



**HAL**  
open science

# Correspondance de Satake géométrique, bases canoniques et involution de Schützenberger

Arnaud Demarais

► **To cite this version:**

Arnaud Demarais. Correspondance de Satake géométrique, bases canoniques et involution de Schützenberger. Mathématiques générales [math.GM]. Université de Strasbourg, 2017. Français. NNT : 2017STRAD040 . tel-01652887v3

**HAL Id: tel-01652887**

**<https://theses.hal.science/tel-01652887v3>**

Submitted on 15 Mar 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

INSTITUT DE  
RECHERCHE  
MATHÉMATIQUE  
AVANCÉE

UMR 7501

Strasbourg

## Thèse

présentée pour obtenir le grade de docteur de  
l'Université de Strasbourg  
Spécialité MATHÉMATIQUES

**Arnaud Demarais**

**Correspondance de Satake géométrique, bases  
canoniques et involution de Schützenberger**

Soutenu le 11 Décembre 2017  
devant la commission d'examen

Pierre Baumann, directeur de thèse  
Stephane Gaussent, rapporteur  
Olivier Schiffmann, rapporteur  
Caroline Gruson, examinateur  
Frédéric Chapoton, examinateur

[www-irma.u-strasbg.fr](http://www-irma.u-strasbg.fr)





*“You, me, or nobody is gonna hit as hard as life. But it ain’t about how hard you hit. It’s about how hard you can get hit and keep moving forward. THAT’S HOW WINNING IS DONE.”*

Correspondance de Satake géométrique, bases  
canoniques et involution de Schützenberger.

11 Décembre 2017

# Remerciements

Avant toute chose, je souhaite remercier mon directeur de thèse Pierre Baumann. Sans vous, je n'aurais pas pu écrire ne serait-ce que la première phrase de cette thèse. Si j'ai failli baisser les bras à plusieurs reprises, c'est toujours vos mots et votre aide qui m'ont aidé à continuer. J'ai énormément apprécié la liberté que vous m'avez offerte dans mon travail ; liberté qui m'a permis de vivre avec ma compagne et de fonder une famille. J'ai beaucoup appris à votre contact, surement plus qu'avec n'importe quel autre professeur, notamment la rédaction d'un document Mathématiques (même si vos oreilles ont du siffler plus d'une fois lors des corrections, j'en suis désolé).

Je remercie aussi Stéphane Gaussent et Olivier Schiffmann qui ont accepté de rapporter cette thèse ainsi que Caroline Gruson et Frédéric Chapoton qui composent mon jury.

Cette thèse signe la fin de mes études. Je remercie tous les professeurs de Mathématiques et autres sciences occultes (Monsieur Brochet et ses déclinaisons latines, Monsieur « THE GUICHE » Guichard qui a rendu mes années de prépa plus qu'agréables et Monsieur Gaillard et ses lignes de lettres grecques, sa théorie du chaos et sa méthode pour tenir LA CRAIE) que j'ai pu avoir ces 23 dernières années. En particulier Monsieur Besson qui a su me transmettre sa passion des Mathématiques, Monsieur Bayle sans qui je n'aurais pas fait long feu dans le supérieur et Monsieur Michel « JIMMY » Gonnord qui m'a appris que les problèmes Mathématiques pouvaient aussi se résoudre à la force des bras et à qui je dois mon entrée à l'ENS. Je remercie aussi l'Ecole Normale Supérieure de Lyon, pour la qualité de ses enseignements, le niveau de ses cours et l'engagement de ses enseignants probablement uniques au monde. Enfin, je remercie l'université de Strasbourg, qui m'a accordé sa confiance pour réaliser cette thèse et qui a su me fournir tout le confort logistique nécessaire.

Ma petite Caroline, tu m'as offert le plus beau des bébés et le plus grand des réconforts lors de cette thèse. MERCI INFINIEMENT, je t'aime. Mon petit Albéric, je ne sais pas si tu lieras un jour ces lignes mais un conseil : après les remerciements ça fait mal à la tête. Papa, Maman, vous avez toujours mis notre éducation en priorité et je n'ai rien d'autre à ajouter si ce n'est que je vous dois littérale-

ment TOUT. Sophie, même si on t'a acheté à la redoute, je t'aime bien :P. Papi Maurice, si là haut tu as un peu de temps entre deux parties de boules, je sais que tu nous regarde, voici mes remerciements. Tu as toujours vu l'école comme l'assenseur social qu'elle est et cette thèse je te la dédie. Je ne suis plus dans le peloton de tête : j'ai franchi la ligne d'arrivée. Mamie Titine il n'y a pas de mots pour exprimer ce que je te dois, tu es et tu resteras toujours ma seconde Maman. Je remercie aussi mes grands parents Daniel et Arlette, ma Nounou Giselle ainsi mon oncle Sylvain qui vivent au pôle nord. Plus au sud, je remercie mon oncle Georges (tu es le seul philosophe que j'ai jamais compris), ma tante Michelle et mes cousins David, Lionel et Claire et plus généralement toute ma famille que l'on se voie souvent ou pas.

Le paragraphe sur la famille étant terminé, vient ensuite le paragraphe sur ma seconde famille. Je remercie du fond mon coeur la famille Cesbron qui m'a accueilli comme un fils. Si ma famille de Toulouse est loin, vous avez toujours tout fait pour que je me sente chez moi. Cela a beaucoup joué sur mon moral de savoir que j'avais une famille à côté. Daniel, Patricia, Frédéric, Olivier, Nathan, Virginie, Manon mais aussi les Faivres, Guillaume, Nathalie, Cassandre, Léandre, Céleste : MERCI.

Maintenant c'est le paragraphe pour les amis. Traditionnellement, on commence par citer ses amis de thèse, exceptionnellement je me dois de transgresser cette règle et citer avant deux amis sans qui rien n'aurait été possible. Ceux qui m'ont accueilli chez eux sans rien demander en retour. Il m'ont nourri, ils m'ont logé, ils m'ont même amené chez KFC<sup>1</sup>, un des deux m'a même prêté sa serviette de toilette mais je pense que ce n'est pas une histoire à raconter en public. Je parle bien sûr de Sebastien Holtz et Lionel Burgart, les mecs changez rien <3. Maintenant une spéciale dédicace pour toi mon cousin, si tu veux prendre une volée et qu't'es prêt à faire 100 kilomètres (3 ou 4 fois), je t'attends à Chalon. Je te dois du poulet si ma mémoire est bonne! Je parle bien sûr de Thomas Richez, le Lopez du 114, merci d'avoir mis l'ambiance au bureau. Merci aussi à Amandine, Audrey, Fred, Guillaume, Ranine, et tous les doctorants ayant pu mettre les pieds à l'IRMA entre 2014 et 2017. Dorian Hellidestock merci d'avoir été là tous ces étés. Merci à tous les potes de prépa ; les geeks : Docteur Foca, Docteur Masse, Docteur Badie, Monsieur GURB et Monsieur Ye, GEBaptiste, Léon ; les moins geek : Jano, Mssieu Wyss, le roux.... Merci à tous les potes de l'ENS : JM, Louis-Clément-Chasse-Neige, Paul-Ahmed, Walid qui a cassé la salle de sport et tous ceux que j'oublie.

Chose promise, chose due. Un paragraphe pour les escrocs de Lyon. La perspective de nos réunions bi-annuelles m'a aidé à tenir le coup ces 2 dernières années et je vais essayer d'avoir un mot pour chacun. Jacques, mon meilleur pote, jamais là quand il faut :P, merci pour tout, tes passages à la maison, pour tes bons plans et

---

1. Big up mon colonel

---

pour m'avoir présenté les autres. Pierre-Etienne, t'es un réac de droite mais t'es le plus généreux d'entre nous. Merci de nous accueillir deux fois par an chez toi, merci à Carole aussi! et à Anthéa! Casu, Romain et Laurent vous êtes mes trois suisses préférés (oui devant ceux du catalogue). Tom Feve merci de m'avoir sauvé la vie après l'avoir volontairement mises en péril, je te confierais pas mes enfants mais tu es un sage parmi les sages, merci d'avoir aidé au cadeau en faisant le graphisme du B. Guilhem « Waguil » Mercier tu es le roi du pâté vegan et de la gameboy occitane. Pierrick la table basse de Besançon, tu me feras voir ton grenier! Xavier tu me fais voir la vie en Rose! Mickael tu ronfles comme un bulldozer! Rémi tu me prends tout mon argent! Marion oui je suis jaloux de tes rentrées! Florent je voudrais la même barbe que toi, t'es une crème ne change rien! Julien tu es le seul joueur de FIFA que j'aime et tu as une belle barbe! Seb et Olivier vous êtes un très beau couple! Fayssal-Ragnar-Daniel, sans déconner ils sont où mes macroutes??? Et aussi ceux qui sont passés sur le stand, Francisco, Robin, Louis et Tim de Holdies et j'en oublies sûrement! Les mecs (et la fille) c'est un plaisir d'être à vos côtés, afin de voler aux riches, pour donner aux pauvres, pour reprendre aux pauvres, pour garder pour nous (cette formule nous vient directement du Maitre Tom).

Enfin je remercie chaudement l'ensemble des collègues du lycée Mathias et en particulier ceux de Mathématiques pour leur accueil chaleureux. Je remercie aussi les élèves sans qui les profs ne sont rien.



# Remerciements

Avant toute chose, je souhaite remercier mon directeur de thèse Pierre Baumann. Sans vous, je n'aurais pas pu écrire ne serait-ce que la première phrase de cette thèse. Si j'ai failli baisser les bras à plusieurs reprises, c'est toujours vos mots et votre aide qui m'ont aidé à continuer. J'ai énormément apprécié la liberté que vous m'avez offerte dans mon travail ; liberté qui m'a permis de vivre avec ma compagne et de fonder une famille. J'ai beaucoup appris à votre contact, surement plus qu'avec n'importe quel autre professeur, notamment la rédaction d'un document Mathématiques (même si vos oreilles ont du siffler plus d'une fois lors des corrections, j'en suis désolé).

Je remercie aussi Stéphane Gaussent et Olivier Schiffmann qui ont accepté de rapporter cette thèse ainsi que Caroline Gruson et Frédéric Chapoton qui composent mon jury.

Cette thèse signe la fin de mes études. Je remercie tous les professeurs de Mathématiques et autres sciences occultes (Monsieur Brochet et ses déclinaisons latines, Monsieur « THE GUICHE » Guichard qui a rendu mes années de prépa plus qu'agréables et Monsieur Gaillard et ses lignes de lettres grecques, sa théorie du chaos et sa méthode pour tenir LA CRAIE) que j'ai pu avoir ces 23 dernières années. En particulier Monsieur Besson qui a su me transmettre sa passion des Mathématiques, Monsieur Bayle sans qui je n'aurais pas fait long feu dans le supérieur et Monsieur Michel « JIMMY » Gonnord qui m'a appris que les problèmes Mathématiques pouvaient aussi se résoudre à la force des bras et à qui je dois mon entrée à l'ENS. Je remercie aussi l'Ecole Normale Supérieure de Lyon, pour la qualité de ses enseignements, le niveau de ses cours et l'engagement de ses enseignants probablement uniques au monde. Enfin, je remercie l'université de Strasbourg, qui m'a accordé sa confiance pour réaliser cette thèse et qui a su me fournir tout le confort logistique nécessaire.

Ma petite Caroline, tu m'as offert le plus beau des bébés et le plus grand des réconforts lors de cette thèse. MERCI INFINIEMENT, je t'aime. Mon petit Albéric, je ne sais pas si tu lieras un jour ces lignes mais un conseil : après les remerciements ça fait mal à la tête. Papa, Maman, vous avez toujours mis notre éducation en priorité et je n'ai rien d'autre à ajouter si ce n'est que je vous dois littérale-

ment TOUT. Sophie, même si on t'a acheté à la redoute, je t'aime bien :P. Papi Maurice, si là haut tu as un peu de temps entre deux parties de boules, je sais que tu nous regarde, voici mes remerciements. Tu as toujours vu l'école comme l'assenseur social qu'elle est et cette thèse je te la dédie. Je ne suis plus dans le peloton de tête : j'ai franchi la ligne d'arrivée. Mamie Titine il n'y a pas de mots pour exprimer ce que je te dois, tu es et tu resteras toujours ma seconde Maman. Je remercie aussi mes grands parents Daniel et Arlette, ma Nounou Giselle ainsi mon oncle Sylvain qui vivent au pôle nord. Plus au sud, je remercie mon oncle Georges (tu es le seul philosophe que j'ai jamais compris), ma tante Michelle et mes cousins David, Lionel et Claire et plus généralement toute ma famille que l'on se voie souvent ou pas.

Le paragraphe sur la famille étant terminé, vient ensuite le paragraphe sur ma seconde famille. Je remercie du fond mon coeur la famille Cesbron qui m'a accueilli comme un fils. Si ma famille de Toulouse est loin, vous avez toujours tout fait pour que je me sente chez moi. Cela a beaucoup joué sur mon moral de savoir que j'avais une famille à côté. Daniel, Patricia, Frédéric, Olivier, Nathan, Virginie, Manon mais aussi les Faivres, Guillaume, Nathalie, Cassandre, Léandre, Céleste : MERCI.

Maintenant c'est le paragraphe pour les amis. Traditionnellement, on commence par citer ses amis de thèse, exceptionnellement je me dois de transgresser cette règle et citer avant deux amis sans qui rien n'aurait été possible. Ceux qui m'ont accueilli chez eux sans rien demander en retour. Il m'ont nourri, ils m'ont logé, ils m'ont même amené chez KFC<sup>1</sup>, un des deux m'a même prêté sa serviette de toilette mais je pense que ce n'est pas une histoire à raconter en public. Je parle bien sûr de Sebastien Holtz et Lionel Burgart, les mecs changez rien <3. Maintenant une spéciale dédicace pour toi mon cousin, si tu veux prendre une volée et qu't'es prêt à faire 100 kilomètres (3 ou 4 fois), je t'attends à Chalon. Je te dois du poulet si ma mémoire est bonne! Je parle bien sûr de Thomas Richez, le Lopez du 114, merci d'avoir mis l'ambiance au bureau. Merci aussi à Amandine, Audrey, Fred, Guillaume, Ranine, et tous les doctorants ayant pu mettre les pieds à l'IRMA entre 2014 et 2017. Dorian Hellidestock merci d'avoir été là tous ces étés. Merci à tous les potes de prépa ; les geeks : Docteur Foca, Docteur Masse, Docteur Badie, Monsieur GURB et Monsieur Ye, GEBaptiste, Léon ; les moins geek : Jano, Mssieu Wyss, le roux.... Merci à tous les potes de l'ENS : JM, Louis-Clément-Chasse-Neige, Paul-Ahmed, Walid qui a cassé la salle de sport et tous ceux que j'oublie.

Chose promise, chose due. Un paragraphe pour les escrocs de Lyon. La perspective de nos réunions bi-annuelles m'a aidé à tenir le coup ces 2 dernières années et je vais essayer d'avoir un mot pour chacun. Jacques, mon meilleur pote, jamais là quand il faut :P, merci pour tout, tes passages à la maison, pour tes bons plans et

---

1. Big up mon colonel

---

pour m'avoir présenté les autres. Pierre-Etienne, t'es un réac de droite mais t'es le plus généreux d'entre nous. Merci de nous accueillir deux fois par an chez toi, merci à Carole aussi ! et à Anthéa ! Casu, Romain et Laurent vous êtes mes trois suisses préférés (oui devant ceux du catalogue). Tom Feve merci de m'avoir sauvé la vie après l'avoir volontairement mises en péril, je te confierais pas mes enfants mais tu es un sâge parmi les sâges, merci d'avoir aidé au cadeau en faisant le graphisme du B. Guilhem « Waguil » Mercier tu es le roi du pâté vegan et de la gameboy occitane. Pierrick la table basse de Besançon, tu me feras voir ton grenier ! Xavier tu me fais voir la vie en Rose ! Mickael tu ronfles comme un bulldoser ! Rémi tu me prends tout mon argent ! Marion oui je suis jaloux de tes rentrées ! Florent je voudrais la même barbe que toi, t'es une crème ne change rien ! Julien tu es le seul joueur de FIFA que j'aime et tu as une belle barbe ! Seb et Olivier vous êtes un très beau couple ! Fayssal-Ragnar-Daniel, sans déconner ils sont où mes macroutes ??? Et aussi ceux qui sont passés sur le stand, Francisco, Robin, Louis et Tim de Holdies et j'en oublie sûrement ! Les mecs (et la fille) c'est un plaisir d'être à vos côtés, afin de voler aux riches, pour donner aux pauvres, pour reprendre aux pauvres, pour garder pour nous (cette formule nous vient directement du Maître Tom).

Enfin je remercie chaudement l'ensemble des collègues du lycée Mathias et en particulier ceux de Mathématiques pour leur accueil chaleureux. Je remercie aussi les élèves sans qui les profs ne sont rien.



# Introduction

La deuxième moitié du vingtième siècle a vu naître et se développer la physique des particules telle que nous la connaissons aujourd'hui. Au fur et à mesure que cette théorie progressait, de nouvelles particules étaient découvertes. Afin de les classer, les physiciens leur ont associé des grandeurs telles que le spin, l'étrangeté ou la charge. A partir de cette classification, ils se sont alors rendu compte que certaines familles de particules s'organisaient comme des bases de représentations d'algèbres de Lie. Par exemple, au début des années 1960, les physiciens observèrent que les sept particules « de type méson » alors connues semblaient s'organiser comme sept des huit vecteurs de poids de la représentation adjointe de  $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$ . Ces observations permirent alors à Murray Gell-Mann de prédire en 1962 l'existence d'une huitième particule « de type méson » qui fut effectivement observée en 1964 au laboratoire national de Brookhaven. Cette découverte valut à Gell-Mann le prix Nobel de Physique.

L'étude des groupes algébriques, des algèbres de Lie et de leurs représentations a donc des applications dans de nombreux domaines, ce qui justifie entre autres qu'on s'y intéresse en Mathématiques fondamentales.

Dans les années 1980, Gelfand et Zelevinsky se posèrent la question de l'existence et l'unicité de bases compatibles avec l'action des générateurs de Chevalley. Ils exhibèrent alors une base des représentations de  $\mathfrak{gl}_3$  pour laquelle, si on choisit un épinglage  $(e_i, f_i, h_i)_{1 \leq i \leq 3}$ , le noyau des opérateurs  $f_i$  est un espace de coordonnées.

De telles bases sont aujourd'hui connues pour tous les groupes réductifs complexes. Nous pouvons par exemple citer la base canonique, qui fut construite par Lusztig de manière géométrique à l'aide de faisceaux pervers et par Kashiwara de manière plus combinatoire à l'aide des cristaux.

Une autre base de ce type est la base de Mirković et Vilonen. Donnons nous un groupe réductif complexe  $G$ . En 1982, Lusztig construit une variété dans laquelle, pour tout poids dominant  $\lambda$  de  $G$ , il exhibe une sous variété  $\overline{Gr}^\lambda$ . La dimension de l'homologie d'intersection de  $\overline{Gr}^\lambda$  est égale à la dimension de la représentation de plus haut poids  $\lambda$  du dual de Langlands de  $G$ . Cette variété est en fait la

grassmannienne affine et le résultat de Lusztig est expliqué, en 1995, par Ginzburg et Drinfeld et la correspondance de Satake géométrique. C'est une équivalence de catégories qui relie la géométrie de la grassmannienne affine (une ind-variété construite à partir du dual de Langlands de  $G$ ) à la théorie des représentations du groupe  $G$ . Plus précisément, le module  $L(\lambda)$  de plus haut poids  $\lambda$  correspond à l'homologie d'intersection d'une variété  $\overline{Gr}^\lambda$ . Les travaux de Mirković et Vilonen [22] conduisent alors à définir une famille de cycles algébriques de  $\overline{Gr}^\lambda$  dont les classes fondamentales forment une base de  $L(\lambda)$ , c'est la base de Mirković et Vilonen (ou base MV). Les travaux de Stéphane Gaussent et Pierre Baumann [3] permettent alors de voir que cette base est parfaite.

Toutes ces bases dites parfaites, bien que différentes, suivent une même combinatoire : celle des cristaux de Kashiwara. On peut donc paramétriser la base de Mirković et Vilonen grâce au paramètre en corde (voir [3]) ou au paramètre de Lusztig (voir [18]). Le plus long élément du groupe de Weyl  $w_0$  joue un rôle central dans la définition de ces paramètres. Il permet de définir une involution de  $L(\lambda)$  qui s'appelle involution de Schützenberger.

Lusztig a démontré que l'involution de Schützenberger était compatible avec la base canonique et dans [23], Sophie Morier-Genoud exprime l'action de cette involution sur la base canonique en terme de paramètres en corde et de paramètre de Lusztig.

L'objectif initial de cette thèse est de démontrer la compatibilité de la base de Mirković et Vilonen avec l'involution de Schützenberger. Au delà de son intérêt combinatoire, ce résultat donne une interprétation géométrique de l'action des générateurs de Chevalley  $f_i$ . En effet, l'involution de Schützenberger permet de relier l'action des opérateurs  $f_i$  avec celle des opérateurs  $e_i$  les coefficients de l'action de ces derniers se calculant via des multiplicités d'intersection.

Nous étudions deux pistes pour démontrer la compatibilité. La première, via des formes bilinéaires intrinsèquement liées à la géométrie de la grassmannienne affine et faisant intervenir l'involution de Schützenberger, la seconde en tensorisant des représentations fondamentales, en exhibant une certaine base du produit tensoriel et en montrant que la matrice de passage de la base des tenseurs simples de vecteurs de Mirković et Vilonen vers cette base, jouit d'une certaine compatibilité avec  $S$ . La première piste fonctionne pour tout groupe réductif simplement connexe mais ne nous donne pas la compatibilité de la base MV avec l'involution de Schützenberger ; la seconde piste donne la compatibilité de la base mais je n'ai établi ce résultat que pour l'algèbre de Lie  $\mathfrak{sl}_2$ .

Au chapitre 1, nous rappelons les résultats et les notations usuelles relatives aux groupes et algèbres de Lie. Nous donnons par exemple les définitions ou propriétés concernant les modules simples de plus haut poids, de l'involution de Schützenberger, des formes contravariantes ou de la catégorie des cristaux de

---

Kashiwara.

Dans le chapitre 2, nous nous intéressons à la grassmannienne affine ainsi qu'à plusieurs de ses sous-variétés. Après quelques rappels sur sa géométrie, nous énonçons la correspondance de Satake géométrique et nous définissons les cycles et base de Mirković et Vilonen. Dans un second temps, nous présentons la variété de convolution et grassmannienne de Beilinson-Drinfeld ainsi que la base de Mirković et Vilonen généralisée du produit tensoriel  $L(\lambda_1) \otimes \dots \otimes L(\lambda_n)$  (ou base GMV). Nous énonçons alors les principales propriétés de cette base, à savoir sa compatibilité avec la filtration par les composantes isotypiques. Si  $v$  est un vecteur de la base de Mirković et Vilonen généralisée de  $L(\lambda_1) \otimes \dots \otimes L(\lambda_m)$  et  $v'$  de celle de  $L(\lambda_{m+1}) \otimes \dots \otimes L(\lambda_n)$ , on donne aussi les coefficients de la décomposition de  $v \otimes v'$  dans la base de Mirković et Vilonen généralisée de  $L(\lambda_1) \otimes \dots \otimes L(\lambda_n)$ .

Dans le chapitre 3, nous définissons la forme d'intersection sur les groupes de cohomologie, et nous identifions cette forme d'intersection avec une forme contravariante tordue par l'involution de Schützenberger. Nous expliquons ensuite le lien entre la symétrie vis à vis de l'involution de Schützenberger de la matrice de passage de la base des tenseurs vecteurs de la base MV vers la base GMV et la compatibilité de la base MV avec l'involution de Schützenberger.

Le chapitre 4 est quant à lui consacré à l'étude du cas de l'algèbre de Lie  $\mathfrak{sl}_2$ . Nous commençons par y démontrer une formule explicite donnant le coefficient d'un vecteur de la base GMV dans la décomposition du produit tensoriel d'un vecteur de la base MV avec un vecteur de la base GMV. Nous énonçons ensuite quelques règles de calcul issues de cette formule, nous servant d'une part à démontrer la symétrie par rapport à l'involution de Schützenberger, puis d'autre part à démontrer que la base GMV coïncide avec la base canonique duale.





# Table des matières

<b>Remerciements</b>	<b>iii</b>
<b>Introduction</b>	<b>vii</b>
<b>Table des matières</b>	<b>xi</b>
<b>1 Notations</b>	<b>1</b>
1.1 Algèbres de Lie . . . . .	1
1.1.1 Algèbre enveloppante . . . . .	1
1.1.2 Données usuelles . . . . .	2
1.1.3 Groupe de Weyl . . . . .	2
1.2 Groupes de Lie . . . . .	3
1.2.1 Données usuelles . . . . .	3
1.2.2 Dual de Langlands . . . . .	3
1.3 Modules . . . . .	4
1.3.1 Modules de plus haut poids . . . . .	4
1.3.2 Forme contravariante . . . . .	4
1.3.3 Involution de Schützenberger . . . . .	5
1.4 Cristal de Kashiwara . . . . .	6
1.4.1 Définition . . . . .	6
1.4.2 Produit tensoriel . . . . .	7
1.4.3 Cristal de plus haut poids . . . . .	9

<b>2</b>	<b>Correspondance de Satake géométrique</b>	<b>11</b>
2.1	La grassmannienne affine . . . . .	11
2.2	Faisceaux pervers sur la grassmannienne affine . . . . .	12
2.3	Correspondance de Satake géométrique . . . . .	13
2.4	Cycles et base de Mirković et Vilonen . . . . .	14
2.4.1	Cycles de Mirković et Vilonen . . . . .	14
2.4.2	Base de Mirković et Vilonen . . . . .	15
2.5	Cycles de Mirković et Vilonen généralisés . . . . .	16
2.5.1	Définition . . . . .	16
2.5.2	Propriétés . . . . .	18
2.5.3	Grassmannienne de Beilinson-Drinfeld . . . . .	19
2.5.4	Le cas particulier $G = SL_2$ . . . . .	22
<b>3</b>	<b>Bases et involution de Schützenberger</b>	<b>25</b>
3.1	Forme d'intersection . . . . .	25
3.1.1	Définition, dualité de Verdier . . . . .	25
3.1.2	Propriétés . . . . .	27
3.1.3	Identification avec la forme contravariante. . . . .	29
3.1.4	Exemple de la représentation adjointe de $\mathfrak{sl}_3$ . . . . .	31
3.2	Involution de Schützenberger et base de Mirković et Vilonen gé- néralisée . . . . .	33
<b>4</b>	<b>L'exemple de <math>\mathfrak{sl}_2</math></b>	<b>37</b>
4.1	Introduction . . . . .	37
4.2	Décomposition de $z_- \otimes z_k$ sur la base MVG . . . . .	38
4.3	Formules de calcul . . . . .	58
4.4	Symétrie . . . . .	63
4.5	Lien avec la base canonique duale . . . . .	67

*TABLE DES MATIÈRES*

---

<b>Annexes</b>	<b>73</b>
<b>A Calculs dans <math>V(\varpi)^{\otimes 6}</math></b>	<b>75</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>79</b>



# Chapitre 1

## Notations

### 1.1 Algèbres de Lie

Soit  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie sur  $\mathbb{C}$ , semi-simple, et soit  $\mathfrak{h}$  une sous algèbre de Cartan dont on note  $n$  la dimension. On appelle  $k$  la forme de Killing sur  $\mathfrak{g}$ ; elle est non dégénérée et sa restriction à  $\mathfrak{h}$  est non dégénérée. Elle se transporte donc sur  $\mathfrak{h}^*$ . Par abus de notation, on note également  $k$  la forme de Killing transportée sur  $\mathfrak{h}^*$ .

#### 1.1.1 Algèbre enveloppante

Soit  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie. On considère le produit tensoriel au dessus de  $\mathbb{C}$

$$\mathfrak{g}^{\otimes n} = \mathfrak{g} \otimes \dots \otimes \mathfrak{g}.$$

On note alors

$$T(\mathfrak{g}) = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathfrak{g}^{\otimes n},$$

$$R = \{g \otimes g' - g' \otimes g - [g, g'] \mid g, g' \in \mathfrak{g}\},$$

et  $\langle R \rangle$  l'idéal bilatère de  $T(\mathfrak{g})$  engendré par  $R$ .

L'algèbre enveloppante de  $\mathfrak{g}$  est le quotient

$$U(\mathfrak{g}) = T(\mathfrak{g}) / \langle R \rangle.$$

Toute représentation de l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  est un  $U(\mathfrak{g})$ -module et inversement.

### 1.1.2 Données usuelles

On suppose connue l'étude des algèbres de Lie semi-simples de dimension finie. On considère :

- $\Delta \subset \mathfrak{h}^*$  le système de racines de  $\mathfrak{g}$ .

On peut alors choisir un ensemble :

- $\Pi \subset \Delta$  que l'on appelle racines simples de  $\mathfrak{g}$  et qui vérifie

$\Delta = \Delta \cap (\mathbb{N}\Pi \sqcup -\mathbb{N}\Pi)$ . On écrit  $\Pi = \{\alpha_i\}_{i \in I}$  où  $I = \{1, \dots, n\}$ . On note :

- $\Delta^+ = \Delta \cap \mathbb{N}\Pi$  les racines positives de  $\mathfrak{g}$ .

On note alors  $\rho$  la demi somme de toutes les racines positives,

- $\{h_i\}_{i \in I} \subset \mathfrak{h}$  les coracines simples de  $\mathfrak{g}$ ,
- $\{\varpi_i\}_{i \in I} \subset \mathfrak{h}^*$  les poids fondamentaux de  $\mathfrak{g}$ ,
- $P = \bigoplus_{i \in I} \mathbb{Z}\varpi_i$  le  $\mathbb{Z}$ -module libre appelé réseau des poids de  $\mathfrak{g}$ ,
- $P^+$  le cône des poids dominants de  $\mathfrak{g}$ , c'est à dire l'ensemble des combinaisons linéaires de poids fondamentaux de  $\mathfrak{g}$  à coefficients dans  $\mathbb{N}$ .

Ces données vérifient les propriétés suivantes :

- Pour tout  $\alpha \in \Delta$ ,  $\alpha$  est non nul et l'espace

$$\mathfrak{g}_\alpha = \{x \in \mathfrak{g} \mid \forall h \in \mathfrak{h}, [h, x] = \alpha(h)x\}$$

est de dimension 1,

- $\Pi$  est une base de  $\mathfrak{h}^*$ .
- Pour toute racine simple  $\alpha_i$ ,  $h_i$  est l'unique élément de  $\mathfrak{h}$  tel que les formes linéaires  $k(\cdot, h_i)$  et  $\frac{2\alpha_i(\cdot)}{k(\alpha_i, \alpha_i)}$  soient égales,
- les vecteurs  $\{h_1, \dots, h_n\}$  forment une base de  $\mathfrak{h}$  dont  $\{\varpi_1, \dots, \varpi_n\}$  est la base duale,
- Si on pose  $\mathfrak{n} = \bigoplus_{\alpha \in \Delta^+} \mathfrak{g}_\alpha$  et  $\mathfrak{n}^- = \bigoplus_{\alpha \in \Delta^-} \mathfrak{g}_\alpha$  alors on a la décomposition triangulaire  $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n} \oplus \mathfrak{n}^-$ .

