mathcal{R}}$ , on obtient :

$$\tilde{\mathbf{c}}_n = \underbrace{\mathbb{F}_{ML, N_{\mathcal{R}}}^{\mathcal{R}} ((\mathbb{F}_{ML, N_{\mathcal{R}}}^{\mathcal{R}})^H \mathbb{F}_{ML, N_{\mathcal{R}}}^{\mathcal{R}})^{-1} (\mathbb{F}_{ML, N_{\mathcal{R}}}^{\mathcal{R}})^H}_{\mathbb{P}} \mathbf{c}_n \quad (2.22)$$

On remarque ainsi, que la méthode TR-*Clipping* peut être implémentée de manière efficace si la matrice  $\mathbb{P}$  est pré calculée et enregistrée en mémoire. Ce constat a été brièvement souligné dans [126] et exploité aussi dans [88, 69] pour améliorer les performances.

L'autre groupe d'approche des techniques TR à faible complexité numérique par rapport aux techniques TR-QCQP ou TR-SOCP est comme nous l'avons mentionné précédemment, celles proposant l'utilisation de fonctions de coût alternatives permettant l'utilisation d'algorithmes simples pour construire le signal de correction du PAPR. Elles exploitent généralement des algorithmes de projection itératifs tel que le gradient projeté ou l'algorithme POCS (pour *Projection Onto Convex Set*) [125, 78, 81, 67, 50]. Ces méthodes proposent donc une amélioration successive du PAPR du symbole via l'équation 2.23, qui est une forme générale de l'algorithme du gradient projeté pour une fonction de coût  $J(\cdot)$ .

$$\mathbf{C}_n^{(i+1)} = \mathbf{C}_n^{(i)} - \nu \nabla_{\mathbf{C}_n^{(i)}} \quad (2.23)$$

Avec  $\mathbf{C}_n^{(i)}$  la composante fréquentielle du signal de correction du PAPR à la sortie de la  $i$ -ième itération et  $\nabla_{\mathbf{C}_n^{(i)}}$  le gradient de la fonction de coût  $J$  au point  $\mathbf{C}_n^{(i)}$ . Nous reviendrons en détail sur cette équation dans le chapitre 4 dans le cas de la méthode TR-GP pour laquelle la fonction de coût est le SCR pour *Signal to Clipping Ratio*. Notons que dans les méthodes [67, 50] les fonctions de coût considérées sont respectivement la norme infinie (considérée comme une norme  $\| \cdot \|_p$  lorsque  $p$  tend vers l'infini) et le SDR pour *Signal to Distorsion Ratio*. Pour illustrer ces types de techniques, nous avons opté notre choix sur la méthode TR-GP [125, 78] pour ses bonnes performances en réduction du PAPR, sa faible complexité numérique (qui est linéaire) et du fait qu'elle entraîne aussi une faible augmentation de la puissance moyenne, voir Annexe A où nous avons présenté quelques résultats de simulation sur les performances de cette méthode. Nous avons accordé durant notre thèse un grand intérêt à cette méthode avec laquelle nous allons nous comparer dans le chapitre 5. Pour une étude plus détaillée des performances (performances en réduction du PAPR, en variation de la puissance et en complexité numérique) le lecteur peut se référer à [103] ou étude des techniques TR pour la norme DVT-T2.

#### 2.4.2.2.b Techniques basées sur l' ACE

L'*Active Constellation Extension* est comme la TR une méthode de réduction du PAPR par ajout de signal. Elle propose un schéma d'insertion et une étape de calcul du signal de correction du PAPR. Elle est sans dégradation du BER et sans émission hors bande. Elle fut proposée pour la première fois par *D. Jones* dans [72]. Cependant les travaux proposés par *B. Krongold* dans [82] pour le calcul du signal via le gradient

projeté sont les plus connus parmi les techniques basées sur le schéma d'insertion de l'ACE [83, 80]. L'idée de base de l'ACE est d'étendre la constellation du signal de manière aveugle en réception (schéma d'insertion) afin d'insérer le signal de correction. Afin que cette extension soit aveugle en réception elle doit pas changer les seuils de détection de la constellation d'origine, ni affaiblir leur robustesse en présence d'un bruit additif. Il vient alors que les zones admissibles pour l'insertion du signal de correction du PAPR sont fonction de la constellation d'origine. Les Figures 2.19 et 2.20 donnent les zones admissibles d'insertion pour les constellation 4-QAM et 16-QAM.

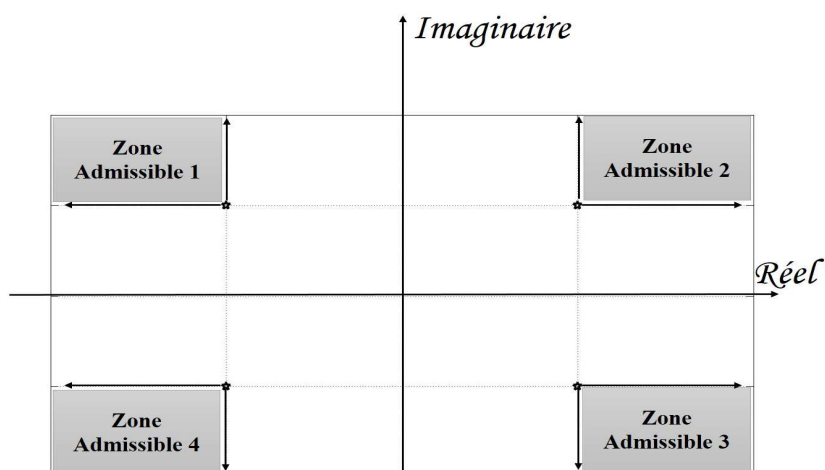


FIGURE 2.19 – Zones Admissibles pour l'insertion du signal de correction du PAPR dans le cas d'une 4-QAM

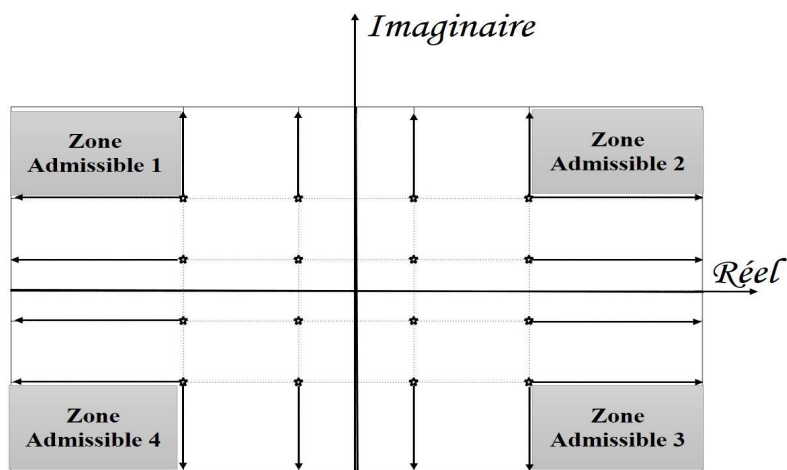


FIGURE 2.20 – Zones Admissibles pour l'insertion du signal de correction du PAPR dans le cas d'une 16-QAM

De la Figure 2.19 on remarque que dans le cas d'une 4-QAM chaque point de la constellation admet une zone admissible, cela signifie qu'on peut insérer du signal dans la zone associée à chaque point de la constellation sans modifier son seuil de détection ni affaiblir sa robustesse par rapport au bruit. Dans le cas d'une 16-QAM, voir Figure 2.20, on remarque que pour certains points, ceux de l'intérieur (ici il s'agit des points  $\{\pm 1 + \pm j\}$ ) il n'y a aucune possibilité d'insertion. En d'autres termes, si un symbole OFDM n'est

constitué que par ces points, on ne peut ajouter du signal pour réduire son PAPR sans rendre leur seuil de détection plus sensible au bruit. Cette remarque illustre bien les limites des méthodes basées sur l'ACE.

Soient  $\mathcal{U}_1^4, \dots, \mathcal{U}_3^4$  les quatre zones admissibles associées à chacune des quatre points définissant la constellation 4-QAM (dans la Figure 2.19) ces zones sont notées par **Zone Admissible 1, ..., Zone Admissible 4**. Posons  $\mathcal{U} = \bigcup_{i=1, \dots, 4} (\mathcal{U}_i^4)$ . Plus généralement, pour une constellation contenant  $K$  points, posons  $\mathcal{U}_i^K, i = 1 \dots K$  les  $K$  zones admissibles associées aux  $K$  points que contiennent cette constellation et désignons  $\mathcal{U}^K$  l'union de ces  $K$  zones admissibles. Notons que lorsque  $K > 4$ , certaines zones sont vides comme dans le cas de la constellation 16-QAM pour laquelle toutes les zones admissibles associées aux points intérieurs sont vides et les autres sont défini par des quart de plan (il s'agit des points  $\{\pm 3 \pm 3j\}$ ) ou par des demi-droites (il s'agit des point  $\{\pm 3 \pm j, \pm 1 \pm 3j\}$ ), voir Figure 2.20.

Avec les notations ci-dessus, la méthode ACE formalise le problème de réduction du PAPR par ajout de signal via le problème d'optimisation suivant :

$$\mathbf{C}_n^{(\text{opt})} = \min_{\mathbf{C}_n \in \mathcal{U}^K} \|\mathbf{x}_n + \mathbb{F}_{ML} \mathbf{C}_n\|_{\infty}^2 \quad (2.24)$$

On note ici que l'étape d'insertion est formalisée sous forme d'une contrainte de l'étape de calcul du signal de correction.

Comme dans [126], il a été montré que ce problème d'optimisation peut être reformulé comme un QCQP. En effet, en introduisant la variable  $E > 0$ , le problème (2.24) est équivalent au problème suivant :

$$\begin{aligned} & \min && E \\ \text{Sous la Contrainte :} &&& |x_{n,0} + \mathbf{F}_{ML,0}^{\text{Lig}} \mathbf{C}_n|_2^2 \leq E \\ &&& |x_{n,1} + \mathbf{F}_{ML,1}^{\text{Lig}} \mathbf{C}_n|_2^2 \leq E \\ &&& \vdots \\ &&& |x_{n,LM-1} + \mathbf{F}_{ML,LM-1}^{\text{Lig}} \mathbf{C}_n|_2^2 \leq E \\ &&& \mathbf{C} \in \mathcal{U}^k \end{aligned} \quad (2.25)$$

La dernière contrainte de ce problème d'optimisation spécifie le schéma d'insertion (ou étape d'insertion) du signal de correction du PAPR.

A la différence de la méthode TR-QCQP voir problème (2.18) la résolution de problème est très difficile voir irréalisable du fait d'une part de sa complexité et d'autre part du fait que la dernière contrainte n'est pas explicite [82]. Ainsi, comme alternative sous optimale, il existe deux solutions bien connues qui sont basées sur l'algorithme POCS (pour *Projection Onto Convex Set*) et l'algorithme SGP (pour *Smart Gradient Project*) [82, 49]. Ces deux méthodes sont des méthodes de type gradient projeté. A la différence de la méthode POCS, l'auteur propose dans [82] d'utiliser à chaque itération un pas optimal de descente calculé via une méthode qu'il a dénommé *Balancing Method* d'où le nom de *Smart Gradient Project*. Une autre solution moins populaire dans la littérature mais bien efficace a été proposée dans [132] par L. WANG AND TELLAMBURA. Cette méthode s'inspire des techniques de *Clipping And Filtering* et consiste via un filtrage dans le domaine fréquentiel à construire le signal de correction sous contrainte ACE à partir du signal de *clipping*. Cette méthode connue sous l'appellation AS pour *Adaptive-Scaling* peut aussi être vue comme une méthode du gradient projeté comme les méthode POCS et SGP. Notons que les méthodes AS et SPG du fait de la multiplication par un pas de descente optimal dans le domaine temporel peuvent entraîner de légère dégradation du BER [132].



Comme pour la TR, la méthode ACE a beaucoup attiré l'attention de la communauté et ainsi il existe d'autres travaux utilisant le principe d'insertion du signal de correction proposé par la méthode ACE [5, 63]. Tous ses travaux se focalisent sur la manière de calculer le signal de correction, ainsi comme nouvelle direction ou alternative nous suggérons de regarder comment assouplir la contrainte d'insertion du signal de correction proposée par la méthode ACE. Il existe déjà quelques travaux la dessus [4] ou l'auteur propose une approche adaptative qui consiste à utiliser un seuil d'écrêtage tenant compte des zones admissibles pour une projection optimale du signal de *clipping*. Sur cette thématique, on peut aussi noter les travaux dans [109] qui consiste à assouplir les contraintes de définition des zones admissibles. L'objectif est de jouer sur un compromis BER et performances en réduction du PAPR.

## 2.5 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté l'état de l'art des techniques de réduction du PAPR. Pour ce faire, nous avons d'abord donné une classification des techniques de réduction du PAPR. Ainsi, trois grandes familles ont été présentées dans ce chapitre. Il s'agit notamment des techniques de réduction du PAPR par codage, des techniques de réduction du PAPR dites probabilistes telles que les techniques *Selectives Mapping* ou *Partial Transmit Sequence*, des techniques de réduction du PAPR par ajout de signal. Cette dernière famille nous a particulièrement intéressé du fait que mon sujet de thèse s'inscrit dans cette thématique. Les techniques dites d'ajout de signal ont aussi été regroupées en deux familles que sont celles avec distorsions (Bruit *In Band* et Bruit hors bande) et celles sans distorsions. Pour les techniques sans distorsions nous sommes particulièrement intéressés à celles basées sur l'*Active Constellation Extension* et sur la *Tone Reservation*. Sur cette dernière approche nous avons fait un rappel très large sur les différentes techniques existantes dans la littérature et montré ainsi que de nos jours toutes les améliorations apportées sur la TR se concentrent essentiellement sur la manière dont le signal de correction du PAPR est calculé. Ce constat nous a poussé à plus nous focaliser sur la manière dont le signal est "inséré" ou sur le schéma d'insertion de la TR. Le Chapitre 5 est le fruit de ce travail. L'Annexe A apporte un complément sur le chapitre de l'état de l'art via une présentation de quelques résultats de simulation sur les performances de quelques unes des méthodes abordées. Nous y avons présenté une évaluation des performances des méthodes TR-QCQP, TR-SOCP et TR-GP.

# Chapitre 3

## Écrêtage Adaptatif

### Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>49</b>
<b>2.2</b>	<b>Notations et définitions générales de la thèse</b>	<b>51</b>
<b>2.3</b>	<b>Les techniques de Codage et Les techniques Probabilistes</b>	<b>54</b>
2.3.1	Les Techniques de Codages	54
2.3.2	Les techniques Probabilistes	54
<b>2.4</b>	<b>Les techniques dites d'ajout de signal</b>	<b>57</b>
2.4.1	Les techniques dites d'ajout de signal à compatibilité non descendante	60
2.4.1.1	La méthode <i>Tone Injection</i>	60
2.4.1.2	Les Techniques de <i>Companing</i>	62
2.4.1.3	Les Techniques de <i>Clipping Inversible</i>	63
2.4.2	Les techniques dites d'ajout de signal à compatibilité descendante	64
2.4.2.1	Techniques à compatibilité descendante avec distorsion	65
2.4.2.2	Techniques à compatibilité descendante sans distorsion	69
<b>2.5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>78</b>

---

### 3.1 Introduction

L'écrêtage, plus connu sous l'appellation de *Clipping* est la technique de réduction de PAPR la plus simple en matière de réalisation et d'implémentation. Le *clipping* consiste en effet à écrêter tous les échantillons du symbole qui dépassent une certaine amplitude prédéfinie communément appelée seuil de *clipping*. Pour plus de détails sur les avantages et inconvénients du *clipping*, le lecteur peut se référer au Chapitre 2. Dans ce chapitre, on s'intéresse au choix ou à la détermination du seuil de *clipping*. En effet, le seuil de *clipping* dans les techniques de *clipping* est prédéfini au préalable et de ce fait le PAPR instantané (valeur du PAPR pour un symbole OFDM donné, i.e., une réalisation du PAPR) après écrêtage dépend fortement du contenu du symbole écrêté qui à son tour dépend des données modulées par ce symbole ou de l'information contenue dans ce symbole. Il s'ensuit alors que le recul de puissance nécessaire pour une amplification optimale en terme de rendement énergétique et sans distorsions, voire Chapitre 1, qui n'est rien d'autre en pratique que la borne supérieure du PAPR à  $10^{-4}$  est en général très grand par rapport



aux PAPR instantanés d'un grand nombre de symboles OFDM après écrêtage. Cet écart est d'autant plus important ( $\geq 1\text{dB}$ ) pour des seuils de *clipping* permettant d'avoir de bonnes performances en termes de réduction de PAPR. Ainsi, beaucoup de symboles OFDM (probabilité d'occurrence non négligeable) sont sévèrement écrêtés ou inutilement écrêtés par rapport au PAPR de sortie à  $10^{-4}$  obtenu avec ce seuil. Dans ce chapitre on propose l'écrêtage adaptatif. Dans cette technique d'écrêtage, chaque symbole est écrêté avec un seuil à déterminer de telle sorte que le PAPR instantané de ce symbole après écrêtage soit égal au PAPR de sortie désiré. On obtient ainsi, une technique d'écrêtage à PAPR de sortie quasi-constant.

Ce chapitre sera organisé comme suit. La Section 3.2 abordera les différentes définitions et notations qui seront utilisées le long de ce chapitre ainsi que le principe et la formulation de l'écrêtage adaptatif. Dans la Section 3.4 les résultats de simulation seront présentés afin de comparer l'écrêtage adaptatif à l'écrêtage à seuil prédéfini. Nous finirons par la conclusion et les perspectives dans la Section 3.5

## 3.2 Motivations et Principe de l'écrêtage adaptatif

Dans cette section, à travers une analyse de la CCDF d'un signal OFDM après réduction du PAPR via la méthode *clipping* classique (CC), nous allons donner les motivations et l'idée derrière (objectifs) de l'écrêtage adaptatif. Notons d'emblée que cette technique se donne comme objectifs de réduire les dégradations induites par la méthode CC sans perte de performances en termes de réduction du PAPR. Pour ce faire, nous allons dans la sous section à venir donner les définitions et notations qui seront utilisées tout au long de ce chapitre.

### 3.2.1 Notations et définitions

Comme dans les chapitres précédents,  $x_n(t)$ ,  $M$ ,  $\rho$  désignerons respectivement un symbole OFDM de durée  $T_u$ , le nombre de porteuses ou sous porteuses de  $x_n(t)$  et le seuil d'écrêtage normalisé. En discret  $x_n(t)$  sera désigné par le vecteur  $\mathbf{x}_n$ . Puisque  $\mathbf{x}_n$  est une variable aléatoire, le PAPR de  $\mathbf{x}_n$  est aussi une variable aléatoire, ainsi, nous désignerons dans ce chapitre par PAPR instantané une réalisation du PAPR de  $\mathbf{x}_n$ , i.e, la valeur du PAPR associé à chaque symbole. Pour un symbole  $\mathbf{x}_n$  donné, le calcul de cette valeur que nous noterons  $\text{PAPR}_{[\mathbf{x}_n]}$  a été donné dans l'équation 1.12 du chapitre 1.

Nous désignerons, comme dans les chapitres précédents, par  $\mathbf{y}_n$  le symbole OFDM  $\mathbf{x}_n$  après réduction du PAPR, i.e après écrêtage dans ce chapitre. Dans le cas d'un processus ou méthode de réduction du PAPR itérative, nous désignerons par  $\mathbf{y}_n^{(k)}$  le symbole à la sortie de la  $k$ -ième étape du processus.

Pour tout  $e \geq 0$ ,  $\gamma_e$  désignera tout au long de ce chapitre la borne supérieure du PAPR à  $10^{-e}$ , i.e,  $\text{CCDF}(\Phi) = 10^{-e}$ , à ne pas confondre avec le PAPR instantané qui est une réalisation du PAPR. Il est à noter qu'en pratique,  $\gamma_4$  désigne le recul de puissance (IBO) nécessaire **sans** réduction du PAPR pour une amplification sans distorsion.

La Figure (3.1) donne une illustration de la définition de  $\gamma_e$  à l'aide de la courbe de la CCDF.

On remarque sur la Figure 3.1 que les valeurs  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$  et  $\gamma_4$  désignent respectivement les bornes supérieures du PAPR à  $10^{-1}$ ,  $10^{-2}$  et  $10^{-4}$  de la CCDF.

D'un point de vue mathématique (cf Figure 3.1), on remarque que si  $e > 0$ , alors la borne supérieure  $\gamma_e$  du PAPR à  $10^{-e}$  de la CCDF peut être définie comme suit :

$$\gamma_e = \arg \min_{\Phi} \{ \Phi, \text{CCDF}(\Phi) \leq 10^{-e} \} \quad (3.1)$$

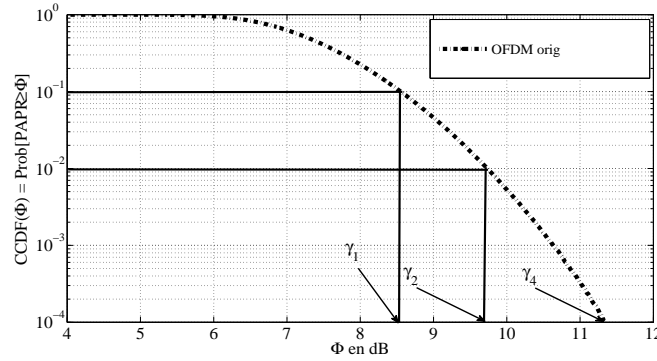


FIGURE 3.1 – Représentation de  $\gamma_e$  à l'aide de la CCDF pour un système OFDM comportant  $M = 64$  porteuses.

Pour un seuil normalisé  $\rho$  donné et une fonction d'écrêtage  $f$  associé à ce seuil,  $\gamma_e(\rho)$  désignera tout au long de ce chapitre la borne supérieure du PAPR à  $10^{-e}$  de la CCDF après réduction du PAPR par écrêtage à l'aide de la fonction  $f$  avec le seuil  $\rho$ . Cette borne supérieure sera aussi simplement appelée PAPR à  $10^{-e}$ . Pour  $e = 4$ , on la désignera comme étant le *PAPR de sortie* ou le *PAPR obtenu* ou simplement *la valeur utile du PAPR*.

La Figure 3.2 donne une illustration graphique du PAPR à  $10^{-e}$  après réduction du PAPR par écrêtage (méthode CC) avec le seuil  $\rho = 5$ dB. De la Figure (3.2), on remarque

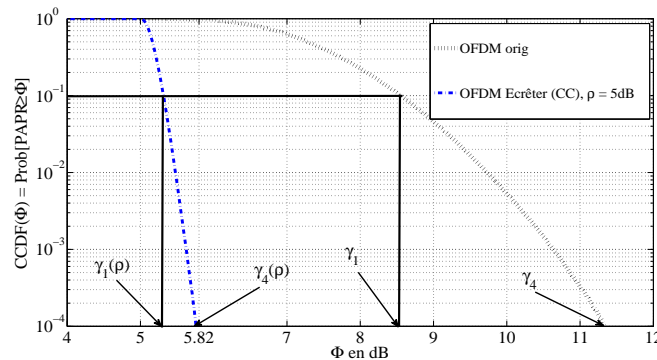


FIGURE 3.2 – Représentation de  $\gamma_e(\rho)$  à l'aide de la CCDF pour un système OFDM comportant  $M = 64$  porteuses.

que  $\gamma_e(\rho)$  croît quand  $e$  décroît, i.e., quand la CCDF du signal après écrêtage décroît. En outre, on remarque que l'écart entre  $\rho = \gamma_0(\rho)$  et  $\gamma_4(\rho)$  est important, il vaut 1.22dB environ dans notre exemple. Cela occasionnera comme nous le verrons dans la section à venir un écrêtage sévère ou non nécessaire d'un grand nombre de symboles OFDM par rapport au PAPR de sortie  $\gamma_4(\rho)$  qu'on peut avoir avec ce seuil. Pour un PAPR de sortie  $\text{PAPR}_0$  cible fixé, la technique d'écrêtage adaptatif que nous proposons dans ce chapitre, nous permettra d'obtenir en sortie, un PAPR à  $10^{-e}$  égal à  $\text{PAPR}_0$  quelque soit  $e \geq 0$ , i.e., un PAPR à borne supérieure constante et déterministe. De ce fait, l'écrêtage adaptatif n'occasionnera pas d'écrêtage sévère ou non nécessaire par rapport au PAPR de sortie. En choisissant  $\text{PAPR}_0 = \gamma_4(\rho)$ , les deux approches donnerons le même PAPR de sortie mais l'approche adaptative engendrera moins de dégradations sur le signal de sortie que le *clipping* classique à seuil prédéfini  $\rho$ .

Dans la suite de ce chapitre,  $\text{PAPR}_0$  désignera le PAPR de sortie souhaité dans le cas de l'écrêtage à seuil adaptatif que nous proposons. Pour chaque symbole  $\mathbf{x}_n$  à écrêter,  $\rho^{\mathbf{x}_n}$

désignera le seuil adapté à ce symbole. Nous allons à présent, parler de l'écrêtage adaptatif et particulièrement des techniques de calcul du seuil adapté  $\rho^{x^n}$ .

### 3.2.2 Problématique et Formulation de l'écrêtage adaptatif

Avec les mêmes notations que dans la sous section (3.2.1), considérons la Figure (3.3) qui donne  $\gamma_4(\rho)$  ainsi que les PAPR instantanés  $\text{PAPR}_{[y_n]}$  de quelques symboles OFDM, après écrêtage, en fonction du seuil  $\rho$ .

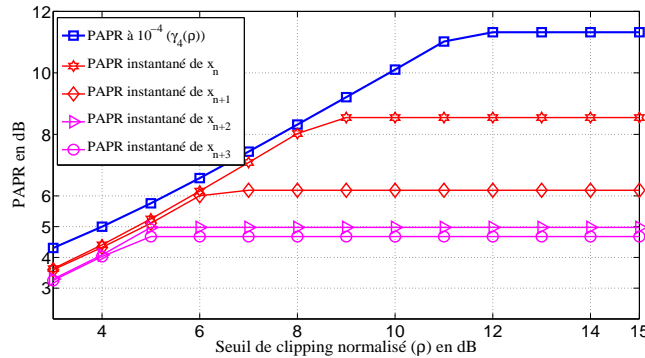


FIGURE 3.3 – Le PAPR à  $10^{-4}$  ainsi que les PAPR instantanés de quelques symboles OFDM après écrêtage en fonction de  $\rho$  :  $M = 64$  et  $L = 4$ .

Tout d'abord notons que sur la Figure (3.3), par principe de l'écrêtage, les valeurs des PAPR instantanés des cinq symboles à partir de  $\rho \geq 9$ dB sont égaux à leur PAPR instantané initial. D'ailleurs, on peut même remarquer qu'à partir de ce seuil leur PAPR instantané ne varie plus. Cela est tout à fait normal car ces symboles ont un PAPR initial inférieur au seuil normalisé  $\rho$ . Les résultats de la Figure (3.3), montrent bien qu'il existe un écart entre  $\gamma_0(\rho) = \rho$  et  $\gamma_4(\rho)$ . En effet, on remarque que la courbe  $\gamma_4(\rho)$  est au dessus de la diagonale (Première bissectrice). On constate aussi que cet écart est plus important pour des seuils de *clipping* permettant d'avoir un bon PAPR de sortie. Par exemple, pour  $\rho = 4$ dB on a un écart d'environ 1dB. Les résultats de simulation montrent aussi qu'il existe des symboles OFDM (Voire courbes des PAPR instantanés des 5 symboles dénotés  $\mathbf{x}_n, \dots, \mathbf{x}_{n+3}$ ), qui après écrêtage, ont un PAPR instantané  $\text{PAPR}_{[y_n]}$  strictement plus petit que le  $\gamma_4(\rho)$ . Par exemple, pour  $\rho = 4$ dB, on observe un écart supérieur à 0.5dB entre  $\gamma_4(4$ dB) qui vaut 5dB et les PAPR instantané des cinq symboles qui varie entre 4 et 4.5dB. On peut aussi constater que certains symboles ont été écrêtés malgré que leur PAPR instantané initial était inférieur au PAPR de sortie  $\gamma_4(\rho)$ . Il s'agit des symboles  $\mathbf{x}_{n+2}$  et  $\mathbf{x}_{n+3}$  qui ont un PAPR instantané initial compris entre 4.5 et 5dB et qui sont écrêtés avec  $\rho = 4$ dB, sachant que le PAPR de sortie qu'on peut obtenir avec ce seuil est de 5dB, voir Figure (3.4).

Les résultats de simulation des Figures (3.3) et (3.4) illustrent bien que le *clipping* classique entraîne un écrêtage sévère ou non nécessaire de certains symboles OFDM par rapport au PAPR de sortie  $\gamma_4(\rho)$  que ce seuil permet d'avoir. Le *clipping* étant par principe une méthode à distorsions, voir chapitre 2, il est alors légitime de s'interroger si le fait de fixer le seuil d'écrêtage pour tous les symboles OFDM n'entraîne pas des dégradations inutiles sur le signal de sortie par rapport au PAPR cible ( $\gamma_4(\rho)$ ).

Pour voir un peu plus clair sur cette notion d'écrêtage sévère ou non nécessaire, considérons la Figure (3.5) sur laquelle sont représentées les CCDF du PAPR d'un symbole OFDM avant et après écrêtage avec un seuil prédéfini à  $\rho = 3.5$ dB. Sur cette figure,

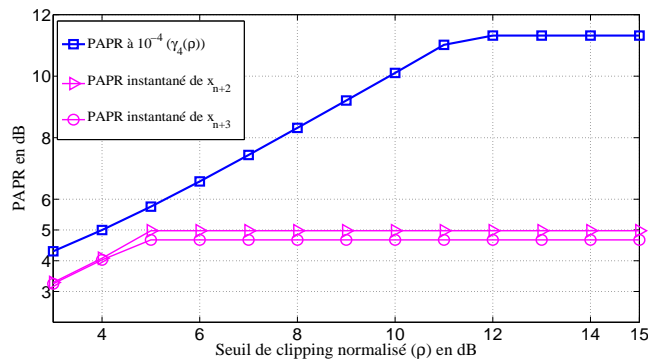


FIGURE 3.4 – Le PAPR à  $10^{-4}$  et le PAPR instantané de quelques symboles OFDM en fonction de  $\rho$  pour  $M = 64$  et  $L = 4$ .

nous avons aussi dessiné la CCDF du "Écrêtage Idéal". L'appellation *clipping* idéal vient du fait qu'une telle méthode permettra d'avoir  $\gamma_e(\cdot)$  constant quelque soit  $e$  et donc il n'y aurait pas d'écrêtage sévère ou inutile par rapport au PAPR de sortie. En outre, il aura les mêmes performances en termes de réduction du PAPR que l'écrêtage classique et engendrera moins de dégradations.

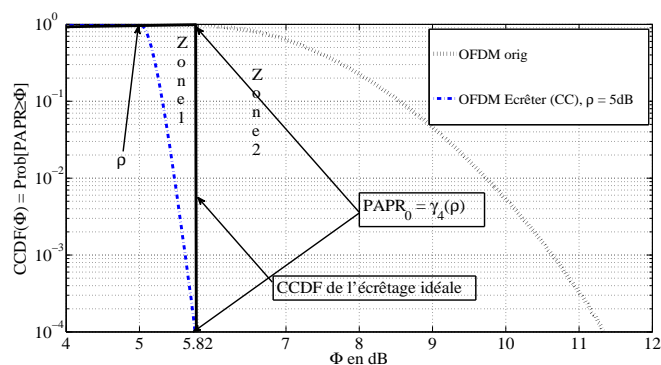


FIGURE 3.5 – CCDF avant et après écrêtage à  $\rho = 5$  dB pour un système OFDM à 64 porteuses.

Les résultats de la Figure 3.5, montrent qu'en fixant le seuil à  $\rho = 5$  dB, certains symboles OFDM seront écrêtés sévèrement ou inutilement vis à vis du PAPR  $\gamma_4(\rho)$  obtenu après écrêtage. En effet on peut considérer les deux situations suivantes :

- Les symboles avec un PAPR instantané initial supérieur à  $\gamma_4(\rho)$  (Zone 2).

D'après la Figure 3.5, la CCDF du PAPR avant écrêtage montre que tout symbole OFDM (comportant  $M = 64$  porteuses) a un PAPR presque toujours supérieur  $\gamma_e(\rho)$  puisque on a :

$$\text{Prob} [\text{PAPR} \geq \gamma_e(\rho)] = \text{CCDF}(\gamma_e(\rho)) \simeq 1 \text{ quelque soit } e \geq 0 \quad (3.2)$$

Après écrêtage, la probabilité d'avoir des symboles avec un PAPR instantané compris entre  $[\gamma_0(\rho), \gamma_4(\rho)] = [\rho, \text{PAPR}_0]$  est assez grande. Ainsi, puisque l'écart entre  $\gamma_0(\rho)$  et  $\text{PAPR}_0 = \gamma_4(\rho)$  n'est pas négligeable ( $\geq 1$  dB), il s'en suit alors que beaucoup de symboles ont été sévèrement écrêtés par rapport au PAPR cible  $\gamma_4(\rho)$ .

- Les symboles avec un PAPR instantané initial compris entre  $\gamma_0(\rho) = \rho$  et  $\gamma_4(\rho)$  (Zone 1).

Tout d'abord, notons que dans la Figure 3.5 on a  $\mathbb{P}\text{rob}[\text{PAPR} < \gamma_4(\rho)] \simeq 0$  et que cela est dû au fait que  $\gamma_4(\rho)$  est petit. Cependant en utilisant les Figures (3.3) et (3.5), on remarque que pour  $\rho = 5.5$  ou 6dB par exemple, la probabilité d'avoir des symboles avec un PAPR instantané initial compris entre  $[\rho, \text{PAPR}_0] = [\rho, \gamma_4(\rho)]$  n'est pas négligeable. Par conséquent, pour de tels seuils, le *clipping* classique occasionne un écrêtage non nécessaire, i.e, des symboles avec un PAPR initial plus petit que le PAPR de sortie  $\gamma_4(\rho)$  que ce seuil peut atteindre seront écrêtés.

Pour pallier ce problème nous avons proposé dans cette thèse l'écrêtage adaptatif [32, 33] ou *Clipping* adaptatif. L'objectif de cette technique est d'avoir une CCDF qui approche au mieux la courbe désignée par Écrêtage Idéal dans la Figure (3.5). Pour ce faire, le *clipping* adaptatif consistera à écrêter chaque symbole avec un seuil adapté de telle sorte que le PAPR instantané de ce symbole après écrêtage soit égal à  $\text{PAPR}_0$ . De ce fait, comme on peut le remarquer sur la Figure (3.5), le *clipping* adaptatif nous permettra d'avoir la même borne supérieure du PAPR à n'importe quel point de la CCDF. L'écrêtage adaptatif, comme nous le verrons par la suite, nous permettra ainsi d'atténuer les dégradations du signal d'intérêt pour les mêmes performances en termes de réduction du PAPR que l'écrêtage à seuil prédéfini.

Dans ce qui suit nous allons élaborer le processus de l'écrêtage adaptatif qui se déroule en deux étapes à savoir le calcul du seuil de *clipping* pour chaque symbole à écrêter et l'écrêtage en tant que tel. Comme fonction d'écrêtage pour cette dernière étape, nous utiliserons la fonction d'écrêtage classique [89] défini pour un seuil  $\rho = 10\text{Log}_{10}\left(\frac{A^2}{P_{\mathbf{x}_n}}\right)$  donné, par l'équation ci-dessous.

$$y_{n,l} = f(x_{n,l}, A) = \begin{cases} Ae^{j \arg x_{n,l}} & \text{Si } |x_{n,l}| \geq A \\ x_{n,l} & \text{Sinon} \end{cases} \quad (3.3)$$

avec  $\mathbf{x}_n = [x_{n,0}, \dots, x_{n,ML-1}]$  et  $\mathbf{y}_n = [y_{n,0}, \dots, y_{n,ML-1}]$  les vecteurs symboles OFDM avant et après écrêtage.

### 3.3 Principe de l'écrêtage adaptatif ou *clipping* adaptatif

Soient  $\mathbf{x}_n$  et  $\mathbf{y}_n$  des symboles OFDM avant et après écrêtage. Notons par  $\rho$  le seuil d'écrêtage. Le PAPR instantané du symbole  $\mathbf{y}_n$  est par définition donné par :

$$\text{PAPR}_{[\mathbf{y}_n]} = \frac{\max_{l=0, \dots, ML-1} \{|y_{n,l}|^2\}}{P_{\mathbf{y}_n}} \quad (3.4)$$

En supposant que le PAPR instantané de  $\mathbf{x}_n$  est supérieur au seuil normalisé  $\rho = 10\text{Log}_{10}\left(\frac{A^2}{P_{\mathbf{x}_n}}\right)$  i.e que le symbole  $\mathbf{x}_n$  a bien été écrêté suivant la fonction définie par l'équation (3.3), alors l'équation ci-dessus devient :

$$\begin{aligned} \text{PAPR}_{[\mathbf{y}_n]} &= \frac{|A|^2}{P_{\mathbf{y}_n}} \\ &= 10^{\frac{\rho}{10}} \left( \frac{P_{\mathbf{x}_n}}{P_{\mathbf{y}_n}} \right) \end{aligned} \quad (3.5)$$

En passant en décibel l'équation (3.5) se réécrit comme suit :

$$\text{PAPR}_{[\mathbf{y}_n]_{\text{dB}}} = \rho + 10\text{Log}_{10}\left(\frac{P_{\mathbf{x}_n}}{P_{\mathbf{y}_n}}\right) \quad (3.6)$$

Étant donné que l'écrêtage entraîne une diminution de la puissance moyenne du signal on a alors  $10\text{Log}_{10}\left(\frac{P_{\mathbf{x}_n}}{P_{\mathbf{y}_n}}\right) > 0$ , d'où  $\text{PAPR}_{[\mathbf{y}_n]} > \rho$ . On en conclut que l'écrêtage à seuil prédéfini ne permet pas d'avoir  $\gamma_e(\rho)$  constant quelque soit  $e \geq 0$  puisque l'équation (3.6) montre que le PAPR instantané après écrêtage dépend du contenu du symbole  $\left(\frac{P_{\mathbf{x}_n}}{P_{\mathbf{y}_n}}\right)$ . En outre nous avons vu dans la sous Section (3.2) que pour des valeurs de  $\rho$  petit, l'écart entre ce PAPR en sortie et le seuil  $\rho$  est important.

Les seuil d'écrêtage normalisé utilisé en pratique dans la cadre du *clipping* classique est généralement supérieur à 3dB afin de ne pas dégrader totalement les données transmises par ce symbole voir chapitre 2 et section 2.4.2.1. Ainsi, si  $\gamma_4(3\text{dB})$  désigne le PAPR obtenu à  $10^{-4}$  de la CCDF après écrêtage classique avec le seuil  $\rho = 3.5\text{dB}$ , nous supposons dans la suite de ce document que  $\text{PAPR}_0 > \gamma_4(3\text{dB})$ . Cette hypothèse nous permettra de nous assurer, comme nous le verrons dans la suite de ce document que pour chaque symbole OFDM  $\mathbf{x}_n$  son seuil adapté  $\rho^{\mathbf{x}_n}$  existe et n'est pas trop petit.

Pour tout symbole OFDM  $\mathbf{x}_n$  avec un PAPR instantané supérieur au PAPR souhaité en sortie ( $\text{PAPR}_0$ ) après écrêtage, l'écrêtage adaptatif comme il a été énoncé dans [32], consiste en deux étapes que sont :

1. Calcul du seuil adapté  $\rho^{(\mathbf{x}_n)}$  :

Cette étape consiste, pour un  $\mathbf{x}_n$  donné et  $\text{PAPR}_0$  fixé, à trouver le seuil  $\rho^{(\mathbf{x}_n)}$  de tel sorte que le PAPR instantané de ce symbole après écrêtage soit égal à  $\text{PAPR}_0$ . D'après l'équation (3.5) cette étape consiste, d'un point de vue mathématique, à résoudre l'équation suivante

$$\text{PAPR}_0 = 10^{\frac{\rho}{10}} \left( \frac{P_{\mathbf{x}_n}}{P_{\mathbf{y}_n}} \right) \quad (3.7)$$

2. Écrêtage du symbole  $\mathbf{x}_n$  avec le seuil  $\rho^{(\mathbf{x}_n)}$  solution de l'équation (3.7), selon la fonction d'écrêtage défini par l'équation (3.3).

La résolution de l'équation (3.7) n'est pas triviale. En effet, la puissance moyenne  $P_{\mathbf{y}_n}$  est fonction de l'inconnue  $\rho$  et il est à priori difficile d'exprimer  $P_{\mathbf{y}_n}$  en fonction de  $\rho$  de manière explicite. Dans cette thèse trois approches de résolution de cette équation seront abordées. Ces approches, comme nous le verrons dans les sous sections (3.3.1),(3.3.2) et (3.3.3) à venir ne différeront qu'en termes de complexité. Ces trois méthodes ne diffèrent en effet, que de la manière dont le seuil adapté est calculé pour chaque symbole à écrêter. Ainsi, ces différentes approches auront les mêmes performances en termes de réduction du PAPR et de dégradations du signal après écrêtage.

### 3.3.1 Recherche Exhaustive à pas constant : Approche naïve

La résolution de l'équation, comme il été souligné précédemment n'est pas un problème trivial du fait que  $P_{\mathbf{y}_n}$  ne peut pas être exprimé de manière explicite en fonction de  $\rho$ . Ainsi, dans cette sous section, nous proposons une approche basée sur une recherche exhaustive à pas constant pour trouver le seuil adapté comme dans [32]. Pour ce faire, nous allons dans un premier temps déterminer un intervalle dans lequel se trouve le seuil  $\rho^{\mathbf{x}_n}$  et cela indépendamment du symbole à écrêter. Soit  $\rho_{\min}$  un seuil normalisé défini comme suit :

$$\rho_{\min} = \min_{\rho} \{ |\text{PAPR}_0 - \gamma_4(\rho)| \} \quad (3.8)$$

La Figure (3.6) donne une illustration de  $\rho_{\min}$  pour une valeur de  $\text{PAPR}_0$  donnée.



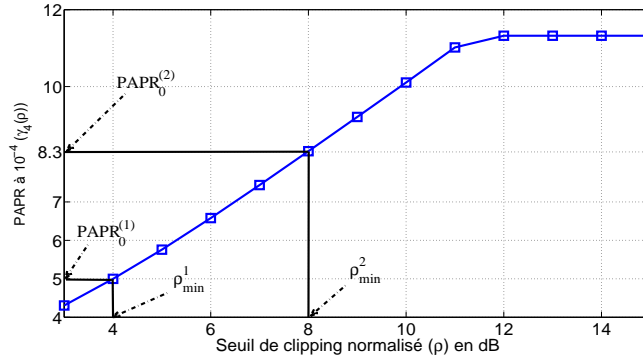


FIGURE 3.6 – Détermination graphique de  $\rho_{\min}$  à l'aide de la courbe du PAPR à  $10^{-4}$  en fonction de  $\rho$  :  $M = 64$  et  $L = 4$ .

Dans cette figure deux valeurs de  $\text{PAPR}_0$  désignées par  $\text{PAPR}_0^{(1)}$  et  $\text{PAPR}_0^{(2)}$  ont été prises comme exemple, les  $\rho_{\min}$  associés ont été désignés respectivement par  $\rho_{\min}^{(1)}$  et  $\rho_{\min}^{(2)}$ . On remarquera que pour des valeurs assez grandes de  $\text{PAPR}_0$ , on aura  $\text{PAPR}_0 = \gamma_4(\rho_{\min}) = \rho_{\min}$ . Ce qui est tout à fait normal, puisque dans ce cas le PAPR instantané de chaque symbole OFDM sera inférieur ou égale à  $\text{PAPR}_0$  avec une probabilité quasiment égale à 1 et donc les symboles ne seront pas écrêtés.

D'après l'équation (3.7), si  $\rho^{(\mathbf{x}_n)}$  est solution alors on a :

$$\begin{aligned} \text{PAPR}_0 &= 10^{\frac{\rho^{(\mathbf{x}_n)} - 10}{10}} \left( \frac{P_{\mathbf{x}_n}}{P_{\mathbf{y}_n}} \right) \\ \text{PAPR}_{0|\text{dB}} &= \underbrace{\rho^{(\mathbf{x}_n)} + 10 \text{Log}_{10} \left( \frac{P_{\mathbf{x}_n}}{P_{\mathbf{y}_n}} \right)}_{>0} \end{aligned} \quad (3.9)$$

Il s'ensuit alors que  $\rho^{(\mathbf{x}_n)} \in [\rho_{\min}, \text{PAPR}_0]$  et cela quelque soit le symbole OFDM  $\mathbf{x}_n$  à écrêter. Du fait que le calcul de  $\rho^{(\mathbf{x}_n)}$  par recherche exhaustive à pas constant donne une approximation de la solution, il s'ensuit alors que le PAPR instantané du symbole OFDM concerné après écrêtage sera aussi une approximation de  $\text{PAPR}_0$ . Désignons par  $\epsilon > 0$ , le résidu toléré (écart entre  $\text{PAPR}_0$  et le PAPR instantané du symbole après écrêtage avec le seuil adapté).

L'approche par recherche exhaustive consiste à parcourir avec un pas de déplacement constant dans l'intervalle  $[\rho_{\min}, \text{PAPR}_0]$  à la recherche d'une bonne approximation de  $\rho^{(\mathbf{x}_n)}$  pour chaque symbole à écrêter, i.e., si  $\rho_k$  désigne le seuil testé à la sortie de la  $k$ -ième étape, alors la recherche s'arrête si  $\text{PAPR}_0 - \text{PAPR}_{[\mathbf{y}_n]} \leq \epsilon$  et continue sinon. Notons que  $\rho_{\min}$ , voir Figure 3.6, est une borne probabiliste, i.e., il peut y avoir des symboles OFDM qui nécessitent un seuil  $\rho^{(\mathbf{x}_n)} < \rho_{\min}$ . Par définition du  $\rho_{\min}$ , pour une valeur de  $\text{PAPR}_0$  donnée, cette probabilité est de l'ordre de  $10^{-4}$ . Cependant, pour un choix d'initialisation plus judicieux du premier seuil à tester lors de la recherche exhaustive à pas constant, on peut choisir  $\text{PAPR}_0$  qui est une borne supérieure déterministe du  $\rho^{(\mathbf{x}_n)}$ , voir équation (3.9). La recherche exhaustive à pas constant  $\epsilon$  consistera alors à tester successivement les seuils  $\rho_1 = \text{PAPR}_0, \rho_2 = \rho_1 - \epsilon, \dots, \rho_k = \rho_{k-1} - \epsilon, \dots$ , jusqu'à obtenir le seuil  $\rho_k$  permettant d'avoir un PAPR instantané après écrêtage vérifiant la contrainte défini comme suit :

$$\text{PAPR}_0 - \text{PAPR}_{[\mathbf{y}_n]} \leq \epsilon \quad (3.10)$$

L'Algorithme (1) décrit le processus de l'écrêtage adaptatif.

---

**Algorithm 1** Écrêtage adaptatif : Calcul du seuil et du symbole écrêté.
 

---

**Require:**  $\mathbf{x}_n, \epsilon, \text{PAPR}_0$ **Ensure:**  $\mathbf{y}_n$  $\rho_1 \leftarrow \text{PAPR}_0$  ou  $\rho_{\min}$ Calculer  $A$  en utilisant  $\rho_1 = \frac{A}{\sqrt{P_{\mathbf{x}_n}}}$  $\mathbf{y}_n \leftarrow f(\mathbf{x}_n, A)$ **while**  $|\text{PAPR}_{[\mathbf{y}_n]} - \text{PAPR}_0| > \epsilon$  **do** $\rho_k \leftarrow \rho_{k-1} - \epsilon$ Calculer  $A$  en utilisant  $\rho_k = \frac{A}{\sqrt{P_{\mathbf{x}_n}}}$  $\mathbf{y}_n \leftarrow f(\mathbf{x}_n, A)$ **end while**


---

De l'Algorithme 1, on constate qu'à chaque itération une opération d'écrêtage classique et le calcul d'un PAPR est nécessaire pour décider si la recherche continue ou non. Ces deux opérations étant à faible coût, nous allons donc nous intéresser plus au nombre moyen d'itérations nécessaires pour trouver le seuil adapté, i.e, la vitesse de convergence de l'Algorithme (1). Néanmoins, nous allons d'abord, illustrer (ou confirmer) par simulation le phénomène d'écrêtage non nécessaire ou sévère par rapport au PAPR de sortie de la méthode d'écrêtage à seuil prédéfini (fixe). Pour ce faire, nous allons comparer les PAPR instantanés initial et après écrêtage avec le *clipping* à seuil prédéfini  $\rho$  (CC) et le *clipping* adaptatif (AC) avec  $\text{PAPR}_0 = \gamma_4(\rho) - \epsilon$  de quelques symboles OFDM.

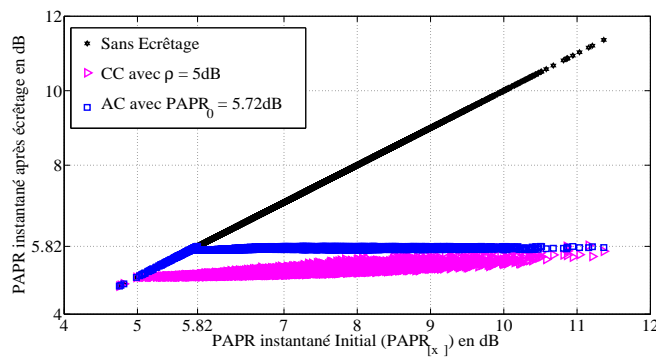


FIGURE 3.7 – PAPR instantané avant et après écrêtage avec les méthodes CC et AC.

Les résultats de simulation de la Figure (3.7) confirment qu'en fixant le seuil d'écrêtage  $\rho$  à 5dB, certains symboles OFDM sont sévèrement ou inutilement écrêtés par rapport au PAPR de sortie  $\gamma_4(\rho) = 5.82$ . En effet, on peut observer que les symboles avec un PAPR instantané initial inclus dans  $[\rho, \gamma_4(\rho)] = [5, 5.82]$  (en dB) seront écrêtés dans le cas du *clipping* classique (écrêtage non nécessaire) alors que dans le cas du *clipping* adaptatif (AC) ces symboles ne seront pas écrêtés. De mêmes les symboles avec un PAPR instantané initial plus grand que 5.82dB sont sévèrement écrêtés dans le cas du *clipping classique* contrairement avec la méthode AC où leur PAPR instantané après écrêtage est quasiment égal 5.82dB.

Nous allons maintenant évaluer les performances de l'Algorithme 1 en termes de rapidité de convergence i.e le nombre d'itérations nécessaires pour trouver le seuil adapté pour chaque symbole à écrêter. Pour chaque symbole OFDM, la recherche du seuil adapté nécessite une opération d'écrêtage pour chaque seuil testé, ainsi l'écrêtage étant une opération à très faible complexité numérique, nous allons donc nous intéresser qu'au



nombre moyen d'itérations nécessaires pour trouver le seuil adapté. Pour un symbole OFDM  $\mathbf{x}_n$  donné et  $\text{PAPR}_0$  fixé, désignons par  $N_{\mathbf{x}_n}$  le nombre d'itérations effectués par l'Algorithme (1) pour la recherche du seuil adapté au symbole  $\mathbf{x}_n$ . Posons  $N_{\text{AC}} = \mathbb{E}[N_{\mathbf{x}_n}]$ , i.e, le nombre moyen d'itérations. En pratique, pour un nombre de réalisations appelé Trial suffisant,  $N_{\text{AC}}$  peut être estimé comme suit :

$$N_{\text{AC}} = \frac{1}{\text{Trial}} \sum_{n=1}^{\text{Trial}} N_{\mathbf{x}_n} \quad (3.11)$$

Le Tableau (3.1) donne  $N_{\text{AC}}$  pour différents valeurs de  $\text{PAPR}_0$ .

$\text{PAPR}_0$ (en dB)	4	5	6	7	8	9
$N_{\text{AC}}$	5.2	2.6	1.4	1.1	1	1

TABLE 3.1 – Complexité en termes de vitesse (nombre moyen d'itérations) de l'Algorithme (1) en fonction du PAPR désiré  $\text{PAPR}_0$ .

Bien que l'opération d'écrêtage effectuée à chaque itération soit à faible complexité, force est de constater que la recherche exhaustive à pas constant est une méthode très coûteuse en termes de complexité numérique comparée au *clipping* classique. En effet, on remarque par exemple, pour  $\text{PAPR}_0 = 4\text{dB}$ , il faut en moyen 5 itérations pour approcher le seuil adapté pour chaque symbole, voir Tableau (3.1). Puis qu'à chaque itération, une opération d'écrêtage simple est nécessaire pour décider de l'arrêt ou non de la recherche, il vient alors que la méthode AC est très coûteuse comparée aux techniques d'écrêtages connues dans la littérature tel que le *Smooth Clipping*, le *Deep Clipping*, voir chapitre 3. Du Tableau (3.1), on remarque aussi que pour des valeurs grand de  $\text{PAPR}_0$ , la méthode AC aura une complexité similaire au *clipping* classique. Cela est tout à fait prévisible puisque, lorsque  $\rho$  est grand, la méthode CC sera quasiment identique à de l'Écrêtage Ideal car l'écart entre  $\gamma_0(\rho) = \rho$  et  $\gamma_4(\rho)$  devient négligeable, voir sous section (3.2.2).

Dans l'Algorithme (1), le pas  $\epsilon$  étant fixé, on peut s'attendre par analogie avec l'écrêtage à seuil prédéfini (fixe pour tous les symboles), à ce que le nombre d'itérations nécessaires dépende fortement du contenu de chaque symbole.

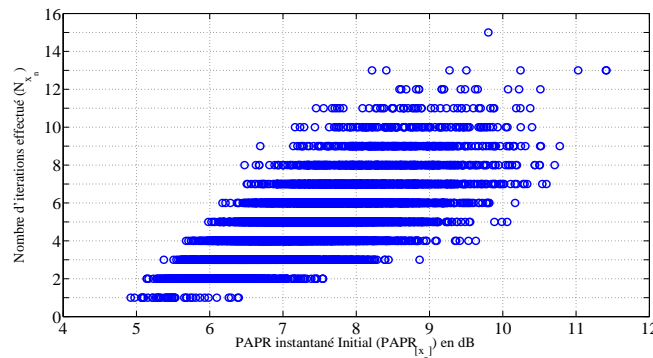


FIGURE 3.8 – Nombre d'itérations nécessaires (Recherche de seuil adapté) pour quelques symboles OFDMM ( $M = 64, L = 4$ ) pour  $\text{PAPR}_0 = 4\text{dB}$  en fonction de leur PAPR instantané initial.

Les Figures 3.8 et 3.9 donnent respectivement, le nombre d'itérations  $N_{\mathbf{x}_n}$  pour quelques milliers de symboles OFDM générés aléatoirement et pour  $\text{PAPR}_0 = 4\text{dB}$  et  $5\text{dB}$ .

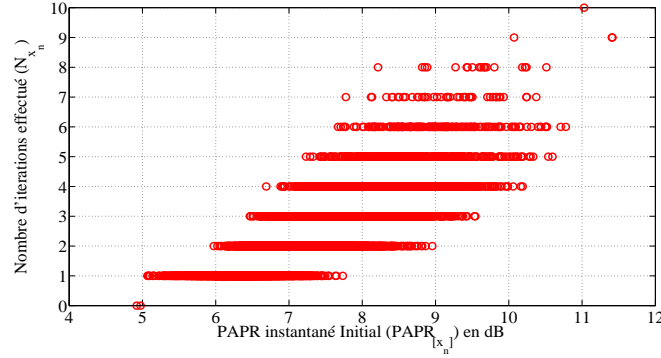


FIGURE 3.9 – Nombre d'itérations nécessaire (Recherche de seuil adapté) pour quelques symboles OFDM ( $M = 64, L = 4$ ) pour  $\text{PAPR}_0 = 5\text{dB}$ .

Comme on s'y attendait, les résultats de simulation des Figures (3.8) et (3.9) montrent que  $N_{\mathbf{x}_n}$  dépend du contenu de chaque symbole  $\mathbf{x}_n$ . En outre, on constate  $N_{\mathbf{x}_n}$  ne croît pas nécessairement avec le PAPR instantané initial des symboles. Par exemple on remarque sur les Figure (3.8) et (3.9) que des symboles avec un PAPR instantané initial compris dans  $[7, 8]\text{dB}$  ont nécessité plus d'itérations que des symboles avec un PAPR initial instantané compris dans  $[10, 11]\text{dB}$ . Sur la Figure (3.8) le symbole ayant nécessité le plus d'itérations a un PAPR instantané initial d'environ  $10\text{dB}$  et dans la Figure (3.9) son PAPR instantané initial est de  $11\text{dB}$ .

Dans ce qui suit, nous allons présenter l'approche exhaustive mais à pas non constant afin d'accroître la vitesse de convergence lors de la recherche du seuil adapté à chaque symbole OFDM. Dans cette approche, contrairement à la précédente, le pas de recherche dépendra de chaque symbole et donc du contenu de chaque symbole. De ce fait, on s'attend à ce que cette approche soit plus rapide que la précédente.

### 3.3.2 Recherche Exhaustive à pas non Constant

La recherche Exhaustive à pas non Constant, contrairement à l'approche précédente (cf Algorithme 1), consiste à tester successivement les seuils  $\rho_1 = \text{PAPR}_0, \rho_2 = \rho_1 - \epsilon_1, \dots, \rho_k = \rho_{k-1} - \epsilon_{k-1}, \dots$ , jusqu'à trouver le seuil  $\rho_k$  permettant d'avoir un PAPR instantané après écrêtage satisfaisant la contrainte ci-dessous.

$$\text{PAPR}_0 - \text{PAPR}_{[\mathbf{y}_n^{(k)}]} \leq \epsilon \quad (3.12)$$

Avec  $\epsilon_{k-1}$  le pas non constant utilisé pour passer d'une étape à une autre,  $\mathbf{y}_n^{(k)}$  le symbole OFDM après écrêtage de  $\mathbf{x}_n$  avec le seuil  $\rho_k$  et  $\epsilon$  le résidu toléré.

Soit  $\mathbf{x}_n$  un symbole donné tel que son PAPR instantané soit plus grand que le PAPR de sortie désiré  $\text{PAPR}_0$ . Notons par  $\rho_k \in [\rho_{\min}, \text{PAPR}_0]$  le seuil adapté à tester et par  $\epsilon_{k-1}$  le pas permettant de passer de l'étape  $k-1$  à l'étape  $k$ . On rappelle que  $\rho_k = \rho_{k-1} - \epsilon_{k-1}$ . D'après l'équation (3.5), le PAPR instantané du symbole  $\mathbf{x}_n$  après écrêtage avec le seuil  $\rho_k$  s'écrit :

$$\text{PAPR}_{[\mathbf{y}_n^{(k)}]} = 10^{\frac{\rho_k}{10}} \left( \frac{P_{\mathbf{x}_n}}{P_{\mathbf{y}_n^{(k)}}} \right) \quad (3.13)$$

En passant en dB, l'équation (3.13) se réécrit comme suit :

$$\begin{aligned} \text{PAPR}_{[\mathbf{y}_n^{(k)}]_{\text{dB}}} &= \rho_k + 10\text{Log}_{10} \left( \frac{P_{\mathbf{x}_n}}{P_{\mathbf{y}_n^{(k)}}} \right) \\ &= \text{PAPR}_0 - \left( \sum_{m=1}^{k-1} \epsilon_m \right) + 10\text{Log}_{10} \left( \frac{P_{\mathbf{x}_n}}{P_{\mathbf{y}_n^{(k)}}} \right) \end{aligned} \quad (3.14)$$

En posant  $\epsilon_m = 10\text{Log}_{10} \left( \frac{P_{\mathbf{y}_n^{(m-1)}}}{P_{\mathbf{y}_n^{(m)}}} \right)$  et en remarquant que :

$$\frac{P_{\mathbf{x}_n}}{P_{\mathbf{y}_n^{(k)}}} = \prod_{m=1}^k \frac{P_{\mathbf{y}_n^{(m-1)}}}{P_{\mathbf{y}_n^{(m)}}} \quad (3.15)$$

avec la convention  $\mathbf{y}_n^{(0)} = \mathbf{x}_n$  et donc  $P_{\mathbf{y}_n^{(0)}} = P_{\mathbf{x}_n}$ , l'équation (3.14) devient :

$$\begin{aligned} \text{PAPR}_{[\mathbf{y}_n^{(k)}]_{\text{dB}}} &= \text{PAPR}_0 - \sum_{m=1}^{k-1} 10\text{Log}_{10} \left( \frac{P_{\mathbf{y}_n^{(m-1)}}}{P_{\mathbf{y}_n^{(m)}}} \right) + 10\text{Log}_{10} \left( \prod_{m=1}^k \frac{P_{\mathbf{y}_n^{(m-1)}}}{P_{\mathbf{y}_n^{(m)}}} \right) \\ &= \text{PAPR}_0 - \sum_{m=1}^{k-1} 10\text{Log}_{10} \left( \frac{P_{\mathbf{y}_n^{(m-1)}}}{P_{\mathbf{y}_n^{(m)}}} \right) + \sum_{m=1}^k 10\text{Log}_{10} \left( \frac{P_{\mathbf{y}_n^{(m-1)}}}{P_{\mathbf{y}_n^{(m)}}} \right) \\ &= \text{PAPR}_0 + \epsilon_k \end{aligned} \quad (3.16)$$

Il vient alors que le choix  $\epsilon_m = 10\text{Log}_{10} \left( \frac{P_{\mathbf{y}_n^{(m-1)}}}{P_{\mathbf{y}_n^{(m)}}} \right)$  comme 'pas' pour passer d'une étape à une autre est tout à fait pertinent. En effet, de l'équation (3.16), on constate qu'à chaque étape, plus le seuil testé est loin du seuil adapté recherché, plus le pas permettant de passer à l'étape suivante est grande. On constate aussi que le pas dans cette étape, contrairement à l'étape précédente, dépendra du contenu de chaque symbole.

La Figure 3.10 donne l'organigramme de calcul du seuil adapté dans le cadre de la méthode IAC.

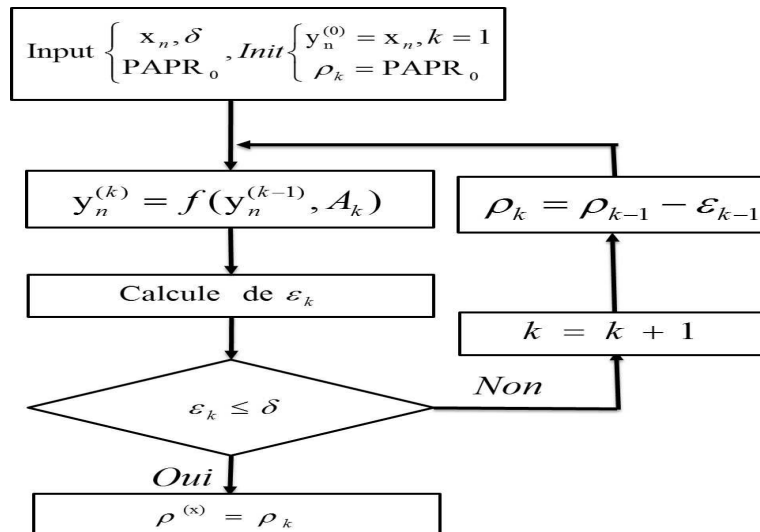


FIGURE 3.10 – Organigramme de calcul du seuil adapté pour chaque symbole OFDM à écrêter.

De la Figure (3.10), on constate qu'à chaque étape, le pas est calculé afin de mettre éventuellement à jour le seuil pour l'étape suivante. On note aussi que dans cette approche le pas permet de décider si la recherche se poursuit ou pas. En effet de l'équation (3.16), on peut déduire l'équation suivante :

$$\text{PAPR}_{\mathbf{y}_n^{(k)}} - \text{PAPR}_0 = \epsilon_k \quad (3.17)$$

On constate alors, que tester la condition d'arrêt de la recherche du seuil adapté défini par l'inégalité (3.12) est équivalent à comparer le pas  $\epsilon_k$  avec le résidu  $\epsilon$ .

Soit  $A_m$  l'amplitude d'écrêtage à l'étape  $m$ , i.e,  $\rho_m = 10 \text{Log}_{10} \left( \frac{A^2}{P_{\mathbf{x}_n}} \right)$ . Alors on a :

$$\begin{aligned} A_m &= 10^{\frac{\rho_m}{20}} \sqrt{P_{\mathbf{x}_n}} \\ &= \left( 10^{\frac{\rho_1 - \epsilon_1 - \dots - \epsilon_{m-1}}{20}} \right) \sqrt{P_{\mathbf{x}_n}} \\ &= \left( 10^{\frac{\text{PAPR}_0}{20}} \right) \left( 10^{\frac{-\sum_{l=1}^{m-1} \epsilon_l}{20}} \right) \sqrt{P_{\mathbf{x}_n}} \\ &= \left( 10^{\frac{\text{PAPR}_0}{20}} \right) \left( \prod_{l=1}^{m-1} 10^{\frac{-\epsilon_l}{20}} \right) \sqrt{P_{\mathbf{x}_n}} \\ &= \left( 10^{\frac{\text{PAPR}_0}{20}} \right) \left( \prod_{l=1}^{m-1} \sqrt{\frac{P_{\mathbf{y}_n^{(l)}}}{P_{\mathbf{y}_n^{(l-1)}}}} \right) \sqrt{P_{\mathbf{x}_n}} \\ &= \left( 10^{\frac{\text{PAPR}_0}{20}} \right) \sqrt{P_{\mathbf{y}_n^{(m-1)}}} \end{aligned} \quad (3.18)$$

En utilisant cette équation et l'organigramme décrit dans la Figure (3.10), on en déduit l'algorithme suivant :

---

**Algorithm 2** Recherche Exhaustive à pas non constant.

---

**Require:**  $\mathbf{x}_n$  Signal d'entrée,  $\epsilon > 0$  et  $\text{PAPR}_0$

**Ensure:**  $\mathbf{y}_n$  Symbol après écrêtage

```

 $m \leftarrow 0$ 
 $\epsilon_m \leftarrow 1$ 
 $\mathbf{y}_n^{(0)} \leftarrow \mathbf{x}_n$ 
while  $(\text{PAPR}_{\mathbf{y}_n^{(m)}} - \text{PAPR}_0) = \epsilon_m \geq \epsilon$  do
     $m \leftarrow m + 1$ 
    Compute  $A_m$  en utilisant l'équation 3.18
     $\mathbf{y}_n^{(m)} \leftarrow f(\mathbf{y}_n^{(m-1)}, A_m)$ 
end while
 $\mathbf{y}_n \leftarrow \mathbf{y}_n^{(m)}$ 

```

---

L'algorithme (2), contrairement à l'algorithme (1) nécessite une opération supplémentaire qui est le calcul de la puissance  $P_{\mathbf{y}_n^{(m-1)}}$ . En outre on constate que pour un PAPR de sortie désiré donné, cette approche consiste à écrêter le symbole itérativement en ajustant à chaque itération l'amplitude de *clipping*  $A_m$  suivant l'équation (3.18). Ainsi, cette approche sera dénommée IAC pour *Iterative Adaptive Clipping* comme dans [33].

Comme précédemment, nous allons illustrer (confirmer) par simulation le phénomène d'écrêtage non nécessaire ou sévère occasionné par le fait de fixer le seuil d'écrêtage avec le *clipping* classique. Les résultats de simulation sont réalisés avec les mêmes paramètres que dans la sous section 3.3.1.

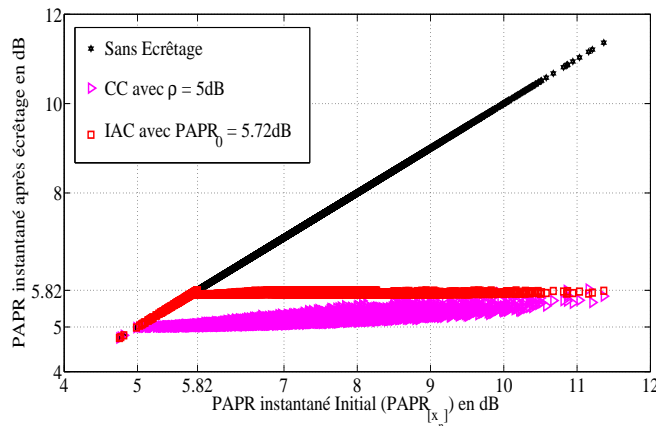


FIGURE 3.11 – PAPR instantané avant et après écrêtage avec les méthodes CC et IAC.

Comme dans la sous section 3.3.1, les résultats de simulation de la Figure (3.11) confirment qu'en fixant le seuil d'écrêtage certains symboles OFDM sont sévèrement ou inutilement écrêtés vis à vis de la borne supérieure du PAPR  $\gamma_4(\rho)$ . En effet, on peut voir sur la Figure (3.3.1) que les symboles avec un PAPR instantané initial inclus dans  $[\rho, \gamma_4(\rho)] = [5, 5.82]$  (en dB) seront écrêtés dans le cas du *clipping classique* (écrêtage non nécessaire) alors que dans le cas de la méthode IAC ces symboles ne seront pas écrêtés. De même les symboles avec un PAPR instantané initial plus grand que 5.82dB sont sévèrement écrêtés dans le cas du *clipping classique* contrairement avec la méthode IAC où on leurs PAPR instantané après écrêtage est quasiment égale 5.82dB.

Dans ce qui suit, nous allons comme précédemment évaluer la complexité de cette méthode en termes de vitesse de convergence i.e le nombre d'itérations nécessaire pour trouver le seuil adapté pour chaque symbole à écrêter. Nous utiliserons les mêmes notations que dans la sous Section (3.3.1).

Le Tableau (3.2) compare  $N_{IAC}$  et  $N_{AC}$  pour différents valeurs de  $PAPR_0$ .

$PAPR_0$ (en dB)	4	5	6	7	8	9
$N_{AC}$	5.2	2.6	1.4	1.1	1	1
$N_{IAC}$	2.4	1.8	1.3	1.1	1	1

TABLE 3.2 – Complexité en terme de vitesse de convergence (nombre moyen d'itérations) de l'Algorithme (2) en fonction du PAPR désiré  $PAPR_0$ .

Les résultats de simulation consignés dans le Tableau (3.2) montrent que la méthode IAC permet de converger plus rapidement vers le seuil adapté pour des valeurs de  $PAPR_0$  petites. Comme précédemment, on remarque que lorsque  $PAPR_0$  croît, la méthode IAC et celle basé sur une recherche exhaustive à pas constant converge quasiment à la même

vitesse vers le seuil adapté. Plus loin, une analyse théorique sera menée afin de déterminer à partir de quelle valeur de  $\text{PAPR}_0$  la méthode IAC est plus rapide que la méthode AC.

Les Figures (3.12) et (3.13) donnent respectivement, le nombre d'itérations  $N_{\mathbf{x}_n}$  pour quelques milliers de symboles OFDM générés aléatoirement et pour différentes  $\text{PAPR}_0 = 4$  et 5dB. Les résultats de simulation des Figure (3.12) et (3.13) montrent que la vitesse de

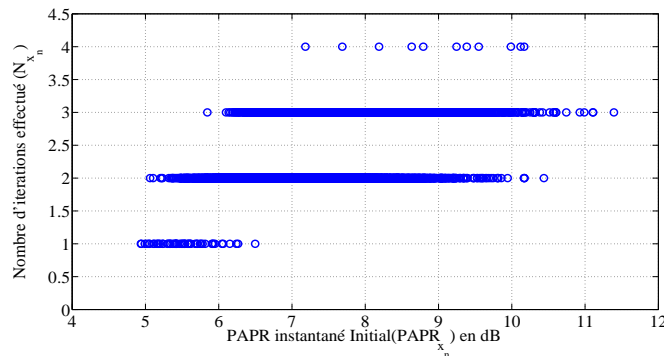


FIGURE 3.12 – Nombre d'itérations nécessaires (Recherche de seuil adapté) pour quelques symboles OFDM ( $M = 64, L = 4$ ) pour  $\text{PAPR}_0 = 4\text{dB}$ .

convergence dépend toujours du contenu de chaque symbole comme précédemment. On remarque aussi que le nombre d'itérations  $N_{\mathbf{x}_n}$  ne croît pas nécessairement avec le PAPR instantané des symboles à écrêter.

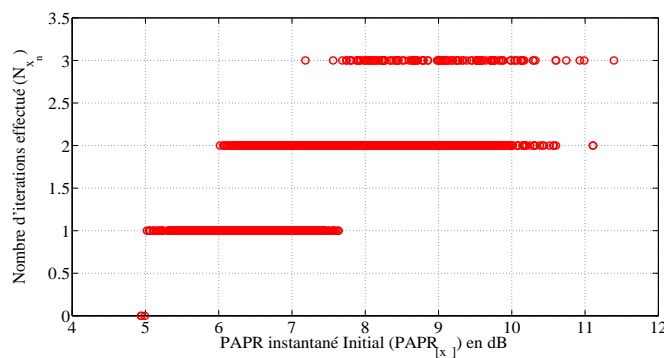


FIGURE 3.13 – Nombre d'itérations nécessaires (Recherche de seuil adapté) pour quelques symboles OFDM ( $M = 64, L = 4$ ) pour  $\text{PAPR}_0 = 5\text{dB}$ .

Dans ce qui suit nous allons mener une étude pour déterminer à partir de quelle valeur de  $\text{PAPR}_0$ , la méthode IAC converge plus rapidement que la méthode AC. Pour ce faire, soit  $\mathbf{x}_n$  un symbole OFDM à écrêter et  $\epsilon > 0$  le résidu toléré. Désignons par  $N_{\text{AC},\mathbf{x}_n}$  et  $N_{\text{IAC},\mathbf{x}_n}$  le nombre d'itérations effectué respectivement avec les méthodes AC et IAC (respect. Algorithme 1 et Algorithme 2) afin de trouver le seuil adapté au symbole. Posons  $\epsilon_{\mathbf{x}_n}$  la moyenne des différents pas  $\epsilon_m$  avec  $m = 1, \dots, N_{\text{IAC},\mathbf{x}_n} - 1$  utilisés avec la méthode IAC au cour de  $N_{\text{IAC},\mathbf{x}_n}$  itérations i.e :

$$\epsilon_{\mathbf{x}_n} = \frac{1}{N_{\text{IAC},\mathbf{x}_n} - 1} \sum_{m=1}^{N_{\text{IAC},\mathbf{x}_n}} \epsilon_m \quad (3.19)$$

**Proposition 1** Pour tout symbole OFDM  $\mathbf{x}_n$  à écrêter et un résidu  $\epsilon > 0$ , le nombre d'itérations effectué par la méthode IAC (Algorithme 2) est égale au nombre d'itérations effectué par la méthode AC avec un pas fixe  $\epsilon_{\mathbf{x}_n}$  (Algorithme 1).

Il suffit de montrer que l'Algorithme 1 effectue  $N_{\text{IAC},\mathbf{x}_n}$  itérations pour trouver le seuil adapté au symbole  $\mathbf{x}_n$  avec un pas  $\epsilon = \epsilon_{\mathbf{x}_n}$ . En d'autres termes, il suffit de montrer que si  $\epsilon = \epsilon_{\mathbf{x}_n}$  alors  $N_{\text{AC},\mathbf{x}_n} = N_{\text{IAC},\mathbf{x}_n}$ .

**Preuve:** Soit  $m$  le nombre d'itérations effectué par la méthode AC. Le seuil testé alors s'écrit  $\rho_m = \rho_{m-1} - \epsilon = \text{PAPR}_0 - m\epsilon$ . Le PAPR instantané, en dB, du symbole  $\mathbf{x}_n$  après écrêtage avec  $\rho_m$  s'écrit :

$$\begin{aligned} \text{PAPR}_{[\mathbf{y}_n^{(m)}]_{\text{dB}}} &= \rho_m + 10\text{Log}_{10} \left( \frac{P_{\mathbf{x}_n}}{P_{\mathbf{y}_n^{(m)}}} \right) \\ &= \text{PAPR}_0 - m\epsilon + 10\text{Log}_{10} \left( \frac{P_{\mathbf{x}_n}}{P_{\mathbf{y}_n^{(m)}}} \right) \end{aligned} \quad (3.20)$$

Puisque  $\epsilon = \epsilon_{\mathbf{x}_n}$ , qui est donné par l'équation (3.19) on a alors :

$$\begin{aligned} \text{PAPR}_{[\mathbf{y}_n^{(m)}]_{\text{dB}}} &= \text{PAPR}_0 - (m-1)\epsilon + 10\text{Log}_{10} \left( \frac{P_{\mathbf{x}_n}}{P_{\mathbf{y}_n^{(m)}}} \right) \\ &= \text{PAPR}_0 - \frac{m-1}{N_{\text{IAC},\mathbf{x}_n}} \sum_{l=1}^{N_{\text{IAC},\mathbf{x}_n}-1} 10\text{Log}_{10} \left( \frac{P_{\mathbf{y}_n^{(l-1)}}}{P_{\mathbf{y}_n^{(l)}}} \right) + 10\text{Log}_{10} \left( \frac{P_{\mathbf{x}_n}}{P_{\mathbf{y}_n^{(m)}}} \right) \\ &= \text{PAPR}_0 - 10\text{Log}_{10} \left( \left[ \frac{P_{\mathbf{x}_n}}{P_{\mathbf{y}_n^{(N_{\text{IAC},\mathbf{x}_n})}}} \right]^{\frac{m-1}{N_{\text{IAC},\mathbf{x}_n}-1}} \right) + 10\text{Log}_{10} \left( \frac{P_{\mathbf{x}_n}}{P_{\mathbf{y}_n^{(m)}}} \right) \\ &= \text{PAPR}_0 + 10\text{Log}_{10} \left( \left[ \frac{P_{\mathbf{y}_n^{(N_{\text{IAC},\mathbf{x}_n})}}}{P_{\mathbf{x}_n}} \right]^{\frac{m-1}{N_{\text{IAC},\mathbf{x}_n}-1}} \frac{P_{\mathbf{x}_n}}{P_{\mathbf{y}_n^{(m)}}} \right) \end{aligned} \quad (3.21)$$

Selon que  $m < N_{\text{IAC},\mathbf{x}_n}$  ou  $m = N_{\text{IAC},\mathbf{x}_n}$  on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left( \text{PAPR}_{[\mathbf{y}_n^{(m)}]} - \text{PAPR}_0 \right) \geq 10\text{Log}_{10} \left[ \frac{P_{\mathbf{y}_n^{(m-1)}}}{P_{\mathbf{y}_n^{(m)}}} \right] \\ \geq \epsilon_m > \epsilon \text{ Si } m < N_{\text{IAC},\mathbf{x}_n} \\ \left( \text{PAPR}_{[\mathbf{y}_n^{(m)}]} - \text{PAPR}_0 \right) = \text{Log}_{10} \left[ \frac{P_{\mathbf{y}_n^{(N_{\text{IAC},\mathbf{x}_n}, 2^{-1})}}}{P_{\mathbf{y}_n^{(N_{\text{IAC},\mathbf{x}_n})}}} \right] \\ = \epsilon_{N_{\text{IAC},\mathbf{x}_n}} < \epsilon \text{ Si } m = N_{\text{IAC},\mathbf{x}_n} \end{array} \right. \quad (3.22)$$

On vient de montrer que si  $m < N_{\text{IAC},\mathbf{x}_n}$  alors on a  $(\text{PAPR}_{[\mathbf{y}_n^{(m)}]} - \text{PAPR}_0) > \epsilon$  et donc la recherche du seuil continuera.

Par contre lorsque  $m = N_{\text{IAC},\mathbf{x}_n}$  alors on a  $(\text{PAPR}_{[\mathbf{y}_n^{(m)}]} - \text{PAPR}_0) = \epsilon_{N_{\text{IAC},\mathbf{x}_n}} < \epsilon$  car le nombre d'itérations effectué par la méthode IAC est égale à  $N_{\text{IAC},\mathbf{x}_n}$ .

Il vient alors que, pour tout symbole OFDM à écrêter, comparer  $N_{\text{AC},\mathbf{x}_n}$  et  $N_{\text{IAC},\mathbf{x}_n}$  revient à comparer  $\epsilon_{\mathbf{x}_n}$  et  $\epsilon$ . Puisque  $\mathbf{x}_n$  est supposé être une variable aléatoire, alors  $\epsilon_{\mathbf{x}_n}$  l'est aussi, il vient alors que la comparaison de AC et IAC en termes de nombre moyen d'itérations est équivalent à comparer  $\mathbb{E}[\epsilon_{\mathbf{x}_n}]$  et  $\epsilon$ . Avec les mêmes notations que précédemment et en utilisant l'équation (3.19),  $\mathbb{E}[\epsilon_{\mathbf{x}_n}]$  sera estimé comme suit :

$$\mathbb{E}[\epsilon_{\mathbf{x}_n}] = \frac{1}{\text{Trial}} \sum_{n=1}^{\text{Trial}} \epsilon_{\mathbf{x}_n} \quad (3.23)$$

Les Figures (3.14) et (3.15) comparent respectivement  $\mathbb{E}[\epsilon_{\mathbf{x}_n}]$  et  $\epsilon$  avec  $\epsilon = 0.1\text{dB}$  et  $N_{\text{IAC}}$  et  $N_{\text{AC}}$ , en fonction de  $\text{PAPR}_0$ .

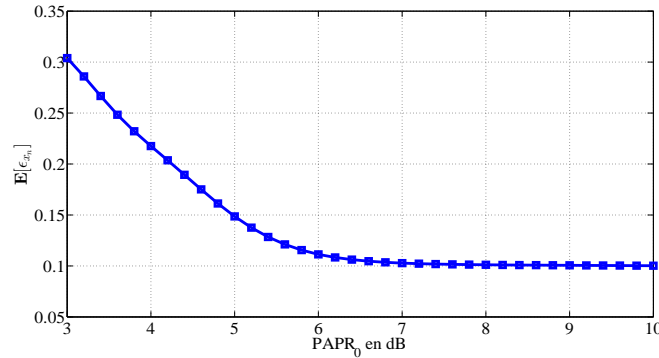


FIGURE 3.14 – Le pas moyen ( $\mathbb{E}[\epsilon_{\mathbf{x}_n}]$ ) en fonction de  $\text{PAPR}_0$  :  $M = 64$  et  $L = 4$ .

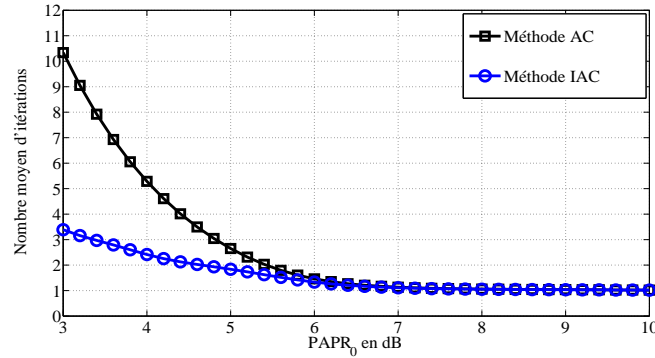


FIGURE 3.15 – Nombre moyen d'itérations nécessaires (Recherche de seuil adapté) en fonction de  $\text{PAPR}_0$  :  $M = 64$  et  $L = 4$ .

Les résultats de simulation de la Figure (3.14) montrent que la méthode IAC est équivalente à la méthode AC avec un pas constant  $\mathbb{E}[\epsilon_{\mathbf{x}_n}]$  toujours supérieur ou égal à  $\epsilon$ . On constate en effet que pour  $\text{PAPR}_0 \geq 7\text{dB}$ ,  $\mathbb{E}[\epsilon_{\mathbf{x}_n}] \simeq \epsilon = 0.1\text{dB}$ , on s'attend ainsi à ce que ces deux approches aient le même nombre moyen d'itération lorsque  $\text{PAPR}_0 \geq 7\text{dB}$ . Par contre, lorsque  $\text{PAPR}_0 \leq 7\text{dB}$ ,  $\mathbb{E}[\epsilon_{\mathbf{x}_n}] \geq \epsilon$ , donc on s'attend à ce que la méthode IAC converge plus rapidement que la méthode AC. En outre, on remarque que  $\mathbb{E}[\epsilon_{\mathbf{x}_n}]$  croît très rapidement à partir de  $\text{PAPR}_0 \leq 6\text{dB}$ . Par exemple pour  $\text{PAPR}_0 = 3\text{dB}$  on a  $\mathbb{E}[\epsilon_{\mathbf{x}_n}] \simeq 0.3\text{dB} = 3\epsilon$ . Ainsi, on s'attend à ce que le nombre moyen d'itérations nécessaires croît lentement lorsque  $\text{PAPR}_0$  décroît dans le cadre de la méthode IAC. Par contre, dans le cadre de la méthode AC, lorsque  $\text{PAPR}_0$  décroît, le nombre moyen d'itérations nécessaire croît rapidement.

