



HAL
open science

Diminution des vibrations et du bruit rayonné d'une paroi par contrôle distribué

Charlie Bricault

► **To cite this version:**

Charlie Bricault. Diminution des vibrations et du bruit rayonné d'une paroi par contrôle distribué. Acoustique [physics.class-ph]. Université du Maine, 2017. Français. NNT: 2017LEMA1009 . tel-01648349

HAL Id: tel-01648349

<https://theses.hal.science/tel-01648349>

Submitted on 25 Nov 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE DE DOCTORAT

Charlie BRICAULT

Mémoire présenté en vue de l'obtention du
grade de Docteur de l'Université du Maine
sous le sceau de L'Université Bretagne Loire

École doctorale : SPIGA

Discipline : 60

Spécialité : Acoustique

Unité de recherche : Laboratoire d'Acoustique de l'Université du Maine — UMR CNRS 6613

Soutenue le 14 juin 2017

Thèse N° : 99697

DIMINUTION DES VIBRATIONS ET DU BRUIT RAYONNÉ D'UNE PAROI PAR CONTRÔLE DISTRIBUÉ

JURY

- Rapporteurs : **Jean-François DEÛ**, Professeur, LMSSC, CNAM Paris
Olivier THOMAS, Professeur, LSIS - INSM, ENSAM Lille
- Examineurs : **Émeline SADOULET-REBOUL**, Maître de Conférence, Institut Femto-ST Besançon
Thomas WEISSER, Maître de Conférence, Laboratoire MIPS Mulhouse
- Invité : **Pascal AUDRAIN**, Docteur, IRT Jules Verne Bouguenais
Vicente ROMERO-GARCÍA, Chargé de Recherche CNRS, LAUM Le Mans
- Directeur de thèse : **Charles PÉZERAT**, Professeur, LAUM Le Mans
- Co-directeur de thèse : **Manuel COLLET**, Directeur de Recherche CNRS, LTDS Écully

Remerciements

Je remercie tout d'abord M. Charles PÉZERAT, Professeur des Universités et Directeur de recherche au Laboratoire d'Acoustique de l'Université du Maine (LAUM), et M. Manuel COLLET, Directeur de recherche au Centre National de la Recherche Scientifique (CNRS) et au Laboratoire de Tribologie et Dynamique des Systèmes (LTDS), qui sont à l'initiative de ce sujet ; Charles étant le directeur et Manuel le Co-directeur de cette thèse. Ils ont consacré beaucoup de temps au suivi de mes recherches, ainsi que dans l'établissement de ce document. Ils ont su répondre à toutes mes questions et cela toujours dans la bonne humeur. Je leur suis donc très reconnaissant de m'avoir fait confiance et de m'avoir soutenu durant ces trois ans en me faisant part de leurs connaissances.

Cette thèse n'aurait pu exister sans l'Institut de Recherche Technologique Jules Verne qui m'a proposé ce contrat et a financé mes travaux. Je remercie donc toutes les personnes qui ont permis le bon déroulement de ces trois ans à l'IRT Jules Verne d'un point de vue administratif, informatique, ressource humaine, équipements, ... etc (je ne peux pas tout citer).

Je tiens aussi à remercier l'IRT Jules Verne d'avoir proposé un cursus de formation particulier qui m'a permis de développer et de faire évoluer des compétences professionnelles, mais aussi personnelles. Je pense notamment à Mme Nathalie SCHOUMACHER, Directrice des Ressources Humaine, et Valérie DONAL, Directrice adjointe du Département de l'Étude et de la Recherche, d'avoir mis en place les formations « COMPETENCIA » et « GRAINE D'INNOVATION ». Merci à M. Serge MASSEROT, Dirigeant du cabinet COMPETENCIA, et les différents intervenants pour leurs précieux conseils.

De même, cette thèse n'aurait pu avoir lieu sans le Laboratoire d'Acoustique de l'Université du Maine (LAUM) et de ses directeurs Joël GILBERT et Laurent SIMON. Je remercie donc d'une manière générale le LAUM pour m'avoir donné l'opportunité de suivre cette thèse dans les meilleures conditions qui soit.

Un grand merci à l'École Nationale Supérieure d'Ingénieurs du Mans (ENSIM) où j'ai été domicilié pendant ces trois ans de thèse. Merci donc à toutes les personnes de cette école m'ayant aidé à rendre encore plus agréable mon quotidien.

Je remercie aussi tout particulièrement Pascal AUDRAIN, Responsable et Représentant IRT Jules Verne au sein de l'équipe du site secondaire du Mans, de m'avoir fait profiter de son expérience et de m'avoir apporté ses précieux conseils ; et je n'oublie pas non plus de remercier Bertrand LASCOUP, Ingénieur de Recherche à l'IRT J.V. pour sa joie et sa bonne humeur au travail, et pour ses conseils pratiques, professionnels ou pas.

Un grand remerciement à Vicente ROMERO GARCIA, chercheur CNRS au LAUM, pour son aide précieuse notamment dans les périodes les plus compliquées de la thèse.

Merci aussi à Sami KARKAR, Adrien PYSKIR et Patrick PERRARD travaillant au LTDS de m'avoir supporté pendant mes séjours à Lyon et de m'avoir beaucoup aidé dans les manipes.

Cette thèse n'aurait pas pu être ce qu'elle a été sans mes deux collègues de bureau Thibault WASSEREAU et Olfa CHAOUCH. Que dire,... ? Merci pour tout !

Merci aussi à tout mes autres collègues doctorants pour tout ces moments passés ensemble à discuter scientifiques ou non : Corentin CHESNAIS, Maxime LAFOND, Julien POITTEVIN, Margaux REGNIEZ, Charly FAURE, Omar AKLOUCHE, Vivien DENIS, Justine CARPENTIER, Océane GROSSET, Sylvain AMAILLANT, Antoine STERNBERGER, Thibaut DEVAUX, Côme OLIVIER, Cédric FAURE, Florian ALLEIN, Rodrigue BOUETE, Paul BOTTOIS et Jean Michel ATTENDU.

Merci à Marion pour son soutien moral, ses nombreuses relectures et sa patience.

À ma famille, à ma femme et à ma fille Aubane.

Je remercie donc toutes ces personnes pour l'attention qu'elles ont portée à mon égard durant ces trois ans de thèse qui a pu se dérouler dans les conditions souhaitées.

Table des matières

Nomenclature	I
Introduction	1
Contexte et Problématique	1
Objectifs et Stratégie	2
Démarche et organisation du mémoire de thèse	4
1 Notions générales : transduction piézoélectrique, métamatériaux et comportement vibroacoustique de structures planes	5
1.1 Transduction piézoélectrique, shunt et couplage électromécanique	5
1.1.1 Transduction piézoélectrique	6
1.1.2 Principaux types de shunt	9
1.2 Introduction aux métamatériaux	12
1.2.1 Structures monodimensionnelles	13
1.2.2 Structures bidimensionnelles	31
1.2.3 Métamatériaux piézoélectriques	37
1.3 Phénomènes vibroacoustiques	39
1.3.1 Rayonnement acoustique et transparence de plaques infinies	40
1.3.2 Conséquences sur les plaques finies	45
1.4 Bilan : choix du type de shunt et stratégie de contrôle	52
2 Étude du shunt à capacité négative	55
2.1 Synthèse d'une capacité négative	56
2.1.1 Synthèse analogique	56
2.1.2 Synthèse numérique	59
2.2 Influence d'un shunt à capacité négative sur le comportement vibroacoustique d'une plaque : simulation et expérimentation	62
2.2.1 Système étudié	62
2.2.2 Simulation numérique	63
2.2.3 Étude expérimentale	71
2.3 Optimisation du contrôle vibroacoustique	76
2.4 Bilan : influence d'un patch shunté sur le comportement vibratoire d'une plaque finie	80

3	Modélisation d'un réseau périodique de patches shuntés sur une plaque mince	83
3.1	Description du système	84
3.2	Modèle analytique équivalent d'une cellule périodisée	84
3.2.1	Formulation analytique	85
3.2.2	Étude du modèle équivalent	86
3.3	Modèles numériques de la cellule périodisée	91
3.3.1	Modèle pour le calcul de la capacité négative « optimale »	91
3.3.2	Modèles pour le calcul des courbes de dispersion, implémentation du théorème de Bloch	94
3.4	Bilan : une méthodologie pour calculer les courbes de dispersions	99
4	Maîtrise des comportements vibroacoustiques d'une plaque munie d'un réseau de patches shuntés avec capacités négatives	103
4.1	Étude de la cellule élémentaire, calculs des courbes de dispersion	103
4.1.1	Influence de la capacité négative C_{neg}	103
4.1.2	Influence de la résistance R	105
4.1.3	Influence des dimensions de la cellule	106
4.2	Étude de la diminution des vibrations sur plaques finies	107
4.3	Étude de la diminution du rayonnement sur plaque finie	110
4.4	Étude de l'augmentation de l'isolation de paroi infinie	120
4.4.1	Stratégie	121
4.4.2	Modèles numérique et analytique	122
4.4.3	Résultats	124
4.5	Bilan : l'influence d'un réseau de patches shuntés par une capacité négative sur le contrôle vibroacoustique d'une paroi	128
	Conclusion Générale	133
	Résumé des travaux	133
	Contributions	135
	Perspectives	135
A	Calcul de l'impédance équivalente Z_{eq} du circuit analogique de la figure 2.4	139
B	Schémas des circuits électroniques de la carte numérique de la figure 2.6	141
	Bibliographie	153

Nomenclature

Alphabet latin

Variable	Description	Unité
A_i	Surface, section	m^2
c	Célérité du son dans l'air	$m.s^{-2}$
C	Capacité électrique	C
C_{eq}	Capacité électrique équivalente de la carte de synthèse analogique	F
C_{neg}	Capacité négative	F
C_p^s	Capacité électrique à déformée nulle	F
C_p^t	Capacité électrique à contrainte nulle	F
C_2	Capacité électrique de la carte de synthèse analogique	F
$d_{i\alpha}$	Tenseur des constantes piézoélectriques	$C.N^{-1}$
D	Rigidité de flexion	$N.m^2$
D_a	Force exercée par l'absorbeur dynamique	N
D_{eq}	Rigidité de flexion équivalente du modèle équivalent	$N.m^2$
D_i	Déplacement électrique	$V.cm^2$
e^T	Tenseur des coefficients de couplage piézoélectrique	-
E	Module d'Young	Pa
E_i	Champ électrique	V
E_p	Module d'Young équivalent du patch piézoélectrique	Pa
f_c	Fréquence critique	Hz
f_{coin}	Fréquence de coïncidence	Hz
f_0	Fréquence propre de l'absorbeur dynamique	Hz
f_b	Fréquence de Bragg	Hz
f_b	Fréquence de résonance d'un shunt résonant	Hz
F	Force, force injectée	N
$F_{g,d}$	Vecteur des efforts	-
h	Épaisseur de la plaque	m
h_p	Épaisseur du patch piézoélectrique	m
i	Courant électrique	A
I	Moment quadratique	m^4

Variable	Description	Unité
k, k_a	Le nombre d'ondes acoustiques	rad.m ⁻¹
k_{eff}	Coefficient de couplage effectif ou généralisé	-
k_{eq}	Nombre d'ondes équivalent du modèle équivalent	-
k_f	Nombre d'ondes de flexion	rad.m ⁻¹
k_{ij}	Coefficient de couplage	-
k_x, k_y, k_z	Projection du nombre d'ondes acoustiques sur la base de l'espace (x,y,z)	rad.m ⁻¹
K	Raideur du ressort d'un absorbeur dynamique	N.m ⁻¹
K_0	Facteur de conversion	-
l, L	Côté, longueur d'une cellule unitaire d'un milieu périodique	m
l_p	Côté du patch piézoélectrique	m
L	Inductance électrique	H
m	Masse surfacique de la plaque	kg.m ⁻²
m_{eq}	Masse surfacique équivalente du modèle équivalent	kg.m ⁻²
$M_{g,d}$	Moment fléchissant	N.m
M	Masse d'un absorbeur dynamique	kg
p	Pression acoustique	-
p_{inc}, p_{tr}	Pression acoustique incidente et transmise	Pa
$q_{g,d}$	Vecteur des déplacements	-
R	Résistance électrique	Ohm
R_a	Indice d'affaiblissement en champ d'onde plane	-
R_d	Indice d'affaiblissement en champ d'onde diffus	-
R_e	Résistance électrique équivalente de la carte de synthèse analogique	Ohm
R_{opt}	Résistance « optimale »	Ohm
R_{pot}	Résistance électrique du potentiomètre	Ohm
$R_{pot,max}$	Résistance électrique maximale du potentiomètre	Ohm
R_1	Résistance électrique d'entrée de la carte de synthèse analogique	Ohm
R_2	Résistance électrique de la carte de synthèse analogique	Ohm
$s_{\alpha\beta}$	Tenseur d'élasticité du matériau piézoélectrique	m ² .N ⁻¹
S	Surface, section	m ²
S_α	Déformations	-
S_p	Surface du patch dans la direction x_3	m ²
T	Matrice de transfert	-
T_β	Contraintes	Pa
$T_{g,d}$	Effort tranchant	m
u	Vecteur des déplacements	m
v	Vitesse de déplacement transverse de la plaque	m.s ⁻¹
V^+, V^-	Tension aux bornes positives et négatives de l'amplificateur opérationnel	V
V_s	Tension en sortie de l'amplificateur opérationnel	V

Variable	Description	Unité
$w, W_{g,d}$	Déplacement transverse de la plaque	m
W	Transformée de Fourier Spatiale du déplacement transverse de la plaque	m
\mathcal{W}_a	Puissance acoustique rayonnée	Watt
$\mathcal{W}_{inc}, \mathcal{W}_{tr}$	Puissance acoustique incidente et transmise	Watt
\mathcal{W}_m	Puissance mécanique injectée	Watt
Y_{sh}	Admittance électrique de shunt	Ohm ⁻¹
Z, Z_{sh}	Impédance électrique de shunt	Ohm

Alphabet grec

Variable	Description	Unité
α	Facteur de taux de recouvrement de l'élément périodique sur la structure	-
α_{amp}	Gain de l'amplificateur	-
γ	Masse adimensionnée	-
γ_{sc}	Gain de la source de courant	-
ε	Tenseur des contraintes de Green	Pa
ε_{ij}	Tenseur de permittivité électrique	F.m ⁻¹
θ, φ	Angles radial et azimutal	rad
Θ	Angle de flexion	m
λ	Longueur d'ondes acoustiques	m
λ_c	Longueur d'ondes à la fréquence critique f_c	m
λ_i	Valeurs propres	-
Λ	Matrice contenant les valeurs propres de la matrice de transfert T	-
μ_i	Constante de propagation	-
ν	Coefficient de Poisson de la plaque	-
ν_p	Coefficient de Poisson équivalent du patch piézoélectrique	-
ξ	Terme de dissipation	-
Ξ	Terme de dissipation adimensionnée	-
Π	Puissance acoustique rayonnée	Watt
ρ	Masse volumique de la plaque	kg.m ⁻³
ρ_0	Masse volumique de l'air	kg.m ⁻³
σ	Tenseur des contraintes	-
σ, σ_{ray}	Facteur de rayonnement	-
$\sigma_{\mathcal{W}}$	Facteur de puissance	-
τ	Facteur de transmission acoustique	-
ϕ	Angle de calcul des constantes de propagation pour un milieu périodique	-
$\phi_{m,n}$	Déformée modale	-
Φ	Transformée de Fourier Spatiale de la déformée modale	-

Variable	Description	Unité
Ψ	Matrice des vecteurs propres de la matrice de transfert T	-
ω	Pulsation	rad.s ⁻¹
$\omega_{oc,i}$	Pulsation propres des modes en circuit ouvert	rad.s ⁻¹
$\omega_{sc,i}$	Pulsation propres des modes en circuit fermé	rad.s ⁻¹
Ω	Pulsation adimensionnée	-
Ω_b	Pulsation de Bragg adimensionnée	-
$\Omega_0, \Omega_{0,b}$	Pulsation propre de l'absorbeur dynamique adimensionnée	-

Introduction

Contexte et Problématique

Durant ces dernières années, l'utilisation de matériaux composites a connu une croissance importante du fait de leurs intérêts grandissant dans diverses domaines d'applications. Grâce à l'amélioration des processus de fabrication et des techniques de production, le marché industriel qui gravite autour du composite n'a cessé de s'étendre.

Ces nouveaux matériaux présentent des atouts de propriétés physiques et chimiques qui offrent de nombreux avantages par rapport à des matières plus classiques : légèreté, rigidité, résistance mécanique, résistance au feu, facilité de mise en forme permettant la conception de structures complexes. Aussi, elles peuvent parfois être une solution économique.

Les matériaux composites suscitent donc un grand intérêt dans plusieurs marchés industriels tels que le sport (tennis, tir à l'arc, sport d'hiver, surf, cyclisme, kayak, ...), le bâtiment, l'automobile, l'aéronautique, le naval et encore dans bien d'autres applications divers comme par exemple la fabrication de coques de téléphones mobiles, de lunettes de soleil ou de vue, de casques de protection en tout genres (moto, ski, vélo,...).

De plus, il existe de nombreuses techniques de fabrication de structures en matériaux composite qui offrent aux industriels un éventail de possibilité d'amélioration de leur produit tant sur les performances, sur le design et sur la rapidité de conception.

Or, les propriétés physiques de ces matériaux plus légers, mais aussi plus rigides, impliquent de nouvelles problématiques vibratoires et acoustiques.

Parmi les différents acteurs du marché du composite, l'Institut de Recherche Technologique Jules Verne (IRT Jules Verne) est à l'initiative de ce sujet de thèse en étroite collaboration avec le Laboratoire d'Acoustique de l'Université du Maine (LAUM). Cet IRT, situé sur le Technocampus EMC² à Bouguenais (44), est un centre de recherche qui regroupe de nombreux acteurs industriels et académiques. Il a pour ambition de devenir une référence mondiale dans le domaine des Technologies Avancées de Production. Afin de répondre aux besoins industriels dans les domaines de l'aéronautique, de la construction navale, du transport terrestre et de l'énergie, l'IRT oriente ses recherches technologiques autour de trois grands axes :

- la conception et l'intégration de structures complexes en matériaux composites, métalliques ou encore hybrides ;
- le développement des procédés innovants de fabrication de ces structures ;
- la conception et le développement de l'usine du futur.

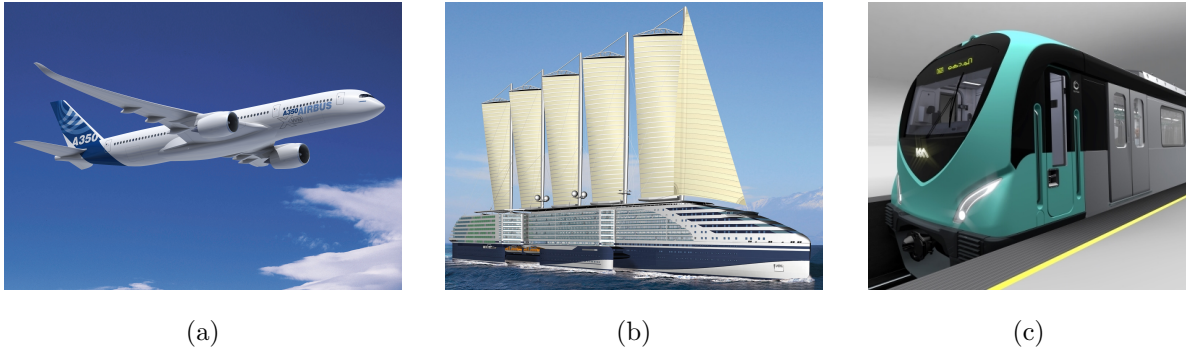


FIG 1 – (a) Airbus A350XWB, avion qui intègre une grande quantité de matière composite. (b) EOSEAS, paquebot de croisière du futur vue selon STX, concept du programme de R & D ECORIZON. (c) Alstom, Projet ULTIMAT (2007) permettant une réduction de masse de plus de 20 % sur des caisses de train de la gamme métropolis.

Un des défis technologiques de cet IRT est d’alléger les structures afin de réaliser des économies d’énergie dans les différents domaines d’application en particulier dans le domaine du transport (figure 1).

C’est dans ce contexte que s’inscrit la chaire VIBROLEG « Vibration des structures légères », projet sur 5 ans, qui est porté par le Laboratoire d’Acoustique de L’Université du Maine (LAUM) et qui regroupe les partenaires industriels Airbus, General Electric, Bureau Veritas, Daher, DCNS research, Cetim et STX.

Les deux grandes thématiques de recherche de VIBROLEG sont :

- le développement de méthodes de diagnostic : mesure de champ vibratoire sans contact [1, 2], caractérisation des matériaux par problème inverse [3,4], caractérisation des sources aéroacoustiques sur structures légères [5, 6] ;
- le développement de dispositifs innovants de réduction des vibrations et du bruit : utilisation de trous noirs acoustiques pour réduire les vibrations [7, 8], contrôle vibroacoustique de paroi à l’aide de réseaux de capteurs actionneurs intégrés, utilisation de matériaux granulaires légers dans les structures tubulaires [9].

Cette thèse tente de répondre à la seconde thématique et à la problématique suivante : comment diminuer les vibrations et le rayonnement acoustique des structures légères en minimisant la masse ajoutée aux structures ? Pour répondre à cette problématique, l’un des choix de la chaire VIBROLEG est l’utilisation de capteurs actionneurs légers et intégrés dans les parois à traiter.

Objectifs et Stratégies

De nombreuses recherches sont portées sur l’utilisation de la transduction électromécanique, permettant de convertir de l’énergie mécanique en énergie électrique (ou inversement), dans le contrôle passif [10–21], semi-passif [10, 22–45] ou actif [28, 46–50] de structure. Cette conversion énergétique ouvre un large éventail de possibilités d’applications et suscite un grand intérêt dans la fabrication de **smart structures** (structures intelligentes en français). Une structure intelligente est un système capable de capter une information et d’agir en conséquent de manière « ingénieuse ». Il existe plusieurs catégories

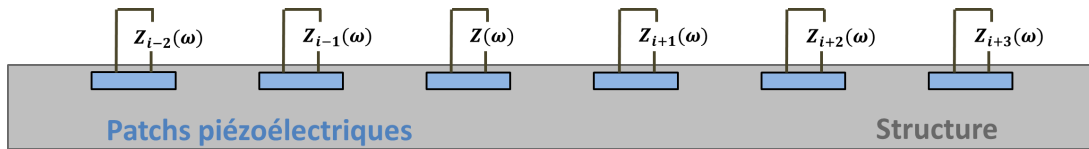


FIG 2 – Représentation schématique du système proposé

de matériaux fonctionnels comme les matériaux piézoélectriques, électrostrictifs, magnétostrictifs ou encore les matériaux à alliage à mémoire de forme [51].

Dans le domaine des vibrations, les transducteurs électromécaniques les plus communément utilisés sont les transducteurs piézoélectriques qui présentent de nombreux avantages :

- peu couteux ;
- légers, ils n'augmentent donc pas significativement la masse de la paroi ;
- facile d'implémentation ;
- le contrôle de leur déformation peut se faire simplement via un système électrique qui applique une loi de comportement fonction de la fréquence, autrement dit une impédance $Z(\omega)$, aux bornes des patches piézoélectriques.

Un autre domaine de plus en plus exploité dans la mécanique vibratoire et acoustique est le domaine des métamatériaux définis comme des matériaux à « bandes interdites ». Parmi ces métamatériaux existent les structures périodiques qui sont communément appelés cristaux phononiques dans le domaine de la mécanique acoustique et vibratoire. Une structure est dite périodique lorsqu'elle présente une géométrie ou des propriétés mécaniques qui se répètent dans l'espace, leur procurant ainsi des propriétés physiques particulières qui sont très pertinentes dans la diminution des vibrations [52–62]. En effet, le caractère périodique de ces structures crée des zones fréquentielles appelées **bandes interdites de Bragg** (ou **Bragg band gap** en anglais) pour lesquelles les ondes ne se propagent plus ou du moins sont fortement amorties. En dehors de ces zones, le comportement vibratoire est aussi modifié.

Les travaux de cette thèse tentent de coupler à la fois les phénomènes physiques liés à la transduction piézo-électromécanique et aux métamatériaux pour répondre à la problématique. La méthode proposée est d'utiliser un réseau périodique de patches piézoélectriques shuntés par un circuit électrique dont on peut contrôler l'impédance. Le but principal de cette méthode est de modifier le nombre d'ondes de flexion d'une structure homogène afin de :

- créer une bande interdite basse fréquence sur une large bande fréquentielle pour diminuer les vibrations ;
- augmenter la fréquence critique dans le cas d'une diminution du rayonnement acoustique de paroi et augmenter la fréquence de coïncidence pour augmenter le facteur de perte par transmission acoustique dans le cas d'un problème de transmission aérienne.

Un schéma du système proposé est présenté par la figure 2.

En terme d'applications, il est possible d'imaginer, par exemple, le traitement du bruit de machinerie dans les cabines de bateaux (problème de transmission vibratoire) ou de l'isolation entre cabines (problème d'isolation acoustique) ; ou encore réaliser des capotages légers isolants.

Démarche et organisation du mémoire de thèse

Cette problématique amène, dans un premier temps à étudier les phénomènes métamatériaux pour s'imprégner des outils proposés dans l'étude de la propagation des ondes dans ces milieux périodiques (Théorie de Floquet-Bloch, diagramme de bandes, ...), mais aussi à étudier les phénomènes de couplage électromécanique de patchs piézoélectriques shuntés.

Le chapitre 1 donne alors quelques notions générales sur les thèmes de la transduction piézoélectrique, des métamatériaux et de la vibroacoustique. Nous constatons dans ce chapitre qu'il s'avère intéressant d'utiliser le shunt à capacité négative, qui semble être la méthode de shunt la plus performante, pour répondre à la problématique.

Le chapitre 2 se focalise, dans un premier temps, sur la création d'une capacité négative. Les procédés de synthèse analogique et numérique de celle-ci y sont en particuliers décrits. Puis, dans un second temps, une étude de l'influence de ce type de shunt sur le comportement vibroacoustique d'une plaque munie d'un seul patch piézoélectrique est présentée. Cette étude permet de mieux comprendre le couplage électromécanique avec un système simple et de mieux saisir l'intérêt du shunt à capacité négative. On tente alors de montrer la possibilité de changer significativement le comportement dynamique d'une structure en comparant des études théoriques, réalisées par calculs numériques, et des mesures expérimentales.

Le chapitre 3 est consacré à la modélisation analytique et numérique du couplage électromécanique. Différents modèles sont développés.

Le premier modèle est analytique. Il permet de déterminer un ordre de grandeur des valeurs que doit prendre la capacité négative pour avoir un effet significatif sur le système. Ce modèle ouvre la possibilité de calculer différents paramètres qui sont utiles au conditionnement du système (dimensions de la cellule et des patchs piézoélectriques, type de patchs). Il permet, par conséquent, un préconditionnement du modèle numérique.

Le second modèle est numérique. Il sert à déterminer approximativement les valeurs de capacité négative à implémenter, par la suite, dans le calcul des courbes de dispersion. Deux nouveaux modèles utilisant deux approches différentes pour le calculs de ces courbes sont utilisés ; le premier étant basé sur la méthode classique de Floquet et le second étant basé sur la méthode Shifted-Cell Operator.

Le chapitre 4 présente l'étude paramétrique du système proposé à partir des différents modèles développés dans le chapitre 3. Des calculs de courbes de dispersion, de champ vibratoire et de champ acoustique rayonné sont donc réalisés ici . L'optimisation du système pour répondre au mieux à la problématique du sujet est alors proposée. Un paragraphe est consacré à l'étude de l'augmentation de l'indice d'affaiblissement acoustique de paroi.

Chapitre 1

Notions générales : transduction piézoélectrique, métamatériaux et comportement vibroacoustique de structures planes

Ce chapitre introduit les travaux menés dans cette thèse en donnant quelques notions générales dans les différents domaines de la physique utilisés par la suite : la transduction piézoélectrique, la propagation des ondes dans les milieux périodiques, aussi appelés métamatériaux, et le couplage vibroacoustique de structure plane.

L'introduction de la transduction piézoélectrique permet de mieux comprendre le couplage électrodynamique qui existe entre une structure et un patch piézoélectrique positionné sur celle-ci. On pourra alors mieux saisir l'intérêt des méthodes de contrôle dynamique utilisant ce type de transduction et notamment des méthodes de shunts. Ensuite, nous discuterons des phénomènes liés à la propagation des ondes mécaniques dans les milieux périodiques pour s'approprier quelques éléments clés dans l'étude de ces milieux. Cette partie permet alors d'aider à la compréhension des outils utilisés par la suite. Pour finir, une dernière partie donne des explications sur le couplage vibroacoustique en vue, d'une part, de présenter les indicateurs qui seront utilisés ensuite pour quantifier les différents effets vibroacoustiques et, d'autre part, de cerner la stratégie adoptée.

1.1 Transduction piézoélectrique, shunt et couplage électromécanique

Les propriétés de transduction électro-mécanique des patches piézoélectriques sont depuis longtemps utilisées dans les domaines de l'acoustique et de la mécanique pour fabriquer des capteurs et des actionneurs. En effet, la capacité à transformer l'énergie électrique en énergie mécanique (actionneur), ou inversement à transformer l'énergie mécanique en énergie électrique (capteur), devient très vite

intéressante dans de nombreuses applications scientifiques pour générer ou capter des ondes mécaniques. Dans notre cas, des patchs piézoélectriques sont utilisés pour modifier le comportement dynamique d'une structure mécanique afin de traiter des problèmes de transmissions solidiennes et de transmissions aériennes (rayonnement acoustique) des ondes vibratoires de la structure. Le système proposé pour répondre à cette problématique, et ce, sans ajout significatif de masse à la structure, est un réseau périodique de patchs piézoélectriques **shuntés**. Ce dernier terme signifie que les bornes du patch sont reliées entre elles par un circuit électrique d'impédance, que nous noterons par la suite, $Z_{sh}(\omega)$. Ce procédé permet de modifier le comportement dynamique du système couplé au travers du contrôle de l'impédance $Z_{sh}(\omega)$. Le système est ainsi colocalisé permettant sa stabilité et sa robustesse. Une représentation schématique du système est donnée en figure 2 page 3.

Les méthodes de contrôle du comportement dynamique des structures utilisant des patchs piézoélectriques peuvent être classées en trois groupes :

- Les méthodes **actives** [28, 46–50] qui consistent à appliquer un retour d'information (feedback en anglais) sur des transducteurs actionneurs à partir de signaux mesurés par un ou plusieurs capteurs. Dans ce cas, il est dit que l'on forme une boucle de rétro contrôle. Ces méthodes nécessitent un apport d'énergie électrique et peuvent être complexes à mettre en œuvre : mesure, traitement des données et contrôle doivent être réalisés en un temps quasi-instantané.
- Les méthodes **semi-actives** ou **semi-passives** [10, 22–45] consistent à dissiper de l'énergie avec un système qui consomme une faible énergie électrique. Par exemple, certaines méthodes nécessitent l'alimentation d'amplificateurs opérationnels pour pouvoir synthétiser de manière analogique un composant électronique. Ces méthodes se diffèrent des méthodes actives car elles n'utilisent pas de boucle de rétro contrôle et ne fournissent pas d'énergie au système. Les références [22–24] donnent des exemples de synthèses d'inductances à partir de ce type de procédé. Parmi ces méthodes, on trouve aussi le shunt à capacité négative, ou encore les méthodes de contrôle comme celles appelées « Synchronized Switch Damping » (SSD) [32–45]. Ces dernières sont basées sur la variation de la rigidité de la structure par action du patch piézoélectrique et par implémentation d'un interrupteur qui bascule en position fermé/ouvert » de manière synchronisée avec les vibrations. La faible consommation d'énergie est induite par la commande de cet interrupteur « Switch ».
- Les méthodes **passives** [10–21] qui n'utilisent aucun apport d'énergie externe au système. Dans cette famille, on trouve les méthodes de shunt classiques composées de composants électroniques R,L,C.

Dans la littérature, plusieurs types de circuit « shunt » sont proposés pour modifier le comportement dynamique d'une structure et plus précisément pour amortir les ondes vibratoires de celle-ci. Ces circuits sont décrits ci-après.

1.1.1 Transduction piézoélectrique

La transduction piézoélectrique est définie par un transfert d'une énergie électrique en énergie mécanique, ou inversement, d'une énergie mécanique en énergie électrique.

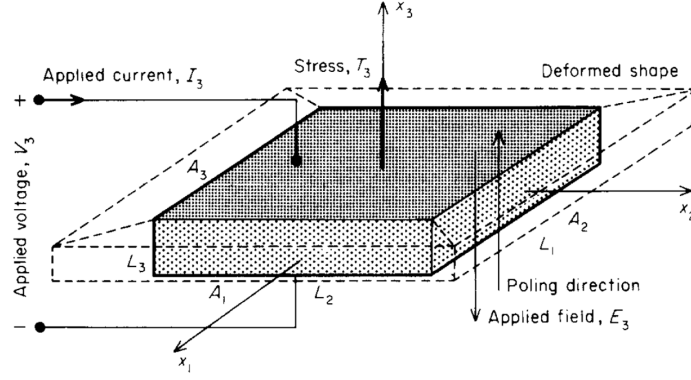


FIG 1.1 – Représentation schématique d'un patch piézoélectrique polarisé dans la direction x_3 sur le schéma. L_i définit les distances entre deux surfaces A_i , $i = 1, 2, 3$ étant l'indice de direction donnée par les vecteurs x_i . Figure empruntée à [13].

« La piézoélectricité est un phénomène que présentent certains cristaux qui acquièrent une polarisation électrique dans leur masse et des charges électriques à leur surface quand ils sont soumis à des contraintes mécaniques (effet direct) et qui se déforment sous l'action de forces internes quand ils sont soumis à un champ électrique (effet inverse). » (Larousse, Piézoélectricité, 2014)

Considérons le schéma d'un matériau piézoélectrique de la figure 1.1. Sur ce schéma, L_i définit les distances entre deux surfaces A_i , $i = 1, 2, 3$ étant l'indice de direction qui est indiquée par les vecteurs x_i . La polarisation de ce patch, tel qu'il est présenté, est dans la direction x_3 (épaisseur du patch). Cette direction est utilisée par convention. Les équations de couplage piézoélectrique [13, 45, 50, 63] font intervenir des grandeurs électriques : le champ électrique E et le déplacement électrique D , et des grandeurs mécaniques : les contraintes notées T et les déformations notées S . Le couplage piézoélectrique se met sous la forme de deux équations [63] :

$$S_\alpha = s_{\alpha\beta}^E T_\beta + d_{i\alpha} E_i, \quad (1.1)$$

$$D_i = \varepsilon_{ij}^T E_j + d_{i\alpha} T_\alpha, \quad (1.2)$$

où $s_{\alpha\beta}^E$ est le tenseur d'élasticité du matériau piézoélectrique à champ électrique E nul, $d_{i\alpha}$ le tenseur des constantes piézoélectriques et ε_{ij}^T le tenseur de la permittivité électrique à contrainte T constante. E , D , T et S s'écrivent :

$$D = \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} S_{11} \\ S_{22} \\ S_{33} \\ 2S_{23} \\ 2S_{13} \\ 2S_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} T_{11} \\ T_{22} \\ T_{33} \\ T_{23} \\ T_{13} \\ T_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \end{bmatrix}. \quad (1.3)$$

Dans le cas d'une polarisation selon l'axe x_3 et pour un matériau considéré isotrope dans les deux autres directions x_1 et x_2 , les grandeurs ε^T , s^E et d s'écrivent :

$$\varepsilon^T = \begin{bmatrix} \varepsilon_1^T & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2^T & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3^T \end{bmatrix}, \quad s^E = \begin{bmatrix} s_{11}^E & s_{12}^E & s_{13}^E & 0 & 0 & 0 \\ s_{12}^E & s_{11}^E & s_{13}^E & 0 & 0 & 0 \\ s_{13}^E & s_{13}^E & s_{33}^E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_{44}^E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s_{44}^E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s_{66}^E \end{bmatrix}, \quad d = \begin{bmatrix} 0 & 0 & d_{13} \\ 0 & 0 & d_{13} \\ 0 & 0 & d_{33} \\ 0 & d_{15} & 0 \\ d_{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (1.4)$$

Les relations de couplage 1.1 et 1.2 peuvent se mettre sous une autre forme qui permet d'exprimer le lien entre les courants I_i , les tensions V_i , les contraintes T_β et les déformées S_α dans le domaine fréquentiel à partir des relations ci-dessous :

$$V_i = - \int_0^{L_i} E_i dx_i, \quad (1.5)$$

$$\frac{I_i}{j\omega} = - \int_{A_i} D_i da_i. \quad (1.6)$$

En utilisant les relations 1.5 et 1.6 pour exprimer D_i et E_i dans les relations 1.1 et 1.2, et en considérant les hypothèses classiques du champ électrique E constant selon x et y (axe x_1 et x_2 sur la figure 1.1) et de variation linéaire sur l'axe z (axe x_3 sur la figure 1.1) on obtient alors :

$$I_i = \frac{j\omega A_i \varepsilon_{ij}^T}{L_i} V_i + j\omega A_i d_{i\alpha} T_\alpha, \quad (1.7)$$

$$S_\alpha = d_{i\alpha} V_i + s_{\alpha\beta} T_\beta. \quad (1.8)$$

Dans la relation 1.7 apparaît un terme de compliance qui définit la capacité inhérente du transducteur, c'est à dire la capacité à contrainte T constante, que l'on note C_p^t :

$$C_p^t = \frac{\varepsilon_{ij}^T A_i}{L_i}. \quad (1.9)$$

On peut aussi définir C_p^s qui est la capacité électrique du transducteur à déformée nulle. Les capacités C_p^s et C_p^t sont liées par la relation suivante :

$$C_p^s = C_p^t \left(1 - \frac{d_{ij}^2}{s_{jj}^E \varepsilon_{ii}^T}\right) = C_p^t (1 - k_{ij}^2), \quad (1.10)$$

où k_{ij} sont les coefficients de couplage piézoélectrique qui définissent l'efficacité de la conversion de l'énergie mécanique en énergie électrique, et inversement :

$$k_{ij} = \frac{d_{ij}}{\sqrt{s_{jj}^E \varepsilon_{ii}^T}}; \quad (1.11)$$

k_{15} , k_{31} et k_{33} sont respectivement les coefficients de couplage définis en cisaillement, en flexion et en traction/compression. Par la suite, pour simplifier les expressions étant donné que nous nous intéresserons qu'aux mouvements de flexion, on définira C_p^t par :

$$C_p^t = \frac{\varepsilon_{33}^T S_p}{h_p}. \quad (1.12)$$

avec S_p la surface normale à x_3 et h_p l'épaisseur du transducteur dans la direction x_3 .

Les références bibliographiques [13, 50, 63] donnent des informations plus complètes sur la transduction piézoélectrique. On y trouve une classification des différents types de matériaux piézoélectriques, des explications sur le mécanisme de la piézoélectricité et sur les phénomènes de polarisation ionique. Les équations y sont aussi plus détaillées.

1.1.2 Principaux types de shunt

L'atténuation des ondes vibratoires dans une structure (plaque, poutre) par contrôle passif ou semi-passif via la transduction piézoélectrique suscite depuis plusieurs années un intérêt certain [10, 22–31]. Plusieurs types de shunt ont été développés selon le but recherché.

Cette partie donne une liste des principaux shunts étudiés afin de mieux comprendre leur influence sur le comportement dynamique de la structure. Une classification détaillée des différentes méthodes de shunt est réalisée dans [64].

1.1.2.1 Le shunt résistif : R

Le circuit branchés aux bornes du patch piézoélectrique est simplement constitué d'une résistance R . Cette résistance a pour effet de dissiper de l'énergie sous forme de chaleur par effet Joule et se comporte, par analogie électromécanique, comme un amortisseur visqueux. Ce type de shunt permet d'augmenter le facteur de perte énergétique, notamment en haute fréquence. Cette méthode est robuste, en revanche ses performances sont très vite limitées car l'atténuation optimale de la résistance dépend du coefficient de couplage et de la capacité inhérente C_p^t de la cellule piézoélectrique [13].

1.1.2.2 Le shunt résonant : RL

Le circuit électrique est constitué d'une résistance R et d'une inductance L . Cette méthode est utilisée dans le but d'atténuer l'amplitude des vibrations qui sont liées à un seul mode de la structure traitée. L'ajout d'une inductance permet d'obtenir un circuit électrique résonant car le comportement d'un patch piézoélectrique peut être assimilé à celui d'une capacité. Par analogie électromécanique, L joue alors le rôle de la masse mécanique et C_p^s joue le rôle du ressort équivalent. La fréquence de résonance du patch shunté est [13, 25, 65, 66] :

$$f_r = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{LC_p^s}}. \quad (1.13)$$

Cette fréquence est la fréquence de résonance du patch shunté non couplé à une structure puisque les termes de masse et de raideur de la structure ne sont pas considérées. La relation 3.23, qui est donnée plus

loin dans ce document, permet de prendre en considération ce couplage et d'approximer analytiquement la valeur de la fréquence shuntée. L peut donc être accordé de manière à atténuer les vibrations de la fréquence de résonance mécanique que l'on veut traiter, réalisant ainsi un « tuned mass damper ». La résistance R permet d'optimiser le niveau d'atténuation de la fréquence ciblée. Deux configurations du circuit électrique sont possibles, soit les deux composants R et L sont mis en série, soit ils sont mis en parallèle. Les deux types de circuit « série - parallèle » (figure 1.2) sont aussi efficaces l'un que l'autre pour amortir une résonance, simplement c'est la valeur de la résistance R qui varie très fortement selon le cas choisi. Ceci est très bien illustré dans [24].



FIG 1.2 – Exemples de « shunt résonant » (single mode shunt circuits) : (a) un circuit $R - L$ en série et (b) un circuit $R - L$ en parallèle. Figures empruntées à [10].

Le principal inconvénient de cette méthode est la valeur importante que doit prendre L pour diminuer les vibrations en basse fréquence qui implique la fabrication de bobine d'inductance de grande taille et donc de masse non négligeable.

1.1.2.3 Le shunt multimodale

Dans le même principe que le « shunt résonant », le « shunt multimodale » peut être utilisé pour atténuer plusieurs modes de vibration d'une structure avec un seul patch piézoélectrique. Les premiers travaux réalisés avec ce type de shunt ont été proposés par Shu-Yau Wu dans [20] montrant la possibilité de diminuer les amplitudes vibratoires des premiers modes résonants d'une poutre à partir de cette méthode. Trois exemples de ce type de circuit électrique sont présentés en figure 1.3. Bien sûr, il existe d'autres configurations possibles, mais le principe reste toujours le même.

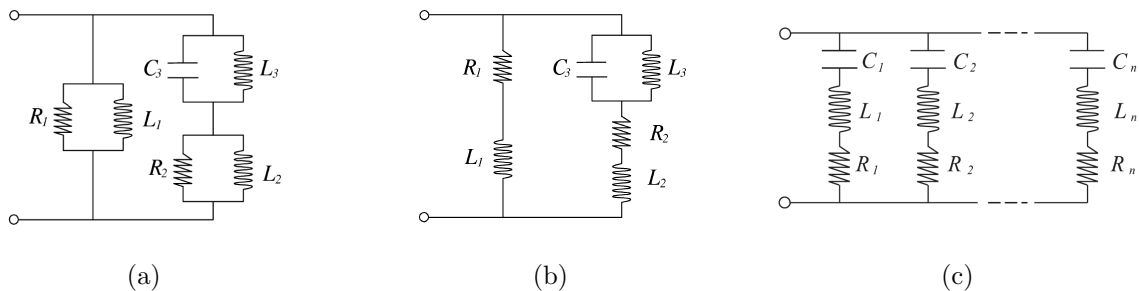


FIG 1.3 – Exemples de « multiple mode shunt circuits » : (a) cas d'un circuit en parallèle, (b) et (c) cas d'un circuit en série. Figures empruntées à [10] et [17] .

Le circuit électrique qui compose le shunt est constitué de plusieurs branches électriques connectées

entre elles en parallèle, utilisant les trois composants R , L et C . Ainsi, chacune des branches a pour rôle d'atténuer une seule fréquence, elle agit donc comme un court-circuit à la fréquence à laquelle elle est accordée et agit comme un circuit-ouvert à toutes les autres fréquences (« current blocking »). Par exemple, dans le cas présenté par la figure 1.3 c, chaque branche est composée de deux parties. La première est appelée « Current Flowing Branche » et est simplement constituée dans ce cas d'un condensateur ; elle joue le rôle d'interrupteur et ne laisse passer le courant qu'à la fréquence pour laquelle elle est paramétrée. La seconde partie appelée « Shunting Branche » est composée d'une résistance et d'une bobine qui joue le rôle d'un shunt résonant comme expliqué dans le §1.1.2.2 précédent.

1.1.2.4 Les shunts à commutation « Synchronized Switch Damping » (SSD)

Les méthodes SSD [32–45] sont classées dans les méthodes non linéaires semi-passives de contrôle dynamique. Elles consistent à connecter un patch piézoélectrique à un circuit qui peut être résistif (SSDS) ou résonant (SSDI) et qui est doté d'un interrupteur (« switch ») dont l'ouverture et la fermeture sont synchronisées sur les variations d'amplitude vibratoire. L'interrupteur est fermé pendant un temps très court sur les extremums du déplacement créant un court-circuit du patch piézoélectrique et annule ainsi la tension à ses bornes. Lorsque le l'interrupteur s'ouvre, la tension aux bornes du patch redevient proportionnel au déplacement. Cette alternance d'ouverture et de fermeture de l'interrupteur permet d'extraire de l'énergie mécanique au système en ayant pour effet de dissiper l'énergie potentielle issue de la conversion de l'énergie mécanique, induite par les contraintes, sous forme d'énergie électrique par effet piézoélectrique. Il existe d'autres types de méthodes SSD comme la méthode SSDV (Synchronized Switching Damping on Voltage source) ou SSDH (Synchronized Switching Damping and Harvesting). La première utilise des générateurs de tension catégorisant alors ce type de procédé dans les méthodes actives puisqu'il consomme de l'énergie électrique pour l'alimentation des générateurs. L'implémentation de ces générateurs augmente la tension aux bornes du patch piézoélectrique et permet alors d'accroître l'amortissement [37, 39]. Kaixiang Li parle même de méthode « SSD Energy Transfert » basée sur la méthode SSDV. Dans ce cas, la source de tension est réalisée par la conversion de l'énergie mécanique vibratoire d'une première structure en énergie électrique qui va permettre de contrôler une seconde structure [40]. La second méthode (SSDH) vise à récupérer l'énergie fournie par les modes non contrôlés pour l'utiliser ensuite dans le contrôle des modes ciblés [43].

Des exemples de schéma de shunt SSD sont présentés par en figure 1.4.

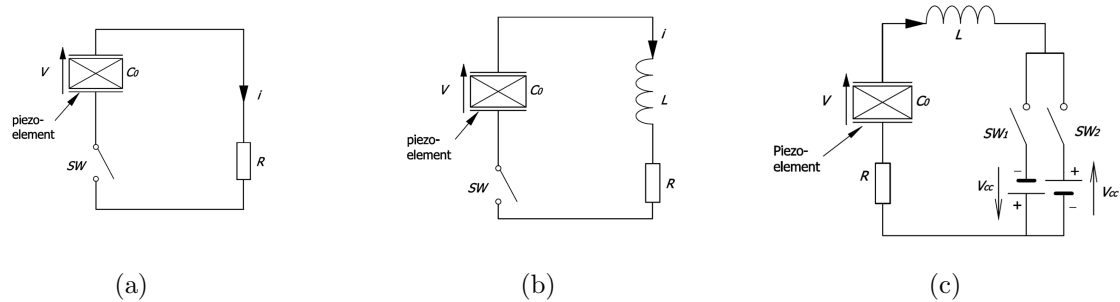


FIG 1.4 – Exemples de shunts commutatifs « Synchronized Switch Damping »(SSD) : (a) SSDS, (b) SSDI et (c) SSDV. Figures empruntées à [44].

1.1.2.5 Le shunt à capacité négative

Une compliance négative n'existe pas en tant que telle mais peut être synthétisée soit de manière analogique [10, 31, 67] à partir de systèmes électriques complexes, soit de manière numérique [68], la carte électronique est alors constituée d'un étage analogique et d'un étage numérique, ce dernier permettant de simuler le comportement d'une capacité négative (voir le § 2.1). Le shunt à capacité négative est le plus souvent représenté par une capacité négative $-C$ et une résistance R (figure 1.5). La capacité $-C$ du shunt permet d'agir directement sur la rigidité du patch en modifiant l'impédance capacitif globale du système « patch + shunt » [10, 67, 69]. En effet, elle vient s'ajouter à l'effet de la capacité inhérente C_p^s du patch et permet de modifier l'impédance équivalente de ce dernier. La résistance, elle, permet de stabiliser le système et d'optimiser l'amortissement des ondes vibratoires lorsque le patch piézoélectrique shunté par une capacité négative est couplé à une structure [31, 67]. Sam Behrens a par exemple discuté des premiers travaux sur la diminution des vibrations de plusieurs modes avec un seul patch piézoélectrique en utilisant ce type de shunt [70].

Une seconde approche est proposée dans [71, 72]. Les auteurs montrent que la capacité négative permet d'augmenter le facteur de couplage électromécanique par rapport au shunt résistif composé seulement d'une résistance. Ils étudient différentes configurations de circuit de synthèse analogique de capacité négative pour améliorer le couplage entre la structure, le patch piézoélectrique et le shunt afin d'accroître la transduction électromécanique, et ainsi augmenter significativement l'effet de dissipation d'énergie réalisée par la résistance.

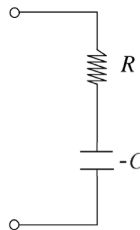


FIG 1.5 – Exemple de shunt à capacité négative.

1.2 Introduction aux métamatériaux

De nombreuses études portant sur la propagation des ondes mécaniques dans les milieux périodiques, appelés cristaux phononiques (PCs), ont été réalisées par le passé [52, 53, 62, 73, 74]. Ces milieux présentent une alternance périodique de leurs propriétés géométriques ou élastiques créant ainsi des bandes fréquentielles pour lesquelles l'énergie se propage et d'autres pour lesquelles l'énergie ne se propage pas. L'absence de propagation d'ondes dans ces plages fréquentielles est appelée « bandes interdites » ou « band gap » en anglais. Dans ces bandes interdites, les ondes sont atténuées de manière exponentielle et sont appelées ondes évanescentes. Il est possible de décrire ces zones de propagation et d'atténuation des ondes en étudiant seulement un élément unitaire (aussi appelé cellule), élément qui se répète périodiquement dans le système.

Afin de mieux comprendre le comportement dynamique et la propagation des ondes dans les milieux périodiques, cette partie décline une série d'exemples simples et académiques afin d'aider à la compréhension des phénomènes mis en jeu. Les références bibliographiques [52, 53, 75–80], expliquent précisément ces phénomènes.

1.2.1 Structures monodimensionnelles

1.2.1.1 Éléments théoriques

Théorème de Floquet Les éléments théoriques donnés ci-dessous sont principalement extraits de la thèse de Guillaume Gosse [81].

Considérons une structure périodique infinie comme présentée par la figure 1.6. Dans le cas d'une propagation 1D, par exemple la propagation d'ondes planes dans une poutre, le théorème de Floquet permet de relier les déplacements et les efforts de part et d'autre d'un élément unitaire par la relation mathématique suivante :

$$e^{-\mu} \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_g \\ \mathbf{F}_g \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_d \\ -\mathbf{F}_d \end{Bmatrix}, \quad (1.14)$$

où \mathbf{q}_g , \mathbf{q}_d , \mathbf{F}_g , \mathbf{F}_d sont respectivement les déplacements et les efforts à gauche et à droite de l'élément unitaire et μ est la constante de propagation d'une onde se propageant dans une structure périodique infinie (figure 1.6) qui est directement liée au nombre d'ondes. Les courbes représentatives de la partie réelle et de la partie imaginaire de la constante de propagation μ permettent d'observer les zones de propagation et d'atténuation définies précédemment (représentation en diagramme de bande); la partie imaginaire de μ étant représentative de la propagation des ondes (appelée « phase constant » en anglais) et la partie réelle de μ étant représentative de l'atténuation des ondes (appelée « atténuation constant » en anglais). Pour calculer les constantes de propagation, il est nécessaire de modéliser la structure périodique. Différentes approches existent et sont largement référencées dans la littérature [77, 78, 82], ces méthodes permettent toutes d'obtenir la matrice de transfert qui relie les déplacements et les efforts à gauche d'un élément aux déplacements et aux efforts à droite de l'élément.

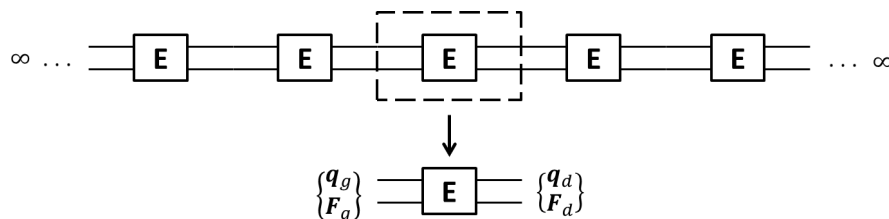


FIG 1.6 – Représentation schématique d'un élément unitaire d'une structure périodique selon le théorème de Floquet; \mathbf{q}_g , \mathbf{q}_d , \mathbf{F}_g , \mathbf{F}_d sont respectivement les déplacements et les efforts à gauche et à droite de l'élément unitaire E.

Matrice de transfert et constantes de propagation La matrice de transfert \mathbf{T} exprime les déplacements et les efforts aux points de couplage à droite de l'élément unitaire en fonction des déplacements et des efforts aux points de couplage à gauche :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T}_{qq} & \mathbf{T}_{qF} \\ \mathbf{T}_{Fq} & \mathbf{T}_{FF} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_g \\ \mathbf{F}_g \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_d \\ -\mathbf{F}_d \end{Bmatrix}. \quad (1.15)$$

Les constantes de propagation μ_i s'obtiennent en calculant les valeurs propres λ_i de la matrice de transfert :

$$\lambda_i = e^{-\mu_i}. \quad (1.16)$$

Les vecteurs propres de la matrice de transfert permettent d'identifier directement le vecteur des ondes composés des déplacements et des efforts aux points de couplage. Pour calculer les constantes de propagation d'un système fini, de N éléments unitaires, on utilise la forme diagonale de la matrice de transfert :

$$\mathbf{T} = \mathbf{\Psi} \mathbf{\Lambda} \mathbf{\Psi}^{-1}, \quad (1.17)$$

où $\mathbf{\Psi}$ et $\mathbf{\Lambda}$ désignent respectivement les matrices contenant les vecteurs propres et les valeurs propres à droites de la matrice de transfert \mathbf{T} . Le calcul de $\mathbf{\Lambda}^N$ permet ensuite de retrouver les constantes de propagation reliant déplacements et efforts à l'extrémité gauche de la structure à N éléments, aux déplacements et efforts à l'extrémité droite.

Une introduction au calcul des courbes de dispersion par décomposition en ondes de Floquet-Bloch en milieu périodique 2D et 3D est explicitée dans les articles [56, 57, 83], et est reprise plus loin dans ce document § 1.2.2.1 page 31.

1.2.1.2 Étude théorique du modèle de la poutre en traction/compression avec un absorbeur dynamique local [84–86]

Le système Une poutre de longueur infinie, de masse volumique ρ , de module d'Young E et de section S , est munie d'un réseau périodique d'absorbeurs dynamiques, chacun constitué d'une masse M et d'un ressort K . La distance entre deux systèmes « masse-ressort » est notée L . Un schéma du système étudié est présenté par la figure 1.7. Cette structure périodique peut donc être décomposée en une infinité de cellules de longueur L .

Expression analytique des constantes de propagation Considérons la cellule (élément unitaire) schématisée par la figure 1.8. La matrice de transfert de cette cellule peut être mise sous la forme [87] :

$$\begin{bmatrix} \cos(kL) + D_a \frac{1}{kES} \sin(kL) & \frac{1}{kES} \sin(kL) \\ -kES \sin(kL) + D_a \cos(kL) & \cos(kL) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_g \\ N_g \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} U_d \\ -N_d \end{Bmatrix}, \quad (1.18)$$

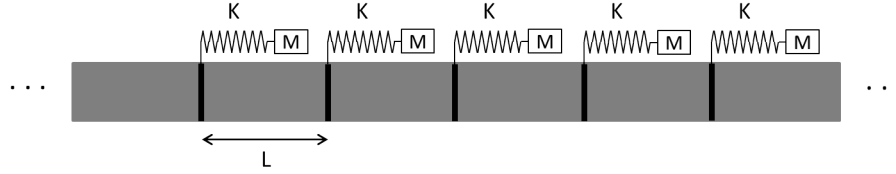


FIG 1.7 – Représentation schématique du système étudié : une poutre de longueur infinie, de masse volumique ρ , de module d'Young E et de section S , munie d'un réseau périodique d'absorbeurs dynamiques « masse-ressort » de masse M et de raideur K . L est la distance entre deux points d'attache des absorbeurs.

où $k = \omega/c = \omega\sqrt{\rho/E}$ est le nombre d'ondes caractéristique d'une poutre en traction/compression, c est la célérité des ondes dans la poutre et D_a caractérise l'influence de l'absorbeur dynamique et s'exprime de la façon suivante :

$$D_a = \frac{-K\omega^2 M}{K - \omega^2 M}. \quad (1.19)$$

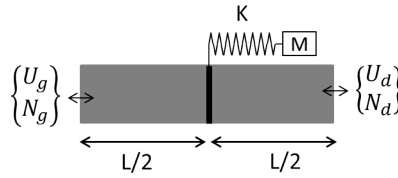


FIG 1.8 – Représentation schématique d'une cellule. U_g , U_d , N_g , N_d désignent respectivement les déplacements et les efforts normaux à la surface à gauche et à droite de la cellule. $N_{g,d} = ES \frac{\partial U_{g,d}}{\partial x}$.

Les valeurs propres de la matrice de transfert s'expriment alors par la relation suivante :

$$\lambda_{1,2} = \cos(kL) + \frac{D_a}{2kES} \sin(kL) \pm \sqrt{\left[\cos(kL) + \frac{D_a}{2kES} \sin(kL) \right]^2 - 1}. \quad (1.20)$$

À partir de la formule trigonométrique hyperbolique :

$$\pm \operatorname{argcosh}(x) = \ln \left(x \pm \sqrt{x^2 - 1} \right) = \pm \ln \left(x + \sqrt{x^2 - 1} \right), \quad (1.21)$$

la relation 1.20 peut se mettre sous la forme suivante :

$$-\ln(\lambda_{1,2}) \equiv \pm iqL = \pm \operatorname{argcosh} \left[\cos(kL) - \frac{P}{2} \sin(kL) \right], \quad (1.22)$$

où q est le vecteur complexe d'onde de Bloch et $P = -D_a/kES$. Finalement, selon 1.16, les valeurs de $\mu_{1,2}$ sont obtenues à partir des valeurs propres $\lambda_{1,2}$ de la matrice de transfert en utilisant la relation ci-dessous :

$$\mu_{1,2} = -\ln(\lambda_{1,2}). \quad (1.23)$$

La matrice de transfert admet deux constantes de propagation opposées : $\mu_1 = -\mu_2$.

Bandes interdites : formation et couplage avec l'absorbeur dynamique Les développements mathématiques sont fortement inspirés de [84]. Pour plus de commodité, les différentes grandeurs sont adimensionnées. La fréquence adimensionnée est définie par :

$$\Omega = \frac{\omega L}{\pi c}, \quad (1.24)$$

qui équivaut au ratio de l'espacement L entre deux résonateurs et la demi-longueur d'onde ; on définit également la masse adimensionnée γ par :

$$\gamma = \frac{M}{\rho S L}, \quad (1.25)$$

qui équivaut au rapport entre la masse de l'absorbeur dynamique et la masse de la poutre seule. P peut donc s'écrire :

$$P = \frac{\gamma \pi \Omega_0^2 \Omega}{\Omega_0^2 - \Omega^2}, \quad (1.26)$$

avec $\Omega_0 = \frac{L}{\pi c} \sqrt{K/M}$ la pulsation propre adimensionnée de l'absorbeur dynamique. La relation 1.22 peut alors se mettre sous la forme [84, 85] :

$$\mu_{1,2} = -\ln(\lambda_{1,2}) \equiv \pm i q L = \pm \operatorname{argcosh} \left[\cos(\Omega \pi) - \frac{P}{2} \sin(\Omega \pi) \right]. \quad (1.27)$$

La figure 1.9 présente la partie réelle et la partie imaginaire des constantes de propagation calculées à partir de la relation 1.27 avec $\Omega_0 = 2.3$ et $\gamma = 0.25$. Ce qui équivaut à dire que la fréquence de résonance de l'absorbeur vaut 2.3 fois celle associée à la demi-longueur d'ondes de la cellule et que la masse de l'absorbeur dynamique vaut 0.25 fois celle de la portion de poutre qui est considérée dans l'élément de cellule. Deux types de bandes interdites peuvent être identifiées. Les bandes interdites périodiques localisées à $\Omega = 1, 2, 3, \dots$ sont appelées les bandes de Bragg et la bande interdite localisée sur la fréquence propre d'oscillation de l'absorbeur dynamique $\Omega_0 = 2.3$ est appelée la bande interdite de résonance locale. Les fréquences associée aux pulsations adimensionnées $\Omega = 1, 2, 3, \dots$ sont appelées les **fréquences de Bragg**. Dans les bandes de Bragg, l'atténuation des ondes est lente et son maximum est atteint au centre de ces bandes. En revanche, dans la bande de résonance locale, l'atténuation est très importante et est d'autant plus grande que la fréquence est proche de la fréquence de propre de l'absorbeur dynamique. En ne considérant pas d'amortissement structurel, dans une bande interdite, les ondes deviennent évanescentes, soit $\Re\{\mu\} \neq 0$ et $\Im\{\mu\} = 0[\pi]$; à l'inverse, hors des bandes interdites, les ondes sont purement propagatives, soit $\Re\{\mu\} = 0$ et $\Im\{\mu\} \neq 0[\pi]$.

Les frontières des bandes interdites sont définies par $\Re\{\mu\} = 0$ et $\Im\{\mu\} = 0[\pi]$, soit selon 1.27 :

$$\cos(i\mu) = \cosh(\mu) = \cos(\Omega \pi) - \frac{P}{2} \sin(\Omega \pi) = \pm 1. \quad (1.28)$$

Il est possible de montrer que résoudre cette équation équivaut à résoudre le système à deux équations

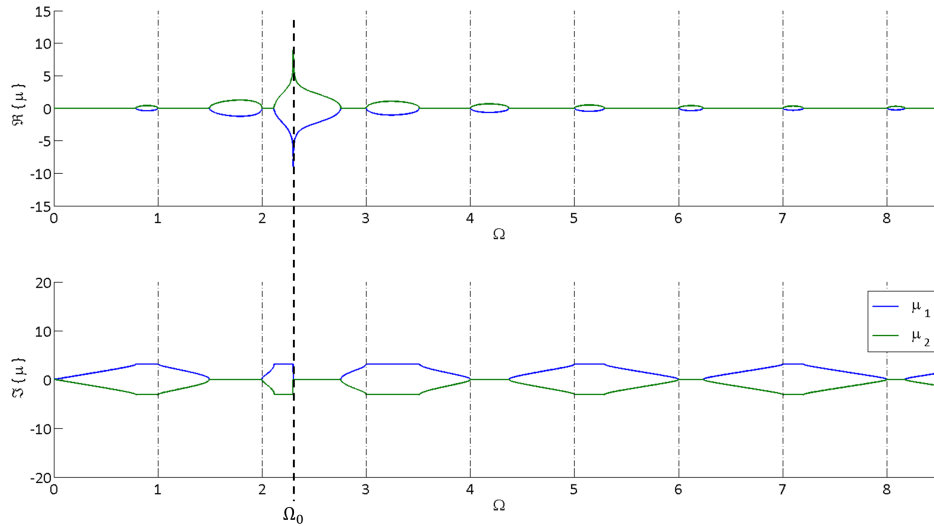


FIG 1.9 – Partie réelle et partie imaginaire de la constante de propagation μ en fonction de la pulsation adimensionnée $\Omega = (\omega L)/(\pi c)$. Le calcul est réalisé pour $\gamma = 0.25$ et $\Omega_0 = 2.3$.

ci-dessous [84] :

$$\sin\left(\frac{\Omega\pi}{2}\right) \left[P \sin\left(\frac{\Omega\pi}{2}\right) - 2 \cos\left(\frac{\Omega\pi}{2}\right) \right] = 0, \quad (1.29)$$

et

$$\cos\left(\frac{\Omega\pi}{2}\right) \left[P \cos\left(\frac{\Omega\pi}{2}\right) - 2 \sin\left(\frac{\Omega\pi}{2}\right) \right] = 0. \quad (1.30)$$

Pour la première équation (1.29) on obtient :

$$\sin\left(\frac{\Omega\pi}{2}\right) = 0, \quad (1.31)$$

$$P = 2 \cot\left(\frac{\Omega\pi}{2}\right); \quad (1.32)$$

pour la seconde équation (1.30) on obtient :

$$\cos\left(\frac{\Omega\pi}{2}\right) = 0, \quad (1.33)$$

$$P = -2 \tan\left(\frac{\Omega\pi}{2}\right). \quad (1.34)$$

L'équation 1.29 correspond à la relation qui donne les modes propres de vibration de la cellule ayant pour conditions aux limites « encastree-encastree » et l'équation 1.30 correspond à la relation qui donne les modes propres de la cellule « libre-libre ». Par la suite, ces modes sont appelés les modes A_n et B_n .

Les solutions des équations 1.31 et 1.33 sont respectivement les nombres entiers pairs $\Omega = 2, 4, 6, \dots$ et impairs $\Omega = 1, 3, 5, \dots$. Ces fréquences dépendent de la périodicité L mais pas des paramètres de l'absorbeur dynamique M et K , ce sont les fréquences de Bragg. La figure 1.10 présente trois cas de simulation faisant varier les paramètres de l'absorbeur dynamique γ et Ω_0 . Ces courbes montrent bien que l'une des frontières de chaque bande interdite de Bragg est fixe et ne varie pas en fonction des

propriétés de l'absorbeur dynamique.

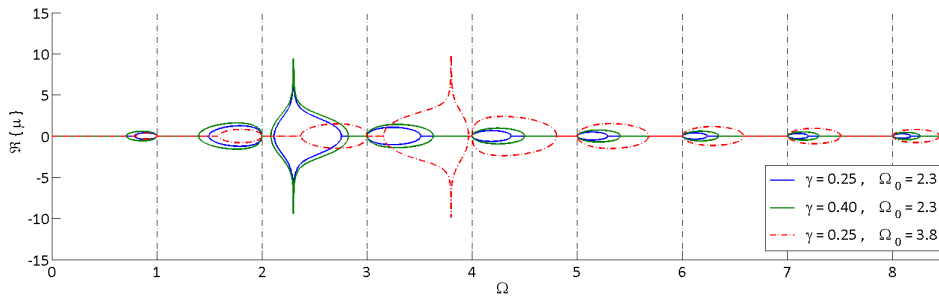


FIG 1.10 – Partie réelle de la constante de propagation μ en fonction de la fréquence adimensionnée $\Omega = (\omega L)/(\pi c)$ et pour différentes valeurs de γ et Ω_0 . En bleu : $\gamma = 0.25$ et $\Omega_0 = 2.3$; en vert : $\gamma = 0.40$ et $\Omega_0 = 2.3$; en rouge : $\gamma = 0.25$ et $\Omega_0 = 3.8$.

Pour compléter les propos précédents, les fonctions P , $-2 \tan(\Omega\pi/2)$, $2 \cot(\Omega\pi/2)$ et $\Re\{\mu\}$ sont tracées en fonction de la fréquence adimensionnée Ω (figure 1.11). Cette méthode permet d'identifier les modes A_n et B_n solution des équations 1.31 à 1.34. On constate alors que les bandes interdites sont bornées par un des modes A_n ou B_n représentatifs des modes propres d'une cellule du système ayant pour conditions aux limites « libre-libre » ou « encastré-encastré ».

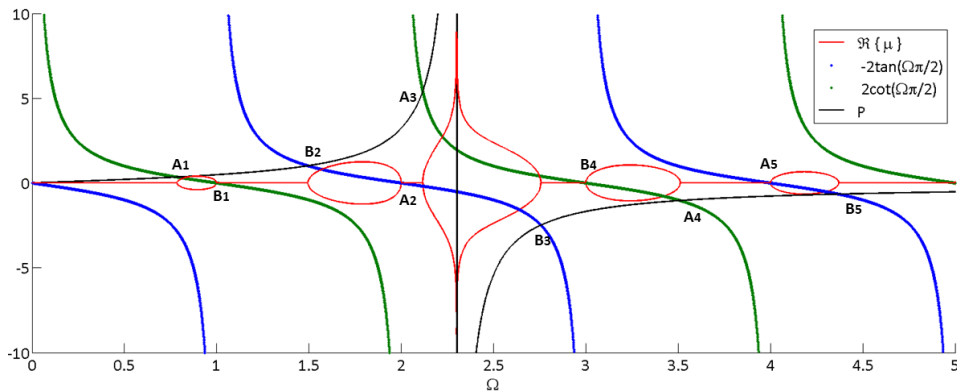


FIG 1.11 – Partie réelle de la constante de propagation μ , P , $-2 \tan(\Omega\pi/2)$ et $2 \cot(\Omega\pi/2)$ en fonction de la fréquence adimensionnée $\Omega = (\omega L)/(\pi c)$ pour $\gamma = 0.25$ et $\Omega_0 = 2.3$.

Nous avons pu voir précédemment que l'une des deux frontières de chacune des bandes interdites de Bragg reste fixe, celle-ci étant liée à la périodicité L de la cellule et est indépendante des propriétés de l'absorbeur dynamique. Qu'en est-il de la seconde frontière ?

La figure 1.12 trace les fonctions $-2 \tan(\Omega\pi/2)$ et $2 \cot(\Omega\pi/2)$ pour différentes valeurs de γ allant de 0.2 à 1 par pas de 0.2. La frontière mobile des bandes interdites de Bragg s'éloigne plus γ augmente (autrement dit P augmente) jusqu'à la limite où cette frontière rejoint la borne fixe d'une autre bande interdite ($\Omega = 1, 2, 3, \dots$). Pour illustrer ceci, un calcul des constantes de propagation est réalisé pour une valeur extrême de $\gamma = 10$, les résultats sont présentés par la figure 1.13. Les bandes interdites ne se touchent pas réellement, mais l'écart qui les sépare tant vers 0.