On peut alors choisir des éléments  $\{e_1, \dots, e_n\} \in \mathfrak{n}$  et  $\{f_1, \dots, f_n\} \in \mathfrak{n}^-$  tels que, pour tout  $(i, j) \in I^2$ , on ait

$$\begin{cases} [e_i, f_j] = \delta_{i,j}h_i, \\ [h_i, e_j] = \alpha_j(h_i)e_j, \\ [h_i, f_j] = -\alpha_j(h_i)f_j, \end{cases} \quad \text{et}$$

l'ensemble  $\{e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_n\}$  engendre  $\mathfrak{g}$  en tant qu'algèbre de Lie.

### 1.1.3 Groupe de Weyl

Pour toute racine simple  $\alpha_i$ , on définit l'application  $s_i : \mathfrak{h}^* \rightarrow \mathfrak{h}^*$  qui à tout  $x \in \mathfrak{h}^*$  associe :

$$s_i(x) = x - x(h_i)\alpha_i.$$

On l'appelle réflexion par rapport à  $\alpha_i$  et on note  $W$  le groupe de Weyl, engendré par les réflexions  $s_i$ , pour tout  $1 \leq i \leq n$ . Il est bien connu que le groupe de Weyl stabilise  $\Delta$ .

Comme  $s_i^2 = id$ , tout élément de  $W$  s'écrit donc comme un produit fini de réflexions  $s_i$ . Le nombre minimal de réflexions nécessaires à l'écriture d'un élément  $x \in W$  est appelé longueur de  $x$ . Un mot réduit de  $x$  est une écriture  $x = s_{i_1} \dots s_{i_p}$  où  $p$  est la longueur de  $x$ . On sait qu'il existe un unique élément de longueur maximale dans  $W$  que l'on note  $w_0$ .

## 1.2 Groupes de Lie

### 1.2.1 Données usuelles

Soit  $G$  un groupe de Lie complexe semi-simple. On se donne alors :

- $T$  : un tore maximal de  $G$ ,
- $B$  : un sous groupe de Borel contenant  $T$ ,
- $N$  : le radical unipotent de  $B$ ,
- $B^-$  : le sous groupe de Borel opposé à  $B$  par rapport à  $T$ ,
- $N^-$  : son radical unipotent.

Se donner de tels sous-groupes équivaut à se donner les ensembles de la section précédente pour l'algèbre de Lie du groupe  $G$ .

On définit l'ensemble des morphismes de groupes algébriques  $X_*(T) = Hom(\mathbb{C}^*, T)$  et  $X^*(T) = Hom(T, \mathbb{C}^*)$ . Conformément à la correspondance entre algèbres de Lie et groupes de Lie, on appelle ces ensembles respectivement copoids et poids de  $G$ . Lorsque  $\lambda$  et  $\mu$  sont des copoids, on écrit que  $\lambda \geq \mu$  si  $\lambda - \mu$  est une somme de coracines simples.

### 1.2.2 Dual de Langlands

Les ensembles des poids, copoids, racines et coracines suffisent à reconstruire entièrement un groupe algébrique réductif sur  $\mathbb{C}$  (voir le théorème de classification de [25]). Soit  $G$  un groupe de Lie complexe semi-simple. On peut définir le groupe algébrique réductif connexe dont le système de racines est obtenu à partir de celui de  $G$  en échangeant racines et coracines ainsi que poids et copoids. On appelle ce groupe le dual de Langlands de  $G$  et on le note  $\check{G}$ . On note  $\check{\mathfrak{g}}$  son algèbre de Lie.

**Exemple.** Si on prend  $G = SL_n(\mathbb{C})$  alors  $\check{G} = PSL_n(\mathbb{C})$ . En revanche, le groupe  $GL_n(\mathbb{C})$  est auto-dual.

## 1.3 Modules

### 1.3.1 Modules de plus haut poids

On s'intéresse aux représentations de dimension finie du groupe  $G$  ou de son algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$ . Soient  $\lambda$  et  $\mu$  des poids de  $\mathfrak{g}$ . Si  $\lambda - \mu$  est une somme de racines simples, on dit que  $\lambda$  est plus haut que  $\mu$  et on écrit que  $\lambda \geq \mu$ . Comme l'espace vectoriel sous-jacent d'une telle représentation est de dimension finie, il n'y a qu'un nombre fini de sous espaces de poids. Il est bien connu que dans toute représentation irréductible, il existe un plus haut poids. Tout poids  $\nu$  de la représentation ne diffère alors du plus haut poids que par une somme finie de racines simples. Plus précisément, on a le théorème suivant :

**Théorème.** (Weyl) *L'application de l'ensemble des représentations irréductibles de  $\mathfrak{g}$  modulo isomorphisme vers l'ensemble des poids dominants de  $\mathfrak{g}$  qui à toute représentation associe son plus haut poids est une bijection.*

On peut donc associer de manière unique une représentation à un poids dominant et vice versa. Pour  $\lambda \in P^+$ , on note  $L(\lambda)$  la représentation irréductible de plus haut poids  $\lambda$ .

Soit  $v_{high} \in L(\lambda)$ , un vecteur de poids  $\lambda$ . On se donne des indices  $i_1, \dots, i_p$  tels que  $s_{i_1} \dots s_{i_p}$  soit un mot réduit de  $w_0$ . On pose alors  $k_j = s_{i_{j+1}} \dots s_{i_p}(\lambda)(h_{i_j})$  pour tout  $1 \leq j < p$  et  $k_p = \lambda(h_{i_p})$ . La Proposition 28.1.2 de [21] nous assure que  $\frac{f_{i_1}^{k_1}}{k_1!} \dots \frac{f_{i_p}^{k_p}}{k_p!}$  ne dépend pas du choix du mot réduit de  $w_0$  et la proposition 28.1.4 de [21] dit que  $\frac{f_{i_1}^{k_1}}{k_1!} \dots \frac{f_{i_p}^{k_p}}{k_p!} \cdot v_{high}$  est un vecteur non nul de plus bas poids de  $L(\lambda)$ . On le note  $v_{low}$ .

### 1.3.2 Forme contravariante

Dans ce paragraphe, on rappelle la définition de la forme contravariante. Les détails et preuves des résultats énoncés ici se trouvent dans [16], Kapitel 1.

On rappelle que  $(e_i, f_i, h_i)_{i \in I}$  désignent les générateurs de Chevalley et  $(\alpha_i)_{i \in I}$  les racines simples de  $\mathfrak{g}$ . On sait qu'il existe un anti-automorphisme involutif  $\omega$  de l'algèbre enveloppante  $U(\mathfrak{g})$  défini par  $\omega(e_i) = f_i$  et  $\omega(h) = h$  pour tous les générateurs de Chevalley  $(e_i, f_i)$  et tout  $h \in \mathfrak{h}$ .



Une forme contravariante sur le module  $L(\lambda)$  est une forme bilinéaire, symétrique non dégénérée qui vérifie  $(z.x, y) = (x, \omega(z).y)$  pour tous  $x, y \in L(\lambda)$  et tout  $z \in U(\mathfrak{g})$ . Une telle forme contravariante existe et est unique à multiplication par un scalaire près.

### 1.3.3 Involution de Schützenberger

Rappelons la définition de l'involution de Schützenberger. Les détails de la construction se trouvent, par exemple, dans la section 3.3.2 de [23].

Pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ , on définit  $i^*$  l'unique indice tel que  $w_0(\alpha_i) = -\alpha_{i^*}$  puis on définit l'automorphisme  $\zeta$  de  $U(\mathfrak{g})$  sur les générateurs :

$$\zeta(e_i) = f_{i^*},$$

$$\zeta(f_i) = e_{i^*},$$

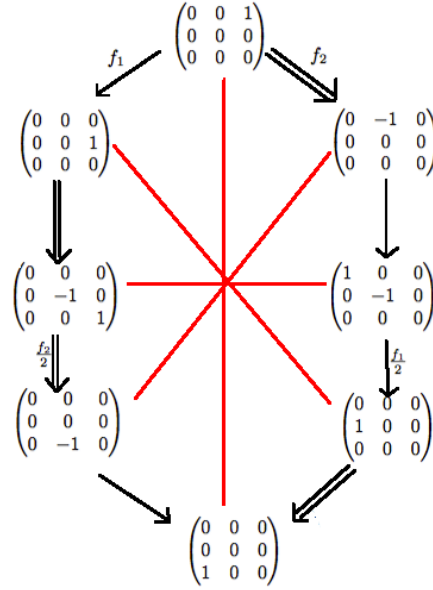
$$\zeta(h_i) = -h_{i^*}.$$

La section 3.3.2 de [23] assure l'existence et l'unicité de l'involution  $S$  de  $L(\lambda)$  vérifiant  $S(v_{high}) = v_{low}$  et  $S(a.x) = \zeta(a).S(x)$  pour tout  $a \in U(\mathfrak{g})$  et tout  $x \in L(\lambda)$ . On l'appelle involution de Schützenberger.

**Exemple 1.** On se place dans le cas où  $\mathfrak{g}$  est l'algèbre de Lie  $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$ . La représentation adjointe est alors  $L(\alpha_1 + \alpha_2)$ . On considère les matrices

- $e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  et  $e_3 = [e_1, e_2]$ ,
- $f_i = e_i^t$ ,
- $h_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  et  $h_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ .

L'action de l'involution de Schützenberger est donnée sur le dessin ci-dessous :



## 1.4 Cristal de Kashiwara

Les cristaux ont été introduits par Kashiwara dans les années 1990 afin d'étudier la combinatoire de la base canonique.

### 1.4.1 Définition

Un cristal de Kashiwara est un ensemble  $B$  muni d'applications :

- $wt : B \rightarrow P$ ,
- $\epsilon_i : B \rightarrow \mathbb{Z}$  pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,
- $\phi_i : B \rightarrow \mathbb{Z}$  pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,
- $\tilde{e}_i : B \rightarrow B \sqcup \{0\}$  pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,
- $\tilde{f}_i : B \rightarrow B \sqcup \{0\}$  pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,

qui vérifient pour tout  $b \in B$  :

- $wt(b)(h_i) = \phi_i(b) - \epsilon_i(b)$ ,
- si  $b, b' \in B$  alors  $\tilde{e}_i(b) = b'$  si et seulement si  $\tilde{f}_i(b') = b$ .

On a alors  $wt(b') = wt(b) + \alpha_i$ ,  $\epsilon_i(b') = \epsilon_i(b) - 1$ ,  $\phi_i(b') = \phi_i(b) + 1$ .

Un cristal  $B$  est dit normal si pour tout  $b \in B$  on a :

$$\epsilon_i(b) = \max \{n \in \mathbb{N} \mid \tilde{e}_i^n(b) \neq 0\} \text{ et } \phi_i(b) = \max \{n \in \mathbb{N} \mid \tilde{f}_i^n(b) \neq 0\}.$$

Tous les cristaux considérés dans cette thèse sont normaux.

Un morphisme entre deux cristaux  $B$  et  $B'$  est une application  $\phi : B \sqcup \{0\} \rightarrow B' \sqcup \{0\}$  qui commute aux opérateurs  $wt, \epsilon_i, \phi_i, \tilde{e}_i, \tilde{f}_i$  pour tout  $i \in I$ .

**Exemple.** Considérons la représentation  $L(\alpha)$  de  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$  dont le plus haut poids est l'unique racine  $\alpha$ . On note  $v_\alpha$  un vecteur de poids  $\alpha$ ,  $v_0$  le vecteur  $f.v_\alpha$  et  $v_{-\alpha}$  le vecteur  $\frac{f^2}{2}.v_\alpha$ . L'ensemble  $B = \{v_\alpha, v_0, v_{-\alpha}\}$  peut être muni d'une structure de cristal de la manière suivante :

$wt : B \rightarrow P$  est l'application qui a un vecteur lui associe son poids, on définit  $\epsilon : B \rightarrow \mathbb{Z}$  et  $\phi : B \rightarrow \mathbb{Z}$  en posant

$$\epsilon(v_\alpha) = 0, \epsilon(v_0) = 1, \epsilon(v_{-\alpha}) = 2,$$

$$\phi(v_\alpha) = 2, \phi(v_0) = 1, \phi(v_{-\alpha}) = 0.$$

On définit  $\tilde{e} : B \rightarrow B \sqcup \{0\}$  et  $\tilde{f} : B \rightarrow B \sqcup \{0\}$  en posant

$$\tilde{e}(v_\alpha) = 0, \tilde{e}(v_0) = v_\alpha, \tilde{e}(v_{-\alpha}) = v_0,$$

$$\tilde{f}(v_\alpha) = v_0, \tilde{f}(v_0) = v_{-\alpha}, \tilde{f}(v_{-\alpha}) = 0.$$

### 1.4.2 Produit tensoriel

On va définir un produit tensoriel dans la catégorie des cristaux de Kashiwara. Nous ne définirons pas tout à fait le produit tensoriel usuel de [19] mais une variante compatible avec les bases que l'on va introduire au chapitre suivant. Ce produit tensoriel est défini et utilisé dans [6].

Si  $(B, wt, \epsilon_i, \phi_i, \tilde{e}_i, \tilde{f}_i)$  et  $(B', wt', \epsilon'_i, \phi'_i, \tilde{e}'_i, \tilde{f}'_i)$  sont des cristaux, alors on peut définir le cristal  $B \otimes B'$  dont l'ensemble sous-jacent est le produit cartésien de  $B$  et  $B'$ , et muni des opérateurs suivants :

- $wt(b \otimes b') = wt(b) + wt'(b')$ ,
- $\tilde{e}_i(b \otimes b') = \begin{cases} \tilde{e}_i(b) \otimes b' & \text{si } \epsilon_i(b) > \phi_i(b') \\ b \otimes \tilde{e}_i(b') & \text{si } \epsilon_i(b) \leq \phi_i(b') \end{cases}$ ,
- $\tilde{f}_i(b \otimes b') = \begin{cases} \tilde{f}_i(b) \otimes b' & \text{si } \epsilon_i(b) \geq \phi_i(b') \\ b \otimes \tilde{f}_i(b') & \text{si } \epsilon_i(b) < \phi_i(b') \end{cases}$ ,
- $\epsilon_i(b \otimes b') = \max(\epsilon_i(b) - wt'(b')(h_i), \epsilon_i(b'))$ ,

- $\phi_i(b \otimes b') = \max(\phi_i(b), \phi_i(b') + wt(b)(h_i))$ .

Ce produit tensoriel est associatif et préserve les cristaux normaux.

**Exemple.** Considérons la représentation  $L(\varpi)$  de  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$  dont le plus haut poids est l'unique poids fondamental  $\varpi$ . On note  $v_\varpi$  un vecteur de poids  $\varpi$  et  $v_{-\varpi}$  le vecteur  $f.v_\varpi$ . On tensorise le cristal  $\{v_{-\varpi}, v_\varpi\}$  avec le cristal  $\{v_{-\alpha}, v_0, v_\alpha\}$  de l'exemple précédent.

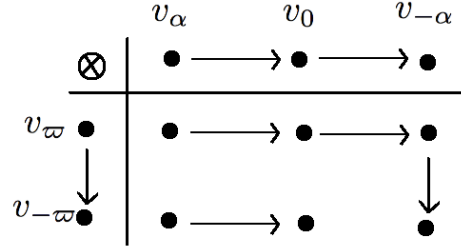
$$wt(b \otimes b') = \begin{cases} 3\varpi & \text{si } b = v_\varpi \text{ et } b' = v_\alpha \\ \varpi & \text{si } (b, b') \in \{(v_\varpi, v_0), (v_{-\varpi}, v_\alpha)\} \\ -\varpi & \text{si } (b, b') \in \{(v_{-\varpi}, v_0), (v_\varpi, v_{-\alpha})\} \\ -3\varpi & \text{si } b = v_{-\varpi} \text{ et } b' = v_{-\alpha} \end{cases},$$

$$\tilde{e}(b \otimes b') = \begin{cases} 0 & \text{si } b = v_\varpi \text{ et } b' = v_\alpha \\ v_\varpi \otimes v_\alpha & \text{si } b = v_\varpi \text{ et } b' = v_0 \\ 0 & \text{si } b = v_{-\varpi} \text{ et } b' = v_\alpha \\ v_{-\varpi} \otimes v_\alpha & \text{si } b = v_{-\varpi} \text{ et } b' = v_0 \\ v_\varpi \otimes v_0 & \text{si } b = v_\varpi \text{ et } b' = v_{-\alpha} \\ v_\varpi \otimes v_{-\alpha} & \text{si } b = v_{-\varpi} \text{ et } b' = v_{-\alpha} \end{cases},$$

$$\tilde{f}(b \otimes b') = \begin{cases} v_\varpi \otimes v_0 & \text{si } b = v_\varpi \text{ et } b' = v_\alpha \\ v_\varpi \otimes v_{-\alpha} & \text{si } b = v_\varpi \text{ et } b' = v_0 \\ v_{-\varpi} \otimes v_0 & \text{si } b = v_{-\varpi} \text{ et } b' = v_\alpha \\ 0 & \text{si } b = v_{-\varpi} \text{ et } b' = v_0 \\ v_{-\varpi} \otimes v_{-\alpha} & \text{si } b = v_\varpi \text{ et } b' = v_{-\alpha} \\ 0 & \text{si } b = v_{-\varpi} \text{ et } b' = v_{-\alpha} \end{cases},$$

$$\epsilon(b \otimes b') = \begin{cases} 0 & \text{si } b = v_\varpi \text{ et } b' = v_\alpha \\ 1 & \text{si } b = v_\varpi \text{ et } b' = v_0 \\ 0 & \text{si } b = v_{-\varpi} \text{ et } b' = v_\alpha \\ 1 & \text{si } b = v_{-\varpi} \text{ et } b' = v_0 \\ 2 & \text{si } b = v_\varpi \text{ et } b' = v_{-\alpha} \\ 3 & \text{si } b = v_{-\varpi} \text{ et } b' = v_{-\alpha} \end{cases} \quad \text{et } \phi(b \otimes b') = \begin{cases} 3 & \text{si } b = v_\varpi \text{ et } b' = v_\alpha \\ 2 & \text{si } b = v_\varpi \text{ et } b' = v_0 \\ 1 & \text{si } b = v_{-\varpi} \text{ et } b' = v_\alpha \\ 0 & \text{si } b = v_{-\varpi} \text{ et } b' = v_0 \\ 1 & \text{si } b = v_\varpi \text{ et } b' = v_{-\alpha} \\ 0 & \text{si } b = v_{-\varpi} \text{ et } b' = v_{-\alpha} \end{cases}.$$

On peut résumer ces données de manière graphique, les flèches indiquant l'action de  $\tilde{f}$  :



On remarque qu'il y a deux composantes connexes à ce graphe. Cela traduit qu'il y a deux composantes isotypiques lorsqu'on écrit  $L(\varpi) \otimes L(\alpha) = L(3\varpi) \oplus L(\varpi)$ .

### 1.4.3 Cristal de plus haut poids

Les cristaux sont un outil combinatoire permettant d'étudier les bases des représentations de  $\mathfrak{g}$ . Par conséquent, il est naturel de chercher à définir une famille de cristaux correspondant à la combinatoire des modules  $L(\lambda)$ .

On dit que  $B$  est un cristal de plus haut poids  $\lambda$  s'il existe  $b_\lambda \in B$  tel que :

- $wt(b_\lambda) = \lambda$ ,
- $\tilde{e}_i.b_\lambda = 0$  pour tout  $i \in I$ ,
- pour tout  $b \in B$ , il existe  $N \in \mathbb{N}$  et  $i_1, \dots, i_N \in I$  tels que  $b' = \tilde{f}_{i_1} \dots \tilde{f}_{i_N}.b_\lambda$ .

On sait d'après le théorème 6.4.21 de [17] qu'il existe une unique famille de cristaux normaux  $\{B(\lambda)\}_{\lambda \in P^+}$  tels que :

- pour tout  $\lambda \in P^+$ ,  $B(\lambda)$  est un cristal de plus haut poids  $\lambda$ ,
- pour tout  $\lambda$  et tout  $\mu \in P^+$ , il existe une injection de cristal  $B(\lambda + \mu) \hookrightarrow B(\lambda) \otimes B(\mu)$  qui envoie  $b_{\lambda+\mu}$  sur  $b_\lambda \otimes b_\mu$ .

Pour tout poids dominant  $\lambda$ , il existe une base du module  $L(\lambda)$  munie d'une structure de cristal isomorphe à  $B(\lambda)$ . Par exemple la base de Mirković et Vilonen, que nous étudions au chapitre suivant.



## Chapitre 2

# Correspondance de Satake géométrique

La grassmannienne affine d'un groupe algébrique complexe  $G$  est une variété complexe de dimension infinie construite à partir de  $G$ . Les travaux de Lusztig, Ginzburg, Beilinson, Drinfeld, Mirković et Vilonen relient la géométrie de cette variété avec la théorie des représentations du dual de Langlands  $\check{G}$  de  $G$ .

En particulier, nous allons nous intéresser à certaines sous variétés de la grassmannienne affine, les cycles de Mirković et Vilonen. Ce sont ces variétés qui vont nous donner une base pour les représentations de  $\check{G}$ .

Afin d'étudier les représentations du groupe  $G$  et non celles du groupe  $\check{G}$ , toutes les constructions relatives à la grassmannienne affine et aux cycles de Mirković et Vilonen seront faites à partir du groupe  $\check{G}$ .

### 2.1 La grassmannienne affine

Dans cette section,  $G$  désigne un groupe algébrique complexe connexe et réductif. On utilise les notations du chapitre 1. On note  $\mathcal{O}$  l'anneau des séries de Laurent  $\mathbb{C}[[t]]$  et  $\mathcal{K}$  son corps des fractions.

**Définition 2.** On appelle grassmannienne affine du groupe  $\check{G}$  l'ensemble  $\check{G}(\mathcal{K})/\check{G}(\mathcal{O})$ . On la note  $Gr$ .

Soit  $\lambda$  un copoids de  $\check{G}$ . Ce copoids induit une application  $\mathcal{K}^* \rightarrow \check{T}(\mathcal{K})$ . On considère alors  $\lambda(t)$  l'image de l'indéterminée  $t$  par  $\lambda$ . C'est un élément de  $\check{G}(\mathcal{K})$ , dont on note  $L_\lambda$  la classe dans la grassmannienne affine. Le groupe  $\check{G}(\mathcal{K})$  et ses sous-groupes  $\check{G}(\mathcal{O})$ ,  $\check{N}(\mathcal{K})$  et  $\check{N}^-(\mathcal{K})$  agissent sur  $Gr$  par multiplication à gauche.

**Définition 3.** Pour tout  $\lambda, \nu \in X_*(T)$ , on définit les orbites suivantes :

$$Gr^\lambda = \check{G}(\mathcal{O}).L_\lambda,$$

$$S_\nu = \check{N}(\mathcal{K}).L_\nu,$$

$$T_\nu = \check{N}^-(\mathcal{K}).L_\nu.$$

Il est bien connu que toute  $\check{G}(\mathcal{O})$ -orbite est de la forme  $Gr^\lambda$  avec  $\lambda$  dominant. L'égalité 2.4 de [22] et la discussion qui en découle impliquent que  $Gr^\lambda$  est une variété algébrique complexe simplement connexe de dimension  $2\rho(\lambda)$ . De plus  $\overline{Gr^\lambda}$  est une variété projective et on a

$$\overline{Gr^\lambda} = \bigcup_{\mu \leq \lambda} Gr^\mu.$$

La grassmannienne affine est ainsi une ind-variété (voir [13] proposition 1.2.2) que l'on munit de la topologie analytique.

**Proposition 4.** ([22] Théorème 3.2)

Pour tout poids dominant  $\lambda$  et tout poids  $\nu$ , l'intersection  $\overline{Gr^\lambda} \cap T_\nu$  est une partie localement fermée de  $Gr$  de dimension pure  $2\rho(\lambda - \nu)$ .

Pour tout poids dominant  $\lambda$  et tout poids  $\nu$ , l'intersection  $\overline{Gr^\lambda} \cap S_\nu$  est une partie localement fermée de  $Gr$  de dimension pure  $2\rho(\lambda + \nu)$ .

## 2.2 Faisceaux pervers sur la grassmannienne affine

On appelle  $\mathcal{S}$  la stratification de  $Gr$  induite par les  $\check{G}(\mathcal{O})$ -orbites (on se réfère à la discussion précédant la proposition 2.1 de [22] pour plus de détails). C'est une stratification de Whitney de  $Gr$  ce qui nous permet de définir la catégorie dérivée bornée  $D_{\mathcal{S}}^b(Gr)$  des faisceaux  $\mathcal{S}$ -constructibles sur la grassmannienne affine et à coefficients dans  $\mathbb{C}$ . Plus précisément, on appelle  $D_{\mathcal{S}}^b(Gr)$  la sous-catégorie pleine de la catégorie dérivée des faisceaux sur la grassmannienne affine et à coefficients dans  $\mathbb{C}$ , dont les objets  $\mathcal{F}$  vérifient :

- $H^k(Gr, \mathcal{F}) = 0$  pour  $|k| \gg 0$ ,
- pour tout  $S \in \mathcal{S}$  et tout  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $H^k(\mathcal{F})|_S$  est un système local de  $\mathbb{C}$ -espaces vectoriels.



On peut alors définir la catégorie  $P_{\mathcal{S}}(Gr)$  des faisceaux pervers sur la grassmannienne affine pour la perversité moyenne en considérant la sous-catégorie pleine de  $D_{\mathcal{S}}^b(Gr)$  dont les objets  $\mathcal{F}$  vérifient les conditions de support et de cosupport :

- pour toute strate  $S \in \mathcal{S}$  et toute injection  $j : S \hookrightarrow Gr$ ,  $H^k(j^* \mathcal{F}) = 0$  dès que  $k > -\dim_{\mathbb{C}}(S)$ ,
- pour toute strate  $S \in \mathcal{S}$  et toute injection  $j : S \hookrightarrow Gr$ ,  $H^k(j^! \mathcal{F}) = 0$  dès que  $k < -\dim_{\mathbb{C}}(S)$ .

On note  $j_{\lambda}$  l'inclusion  $\overline{Gr^{\lambda}} \hookrightarrow Gr$  et  $1$  le système local trivial sur  $Gr^{\lambda}$ . On définit alors  $I_{\lambda}$  comme étant le complexe de cohomologie d'intersection

$$I_{\lambda} = j_{\lambda!} IC(\overline{Gr^{\lambda}}, 1)[\dim(Gr^{\lambda})].$$

La proposition 4.2.11 de [1] nous apprend que les objets simples de la catégorie  $P_{\mathcal{S}}(Gr)$  sont les faisceaux  $I_{\lambda}$ .

## 2.3 Correspondance de Satake géométrique

On considère l'application  $c$  de la grassmannienne affine vers l'espace réduit à un point,  $t_{\nu}$  l'injection de  $\overline{T_{\nu}}$  dans  $Gr$  et  $s_{\nu}$  l'injection de  $\overline{S_{\nu}}$  dans  $Gr$ . Le théorème 3.5 de [22] nous dit qu'il existe un isomorphisme naturel entre les foncteurs

$$H^{2\rho(\nu)}(c_*(t_{\nu})^!(-)) = H_{\overline{T_{\nu}}}^{2\rho(\nu)}(Gr, -) \text{ et } H_c^{2\rho(\nu)}(\overline{S_{\nu}}, -) = H^{2\rho(\nu)}(c_!s_{\nu}^*(-)).$$

On note alors  $F : P_{\mathcal{S}}(Gr) \rightarrow Mod_{\mathbb{C}}$  le foncteur  $\bigoplus_{\nu \in X_*(T)} H_{\overline{T_{\nu}}}^{2\rho(\nu)}(Gr, -)$ . Le théorème 3.6 de [22] nous donne la décomposition suivante :

**Théorème 5.** *Il existe un isomorphisme naturel entre les foncteurs :*

$$H^{\bullet}(Gr, -) \cong \bigoplus_{\nu \in X_*(T)} H_{\overline{T_{\nu}}}^{2\rho(\nu)}(Gr, -) \cong \bigoplus_{\nu \in X_*(T)} H_c^{2\rho(\nu)}(\overline{S_{\nu}}, -).$$

Grâce au théorème 5, on a la décomposition de  $H^{\bullet}(Gr, \mathcal{A})$  en sous-espaces de poids, pour tout  $\mathcal{A} \in P_{\mathcal{S}}(Gr)$ . On en déduit donc l'action du tore dual  $\check{T} \subset \check{G}$  sur l'espace vectoriel  $H^{\bullet}(Gr, \mathcal{A})$ .

Dans la quatrième section de [22], Mirković et Vilonen construisent un produit de convolution  $*$  sur  $P_{\mathcal{S}}(Gr)$ . Ainsi  $P_{\mathcal{S}}(Gr)$  présente une structure de catégorie tannakienne. Le théorème 2.11 de [7] assure qu'il existe un groupe algébrique complexe  $\check{G}$  tel que la catégorie tensorielle  $(P_{\mathcal{S}}(Gr), *)$  soit équivalente à la catégorie

tensorielle des représentations rationnelles de dimension finie de  $\tilde{G}$  sur  $\mathbb{C}$ . Cette équivalence de catégories fait correspondre à  $F$  le foncteur oubli de la catégorie des représentations de dimension finie de  $\tilde{G}$  dans la catégorie des  $\mathbb{C}$ -espaces vectoriels. Le théorème 7.3 de [22] identifie le groupe  $\tilde{G}$  comme étant le groupe  $G$ .

Si  $\lambda$  est un copoids dominant, le foncteur d'hypercohomologie envoie alors le faisceau  $I_\lambda$  sur le module simple  $L(\lambda)$  de plus haut poids  $\lambda$ . Le sous-espace  $L(\lambda)_\nu$  des vecteurs de poids  $\nu$  de  $L(\lambda)$  s'identifie alors avec le groupe de cohomologie de degré  $2\rho(\nu)$  à support dans  $\overline{T}_\nu$  que l'on note  $H_{\overline{T}_\nu}^{2\rho(\nu)}(Gr, I_\lambda)$  ainsi qu'au groupe de cohomologie à support compact de  $\overline{S}_\nu$  de degré  $2\rho(\nu)$  que l'on note  $H_c^{2\rho(\nu)}(\overline{S}_\nu, I_\lambda)$ .

## 2.4 Cycles et base de Mirković et Vilonen

De la correspondance de Satake géométrique, on va déduire une base des représentations de  $G$  que l'on appellera base de Mirković et Vilonen. Pour cela, on commence par étudier les variétés que l'on appelle cycles de Mirković et Vilonen.

### 2.4.1 Cycles de Mirković et Vilonen

Pour toute variété  $X$ , on écrit  $Irr(X)$  pour l'ensemble des composantes irréductibles de  $X$ . Pour tout  $\lambda$  et tout  $\nu$  dans  $X^*(T)$ , les éléments de  $Irr(\overline{Gr}^\lambda \cap T_\nu)$  sont appelés cycles de Mirković et Vilonen (ou cycles MV). On note alors

$$Z(\lambda) = \bigcup_{\nu \in X_*(T)} Irr(\overline{Gr}^\lambda \cap T_\nu)$$

l'ensemble des cycles de Mirković et Vilonen inclus dans  $\overline{Gr}^\lambda$ . Le théorème 3.1 de [6] munit l'ensemble  $Z(\lambda)$  d'une structure de cristal isomorphe à  $B(\lambda)$ . En particulier, à la section 3.3, Braverman et Gaiitgory définissent des opérateurs  $\epsilon_i$ ,  $\phi_i$ ,  $\tilde{\epsilon}_i$  et  $\tilde{f}_i$  sur  $Z(\lambda)$ .