Les résultats de simulation de la Figure (3.15) sont en accord avec les résultats de simulation de la Figure (3.14), et donc confirment l'analyse théorique effectuée précédemment. En effet on constate que pour  $\text{PAPR}_0 \geq 7\text{dB}$  les deux méthodes nécessitent le même nombre moyen d'itérations alors que pour  $\text{PAPR}_0 \leq 7\text{dB}$ , la méthode IAC exige en moyenne peu d'itérations pour trouver le seuil adapté que la méthode AC. En outre, on constate que lorsque  $\text{PAPR}_0$  décroît,  $N_{\text{AC}}$  croît plus rapidement que  $N_{\text{IAC}}$ . Ce résultat est tout fait prévisible. En effet, sur la Figure (3.14) on constate que plus  $\text{PAPR}_0$  est petit, plus  $\mathbb{E}[\epsilon_{\mathbf{x}_n}]$  est grand et par conséquent plus la méthode IAC convergera plus rapidement que la méthode AC. Par exemple, on constate que pour  $\text{PAPR}_0 = 3\text{dB}$ , on a  $N_{\text{IAC}} \simeq \frac{N_{\text{AC}}}{3}$ .



### 3.3.3 Résolution par approximation de la puissance moyenne $P_{\mathbf{y}_n}$

Dans cette sous section nous allons présenter une approche qui permet de trouver le seuil adapté en utilisant une approximation de la puissance d'un symbole OFDM après écrêtage.

Soit  $\mathbf{x}_n$  un symbole OFDM à écrêter et  $\text{PAPR}_0$  le PAPR de sortie désiré, il a été souligné dans la section 3.2 que l'écrêtage adaptatif consiste à écrêter le symbole avec le seuil  $\rho^{(\mathbf{x}_n)}$  solution de l'équation (3.7) que nous rappelons ci-dessous

$$\text{PAPR}_0 = 10^{\frac{\rho^{(\mathbf{x}_n)}}{10}} \left( \frac{P_{\mathbf{x}_n}}{P_{\mathbf{y}_n}} \right) \quad (3.24)$$

En posant  $\rho^{(\mathbf{x}_n)} = 10 \text{Log}_{10} \left( \frac{A^2}{P_{\mathbf{x}_n}} \right)$ , avec  $A$  l'amplitude d'écrêtage. L'équation précédente peut être reformulée comme suit :

$$\text{PAPR}_0 = \left( \frac{A^2}{P_{\mathbf{y}_n}} \right) \quad (3.25)$$

Comme nous l'avons souligné précédemment, la résolution de cette équation n'est pas triviale. En effet, la puissance moyenne  $P_{\mathbf{y}_n}$  est fonction du l'inconnu  $A$  à déterminer et cela de manière non explicite. En effet, le symbole  $\mathbf{y}_n = [y_{n,0}, \dots, y_{n,LM-1}]$  obtenu après écrêtage du symbole  $\mathbf{x}_n = [x_{n,0}, \dots, x_{n,LM-1}]$  avec comme seuil  $A$ , est donné par l'équation (3.3). Posons  $\mathcal{I} = \{l, |x_{n,l}| > A\}$ , i.e, l'ensemble contenant les instants (index) d'écrêtage. La puissance moyenne du symbole  $\mathbf{y}_n$  peut alors être exprimée en fonction de  $A$ , de  $\mathcal{I}$  et des échantillons de  $\mathbf{x}_n$  (échantillons de  $\mathbf{x}_n$  non écrêtés) comme suit :

$$\begin{aligned} P_{\mathbf{y}_n} &= \frac{1}{LM} \sum_{l=0}^{LM-1} |y_{n,l}|^2 \\ &= \frac{1}{LM} \left( \sum_{l \notin \mathcal{I}} |x_{n,l}|^2 + \text{Cardinal}(\mathcal{I}) A^2 \right) \\ &= \frac{1}{LM} \sum_{l \notin \mathcal{I}} |x_{n,l}|^2 + \frac{\text{Cardinal}(\mathcal{I})}{LM} A^2 \end{aligned} \quad (3.26)$$

En remplaçant cette expression dans l'équation 3.25 on obtient :

$$\text{PAPR}_0 \left( \frac{1}{LM} \sum_{l \notin \mathcal{I}} |x_{n,l}|^2 + \frac{\text{Cardinal}(\mathcal{I})}{LM} A^2 \right) = A^2 \quad (3.27)$$

On remarque ainsi, que la connaissance de  $\mathcal{I}$ , qui à son tour dépend de l'inconnu  $A$ , est nécessaire pour la résolution de cette équation et donc pour déterminer le seuil adapté.

Dans cette section, nous proposons une méthode de résolution de cette équation basée sur une approximation de la puissance moyenne  $P_{\mathbf{y}_n}$ . L'idée de base de cette approche est de rendre la connaissance de  $\mathcal{I}$  indépendante de l'inconnu  $A$ . En effet, on peut aisément remarquer que connaître  $A$  est équivalent à connaître  $\text{Cardinal}(\mathcal{I})$  car connaissant  $\text{Cardinal}(\mathcal{I})$  il suffirait juste de prendre les  $\text{Cardinal}(\mathcal{I})$  premiers index du vecteur  $\mathbf{x}_n$  correspondant aux  $\text{Cardinal}(\mathcal{I})$  plus grands *peaks* de  $\mathbf{x}_n$  pour avoir  $\mathcal{I}$ .

Sous l'hypothèse que  $\mathcal{I}$  est connu, alors la solution de l'équation (3.27) sera donnée comme suit :

$$A = \sqrt{\frac{\frac{\text{PAPR}_0}{LM} \sum_{l \notin \mathcal{I}} |x_{n,l}|^2}{1 - \text{PAPR}_0 \frac{\text{Cardinal}(\mathcal{I})}{LM}}} \quad (3.28)$$

Soit  $A_{\min}$  et  $A_{\max}$  tel que  $A_{\min} \leq A \leq A_{\max}$ . Posons alors

$$\mathcal{I}_{\min} = \{l, |x_{n,l}| > A_{\min}\} \text{ Et } \mathcal{I}_{\max} = \{l, |x_{n,l}| > A_{\max}\} \quad (3.29)$$

Puisque  $A_{\min} \leq A \leq A_{\max}$  alors  $\text{Cardinal}(\mathcal{I}_{\max}) \leq \text{Cardinal}(\mathcal{I}) \leq \text{Cardinal}(\mathcal{I}_{\min})$ .

Dans la section (3.2), nous avons montré que pour chaque symbole OFDM  $\mathbf{x}_n$  à écrêter, son seuil adapté normalisé  $\rho^{\mathbf{x}_n}$  est inférieur ou égale à  $\rho_{\min}$  avec une probabilité de  $10^{-4}$ . De manière plus générale, par le choix de  $\text{PAPR}_0$ , on a  $\rho^{\mathbf{x}_n} \geq 0$  quelque soit le symbole  $\mathbf{x}_n$  à écrêter. Considérons l'équation ci-dessus permettant d'initialiser  $A_{\min}$  et  $A_{\max}$ .

$$\begin{aligned} A_{\min} &= \begin{cases} 10^{\frac{\rho_{\min}}{20}} (\sqrt{P_{\mathbf{x}_n}}) & \text{Si } \text{PAPR}_{[z_n]} > \text{PAPR}_0 \\ (\sqrt{P_{\mathbf{x}_n}}) & \text{Sinon} \end{cases} \\ A_{\max} &= 10^{\frac{\text{PAPR}_0}{20}} (\sqrt{P_{\mathbf{x}_n}}) \end{aligned} \quad (3.30)$$

Avec  $\text{PAPR}_{[z_n]}$  le PAPR instantané après écrêtage avec le seuil  $\rho_{\min}$ . La comparaison de  $\text{PAPR}_{[z_n]}$  avec  $\text{PAPR}_0$  permet de savoir si le seuil adapté à ce symbole est dans l'intervalle  $[\rho_{\min}, \text{PAPR}_0]$  ou  $[0, \text{PAPR}_0]$ . La méthode que nous proposons dans cette section consistera alors, à l'aide d'une recherche par dichotomie, à trouver  $A_{\min}$  et  $A_{\max}$  de tel sorte que

$$A_{\min} \leq A \leq A_{\max} \text{ avec } \mathcal{I}_{\min} = \mathcal{I}_{\max} \quad (3.31)$$

avec  $A$  l'amplitude d'écrêtage adaptée à déterminer, i.e.,  $\rho^{\mathbf{x}_n} = 10 \text{Log}_{10} \left( \frac{A^2}{P_{\mathbf{x}_n}} \right)$ .

La Figure (3.16) décrit l'organigramme du calcul des  $A_{\min}$  et  $A_{\max}$  vérifiant l'équation (3.31) via une recherche par dichotomie.

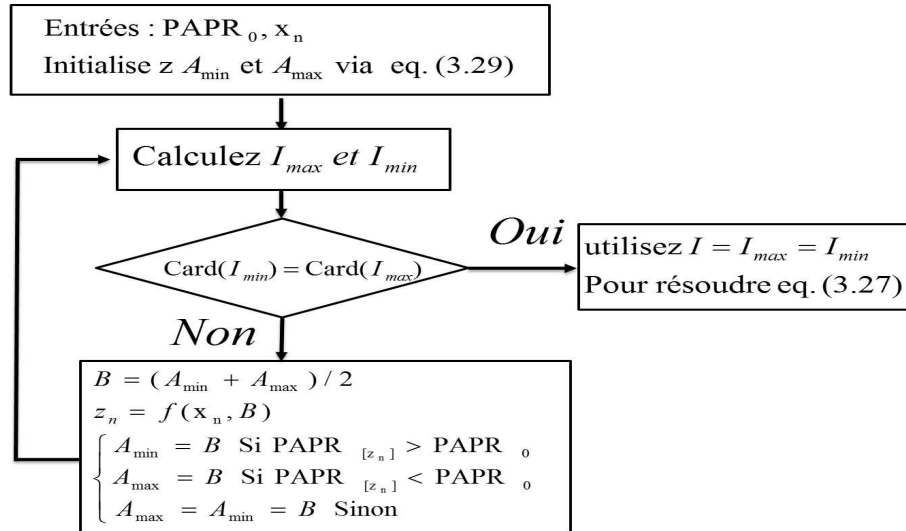


FIGURE 3.16 – Organigramme de calcul des  $A_{\min}$  et  $A_{\max}$  vérifiant l'équation (3.31)

De la Figure (3.16), on remarque que les  $A_{\min}$  et  $A_{\max}$  à la fin de la boucle vérifient l'équation (3.31). Par conséquent on a  $\mathcal{I} = \mathcal{I}_{\min} = \mathcal{I}_{\max}$  connu. Il vient alors que la puissance moyenne du signal après écrêtage avec l'amplitude adaptée  $A$ , qui est l'inconnue de l'équation pour trouver le seuil adapté, peut être exprimée en fonction de  $A$  de manière explicite puisque  $\mathcal{I}$  est connu, voir équation (3.26).

L'Algorithme 3 donne une description plus détaillée de cette approche. On remarque que cette approche, comme les méthodes précédentes nécessite les mêmes opérations

à chaque itération ainsi sa complexité sera évaluée en terme de nombre d'itérations nécessaires pour trouver les amplitude  $A_{\min}$  et  $A_{\max}$  vérifiant l'équation (3.31). Les opérations de test et de comparaison seront en quelque sorte négligées. Notons que cette approche, contrairement aux précédentes méthodes, donne une solution exacte du seuil adapté. Ainsi, on peut s'attendre à ce qu'elle soit moins rapide que les méthodes AC et IAC. Cette approche sera désignée par PAC pour *Power approximation based approach for Adaptive Clipping* dans la suite de ce document.

L'Algorithme 3 donne une description détaillé de la méthode PAC.

---

**Algorithm 3** PAC : Calcul exact du seuil adapté pour chaque symbole.

---

**Require:**  $\mathbf{x}_n$  Signal d'entrée , ,  $\text{PAPR}_0$  et  $\rho_{\min}$

**Ensure:**  $\mathbf{y}_n$  Symbol après écrêtage

Calculez  $A_{\max}$  tel que  $\text{PAPR}_0 = 10\text{Log}_{10} \left( \frac{A_{\max}^2}{P_{\mathbf{x}_n}} \right)$

Calculez  $A_{\min}$  tel que  $\rho_{\min} = 10\text{Log}_{10} \left( \frac{A_{\min}^2}{P_{\mathbf{x}_n}} \right)$

Determinez  $\mathcal{I}_{\max}$  Et  $\mathcal{I}_{\min}$

$\mathbf{y}_n \leftarrow f(\mathbf{x}_n, A_{\max})$

$\text{PAPR}_{[\mathbf{y}_n]} \leftarrow \frac{A^2}{P_{\mathbf{y}_n}}$  ( en dB)

**if** ( $\text{PAPR}_{[\mathbf{y}_n]} == \text{PAPR}_0$ ) **then**

    Retournez  $\mathbf{y}_n$

$\mathcal{I} \leftarrow \emptyset$

**else**

**while**  $\text{Cardinal}(A_{\min}) \neq \text{Cardinal}(A_{\max})$  Et  $\text{PAPR}_{[\mathbf{y}_n]} \neq \text{PAPR}_0$  **do**

$A_{\text{moy}} \leftarrow \frac{A_{\max} + A_{\min}}{2}$

$\mathbf{y}_n \leftarrow f(\mathbf{x}_n, A_{\text{moy}})$

$\text{PAPR}_{[\mathbf{y}_n]} \leftarrow \frac{A^2}{P_{\mathbf{y}_n}}$  ( en dB)

**if**  $\text{PAPR}_{[\mathbf{y}_n]} \neq \text{PAPR}_0$  **then**

            Retournez  $\mathbf{y}_n$

$\mathcal{I} \leftarrow \emptyset$

**else**

$A_{\min}$  et  $A_{\max} \leftarrow \begin{cases} A_{\text{moy}} \text{ et } A_{\max} & \text{Si } \text{PAPR}_{[\mathbf{y}_n]} < \text{PAPR}_0 \\ A_{\min} \text{ et } A_{\text{moy}} & \text{Sinon} \end{cases}$

**end if**

        Calculez  $\mathcal{I}_{\max}$  Et  $\mathcal{I}_{\min}$

$\mathcal{I} \leftarrow \mathcal{I}_{\max}$

**end while**

**if**  $\mathcal{I} \neq \emptyset$  **then**

        Calculez  $A$  En resolvant l'équation (3.28)

$\mathbf{y}_n \leftarrow f(\mathbf{x}_n, A)$

**end if**

**end if**

---

Dans ce qui suit, nous allons comme précédemment illustrer ou confirmer le phénomène d'écrêtage sévère ou non nécessaire dû au fait d'écrêter avec un seuil prédéfini fixe. Pour ce faire, nous allons comparer les PAPR instantanés après écrêtage avec le *clipping* à seuil prédéfini  $\rho$  (CC) et le clipping adaptatif (PAC) avec  $\text{PAPR}_0 = \gamma_4(\rho)$  de quelques symboles OFDM. On constate que dans cette approche  $\text{PAPR}_0$  est exactement le PAPR désiré en sortie contrairement aux autres méthode où on l'on tient compte du résidu toléré  $\epsilon$ . Notons qu'avec un tel choix de  $\text{PAPR}_0$ , les deux méthodes donnent le même PAPR de sortie (PAPR à  $10^{-4}$ ).

Les résultats de simulation de la Figure (3.17) confirment qu'en fixant le seuil d'écrêtage

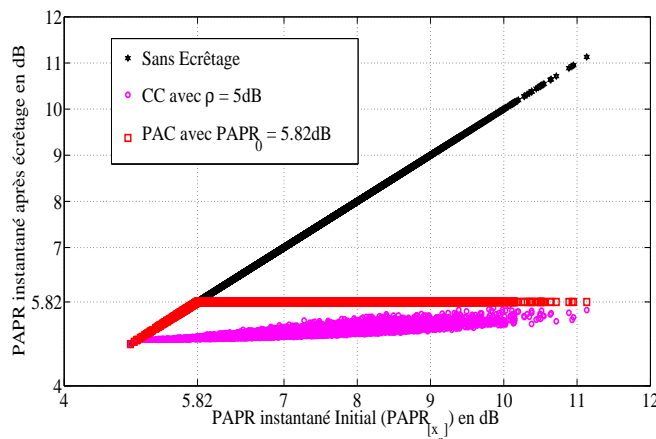


FIGURE 3.17 – PAPR instantané avant et après écrêtage avec les méthodes CC et PAC.

certains symboles OFDM sont sévèrement ou inutilement écrêtés vis à vis de la borne supérieure du PAPR  $\gamma_4(\rho)$ . En effet, on peut observer que les symboles avec un PAPR instantané initial inclus dans  $[\rho, \gamma_4(\rho)] = [5, 5.82]$  (en dB) seront écrêtés dans le cas du *clipping classique* (écrêtage non nécessaire) alors que dans le cas de la méthode PAC ces symboles ne seront pas écrêtés. De même les symboles avec un PAPR instantané initial plus grand que 5.82dB sont sévèrement écrêtés dans le cas du *clipping classique* contrairement avec la méthode PAC où on leur PAPR instantané après écrêtage est égale 5.82dB. En effet, on voit sur la Figure (3.17) que le PAPR instantané après écrêtage avec la méthode PAC vaut toujours 5.82dB quel que soit le PAPR instantané initial du symbole écrêté. En outre on remarque que la méthode PAC donne une solution exacte pour le calcul du seuil adapté.

Nous allons à présent, comme précédemment, évaluer les performances en termes de complexité numérique. Pour ce faire, nous allons évaluer le nombre d'itérations nécessaires à la phase de recherche par dichotomie pour trouver les  $A_{\min}$  et  $A_{\max}$  nécessaires pour la résolution de l'équation (3.28), i.e, qui vérifie l'équation (3.31).

Le Tableau (3.3) compare les nombres moyen d'itérations  $N_{AC}$ ,  $N_{IAC}$  et  $N_{PAC}$  en fonction de  $PAPR_0$ .

$PAPR_0$ (en dB)	4	5	6	7	8	9
$N_{AC}$	5.2	2.6	1.4	1.1	1	1
$N_{IAC}$	2.4	1.8	1.3	1.1	1	1
$N_{PAC}$	5.7	4.4	3.2	2.3	2.1	1.7

TABLE 3.3 – Complexité en termes de vitesse (nombre d'itérations moyenne) des Algorithmes (1),(2) et (3) en fonction du PAPR désiré  $PAPR_0$ .

Les résultats de simulations consignés dans le Tableau (3.3) montrent que la méthode PAC est aussi complexe que la méthode basée sur la recherche exhaustive à pas constant

décrite dans l'Algorithme (1), i.e, que le nombre moyen d'itérations nécessaires pour trouver les amplitudes  $A_{\min}$  et  $A_{\max}$  est du même ordre que le nombre d'itérations pour approcher le seuil adapté avec la méthode AC. Il faut noter cependant, pour des valeurs grand de  $\text{PAPR}_0$ , la méthode AC converge plus rapidement. Par exemple, on a pour  $\text{PAPR}_0 \geq 6\text{dB}$ , en moyenne la méthode AC nécessite une itération alors que la méthode PAC nécessite en moyenne 2 itérations. La méthode IAC est plus rapide dans ce sens que ces deux approches. Notons cependant que pour la méthode PAC, une opération supplémentaire pour la résolution de l'équation (3.28) est nécessaire après la détermination des amplitudes  $A_{\min}$  et  $A_{\max}$ . Les Figures (3.18) et (3.19) donnent le nombre d'itérations  $N_{x_n}$  pour quelques milliers de symboles OFDM générés aléatoirement et pour  $\text{PAPR}_0 = 4\text{dB}$  et  $5\text{dB}$ .

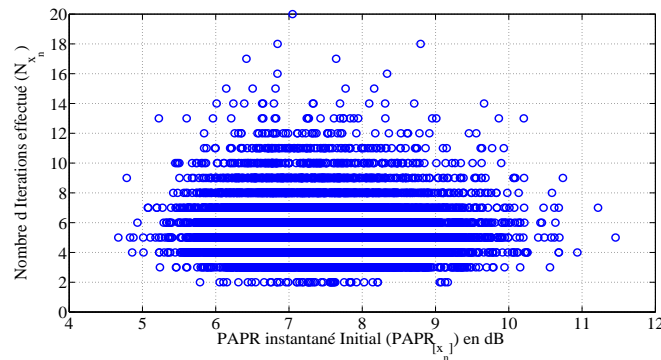


FIGURE 3.18 – Nombre d'itérations nécessaires (Recherche de seuil adapté) pour quelques symboles OFDM ( $M = 64, L = 4$ ) pour  $\text{PAPR}_0 = 4\text{dB}$ .

Les résultats de simulation des Figures (3.18) et (3.19) montrent que la vitesse de convergence dépend du contenu de chaque symbole comme dans l'approche basée sur la recherche exhaustive. Elle est donc moins rapide que la méthode IAC. Pour certains symboles OFDM, le nombre d'itérations nécessaires pour trouver les  $A_{\min}$  et  $A_{\max}$  avoisine les 20 itérations. On note aussi qu'il n'y a pas beaucoup de différence sur le nombre d'itérations nécessaire dans les deux figures (cas  $\rho = 4\text{dB}$  et  $\rho = 5\text{dB}$ ).

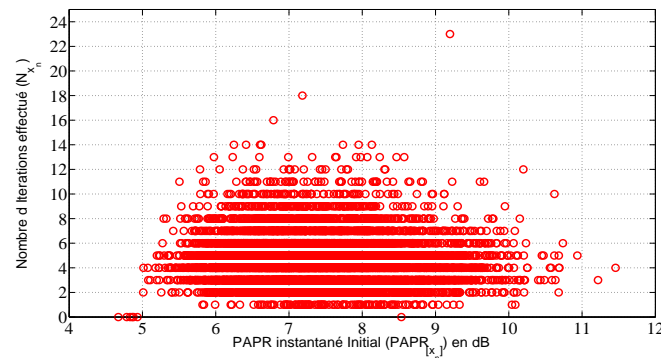


FIGURE 3.19 – Nombre d'itérations nécessaires (Recherche de seuil adapté) pour quelques symboles OFDM ( $M = 64, L = 4$ ) pour  $\text{PAPR}_0 = 5\text{dB}$ .

### 3.4 Performances en termes de réduction du PAPR et des dégradations occasionnées

Dans cette section nous allons évaluer les performances en termes de réduction de PAPR, de dégradation du taux d'erreur binaire, émission hors bande (remontée lobes secondaires) et de variation de la puissance moyenne de l'écrêtage adaptatif. Cette évaluation se fera en comparaison avec l'écrêtage à seuil prédéfini.

Comme environnement de simulation, nous considérerons un système OFDM comportant  $M = 64$  porteuses et modulant des données issue d'une constellation 16-QAM. Le facteur de sur-échantillonnage sera de  $L = 4$  pour une bonne approximation du PAPR du signal analogique. Pour l'évaluation du BER, nous considérerons un canal AWGN pour *Additive White Gaussian Noise*.

Les Figures (3.20) et (3.21) comparent les CCDF du symboles OFDM avant et après écrêtage avec le *clipping* classique et le *clipping* adaptatif. Pour le clipping adaptatif les trois méthodes (Algorithme 1,2 et 3) ont été utilisées pour le calcul du seuil adapté. Les seuils d'écrêtage utilisés dans les deux figures sont respectivement  $\rho_1 = 3.5\text{dB}$  et  $\rho_2 = 5\text{dB}$  pour la méthode CC et les PAPR de sorties désirés correspondant sont, pour la méthodes AC et IAC sont  $\text{PAPR}_0 = \gamma_4(\rho_1) - \epsilon$  et  $\text{PAPR}_0 = \gamma_4(\rho_2) - \epsilon$  et pour la méthode PAC  $\text{PAPR}_0 = \gamma_4(\rho_1)$  et  $\text{PAPR}_0 = \gamma_4(\rho_2)$ , avec  $\epsilon = 0.1\text{dB}$ .

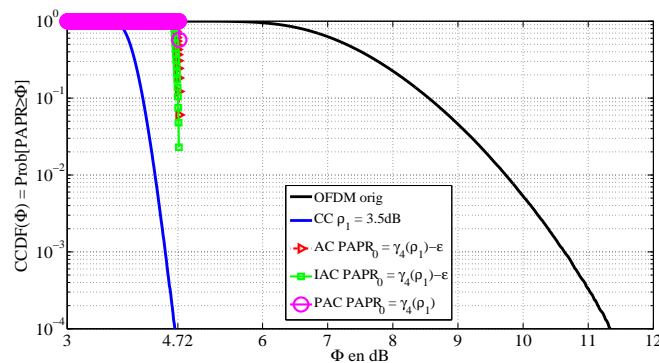


FIGURE 3.20 – CCDF avant et après écrêtage avec les techniques CC avec  $\rho_1 = 3.5\text{dB}$ , AC et IAC avec  $\text{PAPR}_0 = \gamma_4(\rho_1) - \epsilon$  et PAC avec  $\text{PAPR}_0 = \gamma_4(\rho_1)$ .

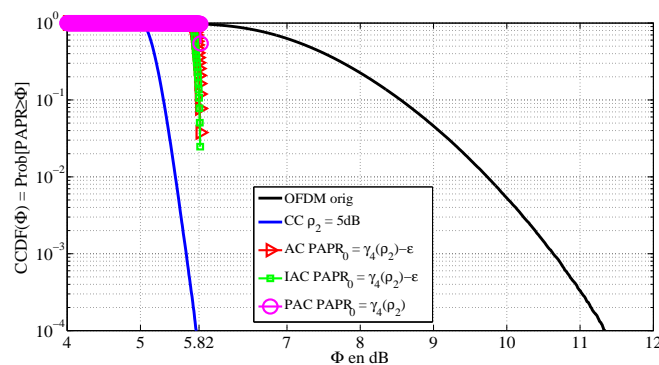


FIGURE 3.21 – CCDF avant et après écrêtage avec les techniques CC avec  $\rho_1 = 5\text{dB}$ , AC et IAC avec  $\text{PAPR}_0 = \gamma_4(\rho_2) - \epsilon$  et PAC avec  $\text{PAPR}_0 = \gamma_4(\rho_2)$ .

Les résultats de simulation des Figures (3.20) et (3.21) confirment que pour un seuil donné  $\rho$  (dans nos simulations 3.5dB et 5dB), la méthode CC avec le seuil  $\rho$  et les méthodes

AC, IAC avec  $\text{PAPR}_0 = \gamma_4(\rho) - \epsilon$  et la méthode PAC avec  $\text{PAPR}_0 = \gamma_4(\rho)$  donnent le même PAPR de sortie égal à  $\gamma_4(\rho)$ , dans nos simulations on a  $\gamma_4(\rho) = 4.72\text{dB}$  et  $5.82\text{dB}$  pour respectivement  $\rho = 3.5\text{dB}$  et  $5\text{dB}$ . Ces résultats sont bien en accord avec le principe de l'écrêtage, voir section (3.2.2) et Figure (3.5). On peut aussi le voir sur les Figure (3.7), (3.11) et (3.17). En outre, on remarque que l'écrêtage adaptatif permet d'avoir  $\gamma_e$ , i.e., la borne supérieure du PAPR à  $10^{-e}$ , constante quelque soit  $e > 0$ . En particulier, on a  $\gamma_0 = \gamma_4 = \text{PAPR}_0$  (le PAPR de sortie désiré) et par conséquent l'écrêtage adaptatif n'entraîne pas d'écrêtage sévère ou non nécessaire par rapport au PAPR de sortie désiré, et donc sera moins dégradant que l'écrêtage classique, pour les mêmes performances en termes de réduction du PAPR. On peut aussi remarquer que la méthode PAC donne un PAPR instantané après écrêtage exactement égal  $\text{PAPR}_0$  contrairement aux méthodes AC et IAC qui donnent une approximation avec un résidu de  $\epsilon$ . En effet, on remarque sur les Figures (3.20) et (3.21) que les CCDF des techniques AC et IAC s'écarte un peu de la verticale passant par les points  $\text{PAPR}_0 = 4.72$  ou  $5.82$  lorsque la CCDF s'approche de 1. La Figure (3.22), donne une représentation en base linéaire des mêmes CCDF pour une meilleure observation de ce phénomène. Rappelons qu'en termes de réduction de PAPR ce phénomène n'a pas beaucoup d'intérêt.

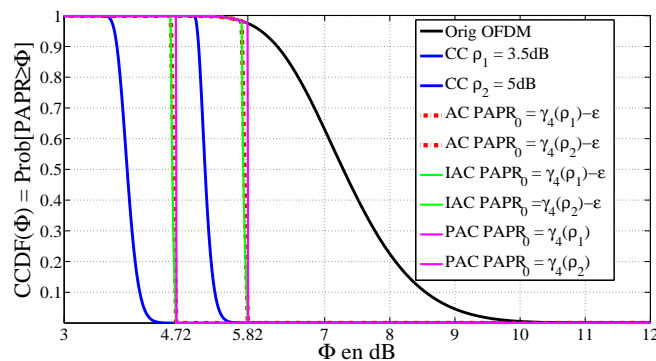


FIGURE 3.22 – Les CCDF en échelle linéaire des Figure (3.20) et Figure (3.21).

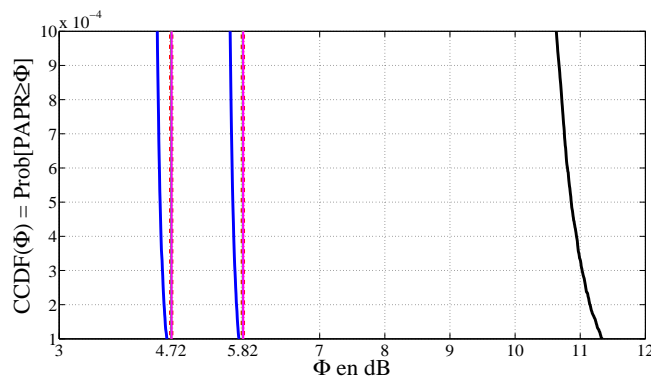


FIGURE 3.23 – Zoom autour de  $\text{CCDF}(\Phi) = 10^{-4}$  de la Figure (3.22).

On remarque sur la Figure (3.22) que les deux CCDF de la méthode PAC pour  $\text{PAPR}_0 = 4.72\text{dB}$  et  $5.82\text{dB}$  coïncident avec les verticales qui passent par ces points. Pour les méthodes AC et IAC, en ces mêmes points, on constate un léger décalage vis à vis de la verticale. Notons aussi que vers des valeurs faibles de la CCDF, les courbes de la méthode CC donnent une impression de ne pas couper l'axe des abscisses aux points



$\text{PAPR}_0 = \gamma_4(\rho)$  associés aux valeurs des différents  $\rho$  utilisés. Cela est du à l'échelle d'observation, comme on peut le voir dans la Figure (3.23), qui est un zoom de la Figure (3.22) aux alentours de  $\text{CCDF}(\Phi) = 10^{-4}$ , les CCDF de la méthode CC coupent bien l'axes des abscisses aux points  $\text{PAPR}_0 = \gamma_4(\rho)$  associés aux différentes valeur du seuil  $\rho$ .

Dans ce qui suit nous allons maintenant comparer l'écrêtage classique avec l'écrêtage adaptatif en termes de dégradation du BER (Bit Error Rate) avec les mêmes performances en termes de réduction du PAPR. En d'autres termes, pour un écrêtage à un seuil fixe  $\rho$ , l'écrêtage adaptatif sera à  $\text{PAPR}_0 = \gamma_4(\rho) - \epsilon$  pour les méthodes AC et IAC et à  $\text{PAPR}_0 = \gamma_4(\rho)$  pour la méthode PAC.

Les Figures (3.24) et (3.25) évaluent les BER avant et après écrêtage classique et adaptatif en fonction du rapport signal à énergie bit par symbole ( $E_b/N_0$ ).

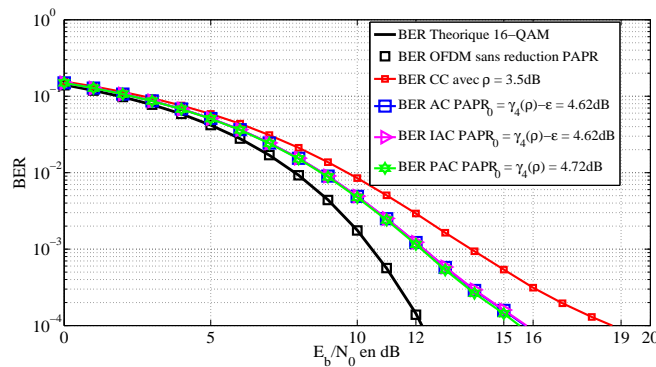


FIGURE 3.24 – BER avant et après écrêtage avec les techniques CC avec  $\rho_1 = 3.5\text{dB}$ , les techniques AC et IAC avec  $\text{PAPR}_0 = \gamma_4(\rho_1) - \epsilon = 4.62\text{dB}$  et la technique PAC avec  $\text{PAPR}_0 = \gamma_4(\rho_1) = 4.72\text{dB}$ .

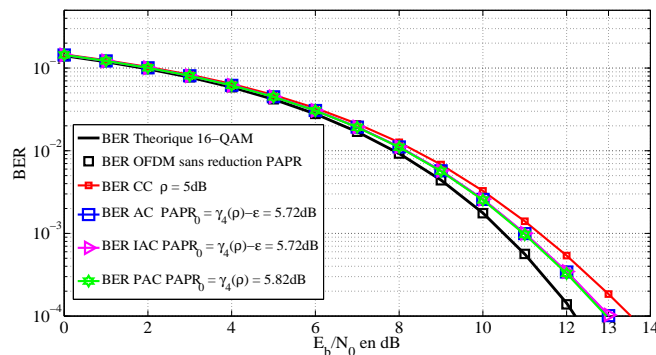


FIGURE 3.25 – BER avant et après écrêtage avec les techniques CC avec  $\rho_2 = 5\text{dB}$ , les techniques AC et IAC avec  $\text{PAPR}_0 = \gamma_4(\rho_2) - \epsilon = 5.72\text{dB}$  et la technique PAC avec  $\text{PAPR}_0 = \gamma_4(\rho_2) = 5.82\text{dB}$ .

Les résultats de simulation des Figures (3.24) et (3.25) confirment que l'écrêtage adaptatif dégrade moins le BER que l'écrêtage classique et cela pour des performances en termes de réduction du PAPR identiques. Elles nous confirment aussi que les dégradations du BER dues à la technique d'écrêtage adaptatif ne dépendent pas de la méthode ou algorithme utilisé pour le calcul du seuil adapté. Sur la Figure (3.24), pour un BER à  $10^{-4}$ , l'écrêtage adaptatif permet de gagner en  $E_b/N_0$  environ 3dB. Sur la Figure (3.25), ce gain est d'environ 0.5dB. Ce qui est tout à fait normal puisque dans les sections précédentes, nous avons montré que pour des seuils  $\rho$  grand l'écrêtage adaptatif et le clipping classique

sont identiques que ça soit en termes de performances en réduction de PAPR qu'en termes de complexité numérique.

Nous allons à présent regarder l'effet de l'écrêtage adaptatif et classique sur le spectre du signal. Pour cela, comme pour le PAPR et BER, considérons les Figures (3.26) et (3.28) qui donnent les DSP (Densité Spectrale de Puissance) du signal avant et après écrêtage.

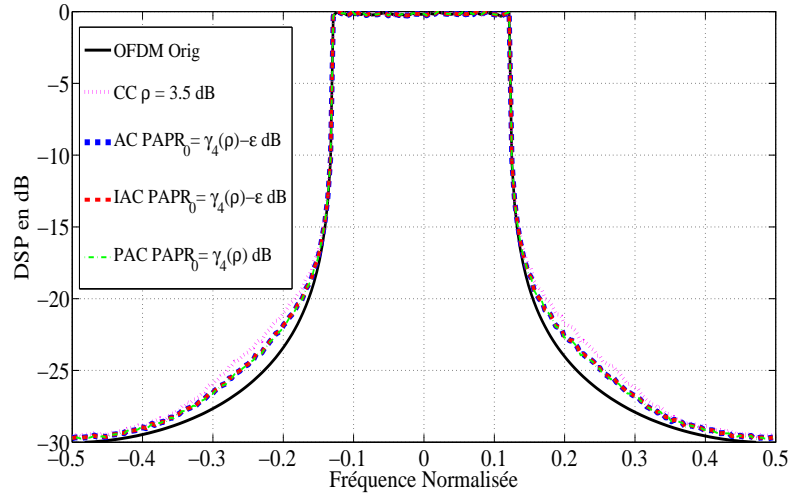


FIGURE 3.26 – DSP avant et après écrêtage avec les techniques CC avec  $\rho_1 = 3.5\text{dB}$ , les techniques AC et IAC avec  $\text{PAPR}_0 = \gamma_4(\rho_1) - \epsilon = 4.62\text{dB}$  et la technique PAC avec  $\text{PAPR}_0 = \gamma_4(\rho_1) = 4.72\text{dB}$ .

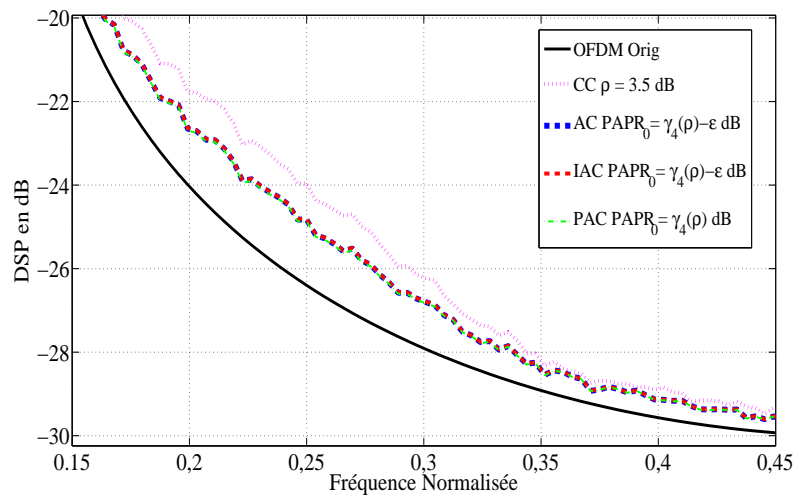


FIGURE 3.27 – Zoom sur la Figure 3.26

Les résultats de simulations des Figures (3.26) et (3.28) montrent que l'écrêtage adaptatif entraîne, comme le *clipping* classique, du bruit hors bande, et donc entraînera une pollution des bandes adjacentes. A PAPR de sortie égal, les résultats de simulation montrent que l'écrêtage adaptatif pollue moins que l'écrêtage classique, en particulier lorsque le seuil  $\rho$  est petit, voir Figure 3.26 et 3.27. En outre, on constate que le bruit hors bande généré par l'écrêtage adaptatif ne dépend pas de l'algorithme utilisé pour le calcul du seuil adapté. Comme pour le BER, on remarque que plus  $\rho$  est grand, plus le bruit hors bande est faible et de même intensité pour les deux méthodes d'écrêtages, classique et adaptatif, voir Figure 3.28 et 3.29.

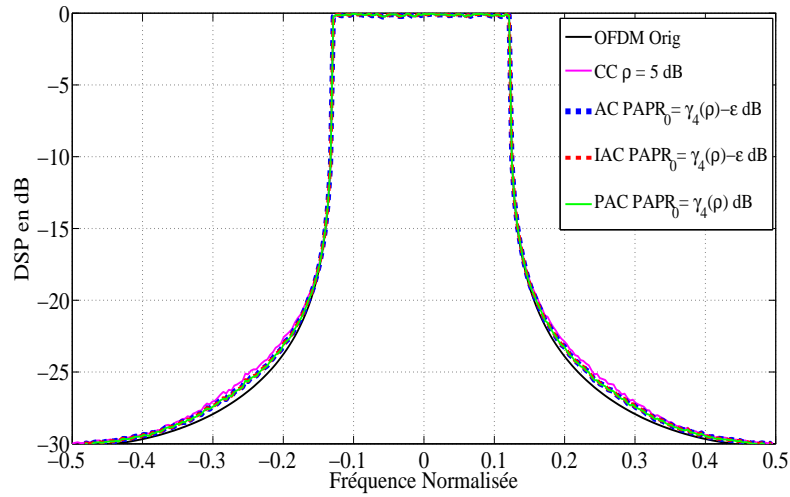


FIGURE 3.28 – DSP avant et après écrêtage avec les techniques CC avec  $\rho_1 = 5$ dB, les techniques AC et IAC avec  $\text{PAPR}_0 = \gamma_4(\rho_1) - \epsilon = 5.72$ dB et la technique PAC avec  $\text{PAPR}_0 = \gamma_4(\rho_1) = 5.82$ dB.

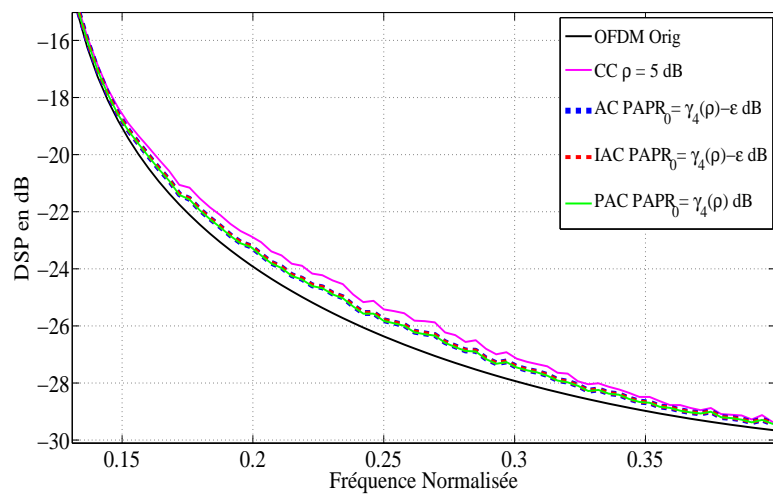


FIGURE 3.29 – Zoom sur la Figure 3.28

Comme la plupart des techniques de réduction du PAPR par ajout de signal, l'écrêtage occasionne une dégradation de la puissance moyenne du signal après réduction du PAPR. Ainsi, dans la Figure (3.30), nous allons comparer les techniques CC, AC, IAC et PAC en termes de variation de la puissance moyenne du signal après réduction du PAPR en fonction du PAPR de sortie à  $10^{-4}$  de la CCDF. En d'autres termes, nous regardons ici, les dégradations de la puissance moyenne occasionnées par les différentes techniques CC, AC, IAC et PAC, pour le même PAPR de sortie. Les résultats de simulation de

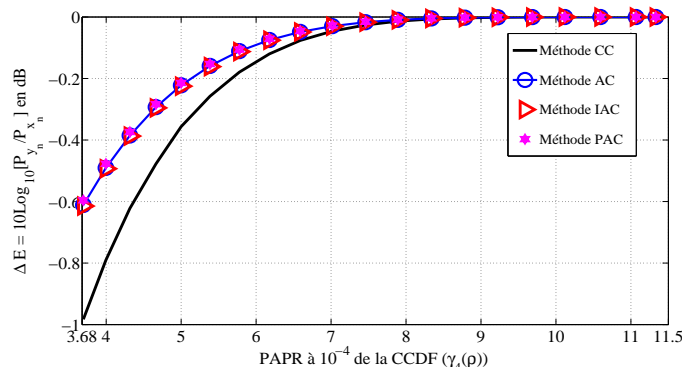


FIGURE 3.30 – Variations de la Puissance moyenne en fonction du PAPR de sortie.

la Figure (3.30) montrent que l'écrêtage adaptatif dégrade moins la puissance moyenne du signal que l'écrêtage classique pour le même PAPR de sortie. Par exemple, pour un PAPR à  $10^{-4}$  de 4dB, les techniques AC, IAC et PAC occasionnent une dégradation de la puissance moyenne du signal de  $-0.5\text{dB}$  alors que le *clipping* classique entraîne une dégradation de la puissance moyenne du signal de  $-0.8\text{dB}$ . Cela est dû, comme pour le BER, aux phénomènes d'écrêtages sévères ou non nécessaires qui sont occasionnés par le fait d'écrêter avec un seuil prédéfini et fixe tous les symboles. On constate aussi, que pour un PAPR de sortie  $\gamma_4(\rho)$  grand, les deux techniques d'écrêtage (adaptatif et à seuil fixe) occasionnent les mêmes variations de la puissance moyenne du signal. Cependant, il faut noter que dans ce cas le gain en PAPR est aussi très faible.

### 3.5 Conclusion et Perspectives

Dans ce chapitre nous avons présenté une technique d'écrêtage à seuil adaptatif. Cette technique, comme il a été souligné le long de ce chapitre permet d'écrêter le signal en fonction du PAPR de sortie désiré. Nous avons montré, théoriquement et par simulation, que l'écrêtage adaptatif permet d'une part d'avoir en sortie un signal à borne supérieure du PAPR déterministe, i.e., la borne supérieure du PAPR est la même à n'importe quel point de la CCDF et d'autre part d'offrir le même PAPR de sortie que l'écrêtage classique. Ainsi, contrairement au *clipping* classique, le *clipping* adaptatif n'entraîne pas d'écrêtage sévère ou non nécessaire vis à vis du PAPR cible et par conséquent occasionne des dégradations moins sévères par rapport au *clipping* classique. Par exemple, pour un PAPR de sortie de 4.72dB en sortie, l'écrêtage adaptatif, permet d'avoir un gain en  $E_b/N_0$  de 3dB, pour un BER à  $10^{-4}$ . Comparer au clipping classique, l'inconvénient de l'écrêtage adaptatif est le surplus de complexité numérique dû au calcul du seuil adapté pour chaque symbole à écrêter. Cependant, nous avons montré que la technique IAC, décrite dans l'Algorithme (2), permet de réduire considérablement la complexité numérique.

Comme perspective, il serait très souhaitable, pour des raisons de complexité, d'étudier une technique de résolution de l'équation permettant d'adapter le seuil d'écrêtage pour

chaque symbole à écreter qui soit moins coûteuse que celle proposée dans ce chapitre. Du fait de la sensibilité aux phénomènes de *Peak Regrowth* de la fonction d'écrêtage classique utilisée dans ce chapitre, il serait très intéressant d'appliquer cette technique d'écrêtage à d'autres types de fonction d'écrêtage tel que le deep clipping par exemple, pour une meilleure robustesse face aux phénomènes de *Peak Regrowth* qui se traduisent par une augmentation du PAPR du signal après filtrage du bruit hors bande généré par l'écrêtage, classique ou adaptatif.



# Chapitre 4

## Contribution sur le choix des porteuses réservées dans les méthodes TR

### Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>79</b>
<b>3.2</b>	<b>Motivations et Principe de l'écrêtage adaptatif</b>	<b>80</b>
3.2.1	Notations et définitions	80
3.2.2	Problématique et Formulation de l'écrêtage adaptatif	82
<b>3.3</b>	<b>Principe de l'écrêtage adaptatif ou <i>clipping</i> adaptatif</b>	<b>84</b>
3.3.1	Recherche Exhaustive à pas constant : Approche naïve	85
3.3.2	Recherche Exhaustive à pas non Constant	89
3.3.3	Résolution par approximation de la puissance moyenne $P_{y_n}$	96
<b>3.4</b>	<b>Performances en termes de réduction du PAPR et des dégradations occasionnées</b>	<b>101</b>
<b>3.5</b>	<b>Conclusion et Perspectives</b>	<b>106</b>

---

### 4.1 Introduction

Dans ce chapitre nous allons présenter nos contributions sur le choix des porteuses réservées dans les techniques basées sur la *Tone Reservation*.

Dans sa thèse de doctorat [126], J. TELLADO avait mentionné deux critères pour la construction du jeu de porteuses dédiées à la réduction du PAPR :

Le premier critère concerne évidemment l'impact que peut avoir le jeu de porteuses sélectionné sur les performances en réduction du PAPR. En effet, comme nous l'avions mentionné dans le chapitre 2 et confirmé via nos résultats de simulation présentés dans l'annexe A, le choix des porteuses réservées est d'une importance capitale car il peut permettre d'améliorer de manière significative les performances en termes de réduction du PAPR. Néanmoins, il a été montré que la recherche du jeu de porteuses optimale (en termes de réduction du PAPR) est un problème combinatoire complexe. Des solutions sous optimales ont cependant été proposées dans [92, 21, 125]. Dans l'Annexe A nous sommes revenus en détail sur l'un d'eux connu sous le nom de *Random Set Optimizer*. Dans ce chapitre, nous présentons une contribution sur l'influence de la parité des porteuses



réservées sur les performances en réduction du PAPR [36]. Cette étude est basée d'une part sur une analyse théorique et d'autre part via une étude statistique afin de corroborer certains résultats théoriques que nous n'avons pas pu démontrer.

Le deuxième critère souligné dans [126] concernant l'influence du choix du jeu des porteuses est celui du débit net du système. En effet, dans un contexte où les données modulées sont issues de diverses constellations, l'auteur propose l'utilisation des porteuses dédiées aux constellations transportant le moins de bit pour porter le signal de correction afin de minimiser la perte du débit net. Dans certains standards disposant de porteuses nulles, l'auteur suggèrent aussi l'utilisation de ces porteuses pour porter le signal. Dans [56], cette idée a été exploitée sur la norme IEEE.802.11a/g. qui disposent de 12 porteuses sur 64 (au total) nulles. Notons que dans ce cas de figure, il est important d'ajouter une contrainte sur le signal de correction du PAPR afin de se conformer aux masques d'émission de telles standards [138]. Sur cette thématique, nous apportons une contribution dénommée ATR pour *Adaptive Tone Teservation* [17]. Cette technique propose de choisir les porteuses réservées en fonction de la qualité du canal de transmission. Cette technique se positionne dans un context multi-trajet et suppose que l'émetteur et le récepteur peuvent échanger des informations. Ainsi, sous l'hypothèse que le canal de transmission est connu, l'ATR propose d'utiliser les porteuses les plus atténuées afin de porter le signal de correction du PAPR. Le but est ainsi, d'améliorer le BER du système en présence de canaux sélectifs en fréquence avec évanouissement.

## 4.2 Contribution sur l'influence de la parité des porteuses sur la méthode TR-GP

Cette section est consacrée à notre contribution sur l'influence de la parité des porteuses réservées sur les performances de la méthode TR-GP. Ainsi, dans un premier temps nous allons rappeler le principe de la méthode TR-GP dans la sous section 4.2.1 avant de présenter notre contribution dans la sous section 4.2.2. Cette dernière sous section est complétée par la section A.3 de l'annexe A, dans laquelle nous avons effectué un état de l'art sur l'influence du choix (distribution ou répartition) des porteuses réservées sur les performances de la méthode TR-GP. Les résultats de simulation seront présentés dans la sous section 4.2.3.

### 4.2.1 Rappel du principe de La méthode TR-GP

La méthode TR-GP est une technique de réduction du PAPR itérative basée sur l'algorithme du gradient projeté. Cette méthode propose de calculer le signal de correction du PAPR via une maximisation du SCR (*Signal to Clipping Ratio*) par ajout de signal sous la contrainte TR. Soit un symbole OFDM  $\mathbf{x}_n$  donné et  $\mathbf{c}_n$  le signal de correction du PAPR de ce symbole, alors le SCR de ce symbole après réduction du PAPR, i.e  $\mathbf{x}_n + \mathbf{c}_n$  est défini comme suit :

$$\text{SCR} = \frac{\|\mathbf{x}_n + \mathbf{c}_n\|_2^2}{\|\mathbf{x}_n + \mathbf{c}_n - f(\mathbf{x}_n + \mathbf{c}_n, A)\|_2^2} \quad (4.1)$$

Avec  $A$  un seuil d'écrêtage prédéfini et  $f(\cdot, A)$  une fonction d'écrêtage définie par l'équation suivante :

$$f(r, A) = \begin{cases} Ae^{\arg r} & \text{Si } |r| > A \\ r & \text{Sinon} \end{cases} \quad (4.2)$$

Notons que rien n'exclut de prendre d'autres fonctions d'écrêtage. De l'équation (4.1), on peut remarquer que si le signal  $\mathbf{c}_n$  est un signal de correction du PAPR idéal (permettant d'atténuer tous les *peaks* du symbole  $\mathbf{x}_n$  qui sont supérieurs à  $A$ ), alors le SCR va tendre vers l'infini car  $\|\mathbf{x}_n + \mathbf{c}_n - f(\mathbf{x}_n + \mathbf{c}_n, A)\|_2^2 \rightarrow 0$  par définition de la fonction  $f(\cdot, A)$ . Il est alors tout à fait pertinent de reformuler le problème de réduction du PAPR défini par (2.15) comme suit :

$$\begin{aligned} & \max_{\mathbf{c}_n} \left( \frac{\|\mathbf{x}_n + \mathbf{c}_n\|_2^2}{\|\mathbf{x}_n + \mathbf{c}_n - f(\mathbf{x}_n + \mathbf{c}_n, A)\|_2^2} \right) \\ C_{m,n} + X_{m,n} &= \begin{cases} X_{m,n} & \text{Si } m \notin \mathcal{R} \\ C_{m,n} & \text{Si } m \in \mathcal{R} \end{cases} \end{aligned} \quad (4.3)$$

Pour des raisons de complexité numérique, l'auteur propose de reformuler le problème ci-dessus comme suit :

$$\begin{aligned} & \max_{\mathbf{c}_n} \left( \frac{\|\mathbf{x}_n\|_2^2}{\|\mathbf{x}_n + \mathbf{c}_n - f(\mathbf{x}_n + \mathbf{c}_n, A)\|_2^2} \right) \\ C_{m,n} + X_{m,n} &= \begin{cases} X_{m,n} & \text{Si } m \notin \mathcal{R} \\ C_{m,n} & \text{Si } m \in \mathcal{R} \end{cases} \end{aligned} \quad (4.4)$$

Puisque le numérateur ne dépend pas de la variable d'optimisation, le problème (4.4) est alors équivalent au problème suivant :

$$\begin{aligned} & \min_{\mathbf{c}_n} \left( \underbrace{\|\mathbf{x}_n + \mathbf{c}_n - f(\mathbf{x}_n + \mathbf{c}_n, A)\|_2^2}_{J_{[\mathbf{x}_n]}(\mathbf{c}_n)} \right) \\ C_{m,n} + X_{m,n} &= \begin{cases} X_{m,n} & \text{Si } m \notin \mathcal{R} \\ C_{m,n} & \text{Si } m \in \mathcal{R} \end{cases} \end{aligned} \quad (4.5)$$

La fonction ou quantité  $J_{[\mathbf{x}_n]}(\mathbf{c}_n)$  est couramment appelée dans la littérature *clipping noise* ou *clipping noise power*. Dans ce chapitre ainsi que dans les chapitres à venir nous la désignerons par Bruit de clipping. Cette fonction reviendra dans le chapitre 5 où nous proposons une amélioration de la méthode TR-GP via une modification de la structure d'insertion de la TR. En exploitant le fait que  $\mathbf{c}_n = \mathbb{F}_{ML, N_{\mathcal{R}}}^{\mathcal{R}} \mathbf{C}_n$  (traduction mathématique de la contrainte TR), le problème (4.5) peut être reformulé comme suit :

$$\min_{\mathbf{C}_n} (\|\mathbf{x}_n + \mathbb{F}_{ML, N_{\mathcal{R}}}^{\mathcal{R}} \mathbf{C}_n - f(\mathbf{x}_n + \mathbb{F}_{ML, N_{\mathcal{R}}}^{\mathcal{R}} \mathbf{C}_n)\|_2^2) \quad (4.6)$$

Le gradient de la fonction de coût de (4.6) est donné après quelques calculs par l'expression suivante :

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{C}_n} &= \frac{\delta}{\delta \mathbf{C}} (J_{[\mathbf{x}_n]}(\mathbf{c}_n)) \\ &= 2 \sum_{l, |x_{n,l} + c_{n,l}| > A} \left( \underbrace{x_{n,l} + \mathbb{F}_{ML, N_{\mathcal{R}, l}}^{\mathcal{R}, \text{Lig}} \mathbf{C}_n}_{c_{n,l}} - A e^{j \arg(x_{n,l} + \mathbb{F}_{ML, N_{\mathcal{R}, l}}^{\mathcal{R}, \text{Lig}} \mathbf{C}_n)} \right) \left( \mathbb{F}_{ML, N_{\mathcal{R}, l}}^{\mathcal{R}, \text{Lig}} \right)^H \\ &= 2 \sum_{l, |x_{n,l} + c_{n,l}| > A} \left( x_{n,l} + c_{n,l} - A e^{j \arg(x_{n,l} + c_{n,l})} \right) \left( \mathbb{F}_{ML, N_{\mathcal{R}, l}}^{\mathcal{R}, \text{Lig}} \right)^H \end{aligned} \quad (4.7)$$

avec on le rappelle  $\mathbf{F}_{ML,\mathcal{R},l}^{\mathcal{R},\text{Lig}}$  la  $l$ -ième ligne de la matrice  $\mathbb{F}_{ML,N_{\mathcal{R}}}^{\mathcal{R}}$ .

Partant des conditions initiales  $\mathbf{C}_n^{(i)} = \mathbf{0}_{N_{\mathcal{R}}}$  le vecteur nul de dimension  $N_{\mathcal{R}}$ , le gradient projeté consiste à construire successivement la solution du problème (4.6) en utilisant l'équation suivante :

$$\mathbf{C}_n^{(i+1)} = \mathbf{C}_n^{(i)} - \frac{\nu}{2} \nabla_{\mathbf{C}_n^{(i)}} \quad (4.8)$$

Avec on le rappelle  $\nabla_{\mathbf{C}_n^{(i)}}$  le gradient de  $J_{[\mathbf{x}_n]}(\mathbf{c}_n)$  au point  $\mathbf{C}_n^{(i)}$ . On remarque ainsi la similitude avec l'équation (2.23) qui est une formulation générale (fonction de coût non spécifiée). Dans le cas de la méthode TR-GP la fonction de coût est le Bruit de *clipping* dont le gradient est donné par l'équation (4.7). Il vient alors que l'équation (4.8) peut se réécrire en utilisant (2.23) comme suit :

$$\mathbf{C}_n^{(i+1)} = \mathbf{C}_n^{(i)} - \nu \sum_{l, |x_{n,l} + c_{n,l}^{(i)}| > A} \left( x_{n,l} + c_{n,l}^{(i)} - Ae^{j \arg(x_{n,l} + c_{n,l}^{(i)})} \right) \left( \mathbf{F}_{ML,N_{\mathcal{R}},l}^{\mathcal{R},\text{Lig}} \right)^H, \quad (4.9)$$

avec  $\mathbf{C}_n^{(i+1)}$  le signal de correction (en fréquence) obtenu après  $i + 1$  itérations. Soulignons que dans le cas des méthodes proposées dans [67, 50] le calcul du vecteur  $\mathbf{C}_n^{(i+1)}$  se fait de la même manière en utilisant les gradients des fonctions de coût considérées dans ces approches comme nous l'avons souligné dans la section précédente. Dans [67] il s'agit de la norme infinie et dans [50] du SDR.

En réécrivant l'équation (4.9) dans le domaine temporel, on obtient comme dans [126] le signal de correction du PAPR à la  $i + 1$ -ième itération via l'équation suivante :

$$\mathbf{c}_n^{(i+1)} = \mathbf{x}_n + \mathbf{c}_n^{(i)} - \nu \sum_{l, |x_{n,l} + c_{n,l}^{(i)}| > A} \left( x_{n,l} + c_{n,l}^{(i)} - Ae^{j \arg(x_{n,l} + c_{n,l}^{(i)})} \right) \mathbb{F}_{ML,N_{\mathcal{R}}}^{\mathcal{R}} \left( \mathbf{F}_{ML,N_{\mathcal{R}},l}^{\mathcal{R},\text{Lig}} \right)^H \quad (4.10)$$

En ajoutant le signal utile sur chacune des membres de l'équation (4.10) on obtient alors :

$$\underbrace{\mathbf{x}_n + \mathbf{c}_n^{(i+1)}}_{\mathbf{x}_n^{(i+1)}} = \underbrace{\mathbf{x}_n + \mathbf{c}_n^{(i)}}_{\mathbf{x}_n^{(i)}} - \nu \sum_{l, |x_{n,l} + c_{n,l}^{(i)}| > A} \underbrace{\left( x_{n,l} + c_{n,l}^{(i)} - Ae^{j \arg(x_{n,l} + c_{n,l}^{(i)})} \right)}_{\alpha_{n,l}^{(i)}} \mathbb{F}_{ML,N_{\mathcal{R}}}^{\mathcal{R}} \left( \mathbf{F}_{ML,N_{\mathcal{R}},l}^{\mathcal{R},\text{Lig}} \right)^H \quad (4.11)$$

Ainsi, successivement on réduit le PAPR du signal utile  $\mathbf{x}_n$  à l'aide de la méthode du gradient projeté. En fixant  $N_{\max}$  le nombre d'itérations maximal et un seuil  $A$  prédéfini, l'Algorithme 4 donne une description plus explicite de la technique TR-GP. On remarque ainsi la similitude de la méthode TR-GP avec la méthode TR-*Clipping* en considérant sa formulation définie via l'équation (2.20). En effet, ces deux méthodes ne diffèrent que par leur matrice de projection.

Comme on peut le remarquer dans l'Algorithme 4, la matrice de projection  $\mathbb{Q}$  peut être pré-calculée et stockée puisqu'elle ne dépend que de  $\mathcal{R}$ , ainsi la complexité de la méthode TR-GP est de l'ordre de  $\mathcal{O}(NL)$  [126].

## 4.2.2 Influence de la parité des porteuses réservées sur les performances de la méthode TR-GP

Dans sa thèse de doctorat, J. TELLADO a montré que le choix de  $\mathcal{R}$  joue un rôle important sur les performances de la méthode TR-GP mais aussi de la méthode TR-QCQP

**Algorithm 4** L'algorithme TR-GP [126]

---

**Require:**  $\mathbf{x}_n$  Symbol OFDM avant réduction du PAPR,  $\nu$  Pas de descente et  
**Require:**  $N_{\max}$  Nombre d'itérations maximal,  $A$  Un seuil de *clipping* fixé (Amplitude)  
**Require:**  $\mathbb{Q} = \mathbb{F}_{ML, N_{\mathcal{R}}}^{\mathcal{R}} (\mathbb{F}_{ML, N_{\mathcal{R}}}^{\mathcal{R}})^H$  Matrice de projection, notons :  $\mathbf{q}_l$  la  $l$ -ième ligne de  $\mathbb{Q}$   
**Ensure:**  $\mathbf{x}_n^{(i)}$  Symbol OFDM après réduction du PAPR à la  $i$ -ième itération  
 $i \leftarrow 0, \mathbf{x}_n^{(0)} = \mathbf{x}_n, \mathbf{c}_n^0 = \mathbf{0}_{LM}$   
**while**  $\left[ \left( \left\{ |x_{n,l}^{(i)}| > A, l = 0, \dots, LM - 1 \right\} \neq \emptyset \right) \text{ Et } (i \leq N_{\max}) \right]$  **do**  
    Pour  $l = 0, \dots, LM - 1, \alpha_l^{(i)} \leftarrow x_{n,l}^{(i)} - A e^{j \arg(y_{n,l}^{(i)})}$   
     $\mathbf{x}_n^{(i+1)} \leftarrow \mathbf{x}_n^{(i)} - \nu \sum_{\{l, x_{n,l}^{(i)} > A\}} \alpha_l^{(i)} \mathbf{q}_l$   
     $i \leftarrow i + 1$   
**end while**

---

en termes de réduction de PAPR. Le principal inconvénient qui peut être lié à un mauvais choix des porteuses réservées est l'apparition de nouveaux *peaks* après ajout du signal de correction du PAPR. Il en résulte alors que la réduction du PAPR qui est le rapport entre le *peak* maximal et la puissance moyenne du signal, est plus due à une forte augmentation de la puissance moyenne qu'à une atténuation des *peaks* élevés. Après avoir montré que le choix des porteuses adéquates pour la réduction du PAPR est un problème combinatoire très complexe, l'auteur a proposé une approche sous optimale permettant le choix de ces porteuses. Cette solution est connue sous le nom de *Random Set Optimizer*. Cette approche est présentée en détail dans la sous section A.3.1 de l'annexe A. Le *Random Set Optimizer* a aussi été utilisé dans le chapitre 5 car il y aura un rôle important d'arbitrage afin de montrer que l'amélioration de la méthode TR-GP que nous y avons proposé n'est nullement influencée par la distribution des porteuses réservées. Il existe d'autres approches de choix des porteuses réservées. On peut citer par exemple le *Contiguous Tone* qui consiste à sélectionner comme son nom l'indique des porteuses consécutives (ex.  $\mathcal{R} = [m_0, m_0 + 1, m_0 + 2, \dots, ]$ ), le *Equally Spaced Tones* qui consiste à construire  $\mathcal{R}$  de telle sorte que ces porteuses soient équidistantes (ex.  $\mathcal{R} = [m_0, m_0 + k, m_0 + k, \dots, ]$  avec  $k$  le pas d'espacement entre les porteuses réservées). Il existe d'autres structures (ou manière) permettant le choix des porteuses réservées [56]. Notons que ces études sont généralement basées sur des études statistiques (comparaison via les résultats de simulation) ce qui laisse le sujet tout à fait ouvert. Dans cette thèse et particulièrement dans le chapitre 5 nous avons utilisé le *Contiguous Tones-Middle Side*, le *Contiguous Tone-Two Side* et le *Random Set Optimizer* comme structure de construction des porteuses réservées. Dans l'Annexe A, nous avons présenté quelques résultats de simulation de la méthode TR-GP pour les types de *mapping* suivantes : *Contiguous Tones-Middle Side*, *Contiguous Tones-Left Side*, *Contiguous Tones-Right Side* et *Random Set Optimizer*. Ces résultats de simulation confirment tout l'intérêt de la méthode TR-GP ainsi que l'influence du choix des porteuses. En effet, elles montrent que la méthode TR-GP offre un bon compromis réduction du PAPR, complexité numérique et augmentation de la puissance après réduction du PAPR. En outre, comme toutes les techniques basées sur le principe d'insertion de la TR, elle est sans dégradation du BER et sans émission hors bande. Les résultats de simulation présentés dans cette section montrent que la *Contiguous Tones-Middle Side* est meilleure que les cas *Contiguous Tones-Left Side*, *Contiguous Tones-Right Side*, et permet d'améliorer les performances en réduction du PAPR significativement. Cela confirme tout l'intérêt du choix des porteuses réservées sur les performances de la méthode TR-GP.

Sur ce sujet (influence de  $\mathcal{R}$  sur les performances en réduction du PAPR), nous

avons apporté une nouvelle contribution qui traite de l'influence de la parité des porteuses réservées sur les performances de la méthode TR-GP [36]. Dans [126], l'auteur a brièvement souligné les conséquences que peuvent avoir le fait d'utiliser toutes les porteuses impaires du signal pour porter le signal de correction sur le phénomène d'apparition de nouveaux *peak*. En effet, pour  $L = 1$ , J. TELLADO a montré que sous l'hypothèse que  $\mathcal{R}$  est l'ensemble contenant toutes les porteuses impaires le signal de correction du PAPR  $\mathbf{c}_n$  est "anti-symétrique" i.e  $c_{n,l} = -c_{n,l+\frac{M}{2}}$  et parallèlement puisque le signal utile est porté par les porteuses paires alors il est "symétrique" i.e  $x_{n,l} = x_{n,l+\frac{M}{2}}$ . De ce fait on remarque ainsi que si l'échantillon  $c_{n,l}$  permettait de réduire l'amplitude de l'échantillon  $x_{n,l}$  alors le *peak* de l'échantillon  $x_{n,l+\frac{M}{2}} = x_{n,l}$  sera quant à lui rehaussé par l'échantillon  $c_{n,l+\frac{M}{2}} = -c_{n,l}$ . Notons que les notions de "symétrie" et d'"anti-symétrie" définies précédemment désignent respectivement une périodicité avec conservation du signe et périodicité avec inversion du signe. Dans cette thèse, nous avons opté pour la dénomination symétrie et anti-symétrie (sans les guillemet). Ce choix est dû au fait que les signaux en question sont de support fini, ainsi la notion la notion de symétrie ou d'anti-symétrie est plus adapté.

Cependant il faut noter qu'en pratique afin de garantir une bonne approximation du PAPR du signal analogique (voir Figures 1.5, 1.6 et 1.7 du chapitre 1), le signal est généralement sur-échantillonné d'un facteur  $L \geq 4$ , ainsi l'hypothèse  $L = 1$  avec laquelle nous avons illustré dans le paragraphe ci-dessus le phénomène d'apparition de nouveaux *peaks* lorsque les porteuses réservées sont les porteuses paires (ou bien les porteuses impaires) est restrictif.

Ainsi, dans cette thèse nous allons tout d'abord faire remarquer que la propriété de symétrie et respectivement d'anti symétrie du signal utile  $\mathbf{x}_n$  et respectivement du signal de correction  $\mathbf{c}_n$  évoquée précédemment est valable quelque soit  $L \geq 1$  si  $\mathcal{R}$  est l'ensemble contenant toutes les porteuses impaires et par conséquent, confirmer qu'un tel choix de  $\mathcal{R}$  accentue le phénomène d'apparition de nouveaux *peaks*. Nous montrerons ensuite théoriquement que lorsque toutes les porteuses impaires sont utilisées pour porter le signal, alors l'algorithme de la méthode TR-GP ne permet aucune réduction de PAPR. Nous finirons par généraliser cette étude dans le cas où  $\mathcal{R}$  ne contient pas toutes les porteuses impaires i.e  $N_{\mathcal{R}} < \frac{M}{2}$  mais nous allons supposer que toutes les porteuses de  $\mathcal{R}$  ont la même parité i.e soit elles sont toutes paires soit elles sont toutes impaires. Nous montrerons théoriquement et aussi par simulation qu'un tel choix n'est pas optimal en terme de réduction du PAPR.

Dans le chapitre 1, nous avons montré qu'après sur-échantillonnage à un facteur  $L$ , les échantillons  $x_{n,l}$ ,  $l = 0, \dots, ML - 1$  du vecteur symbole  $\mathbf{x}_n$  s'écrivent comme suit :

$$x_{n,l} = \sum_{m=0}^{M-1} X_{m,n} e^{j2\pi \frac{ml}{ML}} \quad (4.12)$$

Puisque par principe de la TR, le signal de correction du PAPR  $\mathbf{c}_n = [c_{n,0}, \dots, c_{n,ML-1}]$  est généré via les porteuses réservées dans  $\mathcal{R}$ , il vient alors que :

$$x_{n,l_1} = \sum_{m=0, m \notin \mathcal{R}}^{M-1} X_{m,n} e^{j2\pi m \frac{l_1}{LM}} \quad c_{n,l_1} = \sum_{m=0, m \in \mathcal{R}}^{M-1} C_{m,n} e^{j2\pi m \frac{l_1}{LM}} \quad (4.13) \quad (4.14)$$

Supposons que  $l_1 = l + \frac{LM}{2}$  et que  $\mathcal{R}$  contient toutes les porteuses de même parité (i.e toutes les porteuses paires ou toutes les porteuses impaires). Sans perte de généralité supposons que  $\mathcal{R}$  contient toutes les porteuses paires, il vient alors que les équations ci

dessus peuvent se réécrire comme suit :

$$\begin{aligned}
x_{n,l+\frac{LM}{2}} &= \sum_{m=0}^{\frac{M}{2}-1} X_{2m,n} e^{j2\pi 2m \frac{l+\frac{LM}{2}}{LM}} & c_{n,l+\frac{LM}{2}} &= \sum_{m=0}^{\frac{M}{2}-1} C_{2m+1,n} e^{j2\pi(2m+1) \frac{l+\frac{LM}{2}}{LM}} \\
&= \sum_{m=0}^{\frac{M}{2}-1} X_{2m,n} e^{j2\pi 2m \frac{l}{LM}} & &= - \sum_{m=0}^{\frac{M}{2}-1} C_{2m+1,n} e^{j2\pi(2m+1) \frac{l}{LM}} \\
&= x_{n,l} & &= -c_{n,l}
\end{aligned} \tag{4.15} \tag{4.16}$$

On remarque ainsi que les vecteurs  $\mathbf{x}_n$  et  $\mathbf{c}_n$  sont respectivement symétrique et anti-symétrique par rapport à l'instant  $\frac{ML}{2}$ . Par conséquent, si l'on suppose que le  $l$ -ième échantillon de  $\mathbf{x}_n$  dépasse le seuil prédéfini  $A$  i.e  $\|x_{n,l}\| > A$  avec  $l < \frac{LM}{2}$  alors le  $l + \frac{LM}{2}$ -ième échantillon de  $\mathbf{x}_n$  dépasse aussi le seuil prédéfini  $A$  (voir équation (4.15)). Or d'après l'équation (4.16) on a  $c_{n,l} = -c_{n,l+\frac{LM}{2}}$  et ainsi le  $l + \frac{LM}{2}$ -ième échantillons de  $\mathbf{x}_n$  au lieu d'être écrêté est alors rehaussé. En outre, dans le cas de la méthode TR-GP sous cette même hypothèse, on peut montrer qu'il n'y a pas de réduction du PAPR. En effet d'après la relation de récurrence définie par l'équation (4.9) le vecteur fréquentiel du signal de correction du PAPR après  $i \geq 1$ -itérations est défini par :

$$\begin{aligned}
\mathbf{C}_n^{(i+1)} &= \mathbf{C}_n^{(i)} - \nu \sum_{l, |x_{n,l} + c_{n,l}^{(i)}| > A} \left( x_{n,l} + c_{n,l}^{(i)} - A e^{j \arg(x_{n,l} + c_{n,l}^{(i)})} \right) \left( \mathbf{F}_{ML, N_{\mathcal{R}}, l}^{\mathcal{R}, \text{Lig}} \right)^H \\
&= \mathbf{C}_n^{(i)} - \nu \sum_{l < \frac{LM}{2}, |x_{n,l} + c_{n,l}^{(i)}| > A} \left( x_{n,l} + c_{n,l}^{(i)} - A e^{j \arg(x_{n,l} + c_{n,l}^{(i)})} \right) \left( \mathbf{F}_{ML, N_{\mathcal{R}}, l}^{\mathcal{R}, \text{Lig}} \right)^H \\
&\quad - \nu \sum_{l \geq \frac{LM}{2}, |x_{n,l} + c_{n,l}^{(i)}| > A} \left( x_{n,l} + c_{n,l}^{(i)} - A e^{j \arg(x_{n,l} + c_{n,l}^{(i)})} \right) \left( \mathbf{F}_{ML, N_{\mathcal{R}}, l}^{\mathcal{R}, \text{Lig}} \right)^H
\end{aligned} \tag{4.17}$$

Pour un seuil d'écrêtage  $A$  fixé, notons par  $\left\{ l < \frac{LM}{2}, |x_{n,l} + c_{n,l}^{(k-1)}| > A \right\} = [s_0, \dots, s_{P_1-1}]$  avec  $P_1 \leq \frac{LM}{2}$  et  $\left\{ l \geq \frac{LM}{2}, |x_{n,l} + c_{n,l}^{(k-1)}| > A \right\} = [r_0, \dots, r_{P_2-1}]$  avec  $P_2 \leq \frac{LM}{2}$ . Alors, pour  $i = 1$  on a  $\mathbf{C}_n^{(0)} = \mathbf{0}_{N_{\mathcal{R}} = \frac{M}{2}}$  i.e  $\mathbf{c}_n^{(0)} = \mathbf{0}_{LM}$ . En vertu de l'équation (4.15) on a  $P_1 = P_2$  et  $[r_0, \dots, r_{P_2-1}] = [s_0 + \frac{LM}{2}, \dots, s_{P_1-1} + \frac{LM}{2}]$  car le signal  $\mathbf{x}_n$  est symétrique. Il vient alors que le vecteur fréquentiel du signal de correction du PAPR après une itération i.e  $\mathbf{C}_n^{(1)}$  est donné par l'équation suivante :

$$\begin{aligned}
\mathbf{C}_n^{(1)} &= \underbrace{\mathbf{C}_n^{(0)}}_{\mathbf{0}_{\frac{M}{2}}} - \frac{\nu}{2} \sum_{i=0}^{P_1-1} \left( x_{n,s_i} - A e^{j \arg(x_{n,s_i})} \right) \left( \mathbf{F}_{ML, N_{\mathcal{R}}, s_i}^{\mathcal{R}, \text{Lig}} \right)^H \\
&\quad - 2\nu \sum_{i=0}^{P_1-1} \left( x_{n,s_i + \frac{LM}{2}} - A e^{j \arg(x_{n,s_i + \frac{LM}{2}})} \right) \left( \mathbf{F}_{ML, N_{\mathcal{R}}, s_i + \frac{LM}{2}}^{\mathcal{R}, \text{Lig}} \right)^H
\end{aligned} \tag{4.18}$$

Puisque on a  $x_{n,s_i} = x_{n,s_i + \frac{LM}{2}}$  d'après l'équation (4.15). Il vient alors que (4.18) devient :

$$\mathbf{C}_n^{(1)} = -2\nu \sum_{i=0}^{P_1-1} \left( x_{n,s_i} - A e^{j \arg(x_{n,s_i})} \right) \left( \mathbf{F}_{ML, N_{\mathcal{R}}, s_i}^{\mathcal{R}, \text{Lig}} + \mathbf{F}_{ML, N_{\mathcal{R}}, s_i + \frac{LM}{2}}^{\mathcal{R}, \text{Lig}} \right)^H \tag{4.19}$$



Or on a  $\mathbf{F}_{ML, N_{\mathcal{R}}, s_i}^{\mathcal{R}, \text{Lig}} = \left[ e^{j2\pi s_i \frac{m_0}{LM}}, e^{j2\pi s_i \frac{m_1}{LM}}, \dots, e^{j2\pi s_i \frac{m_{N_{\mathcal{R}}-1}}{LM}} \right]$  avec  $m_0, \dots, m_{N_{\mathcal{R}}-1}$  les indices des porteuses réservées dans  $\mathcal{R}$ . Puisque par hypothèses  $\mathcal{R}$  est l'ensemble de toutes les porteuses impaires alors on a  $\mathbf{F}_{ML, N_{\mathcal{R}}, s_1}^{\mathcal{R}, \text{Lig}} = \left[ e^{j2\pi s_1 \frac{1}{LM}}, e^{j2\pi s_1 \frac{3}{LM}}, \dots, e^{j2\pi s_1 \frac{2M-1}{LM}} \right]$ . On peut alors facilement montrer que  $\mathbf{F}_{ML, N_{\mathcal{R}}, s_1 + \frac{LM}{2}}^{\mathcal{R}, \text{Lig}} = -\mathbf{F}_{ML, N_{\mathcal{R}}, s_1}^{\mathcal{R}, \text{Lig}}$ . Il s'en suit alors que l'équation (4.19) donne :

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_n^{(1)} &= -2\nu \sum_{i=0}^{P_1-1} (x_{n, s_i} - Ae^{j \arg(x_{n, s_i})}) \left( \mathbf{F}_{ML, N_{\mathcal{R}}, s_i}^{\mathcal{R}, \text{Lig}} + \mathbf{F}_{ML, N_{\mathcal{R}}, s_i + \frac{LM}{2}}^{\mathcal{R}, \text{Lig}} \right)^H \\ &= -\nu \sum_{i=0}^{P_1-1} (x_{n, s_i} - Ae^{j \arg(x_{n, s_i})}) \left( \mathbf{F}_{ML, N_{\mathcal{R}}, s_i}^{\mathcal{R}, \text{Lig}} - \mathbf{F}_{ML, N_{\mathcal{R}}, s_i}^{\mathcal{R}, \text{Lig}} \right)^H \\ &= \mathbf{0}_{N_{\mathcal{R}}} \end{aligned} \quad (4.20)$$

On montre ainsi, que dans le cas de la méthode TR-GP, si  $\mathcal{R}$  est l'ensemble de toutes les porteuses impaires alors il n'y a pas de réduction du PAPR. Il est important de noter que ce résultat provient du fait que le signal utile est symétrique et que par principe de la TR le signal de correction doit être porté par les porteuses restantes qui sont toutes impaires est donc anti-symétrique.

En pratique, utiliser autant de porteuses pour porter le signal de correction est inutile et inenvisageable. Généralement le pourcentage des porteuses réservées ou mises à zéros est petit. En guise d'exemple, le Tableau suivant donne le nombre de porteuses réservées dans la nouvelle norme DVB-T2.

Taille de la FFT ( $M$ )	Nombre de porteuses réservées ( $N_{\mathcal{R}}$ )
1K, $M = 1024$	$N_{\mathcal{R}} = 10$
2K, $M = 1024 * 2$	$N_{\mathcal{R}} = 18$
4K, $M = 1024 * 4$	$N_{\mathcal{R}} = 36$
8K, $M = 1024 * 8$	$N_{\mathcal{R}} = 72$
16K, $M = 1024 * 16$	$N_{\mathcal{R}} = 144$
32K, $M = 1024 * 32$	$N_{\mathcal{R}} = 288$

TABLE 4.1 – Nombre de Porteuses réservées dans la DVB-T2 en fonction de la taille de la FFT

Dans ce qui suit nous allons généraliser ce résultat dans le cas où le nombre de porteuses est raisonnable (plus petit que  $\frac{M}{2}$ ) mais avec l'hypothèse qu'elles sont toutes de même parité. Pour fixer les idées et sans perte de généralité supposons qu'elles (les porteuses réservées) sont toutes impaires. Tout d'abord notons que puisque  $N_{\mathcal{R}} < \frac{M}{2}$  alors les



porteuses utiles du signal ne seront pas de même parité. Par conséquent, le signal  $\mathbf{x}_n$  ne sera plus symétrique (ou anti-symétrique dans le cas où on suppose que les porteuses de  $\mathcal{R}$  sont toutes paires). Il vient alors que le passage de l'équation (4.18) à l'équation (4.19) n'est plus garanti a priori. Néanmoins, il restera que le signal de correction du PAPR  $\mathbf{c}_n$  sera anti-symétrique comme l'atteste l'équation suivante :

$$\begin{aligned} c_{n,l+\frac{LM}{2}} &= \sum_{m=0, m \in \mathcal{R}}^{M-1} C_{m,n} e^{j2\pi m \frac{l}{M}} \\ &= - \sum_{m=0, 2m+1 \in \mathcal{R}}^{\frac{M}{2}-1} C_{2m+1,n} e^{j2\pi(2m+1) \frac{l}{LM}} \\ &= -c_{n,l} \end{aligned} \quad (4.21)$$

Ainsi, comme précédemment on remarquera d'après l'équation (4.21) que si  $c_{n,l}$  permet d'atténuer le *peak* du signal  $\mathbf{x}_n$  à l'instant  $l$ , i.e l'échantillon  $x_{n,l}$ , alors à l'instant  $l + \frac{ML}{2}$  un *peak* de même amplitude et de même phase modulo  $\pi$  (à un signe multiplicatif près) vient s'ajouter sur l'échantillon  $x_{n,l+\frac{ML}{2}}$  qui a priori n'a pas la même amplitude ni la même phase modulo  $\pi$  que l'échantillon  $x_{n,l}$ . Ainsi, ce *peak* supplémentaire risque fort d'augmenter l'amplitude de l'échantillon  $x_{n,l+\frac{ML}{2}}$  que plutôt de l'atténuer. En outre, si ce *peak* du signal utile, i.e  $x_{n,l+\frac{ML}{2}}$  est supérieur (en module) au seuil d'écrêtage prédéfini  $A$ , le signal de correction du PAPR  $\mathbf{c}_n$  risque alors de ne pas entraîner une réduction du PAPR du signal car d'un côté il atténue l'amplitude de l'échantillon  $x_{n,l}$  et de l'autre côté il augmente celui de  $x_{n,l+\frac{ML}{2}}$ . Pour aller un peu plus loin sur ce constat, considérons un symbole OFDM  $\mathbf{x}_n$  satisfaisant la condition suivante :

$$\text{Pour tout } l \in \left[0, \frac{LM}{2}\right], \text{ si } |x_{n,l}| \geq A \text{ alors } |x_{n,l+\frac{LM}{2}}| \geq A \text{ et} \quad (4.22)$$

On remarque que cette propriété suppose que les échantillons du symbole  $\mathbf{x}_n$  qui dépassent le seuil  $A$  sont répartis de manière symétrique par rapport à l'instant  $T_u/2$  (en discret  $\frac{ML}{2}$ ). La Figure 4.1 donne l'exemple d'un symbole OFDM qui satisfait cette propriété. Nous remarquons que les *peak* du symbole  $\mathbf{x}_n$  qui dépasse le seuil  $A$  sont répartis de

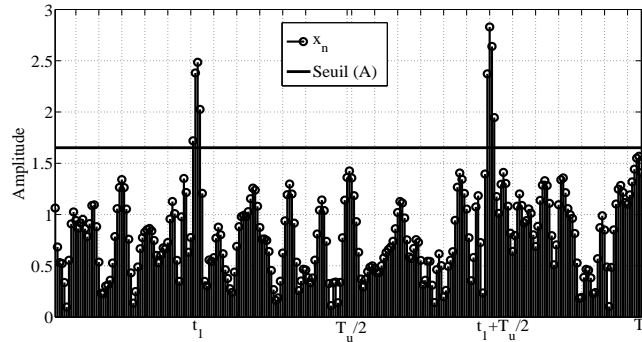


FIGURE 4.1 – Exemple d'un symbole OFDM vérifiant la condition 4.22 ( $M = 64, N_{\mathcal{R}} = 12$ )

manière symétrique autour de  $\frac{T_u}{2}$ , voir Figure 4.1. Le choix de regarder le comportement du signal de correction du PAPR  $\mathbf{c}_n$  sur ce type de symbole (symbole vérifiant (4.22)) est motivé par l'envie d'avoir un comportement similaire que dans le cas précédent lorsque

le nombre de porteuses réservées est  $N_{\mathcal{R}} = M/2$ . En effet comme nous l'avons souligné précédemment, puisque  $N_{\mathcal{R}} < M/2$ ,  $\mathbf{x}_n$  n'est plus symétrique (il est modulé par des porteuses paires et impaires). Ainsi, bien que  $\mathbf{c}_n$  soit toujours anti-symétrique (toutes ses porteuses sont impaires), le passage de l'équation (4.18) à l'équation (4.19) qui nous a permis de montrer que  $\mathbf{C}_n^{(1)} = 0$  dans la cas  $N_{\mathcal{R}} = M/2$ , n'est plus valable cette fois ci car on suppose  $N_{\mathcal{R}} < M/2$ . Avec la condition (4.22), nous allons montrer dans ce qui suit que lorsque les  $N_{\mathcal{R}}$  porteuses réservées sont toutes impaires, alors  $\mathbf{C}_n^{(k)}$  ne variera plus au bout de quelques itérations, par conséquent, la méthode TR-GP ne permettra plus de réduire le PAPR au bout de quelques itérations. Il en résultera alors que le PAPR à  $10^{-4}$  de la CCDF ne décroîtra plus au bout de quelques itérations lorsque toutes les porteuses réservées sont impaires.

