



**HAL**  
open science

# Actions des vibrations sur le processus de séparation des constituants d'un mélange binaire en configuration de Rayleigh-Bénard

Soumaya Ouadhani

► **To cite this version:**

Soumaya Ouadhani. Actions des vibrations sur le processus de séparation des constituants d'un mélange binaire en configuration de Rayleigh-Bénard. Mécanique des fluides [physics.class-ph]. Université Paul Sabatier - Toulouse III, 2016. Français. NNT : 2016TOU30192 . tel-01654471

**HAL Id: tel-01654471**

**<https://theses.hal.science/tel-01654471>**

Submitted on 4 Dec 2017

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Université  
de Toulouse

# THÈSE

En vue de l'obtention du

## DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

Délivré par : *l'Université Toulouse 3 Paul Sabatier (UT3 Paul Sabatier)*

Cotutelle internationale avec : *l'Ecole Polytechnique de Tunisie (EPT)*

---

---

Présentée et soutenue le *23/09/2016* par :

**Soumaya OUADHANI**

**ACTIONS DES VIBRATIONS SUR LE PROCESSUS DE SÉPARATION  
DES CONSTITUANTS D'UN MÉLANGE BINAIRE EN  
CONFIGURATION DE RAYLEIGH-BENARD**

---

---

### JURY

A. ABDENNADHER	Professeur de l'Université de Carthage (EPT)	Directeur de thèse
H. BEN HADID	Professeur de l'Université Lyon I	Rapporteur
A. BERGEON	Professeur de l'Université de Toulouse III	Examineur
J. P. CALTAGIRONE	Professeur de l'Université de Bordeaux	Examineur
M. C. CHARRIER-MOJTABI	Professeur de l'Université de Toulouse III	Invitée
S. KADDECHE	Professeur de l'Université de Carthage (INSAT)	Rapporteur
A. MOJTABI	Professeur de l'Université de Toulouse III	Directeur de thèse

---

#### École doctorale et spécialité :

*MEGEP : Dynamique des fluides*

#### Unité de Recherche :

*Institut de Mécanique des Fluides de Toulouse (IMFT)*

#### Directeur(s) de Thèse :

*A. Mojtabi et A. Abdennadher*

#### Rapporteurs :

*H. Ben Hadid et S. Kaddeche*



Je dédie ce travail à la mémoire de mes grands parents Omar et Mariam, à qui ce travail leurs aurait fait beaucoup plaisir. Le destin ne nous a pas laissé le temps pour jouir de ce bonheur ensemble et vous exprimer tout mon amour. Puisse Dieu le tout puissant vous accorder sa clémence, sa miséricorde et vous accueillir dans son paradis. Vous me manquez.....

# Remerciements

Ce travail a été effectué en cotutelle entre l'Université de Toulouse 3 Paul Sabatier et l'Université de Carthage de Tunis (EPT) sous la direction de Monsieur Abdelkader Mojtabi et Monsieur Ali Abdennadher.

Je tiens à adresser en premier lieu mes plus chaleureux remerciements à mes directeurs de thèse :

Mr. Abdelkader Mojtabi pour m'avoir confié ce travail de recherche, ainsi que pour son aide et ses précieux conseils au cours de ces années. J'ai beaucoup apprécié sa passion pour la recherche, sa manière de voir les problèmes, même les plus complexes. Je suis très honorée de l'avoir eu pour directeur.

Mr. Ali Abdennadher qui n'a jamais épargné un effort pour m'aider sur tous les plans. Je suis ravie d'avoir travaillé en sa compagnie car il a toujours été là pour me soutenir et me conseiller au cours de l'élaboration de cette thèse. Je le remercie énormément pour sa patience.

Je tiens à remercier chaleureusement Madame Catherine Charrier-Mojtabi pour ses conseils avisés et d'avoir accepté de faire partie de mon jury.

Je voudrais remercier vivement Monsieur Hamda Ben Hadid et Monsieur Slim Kaddeche pour avoir consacré du temps à la lecture de ce document en tant que rapporteurs. J'associe à ces remerciements Monsieur Alain Bergeon d'avoir accepté de présider mon jury et Monsieur Jean Paul Caltagirone pour avoir accepté de juger mon travail.

Dans ces remerciements, je ne voudrais pas oublier les membres du l'IMFT, notamment Roua, Manel, Ouattara, Ali et Loujaine. Un remerciement spécial pour Nahla, Imen, Sofiene et Fatma. Je remercie également les membres du laboratoire LIM, Hager, Ben Hamza, Jebali, Nahla, Imen, Wafa, Yosra... .

Ces remerciements ne peuvent s'achever, sans une pensée pour les êtres les plus chers à mon coeur : mes chers parents. Aucune dédicace ne saurait être assez éloquente pour exprimer ce que vous méritez pour tous les sacrifices que vous n'avez cessé de me donner depuis ma naissance, durant mon enfance et même à l'âge adulte. Que ce travail puisse être le résultat de vos efforts et de vos sacrifices et que Dieu tout puissant vous garde et vous procure santé, bonheur et longue vie.

Ma chère grand-mère, aucune dédicace ne saurait exprimer tout ce que je ressens pour toi. Je te remercie pour tout le soutien exemplaire et l'amour exceptionnel que tu me portes depuis mon enfance et j'espère que ta bénédiction m'accompagnera toujours.

Vient le moment de remercier mon petit frère et mes chères cousines Hajer, Ons , Asma, et Olfa pour leurs soutiens, ainsi que toutes ma famille, je vous aime énormément.

J'ai choisi de le laisser à la fin mon cher fiancé, qui a su m'écouter et me supporter dans les moments les plus difficiles. Je te remercie chéri pour ta patience et pour ton soutien.

# Résumé

Dans cette étude, nous proposons une étude théorique et numérique de l'influence des vibrations de hautes fréquences et de faibles amplitudes sur la séparation thermo-gravitationnelle des constituants d'un mélange binaire saturant un milieu poreux. La cellule considérée est horizontale, de grand rapport d'aspect et placée dans le champ de pesanteur. La formulation mathématique est obtenue en utilisant le formalisme des équations moyennées. Les conditions aux limites imposées au niveau des parois horizontales diffèrent de celles du problème de Rayleigh Bénard. On considère respectivement le cas où un flux constant est imposé sur ces parois puis le cas où un flux thermique constant est imposé sur la paroi inférieure alors qu'une température constante est imposée sur la paroi supérieure. Dans les deux configurations, on met en évidence de solutions stables monocellulaires conduisant à la séparation des constituants du mélange et ce pour une large gamme des paramètres adimensionnels régissant le problème. Les résultats analytiques et de simulations numériques directes sont en très bon accord. Dans les deux cas, une étude de stabilité linéaire de la solution d'équilibre et de la solution monocellulaire est réalisée par méthode spectrale.

## Mots clés :

Convection, Diffusion thermo-gravitationnelle, Effet Soret, Mélange binaire, milieu poreux, Séparation des espèces, Vibration, Stabilité.

# Abstract

In this study, the influence of vertical vibrations on species thermo-gravitational separation of a binary fluid, saturating a porous medium, is presented. The cell is horizontal of large aspect ratio and situated in the gravity field. A formulation using time average equations is used. Two configurations have been considered and compared. In the first one, a constant heat flux is imposed on the horizontal walls and in the second case, a constant heat flux is imposed on the bottom wall while a constant temperature is imposed on the top wall. For each configuration, stable unicellular solutions leading to species separation are obtained, depending on the dimensionless parameters of the problem. The analytical results are in good agreement with those obtained by direct numerical simulations. In both cases, a linear stability analysis of the equilibrium solution and the unicellular one is presented using a spectral method.

## **Keywords :**

Soret driven convection, Thermo-gravitational diffusion, binary mixture, porous medium, species separation, vibration, stability analysis.





# Nomenclature

$\beta_C$	Coefficient d'expansion massique
$\beta_T$	Coefficient d'expansion thermique, $K^{-1}$
$\epsilon^*$	Porosité
$\lambda^*$	Conductivité thermique, $W.m^{-1}.K^{-1}$
$\mu$	Viscosité dynamique, $Kg.m^{-1}.s^{-1} = Pa.s$
$\nu$	Viscosité cinématique, $m^2.s^{-1}$
$\omega'$	Pulsation des vibrations mécaniques, $rad.s^{-1}$
$\psi$	Facteur de séparation
$\rho$	Masse volumique, $kg.m^{-3}$
$\varrho$	Rapport des chaleurs spécifiques
$A$	Rapport d'aspect longitudinal
$a^*$	Diffusivité thermique du fluide, $m^2.s^{-1}$
$b$	Amplitude des vibrations, $m$
$C$	Fraction massique du constituant considéré
$D$	Coefficient de diffusion isotherme, $m^2.s^{-1}$
$D_T$	Coefficient de thermodiffusion, $m^2.s^{-1}.K^{-1}$
$Da$	Nombre de Darcy
$H$	Hauteur de la cellule, $m$
$K$	Perméabilité, $m^2$
$k$	Nombre d'onde
$k_c$	Nombre d'onde critique

---

$L$	Largeur de la cellule, $m$
$Le$	Nombre de Lewis
$P$	Pression, $Pa$
$Pr$	Nombre de Prandlt
$R$	paramètre vibrationnel
$Ra$	Nombre de Rayleigh thermique
$Ra_c$	Nombre de Rayleigh thermique critique
$Rv$	Nombre de Rayleigh vibrationnel
$T$	Température, $K$



# Table des matières

<b>Table des matières</b>	<b>i</b>
<b>1 Introduction générale</b>	<b>3</b>
1.1 État de l'Art . . . . .	3
1.1.1 La configuration de Rayleigh-Bénard . . . . .	3
1.1.2 Convection naturelle et convection thermosolutale . . . . .	4
1.1.3 Thermodiffusion . . . . .	5
1.1.4 La diffusion thermogravitationnelle en milieux poreux . . . . .	5
1.1.5 Les travaux portant sur l'action des vibrations sur le processus de séparation . . . . .	8
1.2 Contenu du manuscrit . . . . .	9
<b>2 Problème physique et modélisation</b>	<b>11</b>
2.1 Équations de conservation . . . . .	11
2.2 Modèles d'écoulement en milieu poreux . . . . .	16
2.2.1 Paramètres caractérisants un milieu poreux . . . . .	16
2.2.2 Modélisation mathématique d'un milieu poreux . . . . .	18
<b>3 Formulation mathématique</b>	<b>23</b>
3.1 Équations de conservation . . . . .	23
3.2 Conditions aux limites . . . . .	24
3.3 Équations moyennées . . . . .	25

<b>4</b>	<b>Séparation des constituants d'un mélange binaire en couche poreuse horizontale soumise à un flux thermique</b>	<b>29</b>
4.1	Introduction . . . . .	29
4.2	Formulation du problème . . . . .	31
4.3	Étude de la stabilité linéaire dans le cas d'une cellule horizontale infinie . . . . .	33
4.3.1	Équations aux perturbations . . . . .	33
4.3.2	Décomposition en modes normaux . . . . .	34
4.3.3	Cas des perturbations de très grandes longueurs d'onde . . . . .	34
4.3.4	Méthode de Galerkin . . . . .	37
4.3.4.1	Transition stationnaire . . . . .	37
4.3.4.2	Transition instationnaire . . . . .	38
4.4	Solution analytique de l'écoulement monocellulaire . . . . .	41
4.4.1	Approximation de l'écoulement parallèle . . . . .	41
4.4.2	Formulation mathématique . . . . .	42
4.5	Stabilité linéaire de la solution monocellulaire . . . . .	44
4.6	Simulation numérique . . . . .	47
4.7	Conclusion . . . . .	49
<b>5</b>	<b>Séparation dans le cas d'un flux thermique au niveau de la paroi horizontale du bas et une température constante en haut</b>	<b>53</b>
5.1	Introduction . . . . .	53
5.2	Position du problème . . . . .	53
5.3	Stabilité linéaire de la solution d'équilibre dans le cas d'une cellule horizontale infinie . . . . .	55
5.3.1	Décomposition en modes normaux . . . . .	55
5.3.2	Cas des perturbations de très grandes longueurs d'onde . . . . .	55
5.3.3	Méthode de Galerkin . . . . .	56
5.4	Solution analytique de l'écoulement monocellulaire . . . . .	59

---

5.4.1	Approximation de l'écoulement parallèle . . . . .	59
5.4.2	Équations de base simplifiées . . . . .	60
5.5	Stabilité linéaire de la solution monocellulaire . . . . .	62
5.6	Simulation numérique . . . . .	64
5.7	Conclusion . . . . .	65
<b>6</b>	<b>Conclusion générale et perspectives</b>	<b>67</b>
<b>A</b>	<b>Article en révision à "Transport in Porous Media" : Influence of vertical vibrations on the species separation of a binary mixture in a horizontal porous layer submitted to a vertical heat flux</b>	<b>69</b>
<b>B</b>	<b>Article soumis à "The European Physical Journal" : Analytical and numerical stability analysis of solet-driven convection in a horizontal porous layer : the effect of vertical vibrations</b>	<b>89</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>96</b>





# Table des figures

<b>Table des figures</b>	<b>v</b>
1.1 Processus thermogravitationnel . . . . .	6
2.1 Écoulement de Darcy dans un milieu poreux . . . . .	19
3.1 Conditions aux frontières . . . . .	25
4.1 Cellule rectangulaire de longueur $L$ et de hauteur $H$ soumise à un flux thermique	32
4.2 Diagramme de stabilité pour $Le = 5$ , $Rv = 0$ . La courbe en ligne continue correspond à la bifurcation stationnaire, la droite verticale : $\psi_H = \frac{-1}{Le+1}$ et les trois courbes en pointillé représentent la bifurcation de Hopf pour différentes valeurs de la porosité normalisée ( $\epsilon = 0.5(*)$ , $\epsilon = 0.7(\square)$ , $\epsilon = 0.9(\blacksquare)$ ), (méthode de Galerkin à l'ordre 4). . . . .	40
4.3 Diagramme de stabilité pour $Le = 50$ , $Rv = 0$ . La courbe en ligne continue correspond à la bifurcation stationnaire, la droite verticale : $\psi_H = \frac{-1}{Le+1}$ et les trois courbes en pointillé représentent la bifurcation de Hopf pour différentes valeurs de la porosité normalisée ( $\epsilon = 0.5(*)$ , $\epsilon = 0.7(\square)$ , $\epsilon = 0.9(\blacksquare)$ ), (méthode de Galerkin à l'ordre 4). . . . .	41
4.4 (1) Régions du plan $(\psi, Ra)$ correspondantes aux différentes structures d'écoulement à l'intérieur de la cavité rectangulaire ( $Le = 5$ ). (2) les diagrammes de bifurcations. . . . .	44
4.5 (a,b) Diagrammes de bifurcations, $ \psi_0 $ en fonction de $Ra$ pour différentes valeurs de $\psi$ et pour $Le = 5$ et $Rv = 0$ , $\psi = 0$ en ligne discontinue. . . . .	44
4.6 Courbe de la séparation en fonction du nombre de Rayleigh pour $Le = 100$ , $\psi = 0.1$ et $Rv = (0, 10)$ . . . . .	45

4.7	Les lignes de courant pour $Le = 100$ , $Ra = 12$ et $\psi = 0.1$ . (a) $Rv = 0$ (b) $Rv = 10$ (c) $Rv = 50$ . . . . .	48
4.8	Les isoconcentrations pour $Le = 100$ , $Ra = 12$ et $\psi = 0.1$ . (a) $Rv = 0$ (b) $Rv = 10$ (c) $Rv = 50$ . . . . .	49
4.9	(a) Variation de la fonction de courant maximale $\Phi_{max}$ en fonction de $Ra$ pour $Le = 100$ , $\psi = 0.1$ et $Rv = 0$ , (b) perspective de (a). . . . .	49
4.10	(a) Diagramme des quatre premières bifurcations primaires, bifurquant à partir de l'état de conduction, en terme de la composante horizontale maximale de la vitesse $u_{max}$ en fonction du nombre de Rayleigh. Les lignes continues (pointillées) présentent des solutions linéairement stables (instables). Les carrés indiquent les points de bifurcations primaires et secondaires. (b) identique à (a) sur un plus large intervalle du nombre de Rayleigh. (c) identique à (b), mais en terme d'énergie cinétique $E_K$ en fonction du nombre de Rayleigh. (d) Isovaleurs de la fonction de courant des solutions pour $Ra \approx 20$ le long des branches $L_n^-$ où $n$ est le nombre de rouleaux. Les paramètres sont $\psi = 0$ , $Rv = 0$ et $A = 20$ . . . . .	50
4.11	(a) Diagramme de bifurcation de l'énergie cinétique le long des deux premières branches bifurquant à partir de l'état de conduction en fonction du nombre de Rayleigh pour $\psi = 0.01$ . (b) schéma de bifurcation montrant l'énergie cinétique le long de la première branche $L_1^{10}$ pour $\psi = 0, 0.01, 0.1$ et $1$ . $Le = 10$ , $Rv = 0$ et $A = 20$ . . . . .	51
4.12	Diagramme de bifurcation montrant les variations de $ u(x = A/2, z = 1) $ (Ligne continue) et $ u_\infty(z = 1) $ (ligne pointillée) avec $Ra$ . Les paramètres sont $Le = 20$ , $\psi = 0.1$ , $Rv = 0$ et $A = 20$ . . . . .	51
4.13	Diagramme de bifurcation de (a) l'énergie cinétique ((b) composante horizontale maximale de la vitesse $u_{max}$ ) en fonction du nombre de Rayleigh le long de la première branche $L_1^{Le}$ bifurquant par rapport à l'état de conduction pour $Le = 10, 20, 50, 100$ , $\psi = 1$ , $Rv = 0$ et $A = 20$ . La ligne en pointillée correspond à $L_1^-$ (le fluide n'est pas en mélange binaire). . . . .	52
4.14	Les isovaleurs de la fonction de courant, la température et la concentration pour $Ra = 0.123$ et $Ra = 19.801$ . $Le = 100$ , $\psi = 0.1$ , $Rv = 0$ et $A = 20$ . . . . .	52
5.1	Cellule rectangulaire de longueur $L$ et de hauteur $H$ soumise à un flux thermique sur l'une des faces horizontales et à une température constante sur l'autre face . . . . .	54

5.2	Effet des vibrations verticales sur le nombre de Rayleigh critique au déclenchement de la convection pour $Le = 100, \epsilon = 0.5, \omega = 10^4$ et $B = 10^{-6}$ . . . . .	57
5.3	Effet des vibrations verticales sur le nombre de Rayleigh critique au déclenchement de la convection pour $Le = 100, \epsilon = 0.5, Rv = 50, \omega = 10^4$ et $B = 10^{-6}$	58
5.4	Effet des vibrations verticales sur le nombre d'onde critique pour $Le = 100, \epsilon = 0.5, \omega = 10^4$ et $B = 10^{-6}$ . . . . .	59
5.5	Effet des vibrations sur la valeur du facteur de séparation au delà de laquelle l'écoulement au déclenchement de la convection devient monocellulaire pour $\epsilon = 0.5, \omega = 10^4$ et $B = 10^{-6}$ . . . . .	60
5.6	Courbe de gradient de fraction massique dimensionnelle $m_{dim}$ pour un mélange eau éthanol à 60.88% en masse d'eau. (Les valeurs prises d'après Platten et al. [49] : $\beta_c = 0.2, K = 10^{-9}, C_0 = 0.5, D = 4.10^{-10}, D_T = 10^{-12}$ et $\nu = 3.10^{-6}$ )	62
5.7	Les lignes de courant (a) et les isoconcentrations (b) pour $Le = 100, \psi = 0.02, Ra = 6, Rv = 0$ (sans vibration). Un écoulement multicellulaire est obtenu à la perte de stabilité de la solution d'équilibre pour $Rv = 0$ . . . . .	65
5.8	Les lignes de courant (a) et les isoconcentrations (b) pour $Le = 100, \psi = 0.02, Ra = 6, Rv = 10$ . Un écoulement monocellulaire est obtenu pour $Rv = 10$ . . . . .	65



# Liste des tableaux

<b>Liste des tableaux</b>	<b>ix</b>
1.1 Nombre de Rayleigh critique, $Ra_c$ , et nombre d'onde critique $k_c$ , sous diverses conditions aux limites, mentionnés par Nield et Bejan [44]. FST : Fixed Surface Temperature ; IMP : Impermeable ; CHF : Constant Heat Flux . . . . .	4
2.1 Propriétés de quelques matériaux poreux [44] . . . . .	18
4.1 Comparaison entre les valeurs du nombre de Rayleigh critique obtenues à partir de la solution exacte et de la méthode de Galerkin à l'ordre 4 pour $Le = 100$ . .	38
4.2 Le nombre de Rayleigh critique $Ra_c$ , la fréquence critique $\omega_c$ et le nombre d'onde critique $k_c$ par la méthode de Galerkin à l'ordre 6 pour $Le = 5$ . . . . .	39
4.3 Effet des vibrations sur les valeurs critiques du nombre de Rayleigh, du nombre d'onde et de la fréquence associées aux transitions entre l'écoulement monocellulaire et l'écoulement multicellulaire pour $Le=100$ , $\epsilon = 0.5$ , $B = 10^{-6}$ et $\psi = 0.1$ (méthode de Galerkin à l'ordre 4) . . . . .	46
5.1 Effet des vibrations sur les valeurs critiques du nombre de Rayleigh et du nombre d'onde au déclenchement de la convection pour $Le = 100$ , $\epsilon = 0.5$ , $\omega = 10^4$ et $B = 10^{-6}$ (méthode de Galerkin à l'ordre 4) . . . . .	58
5.2 Effet des vibrations sur les valeurs critiques du nombre de Rayleigh, du nombre d'onde et de la fréquence associées aux transitions entre l'écoulement monocellulaire et l'écoulement multicellulaire pour $\psi = 0.1$ , $Le = 100$ , $\epsilon = 0.5$ et $B = 10^{-6}$ . . . . .	64

---

5.3	Effet des vibrations sur les valeurs critiques du nombre de Rayleigh, du nombre d'onde et de la fréquence associées aux transitions entre l'écoulement monocellulaire et l'écoulement multicellulaire pour $\psi = 0.3$ , $Le = 100$ , $\epsilon = 0.5$ , $\omega = 10^4$ et $B = 10^{-6}$ . . . . .	64
-----	--	----



# Chapitre 1

## Introduction générale

Le travail de recherche présenté porte sur l'étude de l'action des vibrations sur le processus de séparation des constituants d'un mélange binaire en configuration de Rayleigh-Bénard par couplage thermodiffusion-convection et ce dont le but d'optimiser la séparation.

L'intérêt de l'étude des écoulements convectifs dans des mélanges multi-constituants vient de la complexité des matériaux dans la nature. On peut citer la variation de concentration saline (océanographie) et l'air humide dans beaucoup d'applications industrielles (le séchage ou le refroidissement par évaporation).

Les configurations considérées sont de type Rayleigh-Bénard, remplies d'un milieu poreux et saturé par un fluide binaire. Les parois horizontales sont soumises à des gradients de température ou des flux de chaleur.

### 1.1 État de l'Art

#### 1.1.1 La configuration de Rayleigh-Bénard

Le problème de l'écoulement de Rayleigh-Bénard est un problème d'instabilité dans un fluide confiné entre deux plaques horizontales portées à deux températures différentes. Si la paroi supérieure est la plus chaude, le système reste stable et stratifié en température. Mais, si la paroi inférieure est la plus chaude et si une perturbation est introduite dans le système, alors pour une valeur critique de la différence de température entre les deux plaques il peut apparaître des mouvements à l'intérieur du fluide, le système est instable et des mouvements sont organisés en rouleaux périodiques contrarotatifs. Ces rouleaux, également appelés cellules de Rayleigh-Bénard, apparaissent quand il y a un couplage entre le champ dynamique et le champ thermique.



Les recherches sur les instabilités thermiques dans le fluide n'ont commencé qu'en 1900 par Henri Bénard [5] qui fut le premier à mener des expériences pertinentes de convection naturelle, il a observé l'apparition de cellules hexagonales dans une fine couche de fluide à surface libre. C'est quand 1916 que Lord Rayleigh [51] a proposé un calcul de la différence de température pour introduire le nombre de Rayleigh qui décrit la stabilité du système défini plus tard.

L'étude de la stabilité linéaire de ce système, permet de déterminer la valeur critique du nombre du Rayleigh à partir de laquelle le système devient instable et des cellules convectives apparaissent.

Une compilation de la plupart des informations pertinentes sur le nombre de Rayleigh critique et le nombre d'onde pour une couche infinie avec différentes conditions aux limites, (libre ou imperméable ; application de températures ou de flux de chaleur) peut être trouvée dans Nield et Bejan [44] et est reproduite dans le tableau (1.1). Les effets des différents types d'hétérogénéité sur le déclenchement de la convection dans un milieu poreux ont été étudiés par Nield et Kuznetsov [45].

Il est à noter que l'analogie du problème de Rayleigh Bénard en milieu poreux est connu sous le nom de HORTON ROGERS LAPWOOD (1945-1948), et aussi sous le nom de RAYLEIGH DARCY.

La surface inférieure	La surface supérieure	$Ra_c$	$k_c$
FST, IMP	FST, IMP	$4\pi^2$	$\pi$
FST, IMP	CHF, IMP	27.10	2.33
CHF, IMP	CHF, IMP	12	0
FST, IMP	FST, FREE	27.10	2.33
CHF, IMP	FST, FREE	17.65	1.75
FST, IMP	CHF, FREE	$\pi^2$	$\pi/2$
CHF, IMP	CHF, FREE	3	0

**TABLE 1.1** – Nombre de Rayleigh critique,  $Ra_c$ , et nombre d'onde critique  $k_c$ , sous diverses conditions aux limites, mentionnés par Nield et Bejan [44]. FST : Fixed Surface Temperature ; IMP : Impermeable ; CHF : Constant Heat Flux

### 1.1.2 Convection naturelle et convection thermosolutale

La convection naturelle résulte de l'application d'un gradient de température à tout fluide placé dans le champ de pesanteur. Ce phénomène bien connu a été largement étudié dans le passé. Nous rappelons simplement que le gradient de température induit des variations de densité qui,

sous l'action du champ de pesanteur, tendent à faire monter le fluide le long d'une paroi chaude et à le faire descendre le long d'une paroi froide. Ceci a donc pour résultat un mouvement global du fluide dans le domaine considéré. La convection thermosolutale, quand à elle, résulte de la variation de la masse volumique en fonction de la température et de la fraction massique de l'un des constituants du mélange binaire. Nous verrons que le mouvement global du fluide peut s'avérer complexe dans le cas d'un fluide multi-constituant.

### 1.1.3 Thermodiffusion

La thermodiffusion nommée effet Soret fut découverte par Ludwig en 1856 par l'observation d'une différence de concentration dans une solution aqueuse de sulfate de sodium soumise à un gradient de température et par Soret en 1880 [56] et en 1881 [57].

Notons qu'en 1872, Dufour a découvert l'effet inverse de l'effet Soret qui porte son nom, qui consiste à l'apparition d'un gradient de température induit par un gradient de concentration, cet effet est négligeable en dehors des phases gazeuses.

Le phénomène de l'effet Soret est mis en évidence lorsqu'un fluide multi-constituant est soumis à un gradient de température. Dans une telle situation le gradient de température induit un gradient de concentration, ce qui se traduit par un flux de matière au sein du mélange. On observe alors une accumulation de l'un des deux constituants près de la paroi chaude et de l'autre près de la paroi froide. Les séparations obtenues dans les phases liquides restent faibles, alors que les séparations atteignent jusqu'à 25% dans les phases gazeuses à l'état stationnaire.

### 1.1.4 La diffusion thermogravitationnelle en milieux poreux

Lorsqu'un mélange de fluide est soumis à un gradient de température dans le champ de pesanteur, deux phénomènes sont présents : la convection et la thermodiffusion. Le couplage entre ces deux phénomènes est dit la diffusion thermogravitationnelle.

Dans ces conditions, le gradient de température vertical induit un écoulement convectif dans le sens vertical et la diffusion thermique a lieu dans le sens horizontal. L'effet combiné entre ces deux phénomènes entraîne une séparation importante, figure (1.1).

La diffusion thermique pour la séparation des isotopes avait été suggérée par Chapman [13], en 1919. Ce n'était qu'en 1938, que Clusius et Dickel réalisèrent que la séparation des isotopes peut être considérablement améliorée par la convection. En 1939, les deux scientifiques Korshing et Wirtz ont utilisé le même modèle pour des liquides.

En 1939, la théorie (FJO Théorie) pour la séparation des isotopes dans une colonne thermogra-

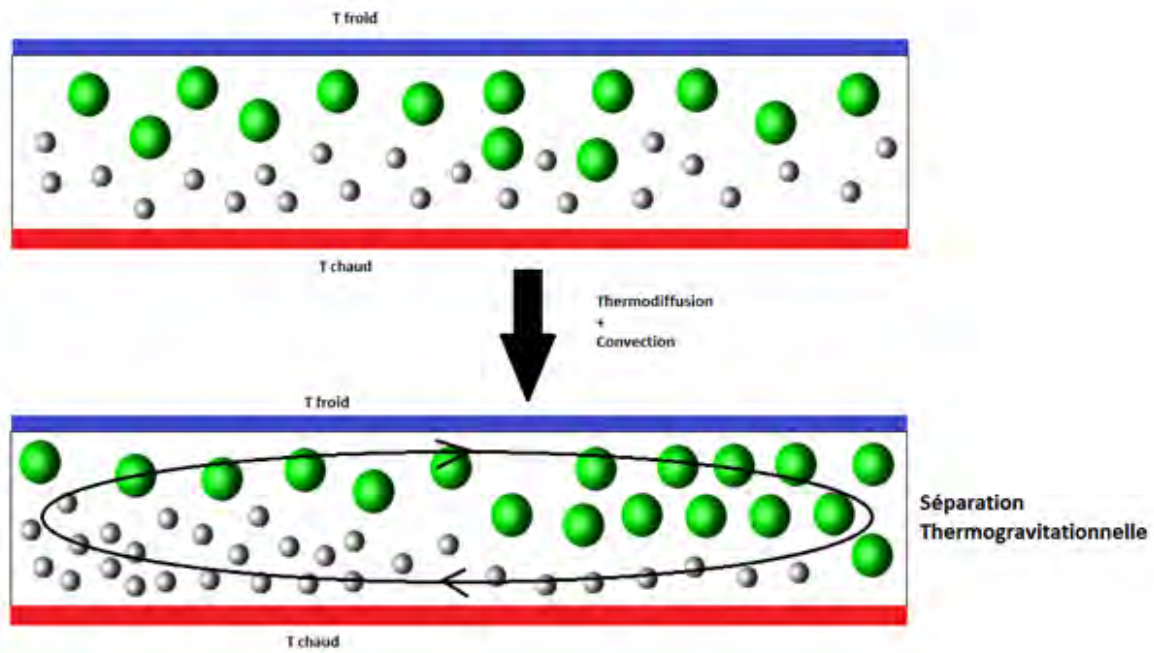


FIGURE 1.1 – Processus thermogravitationalnel

vationnelle pour les mélanges gazeux, développée par Furry Jones et Onsager [29], conduit à la mesure du coefficient de thermodiffusion et suppose que le gradient horizontal de densité est dû seulement au gradient de température. En 1942, De Groot [23] a mené une étude concernant la séparation dans un mélange liquide, il a utilisé un dispositif expérimental avec deux plaques verticales, parallèles et portées à des températures différentes. Au sommet et à la base de l'appareil se trouvent deux réservoirs qui sont en communication libre avec l'espace entre les deux plaques. Dans son étude, De Groot a suivi la même démarche utilisée dans la théorie de (FJO), mais, il a remplacé le terme  $1 - C$  par  $1$  dans le terme  $C(1 - C)$ . Il a déterminé les expressions des concentrations dans chaque réservoir. Lorenz et Emery [[37], [28]] ont proposé d'introduire un garnissage poreux dans la colonne de thermogravitation. Leur objectif était de s'affranchir de la réalisation de cellule expérimentale nécessitant un très faible écartement entre plaques pour obtenir une séparation optimale. Ainsi dans une colonne avec un grand espacement entre les deux plaques, remplie d'un garnissage poreux, la vitesse du fluide est du même ordre que dans une colonne avec un faible espacement. En 1992, Jamet et al. [33] ont présenté un modèle simple de la séparation dans la colonne thermogravitationnelle à garnissage. Ils ont indiqué que la solution analytique de Lorenz-Emery [[37], [28]] pourrait correctement reproduire la valeur maximale de la séparation, mais cette solution correspond à une perméabilité optimale inférieure à la valeur expérimentale par plus d'un ordre de grandeur. Bahloul et al. [2] ont présenté une étude analytique et numérique de la séparation des constituants d'un mélange binaire saturant une couche poreuse annulaire verticale avec des flux de chaleur uniformes appliqués sur les parois verticales de la cellule. La variation de la masse volumique a été prise en compte, les

résultats analytiques et numériques sont en bon accord.

Elhajjar et al. [27], en 2006, ont proposé une nouvelle procédure pour la séparation des espèces d'un mélange binaire confiné dans une cavité rectangulaire horizontale, les parois horizontales sont soumises à un gradient de température vertical, tandis que les parois verticales sont adiabatiques. En 2008, Elhajjar et al. [25] ont utilisé une cavité horizontale poreuse pour étudier la séparation thermogravitationnelle des composants d'un mélange de fluide binaire. L'écoulement monocellulaire apparaît au déclenchement de la convection en cavité poreuse horizontale chauffée par le bas. Ils ont montré qu'il est possible d'obtenir une séparation optimale avant que l'écoulement monocellulaire perde sa stabilité. Ils ont montré également que le nombre de Rayleigh conduisant à la séparation optimale dans une cellule horizontale était plus grand que celui obtenu dans une cellule verticale, ce qui a permis d'effectuer la séparation dans une cellule d'épaisseur plus grande.

En 2010, Elhajjar et al. [26] ont présenté une étude théorique et numérique de séparation des espèces dans une cavité poreuse inclinée. Ils ont montré que la séparation peut être sensiblement augmentée pour une valeur optimale de l'angle d'inclinaison. Les résultats analytiques obtenus ont été corroborés par des simulations numériques et par des expériences réalisées avec une solution de  $\text{CuSO}_4$ . Charrier-Mojtabi et al. [15] ont réalisé une étude analytique et numérique pour étudier la séparation dans une couche poreuse horizontale saturée par un mélange binaire et soumise à un flux thermique constant sur les deux parois horizontales. Ils ont déterminé la séparation en fonction du nombre de Rayleigh thermique, du nombre de Lewis, du facteur de séparation et du rapport d'aspect de la cellule, la séparation maximale est obtenue pour une valeur optimale du nombre de Rayleigh. Les résultats numériques sont en bon accord avec les résultats analytiques. La comparaison avec la séparation obtenue dans une colonne verticale différentiellement chauffée a montré que la valeur maximale de la séparation est la même dans les deux configurations. Par contre, pour la même différence de température, la séparation dans la cellule horizontale peut avoir lieu pour une large gamme de  $Ra$ , ce qui permet l'utilisation de cellule de hauteur plus grande que la largeur de la colonne thermogravitationnelle, et par conséquent, la quantité des espèces séparées est plus importante dans la cellule horizontale. Ouattara et al. [47] ont étudié la stabilité linéaire de la solution d'équilibre et de la solution monocellulaire dans une cellule horizontale de grande extension longitudinale remplie d'un milieu poreux saturé par un mélange binaire délimitée par deux parois de même épaisseur et de même conductivité thermique, les surfaces extérieures de ces parois sont soumises à un flux de chaleur constant. Ils ont trouvé que la solution d'équilibre perd sa stabilité via une bifurcation stationnaire ou une bifurcation de Hopf compte tenu des valeurs des paramètres adimensionnels considérés. Ils ont également déterminé les paramètres critiques (le nombre de Rayleigh critique et le nombre d'onde critique) associés à la transition entre la solution d'équilibre et l'écoulement monocellulaire. Plus récemment, Ouattara [48] a étudié analytiquement et numériquement

l'influence de la conductivité thermique et de l'épaisseur des parois qui délimitent une cellule poreuse rectangulaire horizontale sur la séparation thermogravitationnelle des constituants d'un mélange binaire. Il a montré que la séparation des espèces d'une solution binaire dépend fortement de  $\delta$  (rapport de l'épaisseur des parois sur l'épaisseur de la couche poreuse) et de  $d$  (le rapport de leur conductivité thermique respective) pour des valeurs du nombre de Rayleigh supérieures au nombre de Rayleigh conduisant à la séparation maximale. Il a montré également que la séparation est sous-estimée lorsqu'on ne prend pas en compte l'effet des caractéristiques thermiques des parois.

### 1.1.5 Les travaux portant sur l'action des vibrations sur le processus de séparation

De nombreux travaux précédents montrent qu'il est important d'étudier le contrôle des mouvements convectifs par l'effet des vibrations pour un fluide mono-constituant ou multi-constituant. Khallouf et al. [35] ont considéré une cavité de section carrée remplie d'un milieu poreux saturée par un fluide pur différentiellement chauffée et soumise à des oscillations harmoniques linéaires dans la direction verticale. Dans leur étude, les auteurs ont utilisé le modèle Darcy-Boussinesq et une formulation directe. Gershuni et al. [[31], [30]], ont étudié la stabilité linéaire de la solution de quasi équilibre mécanique pour une couche horizontale d'un mélange binaire soumise à un gradient thermique vertical, sous l'effet des vibrations de haute fréquence. La convection thermovibrationnelle dans un fluide a reçu plus d'attention que la convection thermovibrationnelle dans un milieu poreux. Une bonne synthèse de ces travaux a été réalisée par Gershuni et al. [31], Gershuni et Lyubimov [32]. Dans le cas d'une couche horizontale poreuse saturée par un liquide pur, chauffée par le bas ou par le haut, Zenkovskaya et Rogovenko [59], Bardan et Mojtabi [3], ont utilisé le modèle de Darcy avec le terme instationnaire et ont adopté la formulation des équations moyennées pour étudier l'influence des vibrations de haute fréquence et de faible amplitude sur l'apparition de la convection. Ils ont constaté que les vibrations verticales stabilisent la solution de repos. Charrier Mojtabi et al. [16] ont étudié l'influence des vibrations sur la convection thermosolutale dans une cellule poreuse horizontale chauffée par le bas ou par le haut. Ils ont montré que les vibrations verticales ont un effet stabilisant tandis que les vibrations horizontales ont un effet déstabilisant.

Elhajjar et al. [25] ont étudié l'influence des vibrations verticales de hautes fréquence et de faibles amplitudes sur la séparation. La stabilité linéaire de l'écoulement monocellulaire obtenue a été analysée analytiquement et numériquement. Ils ont souligné que l'écoulement monocellulaire, associé à un champ de concentration stratifié, conduit à une séparation horizontale des constituants du mélange binaire. Ils ont observé que les vibrations ont un effet stabilisant, conduisant à une augmentation de la valeur critique du nombre de Rayleigh correspondant à

la transition entre l'écoulement monocellulaire et multicellulaire, par conséquent les vibrations verticales permettent de séparer les espèces sur une large gamme de nombres de Rayleigh.

## 1.2 Contenu du manuscrit

Si la séparation thermogravitationnelle a fait l'objet de nombreux travaux durant ces dernières décennies, de nombreuses études seraient encore nécessaires pour comprendre tous les aspects de ce phénomène. Notre objectif dans ce travail est d'étudier la séparation thermogravitationnelle des constituants d'un fluide binaire dans le cas de flux thermique et température constante, tout en tenant compte des vibrations verticales.

Après avoir introduit le problème de convection thermogravitationnelle et présenté une revue bibliographique de cette thématique dans le chapitre 1, nous consacrons le chapitre 2 au problème physique.

Au chapitre 3, nous présentons la formulation mathématique et le problème moyenné.

Au chapitre 4, nous faisons l'analyse de la stabilité linéaire en tenant compte de l'influence des vibrations verticales de hautes fréquences et de faibles amplitudes. L'étude de la stabilité linéaire montre que la solution d'équilibre perd sa stabilité via une bifurcation stationnaire ou une bifurcation de Hopf selon les valeurs du facteur de séparation et de la porosité normalisée. Le rôle de la porosité est important ; quand elle diminue, la stabilité de la solution d'équilibre est renforcée. La solution oscillatoire est instable et redonne une solution stationnaire. Dans le cas de faibles nombres d'onde, nous avons déterminé analytiquement une relation donnant les paramètres critique. Nous utilisons une méthode spectrale, la méthode de Galerkin, pour calculer les valeurs critiques, nous montrons que le Rayleigh critique ne dépend pas de Rayleigh vibrationnel. Nous étudions l'influence des vibrations verticales de haute fréquence et de faible amplitude sur la séparation des constituants d'un mélange binaire saturant une couche poreuse horizontale. Nous examinons la stabilité de l'écoulement monocellulaire obtenu pour des valeurs données des paramètres physiques du problème. L'influence des paramètres régissant ce problème et plus particulièrement le rôle du facteur de séparation  $\psi$ , caractérisant l'effet Soret est étudié théoriquement et numériquement. Le diagramme de bifurcation des branches de solutions stationnaires localisées est présenté.

Au chapitre 5 on décrit une nouvelle configuration, qui consiste à utiliser une cavité horizontale chauffée par le haut. On impose un flux thermique sur la paroi horizontale du bas. Nous étudions l'influence des vibrations verticales de haute fréquence et de faible amplitude sur la séparation. L'analyse de stabilité linéaire des équations moyennées régissant le problème, montre que les vibrations verticales retardent la transition entre l'écoulement monocellulaire et l'écou-

lement multicellulaire. Les vibrations diminuent également la valeur de  $\psi_{mono}$ , ce qui permet la séparation des espèces pour une grande variété de mélanges binaires.