Pour la bande interdite de résonance locale, on remarque que celle-ci est asymétrique selon la valeur de Ω_0 (voir figure 1.14). Il existe un couplage entre les bandes interdites de Bragg et la bande interdite de résonance locale.

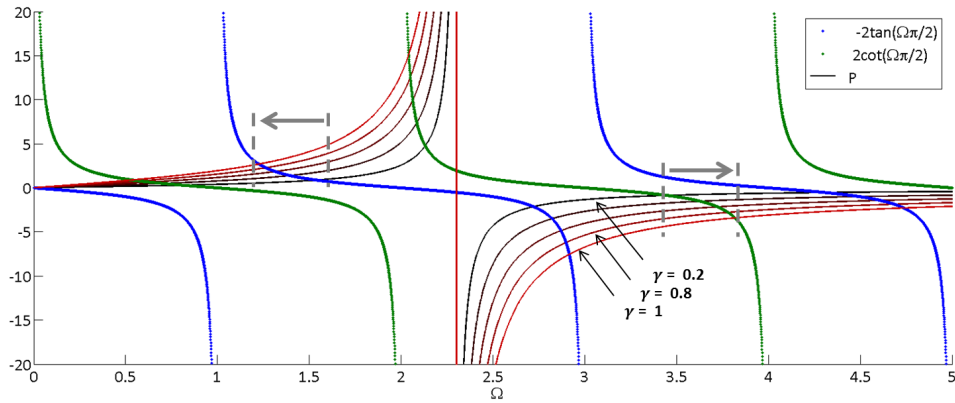


FIG 1.12 – Variation des points d'intersection de P , calculé pour différentes valeurs de γ , avec les fonctions $-2 \tan(\Omega\pi/2)$ et $2 \cot(\Omega\pi/2)$. Le calcul est réalisé pour $\Omega_0 = 2.3$ et $\gamma = 0.2$ à 1 par pas de 0.2 .

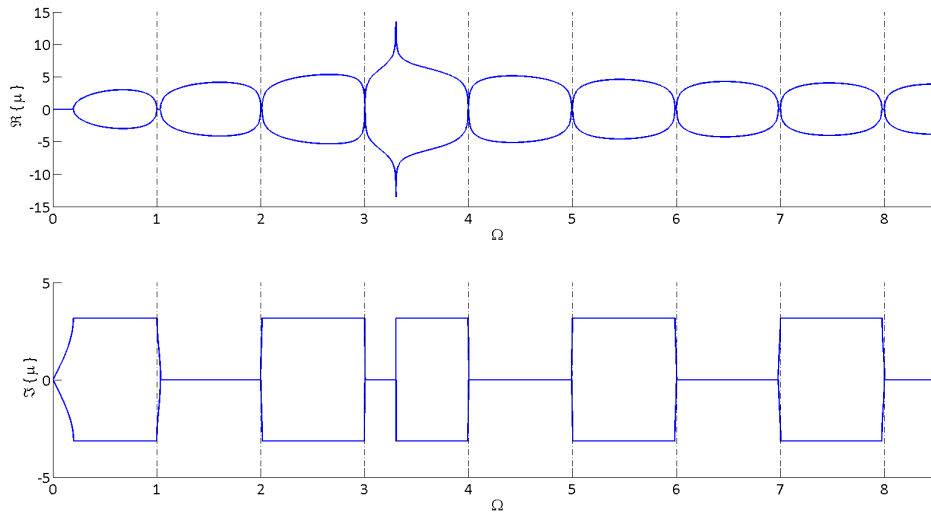


FIG 1.13 – Partie réelle et partie imaginaire de la constante de propagation μ en fonction de la pulsation adimensionnée $\Omega = (\omega L)/(\pi c)$. Le calcul est réalisé pour $\Omega_0 = 3.3$ et $\gamma = 10$.

Si la bande interdite de résonance est centrée entre deux bandes interdites de Bragg ($\Omega_0 = 0.5, 1.5, 2.5\dots$), elle est symétrique. Dans ce cas, l'atténuation est la même de part et d'autre de la fréquence propre Ω_0 de l'absorbeur dynamique. À l'inverse, si celle-ci n'est pas centrée, elle est asymétrique et l'atténuation est plus importante du côté le plus proche d'une bande interdite de Bragg (figure 1.14). De plus, la largeur fréquentielle des bandes interdites de Bragg varie en fonction de la position de la bande interdite de résonance locale. Ceci est lié aux faits précédemment expliqués, la fréquence de l'une des frontières de ces bandes interdites est fonctions des paramètres de l'absorbeur dynamique.

Les deux graphiques sur les figures 1.15 et 1.16 présentent, de manière plus générale, l'influence de γ et de Ω_0 sur la variation de la largeur fréquentielle des bandes interdites. Le premier graphique présente la variation de l'atténuation $\Re\{\mu\}$ en fonction de Ω et γ pour $\Omega_0 = 2.8$; le second graphique présente la variation de l'atténuation $\Re\{\mu\}$ en fonction de Ω et Ω_0 pour $\gamma = 0.5$. En conclusion, un couplage existe entre les bandes interdites de Bragg et la bande interdite de résonance locale, couplage réalisé par l'absorbeur dynamique.

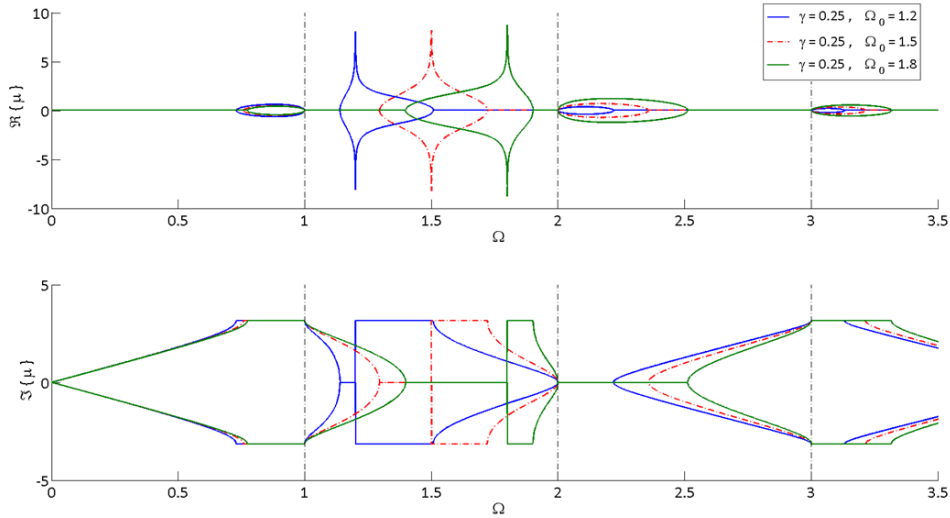


FIG 1.14 – Partie réelle et partie imaginaire de la constante de propagation μ en fonction de la pulsation adimensionnée $\Omega = (\omega L)/(\pi c)$ pour différentes valeurs de Ω_0 . En bleu $\Omega_0 = 1.2$, en rouge $\Omega_0 = 1.5$, en vert $\Omega_0 = 1.8$. Le calcul est réalisé pour $\gamma = 0.25$.

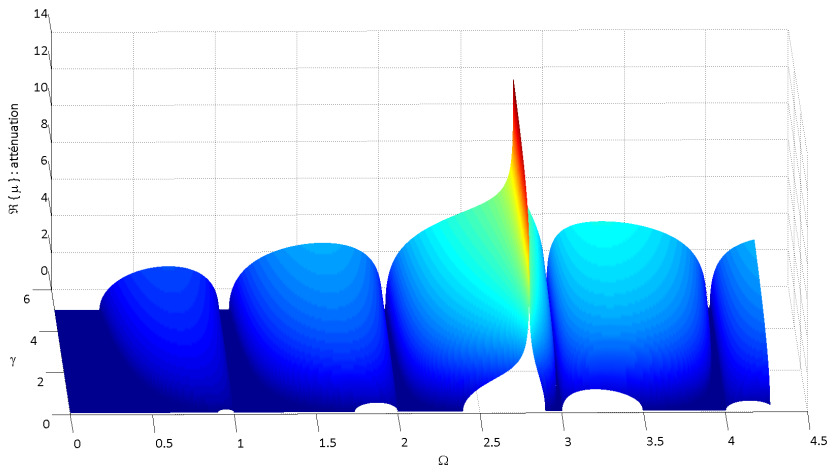


FIG 1.15 – Partie réelle de la constante de propagation μ dans le plan (Ω, γ) . Le calcul est réalisé pour $\Omega_0 = 2.8$.

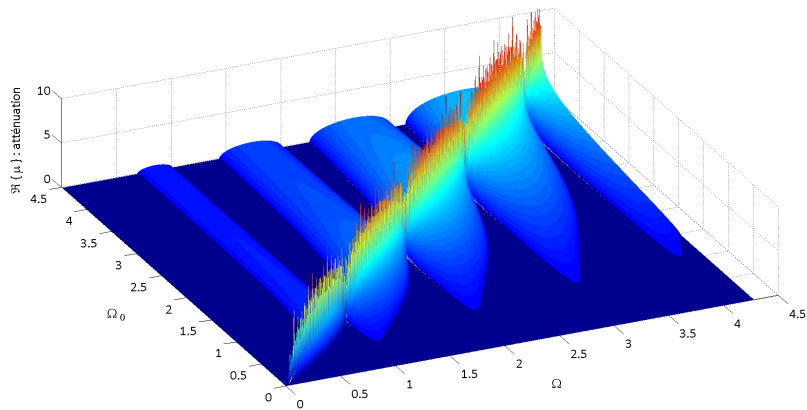


FIG 1.16 – Partie réelle de la constante de propagation μ dans le plan (Ω, Ω_0) . Le calcul est réalisé pour $\gamma = 0.5$.

Cas particulier $\Omega = \Omega_0$ Nous nous intéressons à présent à un phénomène particulier qui se produit pour $\Omega = \Omega_0$. En effet, dans ce cas précis, bande interdite de Bragg et bande interdite de résonance locale se recouvrent. Sur les figures 1.15 et 1.16, il est possible de distinguer les contours des bandes interdites ($\Re\{\mu\} \rightarrow 0$). Ces contours peuvent être définis à partir des équations 1.31 à 1.34; les équations 1.32 et 1.34 sont réécrites en exprimant Ω_0 en fonction de Ω . Les frontières des bandes interdites sont alors définies par :

$$\Omega = 2, 4, 6, \dots, \quad (1.35)$$

$$\Omega_0 = \Omega \left(1 - \frac{\gamma\pi\Omega}{2 \cot(\frac{\pi\Omega}{2})} \right)^{-1/2}, \quad (1.36)$$

relatif aux modes A_n et :

$$\Omega = 1, 3, 5, \dots, \quad (1.37)$$

$$\Omega_0 = \Omega \left(1 + \frac{\gamma\pi\Omega}{2 \tan(\frac{\pi\Omega}{2})} \right)^{-1/2}, \quad (1.38)$$

relatif aux modes B_n . Les courbes correspondantes sont tracées sur la figure 1.17 pour $\gamma = 0.5$ (conditions de la figure 1.16).

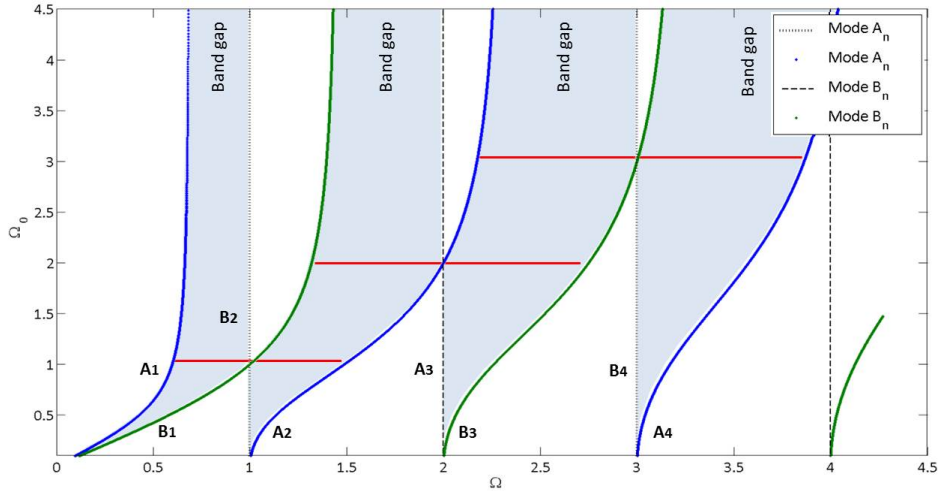


FIG 1.17 – Courbes obtenues à partir des relations 1.35 à 1.38 représentatives des frontières des bandes interdites. $\gamma = 0.5$.

Lorsque $\Omega = \Omega_0$, deux bandes interdites sont connectées entre elles et forment une seule et même bande interdite (voir figure 1.18) : on parle de couplage. Cette bande interdite présente les mêmes caractéristiques qu'une bande interdite de Bragg : atténuation douce, profil quasi-symétrique sans résonance. En revanche, sa largeur de bande fréquentielle est plus importante que les autres bandes interdites. Dans [84], l'amplitude de cette bande interdite est exprimée par :

$$\lim_{\Omega \rightarrow \Omega_0 = n} \Re\{\mu\} = \pm \operatorname{argcosh} \left(1 + \frac{\gamma\pi^2 n^2}{4} \right) \quad (1.39)$$

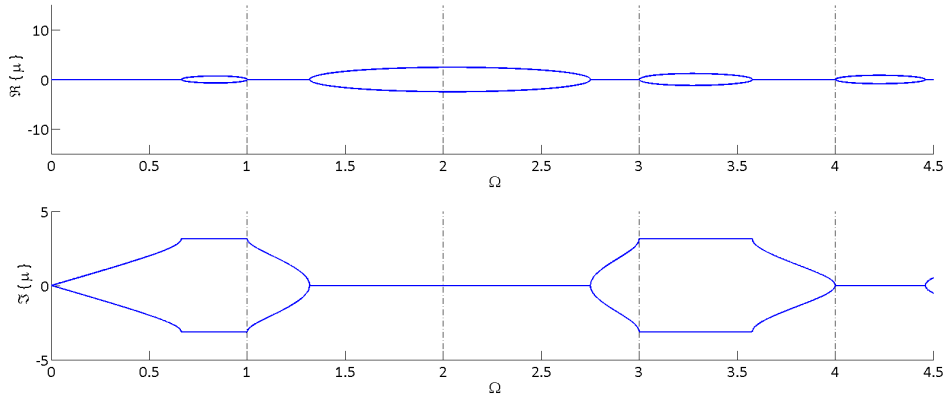


FIG 1.18 – Partie réelle et partie imaginaire de la constante de propagation μ en fonction de la pulsation adimensionnée Ω . Le calcul est réalisé pour $\gamma = 0.5$ et $\Omega_0 = 2$.

1.2.1.3 Étude théorique du modèle de la poutre en flexion avec un absorbeur dynamique local [88–93]

Le système Le système étudié est similaire au système présenté en figure 1.7 page 15 avec pour seule différence que les absorbeurs dynamiques n’agissent plus sur le déplacement longitudinal de la poutre mais sur le déplacement transversal (ondes de flexion). La différence avec le cas de la poutre en traction compression est que, d’une part, le milieu est dispersif, et d’autre part, il n’y a plus seulement deux ondes propagatives, mais deux ondes prorogatives et deux ondes évanescentes.

Il est nécessaire d’introduire le paramètre I , moment quadratique (ou moment d’inertie) selon l’axe de la poutre.

Expression analytique des constantes de propagation Considérons la cellule (élément unitaire) schématisée par la figure 1.19. La matrice de transfert de celle-ci s’écrit [87] :

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} c_1 + D_a \frac{s_2}{EI k_f^3} & \frac{s_1}{k_f} & \frac{s_2}{EI k_f^3} & -\frac{c_2}{EI k_f^2} \\ -k_f s_2 + D_a \frac{c_2}{EI k_f^2} & c_1 & \frac{c_2}{EI k_f^2} & \frac{s_1}{EI k_f} \\ -EI k_f^3 s_1 + D_a c_1 & EI k_f^2 c_2 & c_1 & k_f s_2 \\ -EI k_f^2 c_2 - D_a \frac{s_1}{k_f} & EI k_f s_2 & -\frac{s_1}{k_f} & c_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} W_g \\ \Theta_g \\ T_g \\ M_g \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} W_d \\ \Theta_d \\ T_d \\ M_d \end{Bmatrix}, \quad (1.40)$$

avec W_d le déplacement transversal, Θ_d l’angle de flexion, T_d l’effort tranchant, M_d le moment fléchissant, et où :

$$c_1 = \cos(k_f L) + \cosh(k_f L), \quad (1.41)$$

$$c_2 = \cos(k_f L) - \cosh(k_f L), \quad (1.42)$$

$$s_1 = \sin(k_f L) + \sinh(k_f L), \quad (1.43)$$

$$s_2 = \sin(k_f L) - \sinh(k_f L), \quad (1.44)$$

avec $k_f = \sqrt[4]{\rho S \omega^2 / EI}$ le nombre d'ondes de flexion de la poutre considérée. L'influence de l'absorbeur dynamique D_a s'exprime toujours par la relation 1.19.

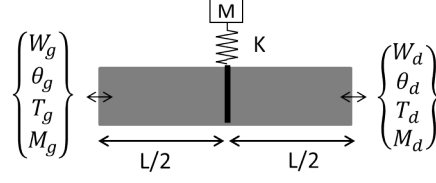


FIG 1.19 – Représentation schématique d'une cellule. $W_{g,d}$, $\Theta_{g,d}$, $T_{g,d}$, $M_{g,d}$ désignent respectivement les déplacements, les pentes, les efforts tranchants et les moments de flexion à gauche et à droite de la cellule.

$$\Theta_{g,d} = \frac{\partial W_{g,d}}{\partial y}, \quad M_{g,d} = EI \frac{\partial^2 W_{g,d}}{\partial x^2}, \quad T_{g,d} = EI \frac{\partial^3 W_{g,d}}{\partial x^3}.$$

Les valeurs propres de la matrice de transfert, au nombre de quatre, s'expriment alors par les relations suivantes [88] :

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\alpha_1 + \sqrt{\alpha_1^2 - 4\alpha_2}}{2} \pm \sqrt{\frac{(-\alpha_1 + \sqrt{\alpha_1^2 - 4\alpha_2})^2}{4} - 1}, \quad (1.45)$$

$$\lambda_{3,4} = \frac{-\alpha_1 - \sqrt{\alpha_1^2 - 4\alpha_2}}{2} \pm \sqrt{\frac{(-\alpha_1 - \sqrt{\alpha_1^2 - 4\alpha_2})^2}{4} - 1}, \quad (1.46)$$

avec :

$$\alpha_1 = -\left[\cos(k_f L) + \cosh(k_f L) \right] - \frac{D_a}{4EI k_f^3} \left[\sin(k_f L) - \sinh(k_f L) \right], \quad (1.47)$$

$$\alpha_2 = \cos(k_f L) \cosh(k_f L) - \frac{D_a}{4EI k_f^3} \left[\sin(k_f L) \cosh(k_f L) - \sinh(k_f L) \cos(k_f L) \right]. \quad (1.48)$$

D'après l'équation 1.21 et la relation $\mu_{1,2} = -\ln(\lambda_{1,2})$, les constantes de propagation sont données par :

$$\pm \mu_1 = \pm \operatorname{argcosh} \left[\frac{-\alpha_1 + \sqrt{\alpha_1^2 - 4\alpha_2}}{2} \right], \quad (1.49)$$

$$\pm \mu_2 = \pm \operatorname{argcosh} \left[\frac{-\alpha_1 - \sqrt{\alpha_1^2 - 4\alpha_2}}{2} \right]. \quad (1.50)$$

$\pm \mu_1$ définit alors la première paire de constante et $\pm \mu_2$ définit la seconde paire. Les deux constantes de propagation d'une même paire sont opposées et représentent la propagation des ondes dans les deux directions opposées. On parlera par la suite des deux constantes μ_1 et μ_2 .

Bandes interdites : formation et couplage avec l'absorbeur dynamique Les développements mathématiques sont fortement inspirés de [88]. Pour plus de commodité, les différentes grandeurs sont adimensionnées. Ici, les fréquences de Bragg sont données par l'expression suivante :

$$f_{b,n} = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho S}}, \quad \text{avec } n = 1, 2, 3, \dots \quad (1.51)$$

On définit alors la fréquence adimensionnée par :

$$\Omega_b = \frac{k_f L}{\pi} = \sqrt{\frac{\omega}{\omega_{b,1}}}, \quad (1.52)$$

où $\omega_{b,1}$ est la pulsation liée à la première fréquence de Bragg $f_{b,1}$ avec $n = 1$. La masse adimensionnée γ est toujours donnée par $\gamma = \frac{M}{\rho S L}$ (relation 1.25).

Les relations 1.47 et 1.48 peuvent alors se mettre sous la forme adimensionnée :

$$\alpha_1 = -\left[\cos(\Omega_b \pi) + \cosh(\Omega_b \pi) \right] - \frac{Q}{4} \left[\sin(\Omega_b \pi) - \sinh(\Omega_b \pi) \right], \quad (1.53)$$

$$\alpha_2 = \cos(\Omega_b \pi) \cosh(\Omega_b \pi) - \frac{Q}{4} \left[\sin(\Omega_b \pi) \cosh(\Omega_b \pi) - \sinh(\Omega_b \pi) \cos(\Omega_b \pi) \right], \quad (1.54)$$

avec :

$$Q = -\frac{\Omega_{0b}^4 \Omega_b \gamma \pi}{\Omega_{0b}^4 - \Omega_b^4}, \quad (1.55)$$

où $\Omega_{0b} = (L/\pi)^4 \sqrt{\rho S / EI} \sqrt{K/M}$ est la pulsation propre adimensionnée de l'absorbeur dynamique.

La figure 1.20 présente la partie réelle et la partie imaginaire des constantes de propagation calculées à partir des expressions adimensionnées de α_1 et α_2 (1.53 et 1.54) remplacées dans les relations 1.49, 1.50, pour $\Omega_{0b} = 0.8$ et $\gamma = 0.1$.

Trois types de région peuvent être distinguées sur ces paires de constantes de propagation :

- les régions d'atténuation : définies par $\Re\{\mu_{1,2}\} \neq 0$ et $\Im\{\mu_{1,2}\} = 0$,
- les régions de propagation : définies par $\Re\{\mu_{1,2}\} = 0$ et $\Im\{\mu_{1,2}\} \neq 0$,
- les régions complexes : définies par $\Re\{\mu_{1,2}\} \neq 0$ et $\Im\{\mu_{1,2}\} \neq 0$, de même que $\mu_1 = \mu_2$.

Aussi, quatre types de dispersion peuvent être définies selon les caractéristiques des deux paires de constantes de propagation :

- Propagation-Atténuation (PA) : l'une des ondes est propagative (b.) et l'autre est atténuée (a.),
- Propagation-Propagation (PP) : les deux ondes sont propagatives (b.),
- Atténuation-Atténuation (AA) (ou « Bragg Scattering ») : les deux ondes sont atténuées (a.). Ces zones sont positionnées fréquemment au niveau des bandes interdites de Bragg et de la bande interdite de résonance locale.
- Complexe (C) : les caractéristiques d'atténuation et de propagation des ondes sont les mêmes pour les deux types d'ondes (c.).

On peut donc définir deux zones fréquentielles « pass-band », PP et PA, et deux zones fréquentielles « stop-band », AA et C. Pour illustrer ces propos, la figure 1.21 présente un autre calcul permettant de mieux visualiser ces différentes zones.

Les frontières des bandes interdites peuvent être déterminées en cherchant les solution de Ω_b possibles pour $\cosh(\mu) = \pm 1$, ce qui équivaut à chercher d'après les relations 1.49 et 1.50 :

$$-\alpha_1 + \alpha_2 + 1 = 0, \quad (1.56)$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + 1 = 0. \quad (1.57)$$

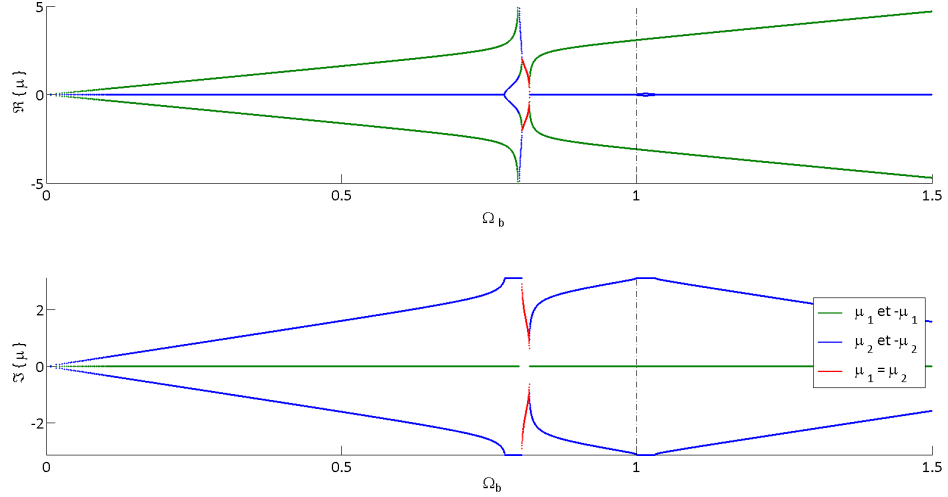


FIG 1.20 – Partie réelle et partie imaginaire des constantes de propagation μ_1 et μ_2 en fonction de la pulsation adimensionnée $\Omega_b = k_f L / \pi$. Le calcul est réalisé pour $\gamma = 0.1$ et $\Omega_{0b} = 0.8$. En vert $\pm\mu_1$, en bleu $\pm\mu_2$ et en rouge $\mu_1 = \mu_2$.

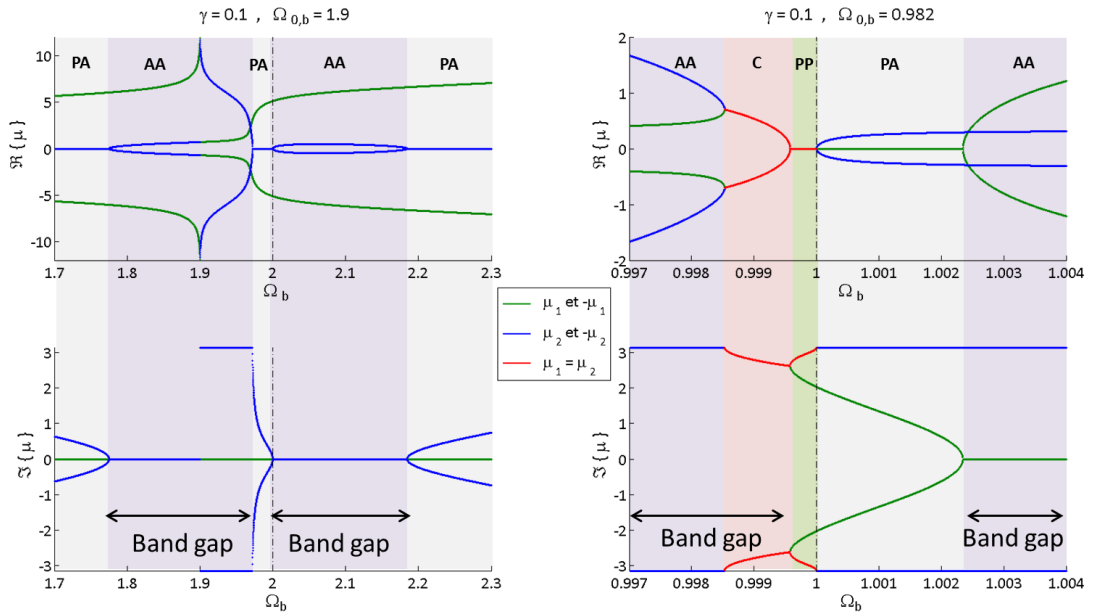


FIG 1.21 – Identification des zones de dispersion. Partie réelle et partie imaginaire des constantes de propagation μ_1 et μ_2 en fonction de la pulsation adimensionnée Ω_b . Le calcul est réalisé pour $\gamma = 0.1$ et $\Omega_{0b} = 1.9$ à gauche et $\Omega_{0b} = 0.982$ à droite. En vert $\pm\mu_1$, en bleu $\pm\mu_2$ et en rouge $\mu_1 = \mu_2$.

De plus, lorsque μ est complexe, $\mu_1 = \mu_2$, autrement dit les relations 1.49 et 1.50 sont égales. Une troisième forme d'équation est ainsi obtenue :

$$\alpha_1^2 - 4\alpha_2 = 0 . \quad (1.58)$$

En remplaçant α_1 et α_2 par leur expression donnée par les relations 1.53 et 1.54, dans les équations 1.56, 1.57 et 1.58, on obtient les relations 1.59 à 1.63 permettant de déterminer les frontières des bandes interdites.

Pour la relation 1.56 on obtient :

$$\cos(\Omega_b \pi) = -1 , \quad (1.59)$$

$$Q = 4 \left(\tanh \left(\frac{\Omega_b \pi}{2} \right) - \tan \left(\frac{\Omega_b \pi}{2} \right) \right)^{-1} . \quad (1.60)$$

Pour la relation 1.57 on obtient :

$$\cos(\Omega_b \pi) = 1 , \quad (1.61)$$

$$Q = 4 \left(\coth \left(\frac{\Omega_b \pi}{2} \right) + \cot \left(\frac{\Omega_b \pi}{2} \right) \right)^{-1} . \quad (1.62)$$

Pour la relation 1.58 on obtient :

$$Q = 4 \frac{\cosh(\Omega_b \pi) + \cos(\Omega_b \pi)}{\left[\sqrt{\sin(\Omega_b \pi)} \pm \sqrt{\sinh(\Omega_b \pi)} \right]^2} . \quad (1.63)$$

Les équations 1.56 et 1.57 correspondent aux relations qui donnent les modes propres de vibration de la cellule ayant pour conditions aux limites « appuyée-appuyée » et « guidée-guidée » (angle de flexion et effort tranchant considérés nuls selon l'axe de la poutre, voir figure 1.22). Par la suite, ces modes sont notés A_n et B_n . Les solutions des équations 1.59 et 1.61 sont respectivement les nombres entiers impairs $\Omega_b = 1, 3, 5, \dots$, et pairs $\Omega_b = 2, 4, 6, \dots$. Ces fréquences dépendent de la périodicité L , mais pas des paramètres de l'absorbeur dynamique M et K , ce sont les fréquences de Bragg. On distingue alors par la suite les modes $A_{b,n}$ et $B_{b,n}$ obtenus à partir des relations 1.59 et 1.61 caractéristiques des fréquences de Bragg et $A_{a,n}$ et $B_{a,n}$ obtenus à partir des relations 1.60 et 1.62 qui sont fonction de l'absorbeur dynamique.

Pour résumer ces propos, les modes $A_{b,n}$, $B_{b,n}$, $A_{a,n}$, $B_{a,n}$ sont associés aux différents schémas de la figure 1.22 :

- $A_{b,n}$ (eq.1.59) \implies figure 1.22.a (modes symétriques), figure 1.22.d (modes anti-symétriques) ;
- $B_{b,n}$ (eq.1.61) \implies figure 1.22.a (modes anti-symétriques), figure 1.22.b (modes anti-symétriques) ;
- $A_{a,n}$ (eq.1.60) \implies figure 1.22.b (modes symétriques), figure 1.22.c (modes anti-symétriques) ;
- $B_{a,n}$ (eq.1.62) \implies figure 1.22.c (modes symétriques), figure 1.22.d (modes symétriques) ;

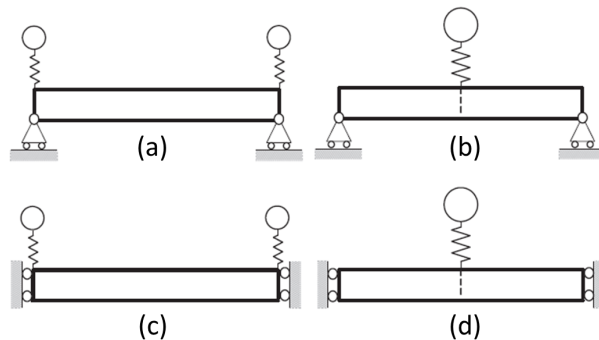


FIG 1.22 – Schémas de la cellule élémentaire avec pour conditions aux limites « appuyée-appuyée » (en haut) et « guidée-guidée » (en bas). Figure empruntée à [88].

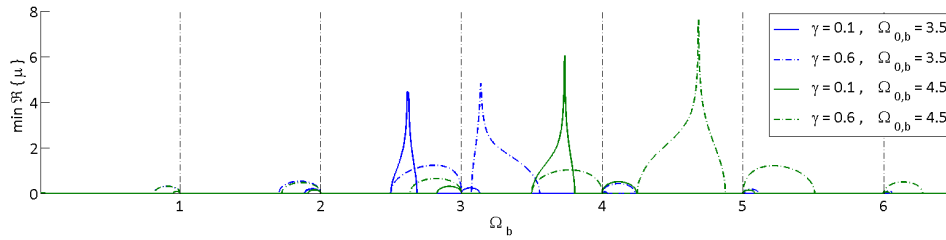


FIG 1.23 – $\min\{|\Re(\mu)|\} = \min\{|\Re(\mu_1)|, |\Re(\mu_2)|\}$ en fonction de la fréquence adimensionnée Ω_b et pour différentes valeurs de γ et de Ω_{0b} . En bleu : $\Omega_{0b} = 2.5$, $\gamma = 0.1$ pour la courbe pleine et $\gamma = 0.6$ pour la courbe en pointillés; en vert : $\Omega_{0b} = 3.5$, $\gamma = 0.1$ pour la courbe pleine et $\gamma = 0.6$ pour la courbe en pointillés.

En cherchant

$$\min\{|\Re(\mu)|\} = \min\{|\Re(\mu_1)|, |\Re(\mu_2)|\}, \quad (1.64)$$

il est possible de déterminer les frontières des bandes interdites. En effet, comme $\Re\{\mu_1\}$ et $\Re\{\mu_2\}$ sont tous les deux différents de zéro sur la largeur fréquentielle d'une bande interdite, ces dernières deviennent visibles en traçant $\min\{|\Re(\mu)|\}$. La figure 1.23 présente plusieurs calculs de $\min\{|\Re(\mu)|\}$ faisant varier les paramètres de l'absorbeur dynamique γ et Ω_{0b} . Ces courbes montrent bien que l'une des frontières de chaque bande interdite de Bragg est fixe et ne varie pas en fonction des propriétés de l'absorbeur dynamique (relations 1.59 et 1.61).

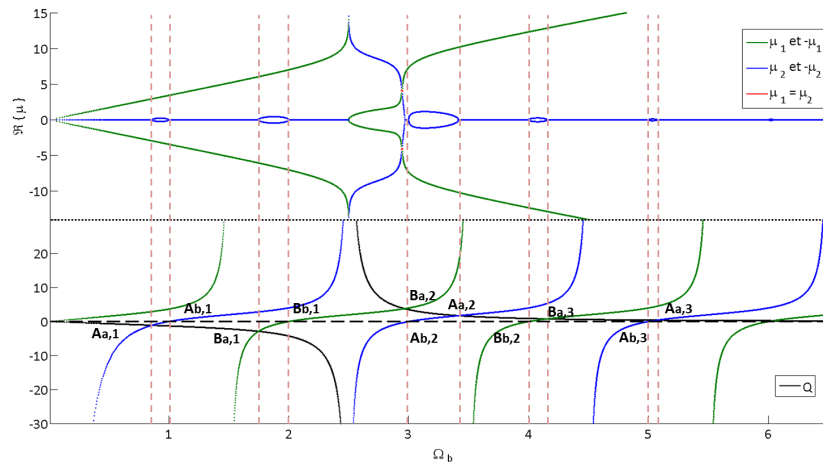


FIG 1.24 – Détermination des bandes interdites de Bragg. En haut : partie réelle des constantes de propagation μ_1 et μ_2 en fonction de la pulsation adimensionnée Ω_b . Le calcul est réalisé pour $\gamma = 0.4$ et $\Omega_{0b} = 2.5$. En vert $\pm\mu_1$, en bleu $\pm\mu_2$ et en rouge $\mu_1 = \mu_2$. En bas : Q en noire (1.55), le terme de droite de l'équation 1.60 en vert et le terme de droite de l'équation 1.62 en bleu; en pointillés, l'intersection de la courbe Q avec : soit les courbes vertes et bleues, soit l'axe des ordonnées égal à 0.

Les différents termes des relations 1.60, 1.62 et 1.63 sont tracés sur les figures 1.24 et 1.25. Ces figures viennent compléter les propos précédents; les frontières des bandes interdites sont délimitées par les relations 1.59 à 1.63. De plus, comme dans le cas de la poutre en traction/compression, plus Q augmente plus les bandes interdites s'élargissent fréquentiellement; ceci est visible sur la figure 1.26 (Q est proportionnel à γ , relation 1.55).

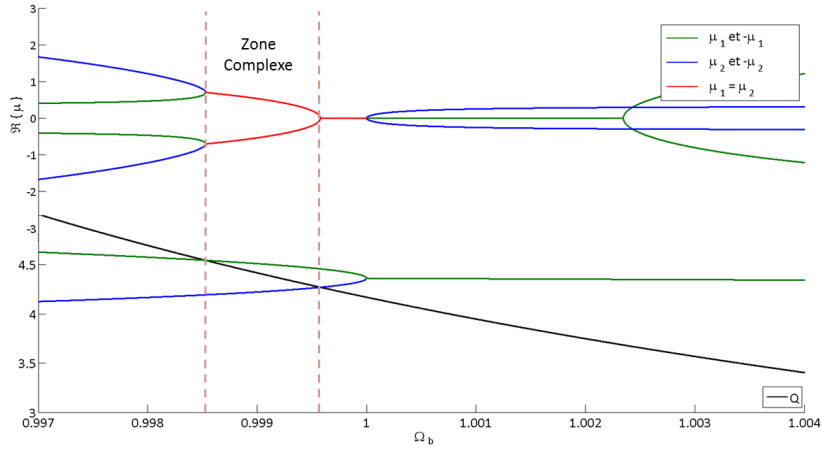


FIG 1.25 – Détermination des bandes interdites de Bragg. En haut : partie réelle des constantes de propagation μ_1 et μ_2 en fonction de la pulsation adimensionnée Ω_b . Le calcul est réalisé pour $\gamma = 0.1$ et $\Omega_{0b} = 0.982$. En vert $\pm\mu_1$, en bleu $\pm\mu_2$ et en rouge $\mu_1 = \mu_2$. En bas : Q en noire (1.55), la relation 1.63 en vert et en bleu ; en pointillés, l'intersection de la courbe Q avec les courbes vertes et bleues.

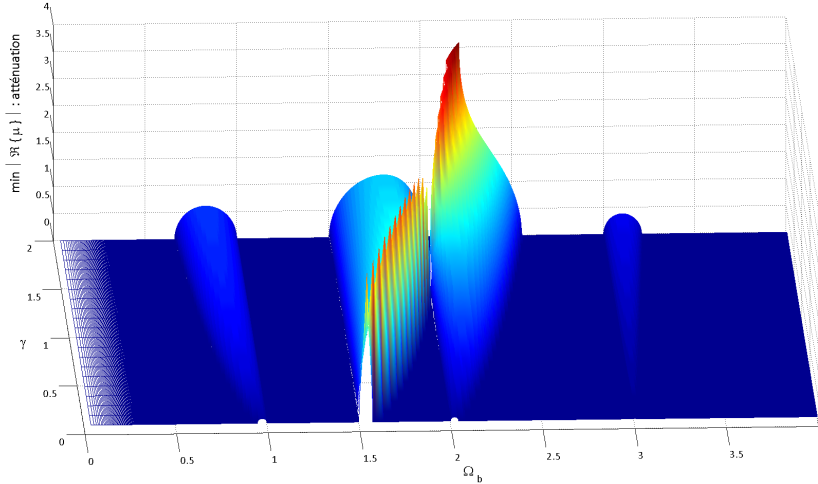


FIG 1.26 – $\min\{\Re\{\mu\}\}$ dans le plan (Ω_b, γ) . Le calcul est réalisé pour $\Omega_{0b} = 1.5$.

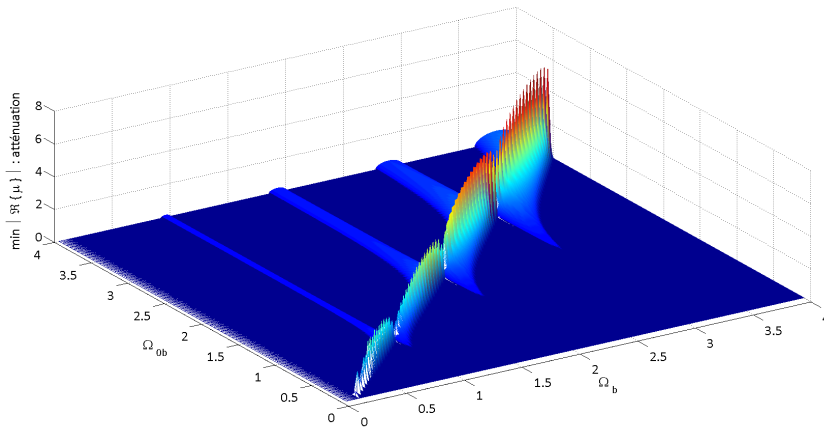


FIG 1.27 – $\min\{\Re\{\mu\}\}$ dans le plan (Ω_b, Ω_{0b}) . Le calcul est réalisé pour $\gamma = 0.2$.

Les deux figures 1.26 et 1.27 présentent de manière plus générale la variation des bandes interdites déterminées par la relation 1.64 en fonction de γ (figure 1.26) et en fonction de Ω_{0b} (figure 1.27). La figure 1.28 présente les résultats de la figure 1.27 seulement dans le plan 2D (Ω_b, Ω_{0b}) pour mieux visualiser la variation des bandes interdites en fonction de la fréquence propre adimensionnée de l'absorbeur dynamique. On constate alors que pour certaines valeurs de la fréquence propre de l'absorbeur dynamique, il existe un phénomène de couplage entre les bandes interdites de Bragg et la bande interdite de résonance qui, comme dans le cas de la poutre en traction/compression, crée une « super bande interdite ». En revanche, contrairement au cas de la poutre en traction compression, ce phénomène de couplage n'apparaît pas pour une valeur de la fréquence propre de l'absorbeur dynamique égale à une fréquence de Bragg : $\Omega_{0b} \neq \Omega_b = 1, 2, 3, \dots$.

Pour étayer ces propos, il est proposé de déterminer les contours des bandes interdites qu'il est possible de distinguer sur les figures 1.27 et 1.28 ($\min |\Re\{\mu\}| \rightarrow 0$). Ces contours peuvent être définis à partir des équations 1.59 à 1.63 ; les équations 1.60, 1.61 et 1.63 sont réécrites en exprimant Ω_{0b} en fonction de Ω_b . Les frontières des bandes interdites sont alors définies par :

$$\Omega_{0b;A} = \left[\frac{4\Omega_b^4 \left(\tanh\left(\frac{\Omega_b\pi}{2}\right) - \tan\left(\frac{\Omega_b\pi}{2}\right) \right)^{-1}}{\gamma\pi\Omega_b + \left(\tanh\left(\frac{\Omega_b\pi}{2}\right) - \tan\left(\frac{\Omega_b\pi}{2}\right) \right)^{-1}} \right]^{1/4}, \quad (1.65)$$

$$\Omega_{0b;B} = \left[\frac{4\Omega_b^4 \left(\coth\left(\frac{\Omega_b\pi}{2}\right) + \cot\left(\frac{\Omega_b\pi}{2}\right) \right)^{-1}}{\gamma\pi\Omega_b + \left(\coth\left(\frac{\Omega_b\pi}{2}\right) + \cot\left(\frac{\Omega_b\pi}{2}\right) \right)^{-1}} \right]^{1/4}, \quad (1.66)$$

$$\Omega_{0b;C1} = \left[\frac{4\Omega_b^4 \frac{\cosh(\Omega_b\pi) + \cos(\Omega_b\pi)}{\left[\sqrt{\sin(\Omega_b\pi)} + \sqrt{\sinh(\Omega_b\pi)} \right]^2}}{\gamma\pi\Omega_b + \frac{\cosh(\Omega_b\pi) + \cos(\Omega_b\pi)}{\left[\sqrt{\sin(\Omega_b\pi)} + \sqrt{\sinh(\Omega_b\pi)} \right]^2}} \right]^{1/4}, \quad (1.67)$$

$$\Omega_{0b;C2} = \left[\frac{4\Omega_b^4 \frac{\cosh(\Omega_b\pi) + \cos(\Omega_b\pi)}{\left[\sqrt{\sin(\Omega_b\pi)} - \sqrt{\sinh(\Omega_b\pi)} \right]^2}}{\gamma\pi\Omega_b + \frac{\cosh(\Omega_b\pi) + \cos(\Omega_b\pi)}{\left[\sqrt{\sin(\Omega_b\pi)} - \sqrt{\sinh(\Omega_b\pi)} \right]^2}} \right]^{1/4}. \quad (1.68)$$

Les indices A et B des relations 1.65 et 1.66 font référence aux modes A_n et B_n définis précédemment (voir figure 1.24), les indices $C1$ et $C2$ des relations 1.67 et 1.68 désignent les frontières de la bande interdite de résonance.

Les courbes correspondantes sont tracées sur la figure 1.29. Les valeurs de f_i , f_{ii} et f_{iii} définissent les valeurs de la pulsation adimensionnée de l'absorbeur dynamique permettant d'obtenir une coïncidence entre la bande interdite de résonance et la bande interdite de Bragg. Nous ne discutons pas ici de f_{iii} pour

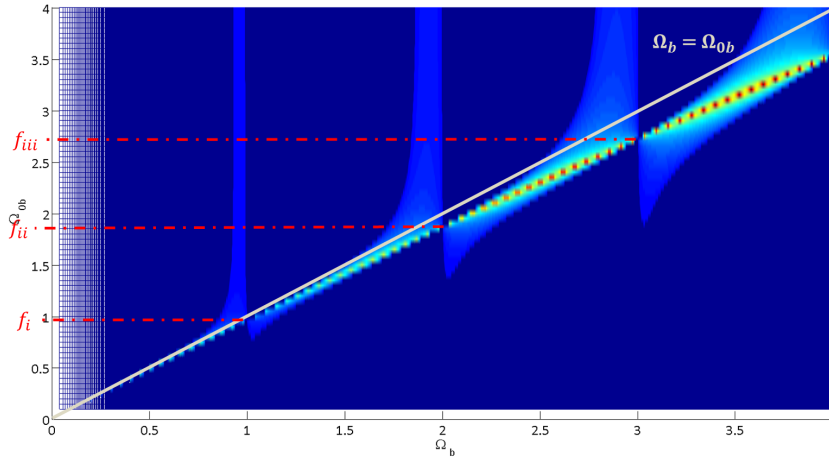


FIG 1.28 – $\min\{|\Re(\mu)|\}$ dans le plan (Ω_b, Ω_{ob}) . Le calcul est réalisé pour $\gamma = 0.2$.

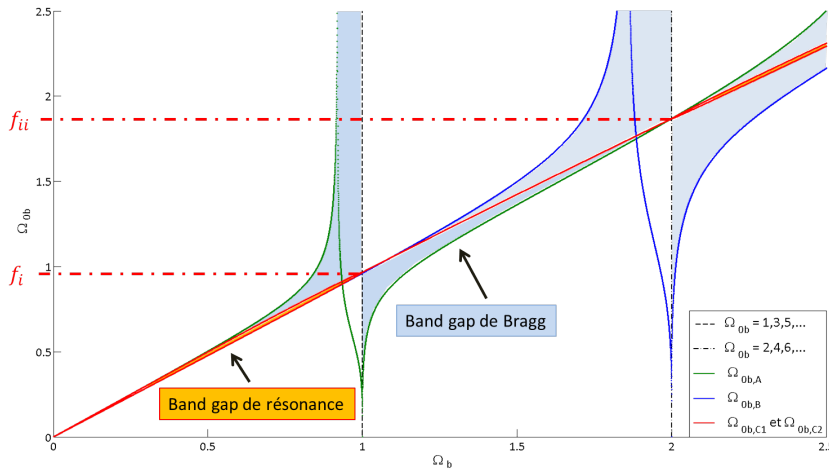


FIG 1.29 – Courbes obtenues à partir des relations 1.65 à 1.68. $\gamma = 0.2$.

alléger les propos. Ces valeurs de f_i et f_{ii} sont obtenues en calculant respectivement la relation 1.66 pour $\Omega_b = 1$ et la relation 1.65 pour $\Omega_b = 2$. Dans le cas présenté en figure 1.29, $f_i \simeq 0.967$ et $f_{ii} \simeq 1.867$. On constate alors sur cette figure que plus la fréquence de l'absorbeur dynamique est proche de ces valeurs de f_i et f_{ii} et plus la zone complexe tend à disparaître, autrement dit, la bande interdite de résonance disparaît elle aussi.

La figure 1.30 montre la bande interdite obtenue lorsque la fréquence de l'absorbeur dynamique est paramétrée de manière à avoir une coïncidence entre la bande interdite de résonance et une bande interdite de Bragg. Cette figure est obtenue à partir du calcul de $\min\{|\Re(\mu)|\}$ avec $\gamma = 0.2$ et $\Omega_{ob} = f_{ii} = 1.867$. On remarque alors, comme dans le cas de la poutre en traction/compression, la formation d'une « super » bande interdite. Mais, à la fréquence de Bragg ($\Omega_b = 2$), il apparaît une singularité pour laquelle les ondes se propagent avec une vitesse qui tend vers l'infini. Cette singularité est due à l'existence d'un mode naturel de vibration de la structure indépendant de l'absorbeur dynamique.

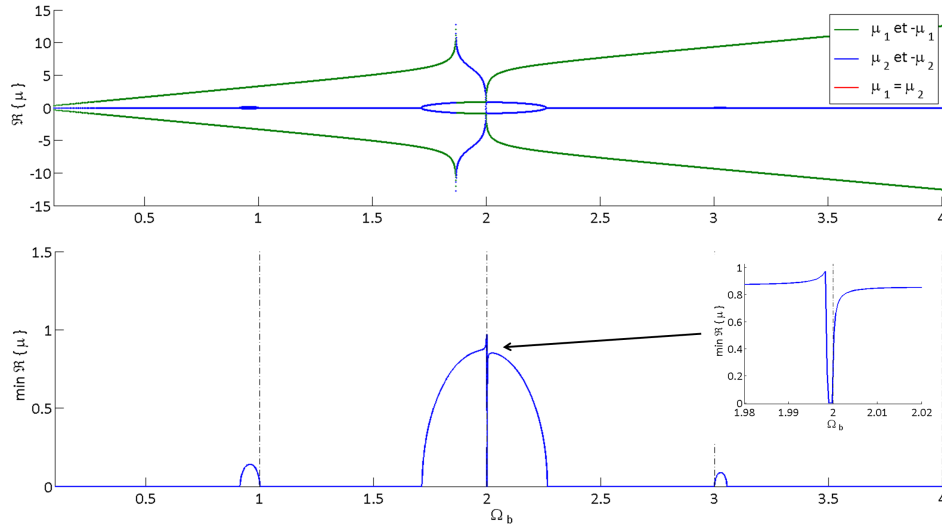


FIG 1.30 – $\min\{|\Re(\mu)|\}$ pour $\gamma = 0.2$ et $\Omega_{0b} = f_{ii} = 1.867$.

1.2.2 Structures bidimensionnelles

1.2.2.1 Éléments théoriques

Zone de Brillouin Léon Brillouin (1889-1969), physicien spécialiste dans la propagation des ondes et dans la physique du solide, établit, à la suite de ses travaux dans le domaine de la cristallographie, un modèle mathématique pour décrire les structures périodiques [75]. Il est également à l'origine de la modélisation de la propagation des ondes dans ces structures. Dès lors, la propagation des ondes dans les milieux périodiques peut être décrite sur la **première zone de Brillouin** qui est définie comme une cellule primitive irréductible de l'espace réciproque des nombres d'ondes ; dans l'espace réel, cette zone est définie par la plus petite figure géométrique dont les côtés forment des axes de symétrie. En effet, Brillouin montre que toutes les solutions du problème homogène, fonctions d'ondes solutions d'une propagation périodique appelées **ondes de Bloch**, peuvent être uniquement calculées sur le pourtour de cette zone. Les solutions sont conventionnellement représentées dans des **diagrammes de bandes**. Ces diagrammes témoignent de la propagation ou non des ondes. Une représentation de la zone de Brillouin et un exemple de représentation en diagramme de bande associé sont présentés par la figure 1.31.

Les solutions sont obtenues en utilisant le théorème de Floquet, dans le cas 1D, et de Bloch dans le cas 2D et 3D, qui s'appliquent aux systèmes dynamiques périodiques.

Théorème de Bloch Les descriptions ci-dessous sont principalement extraites de [75, 76, 83, 94].

Le théorème de Bloch peut être considéré comme une généralisation du théorème de Floquet (§1.2.1) aux systèmes 2D et 3D [76]. Considérons un milieu dont les propriétés dynamiques $M(\mathbf{r})$ satisfont la condition périodique suivante :

$$M(\mathbf{r} + \mathbf{R}\cdot\mathbf{m}) = M(\mathbf{r}), \quad (1.69)$$

où $\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^3$ et $\mathbf{R} = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3] \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ est la matrice du réseau qui contient les vecteurs $\mathbf{a}_j, j = 1, 2, 3$ qui définissent les dimensions et les directions de périodicité du domaine Ω_R de la cellule unitaire dans

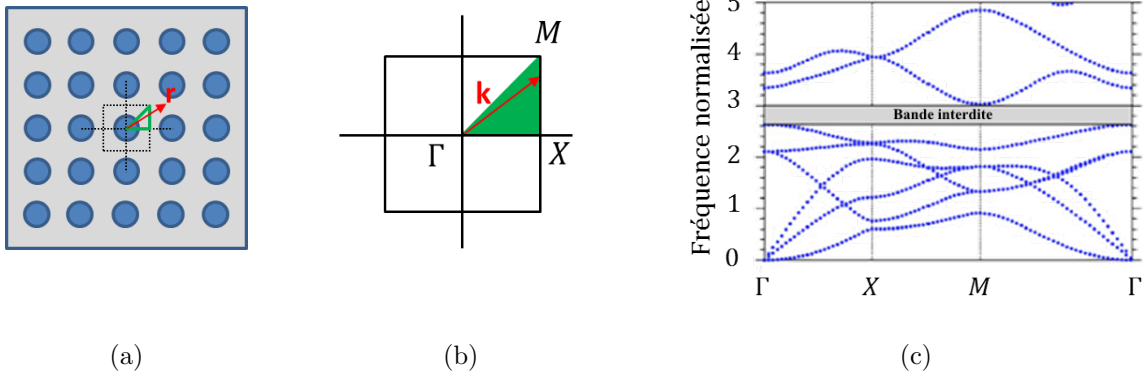


FIG 1.31 – (a) Espace réel. (b) Espace réciproque, zone irréductible de Brillouin. (c) Exemple de représentation en diagramme de bandes (partie réelle des nombres d’ondes); figure empruntée à [56].

l’espace réel $\mathbf{r} = (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3)$. Soit : $\mathbf{a}_1 = (a_{11}, a_{12}, a_{13})$, $\mathbf{a}_2 = (a_{21}, a_{22}, a_{23})$ et $\mathbf{a}_3 = (a_{31}, a_{23}, a_{33})$. La cellule unitaire réciproque Ω_G est alors définie par la base des vecteurs réciproques à \mathbf{a}_j notée \mathbf{g}_k respectant :

$$\mathbf{a}_j \cdot \mathbf{g}_k = 2\pi\delta_{jk} , \quad (1.70)$$

où δ_{jk} est le symbole de Kronecker. On obtient alors la matrice du réseau réciproque $\mathbf{G} = [\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3]$ (figure 1.32). Géométriquement, si Ω_R définit la cellule unitaire irréductible, Ω_G correspond alors à **la première zone irréductible de Brillouin**; voir la figure 1.31. Par exemple sur la figure 1.32 : $\mathbf{a}_1 = (a_1, 0, 0)$, $\mathbf{a}_2 = (0, a_2, 0)$ et $\mathbf{a}_3 = (0, 0, a_3)$, de même que $\mathbf{g}_1 = (2\pi/a_1, 0, 0)$, $\mathbf{g}_2 = (0, 2\pi/a_2, 0)$ et $\mathbf{g}_3 = (0, 0, 2\pi/a_3)$.

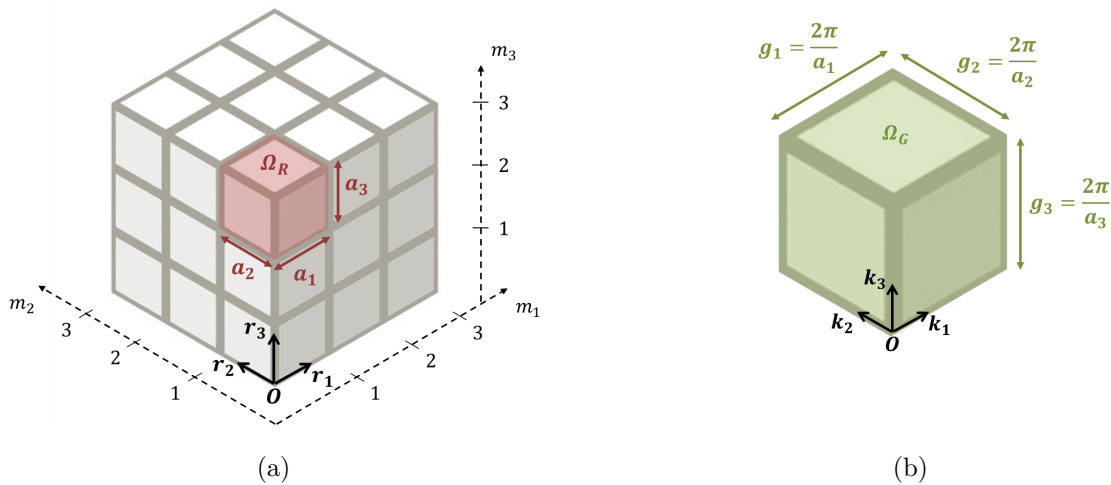


FIG 1.32 – Schéma d’une cellule périodique de domaine Ω_R en 3D (a) et de sa cellule réciproque (b).

Le théorème de Bloch stipule que toutes les fonctions $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ de $\Omega_R \in \mathbb{C}$ peuvent être exprimées de la

façon suivante :

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \int_{\Omega_G} \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{r}, \mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d\mathbf{k}, \quad (1.71)$$

où $\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{r}, \mathbf{k})$ sont appelées les amplitudes de Bloch et sont Ω_G périodiques dans $\mathbf{k} = (\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3)$ avec \mathbf{k}_1 , \mathbf{k}_2 , \mathbf{k}_3 les vecteurs d'ondes de Bloch. Les amplitudes de Bloch peuvent s'écrire :

$$\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{r}, \mathbf{k}) = \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^3} \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k} + G\mathbf{m}) e^{iG\mathbf{m}\cdot\mathbf{r}} = \frac{|\Omega|}{(2\pi)^3} \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^3} \mathbf{u}(\mathbf{r} + \mathbf{Rm}) e^{-i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r} + \mathbf{Rm})}, \quad (1.72)$$

où $\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k})$ est la transformée de Fourier de $\mathbf{u}(\mathbf{r})$. On utilise alors ce théorème pour représenter les solutions des équations aux dérivées partielles d'un milieu périodique. En imposant ainsi une forme de solution spatialement périodique, la résolution du problème homogène aux valeurs propres permet de calculer les courbes de dispersion du système.

1.2.2.2 Étude théorique du modèle d'une plaque munie d'un réseau périodique d'absorbeurs dynamiques

Dans cette section, nous cherchons à montrer, comme précédemment dans le cas d'un système 1D, la formation et le couplage des bandes interdites étendu dans le cas d'une structure bidimensionnelle. Les explications données ci-dessous sont tirées de l'article [95] mais de nombreux autres articles traitent de ce type d'étude [54–62].

Le système Une plaque de longueur infinie, de masse volumique ρ , de module d'Young E et de hauteur h est munie d'un réseau périodique d'absorbeurs dynamiques chacun constitué d'une masse M et d'un ressort K . La distance entre deux systèmes « masse-ressort » est notée a . Un schéma du système étudié est présenté par la figure 1.33.

Cette structure périodique peut donc être décomposée en une infinité de cellules de longueur a (sur la figure 1.33, $a = a_1 = a_2$.)

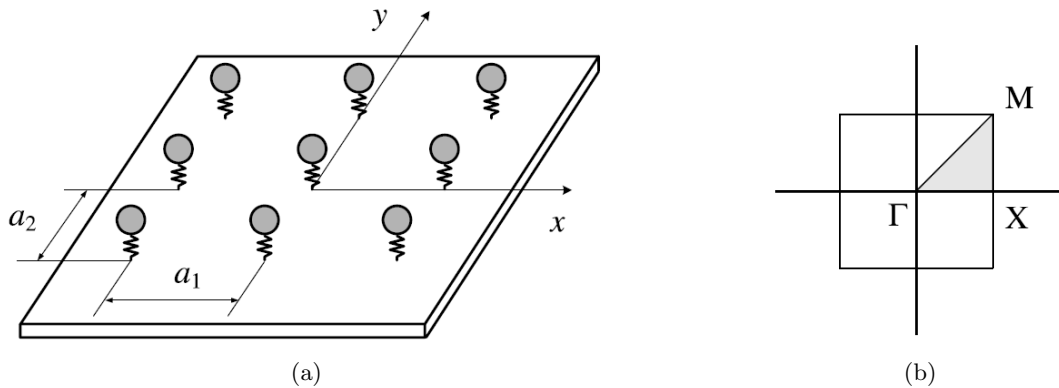


FIG 1.33 – (a) Représentation schématique du système étudié : une plaque de longueur infinie, de masse volumique ρ , de module d'Young E et de hauteur h , munie d'un réseau périodique d'absorbeurs dynamiques « masse-ressort » de masse M et de raideur K . $a = a_1 = a_2$ est la distance entre deux points d'attache des absorbeurs. (b) Zone de Brillouin correspondante. La zone grise est la zone irréductible de Brillouin. Figure empruntée à [95].

Formulation analytique et simulation numérique La référence bibliographique [95] donne un développement du modèle mathématique qu'il n'est pas utile de reprendre ici. Simplement, ce modèle permet de tracer les diagrammes de bande montrant les courbes de dispersion du système calculées sur le pourtour de la zone irréductible de Brillouin (voir figure 1.33b). Deux exemples tirés de [95] sont proposés ci-dessous afin de mieux comprendre les phénomènes mis en jeu lors du passage d'un système 1D à un système 2D.

Les paramètres sont : $E = 70 \text{ GPa}$, $\nu = 0.3$, $\rho = 2700 \text{ kg.m}^{-3}$, $h = 0.002 \text{ m}$, $a_1 = a_2 = a = 0.1 \text{ m}$, $M = 0.027 \text{ kg}$.

Dans le premier exemple, la fréquence propre de l'absorbeur dynamique notée ici f_R est $f_R = 300 \text{ Hz}$, soit $K = 9.593 \cdot 10^4 \text{ N.m}^{-1}$; dans le second exemple, $f_R = 425 \text{ Hz}$, soit $K = 1.925 \cdot 10^5 \text{ N.m}^{-1}$. La figure 1.34 montre la partie réelle des courbes de dispersion en flexion pure représentées dans un diagramme de bande.

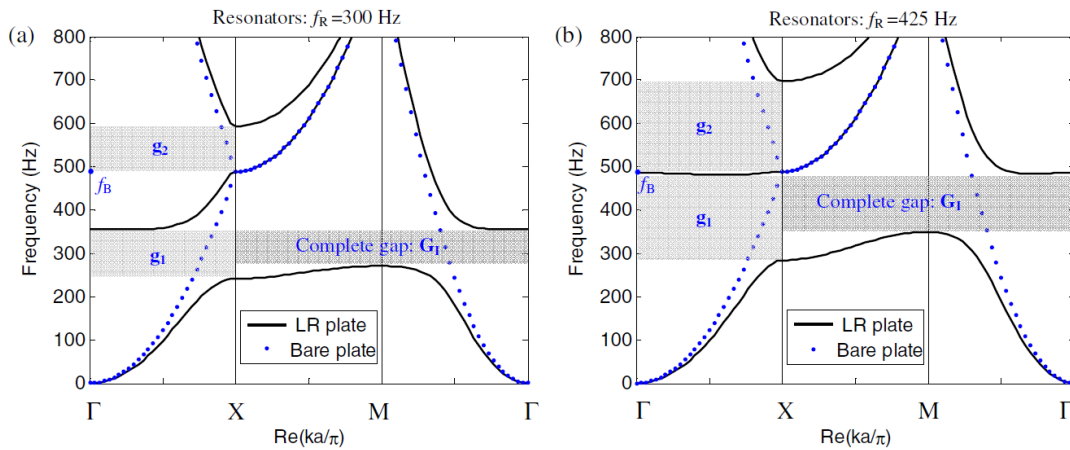


FIG 1.34 – Partie réelle des courbes de dispersion en flexion pure dans le cas d'une plaque simple (points bleus) et d'une plaque avec absorbeurs (en trait noir). À gauche, $f_R = 300 \text{ Hz}$, à droite, $f_R = 425 \text{ Hz}$. Figure empruntée à [95].

Sur ces graphiques, trois types de bandes interdites peuvent être identifiés : g_1 , g_2 et G_I :

- g_1 est la bande interdite de résonance. Comme on peut le constater sur les deux diagrammes de bandes, la position de cette bande interdite est gouvernée par la fréquence de résonance de l'absorbeur dynamique f_R .
- g_2 est une bande interdite de Bragg. Une des bornes de la bande interdite reste inchangée et correspond à la première fréquence de Bragg.
- G_I est appelée **bande interdite complète**. Cette bande interdite est présente dans toutes les directions contrairement aux bande interdites g_1 et g_2 qui sont seulement présentes dans la direction ΓX . On constate aussi que la position de cette bande interdite est gouvernée par la fréquence de résonance de l'absorbeur dynamique.

Les fréquences de Bragg sont données par :

$$f_{b,n}(\phi) = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\pi}{a \cos(\phi)} \right)^2 \sqrt{\frac{D}{\rho h}}, \text{ avec } n = 1, 2, 3, \dots \quad (1.73)$$

$D = Eh^3/12(1 - \nu^2)$ est la rigidité de flexion de la plaque et ϕ l'angle azimutal formé avec l'axe ΓX .

Dans les deux exemples ci-dessus, $\phi = 0$. La première fréquence de Bragg vaut $f_b = 484 \text{ Hz}$.

Notons que dans le deuxième exemple avec $f_R = 425 \text{ Hz}$, les deux bandes interdites g_1 et g_2 sont couplées et forment une « super » bande interdite. Ce comportement est similaire au phénomène de couplage des bandes interdites vu précédemment dans l'étude des systèmes 1D (voir §1.2.1.2 et §1.2.1.3).

Dans [95], les auteurs donnent une relation permettant de calculer les frontières des bandes interdites en fonction de la fréquence de résonance de l'absorbeur dynamique. La figure 1.35 montre les résultats obtenus pour le système étudié. Comme dans le cas de la poutre en flexion, la valeur de la fréquence f_R qui induit un couplage entre les deux bandes interdites g_1 et g_2 est différente de la fréquence de Bragg.

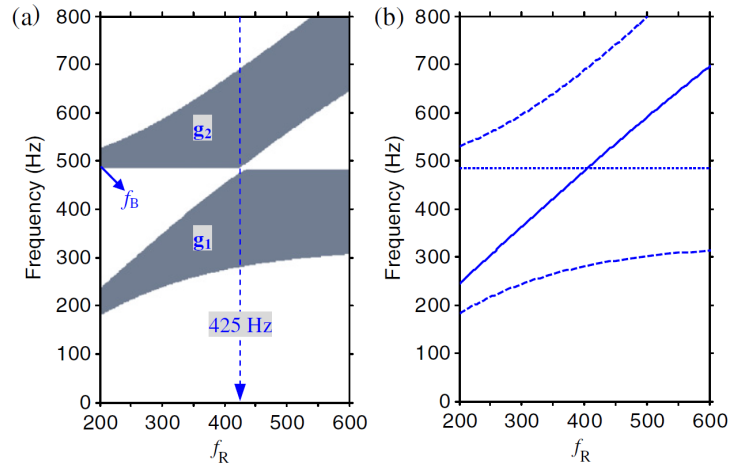


FIG 1.35 – Variation des frontières des bandes interdites g_1 et g_2 en fonction de la fréquence de l'absorbeur dynamique f_R . Figure empruntée à [95].

La figure 1.36 montre la partie réelle de la courbe de dispersion de la plaque en flexion pure pour $\phi = 0$ et la partie imaginaire pour différentes valeurs de ϕ . Plus ϕ augmente, plus la fréquence de Bragg augmente induisant ainsi une variation de la position des bandes interdites de Bragg, et plus l'atténuation liée à la bande interdite de résonance diminue.