Sous la condition (4.22), l'équation (4.9) permettant le calcul du signal de correction à la sortie de la  $(i + 1)$ -ième itération peut se réécrire comme suit :

$$\begin{aligned}
\mathbf{C}_n^{(i+1)} &= \mathbf{C}_n^{(i)} - \nu \left( \sum_{l \in \Theta_A} \left( x_{n,l} + c_{n,l}^{(i)} - Ae^{j \arg(x_{n,l} + c_{n,l}^{(i)})} \right) \left( \mathbf{F}_{ML, N_{\mathcal{R}}, l}^{\mathcal{R}, \text{Lig}} \right)^H \right. \\
&+ \left. \sum_{l \in \Theta_A} \left( x_{n, l + \frac{ML}{2}} + c_{n, l + \frac{ML}{2}}^{(i)} - Ae^{j \arg(x_{n, l + \frac{ML}{2}} + c_{n, l + \frac{ML}{2}}^{(i)})} \right) \left( \mathbf{F}_{ML, N_{\mathcal{R}}, l + \frac{LM}{2}}^{\mathcal{R}, \text{Lig}} \right)^H \right) \\
&= \mathbf{C}_n^{(i)} - \nu \left( \sum_{l \in \Theta_A} \left( x_{n,l}^{(i)} - Ae^{j \arg(x_{n,l}^{(i)})} \right) \left( \mathbf{F}_{ML, N_{\mathcal{R}}, l}^{\mathcal{R}, \text{Lig}} \right)^H \right. \\
&+ \left. \sum_{l \in \Theta_A} \left( x_{n, l + \frac{ML}{2}}^{(i)} - Ae^{j \arg(x_{n, l + \frac{ML}{2}}^{(i)})} \right) \left( \mathbf{F}_{ML, N_{\mathcal{R}}, l + \frac{LM}{2}}^{\mathcal{R}, \text{Lig}} \right)^H \right) \quad (4.23)
\end{aligned}$$

Avec  $\Theta_A = \{l \leq \frac{ML}{2}, |x_{n,l}| > A\}$ . Puis que toutes les  $N_{\mathcal{R}} < \frac{M}{2}$  porteuses réservées sont impaires, alors on a  $\mathbf{F}_{ML, N_{\mathcal{R}}, l}^{\mathcal{R}, \text{Lig}} = \mathbf{F}_{ML, N_{\mathcal{R}}, l + \frac{ML}{2}}^{\mathcal{R}, \text{Lig}}$ . En utilisant ce résultat, l'équation (4.23) devient :

$$\mathbf{C}_n^{(i+1)} = \mathbf{C}_n^{(i)} - \nu \left( \sum_{l \in \Theta_A} \left( x_{n,l}^{(i)} - Ae^{j \arg(x_{n,l}^{(i)})} \right) - \left( x_{n, l + \frac{ML}{2}}^{(i)} - Ae^{j \arg(x_{n, l + \frac{ML}{2}}^{(i)})} \right) \right) \left( \mathbf{F}_{ML, N_{\mathcal{R}}, l}^{\mathcal{R}, \text{Lig}} \right)^H \quad (4.24)$$

Puisque le nombre de porteuses réservées  $N_{\mathcal{R}}$  est plus petit que  $\frac{M}{2}$ , les porteuses utiles (les porteuses de  $\mathbf{x}_n$ ) ne sont pas toutes paires bien que celles réservées soient toutes impaires.

Ainsi, on a priori  $\left( x_{n,l}^{(i)} - Ae^{j \arg(x_{n,l}^{(i)})} \right) \neq \left( x_{n, l + \frac{ML}{2}}^{(i)} - Ae^{j \arg(x_{n, l + \frac{ML}{2}}^{(i)})} \right)$ . Ainsi, il vient que

$\mathbf{C}_n^{(i+1)} \neq \mathbf{0}_{N_{\mathcal{R}}}$  contrairement au cas précédent, voir équation (4.20). Néanmoins, du fait que toutes les porteuses réservées sont impaires et que le signal dont on veut réduire le PAPR satisfait la condition (4.22) (voir Figure 4.1) on s'attend intuitivement à ce que le PAPR de tels signaux après réduction via la méthodes TR-GP en fonction du nombre d'itérations ne décroît plus au bout de quelques itérations. Ainsi, puisque la valeur utile du PAPR (borne supérieure du PAPR) du signal est généralement obtenu à  $10^{-4}$  de la CCDF, les performances en réduction du PAPR de la méthode TR-GP en fonction du nombre d'itérations risquent de ne plus être améliorées au bout de quelques itérations. Pour établir ce résultat théorique, il suffit de montrer que pour tout symbole OFDM  $\mathbf{x}_n$  vérifiant (4.22) le vecteur fréquentiel  $\mathbf{C}_n^{(i+1)}$ , voir équation (4.24) est presque nul après quelques itérations. Du fait de la difficulté de prouver ce résultat théoriquement, nous avons opté de montrer ce résultat par simulation. En effet, puisque la méthode TR-GP consiste à minimiser

itérativement le Bruit de *Clipping*, voir équation (4.5). Il suffit alors de montrer que cette quantité (bruit de *clipping*) ne décroît plus au bout de quelques itérations. Autrement dit, il suffit de montrer que  $J_{[\mathbf{x}_n]}(\mathbf{c}_n^{(i)})$  décroît très faiblement lorsque  $\mathbf{x}_n$  vérifie (4.22) et que toutes les porteuses réservées sont impaires. On rappelle que  $J_{[\mathbf{x}_n]}(\mathbf{c}_n^{(i)})$  (voir (4.5)) est défini comme suit :

$$J_{[\mathbf{x}_n]}(\mathbf{c}_n^{(i)}) = \sum_{|x_{n,l}^{(i)}| > A} \|x_{n,l}^{(i)} - f(x_{n,l}, A)\|_2^2 \quad (4.25)$$

Puisque  $\mathbf{x}_n$  est une variable aléatoire, nous allons donc montrer (vérifier) par simulation que  $\mathbb{E}[J_{[\mathbf{x}_n]}(\mathbf{c}_n^{(i)})]$  décroît très lentement lors que  $\mathbf{x}_n$  vérifie (4.22) et que toutes les porteuses de  $\mathcal{R}$  sont paires ou impaires. On estimera  $\mathbb{E}[J_{[\mathbf{x}_n]}(\mathbf{c}_n^{(i)})]$  comme suit :

$$\mathbb{E}[J_{[\mathbf{x}_n]}(\mathbf{c}_n^{(i)})] = \sum_{n=1}^{\text{Trial}} (J_{[\mathbf{x}_n]}(\mathbf{c}_n^{(i)})) \quad (4.26)$$

Avec *Trial* le nombre de réalisations (symboles OFDM) vérifiant (4.22).

Dans la section à venir nous allons présenter quelques résultats de simulations sur l'influence de la parité des porteuses réservées sur les performances de la méthodes TR-GP. Mais avant cela, nous allons d'abord établir par simulations que  $\mathbb{E}[J_{[\mathbf{x}_n]}(\mathbf{c}_n^{(i)})]$  décroît très lentement lorsque les symboles  $\mathbf{x}_n$  vérifient (4.22) et que toutes les porteuses réservées sont impaires. Cela sera aussi valable lorsque elles sont aussi toutes paires comme nous allons le voir dans ce qui suit.

### 4.2.3 Résultats de simulation sur l'influence de la parité des porteuses réservées sur les performances de la méthode TR-GP

L'environnement de simulation sera un système OFDM comportant  $M = 64$  porteuses dont  $N_{\mathcal{R}} = 12$  porteuses seront réservées pour porter le signal de correction et modulant des données issues d'une 16-QAM. Nos signaux seront échantillonnés à un facteur  $L = 4$  pour garantir une bonne approximation du PAPR du signal analogique.

Soient  $N_{\mathcal{R}^P}$ ,  $N_{\mathcal{R}^I}$  le nombre de porteuses paires et impaires que contient  $\mathcal{R}$ . Pour évaluer l'impact de la parité des porteuses sur les performances de la méthode TR-GP nous allons considérer plusieurs cas de jeux de porteuses réservées en faisant varier  $N_{\mathcal{R}^P}$  et  $N_{\mathcal{R}^I}$ . Notons que  $N_{\mathcal{R}^P} + N_{\mathcal{R}^I} = N_{\mathcal{R}} = 12$ . Il est connu que la répartition ou position des porteuses réservées peut avoir un grand impact sur les performances de la méthode TR-GP. Ainsi, pour chaque  $\mathcal{R}$  la distribution ou position des porteuses réservées sera sélectionnée via la méthode *Random Set Optimizer* sous la contrainte qu'il contient  $N_{\mathcal{R}^P}$  porteuses paires et  $N_{\mathcal{R}^I}$  porteuses impaires. Ainsi, les résultats obtenus ne seront influencés que par la parité des porteuses et non leur position ou distribution. L'algorithme *Random Set Optimizer* est décrit en détail dans la section A.3.1 de l'Annexe A, voir Algorithme 11

La Figure (4.2) donne  $\mathbb{E}[J_{[\mathbf{x}_n]}(\mathbf{c}_n^{(i)})]$  en fonction du nombre d'itérations dans les cas  $(N_{\mathcal{R}^P}, N_{\mathcal{R}^I}) = (0, 12)$ ,  $(N_{\mathcal{R}^P}, N_{\mathcal{R}^I}) = (12, 0)$  et  $(N_{\mathcal{R}^P}, N_{\mathcal{R}^I}) = (6, 6)$  lorsque  $\mathbf{x}_n$  satisfait (4.22).

Les résultats de simulation de la Figure 4.2 montrent que  $\mathbb{E}[J_{[\mathbf{x}_n]}(\mathbf{c}_n^{(i)})]$  décroît très lentement lorsque les symboles OFDM  $\mathbf{x}_n$  vérifient (4.22) et que  $\mathcal{R}$  ne contient que des porteuses de même parité i.e lorsque  $(N_{\mathcal{R}^P}, N_{\mathcal{R}^I}) = (0, 12)$  (toutes les porteuses sont impaires) ou lorsque  $(N_{\mathcal{R}^P}, N_{\mathcal{R}^I}) = (12, 0)$  (toutes les porteuses réservées sont paires).

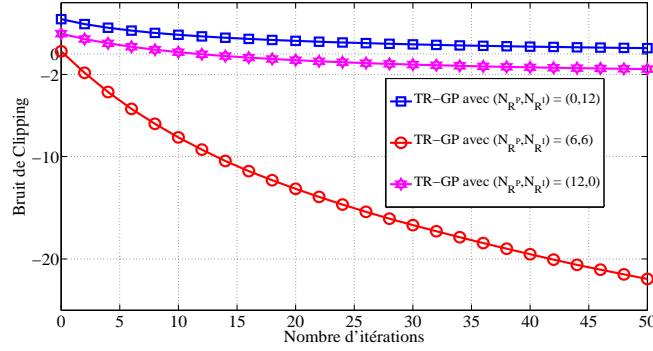


FIGURE 4.2 – Evolution de  $\mathbb{E}[J_{\mathbf{x}_n}(\mathbf{c}_n^{(i)})]$  en fonction pour des symboles vérifiant (4.22)

Dans le cas où les porteuses ne sont pas de même parité (dans notre cas autant de porteuses paires que d'impaire), on remarque que  $\mathbb{E}[J_{\mathbf{x}_n}(\mathbf{c}_n^{(i)})]$  décroît significativement lorsque le nombre d'itération augmente malgré que les symboles  $\mathbf{x}_n$  vérifient (4.22).

La Figure (4.3) donne  $\mathbb{E}[J_{\mathbf{x}_n}(\mathbf{c}_n^{(i)})]$  en fonction du nombre d'itérations dans les cas  $(N_{R^p}, N_{R^i}) = (0, 12)$ ,  $(N_{R^p}, N_{R^i}) = (12, 0)$  et  $(N_{R^p}, N_{R^i}) = (6, 6)$  lorsque les symboles  $\mathbf{x}_n$  ne satisfont pas (4.22).

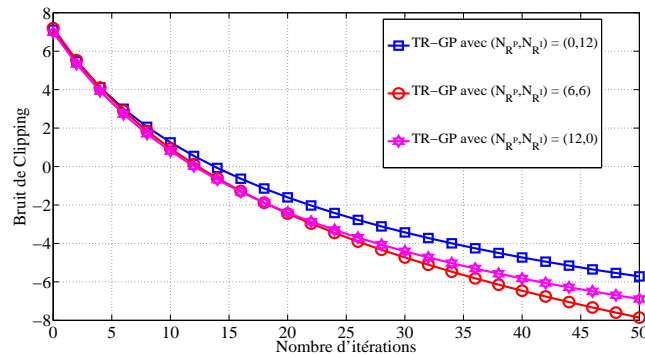


FIGURE 4.3 – Evolution de  $\mathbb{E}[J_{\mathbf{x}_n}(\mathbf{c}_n^{(i)})]$  en fonction pour des symboles ne vérifiant pas (4.22)

Contrairement au résultats de la Figure 4.2, sur la Figure 4.3, on remarque que les trois courbes ont une même allure de décroissance lorsque  $\mathbf{x}_n$  ne vérifie pas la condition (4.22). En combinant les résultats de simulation des Figures 4.2 et 4.3 on peut conclure que  $\mathbb{E}[J_{\mathbf{x}_n}(\mathbf{c}_n^{(i)})]$  décroît lentement que si et seulement si les porteuses réservées sont de même parité et que les symboles  $\mathbf{x}_n$  vérifient (4.22). Puisque  $\mathbb{E}[J_{\mathbf{x}_n}(\mathbf{c}_n^{(i)})]$  représente la fonction de coût à minimiser, alors on peut s'attendre à ce que le PAPR de tels symboles ne soit plus réduit significativement au bout de quelques itérations. Par conséquent, le PAPR à  $10^{-4}$  obtenu via la méthode TR-GP décroîtra très lentement au bout de quelques itérations lorsque toutes les porteuses réservées ont la même parité.

Les Figures 4.4 et 4.5 donnent les variations d'amplitudes avant et après réduction du PAPR de deux symboles OFDM qui vérifient (4.22).

Les deux exemples illustrés sur les Figures 4.4 et 4.5 ont exactement le comportement auquel on s'attendait si l'on réduit via la méthode TR-GP le PAPR d'un symbole qui satisfait la condition (4.22). En effet, lorsque les porteuses réservées dans  $\mathcal{R}$  sont de même parité (impaires) (voir Figure 4.4), on remarque que les enveloppes complexes du signal après 10, 20 et 40 itérations sont identiques (voir Figure 4.6). Autrement dit, le PAPR

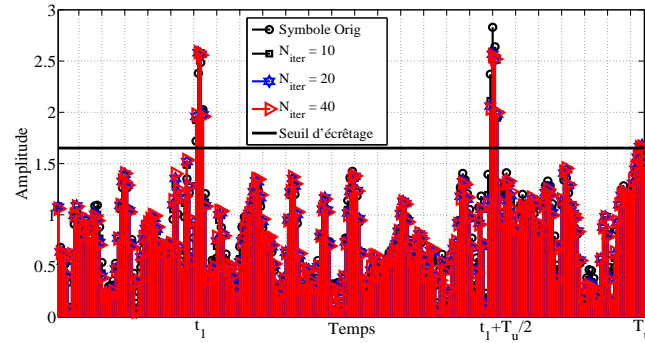


FIGURE 4.4 – Variation de l'enveloppe complexe avant et après réduction du PAPR : Symbole vérifiant (4.22) et  $\mathcal{R}$  ne contient que des porteuses de même parité :  $(N_{\mathcal{R}^P}, N_{\mathcal{R}^I}) = (0, 12)$

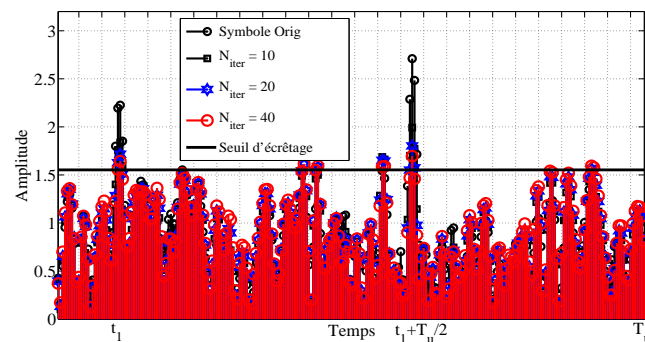


FIGURE 4.5 – Variation de l'enveloppe complexe avant et après réduction du PAPR : Symbole vérifiant (4.22) et  $\mathcal{R}$  contient autant de porteuses paires que d'impaire :  $(N_{\mathcal{R}^P}, N_{\mathcal{R}^I}) = (6, 6)$

de ce signal ne sera quasiment plus réduit après 10 itérations. Cela est en accord avec les résultats de la Figure 4.2 qui montrent aussi que  $\mathbb{E}[J_{[\mathbf{x}_n]}(\mathbf{c}_n^{(i)})]$  (fonction de coût) ne décroît quasiment plus après quelques itérations. En outre, on remarque que les amplitudes des échantillons qui sont au dessus du seuil  $A$  (les amplitudes autour des instants  $t_1$  et  $t_1 + T_u/2$  de la Figure 4.6) sont sensiblement égales.

Les Figures 4.6 et 4.7 donne respectivement un zoom des Figures 4.4 et 4.5 autours des *peaks* qui dépassent les seuil.

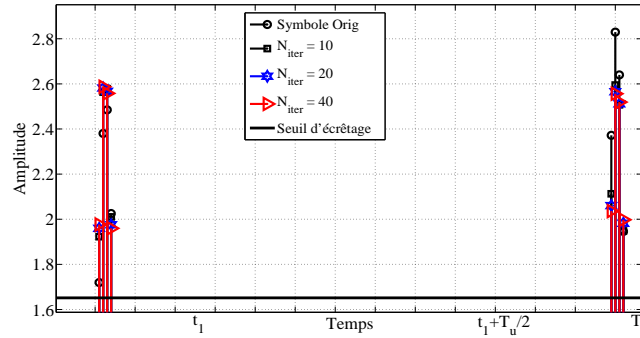


FIGURE 4.6 – Zoom sur la Figure 4.4

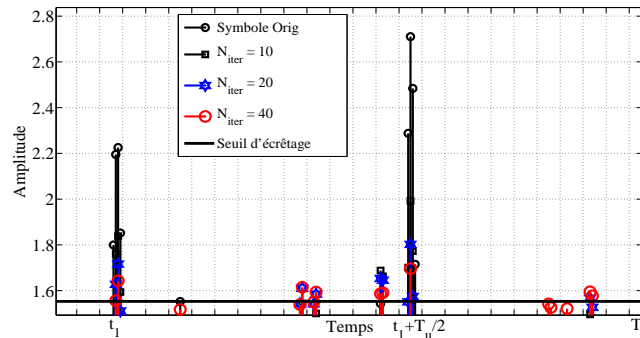


FIGURE 4.7 – Zoom sur la Figure 4.5

Cependant, lorsque les porteuses réservées ne sont pas de même parité (dans notre cas autant de paires que d'impaires), voir Figure 4.5, on remarque que les amplitudes du signal continuent de décroître au fur et à mesure que l'on augmente le nombre d'itérations de la méthode TR-GP, voir Figure 4.7. On remarque aussi ce même comportement concernant l'évolution de  $\mathbb{E}[J_{[\mathbf{x}_n]}(\mathbf{c}_n^{(i)})]$  en fonction du nombre d'itérations effectué par la méthode TR-GP, voir Figure 4.2.

Dans ce qui suit nous allons évaluer l'influence de la parité des porteuses réservées sur les performances en termes de réduction du PAPR de la méthode TR-GP. Pour ce faire, considérons d'abord les Figures 4.8 et 4.9 donnant respectivement les CCDF avant et après réduction du PAPR via la méthode TR-GP pour respectivement les seuils normalisés  $\rho = 6\text{dB}$  et  $5\text{dB}$ .

Comme on s'y attendait, les résultats de simulation des Figures 4.8 et 4.9 montrent que les performances de la méthode TR-GP sont moins bonnes lorsque toutes les porteuses réservées ont la même parité (cas  $(N_{\mathcal{R}^P}, N_{\mathcal{R}^I}) = (0, 12)$  et  $(12, 0)$ ) que lorsque il y a autant de porteuses paires que d'impaires ( $(N_{\mathcal{R}^P}, N_{\mathcal{R}^I}) = (6, 6)$ ). En effet, sur la Figure 4.8 le cas  $(N_{\mathcal{R}^P}, N_{\mathcal{R}^I}) = (6, 6)$  permet de gagner environ  $0.5\text{dB}$  par rapport aux cas  $(N_{\mathcal{R}^P}, N_{\mathcal{R}^I}) =$

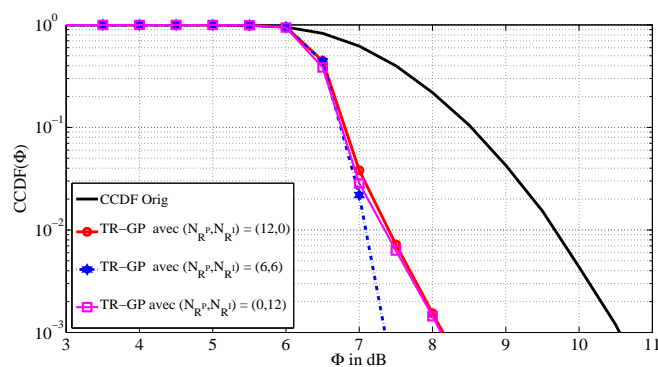


FIGURE 4.8 – Effet de la parité des porteuses réservées sur le CCDF avant est après réduction du PAPR pour  $\rho = 6\text{dB}$ ,  $N_{\max} = 20$

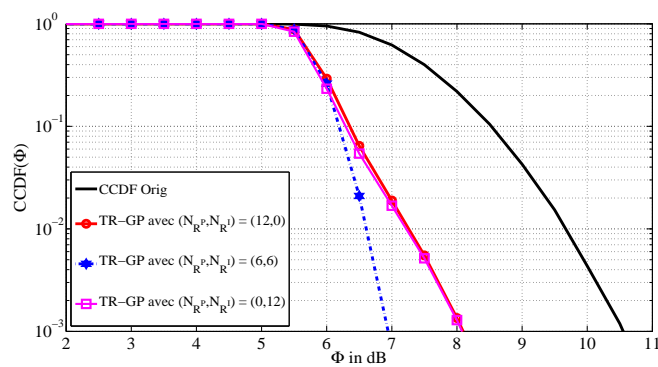


FIGURE 4.9 – Effet de la parité des porteuses réservées sur le CCDF avant est après réduction du PAPR pour  $\rho = 5\text{dB}$ ,  $N_{\max} = 20$



(0, 12) et (12, 0), i.e les cas où toutes les porteuses réservées ont la même parité. Ce gain passe à 1dB lorsque le seuil est  $\rho = 5\text{dB}$ , voir Figure 4.9.

Sur les Figures 4.10 et 4.11 nous allons maintenant regarder l'évolution du PAPR en fonction du nombre d'itérations pour les cas  $(N_{\mathcal{R}^p}, N_{\mathcal{R}^i}) = (0, 12)$ , (12, 0) et (6, 6) pour respectivement  $\rho = 6\text{dB}$  et  $\rho = 5\text{dB}$ . Les résultats de simulation des Figures 4.10

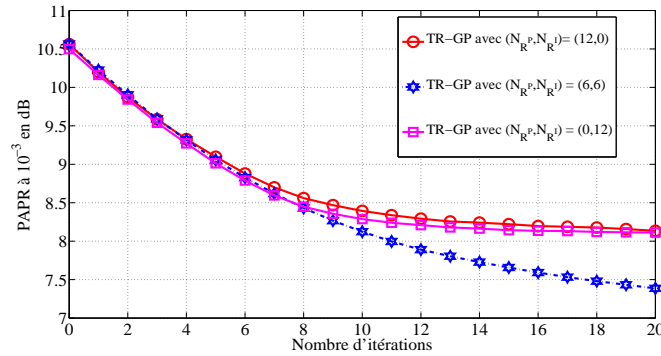


FIGURE 4.10 – Effet de la parité des porteuses réservées sur l'évolution du PAPR à  $10^{-3}$  en fonction du nombre d'itérations :  $\rho = 6\text{dB}$

et 4.11 montrent que lorsque les porteuses réservées ont la même parité, le PAPR à  $10^{-3}$  de la CCDF ne varie plus significativement au bout de quelques itérations alors que lorsque les porteuses réservées ne sont pas de même parité, il continue de décroître significativement. En effet, sur la Figure 4.10 on remarque qu'à partir de 15 itérations le PAPR ne décroît plus et reste égale à environ 8.1dB lorsque les porteuses réservées ont la même parité. Sur la Figure 4.11 on constate aussi que le PAPR ne varie plus après 15 itérations et reste égal à 8.04dB lorsque les porteuses réservées ont la même parité. Lorsque  $\mathcal{R}$  contient autant de porteuses paires que d'impaires on remarque que le PAPR continue de décroître lorsque le nombre d'itérations augmente sur les 2 figures. Ces résultats sont en accord avec nos analyses théoriques précédentes et confirment que le fait de choisir des porteuses de même parité pour porter le signal de correction n'est pas un bon choix.

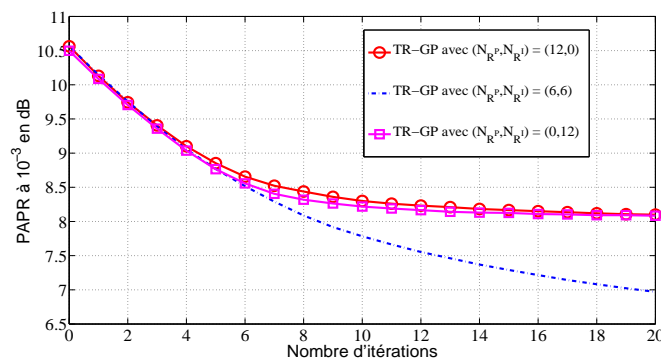


FIGURE 4.11 – Effet de la parité des porteuses réservées sur l'évolution du PAPR à  $10^{-3}$  en fonction du nombre d'itérations :  $\rho = 5\text{dB}$

Dans ce qui suit nous allons maintenant faire varier  $N_{\mathcal{R}^p}$  et  $N_{\mathcal{R}^i}$  pour mieux voir l'impact de la parité des porteuses réservées sur les performances de la méthode TR-GP. La Figure 4.12 et 4.13 donnent les PAPR à  $10^{-3}$  de la CCDF en fonction du nombre de porteuses paires  $N_{\mathcal{R}^p}$  (ou impaires  $N_{\mathcal{R}^i} = N_{\mathcal{R}} - N_{\mathcal{R}^p}$ ) que contient  $\mathcal{R}$ .

Des Figures 4.12 et 4.13, on remarque globalement que lorsque  $\mathcal{R}$  est mixte (contient des porteuses paires et impaires, i.e les cas  $N_{\mathcal{R}^p} \neq 0$  et  $N_{\mathcal{R}^i} \neq 12$  sur l'axe des abscisses)

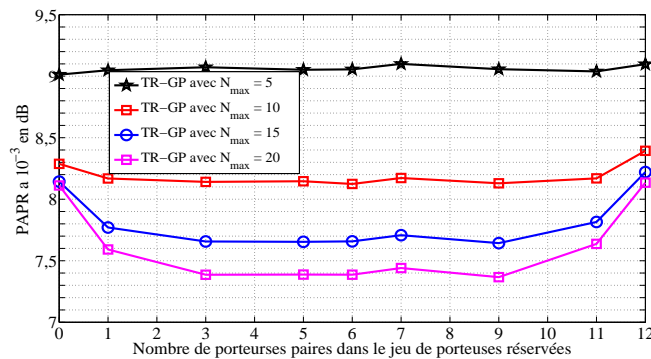


FIGURE 4.12 – PAPR à  $10^{-3}$  de la CCDF en fonction du nombre de porteuses paires (ou impaires) contenu dans  $\mathcal{R}$  :  $\rho = 6\text{dB}$

Le PAPR à  $10^{-3}$  de la CCDF continue de décroître significativement même après 10 itérations alors que lorsque  $\mathcal{R}$  ne contient que des porteuses paires (cas  $N_{\mathcal{R}^P} = 0$  ou  $N_{\mathcal{R}^P} = 12$ ) les PAPR à  $10^{-3}$  de la CCDF après 10, 15 et 20 itérations sont quasiment identiques, c'est à dire qu'il n'y a plus de réduction du PAPR après 10 itérations. En effet, on remarque qu'avec  $\rho = 6\text{dB}$  (voir Figure 4.12), les PAPR  $10^{-3}$  de la CCDF obtenus après 15 et 20 itérations sont quasiment identiques lorsque toutes les porteuses sont paires ou impaires (voir PAPR à  $10^{-3}$  aux point  $N_{\mathcal{R}^P} = 0$  et 12) alors que lorsque  $\mathcal{R}$  est mixte ( $N_{\mathcal{R}^P} \neq 0$  et 12) on a en moyenne un gain en réduction du PAPR d'environ 0.25dB. De même lorsque  $\rho = 5\text{dB}$  (voir Figure 4.13), on remarque que lorsque les porteuses réservées sont de même parité on ne réduit plus le PAPR à partir de 10 itérations alors que lorsque  $\mathcal{R}$  est mixte le PAPR continue de décroître lorsque le nombre d'itérations augmente. Les résultats de simulation montrent aussi que le meilleur mixage est que  $\mathcal{R}$  contient au moins 3 porteuses paires et au maximum 9 porteuses paires (ou maximum 9 porteuses paires et minimum 3 porteuses impaires). Avec de telles proportions, on note ainsi qu'avec  $\rho = 5\text{dB}$  et  $N_{\max} = 20$  on a une amélioration du gain en réduction d'environ 1dB par rapport aux cas où  $\mathcal{R}$  ne contient que des porteuses de même parité, voir Figure 4.13. Notons aussi que globalement une seule porteuse de parité différente permet de ne pas borner les performances en réduction du PAPR en fonction du nombre d'itérations effectué.

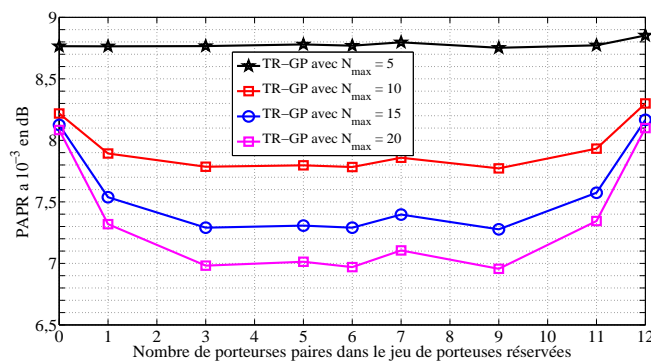


FIGURE 4.13 – PAPR à  $10^{-3}$  de la CCDF en fonction du nombre de porteuses paires (ou impaires) contenu dans  $\mathcal{R}$  :  $\rho = 5\text{dB}$

### 4.3 La méthode *Adaptive Tone Reservation* (ATR)

Cette section est consacrée à la technique ATR pour *Adaptive Tone Reservation*. Cette approche comme son nom l'indique, propose de choisir le jeu de porteuses réservées en fonction de la qualité du canal de transmission afin d'améliorer le BER du système lorsque le canal est sélectif en fréquence. D'où le choix de le mettre dans ce chapitre contenant aussi notre contribution sur l'influence de la parité des porteuses sur les performances en réduction du PAPR de la méthode TR-GP. Soulignons d'emblée que la technique ATR, contrairement à toutes les études qui ont été menées sur l'influence du choix des porteuses réservées sur les techniques TR, ne vise pas à booster les performances en réduction du PAPR. Cette technique se donne comme objectif d'améliorer le BER du système en choisissant les porteuses qui doivent être dédiées à la réduction du PAPR en fonction de la qualité du canal de transmission. Ainsi, en termes de réduction du PAPR, la technique ATR peut être moins performante que la TR lorsque le jeu de porteuses utilisé pour cette dernière est bien choisi. Notons aussi que comme nous allons le voir dans la suite de cette section, la technique ATR sera plus coûteuse en termes de complexité numérique que la techniques TR.

Ces travaux sont le fruit d'une collaboration avec MARWA CHAFII qui est une doctorante au sein de l'équipe travaillant sur une thématique proche de la mienne sous la direction de JACQUES PALICOT, REMI GRIBONVAL<sup>1</sup> et FAOUZI BADER. Ce travail a fait l'objet d'une publication [17].

Cette section sera constituée de deux sous sections. Dans la sous section 4.3.1 nous allons présenter le principe de la technique ATR ainsi que la méthode de calcul du signal de réduction du PAPR associée. À cet effet nous allons utiliser l'algorithme de gradient projeté comme dans la section précédente. Dans la sous section 4.3.2, nous présenterons d'une part les performances en réduction du PAPR et d'autre part les performances en terme de dégradation du BER en présence d'un canal sélectif en fréquence.

#### 4.3.1 Principe et formulation du problème

Tout d'abord notons que la technique ATR se positionne dans un contexte de systèmes communiquant entre eux et dans un contexte mono-utilisateur. Autrement dit l'émetteur et le récepteur échangent des informations et plus particulièrement nous supposons que le récepteur est capable de transmettre à l'émetteur une information fiable sur la qualité du canal de transmission. Cette information est connue dans le jargon sous l'appellation *Channel State Information* (CSI). L'idée d'utiliser le CSI pour améliorer les performances spectrales (Pour une bande donnée : débit élevé avec un BER inférieur à une valeur fixe prédéfinie) des systèmes de télécommunications n'est pas nouvelle. En effet les premières idées sur l'utilisation de techniques de modulations adaptatives [130, 52] furent proposées des les années 90. L'idée de ces techniques est soit de restreindre la constellation ou de l'étendre en fonction de la qualité du canal de transmission. Plus précisément la technique AMC pour *Adaptive Modulation and Coding* consiste à restreindre la constellation lorsque le canal présente de forte atténuations afin de garantir une bonne robustesse vis à vis du bruit et d'étendre celle-ci (la constellation) lorsque le canal présente de faible atténuation afin d'accroître le débit transmis. Dès lors, on remarque qu'une bonne performance des techniques AMC passe par une bonne estimation de l'information canal ainsi qu'un acheminement fiable vers l'émetteur [47, 129]. Ainsi, pour la technique ATR que nous proposons nous allons travailler avec l'hypothèse que l'émetteur connaît le canal de

---

1. Directeur de Recherche, INRIA, Rennes-Beaulieu Atalante  
Campus de Beaulieu, F-35042 Rennes cedex, France

transmission et plus précisément sa réponse fréquentielle  $\mathbf{H}(f)$ .

Sous cette hypothèse, la technique ATR propose d'utiliser les porteuses les plus affectées par les phénomènes d'évanouissement canal afin de porter le signal de correction du PAPR. En d'autres termes, par opposition à la TR qui suggère un choix définitif et fixe des porteuses réservées pour la réduction du PAPR, la technique ATR propose quant à elle de choisir les porteuses réservées en fonction de  $\mathbf{H}(f)$  afin d'améliorer le BER du système. En effet, dans le chapitre 1 nous avons montré qu'après démodulation (après DFT) le symbole OFDM reçue sur la  $m$ -ième porteuses est donné par l'équation suivante :

$$Y_{m,n} = H_{m,n} \mathbf{X}_{m,n} + \mathbf{n}_b[m] \quad (4.27)$$

avec  $H_{m,n}$  la réponse fréquentielle du canal autour de la porteuse  $mF$  et  $\mathbf{n}_n[m]$  un bruit AWGN. Après estimation du canal, il vient alors que l'estimé du symbole émis sur cette porteuse peut être donnée comme suit (égalisation par *Zero-Forcing*) :

$$\hat{X}_{m,n} = \frac{Y_{m,n}}{H_{m,n}} = X_{m,n} + \frac{\mathbf{n}_b[m]}{H_{m,n}} \quad (4.28)$$

En prenant l'erreur quadratique entre le symbole émis et celui estimé on a :

$$\|\hat{X}_{m,n} - X_{m,n}\|_2^2 = \left| \frac{\mathbf{n}_b[m]}{H_{m,n}} \right|_2^2 \quad (4.29)$$

On note ainsi que pour chaque porteuse, plus le facteur d'atténuation sur cette porteuse est fort ( $|H_m|$  petit) plus le bruit est amplifié après égalisation et donc plus la probabilité de détecter correctement le symbole est faible.

Soit  $N_{\mathcal{R}}$  le nombre de porteuses dédiées à la réduction du PAPR et  $\beta$  un seuil prédéfini, la technique ATR consistera alors à sélectionner les  $N_{\mathcal{R}}$  porteuses vérifiant  $|H_m| \leq \beta$  comme jeu de porteuses réservées pour réduire le PAPR des symboles qui seront transmises durant toute la période où le canal ne change pas. Le seuil  $\beta$  n'est pas indispensable comme on peut le voir sur l'Algorithme 5. En effet, le jeu des porteuses peut être constitué des  $N_{\mathcal{R}}$  porteuses les plus affectées par le canal. L'hypothèse d'invariance du canal durant une certaine période n'est pas du tout sur-réaliste en pratique. En estimation du canal de propagation pour les systèmes OFDM grâce aux porteuses pilotes réparties dans des trames contenant un certain nombre de symboles OFDM, cette hypothèse d'invariance du canal durant toute la transmission de la trame est souvent utilisée [116]. Dans cette section, pour nos résultats de simulation, on supposera que le canal sera constant durant la transmission de 30 symboles OFDM (nos trames contiendront 30 symboles OFDM). Ainsi pour ces 30 symboles le jeu de porteuses sera identique puisque le canal est constant durant cet intervalle de temps. Cependant, après l'émission des ces 30 symboles OFDM, l'émetteur aura besoin d'une nouvelle information CSI afin de sélectionner les nouvelles porteuses qui seront dédiées à la réduction du PAPR.

La Figure 4.14 donne une illustration de la sélection des porteuses à réserver pour porter le signal de correction du PAPR. Les réponses fréquentielles représentées sur ces figures sont celles des canaux EVA (pour *Extended Vehicular A model*) et ETU (*Extended Typical Urban model*) proposés dans les travaux de spécification de la norme LTE [43]. Le système OFDM associé est décrit dans le tableau 4.4.

De la Figure 4.14 on remarque que la réponse fréquentielle du canal ETU présente des "trous" ( $H(f) \leq \beta$ ) plus profonds que le canal EVA. On note ainsi une profondeur des trous allant jusqu'à  $-30$ dB par rapport à la porteuse la moins atténuée. Le principe de la technique ATR, est alors de sélectionner les porteuses qui seront les plus affectées par le canal afin de porter le signal de correction du PAPR. Dans la sous section 4.3.2

Retard en $ns$	0	30	150	310	370	710	1090	1730	2510
Gain en dB	0.0	-1.5	-1.4	-3.6	-0.6	-9.1	-7.0	-12.0	-16.9

TABLE 4.2 – Paramètres du canal EVA

Retard en $ns$	0	50	120	200	230	500	1600	2300	5000
Gain en dB	-1.0	-1.0	-1.0	0.0	0.0	0.0	-3.0	-5.0	-7.0

TABLE 4.3 – Paramètres du canal ETU

Nombre de porteuses ( $M$ )	Largeur bande	Durée symbole ( $T_u$ )
256	3MHz	$1/3.84 * 10^6$ s

TABLE 4.4 – Paramètres du système OFDM utilisé

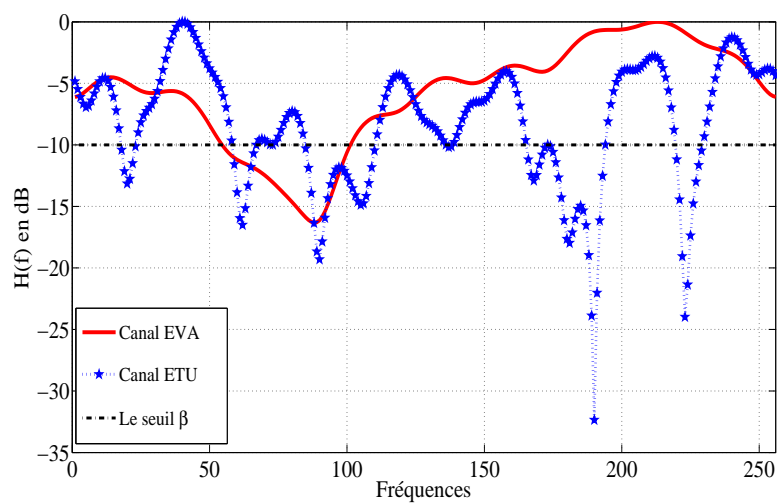


FIGURE 4.14 – Illustration de la profondeur des trous de la réponse fréquentielle des canaux EVA et ETU décrit dans les tableaux 4.2 et 4.3

les résultats de simulation seront présentés avec le même environnement de simulation (mêmes canaux de propagation et même système OFDM). Mais avant cela nous allons dans ce qui suit donner l'algorithme de sélection des porteuses réservées ainsi que la méthode de calcul du signal de correction du PAPR.

Sous l'hypothèse que le récepteur connaît la réponse du canal de transmission, L'Algorithme 5 donne une description détaillée de la méthode de sélection des porteuses dédiées à la correction du PAPR.

---

**Algorithm 5** Sélection des porteuses à utiliser pour la réduction du PAPR en fonction de l'état du canal

---

**Require:**  $\mathbf{H}$  Réponse fréquentielle du canal,  $\beta$  Seuil de sélection

**Require:**  $N_0 :=$  Nombre de porteuses dédiées à la réduction du PAPR

**Ensure:**  $\mathcal{R} :=$  Jeu des porteuses choisies

$\mathcal{H}_\beta \leftarrow \{m, |H_m| \leq \beta\}$

**if** Cardinal( $\mathcal{H}_\beta$ ) >  $N_0$  **then**

$\mathcal{R} \leftarrow$  Les  $N_0$  porteuses indexées dans  $\mathcal{H}_\beta$  les plus atténuées

**else**

$\mathcal{R} \leftarrow \mathcal{H}_\beta$

Complétez  $\mathcal{R}$  pour avoir  $N_0$  porteuses (choisir les plus atténuées pour compléter)

**end if**

---

Comme dans la section précédente, nous avons opté pour la méthode basée sur le gradient projeté. Elle sera donc dénommée par ATR-GP pour *adaptive tone reservation based on the gradient project*. A la différence de la méthode TR-GP, la matrice de projection dans le cadre de la méthode ATR-GP ne peut pas être pré-calculée et stockée du fait que les porteuses réservées sont définies en fonction du canal de transmission et donc peuvent changer d'une trame à l'autre. Ainsi, le calcul de la matrice de projection est à tenir en compte concernant la complexité de la méthode ATR-GP. Cependant dans [126], l'auteur a montré que la matrice  $\mathbf{Q} = \mathbb{F}_{ML, N_{\mathcal{R}}}^{\mathcal{R}} (\mathbb{F}_{ML, N_{\mathcal{R}}}^{\mathcal{R}})^H$  peut être entièrement déterminée à partir de sa première colonne  $\mathbf{Q}_0^{\text{Col}} = \mathbb{F}_{ML, N_{\mathcal{R}}}^{\mathcal{R}} (\mathbb{F}_{ML, N_{\mathcal{R}}, 0}^{\mathcal{R}, \text{Lig}})^H$  via un *shift* circulaire, autrement dit on a :

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_0^{\text{Col}}[0] & \mathbf{Q}_0^{\text{Col}}[ML-1] & \mathbf{Q}_0^{\text{Col}}[ML-2] & \dots & \mathbf{Q}_0[1] \\ \mathbf{Q}_0^{\text{Col}}[1] & \mathbf{Q}_0^{\text{Col}}[0] & \mathbf{Q}_0^{\text{Col}}[ML-1] & \dots & \mathbf{Q}_0[2] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{Q}_0^{\text{Col}}[ML-1] & \mathbf{Q}_0^{\text{Col}}[ML-2] & \mathbf{Q}_0^{\text{Col}}[ML-3] & \dots & \mathbf{Q}_0^{\text{Col}}[0] \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

Avec  $\mathbf{Q}_0^{\text{Col}}[p]$  désignant la  $p$ -ième composante de  $\mathbf{Q}_0^{\text{Col}}$ . En exploitant cette propriété, on remarque alors que le coût de calcul de la matrice de projection  $\mathbf{Q}$  est de  $\mathcal{O}(MLN_{\mathcal{R}})$ . Il vient alors que la complexité numérique de la méthode ATR-GP est de  $\mathcal{O}(MLN_{\max}) + \mathcal{O}(MLN_{\mathcal{R}}) = \mathcal{O}(ML(N_{\mathcal{R}} + N_{\max}))$  contre  $\mathcal{O}(MLN_{\max})$  pour la méthode TR-GP classique. Ce surplus de complexité est dû au fait que les porteuses réservées dans la méthode ATR-GP change en fonction du canal de transmission.

L'Algorithme 6 donne une description détaillée de la méthode ATR-GP

### 4.3.2 Résultats de simulation

Dans cette section nous allons présenter les résultats de simulations de la méthode ATR-GP via une comparaison avec la méthode TR-GP. Cette comparaison se fera en terme de réduction du PAPR et de dégradation du BER en présence d'un canal sélectif



**Algorithm 6** L'algorithme ATR-GP**Require:**  $\mathbf{x}_n$  Symbole OFDM avant réduction du PAPR,  $\nu$  Pas de descente et**Require:**  $N_{\max}$  Nombre d'itérations maximal,  $A$  Un seuil de *clipping* fixé (Amplitude)**Ensure:**  $\mathbf{x}_n^{(i)}$  Symbole OFDM après réduction du PAPR à la  $i$ -ième itération

Sélection des porteuses réservées via l'Algorithme 5

Calcul de  $\mathbb{Q}$  grâce à l'équation (4.30) $i \leftarrow 0, \mathbf{x}_n^{(0)} = \mathbf{x}_n, \mathbf{c}_n^0 = \mathbf{0}_{LM}$ **while**  $\left[ \left( \left\{ |x_{n,l}^{(i)}| > A, l = 0, \dots, LM - 1 \right\} \neq \emptyset \right) \text{ Et } (i \leq N_{\max}) \right]$  **do**    Pour  $l = 0, \dots, LM - 1, \alpha_l^{(i)} \leftarrow x_{n,l}^{(i)} - Ae^{j \arg(y_{n,l}^{(i)})}$      $\mathbf{x}_n^{(i+1)} \leftarrow \mathbf{x}_n^{(i)} - \nu \sum_{\{l, x_{n,l}^{(i)} > A\}} \alpha_l^{(i)} \mathbf{Q}_l^{\text{Col}}$      $i \leftarrow i + 1$ **end while**

en fréquence. Nous considérerons un système OFDM décrit dans le tableau (4.4). Nos canaux de transmission pour l'évaluation du BER seront ceux décrits dans les tableaux 4.2 et 4.3. Concernant la méthode TR-GP, puisque  $\mathcal{R}$  est fixe, nous utiliserons  $\mathcal{R} = [109, 110, 123, 125, 126, 127, 129, 132, 138, 145, 185, 222]$ , qui a été obtenu grâce à l'algorithme Random Set Optimizer (voir Annexe A) réalisé sur  $10^6$  trials.

#### 4.3.2.1 Comparaison des techniques TR-GP et ATR-GP en termes de réduction du PAPR

Les Figures 4.15 et 4.16 comparent les CCDF avant et après réduction du PAPR via les méthodes TR-GP et ATR-GP (avec les deux types de canaux ETU et EVA) après 10 et 20 itérations.

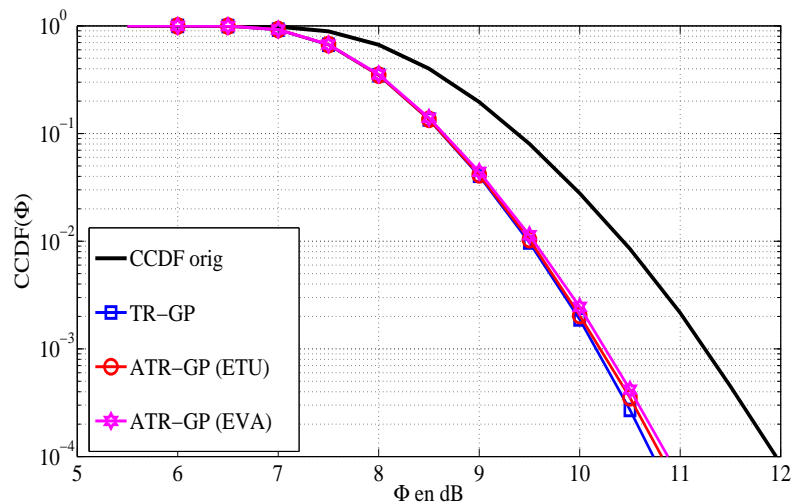


FIGURE 4.15 – Performances en réduction du PAPR des techniques TR-GP et ATR-GP après 10 itérations et  $\rho = 5\text{dB}$

Les résultats de simulation des Figures 4.15 et 4.16 montrent que la méthode TR-GP est légèrement plus performante que la méthode ATR-GP au fur et à mesure que l'on augmente le nombre d'itérations. En effet, la méthode TR-GP offre environ 0.5dB de gain en réduction du PAPR de plus que la méthode ATR-GP après 20 itération alors qu'à 10



itérations elles ont quasiment les mêmes performances en réduction du PAPR. Notons aussi que les performances en réduction du PAPR ne dépendent pas beaucoup des canaux ETU et EVA considérés et cela quelque soit le nombre d'itérations.

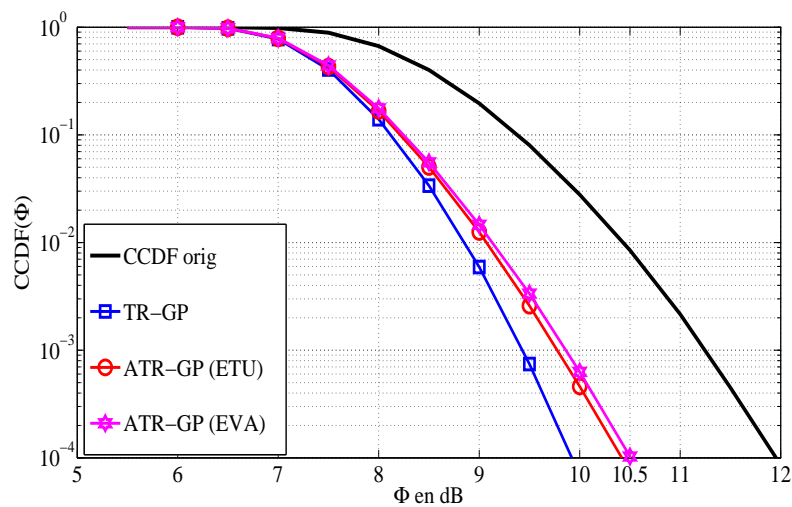


FIGURE 4.16 – Performances en réduction du PAPR des techniques TR-GP et ATR-GP après 10 itérations et  $\rho = 5\text{dB}$

#### 4.3.2.2 Comparaison des techniques TR et ATR sur les performances en BER en présence d'un canal sélectif en fréquence

Les Figures 4.17 et 4.18 comparent les performances en termes de dégradation en présence d'un canal sélectif en fréquence. Les résultats de simulation montrent que la

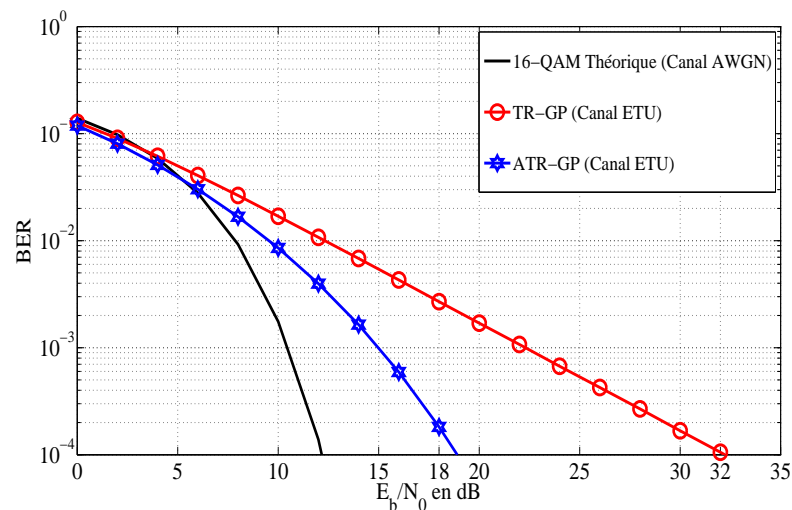


FIGURE 4.17 – Performances en réduction de dégradation du BER : Canal ETU,  $N_{\max} = 10$  et  $\rho = 5\text{dB}$

méthode ATR-GP est plus robuste vis à vis des canaux sélectifs en fréquence. Sur la Figure 4.18 (cas du canal EVA), on remarque que la méthode ATR-GP permet de gagner environ 10dB en  $E_b/N_0$  à  $10^{-4}$  du BER par rapport à la méthode TR-GP. Sur la Figure 4.17 (cas du canal ETU), on remarque que la méthode ATR-GP permet de gagner environ 13dB en  $E_b/N_0$  à  $10^{-4}$  du BER par rapport à la méthode TR-GP. Ces résultats

sont tout à fait en accord avec le principe de la méthode ATR, qui consiste à utiliser les porteuses les plus affectées par le canal de transmission pour porter le signal. Soulignons néanmoins que le  $E_b/N_0$  à  $10^{-4}$  du BER est d'environ 19dB (pour le canal ETU) et 24dB (pour le canal EVA) dans le cas de la méthode ATR-GP ce qui n'est pas négligeable.

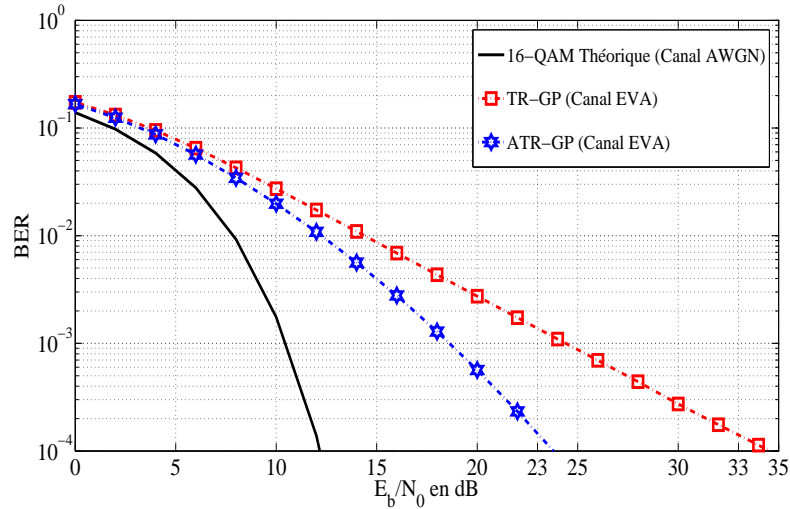


FIGURE 4.18 – Performances en réduction dégradation du BER : Canal EVA,  $N_{\max} = 10$  et  $\rho = 5\text{dB}$

Des résultats de simulation des Figures 4.17 et 4.18, on remarque que le canal EVA entraîne une plus forte dégradation du BER que le canal ETU. La Figure 4.19 donne une comparaison des deux canaux.

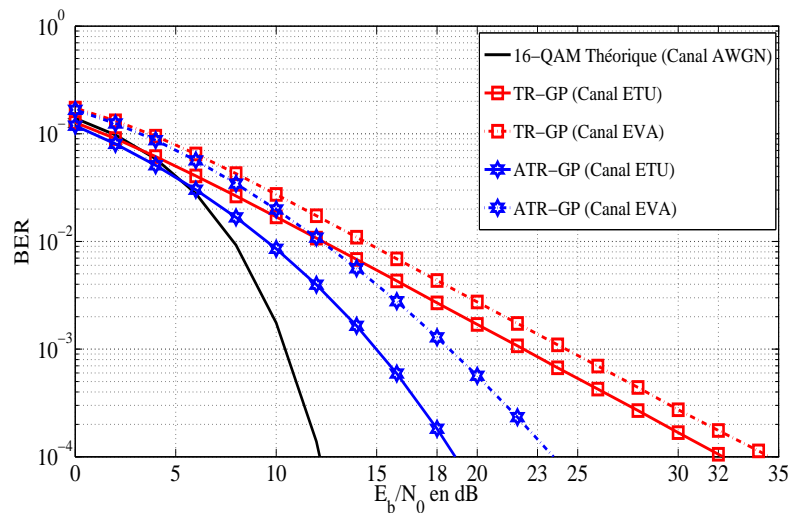


FIGURE 4.19 – Performances en réduction dégradation du BER : Canal EVA,  $N_{\max} = 10$  et  $\rho = 5\text{dB}$

On note que le canal EVA entraîne une plus forte dégradation que le canal ETU que ce soit avec la méthode TR-GP (porteuses réservées fixes) ou avec la méthode ATR-GP (porteuses adaptées au canal). Ces résultats de simulation sont en accord avec les caractéristiques des canaux ETU et EVA illustrées sur la Figure 4.14.

## 4.4 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté deux contributions sur le choix du jeu de porteuses réservées pour porter le signal de correction du PAPR.

La première contribution se positionne sur l'influence que peut avoir le jeu de porteuses sur les performances en réduction. Il s'agit plus précisément de l'influence de la parité des porteuses réservées sur les performances des techniques basées sur la TR en particulier la méthode TR-GP. Cette étude, nous a permis de montrer que lorsque les porteuses réservées pour porter le signal de correction sont toutes de la même parité les performances de la méthode TR-GP sont moins bonnes que dans les cas où l'ensemble des porteuses réservées contient à la fois des porteuses paires et impaires. Les résultats de simulation présentés à cet effet montrent qu'on peut avoir une nette amélioration du gain en PAPR en tenant compte de la parité des porteuses réservées.

La deuxième contribution se positionne sur l'influence du choix des porteuses sur le BER du système en présence d'un canal sélectif en fréquence. En effet, nous avons proposé d'adapter le choix du jeu de porteuses en fonction de la qualité du canal de transmission en lieu et place d'un choix fixe et définitif de celles-ci. Ainsi, nous avons montré qu'un tel choix n'est pas optimal en termes de réduction, ce qui n'était d'ailleurs pas le but visé. Cependant, nous avons vu à travers nos résultats de simulation, qu'un tel choix permet d'améliorer considérablement le BER du système.

Généralement, l'hypothèse que le canal de transmission est connu est utilisée afin de mettre en place un codage adapté ou pour adapter la constellation comme dans les techniques AMC, ou parfois ajuster la puissance d'émission afin de pouvoir atténuer au mieux le SNR. Ainsi, comme perspective, il serait intéressant de comparer la techniques ATR avec la technique TR lorsque de tels procédés sont employés.



# Chapitre 5

## Améliorations de la méthode *Tone Reservation*

### Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>109</b>
<b>4.2</b>	<b>Contribution sur l'influence de la parité des porteuses sur la méthode TR-GP</b>	<b>110</b>
4.2.1	Rappel du principe de La méthode TR-GP	110
4.2.2	Influence de la parité des porteuses réservées sur les performances de la méthode TR-GP	112
4.2.3	Résultats de simulation sur l'influence de la parité des porteuses réservées sur les performances de la méthode TR-GP	119
<b>4.3</b>	<b>La méthode <i>Adaptive Tone Reservation</i> (ATR)</b>	<b>126</b>
4.3.1	Principe et formulation du problème	126
4.3.2	Résultats de simulation	129
4.3.2.1	Comparaison des techniques TR-GP et ATR-GP en termes de réduction du PAPR	130
4.3.2.2	Comparaison des techniques TR et ATR sur les performances en BER en présence d'un canal sélectif en fréquence	131
<b>4.4</b>	<b>Conclusion</b>	<b>133</b>

---

### 5.1 Introduction

Dans ce chapitre nous allons présenter l'approche *Modified Tone Reservation* (MTR). Cette approche comme nous l'avons souligné dans la conclusion du Chapitre 2 propose une amélioration de la méthode *Tone Reservation* (TR). Elle exploite les propriétés de symétrie et d'anti-symétrie d'un symbole OFDM pour modifier la TR classique afin d'améliorer les performances de la méthode TR-GP classique en termes de réduction de PAPR. L'idée phare de cette approche est de modifier la structure d'insertion du signal de correction du PAPR de la TR classique pour une meilleure projection de ce dernier sur les porteuses réservées à cet effet. En effet, un symbole OFDM est constitué d'une composante symétrique (périodique avec conservation du signe) qui résulte des porteuses paires et d'une composante anti-symétrique (périodique avec inversion du signe, voir chapitre 2)

qui résulte des porteuses impaires autour de la moitié du temps symbole. Chacune de ces composantes peut à son tour être interprétée (ou vue) comme étant la concaténation de deux symboles multiporteuses de durée deux fois plus courte et contenant deux fois moins de porteuses et qui sont identiques dans le cas de la composante symétrique et opposées dans le cas de la composante anti-symétrique. Ainsi, le symbole OFDM initial peut être, après cette décomposition, interprété comme un mélange de 4 symboles multiporteuses de durée deux fois plus courte et comportant chacun deux fois moins de porteuses, avec deux d'entre eux symétriques et les deux autres anti-symétriques autour de la moitié du temps symbole. De cette décomposition, il en résultera aussi, une projection des porteuses initialement réservées pour porter le signal de correction du PAPR dans le cadre de la TR sur ces quatre symboles obtenus après décomposition du symbole OFDM d'intérêt dont on veut réduire le PAPR. La MTR propose ainsi, d'utiliser ces porteuses libres sur ces quatre symboles afin de générer le signal de correction tout en relâchant la contrainte de symétrie et d'anti-symétrie. Le but visé par la MTR sera ainsi de relâcher la contrainte d'orthogonalité entre les porteuses réservées pour porter le signal de réduction du PAPR. En effet, le signal de correction du PAPR n'étant pas une information d'intérêt à la réception, relâcher la contrainte d'orthogonalité entre les porteuses qui le modulent est tout à fait pertinent. Cependant, bien que les porteuses utiles restent orthogonales entre elles, elles ne le seront plus avec celles dédiées à la réduction du PAPR. Par conséquent, le signal de réduction du PAPR générera des perturbations sur les données transmises sur ces porteuses (données utiles). Afin de pallier ce problème, i.e éviter de perturber le BER comme dans le cas de la TR classique, un filtrage dans le domaine fréquentiel sera utilisé à cet effet.

## 5.2 Notations et définitions

Dans ce chapitre, comme nous l'avons brièvement mentionné dans l'introduction, l'amélioration de la méthode TR que nous allons proposer dans ce chapitre passe par une décomposition du symbole  $\mathbf{x}_n$  en au moins quatre autres signaux multi-porteuses comportant chacun moins de porteuses que  $\mathbf{x}_n$ . Ainsi, il nous arrivera de manipuler des symboles OFDM, ou multiporteuses de manière plus générale, qui ne comporteront pas nécessairement le même nombre de porteuses au total (porteuses réservées et non réservées puisqu'il s'agira de TR dans ce chapitre).

Ainsi dans ce chapitre, nous montrerons qu'après une première décomposition, le symbole  $\mathbf{x}_n$  sera constitué de quatre symboles multiporteuses comportant chacun  $M_1 = \frac{M}{2}$  porteuses. Il en résultera aussi une projection des porteuses réservées de  $\mathbf{x}_n$  sur ces quatre symboles multiporteuses. Deux à deux les 4 symboles issus de la décomposition auront comme jeu de porteuses après cette projection :

$$\begin{aligned} \mathcal{K}^{(0)} &= \frac{\mathcal{R}^P}{2} && \text{(projection des porteuses paires)} \\ \mathcal{K}^{(1)} &= \frac{\mathcal{R}^I - 1}{2} && \text{(projection des porteuses impaires)} \end{aligned} \tag{5.1}$$

avec on le rappelle  $\mathcal{R}^P$  (respect.  $\mathcal{R}^I$ ) désigne le sous ensemble contenant les porteuses (indexés) paires (respect. impaires) de  $\mathcal{R}$  qui est le jeu des porteuses réservées pour la réduction du PAPR de  $\mathbf{x}_n$ . Ainsi, puisque  $\mathbf{x}_n$  est un symbole comportant  $M$  porteuses au total (utiles et réservées), alors  $\mathcal{R} \subset [0, \dots, M - 1]$ . Il s'en suit alors que les ensembles  $\mathcal{K}^{(0)}$  et  $\mathcal{K}^{(1)}$  sont inclus dans  $[0, \dots, M_1 - 1]$  et donc seront les jeux de porteuses pour les symboles qui seront issus de la décomposition de  $\mathbf{x}_n$ .

En utilisant les résultats de la section 2.2, nous aurons les matrices TR (matrices qui seront utilisées pour générer le signal de correction du PAPR dans le cadre de la MTR) suivantes :

- $\mathbb{F}_{M_1 L}$  sera la matrice de la IDFT de dimension  $(M_1 L, M_1 L)$  et définie comme dans (2.2) en remplaçant  $M$  par  $M_1$ .
- $\mathbb{F}_{M_1 L, N_{\mathcal{K}^{(0)}}}^{\mathcal{K}^{(0)}}$  la matrice TR associée au jeu de porteuses  $\mathcal{K}^{(0)}$ .  
Elle est de dimension  $(M_1 L, N_{\mathcal{K}^{(0)}})$  et est construite à partir de  $\mathbb{F}_{M_1 L}$  comme dans la section précédente.
- $\mathbb{F}_{M_1 L, N_{\mathcal{K}^{(1)}}}^{\mathcal{K}^{(1)}}$  la matrice TR associée au jeu de porteuses  $\mathcal{K}^{(1)}$ .  
Elle est de dimension  $(M_1 L, N_{\mathcal{K}^{(1)}})$  et est construite à partir de  $\mathbb{F}_{M_1 L}$  comme dans la section précédente.

Après une deuxième décomposition,  $\mathbf{x}_n$  sera constitué de 16 symboles multiporteuses comportant  $M_2 = \frac{M}{4}$  porteuses. Il en résultera aussi une projection du jeu de porteuses  $\mathcal{R}$  de  $\mathbf{x}_n$  sur ces 16 symboles multiporteuses.

Comme dans le cas de  $\mathcal{R}$ , nous noterons par  $\mathcal{K}^{(0),P}$  et  $\mathcal{K}^{(0),I}$  (respect.  $\mathcal{K}^{(1),P}$  et  $\mathcal{K}^{(1),I}$ ) les sous ensembles de  $\mathcal{K}^{(0)}$  (respect.  $\mathcal{K}^{(1)}$ ) ne contenant respectivement que les porteuses paires et impaires. Deux à deux les 16 symboles issus de la deuxième décomposition auront comme jeu de porteuses :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{K}^{(0,0)} &= \frac{\mathcal{K}^{(0),P}}{2} && \text{(projection des porteuses paires de )}\mathcal{K}^{(0)} \\
 \mathcal{K}^{(0,1)} &= \frac{\mathcal{K}^{(0),I} - 1}{2} && \text{(projection des porteuses impaires de )}\mathcal{K}^{(0)} \\
 \mathcal{K}^{(1,0)} &= \frac{\mathcal{K}^{(1),P}}{2} && \text{(projection des porteuses paires de )}\mathcal{K}^{(1)} \\
 \mathcal{K}^{(1,1)} &= \frac{\mathcal{K}^{(1),I} - 1}{2} && \text{(projection des porteuses impaires de )}\mathcal{K}^{(1)}
 \end{aligned} \tag{5.2}$$

Avec ces jeu de porteuses et la matrice  $\mathbb{F}_{M_2 L}$  (construite comme dans (2.2) en remplaçant  $M$  par  $M_2$ ), nous aurons les matrices TR suivantes :

1.  $\mathbb{F}_{M_2 L, N_{\mathcal{K}^{(0,0)}}}^{\mathcal{K}^{(0,0)}}$  la matrice TR associée au jeu de porteuses  $\mathcal{K}^{(0,0)}$ .  
Elle est de dimension  $(M_2 L, N_{\mathcal{K}^{(0,0)}})$  et est construite à partir de  $\mathbb{F}_{M_2 L}$  comme dans la section précédente.
2.  $\mathbb{F}_{M_2 L, N_{\mathcal{K}^{(0,1)}}}^{\mathcal{K}^{(0,1)}}$  la matrice TR associée au jeu de porteuses  $\mathcal{K}^{(0,1)}$ .  
Elle est de dimension  $(M_2 L, N_{\mathcal{K}^{(0,1)}})$  et est construite à partir de  $\mathbb{F}_{M_2 L}$  comme dans la section précédente.
3.  $\mathbb{F}_{M_2 L, N_{\mathcal{K}^{(1,0)}}}^{\mathcal{K}^{(1,0)}}$  la matrice TR associée au jeu de porteuses  $\mathcal{K}^{(1,0)}$ .  
Elle est de dimension  $(M_2 L, N_{\mathcal{K}^{(1,0)}})$  et est construite à partir de  $\mathbb{F}_{M_2 L}$  comme dans la section précédente.
4.  $\mathbb{F}_{M_2 L, N_{\mathcal{K}^{(1,1)}}}^{\mathcal{K}^{(1,1)}}$  la matrice TR associée au jeu de porteuses  $\mathcal{K}^{(1,1)}$ .  
Elle est de dimension  $(M_2 L, N_{\mathcal{K}^{(1,1)}})$  et est construite à partir de  $\mathbb{F}_{M_2 L}$  comme dans la section précédente.



Dans ce chapitre, nous aurons aussi besoin des matrices diagonales  $\mathbb{D}_{M_1}$  (après une première décomposition),  $\mathbb{D}_{M_2}$  (après une deuxième décomposition), etc définies comme suit ( $i = 1, 2, \dots$  etc) :

$$\mathbb{D}_{M_i L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{j\pi \frac{1}{LM_i}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{j\pi \frac{LM_i-1}{LM_i}} \end{pmatrix} \quad (5.3)$$

### 5.3 Formulation du problème et schéma d'insertion de la méthode *Modified Tone Reservation*

Comme il a été mentionné précédemment, la MTR est basée sur une décomposition successive du symbole  $\mathbf{x}_n$ . Ainsi, dans cette section nous allons d'abord présenté la MTR basée sur la première décomposition avant de la généraliser dans la sections 5.6.

#### 5.3.1 Décomposition du symbole OFDM

Soient  $\bar{x}_n^1(t)$  et  $\bar{x}_n^2(t)$  des symboles OFDM de même durée que  $x_n(t)$  définis comme suit :

$$\begin{aligned} \bar{x}_n^1(t) &= \sum_{m=0}^{M-1} \bar{X}_{m,n}^1 e^{j2\pi m F t} \\ \bar{x}_n^2(t) &= \sum_{m=0}^{M-1} \bar{X}_{m,n}^2 e^{j2\pi m F t} \end{aligned} \quad (5.4)$$

avec :

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{X}}_n^1 &= [\bar{X}_{0,n}^1, \bar{X}_{1,n}^1, \dots, \bar{X}_{M-2,n}^1, \bar{X}_{M-1,n}^1] = [X_{0,n}, 0, X_{2,n}, 0, \dots, X_{M-2,n}, 0] \\ \bar{\mathbf{X}}_n^2 &= [\bar{X}_{0,n}^2, \bar{X}_{1,n}^2, \dots, \bar{X}_{M-2,n}^2, \bar{X}_{M-1,n}^2] = [0, X_{1,n}, 0, X_{3,n}, \dots, 0, X_{M-1,n}] \end{aligned} \quad (5.5)$$

Les symboles OFDM  $\bar{x}_n^1(t)$  et  $\bar{x}_n^2(t)$  ne modulent respectivement que les composantes paires et impaires du vecteur fréquentiel  $\mathbf{X}_n$ . Ainsi, on peut aisément vérifier que :

$$x_n(t) = \bar{x}_n^1(t) + \bar{x}_n^2(t) \quad (5.6)$$

En outre,  $\bar{x}_n^1(t)$  et  $\bar{x}_n^2(t)$  sont respectivement symétrique et anti-symétrique autour de  $\frac{T_u}{2}$ . En effet en reprenant l'équation (5.4) on montre que :

$$\begin{aligned}
 \bar{x}_n^1(t) &= \sum_{m=0}^{M-1} \bar{X}_{m,n}^1 e^{j2\pi m Ft} \\
 &= \sum_{m=0}^{\frac{M}{2}-1} \underbrace{\bar{X}_{2m,n}^1}_{X_{2m,n}} e^{j2\pi 2m Ft} \\
 &\quad + \sum_{m=0}^{\frac{M}{2}-1} \underbrace{\bar{X}_{2m+1,n}^1}_{=0} e^{j2\pi(2m+1) Ft} \\
 &= \sum_{m=0}^{\frac{M}{2}-1} X_{2m,n} e^{j2\pi 2m Ft}
 \end{aligned}$$

(5.7)

$$\begin{aligned}
 \bar{x}_n^2(t) &= \sum_{m=0}^{M-1} \bar{X}_{m,n}^2 e^{j2\pi m Ft} \\
 &= \sum_{m=0}^{\frac{M}{2}-1} \underbrace{\bar{X}_{2m,n}^2}_0 e^{j2\pi 2m Ft} \\
 &\quad + \sum_{m=0}^{\frac{M}{2}-1} \underbrace{\bar{X}_{2m+1,n}^2}_{=X_{2m+1,n}} e^{j2\pi(2m+1) Ft} \\
 &= \sum_{m=0}^{\frac{M}{2}-1} X_{2m+1,n} e^{j2\pi(2m+1) Ft}
 \end{aligned}$$

(5.8)

Des équations ci-dessus, on vérifie facilement que pour  $t \in [nT_u, nT_u + \frac{T_u}{2}]$  :

$$\begin{aligned}
 \bar{x}_n^1(t + \frac{T_u}{2}) &= \sum_{m=0}^{\frac{M}{2}-1} X_{2m,n} e^{j2\pi 2m F(t + \frac{T_u}{2})} & \bar{x}_n^2(t + \frac{T_u}{2}) &= \sum_{m=0}^{\frac{M}{2}-1} X_{2m+1,n} e^{j2\pi(2m+1) F(t + \frac{T_u}{2})} \\
 &= \sum_{m=0}^{\frac{M}{2}-1} X_{2m,n} e^{j2\pi 2m Ft} & &= - \sum_{m=0}^{\frac{M}{2}-1} X_{2m+1,n} e^{j2\pi(2m+1) Ft} \\
 &= \bar{x}_n^1(t) & &= -\bar{x}_n^2(t)
 \end{aligned}$$

CQFD

CQFD

Ce qui prouve que  $\bar{x}_n^1(t)$  et  $\bar{x}_n^2(t)$  sont respectivement symétrique et anti-symétrique.

Soient maintenant les vecteurs  $\mathbf{X}_{2n}^1$ ,  $\mathbf{X}_{2n+1}^1$ ,  $\mathbf{X}_{2n}^2$  et  $\mathbf{X}_{2n+1}^2$  de longueur  $\frac{M}{2}$  définis comme suit :

$$\mathbf{X}_{2n}^1 = \mathbf{X}_{2n+1}^1 = \underbrace{\left[ \frac{X_{0,n}}{2}, \frac{X_{2,n}}{2}, \dots, \frac{X_{M-2,n}}{2} \right]}_{\text{Les } \frac{M}{2} \text{ données situées sur les porteuses Paires de } x_n(t)}$$

$$\mathbf{X}_{2n}^2 = \mathbf{X}_{2n+1}^2 = \underbrace{\left[ \frac{X_{1,n}}{2}, \frac{X_{3,n}}{2}, \dots, \frac{X_{M-1,n}}{2} \right]}_{\text{Les } \frac{M}{2} \text{ données situées sur les porteuses Impaires de } x_n(t)}$$

(5.9)

On remarque que les vecteurs  $\mathbf{X}_{2n}^1$  et  $\mathbf{X}_{2n+1}^1$  (respect.  $\mathbf{X}_{2n}^2$  et  $\mathbf{X}_{2n+1}^2$ ) contiennent les  $X_{m,n}$  avec  $m$  paire (respect. impaire).

Soient  $x_{2n}^1(t)$ ,  $x_{2n+1}^1(t)$ ,  $x_{2n}^2(t)$  et  $x_{2n+1}^2(t)$  les symboles multi-porteuses de durée chacun  $T_1 = \frac{T_u}{2}$ , modulant respectivement les vecteurs fréquentiels  $\mathbf{X}_{2n}^1$ ,  $\mathbf{X}_{2n+1}^1$ ,  $\mathbf{X}_{2n}^2$  et  $\mathbf{X}_{2n+1}^2$ , et

définis, en bande de base, par les équations suivantes :

$$\begin{aligned}
x_{2n}^1(t) &= \sum_{m=0}^{\frac{M}{2}-1} X_{m,2n}^1 e^{j2\pi m F_1 t} & \text{avec} & \quad 2n \frac{T_u}{2} \leq t \leq (2n+1) \frac{T_u}{2} \\
& & & \quad nT_1 \leq t < (n+1)T_1 \\
x_{2n+1}^1(t) &= \sum_{m=0}^{\frac{M}{2}-1} X_{m,2n+1}^1 e^{j2\pi m F_1 t} & \text{avec} & \quad (2n+1) \frac{T_u}{2} \leq t \leq (2n+2) \frac{T_u}{2} \\
& & & \quad (n+1)T_1 \leq t < (n+2)T_1 \\
x_{2n}^2(t) &= \sum_{m=0}^{\frac{M}{2}-1} X_{m,2n}^2 e^{j2\pi(mF_1+F)t} & \text{avec} & \quad 2n \frac{T_u}{2} \leq t \leq (2n+1) \frac{T_u}{2} \\
& & & \quad nT_1 \leq t < (n+1)T_1 \\
x_{2n+1}^2(t) &= \sum_{m=0}^{\frac{M}{2}-1} X_{m,2n+1}^2 e^{j2\pi(mF_1+F)t} & \text{avec} & \quad (2n+1) \frac{T_u}{2} \leq t \leq (2n+2) \frac{T_u}{2} \\
& & & \quad (n+1)T_1 \leq t < (n+2)T_1
\end{aligned} \tag{5.10}$$

Avec  $F_1 = \frac{1}{\frac{T_u}{2}} = 2F$  l'écart entre les porteuses.

Par la construction de ces symboles et de la définition des vecteurs fréquentiels modulés par ces derniers, on peut facilement voir que

$$\bar{x}_n^1(t) = x_{2n}^1(t) + x_{2n+1}^1(t) \quad \text{et} \quad \bar{x}_n^2(t) = x_{2n}^2(t) + x_{2n+1}^2(t) \tag{5.11}$$

Par conséquent, en vertu de l'équation (5.4) on a  $x_n(t) = x_{2n}^1(t) + x_{2n}^2(t) + x_{2n+1}^1(t) + x_{2n+1}^2(t)$ . Nous attirons l'attention du lecteur sur les supports temporels de ces différents symboles multi-porteuses. En effet, en réordonnant la sommation par symboles de même support temporel, on a alors

$$x_n(t) = \begin{cases} x_{2n}^1(t) + x_{2n}^2(t) & \text{Si } t \in [nT_u, nT_u + \frac{T_u}{2}[ = [nT_1, (n+1)T_1[ \\ x_{2n+1}^1(t) + x_{2n+1}^2(t) & \text{Si } t \in [nT_u + \frac{T_u}{2}, (n+1)T_u[ = [(n+1)T_1, (n+2)T_1[ \end{cases} \tag{5.12}$$

□ **Remarque** : Le symbole OFDM  $x_n(t)$  a été décomposé comme étant le mélange de quatre symboles multi-porteuses de durée chacun  $\frac{T_u}{2}$  et comportant chacun  $\frac{M}{2}$  porteuses. Le terme de mélange est employé ici car dans la sommation certains des signaux ont des supports temporels disjoints, donc en discret, cette sommation s'apparentera à une concaténation. c'est le cas respectivement des signaux  $x_{2n}^1(t)$  et  $x_{2n+1}^1(t)$  et des signaux  $x_{2n}^2(t) + x_{2n+1}^2(t)$ . D'où le choix de noter  $\bar{x}_n^1(t)$  comme étant la sommation (ou concaténation en discret)  $x_{2n}^1(t) + x_{2n+1}^1(t)$  et  $\bar{x}_n^2(t)$  comme étant la sommation (ou concaténation en discret)  $x_{2n}^2(t) + x_{2n+1}^2(t)$ .

Dans ce qui suit, nous allons dans un premier temps, définir le modulateur numérique associé à la nouvelle construction du symbole  $x_n(t)$ . Nous exposerons ensuite le principe de la MTR (pour *Modified Tone Reservation*). Pour ce faire, nous allons exprimer les échantillons de  $x_n(t)$ , i.e,  $x_{n,l} = x_n(nT_u + lT_e)$  en fonction des échantillons des symboles  $x_{2n}^1(t)$ ,  $x_{2n+1}^1(t)$ ,  $x_{2n}^2(t)$  et  $x_{2n+1}^2(t)$ .