# Chapitre 2

## Problème physique et modélisation

On présente dans ce chapitre les modèles mathématiques utilisés pour décrire l'évolution de la vitesse, de la température et de la concentration du système.

### 2.1 Équations de conservation

Différentes méthodes peuvent être utilisées dans la détermination des équations fondamentales de la mécanique des fluides. On adopte ici l'approche sous forme locale.

On considère un volume de contrôle élémentaire pour analyser les variations au cours du temps de la masse, de la quantité de mouvement, de l'énergie et des espèces. Cette approche a été largement étudiée dans les ouvrages de références [7, 50].

#### A. Théorème de transport :

Considérons un volume  $\Omega$  limité par la surface  $\Sigma$ . Soit  $f$  une fonction définie et continue sur  $\Omega$ , désignant une grandeur intensive.

Le taux de variation de  $f$  sur le volume  $\Omega$  est donné par :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} f d\Omega = \int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial t} d\Omega + \int_{\Sigma} f \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} d\Sigma \quad (2.1)$$

où  $\mathbf{V}$  désigne la vitesse locale de la surface de contrôle et  $\mathbf{n}$  la normale extérieure. D'après le théorème de Green-Ostrogradsky :

$$\int_{\Sigma} f \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} d\Sigma = \int_{\Omega} \nabla \cdot (f \mathbf{V}) d\Omega \quad (2.2)$$

En combinant (2.1) et (2.2), le théorème de transport s'écrit :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} f d\Omega = \int_{\Omega} \left[ \frac{\partial f}{\partial t} + \nabla \cdot (f\mathbf{V}) \right] d\Omega \quad (2.3)$$

### B. Équation de conservation de la masse :

La masse contenue dans le volume de contrôle  $\Omega$ , où  $\rho$  désigne la masse volumique locale (i.e. masse par unité de volume), est donnée par :

$$m = \int_{\Omega} \rho(\mathbf{X}, t) d\Omega \quad (2.4)$$

Dans le cas où, il n'y a ni création, ni perte de matière dans  $\Omega$  au cours de son mouvement, on peut écrire :

$$\frac{dm}{dt} = 0 \quad (2.5)$$

En appliquant l'équation de transport, on obtient :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho d\Omega = \int_{\Omega} \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\mathbf{V}) \right] d\Omega = 0 \quad (2.6)$$

d'où l'équation de conservation de la masse (équation de continuité) :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\mathbf{V}) = 0 \quad (2.7)$$

Dans le cas des fluides incompressibles, la masse volumique de chaque particule fluide reste constante au cours du temps,  $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ . L'équation (2.7) peut s'écrire alors de la façon suivante :

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \quad (2.8)$$

### C. Équation de conservation de la quantité de mouvement :

La quantité de mouvement totale d'un fluide contenu dans un volume de contrôle  $\Omega$  est :

$$\int_{\Omega} \rho\mathbf{V} d\Omega \quad (2.9)$$

En appliquant la deuxième loi de Newton, aussi appelée loi fondamentale de la dynamique, la variation de la quantité de mouvement au cours du temps est égale à la somme des forces extérieures qui lui sont appliquées :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho\mathbf{V} d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{f} d\Omega + \int_{\Sigma} \bar{\bar{\sigma}} \cdot \mathbf{n} d\Sigma \quad (2.10)$$

Dans notre cas  $\mathbf{f} = -\rho g \mathbf{e}_z$  et  $\bar{\sigma} = -P\bar{I} + 2\mu\bar{D} + \gamma(\nabla \cdot \mathbf{V})\bar{I}$

où  $\mu$  le coefficient de viscosité de cisaillement pur (ou viscosité dynamique),  $\gamma$  le coefficient de viscosité volumique et  $\bar{D} = \frac{1}{2}[\nabla\mathbf{V} + {}^t(\nabla\mathbf{V})]$ .

L'hypothèse de Newton-Stokes, valable pour les liquides et les gaz monoatomiques, conduit à  $\gamma = -\frac{2}{3}\mu$  selon Bird et al. [7]. Nous supposons que  $\mu$  est constante dans tout l'écoulement.

Après application du théorème de Reynolds [17] et de l'équation (2.3), on obtient :

$$\rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \rho \mathbf{g} - \nabla P + (\gamma + \mu) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{V}) + \mu \nabla^2 \mathbf{V} \quad (2.11)$$

Pour le cas d'un fluide, ou mélange de fluide incompressible :  $\frac{dp}{dt} = 0 \Leftrightarrow \nabla \cdot \mathbf{V} = 0$ . On obtient la forme suivante de l'équation de Navier-Stokes que nous utiliserons dans la suite de ce travail :

$$\rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \rho \mathbf{g} - \nabla P + \mu \nabla^2 \mathbf{V} \quad (2.12)$$

#### D. Équation de conservation de l'énergie :

Notons,  $E$  l'énergie totale contenue dans un volume  $\Omega$ .

$$E = E_c + U, \quad (2.13)$$

où  $E_c$  : l'énergie cinétique et  $U$  : l'énergie interne du fluide mono-constituant, ou du fluide multi-constituant, contenu dans  $\Omega$ . Pour exprimer la conservation de l'énergie, nous partons du premier principe de la thermodynamique : la dérivée particulière à chaque instant  $t$  de la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie interne, est égale à la somme de la puissance mécanique  $P_e$  fournie à  $\Omega$  par les forces extérieures (actions de contact et à distance) et de la puissance calorifique  $\dot{Q}$  fournie à  $\Omega$  par l'extérieur :

$$\frac{d(E_c + U)}{dt} = P_e + \dot{Q} \quad (2.14)$$

Pour obtenir un bilan sur l'énergie interne  $U$ , on introduit le théorème de l'énergie cinétique qui se déduit de la conservation de la quantité de mouvement et s'énonce de la façon suivante : à chaque instant, la dérivée particulière de l'énergie cinétique d'un domaine fluide  $\Omega$  que l'on suit au cours du temps, est égale à la puissance de toutes les forces extérieures et intérieures appliquées à  $\Omega$ .

En combinant le premier principe et le théorème de l'énergie cinétique et en utilisant la loi de Fourier :  $\mathbf{q} = -\lambda \nabla T$ , on obtient l'équation locale suivante :

$$\rho \frac{de}{dt} = -\nabla \cdot \mathbf{q} + r - P \nabla \cdot \mathbf{V} + (\bar{\tau} : \nabla \mathbf{V}) \quad (2.15)$$

Finalement, si on considère un fluide incompressible mais dilatable de conductivité thermique constante et on néglige les dissipations visqueuses au sein de la couche fluide, on aboutit à l'équation de l'énergie sous la forme simplifiée suivante :

$$\rho \frac{de}{dt} = \nabla \cdot (\lambda \nabla T) + r - P \nabla \cdot \mathbf{V} + (\bar{\tau} : \nabla \mathbf{V}) \quad (2.16)$$

### E. Équation de conservation des espèces :

Considérons un mélange constitué de  $N$  espèces moléculaires miscibles distinctes. La masse volumique locale  $\rho_k$  relative à l'espèce  $k$  est :

$\rho_k = \frac{m_k}{V}$ , où  $m_k$  désigne la masse de l'espèce  $k$  contenue dans le volume total  $V$  du mélange, on en déduit alors que la masse volumique du mélange est :

$$\rho = \sum_{k=1}^N \rho_k \quad (2.17)$$

La variation de masse de l'espèce  $k$ , contenue dans le volume de contrôle  $\Omega$ , est produite par le flux de matière de l'espèce ( $k$ ) traversant la surface  $\Sigma$  pour pénétrer dans  $\Omega$  et par la réaction chimique produisant la masse  $\dot{\omega}_k$  par unité de volume et de temps :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \rho_k}{\partial t} d\Omega = - \int_{\Sigma} \rho_k \mathbf{V}_k \cdot \mathbf{n} d\Sigma + \int_{\Omega} \dot{\omega}_k d\Omega, \quad \forall k = 1..N \quad (2.18)$$

où  $V_k$  est la vitesse moyenne locale de l'espèce ( $k$ ).

On peut ignorer le terme dû aux réactions chimiques dans notre cas, d'où  $\dot{\omega}_k = 0$ .

En appliquant à l'équation (2.18), (2.2) on obtient l'équation du bilan de l'espèce  $k$  :

$$\frac{\partial \rho_k}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_k \mathbf{V}_k) = 0 \quad (2.19)$$

On peut également reformuler cette équation en faisant apparaître le flux convectif si on exprime le vecteur densité de flux de diffusion massique de l'espèce  $k$  :

$$\mathbf{J}_k = \rho_k (\mathbf{V}_k - \mathbf{V}), \quad (2.20)$$

avec  $\sum_{k=1}^N \mathbf{J}_k = \mathbf{0}$ .

La fraction massique  $C_k$  de l'espèce ( $k$ ) comme étant :  $C_k = \frac{\rho_k}{\rho}$ , pour tout  $k = 1..N$ , tel que :

$\sum_{k=1}^N C_k = 1$  et on obtient à partir de l'équation (2.19) et la loi de conservation de la masse (2.7) :

$$\rho \frac{dC_k}{dt} = -\nabla \cdot \mathbf{J}_k \quad (2.21)$$

Cette relation traduit la conservation de la masse de l'espèce  $k$  en l'absence de réaction chimique.

### F. Cas d'un mélange binaire :

Dans le cas qui nous intéresse, on est en présence d'un fluide binaire dont on tient compte de l'effet Soret (i.e. gradient de température qui induit un gradient de concentration). Le vecteur flux de matière du constituant de fraction massique  $C$  est donné par :

$$\mathbf{J} = -\rho D \nabla C - \rho C (1 - C) D_T \nabla T, \quad (2.22)$$

avec ;

- $C$  : fraction massique du constituant le plus dense du mélange.
- $D_T$  : coefficient de thermodiffusion.
- $D$  : coefficient de diffusion de Fick ou coefficient de diffusion isotherme du constituant considéré dans le mélange.

Finalement, l'équation (2.21) valable pour l'espèce  $k$  donne dans le cas d'un mélange binaire :

$$\rho \frac{dC}{dt} = \nabla \cdot [\rho D \nabla C + \rho C (1 - C) D_T \nabla T] \quad (2.23)$$

### G. Approximation de Boussinesq :

L'approximation attribuée à Boussinesq [10], a été proposée par Oberbeck [46] pour la première fois en 1879 :

- La masse volumique  $\rho$  d'un fluide (liquide, gaz, mélange liquide ou gazeux) est considérée comme étant constante dans tous les termes des équations de conservation, c'est-à-dire  $\rho(T, P) = \rho(T_0, P_0) = \rho_0 = c^{ste}$  ( $T_0$  et  $P_0$  sont la température et la pression de référence) sauf dans le terme générateur de la convection,  $\rho$  est une fonction de la température et de la fraction massique :  $\rho(T, C) = \rho_0 \left[ 1 - \beta_T (T - T_0) - \sum_k \beta_k (C_k - C_{0k}) \right]$  où :
- $\rho_0$  est la masse volumique à la température et aux fractions massiques de référence.
- $T_0$  et  $C_{0k}$  sont des valeurs de référence.
- $k$  variant de 1 à  $N$  correspondant au nombre d'espèces.
- $\beta_T$  est le coefficient d'expansion thermique du fluide :  $\beta_T = -\frac{1}{\rho_0} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_{C_k}$  ;

- $\beta_k$  est le coefficient d'expansion massique de l'espèce  $k$  :  $\beta_k = -\frac{1}{\rho_0} \left( \frac{\partial \rho}{\partial C} \right)_{T, C_{j \neq k}}$  ;
- Les autres propriétés thermophysiques du fluide ( $\mu, \gamma, \lambda, C_p$ ) sont supposées constantes.

## 2.2 Modèles d'écoulement en milieu poreux

### 2.2.1 Paramètres caractérisants un milieu poreux

Un milieu poreux est un milieu continu, à l'intérieur duquel se trouve une fraction de volume accessible à un fluide. Cette fraction de volume non solide, composée de pores, constitue ce que l'on appelle la porosité du milieu poreux.

#### A. La porosité :

La porosité  $\epsilon$  d'un milieu poreux est la fraction du volume total occupée par les pores :

$$\epsilon = \frac{\text{Volume des pores}}{\text{Volume total du milieu poreux}} \quad (2.24)$$

Nous présentons dans le tableau (2.1) les valeurs de la porosité et de la perméabilité pour différents matériaux poreux, tirées de l'ouvrage de Nield et Bejan [44].

#### B. La tortuosité :

La description de la géométrie des pores fait intervenir la notion de connectivité, correspondante à la complexité d'un chemin continu à travers l'espace des pores. Il faut aussi tenir compte des " bras morts ", qui sont nombreux dans les milieux peu poreux et très hétérogènes. Pour décrire ces différents aspects, on introduit un paramètre  $\tau$ , appelé tortuosité, que l'on définit de la manière suivante :

$$\tau = \left( \frac{L_e}{L} \right)^2 \quad (2.25)$$

où  $L_e$  est la longueur réelle des lignes de courant du fluide traversant un échantillon de longueur  $L$ . La tortuosité  $\tau$ , joue un rôle important en diffusion.

#### C. La perméabilité :

La perméabilité  $K$  d'un milieu poreux dépend de la porosité et de la géométrie de la matrice solide. Plusieurs évaluations de  $K$  ont été proposées. Les différentes expressions donnant la perméabilité dépendent de la géométrie du milieu poreux.

- La relation de KOZENY-CARMAN (1927) pour un milieu poreux non consolidé constitué d'éléments identiques de géométrie simple :

$$K = \frac{d^2 \epsilon^2}{36 C_0 (1 - \epsilon)^2} \quad (2.26)$$

où  $d$  désigne une dimension caractéristique des éléments constituant la matrice poreuse et  $C_0$  une constante dépendante de la forme des grains ( $3.6 < C_0 < 5$ ).

- La relation d'ERGUN (1927), semblable à l'équation ci-dessus établie en considérant l'écoulement unidirectionnel d'un fluide incompressible, au sein d'une colonne poreuse constituée de particules sphériques, de diamètre  $d$ . La colonne est soumise à un gradient de pression :

$$K = \frac{d^2 \epsilon^2}{150 (1 - \epsilon)^2} \quad (2.27)$$

Cette relation est identique à la relation de la loi de KOZENY CARMAN pour la valeur de  $C_0 = 4.16$ .

- La modélisation de la matrice poreuse comme un faisceau de tubes capillaires parallèles :

$$K = \epsilon \frac{d^2}{32} \quad (2.28)$$

où  $\epsilon = n \frac{\pi d^2}{4}$  et  $n$  est le nombre de capillaires par unité de surface perpendiculaire au sens de l'écoulement et  $d$  le diamètre des capillaires.

#### D. Volume élémentaire représentatif (V.E.R.) :

Lorsqu'on étudie les écoulements en milieu poreux, deux échelles s'imposent pour la description des phénomènes [8] :

- L'échelle des pores, ou microscopique, à l'intérieur de laquelle les grandeurs locales peuvent très largement varier. En général, cette échelle est associée au diamètre moyen des pores,  $d_p$ .
- L'échelle du milieu poreux, ou macroscopique, caractéristique des variations significatives de ces mêmes grandeurs définies en moyenne sur un certain volume de milieu poreux, appelé communément Volume Élémentaire Représentatif et noté V.E.R. Cette échelle macroscopique est associée à la dimension géométrique du milieu,  $Lm$ . Les grandeurs macroscopiques caractérisant le milieu poreux sont donc des moyennes des grandeurs microscopiques correspondantes, prises sur un domaine dont la taille est grande devant l'échelle de leurs fluctuations microscopiques mais petite devant celle des variations à l'échelle macroscopique. Ainsi, ' $l$ ' désignant la dimension caractéristique du V.E.R., doit satisfaire la double inégalité suivante :  $d_p \leq l \leq Lm$ . Pour effectuer le changement d'échelle (i.e. passage de l'échelle des pores à l'échelle macroscopique) plusieurs méthodes ont été proposées, dont notamment la méthode de prise de moyenne et la méthode d'homogénéisation.

Matériau	Porosité $\epsilon$	Perméabilité $K$ ( $m^2$ )
Ardoise	0.56 à 0.66	$4.9 \times 10^{-14}$ à $4.4 \times 10^{-13}$
Brique	0.12 à 0.34	$4.8 \times 10^{-15}$ à $2.2 \times 10^{-13}$
Charbon	0.02 à 0.12	-
Fibre de verre	0.88 à 0.93	-
Calcaire (dolomite)	0.04 à 0.10	$2 \times 10^{-15}$ à $4.5 \times 10^{-14}$
Sable	0.37 à 0.50	$2 \times 10^{-11}$ à $1.8 \times 10^{-10}$
Grès	0.08 à 0.38	$5 \times 10^{-16}$ à $3 \times 10^{-12}$
Silice (en poudre)	0.37 à 0.49	$1.3 \times 10^{-14}$ à $5.1 \times 10^{-14}$

TABLE 2.1 – Propriétés de quelques matériaux poreux [44]

## 2.2.2 Modélisation mathématique d'un milieu poreux

### A. Équation de continuité :

En raison de la complexité du milieu poreux, il faut passer à l'échelle macroscopique afin d'obtenir une équivalence entre le milieu réel dispersé et le milieu continu fictif équivalent.

On introduit la notion de vitesse de filtration  $\mathbf{V}^*$ , qui correspond à la vitesse moyenne du fluide prise sur un V.E.R..

L'équation de conservation de la masse s'écrit alors sous la forme :

$$\epsilon \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}^*) = 0 \quad (2.29)$$

où  $\rho$  est la masse volumique du fluide saturant. Dans le cas particulier d'un fluide incompressible l'équation (2.29) se ramène à :

$$\nabla \cdot \mathbf{V}^* = 0 \quad (2.30)$$

### B. Loi de Darcy :

Pour un échantillon de longueur  $L$  et de section  $S$  figure (??), le débit volumique  $Q_v$ , vérifie la relation :

$$Q_v = \frac{K}{\mu} S \frac{\Delta P}{L} \quad (2.31)$$

où  $\mu$  représente la viscosité dynamique du fluide saturant la matière poreuse et  $K$  la perméabilité caractéristique du milieu poreux. Le rapport du débit volumique total par unité de surface du matériau :  $\frac{Q_v}{S}$  représente la vitesse de filtration du fluide, qui correspond à la vitesse moyenne du fluide prise sur un V.E.R..



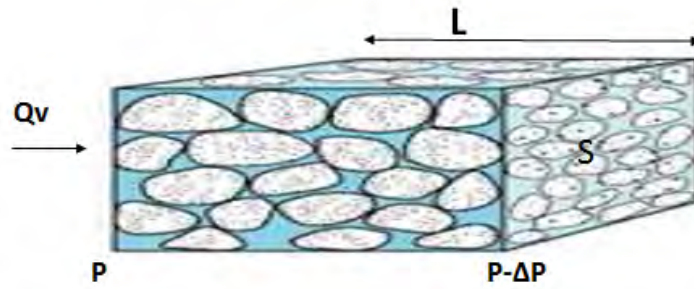


FIGURE 2.1 – Écoulement de Darcy dans un milieu poreux

A trois dimensions, l'équation (2.31) se généralise, pour un milieu isotrope en présence du champ de gravité à :

$$\mathbf{V} = -\frac{K}{\mu} (\nabla P - \rho \mathbf{g}) \quad (2.32)$$

où  $\rho$  désigne la masse volumique du fluide saturant.

### C. Limites de validités de la loi de Darcy :

Le nombre de Reynolds de pore est basé sur la vitesse  $V_p$  et sur une longueur  $d$ , soit :

$$Re = V_p \frac{d}{\nu} \quad (2.33)$$

où  $\nu = \frac{\mu}{\rho}$  est la viscosité cinématique du fluide et  $|\mathbf{V}_p| = \frac{|\mathbf{V}|}{\epsilon}$

Bear [4] distingue trois régimes d'écoulement suivant la valeur du nombre de Reynolds de pore. Dybbs et Edwards [24], à l'aide de mesures de vitesse, ont conclu que pour des nombres de Reynolds de pore inférieurs à l'unité, le régime d'écoulement est laminaire, les forces visqueuses sont prédominantes et la loi de Darcy est applicable.

### D. Transfert de chaleur en milieu poreux :

L'équation traduisant le transfert de chaleur dans un milieu poreux fait aussi appel au concept de milieu continu fictif, équivalent au milieu poreux réel.

A l'échelle du pore, le système décrivant le transfert de chaleur est le suivant : En tout point  $M$  du milieu poreux, à l'exception de la surface de contact entre le solide et le fluide, la loi de Fourier s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial t} [(\rho c)_i T_i] + \nabla \cdot [(\rho c)_i T_i \mathbf{V}_i] = \nabla \cdot (\lambda_i \nabla T_i) \quad (2.34)$$

où  $i = f$  si  $M$  appartient à la phase fluide et  $i = s$  s'il appartient à la phase solide. On a donc  $\mathbf{V}_s = 0$  et  $\mathbf{V}_f$  désigne la vitesse locale du fluide à l'échelle du pore.

Les conditions aux limites associées à l'interface solide-fluide, sont les suivantes :

$$\begin{aligned} T_s &= T_f \\ (\lambda_s \nabla T_s) \cdot \mathbf{n} &= (\lambda_f \nabla T_f) \cdot \mathbf{n} \\ \mathbf{V}_f &= 0 \end{aligned} \quad (2.35)$$

où  $\mathbf{n}$  désigne le vecteur normal à l'interface,  $\lambda_i$  la conductivité thermique de la phase  $i$  et  $(\rho c)_i$  la capacité calorifique volumique de la phase  $i$ .

Après avoir écrit ces équations à l'échelle microscopique, on définit des grandeurs moyennes qui permettent de décrire le transfert de chaleur à l'échelle du milieu homogène par l'équation classique des milieux continus fluides à savoir :

$$\frac{\partial}{\partial t} [(\rho c)_m T_m] + \nabla \cdot [(\rho c)_m T_m \mathbf{V}_m] = \nabla \cdot (\lambda_m \nabla T_m) \quad (2.36)$$

La détermination de ces grandeurs moyennes,  $(\rho c)_m$ ,  $T_m$ ,  $\lambda_m$  s'effectue alors par identification de l'équation (2.16) avec celles obtenues par prises de moyenne sur un V.E.R., des équations (2.14) [41, 18].

Cette identification conduit aux relations suivantes :

$$(\rho c)_m = \epsilon (\rho c)_f + (1 - \epsilon) (\rho c)_s \quad (2.37)$$

$$\mathbf{V}_m = \frac{(\rho c)_f}{(\rho c)_m} \mathbf{V} \quad (2.38)$$

où  $\mathbf{V}$  est la vitesse de filtration.

Deux modèles de description du transfert de chaleur en milieu poreux sont alors proposés [18, 19] selon que l'on retienne l'une des deux hypothèses suivantes :

- La première utilise le concept de conductivité thermique globale équivalente.
- La seconde conduit à distinguer les températures moyennes des phases solides et fluides et à introduire un coefficient d'échange fini entre les deux phases.

Le premier modèle est le plus couramment utilisé dans la littérature. Il est satisfaisant pour décrire le transfert de chaleur au sein d'un milieu poreux lorsque les vitesses de filtration sont faibles. Il est de plus, considéré comme le plus acceptable pour les milieux poreux de faible granulométrie. Le deuxième modèle est utile lorsque les vitesses de filtration sont importantes (mouvements convectifs développés) ainsi que les écarts initiaux de températures entre les deux phases. Cependant, ce modèle est difficile à utiliser vu les difficultés rencontrées pour l'esti-

mation en particulier du coefficient d'échange convectif. La détermination expérimentale du coefficient d'échange reste difficile.

### E. Concept de conductivité thermique équivalente :

Cette hypothèse qui assimile le milieu poreux à un milieu fictif unique consiste à admettre que dans tout le volume élémentaire sur lequel on effectue un bilan énergétique, les températures moyennes des phases solides et fluides sont égales soit :

$$\bar{T}_s = \bar{T}_f = T \quad (2.39)$$

Cette hypothèse, qui implique un coefficient de transfert infini entre les deux phases, conduit à l'équation de l'énergie suivante analogue à (2.36) :

$$\frac{\partial}{\partial t} [(\rho c)^* T] + \nabla \cdot [(\rho c)_f T \mathbf{V}] = \nabla \cdot (\lambda^* \nabla T), \quad (2.40)$$

avec,  $(\rho c)^* = \epsilon (\rho c)_f + (1 - \epsilon) (\rho c)_s$  est la capacité calorifique volumique du milieu poreux équivalent.

La conductivité thermique globale  $\lambda^*$ , dépend des conductivités des phases solides et fluides et de la texture du milieu poreux.

De nombreux modèles de conductivité thermique ont été développés et qui permettent l'estimation de  $\lambda^*$ , tels que  $\lambda^* = (1 - \epsilon) \lambda_s + \epsilon \lambda_f$  ou  $\frac{1}{\lambda^*} = \frac{\epsilon}{\lambda_f} + \frac{1-\epsilon}{\lambda_s}$  dans le cas de milieux poreux constitués par des éléments très réguliers tels que des sphères. Mais il est généralement indispensable de recourir à la détermination expérimentale pour une évaluation précise de  $\lambda^*$ .



# Chapitre 3

## Formulation mathématique

### 3.1 Équations de conservation

Soit un milieu poreux saturé par un fluide binaire enfermé dans une cavité rectangulaire de rapport d'aspect  $A = \frac{L}{H}$  où  $H$  est la hauteur de la cavité et  $L$  sa longueur. La paroi horizontale inférieure est soumise à un flux de chaleur  $q'$ . La paroi horizontale supérieure est soumise à un flux de chaleur  $q'$  ou à température constante. Les parois verticales ( $x=0$ ,  $x=L$ ) sont supposées imperméables et adiabatiques. Toutes les parois sont supposées rigides. L'effet Soret est pris en compte et la cavité est soumise à des oscillations linéaires harmoniques dans la direction verticale. Nous considérons le référentiel lié à la cavité où on peut constater qu'il existe deux forces volumiques qui agissent sur le fluide :

- La force volumique de gravitationnelle  $-g\rho\mathbf{e}_z$ .
- la force d'inertie d'entraînement du système  $(\rho b\omega'^2 \sin\omega't')\mathbf{e}_z$ . La fréquence des oscillations est désignée par  $\omega'$  et leur amplitude par  $b$ . La prise en compte de cette force justifie le terme de la convection vibrationnelle.

Ce problème a été abordé par de nombreux auteurs parmi lesquels [25] et [16] qui ont utilisé les équations de conservation de la masse, de la quantité de mouvement modélisée par l'équation de Darcy, de l'énergie et des espèces :

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{V}' &= 0 \\ \frac{\rho}{\epsilon^*} \frac{\partial \mathbf{V}'}{\partial t} &= -\nabla P' + \rho[\mathbf{g} + b\omega'^2 \sin(\omega't') \mathbf{e}_z] - \frac{\mu}{K} \mathbf{V}' \\ (\rho c) \frac{\partial T'}{\partial t} + (\rho c)_f \mathbf{V}' \cdot \nabla T' &= \lambda \Delta T' \\ \rho(\epsilon^* \frac{\partial C'}{\partial t} + \mathbf{V}' \cdot \nabla C') &= \nabla \cdot [\rho(D \nabla C' + D_T C'(1 - C') \nabla T')]\end{aligned}\tag{3.1}$$

où  $(\rho c)$  est la capacité calorifique volumique équivalente définie par :  $(\rho c) = (1 - \epsilon^*)(\rho c)_s + \epsilon^*(\rho c)_f$ .  $(\rho c)_s$  et  $(\rho c)_f$ , sont respectivement les capacités calorifiques volumiques du solide et du liquide. La conductivité thermique équivalente du milieu poreux est notée  $\lambda$ .

Nous utiliserons l'approximation d'Oberbeck-Boussinesq. Les propriétés thermo physiques du fluide binaire sont supposées constantes, à l'exception de la masse volumique du fluide au niveau du terme générateur de la convection.

$$\rho(T, C) = \rho_0 (1 - \beta_T(T - T_0) - \beta_C(C - C_0)), \quad (3.2)$$

L'état de référence est défini par la température  $T_0$  et la fraction massique  $C_0$ .

Pour simplifier on introduit la pression motrice  $\hat{P}$  définie par :

$$\hat{P} = P' + \rho_0(g - b\omega'^2 \sin(\omega't'))z \quad (3.3)$$

De plus, on prend l'hypothèse que le terme  $C'(1 - C')$  présent dans l'équation de conservation des espèces varie peu par rapport à  $C_0(1 - C_0)$ .

Le problème (3.1) s'écrit :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{V}' &= 0 \\ \frac{\rho_0}{\epsilon^*} \frac{\partial \mathbf{V}'}{\partial t} &= -\nabla \hat{P} + \rho_0[\beta_T(T' - T_0) + \beta_C(C' - C_0)](g - b\omega'^2 \sin(\omega't'))\mathbf{e}_z - \frac{\mu}{K} \mathbf{V}' \\ (\rho c) \frac{\partial T'}{\partial t} + (\rho c)_f \mathbf{V}' \cdot \nabla T' &= \lambda \Delta T' \\ \epsilon^* \frac{\partial C'}{\partial t} + \mathbf{V}' \cdot \nabla C' &= D \nabla^2 C' + D_T C_0(1 - C_0) \nabla^2 T' \end{aligned} \quad (3.4)$$

Dans le but de simplifier la représentation paramétrique du problème physique on introduit les variables adimensionnelles suivantes :  $\mathbf{V} = \mathbf{V}' \frac{H}{a}$ ,  $t = t' \frac{a}{\varrho H^2}$ ,  $P = P' \frac{K}{\mu a}$ ,  $T = \frac{T' - (\alpha T_0 + (1 - \alpha) T_2)}{\Delta T}$ , (avec  $\alpha = 0, 1$ ),  $C = \frac{C' - C_0}{\Delta C}$ ,  $a = \frac{\lambda}{(\rho c)_f}$  est la diffusivité thermique équivalente,  $\varrho = \frac{(\rho c)_f}{(\rho c)}$ ,  $\Delta T = \frac{q'H}{\lambda}$ ,  $\Delta C = -\Delta T C_0(1 - C_0) \frac{D_T}{D}$ , ainsi on obtient le système adimensionnel suivant :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{V} &= 0 \\ B \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{V} &= -\nabla P + Ra(T + \psi C)(1 - R \sin(\omega t)) \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla T &= \nabla^2 T \\ \epsilon \frac{\partial C}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla C &= \frac{1}{Le} (\nabla^2 C - \nabla^2 T) \end{aligned} \quad (3.5)$$

où  $B = \frac{D_a}{\epsilon^* \varrho Pr} = \frac{1}{V_a}$  (l'inverse du nombre de Vadasz),  $D_a = \frac{K}{H^2}$ ,  $Pr = \frac{\nu}{a}$ ,  $\nu = \frac{\mu}{\rho_0}$  est la viscosité cinématique,  $Ra = \frac{K g H \Delta T \beta_T}{\nu a}$ ,  $R = \frac{b\omega'^2}{g}$ ,  $\psi = \frac{\beta_C \Delta C}{\beta_T \Delta T} = -C_0(1 - C_0) \frac{\beta_C}{\beta_T} \frac{D_T}{D}$  est le facteur de séparation,  $\omega = \frac{\omega' \varrho H^2}{a}$  est la pulsation adimensionnelle des vibrations,  $\epsilon = \frac{\epsilon^*}{\varrho}$  est la porosité normalisée et  $Le = \frac{a}{D}$  est le nombre de Lewis.

## 3.2 Conditions aux limites

Deux types de conditions aux limites ont été considérés au niveau des parois horizontales : flux thermique constant et uniforme ou flux thermique constant sur la paroi horizontale du bas et une

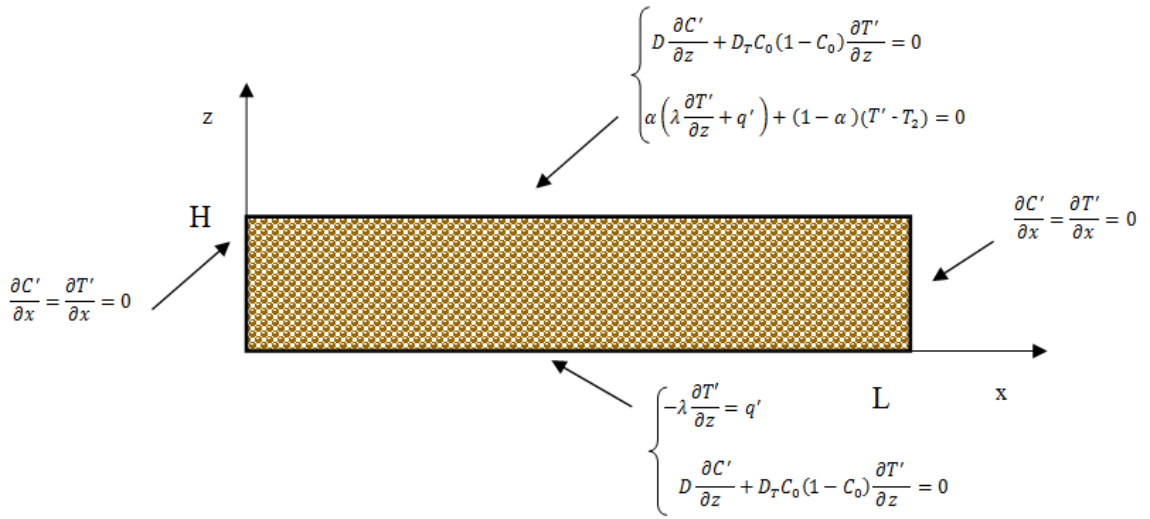


FIGURE 3.1 – Conditions aux frontières

température uniforme imposée sur la paroi horizontale supérieure. Les conditions aux limites dimensionnelles sont données par :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{V}' \cdot \mathbf{n} &= 0 \quad \forall M \in \partial\Omega \\
 D \frac{\partial C'}{\partial z} + D_T C_0 (1 - C_0) \frac{\partial T'}{\partial z} &= 0 \quad \text{pour } z = 0 \quad \forall x \in [0, L] \\
 D \frac{\partial C'}{\partial z} + D_T C_0 (1 - C_0) \frac{\partial T'}{\partial z} &= 0 \quad \text{pour } z = H \quad \forall x \in [0, L] \\
 -\lambda \frac{\partial T'}{\partial z} &= q' \quad \text{pour } z = 0 \quad \forall x \in [0, L] \\
 \alpha \left( \lambda \frac{\partial T'}{\partial z} + q' \right) + (1 - \alpha)(T' - T_2) &= 0 \quad \text{pour } z = H \quad \forall x \in [0, L] \\
 \frac{\partial C'}{\partial x} = \frac{\partial T'}{\partial x} &= 0 \quad \text{pour } x = 0, L \quad \forall z \in [0, H]
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

Les conditions aux limites adimensionnelles sont :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} &= 0 \quad \forall M \in \partial\Omega \\
 \frac{\partial C}{\partial z} = \frac{\partial T}{\partial z} &= -1 \quad \text{pour } z = 0 \quad \forall x \in [0, A] \\
 \frac{\partial C}{\partial z} = \frac{\partial T}{\partial z} &= 0 \quad \text{pour } z = 1 \quad \forall x \in [0, A] \\
 \alpha \left( \frac{\partial T}{\partial z} + 1 \right) + (1 - \alpha)T_2 &= 0 \quad \text{pour } z = 1 \quad \forall x \in [0, A] \\
 \frac{\partial C}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial x} &= 0 \quad \text{pour } x = 0, A \quad \forall z \in [0, 1]
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

### 3.3 Équations moyennées

Nous considérons le cas des vibrations de haute fréquence, c'est-à-dire le cas où la période des vibrations est faible par rapport aux temps caractéristiques. La période des oscillations  $\tau = \frac{2\pi}{\omega}$  doit rester très petite comparée aux échelles de temps caractéristiques de la diffusion visqueuse ( $\frac{H^2}{\nu}$ ), de la diffusion thermique ( $\frac{aH^2}{\alpha}$ ), et de la diffusion solutale ( $\frac{H^2}{D}$ ).

Dans cette situation, la méthode de moyennisation peut être utilisée [32]. Tous les champs ( $\mathbf{V}$ ,  $P$ ,  $T$ ,  $C$ ) peuvent être considérés comme la superposition d'une partie moyenne et d'une partie vibratoire :

$$(\mathbf{V}, P, T, C) = (\overline{\mathbf{V}}, \overline{P}, \overline{T}, \overline{C})(t) + (\mathbf{v}', p', \theta', c')(\omega, t). \quad (3.8)$$

où  $\overline{\mathbf{V}}, \overline{P}, \overline{T}, \overline{C}$  sont des fonctions à évolution lente et  $\mathbf{v}', p', \theta', c'$  sont à évolution rapide. Les variables notées  $\overline{X}$ , représentent les moyennes temporelles sur la période  $\tau = \frac{2\pi}{\omega}$

$$\overline{X} = \frac{1}{\tau} \int_{t-\tau/2}^{t+\tau/2} X(s) ds \quad (3.9)$$

En substituant les expressions (3.8) dans le système (3.5), et en appliquant la moyenne, nous obtenons le système d'équations donnant les champs moyens :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \overline{\mathbf{V}} &= 0 \\ B \frac{\partial \overline{\mathbf{V}}}{\partial t} + \overline{\mathbf{V}} &= -\nabla \overline{P} + Ra (\overline{T} + \psi \overline{C}) \mathbf{e}_z - Ra R \overline{\sin(\omega t) (\theta' + \psi c')} \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial \overline{T}}{\partial t} + \overline{\mathbf{V}} \cdot \nabla \overline{T} + \overline{\mathbf{v}' \cdot \nabla \theta'} &= \Delta \overline{T} \\ \epsilon \frac{\partial \overline{C}}{\partial t} + \overline{\mathbf{V}} \cdot \nabla \overline{C} + \overline{\mathbf{v}' \cdot \nabla c'} &= \frac{1}{Le} (\nabla^2 \overline{C} - \nabla^2 \overline{T}) \end{aligned} \quad (3.10)$$

En faisant la différence entre le système (3.10) et (3.5), nous obtenons le système régissant les variables à évolution rapide :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{v}' &= 0 \\ B \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} + \mathbf{v}' &= -\nabla p' + Ra (\theta' + \psi c') \mathbf{e}_z - Ra R \sin(\omega t) (\overline{T} + \theta' + \psi (\overline{C} + c')) \mathbf{e}_z \\ &\quad + Ra R \overline{\sin(\omega t) (\theta' + \psi c')} \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial \theta'}{\partial t} + \overline{\mathbf{V}} \cdot \nabla \theta' + \mathbf{v}' \cdot \nabla \overline{T} + \mathbf{v}' \cdot \nabla \theta' - \overline{\mathbf{v}' \cdot \nabla \theta'} &= \nabla^2 \theta' \\ \epsilon \frac{\partial c'}{\partial t} + \overline{\mathbf{V}} \cdot \nabla c' + \mathbf{v}' \cdot \nabla \overline{C} + \mathbf{v}' \cdot \nabla c' - \overline{\mathbf{v}' \cdot \nabla c'} &= \frac{1}{Le} (\nabla^2 c' - \nabla^2 \theta') \end{aligned} \quad (3.11)$$

Comme les vibrations sont de hautes fréquences, il s'ensuit que les variations temporelles de  $\mathbf{v}', \theta', c'$  sont d'ordre supérieur à leurs variations spatiales. Donc on va négliger dans le système (3.11) les termes  $Ra (\theta' + \psi c')$ ,  $Ra R \sin(\omega t) (\theta' + \psi c')$ ,  $Ra R \overline{\sin(\omega t) (\theta' + \psi c')}$ ,  $\overline{\mathbf{V}} \cdot \nabla \theta'$ ,  $\mathbf{v}' \cdot \nabla \theta'$ ,  $\overline{\mathbf{v}' \cdot \nabla \theta'}$ ,  $\nabla^2 \theta'$ ,  $\overline{\mathbf{V}} \cdot \nabla c'$ ,  $\mathbf{v}' \cdot \nabla c'$ ,  $\overline{\mathbf{v}' \cdot \nabla c'}$  et  $\nabla^2 c'$ .