**Exemple 6.** Dans le cas où  $G = Gl_n$ , on prend  $T$  l'ensemble des matrices diagonales inversibles et  $B$  (resp.  $B^-$ ) l'ensemble des matrices triangulaires supérieures (resp. inférieures) inversibles. Pour tout  $\nu \in X^*(T)$  tel que  $\overline{Gr}^{\alpha_1 + \alpha_2} \cap T_\nu$  n'ait qu'une seule composante irréductible, on définit l'ensemble  $Z^\nu$  par :

$$Z^{\alpha_1 + \alpha_2} = \left\{ \begin{bmatrix} t & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & t^{-1} \end{bmatrix} \right\},$$

$$\begin{aligned}
 Z^{\alpha_2} &= \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ at^{-1} & t & 0 \\ 0 & 0 & t^{-1} \end{bmatrix} \mid a \in \mathbb{C} \right\}, Z^{\alpha_1} = \left\{ \begin{bmatrix} t & 0 & 0 \\ 0 & t^{-1} & 0 \\ 0 & bt^{-1} & 1 \end{bmatrix} \mid b \in \mathbb{C} \right\}, \\
 Z^{-\alpha_1} &= \left\{ \begin{bmatrix} t^{-1} & 0 & 0 \\ a + bt^{-1} & t & 0 \\ ct^{-1} & 0 & 1 \end{bmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{C} \right\}, Z^{-\alpha_2} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & t^{-1} & 0 \\ a & c + bt^{-1} & t \end{bmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{C} \right\}, \\
 Z^{-\alpha_1 - \alpha_2} &= \left\{ \begin{bmatrix} t^{-1} & 0 & 0 \\ bt^{-1} & 1 & 0 \\ c + dt^{-1} & a & t \end{bmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{C} \right\}.
 \end{aligned}$$

Le cycle MV correspondant est alors l'adhérence de l'ensemble  $Z^\nu$ . La variété  $\overline{Gr^{\alpha_1 + \alpha_2}} \cap T_0$  étant de dimension 2, les deux cycles de Mirković et Vilonen dans  $\overline{Gr^{\alpha_1 + \alpha_2}} \cap T_0$  sont les adhérences des ensembles suivants :

$$Z_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ at^{-1} & bt^{-1} & 1 \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbb{C}, a \neq 0 \right\}, Z_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ ct^{-1} & 1 & 0 \\ at^{-1} & 0 & 1 \end{bmatrix} \mid a, c \in \mathbb{C}, a \neq 0 \right\}.$$

### 2.4.2 Base de Mirković et Vilonen

La proposition 3.10 de [22] nous permet d'identifier  $L(\lambda)_\nu$  avec l'espace vectoriel  $\mathbb{Q}[Irr(Gr^\lambda \cap T_\nu)]$ , engendré par les composantes irréductibles de  $Gr^\lambda \cap T_\nu$ . Plus précisément, on a la

**Proposition 7.** *Pour tout poids dominant  $\lambda$  et tout poids  $\nu$ , le groupe de cohomologie  $H_{T_\nu}^{2\rho(\nu)}(Gr, I_\lambda)$  est isomorphe au groupe d'homologie de Borel Moore  $H_{top}(Gr^\lambda \cap T_\nu)$  à coefficients dans  $\mathbb{C}$  de dimension maximale de la variété  $Gr^\lambda \cap T_\nu$ .*

Le lemme 4 de l'appendice B de [11] nous dit que les classes fondamentales des composantes irréductibles de  $Gr^\lambda \cap T_\nu$  forment une base de  $H_{top}(\overline{Gr^\lambda} \cap T_\nu)$  et par conséquent une base de  $H_{T_\nu}^{2\rho(\nu)}(Gr, I_\lambda)$ . Via le théorème 5, on obtient une base de  $H^\bullet(Gr, I_\lambda)$  indexée par l'ensemble des cycles MV. C'est cette base que l'on appelle base de Mirković et Vilonen (ou base MV). Pour tout  $Z \in Irr(Gr^\lambda \cap T_\nu)$ , on note  $[Z]$  le vecteur de la base de Mirković et Vilonen de poids  $\nu$  correspondant. Le théorème 2 de [2] nous donne le premier coefficient de l'action de  $e_i$  sur un vecteur de la base de Mirković et Vilonen :

**Théorème 8.** *Soit  $Z \in Z(\lambda)$ . On a alors :*

$$e_i.[Z] = \epsilon_i(Z) \cdot [\tilde{e}_i.Z] + \sum_{\epsilon_i(Z') < \epsilon_i(Z) - 1} a_{Z,Z'}[Z'],$$

avec  $a_{Z,Z'} \in \mathbb{Q}$ .

$$f_i.[Z] = \phi_i(Z) \cdot [\tilde{f}_i.Z] + \sum_{\phi_i(Z') < \phi_i(Z) - 1} b_{Z,Z'}[Z'],$$

avec  $b_{Z,Z'} \in \mathbb{Q}$ .

Par conséquent, la base MV est parfaite au sens de Berenstein et Kazhdan. Elle est donc compatible avec les noyaux des opérateurs  $f_i$ .

## 2.5 Cycles de Mirković et Vilonen généralisés

Dans cette section, on généralise la grassmannienne affine et on utilise la correspondance de Satake géométrique afin d'associer un faisceau au module  $L(\lambda_1) \otimes \dots \otimes L(\lambda_n)$ .

### 2.5.1 Définition

Si  $A$  est un ensemble muni d'une  $\check{G}(\mathcal{O})$ -action à droite et  $B$  un ensemble muni d'une  $\check{G}(\mathcal{O})$ -action à gauche, alors on définit

$$A \overset{\check{G}(\mathcal{O})}{\times} B = A \times B / \mathcal{R},$$

où  $(a, b)\mathcal{R}(a', b')$  si et seulement s'il existe  $k \in G(\mathcal{O})$  tel que  $(a', b') = (a.k, k^{-1}.b)$ .

On définit la variété de convolution  $Conv_n$  de la manière suivante :

$$Conv_n = \underbrace{\check{G}(\mathcal{K}) \overset{\check{G}(\mathcal{O})}{\times} \dots \overset{\check{G}(\mathcal{O})}{\times} \check{G}(\mathcal{K})}_{n-1 \text{ facteurs}} \overset{\check{G}(\mathcal{O})}{\times} \check{G}(\mathcal{K}) / \check{G}(\mathcal{O}).$$

Si  $x_1, \dots, x_n \in \check{G}(\mathcal{K})$  alors on note  $[x_1, \dots, x_n]$  l'image du  $n$ -uplet  $(x_1, \dots, x_n)$  dans le quotient  $Conv_n$ . En particulier si  $x \in \check{G}(\mathcal{K})$  alors  $[x]$  désigne son image dans la grassmannienne affine.

On montre aisément l'existence d'une application  $m : Conv_n \rightarrow Gr$  telle que pour tout  $(x_1, \dots, x_n) \in \check{G}(\mathcal{K})^n$ ,

$$m([x_1, \dots, x_n]) = [x_1 \dots x_n].$$

Soient  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in P^+$ . On pose  $\underline{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ . Comme pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $Gr^{\lambda_i}$  est  $\check{G}(\mathcal{O})$ -stable, on peut définir le sous ensemble de  $Conv_n$  suivant :

$$Gr^{\underline{\lambda}} = \{[x_1, \dots, x_n] \in Gr^n \mid x_1 \check{G}(\mathcal{O}) \in Gr^{\lambda_1}, \dots, x_n \check{G}(\mathcal{O}) \in Gr^{\lambda_n}\}.$$

L'ensemble des variétés  $Gr^{\underline{\lambda}}$  forme une stratification de  $Conv_n$ . On définit aussi pour tout poids  $\mu$ , les ensembles  $S_\mu^n$  et  $T_\mu^n$  par :

$$S_\mu^n = m^{-1}(S_\mu) \text{ et } T_\mu^n = m^{-1}(T_\mu).$$

On appelle  $j_{\underline{\lambda}}$  l'inclusion de  $Gr^{\underline{\lambda}}$  dans  $Conv_n$  et 1 le système local trivial sur  $Gr^{\underline{\lambda}}$ . On définit alors  $I_{\underline{\lambda}}$  comme étant le complexe de cohomologie d'intersection

$$I_{\underline{\lambda}} = j_{\underline{\lambda}*} IC(\overline{Gr^{\underline{\lambda}}}, 1)[\dim(Gr^{\underline{\lambda}})].$$

L'égalité 4.2 de [22] assure que

$$m_* I_{\underline{\lambda}} = I_{\lambda_1} * \dots * I_{\lambda_n}$$

où  $*$  est le produit de convolution sur la catégorie  $P_S(Gr)$  défini à la section 4 de [22]. Par conséquent, le groupe de cohomologie  $H^*(Conv_n, I_{\underline{\lambda}}) = H^*(Gr, m_* I_{\underline{\lambda}})$  s'identifie, à travers la correspondance de Satake géométrique, au produit tensoriel  $L(\lambda_1) \otimes \dots \otimes L(\lambda_n)$ . On peut alors appliquer le foncteur de poids de Mirković et Vilonen. Pour tout poids  $\nu$  de  $G$ , le sous espace de poids  $\nu$  de  $L(\lambda_1) \otimes \dots \otimes L(\lambda_n)$  s'identifie avec le groupe de cohomologie

$$H_{T_\nu}^{2\rho(\nu)}(Gr, m_* I_{\underline{\lambda}}) = H_{T_\nu}^{2\rho(\nu)}(Conv_n, I_{\underline{\lambda}}),$$

en effectuant le changement de base lié au carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} T_\nu^n & \longrightarrow & Conv_n \\ m \downarrow & & \downarrow m \\ T_\nu & \longrightarrow & Gr \end{array}$$

Au paragraphe 2.4 de [14], Goncharov et Shen démontrent, grâce à des arguments similaires à ceux de la section 3 de [22], que

$$H_{T_\nu^n}^{2\rho(\nu)}(\text{Conv}_n, I_\lambda) \cong H_{T_\nu^n \cap Gr^\lambda}^{2\rho(\nu)}(Gr^\lambda, I_\lambda |_{Gr^\lambda}) \cong H_{2\rho(\lambda_1 + \dots + \lambda_n - \nu)}(T_\nu^n \cap Gr^\lambda, \mathbb{C}).$$

De plus le lemme 2.37 de [14] assure que la variété  $T_\nu^n \cap Gr^\lambda$  est de dimension pure  $\rho(\lambda_1 + \dots + \lambda_n - \nu)$ . Il en découle que les classes fondamentales des composantes irréductibles de  $T_\nu^n \cap Gr^\lambda$  forment une base de  $H_{top}(T_\nu^n \cap Gr^\lambda, \mathbb{C})$  et donc une base de  $(L(\lambda_1) \otimes \dots \otimes L(\lambda_n))_\nu$ . On note  $Z(\underline{\lambda})_\mu$  les composantes irréductibles de  $Gr^\lambda \cap T_\mu^n$  et on les appelle cycles de Mirković Vilonen généralisés (ou cycles MVG) de type  $\underline{\lambda}$  et de poids  $\mu$ . Pour tout  $Z \in Z(\underline{\lambda})_\mu$ , on note  $[Z]$  le vecteur associé dans le produit tensoriel  $L(\lambda_1) \otimes \dots \otimes L(\lambda_n)$ . La base du produit tensoriel  $L(\lambda_1) \otimes \dots \otimes L(\lambda_n)$  formée par l'ensemble de ces vecteurs est appelée base de Mirković et Vilonen généralisée (ou base MVG).

## 2.5.2 Propriétés

Soit  $\mu$  un poids dominant de  $G$ . On note  $\mathbb{T}_{(\mu)}$  la composante isotypique de type  $L(\mu)$  de  $\mathbb{T} = L(\lambda_1) \otimes \dots \otimes L(\lambda_n)$  et on définit

$$\mathbb{T}_{\leq(\mu)} = \bigoplus_{\mu' \leq \mu} \mathbb{T}_{(\mu')}.$$

De même on définit  $\mathbb{T}_{<(\mu)}$ . Dans [4], Baumann, Gaussent et Littlemann démontrent le théorème de compatibilité suivant :

**Théorème 9.** *Soit  $\mu$  un poids dominant de  $G$ . On note  $m_\mu$  l'entier tel que la composante isotypique de type  $L(\mu)$  de  $L(\lambda_1) \otimes \dots \otimes L(\lambda_n)$  soit isomorphe au produit cartésien  $L(\mu)^{m_\mu}$ .*

1) *Soit  $Z \in \bigsqcup_{\nu \leq \mu} Z(\underline{\lambda})_\nu$ . Les classes fondamentales  $[Z]$  sélectionnées ainsi forment une base de l'espace de poids  $\leq \mu$  de  $\mathbb{T}$ .*

2) *Il existe un isomorphisme de représentations entre  $\mathbb{T}_{\leq(\mu)}/\mathbb{T}_{<(\mu)}$  et  $L(\mu)^{m_\mu} \cong L(\mu) \otimes \mathbb{C}^{m_\mu}$  qui envoie la base de Mirković et Vilonen généralisée sur les vecteurs de la forme  $v \otimes b$  où  $v$  est un vecteur de la base de Mirković et Vilonen de  $L(\mu)$  et  $b$  est un vecteur de la base canonique de  $\mathbb{C}^{m_\mu}$ .*

Lorsque  $Z_j$  et  $Z_{n-j}$  sont des cycles de Mirković et Vilonen généralisés dans  $\text{Conv}_j$  et  $\text{Conv}_{n-j}$ , on cherche à décomposer le produit tensoriel  $[Z_j] \otimes [Z_{n-j}]$  sur la base des  $[Z']$  où  $Z'$  est un cycle de Mirković et Vilonen généralisé dans  $\text{Conv}_n$ . Pour cela, on a besoin de définir la grassmannienne de Beilinson-Drinfeld.

### 2.5.3 Grassmannienne de Beilinson-Drinfeld

Les constructions générales se font à partir d'une courbe lisse  $X$  quelconque mais nous n'avons besoin que du cas où  $X = \mathbb{A}^1$ . On note  $\Delta$  la diagonale de  $X^n$  et  $\Delta_{j,n-j} = \{(x_1, \dots, x_n) \in X^n \mid x_1 = \dots = x_j, x_{j+1} = \dots = x_n\}$ .

On note  $\mathcal{F}_0$  le  $\check{G}$ -torseur trivial sur  $X$  et  $X_R = X \times \text{Spec}(R)$ . La grassmannienne de Beilinson-Drinfeld est le foncteur  $Gr_{X,n}$  qui à une  $\mathbb{C}$ -algèbre commutative  $R$  associe l'ensemble des classes d'isomorphismes de  $n+2$ -uplets  $(x_1, \dots, x_n, \mathcal{F}, \beta)$  où  $(x_1, \dots, x_n) \in X(R)^n$ ,  $\mathcal{F}$  est un  $\check{G}$ -torseur sur  $X_R$  et  $\beta : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}_0$  est un isomorphisme ailleurs qu'aux points  $x_i$ . C'est un ind-schéma sur  $X^n$  qui est ind-propre dès que  $\check{G}$  est réductif (voir [5] 5 et 3.10 et [24] lemme 3.4). On dispose d'un morphisme évident  $\pi : Gr_{X,n} \rightarrow X^n$  qui ne garde que les  $x_i$ .

De même, on définit la variété de convolution de Beilinson-Drinfeld  $Conv_{X,n}$  comme étant le foncteur qui à une  $\mathbb{C}$ -algèbre commutative  $R$  associe l'ensemble des classes d'isomorphismes de  $3n$ -uplets

$$(x_1, \dots, x_n, \mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n, \beta_1, \dots, \beta_n)$$

où  $(x_1, \dots, x_n) \in X(R)^n$ ,  $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n$  sont des  $\check{G}$ -torseurs sur  $X_R$  et, pour tout  $1 \leq i \leq n$ ,  $\beta_i : \mathcal{F}_i \rightarrow \mathcal{F}_{i-1}$  est un isomorphisme ailleurs qu'au point  $x_i$ . On a encore un morphisme évident  $\tilde{\pi} : Conv_{X,n} \rightarrow X^n$  qui ne garde que les points  $x_i$ .

On définit l'application de multiplication  $m : Conv_{X,n} \rightarrow Gr_{X,n}$  par

$$m(x_1, \dots, x_n, \mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n, \beta_1, \dots, \beta_n) = (x_1, \dots, x_n, \mathcal{F}_n, \beta_1 \circ \dots \circ \beta_n).$$

On se place dans le cas  $X = \mathbb{A}^1$ . L'existence d'une coordonnée globale simplifie grandement les constructions ci-dessus. En effet, tout  $\check{G}$ -torseur sur  $X_R$  est alors isomorphe au  $\check{G}$ -torseur trivial. Par conséquent, dans la définition de  $Gr_{X,n}$  et de  $Conv_{X,n}$  on regarde seulement les morphismes  $\beta_i$  en prenant en compte un possible changement de trivialisations pour les  $\mathcal{F}_i$ . Si  $\beta_i$  est un isomorphisme ailleurs qu'au point  $x_i$  alors, en considérant  $\phi_{i-1}$  et  $\phi_i$  des trivialisations de  $\mathcal{F}_{i-1}$  et  $\mathcal{F}_i$ , la donnée de  $\beta_i$  est équivalente à la donnée de  $\beta$  :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}_{i-1} |_{X \setminus \{x_i\}} & \xleftarrow{\beta_i} & \mathcal{F}_i |_{X \setminus \{x_i\}} \\ \phi_{i-1} \downarrow & & \downarrow \phi_i \\ \mathcal{F}_0 |_{X \setminus \{x_i\}} & \xleftarrow{\beta} & \mathcal{F}_0 |_{X \setminus \{x_i\}} \end{array}$$

La donnée de  $\beta$  est équivalente à la donnée d'un morphisme  $X \setminus \{x_i\} \rightarrow \check{G}$  et donc à un  $\mathbb{C}[t, (t-x_i)^{-1}]$  point de  $\check{G}$ . Un changement de trivialisation étant donnée par un  $\mathbb{C}[t]$  point de  $\check{G}$ , un point de  $Conv_{X,n}$  dans la fibre de  $(x_1, \dots, x_n)$  est donc un point de

$$\underbrace{\check{G}(\mathbb{C}[t, (t-x_1)^{-1}])}_{\text{donnée de } \beta_1} \underbrace{\times}_{\text{Chgmt. de triv. pour } \mathcal{F}_1}^{\check{G}(\mathbb{C}[t])} \dots \underbrace{\times}_{\text{Chgmt. de triv. pour } \mathcal{F}_{n-1}}^{\check{G}(\mathbb{C}[t])} \underbrace{\check{G}(\mathbb{C}[t, (t-x_n)^{-1}])}_{\text{donnée de } \beta_n} / \underbrace{\check{G}(\mathbb{C}[t])}_{\text{Chgmt. de triv. pour } \mathcal{F}_n}.$$

Via cette identification,  $Gr_{X,1}$  est en bijection avec  $Gr \times X$  (respectivement  $Conv_{X,n} \times_{X^n} \Delta$  est en bijection avec  $Conv_n \times X$ ). Pour toute partie  $\check{G}(\mathcal{O})$ -stable  $K$  de  $Gr$  (respectivement de  $Conv_n$ ) on note  $\tau K$  la partie de  $Gr_{X,1}$  (respectivement  $Conv_{X,n} \times_{X^n} \Delta$ ) définie comme la préimage de  $K \times X$  par cette bijection.

On se donne des parties  $\check{G}(\mathcal{O})$ -stables  $K_1, \dots, K_n$  de  $Gr$ . On définit alors la partie  $\tau K_1 \star \dots \star \tau K_n \subset Conv_{X,n}$  par

$$\{(x_1, \dots, x_n, [g_1(t-x_1), \dots, g_n(t-x_n)]) \mid \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_i \in X, g_i(t) \in \check{G}(\mathcal{K}), [g_i(t)] \in K_i\}.$$

De même si  $K_1$  est une partie  $\check{G}(\mathcal{O})$ -stable de  $Gr$  et  $K_2$  une partie  $\check{G}(\mathcal{O})$ -stable de  $Conv_{n-1}$ , alors on définit  $\tau K_1 \star \tau K_2 \subset Conv_{X,n} \times_{X^n} \Delta_{1,n-1}$  par

$$\{(x, y, \dots, y, [g_1(t-x), g_2(t-y), \dots, g_n(t-y)]) \mid [g_1(t)] \in K_1 \text{ et } [g_2(t), \dots, g_n(t)] \in K_2\}.$$

**Exemple 10.** On reprend les constructions de cette partie avec  $G = SL_2$ .

$$U = \left\{ \begin{bmatrix} t & at^{-1} \\ 0 & t^{-1} \end{bmatrix} \mid a \in \mathbb{C} \right\} \subset Gr, \text{ et } V = \left\{ \left[ \begin{bmatrix} t^{-1} & 0 \\ bt^{-1} & t \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} t & ct^{-1} \\ 0 & t^{-1} \end{bmatrix} \right] \mid b, c \in \mathbb{C} \right\} \subset Conv_2.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} & \tau U \star \tau V \\ = & \{(x, y, y, \left[ \begin{bmatrix} t-x & a(t-x)^{-1} \\ 0 & (t-x)^{-1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} (t-y)^{-1} & 0 \\ b(t-y)^{-1} & t-y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} t-y & c(t-y)^{-1} \\ 0 & (t-y)^{-1} \end{bmatrix} \right]) \mid a, b, c \in \mathbb{C}\}. \end{aligned}$$



On souhaite désormais définir  $\tau Z \star \tau Z'$  pour un cycle MV  $Z$  et un cycle MVG  $Z'$ . Ces parties ne sont pas  $\check{G}(\mathcal{O})$ -stables mais seulement  $\check{B}^-(\mathcal{O})$ -stables. On définit alors  $\tau Z \star \tau Z'$  dans la variété de convolution de Beilinson-Drinfeld  $Conv_{B^-, X, n}$  du groupe  $\check{B}^-$  puis on transporte cette partie dans  $Conv_{X, n}$  via  $Conv_{B^-, X, n} \rightarrow Conv_{X, n}$  construite fonctoriellement à partir de l'injection  $B^- \rightarrow G$ . C'est une bijection sur les  $\mathbb{C}$ -points.

On va généraliser la notion d'orbite semi-infinie  $T_\nu$ . On commence par regarder les points fixés par l'action du tore  $T$  dans  $Conv_{X, n}$ . Les composantes connexes de cet ensemble de points fixés sont indexées de façon naturelle par  $X_*(T)^n$ . On note alors  $\mathring{L}_{\nu_1, \dots, \nu_n}$  la composante connexe associée au  $n$ -uplet  $(\nu_1, \dots, \nu_n)$ . La fibre de  $\mathring{L}_{\nu_1, \dots, \nu_n}$  au dessus du point  $(x_1, \dots, x_n)$  est le singleton  $\{(t - x_1)^{\nu_1}, \dots, (t - x_n)^{\nu_n}\}$ . Le morphisme  $\tilde{\pi}$  induit alors un isomorphisme de  $\mathring{L}_{\nu_1, \dots, \nu_n}$  sur  $X^n$ . On se fixe alors un copoids dominant régulier  $\sigma$ , d'où une action de  $\mathbb{C}^*$  sur  $Conv_{X, n}$ . Par analogie avec

$$T_\nu = \{u \in Gr \mid \lim_{a \rightarrow \infty} \sigma(a).u = L_\nu\},$$

on pose

$$T_{\nu_1, \dots, \nu_n} = \{u \in Conv_{X, n} \mid \lim_{a \rightarrow \infty} \sigma(a).u \in \mathring{L}_{\nu_1, \dots, \nu_n}\}.$$

En d'autres termes, lorsque les  $x_i$  sont distincts,  $(x_1, \dots, x_n, [g_1, \dots, g_n]) \in T_{\nu_1, \dots, \nu_n}$  si et seulement si  $g_1 \dots g_n$  est de la forme  $u(t - x_1)^{\nu_1} \dots (t - x_n)^{\nu_n} h$  avec  $h \in G(\mathbb{C}[t])$  et  $u \in N^-(\mathbb{C}[t, (t - x_1)^{-1}, \dots, (t - x_n)^{-1}])$ . Pour tout  $\nu \in X_*(T)$ , on pose

$$\mathring{T}_\nu = \bigsqcup_{\substack{(\nu_1, \dots, \nu_n) \in X_*(T)^n \\ \nu_1 + \dots + \nu_n = \nu}} T_{\nu_1, \dots, \nu_n}.$$

Les fibres de  $\mathring{T}_\nu$  au dessus de points de la diagonale  $\Delta$  s'identifient à la partie  $T_\nu^n$ .

Le preuves de la proposition 11, du corollaire 12, du théorème 13 et de la proposition 14 se trouvent dans l'article de Pierre Baumann, Stéphane Gaussent et Peter Littlemann [4] en cours de rédaction.

**Proposition 11.** *Soient  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in X_*(T)^n$  tous dominants. Soient un poids de  $G$ . On pose  $\underline{\lambda} = (\lambda_2, \dots, \lambda_n)$ . Les composantes irréductibles de  $(\tau Gr^{\lambda_1} \star \tau Gr^{\underline{\lambda}}) \cap \mathring{T}_\nu$  sont exactement les adhérences des ensembles  $\tau Z \star \tau Z'$  avec  $(Z, Z') \in \bigcup_{\nu' + \nu'' = \nu} Z(\lambda_1)_{\nu'} \times Z(\underline{\lambda})_{\nu''}$ .*

**Corollaire 12.** Soient  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in X_*(T)^n$  tous dominants et soit  $\nu$  un poids de  $G$ . On conserve les notations de la proposition précédente. Il y a donc une bijection entre  $Z(\underline{\lambda})_\nu$  et  $\bigcup_{\nu'+\nu''=\nu} Z(\lambda_1)_{\nu'} \times Z(\underline{\lambda})_{\nu''}$ .

Soient  $\nu, \nu'$  et  $\nu''$  des poids de  $G$  tels que  $\nu' + \nu'' = \nu$ . Soient  $Z \in Z(\lambda_1)_{\nu'}$  et  $Z' \in Z(\underline{\lambda})_{\nu''}$ . Si  $Z'' \in Z(\underline{\lambda})_\nu$  est le cycle MVG correspondant au couple  $(Z, Z')$  dans la proposition précédente, alors on s'autorise à noter  $[\tau Z \star \tau Z']$  à la place de  $[Z'']$ .

**Théorème 13.** Soient  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  des copoids dominants. Soit  $1 \leq j \leq n$ . On pose  $\underline{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ ,  $\underline{\lambda}' = (\lambda_1, \dots, \lambda_j)$  et  $\underline{\lambda}'' = (\lambda_{j+1}, \dots, \lambda_n)$ .

Soit  $(\nu, \nu', \nu'') \in X_*(T)^3$  tel que  $\nu = \nu' + \nu''$ . Soit  $(Z', Z'') \in Z(\underline{\lambda}')_{\nu'} \times Z(\underline{\lambda}'')_{\nu''}$  et soit  $Z \in Z(\underline{\lambda})_\nu$ .

Lorsqu'on décompose  $[Z'] \otimes [Z'']$  sur la base de Mirković et Vilonen généralisée, le coefficient devant  $[Z]$  est égal à la multiplicité de  $Z$  dans le produit d'intersection

$$\overline{\tau Z' \star \tau Z''} \cdot \tilde{\pi}^{-1}(x)$$

calculé dans l'espace ambiant  $\tau Gr^{\underline{\lambda}'} \star \tau Gr^{\underline{\lambda}''} \subset Conv_{X,n} \times_{X^n} \Delta_{j,n-j}$ , pour tout point  $x$  appartenant à la diagonale de  $X^n$ .

En étudiant la géométrie de  $\tau Z' \star \tau Z''$ , on peut montrer que la matrice de passage entre nos deux bases de  $L(\lambda_1) \otimes \dots \otimes L(\lambda_n)$  est unitriangulaire. Plus précisément :

**Proposition 14.** Soit  $(\nu', \nu'', \nu'_1, \nu''_1) \in X_*(T)^4$  tel que  $\nu' + \nu'' = \nu'_1 + \nu''_1 = \nu$ . Soit  $(Z', Z'', Z'_1, Z''_1) \in Z(\underline{\lambda}')_{\nu'} \times Z(\underline{\lambda}'')_{\nu''} \times Z(\underline{\lambda}')_{\nu'_1} \times Z(\underline{\lambda}'')_{\nu''_1}$ .

Si  $[Z'_1 \star Z''_1]$  apparaît avec un coefficient non-nul dans le produit tensoriel  $[Z'] \otimes [Z'']$  quand on développe celui-ci sur la base des cycles MVG, alors :

- 1) soit  $\nu'_1 > \nu'$  et  $\nu''_1 < \nu''$  ;
- 2) soit  $(\nu'_1, \nu''_1) = (\nu', \nu'')$  et  $(Z'_1, Z''_1) = (Z', Z'')$ . Dans ce cas, le coefficient est 1.

### 2.5.4 Le cas particulier $G = SL_2$

Dans le cas où  $G = SL_2$ , son dual de Langlands est  $\check{G} = PGL_2$ . Il n'y a qu'un seul poids fondamental  $\varpi$  et a variété  $Gr^\varpi = \check{G}(\mathcal{O})L_\varpi$  est de dimension 1. Le sous-groupe de congruence  $\ker(\check{G}(\mathcal{O}) \rightarrow \check{G}(\mathbb{C}))$  fixe le point  $L_\varpi$  donc  $\check{G}(\mathcal{O})L_\varpi = \check{G}(\mathbb{C})L_\varpi$ . Par conséquent,

$$\check{G}(\mathcal{O})L_\varpi = \check{G}(\mathbb{C})L_\varpi = \check{G}(\mathbb{C})/Stab_{\check{G}(\mathbb{C})}(L_\varpi).$$

Or

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod{\check{G}(\mathcal{O})} \Leftrightarrow b = 0$$

donc  $Stab_{\check{G}(\mathbb{C})}(L_\varpi) = \check{B}^-(\mathbb{C})$ . On a alors  $Gr^\varpi \cong \check{G}(\mathbb{C})/\check{B}^-(\mathbb{C})$ . C'est la variété de drapeaux  $\mathbb{P}^1$ . Cet isomorphisme est donné par  $\phi : \begin{cases} Gr^\varpi \rightarrow \mathbb{P}^1 \\ g.L_\varpi \mapsto g.e_2 \end{cases}$ .

On écrit  $\begin{pmatrix} t & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . L'image de cet élément par  $\phi$  est  $[a : 1]$ . On écrit  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & t \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ . L'image de cet élément par  $\phi$  est  $[1 : b]$ . Ainsi on dispose de deux cartes de  $Gr^\varpi$  :

$$\left\{ \begin{pmatrix} t & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{C} \right\} \text{ et } \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & t \end{pmatrix} \mid b \in \mathbb{C} \right\}.$$

De même, on a une carte de  $\tau Gr^\varpi \star \tau Gr \overbrace{(\varpi, \dots, \varpi)}^{n-1 \text{ copoids}} \times_{X^n} \Delta_{1, n-1}$  donnée par

$$\{(x, y, \dots, y, [\begin{pmatrix} t-x & a_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a_2 & t-y \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} t-y & a_n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}]) \mid a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}\},$$

où les matrices considérées entre crochets sont triangulaires supérieures ou bien inférieures. On peut montrer (et nous admettons que) que l'on décrit bien un ouvert et que l'application

$$(x, y, a_1, \dots, a_n) \mapsto (x, y, \dots, y, [\begin{pmatrix} t-x & a_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a_2 & t-y \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} t-y & a_n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}])$$

est injective.