De l'équation (5.12), on remarque que par construction des symboles  $x_{2n}^1(t)$ ,  $x_{2n+1}^1(t)$ ,  $x_{2n}^2(t)$  et  $x_{2n+1}^2(t)$ , l'échantillon  $x_{n,l}$  peut être exprimé comme suit :

$$\begin{aligned}
 x_{n,l} = x_n(\underbrace{nT_u + lT_e}_{t_l}) &= \begin{cases} x_{2n}^1(t_l) + x_{2n}^2(t_l) & \text{Si } t_l \in [nT_u, nT_u + \frac{T_u}{2}] \\ x_{2n+1}^1(t_l) + x_{2n+1}^2(t_l) & \text{Si } t_l \in [nT_u + \frac{T_u}{2}, (n+1)T_u] \end{cases} \\
 &= \begin{cases} x_{2n}^1(t_l) + x_{2n}^2(t_l) & \text{Si } l \in \{0, \frac{LM}{2} - 1\} \\ x_{2n+1}^1(t_l) + x_{2n+1}^2(t_l) & \text{Si } l \in \{\frac{LM}{2}, LM - 1\} \end{cases}
 \end{aligned} \tag{5.13}$$

Rappelons que  $T_1 = \frac{T_u}{2}$  et  $M_1 = \frac{M}{2}$  désignent respectivement la durée symbole et le nombre de porteuses total (utiles et réservées éventuellement) de  $x_{2n}^1(t)$ ,  $x_{2n+1}^1(t)$ ,  $x_{2n}^2(t)$  et  $x_{2n+1}^2(t)$ . On a :

$$\square \text{ Cas } l \in \{0, \frac{LM}{2} - 1\} = \{0, LM_1 - 1\} \quad \square \text{ Cas } l = l_1 + \frac{LM}{2}, l_1 \in \{0, LM_1 - 1\}$$

$$\begin{aligned}
 x_{2n}^1(t_l) &= \sum_{m=0}^{M_1} X_{m,2n}^1 e^{j2\pi m F_1 t_l} \\
 &= \sum_{m=0}^{M_1} X_{m,2n}^1 e^{j2\pi m F_1 (nT_u + lT_e)} \\
 &= \sum_{m=0}^{M_1} X_{m,2n}^1 e^{j2\pi m \frac{2l}{LM}} \\
 &= \sum_{m=0}^{M_1} X_{m,2n}^1 e^{j2\pi m \frac{l}{LM_1}}
 \end{aligned}$$

(5.14)

$$\begin{aligned}
 x_{2n+1}^1(t_l) &= \sum_{m=0}^{M_1} X_{m,2n+1}^1 e^{j2\pi m F_1 t_l} \\
 &= \sum_{m=0}^{M_1} X_{m,2n+1}^1 e^{j2\pi m F_1 (nT_u + lT_e)} \\
 &= \sum_{m=0}^{M_1} X_{m,2n+1}^1 e^{j2\pi m \frac{2l}{LM}} \\
 &= \sum_{m=0}^{M_1} X_{m,2n+1}^1 e^{j2\pi m \frac{l}{LM_1}} \\
 &= \sum_{m=0}^{M_1} X_{m,2n+1}^1 e^{j2\pi m \frac{l_1 + LM_1}{LM_1}} \\
 &= \sum_{m=0}^{M_1} X_{m,2n+1}^1 e^{j2\pi m \frac{l_1}{LM_1}}
 \end{aligned}$$

(5.15)

Par analogie, on peut aussi facilement montrer que :

$$\square \text{ Cas } l \in \{0, \frac{LM}{2} - 1\} = \{0, LM_1 - 1\} \quad \square \text{ Cas } l = l_1 + \frac{LM}{2}, l_1 \in \{0, LM_1\}$$

$$\begin{aligned}
 x_{2n}^2(t_l) &= \sum_{m=0}^{M_1} X_{m,2n}^2 e^{j2\pi(mF_1 + F)t_l} \\
 &= \sum_{m=0}^{M_1} X_{m,2n}^2 e^{j2\pi m \frac{l}{LM_1}} e^{j\pi \frac{l}{LM_1}}
 \end{aligned}$$

(5.16)

$$\begin{aligned}
 x_{2n+1}^2(t_l) &= \sum_{m=0}^{M_1} X_{m,2n+1}^2 e^{j2\pi(mF_1 + F)t_l} \\
 &= - \sum_{m=0}^{M_1} X_{m,2n+1}^2 e^{j2\pi m \frac{l_1}{LM_1}} e^{j\pi \frac{l_1}{LM_1}}
 \end{aligned}$$

(5.17)

Posons  $\mathbf{x}_{2n}^1$ ,  $\mathbf{x}_{2n+1}^1$ ,  $\mathbf{x}_{2n}^2$  et  $\mathbf{x}_{2n+1}^2$  les vecteurs contenant respectivement les échantillons des symboles  $x_{2n}^1(t)$ ,  $x_{2n+1}^1(t)$ ,  $x_{2n}^2(t)$  et  $x_{2n+1}^2(t)$  sur-échantillonnés à la même cadence que

le symbole  $x_n(t)$ . Des équations (5.14),(5.15), (5.16) et (5.17), il vient alors que :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{2n}^1 &= \mathbb{F}_{M_1 L} \check{\mathbf{X}}_{2n}^1 & \text{et} & & \mathbf{x}_{2n+1}^1 &= \mathbb{F}_{M_1 L} \check{\mathbf{X}}_{2n+1}^1 \\ \mathbf{x}_{2n}^2 &= \mathbb{D}_{M_1 L} \left( \mathbb{F}_{M_1 L} \check{\mathbf{X}}_{2n}^2 \right) & \text{et} & & \mathbf{x}_{2n+1}^2 &= -\mathbb{D}_{M_1 L} \left( \mathbb{F}_{M_1 L} \check{\mathbf{X}}_{2n+1}^2 \right) \end{aligned} \quad (5.18)$$

Avec  $\mathbb{D}_{M_1 L}$  une matrice diagonale de dimension  $LM_1$  définie par l'équation suivante :

$$\mathbb{D}_{M_1 L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{j\pi \frac{1}{LM_1}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{j\pi \frac{LM_1-1}{LM_1}} \end{pmatrix} \quad (5.19)$$

Le vecteur symbole OFDM  $\mathbf{x}_n$  peut être alors construit à partir des vecteurs  $\mathbf{x}_{2n}^1$ ,  $\mathbf{x}_{2n+1}^1$ ,  $\mathbf{x}_{2n}^2$  et  $\mathbf{x}_{2n+1}^2$  qui contiennent respectivement les échantillons des symboles  $x_{2n}^1(t)$ ,  $x_{2n+1}^1(t)$ ,  $x_{2n}^2(t)$  et  $x_{2n+1}^2(t)$  après sur-échantillonnage à la même cadence, comme suit :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_n &= \underbrace{[x_{2n,0}^1, \dots, x_{2n,LM_1-1}^1, x_{2n+1,0}^1, \dots, x_{2n+1,LM_1-1}^1]^T}_{\text{Composante symétrique } (\bar{\mathbf{x}}_n^1)} \\ &+ \underbrace{[x_{2n,0}^2, \dots, x_{2n,LM_1-1}^2, x_{2n+1,0}^2, \dots, x_{2n+1,LM_1-1}^2]^T}_{\text{Composante anti-symétrique } (\bar{\mathbf{x}}_n^2)} \\ &= [(\mathbf{x}_{2n}^1 + \mathbf{x}_{2n}^2) \bullet (\mathbf{x}_{2n+1}^1 + \mathbf{x}_{2n+1}^2)] \end{aligned} \quad (5.20)$$

Avec  $\bullet$  désignant l'opérateur de concaténation vectoriel.

La Figure (5.1) donne une illustration du modulateur numérique de  $\mathbf{x}_n$  basé sur la décomposition précédente.

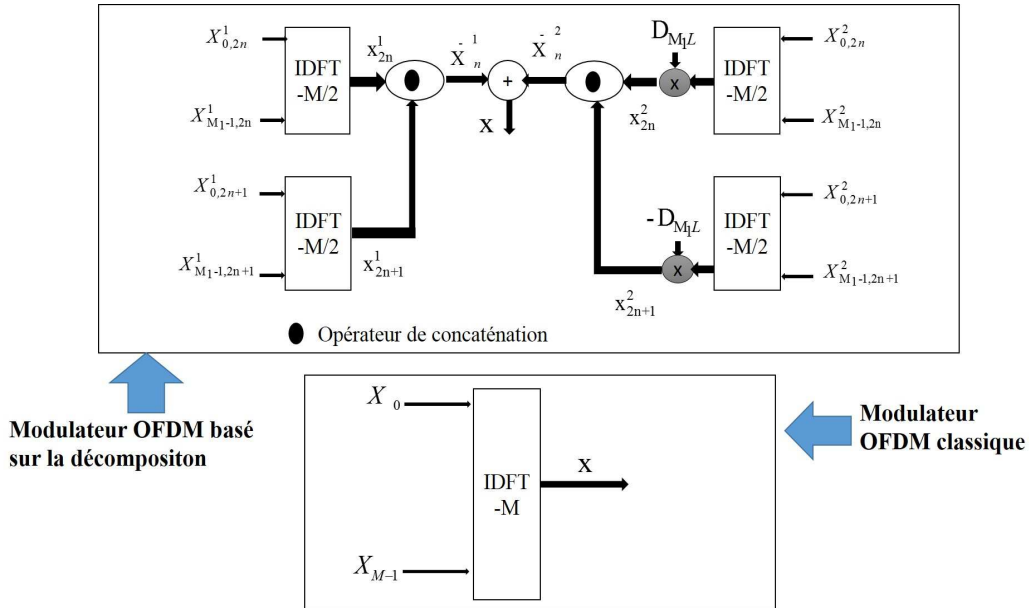


FIGURE 5.1 – Modulateur numérique de  $\mathbf{x}_n$  classique et celui basé sur la décomposition définie par l'équation (5.20)

Notons que dans ce chapitre il n'est pas question de proposer un nouveau schéma de modulation d'un symbole OFDM classique, le schéma de modulation présenté dans la

Figure (5.1) est totalement instructif. Ce schéma a pour but de nous permettre de modifier la structure de la TR classique [126]. L'idée ici sera d'utiliser ce schéma pour générer le signal de correction tout en relâchant les contraintes de symétrie et d'anti-symétrie. Ainsi, comme nous le verrons ultérieurement, la relaxation des ces contraintes entraînera une non-orthogonalité entre les porteuses paires et impaires dédiées à la réduction du PAPR. Ce qui n'aura aucun inconvénient en réception puisque l'information mises sur ces porteuses ne servira qu'à réduire le PAPR. Par contre, ce nouveau degré de liberté permettra comme nous allons le voir d'améliorer les performances en réduction du PAPR.

La Figure (5.2) et (5.3) comparent les signaux temporels obtenus via un modulateur OFDM classique et celui décrit sur la Figure 5.1 et leur BER en présence d'un canal AWGN.

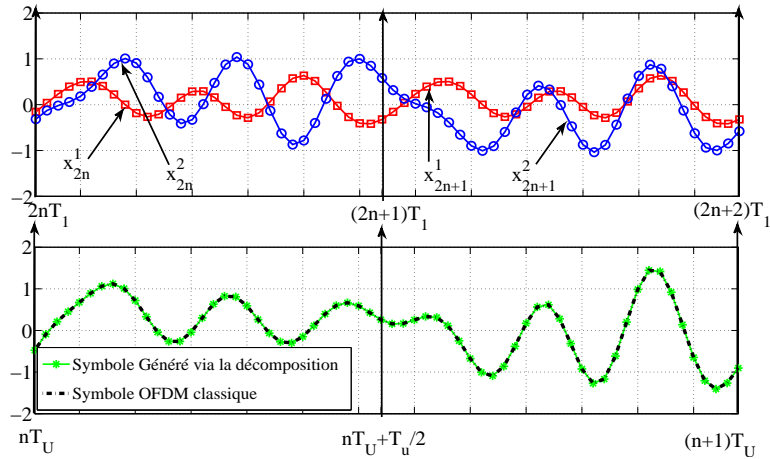


FIGURE 5.2 – Illustration de la symétrie et anti-symétrie des composantes  $\bar{\mathbf{x}}_n^1 = [\mathbf{x}_{2n}^1; \mathbf{x}_{2n+1}^1]$  et  $\bar{\mathbf{x}}_n^2 = [\mathbf{x}_{2n}^2; \mathbf{x}_{2n+1}^2]$

Sur la Figure 5.2 on remarque que les composantes  $\bar{\mathbf{x}}_n^1 = [\mathbf{x}_{2n}^1 \bullet \mathbf{x}_{2n+1}^1]$  et  $\bar{\mathbf{x}}_n^2 = [\mathbf{x}_{2n}^2 \bullet \mathbf{x}_{2n+1}^2]$  sont respectivement symétrique et anti-symétrique. En outre, leur sommation est bien égale en tout point au symbole  $\mathbf{x}_n$  (généré via un modulateur OFDM classique). Sur la Figure 5.3 on remarque que les deux manières de générer le symbole OFDM discret (OFDM classique et celle basée sur la décomposition) sont identiques en termes de BER.

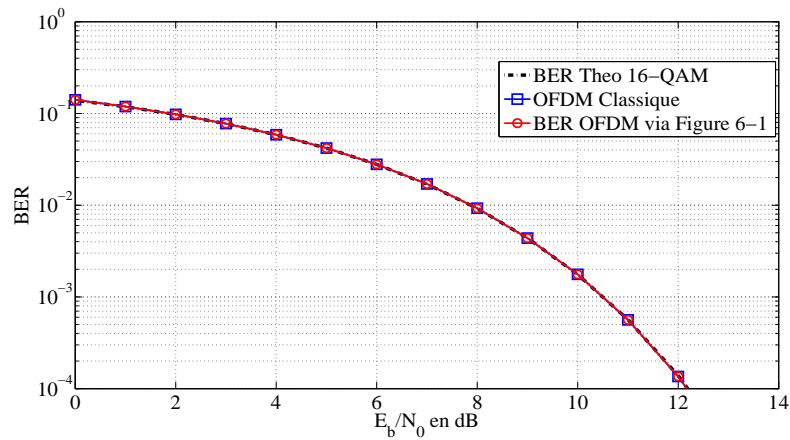


FIGURE 5.3 – BER des deux signaux générés par un modulateur OFDM classique et via la décomposition proposée

La Figure (5.4) donne une illustration graphique de la disposition des supports temporels des symboles  $\mathbf{x}_{2n}^1$ ,  $\mathbf{x}_{2n+1}^1$ ,  $\mathbf{x}_{2n}^2$  et  $\mathbf{x}_{2n+1}^2$  le long du support temporel du symbole

$\mathbf{x}_n$ . Cette illustration graphique à pour but de permettre de comprendre la logique de la notation  $n, 2n + 1, 2n$  pour désigner les indices temporels de nos différents symboles multiporteuses.

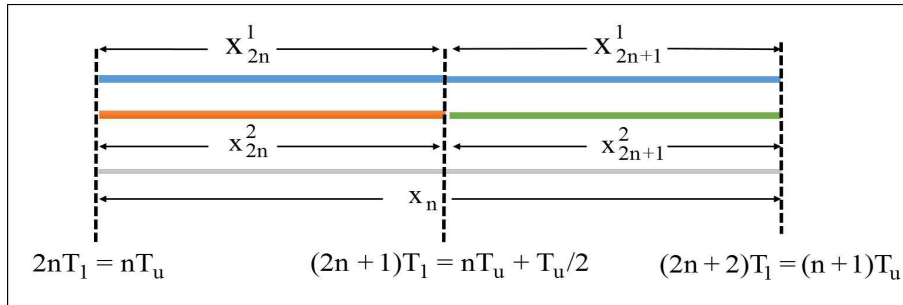


FIGURE 5.4 – Disposition ou position des supports temporels des symboles  $\mathbf{x}_{2n}^1$ ,  $\mathbf{x}_{2n+1}^1$ ,  $\mathbf{x}_{2n}^2$  et  $\mathbf{x}_{2n+1}^2$  par rapport à  $\mathbf{x}_n$

On remarque sur la Figure (5.4) que les indices temporels " $n, 2n$ , etc ..." de nos symboles ne sont pas de simples notations mais permettent de désigner ou localiser le support temporel du symbole. Sur cette figure, on voit bien la disposition des supports temporels des symboles  $\mathbf{x}_{2n}^1$ ,  $\mathbf{x}_{2n+1}^1$ ,  $\mathbf{x}_{2n}^2$  et  $\mathbf{x}_{2n+1}^2$  par rapport au support temporel du symbole  $\mathbf{x}_n$ .

Dans ce qui suit nous allons donner le principe de base de la MTR et le schéma d'insertion du signal de correction du PAPR qui en découle.

### 5.3.2 Principe et Schéma d'insertion général de la MTR

Dans ce chapitre nous proposons de modifier la structure du schéma d'insertion de la TR classique afin d'améliorer la méthode TR-GP [126, 78] dont un rappel en détail a été fait dans la sous section 4.2.1 du chapitre 4, d'où le nom MTR-GP pour (*Modified Tone Reservation based on the Gradient Project Algorithm*) pour désigner cette approche.

Rappelons que dans la section 4.2.1, nous avons montré que la méthode TR-GP consiste à minimiser, par ajout de signal, le bruit de *clipping*  $J_{[\mathbf{x}_n]}(\mathbf{c}_n)$ , voir équation (4.5). Rappelons que  $J_{[\mathbf{x}_n]}(\cdot)$  qui désigne le bruit de *clipping* sans le signal de correction du PAPR  $\mathbf{c}_n$ , est défini pour un seuil  $A$  donné par l'équation (5.21) suivante :

$$J_{\mathbf{x}_n}(\cdot) = \|\mathbf{x}_n - f(\mathbf{x}_n, A)\|_2^2 \quad (5.21)$$

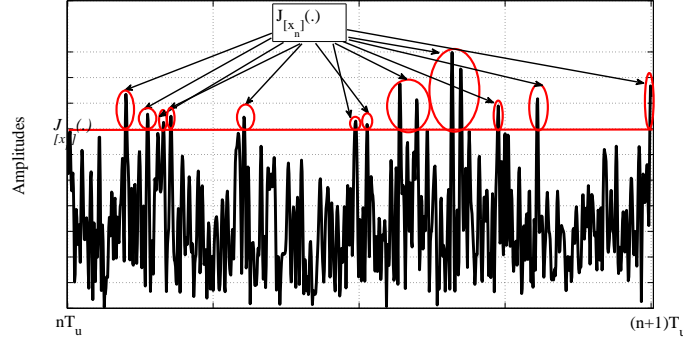
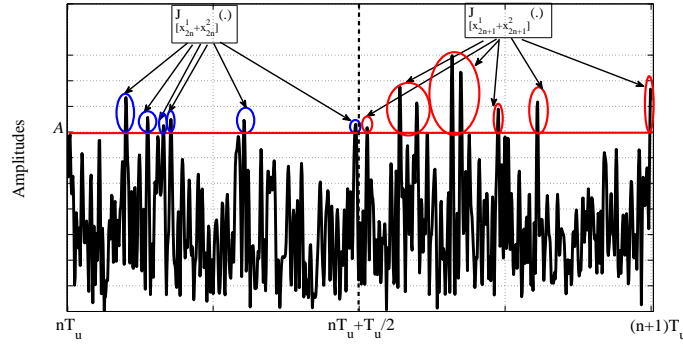
La Figure (5.5) donne une illustration graphique du bruit de *clipping* pour un symbole OFDM donnée et un seuil de *clipping*  $\rho = 5\text{dB}$ .

Dans le cas de la méthode TR-GP, le signal de correction du PAPR est celui qui permet de minimiser les *peaks* indiqués sur la Figure 5.5 par des cercles.

Conformément à la décomposition du symbole  $\mathbf{x}_n$ , considérons maintenant les quantités  $J_{[\mathbf{x}_{2n}^1 + \mathbf{x}_{2n}^2]}(\cdot)$  et  $J_{[\mathbf{x}_{2n+1}^1 + \mathbf{x}_{2n+1}^2]}(\cdot)$  définies à partir du bruit de *clipping* du symbole  $\mathbf{x}_n$  respectivement sur les intervalles  $[nT_u, nT_u + \frac{T_u}{2}]$  et  $[nT_u + \frac{T_u}{2}, (n+1)T_u]$ , voir Figure (5.6) qui en donne une illustration graphique à partir de l'exemple de la Figure 5.5. Notons que ces deux quantités que nous appellerons dans ce chapitre par bruit de *clipping* partiels seront les fonctions de coûts à minimiser dans le cadre de la *Modified Tone Reservation* via l'algorithme du gradient projeté comme dans le cas de méthode TR-GP.

Remarquons d'abord que de la disposition des supports temporels des symboles  $\mathbf{x}_{2n}^1$ ,  $\mathbf{x}_{2n+1}^1$ ,  $\mathbf{x}_{2n}^2$  et  $\mathbf{x}_{2n+1}^2$ , voir Figure (5.4), les bruits de *clipping* partiels  $J_{[\mathbf{x}_{2n}^1 + \mathbf{x}_{2n}^2]}(\cdot)$  et  $J_{[\mathbf{x}_{2n+1}^1 + \mathbf{x}_{2n+1}^2]}(\cdot)$




 FIGURE 5.5 – Illustration du bruit de *clipping* à minimiser dans le cadre de la TR classique

 FIGURE 5.6 – Illustration des bruits de *clipping*  $J_{[x_{2n}^1+x_{2n}^2]}(.)$  et  $J_{[x_{2n+1}^1+x_{2n+1}^2]}(.)$  à minimiser dans le cadre de la MTR

peuvent être exprimés en fonction des symboles multiporteuses issus de la décomposition du symbole OFDM  $\mathbf{x}_n$  comme suit :

$$\begin{aligned} J_{[x_{2n}^1+x_{2n}^2]}(.) &= \|(\mathbf{x}_{2n}^1 + \mathbf{x}_{2n}^2) - f(\mathbf{x}_{2n}^1 + \mathbf{x}_{2n}^2, A)\| \\ J_{[x_{2n+1}^1+x_{2n+1}^2]}(.) &= \|(\mathbf{x}_{2n+1}^1 + \mathbf{x}_{2n+1}^2) - f(\mathbf{x}_{2n+1}^1 + \mathbf{x}_{2n+1}^2, A)\| \end{aligned} \quad (5.22)$$

La fonction de coût à minimiser par ajout de signal dans le cadre de la méthode TR-GP classique [126], i.e,  $J_{\mathbf{x}_n}()$ , a été décomposée par rapport aux supports temporels des symboles  $\mathbf{x}_{2n}^1$ ,  $\mathbf{x}_{2n+1}^1$ ,  $\mathbf{x}_{2n}^2$  et  $\mathbf{x}_{2n+1}^2$  obtenus par décomposition du symbole d'intérêt  $\mathbf{x}_n$ . Le but ici, sera de minimiser séparément ces bruits de *clipping* par ajout de signal sous la contrainte TR sur les symboles  $\mathbf{x}_{2n}^1$ ,  $\mathbf{x}_{2n+1}^1$ ,  $\mathbf{x}_{2n}^2$  et  $\mathbf{x}_{2n+1}^2$ . A cet effet, comme dans le cas de la TR classique, supposons que toutes les porteuses de  $\mathbf{x}_n$  incluses dans  $\mathcal{R}$  sont nulles, i.e, réservées pour porter le signal de correction. Autrement dit supposons que pour chaque symbole  $\mathbf{x}_n$  dont on veut réduire le PAPR, on a :

$$\frac{1}{L}(\mathbf{F}_{ML,m}^{\text{Col}})^H \mathbf{x}_n = \begin{cases} X_{m,n} & \text{Si } m \notin \mathcal{R} \\ 0 & \text{Si } m \in \mathcal{R} \end{cases} \quad (5.23)$$

Avec on le rappelle  $\mathbf{F}_{M,m}^{\text{Col}}$  désigne la  $m$ -ième colonne de la matrice  $\mathbb{F}_{ML}$ . La multiplication par le scalaire  $\frac{1}{L}$  provient du fait que  $(\mathbb{F}_{ML})^{-1} = \frac{1}{L}(\mathbb{F}_{ML})^H$ . En effet, par construction de  $\mathbb{F}_{ML}$ , voir section 2.2 du chapitre 2, on a :

$$(\mathbb{F}_{ML})^H \mathbb{F}_{ML} = L\mathbb{I}_{ML} \quad (5.24)$$

Avec  $\mathbb{I}_{ML}$  la matrice identité de taille  $ML$ . On note ainsi que l'équation (5.23) ne traduit rien d'autre que la démodulation (projection) de  $\mathbf{x}_n$  sur la porteuse  $m$ .

Sous cette hypothèse ( $\mathbf{x}_n$  vérifie la contrainte TR (5.23)), Il vient alors que par construction (décomposition de  $\mathbf{x}_n$ ) des symboles  $\mathbf{x}_{2n}^1$ ,  $\mathbf{x}_{2n+1}^1$ ,  $\mathbf{x}_{2n}^2$  et  $\mathbf{x}_{2n+1}^2$  décrite dans la section 5.3.1 on a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{L}(\mathbf{F}_{M_1L,m}^{\text{Col}})^H \mathbf{x}_{2n}^1 &= \begin{cases} X_{m,2n}^1 & \text{Si } m \notin \mathcal{K}^{(0)} \\ 0 & \text{Si } m \in \mathcal{K}^{(0)} \end{cases} \\ \frac{1}{L}(\mathbf{F}_{M_1L,m}^{\text{Col}})^H \mathbf{x}_{2n+1}^1 &= \begin{cases} X_{m,2n+1}^1 & \text{Si } m \notin \mathcal{K}^{(0)} \\ 0 & \text{Si } m \in \mathcal{K}^{(0)} \end{cases} \\ \frac{1}{L}(\mathbf{F}_{M_1L,m}^{\text{Col}})^H (\mathbb{D}_{M_1L})^H \mathbf{x}_{2n}^2 &= \begin{cases} X_{m,2n}^2 & \text{Si } m \notin \mathcal{K}^{(1)} \\ 0 & \text{Si } m \in \mathcal{K}^{(1)} \end{cases} \\ \frac{1}{L}(\mathbf{F}_{M_1L,m}^{\text{Col}})^H (-\mathbb{D}_{M_1L})^H \mathbf{x}_{2n+1}^2 &= \begin{cases} X_{m,2n+1}^2 & \text{Si } m \notin \mathcal{K}^{(1)} \\ 0 & \text{Si } m \in \mathcal{K}^{(1)} \end{cases} \end{aligned} \quad (5.25)$$

Avec

$$\mathcal{K}^{(0)} = \frac{\mathcal{R}^P}{2} \text{ et } \mathcal{K}^{(1)} = \frac{\mathcal{R}^I - 1}{2} \quad (5.26)$$

On rappelle que  $\mathcal{R}^P$  et  $\mathcal{R}^I$  sont des sous ensembles de  $\mathcal{R}$  qui contiennent respectivement ses porteuses paires et impaires et que  $M_1 = \frac{M}{2}$  représente le nombre total des porteuses (réservées et non réservées) des symboles  $\mathbf{x}_{2n}^1$ ,  $\mathbf{x}_{2n+1}^1$ ,  $\mathbf{x}_{2n}^2$  et  $\mathbf{x}_{2n+1}^2$ . On remarquera que  $\mathcal{K}^{(0)}$  (respect.  $\mathcal{K}^{(1)}$ ) désigne l'ensemble des porteuses réservées pour les symboles  $\mathbf{x}_{2n}^1$  et  $\mathbf{x}_{2n+1}^1$  (respect.  $\mathbf{x}_{2n}^2$ ,  $\mathbf{x}_{2n+1}^2$ ). Pour s'en convaincre sur la projection des porteuses réservées de  $\mathbf{x}_n$  sur les symboles  $\mathbf{x}_{2n}^1$ ,  $\mathbf{x}_{2n+1}^1$ ,  $\mathbf{x}_{2n}^2$  et  $\mathbf{x}_{2n+1}^2$  issus de la décomposition, le lecteur peut consulter l'Annexe B.

Tout d'abord avant de d'aller plus loin sur la MTR, rappelons que la méthode TR-GP consiste à trouver  $\mathbf{C}_n$  via la problème d'optimisation suivant :

$$\min_{\mathbf{C}_n} \|\mathbf{x}_n + \mathbb{F}_{ML,N_{\mathcal{R}}}^{\mathcal{R}} \mathbf{C}_n - f(\mathbf{x}_n + \mathbb{F}_{ML,N_{\mathcal{R}}}^{\mathcal{R}} \mathbf{C}_n, A)\|_2^2 \quad (5.27)$$

Dans [126], l'algorithme du gradient projeté [64] a été utilisé pour résoudre itérativement ce problème. Dans le chapitre 4 nous sommes revenus en détail sur la résolution de ce problème. Le but ici est d'exposer les points faibles de cette méthode afin de mettre en évidence en quoi la MTR permettra t-elle de lever ses points faibles.

Soit  $\bar{\mathbf{c}}_n^1$  (respect.  $\bar{\mathbf{c}}_n^2$ ) la composante symétrique (respect. anti symétrique) du signal de correction  $\mathbf{c}_n$ . En d'autres termes on a  $\bar{\mathbf{c}}_n^1 = \mathbb{F}_{ML,N_{\mathcal{R}^P}}^{\mathcal{R}^P} \bar{\mathbf{C}}_n^1$  et  $\bar{\mathbf{c}}_n^2 = \mathbb{F}_{ML,N_{\mathcal{R}^I}}^{\mathcal{R}^I} \bar{\mathbf{C}}_n^2$  avec  $\bar{\mathbf{C}}_n^1$  (respect.  $\bar{\mathbf{C}}_n^2$ ) le vecteur fréquentiel de taille  $N_{\mathcal{R}^P}$  (respect.  $N_{\mathcal{R}^I}$ ) ne contenant que les composantes de  $\mathbf{C}_n$  appartenant à  $\mathcal{R}^P$ , i.e, les porteuses réservées paires (respect  $\mathcal{R}^I$ , i.e., les porteuses réservées impaires). Rappelons que par principe de la TR, le signal de correction est un signal OFDM, donc les résultats de la section 5.3.1 concernant la décomposition en composante symétrique et anti-symétrique s'appliquent. Avec la décomposition du signal de correction  $\mathbf{c}_n$  en ses composantes symétriques et anti-symétriques, le problème (5.27)

peut être formellement reformulé comme suit :

$$\min_{\bar{\mathbf{c}}_n^1, \bar{\mathbf{c}}_n^2} \|(\mathbf{x}_n + \bar{\mathbf{c}}_n^1 + \bar{\mathbf{c}}_n^2 - f(\mathbf{x}_n + \bar{\mathbf{c}}_n^1 + \bar{\mathbf{c}}_n^2, A))\|_2^2$$

Sous la Contrainte  $\left\{ \begin{array}{ll} \bar{\mathbf{c}}_n^1 + \bar{\mathbf{c}}_n^2 & \text{ne pollue pas les porteuses utiles de } \mathbf{x}_n \text{ (a)} \\ \bar{\mathbf{c}}_n^1 & \text{est symétrique (b)} \\ \bar{\mathbf{c}}_n^2 & \text{est anti-symétrique (c)} \end{array} \right.$

(5.28)

Du fait des propriétés de symétrie et d'anti-symétrie des composantes  $\bar{\mathbf{c}}_n^1$  et  $\bar{\mathbf{c}}_n^2$ , le signal de correction du PAPR  $\mathbf{c}_n$  risque fort de ne pas atteindre certains *peaks* du signal  $\mathbf{x}_n$  du fait que les échantillons permettant de les atténuer risquent d'être atténués à cause des propriétés de symétrie et d'anti-symétrie des composantes  $\bar{\mathbf{c}}_n^1$  et  $\bar{\mathbf{c}}_n^2$ , voir section 4.2.1 pour plus d'explications. En outre, on remarque que les contraintes (b) et (c) signifient que les symboles  $\bar{\mathbf{c}}_n^1$  et  $\bar{\mathbf{c}}_n^2$  n'interfèrent pas entre eux, ce qui n'est d'aucune nécessité puisque ses signaux n'acheminent aucune information utile. Toutes ces propriétés de symétrie et d'anti-symétrie, d'orthogonalité en fréquence entre  $\bar{\mathbf{c}}_n^1$  et  $\bar{\mathbf{c}}_n^2$  font que la TR-GP classique ne permet pas d'atteindre toutes les *peaks* du signal d'intérêt dont on veut réduire le PAPR. Ainsi, l'idée derrière la MTR est de relâcher ces propriétés en générant le signal de correction via le modulateur décrit dans la Figure 5.1 et en relâchant les contraintes de symétrie et d'anti-symétrie. En effet, par le schéma de décomposition présenté dans la section 5.3.1, si le symbole  $\mathbf{x}_n$  dispose de porteuses laissées libres pour porter le signal de correction, ces porteuses seront projetées sur les 4 modules de IDFT présents sur le schéma du modulateur associé à la MTR, voir équation (5.25) et Figure 5.1. La MTR consistera donc d'une part à utiliser ces porteuses nulles des 4 modules de IDFT ( $\mathcal{K}^{(0)}$  et  $\mathcal{K}^{(1)}$ ) pour générer le signal de correction et d'autre part de relâcher les contraintes de symétries pour permettre à ces signaux (si besoin) d'interférer entre eux puisque de toutes façon ils ne transportent aucune information utile. Ainsi, dans ce chapitre, le schéma d'insertion que nous proposons, i.e, la MTR, nous permet de relâcher les contraintes (b), (c) afin que la méthode MTR-GP soit plus performante que la méthode TR-GP classique en termes de réduction du PAPR et sans dégradation du BER comme la TR classique.

Pour ce faire, la MTR-GP consistera en deux étapes :

1. Génération du signal de correction  $\mathbf{c}_n$ .

Tout comme la méthode TR-GP classique, la MTR-GP se donne pour objectif de minimiser le bruit de *clipping* par ajout de signal, pour un seuil  $A$  donné. Cependant, afin de relâcher les contraintes (b) et (c), la MTR-GP propose de minimiser séparément les bruits de clipping partiels  $J_{[\mathbf{x}_{2n}^1 + \mathbf{x}_{2n}^2]}(\cdot)$  et  $J_{[\mathbf{x}_{2n+1}^1 + \mathbf{x}_{2n+1}^2]}(\cdot)$  par ajout de signal sous la contrainte TR classique par rapport aux symboles  $\mathbf{x}_{2n}^1$ ,  $\mathbf{x}_{2n+1}^1$ ,  $\mathbf{x}_{2n}^2$  et  $\mathbf{x}_{2n+1}^2$ , voir équation (5.25). En d'autres termes, la MTR consiste à générer le signal de correction  $\mathbf{c}_n$  à l'aide du modulateur décrit par la Figure (5.1). Pour ce faire, les porteuses laissées libres sur les symboles issus de la décomposition (projection des porteuses réservées de  $\mathcal{R}$ ) seront utilisées afin de construire le signal de correction  $\mathbf{c}_n$  comme suit :

$$\mathbf{c}_n = [(\mathbf{c}_{2n}^1 + \mathbf{c}_{2n}^2) \bullet (\mathbf{c}_{2n+1}^1 + \mathbf{c}_{2n+1}^2)] \quad (5.29)$$

Les composantes  $\mathbf{c}_{2n}^1$  et  $\mathbf{c}_{2n+1}^1$  (respect.  $\mathbf{c}_{2n}^2$  et  $\mathbf{c}_{2n+1}^2$ ) du signal de correction du PAPR seront générées grâce aux porteuses réservées des composantes  $\mathbf{x}_{2n}^1$  et  $\mathbf{x}_{2n+1}^1$  (respect.  $\mathbf{x}_{2n}^2$  et  $\mathbf{x}_{2n+1}^2$ ) du symbole  $\mathbf{x}_n$ .

Concernant le calcul des symboles  $\mathbf{c}_{2n}^1$  et  $\mathbf{c}_{2n}^2$  (respect.  $\mathbf{c}_{2n+1}^1$  et  $\mathbf{c}_{2n+1}^2$ ), il s'effectuera en minimisant  $J_{[\mathbf{x}_{2n}^1 + \mathbf{x}_{2n}^2]}(\cdot)$  (respect.  $J_{[\mathbf{x}_{2n+1}^1 + \mathbf{x}_{2n+1}^2]}(\cdot)$ ) sous la contrainte TR

classique sur les symboles  $\mathbf{x}_{2n}^1$  et  $\mathbf{x}_{2n}^2$  (respect.  $\mathbf{x}_{2n+1}^1$  et  $\mathbf{x}_{2n+1}^2$ ). D'un point de vu mathématique, la MTR revient à résoudre les deux problèmes d'optimisation suivants :

$$\begin{aligned} & \min_{\mathbf{c}_{2n}^1, \mathbf{c}_{2n}^2} J_{[\mathbf{x}_{2n}^1 + \mathbf{x}_{2n}^2]}(\mathbf{c}_{2n}^1 + \mathbf{c}_{2n}^2) \\ \text{Subject to } & \begin{cases} \frac{1}{L}(\mathbf{F}_{M_1 L, m}^{\text{Col}})^H(\mathbf{x}_{2n}^1 + \mathbf{c}_{2n}^1) = \begin{cases} X_{m, 2n}^1 & \text{Si } m \notin \mathcal{K}^{(0)} \\ C_{m, 2n}^1 & \text{Si } m \in \mathcal{K}^{(0)} \end{cases} \\ \frac{1}{L}(\mathbf{F}_{M_1 L, m}^{\text{Col}})^H(\mathbb{D}_{M_1 L})^H(\mathbf{x}_{2n}^2 + \mathbf{c}_{2n}^2) = \begin{cases} X_{m, 2n}^2 & \text{Si } m \notin \mathcal{K}^{(1)} \\ C_{m, 2n}^2 & \text{Si } m \in \mathcal{K}^{(1)} \end{cases} \end{cases} \end{aligned} \quad (5.30)$$

Et

$$\begin{aligned} & \min_{\mathbf{c}_{2n+1}^1, \mathbf{c}_{2n+1}^2} J_{[\mathbf{x}_{2n+1}^1 + \mathbf{x}_{2n+1}^2]}(\mathbf{c}_{2n+1}^1 + \mathbf{c}_{2n+1}^2) \\ \text{Subject to } & \begin{cases} \frac{1}{L}(\mathbf{F}_{M_1 L, m}^{\text{Col}})^H(\mathbf{x}_{2n+1}^1 + \mathbf{c}_{2n+1}^1) = \begin{cases} X_{m, 2n+1}^1 & \text{Si } m \notin \mathcal{K}^{(0)} \\ C_{m, 2n+1}^1 & \text{Si } m \in \mathcal{K}^{(0)} \end{cases} \\ \frac{1}{L}(\mathbf{F}_{M_1 L, m}^{\text{Col}})^H(-\mathbb{D}_{M_1 L})^H(\mathbf{x}_{2n+1}^2 + \mathbf{c}_{2n+1}^2) = \begin{cases} X_{m, 2n+1}^2 & \text{Si } m \notin \mathcal{K}^{(1)} \\ C_{m, 2n+1}^2 & \text{Si } m \in \mathcal{K}^{(1)} \end{cases} \end{cases} \end{aligned} \quad (5.31)$$

2. Suppression du bruit généré par le signal de correction du PAPR  $\mathbf{c}_n$  sur les porteuses utiles de  $\mathbf{x}_n$ .

Puisque les deux fonctions de coût sont à priori différentes, il vient alors qu'à priori on a  $\mathbf{c}_{2n}^1 \neq \mathbf{c}_{2n+1}^1$  et  $\mathbf{c}_{2n}^2 \neq -\mathbf{c}_{2n+1}^2$ , en d'autres termes  $\bar{\mathbf{c}}_n^1 = [\mathbf{c}_{2n}^1; \mathbf{c}_{2n+1}^1]^T$  et  $\bar{\mathbf{c}}_n^2 = [\mathbf{c}_{2n}^2; \mathbf{c}_{2n+1}^2]^T$  ne sont respectivement pas symétrique et anti-symétrique comme dans le cas de la TR-GP, voir (5.28). Il vient alors que le signal de correction  $\mathbf{c}_n = \bar{\mathbf{c}}_n^1 + \bar{\mathbf{c}}_n^2$  va perturber les porteuses utiles du signal  $\mathbf{x}_n$ . Plus précisément, le signal  $\bar{\mathbf{c}}_n^1$  (respect.  $\bar{\mathbf{c}}_n^2$ ) va perturber les porteuses impaires (respect. paires) du signal d'intérêt  $\mathbf{x}_n$ . A l'aide d'un filtrage dans le domaine fréquentiel, cette étape consistera à extraire le bruit d'interférence généré par le signal de correction sur les porteuses utiles du symbole d'intérêt. Dans les sections à venir nous reviendrons en détail sur ces perturbations et le schéma de filtrage proposé. Notons que malgré ce filtrage, la composante  $\bar{\mathbf{c}}_n^1$  (respect.  $\bar{\mathbf{c}}_n^2$ ) ne sera toujours pas symétrique (respect. anti-symétrique) si  $\mathcal{R}$  est de parité mixte. Cette propriété est le point fort de la MTR. Nous reviendrons en détail sur ces aspects dans la sous section 5.4.2.

Avant de présenter la méthode MTR-GP sans dégradations du BER dans la section (5.5), nous allons d'abord présenter la MTR sans filtrage (i.e avec dégradations) dans la section 5.4. Pour ce faire, nous allons présenter dans la sous section (5.4.1) le calcul du signal de correction solution des problèmes d'optimisations (5.30) et (5.31). Il s'en suivra dans la sous section 5.4.2 une caractérisation du schéma de filtrage dédié à la suppression des perturbations générées par ce signal de correction du PAPR, en utilisant les résultat de la section B.2 de l'Annexe B dans laquelle nous avons donné une caractérisation détaillée des perturbations générées par le signal de correction du PAPR sur les porteuses utiles.

## 5.4 Implémentation de la MTR-GP sans filtrage

Dans cette section, nous allons présenter l'algorithme de résolution des problèmes d'optimisation (5.30) et (5.31) qui permet de générer les symboles  $\mathbf{c}_{2n}^1$ ,  $\mathbf{c}_{2n+1}^1$ ,  $\mathbf{c}_{2n}^2$  et  $\mathbf{c}_{2n+1}^2$ .

En utilisant les résultats de l'Annexe B qui donnent une caractérisation des perturbations générées par les composantes  $\bar{\mathbf{c}}_n^1$  et  $\bar{\mathbf{c}}_n^2$  du signal de correction du PAPR  $\mathbf{c}_n$  sur les porteuses utiles du signal  $\mathbf{x}_n$ , nous allons dans la sous section 5.4.2 définir le procédé de filtrage numérique permettant de se prémunir de ces dégradations. Ce schéma sera utilisé dans la section 5.5 pour la construction de la méthode MTR-GP sans dégradation du BER.

### 5.4.1 Calcul du signal de correction

Soient  $\mathbf{C}_{2n}^1, \mathbf{C}_{2n+1}^1, \mathbf{C}_{2n}^2$  et  $\mathbf{C}_{2n+1}^2$  les vecteurs fréquentiels associés respectivement au symboles  $\mathbf{c}_{2n}^1, \mathbf{c}_{2n+1}^1, \mathbf{c}_{2n}^2$  et  $\mathbf{c}_{2n+1}^2$ . Par la contrainte TR imposée dans les problèmes d'optimisations (5.30) et (5.31) on a alors d'après la projection des porteuses réservées du symbole  $\mathbf{x}_n$  sur les symboles  $\mathbf{x}_{2n}^1, \mathbf{x}_{2n+1}^1, \mathbf{x}_{2n}^2$  et  $\mathbf{x}_{2n+1}^2$ , décrite dans l'équation (5.25), les relations matricielles suivantes :

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_{2n}^1 &= \mathbb{F}_{M_1 L, N_{\mathcal{K}(0)}}^{\mathcal{K}(0)} \mathbf{C}_{2n}^1 & \text{et} & \quad \mathbf{c}_{2n+1}^1 = \mathbb{F}_{M_1 L, N_{\mathcal{K}(0)}}^{\mathcal{K}(0)} \mathbf{C}_{2n+1}^1 \\ \mathbf{c}_{2n}^2 &= \mathbb{D}_{M_1 L} \left( \mathbb{F}_{M_1 L, N_{\mathcal{K}(1)}}^{\mathcal{K}(1)} \mathbf{C}_{2n}^2 \right) & \text{et} & \quad \mathbf{c}_{2n+1}^2 = -\mathbb{D}_{M_1 L} \left( \mathbb{F}_{M_1 L, N_{\mathcal{K}(1)}}^{\mathcal{K}(1)} \mathbf{C}_{2n+1}^2 \right) \end{aligned} \quad (5.32)$$

Rappelons que la construction des matrices  $\mathbb{F}_{M_1 L, N_{\mathcal{K}(0)}}^{\mathcal{K}(0)}$  et  $\mathbb{F}_{M_1 L, N_{\mathcal{K}(1)}}^{\mathcal{K}(1)}$  a été donnée dans la section 5.2.

En utilisant l'équation (5.32) les problèmes d'optimisations (5.30) et (5.31) peuvent être reformulés à l'aide des composantes fréquentielles comme suit :

$$\min_{\mathbf{C}_{2n}^1, \mathbf{C}_{2n}^2} J_{[\mathbf{x}_{2n}^1 + \mathbf{x}_{2n}^2]} \left( \mathbb{F}_{M_1 L, N_{\mathcal{K}(0)}}^{\mathcal{K}(0)} \mathbf{C}_{2n}^1 + \tilde{\mathbb{F}}_{M_1 L, N_{\mathcal{K}(1)}}^{\mathcal{K}(1), 1} \mathbf{C}_{2n}^2 \right) \quad (5.33)$$

Et

$$\min_{\mathbf{C}_{2n+1}^1, \mathbf{C}_{2n+1}^2} J_{[\mathbf{x}_{2n+1}^1 + \mathbf{x}_{2n+1}^2]} \left( \mathbb{F}_{M_1 L, N_{\mathcal{K}(0)}}^{\mathcal{K}(0)} \mathbf{C}_{2n+1}^1 + \tilde{\mathbb{F}}_{M_1 L, N_{\mathcal{K}(1)}}^{\mathcal{K}(1), 2} \mathbf{C}_{2n+1}^2 \right) \quad (5.34)$$

avec  $\tilde{\mathbb{F}}_{M_1 L, N_{\mathcal{K}(1)}}^{\mathcal{K}(1), 1} = -\tilde{\mathbb{F}}_{M_1 L, N_{\mathcal{K}(1)}}^{\mathcal{K}(1), 2} = \mathbb{D}_{M_1 L} \mathbb{F}_{M_1 L, N_{\mathcal{K}(1)}}^{\mathcal{K}(1)}$ . Dans ce qui suit, nous allons voir comment combiner ces deux problèmes d'optimisation en un seul. Le but est simplement de simplifier la résolution et aussi d'en faciliter la compréhension. Pour ce faire, soient  $\mathbb{A}$  la matrice de dimension  $(ML, 2N_{\mathcal{R}})$  définie par l'équation (5.35) et  $\check{\mathbf{C}}_n = [\mathbf{C}_{2n}^1 \bullet \mathbf{C}_{2n+1}^1 \bullet \mathbf{C}_{2n}^2 \bullet \mathbf{C}_{2n+1}^2]$ . Rappelons que l'opérateur  $\bullet$  désigne la concaténation vectorielle.

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} \mathbb{F}_{M_1 L, N_{\mathcal{K}(0)}}^{\mathcal{K}(0)} & \mathbf{0}_{M_1 L, N_{\mathcal{K}(0)}} & \tilde{\mathbb{F}}_{M_1 L, N_{\mathcal{K}(1)}}^{\mathcal{K}(1), 1} & \mathbf{0}_{M_1 L, N_{\mathcal{K}(1)}} \\ \mathbf{0}_{M_1 L, N_{\mathcal{K}(0)}} & \mathbb{F}_{M_1 L, N_{\mathcal{K}(0)}}^{\mathcal{K}(0)} & \mathbf{0}_{M_1 L, N_{\mathcal{K}(1)}} & \tilde{\mathbb{F}}_{M_1 L, N_{\mathcal{K}(1)}}^{\mathcal{K}(1), 2} \end{bmatrix} \quad (5.35)$$

Avec  $\mathbf{0}_{x,y}$  la matrice nulle de dimension  $(x, y)$ .

En utilisant la matrice  $\mathbb{A}$  et le vecteur  $\check{\mathbf{C}}_n$  les problèmes d'optimisations (5.33) et (5.34) peuvent être combinés en un seul problème d'optimisation défini comme suit :

$$\min_{\check{\mathbf{C}}_n} \left( \|\mathbf{x}_n + \mathbb{A} \check{\mathbf{C}}_n - f(\mathbf{x}_n + \mathbb{A} \check{\mathbf{C}}_n, A)\|_2^2 \right) \quad (5.36)$$

Comme nous l'avons souligné dans la section (5.3.1), la décomposition du symbole  $\mathbf{x}_n$  ne sert que comme référence pour structurer le schéma d'insertion du signal de correction du PAPR  $\mathbf{c}_n$ , i.e, la manière dont celui-ci sera inséré. En effet on remarque que dans le problème d'optimisation (5.36) la connaissance des différentes composantes du symbole d'intérêt  $\mathbf{x}_n$  dont on veut réduire le PAPR, i.e.,  $\mathbf{x}_{2n}^1, \mathbf{x}_{2n+1}^1, \mathbf{x}_{2n}^2$  et  $\mathbf{x}_{2n+1}^2$  n'intervient pas et n'est pas nécessaire dans le calcul des vecteurs fréquentiels  $\mathbf{C}_{2n}^1, \mathbf{C}_{2n+1}^1, \mathbf{C}_{2n}^2$  et  $\mathbf{C}_{2n+1}^2$  et

donc du signal de correction  $\mathbf{c}_n$ . Par contre, on remarque que la décomposition du symbole  $\mathbf{x}_n$  a permis de structurer la matrice  $\mathbb{A}$  qui définit la structure d'insertion de la *modified tones reservation*. En effet cette matrice traduit mathématiquement le modulateur décrit dans la Figure 5.1 lorsque les porteuses actives sur les 4 modules de IDFT sont celles dans  $\mathcal{K}^{(0)}$  et  $\mathcal{K}^{(1)}$  c'est à dire les projections des porteuses de  $\mathcal{R}$ .

Pour résoudre le problème d'optimisation (5.36), nous allons procéder comme dans [126] par un algorithme itératif basé sur le gradient projeté [64]. Pour cela, soit  $\nabla_{\check{\mathbf{c}}_n}$  le gradient de la fonction de coût du problème (5.36)

$$\begin{aligned}\nabla_{\check{\mathbf{c}}_n} &= \frac{\delta}{\delta \check{\mathbf{c}}_n} \left( \|\mathbf{x}_n + \mathbb{A}\check{\mathbf{c}}_n - f(\mathbf{x}_n + \mathbb{A}\check{\mathbf{c}}_n)\|_2^2 \right) \\ &= \frac{\delta}{\delta \check{\mathbf{c}}_n} \sum_{l \in \Theta_A} \left\| x_{n,l} + \underbrace{\mathbf{A}_l^{\text{Lig}} \check{\mathbf{c}}_n}_{c_{n,l}} - A e^{j \arg(x_{n,l} + c_{n,l})} \right\|_2^2 \\ &= 2 \sum_{l \in \Theta_A} \left( x_{n,l} + c_{n,l} - A e^{j \arg(x_{n,l} + c_{n,l})} \right) \left( \mathbf{A}_l^{\text{Lig}} \right)^H\end{aligned}\tag{5.37}$$

avec  $\mathbf{c}_n = [c_{n,0}, \dots, c_{n,LM-1}]^T = [(\mathbf{c}_{2n}^1 + \mathbf{c}_{2n}^2) \bullet (\mathbf{c}_{2n+1}^1 + \mathbf{c}_{2n+1}^2)] = \check{\mathbf{c}}_n$  et  $\Theta_A = \{l, |x_{n,l} + c_{n,l}| > A\}$ , l'ensemble contenant les instants (indices) d'écrêtage et  $\mathbf{A}_l^{\text{Lig}}$  désigne la  $l$ -ième ligne de la matrice  $\mathbb{A}$ .

Avec les conditions initiales  $\check{\mathbf{c}}_n^{(0)} = \mathbf{0}_{LM}$  et  $\Theta_A^{(0)} = \Theta_A$  avec  $\Theta_A^{(k)} = \{l, |x_{n,l} + c_{n,l}^{(k)}| > A\}$  la méthode du gradient projeté consiste à construire itérativement le vecteur fréquentiel du signal de correction du PAPR par la relation de récurrence suivante :

$$\check{\mathbf{c}}_n^{(k+1)} = \check{\mathbf{c}}_n^{(k)} - \nu \sum_{l \in \Theta_A^{(k)}} \left( x_{n,l} + c_{n,l}^{(k)} - A e^{j \arg(x_{n,l} + c_{n,l}^{(k)})} \right) \left( \mathbf{A}_l^{\text{Lig}} \right)^H, \tag{5.38}$$

Avec  $\frac{\nu}{2}$  le pas de descente, la division par deux permet de se débarrasser du facteur 2 dans la formule du gradient pour juste une question de simplicité de l'écriture sans aucune perte de généralité.

En multipliant les deux membres de l'équation ci-dessus par la matrice  $\mathbb{A}$  on obtient le signal de correction à la sortie de la  $k$ -ième étape grâce à la relation suivante (passage en temporel) :

$$\mathbf{c}_n^{(k+1)} = \mathbf{c}_n^{(k)} - \nu \sum_{l \in \Theta_A^{(k)}} \left( x_{n,l} + c_{n,l}^{(k)} - A e^{j \arg(x_{n,l} + c_{n,l}^{(k)})} \right) \mathbb{A} \left( \mathbf{A}_l^{\text{Lig}} \right)^H \tag{5.39}$$

En ajoutant le symbole d'intérêt  $\mathbf{x}_n$ , il vient alors que le symbole OFDM après réduction du PAPR à la sortie de la  $k$ -ième itération sera donné par l'équation suivante :

$$\begin{aligned}\underbrace{\mathbf{x}_n + \mathbf{c}_n^{(k+1)}}_{\mathbf{x}_n^{(k+1)}} &= \underbrace{\mathbf{x}_n + \mathbf{c}_n^{(k)}}_{\mathbf{x}_n^{(k)}} - \nu \sum_{l \in \Theta_A^{(k)}} \underbrace{\left( x_{n,l} + c_{n,l}^{(k)} - A e^{j \arg(x_{n,l} + c_{n,l}^{(k)})} \right)}_{\alpha_{n,l}^{(k)}} \mathbb{A} \left( \mathbf{A}_l^{\text{Lig}} \right)^H \\ \mathbf{x}_n^{(k+1)} &= \mathbf{x}_n^{(k)} - \nu \sum_{l \in \Theta_A^{(k)}} \alpha_{n,l}^{(k)} \mathbb{A} \left( \mathbf{A}_l^{\text{Lig}} \right)^H\end{aligned}\tag{5.40}$$

L'algorithme (7) donne une description plus détaillée de la résolution du problème d'optimisation (5.36) à l'aide de la méthode du gradient projeté.



---

**Algorithm 7** L'algorithme MTR-GP avec Dégradation du BER
 

---

**Require:**  $\mathbf{x}_n$  Symbol OFDM avant réduction du PAPR,  $\nu$  Pas de descente

**Require:**  $N_{\max}$  Nombre d'itérations maximal,  $A$  le seuil de *clipping* fixé (Amplitude)

**Require:**  $\mathbb{Q} = \mathbb{A}\mathbb{A}^H$  Notons :  $\mathbf{q}_l$  la  $l$ -ième ligne de  $\mathbb{Q}$ 
**Ensure:**  $\mathbf{x}_n^{(k)}$  Symbole OFDM après réduction du PAPR à la sortie de la  $k$ -ième itération

 $i \leftarrow 0, \mathbf{x}_n^{(0)} = \mathbf{x}_n, \mathbf{c}_n^0 = \mathbf{0}_{LM}$ 
**while**  $\left[ \left( \Theta_A^{(k)} \neq \emptyset \right) \text{ Et } (k \leq N_{\max}) \right]$  **do**

 Pour  $l = 0, \dots, LM - 1, \alpha_l^{(k)} \leftarrow x_{n,l}^{(k)} - Ae^{j \arg(x_{n,l}^{(k)})}$ 
 $\mathbf{x}_n^{(k+1)} \leftarrow \mathbf{x}_n^{(k)} - \nu \sum_{\{l \in \Theta_A^{(k)}\}} \alpha_l^{(k)} \mathbf{q}_l$ 
 $k \leftarrow k + 1$ 
**end while**


---

Comme on peut le remarquer dans l'Algorithme 7, la matrice de projection  $\mathbb{Q}$  peut être pré-calculée et stockée puisqu'elle ne dépend que de  $\mathcal{R}$ , ainsi la complexité de la méthode MTR-GP est de l'ordre de  $\mathcal{O}(NL)$  comme dans le cas de la méthode TR-GP classique[126]. Cependant comme nous l'avons souligné précédemment, cette approche va occasionner une dégradation du BER due au fait que la composantes  $\bar{\mathbf{c}}_n^1$  (respect.  $\bar{\mathbf{c}}_n^2$ ) n'est pas symétrique (respect. anti-symétrique). Ainsi, en utilisant les résultats de l'Annexe B, nous allons proposer le schéma de filtrage permettant la suppression des perturbations générées par le signal de correction du PAPR sur  $\mathbf{x}_n$ . Rappelons que dans l'Annexe B, nous avons présenté une caractérisation des perturbations générées par les composantes  $\bar{\mathbf{c}}_n^1$  et  $\bar{\mathbf{c}}_n^2$  sur les porteuses utiles.

### 5.4.2 Structure du schéma de filtrage des perturbations générées par le signal de correction du PAPR

Dans l'Annexe B, nous avons montré que les composantes  $\bar{\mathbf{c}}_n^{1,(k)}$  et  $\bar{\mathbf{c}}_n^{2,(k)}$  du signal de correction du PAPR  $\mathbf{c}_n^{(k)}$  à la sortie de la  $k$ -ième itérations vérifient les relations suivantes :

$$\bar{C}_{m,n}^{1,(k)} = \sqrt{\frac{1}{2}} \begin{cases} C_{p,2n}^{1,(k)} + C_{p,2n+1}^{1,(k)} & \text{Si } m = 2 * p \text{ et } p \in \mathcal{K}^{(0)} \text{ i.e } 2p \in \mathcal{R} \\ 0 & \text{Si } m = 2 * p \text{ et } p \notin \mathcal{K}^{(0)} \text{ i.e } 2p \notin \mathcal{R} \\ P_{p,n}^{1,(k)} & \text{Si } m = 2p + 1 \end{cases} \quad (5.41)$$

$$\bar{C}_{m,n}^{2,(k)} = \sqrt{\frac{1}{2}} \begin{cases} C_{p,2n}^{2,(k)} + C_{p,2n+1}^{2,(k)} & \text{Si } m = 2p + 1 \text{ et } p \in \mathcal{K}^{(1)} \text{ i.e } 2p + 1 \in \mathcal{R} \\ 0 & \text{Si } m = 2p + 1 \text{ et } p \notin \mathcal{K}^{(1)} \text{ i.e } 2p + 1 \notin \mathcal{R} \\ P_{p,n}^{2,(k)} & \text{Si } m = 2p \end{cases} \quad (5.42)$$

Avec on le rappelle  $P_{p,n}^{1,(k)}$  (respect.  $P_{p,n}^{2,(k)}$ ) désigne respectivement les perturbations générées par la composantes  $\bar{\mathbf{c}}_n^{1,(k)}$  (respect.  $\bar{\mathbf{c}}_n^{2,(k)}$ ) sur les porteuses impaires (utiles et réservées) (respect. paires) du symbole  $\mathbf{x}_n$ .

Des équations (5.41) et (5.42), on en déduit la DFT de symbole de correction du PAPR  $\mathbf{c}_n^{(k)} = \bar{\mathbf{c}}_n^{1,(k)} + \bar{\mathbf{c}}_n^{2,(k)}$  est donnée par l'équation suivante :

$$C_{m,n}^{(k)} = \sqrt{\frac{1}{2}} \begin{cases} C_{\frac{m}{2},2n}^{1,(k)} + C_{\frac{m}{2},2n+1}^{1,(k)} + P_{\frac{m}{2},n}^{2,(k)} & \text{Si } m \in \mathcal{R} \text{ Et Paire i.e } \frac{m}{2} \in \mathcal{K}^{(0)} \\ C_{\frac{m-1}{2},2n}^{2,(k)} + C_{\frac{m-1}{2},2n+1}^{2,(k)} + P_{\frac{m-1}{2},n}^{1,(k)} & \text{Si } m \in \mathcal{R} \text{ Et Impaire i.e } \frac{m-1}{2} \in \mathcal{K}^{(1)} \\ P_{\frac{m}{2},n}^{2,(k)} & \text{Si } m \notin \mathcal{R} \text{ Et } m \text{ Paire} \\ P_{\frac{m-1}{2},n}^{1,(k)} & \text{Si } m \notin \mathcal{R} \text{ Et } m \text{ Impaire} \end{cases} \quad (5.43)$$



Ce qui montre que le signal de correction du PAPR polluera les données utiles ( $m \notin \mathcal{R}$ ). Pour pallier ce problème nous allons proposer un filtrage numérique dans le domaine fréquentiel. Notons aussi que les composantes  $\mathbf{c}_n^{1,(k)}$  et  $\mathbf{c}_n^{2,(k)}$  interfèrent entre elles. Le filtrage que ne proposerons dans ce qui suit conservera cette non orthogonalité entre les composantes  $\mathbf{c}_n^{1,(k)}$  et  $\mathbf{c}_n^{2,(k)}$ .

Soit  $\delta \in [0, 1]$  et  $\mathbf{P}_n^{(k)} = [P_{0,n}^{(k)}, \dots, P_{LM-1,n}^{(k)}]$  le vecteur fréquentiel défini par l'équation suivante :

$$P_{m,n}^{(k)} = \begin{cases} (1 - \delta)C_{m,n}^{(k)} & \text{Si } m \notin \mathcal{R} \\ 0 & \text{Sinon} \end{cases} \quad (5.44)$$

En vertu de l'équation (5.43), l'équation (5.44) devient :

$$P_{m,n}^{(k)} = \begin{cases} (1 - \delta)P_{\frac{m}{2},n}^{2,(k)} & \text{Si } m \notin \mathcal{R} \text{ et } m \text{ paire} \\ (1 - \delta)P_{\frac{m-1}{2},n}^{1,(k)} & \text{Si } m \notin \mathcal{R} \text{ et } m \text{ impaire} \\ 0 & \text{Sinon} \end{cases} \quad (5.45)$$

On remarque que  $\mathbf{P}_n^{(k)}$  est le vecteur contenant les perturbations générées par la composante  $\mathbf{c}_n^{1,(k)}$  sur les porteuses impaires du signal d'intérêt ainsi que les perturbations générées par la composante  $\mathbf{c}_n^{2,(k)}$  sur les porteuses paires du signal d'intérêt. L'objectif du filtrage fréquentiel que nous allons présenter dans ce qui suit est d'atténuer ou de supprimer ces composantes.

Notons que par construction de  $\mathbf{P}_n^{(k)}$ , les composantes  $\mathbf{c}_n^{1,(k)}$  et  $\mathbf{c}_n^{2,(k)}$  ne seront toujours pas respectivement symétrique et anti-symétrique. En effet, le filtrage fréquentiel que nous allons proposer dans ce qui suit consistera à supprimer ou atténuer les perturbations générées par la composante  $\mathbf{c}_n^{1,(k)}$  (respect.  $\mathbf{c}_n^{2,(k)}$ ) sur les porteuses impaires utiles (respect. sur les porteuses paires utiles), ainsi sous l'hypothèse que  $\mathcal{R}$  contient des porteuses paires et impaires, les composantes  $\mathbf{c}_n^{1,(k)}$  et  $\mathbf{c}_n^{2,(k)}$  seront chacune générées à l'aide de toutes les porteuses de  $\mathcal{R}$ . Ces symboles ne seront alors pas symétrique et anti-symétrique. Dans le cas de la TR classique, rappelons que les composantes  $\mathbf{c}_n^{1,(k)}$  et  $\mathbf{c}_n^{2,(k)}$  sont respectivement symétrique et anti-symétrique car elles sont respectivement générées à l'aide des porteuses paires ( $\mathcal{R}^P$ ) et des porteuses impaires ( $\mathcal{R}^I$ ) de  $\mathcal{R}$ . Cette différence est, comme nous l'avons déjà souligné, le point clé de la technique *modified tone reservation*, voir sous section 5.3.2 pour plus de détails.

En posant  $\mathbf{p}_n^{(k)} = \mathbb{F}_{ML}\mathbf{P}_n^{(k)}$ , alors d'après l'équation (B.32) la transformé de Fourier du symbole  $\tilde{\mathbf{c}}_n^{(k)} = \mathbf{c}_n^{(k)} - \mathbf{p}_n^{(k)}$  c'est à dire le vecteur fréquentiel  $\tilde{\mathbf{C}}_n^{(k)} = \mathbf{C}_n^{(k)} - \mathbf{P}_n^{(k)}$  vérifiera la condition suivante :

$$C_{m,n}^{(k)} - P_{m,n}^{(k)} = \sqrt{\frac{1}{2}} \begin{cases} C_{\frac{m}{2},2n}^{1,(k)} + C_{\frac{m}{2},2n+1}^{1,(k)} + P_{\frac{m}{2},n}^{2,(k)} & \text{Si } m \in \mathcal{R} \text{ et Paire } (\frac{m}{2} \in \mathcal{K}^{(0)}) \\ C_{\frac{m-1}{2},2n}^{2,(k)} + C_{\frac{m-1}{2},2n+1}^{2,(k)} + P_{\frac{m-1}{2},n}^{1,(k)} & \text{Si } m \in \mathcal{R} \text{ et Impaire } (\frac{m-1}{2} \in \mathcal{K}^{(1)}) \\ \delta P_{\frac{m}{2},n}^{2,(k)} & \text{Si } m \notin \mathcal{R} \text{ et } m \text{ Paire} \\ \delta P_{\frac{m-1}{2},n}^{1,(k)} & \text{Si } m \notin \mathcal{R} \text{ et } m \text{ Impaire} \end{cases} \quad (5.46)$$

Le schéma de filtrage que nous allons proposer dans cette section repose sur cette équation. Elle nous permettra ainsi, en fonction de  $\delta$  de mener une étude sur un compromis entre PAPR et BER. La Figure (5.7) décrit la structure du filtrage fréquentiel qui permet d'atténuer ou de supprimer les perturbations générées par le signal de correction du PAPR à la sortie de la  $k$ -ième itérations  $\mathbf{c}_n^{(n)}$ . Le paramètre  $\delta$  représente le facteur d'atténuation des perturbations.

De la Figure 5.7, on remarque que le schéma de filtrage ne supprime que les perturbations générées par la composante  $\bar{\mathbf{c}}_n^{1,(k)}$  (respect.  $\bar{\mathbf{c}}_n^{2,(k)}$ ) sur les porteuses **impaires**

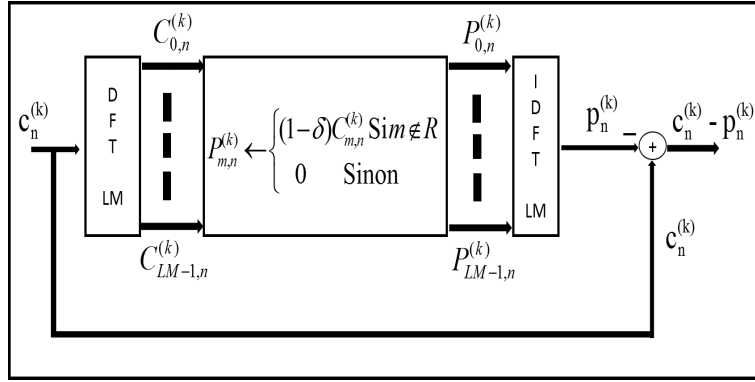


FIGURE 5.7 – Structure du schéma de filtrage ou d’atténuation des perturbations générées par la MTR-GP pour un facteur d’atténuation  $\delta$  donnée

**et utiles** (respect. **paires et utiles**). Ainsi, le schéma de filtrage conserve la non-orthogonalité en fréquence entre ces composantes et donc chacune des composantes exploite bien la totalité des porteuses réservées dans  $\mathcal{R}$ .

Soit  $\tilde{\mathbf{c}}_n^{(k)}$  le signal de correction du PAPR après filtrage à la sortie de la  $k$ -ième itération, i.e,  $\tilde{\mathbf{c}}_n^{(k)} = \mathbf{c}_n^{(k)} - \mathbf{p}_n^{(k)}$ . Soit  $\tilde{\mathbf{C}}_n^{(k)}$  le vecteur fréquentiel associé à ce signal. D’après le schéma de filtrage décrit dans la Figure (5.7), on peut facilement vérifier que la transformée de Fourier du symbole d’intérêt  $\mathbf{x}_n^{(k)}$  à la sortie de la  $k$ -ième itération et après filtrage pour  $\delta \in [0, 1]$  vérifie la relation suivante :

$$X_{m,n}^{(k)} = X_{m,n}^{(k-1)} + \tilde{C}_{m,n}^{(k)} = \begin{cases} \tilde{C}_{m,n}^{(k)} & \text{Si } m \in \mathcal{R} \\ X_{m,n}^{(k-1)} + \delta \tilde{C}_{m,n}^{(k)} & \text{Si } m \in \mathcal{R} \end{cases} \quad (5.47)$$

On rappelle que d’après le schéma de filtrage les composantes du vecteur fréquentiel  $\tilde{\mathbf{C}}_n^{(k)}$  sont définies en fonction de  $\mathbf{C}_n^{(k)}$  par l’équation suivante :

$$\tilde{C}_{m,n}^{(k)} = \sqrt{\frac{1}{2}} \begin{cases} C_{\frac{m}{2},2n}^{1,(k)} + C_{\frac{m}{2},2n+1}^{1,(k)} + P_{\frac{m}{2},n}^{2,(k)} & \text{Si } m \in \mathcal{R} \text{ et Paire } (\frac{m}{2} \in \mathcal{K}^{(0)}) \\ C_{\frac{m-1}{2},2n}^{2,(k)} + C_{\frac{m-1}{2},2n+1}^{2,(k)} + P_{\frac{m-1}{2},n}^{1,(k)} & \text{Si } m \in \mathcal{R} \text{ et Impaire } (\frac{m-1}{2} \in \mathcal{K}^{(1)}) \\ \delta P_{\frac{m}{2},n}^{2,(k)} & \text{Si } m \notin \mathcal{R} \text{ et } m \text{ Paire} \\ \delta P_{\frac{m-1}{2},n}^{1,(k)} & \text{Si } m \notin \mathcal{R} \text{ et } m \text{ Impaire} \end{cases} \quad (5.48)$$

On remarque ainsi que lorsque  $\delta = 0$ , l’équation (5.48) devient

$$\tilde{C}_{m,n}^{(k)} = \sqrt{\frac{1}{2}} \begin{cases} C_{\frac{m}{2},2n}^{1,(k)} + C_{\frac{m}{2},2n+1}^{1,(k)} + P_{\frac{m}{2},n}^{2,(k)} & \text{Si } m \in \mathcal{R} \text{ et Paire } (\frac{m}{2} \in \mathcal{K}^{(0)}) \\ C_{\frac{m-1}{2},2n}^{2,(k)} + C_{\frac{m-1}{2},2n+1}^{2,(k)} + P_{\frac{m-1}{2},n}^{1,(k)} & \text{Si } m \in \mathcal{R} \text{ et Impaire } (\frac{m-1}{2} \in \mathcal{K}^{(1)}) \\ 0 & \text{Si } m \notin \mathcal{R} \text{ et } m \text{ Paire} \\ 0 & \text{Si } m \notin \mathcal{R} \text{ et } m \text{ Impaire} \end{cases} \quad (5.49)$$

Il vient alors que pour  $\delta = 0$ , le signal de correction du PAPR n’entraînera aucune dégradation des données utiles. En outre, on remarque que malgré le filtrage les composantes  $\tilde{\mathbf{c}}_n^1$  et  $\tilde{\mathbf{c}}_n^2$  ne sont pas orthogonales en fréquence, ce qui garantit que ces composantes ne sont respectivement pas symétrique et anti-symétrique malgré le filtrage dès l’instant que  $\mathcal{R}$  contient des porteuses paires et impaires. On voit ainsi, que la méthode MTR permet de relâcher la contrainte d’orthogonalité entre les porteuses paires et impaires. Dans la section 5.6 nous verrons que la méthode MTR permettra de relâcher la contrainte d’orthogonalités entre toutes les porteuses réservées en itérant le processus de décomposition du symbole OFDM  $\mathbf{x}_n$  présenté dans la section 5.3.1. Ce nouveau degré de liberté est le point d’orgue de la MTR.

## 5.5 Implémentation de la MTR-GP avec Filtrage : Compromis BER-PAPR

Dans cette section, nous allons présenter deux approches d'implémentation de la méthode MTR-GP sans dégradation du BER. La première approche consistera, à appliquer le schéma de filtrage défini par la Figure (5.7) à la sortie de chaque itération de l'Algorithme (7). Dans la deuxième approche, la suppression des perturbations, qui n'est rien d'autre qu'une soustraction du signal  $\mathbf{p}_n^{(k)}$  du signal de correction du PAPR  $\mathbf{c}_n^{(k)}$  sera directement incluse dans le problème d'optimisation (5.36). Ainsi cette approche nous permettra de gagner en complexité.

### 5.5.1 Implémentation de la MTR-GP à l'aide d'une FFT : FFT-IFFT-MTR-GP

Cette approche consiste à traiter séparément le calcul du signal de correction et l'atténuation ou la suppression des perturbations générées par celui-ci. Le processus d'atténuation ou de suppression des perturbations comme décrit dans la Figure (5.7) peut être réalisé à l'aide de l'algorithme de la transformée de Fourier rapide. D'où l'appellation FFT-IFFT-MTR-GP. L'Algorithme (8) donne une description détaillée de cette approche.

---

**Algorithm 8** L'algorithme FFT-IFFT-MTR-GP avec ou sans (suivant  $\delta$ ) dégradation du BER

---

**Require:**  $\mathbf{x}_n$  Symbole OFDM avant réduction du PAPR,  $\delta \in [0, 1]$ ,  $\nu$  Pas de descente

**Require:**  $N_{\max}$  Nombre d'itérations maximal,  $A$  le seuil de *clipping* fixé (Amplitude)

**Require:**  $\mathbb{Q} = \mathbb{A}^H$  Notons :  $\mathbf{q}_l$  la  $l$ -ième ligne de  $\mathbb{Q}$

**Ensure:**  $\mathbf{x}_n^{(k)}$  Symbole OFDM après réduction du PAPR à la sortie de la  $k$ -ième itération

$k \leftarrow 0, \mathbf{x}_n^{(0)} = \mathbf{x}_n$

**while**  $\left[ \left( \Theta_A^{(k)} \neq \emptyset \right) \text{ Et } (k \leq N_{\max}) \right]$  **do**

Pour  $l = 0, \dots, LM - 1, \alpha_l^{(k)} \leftarrow x_{n,l}^{(k)} - Ae^{j \arg(x_{n,l}^{(k)})}$

$\mathbf{c}_n^{(k+1)} \leftarrow -\nu \sum_{\{l \in \Theta_A^{(k)}\}} \alpha_l^{(k)} \mathbf{q}_l$

Calculer  $\mathbf{p}_n^{(k+1)}$  à l'aide de la Figure (5.7)

$\tilde{\mathbf{c}}_n^{(k+1)} \leftarrow \mathbf{c}_n^{(k+1)} - \mathbf{p}_n^{(k+1)}$

$\mathbf{x}_n^{(k+1)} \leftarrow \mathbf{x}_n^{(k)} + \tilde{\mathbf{c}}_n^{(k+1)}$

$k \leftarrow k + 1$

**end while**

---

Du fait de l'opération de Filtrage effectuée à chaque itération, la complexité numérique de cet algorithme est de l'ordre de  $\mathcal{O}(N_{\max} LM \log(LM))$ , contrairement à la méthode TR-GP classique ou la MTR-GP avec dégradation (sans filtrage) (Algorithme 7) qui ont une complexité numérique linéaire, i.e,  $\mathcal{O}(N_{\max} LM)$ . Notons qu'on peut envisager de faire sortir le filtrage à l'extérieur de la boucle afin de gagner en complexité. Cependant, puisqu'en pratique le nombre d'itérations est généralement très faible devant  $LM$ , cette stratégie est alors sans grand effet en termes de gain en complexité.

Dans la sous section B.2 de l'Annexe B, nous avons montré que pour une valeur de  $\delta$  donnée, le vecteur fréquentiel du symbole d'intérêt à la sortie de la  $k$ -ième itération et

après filtrage, i.e,  $\mathbf{X}_n^{(k)} = \mathbf{X}_n^{(k-1)} + \tilde{\mathbf{C}}_n^{(k)}$  (cf Algorithme 8) vérifie l'équation suivante :

$$X_{m,n}^{(k)} = X_{m,n}^{(k-1)} + \tilde{C}_{m,n}^{(k)} = \begin{cases} \tilde{C}_{m,n}^{(k)} & \text{Si } m \in \mathcal{R} \\ X_{m,n}^{(k-1)} + \delta \tilde{C}_{m,n}^{(k)} & \text{Si } m \notin \mathcal{R} \end{cases} \quad (5.50)$$

Par analogie, on peut aussi facilement vérifier que le vecteur fréquentiel du symbole d'intérêt à la sortie de la  $k - 1$ -ième itération vérifie aussi l'équation suivante :

$$X_{m,n}^{(k-1)} = X_{m,n}^{(k-2)} + \tilde{C}_{m,n}^{(k-1)} = \begin{cases} \tilde{C}_{m,n}^{(k-1)} & \text{Si } m \in \mathcal{R} \\ X_{m,n}^{(k-2)} + \delta \tilde{C}_{m,n}^{(k-1)} & \text{Si } m \notin \mathcal{R} \end{cases} \quad (5.51)$$

Il vient alors par récurrence, que le vecteur  $\mathbf{X}_n^{(k)}$  est lié au vecteur  $\mathbf{X}_n^{(0)} = \mathbf{X}_n$  qui contient les données à transmettre par l'équation suivante :

$$X_{m,n}^{(k)} = \begin{cases} \sum_{p=1}^k \tilde{C}_{m,n}^{(p-1)} & \text{Si } m \in \mathcal{R} \\ X_{m,n} + \delta \sum_{p=1}^k \tilde{C}_{m,n}^{(p-1)} & \text{Si } m \notin \mathcal{R} \end{cases} \quad (5.52)$$

De cette équation il vient alors que lorsque  $\delta = 0$ , la méthode FFT-IFFT-MTR-GP n'entraînera aucune dégradation sur les données utiles du symbole initial et cela quelque soit le nombre d'itérations effectué. Par contre lorsque  $\delta \neq 0$ , la méthode FFT-IFFT-MTR-GP dégradera le BER. En outre, cette dégradation augmentera lorsque le nombre d'itérations effectué augmentera.

Dans la sous section suivante, nous allons présenter une approche efficace pour réaliser la méthode MTR-GP sans dégradation.

### 5.5.2 Implémentation efficace de la méthode MTR-GP

Dans cette approche le filtrage ou extraction des perturbations générées par le signal de correction du PAPR va être directement inclus dans le problème d'optimisation (5.36) afin de gagner en complexité sans aucune perte en termes de performances en réduction du PAPR.

Pour un signal de correction  $\mathbf{c}_n$  solution du problème d'optimisation (5.36) donné, la suppression des perturbations générées par ce dernier consiste à extraire de ce dernier le signal  $\mathbf{p}_n$  généré par transformée de Fourier inverse des composantes fréquentielles du signal temporel  $\mathbf{c}_n$  qui interfèrent avec les porteuses utiles du signal d'intérêt dont on veut réduire le PAPR, voir Figure 5.7. De ce fait, le problème d'optimisation (5.36) peut être reformulé comme dans l'équation (5.36), en tenant compte de l'extraction des perturbations générées comme suit.

$$\min_{\check{\mathbf{C}}_n} \left( \|\mathbf{x}_n + \mathbb{A}\check{\mathbf{C}}_n - \mathbf{p}_n - f(\mathbf{x}_n + \mathbb{A}\check{\mathbf{C}}_n - \mathbf{p}_n, A)\|_2^2 \right) \quad (5.53)$$

Nous attirons l'attention du lecteur sur le fait que le signal  $\mathbf{p}_n$  dépend de la variable d'optimisation  $\check{\mathbf{C}}$  comme nous le verrons plus clairement dans ce qui suit. Posons  $\mathbf{P}_n$  le vecteur fréquentiel associé au signal  $\mathbf{p}_n$ .

Soit  $\mathbb{F}_{M,\mathcal{R}^c}$  la sous matrice de la matrice  $\mathbb{F}_{ML}$  ne contenant que les colonnes qui n'appartiennent pas à  $\mathcal{R}$ . Autrement dit cette matrice contient les colonnes incluses dans  $\mathcal{I}_{OOB}$  et celles incluses dans  $\mathcal{I}_{IB}$  sauf celles indexées dans  $\mathcal{R}$ . Rappelons que La matrice  $\mathbb{F}_{ML}$

ainsi que les ensembles  $\mathcal{I}_{OOB}$  et  $\mathcal{I}_{IB}$  sont définis dans la section 2.2 du chapitre 2. De la Figure (5.7), il vient alors que le vecteur  $\mathbf{P}_n$  est défini comme suit :

$$\mathbf{P}_n = (1 - \delta) (\mathbb{F}_{M, \mathcal{R}^c})^H (\mathbb{A} \check{\mathbf{C}}_n) \quad (5.54)$$

Il s'ensuit alors que le vecteur temporel associé est défini comme suit :

$$\mathbf{p}_n = \mathbb{F}_{M, \mathcal{R}^c} \left[ (1 - \delta) (\mathbb{F}_{M, \mathcal{R}^c})^H (\mathbb{A} \check{\mathbf{C}}_n) \right] \quad (5.55)$$

Par associativité du produit matriciel, on a alors :

$$\mathbf{p}_n = \left[ (1 - \delta) \mathbb{F}_{M, \mathcal{R}^c} (\mathbb{F}_{M, \mathcal{R}^c})^H \mathbb{A} \right] \check{\mathbf{C}}_n \quad (5.56)$$

En remplaçant l'expression de  $\mathbf{p}_n$  dans le problème d'optimisation (5.53) on obtient le problème suivant :

$$\min_{\check{\mathbf{C}}_n} \left( \|\mathbf{x}_n + \tilde{\mathbb{A}} \check{\mathbf{C}}_n - f(\mathbf{x}_n + \tilde{\mathbb{A}} \check{\mathbf{C}}_n, A)\|_2^2 \right) \quad (5.57)$$

Avec :

$$\tilde{\mathbb{A}} = \mathbb{A} - (1 - \delta) \mathbb{F}_{M, \mathcal{R}^c} (\mathbb{F}_{M, \mathcal{R}^c})^H \mathbb{A} \quad (5.58)$$

Ce problème peut être résolu à l'aide du gradient projeté comme dans [126] à l'aide de l'Algorithme (7) en prenant comme matrice de projection la matrice  $\mathbb{Q} = \tilde{\mathbb{A}} \tilde{\mathbb{A}}^H$ . Comme nous l'avons souligné précédemment, l'insertion du filtrage dans le problème d'optimisation permet de gagner considérablement en complexité. On remarque que pour  $\delta = 1$ , les problèmes d'optimisations (5.36) et (5.57) sont identiques. Rappelons que d'après le schéma de filtrage fréquentiel décrit dans la Figure (5.7), on aura pour  $\delta = 0$  aucune dégradation du BER alors que pour  $\delta \in ]0, 1]$  le BER sera dégradé. Dans nos résultats de simulation qui seront présentés dans la sous section suivante nous désignerons par FFT-IFFT-MTR-GP la méthode décrite par l'Algorithme (8) et par MTR-GP la méthode décrite par le problème d'optimisation (5.57). Dans un premier temps nous allons montrer que ces deux méthodes ont les mêmes performances en termes de réduction du PAPR car elles ne diffèrent que par la manière dont le filtrage est réalisé. Par la suite, nous ne travaillerons qu'avec la méthode MTR-GP du fait de sa faible complexité.

### 5.5.3 Performances en termes de réduction du PAPR et de dégradation du BER

Dans cette section nous allons évaluer les performances en termes de réduction du PAPR et de dégradation du BER des méthodes proposées via une comparaison avec la méthode TR-GP classique. Une discussion sur un compromis entre PAPR-BER sera aussi menée pour différentes valeurs de  $\delta$ . L'environnement de simulation sera un système OFDM comportant  $M = 256$  porteuses au total dont  $N_{\mathcal{R}} = 12$  seront réservées pour porter le signal de correction et modulant des données issues d'une constellation 16-QAM. Afin d'avoir une bonne approximation du PAPR, nous travaillerons avec un facteur de sur-échantillonnage de  $L = 4$ . Concernant la distribution des porteuses réservées 2 cas de *mapping* seront considérés. Nous utiliserons  $\mathcal{R} = [109, 110, 123, 125, 126, 127, 129, 132, 138, 145, 185, 222]$  solution de l'Algorithme 11 (*Random Set Optimizer*) sur un nombre de cas égal à  $10^6$  et le *Contiguous Tones-Middle Side* voir équation (5.59)

$$\mathcal{R} = \left[ \underbrace{\frac{M}{2} - \left(\frac{N_{\mathcal{R}}}{2} - 1\right), \frac{M}{2} - \left(\frac{N_{\mathcal{R}}}{2} - 2\right), \dots, \frac{M}{2} + \frac{N_{\mathcal{R}}}{2}}_{\text{Contiguous Tones-Middle Side}} \right] \quad (5.59)$$

Le choix de la structure *Contiguous Tones-Middle Side* est motivé par le fait que la structure des porteuses réservées dans le cadre de la MTR après décomposition, voir équation (5.25), sera identique à celle de  $\mathcal{R}$ . Ainsi, la comparaison entre la MTR et la TR ne sera pas beaucoup influencée par la distribution des porteuses associées aux deux schémas d'insertion. Notons qu'une étude sur l'influence du choix de  $\mathcal{R}$  sur les performances de la méthode TR-GP a été menée dans l'Annexe A. À cela, on peut aussi ajouter qu'avec de telles structures de *mapping*, les pourcentages relatifs des porteuses paires et impaires avant et après décomposition seront identiques, ainsi l'influence de la parité des porteuses ne sera pas un facteur déterminant dans la comparaison entre les méthodes MTR et TR [36], voir la section 4.2.2 du chapitre 4 dans laquelle nous avons étudié l'influence de la parité des porteuses réservées sur les performances de la méthode TR-GP.

Concernant le choix de la structure *Random Set Optimizer* qui est construit dans le but d'accroître les performances de la méthode TR-GP, voir Annexe A, le but est de montrer que la méthode MTR constitue une amélioration de la méthode indépendamment de l'influence que peut avoir les porteuses réservées après projection.

### 5.5.3.1 Cas *Random Set Optimizer*

Pour  $N_{\max} = 10$ , les Figures (5.8) et (5.9) comparent les CCDF des méthodes FFT-IFFT-MTR-GP (Algorithme 8), MTR-GP (Algorithme 7) et la méthode TR-GP classique ([126], Algorithme 4). Sur la Figure 5.9 on a  $\delta = 0$  (cas avec filtrage) et sur la Figure 5.8 on a  $\delta = 1$  (cas sans filtrage). Le seuil d'écrêtage utilisé est  $\rho = 5\text{dB}$ .