Alors le système (3.11) simplifié est :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{v}' &= 0 \\ B \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} + \mathbf{v}' &= -\nabla p' - Ra R \sin(\omega t) (\overline{T} + \psi \overline{C}) \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial \theta'}{\partial t} + \mathbf{v}' \cdot \nabla \overline{T} &= 0 \\ \epsilon \frac{\partial c'}{\partial t} + \mathbf{v}' \cdot \nabla \overline{C} &= 0 \end{aligned} \quad (3.12)$$



Le découplage entre les parties vibratoires de la vitesse et la pression est obtenue en utilisant la décomposition de Helmholtz de  $(\bar{T} + \psi\bar{C})\mathbf{e}_z$  :

$$(\bar{T} + \psi\bar{C})\mathbf{e}_z = \mathbf{W} + \nabla\xi \quad (3.13)$$

avec  $\nabla \cdot \mathbf{W} = 0$  (où  $\mathbf{W}$  est la partie solénoïdale)

Ainsi on obtient les deux équations suivantes :

$$\begin{aligned} B\frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} + \mathbf{v}' &= -RaR\sin(\omega t)\mathbf{W} \\ \nabla p' &= -RaR\sin(\omega t)\nabla\xi \end{aligned} \quad (3.14)$$

La variation de  $\mathbf{v}'$  est rapide par rapport au temps comparée aux variations des variables moyennes  $\bar{T}$  et  $\bar{C}$ . On peut alors intégrer l'équation (3.14) pour trouver  $\mathbf{v}'$  en supposant que  $\mathbf{W}$  est constante. Puis on peut trouver  $\theta'$  et  $c'$  en fonction des champs moyens :

$$\begin{aligned} \mathbf{v}' &= -\frac{RaR}{1+B^2\omega^2}[\sin(\omega t) - \omega B\cos(\omega t)]\mathbf{W} \\ \theta' &= -\frac{RaR}{\omega(1+B^2\omega^2)}[\cos(\omega t) + \omega B\sin(\omega t)]\mathbf{W} \cdot \nabla\bar{T} \\ c' &= -\frac{RaR}{\epsilon\omega(1+B^2\omega^2)}[\cos(\omega t) + \omega B\sin(\omega t)]\mathbf{W} \cdot \nabla\bar{C} \end{aligned} \quad (3.15)$$

Les constantes d'intégration sont nulles car  $\bar{\mathbf{v}}' = 0$ ,  $\bar{\theta}' = 0$  et  $\bar{c}' = 0$ . En remplaçant les expressions obtenues des variables fluctuantes (3.16) dans le système d'équations (3.10), on obtient le système d'équation régissant les variables moyennes :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \bar{\mathbf{V}} &= 0 \\ B\frac{\partial \bar{\mathbf{V}}}{\partial t} + \bar{\mathbf{V}} &= -\nabla\bar{P} + (Ra(\bar{T} + \psi\bar{C}) + Rv(\nabla\bar{T} + \frac{\psi}{\epsilon}\nabla\bar{C}) \cdot \mathbf{W})\mathbf{e}_z \\ \frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + (\bar{\mathbf{V}} \cdot \nabla)\bar{T} &= \nabla^2\bar{T} \\ \epsilon\frac{\partial \bar{C}}{\partial t} + (\bar{\mathbf{V}} \cdot \nabla)\bar{C} &= \frac{1}{Le}(\nabla^2\bar{C} - \nabla^2\bar{T}) \\ (\bar{T} + \psi\bar{C})\mathbf{e}_z &= \mathbf{W} + \nabla\xi \\ \nabla \cdot \mathbf{W} &= 0 \end{aligned} \quad (3.16)$$

avec  $Rv = \frac{Ra^2R^2B}{2(B^2\omega^2+1)}$  est le nombre de Rayleigh vibrationnel.

La condition à la limite associée au champ  $\mathbf{W}$  :

$$\mathbf{W} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \forall M \in \partial\Omega. \quad (3.17)$$

Une justification mathématique de la méthode de moyennisation a été proposée par Simonenko [[54], [55]]. Lorsque la fréquence est très grande, les théorèmes proposés par Simonenko montrent l'existence et la convergence des solutions des équations en formalisme direct (3.5) vers les solutions des équations du formalisme moyenné (3.16) sans toutefois fournir une estimation de l'erreur.



# Chapitre 4

## Séparation des constituants d'un mélange binaire en couche poreuse horizontale soumise à un flux thermique

### 4.1 Introduction

Un intérêt considérable a été porté, ces dernières années, à la séparation thermogravitationnelle. Ceci est dû principalement à sa présence dans plusieurs applications industrielles, on peut citer : les procédés de séparation dans l'industrie chimique et pétrolière, le stockage des déchets nucléaires, la dispersion des contaminants chimiques dans les couches d'eau souterraines, la migration de l'humidité à travers les isolants fibreux, les processus de séchage, les opérations de dessalement de l'eau de mer, la formation des régions dendritiques durant la solidification des alliages et l'exploration pétrolière afin de mieux rentabiliser les investissements par une meilleure connaissance de la structure des gisements (Montel [43], Costesèque et al. [[22], [21]]). La séparation thermogravitationnelle dans les milieux poreux a été également étudiée pour ses nombreuses applications fondamentales.

Schöpf [53] a comparé, en utilisant des conditions aux limites réalistes pour la première fois, le déclenchement de la convection dans un fluide binaire saturant un milieu poreux à celui de la convection dans un fluide au sein d'une cavité très confinée. Il a montré que l'écoulement du fluide dans une cellule étroite et ou dans un milieu poreux devient identique lorsque le rapport hauteur sur épaisseur est très grand (cellule Hele-Shaw). Il a utilisé la même formulation mathématique utilisée par Brand et Steinberg [[11], [12]] (avec des conditions aux limites réalistes). Schöpf a montré que les critères de stabilité linéaire de la solution d'équilibre en présence de l'effet Soret dans la couche poreuse et dans la couche Hele-Shaw sont les mêmes. Ce résultat

tat ne prend pas en compte le rôle de la porosité dans cette instabilité comme l'ont montré Charrier-Mojtabi et al. [14].

Mamou et Vasseur [38] ont analysé l'instabilité diffusivo-convective dans une couche poreuse rectangulaire horizontale dont les parois horizontales sont soumises à des flux de chaleur et de masse. Les résultats de leurs travaux montrent que selon les paramètres de contrôle, quatre régimes différents peuvent exister (diffusif stable, convectif surstable, oscillant et direct). Marcoux et al. [40] ont proposé une étude de stabilité linéaire pour une cavité différentiellement chauffée avec un facteur de séparation  $\psi = -1$ . Dans une configuration analogue mais avec des flux de matière imposés au niveau des parois verticales, Joly et al. [34] ont fait une étude analytique sur la base d'un modèle de type "écoulement parallèle" suivie d'une étude numérique plus complète lorsque le facteur de séparation est égal à  $-1$ .

Bennacer et al. [6] ont étudié la prise en compte de l'effet Soret sur la convection dans une couche poreuse horizontale sous des gradients de température et de concentration. Ils ont montré que le gradient de concentration vertical a un effet stabilisant. Mojtabi et al. [42] ont étudié la stabilité linéaire des écoulements dans un mélange binaire avec un coefficient Soret variable. Bourich et al. [9] ont analysé numériquement les écoulements doubles diffusifs dans une cavité poreuse carrée dont les parois horizontales sont chauffées à des températures constantes et pour des concentrations imposées sur les parois verticales. Ces auteurs ont montré que pour  $\psi$  supérieur à un  $\psi$  critique, les solutions multiples disparaissent. Par contre une solution monocellulaire se maintient quand la convection est coopérante ( $\psi > 0$ ) ou opposée ( $\psi < 0$ ).

Charrier-Mojtabi et al. [14] ont étudié la stabilité linéaire et non linéaire de la solution d'équilibre et de l'écoulement monocellulaire dans une couche poreuse horizontale remplie par un fluide binaire chauffée par le bas ou par le haut. L'effet Soret est pris en compte et l'influence à la fois du facteur de séparation et de la porosité normalisée est étudiée. L'analyse de stabilité linéaire menée, a montré que la solution d'équilibre perd sa stabilité via une bifurcation stationnaire ou une bifurcation de Hopf en fonction du facteur de séparation et de la porosité du milieu. La porosité joue un rôle important ; la stabilité de la solution d'équilibre est renforcée quand la porosité normalisée diminue. Dans le cas des perturbations de très grandes longueurs d'onde, pour le facteur de séparation,  $\psi < 0$  et pour  $\psi$  supérieure à une valeur particulière appelée  $\psi_{mono}$ , les auteurs ont observé que l'écoulement monocellulaire conduit à une séparation des constituants de mélange entre les deux extrémités de la cellule. À partir de l'étude de la stabilité de l'écoulement monocellulaire, ils ont montré que pour une cellule chauffée par le bas et pour  $\psi > \psi_{mono}$ , l'écoulement monocellulaire perd sa stabilité via une bifurcation de Hopf.

Elhajjar et al. [25] ont étudié l'écoulement monocellulaire prenant naissance au déclenchement de la convection dans un fluide binaire saturant une cavité horizontale poreuse chauffée par le bas. Lorsque le coefficient de séparation  $\psi$  est positif et supérieur à une certaine valeur  $\psi_{mono}$ ,

ces auteurs ont montré qu'il est possible de séparer les espèces de la solution binaire entre les deux extrémités de la cellule. Par ailleurs, le nombre de Rayleigh conduisant au maximum de séparation dans le cas d'une cellule horizontale est supérieur à celui de la cellule verticale (colonne de thermogravitation). Il s'en suit qu'il est possible d'obtenir une plus grande quantité de produit séparé. L'épaisseur de la cellule en configuration horizontale est plus grande que celle de la colonne verticale.

Bahloul et al. [1] ont examiné les écoulements dans une cavité horizontale soumise à des flux verticaux de chaleur et de masse avec prise en compte de l'effet Soret. Ils ont démontré que la transition prend la forme d'une bifurcation qui peut être sous critique ou fourche suivant les valeurs du facteur de séparation et du nombre de Lewis,  $Le$ . Pour leurs études, les auteurs ont utilisé une solution analytique utilisant l'approximation de l'écoulement parallèle. Leurs travaux n'ont pas été étendus à la séparation des constituants du mélange binaire.

Dans ce chapitre on étudie la stabilité linéaire stationnaire et instationnaire de la solution d'équilibre et la solution de l'écoulement monocellulaire en milieu poreux saturé par un mélange binaire soumis à des vibrations de hautes fréquences et de faibles amplitudes, la cavité est soumise à des densités de flux uniforme le long des parois horizontales. On utilise le problème moyenné développé dans le chapitre précédent. La stabilité de la solution d'équilibre est étudiée analytiquement et numériquement dans le cas d'une cellule d'extension infinie. On s'intéressera à la détermination analytique et par la méthode de Galerkin du nombre de Rayleigh critique à partir duquel il y aura naissance de la convection Ceci peut se déterminer par la stabilité marginale. La stabilité marginale est le cas où une perturbation n'est ni amplifiée ni amortie, elle est donc utile pour déterminer les modes les plus instables. Une analyse de stabilité transitoire a été présentée afin de déterminer les passages entre les différentes bifurcations.

Ensuite nous allons étudier la séparation des espèces entre les deux extrémités d'une cellule horizontale, lors de l'écoulement monocellulaire pour des facteurs de séparation positives. Les résultats analytiques ont été corroborées par des simulations numériques en utilisant un code de calcul par éléments finis.

## 4.2 Formulation du problème

On se propose d'étudier le comportement d'un mélange binaire de fluides saturant un milieu poreux dont les parois horizontales sont soumises à un flux uniforme, les parois verticales étant adiabatiques, figure (4.1).

On s'intéresse plus particulièrement à l'analyse de stabilité linéaire. Les équations modélisant le problème ont été présentées au chapitre précédent pour ( $\alpha = 1$ ), le système moyenné s'écrit

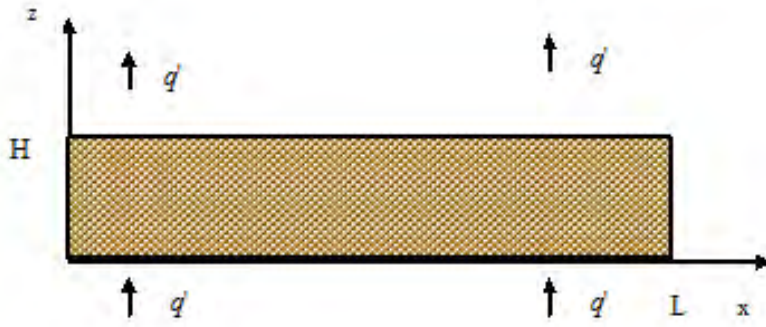


FIGURE 4.1 – Cellule rectangulaire de longueur  $L$  et de hauteur  $H$  soumise à un flux thermique

alors :

$$\begin{aligned}
 \nabla \cdot \mathbf{V} &= 0 \\
 B \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{V} &= -\nabla P + (Ra(T + \psi C) + Rv(\nabla T + \frac{\psi}{\epsilon} \nabla C) \cdot \mathbf{W}) \mathbf{e}_z \\
 \frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) T &= \nabla^2 T \\
 \epsilon \frac{\partial C}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) C &= \frac{1}{Le} (\nabla^2 C - \nabla^2 T) \\
 (T + \psi C) \mathbf{e}_z &= \mathbf{W} + \nabla \xi \\
 \nabla \cdot \mathbf{W} &= 0
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

avec les conditions aux limites :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} &= 0, \quad \forall M \in \partial\Omega \\
 \frac{\partial C}{\partial z} = \frac{\partial T}{\partial z} &= -1, \quad \text{pour } z = 0, 1 \quad \forall x \in [0, A] \\
 \frac{\partial C}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial x} &= 0, \quad \text{pour } x = 0, A \quad \forall z \in [0, 1] \\
 \mathbf{W} \cdot \mathbf{n} &= 0, \quad \forall M \in \partial\Omega
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

On introduit les fonctions de courant  $f$  et  $F$  associées aux champs de vitesse  $\mathbf{V}$  et  $\mathbf{W}$  respectivement sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
 V_x &= \frac{\partial f}{\partial z} & W_x &= \frac{\partial F}{\partial z} \\
 V_z &= -\frac{\partial f}{\partial x} & W_z &= -\frac{\partial F}{\partial x}
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

Dans ce cas le système (4.1) devient :

$$\begin{aligned}
 B \frac{\partial \nabla^2 f}{\partial t} + \nabla^2 f &= -Ra \frac{\partial}{\partial x} (T + \psi C) \\
 -Rv \left[ \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} \left( \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\psi}{\epsilon} \frac{\partial C}{\partial x} \right) + \frac{\partial F}{\partial z} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\psi}{\epsilon} \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \right) - \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \left( \frac{\partial T}{\partial z} + \frac{\psi}{\epsilon} \frac{\partial C}{\partial z} \right) - \frac{\partial F}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial z} + \frac{\psi}{\epsilon} \frac{\partial^2 C}{\partial x \partial z} \right) \right] \\
 \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial z} &= \Delta T \\
 \epsilon \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial C}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial C}{\partial z} &= \frac{1}{Le} (\nabla^2 C - \nabla^2 T) \\
 -\frac{\partial}{\partial x} (T + \psi C) &= \nabla^2 F
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

avec les conditions aux limites :

$$\begin{aligned}
f &= 0, \text{ pour } z = 0, 1 \quad \forall x \in [0, A] \\
\frac{\partial C}{\partial z} &= \frac{\partial T}{\partial z} = -1, \text{ pour } z = 0, 1 \quad \forall x \in [0, A] \\
\frac{\partial C}{\partial x} &= \frac{\partial T}{\partial x} = 0, \text{ pour } x = 0, A \quad \forall z \in [0, 1] \\
F &= 0, \text{ pour } z = 0, 1 \quad \forall x \in [0, A]
\end{aligned} \tag{4.5}$$

### 4.3 Étude de la stabilité linéaire dans le cas d'une cellule horizontale infinie

Le problème précédant, admet une solution d'équilibre mécanique :

$$f_0 = 0, \quad T_0 = -z + C^{ste}, \quad C_0 = -z + \frac{1}{2}, \quad F_0 = 0. \tag{4.6}$$

#### 4.3.1 Équations aux perturbations

Pour étudier la stabilité linéaire de la solution d'équilibre (4.6), nous introduisons des perturbations infinitésimales notées,  $f_p$  pour la fonction de courant de la vitesse,  $\theta$  pour la température,  $c$  pour la fraction massique et  $F_p$  pour la fonction de courant sinusoïdale.

Ces perturbations infinitésimales sont définies par :

$$\begin{aligned}
f(x, z, t) &= f_p(x, z, t) + f_0(x, z) \\
T(x, z, t) &= \theta(x, z, t) + T_0(x, z) \\
C(x, z, t) &= c(x, z, t) + C_0(x, z) \\
F(x, z, t) &= F_p(x, z, t) + F_0(x, z)
\end{aligned} \tag{4.7}$$

En introduisant les quantités perturbées, (4.7), dans le système (4.4) et en négligeant les termes du second ordre, on obtient alors les équations aux perturbations linéarisées suivantes :

$$\begin{aligned}
B \frac{\partial \nabla^2 f_p}{\partial t} + \nabla^2 f_p &= -Ra \frac{\partial}{\partial x} (\theta + \psi c) - Rv \frac{\partial^2 F_p}{\partial x^2} \left(1 + \frac{\psi}{\epsilon}\right) \\
\frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial f_p}{\partial x} &= \Delta \theta \\
\epsilon \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial f_p}{\partial x} &= \frac{1}{Le} (\nabla^2 c - \nabla^2 \theta) \\
-\frac{\partial}{\partial x} (\theta + \psi c) &= \nabla^2 F_p
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Les conditions aux limites associées aux perturbations sont données par :

$$\begin{aligned}
f_p &= 0, \text{ pour } z = 0, 1 \quad \forall x \in [0, A] \\
\frac{\partial c}{\partial z} &= \frac{\partial \theta}{\partial z} = -1, \text{ pour } z = 0, 1 \quad \forall x \in [0, A] \\
\frac{\partial c}{\partial x} &= \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0, \text{ pour } x = 0, A \quad \forall z \in [0, 1] \\
F_p &= 0, \text{ pour } z = 0, 1 \quad \forall x \in [0, A]
\end{aligned} \tag{4.9}$$

### 4.3.2 Décomposition en modes normaux

Il s'agit d'étudier le comportement temporel des perturbations infinitésimales, solution du système d'équations aux perturbations linéarisées. Pour ce faire on développe les perturbations en fonction du temps sous la forme :  $e^{\sigma t}$ . Nous écrivons  $\sigma$  sous la forme  $\sigma = \sigma_r + I\sigma_i$  où  $\sigma_r$  est le facteur d'amplification temporelle de la perturbation et  $\sigma_i = \omega$  la pulsation.

L'analyse du signe de  $\sigma_r$  permet de déterminer la stabilité de l'écoulement de base vis-à-vis des perturbations infinitésimales.

- si  $\sigma \in \mathbb{R}$  : les perturbations sont des fonctions décroissantes pour  $\sigma < 0$  et croissantes pour  $\sigma > 0$ .
- si  $\sigma \in \mathbb{C}$  avec  $\sigma_i \neq 0$  : on a un mode oscillant caractérisé par une pulsation  $\sigma_i = \omega$ . Ce mode oscillant sera amorti ou amplifié selon le signe de  $\sigma_r$  : le système est linéairement stable si, pour tous les modes,  $\sigma_r < 0$ . S'il existe un seul mode pour lequel  $\sigma_r > 0$ , l'écoulement de base est dit instable. Si  $\sigma_r = 0$  on parle de stabilité marginale.

La cellule étant d'extension infinie selon la direction  $(ox)$ , on montre que les perturbations selon  $x$  peuvent être développées sous la forme de fonction périodique en  $x$ . On doit donc chercher les perturbations du système sous la forme :

$$(f_p, \theta, c, F_p) = \left[ \tilde{f}(z), \tilde{\theta}(z), \tilde{c}(z), \tilde{F}(z) \right] e^{Ikx + \sigma t} + c.c \quad (4.10)$$

où  $k$  est le nombre d'onde des perturbations selon la direction  $(ox)$  et c.c désigne le complexe conjugué.

Afin de simplifier l'étude de la stabilité linéaire, nous introduisons la variable  $\tilde{\eta} = \tilde{c} - \tilde{\theta}$  en remplacement la perturbation de fraction massique  $c$ . En introduisant (4.10), dans le système (4.8), et en négligeant les termes du second ordre. On obtient :

$$\begin{aligned} (B\sigma + 1)(D^2 - k^2)\tilde{f} + RaIk((1 + \psi)\tilde{\theta} + \psi\tilde{\eta}) - Rv\tilde{F}k^2(1 + \frac{\psi}{\epsilon}) &= 0 \\ (D^2 - k^2)\tilde{\theta} - \sigma\tilde{\theta} - Ik\tilde{f} &= 0 \\ Le^{-1}(D^2 - k^2)\tilde{\eta} - \epsilon\sigma(\tilde{\eta} + \tilde{\theta}) - Ik\tilde{f} &= 0 \\ (D^2 - k^2)\tilde{F} + Ik((1 + \psi)\tilde{\theta} + \psi\tilde{\eta}) &= 0 \end{aligned} \quad (4.11)$$

où l'opérateur  $D$  représente  $\frac{d}{dz}$ .

### 4.3.3 Cas des perturbations de très grandes longueurs d'onde

**A.** On examine dans cette partie la stabilité de la solution d'équilibre vis-à-vis des perturbations de faibles nombres d'onde. Guershuni et al. [31] ont remarqué que les faibles nombres



d'onde critique sont généralement plus déstabilisants. Par simplification on omet le signe tilde de (4.10), on écrit :

$$(f, \theta, \eta, \sigma, F) = \sum_{n=0}^{\infty} k^n (f_n, \theta_n, \eta_n, \sigma_n, F_n), \quad (4.12)$$

avec les conditions limites :

$$z = 0, 1 : f_n = F_n = \frac{\partial \theta_n}{\partial z} = \frac{\partial \eta_n}{\partial z} = 0 \quad (4.13)$$

En remplaçant (4.12) dans (4.11) et en regroupant les termes de même ordre, on obtient :

$$(k^0) : f_0 = 0, F_0 = 0, \theta_0 = C^{ste}, \eta_0 = C^{ste}, \sigma_0 = 0. \quad (4.14)$$

$$(k^1) : \begin{aligned} f_1 &= -\frac{I}{2} Ra(1 + \psi(Le + 1))\theta_0(z^2 - z), \\ F_1 &= -\frac{I}{2}(1 + \psi(Le + 1))\theta_0(z^2 - z), \\ \theta_1 &= C^{ste}, \eta_1 = C^{ste}, \sigma_1 = 0. \end{aligned} \quad (4.15)$$

$$(k^2) : \begin{aligned} \frac{\partial^2 f_2(z)}{\partial z^2} &= -IRa((1 + \psi)\theta_1 + \psi\eta_1), \\ \frac{\partial^2 \theta_2(z)}{\partial z^2} &= If_1 + \theta_0(\sigma_2 + 1), \\ \frac{\partial^2 \eta_2(z)}{\partial z^2} &= ILe f_1 + \eta_0, \\ \frac{\partial^2 F_2(z)}{\partial z^2} &= -I((1 + \psi)\theta_1 + \psi\eta_1). \end{aligned} \quad (4.16)$$

En intégrant la deuxième équation du système (4.16), et en remplaçant l'expression de  $f_1$ , on obtient :

$$\sigma_2 = \frac{Ra}{12}(\psi(Le + 1) + 1) - 1 \quad (4.17)$$

On remarque que  $\sigma_2$  est réel. Dans le cas où  $\sigma = 0$  on se ramène à la stabilité marginale. L'expression de  $Ra$  est déduite de

$$12 = Ra(\psi(Le + 1) + 1) \quad (4.18)$$

on aura

$$Ra = \frac{12}{1 + \psi(Le + 1)}$$

Le nombre  $Ra$  marque la naissance de la convection stationnaire monocellulaire ( $k = 0$ ). Selon le signe de  $Ra$  on peut déterminer si le chauffage se fait par le bas ou par le haut. Un nombre de Rayleigh négatif équivaut à un chauffage par le haut, alors qu'un nombre de Rayleigh positif indique une configuration déstabilisante.

**B.** Lorsque le nombre d'onde critique  $k$  tend vers zéro, il est possible de simplifier les calculs effectués à partir du logiciel symbolique Maple en faisant un développement limité du déterminant  $\det(Ra(k), k, Le, \psi, Rv)$  au voisinage de  $k=0$  :

$$\det(Ra(k), k, Le, \psi, Rv) = G(Ra, k, Le, \psi, Rv) k^4 \quad (4.19)$$

A partir de cette relation de dispersion, on détermine le nombre d'onde critique et le nombre de Rayleigh critique. On fixe pour cela la valeur du nombre de Lewis. Pour chaque valeur de  $\psi$  fixée, on cherche la valeur de  $k = k_c$  qui minimise le nombre de Rayleigh pour obtenir le nombre de Rayleigh critique associé  $Ra_c$ .

Nous développons la fonction  $G$  au voisinage de  $k=0$  en utilisant le logiciel Maple, on obtient :

$$G(Ra, k, Le, \psi, Rv) = G_1(Ra, Le, \psi) + G_2(Ra, Le, \psi, Rv) k^2 + o(k^4). \quad (4.20)$$

La fonction  $G_1$  s'annule pour  $Ra_0 = \frac{12}{1+\psi(Le+1)}$ , qui correspond à l'apparition de l'écoulement monocellulaire associé à  $k = 0$ .

$Ra_0$  ne correspond pas nécessairement à un nombre de Rayleigh critique du problème considéré.

Cherchons à quelles conditions le nombre d'onde  $k = 0$  et  $Ra_0 = \frac{12}{1+\psi(Le+1)}$  correspond respectivement à un nombre d'onde critique et à un nombre de Rayleigh critique.

Pour  $Ra > 0$ , il est nécessaire de montrer que  $\frac{dRa}{dk} > 0$  ( $\frac{dRa}{dk^2} > 0$ ), et pour  $Ra < 0$ , de montrer que  $\frac{dRa}{dk} < 0$ .

$$k \rightarrow 0 : \begin{cases} \left(\frac{dG_1}{dk^2}\right)_{k=0} = -G_2 \\ \left(\frac{dG_1}{dk^2}\right)_{k=0} = \left(\frac{dG_1}{dRa}\right)_{Ra=Ra_0} \cdot \frac{dRa}{dk^2} \end{cases} \Rightarrow \frac{dRa}{dk^2} = (-G_2) \cdot \left(\frac{dRa}{dG_1}\right)_{Ra=Ra_0}$$

Ce qui implique :

$$\text{Si } Rv \in \left[0, \frac{640(Le+1)}{7(Le-1)^2}\right] \Rightarrow Ra_c = Ra_0 = \frac{12}{1+\psi(Le+1)} \text{ et } k_c = 0$$

$$\text{Si } \begin{cases} \psi_1 < \psi < \psi_H = -\frac{1}{Le+1} \text{ ou } \psi < \psi_2 \\ Rv > \frac{640(Le+1)}{7(Le-1)^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Ra_c = Ra_0 = \frac{12}{1+\psi(Le+1)} \\ k_c = 0 \end{cases}$$

$$\text{Si } \begin{cases} \psi_1 < \psi < \psi_2 \\ Rv > \frac{640(Le+1)}{7(Le-1)^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Ra_c \neq Ra_0 \\ k_c \neq 0 \end{cases}$$

$$\text{avec } \psi_1 = -\frac{Le+3+\sqrt{\frac{(Le-1)^2-640(Le+1)}{7Rv}}}{4(Le+1)} \text{ et } \psi_2 = -\frac{Le+3-\sqrt{\frac{(Le-1)^2-640(Le+1)}{7Rv}}}{4(Le+1)}$$

L'influence des vibrations pour  $Ra < 0$  dépend des valeurs de  $\psi$  et  $Le$ .

### 4.3.4 Méthode de Galerkin

Pour résoudre l'équation (4.11), on utilise dans cette étude une méthode spectrale : la méthode de Galerkin qui consiste à décomposer  $(\tilde{f}, \tilde{\theta}, \tilde{\eta}, \tilde{F})$  sur une base de fonctions orthogonales par rapport à un produit scalaire. Ici,  $(\tilde{f}, \tilde{\theta}, \tilde{\eta}, \tilde{F})$  seront approchées, dans la direction  $z$ , par sa projection sur la base des polynômes à l'ordre  $N$  en  $z$ , soit :

$$\begin{aligned}\tilde{f} &= \sum_{n=1}^N a_n (1-z) z^n \\ \tilde{\theta} &= b_1 + b_2 \left(z^2 - \frac{2}{3}z^3\right) + \sum_{n=1}^N b_{n+2} (1-z)^2 z^{n+1} \\ \tilde{\eta} &= d_1 + d_2 \left(z^2 - \frac{2}{3}z^3\right) + \sum_{n=1}^N d_{n+2} (1-z)^2 z^{n+1} \\ \tilde{F} &= \sum_{n=1}^N e_n (1-z) z^n\end{aligned}\tag{4.21}$$

Les fonctions de base vérifient toutes les conditions aux limites, donc le résidu  $R_{\tilde{f}}$  associé à la première équation du système (4.11) est multiplié par  $(1-z) z^n$  avec  $n$  variant de 1 à  $N$  et  $\int_0^1 R_{\tilde{f}} (1-z) z^n dz = 0 \forall n = 1..N$ . On obtient  $N$  équations algébriques. Une procédure similaire est utilisée pour les résidus  $R_{\tilde{\theta}}$ ,  $R_{\tilde{\eta}}$  et  $R_{\tilde{F}}$  associés aux autres équations du système (4.11). Cela donne  $4N$  équations algébriques à  $4N$  inconnues. D'une manière générale, le déterminant est complexe. La procédure que nous avons utilisé pour calculer la valeur du nombre de Rayleigh critique est la même que celle décrite dans Ouattara et al. [48].

#### 4.3.4.1 Transition stationnaire

Pour les bifurcations stationnaires ( $\sigma = 0$ ), les résultats sont présentés dans le tableau (4.1). On observe dans ce tableau que les vibrations n'ont aucun effet sur le nombre de Rayleigh et le nombre d'onde critique. Les résultats sont en très bon accord avec ceux obtenus dans l'approximation des ondes longues. Sur la figure (4.2) nous présentons le diagramme de stabilité obtenu pour  $Le = 5$ , (les lignes continues sont associées à la bifurcation stationnaire).

- Pour  $\psi > 0$ , le constituant le plus lourd se dirige vers la paroi la plus froide. La solution de double-diffusion pure est alors infiniment linéairement stable lorsque la couche horizontale est chauffée par le haut ( $Ra < 0$ ) alors qu'elle perd sa stabilité pour un nombre de Rayleigh critique inférieur au nombre de Rayleigh critique 12 correspondant au cas thermique pur, pour un chauffage par le bas ( $Ra > 0$ ).
- Pour  $\psi < 0$ , le composant le plus lourd migre vers la paroi chaude :  
 Pour  $Ra < 0$ , la solution d'équilibre n'est plus infiniment linéairement stable contrairement au cas thermique pur et on doit s'attendre à ce que  $Ra_c \rightarrow -\infty$  lorsque  $\psi \rightarrow \psi_H^-$  par valeur négative. Cette hypothèse est confirmée par les calculs.  
 Pour  $Ra > 0$  et  $(1 + \psi(1 + Le)) > 0$ , la migration du composant le plus lourd vers la paroi chaude (celle du bas), conduit à une augmentation du nombre de Rayleigh critique par rapport à la valeur 12 ( $Ra_c > 12$ ).

Pour  $Ra > 0$  et  $(1 + \psi(1 + Le)) < 0$ , on n'obtient plus de transition vers un régime convectif stationnaire.

		Galerkin, $Rv = 0$	Galerkin, $Rv = 10$	
$\psi$	$Ra_c = \frac{12}{\psi(Le+1)+1}$	$Ra_c, k_c = 0$	$Ra_c$	$k_c$
-0.1	-1.319	-1.319	-1.319	0
-0.06	-2.372	-2.372	-0.190	3.191
-0.05	-2.963	-2.963	-1.187	2.861
-0.03	-5.911	-5.911	-5.420	1.737
0	12	12.000	12.000	0
0.1	1.081	1.081	1.081	0
0.2	0.566	0.566	0.566	0
0.5	0.233	0.233	0.233	0

**TABLE 4.1** – Comparaison entre les valeurs du nombre de Rayleigh critique obtenues à partir de la solution exacte et de la méthode de Galerkin à l'ordre 4 pour  $Le = 100$

#### 4.3.4.2 Transition instationnaire

Pour l'analyse de la transition instationnaire, on prend  $\sigma = I\omega$  (bifurcation oscillatoire). On utilise la méthode de Galerkin pour résoudre (4.11).

On se propose de calculer les pulsations critiques  $\omega_c$  associées aux nombres de Rayleigh critiques  $Ra_c$  plus petits que les nombres de Rayleigh critiques associés à la bifurcation stationnaire. On remplace les perturbations par leurs développements, ce qui conduit à un système algébrique linéaire homogène. Pour que ce système admette une solution non triviale, il faut que le déterminant associé soit nul. Dans cette étude, ce dernier s'écrit sous la forme :

$$\det(A) = R(Ra, k, \omega, \epsilon, Le, \psi, Rv) + IS(Ra, k, \omega, \epsilon, Le, \psi, Rv) \quad (4.22)$$

où  $R$  et  $S$  sont des fonctions polynomiales en leurs arguments  $(Ra, k, \omega, \epsilon, Le, \psi, Rv)$ . La puissance de  $Ra$  et  $k$  dans ces fonctions augmente avec l'ordre de troncature  $N$ . Pour les approximations d'ordres  $N = 3, 4, 5$  et  $N = 6$ , l'expression du déterminant s'écrit comme suit :

$$\det(A) = \mathcal{F}_1(Ra, k, \omega, \epsilon, Le, \psi, Rv) \cdot \mathcal{F}_2(Ra, k, \omega, \epsilon, Le, \psi, Rv). \quad (4.23)$$

Lorsque nous fixons  $\omega = 0$ , on retrouve la valeur de  $Ra_c$  obtenue analytiquement.

Lorsqu'on écarte le cas  $\omega = 0$ , il n'est pas possible d'obtenir une relation analytique donnant  $(Ra_c, k_c, \omega_c)$  en fonction de  $(\epsilon, Le, \psi)$ . Nous avons pu déterminer ces paramètres critiques en utilisant le logiciel Maple.

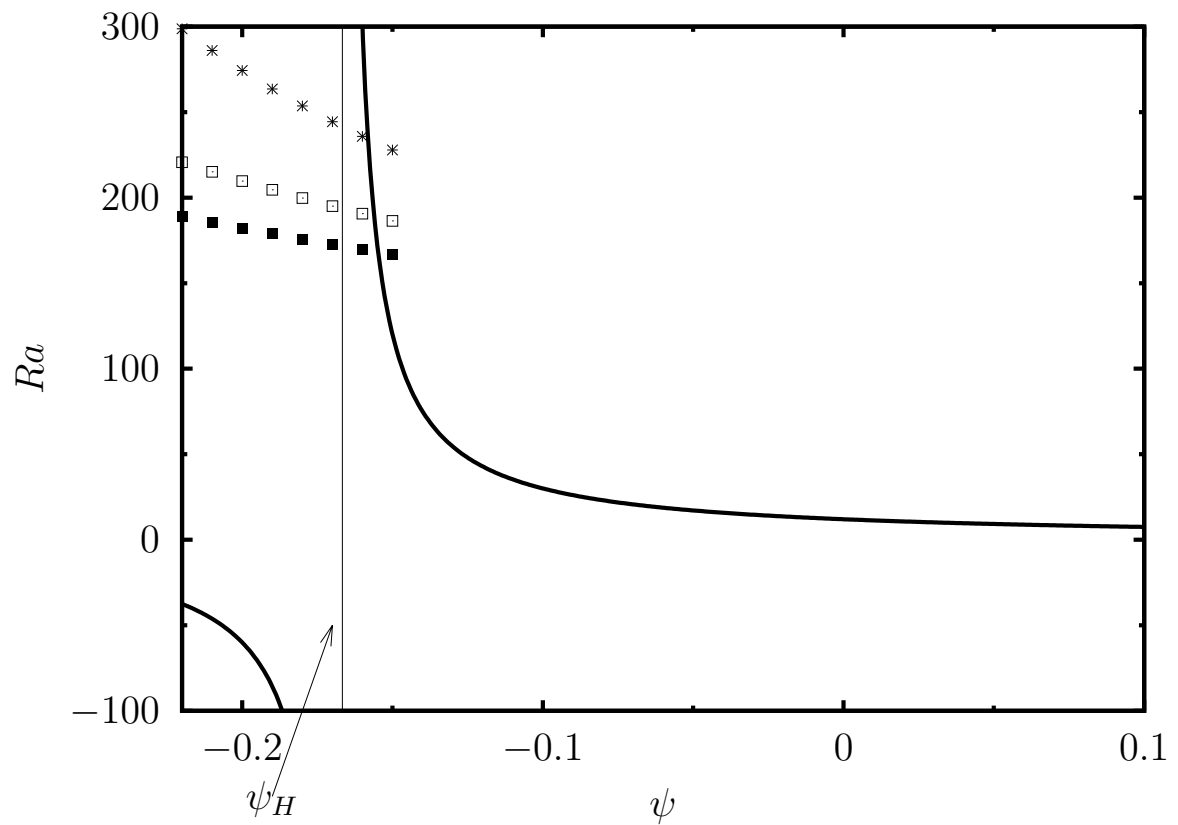
Pour une cellule chauffée par le bas, et pour  $\psi < 0$ , le constituant le plus lourd migre vers la paroi chaude du bas, ce qui nous donne un effet stabilisant. Dans ce cas la première bifurcation est une bifurcation de Hopf.

Nous avons déterminé les valeurs des paramètres critiques  $(Ra_c, \omega_c, k_c)$  pour la bifurcation de Hopf par la méthode de Galerkin.

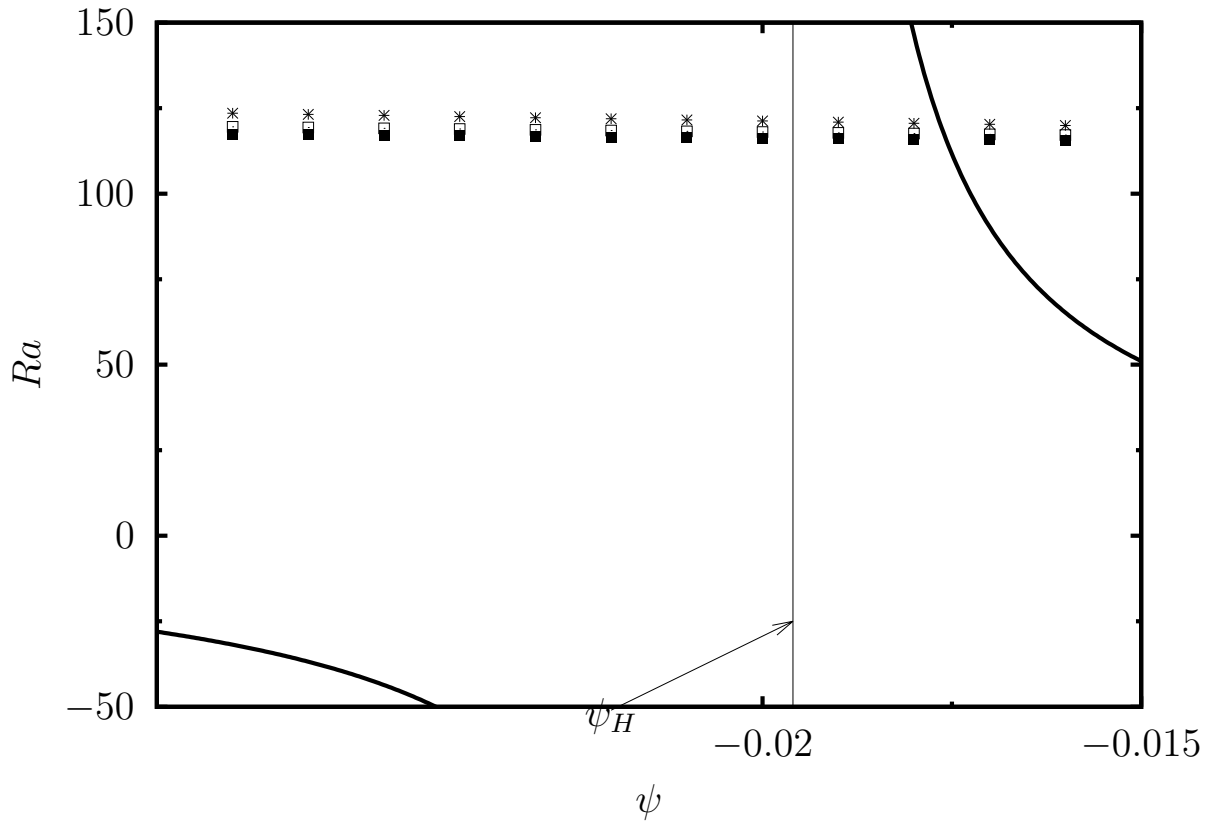
Les résultats sont présentés dans les figures (4.2, 4.3) et le tableau (4.2). Nous avons utilisé un nombre de Lewis ( $Le = 5$  et  $Le = 50$ ) et pour différentes valeurs de  $\psi$ ,  $\epsilon$  et  $Rv$ , nous avons obtenu le nombre de Rayleigh critique  $Ra_c$ , la fréquence critique  $\omega_c$  et le nombre d'onde critique  $k_c$  associé. Ces résultats montrent que, pour les valeurs de  $\psi$  inférieure à  $\psi_H = \frac{-1}{Le+1}$ , l'état conducteur perd la stabilité via une bifurcation Hopf.

		$Rv = 0$		$Rv = 10$	
$\psi$		$\epsilon = 0.5$	$\epsilon = 0.7$	$\epsilon = 0.5$	$\epsilon = 0.7$
-0.16	$k_c$	4.62	4.63	4.58	4.58
	$Ra_c$	233.73	188.97	236.02	191.58
	$\omega_c$	19.49	16.73	19.25	16.47
-0.18	$k_c$	4.61	4.63	4.58	4.58
	$Ra_c$	251.40	198.00	253.55	200.51
	$\omega_c$	22.12	18.58	21.91	18.29
-0.20	$k_c$	4.61	4.63	4.58	4.58
	$Ra_c$	271.89	207.93	273.99	210.33
	$\omega_c$	24.89	20.42	24.66	20.10
-0.22	$k_c$	4.60	4.63	4.58	4.59
	$Ra_c$	296.29	218.90	298.15	221.20
	$\omega_c$	26.24	22.28	27.54	22.00

**TABLE 4.2** – Le nombre de Rayleigh critique  $Ra_c$ , la fréquence critique  $\omega_c$  et le nombre d'onde critique  $k_c$  par la méthode de Galerkin à l'ordre 6 pour  $Le = 5$ .