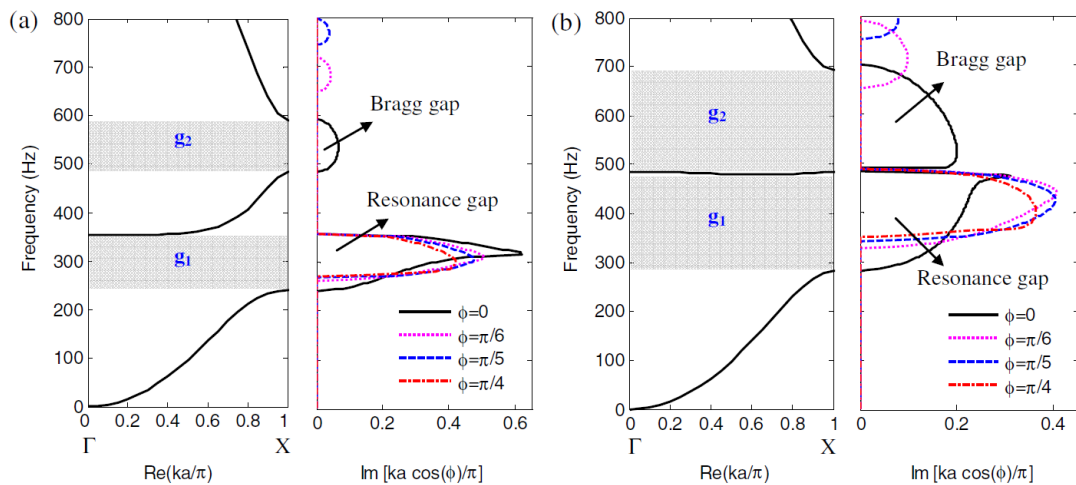


FIG 1.36 – Partie réelle et partie imaginaire des courbes de dispersion en flexion pure. Pour la partie réelle $\phi = 0$, pour la partie imaginaire ϕ prend les valeurs $0, \pi/6, \pi/5, \pi/4$. À gauche, $f_R = 300 \text{ Hz}$, à droite, $f_R = 425 \text{ Hz}$. Figure empruntée à [95].

Afin de mettre en avant l'effet des bandes interdites sur la propagation des ondes, les auteurs de cet

article [95] calculent numériquement le champ de déplacement de la métaplaque avec deux excitations harmoniques différentes : la première est une excitation linéique sur l'une des frontières de la plaque, la seconde est une excitation ponctuelle dans un des coins de la plaque (figure 1.37). Les conditions aux limites de la plaque sont considérées libres. Les fonctions de transfert représentatives des rapports de déplacement aux point 1 et point 2 sur les déplacements aux points d'excitation 1 et 2 de la figure 1.37 sont présentés par la figure 1.38.

Ces résultats mettent en relation l'étude des constantes de propagation sur un élément unitaire, le système étant alors considéré infini, et le comportement vibratoire associé sur un système fini. Une forte diminution des vibrations est visible sur les bandes fréquentielles définies par les bandes interdites. Les deux cas de simulation avec deux excitations différentes permettent de mettre en évidence que l'atténuation des ondes est différente selon la direction de propagation. Seule la bande interdite complète G_1 est visible dans toutes les directions.

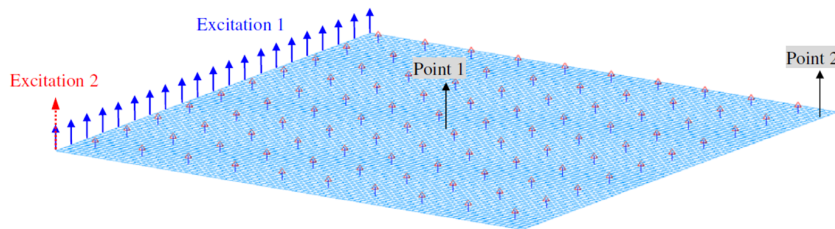


FIG 1.37 – Modèle numérique d'éléments finis de la plaque munie d'absorbeurs dynamiques mesurant 10×10 cellules unitaire. En bleu l'excitation linéique et en rouge l'excitation ponctuelle. Figure empruntée à [95].

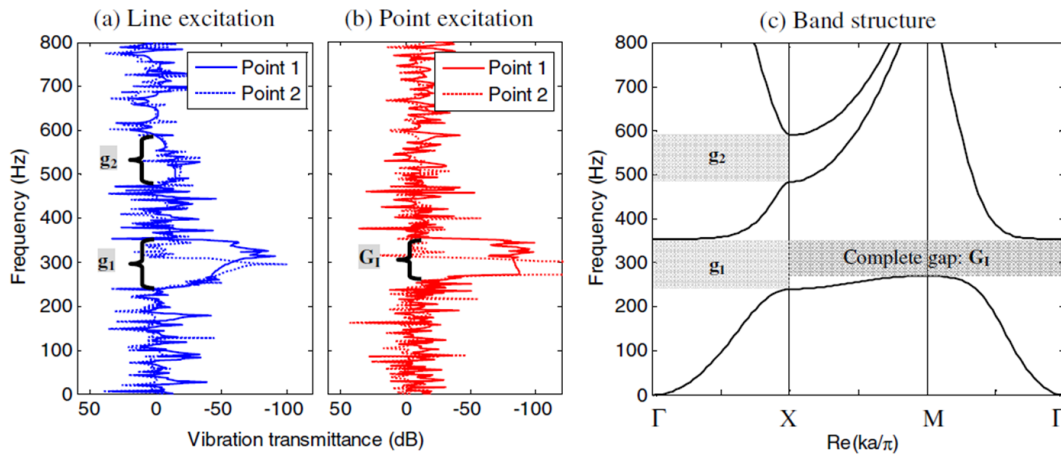


FIG 1.38 – Fonction de transfert du déplacement de la plaque finie munie d'absorbeurs dynamiques réglés à $f_R = 300 \text{ Hz}$ obtenue à partir de la simulation présentée par la figure 1.38. Figure empruntée à [95].

Le champ de déplacement de la plaque finie munie d'absorbeurs dynamiques réglés à $f_R = 300 \text{ Hz}$ est présenté par la figure 1.39 pour les deux cas d'excitation et pour différentes valeurs de la fréquence d'excitation : hors des bandes interdites (200 Hz), dans la bande interdite de résonance (320 Hz) et dans la bande de Bragg (550 Hz). Ces résultats montrent une forte atténuation des ondes dans toutes les directions lorsque la fréquence d'excitation est paramétrée dans la bande interdite de résonance, témoignant bien du fait que cette bande interdite est définie dans toutes les directions $\Gamma X M \Gamma$ comme

il est présenté sur le diagramme de bande associé en figure 1.38. Il en est de même lorsque la fréquence d'excitation est paramétrée dans la bande interdite de Bragg, les ondes sont atténuées dans la direction ΓX puisque cette bande interdite existe seulement dans cette direction.

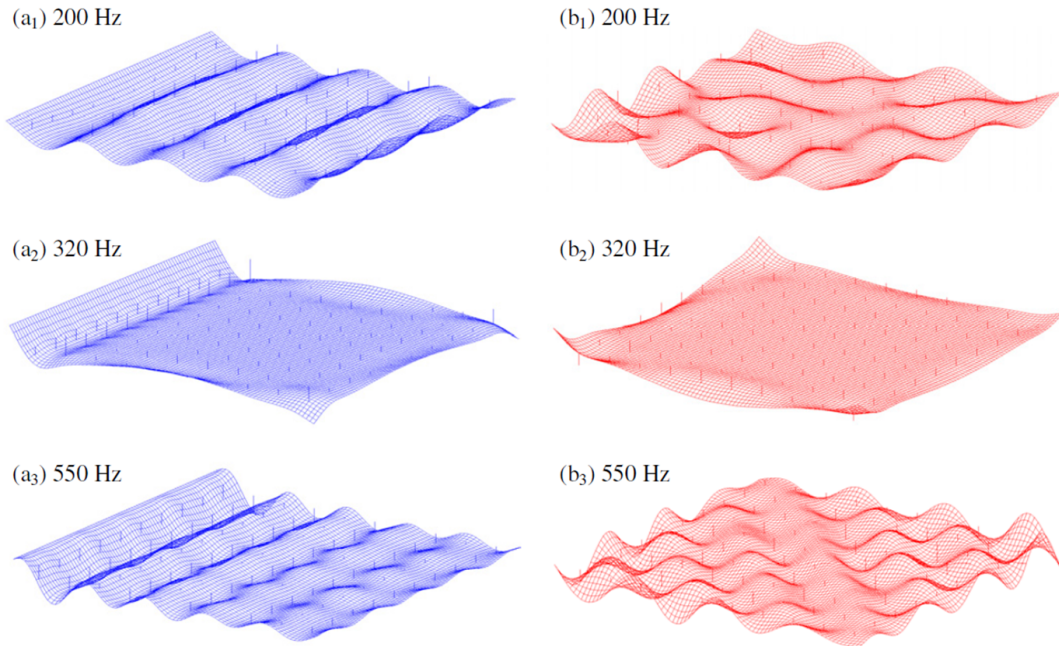


FIG 1.39 – Profil du champ de déplacement de la plaque finie munie d'absorbeurs dynamiques réglés à $f_R = 300 \text{ Hz}$ obtenu à partir de la simulation présentée par la figure 1.38. En bleu, l'excitation linéique, en rouge l'excitation ponctuelle. 200 Hz : hors des bandes interdites, 320 Hz : dans la bande interdite de résonance, 550 Hz : dans la bande interdite de Bragg. Figure empruntée à [95].

1.2.3 Métamatériaux piézoélectriques

Plusieurs équipes de chercheurs se sont déjà intéressées aux comportements dynamiques de systèmes métamatériaux piézocomposites. Quelques exemples sont donnés ici. Dans [23], les auteurs proposent un modèle analytique équivalent pour étudier la propagation des ondes de flexion dans une poutre munie d'un réseau périodique de patches shuntés par un shunt résonant. Les constantes de propagation sont calculées à partir du théorème de Floquet (voir §1.2.1.1). Ce modèle est ensuite validé expérimentalement. Dans [96], Filippo Casadei & al. étudient un réseau périodique hybride de patches piézoélectriques, en ce sens où les patches sont shuntés de manière alternée par un shunt résonant et par un shunt à capacité négative. Ils montrent alors que l'effet résultant de la combinaison des deux types de shunt revient à la combinaison des effets bénéfiques de chacun des shunts séparément. Parmi les auteurs de cet article, Benjamin S. Beck a travaillé pendant sa thèse sur l'utilisation de réseaux périodiques de patches piézoélectriques shuntés pour le contrôle vibratoire de systèmes continus [67]. Shengbing Chen & al. montrent expérimentalement la possibilité de créer des bandes interdites, et d'atténuer les ondes vibratoires dans ces bandes fréquentielles, pour une plaque munie d'un réseau périodique de patches shuntés par un shunt résonant [97]. On peut aussi citer les travaux de Manuel Collet & al. portant sur l'amortissement vibratoire utilisant des méthodes de shunt à capacité négative [27, 94]. Mais, nous nous intéressons de plus près aux travaux de Flaviano Tateo réalisés au cours de sa thèse [31]. Il utilise des réseaux périodiques de patches piézoélectriques shuntés par une capacité négative pour atténuer la transmission des ondes le long d'une paroi. Cette

thèse a été encadrée par Manuel Collet et Morvan Ouisse. L'objectif global de la thèse était de montrer la possibilité d'intégrer des transducteurs électromécaniques shuntés par capacité négative pour le contrôle vibratoire de structures. Le système étudié est présenté par les figures 1.40 et 1.41 : une plaque de dimensions $2100 \times 1050 \times 3 \text{ mm}^3$ munie d'une partie dite active qui est constituée d'un réseau périodique de patchs piézoélectriques de type PZ26 de dimensions $50 \times 50 \times 0.5 \text{ mm}^3$ et espacés les uns des autres de 10 mm . Ces patchs piézoélectriques sont shuntés par une capacité négative mise en série avec une résistance qui prendra soit une petite valeur de 40Ω (cas 1), soit une grande valeur de 400Ω (cas 2). La capacité négative est obtenue par un circuit électronique de synthèse analogique organisé autour d'un amplificateur opérationnel (AOP). La synthèse de la capacité négative est étudiée dans le chapitre suivant dans le §2.1. Les deux cas de figure permettent d'obtenir une configuration de réflexion (cas 1) et une configuration d'absorption (cas 2). Lorsque la résistance est faible, l'impédance du shunt est principalement gouvernée par la capacité négative et le réseau de patch agit donc sur la variation de la raideur de la zone couverte. Ainsi, ce réseau induit un changement d'impédance mécanique entre la zone non couverte et la zone couverte de patchs piézoélectriques : on obtient alors un effet de réflexion des ondes. Lorsque la résistance est plus grande, la variation de raideur est moins importante mais la dissipation d'énergie est augmentée. Les ondes se propagent alors plus facilement à travers le réseau et l'énergie mécanique qui est convertit en énergie électrique par l'effet piézoélectrique est dissipée par la résistance par effet Joule.

Pour paramétrer l'impédance du shunt selon la configuration choisie, deux critères ont été utilisés. Le premier critère, relatif au cas de réflexion, est basé sur la minimisation du maximum de la vitesse de groupe qui reflète le transport d'énergie. Le second critère, relatif à l'absorption, est basé sur la maximisation de la puissance électrique dissipée. Les deux méthodes permettent de diminuer l'énergie transmise à travers le réseau de patch, soit en la dissipant avec la configuration d'absorption, soit en l'isolant du même côté avec la configuration de réflexion.

L'étude paramétrique sur les valeurs de la capacité négative et sur la topologie du réseau montre qu'il est possible d'agir sur les bandes fréquentielles d'intérêts, la capacité négative agissant sur la largeur de bande fréquentielle et la topologie sur sa position.

Finalement, ces travaux ont montré, numériquement et expérimentalement, la réelle faculté du réseau actif de patchs piézoélectriques shuntés par une capacité négative a diminuer les ondes vibratoires basses fréquences qui se transmettent à travers celui-ci. Les résultats de ces travaux serviront de support dans notre étude.

Les différentes études menées jusqu'à aujourd'hui avec des métamatériaux piézocomposites portent principalement sur le contrôle modale de systèmes 1D et 2D avec des shunts résonants. L'utilisation de shunt à capacité négative n'a que très peu été étudié pour le contrôle modale de structure et pour atténuer les ondes vibratoires se propageant dans toutes les directions. En effet, peu de publications scientifiques montrent l'impact d'un shunt à capacité négative dans toutes les directions de propagations, à l'aide de diagramme de bande par exemple. De plus, toutes ces études mettent essentiellement en avant les potentialités de ce type de procédé dans le contrôle des vibrations, mais s'intéressent peu à son influence sur le rayonnement acoustique des structures.

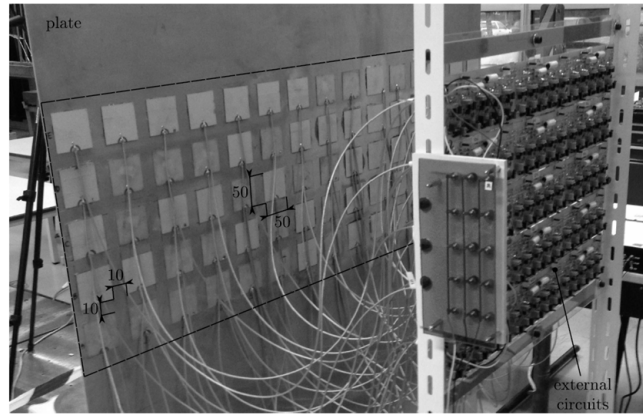


FIG 1.40 – Photo du système expérimental utilisé par Flaviano Tateo dans [31]. Figure empruntée à [31].

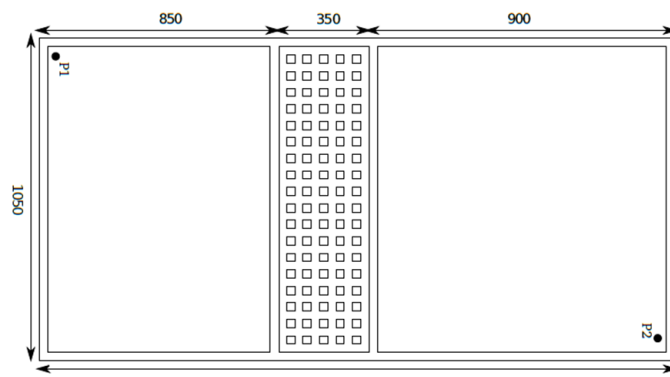


FIG 1.41 – Schéma du système expérimental utilisé par Flaviano Tateo dans [31] : une plaque de dimensions $2100 \times 1050 \times 3 \text{ mm}^3$ munie d'une partie dite active qui est constituée d'un réseau périodique de patches piézoélectriques de type PZ26 de dimensions $50 \times 50 \times 0.5 \text{ mm}^3$ et espacés les uns des autres de 10 mm .- Figure empruntée à [31].

1.3 Phénomènes vibroacoustiques

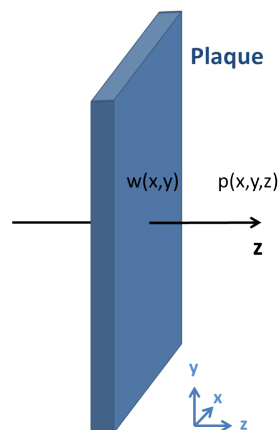


FIG 1.42 – Schéma du problème considéré : une plaque infinie de module d'Young E , de coefficient de Poisson ν , d'épaisseur h et de masse volumique ρ . $w(x,y)$ est le déplacement transverse de la plaque et $p(x,y,z)$ est la pression acoustique.

Les éléments donnés dans ce paragraphe sont tirés du cours de vibroacoustique de l'École Nationale Supérieure d'Ingénieurs du Mans (ENSIM) de Charles Pézerat [98], du livre de Claude Lesueur « Rayonnement acoustique des structures » [99] et du livre de Frank Fahy et Paolo Gardonio « Sound and structural vibration : radiation, transmission and reponse » [100].

1.3.1 Rayonnement acoustique et transparence de plaques infinies

Afin d'aider à la compréhension des phénomènes mis en jeu dans le couplage vibroacoustique entre structure et fluide, prenons le cas simple d'une plaque mince infinie dans un fluide léger, autrement dit sur laquelle la pression du fluide est négligeable (figure 1.42). Dans hypothèse d'une plaque mince, l'influence du cisaillement transversal et l'inertie de rotation sont négligeables.

Le déplacement transversal harmonique s'écrit :

$$w(x, y, t) = w(x, y)e^{j\omega t}, \quad (1.74)$$

avec $\omega = 2\pi f$ la pulsation, f est la fréquence. Pour simplifier les expressions, le terme $e^{j\omega t}$ est omis dans l'équation du mouvement de vibration de flexion de la plaque mince qui est :

$$D\nabla^4 w(x, y) - \omega^2 \rho h w(x, y) = 0, \quad (1.75)$$

où ω est la pulsation, ρ est la masse volumique de la plaque, h est l'épaisseur de plaque et $D = Eh^3/12(1 - \nu^2)$ est la rigidité de flexion (E est le module d'Young et ν est le coefficient de Poisson). Cette équation peut se mettre sous la forme :

$$\nabla^4 w(x, y) - k_f^4 w(x, y) = 0, \quad (1.76)$$

avec k_f le nombre d'ondes de flexion de la plaque qui est défini par :

$$k_f = \sqrt{\omega} \sqrt[4]{\rho h / D}. \quad (1.77)$$

La résolution de l'équation 1.76 donne deux types de solutions qui décrivent deux types d'ondes : les ondes vibratoires propagatives et évanescentes. Ces solutions sont de la forme :

$$w(x, y) = W e^{-j(k_{fx}x + k_{fy}y)}, \quad (1.78)$$

pour les ondes propagatives et :

$$w(x, y) = W e^{-(k_{fx}x + k_{fy}y)}, \quad (1.79)$$

pour les ondes évanescentes. La résolution de cette équation implique la relation de dispersion :

$$k_f^2 = k_{fx}^2 + k_{fy}^2. \quad (1.80)$$

où k_{fx} et k_{fy} sont les composantes du vecteur d'ondes de flexion.

Dans le domaine acoustique, la propagation des ondes dans un espace semi-infini est régie par l'équation de Helmholtz :

$$\nabla^2 p(x, y, z) + k^2 p(x, y, z) = 0 , \quad (1.81)$$

où k est le nombre d'ondes acoustiques du milieu de propagation qui est défini ici par $k = \omega/c$ avec c la vitesse du son, $p(x, y, z)$ est la pression acoustique en tous points du milieu de propagation. La pression acoustique prend la forme de solution suivante :

$$p(x, y, z) = P e^{-j(k_{ax}x + k_{ay}y + k_{az}z)} , \quad (1.82)$$

avec P qui représente l'amplitude des ondes. L'équation 1.81 implique alors la relation de dispersion :

$$k^2 = k_{ax}^2 + k_{ay}^2 + k_{az}^2 , \quad (1.83)$$

où k_{ax} , k_{ay} , et k_{az} sont les projections du nombre d'ondes acoustiques sur la base $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$, ils définissent les composantes du vecteur d'ondes acoustiques.

Les deux nombres d'ondes k_f et k sont tracés sur la figure 1.43. Quand $k = k_f$, la longueur d'onde acoustique correspond à la longueur d'ondes de flexion. La pulsation correspondante est nommée **pulsation critique** ω_c :

$$\omega_c = c^2 \sqrt{\frac{\rho h}{D}} = c^2 \sqrt{\frac{12\rho(1-\nu^2)}{Eh^2}} . \quad (1.84)$$

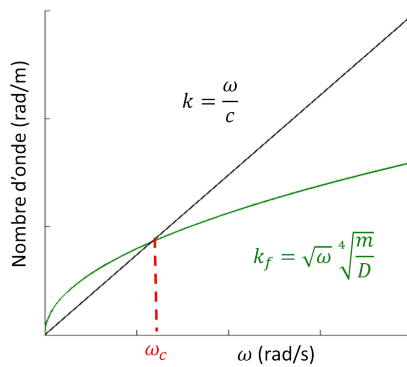


FIG 1.43 – Relation entre le nombre d'ondes acoustiques et le nombre d'ondes de flexion. ω_c est appelée pulsation critique et est donnée par la relation 1.84.

1.3.1.1 Rayonnement acoustique

La continuité des vitesses en $z = 0$ entre la vitesse particulière acoustique et la vitesse vibratoire mécanique de la plaque implique une égalité entre les composantes des nombres d'ondes acoustiques et de flexion :

$$k_{ax} = k_{fx} = k_x \quad \text{et} \quad k_{ay} = k_{fy} = k_y . \quad (1.85)$$

On écrit à présent $k_{az} = k_z$. Il est possible de montrer que le facteur rayonnement acoustique des parois σ , défini comme étant le rapport de la puissance acoustique rayonnée sur la vitesse quadratique moyenne, peut s'écrire [98] :

$$\sigma = \Re \left\{ \frac{k}{k_z} \right\}. \quad (1.86)$$

Par ailleurs, on peut également écrire :

$$k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2, \quad (1.87)$$

soit :

$$k_z^2 = k^2 - k_x^2 - k_y^2, \quad (1.88)$$

Comme $k_f^2 = k_x^2 + k_y^2$, on montre que le facteur de rayonnement est directement lié au rapport du nombre d'ondes de flexion de la plaque sur le nombre d'ondes acoustiques :

$$\sigma = \Re \left\{ \frac{k}{\sqrt{1 - \frac{k^2}{k_f^2}}} \right\}. \quad (1.89)$$

Nous avons vu que la résolution de l'équation de dispersion liée au problème donne deux types de solutions possibles, autrement dit deux types d'ondes vibratoires : propagatives (k_f est réel) et évanescentes (k_f est imaginaire) [98]. Ces deux types de solution sont conjugués.

Dans le cas d'ondes **vibratoires propagatives** :

- $k > k_f$, l'onde rayonnée est une onde plane dont l'angle θ par rapport à l'axe z est donné par $k_z = k \cos(\theta)$; le facteur de rayonnement vaut :

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{k_f^2}{k^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}}}. \quad (1.90)$$

- $k < k_f$, k_z devient imaginaire et ne correspond plus à un terme propagatif dans l'expression de la pression acoustique [98]. Les ondes acoustiques sont donc évanescentes et le facteur de rayonnement vaut :

$$\sigma = 0. \quad (1.91)$$

La figure 1.44 représente les deux formes d'ondes acoustiques que peut prendre le premier type de solution de l'équation de dispersion pour les fluides légers. Ces deux formes correspondent à des ondes de flexion propagatives dans la plaque.

Dans le cas d'ondes **vibratoires évanescentes**, la solution de l'équation de dispersion admet un type de solution correspondant à des ondes rayonnées. Le facteur de rayonnement vaut :

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{k_f^2}{k^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\omega_c^2}{\omega^2}}}. \quad (1.92)$$

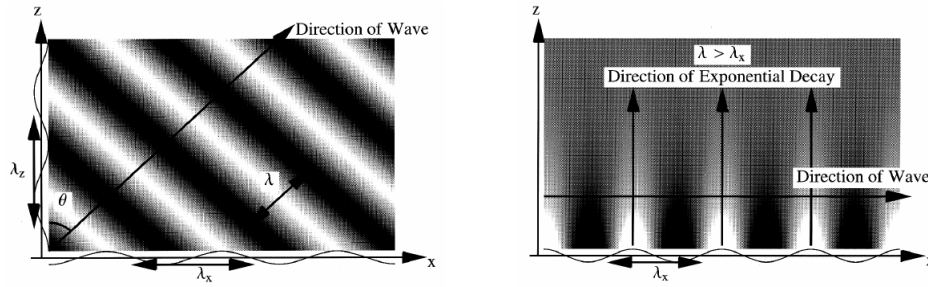


FIG 1.44 – Ondes acoustiques propagatives à gauche ($k > k_f$) et évanescentes à droite ($k < k_f$). Les ondes vibratoires sont propagatives. Figure empruntée à [98].

La figure 1.45 représente le facteur de rayonnement pour une plaque infinie pour les deux types d'ondes de flexion : propagatives et évanescentes.

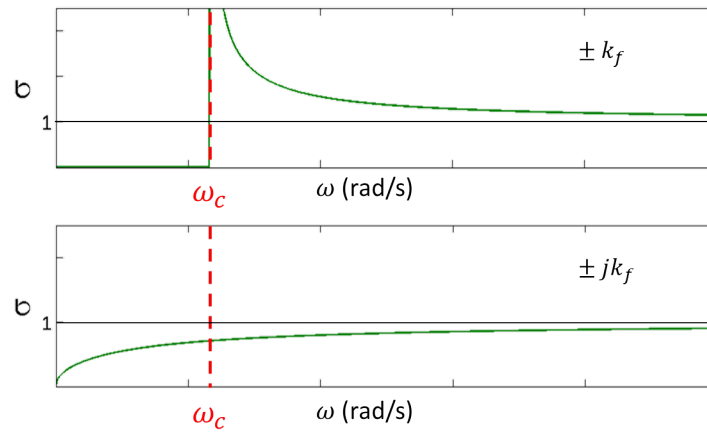


FIG 1.45 – Facteur de rayonnement σ pour des ondes vibratoires propagatives (en haut) et évanescentes (en bas).

1.3.1.2 La transparence acoustique

Pour caractériser la transmission acoustique, il peut être intéressant d'étudier le facteur de transmission d'une paroi τ qui est le rapport de la puissance acoustique de l'onde transmise \mathcal{W}_{tr} sur la puissance acoustique de l'onde incidente \mathcal{W}_{inc} :

$$\tau(\omega, \theta) = \mathcal{W}_{tr}/\mathcal{W}_{inc} , \quad (1.93)$$

ou de manière analogue l'indice d'affaiblissement R défini par :

$$R(\omega, \theta, \varphi) = 10 \log_{10} (1/\tau) . \quad (1.94)$$

La direction des ondes incidentes est définie par deux angles θ et φ (voir la figure 1.46a). Dans le cas d'une plaque isotrope, pour un angle θ donné, le profil du champ vibratoire n'a pas de dépendance selon l'angle φ ; φ est donc considéré nul. La figure 1.46b montre l'allure de l'indice d'affaiblissement R pour une excitation en champ d'ondes planes d'une plaque infinie en fonction de l'angle d'incidence θ pour $\varphi = 0^\circ$.

Une singularité sépare deux zones distinctes. Cette singularité correspond à la fréquence de coïncidence f_{coin} (relation 1.95) qui est naturellement liée à la fréquence critique f_c (relation 1.84) :

$$f_{coin} = \frac{c^2}{2\pi \sin^2(\theta)} \sqrt{\frac{\rho h}{D}} = \frac{f_c}{\sin^2(\theta)}. \quad (1.95)$$

Notons ici que $f_{coin} = f_c$ pour $\theta = 90^\circ$.

La pente est de 6 dB/oct avant la fréquence de coïncidence et de 18 dB/oct après. On peut noter également qu'avant la fréquence de coïncidence, l'amplitude de l'indice d'affaiblissement est contrôlée par la masse, l'anti-résonance à f_{coin} par l'amortissement, et qu'après f_{coin} l'indice d'affaiblissement est contrôlé par la raideur.

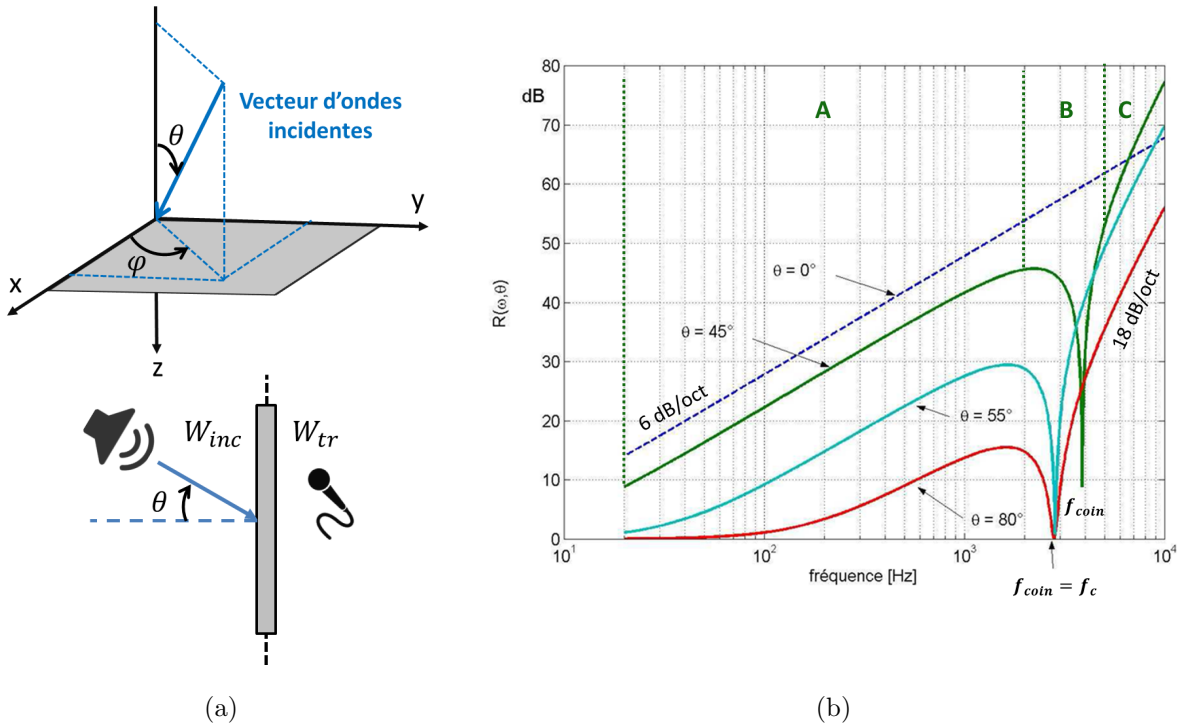


FIG 1.46 – (a) Onde plane incidente fonction de θ et de φ . (b) Indice d'affaiblissement R d'une plaque infinie excitée par une onde plane d'angle incident θ ($\varphi = 0^\circ$). f_{coin} est la fréquence de coïncidence définie par la relation 1.84 et f_c est la fréquence critique égale à f_{coin} pour $\theta = 90^\circ$. Les zones A,B,C ne sont définies ici que pour la courbe verte ($\theta = 45^\circ$) ; A : contrôlé par la masse, B : contrôlé par l'amortissement, C : contrôlé par la raideur. Figure empruntée à [98].

Le modèle de champ diffus est obtenu par sommation des effets de pression d'ondes planes d'angle d'incidence variant de $\theta = 0^\circ$ à $\theta = 90^\circ$ ($\pi/2$) et de $\varphi = 0^\circ$ à $\varphi = 360^\circ$ (2π) si φ est considéré différent de 0. [99]. Cet effet de sommation a deux conséquences :

- les fréquences de coïncidence de chaque θ_i disparaissent par effet de moyenne, une seule fréquence de coïncidence est visible, elle correspond à la fréquence critique qui est obtenue avec la valeur d'angle le plus grand (théoriquement $\theta = 90^\circ$ et $f_{coin} = f_c$) ;
- pour les fréquences en dessous de cette fréquence critique, l'indice d'affaiblissement noté R_d croît de 6 dB/oct et respecte la loi de masse donnée par la relation 1.96 [99] :

$$R_d = R_0 - 10 \log_{10}(0.23 R_0), \quad (1.96)$$

où R_0 est l'indice d'affaiblissement obtenu en champ d'ondes planes avec un angle d'incidence $\theta = 0^\circ$. Pour les fréquences au dessus de la fréquence critique, R_d croît de $9dB/oct$.

Une représentation de l'indice de rayonnement en champ diffus est donnée en figure 1.47.

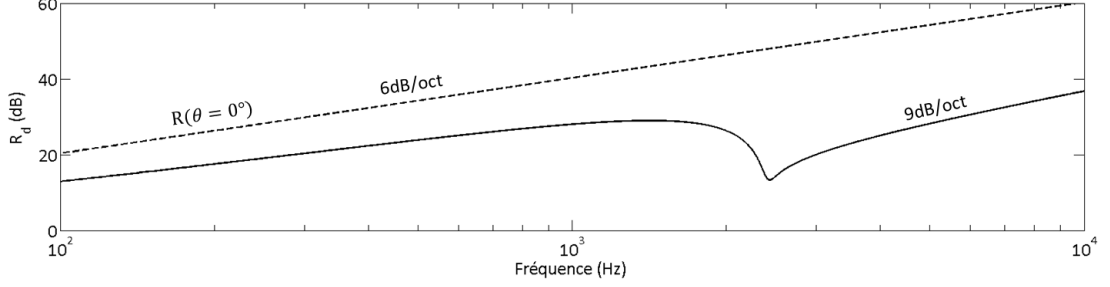


FIG 1.47 – Indice d'affaiblissement R_d d'une plaque infinie excitée par un champ diffus. $R(\theta = 0^\circ)$ est l'indice d'affaiblissement obtenu en champ d'onde plane avec un angle d'incidence $\theta = 0^\circ$.

1.3.2 Conséquences sur les plaques finies

On considère une plaque finie qui sépare deux milieux infinis. Ici, ces deux milieux sont identiques et sont de l'air. Cette plaque est considérée encastrée dans un baffle plan infini rigide. Il n'y a pas d'intérêt à réécrire les équations du problème qui sont dans [98, 99], ce paragraphe donne simplement quelques notions sur le rayonnement des plaques finies.

Il est possible de montrer que la pression acoustique rayonnée dans le milieu semi-infini est :

$$p(x, y, z) = j\omega \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{\rho_0 c k}{\sqrt{k^2 - k_z^2 - k_y^2}} e^{-j\sqrt{k^2 - k_z^2 - k_y^2}z} W(k_x, k_y) \right] e^{-j(k_x x + k_y y)} \frac{dk_x}{2\pi} \frac{dk_y}{2\pi}, \quad (1.97)$$

avec $W(k_x, k_y)$ la transformée de Fourier 2D spatiale du déplacement :

$$W(k_x, k_y) = \iint_S w(x, y) e^{j(k_x x + k_y y)} dx dy. \quad (1.98)$$

En utilisant les coordonnées sphériques :

$$\begin{cases} x = R \sin\theta \cos\varphi \\ y = R \sin\theta \sin\varphi \\ z = R \cos\theta \end{cases}, \quad (1.99)$$

la relation 1.97 devient :

$$p(R, \theta, \varphi) = j\omega \rho_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-jR(k_x \sin\theta \cos\varphi + k_y \sin\theta \sin\varphi + k_z \cos\theta)}}{k_z} W(k_x, k_y) \frac{dk_x}{2\pi} \frac{dk_y}{2\pi}, \quad (1.100)$$

où R est la distance parcourue par l'onde acoustique entre le point d'émission et le point de réception. Cette relation 1.100 permet de calculer le champ de pression acoustique rayonné par une plaque finie à partir du champ de vitesse vibratoire. Pour ce faire, on utilise communément la **méthode de l'intégrale**

de **Rayleigh** [101–105]. La puissance acoustique rayonnée \mathcal{W}_a peut être calculée en champ lointain sur une hémisphère à partir de cette méthode discrétisée en considérant chaque élément d'un maillage spatial défini sur la surface de la plaque, éléments carrés par exemple, comme étant un piston qui émet son propre rayonnement. La pression acoustique en un point de l'hémisphère est la somme des pressions émises en ce point par tous les pistons (relation 1.101, figure 1.48a). Pour obtenir la puissance totale acoustique, on réalise une somme discrète de ces pressions et plus exactement des intensités acoustiques (relation 1.102, figure 1.48b).

$$p_{\omega,n} = -jk\rho_0c_0 \sum_{i=1}^i \frac{e^{jkR_{i,n}}}{2\pi R_{i,n}} v_{\omega,i}(x,y) dx dy \quad (1.101)$$

$$\mathcal{W}_{a,\omega} = \sum_{n=1}^n \frac{|p_{\omega,n}|^2}{\rho_0c} R^2 \sin(\theta) d\theta d\varphi \quad (1.102)$$

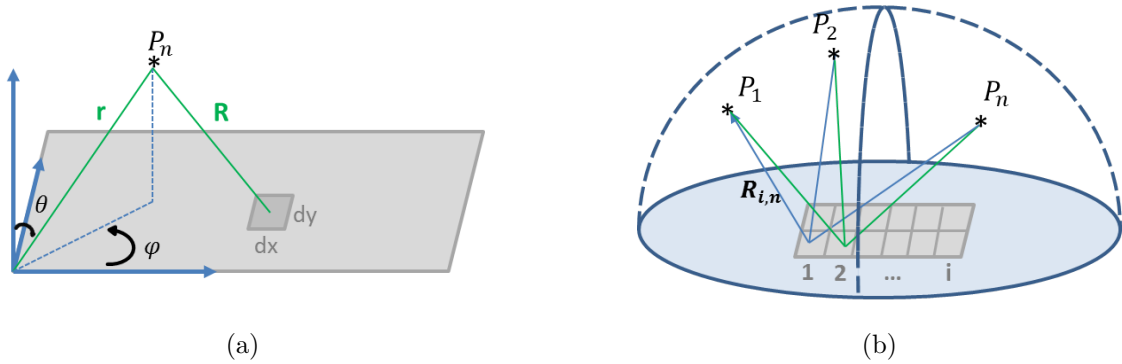


FIG 1.48 – Schéma du principe du calcul de l'intégrale de Rayleigh discrétisée sur une hémisphère.

Le rayonnement acoustique d'une plaque finie peut alors être caractérisé par les facteurs ci-dessous :

- le facteur de rayonnement σ_{ray} défini par :

$$\sigma_{ray} = \frac{\mathcal{W}_a}{\rho_0c \langle |v|^2 \rangle ab} , \quad (1.103)$$

avec \mathcal{W}_a la puissance acoustique rayonnée, ρ_0 et c la masse volumique et la célérité des ondes acoustiques dans l'air, $\langle |v|^2 \rangle$ la moyenne du champ de vitesse transverse au carré (moyenne de la vitesse quadratique) et a et b les dimensions de la plaque (longueur, largeur).

- le facteur $\sigma_{\mathcal{W}}$ que nous définirons comme le rapport entre la puissance acoustique rayonnée \mathcal{W}_a et la puissance mécanique injectée $\mathcal{W}_m = \frac{1}{2} \Re\{Fv^*\}$:

$$\sigma_{\mathcal{W}} = \frac{\mathcal{W}_a}{\mathcal{W}_m} = \frac{\mathcal{W}_a}{\frac{1}{2} \Re\{Fv^*\}} , \quad (1.104)$$

où F est la force d'excitation et v la vitesse transverse des ondes vibratoires.

La figure 1.49 présente le facteur de rayonnement pour différents modes d'une plaque en flexion pure appuyée sur ses bords [102]. Chaque mode (m, n) a un maximum de rayonnement pour $k/k_{mn} = 1$ où k_{mn} est le nombre d'ondes défini pour le mode (m, n) :

$$k_{mn} = \sqrt{\frac{m^2\pi^2}{a^2} + \frac{n^2\pi^2}{b^2}}, \quad (1.105)$$

$$\omega_{mn} = \sqrt{\frac{D}{\rho h} \left(\frac{m^2\pi^2}{a^2} + \frac{n^2\pi^2}{b^2} \right)}, \quad (1.106)$$

avec a et b étant les dimensions de la plaque. Lorsque ce rapport est égal à 1, on peut montrer que la pulsation correspondante est :

$$\omega_c^{mn} = \sqrt{\omega_{mn}} c \sqrt[4]{\frac{\rho h}{D}}, \quad (1.107)$$

qui définit la pulsation critique du mode (m, n) . Tout comme dans le cas de la plaque infinie, cette fréquence critique sépare deux zones distinctes :

- $\omega < \omega_c^{mn}$, le facteur de rayonnement est fonction d'un effet à la fois résistif et réactif de l'impédance de rayonnement ; le mode rayonne peu.
- $\omega > \omega_c^{mn}$, le facteur de rayonnement est principalement fonction d'un effet résistif de l'impédance de rayonnement qui décroît vers 1.
- $\omega = \omega_c^{mn}$, le mode rayonne à son maximum.

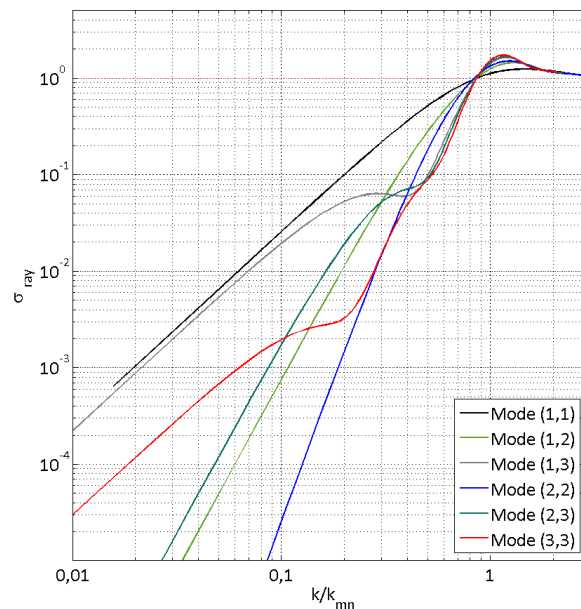


FIG 1.49 – Facteur de rayonnement pour une plaque finie en flexion pure appuyée sur ces bords. Le ratio k/k_{mn} définit le rapport entre le nombre d'ondes et le nombre d'ondes du mode (m, n) .

On peut constater sur la figure 1.49 que l'amplitude du facteur de rayonnement diffère pour chacun des modes. Pour expliquer cela, considérons une plaque appuyée dont une des dimensions est infinie, dans

ce cas, la déformée modale de la plaque s'écrit :

$$\phi(m) = A_m \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right). \quad (1.108)$$

Il est possible de montrer que la puissance acoustique rayonnée peut s'écrire :

$$\Pi = \frac{\rho_0 c \omega^2 |A_m|^2}{2} \int_{-k}^{+k} \frac{k \Phi_p^2(k_x, k_y)}{\sqrt{k^2 - k_x^2}} \frac{dk_x}{2\pi}, \quad (1.109)$$

où A_m est l'amplitude du mode et $\Phi_p^2(k_x)$ est la Transformée de Fourier Spatiale de la déformée modale $\phi(m)$ exprimée par :

$$\Phi_p^2(k_x) = \left[\frac{2\pi m/a}{k_x^2 - (m\pi/a)^2} \right]^2 \sin^2(k_x a - m\pi), \quad (1.110)$$

La figure 1.50 présente le spectre du nombre d'ondes pour un mode m donné.

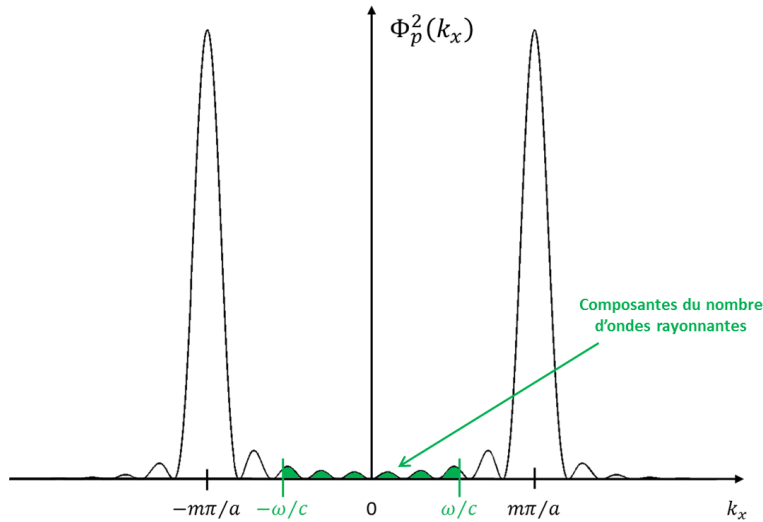


FIG 1.50 – Spectre de la déformée du mode m dans l'espace des nombres d'ondes d'une plaque appuyée dont une des dimensions est considérée infinie.

Le spectre du nombre d'ondes, figure 1.50, montre une partie verte qui correspond à la puissance acoustique rayonnée calculée à partir de la relation 1.110 pour une fréquence donnée. Lorsque $k = \omega/c$ tend vers $k_x = m\pi/a$, la puissance rayonnée devient maximale. Par conséquent, si à la pulsation naturelle du mode m donnée par :

$$\omega_m = \sqrt{\frac{D}{\rho h}} \left(\frac{m^2 \pi^2}{a^2} \right), \quad (1.111)$$

$k_m = m\pi/a$ est supérieur à k , le rayonnement devient maximal. On comprend dès lors qu'en fonction de la fréquence des modes, la proportion d'énergie rayonnée est différente.

Une représentation plus visuelle est donnée dans [98] en plaçant le maximum du spectre du nombre d'ondes du mode (m, n) comme un point dans un maillage. Prenons par exemple les modes $(2, 4)$ et $(3, 2)$. La figure 1.51 trace $\Phi_p(k_x, k_y)$ dans l'espace des nombres d'ondes. On remarque que le maximum

de $\Phi_p(k_x, k_y)$ est donné par (m, n) matérialisé par un point dans un maillage. La figure 1.52 montre la position de ce point par rapport au cercle du nombre d'ondes acoustique ω_{mn}/c à la fréquence du mode ω_{mn} . Si ce point est dans le cercle, alors $k_{mn} < k$ et le mode rayonne à son maximum ; si le point est hors du cercle, alors $k_{mn} > k$ et la proportion d'énergie rayonnée par le mode est faible. Dans cette situation, trois cas de figure sont possibles :

- $k < k_m = m\pi/a, k > k_n = n\pi/b$, (mode de bord) ;
- $k > k_m = m\pi/a, k < k_n = n\pi/b$, (mode de bord) ;
- $k < k_m = m\pi/a, k < k_n = n\pi/b$, (mode de coin) ;

ces trois cas sont illustrés en figure 1.54. Le phénomène de rayonnement en mode de bord ou en mode de coin est induit par la compensation des zones adjacentes en opposition de phase [99]. Ceci explique aussi le fait que certains modes rayonnent plus que d'autres.

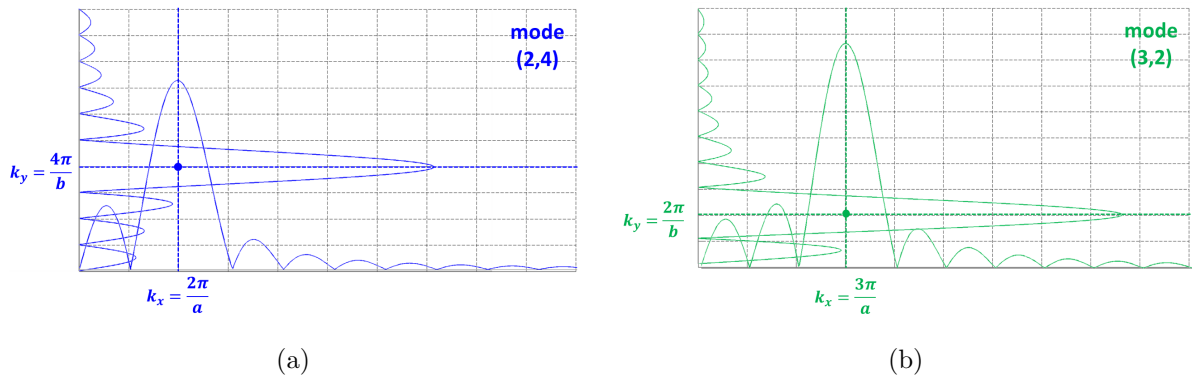


FIG 1.51 – Spectre de $\Phi_p(k_x, k_y)$ dans l'espace des nombres d'ondes pour les modes (2, 4) (a) et (3, 2) (b).

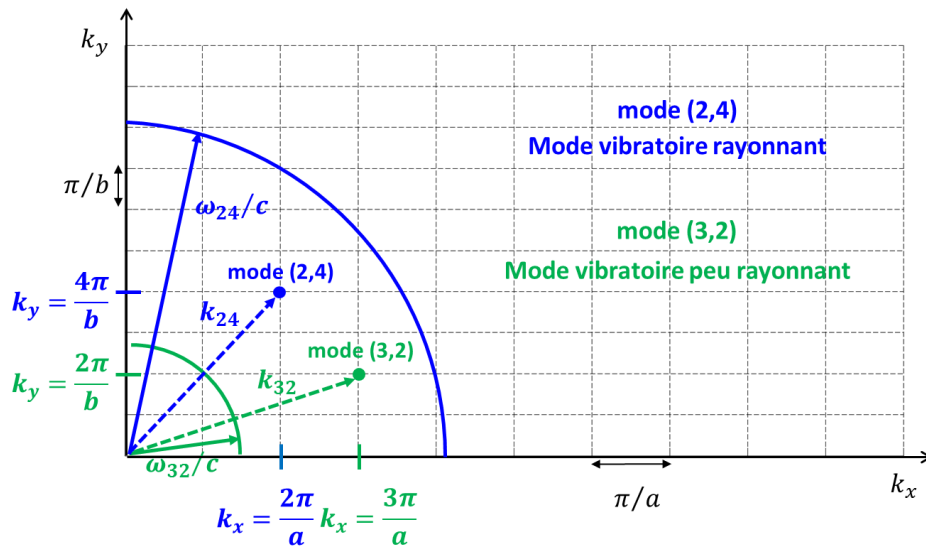


FIG 1.52 – Représentation des modes (m, n) et du nombre d'ondes acoustiques ω_{mn}/c à la pulsation du mode ω_{mn} dans l'espace des nombres d'ondes pour le (2, 4) (bleu) et (3, 2) (vert).

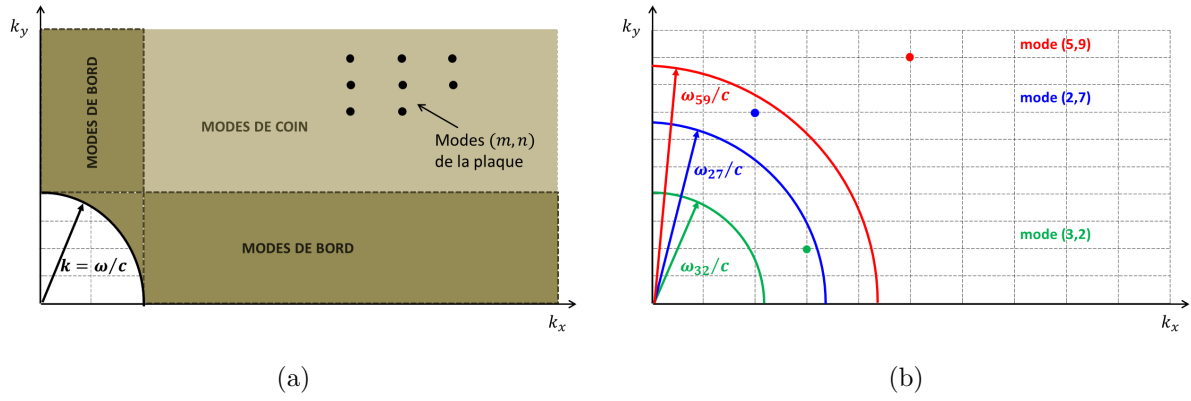


FIG 1.53 – Illustration de la classification des modes de bord et des modes de coin dans le plan des nombres d’ondes.

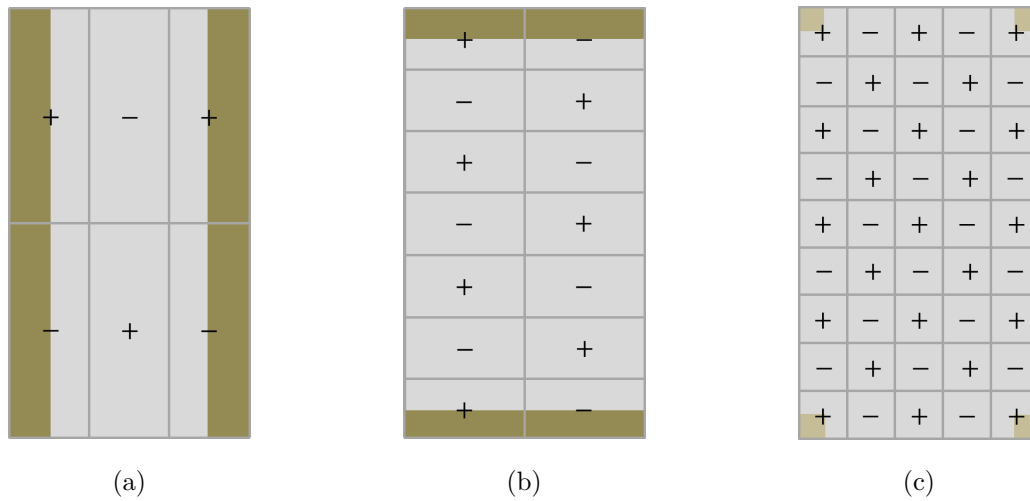


FIG 1.54 – Représentation des modes (3, 2), (2, 7), (5, 9). Les deux premiers (a,b) sont des modes de bord et le troisième (c) est un mode de coin.

L’allure typique de la courbe du facteur de rayonnement en fonction de la fréquence est présentée par la figure 1.55. Finalement, au dessus de la pulsation critique ω_c , tous les modes vibratoires résonnants rayonnent. En dessous, les modes rayonnent peu d’énergie.

Si l’on s’intéresse à la transmission des ondes acoustiques, les modes transmettent beaucoup d’énergie lorsqu’il y a une forte réponse vibratoire de ces derniers et lorsque leur rayonnement associé est important. Une forte réponse vibratoire est liée soit à une coïncidence fréquentielle, le mode est alors résonant :

$$\omega = \omega_{mn} = \sqrt{\frac{D}{\rho h} \left(\frac{m^2 \pi^2}{a^2} + \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \right)} ; \quad (1.112)$$

soit à un mode fortement excité, c’est à dire qu’il y a une coïncidence spatiale entre l’onde excitatrice et le mode de la plaque. Dans ce cas, cette coïncidence peut être soit partielle, c’est à dire qu’il n’y a coïncidence que dans une seule direction :

$$\frac{m\pi}{a} = \frac{\omega}{c} \sin(\theta) \cos(\varphi) \quad \text{ou} \quad \frac{m\pi}{a} = \frac{\omega}{c} \sin(\theta) \sin(\varphi) ; \quad (1.113)$$

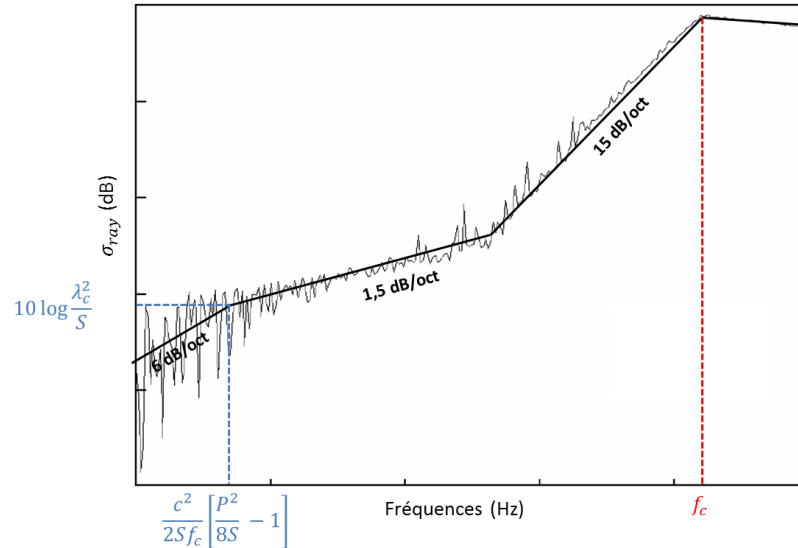


FIG 1.55 – Allure du facteur de rayonnement en fonction de la fréquence pour une plaque de dimension $a \times b$, de surface S et de périmètre P . f_c est la fréquence critique (relation 1.84) et $\lambda_c = c/f_c$ est la longueur d'onde associée. Figure empruntée à [98].

soit totale, la coïncidence est dans les deux directions x et y , et :

$$k_{mn} = \frac{\omega}{c} \sin(\theta) . \quad (1.114)$$

En écrivant l'égalité entre les relations 1.112 et 1.114, on retrouve l'expression de la fréquence de coïncidence de la relation 1.95 de la plaque infinie. On a donc le mode (m, n) associé :

$$\begin{cases} m = \frac{a}{\pi} \frac{\omega_{coïn}}{c} \sin(\theta) \cos(\varphi) . \\ n = \frac{b}{\pi} \frac{\omega_{coïn}}{c} \sin(\theta) \sin(\varphi) \end{cases} \quad (1.115)$$

Les valeurs de m et de n ne sont pas nécessairement entières, il faut donc prendre les entiers les plus proches. Lorsqu'il y a coïncidence partielle (voir relation 1.113) et qu'il y a coïncidence fréquentielle (voir relation 1.112), il existe alors des fréquences pour lesquelles la transmission des ondes acoustiques est importante, ce sont des **pseudo-coïncidences**. Elles sont généralement définies pour des fréquences $f < f_{coïn}$. La figure 1.56 montre l'allure typique de l'indice d'affaiblissement R dans le cas d'une excitation par une onde plane. Les zones A , B et C sont respectivement contrôlées par la raideur, la masse et l'amortissement. D est principalement contrôlé par la raideur, mais l'amortissement y a une grande influence. Dans le cas d'une excitation en champ diffus, l'allure de la courbe de l'indice d'affaiblissement est sensiblement identique à celle obtenue avec la plaque infinie (voir figure 1.47) du fait du moyennage des courbes déjà expliqué au §1.3.1.2.

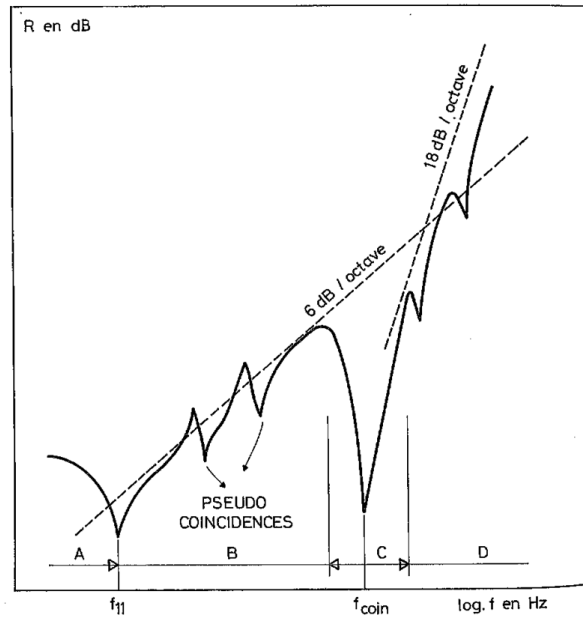


FIG 1.56 – Allure typique de l'indice d'affaiblissement R d'une plaque finie excitée par une onde plane. Figure empruntée à [99].

1.4 Bilan : choix du type de shunt et stratégie de contrôle

Pour diminuer le rayonnement acoustique d'une structure, ici une plaque, nous cherchons à modifier son comportement dynamique de façon à augmenter son nombre d'ondes de flexion k_f (relation 1.77) et plus précisément du système global « plaque + patchs piézoélectriques ». En effet, cette augmentation implique une progression vers les hautes fréquences de la fréquence critique f_c (relation 1.84, figure 1.43). Or, nous avons pu voir que dans le cas d'une plaque considérée infinie, les ondes vibratoires propagatives ne rayonnent pas dans la bande fréquentielle en-dessous de cette fréquence critique et que l'amplitude de rayonnement des ondes vibratoires évanescentes est fonction de cette fréquence critique (voir figure 1.45) : plus elle est haute, plus la fréquence à partir de laquelle le rayonnement des ondes évanescentes devient maximal l'est aussi. Rappelons que ces dernières rayonnent toujours, peu importe la fréquence d'excitation. Dans le cas d'une plaque finie, les modes rayonnent peu en dessous de cette fréquence critique. L'objectif est de rendre non rayonnants les modes rayonnants.

Pour augmenter la fréquence critique, deux stratégies sont possibles : soit augmenter la masse m du système, soit diminuer la rigidité de flexion D de celui-ci (relation 1.84). La première stratégie ne peut répondre à la problématique. Nous chercherons donc à diminuer la rigidité de flexion globale du système. On notera aussi qu'augmenter la fréquence critique implique une augmentation de la fréquence de coïncidence (relation 1.95) permettant d'accroître les performances d'une paroi en terme d'isolation acoustique.

Le shunt à capacité négative semble être le plus performant pour diminuer la rigidité de flexion d'une structure. En effet, cette méthode est utilisée pour contrecarrer l'effet de la capacité inhérente du patch piézoélectrique C_p^t (§1.1.1). Considérons simplement dans un premier temps un shunt constitué seulement d'une capacité négative (pas de résistance). Il est possible d'écrire la raideur mécanique équivalente

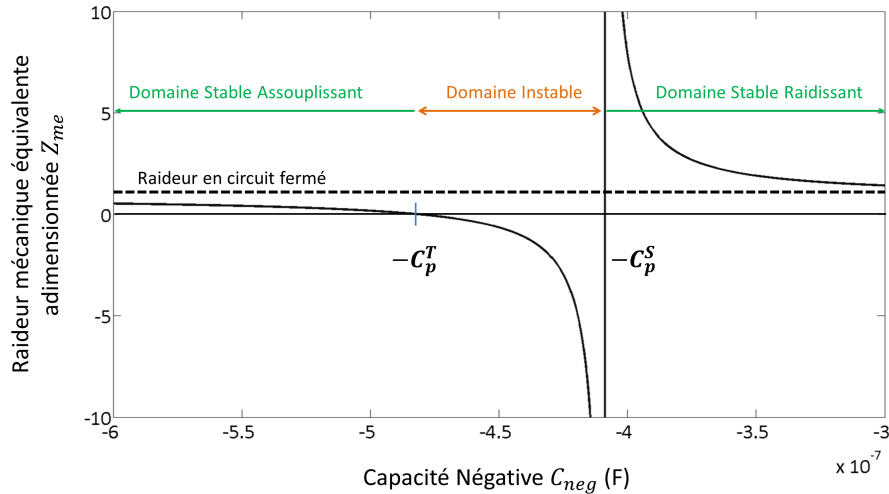


FIG 1.57 – Raideur mécanique équivalente du patch piézoélectrique en fonction de la capacité négative.

adimensionnée du patch piézoélectrique de la façon suivante [13, 29, 67, 106] :

$$Z_{me} = \frac{C_p^s + (1 - k_{ij}^2)C_{neg}}{C_p^s + C_{neg}}. \quad (1.116)$$

La variation de la raideur mécanique Z_{me} en fonction de la valeur de la capacité négative est présentée par la figure 1.57. Théoriquement, si la capacité négative est égale à $-C_p^s$, la rigidité du patch tend vers l'infini, et si la capacité négative est égale à $-C_p^t$, la raideur équivalente est égale à 0 (voir relation 1.10). Une zone dite « instable » existe entre ces deux valeurs car la raideur devient inférieure à 0 et l'énergie devient négative. L'intervalle de cette zone instable diminue plus le coefficient de couplage k_{ij} est petit, et diminue également plus l'épaisseur et la surface du patch piézoélectrique sont petites (voir les relations 1.10 et 1.12). Lorsque la capacité négative est nulle, la raideur mécanique équivalente du patch est celle obtenue avec le circuit ouvert car l'impédance vue par le patch devient infinie.

La stratégie de contrôle proposée ici est :

- pour des grandes structures, de s'appuyer sur les travaux de thèse de Flaviano Tateo [31] pour assouplir la structure afin d'augmenter la fréquence critique f_c (relation 1.84).
- pour des petites structures, ayant un comportement principalement modal, réaliser un contrôle modal en atténuant les modes rayonnant. On notera ici que les modes qui rayonnent ne sont pas forcements tous les modes mécaniquement résonants.

Des travaux ont été réalisés par Vincent Lhuillier dans sa thèse sur le contrôle actif de la transparence acoustique de double paroi par un contrôle modal de la structure en utilisant des couples de patches piézoélectriques « capteurs-actionneurs » [107]. Giuseppe Rosi a aussi travaillé sur le contrôle modal de structure à partir de patch shuntés dans le but de diminuer le rayonnement acoustique de structure [14]. Il a utilisé le shunt résonant et multimodale, ainsi qu'un réseau de patch connectés utilisant des circuits RL (« RL network »). Nous nous appuyerons donc sur ces travaux ainsi que sur les travaux déjà réalisés sur l'atténuation de vibrations à partir du shunt à capacité négative (voir §1.1.2.5) pour proposer une méthode de contrôle vibroacoustique réaliser avec un réseau périodique de patches piézoélectriques shuntés par une capacité négative.

Chapitre 2

Étude du shunt à capacité négative

Le shunt à capacité négative est, jusqu'à maintenant, une technique relativement peu étudiée, même s'il est prouvé qu'elle peut apporter une solution pour la diminution de vibrations. De plus, très peu d'études ont été faites sur l'utilisation de cette technique pour diminuer le rayonnement acoustique. Aussi, il est encore difficile de trouver des circuits électroniques permettant de créer de la capacité négative de manière très précise. En effet, ce type de shunt peut se montrer très efficace mais reste pour le moment peu robuste. Néanmoins, quelques auteurs cherchent à développer son utilisation. Marta Berardengo et al. montrent dans [71] l'efficacité de nouveaux circuits pour augmenter le facteur de couplage généralisé (relation 2.16) ; Gaël Matten a étudié dans sa thèse la possibilité de synthétiser numériquement la capacité négative [68] ; Flaviano Tateo a utilisé dans sa thèse des circuits électroniques analogiques pour diminuer le transfert d'énergie vibratoire dans une plaque à partir d'un réseau périodique de patchs piézoélectriques [31] ; on peut également citer B. de Marneffe et André Preumont qui ont étudié la capacité négative pour l'amortissement d'un mode vibratoire d'une structure [72]. D'autres études ont déjà été cités dans le §1.1.2.5 page 12.

Une partie des travaux a été consacrée à l'étude de la synthèse de la capacité négative en collaboration avec Gaël Matten qui a travaillé pendant sa thèse sur « la conception robuste d'actionneurs électromécaniques distribués pour le contrôle vibroacoustique de structures » [68]. La capacité négative n'existant pas en tant que tel, il est nécessaire de recourir à une synthèse « artificielle » de celle-ci à partir de la réalisation d'un circuit électronique émulant le comportement d'une capacité dont la valeur est négative. Un court paragraphe est donc consacré à la synthèse de la capacité négative.

Par la suite, il est proposé de montrer l'interaction entre le patch et la structure à partir de l'étude numérique et expérimentale du comportement dynamique d'une plaque munie d'un patch shunté. Cette étude permet notamment de mieux comprendre les phénomènes de couplage liés à l'ajout de ce patch shunté sur une structure afin de maîtriser le contrôle en vue de la diminution du niveau vibratoire et/ou du rayonnement acoustique de certains modes basses fréquences.

2.1 Synthèse d'une capacité négative

2.1.1 Synthèse analogique

La synthèse analogique d'une capacité négative fait appel à un circuit électronique s'organisant autour d'un amplificateur opérationnel (AOP) comme il est montré sur la figure 2.1. L'impédance du circuit présenté par ce schéma électronique est donnée par :

$$Z_{in} = -\frac{Z_3 Z_2}{Z_4} . \quad (2.1)$$

Ainsi, cette technique permet d'obtenir une impédance négative. Si Z_2 ou Z_3 contient un condensateur, il est alors possible de réaliser une capacité négative. Les deux autres impédances, Z_3 et Z_4 si Z_2 est le condensateur, ou Z_2 et Z_4 si Z_3 est le condensateur, sont constituées d'une résistance permettant de modifier l'amplitude de la capacité négative. Deux exemples d'implémentation possibles de ce type de circuit sont présentés en figure 2.2. Par la suite, le schéma du montage retenu est celui de gauche (figure 2.2a), les résistances R_3 et R_4 sont remplacées par un potentiomètre qui permet alors de réaliser des résistances variables et ainsi modifier la valeur de la capacité négative.

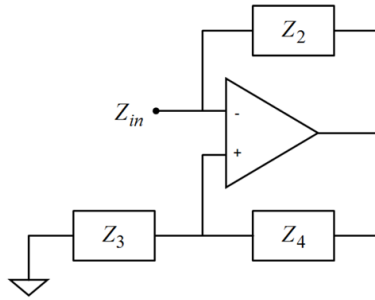


FIG 2.1 – Schéma de la synthèse analogique d'une impédance négative. Figures empruntées à [67].

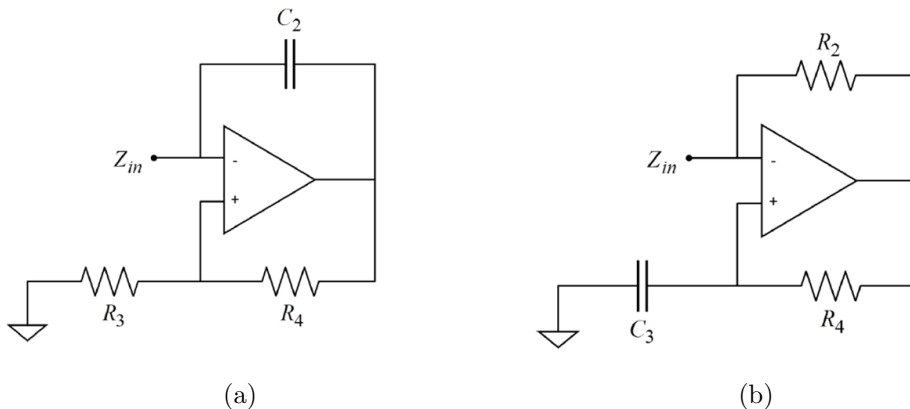


FIG 2.2 – Schémas de la synthèse analogique d'un shunt à capacité négative. Figures empruntées à [67].