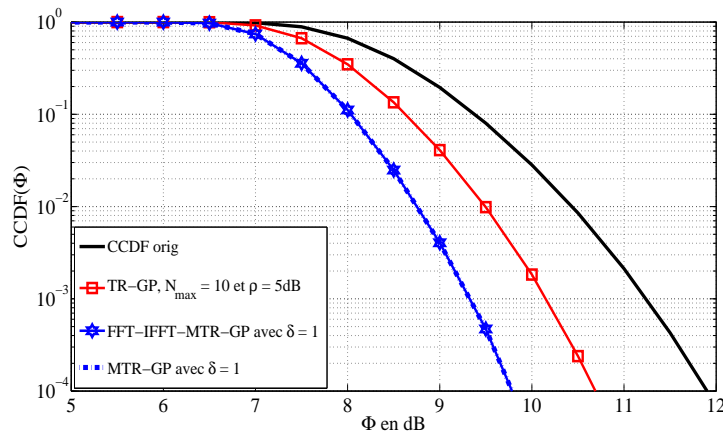


FIGURE 5.8 – Performances en termes de réduction de PAPR des méthodes FFT-IFFT-MT-GP, MTR-GP et TR-GP avec  $\rho = 5\text{dB}$  et après 10 itérations et  $\delta = 1$  (Sans Filtrage)

Tout d'abord, notons que les résultats de simulation des Figures (5.9), (5.8) confirment que les performances en réduction du PAPR des méthodes FFT-IFFT-MTR-GP et MTR-GP sont identiques. Ces résultats sont tout à fait prévisibles puisque la méthode MTR-GP n'est qu'une implémentation efficace de de la méthode FFT-IFFT-MTR-GP. En effet elle permet de se passer de l'opération de filtrage décrite dans la Figure (5.7) en l'incluant directement dans le problème d'optimisation. Concernant la comparaison avec la méthode TR-GP, on remarque qu'avec  $\delta = 0$  ou 1 les méthodes que nous avons proposées sont plus performantes que la méthode TR-GP classique. En effet, pour  $\delta = 1$ , les méthodes que nous avons proposées permettent de gagner environ 0.2dB (dans le cas  $\delta = 0$ , Figure 5.9) et 0.8dB (dans le cas  $\delta = 1$ , Figure 5.8) de gain en réduction du PAPR à  $10^{-4}$ . On remarque ainsi, que le filtrage entraîne une diminution des performances en réduction du



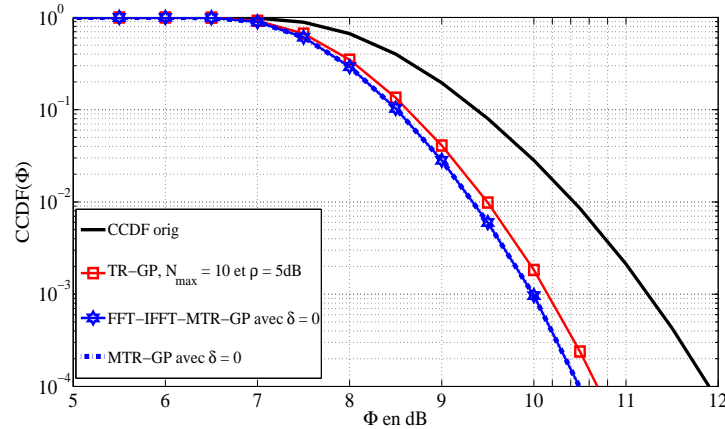


FIGURE 5.9 – Performances en termes de réduction de PAPR des méthodes FFT-IFFT-MT-GP, MTR-GP et TR-GP avec  $\rho = 5$ dB et après 10 itérations et  $\delta = 0$  (Avec Filtrage)

PAPR. Notons néanmoins que le cas  $\delta = 0$  est sans dégradation du BER et qu'en outre sur les Figures 5.9 et 5.8, nous n'avons regardé que le cas  $\rho = 5$ dB et avec  $N_{max} = 10$ . Ainsi dans ce qui suit nous allons regarder :

1. L'influence du seuil d'écrêtage sur les performances des méthodes proposées
2. L'influence du nombre d'itérations
3. L'influence du facteur d'atténuation du bruit  $\delta$  sur les performances en PAPR. Plus précisément nous regarderons les cas  $\delta = 0$ ,  $\delta = 0.25$ ,  $\delta = 0.5$  et  $\delta = 1$

Pour ce faire, nous allons dans ce qui suit, comparer les PAPR à  $10^{-4}$  de la CCDF en fonction du nombre d'itérations et pour différentes valeurs de  $\delta$  et pour différents seuils d'écrêtage  $\rho$ . Puisque les méthodes FFT-IFFT-MTR-GP et MTR-GP sont identiques nous utiliserons seulement la méthode MTR-GP qui a la même complexité numérique que la méthode TR-GP. Cette méthode sera dénommée par 1-MTR-GP dans les résultats de simulation qui suivront ainsi que dans le reste de ce chapitre. Voir la section (5.6) pour comprendre la logique de cette dénomination.

### 5.5.3.1.a Influence de $\delta$ , de $\rho$ et du nombre d'itérations sur les performances en réduction du PAPR de la méthode 1-MTR-GP

Les Figures 5.10 et 5.11 comparent les PAPR à  $10^{-4}$  de la CCDF des méthodes TR-GP et 1-MTR-GP pour différents  $\delta$  en fonction du nombre d'itérations (pour  $\rho = 6$ dB) et en fonction du seuil d'écrêtage (avec  $N_{max} = 20$ ).

Les résultats de simulations de la Figure 5.10 montrent que la méthode 1-MTR-GP est plus performante que la méthode TR-GP en terme de réduction du PAPR et cela quelque soit  $\delta$ , le coefficient d'atténuation des perturbations générées par le signal de correction, voir Figure (5.10). Notons aussi que plus  $\delta$  est petit plus les performances en réduction du PAPR se dégradent. Sur la Figure (5.10), on remarque que pour  $\delta = 1$ , la méthode 1-MTR-GP permet de gagner environ un gain en PAPR de 1dB après  $N_{max} = 20$  par rapport à la méthode TR-GP. Cette amélioration du gain en réduction du PAPR diminue au fur et à mesure que le  $\delta$  est petit. Par exemple, pour  $\delta = 0$ , c'est à dire après suppression des perturbations générées par le signal de correction du PAPR, le gain en PAPR par rapport à la méthode TR-GP est d'environ 0.3dB pour  $N_{max} = 20$ .



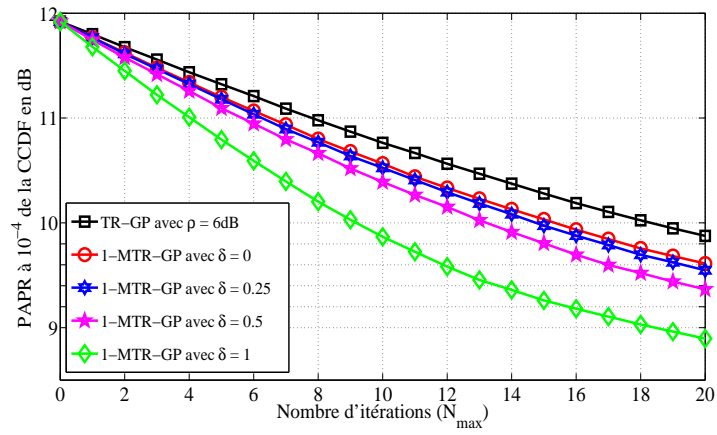


FIGURE 5.10 – PAPR à  $10^{-4}$  en fonction de  $N_{\max}$  des méthodes 1-MTR-GP et TR-GP avec  $\rho = 6\text{dB}$

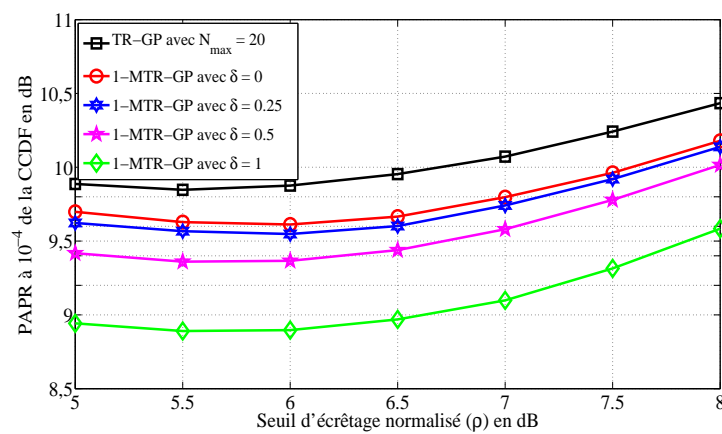


FIGURE 5.11 – PAPR à  $10^{-4}$  de la CCDF en fonction de  $\rho$  des méthodes 1-MTR-GP et TR-GP avec  $N_{\max} = 20$

Sur la Figure 5.11, on note aussi que la méthode 1-MTR-GP est plus performante que la méthode TR-GP classique et cela quel que soit le seuil d'écrêtage utilisé et quel que le coefficient d'atténuation  $\delta$ . Sur cette figure, on note aussi que les courbes de performances en réduction du PAPR en fonction du seuil d'écrêtage ne sont pas monotones. Pour la méthode TR-GP, le meilleur résultat (PAPR le plus faible) est obtenu grâce au seuil  $\rho = 5.5\text{dB}$ . Pour la méthode 1-MTR-GP pour  $\delta = 0$  et  $\delta = 1$  les meilleurs résultats sont respectivement obtenus avec les seuils  $\rho = 6\text{dB}$  et  $\rho = 5.5\text{dB}$ . Ce constat nous servira dans la sous section 5.5.3.1.d pour faire le bilan sur le compromis entre performances en réduction du PAPR et variation de la puissance moyenne.

Dans ce qui suit nous allons évaluer nos méthodes en termes de variations (augmentation) de la puissance moyenne après réduction du PAPR.

### 5.5.3.1.b Influence de $\delta$ , de $\rho$ et du nombre d'itérations sur les performances en termes de variation de la puissance moyenne

Les Figures 5.12 et 5.13 comparent respectivement les variations de la puissance moyenne ( $\Delta E$ ) induites par les méthodes TR-GP et 1-MTR-GP pour différents  $\delta$  en fonction du nombre d'itérations (pour  $\rho = 6\text{dB}$ ) et en fonction du seuil d'écrêtage (avec  $N_{\max} = 20$ ).

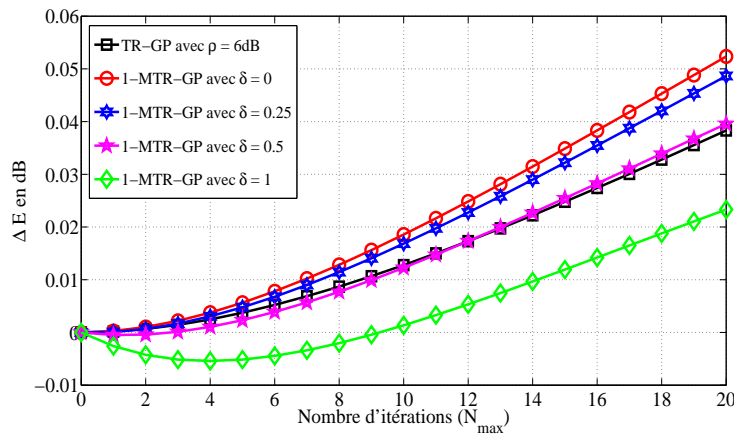


FIGURE 5.12 – Variations de la puissance moyenne  $\Delta E$  en fonction de  $N_{\max}$  des méthodes 1-MTR-GP et TR-GP avec  $\rho = 6\text{dB}$

Les résultats de simulation de la Figure 5.12 montrent que plus on augmente le nombre d'itérations, plus la puissance moyenne du signal après réduction du PAPR augmente dans le cas des méthodes TR-GP et 1-MTR-GP avec  $\delta = 0, 0.25$  et  $0.5$ . Dans le cas de la méthode 1-MTR-GP avec  $\delta = 1$ , on note que  $\Delta E$  décroît au début avant d'augmenter en fonction du nombre d'itérations. On remarque aussi que la méthode 1-MTR-GP avec  $\delta = 0$  (avec filtrage) augmente la puissance du signal plus que la méthode TR-GP classique.

Sur la Figure 5.13, on remarque que la méthode 1-MTR-GP pour  $\delta = 0$  et  $\delta = 0.25$  augmente la puissance moyenne du signal plus que la méthode TR-GP, alors que pour  $\delta = 0.5$ , la méthode 1-MTR-GP et la méthode TR-GP occasionne quasiment les mêmes variations de la puissance quel que soit le seuil  $\rho$ . Pour le cas  $\delta = 1$  par contre, on note que la méthode TR-GP augmente plus la puissance moyenne que la méthode 1-MTR-GP. Notons aussi, qu'à la différence de la Figure 5.11 où les courbes du PAPR à  $10^{-4}$  en fonction de  $\rho$  ne sont pas monotones, les courbes de  $\Delta E$  en fonction de  $\rho$  sont décroissantes. Autrement dit, plus  $\rho$  est petit, plus  $\Delta E$  est grand. Ce constat nous poussera à mener certaines de nos comparaisons (en termes de réduction du PAPR et de variation de la

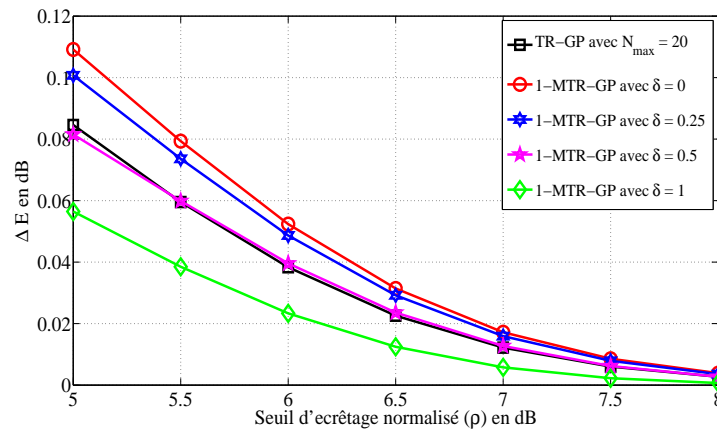


FIGURE 5.13 – Variations de la puissance moyenne  $\Delta E$  en fonction de  $\rho$  des méthodes 1-MTR-GP et TR-GP avec  $N_{\max} = 20$

puissance moyenne) avec des seuils différents. Autrement dit, pour chaque méthode nous prendrons le seuil permettant d'obtenir le meilleur PAPR (le PAPR le plus petit)

L'idée d'atténuer les perturbations ( $\delta \in ]0, 1]$ ) en lieu et place de les supprimer totalement ( $\delta = 0$ ) grâce au schéma décrit dans la Figure (5.7) avait pour but de permettre un éventuel compromis entre performances en réduction du PAPR et dégradation du BER. Ainsi, dans ce qui suit nous allons voir les performances en termes de dégradation du BER des méthodes 1-MTR-GP en fonction du nombre d'itérations, du coefficient d'atténuation  $\delta$  et aussi du seuil d'écrêtage. L'autre objectif des résultats de simulation à venir est de confirmer que lorsque  $\delta = 0$ , la méthode 1-MTR-GP ne dégrade pas le BER tout comme la méthode TR-GP.

### 5.5.3.1.c Influence de $\delta$ , de $\rho$ et du nombre d'itérations sur les performances en termes de dégradation du BER

Dans cette section, nous supposons que le canal est de type AWGN. L'idée ici est seulement de quantifier la qualité du signal à la sortie de l'émetteur.

La Figure 5.14 donne les courbes du BER des méthodes TR-GP et 1-MTR-GP avec  $\delta = 0$ ,  $\delta = 1$  après 20 itérations et pour  $\rho = 6$  dB.

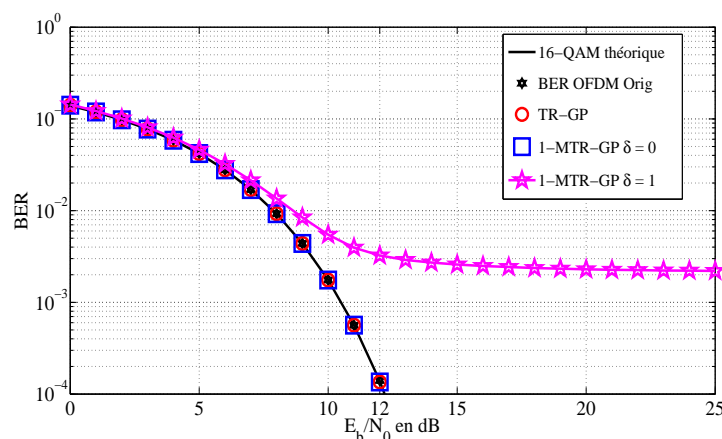


FIGURE 5.14 – Courbes du BER avant et après réduction du PAPR avec la méthode 1-MTR-GP pour  $\delta = 0$  et 1 et la méthode TR-GP avec  $\rho = 6$  dB et après 20 itérations

Comme on s’y attendait, on remarque que les courbes des méthodes TR-GP et 1-MTR-GP avec  $\delta = 0$  se superposent avec celle du BER 16-QAM théorique et celle du BER OFDM sans réduction du PAPR (simulation). Cela montre que la méthode 1-MTR-GP avec  $\delta = 0$ , tout comme la méthode TR-GP ne dégrade pas le BER du signal à l’émission. Cependant, on note que la méthode 1-MTR-GP avec  $\delta = 1$  entraîne de sévères dégradations du BER (présence d’un pallier). Notons que le fait que cette méthode dégrade le BER était prévisible, voir Annexe B où nous avons montré que sans filtrage la méthode 1-MTR-GP dégradera le BER. Dans ce qui suit nous allons à présent regarder l’influence du coefficient d’atténuation  $\delta$ , du seuil d’écrtage  $\rho$  et du nombre d’itérations effectué, sur les dégradations du BER.

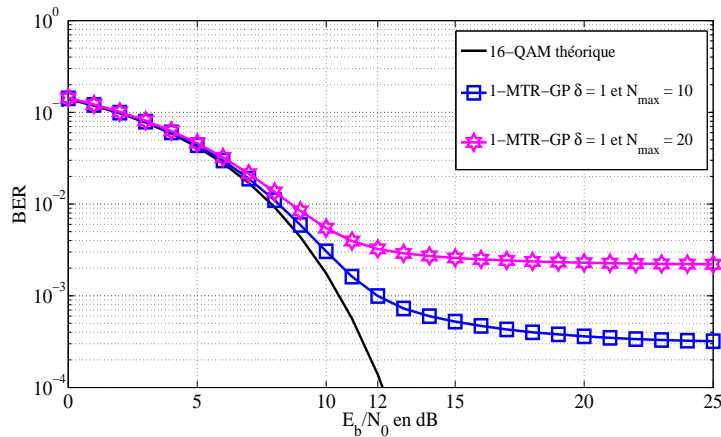


FIGURE 5.15 – Influence du nombre d’itérations effectué sur les dégradations du BER induite par la méthodes 1-MTR-GP avec  $\delta = 1$  :  $\rho = 6\text{dB}$ .

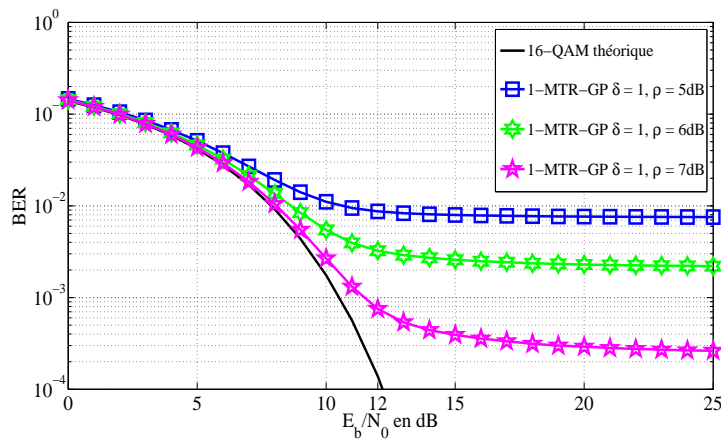


FIGURE 5.16 – Influence du seuil d’écrtage utilisé sur les dégradations du BER induite par la méthodes 1-MTR-GP avec  $\delta = 1$  :  $N_{max} = 20$ .

Les résultats de simulation de la Figure 5.15 montrent que plus on augmente le nombre d’itérations plus le BER est dégradé (Figure 5.15). Ce résultat confirme les analyses théoriques présentées dans la sous section 5.5.1. En effet, nous y avons montré via l’équation (5.52) que les perturbations générées par le signal de correction du PAPR dépendent du nombre d’itérations lorsque  $\delta \in ]0, 1]$ . On note aussi le même comportement concernant l’influence du seuil d’écrtage. En effet, on remarque sur la Figure 5.16, que plus le seuil d’écrtage est sévère (petit) plus les dégradations occasionnées par la méthode

1-MTR-GP sont sévères. Dans ce qui suit nous allons maintenant regarder l'influence du facteur d'atténuation  $\delta$  sur les dégradations du BER.

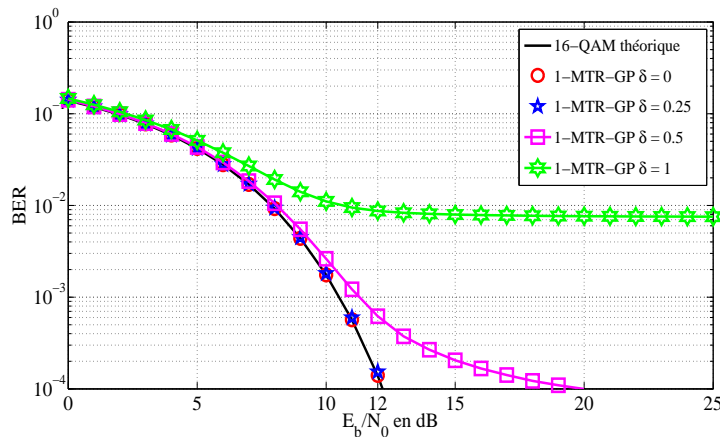


FIGURE 5.17 – Influence du facteur d'atténuation  $\delta$  sur les dégradations du BER induites par la méthode 1-MTR-GP avec  $\delta = 1$  :  $\rho = 5\text{dB}$  et  $N_{max} = 20$ .

Les résultats de simulation de la Figure 5.17 confirment que  $\delta$  permet d'atténuer les dégradations du BER, d'où son appellation de facteur d'atténuation. En effet, on remarque que plus  $\delta$  est petit, plus les dégradations du BER sont moins sévères. On note d'ailleurs que pour  $\delta = 0.25$ , il n'y a quasiment pas de dégradations du BER. Ces résultats sont bien en accord avec les courbes sur les performances en réduction du PAPR, où on peut constater que pour les méthodes 1-MTR-GP avec  $\delta = 0$  et  $\delta = 0.25$ , on a quasiment les mêmes performances en réduction du PAPR, voir Figures 5.10 et 5.11.

Au regard des fortes dégradations du BER occasionnées lorsque  $\delta > 0$  pour une amélioration du PAPR relativement faible, nous allons dans ce qui suit ne considérer que le cas  $\delta = 0$ , i.e le cas sans dégradation du BER.

Dans toute la suite de ce rapport de thèse nous désignerons par 1-MTR-GP la méthode sans dégradation (sans préciser que  $\delta = 0$ ).

#### 5.5.3.1.d Compromis performances en réduction du PAPR et augmentation de la puissance moyenne

Comme nous l'avons mentionné dans la sous section 5.5.3.1.a, les courbes PAPR à  $10^{-4}$  des méthodes TR-GP et 1-MTR-GP en fonction de  $\rho$  ne sont pas monotones (voir Figure 5.11) alors que celles de  $\Delta E$  en fonction de  $\rho$  le sont (voir Figure 5.13), plus précisément  $\Delta E$  augmente lorsque  $\rho$  diminue. Ainsi, dans ce qui suit nous allons comparer les PAPR à  $10^{-4}$  ainsi que les variations de la puissance induites ( $\Delta E$ ) des méthodes TR-GP et 1-MTR-GP en fonction du nombre d'itérations en utilisant pour chacune d'elles le seuil optimal (seuil donnant le meilleurs PAPR après 20 itération). Ainsi, pour la méthode TR-GP ce seuil est  $\rho = 5.5\text{dB}$  et pour la méthode 1-MTR-GP on a  $\rho = 6\text{dB}$ , voir Figure 5.11.

Les résultats de simulation des Figures 5.18 et 5.19 montrent que la méthode 1-MTR-GP peut permettre de gagner aussi bien en PAPR qu'en termes d'augmentation de la puissance moyenne. En effet, on remarque sur la Figure 5.18 que la méthode 1-MTR-GP avec  $\rho = 6\text{dB}$  est plus performante que la méthode TR-GP avec  $\rho = 5.5$  ou  $6\text{dB}$ . Sur la Figure 5.19 on remarque que la méthode 1-MTR-GP avec  $\rho = 6\text{dB}$  augmente moins la puissance moyenne que la méthode TR-GP avec  $\rho = 5.5\text{dB}$ . Cependant, on note qu'à seuil d'écrtage égaux la méthode 1-MTR-GP augmente la puissance moyenne plus que

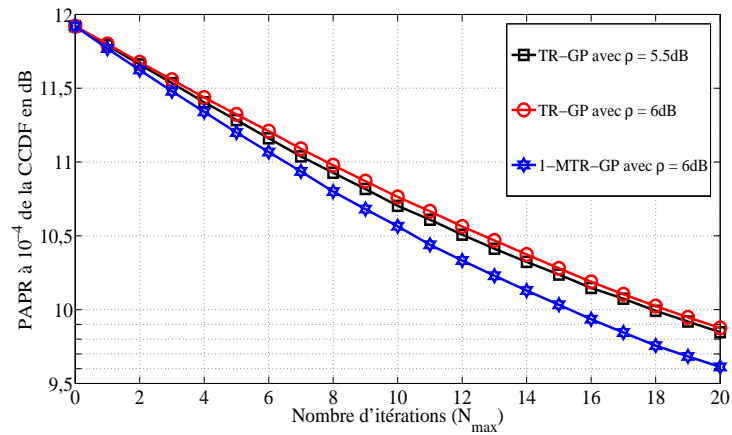


FIGURE 5.18 – Performances en réduction du PAPR des méthodes TR-GP et 1-MTR-GP en fonction du nombre d'itérations : Comparaison à seuil optimaux

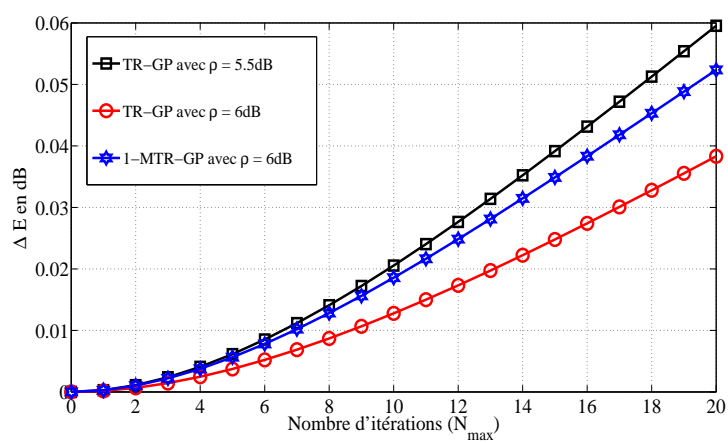


FIGURE 5.19 – Augmentation de la puissance moyenne induites par les méthodes TR-GP et 1-MTR-GP en fonction du nombre d'itérations : Comparaison à seuil optimaux

la méthode TR-GP, ce qui est tout à fait en accord avec le principe des méthode basées sur la *Tone Reservation*.

Dans la section suivante nous allons évaluer les performances en réduction du PAPR dans le cas ou le *mapping* des porteuses réservées est de type *Contiguous Tones-Middle Side* voir équation (5.59).

### 5.5.3.2 Cas *Contiguous Tones-Middle Side*

Dans cette sous section, nous allons comparer les méthodes TR-GP et 1-MTR-GP avec différents types de *mapping*. Notons que dans l'Annexe A une étude sur l'influence du jeu de porteuses réservées sur les performances de la méthode TR-GP a été effectuée comme complément du chapitre 4 dans lequel nous avons présenté nos contributions sur la thématique. Les résultats de simulation présentés dans cette section montrent que le *Contiguous Tones-Middle* est meilleur que les structures *Contiguous Tones-Right Side* et *Contiguous Tones-Left Side*. Ainsi, dans cette section nous allons seulement comparer le *Random Set Optimizer* avec le *Contiguous Tones-Middle*, défini dans l'équation (5.59).

Les Figures (5.20) et (5.21) comparent les performances en termes de réduction du PAPR des méthodes 1-MTR-GP et TR-GP avec  $\rho = 6\text{dB}$  dans les deux cas de *mapping*, i.e, pour  $\mathcal{R} = [121, \dots, 128, 129, \dots, 136]$  (*Contiguous Tone-Middle Side*) et le cas *Random Set Optimizer*.

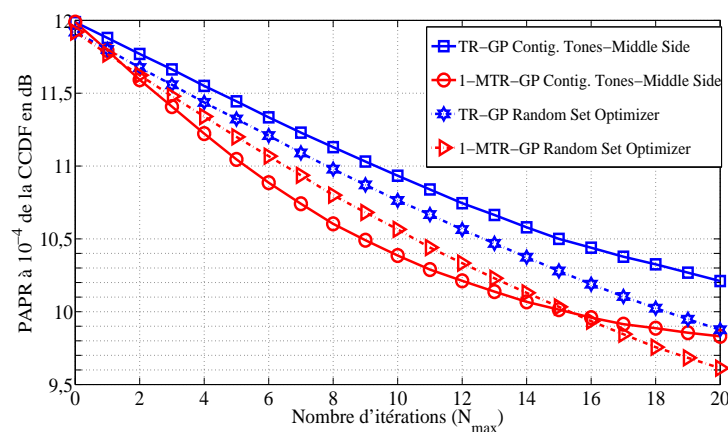


FIGURE 5.20 – PAPR à  $10^{-4}$  des méthodes 1-MTR-GP et TR-GP en fonction du nombre d'itérations et en fonction du type de *mapping* avec  $\rho = 6\text{dB}$

Tout d'abord on remarque que la méthode 1-MTR-GP reste toujours plus performante que la méthode TR-GP, voir Figure (5.20) pour chaque cas de *mapping* (comparaison avec le même *mapping*). Concernant la méthode TR-GP, les résultats de simulation montrent que le *Random Set Optimizer* est plus efficace en termes de réduction du PAPR que le *Contiguous Tones-Middle Side*. En outre, on remarque que plus le nombre d'itérations augmente plus le cas *Random Set Optimizer* est meilleur. Ce résultat est en accord avec l'étude menée sur le *Random Set Optimizer* dans l'Annexe A. En effet, l'algorithme *Random Set Optimizer* (voir Algorithme 11 sous section A.3.1) consiste à chercher le jeu de porteuses qui minimise au maximum les *peaks* secondaires de chaque vecteur colonne de la matrice de projection de la méthode TR-GP. Le but étant ainsi de maximiser la capacité de réduction des *peaks* au dessus de seuil prédéfini tout en minimisant le phénomène d'apparition de nouveaux *peaks*. Les résultats de la Figure 5.21 confirment ce fait car on remarque que les deux types de *mapping* occasionnent quasiment les mêmes variations de puissance alors que le *Random Set Optimizer* améliore significativement le PAPR.



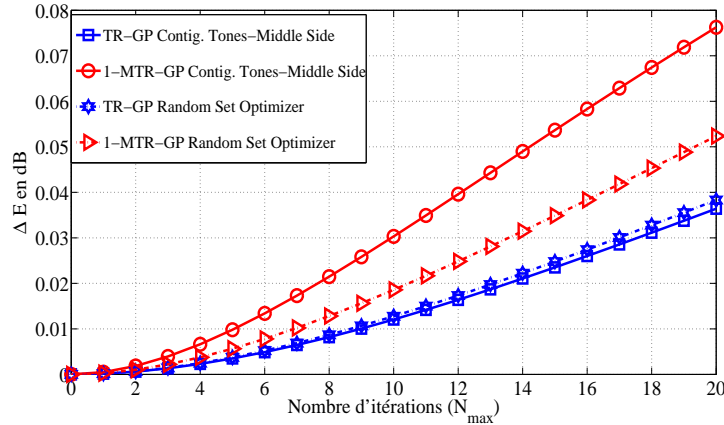


FIGURE 5.21 – Variations de la puissance moyenne induites par les méthodes 1-MTR-GP et TR-GP en fonction du nombre d'itérations et en fonction du type de *mapping* avec  $\rho = 6\text{dB}$

Dans le cas de la méthode 1-MTR-GP, les résultats de simulations montrent que le *Contiguous Tones-Middle Side* est plus performant lorsque le nombre d'itérations est plus petit ( $\leq 15$ ) et moins performant au delà des 15 itérations. Cependant en termes d'augmentation de la puissance moyenne, on remarque sur la Figure (5.21) que le *Random Set Optimizer* permet de réduire l'augmentation de la puissance moyenne par apport au cas *Contiguous tones-Middle Side*. Ces résultats illustrent toute l'importance de bien choisir la disposition des porteuses réservées pour la réduction du PAPR. Le *Random Set Optimizer* étant dédié à améliorer les performances de la méthode TR-GP, il serait important comme nous l'avons mentionné dans les perspectives, de mener une étude pour une construction optimale des porteuses dédiées à la réduction du PAPR dans le cadre de la MTR.

## 5.6 Généralisation de la MTR

Dans la section (5.3), nous avons montré que la méthode 1-MTR-GP permet de calculer le signal de correction en relâchant la contrainte de symétrie et d'anti symétrie de ces composantes  $\bar{\mathbf{c}}_n^1$  et  $\bar{\mathbf{c}}_n^2$ . Pour ce faire, nous avons utilisé la décomposition décrite dans la section 5.3.1 pour construire les composantes  $\bar{\mathbf{c}}_n^1$  et  $\bar{\mathbf{c}}_n^2$  en utilisant les projetées des porteuses réservées de  $\mathcal{R}$  du symbole d'intérêt  $\mathbf{x}_n$  sur les composantes  $\mathbf{x}_{2n}^1$ ,  $\mathbf{x}_{2n+1}^1$ ,  $\mathbf{x}_{2n}^2$  et  $\mathbf{x}_{2n+1}^2$  obtenues par décomposition de ce symbole d'intérêt, voir section 5.3.1. La généralisation de la MTR se donne pour objectif d'étendre la projection des porteuses de  $\mathcal{R}$  en décomposant les symboles  $\mathbf{x}_{2n}^1$ ,  $\mathbf{x}_{2n+1}^1$ ,  $\mathbf{x}_{2n}^2$  et  $\mathbf{x}_{2n+1}^2$  de manière identique avec le symbole  $\mathbf{x}_n$ .

Dans la section suivante, nous allons brièvement traiter la double décomposition du symbole  $\mathbf{x}_n$ , i.e, la décomposition des symboles  $\mathbf{x}_{2n}^1$ ,  $\mathbf{x}_{2n+1}^1$ ,  $\mathbf{x}_{2n}^2$  et  $\mathbf{x}_{2n+1}^2$ . Nous aborderons ensuite la MTR-GP associée après cette décomposition. Elle sera désignée par 2-MTR-GP.

### 5.6.1 Double décomposition du symbole $\mathbf{x}_n$ et principe de la méthode 2-MTR-GP associée

Tout d'abord rappelons que dans ce chapitre, et plus généralement dans tout le document, l'indice temporel  $n$  est défini relativement au temps symbole du signal considéré.

En d'autre termes si  $s(t)$  et  $r(t)$  désigne des signaux multiporteuses de durée symbole respectivement égal à  $T_s$  et  $T_r$ , alors,  $s_n(t)$  et  $r_n(t)$  désignent respectivement les symboles émis aux instants  $nT_s$  et  $nT_r$ . Ainsi, si  $T_s = pT_r$  ( $p$  un entier positif), alors le symbole de  $r(t)$  ayant le même support temporel que le symbole  $s_n(t)$  sera  $r_{pn}(t)$ . La compréhension de cette convention de notation est d'un intérêt capital dans ce chapitre, car elle permettra de comprendre les notations des indices temporels des symboles obtenus après décomposition du symbole  $\mathbf{x}_n$ .

Dans la section 5.3.1, nous avons montré que le symbole OFDM  $x_n(t)$  peut être décomposé comme étant la sommation des symboles  $x_{2n}^1(t)$ ,  $x_{2n+1}^1(t)$ ,  $x_{2n}^2(t)$  et  $x_{2n+1}^2(t)$  via l'équation suivante :

$$x_n(t) = \begin{cases} x_{2n}^1(t) + x_{2n}^2(t) & \text{Si } t \in [nT_u, nT_u + \frac{T_u}{2}] \\ x_{2n+1}^1(t) + x_{2n+1}^2(t) & \text{Si } t \in [nT_u + \frac{T_u}{2}, (n+1)T_u] \end{cases} \quad (5.60)$$

avec, on le rappelle,  $x_{2n}^1(t)$ ,  $x_{2n+1}^1(t)$ ,  $x_{2n}^2(t)$  et  $x_{2n+1}^2(t)$  des symboles multiporteuses de durée  $T_1 = \frac{T_u}{2}$  et comportant  $M_1 = \frac{M}{2}$  porteuses. Plus précisément les symboles  $x_{2n}^1(t)$  et  $x_{2n+1}^1(t)$  sont deux symboles consécutifs d'un signal OFDM, voir équation (5.10). Il vient alors que la décomposition effectuée sur le symbole  $x_n(t)$  peut s'appliquer sur ces deux symboles. En d'autres termes, après sur-échantillonnage, les vecteurs symboles  $\mathbf{x}_{2n}^1$  et  $\mathbf{x}_{2n+1}^1$  peuvent s'écrire respectivement en fonction des nouveaux symboles multiporteuses qui découlent de leur décomposition comme suit :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{2n}^1 &= \underbrace{\left[ \begin{array}{c} \overbrace{x_{4n,0}^{1,1}, \dots, x_{4n,LM_2-1}^{1,1}}^{\mathbf{x}_{4n}^{1,1}} \quad \overbrace{x_{4n+1,0}^{1,1}, \dots, x_{4n+1,LM_2-1}^{1,1}}^{\mathbf{x}_{4n+1}^{1,1}} \\ \hline \end{array} \right]^T}_{\text{Composante symétrique}} \\ &+ \underbrace{\left[ \begin{array}{c} \overbrace{x_{4n,0}^{1,2}, \dots, x_{4n,LM_2-1}^{1,2}}^{\mathbf{x}_{4n}^{1,2}} \quad \overbrace{x_{4n+1,0}^{1,2}, \dots, x_{4n+1,LM_2-1}^{1,2}}^{\mathbf{x}_{4n+1}^{1,2}} \\ \hline \end{array} \right]^T}_{\text{Composante anti-symétrique}} \end{aligned} \quad (5.61)$$

avec  $M_2 = \frac{M_1}{2} = \frac{M}{4}$ . Comme dans la section 5.3.1, on a  $\mathbf{x}_{4n}^{1,1} = \mathbf{x}_{4n+1}^{1,1}$  et  $[\mathbf{x}_{4n}^{1,1} \bullet \mathbf{x}_{4n+1}^{1,1}]$  représente la composante symétrique de  $\mathbf{x}_{2n}^1$ . De même on a  $\mathbf{x}_{4n}^{1,2} = -\mathbf{x}_{4n+1}^{1,2}$  et  $[\mathbf{x}_{4n}^{1,2} \bullet \mathbf{x}_{4n+1}^{1,2}]$  représente la composante anti-symétrique de  $\mathbf{x}_{2n}^1$ . Par le même procédé le vecteur symbole  $\mathbf{x}_{2n+1}^1$  peut être exprimé lui aussi en fonction des symboles issues de sa décomposition comme suit :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{2n+1}^1 &= \underbrace{\left[ \begin{array}{c} \overbrace{x_{4n+2,0}^{1,1}, \dots, x_{4n+2,LM_2-1}^{1,1}}^{\mathbf{x}_{4n+2}^{1,1}} \quad \overbrace{x_{4n+3,0}^{1,1}, \dots, x_{4n+3,LM_2-1}^{1,1}}^{\mathbf{x}_{4n+3}^{1,1}} \\ \hline \end{array} \right]^T}_{\text{Composante symétrique}} \\ &+ \underbrace{\left[ \begin{array}{c} \overbrace{x_{4n+2,0}^{1,2}, \dots, x_{4n+2,LM_2-1}^{1,2}}^{\mathbf{x}_{4n+2}^{1,2}} \quad \overbrace{x_{4n+3,0}^{1,2}, \dots, x_{4n+3,LM_2-1}^{1,2}}^{\mathbf{x}_{4n+3}^{1,2}} \\ \hline \end{array} \right]^T}_{\text{Composante anti-symétrique}} \end{aligned} \quad (5.62)$$

Comme pour le symbole  $\mathbf{x}_{2n}^1$ , on a  $\mathbf{x}_{4n+2}^{1,1} = \mathbf{x}_{4n+3}^{1,1}$  et  $[\mathbf{x}_{4n+2}^{1,1} \bullet \mathbf{x}_{4n+3}^{1,1}]$  représente la composante symétrique de  $\mathbf{x}_{2n+1}^1$ . De même on a  $\mathbf{x}_{4n+2}^{1,2} = -\mathbf{x}_{4n+3}^{1,2}$  et  $[\mathbf{x}_{4n+2}^{1,2} \bullet \mathbf{x}_{4n+3}^{1,2}]$  représente la composante anti-symétrique de  $\mathbf{x}_{2n+1}^1$ . Comme pour le symbole  $\mathbf{x}_{2n}^1$ , on a  $\mathbf{x}_{4n+2}^{1,1} = \mathbf{x}_{4n+3}^{1,1}$  et  $[\mathbf{x}_{4n+2}^{1,1} \bullet \mathbf{x}_{4n+3}^{1,1}]$  représente la composante symétrique de  $\mathbf{x}_{2n+1}^1$ . De même on a  $\mathbf{x}_{4n+2}^{1,2} = -\mathbf{x}_{4n+3}^{1,2}$  et  $[\mathbf{x}_{4n+2}^{1,2} \bullet \mathbf{x}_{4n+3}^{1,2}]$  représente la composante anti-symétrique de  $\mathbf{x}_{2n+1}^1$ .

En désignant par  $\mathbf{X}_{4n+i}^{1,1}$  et  $\mathbf{X}_{4n+i}^{1,2}$  avec  $i = 0, \dots, 3$  les vecteurs fréquentiels associés aux vecteurs temporels  $\mathbf{x}_{4n+i}^{1,1}$  et  $\mathbf{x}_{4n+i}^{1,2}$  avec  $i = 0, \dots, 3$ , on a en utilisant les résultats de la section 5.3.1, voir équation (5.18) :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{4n+i}^{1,1} &= \mathbb{F}_{M_2L} \check{\mathbf{X}}_{4n+i}^{1,1}, i = 0, \dots, 3 \\ \mathbf{x}_{4n+i}^{1,2} &= \begin{cases} \mathbb{D}_{M_2L} \mathbb{F}_{M_2L} \check{\mathbf{X}}_{4n+i}^{1,2} & \text{pour } i = 0, 2 \\ -\mathbb{D}_{M_2L} \mathbb{F}_{M_2L} \check{\mathbf{X}}_{4n+i}^{1,2} & \text{pour } i = 1, 3 \end{cases} \end{aligned} \quad (5.63)$$

avec  $\check{\mathbf{X}}_{4n+i}^{1,1}$  et  $\check{\mathbf{X}}_{4n+i}^{1,2}$  avec  $i = 0, \dots, 3$  les vecteurs obtenus après l'opération de *zéros padding* sur les vecteurs  $\mathbf{X}_{4n+i}^{1,1}$  et  $\mathbf{X}_{4n+i}^{1,2}$  avec  $i = 0, \dots, 3$ .

Concernant les symboles  $\mathbf{x}_{2n}^2$  et  $\mathbf{x}_{2n+1}^2$ , ce sont deux symboles consécutifs d'un signal OFDM multiplié par une matrice diagonale, voir équation (5.18). En d'autres termes on peut les réécrire comme suit :

$$\mathbf{x}_{2n}^2 = \mathbb{D}_{M_1L} \tilde{\mathbf{x}}_{2n}^2 \text{ et } \mathbf{x}_{2n+1}^2 = -\mathbb{D}_{M_1L} \tilde{\mathbf{x}}_{2n+1}^2 \quad (5.64)$$

Avec  $\tilde{\mathbf{x}}_{2n}^2$  et  $\tilde{\mathbf{x}}_{2n+1}^2$  des symboles OFDM. Il vient alors qu'on peut utiliser les résultats de la section 5.3.1 pour décomposer les symboles  $\mathbf{x}_{2n}^2$  et  $\mathbf{x}_{2n+1}^2$ . Pour ce faire, il suffit d'appliquer les résultats de la section 5.3.1 sur les symboles  $\tilde{\mathbf{x}}_{2n}^2$  et  $\tilde{\mathbf{x}}_{2n+1}^2$  et ensuite multiplier ces symboles par  $\mathbb{D}_{M_1L}$ .

Comme précédemment, les symboles  $\tilde{\mathbf{x}}_{2n}^2$  et  $\tilde{\mathbf{x}}_{2n+1}^2$  peuvent être exprimés en fonction des symboles issus de leur décomposition comme suit :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{x}}_{2n}^2 &= \underbrace{\left[ \begin{array}{c} \overbrace{\tilde{x}_{4n,0}^{2,1}, \dots, \tilde{x}_{4n,LM_2-1}^{2,1}}^{\tilde{\mathbf{x}}_{4n}^{2,1}} \quad \overbrace{\tilde{x}_{4n+1,0}^{2,1}, \dots, \tilde{x}_{4n+1,LM_2-1}^{2,1}}^{\tilde{\mathbf{x}}_{4n+1}^{2,1}} \\ \tilde{x}_{4n,0}^{2,1}, \dots, \tilde{x}_{4n,LM_2-1}^{2,1}, \tilde{x}_{4n+1,0}^{2,1}, \dots, \tilde{x}_{4n+1,LM_2-1}^{2,1} \end{array} \right]^T}_{\text{Composante symétrique}} \\ &+ \underbrace{\left[ \begin{array}{c} \overbrace{\tilde{x}_{4n,0}^{2,2}, \dots, \tilde{x}_{4n,LM_2-1}^{2,2}}^{\tilde{\mathbf{x}}_{4n}^{2,2}} \quad \overbrace{\tilde{x}_{4n+1,0}^{2,2}, \dots, \tilde{x}_{4n+1,LM_2-1}^{2,2}}^{\tilde{\mathbf{x}}_{4n+1}^{2,2}} \\ \tilde{x}_{4n,0}^{2,2}, \dots, \tilde{x}_{4n,LM_2-1}^{2,2}, \tilde{x}_{4n+1,0}^{2,2}, \dots, \tilde{x}_{4n+1,LM_2-1}^{2,2} \end{array} \right]^T}_{\text{Composante anti-symétrique}} \end{aligned} \quad (5.65)$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{x}}_{2n+1}^2 &= \underbrace{\left[ \begin{array}{c} \overbrace{\tilde{x}_{4n+2,0}^{2,1}, \dots, \tilde{x}_{4n+2,LM_2-1}^{2,1}}^{\tilde{\mathbf{x}}_{4n+2}^{2,1}} \quad \overbrace{\tilde{x}_{4n+3,0}^{2,1}, \dots, \tilde{x}_{4n+3,LM_2-1}^{2,1}}^{\tilde{\mathbf{x}}_{4n+3}^{2,1}} \\ \tilde{x}_{4n+2,0}^{2,1}, \dots, \tilde{x}_{4n+2,LM_2-1}^{2,1}, \tilde{x}_{4n+3,0}^{2,1}, \dots, \tilde{x}_{4n+3,LM_2-1}^{2,1} \end{array} \right]^T}_{\text{Composante symétrique}} \\
&+ \underbrace{\left[ \begin{array}{c} \overbrace{\tilde{x}_{4n+2,0}^{2,2}, \dots, \tilde{x}_{4n+2,LM_2-1}^{2,2}}^{\tilde{\mathbf{x}}_{4n+2}^{2,2}} \quad \overbrace{\tilde{x}_{4n+3,0}^{2,2}, \dots, \tilde{x}_{4n+3,LM_2-1}^{2,2}}^{\tilde{\mathbf{x}}_{4n+3}^{2,2}} \\ \tilde{x}_{4n+2,0}^{2,2}, \dots, \tilde{x}_{4n+2,LM_2-1}^{2,2}, \tilde{x}_{4n+3,0}^{2,2}, \dots, \tilde{x}_{4n+3,LM_2-1}^{2,2} \end{array} \right]^T}_{\text{Composante anti-symétrique}}
\end{aligned} \tag{5.66}$$

Notons que les symboles obtenus après décomposition de  $\tilde{\mathbf{x}}_{2n}^2$  et  $\tilde{\mathbf{x}}_{2n+1}^2$  satisfont les mêmes propriétés de symétrie et d'anti-symétrie que les symboles issus de la décomposition des symboles  $x_{2n}^2(t)$  et  $x_{2n+1}^2(t)$ . En outre on a :

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{x}}_{4n+i}^{2,1} &= \mathbb{F}_{M_2L} \check{\mathbf{X}}_{4n+i}^{2,1}, i = 0, \dots, 3 \\
\tilde{\mathbf{x}}_{4n+i}^{2,2} &= \begin{cases} \mathbb{D}_{M_2L} \mathbb{F}_{M_2L} \check{\mathbf{X}}_{4n+i}^{2,2} & \text{pour } i = 0, 2 \\ -\mathbb{D}_{M_2L} \mathbb{F}_{M_2L} \check{\mathbf{X}}_{4n+i}^{2,2} & \text{pour } i = 1, 3 \end{cases}
\end{aligned} \tag{5.67}$$

Pour obtenir la décomposition de  $\mathbf{x}_{2n}^2$  et  $\mathbf{x}_{2n+1}^2$ , il suffit alors de multiplier  $\tilde{\mathbf{x}}_{2n}^2$  et  $\tilde{\mathbf{x}}_{2n+1}^2$  par respectivement  $\mathbb{D}_{M_1L}$  et  $-\mathbb{D}_{M_1L}$ , voir (5.18). Pour des raisons de simplicité, nous utiliserons les notations désignant les symboles obtenus après décomposition de  $\tilde{\mathbf{x}}_{2n}^2$  et  $\tilde{\mathbf{x}}_{2n+1}^2$  sans le *tilde* pour désigner les symboles obtenus après décomposition de  $\mathbf{x}_{2n}^2$  et  $\mathbf{x}_{2n+1}^2$ .

Soient les vecteurs  $\mathbf{d}_1 = [1, e^{j\pi \frac{1}{LM_1}}, \dots, e^{j\pi \frac{LM_1-1}{LM_1}}]^T$  et  $\mathbf{d}_2 = [e^{j\pi \frac{L-1}{LM_1}}, \dots, e^{j\pi \frac{LM_1-1}{LM_1}}]^T$ . Puisque :

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_{2n}^2 &= \mathbb{D}_{M_1L} \tilde{\mathbf{x}}_{2n}^2 \\
&= \mathbb{D}_{M_1L} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}}_{4n}^{2,1} + \tilde{\mathbf{x}}_{4n}^{2,2} \\ \tilde{\mathbf{x}}_{4n+1}^{2,1} + \tilde{\mathbf{x}}_{4n+1}^{2,2} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \mathbb{D}^1 (\tilde{\mathbf{x}}_{4n}^{2,1} + \tilde{\mathbf{x}}_{4n}^{2,2}) \\ \mathbb{D}^2 (\tilde{\mathbf{x}}_{4n+1}^{2,1} + \tilde{\mathbf{x}}_{4n+1}^{2,2}) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \underbrace{\mathbb{D}^1 \tilde{\mathbf{x}}_{4n}^{2,1}}_{\mathbf{x}_{4n}^{2,1}} + \underbrace{\mathbb{D}^1 \tilde{\mathbf{x}}_{4n}^{2,2}}_{\mathbf{x}_{4n}^{2,2}} \\ \underbrace{\mathbb{D}^2 \tilde{\mathbf{x}}_{4n+1}^{2,1}}_{\mathbf{x}_{4n+1}^{2,1}} + \underbrace{\mathbb{D}^2 \tilde{\mathbf{x}}_{4n+1}^{2,2}}_{\mathbf{x}_{4n+1}^{2,2}} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{5.68}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_{2n+1}^2 &= -\mathbb{D}_{M_1 L} \tilde{\mathbf{x}}_{2n+1}^2 \\
&= -\mathbb{D}_{M_1 L} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}}_{4n+2}^{2,1} + \tilde{\mathbf{x}}_{4n+2}^{2,2} \\ \tilde{\mathbf{x}}_{4n+3}^{2,1} + \tilde{\mathbf{x}}_{4n+3}^{2,2} \end{bmatrix} \\
&= - \begin{bmatrix} \mathbb{D}^1 (\tilde{\mathbf{x}}_{4n+2}^{2,1} + \tilde{\mathbf{x}}_{4n+2}^{2,2}) \\ \mathbb{D}^2 (\tilde{\mathbf{x}}_{4n+3}^{2,1} + \tilde{\mathbf{x}}_{4n+3}^{2,2}) \end{bmatrix} \\
&= - \begin{bmatrix} \underbrace{\mathbb{D}^1 \tilde{\mathbf{x}}_{4n+2}^{2,1}}_{\mathbf{x}_{4n+2}^{2,1}} + \underbrace{\mathbb{D}^1 \tilde{\mathbf{x}}_{4n+2}^{2,2}}_{\mathbf{x}_{4n+2}^{2,2}} \\ \underbrace{\mathbb{D}^2 \tilde{\mathbf{x}}_{4n+3}^{2,1}}_{\mathbf{x}_{4n+3}^{2,1}} + \underbrace{\mathbb{D}^2 \tilde{\mathbf{x}}_{4n+3}^{2,2}}_{\mathbf{x}_{4n+3}^{2,2}} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{5.69}$$

Avec  $\mathbb{D}^1$  et  $\mathbb{D}^2$  des matrices diagonales construites respectivement avec les vecteurs  $\mathbf{d}_1$  et  $\mathbf{d}_2$ , alors, en utilisant (5.67), les équations (5.69) et (5.69) donnent respectivement

$$\mathbf{x}_{2n}^2 = \begin{bmatrix} \underbrace{\mathbb{D}^1 \mathbb{F}_{M_2 L} \check{\mathbf{X}}_{4n}^{2,1}}_{\mathbf{x}_{4n}^{2,1}} + \underbrace{\mathbb{D}^1 \mathbb{D}_{M_2 L} \mathbb{F}_{M_2 L} \check{\mathbf{X}}_{4n}^{2,2}}_{\mathbf{x}_{4n}^{2,2}} \\ \underbrace{\mathbb{D}^2 \mathbb{F}_{M_2 L} \check{\mathbf{X}}_{4n+1}^{2,1}}_{\mathbf{x}_{4n+1}^{2,1}} + \underbrace{(-\mathbb{D}^2 \mathbb{D}_{M_2 L} \mathbb{F}_{M_2 L} \check{\mathbf{X}}_{4n+1}^{2,2})}_{\mathbf{x}_{4n+1}^{2,2}} \end{bmatrix} \tag{5.70}$$

$$\mathbf{x}_{2n+1}^2 = - \begin{bmatrix} \underbrace{\mathbb{D}^1 \mathbb{F}_{M_2 L} \check{\mathbf{X}}_{4n+2}^{2,1}}_{\mathbf{x}_{4n+2}^{2,1}} + \underbrace{\mathbb{D}^1 \mathbb{D}_{M_2 L} \mathbb{F}_{M_2 L} \check{\mathbf{X}}_{4n+2}^{2,2}}_{\mathbf{x}_{4n+2}^{2,2}} \\ \underbrace{\mathbb{D}^2 \mathbb{F}_{M_2 L} \check{\mathbf{X}}_{4n+3}^{2,1}}_{\mathbf{x}_{4n+3}^{2,1}} + \underbrace{(-\mathbb{D}^2 \mathbb{D}_{M_2 L} \mathbb{F}_{M_2 L} \check{\mathbf{X}}_{4n+3}^{2,2})}_{\mathbf{x}_{4n+3}^{2,2}} \end{bmatrix} \tag{5.71}$$

Ainsi, les symboles obtenus après décomposition des symboles  $\tilde{\mathbf{x}}_{2n}^2$  et  $\tilde{\mathbf{x}}_{2n+1}^2$  ont permis d'obtenir la décomposition des symboles  $\mathbf{x}_{2n}^2$  et  $\mathbf{x}_{2n+1}^2$  par multiplication avec la matrices  $\mathbb{D}_{M_1 L}$ . Ainsi, comme pour les symboles  $\mathbf{x}_{2n}^1$  et  $\mathbf{x}_{2n+1}^1$ , voir (5.61) et (5.62), les symboles  $\mathbf{x}_{2n}^2$  et  $\mathbf{x}_{2n+1}^2$  se décomposent eux aussi comme suit :

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_{2n}^2 &= \begin{bmatrix} \underbrace{\mathbf{x}_{4n}^{2,1}}_{x_{4n,0}^{2,1}, \dots, x_{4n, LM_2-1}^{2,1}} \quad \underbrace{\mathbf{x}_{4n+1}^{2,1}}_{x_{4n+1,0}^{2,1}, \dots, x_{4n+1, LM_2-1}^{2,1}} \\ \underbrace{\mathbf{x}_{4n}^{2,2}}_{x_{4n,0}^{2,2}, \dots, x_{4n, LM_2-1}^{2,2}} \quad \underbrace{\mathbf{x}_{4n+1}^{2,2}}_{x_{4n+1,0}^{2,2}, \dots, x_{4n+1, LM_2-1}^{2,2}} \end{bmatrix} \\
&+ \begin{bmatrix} \underbrace{\mathbf{x}_{4n}^{2,2}}_{x_{4n,0}^{2,2}, \dots, x_{4n, LM_2-1}^{2,2}} \quad \underbrace{\mathbf{x}_{4n+1}^{2,2}}_{x_{4n+1,0}^{2,2}, \dots, x_{4n+1, LM_2-1}^{2,2}} \\ \underbrace{\mathbf{x}_{4n}^{2,1}}_{x_{4n,0}^{2,1}, \dots, x_{4n, LM_2-1}^{2,1}} \quad \underbrace{\mathbf{x}_{4n+1}^{2,1}}_{x_{4n+1,0}^{2,1}, \dots, x_{4n+1, LM_2-1}^{2,1}} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{5.72}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_{2n+1}^2 &= \left[ \begin{array}{c} \overbrace{x_{4n+2,0}^{2,1}, \dots, x_{4n+2,LM_2-1}^{2,1}}^{\mathbf{x}_{4n+2}^{2,1}}, \overbrace{x_{4n+3,0}^{2,1}, \dots, x_{4n+3,LM_2-1}^{2,1}}^{\mathbf{x}_{4n+3}^{2,1}} \\ \overbrace{x_{4n+2,0}^{2,2}, \dots, x_{4n+2,LM_2-1}^{2,2}}^{\mathbf{x}_{4n+2}^{2,2}}, \overbrace{x_{4n+3,0}^{2,2}, \dots, x_{4n+3,LM_2-1}^{2,2}}^{\mathbf{x}_{4n+3}^{2,2}} \end{array} \right] \\
&+ \left[ \begin{array}{c} \overbrace{x_{4n+2,0}^{2,2}, \dots, x_{4n+2,LM_2-1}^{2,2}}^{\mathbf{x}_{4n+2}^{2,2}}, \overbrace{x_{4n+3,0}^{2,2}, \dots, x_{4n+3,LM_2-1}^{2,2}}^{\mathbf{x}_{4n+3}^{2,2}} \\ \overbrace{x_{4n+2,0}^{2,1}, \dots, x_{4n+2,LM_2-1}^{2,1}}^{\mathbf{x}_{4n+2}^{2,1}}, \overbrace{x_{4n+3,0}^{2,1}, \dots, x_{4n+3,LM_2-1}^{2,1}}^{\mathbf{x}_{4n+3}^{2,1}} \end{array} \right]
\end{aligned} \tag{5.73}$$

Avec  $\mathbf{x}_{4n+i}^{2,1}$  et  $\mathbf{x}_{4n+i}^{2,2}$  pour  $i = 0, \dots, 3$  définis comme suit, voir (5.70) et (5.71)

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_{4n+i}^{2,1} &= \begin{cases} \mathbb{D}^1 \mathbb{F}_{M_2 L} \check{\mathbf{X}}_{4n+i}^{2,1} & \text{pour } i = 0 \\ \mathbb{D}^2 \mathbb{F}_{M_2 L} \check{\mathbf{X}}_{4n+i}^{2,1} & \text{pour } i = 1 \\ -\mathbb{D}^1 \mathbb{F}_{M_2 L} \check{\mathbf{X}}_{4n+i}^{2,1} & \text{pour } i = 2 \\ -\mathbb{D}^2 \mathbb{F}_{M_2 L} \check{\mathbf{X}}_{4n+i}^{2,1} & \text{pour } i = 3 \end{cases} \\
\mathbf{x}_{4n+i}^{2,2} &= \begin{cases} \mathbb{D}^1 \mathbb{D}_{M_2 L} \mathbb{F}_{M_2 L} \check{\mathbf{X}}_{4n+i}^{2,2} & \text{pour } i = 0 \\ -\mathbb{D}^2 \mathbb{D}_{M_2 L} \mathbb{F}_{M_2 L} \check{\mathbf{X}}_{4n+i}^{2,2} & \text{pour } i = 1 \\ -\mathbb{D}^1 \mathbb{D}_{M_2 L} \mathbb{F}_{M_2 L} \check{\mathbf{X}}_{4n+i}^{2,2} & \text{pour } i = 2 \\ \mathbb{D}^2 \mathbb{D}_{M_2 L} \mathbb{F}_{M_2 L} \check{\mathbf{X}}_{4n+i}^{2,2} & \text{pour } i = 3 \end{cases}
\end{aligned} \tag{5.74}$$

La multiplication par les matrices  $\mathbb{D}^1$  et  $\mathbb{D}^2$  provient du fait que  $\mathbf{x}_{2n}^2 = \mathbb{D}_{M_1 L} \tilde{\mathbf{x}}_{2n}^2$  et  $\mathbf{x}_{2n+1}^2 = \mathbb{D}_{M_1 L} \tilde{\mathbf{x}}_{2n+1}^2$ . En dehors de cette opération supplémentaire, on remarque beaucoup de similitudes entre les équations (5.63) et (5.74) avec l'équation (5.18) de la section (5.3.1). Dans la section 5.4.1, nous avons montré que la connaissance des symboles obtenus après décomposition n'était pas nécessaire pour le calcul du signal de correction du PAPR, voir le problème d'optimisation (5.36). Il en sera de même dans cette section aussi. En effet dans la section 5.4.1, nous avons montré que la décomposition permet seulement de définir comment le signal de correction du PAPR est inséré, ce qui est traduit par la matrice  $\mathbb{A}$ . Ainsi, dans cette section, nous ne nous attarderons pas sur le calcul des symboles obtenus après cette deuxième décomposition mais plutôt sur la construction de la matrice d'insertion que nous noterons plus tard par  $\mathbb{B}$ . A cet effet, les descriptions données dans les équations (5.63) et (5.74) suffiront largement à comprendre comment générer le signal de correction du PAPR, et donc la construction de la matrice  $\mathbb{B}$ .

La Figure. 5.22, illustre la représentation du symbole utile  $\mathbf{x}_n$  en fonction des symboles obtenus après la seconde décomposition, i.e après décomposition des symboles  $\mathbf{x}_{2n}^1$ ,  $\mathbf{x}_{2n+1}^1$ ,  $\mathbf{x}_{2n}^2$  et  $\mathbf{x}_{2n+1}^2$ .

La Figure 5.22 donne la disposition des symboles obtenus après une deuxième décomposition le long du support temporel du symbole d'intérêt. Ainsi, on remarque que le support temporel de  $\mathbf{x}_n$ , i.e  $[nT_u, (n+1)T_u]$  est décomposé en quatre parties que sont  $[nT_u, nT_u + T_u/4]$ ,  $[nT_u + T_u/4, nT_u + T_u/2]$ ,  $[nT_u + T_u/2, nT_u + 3T_u/4]$  et  $[nT_u + 3T_u/4, (n+1)T_u]$ . En effet, il suffit de remplacer dans la figure  $T_2 = \frac{T_u}{4}$ . L'équation suivante donne le symbole  $\mathbf{x}_n$  en

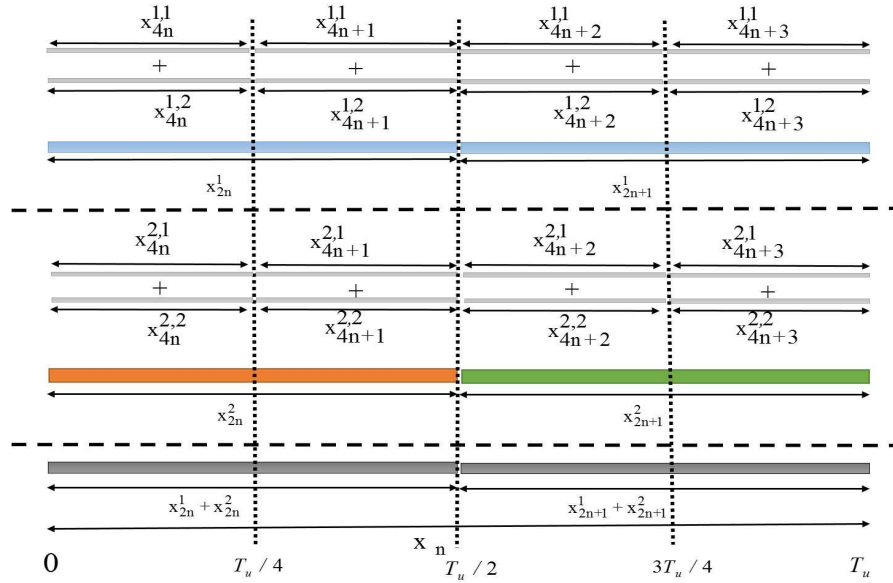


FIGURE 5.22 – Illustration graphique de  $\mathbf{x}_n$  en fonction des symboles obtenus après décomposition des symboles  $\mathbf{x}_{2n}^1$ ,  $\mathbf{x}_{2n+1}^1$ ,  $\mathbf{x}_{2n}^2$  et  $\mathbf{x}_{2n+1}^2$ .

fonctions des 16 symboles issus de la double décomposition de ce dernier.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}_n &= \left[ \begin{array}{cccc} \mathbf{x}_{4n}^{1,1} & \mathbf{x}_{4n+1}^{1,1} & \mathbf{x}_{4n+2}^{1,1} & \mathbf{x}_{4n+3}^{1,1} \\ x_{4n,0}^{1,1}, \dots, x_{4n,LM_2-1}^{1,1} & x_{4n+1,0}^{1,1}, \dots, x_{4n+1,LM_2-1}^{1,1} & x_{4n+2,0}^{1,1}, \dots, x_{4n+2,LM_2-1}^{1,1} & x_{4n+3,0}^{1,1}, \dots, x_{4n+3,LM_2-1}^{1,1} \end{array} \right] \\
 &+ \left[ \begin{array}{cccc} \mathbf{x}_{4n}^{1,2} & \mathbf{x}_{4n+1}^{1,2} & \mathbf{x}_{4n+2}^{1,2} & \mathbf{x}_{4n+3}^{1,2} \\ x_{4n,0}^{1,2}, \dots, x_{4n,LM_2-1}^{1,2} & x_{4n+1,0}^{1,2}, \dots, x_{4n+1,LM_2-1}^{1,2} & x_{4n+2,0}^{1,2}, \dots, x_{4n+2,LM_2-1}^{1,2} & x_{4n+3,0}^{1,2}, \dots, x_{4n+3,LM_2-1}^{1,2} \end{array} \right] \\
 &= \left[ \begin{array}{cccc} \mathbf{x}_{4n}^{2,1} & \mathbf{x}_{4n+1}^{2,1} & \mathbf{x}_{4n+2}^{2,1} & \mathbf{x}_{4n+3}^{2,1} \\ x_{4n,0}^{2,1}, \dots, x_{4n,LM_2-1}^{2,1} & x_{4n+1,0}^{2,1}, \dots, x_{4n+1,LM_2-1}^{2,1} & x_{4n+2,0}^{2,1}, \dots, x_{4n+2,LM_2-1}^{2,1} & x_{4n+3,0}^{2,1}, \dots, x_{4n+3,LM_2-1}^{2,1} \end{array} \right] \\
 &+ \left[ \begin{array}{cccc} \mathbf{x}_{4n}^{2,2} & \mathbf{x}_{4n+1}^{2,2} & \mathbf{x}_{4n+2}^{2,2} & \mathbf{x}_{4n+3}^{2,2} \\ x_{4n,0}^{2,2}, \dots, x_{4n,LM_2-1}^{2,2} & x_{4n+1,0}^{2,2}, \dots, x_{4n+1,LM_2-1}^{2,2} & x_{4n+2,0}^{2,2}, \dots, x_{4n+2,LM_2-1}^{2,2} & x_{4n+3,0}^{2,2}, \dots, x_{4n+3,LM_2-1}^{2,2} \end{array} \right] \quad (5.75)
 \end{aligned}$$

On peut déjà deviner que la méthode qui va découler de cette double décomposition consistera à construire le signal de correction de manière similaire avec l'équation 5.75 en utilisant les projetés des porteuses réservées de  $\mathbf{x}_n$  ( $\mathcal{R}$ ) sur les symboles issus de sa double décomposition. Et comme dans le cas de la méthode 1-MTR-GP les contraintes de symétries et d'anti-symétries qui existent entre les différentes composantes issus de cette double décomposition seront relâchées dans le cas du signal de correction.

À cet effet, comme dans la section 5.3.2, nous allons décomposer le bruit de *clipping*  $J_{[\mathbf{x}_n]}(\cdot)$  du symbole  $\mathbf{x}_n$ , voir (5.21), selon les supports temporels décrits précédemment. La Fig. 5.23 donne un illustration de cette décomposition du bruit de *clipping*  $J_{[\mathbf{x}_n]}(\cdot)$ . Le bruit de *clipping* à minimiser dans le cas de la méthode TR-GP, illustré sur la Figure 5.5, est décomposé sur la Figure 5.23 par rapport à la double décomposition du symbole  $\mathbf{x}_n$  pour donner les quatre bruits de *clipping* à minimiser dans le cadre de la méthode 2-MTR-GP.



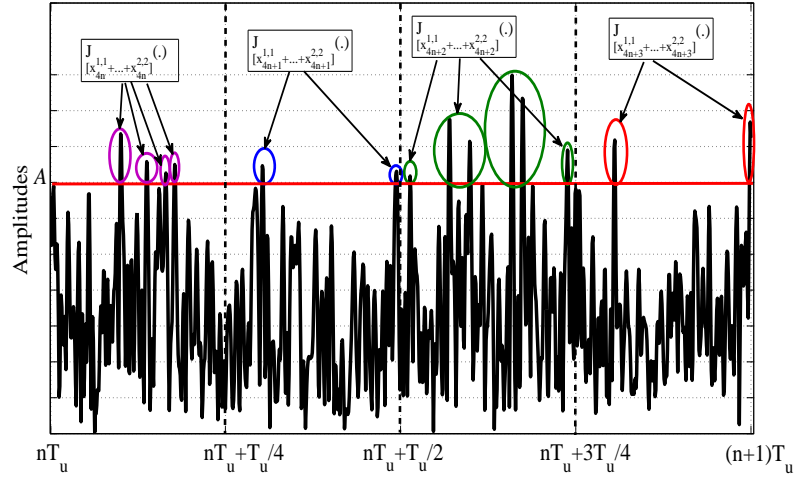


FIGURE 5.23 – Illustration des bruits de *clipping* à minimiser dans le cadre de la méthode 2-MTR-GP

De la Figure 5.23, on remarque que  $J_{[\mathbf{x}_n]}$  est décomposé comme étant la somme des quatre quantités définies ci-dessous, suivant la double décomposition du symbole  $\mathbf{x}_n$ .

$$\begin{aligned}
 J_{[\mathbf{x}_{4n}^{1,1} + \mathbf{x}_{4n}^{1,2} + \mathbf{x}_{4n}^{2,1} + \mathbf{x}_{4n}^{2,2}]}(\cdot) &= \|\mathbf{x}_{4n}^{1,1} + \mathbf{x}_{4n}^{1,2} + \mathbf{x}_{4n}^{2,1} + \mathbf{x}_{4n}^{2,2} - f(\mathbf{x}_{4n}^{1,1} + \mathbf{x}_{4n}^{1,2} + \mathbf{x}_{4n}^{2,1} + \mathbf{x}_{4n}^{2,2}, A)\|_2^2 \\
 J_{[\mathbf{x}_{4n+1}^{1,1} + \mathbf{x}_{4n+1}^{1,2} + \mathbf{x}_{4n+1}^{2,1} + \mathbf{x}_{4n+1}^{2,2}]}(\cdot) &= \|\mathbf{x}_{4n+1}^{1,1} + \dots + \mathbf{x}_{4n+1}^{2,2} - f(\mathbf{x}_{4n+1}^{1,1} + \dots + \mathbf{x}_{4n+1}^{2,2}, A)\|_2^2 \\
 J_{[\mathbf{x}_{4n+2}^{1,1} + \mathbf{x}_{4n+2}^{1,2} + \mathbf{x}_{4n+2}^{2,1} + \mathbf{x}_{4n+2}^{2,2}]}(\cdot) &= \|\mathbf{x}_{4n+2}^{1,1} + \dots + \mathbf{x}_{4n+2}^{2,2} - f(\mathbf{x}_{4n+2}^{1,1} + \dots + \mathbf{x}_{4n+2}^{2,2}, A)\|_2^2 \\
 J_{[\mathbf{x}_{4n+3}^{1,1} + \mathbf{x}_{4n+3}^{1,2} + \mathbf{x}_{4n+3}^{2,1} + \mathbf{x}_{4n+3}^{2,2}]}(\cdot) &= \|\mathbf{x}_{4n+3}^{1,1} + \dots + \mathbf{x}_{4n+3}^{2,2} - f(\mathbf{x}_{4n+3}^{1,1} + \dots + \mathbf{x}_{4n+3}^{2,2}, A)\|_2^2
 \end{aligned} \tag{5.76}$$

Comme dans le cas de la méthode 1-MTR-GP, la méthode 2-MTR-GP consistera à construire le signal de correction du PAPR en maximisant par ajout de signal les bruits de *clipping* partiels définis dans (5.76) et illustrés sur la Figure 5.23 sous la contrainte TR (orthogonalité en fréquence) par rapport aux 16 symboles  $\mathbf{x}_{4n}, \dots$ , et  $\mathbf{x}_{4n+3}^{2,2}$  obtenus après la double décomposition de  $\mathbf{x}_n$ . En effet, sous l'hypothèse que le symbole d'intérêt  $\mathbf{x}_n$  satisfait la contrainte TR, voire (5.23), alors les 16 symboles multiporteuses  $\mathbf{x}_{4n}^{1,1}, \dots$ , et  $\mathbf{x}_{4n+3}^{2,2}$  satisfont les conditions suivantes :

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{L}(\mathbf{F}_{M_2L,m}^{\text{Col}})^H \mathbf{x}_{4n+i}^{1,1} &= \begin{cases} X_{4n+i,m}^{1,1} & \text{Si } m \in \mathcal{K}^{(0,0)} \\ 0 & \text{Sinon} \end{cases}, i = 0, \dots, 3 \\
 \frac{1}{L}(\mathbf{F}_{M_2L,m}^{\text{Col}})^H (\mathbb{D}_{M_2L})^H \mathbf{x}_{4n+i}^{1,2} &= \begin{cases} X_{4n+i,m}^{1,2} & \text{Si } m \in \mathcal{K}^{(0,1)} \\ 0 & \text{Sinon} \end{cases}, i = 0, 2 \\
 \frac{1}{L}(\mathbf{F}_{M_2L,m}^{\text{Col}})^H (-\mathbb{D}_{M_2L})^H \mathbf{x}_{4n+i}^{1,2} &= \begin{cases} X_{4n+i,m}^{1,2} & \text{Si } m \in \mathcal{K}^{(0,1)} \\ 0 & \text{Sinon} \end{cases}, i = 1, 3
 \end{aligned} \tag{5.77}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{L}(\mathbf{F}_{M_2L,m}^{\text{Col}})^H(\mathbb{D}^1)^H\mathbf{x}_{4n}^{2,1} &= \begin{cases} X_{4n,m}^{2,1} & \text{Si } m \in \mathcal{K}^{(1,0)} \\ 0 & \text{Sinon} \end{cases} \\
\frac{1}{L}(\mathbf{F}_{M_2L,m}^{\text{Col}})^H(\mathbb{D}^2)^H\mathbf{x}_{4n+1}^{2,1} &= \begin{cases} X_{4n+1,m}^{2,1} & \text{Si } m \in \mathcal{K}^{(1,0)} \\ 0 & \text{Sinon} \end{cases} \\
\frac{1}{L}(\mathbf{F}_{M_2L,m}^{\text{Col}})^H(-\mathbb{D}^1)^H\mathbf{x}_{4n+2}^{2,1} &= \begin{cases} X_{4n+2,m}^{2,1} & \text{Si } m \in \mathcal{K}^{(1,0)} \\ 0 & \text{Sinon} \end{cases} \\
\frac{1}{L}(\mathbf{F}_{M_2L,m}^{\text{Col}})^H(-\mathbb{D}^2)^H\mathbf{x}_{4n+3}^{2,1} &= \begin{cases} X_{4n+3,m}^{2,1} & \text{Si } m \in \mathcal{K}^{(1,0)} \\ 0 & \text{Sinon} \end{cases}
\end{aligned} \tag{5.78}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{L}(\mathbf{F}_{M_2L,m}^{\text{Col}})^H(\mathbb{D}^1\mathbb{D}_{M_2L})^H\mathbf{x}_{4n}^{2,2} &= \begin{cases} X_{4n,m}^{2,2} & \text{Si } m \in \mathcal{K}^{(1,1)} \\ 0 & \text{Sinon} \end{cases} \\
\frac{1}{L}(\mathbf{F}_{M_2L,m}^{\text{Col}})^H(\mathbb{D}^2\mathbb{D}_{M_2L})^H\mathbf{x}_{4n+1}^{2,2} &= \begin{cases} X_{4n+1,m}^{2,2} & \text{Si } m \in \mathcal{K}^{(1,1)} \\ 0 & \text{Sinon} \end{cases} \\
\frac{1}{L}(\mathbf{F}_{M_2L,m}^{\text{Col}})^H(-\mathbb{D}^1\mathbb{D}_{M_2L})^H\mathbf{x}_{4n+2}^{2,2} &= \begin{cases} X_{4n+2,m}^{2,2} & \text{Si } m \in \mathcal{K}^{(1,1)} \\ 0 & \text{Sinon} \end{cases} \\
\frac{1}{L}(\mathbf{F}_{M_2L,m}^{\text{Col}})^H(\mathbb{D}^2\mathbb{D}_{M_2L})^H\mathbf{x}_{4n+3}^{2,2} &= \begin{cases} X_{4n+3,m}^{2,2} & \text{Si } m \in \mathcal{K}^{(1,1)} \\ 0 & \text{Sinon} \end{cases}
\end{aligned} \tag{5.79}$$

Avec

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}^{(0,0)} &= \frac{\mathcal{K}^{(0),P}}{2} \text{ et } \mathcal{K}^{(0,1)} = \frac{\mathcal{K}^{(0),I} - 1}{2} \\
\mathcal{K}^{(1,0)} &= \frac{\mathcal{K}^{(1),P}}{2} \text{ et } \mathcal{K}^{(1,1)} = \frac{\mathcal{K}^{(1),I} - 1}{2}
\end{aligned} \tag{5.80}$$

Les ensembles  $\mathcal{K}^{(0),I}$  et  $\mathcal{K}^{(0),P}$  (respect.  $\mathcal{K}^{(1),I}$  et  $\mathcal{K}^{(1),P}$ ) désignent respectivement l'ensemble des porteuses (index ou positions) impaires et paires de  $\mathcal{K}^{(0)}$  (respect.  $\mathcal{K}^{(1)}$ ). Ainsi, la méthode 2-MTR-GP propose de générer le signal en utilisant les composantes nulles, voir équations (5.77), (5.78) et (5.79), des 16 symboles issus de la décomposition de  $\mathbf{x}_n$ . Pour s'en convaincre sur la projection des porteuses réservées de  $\mathbf{x}_n$  sur les 16 symboles issus de la double décomposition, le lecteur peut consulter l'Annexe B où une preuve dans le cas de la première décomposition est fournie. La double décomposition n'étant qu'une itération du processus de décomposition présenté dans la section 5.3.2 sur les 4 symboles issus de la première décomposition, il suffit alors de faire le même raisonnement pour avoir une preuve de (5.77), (5.78), (5.79).

Dans la section 5.3.2, nous avons montré que la méthode 1-MTR-GP permettait de relâcher la contrainte d'orthogonalité entre les porteuses paires et impaires, voir (5.49), car nous avons montré que les composantes  $\bar{\mathbf{c}}_n^1$  et  $\bar{\mathbf{c}}_n^2$  sont générées simultanément en utilisant l'ensemble des porteuses de  $\mathcal{R}$  contrairement à la méthode TR-GP classique où elles sont générées en utilisant respectivement que les porteuses de  $\mathcal{R}^P$  et  $\mathcal{R}^I$ . Ainsi, le but d'étendre la méthode MTR est de parvenir à relâcher la contrainte d'orthogonalité entre toutes les porteuses réservées et non seulement entre les porteuses paires et impaires. Par exemple, si  $\mathcal{R}$  contenait 4 porteuses réservées dont deux paires et deux impaires,

la méthode 2-MTR-GP permettra de relâcher l'orthogonalité entre ces quatre porteuses réservées alors que la méthode 1-MTR-GP relâche la condition d'orthogonalité entre les 2 porteuses paires et les 2 autres impaires, c'est à dire que les deux porteuses paires sont orthogonales entre elles de même que les deux porteuses impaires. En d'autres termes, seules les porteuses de parités différentes sont non-orthogonales dans le cas de la méthode 1-MTR-GP.

La construction du signal de correction du PAPR  $\mathbf{c}_n$  dans le cas de la méthodes 2-MTR-GP se fera à partir des composantes  $\mathbf{c}_{4n+i}^{1,1}$ ,  $\mathbf{c}_{4n+i}^{1,2}$ ,  $\mathbf{c}_{4n+i}^{2,1}$  et  $\mathbf{c}_{4n+i}^{2,2}$  pour  $i = 0, \dots, 3$  en utilisant (5.75), voir (5.81). Ces composantes du signal de correction seront générées en utilisant respectivement les porteuses libres sur les 16 symboles multi-porteuses  $\mathbf{x}_{4n+i}^{1,1}$ ,  $\mathbf{x}_{4n+i}^{1,2}$ ,  $\mathbf{x}_{4n+i}^{2,1}$  et  $\mathbf{x}_{4n+i}^{2,2}$  par minimisation des bruits de *clipping* partiels définis dans l'équation (5.76).

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_n &= [\mathbf{c}_{4n}^{1,1} \bullet \mathbf{c}_{4n+1}^{1,1} \bullet \mathbf{c}_{4n+2}^{1,1} \bullet \mathbf{c}_{4n+3}^{1,1}] \\ &+ [\mathbf{c}_{4n}^{1,2} \bullet \mathbf{c}_{4n+1}^{1,2} \bullet \mathbf{c}_{4n+2}^{1,2} \bullet \mathbf{c}_{4n+3}^{1,2}] \\ &+ [\mathbf{c}_{4n}^{2,1} \bullet \mathbf{c}_{4n+1}^{2,1} \bullet \mathbf{c}_{4n+2}^{2,1} \bullet \mathbf{c}_{4n+3}^{2,1}] \\ &+ [\mathbf{c}_{4n}^{2,2} \bullet \mathbf{c}_{4n+1}^{2,2} \bullet \mathbf{c}_{4n+2}^{2,2} \bullet \mathbf{c}_{4n+3}^{2,2}] \end{aligned} \quad (5.81)$$

Ainsi comme pour la méthode 1-MTR-GP, la méthode 2-MTR-GP consistera en deux étapes :

1. Calcul des composantes  $\mathbf{c}_{4n+i}^{1,1}$ ,  $\mathbf{c}_{4n+i}^{1,2}$ ,  $\mathbf{c}_{4n+i}^{2,1}$  et  $\mathbf{c}_{4n+i}^{2,2}$  pour  $i = 0, \dots, 3$ .

Comme dans la section 5.4, on peut montrer que le calcul des composantes  $\mathbf{c}_{4n+i}^{1,1}$ ,  $\mathbf{c}_{4n+i}^{1,2}$ ,  $\mathbf{c}_{4n+i}^{2,1}$  et  $\mathbf{c}_{4n+i}^{2,2}$  pour  $i = 0, \dots, 3$ , par minimisation des bruits de *clipping* partiels définis dans (5.76), sous la contrainte TR sur les 16 symboles  $\mathbf{x}_{4n+i}^{1,1}$ ,  $\mathbf{x}_{4n+i}^{1,2}$ ,  $\mathbf{x}_{4n+i}^{2,1}$  et  $\mathbf{x}_{4n+i}^{2,2}$  peut se ramener à un calcul des composantes fréquentielles  $\mathbf{C}_{4n+i}^{1,1}$ ,  $\mathbf{C}_{4n+i}^{1,2}$ ,  $\mathbf{C}_{4n+i}^{2,1}$  et  $\mathbf{C}_{4n+i}^{2,2}$  pour  $i = 0, \dots, 3$  via le problème d'optimisation suivant, voir sous section suivante (sous section 5.6.2) :

$$\min_{\bar{\mathbf{C}}_n} \|\mathbf{x}_n + \mathbb{B}\bar{\mathbf{C}}_n - f(\mathbf{x}_n + \mathbb{B}\bar{\mathbf{C}}_n, A)\|_2^2 \quad (5.82)$$

Avec  $\bar{\mathbf{C}}_n$  un vecteur contenant les vecteurs  $\mathbf{C}_{4n+i}^{1,1}$ ,  $\mathbf{C}_{4n+i}^{1,2}$ ,  $\mathbf{C}_{4n+i}^{2,1}$  et  $\mathbf{C}_{4n+i}^{2,2}$  pour  $i = 0, \dots, 3$  et  $\mathbb{B}$  une matrice que nous spécifierons dans la section 5.6.2.