**FIGURE 4.2** – Diagramme de stabilité pour  $Le = 5$ ,  $Rv = 0$ . La courbe en ligne continue correspond à la bifurcation stationnaire, la droite verticale :  $\psi_H = \frac{-1}{Le+1}$  et les trois courbes en pointillé représentent la bifurcation de Hopf pour différentes valeurs de la porosité normalisée ( $\epsilon = 0.5(*)$ ,  $\epsilon = 0.7(\square)$ ,  $\epsilon = 0.9(\blacksquare)$ ), (méthode de Galerkin à l'ordre 4).



**FIGURE 4.3** – Diagramme de stabilité pour  $Le = 50$ ,  $Rv = 0$ . La courbe en ligne continue correspond à la bifurcation stationnaire, la droite verticale :  $\psi_H = \frac{-1}{Le+1}$  et les trois courbes en pointillé représentent la bifurcation de Hopf pour différentes valeurs de la porosité normalisée ( $\epsilon = 0.5$ (\*),  $\epsilon = 0.7$ (□),  $\epsilon = 0.9$ (■)), (méthode de Galerkin à l'ordre 4).

## 4.4 Solution analytique de l'écoulement monocellulaire

### 4.4.1 Approximation de l'écoulement parallèle

Pour des cavités de grande extension ( $A \gg 1$ ), nous avons utilisé l'hypothèse d'écoulement parallèle, d'après Cormack et al. [20]. Dans ce cas l'écoulement de base est comme suit :

$$\mathbf{V}_0 = U(z) \mathbf{e}_x, \quad T_0 = bx + h(z), \quad C_0 = mx + g(z), \quad \mathbf{W}_0 = W_1(z) \mathbf{e}_x, \quad (4.24)$$

où  $b$  et  $m$  expriment respectivement le gradient de température et de fraction massique selon la direction ( $ox$ ).

#### 4.4.2 Formulation mathématique

En substituant les relations (4.24) dans le système d'équations (4.1), nous obtenons le système d'équations aux dérivées partielles suivant :

$$\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial z} &= -Ra(b + \psi m) \\ b \times U(z) &= \frac{d^2 h}{dz^2} \\ m \times U(z) &= \frac{1}{Le} \left( \frac{d^2 g}{dz^2} - \frac{d^2 h}{dz^2} \right) \\ \frac{\partial W_1}{\partial z} &= -(b + \psi m)\end{aligned}\quad (4.25)$$

Les conditions aux limites sur la paroi verticale ne sont pas prises en compte. On introduit d'autres conditions pour la résolution du problème (4.25) :

Le débit volumique à travers toute section droite verticale est nul :

$$\int_0^1 U(z) dz = 0 \quad \forall x \in [0, A] \quad (4.26)$$

En régime stationnaire, le flux massique à travers toute section droite de la cellule est nul :

$$\int_0^1 (U(z) g(z) Le - m + b) dz = 0 \quad (4.27)$$

Il en est de même pour le flux thermique :

$$\int_0^1 \left( -\frac{\partial T_0}{\partial x} T_0 U(z) \right) dz = 0 \quad (4.28)$$

On en déduit donc :

$$U(z) = -\psi_0(2z - 1), W_1(z) = -\frac{\psi_0}{Ra}(2z - 1), T_0 = bx + h(z), C_0 = mx + g(z), \quad (4.29)$$

avec :

$$\begin{aligned}\psi_0 &= \frac{1}{2} Ra(b + \psi m) \\ h(z) &= -\frac{b}{3} \psi_0 z^3 + \frac{b}{2} \psi_0 z^2 - z + C^{ste} \\ g(z) &= \frac{\psi_0(mLe+b)(6z^2-4z^3-1)}{12} + \frac{1-mA}{2} - z \\ m &= -\frac{Le\psi_0(b\psi_0-5)-30b}{Le^2\psi_0^2+30}, \\ b &= \frac{5\psi_0}{\psi_0^2+30}.\end{aligned}\quad (4.30)$$

Les expressions obtenues pour les champs de vitesse, de température, de fraction massique et du champ solénoïdal montrent que la solution de base correspondante à l'écoulement monocellulaire ne dépend pas des vibrations.

Le système (4.30) se ramène à la résolution d'une équation de cinquième degré en  $\psi_0$  :

$$\psi_0 \left( Le^2 \psi_0^4 - \frac{5}{2} d_1 \psi_0^2 - \frac{25}{16} d_2 \right) = 0, \quad (4.31)$$



où :

$$d_1 = Le^2 Ra - 12Le^2 - 12, \quad d_2 = 48(Ra(1 + \psi(Le + 1)) - 12). \quad (4.32)$$

Les solutions de l'équation (4.31) sont :

$$\psi_0 = 0 \text{ et } \psi_0 = \pm \frac{\sqrt{5}}{2Le} \left( d_1 \pm \sqrt{d_1^2 + Le^2 d_2} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (4.33)$$

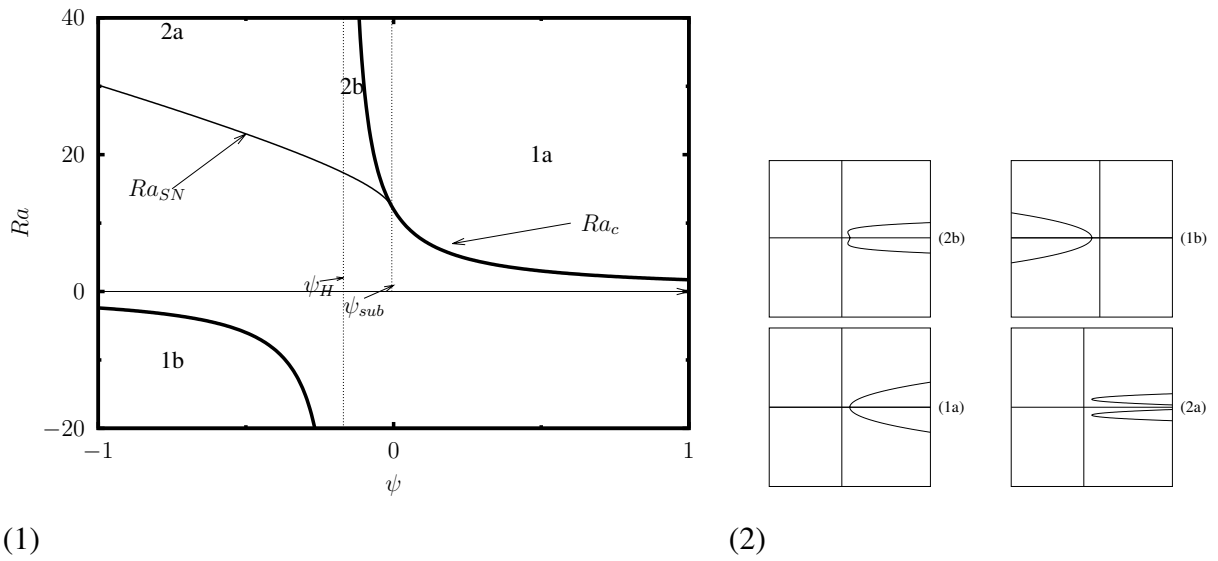
Le nombre de solutions dépend du signe de  $d_1^2 + Le^2 d_2$  et  $d_1 \pm \sqrt{d_1^2 + Le^2 d_2}$ . Ces dernières quantités dépendent de  $Ra$  pour  $Le$  et  $\psi$  fixés. Pour  $Ra > 0$  :

- Si  $d_1^2 + Le^2 d_2 < 0$ , l'état de conduction pure,  $\psi_0 = 0$ , est la seule solution possible.
- Si  $d_1^2 + Le^2 d_2 = 0 \Rightarrow Ra = Ra_{2\pm} \equiv \frac{12(Le+1)}{Le^2} \left( Le - 2\psi - 1 \pm 2\sqrt{\psi(1 - Le + \psi)} \right)$ . Alors  $Ra < Ra_{2-}$  et  $Ra > Ra_{2+}$  est nécessaire pour l'existence d'au moins une solution.
- Si  $d_1 \pm \sqrt{d_1^2 + Le^2 d_2} > 0$  pour  $Ra = Ra_{2+} \Rightarrow \psi_{\text{sub}} = -\frac{1}{1+Le+Le^2+Le^3}$ .

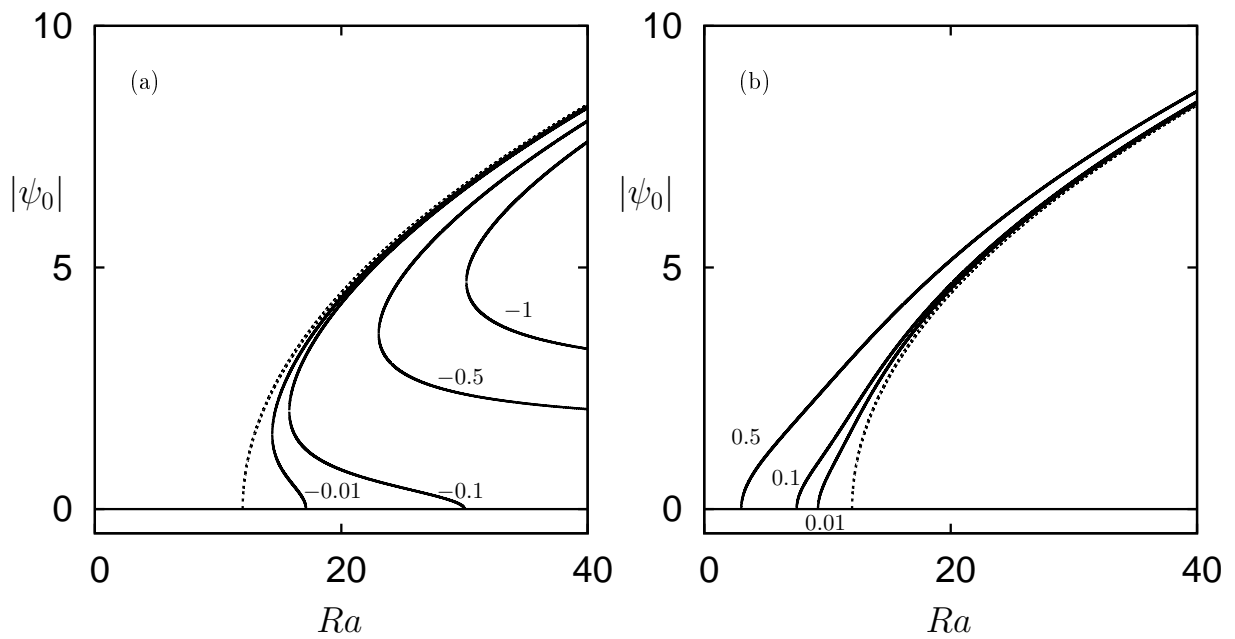
Le coefficient de séparation Soret  $\psi_{\text{sub}}$  correspond à la valeur en dessous de laquelle la bifurcation primaire supercritique devient sous-critique. Pour  $Le = 5$ ,  $\psi_{\text{sub}} = -0,00641$ . Lorsque  $\psi < \psi_{\text{sub}}$ , la valeur  $Ra_{SN} = Ra_{2+}$  correspond à un nœud-col le long d'une branche de solution.

Dans l'espace des paramètres  $(\psi, Ra)$ , la figure (4.4) illustre le diagramme de stabilité. Quatre régions sont identifiées 1a, 2a, 1b et 2b. Dans la région 2a il est difficile d'observer des structures stationnaires et régulières. Dans la région 2b, quatre modes de convection peuvent se produire. Enfin dans la région 1b et 1a la bifurcation est supercritique et trois modes de convection sont possibles. La figure (4.5) montre les diagrammes de bifurcations pour les solutions monocellulaires pour différentes valeurs de  $\psi$  et pour  $Le = 5$ . Pour  $-0.008 < \psi < 0$ , la bifurcation primaire supercritique devient sous-critique et deux solutions existent pour le même  $Ra$ . Pour  $\psi > \frac{-1}{Le+1}$  et  $\psi \approx \frac{-1}{Le+1}$ , la bifurcation de Hopf et stationnaire existent.

La séparation est définie comme étant la différence des fractions massiques du constituant le plus lourd entre les deux extrémités gauche et droite de la cellule soit  $S = m \cdot A$ , ( $m$  est adimensionnelle). La figure (4.6) représente la séparation obtenue analytiquement et numériquement en fonction de  $Ra$  pour une valeur donnée du nombre  $Rv$  et ce résultat est valable pour toute valeur de  $Rv$ . Nous avons vérifié numériquement, en résolvant les équations moyennées (4.1), pour  $Rv = 0, 10$ , que l'écoulement monocellulaire conduit à la valeur de la séparation obtenue analytiquement à partir de l'équation (4.30). Pour les faibles valeurs du nombre de Rayleigh, la convection est faible et la séparation résulte principalement de la thermodiffusion, le maximum correspond au couplage optimal entre la convection et la thermodiffusion. Pour les grandes valeurs du nombre de Rayleigh, la convection est forte et l'écoulement conduit à une faible séparation des espèces du mélange.



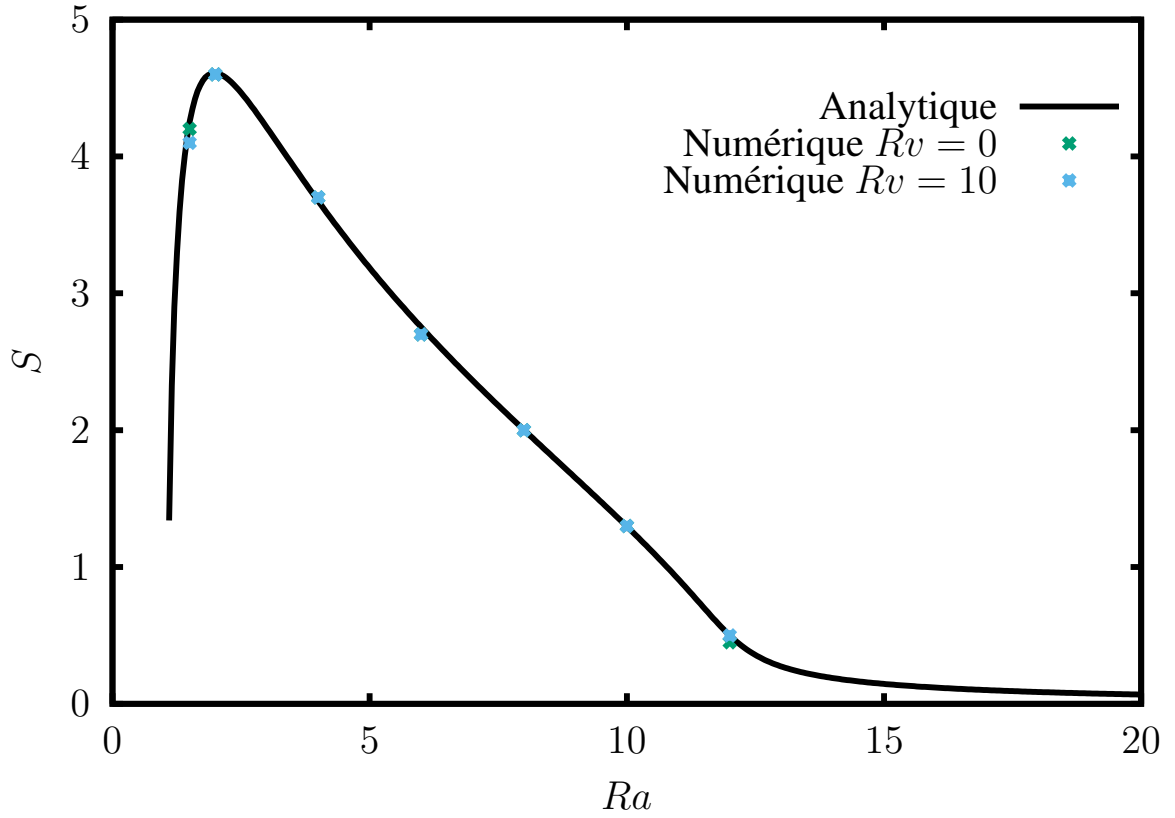
**FIGURE 4.4** – (1) Régions du plan  $(\psi, Ra)$  correspondantes aux différentes structures d'écoulement à l'intérieur de la cavité rectangulaire ( $Le = 5$ ). (2) les diagrammes de bifurcations.



**FIGURE 4.5** – (a,b) Diagrammes de bifurcations,  $|\psi_0|$  en fonction de  $Ra$  pour différentes valeurs de  $\psi$  et pour  $Le = 5$  et  $Rv = 0$ ,  $\psi = 0$  en ligne discontinue.

## 4.5 Stabilité linéaire de la solution monocellulaire

Pour étudier la stabilité de la solution monocellulaire, on introduit les perturbations de la vitesse, de la température, de la pression, de la concentration et de la vitesse solénoïdale.



**FIGURE 4.6** – Courbe de la séparation en fonction du nombre de Rayleigh pour  $Le = 100$ ,  $\psi = 0.1$  et  $Rv = (0, 10)$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{v} &= \mathbf{V} - \mathbf{V}_0 \\
 \theta &= T - T_0 \\
 c &= C - C_0 \\
 p &= P - P_0 \\
 \mathbf{w} &= \mathbf{W} - \mathbf{W}_0
 \end{aligned} \tag{4.34}$$

En négligeant les termes du second ordre, nous obtenons les équations linéaires dont les inconnues sont les perturbations. On introduit la nouvelle variable  $\eta = c - \theta$ . En développant les perturbations en modes normaux, on obtient le système suivant :

$$\begin{aligned}
 (B\sigma + 1)(D^2 - k^2)w + Rak^2[(1 + \psi)\theta + \psi\eta] + Rv[IkDw_2(b + \frac{\psi}{\epsilon}m) \\
 + k^2w_2(DT_0 + \frac{\psi}{\epsilon}DC_0) + Ik^3w_2[(1 + \psi)\theta + \psi\eta]] &= 0, \\
 Ik(D^2 - k^2)\theta - \sigma Ik\theta - wIkDT_0 + Uk^2\theta + bDw &= 0, \\
 \frac{Ik}{Le}(D^2 - k^2)(\eta + \theta) - (\eta + \theta) - wIkDC_0 + Uk^2(\eta + \theta) + mDw &= 0, \\
 (D^2 - k^2)w_2 + k^2[(1 + \psi)\theta + \psi\eta] &= 0.
 \end{aligned} \tag{4.35}$$

où  $D = \frac{d}{dz}$ ,  $k$  le nombre d'onde selon la direction ( $ox$ ),  $w$  est la composante verticale de la vitesse et  $w_2$  la composante verticale de  $\mathbf{w}$ . Les conditions aux limites du système sont :

$$w = 0, \frac{\partial \eta}{\partial z} = \frac{\partial \theta}{\partial z} = 0, w_2 = 0 \text{ pour } z = 0, 1 \quad (4.36)$$

Le problème (4.35, 4.36) est résolu par la méthode de Galerkin à l'ordre 4.

Les perturbations infinitésimales sont cherchées sous la forme :

$$\begin{aligned} w &= \sum_{n=1}^N a_n (1-z) z^n, \\ \theta &= b_1 + b_2 \left( z^2 - \frac{2}{3} z^3 \right) + \sum_{n=1}^N b_{n+2} (1-z)^2 z^{n+1}, \\ \eta &= d_1 + d_2 \left( z^2 - \frac{2}{3} z^3 \right) + \sum_{n=1}^N d_{n+2} (1-z)^2 z^{n+1}, \\ w_2 &= \sum_{n=1}^N e_n (1-z) z^n. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Les valeurs critiques ont été obtenues pour les bifurcations stationnaires et instationnaires. Le nombre de Rayleigh critique conduisant à une bifurcation stationnaire demeure plus grand que le nombre de Rayleigh critique conduisant à la bifurcation de Hopf. Pour cela, nous présentons principalement les valeurs du nombre d'onde  $k_c$ , du nombre de Rayleigh critique  $Ra_c$  et de la pulsation critique  $\omega_c$  associées à la bifurcation de Hopf, tableau (4.3). On observe d'après ce

$R_v$	$Ra_c$	$k_c$	$\omega_c$
<b>0</b>	58.23	6.47	56.78
<b>10</b>	58.47	6.44	56.46
<b>30</b>	58.95	6.39	55.91
<b>40</b>	59.18	6.37	55.68
<b>50</b>	59.42	6.34	55.37
<b>70</b>	59.89	6.30	54.92
<b>80</b>	60.12	6.27	54.61
<b>90</b>	60.36	6.25	54.39
<b>100</b>	60.59	6.22	54.09

**TABLE 4.3** – Effet des vibrations sur les valeurs critiques du nombre de Rayleigh, du nombre d'onde et de la fréquence associées aux transitions entre l'écoulement monocellulaire et l'écoulement multicellulaire pour  $Le=100$ ,  $\epsilon = 0.5$ ,  $B = 10^{-6}$  et  $\psi = 0.1$  (méthode de Galerkin à l'ordre 4)

tableau que les vibrations ont un effet stabilisant puisque leurs effet est d'augmenter la valeur du nombre de Rayleigh critique. Ainsi, les vibrations peuvent être utilisées pour maintenir l'écoulement monocellulaire pour des valeurs plus élevées du nombre de Rayleigh et ainsi permettre la séparation des constituants d'un mélange binaire pour une plus large gamme de valeurs du nombre de Rayleigh thermique. Mais il faut aussi noter que la séparation diminue pour les grandes valeurs de  $Ra$ .

## 4.6 Simulation numérique

Des simulations numériques ont été effectuées en utilisant une méthode aux éléments finis (Comsol) de maillage uniforme de  $150 \times 30$  avec un rapport d'aspect  $A = 10$ . Nous avons fait des simulations numériques directes pour étudier le cas  $Le = 100$ ,  $\psi = 0.1$  pour  $Ra = 12$ , une fois sans vibration ( $Rv = 0$ ) et une autre fois avec vibrations ( $Rv = 10$  et  $Rv = 50$ ). La figure (4.7) montre les lignes de courant pour  $Rv = 0, 10$  et  $50$ . Dans ce cas, l'écoulement est monocellulaire et on peut utiliser la cellule horizontale pour séparer les constituants des mélanges binaires. La figure (4.8) montre les isoconcentrations pour les mêmes valeurs de tous les paramètres. On peut observer que les vibrations modifient les valeurs du champ de concentration et par suite augmentent la séparation des constituants du mélange binaire.

En fonction des conditions initiales introduites dans les calculs numériques, la solution stationnaire est caractérisée par 13, 11, 10, 8 ou 1 rouleaux, figure (4.9). Ces solutions stationnaires restent stables avec la décroissance du nombre de Rayleigh jusqu'à ce que les points de retournement soient atteints. Le point de retour associé à la branche avec 13 rouleaux est obtenu pour  $Ra = 90$ , avec 11 rouleaux pour  $Ra = 64.7$ , avec 10 rouleaux pour  $Ra = 53.3$  et avec 8 rouleaux pour  $Ra = 40$ . L'écoulement monocellulaire reste stable et conduit à la solution exacte.

Afin d'exploiter les résultats présentés dans la figure (4.9), nous utilisons une méthode de continuation (méthode de Newton). Cette approche est proposée par Mamun et Tuckerman [39]. La méthode exploite le schéma d'intégration en espace des équations moyennées et des conditions aux limites à l'ordre 1. La discrétisation de l'espace se fait par méthode spectrale dont le domaine décomposé en  $n_e$  élément spectrale de taille  $n_x \times n_z$ . Les champs sont développés en ordre élevé par des points de Gauss-Lobatto-Legendre. Pour le cas  $Rv = 0$ , le système est formulé suivant les fonctions de courant et avec des conditions aux limites de Dirichlet. L'introduction du terme vibratoire dans les équations moyennées se fait à chaque pas de temps avant l'intégration temporelle de la température et de la concentration. La stabilité linéaire des solutions obtenues est calculée par la méthode d'Arnoldi [39].

Pour ceci on considère un domaine borné défini par un rapport d'aspect  $A = \frac{L}{H}$  où  $H$  est la longueur et  $L$  la hauteur. On applique les conditions aux limites suivantes :

$$x = 0, A : \partial_x T = \partial_x C = u = 0. \quad (4.38)$$

Afin de comparer les résultats de cette géométrie à ceux de la couche d'extension infinie, nous considérons un grand rapport d'aspect  $A = 20$ . L'ensemble des résultats sont calculé pour  $Rv = 0$ ,  $B = 0$  et  $\epsilon = 1$  avec différentes valeurs de  $Le$  et  $\psi$ . On prend  $n_e = 20$  et  $n_x = n_z = 17$  pour  $Le = 10$  à  $n_x = n_z = 31$  pour  $Le = 100$ . Les résultats sont en bon accord à ceux obtenus par Comsol.

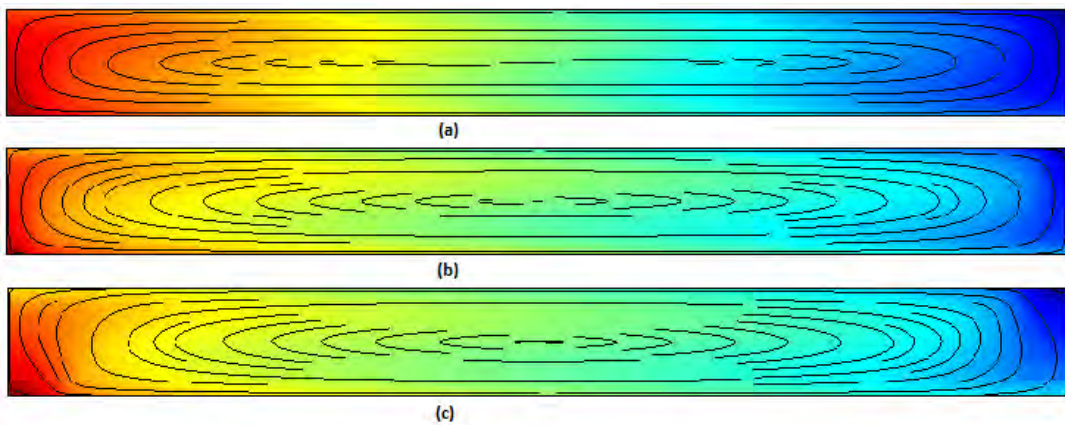
Soit  $E_K = (1/2) \int_{\Omega} \mathbf{V}^{*2} d\Omega$  l'énergie cinétique et  $L_n$  les branches d'états localisées où  $n$  est le nombre d'onde associé, figure (4.8d).

Dans le cas thermique pur,  $\psi = 0$ , la première branche  $L_1$  qui correspond à un rouleau bifurque de manière supercritique. Les autres branches sont  $n$  fois instables près du seuil et finissent par se stabiliser progressivement, figure (4.10a-c).

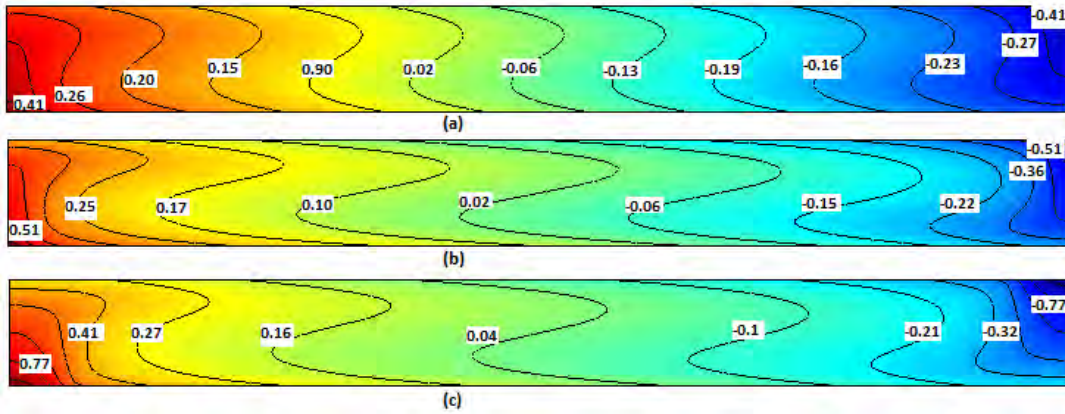
Pour des faibles valeurs positives de  $\psi$ , il se produit une transition de la variation de l'énergie cinétique dès que le nombre de Rayleigh dépasse le seuil thermique pur  $Ra_{c,PT} = 12$ . La contribution thermique est d'autant plus dominante que  $Ra$  est grand par rapport à  $Ra_{c,PT}$ . D'autre part, au-dessous du seuil  $Ra_{c,PT}$ , seule la partie solutale est responsable de l'apparition de la convection, figure (4.11a-b).

Pour la solution d'une seule cellule, il est intéressant de comparer les résultats d'une couche infinie à ceux d'un domaine borné, ( $A = 20$ ). La figure (4.12) montre que la couche infinie possède une valeur de seuil légèrement inférieure à celle d'un domaine fini.

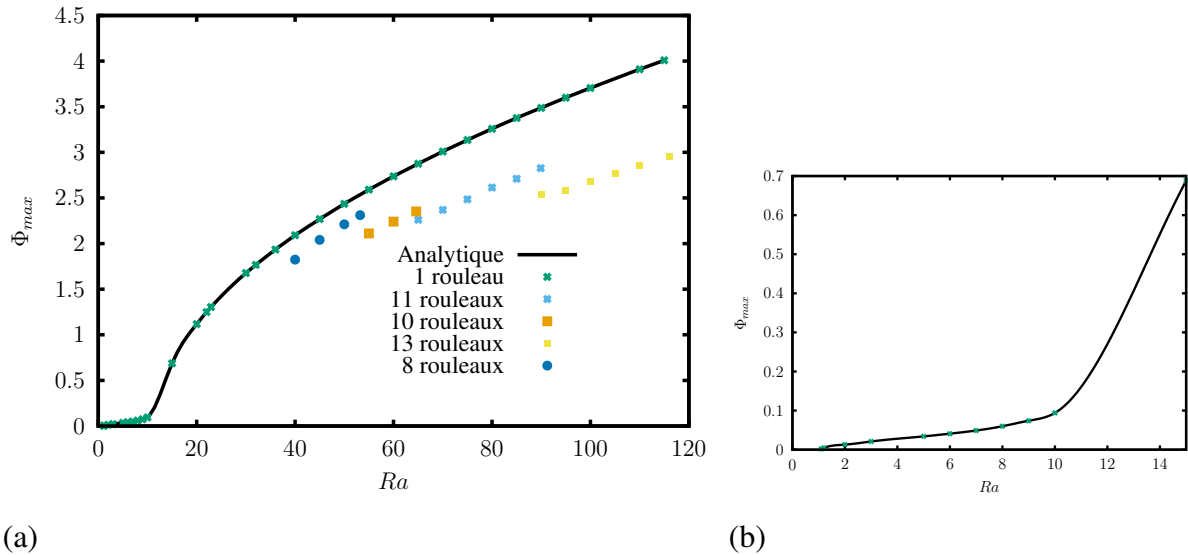
Pour un facteur de séparation positif  $\psi = 1$ , et des nombres de Lewis  $Le = 10, 20, 50$  et  $100$  les branches sont linéairement stables, figure (4.13). L'écoulement est produit par les gradients horizontaux thermiques et solutaux. La comparaison des deux régimes  $Ra < Ra_{c,PT}$  et  $Ra > Ra_{c,PT}$  est illustrée par la figure (4.14). L'analyse de ces deux régimes non-linéaires est effectuée par Tuckerman [58] en utilisant un modèle simple  $2 \times 2$ .



**FIGURE 4.7** – Les lignes de courant pour  $Le = 100$ ,  $Ra = 12$  et  $\psi = 0.1$ . (a)  $Rv = 0$  (b)  $Rv = 10$  (c)  $Rv = 50$



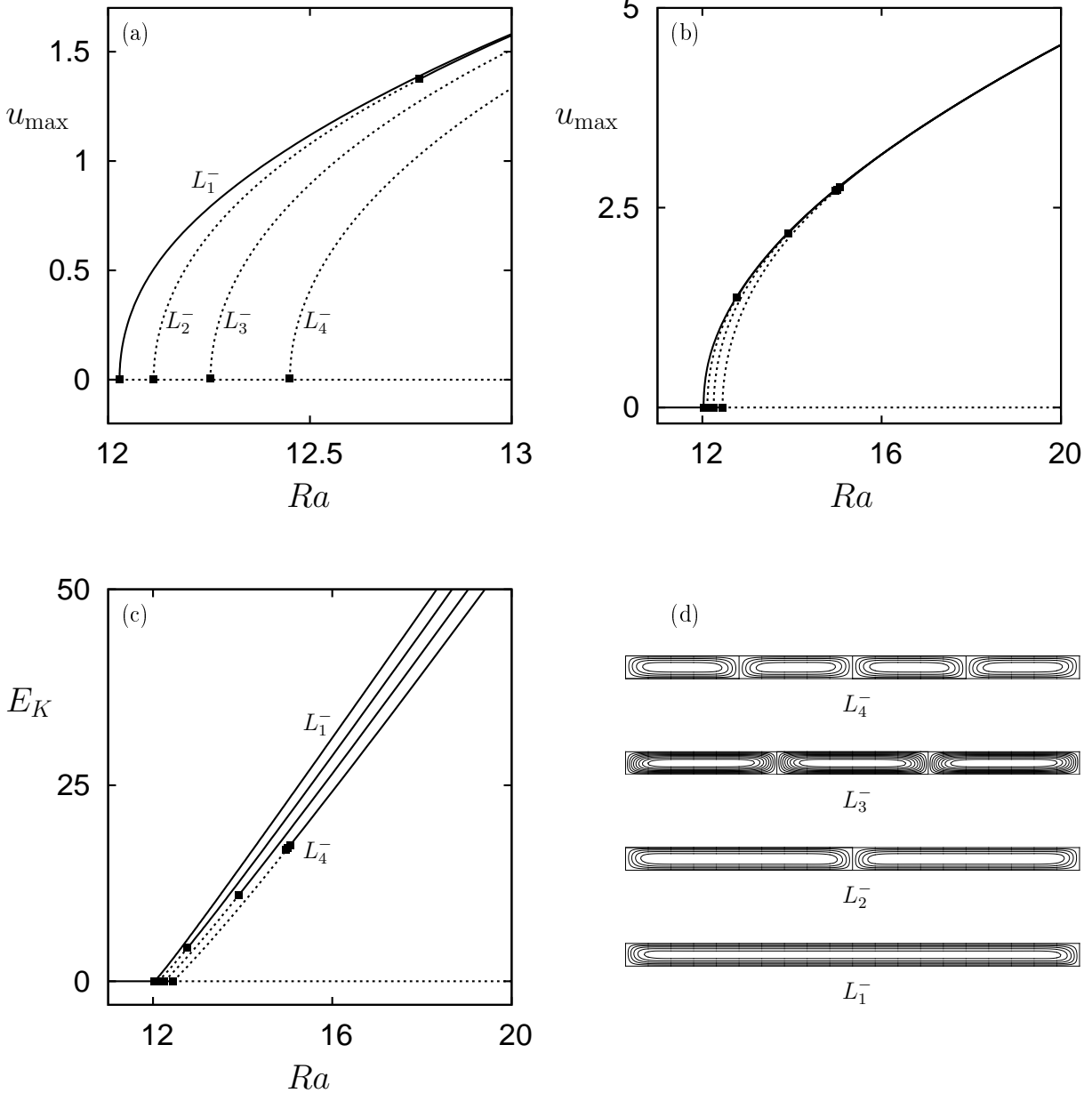
**FIGURE 4.8** – Les isoconcentrations pour  $Le = 100$ ,  $Ra = 12$  et  $\psi = 0.1$ . (a)  $Rv = 0$  (b)  $Rv = 10$  (c)  $Rv = 50$



**FIGURE 4.9** – (a) Variation de la fonction de courant maximale  $\Phi_{max}$  en fonction de  $Ra$  pour  $Le = 100$ ,  $\psi = 0.1$  et  $Rv = 0$ , (b) perspective de (a).

## 4.7 Conclusion

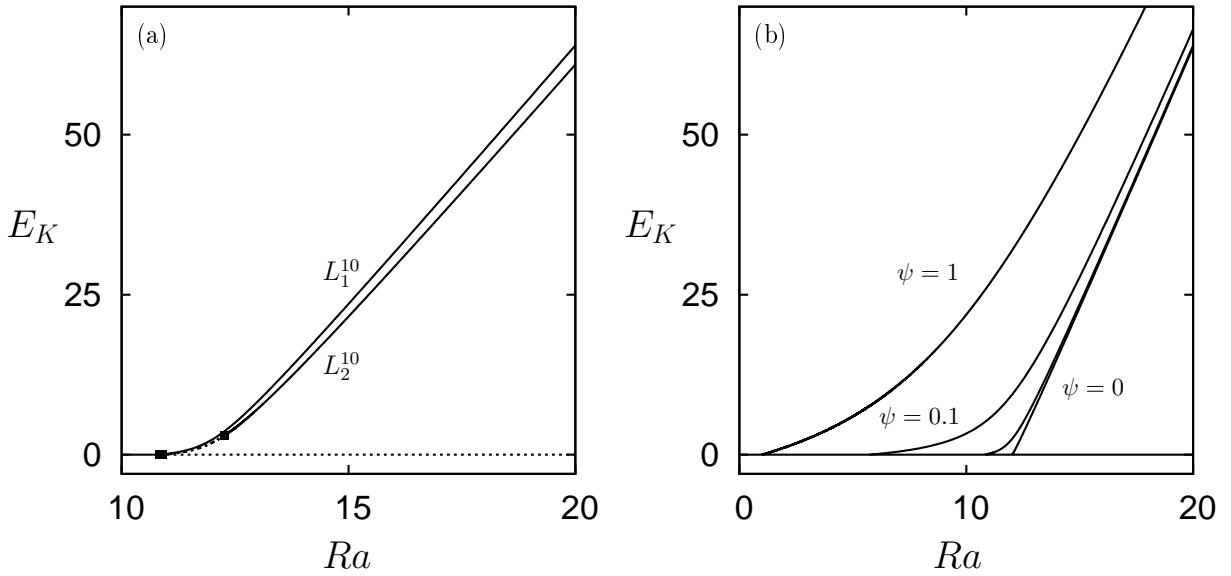
On a étudié la convection thermosolutale dans une couche poreuse horizontale de grand rapport d'aspect, soumise à un flux thermique au niveau de la paroi inférieure, saturée par un fluide binaire. L'influence du facteur de séparation négatif ou positif et l'importance du rôle de la porosité normalisée sur le déclenchement de la convection stationnaire et instationnaire (bifurcation de Hopf) ont été étudiées analytiquement et numériquement. Pour les bifurcations stationnaires une relation donnant le nombre de Rayleigh critique a été obtenue,  $Ra_c = \frac{12}{\psi(Le+1)+1}$ . Pour les bifurcations de Hopf, nous avons montré que les vibrations n'ont aucun effet sur la stabilité de la solution d'équilibre. Des simulations numériques directes utilisant une méthode aux élé-



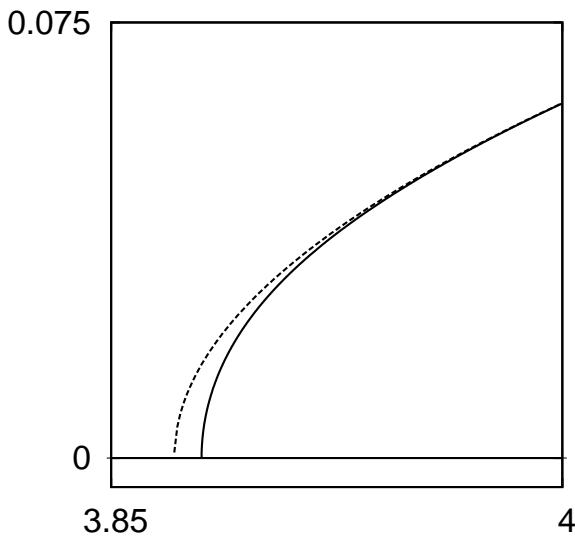
**FIGURE 4.10** – (a) Diagramme des quatre premières bifurcations primaires, bifurquant à partir de l'état de conduction, en terme de la composante horizontale maximale de la vitesse  $u_{\max}$  en fonction du nombre de Rayleigh. Les lignes continues (pointillées) présentent des solutions linéairement stables (instables). Les carrés indiquent les points de bifurcations primaires et secondaires. (b) identique à (a) sur un plus large intervalle du nombre de Rayleigh. (c) identique à (b), mais en terme d'énergie cinétique  $E_K$  en fonction du nombre de Rayleigh. (d) Isovaleurs de la fonction de courant des solutions pour  $Ra \approx 20$  le long des branches  $L_n^-$  où  $n$  est le nombre de rouleaux. Les paramètres sont  $\psi = 0$ ,  $Rv = 0$  et  $A = 20$ .

ments finis (Comsol) et une méthode de continuation (méthode de Newton) nous ont permis de compléter le diagramme de bifurcation en y représentant les branches de solutions stationnaires localisées.