La figure 2.3 présente le schéma du circuit électronique de synthèse de la capacité négative qui a été utilisé par la suite dans l'étape de fabrication de cartes électroniques. Ce circuit de contrôle peut être divisé en deux parties :

- Une partie dite active qui permet de créer la capacité négative. Cette partie est un circuit capacitif

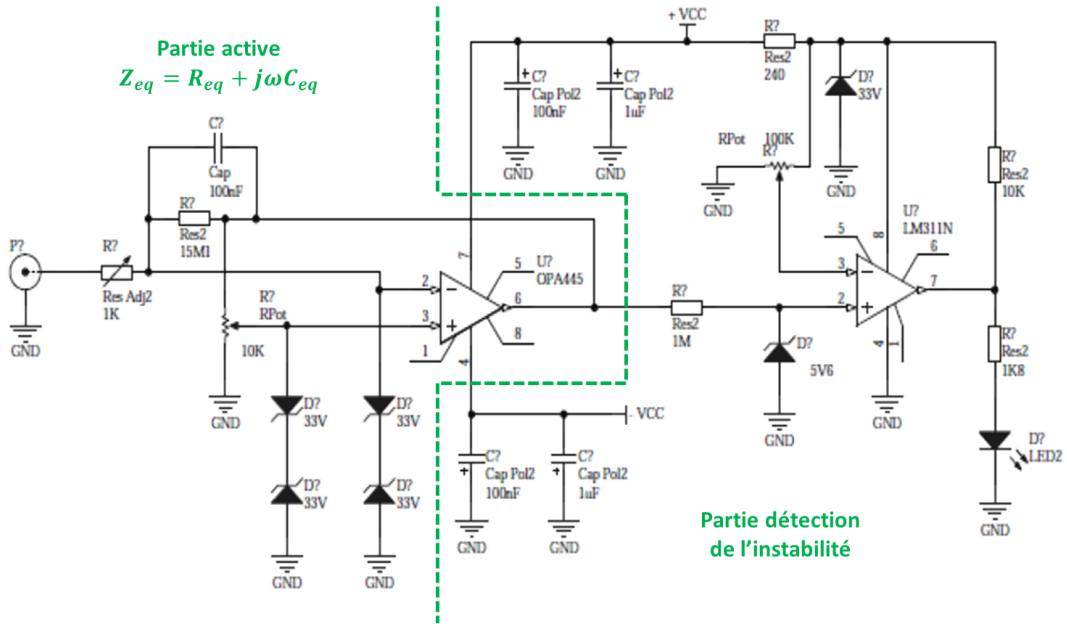


FIG 2.3 – Schéma du circuit électronique de synthèse de la capacité négative.

qui équivaut à déphaser de 180 degré son impédance électrique. Celle-ci peut être assimilée à une impédance équivalente $Z_{eq} = R_{eq} + 1/j\omega C_{eq}$. Nous comprenons dès lors que C_{eq} n'est autre que la valeur de la capacité négative notée C_{neg} dans le reste de ce document.

- Une partie complémentaire qui permet la détection de l'instabilité. Ainsi, lorsque la capacité négative est au point d'instabilité, la tension en sortie de l'AOP atteint la tension d'alimentation de l'AOP et ce dernier sature. Pour informer l'utilisateur de cette saturation, une diode électroluminescente (LED) est incluse dans le circuit et s'allume lorsque le système est instable [31].

En comparant le schéma électronique de la partie active de la figure 2.3 au schéma-bloc du circuit électronique présenté par la figure 2.2a, on constate que le circuit utilisé est plus complexe. En effet, plusieurs composants sont ajoutés :

- Une résistance variable, réalisée par un potentiomètre, est connectée en entrée du circuit actif. Celle-ci permet de modifier la résistance équivalente R_{eq} du circuit.
- Une résistance d'une valeur de $15\text{ M}\Omega$ est connectée en parallèle du condensateur. Elle permet aux courants de polarisation, qui peuvent être créés en entrée de l'AOP, de s'écouler à travers celle-ci et d'éviter ainsi le chargement du condensateur qui provoquerait la saturation de l'AOP.
- Des montages « tête-bêches » de diodes Zener sont réalisés aux entrées positive et négative de l'AOP. Ces montages limitent les tensions d'entrées de l'AOP pour éviter sa détérioration.

La figure 2.4 présente une photographie du circuit réalisé à partir du schéma électronique proposé en figure 2.3 et un schéma électrique équivalent simplifié de la partie active. Dans le circuit expérimental, les résistances R_3 et R_4 n'existent pas réellement mais symbolisent l'effet du potentiomètre qui applique une fraction de la tension V_s à la borne positive de l'AOP, qui peut être vue comme un pont diviseur de tension créé par R_3 et R_4 . Cette tension peut s'écrire :

$$V^+ = \frac{R_3}{R_3 + R_4} V_s = \frac{R_{pot,max} - R_{pot}}{R_{pot,max}} V_s, \quad (2.2)$$

où $R_{pot,max} = R_3 + R_4 = 10 \text{ k}\Omega$ est la résistance maximale du potentiomètre et $R_{pot} = R_4$ est la valeur de la résistance appliquée par le potentiomètre. D'après le schéma électrique de la figure 2.4b, il est possible de montrer que l'impédance équivalente Z_{eq} du circuit peut s'écrire :

$$Z_{eq} = R_1 - \frac{R_3 R_2}{R_4(1 + j\omega R_2 C_2)} ; \quad (2.3)$$

le calcul est détaillé dans l'annexe A. En séparant la partie réelle et la partie imaginaire de cette expression, on détermine la résistance équivalente R_{eq} et la capacité négative équivalente C_{eq} du système :

$$\begin{cases} R_{eq} = R_1 - \frac{R_3 R_2}{R_4} \frac{\omega_{RC}^2}{\omega_{RC}^2 + \omega^2} , \\ C_{eq} = -\frac{R_4}{R_3} \left(C_2 + \frac{1}{R_2^2 \omega^2} \right) , \end{cases} \quad (2.4)$$

avec $\omega_{RC} = 1/R_2 C_2$. Or, $R_2 = 15 \text{ M}\Omega$, donc le terme $\frac{1}{R_2^2 \omega^2}$ dans l'expression de C_{eq} (relation 2.4) est négligeable. On obtient alors :

$$C_{eq} = -\frac{R_4}{R_3} C_2 . \quad (2.5)$$

Étant donné que $C_2 = 107 \text{ nF}$ (valeur exacte mesurée, $C_2 = 100 \text{ nF}$ sur le schéma électronique de la figure 2.4) et que le rapport R_4/R_3 est positif, la capacité équivalente C_{eq} est négative. En remplaçant R_3 et R_4 dans la relation 2.5, on peut encore écrire la capacité négative équivalente :

$$C_{eq} = -\frac{R_{pot}}{R_{pot,max} - R_{pot}} C_2 \quad (2.6)$$

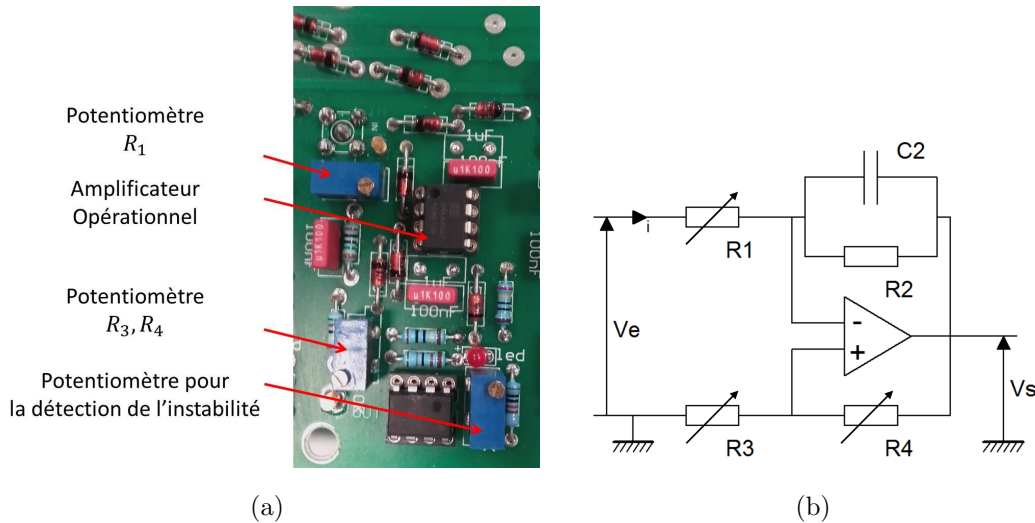


FIG 2.4 – (a) Photographie zoomée d'un des cinq circuits de synthèse de la carte électronique de la figure 2.5. (b) Circuit électrique équivalent simplifié de la partie active permettant de créer l'impédance équivalente $Z_{eq} = R_{eq} + 1/j\omega C_{eq}$.

La carte électronique, utilisée dans la partie expérimentale ci-après, est présentée par la figure 2.5. Cette carte électronique est composée de cinq circuits identiques ayant chacun une sortie de contrôle et permet de piloter au minimum cinq patches piézoélectriques. Les patches peuvent être branchés en parallèle

sur chacune des sorties ce qui permet d'en contrôler un plus grand nombre. La figure 2.4a présente une photographie d'un des cinq circuits.

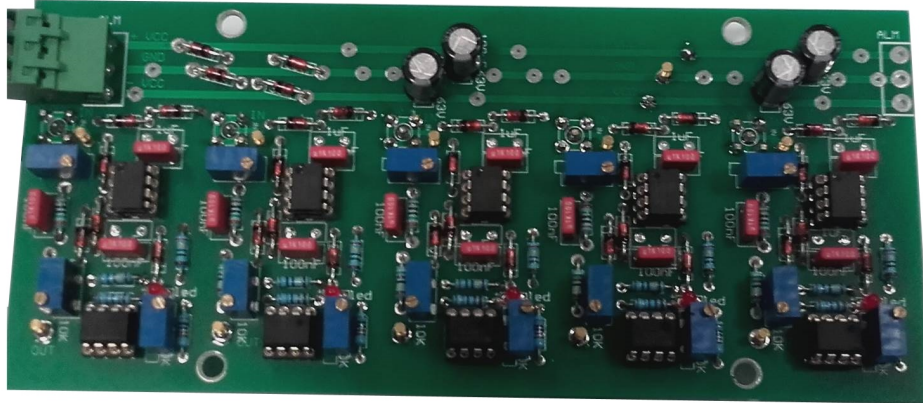


FIG 2.5 – Photographie de la carte analogique utilisée.

Un des inconvénients majeurs de ce type de synthèse est que le paramétrage de R_{eq} et C_{eq} est sensible, ces deux paramètres sont fonction du rapport des résistances R_3 et R_4 et sont donc interdépendants. De plus, la valeur de R_{eq} dépend de la pulsation ω . Pour palier ce type de difficulté, on propose de s'intéresser à la synthèse numérique de la capacité négative permettant de s'affranchir de plusieurs composants passifs.

2.1.2 Synthèse numérique

Les premiers travaux réalisés sur la synthèse numérique d'un shunt ont été proposés par Andrew John Fleming & al. dans [108]. Ces auteurs ont évoqué l'idée de synthétiser un shunt à partir d'un « Digital Signal Processor » (DSP). Gaël Matten a aussi réalisé des travaux sur la conception d'actionneurs électromécaniques dédiés au contrôle vibroacoustique de structure dans [68,109]. Ses travaux ont porté sur la fabrication de cartes électroniques de synthèse numérique de capacité négative dans le but de répondre à des problèmes d'embarcation de systèmes robustes miniaturisés. Il est proposé dans cette section de présenter des travaux qui ont été réalisés en collaboration avec Gaël Matten sur la synthèse numérique de la capacité négative.

2.1.2.1 Architecture et principe

La synthèse numérique de la capacité négative est réalisée à partir d'une carte de commande numérique et d'un circuit analogique. La commande numérique est effectuée par le calcul numérique d'une fonction de transfert au travers une carte DSpace constituée de sorties ADC (Analog to Digital Converter) et DAC (Digital to Analog Converter) ainsi qu'un DSP (Digital Signal Processor). Cette carte permet donc de convertir des signaux analogiques en signaux numériques (ADC), de calculer ensuite la fonction de transfert (DSP) et de reconvertir les signaux numériques en signaux analogiques (DAC). La carte DSpace joue donc le rôle d'interface entre la commande numérique et la carte analogique. Le circuit analogique est constitué, de manière simplifiée, d'un amplificateur et d'une source de courant. Il a pour fonction d'adapter les impédances entre le transducteur et la commande numérique, et de piloter en courant le transducteur piézoélectrique en lui imposant les variations de charges électriques.

On parle de synthèse numérique car la partie active du circuit qui simule la capacité négative est réalisée numériquement.

Une photographie d'une des versions de cartes électroniques et un schéma simplifié de l'architecture de cette carte sont présentées en figures 2.6 et 2.7. Sur ces deux figures, ADC (Analog to Digital Converter) est l'entrée de la carte DSpace qui convertit les signaux analogiques en signaux numériques et DAC (Digital to Analog Converter) est la sortie de la carte DSpace qui convertit les signaux numériques en signaux analogiques. Sur le schéma, l'« algorithme » correspond à la programmation de l'équation de l'admittance électrique du shunt. En effet, c'est l'admittance et non l'impédance qui est programmée car le choix s'est porté sur une mesure de la tension au borne du patch piézoélectrique et un pilotage en courant de celui-ci. Le courant i est donc généré en fonction de la tension V prise aux bornes du patch et est ainsi proportionnel à la tension V par $i = V/Z_{sh} = VY_{sh}$. Les schémas électroniques de l'amplificateur, de la source de courant et de l'alimentation sont présentés par les figures B.1, B.2 et B.3 en annexe B.

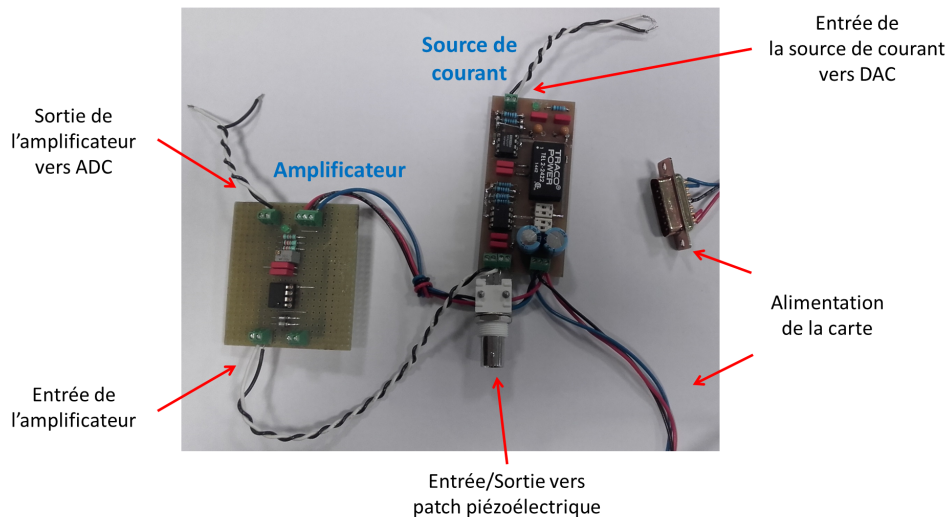


FIG 2.6 – Photographie d'une carte analogique utilisée dans la synthèse numérique d'un shunt.

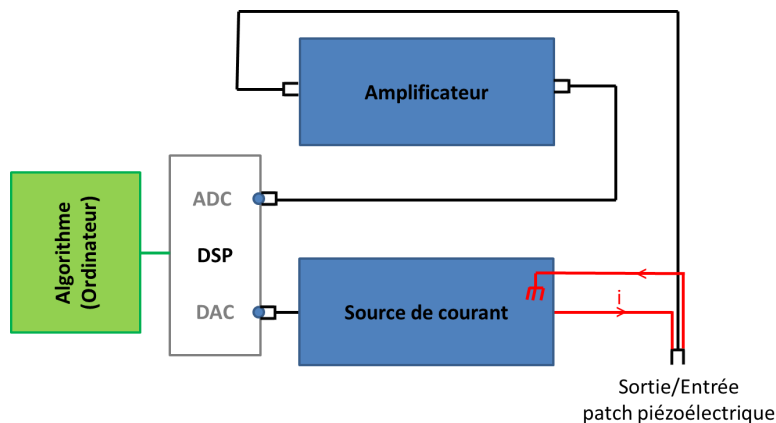


FIG 2.7 – Schéma simplifié de la synthèse numérique d'un shunt.

2.1.2.2 Programmation du shunt

Les premiers essais de programmation du shunt ont été réalisés à partir des logiciels Simulink et ControlDesk; Simulink permettant de créer la fonction d'admittance du shunt et ControlDesk permettant de calculer en temps réel cette fonction grâce au module « Real-Time Interface ». La fonction d'admittance programmée pour un shunt à capacité négative $Z_{sh} = R + 1/j\omega C_{neg}$ est :

$$H_{sh} = \frac{1}{\alpha_{amp}} Y_{sh} \frac{1}{\gamma_{sc}} = \frac{1}{\alpha_{amp}} \frac{sC_{neg}}{RC_{neg} + 1} \frac{1}{\gamma_{sc}}, \quad (2.7)$$

où α_{amp} est le gain de l'amplificateur, γ_{sc} est le gain de la source de courant (mA/V^{-1}) et $s = j\omega$. Il est nécessaire de compenser les gains de l'amplificateur et de la source de courant afin que le courant soit « l'image » de la tension aux bornes du patch piézoélectrique : $i = V Y_{sh}$. Le schéma Simulink est présenté par la figure 2.8.

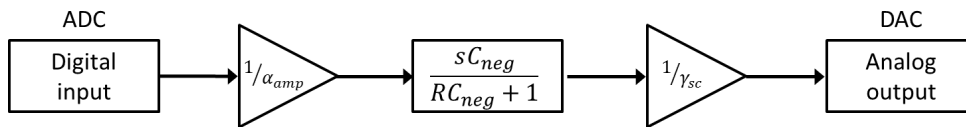


FIG 2.8 – Schéma de la fonction d'admittance du shunt programmée dans Simulink.

Cette méthode, telle qu'elle fut réalisée, n'a pu donner de résultats satisfaisants du fait de la limitation en tension en entrée et en sortie du DSP à 15 Volts crête. La compensation de l'effet de l'amplificateur et de la source de courant par les coefficients α_{amp}^{-1} et γ_{sc}^{-1} , au sein même de la fonction numérique, donne de grandes valeurs de tension en sortie DAC du DSP utilisée. Ceci implique la saturation de ce dernier. Une solution pour remédier à ce problème serait de placer un amplificateur de tension entre la sortie DAC et la source de courant pour compenser les gains de manière physique et éviter ainsi la compensation numérique. Cette méthode n'a pu être exploitée pour le moment.

Gaël Matten a développé une nouvelle version du circuit utilisant un étage électronique numérique composé d'un micro-contrôleur qui est piloté par une interface informatique. Ce système permet de modifier en temps réel les différents paramètres utilisés dans la fonction d'admittance comme par exemple la capacité négative C_{neg} , la résistance R , ou encore γ_{sc} . Nous avons donc cherché à valider le bon fonctionnement de ce circuit et à montrer la possibilité de créer le comportement d'un shunt à capacité négative. L'étage analogique et l'étage numérique de la carte sont présentés par la figure 2.9. L'étage numérique s'imbrique sur l'étage analogique.

2.1.2.3 Validation du procédé

Afin de montrer la possibilité de créer une capacité négative, le système est connecté à un circuit RC tel qu'il est schématisé sur la figure 2.10. Dans le cas où le shunt synthétisé est $Z_{sh} = 1/j\omega C_{neg}$, la fonction de transfert de la tension de sortie V_s sur la tension d'entrée V_e du système est :

$$H_e = \frac{R}{1 + j\omega(C + C_{neg})}. \quad (2.8)$$

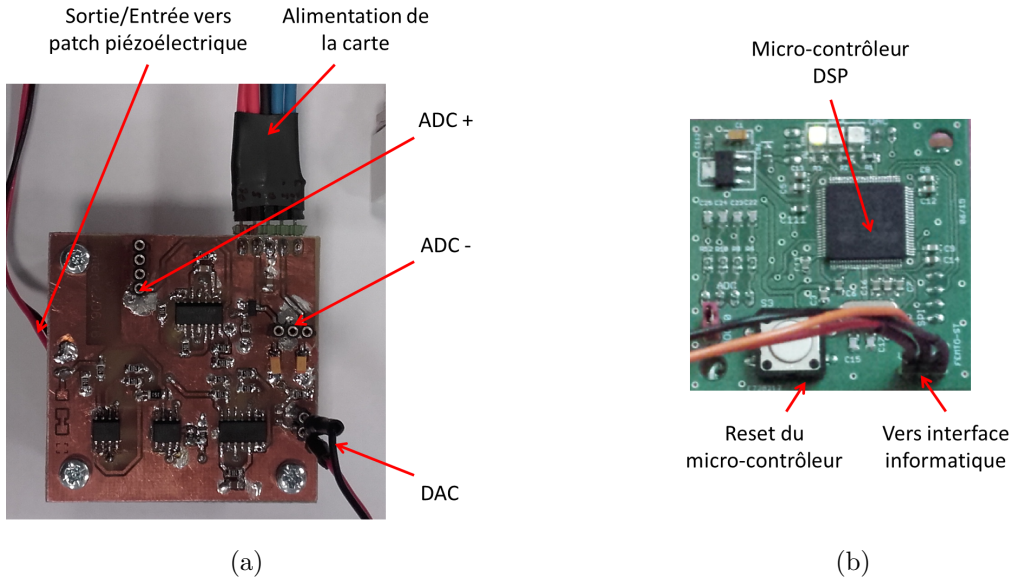


FIG 2.9 – (a) Photographie de l'étage analogique; ADC+ et ADC– sont les branchements des bornes positive et négative de l'ADC. (b) Photographie de l'étage numérique, le reset du micro-contrôleur permet de remettre à zéro la programmation implémentée lors de la saturation des ampli-OP.

La mesure de cette fonction de transfert H_e permet d'identifier si le procédé synthétise ou non une capacité négative. La figure 2.11 compare les résultats théoriques et expérimentaux pour plusieurs valeurs de C_{neg} . Quelques différences sont notables entre théorie et expérience, notamment sur les courbes de phase. Celles-ci peuvent provenir de la saturation de la carte électronique, notamment la source de courant, ou encore à des comportement non-linéaire de la capacité. Hormis ces légères différences, les résultats témoignent tout de même d'une synthèse correcte de la capacité négative. Ce type de système a été expérimenté sur le contrôle vibratoire d'une plaque dans [68].

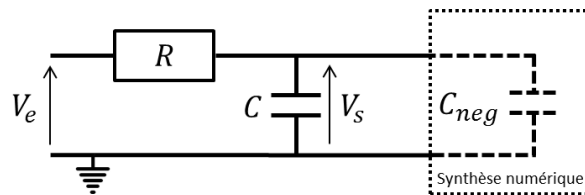


FIG 2.10 – Schéma de la mesure du pont RC avec un shunt à capacité négative connecté en parallèle.

2.2 Influence d'un shunt à capacité négative sur le comportement vibroacoustique d'une plaque : simulation et expérimentation

2.2.1 Système étudié

Le système étudié dans cette partie est constitué d'une plaque en aluminium sur laquelle est positionné un patch piézoélectrique de type PZT-5H shunté par un circuit $Z_{sh} = R + 1/j\omega C_{neg}$. Les différentes caractéristiques du système considéré sont présentées par la figure 2.12.

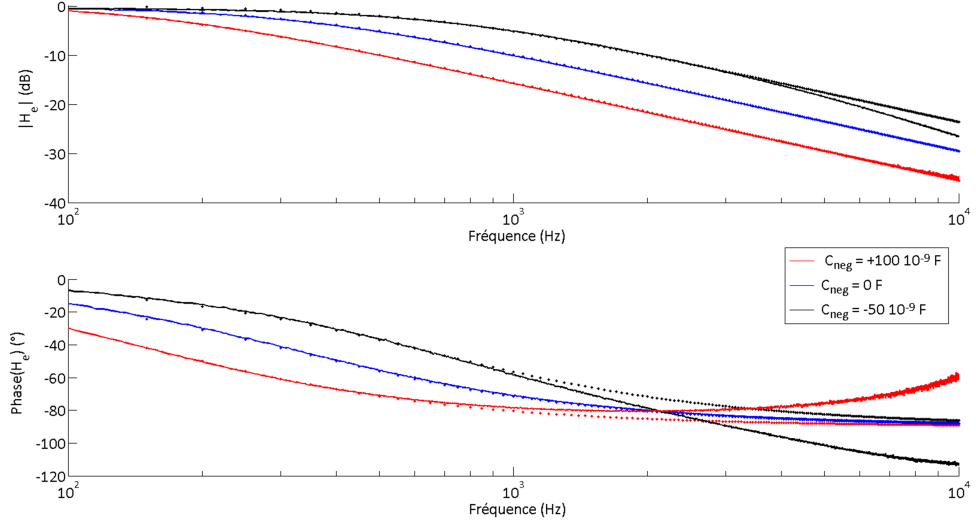


FIG 2.11 – Module (en haut) et phase (en bas) de la fonction de transfert H_e théorique définie par la relation 2.8 (point), et expérimentale définie par la relation $H_e = V_s/V_e$ d'après la figure 2.10 (trait) pour différentes valeurs de C_{neg} : $100 \cdot 10^{-9} F$ (rouge), $0 F$ (bleu) et $-50 \cdot 10^{-9} F$ (noir).

Structure aluminium

$$l = 30 \text{ cm}, h = 2 \text{ mm}$$

$$E = 70 \cdot 10^9 \text{ N.m}^{-2}$$

$$\nu = 0.35$$

$$\rho = 2700 \text{ kg.m}^{-3}$$

Piézo PZT-5H

$$l_p = 50 \text{ mm}, h_p = 0.5 \text{ mm}$$

$$s_{11}^E = 16.5 \cdot 10^{-12} \text{ m}^2.\text{N}^{-1}$$

$$s_{12}^E = -4.78 \cdot 10^{-12} \text{ m}^2.\text{N}^{-1}$$

$$d_{31} = -2.74 \cdot 10^{-10} \text{ C.N}^{-1}$$

$$\epsilon_{33}^T = 3.01 \cdot 10^{-8} \text{ F.m}^{-1}$$

$$\rho_p = 7500 \text{ kg.m}^{-3}$$

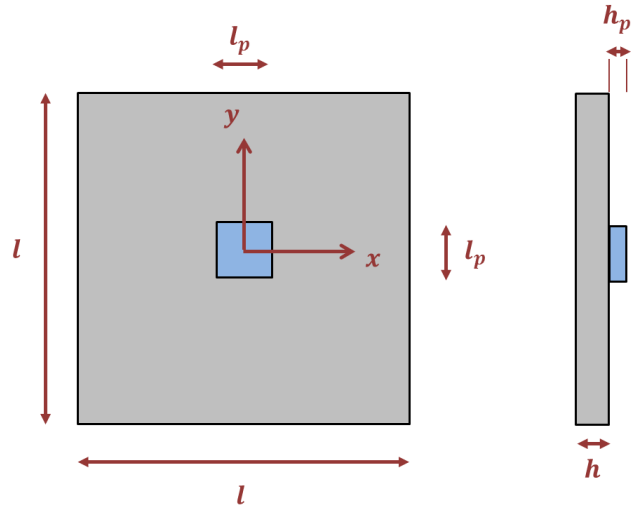


FIG 2.12 – Schéma du système étudié.

2.2.2 Simulation numérique

2.2.2.1 Modèle

Le système est décrit en figure 2.13. Le comportement électro-mécanique d'un système structure/patch piézoélectrique est dirigé par les équations aux dérivées partielles :

$$\rho \ddot{\mathbf{w}}(\mathbf{r}, t) - \nabla \sigma(\mathbf{r}, t) = 0, \quad \forall \mathbf{r} \in \Omega, \quad (2.9)$$

$$-\nabla \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad \forall \mathbf{r} \in \Omega, \quad (2.10)$$

où $\mathbf{w}(\mathbf{r}, t) \in \mathbb{R}^3$ avec $\mathbf{r}[x, y, z]$ le vecteur de déplacement, σ le tenseur des contraintes de Cauchy et \mathbf{D} le déplacement diélectrique. Ω désigne ici le domaine défini par le système global. Le couplage

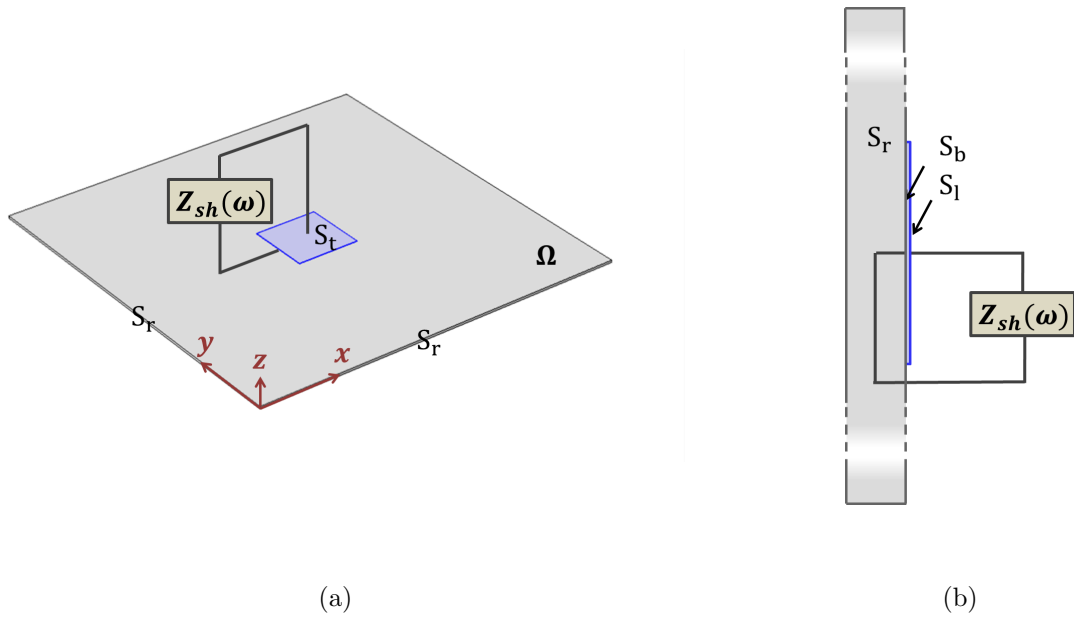


FIG 2.13 – Modèle numérique du système étudié.

électromécanique est pris en compte par les relations 1.1 et 1.2 qui peuvent être réécrites de la façon suivante :

$$\boldsymbol{\sigma} = C_E(\mathbf{r})\boldsymbol{\varepsilon} - e^T(\mathbf{r})\mathbf{E} , \quad (2.11)$$

$$\mathbf{D} = e(\mathbf{r})\boldsymbol{\varepsilon} + \varepsilon_s(\mathbf{r})\mathbf{E} , \quad (2.12)$$

où $\mathbf{E} = -\nabla V$ est le vecteur des champs électriques, V étant la tension, C_E le tenseur d'élasticité à champ électrique constant, e^T le tenseur des coefficients de couplage piézoélectrique, $\boldsymbol{\varepsilon} = 1/2[\nabla\mathbf{w}^T(\mathbf{r}, t) + \mathbf{w}(\mathbf{r}, t)\nabla^T]$ le tenseur des contraintes de Green et ε_s la permittivité électrique à contrainte constante. Pour prendre en compte le shunt électrique, nous avons besoin d'une autre expression qui considère la quantité totale de charges électriques q générées par le patch piézoélectrique dans le circuit électrique d'impédance Z_{sh} :

$$q(\omega) = \int i dt = i/(j\omega) = - \int_{S_t} \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} dS , \quad (2.13)$$

où i est le courant et \mathbf{n} désigne ici le vecteur normal à la surface S_t , qui est la surface du dessus du patch. Le potentiel électrique s'écrit :

$$V(\omega) = Z_{sh}(\omega) j\omega q(\omega) . \quad (2.14)$$

Les conditions aux limites électriques considérées sont :

$$\begin{cases} V(\mathbf{r}, \omega) = 0 , & \forall \mathbf{r} \in S_b , \\ V(\mathbf{r}, \omega) = V(\omega) , & \forall \mathbf{r} \in S_t , \\ \mathbf{D} \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}, \omega) = 0 , & \forall \mathbf{r} \in S_l , \end{cases} \quad (2.15)$$

où S_b est le dessous du patch relié à la masse, S_t est le dessus du patch relié au shunt et S_l sont les côtés du patch (voir la figure 2.13). L'équipotentiel électrique V appliqué au-dessus du patch dépend de l'impédance Z_{sh} et de la charge totale définie dans la relation 2.13. Les conditions aux limites mécaniques considérées sont des conditions de déplacements libres sur tous le domaine Ω .

Le logiciel de calcul numérique d'éléments finis utilisé est COMSOL Multiphysics[®].

2.2.2.2 Calculs aux valeurs propres

Nous cherchons ici à déterminer les modes de vibration de la plaque sur lesquels le patch piézoélectrique a une influence ; on les appelle les modes couplés. Lorsque le patch est sollicité par les vibrations d'un mode i de la plaque, la pulsation propre ω_i de ce mode varie en fonction de l'impédance du shunt Z_{sh} , ceci étant directement lié au couplage électromécanique qui existe entre la plaque et le patch. À partir du calcul des fréquences propres de ce système « plaque + patch » avec le patch en circuit ouvert et en court-circuit, il est possible de déterminer le coefficient de couplage effectif, aussi appelé coefficient de couplage généralisé. Ce coefficient caractérise quantitativement la qualité du couplage électromécanique pour un mode donné et traduit donc la potentialité de contrôler ce mode. Ce coefficient peut être défini par :

$$k_{eff,i} = \sqrt{\frac{\omega_{oc,i}^2 - \omega_{sc,i}^2}{\omega_{sc,i}^2}}, \quad (2.16)$$

avec $\omega_{oc,i}$ les pulsations propres du système couplé « plaque + patch » en circuit ouvert (**oc** ~ open-circuit), ce qui équivaut à dire que l'impédance électrique du shunt $Z_{sh} = \infty$, et $\omega_{sc,i}$ les pulsations propres en court-circuit (**sc** ~ short circuit), équivalent à une impédance électrique de shunt $Z_{sh} = 0$.

Les fréquences propres du système sont calculés numériquement à partir d'une méthode d'éléments finis ; le logiciel utilisé est COMSOL Multiphysics[®].

Pour le calcul numérique, les conditions aux limites mécaniques de la plaque sont considérées libres sur tous ses bords. La figure 2.14 présente le profil des modes vibratoires de la plaque pour lesquels le coefficient de couplage effectif (relation 2.16) est supérieur à 7%. Cette valeur est choisie ainsi pour restreindre le nombre de modes étudiés. Le profil de ces modes amène à supposer que le couplage existe pour les modes symétriques de la plaque et que le patch est couplé avec les modes pour lesquels un ventre vibratoire est positionné au même endroit que le patch piézoélectrique. En réalité, le patch agit sur le maximum de courbure de la plaque, autrement dit, il agit efficacement aux maxima des dérivées secondes spatiales du déplacement vibratoire.

On s'intéresse dans un premier temps à l'influence de la résistance R simplement. La figure 2.15 trace la partie réelle des quatre premières fréquences propres des modes $A \simeq 135 \text{ Hz}$, $B \simeq 345 \text{ Hz}$, $C \simeq 680 \text{ Hz}$ et $D \simeq 927 \text{ Hz}$ de la figure 2.14, en fonction du terme de dissipation défini par $\xi = \Im(\omega_i)/\Re(\omega_i)$ où ω_i est la pulsation propre complexe du mode i , pour un shunt résistif avec $R = 0,5 \Omega - 50 \text{ k}\Omega$. Ce terme de dissipation d'énergie est donnée en pourcentage. Pour les deux valeurs extrêmes de R , on remarque que la fréquence des modes se rapproche des fréquences qui sont obtenues en court-circuit ($R = 0,5 \Omega \rightarrow 0$) et en circuit ouvert ($R = 50 \text{ k}\Omega \rightarrow \infty$) ; en effet, les valeurs extrêmes de R égales à $0,5 \Omega$ et $50 \text{ k}\Omega$ représentent respectivement une faible et grande impédance qui se rapprochent des conditions en circuit

ouvert et en court-circuit du patch piézoélectrique. Ces premiers résultats montrent aussi que, pour cette position du patch piézoélectrique, l'influence du shunt résistif est différente selon le mode sur la variation de la fréquence propre de ce dernier ainsi que sur son atténuation. Par exemple, il est possible de faire varier la fréquence du mode B de manière plus importante que le mode A , mais son atténuation est moins grande. De plus, nous allons le voir ci-après, que le terme de dissipation est faible (inférieur à 1%). Pour connaître la valeur optimale de R qui permet d'amortir les modes à leur maximum, ξ est tracé en fonction de R (figure 2.16) : la valeur optimale de la résistance diffère pour chaque mode.

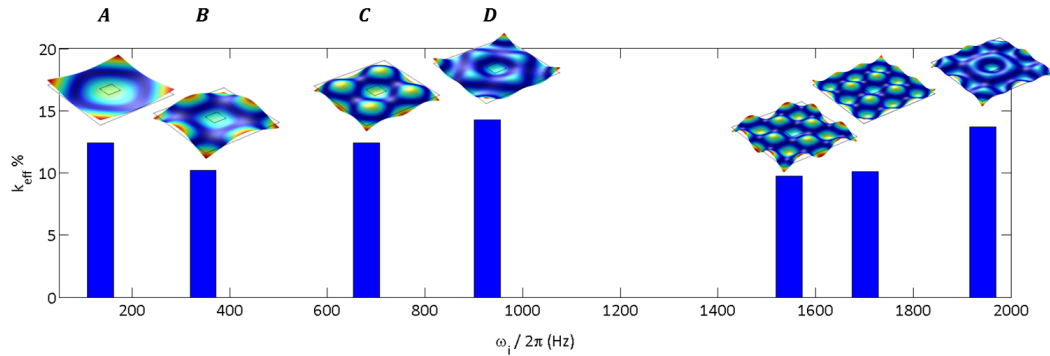


FIG 2.14 – Coefficient de couplage effectif k_{eff} en % (relation 2.16) en fonction de ω_i . Seuls les coefficients de couplage supérieurs à 7% sont retenus. $A \simeq 135 \text{ Hz}$, $B \simeq 345 \text{ Hz}$, $C \simeq 680 \text{ Hz}$ et $D \simeq 927 \text{ Hz}$.

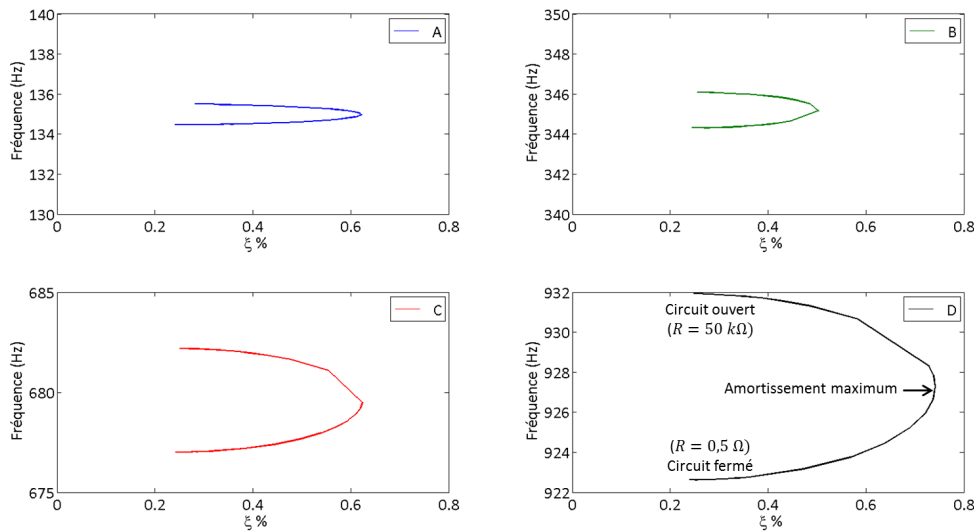


FIG 2.15 – Partie réelle, représentative de la fréquence propre des modes, en fonction du terme de dissipation ξ pour les modes A , B , C et D de la figure 2.14 pour un shunt résistif, avec $R = 0,5 \Omega - 50 \text{ k}\Omega$.

On s'intéresse à présent à la variation de la fréquence propre des modes en partie réelle et en partie imaginaire avec un shunt à capacité négative de la forme $Z_{sh} = R + 1/j\omega C_{neg}$. Tout d'abord, observons sur la figure 2.17 la variation de la fréquence propre du mode $A \simeq 135 \text{ Hz}$ en fonction de la valeur de la capacité négative pour $R = 0$. Trois zones distinctes peuvent être identifiées sur cette courbe. La première, où la fréquence propre du mode diminue est la zone assouplissante, le contrôle exercé par le patch introduit la décroissance de la fréquence propre du mode considéré. La seconde, où la valeur du mode atteint quasiment 0 Hz , est la zone d'instabilité du système. La troisième, qui est définie par une

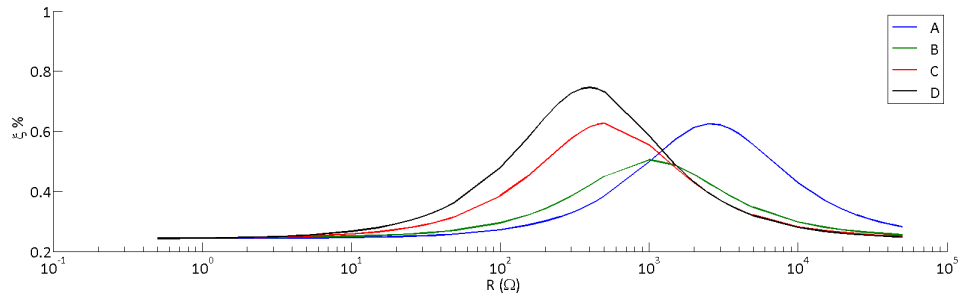


FIG 2.16 – Terme de dissipation ξ des modes A , B , C et D de la figure 2.14 en fonction de R du shunt résistif avec, $R = 0,5 \Omega - 50 k\Omega$.

augmentation de la fréquence initiale du mode, est la zone raidissante. Le profil de la courbe obtenue est le même que celle présentée en figure 1.57 page 53 à partir de laquelle nous avons clairement défini les zones assouplissante, raidissante et instable.

En revanche, cette même courbe varie en fonction de la résistance appliquée. Les parties stable et instable changent légèrement en fonction de la résistance : le profil reste toujours le même, mais les variations de la fréquence propre du mode sont plus ou moins importantes en fonction de la valeur de R . Pour visualiser cela, la fréquence propre du mode A est tracée en fonction de ξ pour différentes valeurs de C_{neg} et R variant de $0,5 \Omega$ à $50 k\Omega$. Les courbes ainsi tracées (figure 2.18) montrent que pour une résistance très grande, l'effet de la capacité négative devient négligeable et la valeur du mode reste inchangée. Cette valeur est celle obtenue en circuit ouvert (impédance infinie). Pour une valeur très petite de la résistance, celle-ci devient négligeable et le mode est décalé par l'effet de la capacité négative mais il est très peu atténué. Finalement, pour une même valeur de la capacité négative, la fréquence propre du mode et son niveau d'atténuation varient en fonction de la résistance R .

La figure 2.19 trace le terme de dissipation ξ du mode A en fonction de la résistance du shunt pour les valeurs de la capacité négative assouplissante utilisées dans la figure 2.18. Le maximum d'atténuation est obtenu avec une valeur de résistance différente pour chacune des valeurs de la capacité négative. Il y a donc un compromis entre la valeur de la résistance et la valeur de la capacité négative dans le décalage en fréquence et l'atténuation des modes ciblés.

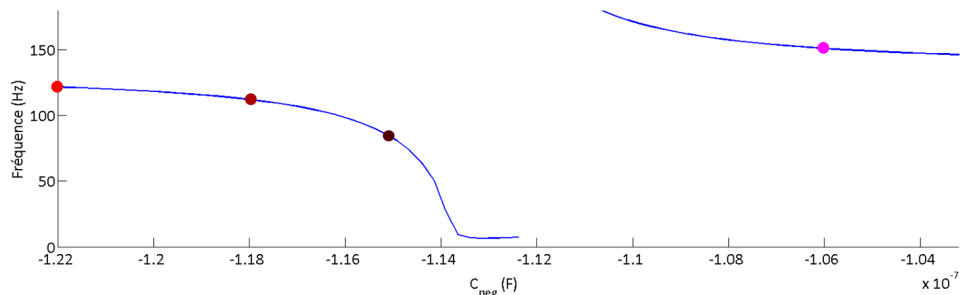


FIG 2.17 – Partie réelle, représentative de la fréquence propre, du mode A de la figure 2.14 en fonction de C_{neg} ($R = 0$). Les points de couleurs localise les valeurs utilisées dans le calcul des courbes des figures 2.18 et 2.19.

On cherche à présent à amortir les quatre modes A , B , C , et D . La capacité négative est paramétrée à $C_{neg} = -11,5 \cdot 10^{-8} F$ permettant d'obtenir un taux d'atténuation important selon la figure 2.19.

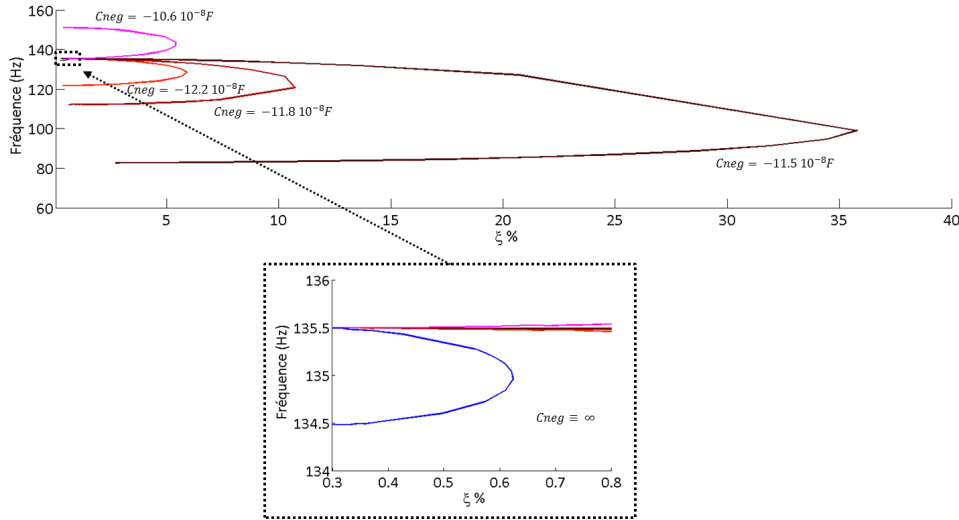


FIG 2.18 – Partie réelle, représentative de la fréquence propre du mode, en fonction du terme de dissipation pour le mode A de la figure 2.14 pour différentes valeurs de C_{neg} (voir figure 2.17) et R variant de $0,5 \Omega$ à $50 k\Omega$. Dans l’encadré, la courbe obtenue avec un shunt purement résistif (cas de la figure 2.15 ce qui équivaut à $C_{neg} = \infty$).

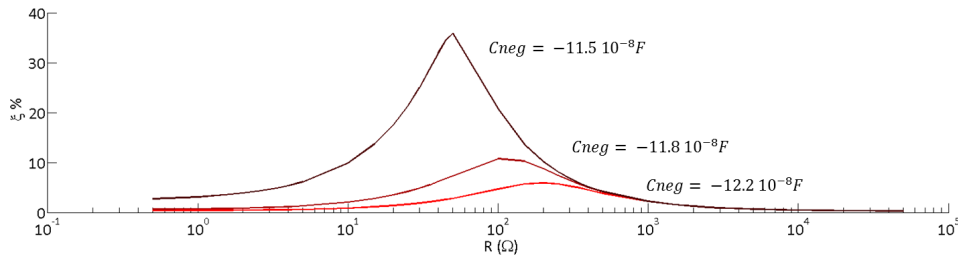


FIG 2.19 – Terme de dissipation ξ du mode $A \simeq 135 Hz$ de la figure 2.14 en fonction de R avec $R = 0,5 \Omega - 50 k\Omega \Omega$ pour différentes valeurs de la capacité négative C_{neg} prise dans le domaine assouplissant (voir figure 2.18).

L’étude paramétrique de la résistance est réalisée en figure 2.20 ; pour chaque mode, la valeur de la résistance optimale est déterminée par le calcul du terme de dissipation $\xi = \Im(\omega_i)/\Re(\omega_i)$ en fonction de R . Il est ici aussi possible de constater que la valeur optimale de la résistance permettant d’atténuer les modes à leur maximum est différentes pour chacun des modes. On définit alors le facteur de dissipation normalisé $\Xi = \xi_i/\max(\xi_i)$ avec $i = A, B, C, D$. La résistance optimale pour atténuer chacun des modes étant différentes, on cherche alors la résistance qui permet d’atténuer au maximum les quatre modes en même temps. D’après les résultats de la figure 2.20, une condition $\Xi_i = 0.8$ est alors trouvée pour une résistance optimale $R_{opt} = 39 \Omega$. Cela signifie donc que cette valeur de résistance permet d’obtenir 80% de l’atténuation maximum qu’il aurait été possible d’obtenir pour chacun des modes.

2.2.2.3 Réponse en fréquence

Afin de vérifier le potentiel de la capacité négative sur la réponse vibratoire d’une structure, on propose d’observer la réponse fréquentielle de la mobilité d’une plaque munie d’un patch shunté selon différentes configurations : pour le patch piézoélectrique en circuit ouvert, en court-circuit et shunté par un shunt à capacité négative de la forme $Z_{sh} = R + 1/j\omega C_{neg}$ avec $C_{neg} = -11.5 \cdot 10^{-8} F$ et $R = 1, 10, 39 \Omega$. La

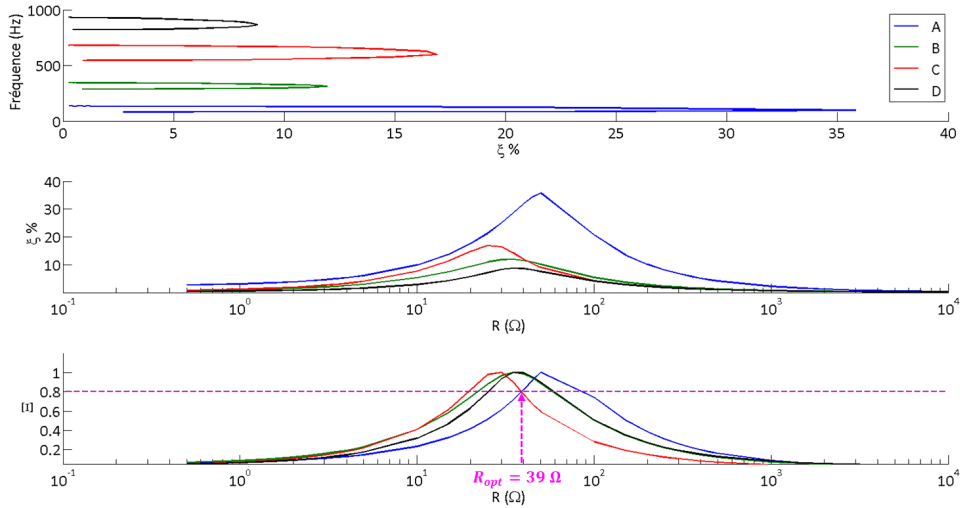


FIG 2.20 – Partie réelle, représentative de la fréquence propre du mode, en fonction du terme de dissipation ξ pour les modes A , B , C , et D de la figure 2.14 pour différentes valeurs de R avec $R = 0,5 \Omega - 50 k\Omega$ et pour une valeur de la capacité négative $C_{neg} = -11.5 \cdot 10^{-8} F$ prise dans le domaine assouplissant (en haut). Terme de dissipation ξ des modes A , B , C , et D en fonction de R (au milieu). Courbe représentative de la dissipation normalisée $\Xi = \xi_i / \max(\xi_i)$ avec $i = A, B, C, D$ (en bas).

mobilité d'entrée est définie par :

$$H(\omega) = \frac{v}{F} = \frac{j\omega w}{F}, \quad (2.17)$$

avec w, v et F , le déplacement transverse, la vitesse transverse et la force harmonique d'excitation. Cette mobilité est calculée pour $v(\text{point1})/F(\text{point1})$ et $v(\text{point2})/F(\text{point1})$; les points 1 et 2 de calcul de la vitesse sont présentés par la figure 2.21. L'amplitude de la force est de $1 N$. Les résultats obtenus sont présentés par la figure 2.22. On constate bien le décalage fréquentiel des modes couplés pour des conditions en circuit ouvert et en court-circuit du patch. Par ailleurs, dans le cas d'une résistance $R = R_{opt} = 39 \Omega$ (avec $C_{neg} = -11.5 \cdot 10^{-8} F$), les modes A , B , C et D sont fortement atténués, cela confirme l'efficacité des paramètres R et C_{neg} choisis précédemment (voir figure 2.20). Pour des valeurs plus faibles de la résistance ($R = 1 \Omega, 10 \Omega$), les modes sont décalés vers les basses fréquences par l'effet de la capacité négative mais sont très peu atténués.

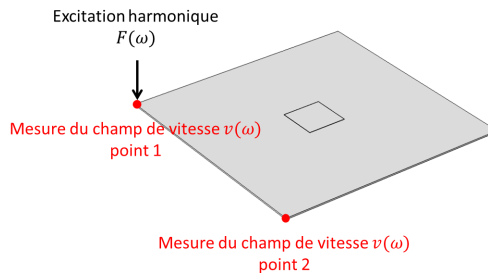


FIG 2.21 – Schéma du calcul numérique de la mobilité (relation 2.17).

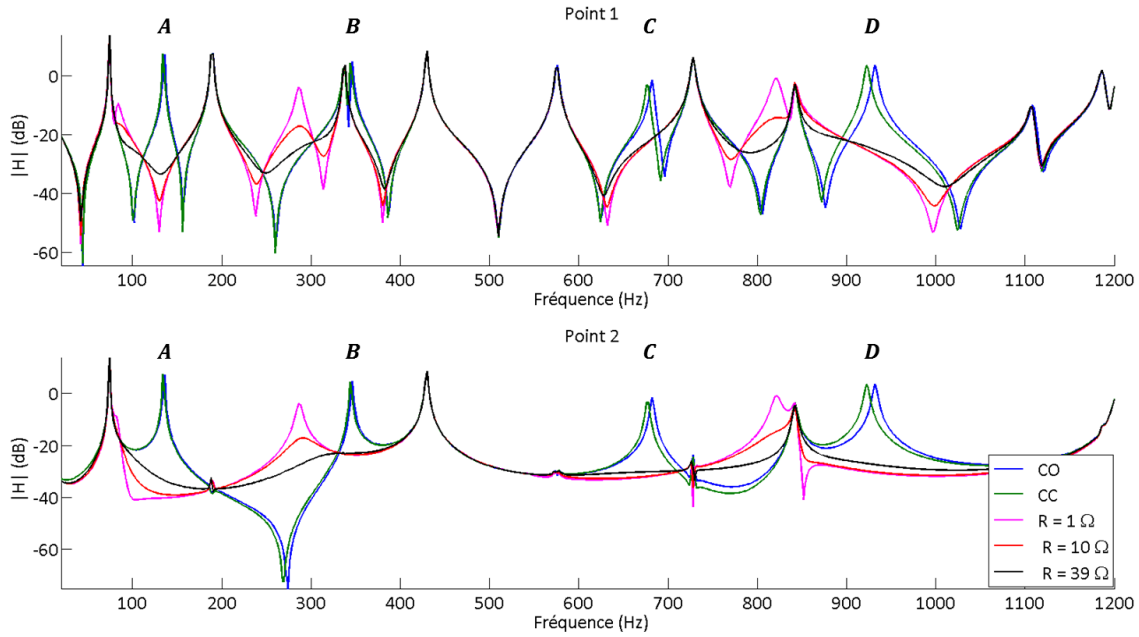


FIG 2.22 – Module de la réponse en fréquence de la mobilité $|H(\omega)|$ calculée dans les cas $v(\text{point1})/F(\text{point1})$ (en haut) et $v(\text{point2})/F(\text{point1})$ (en bas) (voir figure 2.21) pour le patch piézoélectrique en circuit ouvert (bleu), en court-circuit (vert) et shunté par un shunt à capacité négative de la forme $Z_{sh} = R + 1/j\omega C_{neg}$ avec $C_{neg} = -11.5 \cdot 10^{-8} F$ et $R = 1, 10, 35 \Omega$ (magenta, rouge et noir).

2.2.2.4 Calculs de rayonnement

L'influence du contrôle par shunt à capacité négative sur le rayonnement acoustique est déterminée par le calcul du facteur de rayonnement et du facteur de puissance respectivement définis par les relations 1.103 et 1.104 à partir de la méthode de Rayleigh expliquée dans le §1.3.2 page 45.

La figure 2.23 montre : la puissance mécanique injectée \mathcal{W}_m au point 1 sur la figure 2.21, la puissance acoustique rayonnée \mathcal{W}_a (relation 1.102) et la moyenne du champ de vitesse quadratique $\langle |v|^2 \rangle$ de la plaque, avec le patch piézoélectrique en circuit ouvert et shunté par une capacité négative $C_{neg} = -11.5 \cdot 10^{-8} F$ et $R = 39 \Omega$. Ces trois termes permettent de calculer le facteur de rayonnement et le facteur de puissance (relations 1.103 et 1.104).

La puissance mécanique injectée \mathcal{W}_m augmente globalement avec l'utilisation d'un shunt à capacité négative. La vitesse vibratoire s'avère alors être plus importante au point d'excitation hormis dans les zones fréquentielles autour des modes A , B , C , et D où elle est plus faible. La vitesse vibratoire moyenne de la plaque est plus faible avec le shunt à capacité négative pour les modes A , B , C , et D , mais reste équivalente ailleurs avec ou sans shunt. Il y a donc pour les modes contrôlés A , B , C , et D , une diminution de la vitesse vibratoire sur toute la plaque et une forte diminution du champ rayonné. Ailleurs, la vitesse vibratoire augmente globalement au point d'excitation, mais reste inchangée sur le reste de la plaque, ce qui implique peu de changement sur l'énergie rayonnée. La figure 2.24 présente le facteur de rayonnement et le facteur de puissance précédemment définis. Le facteur de rayonnement est peu modifié dans la bande fréquentielle étudiée. Le shunt à capacité négative ne modifie pas le rapport de la puissance rayonnée par rapport au champ de vitesse vibratoire, ce rapport est sensiblement conservé. Le facteur de puissance montre en revanche que la force d'excitation doit être plus importante pour fournir autant d'énergie qu'au système non contrôlé. Le « pouvoir » rayonnant de la plaque est peu modifié de manière relative

au champ de de vitesse quadratique, mais l'énergie acoustique rayonnée diminue de manière absolue étant donnée la réduction de ce champ de vitesse sur la plaque.

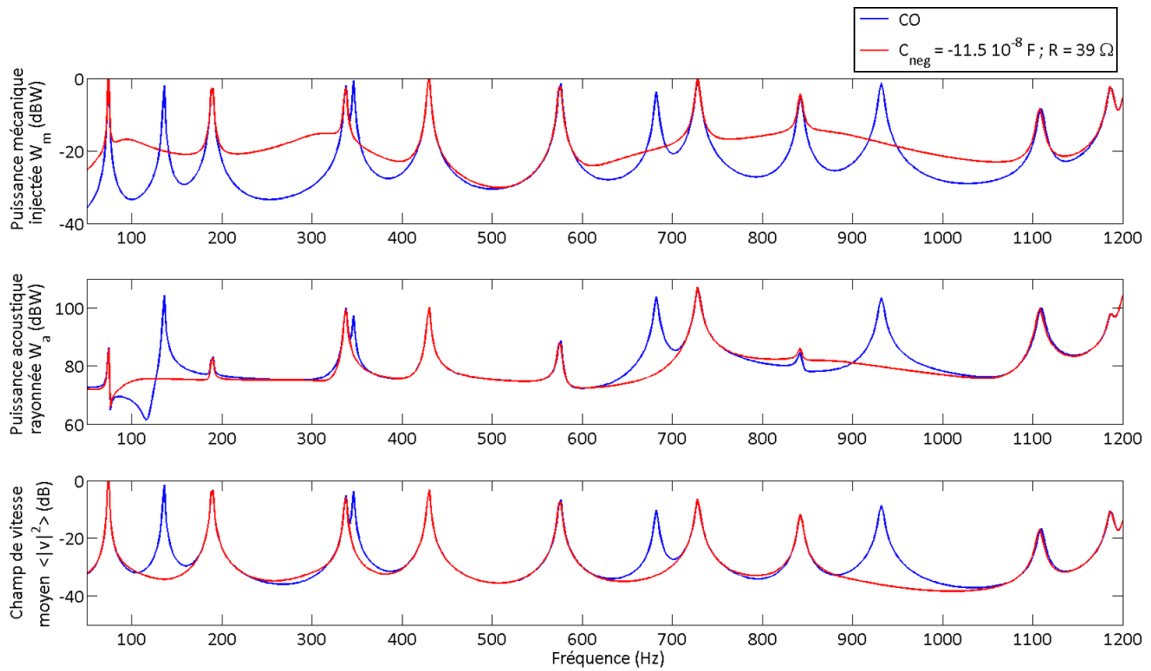


FIG 2.23 – Puissance mécanique injectée \mathcal{W}_m au point 1 sur la figure 2.21 (en haut), puissance acoustique rayonnée \mathcal{W}_a (au milieu) et champ de vitesse quadratique (en bas) de la plaque avec le patch piézoélectrique en circuit ouvert (bleu) et shunté par un shunt à capacité négative avec $C_{neg} = -11.5 \cdot 10^{-8} F$ et $R = 39 \Omega$ (rouge).

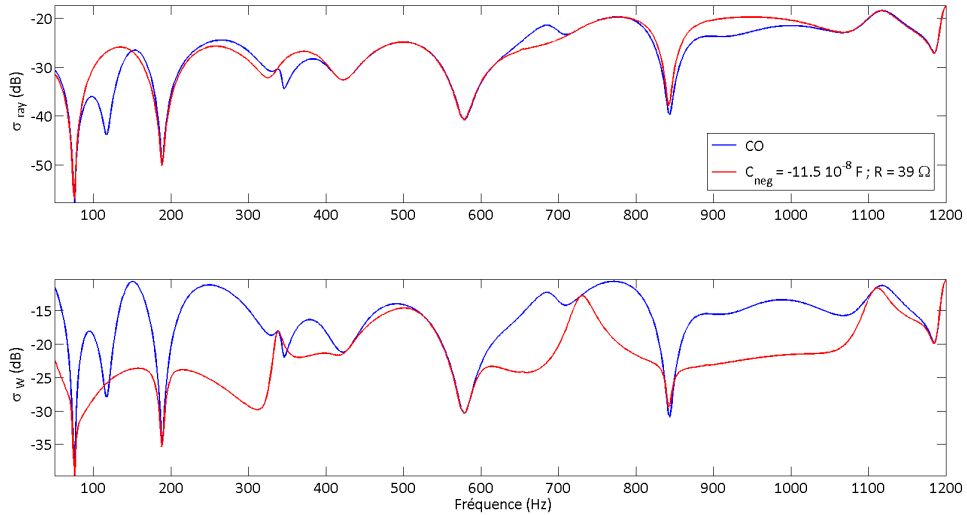


FIG 2.24 – Facteur de rayonnement σ_{ray} (en haut) et facteur de puissance σ_W (en bas) définis par les relations 1.103 et 1.104 pour le patch piézoélectrique en circuit ouvert (bleu) et shunté par un shunt à capacité négative avec $C_{neg} = -11.5 \cdot 10^{-8} F$ et $R = 39 \Omega$ (rouge).

2.2.3 Étude expérimentale

Afin de montrer la possibilité d'obtenir les mêmes types de résultats que dans la partie théorique précédente (§ 2.2.2), c'est à dire la possibilité de diminuer les vibrations et le rayonnement acoustique

de modes couplés, des mesures comparatives de mobilité et de champs de vitesse vibratoire sont réalisées dans différents cas de figure : en circuit ouvert, en court-circuit et shunté par la carte analogique de la figure 2.5 page 59 qui synthétise une capacité négative. La mesure de la réponse en fréquence de la mobilité en différents points permet de déterminer certains de ces modes couplés (voir la relation 2.16). Ensuite, après avoir identifié ces modes, la mesure du champ vibratoire permet d'une part de montrer qu'il est possible de diminuer les amplitudes vibratoires de ces modes, et d'autre part de montrer la diminution du champ acoustique rayonné à partir de la méthode de l'intégrale de Rayleigh (voir §1.3.2).

2.2.3.1 Description du système

Le système étudié dans cette partie est constitué d'une plaque en aluminium $300 \times 300 \times 2 \text{ mm}^3$ sur laquelle est positionné en son centre un patch piézoélectrique de type PZ26 $50 \times 50 \times 0.5 \text{ mm}^3$, shunté par un circuit $Z_{sh} = 1/j\omega C_{neg} + R$ synthétisé par la carte analogique de la figure 2.5. Le système utilisé est donc le même que celui présenté dans la section théorique précédente (§2.2.2) hormis le patch qui n'est pas un PZT-5H mais est un PZ26. Les simulations n'ont pu être réalisées avec un PZ26 car ce dernier n'est pas présent dans la bibliothèque de matériaux du logiciel de calcul numérique et il est difficile de retrouver toutes les caractéristiques utiles. Les caractéristiques de ces patchs sont différentes, mais les phénomènes physiques mis en jeu sont les mêmes. La capacité du patch est de 51 nF . Une photographie du système étudié est présentée par la figure 2.25.

2.2.3.2 Réponse en fréquence

La plaque est suspendue et est excitée par un signal harmonique de type « sweep » dans un des coins par un pot vibrant possédant une tête d'impédance munie à la fois d'un capteur de force et d'un accéléromètre. La bande fréquentielle d'excitation est $200 - 3000 \text{ Hz}$. Les déplacements de la plaque sont mesurés à l'aide d'un vibromètre laser à balayage placé à 4m de celle-ci. La figure 2.25 est une photographie de l'expérience et la figure 2.26 présente un schéma de la mesure de la réponse en fréquence de la mobilité $H(\omega)$ (relation 2.17).

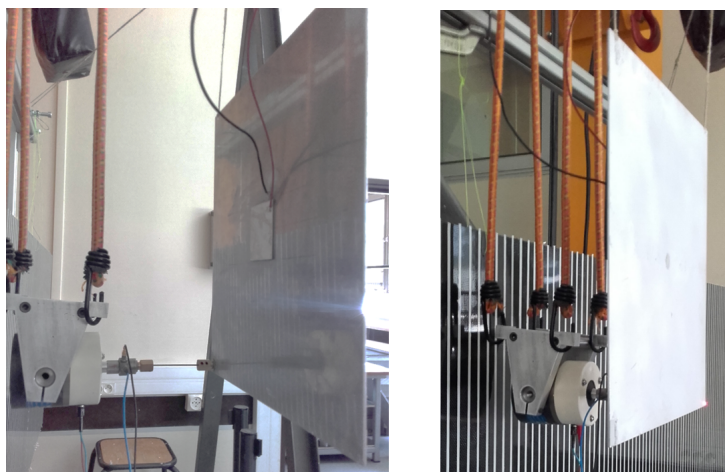


FIG 2.25 – Photographie de l'expérience : une plaque en aluminium suspendue $300 \times 300 \times 2 \text{ mm}^3$ munie d'un patch piézoélectrique PZ26 $50 \times 50 \times 0.5 \text{ mm}^3$ shunté par un circuit $Z_{sh} = 1/j\omega C_{neg} + R$ synthétisé par la carte analogique de la figure 2.5.

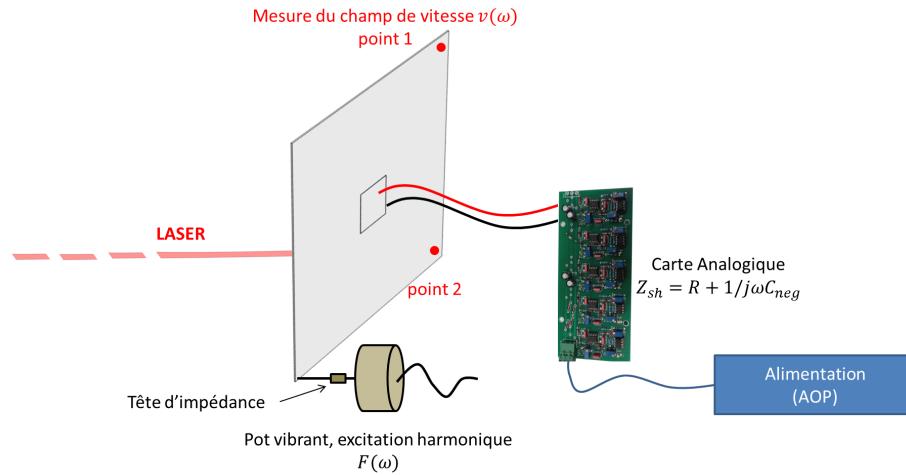
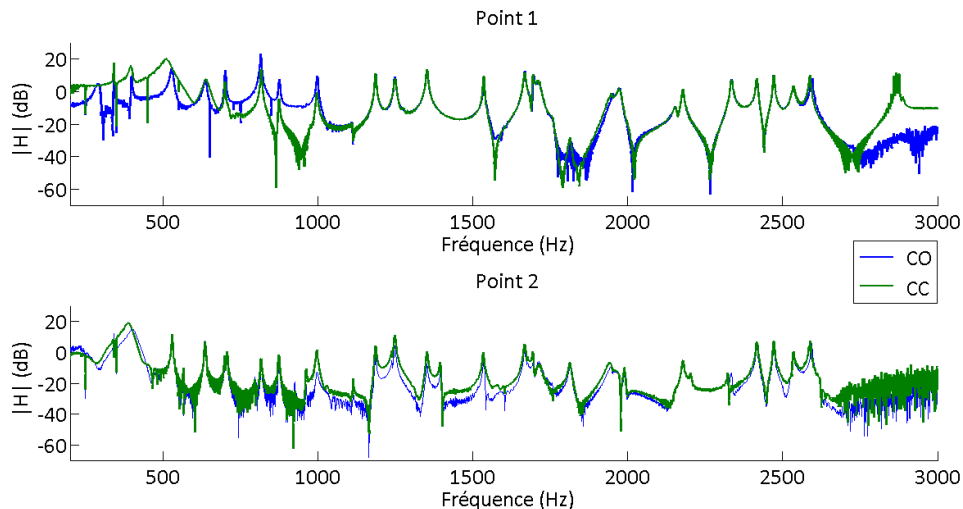


FIG 2.26 – Schéma de la mesure de la mobilité (relation 2.17).