Par ailleurs, on a  $X_*(T) = \mathbb{Z}^2/(1, 1)\mathbb{Z}$ . Si  $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ , on note  $\overline{(x, y)}$  sa classe dans  $\mathbb{Z}^2/(1, 1)\mathbb{Z}$ . Pour tout  $\nu = (\nu', \nu'') \in X_*(T)$ , on peut écrire

$$(t-x)^\nu = \begin{pmatrix} (t-x)^{\nu'} & 0 \\ 0 & (t-x)^{\nu''} \end{pmatrix}.$$

Soient  $g_1, \dots, g_n \in GL_2(\mathbb{C}[t, t^{-1}])$ , on note  $\bar{g}_i$  l'image de  $g_i$  dans  $PGL_2(\mathbb{C}[t, t^{-1}])$ . On a  $(x_1, \dots, x_n, [g_1(t-x_1), \dots, g_n(t-x_n)]) \in T_{\nu_1, \dots, \nu_n}$  si et seulement si  $\bar{g}_1 \dots \bar{g}_n$  est de la forme  $\begin{pmatrix} (t-x_1)^{\nu_1} \dots (t-x_n)^{\nu_n} & 0 \\ * & (t-x_1)^{\nu'_1} \dots (t-x_n)^{\nu''_n} \end{pmatrix} \bar{h}$  avec  $\bar{h} \in PGL_2(\mathcal{O})$ . Si en plus on prend des représentants  $g_i$  de déterminant  $t-x_i$  alors  $g_1 \dots g_n = \begin{pmatrix} (t-x_1)^{\nu_1} \dots (t-x_n)^{\nu_n} & 0 \\ * & (t-x_1)^{\nu'_1} \dots (t-x_n)^{\nu''_n} \end{pmatrix} h$  avec  $h \in GL_2(\mathcal{O})$ .

On a donc  $g_1 \dots g_n = \begin{pmatrix} (t-x_1)^{\nu_1} \dots (t-x_n)^{\nu_n} & 0 \\ 0 & (t-x_1)^{\nu'_1} \dots (t-x_n)^{\nu''_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C & D \\ E & F \end{pmatrix}$  avec  $\begin{pmatrix} C & D \\ E & F \end{pmatrix} \in GL_2(\mathcal{O})$ . Par conséquent  $(t-x_1)^{\nu_1} \dots (t-x_n)^{\nu_n}$  est le PGCD de la première ligne de  $g_1 \dots g_n$ . On prend un élément

$$(x, y, \dots, y, [g_1(t-x), g_2(t-y), \dots, g_n(t-y)])$$

dans la carte de  $\tau Gr^{\varpi} \star \tau Gr^{\overbrace{(\varpi, \dots, \varpi)}^{n-1 \text{ copoids}}} \times_{X^n} \Delta_{1, n-1}$  décrite ci-dessus. Soit  $(\nu_1, \dots, \nu_n) \in X_*(T)^n$ , pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  on écrit  $\nu_i = (\nu'_i, \nu''_i) \in \mathbb{Z}^2 / (1, 1)\mathbb{Z}$ . Il est équivalent de dire que  $(x, y, \dots, y, [g_1(t-x), g_2(t-y), \dots, g_n(t-y)]) \in T_{\nu_1, \dots, \nu_n}$  et que  $(t-x)^{\nu_1} (t-y)^{\nu_2} \dots (t-y)^{\nu_n}$  est le PGCD de la première ligne de  $g_1(t-x)g_2(t-y) \dots g_n(t-y)$ .

## Chapitre 3

# Bases et involution de Schützenberger

### 3.1 Forme d'intersection

#### 3.1.1 Définition, dualité de Verdier

On sait que  $\overline{Gr^\lambda}$  est une variété projective. De ce fait,  $H_c^p(\overline{Gr^\lambda}, \mathcal{A}) = H^p(\overline{Gr^\lambda}, \mathcal{A})$  pour tout  $p \in \mathbb{Z}$  et tout  $\mathcal{A} \in D_S^b(\overline{Gr^\lambda})$ . On note  $\underline{\mathbb{C}}$  le faisceau constant sur  $\overline{Gr^\lambda}$  et on fait l'identification suivante :

$$H^p(\overline{Gr^\lambda}, I_\lambda) = \text{Hom}_{D_S^b(\overline{Gr^\lambda})}(\underline{\mathbb{C}}, I_\lambda[p]) \text{ pour tout } p \in \mathbb{Z}.$$

On appelle  $\mathcal{D}$  le complexe dualisant de  $\overline{Gr^\lambda}$ . Le complexe dualisant  $\mathcal{D}$  représente le foncteur

$$F : \mathcal{A} \mapsto (\text{Hom}_{D_S^b(\overline{Gr^\lambda})}(\underline{\mathbb{C}}, \mathcal{A}))^*$$

de la catégorie  $D_S^b(\overline{Gr^\lambda})$  vers la catégorie  $\text{Vect}_{\mathbb{C}}$  des  $\mathbb{C}$ -espaces vectoriels. Il y a donc un isomorphisme de foncteurs (voir [15] Théorème V.2.1)

$$\kappa : \text{Hom}_{D_S^b(\overline{Gr^\lambda})}(\cdot, \mathcal{D}) \rightarrow F.$$

On appelle  $\int \in F(\mathcal{D})$  l'image par  $\kappa_{\mathcal{D}}$  de la flèche identité  $id_{\mathcal{D}}$ . On peut voir  $\int$  comme une forme linéaire sur  $\bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} H^k(\overline{Gr^\lambda}, \mathcal{D})$  nulle partout sauf en degré 0. Le

lemme de Yoneda assure que l'image par  $\kappa_{\mathcal{A}}$  d'une flèche  $f \in \text{Hom}_{D_S^b(\overline{Gr^\lambda})}(\mathcal{A}, \mathcal{D})$  est la forme linéaire qui à  $g \in \text{Hom}_{D_S^b(\overline{Gr^\lambda})}(\mathbb{C}, \mathcal{A})$  associe  $\int f \circ g$ . On définit alors, grâce au complexe dualisant  $\mathcal{D}$ , le foncteur de dualité de Verdier  $\mathbb{D} = \mathbb{R}\mathcal{H}om(\cdot, \mathcal{D})$  dans la catégorie  $D_S^b(\overline{Gr^\lambda})$ . Le morphisme de l'égalité 8.6 de [22] est un isomorphisme. Il existe donc un isomorphisme  $\eta : I_\lambda \rightarrow \mathbb{D}(I_\lambda)$ .

Soient  $x, y \in H^\bullet(\overline{Gr^\lambda}, I_\lambda)$  homogènes de degrés respectifs  $k$  et  $k'$ . Avec notre identification,  $x \in \text{Hom}_{D_S^b(\overline{Gr^\lambda})}(\mathbb{C}, I_\lambda[k])$  et  $y \in \text{Hom}_{D_S^b(\overline{Gr^\lambda})}(\mathbb{C}, I_\lambda[k'])$ . On cherche à définir un cup-produit  $x \cup y$ . La transformation naturelle

$$\text{Hom}_{D_S^b(\overline{Gr^\lambda})}(\mathcal{A} \overset{L}{\otimes} \mathcal{B}, \mathcal{C}) \cong \text{Hom}_{D_S^b(\overline{Gr^\lambda})}(\mathcal{A}, \mathbb{R}\mathcal{H}om(\mathcal{B}, \mathcal{C}))$$

est un isomorphisme pour tout  $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C} \in D_S^b(\overline{Gr^\lambda})$  (voir [20] 2.6.7). En particulier, la transformation suivante est naturelle

$$T : \text{Hom}_{D_S^b(\overline{Gr^\lambda})}(\cdot, \mathbb{D}(I_\lambda)) \xrightarrow{\cong} \text{Hom}_{D_S^b(\overline{Gr^\lambda})}(\cdot \overset{L}{\otimes} I_\lambda, \mathcal{D}).$$

On note alors  $\psi \in \text{Hom}_{D_S^b(\overline{Gr^\lambda})}(I_\lambda \overset{L}{\otimes} I_\lambda, \mathcal{D})$  l'image de  $\eta$  par  $T_{I_\lambda}$ . Ainsi, on peut composer  $\psi$  et  $x \overset{L}{\otimes} y \in \text{Hom}_{D_S^b(\overline{Gr^\lambda})}(\mathbb{C} \overset{L}{\otimes} \mathbb{C}, I_\lambda \overset{L}{\otimes} I_\lambda[k + k'])$ .

Pour tout  $\mathcal{A} \in D_S^b(Gr)$ , on désigne par  $r_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \overset{L}{\otimes} \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{A}$  le quasi-isomorphisme de contraction à droite et par  $l_{\mathcal{A}} : \mathbb{C} \overset{L}{\otimes} \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  le quasi-isomorphisme de contraction à gauche. Les deux sont évidemment des transformations naturelles. Le cup produit  $x \cup y$  est alors l'élément

$$\psi \circ (x \overset{L}{\otimes} y) \circ l_{\mathbb{C}}^{-1} \in \text{Hom}_{D_S^b(\overline{Gr^\lambda})}(\mathbb{C}, \mathcal{D}[k + k']).$$

Grâce à l'identification faite en début de section,  $x \cup y \in H^{k+k'}(\overline{Gr^\lambda}, \mathcal{D})$ . On peut alors définir une forme bilinéaire sur  $H^\bullet(\overline{Gr^\lambda}, I_\lambda) \times H^\bullet(\overline{Gr^\lambda}, I_\lambda)$ .

**Définition 15.** Pour tous éléments  $x$  et  $y$  de  $H^\bullet(\overline{Gr^\lambda}, I_\lambda)$  homogènes de degrés respectifs  $k$  et  $k'$ , on définit la forme d'intersection par

$$\langle x, y \rangle = \int x \cup y = \int \psi \circ (x \overset{L}{\otimes} y) \circ l_{\mathbb{C}}^{-1}.$$

La forme d'intersection s'étend alors par bilinéarité à  $H^\bullet(\overline{Gr^\lambda}, I_\lambda) \times H^\bullet(\overline{Gr^\lambda}, I_\lambda)$  tout entier.

### 3.1.2 Propriétés

**Théorème 16.** *La forme d'intersection est une forme bilinéaire non dégénérée sur  $H^\bullet(\overline{Gr^\lambda}, I_\lambda)$ .*

*Démonstration.* Il faut montrer que l'application

$$\begin{array}{ccc} H^\bullet(\overline{Gr^\lambda}, I_\lambda) & \rightarrow & (H^\bullet(\overline{Gr^\lambda}, I_\lambda))^* \\ x & \mapsto & \langle x, \cdot \rangle \end{array}$$

est bijective. Le quasi isomorphisme  $l$  est une transformation naturelle. Ainsi, pour tout  $y \in Hom_{D_S^b(\overline{Gr^\lambda})}(\mathbb{C}, I_\lambda[-p])$ , le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \xrightarrow{y} & I_\lambda[-p] \\ \uparrow l_{\mathbb{C}} & & \uparrow l_{I_\lambda} \\ \mathbb{C} \otimes^L \mathbb{C} & \xrightarrow[1 \otimes y]{L} & \mathbb{C}_{\overline{Gr^\lambda}} \otimes^L I_\lambda[-p] \end{array}$$

Par conséquent  $\langle x, y \rangle = \int \psi \circ (x \otimes y) \circ l_{\mathbb{C}}^{-1} = \int \psi \circ (x \otimes id_{I_\lambda}) \circ l_{I_\lambda}^{-1} \circ y$ . Les compositions à gauche et à droite

$$\eta \circ : Hom_{D_S^b(\overline{Gr^\lambda})}(\mathbb{C}, I_\lambda[p]) \rightarrow Hom_{D_S^b(\overline{Gr^\lambda})}(\mathbb{C}, \mathbb{D}(I_\lambda[-p])) \text{ et}$$

$$\circ l_{I_\lambda}^{-1} : Hom_{D_S^b(\overline{Gr^\lambda})}(\mathbb{C} \otimes^L I_\lambda[-p], \mathcal{D}) \rightarrow Hom_{D_S^b(\overline{Gr^\lambda})}(I_\lambda[-p], \mathcal{D})$$

sont des isomorphismes. L'isomorphisme naturel

$$T_{\mathbb{C}[-p]} : Hom_{D_S^b(\overline{Gr^\lambda})}(\mathbb{C}, \mathbb{D}(I_\lambda[-p])) \rightarrow Hom_{D_S^b(\overline{Gr^\lambda})}(\mathbb{C} \otimes^L I_\lambda[-p], \mathcal{D})$$

envoie  $\eta \circ x$  sur  $\psi \circ (x \otimes id_{I_\lambda})$ . La transformation naturelle

$$\kappa_{I_\lambda[-p]} : Hom_{D_S^b(\overline{Gr^\lambda})}(I_\lambda[-p], \mathcal{D}) \rightarrow (Hom_{D_S^b(\overline{Gr^\lambda})}(\mathbb{C}, I_\lambda[-p]))^*,$$

qui à  $f$  associe la forme linéaire  $g \mapsto \int f \circ g$  est aussi un isomorphisme. Par conséquent,  $x \mapsto \langle x, \cdot \rangle$  est l'isomorphisme

$$\kappa_{I_\lambda[-p]} \circ (\circ l_{I_\lambda}^{-1}) \circ T_{\underline{\mathbb{C}}} \circ (\eta \circ).$$

□

On s'intéresse alors au comportement de la forme d'intersection vis à vis de la décomposition en espaces de poids :

$$H^\bullet(Gr, I_\lambda) = \bigoplus_{\nu \in X_*(T)} H_{T_\nu}^{2\rho(\nu)}(Gr, I_\lambda).$$

**Lemme 17.** *Soient  $x$  et  $y$  des vecteurs de  $H^\bullet(Gr, I_\lambda)$  de poids  $\mu$  et  $\nu$  respectivement. Si  $\langle x, y \rangle \neq 0$ , alors nécessairement  $\nu = w_0(\mu)$ .*

*Démonstration.* D'après le théorème 3.6 de [22], les espaces  $H_{T_\nu}^{2\rho(\nu)}(Gr, I_\lambda)$  sont indépendants du couple  $(T, B)$ . Donc  $H_{T_\mu}^{2\rho(\mu)}(Gr, I_\lambda) \cong H_{S_{w_0(\mu)}}^{2\rho(\mu)}(Gr, I_\lambda)$ . L'égalité II.10.1 de [15] nous donne

$$x \cup y \in H_{S_{w_0(\mu)} \cap T_\nu}^{2\rho(\mu) + 2\rho(\nu)}(Gr, \mathcal{D}).$$

Supposons que  $\langle x, y \rangle \neq 0$ .

Le lemme 2.1 de [18] avec  $w = e$  et  $v = w_0$  nous apprend que  $\overline{S_{w_0(\mu)}} \cap \overline{T_\nu}$  est vide sauf si  $\nu \leq w_0(\mu)$ . Comme  $\langle x, y \rangle = \int x \cup y$ , on a  $x \cup y \neq 0$  et nécessairement, on a  $\nu \leq w_0(\mu)$ .

Comme  $\int x \cup y \neq 0$ , nécessairement  $x \cup y$  est de degré 0. Par conséquent  $\rho(\nu - w_0(\mu)) = 0$ .

Ces deux résultats assurent que  $\nu = w_0(\mu)$ . □

Soit  $e \in H^2(Gr, \mathbb{C})$ . On a le lemme fondamental suivant :

**Lemme 18.** *Pour tout  $(x, y) \in (H^\bullet(Gr, I_\lambda))^2$ , on a  $\langle x \cup e, y \rangle = \langle x, y \cup e \rangle$ .*

*Démonstration.* Soient  $x$  et  $y$  deux vecteurs homogènes de  $H^\bullet(Gr, I_\lambda)$  de degrés  $k$  et  $k'$ . On rappelle l'identification  $H^p(Gr, I_\lambda) \cong Hom_{D_S^b(\overline{Gr^\lambda})}(\mathbb{C}, I_\lambda[p])$  pour tout  $p$ . Le cup produit avec  $e$  est défini comme

$$z \cup e = r_{I_\lambda} \circ (z \overset{L}{\otimes} e) \circ r_{\underline{\mathbb{C}}}^{-1}$$

pour tout  $z \in H^\bullet(Gr, I_\lambda)$ . Donc



$$\langle x \cup e, y \rangle = \int \psi \circ (r_{I_\lambda} \otimes^L id_{I_\lambda}) \circ (x \otimes^L e \otimes^L y) \circ (r_{\mathbb{C}}^{-1} \otimes^L id_{\mathbb{C}}) \circ l_{\mathbb{C}}^{-1}.$$

D'après l'égalité II.10.3 de [15] et le fait que  $e$  est de degré pair, on a aussi que  $z \cup e = l_{I_\lambda} \circ (e \otimes^L z) \circ l_{\mathbb{C}}^{-1}$  pour tout  $z \in H^\bullet(Gr, I_\lambda)$ . La proposition 2.2.3 de [8] assure que l'on a  $r_{\mathcal{A}} \otimes^L id_{\mathcal{B}} = id_{\mathcal{A}} \otimes^L l_{\mathcal{B}}$  pour tous  $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in D_S^b(\overline{Gr^\lambda})$ . Le diagramme suivant est alors commutatif.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \mathbb{C} \otimes^L \mathbb{C} \otimes^L \mathbb{C} & \xrightarrow{x \otimes^L e \otimes^L y} & I_\lambda[k] \otimes^L \mathbb{C}[2] \otimes^L I_\lambda[k'] & & \\
 & \nearrow^{id_{\mathbb{C}} \otimes^L l_{\mathbb{C}}^{-1}} & \parallel & & \parallel & \searrow^{id_{I_\lambda} \otimes^L l_{I_\lambda}} & \\
 \mathbb{C} \otimes^L \mathbb{C} & & & & & & I_\lambda \otimes^L I_\lambda[k+k'+2] \\
 & \searrow_{r_{\mathbb{C}}^{-1} \otimes^L id_{\mathbb{C}}} & \parallel & & \parallel & \nearrow_{r_{I_\lambda} \otimes^L id_{I_\lambda}} & \\
 & & \mathbb{C} \otimes^L \mathbb{C} \otimes^L \mathbb{C} & \xrightarrow{x \otimes^L e \otimes^L y} & I_\lambda[k] \otimes^L \mathbb{C}[2] \otimes^L I_\lambda[k'] & & 
 \end{array}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
 \langle x \cup e, y \rangle &= \int \psi \circ (r_{I_\lambda} \otimes^L id_{I_\lambda}) \circ (x \otimes^L e \otimes^L y) \circ (r_{\mathbb{C}}^{-1} \otimes^L id_{\mathbb{C}}) \circ l_{\mathbb{C}}^{-1} \\
 &= \int \psi \circ (id_{I_\lambda} \otimes^L l_{I_\lambda}) \circ (x \otimes^L e \otimes^L y) \circ (id_{\mathbb{C}} \otimes^L l_{\mathbb{C}}^{-1}) \circ l_{\mathbb{C}}^{-1} \\
 &= \langle x, y \cup e \rangle
 \end{aligned}$$

ce qui conclut la preuve du lemme.  $\square$

### 3.1.3 Identification avec la forme contravariante.

A travers la correspondance de Satake géométrique,  $H^\bullet(Gr, I_\lambda)$  s'identifie avec  $L(\lambda)$  et  $H_{T_\mu}^{2\rho(\mu)}(Gr, I_\lambda)$  s'identifie avec  $L(\lambda)_\mu$ . On considère alors la forme bilinéaire d'intersection comme une forme bilinéaire sur  $L(\lambda)$ . On désigne encore par  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  la forme bilinéaire d'intersection sur  $L(\lambda)$ . On reprend les notations du chapitre 1.

**Définition 19.** On pose  $(\cdot, \cdot)$  l'unique forme contravariante sur  $L(\lambda)$  telle que  $(v_{low}, v_{low}) = \langle v_{low}, v_{high} \rangle$ .

**Théorème 20.** Pour tout couple  $(x, y) \in L(\lambda)^2$ , on a  $\langle x, y \rangle = (x, S(y))$  où  $S$  est l'involution de Schützenberger de  $L(\lambda)$  définie au chapitre 1.

*Démonstration.* On choisit un produit scalaire  $W$ -invariant sur  $X_*(T)$  et on définit  $q(\alpha_i)$  comme étant le carré de la longueur de la racine  $\alpha_i$ . On considère alors  $e = \sum q(\alpha_i)e_i$ . On peut voir dans [26] et dans [13], theorem 1.7.6 que l'action de ce nilpotent principal s'identifie avec le cup produit avec la première classe de Chern, aussi appelée  $e$ , d'un fibré en droites sur  $Gr$ . De plus,  $q(\alpha_j) = q(\alpha_{j^*})$  car le produit scalaire choisi est  $W$ -invariant. Par conséquent  $\omega(\zeta(e)) = e$ .

On rappelle que les sous espaces de plus haut et plus bas poids de  $L(\lambda)$  sont de dimension 1 et engendrés par  $v_{high}$  et  $v_{low}$  respectivement. Par définition

$$\langle v_{low}, v_{high} \rangle = (v_{low}, v_{low}) = (v_{low}, S(v_{high}))$$

donc par linéarité et orthogonalité des sous espaces de poids, le théorème est vrai pour tout  $x \in L(\lambda)_{w_0(\lambda)}$  et tout  $y \in L(\lambda)$ .

On fait alors une récurrence sur la hauteur du poids de  $x$ . On montre que la propriété suivante est vraie pour tout  $n$ .

$P(n)$  : Pour tout poids  $\nu$  de hauteur  $n$  et tout  $x \in L(\lambda)_\nu$ , on a  $\langle x, z \rangle = (x, S(z))$  pour tout  $z \in L(\lambda)$ .

Pour la plus petite hauteur possible, il n'y a que le poids  $w_0(\lambda)$  possible. Or on vient de montrer que le théorème est vrai pour tout  $x \in L(\lambda)_{w_0(\lambda)}$  et tout  $y \in L(\lambda)$ . Par conséquent  $P(ht(w_0(\lambda)))$  est vraie.

Supposons que  $P(n)$  est vraie. Soit  $\nu$  un poids de hauteur  $n+1$  et soit  $x \in L(\lambda)_\nu$ . On peut écrire que

$$x = \sum_{j \in J} q(\alpha_j) e_j x_j$$

où  $J$  est un ensemble fini et pour tout  $j \in J$ ,  $x_j$  est un vecteur de poids  $\nu - \alpha_j$ . Par hypothèse de récurrence,  $\langle x_j, z \rangle = (x_j, S(z))$  pour tout  $z \in L(\lambda)$ .

1. Si  $y$  est un vecteur de poids dont le poids n'est pas  $w_0(\nu)$ , alors  $\langle x, y \rangle = 0$  et  $(x, S(y)) = 0$  par orthogonalité des espaces de poids.
2. Si  $y \in L(\lambda)_{w_0(\nu)}$ , pour tout  $j \in J$ , on a

$$\langle q(\alpha_j) e_j x_j, y \rangle = \langle e x_j, y \rangle \text{ et } (q(\alpha_j) e_j x_j, S(y)) = (e x_j, S(y)).$$

Le lemme 18 et l'hypothèse de récurrence impliquent :

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle &= \sum_{j \in J} \langle e x_j, y \rangle = \sum_{j \in J} \langle x_j, e y \rangle = \sum_{j \in J} (x_j, S(e y)) = \sum_{j \in J} (x_j, \zeta(e) S(y)) \\ &= \sum_{j \in J} (\omega(\zeta(e)) x_j, S(y)) \end{aligned}$$

Alors

$$\sum_{j \in J} (\omega(\zeta(e)).x_j, S(y)) = \sum_{j \in J} (e.x_j, S(y)) = \sum_{j \in J} (q(\alpha_j)e_j.x_j, S(y))$$

donc  $\langle x, y \rangle = (x, S(y))$  pour tout  $y \in L(\lambda)$ .

Donc  $P(n+1)$  est vraie et le théorème est prouvé.  $\square$

### 3.1.4 Exemple de la représentation adjointe de $\mathfrak{sl}_3$

On va donner la matrice de la forme d'intersection de la représentation adjointe  $L(\alpha_1 + \alpha_2)$  de  $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$  en poids 0. On reprend les notations de l'exemple 1. Pour tout  $i \in I$ , on considère l'application

$$ad(f_i) : \begin{cases} \mathfrak{sl}_3(\mathbb{C}) & \rightarrow \mathfrak{sl}_3(\mathbb{C}) \\ M & \mapsto f_i.M - M.f_i \end{cases}.$$

Pour les espaces de poids de dimension 1, on note  $[Z^\alpha]$  l'unique vecteur de la base de Mirković et Vilonen de  $L(\alpha_1 + \alpha_2)$  de poids  $\alpha$ . Grâce au lemme de Schur, on choisit un isomorphisme entre la représentation adjointe et  $L(\alpha_1 + \alpha_2)$  tel que  $[Z^{\alpha_1 + \alpha_2}] = e_3$ . On cherche à exprimer la base de Mirković et Vilonen de  $L(\alpha_1 + \alpha_2)$  en fonction des matrices posées ci dessus. Grâce au théorème 8, on trouve

$$[Z^{\alpha_1}] = -e_1 \text{ et } [Z^{\alpha_2}] = e_2.$$

Le sous espace de poids 0 est de dimension 2 et engendré par les vecteurs  $[Z_1]$  et  $[Z_2]$ . Comme la base est compatible avec les noyaux des opérateurs  $ad(f_i)$ , on choisit ces indices pour que  $[Z_1] \in Ker(ad(f_1)) \cap L(\alpha_1 + \alpha_2)_0$  et  $[Z_2] \in Ker(ad(f_2)) \cap L(\alpha_1 + \alpha_2)_0$ . On calcule facilement

$$\begin{aligned} Ker(ad(f_1)) \cap L(\alpha_1 + \alpha_2)_0 &= Vect(2h_2 + h_1), \\ Ker(ad(f_2)) \cap L(\alpha_1 + \alpha_2)_0 &= Vect(2h_1 + h_2). \end{aligned}$$

Un calcul immédiat donne alors

$$f_1.[Z^{\alpha_1}] = h_1 \text{ et } f_2.[Z^{\alpha_2}] = -h_2.$$

Or d'après le théorème 8,  $f_1.[Z^{\alpha_1}]$  est de la forme  $2[Z_2] + b[Z_1]$  et

$$h_1 = \frac{2(2h_1 + h_2) - (2h_2 + h_1)}{3} = 2\frac{2h_1 + h_2}{3} - \frac{2h_2 + h_1}{3}.$$

On déduit  $[Z_2] = \frac{2h_1+h_2}{3}$  et de même  $[Z_1] = -\frac{2h_2+h_1}{3}$ . L'involution de Schützenberger  $S$  vérifie

$$S(h_1) = S(-f_1.f_2.e_3) = -e_2.e_1.S(e_3) = e_2.e_1.f_3 = -h_2 \text{ et donc } S(h_2) = -h_1.$$

On a alors

$$S([Z_1]) = [Z_2] \text{ et } S([Z_2]) = [Z_1].$$

En utilisant que  $h_1 = f_1.f_2.e_3$  et  $h_2 = -f_2.f_1.e_3$ , on a, pour toute forme contravariante  $(.,.)$ ,

$$(h_1, h_1) = (h_2, h_2) = 2(e_3, e_3) \text{ et } (h_1, h_2) = -(e_3, e_3).$$

L'expression de  $[Z_1]$  et  $[Z_2]$  en fonction de  $h_1$  et  $h_2$  donne alors :

$$\langle [Z_1], [Z_1] \rangle = ([Z_1], [Z_2]) = \frac{-1}{3}(e_3, e_3) = \langle [Z_2], [Z_2] \rangle,$$

$$\langle [Z_1], [Z_2] \rangle = ([Z_1], [Z_1]) = \frac{2}{3}(e_3, e_3) = \langle [Z_2], [Z_1] \rangle.$$

Or  $Z^{\alpha_1+\alpha_2} = \overline{Gr^{\alpha_1+\alpha_2}}$  et  $Z^{-\alpha_1-\alpha_2} = \{L_{-\alpha_1-\alpha_2}\}$ . La multiplicité d'intersection d'un point d'une variété dans le produit d'intersection du point et de cette variété est égal à 1. Par conséquent,

$$(e_3, e_3) = \langle [Z^{\alpha_1+\alpha_2}], [Z^{-\alpha_1-\alpha_2}] \rangle = 1.$$

La restriction de la forme d'intersection au sous-espace de poids 0 a donc pour matrice  $\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$  dans la base  $\{[Z_1], [Z_2]\}$ .

## 3.2 Involution de Schützenberger et base de Mirković et Vilonen généralisée

On souhaite démontrer que l'involution de Schützenberger stabilise la base de Mirković et Vilonen. On suppose désormais que les représentations fondamentales de  $\mathfrak{g}$  sont minuscules. Pour tout poids fondamental  $\varpi_i$  de  $\mathfrak{g}$ , les sous espaces de poids de  $L(\varpi_i)$  sont tous de dimension 1. Par conséquent, la base MV des représentations fondamentales est stable par l'involution de Schützenberger. On cherche à étendre cette propriété à toute représentation de  $\mathfrak{g}$ .

On note  $\varpi_1, \dots, \varpi_n$  les copoids fondamentaux de  $G$ . Soit  $\lambda$  un copoids dominant. Il existe des entiers naturels  $p_1, \dots, p_n$  tels que  $\lambda = p_1\varpi_1 + \dots + p_n\varpi_n$ . On note  $\underline{\lambda} = (\underbrace{\varpi_1, \dots, \varpi_1}_{p_1 \text{ facteurs}}, \dots, \underbrace{\varpi_n, \dots, \varpi_n}_{p_n \text{ facteurs}})$  et  $\bar{\lambda} = (\underbrace{\varpi_n, \dots, \varpi_n}_{p_n \text{ facteurs}}, \dots, \underbrace{\varpi_1, \dots, \varpi_1}_{p_1 \text{ facteurs}})$ . On rappelle que  $Z(\underline{\lambda})$  désigne l'ensemble des cycles de Mirković et Vilonen généralisés de  $Gr^\lambda$ . La représentation  $L(\lambda)$  apparaît alors avec multiplicité 1 dans

$$L(\underline{\lambda}) = \underbrace{L(\varpi_1) \otimes \dots \otimes L(\varpi_1)}_{p_1 \text{ facteurs}} \otimes \dots \otimes \underbrace{L(\varpi_n) \otimes \dots \otimes L(\varpi_n)}_{p_n \text{ facteurs}}.$$

Les autres composantes isotypiques de ce produit tensoriel sont de type  $L(\mu)$  avec  $\mu < \lambda$ .