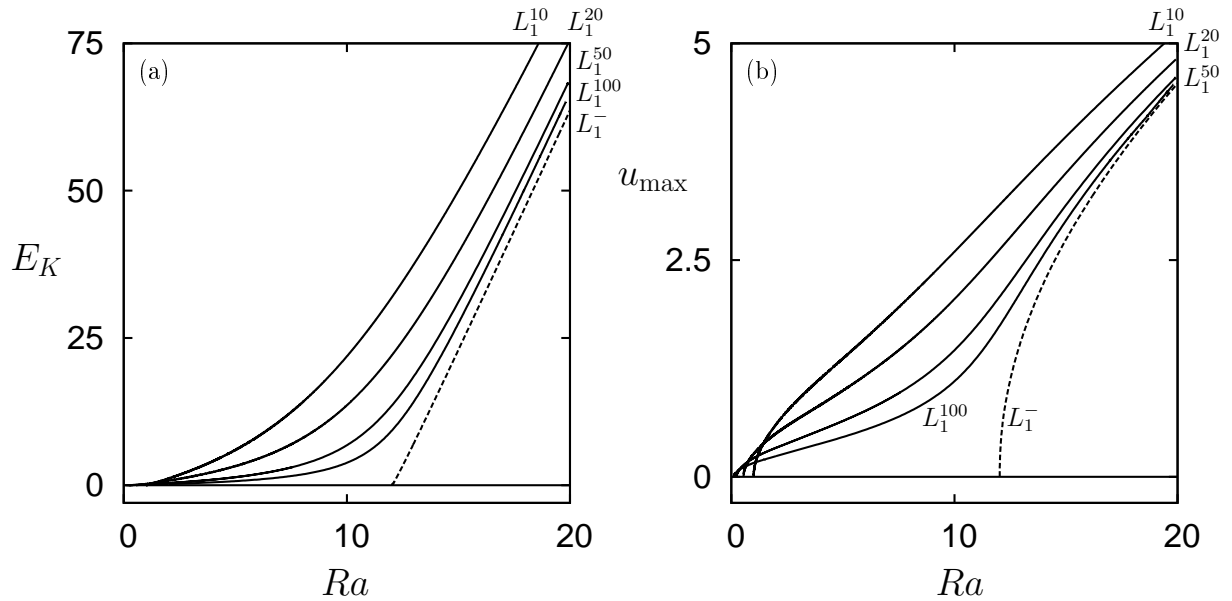


**FIGURE 4.11** – (a) Diagramme de bifurcation de l'énergie cinétique le long des deux premières branches bifurquant à partir de l'état de conduction en fonction du nombre de Rayleigh pour  $\psi = 0.01$ . (b) schéma de bifurcation montrant l'énergie cinétique le long de la première branche  $L_1^{10}$  pour  $\psi = 0, 0.01, 0.1$  et  $1$ .  $Le = 10, Rv = 0$  et  $A = 20$ .

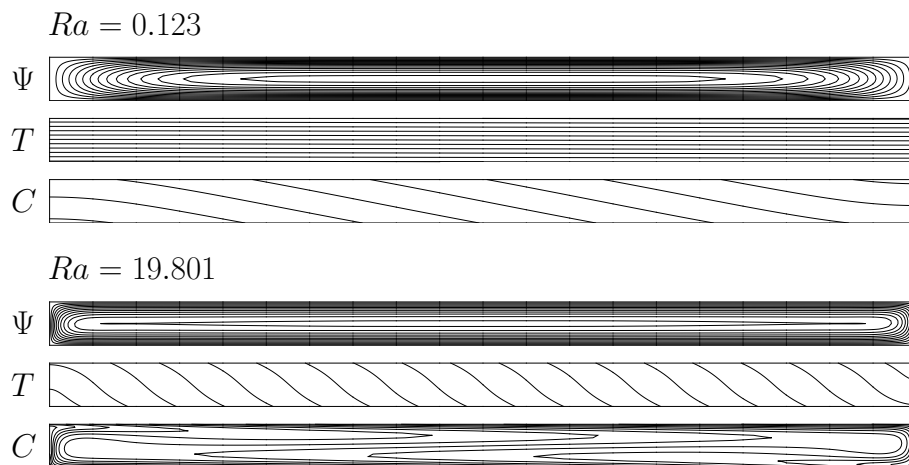


**FIGURE 4.12** – Diagramme de bifurcation montrant les variations de  $|u(x = A/2, z = 1)|$  (Ligne continue) et  $|u_\infty(z = 1)|$  (ligne pointillée) avec  $Ra$ . Les paramètres sont  $Le = 20, \psi = 0.1, Rv = 0$  et  $A = 20$ .

Nous avons étudié la stabilité linéaire de la solution monocellulaire. On a remarqué que l'écoulement monocellulaire conduit à une séparation des constituants du mélange binaire. On a observé aussi que les vibrations ont un effet stabilisant puisqu'elles augmentent la valeur du nombre de Rayleigh critique correspondant à la transition entre l'écoulement monocellulaire et l'écoulement multicellulaire. Ainsi les vibrations verticales induisent une séparation des espèces d'un mélange binaire pour une gamme plus large des valeurs du nombre de Rayleigh.



**FIGURE 4.13** – Diagramme de bifurcation de (a) l'énergie cinétique ((b) composante horizontale maximale de la vitesse  $u_{\max}$ ) en fonction du nombre de Rayleigh le long de la première branche  $L_1^{Le}$  bifurquant par rapport à l'état de conduction pour  $Le = 10, 20, 50, 100, \psi = 1, Rv = 0$  et  $A = 20$ . La ligne en pointillée correspond à  $L_1^-$  (le fluide n'est pas en mélange binaire).



**FIGURE 4.14** – Les isovaleurs de la fonction de courant, la température et la concentration pour  $Ra = 0.123$  et  $Ra = 19.801$ .  $Le = 100, \psi = 0.1, Rv = 0$  et  $A = 20$ .



# Chapitre 5

## Séparation dans le cas d'un flux thermique au niveau de la paroi horizontale du bas et une température constante en haut

### 5.1 Introduction

Nous proposons dans ce chapitre d'étudier l'influence des vibrations dans une nouvelle configuration, qui consiste en une cavité horizontale remplie d'un milieu poreux et saturée par un mélange binaire, soumise à un flux thermique constant et vertical sur la paroi inférieure et à température constante sur la paroi supérieure.

Nous verrons que cette configuration est plus réalisable que celle présentée précédemment. En effet, il est plus facile d'obtenir une température constante et un flux injecté uniforme constant que de retirer un flux uniforme constant.

### 5.2 Position du problème

Soit un milieu poreux saturé par un fluide binaire enfermé dans une cavité rectangulaire de rapport d'aspect  $A = \frac{L}{H}$  où  $H$  est la hauteur de la cavité et  $L$  sa longueur.

Le gradient vertical de concentration induit par l'effet Soret, résulte de l'imposition d'un flux de chaleur  $q'$ , constant et uniforme, sur la paroi horizontale en bas. La paroi horizontale en haut est maintenue à une température constante  $T_2$ . Les parois verticales ( $x = 0$ ,  $x = L$ ) sont supposées imperméables et adiabatiques. Toutes les parois sont supposées rigides. La cavité est soumise à des oscillations linéaires harmoniques dans la direction verticale.

Nous utiliserons l'approximation d'Oberbeck-Boussinesq. Les propriétés thermo-physiques du fluide binaire sont supposées constantes, à l'exception de la masse volumique du fluide au niveau du terme générateur de la convection.

Les équations modélisant le problème ont été présentés au chapitre 3 pour ( $\alpha = 0$ ), le système moyenné s'écrit alors :

$$\begin{aligned}
 \nabla \cdot \mathbf{V} &= 0 \\
 B \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{V} &= -\nabla P + (Ra(T + \psi C) + Rv(\nabla T + \frac{\psi}{\epsilon} \nabla C) \cdot \mathbf{W}) \mathbf{e}_z \\
 \frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) T &= \nabla^2 T \\
 \epsilon \frac{\partial C}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) C &= \frac{1}{Le} (\nabla^2 C - \nabla^2 T) \\
 (T + \psi C) \mathbf{e}_z &= \mathbf{W} + \nabla \xi \\
 \nabla \cdot \mathbf{W} &= 0
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

avec  $Rv = \frac{Ra^2 R^2 B}{2(B^2 \omega^2 + 1)}$ .

Les conditions aux limites du système :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} &= 0, \quad \forall M \in \partial\Omega \\
 \frac{\partial C}{\partial z} = \frac{\partial T}{\partial z} &= -1, \quad \text{pour } z = 0 \quad \forall x \in [0, A] \\
 \frac{\partial C}{\partial z} = \frac{\partial T}{\partial z}, \quad &\text{pour } z = 1 \quad \forall x \in [0, A] \\
 T &= 0, \quad \text{pour } z = 1 \quad \forall x \in [0, A] \\
 \frac{\partial C}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial x} &= 0, \quad \text{pour } x = 0, A \quad \forall z \in [0, 1] \\
 \mathbf{W} \cdot \mathbf{n} &= 0, \quad \forall M \in \partial\Omega
 \end{aligned} \tag{5.2}$$

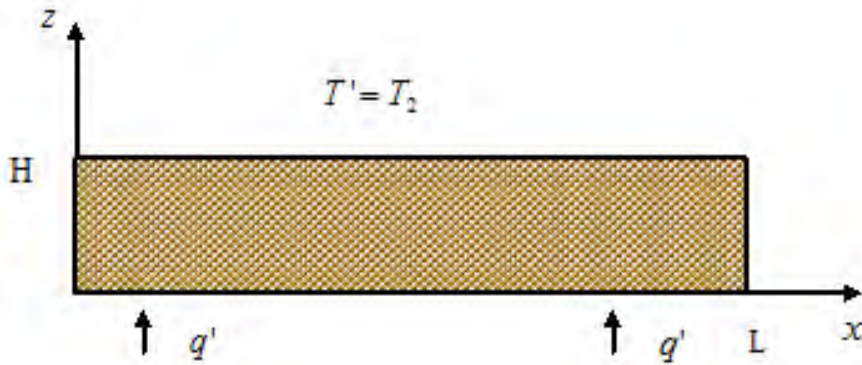


FIGURE 5.1 – Cellule rectangulaire de longueur  $L$  et de hauteur  $H$  soumise à un flux thermique sur l'une des faces horizontales et à une température constante sur l'autre face

## 5.3 Stabilité linéaire de la solution d'équilibre dans le cas d'une cellule horizontale infinie

### 5.3.1 Décomposition en modes normaux

Le problème (5.1, 5.2) admet une solution d'équilibre mécanique :

$$\mathbf{V}_0 = \mathbf{0}, \quad T_0 = -z + 1, \quad C_0 = -z + C^{ste}, \quad \mathbf{W}_0 = \mathbf{0}. \quad (5.3)$$

On introduit les fonctions de courant  $f$  et  $F$  associées aux champs de vitesse  $\mathbf{V}$  et  $\mathbf{W}$  respectivement sous la forme suivante :

$$v_x = \frac{\partial f}{\partial z}, \quad v_z = -\frac{\partial f}{\partial x} \quad \text{et} \quad w_x = \frac{\partial F}{\partial z}, \quad w_z = -\frac{\partial F}{\partial x} \quad (5.4)$$

La cellule étant d'extension infinie selon la direction ( $ox$ ). Les perturbations en  $x$  peuvent être développées sous la forme de fonction périodique selon  $x$ . On cherche les perturbations du système sous la forme :

$$(f, \theta, c, F) = \left( \tilde{f}(z), \tilde{\theta}(z), \tilde{c}(z), \tilde{F}(z) \right) e^{Ikx + \sigma t} \quad (5.5)$$

où  $k$  est le nombre d'onde des perturbations selon la direction infinie ( $ox$ ). Le système (5.1) perturbé au tour de la solution d'équilibre (5.3) donne :

$$\begin{aligned} (B\sigma + 1)(D^2 - k^2)\tilde{f} + IkRa \left( (1 + \psi)\tilde{\theta} + \psi\tilde{\eta} \right) - Rk^2 \left( 1 + \frac{\psi}{\epsilon} \right) \tilde{F} &= 0 \\ (D^2 - k^2)\tilde{\theta} - \sigma\tilde{\theta} - Ik\tilde{f} &= 0 \\ \frac{1}{Le}(D^2 - k^2)\tilde{\eta} - \epsilon\sigma(\tilde{\theta} + \tilde{\eta}) - Ik\tilde{f} &= 0 \\ (D^2 - k^2)\tilde{F} + Ik \left( (1 + \psi)\tilde{\theta} + \psi\tilde{\eta} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (5.6)$$

où  $\tilde{\eta} = \tilde{c} - \tilde{\theta}$  et  $D$  représente  $\frac{d}{dz}$ .

Les conditions aux limites :

$$\begin{aligned} \tilde{f} = \tilde{F} = \tilde{\theta} = \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial z} &= 0 \quad \text{pour } z = 1 \\ \tilde{f} = \tilde{F} = \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial z} = \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial z} &= 0 \quad \text{pour } z = 0 \end{aligned} \quad (5.7)$$

### 5.3.2 Cas des perturbations de très grandes longueurs d'onde

Nous écrivons les perturbations sous la forme d'un développement en série entière en  $k$ . Des résultats similaires ont été obtenus par Razi et al. [52] :

$$\left( \tilde{f}, \tilde{\theta}, \tilde{\eta}, \sigma, \tilde{F} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} k^n (f_n, \theta_n, \eta_n, \sigma_n, F_n) \quad (5.8)$$

Les conditions aux limites sont :

$$\begin{aligned} f_n = F_n = \theta_n = \partial_z \eta_n = 0, \text{ pour } z = 1 \\ f_n = F_n = \partial_z \theta_n = \partial_z \eta_n = 0, \text{ pour } z = 0 \end{aligned} \quad (5.9)$$

On remplace (5.8) dans (5.6) et on utilise (5.9). La résolution des équations différentielles aux différents ordres de développement, on obtient :

$$(k^0) \quad f_0 = 0, \quad F_0 = 0, \quad \theta_0 = 0, \quad \eta_0 = C^{ste}, \quad \sigma_0 = 0 \quad (5.10)$$

$$\begin{aligned} \theta_1 &= 0, \\ (k^1) : \quad f_1 &= -\left(\frac{IRa\psi\eta_0}{2}\right)(z^2 - z), \\ F_1 &= -\left(\frac{I\psi\eta_0}{2}\right)(z^2 - z), \\ \eta_1 &= C^{ste}, \quad \sigma_1 = 0, \end{aligned} \quad (5.11)$$

$$\begin{aligned} \theta_2 &= \left(\frac{Ra\psi\eta_0}{24}\right)(z^4 - 2z^3 + 1), \\ (k^2) : \quad f_2 &= -\left(\frac{IRa\psi\eta_1}{2}\right)(z^2 - z), \\ \eta_2 &= \frac{\eta_0 z^2}{2}(Le\epsilon\sigma_2 + 1) + \frac{RaLe\psi\eta_0}{24}z^3(z - 2), \\ F_2 &= -\left(\frac{I\psi\eta_1}{2}\right)(z^2 - z). \end{aligned} \quad (5.12)$$

On obtient :

$$\epsilon\sigma_2 = \frac{1}{Le} - \psi\frac{Ra}{12} \quad (5.13)$$

On remarque que  $\sigma_2$  est un réel. La solution de repos perd sa stabilité et les perturbations croissent (décroissent) de manière continue. La bifurcation est stationnaire dans le cas des perturbations de grandes longueurs d'onde. La stabilité marginale est déterminée par la courbe  $\sigma_2 = 0$ , ce qui permet de caractériser la courbe de stabilité marginale par  $Ra_c = \frac{12}{Le\psi}$ .

### 5.3.3 Méthode de Galerkin

Les équations de stabilité linéaire (5.6) sont résolues par la méthode de Galerkin à l'ordre 4 :

$$\begin{aligned} \tilde{f} &= \sum_{n=1}^N a_n (1 - z) z^n \\ \tilde{\theta} &= b_1 (z^2 - 1) + b_2 (z^3 - 1) + \sum_{n=1}^{N-2} b_{n+2} (z^2 - 1) z^{n+1} \\ \tilde{\eta} &= c_1 + c_2 \left(z^2 - \frac{2}{3}z^3\right) + \sum_{n=1}^{N-2} c_{n+2} (z - 1)^2 z^{n+1} \\ \tilde{F} &= \sum_{n=1}^N d_n (1 - z) z^n \end{aligned} \quad (5.14)$$

Pour  $\psi > 0$  la première bifurcation est stationnaire. On fixe les paramètres  $B = 10^{-6}$  et  $\epsilon = 0.5$ . Pour  $Le = 100$  on a trouvé les diagrammes de bifurcation. Les résultats sont illustrés sur les figures (5.2, 5.3 et 5.4) pour  $\psi > 0$  et  $R = 0, 150, 300$ .

### 5.3 Stabilité linéaire de la solution d'équilibre dans le cas d'une cellule horizontale infinie

Pour une couche chauffée par le haut et soumise à un flux thermique en bas, on peut noter que  $Ra_c$  augmente avec  $R$ . Pour  $\psi > 0$ , quand  $R$  augmente, la valeur  $\psi_{mono}$  du facteur de séparation au-delà de laquelle l'écoulement au déclenchement de la convection devient monocellulaire ( $k_c = 0$ ), diminue. La figure (5.5) montre l'influence des vibrations  $R$  sur  $\psi_{mono}$ . On note que le facteur de séparation  $\psi_{mono}$  diminue quand  $R$  augmente. Pour  $Le = 100$  et  $R = 250$ , on obtient un  $\psi_{mono} = 0.036$ . Cette valeur de  $\psi$  est très faible et la plupart des mélanges liquides binaires ont un facteur de séparation plus grand que cette valeur. Ainsi en appliquant des vibrations, nous pouvons utiliser une cellule horizontale pour séparer la plupart des mélanges binaires. En utilisant une méthode de perturbation dans le cas des modes de grandes longueurs d'onde, nous avons montré que la bifurcation primaire est stationnaire et que le nombre de Rayleigh critique thermique associé est :  $Ra_c = \frac{12}{Le\psi}$ , pour toutes valeurs de  $R$ . Pour conclure, les vibrations verticales ont un effet stabilisant sur les mouvements convectifs alors qu'ils ne modifient pas la valeur de  $Ra_c$  pour l'écoulement associé aux grandes longueurs d'onde.

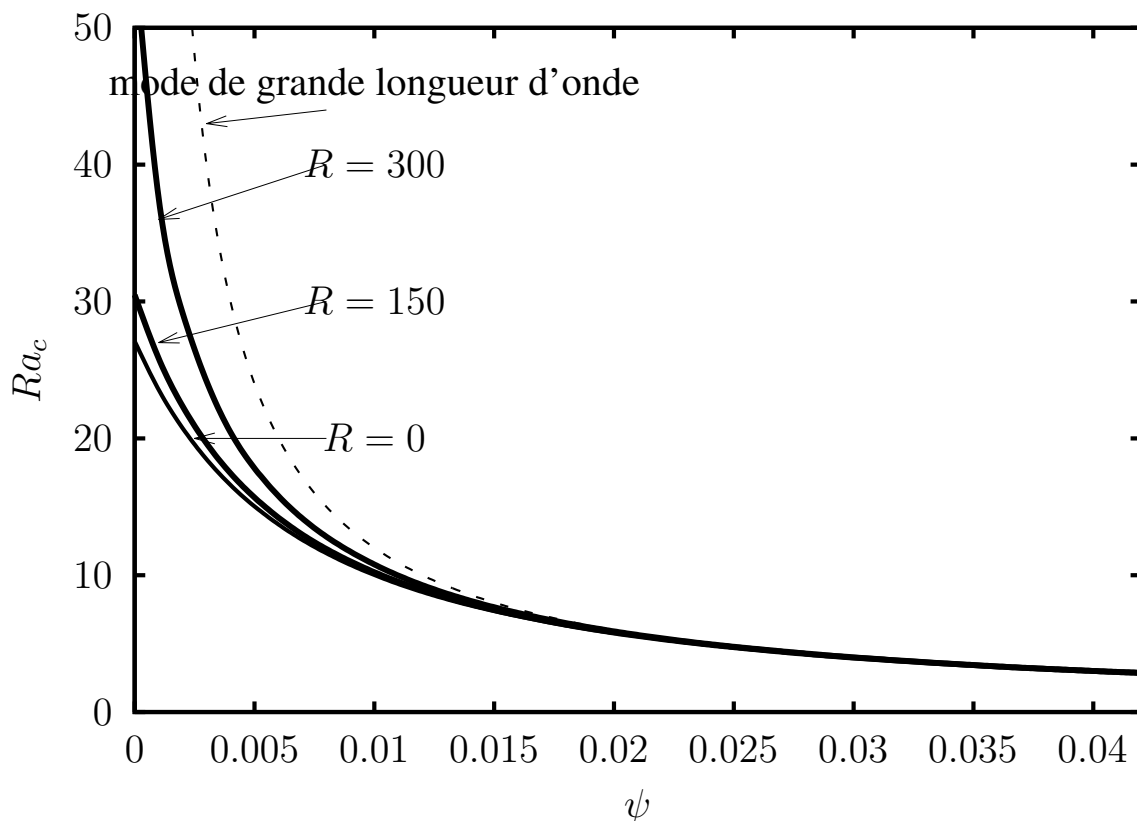


FIGURE 5.2 – Effet des vibrations verticales sur le nombre de Rayleigh critique au déclenchement de la convection pour  $Le = 100$ ,  $\epsilon = 0.5$ ,  $\omega = 10^4$  et  $B = 10^{-6}$



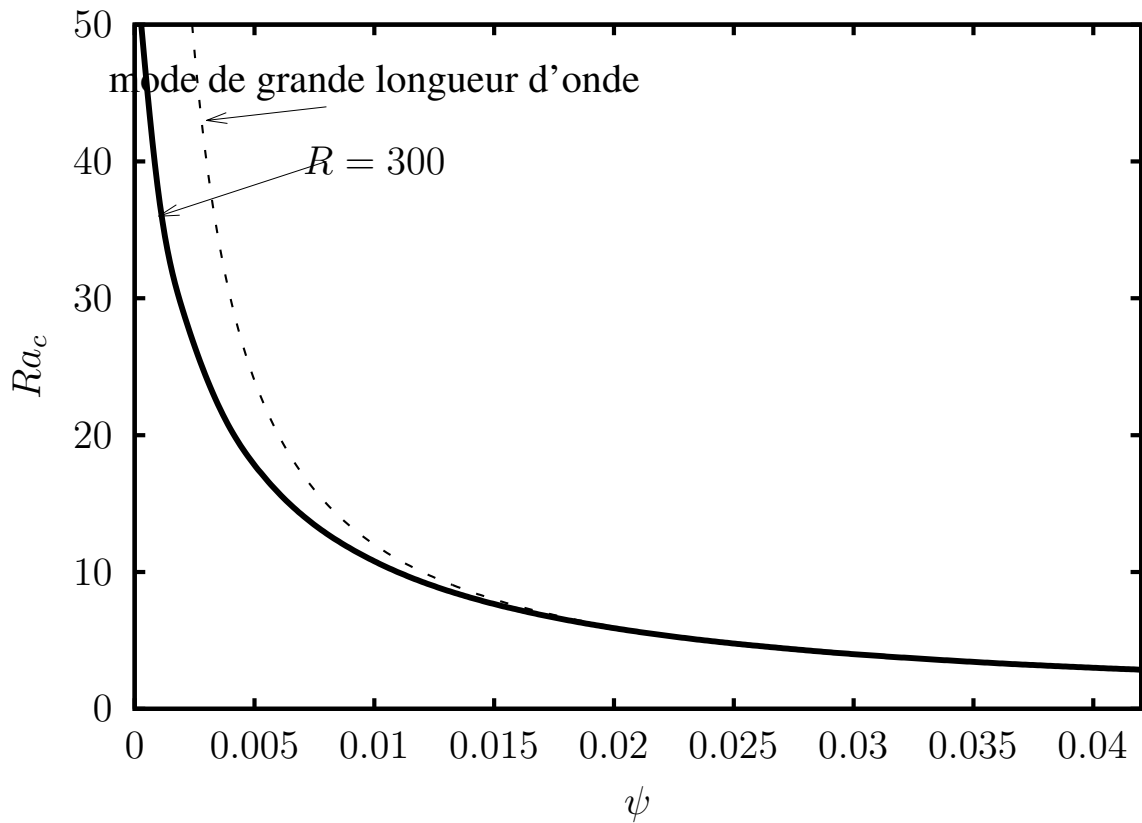
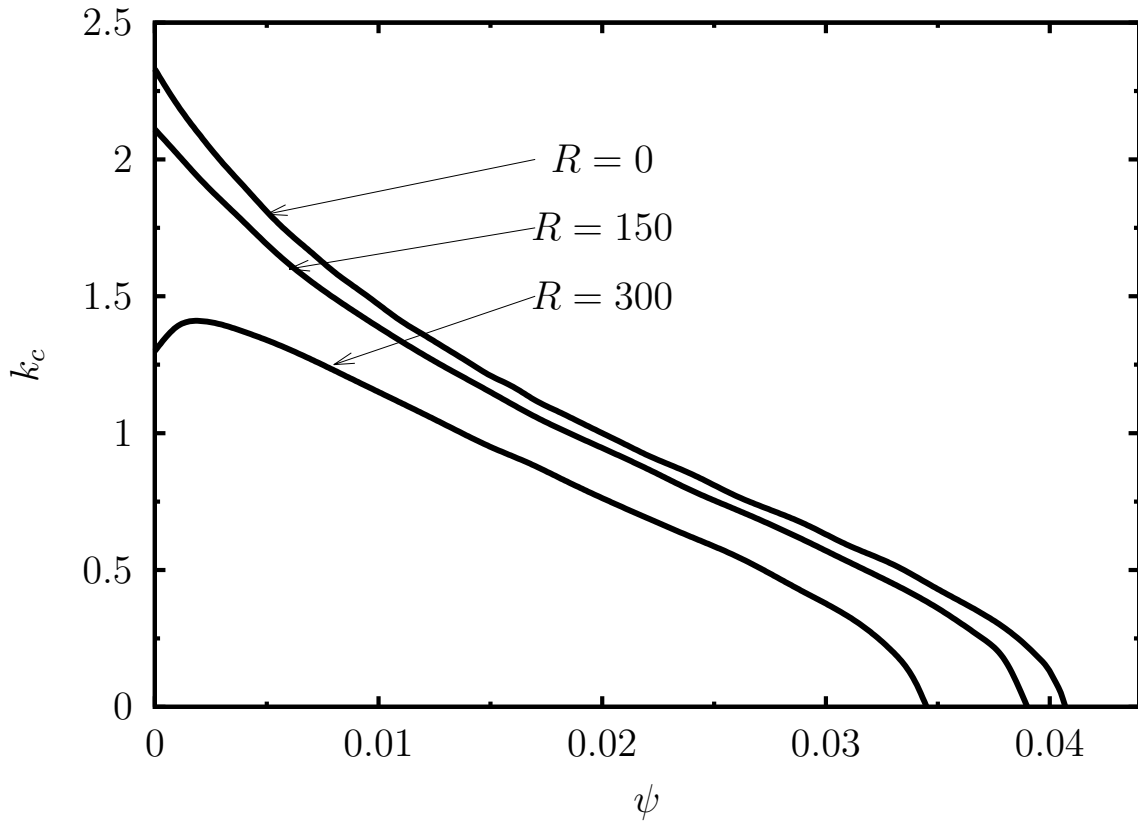


FIGURE 5.3 – Effet des vibrations verticales sur le nombre de Rayleigh critique au déclenchement de la convection pour  $Le = 100$ ,  $\epsilon = 0.5$ ,  $Rv = 50$ ,  $\omega = 10^4$  et  $B = 10^{-6}$

$\psi$	$R = 0$		$R = 100$		$R = 300$	
	$Ra_c$	$k_c$	$Ra_c$	$k_c$	$Ra_c$	$k_c$
0	27.10	2.33	28.46	2.24	55.51	1.30
0.001	23.56	2.20	24.51	2.12	37.58	1.39
0.002	20.75	2.09	21.42	2.02	29.17	1.41
0.004	16.59	1.90	16.96	1.84	20.45	1.37
0.005	15.03	1.81	15.31	1.76	17.82	1.34
-0.005	-24	0	-24	0	-24	0
-0.004	-30	0	-30	0	-30	0
-0.002	-60	0	-60	0	-60	0
-0.001	-120	0	-120	0	-120	0

TABLE 5.1 – Effet des vibrations sur les valeurs critiques du nombre de Rayleigh et du nombre d'onde au déclenchement de la convection pour  $Le = 100$ ,  $\epsilon = 0.5$ ,  $\omega = 10^4$  et  $B = 10^{-6}$  (méthode de Galerkin à l'ordre 4)



**FIGURE 5.4** – Effet des vibrations verticales sur le nombre d'onde critique pour  $Le = 100$ ,  $\epsilon = 0.5$ ,  $\omega = 10^4$  et  $B = 10^{-6}$

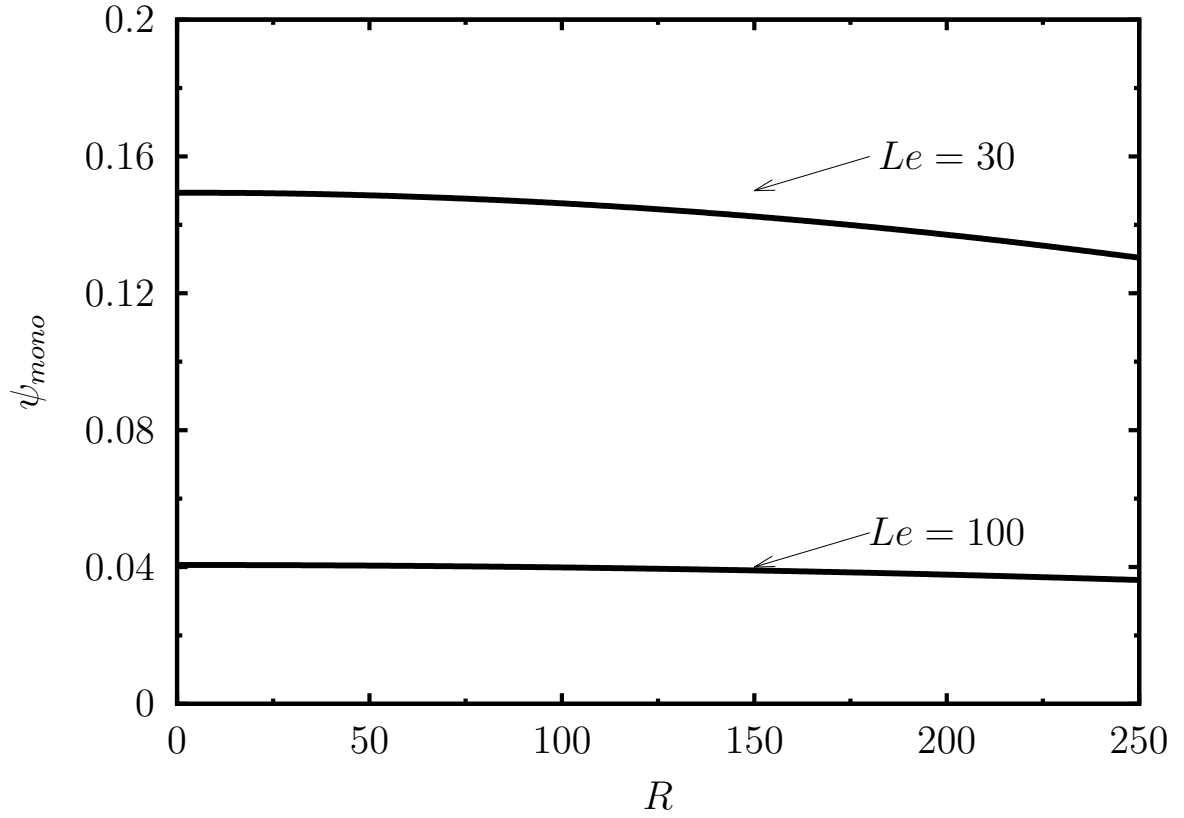
## 5.4 Solution analytique de l'écoulement monocellulaire

### 5.4.1 Approximation de l'écoulement parallèle

Pour des cavités de grande extension ( $A \gg 1$ ), nous avons utilisé l'hypothèse d'écoulement parallèle. Pour cette situation l'écoulement de base est comme suit :

$$\mathbf{V}_0 = U(z) \mathbf{e}_x, \quad T_0 = bx + h(z), \quad C_0 = mx + g(z), \quad \mathbf{W}_0 = W_1(z) \mathbf{e}_x, \quad (5.15)$$

où  $b$  et  $m$  expriment respectivement le gradient de température et de fraction massique selon la direction ( $ox$ ).



**FIGURE 5.5** – Effet des vibrations sur la valeur du facteur de séparation au delà de laquelle l'écoulement au déclenchement de la convection devient monocellulaire pour  $\epsilon = 0.5$ ,  $\omega = 10^4$  et  $B = 10^{-6}$

### 5.4.2 Équations de base simplifiées

Le système d'équations (5.1) s'écrit, après substitution des relations (5.15), comme suit :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial U}{\partial z} &= -Ra(b + \psi m) \\
 b \times U(z) &= \frac{d^2 h}{dz^2} \\
 m \times U(z) &= \frac{1}{Le} \left( \frac{d^2 g}{dz^2} - \frac{d^2 h}{dz^2} \right) \\
 \frac{\partial W_1}{\partial z} &= -(b + \psi m)
 \end{aligned} \tag{5.16}$$

Les conditions aux limites sur les parois verticales ne sont pas prises en compte, on introduit d'autres conditions pour la résolution du problème (5.16) :

Le débit volumique à travers toute section droite verticale est nul :

$$\int_0^1 U(z) dz = 0 \quad \forall x \in [0, A] \tag{5.17}$$

En régime stationnaire, le flux massique à travers toute section droite de la cellule est nul :

$$\int_0^1 (U(z) g(z) Le - m + b) dz = 0 \tag{5.18}$$

Le flux thermique à travers toute section droite de la cellule est nul :

$$\int_0^1 \left(-\frac{\partial T_0}{\partial x} + T_0 U(z)\right) dz = 0 \quad (5.19)$$

On en déduit :

$$U(z) = -\psi_0(2z-1), \quad W_1(z) = -\frac{\psi_0}{Ra}(2z-1), \quad T_0 = -z+1, \quad C_0 = mx + g(z), \quad (5.20)$$

avec :

$$\begin{aligned} \psi_0 &= \frac{1}{2} Ra \psi m, \\ g(z) &= \frac{\psi_0 m Le (6z^2 - 4z^3 - 1)}{12} + \frac{1-mA}{2} - z, \\ m &= \frac{5Le\psi_0}{Le^2\psi_0^2 + 30}. \end{aligned} \quad (5.21)$$

Le système (5.21) se ramène à la résolution d'une équation de troisième degré en  $\psi_0$  :

$$2\psi_0^3 Le^2 + (60 - 5RaLe\psi) \psi_0 = 0 \quad (5.22)$$

L'équation (5.22) admet les trois solutions :

$$\psi_0 = 0 \quad \text{et} \quad \psi_0 = \pm \frac{1}{2} \frac{\sqrt{10RaLe\psi - 120}}{Le} \quad (5.23)$$

Les expressions obtenues pour les champs de vitesse, de température, de fraction massique et du champ solénoïdal montrent que la solution de base, correspondant à l'écoulement monocellulaire, est indépendante de l'action des vibrations.

La séparation est définie comme étant la différence des fractions massiques du constituant le plus lourd entre les deux extrémités ( $z = 0$ ,  $z = A$ ) de la cellule,  $S = mA$ ,

avec :

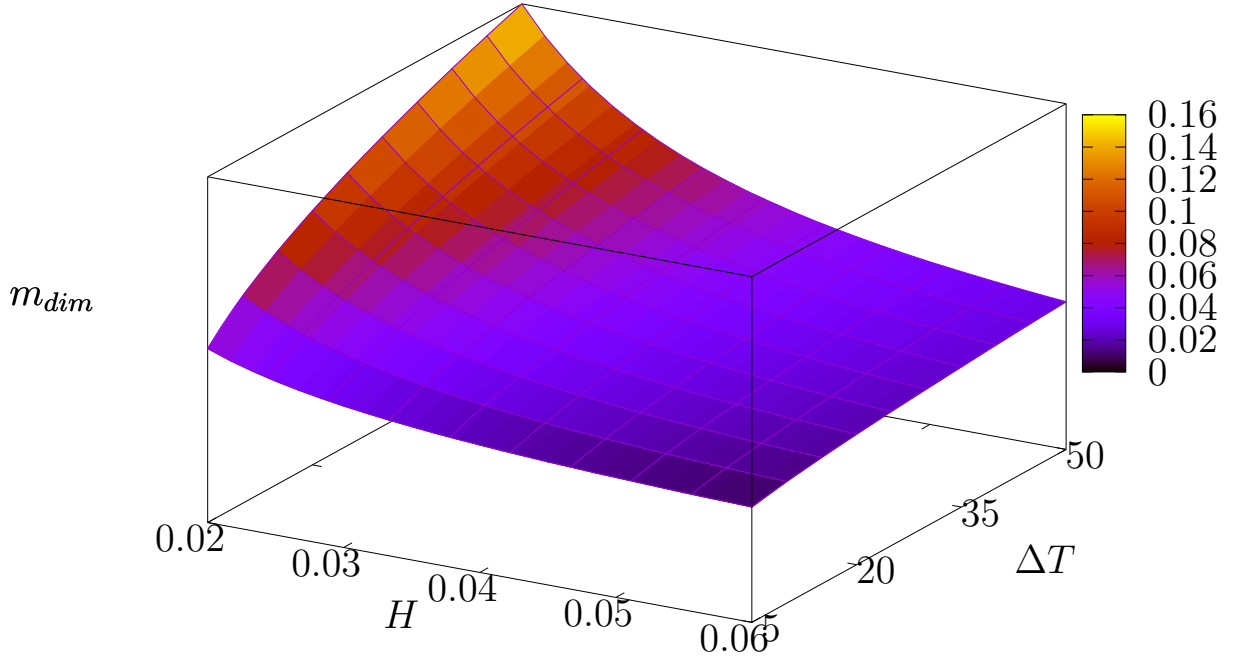
$$m = \frac{\sqrt{10RaLe\psi - 120}}{RaLe\psi} \quad (5.24)$$

et

$$m_{dim} = \frac{\sqrt{10c_1c_2H\Delta T - 120}}{H^2c_1} \quad (5.25)$$

où :  $c_1 = \frac{Kg\beta_c}{\nu D}$  et  $c_2 = -C_0(1 - C_0)D_T/D$

La figure (5.6) illustre le gradient de fraction massique dimensionnelle  $m_{dim}$  obtenue analytiquement en fonction de  $H$  et  $\Delta T$  pour un mélange eau éthanol (60,88 % en poids d'eau). Il en résulte que pour une hauteur  $H$  fixée de la cavité, le gradient de fraction massique est d'autant plus grande que  $\Delta T$  est grand. De ce fait la valeur de  $H$  qui maximise le gradient fraction massique dépend du choix de  $\Delta T$  :  $H_{max} = \frac{16}{c_1c_2\Delta T}$ .



**FIGURE 5.6** – Courbe de gradient de fraction massique dimensionnelle  $m_{dim}$  pour un mélange eau éthanol à 60.88% en masse d'eau. (Les valeurs prises d'après Platten et al. [49] :  $\beta_c = 0.2, K = 10^{-9}, C_0 = 0.5, D = 4.10^{-10}, D_T = 10^{-12}$  et  $\nu = 3.10^{-6}$ )

## 5.5 Stabilité linéaire de la solution monocellulaire

Il s'agit d'étudier la stabilité de la solution monocellulaire. Pour ceci, les perturbations de la vitesse, de la température, de la concentration et de la vitesse solénoïdale sont :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{v}(x, z, t) &= \mathbf{V}(x, z, t) - \mathbf{V}_0, \\
 \theta(x, z, t) &= T(x, z, t) - T_0, \\
 c(x, z, t) &= C(x, z, t) - C_0, \\
 p(x, z, t) &= P(x, z, t) - P_0, \\
 \mathbf{w}(x, z, t) &= \mathbf{W}(x, z, t) - \mathbf{W}_0
 \end{aligned}
 \tag{5.26}$$

On considère la nouvelle variable  $\eta = c - \theta$ . En développant les perturbations en modes nor-

maux, on obtient le système d'équations suivant :

$$\begin{aligned}
& (B\sigma + 1)(D^2 - k^2)w + Rak^2[(1 + \psi)\theta + \psi\eta] + Rv[IkDw_2(b + \frac{\psi}{\epsilon}m) \\
& \quad + k^2w_2(DT_0 + \frac{\psi}{\epsilon}DC_0) + Ik^3w_2[(1 + \psi)\theta + \psi\eta] = 0 \\
& \quad Ik(D^2 - k^2)\theta - \sigma Ik\theta - wIkDT_0 + Uk^2\theta + bDw = 0 \\
& \frac{Ik}{Le}(D^2 - k^2)(\eta + \theta) - \sigma Ik(\eta + \theta) - wIkDC_0 + Uk^2(\eta + \theta) + mDw = 0 \\
& \quad (D^2 - k^2)w_2 + k^2[(1 + \psi)\theta + \psi\eta] = 0
\end{aligned} \tag{5.27}$$

où  $D = \frac{d}{dz}$ , et  $k$  désigne le nombre d'onde,  $w$  est la composante verticale de la vitesse et  $w_2$  est la composante verticale de  $\mathbf{w}$ .