Il est important de remarquer que d'après le problème d'optimisation (5.82), il n'est pas nécessaire de connaître les 16 symboles issus de la décomposition de  $\mathbf{x}_n$  pour les besoins du calcul des 16 composantes fréquentielles  $\mathbf{C}_{4n+i}^{1,1}$ ,  $\mathbf{C}_{4n+i}^{1,2}$ ,  $\mathbf{C}_{4n+i}^{2,1}$  et  $\mathbf{C}_{4n+i}^{2,2}$  pour  $i = 0, \dots, 3$ , i.e,  $\bar{\mathbf{C}}_n$ . En effet, comme nous l'avions souligné, la décomposition ne sert qu'à spécifier la manière dont le signal de correction du PAPR est généré ou inséré, ce qui est défini par la matrice  $\mathbb{B}$ .

2. Filtrage dans le domaine fréquentiel pour supprimer les dégradations générées par le signal de correction du PAPR  $\mathbf{c}_n$  sur les porteuses utiles.

L'objectif de la méthode 2-MTR-GP étant de relâcher l'orthogonalité entre les porteuses réservées, le signal de correction du PAPR générera des perturbations sur les porteuses utiles. D'où le schéma de filtrage afin de supprimer ces perturbations. Ainsi comme dans la section 5.5.2, nous verrons que ce filtrage peut être inclus directement dans le problème d'optimisation permettant ainsi un gain en complexité. Pour cette méthode nous n'allons pas effectuer une caractérisation des perturbations générées par le signal de correction sur les porteuses utiles comme ce fut le cas pour

la méthode 1-MTR-GP, voir Annexe B. En effet, le schéma de filtrage à appliquer sur cette méthode est identique à celui décrit dans la Figure 5.7, ainsi nous ne donnerons dans cette section que l'expression  $\mathbf{p}_n$  des perturbations à extraire de  $\mathbf{c}_n$  afin de garantir la non dégradation des données utiles.

### 5.6.2 Construction de la matrice d'insertion pour la méthode 2-MTR-GP

Le calcul des composantes du signal de correction  $\mathbf{c}_n$  du PAPR comme indiqué dans la section précédente, passe par une minimisation des bruits de *clipping* partiels illustrés dans la Figure 5.23 sous la contrainte TR sur les 16 symboles issus de la double décomposition de  $\mathbf{x}_n$ . D'un point de vue mathématique, on a les 4 problèmes d'optimisation suivants :

$$\begin{aligned} & \min_{(\mathbf{c}_{4n}^{1,1}, \mathbf{c}_{4n}^{1,2}, \mathbf{c}_{4n}^{2,1}, \mathbf{c}_{4n}^{2,2})} \left( J_{[\mathbf{x}_{4n}^{1,1} + \mathbf{x}_{4n}^{1,2} + \mathbf{x}_{4n}^{2,1} + \mathbf{x}_{4n}^{2,2}]}(\mathbf{c}_{4n}^{1,1}, \mathbf{c}_{4n}^{1,2}, \mathbf{c}_{4n}^{2,1}, \mathbf{c}_{4n}^{2,2}) \right) \\ \text{Sous la contrainte} \quad & \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{L}(\mathbf{F}_{M_2L}^{\text{Col}})^H(\mathbf{x}_{4n}^{1,1} + \mathbf{c}_{4n}^{1,1}) &= \begin{cases} X_{4n,m}^{1,1} & \text{Si } m \notin \mathcal{K}^{0,0} \\ C_{4n,m}^{1,1} & \text{Si } m \in \mathcal{K}^{0,0} \end{cases} \\ \frac{1}{L}(\mathbf{F}_{M_2L}^{\text{Col}})^H((\mathbb{D}_{M_2L})^H(\mathbf{x}_{4n}^{1,2} + \mathbf{c}_{4n}^{1,2})) &= \begin{cases} X_{4n,m}^{1,2} & \text{Si } m \notin \mathcal{K}^{0,1} \\ C_{4n,m}^{1,2} & \text{Si } m \in \mathcal{K}^{0,1} \end{cases} \\ \frac{1}{L}(\mathbf{F}_{M_2L}^{\text{Col}})^H((\mathbb{D}^1)^H(\mathbf{x}_{4n}^{2,1} + \mathbf{c}_{4n}^{2,1})) &= \begin{cases} X_{4n,m}^{2,1} & \text{Si } m \notin \mathcal{K}^{1,0} \\ C_{4n,m}^{2,1} & \text{Si } m \in \mathcal{K}^{1,0} \end{cases} \\ \frac{1}{L}(\mathbf{F}_{M_2L}^{\text{Col}})^H((\mathbb{D}^1\mathbb{D}_{M_2L})^H(\mathbf{x}_{4n}^{2,2} + \mathbf{c}_{4n}^{2,2})) &= \begin{cases} X_{4n,m}^{2,2} & \text{Si } m \notin \mathcal{K}^{1,1} \\ C_{4n,m}^{2,2} & \text{Si } m \in \mathcal{K}^{1,1} \end{cases} \end{aligned} \right. \quad (5.83) \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned} & \min_{(\mathbf{c}_{4n+1}^{1,1}, \mathbf{c}_{4n+1}^{1,2}, \mathbf{c}_{4n+1}^{2,1}, \mathbf{c}_{4n+1}^{2,2})} \left( J_{[\mathbf{x}_{4n+1}^{1,1} + \mathbf{x}_{4n+1}^{1,2} + \mathbf{x}_{4n+1}^{2,1} + \mathbf{x}_{4n+1}^{2,2}]}(\mathbf{c}_{4n+1}^{1,1}, \mathbf{c}_{4n+1}^{1,2}, \mathbf{c}_{4n+1}^{2,1}, \mathbf{c}_{4n+1}^{2,2}) \right) \\ \text{Sous la contrainte} \quad & \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{L}(\mathbf{F}_{M_2L}^{\text{Col}})^H(\mathbf{x}_{4n+1}^{1,1} + \mathbf{c}_{4n+1}^{1,1}) &= \begin{cases} X_{4n+1,m}^{1,1} & \text{Si } m \notin \mathcal{K}^{0,0} \\ C_{4n+1,m}^{1,1} & \text{Si } m \in \mathcal{K}^{0,0} \end{cases} \\ \frac{1}{L}(\mathbf{F}_{M_2L}^{\text{Col}})^H(-(\mathbb{D}_{M_2L})^H(\mathbf{x}_{4n+1}^{1,2} + \mathbf{c}_{4n+1}^{1,2})) &= \begin{cases} X_{4n+1,m}^{1,2} & \text{Si } m \notin \mathcal{K}^{0,1} \\ C_{4n+1,m}^{1,2} & \text{Si } m \in \mathcal{K}^{0,1} \end{cases} \\ \frac{1}{L}(\mathbf{F}_{M_2L}^{\text{Col}})^H((\mathbb{D}^2)^H(\mathbf{x}_{4n+1}^{2,1} + \mathbf{c}_{4n+1}^{2,1})) &= \begin{cases} X_{4n+1,m}^{2,1} & \text{Si } m \notin \mathcal{K}^{1,0} \\ C_{4n+1,m}^{2,1} & \text{Si } m \in \mathcal{K}^{1,0} \end{cases} \\ \frac{1}{L}(\mathbf{F}_{M_2L}^{\text{Col}})^H((\mathbb{D}^2\mathbb{D}_{M_2L})^H(\mathbf{x}_{4n+1}^{2,2} + \mathbf{c}_{4n+1}^{2,2})) &= \begin{cases} X_{4n+1,m}^{2,2} & \text{Si } m \notin \mathcal{K}^{1,1} \\ C_{4n+1,m}^{2,2} & \text{Si } m \in \mathcal{K}^{1,1} \end{cases} \end{aligned} \right. \quad (5.84) \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned}
 & \min_{(\mathbf{c}_{4n+2}^{1,1}, \mathbf{c}_{4n+2}^{1,2}, \mathbf{c}_{4n+2}^{2,1}, \mathbf{c}_{4n+2}^{2,2})} \left( J_{[\mathbf{x}_{4n+2}^{1,1} + \mathbf{x}_{4n+2}^{1,2} + \mathbf{x}_{4n+2}^{2,1} + \mathbf{x}_{4n+2}^{2,2}]}(\mathbf{c}_{4n+2}^{1,1}, \mathbf{c}_{4n+2}^{1,2}, \mathbf{c}_{4n+2}^{2,1}, \mathbf{c}_{4n+2}^{2,2}) \right) \\
 \text{Sous la contrainte} & \left\{ \begin{aligned}
 & \frac{1}{L} (\mathbf{F}_{M_2L}^{\text{Col}})^H (\mathbf{x}_{4n+2}^{1,1} + \mathbf{c}_{4n+2}^{1,1}) = \begin{cases} X_{4n+2,m}^{1,1} & \text{Si } m \notin \mathcal{K}^{0,0} \\ C_{4n+2,m}^{1,1} & \text{Si } m \in \mathcal{K}^{0,0} \end{cases} \\
 & \frac{1}{L} (\mathbf{F}_{M_2L}^{\text{Col}})^H ((\mathbb{D}_{M_2L})^H (\mathbf{x}_{4n+2}^{1,2} + \mathbf{c}_{4n+2}^{1,2})) = \begin{cases} X_{4n+2,m}^{1,2} & \text{Si } m \notin \mathcal{K}^{0,1} \\ C_{4n+2,m}^{1,2} & \text{Si } m \in \mathcal{K}^{0,1} \end{cases} \\
 & \frac{1}{L} (\mathbf{F}_{M_2L}^{\text{Col}})^H (- (\mathbb{D}^1)^H (\mathbf{x}_{4n+2}^{2,1} + \mathbf{c}_{4n+2}^{2,1})) = \begin{cases} X_{4n+2,m}^{2,1} & \text{Si } m \notin \mathcal{K}^{1,0} \\ C_{4n+2,m}^{2,1} & \text{Si } m \in \mathcal{K}^{1,0} \end{cases} \\
 & \frac{1}{L} (\mathbf{F}_{M_2L}^{\text{Col}})^H (- (\mathbb{D}^1 \mathbb{D}_{M_2L})^H (\mathbf{x}_{4n+2}^{2,2} + \mathbf{c}_{4n+2}^{2,2})) = \begin{cases} X_{4n+2,m}^{2,2} & \text{Si } m \notin \mathcal{K}^{1,0} \\ C_{4n+2,m}^{2,2} & \text{Si } m \in \mathcal{K}^{1,1} \end{cases}
 \end{aligned} \right. \quad (5.85)
 \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned}
 & \min_{(\mathbf{c}_{4n+3}^{1,1}, \mathbf{c}_{4n+3}^{1,2}, \mathbf{c}_{4n+3}^{2,1}, \mathbf{c}_{4n+3}^{2,2})} \left( J_{[\mathbf{x}_{4n+3}^{1,1} + \mathbf{x}_{4n+3}^{1,2} + \mathbf{x}_{4n+3}^{2,1} + \mathbf{x}_{4n+3}^{2,2}]}(\mathbf{c}_{4n+3}^{1,1}, \mathbf{c}_{4n+3}^{1,2}, \mathbf{c}_{4n+3}^{2,1}, \mathbf{c}_{4n+3}^{2,2}) \right) \\
 \text{Sous la contrainte} & \left\{ \begin{aligned}
 & \frac{1}{L} (\mathbf{F}_{M_2L}^{\text{Col}})^H (\mathbf{x}_{4n+3}^{1,1} + \mathbf{c}_{4n+3}^{1,1}) = \begin{cases} X_{4n+3,m}^{1,1} & \text{Si } m \notin \mathcal{K}^{0,0} \\ C_{4n+3,m}^{1,1} & \text{Si } m \in \mathcal{K}^{0,0} \end{cases} \\
 & \frac{1}{L} (\mathbf{F}_{M_2L}^{\text{Col}})^H (- (\mathbb{D}_{M_2L})^H (\mathbf{x}_{4n+3}^{1,2} + \mathbf{c}_{4n+3}^{1,2})) = \begin{cases} X_{4n+3,m}^{1,2} & \text{Si } m \notin \mathcal{K}^{0,1} \\ C_{4n+3,m}^{1,2} & \text{Si } m \in \mathcal{K}^{0,1} \end{cases} \\
 & \frac{1}{L} (\mathbf{F}_{M_2L}^{\text{Col}})^H (- (\mathbb{D}^2)^H (\mathbf{x}_{4n+3}^{2,1} + \mathbf{c}_{4n+3}^{2,1})) = \begin{cases} X_{4n+3,m}^{2,1} & \text{Si } m \notin \mathcal{K}^{1,0} \\ C_{4n+3,m}^{2,1} & \text{Si } m \in \mathcal{K}^{1,0} \end{cases} \\
 & \frac{1}{L} (\mathbf{F}_{M_2L}^{\text{Col}})^H ((\mathbb{D}^2 \mathbb{D}_{M_2L})^H (\mathbf{x}_{4n+3}^{2,2} + \mathbf{c}_{4n+3}^{2,2})) = \begin{cases} X_{4n+3,m}^{2,2} & \text{Si } m \notin \mathcal{K}^{1,0} \\ C_{4n+3,m}^{2,2} & \text{Si } m \in \mathcal{K}^{1,1} \end{cases}
 \end{aligned} \right. \quad (5.86)
 \end{aligned}$$

Avec pour  $i = 0, \dots, 3$

$$\begin{aligned}
 J_{[\mathbf{x}_{4n+i}^{1,1} + \dots + \mathbf{x}_{4n+i}^{2,2}]}(\mathbf{c}_{4n+i}^{1,1}, \dots, \mathbf{c}_{4n+i}^{2,2}) &= \left\| (\mathbf{x}_{4n+i}^{1,1} + \dots + \mathbf{x}_{4n+i}^{2,2}) + (\mathbf{c}_{4n+i}^{1,1} + \dots + \mathbf{c}_{4n+i}^{2,2}) \right. \\
 &\quad \left. - f((\mathbf{x}_{4n+i}^{1,1} + \dots + \mathbf{x}_{4n+i}^{2,2}) + (\mathbf{c}_{4n+i}^{1,1} + \dots + \mathbf{c}_{4n+i}^{2,2}), A) \right\|_2^2 \quad (5.87)
 \end{aligned}$$

Pour la compréhension des contraintes mises en jeu dans les problèmes d'optimisation ci dessus, le lecteur peut se référer aux équations (5.77), (5.78) et (5.79) exprimant la projection des porteuses réservées de  $\mathcal{R}$  sur les symboles issus de la double décomposition de  $\mathbf{x}_n$ . Ainsi, en utilisant la construction des jeux de porteuses issus de cette projection sur les symboles issus de la double décomposition, voir équation (5.80), on remarquera que les composantes du signal de corrections sont générées en utilisant ces jeux de porteuses et donc sont orthogonales avec les symboles issus de la double décomposition.

Comme dans le cas de la méthode TR-GP classique ou de la méthode 1-MTR-GP, le but est de reformuler les problèmes d'optimisation ci-dessus à l'aide des composantes fréquentielles afin d'inclure les contraintes directement dans les fonctions de coût à minimiser et ainsi se ramener à des problèmes d'optimisation basiques. Pour ce faire, en utilisant les équations (5.63) et (5.74), les contraintes des problèmes d'optimisation (5.83), (5.84), (5.85) et (5.86) peuvent respectivement s'exprimer sous forme matricielle en fonction de leurs composantes fréquentielles respectives comme suit :

$$\begin{aligned}
\mathbf{c}_{4n}^{1,1} &= \underbrace{\mathbb{F}_{M_2L, N_{\mathcal{K}(0,0)}}^{\mathcal{K}(0,0)}}_{\mathbb{A}_1^{(0)}} \mathbf{C}_{4n}^{1,1} \\
\mathbf{c}_{4n}^{1,2} &= \underbrace{\mathbb{D}_{M_2L} \mathbb{F}_{M_2L, N_{\mathcal{K}(0,1)}}^{\mathcal{K}(0,1)}}_{\mathbb{A}_2^{(0)}} \mathbf{C}_{4n}^{1,2} \\
\mathbf{c}_{4n}^{2,1} &= \underbrace{\mathbb{D}^1 \mathbb{F}_{M_2L, N_{\mathcal{K}(1,0)}}^{\mathcal{K}(1,0)}}_{\mathbb{A}_3^{(0)}} \mathbf{C}_{4n}^{2,1} \\
\mathbf{c}_{4n}^{2,2} &= \underbrace{\mathbb{D}^1 \mathbb{D}_{M_2L} \mathbb{F}_{M_2L, N_{\mathcal{K}(1,1)}}^{\mathcal{K}(1,1)}}_{\mathbb{A}_4^{(0)}} \mathbf{C}_{4n}^{2,2}
\end{aligned} \tag{5.88}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{c}_{4n+2}^{1,1} &= \underbrace{\mathbb{F}_{M_2L, N_{\mathcal{K}(0,0)}}^{\mathcal{K}(0,0)}}_{\mathbb{A}_1^{(2)}} \mathbf{C}_{4n+2}^{1,1} \\
\mathbf{c}_{4n+2}^{1,2} &= \underbrace{\mathbb{D}_{M_2L} \mathbb{F}_{M_2L, N_{\mathcal{K}(0,1)}}^{\mathcal{K}(0,1)}}_{\mathbb{A}_2^{(2)}} \mathbf{C}_{4n+2}^{1,2} \\
\mathbf{c}_{4n+2}^{2,1} &= \underbrace{-\mathbb{D}^1 \mathbb{F}_{M_2L, N_{\mathcal{K}(1,0)}}^{\mathcal{K}(1,0)}}_{\mathbb{A}_3^{(2)}} \mathbf{C}_{4n+2}^{2,1} \\
\mathbf{c}_{4n+2}^{2,2} &= \underbrace{-\mathbb{D}^1 \mathbb{D}_{M_2L} \mathbb{F}_{M_2L, N_{\mathcal{K}(1,1)}}^{\mathcal{K}(1,1)}}_{\mathbb{A}_4^{(2)}} \mathbf{C}_{4n+2}^{2,2}
\end{aligned} \tag{5.90}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{c}_{4n+1}^{1,1} &= \underbrace{\mathbb{F}_{M_2L, N_{\mathcal{K}(0,0)}}^{\mathcal{K}(0,0)}}_{\mathbb{A}_1^{(1)}} \mathbf{C}_{4n+1}^{1,1} \\
\mathbf{c}_{4n+1}^{1,2} &= \underbrace{-\mathbb{D}_{M_2L} \mathbb{F}_{M_2L, N_{\mathcal{K}(0,1)}}^{\mathcal{K}(0,1)}}_{\mathbb{A}_2^{(1)}} \mathbf{C}_{4n+1}^{1,2} \\
\mathbf{c}_{4n+1}^{2,1} &= \underbrace{\mathbb{D}^2 \mathbb{F}_{M_2L, N_{\mathcal{K}(1,0)}}^{\mathcal{K}(1,0)}}_{\mathbb{A}_3^{(1)}} \mathbf{C}_{4n+1}^{2,1} \\
\mathbf{c}_{4n+1}^{2,2} &= \underbrace{\mathbb{D}^2 \mathbb{D}_{M_2L} \mathbb{F}_{M_2L, N_{\mathcal{K}(1,1)}}^{\mathcal{K}(1,1)}}_{\mathbb{A}_4^{(1)}} \mathbf{C}_{4n+1}^{2,2}
\end{aligned} \tag{5.89}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{c}_{4n+3}^{1,1} &= \underbrace{\mathbb{F}_{M_2L, N_{\mathcal{K}(0,0)}}^{\mathcal{K}(0,0)}}_{\mathbb{A}_1^{(3)}} \mathbf{C}_{4n+3}^{1,1} \\
\mathbf{c}_{4n+3}^{1,2} &= \underbrace{-\mathbb{D}_{M_2L} \mathbb{F}_{M_2L, N_{\mathcal{K}(0,1)}}^{\mathcal{K}(0,1)}}_{\mathbb{A}_2^{(3)}} \mathbf{C}_{4n+3}^{1,2} \\
\mathbf{c}_{4n+3}^{2,1} &= \underbrace{-\mathbb{D}^2 \mathbb{F}_{M_2L, N_{\mathcal{K}(1,0)}}^{\mathcal{K}(1,0)}}_{\mathbb{A}_3^{(3)}} \mathbf{C}_{4n+3}^{2,1} \\
\mathbf{c}_{4n+3}^{2,2} &= \underbrace{\mathbb{D}^2 \mathbb{D}_{M_2L} \mathbb{F}_{M_2L, N_{\mathcal{K}(1,1)}}^{\mathcal{K}(1,1)}}_{\mathbb{A}_4^{(3)}} \mathbf{C}_{4n+3}^{2,2}
\end{aligned} \tag{5.91}$$

En utilisant les équations (5.88), (5.89), (5.90) et (5.91) les 4 problèmes d'optimisation précédents peuvent respectivement être reformulés comme suit :

$$\min_{(\mathbf{C}_{4n}^{1,1}, \dots, \mathbf{C}_{4n}^{2,2})} J_0 \left( \mathbf{C}_{4n}^{1,1}, \dots, \mathbf{C}_{4n}^{2,2} \right) \tag{5.92}$$

$$\min_{(\mathbf{C}_{4n+2}^{1,1}, \dots, \mathbf{C}_{4n+2}^{2,2})} J_2 \left( \mathbf{C}_{4n+2}^{1,1}, \dots, \mathbf{C}_{4n+2}^{2,2} \right) \tag{5.94}$$

$$\min_{(\mathbf{C}_{4n+1}^{1,1}, \dots, \mathbf{C}_{4n+1}^{2,2})} J_1 \left( \mathbf{C}_{4n+1}^{1,1}, \dots, \mathbf{C}_{4n+1}^{2,2} \right) \tag{5.93}$$

$$\min_{(\mathbf{C}_{4n+3}^{1,1}, \dots, \mathbf{C}_{4n+3}^{2,2})} J_3 \left( \mathbf{C}_{4n+3}^{1,1}, \dots, \mathbf{C}_{4n+3}^{2,2} \right) \tag{5.95}$$

Pour  $i = 0, \dots, 3$ , la fonction de coût  $J_i \left( \mathbf{C}_{4n+i}^{1,1}, \mathbf{C}_{4n+i}^{1,2}, \mathbf{C}_{4n+i}^{2,1}, \mathbf{C}_{4n+i}^{2,2} \right)$  est définie en remplaçant dans l'équation (5.87) les  $\mathbf{c}_{4n+i}^{1,1}$ ,  $\mathbf{c}_{4n+i}^{1,2}$ ,  $\mathbf{c}_{4n+i}^{2,1}$  et  $\mathbf{c}_{4n+i}^{2,2}$  par respectivement  $\mathbb{A}_1^{(i)} \mathbf{C}_{4n+i}^{1,1}$ ,  $\mathbb{A}_2^{(i)} \mathbf{C}_{4n+i}^{1,2}$ ,  $\mathbb{A}_3^{(i)} \mathbf{C}_{4n+i}^{2,1}$  et  $\mathbb{A}_4^{(i)} \mathbf{C}_{4n+i}^{2,2}$ . En d'autres termes, pour  $i = 0, \dots, 3$ , la fonction de coût est donnée comme suit :

$$\begin{aligned}
J_i \left( \mathbf{C}_{4n+i}^{1,1}, \dots, \mathbf{C}_{4n+i}^{2,2} \right) &= \left\| \left( \mathbf{x}_{4n+i}^{1,1} + \dots + \mathbf{x}_{4n+i}^{2,2} \right) + \left( \mathbb{A}_1^{(i)} \mathbf{C}_{4n+i}^{1,1} + \dots + \mathbb{A}_4^{(i)} \mathbf{C}_{4n+i}^{2,2} \right) - \right. \\
&\quad \left. + f \left( \left( \mathbf{x}_{4n+i}^{1,1} + \dots + \mathbf{x}_{4n+i}^{2,2} \right) + \left( \mathbb{A}_1^{(i)} \mathbf{C}_{4n+i}^{1,1} + \dots + \mathbb{A}_4^{(i)} \mathbf{C}_{4n+i}^{2,2} \right) \right) \right\|_2^2
\end{aligned} \tag{5.96}$$

Dans ce qui suit nous allons maintenant combiner les 4 problèmes d'optimisation précédents en un seul problème d'optimisation. Le but est de se passer de la connaissance des 16 sym-

boles issus de la décomposition de  $\mathbf{x}_n$  pour le calcul du signal de correction. Pour ce faire nous allons déterminer la matrice permettant de traduire le schéma d'insertion de la méthode TR-GP. À cet effet, soient  $\mathbb{B}_1$  et  $\mathbb{B}_2$  des matrices définies comme suit :

$$\begin{aligned} \mathbb{B}^1 &= \begin{bmatrix} \mathbb{A}_1^{(0)} & \mathbf{0}_{LM_2, N_{\mathcal{K}(0,0)}} & \mathbb{A}_2^{(0)} & \mathbf{0}_{LM_2, N_{\mathcal{K}(0,1)}} \\ \mathbf{0}_{LM_2, N_{\mathcal{K}(0,0)}} & \mathbb{A}_1^{(1)} & \mathbf{0}_{LM_2, N_{\mathcal{K}(0,1)}} & \mathbb{A}_2^{(1)} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbb{F}_{M_2L, N_{\mathcal{K}(0,0)}}^{\mathcal{K}(0,0)} & \mathbf{0}_{LM_2, N_{\mathcal{K}(0,0)}} & \tilde{\mathbb{F}}_{M_2L, N_{\mathcal{K}(0,1)}}^{\mathcal{K}(0,1),1} & \mathbf{0}_{LM_2, N_{\mathcal{K}(0,1)}} \\ \mathbf{0}_{LM_2, N_{\mathcal{K}(0,0)}} & \mathbb{F}_{M_2L, N_{\mathcal{K}(0,0)}}^{\mathcal{K}(0,0)} & \mathbf{0}_{LM_2, N_{\mathcal{K}(0,1)}} & \tilde{\mathbb{F}}_{M_2L, N_{\mathcal{K}(0,1)}}^{\mathcal{K}(0,1),2} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.97)$$

Avec  $\tilde{\mathbb{F}}_{M_2L, N_{\mathcal{K}(0,1)}}^{\mathcal{K}(0,1),1} = -\tilde{\mathbb{F}}_{M_2L, N_{\mathcal{K}(0,1)}}^{\mathcal{K}(0,1),2} = \mathbb{D}_{M_2L} \tilde{\mathbb{F}}_{M_2L, N_{\mathcal{K}(0,1)}}^{\mathcal{K}(0,1)}$ . Rappelons que  $N_{\mathcal{K}(0,0)}$  et  $N_{\mathcal{K}(0,1)}$  désignant respectivement le nombre de porteuses paires et impaires dans  $\mathcal{K}^{(0)}$

$$\begin{aligned} \mathbb{B}^2 &= \begin{bmatrix} \mathbb{A}_3^{(0)} & \mathbf{0}_{LM_2, N_{\mathcal{K}(1,0)}} & \mathbb{A}_4^{(0)} & \mathbf{0}_{LM_2, N_{\mathcal{K}(1,1)}} \\ \mathbf{0}_{LM_2, N_{\mathcal{K}(1,0)}} & \mathbb{A}_3^{(1)} & \mathbf{0}_{LM_2, N_{\mathcal{K}(1,1)}} & \mathbb{A}_4^{(1)} \end{bmatrix} \\ &= \mathbb{D}_{M_1L} \begin{bmatrix} \mathbb{F}_{M_2L, N_{\mathcal{K}(1,0)}}^{\mathcal{K}(1,0)} & \mathbf{0}_{LM_2, N_{\mathcal{K}(1,0)}} & \tilde{\mathbb{F}}_{M_2L, N_{\mathcal{K}(1,1)}}^{\mathcal{K}(1,1),1} & \mathbf{0}_{LM_2, N_{\mathcal{K}(0,1)}} \\ \mathbf{0}_{LM_2, N_{\mathcal{K}(1,0)}} & \mathbb{F}_{M_2L, N_{\mathcal{K}(1,0)}}^{\mathcal{K}(1,0)} & \mathbf{0}_{LM_2, N_{\mathcal{K}(1,1)}} & \tilde{\mathbb{F}}_{M_2L, N_{\mathcal{K}(1,1)}}^{\mathcal{K}(1,1),2} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.98)$$

Avec  $\tilde{\mathbb{F}}_{M_2L, N_{\mathcal{K}(1,1)}}^{\mathcal{K}(1,1),2} = -\tilde{\mathbb{F}}_{M_2L, N_{\mathcal{K}(1,1)}}^{\mathcal{K}(1,1),1} = \mathbb{D}_{M_2L} \tilde{\mathbb{F}}_{M_2L, N_{\mathcal{K}(1,1)}}^{\mathcal{K}(1,1)}$ . Rappelons que  $N_{\mathcal{K}(1,0)}$  et  $N_{\mathcal{K}(1,1)}$  désignant respectivement le nombre de porteuses paires et impaires dans  $\mathcal{K}^{(1)}$ .

Considérons maintenant la matrice  $\mathbb{B}$  définie comme suit :

$$\mathbb{B} = \begin{bmatrix} \mathbb{B}^1 & \mathbf{0}_{LM_1, 2N_{\mathcal{K}(0)}} & \mathbb{B}^2 & \mathbf{0}_{LM_1, 2N_{\mathcal{K}(1)}} \\ \mathbf{0}_{LM_1, 2N_{\mathcal{K}(0)}} & \mathbb{B}^1 & \mathbf{0}_{LM_1, 2N_{\mathcal{K}(1)}} & -\mathbb{B}^2 \end{bmatrix} \quad (5.99)$$

Considérons maintenant le vecteur fréquentiel défini comme suit :

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{c}}_n &= \left[ \mathbf{c}_{4n}^{1,1} \bullet \mathbf{c}_{4n+1}^{1,1} \bullet \mathbf{c}_{4n}^{1,2} \bullet \mathbf{c}_{4n+1}^{1,2} \bullet \mathbf{c}_{4n}^{2,1} \bullet \mathbf{c}_{4n+1}^{2,1}, \mathbf{c}_{4n}^{2,2} \bullet \mathbf{c}_{4n+1}^{2,2} \bullet \right. \\ &\quad \left. \mathbf{c}_{4n+2}^{1,1} \bullet \mathbf{c}_{4n+3}^{1,1} \bullet \mathbf{c}_{4n+2}^{1,2}, \mathbf{c}_{4n+3}^{1,2} \bullet \mathbf{c}_{4n+2}^{2,1} \bullet \mathbf{c}_{4n+3}^{2,1}, \mathbf{c}_{4n+2}^{2,2} \bullet \mathbf{c}_{4n+3}^{2,2} \right] \end{aligned} \quad (5.100)$$

Alors par construction du signal de correction du PAPR, voir (5.81), on peut vérifier aisément que  $\mathbf{c}_n = \mathbb{B}\bar{\mathbf{c}}_n$ , en outre, les problèmes d'optimisations (5.92), (5.93), (5.94), et (5.95) peuvent être reformulés sous forme d'un seul problème avec comme variable d'optimisation  $\bar{\mathbf{c}}_n$  comme suit :

$$\min_{\bar{\mathbf{c}}_n} (\|\mathbf{x}_n + \mathbb{B}\bar{\mathbf{c}}_n - f(\mathbf{x}_n + \mathbb{B}\bar{\mathbf{c}}_n, A)\|_2^2) \quad (5.101)$$

Comme nous l'avons précédemment souligné, la double décomposition du symbole  $\mathbf{x}_n$  n'intervient que pour définir la manière dont le signal de correction du PAPR sera généré. Il n'est pas nécessaire de connaître les symboles issus de cette double décomposition du signal  $\mathbf{x}_n$  pour calculer le signal de correction du PAPR comme on peut le voir sur le problème d'optimisation (5.101).



Comme pour la méthode 1-MTR-GP, voir la sous section 5.3.2, la méthode 2-MTR-GP va dégrader le BER pour les mêmes raisons évoquées dans cette sous section. Ainsi, afin de pallier ce problème nous allons procéder à un filtrage dans le domaine fréquentiel, qui consistera à extraire les perturbations générées par le signal de correction du PAPR sur les porteuses utiles du symbole  $\mathbf{x}_n$  en utilisant le schéma de filtrage décrit dans la Figure 5.7. Pour des raisons de complexité, l'étape de filtrage va être incluse directement dans la problème d'optimisation comme dans la section 5.4.2. Ainsi, en utilisant les mêmes notations que dans la section 5.4.2, le problème d'optimisation 5.101 peut être réécrit comme suit :

$$\min_{\bar{\mathbf{C}}_n} \left( \|\mathbf{x}_n + \mathbb{B}\bar{\mathbf{C}}_n - \mathbf{p}_n - f(\mathbf{x}_n + \mathbb{B}\bar{\mathbf{C}}_n - \mathbf{p}_n, A)\|_2^2 \right) \quad (5.102)$$

Avec  $\mathbf{p}_n$  désignant les perturbations générées par le signal de correction du PAPR, solution du problème d'optimisation (5.101).

$$\mathbf{p}_n = \left[ (1 - \delta)\mathbb{F}_{M,R^c} (\mathbb{F}_{M,R^c})^H \mathbb{B} \right] \check{\mathbf{C}}_n \quad (5.103)$$

Il vient alors qu'après quelques calculs le problème (5.102) est équivalent à :

$$\min_{\bar{\mathbf{C}}_n} \left( \|\mathbf{x}_n + \tilde{\mathbb{B}}\bar{\mathbf{C}}_n - f(\mathbf{x}_n + \tilde{\mathbb{B}}\bar{\mathbf{C}}_n, A)\|_2^2 \right) \quad (5.104)$$

Avec :

$$\tilde{\mathbb{B}} = \mathbb{B} - (1 - \delta)\mathbb{F}_{M,R^c} (\mathbb{F}_{M,R^c})^H \mathbb{B} \quad (5.105)$$

Comme précédemment, on peut facilement vérifier que lorsque  $\delta = 0$ , la méthode 2-MTR-GP sera sans dégradation du BER et sans émission hors bande comme la méthode TR-GP classique. Par contre lorsque  $0 < \delta \leq 1$ , la méthode 2-MTR-GP entraînera des dégradations. Ainsi, un compromis entre PAPR et BER peut être envisagé. Cependant, comme nous l'avons souligné dans la section 5.5.3, les performances en PAPR ne varient pas considérablement en fonction du coefficient d'atténuation  $\delta$ , alors que les dégradations du BER varient significativement en fonction du  $\delta$ , voir la sous section 5.5.3. Ainsi dans la section à venir, nous ne regarderons que le cas  $\delta = 0$ , i.e le cas sans dégradation, pour évaluer les performances de la méthode 2-MTR-GP.

Signalons d'abord que le problème d'optimisation (5.104) peut être résolu via l'algorithme du gradient projeté. Pour ce faire, il suffit de remplacer dans l'Algorithme 7 la matrice de projection  $\mathbb{P} = \tilde{\mathbb{A}}\tilde{\mathbb{A}}^H$  par  $\tilde{\mathbb{B}}\tilde{\mathbb{B}}^H$ . Ainsi, cette méthode aura la même complexité numérique que la méthode TR-GP classique et la méthode 1-MTR-GP.

### 5.6.3 Performances en termes de réduction du PAPR et de variation de la puissance moyenne ( $\Delta E$ )

Dans cette section nous allons comparer les méthodes TR-GP, 1-MTR-GP et 2-MTR-GP en termes de réduction du PAPR et de variation de la puissance moyenne ( $\Delta E$ ) définies par l'équation suivante. Notons que pour le cas  $\delta = 0$ , les méthodes 1-MTR-GP et 2-MTR-GP seront sans dégradation du BER.

$$\Delta E = 10\text{Log}_{10} \left[ \frac{P_{y_n}}{P_{x_n}} \right] \quad (5.106)$$

Avec  $\mathbf{x}_n$  et  $\mathbf{y}_n$  désignant respectivement le symbole avant et après réduction du PAPR.

L'environnement de simulation sera un système OFDM comportant  $M = 256$  porteuses au total et modulant des données issues d'une constellation 16-QAM. Afin d'avoir une bonne approximation du PAPR, nous travaillerons avec un facteur de sur-échantillonnage de  $L = 4$ . Le nombre de porteuses réservées sera de  $N_{\mathcal{R}} = 12$  et le type de *mapping* pour l'ensemble des porteuses réservées  $\mathcal{R}$  sera le *Contiguous Tones-Middle Side*, voir équation (5.59). C'est cette structure de *mapping* qui a été utilisé dans [34], d'où ce choix dans cette section. Dans cette section, nous regarderons aussi l'effet du seuil de *clipping* utilisé sur les performances des méthodes TR-GP, 1-MTR-GP et 2-MTR-GP en évaluant les performances en réduction du PAPR pour différents seuils d'écrêtage  $\rho$ .

### 5.6.3.1 Performances en réduction du PAPR

Pour un seuil  $\rho = 7\text{dB}$ , la Figure 5.24 compare les CCDF du signal avant et après réduction du PAPR via les méthodes TR-GP, 1-MTR-GP et 2-MTR-GP après 10 itérations.

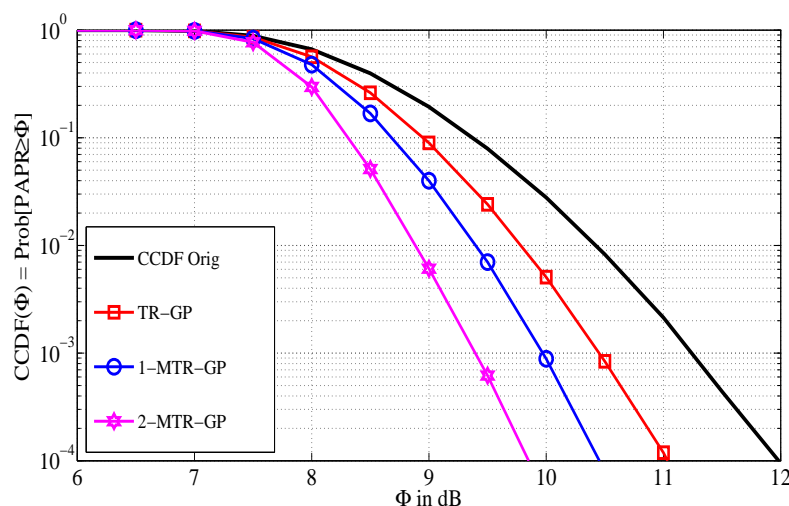


FIGURE 5.24 – Performance en termes de réduction de PAPR des méthodes 1-MTR-GP, 2-MTR-GP et TR-GP avec  $\rho = 7\text{dB}$  et après 10 itérations

Les résultats de simulations de la Figure 5.24 montrent que les méthodes 1-MTR-GP et 2-MTR-GP sont plus performantes que la méthode TR-GP. Les méthodes 1-MTR-GP et 2-MTR-GP donnent respectivement un PAPR de sortie à  $10^{-4}$  de la CCDF d'environ 9.8dB et 10.4dB contre 11dB pour la méthode TR-GP. En outre on remarque que la double décomposition permet d'améliorer encore les performances en réduction du PAPR sans aucun coût supplémentaire en termes de complexité numérique. Globalement la MTR (via la méthode 2-MTR-GP) permet de gagner environ 1.2dB de gain en réduction de PAPR par rapport à la méthode TR-GP classique.

Dans ce qui suit nous allons maintenant évaluer l'impact du seuil d'écrêtage utilisé sur les performances en réduction du PAPR des différentes méthodes comparées précédemment. Pour ce faire, les Figures 5.25 et 5.26 donnent respectivement le PAPR à  $10^{-4}$  de la CCDF après 10 et 20 itérations en fonction du seuil normalisé d'écrêtage utilisé.

Les résultats de simulations des Figures 5.25 et 5.26 confirment que les méthodes que nous avons proposées (1-MTR-GP et 2-MTR-GP) sont plus performantes que la méthode TR-GP et cela quelque soit le seuil d'écrêtage utilisé. En outre, soulignons que les courbes

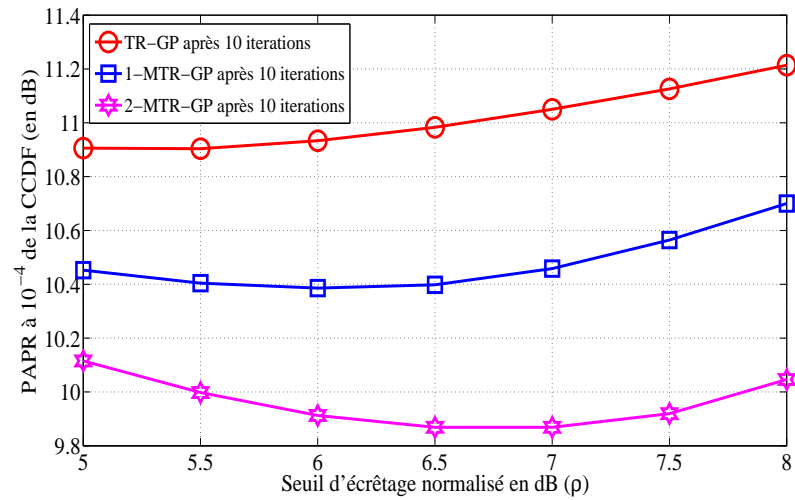


FIGURE 5.25 – Performance en termes de réduction de PAPR des méthodes 1-MT-GP, 2-MTR-GP et TR-GP en fonction du seuil  $\rho$  après 10 itérations

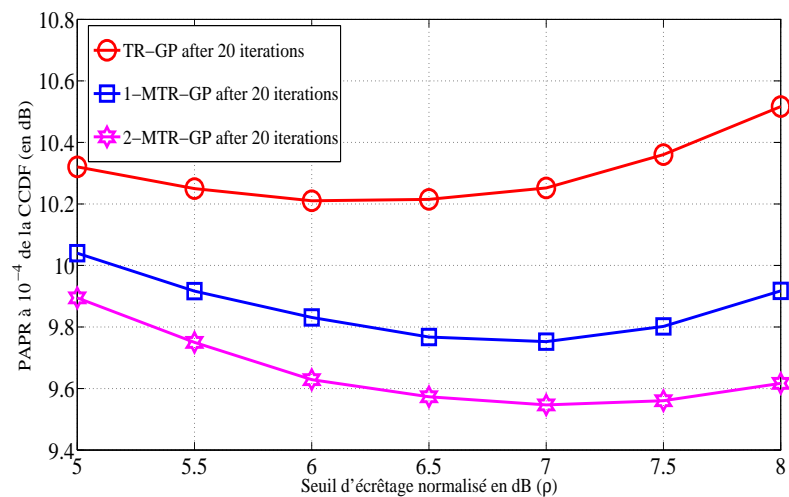


FIGURE 5.26 – Performance en termes de réduction de PAPR des méthodes 1-MT-GP, 2-MTR-GP et TR-GP en fonction du seuil  $\rho$  après 20 itérations

$N_{max} = 10$ itérations	TR-GP	1-MTR-GP	2-MTR-GP
Seuil d'écrêtage optimal en dB ( $\rho$ )	5.5	6.5	7
PAPR à $10^{-4}$ de la CCDF en dB	10.9	10.4	9.85

TABLE 5.1 – Récapitulatif de la Figure 5.25

$N_{max} = 20$ itérations	TR-GP	1-MTR-GP	2-MTR-GP
Seuil d'écrêtage optimal en dB ( $\rho$ )	6	7	7
PAPR à $10^{-4}$ de la CCDF en dB	10.2	9.75	9.55

TABLE 5.2 – Récapitulatif de la Figure 5.26

du PAPR à  $10^{-4}$  ne sont pas monotones par rapport au seuil d'écrêtage utilisé, c'est à dire qu'elles ne sont ni décroissantes ni croissantes en fonction de  $\rho$ . Les Tables 5.1 et 5.2 consignent pour chaque méthode les seuils optimaux (qui donnent le meilleur PAPR à  $10^{-4}$ ) après 10 et 20 itérations ainsi que les PAPR à  $10^{-4}$  de la CCDF associés pour chacune de ces méthodes.

Des résultats consignés dans les tableaux 5.1 et 5.2, on peut en déduire que le schéma d'insertion de la MTR permet d'améliorer le gain en réduction du PAPR d'environ 1.15dB après 10 itérations et 0.65dB après 20 itérations par rapport à la TR. On note que le gain en PAPR par rapport à la TR-GP diminue avec le nombre d'itérations, ce qui est tout à fait en accord avec le principe du gradient projeté qui est un algorithme qui permet de converger vers la solution optimale.

### 5.6.3.2 Évaluation des variations de la puissance moyenne induites après réduction du PAPR

L'inconvénient majeur des méthodes basées sur le principe de la *Tone Reservation* est l'augmentation de la puissance du signal après réduction du PAPR qu'elles entraînent. D'après l'équation (5.106) définissant la variation de la puissance moyenne après réduction du PAPR, on peut montrer que toute méthode basée sur le principe de la TR entraîne

une augmentation de la puissance moyenne. En effet, on a :

$$\begin{aligned}
 \Delta E &= 10\text{Log}_{10} \left[ \frac{P_{\mathbf{y}_n}}{P_{\mathbf{x}_n}} \right] \\
 &= 10\text{Log}_{10} \left[ \frac{\|\mathbf{y}_n\|_2^2}{\|\mathbf{x}_n\|_2^2} \right] \\
 &= 10\text{Log}_{10} \left[ \frac{\|\mathbf{Y}_n\|_2^2}{\|\mathbf{X}_n\|_2^2} \right] \\
 &= 10\text{Log}_{10} \left[ \frac{\|\mathbf{X}_n + \mathbf{C}_n\|_2^2}{\|\mathbf{X}_n\|_2^2} \right]
 \end{aligned} \tag{5.107}$$

Puisque par principe de la TR, les vecteurs  $\mathbf{X}_n$  et  $\mathbf{C}_n$  sont orthogonaux, il vient alors que :

$$\begin{aligned}
 \Delta E &= 10\text{Log}_{10} \left[ \frac{\|\mathbf{X}_n\|_2^2 + \|\mathbf{C}_n\|_2^2}{\|\mathbf{X}_n\|_2^2} \right] \\
 &= 10\text{Log}_{10} \left[ 1 + \frac{\|\mathbf{C}_n\|_2^2}{\|\mathbf{X}_n\|_2^2} \right]
 \end{aligned} \tag{5.108}$$

Ce qui prouve que les techniques basées sur la TR entraînent une augmentation de la puissance moyenne du signal.

Les Figures 5.27 et 5.28 donnent respectivement les variations de la puissance moyenne en fonction du seuil d'écrêtage après 10 et 20 itérations.

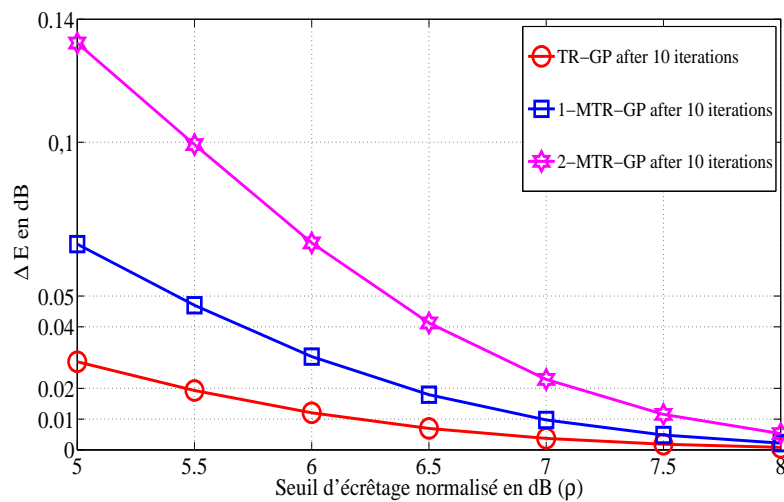


FIGURE 5.27 – Variations de la puissance moyenne induites par les méthodes 1-MT-GP, 2-MTR-GP et TR-GP en fonction du seuil  $\rho$  après 10 itérations

Comme on pouvait s'y attendre, les résultats de simulation des Figures 5.27 et 5.28 montrent que la méthode TR-GP entraîne une augmentation de la puissance moyenne plus faible que les méthodes 1-MTR-GP et 2-MTR-GP lorsque cette comparaison est faite pour le même seuil d'écrêtage. Ce résultat est tout à fait prévisible. En effet, plus le signal de correction du PAPR réduit les *peaks* qui dépassent le seuil prédéfini, plus sa puissance moyenne est grande, et par conséquent plus  $\Delta E$  est importante, voir (5.108). Cependant, comme nous l'avons vu sur les Figures 5.25 et 5.26, les courbes donnant le PAPR obtenus à  $10^{-4}$  de la CCDF des différentes méthodes en fonction du seuil  $\rho$  ne sont pas monotones

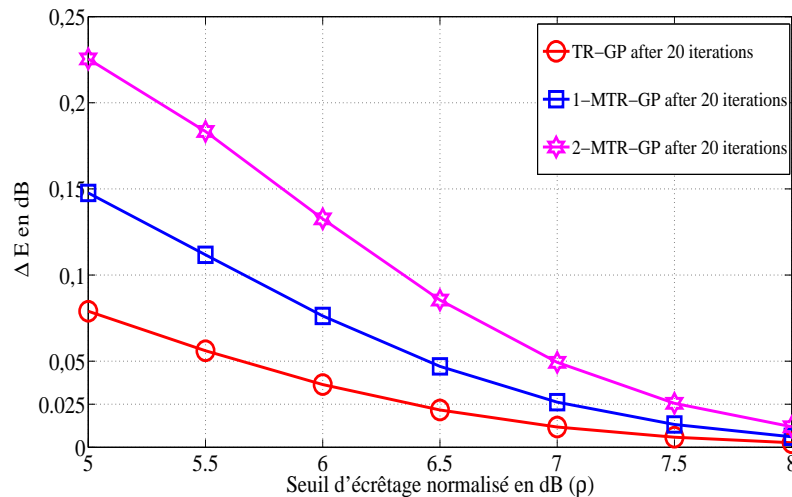


FIGURE 5.28 – Variations de la puissance moyenne induites par les méthodes 1-MTR-GP, 2-MTR-GP et TR-GP en fonction du seuil  $\rho$  après 20 itérations

$N_{max} = 10$ itérations	TR-GP	1-MTR-GP	2-MTR-GP
Seuil d'écrêtage optimal en dB ( $\rho$ )	5.5	6.5	7
PAPR à $10^{-4}$ de la CCDF en dB	10.9	10.4	9.85
$\Delta E$ en dB	0.02	0.017	0.025

TABLE 5.3 – Récapitulatif de la Figure 5.25 et 5.27

alors que celles donnant  $\Delta E$  en fonction de  $\rho$  le sont (elles sont décroissantes), voir Figures 5.27 et 5.28. Ainsi, une meilleure comparaison serait de regarder les variations de la puissance moyenne occasionnées en utilisant les seuils optimaux (donnant le meilleur PAPR) consignés dans les tableaux 5.1 et 5.2. Ainsi, les tableaux 5.3 et 5.4 complètent les tables précédentes avec les variations de puissances associées.

Les résultats consignés dans les tableaux 5.3 et 5.4 montrent que la méthode MTR permet d'avoir le meilleur compromis entre réduction du PAPR et augmentation de la puissance moyenne. En effet, on remarque que la méthode 1-MTR-GP permet d'offrir un meilleur gain en réduction du PAPR avec une augmentation de la puissance moyenne plus faible comparée à la méthode TR-GP en utilisant leur seuil optimal. Concernant la méthode 2-MTR-GP, on remarque qu'après 20 itérations elle permet d'améliorer le gain en PAPR d'environ 0.65dB pour une augmentation de la puissance moyenne d'environ  $0.05 - 0.037 = 0.013$ dB par rapport à la méthode TR-GP. Ce qui montre que le gain en PAPR est plus important que l'augmentation de la puissance moyenne engendrée parallèlement.

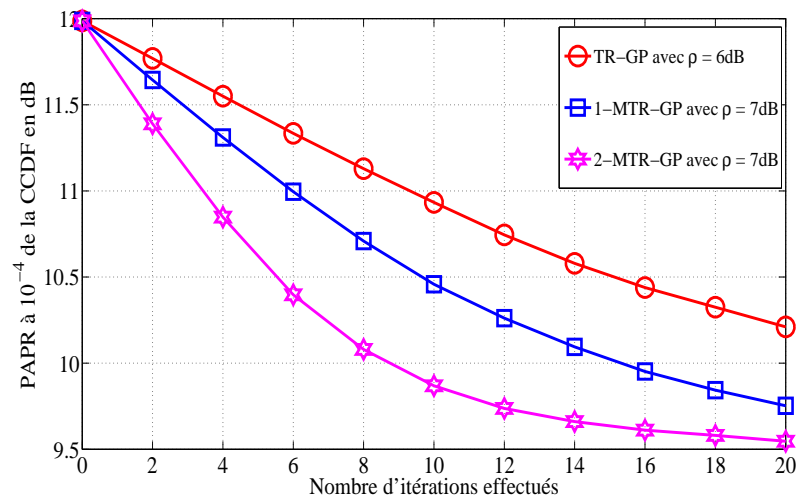
$N_{max} = 20$ itérations	TR-GP	1-MTR-GP	2-MTR-GP
Seuil d'écrêtage optimal en dB ( $\rho$ )	6	7	7
PAPR à $10^{-4}$ de la CCDF en dB	10.2	9.75	9.55
$\Delta E$ en dB	0.037	0.025	0.05

TABLE 5.4 – Récapitulatif de la Figure 5.26 et 5.28

### 5.6.3.3 Compromis PAPR- $\Delta E$ et Complexité numérique

Du fait de la limitation du nombre d'itérations maximales en pratique pour des raisons de complexité, nous allons dans ce qui suit évaluer les performances des méthodes 1-MTR-GP, 2-MTR-GP et TR-GP en fonction du nombre d'itérations et en utilisant pour chacune leur seuil optimal à 20 itérations consigné dans le Tableau 5.4.

Pour ce faire, considérons les Figures 5.29 et 5.30. Sur la Figure 5.29, le PAPR à  $10^{-4}$  en fonction du nombre d'itérations des méthodes TR-GP, 1-MTR-GP et 2-MTR-GP en utilisant pour chacune d'elles le seuil donnant le meilleur PAPR à  $10^{-4}$  de la CCDF après 20 itérations est évalué et sur la Figure 5.30, les variations de la puissance moyenne induites sont évaluées pour les mêmes seuils d'écrêtage.

FIGURE 5.29 – PAPR à  $10^{-4}$  des méthodes 1-MT-GP, 2-MTR-GP et TR-GP en fonction du nombre d'itérations

Comme nous l'avons mentionné précédemment, la méthode MTR permet d'avoir le meilleur compromis réduction du PAPR et variations de la puissance moyenne, cf Figures 5.29 et 5.30. En effet, on remarque sur ces deux figures que la méthode 1-MTR-GP permet d'obtenir un meilleur gain en réduction du PAPR (Figure 5.29) avec une augmentation de la puissance moyenne plus faible que celle engendrée par la méthode TR-GP (Figure 5.30). Pour la méthode 2-MTR-GP, on a une plus forte augmentation de la puissance moyenne par rapport à la méthode TR-GP qui est de l'ordre de 0.011dB et 0.013dB



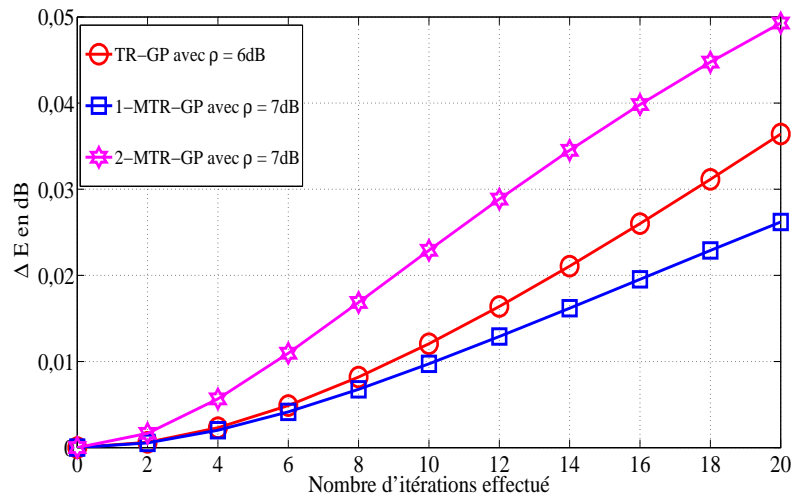


FIGURE 5.30 – Variations de la puissance moyenne  $\Delta E$  des méthodes 1-MT-GP, 2-MTR-GP et TR-GP en fonction du nombre d'itérations

après respectivement 10 et 20 itérations, voir Figure 5.30. Cependant au vu du gain en PAPR qu'apporte cette méthode par rapport à la méthode TR-GP, qui est d'environ 1.06dB et 0.66dB après respectivement 10 et 20 itérations voir Figure 5.30, on peut affirmer que cette méthode offre un meilleur compromis PAPR-vs- $\Delta E$  que la méthode TR-GP. En outre, notons aussi qu'après 10 itérations la méthode 2-MTR-GP permet d'avoir un meilleur gain en réduction du PAPR (9.87dB) suivi d'une plus faible augmentation de la puissance moyenne ( $\Delta E = 0.023\text{dB}$ ) que la méthode TR-GP après 20 itérations (gain en PAPR 10.21dB et  $\Delta E = 0.037\text{dB}$ ). Ainsi, dans un certain sens la MTR offre un gain en complexité numérique avec de meilleures performances en réduction du PAPR et avec une plus faible augmentation de la puissance moyenne.

#### 5.6.4 Généralisation de la méthode MTR par extension de la décomposition du symbole OFDM d'intérêt

Dans les sections 5.3.1 et 5.6.1 nous avons respectivement présenté en détail le procédé de décomposition et de double décomposition d'un symbole OFDM comme étant respectivement un mélange de 4 symboles multiporteuses et un mélange de 16 symboles multiporteuses. De ces deux schémas de décomposition nous avons donné une nouvelle manière de générer le signal de correction dans le cadre de la méthode TR. Ces deux nouveaux schémas d'insertion combinés à l'algorithme du gradient projeté pour le calcul des signaux de correction du PAPR respectifs nous ont permis d'obtenir les méthodes 1-MTR-GP et 2-MTR-GP. Les résultats de simulations présentés dans la section 5.6.3 confirment tout l'intérêt de ces deux méthodes en termes de réduction du PAPR. Dans cette section nous allons procéder à une extension de la méthode d'insertion MTR via une décomposition d'ordre 3, 4, 5 ... du symbole OFDM d'intérêt. Cependant, rappelons que nous avons montré dans les sections 5.4.1 et 5.6.2 que la décomposition (les symboles obtenus après décomposition) n'intervenait pas dans le calcul du signal de correction du PAPR et qu'elle permettait seulement de définir la manière d'insérer le signal de correction du PAPR et que cette insertion est complètement définie par les matrices  $\mathbb{A}$  et  $\mathbb{B}$ . En outre puisque la construction de ces matrices ne requiert que la connaissance de  $\mathcal{R}$  et  $M$ , nous allons dans cette section nous contenter de donner seulement la construction des matrices de génération du signal de correction dans le cas des méthodes 3-MTR-GP, 4-MTR-GP,

5-MTR-GP etc.

Pour des raisons de simplicité, la construction des matrices dédiées aux méthodes 3-MTR-GP, ..., 5-MTR-GP etc va être définie de manière récursive. En d'autres termes, pour  $k = 2, \dots, 5$  la construction de la matrice de la méthode  $k$ -MTR-GP va être définie en fonction de celle de la matrice de la méthode  $(k-1)$ -MTR-GP. Ainsi, puisque nous avons donné la construction de la matrice  $\mathbb{A}$  dédiée à la méthode 1-MTR-GP alors les matrices de toutes les autres méthodes se déduiront de manière récursive en partant de  $\mathbb{A}$ .

Tout d'abord nous allons établir la relation de récursivité qui lie la matrice  $\mathbb{A}$  (matrice de la méthode 1-MTR-GP) et  $\mathbb{B}$  (matrice de la méthode 2-MTR-GP).

Dans la section 5.6.2 nous avons montré que la matrice  $\mathbb{B}$  est donnée par l'équation suivante :

$$\mathbb{B} = \begin{bmatrix} \mathbb{B}^1 & \mathbf{0}_{LM_1, 2N_{\mathcal{K}(0)}} & \mathbb{B}^2 & \mathbf{0}_{LM_1, 2N_{\mathcal{K}(1)}} \\ \mathbf{0}_{LM_1, 2N_{\mathcal{K}(0)}} & \mathbb{B}^1 & \mathbf{0}_{LM_1, 2N_{\mathcal{K}(1)}} & -\mathbb{B}^2 \end{bmatrix} \quad (5.109)$$

Avec on le rappelle :

$$\mathbb{B}^1 = \begin{bmatrix} \mathbb{F}_{M_2 L, N_{\mathcal{K}(0,0)}}^{\mathcal{K}(0,0)} & \mathbf{0}_{LM_2, K(0,0)} & \mathbb{F}_{M_2 L, N_{\mathcal{K}(0,1)}}^{\mathcal{K}(0,1),1} & \mathbf{0}_{LM_2, K(0,1)} \\ \mathbf{0}_{LM_2, K(0,0)} & \mathbb{F}_{M_2, \mathcal{K}(0,0)} & \mathbf{0}_{LM_2, K(0,1)} & \mathbb{F}_{M_2 L, N_{\mathcal{K}(0,1)}}^{\mathcal{K}(0,1),2} \end{bmatrix} \quad (5.110)$$

$$\mathbb{B}^2 = \underbrace{\mathbb{D}_{M_1 L} \begin{bmatrix} \mathbb{F}_{M_2 L, N_{\mathcal{K}(1,0)}}^{\mathcal{K}(1,0)} & \mathbf{0}_{LM_2, K(1,0)} & \mathbb{F}_{M_2 L, N_{\mathcal{K}(1,1)}}^{\mathcal{K}(1,1),1} & \mathbf{0}_{LM_2, K(0,1)} \\ \mathbf{0}_{LM_2, K(1,0)} & \mathbb{F}_{M_2 L, N_{\mathcal{K}(1,0)}}^{\mathcal{K}(1,0)} & \mathbf{0}_{LM_2, K(1,1)} & \mathbb{F}_{M_2 L, N_{\mathcal{K}(1,1)}}^{\mathcal{K}(1,1),2} \end{bmatrix}}_{\check{\mathbb{B}}^2} \quad (5.111)$$

On remarque ainsi que les matrices  $\mathbb{B}^1$  et  $\check{\mathbb{B}}^2$  ont la même structure que la matrice  $\mathbb{A}$ , voir équation (5.35). Elles ne diffèrent que du nombre de porteuses considérées et aussi de l'ensemble des porteuses réservées. Ainsi, si on désigne par  $\mathcal{M}_{[1\text{-MTR-GP}]}[K, \mathcal{X}]$  le procédé ou fonction permettant de calculer la matrice  $\mathbb{A}$  (voir équation (5.35) pour un système OFDM comportant  $K$  porteuses et avec  $\mathcal{X}$  comme étant l'ensemble des porteuses réservées, alors les matrices  $\mathbb{B}^1$  et  $\check{\mathbb{B}}^2$  se construisent à partir de ce procédé ou fonction via les équations suivantes :

$$\begin{aligned} \mathbb{B}^1 &= \mathcal{M}_{[1\text{-MTR-GP}]}[M_1, \mathcal{X}^{(0)}] \\ \check{\mathbb{B}}^2 &= \mathcal{M}_{[1\text{-MTR-GP}]}[M_1, \mathcal{X}^{(1)}] \end{aligned} \quad (5.112)$$

avec  $\mathcal{K}^{(0)}$  (respect.  $\mathcal{K}^{(1)}$ ) désignant la projection des porteuses paires (respect. impaires) de  $\mathcal{X}$  et  $M_1 = \frac{K}{2}$ , voir équation (5.26). Soulignons juste qu'ici nos variables sont muettes pour les besoins de la constructions de l'algorithme qui va permettre de calculer la matrice associée à chaque méthode  $k$ -MTR-GP avec  $k \geq 2$ .

De l'équation (5.112), considérons l'Algorithme 9 décrivant en détail la construction de la matrice de la méthode 2-MTR-GP à partir de la connaissance du procédé permettant de calculer celle de la méthode 1-MTR-GP.

---

**Algorithm 9** Calcul de la matrice de la méthode 2-MTR-GP :  $(\mathcal{M}_{[2\text{-MTR-GP}]}(K, \mathcal{X}))$

---

**Require:**  $K$  := nombre de porteuses total,  $\mathcal{X}$  := Ensemble des porteuses réservées.

**Ensure:**  $\mathbb{B}$  la matrice de la méthode 2-MTR-GP

$\mathcal{X}^P \leftarrow$  les porteuses paires de  $\mathcal{X}$

$\mathcal{X}^I \leftarrow$  les porteuses impaires de  $\mathcal{X}$

$M_1 = \frac{K}{2}$  et construire  $\mathbb{D}_{M_1 L}$  via l'équation (5.19)

$\mathcal{K}^{(0)} = \frac{\mathcal{X}^P}{2}$

$\mathcal{K}^{(1)} = \frac{\mathcal{X}^I - 1}{2}$

$\mathbb{B}^1 = \mathcal{M}_{[1\text{-MTR-GP}]}[M_1, \mathcal{K}^{(0)}]$

$\check{\mathbb{B}}^2 = \mathcal{M}_{[1\text{-MTR-GP}]}[M_1, \mathcal{K}^{(1)}]$

$\mathbb{B}^2 = \mathbb{D}_{M_1 L} \check{\mathbb{B}}^2$

$$\mathbb{B} = \begin{bmatrix} \mathbb{B}^1 & \mathbf{0}_{LM_1, 2^{k-1}N_{\mathcal{K}^{(0)}}} & \mathbb{B}^2 & \mathbf{0}_{LM_1, 2^{k-1}N_{\mathcal{K}^{(1)}}} \\ \mathbf{0}_{LM_1, 2^{k-1}N_{\mathcal{K}^{(0)}}} & \mathbb{B}^1 & \mathbf{0}_{LM_1, 2^{k-1}N_{\mathcal{K}^{(1)}}} & -\mathbb{B}^2 \end{bmatrix}$$


---

Partant de cette algorithmme nous allons donner la construction des matrices des méthodes 3-MTR-GP, 4-MTR-GP, 5-MTR-GP. Tout d'abord notons que par le principe de décomposition du symbole OFDM, on peut remarquer que si  $\mathbb{X}$  désigne la matrice de la méthode  $k$ -MTR-GP avec  $k = 2, \dots, 5$  dédiée à un système OFDM comportant  $K$  porteuses et dont le jeu de porteuses réservées est  $\mathcal{X}$ , alors on a :

$$\mathbb{X} = \begin{bmatrix} \mathbb{X}^1 & \mathbf{0}_{LM_1, 2^{k-1}N_{\mathcal{K}^{(0)}}} & \mathbb{D}_{M_1 L} \check{\mathbb{X}}^2 & \mathbf{0}_{LM_1, 2^{k-1}N_{\mathcal{K}^{(1)}}} \\ \mathbf{0}_{LM_1, 2^{k-1}N_{\mathcal{K}^{(0)}}} & \mathbb{X}^1 & \mathbf{0}_{LM_1, 2^{k-1}N_{\mathcal{K}^{(1)}}} & -\mathbb{D}_{M_1 L} \check{\mathbb{X}}^2 \end{bmatrix} \quad (5.113)$$

Avec  $\mathbb{X}^1$  une matrice ayant la même structure que la matrice de la méthode  $(k-1)$ -MTR-GP pour un système OFDM comportant  $M_1 = K/2$  porteuses et dont l'espace des porteuses réservées est la projection des porteuses paires de  $\mathcal{X}$ , i.e  $\mathcal{K}^{(0)}$ . De même  $\check{\mathbb{X}}^2$  est une matrice ayant la même structure que la matrice de la méthode  $(k-1)$ -MTR-GP pour un système OFDM comportant  $M_1 = K/2$  porteuses et dont l'espace des porteuses réservées est la projection des porteuses impaires de  $\mathcal{X}$ , i.e  $\mathcal{K}^{(1)}$ . On remarque ainsi que la matrice  $\mathbb{X}$ , matrice de la méthode  $k$ -MTR-GP sera de dimension  $(LM, 2^k(N_{\mathcal{K}^{(0)}} + N_{\mathcal{K}^{(1)}}))$ . La démonstration de cette remarque ne sera pas faite dans cette thèse et cela non pas parce que c'est difficile mais seulement parce que elle nécessiterait de présenter la décomposition de toutes ces méthodes et donc beaucoup de notations et de formules. Néanmoins, il est simple de voir que la connaissance de la manière de construire la matrice de la méthode 1-MTR-GP est suffisante pour en déduire celle de la méthode 2-MTR-GP comme nous venons de l'exposer précédemment, et donc par le même procédé on peut déduire la construction de la matrice de la méthode 3-MTR-GP à partir de celle de la matrice de la méthode 2-MTR-GP et ainsi de suite.

Pour  $k = 2, \dots, 5$ , notons par  $\mathcal{M}_{[k\text{-MTR-GP}]}(K, \mathcal{X})$  la fonction ou algorithme permettant le calcul de la matrice de la méthode  $k$ -MTR-GP pour un système OFDM comportant  $K$  porteuses et dont les porteuses de  $\mathcal{X}$  sont réservées pour la correction du PAPR ( $K$  et  $\mathcal{X}$  sont des variables muettes). L'Algorithme 10 donne la construction de la méthode  $k$ -MTR-GP à partir de la fonction (ou algorithme) permettant le calcul de la matrice dédiée à la méthode  $(k-1)$ -MTR-GP, i.e la fonction  $\mathcal{M}_{[(k-1)\text{-MTR-GP}]}(\cdot, \cdot)$ .

Notons que les matrices obtenues via l'Algorithme 10 n'incluent pas le filtrage dans le domaine fréquentiel permettant à nos méthodes de ne pas dégrader le BER. Pour que les méthode 3-MTR-GP, ..., 5-MTR-GP soient sans dégradation du BER, il faudra comme

---

**Algorithm 10** Calcul de la matrice de la méthode k-MTR-GP,  $k \geq 2$  :  $(\mathcal{M}_{[k\text{-MTR-GP}]}(K, \mathcal{X}))$

---

**Require:**  $K$  := nombre de porteuses total,  $\mathcal{X}$  := Ensemble des porteuses réservées.

**Ensure:**  $\mathbb{X}$  la matrice de la méthode k-MTR-GP

$\mathcal{X}^P \leftarrow$  les porteuses paires de  $\mathcal{X}$

$\mathcal{X}^I \leftarrow$  les porteuses impaires de  $\mathcal{X}$

$M_1 = \frac{K}{2}$  et construire  $\mathbb{D}_{M_1 L}$  via l'équation (5.19)

$\mathcal{K}^{(0)} = \frac{\mathcal{X}^P}{2}$

$\mathcal{K}^{(1)} = \frac{\mathcal{X}^I - 1}{2}$

$\mathbb{X}^1 = \mathcal{M}_{[(k-1)\text{-MTR-GP}]}[M_1, \mathcal{K}^{(0)}]$

$\check{\mathbb{X}}^2 = \mathcal{M}_{[(k-1)\text{-MTR-GP}]}[M_1, \mathcal{K}^{(1)}]$

$\mathbb{X}^2 = \mathbb{D}_{M_1 L} \check{\mathbb{X}}^2$

$$\mathbb{X} = \begin{bmatrix} \mathbb{X}^1 & \mathbf{0}_{LM_1, 2^{k-1}N_{\mathcal{K}^{(0)}}} & \check{\mathbb{X}}^2 & \mathbf{0}_{LM_1, 2^{k-1}N_{\mathcal{K}^{(1)}}} \\ \mathbf{0}_{LM_1, 2^{k-1}N_{\mathcal{K}^{(0)}}} & \mathbb{X}^1 & \mathbf{0}_{LM_1, 2^{k-1}N_{\mathcal{K}^{(1)}}} & -\check{\mathbb{X}}^2 \end{bmatrix}$$


---

pour les méthodes 1-MTR-GP et 2-MTR-GP, voir problèmes 5.53 et 5.104, inclure le filtrage dans le problème d'optimisation. Il en résultera, que les méthodes 3-MTR-GP, ..., 5-MTR-GP auront comme les méthodes 1-MTR-GP et 2-MTR-GP une complexité numérique identique à celle de la méthode TR-GP.

### 5.6.5 Performances en termes de réduction du PAPR et de variation de la puissance moyenne

L'environnement de simulation sera un système OFDM comportant  $M = 256$  porteuses, modulant des données issues d'une 16-QAM et dont  $N_{\mathcal{R}} = 12$  porteuses seront réservées. Contrairement à la 5.6.3, dans cette section le jeu de porteuses  $\mathcal{R}$  a été sélectionné via l'algorithme *Random Set Optimizer* comme dans la section 5.5.3, voir algorithme 11 dans l'Annexe A. Le jeu de porteuses retenu par l'algorithme *Random Set Optimizer* est  $\mathcal{R}^* = [109, 110, 123, 125, 126, 127, 129, 132, 138, 145, 185, 222]$  sur  $10^6$  jeux de porteuses testés. Notons que ce nombre est très loin du nombre de cas total qui est de l'ordre de  $10^{20}$ .

#### 5.6.5.1 Performances en termes de réduction du PAPR

Dans cette sous section nous allons évaluer les performances des méthodes 1-MTR-GP, 2-MTR-GP, 3-MTR-GP, 4-MTR-GP et 5-MTR-GP, voir section 5.6.4 en termes de réduction du PAPR.

La Figure 5.31 donne les CCDF des méthodes TR-GP, 1-MTR, 2-MTR-GP, ..., 5-MTR-GP après 20 itérations pour un seuil d'écrêtage normalisé 6.5dB.

Comme dans le cas du *Contiguous Tones-Middle Side*, avec le *Random Set Optimizer* les résultats de simulation montrent que les méthodes 1-MTR-GP, ... et 5-MTR-GP sont aussi plus performantes que la méthode TR-GP. On remarque ainsi que la méthode MTR permet d'améliorer le gain en réduction du PAPR d'environ 1.5dB (5-MTR-GP). En effet la méthode TR-GP offre un gain d'environ 2dB à  $10^{-4}$  de la CCDF alors que la méthode 5-MTR-GP offre un gain en réduction d'environ 3.5dB à  $10^{-4}$  de la CCDF, ce qui offre une amélioration d'environ 1.5dB et cela pour la même complexité numérique. Les variations de puissance moyenne associées sont de  $\Delta E = 0.022$ dB pour la méthode TR-GP et  $\Delta E = 0.11$ dB pour la méthode 5-MTR-GP. Néanmoins, l'amélioration du gain

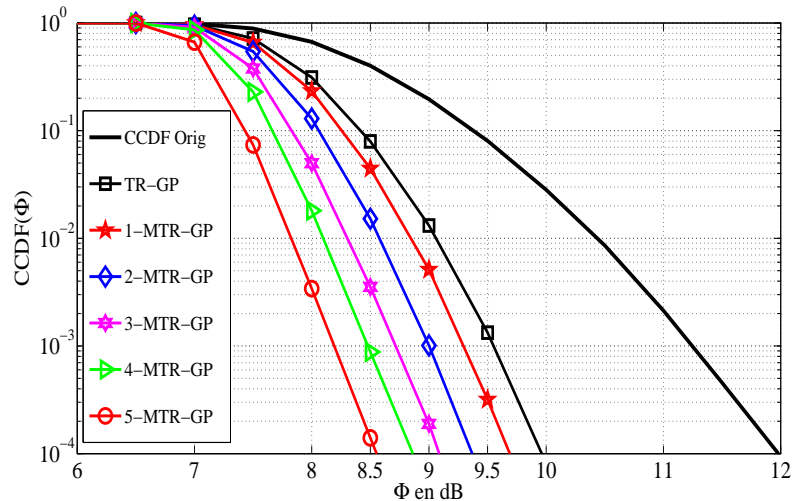


FIGURE 5.31 – Influence des porteuses réservées sur les performances des méthodes TR-GP, 1-MTR-GP, ... et 5-MTR-GP

en réduction du PAPR est nettement plus importante que l'augmentation de la puissance qu'occasionne cette méthode qui est de  $0.11 - 0.022 \simeq 0.09$ . Notons aussi que plus on décompose, plus on améliore les performances en réduction du PAPR.

Dans ce qui suit nous allons regarder l'impact du seuil d'écrêtage utilisé sur les performances des méthodes TR-GP, 1-MTR-GP, ... et 5-MTR-GP. Pour ce faire, les Figures 5.32 et 5.33 donnent respectivement les PAPR à  $10^{-4}$  de la CCDF en fonction du seuil d'écrêtage utilisé pour 10 et 20 itérations.

Comme dans la section 5.6.3 précédente, on remarque que les méthodes proposées, c'est à dire les méthodes 1-MTR-GP, ..., 5-MTR-GP sont plus performantes que la méthode TR-GP quel que soit le seuil d'écrêtage utilisé. En comparant les méthodes à même seuil d'écrêtage, on remarque que la MTR via la méthode 5-MTR-GP permet d'améliorer le gain en réduction du PAPR à  $10^{-4}$  par rapport à la méthode TR-GP au minimum (comparaison à  $\rho = 5$  dB) d'environ 1.29 dB et 0.88 dB après respectivement 10 et 20 itérations et au maximum (comparaison à  $\rho = 6.5$ ) d'environ 1.7 dB et 1.41 dB après respectivement 10 et 20 itérations, voir Figures 5.32 et 5.33. Cependant on remarque que les performances en réduction du PAPR n'augmentent pas nécessairement lorsque le seuil décroît. Ainsi, en comparant les différentes méthodes et en considérant pour chacune les seuils optimaux à 10 et 20 itérations, voir Tableaux 5.5 et 5.6 qui consignent respectivement les seuils optimaux (seuil donnant le meilleur PAPR à  $10^{-4}$ ) ainsi que les valeurs du PAPR à  $10^{-4}$  associées des différentes méthodes après 10 et 20 itérations, on constate dans ce cas que la MTR permet d'améliorer le gain en réduction du PAPR à  $10^{-4}$  de la CCDF d'environ 1.56 dB et 1.25 dB par rapport à la TR-GP pour après respectivement 10 et 20 itérations.

En effet, sur le Tableau 5.5, c'est à dire après 10 itérations, on remarque que la méthode 5-MTR-GP permet de gagner environ 1.56 dB de gain en réduction du PAPR par rapport à la méthode TR-GP. Cette amélioration descend à 1.29 dB après 20 itérations. Cette baisse du gain est tout à fait prévisible puisque, par principe, l'algorithme du gradient projeté permet de converger vers la solution optimale lorsqu'on augmente progressivement le nombre d'itérations.

En pratique, pour des raisons de complexité, il est préférable de limiter le nombre d'itérations effectué par l'algorithme. Ainsi, dans ce qui suit, nous allons évaluer les performances en réduction du PAPR en fonction du nombre d'itérations en utilisant pour chaque méthode le seuil optimal après 20 itérations consigné dans le tableau 5.6. Mais

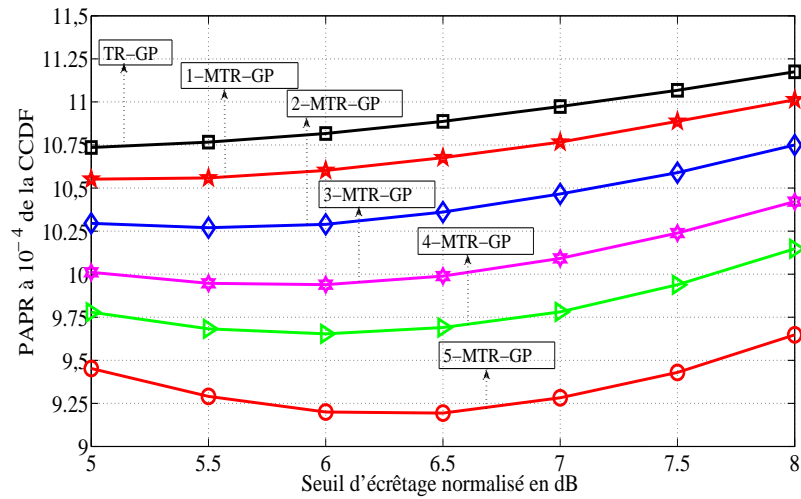


FIGURE 5.32 – Performance en termes de réduction de PAPR des méthodes 1-MT-GP, 2-MTR-GP, ..., 5-MTR-GP et TR-GP en fonction du seuil  $\rho$  après 10 itérations

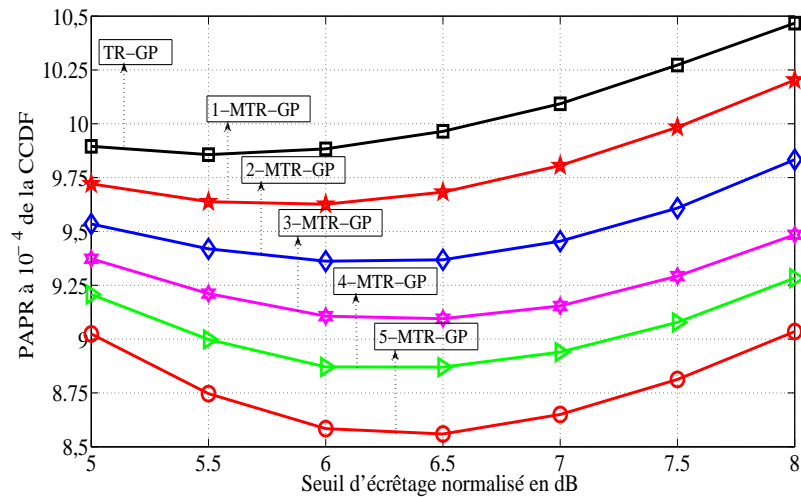


FIGURE 5.33 – Performance en termes de réduction de PAPR des méthodes 1-MT-GP, 2-MTR-GP, ..., 5-MTR-GP et TR-GP en fonction du seuil  $\rho$  après 20 itérations

$N_{max} = 10$ itérations	TR-GP	1-MTR-GP	2-MTR-GP	3-MTR-GP	4-MTR-GP	5-MTR-GP
$\rho$ optimal en dB	5	5	5.5	6	6	6.5
PAPR à $10^{-4}$ en dB	10.75	10.55	10.27	9.9	9.65	9.19

TABLE 5.5 – Récapitulatif de la Figure 5.32

$N_{max} = 20$ itérations	TR-GP	1-MTR-GP	2-MTR-GP	3-MTR-GP	4-MTR-GP	5-MTR-GP
$\rho$ optimal en dB	5.5	6	6.5	6.5	6.5	6.5
PAPR à $10^{-4}$ en dB	9.85	9.62	9.37	9.09	8.87	8.56

TABLE 5.6 – Récapitulatif de la Figure 5.33

avant, nous allons d’abord regarder les variations de la puissance moyenne des différentes méthodes en fonction du seuil d’écrêtage dans la sous section 5.6.5.2.

### 5.6.5.2 Évaluation de la variation de la puissance moyenne induite après réduction du PAPR

Comme dans la section 5.6.3, nous allons regarder les variations de la puissance moyenne induites par les méthodes 1-MTR-GP,..., 5-MTR-GP ainsi que le méthode TR-GP.

Les Figures 5.34 et 5.35 donnent respectivement les variations de puissance moyenne des différentes méthodes en fonction du seuil d’écrêtage après 10 et 20 itérations.

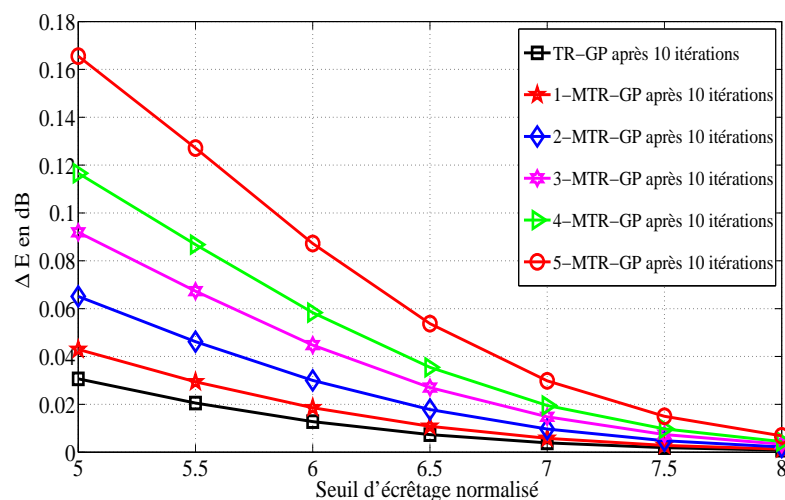


FIGURE 5.34 – Variations de la puissances moyenne après réduction du PAPR des méthodes 1-MT-GP, 2-MTR-GP, ..., 5-MTR-GP et TR-GP en fonction du seuil  $\rho$  après 10 itérations

Les résultats de simulation montrent que les méthodes proposées entraînent une plus grande augmentation de la puissance moyenne après réduction du PAPR que la méthode TR-GP. On note aussi, que  $\Delta E$  augmente lorsque  $\rho$  décroît contrairement au PAPR à  $10^{-4}$  de la CCDF qui n’est pas monotone en fonction de  $\rho$ , voir Figure 5.32 et 5.33. Ainsi, comme dans la sous section 5.6.3 nous allons compléter les tableaux 5.5 et 5.6 en ajoutant les variations de puissance moyenne associées.