Grâce à la structure de cristal sur  $Z(\lambda)$ , on définit une involution  $\bar{S} : Z(\lambda) \rightarrow Z(\lambda)$  en envoyant le cycle de Mirković et Vilonen de plus haut poids sur celui de plus bas poids et en échangeant l'action de  $\tilde{e}_i$  et celle de  $\tilde{f}_i$ . On appelle  $\bar{S}$  involution de Schützenberger du cristal  $Z(\lambda)$ . De même, on définit la symétrie  $\tilde{S} : Z(\lambda) \rightarrow Z(\bar{\lambda})$  par

$$\tilde{S}(\tau Z_1^1 \star \dots \star \tau Z_n^{p_n}) = \tau \bar{S}(Z_n^{p_n}) \star \dots \star \tau \bar{S}(Z_1^1)$$

pour tout  $(Z_1^1, \dots, Z_1^{p_1}, \dots, Z_n^1, \dots, Z_n^{p_n}) \in Z(\varpi_1)^{p_1} \times \dots \times Z(\varpi_n)^{p_n}$ . On démontre alors que la conjecture suivante implique la compatibilité de la base MV avec l'involution de Schützenberger :

**Conjecture** : Pour tout  $(Z_1^1, \dots, Z_1^{p_1}, \dots, Z_n^1, \dots, Z_n^{p_n}) \in Z(\varpi_1)^{p_1} \times \dots \times Z(\varpi_n)^{p_n}$ , lorsqu'on décompose  $[Z_1^1] \otimes \dots \otimes [Z_1^{p_1}] \otimes \dots \otimes [Z_n^1] \otimes \dots \otimes [Z_n^{p_n}]$  sur la base MVG de  $L(\underline{\lambda})$

$$[Z_1^1] \otimes \dots \otimes [Z_n^{p_n}] = \sum_{\substack{(Y_1^1, \dots, Y_n^{p_n}) \in \\ Z(\varpi_1)^{p_1} \times \dots \times Z(\varpi_n)^{p_n}}} a_{Y_1^1, \dots, Y_n^{p_n}}^{Z_1^1, \dots, Z_n^{p_n}} [\tau Y_1^1 \star \dots \star \tau Y_n^{p_n}],$$

alors

$$[\bar{S}(Z_n^{p_n})] \otimes \dots \otimes [\bar{S}(Z_1^1)] = \sum_{\substack{(Y_1^1, \dots, Y_n^{p_n}) \in \\ Z(\varpi_1)^{p_1} \times \dots \times Z(\varpi_n)^{p_n}}} a_{Y_1^1, \dots, Y_n^{p_n}}^{Z_1^1, \dots, Z_n^{p_n}} [\tilde{S}(\tau Y_1^1 \star \dots \star \tau Y_n^{p_n})].$$

On définit  $\hat{S} : L(\underline{\lambda}) \rightarrow L(\bar{\lambda})$  l'application linéaire telle que

$$\hat{S}([\tau Z_1^1 \star \dots \star \tau Z_n^{p_n}]) = [\tilde{S}(\tau Z_1^1 \star \dots \star \tau Z_n^{p_n})],$$

pour tout  $(Z_1^1, \dots, Z_1^{p_1}, \dots, Z_n^1, \dots, Z_n^{p_n}) \in Z(\varpi_1)^{p_1} \times \dots \times Z(\varpi_n)^{p_n}$ . La conjecture est équivalente à l'égalité

$$\hat{S}([Z_1^1] \otimes \dots \otimes [Z_n^{p_n}]) = [\bar{S}(Z_n^{p_n})] \otimes \dots \otimes [\bar{S}(Z_1^1)].$$

*Supposons que la conjecture est vraie.*

Pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , comme les représentations fondamentales sont minuscules, on a  $[\bar{S}(Z_i)] = S([Z_i])$ . Par conséquent, pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on a  $\hat{S} \circ e_i = f_i^* \circ \hat{S}$ . Il en résulte que si  $x \in L(\underline{\lambda})$  est un vecteur annulé par tous les  $e_i$  alors  $\hat{S}(x) \in L(\bar{\lambda})$  est annulé par tous les  $f_i$ . De plus, si  $x$  est un vecteur de plus haut poids dans  $L(\underline{\lambda})$  alors  $\hat{S}(x)$  est un vecteur de plus bas poids. Par conséquent,  $\hat{S}$  préserve la décomposition en composante isotypique de  $L(\underline{\lambda})$  et  $L(\bar{\lambda})$  et (en reprenant les notations du chapitre 2)  $\hat{S}$  passe au quotient  $L(\underline{\lambda})_{\leq(\lambda)}/L(\underline{\lambda})_{<(\lambda)} \rightarrow L(\bar{\lambda})_{\leq(\lambda)}/L(\bar{\lambda})_{<(\lambda)}$ . Par abus de notation, on note toujours  $\hat{S}$  cette application.

Le théorème 9 assure l'existence d'un isomorphisme de représentations

$$A : L(\underline{\lambda})_{\leq(\lambda)}/L(\underline{\lambda})_{<(\lambda)} \rightarrow L(\lambda)$$

qui envoie les classes de vecteurs de la base MVG de  $L(\underline{\lambda})_{\leq(\lambda)}$  sur la base MV de  $L(\lambda)$  ainsi que d'un isomorphisme de représentations

$$B : L(\bar{\lambda})_{\leq(\lambda)}/L(\bar{\lambda})_{<(\lambda)} \rightarrow L(\lambda)$$

jouissant des mêmes propriétés.

L'application  $S \circ B \circ \hat{S} : L(\underline{\lambda})_{\leq(\lambda)}/L(\underline{\lambda})_{<(\lambda)} \rightarrow L(\lambda)$  est alors un isomorphisme de représentations entre deux représentations irréductibles. Elle coïncide avec  $A$  sur le vecteur de plus haut poids de la base MVG. D'après le lemme de Schur, on a  $A = S \circ B \circ \hat{S}$  d'où  $S = A \circ \hat{S}^{-1} \circ B^{-1}$ .

**Corollaire 21.** *Si la conjecture encadrée est vraie, alors pour tout  $Z \in Z(\lambda)$ , le vecteur  $S([Z])$  appartient à la base MV de  $L(\lambda)$ .*

*Démonstration.* On a démontré que  $S([Z]) = A \circ \hat{S}^{-1} \circ B^{-1}([Z])$ .

On rappelle que  $A$  (resp.  $B$ ) envoie les classes de vecteurs de la base MVG de  $L(\underline{\lambda})$  (resp.  $L(\bar{\lambda})$ ) sur la base MV de  $L(\lambda)$ . Si  $x \in L(\underline{\lambda})$  (resp.  $x \in L(\bar{\lambda})$ ), on note  $\bar{x}$  sa classe dans le quotient  $L(\underline{\lambda})_{\leq(\lambda)}/L(\underline{\lambda})_{<(\lambda)}$  (resp.  $L(\bar{\lambda})_{\leq(\lambda)}/L(\bar{\lambda})_{<(\lambda)}$ ).

Or  $B^{-1}([Z])$  est de la forme  $\overline{[\tau Z_n^{p_n} \star \dots \star \tau Z_1^1]}$  avec  $(Z_1^1, \dots, Z_n^{p_n}) \in Z(\varpi_1)^{p_1} \times \dots \times Z(\varpi_n)^{p_n}$ . Alors  $\hat{S}^{-1}(\overline{[\tau Z_n^{p_n} \star \dots \star \tau Z_1^1]}) = \overline{[\tau \bar{S}(Z_1^1) \star \dots \star \tau \bar{S}(Z_n^{p_n})]}$  et  $A(\overline{[\tau \bar{S}(Z_1^1) \star \dots \star \tau \bar{S}(Z_n^{p_n})]})$  est un vecteur de la base MV de  $L(\lambda)$ .  $\square$





## Chapitre 4

# L'exemple de $\mathfrak{sl}_2$

Dans ce chapitre, on démontre la propriété de symétrie conjecturée à la fin du chapitre 3, dans le cas où  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ . Pour cela, on développe aussi des outils qui nous permettent, en dernière section, de démontrer que la base de Mirković et Vilonen généralisée coïncide avec la base canonique duale pour le cas  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ .

### 4.1 Introduction

Dans le cas où  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ , il n'y a qu'un seul poids fondamental  $\varpi$  et qu'une seule représentation fondamentale  $L(\varpi)$ . On se place dans  $L(\varpi)$  et on note  $x_+$  (respectivement  $x_-$ ) le vecteur de la base de Mirković et Vilonen de poids  $\varpi$  (respectivement celui de poids  $-\varpi$ ). On pose  $U_n = \{-, +\}^n$ . Le théorème 2.46 de [14] assure que  $U_n$  paramétrise la base MVG de  $L(\varpi)^{\otimes n}$ . On note  $Z_-$  la variété irréductible  $Gr^\varpi \cap T_{-\varpi}$  et  $Z_+ = Gr^\varpi \cap T_\varpi$ .

**Définition 22.** Soit  $p = (p_1, \dots, p_n) \in U_n$ .

1)  $U_n$  paramétrise la base des tenseurs simples de la base MV de  $L(\varpi)^{\otimes n}$  et on note  $x_p = x_{p_1} \otimes \dots \otimes x_{p_n}$ .

2) On note  $Z_p = Z_{p_1} \star \dots \star Z_{p_n}$  et  $z_p$  le vecteur  $[Z_p]$ .

*Remarque 23.* On a bien sûr  $x_+ = z_+$  et  $x_- = z_-$ .

**Définition 24.** Si  $k$  est une suite de  $-$  et de  $+$ , on note  $\bar{k}$  le mot obtenu à partir de  $k$  en le lisant à l'envers et en échangeant les signes  $+$  et les  $-$ .

**Exemple 25.**  $\overline{+- - + -} = + - + + -$

La conjecture 3.2 se traduit alors de la manière suivante :

« Le vecteur  $z_{p'}$  apparait dans la décomposition de  $x_p$  sur la base de Mirković et Vilonen généralisée avec coefficient  $m$  si et seulement si  $z_{\overline{p'}}$  apparait dans la décomposition de  $x_{\overline{p}}$  sur la base de Mirković et Vilonen généralisée avec le même coefficient  $m$ . »

En effectuant les calculs à la main, cette propriété est vraie pour  $n = 2$ ,  $n = 3$ ,  $n = 4$ ,  $n = 5$  et  $n = 6$ . Le cas  $n = 6$  est disponible en annexe. Afin de démontrer la propriété de symétrie, on cherche à décomposer  $z_- \otimes z_k$  sur la base MVG pour tout mot  $k$ .

## 4.2 Décomposition de $z_- \otimes z_k$ sur la base MVG

**Définition 26.** Soit  $k \in U_n$ . On découpe  $k_1 \dots k_n$  en  $p$  mots :  $m_1, \dots, m_p$  où chaque  $m_i$  est un bloc constitué uniquement de + et de - de taille maximale. Quitte à prendre le mot vide, on suppose que  $m_1$  et  $m_p$  sont des blocs de +. On note alors  $a_1$  la taille du premier bloc de + (éventuellement nulle),  $a_i$  la taille du  $i$ -ème bloc de + et  $b_i$  la taille du  $i$ -ème bloc de -.

**Exemple 27.** Dans le mot  $+ - + + - - - +$  les blocs de + sont +, +++ et + et les blocs de - sont - et - - -. On a  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = 3$ ,  $a_3 = 1$ ,  $b_1 = 1$  et  $b_2 = 3$ .

**Définition 28.**

- 1) Soit  $p = p_1 \dots p_n \in U_n$ . On dit que  $p$  est équilibré lorsque pour tout  $1 \leq i \leq n$ , le sous mot  $p_i \dots p_n$  contient plus de + que de -. Par convention, le mot vide est équilibré.
- 2) Lorsque  $p$  est équilibré et contient autant de + que de - on dit qu'il est super équilibré.

**Définition 29.** Soit  $k \in U(n)$ . On note  $N(k)$  l'ensemble des mots obtenus à partir de  $k$  en changeant exactement un signe + en signe - sous la réserve suivante : on ne peut changer  $k_t = +$  en - que si  $k_1 \dots k_{t-1}$  est équilibré.

**Exemple 30.** Si  $k = + + - + + -$  alors

$$N(k) = \{- + - + + -, + - - + + -, + + - + --\}.$$

Le but de cette section est de démontrer le théorème suivant.

**Théorème 31.** *Pour tout mot  $k$  :*

$$z_- \otimes z_k = z_{-k} + \sum_{k' \in N(k)} z_{+k'}.$$

On se fixe un entier  $v$  et un mot  $+k' \in U_v$  commençant par un  $+$ . A partir de maintenant,  $n$  désigne le nombre de blocs de  $+$  dans  $k'$  (le premier et le dernier étant toujours possiblement vides). On décompose  $k'_1 \dots k'_{v-1} = m_1, \dots, m_{2n-1}$  comme dans la définition 26. Il y a donc  $n - 1$  blocs de  $-$  et  $n$  blocs de  $+$ . Comme précédemment, on considère les grandeurs  $a_1, \dots, a_n$  (respectivement  $b_1, \dots, b_{n-1}$ ) qui sont les longueurs des différents blocs de  $+$  (respectivement de  $-$ ).

**Définition 32.** Pour tout  $l \in \{0, \dots, n - 1\}$ , on note  $Q_l = \sum_{i \in \{l+1, \dots, n\}} a_i$ .

La proposition 14 dans le cas où  $Z' = Z_+$  nous donne la décomposition de  $z_+ \otimes z_k$  sur la base MVG. En effet, pour tout mot  $k$ , comme  $\varpi$  est le plus haut poids de  $L(\varpi)$ , on a  $z_+ \otimes z_k = z_{+k}$ . Pour tout  $j \in \mathbb{N}$ , on pose  $\varpi^j = \underbrace{(\varpi, \dots, \varpi)}_{j \text{ facteurs}}$ . Le théorème

13 assure que le coefficient de  $z_{+k'}$  dans  $z_- \otimes z_k$  est égal à la multiplicité de  $Z_{+k'}$  dans le produit d'intersection

$$\overline{\tau Z_- \star \tau Z_k} \cdot \tilde{\pi}^{-1}(\mathbf{x})$$

pour tout point  $\mathbf{x}$  appartenant à la diagonale de  $X^n$ .

On va maintenant calculer cette multiplicité d'intersection. La fin du chapitre 2 nous permet d'écrire une carte de  $\tau Gr^\varpi \star \tau Gr^{\varpi^{v-1}}$  centrée autour de  $\tau Z_+ \star \tau Z_{k'}$  :

$$\left[ \begin{pmatrix} t-x & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} (t-y)^{a_1} & A^1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ B^1 & (t-y)^{b_1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} (t-y)^{a_n} & A^n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right]$$

où pour tout  $i \leq n - 1$ ,  $A^i$  (respectivement  $B^i$ ) est un polynôme en  $t - y$  de degré  $a_i - 1$  (respectivement  $b_i - 1$ ). On note  $(A_j^i)_{0 \leq j \leq a_i - 1}$  (respectivement  $(B_j^i)_{0 \leq j \leq b_i - 1}$ ) les coefficients du polynôme  $A^i$  (respectivement  $B^i$ ). Comme toute la situation géométrique est invariante par la translation  $(x, y) \mapsto (x + a, y + a)$ , nous pouvons (et allons) simplifier les notations en fixant  $y = 0$  dans la suite.

On note  $A$  l'anneau  $\mathbb{C}[x, a, A_0^1, \dots, A_{a_1-1}^1, \dots, B_{b_{n-1}-1}^{n-1}]$  et  $\mathfrak{q} = (a, x, A_0^1, \dots, A_{a_1-1}^1, \dots, A_{a_n-1}^n)$  l'idéal de  $Z_+ \star Z_{k'}$  dans  $\tau Gr^\varpi \star \tau Gr^{\varpi^u}$ . On pose  $\nu = \left( \sum_{i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket} (a_i - b_i) + a_n + 1 \right) \varpi$ .

On a vu dans la dernière section du chapitre 2 que la condition d'appartenance à  $\mathring{T}_\nu$  est que  $t^{Q_0+1}$  divise la première ligne de

$$m\left(\left[\begin{pmatrix} t-x & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t^{a_1} & A^1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ B^1 & t^{b_1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} t^{a_n} & A^n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]\right).$$

On note alors  $\mathfrak{J}$  l'idéal engendré par les  $Q_0 + 1$  premiers coefficients des polynômes de la première ligne de cette matrice. C'est donc l'idéal de la variété  $\tau Gr^{\varpi} \star \tau Gr^{\varpi} \cap \mathring{T}_\nu$  dans l'anneau  $A$ .

**Définition 33.** Pour tout  $i \leq n - 1$ , on définit des éléments  $C^i$ ,  $D^i$ ,  $E^i$  et  $F^i$  de  $A[t]$  par

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ B^i & t^{b_i} \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} t^{a_n} & A^n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C^i & D^i \\ E^i & F^i \end{pmatrix}.$$

En écrivant que

$$\begin{pmatrix} C^i & * \\ E^i & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ B^i & t^{b_i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^{a_{i+1}} & A^{i+1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C^{i+1} & * \\ E^{i+1} & * \end{pmatrix},$$

on obtient les relations :

- $C^i = t^{a_{i+1}}C^{i+1} + A^{i+1}E^{i+1}$ ,
- $E^i = B^i t^{a_{i+1}}C^{i+1} + (B^i A^{i+1} + t^{b_i})E^{i+1} = B^i C^i + t^{b_i}E^{i+1}$ .

Les deux lemmes suivants sont les piliers de la preuve de la formule et servent dans la majorité des preuves de cette section. Ils permettent de se concentrer sur ce qui est à gauche dans les produits de matrices, pour revenir plus tard sur ce qui est à droite.

**Lemme 34.** Pour tout  $i \leq n - 1$ , on a :

- 1)  $C^i \equiv t^{Q_i} \pmod{\mathfrak{q}[t]}$ ,
- 2)  $E_{Q_i}^i \notin \mathfrak{q}$ .

*Démonstration.*

1) On démontre le résultat par récurrence descendante sur  $i$ .

$C^{n-1} = t^{a_n}$  donc la propriété est vraie au rang  $n - 1$ .

On suppose le résultat vrai au rang  $i + 1$ . On a  $C^{i+1} \equiv t^{Q_{i+1}} \pmod{\mathfrak{q}[t]}$  et on écrit que

$$\begin{aligned} C^i &= t^{a_{i+1}} C^{i+1} + \underbrace{A^{i+1} E^{i+1}}_{\in \mathfrak{q}[t]} \\ &\equiv t^{Q_i} \pmod{\mathfrak{q}[t]}, \end{aligned}$$

d'où le résultat.

2) Soit  $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ .

Si  $i = n-1$  alors  $E^{n-1} = B^{n-1} t^{a_n}$  les coefficients de plus bas degrés de  $E^{n-1}$  sont nuls et la propriété est vraie.

On écrit que

$$E^i = B^i t^{a_{i+1}} C^{i+1} + (B^i A^{i+1} + t^{b_i}) E^{i+1}.$$

D'après le 1)

$$E^i \equiv B^i t^{Q_i} + t^{b_i} E^{i+1} \pmod{\mathfrak{q}[t]}$$

donc  $E_{Q_i}^i \equiv B_0^i + \mathbf{P} \pmod{\mathfrak{q}}$  où  $\mathbf{P} \in \mathbb{C}[x, A_j^t, B_j^t]_{t \geq i+1}$ . Par conséquent, le coefficient  $E_{Q_i}^i$  n'appartient pas à  $\mathfrak{q}$ .  $\square$

**Lemme 35.** Soit  $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{q}$  un idéal premier. Soit  $i \leq n-1$  et soit  $0 \leq k < Q_i$ .

Si  $E_0^i, \dots, E_k^i \in \mathfrak{p}$  alors  $C_0^i, \dots, C_k^i \in \mathfrak{p}$ .

*Démonstration.* On démontre le résultat par récurrence descendante sur  $i$ .

On note  $H_i$  : « Pour tout  $k < Q_i$  on a  $E_0^i, \dots, E_k^i \in \mathfrak{p} \Rightarrow C_0^i, \dots, C_k^i \in \mathfrak{p}$  ».

Lorsque  $i = n-1$ ,  $Q_i = a_n$ ,  $E^i = t^{a_n} B^n$  et  $C^i = t^{a_n}$ . La propriété  $H_{n-1}$  est donc vraie.

Supposons  $H_j$  vraie pour tout  $j > i$ .

On procède alors par l'absurde en considérant le plus petit  $k \in \llbracket 0, Q_i-1 \rrbracket$  tel que

$$E_0^i, \dots, E_k^i \in \mathfrak{p}, C_0^i, \dots, C_{k-1}^i \in \mathfrak{p} \text{ mais } C_k^i \notin \mathfrak{p}.$$

On suppose que  $A^j \in \mathfrak{p}[t]$  pour tout  $j \geq i+1$ . En écrivant

$$C^{j-1} = t^{a_j} C^j + A^j E^j,$$

on a  $C^i \equiv t^{Q_i} \pmod{\mathfrak{p}[t]}$  et  $C_k^i \in \mathfrak{p}$ . C'est absurde car on avait supposé que  $C_k^i \notin \mathfrak{p}$ . Il existe donc un plus petit  $j \in \llbracket i+1, n-1 \rrbracket$  et un plus petit  $l \in \llbracket 0, a_j-1 \rrbracket$  tels que  $A_l^j \notin \mathfrak{p}$ .

On démontre la propriété

$$\overline{H}_m : \llbracket a_{i+1} + \dots + a_m \leq b_i + \dots + b_{m-1} \rrbracket$$

pour tout  $m \in \llbracket i+1, j-1 \rrbracket$ .

*Preuve de  $\overline{H}$ .*

Pour tout  $m \in \llbracket i+1, j-1 \rrbracket$ , on a  $C^i \equiv t^{a_{i+1}+\dots+a_m} C^m \pmod{\mathfrak{p}[t]}$ . On pose  $k_m = k - a_{i+1} - \dots - a_m = k - Q_i + Q_m$ . Comme  $C_k^i \notin \mathfrak{p}$ ,  $k_m$  est positif.

On prouve  $\overline{H}$  par récurrence sur  $m$ .

Lorsque  $m = i+1$ ,  $C^i \equiv t^{a_{i+1}} C^{i+1} \pmod{\mathfrak{p}[t]}$  donc

$$C_0^{i+1}, \dots, C_{k_{i+1}-1}^{i+1} \in \mathfrak{p} \text{ et } C_{k_{i+1}}^{i+1} \notin \mathfrak{p}.$$

De plus  $E_k^i \equiv B_0^i C_k^i + E_{k-b_i}^{i+1} \pmod{\mathfrak{p}}$ . Cette somme appartient à  $\mathfrak{p}$  mais pas son premier terme, donc  $E_{k-b_i}^{i+1} \notin \mathfrak{p}$ . On a donc  $k \geq b_i$ . De plus, pour tout  $v \in \llbracket 0, k-b_i-1 \rrbracket$

$$E_{v+b_i}^i \equiv E_v^{i+1} \pmod{\mathfrak{p}}$$

Comme  $E_{b_i}^i, \dots, E_k^i \in \mathfrak{p}$ , on a alors  $E_0^{i+1}, \dots, E_{k-b_i-1}^{i+1} \in \mathfrak{p}$ . D'après  $H_{i+1}$ , on a  $C_0^{i+1}, \dots, C_{k-b_i-1}^{i+1} \in \mathfrak{p}$ .

Nécessairement,  $k-b_i \leq k_{i+1}$ . Cela se réécrit  $b_i \geq a_{i+1}$ . La propriété  $\overline{H}_{i+1}$  est donc vraie.

On suppose que  $\overline{H}_{i+1}, \dots, \overline{H}_m$  sont vraies avec  $m < j-1$ . Comme  $C^i \equiv t^{a_{i+1}+\dots+a_{m+1}} C^{m+1} \pmod{\mathfrak{p}[t]}$ , on a

$$C_0^{m+1}, \dots, C_{k_{m+1}-1}^{m+1} \in \mathfrak{p} \text{ et } C_{k_{m+1}}^{m+1} \notin \mathfrak{p}.$$

De plus, pour tout  $1 \leq v \leq n$  on a  $E^v = B^v C^v + t^{b_v} E^{v+1}$  et pour tout  $i+1 \leq w \leq j-1$  on a  $C^i \equiv t^{a_{i+1}+\dots+a_w} C^w \pmod{\mathfrak{p}[t]}$ , donc

$$\begin{aligned} E^i &\equiv B^i C^i + t^{b_i} E^{i+1} \\ &\equiv B^i C^i + t^{b_i-a_{i+1}} B^{i+1} C^i + t^{b_i+b_{i+1}} E^{i+2} \\ &\equiv \dots \\ &\equiv (B^i + B^{i+1} t^{b_i-a_{i+1}} + \dots + B^m t^{b_i+\dots+b_{m-1}-a_{i+1}-\dots-a_m}) C^i + t^{b_i+\dots+b_m} E^{m+1} \pmod{\mathfrak{p}[t]} \end{aligned}$$

et toutes les puissances de  $t$  considérées ci dessus sont positives car  $\overline{H}_{i+1}, \dots, \overline{H}_m$  sont vraies.

On pose alors

$$B' = B^i + B^{i+1}t^{b_i - a_{i+1}} + \dots + B^m t^{b_i + \dots + b_{m-1} - a_{i+1} - \dots - a_m}.$$

On a alors  $B'_0 \notin \mathfrak{q}$  et on réécrit

$$E^i \equiv B' C^i + t^{b_i + \dots + b_m} E^{m+1} \pmod{\mathfrak{p}[t]}.$$

On a  $E_k^i \equiv B'_0 C_k^i + E_{k-b_i-\dots-b_m}^{m+1} \in \mathfrak{p}$  mais le premier terme de cette somme n'appartient pas à  $\mathfrak{p}$ . Nécessairement  $E_{k-b_i-\dots-b_m}^{m+1} \notin \mathfrak{p}$ . De même qu'à la preuve de  $\overline{H}_{i+1}$ ,

$$E_0^{m+1}, \dots, E_{k-b_i-\dots-b_{m-1}}^{m+1} \in \mathfrak{p}.$$

En appliquant  $H_{m+1}$ , on a  $C_0^{m+1}, \dots, C_{k-b_i-\dots-b_{m-1}}^{m+1} \in \mathfrak{p}$ . Nécessairement,  $k - b_i - \dots - b_m \leq k_{m+1}$  qui se réécrit

$$a_{i+1} + \dots + a_{m+1} \leq b_i + \dots + b_m,$$

donc  $\overline{H}_{m+1}$  est vraie et la propriété  $\overline{H}$  est prouvée.

*Retour à la preuve de  $H$ .*

Comme dans la preuve de  $\overline{H}$ , on pose  $B' = B^i + B^{i+1}t^{b_i - a_{i+1}} + \dots + B^m t^{b_i + \dots + b_{m-1} - a_{i+1} - \dots - a_m}$ . On écrit alors que

$$\begin{aligned} E^i &\equiv (B^i + B^{i+1}t^{b_i - a_{i+1}} + \dots + B^{j-1}t^{b_i + \dots + b_{j-2} - a_{i+1} - \dots - a_{j-1}}) C^i + t^{b_i + \dots + b_{j-1}} E^j \pmod{\mathfrak{p}[t]} \\ &\equiv B' C^i + t^{b_i + \dots + b_{j-1}} E^j \pmod{\mathfrak{p}[t]}. \end{aligned}$$

On en déduit que

$$E_0^j, \dots, E_{k-b_i-\dots-b_{j-1}-1}^j \in \mathfrak{p} \text{ et } E_{k-b_i-\dots-b_{j-1}}^j \notin \mathfrak{p}.$$

On écrit que

$$C^i \equiv t^{a_{i+1} + \dots + a_{j-1}} C^{j-1} \equiv t^{a_{i+1} + \dots + a_{j-1}} (t^{a_j} C^j + A^j E^j) \pmod{\mathfrak{p}[t]}.$$

Comme  $C_0^i, \dots, C_{k-1}^i \in \mathfrak{p}$  et  $C_k^i \notin \mathfrak{p}$ , on obtient

$$(t^{a_j}C^j + A^jE^j)_0, \dots, (t^{a_j}C^j + A^jE^j)_{k_{j-1}-1} \in \mathfrak{p} \text{ et } (t^{a_j}C^j + A^jE^j)_{k_{j-1}} \notin \mathfrak{p}.$$

Le fait que  $(t^{a_j}C^j + A^jE^j)_0, \dots, (t^{a_j}C^j + A^jE^j)_{l-1} \in \mathfrak{p}$  implique que  $k_{j-1} \geq l$ .

Supposons que  $k_{j-1} > a_j$ . On a donc  $(t^{a_j}C^j + A^jE^j)_m \in \mathfrak{p}$  pour tout  $m \in \llbracket l, a_j-1 \rrbracket$ . Par conséquent,  $E_0^j, \dots, E_{a_j-l-1}^j \in \mathfrak{p}$  et en appliquant  $H_j$ , on a  $C_0^j, \dots, C_{a_j-l-1}^j \in \mathfrak{p}$ .

Mais alors

$$(t^{a_j}C^j + A^jE^j)_{a_j} \equiv C_0^j + A_l^j E_{a_j-l}^j \equiv A_l^j E_{a_j-l}^j \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$$

et  $E_{a_j-l}^j \in \mathfrak{p}$ . En utilisant  $H_j$ , on a aussi  $C_{a_j-l}^j \in \mathfrak{p}$ .

On applique ainsi  $k_j$  fois l'hypothèse  $H_j$  pour obtenir  $E_0^j, \dots, E_{k_{j-1}-l-1}^j$  et  $C_0^j, \dots, C_{k_{j-1}-l-1}^j \in \mathfrak{p}$ . Lorsque  $k_{j-1} \leq a_j$ , on arrive directement à cette conclusion.

Maintenant,  $(t^{a_j}C^j + A^jE^j)_{k_{j-1}} \equiv A_l^j E_{k_{j-1}-l}^j$  et donc  $E_{k_{j-1}-l}^j \notin \mathfrak{p}$ .

Or  $E_{k_{j-1}-l}^j$  et  $E_{k-b_i-\dots-b_{j-1}}^j$  sont à chaque fois les premiers coefficients de  $E^j$  n'appartenant pas à  $\mathfrak{p}$ . Donc

$$l = b_i + \dots + b_{j-1} - a_{i+1} - \dots - a_{j-1}.$$

On écrit que

$$E^i \equiv B't^{a_{i+1}+\dots+a_{j-1}}(t^{a_j}C^j + A^jE^j) + t^{b_i+\dots+b_{j-1}}E^j \pmod{\mathfrak{p}[t]}$$

et on a  $E_k^i \equiv B'_0 A_l^j E_{k_{j-1}-l}^j + E_{k-b_i-\dots-b_{j-1}}^j \pmod{\mathfrak{p}}$ .

Par conséquent,  $E_k^i \equiv (B'_0 A_l^j + 1)E_{k_{j-1}-l}^j \pmod{\mathfrak{p}}$  mais  $\underbrace{B'_0 A_l^j + 1}_{\in \mathfrak{q}} \notin \mathfrak{q}$  donc  $B'_0 A_l^j + 1 \notin \mathfrak{p}$ .

On a donc démontré que  $E_k^i \notin \mathfrak{p}$  : c'est absurde. Donc  $H_i$  est vraie et le lemme est prouvé.  $\square$

**Lemme 36.** Soit  $G, H \in A[t]$ , soit  $g > 0$ , soit  $i \leq n-1$ , soit  $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{q}$  un idéal premier.

Si tous les coefficients de degré inférieur à  $Q_i + g - 1$  de  $t^g G C^i + H E^i$  appartiennent à  $\mathfrak{p}$ ,

alors  $H_0, \dots, H_{g-1} \in \mathfrak{p}$ .



*Démonstration.* Par l'absurde, supposons qu'il existe  $m < g$  tel que  $H_0, \dots, H_{m-1} \in \mathfrak{p}$  et  $H_m \notin \mathfrak{p}$ .