Les conditions aux limites du système sont :

$$\begin{aligned}
& w = 0, \quad \theta = \frac{\partial\eta}{\partial z} = 0, \quad w_2 = 0, \quad \text{pour } z = 1 \\
& w = 0, \quad \frac{\partial\theta}{\partial z} = \frac{\partial\eta}{\partial z} = 0, \quad w_2 = 0, \quad \text{pour } z = 0
\end{aligned} \tag{5.28}$$

Les perturbations sont développées sous forme de fonctions polynomiales vérifiant toutes les conditions aux limites, à l'exception des conditions aux limites au niveau des surfaces internes des parois :

$$\begin{aligned}
& w = \sum_{n=1}^N a_n (1 - z) z^n \\
& \theta = b_1 (z^2 - 1) + b_2 (z^3 - 1) + \sum_{n=1}^N b_{n+2} (z^2 - 1) z^{n+1} \\
& \eta = d_1 + d_2 (z^2 - \frac{2}{3}z^3) + \sum_{n=1}^N d_{n+2} (1 - z)^2 z^{n+1} \\
& w_2 = \sum_{n=1}^N e_n (1 - z) z^n
\end{aligned} \tag{5.29}$$

Pour les valeurs utilisées de  $\psi$  et  $Le$ , on a trouvé que le nombre de Rayleigh critique conduisant à une bifurcation stationnaire est toujours supérieur à celui conduisant à la bifurcation de Hopf. Ainsi, nous nous concentrons sur les valeurs du nombre d'onde  $k_c$ , du nombre de Rayleigh critique  $Ra_c$  et de la pulsation critique  $\omega_c$  associées à la bifurcation de Hopf. Les résultats de l'analyse de stabilité linéaire pour  $\psi = 0.1$ ,  $\psi = 0.3$  et  $Le = 100$  sont donnés dans les tableaux (5.2 et 5.3)

On observe d'après ces tableaux que les vibrations verticales ont un effet stabilisant et augmentent la valeur critique du nombre de Rayleigh thermique  $Ra_c$ . Ainsi, les vibrations peuvent être utilisées pour maintenir l'écoulement monocellulaire et permettent la séparation des composants du mélange binaire pour une plus large gamme de valeurs du nombre de Rayleigh thermique. On peut remarquer que les vibrations réduisent la valeur du nombre d'onde critique  $k_c$  et de la fréquence critique  $\omega_c$ . Ceci signifie que les vibrations peuvent également être utilisées pour réduire le nombre de cellules convectives ( $n = \frac{Ak_c}{\pi}$ ) lors de la transition de l'écoulement monocellulaire à l'écoulement multicellulaire.

$R$	$k_c$	$Ra_c$	$\omega_c$
<b>0</b>	5.25	50.62	1.55
<b>100</b>	5.21	50.72	1.54
<b>150</b>	5.16	50.84	1.52
<b>200</b>	5.09	51.01	1.49
<b>250</b>	5.00	51.21	1.45
<b>300</b>	4.90	51.44	1.41

**TABLE 5.2** – Effet des vibrations sur les valeurs critiques du nombre de Rayleigh, du nombre d'onde et de la fréquence associées aux transitions entre l'écoulement monocellulaire et l'écoulement multicellulaire pour  $\psi = 0.1$ ,  $Le = 100$ ,  $\epsilon = 0.5$ ,  $\omega = 10^4$  et  $B = 10^{-6}$

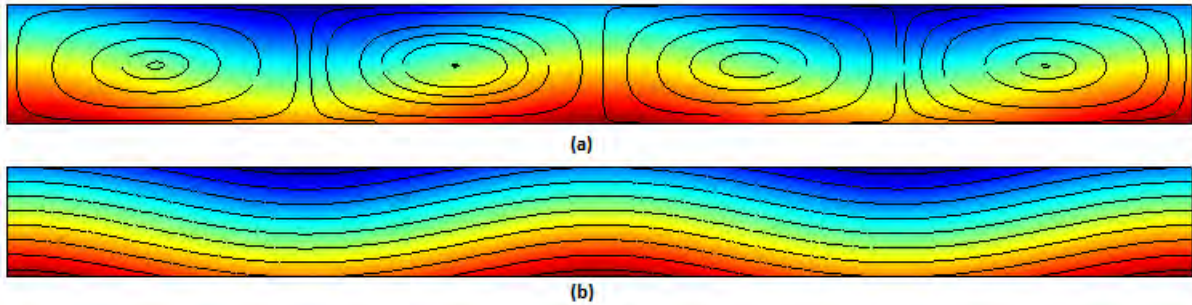
$R$	$k_c$	$Ra_c$	$\omega_c$
<b>0</b>	5.25	16.87	1.55
<b>100</b>	5.21	16.91	1.54
<b>150</b>	5.16	16.95	1.52
<b>200</b>	5.09	17.00	1.49
<b>250</b>	5.00	17.07	1.45
<b>300</b>	4.90	17.15	1.41

**TABLE 5.3** – Effet des vibrations sur les valeurs critiques du nombre de Rayleigh, du nombre d'onde et de la fréquence associées aux transitions entre l'écoulement monocellulaire et l'écoulement multicellulaire pour  $\psi = 0.3$ ,  $Le = 100$ ,  $\epsilon = 0.5$ ,  $\omega = 10^4$  et  $B = 10^{-6}$

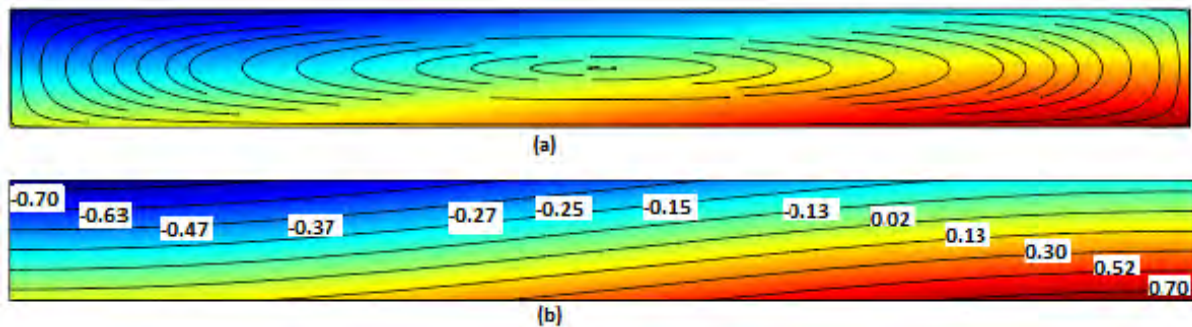
## 5.6 Simulation numérique

Des simulations numériques ont été effectuées en utilisant une méthode aux éléments finis (Comsol) de maillage uniforme de  $150 \times 30$ . L'influence des vibrations sur l'apparition de la convection a été étudiée pour une cellule de rapport d'aspect  $A = 10$  et pour  $Le = 100$ ,  $\epsilon = 0.5$  et  $B = 10^{-6}$ . Pour  $Le = 100$  et  $\psi = 0.02$ , sans vibration ( $Rv = 0$ ), les paramètres critiques  $Ra_c = 5.78$ ,  $k_c = 1.00$  sont obtenus par la stabilité linéaire. Pour les memes valeurs de  $Le$  et  $\psi$  mais avec vibrations ( $Rv = 10$ ), la stabilité linéaire donne  $Ra_c = 6$  et  $k_c = 0$ , donc le nombre d'onde critique est nul, ce qui signifie que l'écoulement est monocellulaire au déclenchement de la convection. Pour confirmer ce résultat, nous avons fait des simulations numériques directes pour étudier le cas  $Le = 100$ ,  $\psi = 0.02$  pour une valeur de  $Ra$  proche de la valeur critique ( $Ra = 6$ ), une fois sans vibration ( $Rv = 0$ ) et une autre fois avec vibrations ( $Rv = 10$ ). La figure 5.7 montre les lignes de courant et les isoconcentrations pour  $Rv = 0$ . Dans ce cas, l'écoulement est multicellulaire et on ne peut pas utiliser la cellule horizontale pour séparer les constituants des

mélanges binaires. La figure 5.8 montre les lignes de courant et les isoconcentrations pour les memes valeurs de tous les paramètres, mais avec vibration (ici  $Rv = 10$ ). On peut observer que les vibrations modifient la structure de l'écoulement passant du multicellulaire au monocellulaire, ce qui conduit à la stratification du champ de concentration et par suite à la séparation des constituants du mélange binaire.



**FIGURE 5.7** – Les lignes de courant (a) et les isoconcentrations (b) pour  $Le = 100$ ,  $\psi = 0.02$ ,  $Ra = 6$ ,  $Rv = 0$  (sans vibration). Un écoulement multicellulaire est obtenu à la perte de stabilité de la solution d'équilibre pour  $Rv = 0$



**FIGURE 5.8** – Les lignes de courant (a) et les isoconcentrations (b) pour  $Le = 100$ ,  $\psi = 0.02$ ,  $Ra = 6$ ,  $Rv = 10$ . Un écoulement monocellulaire est obtenu pour  $Rv = 10$ .

## 5.7 Conclusion

On a étudié la diffusion thermogravitationnelle dans une couche poreuse horizontale soumise à un flux thermique, constant et vertical sur l'une des paroi horizontale et à une température constante sur l'autre paroi. Nous avons examiné le cas des vibrations de hautes fréquences et de faibles amplitudes, en utilisant la formulation des équations moyennées développées dans le troisième chapitre.

Dans le cas des modes de grandes longueurs d'onde, la solution d'équilibre mécanique perd sa stabilité via une bifurcation stationnaire pour  $Ra_{cs} = \frac{12}{\psi Le}$ . On a observé que les vibrations



verticales ont un effet stabilisant sur la convection. Ces vibrations pourraient être utilisées pour diminuer la valeur du facteur de séparation au delà de laquelle l'écoulement, au déclenchement de la convection, devient monocellulaire. Ceci permet la séparation des constituants d'un mélange binaire dans une cellule horizontale pour une large gamme des mélanges binaires.

Des résolutions par la méthode de Galerkin ont été utilisées pour étudier la stabilité de l'écoulement monocellulaire obtenu pour  $\psi > \psi_{mono}$  après la destabilisation de la solution d'équilibre. Les vibrations ont aussi dans ce cas un effet stabilisant en augmentant la valeur du nombre de Rayleigh critique correspondant à la transition entre l'écoulement monocellulaire et l'écoulement multicellulaire. Ainsi les vibrations verticales permettent la séparation des espèces d'un mélange binaire pour une gamme plus large des valeurs du nombre de Rayleigh.



# Chapitre 6

## Conclusion générale et perspectives

Les résultats de ce travail ont été obtenus à partir d'une contribution au problème de diffusion thermogravitationnelle dans un fluide binaire soumis à un gradient thermique.

Dans une première partie, nous avons étudié le problème de convection thermosolutale dans une couche poreuse horizontale de grande extension saturée par un fluide binaire et soumise à des vibrations. Nous avons examiné le cas des vibrations de hautes fréquences et de faibles amplitudes, ce qui nous a permis d'utiliser le formalisme des équations moyennées. L'influence du facteur de séparation négatif ou positif et l'importance du rôle de la porosité normalisée sur le déclenchement de la convection stationnaire et instationnaire (bifurcation de Hopf) ont été étudiées analytiquement et numériquement, lorsqu'on applique un flux uniforme au niveau des parois horizontales. Pour les bifurcations stationnaires une relation donnant le nombre de Rayleigh critique a été obtenue,  $Ra_c = \frac{12}{\psi(Le+1)+1}$ . un très bon accord a été trouvé entre les valeurs critiques obtenues analytiquement et celles obtenues numériquement par la méthode de Galerkin. Pour les bifurcations de Hopf, les paramètres critiques dépendent fortement de la porosité normalisée. Nous avons montré que les vibrations n'ont aucun effet sur la stabilité de la solution d'équilibre. Des simulations numériques directes utilisant une méthode aux éléments finis (Comsol) et une méthode de continuation (méthode de Newton) nous ont permis de compléter le diagramme de bifurcation en y représentant les branches de solutions stationnaires localisées.

Nous avons étudié la stabilité linéaire de la solution monocellulaire. Nous signalons que l'écoulement monocellulaire conduit à une séparation des constituants du mélange binaire. Les vibrations permettent d'augmenter la valeur du nombre de Rayleigh critique correspondant à la transition entre l'écoulement monocellulaire et l'écoulement multicellulaire. Ainsi les vibrations verticales induisent une séparation des espèces d'un mélange binaire pour une plus large gamme des valeurs du nombre de Rayleigh. Dans tous les cas étudiés, un bon accord a été trouvé entre les résultats analytiques et numériques pour la séparation.

Dans une deuxième partie, Nous avons utilisé une nouvelle configuration permettant la séparation des constituants. Cette configuration consiste en une cavité horizontale remplie d'un milieu poreux, saturée par un fluide binaire et soumise à un flux thermique vertical sur la paroi inférieure et à une température constante sur la paroi supérieure. L'influence des vibrations verticales sur le déclenchement de la convection et sur la stabilité de l'écoulement monocellulaire obtenu pour certaines valeurs des paramètres adimensionnels régissant le problème a été étudiée. En étudiant la stabilité de la solution d'équilibre sous l'effet des vibrations, on a observé que les vibrations verticales ont un effet stabilisant. Aussi les vibrations pourraient être utilisées pour diminuer la valeur du facteur de séparation  $\psi_{mono}$  au delà duquel, l'écoulement devient monocellulaire au déclenchement de la convection, ce qui permet la séparation des constituants d'un mélange binaire dans une cellule horizontale pour une large gamme des mélanges binaires. Les vibrations permettent également d'augmenter la valeur du nombre de Rayleigh critique correspondant à la transition entre l'écoulement monocellulaire et l'écoulement multicellulaire. Ainsi les vibrations verticales induisent une séparation des espèces d'un mélange binaire pour une plus large gamme des valeurs du nombre de Rayleigh.

Nous avons réalisé une étude de l'action des vibrations pour différentes conditions aux limites d'un mélange binaire dans le cas bidimensionnels. Il serait intéressant d'étendre ses résultats aux cas tridimensionnels et pour des mélanges ternaires.



## **Annexe A**

**Article en révision à "Transport in Porous Media" : Influence of vertical vibrations on the species separation of a binary mixture in a horizontal porous layer submitted to a vertical heat flux**

## Influence of vertical vibrations on the species separation of a binary mixture in a horizontal porous layer submitted to a vertical heat flux

Soumaya Ouadhani, Ali Abdennadher,  
Abdelkader Mojtabi, Alain Bergeon

Received: date / Accepted: date

**Abstract** We present an analytical and numerical stability analysis of Soret-driven convection in a porous cavity saturated by a binary fluid mixture and subjected to vertical high frequency and small amplitude vibrations. Two configurations have been considered and compared: an infinite horizontal layer and a bounded domain with a large horizontal extension. In both cases, the initial temperature gradient is produced by a constant uniform heat flux applied on the horizontal boundaries. A formulation using time averaged equations is used. The linear stability of the equilibrium solution is carried out for various Soret separation ratio  $\psi$ , vibrational Rayleigh numbers  $R_v$ , Lewis numbers  $Le$  and normalised porosity. For an infinite horizontal layer, the critical Rayleigh number  $Ra_c$  is determined analytically. It corresponds to a bifurcation to a one-cell solution corresponding to a zero wave number and bifurcates at  $Ra_{cs} = 12/(\psi(Le + 1) + 1)$  for all  $R_v$ . When the bifurcation is a Hopf bifurcation, we use a Galerkin method to compute the critical values. Our study is completed by a non-linear analysis of the bifurcation to one-cell so-

---

Soumaya Ouadhani

IMFT, Université Paul Sabatier, 118 Narbonne street, 31062 Toulouse cedex, France  
University of Carthage, Mathematical Engineering Laboratory, Tunisia Polytechnic School, El  
Khawerzmi street-B.P.743- 2078 La Marsa, TUNISIA

Tel.:

E-mail: souadhan@imft.fr

Ali Abdennadher

University of Carthage, Mathematical Engineering Laboratory, Tunisia Polytechnic School, El  
Khawerzmi street-B.P.743- 2078 La Marsa, TUNISIA

Tel.:

E-mail: ali.abdennadher@insat.rnu.tn

Abdelkader Mojtabi

IMFT, UMR CNRS/INP/UPS, UFR MIG, Université Paul Sabatier, 118 Narbonne street,  
31062 Toulouse cedex, France

Tel.:

E-mail: mojtabi@imft.fr

Alain Bergeon

IMFT, Université Paul Sabatier, 118 Narbonne street, 31062 Toulouse cedex, France

Tel.:

E-mail: abergeon@imft.fr

lutions in an infinite horizontal layer that is compared to numerical simulations in bounded horizontal domains with large aspect ratio.

**Keywords** Porous media; Soret effect; Separation; Vibration

## 1 Introduction

Double-diffusive convection in a saturated porous medium due to temperature and concentration gradients has been widely studied because of its numerous fundamental and industrial applications. Reviews of recent developments and publications in this field can be found in reference [16]. Here, we study the effect of a mechanical high-frequency vibration on the thermo-solutal convection with Soret effect in a saturated porous medium.

In a binary fluid mixture subject to a temperature gradient, the Soret effect produces a species separation in the mixture. The mass flux  $\mathbf{J}$  takes into account both the isothermal diffusion and the thermodiffusion and reads:

$$\mathbf{J} = -\rho D \nabla C - \rho \bar{C}(1 - \bar{C}) D_T \nabla T, \quad (1)$$

where  $D$  is the isothermal diffusion coefficient,  $D_T$  is the thermodiffusion coefficient,  $S_T \equiv D_T/D$  is the Soret coefficient,  $\rho$  is the density,  $T$  is the temperature,  $C$  is the concentration of the denser component,  $\bar{C}$  is the mean concentration and  $\bar{C}(1 - \bar{C})$  is a weight factor [20]. Motivated by experiments in microgravity in which static and oscillatory g-jitters are present, the effects of mechanical vibrations on the stability of thermal systems have been the subject of numerous studies where the authors considered various directions, amplitudes and frequencies of the vibrations. In their book, Gershuni and Lyubimov [10] presented a detailed review of the work done on the vibrational effects on convection in cavities filled with eventually a multi-component fluid mixtures.

Thermo-vibration problems in porous media have also received particular attention. Generally, these studies are classified in two groups: those concerning a porous medium saturated by a pure fluid and those in which the fluid is a binary-mixture. Hereafter, we report only works dealing with high-frequency and small amplitude vibrations; for other situations, the interested reader can refer to [18]. In that case, it is well established analytically that vertical vibrations have a stabilizing effect increasing the critical Rayleigh number. In 1999, Zen'kovskaya & Rogovenko [22] completed earlier works by considering arbitrary directions of vibration. They show that intense horizontal vibrations can destabilize the system giving rise to convection even in a zero gravity environment or in a fluid heated from above. Similar results are discussed by Govender [12] in the case of vertical vibrations and a fluid heated from above when the gravity modulation due to vibrations may (on average) overcome the stabilizing effect due to gravity. Using a time-averaged formulation, Bardan & Mojtabi [1] reconsidered the case of vertical vibrations focusing on a bounded horizontal porous medium. In addition to performing the linear stability analysis, they conducted a weakly non-linear study and obtained analytically the solution as a function of the strength of vibration in the neighborhood of the bifurcation point. They showed that increasing the vibration amplitude



delays the onset of convection and may affect the nature of the first primary bifurcation. These results are considered again in 2004 by Bardan *et al.* [2]. The domain of validity of the mean flow is discussed and the authors show, using a weakly nonlinear stability analysis performed demonstrates, that contrary to earlier published results, the first bifurcation is always supercritical.

All the papers cited above dealt with porous media saturated by a pure fluid. Double-diffusive convection caused by temperature and concentration gradients in a porous medium has been widely studied due to its numerous fundamental and industrial applications. Some examples of interest are the migration of moisture in fibrous insulation, the transport of contaminants in saturated soil, drying processes or solute transfer in the mushy layer during the solidification of binary alloys. Soret-driven convective effects cannot be neglected in many of these situations and other industrial processes. For the problems involving binary mixtures subjected to Soret effect, Sovran *et al.* [19] present a linear stability analysis of the horizontal infinite layer without vibrations. For a cell heated from below and for a positive separation ratio  $\psi > 0$  they showed that the first primary bifurcation is a stationary one. Using a regular perturbation method, in the case of long wave disturbances (i.e.  $k = 0$ ), they found the critical Rayleigh number  $Ra_c = 12/(Le\psi)$  associated to the critical wave number  $k_c = 0$  when  $\psi \geq \psi_{uni} = 1/[(40/51)Le - 1]$ . The same configuration is studied by Charrier *et al.* [6] who introduced high frequency vertical vibrations. Their linear stability results using a time-averaged formulation reveals that vertical vibrations increase the stability threshold for the steady bifurcation destabilizing the case of a binary mixture with a positive Soret separation ratio as well as the Hopf bifurcation in the case of negative Soret separation ratio. Some analytical relations for the long wave mode instability were also proposed. Elhajjar *et al.* [8] revisited the problem and their results suggest that vibrations could be used to improve the species separation in the case of the long wave mode. Furthermore, for the first time in this context, they performed a linear stability analysis of the long wave mode. They found that the one-cell solution loses stability via a Hopf bifurcation and that vibration had a stabilizing effect on it.

In the present paper, we use the formulation in [6] of a shallow porous cavity saturated by a binary mixture subjected to the Soret effect but we consider the case for which a vertical heat flux applied on the horizontal walls is responsible for the initial vertical temperature gradient (Charrier *et al.* [6] consider prescribed temperatures). As we will show, this difference is responsible of a number of particular behaviours. In the next two sections, we present the mathematical formulation and the averaged equations. We next reconsider the linear stability analysis focusing on the one-cell solution. In the last sections, the linear and non-linear analytical predictions are compared to direct numerical simulations.

## 2 Mathematical formulation

We consider a two dimensional infinite horizontal porous medium saturated by a Boussinesq binary fluid for which the Soret effect is taken into account. A constant heat flux  $\mathbf{q}' = q' \mathbf{e}_z$  is applied to the horizontal impermeable rigid boundaries. Here

$x$  is the coordinate in the horizontal infinite direction,  $z$  is the vertical coordinate and  $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_z$  are unit vectors in the  $x$  and  $z$  directions. The cavity is subjected to linear harmonic oscillations in the vertical direction (amplitude  $b$  and dimensional frequency  $\omega'$ ).

For the governing equations, we adopt the Boussinesq approximation and Darcy equation for which the time dependent term is taken into account. We set all the properties of the binary fluid constant except the density  $\rho$  in the buoyancy term that varies linearly with the temperature and concentration in the expected range of temperatures and concentrations:

$$\rho = \rho_r (1 - \beta_T(T - T_r) - \beta_C(C - C_r)), \quad (2)$$

where  $\rho_r$  is the fluid mixture density at temperature  $T_r$  and mass fraction  $C_r$  and  $\beta_T, \beta_C$  are the thermal and solutal expansion coefficients respectively. When we consider the referential related to the oscillating system, the gravitational field  $\mathbf{g}$  is replaced by:  $\mathbf{g} + b\omega'^2 \sin(\omega't')\mathbf{e}_z$  where  $\mathbf{e}_z$  is the vibration direction axis and  $t'$  is the dimensional time.

Because of the applied heat flux, a temperature difference  $\Delta T$  is produced across the system; in response the system develops a concentration difference  $\Delta C = -S_T \bar{C}(1 - \bar{C})\Delta T$ . The dimensionless temperature and concentration are taken to be  $(T^* - T_r)/\Delta T$  and  $(C^* - C_r)/\Delta C$ . Distance, time and velocity are non dimensionalised with  $H, (\rho c)^* H^2/a^*(\rho c)_f$  and  $a^*/H$ . Taking into account the Soret effect, the resulting dimensionless equations are:

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0, \quad (3)$$

$$B\partial_t \mathbf{V} + \mathbf{V} = -\nabla P + Ra(T + \psi C)(1 - R \sin(\omega t)) \mathbf{e}_z, \quad (4)$$

$$\partial_t T + \mathbf{V} \cdot \nabla T = \nabla^2 T, \quad (5)$$

$$\epsilon \partial_t C + \mathbf{V} \cdot \nabla C = Le^{-1}(\nabla^2 C - \nabla^2 T), \quad (6)$$

where  $B = Da(\rho c)_f/[(\rho c)^* \epsilon \text{Pr}]$  is the inverse Vadasz number ( $B = 1/Va$ ),  $Da = K/H^2$  is the Darcy number and  $K$  the permeability of the porous medium.

The problem under consideration depends on eight non-dimensional parameters: the thermal Rayleigh number,  $Ra = Kg\beta_T H \Delta T/a\nu$ ,  $R = b\omega'^2/g$ , the separation ratio  $\psi = -(\beta_c/\beta_T)(D_T/D)C_i(1 - C_i)$ , the Lewis number  $Le = a^*/D^*$ , the normalized porosity  $\epsilon = \epsilon^*(\rho c)_f/(\rho c)^*$  (where  $\epsilon^*$  is the porosity), the dimensionless frequency  $\omega = \omega'^2(\rho c)^* H^2/a^*(\rho c)_f$ , the aspect ratio  $A$  and the factor  $B$ . The dimensionless boundary conditions are:

$$z = 0, 1 : \quad w = \partial_z T + 1 = \partial_z T - \partial_z C = 0, \quad (7)$$

where  $w$  is the vertical component of  $\mathbf{V}$ . In the momentum equation the term  $B\partial \mathbf{V}/\partial t$  is usually neglected since  $B$  is of order  $10^{-6}$ . But in our problem, high frequency vibrations cause very large accelerations and this term must be taken into account [22].

It should be mentioned that because of the Neuman boundary conditions for  $T$  and  $C$ , and when the extension of the domain is infinite in the  $x$  direction, additional

conditions must be specified to solve the equations. In particular, the mass flow rate through any vertical cross-section should be zero:

$$\int_0^1 u(z) dz = 0, \quad (8)$$

where  $u$  is the horizontal component of  $\mathbf{V}$ . The species are also conserved in time:

$$\int_{\Omega} C(z) d\Omega = 0. \quad (9)$$

Finally, the total heat and species transfer through any vertical cross-section should be zero:

$$\int_0^1 (uT - \partial_x T) dz = \int_0^1 (uC - \partial_x C) dz = 0. \quad (10)$$

### 3 The averaged equations

In the limiting case of high frequency and small amplitude vibrations, the averaging method can be applied to study thermal vibrational convection, [10]. According to this method, each field ( $\mathbf{V}$ ,  $P$ ,  $T$ ,  $C$ ) is subdivided into two parts: the first part varies slowly with time (i.e. the characteristic time is large with respect to the period of the vibrations) and the second one varies quickly with time (i.e. the characteristic time is of the order of magnitude of the vibrational period):

$$(\mathbf{V}, P, T, C) = (\mathbf{V}^*, P^*, T^*, C^*)(t) + (\mathbf{u}', p', \theta', c')(\omega, t). \quad (11)$$

Here,  $\mathbf{V}^*, P^*, T^*, C^*$  are the averaged fields (i.e. the mean value of the field calculated over the period  $\tau = 2\pi/\omega$ ) of the velocity, pressure, temperature and mass fraction. The decoupling between the pulsational parts of the velocity and the pressure is obtained by using a Helmholtz decomposition:

$$(T^* + \psi C^*)\mathbf{e}_z = \mathbf{W} + \nabla\xi \quad (12)$$

where  $\mathbf{W}$  is the solenoidal part of  $(T^* + \psi C^*)\mathbf{e}_z$  satisfying  $\nabla \cdot \mathbf{W} = 0$ . Thus the averaged flow equations are:

$$\nabla \cdot \mathbf{V}^* = 0, \quad (13)$$

$$B\partial_t \mathbf{V}^* + \mathbf{V}^* = -\nabla P^* + \left( Ra(T^* + \Psi C^*) + Rv(\nabla T^* + \frac{\Psi}{\epsilon^*} \nabla C^*) \cdot \mathbf{W} \right) \mathbf{e}_z, \quad (14)$$

$$\partial_t T^* + (\mathbf{V}^* \cdot \nabla) T^* = \nabla^2 T^*, \quad (15)$$

$$\epsilon \partial_t C^* + (\mathbf{V}^* \cdot \nabla) C^* = \frac{1}{Le} (\nabla^2 C^* - \nabla^2 T^*), \quad (16)$$

$$(T^* + \psi C^*)\mathbf{e}_z = \mathbf{W} + \nabla\xi, \quad (17)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{W} = 0. \quad (18)$$

In addition to the boundary conditions (7) applied to the mean fields, we assume that:

$$\mathbf{W} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ on } \partial\Omega. \quad (19)$$

The modified vibrational Rayleigh number  $Rv = (Ra^2 R^2 B)/(2(B^2 \omega^2 + 1))$  characterizes the intensity of the vibrations.

#### 4 Linear stability of the equilibrium solution in an infinite horizontal porous layer

The stability of the equilibrium solution was studied by [6]. They restricted their study to the case  $Le = 2$  for which the fluid considered is in the gaseous state, and so the Dufour effect should be taken into account. We extended this study to the case of a high Lewis number and we focused on the transition from the equilibrium solution to the mono-cellular flow obtained for binary mixtures. This problem has a mechanical equilibrium solution characterized by:

$$\mathbf{V}_0^* = \mathbf{0}, \quad T_0^* = -z + cste, \quad C_0^* = -z + \frac{1}{2}, \quad \mathbf{W}_0 = \mathbf{0}. \quad (20)$$

In order to investigate the stability of the conductive solution, we separate the disturbances from the base state:

$$(\Psi^*, T^*, C^*, \Psi_w^*)(x, z, t) = (\Psi_0^*, T_0^*, C_0^*, \Psi_{w,0}^*) + (f, \theta, c, F)(x, z, t), \quad (21)$$

where  $\Psi_0^* = 0$  is the streamfunction of the base state and  $\Psi_{w,0}^* = 0$  the solenoidal stream function of the base state. The disturbances are developed in the form of normal modes:

$$(f, \theta, c, F)(x, z, t) = (\tilde{f}(z), \tilde{\theta}(z), \tilde{c}(z), \tilde{F}(z)) e^{ikx + \sigma t} + c.c., \quad (22)$$

where  $i^2 = -1$  and c.c. denotes the complex conjugate. In the above expansion, the disturbances  $\tilde{f}, \tilde{\theta}, \tilde{c}, \tilde{F}$  are the amplitudes of the stream function, temperature, concentration and solenoidal stream function,  $k$  is the wave number in the horizontal  $x$  direction, and  $\sigma$  is the temporal exponential growth rate of the perturbation. We introduce a new function  $\tilde{\eta} = \tilde{c} - \tilde{\theta}$ . The system of equations can be written as

$$\begin{aligned} (B\sigma + 1)(D^2 - k^2)\tilde{f} + Raik((1 + \psi)\tilde{\theta} + \psi\tilde{\eta}) - Rv\tilde{F}k^2(1 + \frac{\psi}{\epsilon}) &= 0, \\ (D^2 - k^2)\tilde{\theta} - \sigma\tilde{\theta} - ik\tilde{f} &= 0, \\ Le^{-1}(D^2 - k^2)\tilde{\eta} - \epsilon\sigma(\tilde{\eta} + \tilde{\theta}) - ik\tilde{f} &= 0, \\ (D^2 - k^2)\tilde{F} + ik((1 + \psi)\tilde{\theta} + \psi\tilde{\eta}) &= 0, \end{aligned} \quad (23)$$

with the boundary conditions :

$$z = 0, 1 : \tilde{f} = \tilde{F} = \partial_z \tilde{\theta} = \partial_z \tilde{\eta} = 0. \quad (24)$$

##### 4.1 The limiting case of long wave disturbances:

In this part, we focus on steady bifurcation. We study analytically the special case of the long wave mode. In some related studies in fluid media [9, 11, 18] the authors showed that asymptotic analysis results in a closed form relation for the stability threshold. In order to obtain such a relation, a regular perturbation method with the wave number as the small parameter is performed (for simplicity, we remove the tilde in (22-24)). We expand  $(f, \theta, \eta, F, \sigma)$  as:

$$(f, \theta, \eta, \sigma, F) = \sum_{n=0}^{\infty} k^n (f_n, \theta_n, \eta_n, \sigma_n, F_n), \quad (25)$$

with the boundary conditions:

$$z = 0, 1 : f_n = F_n = \partial_z \theta_n = \partial_z \eta_n = 0. \quad (26)$$

Substituting these expressions in equations (23) and factoring the same order of  $k$ , we find a sequential system of equations. For the zeroth order ( $k^0$ ):

$$f_0 = 0, \quad F_0 = 0, \quad \theta_0 = cst, \quad \eta_0 = cst, \quad \sigma_0 = 0. \quad (27)$$

At order 1, we get:

$$f_1 = -\frac{i}{2} Ra(1 + \psi(Le + 1))\theta_0(z^2 - z), \quad F_1 = -\frac{i}{2}(1 + \psi(Le + 1))\theta_0(z^2 - z), \quad (28)$$

$$\theta_1 = cst, \quad \eta_1 = cst, \quad \sigma_1 = 0,$$

and at order 2:

$$\begin{aligned} f_2''(z) &= -iRa((1 + \psi)\theta_1 + \psi\eta_1), \\ \theta_2''(z) &= if_1 + \theta_0(\sigma_2 + 1), \\ \eta_2''(z) &= iLe f_1 + \eta_0, \\ F_2''(z) &= -i((1 + \psi)\theta_1 + \psi\eta_1). \end{aligned} \quad (29)$$

where  $''$  is the second derivative with respect to  $z$ . After involving the solvability condition, we find:

$$\sigma_2 = \frac{Ra}{12}(\psi(Le + 1) + 1) - 1. \quad (30)$$

We note that  $\sigma_2$  is real indicating that the conductive solution loses stability through a stationary bifurcation. For the marginal stability  $\sigma_2$  is set equal to zero and we obtain the critical Rayleigh number:

$$Ra = Ra_c \equiv \frac{12}{1 + \psi(Le + 1)}. \quad (31)$$

#### 4.2 The general case

The linear stability is investigated using a Galerkin method. The perturbations are expanded in series of polynomial functions satisfying all the boundaries conditions:

$$\left\{ \begin{array}{l} f = \sum_{n=1}^N a_n (1 - z) z^n \\ \theta = b_1 + b_2 \left( z^2 - \frac{2}{3} z^3 \right) + \sum_{n=1}^N b_{n+2} (1 - z)^2 z^{n+1} \\ \eta = d_1 + d_2 \left( z^2 - \frac{2}{3} z^3 \right) + \sum_{n=1}^N d_{n+2} (1 - z)^2 z^{n+1} \\ F = \sum_{n=1}^N e_n (1 - z) z^n \end{array} \right. \quad (32)$$

These expressions are introduced in system (23). The resulting algebraic system of equations has a non trivial solution when its determinant is zero. In general, the determinant is complex. The procedure that we used to calculate the value of the critical Rayleigh number is the same as that described in Ouattara *et al.* [17].

For stationary bifurcations ( $\sigma = 0$ ), the results are presented in table 1. An accuracy of less than 1 % was obtained with  $N \approx 4$ . It can be observed that the vibrations have no effect on the critical Rayleigh number and do not change the critical wave number. The results are in very good agreement with those obtained

in the long-wave approximation.

For the oscillatory instability ( $\sigma = i\omega$ ,  $\omega \neq 0$ ), the results are presented in figure 1 and table 2. We used  $N = 4$  with  $Le$  fixed and for different values of  $\psi$  and  $Rv$ , we obtained the critical Rayleigh number  $Ra_c$ , the critical Hopf frequency  $\omega_c$  and the associated critical wave number  $k_c$ . These results show that, for values of  $\psi$  less than  $-1/Le + 1$ , the conductive state loses stability through a Hopf bifurcation.

## 5 Analytical solution of the mono-cellular flow

In the case of a shallow cavity ( $A \gg 1$ ), we solve the full non-linear problem analytically using the parallel flow approximation [5,8]. More precisely, we assume that the streamlines are parallel to the horizontal walls except in the vicinity of the vertical walls. So except these regions, the vertical component of the velocity can be neglected. The temperature and mass fraction are written as the sum of two terms: a first contribution corresponding to a linear longitudinal variation and a second contribution producing the transverse distribution. The basic flow can be written as follow:

$$\mathbf{V}_0 = U(z) \mathbf{e}_x, \quad T_0 = bx + h(z), \quad C_0 = mx + g(z), \quad \mathbf{W}_0 = W_1(z) \mathbf{e}_x, \quad (33)$$

where  $b$  and  $m$  are respectively the unknown constant temperature gradient and mass fraction gradient in the  $x$  direction. In the stationary case and using the boundary conditions, we obtain the expressions of the velocity, temperature and concentration:

$$U(z) = -\psi_0(2z-1), \quad W_1(z) = -\frac{\psi_0}{Ra}(2z-1), \quad T_0 = bx+h(z), \quad C_0 = mx+g(z), \quad (34)$$

with:

$$\psi_0 = \frac{1}{2}Ra(b + \psi m), \quad (35)$$

$$h(z) = -\frac{1}{3}\psi_0bz^3 + \frac{1}{2}\psi_0bz^2 - z + cte, \quad (36)$$

$$g(z) = \frac{\psi_0(mLe + b)(6z^2 - 4z^3 - 1)}{12} + \frac{1 - mA}{2} - z, \quad (37)$$

$$m = -\frac{Le\psi_0(b\psi_0 - 5) - 30b}{Le^2\psi_0^2 + 30}, \quad b = \frac{5\psi_0}{\psi_0^2 + 30}. \quad (38)$$

Replacing the expressions of  $m$  and  $b$  of (38) in equation (35) we obtain :

$$\psi_0 \left( Le^2\psi_0^4 - \frac{5}{2}d_1\psi_0^2 - \frac{25}{16}d_2 \right) = 0, \quad (39)$$

where:

$$d_1 = Le^2Ra - 12Le^2 - 12, \quad d_2 = 48(Ra(1 + \psi(Le + 1)) - 12). \quad (40)$$

The solutions of (39) are  $\psi_0 = 0$  or:

$$\psi_0 = \pm \frac{\sqrt{5}}{2Le} \left( d_1 \pm \sqrt{d_1^2 + Le^2d_2} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (41)$$

Of course, the number of solutions depends on the signs of  $d_1^2 + Le^2 d_2$  and  $d_1 \pm \sqrt{d_1^2 + Le^2 d_2}$  and these signs also depend on  $Ra$  at fixed  $Le$  and  $\psi$ . But if a one-cell solution exists, there also exists another counter-rotating solution.

In the following, we focus on the configuration  $Ra > 0$ . It is clear that if  $d_1^2 + Le^2 d_2 < 0$  one-cell solution do not appear and we are left with the conductive state corresponding to  $\psi_0 = 0$ . Solving  $d_1^2 + Le^2 d_2 = 0$  in terms of  $Ra$  gives two values  $Ra_{2\pm}$ :

$$Ra = Ra_{2\pm} \equiv \frac{12(Le+1)}{Le^2} \left( Le - 2\psi - 1 \pm 2\sqrt{\psi(1-Le+\psi)} \right). \quad (42)$$

In between these two roots  $d_1^2 + Le^2 d_2 < 0$ . Therefore,  $Ra < Ra_{2-}$  and  $Ra > Ra_{2+}$  are necessary conditions for the existence of one-cell solutions. To ensure these solutions exist, we must have in addition at least one of this two conditions:  $d_1 \pm \sqrt{d_1^2 + Le^2 d_2} > 0$  when  $Ra = Ra_{2+}$ . We calculated the expression  $\psi_{\text{sub}}$  of  $\psi$  below which it happens:

$$\psi_{\text{sub}} = -\frac{1}{1 + Le + Le^2 + Le^3}. \quad (43)$$

This Soret separation coefficient corresponds to the value below which the supercritical primary bifurcation to the one-cell solutions becomes subcritical. For  $Le = 5$ , it gives  $\psi_{\text{sub}} = -0.00641$ . When  $\psi < \psi_{\text{sub}}$ , the value  $Ra_{\text{SN}} = Ra_{2+}$  corresponds to the saddle-node along the branch of one-cell solutions. It is also possible to obtain  $\psi_{\text{SN}} = \psi(Ra_{\text{SN}})$ :

$$\psi_{\text{SN}} = -\frac{1}{48} \frac{(Le^2(Ra_{\text{SN}} - 12) + 12)^2}{Le^2 Ra_{\text{SN}} (Le + 1)}. \quad (44)$$

Figure 2 summarizes the various expressions obtained here and shows the corresponding bifurcations in the different regions of the parameter space  $(\psi, Ra)$ . We mention that both the linear threshold  $Ra_c$  and the saddle-node  $Ra_{\text{SN}} = Ra_{2+}$  do not depend on  $Rv$ .

To be more explicit, figure 3 shows the bifurcation diagram of the one-cell steady solution for  $Le = 5$  and different values of the separation coefficient  $\psi$ . We see that the occurrence of two pairs of solutions is produced by the stabilizing effect of the solutal contribution to the buoyancy force as it only happens when the Soret separation coefficient is negative. The steady bifurcation which is supercritical when  $-0.008 \leq \psi \leq 0$ , becomes subcritical producing a region in which two different one-cell solutions exist for a given  $Ra$ . When  $\psi$  is sufficiently negative, the first primary bifurcation becomes a Hopf bifurcation (as discussed before). If  $-\psi$  is not too large i.e. if  $\psi > -1/(Le + 1)$ , the Hopf bifurcation and the steady bifurcation coexist. As can be seen in figure 3 and from relation (31), if  $\psi < -1/(Le + 1)$ , the primary steady bifurcation to the one-cell solution disappears. It does not mean that the one-cell branch has disappeared but it means that this branch is now disconnected from the conductive state (see Fig. 3). The careful analysis of this scenario is described by Tuckerman [21].

## 6 Numerical simulations

We use a numerical continuation method to follow steady states emerging from from small amplitude near the primary instability threshold to large amplitudes. Our numerical continuation method is based on a Newton solver for the time-independent version of the averaged equations and boundary conditions. The implementation of the method follows that of Mamun and Tuckerman [15]. The discretisation in space is a spectral element method in which the domain is decomposed into  $n_e$  spectral elements of size  $n_x \times n_z$ . In each element, the fields are approximated by a high-order interpolant through the Gauss-Lobatto-Legendre points. The Newton solver uses a first-order time integration scheme for the equations. The diffusive linear part is treated implicitly, and the nonlinear part, explicitly. Since the latter requires the velocity, in the absence of vibrations, a Poisson problem is formulated for the stream function and it is solved subject to Dirichlet boundary conditions. When  $Rv = 0$ , each time step therefore requires the inversion of two Helmholtz problems and one Poisson problem. This is carried out using a Schur factorization procedure on the weak form of the equations. The introduction of the vibrational forcing term in the averaged equation is done at each time-step before the time integration of the temperature and concentration. The linear stability of the solutions obtained during the continuation process is calculated using a Arnoldi method as described in [15]. More details on the code and its adaptation to other physical problems can be found in [14, 13, 3, 4].