La mobilité est mesurée en deux points afin d'obtenir plusieurs résultats de comparaison. Les résultats obtenus sont présentés par les figures 2.27 et 2.29 : la première montre les courbes de mobilité avec le patch piézoélectrique en circuit ouvert et en court-circuit, la seconde montre les courbes avec le patch shunté par la carte analogique en mode actif et en mode passif, c'est à dire qu'elle n'est pas alimentée électriquement et que le circuit est inactif. Cette dernière condition électrique est différente de la condition en court-circuit car la carte analogique non alimentée possède sa propre impédance de part les différents composants électroniques qui la composent. En mode actif, la résistance et la capacité négative équivalentes sont respectivement égale à environ 39.85Ω et $-63.22 \cdot 10^{-9} F$; cette capacité négative est paramétrée à la limite de l'instabilité. Pour plus de détails sur cette condition d'instabilité, et sur le calcul de la résistance et de la capacité négative équivalente, se référer au §2.1.1 page 56. Les courbes de mobilité présentées par la figure 2.29 montre la possibilité d'atténuer plusieurs modes vibratoires avec un seul patch piézoélectrique. En effet, on observe une nette diminution d'amplitude de la mobilité pour plusieurs modes couplés.

FIG 2.27 – Module de la réponse en fréquence de la mobilité $|H(\omega)|$ mesurée dans les cas $v(\text{point1})/F(\text{point1})$ (en haut) et $v(\text{point2})/F(\text{point1})$ (en bas) (voir figure 2.26) pour le patch piézoélectrique en circuit ouvert (bleu) et en court-circuit (vert).

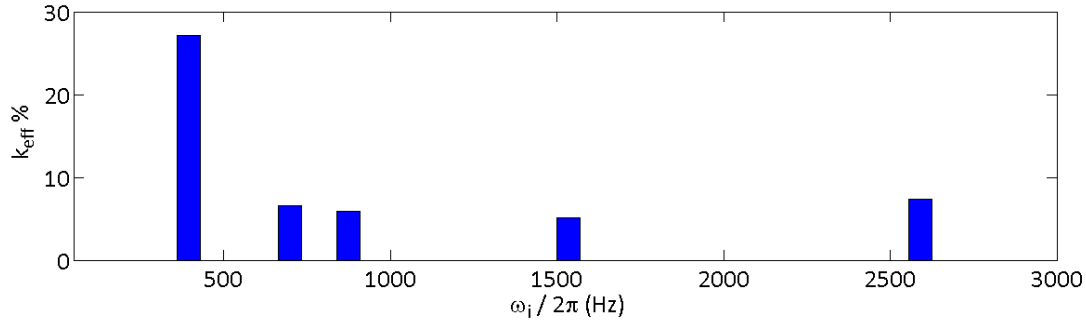


FIG 2.28 – Coefficient de couplage effectif k_{eff} en % en fonction de ω_i . Seuls les coefficients de couplage supérieurs ou égaux à 5% sont retenus.

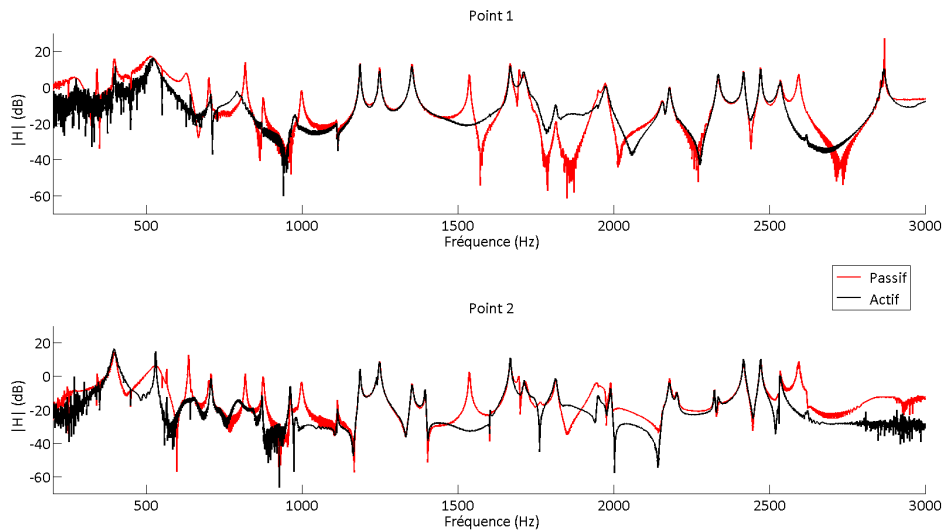


FIG 2.29 – Module de la réponse en fréquence de la mobilité $|H(\omega)|$ mesurée dans les cas $v(point1)/F(point1)$ (en haut) et $v(point2)/F(point1)$ (en bas) (voir figure 2.26) pour le patch piézoélectrique shunté par un shunt à capacité négative de la forme $Z_{sh}(\omega) = R + 1/j\omega C_{neg}$ avec la carte analogique passive (rouge) et active (noir). $C_{neg} = -63.22 \cdot 10^{-9} F$ et $R = 39.85 \Omega$.

Les coefficients de couplage k_{eff} (voir relation 2.16) sont calculés à partir des courbes de la figure 2.27 et sont présentés en figure 2.28. Seuls les coefficients supérieurs ou égaux à 5% sont retenus. Les mesures de réponse en fréquence de la mobilité témoignent d'un réel contrôle vibratoire des modes couplés pour des fréquences supérieures à 500 Hz ; ces mesures ne permettent pas d'exploiter ces résultats pour des fréquences inférieures. L'étude de la diminution du rayonnement acoustique est réalisée sur le mode à 1536 Hz qui est le mode le plus atténué. Nous aurions pu focaliser notre attention sur le mode à 2590 Hz, mais la mesure du champ de vitesse vibratoire, qui nous permet ensuite de calculer la puissance acoustique rayonnée, implique une discrétisation spatiale des points de mesure plus importante et, par conséquent, des mesures beaucoup plus longues pour finalement en déduire les mêmes remarques qu'avec l'étude du mode à 1536 Hz.

2.2.3.3 Mesures de champ de vitesse vibratoire et calculs de rayonnement

La plaque est discrétisée spatialement avec un maillage de 29×29 points comme on peut le voir sur la figure 2.30. La vitesse vibratoire de la plaque est mesurée à la fréquence d'excitation de 1536 Hz pour

la carte active et passive. L'amplitude du champ de vitesse est présentée par la figure 2.31.

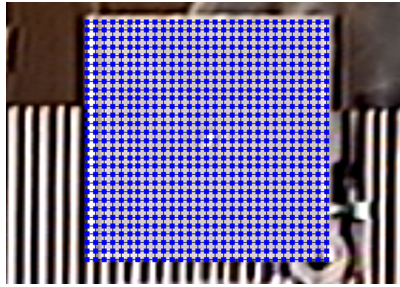


FIG 2.30 – Maillage spatial de la plaque pour la mesure du champ de vitesse vibratoire.

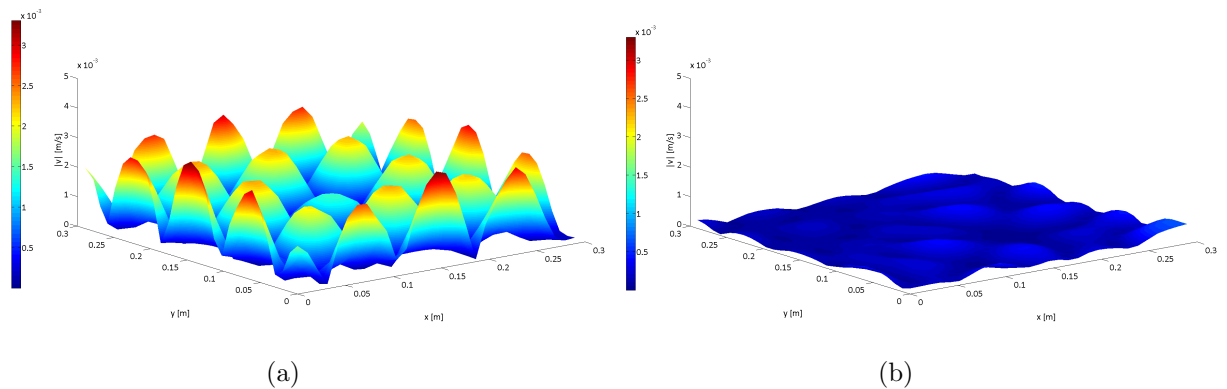


FIG 2.31 – Module du champ de vitesse vibratoire mesuré au vibromètre laser à balayage à partir du maillage spatial de la figure 2.30 pour la carte analogique passive (a) et active (b) pour le mode à 1536 Hz.

	Passif	Actif
Puissance mécanique injectée \mathcal{W}_m	-48.7 (dB)	-54.9 (dB)
Puissance acoustique \mathcal{W}_a	55.6 (dBW)	47.1 (dBW)
Vitesse vibratoire moyenne $\langle v ^2 \rangle$	-42.3 (dB)	-58.2 (dB)
Facteur de rayonnement σ_{ray}	-22.1 (dB)	-14.7 (dB)
Facteur de Puissance $\sigma_{\mathcal{W}}$	-15.6 (dB)	-18.1 (dB)

TABLEAU 2.1 – Résultats de l'étude acoustique à 1536 Hz.

Le tableau 2.1 donne la synthèse des différents paramètres calculés à partir du champ de vitesse vibratoire. On observe une diminution de 8,5 dB de la puissance acoustique rayonnée. Cette diminution n'est pas de l'ordre de 20 dB qui est l'ordre de grandeur obtenu théoriquement dans le §2.2.2.4 page 70. Ceci s'explique par la difficulté de réglage de la carte analogique et donc d'un paramétrage trop peu précis de la résistance et de la capacité négative. En revanche les résultats témoignent d'une même tendance que celle obtenue à partir des résultats théoriques, le contrôle permet : une diminution de la puissance injectée \mathcal{W}_m , du champ de vitesse quadratique moyen $\langle |v|^2 \rangle$ et de la puissance rayonnée \mathcal{W}_a . Le facteur de puissance $\sigma_{\mathcal{W}}$ montre que la diminution de l'énergie acoustique rayonnée est à la fois à la réduction de l'énergie mécanique injectée au système et à l'énergie dissipée par le shunt électrique.

2.3 Optimisation du contrôle vibroacoustique

Nous avons pu voir précédemment dans la partie théorique (§2.2.2) la possibilité de contrôler certains modes de la plaque et de diminuer leur amplitude vibratoire induisant une diminution de l'énergie acoustique rayonnée à la fréquence de ces modes. Ce sont les modes pour lesquels le patch piézoélectrique est positionné sur un maximum de courbure de la plaque. Il est proposé ici une optimisation du système précédent (voir §2.2.2, figure 2.12) afin de contrôler en plus des modes A , B , C , et D les modes à 338 Hz , 430 Hz , 576 Hz , 728 Hz et 1108 Hz qui ont une forte puissance acoustique rayonnée selon la figure 2.23 pour la même excitation. On cherche donc à optimiser le contrôle dynamique de la plaque en positionnant des patches piézoélectriques stratégiquement sur celle-ci. Pour ce faire, la méthode proposée est de calculer, pour chaque fréquence d'excitation de ces cinq modes, le champ de courbure pondéré par le facteur de rayonnement acoustique associé :

$$g_i = \left(\left| \frac{\partial^2 w_i(x, y)}{\partial x^2} \right| + \left| \frac{\partial^2 w_i(x, y)}{\partial y^2} \right| \right) \times \sigma_{ray, i} , \quad (2.18)$$

où w_i est le déplacement transverse de la structure et $\sigma_{ray, i}$ le facteur de rayonnement du mode i ; la pondération par le facteur de rayonnement acoustique permet de donner un coefficient qui quantifie la participation du champ de courbure du mode excité au rayonnement acoustique globale de la plaque. Puis, on réalise la somme des champs de courbure ainsi obtenus qui est ensuite normalisé par son maximum :

$$G = \frac{\sum_i g_i}{\max(\sum_i g_i)} . \quad (2.19)$$

La somme des champs de courbure permet de déterminer les endroits de la plaque qui sont sollicités communément pour tous les modes. Les champs de courbure sont directement calculés à partir du champ de déplacement induit par la la force ponctuelle $F(\omega)$ précédemment définie dans le modèle avec un seul patch piézoélectrique (voir figure 2.21). Les profils des champs de déplacement des modes sont présentés par la figure 2.32. La somme des champs de courbure normalisée définie par la relation 2.19 est présentée par la figure 2.33.

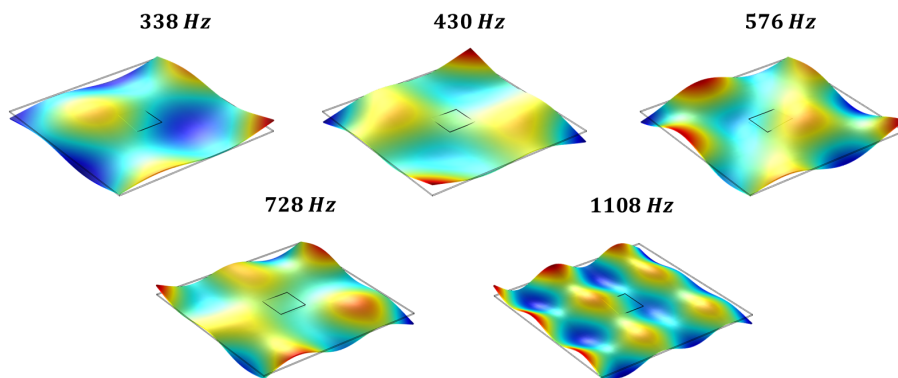


FIG 2.32 – Champ de déplacement de la structure à la fréquence des modes propres (déformée opérationnelle) principalement rayonnants selon la figure 2.23.

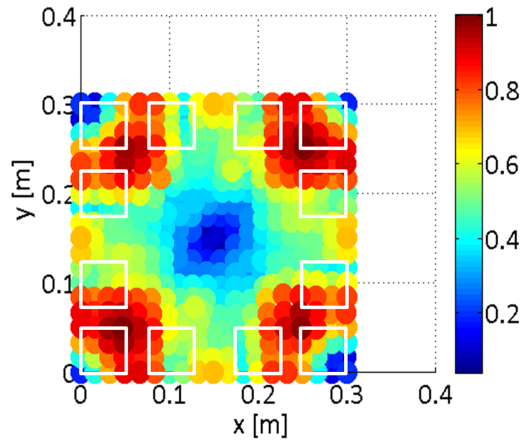


FIG 2.33 – Champ de courbure total G calculé à partir de la relation 2.19 pour les déformées opérationnelles aux fréquences propres des modes présentés par la figure 2.32.

Au vu des résultats obtenus en figure 2.33, il semble intéressant d'étudier l'impact de patches positionnés tel qu'il est montré sur la figure 2.34. Treize patches sont utilisés ici. Bien évidemment, plus on augmente le nombre de patches, plus le contrôle se montre efficace, mais plus la masse ajoutée devient importante. Notons que l'utilisation des 13 patches implique une augmentation de la masse de la plaque de 23 %, ce qui devient non négligeable. Il semblerait donc intéressant de chercher par la suite à optimiser le rapport d'efficacité au taux de recouvrement des patches en utilisant par exemple des patches de plus petites tailles.

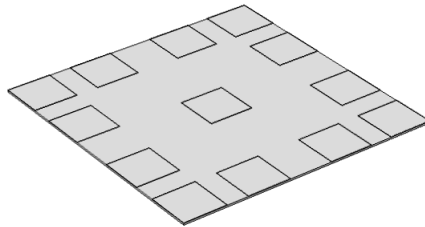


FIG 2.34 – Positionnement des patches selon la déformée des modes de la figure 2.32 et des résultats obtenus en figure 2.33.

Les facteurs de couplage sont recalculés avec le nouveau système. Les résultats sont présentés par la figure 2.35. On remarque un couplage nettement plus important pour un grand nombre de modes comparé au modèle avec un seul patch proposé précédemment. Le facteur de couplage augmente pour les anciens modes couplés A , B , C et D du fait du positionnement de plusieurs patches qui viennent agir sur différents maxima de la courbure de ces modes. La fréquence propre de tous les modes a naturellement changé avec le positionnement de nouveaux patches, mais ces fréquences restent tout de même peu décalées vers les basses fréquences.

L'étude aux valeurs propres de la réponse en fréquence et du rayonnement est refaite de la même manière qu'elle a été faite et décrite dans le §2.2.2. La capacité négative et la résistance du shunt sont paramétrées à $C_{neg} = -11.8 \cdot 10^{-8} F$ et $R = 35 \Omega$. Les résultats de la réponse en fréquence de la mobilité

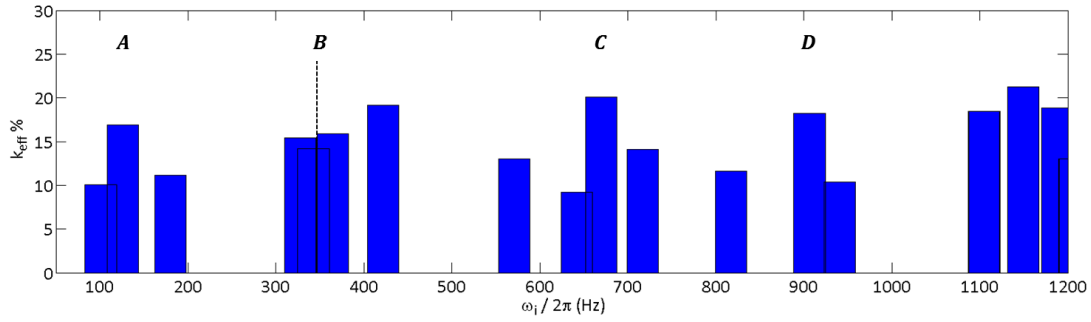


FIG 2.35 – Coefficient de couplage effectif k_{eff} en % en fonction de ω_i . Seuls les coefficients de couplage supérieur ou égaux à 7% sont retenus.

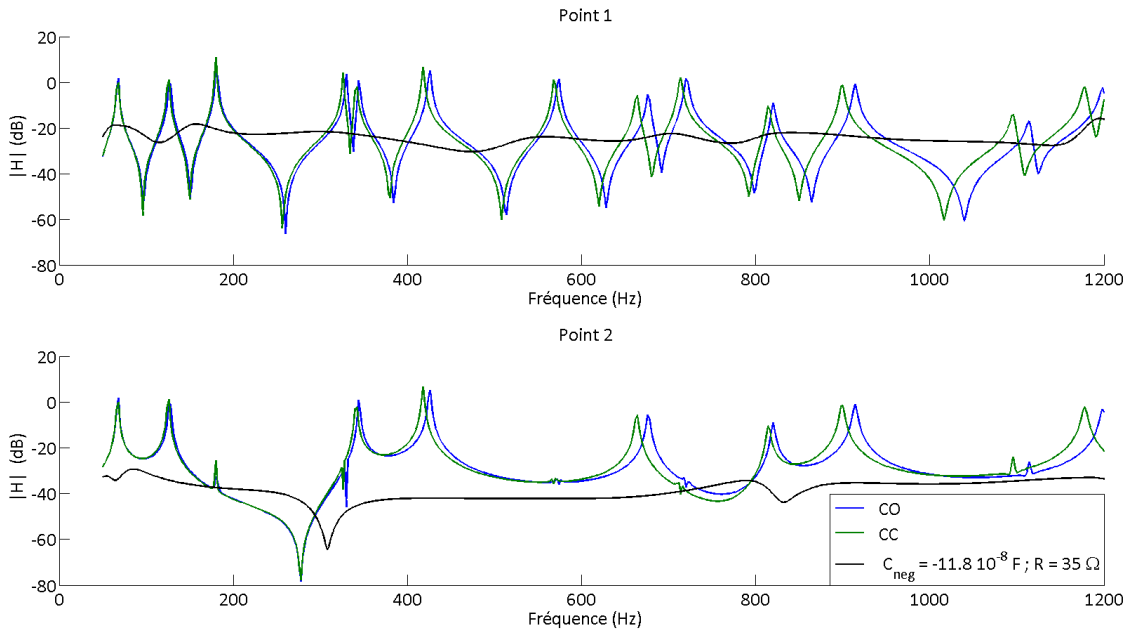


FIG 2.36 – Module de la réponse en fréquence de la mobilité $|H(\omega)|$ calculée dans les cas $v(point1)/F(point1)$ (en haut) et $v(point2)/F(point1)$ (en bas) (voir figure 2.21) pour le patch piézoélectrique en circuit ouvert (bleu), en court-circuit (vert) et shunté par un shunt à capacité négative de la forme $Z_{sh} = R + 1/j\omega C_{neg}$ avec $C_{neg} = -11.8 \cdot 10^{-8} F$ et $R = 35 \Omega$ (noir).

et des différents indicateurs du rayonnement sont présentés par les figures 2.36 à 2.38. On constate une forte diminution des vibrations et du rayonnement sur une large bande fréquentielle induite par le contrôle vibroacoustique de tous les modes de flexion. Le calcul du champ de vitesse quadratique moyen confirme bien que l'amplitude vibratoire globale de la plaque est fortement atténuée et le calcul de la puissance acoustique rayonnée témoigne d'une diminution d'environ 20 dB sur tous les modes.

Comme expliqué précédemment, le facteur de rayonnement σ_{ray} ne révèle pas une diminution de la puissance acoustique rayonnée car le rapport de cette puissance sur le champ de vitesse quadratique change peu. En revanche, lorsque la puissance injectée dans le système est considérée, on remarque une nette amélioration. En effet le facteur de puissance σ_W chute significativement d'environ 10 dB.

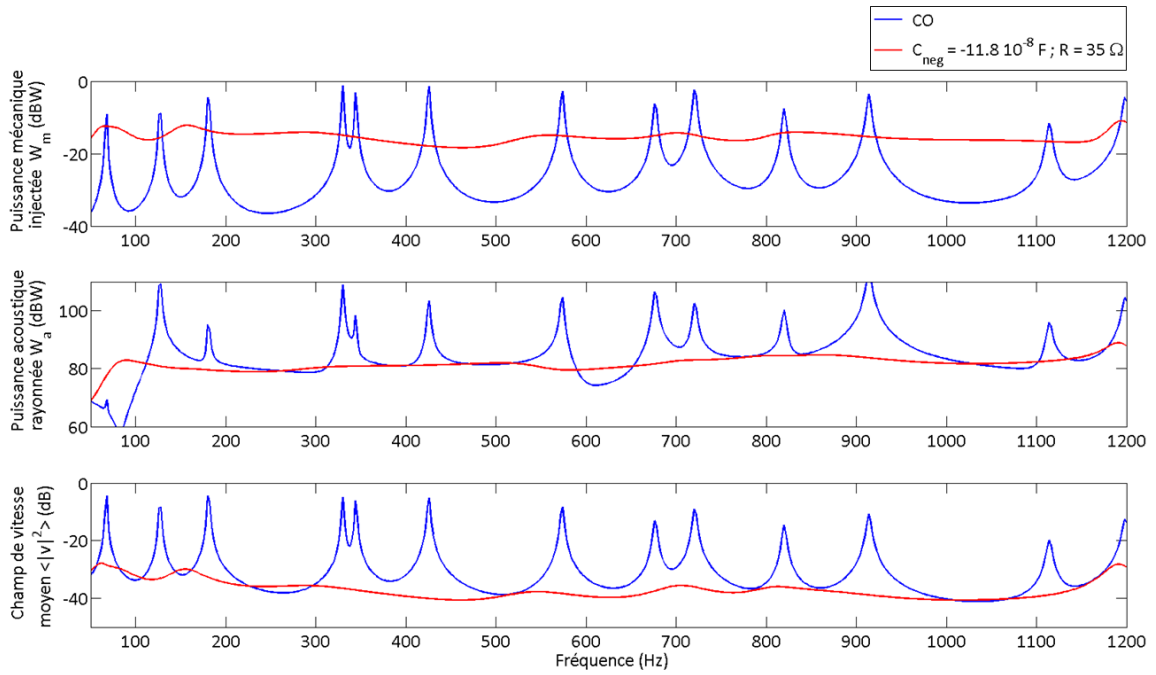


FIG 2.37 – Puissance mécanique injectée \mathcal{W}_m au point 1 sur la figure 2.21 (en haut), puissance acoustique rayonnée \mathcal{W}_a (au milieu) et champ de vitesse moyen $\langle |v|^2 \rangle$ (en bas) de la plaque figure 2.34 avec les patches piézoélectriques en circuit ouvert (bleu) et shuntés par un shunt à capacité négative avec $C_{neg} = -11.8 \cdot 10^{-8} F$ et $R = 35 \Omega$ (rouge).

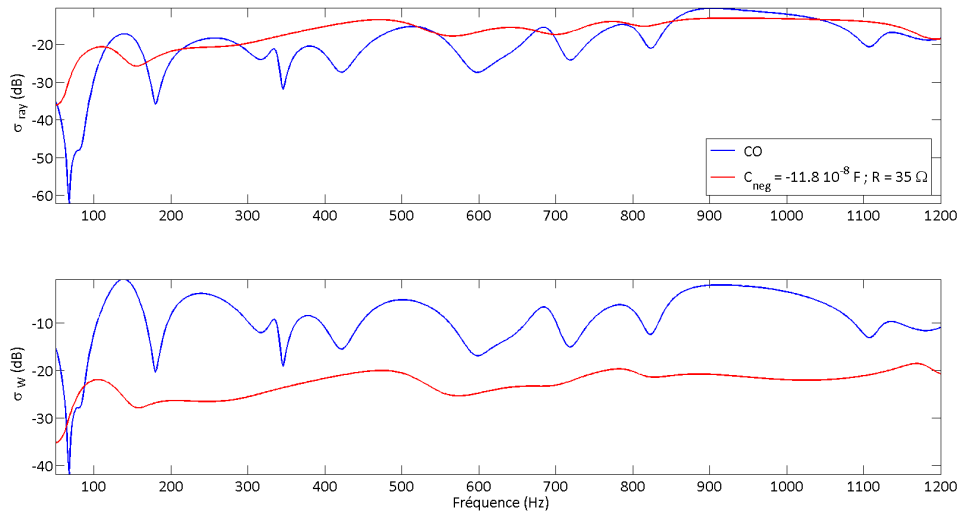


FIG 2.38 – Facteur de rayonnement σ_{ray} (en haut) et facteur de puissance σ_W (en bas) définis par les relations 1.103 et 1.104 pour les patches piézoélectriques en circuit ouvert (bleu) et shuntés par un shunt à capacité négative avec $C_{neg} = -11.8 \cdot 10^{-8} F$ et $R = 35 \Omega$ (rouge).

2.4 Bilan : influence d'un patch shunté sur le comportement vibratoire d'une plaque finie

La capacité négative peut être synthétisée de manière analogique, elle est alors créée grâce à un circuit électronique complexe utilisant des amplificateurs opérationnels et des résistances variables afin de convertir l'impédance d'un condensateur en une impédance négative. Elle peut aussi être synthétisée de manière numérique grâce à l'utilisation d'un contrôleur numérique fabriqué à partir d'une carte DSpace. Celle-ci est constituée de convertisseurs analogique/numérique (entrée) et numérique/analogique (sortie) et d'un DSP (Digital Signal Processor, processeur de signal numérique en français) qui permet de calculer la fonction de transfert implémentée informatiquement. Cette fonction de transfert simule alors l'équation d'impédance (ou admittance) du shunt. Il est ainsi possible de créer n'importe quel type de shunt avec ce modèle de circuit, il suffit de simuler l'impédance associée.

La synthèse analogique de la capacité négative présente de nombreux inconvénients. Elle est simple de mise en œuvre mais ne permet pas un réglage précis de la résistance et de la capacité négative qui composent le shunt. Pour palier ce problème, on propose d'avoir recours à une synthèse numérique de la capacité négative. La synthèse numérique est donc une perspective intéressante pour plusieurs critères. Elle permet une plus grande précision, elle semble plus robuste tout en ouvrant des perspectives de miniaturisation du système électrique et donc une meilleure intégration du système électronique.

Le shunt à capacité négative s'avère être une méthode efficace pour le contrôle modal d'une structure. Nous avons pu voir la possibilité d'atténuer fortement les vibrations et le rayonnement acoustique d'un mode. Pour optimiser l'efficacité du contrôle, il faut alors placer un bord du patch piézoélectrique sur un maximum de courbure qui est directement liée à la dérivée partielle d'ordre deux du champ de déplacement. Pour évaluer le couplage piézo-électromécanique, on observe la variation de la fréquence propre du mode ciblé avec le patch piézoélectrique en circuit ouvert et en court-circuit. En effet, la variation de cette dernière traduit une augmentation de la rigidité locale de la plaque couplée au patch. La quantification de la variation de la fréquence propre permet alors de calculer le coefficient de couplage effectif (relation 2.16). Ce facteur de couplage est d'autant plus important lorsque l'on place plusieurs patchs piézoélectriques sur plusieurs maxima du champ de courbure du mode. Le but ici est de maximiser ce coefficient de couplage qui quantifie la qualité des échanges énergétiques. Ensuite, il est nécessaire d'optimiser les valeurs de la capacité négative C_{neg} et de la résistance R . La valeur de la capacité négative est choisie dans le domaine assouplissant au plus proche de l'instabilité. Pour optimiser R , la méthode proposée est simplement d'étudier la variation du terme de dissipation d'énergie en fonction de R et de maximiser ce terme.

Dans ce chapitre, nous avons montré expérimentalement le contrôle de quelques modes d'une plaque avec un seul patch piézoélectrique shunté par une capacité négative qui est synthétisée de manière analogique. Pour optimiser le contrôle vibroacoustique de la structure, nous avons proposé une étude de l'impact du couple de valeurs de la résistance R et de la capacité négative C_{neg} sur la dissipation d'énergie de chaque mode. Nous en avons déduit que pour chaque mode, pour une valeur de C_{neg} donnée, la valeur optimale de la résistance pour amortir chacun des modes varie. Nous avons donc cherché la valeur de cette résistance qui permet d'atténuer au mieux l'amplitude de tous les modes simultanément.

Finalement, les travaux présentés dans ce chapitre montrent la possibilité de diminuer les vibrations et

le rayonnement à la fréquence de plusieurs modes en :

- optimisant la position des patches par l'étude du champ de courbure, les bords des patches sont positionnés sur les maximas ;
- optimisant la valeur de C_{neg} , celle-ci est choisie dans le domaine assouplissant au plus proche de l'instabilité, et ce, pour pour tout les modes ;
- optimisant la valeur de R en cherchant la valeur qui permet d'atténuer au mieux tout les modes.

Notons ici que le réglage de la valeur de la capacité négative est très sensible et que la méthode de synthèse numérique permet d'être beaucoup plus précis et peut donc améliorer le contrôle.

La méthode de contrôle utilisée ici ne permet pas de diminuer les vibrations de manière globale sur une large bande fréquentielle, ce que peut potentiellement réaliser un réseau périodique de patches piézoélectriques shuntés par une capacité négative.

Chapitre 3

Modélisation d'un réseau périodique de patchs shuntés sur une plaque mince

L'objectif ici est d'étudier l'influence du shunt à capacité négative sur le comportement dynamique d'une plaque munie d'un réseau périodique de patchs piézoélectriques shuntés (figure 2, page 3) avec une capacité négative. Nous nous intéressons alors à l'influence de ce type de shunt sur le champ vibratoire et le champ acoustique rayonné. On propose de réaliser une étude paramétrique du système à partir du calcul des constantes de propagation d'un modèle numérique d'une cellule unitaire.

Le calcul numérique des constantes de propagation d'une cellule unitaire « structure + patch » est proposé en utilisant un logiciel de calcul d'éléments finis. La modélisation envisagée permet de prendre en considération toute la physique du problème en trois dimensions et de calculer aisément les constantes de propagation d'une cellule avec des propriétés dynamiques plus complexes, comme par exemple le cas d'une plaque en matériaux composites. Or, le calcul numérique des valeurs propres (constantes de propagation) de la matrice dynamique d'un système est très coûteux en temps. La capacité négative étant un paramètre sensible et qui demande une grande précision, il est nécessaire de déterminer auparavant un encadrement approximatif des valeurs que va prendre cette capacité négative pour avoir un impact significatif sur le système ; on cherche à diminuer la rigidité de flexion du système. Pour ce faire, une modélisation du couplage structure/patch à l'aide d'un modèle équivalent simplifié [23, 110] est utilisée. Ce modèle analytique est basé sur des hypothèses d'approximation du comportement dynamique d'un système « structure + patch » par un système homogène aux propriétés mécaniques équivalentes. Ce modèle analytique permet alors un pré-conditionnement du modèle numérique.

Les logiciels de calcul d'éléments finis proposent de réaliser un calcul de constantes de propagation d'un milieu périodique à partir de l'approche classique de Floquet-Bloch qui consiste à fixer un paramètre de « périodicité de Floquet » qui est le nombre d'ondes, et de calculer les valeurs propres du système qui sont les pulsations propres. Dans ce cas, il n'est pas possible, à partir de cette méthode, d'obtenir de l'information sur l'amplitude d'atténuation des ondes. Pour palier ce problème, Manuel Collet & al. ont développés un modèle numérique basé sur une méthode appelée **Shifted-Cell Operator** qui est décrite

dans [83, 94], méthode utilisée par la suite.

Ce chapitre présente et compare les différents modèles utilisés.

3.1 Description du système

Les différentes caractéristiques du système considéré sont présentées par la figure 3.1.

Structure aluminium

$$l = 80 \text{ mm}, h = 5 \text{ mm}$$

$$E = 70 \cdot 10^9 \text{ N.m}^{-2}$$

$$\nu = 0.37$$

$$\rho = 2700 \text{ kg.m}^{-3}$$

Piézo PZT-5H

$$l_p = 40 \text{ mm}, h_p = 0.5 \text{ mm}$$

$$s_{11}^E = 16.5 \cdot 10^{-12} \text{ m}^2.\text{N}^{-1}$$

$$s_{12}^E = -4.78 \cdot 10^{-12} \text{ m}^2.\text{N}^{-1}$$

$$d_{31} = -2.74 \cdot 10^{-10} \text{ C.N}^{-1}$$

$$\epsilon_{33}^T = 3.01 \cdot 10^{-8} \text{ F.M}^{-1}$$

$$\rho_p = 7500 \text{ kg.m}^{-3}$$

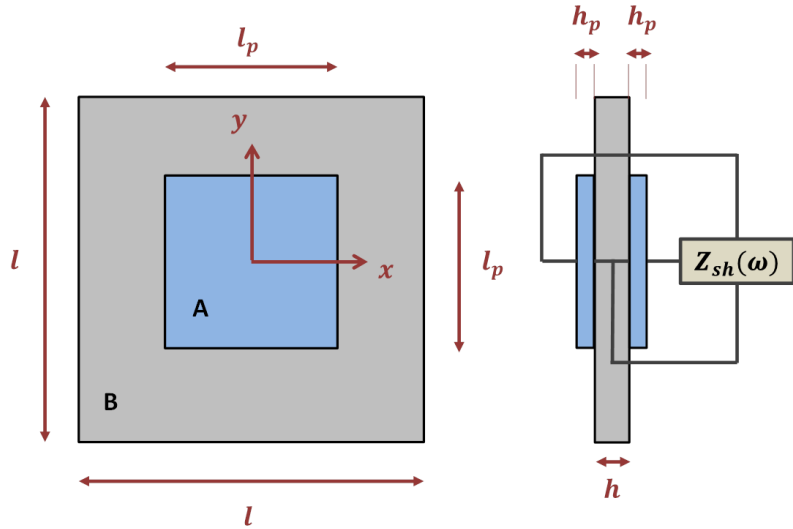


FIG 3.1 – Schéma d'une cellule du système considéré.

La cellule élémentaire est munie de deux patchs, de même dimensions, collés sur les deux faces opposées de la plaque et situés aux mêmes emplacements. Ils sont shuntés en parallèle comme décrit en figure 3.1. L'épaisseur d'un patch est prise suffisamment grande pour des raisons de convergence des solutions numériques. En effet, prendre une épaisseur trop faible implique un maillage utilisant des éléments de très petites tailles ne permettant pas de préserver une bonne qualité des éléments du maillage. L'épaisseur de la plaque est elle aussi choisie avec une épaisseur suffisamment importante pour que le rapport de masse ajoutée ne soit pas trop élevé et respecter ainsi la problématique de la contrainte industrielle de masse ajoutée. Les dimensions de la cellule sont choisies de manière à positionner la fréquence de Bragg f_b de manière à observer l'influence de la méthode utilisée dans une gamme de fréquence inférieure à 4 kHz . Ici, la fréquence de Bragg de la structure avec le patch non shunté est $f_b \simeq 1942 \text{ Hz}$.

3.2 Modèle analytique équivalent d'une cellule périodisée

Lorsque les dimensions de la périodicité sont plus petites que les longueurs d'ondes acoustiques (rapport inférieur à 1), il est possible d'utiliser la théorie du modèle équivalent (ME). Dans cette approche, le système est traité comme un système homogène ayant des propriétés dynamiques équivalentes. Le modèle utilisé décrit ci-dessous est présenté dans [23, 110].

3.2.1 Formulation analytique

Dans le cas d'une polarisation des électrodes selon l'axe z (sens de l'épaisseur), les équations de couplage électromécanique 1.1 et 1.2 peuvent s'écrire comme le système d'équation suivant [110] :

$$S_1 = s_{11}^E T_1 + s_{12}^E T_2 + d_{31} E_3, \quad (3.1)$$

$$S_2 = s_{12}^E T_1 + s_{11}^E T_2 + d_{31} E_3, \quad (3.2)$$

$$S_6 = 2(s_{11}^E - s_{12}^E) T_6, \quad (3.3)$$

$$D_3 = \varepsilon_{33}^T E_3 + d_{31} T_1 + d_{31} T_2, \quad (3.4)$$

où S_1 et T_1 sont la déformée et la contrainte normale à la surface suivant x , S_2 et T_2 sont la déformée et la contrainte normale à la surface suivant y , S_6 et T_6 sont la déformée et la contrainte transverse à la surface x suivant y (cisaillement), D_3 est le déplacement électrique sur les électrodes, E_3 est le champ électrique dans le patch, s_{11}^E et s_{12}^E sont les coefficients d'élasticité du matériau à champ électrique constant, ε_{33} est la constante diélectrique du piézoélectrique à contrainte constante et d_{31} est la constante piézoélectrique.

Le courant i généré par un patch piézoélectrique shunté par un circuit électrique d'impédance Z_{sh} peut s'écrire :

$$i = \frac{E_3 h_p}{Z_{sh}} = -j\omega S_p D_3, \quad (3.5)$$

avec S_p la surface du patch piézoélectrique. En remplaçant les termes de la relation 3.4 par les termes de la relation 3.5, on obtient :

$$\begin{Bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11}^E - \frac{j\omega Z_{sh} d_{31}^2 S_p h_p^{-1}}{1+j\omega Z_{sh} C_p^t} & s_{12}^E - \frac{j\omega Z_{sh} d_{31}^2 S_p h_p^{-1}}{1+j\omega Z_{sh} C_p^t} & 0 \\ s_{12}^E - \frac{j\omega Z_{sh} d_{31}^2 S_p h_p^{-1}}{1+j\omega Z_{sh} C_p^t} & s_{11}^E - \frac{j\omega Z_{sh} d_{31}^2 S_p h_p^{-1}}{1+j\omega Z_{sh} C_p^t} & 0 \\ 0 & 0 & 2(s_{11}^E - s_{12}^E) \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_6 \end{Bmatrix}. \quad (3.6)$$

Pour une plaque isotrope, cette relation est :

$$\begin{Bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_6 \end{Bmatrix}. \quad (3.7)$$

Dès lors, il est possible de montrer que le module d'Young E_p et le coefficient de Poisson ν_p du patch piézoélectrique sont donnés par :

$$E_p = \frac{h_p(1+j\omega Z_{sh} C_p^t)}{h_p s_{11}^E(1+j\omega Z_{sh} C_p^t) - j\omega Z_{sh} d_{31}^2 S_p}, \quad (3.8)$$

$$\nu_p = \frac{s_{12}^E(1+j\omega Z_{sh} C_p^t) - j\omega d_{31}^2 S_p h_p^{-1}}{s_{11}^E(1+j\omega Z_{sh} C_p^t) - j\omega Z_{sh} d_{31}^2 S_p h_p^{-1}}. \quad (3.9)$$

La masse m_A et la rigidité de flexion D_A dans la région **A** (figure 3.1) sont :

$$m_A = \rho h + 2\rho_p h_p, \quad (3.10)$$

$$D_A = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} + \frac{2E_p}{3(1-\nu_p^2)} \left[\left(\frac{h}{2} + h_p \right)^3 - \left(\frac{h}{2} \right)^3 \right]. \quad (3.11)$$

On obtient donc, pour la cellule, le système équivalent suivant :

$$m(x, y) = \begin{cases} m_A = \rho h + 2\rho_p h_p, & (x, y) \in A, \\ m_B = \rho h, & (x, y) \in B; \end{cases} \quad (3.12)$$

$$D(x, y) = \begin{cases} D_A = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} + \frac{2E_p}{3(1-\nu_p^2)} \left[\left(\frac{h}{2} + h_p \right)^3 - \left(\frac{h}{2} \right)^3 \right], & (x, y) \in A, \\ D_B = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, & (x, y) \in B. \end{cases} \quad (3.13)$$

Finalement, en définissant $\alpha = l_p^2/l^2$ comme étant le ratio entre la surface S_p et la surface de la cellule, on peut définir la masse équivalente du système m_{eq} , la rigidité de flexion D_{eq} et le nombre d'ondes équivalent k_{eq} :

$$m_{eq} = \alpha m_A + (1 - \alpha) m_B, \quad (3.14)$$

$$D_{eq} = \frac{D_A D_B}{(1 - \alpha) D_A + \alpha D_B}, \quad (3.15)$$

$$k_{eq} = \sqrt{\omega} \sqrt[4]{m_{eq}/D_{eq}}. \quad (3.16)$$

L'étude de ces équations montre que le comportement dynamique du système sans patch et avec un patch non shunté ($Z = \infty$) change très peu dans notre cas. Les nombres d'ondes avec patch non shunté et sans patch sont quasi-équivalents.

3.2.2 Étude du modèle équivalent

Nous cherchons à présent à déterminer la valeur optimale de la capacité négative afin de minimiser la rigidité de flexion équivalente D_{eq} du modèle équivalent permettant ensuite de pré-conditionner le calcul numérique ; le résultat obtenu à partir du modèle équivalent donne un ordre de grandeur de la capacité négative utilisée par la suite dans le modèle numérique. La courbe en figure 3.2 montre la variation de D_{eq} en fonction de la capacité négative. La capacité négative « optimale » est notée $C_{neg,a}$ et vaut : $C_{neg,a} \approx 13.0 \cdot 10^{-8} F$.

Le graphique présenté par la figure 3.3 montre une augmentation de la masse surfacique d'environ 14%. Cette augmentation de masse reste faible mais non négligeable. En revanche, l'épaisseur des patches utilisés est importante ($h_p = 0.5 \text{ mm}$) et pourrait être en réalité diminuée, mais pour des raisons de convergence de calculs numériques, l'épaisseur des patches reste inchangée.

Pour calculer de manière usuelle les constantes de propagation, en flexion pure, de la cellule qui est présentée en figure 3.1, il est proposé dans [23] de scinder la cellule en deux parties comme présenté en

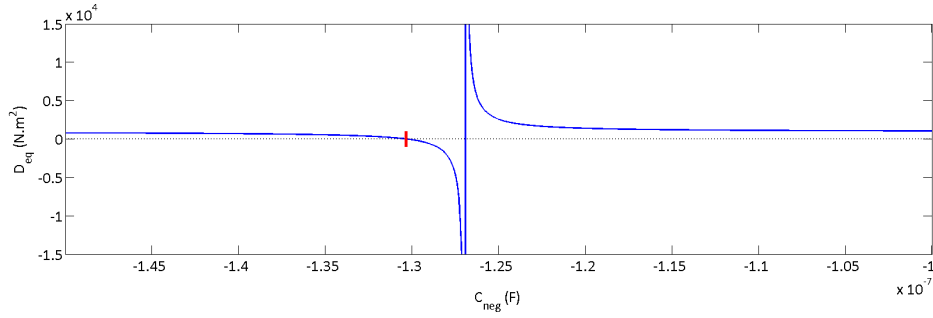


FIG 3.2 – Courbe représentative de la variation de la rigidité de flexion équivalente D_{eq} en fonction de la capacité négative C_{neg} . La valeur optimale de la capacité négative notée $C_{neg,a}$ est donnée par le trait rouge, $C_{neg,a} \approx 13.0 \cdot 10^{-8} F$.

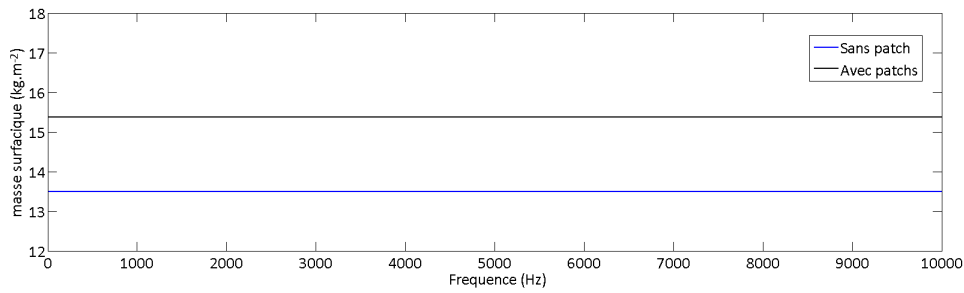


FIG 3.3 – Masse surfacique équivalente m_{eq} . Plaque sans patch (en bleu), avec patchs mais sans shunt (en noir).

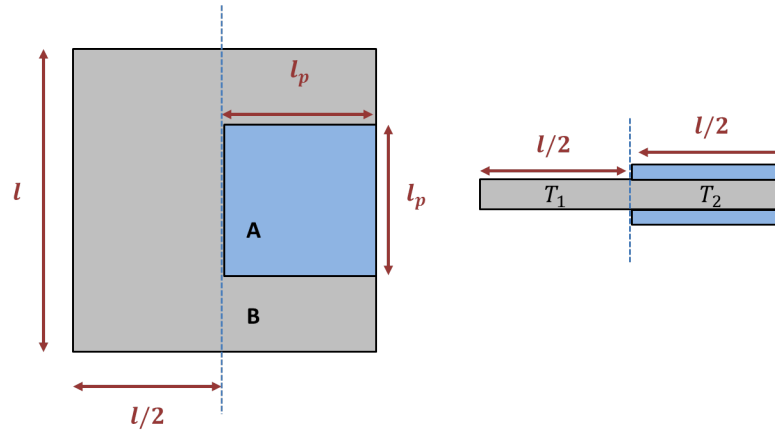


FIG 3.4 – Schéma d'une cellule considérée pour le calcul des constantes de propagation vue du dessus (à gauche) et de côté (à droite).

figure 3.4 et d'utiliser la méthode de Floquet comme expliqué dans le §1.2.1 page 13. Cette figure montre un changement spatial de la périodicité, le patch est positionné à l'extrémité de la cellule ; ceci n'a que pour intérêt de simplifier les explications ci-dessous. La partie sans patch est définie par une matrice de transfert T_1 et la partie avec patchs est définie par une matrice de transfert T_2 ; la matrice de transfert globale est alors : $T = T_1 T_2$. En considérant seulement la propagation des ondes de flexion, et qui plus est, dans une seule direction (direction ΓX sur la zone de Brillouin, figure 1.31 page 32), les deux matrices T_1 et T_2 prennent la forme de la matrice décrite par la relation 3.17 en enlevant les termes liés à l'influence de l'absorbeur dynamique ($D_a = 0$) et en considérant $k_f = \sqrt[4]{m\omega^2/D}$ pour T_1 et $k_f = k_{eq} = \sqrt[4]{m_{eq}\omega^2/D_{eq}}$

pour T_2 :

$$\begin{bmatrix} c_1 & \frac{s_1}{k_f} & \frac{s_2}{EI k_f^3} & -\frac{c_2}{EI k_f^2} \\ -k_f s_2 & c_1 & \frac{c_2}{EI k_f^2} & \frac{s_1}{EI k_f} \\ -EI k_f^3 s_1 & EI k_f^2 c_2 & c_1 & k_f s_2 \\ -EI k_f^2 c_2 & EI k_f s_2 & -\frac{s_1}{k_f} & c_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{1,eq} & \frac{s_{1,eq}}{k_{eq}} & \frac{s_{2,eq}}{EI k_{eq}^3} & -\frac{c_{2,eq}}{EI k_{eq}^2} \\ -k_{eq} s_{2,eq} & c_{1,eq} & \frac{c_{2,eq}}{EI k_{eq}^2} & \frac{s_{1,eq}}{EI k_{eq}} \\ -EI k_{eq}^3 s_{1,eq} & EI k_{eq}^2 c_{2,eq} & c_{1,eq} & k_{eq} s_{2,eq} \\ -EI k_{eq}^2 c_{2,eq} & EI k_{eq} s_{2,eq} & -\frac{s_{1,eq}}{k_{eq}} & c_{1,eq} \end{bmatrix} = [T], \quad (3.17)$$

avec

$$c_1 = \cos(k_f l) + \cosh(k_f l), \quad c_{1,eq} = \cos(k_{eq} l_p) + \cosh(k_{eq} l_p), \quad (3.18)$$

$$c_2 = \cos(k_f l) - \cosh(k_f l), \quad c_{2,eq} = \cos(k_{eq} l_p) - \cosh(k_{eq} l_p), \quad (3.19)$$

$$s_1 = \sin(k_f l) + \sinh(k_f l), \quad s_{1,eq} = \sin(k_{eq} l_p) + \sinh(k_{eq} l_p), \quad (3.20)$$

$$s_2 = \sin(k_f l) - \sinh(k_f l), \quad s_{2,eq} = \sin(k_{eq} l_p) - \sinh(k_{eq} l_p), \quad (3.21)$$

La figure 3.5 montre les nombres d'ondes de flexion de la plaque sans patch calculés à partir de cette méthode et à partir de la relation 1.77 qui est la relation analytique connue du nombre d'onde de flexion d'une plaque isotrope infinie. Les résultats obtenus à partir du modèle équivalent (ME) sont identiques aux résultats obtenus avec la relation 1.77, hormis la courbe du nombre d'ondes de flexion calculé à partir du modèle équivalent qui se replie à partir de la fréquence de Bragg notée f_b sur la figure 3.5 (f_b est en réalité la première fréquence de Bragg). Comme il est expliqué précédemment, l'utilisation du théorème de Floquet-Bloch pour calculer les nombres d'ondes applique un artéfact mathématique du fait des conditions de périodicité appliquées à la forme de solution. La résolution du problème aux valeurs propres de la matrice T donne deux valeurs propres, les deux nombres d'ondes correspondants sont notés k_{f1} et k_{f2} .

On peut noter ici que les fréquences de Bragg sont données par :

$$f_{b,n}(\phi) = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\pi}{a \cos(\phi)} \right)^2 \sqrt{\frac{D_{eq}}{m_{eq}}}, \quad \text{avec } n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.22)$$

où ϕ est l'angle azimutal formé avec l'axe ΓX , ici $\phi = 0$.

Les deux figures suivantes montrent les résultats obtenus avec un shunt résonant $Z_{sh} = R + j\omega L$ (figure 3.6) et un shunt à capacité négative $Z_{sh} = 1/j\omega C_{neg}$ (figure 3.7).

Le shunt résonant permet d'amortir les ondes à une fréquence donnée. Ici, avec $L = 0.4 \text{ H}$ et $R = 2 \text{ }\Omega$, la fréquence shuntée est $f_r = 700 \text{ Hz}$. Cette fréquence peut être approximée par la relation 3.23 [110]) :

$$f_r \simeq \frac{1}{2\pi \sqrt{LC_p^t - \frac{d_{31}^2 S_p L / h_p}{s_{11}^E - E h^3 (s_{11}^E - s_{12}^E)^2 / [(1-\alpha)(1-\nu^2)((h+2h_p)^3 - h^3) + 2E h^3 (s_{11}^E - s_{12}^E)]}}}. \quad (3.23)$$

Dans le cas d'un shunt à capacité négative, une bande interdite est créée dont les propriétés d'atténuation sont celles d'une bande interdite de Bragg. Autrement dit l'atténuation est douce et

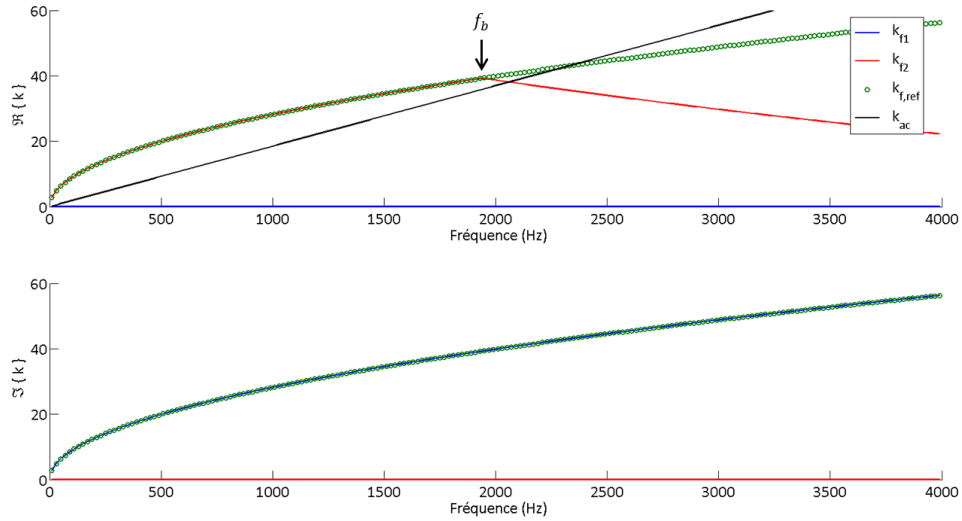


FIG 3.5 – Nombre d’ondes de la plaque en flexion sans patch calculé avec le modèle équivalent (ME) (k_{f1} et k_{f2}) et avec la relation initiale 1.77 ($k_{f,ref}$). k_{ac} est le nombre d’ondes acoustique et f_b la fréquence de Bragg.

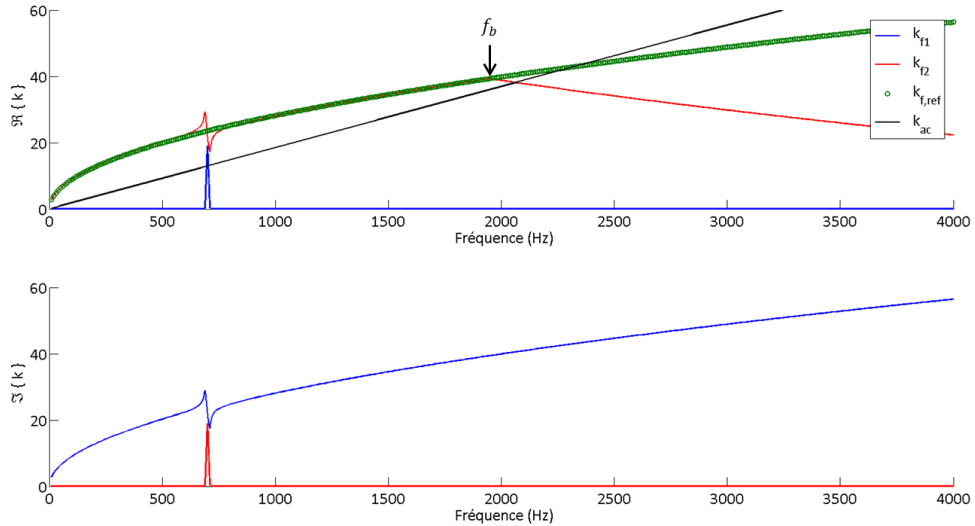


FIG 3.6 – Nombre d’ondes de la plaque en flexion avec un shunt RL , avec $L = 0.4 H$ et $R = 2 \Omega$, calculé avec le modèle équivalent (ME) (k_{f1} et k_{f2}). $k_{f,ref}$ est le nombre d’onde de référence de la plaque seule (relation 1.77), k_{ac} le nombre d’ondes acoustiques et f_b la fréquence de Bragg.

est définie sur une large bande fréquentielle. On montre que l’utilisation d’une capacité négative dite « **assouplissante** » ouvre cette bande interdite à gauche de la fréquence de Bragg et que, inversement, l’utilisation d’une capacité négative dite « **raidissante** » ouvre cette bande interdite à droite de cette fréquence (sur ΓX). Cette fréquence de Bragg se déplace elle-même vers les basses ou hautes fréquences selon la capacité négative appliquée. En effet, selon la relation 3.22, elle varie en fonction de la rigidité de flexion qui change avec la capacité négative, on constate bien respectivement une augmentation et une diminution de la fréquence de Bragg en utilisant un shunt à capacité négative assouplissant ou raidissant. Cette étude confirme la sensibilité des résultats à la capacité négative qui varient fortement d’une valeur à une autre.

À partir de ces résultats, la variation de la fréquence critique est difficile à visualiser (voir relation 1.84). Pour montrer une réelle augmentation de celle-ci avec l’utilisation d’une capacité négative assouplissante,

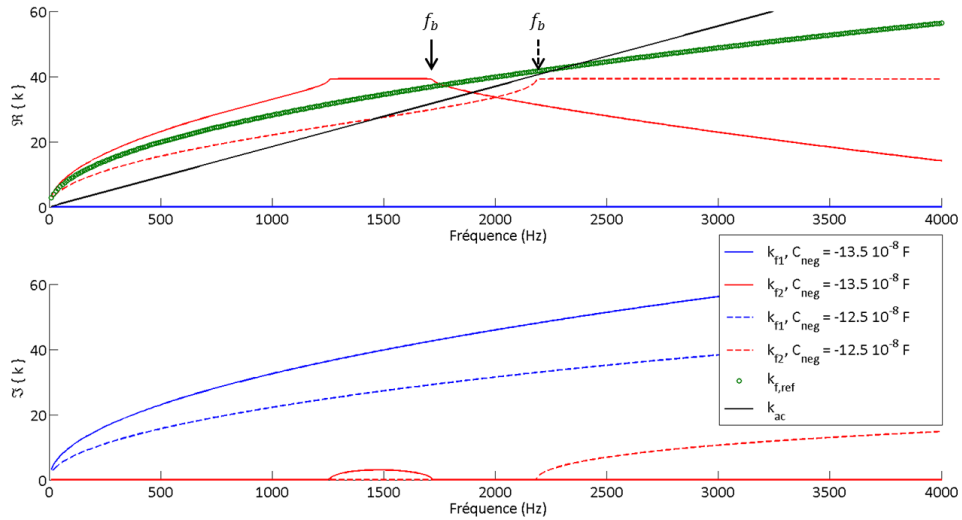


FIG 3.7 – Nombre d’ondes de la plaque en flexion avec un shunt à capacité négative « assouplissant », $C_{neg} = -13.50 \cdot 10^{-8} F$ et « raidissant », $C_{neg} = -12.50 \cdot 10^{-8} F$, calculé avec le modèle équivalent (ME) (k_{f1} et k_{f2}). $k_{f,ref}$ est le nombre d’ondes de référence de la plaque seule (relation 1.77), k_{ac} le nombre d’ondes acoustiques et f_b la fréquence de Bragg.

les courbes de la partie réelle du nombre d’ondes présentées en figure 3.7 sont recalculées de manière « déroulée » afin de contrer l’artéfact mathématique appliqué par la résolution du problème périodique. Les résultats sont présentés par la figure 3.8. On peut alors voir que la fréquence critique peut être fortement augmentée, ce qui peut avoir des implications importantes sur le comportement vibroacoustique de la plaque. .

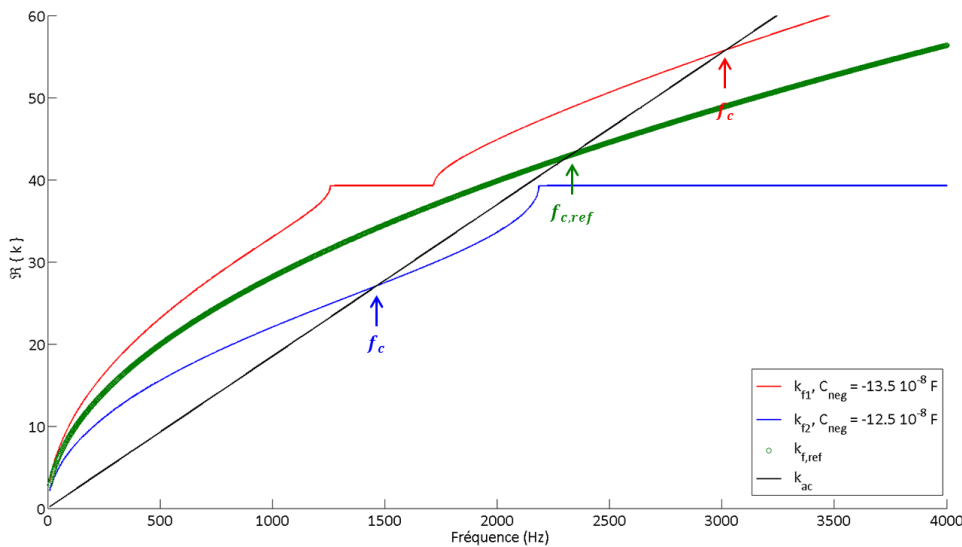


FIG 3.8 – Nombre d’ondes « déroulé » de la plaque en flexion avec un shunt à capacité négative « assouplissant », $C_{neg} = -13.50 \cdot 10^{-8} F$ et « raidissant », $C_{neg} = -12.50 \cdot 10^{-8} F$, calculé avec le modèle équivalent (ME) (k_{f1} et k_{f2}). $k_{f,ref}$ est le nombre d’ondes de référence de la plaque seule (relation 1.77) et k_{ac} le nombre d’ondes acoustiques.

3.3 Modèles numériques de la cellule périodisée

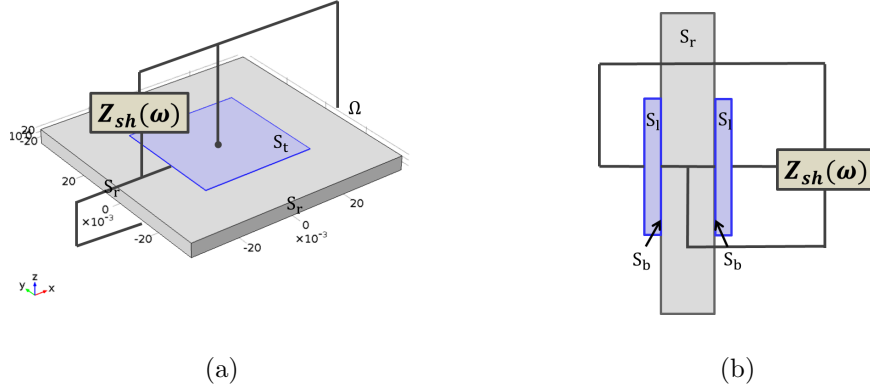


FIG 3.9 – Cellule périodique piézocomposite.

Considérons la cellule périodique piézocomposite décrite par la figure 3.9. Les équations de couplage piézo-élastique du système sont données dans le §2.2.2.1 page 63 .

La modélisation numérique du système par éléments finis permet d'étudier la potentialité de la méthode proposée dans cette thèse pour plusieurs raisons. Ce type de modélisation permet d'étudier des structures plus complexes comme par exemple des structures en matières composites, dont les propriétés dynamiques varient spatialement, ou des structures avec des géométries particulières. La modélisation choisie permet aussi de réaliser des calculs multi-physiques et d'éviter les fortes approximations tel que cela a été fait dans le modèle analytique décrit dans la section précédente §3.2. Trois modèles sont présentés ci-après, le premier permet de déterminer un encadrement des valeurs que doit prendre la capacité négative pour assouplir ou raidir le système, les deux autres permettent de calculer les courbes de dispersion de deux manières différentes. Les trois modèles se basent sur la même géométrie (figure 3.9) mais diffèrent dans les conditions aux limites de la plaque et dans la méthode de résolution du problème car les expressions faibles du principe variationnel sont différentes. En revanche, les conditions aux limites électriques considérées restent inchangées et sont :

$$\begin{cases} V(\mathbf{r}, \omega) = 0, & \forall \mathbf{r} \in S_b, \\ V(\mathbf{r}, \omega) = V(\omega), & \forall \mathbf{r} \in S_t, \\ \mathbf{D} \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}, \omega) = 0, & \forall \mathbf{r} \in S_l, \end{cases} \quad (3.24)$$

où S_b est le dessous du patch relié à la masse, S_t est le dessus du patch relié au shunt et S_l sont les côtés du patch (voir la figure 3.9). L'équipotentiel électrique V appliqué au-dessus du patch dépend de l'impédance Z_{sh} et de la charge totale définie dans la relation 2.13. Le logiciel de calcul numérique d'éléments finis utilisé est COMSOL Multiphysics[®].

3.3.1 Modèle pour le calcul de la capacité négative « optimale »

La capacité négative « optimale » est définie ici par la valeur de la capacité négative permettant théoriquement d'obtenir une rigidité de flexion nulle. Il est possible de calculer numériquement cette valeur. Pour ce faire, il est nécessaire de chercher la condition d'instabilité du système global, c'est à

dire chercher à faire tendre la première valeur propre de la matrice dynamique du modèle numérique vers 0. Ainsi, un calcul aux valeurs propres est réalisé en faisant varier la capacité négative dans le but de trouver celle qui annule la première valeur propre ; cela équivaut à chercher la singularité de la matrice dynamique [111]. Les conditions aux limites mécaniques sont libres pour la quasi-totalité du modèle hormis sur les surfaces S_r (voir la figure 3.9) qui sont considérées soit libres, soit encastées. Ces conditions aux limites permettent d'obtenir un encadrement de la valeur de la capacité négative optimale.

Une capacité négative C_{imp} est alors imposée aux bornes des patchs piézoélectriques, la valeur choisie est de l'ordre de grandeur de la valeur précédemment déterminée à partir du modèle équivalent $C_{neg,a}$ (voir § 3.2.2). On choisira ici une capacité négative $C_{imp} = -25 \cdot 10^{-8} F$, qui sera ensuite multipliée par un coefficient noté $alpha$ permettant de la faire varier ; la capacité vaut donc $C_{neg} = alpha * C_{imp}$. La figure 3.10 présente un exemple de résultats obtenus à partir d'un calcul aux valeurs propres. Cette figure montre la variation des fréquences propres du système en fonction des valeurs de C_{neg} pour des conditions limites encastées. Les lignes horizontales sont les fréquences propres des modes pour lesquels les patchs n'agissent pas, ce sont les modes anti-symétriques de la cellule. On y retrouve les trois domaines : instable, stable raidissant, stable assouplissant. Le domaine stable assouplissant est caractérisé par une diminution de la partie réelle de la fréquence propre du premier mode symétrique noté f_1 sur la figure 3.10. Le domaine instable est déterminé par une valeur nulle de la partie réelle de f_1 . Le domaine stable raidissant est caractérisé par une augmentation de la partie réelle de f_1 jusqu'à atteindre le domaine instable.

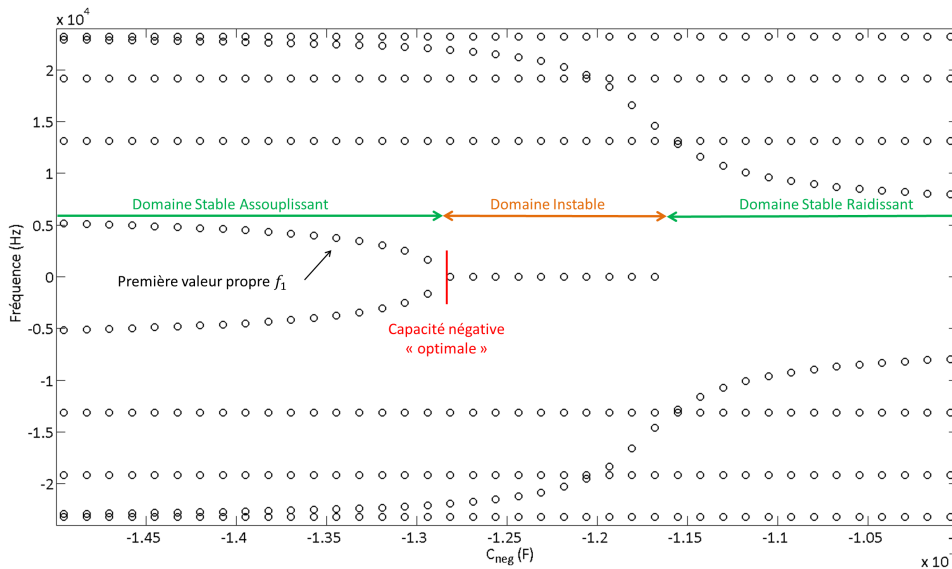


FIG 3.10 – Exemple de variation des fréquences propres en fonction de la capacité négative $C_{neg} = alpha * C_{imp}$.