En appliquant le lemme 34, il existe  $l \leq Q_i$  tel que

$$E_0^i, \dots, E_{l-1}^i \in \mathfrak{p} \text{ et } E_l^i \notin \mathfrak{p}.$$

D'après le lemme 35,  $C_0^i, \dots, C_{l-1}^i \in \mathfrak{p}$ . On écrit alors

$$\begin{aligned} (t^g GC^i + HE^i)_{l+m} &= \sum_{v=0}^{l+m-g} G_v C_{l+m-g-v}^i + \sum_{v=0}^{l+m} H_v E_{l+m-v}^i \\ &= \sum_{v=0}^{l+m-g} G_v \underbrace{C_{l+m-g-v}^i}_{\in \mathfrak{p}} + \sum_{v=0}^{m-1} \underbrace{H_v E_{l+m-v}^i}_{\in \mathfrak{p}} + H_m E_l^i + \sum_{v=m+1}^{l+m} H_v \underbrace{E_{l+m-v}^i}_{\in \mathfrak{p}}. \end{aligned}$$

Or  $(t^g GC^i + HE^i)_{l+m} \in \mathfrak{p}$  et donc  $H_m E_l^i \in \mathfrak{p}$  : c'est absurde.  $\square$

L'idéal de  $\tau Z_- \star \tau Z_k$  dans la variété  $\tau Gr^\infty \star \tau Gr^{\infty^v}$  est alors un idéal  $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{q}$  premier contenant  $\mathfrak{J}$  et minimal. On note alors  $\mathcal{O}_{Z_{+k'}, \overline{\tau Z_- \star \tau Z_k}}$  l'anneau local de  $\overline{\tau Z_- \star \tau Z_k}$  le long de  $Z_{+k'}$ . Cet anneau est isomorphe à  $A_{\mathfrak{q}}/\mathfrak{p}A_{\mathfrak{q}}$  et si son idéal maximal est principal alors c'est un anneau de valuation discrète. La multiplicité d'intersection cherchée est alors (voir [12] section 1.1 et 1.2) l'ordre d'annulation de  $x$  le long de  $Z_{+k'}$ . Si  $\mathfrak{q}A_{\mathfrak{q}}/\mathfrak{p}A_{\mathfrak{q}} = (\bar{x})$ , alors cette multiplicité est 1. C'est ce que l'on va démontrer.

On cherche à déterminer des générateurs de  $\mathfrak{p}$  permettant de retrouver le mot  $k$ . Comme le premier facteur doit être  $Z_-$ , nécessairement  $a \notin \mathfrak{p}$ . On pose  $A_1 = \mathbb{C}[a, x, A_0^1, \dots, A_{a_1-1}^1]$  et, pour tout  $v \in \llbracket 2, n \rrbracket$ , on note

$$A_v = \mathbb{C}[a, x, A_0^1, \dots, A_{a_1-1}^1, \dots, A_{a_v-1}^v B_0^1, \dots, B_{b_1-1}^1, \dots, B_{b_{v-1}-1}^{v-1}],$$

$\mathfrak{q}_v$  la trace de  $\mathfrak{q}$  et  $\mathfrak{p}_v$  la trace de  $\mathfrak{p}$  sur le sous anneau  $A_v$  de  $A$ . On note  $(A_{\mathfrak{q}})_v$  le localisé de  $A_v$  en l'idéal  $\mathfrak{q}_v$ .

**Définition 37.**

1) On considère alors les variables suivantes :

$$a, A_0^1, \dots, A_{a_1-1}^1 B_0^1, \dots, B_{b_1-1}^1, \dots, A_{a_n-1}^n.$$

On ordonne alors les variables de la gauche vers la droite, la plus petite étant  $a$  et la plus grande  $A_{a_{n-1}}^n$ .

2) On dit qu'une variable  $X$  est liée par rapport à l'idéal  $\mathfrak{p}$  lorsqu'il existe un élément de  $\mathfrak{p}$  dans lequel  $X$  est la plus grande variable.

On écrit une carte de  $\tau Gr^{\varpi} \star \tau Gr^{\varpi^u} \times_{X^n} \Delta_{1,u}$  comme en début de section mais en centrant en  $\tau Z_- \star \tau Z_k$ . On obtient des variables ordonnées comme dans la définition précédente  $(c, D_0^1, \dots, E_0^1, \dots, D_{a_{n-1}}^n)$  de sorte que les équations de  $\tau Z_- \star \tau Z_k$  soient  $D_i^j = 0$  pour tout entiers  $i$  et  $j$ . On fait alors le changement de carte  $(a, A_0^1, \dots, B_0^1, \dots, A_{a_{n-1}}^n) \rightarrow (c, D_0^1, \dots, E_0^1, \dots, D_{a_{n-1}}^n)$ . La  $t$ -ième variable à droite est un polynôme en les  $t$  premières variables à gauche. Ainsi, si la  $t$ -ième variable à droite correspond à un  $+$ , alors elle appartient à  $\mathfrak{p}$ . On a donc un polynôme en les  $t$  premières variables à gauche qui appartient à  $\mathfrak{p}$  donc la  $t$ -ième variable à gauche est liée par rapport à  $\mathfrak{p}$ . Grâce à ce raisonnement on va pouvoir identifier le mot  $k$  à partir de certains éléments de  $\mathfrak{p}$ .

**Définition 38.** Soient  $(P, K) \in (A[t])^2$ . Soit  $j \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ .

1) On dit que le couple  $(P, K)$  est de type  $Cond_j$  si tous les coefficients de  $P$  sauf  $P_1$ , et tous ceux de  $K$  appartiennent à  $\mathfrak{q}_j$ , si  $K_0 \in \mathfrak{q} \setminus \mathfrak{p}$ , si  $P_1 \notin \mathfrak{q}$ , si  $P_0$  est de la forme  $-x + z$  avec  $z \in \mathfrak{q}_j$  et si  $\bar{z} \in (\bar{K}_0)$  dans le quotient  $\mathfrak{q}_j(A_{\mathfrak{q}})_j / \mathfrak{p}_j(A_{\mathfrak{q}})_j$ .

2) On dit que le couple  $(P, K)$  est de type  $\widetilde{Cond}_j$  si tous les coefficients de  $P$  sauf  $P_0$ , et tous ceux de  $K$  appartiennent à  $\mathfrak{q}_j$ , et si  $P_0 \notin \mathfrak{q}$ .

**Proposition 39.** Soit  $l \leq n-1$ . On considère la matrice

$$\begin{pmatrix} P^n & K^n \\ * & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ B' & t^{b'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^{a_n} & A^n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où le couple  $(P^{n-1}, K^{n-1})$  est de type  $Cond_l$ , où  $b' = b_l + \dots + b_{n-1} - a_{l+1} - \dots - a_{n-1}$ , où  $b_l + \dots + b_y - a_{l+1} - \dots - a_{y+1} > 0$  pour tout  $y \in \llbracket l, n-2 \rrbracket$  et où  $B' = B^l + t^{b_l - a_{l+1}} B^{l+1} + \dots + t^{b_l + \dots + b_{n-2} - a_{l+1} - \dots - a_{n-1}} B^{n-1}$ .

Supposons que  $\mathfrak{q}_{n-1}(A_{\mathfrak{q}})_{n-1} / \mathfrak{p}_{n-1}(A_{\mathfrak{q}})_{n-1} = (\bar{K}_0^{n-1}, \bar{x})$ .

Si les  $a_n + 1$  premiers coefficients des polynômes de la première ligne de cette matrice appartiennent à  $\mathfrak{p}$  alors la variable  $B'_0 = B_0^l$  est liée par rapport à  $\mathfrak{p}$  ainsi que les coefficients de  $A^n$ . De plus  $\mathfrak{q}_{A_{\mathfrak{q}}}/\mathfrak{p}_{A_{\mathfrak{q}}} = (\bar{x})$ .

*Démonstration.* On commence par écrire que les  $a_n + 1$  premiers coefficients du polynôme  $(P^{n-1} + K^{n-1}B')t^{a_n}$  appartiennent à  $\mathfrak{p}$ . Le coefficient en degré  $a_n$  est  $P_0^{n-1} + K_0^{n-1}B'_0$  et appartient à  $\mathfrak{p}$ . La variable  $B'_0$  est donc liée par rapport à  $\mathfrak{p}$ .

De plus, dans  $A_{\mathfrak{q}}/\mathfrak{p}A_{\mathfrak{q}}$ , on a  $\bar{z} = \overline{K_0^{n-1}u}$  avec  $u \in (A_{\mathfrak{q}})_l$ . Donc  $\bar{x} = \overline{(B'_0 + u)K_0^{n-1}}$  mais  $\overline{B'_0 + u}$  est inversible dans  $A_{\mathfrak{q}}$ . On a donc

$$(a, x, A_0^1, \dots, A_{a_1-1}^1, \dots, A_{a_{n-1}-1}^{n-1})A_{\mathfrak{q}}/\mathfrak{p}A_{\mathfrak{q}} = (\bar{x}).$$

On écrit ensuite que les  $a_n+1$  premiers coefficients du polynôme  $(P^{n-1} + K^{n-1}B')A^n + K^{n-1}t^{b'}$  appartiennent à  $\mathfrak{p}$ .

Lorsque  $b' > 1$ , le coefficient en degré 1,  $(P^{n-1} + K^{n-1}B')_1 A_0^n$  appartient à  $\mathfrak{p}$ . Or  $P_1^{n-1} \notin \mathfrak{q}$  et  $(K^{n-1}B')_1 \in \mathfrak{q}$  donc  $(P^{n-1} + K^{n-1}B')_1$  n'appartient pas à  $\mathfrak{q}$  et donc pas à  $\mathfrak{p}$ . Par conséquent  $A_0^n \in \mathfrak{p}$ . Si  $b' > a_n$ , alors de même  $A_1^n, \dots, A_{a_n-1}^n \in \mathfrak{p}$  et la preuve est terminée.

Sinon  $A_1^n, \dots, A_{b'-2}^n \in \mathfrak{p}$ , ce qui lie ces variables par rapport à  $\mathfrak{p}$ .

Ensuite, pour les variables suivantes (le cas  $b' = 1$  correspond directement à cette étape),  $(P^{n-1} + K^{n-1}B')_1 A_{b'-1}^n + K_0^{n-1} \in \mathfrak{p}$ , ce qui lie  $A_{b'-1}^n$  par rapport à  $\mathfrak{p}$ .

De plus, dans  $A_{\mathfrak{q}}/\mathfrak{p}A_{\mathfrak{q}}$ , on a  $\overline{A_{b'-1}^n} \in (\bar{x})$  car  $\overline{(P^{n-1} + K^{n-1}B')_1}$  est inversible et  $\overline{K_0^{n-1}} \in (\bar{x})$ .

On écrit que le coefficient en degré  $b' + j + 1$  appartient à  $\mathfrak{p}$ . Cela permet de lier les variables  $A_{b'+j}^n$ . Ainsi,

$$\underbrace{(P^{n-1} + K^{n-1}B')_0 A_{b'+j+1}^n}_{\in \mathfrak{p}} + (P^{n-1} + K^{n-1}B')_1 A_{b'+j}^n + \sum_{2 \leq r \leq b'+j+1} (P^{n-1} + K^{n-1}B')_r A_{b'+j+1-r}^n + K_{j+1}^{n-1} \in \mathfrak{p}.$$

Ces équations impliquent que dans  $A_{\mathfrak{q}}/\mathfrak{p}A_{\mathfrak{q}}$

$$\underbrace{(P^{n-1} + K^{n-1}B')_1 A_{b'+j}^n}_{\text{inversible}} + \sum_{2 \leq r \leq b'+j+1} (P^{n-1} + K^{n-1}B')_r \underbrace{A_{b'+j+1-r}^n}_{\in (\bar{x})} + \underbrace{K_{j+1}^{n-1}}_{\in (\bar{x})} = 0,$$

donc  $\overline{A_j^n} \in (\bar{x})$  pour tout  $j \in \llbracket 0, a_n - 1 \rrbracket$ . Par conséquent  $\mathfrak{q}A_{\mathfrak{q}}/\mathfrak{p}A_{\mathfrak{q}} = (\bar{x})$ .  $\square$

**Lemme 40.** Si  $n \geq 3$  et si les  $Q_0 + 1$  premiers coefficients des polynômes de la première ligne de :

$$\begin{pmatrix} t-x & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^{a_1} & A^1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ B^1 & t^{b_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^{a_2} & A^2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ B^2 & t^{b_2} \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} t^{a_n} & A^n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} t-x & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^{a_1} & A^1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C^1 & D^1 \\ E^1 & F^1 \end{pmatrix}$$

appartiennent à  $\mathfrak{p}$  alors on a les  $a_1$  équations :

$$\begin{cases} a - xA_0^1 \in \mathfrak{p} \\ A_0^1 - xA_1^1 \in \mathfrak{p} \\ \dots \\ A_{a_1-2}^1 - xA_{a_1-1}^1 \in \mathfrak{p} \end{cases}$$

et, si on pose  $P^1 = t - x$  et  $K^1 = A_{a_1-1}^1$ , alors le couple  $(P^1, K^1)$  est de type *Cond*<sub>1</sub>, les  $Q_1 + 1$  premiers coefficients des polynômes de la première ligne de

$$\begin{pmatrix} P^1 & K^1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C^1 & D^1 \\ E^1 & F^1 \end{pmatrix}$$

appartiennent à  $\mathfrak{p}$  et de plus  $\mathfrak{q}_1(A_q)_1 / \mathfrak{p}_1(A_q)_1 = (\overline{K_0^1}, \overline{x})$ .

*Démonstration.* On écrit que

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} t-x & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^{a_1} & A^1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C^1 & D^1 \\ E^1 & F^1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (t-x)t^{a_1} & (t-x)A^1 + a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C^1 & D^1 \\ E^1 & F^1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

puis que les  $Q_0 + 1$  premiers coefficients du polynôme  $(t-x)t^{a_1}C^1 + ((t-x)A^1 + a)E^1$  appartiennent à  $\mathfrak{p}$ .

On applique alors le lemme 36 avec  $G = t - x$ ,  $H = (t - x)A^1 + a$ ,  $i = 1$  et  $g = a_1$ . On obtient alors que les  $a_1$  premiers coefficients de  $(t - x)A^1 + a$  appartiennent à  $\mathfrak{p}$ . C'est exactement les équations

$$\begin{cases} a - xA_0^1 \in \mathfrak{p} \\ A_0^1 - xA_1^1 \in \mathfrak{p} \\ \dots \\ A_{a_1-2}^1 - xA_{a_1-1}^1 \in \mathfrak{p} \end{cases}$$

On a démontré que  $(t - x)A^1 + a \equiv K^1 t^{a_1} \pmod{\mathfrak{p}[t]}$ . Alors

$$\begin{pmatrix} t-x & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^{a_1} & A^1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C^1 & D^1 \\ E^1 & F^1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} t^{a_1} P^1 & K^1 t^{a_1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C^1 & D^1 \\ E^1 & F^1 \end{pmatrix} \pmod{\mathfrak{p}[t]}$$

et comme les  $Q_0 + 1$  premiers coefficients des polynômes de la première ligne de cette matrice appartiennent à  $\mathfrak{p}$ , alors les  $Q_1 + 1$  premiers coefficients des polynômes de la première ligne de

$$\begin{pmatrix} (t-x) & K^1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C^1 & D^1 \\ E^1 & F^1 \end{pmatrix}$$

appartiennent à  $\mathfrak{p}$ .

La seule chose à vérifier pour que  $(P^1, K^1)$  soit de type  $Cond_1$  est  $K_0^1 \notin \mathfrak{p}$ . On raisonne par l'absurde. Comme  $A_{a_1-2}^1 - xA_{a_1-1}^1 \in \mathfrak{p}$ , on a  $A_{a_1-2}^1 \in \mathfrak{p}$  et de même comme

$$\begin{cases} a - xA_0^1 \in \mathfrak{p} \\ A_0^1 - xA_1^1 \in \mathfrak{p} \\ \dots \\ A_{a_1-2}^1 - xA_{a_1-1}^1 \in \mathfrak{p} \end{cases},$$

alors  $a \in \mathfrak{p}$ . C'est absurde. Ces équations impliquent que  $\mathfrak{q}_1(A_q)_1 / \mathfrak{p}_1(A_q)_1 = (\overline{K_0^1}, \bar{x})$ .  $\square$

*Remarque 41.* Lorsque  $a_1 = 0$ , on a les mêmes conclusions qu'au lemme précédent en posant  $P^1 = t - x$  et  $K^1 = a$ .

*Remarque 42.* Dans le cas où il n'y a qu'un seul bloc de  $-$ , les  $Q_0 + 1$  premiers coefficients des polynômes de la première ligne de

$$\begin{pmatrix} t-x & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^{a_1} & A^1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ B^1 & t^{b_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^{a_2} & A^2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

appartiennent à  $\mathfrak{p}$ .

On peut alors appliquer le lemme 40 et, en posant  $t^{a_1} K^1 \equiv a + (t-x)A^1 \pmod{\mathfrak{p}[t]}$ , les  $Q_1 + 1$  premiers coefficients des polynômes de la première ligne de

$$\begin{pmatrix} t-x & K^1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ B^1 & t^{b_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^{a_2} & A^2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

appartiennent à  $\mathfrak{p}$ . On applique alors la proposition 39 (avec  $l = n - 1 = 1$ ). L'idéal  $\mathfrak{p}$  est alors l'idéal de  $\tau Z_- * \tau Z_k$  où  $k$  est obtenu à partir de  $k'$  en changeant le signe

– correspondant à  $B_0^1$  en un signe +. La multiplicité d'intersection est alors 1 car  $\mathfrak{q}A_{\mathfrak{q}}/\mathfrak{p}A_{\mathfrak{q}} = (x)$ .

**Théorème 43.** Soit  $j \in \{1, \dots, n-2\}$  et  $l \leq j$ . On considère :

$$\begin{pmatrix} P^j & K^j \\ * & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ B' & t^{b'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^{a_{j+1}} & A^{j+1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C^{j+1} & * \\ E^{j+1} & * \end{pmatrix},$$

où  $(P^j, K^j)$  est de type  $Cond_l$ , où  $b_l + \dots + b_j - a_{l+1} - \dots - a_{j+1} > 0$  pour tout  $y \in \llbracket l, j-1 \rrbracket$ , où  $B' = B^l + t^{b_l - a_{l+1}} B^{l+1} + \dots + t^{b_l + \dots + b_{j-1} - a_{l+1} - \dots - a_j} B^j$ , et où  $b' = b_l + \dots + b_j - a_{l+1} - \dots - a_j$ .

Supposons que  $b' > a_{j+1}$ , que les  $Q_j + 1$  premiers coefficients des polynômes de la première ligne de cette matrice soient dans  $\mathfrak{p}$ , que  $\mathfrak{q}_j(A_{\mathfrak{q}})_j/\mathfrak{p}_j(A_{\mathfrak{q}})_j = (\overline{K_0^j}, \overline{x})$  et que  $K_0^j B_0^l + P_0^j \notin \mathfrak{p}$ .

Alors,  $A_y^{j+1} \in \mathfrak{p}$  pour tout  $y \in \llbracket 0, a_{j+1} - 1 \rrbracket$ ,  $\mathfrak{q}_{j+1}(A_{\mathfrak{q}})_{j+1}/\mathfrak{p}_{j+1}(A_{\mathfrak{q}})_{j+1} = (\overline{K_0^j}, \overline{x})$ , et si on pose  $B'' = B' + B^{j+1} t^{b' - a_{j+1}}$  et  $b'' = b_{j+1} + b' - a_{j+1}$  alors les  $Q_{j+1} + 1$  premiers coefficients des polynômes de la première ligne de

$$\begin{pmatrix} P^j & K^j \\ * & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ B'' & t^{b''} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^{a_{j+2}} & A^{j+2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C^{j+2} & * \\ E^{j+2} & * \end{pmatrix},$$

appartiennent à  $\mathfrak{p}$ . On pose alors  $P^{j+1} = P^j$  et  $K^{j+1} = K^j$ .

*Démonstration.* On écrit que les  $Q_j + 1$  premiers coefficients de

$$(P^j t^{a_{j+1}} + K^j t^{a_{j+1}} B') C^{j+1} + (P^j A^{j+1} + K^j (t^{b'} + B' A^{j+1})) E^{j+1}$$

appartiennent à  $\mathfrak{p}$ . D'après le lemme 36, les  $a_{j+1}$  premiers coefficients du polynôme  $P^j A^{j+1} + K^j (t^{b'} + B' A^{j+1})$  appartiennent à  $\mathfrak{p}$ .

Pour tout  $u \in \llbracket 0, a_{j+1} - 1 \rrbracket$ , on a

$$\underbrace{(P^j A^{j+1} + K^j (t^{b'} + B' A^{j+1}))}_u \equiv \underbrace{(P^j + K^j B')}_0 A_u^{j+1} \pmod{\mathfrak{p}}$$

donc  $A_u^{j+1} \in \mathfrak{p}$  pour tout  $u \in \llbracket 0, a_{j+1} - 1 \rrbracket$ . Cela implique que  $\mathfrak{q}_{j+1}(A_{\mathfrak{q}})_{j+1}/\mathfrak{p}_{j+1}(A_{\mathfrak{q}})_{j+1} = (\overline{K_0^j}, \overline{x})$ . Par ailleurs, on a

$$\begin{aligned}
 & \begin{pmatrix} P^j & K^j \\ * & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ B' & t^{b'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^{a_{j+1}} & A^{j+1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C^{j+1} & * \\ E^{j+1} & * \end{pmatrix} \\
 \equiv & \begin{pmatrix} P^j & K^j \\ * & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ B' & t^{b'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^{a_{j+1}} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C^{j+1} & * \\ E^{j+1} & * \end{pmatrix} \pmod{\mathfrak{p}[t]} \\
 \equiv & \begin{pmatrix} t^{a_{j+1}} & 0 \\ 0 & t^{a_{j+1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P^j & K^j \\ * & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ B' & t^{b'-a_{j+1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C^{j+1} & * \\ E^{j+1} & * \end{pmatrix} \pmod{\mathfrak{p}[t]} \\
 \equiv & \begin{pmatrix} t^{a_{j+1}} & 0 \\ 0 & t^{a_{j+1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P^j & K^j \\ * & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ B'' & t^{b''} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^{a_{j+2}} & A^{j+2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C^{j+2} & D^{j+2} \\ E^{j+2} & F^{j+2} \end{pmatrix} \pmod{\mathfrak{p}[t]}.
 \end{aligned}$$

Si les  $Q_j + 1$  premiers coefficients des polynômes de la ligne du haut de cette matrice appartiennent à  $\mathfrak{p}$ , alors les  $Q_{j+1} + 1$  premiers coefficients des polynômes de la première ligne de

$$\begin{pmatrix} P^{j+1} & K^{j+1} \\ * & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ B'' & t^{b''} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^{a_{j+2}} & A^{j+2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C^{j+2} & D^{j+2} \\ E^{j+2} & F^{j+2} \end{pmatrix}$$

appartiennent à  $\mathfrak{p}$ . □

**Théorème 44.** Soit  $j \in \{1, \dots, n-2\}$  et  $l \leq j$ . On considère la matrice :

$$\begin{pmatrix} P^j & K^j \\ * & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ B' & t^{b'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^{a_{j+1}} & A^{j+1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C^{j+1} & D^{j+1} \\ E^{j+1} & F^{j+1} \end{pmatrix}$$

où  $(P^j, K^j)$  est de type  $\text{Cond}_l$ , où  $b_l + \dots + b_y - a_{l+1} - \dots - a_{y+1} > 0$  pour tout  $y \in \llbracket l, j-1 \rrbracket$ , où  $B' = B^l + t^{b_l - a_{l+1}} B^{l+1} + \dots + t^{b_l + \dots + b_{j-1} - a_{l+1} - \dots - a_j} B^j$ , et où  $b' = b_l + \dots + b_j - a_{l+1} - \dots - a_j$ .

Supposons que  $b' \leq a_{j+1}$ , que les  $Q_j + 1$  premiers coefficients des polynômes de la première ligne de cette matrice soient dans  $\mathfrak{p}$ , que  $\mathfrak{q}_j(A_{\mathfrak{q}})_j / \mathfrak{p}_j(A_{\mathfrak{q}})_j = (\overline{K_0^j}, \bar{x})$  et que  $K_0^j B_0^l + P_0^j \notin \mathfrak{p}$ .

Alors les  $a_{j+1}$  premiers coefficients du polynôme  $t^{b'} K^j + A^{j+1}(P^j + K^j B')$  appartiennent à  $\mathfrak{p}$  ce qui lie les variables de  $A^{j+1}$  par rapport à  $\mathfrak{p}$ .

Si on pose  $P^{j+1} = P^j + K^j B'$  et  $t^{a_{j+1}} K^{j+1} \equiv t^{b'} K^j + A^{j+1}(P^j + K^j B') \pmod{\mathfrak{p}[t]}$  alors  $(P^{j+1}, K^{j+1})$  est de type  $\text{Cond}_{j+1}$  et les  $Q_{j+1} + 1$  premiers coefficients des polynômes de la première ligne de

$$\begin{pmatrix} P^{j+1} & K^{j+1} \\ * & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ B^{j+1} & t^{b_{j+1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^{a_{j+2}} & A^{j+2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C^{j+2} & D^{j+2} \\ E^{j+2} & F^{j+2} \end{pmatrix}$$

appartiennent à  $\mathfrak{p}$ . De plus  $\mathfrak{q}_{j+1}(A_{\mathfrak{q}})_{j+1} / \mathfrak{p}_{j+1}(A_{\mathfrak{q}})_{j+1} = (\overline{K_0^{j+1}}, \bar{x})$ .

*Démonstration.* Comme  $P^{j+1} = P^j + K^j B'$ , tous les coefficients de  $P^{j+1}$  sauf  $P_1^{j+1}$  appartiennent à  $\mathfrak{q}_{j+1}$ ,  $P_1^{j+1} \notin \mathfrak{q}$  et  $P_0^{j+1}$  n'appartient pas à  $\mathfrak{p}$  par hypothèse et est de la forme  $-x + z$  avec  $z \in \mathfrak{q}_{j+1}$ .

On écrit que les  $Q_j + 1$  premiers coefficients du polynôme dans le coefficient en haut à gauche

$$P^{j+1} t^{a_{j+1}} C^{j+1} + (t^{b'} K^j + A^{j+1} P^{j+1}) E^{j+1}$$

appartiennent à  $\mathfrak{p}$ . D'après le lemme 36 les  $a_{j+1}$  premiers coefficients de  $t^{b'} K^j + A^{j+1} P^{j+1}$  appartiennent à  $\mathfrak{p}$ . Pour tout  $i \in \llbracket 0, a_{j+1} - 1 \rrbracket$ , on a donc

$$P_0^{j+1} A_i^{j+1} + P_1^{j+1} A_{i-1}^{j+1} + \dots + A_0^{j+1} P_i^{j+1} + K_{i-b'}^j \in \mathfrak{p}$$

(par convention si un indice est négatif, on remplace le coefficient correspondant par 0) ce qui lie les variables de  $A^{j+1}$  par rapport à  $\mathfrak{p}$ .

Montrons que  $(A_{\mathfrak{q}})_{j+1} / \mathfrak{p}_{j+1}(A_{\mathfrak{q}})_{j+1} = (\overline{K_0^{j+1}}, \bar{x})$ . Pour tout  $i \in \llbracket 0, a_{j+1} - 1 \rrbracket$ , dans le quotient  $(A_{\mathfrak{q}})_{j+1} / \mathfrak{p}_{j+1}(A_{\mathfrak{q}})_{j+1}$ , on a

$$\overline{P_0^{j+1} A_i^{j+1}} + \overline{P_1^{j+1} A_{i-1}^{j+1}} + \underbrace{\overline{P_2^{j+1} A_{i-2}^{j+1} + \dots + A_0^{j+1} P_i^{j+1} + K_{i-b'}^j}}_{\in (\overline{P_0^{j+1} A_{i-1}^{j+1}})} = 0$$

donc, pour  $i = 0$  puis  $i = 1$  puis ... puis pour  $i = b' - 1$ , on obtient  $A_0^{j+1}, \dots, A_{b'-1}^{j+1} \in \mathfrak{p}_{j+1}$ . Lorsque  $i = b'$

$$\overline{P_0^{j+1} A_{b'}^{j+1}} + \underbrace{\overline{P_1^{j+1} A_{b'-1}^{j+1}}}_{=0} + \underbrace{\overline{P_2^{j+1} A_{i-2}^{j+1} + \dots + A_0^{j+1} P_i^{j+1}}}_{=0} + \overline{K_0} = 0$$

et  $\overline{K_0} = \overline{P_0^{j+1} A_{b'}^{j+1}}$ . Ainsi pour tout  $i > b'$ , on a  $\overline{P_0^{j+1} A_i^{j+1}} = \overline{A_{i-1}^{j+1} (P_1^{j+1} + P_0^{j+1} u)}$

avec  $u \in A_{j+1}$ . Par conséquent, pour tout  $i \in \llbracket 0, a_{j+1} - 1 \rrbracket$ , on a  $\overline{A_i^{j+1}} \in \overline{(A_{a_{j+1}-1}^{j+1})}$ .

De plus dans l'anneau  $(A_{\mathfrak{q}})_{j+1} / \mathfrak{p}_{j+1}(A_{\mathfrak{q}})_{j+1}$ , on a

$$\overline{K_0^{j+1}} = \underbrace{\overline{K_{a_{j+1}-b'}^j}}_{\in (\overline{K_0^j}) \subset (\overline{P_0^{j+1} A_{a_{j+1}-1}^{j+1}})} + \overline{A_{a_{j+1}-1}^{j+1} P_1^{j+1}} + \underbrace{\overline{A_{a_{j+1}-2}^{j+1} P_2^{j+1} + \dots + A_0^{j+1} P_{a_j}^{j+1}}}_{\in (\overline{P_0^{j+1} A_{a_{j+1}-1}^{j+1}})} = \overline{A_{a_{j+1}-1}^{j+1}} \underbrace{\overline{u}}_{\text{invertible}}$$



donc  $(\overline{K_0^{j+1}}) = (\overline{A_{a_{j+1}-1}^{j+1}})$  et  $(A_q)_{j+1}/\mathfrak{p}_{j+1}(A_q)_{j+1} = (\overline{K_0^{j+1}}, \overline{x})$ .

On a alors

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} P^j & K^j \\ * & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ B' & t^{b'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^{a_{j+1}} & A^{j+1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C^{j+1} & D^{j+1} \\ E^{j+1} & F^{j+1} \end{pmatrix} \\ & \equiv \begin{pmatrix} t^{a_{j+1}} & 0 \\ 0 & t^{a_{j+1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P^{j+1} & K^{j+1} \\ * & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ B^{j+1} & t^{b_{j+1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^{a_{j+2}} & A^{j+2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C^{j+2} & D^{j+2} \\ E^{j+2} & F^{j+2} \end{pmatrix} \pmod{\mathfrak{p}[t]}. \end{aligned}$$

Les  $Q_{j+1} + 1$  premiers coefficients des polynômes de la première ligne de

$$\begin{pmatrix} P^{j+1} & K^{j+1} \\ * & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ B^{j+1} & t^{b_{j+1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^{a_{j+2}} & A^{j+2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C^{j+2} & D^{j+2} \\ E^{j+2} & F^{j+2} \end{pmatrix}$$

appartiennent alors à  $\mathfrak{p}$ .