Les résultats consignés dans les tableaux 5.7 et 5.8 montrent que les méthodes proposées offrent le meilleurs compromis réduction en PAPR et augmentation de la puissance



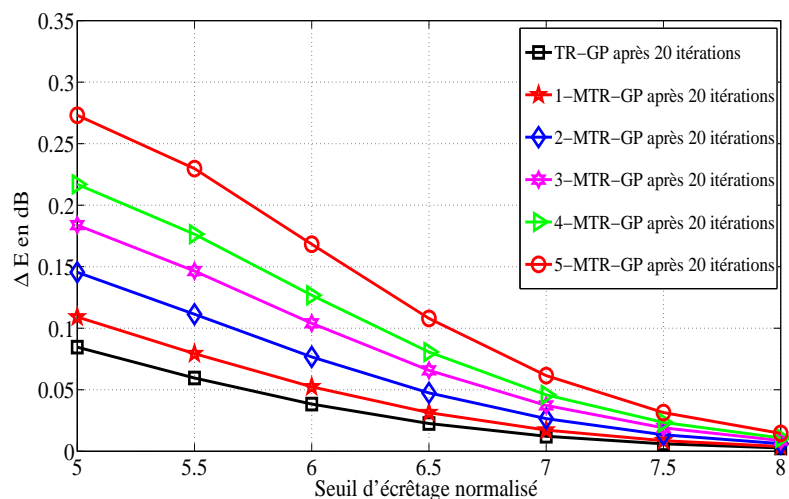


FIGURE 5.35 – Variations de la puissances moyenne après réduction du PAPR des méthodes 1-MT-GP, 2-MTR-GP, ..., 5-MTR-GP et TR-GP en fonction du seuil  $\rho$  après 20 itérations

$N_{max} = 10$ itérations	TR-GP	1-MTR-GP	2-MTR-GP	3-MTR-GP	4-MTR-GP	5-MTR-GP
$\rho$ optimal en dB	5	5	5.5	6	6	6.5
PAPR à $10^{-4}$ en dB	10.75	10.55	10.27	9.9	9.65	9.19
$\Delta E$ en dB	0.03	0.042	0.046	0.044	0.058	0.054

TABLE 5.7 – Récapitulatif de la Figure 5.32 et 5.34

$N_{max} = 20$ itérations	TR-GP	1-MTR-GP	2-MTR-GP	3-MTR-GP	4-MTR-GP	5-MTR-GP
$\rho$ optimal en dB	5.5	6	6.5	6.5	6.5	6.5
PAPR à $10^{-4}$ en dB	9.85	9.62	9.37	9.09	8.87	8.56
$\Delta E$ en dB	0.06	0.052	0.047	0.065	0.08	0.1

TABLE 5.8 – Récapitulatif de la Figure 5.33 et 5.35

moyenne, car l'amélioration du gain en PAPR est nettement plus importante que l'augmentation de la puissance moyenne. En effet, sur le tableau 5.8 par exemple, on remarque que les méthodes 1-MTR-GP et 2-MTR-GP permettent respectivement d'améliorer la méthode TR-GP d'environ 0.23dB et 0.48dB de gain à  $10^{-4}$  avec une plus faible augmentation de  $\Delta E$  que celle-ci. Par contre la méthode 5-MTR-GP entraîne une augmentation de  $\Delta E$  d'environ 0.04dB par rapport à la méthode TR-GP pour une amélioration du gain en PAPR d'environ 1.45dB, ce qui constitue un très bon compromis.

### 5.6.5.3 Compromis performances en réduction du PAPR- $\Delta E$ et complexité numérique

Comme nous l'avons souligné dans le paragraphe précédent, en pratique le nombre d'itérations étant limité pour des raisons de complexité numérique et donc de consommation, nous allons évaluer sur les Figures 5.36 et 5.37 les performances des différentes méthodes en fonction du nombre d'itérations. Nous utiliserons pour chaque méthode les seuils optimaux après 20 itérations consignés dans le tableau 5.8

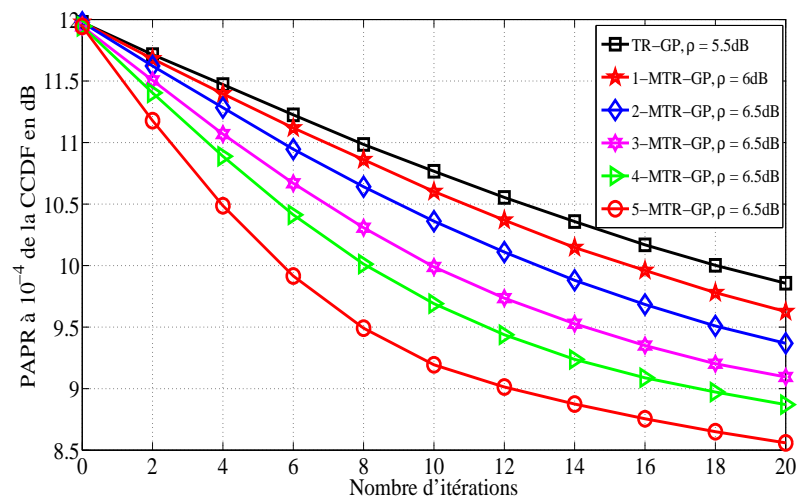


FIGURE 5.36 – PAPR à  $10^{-4}$  des méthodes 1-MT-GP, 2-MTR-GP et TR-GP en fonction du nombre d'itérations

Les résultats des Figures 5.36 et 5.37 confirment que la *Modified Tone Reservation* permet d'obtenir le meilleur compromis réduction du PAPR et augmentation de la puissance moyenne  $\Delta E$ . En effet, sur ces figures on remarque que les méthodes 1-MTR-GP et 2-MTR-GP permettent d'améliorer les performances en réduction du PAPR tout en entraînant une plus faible augmentation de la puissance moyenne. La méthode 5-MTR-GP permet quant à elle d'améliorer considérablement le gain en réduction du PAPR (environ +1.45dB par rapport à la TR-GP) mais avec une augmentation de la puissance moyenne  $\Delta E$  qui passe de  $\Delta E = 0.06$ dB pour la méthode TR-GP à  $\Delta E = 0.11$ dB pour la méthode 5-MTR-GP. Cependant, vu la nette amélioration du gain, cette différence en termes d'augmentation de la puissance peut être tout à fait acceptable. En outre, notons que la méthode *Modified Tone Reservation* permet de converger plus rapidement et donc permet de gagner en complexité numérique en pratique. Par exemple avec la méthode 5-MTR-GP, le PAPR à  $10^{-4}$  de la CCDF est de 9.5dB après 8 itérations pour  $\Delta E = 0.04$ dB alors qu'avec la méthode TR-GP, le PAPR à  $10^{-4}$  de la CCDF après 20 itérations est de 9.85dB pour  $\Delta = 0.06$ dB. Ainsi, on voit que la MTR peut permettre de gagner sur tous les fronts (Gain en PAPR,  $\Delta E$ , et complexité numérique (nécessite moins d'itérations)) par rapport à la méthode TR-GP.

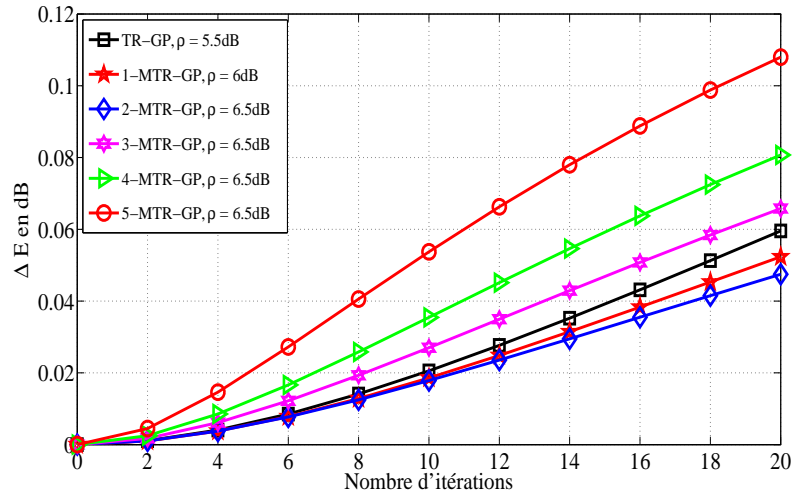


FIGURE 5.37 – Variations de la puissance moyenne  $\Delta E$  des méthodes 1-MT-GP, 2-MTR-GP et TR-GP en fonction du nombre d'itérations

En conclusion, notons que ces résultats sont d'autant plus prometteurs que le jeu de porteuses utilisé ici est le *Random Set Optimizer* qui permet normalement d'optimiser les performances de la méthode TR-GP. Ainsi, comme nous le ferons remarquer dans les perspectives il serait très intéressant d'évaluer les performances des méthodes proposées avec un jeu de porteuses qui permettrait d'optimiser leur performances.

## 5.7 Conclusion et Perspectives

Dans ce chapitre nous avons proposé une amélioration de la méthode *Tone Reservation*. Cette amélioration est basée sur une modification du schéma d'insertion de la TR classique d'où le nom de *Modified Tone Reservation*. En effet, nous avons montré qu'un symbole OFDM peut être vu comme la sommation d'une composante paire et d'une composante impaire et qu'en outre chacune de ces composantes peut être vue comme la concaténation de deux symboles multiporteuses de durée deux fois plus courte et comportant deux fois moins de porteuses. De cette décomposition nous avons déduit un nouveau schéma de modulateur numérique d'un symbole OFDM. Nous avons ensuite montré que les porteuses initialement réservées se projettent sur les quatre symboles multiporteuses issus de la décomposition. En décomposant le Bruit *Clipping* (fonction de coût permettant de maximiser le SCR et donc de réduire le PAPR) conjointement à la décomposition du symbole OFDM, on se retrouve avec deux fonctions de coût indépendantes (Nous les avons appelé Bruit de *Clipping* Partiels). Nous avons ainsi défini deux problèmes de minimisation sous la contrainte TR par rapport aux symboles issus de la décomposition. Ce travail, nous a permis de générer le signal de correction en utilisant le schéma de modulateur basé sur cette décomposition et en relâchant les contraintes de symétrie et d'anti-symétrie entres les différentes composantes du signal de correction du PAPR. Ce nouveau degré de liberté, a permis d'une part à la MTR de gagner en performances en termes de réduction du PAPR mais d'autre part entraîne une pollution des porteuses utiles. Ainsi, grâce à un schéma de filtrage dans le domaine fréquentiel nous avons supprimé les perturbations générées par le signal de correction du PAPR sans pour autant que les composantes du signal de corrections du PAPR vérifient les contraintes de symétrie et anti-symétrie. Cette méthode que nous avons appelé 1-MTR-GP (le 1 pour une décomposition et le GP pour Gradient Projecté) est plus performante que la TR-GP classique et avec la même complexité numérique

que cette dernière.

Après avoir confirmé par simulation que la méthode 1-MTR-GP est plus performante que la méthode TR-GP classique, nous avons étendu itérativement la décomposition du symbole d'intérêt pour définir de nouvelles structures d'insertion du signal de correction du PAPR. On a ainsi obtenu les méthodes 2-MTR-GP, 3-MTR-GP, 4-MTR-GP, 5-MTR-GP. Les résultats de simulation présentés dans la dernière section de ce chapitre montrent tout l'intérêt de ces méthodes. Pour la même complexité, la MTR a permis une amélioration considérable de la méthode TR-GP en termes de réduction du PAPR.

En perspective, il serait intéressant d'abord d'étudier jusqu'où la décomposition peut aller. L'autre travail immédiat serait aussi d'étudier le cas d'une décomposition asymétrique. Autrement dit appliquer la décomposition sur la composante paire ou impaire seulement. Une étude sur l'impact du pourcentage de la parité des porteuses sur la méthode MTR serait aussi intéressante à regarder, comme nous l'avons fait dans le cas de la TR.

Dans la dernière section, nous avons comparé les méthodes de la MTR avec la méthode TR-GP dans le cas où les porteuses réservées sont sélectionnées pour optimiser les performances de la méthode TR-GP ( via l'Algorithme *Random Set Optimizer*), il serait donc intéressant de comparer ces méthodes lorsque chacune d'elle utilise son jeu de porteuses optimal (tous les jeux de porteuses doivent avoir le même nombre de porteuses).



# Conclusion Générale et Perspectives

## Conclusion Générale

Dans ce rapport de thèse intitulé Contribution aux Techniques dites d'Ajout de Signal pour la Réduction du Facteur de Crête des signaux OFDM, nous avons proposé des contributions sur la réduction du PAPR des signaux OFDM afin de faciliter la recherche d'un compromis entre rendement énergétique de l'amplificateur de puissance et dégradations induites par celui-ci sur le signal. En effet, il est connu que les amplificateurs de puissance sont conçus pour fonctionner au plus près de leur zone de saturation pour un rendement optimal. Malheureusement, cette zone des amplificateurs de puissance présente de sévères non linéarités. Ces non linéarités entraînent des dégradations sur le signal amplifié. Ces dégradations s'accroissent considérablement lorsque le signal d'entrée à un PAPR élevé, ce qui est le cas pour les signaux multiporteuses en particulier l'OFDM. D'où la nécessité de réduire le PAPR (fluctuation des amplitudes autour de la puissance moyenne du signal) afin de permettre à l'amplificateur de fonctionner au plus près de sa zone de linéarité sans trop dégrader le signal, c'est à dire avec un recul de puissance petit. L'objectif de ces trois années de thèse a été d'apporter notre contribution à la réduction du PAPR afin de concilier rendement énergétique et linéarité au niveau des amplificateurs de puissance.

A cet effet, nous avons dans le chapitre 1 présenté brièvement le procédé des modulations OFDM, caractérisé le PAPR des signaux OFDM, rappelé le principe de fonctionnement des amplificateurs, donné une caractérisation des paramètres d'intérêt d'un amplificateur de puissance. Nous avons terminé ce chapitre par une analyse de l'influence du PAPR sur le choix de l'IBO via quelques résultats de simulation. De ces résultats de simulation nous avons constaté que plus le PAPR du signal à amplifier est petit, plus il est possible de concilier rendement énergétiques (IBO petit) et dégradations (Dégradations BER et émission hors bande pas trop sévères).

Dans le chapitre 2, nous avons effectué un état de l'art des techniques de réduction du PAPR avec une attention particulière pour les techniques dites d'ajout de signal. Sur ces techniques, nous nous sommes particulièrement intéressés aux techniques de *clipping* et aux techniques basées sur la *Tone Reservation*. Concernant les techniques de *clipping* on peut remarquer que ce sont les techniques les plus simples (en termes de complexité numérique et de réalisation). Cependant, ces techniques étant des méthodes de saturation comme l'amplificateur de puissance, elles entraînent des dégradations *In Band* (BER) et *Out-Of-Band* (émission hors bande) sur le signal après écrêtage. Les résultats de simulation présentés dans l'Annexe A confirment cet état de fait. Cette étude approfondie sur les techniques de *clipping* a conduit à la technique d'écrêtage adaptatif que nous avons proposée dans [32, 33] et présentée dans le chapitre 3.

Le chapitre 3 a été consacré à la technique d'écrêtage adaptatif que nous avons proposée. Nous avons montré que cette méthode permettait d'atténuer les dégradations du BER et la remontée des lobes secondaires comparé à la technique d'écrêtage classique et cela avec les mêmes performances en terme de réduction du PAPR. En effet, nous

avons montré que l'écrêtage adaptatif que nous avons proposé permet d'écrêter le signal en fonction du PAPR de sortie désiré. Ainsi, cette technique permet d'une part d'avoir en sortie un signal à borne supérieure du PAPR déterministe, i.e., la borne supérieure du PAPR est la même à n'importe quel point de la CCDF et d'autre part d'offrir le même PAPR de sortie que l'écrêtage classique. Il en résulte que le *clipping* adaptatif contrairement au *clipping* classique, n'entraîne pas d'écrêtage sévère ou non nécessaire vis à vis du PAPR cible et par conséquent occasionne des dégradations (BER, émission hors bande et diminution de la puissance moyenne) moins sévères que celles occasionnées par le *clipping* classique pour les mêmes performances en réduction du PAPR. La méthode d'écrêtage adaptatif étant composée de deux étapes que sont le calcul du seuil adapté pour chaque symbole en fonction de la valeur du PAPR de sortie souhaitée et l'écrêtage de ce symbole à l'aide de la fonction d'écrêtage classique, trois méthodes de calcul du seuil adapté à chaque symbole ont donc été proposées dans ce chapitre. Ces différentes méthodes ont ensuite été comparées en termes de complexités numérique. Nous avons clos ce chapitre via une comparaison des méthodes d'écrêtage adaptatif proposées (elles ne diffèrent que par la manière de calculer le seuil adapté) avec la méthode d'écrêtage classique. Ces résultats de simulation ont confirmé que les méthodes proposées ont les mêmes performances en réduction du PAPR que la méthode classique mais permettent d'atténuer considérablement les dégradations du signal (BER, émission hors bande et diminution de la puissance moyenne) et cela au pris d'une légère augmentation de la complexité numérique.

Dans le chapitre 4 nous avons présenté deux contributions portant respectivement sur l'influence de la parité des porteuses réservées sur les performances en réduction des méthodes basées sur la TR et sur une amélioration du BER du système en présence d'un canal sélectif en présence grâce à une adaptation du choix des porteuses réservées en fonction de la qualité du canal de transmission. Nous avons aussi présenté dans ce chapitre une étude détaillée de la méthode TR-GP. Concernant la contribution sur l'influence de la parité des porteuses, nous avons montré via une analyse théorique appuyée par des résultats de simulation qu'un jeu de porteuses ne contenant que des porteuses paires ou impaires entraînent une plus faible performance en réduction du PAPR comparée à celle obtenue avec un jeu de porteuses mixtes. Concernant la technique ATR, qui propose d'adapter le choix du jeu de porteuses en fonction de la qualité du canal de transmission, nous avons montré que cette stratégie permet d'atténuer considérablement les dégradations du BER du système dans un contexte multi-trajet.

Dans le chapitre 5 nous avons présenté les méthodes MTR-GP *Modified Tone Reservation based on the gradient project algorithm* (1-MTR-GP, 2-MTR-GP,...) qui sont une amélioration de la méthode TR-GP classique. Cette amélioration est obtenue via une modification de la structure d'insertion du signal de correction du PAPR. Pour obtenir cette nouvelle structure d'insertion, nous avons montré qu'un symbole OFDM peut être vu comme la sommation d'une composante paire et d'une composante impaire et qu'en outre chacune de ses composantes peut être vue comme la concaténation de deux symboles multiporteuses de durée deux fois plus courtes et comportant deux fois moins de porteuses. Ainsi, on a montré qu'un symbole OFDM peut être vu comme un mélange (sommation concaténation) de quatre symboles multiporteuses. De cette décomposition nous avons déduit un nouveau schéma de modulateur numérique d'un symbole OFDM. Nous avons ensuite montré que les porteuses initialement réservées se projettent sur les quatre blocs de IDFT (du nouveau modulateur numérique) qui permettent de générer les quatre symboles multiporteuses issus de la décomposition. Après ce travail de décomposition du symbole d'intérêt, nous avons ensuite décomposé le Bruit *Clipping* (fonction de coût permettant de maximiser le SCR et donc de réduire le PAPR) conjointement à la décomposition du



symbole OFDM se retrouvant ainsi avec deux fonctions de coût indépendants (Nous les avons appelé Bruit de *Clipping* Partiels). Nous avons alors montré que la MTR consiste d'une part à utiliser les projetés des porteuses réservées pour la réduction du PAPR sur les quatre symboles issus de la décomposition du symbole d'intérêt (les porteuses nulles sur les quatre blocs de IDFT du modulateur issu de la décomposition) pour générer les quatre composantes partielles du signal de réduction du PAPR et d'autre part à minimiser les Bruits de *Clipping* Partiels pour déterminer ces quatre composantes partielles du signal de correction du PAPR. Ce travail permet de générer le signal de correction en utilisant le schéma de modulateur basé sur la décomposition du symbole sans les contraintes de symétrie et d'anti-symétrie entre les différentes composantes du signal de correction du PAPR. Ce nouveau degré de liberté, a permis d'une part à la MTR de gagner en performances de réduction du PAPR, mais en entraînant une pollution des porteuses utiles. Néanmoins, grâce à un schéma de filtrage dans le domaine fréquentiel, nous avons supprimé les perturbations générées par le signal de correction sans pour autant que les composantes du signal de correction du PAPR vérifient les contraintes de symétrie et anti-symétrie. Cette méthode que nous avons appelé 1-MTR-GP (le 1 pour une décomposition et le GP pour Gradient Projeté) améliore les performances de la méthode TR-GP en terme de réduction du PAPR. En outre, elle a la même complexité que la méthode TR-GP classique.

Au regard des bons résultats obtenus grâce à cette modification de la structure d'insertion de la TR classique, via une décomposition du symbole d'intérêt, nous avons étendu itérativement la décomposition du symbole d'intérêt pour définir de nouvelles structures d'insertion du signal de correction du PAPR. On a ainsi obtenu les méthodes 2-MTR-GP, 3-MTR-GP, 4-MTR-GP, 5-MTR-GP. Concernant la méthode 2-MTR-GP nous avons présenté en détail les différentes étapes (double décomposition du symbole pour définir la structure d'insertion et décomposition de la fonction de coût pour définir les nouvelles fonctions de coût associées à cette double décomposition). Nous avons par la suite montré que comme pour la méthode 1-MTR-GP, la méthode 2-MTR-GP ne nécessite pas la connaissance des symboles issus de la double décomposition mais seulement de la matrice de génération des composantes du signal de correction du PAPR. Nous avons ensuite montré que la construction de cette matrice peut être faite grâce à la connaissance du procédé de construction de la matrice de la méthode 1-MTR-GP. De ce travail, nous avons proposé un algorithme récursif permettant la construction des matrices de génération du signal de correction du PAPR de la méthodes  $k$ -MTR-GP, pour tout  $k \geq 2$ .

Les résultats de simulation présentés dans la dernière section de ce chapitre montrent tout l'intérêt de ces méthodes. Pour la même complexité, la MTR a permis une amélioration considérable de la méthode TR-GP en termes de réduction du PAPR. Par exemple, pour les méthodes 1-MTR-GP et 2-MTR-GP, les résultats de simulations montrent qu'elles peuvent être plus performantes en termes de réduction du PAPR que la méthode TR-GP et qu'en outre elles génèrent une plus faible augmentation de la puissance moyenne. Pour la méthode 5-MTR-GP, nous avons pu constater qu'elle peut offrir une nette amélioration du gain en réduction du PAPR et avec une légère augmentation de la puissance moyenne. En guise d'illustration, les résultats de simulation obtenus montrent que la méthode 5-MTR-GP permet de gagner environ 1.45dB de gain en réduction du PAPR contre une augmentation de la puissance moyenne d'environ 0.04dB par rapport à la méthode TR-GP classique.

## Perspectives

Comme tout travail de recherche, les résultats ou méthodes obtenus durant cette thèse soulèvent de nouveaux défis. Tout d'abord rappelons que dans cette thèse les principaux résultats s'articulent autour des techniques de *Clipping* et de la méthode *Tone Reservation*. Ainsi, concernant nos contributions [32, 33] autour des techniques de *clipping*, une extension de ces techniques pour les autres types de fonction d'écrêtage telle que le *Smooth Clipping*, le *Deep Clipping* pourrait être envisagé afin de bénéficier des propriétés ou caractéristiques propres à chacune de ces fonctions d'écrêtage. Par exemple pour la fonction d'écrêtage *Deep Clipping*, elle permet d'être moins sensible aux phénomènes de *peaks re-growth* dus à la suppression du bruit hors bande. Il serait aussi intéressant d'étudier une extension de l'écrêtage adaptatif en tenant compte du filtrage dans le domaine fréquentiel pour la suppression du bruit hors bande. Enfin, comme nous l'avons souligné dans le chapitre 3, l'un des inconvénients des méthodes d'écrêtage adaptatif proposées est leur complexité numérique bien qu'elle ne soit pas réellement problématique comparée aux autres techniques de réduction du PAPR existant, il serait néanmoins intéressant d'améliorer considérablement la complexité numérique des méthodes de calcul du seuil adapté.

Sur les travaux effectués dans le chapitre 4, il est important de noter que l'influence du choix des porteuses sur les performances en termes de réduction du PAPR est un sujet ouvert du fait que bon nombre des résultats obtenus sur le sujet sont basés sur des études statistiques. Concernant la technique ATR, il serait intéressant d'une part d'étudier cette technique dans un contexte multi-utilisateur et d'autre part d'évaluer les performances de cette technique lorsque des stratégies de codage ou d'adaptation des constellations en fonction du canal sont mises en place.

Concernant les techniques basées sur la MTR (1-MTR-GP, 2-MTR-GP), les résultats de simulation obtenus laissent apparaître que plus on décompose le symbole, plus la méthode qui découle de cette décomposition est performante. Autrement dit la méthode 1-MTR-GP est moins performante que la méthode 2-MTR-GP qui est à son tour moins performante que la méthode 3-MTR-GP, et ainsi de suite. Cependant, nous n'avons apporté aucune analyse théorique allant dans ce sens. Ainsi, il serait intéressant d'étudier jusqu'où la décomposition permet de continuer à améliorer les performances en réduction du PAPR. Soulignons que dans cette thèse nous avons axé l'analyse théorique des bonnes dispositions de la méthode MTR sur le fait qu'elle permet de relâcher la contrainte d'orthogonalité en fréquence entre les porteuses réservées et dans ce cas la décomposition peut aller jusqu'à  $M_R/2$  si  $M_R$  désigne le nombre de porteuses réservées et s'il y a autant de porteuses paires que d'impaires parmi les  $M_R$  porteuses réservées. Car après  $M_R/2$  décomposition toutes les porteuses réservées seront non orthogonales entre elles. Cependant, bien que nous l'ayons pas explicitement souligné dans le cas des méthodes basées sur la MTR, les matrices de projection qui leur sont associées jouent un rôle prépondérant sur leurs performances en réduction du PAPR. En effet ces matrices sont, tout comme la matrice de projection de la méthode TR-GP, des matrices circulaires. Ainsi, les performances en réduction du PAPR dépendront fortement de l'écart entre le *peak* principal et le *peak* secondaire. Plus cet écart est grand, moins est le risque d'apparition de nouveaux *peaks* et plus la réduction des forts *peaks* sera effective (voir principe de l'algorithme *Random Set Optimizer*). Partant de ce constat, les questions suivantes semblent tout à fait pertinentes :

- Le niveau de décomposition ne dépend t-il pas du jeu de porteuses réservées considéré ? Autrement dit si  $\mathcal{R}^1$  et  $\mathcal{R}^2$  sont deux jeux de porteuses réservées distincts (mais avec le même nombre de porteuses réservées) et que pour le jeu de porteuses  $\mathcal{R}^1$  en décomposant jusqu'à  $k_1$  on continue d'améliorer les performances. Cela sera t-il le

cas lorsqu'on considère le jeu de porteuses  $\mathcal{R}^2$  ?

- Comment faire le lien entre le jeu de porteuses et le niveau de décomposition optimal qu'il faudra utiliser ?
- L'autre question que l'on peut se poser sur ce sujet est l'influence que peut avoir le Bruit de *clipping* sur le niveau de décomposition. En effet, bien que nous l'ayons pas souligné durant cette thèse, le Bruit de *clipping* peut avoir une influence sur le degré de décomposition optimal à considérer. L'idée ici est de savoir si le niveau de décomposition ne doit-il pas être adapté en fonction du Bruit de *clipping* à minimiser ?

Au regard de l'importance de la matrice de projection associée à chaque méthode MTR, Il est aussi pertinent de se demander si la décomposition (niveaux de décomposition) ne doit t-elle pas être faite en fonction des caractéristiques de la matrice de projection ?

L'autre travail immédiat serait aussi d'étudier le cas d'une décomposition asymétrique. Autrement dit appliquer la décomposition pour la composante paire ou impaire seulement. Un étude sur l'impact du pourcentage de la parité des porteuses sur la méthode MTR serait aussi intéressant à regarder, comme nous l'avons fait dans le cas de la TR. Pour clôturer sur la MTR, notons que dans la dernière section, nous avons comparé les méthodes de la MTR avec la méthode TR-GP dans le cas où les porteuses réservées sont sélectionnées pour optimiser les performances de la méthode TR-GP ( via l'Algorithme *Random Set Optimizer*), il serait donc intéressant de comparer ces méthodes lorsque chacune d'elle utilise son jeu de porteuses optimal (tous les jeux de porteuses doivent avoir le même nombre de porteuses).



# Annexe A

## Complément sur les techniques de *Clipping* et les techniques basées sur la TR

### A.1 Évaluation des performances des techniques de *clipping*

Dans cette section, nous allons évaluer les performances en réduction du PAPR des techniques *Classical Clipping*, *Smooth Clipping* et *Deep Clipping* avant et après filtrage des bruits hors bande générés par les fonctions d'écrêtage respectives de ces techniques de *clipping*. Pour ce faire, nous allons considérer un système OFDM comportant  $M = 64$  porteuses et modulant des données issues d'une constellation 16-QAM comme dans le chapitre 3. Le facteur de sur échantillonnage sera de  $L = 4$ .

#### A.1.1 Performances en réduction du PAPR des techniques *Classical Clipping*, *Smooth Clipping* and *Deep Clipping*

Les Figures A.1, A.2 et A.3 donnent respectivement les performances en réduction du PAPR des méthodes *Classical Clipping*, *Smooth Clipping* et *Deep Clipping* avec  $d = 0.5$  et pour un seuil d'écrêtage normalisé égale à  $\rho = 4\text{dB}$ . Le schéma de filtrage que nous allons utiliser dans cette section sera celui proposé dans [3], voir Figure 2.14 de la sous section 2.4.2.1.b.

Comme nous l'avons souligné précédemment on constate sur les Figures A.1, A.2 et A.3 que le filtrage du bruit hors bande après écrêtage entraîne une dégradation du PAPR pour les 3 méthodes de *clipping*. En effet, on remarque que le PAPR à  $10^{-4}$  de la CCDF passe de 5dB à environ 7.75dB après filtrage pour la méthode CC. Pour les méthodes *Smooth Clipping* et *Deep Clipping* le PAPR à  $10^{-4}$  passe respectivement de 6.6dB 7.9dB et 5.3dB 6.25dB après filtrage du bruit hors bande généré par les fonctions d'écrêtages respectives. On remarque que la méthode *Deep Clipping* offre les meilleures performances en réduction du PAPR après filtrage. Ce résultat est tout à fait prévisible car cette méthode a été proposée à cet effet. Bien que nous l'ayons pas montré par simulation, notons que le facteur  $d$  permet d'atténuer au maximum le *peak regrowth phenomena*, voir [77].

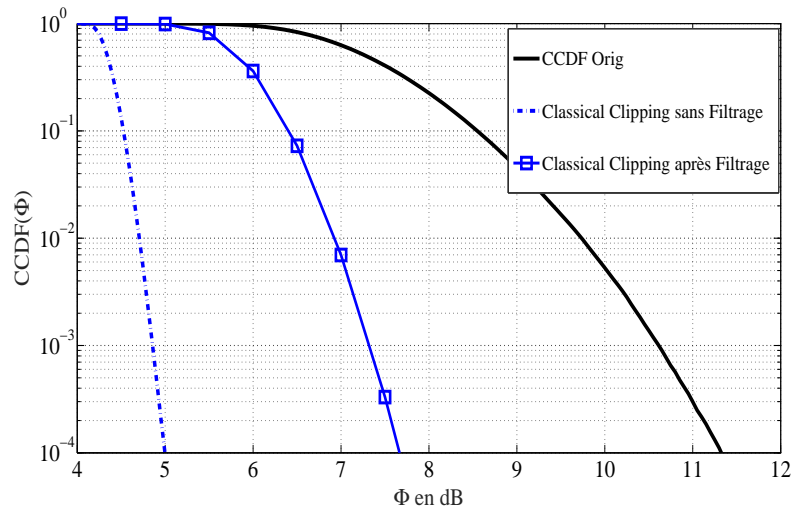


FIGURE A.1 – Performances en réduction du PAPR de la méthode *Classical Clipping* avec ou sans Filtrage des bruits hors bande pour  $\rho = 4\text{dB}$

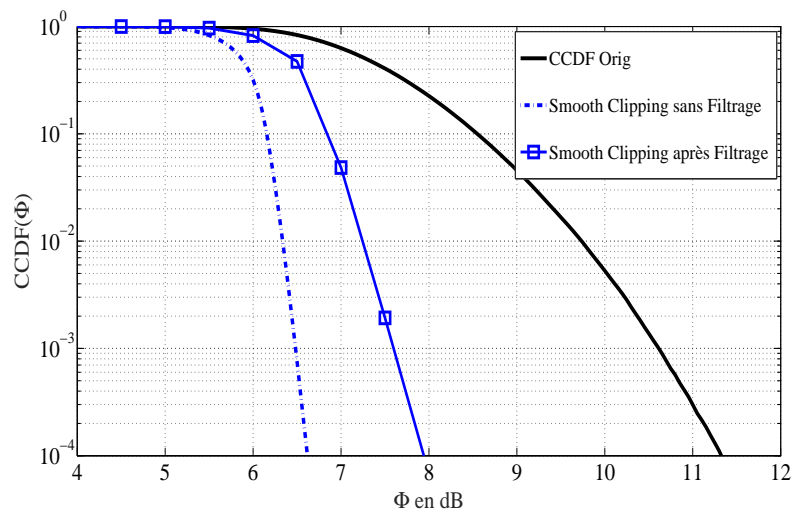


FIGURE A.2 – Performances en réduction du PAPR de la méthode *Smooth Clipping* avec ou sans Filtrage des bruit hors bande pour  $\rho = 4\text{dB}$

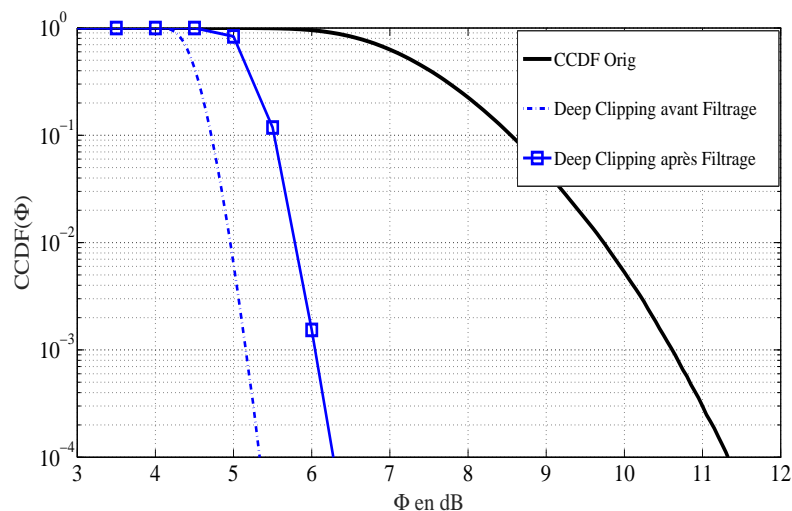


FIGURE A.3 – Performances en réduction du PAPR de la méthode *Deep Clipping* avec ou sans Filtrage des bruit hors bande pour  $\rho = 4\text{dB}$  et  $d = 0.5$

### A.1.2 Influence des techniques de *clipping* sur les densités spectrales de puissance des signaux après écrêtage

Comme nous l'avons souligné dans le chapitre 3, les techniques d'écrêtage comme toute technique de saturation entraînent une remontée des lobes secondaires du signal après écrêtage, d'où la nécessité d'effectuer un filtrage du bruit hors bande avant transmission. Dans cette section, nous allons évaluer l'impact des fonctions d'écrêtages des techniques *Classical Clipping*, *Smooth Clipping* et *Deep Clipping* sur les DSP des signaux OFDM après écrêtage.

A cet effet, la Figure A.4 compare les densités spectrales de puissance des signaux avant et après réduction du PAPR sans filtrage et avec filtrage.

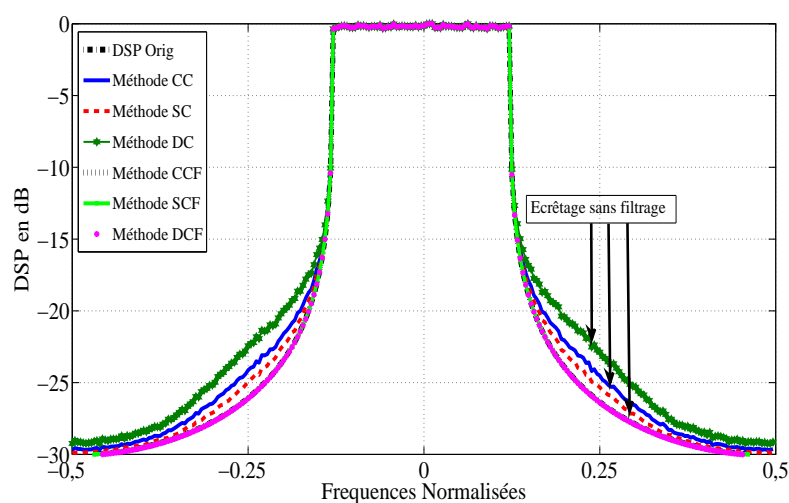


FIGURE A.4 – Densité spectrale de puissance avant et après réduction du PAPR avec les méthodes CC, SC et DC (pour  $d = 0.5$ ) avec ou sans Filtrage des bruits hors bande pour  $\rho = 4\text{dB}$

Les résultats de la Figure A.4 confirment que l'écrêtage provoque une remontée des



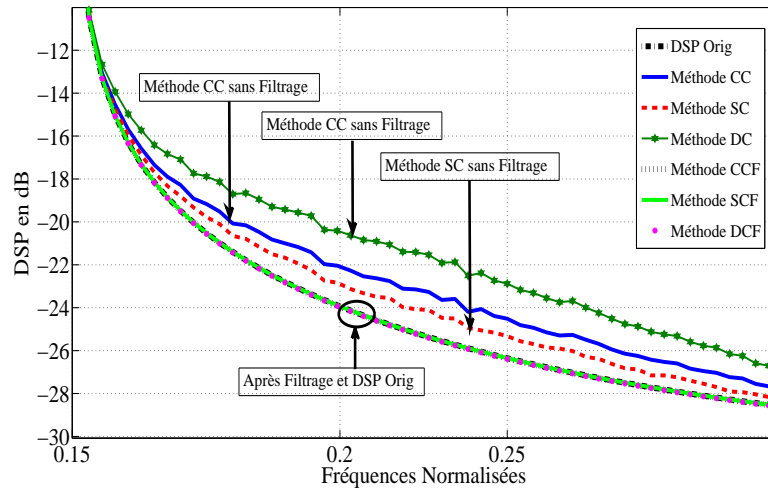
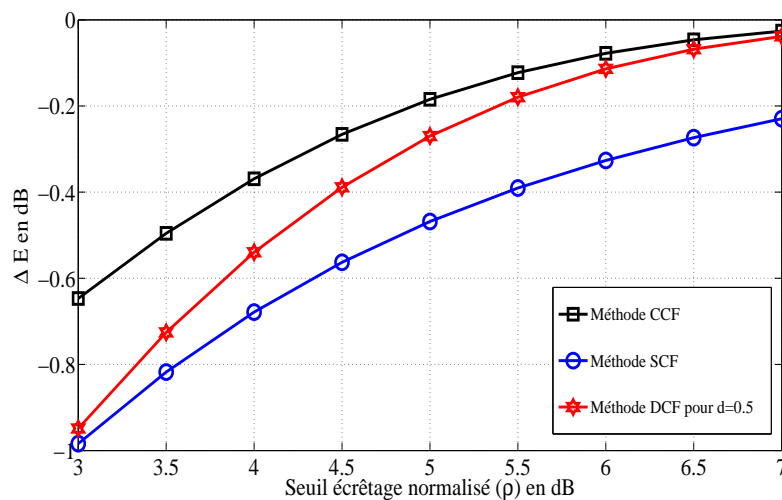


FIGURE A.5 – Zoom sur la Figure A.4

lobes secondaires. En outre on remarque que la méthode *Deep Clipping* (DC) est plus polluante que les méthodes *Classical Clipping* (CC) et *Smooth Clipping* (SC). On remarque aussi que la méthode SC génère la remontée des lobes secondaires la plus faible, voir Figure A.5.

### A.1.3 Évaluation des performances en termes de distorsion de la constellation (EVM) et de variation de la puissance moyenne $\Delta E$

A présent dans ce qui suit, pour différents valeurs de  $\rho$  nous allons évaluer respectivement dans les Figures A.6 et A.7 les dégradations de la puissance moyenne occasionnées par les trois méthodes de *clipping* et les dégradations occasionnées sur la constellation via l'EVM (*Error Vector Magnitude*).

FIGURE A.6 – Les dégradations de la puissance moyenne du signal induites après réduction du PAPR par les méthodes CC, SC et DC (pour  $d = 0.5$ ) pour  $\rho = 4\text{dB}$ 

Les résultats de simulation des Figures A.6 et A.7 montrent que les méthodes CCF, SCF et DCF dégradent la puissance moyenne du signal ainsi que la constellation du

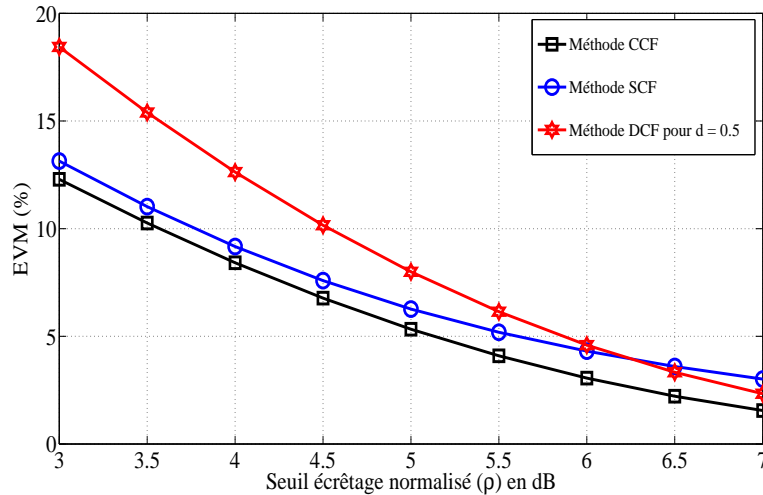


FIGURE A.7 – Les dégradations de la constellation (EVM) induites après réduction du PAPR par les méthodes CC, SC et DC (pour  $d = 0.5$ ) pour  $\rho = 4$  dB

symbole d'intérêt. Si la diminution de la puissance moyenne n'impactera que la paramétrisation de l'amplificateur de puissance et non la qualité des données transmises, celles induites sur la constellation auront quant à elles un effet sur le BER du système. Ainsi, d'après les résultats de simulations de la Figure A.7 la méthode CCF dégradera moins le BER que les méthodes SCF et DCF écrêtées avec le même seuil  $\rho \in [3, 7]$  (en dB). Par contre, entre la méthode SCF et DCF, on remarque que la méthode SCF dégradera moins le BER que la méthode DCF lorsque  $\rho < 6.5$ .

#### A.1.4 Performances en termes de dégradation du BER

Les Figures A.8 et A.9 comparent les dégradations du BER induites par les techniques CC, SC et DC pour  $\rho = 5$  dB et  $\rho = 6.5$  dB.

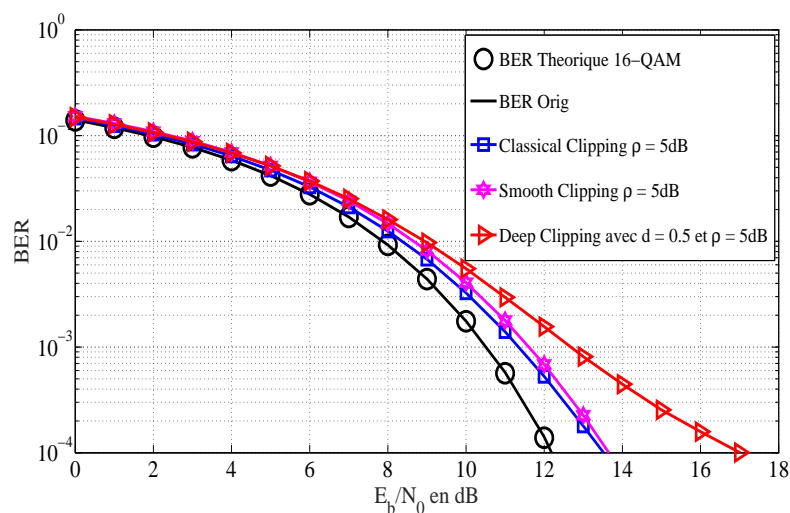


FIGURE A.8 – Performances en dégradation du BER des méthodes *Classical Clipping*, *Smooth Clipping* et *Deep Clipping* pour  $\rho = 5$  dB

Les résultats de simulation des Figures A.8 et A.9 montrent que la méthode CC dégrade moins le BER que les méthodes SC et DC. Par exemple sur pour  $\rho = 5$  dB, pour un BER

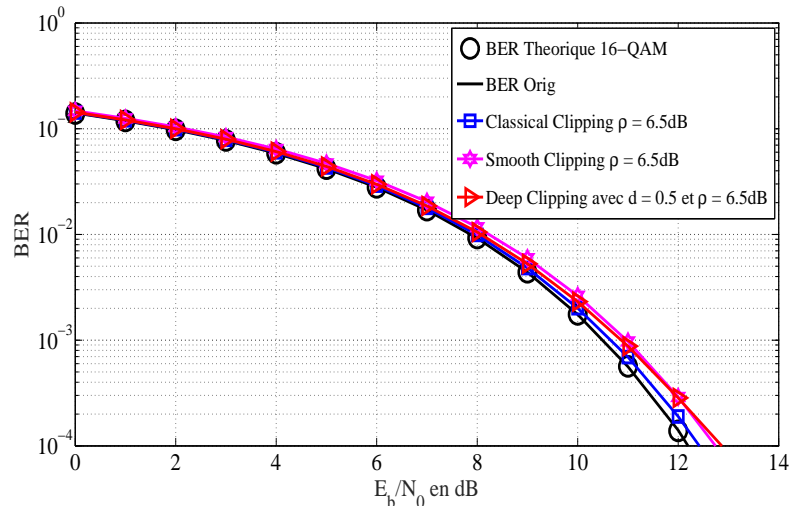


FIGURE A.9 – Performances en dégradation du BER des méthodes *Classical Clipping*, *Smooth Clipping* et *Deep Clipping* pour  $\rho = 6.5$ dB

à  $10^{-4}$  le rapport énergie bit à bruit ( $E_b/N_0$ ) est d'environ 13.5dB pour les méthodes CC et SC et 17dB pour la méthode DC, voir Figure A.8. Pour  $\rho = 6.5$ dB, on remarque que les méthodes SC et DC ont des courbes de BER quasi-similaires, ce qui est en accord avec les résultats de simulation sur l'EVM présentés sur la Figure A.7.

## A.2 Performances en réduction du PAPR de quelques méthodes basées sur la TR

Dans cette section nous allons donner quelques résultats de simulation sur les performances en réduction du PAPR et de variation de la puissance moyenne des techniques TR-QCQP, TR-SOCP, TR-GP et TR-Clipping. L'environnement de simulation sera comme dans la section A.1 un système OFDM comportant  $M = 64$  porteuses et modulant des données issues d'une 16-QAM mais avec  $N_{\mathcal{R}} = 8$  porteuses réservées pour porter le signal de correction du PAPR.

### A.2.1 Performances en réduction du PAPR des méthodes TR-QCQP et TR-SOCP

Dans cette sous section, nous allons prendre  $\mathcal{R} = [29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36]$  (*Contiguous Tones-Middle Side*) comme disposition des porteuses réservées.

Rappelons que la TR est sans dégradation du BER et sans émission hors bande, ainsi ces critères ne seront pas étudiés dans cette section. Les objectifs des résultats de simulation que nous allons présenter est de montrer d'une part que la méthode TR-QCQP permet une importante réduction du PAPR et d'autre part de mettre en évidence le compromis entre performance en réduction du PAPR et augmentation de la puissance moyenne que nous offre la méthode TR-SOCP.

Les Figures A.10 et A.11 donnent respectivement les performances en réduction du PAPR des méthodes TR-QCQP et TR-SOCP en fonction de la contrainte sur la variation de la puissance moyenne  $\Delta E$ .

Tout d'abord notons que comme nous l'avons souligné dans la section 2.4.2.2.a du chapitre 2, la méthode TR-QCQP permet de trouver le signal de correction du PAPR

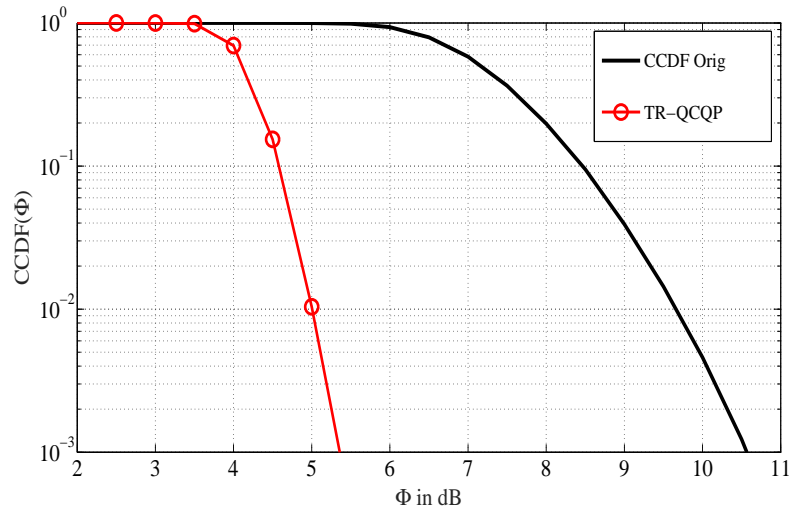


FIGURE A.10 – CCDF avant et après réduction du PAPR pour un système OFDM comportant  $M = 64$  avec  $N_{\mathcal{R}} = 8$  et  $L = 4$  :  $\Delta E = 1.26\text{dB}$

optimal faisant ainsi de cette méthode la plus performante de nos jours en termes de réduction du PAPR parmi les méthodes ajout de signal sans distorsion du BER et sans émission hors bande. Cependant, elle entraîne une augmentation de la puissance moyenne du signal de plus d'un 1dB. Elle est aussi très coûteuse en terme de complexité numérique qui est de l'ordre de  $\mathcal{O}(N_{\mathcal{R}}LM^2)$  [126].

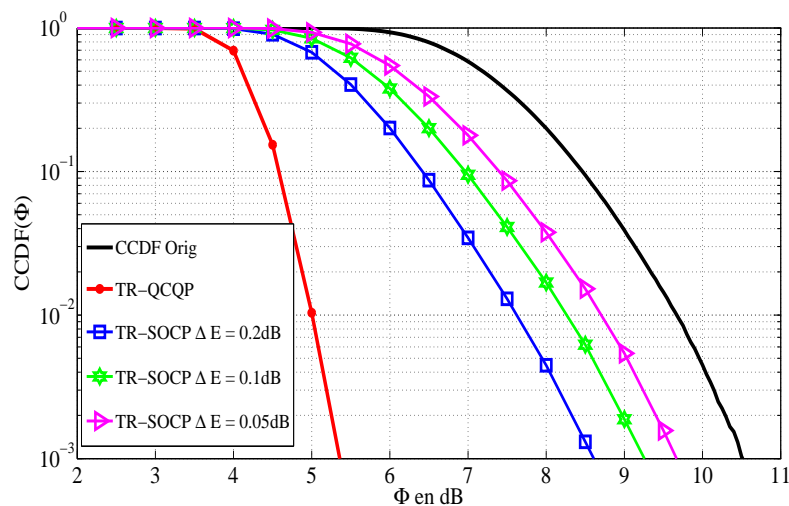


FIGURE A.11 – CCDF avant et après réduction du PAPR pour un système OFDM comportant  $M = 64$  avec  $N_{\mathcal{R}} = 8$  et  $L = 4$  :  $\Delta E = 1.26\text{dB}$

Concernant la méthode TR-SOCP, les résultats de simulation de la Figure A.11 montrent que plus la contrainte sur la puissance moyenne est contraignante (Si on veut  $\Delta E$  très petit) moins les performances en réduction du PAPR sont bonnes. En effet, on peut remarquer que les performances de la méthode TR-SOCP dépendent fortement de la contrainte mise sur la variation de la puissance moyenne. On remarque en effet que les résultats de simulation nous révèlent que pour une contrainte de  $\Delta E = 0.2$  dB, la méthode TR-SOCP entraîne une perte (par rapport à la méthode TR-QCQP) de gain en réduction du PAPR d'environ 3dB. Notons aussi que lorsque  $\Delta E = \infty$ , la TR-QCQP et la TR-SOCP sont identiques, ce qui est tout à fait en accord avec leur problème d'opti-

misation respectif, voir chapitre 2 et équations (2.18) et (2.19). La méthode TR-SOCP pose ainsi un fort dilemme de compromis entre performance en réduction du PAPR et augmentation de la puissance moyenne du signal après réduction du PAPR. Notons que dans [138], l'auteur a proposé d'autres alternatives pour contrôler la variation de la puissance moyenne après réduction du PAPR. Par exemple à la différence du problème (2.19) où la contrainte est mise sur la puissance moyenne, l'auteur de [138] a proposé de mettre des contraintes sur les puissances instantanées dans le domaine fréquentiel du signal de correction du PAPR. C'est travaux, permettent par exemple de contrôler les éventuelles émissions hors bande lorsque les porteuses utilisées pour porter le signal de correction du PAPR sont les porteuses nulles du standard comme dans le cas de la norme IEEE. 802 11a/g.

### A.3 Influence du choix des porteuses sur les performances de la méthode TR-GP

Dans cette section, nous allons compléter la sous section 4.2.1 du chapitre 2 à travers quelques résultats de simulation sur la méthode TR-GP. L'objectif de cette sous section est de mettre en évidence l'influence du choix des porteuses réservées sur les performances de la méthode TR-GP. Pour ce faire nous allons dans premier temps faire une analyse théorique de l'importance du choix de  $\mathcal{R}$  sur les performances de la méthode TR-GP. Nous présenterons ensuite quelques résultats de simulation pour illustrer l'importance de ce choix.

#### A.3.1 Rappel de l'Algorithme *Random Set Optimizer* pour la méthode TR-GP

Comme nous l'avons brièvement mentionné dans la section 4.2 du chapitre 2, le *Random Set Optimizer* est un algorithme permettant la construction d'un jeu de porteuses pouvant considérablement améliorer les performances en réduction du PAPR de la méthode TR-GP. Dans ce qui suit nous allons rappeler le principe cet algorithme.

Dans la section 4.2.1, nous avons montré que la méthode TR-GP consiste à réduire itérativement le PAPR via l'équation suivante :

$$\mathbf{x}_n^{(i+1)} = \mathbf{x}_n^{(i)} - \nu \sum_{|x_{n,l}^{(i)}| > A} \alpha_l \mathbf{P}_l \quad (\text{A.1})$$

Avec  $\mathbf{P}_l$  la  $l$ -ième colonne de la matrice  $\mathbb{F}_{ML,N_{\mathcal{R}}}^{\mathcal{R}} (\mathbb{F}_{ML,N_{\mathcal{R}}}^{\mathcal{R}})^H$ . Pour plus de clarté, notons par  $\{l_0, l_1, \dots, l_A\} = \{l, \text{tel que } |x_{n,l}^{(i)}| > A\}$ . En d'autres termes,  $\{l_0, l_1, \dots, l_A\}$  désigne les indices des échantillons de  $\mathbf{x}_n^{(i)}$  qui dépassent le seuil d'écrêtage prédéfini. Avec ces nouvelles notations, l'équation (A.1) peut être réécrite comme suit :

$$\mathbf{x}_n^{(i+1)} = \mathbf{x}_n^{(i)} - \nu (\alpha_{l_0} \mathbf{P}_{l_0} + \dots + \alpha_{l_A} \mathbf{P}_{l_A}) \quad (\text{A.2})$$

Tout d'abord rappelons que pour tout  $l$ ,  $\mathbf{P}_l$  peut être obtenu par un *shift* circulaire (1 fois) de  $\mathbf{P}_0$ . Autrement dit  $\mathbf{P}_l[k] = \mathbf{P}_0[k - l]$ , voir l'équation 4.30 du chapitre 4 qui exprime la matrice  $\mathbb{P}$  en fonction de  $\mathbf{P}_0$ . On y remarque en effet que la connaissance de la première colonne de la matrice  $\mathbb{F}_{ML,N_{\mathcal{R}}}^{\mathcal{R}} (\mathbb{F}_{ML,N_{\mathcal{R}}}^{\mathcal{R}})^H$  suffit pour connaître toutes les autres colonnes. Soulignons d'ailleurs que cette propriété de circularité est valable pour les matrices de projection des méthodes MTR et qu'elle constitue un intérêt majeur dans l'éventualité

d'une standardisation de ces méthodes car elle (la propriété de circularité) permettra un gain en mémoire non négligeable. Ainsi de l'équation (A.2), Il vient alors que si  $\mathcal{R}$  est choisi de telle sorte que  $\mathbf{P}_0 = \mathbf{e}_0 = [1, 0, \dots, 0]^T$ , alors la méthode TR-GP permettra une projection optimale du bruit de *clipping* sur les porteuses réservées, au sens où :

- Elle permettra d'atténuer complètement toutes les échantillons du signal  $\mathbf{x}_n^{(i)}$  qui dépassent le seuil fixé  $A$ .
- Aucun nouveau *peak* ne sera créé par le signal de correction du PAPR.

La matrice  $\mathbb{F}_{ML, N_{\mathcal{R}}}^{\mathcal{R}} (\mathbb{F}_{ML, N_{\mathcal{R}}}^{\mathcal{R}})^H$  ne dépendant que de  $\mathcal{R}$ , il vient alors que le choix du  $\mathcal{R}$  optimal, au sens où il permettra de réduire au maximum les *peaks* tout minimisant l'apparition de nouveaux *peaks*, consistera à choisir l'ensemble  $\mathcal{R}$  tel que  $\mathbf{P}_0$  approche au mieux  $\mathbf{e}_0$ . Plusieurs métriques telles que la norme euclidienne, la norme infinie, etc peuvent être utilisées pour formaliser ce problème. Néanmoins, dans [126] l'auteur a montré que ce problème reste un problème combinatoire NP hard. Ainsi, le *Random Set Optimizer* a été proposé comme solution sous optimale. C'est cette solution que nous allons utiliser dans cette sous section. Notons que d'autres méthodes de calcul du  $\mathcal{R}$  optimal existent dans la littérature [92, 21].

Le *Random Set Optimizer* consiste à sélectionner parmi un nombre grand de possibilités de choix de l'ensemble des porteuses réservées celui qui minimise le *peak* secondaire de  $\mathbf{P}_0$ . En d'autres termes si  $\mathcal{R}_0, \dots, \mathcal{R}_{\text{Trial}}$  constituent des possibilités de choix du  $\mathcal{R}$ , le *Random Set Optimizer* propose de sélectionner celui dont le *peak* secondaire de  $\mathbf{P}_0$  est le plus petit. Plus clairement, pour un système OFDM comportant  $M$  porteuses et pour lequel on veut réserver  $N_{\mathcal{R}}$  porteuses, l'Algorithme 11 décrit la méthode *Random Set Optimizer* pour le choix des porteuses à réserver pour la réduction du PAPR.

---

**Algorithm 11** L'algorithme *Random Set Optimizer*

---

**Require:**  $M :=$  nombre de porteuses totale,  $N_{\mathcal{R}} :=$  nombre de porteuses dédiées à la réduction du PAPR.

**Require:** Trial := nombre de possibilité à explorer

**Ensure:**  $\mathcal{R}^*$  le  $\mathcal{R}$  optimale parmi les Trial cas testés

$i \leftarrow 0$

$\mathcal{R}^* \leftarrow \text{Randi}([0M - 1], 1, N_{\mathcal{R}})$

Calculer  $\mathbf{P}_0$  à partir de  $\mathcal{R}^*$

$p_{sec} \leftarrow \frac{|\mathbf{P}_0[1]|}{\max\{|\mathbf{P}_0[l]|, l=2, \dots, LM\}}$

**while**  $i < \text{Trial}$  **do**

$\mathcal{R}_i \leftarrow \text{Randi}([0M - 1], 1, N_{\mathcal{R}})$

    Calculer  $\mathbf{P}_0$  à partir de  $\mathcal{R}_i$

$p_{i,sec} \leftarrow \frac{|\mathbf{P}_0[1]|}{\max\{|\mathbf{P}_0[l]|, l=2, \dots, LM\}}$

**if**  $p_{i,sec} < p_{sec}$  **then**

$\mathcal{R}^* \leftarrow \mathcal{R}_i$

$p_{sec} \leftarrow p_{i,sec}$

**end if**

$i \leftarrow i + 1$

**end while**

---

Notons qu'en pratique les systèmes de télécommunications disposent de porteuses réservées pour transmettre des informations dédiées à l'estimation du canal de transmission, à la synchronisation ou d'autres types de traitement en réceptions permettant la récupération des données transmises. Ces porteuses sont généralement appelées *Porteuses Pilotes* ou *Pilotes*. Le choix de ces porteuses, comme pour celles dédiées à l'estimation du canal par exemple est très important car la qualité de l'information transmise par ces porteuses influence considérablement la qualité de l'estimation du canal. Ainsi, le choix de ces porteuses est prioritaire devant le choix des porteuses réservées pour porter le signal de correction du PAPR. Ainsi, bien que nous l'ayons pas spécifié dans l'Algorithme 11, nous supposons que les jeux de porteuses sélectionnées pour la recherche du jeu optimal ne doivent contenir aucune des porteuses pilotes.

Il existe d'autres structures de construction du jeu des porteuses réservées pour la réduction du PAPR tel que le *Contiguous Tone* qui consiste à sélectionner des porteuses consécutives (ex.  $\mathcal{R} = [m_0, m_0 + 1, m_0 + 2, \dots, ]$ ), le *Equally Spaced Tones* qui consiste à construire  $\mathcal{R}$  de telle sorte que ces porteuses soient équidistantes (ex.  $\mathcal{R} = [m_0, m_0 + k, m_0 + k, \dots, ]$  avec  $k$  le pas d'espacement entre les porteuses réservées). Ce dernier est un cas général du *Contiguous Tones*. Notons que ces études sont généralement basées sur des études statistiques (comparaison via les résultats de simulation) ce qui laisse le sujet tout à fait ouvert. Dans cette section nous allons nous intéresser au *Random Set Optimizer* et le *Contiguous Tones*. Concernant ce dernier, on peut distinguer plusieurs cas selon leur disposition le long de la bande. La Figure A.12 en donne quelques exemples que nous utiliserons dans la section (A.3.2).

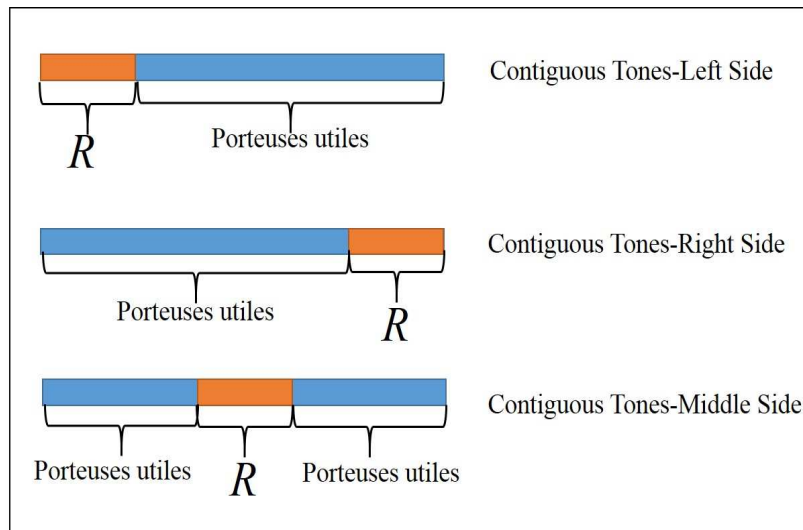


FIGURE A.12 – Disposition des porteuses réservées

De la Figure A.12, on a les différents ensembles de porteuses réservées associées à ces différentes structures pour  $M = 64$  et  $N_{\mathcal{R}} = 6$ .

$$\begin{aligned} \mathcal{R} &= [0, 1, \dots, 7] \text{ Cas } \textit{Contiguous Tones-Left Side} \\ \mathcal{R} &= [28, 29, \dots, 35] \text{ Cas } \textit{Contiguous Tones-Middle Side} \\ \mathcal{R} &= [56, 57, \dots, 63] \text{ Cas } \textit{Contiguous Tones-Right Side} \end{aligned}$$

(A.3)



### A.3.2 Quelques résultats de simulation sur l'influence du choix des porteuses sur la méthode TR-GP

Dans cette section nous allons évaluer l'influence des porteuses réservées sur les performances en termes de réduction du PAPR et de variation de la puissance moyenne ( $\Delta E$ ) de la méthode TR-GP. Pour ce faire, nous allons considérer différentes structures de construction des porteuses réservées. En dehors de celle obtenue via l'algorithme *Random Set Optimizer*, nous considérerons les cas *Contiguous Tones-Middle Sides*, *Contiguous Tones-Left Sides* et *Contiguous Tones-Right Sides*. Ces différentes structures sont définies sur la Figure A.12.

#### A.3.2.1 Performances en réduction du PAPR

Les Figures A.13 et A.14 donnent les CCDF avant et après réduction du PAPR via la méthode TR-GP avec les différentes structures de *mapping* des porteuses réservées après respectivement 10 et 20 itérations.

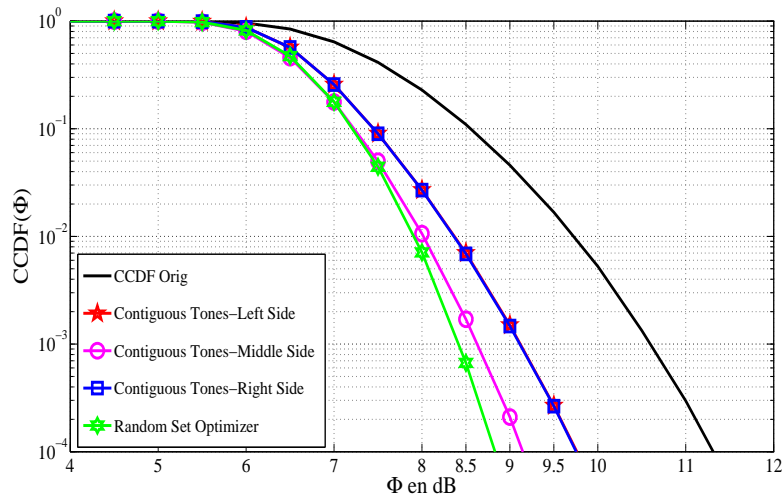


FIGURE A.13 – Performances de la méthode TR-GP avec les différents types de *mapping* des porteuses réservées :  $\rho = 5$ dB et  $N_{\max} = 10$  (nombre d'itérations effectué)

Tout d'abord, on remarque que les performances de la méthode TR-GP lorsqu'on utilise le *Random Set Optimizer* sont meilleures que dans les cas *Contiguous Tones-Middle Side*, *Contiguous Tones-Right Side* et *Contiguous Tones-Left Side*, voir Figures A.13 et A.14. On remarque aussi que le *Contiguous Tones-Middle Side* permet d'avoir de meilleures performances en réduction du PAPR que les cas *Contiguous Tones-Right Side* et *Contiguous Tones-Left Side*. Ces deux derniers types de *mapping* donnent quant à eux les mêmes performances en termes de réduction du PAPR. En outre, on remarque que plus le nombre d'itérations augmente, plus le gain en réduction du PAPR obtenu avec le cas *Random Set Optimizer* est supérieur à celui des cas *Contiguous Tones-Middle Side*, *Contiguous Tones-Right Side* et *Contiguous Tones-Left Side*. Ce constat est aussi valable pour le cas *Contiguous Tones-Middle Side* comparé aux cas *Contiguous Tones-Right Side* et *Contiguous Tones-Left Side*. En effet, on remarque qu'après 10 itérations le cas *Contiguous Tones-Middle Side* permet de gagner environ 0.5dB en gain par rapport aux cas *Contiguous Tones-Right Side* et *Contiguous Tones-Left Side*. ce gain atteint environ 0.8dB lorsqu'on arrive à 20 itérations. Concernant le cas *Random Set Optimizer*, on remarque qu'il permet de gagner environ 0.3dB et 0.6dB après respectivement 10 et 20 itérations

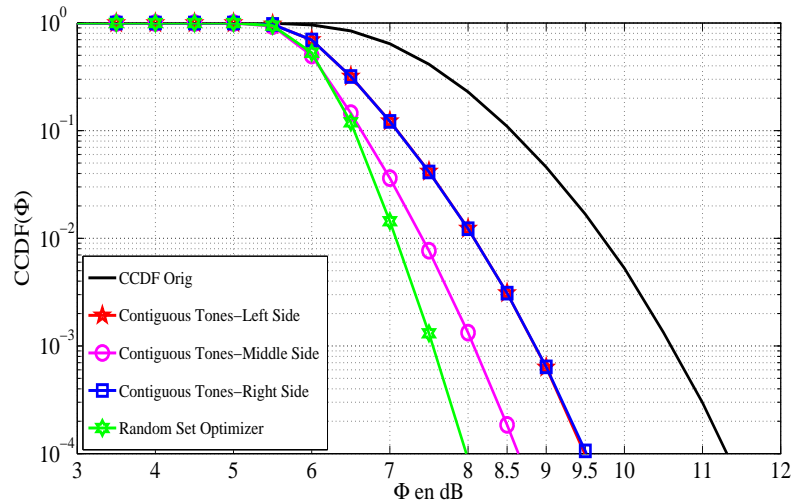


FIGURE A.14 – Performances de la méthode TR-GP avec les différents types de *mapping* des porteuses réservées :  $\rho = 5\text{dB}$  et  $N_{\max} = 20$  (nombre d'itérations effectué)

par rapport au cas *Contiguous Tones-Middle Side*. En conclusion, on peut conclure que le cas *Random Set Optimizer* permet de converger plus rapidement et donc permettra dans un certains sens de gagner en complexité numérique comme on peut le voir sur la Figure A.15. En effet, on remarque sur la Figure A.15 qu'après 12 itérations le PAPR dans le cas du *Random Set Optimizer* est de 8.5dB alors que dans le cas du *Contiguous Tones-Middle Side*, cette valeur du PAPR n'est atteint qu'après 20 itérations. On peut donc dire que le *Random Set Optimizer* peut permettre de gagner en complexité.

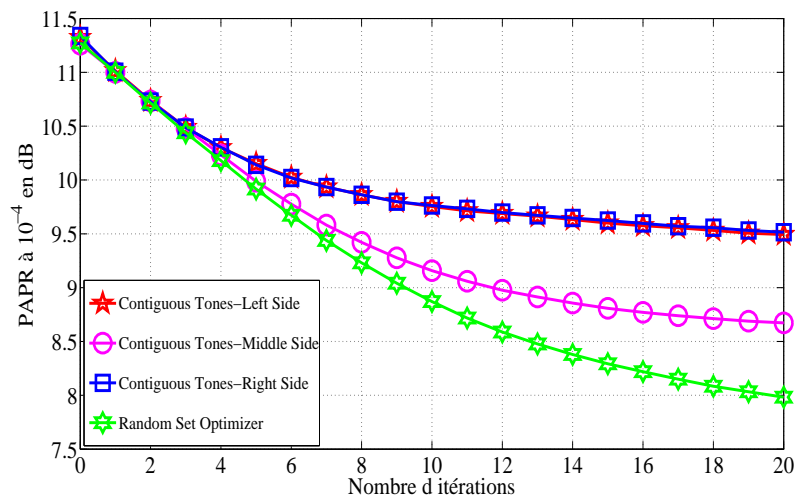


FIGURE A.15 – Performances de la méthode TR-GP avec les différents types de *mapping* des porteuses réservées en fonction du nombre d'itérations :  $\rho = 5\text{dB}$

Dans ce qui suit nous allons à présent, regarder l'influence du seuil d'écrêtage utilisé sur les performances de la méthode TR-GP avec les différents cas de *mapping*.

Les Figures A.16 et A.17 donnent les PAPR à  $10^{-4}$  obtenus en fonction du seuil d'écrêtage utilisé après respectivement 10 et 20 itérations.

Les résultats de simulation des Figures A.16 et A.17 montrent que le cas *Random Set Optimizer* est plus performant que les cas *Contiguous Tones-Middle Side*, *Contiguous Tones-Left Side* et *Contiguous Tones-Right Side* quelque soit le seuil d'écrêtage utilisé. De

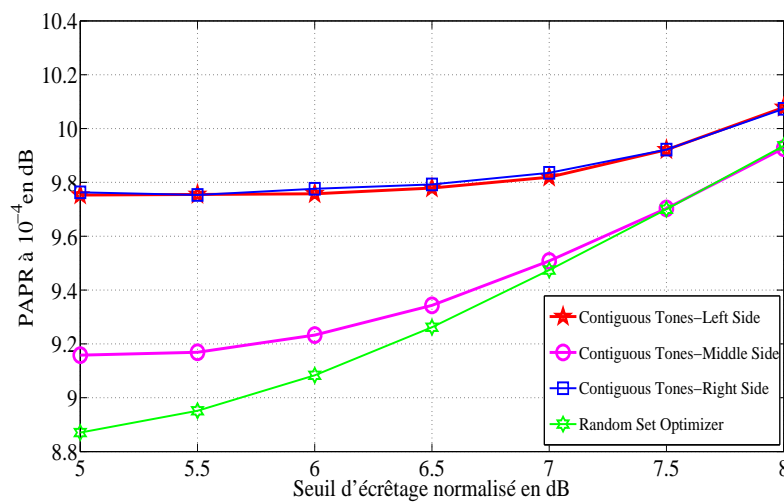


FIGURE A.16 – Performances de la méthode TR-GP en fonction du seuil d'écrêtage avec les différents types de *mapping* des porteuses réservées :  $N_{\max} = 10$  (nombre d'itérations effectué)

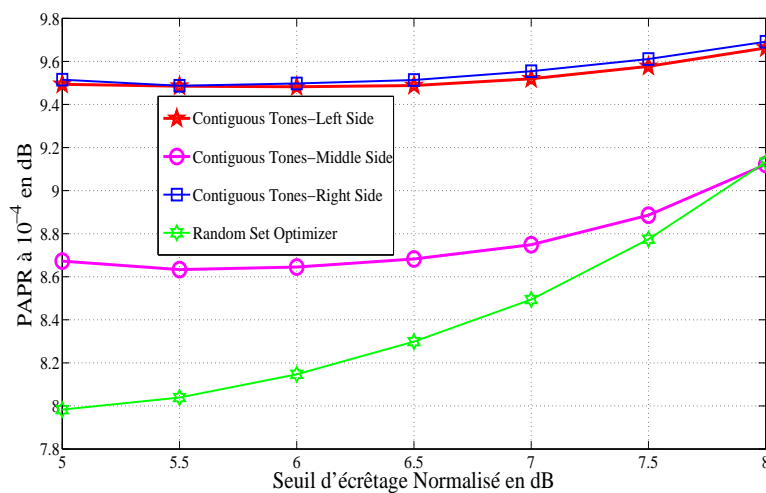


FIGURE A.17 – Performances de la méthode TR-GP en fonction du seuil d'écrêtage avec les différents types de *mapping* des porteuses réservées :  $N_{\max} = 20$  (nombre d'itérations effectué)

même le cas *Contiguous Tones-Middle Side* est meilleur que les cas *Contiguous Tones-Left Side* et *Contiguous Tones-Right Side* quelque soit le seuil d'écrêtage utilisé. Par contre, concernant les cas *Contiguous Tones-Left Side* et *Contiguous Tones-Right Side* on remarque un léger avantage du cas *Contiguous Tones-Right Sides* sur le cas *Contiguous Tones-Left Sides* au fur et à mesure que le seuil d'écrêtage augmente et aussi le nombre d'itérations, voir Figure A.17. En outre, on remarque que plus on augmente le nombre d'itérations, plus le gain en réduction du PAPR obtenu avec le cas *Random Set Optimizer* est supérieur à ceux obtenus avec les trois autres cas de *mapping* et cela quelques choix le seuil d'écrêtage. De même on remarque aussi que plus on augmente le nombre d'itérations, plus le gain en réduction du PAPR obtenu avec le cas *Contiguous Tones-Middle Side* est supérieur à ceux obtenus avec les cas *Contiguous Tones-Left Side* et *Contiguous Tones-Right Side* et cela quelques choix le seuil d'écrêtage. En effet sur la Figure A.16, i.e à 10 itérations, on remarque le cas *Contiguous Tones-Middle Sides* permet de gagner respectivement 0.6dB et 0.14dB par rapport aux autres cas de *mapping* lorsque  $\rho = 5$ dB et 8dB. À 20 itérations, voir Figure A.16, on améliore le gain de 0.84dB et 0.54dB lorsque le seuil  $\rho$  est respectivement égale à 5dB et 8dB.

### A.3.2.2 Performances en termes de variation de la puissance moyenne

Dans cette sous section nous allons à présent regarder les variations de la puissance moyenne induites par la méthode TR-GP avec les différents types de *mapping*.

Les Figures A.18 et A.19 donnent respectivement les variations de la puissance moyenne  $\Delta E$  en fonction du seuil d'écrêtage après respectivement 10 et 20 itérations.

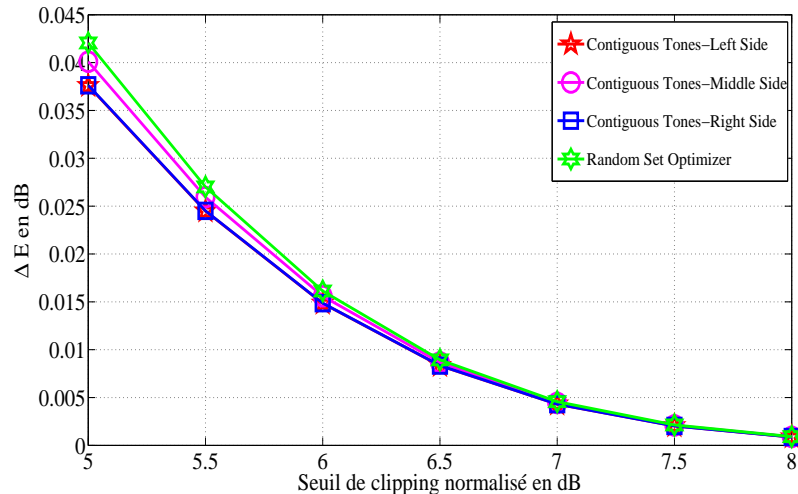


FIGURE A.18 – Variations de la puissance moyenne induites par la méthode TR-GP, en fonction du seuil d'écrêtage, et avec les différents types de *mapping* des porteuses réservées :  $N_{\max} = 20$  (nombre d'itérations effectué)

Les résultats de simulation des Figures A.18 et A.19 montrent que le cas *Random Set Optimizer* entraîne une augmentation de la puissance légèrement plus grande que dans les cas *Contiguous Tones-Middle Side*, *Contiguous Tones-Right Side* et *Contiguous Tones-Left Side* et elle s'accroît au fur et à mesure que le seuil diminue. Signalons que cela est tout à fait tributaire du principe de la TR qui entraîne nécessairement une augmentation de la puissance moyenne du signal après ajout du signal de correction du PAPR. Dans la section 5.6.3 du chapitre 5, une preuve y a été donnée, voir équation (5.108). Notons aussi, que lorsque  $\rho \geq 6.5$ , les quatre types de *mapping* entraînent quasiment les mêmes varia-

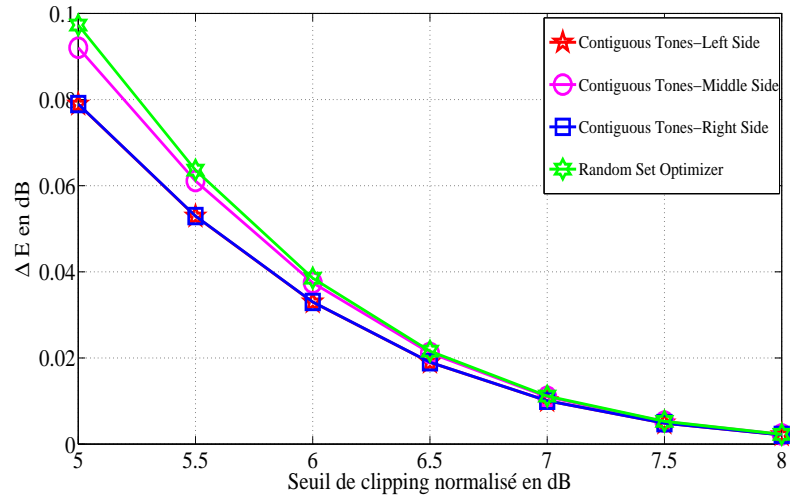


FIGURE A.19 – Variations de la puissance moyenne induites par la méthode TR-GP, en fonction du seuil d'écrêtage, et avec les différents types de *mapping* des porteuses réservées :  $N_{\max} = 20$  (nombre d'itérations effectué)

tions de la puissance moyenne alors que en terme de réduction du PAPR, le cas *Random Set Optimizer* permet une meilleure réduction du PAPR, voir Figure A.16 et A.17. Cela confirme que le jeu de porteuse obtenu via l'Algorithme 11 permet d'une part d'augmenter la capacité de réduction des *peaks* et d'autre de part de réduire le phénomène d'apparition de nouveaux *peaks* et donc de réduire l'augmentation de la puissance moyenne. Ainsi, nous pouvons, au vu de ces résultats conclure que le *Random Set Optimizer* offre un meilleur compromis entre réduction du PAPR et augmentation de la puissance moyenne.



# Annexe B

## Complément sur le chapitre 5

Cet annexe est consacré au développement de quelques résultats énoncés dans le chapitre 5. Plus précisément nous allons dans cette annexe :

1. Donner une preuve de l'équation (5.25) de la sous section 5.3.2 du chapitre 5. Cette équation donne la projection du jeu de porteuses réservées dans le cadre de la TR sur les symboles issus de la décomposition du symbole  $\mathbf{x}_n$ . En d'autre termes, cette équation défini les jeux de porteuses dans le cadre de la MTR.
2. Donner une caractérisation des perturbations générées par le signal de correction du PAPR de la méthode 1-MTR-GP dans le cas avec dégradation du BER, i.e la méthode définie par le problème d'optimisation (5.36). L'objectif est de comprendre la construction du schéma de filtrage utilisé dans la section 5.4.2.

### B.1 Projection des porteuses réservées de $\mathbf{x}_n$ sur les symboles issus de sa décomposition : Preuve de l'équation (5.25)

Rappelons que dans la sous section 5.3.1 du chapitre 5, nous avons montré que le symbole  $\mathbf{x}_n = [\mathbf{x}_{2n}^1 + \mathbf{x}_{2n}^2; \mathbf{x}_{2n+1}^1 + \mathbf{x}_{2n+1}^2]$  et que sous l'hypothèse que  $\mathbf{x}_n$  vérifie la contrainte TR, voir équation (5.23), alors on a :

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{L}(\mathbf{F}_{M_1 L, m}^{\text{Col}})^H \mathbf{x}_{2n}^1 &= \begin{cases} X_{m, 2n}^1 & \text{Si } m \notin \mathcal{K}^{(0)} \\ 0 & \text{Si } m \in \mathcal{K}^{(0)} \end{cases} \\
 \frac{1}{L}(\mathbf{F}_{M_1 L, m}^{\text{Col}})^H \mathbf{x}_{2n+1}^1 &= \begin{cases} X_{m, 2n+1}^1 & \text{Si } m \notin \mathcal{K}^{(0)} \\ 0 & \text{Si } m \in \mathcal{K}^{(0)} \end{cases} \\
 \frac{1}{L}(\mathbf{F}_{M_1 L, m}^{\text{Col}})^H (\mathbb{D}_{M_1 L})^H \mathbf{x}_{2n}^2 &= \begin{cases} X_{m, 2n}^2 & \text{Si } m \notin \mathcal{K}^{(1)} \\ 0 & \text{Si } m \in \mathcal{K}^{(1)} \end{cases} \\
 \frac{1}{L}(\mathbf{F}_{M_1 L, m}^{\text{Col}})^H (\mathbb{D}_{M_1 L})^H \mathbf{x}_{2n+1}^2 &= \begin{cases} X_{m, 2n+1}^2 & \text{Si } m \notin \mathcal{K}^{(1)} \\ 0 & \text{Si } m \in \mathcal{K}^{(1)} \end{cases}
 \end{aligned} \tag{B.1}$$

Pour donner un preuve de cette équation, nous allons nous mettre dans un cas général, c'est dire nous allons regarder ce que valent  $(\frac{1}{L}(\mathbf{F}_{M_1 L})^H \mathbf{x}_{2n}^1)$ ,  $(\frac{1}{L}(\mathbf{F}_{M_1 L})^H (\mathbb{D}_{M_1 L})^H \mathbf{x}_{2n}^2)$ ,  $(\frac{1}{L}(\mathbf{F}_{M_1 L})^H \mathbf{x}_{2n+1}^1)$  et  $(\frac{1}{L}(\mathbf{F}_{M_1 L})^H (\mathbb{D}_{M_1 L})^H \mathbf{x}_{2n+1}^2)$ .