La figure 3.11 présente un autre exemple de résultats qui compare la convergence des solutions numériques pour quatre maillages différents avec 1070, 4907, 5288 et 20096 éléments. Ces résultats témoignent du fait que la valeur de la capacité négative optimale est sensible à la qualité du maillage. Or, les résultats obtenus par la suite sont sensibles à la valeur de la capacité négative, et nous avons vu précédemment avec l'étude du modèle analytique que deux valeurs de capacité négative relativement proches amènent à des courbes de dispersion très différentes. Cela signifie donc que pour deux maillages différents, la capacité négative paramétrée n'aura pas le même effet sur le système. Cette figure montre

l'importance du maillage sur la convergence des solutions. L'utilisation d'un maillage très fin semble nécessaire, mais l'utilisation d'un maillage fin engendre des simulations trop coûteuses en temps de calcul. **Comme notre étude s'intéresse à la différence entre différents shunts, il s'avère nécessaire de toujours garder le même maillage dans les différentes études comparatives.** Par exemple, entre le calcul des nombres d'ondes sur une cellule pour une valeur donnée de C_{neg} et le calcul associé du champ de déplacement sur une plaque finie, il est impératif de garder le même maillage pour garder une cohérence entre les résultats.

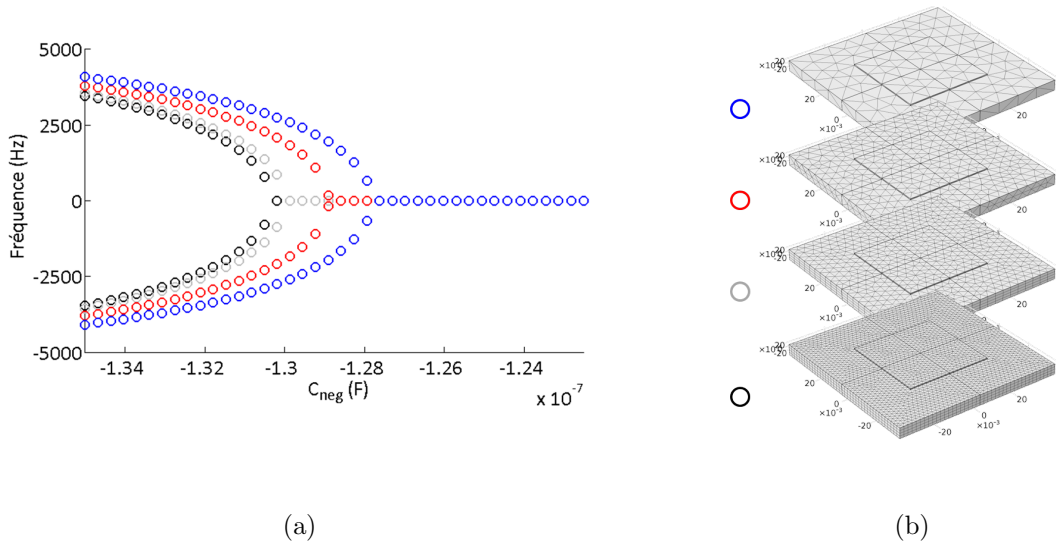


FIG 3.11 – Variation de la valeur de la capacité négative optimale en fonction du maillage.

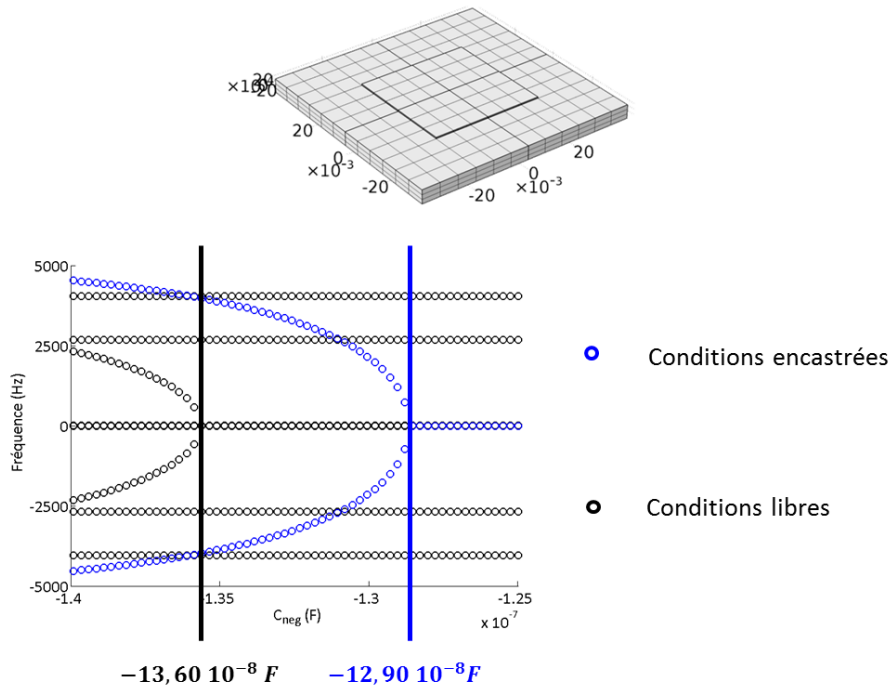


FIG 3.12 – Variation de la capacité négative « optimale » en fonction des conditions aux limites encastées (bleu) et libres (noir) de la cellule.

La figure 3.12 montre alors la variation de la valeur de la capacité négative optimale en fonction des conditions aux limites du modèle avec un maillage « grossier ». Les valeurs des deux capacités optimales obtenues pour ces conditions aux limites extrêmes correspondent alors aux bornes minimum et maximum que peut prendre la valeur de la capacité négative optimale dans le cas d'une condition de périodicité.

3.3.2 Modèles pour le calcul des courbes de dispersion, implémentation du théorème de Bloch

Deux modèles sont proposés pour calculer les nombres d'ondes de la plaque munie de patchs périodisés. Le premier utilise une méthode classique de Floquet qui consiste à appliquer une forme de solution périodique de Floquet et chercher les fréquences propres du problème. Cette méthode permet dans un premier temps de vérifier le conditionnement du modèle en comparant les résultats obtenus aux résultats analytiques. En revanche, cette modélisation ne permet pas d'obtenir la partie atténuative des ondes. La seconde méthode propose de reformuler le problème d'équation aux dérivées partielles définissant l'équilibre dynamique homogène du système afin que le calcul aux valeurs propres soit fonction de ω et permette d'obtenir directement les nombres d'ondes k en partie réelle et imaginaire. Cette méthode est appelée **Shifted-Cell Operator** et a été développée par Manuel Collet et al. [83, 94, 112].

3.3.2.1 La méthode classique de Floquet

Les courbes de dispersion d'un milieu périodique sont obtenues classiquement par l'approche de Floquet-Bloch qui est une méthode communément utilisée dans le cas où les effets d'amortissement restent faibles. Cette méthode consiste à calculer les valeurs propres du système d'équations aux dérivées partielles (relations 2.9 et 2.10) qui définissent l'équilibre dynamique homogène harmonique du système considéré, en imposant des conditions périodiques de Floquet sur les bords de la cellule (les surfaces S_r sur la figure 3.9). Ces conditions périodiques sont :

$$w_R = w_L e^{jk_x l}, \quad w_T = w_B e^{jk_y l}, \quad (3.25)$$

$$w_{RB} = w_{LB} e^{jk_x l}, \quad w_{LT} = w_{LB} e^{jk_y l}, \quad w_{RT} = w_{LB} e^{j(k_x + k_y)l}, \quad (3.26)$$

où, l est la distance qui définit la périodicité de la cellule dans les directions x et y , w_R et w_L sont respectivement les déplacements à droite et à gauche de la cellule selon la direction de périodicité x , w_T et w_B sont respectivement les déplacements en haut et en bas de la cellule selon la direction de périodicité y (voir figure 3.13). w_{RB} , w_{LB} , w_{RT} , w_{LT} sont les coins bas droit, bas gauche, haut droit et haut gauche de la cellule. Les relations 3.25 et 3.26 désignent respectivement les conditions périodiques appliquées aux surfaces et au coins de la cellule.

Afin de caractériser la propagation des ondes dans toutes les directions, les valeurs propres $\lambda_i = j\omega_i$, ω_i étant les pulsations propres, sont calculées sur le pourtour de la zone irréductible de Brillouin de la cellule qui est définie dans l'espace réciproque des nombres d'ondes (figure 3.14) en fonction des deux paramètres k_x et k_y . Une analyse paramétrique des valeurs propres est donc réalisée pour différentes

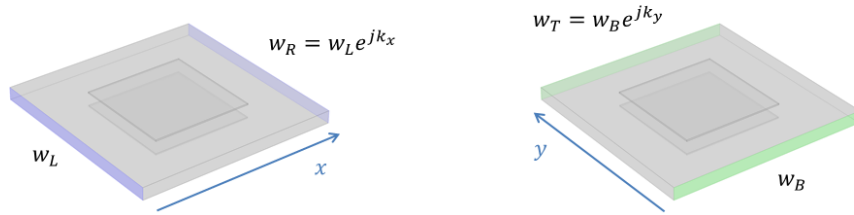
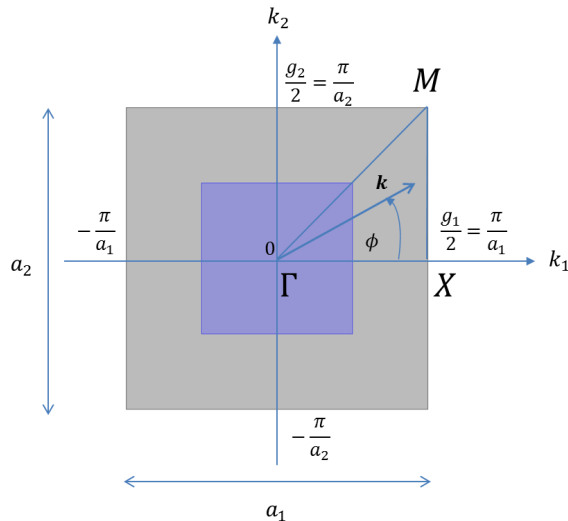


FIG 3.13 – Conditions périodiques imposées au modèle numérique pour la méthode classique de Floquet.

valeurs de k_x et k_y qui prendront les valeurs suivantes :

$$\begin{cases} k_x = [0, \pi/a_1] ; k_y = 0 & \text{sur } \Gamma X, \\ k_x = \pi/a_1 ; k_y = [0, \pi/a_2] & \text{sur } XM, \\ k_x = [\pi/a_1, 0] ; k_y = [\pi/a_2, 0] & \text{sur } M\Gamma, \end{cases} \quad (3.27)$$


 FIG 3.14 – Espace réciproque de la cellule. ΓXM délimitent la zone irréductible de Brillouin.

La figure 3.15 trace dans un premier temps les courbes de dispersion en flexion pure obtenues de manière analytique avec le modèle équivalent et de manière numérique pour un shunt résonant RL avec $R = 2 \Omega$ et $L = 0.4 H$. Les courbes sont calculées seulement sur ΓX . Les résultats obtenus analytiquement ou numériquement avec ce type de shunt sont équivalents.

La figure 3.16 montre les courbes de dispersion pour deux valeurs de capacité négative, l'une est dans le domaine assouplissant, $C_{neg} = -13.50 \cdot 10^{-8} F$, l'autre dans le domaine raidissant, $C_{neg} = -12.50 \cdot 10^{-8} F$. Ces valeurs sont les mêmes que celles utilisées dans l'étude du modèle équivalent dans le §3.2.2 (voir la figure 3.7). On constate une ouverture de la bande interdite de Bragg vers les basses fréquences avec une capacité négative assouplissante, et une ouverture vers les hautes fréquences avec une capacité négative raidissante ; observation fait précédemment avec le modèle analytique. En revanche, le modèle numérique montre, contrairement au modèle analytique, que l'une des bornes des deux bandes interdites est fixe à la fréquence de Bragg $f_b \simeq 1942 Hz$. Le modèle analytique étant un modèle de plaque homogène

équivalente, l'action du patch est simplement considérée comme une variation de la rigidité de flexion et de la masse de la plaque isotrope. Cette hypothèse ne peut être parfaitement fidèle à la physique du problème. Il est aussi possible de constater que dans le cas de la capacité négative raidissante, une bande étroite comparable à la bande interdite obtenue pour un système résonant apparaît proche de 135 Hz . La déformée du mode associé est présentée par la figure 3.17, le changement d'impédance fait apparaître un mode localisé des patches.

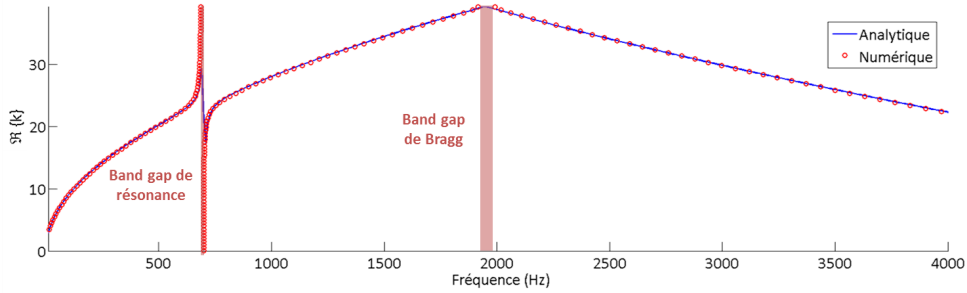


FIG 3.15 – Comparaison entre modèle analytique équivalent (bleu) et modèle numérique (rouge) des courbes de dispersion en partie réelle pour un shunt RL avec $R = 2 \Omega$ et $L = 0.4 \text{ H}$, sur ΓX .

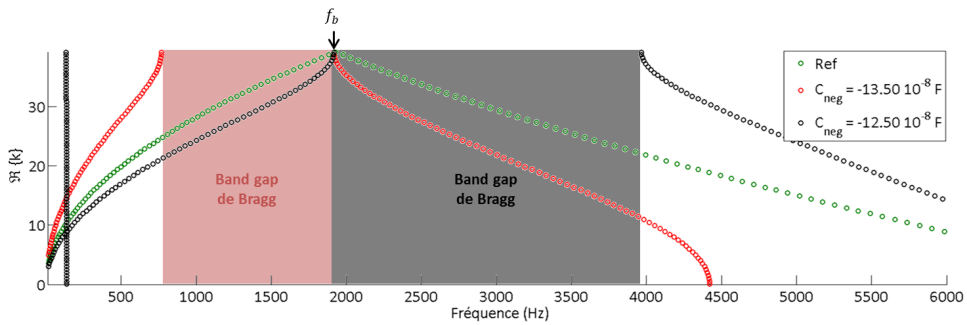


FIG 3.16 – Courbes de dispersion en partie réelle pour un shunt à capacité négative dans le domaine assouplissant (rouge), $C_{neg} = -13.50 \cdot 10^{-8} \text{ F}$, et dans le domaine raidissant (noir), $C_{neg} = -12.50 \cdot 10^{-8} \text{ F}$. En vert, la courbe de dispersion de référence obtenue sans patch. f_b est la première fréquence de Bragg égale à 1942 Hz .

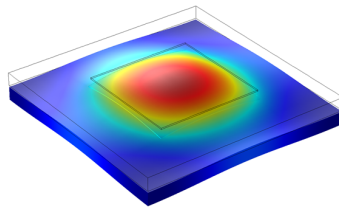


FIG 3.17 – Déformée du mode localisé proche de 135 Hz pour une capacité négative raidissante $C_{neg} = -12.50 \cdot 10^{-8} \text{ F}$ sur la figure 3.16.

Les deux figures 3.18 et 3.19 présentent les courbes de dispersion sur les axes $\Gamma X M \Gamma$ de la zone irréductible de Brillouin (figure 3.14) pour le shunt RL et pour le shunt à capacité négative C_{neg} (figures 3.18 et 3.19). Dans le cas d'un shunt RL , la bande interdite de résonance créée est définie dans toutes les directions ($\Gamma X M \Gamma$) sur une faible largeur de bande fréquentielle. Dans le cas d'un shunt à capacité négative, si l'on se trouve dans le cas où cette capacité est raidissante, une très large bande interdite,

environ 2000 Hz dans notre cas, existe seulement dans la direction ΓX . En revanche, si l'on se trouve dans le cas où cette capacité est assouplissante, une large bande interdite, environ 600 Hz , est créée dans toutes les directions.

Il est possible de constater l'apparition de fréquences propres égales à 0. Celles-ci correspondent aux modes évanescents.

Ces premiers résultats montrent la pertinence d'utiliser une capacité négative assouplissante pour traiter des problèmes de transmission d'ondes vibratoires sur une large bande fréquentielle. Nous verrons plus loin dans ce document que l'ouverture de ces bandes interdites varie en fonction de la valeur de la capacité négative.

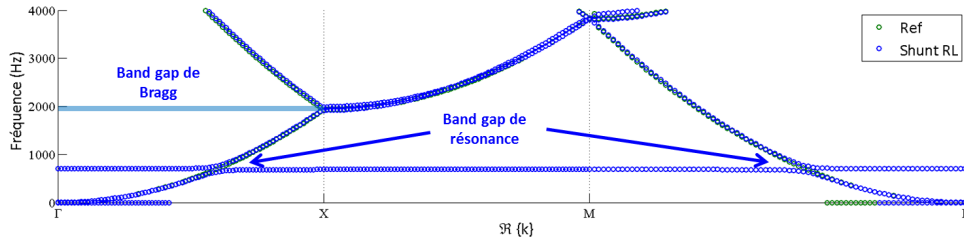


FIG 3.18 – Courbes de dispersion en partie réelle pour un shunt RL avec $R = 2 \Omega$ et $L = 0.4 \text{ H}$, sur $\Gamma XM\Gamma$.

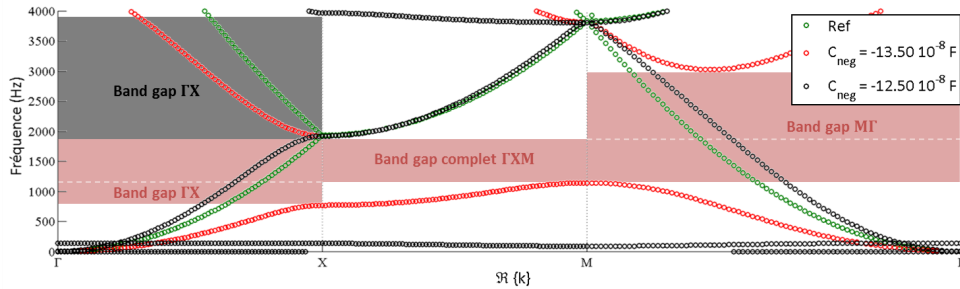


FIG 3.19 – Courbes de dispersion en partie réelle pour un shunt à capacité négative dans le domaine assouplissant (rouge), $C_{neg} = -13.50 \cdot 10^{-8} \text{ F}$, et dans le domaine raidissant (noir), $C_{neg} = -12.50 \cdot 10^{-8} \text{ F}$, sur $\Gamma XM\Gamma$.

3.3.2.2 La méthode Shifted-Cell Operator

La méthode « Shifted-Cell Operator » a été développée par Manuel Collet et al. [83, 94, 112]. Cette méthode consiste à reformuler le problème d'équation aux dérivées partielles définissant l'équilibre dynamique homogène du système (relations 2.9 et 2.10) par « décalage » en termes de nombre d'ondes des dérivées spatiales apparaissant dans l'opérateur de comportement mécanique à l'intérieur de la cellule, tout en imposant des conditions aux limites périodiques sur les frontières S_r du domaine.

En appliquant la transformée de Fourier dans le domaine temporel des relations 2.9 et 2.10, nous obtenons le système suivant :

$$\rho\omega^2 \mathbf{w}(\mathbf{r}, \omega) + \nabla C \nabla_{sym} \mathbf{w}(\mathbf{r}, \omega) + \nabla e^T(\mathbf{r}) \nabla V(\mathbf{r}, \omega) = 0, \quad \forall \mathbf{r} \in \Omega, \quad (3.28)$$

$$-\nabla e(\mathbf{r}) \nabla_{sym} \mathbf{w}(\mathbf{r}, \omega) + \nabla \varepsilon_S(\mathbf{r}, \omega) \nabla V(\mathbf{r}, \omega) = 0, \quad \forall \mathbf{r} \in \Omega, \quad (3.29)$$

où $\mathbf{w}(\mathbf{r}, \omega)$ et $V(\mathbf{r}, \omega)$ sont les expressions du déplacement transverse et du potentiel électrique qui prennent la forme de solution suivant :

$$\mathbf{w}(\mathbf{r}, \omega) = \mathbf{w}_{n,\mathbf{k}} e^{j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}, \quad V(\mathbf{r}, \omega) = V_{n,\mathbf{k}} e^{j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}, \quad (3.30)$$

où $\mathbf{w}_{n,\mathbf{k}}$ et $V_{n,\mathbf{k}}$ sont les fonctions d'amplitude périodiques. Les conditions périodiques appliquées au modèles sont alors :

$$\mathbf{w}_{n,\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = \mathbf{w}_{n,\mathbf{k}}(\mathbf{r} - \mathbf{R}\cdot\mathbf{m}) \quad \forall \mathbf{r} \in S_r, \forall \mathbf{m} \in \mathbb{Z}^2, \quad (3.31)$$

Le théorème de Floquet-Bloch est appliqué à notre système élastodynamique périodique infini gouverné par les relations 3.28 et 3.29. Pour calculer les courbes de dispersion 2D de ce système, il est nécessaire d'introduire une formulation faible adaptée qui est discrétisée par une méthode standard FEM (Finite Element Method). Tous les détails sont donnés dans [83, 94] pour obtenir la formulation faible à partir des relations 3.28 et 3.29 prenant en compte la décomposition de Floquet-Bloch. La méthode Shifted-Cell Operator permet alors de calculer directement les nombres d'ondes k .

Pour résoudre ce problème aux valeurs propres, on utilise alors un logiciel de simulations multiphysiques, ici COMSOL Multiphysics[®]. Ce problème généralisé, qui est simulé dans le logiciel, prend la forme :

$$[K(Z(\omega_n)) - \omega_n^2 M + \lambda L(\phi, Z(\omega_n)) - \lambda^2 H(\phi, Z(\omega_n))] \mathbf{u}_n(k, \phi) = 0, \quad (3.32)$$

où $\lambda = ik$, M et $K(Z(\omega_n))$ sont respectivement la matrice de masse et la matrice de raideur, $L(\phi, Z(\omega_n))$ et $H(\phi, Z(\omega_n))$ sont respectivement des matrices anti-symétriques et symétriques positives.

Les figures 3.20 et 3.21 comparent les résultats obtenus avec le modèle classique de Floquet (voir §3.3.2.1 page 94) et ceux obtenus avec le modèle Shifted-Cell Operator pour différents types de shunt. Ce modèle se montre plus instable, le calcul des valeurs propres n'a pas correctement convergé. En effet, la bande interdite doit être définie pour un nombre d'ondes égal à π/a , a étant la taille de la cellule, soit égal à $\pi/0,08 \simeq 39,27 \text{ rad}\cdot\text{m}^{-1}$. Or, le « plateau » qui définit la bande interdite dans le cas d'une capacité négative assouplissante est $\Re\{k\} \simeq 43,50 \text{ rad}\cdot\text{m}^{-1}$ et dans le cas d'une capacité négative raidissante est $\Re\{k\} \simeq 37,50 \text{ rad}\cdot\text{m}^{-1}$. En revanche, ce modèle permet de connaître l'allure de la courbe représentative de l'atténuation qui, pour une capacité négative, possède les caractéristiques de la bande interdite de Bragg avec une grande amplitude d'amortissement des ondes et sur une large bande fréquentielle. Nous pourrions utiliser ce modèle pour mieux interpréter les phénomènes physiques mis en jeu d'un point de vue qualitatif.

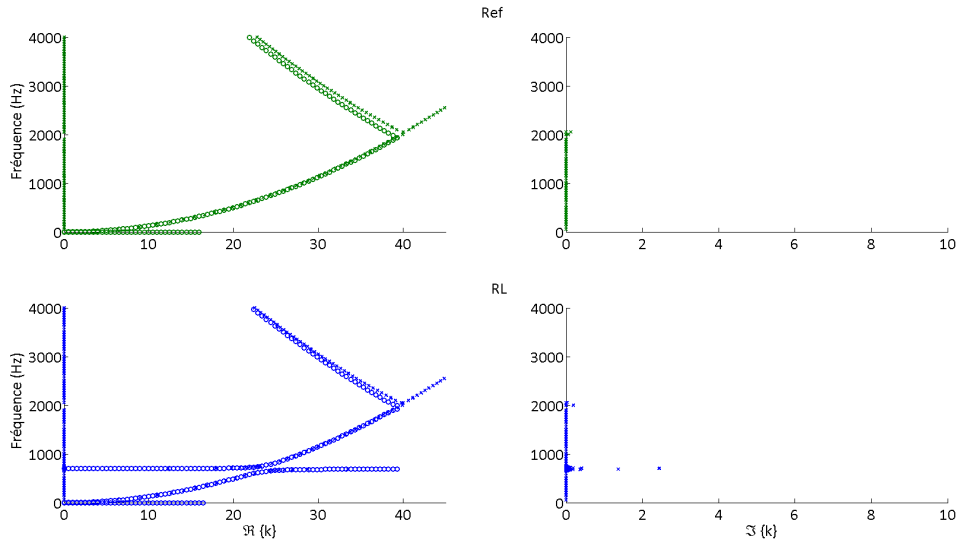


FIG 3.20 – Courbes de dispersion calculées à partir du modèle classique de Floquet (voir §3.3.2.1) (o) et à partir du modèle Shifted-Cell Operator (×) sans shunt (vert) et pour un shunt RL avec $R = 2 \Omega$ et $L = 0.4 H$ (bleu). Les courbes sont calculées sur ΓX .

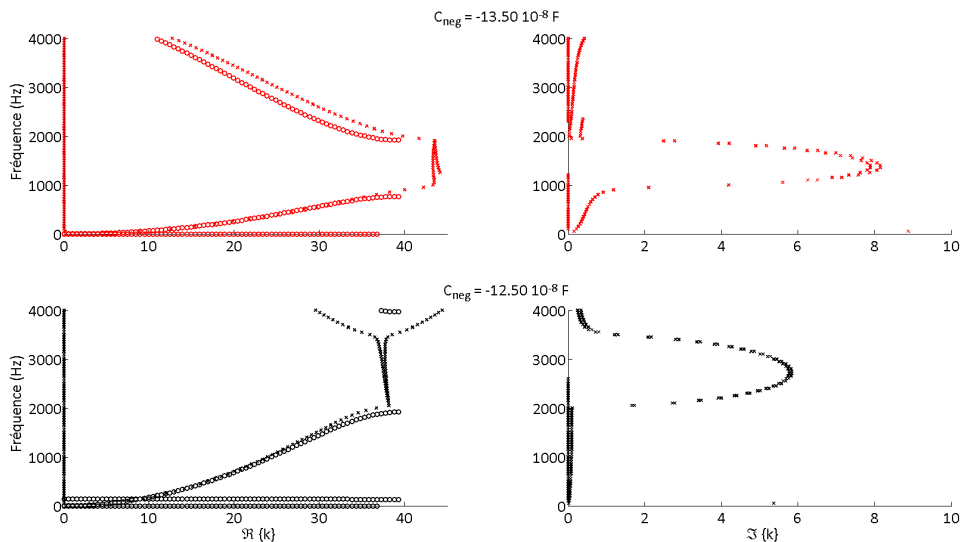


FIG 3.21 – Courbes de dispersion calculées à partir du modèle classique de Floquet (voir §3.3.2.1) (o) et à partir du modèle Shifted-Cell Operator (×) pour un shunt à capacité négative dans le domaine assouplissant (rouge), $C_{neg} = -13.50 10^{-8} F$, et dans le domaine raidissant (noir), $C_{neg} = -12.50 10^{-8} F$. Les courbes sont calculées sur ΓX .

3.4 Bilan : une méthodologie pour calculer les courbes de dispersions

Plusieurs modèles ont été utilisés dans ce chapitre, la figure 3.22 présente un schéma qui fait le bilan de ces différents modèles.

La modélisation analytique considérant un modèle équivalent pour approximer le comportement dynamique d'une structure munie d'un patch piézoélectrique shunté ne peut être représentative de la physique dans le cas d'un shunt à capacité négative. En effet, la singularité créée dans la résolution des équations différentielles régissant la dynamique de ce système ne peut être prise en compte simplement

en considérant la capacité négative agissant seulement sur la rigidité de flexion globale du système. En revanche, ce modèle permet de donner un ordre de grandeur des valeurs que doit prendre la capacité négative pour « assouplir » ou « raidir » le système. Cette approximation permet ensuite un pré-conditionnement du modèle numérique. En effet, l'intervalle de valeurs de C_{neg} pouvant agir sur le système étant très restreint, et ce d'autant plus que l'épaisseur, la surface ou le coefficient de couplage du patch piézoélectrique diminue (voir §1.4 page 52), l'approximation de cet encadrement de valeurs directement par le calcul numérique serait couteux en temps de calcul.

Connaissant alors l'ordre de grandeur de la capacité négative permettant d'agir sur le système, un calcul numérique des fréquences propres de la cellule unitaire en fonction de la capacité négative pour les conditions aux limites mécaniques « encastrées » et « libres » permet de donner un encadrement de la valeur optimale de la capacité négative. La capacité négative optimale définie la valeur permettant d'assouplir le système à son maximum. Les valeurs des deux capacités optimales obtenues pour chacune des deux conditions aux limites extrêmes correspondent alors aux bornes minimum et maximum que peut prendre la valeur de la capacité négative optimale dans le cas d'une condition de périodicité.

Les courbes de dispersion du système périodique peuvent être obtenues à partir d'un calcul numérique aux valeurs propres de la cellule unitaire modélisée en éléments finis en considérant des conditions périodiques de Floquet. Dans ce cas, les valeurs propres correspondent aux fréquences, et le paramètre que l'on fait varier est le nombre d'ondes. Ce calcul est stable mais ne permet pas d'obtenir de l'information sur la partie atténuative des ondes (partie imaginaire du nombre d'ondes). Pour remédier à ce problème, il est proposé d'utiliser une seconde méthode appelée **Shifted-Cell Operaor** qui consiste en une reformulation du problème d'équation aux dérivées partielles définissant l'équilibre dynamique homogène du système. Dans ce cas, les valeurs propres sont les nombres d'ondes complexes et le paramètre que l'on fait varier est la fréquence. Bien que les résultats obtenus soient proches de ceux donnés par le modèle classique de Floquet, ce modèle se montre plus instable, le calcul des valeurs propres n'a pas correctement convergé. En revanche, le modèle permet de mieux comprendre les phénomènes mis en jeu qui peuvent être décrits de manière qualitative.

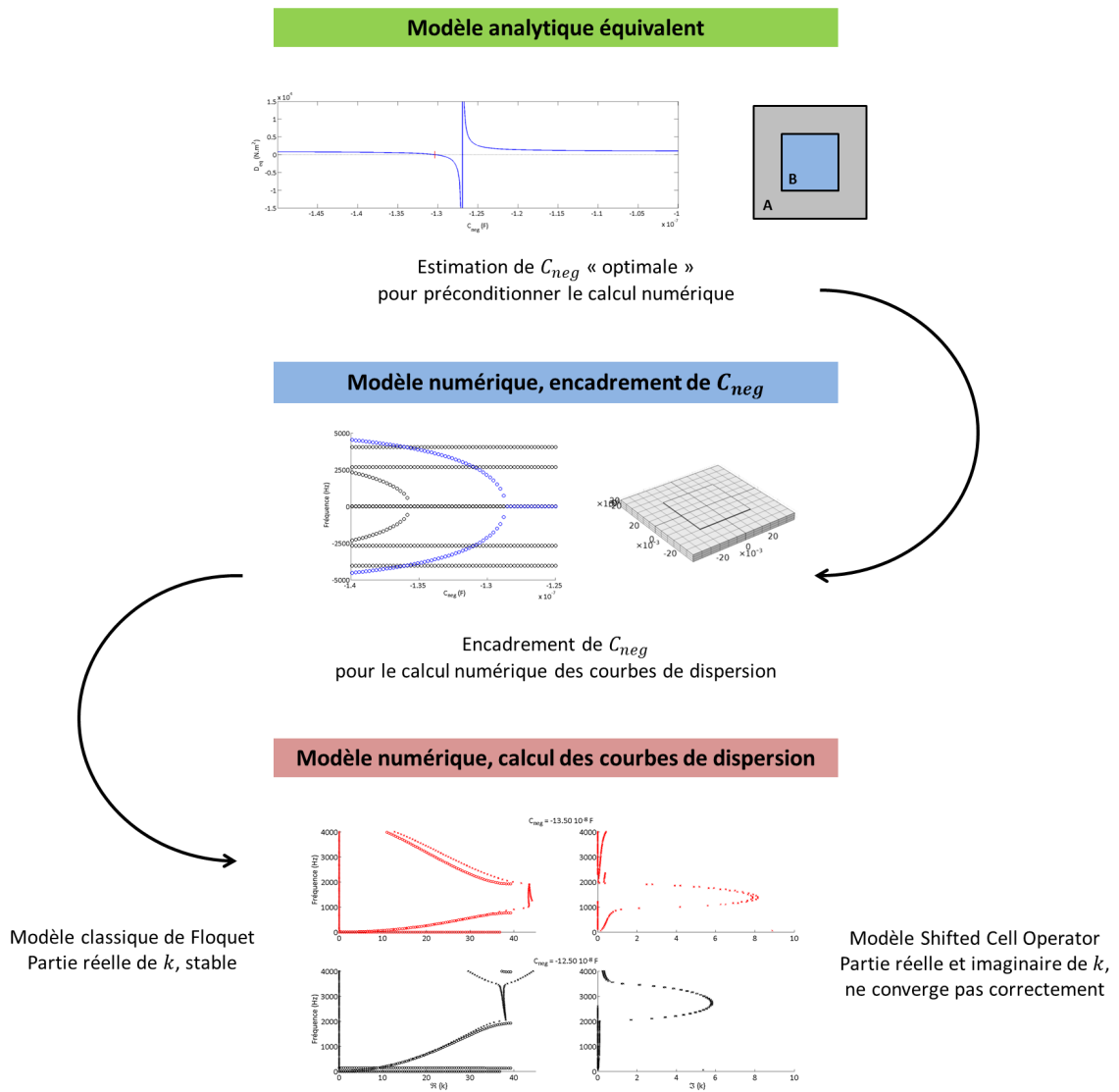


FIG 3.22 – Les différents modèles.

Chapitre 4

Maîtrise des comportements vibroacoustiques d'une plaque munie d'un réseau de patchs shuntés avec capacités négatives

Ce chapitre présente une étude paramétrique donnant les pistes d'optimisation pour la diminution des vibrations, de la diminution du rayonnement acoustique et/ou de l'augmentation de l'isolation acoustique d'une paroi à l'aide d'un réseau de patchs piézoélectriques shuntés par un circuit constitué d'une capacité négative C_{neg} et d'une résistance R .

Dans une première section, il est proposé d'étudier une cellule élémentaire à partir de calculs de courbes de dispersion en utilisant les modèles numériques présentés dans le chapitre 3. On cherchera à mettre en évidence l'influence de la capacité négative C_{neg} , de la résistance R et des dimensions de la cellule sur la variation des courbes de dispersion et sur l'ouverture des bandes interdites, qui traduisent la propagation des ondes dans la structure. Dans ce cas, le milieu est considéré infiniment périodique. Il est proposé dans les deux sections suivantes de visualiser l'influence du réseau actif sur le comportement dynamique et vibroacoustique d'une plaque finie. La dernière section traite de l'augmentation de l'isolation de paroi.

4.1 Étude de la cellule élémentaire, calculs des courbes de dispersion

La cellule élémentaire qui est étudiée ici est celle décrite dans le §3.1 page 84 (voir figure 3.1), c'est à dire une cellule de 8 cm de côté munie de patchs piézoélectriques de 4 cm de côté.

4.1.1 Influence de la capacité négative C_{neg}

Nous cherchons à étudier l'ouverture des bandes interdites en fonction de la valeur de la capacité négative appliquée au shunt dépourvu de résistance R . L'impédance électrique du shunt est donc de la

forme $Z_{sh} = 1/j\omega C_{neg}$. Les courbes de dispersion en flexion sont alors calculées pour différentes valeurs de C_{neg} , d'abord à partir du modèle numérique utilisant la méthode classique de Floquet (se référer au §3.3.2.1) et ensuite avec le modèle Shifted-Cell Operator (se référer au §3.3.2.2). Le premier modèle permet de caractériser en partie réelle les bandes interdites selon toutes les directions de propagation ($\Gamma X M \Gamma$ dans la représentation en diagramme de bande). Le second modèle permet lui de quantifier la partie atténuative des ondes (partie imaginaire du nombre d'ondes) et ainsi de décrire cette atténuation dans les bandes interdites, mais seulement dans la direction ΓX . Sinon, le modèle implémenté est instable et ne converge pas les solutions du problème.

Les résultats obtenus avec des valeurs de capacités négatives choisies dans le domaine assouplissant et dans le domaine raidissant avec la méthode classique de Floquet sont présentés respectivement par les figures 4.1 et 4.2. Ces résultats montrent que la bande interdite s'ouvre vers les hautes fréquences au-dessus de la première fréquence de Bragg avec une capacité négative raidissante, et vers les basses fréquences en dessous de la première fréquence de Bragg avec une capacité négative assouplissante. Cette fréquence de Bragg est donnée par $f_b = 1942 \text{ Hz}$. De plus, avec une capacité négative raidissante, la bande interdite n'est que partielle car elle n'est définie que sur ΓX . Avec une capacité négative assouplissante, la bande interdite est totale et est définie sur $\Gamma X M \Gamma$ autrement dit dans toutes les directions de propagation. Les termes également utilisés sont bandes interdites complètes, ou encore globales.

On remarque aussi que plus la valeur de la capacité négative est proche de l'instabilité (se référer au §1.4 page 52), plus les bandes interdites sont définies sur une large bande fréquentielle que ce soit dans le domaine raidissant ou assouplissant. Ceci peut être expliqué par le fait que plus la capacité négative est paramétrée proche de l'instabilité et plus la rigidité de flexion de la plaque est diminuée (dans le cas assouplissant) ou augmentée (dans le cas raidissant). Ainsi, le nombre d'ondes de flexion lié au mode symétrique de la cellule varie vers les basses ou hautes fréquences et on observe alors une ouverture de la bande interdite de plus en plus importante. Les valeurs de la capacité négative prises au plus proche de l'instabilité sont $C_{neg} = -13.45 \cdot 10^{-8} \text{ F}$ dans le cas assouplissant et $C_{neg} = -12.85 \cdot 10^{-8} \text{ F}$ dans le cas raidissant.

Les résultats obtenus avec la méthode Shifted-Cell Operator sont présentés par la figure 4.3. Cette figure montre la variation de la partie réelle et de la partie imaginaire des courbes de dispersion pour différentes valeurs de la capacité négative, qui est paramétrée dans le domaine assouplissant, et ce, dans la direction ΓX . Le calcul de la partie imaginaire du nombre d'ondes permet de quantifier l'atténuation des ondes dans les bandes interdites définies sur ΓX . On remarque alors que plus la valeur de la capacité négative est paramétrée proche de l'instabilité et plus cette atténuation augmente. De plus, la bande interdite créée est caractéristique d'une bande interdite de Bragg, mais avec une atténuation beaucoup plus forte (se référer au §1.2).

Ce calcul n'est pas réalisé avec des capacités négatives raidissantes car le calcul devient fortement instable et ne converge plus pour obtenir les valeurs propres.

À partir de maintenant, nous nous intéresserons seulement à l'utilisation d'une capacité négative assouplissante qui, contrairement à une capacité négative raidissante, permet de créer une bande interdite dans toutes les directions de propagation $\Gamma X M \Gamma$.

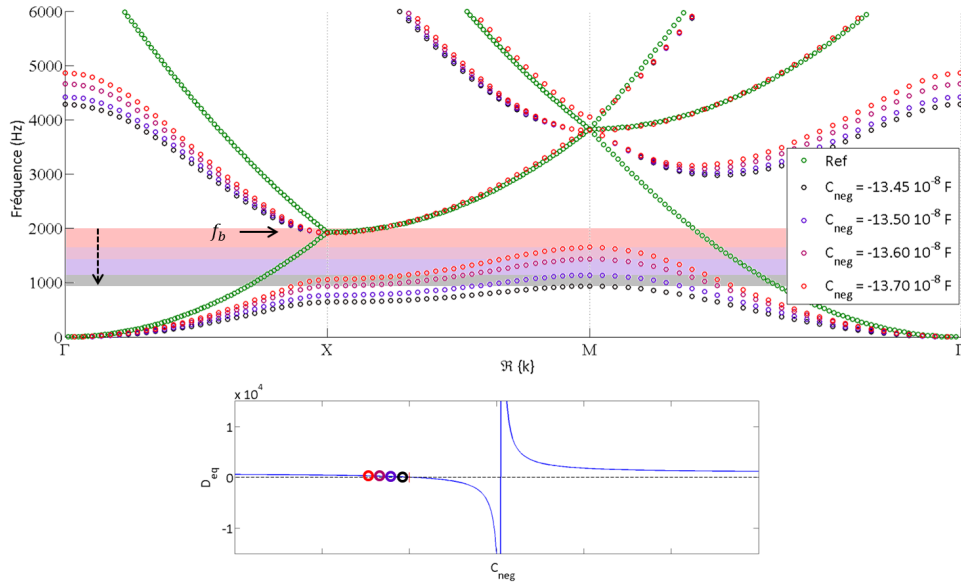


FIG 4.1 – En haut : courbes de dispersion en partie réelle, pour différentes valeurs de la capacité négative dans le domaine assouplissant, obtenues à partir du modèle classique de Floquet. En vert, la courbe de dispersion de référence obtenue sans patch. La première fréquence de Bragg est égale à 1942 Hz . En bas : graphique indiquant qualitativement la rigidité de flexion en fonction de la capacité négative utilisée.

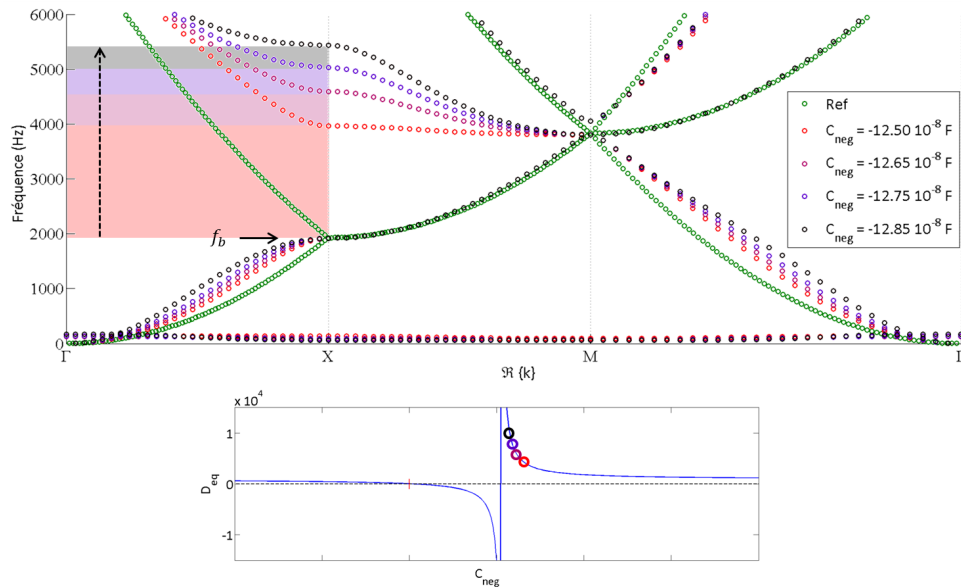


FIG 4.2 – En haut : courbes de dispersion en partie réelle, pour différentes valeurs de la capacité négative dans le domaine raidissant, obtenues à partir du modèle classique de Floquet. En vert, la courbe de dispersion de référence obtenue sans patch. La première fréquence de Bragg est égale à 1942 Hz . En bas : graphique indiquant qualitativement la rigidité de flexion en fonction de la capacité négative utilisée.

4.1.2 Influence de la résistance R

Les courbes de dispersion sont à présent calculées pour un shunt électrique d'impédance $Z_{sh} = R + 1/j\omega C_{neg}$. La capacité négative est paramétrée à $C_{neg} = -13.45 \cdot 10^{-8} F$. Cette valeur est prise au plus proche de l'instabilité dans le domaine assouplissant. La résistance R prend les valeurs 0 Ω , 5 Ω , 10 Ω , 12 Ω . Les résultats obtenus à partir du calcul utilisant la méthode classique de Floquet et la méthode Shifted-Cell Operator sont présentés respectivement par les figures 4.4 et 4.5. La valeur de la

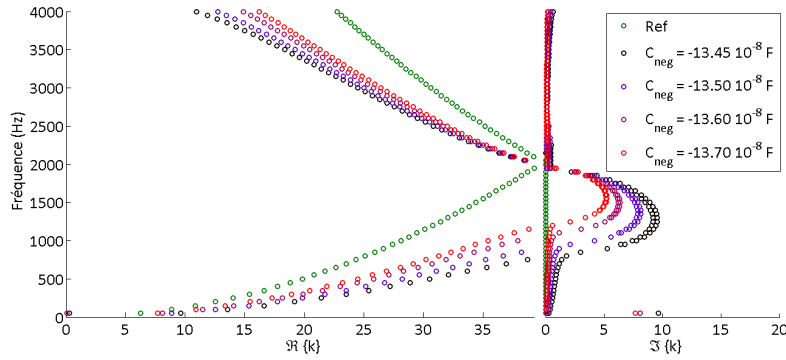


FIG 4.3 – Courbes de dispersion en partie réelle et partie imaginaire, pour différentes valeurs de la capacité négative dans le domaine assouplissant, obtenues à partir du modèle Shifted-Cell Operator. En vert, la courbe de dispersion de référence obtenue sans patch.

résistance influe peu sur l'ouverture de la bande interdite globale. Elle permet simplement d'introduire de l'amortissement dans le système, ce qui a pour effet de diminuer globalement la partie réelle, à savoir la partie propagative, et d'augmenter la partie imaginaire, à savoir la partie atténuative du nombre d'ondes de flexion. Or, nous cherchons à augmenter la partie réelle du nombre d'ondes de flexion dans le but, par la suite, d'augmenter la fréquence critique qui correspond à une égalité entre le nombre d'ondes de flexion et le nombre d'ondes acoustiques. Il ne semble alors pas judicieux d'introduire une résistance trop importante qui aurait pour effet de diminuer cette fréquence critique.

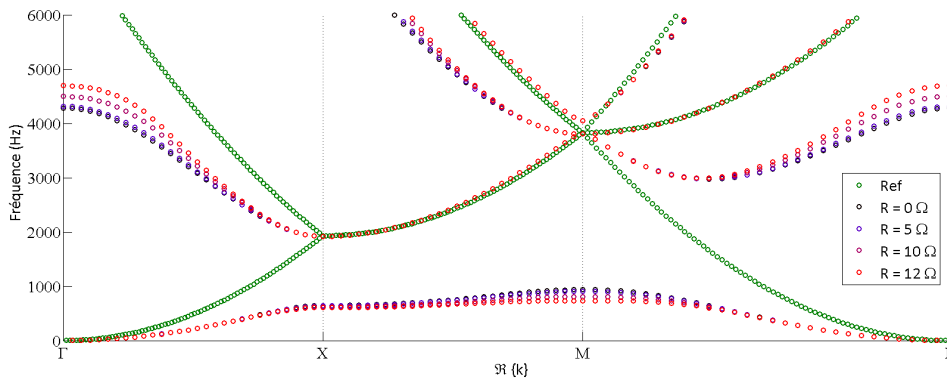


FIG 4.4 – Courbes de dispersion en partie réelle, pour différentes valeurs de la résistance et pour une capacité négative $C_{neg} = -13.45 \cdot 10^{-8} F$ paramétrée dans le domaine assouplissant, obtenues à partir du modèle classique de Floquet. En vert, la courbe de dispersion de référence obtenue sans patch.

4.1.3 Influence des dimensions de la cellule

La taille de la cellule est un paramètre important qui a un impact sur la position de la bande interdite. En effet, la longueur de périodicité de la cellule influe sur la fréquence de Bragg f_b (voir relation 1.73). Or, cette fréquence de Bragg conditionne une des limites fréquentielles de la bande interdite et implique, par conséquent, une variation de la position de la bande interdite. Afin d'illustrer ces propos, il est proposé de calculer les courbes de dispersion pour différentes tailles de cellule : 6 cm, 8 cm et 10 cm, avec un shunt d'impédance électrique $Z_{sh} = 1/j\omega C_{neg}$ où $C_{neg} = -13.45 \cdot 10^{-8} F$ ($R = 0 \Omega$). Précisons ici que c'est la taille de la cellule qui change et non la taille des patches qui reste toujours de 4 cm de côté. La

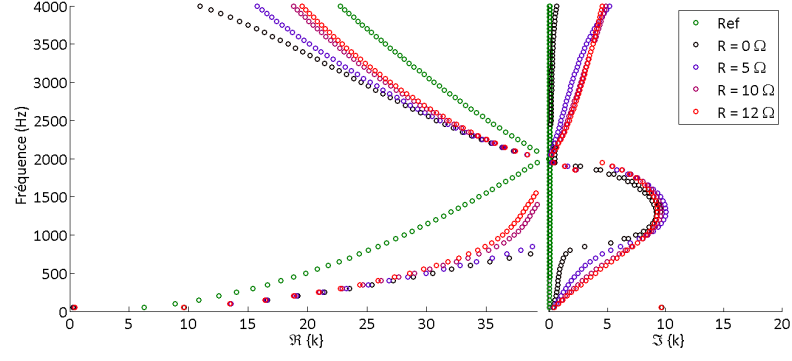


FIG 4.5 – Courbes de dispersion en partie réelle et partie imaginaire, pour différentes valeurs de la résistance et pour une capacité négative $C_{neg} = -13.45 \cdot 10^{-8} F$ paramétrée dans le domaine assouplissant, obtenues à partir du modèle Shifted-Cell Operator . En vert, la courbe de dispersion de référence obtenue sans patch.

cellule utilisée jusqu'à présent était celle de 8 cm. Les courbes de dispersion sont calculées ici à partir du modèle classique de Floquet. Les résultats sont présentés par la figure 4.6. On remarque alors que la taille de la cellule permet de positionner la bande interdite en jouant sur la fréquence de Bragg égale à 3366 Hz pour la cellule de 6 cm, 1942 Hz pour 8 cm et 1247 Hz pour 10 cm.

Par ailleurs, plus la taille de la cellule est importante, plus la largeur de bande fréquentielle de la bande interdite diminue. Ceci est dû au fait que plus la cellule est grande et plus le recouvrement du patch diminue. En effet, lorsque le rapport de surface entre la structure et le patch est réduit, l'influence des patches est moins importante.

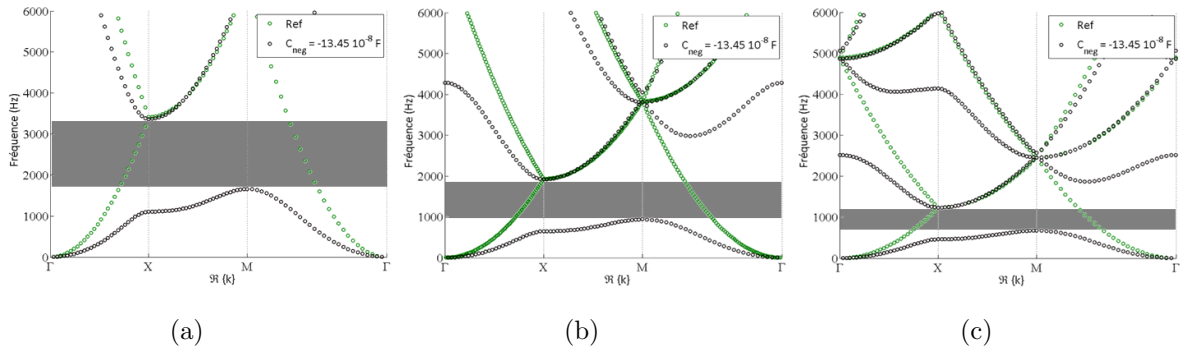


FIG 4.6 – Courbes de dispersion en partie réelle pour différentes tailles de cellule : 6 cm (a) 8 cm (b) 10 cm (c). Les courbes de dispersions sont calculées à partir du modèle classique de Floquet sans patch (vert) et avec une capacité négative $C_{neg} = -13.45 \cdot 10^{-8} F$. La bande interdite totale, définie sur $\Gamma X M \Gamma$, est représentée par la zone noire.

4.2 Étude de la diminution des vibrations sur plaques finies

Afin de visualiser l'influence du réseau périodique de patches piézoélectriques shuntés par un shunt à capacité négative sur le comportement vibratoire d'une plaque, il est proposé ici d'étudier un modèle numérique d'une plaque carré finie en aluminium, libre à ses extrémités, dont les dimensions correspondent à 20×20 cellules soit 1.60 m de coté. La plaque est excitée par une force harmonique $F(\omega)$ en son centre. La figure 4.7 présente un schéma du modèle ; w_1 , w_2 et w_F sont respectivement les déplacements au point

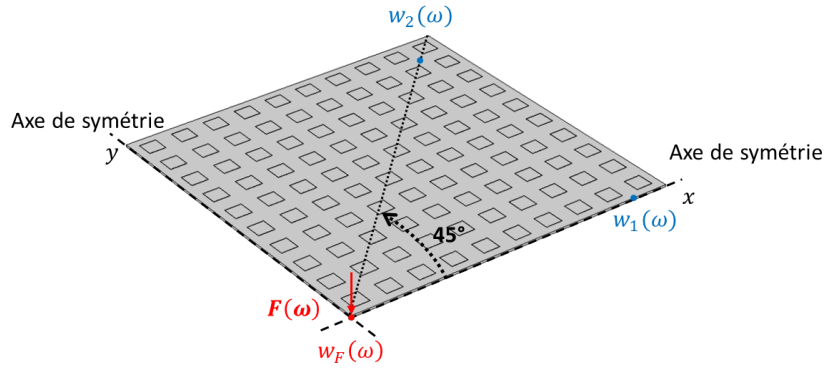


FIG 4.7 – Schéma du modèle pour le calcul des fonctions de transfert du déplacement.

1, au point 2 et au point d'application de la force $F(\omega)$. Le schéma représente seulement un quart de la plaque puisque le modèle prend en compte des conditions de symétrie du système.

Afin de mettre en évidence l'effet des bandes interdites, les fonctions de transfert de déplacement w_1/w_F et w_2/w_F sont calculées pour différentes valeurs de la capacité négative C_{neg} et de la résistance R . On définit alors la fonction de transmittance des vibrations T par :

$$T = 20 \log \left| \frac{w_{1,2}}{w_F} \right| . \quad (4.1)$$

La figure 4.8 présente les résultats obtenus avec la plaque sans patch et la plaque munie du réseau de patchs mais non shuntés (circuit ouvert). Ces résultats montrent simplement que l'ajout du réseau de patchs non shuntés modifie légèrement le comportement dynamique de la plaque. Les patchs augmentent un peu la masse et la raideur de la structure induisant un changement de la position fréquentielle des modes, mais aucune atténuation n'est apportée au système.

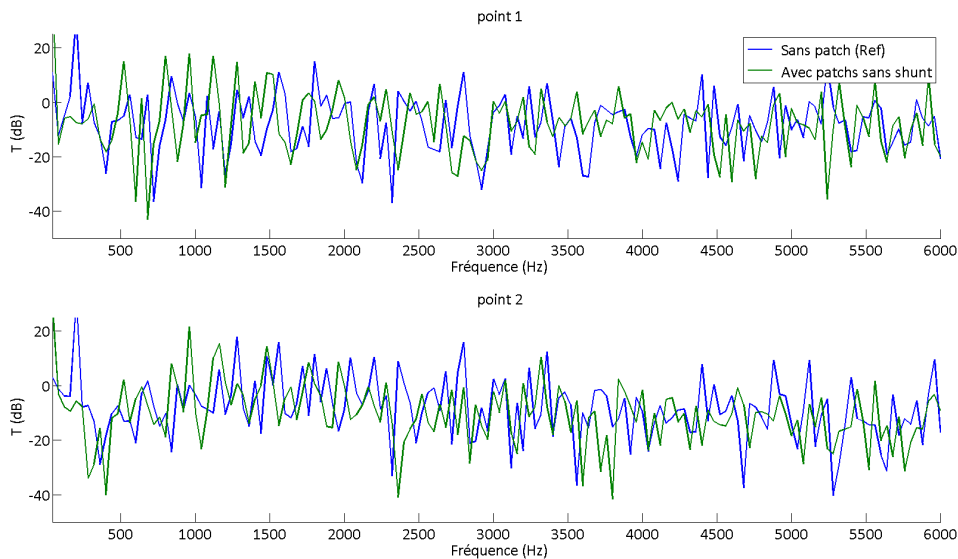


FIG 4.8 – Fonction de transfert T définie par la relation 4.1 (transmittance) calculée au point 1 (en haut) et au point 2 (en bas) selon le schéma présenté par la figure 4.7. Les calculs sont réalisés dans le cas de la plaque sans patch (bleu) et de la plaque munie de patchs piézoélectriques non shuntés équivalents aux patchs en circuit ouvert (vert).

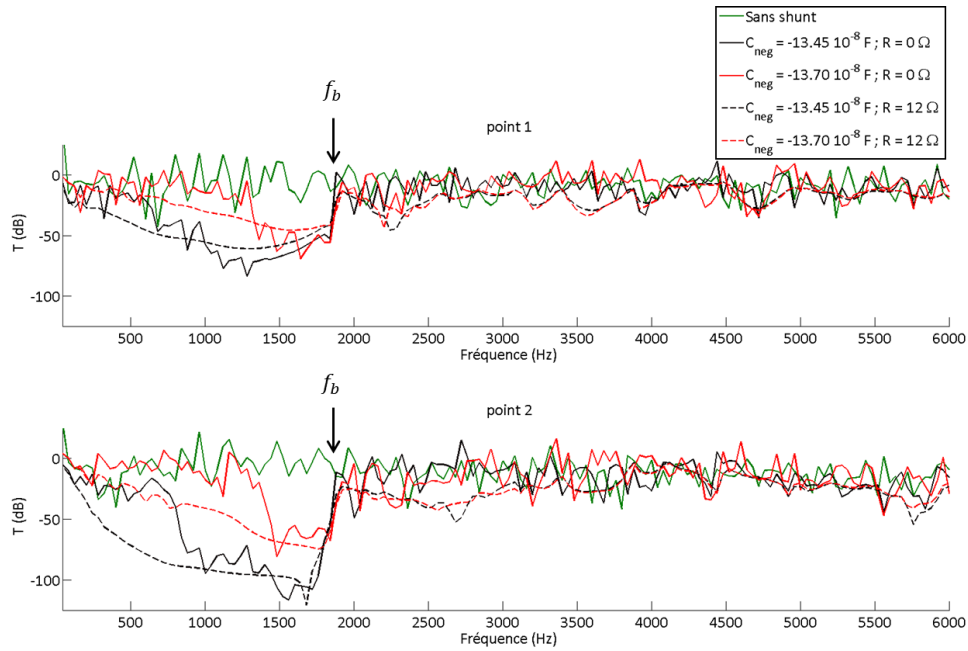


FIG 4.9 – Fonction de transfert T définie par la relation 4.1 (transmittance) calculée au point 1 (en haut) et au point 2 (en bas) selon le schéma présenté par la figure 4.7. Les calculs sont réalisés dans le cas sans shunt (vert) et pour les couples de valeurs de capacité négative et de résistance $C_{neg} = -13.45 \cdot 10^{-8} F$; $R = 0 \Omega$ (trait continu noir), $C_{neg} = -13.45 \cdot 10^{-8} F$; $R = 12 \Omega$ (trait discontinu noir), $C_{neg} = -13.70 \cdot 10^{-8} F$; $R = 0 \Omega$ (trait continu rouge) et $C_{neg} = -13.70 \cdot 10^{-8} F$; $R = 12 \Omega$ (trait discontinu rouge).

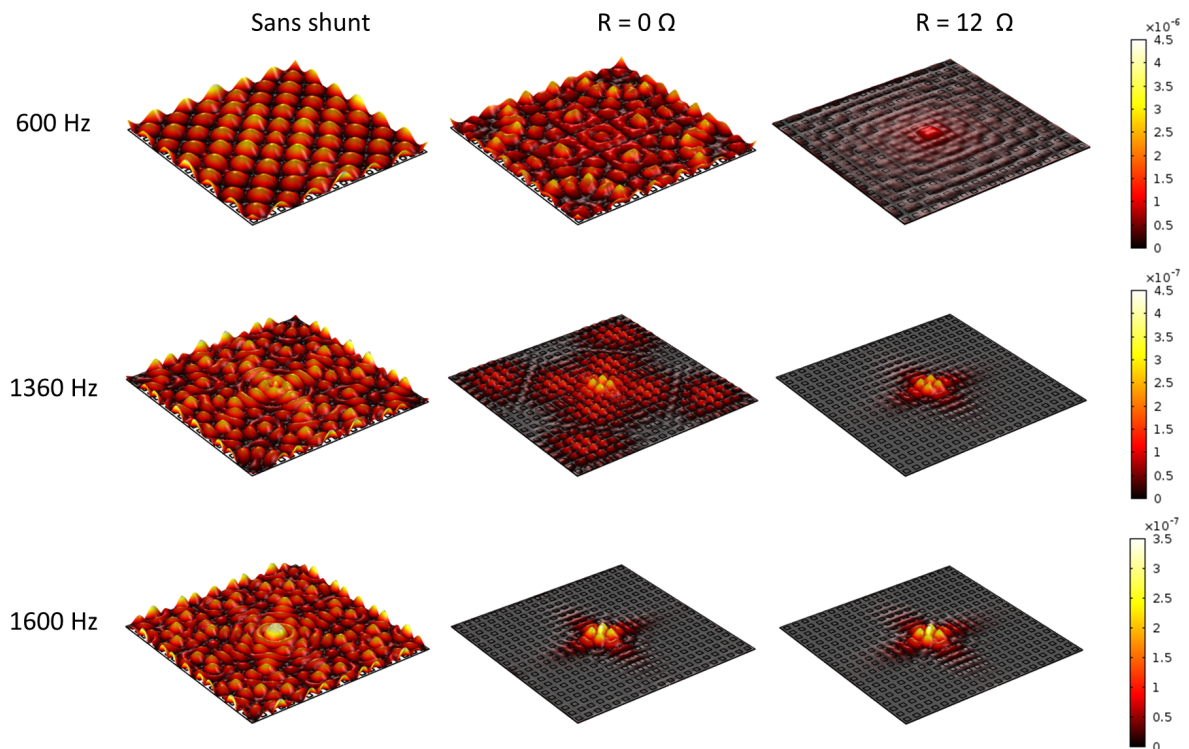


FIG 4.10 – Champ de déplacement calculé dans le cas sans shunt (circuit ouvert) et avec un shunt à capacité négative avec $C_{neg} = -13.70 \cdot 10^{-8} F$ pour $R = 0 \Omega$ et $R = 12 \Omega$. Les fréquences d'excitation sont choisies hors de la bande interdite (600 Hz), dans la bande interdite ΓX (1360 Hz), et dans la bande interdite complète ΓXMT (1600 Hz).

La figure 4.9 présente les résultats obtenus avec l'utilisation d'un shunt à capacité négative. Les courbes calculées avec le shunt dépourvue de résistance ($R = 0 \Omega$) montrent que la capacité négative permet d'ouvrir une bande interdite avec une largeur de bande fréquentielle importante vers les basses fréquences par rapport à la fréquence de Bragg. Cette fréquence de Bragg est soulignée (f_b) sur les fonctions de transmittance à 1920 Hz correspondant approximativement à la fréquence obtenue sur les courbes de dispersion calculées dans la section précédente (§4.1). Dans la bande interdite les vibrations sont nettement atténuées et en dehors, le comportement vibratoire de la plaque est peu modifié. Comme il a pu être observé dans la section précédente, plus la capacité négative est proche de l'instabilité, plus la bande interdite couvre une large bande fréquentielle.

L'ajout de la résistance permet d'augmenter globalement la dissipation d'énergie et donc d'augmenter l'atténuation des ondes. En effet, les modes vibratoires sont lissés, voire même disparaissent sur toute la bande fréquentielle étudiée. L'effet de la résistance est très important avant la fréquence de Bragg du fait de la présence de la bande interdite. On obtient alors deux effets cumulatifs de l'atténuation liée à la bande interdite et à la dissipation d'énergie réalisée par la résistance.

On remarque une variation de la fréquence définissant la limite basse fréquence de la bande interdite selon le point considéré dans le calcul de la transmittance. La bande interdite est plus large dans le cas d'une transmission selon l'axe x (point 1) que selon un axe à 45° (point 2). Comme vu précédemment, la bande interdite n'est pas définie fréquentiellement de la même façon en fonction de la direction de propagation, car le milieu est orthotrope. Seul le calcul au point 2 permet de mettre en évidence la bande interdite complète définie dans toutes les directions $\Gamma X M \Gamma$. En effet, ce calcul donne la limite de la fréquence basse que peut atteindre la bande interdite complète.

Afin de visualiser les propos tenus ci-dessus, il est proposé ici d'observer le champ de déplacement obtenu sur toute la plaque pour différentes configurations : dans le cas sans shunt (circuit ouvert) et dans le cas de la capacité négative $C_{neg} = -13.70 \cdot 10^{-8} \text{ F}$ avec $R = 0 \Omega$ et $R = 12 \Omega$. Les champs de déplacement sont calculés pour trois fréquences d'excitations différentes. Celles-ci sont choisies hors de la bande interdite à 600 Hz , dans la bande interdite définie sur ΓX à 1360 Hz et dans la bande interdite complète $\Gamma X M \Gamma$ à 1600 Hz . Les champs de déplacement ainsi obtenus sont présentés par la figure 4.10. À 600 Hz , le profil du champ de déplacement pour $R = 0 \Omega$ montre que la capacité négative change le comportement dynamique de la plaque mais n'ajoute pas, ou très peu, d'amortissement hors de la bande interdite. À 1360 Hz , le profil du champ de déplacement avec $R = 0 \Omega$ montre clairement que la bande interdite n'est pas définie dans toutes les directions puisque l'atténuation des ondes vibratoires est uniquement visible dans la direction ΓX . À 1600 Hz , comme cette fréquence est prise dans la bande interdite complète ($\Gamma X M \Gamma$), les ondes sont bien atténuées dans toutes les directions. Avec la résistance $R = 12 \Omega$, le champ de déplacement est beaucoup plus amorti pour toutes les fréquences.

4.3 Étude de la diminution du rayonnement sur plaque finie

On cherche ici à déterminer l'influence du réseau périodique de patchs piézoélectriques shuntés sur le rayonnement acoustique de la plaque finie utilisée dans le paragraphe précédent, portant sur l'étude de la diminution des vibrations (§4.2). Pour ce faire, les facteurs de rayonnement σ_{ray} et de puissance $\sigma_{\mathcal{W}}$, respectivement introduits par les relations 1.103 et 1.104 page 46, sont calculés dans les différents

cas utilisés précédemment. La méthode employée pour calculer la puissance acoustique rayonnée est la méthode de Rayleigh [101–105] qui est décrite dans le §1.3.2 page 45.

L’hypothèse est que l’ouverture de la bande interdite vers les basses fréquences, rendue possible par l’utilisation d’une capacité négative assouplissante, permet d’augmenter le nombre d’ondes de flexion de la plaque et ainsi d’augmenter la fréquence critique f_c (relation 1.84). Nous avons vu dans le §1.3, qu’en dessous de cette fréquence critique, pour une plaque considérée infinie, les ondes vibratoires propagatives rayonnent peu d’énergie acoustique (génération d’ondes acoustiques évanescentes). Par contre, les ondes vibratoires évanescentes rayonnent toujours de l’énergie (génération d’ondes acoustiques propagatives), mais leur rayonnement est fonction de cette fréquence critique [99]. En effet, plus f_c est haute fréquence et plus le rayonnement maximal atteint par les ondes acoustiques générées par les ondes vibratoires évanescentes l’est aussi. Dans le cas d’une plaque finie, au dessus de la fréquence critique, tous les modes vibratoires résonnants mécaniquement rayonnent. En dessous de la pulsation critique, les modes rayonnent peu d’énergie.

Jusqu’à présent, il a été montré la possibilité d’augmenter ce nombre d’ondes de flexion k_f de manière importante avant la bande interdite, mais également après (voir les figures 4.1, 4.4 et 4.6). En revanche, l’impact de la bande interdite sur le rayonnement n’est toujours pas connu. Que ce passe-t-il pour des fréquences inférieures et supérieures aux fréquences qui déterminent la bande interdite ? Que se passe-t-il à l’intérieur de la bande interdite si elle est placée avant ou après la fréquence critique ?

Les explications données ci-dessous tentent de répondre à ces questions.

La figure 4.11 montre les courbes du nombre d’ondes de flexion, calculées numériquement à partir du modèle classique de Floquet, pour la plaque sans patch et la plaque munie de patches non shuntés (circuit ouvert). Cette figure montre aussi le nombre d’ondes acoustiques, dans le but de mettre en évidence la fréquence critique f_c qui est caractérisée par une égalité entre nombre d’ondes de flexion et nombre d’ondes acoustiques. On constate alors qu’avec ou sans patch, les courbes de dispersion varient peu et que la fréquence critique est quasiment inchangée ; le rayonnement acoustique devrait par conséquent lui aussi être peu modifié. La fréquence critique de la plaque sans patch est $f_c = 2326 \text{ Hz}$. La figure 4.12 présente les facteurs de rayonnement et de puissance σ_{ray} et σ_W dans ces deux cas où il est possible de constater un changement évident du comportement vibroacoustique de la plaque à partir de la fréquence critique. L’ajout de patches piézoélectriques change très peu ces deux facteurs, on constate néanmoins une faible variation de la fréquence critique vers les hautes fréquences avec l’ajout des patches sur la plaque. Cette augmentation est liée à la masse ajoutée au système.

Il est nécessaire de préciser ici que les courbes de dispersion du nombre d’ondes acoustiques et du nombre d’ondes de flexion coïncident sur le graphique de la figure 4.11 (cercle rouge) dans la direction ΓX pour une fréquence égale à 2060 Hz inférieure à la fréquence critique $f_c = 2326 \text{ Hz}$. Celle-ci ne représente pas une fréquence critique car, comme précédemment expliqué, l’application du théorème de Floquet induit un artéfact mathématique qui implique un repliement des courbes de dispersion dans la représentation en diagramme de bande. Il faut imaginer ces courbes dépliées, cette intersection n’existe donc pas réellement. Ceci est illustré par les différentes figures qui ont été présentées §3.2.2 page 86. De plus, nous constatons sur cette figure deux fréquences de Bragg :

- la fréquence de Bragg « structural » f_b liée à la périodisation de la structure mécanique qui a été précédemment définie,

- la fréquence de Bragg acoustique $f_{b,ac}$ liée à la périodisation du milieu de propagation des ondes acoustiques, $f_{b,ac} = c/2l$.