Il reste à vérifier que  $K_0^{j+1} \notin \mathfrak{p}$ . Procédons par l'absurde. Dans le quotient  $(A_q)_{j+1}/\mathfrak{p}_{j+1}(A_q)_{j+1}$ , on a

$$\overline{K_0^j} \in (\overline{A_b^{j+1}}) \subset \dots \subset (\overline{A_{a_{j+1}-1}^{j+1}}) = (\overline{K_0^{j+1}}).$$

Si  $K_0^{j+1} \in \mathfrak{p}$  alors  $K_0^j \in \mathfrak{p}$ . C'est absurde.  $\square$

**Théorème 45.** Soit  $j \in \{1, \dots, n-2\}$ . On considère

$$\begin{pmatrix} P^j & K^j \\ * & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ B^j & t^{b_j} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^{a_{j+1}} & A^{j+1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C^{j+1} & D^{j+1} \\ E^{j+1} & F^{j+1} \end{pmatrix},$$

où  $(P^j, K^j)$  est de type  $\text{Cond}_j$ . Supposons que les  $Q_j + 1$  premiers coefficients des polynômes de la première ligne de cette matrice appartiennent à  $\mathfrak{p}$ , que  $\mathfrak{q}_j(A_q)_j/\mathfrak{p}_j(A_q)_j = (\overline{K_0^j}, \overline{x})$  et que  $K_0^j B_0^j + P_0^j \in \mathfrak{p}$ .

Si on pose  $tP^{j+1} = P^j + K^j B^j$  modulo  $\mathfrak{p}[t]$ , alors les  $a_{j+1}$  premiers coefficients du polynôme  $P^{j+1} A^{j+1} + K^j t^{b_j-1}$  appartiennent à  $\mathfrak{p}$  ce qui lie les variables de  $A^{j+1}$  par rapport à  $\mathfrak{p}$ . Si on pose  $t^{a_{j+1}} K^{j+1} = P^{j+1} A^{j+1} + K^j t^{b_j-1} \equiv \mathfrak{p}[t]$  alors  $(P^{j+1}, K^{j+1})$  est de type  $\widetilde{\text{Cond}}_{j+1}$  et les  $Q_{j+1}$  premiers coefficients des polynômes de la première ligne de

$$\begin{pmatrix} P^{j+1} & K^{j+1} \\ * & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ B^{j+1} & t^{b_{j+1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^{a_{j+2}} & A^{j+2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C^{j+2} & D^{j+2} \\ E^{j+2} & F^{j+2} \end{pmatrix}$$

appartiennent à  $\mathfrak{p}$ . De plus  $\mathfrak{q}_{j+1}(A_q)_{j+1}/\mathfrak{p}_{j+1}(A_q)_{j+1} = (\overline{x})$ .

*Démonstration.* Comme  $P_0^j = -x + z$ , l'équation  $P_0^j + K_0^j B^j \in \mathfrak{p}$  entraîne que, dans l'anneau  $(A_{\mathfrak{q}})_{j+1}/\mathfrak{p}_j(A_{\mathfrak{q}})_{j+1}$ ,

$$\overline{-x + z + K_0^j B^j} = 0.$$

En écrivant que  $\bar{z} = \overline{K_0^j u}$  avec  $u \in (A_{\mathfrak{q}})_j$ , on a  $\bar{x} = \overline{K_0^j (B_0^j + u)}$ . Comme  $(B_0^j + u)$  est inversible dans  $(A_{\mathfrak{q}})_{j+1}$ ,

$$\mathfrak{q}_j(A_{\mathfrak{q}})_{j+1}/\mathfrak{p}_{j+1}(A_{\mathfrak{q}})_{j+1} = (\bar{x}).$$

On écrit que les  $Q_j + 1$  premiers coefficients du polynôme en haut à gauche

$$\begin{aligned} & (P^j + K^j B^j)t^{a_{j+1}}C^{j+1} + ((P^j + K^j B^j)A^{j+1} + t^{b_j}K^j)E^{j+1} \\ \equiv & t(P^{j+1}t^{a_{j+1}}C^{j+1} + (P^{j+1}A^{j+1} + t^{b_j-1}K^j)E^{j+1}) \pmod{\mathfrak{p}[t]} \end{aligned}$$

appartiennent à  $\mathfrak{p}$ . Les  $Q_j$  premiers coefficients du polynôme  $P^{j+1}t^{a_{j+1}}C^{j+1} + (P^{j+1}A^{j+1} + t^{b_j-1}K^j)E^{j+1}$  appartiennent alors à  $\mathfrak{p}$ . En appliquant le lemme 36, les  $a_{j+1}$  premiers coefficients de  $P^{j+1}A^{j+1} + t^{b_j-1}K^j$  appartiennent à  $\mathfrak{p}$ .

Comme  $(P^j, K^j)$  est de type  $Cond_j$ , on a  $P_0^{j+1} = P_1^j + (K^j B^j)_1 \notin \mathfrak{q}$ . Pour tout  $i \in \llbracket 0, a_{j+1} - 1 \rrbracket$ , dans le quotient  $(A_{\mathfrak{q}})_{j+1}/\mathfrak{p}_{j+1}(A_{\mathfrak{q}})_{j+1}$ , on a

$$\underbrace{\overline{P_0^{j+1}}}_{\text{inversible}} \overline{A_i^{j+1}} + \underbrace{\overline{P_1^{j+1}A_{i-1}^{j+1}} + \dots + \overline{A_0^{j+1}P_i^{j+1}} + \overline{K_{i-b_j+1}^j}}_{\in(\bar{x})} = 0.$$

Donc  $\overline{A_i^{j+1}} \in (\bar{x})$  et  $\mathfrak{q}_{j+1}(A_{\mathfrak{q}})_{j+1}/\mathfrak{p}_{j+1}(A_{\mathfrak{q}})_{j+1} = (\bar{x})$ . De plus, les  $Q_j + 1$  premiers coefficients des polynômes de la première ligne de

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} P^j & K^j \\ * & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ B^j & t^{b_j} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^{a_{j+1}} & A^{j+1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C^{j+1} & D^{j+1} \\ E^{j+1} & F^{j+1} \end{pmatrix} \\ = & \begin{pmatrix} t^{a_{j+1}}(P^j + K^j B^j) & (P^j + K^j B^j)A^{j+1} + K^j t^{b_j} \\ * & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C^{j+1} & D^{j+1} \\ E^{j+1} & F^{j+1} \end{pmatrix} \\ \equiv & \begin{pmatrix} t^{a_{j+1}+1} & 0 \\ 0 & t^{a_{j+1}+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P^{j+1} & K^{j+1} \\ * & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ B^{j+1} & t^{b_{j+1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^{a_{j+2}} & A^{j+2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C^{j+2} & D^{j+2} \\ E^{j+2} & F^{j+2} \end{pmatrix} \pmod{\mathfrak{p}[t]} \end{aligned}$$

appartiennent à  $\mathfrak{p}$  et donc les  $Q_{j+1}$  premiers coefficients des polynômes de la première ligne de

$$\begin{pmatrix} P^{j+1} & K^{j+1} \\ * & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ B^{j+1} & t^{b_{j+1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^{a_{j+2}} & A^{j+2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C^{j+2} & D^{j+2} \\ E^{j+2} & F^{j+2} \end{pmatrix}$$

appartiennent à  $\mathfrak{p}$ . □

**Théorème 46.** Soit  $j \in \{1, \dots, n-2\}$ . On considère la matrice :

$$\begin{pmatrix} P^j & K^j \\ * & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ B^j & t^{b_j} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^{a_{j+1}} & A^{j+1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C^{j+1} & D^{j+1} \\ E^{j+1} & F^{j+1} \end{pmatrix}$$

où  $(P^j, K^j)$  est de type  $\widetilde{\text{Cond}}_j$ . On suppose que les  $Q_j$  premiers coefficients des polynômes de la première ligne de cette matrice appartiennent à  $\mathfrak{p}$  et que  $\mathfrak{q}_j(A_{\mathfrak{q}})_j / \mathfrak{p}_j(A_{\mathfrak{q}})_j = (\bar{x})$ .

Alors, les  $a_{j+1}$  premiers coefficients de coefficients de  $(P^j + KB^j)A^{j+1} + K^j t^{b_j}$  appartiennent à  $\mathfrak{p}$  ce qui lie les variables de  $A^{j+1}$  par rapport à  $\mathfrak{p}$ . Si on pose  $P^{j+1} = P^j + K^j B^j$  et  $t^{a_{j+1}} K^{j+1} = P^{j+1} A^{j+1} + K^j t^{b_j} \pmod{\mathfrak{p}[t]}$  alors  $(P^{j+1}, K^{j+1})$  est de type  $\widetilde{\text{Cond}}_{j+1}$  et les  $Q_{j+1}$  premiers coefficients de

$$\begin{pmatrix} P^{j+1} & K^{j+1} \\ * & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ B^{j+1} & t^{b_{j+1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^{a_{j+2}} & A^{j+2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C^{j+2} & D^{j+2} \\ E^{j+2} & F^{j+2} \end{pmatrix}$$

appartiennent à  $\mathfrak{p}$ . De plus  $\mathfrak{q}_{j+1}(A_{\mathfrak{q}})_{j+1} / \mathfrak{p}_{j+1}(A_{\mathfrak{q}})_{j+1} = (\bar{x})$ .

*Démonstration.* On a encore  $P_0^{j+1} \notin \mathfrak{q}$ . On écrit que les  $Q_j$  premiers coefficients du polynôme

$$P^{j+1} t^{a_{j+1}} C^{j+1} + (P^{j+1} A^{j+1} + K^j t^{b_j}) E^{j+1}$$

appartiennent à  $\mathfrak{p}$ . Le lemme 36 assure alors que les  $a_{j+1}$  premiers coefficients du polynôme  $P^{j+1} A^{j+1} + K^j t^{b_j}$  appartiennent à  $\mathfrak{p}$ . Les variables de  $A^{j+1}$  sont donc liées par rapport à  $\mathfrak{p}$ . Pour tout  $i \in \llbracket 0, a_{j+1} - 1 \rrbracket$  on a

$$P_0^{j+1} A_i^{j+1} + \dots + P_i^{j+1} A_0^{j+1} + K_{i-b_j}^j \in \mathfrak{p}.$$

Dans le quotient  $(A_{\mathfrak{q}})_{j+1} / \mathfrak{p}_{j+1}(A_{\mathfrak{q}})_{j+1}$ , on a donc

$$\underbrace{P_0^{j+1}}_{\text{invertible}} \overline{A_i^{j+1}} + \underbrace{\dots + P_i^{j+1} A_0^{j+1} + K_{i-b_j}^j}_{\in (\bar{x})} = 0.$$

Par conséquent,  $\overline{A_i^{j+1}} \in (\bar{x})$  et  $\mathfrak{q}_{j+1}(A_{\mathfrak{q}})_{j+1}/\mathfrak{p}_{j+1}(A_{\mathfrak{q}})_{j+1} = (\bar{x})$ .

Les  $Q_j$  premiers coefficients de la première ligne de la matrice

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} P^j & K^j \\ * & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ B^j & t^{b_j} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^{a_{j+1}} & A^{j+1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C^{j+1} & D^{j+1} \\ E^{j+1} & F^{j+1} \end{pmatrix} \\ \equiv & \begin{pmatrix} t^{a_{j+1}} & 0 \\ 0 & t^{a_{j+1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P^{j+1} & K^{j+1} \\ * & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ B^{j+1} & t^{b_{j+1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^{a_{j+2}} & A^{j+2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C^{j+2} & D^{j+2} \\ E^{j+2} & F^{j+2} \end{pmatrix} \pmod{\mathfrak{p}[t]} \end{aligned}$$

appartiennent à  $\mathfrak{p}$  donc les  $Q_{j+1}$  premiers coefficients de la première ligne de la matrice

$$\begin{pmatrix} P^{j+1} & K^{j+1} \\ * & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ B^{j+1} & t^{b_{j+1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^{a_{j+2}} & A^{j+2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C^{j+2} & D^{j+2} \\ E^{j+2} & F^{j+2} \end{pmatrix}$$

appartiennent à  $\mathfrak{p}$ . □

**Théorème 47.** *On considère la matrice :*

$$\begin{pmatrix} P^{n-1} & K^{n-1} \\ * & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ B^{n-1} & t^{b_{n-1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^{a_n} & A^n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où  $(P^{n-1}, K^{n-1})$  est de type  $\widetilde{Cond}_{n-1}$ . On suppose que les  $Q_{n-1} = a_n$  premiers coefficients des polynômes de la première ligne de cette matrice appartiennent à  $\mathfrak{p}$  et que  $\mathfrak{q}_{n-1}(A_{\mathfrak{q}})_{n-1}/\mathfrak{p}_{n-1}(A_{\mathfrak{q}})_{n-1} = (\bar{x})$ .

Alors, les  $a_n$  premiers coefficients de  $(P^{n-1} + K^{n-1}B^{n-1})A^n + K^{n-1}t^{b_{n-1}}$  appartiennent à  $\mathfrak{p}$  ce qui lie les variables de  $A^n$  par rapport à  $\mathfrak{p}$ . De plus  $\mathfrak{q}_n(A_{\mathfrak{q}})_n/\mathfrak{p}_n(A_{\mathfrak{q}})_n = (\bar{x})$ .

*Démonstration.* On écrit que les  $Q_{n-1}$  premiers coefficients du polynôme en haut à droite

$$(P^{n-1} + K^{n-1}B^{n-1})A^n + K^{n-1}t^{b_{n-1}}$$

appartiennent à  $\mathfrak{p}$ . Les variables de  $A^n$  sont donc liées par rapport à  $\mathfrak{p}$ . Pour tout  $i \in \llbracket 0, a_{n-1} - 1 \rrbracket$  on a

$$(P^{n-1} + K^{n-1}B^{n-1})_0 A_i^n + \dots + (P^{n-1} + K^{n-1}B^{n-1})_i A_0^n + K_{i-b_{n-1}}^{n-2} \in \mathfrak{p}.$$

Dans le quotient  $(A_q)_n/\mathfrak{p}_n(A_q)_n$ , on a donc

$$\underbrace{(P^{n-1} + K^{n-1}B^{n-1})_0 A_i^n}_{\text{inversible}} + \underbrace{\dots + (P^{n-1} + K^{n-1}B^{n-1})_i A_0^n + K_{i-b_{n-1}}^{n-1}}_{\in(\bar{x})} = 0.$$

Par conséquent,  $\overline{A_i^n} \in (\bar{x})$  et  $\mathfrak{q}_n(A_q)_n/\mathfrak{p}_n(A_q)_n = (\bar{x})$ . □

Lorsqu'on écrit que les  $Q_{n-1} + 1$  premiers coefficients de la première ligne de

$$\begin{pmatrix} t-x & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^{a_1} & A^1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C^1 & D^1 \\ E^1 & F^1 \end{pmatrix}$$

sont dans  $\mathfrak{p}$ , on applique itérativement les théorèmes de cette partie pour se retrouver à finalement appliquer le théorème 47 ou la proposition 39. On note alors  $\mathfrak{j} \subset \mathfrak{p}$  l'idéal engendré par les  $Q_{n-1} + 1$  éléments de  $\mathfrak{p}$  exhibés lors de ce processus. On a en fait démontré que  $\mathfrak{q}A_q/\mathfrak{j}A_q = (\bar{x})$

Montrons que  $\mathfrak{j} = \mathfrak{p}$ . Supposons par l'absurde qu'il existe  $y \in \mathfrak{p} \setminus \mathfrak{j}$ . Alors, dans  $A_q$ , il existe  $j \in \mathfrak{j}A_q$ ,  $u \notin \mathfrak{q}A_q$  et  $n \in \mathbb{N}^*$  tels que  $y = j + ux^n$  ce qui implique que  $x \in \mathfrak{p}A_q$ . Par conséquent, dans  $A$ , on a  $x \in \mathfrak{p}$ . C'est impossible (par exemple parce qu'avec la première équation cela donnerait  $a \in \mathfrak{p}$ , ce que l'on a exclu).

L'idéal  $\mathfrak{p}$  est l'idéal de  $\tau Z_- \star \tau Z_k$  et on explicite  $k$  grâce aux éléments qui engendrent  $\mathfrak{j}$ . On a démontré que les variables  $A_i^j$  étaient toutes liées. Cela signifie que les signes  $+$  de  $k'$  restent des signes  $+$  dans  $k$ . On a aussi démontré que l'on avait exactement une variable  $B_0^j$  qui était liée donc il existe un unique entier  $f$  tel que  $k'_f = -$  et  $k_f = +$ .

Il reste à démontrer que  $k'_1 \dots k'_{f-1}$  est équilibré. Si ce n'est pas le cas alors

$$k'_1 \dots k'_{f-1} = \underbrace{+\dots+}_{a_1 \text{ signes}} \underbrace{-\dots-}_{b_1 \text{ signes}} \dots \underbrace{+\dots+}_{a_j \text{ signes}}$$

et il existe un plus grand  $l < j$  tel que  $a_{l+1} - b_l + \dots - b_{j-1} + a_j < 0$ . Dans ce cas  $B_0^j$  ne peut être liée car de la  $l$ -ème à la  $j$ -ème itération des théorèmes de cette partie, on applique le théorème 43.

Réciproquement, on se donne  $k''$  tel que  $k' \in N(k'')$ . Il existe donc un unique entier  $t$  tel que  $k'_t = -$  et  $k''_t = +$ . De plus

$$k'_1 \dots k'_{t-1} = \underbrace{+\dots+}_{a_1 \text{ signes}} \underbrace{-\dots-}_{b_1 \text{ signes}} \dots \underbrace{+\dots+}_{a_j \text{ signes}}$$

Soit  $\mathfrak{j}$  l'idéal de  $A$  engendré par

- les  $a_1$  premiers coefficients de  $(t-x)A^1 + a$ .
- Si  $b_1 > a_2$  on pose  $(P^2, K^2)$  comme dans le théorème 43 sinon comme dans le théorème 44. On prend les  $a_2$  premiers coefficients de  $P^1A^2 + K^1(t^{b_1} + B^1A^2)$ .
- Pour tout  $3 \leq i \leq j$ , s'il existe  $l < i$  tel que  $\underbrace{-\dots-}_{b_l \text{ signes}} \dots \underbrace{+\dots+}_{a_i \text{ signes}}$  n'est pas équilibré alors on pose alors  $(P^i, K^i)$  comme dans le théorème 43. On prend tous les coefficients de  $A^i$ .
- Pour tout  $3 \leq i \leq j$ , si pour tout  $l < i$  le mot  $\underbrace{-\dots-}_{b_l \text{ signes}} \dots \underbrace{+\dots+}_{a_i \text{ signes}}$  est équilibré alors on pose alors  $(P^i, K^i)$  comme dans le théorème 44. On prend les  $a_i$  premiers coefficients de  $t^{b_l}K^{i-1} + A^iP^i$ .
- $K_0^j B_0^j + P_0^j$
- On pose alors  $(P^{j+1}, K^{j+1})$  comme dans le théorème 45. On prend les  $a_{j+1}$  premiers coefficients du polynôme  $P^{j+1}A^{j+1} + K^{j+1}t^{b_j-1}$
- Pour tout  $j+2 \leq i \leq n-1$ , on pose alors  $(P^i, K^i)$  comme dans le théorème 46. On prend les  $a_i$  premiers coefficients du polynôme  $P^iA^i + K^{i-1}t^{b_{i-1}}$
- On prend les  $a_n$  premiers coefficients du polynôme  $P^nA^n + K^{n-1}t^{b_{n-1}}$

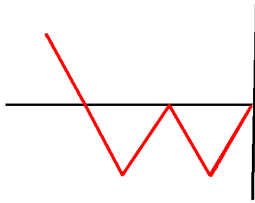
Alors tout a été fait pour que  $\mathfrak{J} \subset \mathfrak{j} \subset \mathfrak{q}$ . De plus, avec les mêmes arguments que dans les preuves de cette partie (ce sont les mêmes équations), on a  $\mathfrak{q}A_{\mathfrak{q}}/\mathfrak{j}A_{\mathfrak{q}} = (\bar{x})$ . Soit  $\mathfrak{p}$  un idéal premier contenant  $\mathfrak{j}$ . Comme auparavant, on a  $\mathfrak{j} = \mathfrak{p}$ , car si on applique récursivement les théorèmes de cette partie avec l'idéal  $\mathfrak{p}$  on obtient les équations qui engendrent  $\mathfrak{j}$ . Avec un changement de carte  $\mathfrak{j}$  est bien l'idéal de  $\tau Z_- \star \tau Z_{k''}$ . Le théorème 31 est alors prouvé.

### 4.3 Formules de calcul

Dans cette section, on dégage des règles de calcul issues de la formule établie à la section précédente. Ces nouvelles règles de calcul nous seront utiles dans les deux sections suivantes.

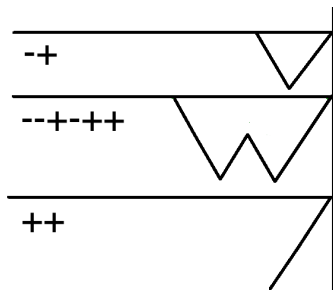
**Définition 48.** On peut associer un chemin à une suite de + et de - : on le construit de la droite vers la gauche. Lorsqu'on lit le mot de la droite vers la gauche : à chaque signe +, on descend et à chaque signe - on remonte.

**Exemple 49.** On associe à la suite - - + - + le chemin suivant :

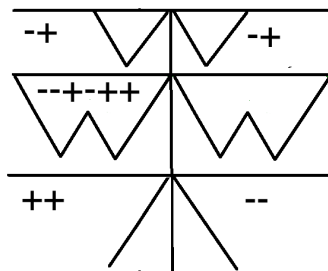


*Remarque 50.* Au niveau des chemins, un mot est équilibré si et seulement si le chemin associé, lorsqu'on le trace à partir de l'axe horizontal n'en repasse jamais au dessus. Si en plus, tout à gauche, le chemin se termine sur l'axe horizontal alors le mot est super équilibré.

**Exemple 51.** Les mots  $-+$  et  $--+ - ++$  sont super équilibrés tandis que  $++$  est équilibré. Sur le dessin :



*Remarque 52.* La représentation graphique de  $\bar{p}$  est obtenue à partir de celle de  $p$  en effectuant une symétrie par rapport à l'axe vertical.



En examinant les chemins correspondants, il est aisé de voir que  $p$  super équilibré implique  $\bar{p}$  super équilibré. Si  $p = p_1 \dots p_n$  est super équilibré alors pour tout  $i \leq n$ ,  $p_1 \dots p_i$  contient plus de  $-$  que de  $+$ .

On rappelle que le résultat suivant est une conséquence de la proposition 14.

**Proposition 53.** *Pour tout mot  $k$ , on a  $z_+ \otimes z_k = z_{+k}$  et  $z_k \otimes z_- = z_{k-}$ .*

Grâce à la remarque 52 et au théorème 31, on a le corollaire suivant.

**Corollaire 54.** *Soit  $p$  un mot équilibré de taille  $v$ . On a*

1)  $N(\bar{p}) = \emptyset$  donc  $z_- \otimes z_{\bar{p}} = z_{-\bar{p}}$ ,

2) si de plus  $p$  est super équilibré,  $N(p+) = \{p-\}$  et alors :

$$z_- \otimes z_{p+} = z_{-p+} + z_{+p} \otimes z_-.$$

*Démonstration.* Lorsque  $p$  est équilibré, par définition,  $\overline{p_i \dots p_v}$  contient plus de  $-$  que de  $+$  quel que soit  $i > 1$ . Pour avoir  $k \in N(\bar{p})$ , il faut qu'il existe un unique  $t$  tel que  $k_t = -$  et  $\bar{p}_t = +$  et que de plus  $\bar{p}_1 \dots \bar{p}_{t-1}$  soit équilibré. Or si  $\bar{p}_1 \dots \bar{p}_{t-1} = \overline{p_i \dots p_v}$  avec  $i = v - t + 2$  est équilibré il est super équilibré et nécessairement  $\bar{p}_t = -$ . Donc  $N(\bar{p}) = \emptyset$ .

Si en plus  $p$  est super équilibré alors  $p- \in N(p+)$ . De plus, on ne peut changer un  $+$  de  $p$  en  $-$ , en effet, si on souhaite changer  $p_i = +$  en  $-$ , il faut que  $p_1 \dots p_{i-1}$  soit équilibré. Si  $p$  est super équilibré, comme énoncé à la remarque 52, le mot  $p_1 \dots p_{i-1}$  contient strictement plus de  $-$  que de  $+$  donc n'est pas équilibré. Par conséquent,  $p-$  est l'unique élément de  $N(p+)$ .  $\square$

**Lemme 55.** *Soit  $p$  un mot équilibré et  $k$  un mot quelconque. On a :*

$$N(pk) = \{qk \mid q \in N(p)\} \sqcup \{pl \mid l \in N(k)\}$$

*Démonstration.* Soit  $k' \in N(pk)$ , par définition  $k'$  ne diffère de  $pk$  que d'un signe :  $k'_t = -$  alors que  $(pk)_t = +$ .

Si  $t$  est inférieur ou égal à la longueur de  $p$  alors  $k'$  est de la forme  $qk$  avec  $q \in N(p)$ .

Si  $t$  est strictement plus grand que la longueur de  $p$  alors le mot

$$(pk)_1 \dots (pk)_{t-1} = p.k_1 \dots k_d$$

est équilibré et nécessairement  $k_1 \dots k_d$  est équilibré<sup>1</sup> donc  $k'$  est de la forme  $pl$  avec  $l \in N(k)$ .

On a donc  $N(pk) \subset \{qk \mid q \in N(p)\} \sqcup \{pl \mid l \in N(k)\}$ . L'inclusion réciproque est facile en constatant que si  $k_1 \dots k_d$  est équilibré alors  $p.k_1 \dots k_d$  est équilibré.  $\square$

1. Le cas où le signe qui change est le premier signe de  $k$  est traité en posant  $d = 0$ . Par convention  $k_1 \dots k_d$  est le mot vide qui est équilibré.



**Théorème 56.** *Si  $p$  est équilibré alors pour tout mot  $k$ ,  $z_p \otimes z_k = z_{pk}$ .*

*Démonstration.* On montre le résultat par récurrence sur la taille de  $p$ .

Lorsque  $p$  est de taille 1 le seul mot équilibré est  $p = +$ . Or on sait déjà que  $z_+ \otimes z_k = z_{+k}$  pour tout mot  $k$ .

Lorsque  $p$  est de taille 2, il y a deux possibilités :

- si  $p = ++$  le résultat est clair car  $z_{++} = z_+ \otimes z_+$  ;
- si  $p = -+$ , on sait d'après le lemme 55 que  $N(+k) = \{-k\} \sqcup \{+l \mid l \in N(k)\}$ .  
On calcule alors :

$$x_{-+} \otimes z_k = z_- \otimes z_+ \otimes z_k = z_- \otimes z_{+k} = z_{-+k} + z_{+-k} + \sum_{k' \in N(k)} z_{++k'}.$$

Or  $x_{-+} = z_{-+} + z_{+-}$  et  $z_{+-} \otimes z_k = z_+ \otimes z_- \otimes z_k = z_{+-k} + \sum_{k' \in N(k)} z_{++k'}$ . On a bien  $z_{-+} \otimes z_k = x_{-+} \otimes z_k - z_{+-} \otimes z_k = z_{-+k}$ .

Soit  $p$  un mot équilibré de longueur strictement plus grande que 2. On suppose le résultat vrai pour tout mot équilibré de taille strictement inférieure à celle de  $p$ .

- Si on peut couper  $p$  en deux mots plus courts équilibrés alors le résultat suit par hypothèse de récurrence. C'est le cas notamment lorsque  $p$  n'est pas super équilibré.
- On suppose donc que  $p$  est super équilibré et ne peut se couper en deux sous mots équilibrés. Alors  $p$  est de la forme  $--p'++$  avec  $-p'+$  super équilibré. Comme  $-p'++$  est équilibré, par hypothèse de récurrence on a :

$$z_- \otimes z_{-p'++} \otimes z_k = z_- \otimes z_{-p'++k}.$$

D'après le lemme 55 et le corollaire 54 on a

$$N(-p'++k) = \{-p'++-k\} \sqcup \{-p'++l \mid l \in N(k)\}.$$

Par conséquent,

$$z_- \otimes z_{-p'++k} = z_{pk} + z_{+-p'++-k} + \sum_{k' \in N(k)} z_{+-p'++k'}.$$

De plus, comme  $+-p'++$  est équilibré, par hypothèse de récurrence on a :

$$\begin{aligned}
 z_{+-p'+-} \otimes z_k &= z_{+-p'+} \otimes z_- \otimes z_k \\
 &= z_{+-p'+} \otimes (z_{-k} + \sum_{k' \in N(k)} z_{+k'}) \\
 &= z_{+-p'+-k} + \sum_{k' \in N(k)} z_{+-p'++k'}
 \end{aligned}$$

En écrivant que  $z_p = z_- \otimes z_{-p'+} - z_{+-p'+-}$  et en utilisant les deux calculs ci-dessus, on obtient bien que  $z_p \otimes z_k = z_{pk}$ .

□

**Définition 57.** Soit  $k = k_1 \dots k_n$  un mot quelconque. On définit récursivement  $(m_1, \dots, m_p)$  la bonne décomposition de  $k$  de la façon suivante :

- Si  $k_n = -$  alors on prend pour  $m_p$  le mot constitué de  $-$  de taille maximale par lequel se termine  $k$ . Lorsque on écrit que  $k = k'm_p$ , alors  $m_1, \dots, m_{p-1}$  est défini comme étant la bonne décomposition de  $k'$ .
- Si  $k_n = +$  alors on prend pour  $m_p$  le mot équilibré de taille maximale par lequel se termine  $k$ . Lorsque on écrit que  $k = k'm_p$ , alors  $m_1, \dots, m_{p-1}$  est défini comme étant la bonne décomposition de  $k'$ .

*Remarque 58.* Dans la bonne décomposition d'un mot  $k$ , si  $m_i$  est équilibré et  $i \neq 1$  alors  $m_i$  est super équilibré.

**Lemme 59.** Soit  $k$  un mot quelconque. On considère  $(m_1, \dots, m_p)$  la bonne décomposition de  $k$ . On a :

$$z_k = z_{m_1} \otimes \dots \otimes z_{m_p}.$$

*Démonstration.* Soit  $i > 1$ , comme le mot  $m_i \dots m_p$  n'est constitué que de mots super-équilibrés et de blocs de  $-$ , alors le mot  $\overline{m_i \dots m_p}$  est équilibré. Par conséquent,

- si  $m_{i-1}$  est un bloc de  $-$  le corollaire 54 assure que

$$z_- \otimes z_{m_i, \dots, m_p} = z_{-m_i, \dots, m_p}$$

et donc que  $z_{m_{i-1}} \otimes z_{m_i, \dots, m_p} = z_{m_{i-1}m_i, \dots, m_p}$ ,

- si  $m_{i-1}$  est équilibré, c'est le théorème 56 qui assure que

$$z_{m_{i-1}} \otimes z_{m_i, \dots, m_p} = z_{m_{i-1}m_i, \dots, m_p}.$$

De proche en proche, on a bien  $z_k = z_{m_1} \otimes \dots \otimes z_{m_p}$ .

□

**Lemme 60.** *Si  $p$  est équilibré alors pour tout mot  $k$ ,  $z_k \otimes z_{\bar{p}} = z_{k\bar{p}}$ .*

*Démonstration.* Soit  $m_1, \dots, m_q$  la bonne décomposition de  $k$ . Le lemme 59, le corollaire 54 ainsi que le théorème 56 assurent que

$$z_k \otimes z_{\bar{p}} = z_{m_1} \otimes \dots \otimes z_{m_q} \otimes z_{\bar{p}} = z_{m_1 \dots m_q \bar{p}} = z_{k\bar{p}}.$$

□

## 4.4 Symétrie

Dans cette section, nous démontrons la propriété de symétrie conjecturée dans la section 4.1. On rappelle que, dans la représentation fondamentale  $L(\varpi)$  de  $\mathfrak{sl}_2$ ,  $x_+$  désigne le vecteur de la base de Mirković et Vilonen de poids  $\varpi$  et  $x_-$  désigne celui de poids  $-\varpi$ .