En utilisant l'équation (5.18) de la sous section 5.3.1, on a :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{L}(\mathbb{F}_{M_1L})^H \mathbf{x}_{2n}^1 &= \frac{1}{L}(\mathbb{F}_{M_1L})^H (\mathbb{F}_{M_1L} \check{\mathbf{X}}_{2n}^1) \\
\frac{1}{L}(\mathbb{F}_{M_1L})^H (\mathbb{D}_{M_1L})^H \mathbf{x}_{2n}^2 &= \frac{1}{L}(\mathbb{F}_{M_1L})^H (\mathbb{D}_{M_1L})^H \mathbb{D}_{M_1L} \left( \mathbb{F}_{M_1L} \check{\mathbf{X}}_{2n}^2 \right) \\
\frac{1}{L}(\mathbb{F}_{M_1L})^H \mathbf{x}_{2n+1}^1 &= \frac{1}{L}(\mathbb{F}_{M_1L})^H \mathbb{F}_{M_1L} \check{\mathbf{X}}_{2n+1}^1 \\
\frac{1}{L}(\mathbb{F}_{M_1L})^H (\mathbb{D}_{M_1L})^H \mathbf{x}_{2n+1}^2 &= \frac{1}{L}(\mathbb{F}_{M_1L})^H (\mathbb{D}_{M_1L})^H \mathbb{D}_{M_1L} \left( \mathbb{F}_{M_1L} \check{\mathbf{X}}_{2n+1}^2 \right)
\end{aligned} \tag{B.2}$$

Par construction des matrices  $\mathbb{F}_{M_1L}$  et  $\mathbb{D}_{M_1L}$  on a :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{L}(\mathbb{F}_{M_1L})^H (\mathbb{F}_{M_1L}) &= \mathbb{I}_{M_1L} \\
(\mathbb{D}_{M_1L})^H \mathbb{D}_{M_1L} &= \mathbb{I}_{M_1L}
\end{aligned} \tag{B.3}$$

Alors l'équation (B.2) devient :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{L}(\mathbb{F}_{M_1L})^H \mathbf{x}_{2n}^1 &= \check{\mathbf{X}}_{2n}^1 \\
\frac{1}{L}(\mathbb{F}_{M_1L})^H (\mathbb{D}_{M_1L})^H \mathbf{x}_{2n}^2 &= \check{\mathbf{X}}_{2n}^2 \\
\frac{1}{L}(\mathbb{F}_{M_1L})^H \mathbf{x}_{2n+1}^1 &= \check{\mathbf{X}}_{2n+1}^1 \\
\frac{1}{L}(\mathbb{F}_{M_1L})^H (\mathbb{D}_{M_1L})^H \mathbf{x}_{2n+1}^2 &= \check{\mathbf{X}}_{2n+1}^2
\end{aligned} \tag{B.4}$$

Avec on le rappelle  $\check{\mathbf{X}}_{2n}^1$ ,  $\check{\mathbf{X}}_{2n}^2$ ,  $\check{\mathbf{X}}_{2n+1}^1$  et  $\check{\mathbf{X}}_{2n+1}^2$  sont respectivement obtenus par zéro *padding* sur les vecteurs  $\mathbf{X}_{2n}^1$ ,  $\mathbf{X}_{2n}^2$ ,  $\mathbf{X}_{2n+1}^1$  et  $\mathbf{X}_{2n+1}^2$ .

En regardant composante par composante, l'équation (B.4) devient pour tout  $m = 0, \dots, M_1L - 1$  :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{L}(\mathbf{F}_{M_1L,m}^{\text{Col}})^H \mathbf{x}_{2n}^1 &= \check{X}_{m,2n}^1 \\
\frac{1}{L}(\mathbf{F}_{M_1L,m}^{\text{Col}})^H (\mathbb{D}_{M_1L})^H \mathbf{x}_{2n}^2 &= \check{X}_{m,2n}^2 \\
\frac{1}{L}(\mathbf{F}_{M_1L,m}^{\text{Col}})^H \mathbf{x}_{2n+1}^1 &= \check{X}_{m,2n+1}^1 \\
\frac{1}{L}(\mathbf{F}_{M_1L,m}^{\text{Col}})^H (\mathbb{D}_{M_1L})^H \mathbf{x}_{2n+1}^2 &= \check{X}_{m,2n+1}^2
\end{aligned} \tag{B.5}$$

En utilisant l'équation (2.3), qui traduit l'opération de zéro *padding*, l'équation (5.9) et

l'hypothèse que  $\mathbf{x}_n$  vérifie la contrainte TR (5.23), on a :

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{L}(\mathbf{F}_{M_1 L, m}^{\text{Col}})^H \mathbf{x}_{2n}^1 &= \begin{cases} X_{m, 2n}^1 & \text{Si } 2m \notin \mathcal{R}^P \\ 0 & \text{Si } 2m \in \mathcal{R}^P \end{cases} \\
 \frac{1}{L}(\mathbf{F}_{M_1 L, m}^{\text{Col}})^H \mathbf{x}_{2n+1}^1 &= \begin{cases} X_{m, 2n+1}^1 & \text{Si } 2m \notin \mathcal{R}^P \\ 0 & \text{Si } 2m \in \mathcal{R}^P \end{cases} \\
 \frac{1}{L}(\mathbf{F}_{M_1 L, m}^{\text{Col}})^H (\mathbb{D}_{M_1 L})^H \mathbf{x}_{2n}^2 &= \begin{cases} X_{m, 2n}^2 & \text{Si } 2m+1 \notin \mathcal{R}^I \\ 0 & \text{Si } 2m+1 \in \mathcal{R}^I \end{cases} \\
 \frac{1}{L}(\mathbf{F}_{M_1 L, m}^{\text{Col}})^H (\mathbb{D}_{M_1 L})^H \mathbf{x}_{2n+1}^2 &= \begin{cases} X_{m, 2n+1}^2 & \text{Si } 2m+1 \notin \mathcal{R}^I \\ 0 & \text{Si } 2m+1 \in \mathcal{R}^I \end{cases}
 \end{aligned} \tag{B.6}$$

Ainsi en posant :

$$\mathcal{K}^{(0)} = \frac{\mathcal{R}^P}{2} \text{ et } \mathcal{K}^{(1)} = \frac{\mathcal{R}^I - 1}{2} \tag{B.7}$$

Alors l'équation B.6 devient :

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{L}(\mathbf{F}_{M_1 L, m}^{\text{Col}})^H \mathbf{x}_{2n}^1 &= \begin{cases} X_{m, 2n}^1 & \text{Si } 2m \notin \mathcal{R}^P \text{ i.e } m \notin \mathcal{K}^{(0)} \\ 0 & \text{Si } 2m \in \mathcal{R}^P \text{ i.e } m \in \mathcal{K}^{(0)} \end{cases} \\
 \frac{1}{L}(\mathbf{F}_{M_1 L, m}^{\text{Col}})^H \mathbf{x}_{2n+1}^1 &= \begin{cases} X_{m, 2n+1}^1 & \text{Si } 2m \notin \mathcal{R}^P \text{ i.e } m \notin \mathcal{K}^{(0)} \\ 0 & \text{Si } 2m \in \mathcal{R}^P \text{ i.e } m \in \mathcal{K}^{(0)} \end{cases} \\
 \frac{1}{L}(\mathbf{F}_{M_1 L, m}^{\text{Col}})^H (\mathbb{D}_{M_1 L})^H \mathbf{x}_{2n}^2 &= \begin{cases} X_{m, 2n}^2 & \text{Si } 2m+1 \notin \mathcal{R}^I \text{ i.e } m \notin \mathcal{K}^{(1)} \\ 0 & \text{Si } 2m+1 \in \mathcal{R}^I \text{ i.e } m \in \mathcal{K}^{(1)} \end{cases} \\
 \frac{1}{L}(\mathbf{F}_{M_1 L, m}^{\text{Col}})^H (\mathbb{D}_{M_1 L})^H \mathbf{x}_{2n+1}^2 &= \begin{cases} X_{m, 2n+1}^2 & \text{Si } 2m+1 \notin \mathcal{R}^I \text{ i.e } m \notin \mathcal{K}^{(1)} \\ 0 & \text{Si } 2m+1 \in \mathcal{R}^I \text{ i.e } m \in \mathcal{K}^{(1)} \end{cases}
 \end{aligned} \tag{B.8}$$

Ce qui prouve l'équation (5.25) de la sous section 5.3.2 du chapitre 5.

## B.2 Caractérisation des perturbations générées par le signal de correction solution de (5.36)

Dans cette section nous allons d'abord caractériser les perturbations générées par le signal de correction du PAPR sur les porteuses utiles du symbole d'intérêt après réduction du PAPR. De part le principe de démodulation d'un système OFDM, voir la Figure 1.4 du chapitre 1, pour montrer que le signal de correction du PAPR perturbe les porteuses utiles du signal d'intérêt, il suffit de montrer que la DFT de ce signal de correction du PAPR est non nulle sur les porteuses utiles du signal d'intérêt.

Soient  $\mathbf{x}_n^{(k)}$  et  $\mathbf{x}_n^{(k-1)}$  les symboles OFDM après réduction du PAPR à la sortie des  $k$  et  $k-1$ -ième itérations. Sans perte de généralité, nous allons supposer que  $\mathbf{x}_n^{(k)} = \mathbf{x}_n^{(k-1)} + \mathbf{c}_n^{(k)}$ , voire Algorithme 7. En fait, d'après les équations (5.40) et (5.37) il suffit de poser  $\mathbf{c}_n^{(k)} = -\nu \mathbb{A} \nabla \check{\mathbf{c}}_n^{(k-1)}$ . Par principe du procédé d'insertion de la MTR, le symbole de correction du PAPR  $\mathbf{c}_n^{(k)}$  peut

être réécrit comme suit :

$$\begin{aligned}
\mathbf{c}_n^{(k)} &= \left[ \begin{array}{c} \overbrace{\mathbf{c}_n^{1,(k)}} \\ \underbrace{c_{2n,0}^{1,(k)}, \dots, c_{2n,LM_1-1}^{1,(k)}}_{\mathbf{c}_{2n}^{1,(k)}} \quad \underbrace{c_{2n+1,0}^{1,(k)}, \dots, c_{2n+1,LM_1-1}^{1,(k)}}_{\mathbf{c}_{2n+1}^{1,(k)}} \end{array} \right] \\
&+ \left[ \begin{array}{c} \overbrace{\mathbf{c}_n^{2,(k)}} \\ \underbrace{c_{2n,0}^{2,(k)}, \dots, c_{2n,LM_1-1}^{2,(k)}}_{\mathbf{c}_{2n}^{2,(k)}} \quad \underbrace{c_{2n+1,0}^{2,(k)}, \dots, c_{2n+1,LM_1-1}^{2,(k)}}_{\mathbf{c}_{2n+1}^{2,(k)}} \end{array} \right] \\
&= \bar{\mathbf{c}}_n^{1,(k)} + \bar{\mathbf{c}}_n^{2,(k)}
\end{aligned} \tag{B.9}$$

Soient  $\bar{\mathbf{C}}_n^{1,(k)}$  et  $\bar{\mathbf{C}}_n^{2,(k)}$  les vecteurs fréquentiels associés respectivement aux symboles  $\mathbf{c}_n^1$  et  $\mathbf{c}_n^2$ . En utilisant l'équation (B.9), il vient alors que les composantes  $\bar{\mathbf{C}}_n^{1,(k)}$  et  $\bar{\mathbf{C}}_n^{2,(k)}$  peuvent être exprimées comme suit :

$$\begin{aligned}
\bar{\mathbf{C}}_n^{1,(k)} &= \text{DFT}(\mathbf{c}_n^{1,(k)}) & \text{et} & \quad \bar{\mathbf{C}}_n^{2,(k)} = \text{DFT}(\mathbf{c}_n^{2,(k)}) \\
\bar{\mathbf{C}}_n^{1,(k)} &= (\mathbb{F}_M)^{-1} \mathbf{c}_n^{1,(k)} & \text{et} & \quad \bar{\mathbf{C}}_n^{2,(k)} = (\mathbb{F}_{ML})^{-1} \mathbf{c}_n^{2,(k)} \\
\bar{\mathbf{C}}_n^{1,(k)} &= \frac{1}{L} (\mathbb{F}_{ML})^H \mathbf{c}_n^{1,(k)} & \text{et} & \quad \bar{\mathbf{C}}_n^{2,(k)} = \frac{1}{L} (\mathbb{F}_{ML})^H \mathbf{c}_n^{2,(k)} \\
\bar{\mathbf{C}}_n^{1,(k)} &= \frac{1}{L} (\mathbb{F}_{ML})^H \begin{bmatrix} \mathbf{c}_{2n}^{1,(k)} \\ \mathbf{c}_{2n+1}^{1,(k)} \end{bmatrix} & \text{et} & \quad \bar{\mathbf{C}}_n^{2,(k)} = \frac{1}{L} (\mathbb{F}_{ML})^H \begin{bmatrix} \mathbf{c}_{2n}^{2,(k)} \\ \mathbf{c}_{2n+1}^{2,(k)} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{B.10}$$

La division par  $L$  se justifie par le fait  $(\mathbb{F}_{ML})^H \mathbb{F}_{ML} = L\mathbb{I}_M$  avec  $\mathbb{I}_M$  la matrice identité de taille  $(ML, ML)$ . Ce résultat est dû à l'opération de zéro *padding* dans le domaine fréquentiel, qui est généralement suivi d'une multiplication par  $\sqrt{L}$  afin que la puissance moyenne du signal après IDFT soit unitaire, voir la construction de la matrice  $\mathbb{F}_{ML}$  dans la section 2.2 du chapitre 2.

Rappelons que dans cette section, le but est de caractériser les perturbations générées par les composantes  $\bar{\mathbf{c}}_n^{1,(k)}$  et  $\bar{\mathbf{c}}_n^{2,(k)}$  du signal de correction du PAPR  $\mathbf{c}_n^{(k)}$  à la sortie de la  $k$ -ième itération. Pour ce faire, nous allons montrer que la DFT de  $\bar{\mathbf{c}}_n^{1,(k)} + \bar{\mathbf{c}}_n^{2,(k)}$  est non nulle sur les porteuses utiles ( $\notin \mathcal{R}$ ). En particulier, nous allons montrer que la composante  $\bar{\mathbf{c}}_n^{1,(k)}$  (respect.  $\bar{\mathbf{c}}_n^{2,(k)}$ ) ne pollue que les porteuses impaires (respect. paires) du symbole d'intérêt. Cela nous permettra d'une part de définir le schéma de filtrage de telle sorte que les composantes  $\bar{\mathbf{c}}_n^{1,(k)}$  et  $\bar{\mathbf{c}}_n^{2,(k)}$  restent non orthogonales en fréquences après filtrage. Ainsi, ces composantes resteront respectivement toujours non symétrique et non anti-symétrique malgré le filtrage, offrant ainsi à la MTR un degré de liberté par rapport à la TR-GP. En effet, nous allons voir que la MTR génère les composantes  $\bar{\mathbf{c}}_n^{1,(k)}$  et  $\bar{\mathbf{c}}_n^{2,(k)}$  en utilisant pour chacune d'elles toutes les porteuses réservées dans  $\mathcal{R}$  alors que dans le cas de la TR-GP ces composantes sont respectivement générées en utilisant que les porteuses dans  $\mathcal{R}^{(0)}$  et dans  $\mathcal{R}^{(1)}$ , d'où leur orthogonalité en fréquence et donc respectivement leur propriété de symétrie et d'anti-symétrie, voir la reformulation formelle de la méthode TR-GP donnée par (5.28). Plus de discussion sur ce nouveau degré de liberté ont été menées dans la sous section 5.4.2 et la section 5.5.2 du chapitre 5.

Soient  $\bar{\mathbf{C}}_n^{1,(k),P}$  et  $\bar{\mathbf{C}}_n^{1,(k),IP}$  (respect.  $\bar{\mathbf{C}}_n^{2,(k),P}$  et  $\bar{\mathbf{C}}_n^{2,(k),IP}$ ) les vecteurs contenant respectivement les composantes paires et impaires du vecteur fréquentiel  $\bar{\mathbf{C}}_n^{1,(k)}$  (respect.  $\bar{\mathbf{C}}_n^{1,(k)}$ ). Soient  $\mathbb{F}^{1,P}$  (respect.  $\mathbb{F}^{2,P}$ ) la sous matrice de  $(\mathbb{F}_{ML})^H$  ne contenant que ses lignes paires et ses  $\frac{LM}{2}$  premières colonnes (respect. ses  $\frac{LM}{2}$  dernières colonnes). De manière analogue, désignons par  $\mathbb{F}^{1,I}$  (respect.  $\mathbb{F}^{2,I}$ ) la sous matrice de  $(\mathbb{F}_{ML})^H$  contenant ses lignes impaires et ses  $\frac{LM}{2}$  premières colonnes

(respect. ses  $\frac{LM}{2}$  dernières colonnes). Avec ces notations et en utilisant l'équation (B.10), on a :

$$\begin{aligned}
 \bar{\mathbf{C}}^{1,(k),P} &= \frac{1}{L} \left[ (\mathbb{F}^{1,P}) \mathbf{c}_{2n}^{1,(k)} + (\mathbb{F}^{2,P}) \mathbf{c}_{2n+1}^{1,(k)} \right] \\
 \bar{\mathbf{C}}^{1,(k),IP} &= \frac{1}{L} \left[ (\mathbb{F}^{1,I}) \mathbf{c}_{2n}^{1,(k)} + (\mathbb{F}^{2,I}) \mathbf{c}_{2n+1}^{1,(k)} \right] \\
 \bar{\mathbf{C}}^{2,(k),P} &= \frac{1}{L} \left[ (\mathbb{F}^{1,P}) \mathbf{c}_{2n}^{2,(k)} + (\mathbb{F}^{2,P}) \mathbf{c}_{2n+1}^{2,(k)} \right] \\
 \bar{\mathbf{C}}^{2,(k),IP} &= \frac{1}{L} \left[ (\mathbb{F}^{1,I}) \mathbf{c}_{2n}^{2,(k)} + (\mathbb{F}^{2,I}) \mathbf{c}_{2n+1}^{2,(k)} \right]
 \end{aligned} \tag{B.11}$$

Par principe de la MTR, les symboles  $\mathbf{c}_{2n}^{1,(k)}$ ,  $\mathbf{c}_{2n+1}^{1,(k)}$ ,  $\mathbf{c}_{2n}^{2,(k)}$  et  $\mathbf{c}_{2n+1}^{2,(k)}$ , sont définis comme suit :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{c}_{2n}^1 &= \mathbb{F}_{M_1 L, N_{\mathcal{K}(0)}}^{\mathcal{K}(0)} \mathbf{C}_{2n}^1 \quad \text{Et} \quad \mathbf{c}_{2n+1}^1 = \mathbb{F}_{M_1 L, N_{\mathcal{K}(0)}}^{\mathcal{K}(0)} \mathbf{C}_{2n+1}^1 \\
 \mathbf{c}_{2n}^2 &= \mathbb{D}_{M_1 L} \left( \mathbb{F}_{M_1 L, N_{\mathcal{K}(1)}}^{\mathcal{K}(1)} \mathbf{C}_{2n}^2 \right) \quad \text{Et} \quad \mathbf{c}_{2n+1}^2 = -\mathbb{D}_{M_1 L} \left( \mathbb{F}_{M_1 L, N_{\mathcal{K}(1)}}^{\mathcal{K}(1)} \mathbf{C}_{2n+1}^2 \right)
 \end{aligned} \tag{B.12}$$

Avec  $\mathbf{C}_{2n}^1$ ,  $\mathbf{C}_{2n+1}^1$ ,  $\mathbf{C}_{2n}^2$  et  $\mathbf{C}_{2n+1}^2$  des vecteurs fréquentiels de longueurs respectifs  $M_{\mathcal{K}(0)}$ ,  $M_{\mathcal{K}(0)}$ ,  $M_{\mathcal{K}(1)}$  et  $M_{\mathcal{K}(1)}$ . Sans perte de généralité, on peut étendre ces vecteurs en des vecteurs de taille  $ML$  en les complétant par des zéros comme suit :

$$\begin{aligned}
 \tilde{\mathbf{C}}_{2n}^{1,(k)} &= \left[ C_{0,2n}^{1,(k)}, \dots, C_{\frac{M_1}{2}-1,2n}^{1,(k)}, \underbrace{0, \dots, 0}_{(L-1)\frac{M}{2} \text{ zéros}}, C_{\frac{M_1}{2},2n}^{1,(k)}, \dots, C_{M_1-1,2n}^{1,(k)} \right] \\
 \text{avec } \tilde{C}_{m,2n}^{1,(k)} &= \begin{cases} 0 & \text{Si } m \notin \mathcal{K}(0) \\ C_{m,2n}^{1,(k)} & \text{Si } m \in \mathcal{K}(0) \end{cases} \\
 \tilde{\mathbf{C}}_{2n+1}^{1,(k)} &= \left[ C_{0,2n+1}^{1,(k)}, \dots, C_{\frac{M_1}{2}-1,2n+1}^{1,(k)}, \underbrace{0, \dots, 0}_{(L-1)\frac{M}{2} \text{ zéros}}, C_{\frac{M_1}{2},2n+1}^{1,(k)}, \dots, C_{M_1-1,2n+1}^{1,(k)} \right] \\
 \text{avec } \tilde{C}_{m,2n+1}^{1,(k)} &= \begin{cases} 0 & \text{Si } m \notin \mathcal{K}(0) \\ C_{m,2n+1}^{1,(k)} & \text{Si } m \in \mathcal{K}(0) \end{cases} \\
 \tilde{\mathbf{C}}_{2n}^{2,(k)} &= \left[ C_{0,2n}^{2,(k)}, \dots, C_{\frac{M_1}{2}-1,2n}^{2,(k)}, \underbrace{0, \dots, 0}_{(L-1)\frac{M}{2} \text{ zéros}}, C_{\frac{M_1}{2},2n}^{2,(k)}, \dots, C_{M_1-1,2n}^{2,(k)} \right] \\
 \text{avec } \tilde{C}_{m,2n}^{2,(k)} &= \begin{cases} 0 & \text{Si } m \notin \mathcal{K}(1) \\ C_{m,2n}^{2,(k)} & \text{Si } m \in \mathcal{K}(1) \end{cases} \\
 \tilde{\mathbf{C}}_{2n+1}^{2,(k)} &= \left[ C_{0,2n+1}^{2,(k)}, \dots, C_{\frac{M_1}{2}-1,2n+1}^{2,(k)}, \underbrace{0, \dots, 0}_{(L-1)\frac{M}{2} \text{ zéros}}, C_{\frac{M_1}{2},2n+1}^{2,(k)}, \dots, C_{M_1-1,2n+1}^{2,(k)} \right] \\
 \text{avec } \tilde{C}_{m,2n+1}^{2,(k)} &= \begin{cases} 0 & \text{Si } m \notin \mathcal{K}(1) \\ C_{m,2n+1}^{2,(k)} & \text{Si } m \in \mathcal{K}(1) \end{cases}
 \end{aligned} \tag{B.13}$$

On remarque dans l'équation B.13, que les vecteurs fréquentiels  $\mathbf{C}_{2n}^1$ ,  $\mathbf{C}_{2n+1}^1$ ,  $\mathbf{C}_{2n}^2$  et  $\mathbf{C}_{2n+1}^2$  sont complétés par des zéro via un *padding* mais aussi en mettant des zéros sur les porteuses (index

ou position) utiles. Ce travail à pour but de faciliter la démonstration et rien de plus car elle nous permettra de remplacer dans l'équation (B.12) les matrices  $\mathbb{F}_{M_1 L, N_{\mathcal{K}(0)}}^{\mathcal{K}(0)}$  et  $\mathbb{F}_{M_1 L, N_{\mathcal{K}(1)}}^{\mathcal{K}(1)}$  par la matrice  $\mathbb{F}_{M_1 L}$  et donc de pouvoir exploiter plus facilement l'orthogonalité de cette matrice.

En utilisant l'équation (B.13), Il vient alors que l'équation (B.12) peut se réécrire comme suit :

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_{2n}^1 &= \mathbb{F}_{M_1 L} \tilde{\mathbf{C}}_{2n}^1 & \text{Et} & \quad \mathbf{c}_{2n+1}^1 = \mathbb{F}_{M_1 L} \tilde{\mathbf{C}}_{2n+1}^1 \\ \mathbf{c}_{2n}^2 &= \mathbb{D}_{M_1 L} \left( \mathbb{F}_{M_1 L} \tilde{\mathbf{C}}_{2n}^2 \right) & \text{Et} & \quad \mathbf{c}_{2n+1}^2 = -\mathbb{D}_{M_1 L} \left( \mathbb{F}_{M_1 L} \tilde{\mathbf{C}}_{2n+1}^2 \right) \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

En substituant l'équation (B.14) dans l'équation (B.11), on obtient alors :

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{C}}^{1,(k),\text{P}} &= \frac{1}{L} \left[ (\mathbb{F}^{1,\text{P}}) \left( \mathbb{F}_{M_1 L} \tilde{\mathbf{C}}_{2n}^1 \right) + (\mathbb{F}^{2,\text{P}}) \left( \mathbb{F}_{M_1 L} \tilde{\mathbf{C}}_{2n+1}^1 \right) \right] \\ \bar{\mathbf{C}}^{1,(k),\text{IP}} &= \frac{1}{L} \left[ (\mathbb{F}^{1,\text{I}}) \left( \mathbb{F}_{M_1 L} \tilde{\mathbf{C}}_{2n}^1 \right) + (\mathbb{F}^{2,\text{I}}) \left( \mathbb{F}_{M_1 L} \tilde{\mathbf{C}}_{2n+1}^1 \right) \right] \\ \bar{\mathbf{C}}^{2,(k),\text{P}} &= \frac{1}{L} \left[ (\mathbb{F}^{1,\text{P}}) \mathbb{D}_{M_1 L} \left( \mathbb{F}_{M_1 L} \tilde{\mathbf{C}}_{2n}^2 \right) - (\mathbb{F}^{2,\text{P}}) \mathbb{D}_{M_1 L} \left( \mathbb{F}_{M_1 L} \tilde{\mathbf{C}}_{2n+1}^2 \right) \right] \\ \bar{\mathbf{C}}^{2,(k),\text{IP}} &= \frac{1}{L} \left[ (\mathbb{F}^{1,\text{I}}) \mathbb{D}_{M_1 L} \left( \mathbb{F}_{M_1 L} \tilde{\mathbf{C}}_{2n}^2 \right) - (\mathbb{F}^{2,\text{I}}) \mathbb{D}_{M_1 L} \left( \mathbb{F}_{M_1 L} \tilde{\mathbf{C}}_{2n+1}^2 \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

Rappelons que  $M_1 = \frac{M}{2}$ . Dans ce qui suit, pour plus de clarté, nous allons calculer séparément les vecteurs  $\bar{\mathbf{C}}^{1,(k),\text{P}}$ ,  $\bar{\mathbf{C}}^{1,(k),\text{IP}}$ ,  $\bar{\mathbf{C}}^{2,(k),\text{P}}$  et  $\bar{\mathbf{C}}^{2,(k),\text{IP}}$ . Pour ce faire, nous allons d'abord exprimer les matrices  $\mathbb{F}^{1,\text{P}}$ ,  $\mathbb{F}^{2,\text{P}}$ ,  $\mathbb{F}^{1,\text{I}}$  et  $\mathbb{F}^{2,\text{I}}$  en fonction de la matrice  $\mathbb{F}_{M_1 L}$ .

Par définition de la matrice  $\mathbb{F}^{1,\text{P}}$ , sa  $p$ -ième ligne est donnée par l'équation suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_p^{1,\text{P,Lig}} &= \frac{1}{\sqrt{M}} \left[ 1, e^{-j2\pi 2p \frac{1}{LM}}, e^{-j2\pi 2p \frac{1}{LM}}, \dots, e^{-j2\pi 2p \frac{\frac{M}{2}-1}{LM}} \right] \\ &= \frac{1}{L\sqrt{M}} \left[ 1, e^{-j2\pi p \frac{1}{LM_1}}, e^{-j2\pi p \frac{1}{LM_1}}, \dots, e^{-j2\pi p \frac{LM_1-1}{LM_1}} \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \underbrace{\sqrt{\frac{1}{M_1}} \left[ 1, e^{-j2\pi p \frac{1}{LM_1}}, e^{-j2\pi p \frac{1}{LM_1}}, \dots, e^{-j2\pi p \frac{LM_1-1}{LM_1}} \right]}_{\text{conjugué de la } p\text{-ième ligne de la matrice } \mathbb{F}_{M_1 L}} \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

Il vient alors que  $\mathbb{F}^{1,\text{P}} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbb{F}_{M_1 L})^H$ . Concernant la matrice  $\mathbb{F}^{2,\text{P}}$ , sa  $p$ -ième ligne est donnée par :

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_p^{2,\text{P,Lig}} &= \frac{1}{\sqrt{M}} \left[ e^{-j2\pi 2p \frac{L\frac{M}{2}}{LM}}, e^{-j2\pi 2p \frac{1+L\frac{M}{2}}{LM}}, \dots, e^{-j2\pi 2p \frac{L\frac{M}{2}-1+L\frac{M}{2}}{LM}} \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \underbrace{\sqrt{\frac{1}{M_1}} \left[ 1, e^{-j2\pi p \frac{1}{LM_1}}, e^{-j2\pi p \frac{1}{LM_1}}, \dots, e^{-j2\pi p \frac{LM_1-1}{LM_1}} \right]}_{\text{conjugué de la } p\text{-ième ligne de la matrice } \mathbb{F}_{M_1 L}} \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

Et donc on a aussi  $\mathbb{F}^{2,\text{P}} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbb{F}_{M_1 L})^H$ .

Par définition de la matrice  $\mathbb{F}^{1,\text{I}}$ , sa  $p$ -ième ligne est donnée par l'équation suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_p^{1,\text{I,Lig}} &= \frac{1}{\sqrt{M}} \left[ 1, e^{-j2\pi(2p+1) \frac{1}{LM}}, e^{-j2\pi(2p+1) \frac{1}{LM}}, \dots, e^{-j2\pi(2p+1) \frac{L\frac{M}{2}-1}{LM}} \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \underbrace{\sqrt{\frac{1}{M_1}} \left[ 1, e^{-j2\pi p \frac{1}{LM_1}}, e^{-j2\pi p \frac{1}{LM_1}}, \dots, e^{-j2\pi p \frac{LM_1-1}{LM_1}} \right]}_{\text{conjugué de la } p\text{-ième ligne de la matrice } \mathbb{F}_{M_1 L}} (\mathbb{D}_{M_1 L})^H \end{aligned} \quad (\text{B.18})$$

On a alors  $\mathbb{F}^{1,I} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbb{D}_{M_1L}\mathbb{F}_{M_1L})^H$ . Concernant la matrice  $\mathbb{F}^{2,I}$ , sa  $p$ -ième ligne est donnée par :

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_p^{2,I,\text{Lig}} &= \frac{1}{\sqrt{M}} \left[ e^{-j2\pi(2p+1)\frac{L\frac{M}{2}}{LM}}, e^{-j2\pi(2p+1)\frac{1+L\frac{M}{2}}{LM}}, \dots, e^{-j2\pi(2p+1)\frac{L\frac{M}{2}-1+L\frac{M}{2}}{LM}} \right] \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \underbrace{\sqrt{\frac{1}{M_1}} \left[ 1, e^{-j2\pi p\frac{1}{LM_1}}, e^{-j2\pi p\frac{1}{LM_1}}, \dots, e^{-j2\pi p\frac{LM_0-1}{LM_1}} \right]}_{\text{conjugué de la } p\text{-ième ligne de la matrice } \mathbb{F}_{M_1L}} (\mathbb{D}_{LM_1}^H)^H\end{aligned}\tag{B.19}$$

Donc on a  $\mathbb{F}^{2,I} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbb{D}_{M_1L}\mathbb{F}_{M_1L})^H$ .

Le vecteur fréquentiel  $\bar{\mathbf{C}}^{1,(k),P}$  ne contenant que les composantes paires du vecteur  $\bar{\mathbf{C}}^{1,(k)}$  est donné par l'équation suivante :

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{C}}^{1,(k),P} &= \frac{1}{L} \left[ (\mathbb{F}^{1,P}) \left( \mathbb{F}_{M_1L} \tilde{\mathbf{C}}_{2n}^1 \right) + (\mathbb{F}^{2,P}) \left( \mathbb{F}_{M_1L} \tilde{\mathbf{C}}_{2n+1}^1 \right) \right] \\ &= \frac{1}{L} \left[ \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbb{F}_{M_1L})^H \left( \mathbb{F}_{M_1L} \tilde{\mathbf{C}}_{2n}^1 \right) + \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbb{F}_{M_1L})^H \left( \mathbb{F}_{M_1L} \tilde{\mathbf{C}}_{2n+1}^1 \right) \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}L} \left[ \underbrace{\left( (\mathbb{F}_{M_1L})^H \mathbb{F}_{M_1L} \right)}_{\text{Id}_{M_1}} \tilde{\mathbf{C}}_{2n}^1 + ((\mathbb{F}_{M_1L})^H \mathbb{F}_{M_1L}) \tilde{\mathbf{C}}_{2n+1}^1 \right]\end{aligned}\tag{B.20}$$

Avec  $\text{Id}_{M_1}$  la matrice identité de taille  $(LM_1, LM_1)$ , il vient alors que :

$$\bar{\mathbf{C}}^{1,(k),P} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \tilde{\mathbf{C}}_{2n}^1 + \tilde{\mathbf{C}}_{2n+1}^1 \right)\tag{B.21}$$

Puisque le vecteur  $\bar{\mathbf{C}}^{1,(k),P}$  ne contient que les composantes paires du vecteur  $\bar{\mathbf{C}}_n^{1,(k)} = [\bar{C}_{0,n}^{1,(k)}, \dots, \bar{C}_{LM-1,n}^{1,(k)}]^T$ , alors on a :

$$\bar{\mathbf{C}}^{1,(k),P} = \begin{bmatrix} \bar{C}_{0,n}^{1,(k)} \\ \bar{C}_{2,n}^{1,(k)} \\ \vdots \\ \bar{C}_{2p,n}^{1,(k)} \\ \vdots \\ \bar{C}_{M-2,n}^{1,(k)} \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} \tilde{C}_{0,2n}^{1,(k)} + \tilde{C}_{0,2n+1}^{1,(k)} \\ \tilde{C}_{1,2n}^{1,(k)} + \tilde{C}_{1,2n+1}^{1,(k)} \\ \vdots \\ \tilde{C}_{p,2n}^{1,(k)} + \tilde{C}_{p,2n+1}^{1,(k)} \\ \vdots \\ \tilde{C}_{\frac{M}{2}-1,2n}^{1,(k)} + \tilde{C}_{\frac{M}{2}-1,2n+1}^{1,(k)} \end{bmatrix}\tag{B.22}$$

Par construction des vecteurs  $\tilde{\mathbf{C}}_{2n}^{1,(k)}$  et  $\tilde{\mathbf{C}}_{2n+1}^{1,(k)}$ , voir équation (B.13), il en résulte que les composantes paires du vecteur  $\bar{\mathbf{C}}_n^{1,(k)}$  vérifient l'équation suivante :

$$\bar{C}_{2p,n}^{1,(k)} = \sqrt{\frac{1}{2}} \begin{cases} C_{p,2n}^{1,(k)} + C_{p,2n+1}^{1,(k)} & \text{Si } p \in \mathcal{K}^{(0)} \text{ i.e } 2p \in \mathcal{R} \\ 0 & \text{Si } p \notin \mathcal{K}^{(0)} \text{ i.e } 2p \notin \mathcal{R} \end{cases}\tag{B.23}$$

Par conséquent comme nous l'avons souligné en début de section, la composante  $\bar{\mathbf{c}}_n^1$  ne pollue pas les porteuses paires du symbole d'intérêt. Cependant comme nous allons le voir, dans ce qui suit, elle polluera les porteuses impaires du signal d'intérêt du fait qu'elle n'est pas symétrique.

Pour ce faire, nous allons maintenant regarder les composantes impaires du vecteur  $\bar{\mathbf{C}}_n^{1,(k)}$ ,

i.e,  $\bar{\mathbf{C}}^{1,(k),\text{IP}}$ .

$$\begin{aligned}
\bar{\mathbf{C}}^{1,(k),\text{IP}} &= \frac{1}{L} \left[ (\mathbb{F}^{1,\text{I}}) \left( \mathbb{F}_{M_1L} \tilde{\mathbf{C}}_{2n}^1 \right) + (\mathbb{F}^{2,\text{I}}) \left( \mathbb{F}_{M_1L} \tilde{\mathbf{C}}_{2n+1}^1 \right) \right] \\
&= \frac{1}{L} \left[ \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbb{D}_{M_1L} \mathbb{F}_{M_1L})^H \left( \mathbb{F}_{M_1L} \tilde{\mathbf{C}}_{2n}^1 \right) + \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbb{D}_{M_1L} \mathbb{F}_{M_1L})^H \left( \mathbb{F}_{M_1L} \tilde{\mathbf{C}}_{2n+1}^1 \right) \right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}L} \left[ ((\mathbb{F}_{M_1L})^H (\mathbb{D}_{M_1L})^H \mathbb{F}_{M_1L}) \tilde{\mathbf{C}}_{2n}^1 - ((\mathbb{F}_{M_1L})^H (\mathbb{D}_{M_1L})^H \mathbb{F}_{M_1L}) \tilde{\mathbf{C}}_{2n+1}^1 \right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \underbrace{\left[ \frac{1}{L} (\mathbb{F}_{M_1L})^H (\mathbb{D}_{M_1L})^H \mathbb{F}_{M_1L} \right]}_{\mathbf{P}_n^{1,(k)}} \left( \tilde{\mathbf{C}}_{2n}^1 - \tilde{\mathbf{C}}_{2n+1}^1 \right)
\end{aligned} \tag{B.24}$$

Puisque par principe de la MTR les vecteurs fréquentiels  $\tilde{\mathbf{C}}_{2n}^1$  et  $\tilde{\mathbf{C}}_{2n+1}^1$  sont à priori différents ( $\tilde{\mathbf{C}}_{2n}^1 \neq \tilde{\mathbf{C}}_{2n+1}^1$ ) car les fonctions de coût des problèmes d'optimisation 5.33 et 5.34 sont à priori différentes, il vient alors que les composantes du vecteur  $\bar{\mathbf{C}}^{1,(k),\text{IP}}$  sont à priori toutes non nulles, ce qui confirme que la composante  $\bar{\mathbf{c}}_n^{1,(k)}$  pollue les porteuses impaires du symbole d'intérêt.

Puisque le vecteur  $\bar{\mathbf{C}}^{1,(k),\text{IP}}$  ne contient que les composantes impaires du vecteur  $\bar{\mathbf{C}}_n^{1,(k)} = [\bar{C}_{0,n}^{1,(k)}, \dots, \bar{C}_{LM-1,n}^{1,(k)}]$ , on a alors la relation suivante entre  $\bar{\mathbf{C}}^{1,(k),\text{IP}}$ ,  $\bar{\mathbf{C}}_n^{1,(k)}$  et le vecteur  $\mathbf{P}_n^1$  ( voir équation B.24).

$$\begin{aligned}
\underbrace{\begin{bmatrix} \bar{C}_{0,n}^{1,(k),\text{IP}} \\ \vdots \\ \bar{C}_{p,n}^{1,(k),\text{IP}} \\ \bar{C}_{L\frac{M}{2}-1,n}^{1,(k),\text{IP}} \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{C}}_n^{1,(k),\text{IP}}} &= \underbrace{\begin{bmatrix} \bar{C}_{1,n}^{1,(k)} \\ \vdots \\ \bar{C}_{2p+1,n}^{1,(k),\text{IP}} \\ \bar{C}_{LM-1,n}^{1,(k),\text{IP}} \end{bmatrix}}_{\text{Composantes paires de } \bar{\mathbf{C}}_n^{1,(k)}} &= \begin{bmatrix} P_{0,n}^{1,(k)} \\ \vdots \\ P_{p,n}^{1,(k)} \\ P_{L\frac{M}{2}-1,n}^{1,(k)} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{B.25}$$

En combinant les équation (B.23) et (B.25) on obtient que :

$$\bar{c}_{m,n}^{1,(k)} = \sqrt{\frac{1}{2}} \begin{cases} C_{p,2n}^{1,(k)} + C_{p,2n+1}^{1,(k)} & \text{Si } m = 2 * p \text{ et } p \in \mathcal{K}^{(0)} \text{ i.e } 2p \in \mathcal{R} \\ 0 & \text{Si } m = 2 * p \text{ et } p \notin \mathcal{K}^{(0)} \text{ i.e } 2p \notin \mathcal{R} \\ P_{p,n}^{1,(k)} & \text{Si } m = 2p + 1 \end{cases} \tag{B.26}$$

Ce qui prouve que la composante  $\bar{\mathbf{c}}_n^1$  ne pollue que les porteuses impaires utiles et les porteuses impaires réservées pour la réduction du PAPR.

De manière analogue à la démonstration précédente, nous allons maintenant montrer que la composante  $\bar{\mathbf{c}}_n^{2,(k)}$  pollue seulement les composantes paires du signal d'intérêt. Pour ce faire, comme précédemment nous allons évaluer les vecteurs  $\bar{\mathbf{C}}^{2,(k),\text{P}}$  et  $\bar{\mathbf{C}}^{2,(k),\text{IP}}$  qui contiennent respectivement les composantes paires et impaires du vecteur  $\bar{\mathbf{C}}_n^{2,(k)}$ .

$$\begin{aligned}
\bar{\mathbf{C}}^{2,(k),\text{P}} &= \frac{1}{L} \left[ \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbb{F}_{M_1L})^H \mathbb{D}_{M_1L} \left( \mathbb{F}_{M_1L} \tilde{\mathbf{C}}_{2n}^2 \right) - \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbb{F}_{M_1L})^H \mathbb{D}_{M_1L} \left( \mathbb{F}_{M_1L} \tilde{\mathbf{C}}_{2n+1}^2 \right) \right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}L} \underbrace{\left[ (\mathbb{F}_{M_1L})^H \mathbb{D}_{M_1L} \mathbb{F}_{M_1L} \right]}_{\mathbf{P}_n^{2,(k)}} \left( \tilde{\mathbf{C}}_{2n}^2 - \tilde{\mathbf{C}}_{2n+1}^2 \right)
\end{aligned} \tag{B.27}$$

La composante  $\bar{\mathbf{c}}_n^{2,(k)} = [\mathbf{c}_{2n}^2, \mathbf{c}_{2n+1}^2]$  n'étant pas anti-symétrique, alors on a priori  $\bar{\mathbf{C}}_{2n}^{2,(k)} \neq \bar{\mathbf{C}}_{2n+1}^{2,(k)}$ , par conséquent toutes les composantes de  $\mathbf{P}_n^{2,(k)}$  sont à priori non nulles. Ce qui prouve que la composante  $\bar{\mathbf{c}}_n^{2,(k)}$  va perturber les porteuses paires du symbole d'intérêt.



Puisque par construction le vecteur  $\bar{\mathbf{C}}_n^{2,(k),P}$  ne contient que les composantes paires du vecteur  $\bar{\mathbf{C}}_n^{2,(k)}$ , on peut le réécrire comme suit :

$$\bar{\mathbf{C}}_n^{2,(k),P} = \sqrt{\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} \bar{C}_{0,n}^{2,(k),P} \\ \vdots \\ \bar{C}_{2p,n}^{2,(k),P} \\ \bar{C}_{ML-2,n}^{2,(k),P} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{0,n}^{2,(k)} \\ \vdots \\ P_{p,n}^{2,(k)} \\ P_{L\frac{M}{2}-1,n}^{2,(k)} \end{bmatrix} \quad (\text{B.28})$$

Concernant le vecteur  $\bar{\mathbf{C}}_n^{2,(k),IP}$  qui ne contient que les composantes impaires du vecteur  $\bar{\mathbf{C}}_n^{2,(k)}$ , on a :

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{C}}_n^{2,(k),IP} &= \frac{1}{L} \left[ (\mathbb{F}^{1,I}) \mathbb{D}_{M_1L} \left( \mathbb{F}_{M_1L} \tilde{\mathbf{C}}_{2n}^2 \right) - (\mathbb{F}^{2,I}) \mathbb{D}_{M_1L} \left( \mathbb{F}_{M_1L} \tilde{\mathbf{C}}_{2n+1}^2 \right) \right] \\ &= \frac{1}{L} \left[ \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbb{D}_{M_1L} \mathbb{F}_{M_1L})^H \mathbb{D}_{M_1L} \left( \mathbb{F}_{M_1L} \tilde{\mathbf{C}}_{2n}^2 \right) + \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbb{D}_{M_1L} \mathbb{F}_{M_1L})^H \mathbb{D}_{M_1L} \left( \mathbb{F}_{M_1L} \tilde{\mathbf{C}}_{2n+1}^2 \right) \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}L} \left[ (\mathbb{F}_{M_1L})^H \underbrace{(\mathbb{D}_{M_1L})^H \mathbb{D}_{M_1L}}_{\text{Id}_{M_1}} \mathbb{F}_{M_1L} \left( \tilde{\mathbf{C}}_{2n}^2 + \tilde{\mathbf{C}}_{2n+1}^2 \right) \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}L} \left[ (\mathbb{F}_{M_1L})^H \underbrace{(\mathbb{D}_{M_1L})^H \mathbb{D}_{M_1L}}_{\text{Id}_{M_1}} \mathbb{F}_{M_1L} \right] \left( \tilde{\mathbf{C}}_{2n}^2 + \tilde{\mathbf{C}}_{2n+1}^2 \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}L} \left[ \underbrace{(\mathbb{F}_{M_1L})^H \mathbb{F}_{M_1L}}_{\text{Id}_{M_1}} \right] \left( \tilde{\mathbf{C}}_{2n}^2 + \tilde{\mathbf{C}}_{2n+1}^2 \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \tilde{\mathbf{C}}_{2n}^2 + \tilde{\mathbf{C}}_{2n+1}^2 \right) \end{aligned} \quad (\text{B.29})$$

Puis que  $\bar{\mathbf{C}}_n^{2,(k),IP}$  ne contient que les composantes impaires du vecteur  $\bar{\mathbf{C}}_n^{2,(k)}$ , alors par principe de la MTR, i.e., par la construction des vecteurs  $\tilde{\mathbf{C}}_{2n}^2$  et  $\tilde{\mathbf{C}}_{2n+1}^2$  on a :

$$\bar{C}_{2p+1,n}^{1,(k)} = \sqrt{\frac{1}{2}} \begin{cases} C_{p,2n}^{1,(k)} + C_{p,2n+1}^{1,(k)} & \text{Si } p \in \mathcal{K}^{(1)} \text{ i.e } 2p+1 \in \mathcal{R} \\ 0 & \text{Si } p \notin \mathcal{K}^{(1)} \text{ i.e } 2p+1 \notin \mathcal{R} \end{cases} \quad (\text{B.30})$$

En combinant les équations B.28 et B.30 on a :

$$\bar{C}_{m,n}^{1,(k)} = \sqrt{\frac{1}{2}} \begin{cases} C_{p,2n}^{1,(k)} + C_{p,2n+1}^{1,(k)} & \text{Si } m = 2p+1 \text{ et } p \in \mathcal{K}^{(1)} \text{ i.e } 2p+1 \in \mathcal{R} \\ 0 & \text{Si } m = 2p+1 \text{ et } p \notin \mathcal{K}^{(1)} \text{ i.e } 2p+1 \notin \mathcal{R} \\ P_{p,n}^{2,(k)} & \text{Si } m = 2p \end{cases} \quad (\text{B.31})$$

Ce qui montre que la composante  $\bar{c}_n^{2,(k)}$  ne pollue pas les porteuses impaires du signal d'intérêt et aussi les porteuses impaires réservées pour la réduction du PAPR.

Puisque le signal de correction du PAPR  $\mathbf{c}_n^{(k)}$  est la somme des composantes  $\bar{c}_n^{1,(k)}$  et  $\bar{c}_n^{2,(k)}$ , on peut en déduire que la transformée de Fourier de ce signal, i.e,  $\mathbf{C}_n^{(k)}$  vérifie, en vertu des équations (B.26) et (B.31), l'équation suivante :

$$C_{m,n}^{(k)} = \sqrt{\frac{1}{2}} \begin{cases} C_{\frac{m}{2},2n}^{1,(k)} + C_{\frac{m}{2},2n+1}^{1,(k)} + P_{\frac{m}{2},n}^{2,(k)} & \text{Si } m \in \mathcal{R} \text{ Et Paire i.e } \frac{m}{2} \in \mathcal{K}^{(0)} \\ C_{\frac{m-1}{2},2n}^{2,(k)} + C_{\frac{m-1}{2},2n+1}^{2,(k)} + P_{\frac{m-1}{2},n}^{1,(k)} & \text{Si } m \in \mathcal{R} \text{ Et Impaire i.e } \frac{m-1}{2} \in \mathcal{K}^{(1)} \\ P_{\frac{m}{2},n}^{2,(k)} & \text{Si } m \notin \mathcal{R} \text{ Et } m \text{ Paire} \\ P_{\frac{m-1}{2},n}^{1,(k)} & \text{Si } m \notin \mathcal{R} \text{ Et } m \text{ Impaire} \end{cases} \quad (\text{B.32})$$

L'équation (B.32) confirme que les porteuses utiles du symbole  $\mathbf{x}_n^{(k)}$ , i.e celles qui n'appartiennent pas à  $\mathcal{R}$ , seront polluées par le signal de correction du PAPR  $\mathbf{c}_n^{(k)}$ . Comme nous l'avons souligné dans la section précédente, la pollution des porteuses utiles est du au fait que la MTR relâche la contrainte de symétrie et d'anti-symétrie sur respectivement les composantes  $\bar{\mathbf{c}}_n^{1,(k)}$  et  $\bar{\mathbf{c}}_n^{2,(k)}$ . En effet, dans l'équation (B.25) on remarque que si le symbole  $\bar{\mathbf{c}}_n^{1,(k)}$  était symétrique alors  $\mathbf{P}_n^{1,(k)} = \mathbf{0}_{M_1}$ . De même, d'après l'équation (B.28) on remarque que si le symbole  $\bar{\mathbf{c}}_n^{2,(k)}$  était anti-symétrique alors  $\mathbf{P}_n^{1,(k)} = \mathbf{0}_{M_1}$ .

Afin de supprimer les perturbations générées sur les porteuses utiles, nous proposons un filtrage numérique dans le domaine fréquentiel afin d'extraire ces perturbations et ainsi assurer la non dégradation du BER comme dans le cas de la TR classique. Dans la sous section 5.4.2 du chapitre 5, nous avons présenté la structure du schéma de filtrage dans le domaine fréquentiel et avons montré que ce filtre est fait de telle sorte que la composante  $\bar{\mathbf{c}}_n^{1,(k)}$  (respect.  $\bar{\mathbf{c}}_n^{2,(k)}$ ) soit toujours non symétrique (respect. non anti-symétrique). En d'autres termes, ces deux composantes ne seront pas orthogonales en fréquence, c'est à dire comme nous l'avons indiqué en début de sous section, la MTR permet de générer ces deux composantes en utilisant pour chacune d'elles toutes les porteuses de  $\mathcal{R}$  contrairement à la TR-GP. En effet, dans l'équation B.32 on peut déjà voir que ces deux composantes interfèrent entre eux (donc non orthogonales en fréquence). Le schéma de filtrage que nous avons présenté dans la sous section 5.4.2 du chapitre 5 aura comme contrainte de préserver cette non-orthogonalité.

# Bibliographie

- [1] Orthogonal Frequency Division Multiplexing, 3 488 445, US. patent, 1970.
- [2] Digital Audio Broadcasting (DAB) ; DAB to Mobile, Portable and Fixed Receivers, February 1995.
- [3] J. Armstrong. Peak-to-average power reduction for OFDM by repeated clipping and frequency domain filtering. *Electronics Letters*, 38(5) :246–247, Feb 2002.
- [4] Kitaek Bae, J.G. Andrews, and E.J. Powers. Adaptive active constellation extension algorithm for peak-to-average ratio reduction in ofdm. *Communications Letters, IEEE*, 14(1) :39–41, January 2010.
- [5] Kitaek Bae and E.J. Powers. A novel active constellation extension algorithm with low peak power for pilot-aided ofdm systems. In *Acoustics Speech and Signal Processing (ICASSP), 2010 IEEE International Conference on*, pages 3282–3285, March 2010.
- [6] R.W. Bauml, R.F.H. Fischer, and J.B. Huber. Reducing the peak-to-average power ratio of multicarrier modulation by selected mapping. *Electronics Letters*, 32(22) :2056–2057, Oct 1996.
- [7] Marko Beko, Rui Dinis, and Ramo Šendelj. Peak reduction in ofdm using second-order cone programming relaxation. *EURASIP Journal on Advances in Signal Processing*, 2014(1) :1–10, 2014.
- [8] Harold S. Black. Translating system, October 9 1928. US Patent 1,686,792.
- [9] P Boonsrimuang, E Puttawong, H Kobayashi, and T Paungma. Papr reduction using smooth clipping in ofdm system. In *The 3rd information and computer engineering post-graduate workshop*, pages 158–161, 2003.
- [10] W. Bosch and G. Gatti. Measurement and simulation of memory effects in predistortion linearizers. *Microwave Theory and Techniques, IEEE Transactions on*, 37(12) :1885–1890, Dec 1989.
- [11] E. Bouquet, S. Haese, M. Drissi, C. Moullec, and K. Sayegrih. An Innovative and Low Complexity PAPR Reduction Technique for Multicarrier Systems. In *Wireless Technology, 2006. The 9th European Conference on*, pages 162–165, Sept 2006.
- [12] S. Boyd and L. Vandenberghe. Convex Optimisation. Technical report, Stanford University, [WWW.Stanford.edu/boyd](http://WWW.Stanford.edu/boyd), 1998.
- [13] M. Breiling, S.H. Muller-Weinfurtner, and J.B. Huber. SLM peak-power reduction without explicit side information. *Communications Letters, IEEE*, 5(6) :239–241, June 2001.
- [14] S. Bulusu, H. Shaiek, and D. Roviras. Reduction of PAPR of FBMC-OQAM Signals by Dispersive Tone Reservation Technique. In *IEEE International Symposium on Wireless Communication Systems*, pages 1–5, Brussels, Belgium, August 2015.

- [15] J. Bussgang. Crosscorrelation function of amplitude-distorted Gaussian Signals. Tech. rep. 216, Research Laboratory of electronics, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, 1952.
- [16] Youngok Kim Byuong Moo Lee. An adaptive clipping and filtering technique for PAPR reduction of OFDM signals. *Circuit, Systems and Signal Processing*, 32 :1335–1349, 2013.
- [17] Marwa Chaffi, Mamadou Lamarana Diallo, Jacques Palicot, and Faouzi Bader. Adaptive Tone Reservation for better BER Performance in a Frequency Selective Fading Channel. *IEEE 83rd Vehicular Technology Conference : VTC2016-Spring*, May 2016.
- [18] A. Chaker. *Influence de l'amplificateur de puissance sur une chaîne de transmission multiporteuses : Prise en Compte de l'effet mémoire*. PhD thesis, Université Cergy-Pontoise, Juillet 2004.
- [19] H. Chen and A.M. Haimovich. Iterative estimation and cancellation of clipping noise for ofdm signals. *Communications Letters, IEEE*, 7(7) :305–307, July 2003.
- [20] Jung-Chieh Chen. Partial transmit sequences for PAPR reduction of OFDM signals with stochastic optimization techniques. *Consumer Electronics, IEEE Transactions on*, 56(3) :1229–1234, Aug 2010.
- [21] Jung-Chieh Chen and Chih-Peng Li. Tone reservation using near-optimal peak reduction tone set selection algorithm for papr reduction in ofdm systems. *Signal Processing Letters, IEEE*, 17(11) :933–936, Nov 2010.
- [22] N. Chen and G.T. Zhou. Peak-to-average power ratio reduction in OFDM with blind selected pilot tone modulation. In *Acoustics, Speech, and Signal Processing, 2005. Proceedings. (ICASSP '05). IEEE International Conference on*, volume 3, pages iii/845–iii/848 Vol. 3, March 2005.
- [23] N. Chen and G.T. Zhou. Peak-to-average power ratio reduction in OFDM with blind selected pilot tone modulation. *Wireless Communications, IEEE Transactions on*, 5(8) :2210–2216, Aug 2006.
- [24] Yen-Ming Chen, Yeong-Luh Ueng, Jhong-Jheng Su, Jen-Yuan Hsu, and Pangan Ting. A lower-complexity iterative trellis-based factor search algorithm and blind detector for pts-based ofdm systems. In *Information, Communications and Signal Processing (ICICS) 2011 8th International Conference on*, pages 1–5, Dec 2011.
- [25] S. C. Cripps. *RF Power Amplifiers for Wireless Communication*. Artech House, 1999.
- [26] S. C. Cripps. *Advanced Techniques in RF Power Amplifier Design*, artech house edition, Mai 2002.
- [27] Erik Dahlman, Stefan Parkvall, and Johan Skold. *4G : LTE/LTE-advanced for mobile broadband*. Academic press, 2013.
- [28] Lilin Dan, Jin Wang, Xu He, and Shaoqian Li. A phase recovering scheme for blind pts-ofdm receiver over pilot symbols. In *Communications and Mobile Computing (CMC), 2010 International Conference on*, volume 2, pages 408–412, April 2010.
- [29] J.A. Davis and J. Jedwab. Peak-to-mean power control in ofdm, golay complementary sequences and reed-muller codes. In *Information Theory, 1998. Proceedings. 1998 IEEE International Symposium on*, pages 190–, Aug 1998.
- [30] J.A. Davis and J. Jedwab. Peak-to-mean power control in ofdm, golay complementary sequences, and reed-muller codes. *Information Theory, IEEE Transactions on*, 45(7) :2397–2417, Nov 1999.

- [31] Romain Déjardin, Maxime Colas, and Guillaume Gelle. On the iterative mitigation of clipping noise for cofdm transmissions. *European Transactions on Telecommunications*, 19(7) :791–800, November 2008.
- [32] Mamadou Lamanara Diallo and Jacques Palicot. Adaptive clipping for a deterministic PAPR. (*invited paper*) *ICTRS, in Proceedings Of Third ICTRS*, pages 25–33, June 2014, Luxembourg.
- [33] Mamadou Lamanara Diallo, Jacques Palicot, and Faouzi Bader. Achieving a Desired Upper Bounded PAPR Value Using a Fast Adaptive Clipping Algorithm. *International Journal on Advances in Telecommunication, the Eleventh Advanced International Conference on Telecommunication*, Jun, 21-26- Brussels, Belgium 2015.
- [34] Mamadou Lamanara Diallo, Jacques Palicot, and Faouzi Bader. Diminution du facteur de crête d'un signal multiporteuses par décomposition selon deux signaux, symétrique et antisymétrique. *GRETSI*, Septembre 2015.
- [35] Mamadou Lamanara Diallo, Jacques Palicot, and Faouzi Bader. A Step Forward on Adaptive Iterative Clipping Approach for PAPR Reduction in OFDM System. *International Journal on Advances in Telecommunications IARIA*, 2016.
- [36] Mamadou Lamanara Diallo, Jacques Palicot, and Bader Faouzi. Carrier parity distribution influence on papr mitigation using tones reservation method. In *Ultra Modern Telecommunications and Control Systems and Workshops (ICUMT), 2015 7th International Congress on*, pages 40–44, Oct 2015.
- [37] T Doc. R1-060023. *Cubic Metric in 3GPP-LTE*, 2006.
- [38] T Doc. R1-060023. *Cubic Metric in 3GPP-LTE*, 2006.
- [39] Jinfend Du and Sviante Signell. Classic OFDM Systems and Pulse Shaping OFDM/OQAM Systems. Technical report, Electronic, Computer and Software Systems Information and Technology, KTH, Royal Institute of Technology, SE-100 44, Stockholm, Sweden, February 2007.
- [40] C. Lereau et S. Ragusa. Procédé de Transmission d'un signal Modulé avec une Forte Dynamique d'Amplitude, Emetteur Récepteur Correspondant. Technical report, France Télécoms, Avril 2005.
- [41] EN ETSI. 302 304 v1. 1.1 (2004-11) : "Digital Video Broadcasting (DVB) : Transmission System for Handheld Terminals (DVB-H)". *European Telecommunication Standard*, 2004.
- [42] EN ETSI. 302 755 v1. 2.1 (2010-10) "Digital Video Broadcasting (DVB). *Frame Structure Channel Coding and Modulation for a Second Generation Digital Terrestrial Television Broadcasting System (DVB-T2)*, 2010.
- [43] TS ETSI. 136 101 V8. 23.0 (3GPP TS 36.101 V8. 23.0 Release 8).
- [44] TS ETSI. 101 475 V1. 3.1 (2001-12), Broadband Radio Access Networks (BRAN) ; HIPERLAN type 2 ; physical (PHY) layer. 2001.
- [45] TS ETSI. 101 388 V1. 3.1 (2002–05). *Asymmetric Digital Subscriber Line (ADSL)-European specific requirements*, 2002.
- [46] W. Bauml F. Fischer, H. Mauller and B. Huber. OFDM with reduced Peak-to-Average Ratio by multiple signal representation. *Annales des télécommunication*, 52, October 1997.
- [47] S. Falahati, A. Svensson, T. Ekman, and M. Sternad. Adaptive modulation systems for predicted wireless channels. *Communications, IEEE Transactions on*, 52(2) :307–316, Feb 2004.

- [48] H. Boche G. Wunder, R. Fischer and S. Litsyn. The PAPR Problem in OFDM Transmission : New directions for a long-lasting problem. *IEEE Signal Processing Magazine*, pages 130–140, October 2013.
- [49] Alan Gatherer and M. Polley. Controlling clipping probability in DMT transmission. In *Signals, Systems amp; Computers, 1997. Conference Record of the Thirty-First Asilomar Conference on*, volume 1, pages 578–584 vol.1, Nov 1997.
- [50] S. Gazor and R. AliHemmati. Tone reservation for ofdm systems by maximizing signal-to-distortion ratio. *Wireless Communications, IEEE Transactions on*, 11(2) :762–770, February 2012.
- [51] A. Ghorbani and M. Sheikhan. The effect of solid state power amplifiers (sspas) nonlinearities on mpsk and m-qam signal transmission. In *Digital Processing of Signals in Communications, 1991., Sixth International Conference on*, pages 193–197, Sep 1991.
- [52] A.J. Goldsmith and P.P. Varaiya. Capacity of fading channels with channel side information. *Information Theory, IEEE Transactions on*, 43(6) :1986–1992, Nov 1997.
- [53] Matthias Götz, Manuel Rapp, and Klaus Dostert. Power line channel characteristics and their effect on communication system design. *Communications Magazine, IEEE*, 42(4) :78–86, 2004.
- [54] Abbel Gouba. *Approche Conjointe entre la Réduction du Facteur de Crête et de la Linéarisation dans le contexte OFDM*. PhD thesis, SUPELEC, 2013.
- [55] L.J. Greenstein and P. Fitzgerald. Phasing Multitone Signals to Minimize Peak Factors. *Communications, IEEE Transactions on*, 29(7) :1072–1074, Jul 1981.
- [56] D. Guel. *Etudes de nouvelles techniques de réduction de facteur de crête à compatibilité descendante pour les systèmes multiporteuses*. PhD thesis, Université de Rennes 1, Novembre 2009.
- [57] D. Guel, J. Palicot, and Y. Louet. Tone reservation technique based on geometric method for orthogonal frequency division multiplexing peak-to-average power ratio reduction. *Communications, IET*, 4(17) :2065–2073, 2010.
- [58] D. Guel and Jacques Palicot. Analysis and comparison of clipping techniques for ofdm peak-to-average power ratio reduction. In *Digital Signal Processing, 2009 16th International Conference on*, pages 1–6, July 2009.
- [59] D. Guel and Jacques Palicot. FFT/IFFT Pair Based Digital Filtering for the Transformation of Adding Signal PAPR Reduction Techniques in Tone Reservation Techniques. In *Wireless and Mobile Communications, 2009. ICWMC '09. Fifth International Conference on*, pages 200–204, 2009.
- [60] Désiré Guel, Yves Louët, and Jacques Palicot. A geometric method for papr reduction in a signal adding context for ofdm signals. In *Digital Signal Processing, 2007 15th International Conference on*, pages 347–350. IEEE, 2007.
- [61] Désiré Guel and Jacques Palicot. Clipping formulated as an adding signal technique for OFDM Peak Power Reduction. In *Vehicular Technology Conference, 2009. VTC Spring 2009. IEEE 69th*, pages 1–5. IEEE, 2009.
- [62] A. Guy. *Etude, Conception et Réalisation d'un système de linéarisation d'amplificateur de puissance á état solide pour les applications spatiales*. PhD thesis, Université Paul Sabatier, Mai 2000.



- [63] Qingwen Han, Xiaoping Zeng, Lingqiu Zeng, and Tao Wang. Joint papr reduction method base on ace pocs and peak clipping. In *Cyber-Enabled Distributed Computing and Knowledge Discovery (CyberC), 2010 International Conference on*, pages 371–375, Oct 2010.
- [64] A. Hjørungnes and D. Gesbert. Complex-Valued Matrix Differentiation : Techniques and Key Results. *Signal Processing, IEEE Transactions on*, 55(6) :2740–2746, June 2007.
- [65] Xiao Huang, Jianhua Lu, and Junli Zheng. Tradeoffs between ber performance and papr reduction for broadband ofdm transmission with signal processing. In *Wireless Personal Multimedia Communications, 2002. The 5th International Symposium on*, volume 1, pages 154–157 vol.1, Oct 2002.
- [66] Y. Louet et S. Zabre J. Palicot. Traitement numériques des non-linéarités : Un état de l’art de la littérature. Technical report, Contrat Étude Supélec-France Telecom., Février 2005.
- [67] S. Janaaththan, C. Kasparis, and B.G. Evans. A gradient based algorithm for papr reduction of ofdm using tone reservation technique. In *Vehicular Technology Conference, 2008. VTC Spring 2008. IEEE*, pages 2977–2980, May 2008.
- [68] P. Jardin and G. Baudoin. Filter lookup table method for power amplifier linearization. *Vehicular Technology, IEEE Transactions on*, 56(3) :1076–1087, May 2007.
- [69] Lv Jian and Yi Wan. An improved tone reservation method for papr reduction in ofdm systems. In *Mechatronic Sciences, Electric Engineering and Computer (MEC), Proceedings 2013 International Conference on*, pages 3791–3794, Dec 2013.
- [70] Tao Jiang and Yiyan Wu. An overview : Peak-to-average power ratio reduction techniques for ofdm signals. *Broadcasting, IEEE Transactions on*, 54(2) :257–268, June 2008.
- [71] Tao Jiang, Weidong Xiang, P.C. Richardson, Jinhua Guo, and Guangxi Zhu. Ppr reduction of ofdm signals using partial transmit sequences with low computational complexity. *Broadcasting, IEEE Transactions on*, 53(3) :719–724, Sept 2007.
- [72] D.L. Jones. Peak power reduction in OFDM and DMT via active channel modification. In *Signals, Systems, and Computers, 1999. Conference Record of the Thirty-Third Asilomar Conference on*, volume 2, pages 1076–1079 vol.2, Oct 1999.
- [73] P. Kenington. *High Linearity RF Amplifier Design*, artech house edition, October 2000.
- [74] Dukhyun Kim and G.L. Stuber. Clipping noise mitigation for ofdm by decision-aided reconstruction. *Communications Letters, IEEE*, 3(1) :4–6, Jan 1999.
- [75] Ildu Kim and Bumman Kim. A 2.655 ghz 3-stage doherty power amplifier using envelope tracking technique. In *Microwave Symposium Digest (MTT), 2010 IEEE MTT-S International*, pages 1496–1499. IEEE, 2010.
- [76] Jungjoon Kim, Junghwan Moon, Daehyun Kang, Seunghoon Jee, Young Yun Woo, and Bumman Kim. Doherty power amplifier design employing direct input power dividing for base station applications. In *Microwave Conference (EuMC), 2010 European*, pages 866–869. IEEE, 2010.
- [77] S. Kimura, T. Nakamura, M. Saito, and M. Okada. PAR reduction for OFDM signals based on deep Clipping. In *Communications, Control and Signal Processing, 2008. ISCCSP 2008. 3rd International Symposium on*, pages 911–916, 2008.



- [78] B. Koussa, S. Bachir, C. Perrine, C. Duvanaud, and R. Vauzelle. A comparison of several gradient based optimization algorithms for PAPR reduction in OFDM systems. In *Communications, Computing and Control Applications (CCCA), 2012 2nd International Conference on*, pages 1–6, Dec 2012.
- [79] W. Kozek and A.F. Molisch. Nonorthogonal pulseshapes for multicarrier communications in doubly dispersive channels. *Selected Areas in Communications, IEEE Journal on*, 16(8) :1579–1589, Oct 1998.
- [80] B. S. Krongold. *New Techniques for Multicarrier Communication Systems*. PhD thesis, University of Illinois at Urbana-Champaign, December 2001.
- [81] Brian S. Krongold and D.L. Jones. A new tone reservation method for complex-baseband PAR reduction in OFDM systems. In *Acoustics, Speech, and Signal Processing (ICASSP), 2002 IEEE International Conference on*, volume 3, pages III–2321–III–2324, May 2002.
- [82] Brian S. Krongold and D.L. Jones. PAR reduction in OFDM via active constellation extension. In *Acoustics, Speech, and Signal Processing, 2003. Proceedings. (ICASSP '03). 2003 IEEE International Conference on*, volume 4, pages IV–525–8 vol.4, April 2003.
- [83] B.S. Krongold and D.L. Jones. PAR reduction in OFDM via active constellation extension. *Broadcasting, IEEE Transactions on*, 49(3) :258–268, Sept 2003.
- [84] Mounira Laabidi, Rafik Zayani, and Ridha Bouallegue. A new tone reservation scheme for papr reduction in fbmc/oqam systems. In *Wireless Communications and Mobile Computing Conference (IWCMC), 2015 International*, pages 862–867. IEEE, 2015.
- [85] F. Langlet, H. Abdulkader, D. Roviras, A. Maller, and F. Castanie. Adaptive predistortion for solid state power amplifier using multilayer perceptron. In *Global Telecommunications Conference, 2001. GLOBECOM '01. IEEE*, volume 1, pages 325–329 vol.1, 2001.
- [86] F. Launey. *Contribution à la modélisation comportementale des amplificateur de puissance*. PhD thesis, Université de Nante, Septembre 2003.
- [87] E. Lawley and C. J. Kikkert. Peak to Average power ratio reduction of OFDM signals using peak reduction carriers. In *Proc. of ISSPA 99*, pages 737–740, Brisbane, Australia, August 1999.
- [88] Haibo Li, Tao Jiang, and Yang Zhou. An improved tone reservation scheme with fast convergence for papr reduction in ofdm systems. *Broadcasting, IEEE Transactions on*, 57(4) :902–906, Dec 2011.
- [89] Xiaodong Li and L.J. Cimini. Effects of clipping and filtering on the performance of OFDM. In *Vehicular Technology Conference, 1997, IEEE 47th*, volume 3, pages 1634–1638 vol.3, 1997.
- [90] Xiaodong Li and L.J. Cimini. Effects of clipping and filtering on the performance of OFDM. In *IEEE Communication letter*, volume 2, pages 131–133, May 1998.
- [91] Dae-Woon Lim, Seok-Joong Heo, Jong-Seon No, and Habong Chung. A new pts ofdm scheme with low complexity for papr reduction. *Broadcasting, IEEE Transactions on*, 52(1) :77–82, March 2006.
- [92] Dae-Woon Lim, Hyung-Suk Noh, Jong-Seon No, and Dong-Joon Shin. Near optimal prt set selection algorithm for tone reservation in ofdm systems. *Broadcasting, IEEE Transactions on*, 54(3) :454–460, Sept 2008.
- [93] Miguel Sousa Lobo, Lieven Vandenberghe, Stephen Boyd, and Hervé Lebret. Applications of second-order cone programming. *Linear algebra and its applications*, 284(1) :193–228, 1998.

- [94] Y. Louet. *Études et performances des codes de Reed-Muller pour la réduction du facteur de crête dans les modulations OFDM*. PhD thesis, Université Rennes 1, October 2000.
- [95] Y. Louet and S. Hussain. Peak-to-Mean Envelope Power Ratio Statistical Analysis of Continuous OFDM Signal. In *Vehicular Technology Conference, 2008. VTC Spring 2008. IEEE*, pages 1681–1685, 2008.
- [96] Y. Louet and J. Palicot. Power Ratio definitions and analysis in signals carrier modulation. In *in 13th European Signal Processing Conference, EUSIPCO*, volume 63, pages 351–368, Septembre 2005.
- [97] Y. Louet and J. Palicot. A Classification of Methods for Efficient Power Amplification of Signals. *Annals of Telecommunications*, 63 :351–368, 2008.
- [98] I.M. Mahafeno, Y. Louet, and J.-F. Helard. Peak-to-average power ratio reduction using second order cone programming based tone reservation for terrestrial digital video broadcasting systems. *Communications, IET*, 3(7) :1250–1261, July 2009.
- [99] R. Marsalek, P. Jardin, and G. Baudoin. From post-distortion to pre-distortion for power amplifiers linearization. *Communications Letters, IEEE*, 7(7) :308–310, July 2003.
- [100] Abi Hussem Mazen. *Linéarisation des amplificateur de puissance - Prédistorsion numérique adaptative en bande de base*. PhD thesis, École polytechnique de l'université de Nante, 2009.
- [101] D.G. Mestdagh and P.M.P. Spruyt. A method to reduce the probability of clipping in dmt-based transceivers. *Communications, IEEE Transactions on*, 44(10) :1234–1238, Oct 1996.
- [102] Saad El Dine Mohamad. *Linéarisation des amplificateurs de puissance à haut rendement en combinant les techniques de predistorsions numérique et le contrôle de la polarisation*. PhD thesis, Université de Limoge, 2011.
- [103] Mohamad Mroué, Amor Nafkha, and Jacques Palicot. An Innovative Low Complexity PAPR Reduction TR-based Technique for DVB-T2 System. In *International Congress on Ultra Modern Telecommunications and Control Systems and Workshops - ICUMT 2010*, page 6 pages, Moscou, Russia, October 2010.
- [104] S.H. Muller and J.B. Huber. OFDM with reduced peak-to-average power ratio by optimum combination of partial transmit sequences. *Electronics Letters*, 33(5) :368–369, Feb 1997.
- [105] R. V. Nee and R. Prasad. *OFDM for Wireless Multimedia Communications*. Artech House, Inc., 2000.
- [106] H. Ochiai and H. Imai. On the distribution of the peak-to-average power ratio in OFDM signals. *Communications, IEEE Transactions on*, 49(2) :282–289, 2001.
- [107] H Ochiai and H. Imai. Performance analysis of deliberately clipped ofdm signals. *Communications, IEEE Transactions on*, 50(1) :89–101, Jan 2002.
- [108] K.G. Paterson and Vahid Tarokh. On the existence and construction of good codes with low peak-to-average power ratios. In *Information Theory, 2000. Proceedings. IEEE International Symposium on*, pages 217–, 2000.
- [109] Raghavendra S. Prabhu and E. Grayver. Active constellation modification techniques for ofdm par reduction. In *Aerospace conference, 2009 IEEE*, pages 1–8, March 2009.
- [110] Hua Qian, Chunpeng Xiao, N. Chen, and G.T. Zhou. Dynamic selected mapping for ofdm. In *Acoustics, Speech, and Signal Processing, 2005. Proceedings. (ICASSP '05). IEEE International Conference on*, volume 4, pages iv/325–iv/328 Vol. 4, March 2005.

- [111] S. Ragusa, Jacques Palicot, and C. Lereau. Ofdm power ratio reduction using invertible clipping. In *Personal, Indoor and Mobile Radio Communications, 2006 IEEE 17th International Symposium on*, pages 1–5, Sept 2006.
- [112] Salvatore RAGUSA. *Ecrêtage Inversible pour l'Amplification Non-Linéaire des signaux OFDM dans les Terminaux Mobiles*. PhD thesis, UNIVERSITE JOSEPH FOURIER, Juin 2006.
- [113] Christoph Rapp. Effects of hpa-nonlinearity on a 4-dpsk/ofdm-signal for a digital sound broadcasting signal. In *In ESA, Second European Conference on Satellite Communications (ECSC-2) p 179-184 (SEE N92-15210 06-32)*, volume 1, pages 179–184, 1991.
- [114] Guangliang Ren, Hui Zhang, and Yilin Chang. A complementary clipping transform technique for the reduction of peak-to-average power ratio of ofdm system. *Consumer Electronics, IEEE Transactions on*, 49(4) :922–926, Nov 2003.
- [115] W. Rudin. Some theorems on Fourier coefficients. *PAMS*, 10 :855–859, 1959.
- [116] Vincent Savaux. *Contribution à l'estimation de canal multi-trajet dans un contexte de modulation OFDM*. PhD thesis, CentraleSupélec, 2013.
- [117] M. Schroeder. Synthesis of low-peak-factor signals and binary sequences with low autocorrelation (Corresp.). *Information Theory, IEEE Transactions on*, 16(1) :85–89, Jan 1970s.
- [118] H Seidel, HR Beurrier, and AN Friedman. Error-controlled high power linear amplifiers at yhf. *Bell System Technical Journal*, 47(5) :651–722, 1968.
- [119] H. S. Shapiro. *Extremal problems for polynomials and power series*. PhD thesis, M.I.T, 1951.
- [120] K. Shibata, J. Webber, T. Nishimura, T. Ohgane, and Y. Ogawa. Blind detection of partial transmit sequence in a coded ofdm system. In *Global Telecommunications Conference, 2009. GLOBECOM 2009. IEEE*, pages 1–6, Nov 2009.
- [121] C. Siclet. *Application de la théorie des bancs de filtres à l'analyse et à la conception de modulations multiporteuses orthogonales et biorthogonales*. PhD thesis, Rennes 1 University, France, 2002.
- [122] Pierre Siohan, Cyrille Siclet, and Nicolas Lacaille. Analysis and design of ofdm/oqam systems based on filterbank theory. *Signal Processing, IEEE Transactions on*, 50(5) :1170–1183, 2002.
- [123] ALexandre SKRZYPCZAK. *Contribution à l'étude des Modulations multiporteuses OFDM/OQAM et OFDM Suréchantillonnées*. PhD thesis, Université de Rennes 1, Novembre 2007.
- [124] S. Suppittux, S. Tangkachavana, T. Vinichhayakul, and P. Suksompong. Enhancing papr reduction for tone reservation algorithms by deep clipping. In *Electrical Engineering/Electronics Computer Telecommunications and Information Technology (ECTI-CON), 2010 International Conference on*, pages 415–419, May 2010.
- [125] J. Tellado and J.M. Cioffi. Efficient algorithms for reducing PAR in multicarrier systems. In *Information Theory, 1998. Proceedings. 1998 IEEE International Symposium on*, pages 191–, Aug 1998.
- [126] J. Tellado-Mourelo. *Peak to Average Power Reduction for Multicarrier Modulation*. PhD thesis, Standford University, 1999.

- [127] R. Van Nee and A. de Wild. Reducing the peak-to-average power ratio of OFDM. In *Vehicular Technology Conference, 1998. VTC 98. 48th IEEE*, volume 3, pages 2072–2076 vol.3, 1998.
- [128] R.D.J. van Nee. OFDM codes for peak-to-average power reduction and error correction. In *Global Telecommunications Conference, 1996. GLOBECOM '96. 'Communications : The Key to Global Prosperity*, volume 1, pages 740–744 vol.1, Nov 1996.
- [129] James Veilleux, Paul Fortier, and Sebastien Roy. On the performance of a practical ofdm adaptive modulation scheme using a feedback channel. In *Communications, Computers and signal Processing, 2005. PACRIM. 2005 IEEE Pacific Rim Conference on*, pages 502–505. IEEE, 2005.
- [130] B. Vucetic. An adaptive coding scheme for time-varying channels. *Communications, IEEE Transactions on*, 39(5) :653–663, May 1991.
- [131] Chin-Liang Wang and Yuan Ouyang. Low-complexity selected mapping schemes for peak-to-average power ratio reduction in OFDM systems. *Signal Processing, IEEE Transactions on*, 53(12) :4652–4660, Dec 2005.
- [132] Luqing Wang and C. Tellambura. An adaptive-scaling algorithm for ofdm par reduction using active constellation extension. In *Vehicular Technology Conference, 2006. VTC-2006 Fall. 2006 IEEE 64th*, pages 1–5, Sept 2006.
- [133] Luqing Wang and C. Tellambura. Analysis of Clipping Noise and Tone-Reservation Algorithms for Peak Reduction in OFDM Systems. *Vehicular Technology, IEEE Transactions on*, 57(3) :1675–1694, 2008.
- [134] Xianbin Wang, T.T. Tjhung, and C.S. Ng. Reduction of peak-to-average power ratio of ofdm system using a companding technique. *Broadcasting, IEEE Transactions on*, 45(3) :303–307, Sep 1999.
- [135] S. Weinstein and P. Ebert. Data transmission by frequency-division multiplexing using the discrete fourier transform. *Communication Technology, IEEE Transactions on*, 19(5) :628–634, October 1971.
- [136] Haibing Yang, P.F.M. Smulders, and E.R. Fledderus. Comparison of single- and multi-carrier block transmissions under the effect of nonlinear hpa. In *Communications and Vehicular Technology in the Benelux, 2007 14th IEEE Symposium on*, pages 1–7, Nov 2007.
- [137] Seungsoo Yoo, Seokho Yoon, Sun Yong Kim, and Ickho Song. A novel PAPR reduction scheme for OFDM systems : selective mapping of partial tones (SMOPT). *Consumer Electronics, IEEE Transactions on*, 52(1) :40–43, Feb 2006.
- [138] S. Zabre. *Amplification non linéaire d'un multiplex de porteuses modulées à fort facteur de crête*. PhD thesis, Université de Rennes 1, 2007.
- [139] S. Zabre, Jacques Palicot, Y. Louet, and C. Lereau. SOCP Approach for OFDM Peak-to-Average Power Ratio Reduction in the Signal Adding Context. In *Signal Processing and Information Technology, 2006 IEEE International Symposium on*, pages 834–839, 2006.
- [140] Haijian Zhang. *Modulation multiporteuses à base de bancs de filtres (FBMC) pour la Radio Cognitive*. PhD thesis, Conservatoire National des Arts et Metiers, CNAM, Paris, Novembre 2010.





# Résumé

L'OFDM pour *Orthogonal Frequency Division Multiplexing* est la technique de modulation multiporteuses la plus connue et la plus utilisée dans les systèmes de télécommunications. Elle est présente dans plusieurs standards tel que la norme DVB-T2, la norme WLAN, la norme WIMAX et aussi sur la liaison descendante de la norme LTE. Le succès de l'OFDM vient de sa robustesse vis à vis des canaux multi-trajets et de la simplicité de son émetteur et récepteur .

Comme toute modulation multiporteuses, l'OFDM souffre d'une forte variation d'amplitudes qui se traduit par un PAPR élevé. Cette caractéristique de l'OFDM la rend très sensible aux non-linéarités de l'amplificateur de puissance. Pour faire face à cette problématique, on peut surdimensionner l'amplificateur de puissance (solution non efficace en terme de rendement énergétique), linéariser l'amplificateur via les techniques de pré-distorsions, ou réduire le PAPR du signal avant amplification. L'objectif de cette thèse s'inscrit dans cette dernière thématique et plus particulièrement sur les techniques dites d'ajout de signal.

Dans cette thèse, après une étude sur l'état de l'art des techniques de réduction du PAPR et en particulier les techniques dites d'ajout de signal, nous avons développé et proposé de nouvelles techniques de réduction du PAPR. Ces contributions s'articulent principalement autour des techniques de *Clipping* et de la *Tone Reservation*.

**Mots Clés :** OFDM, PAPR, Amplificateur de puissance, *Tone Reservation*, *Clipping*

# Abstract

The Orthogonal Frequency Division Multiplexing (OFDM) is the most commonly used multicarriers modulations scheme in the telecommunication systems. It is used in most communication standards such as DVB-T2, Wireless Local Area Networks (WLAN), WiMAX and the new LTE (Long Term Evolution) standard. The success of the OFDM comes from its robustness in presence of multi-path and frequency selective fading channels, and the simplicity of the implementation of its transmitter and receiver.

One of the main drawbacks of the OFDM modulation scheme is its high Peak-To-Average Power variation (PAPR) which can induce poor power efficiency at the transmitter amplifier. The digital base band pre-distortion for linearisation of power amplifier and the PAPR mitigation are the most commonly used solution in order to deals with efficiency and linearisation at the high power amplifier. This thesis is focused on this last solution, and particularly on the adding signal based techniques. The proposed solutions in this report are about improving the Tone Reservation method which is the most popular adding signal based technique for PAPR mitigation, and also the classical clipping method which is the most simple method (in terms of computational complexity) actually.

**Key Words :** OFDM, PAPR, High Power Amplifier, *Tone Reservation*, *Clipping*