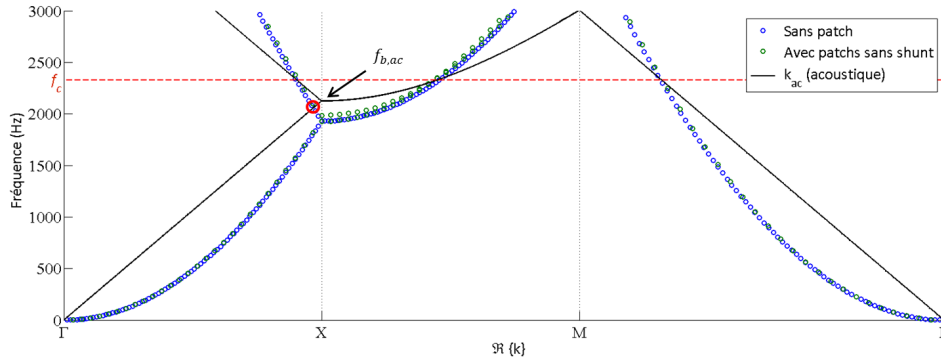


FIG 4.11 – Courbes de dispersion calculées avec le modèle classique de Floquet dans le cas de la plaque sans patch (bleu) et de la plaque munie de patchs piézoélectriques non shuntés équivalent aux patchs en circuit ouvert (vert). En noir, le nombre d'onde acoustique k_{ac} , en rouge la fréquence critique f_c pour la plaque sans patch. Le cercle rouge matérialise une « fausse » fréquence critique. $f_{b,ac}$ est la fréquence de Bragg acoustique.

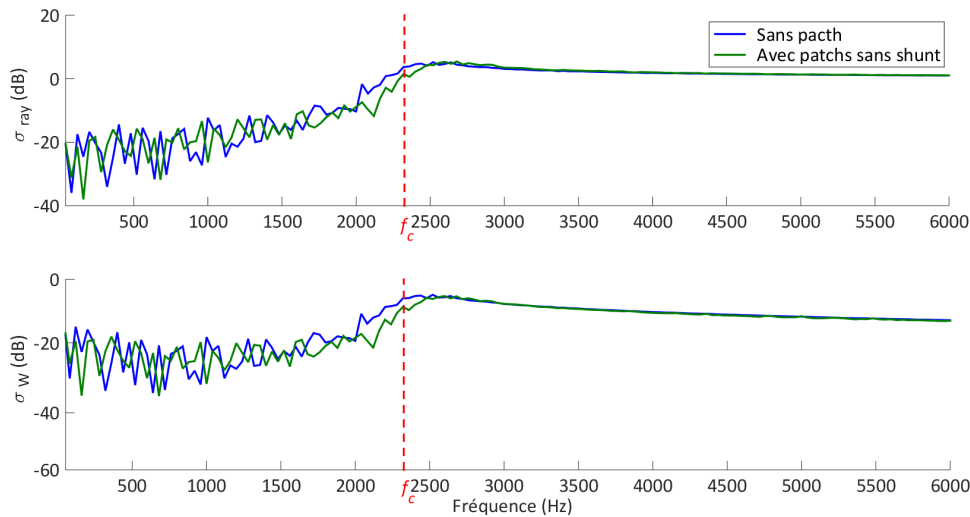


FIG 4.12 – Facteur de rayonnement σ_{ray} (en haut) et facteur de puissance σ_W (en bas) définis par les relations 1.103 et 1.104 dans le cas de la plaque sans patch (bleu) et dans le cas de la plaque munie de patchs piézoélectriques non shuntés équivalent aux patchs en circuit ouvert (vert). En rouge la fréquence critique f_c pour la plaque sans patch.

La figure 4.13 présente les courbes du nombre d'ondes de flexion, dans le cas d'un shunt à capacité négative dépourvu de résistance ($R = 0 \Omega$) avec $C_{neg} = -13.45 \cdot 10^{-8} F$ et $C_{neg} = -13.70 \cdot 10^{-8} F$, et du nombre d'ondes acoustiques. Étant donné que le réseau n'agit pas de manière homogène dans toutes les directions, il apparaît des fréquences de coïncidence du nombre d'ondes acoustiques et du nombre d'ondes de flexion différentes selon les directions de propagation.

Selon la direction ΓX de propagation des ondes, il est possible de constater une augmentation significative de la fréquence critique, liée à l'augmentation du nombre d'ondes selon cette direction. Dans la direction MT , les fréquences critiques obtenues avec l'utilisation de la capacité négative sont différentes de celles obtenues dans la direction ΓX ; ces fréquences critiques n'apparaissent pas sur la figure 4.13 car elles sont

supérieures à 4000 Hz .

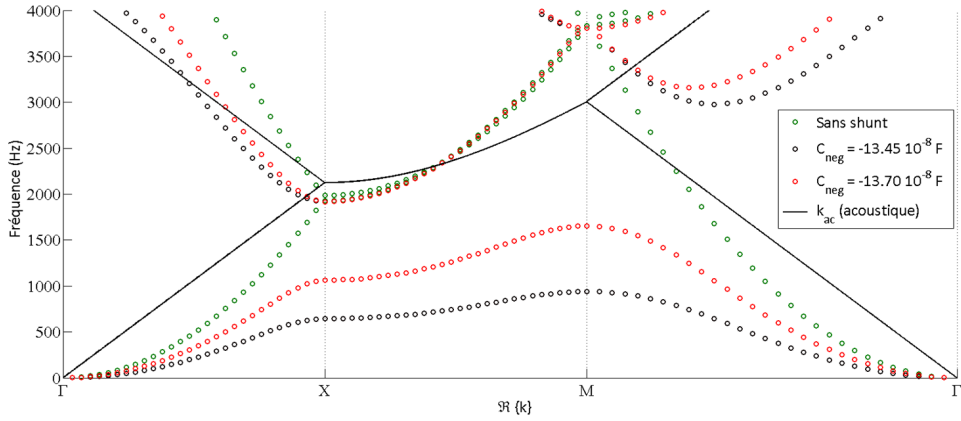


FIG 4.13 – Courbes de dispersion calculées avec le modèle classique de Floquet dans le cas des patchs non shuntés (circuit ouvert) et avec un shunt à capacité négative dépourvu de résistance ($R = 0 \Omega$) avec $C_{neg} = -13.45 \cdot 10^{-8} F$ (cercle noir) et $C_{neg} = -13.70 \cdot 10^{-8} F$ (cercle rouge). En trait continu noir, le nombre d'ondes acoustiques k_{ac} .

Regardons à présent l'influence sur le rayonnement acoustique. La figure 4.14 montre : la puissance mécanique injectée \mathcal{W}_m au point d'excitation (voir figure 4.7), la puissance acoustique rayonnée \mathcal{W}_a (relation 1.102) et la moyenne du champ de vitesse quadratique $\langle |v|^2 \rangle$ de la plaque, avec les patchs piézoélectriques non shuntés (circuit ouvert) et shuntés par une capacité négative $C_{neg} = -13.45 \cdot 10^{-8} F$ et $C_{neg} = -13.70 \cdot 10^{-8} F$. Ces trois termes permettent de calculer les facteurs de rayonnement et de puissance (relations 1.103 et 1.104) qui sont présentés par la figure 4.15.

La capacité négative a pour effet d'assouplir la plaque, ce qui provoque une augmentation globale de la puissance mécanique injectée, hormis dans la bande interdite où elle est diminuée par l'effet d'amortissement vibratoire qui y est important. La vitesse vibratoire et la puissance acoustique rayonnée sont très fortement atténuées dans la bande interdite et peu modifiées ailleurs. Finalement, en observant le facteur de rayonnement sur la figure 4.15, on constate alors que l'utilisation de la capacité négative modifie légèrement celui-ci hors de la bande interdite et l'augmente significativement dans la bande interdite. Cette augmentation de σ_{ray} est liée au fait que la contribution des ondes vibratoires évanescentes au rayonnement des ondes acoustiques est augmentée. En effet, nous avons pu voir précédemment qu'en dessous de la fréquence critique, seule les ondes évanescentes rayonnent de l'énergie acoustique. Hors, dans la bande interdite, les ondes mécaniques deviennent évanescentes ce qui accroît potentiellement le rayonnement acoustique. En revanche, le facteur de rayonnement traduit le pouvoir rayonnant d'une structure pour un champ de vitesse vibratoire donné. Il ne peut donc être représentatif du rayonnement absolu de la plaque puisqu'il traduit le rayonnement relatif au champ de vitesse quadratique. La puissance acoustique absolue qui est rayonnée, donnée en figure 4.14, atteste bien d'une diminution.

Le facteur de puissance $\sigma_{\mathcal{W}}$, qui traduit la proportion de l'énergie mécanique transformée en énergie acoustique, révèle une diminution de cette proportion d'énergie hors de la bande interdite, notamment en basses fréquences. Cette diminution est liée à l'augmentation de l'énergie mécanique qui est fournie au système, mais de part sa raideur qui est amoindrie, ce système transmet moins d'énergie acoustique. Dans la bande interdite, le facteur de puissance suit les mêmes tendances que le facteur de rayonnement. Ces résultats permettent de conclure que : le système rayonne moins d'énergie de manière absolue, mais

ce rayonnement est beaucoup plus sensible au champ vibratoire. En revanche, ces résultats ne montrent pas significativement de changement de la fréquence critique comme il était attendu. Le système se comportant comme un milieu de propagation anisotrope, la fréquence critique varie selon la direction de propagation. Il existe dans ce cas pour chaque direction de propagation une fréquence critique. Il est difficile de déterminer à ce stade de l'étude le lien entre les courbes de dispersion et le profil du facteur de rayonnement associé (voir figures 4.13 et 4.15).

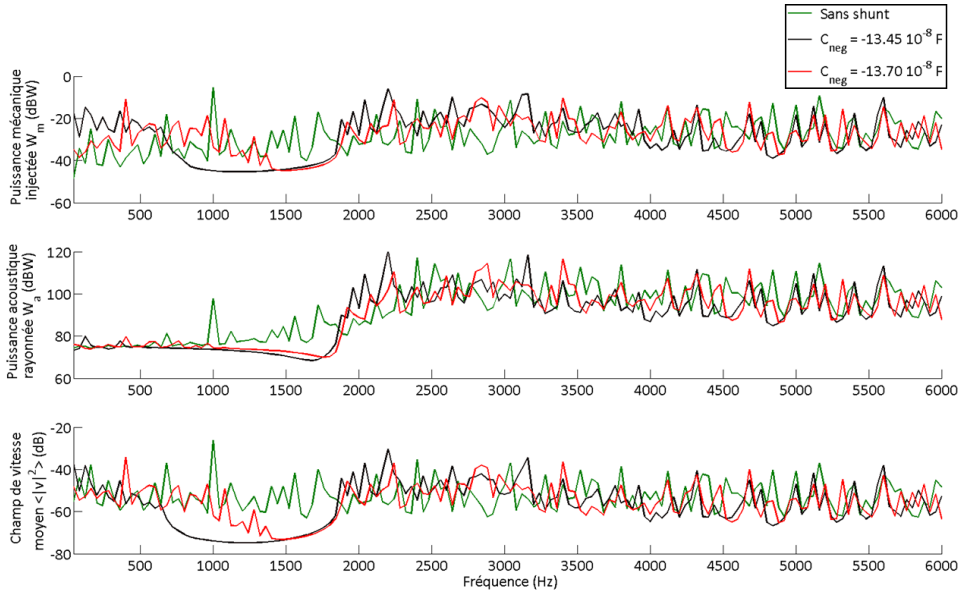


FIG 4.14 – Puissance mécanique injectée \mathcal{W}_m au point d'excitation sur la figure 4.7 (en haut), puissance acoustique rayonnée \mathcal{W}_a (au milieu) et champ de vitesse quadratique moyen (en bas) avec les patches piézoélectriques non shuntés (vert) et shuntés par un shunt à capacité négative dépourvu de résistance ($R = 0 \Omega$) avec $C_{neg} = -13.45 \cdot 10^{-8} F$ (noir) et $C_{neg} = -13.70 \cdot 10^{-8} F$ (rouge).

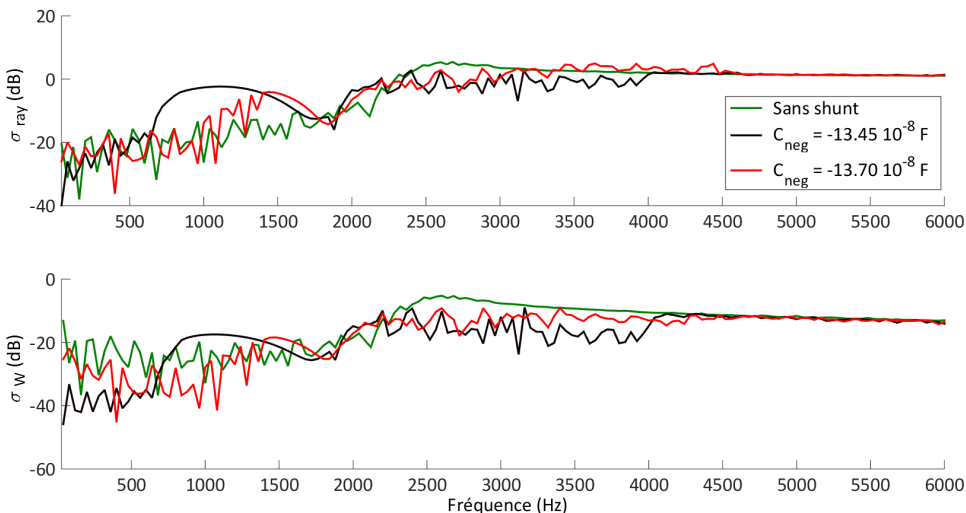


FIG 4.15 – Facteur de rayonnement σ_{ray} (en haut) et facteur de puissance σ_W définis par les relations 1.103 et 1.104 avec les patches piézoélectriques non shuntés (vert) et shuntés par un shunt à capacité négative dépourvu de résistance ($R = 0 \Omega$) avec $C_{neg} = -13.45 \cdot 10^{-8} F$ (noir) et $C_{neg} = -13.70 \cdot 10^{-8} F$ (rouge).

On cherche à présent à déterminer l'influence de la résistance. Pour ce faire, une résistance $R = 12 \Omega$ est ajoutée en série aux valeurs de la capacité négative utilisées dans les deux cas précédents. Les résultats

sont présentés par les figures 4.16 et 4.17.

Ces derniers montrent que l'ajout de la résistance en série de la capacité négative permet de dissiper une grande quantité d'énergie mécanique. En effet, le champ de vitesse vibratoire est nettement diminué pour toute la plage de fréquence étudiée, hormis autour de la fréquence de Bragg pour laquelle le réseau de patches n'a pas d'effet. Par conséquent, le rayonnement d'énergie acoustique se trouve fortement diminué sur toute la gamme de fréquence étudiée et particulièrement dans la bande interdite. Comme précédemment, le facteur de rayonnement est augmenté dans la bande interdite. En revanche, le facteur de puissance $\sigma_{\mathcal{W}}$ permet de faire deux remarques pertinentes : la première est que, comme précisé ci-dessus, l'ajout de la résistance permet une grande dissipation de l'énergie mécanique sur toute la bande fréquentielle ; la seconde est que l'ajout de la résistance permet d'obtenir des résultats moins sensibles à la valeur de la capacité négative. En effet, la figure 4.15 montrait des résultats très sensibles à la variation de la valeur de la capacité négative lorsque le shunt est dépourvu de résistance électrique. Ici, avec une résistance de 12Ω , les deux valeurs de la capacité négative donnent des résultats très proches. Ceci est donc très intéressant pour augmenter la robustesse du système en le rendant moins sensible aux variations de la valeur de la capacité négative.

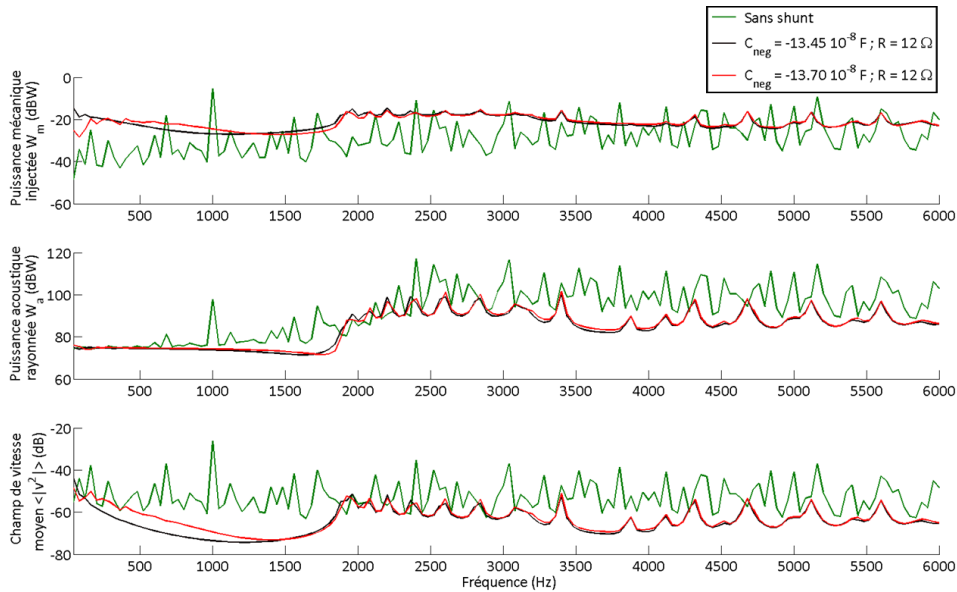


FIG 4.16 – Puissance mécanique injectée \mathcal{W}_m au point d'excitation sur la figure 4.7 (en haut), puissance acoustique rayonnée \mathcal{W}_a (au milieu) et champ de vitesse moyen (en bas) avec les patches piézoélectriques non shuntés (vert) et shuntés par un shunt à capacité négative dépourvu de résistance ($R = 0 \Omega$) avec $C_{neg} = -13.45 \cdot 10^{-8} F$ (noir) et $C_{neg} = -13.70 \cdot 10^{-8} F$ (rouge).

Nous souhaitons à présent positionner la bande interdite après la fréquence critique initiale $f_c = 2326 Hz$. Dans le cas précédent, l'influence de la bande interdite positionnée avant la fréquence critique a été étudiée. Le but ici est de vérifier s'il est possible de diminuer le facteur de rayonnement dans la bande interdite placée ainsi. En effet, ce dernier est principalement induit par les ondes vibratoires propagatives pour des fréquences supérieures à f_c et, par conséquent, en plaçant la bande interdite après la fréquence critique, nous devrions atténuer ces ondes vibratoires propagatives rayonnantes et donc diminuer le facteur de rayonnement. Cette stratégie peut potentiellement permettre de diminuer la puissance acoustique rayonnée sur une plus large bande fréquentielle, tout en rendant le système moins

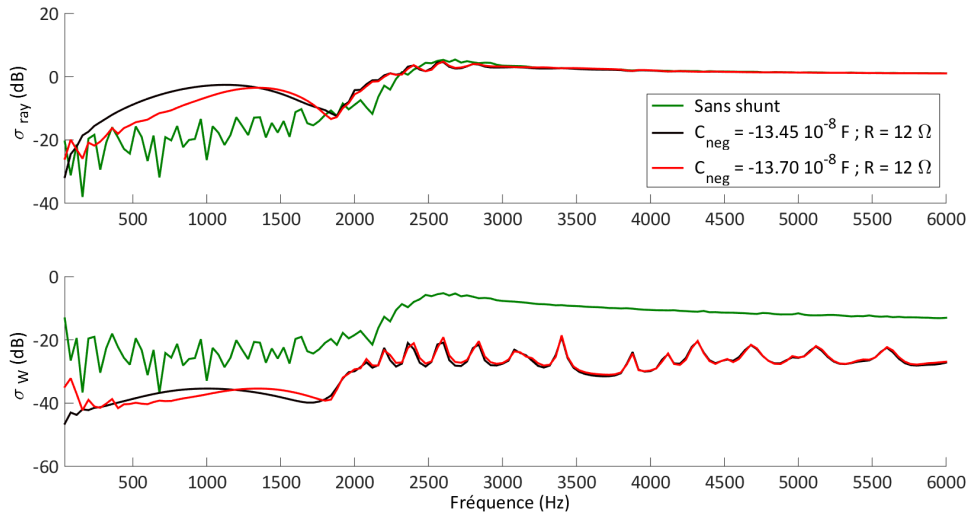


FIG 4.17 – Facteur de rayonnement σ_{ray} (en haut) et facteur de puissance σ_W définis par les relations 1.103 et 1.104 avec les patchs piézoélectriques non shuntés (vert) et shuntés par un shunt à capacité négative avec les couples de valeurs $C_{neg} = -13.45 \cdot 10^{-8} F$; $R = 12 \Omega$ (noir) et $C_{neg} = -13.70 \cdot 10^{-8} F$; $R = 12 \Omega$ (rouge).

sensible au champ de vitesse vibratoire.

Pour positionner la bande interdite après la fréquence critique, les dimensions de la cellule sont diminuées de 8 cm à 6 cm . Ceci a pour effet d'augmenter la fréquence de Bragg structural de 1942 Hz à 3366 Hz . Celle-ci est alors positionnée après la fréquence critique $f_c = 2326 \text{ Hz}$. La capacité négative est choisie de façon à obtenir une bande interdite suffisamment large pour que celle-ci soit située autour de la fréquence critique, autrement dit l'une des frontières de la bande interdite est positionnée après la fréquence critique (fréquence de Bragg), et l'autre avant la fréquence critique; cette dernière étant conditionnée par la valeur de la capacité négative. La valeur choisie est $C_{neg} = -13.55 \cdot 10^{-8} F$. La figure 4.18 présente les courbes de dispersion calculées avec les patchs piézoélectriques non shuntés (circuit ouvert) et shuntés par un shunt à capacité négative $C_{neg} = -13.55 \cdot 10^{-8} F$ dépourvu de résistance ($R = 0 \Omega$). Cette figure montre que la fréquence critique initiale est positionnée à l'intérieur de la bande interdite complète qui est définie sur $\Gamma X M \Gamma$. Rappelons ici que l'ajout de patchs (non shuntés) modifie peu les courbes de dispersion par rapport au cas de la plaque sans patch, ainsi la fréquence critique obtenue avec ou sans patchs peut être considérée la même dans les deux cas. La figure montre également que cette fréquence critique, qui matérialise la fréquence à partir de laquelle le nombre d'ondes acoustiques devient supérieur au nombre d'ondes de flexion, est augmentée avec l'utilisation de la capacité négative. En effet, en observant les courbes de dispersion dans la direction ΓX , il est possible de constater que cette fréquence est déterminée par la fréquence de Bragg structural : $f_{sh} = f_b = 3366 \text{ Hz}$, où f_{sh} détermine la nouvelle fréquence critique obtenue avec le shunt à capacité négative. La figure 4.19 permet de mieux comprendre ces propos. Cette figure représente les courbes de dispersion de nombre d'ondes acoustiques et du nombre d'ondes de flexion sur ΓX vue de manière déroulée. Dans le cas présenté ici, il n'y a pas d'intersection entre le nombre d'ondes acoustiques k_{ac} et le nombres d'ondes de flexion k_f , mais la fréquence critique équivaut à la fréquence qui matérialise le passage de k_{ac} au dessus de k_f . Cette fréquence notée f_{sh} est donnée à la fréquence de Bragg structural f_b : $f_{sh} = f_b$.

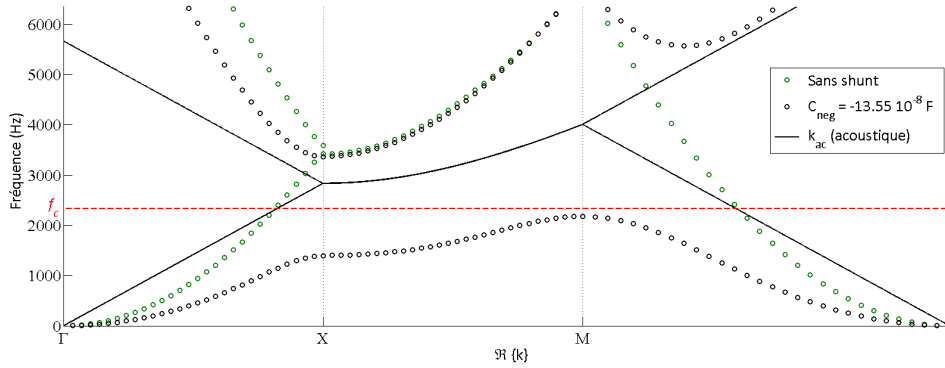


FIG 4.18 – Courbes de dispersion calculées avec le modèle classique de Floquet dans le cas des patches non shuntés (circuit ouvert) et avec un shunt à capacité négative dépourvu de résistance ($R = 0 \Omega$) avec $C_{neg} = -13.55 \cdot 10^{-8} F$ (cercle noir). En trait continu noir, le nombre d’ondes acoustiques k_{ac} , en rouge la fréquence critique f_c pour la plaque sans patch. Calculs réalisés pour la cellule de 6 cm .

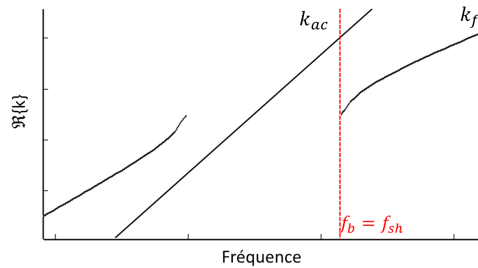


FIG 4.19 – Courbes de dispersion sur ΓX du nombre d’ondes acoustiques coupant le nombre d’ondes de flexion dans la bande interdite. Les courbes sont données de manière déroulée.

La figure 4.20 présente : la puissance mécanique injectée \mathcal{W}_m au point d’excitation, la puissance acoustique rayonnée \mathcal{W}_a (relation 1.102) et la moyenne du champ de vitesse quadratique $\langle |v|^2 \rangle$ de la plaque, avec les patches piézoélectriques non shuntés (circuit ouvert) et shuntés par une capacité négative $C_{neg} = -13.55 \cdot 10^{-8} F$ dans le cas d’une résistance $R = 0 \Omega$ et d’une résistance $R = 10 \Omega$. Ces trois termes permettent de calculer le facteur de rayonnement et le facteur de puissance (relations 1.103 et 1.104) qui sont présentés par la figure 4.21.

Les résultats de la figure 4.20 montrent les phénomènes expliqués précédemment, obtenus avec la cellule de 8 cm : une augmentation globale de la puissance mécanique injectée, une forte diminution de la puissance acoustique rayonnée dans la bande interdite liée à la forte atténuation de la vitesse vibratoire de la plaque, ainsi qu’une diminution du rayonnement en dehors le bande interdite, notamment en hautes fréquences, liée à l’ajout de la résistance dont le pouvoir de dissipation d’énergie augmente avec l’utilisation d’une capacité négative (voir le chapitre 2). Sur la figure 4.21, le rayonnement acoustique est augmenté dans la portion de la bande interdite située avant la fréquence critique de référence f_c et est diminuée dans celle située après cette fréquence f_c , ce qui confirme l’hypothèse émise de pouvoir diminuer la puissance acoustique rayonnée tout en rendant le système moins sensible au champ de vitesse vibratoire. De plus, ces résultats témoignent d’une augmentation de la fréquence critique environ égale à 3130 Hz . Cette fréquence est proche de la fréquence critique déterminée sur les courbes de dispersion en figure 4.21.

Finalement, la portion de la bande interdite positionnée avant f_c augmente la participation des ondes vibratoires évanescentes au rayonnement acoustique, la portion de la bande interdite après f_c diminue la

participation des ondes vibratoires propagatives qui prédominent dans la participation au rayonnement acoustique après cette fréquence critique. À partir de la nouvelle fréquence critique obtenue avec le shunt à capacité négative, le rayonnement redevient proche de 1 (soit 0 en dB).

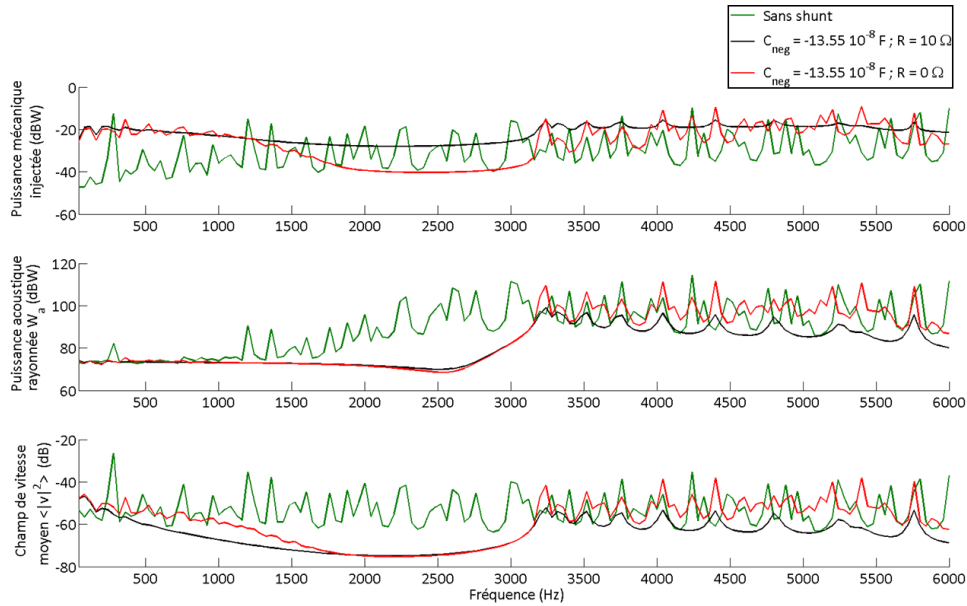


FIG 4.20 – Puissance mécanique injectée \mathcal{W}_m au point d’excitation (en haut), puissance acoustique rayonnée \mathcal{W}_a (au milieu) et champ de vitesse moyen (en bas) avec les patchs piézoélectriques non shuntés (vert) et shuntés par un shunt à capacité négative avec les couples de valeurs $C_{neg} = -13.55 \cdot 10^{-8} F$; $R = 10 \Omega$ (noir) et $C_{neg} = -13.55 \cdot 10^{-8} F$; $R = 0 \Omega$ (rouge). Calculs réalisés pour la cellule de 6 cm.

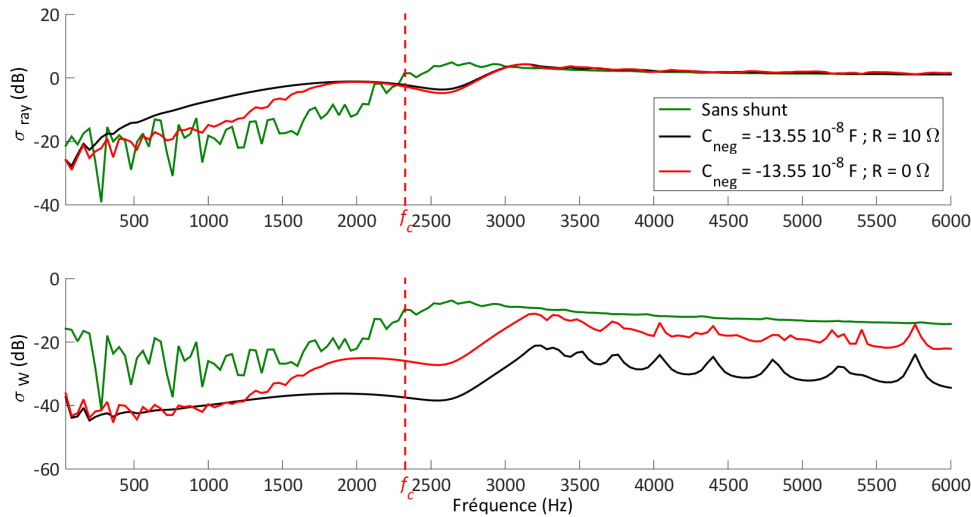


FIG 4.21 – Facteur de rayonnement σ_{ray} (en haut) et facteur de puissance σ_W définis par les relations 1.103 et 1.104 avec les patchs piézoélectriques non shuntés (vert) et shuntés par un shunt à capacité négative avec les couples de valeurs $C_{neg} = -13.55 \cdot 10^{-8} F$; $R = 10 \Omega$ (noir) et $C_{neg} = -13.55 \cdot 10^{-8} F$; $R = 0 \Omega$ (rouge). Calculs réalisés pour la cellule de 6 cm.

Pour mieux visualiser les propos tenus ici, il est proposé de réaliser un calcul du facteur de rayonnement acoustique à partir du modèle équivalent présenté dans le §3.2 page 84. Il a été vu précédemment que ce modèle, étant basé sur une approximation des propriétés mécaniques de la cellule munie d’un patch piézoélectrique par des propriétés équivalentes, ne peut représenter correctement les courbes de dispersion

avec l'utilisation d'un shunt à capacité négative : ni la position de la bande interdite, ni son atténuation ne peuvent être comparées aux résultats obtenus numériquement dans ce paragraphe. De même, ce modèle ne peut prendre en compte le caractère orthotrope de la plaque. Mais, il est possible de l'utiliser de manière purement indicative. Prenons le cas des courbes de dispersion tel que présenté sur la figure 4.22. Cette dernière montre les nombres d'ondes de flexion dans le cas de patchs non shuntés et dans le cas de patchs shuntés par une capacité négative. Peu importe la valeur de la capacité négative qui a été prise pour le calcul puisque le but ici, est simplement de positionner une bande interdite autour de la fréquence critique initiale f_c afin de mieux comprendre les résultats obtenus précédemment en figure 4.21. Nous cherchons simplement à expliquer les variations du profil de la courbe de rayonnement avec l'usage d'une capacité négative. Nous avons pu voir auparavant que cette fréquence critique varie peu avec l'ajout de patchs non shuntés (circuit ouvert) par rapport au cas de la plaque de référence sans patch. La fréquence critique de référence, qui est donc considérée ici, est la fréquence critique f_c obtenue avec la cellule munie de patchs non shuntés.

Le calcul aux valeurs propres de la matrice de transfert de la cellule considérée, qui est une cellule respectant les dimensions précédentes (6 *cm* de côté), donne quatre types d'ondes : deux ondes propagatives correspondant à $\Re|k_{f,sh_1}|$ et $\Re|k_{f,sh_2}|$ et deux ondes évanescentes correspondant à $\Im|k_{f,sh_1}|$ et $\Im|k_{f,sh_2}|$ sur la figure 4.22. On notera que $\Re|k_{f,sh_1}| = 0$. Sur cette figure est aussi présenté le nombre d'ondes de flexion dans le cas sans patch ; on retrouve les quatre types d'ondes : $\Re|k_{f,ref_1}| = \Im|k_{f,ref_2}| = 0$ et $j \times \Re|k_{f,ref_2}| = \Im|k_{f,ref_1}|$. La relation 1.89 page 42 permet de calculer le facteur de rayonnement lié aux nombres d'ondes de flexion complexes k_{f,ref_1} et k_{f,ref_2} pour le cas sans shunt, ainsi que k_{f,sh_1} et k_{f,sh_2} dans le cas du shunt à capacité négative. Les courbes ainsi obtenues sont présentées en figure 4.22. Cette figure montre d'une part une augmentation de la fréquence critique avec l'utilisation d'une capacité négative, et d'autre part, une augmentation du facteur rayonnement dans la bande interdite qui est délimitée par f_a et f_b sur cette figure. Finalement, en comparant les courbes du facteur de rayonnement obtenues avec un shunt à capacité négative et sans shunt, on distingue cinq zones distinctes sur la figure 4.22, on notera ici σ_{ref} le rayonnement globale de la plaque avec des patchs non shuntés et σ_{sh} le rayonnement globale de la plaque avec des patchs shuntés par capacité négative :

- 1 : $f < f_a$, le rayonnement des ondes évanescentes mécaniques, qui sont les seules ondes qui contribuent au rayonnement, est légèrement diminué par rapport au facteur de rayonnement obtenu dans le cas sans shunt ; $\sigma_{sh} < \sigma_{ref}$.
- 2 : $f_a < f < f_c$, la bande interdite créée de nouvelles ondes évanescentes ayant un facteur de rayonnement important ; $\sigma_{sh} > \sigma_{ref}$.
- 3 : $f_c < f < f_b$, le rayonnement σ_{sh} est lié au rayonnement des ondes évanescentes tandis que σ_{ref} est principalement lié au rayonnement des ondes propagatives $\sigma_{sh} < \sigma_{ref}$.
- 4 : $f_b < f < f_{sh}$, les mêmes remarques faites pour la zone 3 s'appliquent ici, hormis que la bande interdite disparaît et donc σ_{sh} diminue légèrement. $\sigma_{sh} < \sigma_{ref}$.
- 5 : $f > f_{sh}$, σ_{sh} est principalement induit par les ondes propagatives. Selon le graphique de la figure 4.22, σ_{sh} devient supérieur au rayonnement de référence σ_{ref} puis ces deux facteurs de rayonnement tendent à se rejoindre vers la valeur 1.

Notons que sur la figure 4.21, la zone 3 est inexistante pour le facteur de rayonnement calculé avec une

capacité négative car, dans ce cas, la fréquence de Bragg f_b et la fréquence critique f_{sh} sont confondues. La figure 4.23 trace la différence entre les deux facteurs de rayonnement obtenus dans le cas sans shunt et dans le cas d'un shunt à capacité négative avec les couples de valeurs ($C_{neg} = -13.55 \cdot 10^{-8} F$; $R = 10 \Omega$) et ($C_{neg} = -13.55 \cdot 10^{-8} F$; $R = 0 \Omega$) respectivement en vert, en noir et en rouge sur la figure 4.21. Les cinq phases définies ci-dessus sont clairement visibles sur ces courbes. Finalement, le facteur de rayonnement est fortement augmenté dans la bande interdite. En revanche, le fait que l'utilisation de la capacité négative augmente la fréquence critique du système, ce facteur de rayonnement reste tout de même inférieur au facteur de rayonnement initial entre la fréquence critique initiale f_c du système et la nouvelle fréquence critique f_{sh} . L'ouverture d'une bande interdite change les ondes propagatives en ondes évanescentes dans la zone fréquentielle sur laquelle elle est définie. Or, ces ondes évanescentes rayonnent de l'énergie tandis que les ondes propagatives n'en rayonnent pas pour des fréquences inférieures à la fréquence critique. L'ouverture de cette bande interdite a donc pour effet d'augmenter le facteur de rayonnement dans la bande interdite qui est définie avant la fréquence critique.

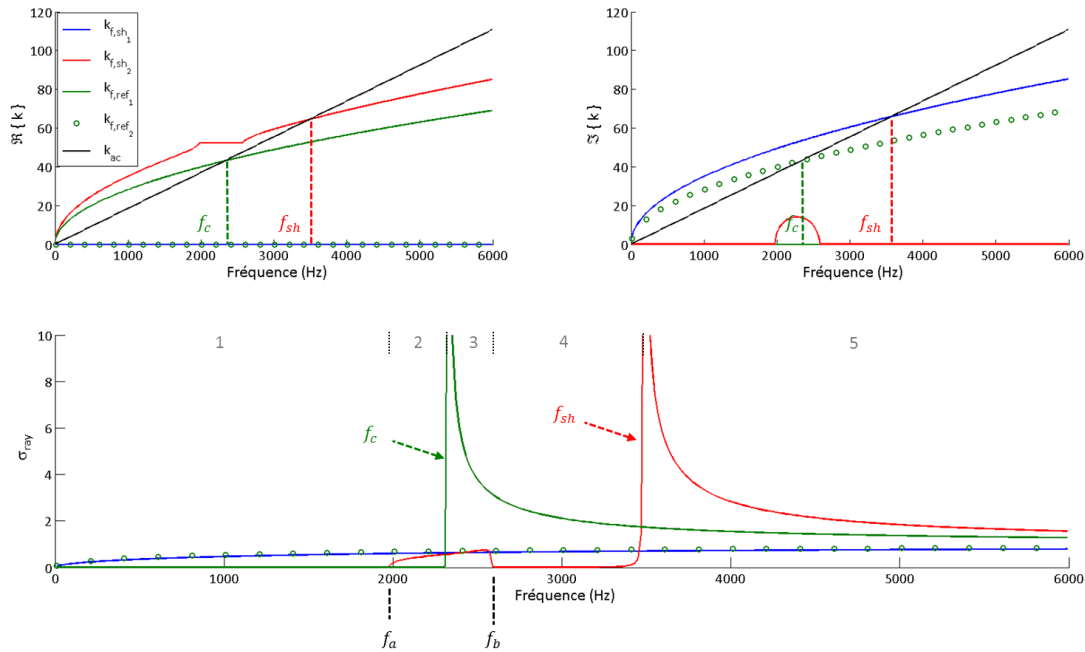


FIG 4.22 – Courbes de dispersion calculées à partir du modèle équivalent présenté dans le §3.2 page 84 (en haut) et facteurs de rayonnement associés calculés à partir de la relation 1.89 (en bas). Les calculs sont réalisés dans le cas sans shunt (vert) et avec une capacité négative (rouge et bleu). f_c est la fréquence critique obtenue dans le cas sans shunt, f_{sh} est la fréquence critique obtenue avec une capacité négative, f_a et f_b délimitent les fréquences frontières de la bande interdite.

4.4 Étude de l'augmentation de l'isolation de paroi infinie

Dans cette section est abordée une seconde problématique de la vibroacoustique qui est l'isolation de paroi. Le but ici est de vérifier s'il est possible d'augmenter l'indice d'affaiblissement d'une paroi en utilisant un réseau de patches piézoélectriques shuntés par une capacité négative. Cette section reprend dans un premier temps la stratégie adoptée pour augmenter le pouvoir isolant de la paroi à la transmission des ondes acoustiques. Puis dans un second temps, les modèles analytique et numérique permettant de calculer les indices d'affaiblissement pour une excitation en champ d'ondes planes et en champ diffus sont

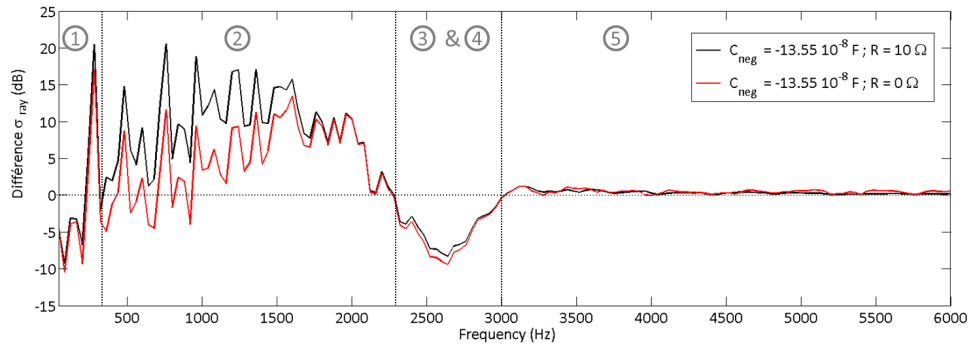


FIG 4.23 – Différence entre les facteurs de rayonnement présentés par la figure 4.21. Différence entre le facteur de rayonnement obtenu dans le cas sans shunt et dans le cas d'un shunt à capacité négative avec $C_{neg} = -13.55 \cdot 10^{-8} F$ et $R = 10 \Omega$ (noir) ; différence entre le facteur de rayonnement obtenu dans le cas sans shunt et dans le cas d'un shunt à capacité négative avec $C_{neg} = -13.55 \cdot 10^{-8} F$ et $R = 0 \Omega$ (rouge).

présentés. Pour finir, un dernier paragraphe présente les résultats de l'étude.

4.4.1 Stratégie

La transparence acoustique peut être caractérisée par le facteur de transmission noté τ qui est le rapport de la puissance acoustique de l'onde transmise \mathcal{W}_{tr} sur la puissance acoustique de l'onde incidente \mathcal{W}_{inc} : voir la relation 1.93 au §1.3.1.2 page 43. Pour deux fluides identiques, le facteur de transmission peut s'écrire [99] :

$$\tau(\omega, \theta, \varphi) = 1 / \left[1 + (\rho h)^2 \left(\frac{\omega \cos(\theta)}{2\rho_0 c} \right)^2 \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_{coin}^2} \right)^2 \right], \quad (4.2)$$

où ω est la pulsation, θ et φ sont les angles qui définissent la direction de propagation des ondes acoustiques incidentes dans l'espace en coordonnées polaires (voir en figure 1.46 page 44), ρ la masse volumique de la plaque, h l'épaisseur de la plaque, ρ_0 la masse volumique de l'air, c la célérité des ondes acoustiques dans l'air et ω_{coin} la pulsation de coïncidence (la fréquence de coïncidence f_{coin} a été définie précédemment par la relation 1.95). Rappelons ici que l'indice d'affaiblissement R est défini par :

$$R(\omega, \theta, \varphi) = 10 \log(1/\tau) . \quad (4.3)$$

Pour simplifier les explications données par la suite, l'étude de l'augmentation d'isolation de paroi est seulement réalisée par rapport à la variation selon l'angle θ , φ est considéré nul. Cela implique que la projection du nombre d'ondes k_y selon l'axe y du nombre d'ondes acoustiques k_{ac} est nul ($k_y = 0$). Cela limite, dans un premier temps, l'étude de l'influence du réseau périodique de patches piézoélectriques selon la direction ΓX . Avant de chercher à comprendre l'influence de ce réseau périodique de patches piézoélectriques shuntés par une capacité négative assouplissante sur l'isolation acoustique d'une paroi dans toutes les directions, le problème est limité à une seule direction. En revanche, la propagation des ondes de flexion dans la structure n'est plus spatialement homogène lorsque les patches sont contrôlés par capacité négative. En effet, il a été expliqué précédemment que l'utilisation du réseau périodique, tel qu'il

est proposé dans ces travaux, de patchs piézoélectriques shuntés par une capacité négative, transforme le milieu initialement isotrope en un milieu orthotrope. En toute rigueur, il faudrait considérer la variation de la direction des ondes acoustiques incidentes selon φ pour caractériser de manière globale l'influence du système sur l'isolation de la paroi contrôlée.

Le système étudié est celui d'une plaque infinie munie d'un réseau de patchs piézoélectriques dont les dimensions de la cellule unitaire sont 6 cm de côté. Cette cellule est celle qui a été utilisée précédemment dans l'étude de la diminution du rayonnement acoustique. Les dimensions de la cellule sont choisies ainsi pour deux raisons : la première est de rejeter vers de plus hautes fréquences des erreurs de calculs qui sont liées à des artefacts numériques induits par l'application du théorème de Floquet-Bloch, nous verrons par la suite en quoi consistent ces erreurs, la seconde est d'augmenter au maximum f_{coin} .

4.4.2 Modèles numérique et analytique

4.4.2.1 Modèle analytique

Les équations analytiques qui sont utilisées pour calculer le facteur de transmission et l'indice d'affaiblissement en champ d'ondes planes sont les relations 4.2 et 4.3. Le modèle de champ diffus est obtenu par sommation des effets de pression d'ondes planes d'angles d'incidences variant de $\theta = 0^\circ$ à $\theta = 90^\circ$ ($\pi/2$) et $\varphi = 0^\circ$ à $\varphi = 360^\circ$ (2π) lorsque φ est considéré. Pour prendre en compte les patchs piézoélectriques dans le modèle analytique, le facteur de transmission est réécrit à partir des propriétés équivalentes obtenues avec le modèle équivalent présenté dans le chapitre 3 §3.2 page 84. Autrement dit :

$$\tau(\omega, \theta, \varphi) = 1 / \left[1 + (m_{eq})^2 \left(\frac{\omega \cos(\theta)}{2\rho_0 c} \right)^2 \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_{coin}^2} \right)^2 \right], \quad (4.4)$$

avec ici :

$$\omega_{coin} = \frac{c^2}{\sin^2(\theta)} \sqrt{\frac{m_{eq}}{D_{eq}}} = \frac{f_c}{\sin^2(\theta)}. \quad (4.5)$$

4.4.2.2 Modèle numérique

L'indice d'affaiblissement d'une paroi peut être calculé en connaissant la puissance acoustique incidente \mathcal{W}_{inc} et la puissance acoustique transmise \mathcal{W}_{tr} définie de part et d'autre de la paroi. Pour calculer numériquement la puissance incidente et la puissance transmise à travers notre paroi infinie munie d'un réseau de patchs, le modèle utilisé représente une cellule « structure + patchs », excitée par un champ de forces qui équivaut au champ de pression des ondes acoustiques qui est projeté dans le plan de la paroi. Ce modèle est présenté par la figure 4.24.

La structure étant considérée placée dans l'air, les hypothèses de fluides légers peuvent s'appliquer. Dans ce cas, la pression de part et d'autre de la paroi est négligeable. En considérant la paroi immobile, la pression bloquée $F(x, y, z = 0) = P_{inc} + P_r = 2P_{inc}$, où P_{inc} et P_r sont les pressions acoustiques incidente et réfléchie. Dans le cas d'ondes planes d'angles d'incidences θ et φ , cette force surfacique excitatrice peut

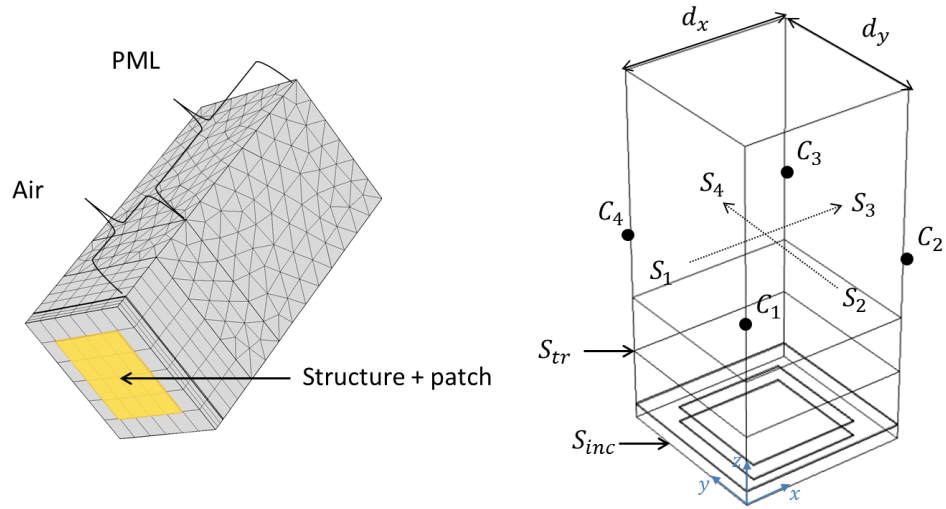


FIG 4.24 – Schéma du modèle numérique utilisé pour le calcul de l'indice d'affaiblissement.

s'écrire :

$$F(x, y, z = 0) = 2e^{-j[(k_{ac}\sin\theta\cos\varphi)x + (k_{ac}\sin\theta\sin\varphi)y]} \quad \text{sur } S_{inc} \text{ selon } z, \quad (4.6)$$

où k_{ac} est le nombre d'ondes acoustiques. On notera ici que :

$$\begin{cases} k_x = k_{ac}\sin\theta\cos\varphi, \\ k_y = k_{ac}\sin\theta\sin\varphi, \end{cases} \quad (4.7)$$

où k_x et k_y sont les nombres d'ondes projetés sur l'axe x et l'axe y du nombre d'ondes acoustiques k_{ac} . En considérant $\varphi = 0$, $k_x = k_{ac}\sin\theta$ et $k_y = 0$, et la force surfacique excitatrice s'écrit :

$$F(x, y, z = 0) = 2e^{-j(k_{ac}\sin\theta)x} \quad \text{sur } S_{inc} \text{ selon } z, \quad (4.8)$$

Ce champ de pression étant imposé, il est possible de calculer la puissance acoustique incidente associée à partir de la relation :

$$\mathcal{W}_{inc} = \int_{S_{inc}} \frac{p_{inc}^2 \cos\theta}{2\rho_0 c} dS_{inc}, \quad (4.9)$$

où p_{inc} est l'amplitude de la pression acoustique pariétale. Dans notre cas, cette pression est $p_{inc} = 1 \text{ N/m}^2$.

La puissance transmise est obtenue en intégrant la pression acoustique sur la surface S_{tr} :

$$\mathcal{W}_{tr} = \int_{S_{tr}} \frac{p_{tr}^2 \cos\theta}{2\rho_0 c} dS_{tr}, \quad (4.10)$$

où p_{tr} est l'amplitude de la pression transmise.

Finalement, l'indice d'affaiblissement de la paroi en champ d'ondes planes est calculé à partir du rapport

entre la puissance transmise \mathcal{W}_{tr} et la puissance incidente \mathcal{W}_{inc} :

$$R = 10 \log \left(\frac{\mathcal{W}_{inc}}{\mathcal{W}_{tr}} \right). \quad (4.11)$$

Pour calculer l'indice d'affaiblissement en champ diffus, plusieurs calculs sont réalisés pour différentes valeurs de θ afin de réaliser une somme des facteurs de transmission obtenus pour chaque angle θ . La résolution angulaire choisie est égale à 0.25° .

Afin de considérer le système infini, des conditions de périodicité de Floquet sont appliquées au modèle. Les références [110, 113–116] présentent des modèles numériques qui utilisent une méthode FEM (Finite Element Method) pour réaliser différents calculs sur des systèmes périodiques. Certains de ces systèmes sont constitués d'une partie mécanique solide (structure) et d'une partie fluide (air).

Considérons une cellule unitaire bornée par les surfaces S_{1-4} et les coins C_{1-4} tel qu'il est montré sur la figure 4.24. Selon le théorème de Floquet-Bloch, si la cellule est caractérisée par une distance de périodicité d_x dans la direction x et d_y dans la direction y , toutes les fonctions spatiales \mathcal{X} , tels que le déplacement et la pression acoustique, satisfont la relation suivante :

$$\mathcal{X}(x + d_x, y + d_y, z) = \mathcal{X}(x, y, z) e^{-j d_x k_{ac} \sin \theta \cos \varphi - j d_y k_{ac} \sin \theta \sin \varphi} = \mathcal{X}(x, y, z) e^{-\mu_x - \mu_y}, \quad (4.12)$$

où $\mu_x = j k_x d_x$ et $\mu_y = j k_y d_y$ sont les constantes de propagation. Les conditions périodiques impliquent alors :

$$\mathcal{X}_{S_3} = \mathcal{X}_{S_1} e^{-\mu_x}, \mathcal{X}_{S_4} = \mathcal{X}_{S_2} e^{-\mu_y}; \quad (4.13)$$

$$\mathcal{X}_{C_2} = \mathcal{X}_{C_1} e^{-\mu_x}, \mathcal{X}_{C_4} = \mathcal{X}_{C_1} e^{-\mu_y}, \mathcal{X}_{C_3} = \mathcal{X}_{C_1} e^{-\mu_x - j \mu_y}. \quad (4.14)$$

Rappelons que dans notre cas, φ vaut 0 dans ces relations. Pour limiter les temps de calcul, le maillage qui est paramétré est un maillage « grossier ». Le maillage utilisé est celui qui est présenté par la figure 4.24.

4.4.3 Résultats

Afin de valider le modèle numérique, l'indice d'affaiblissement R est calculé dans un premier temps sans les patchs et pour différentes valeurs de l'angle θ . Les courbes ainsi obtenues numériquement sont comparées à celles obtenues avec le modèle analytique. Les résultats diffèrent légèrement en hautes fréquences, ceci étant lié à la faible qualité du maillage. La figure 4.25 montre une bonne concordance des résultats analytiques et numériques.

La figure 4.26 (en haut) présente les résultats obtenus avec la prise en compte des patchs piézoélectriques dans le modèle, mais ceux-ci ne sont pas shuntés. On remarque que les courbes obtenues à partir du calcul numérique présentent des points divergents par rapport aux courbes obtenues analytiquement. Ces divergences sont localisées par des flèches sur le graphique. Le graphique en bas de la figure 4.26 trace le nombre d'ondes de flexion de la plaque munie de patchs non shuntés et le nombre d'ondes acoustiques projeté pour différentes valeurs de θ . L'application du théorème de Floquet-Bloch

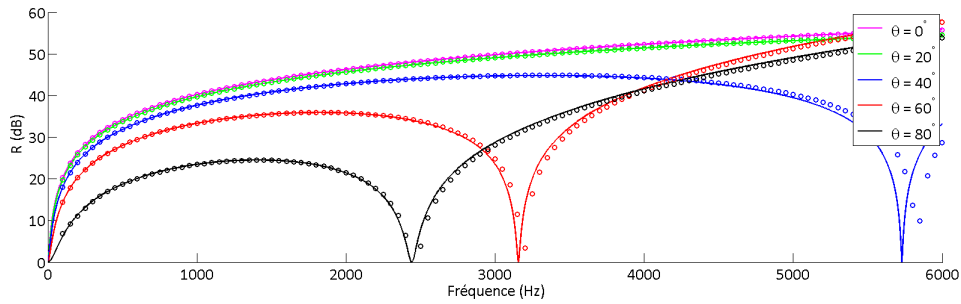


FIG 4.25 – Indices d'affaiblissement R calculés analytiquement (trait continu) et numériquement (cercle) pour différentes valeurs de θ dans le cas sans patch.

induit un artéfact qui replie les nombres d'ondes du fait de la périodicité de la forme de la solution qui est imposée. Le modèle numérique trouve alors plusieurs coïncidences entre le nombre d'ondes acoustiques et le nombre d'ondes de flexion naturel de la plaque (avec les patches non shuntés). Ces « fausses » fréquences de coïncidence disparaissent dans le calcul de l'indice d'affaiblissement en champ diffus puisque celui-ci est calculé par sommation des indices d'affaiblissement en champ d'ondes planes, obtenus pour chaque angle θ . Ces artéfacts disparaissent alors par moyennage des courbes. Hormis ces discordances, le modèle analytique et le modèle numérique donnent les mêmes résultats de la transparence acoustique de la plaque infinie avec des patches non shuntés. Il est donc possible de calculer facilement l'indice d'affaiblissement en champ diffus avec le modèle analytique dans les cas sans patches et avec patches non shuntés puisque nous savons à présent que ce modèle est fidèle aux résultats obtenus numériquement. Ces résultats sont présentés par la figure 4.27 et montrent que l'ajout des patches augmente l'indice d'affaiblissement d'environ $1 - 2 \text{ dB}$ en basses et hautes fréquences, ce qui est lié respectivement à l'augmentation de la masse et de la raideur du système. Cette raideur ajoutée peut être due aux propriétés mécaniques des patches, mais aussi au fait que ces patches sont contraints par une impédance infinie lorsqu'ils sont en circuit ouvert, qui représente ici la condition « sans shunt ».

Observons à présent l'influence d'une capacité négative sur la variation de l'indice d'affaiblissement en champ d'ondes planes R et en champ diffus R_d . La figure 4.28 compare l'indice d'affaiblissement calculé numériquement avec une capacité négative $C_{neg} = -13.55 \cdot 10^{-8} \text{ F}$, et calculé analytiquement dans le cas sans shunt. Pour un angle d'incidence $\theta = 20^\circ$, deux fréquences de coïncidence apparaissent. Celles-ci sont seulement liées à des problèmes de simulation et d'artéfacts numériques comme explicité précédemment. Il en est de même pour la courbe obtenue avec $\theta = 40^\circ$. En revanche, pour $\theta = 60^\circ$, les deux fréquences de coïncidence visibles à environ 3400 Hz et 3950 Hz sont liées à la coïncidence du nombre d'ondes acoustiques projeté et du nombre d'ondes de flexion du système. Pour $\theta = 80^\circ$, il n'y a pas de fréquence de coïncidence visible. Pour mieux comprendre ces propos, il est proposé en figure 4.29 de tracer le nombre d'ondes de flexion du système obtenu avec l'utilisation d'une capacité négative et les nombres d'ondes acoustiques projetés $k_{ac}(\theta) = \omega/c \sin(\theta)$. Sur cette figure, on constate que chaque intersection entre les courbes du nombre d'ondes de flexion et du nombre d'ondes acoustiques donne lieu à une fréquence de coïncidence. Mais, ces fréquences de coïncidence sont parfois issues du repliement des nombres d'ondes lié à l'application du Théorème de Floquet-Bloch comme il est visible, par exemple, pour les angles $\theta = 20^\circ$ et 40° . En revanche, pour la courbe obtenue avec un angle $\theta = 60^\circ$, l'ouverture

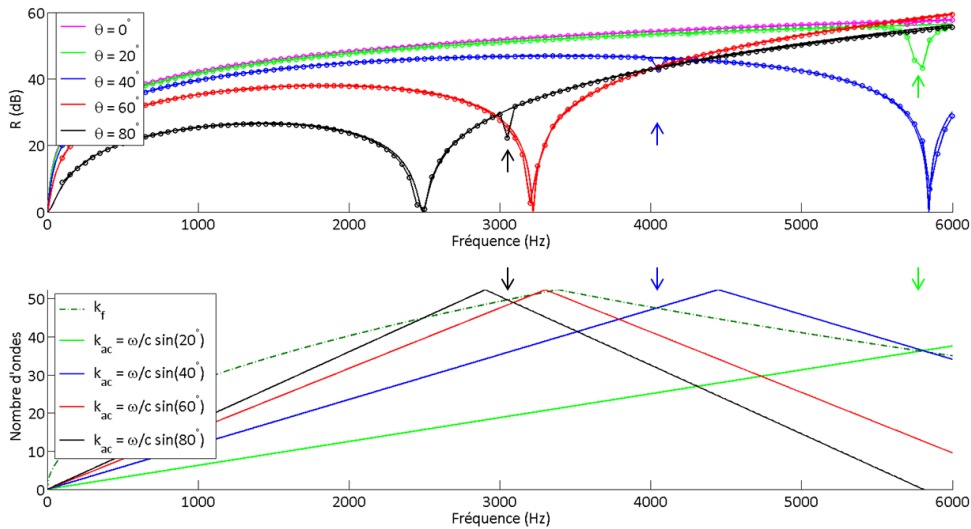


FIG 4.26 – En haut : indices d’affaiblissement en champ d’ondes planes R calculés analytiquement (trait continu) et numériquement (trait et cercles) pour différentes valeurs de θ dans le cas de la cellule avec patchs non shuntés. En bas : nombres d’ondes de flexion de la structure munie de patchs piézoélectriques non shuntés équivalent aux patchs en circuit ouvert (trait discontinu vert), et nombres d’ondes acoustiques projetés pour différentes valeurs de θ .

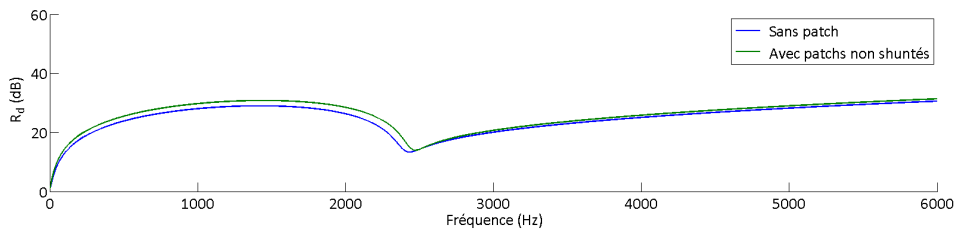


FIG 4.27 – Indices d’affaiblissement en champ diffus R_d calculé à partir du modèle analytique dans le cas de la plaque sans patch (bleu) et de la plaque munie de patchs piézoélectriques non shuntés équivalent aux patchs en circuit ouvert (vert).

de la bande interdite, modifiant ainsi la courbe de dispersion du nombre d’ondes de flexion, donne lieu à deux fréquences de coïncidence au lieu d’une contrairement au cas non contrôlé. Pour un angle $\theta = 80^\circ$, il n’y a pas de fréquence de coïncidence à proprement dit puisque le nombre d’ondes acoustiques coupe le nombre d’ondes de flexion dans la bande interdite. Or, dans la bande interdite, par définition, le nombre d’ondes de flexion n’est pas défini. Mais, le passage du nombre d’ondes acoustiques au dessus du nombre d’ondes de flexion est réalisé à la fréquence de Bragg structural $f_b = 3366 \text{ Hz}$ (voir les explications liée à la figure 4.19).

D’après cette étude, il est difficile de se fier aux résultats obtenus à partir de la fréquence de Bragg acoustique pour chaque angle θ , dans le cas d’une excitation en champ d’ondes planes. Jusqu’à cette fréquence, il est constaté une augmentation de l’indice d’affaiblissement et ce plus l’angle θ est important. L’indice d’affaiblissement en champ diffus R_d est obtenu en sommant les courbes calculées en champ d’ondes planes pour un angle d’incidence θ allant de 0° à 89.75° par pas de 0.25° . Le calcul ne peut être réalisé pour $\theta = 90^\circ$ car la pression surfacique excitatrice devient nulle. La figure 4.30 présente l’indice d’affaiblissement en champ diffus ainsi obtenu avec la capacité négative $C_{neg} = -13.55 \cdot 10^{-8} \text{ F}$ et compare ce résultat à la courbe obtenue dans le cas de patchs non shuntés (condition de circuit ouvert)

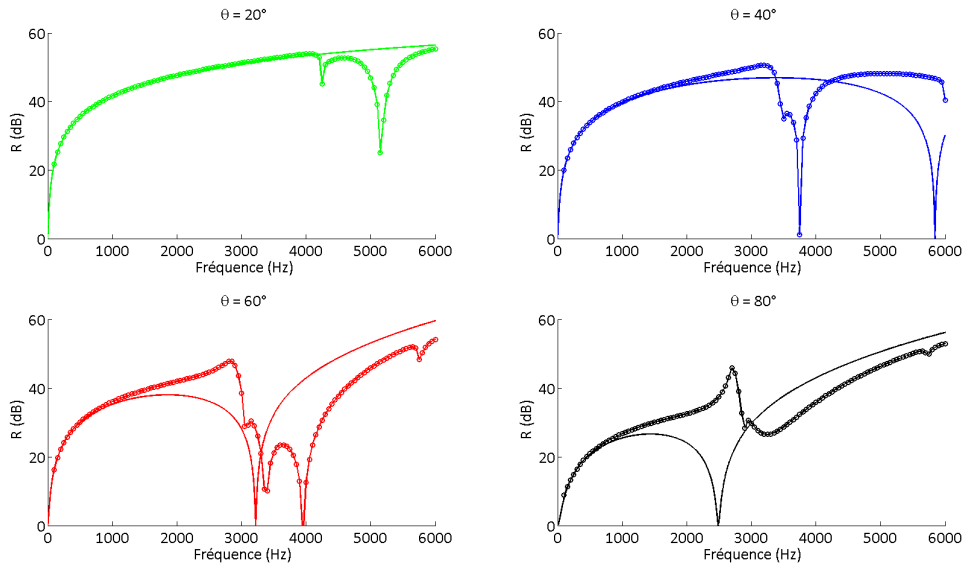


FIG 4.28 – Indices d'affaiblissement en champ d'ondes planes R calculés à partir du modèle numérique (trait et cercles) dans le cas d'une capacité négative $C_{neg} = -13.55 \cdot 10^{-8} F$ et à partir du modèle analytique (trait) dans le cas sans shunt pour différentes valeurs de θ .

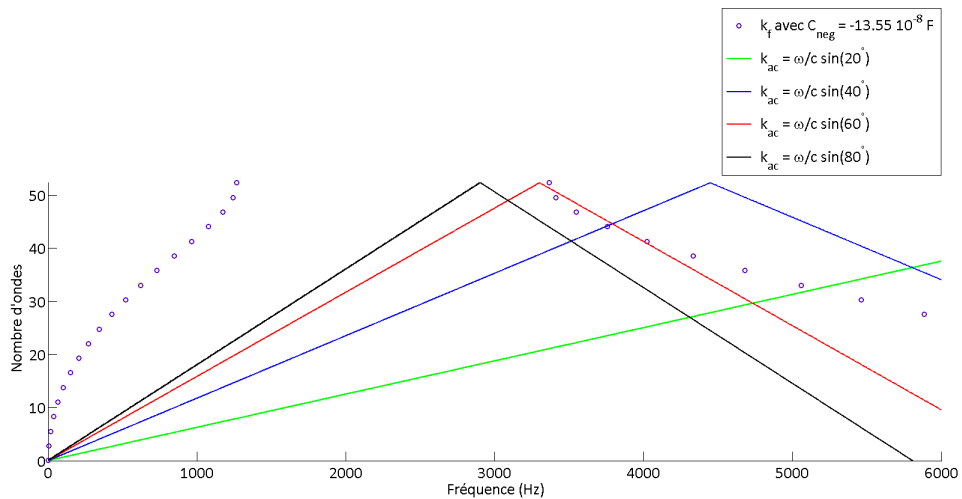


FIG 4.29 – Nombre d'ondes de flexion de la structure avec les patches shuntés par une capacité négative $C_{neg} = -13.55 \cdot 10^{-8} F$ (cercle bleu), et nombre d'ondes acoustiques projetés pour différentes valeurs de θ .

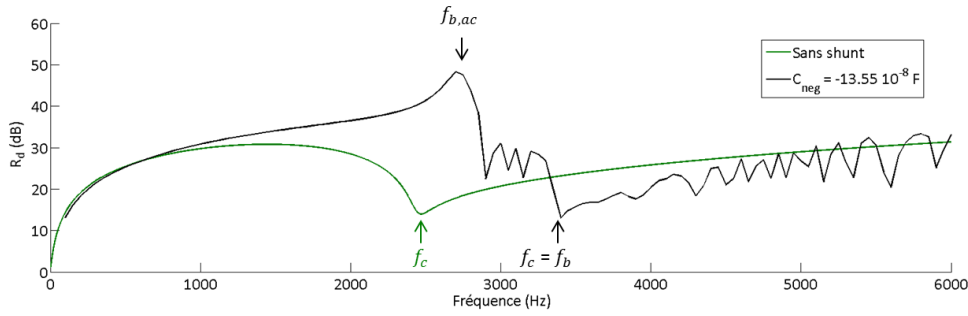


FIG 4.30 – Indices d'affaiblissement en champ diffus R_d calculés à partir du modèle analytique dans le cas sans patch (vert) et calculé numériquement dans le cas des patchs shuntés par une capacité négative $C_{neg} = -13.55 \cdot 10^{-8} F$ (noir).

présentée par la figure 4.27. Ces courbes montrent clairement une augmentation de l'isolation de paroi jusqu'à la fréquence de Bragg acoustique la plus basse qui est obtenue pour un angle $\theta = 89.75^\circ$ dans notre cas. Ensuite, entre cette fréquence de Bragg acoustique et la fréquence de Bragg structural, il est difficile d'expliquer les résultats obtenus. On observe dans cette zone une alternance de « pseudo-coïncidences » qui sont liées à l'intersection de $k_{ac}(\theta)$ aux fréquences de Bragg acoustiques avec la bande interdite pour de grandes valeurs de θ . Dans cet intervalle fréquentiel, seuls quelques pics apparaissent sur la courbe. Ceci est dû au fait que la discrétisation fréquentielle paramétrée pour réaliser le calcul est peu importante, le pas choisi est de $50 Hz$ afin de limiter les temps de calcul qui sont trop coûteux. Après cette zone fréquentielle, on observe la fréquence critique obtenue avec le shunt à capacité négative. Cette fréquence critique est équivalente à la fréquence de coïncidence à $\theta = 90^\circ$. Autrement dit, elle est déterminée par la fréquence de Bragg $f_b = 3366 Hz$ puisque cette fréquence détermine le passage réel du nombre d'ondes acoustiques au dessus du nombre d'ondes de flexion. Dans le cas étudié ici, la nouvelle fréquence critique est caractérisée par la fréquence de Bragg.