On rappelle qu'un multi-ensemble est un ensemble  $(A, m)$  où  $A$  est un ensemble appelé support et  $m$  une application  $A \rightarrow \mathbb{N}$  appelée multiplicité. Un multi-ensemble est donc une généralisation de la notion d'ensemble où chaque élément peut apparaître plusieurs fois. Ainsi si  $(f_i)_{i \in A}$  est une famille de vecteurs indexés par  $A$ , on écrit  $\sum_{i \in A} f_i$  à la place de  $\sum_{i \in A} m(i) \cdot f_i$ .

**Définition 61.** On note  $M(k)$  le multi-ensemble des mots composés de signes de  $+$  et  $-$  tel que  $x_k = \sum_{i \in M(k)} z_i$ .

La propriété de symétrie se réécrit :

$$\text{Si } k \text{ est une suite de } + \text{ et de } - \text{ alors } x_{\bar{k}} = \sum_{i \in M(k)} z_i.$$

**Proposition 62.** *Si la propriété de symétrie est vraie pour tout mot de longueur inférieure à  $n$  alors*

$$z_{\bar{k}} \otimes z_+ = z_{\bar{k}+} + \sum_{i \in N(k)} z_{i-}$$

*pour tout mot  $k$  de longueur inférieure à  $n - 1$ .*

*Démonstration.* Soit  $k$  un mot de longueur  $n - 1$ .

Dans toute la preuve, on note  $\phi_n$  l'involution de  $L(\varpi)^{\otimes n}$  qui à  $z_i$  associe  $z_{\bar{i}}$  et  $\psi_n$  l'involution de  $L(\varpi)^{\otimes n}$  qui à  $x_i$  associe  $x_{\bar{i}}$ . Si la propriété de symétrie est vraie pour tout mot de longueur inférieure ou égale à  $n$  alors pour tout  $p \leq n$ , on a  $\phi_p = \psi_p$ . Donc  $\phi_n(z_{\bar{k}} \otimes z_+) = \psi_n(z_{\bar{k}} \otimes z_+)$ .

On décompose alors  $z_{\bar{k}}$  sur la base des  $x_{k'}$  :

$$z_{\bar{k}} = \sum_{k' \in U_{n-1}} a_{k'} x_{k'}.$$

De plus,

$$\psi_n(z_{\bar{k}} \otimes z_+) = x_- \otimes \sum_{k' \in U_{n-1}} a_{k'} x_{\bar{k}'} = x_- \otimes \psi_{n-1}(z_{\bar{k}}) = z_- \otimes \phi_{n-1}(z_{\bar{k}}) = z_- \otimes z_k.$$

Donc  $\phi_n(z_{\bar{k}} \otimes z_+) = z_- \otimes z_k$  et on a le résultat en appliquant  $\phi_n = \psi_n$  des deux côtés de l'égalité.  $\square$

**Théorème 63.** *Pour tout mot  $k$ , on a  $x_{\bar{k}} = \sum_{i \in M(k)} z_{\bar{i}}$ .*

*Démonstration.* On démontre le résultat par récurrence forte sur le nombre  $n$  de facteurs tensoriels. Le résultat est vrai pour  $n = 1$ ,  $n = 2$ ,  $n = 3$ ,  $n = 4$ ,  $n = 5$  et  $n = 6$  (matrice de passage donnée en annexe). On suppose le résultat vrai pour tout mot de longueur inférieure ou égale à  $n$ .

On se donne un mot  $k$  de taille  $n + 1$ . Si  $k$  commence par un  $+$ , alors il existe un mot  $k'$  tel que  $k = +k'$ . On écrit que

$$x_k = x_+ \otimes x_{k'} = z_+ \otimes \sum_{i \in M(k')} z_i = \sum_{i \in M(k')} z_{+i}.$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} x_{\bar{k}} &= x_{\bar{k}'} \otimes x_- \\ &= \sum_{i \in M(k')} z_{\bar{i}} \otimes z_- && \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= \sum_{i \in M(k')} z_{\bar{i}-}. && \text{d'après la proposition 53} \end{aligned}$$

On a donc le résultat. Si  $k$  termine par un  $-$ , la preuve est rigoureusement la même. On peut alors supposer que  $k$  commence par  $-$  et finit par  $+$ .

On se place dans le cas où l'on peut trouver un mot  $n$ , non vide, super équilibré et un mot  $k'$  non vide tels que  $k = nk'$ . On a  $x_n = \sum_{i \in M(n)} z_i$ . Comme  $n$  est super équilibré, lorsqu'on considère la bonne décomposition  $(i_1, \dots, i_{t_i})$  de  $i \in M(n)$ , nécessairement  $i_1$  est équilibré (sinon il y aurait plus de  $-$  que de  $+$  dans  $n$ ).

On écrit aussi que  $x_{k'} = \sum_{j \in M(k')} z_j$  et donc avec le lemme 59 :

$$x_k = \sum_{\substack{(i,j) \in \\ M(n) \times M(k')}} z_i \otimes z_j = \sum_{\substack{(i,j) \in \\ M(n) \times M(k')}} z_{i_1} \otimes (z_{i_2 \dots i_{t_i}} \otimes z_j)$$

Par hypothèse de récurrence et, comme les mots  $\overline{i_2 \dots i_{t_i}}$  sont équilibrés, d'après le théorème 56, on a aussi :

$$\begin{aligned} x_{\bar{k}} &= x_{\bar{k}'} \otimes x_{\bar{n}} = \sum_{\substack{(i,j) \in \\ M(n) \times M(k')}} z_{\bar{j}} \otimes z_{\bar{i}} \\ &= \sum_{\substack{(i,j) \in \\ M(n) \times M(k')}} z_{\bar{j}} \otimes z_{\overline{i_2 \dots i_{t_i}}} \otimes z_{\bar{i}_1} \end{aligned}$$

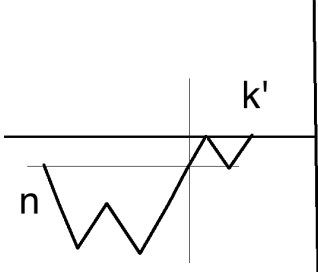
Soit  $P(i_2, \dots, i_{t_i}, j)$  le multi-ensemble tel que  $z_{i_2 \dots i_{t_i}} \otimes z_j = \sum_{l \in P(i_2, \dots, i_{t_i}, j)} z_l$ . On utilise les mêmes arguments que dans la preuve de la proposition 62 pour appliquer l'hypothèse de récurrence et écrire

$$z_{\bar{j}} \otimes z_{\overline{i_2 \dots i_{t_i}}} = \sum_{l \in P(i_2, \dots, i_{t_i}, j)} z_{\bar{l}}.$$

Pour tout mot  $p$ , d'après le théorème 56, on a  $z_{i_1} \otimes z_p = z_{i_1 p}$  et d'après le lemme 60, on a  $z_p \otimes z_{\bar{i}_1} = z_{p\bar{i}_1}$ .

Alors  $x_k = \sum_{\substack{(i,j) \in \\ M(n) \times M(k')}} \sum_{l \in P(i_2, \dots, i_{t_i}, j)} z_{i_1 l}$  et  $x_{\bar{k}} = \sum_{\substack{(i,j) \in \\ M(n) \times M(k')}} \sum_{l \in P(i_2, \dots, i_{t_i}, j)} z_{\bar{l} \bar{i}_1}$ . On a donc le résultat dans le cas particulier où  $k = nk'$ .

Comme on a supposé que  $k_1 = -$ , lorsqu'il y a strictement plus de  $+$  que de  $-$  dans  $k$  on peut toujours trouver un tel couple  $n$  et  $k'$ .



Si il y a strictement plus de  $-$  que de  $+$  dans  $k$ , on écrit  $\bar{k} = nk'$  avec  $n$  super équilibré non vide et  $k'$  non vide. On peut alors appliquer ce qui précède en échangeant les rôles joués par  $k$  et  $\bar{k}$  et conclure.

Il nous reste un seul cas à traiter : celui où  $k$  est super équilibré et non décomposable en deux mots équilibrés non vides. On écrit  $x_k = x_- \otimes x_{k'} = x_- \otimes \sum_{i \in M(k')} z_i$  et, par hypothèse de récurrence,  $x_{\bar{k}} = \sum_{i \in M(k')} z_{\bar{i}} \otimes x_+$ .

Soit  $i \in M(k')$ .

1. Si on peut écrire  $i = n + i_2$  avec  $n$  super équilibré et  $i_2$  non vide, alors d'après le corollaire 54 et le lemme 55 alors  $N(n + i_2) = \{n - i_2\} \sqcup \{n + l \mid l \in N(i_2)\}$ .  
Donc

$$x_- \otimes z_i = z_{-n+i_2} + z_{+n-i_2} + \sum_{l \in N(i_2)} z_{+n+l}.$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} z_{\bar{i}} \otimes z_+ &= z_{\bar{i}_2 - \bar{n}} \otimes z_+ \\ &= z_{\bar{i}_2} \otimes z_{-\bar{n}} \otimes z_+ && \text{car } n+ \text{ est équilibré et d'après le lemme 60} \\ &= z_{\bar{i}_2} \otimes (z_{-\bar{n}+} + z_{+\bar{n}-}) && \text{en utilisant la proposition 62} \\ &= z_{\bar{i}_2 - \bar{n}+} + z_{\bar{i}_2} \otimes z_+ \otimes z_{\bar{n}-} && \text{car } -n+ \text{ et } + \text{ sont équilibrés.} \end{aligned}$$

Par hypothèse de récurrence et d'après la proposition 62 ainsi que le lemme 60 appliqué avec  $p = +n$ , on a :

$$z_{\bar{i}_2} \otimes z_+ \otimes z_{\bar{n}-} = z_{\bar{i}_2 + \bar{n}-} + \sum_{j \in N(i_2)} z_{\bar{j} - \bar{n}-}.$$

On a bien  $z_- \otimes z_i = z_{-i} + \sum_{l \in N(i)} z_{+l}$  et  $z_{\bar{i}} \otimes z_+ = z_{\bar{i}+} + \sum_{l \in N(i)} z_{\bar{l}-}$ .

2. Lorsque  $i \in M(k')$  ne peut s'écrire comme avant, alors  $i = n+$  avec  $n$  super équilibré. On a donc  $x_- \otimes z_i = x_- \otimes z_{n+} = z_{-n+} + z_{+n-}$ . Mais

$$z_{-\bar{n}} \otimes x_+ = z_- \otimes z_{\bar{n}} \otimes z_+ = z_- \otimes z_{\bar{n}+} = z_{-\bar{n}+} + z_{+\bar{n}-}.$$

Encore une fois, on a  $z_- \otimes z_i = z_{-i} + \sum_{l \in N(i)} z_{+l}$  et  $z_{\bar{i}} \otimes z_+ = z_{\bar{i}+} + \sum_{l \in N(i)} z_{\bar{l}-}$ .

On a bien démontré que  $x_{\bar{k}} = \sum_{i \in M(k)} z_{\bar{i}}$ , le théorème est donc prouvé.  $\square$

## 4.5 Lien avec la base canonique duale

Nous avons étudié le passage des tenseurs simples de vecteurs de la base de Mirković et Vilonen vers la base de Mirković et Vilonen généralisée. Nous savons que pour l'algèbre de Lie  $\mathfrak{sl}_2$ , la base de Mirković et Vilonen coïncide avec la base canonique duale. La base canonique duale peut être définie pour le produit tensoriel de représentations irréductibles. Dans [10], Frenkel et Khovanov donnent une formulation explicite de la base canonique duale. Nous spécialisons leurs constructions à  $q = 1$  afin de travailler dans des  $U(\mathfrak{sl}_2)$ -modules, les groupes quantiques ne nous étant pas utiles.

Pour tout  $k \in \mathbb{N}$  et  $i \in \llbracket 0, k \rrbracket$ , on définit les applications  $\delta_1$  et  $(\delta_1)_i^k$  par

$$\delta_1 : \begin{cases} \mathbb{C} \rightarrow & L(\varpi) \otimes L(\varpi) \\ 1 \mapsto & x_{-+} - x_{+-} \end{cases},$$

$$(\delta_1)_i^k : \begin{cases} L(\varpi)^{\otimes k} \rightarrow & L(\varpi)^{\otimes k+2} \\ a_1 \otimes \dots \otimes a_k \mapsto & a_1 \otimes \dots \otimes a_i \otimes \delta_1(1) \otimes a_{i+1} \otimes \dots \otimes a_k \end{cases}.$$

Dans le produit tensoriel  $L(\varpi)^{\otimes k}$ , l'application  $(\delta_1)_i^k$  insère alors un facteur  $x_{-+} - x_{+-} = z_{-+}$  entre le  $i$ -ème et le  $i+1$ -ème terme. Le théorème suivant, dû à Frenkel et Khovanov ([10] theorem 1.9), donne une description complète de la base canonique duale de  $L(\varpi)^{\otimes m}$ .

**Théorème 64.** *La base canonique duale de  $L(\varpi)^{\otimes m}$  est composée des éléments suivants :*

$$(\delta_1)_{i_1}^{m-2} \dots (\delta_1)_{i_j}^{m-2j} \underbrace{x_{+ \dots + - \dots -}}_{m-2j}$$

où  $0 \leq j \leq m$  et  $0 \leq i_r \leq m - 2r$ .

**Exemple 65.** Appliquons le théorème 64 pour  $L(\varpi)^{\otimes 4}$  :

$$\begin{aligned}
 j = 0 \quad & x_{++++} = z_{++++} \\
 & x_{++--} = z_{++--} \\
 & x_{+-+-} = z_{+-+-} \\
 & x_{+---} = z_{+---} \\
 & x_{----} = z_{----} \\
 j = 1 \quad & (\delta_1)_0^2(x_{++}) = z_{-+++} \\
 & (\delta_1)_1^2(x_{++}) = z_{-++-} \\
 & (\delta_1)_1^2(x_{++}) = z_{+--+} \\
 & (\delta_1)_0^2(x_{+-}) = z_{-+-+} \\
 & (\delta_1)_1^2(x_{+-}) = z_{+--+} \\
 & (\delta_1)_2^2(x_{+-}) = z_{+---} \\
 & (\delta_1)_0^2(x_{--}) = z_{-+--} \\
 & (\delta_1)_1^2(x_{--}) = z_{--+} \\
 & (\delta_1)_2^2(x_{--}) = z_{----} \\
 j = 2 \quad & (\delta_1)_0^2(\delta_1)_0^0(1) = z_{-+++} \\
 & (\delta_1)_1^2(\delta_1)_0^0(1) = (\delta_1)_1^2(z_{-+}) = (\delta_1)_1^2(x_{-+} - x_{+-}) = z_{-++-} + z_{+--+} - z_{+-+-} = z_{-++-} \\
 & (\delta_1)_2^2(\delta_1)_0^0(1) = z_{-+++}
 \end{aligned}$$

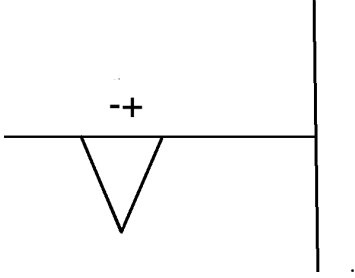
On remarque alors que dans le cas de  $L(\varpi)^{\otimes 4}$ , la base canonique duale coïncide avec la base de Mirković et Vilonen généralisée. On démontre alors le même résultat pour  $L(\varpi)^{\otimes m}$  quel que soit  $m$ .

**Lemme 66.** Soit  $p$  un mot équilibré (respectivement super-équilibré).

Quelle que soit la découpe de  $p$  en  $p_1 p_2$ , le mot  $p_1 - + p_2$  est équilibré (respectivement super-équilibré).

*Démonstration.* Ce résultat est évident avec un dessin. Rappelons qu'un mot est équilibré si son dessin (tracé de la droite vers la gauche) ne dépasse jamais l'axe horizontal. Insérer  $-+$  au milieu d'un mot correspond alors à insérer au milieu du chemin





Un tel ajout ne change pas la hauteur du chemin à l'extrême gauche. Si le chemin ne dépasse pas l'axe horizontal avant l'ajout, il ne le dépasse pas après. D'où le résultat.  $\square$

**Lemme 67.** Soit  $k$  un mot de longueur  $l$  et  $0 \leq i \leq l$ . On écrit  $k = k_1 \dots k_l$ . On a alors :

$$(\delta_1)_l^i(z_k) = z_{k_1 \dots k_{i-+} k_{i+1} \dots k_l}.$$

*Démonstration.* On démontre le résultat par récurrence sur  $l$ .

Lorsque  $l = 0$ ,  $k$  est le mot vide et alors le résultat est évident car  $\delta_1(1) = z_{-+}$ .

Lorsque  $l = 1$ , le résultat est aussi évident car  $x_{\pm} \otimes z_{-+} = z_{\pm-+}$  et  $z_{-+} \otimes x_{\pm} = z_{-+\pm}$ .

Supposons le résultat vrai jusqu'au rang  $l$ . Soit  $k$  un mot de longueur  $l + 1$  et  $0 \leq i \leq l + 1$ .

On considère alors la bonne décomposition de  $z_k$  introduite à la section précédente :

$$z_k = z_{m_1 \dots m_t} = z_{m_1} \otimes \dots \otimes z_{m_t}$$

où pour tout  $p \in \llbracket 1, t \rrbracket$ , le mot  $z_{m_p}$  est de longueur  $l_p$ .

Si  $i = 0$  alors d'après le théorème 56,  $(\delta_1)_{l+1}^i(z_k) = z_{-+} \otimes z_k = z_{-+k}$ .

Si  $i = l_1 + \dots + l_t$  alors d'après le corollaire 60  $(\delta_1)_{l+1}^i(z_k) = z_k \otimes z_{-+} = z_{k-+}$ .

Si  $i = l_1$  alors ou bien  $m_1 - +$  est équilibré, ou bien  $- + m_2$  est super équilibré. On a donc

$$(\delta_1)_{l+1}^i(z_k) = z_{m_1} \otimes z_{-+} \otimes z_{m_2} \otimes \dots \otimes z_{m_t} = z_{m_1-+m_2 \dots m_t}.$$

S'il existe  $2 \leq j \leq t - 1$  tel que  $i = l_1 + \dots + l_j$  alors, comme  $m_j$  ou  $m_{j+1}$  est super équilibré, on a  $m_j - +$  ou  $- + m_{j+1}$  super équilibré d'après le lemme

précédent. Dans ce cas  $m_1, \dots, (m_j - +), \dots, m_t$  ou  $m_1, \dots, (- + m_{j+1}), \dots, m_t$  est la bonne décomposition de  $k_1 \dots k_i - + k_{i+1} \dots k_l$ . Le résultat suit :

$$(\delta_1)_{l+1}^i(z_k) = z_{m_1} \otimes \dots \otimes z_{m_j} \otimes z_{-+} \otimes z_{m_{j+1}} \otimes \dots \otimes z_{m_t} = z_{m_1 \dots m_j - + m_{j+1} \dots m_t}.$$

Sinon il existe  $j$  tel que  $l_1 + \dots + l_{j-1} < i < l_1 + \dots + l_j$ . Dans ce cas

$$(\delta_1)_{l+1}^i(z_k) = z_{m_1} \otimes \dots \otimes z_{m_{j-1}} \otimes (\delta_1)_{i - \sum_{p < j} l_p}^{l_j}(z_{m_j}) \otimes \dots \otimes z_{m_t}.$$

- Si la bonne décomposition de  $k$  comporte plusieurs mots, alors  $l_j < l + 1$  et on applique l'hypothèse de récurrence pour  $l_j$ . On note  $r$  le mot tel que  $(\delta_1)_{i - \sum_{p < j} l_p}^{l_j}(z_{m_j}) = z_r$ . Si  $m_j$  est équilibré alors  $r$  est équilibré et  $(m_1, \dots, m_{j-1}, r, m_{j+1}, \dots, m_t)$  est la bonne décomposition de  $m_1 \dots m_{j-1} r m_{j+1} \dots m_t$ . Sinon,  $r = - \dots - - + - \dots -$  et  $z_r = z_{- \dots -} \otimes z_{-+} \otimes z_{- \dots -}$ . Par conséquent  $z_{m_1} \otimes \dots \otimes z_{m_{j-1}} \otimes z_r \otimes \dots \otimes z_{m_t} = z_{m_1 \dots m_{j-1} r m_{j+1} \dots m_t}$  et on a le résultat.
- Sinon  $k$  est une suite de  $-$  ou  $k$  équilibré.

Le cas où  $k = - \dots -$  est évident car  $z_k = x_- \otimes \dots \otimes x_-$  et comme  $- \dots -, - +, - \dots -$  est une bonne décomposition de  $- \dots - - + - \dots -$ , alors  $(\delta_1)_i^l(z_k) = z_{- \dots - - + - \dots -}$ . Dans le cas où  $k$  est équilibré et découppable en  $k'n$  avec  $k'$  et  $n$  équilibrés non vides. On a  $z_k = z_{k'} \otimes z_n$  et on peut conclure par récurrence en insérant  $- +$  dans  $n$  (respectivement  $k'$ ) et en recollant  $k'$  (respectivement  $n$ ) grâce aux règles de calcul de la section précédente.

Le seul cas délicat est donc le cas où  $k$  est super équilibré non découppable en deux mots super équilibrés (un mot équilibré mais pas super équilibré est forcément découppable).

On traite d'abord le cas où  $k = - +$  et  $i = 1$ . Dans ce cas, on a  $(\delta_1)_1^2(z_{-+}) = x_- \otimes z_{-++} - x_+ \otimes z_{-+} \otimes x_-$ . Or  $x_- \otimes z_{-++} = z_{--++} + z_{+-+}$  et  $x_+ \otimes z_{-+} \otimes x_- = z_{+-+}$  et donc par soustraction

$$(\delta_1)_1^2(z_{-+}) = z_{--++}.$$

Si  $k \neq - +$  alors  $k$  s'écrit  $- - p' + +$  avec  $- p' +$  super équilibré. Les règles de calculs développées à la section 4.3 donnent alors :

$$\begin{aligned} (\delta_1)_i^l(z_k) &= (\delta_1)_i^l(z_{--p'++}) \\ &= (\delta_1)_i^l(z_- \otimes z_{-p'+} \otimes z_+ - z_+ \otimes z_{-p'+} \otimes z_-) \quad \text{car } -p'+ \text{ est équilibré.} \end{aligned}$$

Or par hypothèse de récurrence et d'après le lemme précédent  $(\delta_1)_{i-1}^{l-2}(z_{-p'+})$  est de la forme  $z_s$  avec  $s$  super équilibré donc

$$\begin{aligned}
 (\delta_1)_i^l(z_k) &= z_- \otimes z_s \otimes z_+ - z_+ \otimes z_s \otimes z_- \\
 &= z_{k_1 \dots k_i - + k_{i+1} \dots k_l} .
 \end{aligned}$$

□

**Théorème 68.** *Quel que soit  $m \in \mathbb{N}$ , la base canonique duale de  $L(\varpi)^{\otimes m}$  coïncide avec la base de Mirković et Vilonen généralisée.*

*Démonstration.* Le théorème 1.9 de [10] nous assure que tout vecteur de la base canonique duale s'écrit comme une succession d'images par  $\delta_i^j$  de vecteurs de la forme  $x_{+ \dots + - \dots -} = z_{+ \dots + - \dots -}$  et le lemme 67 nous dit que de telles images restent des vecteurs de la base de Mirković et Vilonen généralisée. Le théorème est donc prouvé. □

On peut se demander si ce résultat se généralise à toutes les algèbres de Lie. La réponse est non. En effet, Fontaine, Kamnitzer et Kuperberg ont exhibé un élément de la base canonique duale de la représentation  $(L(\varpi_1) \otimes L(\varpi_2))^{\otimes 6}$  de  $SL_3$  qui n'appartient pas à la base des cycles MVG (voir [9], theorem 5.17).



# **Annexes**



## Annexe A

### Calculs dans $V(\varpi) \otimes 6$

On rappelle que l'on se place dans la représentation fondamentale de  $\mathfrak{sl}_2$ , que  $x_+$  désigne le vecteur de la base de Mirkovic et Vilonen de poids  $\varpi$  et  $x_-$  celui de poids  $-\varpi$ .

Voici les formules de changement de bases pour  $V(\varpi)^{\otimes 6}$ .

- $x_{++++++} = z_{++++++}$
- $x_{-+++++} = z_{-+++++} + z_{+-++++} + z_{++----} + z_{+++---} + z_{++++--}$
- $x_{+----+} = z_{+----+} + z_{+-----} + z_{++----} + z_{+++---} + z_{++++--}$
- $x_{+-+---} = z_{+-+---} + z_{++----} + z_{+++---} + z_{++++--}$
- $x_{+---+} = z_{+---+} + z_{++----} + z_{+++---}$
- $x_{+----} = z_{+----} + z_{++----}$
- $x_{++++-} = z_{++++-}$
- $x_{-+----} = z_{-+----} + z_{+-+---} + z_{++----} + z_{+++---} + z_{++++--} + 2z_{+-+---} + 2z_{++----} + 2z_{+++---} + 2z_{++++--}$
- $x_{-+---} = z_{-+---} + z_{+-+---} + z_{++----} + z_{+++---} + z_{++++--} + 2z_{-+---} + 2z_{+-+---} + 2z_{++----} + 2z_{+++---} + 2z_{++++--}$
- $x_{-+--} = z_{-+--} + z_{+-+---} + z_{++----} + z_{+++---} + z_{++++--} + 2z_{-+--} + 2z_{+-+---} + 2z_{++----} + 2z_{+++---} + 2z_{++++--}$









# Bibliographie


- [1] ARABIA, A. Faisceaux pervers sur les variétés algébriques complexes, correspondance de springer.
- [2] BAUMANN, P. *Properties and combinatorics of bases of canonical type*. Habilitation à diriger des recherches, Université de Strasbourg, June 2012.
- [3] BAUMANN, P., AND GAUSSENT, S. On Mirković-Vilonen cycles and crystal combinatorics. *Represent. Theory* 12 (2008), 83–130.
- [4] BAUMANN, P., GAUSSENT, S., AND LITTELMANN, P. Bases of tensor products and geometric satake correspondence. *en cours de rédaction* (2017).
- [5] BEILINSON, AND DRINFELD. Quantization of hitchin’s integrable system and hecke eigen- sheaves.
- [6] BRAVERMAN, A., AND GAITSGORY, D. Crystals via the affine Grassmanian. *Duke Math. J.* 107, 3 (2001), 561–575.
- [7] DELIGNE, P. Catégories tannakiennes. In *The Grothendieck Festschrift, Vol. II*, vol. 87 of *Progr. Math.* Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1990, pp. 111–195.
- [8] ETINGOF, P., GELAKI, S., NIKSHYCH, D., AND OSTRIK, V. *Tensor categories*, vol. 205 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2015.
- [9] FONTAINE, B., KAMNITZER, J., AND KUPERBERG, G. Buildings, spiders, and geometric Satake. *Compos. Math.* 149, 11 (2013), 1871–1912.
- [10] FRENKEL, I., AND KHOVANOV, M. Canonical bases in tensor products and graphical calculus for  $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ . *Duke Math. J.* 87, 3 (1997), 409–480.
- [11] FULTON, W. *Young tableaux*, vol. 35 of *London Mathematical Society Student Texts*. Cambridge University Press, Cambridge, 1997. With applications to representation theory and geometry.
- [12] FULTON, W. *Intersection theory*, second ed., vol. 2 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics [Results in Mathematics and Related Areas. 3rd Series. A Series of Modern Surveys in Mathematics]*. Springer-Verlag, Berlin, 1998.

## BIBLIOGRAPHIE


---

- [13] GINZBURG, V. *Perverse sheaves on a Loop group and Langlands' duality*. Preprint, *arXiv :alg-geom/9511007* (1995).
- [14] GONCHAROV, A., AND SHEN, L. Geometry of canonical bases and mirror symmetry. *Invent. Math.* 202, 2 (2015), 487–633.
- [15] IVERSEN, B. *Cohomology of sheaves*. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, 1986.
- [16] JANTZEN, J. *Moduln mit einem höchsten Gewicht*, vol. 750 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer, Berlin, 1979.
- [17] JOSEPH, A. *Quantum groups and their primitive ideals*, vol. 29 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)]*. Springer-Verlag, Berlin, 1995.
- [18] KAMNITZER, J. Mirković-Vilonen cycles and polytopes. *Ann. of Math. (2)* 171, 1 (2010), 245–294.
- [19] KASHIWARA, M. On crystal bases. In *Representations of groups (Banff, AB, 1994)*, vol. 16 of *CMS Conf. Proc.* Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995, pp. 155–197.
- [20] KASHIWARA, M., AND SCHAPIRA, P. *Categories and sheaves*, vol. 332 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 2006.
- [21] LUSZTIG, G. *Introduction to quantum groups*. Modern Birkhäuser Classics. Birkhäuser/Springer, New York, 2010. Reprint of the 1994 edition.
- [22] MIRKOVIĆ, I., AND VILONEN, K. Geometric Langlands duality and representations of algebraic groups over commutative rings. *Ann. of Math. (2)* 166, 1 (2007), 95–143.
- [23] MORIER-GENOUD, S. *Relèvement géométrique de l'involution de Schützenberger et applications*. PhD thesis, Université Claude Bernard. Lyon 1, 2006.
- [24] RICHARZ, T. A new approach to the geometric Satake equivalence. *Doc. Math.* 19 (2014), 209–246.
- [25] STEINBERG, R. The isomorphism and isogeny theorems for reductive algebraic groups. In *Algebraic groups and their representations (Cambridge, 1997)*, vol. 517 of *NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci.* Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1998, pp. 233–240.
- [26] YUN, Z., AND ZHU, X. Integral homology of loop groups via Langlands dual groups. *Represent. Theory* 15 (2011), 347–369.

On étudie dans cette thèse la correspondance de Satake géométrique. Un premier résultat est l'identification de la forme d'intersection au travers de la correspondance de Satake géométrique. En effet elle est égale à la forme contravariante "tordue" par l'involution de Schützenberger. On fait alors une conjecture combinatoire afin de démontrer que la base de Mirković et Vilonen est compatible avec l'involution de Schützenberger. On démontre cette conjecture dans le cas où l'algèbre de Lie est  $\mathfrak{sl}_2$ . Les outils combinatoires développés pour démontrer cette conjecture permettent, en outre, de prouver que la base semicanonique duale coïncide, pour  $\mathfrak{sl}_2$ , avec la base de Mirković et Vilonen généralisée.



UNIVERSITÉ DE STRASBOURG



ISSN 0755-3390

**INSTITUT DE RECHERCHE MATHÉMATIQUE AVANCÉE**  
**UMR 7501**  
 Université de Strasbourg et CNRS  
 7 Rue René Descartes  
 67 084 STRASBOURG CEDEX

Tél. 03 68 85 01 29  
 Fax 03 68 85 03 28

[www-irma.u-strasbg.fr](http://www-irma.u-strasbg.fr)  
[irma@math.unistra.fr](mailto:irma@math.unistra.fr)

IRMA 2017/008  
<http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01652887>