We consider in this part a bounded domain defined with its aspect ratio  $A = L/H$  where  $H$  is the height of the box and  $L$  its horizontal extension. Along the vertical wall, we apply the same type of boundary conditions as along the horizontal boundaries:

$$x = 0, A : \partial_x T = \partial_x C = u = 0. \quad (45)$$

In the following, we also wish to compare the results for this geometry to those of the unbounded layer of the preceding sections in particular for the one-cell solutions. Therefore, we consider a large aspect ratio  $A = 20$ . All results are computed with  $Rv = 0$ ,  $B = 0$  and  $\epsilon = 1$  for various Lewis numbers  $Le$  and Soret separation ratios  $\psi$ . We used  $n_e = 20$  spectral elements with a resolution in each element ranging from  $n_x = n_z = 17$  for  $Le = 10$  to  $n_x = n_z = 31$  for  $Le = 100$ . Some results have been compared to those obtained with the COMSOL Multiphysics software [7] and an excellent agreement was observed.

Figure 4 shows the bifurcation diagram in the pure thermal case corresponding to  $\psi = 0$ . Figures 4a-c report the variations with the Rayleigh number of the maximum velocity and of the kinetic energy  $E_K = (1/2) \int_{\Omega} \mathbf{V}^{*2} d\Omega$ . The first four primary bifurcations are computed and the emerging branches are referred as  $L_n$  where  $n$  is the number of cells of the associated solutions (figure 4d). The first one corresponds the one-cell structure. It bifurcates supercritically and is stable over the computational domain. The other bifurcating branches  $L_n$  are  $n$  times unstable close to the threshold. But along each branch,  $n$  secondary symmetry breaking bifurcations occur. As a consequence, all branches progressively gain stability to finally become linearly stable. It explains why in figure 4 we observe an interval of Rayleigh numbers where the four branches are linearly stable (note that along



the branch  $L_2$  the two secondary bifurcations are very close one another).

Figure 5a shows the bifurcation diagram when  $\psi = 0.01$ . The figure indicate that the mechanism of stabilization persists for the branch  $L_2$  when  $\psi \neq 0$ . We should mention that the stability of the solutions may be affected by the value of  $\epsilon$ . But a complete study of this dependence is beyond the scope of this paper.

Hereafter, we only focus on the one-cell solution. Figure 5b shows the variations of the kinetic energy with the Rayleigh number for various Soret separation ratio  $\psi$ . As expected, when  $\psi$  increases the threshold decreases. The figure reveals that for small positive values of  $\psi$ , the transition from low to large kinetic energy happens once the Rayleigh number exceeds the pure thermal threshold  $Ra_{c,PT} = 12$ . Beyond this value, the thermal and solutal contributions to the buoyancy force are both destabilizing. More precisely, if the Soret separation ratio is not too large that is in between 0 and  $10^{-2}$ , the thermal contribution is dominant as soon as  $Ra$  is larger than  $Ra_{c,PT}$ . This is clear in figure 5b where the bifurcating branches approaches the pure thermal branch ( $\psi = 0$ , dashed curve) for  $\psi = 0.1$  and  $0.01$ . On the other hand, below  $Ra_{c,PT}$ , only the solutal part is responsible for the onset of convection and for small values of  $\psi$ , it produces to a very weak flow.

For the one cell solution, it is interesting to compare the results for an infinite layer to those of a bounded domain with  $A = 20$ . Figure 6 reports the variations of  $|u(x = A/2, z = 1)|$  and  $|u_\infty(z = 1)|$  with  $Ra$  where  $u_\infty(z)$  is the horizontal velocity in an infinite horizontal layer and  $u(x, z)$  is the horizontal velocity component in the bounded domain. Except close to the threshold, the parallel flow approximation and the bounded domain give almost exactly equal values (the relative difference is smaller than  $10^{-6}$  for  $Ra > 10$  with  $\psi = 0.1$  and  $Le = 20$ ) The parallel flow approximation and the analytical expressions could in fact be used to validate a numerical code provided that the comparison is made far enough the onset of instability and for a one-cell solution. Figure 6 shows as expected, that the infinite layer has a threshold value slightly smaller than that of a finite domain.

Figure 7 shows the bifurcation diagram of the one-cell solutions for positive Soret separation ratio  $\psi = 1$  and various Lewis numbers  $Le = 10, 20, 50$  and  $100$ . The branches are labelled  $L_1^{Le}$  and are all linearly stable in the computational domain. These results show that the behavior identified in the previous paragraph for small Soret separation ratios and moderate Lewis numbers, also appears with large Soret separation ratios and large Lewis numbers. For  $Le = 100$  figures 7a-b show that the instability produces a weak convection regime close to the threshold followed by a more intense flow for Rayleigh numbers larger than the pure thermal threshold  $Ra_{c,PT} = 12$ . The physical reason is however slightly different than in the case of small Soret separation ratios. The flow is produced by the thermal and solutal horizontal gradients. When  $Ra > Ra_{c,PT}$ , and for large Lewis numbers, the concentration becomes almost constant everywhere forming boundary layers. As can be seen in figure 8, the concentration does not contribute to the force and the flow becomes driven by the thermally induced buoyancy force. The comparison of the two regimes  $Ra < Ra_{c,PT}$  and  $Ra > Ra_{c,PT}$  is illustrated in figure 8. Again, the analysis of these two non-linear regimes is carried out by Tuckerman [21] using a simple  $2 \times 2$  model.

## 7 Conclusion

We have conducted a numerical and analytical study of the onset Soret-driven convection in an isotropic homogeneous porous medium saturated by a binary fluid mixture and subjected to vertical high frequency and small amplitude vibrations. Two configurations have been considered and compared: an infinite horizontal layer and a bounded domain with a large horizontal extension. In both cases, the initial temperature gradient is produced by a constant uniform heat flux applied on the horizontal boundaries. In response, the system develops a concentration difference adding a solutal contribution to the thermally induced buoyancy force. The relative effect of these two forces depend on the sign of the Soret separation ratio  $\psi$  and the sign of the temperature difference between top and bottom ( $Ra$  can be positive or negative).

In a first part, we studied the influence of the sign of the Soret separation ratio  $\psi$  and the influence of the (normalized) porosity on the onset of convection using an averaged formulation of the equations. A very good agreement was obtained between the analytical critical values and the values obtained with a Galerkin numerical procedure. For steady bifurcation, the threshold does not depend on the normalized porosity and it is not the case for Hopf bifurcations. The stability properties differ from the classical constant temperature Soret-Horton-Rogers-Lapwood problem for which the critical Rayleigh number associated to the onset of one-cell solution is equal  $12/(\psi Le)$ . Here, the steady states bifurcation occurs for  $Ra_c = 12/(\psi(Le + 1) + 1)$ . We demonstrated that the vibrations have no effect on both the critical Rayleigh number  $Ra_c$  and critical wave number ( $k_c = 0$ ). The present configuration differs from the one in which the initial temperature gradient is produced by prescribed temperatures along the horizontal boundaries (Dirichlet boundary conditions) [8].

In the second part, direct numerical simulations were carried out in order to corroborate the results obtained with the linear stability analysis of the base state. More precisely, using a numerical continuation method, the results for a bounded domain with large aspect ratio were compared to an analytical approach being made possible by considering an infinite horizontal domain and restricting the comparison to the one cell structure. Despite expected differences close to the threshold, an excellent agreement was observed when the velocity in the vertical mid-plane of the domain is compared. Finally, we computed the bifurcation diagrams for various Soret separation ratios and various Lewis numbers restricting our study to steady states with a particular focus on the one-cell solution. The results are in agreement with those of Tuckerman [21].

**Acknowledgements** The authors are grateful to CNES (Centre National d'Etudes Spatiales) for their financial support.

## References

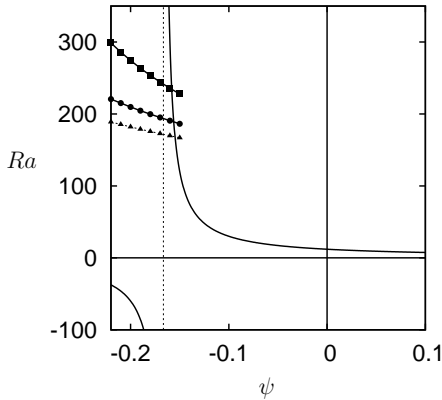
1. Bardan, G., Mojtabi, A., *On the Horton-Rogers-Lapwood convective instability with vertical vibration*, Phys. Fluids, **12**, 1-9, (2000)
2. Bardan, G., Razi, Y.P., Mojtabi, A., *Comments on the mean flow averaged model*, Phys. Fluids, **16**, 1-4, (2004)
3. Beaume, C., Bergeon, A., Knobloch, E. *Nonsnaking doubly diffusive convectons and the twist instability*, Phys. Fluids, **25**, 114102, (2013).
4. Beaume, C., Bergeon, A., Kao, H.-C., Knobloch, E., *Convectons in a rotating fluid layer*, J. Fluid Mech., **717**, 417 - 448, (2013).
5. Bennacer, R., Mahidjiba, A., Vasseur, P., Beji, H., Duval, R., *The soret effect on convection in a horizontal porous domain under cross temperature and concentration gradients*, International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow, **13**, 199 - 215, (2003)
6. Charrier-Mojtabi, M.C., Razi, Y.P., Maliwan, K., Mojtabi, A., *Influence of vibrations on Soret-Driven convection in porous media*, Num. Heat Transfer A. Appl, **46**, 981-993, (2004)
7. Comsol Inc., *Comsol Multiphysics Reference Guide*, edition 4.3, (2012).
8. Elhajjar, B., Mojtabi, A., Charrier-Mojtabi, M.C., *Influence of vertical vibration on the separation of a binary mixture in a horizontal porous layer heated from below*, International Journal of Heat and Mass Transfer, **52**, 165-172, (2009)
9. Gershuni, G.Z., Kolesnikov, A.K., Legros, J.C., Myznikova, B.I., *On the vibrational convective instability of a horizontal, binary-mixture layer with Soret effect*, Journal of Fluid Mechanics, **330**, 251-269, (1997)
10. Gershuni, G.Z., Lyubimov, D.V., *Thermal vibrational convection*, 358, John Wiley and Sons, (1998)
11. Gershuni, G.Z., Kolesnikov, A.K., Legros, J.C., Myznikova, B.I., *On the convective instability of a horizontal binary mixture layer with Soret effect under transversal high frequency vibration*, International Journal of Heat and Mass Transfer, **42**, 547-553, (1999)
12. Govender, S., *Destabilising a fluid saturated gravity modulated porous layer heated from above*, Transport in Porous Media, **59**, 215-225, (2005)
13. Lo Jacono, D., Bergeon, A., Knobloch, E., *Three-dimensional spatially localized binary fluid convection in a porous medium*, J. Fluid Mech., **730**, (2013).
14. Lo Jacono, D., Bergeon, A., Knobloch, E., *Magneto-hydrodynamic convectons*, J. Fluid Mech., **687**, 595 - 605, (2011).
15. Mamun, C. K., Tuckerman, L. S., *Asymmetry and Hopf bifurcation in spherical Couette flow* Physics of Fluids, **7**(1), 80-91, (1995).
16. Nield, D.A., Bejan, A., *Convection in Porous Media*, 4<sup>th</sup> edition. Springer, Inc., New York, (2013)
17. Ouattara, B., Khouzam, A., Mojtabi, A., Charrier-Mojtabi, M.-C., *Analytical and numerical stability analysis of Soret driven convection in a horizontal porous layer: the effect of conducting bounding plates*, Fluid Dynamics Research, **44**(3), (2012).
18. Razi, Y.P., Charrier-Mojtabi, M.C., Mojtabi, A., *Thermal vibrational convection in a porous media saturated by a pure or binary fluid*, Theory and Applications of Transport in Porous Media, **22**, 149-179, (2008)
19. Sovran, O., Charrier-Mojtabi, M.C., Mojtabi, A., *Onset on Soret-driven convection in an infinite porous layer*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, **329**, 287-293, (2001)
20. Torres, J. F., Komiya, A., Henry, D., Maruyama, S. *Measurement of Soret and Fickian diffusion coefficients by orthogonal phase-shifting interferometry and its application to protein aqueous solutions*, Journal of Chemical Physics, **139**, 074203, (2013)
21. Tuckerman, L. S. *Thermosolutal and binary fluid convection as a 2 x 2 matrix problem*, Physica D, **156**, 325-363, (2001).
22. Zen'kovskaya S.M., Rogovenko, T.N. : *Filtration convection in a high-frequency vibration field*, J. Appl. Mech. Tech. Phys., **40**, 379-385, (1999)

**Table 1** Comparison between the exact values of the critical Rayleigh number associated to the first primary steady bifurcation when  $k_c = 0$  to the values obtained using the Galerkin method at order 5. with  $Le = 100$ . Note that the critical values do not depend on  $Rv$ .

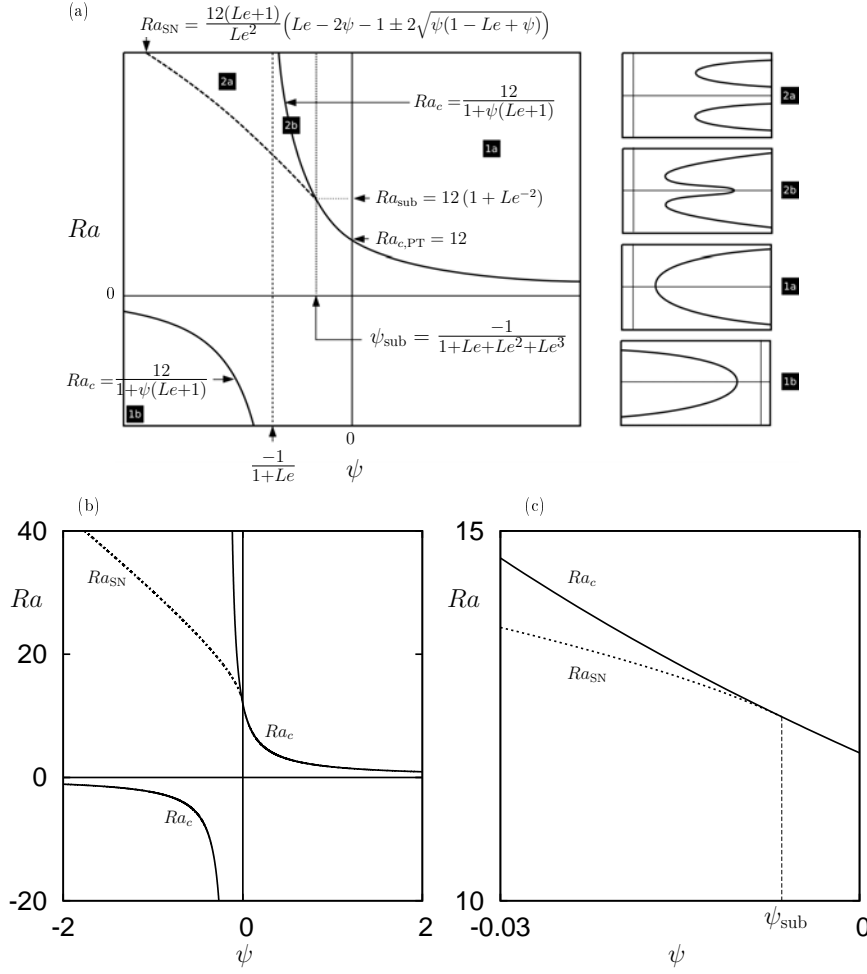
$\psi$	$Ra_c$ (Exact)	$Ra_c$ (Galerkin)
-0.1	-1.319	-1.319
-0.05	-2.963	-2.963
0	12	12.000
0.1	1.081	1.081
0.2	0.566	0.566
0.5	0.233	0.233

**Table 2** Critical Rayleigh numbers  $Ra_c$ , critical Hopf frequency  $\omega_c$  and critical wave number  $k_c$  associated to the primary Hopf bifurcation for various  $\psi$ ,  $Rv$  and  $\epsilon$ . The results are obtained using the Galerkin method at order 6 with  $Le = 5$ .

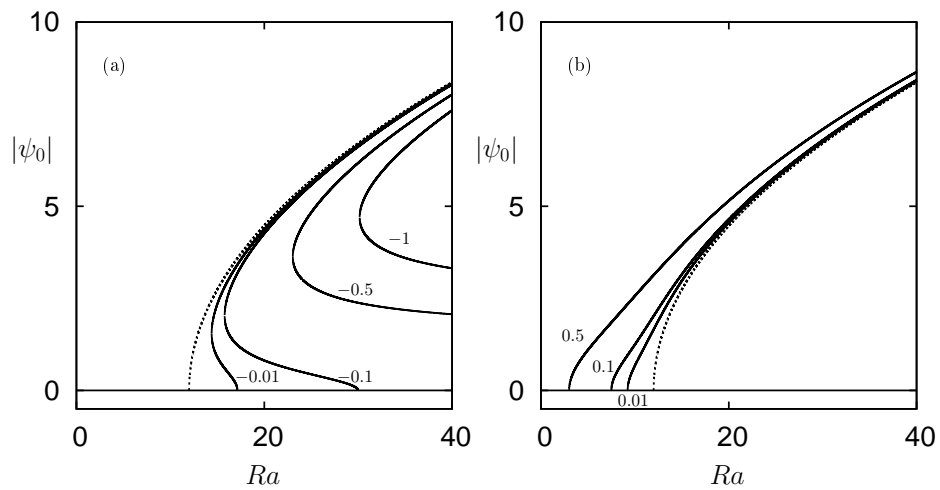
		$Rv = 0$		$Rv = 10$	
$\psi$		$\epsilon = 0.5$	$\epsilon = 0.7$	$\epsilon = 0.5$	$\epsilon = 0.7$
-0.16	$k_c$	4.62	4.63	4.58	4.58
	$Ra_c$	233.73	188.97	236.02	191.58
	$\omega_c$	19.49	16.73	19.25	16.47
-0.18	$k_c$	4.61	4.63	4.58	4.58
	$Ra_c$	251.40	198.00	253.55	200.51
	$\omega_c$	22.12	18.58	21.91	18.29
-0.20	$k_c$	4.61	4.63	4.58	4.58
	$Ra_c$	271.89	207.93	273.99	210.33
	$\omega_c$	24.89	20.42	24.66	20.10
-0.22	$k_c$	4.60	4.63	4.58	4.59
	$Ra_c$	296.29	218.90	298.15	221.20
	$\omega_c$	26.24	22.28	27.54	22.00



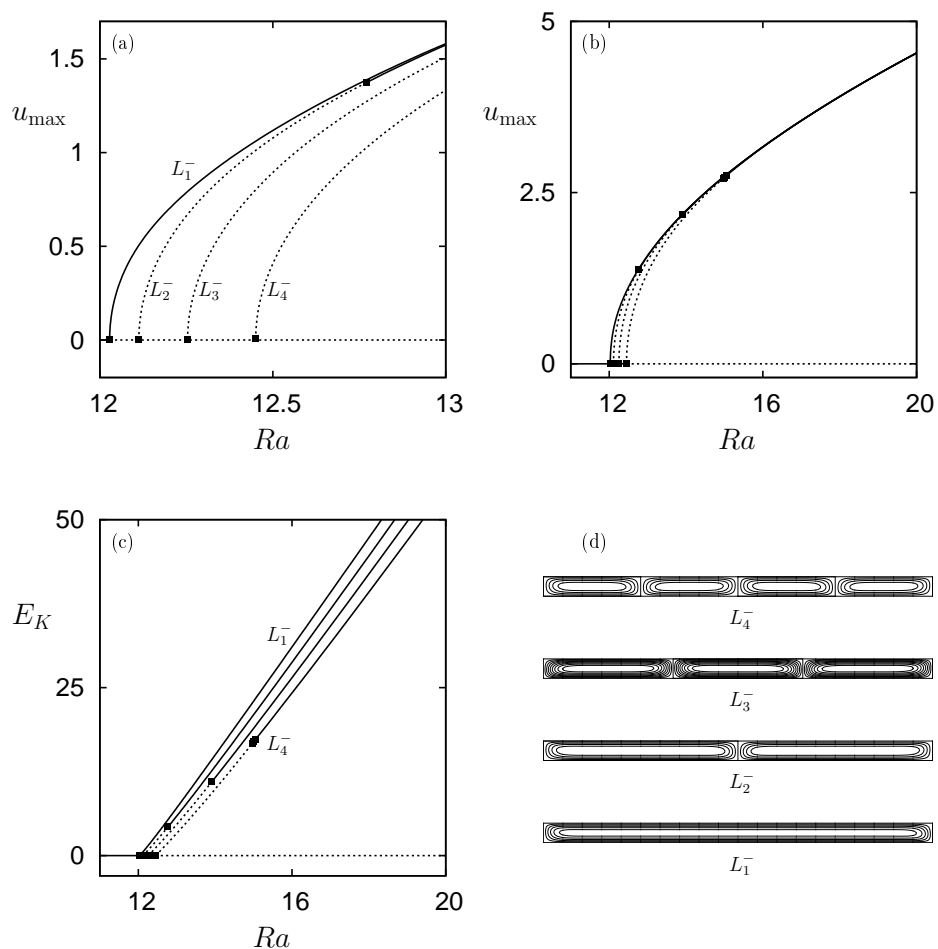
**Fig. 1** Stability diagram for  $Le = 5$ ,  $Rv = 0$  and different normalized porosity values  $\epsilon$ . The continuous line corresponds to the steady bifurcation to a one-cell structure for which the critical Rayleigh number does not depend on  $\epsilon$ . The vertical dotted line corresponds to  $\psi = 1/(Le + 1)$  and is a vertical asymptote for the steady bifurcation curves. The three other curves corresponds to the first Hopf bifurcation for  $\epsilon = 0.5$  (squares),  $0.7$  (circles) and  $0.9$  (triangles). Each symbol corresponds to a value obtained with the the Galerkin method at fourth order.



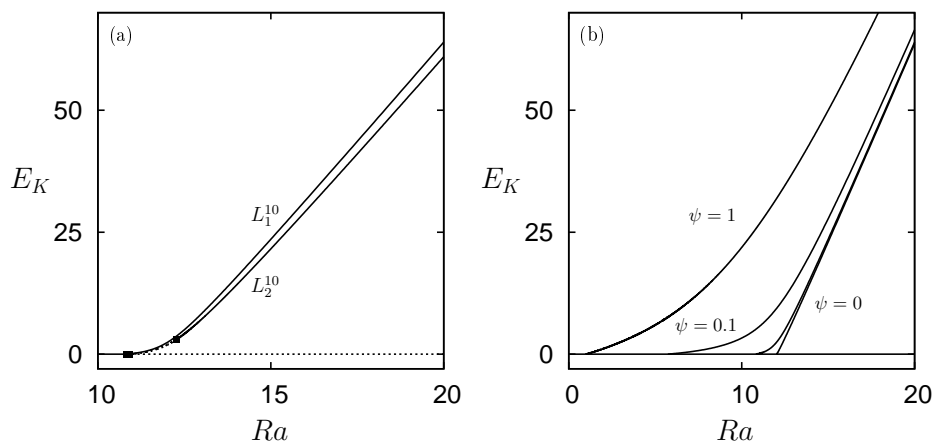
**Fig. 2** (a) In the parameter space  $(\psi, Ra)$  the figure shows the stability diagram and the various analytical expressions obtained in the text. Four regions referred to as 1a, 1b, 2a, 2b are identified and correspond to the schematic bifurcation diagrams shown on the right side of the figure. In region 2a, there are no steady primary bifurcation to one-cell structure. These solutions exist along branches disconnected from the conductive state. Each of these branches passes through a saddle node for  $Ra = Ra_{SN}$  so that in this region, there are 4 solutions (2 pairs of one-cell solutions). In region 2b, there is a subcritical primary bifurcation to one-cell steady solutions. Again this branch, passes through a saddle node at  $Ra = Ra_{SN}$ . This creates a subcritical region  $Ra_{SN} < Ra < Ra_c$  in which there are 4 solutions (2 pairs of one-cell solution) for followed by a region at larger  $Ra$  in which there is only a pair of one-cell solutions. Finally, in regions 1a and 1b the bifurcation is supercritical. (b) shows the figure for  $Le = 5$ . (c) is closer view of (b) showing in particular  $\psi_{sub} = -0.006641$  below which the primary bifurcation to one-cell solutions is subcritical.



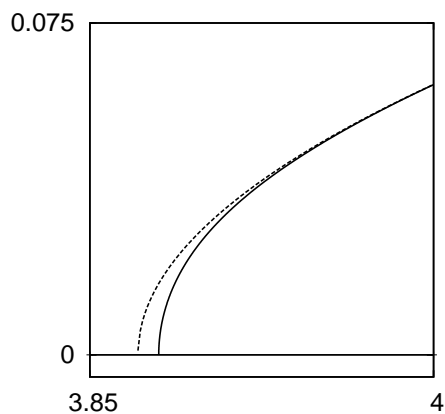
**Fig. 3** (a,b) Bifurcation diagram showing  $|\psi_0|$  as a function of  $Ra$  for different values of  $\psi$  indicated in the figures. The dashed line correspond to  $\psi = 0$ . Parameters are  $Le = 5$ ,  $Rv = 0$ . The domain is infinite in the horizontal direction.



**Fig. 4** (a) Bifurcation diagram showing the vicinity of the four first primary bifurcations from the conduction state in terms of the maximum horizontal component of the velocity  $u_{\max}$  as a function of the Rayleigh number. Continuous (dashed) lines refer to linearly stable (unstable) solutions. Squares indicate primary and secondary bifurcation points. (b) same as (a) over a larger Rayleigh number interval. (c) same as (b) but in terms of the kinetic energy  $E_K$  as a function of the Rayleigh number. (d) Isovalues of the stream-function of the solutions at  $Ra \approx 20$  along the branches  $L_n^-$  where  $n$  is the number of rolls. Parameters are  $\psi = 0$ ,  $Rv = 0$  and  $A = 20$ .

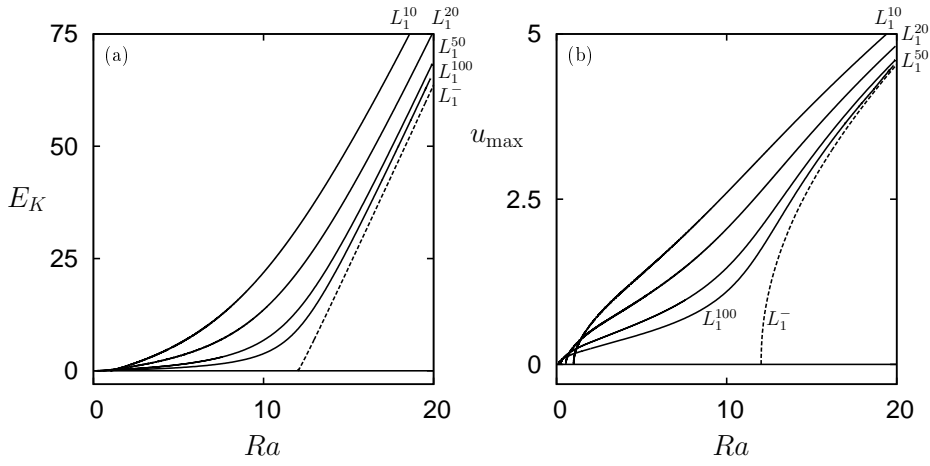


**Fig. 5** (a) Bifurcation diagram showing the kinetic energy along the two first branches bifurcating from the conduction state as a function of the Rayleigh number when  $\psi = 0.01$ . (b) Bifurcation diagram showing the kinetic energy along the first branch  $L_1^{10}$  bifurcating from the conduction state for  $\psi = 0, 0.01, 0.1$  and  $1$ . Other parameters are  $Le = 10$ ,  $Rv = 0$  and  $A = 20$ .

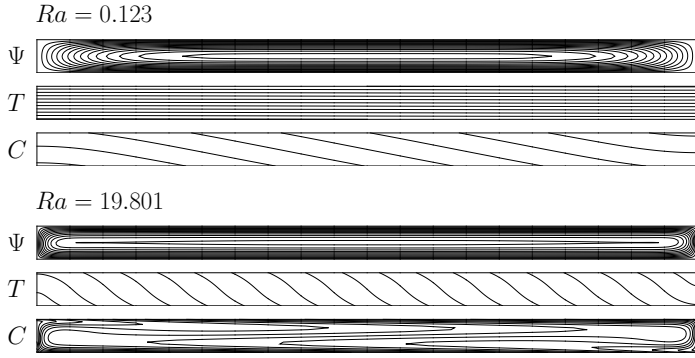


**Fig. 6** Bifurcation diagram showing the variations of  $|u(x = A/2, z = 1)|$  (continuous line) and  $|u_\infty(z = 1)|$  (dotted line) with  $Ra$  where  $u_\infty(z)$  is the horizontal velocity in an infinite horizontal layer and  $u(x, z)$  is the horizontal velocity component in the bounded domain. Parameters are  $Le = 20$ ,  $\psi = 0.1$ ,  $Rv = 0$  and  $A = 20$ .





**Fig. 7** Bifurcation diagram showing in (a) the kinetic energy and in (b) the maximum horizontal component of the velocity  $u_{\max}$  as a function of the Rayleigh number along the first branch  $L_1^{Le}$  bifurcating from the conduction state for Lewis numbers  $Le = 10, 20, 50, 100$  with  $\psi = 1$ . The dashed line corresponds to  $L_1^-$  (the fluid is not a binary mixture). Other parameters are  $Rv = 0$  and  $A = 20$ .



**Fig. 8** Two solutions for two Rayleigh numbers:  $Ra = 0.123$  which is close to the threshold and  $Ra = 19.801$  which corresponds to a regime dominated by the thermally induced buoyancy force. The snapshots show the isovalues of the stream-function, temperature and concentration. Parameters are  $Le = 100$ ,  $\psi = 0.1$ ,  $Rv = 0$  and  $A = 20$ .

## **Annexe B**

**Article soumis à "The European Physical Journal" : Analytical and numerical stability analysis of solet-driven convection in a horizontal porous layer : the effect of vertical vibrations**

# Analytical and numerical stability analysis of Soret-driven convection in a horizontal porous layer: the effect of vertical vibrations

Soumaya Ouadhani<sup>1,2</sup>, Ali Abdennadher<sup>2</sup>, and Abdelkader Mojtabi<sup>1</sup>

<sup>1</sup> IMFT, UMR CNRS/INP/UPS N°5502, UFR MIG, Paul Sabatier University, 118 Narbonne street, 31062 Toulouse cedex, France

<sup>2</sup> Carthage University, LIM Laboratory, Polytechnic school of Tunisia, BP 743, 2078 Marsa

Received: date / Revised version: date

**Abstract** The authors studied the effect of vertical high-frequency and small-amplitude vibrations on the separation of a binary mixture saturating a porous cavity. The horizontal bottom plate was submitted to constant uniform heat flux and the top one was maintained at constant temperature while no mass flux was imposed. The influence of vertical vibrations on the onset of convection and on the stability of the unicellular flow was investigated for positive separation ratio  $\psi$ . The case of high-frequency and small-amplitude vibrations was considered so that a formulation using time averaged equations could be used. For an infinite horizontal porous layer, the equilibrium solution was found to lose its stability via a stationary bifurcation leading to unicellular flow or multicellular one depending on the value of  $\psi$ . The analytical solution of the unicellular flow was obtained and separation was expressed in terms of Lewis number, separation ratio and thermal Rayleigh number. The direct numerical simulations using the averaged governing equations and analytical stability analysis showed that the unicellular flow loses its stability via oscillatory bifurcation. The vibrations decrease the value of  $\psi_{uni}$ , which allows species separation for a wide variety of binary mixtures. The vibrations can be used to maintain the unicellular flow and allow species separation over a wider range of Rayleigh numbers. The results of direct numerical simulations and analytical model are in good agreement.

**Key words.** Species separation; Soret effect; Linear stability; Vibration; Porous media

## 1 Introduction

Double-diffusive convection caused by temperature and concentration gradients in a porous medium is a classical example of the problems that reveal the interaction of different instability mechanisms. It has been widely studied because of its numerous fundamental and industrial applications. Some examples of interest are the migration of moisture in fibrous insulation, the transport of contaminants in saturated soil, drying processes and solute transfer in the mushy layer during the solidification of binary alloys. Originally, mechanical vibration was used in mathematical modeling in the aim of increasing the stability threshold of thermo-fluid system. Formally, thermo-vibrational convection studies concern the form of a mean flow in a confined cavity filled with fluid presenting temperature non-homogeneities. Compared to gravity-induced convection, this type of convection presents the advantage that it can exist in weightless conditions. Reviews of recent developments and publications in this field can be found in [1]. A great number of works in this field of research are devoted to investigations into high frequency and small amplitude vibration. Khallouf *et al.*[2]

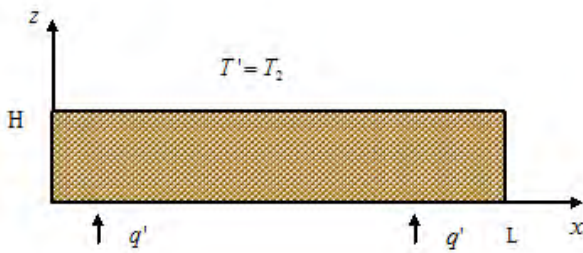
considered a square, differentially heated cavity filled with a porous medium saturated by a pure fluid and subjected to linear harmonic oscillations in the vertical direction. In their study, the authors used a Darcy-Boussinesq model and a direct formulation. Gershuni *et al.*[3] have studied the stability of a substantially linear mechanical equilibrium solution for a horizontal layer of a binary mixture subjected to vertical thermal gradient under the effect of high frequency vibrations. The thermovibrational convection in a fluid has received more attention than the thermovibrational convection in a porous medium. A good summary of this work is given by Gershuni *et al.*[4], [5].

In the case of a horizontal porous layer saturated by a pure fluid, heated from below or from above, Zenkovskaya *et al.*[6] and Bardan *et al.*[7] used the Darcy model including the non-stationary term and adopted the time-averaged equations formulation to study the influence of high-frequency and small amplitude vibrations on the onset of convection. They found that vertical vibrations stabilized the rest solution. Charrier-Mojtabi *et al.*[8] investigated the influence of vibrations on Soret-driven convection in a horizontal porous cell heated from below or

from above. They showed that the vertical vibrations had a stabilizing effect while the horizontal vibrations had a destabilizing one. Elhajjar *et al.*[10] studied the influence of vertical vibration of high-frequency and small amplitude on separation for a cell with horizontal walls maintained at constant but different temperatures. The linear stability of the unicellular flow obtained was analyzed analytically and numerically. They concluded that the unicellular flow associated with a field of laminate concentration led to horizontal separation of binary mixture components. They found that the vibrations had a stabilizing effect, leading to an increase of the critical value of the Rayleigh number corresponding to the transition between the unicellular and multicellular flow. Consequently, vertical vibration allows species separation for a wide variety of binary mixtures.

In the present paper, we use the same formulation as the one used by Charrier-Mojtabi *et al.*[8] for a shallow porous cavity saturated by a binary mixture. The cavity is bounded by horizontal infinite or finite boundaries. The bottom horizontal plate is submitted to constant uniform heat flux and the top one is maintained at constant temperature, while no mass flux is imposed. We verify that it is possible to carry out the species separation of a binary mixture in this geometrical configuration. We consider the case of high frequency and small amplitude vibrations, so that a formulation using time averaged equations can be used. The results of the linear stability analysis of the mechanical equilibrium and the unicellular flow in an infinite porous layer is studied analytically and using a spectral method.

## 2 Mathematical formulation



**Figure 1.** A rectangular cavity,  $H$  is the height and  $L$  is the width, the bottom horizontal plate is submitted to constant uniform heat flux and the top one is maintained at a constant temperature while no mass flux is imposed

We consider a rectangular cavity with aspect ratio  $A = L/H$ , where  $H$  is the height of the cavity along the vertical axis and  $L$  is the width along the horizontal axis (Fig.1). The aspect ratio is assumed infinite in the stability analysis. The cavity is filled with a porous medium saturated by a binary fluid for which the Soret effect is taken into account. Dirichlet and Neumann boundary conditions for

temperature are applied to the horizontal walls ( $z = 0$ ,  $z = H$ ). The vertical walls ( $x' = 0$ ,  $x' = L$ ) are impermeable and adiabatic. All the boundaries are assumed rigid. The cavity is subjected to linear harmonic oscillations in the vertical direction (amplitude  $b$  and dimensional frequency  $\varpi$ ).

### 2.1 Approximation

- (1) The solid matrix is homogeneous, nondeformable, and chemically inert with respect to the fluid.
- (2) The fluid is single phase and Newtonian.
- (3) The Darcy number is small, so the inertia terms may be neglected.
- (4) The solid and fluid phases are in thermal equilibrium.
- (5) The relative temperature differences are small enough for the Boussinesq approximation to hold.
- (6) Thermal dissipation is negligible and an effective thermal conductivity may be assumed.
- (7) The vibration frequency is large and the displacement amplitude is small enough for the averaging method to hold.

### 2.2 The mathematical model

For the governing equations, we adopt the Boussinesq approximation and Darcy equation, for which the non-stationary term is taken into account.

We set all the properties of the binary fluid constant except the density  $\rho$  in the buoyancy term, which depends linearly on the local temperature and mass fraction:

$$\rho = \rho_r [1 - \beta_T (T' - T_r) - \beta_C (C' - C_r)] \quad (1)$$

where  $\rho_r$  is the fluid mixture density at temperature  $T_r$  and mass fraction  $C_r$ .  $\beta_T$  and  $\beta_C$  are the thermal and concentration expansion coefficients respectively.

When we consider the frame of reference related to the oscillating system, the gravitational field  $\mathbf{g}$  is replaced by:  $\mathbf{g} + b\varpi^2 \sin(\varpi t') \mathbf{e}_z$  where  $\mathbf{e}_z$  is the unit vector along the vertical axis (vibration axis) and  $t'$  the dimensional time. The reference scales are  $H$  for the length,  $\sigma H^2/a$  for the time, with  $a = \lambda^*/(\rho c)_f$  and  $\sigma = (\rho c)^*/(\rho c)_f$  (where  $\lambda^*$  and  $(\rho c)^*$  are respectively the effective thermal conductivity and volumetric heat capacity of the porous medium),  $a/H$  for the velocity ( $a$  is the effective thermal diffusivity),  $\Delta T = q'H/\lambda^*$  for the temperature and  $\Delta C = -\Delta T C_i(1 - C_i) D_T^*/D^*$  for the mass fraction where  $C_i$ ,  $D_T^*$ ,  $D^*$  are the initial mass fraction, the thermodiffusion and the mass diffusion coefficients of the denser component respectively. The dimensionless temperature and mass fraction are respectively defined by:  $T = (T' - T_2)/\Delta T$ ,  $C = (C' - C_i)/\Delta C$ .

Thus, the dimensionless governing conservation equations for mass, momentum, energy and chemical species, when

the Soret effect is taken into account are:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{V} = 0, \\ B\partial_t \mathbf{V} + \mathbf{V} = -\nabla P + Ra(T + \psi C)(1 - R \sin(\omega t)) \mathbf{e}_z, \\ \partial_t T + \mathbf{V} \cdot \nabla T = \nabla^2 T, \\ \epsilon \partial_t C + \mathbf{V} \cdot \nabla C = \frac{1}{Le} (\nabla^2 C - \nabla^2 T), \end{cases} \quad (2)$$

where  $B = Da(\rho c)_f / (\rho c)^* \epsilon \text{Pr}$  is the inverse Vadasz number ( $B = 1/Va$ ),  $Da = K/H^2$  is the Darcy number and  $K$  the permeability of the porous medium.

The problem under consideration depends on eight non-dimensional parameters: the thermal Rayleigh number,  $Ra = Kg\beta_T H \Delta T / a\nu$ ,  $R = b\omega^2/g$ , the separation ratio  $\psi = -(\beta_c/\beta_T)(D_T/D)C_i(1 - C_i)$ , the Lewis number  $Le = a^*/D^*$ , the normalized porosity  $\epsilon = \epsilon^*(\rho c)_f / (\rho c)^*$  (where  $\epsilon^*$  is the porosity), the dimensionless frequency  $\omega = \omega'^2(\rho c)^* H / a^*(\rho c)_f$ , the aspect ratio  $A$  and the factor  $B$ . The dimensionless boundary conditions are:

$$\begin{cases} \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \forall M \in \partial\Omega, \\ \frac{\partial C}{\partial z} = \frac{\partial T}{\partial z} = -1, \quad z = 0 \quad \forall x \in [0, A] \\ \frac{\partial C}{\partial z} = \frac{\partial T}{\partial z}, \quad z = 1 \quad \forall x \in [0, A] \\ T = 0, \quad z = 1 \quad \forall x \in [0, A] \\ \frac{\partial C}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial x} = 0, \quad x = 0, A \quad \forall z \in [0, 1] \end{cases} \quad (3)$$

In the momentum equation the term  $B\partial\mathbf{V}/\partial t$  is usually neglected since  $B$  is of order  $10^{-6}$ . However, in our problem, high-frequency vibrations cause very large accelerations, making it necessary to consider this non-stationary term; [6]. The term  $\sin(\omega t)$  allows very large variation of  $\partial\mathbf{V}/\partial t$  and  $B\partial\mathbf{V}/\partial t = O(\mathbf{V})$ .