Finalement cette étude montre qu'il est théoriquement possible d'augmenter significativement l'isolation d'une paroi au transfert de l'énergie acoustique en basses fréquences pour $f < f_b$. La figure 4.30 affiche une augmentation de l'indice d'affaiblissement en champ diffus de plus de $20 dB$ pour certaines fréquences.

4.5 Bilan : l'influence d'un réseau de patchs shuntés par une capacité négative sur le contrôle vibroacoustique d'une paroi

La première étude portant sur l'analyse des courbes de dispersion a permis de déterminer l'influence de chacun des deux composants qui composent le shunt à capacité négative : la résistance R et la capacité négative C_{neg} . Le calcul des courbes de dispersion a été réalisé à partir des deux modèles numériques présentés dans le chapitre 3, appelés ici modèle classique de Floquet et modèle Shifted Cell Operator. La capacité C_{neg} permet l'ouverture d'une bande interdite qui est totale, c'est à dire dans toutes les directions de propagation, lorsque celle-ci est dite « assouplissante » contrairement à l'utilisation d'une capacité négative « raidissante » permettant d'ouvrir une bande interdite seulement dans la direction ΓX . La bande interdite s'ouvre vers les basses fréquences sur $\Gamma X M \Gamma$ quand la capacité négative est

assouplissante et vers les hautes fréquences sur ΓX quand celle-ci est « raidissante ». La largeur de bande fréquentielle de la bande interdite est d'autant plus importante que la capacité négative est paramétrée proche de l'instabilité. La résistance R permet d'augmenter de manière globale l'amortissement des ondes en dissipant l'énergie par effet Joule. L'énergie électrique qui est dissipée est issue de la transduction de l'énergie mécanique des ondes vibratoires en énergie électrique par effet piézoélectrique. Le but étant de diminuer le rayonnement des ondes acoustiques d'une paroi, il semble plus judicieux d'utiliser une capacité négative assouplissante qui permet d'atténuer les ondes vibratoires dans toutes les directions de propagation.

Cette diminution du champ de déplacement vibratoire pour des fréquences situées dans la bande interdite a été mise en évidence par le calcul de la fonction de transmittance. Cette fonction est définie par un rapport du déplacement calculé en deux points différents de la plaque. La figure 4.31 trace la différence entre les courbes de transmittance obtenues au point 2 de la figure 4.9 dans le cas sans shunt et dans le cas d'un shunt à capacité négative avec le couple de valeurs $C_{neg} = -13.45 \cdot 10^{-8} F$ et $R = 12 \Omega$. Dans la bande interdite, les ondes sont très fortement atténuées pendant leur trajet de propagation, le calcul montre jusqu'à 90 dB d'atténuation du déplacement.

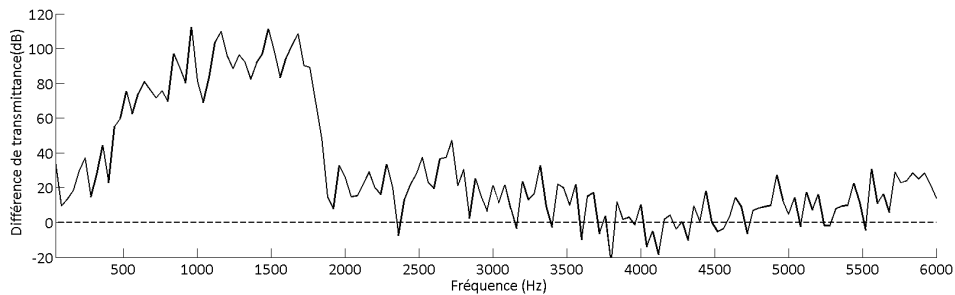


FIG 4.31 – Différence des courbes de transmittance obtenues dans le cas sans shunt et dans le cas d'un shunt à capacité négative avec le couple de valeurs $C_{neg} = -13.45 \cdot 10^{-8} F$; $R = 12 \Omega$ pour le point 2 de la figure 4.9.

L'étude de l'influence du réseau de patchs sur le rayonnement acoustique a montré la possibilité de fortement diminuer celui-ci. En effet, le shunt à capacité négative permet d'amortir les ondes vibratoires et ainsi de fortement réduire le champ de vitesse, notamment dans la bande interdite. Il en résulte une forte diminution de la puissance acoustique qui est rayonnée par la paroi. La figure 4.32 présente la différence du champ de vitesse quadratique moyen et de la puissance acoustique rayonnée avec ou sans l'utilisation d'un shunt à capacité négative. Les cas présentés par cette figure sont : $C_{neg} = -13.45 \cdot 10^{-8} F$ et $R = 12 \Omega$ pour la cellule de 8 cm (plaque de $1.6 \times 1.6 m^2$) de la figure 4.14 et $C_{neg} = -13.55 \cdot 10^{-8} F$; $R = 10 \Omega$ pour la cellule de 6 cm (plaque de $1.2 \times 1.2 m^2$) de la figure 4.20. Cette figure montre une diminution du champ de vitesse jusqu'à 25 dB dans la bande interdite et une diminution de la puissance acoustique rayonnée jusqu'à 20 – 25 dB au maximum. La cellule de 6 cm permet de diminuer plus fortement le rayonnement acoustique que la cellule de 8 cm mais à des fréquences plus élevées. Il y a donc un compromis entre la largeur de bande fréquentielle d'atténuation du rayonnement, la position fréquentielle de cette bande et l'efficacité.

L'étude du facteur de rayonnement témoigne d'une plus grande sensibilité du rayonnement de la paroi au champ de vitesse vibratoire dans la bande interdite lorsque celle-ci est positionnée avant la fréquence

critique. Ceci est dû au fait que le rayonnement acoustique est, dans cette zone fréquentielle, lié aux ondes vibratoires évanescentes et, puisque dans la bande interdite les ondes propagatives deviennent évanescentes, le facteur de rayonnement acoustique se trouve augmenté. L'étude du facteur de puissance entre la puissance mécanique injectée et la puissance acoustique rayonnée témoigne simplement d'une diminution de la transduction énergétique mécano-acoustique ; une grande partie de l'énergie est dissipée par les résistances.

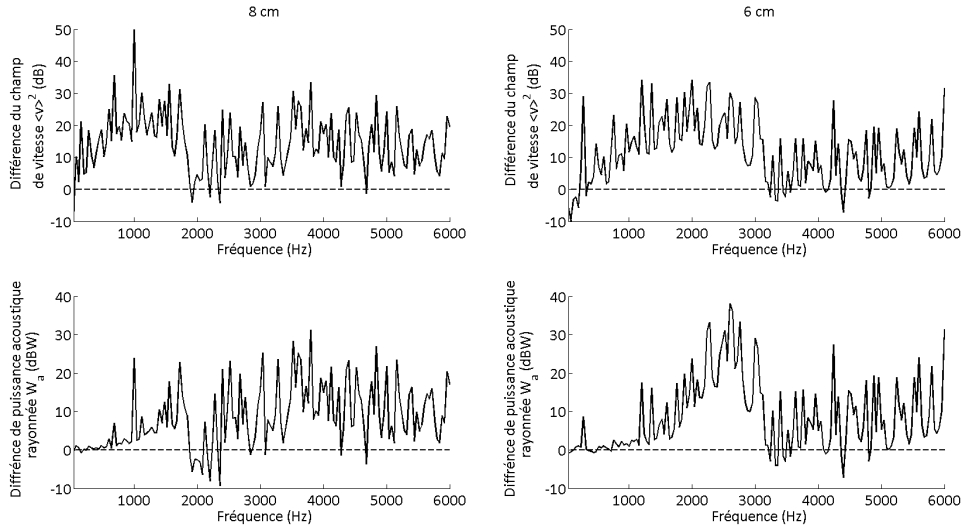


FIG 4.32 – Différence des courbes du champ de vitesse quadratique moyen et de la puissance acoustique rayonnée obtenues dans le cas sans shunt et dans le cas d'un shunt à capacité négative avec le couple de valeurs $C_{neg} = -13.45 \cdot 10^{-8} F$; $R = 12 \Omega$ pour la cellule de 8 cm (plaque de $1.6 \times 1.6 m^2$) de la figure 4.14 et $C_{neg} = -13.55 \cdot 10^{-8} F$; $R = 10 \Omega$ pour la cellule de 6 cm (plaque de $1.2 \times 1.2 m^2$) de la figure 4.20.

En terme d'isolation de paroi, l'étude a montré dans un premier temps les difficultés liées aux calculs des courbes d'indice d'affaiblissement. En effet, la propagation des ondes vibratoires n'étant plus celle d'un système isotrope du fait de l'action des patchs piézoélectriques shuntés, il est nécessaire de réaliser des calculs pour différents angles d'incidence en faisant varier à la fois θ et φ . Or, les temps de calcul sont extrêmement coûteux et il est difficile d'étudier le système dans sa globalité. Il a donc été considéré ici la concordance entre les courbes de dispersion calculées dans une seule direction, ΓX , et l'indice d'affaiblissement selon un seul axe, θ . De plus, l'application du théorème de Floquet induit un artéfact numérique qui implique de « fausses » fréquences de coïncidence. Pour palier ce problème, il a été choisi une cellule suffisamment petite pour augmenter la fréquence de Bragg et ainsi augmenter la fréquence de ces artéfacts qui impliquent ces fausses coïncidences.

L'analyse des résultats de l'indice d'affaiblissement en champ diffus révèle une augmentation significative du pouvoir isolant de la paroi jusqu'à une fréquence qui est définie, dans notre cas, par la plus petite fréquence de Bragg acoustique. Elle est obtenue pour un angle $\theta = 90^\circ$. Cette fréquence est positionnée dans la bande interdite. Celle-ci ne correspond donc pas à une équivalence entre nombre d'ondes acoustiques et nombre d'ondes de flexion puisque le nombre d'ondes de flexion est par définition inexistant dans la bande interdite. En revanche, la fréquence critique est visible à la fréquence de Bragg structural correspondant à la plus petite valeur de la fréquence, pour laquelle il y a réellement le nombres d'ondes acoustiques qui est supérieur au du nombre d'ondes de flexion. Finalement, pour optimiser le système, il

faudrait faire coïncider la fréquence de Bragg obtenue pour un angle $\theta = 90^\circ$ et la fréquence de Bragg structural. Cette coïncidence est obtenue pour une cellule d'environ 73 mm .

La figure 4.33 montre la différence entre les courbes d'indice d'affaiblissement en champ diffus R_d obtenues dans le cas sans shunt et dans le cas d'un shunt à capacité négative $C_{neg} = -13.55 \cdot 10^{-8} \text{ F}$ de la figure 4.30. Cette courbe montre une forte augmentation de l'isolation de paroi pour la bande fréquentielle $1800 - 3000 \text{ Hz}$.

L'étude n'a pas été réalisée sur plaque finie car celle sur plaque infinie suffit à montrer la potentialité de la méthode. En effet, l'indice d'affaiblissement en champ diffus calculé pour une plaque infinie gouverne l'indice d'affaiblissement d'une plaque finie ; le comportement modale ajoute des pseudo-coïncidences (voir le §1.3.2 page 45 [99]). Hors nous avons pu voir que le shunt à capacité négative permet de diminuer la réaction de la plaque aux fréquences d'excitation des modes. En d'autres termes, beaucoup de modes disparaissent, notamment dans la bande interdite.

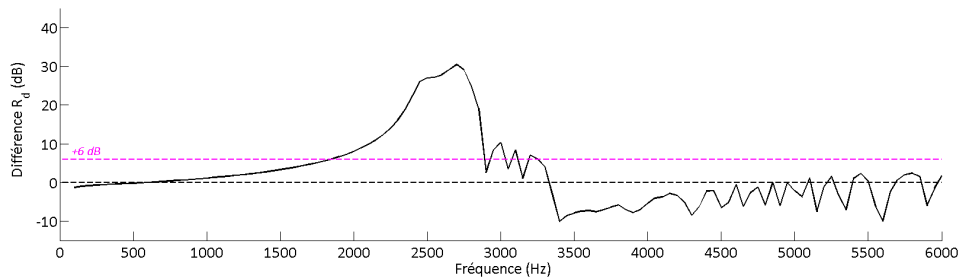


FIG 4.33 – Différence des courbes d'indice d'affaiblissement en champs diffus R_d obtenue dans le cas sans shunt et dans le cas d'un shunt à capacité négative $C_{neg} = -13.55 \cdot 10^{-8} \text{ F}$ de la figure 4.30.

Conclusion Générale

Résumé des travaux

Pour répondre à la problématique de la réduction des vibrations et du bruit rayonné de parois sollicitées par des efforts mécaniques et/ou acoustiques, le choix s'est porté sur l'utilisation d'un shunt à capacité négative. En effet, les différentes études menées jusqu'à ce jour montrent que le shunt à capacité négative permet de faire varier la rigidité de flexion d'une structure. À partir de ce constat, nous avons porté notre attention sur la diminution des vibrations et du bruit rayonné de paroi en diminuant la rigidité de flexion induisant une modification avantageuse du couplage structure/fluide sur le comportement vibroacoustique de la structure.

Actuellement, le shunt à capacité négative est créé avec des circuits analogiques complexes qui transforment l'impédance d'un condensateur en impédance négative. Pour réaliser ceci, il est nécessaire d'avoir recours à des amplificateurs opérationnels et des impédances résistives variables. Le circuit de synthèse alors fabriqué se comporte globalement comme une capacité négative $Z_{sh} = R + 1/j\omega C_{neg}$ avec C_{neg} qui prend des valeurs négatives. Le shunt à capacité négative modifie la capacité équivalente du patch piézoélectrique en contrecarrant l'effet capacitif intrinsèque de ce transducteur et permet ainsi de modifier la rigidité de flexion du système couplé structure/patch.

La synthèse analogique permet un réglage simple et rapide de la capacité négative, mais il est peu précis. En effet, la synthèse de la capacité négative tel qu'il a été vu dans ce document ne permet pas de dissocier aisément les réglages de la résistance équivalente et de la capacité négative équivalente. Or, nous avons pu voir que le paramétrage de ces deux composants demande une grande précision. La synthèse numérique semble être une perspective intéressante. Elle permet une plus grande précision de réglage bien que sa conception soit plus complexe. De plus, elle ouvre des perspectives technologiques attrayantes car elle permet une meilleure adaptation du circuit dans un contexte de fabrication de structures intelligentes : miniaturisation du circuit, interface informatique de contrôle et de pilotage en temps réel.

L'étude sur la plaque en aluminium munie d'un seul patch shunté positionné en son centre a montré la possibilité d'atténuer plusieurs modes en optimisant les valeurs de R et de C_{neg} du shunt.

Le couplage du patch est lié à son positionnement, les modes dits couplés sont les modes pour lesquels le bord du patch est positionné sur un maximum de la courbure définie par la dérivée spatiale d'ordre 2 du déplacement transverse. À travers cette première étude, nous avons montré la potentialité de faire varier la rigidité de flexion de la plaque du fait de la diminution ou de l'augmentation de la fréquence propre des modes couplés. En revanche, le paramétrage de la capacité négative est sensible, un fort compromis existe

entre la valeur de la capacité négative et la valeur de la résistance qui agissent à la fois sur la variation de la rigidité de flexion et sur l'amortissement. Pour R très grand, l'impédance du shunt peut être considérée purement résistif et tout ce passe comme si le patch était en circuit ouvert ($Z_{sh} = \infty$). Dans ce cas le comportement dynamique de la plaque est peu modifié. Pour R très petit, la rigidité de flexion change, l'impédance du shunt peut être considérée purement capacitif avec l'effet de la capacité négative. Dans ce cas la fréquence des modes couplés varient fortement, mais ils sont peu atténués. Il existe donc un couple (C_{neg}, R) qui permet d'obtenir un amortissement maximal des modes couplés. La valeur optimale de R variant selon le mode ciblé, nous avons cherché une valeur de cette résistance permettant de diminuer au maximum les amplitudes vibratoires de tous les modes couplés.

Les études théorique et expérimentale montrent aussi la possibilité de diminuer très fortement le rayonnement des modes couplés amortis. Dès lors, en réalisant une analyse modale d'une structure afin de déterminer les champs de courbure associés aux modes que l'on souhaite amortir, il est possible de réaliser un premier traitement à la fois vibratoire et acoustique. Ce traitement reste limité aux modes couplés.

Les travaux portant sur l'étude de l'influence d'un réseau périodique de patches piézoélectriques shuntés par capacité négative sur une paroi isotrope ont montré :

- la possibilité de diminuer le champ de déplacement et le champ de vitesse dans toutes les directions, sur une large bande fréquentielle, à condition que la capacité négative soit dans le domaine dit « assouplissant ». En effet une capacité négative paramétrée dans le domaine « raidissant » a pour effet d'ouvrir une bande interdite seulement dans la direction ΓX . De plus, la capacité négative assouplissante ouvre une bande interdite totale vers les basses fréquences en-dessous de la fréquence de Bragg (sur $\Gamma X M \Gamma$), tandis qu'une capacité négative raidissante ouvre une bande interdite partielle vers les hautes fréquences (sur ΓX).
- la possibilité de fortement diminuer l'énergie acoustique rayonnée d'une paroi dans la bande interdite. Le shunt à capacité négative permet de dissiper l'énergie électrique issue de la transduction de l'énergie mécanique par effet piézoélectrique. Cette dissipation est réalisée par la résistance dont l'effet est augmenté par la présence de la capacité négative. Il a aussi été observé une diminution du rayonnement après la bande interdite du fait de l'augmentation du nombre d'ondes de flexion : les ondes devenant moins propagatives et plus amorties, le rayonnement est diminué.
- une augmentation de l'isolation d'une paroi sur une large bande fréquentielle moyennes fréquences (1500–3000 Hz). L'utilisation d'une capacité négative permet de modifier le comportement dispersif de la structure et ainsi de modifier les fréquences de coïncidence. L'ouverture d'une bande interdite augmente significativement le pouvoir isolant de la paroi.

Ces travaux de thèse répondent de manière théorique à la problématique proposée qui était de diminuer les vibrations et le bruit rayonné de paroi par contrôle distribué. La méthode de contrôle choisie est une méthode de contrôle semi-passive (ou semi-active) utilisant un réseau de transducteurs piézoélectriques shuntés par une capacité négative. Cette capacité a été déterminée dans le domaine dit « assouplissant ». Ces travaux ouvrent donc de nombreuses perspectives, notamment expérimentales.

Contributions

- Mise en comparaison expérimentale et théorique de la diminution du champ acoustique rayonné d'une plaque munie d'un patch piézoélectrique excitée à la fréquence d'un mode couplé.
- Optimisation du positionnement des patches et du réglage de la capacité négative et de la résistance du shunt à capacité négative pour le contrôle multi-modal d'une plaque en basse fréquence.
- Prémisse de la synthèse numérique de la capacité négative.
- Établissement d'un protocole pour conditionner le calcul aux valeurs propres d'une cellule « plaque + patches ».
- Comparaison des calculs aux valeurs propres à partir de la méthode classique de Floquet et la méthode Shifterd-Cell Operator
- Démonstration théorique de l'impact d'un réseau périodique de patches shuntés par capacité négative sur le rayonnement acoustique et sur l'indice d'affaiblissement d'une paroi. Corrélation faite entre positionnement fréquentielle d'une bande interdite et le comportement vibroacoustique de la paroi.

Perspectives

Plusieurs perspectives d'études et d'axes de recherches s'ouvrent aujourd'hui dans le but de donner suite aux travaux de cette thèse. Ces perspectives sont listées ci-dessous.

1. Le développement d'un banc d'essai constitué d'une plaque en matériau isotrope munie d'un réseau périodique de patches shuntés par capacité négative semble être la perspective la plus immédiate. En effet, aucune mesure n'a été réalisée dans cette thèse pouvant valider expérimentalement les propos avancés dans le chapitre 4 portant sur l'étude de l'impact d'un réseau périodique de patches sur le comportement dynamique d'un système « plaque + patches ».
2. Il semblerait judicieux de tester théoriquement l'impact d'un réseau n'étant pas parfaitement périodique, c'est à dire analyser l'impact d'erreurs commises sur l'espacement entre les patches, mais aussi sur la valeur de la capacité négative appliquée aux différents patches qui ne serait plus exactement la même.
3. Réaliser une optimisation du système en regardant l'impact de la diminution du nombre de patches utilisés. Il n'est certainement pas utile d'appliquer autant de patches pour diminuer le champ vibratoire d'une grande structure comme il a été réalisé dans le chapitre 4.
4. Réaliser des études sur des structures en matériaux composites pour répondre aux différents problèmes industriels. En effet, les différentes approches scientifiques de cette thèse ont été ciblées sur une structure isotrope permettant, dans un premier temps, de simplifier le système. Un matériau par exemple orthotrope, dont les propriétés mécaniques diffèrent selon les axes d'orthotropie, implique d'utiliser un réseau périodique de patches ayant des caractéristiques différentes selon ces axes.
5. Une perspective moins pertinente, mais néanmoins très intéressante, serait de montrer expérimentalement la variation de la rigidité de flexion d'un système (poutre, plaque) en fonction de la capacité négative appliquée, à partir de la caractérisation du module d'Young par méthode RIFF

par exemple [3, 117, 118]. Appliquer cette méthode sur le champ vibratoire d'un système contrôlé permettrait de quantifier l'impact du shunt à capacité négative sur celui-ci.

6. S'il est possible de quantifier expérimentalement la rigidité de flexion d'un système contrôlé, il pourrait être intéressant de réaliser un « trou noir acoustique » (« acoustic black hole » en anglais) [7, 8, 119] à partir de patches piézoélectriques shuntés par une capacité négative. Le trou noir acoustique consiste à diminuer exponentiellement l'épaisseur d'une structure faisant ainsi varier la rigidité de flexion de manière progressive. Cette variation progressive de la rigidité de flexion diminue la vitesse de propagation des ondes qui ont une longueur d'ondes de plus en plus petite au fur et à mesure de leur propagation dans le trou noir. Ce dernier agit donc comme un piège à ondes en concentrant l'énergie vibratoire en son centre. On peut par conséquent imaginer réaliser un gradient de la rigidité de flexion en utilisant le shunt à capacité négative imitant ainsi l'effet d'un trou noir acoustique. On peut ensuite supposer récupérer cette énergie, toujours par le biais de la transduction piézoélectrique, pour alimenter par exemple les amplificateurs opérationnels des circuits de contrôle. Un exemple de « trou noir » réalisé à partir de patches piézoélectriques shuntés par une capacité négative est présenté en figure 4.34.

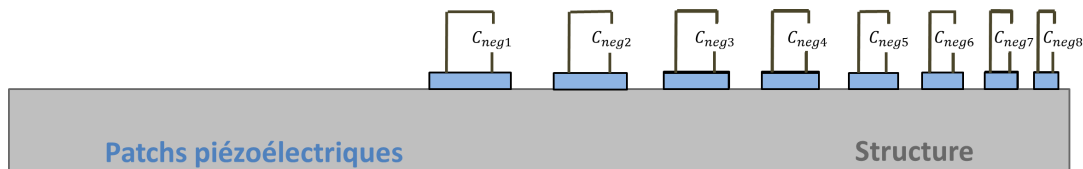


FIG 4.34 – Représentation schématique d'un exemple de trou noir acoustique réalisé à partir de patches piézoélectriques shuntés par une capacité négative.

7. Nous avons pu voir à travers les études menées dans cette thèse que la première fréquence de Bragg positionne la bande interdite. Cette fréquence de Bragg est directement liée à la longueur de périodicité du réseau. Il peut donc être avantageux d'employer une périodicité différente sur chacune des deux faces de la paroi à traiter. Cette double périodicité devrait créer deux bandes interdites à deux fréquences de Bragg différentes. Prenons par exemple le cas d'un double réseau comme il est présenté en figure 4.35. Sur la face B, la périodicité du réseau est deux fois plus petits que celle de la face A. La fréquence de Bragg liée au réseau de la face B est donc quatre fois supérieure à celle de la face A. On devrait donc logiquement pouvoir ouvrir deux bandes interdites à ces deux fréquences de Bragg.

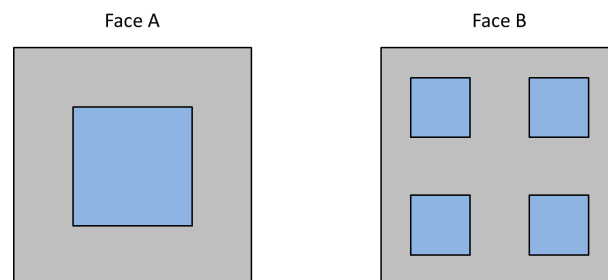


FIG 4.35 – Schéma d'une cellule à double périodicité.

8. Une dernière perspective très forte, n'utilisant pas nécessairement la capacité négative, est de relier les patches entre eux. Ces derniers ne seraient donc plus shuntés, mais connectés les uns aux autres par une impédance électrique toujours contrôlable. La figure 4.36 montre un schéma du système en question.

Des travaux ont déjà été réalisés sur ce type de système dans [120–129], mais ne portent pas sur l'étude de l'impact acoustique. L'intérêt de cette méthode est de pouvoir discrétiser l'équation qui régit le comportement dynamique d'une plaque en réalisant un circuit électro-équivalent de celle-ci. En choisissant donc correctement les éléments électriques qui composent le circuit, il est possible de créer une sorte de double paroi qui pourrait potentiellement être plus efficace en basse fréquence.

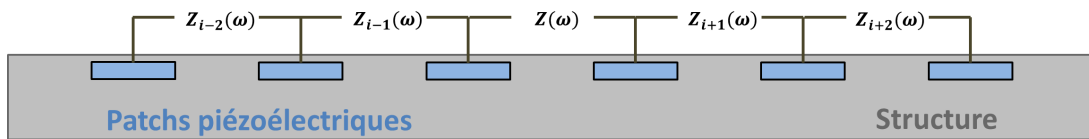


FIG 4.36 – Représentation schématique du système de patches interconnectés.

Annexe A

Calcul de l'impédance équivalente Z_{eq} du circuit analogique de la figure 2.4

Le schéma du circuit électrique est repris ci-dessous :

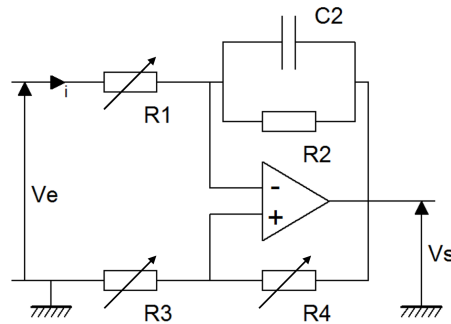


FIG A.1 – Circuit électrique équivalent simplifié de la partie active de la carte analogique permettant de créer l'impédance équivalente $Z_{eq} = R_{eq} + 1/j\omega C_{eq}$.

Nous définissons V^+ , V^- , i^+ et i^- comme étant les potentiels et courants électriques aux bornes + et - de l'amplificateur opérationnel (AOP) sur la figure A.1. Nous considérons l'hypothèse d'un AOP parfait : son impédance d'entrée est alors infinie ; par conséquent, les courants i^+ et i^- sont nuls et les potentiels V^+ et V^- sont égaux. Or :

$$V^- = \frac{ZV_e + R_1V_s}{Z + R_1}, \quad (\text{A.1})$$

et

$$V^+ = \frac{R_3}{R_3 + R_4}V_s, \quad (\text{A.2})$$

avec $Z = R_2/(1 + j\omega R_2 C_2)$ l'impédance équivalente formée par R_2 et C_2 . Soit en écrivant que $V^+ = V^-$,

le rapport V_s/V_e peut donc s'exprimer par :

$$\frac{V_s}{V_e} = \frac{Z(R_3 + R_4)}{ZR_3 - R_1R_4} . \quad (\text{A.3})$$

Ensuite, la loi d'Ohm nous permet d'écrire :

$$R_1 i = V_{R_1} = V_e - V^- , \quad (\text{A.4})$$

et comme $V^+ = V^-$, on a aussi :

$$R_1 i = V_{R_1} = V_e - V^+ . \quad (\text{A.5})$$

On peut donc à présent exprimer l'impédance équivalent Z_{eq} en fonction des paramètres du circuit :

$$Z_{eq} = \frac{V_e}{i} = \frac{R_1 V_e}{V_e - V^+} = \frac{R_1 V_e}{V_e - \frac{R_3}{R_3 + R_4} V_s} = \frac{R_1}{1 - \frac{R_3}{R_3 + R_4} \frac{V_s}{V_e}} = \frac{R_1}{1 - \frac{ZR_3}{ZR_3 - R_1R_4}} = R_1 - \frac{R_3}{R_4} Z . \quad (\text{A.6})$$

Finalement, en remplaçant Z par l'expression $R_2/(1 + j\omega R_2 C_2)$, on obtient :

$$Z_{eq} = R_1 - \frac{R_3 R_2}{R_4 (1 + j\omega R_2 C_2)} . \quad (\text{A.7})$$

En séparant la partie réelle et la partie imaginaire de cette expression, on détermine la résistance équivalente R_{eq} et la capacité négative équivalente C_{eq} du système :

$$\begin{cases} R_{eq} = \Re\{Z_{eq}\} = R_1 - \frac{R_3 R_2}{R_4} \frac{\omega_{RC}^2}{\omega_{RC}^2 + \omega^2} , \\ C_{eq} = 1/(-\omega \times \Im\{Z_{eq}\}) = -\frac{R_4}{R_3} \left(C_2 + \frac{1}{R_2^2 \omega^2} \right) , \end{cases} \quad (\text{A.8})$$

avec $\omega_{RC} = 1/R_2 C_2$. Or, $R_2 = 15 \text{ M}\Omega$, donc le terme $\frac{1}{R_2^2 \omega^2}$ dans l'expression de C_{eq} (relation 2.4) est négligeable. On obtient alors :

$$C_{eq} = -\frac{R_4}{R_3} C_2 . \quad (\text{A.9})$$

En remplaçant cette expression de C_{eq} dans l'expression de R_{eq} de la relation A.8, il est possible d'écrire R_{eq} en fonction de C_{eq} :

$$R_{eq} = R_1 + \frac{1}{C_{eq}} \times \frac{\omega_{RC}^3}{\omega_{RC}^2 + \omega^2} , \quad (\text{A.10})$$

avec $\omega_{RC} = 1/R_2 C_2$.

Annexe B

Schémas des circuits électroniques de la carte numérique de la figure 2.6

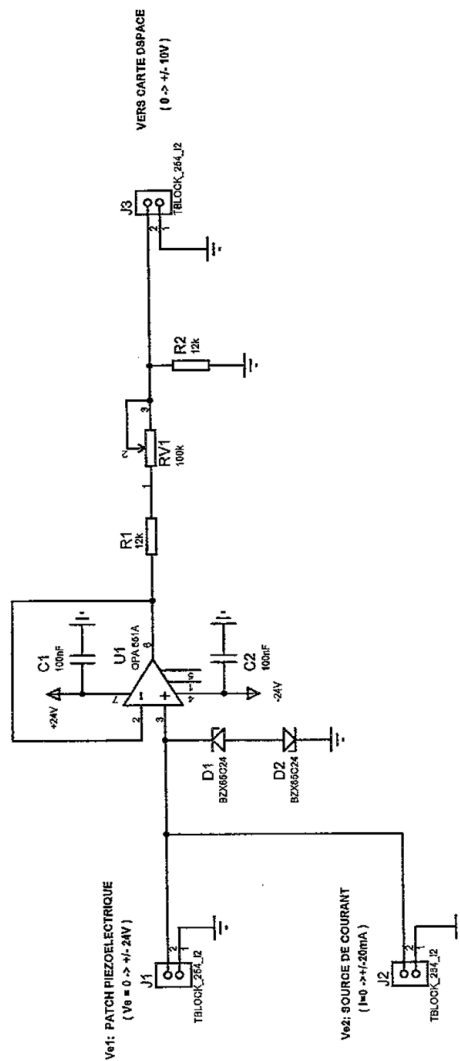


FIG B.1 – Schéma du circuit électronique de l'amplificateur.

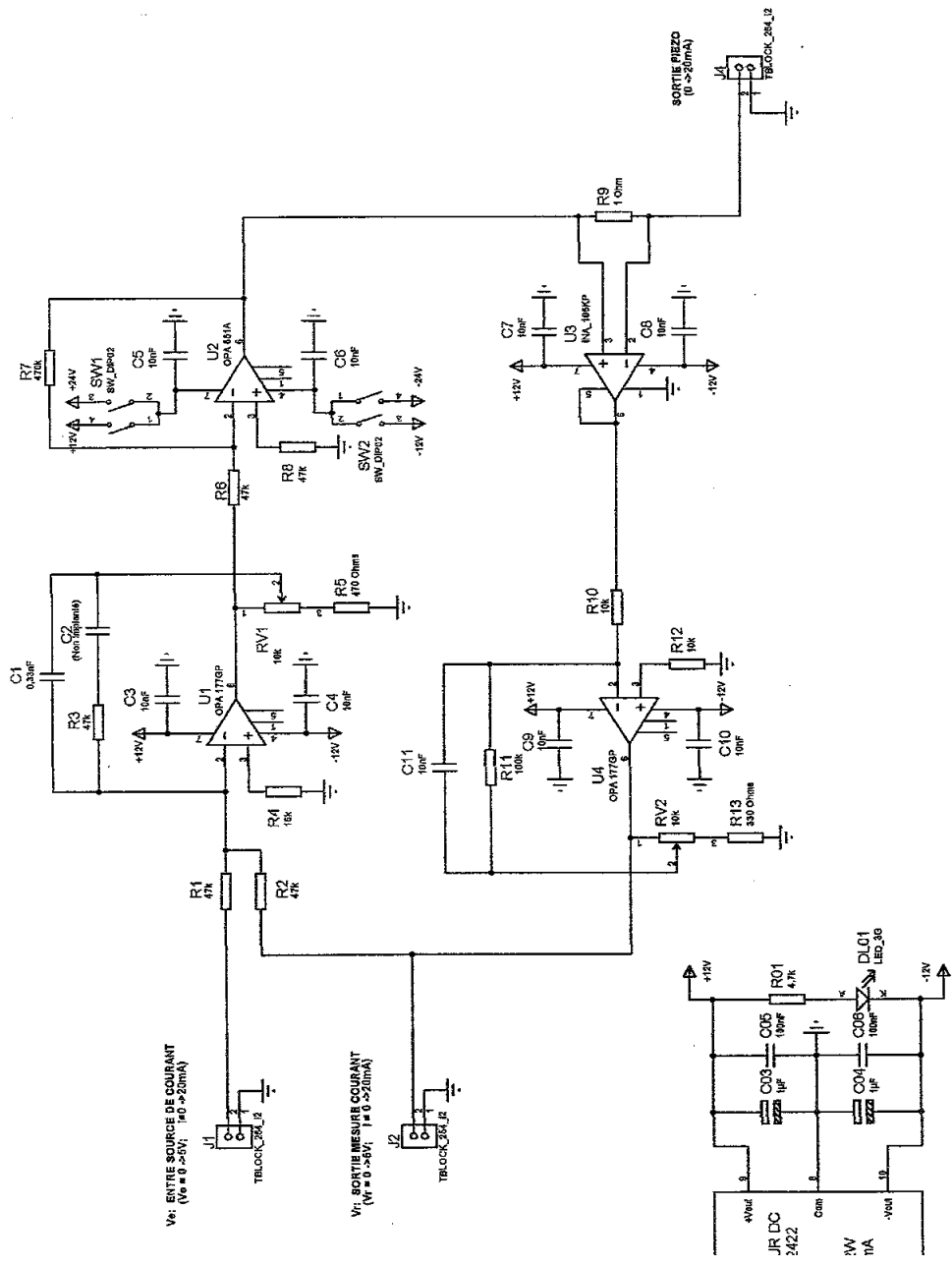
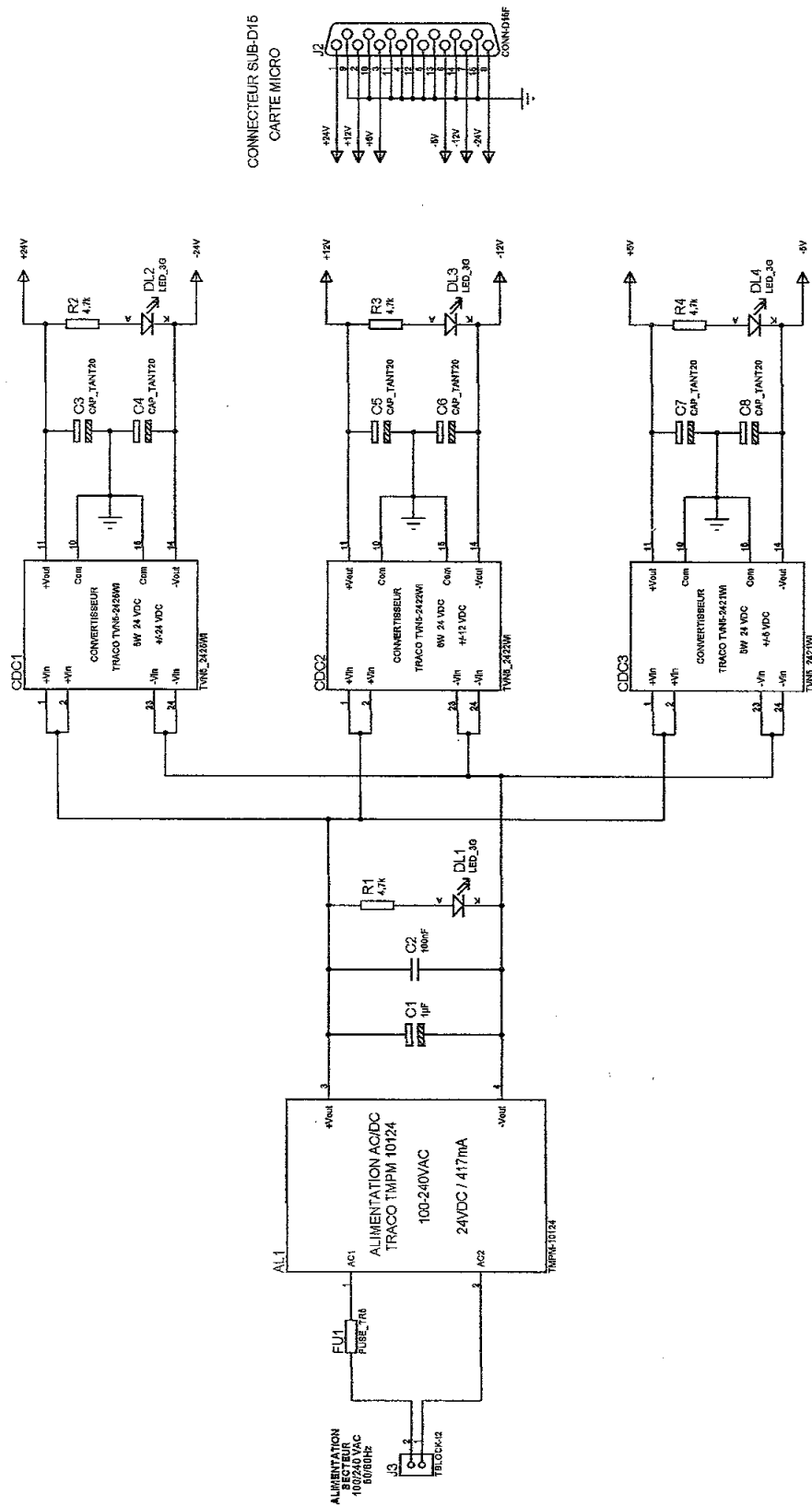


FIG B.2 – Schéma du circuit électronique de la source de courant.



CONNECTEUR SUB-D15
CARTE MICRO

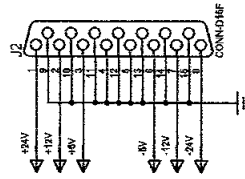


FIG B.3 – Schéma du circuit électronique de l'alimentation.

Bibliographie

- [1] **J. Poittevin**. *Mesure du champ vibratoire d'une structure par holographie optique ultra-rapide*. Thèse doctorale, Université du Maine, Le Mans, France, 2015.
- [2] **J. Poittevin, P. Picart, C. Faure, F. Gautier, and C. Pézerat**. Multi-point vibrometer based on high-speed digital in-line holography. *Applied optics*, 54(11) :3185–3196, Apr 2015.
- [3] **T. Wassereau**. *Caractérisation de matériaux composites par problème inverse vibratoire*. Thèse doctorale, Université du Maine, Le Mans, France, 2016.
- [4] **T. Wassereau, F. Ablitzer, C. Pézerat, and J.L. Guyader**. Experimental identification of flexural and shear complex moduli by inverting the timoshenko beam problem (submitted in the journal of sound and vibration 2017).
- [5] **O. Grosset, J.H. Thomas, F. Ablitzer, and C. Pézerat**. Identification of the acoustic wall pressure of a turbulent flow exciting structures. Athens, 2016. Congrès ICSV23.
- [6] **O. Grosset, C. Pézerat, J.H. Thomas, and F. Ablitzer**. Identification of the turbulent wall pressure in the low wavenumber domain by using the force analysis technique. Melbourne, 2017. Congrès ICASV.
- [7] **O. Aklouche**. *Utilisation de trous noirs acoustiques pour la diminution des niveaux vibratoires de structures industrielles*. Thèse doctorale, Université du Maine, Le Mans, France, 2017.
- [8] **O. Aklouche, A. Pelat, S. Maugeais, and F. Gautier**. Scattering of flexural waves by a pit of quadratic profile inserted in an infinite thin plate. *Journal of Sound and Vibration*, 375 :38–52, Aug 2016.
- [9] **A. Sternberger, J.M. Génevaux, and A. Pelat**. Dissipation ajoutée expérimentalement à une structure par un amas de granulaire à surface libre. Le Mans, 2016. Congrès CFA/VISHNO.
- [10] **S. Berhens**. *Passive and semi-active vibration control of piezoelectric laminates*. Thèse doctorale, University of Newcastle, Newcastle, Australia, 2000.
- [11] **A. Sénéchal, O. Thomas, and J.F. Deü**. Optimization of shunted piezoelectric patches for vibration reduction of complex structures - application to a turbojet fan blade. Montréal, 2010. Congrès ASME - IDETC/CIE.
- [12] **G. Rosi, J. Pouget, and F. dell'Isola**. Control of sound radiation and transmission by a piezoelectric plate with and optimized resistive electrode. *European Journal of Mechanics A*, 29(5) :859–670, Feb 2010.
- [13] **N.W. Hagood and A. Von Flotow**. Damping of structural vibrations with piezoelectric materials and passive electric networks. *Journal of Sound and Vibration*, 146(2) :243–268, Jun 1991.

- [14] **G. Rosi**. *Control of sound radiation and transmission by means of passive piezoelectric networks : modelling, optimization and experimental implementation*. Thèse doctorale, UPMC, Université Paris 6, Paris, France, 2010.
- [15] **T.L. Huang, M.N. Ichchou, O.A. Bareille, M. Collet, and M. Ouisse**. Multi-modal wave propagation in smart structures with shunted piezoelectric patches. *Computational Mechanics*, 52(3) :721–739, Fev 2013.
- [16] **T.L. Huang, M.N. Ichchou, O.A. Bareille, M. Collet, and M. Ouisse**. Traveling wave control in thin-walled structures through shunted piezoelectric patches. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 39(1-2) :59–79, Aug 2013.
- [17] **S. Behrens, S.O.R. Moheimani, and A.J. Flemming**. Multiple mode current flowing passive piezoelectric shunt controller. *Journal of Sound and Vibration*, 266(5) :929–942, Oct 2002.
- [18] **S.J. Pietrzko and Q. Mao**. New results in active and passive control of sound transmission through double wall structures. *Aerospace Science and Technology*, 12(1) :42–52, Oct 2007.
- [19] **M.S. Tsai and K.W. Wang**. On the structural damping characteristics of active piezoelectric actuators with passive shunt. *Journal of Sound and Vibration*, 221(1) :1–21, Mar 1999.
- [20] **S.Y. Wu**. Method for multiple mode piezoelectric shunting with single pzt transducer for vibration control. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 9(12) :991–998, Dec 1998.
- [21] **J. Durcane, O. Thomas, and J.F. Deü**. Optimisation de dispositifs passifs d’atténuation de vibration par shunt piézoélectrique. Giens, 2007. Colloque national en calcul de structure.
- [22] **J.J. Garnier, R. Jason Hundhausen, and G.E. Gaytan**. Passive modal damping with piezoelectric shunts.
- [23] **L. Airoidi and M. Ruzzene**. Design of tunable acoustic metamaterials through periodic arrays of resonant shunted piezos. *New Journal of Physics*, 13 :113010, Nov 2011.
- [24] **C.H. Park**. Dynamics modelling of beams with shunted piezoelectric elements. *Journal of Sound and Vibration*, 268(1) :115–129, Nov 2002.
- [25] **C.H. Park and D.J. Inman**. Enhanced piezoelectric shunt design. *Shock and Vibration*, 10(2) :127–133, Apr 2003.
- [26] **M. Neubauer, R. Oleskiewicz, K. Popp, and T. Krzyzynski**. Optimization of damping and absorbing performance of shunted piezo elements utilizing negative capacitance. *Journal of Sound and Vibration*, 298(1-2) :84–107, Jul 2006.
- [27] **M. Collet, M. Ouisse, M.N. Ichchou, and R. Ohayon**. Semi-active optimization of 2d wave dispersion into shunted piezo-composite systems for controlling acoustic interaction. *Journal of Smart Materials and Structures*, 21(9) :1–7, Aug 2012.
- [28] **S. Harari**. *Contrôle modal semi-actif et actif à faible consommation énergétique par composants piézoélectriques*. Thèse doctorale, INSA de Lyon, Lyon, France, 2009.
- [29] **S. Livet, M. Berthillier M. Collet, P. Jean, and J.M. Cote**. Structural multi-modal damping by optimizing shunted piezoelectric transducers.

- [30] **J. Tang** and **K.W. Wang**. Active-passive hybrid piezoelectric networks for vibration control : comparisons and improvement. *Journal of Smart Materials and Structures*, 10(4) :794–806, Aug 2001.
- [31] **F. Tateo**. *Distributed shunted piezoelectric cells for vibroacoustical interface optimization*. Thèse doctorale, Université de Franche-Comté, Besançon, France, 2013.
- [32] **C. Richard**, **D. Guyomar**, **D. Audigier**, and **H. Bassaler**. Enhanced semi passive damping using continuous switching of a piezoelectric device on an inductor. *Proceedings of SPIE*, 3989 :288–299, Mar 2000.
- [33] **C. Richard**, **D. Guyomar**, **D. Audigier**, and **G. Ching**. Semi-passive damping using continuous switching of a piezoelectric device. *Proceedings of SPIE*, 3672 :104–111, Mar 1999.
- [34] **D. Guyomar** and **A. Badel**. Nonlinear semi-passive multimodal vibration damping : an efficient probabilistic approach. *Journal of Sound and Vibration*, 294(1-2) :249–268, Jun 2006.
- [35] **L. Petit**, **E. Lefeuvre**, **C. Richard**, and **D. Guyomar**. A broadband semi passive piezoelectric technique for structural damping. *Proceedings of SPIE*, 5386 :414–425, Jul 2014.
- [36] **L.R. Corr** and **W.W. Clark**. Energy dissipation analysis of piezoceramic semi-active vibration control. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 12(11) :729–736, Nov 2001.
- [37] **E. Lefeuvre**, **A. Badel**, **L. Petit**, **C. Richard**, and **D. Guyomar**. Semi-passive piezoelectric structural damping by synchronized switching on voltage sources. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 17(8-9) :653–660, Sep 2006.
- [38] **W.W. Clark**. Vibration control with state-switched piezoelectric materials. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 11(4) :263–271, Apr 2000.
- [39] **H. Ji**, **J. Qiu**, **A. Badel**, and **K. Zu**. Semi-active vibration control of a composite beam using an adaptative ssdv approach. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 20(4) :401–412, Mar 2009.
- [40] **K. Li**, **J.Y. Gauthier**, and **D. Guyomar**. Structural vibration control by synchronized switch damping energy transfer. *Journal of Sound and Vibration*, 330(1) :49–60, Jan 2011.
- [41] **B. Bao**, **D. Guyomar**, and **M. Lallart**. Vibration reduction for smart periodic structures via periodic piezoelectric arrays with nonlinear interleaved-switched electronic networks. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 82 :230–259, May 2016.
- [42] **J. Onoda**. Vibration suppression by variable-stiffness members. *AIAA Journal*, 29(6) :230–259, Jun 1991.
- [43] **Z. Wang**. *Enhanced Self-powered vibration damping of smart structures by modal energy transfer*. Thèse doctorale, INSA de Lyon, Lyon, France, 2016.
- [44] **K. Li**. *Structural vibration damping with synchronized energy transfer between piezoelectric patches*. Thèse doctorale, INSA de Lyon, Lyon, France, 2011.
- [45] **J. Durcane**. *Modélisation et optimisation de dispositifs non-linéaires d’amortissement de structures par systèmes piézoélectriques commutés*. Thèse doctorale, Conservatoire National des Arts et Métiers, Besançon, France, 2009.

- [46] **J.C. Lee** and **J.C. Chen**. Active control of sound radiation from rectangular plates using multiple piezoelectric actuators. *Applied Acoustics*, 57(4) :327–343, Aug 1999.
- [47] **L. Ederly-Azulay** and **H. Abramovich**. Active damping of piezo-composite beams. *Composite Structures*, 74(4) :458–466, Aug 2006.
- [48] **E.F. Crawley** and **E.H. Anderson**. Detailed models of piézoceramaic actuation of beams. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 1(1) :4–22, Jan 1990.
- [49] **P. De Man**. *Contrôle actif du rayonnement acoustique des plaques : une approche à faible autorité*. Thèse doctorale, Université Libre De Bruxelles, Bruxelles, Belgique, 2004.
- [50] **M. Collet**. *Contrôle actif du bruit et des vibrations : éléments de conception, outils de l'ingénieur*. Femto-st, Besançon.
- [51] **M. Schwartz**. *Encyclopedia of smart materials*. John Wiley and Sons, New York, 2002.
- [52] **P.A. Deymier**. *Acoustic metamaterial and phononic crystals*. New York, 2013.
- [53] **R.V. Caster** and S. Guenneau. *Acoustic metamaterials : negative refraction, imaging, lensing and cloaking*. New York, 2013.
- [54] **T.T. Wu**, **Z.G. Huang**, **T.C. Tsai**, and **T.C. Wu**. Evidence of complete band gap and resonances in a plate with periodic stubbed surface. *Applied Physics Letters*, 93(11) :111902, Sep 2008.
- [55] **M. Oudich**, **M. Senesi**, **M.B. Assouar**, **M. Ruzenne**, **J.H. Sun**, **B. Vicent**, **Z. Hou**, and **T.T. Wu**. Experimental evidence of locally resonant sonic band gap in two-dimensional phononic stubbed plates. *Physical Review B*, 84(16) :165136, Oct 2011.
- [56] **J.C. Hsu** and **T.T. Wu**. Efficient formulation for band-structure calculations of two-dimensional phononic-crystal plates. *Physical review B*, 74(14) :144303, Oct 2006.
- [57] **T.T. Wu**, **Z.G. Huang**, and **S. Lin**. Surface and bulk acooustic waves in two-dimensional phononic crystal consisting of materials with general anisotropy. *Physical Review B*, 69(9) :094301, Mar 2004.
- [58] **M. Oudich**, **Y. Li**, **B.M. Assouar**, and **Z. Hou**. A sonic band gap based on locally resoannt phononic plates with stubs. *New Journal of Physics*, 12(8) :083049, Aug 2010.
- [59] **J.O. Vasseur**, **P.A. Deymier**, **B. Djafari-Rouhani**, **Y. Pennec**, and **A.C. Hladky-Hennion**. Absolute forbidden bands and waveguiding in two-dimensional phononic crystal plates. *Physical review B*, 77(8) :085415, Feb 2008.
- [60] **A.B. Movchan**, **N.V. Movchan**, and **R.C. McPhedran**. Bloch-floquet bending waves in perforated thin plates. *Proceedings of the Royal Society A*, 463(2086) :2505–2518, Oct 2007.
- [61] **Y. Pennec**, **B. Djafari-Rouhani**, **H. Larabi**, **J.O. Vasseur**, and **A.C. Hladky-Hennion**. Low frequency gaps in a phononic crystal constituted of cylindrical dots deposited on a thin homogeneous plate. *Physical review B*, 78(10) :104105, Sep 2008.
- [62] **M.B. Assouar**, **M. Senesi**, **M. Oudich**, and **M. Ruzzene**. Broadband plate-type acoustic metamaterial for low-frequency sound attenuation. *Applied Physics Letters*, 101(17) :173505, oct 2012.
- [63] **M. Bruneau**. *Manuel d'acoustique fondamentale*. Hermes, Paris, 1998. p. 526-536.

- [64] **D. Niederberger.** *Smart damping materials using shunt control.* Thèse doctorale, École polytechnique fédérale de Zurich, Zurich, Suisse, 2005.
- [65] **O. Thomas, J. Durcane, and J.F Deü.** Performance of piezoelectric shunts for vibration reduction. *Journal of Smart Materials and Structures*, 21(1) :1–16, Dec 2012.
- [66] **G. Wang, J. Wang, S. Chen, and J. Wen.** Vibration attenuations induced by periodic arrays of piezoelectric patches connected by enhanced resonant shunting circuits. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 20(12) :1–9, Nov 2011.
- [67] **B.S. Beck.** *Negative capacitance shunting of piezoelectric patches for vibration control of continuous systems.* Thèse doctorale, Institut technologique de Georgie, Atlanta, U.S., 2012.
- [68] **G. Matten.** *Conception robuste d'actionneurs électromécaniques distribués pour le contrôle vibroacoustique de structures.* Thèse doctorale, Université de Franche-Comté, Besançon, France, 2016.
- [69] **M. Date, M. Kutani, and S. Sakai.** Electrically controlled elasticity utilizing piezoelectric coupling. *Journal of Applied Physics*, 87(2) :863–868, Jan 2000.
- [70] **S. Behrens, A.J. Fleming, and S.O.R. Moheimani.** A broadband controller for shunt piezoelectric damping of structural vibration. *Smart Materials and Structures*, 12(1) :18–28, Jan 2003.
- [71] **M. Berardengo, O. Thomas, C. Giraud-Audine, and S. Manzoni.** Improved resistive shunt by means of negative capacitance : new circuit, performances and multi-mode control. *Journal of Smart Materials and Structures*, 25(7) :1–23, Jun 2016.
- [72] **B. de Marneffe and A. Preumont.** Vibration damping with negative capacitance shunts : theory and experiment. *Journal of Smart Materials and Structures*, 17(3) :1–9, Apr 2008.
- [73] **J.H. Oh, H.M. Seung, and Y.Y. Kim.** A truly hyperbolic elastic metamaterial lens. *Applied Physics Letters*, 104 :073503, 2014.
- [74] **D. Bigoni, S. Guenneau, A.B.Movchan, and A.B.Movchan.** Elastic metamaterials with inertial locally resonant structures : application to lensing and localization. *Physical Review B*, 104 :174303, 2013.
- [75] **L. Brillouin.** *Wave propagation in periodic structures.* McGraw-Hill Book Company, Inc., New-York, 1946.
- [76] **J.D. Joannopoulos, S.G. Johnson, J.N. Winn, and R.D. Mead.** *Photonic Crystals, Modeling the flow of Light.* Princeton university press, Princeton, 2007.
- [77] **D.J. Mead.** Wave propagation in continuous periodic structures : research contributions from southampton. *Journal of Sound and Vibration*, 190(3) :495–524, Nov 1996.
- [78] **D.J. Mead.** Wave propagation and natural modes in periodic systems : I. mono-coupled systems. *Journal of Sound and Vibration*, 40(1) :1–18, May 1974.
- [79] **D.J. Mead.** Wave propagation and natural modes in periodic systems : Ii. multi-coupled systems, with and without damping. *Journal of Sound and Vibration*, 40(1) :19–39, Jul 1974.

- [80] **M. Ruzzene, M.J. Leamy, and M. Hussein.** Dynamics of phononic materials and structures : historical origins, recent progress and future outlook. *Applied Mechanics Reviews*, 66 :040802, Jul 2014.
- [81] **G. Gosse.** *Rayonnement acoustique d'une structure périodique de type batterie à ailettes - Application aux pompes à chaleur.* Thèse doctorale, INSA, Lyon, 2012.
- [82] **U. Lee, J. Kim, and A.Y.T. Leung.** The spectral element method in structural dynamics. *SAGE Publications*, 32(6) :451–465, Nov 2000.
- [83] **M. Collet, M Ouisse, M. Ruzzene, and M.N. Ichchou.** Floquet-bloch decomposition for the computation of dispersion of two-dimensional periodic, damped mechanical systems. *International Journal of Solids and Structures*, 48 :2837–2848, May 2011.
- [84] **Y. Xiao, B. R.Mace, J. Wen, and X. Wen.** Formation and coupling of band gaps in a locally resonant elastic system comprising a string with attached resonators. *Physics Letters A*, 375(12) :1485–1491, Feb 2011.
- [85] **G. Wang, W. Wen, J. Wen, and Y. Liu.** Quasi-one-dimensional periodic structure with locally resonant band gap. *Journal of Applied Mechanics*, 73(1) :167–170, May 2005.
- [86] **Y. Xiao, J. Wen, and X. Wen.** Longitudinal wave band gaps in metamaterial-based elastic rods containing multi-degree-of-freedom resonators. *New Journal Of Physics*, 14(3) :1–20, Mar 2012.
- [87] **W.W. Seto.** *theory and problems of mechanical vibrations.* Shaum's outline, San José, 1964.
- [88] **Y. Xiao, J. Wen, D. Yu, and X. Wen.** Flexural wave propagation in beams with periodically attached vibration absorbers : behavior and band formation mechanisms. *Journal of Sound and Vibration*, 332(4) :867–893, Feb 2013.
- [89] **M.Y. Wang and X. Wang.** Frequency band structure of locally resonant periodic flexural beams suspended with force-moment resonators. *Journal of physics D : Applied Physics*, 46(25) :1–8, Jun 2013.
- [90] **D. Yu, Y. Liu, H. Zhao, G. Wang, and J. Qiu.** Flexural vibration band gaps in eurl-bernoulli beams with locally resonant structures with two degrees of freedom. *Physical review*, 73(6) :1–5, Feb 2006.
- [91] **H.J. Xiang and Z.F. Shi.** Analysis of flexural vibration band gaps in periodic beams using differential quadrature method. *Computers and structures*, 87(23-24) :1559–1566, Aug 2009.
- [92] **T. Chen and L. Wang.** Suppression of bending waves in a periodic beam with timoshenko beam theory. *Acta Mechanica Solida Sinica*, 26(2) :181–197, April 2013.
- [93] **D. Yu, J. Wen, H. Zhao, Y. Liu, and X. Wen.** Vibration reduction by using the idea of phononic crystals in a pipe-conveying fluid. *Journal of Sound and Vibration*, 318(1-2) :181–197, jun 2008.
- [94] **M. Collet, M. Ouisse, and M.N. Ichchou.** Structural energy flow optimization through adaptive shunted piezoelectrique metacomposites. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 23(15) :1661–1677, 2012.

- [95] **Y. Xiao, J. Wen, and X. Wen.** Flexural wave band gaps in locally resonant thin plates with periodically attached spring-mass resonators. *Journal of physics D : Applied Physics*, 45(19) :1–12, Apr 2012.
- [96] **F. Casadei, B. S Beck, K. A Cunefare, and M. Ruzzene.** Vibration control of plates through hybrid configurations of periodic piezoelectric shunts. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 23(10) :1169–1177, May 2012.
- [97] **S. Chen, G. Wang, J. Wen, and X. Wen.** Wave propagation and attenuation in plates with periodic arrays of shunted piezo-patches. *Journal of Sound and Vibration*, 332(6) :1520–1532, Nov 2012.
- [98] **C. Pézerat.** *Vibroacoustics of planar structures*. ENSIM, Le Mans.
- [99] **C. Lesueur.** *Rayonnement acoustique des structures : vibroacoustique, Intéractions fluide-structure*. Eyrolles, Paris, 1988.
- [100] **F. Fahy** and P. GARDONIO.
- [101] **S.M. Kirkup.** Computational solution of the acoustic field surrounding a baffled panel by the rayleigh integral method. *Applied Mathematical Modelling*, 18(7) :403–407, Jul 1994.
- [102] **C.E. Wallace.** Radiation resistance of rectangular panel. *Journal of the Acoustical Society of America*, 51(3) :946–962, Jul 1970.
- [103] **D. Zou and M.J. Crocker.** Sound power radiated from rectangular plates. *Archives of Acoustics*, 34(1) :25–39, Jan 2009.
- [104] **K.A. Cunefare.** The minimum multimodal radiation efficiency of baffled finite beams. *Journal of the Acoustical Society of America*, 90(5) :2521–2529, Nov 1991.
- [105] **M.N. Currey and K.A. Cunefare.** The radiation modes of baffled finite plates. *Journal of the Acoustical Society of America*, 98(3) :1570–1580, Sep 1995.
- [106] **M. Collet, M. Ouisse, K.A Cunefare, M. Ruzzene, B. Beck, L. Airoidi, and F. Casadei.** Vibroacoustic energy diffusion optimization in beams and plates by means distributed shunted piezoelectric patches.
- [107] **V. Lhuillier.** *Contrôle actif de la transparence acoustique d'une double paroi*. Thèse doctorale, INSA de Lyon, Lyon, France, 2009.
- [108] **A.J. Fleming, S. Behrens, and S.O.R. Moheimani.** Synthetic impedance for implementation of piezoelectric shunt-damping circuits. *Electronics Letters*, 36(18) :1525–156, Aug 2000.
- [109] **G. Matten, M. Collet, S. Cogan, and E. Sadoulet-Reboul.** Synthetic impedance for adaptative piezoelectric metacomposite. *Procedia Technology*, 36 :84–89, 2014.
- [110] **H. Zhang, J. Wen, Y. Xiao, G. Wang, , and X. Wen.** Sound transmission loss of metamaterial thin plates with periodic subwavelength arrays of shunted piezoelectric patches. *Journal of Sound and Vibration*, 343 :104–120, Jan 2015.
- [111] **F. Tateo, M. Collet, and M. Ouisse.** Patches piézoélectriques shuntés distribués sur une poutre en composite : modélisation et validation. Besançon, 2011. 20ème Congrès Français de Mécanique.

- [112] **K. Billon, M. Ouisse, E. Sadoulet-Reboul, and M. Collet.** Numerical tools for efficient simulations of wave propagation in damped periodic structures. Dubrovnik, 2015. Congrès NOVEM.
- [113] **M.C. Remellieux and R.A. Burdisso.** Vibro-acoustic response of an infinite, rib-stiffened, thick-plate assembly using finite-element analysis. *Journal of Acoustical Society of America*, 132(1) :36–42, Jun 2010.
- [114] **X. Fu, Z. Jin and Y. Yin, and B. Liu.** Sound absorption of a rib-stiffened plate covered by anechoic coatings. *Journal of Acoustical Society of America*, 130(3) :1551–1556, Mar 2015.
- [115] **J. Wen, H. Zao and L. Lv, B. Yaun, G. Wang, and X. Wen.** Effects of locally resonant modes on underwater sound absorption in viscoelastic materials. *Journal of Acoustical Society of America*, 137(3) :1201–1208, Sep 2011.
- [116] **A.C. Hladky-Hennion and J.N. Decarpigny.** Analysis of the scattering of a plane acoustic wave by a doubly periodic structure using the finite element method : Application to alberich anechoic coatings. *Journal of Acoustical Society of America*, 90(6) :3356–3367, Dec 1991.
- [117] **F. Ablitzer, C. Pézerat, J.M. Génevaux, and J. Bégué.** Identification of stiffness and damping properties of plates by using the local equation of motion. *Journal of Sound and Vibration*, 333(9) :2454–2468, Apr 2014.
- [118] **F. Ablitzer, J.M. Génevaux, and C. Pézerat.** Caractérisation de matériaux composites intégrant la fonction amortissement. Technical report, LAUM, Le Mans, France, 2012.
- [119] **V. Denis.** *Vibration damping in beams using the acoustic black hole effect.* Thèse doctorale, Université du Maine, Le Mans, France, 2014.
- [120] **S. Alessandroni, F. dell’Isola, and M. Profiri.** A revival of electric analogs for vibrating mechanical systems aimed to their efficient control by pzt actuators. *International Journal of Solids and Structures*, 39(20) :5295–5324, Oct 2002.
- [121] **C. Maurini, F. dell’Isola, and D. Del Vescovo.** Comparison of piezoelectronic networks acting as distributed vibration absorbers. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 18(5) :1243–1271, Sep 2004.
- [122] **Y. Lu and J. Tang.** Electromechanical tailoring of structure with periodic piezoelectric circuitry. *Journal of Sound and Vibration*, 331(14) :3371–3385, Jul 2012.
- [123] **R.C. Batra, F. dell’Isola, S. Vidoli, and D. Vigilante.** Multimode vibration suppression with passive two-terminal distributed network incorporating piezoceramic transducers. *International Journal of Solids and Structures*, 42(11-12) :3115–3132, Jun 2005.
- [124] **P. Bisegna, G. Caruso, and F. Maceri.** Optimized electric networks for vibration damping of piezoactuated beams. *Journal of Sound and Vibration*, 289(4-5) :908–937, Feb 2006.
- [125] **F. dell’Isola, C. Maurini, and M. Porfiri.** Passive damping of beam vibrations through distributed electric networks and piezoelectric transducers : prototype design and experimental validation. *Journal of Smart Materials and Structures*, 13(2) :299–308, Feb 2004.
- [126] **U. Andreaus, F. dell’Isola, and M. Porfiri.** Piezoelectric passive distributed controllers for beam flexural vibrations. *Journal of Vibration and Control*, 10(5) :625–659, May 2004.

- [127] **B. Lossouarn, J.F. Deü, and M. Aucejo.** Multimodal vibration damping of a beam with a periodic array of piezoelectric patches connected to a passive electrical network. *Journal of Smart Materials and Structures*, 24(11) :1–14, Oct 2015.
- [128] **B. Lossouarn, M. Aucejo, and J.F. Deü.** Multimodal coupling of a periodic lattices and application to rod vibration damping with a piezoelectric network. *Journal of Smart Materials and Structures*, 24(4) :1–13, Oct 2016.
- [129] **B. Lossouarn, J.F. Deü, and K.A. Cunefare.** Multimodal vibration damping of a plate by piezoelectric coupling to its analogous electrical network. *Journal of Smart Materials and Structures*, 25(11) :1–15, Oct 2016.

THÈSE DE DOCTORAT

Charlie BRICAULT

Diminution des vibrations et du bruit rayonné d'une paroi par contrôle distribué

Reduction of vibrations and radiated wall noise by distributed control

Résumé

L'allègement des structures est un enjeu économique important dans les domaines d'activités industrielles telles que l'automobile, l'aéronautique ou le naval, qui intègrent peu à peu les matériaux composites dans la fabrication des structures. Cet allègement s'accompagne d'un raidissement de la matière qui implique des problèmes de vibrations et d'isolation acoustique. Plusieurs méthodes de traitement existent pour diminuer les vibrations ou le bruit rayonné d'une paroi, mais ces méthodes ont l'inconvénient d'augmenter significativement la masse de la paroi.

Afin de répondre à cette problématique, il est proposé dans cette thèse de modifier le comportement dynamique des structures à partir d'un réseau périodique de patchs piézoélectriques shuntés avec un circuit électrique dont il est possible de modifier l'impédance. En contrôlant ainsi le comportement dynamique des patchs piézoélectriques, il est possible de contrôler le comportement vibratoire de la structure et donc de traiter les problèmes de transmissions solidiennes ou de transmissions aériennes.

La méthode de shunt choisie est la méthode dite de shunt à capacité négative qui permet de modifier la rigidité d'une structure. Cette méthode dite semi-passive présente plusieurs avantages : la mise en œuvre est simple, il est possible d'intégrer les patchs directement à l'intérieur de la paroi, elle consomme une faible quantité d'énergie électrique et sa mise en application est peu onéreuse.

Mots clés

Vibroacoustique, métamatériaux, piézoélectricité, shunt, milieux périodiques, capacité négative

Abstract

Making the structure lighter is an important economic stake in the field of industrial activities such as automotive, aeronautic or naval, which gradually integrate composite materials in the manufacturing of structures. This reduction of the mass goes along with a stiffening of the matter implying acoustics and vibrations issues. Several methods exist to reduce vibrations or acoustic radiations of structures, but these methods increase the mass.

In order to answer the problematic, we propose to change the dynamic behavior of structures with a periodic lattice of piezoelectric patches shunted with an electrical circuit whose the impedance can be controlled. Therefore, the control of the coupled behavior of the piezoelectric patches allows the control of vibrational wave's diffusion inside the structure and so to treat the structure-borne vibrations and airborne acoustics emission. The shunt method chosen is negative capacitance shunt which allows to modify the rigidity of a structure. This semi-passive method has several advantages : the implementation is simple, it is possible to integrate the patches directly inside the wall, it consumes a low amount of electrical energy and its implementation is inexpensive.

Key Words

Vibroacoustic, metamaterials, piezoelectricity, shunt, periodic media, negative capacitance