### 3 The averaged equations

In the limiting case of high frequency and small amplitude vibrations, the averaging method can be applied to study thermal vibrational convection. According to this method, each field ( $\mathbf{V}$ ,  $P$ ,  $T$ ,  $C$ ) is subdivided into two parts: the first part varies slowly with time (i.e. the characteristic time is large with respect to the period of the vibrations) and the second one varies quickly with time (i.e. the characteristic time is of the order of magnitude of the vibrational period):

$$(\mathbf{V}, P, T, C) = (\mathbf{V}^*, P^*, T^*, C^*)(t) + (\mathbf{u}', p', \theta', c')(\omega, t). \quad (4)$$

Here,  $\mathbf{V}^*$ ,  $P^*$ ,  $T^*$ ,  $C^*$  are the averaged fields (i.e. the mean value of the field calculated over the period  $\tau = 2\pi/\omega$ ) of the velocity, pressure, temperature and mass fraction. The decoupling between the pulsational parts of the velocity and the pressure is obtained by using a Helmholtz decomposition:

$$(T^* + \psi C^*)\mathbf{e}_z = \mathbf{W} + \nabla\xi \quad (5)$$

where  $\mathbf{W}$  is the solenoidal part of  $(T^* + \psi C^*)\mathbf{e}_z$  satisfying  $\nabla \cdot \mathbf{W} = 0$ . Thus, the averaged flow equations are:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{V}^* = 0, \\ B\partial_t \mathbf{V}^* + \mathbf{V}^* = -\nabla P^* + (Ra(T^* + \psi C^*) \\ + Rv(\nabla T^* + \frac{\psi}{\epsilon^*} \nabla C^*) \cdot \mathbf{W})\mathbf{e}_z, \\ \partial_t T^* + (\mathbf{V}^* \cdot \nabla)T^* = \nabla^2 T^*, \\ \epsilon \partial_t C^* + (\mathbf{V}^* \cdot \nabla)C^* = \frac{1}{Le} (\nabla^2 C^* - \nabla^2 T^*), \\ (T^* + \psi C^*)\mathbf{e}_z = \mathbf{W} + \nabla\xi, \\ \nabla \cdot \mathbf{W} = 0. \end{cases} \quad (6)$$

The modified vibrational Rayleigh number  $Rv = \frac{Ra^2 R^2 B}{2(B^2 \omega^2 + 1)}$  characterizes the intensity of the vibrations. In addition to the boundary conditions (6-10) applied to the mean fields, we assume that:

$$\mathbf{W} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ on } \partial\Omega. \quad (7)$$

Note that, for the classical Darcy model, the term  $B\partial\mathbf{V}/\partial t$  in the momentum equation is neglected as  $B \approx 10^{-6}$ . Eliminating this term leads to incorrect mean equations which are independent of the vibration. It can be seen that, even if  $B \approx 10^{-6}$  the vibrational Rayleigh number  $Rv = \frac{Ra^2 R^2 B}{2(B^2 \omega^2 + 1)}$  can have a finite value.

### 4 Linear stability of the equilibrium solution in an infinite horizontal porous layer

The stability of the equilibrium solution was studied by Charrier-Mojtabi *et al.* [8]. They restricted their study to the case  $Le = 2$  for which the fluid considered is in the gaseous state, and so the Dufour effect should be taken into account. We extended this study to the case of a high Lewis number and we focused on the transition from the equilibrium solution to the unicellular flow obtained for binary mixtures.

This problem admits a mechanical equilibrium solution characterized by:

$$\mathbf{V}_0^* = \mathbf{0}, \quad T_0^* = -z + cst, \quad C_0^* = -z + \frac{1}{2}, \quad \mathbf{W}_0 = \mathbf{0} \quad (8)$$

In order to analyze the stability of this conductive solution, we introduce the velocity stream function  $\psi'$ , temperature  $\theta$ , the transformation  $\eta = c - \theta$ , and finally, the solenoidal stream function  $\varphi'$ , characterized by:

$$v_x = \frac{\partial\psi'}{\partial z}, \quad v_z = -\frac{\partial\psi'}{\partial x} \text{ et } w_x = \frac{\partial\varphi'}{\partial z}, \quad w_z = -\frac{\partial\varphi'}{\partial x}$$

We assume that the perturbations  $(\psi'(z), \theta(z), \tilde{c}(z), \tilde{\varphi}'(z))$  are small.

The perturbation quantities are chosen as follows:

$$(\psi', \theta, c, \varphi') = (\tilde{\psi}'(z), \tilde{\theta}(z), \tilde{c}(z), \tilde{\varphi}'(z))e^{Ik_x x + \sigma t} \quad (9)$$

We introduce a new function  $\tilde{\eta} = \tilde{c} - \tilde{\theta}$ . The system of equations can be written as:

$$\begin{cases} (B\sigma + 1)(D^2 - k^2)\tilde{\psi}' + RaIk((1 + \psi)\tilde{\theta} + \psi\tilde{\eta}) \\ - Rv\varphi'k^2(1 + \frac{\psi}{\epsilon}) = 0, \\ (D^2 - k^2)\tilde{\theta} - \sigma\tilde{\theta} - Ik\tilde{\psi}' = 0, \\ (D^2 - k^2)\tilde{\eta}/Le - \epsilon\sigma(\tilde{\eta} + \tilde{\theta}) - Ik\tilde{\psi}' = 0, \\ (D^2 - k^2)\tilde{\varphi}' + Ik((1 + \psi)\tilde{\theta} + \psi\tilde{\eta}) = 0, \end{cases} \quad (10)$$

where  $D = \frac{\partial}{\partial z}$ ,  $k$  is the wave number in the horizontal (ox) direction,  $I^2 = -1$ , and  $\sigma$  is the temporal exponential growth rate of perturbation.

The corresponding boundary conditions are :

$$\begin{cases} z = 0 : \tilde{\psi}' = \tilde{\varphi}' = \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial z} = \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial z} = 0. \\ z = 1 : \tilde{\psi}' = \tilde{\varphi}' = \tilde{\theta} = \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial z} = 0. \end{cases} \quad (11)$$

#### 4.1 Limiting case of the long-wave mode instability

We study the special case of the long-wave mode theoretically. In some related studies in fluid media, Razi *et al.* [11] showed that asymptotic analysis resulted in a closed form relation for the stability threshold. In order to obtain such a relation, a regular perturbation method with the wave number as the small parameter is performed to simplify the procedure, we drop the tilde symbol in and we expand  $(\psi', \theta, \eta, \varphi', \sigma)$  as:

$$(\psi', \theta, \eta, \varphi', \sigma) = \sum_{n=0}^{\infty} k^n (\psi'_n, \theta_n, \eta_n, \varphi'_n, \sigma_n), \quad (12)$$

with boundary conditions:

$$\begin{cases} z = 0 : \psi'_n = \varphi'_n = \frac{\partial \theta_n}{\partial z} = \frac{\partial \eta_n}{\partial z} = 0. \\ z = 1 : \psi'_n = \varphi'_n = \theta_n = \frac{\partial \eta_n}{\partial z} = 0. \end{cases} \quad (13)$$

By substituting expressions in the amplitude equations resulting from the linear stability analysis and factoring the same order of  $k$ , we find a sequential system of equations: For the zeroth order ( $k^0$ ):

$$\psi'_0 = 0, \quad \varphi'_0 = 0, \quad \theta_0 = 0, \quad \eta_0 = cst, \quad \sigma_0 = 0 \quad (14)$$

At order 1, we have:

$$\begin{cases} \theta_1 = 0, \quad \psi'_1 = -IRa\psi\eta_0(z^2 - z)/2, \quad \eta_1 = cst, \\ \varphi'_1 = -I\psi\eta_0(z^2 - z)/2, \quad \sigma_1 = 0 \end{cases} \quad (15)$$

and at order 2:

$$\begin{cases} \theta_2 = Ra\psi\eta_0(z^4 - 2z^3 + 1)/24, \\ \psi'_2 = -IRa\psi\eta_1(z^2 - z)/2, \\ \eta_2 = \frac{\eta_0 z^2}{2}(Le\epsilon\sigma_2 + 1) + \frac{RaLe\psi\eta_0}{24}z^3(z - 2), \\ \varphi'_2 = -I\psi\eta_1(z^2 - z)/2. \end{cases} \quad (16)$$

After involving the solvability condition, we find:

$$\epsilon\sigma_2 = \frac{1}{Le} - \psi \frac{Ra}{12}. \quad (17)$$

We note that  $\sigma_2$  is real, indicating that the conductive solution loses stability through a stationary bifurcation. For the marginal stability,  $\sigma_2$  is set equal to zero and we obtain the Rayleigh number:

$$Ra = \frac{12}{\psi Le} \quad (18)$$

#### 4.2 Stability analysis results for arbitrary values of wavenumber

The disturbances are developed in terms of polynomial functions verifying all the boundary conditions except those along the inner plates:

$$\begin{cases} \psi' = \sum_{n=1}^N a_n (1 - z) z^n \\ \theta = b_1 (z^2 - 1) + b_2 (z^3 - 1) + \sum_{n=1}^N b_{n+2} (z^2 - 1) z^{n+1} \\ \eta = d_1 + d_2 (z^2 - \frac{2}{3}z^3) + \sum_{n=1}^N d_{n+2} (1 - z)^2 z^{n+1} \\ \varphi' = \sum_{n=1}^N e_n (1 - z) z^n \end{cases} \quad (19)$$

The Tau spectral method used is similar to the Galerkin method. The test functions used for  $\psi'$ ,  $\theta$ ,  $\varphi'$  and  $\eta$  verify all the boundary conditions.

The first bifurcation is stationary. The results are presented in the stability diagram  $Ra_c = f(\psi)$  and  $kc = f(\psi)$  for  $\psi > 0$ . Figures 2 and 3 illustrate the effect of vibration on the onset of convection. For the case  $Le = 100$ ,  $\epsilon = 0.5$ ,  $\omega = 10^4$ ,  $B = 10^{-6}$  and for  $R = 0, 150, 300$ , it can be noted that  $Ra_c$  increases with  $R$ .

For amplitude of vibration  $b = 10^{-4}m$  and height of cavity  $H = 3.10^{-3}m$  ( $b \ll H$ ), the value of  $R$  used ( $R = 100$ ) leads to dimensional parameters of vibrations at which substantial effects take place :  $\omega'^2 = 10^7 s^{-1}$  or frequency  $f \approx 500Hz$ . The physical time associated with this moderate frequency is smaller than the kinematic, thermal or mass diffusive time for many binary fluids.

Figure 4 shows the influence of vibrations on  $\psi_{uni}$ , i.e. a decrease in the separation ratio beyond which the critical wavenumber vanishes ( $k_c = 0$ ). We note that  $\psi_{uni}$  decreases when  $R$  increases. So by adding vibrations, we can separate most binary mixtures. In the case  $R = 0$ , we obtain  $\psi_{uni} = \frac{1}{\frac{10}{39}Le - 1}$ . Table 1 compares the critical Rayleigh and wavenumbers of the classical situation (absence of vibration) with the situation under different values of the vibration parameter.

#### 5 Analytical solution of the unicellular flow

In the case of a shallow cavity ( $A \gg 1$ ), in order to solve the problem analytically, the parallel flow approximation is considered [9,10]. The streamlines are assumed to be parallel to the horizontal walls except in the vicinity of the vertical walls. In this case, the vertical component of velocity can be neglected. The temperature and mass fraction profiles are written as the sum of two terms: the first defining the linear longitudinal variation and the second giving the transverse distribution: The basic flow, denoted with a subscript 0, is then given as follows:

$$\begin{cases} \mathbf{V}_0 = U(z) \mathbf{e}_x, \quad T_0 = bx + h(z), \\ C_0 = mx + g(z), \quad \mathbf{W}_0 = W_1(z) \mathbf{e}_x. \end{cases} \quad (20)$$

where  $b$  and  $m$  are respectively the unknown constant temperature gradient and mass fraction gradient in the  $x$

direction. For the stationary state, when the above mentioned assumptions are made and the corresponding boundary conditions are considered, we obtain the velocity, temperature and concentration fields:

$$\begin{cases} U(z) = -\psi_0(2z-1), & W_1(z) = -\frac{\psi_0}{Ra}(2z-1), \\ T_0 = -z+1, & C_0 = mx+g(z). \end{cases} \quad (21)$$

with:

$$\begin{cases} g(z) = \frac{\psi_0}{12} \frac{RaLe\psi_0(6z^2-4z^3-1)}{Le^2\psi_0^2+30} + \frac{1-mA}{2} - z, \\ m = \frac{5Le\psi_0}{Le^2\psi_0^2+30}. \end{cases} \quad (22)$$

Then we have  $2\psi_0^3Le^2 + (60 - 5RaLe\psi) \psi_0 = 0$  the solutions of which are:  $\psi_0 = 0$  and  $\psi_0 = \pm \frac{1}{2} \frac{\sqrt{10RaLe\psi-120}}{Le}$ . The dimensionless and the dimensional mass fraction gradients are:

$$m = \pm \frac{\sqrt{10RaLe\psi-120}}{RaLe\psi}, \quad m_{dim} = \frac{\sqrt{10q_1q_2H\Delta T-120}}{H^2q_1} \quad (23)$$

where :  $q_1 = Kg\beta_c/\nu D$  and  $q_2 = -C_0(1-C_0)D_T/D$

Figure 5 illustrates the evaluation of the dimensional mass fraction gradient  $m_{dim}$  according to  $H$  and  $\Delta T$  for a mixture of water and ethanol (60.88 % by weight of water). It follows that, for a fixed height of the cavity  $H$ , the mass fraction gradient will increase as  $\Delta T$  increases, while the  $H$  that maximizes the mass fraction gradient depends on the choice of  $\Delta T$ , and is :  $H_{max} = \frac{16}{q_1q_2\Delta T}$ .

## 6 Linear stability analysis of the unicellular flow

In order to analyse the stability of the unicellular flow, we introduce the perturbation of the vertical velocity component  $w$ , the perturbation of the vertical component of  $\mathbf{W}$ ,  $w_2$ , the perturbation of temperature  $\theta$ , the concentration  $c$  and the transformation  $\eta = c - \theta$ . The disturbances are developed in the form of normal modes. It is assumed that the perturbation quantities are sufficiently small for the second-order terms to be neglected. The system of equations for the amplitudes can be written as:

$$\begin{cases} (B\sigma + 1)(D^2 - k^2)w + Rak^2[(1 + \psi)\theta + \psi\eta] \\ \quad + Rv[IkDw_2(b + \frac{\psi}{\epsilon}m) + \\ k^2w_2(DT_0 + \frac{\psi}{\epsilon}DC_0) + Ik^3w_2[(1 + \psi)\theta + \psi\eta] = 0 \\ Ik(D^2 - k^2)\theta - \sigma Ik\theta - wIkDT_0 + Uk^2\theta + bDw = 0 \\ \frac{Ik}{Le}(D^2 - k^2)(\eta + \theta) - \sigma Ik(\eta + \theta) - wIkDC_0 \\ \quad + Uk^2(\eta + \theta) + mDw = 0 \\ (D^2 - k^2)w_2 + k^2[(1 + \psi)\theta + \psi\eta] = 0 \end{cases} \quad (24)$$

The corresponding boundary conditions are given as:

$$\begin{cases} w = 0, & \theta = \frac{\partial \eta}{\partial z} = 0, & w_2 = 0 \quad \text{for } z = 1 \\ w = 0, & \frac{\partial \theta}{\partial z} = \frac{\partial \eta}{\partial z} = 0, & w_2 = 0 \quad \text{for } z = 0 \end{cases} \quad (25)$$

The linear stability equations are solved using the 4th order Galerkin method:

$$\begin{cases} w = \sum_{n=1}^N a_n (1-z) z^n \\ \theta = b_1 (z^2 - 1) + b_2 (z^3 - 1) + \sum_{n=1}^N b_{n+2} (z^2 - 1) z^{n+1} \\ \eta = d_1 + d_2 (z^2 - \frac{2}{3}z^3) + \sum_{n=1}^N d_{n+2} (1-z)^2 z^{n+1} \\ w_2 = \sum_{n=1}^N e_n (1-z) z^n \end{cases} \quad (26)$$

For the value of  $\psi$  and  $Le$  studied, the critical Rayleigh number leading to stationary bifurcation is always higher than the one leading to Hopf bifurcation. So, in this study we focus on the critical number related to the Hopf bifurcation. The results are illustrated in table 2 for the case  $\psi = 0.3$ ,  $Le = 100$ ,  $\epsilon = 0.5$ ,  $A = 10$ ,  $\omega = 10^4$  and  $B = 10^{-6}$ , the vertical vibrations have a stabilizing effect on convective motions and increase the value of the critical thermal Rayleigh number  $Ra_c$ . Thus the vibrations can be used to maintain the unicellular flow and allow species separation over a wider range of Rayleigh numbers. It should be mentioned that vibrations reduce the critical wave numbers  $k_c$  and the Hopf frequency  $\omega_c$ . This means that vibrations can also be used to decrease the number of convective cells at the transition from unicellular flow to multicellular flow.

## 7 2D Numerical simulations

The averaged equations (eq.6) with the associated boundary conditions were solved using the finite element method. The influence of vibrations on the onset of convection was investigated for a cell of aspect ratio  $A=10$  for  $Le = 100$  and  $\epsilon = 0.5$ , ( $B$  was fixed at  $10^{-6}$ ). It was observed that the critical parameters of the bifurcations differed very little between the case  $A = 10$  and the case of a cell of infinite horizontal extent. A structured mesh  $150 \times 30$  was used for the finite element method for  $A = 10$ . For the onset of stationary convection, the results for  $Le = 100$  are presented on Figures 6 and 7. For  $\psi = 0.02$ , without vibration ( $Rv = 0$ ), the critical parameters  $Ra_c = 5.78$ ,  $k_c = 1.00$  are obtained from the linear stability analysis. For the same value of  $\psi$  but with vibrations ( $Rv = 10$ ), we obtain  $Ra_c = 6$ ,  $k_c = 0$  from the linear stability analysis, so the critical wavenumber is zero, which means that the flow at the onset of convection is unicellular. To confirm this result, we used the direct numerical simulation to study the case  $\psi = 0.02$  for a value of  $Ra$  close to the critical value ( $Ra = 6$ ) first without vibrations ( $Rv = 0$ ) and then with vibrations ( $Rv = 10$ ). Figure 6(a) shows the streamlines for  $Rv = 0$ . In this case, the flow is multicellular and we cannot use the horizontal cell to separate the components of a binary mixture. Figure 6(b) shows the streamlines for the same values of all the parameters but with vibrations. It can be observed that vibrations modify the structure of the flow from multicellular to unicellular. Similar results were obtained for  $\psi = 0.01$  (Figure 7). A study by Yacine [12], in the case of a binary fluid subjected to uniform heat flux on the horizontal and vertical walls shows that for a low  $Ra$  the 2D solution remains

valid in 3D. Moreover, in a porous medium the hydrodynamic boundary conditions are slip one while they are no-slip for fluid. The walls of the cavity in the third direction therefore have less influence on the flow than in fluid medium.

## 8 Conclusions

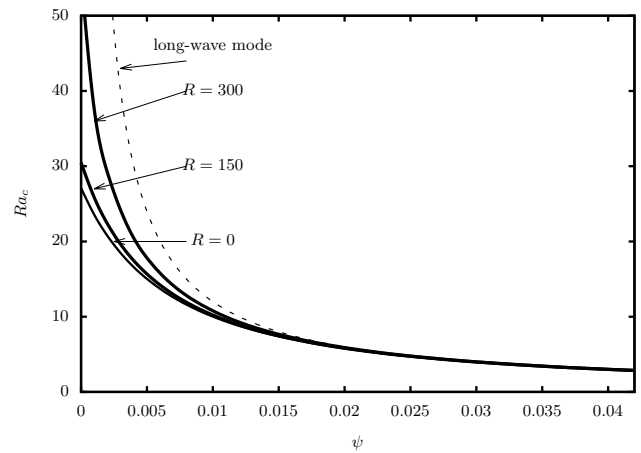
Two-dimensional thermosolutal Soret-driven convection under mechanical vibration was studied analytically and numerically. The vibration was in the limiting range of high frequency and small amplitude and its direction was taken parallel to the temperature gradient. The geometries considered were an infinite horizontal layer and a confined cavity. Linear stability analysis of equilibrium and unicellular solutions were studied for positive values of  $\psi$ . The equilibrium solution was found to lose its stability via a stationary bifurcation. For the long wave-mode, the Rayleigh number was obtained as  $Ra = \frac{12}{Le\psi}$ . It was observed that the vertical vibrations had a stabilizing effect on convection. The vibrations could be used to decrease the value of the separation factor leading to the unicellular flow  $\psi_{uni}$ , allowing separation of the binary mixture in a horizontal cell for a broad range of binary mixtures. The dimensional mass fraction gradient  $m_{dim}$  was defined according to  $H$  and  $\Delta T$ . It followed that, for a fixed height of the cavity  $H$ , the mass fraction gradient increased with  $\Delta T$ , while the height that maximized the mass fraction gradient was  $H_{max} = \frac{16}{q_1 q_2 \Delta T}$ . The expression of the analytical relation  $S = A \cdot \frac{\sqrt{10 Ra Le \psi - 120}}{Ra Le \psi}$  giving the separation value is identical to the one obtained by Elhajjar *et al.*[10] for a cell with horizontal walls maintained at constant but different temperatures.

The authors are grateful to CNES (Centre National d'Etudes Spatiales) for their financial support.

## References

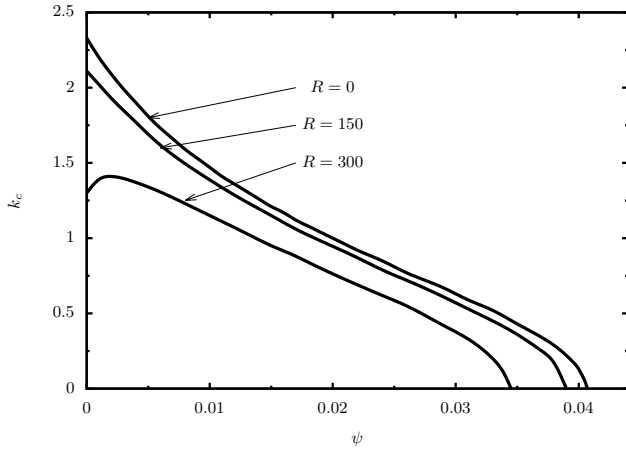
1. Nield, D.A., Bejan, A., *Convection in Porous Media*, (4<sup>th</sup> edition. Springer, Inc., New York, 2013)
2. Khallouf, H. and Gershuni, G. Z. and Mojtabi, A., *Some properties of convective oscillations in porous medium* Numerical Heat Transfer part A-Applications D **30**, (1996) 605-618.
3. Gershuni, G.Z., Kolesnikov, A.K., Legros, J.C., Myznikova, B.I., *On the vibrational convective instability of a horizontal, binary-mixture layer with Soret effect*, Journal of Fluid Mechanics, **330**, (1997) 251-269.
4. Gershuni, G.Z., Lyubimov, D.V., *Thermal vibrational convection*, (John Wiley and Sons, 1998), 358
5. Gershuni, G.Z., Kolesnikov, A.K., Legros, J.C., Myznikova, B.I., *On the convective instability of a horizontal binary mixture layer with Soret effect under transversal high frequency vibration*, International Journal of Heat and Mass Transfer, **42**, (1999) 547-553

6. Zen'kovskaya S.M., Rogovenko, T.N., *Filtration convection in a high-frequency vibration field*, J. Appl. Mech. Tech. Phys., **40**, (1999) 379-385
7. Bardan, G., Mojtabi, A., *On the Horton-Rogers-Lapwood convective instability with vertical vibration*, Phys. Fluids, **12**, (2000) 1-9
8. Charrier-Mojtabi, M.C., Razi, Y.P., Maliwan, K., Mojtabi, A., *Influence of vibrations on Soret-Driven convection in porous media*, Num. Heat Transfer A. Appl, **46**, (2004) 981-993
9. Bennacer, R., Mahidjiba, A., Vasseur, P., Beji, H., Duval, R., *The Soret effect on convection in a horizontal porous domain under cross temperature and concentration gradients*, International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow, **13**, (2003) 199 - 215
10. Elhajjar, B., Mojtabi, A., Charrier-Mojtabi, M.C., *Influence of vertical vibration on the separation of a binary mixture in a horizontal porous layer heated from below*, International Journal of Heat and Mass Transfer, **52**, (2009) 165-172
11. Razi, Y.P., Charrier-Mojtabi, M.C., Mojtabi, A., *Thermal vibrational convection in a porous media saturated by a pure or binary fluid*, Theory and Applications of Transport in Porous Media, **22**, (2008) 149-179
12. Yacine, L., *A study of the thermogravitational separation in fluid and porous cavities subjected to thermal cross-fluxes* (PhD thesis, Université Paul Sabatier, 2015) 53-61

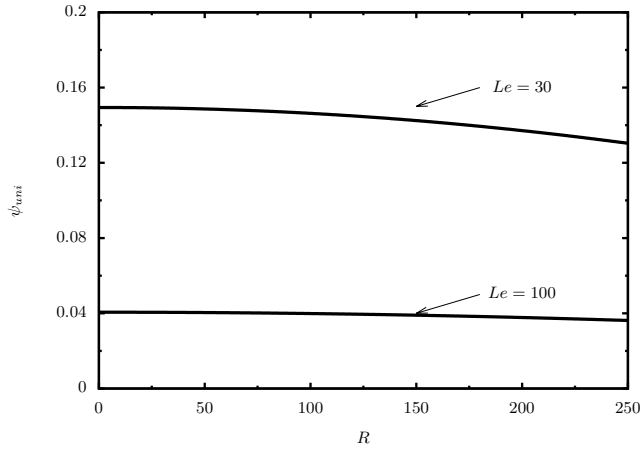


**Figure 2.** Effect of vertical vibration on the onset of convection for  $Le = 100$ ,  $\epsilon = 0.5$ ,  $\omega = 10^4$  and  $B = 10^{-6}$





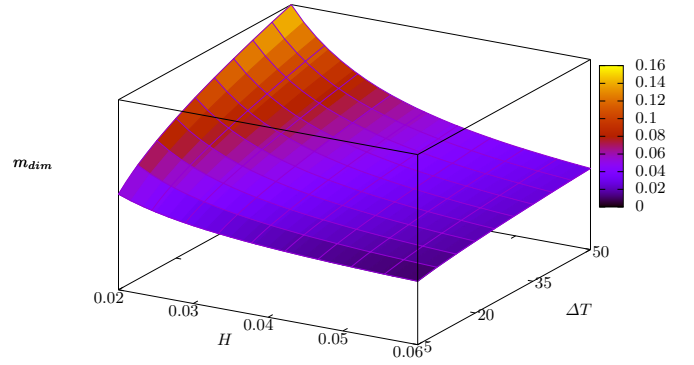
**Figure 3.** Effect of vertical vibration on the critical wave number at the onset of convection for  $Le = 100$ ,  $\epsilon = 0.5$ ,  $\omega = 10^4$  and  $B = 10^{-6}$



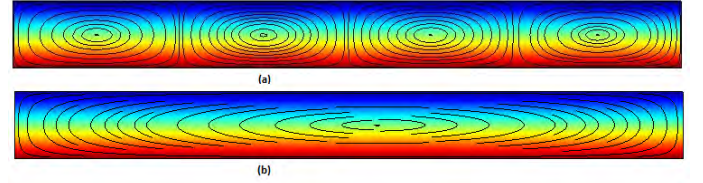
**Figure 4.** Effect of the vertical vibration on the onset of the unicellular separation ratio beyond which the flow at the onset of convection becomes unicellular for  $\epsilon = 0.5$ ,  $\omega = 10^4$  and  $B = 10^{-6}$

**Table 1.** Comparison of the critical Rayleigh and the wave number for  $Le = 100$ ,  $\epsilon = 0.5$ ,  $\omega = 10^4$  and  $B = 10^{-6}$

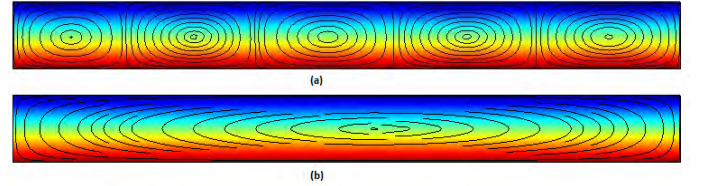
$\psi$	$R = 0$		$R = 100$		$R = 300$	
	$Ra_c$	$k_c$	$Ra_c$	$k_c$	$Ra_c$	$k_c$
0	27.10	2.33	28.46	2.24	55.51	1.30
0.001	23.56	2.20	24.51	2.12	37.58	1.39
0.002	20.75	2.09	21.42	2.02	29.17	1.41
0.004	16.59	1.90	16.96	1.84	20.45	1.37
0.005	15.03	1.81	15.31	1.76	17.82	1.34
-0.005	-24	0	-24	0	-24	0
-0.004	-30	0	-30	0	-30	0
-0.002	-60	0	-60	0	-60	0
-0.001	-120	0	-120	0	-120	0



**Figure 5.** Curve of dimensional mass fraction gradient  $m_{dim}$  for a mixture of water and ethanol (60.88 % by weight of water), for ( $\beta_c = 0.2$ ,  $K = 10^{-9}$ ,  $C_0 = 0.5$ ,  $D = 4.10^{-10}$ ,  $D_T = 10^{-12}$ ,  $\nu = 3.10^{-6}$ )



**Figure 6.** Streamlines for  $Le = 100$ ,  $\psi = 0.02$ ,  $Ra = 6$ , (a)  $Rv = 0$  (without vibration) (b)  $Rv = 10$ . A multicellular flow is obtained at the transition from the equilibrium solution for  $Rv = 0$ , whereas a unicellular flow is obtained for  $Rv = 10$ .



**Figure 7.** Streamlines for  $Le = 100$ ,  $\psi = 0.01$ ,  $Ra = 12.2$ , (a)  $Rv = 10$  (without vibration) (b)  $Rv = 50$ . A multicellular flow is obtained at the transition from the equilibrium solution for  $Rv = 10$ , whereas a unicellular flow is obtained for  $Rv = 50$ .

**Table 2.** Effect of vibrations on the critical values of Rayleigh number  $Ra_c$ , wave number  $k_c$  and frequency  $\omega_c$  associated with transition from unicellular to multicellular flow for  $\psi = 0.3$ ,  $Le = 100$ ,  $\epsilon = 0.5$ ,  $\omega = 10^4$  and  $B = 10^{-6}$

$R$	$k_c$	$Ra_c$	$\omega_c$
0	5.25	16.87	1.55
100	5.21	16.91	1.54
150	5.16	16.95	1.52
200	5.09	17.00	1.49
250	5.00	17.07	1.45
300	4.90	17.15	1.41



# Bibliographie

- [1] A. Bahloul, N. Boutana, and P. Vasseur. Double-diffusive and soret-induced convection in a shallow horizontal porous layer. *Journal of Fluid Mechanics*, 491 :325 – 352, 2003.
- [2] A. Bahloul, M A. Yahiaoui, P. Vasseur, and L. Robillard. Thermogravitational separation in a vertical annular porous layer. *International Communications in Heat and Mass Transfer*, 31 :783 – 794, 2004.
- [3] G. Bardan and Mojtabi A. On the horton-rogers-lapwood convective instability with vertical vibration : Onset of convection. *Physics of Fluids*, 12 :2723–2731, 2000.
- [4] J. Bear. *Dynamics of Fluids in Porous Media*. 1972.
- [5] H. Bénard. Les tourbillons cellulaires dans une nappe liquide transportent de la chaleur par convection en régime permanent. *Ann. Chim. Phys.*, 723 :62 – 79, 1901.
- [6] R. Bennacer, A.Mahidjiba, P. Vasseur, H. Beji, and R. Duval. The soret effect on convection in a horizontal porous domain under cross temperature and concentration gradients. *International Journal of Numerical Methods for Heat and Fluid Flow*, 13(3) :199 – 215, 2003.
- [7] R. G. Bird, W. E. Stewart, and E. N. Lightfoot. *Transport Phenomena*. 1960.
- [8] S. Bories. *Natural convection in porous media*. 1985.
- [9] M. Bourich, A. Amahmid, and M. Hasnaoui. Double diffusive convection in a porous enclosure submitted to cross gradients of temperature and concentration. *Energy Conversion and Management*, 45(11-12) :1655 – 1670, 2004.
- [10] J. Boussinesq. *Théorie analytique de la chaleur*. Paris, 1903.
- [11] H. Brand and V. Steinberg. Convection instabilities in binary mixtures in a porous medium. *Physica A : Statistical and Theoretical Physics*, 119(1-2) :327 – 338, april 1983.
- [12] H. Brand and V. Steinberg. Nonlinear effects in the convective instability of a binary mixture in a porous medium near threshold. *Physics Letters A*, 93(7) :333 – 336, January 1983.

- [13] S. Chapman. The possibility of separating isotopes. *Philosophical Magazine*, 38 :182, 1919.
- [14] M. C. Charrier-Mojtabi, B. Elhajjar, and A. Mojtabi. Analytical and numerical stability analysis of solet-driven convection in a horizontal porous layer. *Physics of Fluids*, 19(12) :124104, 2007.
- [15] M. C. Charrier-Mojtabi, B. Elhajjar, B. Ouattara, A. Mojtabi, and P. Costesèque. Solet-driven convection and separation of binary mixtures in a porous horizontal slot submitted to a heat flux. *Comptes Rendus de Mécanique*, 339(5) :303 – 309, 2011.
- [16] M. C. Charrier Mojtabi, Y. P. Razi, K. Maliwan, and A. Mojtabi. Influence of vibration on solet-driven convection in porous media. *Numerical Heat Transfer, Part A : Applications*, 46(10) :981 – 993, 2004.
- [17] P. Chassaing. *Mécanique des fluides, élément d'un premier parcours*. 2000.
- [18] M. A. Combarous. *Convection naturelle et mixte en milieu poreux*. PhD thesis, Université de Paris VI, 1970.
- [19] M. A. Combarous and S. A. Bories. Modelization of natural convection inside a horizontal porous layer using a solid-fluid transfer coefficient. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 17(4) :505 – 515, April 1974.
- [20] D. E. Cormack, L. G. Leal, and J. Imberger. Natural convection in a shallow cavity with differentially heated end walls. part 1. asymptotic theory. *Journal of Fluid Mechanics Digital Archive*, 65(02) :209–229, 1974.
- [21] P. Costesèque, M. Hridabba, and J. Sahores. Sur la différentiation des hydrocarbures constituants la fraction légère d'un brut par la thermodiffusion gravitationnelle en milieux poreux. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Paris*, 304 :1069 – 1074, 1987b.
- [22] P. Costesèque, El. Maataoui, and J. Sahores. Sur la différentiation des hydrocarbures constituants la fraction légère d'un brut par la thermodiffusion gravitationnelle en milieux poreux. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Paris*, 305 :1531 – 1536, 1987a.
- [23] S. R. De Groot. Théorie phénoménologique du procédé thermo-gravitationnel de séparation dans un liquide. *Physica*, 9 :801 – 816, 1942.
- [24] A. Dybbs and R. Edwards. A new look at porous media fluid mechanics darcy to turbulen. *Fundamentals of Transport Phenomena in Porous Media Martinus Nishoff, Dordrecht*, pages 199–256, 1984.

- [25] B. Elhajjar, M. C. Charrier-Mojtabi, and A. Mojtabi. Separation of a binary fluid mixture in a porous horizontal cavity. *Physical Review E*, 77(2) :026310, February 2008.
- [26] B. Elhajjar, A. Mojtabi, P. Costesèque, and M. C. Charrier Mojtabi. Separation in an inclined porous thermogravitational cell. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 53 :4844 – 4851, 2010.
- [27] B. Elhajjar, A. Mojtabi, M. Marcoux, and M. C. Charrier-Mojtabi. Study of thermogravitation in a horizontal fluid layer. *Comptes Rendus Mecanique*, 334 :621 – 627, 2006.
- [28] A. H. Emery and M. Lorenz. Thermal diffusion in a packed column. *AIChE Journal*, 9(5) :660 – 663, 1963.
- [29] W. H. Furry, R. C. Jones, and L. Onsager. On the theory of isotope separation by thermal diffusion. *Physical Review*, 55 :1083 – 1095, 1939.
- [30] G. Z. Gershuni, A. Kolesnikov, J. Legros, and B. Myznikova. On the vibrational convective instability of a horizontal, binary-mixture layer with soret effect. *Journal of Fluid Mechanics*, 330 :251â269, 1997.
- [31] G. Z. Gershuni, A. Kolesnikov, J. Legros, and B. Myznikova. On the convective instability of a horizontal binary mixture layer with soret effect under transversal high frequency vibration. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 42 :547–553, February 1999.
- [32] G. Z. Gershuni and D. V. Lyubimov. *Thermal Vibrational Convection*. JohnWiley & Sons, 1998.
- [33] P. Jamet, D. Fargue, P. Costesèque, G. Demarsily, and A. Cernes. The thermogravitational effect in porous-media - a modeling approach. *Transport in Porous Media*, 9 :223–240, 1992.
- [34] F. Joly, P. Vasseur, and G. Labrosse. Soret-driven thermosolutal convection in a vertical enclosure. *International Communications in Heat and Mass Transfer*, 27(6) :755 – 754, 2000.
- [35] H. Khallouf, G. Z. Gershuni, and A. Mojtabi. Some properties of convective oscillations in porous medium. *Numerical Heat Transfer part A-Applications D*, 30 :605–618, 1996.
- [36] M. A. Larabi, D. Mutschler, and A. Mojtabi. Thermal gravitational separation of ternary mixture n-dodecane/isobutylbenzene/tetralin components in a porous medium. *J. Chem. Phys.*, 144 :244902, 2016.
- [37] M. Lorenz and A. H. Emery. The packed thermal diffusion column. *Chemical Engineering Science*, 11(1) :16 – 23, 1959.

- [38] M. Mamou and P. Vasseur. Thermosolutal bifurcation phenomena in a porous enclosure subject to vertical temperature and concentration gradients. *Journal of Fluid Mechanics*, 395 :61 – 87, 1999.
- [39] Tuckerman L. S. Mamun, C. K. Asymmetry and hopf bifurcation in spherical couette flow. *Physics of Fluids*, 1(7) :80–91, 1995.
- [40] M. Marcoux and M. C. Charrier Mojtabi. Etude paramétrique de la thermogravitation en milieu poreux. *C. R. Acad. Sci. Paris série IIb*, 326(3) :539 – 546, 1998.
- [41] C. M. Marle. Ecoulement monophasiques en milieux poreux. *Revue Institut Français du Pétrole*, 22(10) :1471 – 1509, 1967.
- [42] A. Mojtabi, J. K. Platten, and M. C. Charrier-Mojtabi. Onset of free convection in solutions with variable soret coefficients. *Journal of Non-Equilibrium Thermodynamics*, 27(1) :25 – 44, 2002.
- [43] F. Montel. Importance de la thermodiffusion en exploration et production pétrolières. *Entropie*, 184 :86 – 93, 1994.
- [44] D. A. Nield and A. Bejan. *Convection in Porous Media, troisième ed.* Springer Sciences+Business Media, Inc., New York, 2006.
- [45] D. A. Nield and A. V. Kuznetsov. The effects of combined horizontal and vertical heterogeneity and anisotropy on the onset of convection in a porous medium. *International Journal of Thermal Sciences*, 46(12) :1211 – 1218, 2007.
- [46] A. Oberbeck. Ueber die wärmeleitung der flüssigkeiten bei berücksichtigung der strömungen infolge von temperaturdifferenzen. *Annalen der Physik und Chemie*, 1879.
- [47] B. Ouattara. *Prise en compte des caractéristiques thermophysiques des parois dans le processus de séparation des constituants d'un mélange binaire ou d'un nanofluide.* PhD thesis, Université Paul Sabatier, 2012.
- [48] B. Ouattara, A. Khouzam, A. Mojtabi, and M. C. Charrier-Mojtabi. Analytical and numerical stability analysis of soret-driven convection in a horizontal porous layer : the effect of conducting bounding plates. *Fluid Dynamics Research*, 44 :031415, 2012.
- [49] J. K. Platten, M. M. Bou-Ali, and J. F. Dutrieux. Enhanced molecular separation in inclined thermogravitational columns. *The Journal of Physical Chemistry B*, 107(42) :11763 – 11767, 2003.
- [50] J. K. Platten and J. C. Legros. *Convection in liquids.* 1984.

- [51] L. Rayleigh. On convection currents in a horizontal layer of fluid, when the higher. *Phil.Mag*, 32 :529–538, 1916.
- [52] Y. P. Razi, A. Mojtabi, and M. C. Charrier-Mojtabi. A summary of new predictive high frequency thermo-vibrational models in porous media. *Transp Porous Med*, 77 :207–228, 2009.
- [53] W. Schöpf. Convection onset for a binary mixture in a porous medium and in a narrow cell. *Journal of Fluid Mechanics*, 245 :263 – 278, 1992.
- [54] I. B. Simonenko. A justification of the averaging method for abstract parabolic equations. *Mathematics of the USSR-Sbornik*, 10(1) :51 – 59, 1970.
- [55] I. B. Simonenko. A justification of the averaging method for a problem of convection in a field of rapidly oscillating and other parabolic equations. *Mathematics of the USSR-Sbornik*, 16(2) :245 – 263, 1972.
- [56] C. Soret. Influence de la température sur la distribution des sels dans leurs solutions. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, 91 :289 – 291, 1880.
- [57] C. Soret. Sur l'état d'équilibre que prend au point de vue de sa concentration une dissolution saline primitivement homogène dont deux parties sont portées à des températures différentes. *Arch. Sci. Phys. Nat.*, 2 :48 – 61, 1881.
- [58] L. S. Tuckerman. Thermosolutal and binary fluid convection as a 2x2 matrix problem. *Physica D*, 156(2) :325–363, 2001.
- [59] S. M. Zenâkovskaya and T. N. Rogovenko. Filtration convection in a high-frequency vibration field. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 40 :379–385, 1999.